Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit Benutzung der Textausgabe von Heiberg. Von Dr. Max Simon, Professor am Lyzeum und Honorarprofessor an der Universität Straßburg i. E. Mit 192 Textfiguren. [VII u. 141 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. *M.* 5.—

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. In 2 Teilen. Mit vielen Textfiguren. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Bearbeitet von E. Netto und C. Färber. 2 Bände. [In Vorbereitung.]

I. Band von C. Färber. [Erscheint Ostern 1910.]

II. Teil: Die Grundlehren der Geometrie. Bearbeitet von W. Frz. Meyer und H. Thieme. 2 Bände.

I. Band: Die Elemente der Geometrie. Von H. Thieme. Mit 323 Textfiguren. [XII u. 394 S.] 1909. n. *M.* 9.—

II. — [In Vorbereitung.]

Gutzmer, Dr. **A.,** Professor an der Universität Halle a. S., Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht, enthaltend die Vorverhandlungen auf den Versammlungen in Cassel und Breslau sowie die seitens der Kommission den Versammlungen in Meran, Stuttgart und Dresden unterbreiteten Reformvorschläge. Im Auftrage der Kommission herausgegeben. [XII u. 322 S.] Lex.-8. 1908. In Leinw. geb. n. *M.* 7.—

Höfler, Dr. **A.,** Professor an der Universität Wien, Didaktik des mathematischen Unterrichts. A. u. d. T.: Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen. Herausgegeben von A. Höfler und F. Poske. Band I. [ca 500 S.] gr. 8. In Leinwand geb. [Erscheint im September 1909.]

Jahnke, Dr. **E.,** Professor an der Königl. Bergakademie zu Berlin, und **F. Emde,** Ingenieur in Berlin, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Mit 53 Figuren im Text. [XII u. 176 S.] 1909. In Leinwand geb. n. *M.* 6.—

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **F.,** Professor an der Universität Göttingen, Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Bearbeitet von Dr. Rud. Schimmack, Oberlehrer am Gymnasium zu Göttingen. A. u. d. T.: Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen I. Teil I: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Mit 8 zum Teil farbigen Textfiguren. [IX u. 236 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. *M.* 5.—

——— neue autographierte Vorlesungshefte. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Ausgearbeitet von E. Hellinger.

Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. [VIII u. 590 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. *M.* 7.50.

Teil II: Geometrie. [VIII u. 515 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M.* 7.50.

HANDBUCH DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS

VON

DR. W. KILLING
PROF. AN DER WESTF. WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU MÜNSTER.

UND

DR. H. HOVESTADT
PROF. AM STÄDT. GYMNASIUM UND REALGYMNASIUM ZU MÜNSTER.

ERSTER BAND

MIT 32 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

Vorwort.

An Vorschlägen zu einer Reform des mathematischen Unterrichts fehlt es nicht; sie sind schon so oft wiederholt worden, daß wir es für überflüssig halten, sie hier noch zu besprechen. Ohne ihren Wert bestreiten zu wollen, sind wir indessen doch der Ansicht, daß sie sich allzu einseitig auf dem Gebiete der Methodik bewegen. Unser Handbuch ist aus der Überzeugung hervorgegangen, daß ohne eine sorgfältige und eingehende Nachprüfung dessen, was an unseren Schulen gelehrt wird, das angestrebte Ziel nicht zu erreichen sei.

Die augenfälligste Wahrnehmung, die man bei einer Durchmusterung der für Schüler geschriebenen Lehrbücher machen kann, ist die, daß sie nahezu vollständig darauf verzichten, mit der mathematischen Wissenschaft von heute Fühlung zu nehmen. Immer noch mühen sie sich ab, vom Standpunkte Euklids aus eine strenge Entwickelung der Geometrie zu gewinnen, obschon eine fast erdrückende Zahl von ergebnisreichen Untersuchungen über die Grundlagen dieser Wissenschaft keinen Zweifel darüber läßt, daß der Versuch aussichtslos ist.

In den „Bemerkungen über den Unterricht in der elementaren Geometrie“ (§ 12) haben wir eingehend dargelegt, daß der heutige Standpunkt der Wissenschaft maßgebende Gesichtspunkte für den Unterricht liefert.

Gern geben wir zu, daß dem Lehrer der Mathematik in der Regel weder Muße noch Mittel zur Verfügung stehen, sich über den Fortschritt der Wissenschaft aus den Quellen selbst zu unterrichten. Wir haben deshalb die erste Hälfte des Handbuches (§ 1—10) einer orientierenden Darstellung der Grundlagen der Geometrie gewidmet.

Die bevorzugte Stellung, die hierbei dem Hilbertschen System von Axiomen eingeräumt ist, wird, wie wir annehmen, jeder Sachverständige billigen. Es gibt kein zweites, das sich für unseren Zweck in gleichem Grade geeignet hätte.

Wer die Aufgabe des ersten Teiles im Auge behält, wird sich nicht wundern, daß die Besprechung der „ebenen Konstruktionsaufgaben“ (§ 9) die Auswahl und methodische Behandlung von Schulaufgaben gar nicht berührt.

Es war unsere Absicht, an keiner Frage von Bedeutung vorbeizugehen. Daher haben wir es für notwendig gehalten, auch der geometrischen Logik einen besonderen Abschnitt (§ 10) zu widmen.

Die Auseinandersetzungen über die verwickelten und noch keineswegs ganz geklärten Fragen des Flächen- und Rauminhaltes (§ 5 und 7) mögen zeigen, daß wir es nicht für angebracht hielten, uns auf das unbedingt Notwendige beschränken.

Der zweite Teil des Buches behandelt in der Hauptsache die eigentliche Schulgeometrie. Wenn auch hier noch an vereinzelten Stellen wissenschaftliche Erörterungen eingeflochten sind, die sich zur unmittelbaren Verwendung im Unterricht nicht eignen, wie namentlich die Theorie der Irrationalzahlen (§ 17), so sind wir doch bemüht gewesen, die sonst übliche abstrakte Form der Darstellung zu mildern, um so eine gewisse Vermittelung zwischen Wissenschaft und Unterricht anzubahnen.

Auch der zweite Teil will im wesentlichen orientieren; sowohl über den Stoff, der zur Verfügung steht, als auch über die Art, wie man ihn behandeln kann. Wir halten es nicht für ein erstrebenswertes Ziel, daß an Schulen gleicher Art überall dasselbe in derselben Weise gelehrt werde. Nur ein persönlich gefärbter Unterricht wirkt anregend. Soweit es die Rücksicht auf praktische Verhältnisse gestattet, möge daher jeder auswählen, was ihm zusagt.

Auch für den mathematischen Unterricht gilt das Wort, daß Stillstand Rückschritt ist. Wir möchten daher auch zu erneuter Prüfung altgewohnter Lehr- und Gedankengänge anregen. Niemand wird sich ganz der Neigung entziehen können, für einfach und zweckmäßig zu halten, was ihm in langer Gewöhnung geläufig geworden ist.

Das Buch enthält nur eine kleine Anzahl von Zeichnungen, doch ist jede in Anspruch genommene Figur sorgfältig beschrieben. Dabei sind stets auch die Lagenbeziehungen hervorgehoben, die in den Beweisen eine Rolle spielen. Solche Beschreibungen sind frei von den Zufälligkeiten, die allen ausgeführten Figuren anhaften. Wenn also dem Leser einerseits die kleine Mühe zugemutet wird, sich die beschriebene Zeichnung jedesmal selbst zu entwerfen, so ist er andrerseits sicher, daß die gegebene Beschreibung auf jede Anordnung, die er zu wählen wünscht, auch paßt.

Münster i. W., im Juni 1909.

W. Killing. H. Hovestadt.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. Die Axiome.

1. **Die Quellen der geometrischen Beweise.** Die Elemente, auf die alle geometrischen Gebilde zurückgeführt werden, sind Flächen, Linien und Punkte. Über die Entstehung dieser drei Begriffe gibt die Geschichte der Geometrie uns keinen Aufschluß, doch kann man kaum zweifeln, daß sie empirischen Ursprunges seien. Mindestens gelingt es noch heute nicht, den Anfänger in die Geometrie einzuführen, ohne daß man natürliche Körper entweder als Träger oder geradezu als Modelle der drei Grundgebilde gelten läßt. Und wiederum muß zu denselben Hülfsmitteln gegriffen werden, um unter den Flächen die Ebenen, unter den Linien die Geraden abzusondern.

Nun sind aber die Flächen, Linien und Punkte, von denen die geometrischen Sätze sprechen, tatsächlich nirgendwo körperlich verwirklicht. Modelle und Zeichnungen vermitteln nicht mehr als eine unbestimmte Vorstellung von diesen drei Dingen, auf die sich alles Denken in der Geometrie bezieht. Es ist demnach eine offenkundige Tatsache, daß der Aufbau der Geometrie durch die fehlenden Begriffsbestimmungen nicht verhindert wird. Man muß daraus schließen, daß nicht Begriffsbestimmungen die letzten Quellen der geometrischen Beweise sind, und daß die körperlichen Vertreter von Flächen, Linien und Punkten, deren wir uns doch mit unverkennbarem Vorteile bedienen, uns mehr bedeuten als einen bloßen Ersatz für unerledigte Begriffserklärungen.

Man findet diese Erwartung bestätigt, wenn man sich von dem ersten und einfachsten Schlusse, der in der Geometrie vollzogen wird, Rechenschaft gibt. Es wird vorausgesetzt, daß durch zwei Punkte immer *eine* Gerade gehe, und dann geschlossen, daß zwei gerade Linien entweder einen oder keinen Punkt gemein haben. Diese Folgerung ist von der besonderen Natur der Punkte und Geraden nicht abhängig. Man kann sie verallgemeinern, indem man die geometrische Einkleidung ganz entfernt. Gegeben sei eine Menge A von zwei oder mehr Dingen a und eine Menge B von mindestens soviel Dingen b, als es *Paare* von Dingen a gibt. Jedem a dürfen beliebig viele b zugeordnet werden und umgekehrt. Dagegen soll je zwei *verschiedenen* Dingen a immer ein und nur ein Ding b *gemeinsam* zugeordnet sein. Diese für die *Verknüpfung* der beiden Mengen A

und B vorgeschriebene Beschränkung hat zur Folge, daß irgend zwei Dingen b immer nur entweder ein oder kein Ding a gemeinsam zugeordnet werden kann. Die Menge A könnte aus schwarzen, die Menge B aus weißen Kugeln bestehen, und die Zuordnung könnte dahin verstanden werden, daß ungleichfarbige Kugeln sich berühren dürfen. Dann wäre die Vorschrift zu erfüllen, daß je zwei schwarze Kugeln immer zugleich eine weiße berühren sollen. Enthalten A und B jetzt nicht mehr als je zwei Kugeln, so sind nur die beiden in Fig. 1 dargestellten Anordnungen möglich. In der einen be-

Fig. 1.

rühren die beiden weißen Kugeln gemeinsam eine schwarze, in der andern wird keine schwarze von den beiden weißen zugleich berührt.

Wenn man sich des heute üblichen Sprachgebrauches bedient, so kann man die soeben vollzogene Schlußfolgerung in ihrer allgemeinsten Form kennzeichnen, indem man sagt, daß aus einem Verknüpfungsaxiom ein Verknüpfungslehrsatz hergeleitet werde. Welcher Art die in zwei Mengen enthaltenen Dinge auch sein mögen, sie gehorchen dem Lehrsatz, sobald sie dem Axiom unterworfen sind. Überdies zeigt sich aber, daß es auch gleichgültig ist, in welchem Sinne die Zuordnung der Einzeldinge zueinander verstanden wird, durch die man die beiden Mengen verknüpft. Die Art der Zuordnung, die wir nach dem Augenschein beschreiben, indem wir sagen: ein Punkt liege auf einer Geraden, eine Gerade gehe durch einen Punkt, trägt zur bindenden Kraft des Schlusses nichts bei. Er stützt sich ganz ausschließlich auf das einmal zugelassene Axiom. Daß aber für gezeichnete Punkte und gerade Linien das Axiom in Kraft treten soll, erscheint dem an den Gebrauch des Lineals gewöhnten Anfänger fast selbstverständlich.

Was hier für den ersten geometrischen Schluß genauer dargelegt ist, gilt für die ganze geometrische Deduktion. Gewisse Denkvorschriften, die man Axiome nennt, sind die letzten Quellen aller geometrischen Beweise. Sie sind der Anschauung und Erfahrung entlehnt: Zeichnungen und Modelle verraten sie uns, und darin besteht der erste wichtige Dienst, den diese Hilfsmittel uns leisten. Die folgerichtige Anwendung der Axiome aber ist reine Verstandestätigkeit, und daraus allein entspringt die bindende Kraft der geometrischen Sätze. Gleichwohl verdanken wir auch hierbei den natürlichen Vertretern der Dinge, mit denen sich unser Denken beschäftigt, eine erhebliche Förderung, indem sie uns dazu dienen, Gedanken festzulegen und zu ordnen. Es ist aber bezeichnend, daß bei diesem Gebrauche geometrischer Figuren die größere oder geringere Genauigkeit, mit der sie entworfen sind, keine wesentliche Rolle spielt, solange nur eine Verwirrung der Gedanken vermieden wird.

Wesentlich anders liegt die Sache, wenn die geometrischen Sätze durch zeichnerische Versuche bestätigt werden sollen. Diese Forderung deckt sich mit der anderen, daß nicht bloß beim Denken, sondern auch beim Zeichnen alle Axiome strenge Geltung haben sollen.

2. **Systeme von Axiomen.** Aus der Erkenntnis, daß in der Geometrie alles deduktive Denken schließlich auf Axiome zurückgeht, erwächst die Aufgabe, eine planmäßige Untersuchung dieser letzten Grundlagen vorzunehmen.

Der erste Schritt zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, daß man sich aller der Anschauung entlehnten Denkregeln, die tatsächlich gebraucht werden, auch ausdrücklich bewußt wird. Das ist schwerer, als es auf den ersten Blick scheinen könnte. Gerade die einfachsten Regeln sind uns durch häufigen Gebrauch so geläufig, daß ihre Anwendung leicht ganz übersehen oder für etwas Selbstverständliches gehalten wird.

Demnächst sind die gefundenen Regeln durch eine sorgfältige logische Analyse auf ihre gegenseitige Abhängigkeit zu prüfen. Die Erfahrung hat gelehrt, daß dieser zweite Teil der Aufgabe dem ersten an Schwierigkeit nicht nachsteht.

Erst nachdem die Untersuchung soweit fortgeschritten ist, kann man dazu übergehen, ein System von Axiomen aufzustellen, indem man eine Gruppe von Denkvorschriften ermittelt, aus denen alle übrigen sich als notwendige Folgerungen ergeben, während sie selbst voneinander unabhängig sind.

Wird endlich für das ausgewählte System von Axiomen auch noch der Nachweis der Widerspruchslosigkeit erbracht, so ist der deduktive Aufbau der Geometrie von vornherein gesichert.

Bei der Wahl der Axiome wird man sich von dem Wunsche leiten lassen, daß sie einfache, durch Anschauung und Erfahrung nahegelegte Beziehungen zum Ausdruck bringen. Nicht minder maßgebend wird das Bestreben sein, einen bequemen Zugang zu den geometrischen Lehrsätzen zu gewinnen. Dem Parallelenaxiom pflegt man um dieses Vorteils willen auch heute noch einen erheblich größeren Umfang zu geben, als streng genommen erforderlich wäre. Im übrigen ist die Wahl vom Geschmack abhängig, und ein fertiges System kann immer dadurch abgeändert werden, daß man einzelne Axiome und Lehrsätze ihre Rolle vertauschen läßt.

3. **Die Axiome bei Euklid.** Den ersten Versuch, ein für die Entwickelung der Geometrie geeignetes System von axiomatischen Beweisquellen abzusondern, finden wir bei Euklid. Er zerlegt das System

in zwei getrennte Gruppen, deren erste er Forderungen (αἰτήματα) nennt, während er die zweite als Grundsätze (κοιναὶ ἔννοιαι) bezeichnet. Die Forderungen sind durchaus in der Sprache der Geometrie gehalten und wurden wohl ausdrücklich als geometrische Hypothesen anerkannt. Die Grundsätze bewegen sich, bis auf einen, in der Sprache einer allgemeinen Größenlehre und galten wahrscheinlich als Denknotwendigkeiten.

Forderungen.

1) Es soll gefordert werden, daß sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.

2) Und daß sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.

3) Und daß sich um jeden Mittelpunkt mit jedem Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.

4) Und daß alle rechten Winkel einander gleich seien.

5) Und daß, wenn eine zwei gerade Linien schneidende Gerade mit diesen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die (zusammen) kleiner sind als zwei Rechte, die beiden geraden Linien, unbegrenzt verlängert, auf der Seite zusammentreffen, auf der diese Winkel liegen.

Grundsätze.

1) Was ein und demselben gleich ist, ist unter sich gleich.

2) Und wird Gleiches zu Gleichem gefügt, so sind die Ganzen gleich.

3) Und wird Gleiches von Gleichem weggenommen, so sind die Reste gleich.

7) Und was sich deckt, ist gleich.

8) Und das Ganze ist größer als ein Teil.[1])

Eine Kritik dieser Zusammenstellung von Axiomen an der Hand eines heutigen Systems wäre ebenso ungerecht wie leicht. Schwerer als die dem antiken System anhaftende Unvollkommenheit ist der in ihm bereits zutage tretende Fortschritt in der logischen Zergliederung des geometrischen Denkens zu begreifen.

Die heutigen Lehrbücher der Geometrie pflegen über die von ihnen benutzten Axiome keine genaue Rechenschaft zu geben. Eine gewisse Rolle spielt das bei Euklid als fünfte Forderung auftretende und mannigfaltig abgeänderte Parallelenaxiom. Zuweilen wird auch das archimedische Axiom nicht ganz verschwiegen. Einiger Aufmerksamkeit erfreuen sich die Verknüpfungsregeln für Punkte, gerade

1) Es wird angenommen, daß die Grundsätze 4, 5, 6, 9 später eingeschoben seien.

Linien und Ebenen. Stets aber werden neben ausdrücklich angegebenen Axiomen andere stillschweigend gebraucht. Dieser Tatbestand beleuchtet, in Übereinstimmung mit der älteren und neueren Geschichte der Geometrie, die große Schwierigkeit der Aufgabe, einen vollständigen Einblick in die axiomatischen Grundlagen dieser Wissenschaft zu gewinnen.

Es ist leicht einzusehen, warum auch an dieser unüberwundenen Schwierigkeit die Entwickelung der Geometrie keineswegs scheitert. Denn die unbewußte Anwendung eines Axioms steht der bewußten an Wirksamkeit nicht nach, und die folgerichtige Benutzung einer Denkregel wird nicht durch den Umstand beeinträchtigt, daß man ihre Abhängigkeit von bereits anerkannten und benutzten Axiomen entweder gar nicht bemerkt oder umgekehrt sogar irrtümlich angenommen hat. Endlich kann man den Aufbau der Geometrie selbst als eine Probe auf die Widerspruchslosigkeit der gebrauchten Axiome ansehen. Trotz alledem aber wäre es durchaus irrig, wenn man annehmen wollte, daß ein genaues Studium der Axiome nur den Zweck habe, einem strengeren logischen Bedürfnisse zu genügen, im übrigen aber für die Geometrie unfruchtbar sei.

4. **Das Hilbertsche System.** Nachdem das Parallelenaxiom lange die Aufmerksamkeit der Geometer fast ausschließlich in Anspruch genommen hatte, sind in neuerer Zeit auch die übrigen Beweisquellen der Geometrie einer genaueren Prüfung unterzogen worden. Eine umfassende und eingehende Untersuchung mit dem Ziele, ein vollständiges und einfaches System von Axiomen zu gewinnen, verdankt man Hilbert.[1]) Er sondert die Axiome in fünf Gruppen; jede Gruppe „drückt gewisse zusammengehörige Grundtatsachen unserer Anschauung aus“. Der Reihe nach enthalten sie: die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung, der Kongruenz, das Parallelenaxiom, die Axiome der Stetigkeit.

Erste Gruppe: Axiome der Verknüpfung.

Ebene Axiome.

1) Zwei voneinander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade.

2) Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.

3) Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte, in einer Ebene gibt es stets wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte.

---

1) Grundlagen der Geometrie von D. Hilbert. Dritte Aufl. Leipzig 1909.

Räumliche Axiome.

4) Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene α.

5) Irgend drei Punkte einer Ebene, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen diese Ebene.

6) Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α.

7) Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.

8) Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

Dem ersten Axiome entsprechend, wird die Verknüpfung eines Punktes mit einer Geraden nur in dem Sinne verstanden, daß der Punkt mit irgendeinem anderen zusammen die Gerade bestimme. Dem Ausdruck: A liegt auf a, wird also der Sinn beigelegt: A bestimmt mit einem anderen Punkte (etwa Q) die Gerade a. Wenn nun B mit einem weiteren Punkte (etwa R) dieselbe Gerade a bestimmt, so sind A und B Punkte von a. Aber A und B bestimmen auch zusammen eine Gerade, und nun besagt das zweite Axiom, daß diese von a nicht verschieden sei. Erst aus beiden Axiomen zusammen folgt z. B., daß drei Punkte entweder drei gerade Linien bestimmen oder nur eine. Wenn nämlich A und C dieselbe Gerade bestimmen wie B und C, so wird nach dem zweiten Axiom auch durch A und B keine neue Gerade gewonnen. Ebenso schließt man aus dem vierten und fünften Axiom, daß vier Punkte, die nicht derselben Geraden angehören, entweder vier Ebenen bestimmen oder nur eine.

Diese Auffassung weicht von der herkömmlichen ab, die den einzelnen Punkt mit der Geraden verknüpft durch die gleichwertigen Ausdrücke: der Punkt liegt auf der Geraden oder die Gerade geht durch den Punkt. Es bedarf dann nur des einen Axiomes: zwei Punkte sind zugleich immer mit einer und nur einer Geraden verknüpft. Ebenso ist es üblich, den einzelnen Punkt mit der Ebene zu verknüpfen und den Inhalt des vierten und fünften Axioms dahin zusammenzufassen, daß je drei Punkten, die nicht in derselben Geraden liegen, stets eine und nur eine Ebene gemeinsam zugeordnet sei.

Aus den vorstehenden Axiomen ergeben sich leicht die folgenden Verknüpfungslehrsätze.

Zwei gerade Linien können nicht mehr als einen Punkt gemein haben.

Zwei Ebenen mit einem gemeinsamen Punkte haben eine Gerade gemein.

Eine Ebene und eine ihr nicht angehörende Gerade können nicht mehr als einen Punkt gemein haben.

Eine Gerade und ein ihr nicht angehörender Punkt bestimmen eine und nur eine Ebene.

Zwei gerade Linien, die einen Punkt gemein haben, bestimmen eine und nur eine Ebene.

Zweite Gruppe: Axiome der Anordnung.

Lineare Axiome.

1) Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.

2) Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und wenigstens einen Punkt D, so daß C zwischen A und D liegt.

3) Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

Das ebene Axiom.

4) Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.

Die Regeln über die Anordnung von Punkten auf einer Geraden sind zwar in der Geometrie unentbehrlich, zugleich aber der Anschauung so leicht zu entnehmen, daß man sie lange gebraucht hat, ohne sie ausdrücklich in Worte zu fassen, geschweige denn, sie auf etwaige Abhängigkeit voneinander zu prüfen. Aufgestellt und näher untersucht sind die Anordnungsgesetze zuerst von Pasch.[1])

Die vorstehenden Axiome sind eine Gebrauchsanweisung für das Wort „zwischen“. Dieser nicht definierte Begriff wird durch sie in derselben Weise dem geometrischen Denken zugänglich gemacht wie die ebensowenig definierten Begriffe: „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“ durch die Verknüpfungsaxiome. Der Streckenbegriff wird eingeführt, indem man sagt, daß zwei Punkte A und B, die einer Geraden a angehören, auf dieser eine Strecke AB bestimmen. Die zwischen A und B liegenden Punkte der Geraden a heißen Punkte der Strecke AB oder auch Punkte innerhalb dieser Strecke. Die bestimmenden Punkte selbst heißen ihre Endpunkte. Von allen übrigen Punkten der Geraden a

1) Vorlesungen über neuere Geometrie von M. Pasch, Leipzig 1882. Über das vierte Axiom vgl. insbesondere S. 21 und 25.

sagt man, daß sie außerhalb der Strecke AB liegen. Wenn auf a der Punkt C zwischen A und B liegt, so sagt man auch: der Punkt C trenne die beiden Punkte A und B. Denselben Ausdruck kann man auch auf eine Gerade anwenden, die a in C trifft. Das vierte Axiom läßt sich also in die Form kleiden: in der Ebene eines Dreiecks gibt es keine Gerade, die nur ein Paar seiner Ecken trennt. Die Nutzbarkeit der Axiome ergibt sich aus den Beweisen der folgenden Sätze.

Satz 1. Jede Gerade, die in der Ebene eines Dreiecks liegt und keine seiner Ecken trifft, trennt entweder zwei Paare seiner Ecken oder kein Paar.[1])

Träfe nämlich ein und dieselbe Gerade die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten: D (zwischen B und C), E (zwischen C und A), F (zwischen A und B), so müßte von diesen drei Punkten einer zwischen den beiden anderen liegen. Aber D liegt nicht zwischen E und F, denn das vierte Axiom erlaubt nicht, daß die Gerade BC von den Ecken des Dreiecks AEF ausschließlich das Paar E, F trenne. Ebensowenig kann E oder F Zwischenpunkt sein. Es gibt demnach keine Gerade, die alle drei Eckenpaare eines Dreiecks trennt. Diese Tatsache gehört zur vollständigen Begründung des nach Menelaus benannten Satzes.

Satz 2. Wenn vier Punkte auf derselben Geraden a liegen, so trennt jeder einzelne entweder zwei Paare von Punkten oder kein Paar.

Tilgt man nämlich irgendeinen der vier Punkte, so bleiben drei übrig, unter denen ein Zwischenpunkt ist; er heiße Z_1. Tilgt man nun von den ursprünglichen vier Punkten nur Z_1, so ergibt sich ein neuer Zwischenpunkt; er heiße Z_2. Die bis dahin noch nicht bezeichneten Punkte seien A und D. Dann liegt Z_2 zwischen A und D, und von Z_1 steht fest, daß er irgend zwei von den drei Punkten A, Z_2, D trenne. Für die weitere Überlegung sei noch O ein Punkt, der nicht der Geraden a angehört.

Wenn Z_1 zwischen A und Z_2 liegt, so wird eine Gerade g, die Z_2 mit einem Punkte zwischen O und D verbindet, nach dem vorhergehenden Satze keinen Punkt zwischen A und O treffen. Nach der soeben gemachten Voraussetzung auch keinen Punkt zwischen A und Z_1. Daher trifft g auch keinen Punkt zwischen O und Z_1; also muß g einen Punkt zwischen Z_1 und D treffen, d. h. Z_2 trennt Z_1 und D. Hiernach wird nun eine Gerade h, die Z_1 mit einem Punkte zwischen O und A verbindet, weder einen Punkt zwischen O und Z_2, noch einen Punkt zwischen Z_2 und D, somit auch keinen Punkt zwischen O und D treffen. Also muß h durch einen Punkt zwischen A und D gehen, d. h. Z_1 trennt A und D.

1) Vgl. Pasch, Vorl. S. 25.

Wenn Z_1 zwischen Z_2 und D liegt, so folgt nunmehr ohne weiteres, daß Z_1 und A durch Z_2, sowie A und D durch Z_1 getrennt werden.

Wenn endlich angenommen wird, Z_1 liege zwischen A und D, so zeigt man leicht, daß es entweder zwischen A und Z_2 oder zwischen Z_2 und D liegen muß, indem man eine Gerade betrachtet, die Z_1 mit einem Punkte zwischen O und A verbindet.

Im ganzen ergibt sich demnach, daß unter vier Punkten auf einer Geraden immer zwei und nur zwei Zwischenpunkte sind, und daß jeder von diesen zwei Paare von Punkten trennt. Hilbert spricht das Ergebnis in folgender Form aus:

Sind irgend vier Punkte einer Geraden gegeben, so lassen sich dieselben stets in der Weise mit A, B, C, D bezeichnen, daß der mit B bezeichnete Punkt zwischen A und C und auch zwischen A und D und ferner der mit C bezeichnete Punkt zwischen A und D und auch zwischen B und D liegt.

In dieser Fassung war der Satz ursprünglich von Hilbert als Axiom bezeichnet, wurde dann aber von E. H. Moore als Lehrsatz nachgewiesen.[1]) Hiernach läßt sich endlich der folgende allgemeine, von Hilbert ausgesprochene Satz begründen.

Satz 3. Ist irgendeine endliche Anzahl von Punkten einer Geraden gegeben, so lassen sich dieselben stets in der Weise mit $A, B, C, D, E, \ldots, K$ bezeichnen, daß B zwischen A einerseits und $C, D, E, \ldots, K$ andererseits, ferner C zwischen A, B einerseits und $D, E, \ldots, K$ andererseits, sodann D zwischen A, B, C einerseits und $E, \ldots, K$ andererseits usw. liegt. Außer dieser Bezeichnungsweise gibt es nur noch die umgekehrte: $K, \ldots, E, D, C, B, A$, die von der nämlichen Beschaffenheit ist.

Zur Begründung kann man sich der vollständigen Induktion bedienen. Der Satz sei für n Punkte richtig, wobei $n \geqq 4$ vorausgesetzt werde. Die n Punkte seien in der angegebenen Weise mit den Buchstaben $A, B, C, \ldots$ bezeichnet. Kommt nun ein weiterer Punkt hinzu, so schließt man durch fortgesetzte Anwendung des dritten Axiomes der Anordnung und des Satzes von Moore, daß der neue Punkt eine der $n+1$ verschiedenen Stellungen zu den ursprünglichen n Punkten haben muß, die uns die Anschauung ohne weiteres kennen lehrt. Aber welche Stellung er auch einnehmen mag, immer kann man die Bezeichnung der $n+1$ Punkte so einrichten, daß dem aufgestellten Satze genügt wird.

---

1) Transactions of the Amer. Math. Soc. 1902. Auch Halsted, rational Geometry, New York 1904, S. 253ff. Der von Moore geführte Beweis ist von dem oben angegebenen verschieden.

Halbstrahl. Jeder Punkt O auf einer Geraden a zerlegt diese in zwei Halbstrahlen, denen O als gemeinsamer Ausgangspunkt zugeordnet wird. Ein von O verschiedener Punkt A der Geraden a gehört einem der beiden Halbstrahlen an. Diesem werden weiter alle Punkte von a zugewiesen, die mit A auf derselben Seite von O liegen, d. h. die nicht durch O von A getrennt werden. Dem anderen Halbstrahle fallen alle Punkte zu, die O von A trennt. Mit Hilfe des zweiten Anordnungssatzes zeigt man, daß zwei Punkte, die auf demselben Halbstrahle liegen, durch O nicht getrennt werden, daß aber jeder Punkt des einen von jedem Punkte des andern durch O geschieden wird. Demnach bestimmt der Punkt O eindeutig die Zerlegung der Punkte von a in zwei getrennte Mengen. Man findet leicht noch, daß nicht ein Punkt des einen Halbstrahls zwei Punkte des andern trennen kann.

Halbebene. Eine Ebene α wird durch jede in ihr liegende Gerade a in zwei Halbebenen zerlegt, denen die Punkte der Geraden selbst gemeinsam zugehören. Die übrigen Punkte von α verteilt man mit Hilfe eines beliebigen Punktes A auf die beiden Halbebenen, indem man einen Punkt B als von A durch a getrennt ansieht, falls innerhalb der Strecke AB ein Punkt von a liegt. Aus dem ersten Anordnungssatze folgert man, daß zwei Punkte, die derselben Halbebene zufallen (oder auf derselben Seite von a liegen), durch a nicht getrennt werden, wogegen jeder Punkt der einen von jedem der andern durch a geschieden wird.

Halbraum. Der erste Anordnungssatz genügt auch, um zu zeigen, daß durch eine Ebene α die ihr nicht angehörenden Punkte des Raumes eindeutig auf zwei Halbräume verteilt werden. Dabei heißen zwei Raumpunkte A, B durch α getrennt, falls innerhalb der Strecke AB ein Punkt von α liegt. Die Ebene α trennt jeden Punkt des einen Halbraumes von jedem des andern, aber nicht zwei Punkte, die ein und demselben Halbraume angehören oder auf derselben Seite von α liegen.

Dritte Gruppe: Axiome der Kongruenz.

Lineare Axiome.

1. Wenn A, B zwei Punkte einer Geraden a sind und A' ein Punkt derselben oder einer andern Geraden a' ist, so kann man in a' auf einer gegebenen Seite von A' stets einen und nur einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen: $AB \equiv A'B'$.

Jede Strecke ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets:

$$AB \equiv AB \quad \text{und} \quad AB \equiv BA.$$

2. Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ kongruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ kongruent.

3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder einer andern Geraden a', ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann

$$AB \equiv A'B' \quad \text{und} \quad BC \equiv B'C'$$

ist, so ist auch stets:

$$AC \equiv A'C'.$$

Ebene Axiome.

4. Es sei ein Winkel $\sphericalangle(h, k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α', sowie eine bestimmte Seite von a' in α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht: dann gibt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k', so daß der Winkel (h, k) kongruent oder gleich dem Winkel (h', k') ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels (h', k') auf der gegebenen Seite von a' liegen, in Zeichen: $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$.

Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets:

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k) \quad \text{und} \quad \sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(k, h).$$

5. Wenn ein Winkel (h, k) sowohl dem Winkel (h', k') als auch dem Winkel (h'', k'') kongruent ist, so ist auch der Winkel (h', k') dem Winkel (h'', k'') kongruent.

6. Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so sind stets auch die Kongruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$

erfüllt.

Streckengleichheit. Bei Strecken (und Winkeln) ist die Bezeichnung „kongruent“ weniger gebräuchlich als die Bezeichnung „gleich“. Die Streckengleichheit selbst ist lediglich als eine den drei linearen Axiomen unterworfene Beziehung aufgefaßt. Daher gibt das erste Axiom nicht an, wie der Punkt B', von dem es spricht, gefunden werden soll. Die Art der Bestimmung ist gleichgültig, wenn nur die Axiome nicht verletzt werden. Demnach wird die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß verschiedene Geometrien den Punkt B' verschieden bestimmen, während jede für sich ihn eindeutig festlegen muß.

Man sagt auch, daß der Punkt B' des ersten Axioms erhalten werde, indem man die Strecke AB auf der Geraden a' vom Punkte A' aus nach einer vorgeschriebenen (d. h. durch einen zweiten Punkt von a' bestimmten) Seite abtrage, und daß eine Strecke einer andern gleich sei, wenn sie deckend auf diese gelegt werden könne. Diese Ausdrucksweise gestattet, die Axiome der Streckengleichheit in die Form von Bewegungsgesetzen zu kleiden. Da aber über die Bewegung von Strecken außer diesen axiomatisch hingestellten Gesetzen nichts ausgesagt wird, so ist in den angegebenen Wendungen eine über die Axiome hinausgehende Definition der Streckengleichheit nicht enthalten. Wollte man fordern, daß eine Strecke bei ihrer Bewegung sich selbst gleich bleiben müsse, so würde man sich völlig im Kreise bewegen.

Aus den beiden ersten Axiomen geht hervor, daß die ihnen unterworfene Beziehung umkehrbar ist. Denn aus

$$AB = A'B' \quad \text{und} \quad AB = AB$$

folgt nach dem zweiten Axiom, daß auch $A'B' = AB$ ist. Man sagt daher, die Strecken AB und $A'B'$ seien einander gleich. Diese Umkehrbarkeit wird häufig stillschweigend vorausgesetzt, wie es auch in Euklids erstem Grundsatze geschieht, in dem überdies von vornherein für alle durch das Wort „gleich" zueinander in Beziehung gesetzten Dinge ein gemeinsames Axiom hingestellt wird. Ebenso ist der häufig gebrauchte Satz zu verstehen: zwei „Größen", die derselben dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

Kongruente Punktreihen. Das dritte lineare Axiom ist Euklids zweiter Grundsatz, angewandt auf zwei Streckenpaare. Es fordert, daß von den drei Beziehungen:

$$AB = A'B' \tag{1}$$

$$BC = B'C' \tag{2}$$

$$AC = A'C' \tag{3}$$

die dritte in Kraft trete, wenn die beiden ersten zugelassen werden, und außerdem sowohl B zwischen A und C als auch B' zwischen A' und C' liegt. Man bezeichnet die beiden Punktreihen A, B, C und A', B', C' wegen der drei Gleichungen als kongruent und schreibt ihnen übereinstimmende Anordnung zu, weil die schon durch die Gleichungen einander zugeordneten Punkte B und B' auch beide zugleich Zwischenpunkte sind.

Durch die Gleichungen (2) und (3) werden die beiden Punkte A' und B' auf derselben Seite von C' schon eindeutig bestimmt, ebenso durch (1) und (3) die Punkte B' und C' auf derselben Seite von A'. Der dritte Grundsatz Euklids erscheint demnach hier als Folgerung aus den Axiomen der Anordnung und der Kongruenz.

Im ganzen ergibt sich: Die beiden Punktreihen A, B, C und A', B', C' sind bei übereinstimmender Anordnung kongruent, sobald irgend zwei von den Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt sind, und sie können nur in übereinstimmender Anordnung kongruent sein.

Allgemein heißen zwei Reihen aus gleich viel Punkten kongruent, wenn ihre Punkte paarweise einander so zugeordnet werden können, daß jede durch irgend zwei Punkte derselben Reihe bestimmte Strecke der durch die entsprechenden Punkte der andern bestimmten gleich ist. Die Möglichkeit solcher Reihen ist leicht ersichtlich, und aus der Definition ergibt sich, daß je drei Punkte der einen mit den zugeordneten der andern in der Anordnung übereinstimmen müssen.

Ungleiche Strecken. Die Begriffe „größer“ und „kleiner“ lassen sich bei Strecken auf die Begriffe „zwischen“ und „gleich“ zurückführen, und die uns geläufigen Regeln, nach denen sie gebraucht werden, sind beweisbare Sätze. Es seien AB und KL irgend zwei Strecken. Auf dem Halbstrahle, der von A ausgeht und den Punkt B enthält, gibt es einen Punkt C der Art, daß $AC = KL$ ist. Liegt C zwischen A und B, so heißt AB größer als KL; liegt B zwischen A und C, so heißt AB kleiner als KL. Von den drei Beziehungen, die wir durch die Wörter: gleich, größer, kleiner ausdrücken, schließt also jede die beiden andern aus. Für einige der erwähnten Gebrauchsregeln folgen hier die Beweise.

Ist $AB > KL$ und $AB = A'B'$, so ist auch $A'B' > KL$. Liegt nämlich der Punkt C auf dem Halbstrahle, der von A ausgeht und B enthält, so, daß $AC = KL$ ist, und ebenso C' auf dem Halbstrahle, der von A' ausgeht und B' enthält, so, daß auch $A'C' = KL$ ist, so sind die beiden Punktreihen A, B, C und A', B', C' kongruent. Wenn also C zwischen A und B liegt, so liegt auch C' zwischen A' und B'.

Ist $AB > KL$ und $KL > PQ$, so ist auch $AB > PQ$. Denn es gibt zwischen A und B einen Punkt C, so, daß $AC = KL$ ist, und zwischen A und C einen Punkt D, so, daß $AD = PQ$ ist. Nach dem Satze über die Anordnung von vier Punkten auf einer Geraden liegt nun D auch zwischen A und B.

Auf einer Geraden liege der Punkt B zwischen A und C; auf derselben oder auf einer andern Geraden ebenso B' zwischen A' und C'. Wenn dann zugleich $AB > A'B'$ und $BC > B'C'$ ist, so ist auch $AC > A'C'$. Denn es gibt auf der ersten Geraden zwischen A und B einen Punkt D, so daß $AD = A'B'$ ist. Der Punkt D liegt auch zwischen A und C. Auf dem Halbstrahle, der von D ausgeht und den Punkt C enthält, gibt es einen Punkt E, so daß $DE = B'C'$ ist. Der Punkt E kann nicht mit C zusammenfallen, weil dann $B'C' > BC$ wäre. Ebensowenig kann E von D durch C getrennt sein; denn dann wäre $B'C' > DC$ und zugleich $DC > BC$, also auch $B'C' > BC$.

Das Winkelfeld. Der Winkel (h, k) wird gebildet von den beiden Halbstrahlen h, k (den Schenkeln), die in der Ebene α von demselben Punkte O (dem Scheitel) ausgehen und zwei verschiedenen Geraden a, b angehören. Der flache Winkel ist also in dieser Definition nicht enthalten. Dem Inneren des Winkels (h, k) gehören die Punkte von α an, die mit k auf derselben Seite von a und und zugleich mit h auf derselben Seite von b liegen. Die beiden Schenkel bilden mit ihnen zusammen das innere Winkelfeld, mit den übrigen Punkten von α das äußere Feld. Das innere Feld wird auch vorzugsweise als das eigentliche, besser noch als das natürliche Winkelfeld bezeichnet. Jede Strecke, die irgend zwei seiner Punkte verbindet, gehört ihm ganz an; das gilt also insbesondere auch von jeder Strecke, die einen Punkt des einen Schenkels mit einem Punkte des andern verbindet. Ein Halbstrahl, der vom Scheitelpunkte ausgeht und einen inneren Punkt enthält, verläuft ganz im Inneren des Winkels und trifft jede der zuletzt erwähnten Strecken. Wenn man beachtet, daß jede von den Halbebenen, in die α durch a oder durch b zerlegt wird, einen Halbstrahl enthält, der ihre Punkte wieder in zwei getrennte Mengen zerlegt, so ergibt sich, daß jeder innere Punkt von jedem äußeren entweder durch einen Punkt eines der beiden Schenkel oder durch den Scheitelpunkt getrennt ist.

Winkelvergleichung. Die früher über Streckengleichheit gemachten Bemerkungen lassen sich so leicht auf Winkel übertragen, daß hier auf nochmalige Ausführung verzichtet werden kann. Ebensoleicht ist die Definition des größeren und des kleineren Winkels.

Erster Kongruenzsatz für Dreiecke. Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ werden kongruent genannt, wenn die sechs Beziehungen:

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C'$$
$$\sphericalangle A = A', \quad \sphericalangle B = B', \quad \sphericalangle C = C'$$

sämtlich erfüllt sind. Der erste Kongruenzsatz behauptet, daß dies der Fall sei, sobald die drei Beziehungen:

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad \sphericalangle A = A'$$

bestehen. Hilbert erbringt dafür den folgenden Beweis. Nach dem sechsten Kongruenzaxiom ist $\sphericalangle B = B'$ und $\sphericalangle C = C'$. Wäre nun nicht auch $BC = B'C'$, so ließe sich auf $B'C'$ der Punkt D' derart bestimmen, daß $BC = B'D'$ würde. Die Anwendung des sechsten Axiomes auf die beiden Dreiecke ABC und $A'B'D'$ ergäbe dann aber: $\sphericalangle BAC = B'A'D'$, und nun würde nach dem fünften Kongruenzaxiome folgen: $\sphericalangle B'A'D' = B'A'C'$. Dies ist nicht möglich, da nach dem vierten Axiom jeder Winkel an einem gegebenen Halbstrahl nach einer gegebenen Seite in einer Ebene nur auf eine Weise abgetragen werden kann.

B e w e g b a r k e i t d e s D r e i e c k s a l s F o l g e r u n g. Der vorstehende Beweis lehrt in erster Linie, daß Dreiecke bewegbar sind, wenn man die Bewegbarkeit in folgendem Sinne versteht. Es sei in der Ebene α das Dreieck ABC gegeben; ferner in derselben oder in einer anderen Ebene α' die Gerade a' und endlich auf a' die Strecke $A'B'$, die gleich AB sein soll. Dann gibt es in α' auf einer beliebig vorgeschriebenen Seite von a' immer einen Punkt C' der Art, daß auch noch die fünf Beziehungen:

$$\sphericalangle A = A', \quad \sphericalangle B = B', \quad \sphericalangle C = C', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C'$$

sämtlich erfüllt sind.

Überdies zeigt dann der Beweis, daß es stets nur e i n e n solchen Punkt C' gibt und daß er durch die drei Bedingungen des ersten Kongruenzsatzes bestimmt ist.

B e w e g b a r k e i t d e s D r e i e c k s a l s A x i o m. Bei den hergebrachten Beweisen der Kongruenzsätze für Dreiecke wird die Bewegbarkeit des Dreiecks in dem oben genau angegebenen Sinne schon vorausgesetzt, d. h. man macht sie, entweder stillschweigend oder ausdrücklich, zum Axiom. In den Beweisen zum ersten und zweiten Kongruenzsatze ergibt sich dann, daß der Punkt C', dessen Existenz also axiomatisch zugestanden wird, durch die aufgestellten Kongruenzbedingungen eindeutig bestimmt ist. Von dieser Eindeutigkeit wird beim Beweise des dritten Kongruenzsatzes Gebrauch gemacht.

Um das Axiom der Bewegbarkeit des Dreiecks mit dem sechsten Kongruenzaxiom des H i l b e r t schen Systems bequem vergleichen zu können, ist es zweckmäßig, diesem die folgende Fassung zu geben. Es sei in der Ebene α das Dreieck ABC gegeben; ferner in derselben oder in einer anderen Ebene α' die Gerade a' und endlich auf a' die Strecke $A'B'$, die gleich AB sein soll. Dann gibt es in α' auf einer beliebig vorgeschriebenen Seite von a' immer einen Punkt C' der Art, daß auch noch:

$$\sphericalangle A = A', \quad \sphericalangle B = B', \quad \sphericalangle C = C', \quad AC = A'C'$$

ist; überdies auch einen Punkt D' der Art, daß ebenso:

$$\sphericalangle A = A', \quad \sphericalangle B = B', \quad \sphericalangle C = D', \quad BC = B'D'$$

ist. Es wird dann nachgewiesen, daß die beiden Punkte C' und D' nicht voneinander verschieden sein können.

Der Vergleich lehrt, daß in beiden Fällen übereinstimmend angenommen wird, es gebe immer einen Punkt C', der die drei Winkelbeziehungen:

$$\sphericalangle A = A', \quad \sphericalangle B = B', \quad \sphericalangle C = C'$$

verwirkliche. Es kann aber, wie leicht ersichtlich, nicht mehr als e i n e n Punkt geben, der sie erfüllt. Hiernach wird nun in dem einen

Falle weiter angenommen, daß mit dieser Übereinstimmung in den Winkeln auch noch die Beziehungen:

$$AC = A'C', \quad BC = B'C'$$

beide zugleich vereinbar seien; im anderen Falle, daß jede für sich dabei bestehen könne, worauf dann aus der schon feststehenden Eindeutigkeit von C' folgt, daß sie zugleich erfüllt sein müssen.

Mag man nun den einen oder den andern Weg bevorzugen, in jedem Falle ist zu beachten, daß die Bewegung des Dreiecks auf Gleichheit oder Bewegung von Strecken und Winkeln zurückgeführt wird und daher mit derselben Unbestimmtheit behaftet ist wie diese.

Weitere Folgerungen. Der zweite Kongruenzsatz kann auch im Hilbertschen System in herkömmlicher Weise begründet werden, da sich beim Beweise des ersten die Bewegbarkeit des Dreiecks ergeben hat.

Daß gleichen Seiten eines Dreiecks gleiche Winkel gegenüberliegen, folgt unmittelbar aus dem sechsten Kongruenzaxiom, wenn man A' durch A, dagegen B' durch C und C' durch B ersetzt. Die Umkehrung des Satzes kommt auf den zweiten Kongruenzsatz hinaus. Führt man die Bewegbarkeit des Dreiecks axiomatisch ein, so fällt der fragliche Satz unter den ersten, seine Umkehrung unter den zweiten Kongruenzsatz.

Demnächst beweist Hilbert für die in bekannter Weise definierten Nebenwinkel den Satz, der in gewöhnlicher Fassung lautet: Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel. Hervorzuheben ist, daß sich der Beweis auf Dreieckskongruenz stützt. Sind O und O' die Scheitelpunkte der beiden Paare von Nebenwinkeln, die in Betracht kommen, so wird auf den drei Schenkeln des ersten Paares je einer der Punkte A, B, C beliebig angenommen. Dann wählt man auf den entsprechenden Schenkeln des zweiten Paares die Punkte A', B', C' so, daß zugeordnete Strecken einander gleich sind. Die eingeführten Punkte bestimmen drei Paare von Dreiecken, die in passender Reihenfolge sich als kongruent (nach dem ersten Kriterium) erweisen. Die dritte Kongruenz ergibt den behaupteten Satz. Es folgt sogleich, daß Scheitelwinkel einander gleich sind.

Man bemerkt, daß sich unter den sechs Kongruenzaxiomen keine Festsetzung für Winkel findet, die dem entspricht, was für Strecken im dritten Axiom ausgesprochen ist. Für Winkel ist also weder der zweite noch der dritte Grundsatz Euklids axiomatisch zugelassen. Das wird gerechtfertigt durch den folgenden

Satz: Es seien (h, k) und (h', k') zwei gleiche Winkel mit den Scheitelpunkten O und O'. Ist dann l irgendein Halbstrahl, der von O ausgeht und im Innern des Winkels (h, k) verläuft, so gibt es stets einen Halbstrahl l', der von O' ausgeht, im Innern des Winkels (h', k') verläuft und die beiden Beziehungen:

$$\sphericalangle(h, l) = (h', l'), \quad \sphericalangle(k, l) = (k', l')$$

verwirklicht. Der Beweis ergibt sich nach Hilbert aus dem ersten Kongruenzsatze für Dreiecke und der Tatsache, daß gleiche Winkel gleiche Nebenwinkel haben. Wählt man nämlich auf dem Halbstrahl h den Punkt A beliebig und ebenso auf k den Punkt B, so treffe l die Strecke AB im Punkte C. Nun wähle man auf h' den Punkt A' und auf k' den Punkt B' so, daß $O'A' = OA$ und $O'B' = OB$ ist; endlich auf der Strecke $A'B'$ den Punkt C' so, daß $A'C' = AC$ wird. Dann ist $O'C'$ der fragliche Halbstrahl l', wie man findet, wenn man die entstandenen drei Paare von kongruenten Dreiecken aufsucht.

Damit ist erwiesen, daß von den drei Gleichungen:

$$\sphericalangle(h, l) = (h', l'), \quad \sphericalangle(k, l) = (k', l'), \quad \sphericalangle(h, k) = (h', k')$$

je zwei die dritte zur Folge haben, wenn einerseits h, k, l und andrerseits h', k', l' je drei von einem Punkte ausgehende und je in einer Ebene liegende Halbstrahlen sind und überdies zunächst die Einschränkung gemacht wird, daß, der Winkeldefinition entsprechend, die Halbstrahlen h, k zwei verschiedenen Geraden angehören und der Halbstrahl l im Innern des Winkels (h, k) liege. Mit dieser Einschränkung ist also nun auch Euklids zweiter und dritter Grundsatz für Winkel als notwendige Folge der drei ersten Axiomgruppen nachgewiesen. Wie man sieht, kann jetzt auch der bekannte Beweis des dritten Kongruenzsatzes für Dreiecke geführt werden.

Nunmehr läßt sich auch für Winkel die Berechtigung der Denkregeln erweisen, nach denen wir mit den Begriffen „größer“ und „kleiner“ verfahren. Insbesondere ist ganz unmittelbar ersichtlich, daß eine Ungleichung zwischen zwei Winkeln nicht gestört wird, wenn man nach Belieben einen der beiden Winkel durch einen ihm gleichen Winkel ersetzt.

Weiter gewinnt man die folgenden Sätze:

Jeder Winkel hat eine und nur eine Halbierungslinie. Auf dem einen Schenkel des Winkels mit dem Scheitel O seien A, B zwei Punkte der Art, daß A zwischen O und B liegt. Dann wähle man auf dem andern Schenkel die Punkte A', B' so, daß $OA' = OA$ und $OB' = OB$ wird. Nun haben die Strecken AB' und $A'B$ einen Punkt C des Winkelfeldes gemein. Denn in dem Dreiecke $OA'B$ trifft die Gerade AB' den Punkt A, der zwischen den Punkten O und B liegt. Da sie nun keinen Punkt zwischen O und A' trifft, so muß sie einen Punkt zwischen A' und B treffen. Die Strecke $A'B$ gehört aber ganz dem Felde des Winkels O an. Der Halbstrahl OC halbiert den Winkel O, wie sich aus kongruenten Dreiecken ergibt. Ein von

OC verschiedener Halbstrahl, der von O ausgeht und einen Punkt C' im Innern des Winkels O trifft, kann den Winkel nicht halbieren; denn entweder ist zugleich $\sphericalangle AOC' < AOC$ und $\sphericalangle A'OC' > A'OC$, oder es kehren sich in beiden Ungleichungen die Zeichen um.

Von einem Punkte außerhalb einer Geraden läßt sich auf diese immer eine und nur eine Senkrechte fällen. Die Gerade a und ein nicht auf ihr liegender Punkt A bestimmen eine Ebene α. Sind B, C irgend zwei Punkte von a, so gibt es in α einen Punkt A', der nicht mit A in derselben Halbebene liegt und die Kongruenz der beiden Dreiecke ABC und $A'BC$ verwirklicht. Die Strecke AA' enthält einen Punkt O der Geraden a, und dieser ist wenigstens von einem der beiden Punkte B und C, etwa von B, verschieden. Man bemerkt, daß $\sphericalangle BOA = BOA'$ ist. Nebenwinkel, die einander gleich sind, heißen rechte Winkel; also bildet a mit der Geraden AA' vier rechte Winkel, und diese sind zu je zweien gleich. Man nennt daher jede der beiden Geraden senkrecht zur andern. Es kann nicht zwei verschiedene Gerade geben, die durch A gehen und auf a senkrecht sind, denn die beiden müßten in der Halbebene, der A nicht angehört, noch einen zweiten Punkt gemein haben.

In einer Ebene läßt sich auf einer Geraden in jedem Punkte nur eine Senkrechte errichten. Eine in der Ebene α liegende Gerade a werde durch den Punkt O in die Halbstrahlen h, k zerlegt, und s sei ein dritter (stets möglicher) Halbstrahl in α, der von O ausgeht und so liegt, daß $\sphericalangle(h, s) = (k, s)$ ist. Dann gibt es in der Halbebene, der s angehört, keinen von O ausgehenden und von s verschiedenen Halbstrahl s' der Art, daß auch noch $\sphericalangle(h, s') = (k, s')$ ist. Denn notwendig ist entweder zugleich $\sphericalangle(h, s') < (h, s)$ und $\sphericalangle(k, s') > (k, s)$, oder es gelten diese beiden Ungleichungen mit umgekehrten Zeichen. Also hat a in O nur eine Senkrechte.

Alle rechten Winkel sind einander gleich. Zwei gerade Linien, die aufeinander senkrecht stehen, bilden eine Schnittfigur, die aus vier gleichen rechten Winkeln besteht. Es sind aber außerdem die rechten Winkel einer solchen Schnittfigur denen einer beliebigen andern gleich. Denn man kann immer irgend zwei rechte Winkel so an eine Gerade a in der Ebene α legen, daß sie den Scheitel und einen Schenkel gemein haben. Die nicht gemeinsamen Schenkel sind dann beide senkrecht auf a, weil zu gleichen Winkeln gleiche Nebenwinkel gehören. Wären sie also voneinander verschieden, so hätte a in der Ebene α in demselben Punkte zwei Lote. Die vierte Forderung Euklids ist also eine Folgerung aus den drei ersten Axiomgruppen.

Auf die Gleichheit der rechten Winkel stützt sich die Unterscheidung der spitzen und stumpfen Winkel.

Man erweitert den Winkelbegriff, indem man sagt, daß zwei Halbstrahlen, die ein und derselben Geraden a in der Ebene α angehören, zwei flache Winkel miteinander bilden. Ihre Winkelfelder sind die beiden Halbebenen, in die α durch a zerlegt wird. Wenn das, was bisher über Winkel, deren Schenkel zwei verschiedenen Geraden angehören, festgesetzt oder erwiesen ist, durch Einführung der flachen Winkel nicht gestört werden soll, so ist es notwendig, zu sagen, daß flache Winkel einander gleich seien, daß ein nicht flacher immer kleiner sei als ein flacher, und daß ein rechter Winkel die Hälfte eines flachen sei.

Jede Strecke auf einer Geraden hat einen und nur einen Mittelpunkt. Es sei AB eine Strecke auf der Geraden a in der Ebene α. Von A und von B aus seien in α nach derselben Seite von a die zu a senkrechten Halbstrahlen gezogen und auf diesen die gleichen Stecken AC und BD abgetragen. Der Punkt D liegt dann stets im Innern des rechten Winkels BAC, weil die von A und B ausgehenden Lote sich nicht schneiden. Der von A ausgehende Halbstrahl AD trifft also einen Punkt innerhalb der Strecke BC. Ebenso muß der von B ausgehende Halbstrahl BC einen Punkt innerhalb der Strecke AD treffen. Also haben die beiden Strecken AD und BC einen Punkt E gemein. Die Halbierungslinie des Winkels AEB trifft einen inneren Punkt M der Strecke AB, und aus kongruenten Dreiecken geht hervor, daß $AM = MB$ ist. Es kann zwischen A und B nicht einen von M verschiedenen Punkt M' der Art geben, daß auch noch $AM' = BM'$ ist. Denn es ist entweder zugleich $AM' < AM$ und $BM' > BM$, oder es gelten beide Ungleichungen mit umgekehrten Zeichen.

Da Winkel nur durch je einen Halbstrahl und Strecken nur durch je einen Punkt halbiert werden können, so gilt für beide der Satz: Wenn die Ganzen einander gleich sind, so sind auch ihre Hälften gleich.

Vierte Gruppe: Axiom der Parallelen.

Dem einzigen Axiom dieser Gruppe gibt Hilbert folgenden Wortlaut: *Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a; dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene α nur eine Gerade b, die durch A läuft und a nicht schneidet. Sie heißt die Parallele zu a durch A.*

Nachdem festgestellt ist, daß jeder Strecke auf einer Geraden ein Mittelpunkt zukommt, tritt der Satz in Kraft, daß ein Außenwinkel am Dreieck stets größer ist als jeder von den beiden inneren Winkeln, die ihm gegenüberliegen. Euklid stellt diesen Satz vor die Theorie der Parallelen und führt den Beweis, indem er den Scheitel eines inneren Winkels mit dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Dreiecksseite verbindet, die gezogene Strecke um sich selbst verlängert und den Endpunkt der Verlängerung mit dem Scheitel des Außenwinkels verbindet. Aus dem Satze schließt man mit Euklid, daß in einer Ebene durch einen Punkt außerhalb einer Geraden immer wenigstens eine Gerade geht, die die erste nicht schneidet. Das von Hilbert gewählte Axiom schließt jede weitere nichtschneidende Gerade aus. Es wird als ebenes Axiom bezeichnet.

Aus dem Hilbertschen Parallelenaxiom folgt ganz unabhängig von allen vorausgehenden Axiomen der Satz, daß in einer Ebene zwei Gerade, die beide ein und dieselbe dritte nicht schneiden, sich auch gegenseitig nicht schneiden können. Umgekehrt folgt aus diesem Satze ebenso das Axiom. Die beiden Aussagen sind also bedingungslos gleichwertig.

Das von Euklid gewählte Axiom ist nicht in demselben Sinne mit dem Hilbertschen gleichwertig. Ohne Rücksicht auf die vorhergehenden Axiome kann weder das erste aus dem zweiten, noch das zweite aus dem ersten hergeleitet werden. Wenn aber die drei ersten Axiomgruppen bereits zugelassen sind, so folgt jedes aus dem andern. Durch Vermittelung der bezeichneten Gruppen werden also beide auch gleichwertig.

Fünfte Gruppe: Axiome der Stetigkeit.

1) Axiom des Messens oder archimedisches Axiom. *Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B; man konstruiere dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ so, daß A_1 zwischen A und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und A_3, ferner A_3 zwischen A_2 und A_4 usw. liegt, und überdies die Strecken AA_1, A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, \ldots$ einander gleich sind: dann gibt es in der Reihe der Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ stets einen solchen Punkt A_n, daß B zwischen A und A_n liegt.*

2) Axiom der Vollständigkeit. *Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, das bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist, d. h. zu dem System der Punkte, Geraden, Ebenen ist es nicht möglich, ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daß in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämtliche Axiome der vier ersten Gruppen und das archimedische Axiom erfüllt sind.*

Um zu verstehen, was mit dem Vollständigkeitsaxiom beabsichtigt wird, kann man folgende Überlegung anstellen. In der gewöhnlichen analytischen Geometrie seien die als Abschnitte auf drei rechtwinkligen Achsen verstandenen Koordinaten beschränkt auf solche Strecken, die sich aus der beliebig gegebenen Einheitsstrecke durch vollständig ausführbare Konstruktionen mit Lineal und Zirkel gewinnen lassen. Die mit diesen Koordinaten erreichbaren Raumpunkte mögen elementar heißen. Je zwei elementare Punkte bestimmen eine elementare Gerade und je drei, die nicht derselben Geraden angehören, eine elementare Ebene. In dem so erhaltenen System gelten alle Axiome der vier ersten Gruppen und das archimedische Axiom, d. h. man kann alle in den bezeichneten Axiomen ausgesprochenen Forderungen erfüllen, ohne das System zu erweitern. Dagegen ist das Vollständigkeitsaxiom nicht erfüllt. Macht man den Umfang des mit der gegebenen Einheitsstrecke beschriebenen Kreises zur Einheitsstrecke eines neuen elementaren Systems, so hat das zweite System mit dem ersten außer dem Koordinatenanfangspunkt keinen Punkt gemein. Wenn man nun beide Systeme zu einem dritten zusammensetzt, so gelten auch in diesem die bezeichneten Axiome, während sie zugleich für jedes der beiden Teilsysteme unverändert in Kraft bleiben. Es liegt z. B. von je drei Punkten derselben Geraden stets einer zwischen den beiden anderen, mögen die drei Punkte demselben Teilsystem angehören oder nicht. Das zusammengesetzte System ist nicht mehr elementar, aber auch nicht vollständig.

Analytisch bedeutet der Aufbau eines elementaren Systems nichts anderes als die Beschränkung der als Zahlen verstandenen Punktkoordinaten auf einen bestimmten Bereich von reellen algebraischen Zahlen. Diese sind sämtlich Wurzeln von solchen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, deren Lösung vollständig auf quadratische Gleichungen zurückgeführt werden kann. Läßt man alle reellen Zahlen ohne Ausnahme als Koordinaten zu, so erhält man die gewöhnliche analytische Geometrie. Sie genügt dem Vollständigkeitsaxiom.

Das archimedische Axiom besagt: wenn irgend zwei ungleiche Strecken gegeben sind, so kann man durch fortgesetztes Abtragen der kleineren auf der größeren immer zu einem Punkte gelangen, der außerhalb der größeren liegt. Die entsprechende Aussage für Winkel lautet: wenn irgend zwei ungleiche Winkel gegeben sind, so kann man durch fortgesetztes Abtragen des kleineren auf dem größeren immer zu einem Halbstrahl gelangen, der außerhalb des natürlichen Feldes des größeren liegt. Die Richtigkeit dieser Aussage ergibt sich auf Grund des Satzes vom Außenwinkel, ohne Benutzung des Parallelenaxioms, in folgender Weise. Der größere Winkel sei zunächst spitz. Man fälle von einem Punkte des einen Schenkels das Lot auf den andern und trage von diesem zweiten Schenkel aus den kleineren Winkel fortgesetzt ab. Dadurch erhält man auf dem gezogenen Lot eine Reihe von beständig wachsenden Strecken. Trifft nämlich in einem Dreieck ABC die Halbierungslinie des Winkels A

die Seite BC im Punkte D, so ist $BD < CD$, falls $AB < AC$ ist. Das ergibt sich, wenn man auf der Seite AC die Strecke $AE = AB$ abträgt und das Dreieck CDE betrachtet. Die Erweiterung des für spitze Winkel begründeten Satzes auf rechte und stumpfe Winkel bietet keine Schwierigkeit.

Unmittelbar ergibt sich aus dem archimedischen Axiom, daß man aus einer gegebenen Strecke durch fortgesetztes Halbieren Teilstrecken gewinnen kann, die kleiner sind als eine vorgeschriebene Strecke. Das Entsprechende folgt für Winkel aus dem soeben bewiesenen Satze.

Die Widerspruchslosigkeit der geometrischen Axiome führt Hilbert auf die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome zurück, indem er nachweist, daß die Cartesische Geometrie sich als reine Zahlengeometrie aufbauen läßt, in der die von den geometrischen Axiomen geforderten, aber nicht festgelegten Begriffe arithmetisch so definiert sind, daß die geometrischen Axiome sämtlich als arithmetische Sätze in Kraft treten, sobald man überhaupt die Arithmetik voraussetzt. Die folgenden Andeutungen mögen dazu dienen, den Gedanken verständlich zu machen.

Jedes Paar von reellen Zahlen (x, y) werde ein Punkt genannt, jede Gruppe von drei reellen Zahlen (a, b, c), in der nicht a und b zugleich null sind, heiße eine Gerade, mit der Maßgabe, daß die Gerade (a', b', c') nicht von (a, b, c) verschieden sein soll, wenn es eine Zahl m derart gibt, daß zugleich $a' = ma$, $b' = mb$, $c' = mc$ ist. Wenn die Gleichung:

$$ax + by + c = 0$$

erfüllt ist, so soll gesagt werden, daß der Punkt (x, y) auf der Geraden (a, b, c) liege. Hiernach bestimmen zwei voneinander verschiedene Punkte immer eine und nur eine Gerade.

Die Gerade $(a_1 b_1 c_1)$ hat mit der von ihr verschiedenen Geraden $(a_2 b_2 c_2)$ keinen Punkt gemein, wenn $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ ist. Soll auch die dritte Gerade $(a_3 b_3 c_3)$ mit der ersten keinen Punkt gemein haben, so muß weiter $a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0$ sein. Dann folgt aber, daß auch $a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0$ ist, d. h. auch die zweite und dritte Gerade haben keinen gemeinsamen Punkt. Damit ist das Parallelenaxiom erwiesen.

Liegen drei voneinander verschiedene Punkte: $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ auf derselben Geraden (a, b, c), so sind die Gleichungen:

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0$$
$$ax_3 + by_3 + c = 0$$

erfüllt, und somit ist:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Da aber nicht zwei der drei Punkte zusammenfallen sollen, so kann die letzte Gleichung nur dann bestehen, wenn wenigstens in einer der beiden Zahlenreihen: x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 sich eine Zahl findet, die zwischen den beiden andern derselben Reihe liegt. Es möge also in der ersten Reihe x_2 zwischen x_1 und x_3 liegen; wenn dann in der zweiten Reihe überhaupt eine Zahl zwischen den beiden andern liegt, so kann es nur y_2 sein. Daraufhin werde gesagt, daß der Punkt $(x_2 y_2)$ zwischen den beiden andern Punkten liege. Dann ist das dritte Axiom der Anordnung gültig.

Wenn die Gerade (a, b, c) gegeben ist, so kann man alle ihr nicht angehörenden Punkte (x, y) in zwei getrennte Mengen zerlegen, je nachdem die Zahl $ax + by + c$ größer oder kleiner als null ausfällt. Wenn zwei Punkte derselben Menge zugehören, so soll von ihnen gesagt werden, daß sie auf derselben Seite der Geraden liegen.

Nun seien $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ irgend zwei verschiedene Punkte, von denen keiner auf der Geraden (a, b, c) gelegen ist, und zwar sei wenigstens x_1 von x_2 verschieden. Auf der durch die beiden Punkte bestimmten zweiten Geraden liege der Punkt (x, y). Dann ist in den Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= n_1 \\ ax_2 + by_2 + c &= n_2 \\ ax + by + c &= 0 \end{aligned}$$

weder n_1 noch n_2 gleich null. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} a(x - x_1) + b(y - y_1) + n_1 &= 0 \\ a(x - x_2) + b(y - y_2) + n_2 &= 0. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß:

$$(x - x_1)(y - y_2) = (x - x_2)(y - y_1)$$

sein soll, so findet man:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Ist nun von den beiden Zahlen n_1, n_2 die eine positiv, die andere negativ, so läßt sich stets eine zwischen x_1 und x_2 liegende Zahl x finden, die der letzten Gleichung genügt. Das ist nicht möglich, wenn n_1 und n_2 entweder beide positiv oder beide negativ sind. Auf Grund dieser Tatsache überzeugt man sich leicht von der Geltung des vierten Axioms der Anordnung.

Der Punkt $(x_1 y_1)$ werde mit P_1 und $(x_2 y_2)$ mit P_2 bezeichnet, die durch sie bestimmte Strecke mit $P_1 P_2$. Als Länge dieser Strecke werde die positive Zahl $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ definiert. Die beiden Punkte bestimmen einen dritten Punkt (x, y) oder P durch die Gleichungen:

$$x = x_2 - x_1, \qquad y = y_2 - y_1.$$

Wird noch der Punkt $(0, 0)$ mit O bezeichnet, so ist $OP = P_1 P_2$, und man sagt, jede der beiden Strecken werde durch Parallelverschiebung der andern erhalten. Die beiden Zahlen:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

mögen die Richtungszahlen des Halbstrahles heißen, der von O ausgeht und P enthält, und ebenso des Halbstrahles, der von P_1 ausgeht und P_2 enthält. Die Richtungszahlen irgendeines Halbstrahles, der von O ausgeht und P nicht enthält, seien ξ', η'. Dann werde als Winkel der beiden Halbstrahlen das Zahlenpaar (ϱ, σ) bezeichnet, das durch die Gleichungen:

$$\xi \xi' + \eta \eta' = \varrho$$
$$\xi \eta' - \xi' \eta = \sigma$$

bestimmt ist. Nun erhält man durch die Transformation:

$$x' = \varrho x - \sigma y$$
$$y' = \sigma x + \varrho y$$

einen Punkt P' derart, daß $OP' = OP$ ist und die beiden Halbstrahlen OP' und OP den Winkel (ϱ, σ) bilden. Das wird auch durch die Wendung ausgedrückt: die Strecke OP' sei aus OP durch eine Drehung um den Punkt O erhalten. Durch die vorstehenden Bestimmungen werden die Kongruenzaxiome in der Zahlengeometrie zur Geltung gebracht. Die Gültigkeit des archimedischen Axioms bedarf keiner Erläuterung.

Dieser Aufbau der Zahlengeometrie kann unter Benutzung aller reellen Zahlen vollzogen werden. Er ist aber auch in dem abgeschlossenen Bereiche der elementaren algebraischen Zahlen möglich, weil die vorgeschriebenen arithmetischen Operationen, an elementaren Zahlen ausgeführt, immer wieder zu solchen führen. Das System der Axiome bleibt also auch dann widerspruchsfrei, wenn man das Vollständigkeitsaxiom beseitigt.

Die Unabhängigkeit der Axiome voneinander ist in einem genauer anzugebenden Sinne zu verstehen. Es ist offensichtlich, daß einzelne Axiome die notwendige Voraussetzung für andere sind. Es wird aber natürlich der Anspruch erhoben, daß kein Axiom aus den übrigen hergeleitet werden könne, nachdem man solche ausgeschieden hat, für die das fragliche selbst eine notwendige Voraussetzung bildet.

Wenn demnach irgendein Axiom ganz unterdrückt wird, so muß es unmöglich sein, die aus dem ganzen System der Axiome hervorgehende Geometrie zu gewinnen. Man könnte, darüber hinausgehend, noch weiter fordern, daß der Aufbau dieser Geometrie auch dann schon unmöglich sein solle, wenn der Umfang irgendeines Axioms eingeschränkt, also z. B. das Parallelenaxiom nicht gleich für jede Gerade und jeden außerhalb dieser liegenden Punkt ausgesprochen würde. Diese Forderung ist in Hilberts System mit gutem Grunde nicht erfüllt; sie würde den Aufbau der Geometrie in hohem Grade erschweren. Von besonderem Interesse sind die angedeuteten Unabhängigkeitsfragen für jene drei Axiome, die die Grundlage für die Dreieckskongruenz, die Parallelentheorie und die Streckenmessung abgeben. Auf die beiden ersten zurückzukommen, wird sich in anderem Zusammenhange natürliche Gelegenheit bieten.

Die Unabhängigkeit des archimedischen Axioms hat Hilbert durch den Aufbau einer Funktionengeometrie bewiesen, die der oben angegebenen Zahlengeometrie mit beschränkter Zahlenmenge genau nachgebildet ist.[1]) Der früher benutzte Zahlenbereich ist hier zu einem Bereiche von Funktionen einer unabhängig Veränderlichen erweitert, und es wird gezeigt, daß durch passende Definition der Begriffe „größer“ und „kleiner“ die gewählten Funktionen sowohl unter sich angeordnet als auch in die mit ihr verbundene Zahlenreihe eingeordnet werden können. Nach dieser Erweiterung bleiben die zur Entwickelung der reinen Zahlengeometrie benutzten arithmetischen Regeln soweit gültig, daß sich die dem archimedischen vorhergehenden Axiome erweisen lassen, das archimedische selbst aber hat nur noch beschränkte Gültigkeit, da sich beliebig viele Fälle angeben lassen, in denen es nicht zutrifft. Die damit nachgewiesene Möglichkeit einer nichtarchimedischen Geometrie schließt die Abhängigkeit des Axioms der Streckenmessung von den ihm vorausgeschickten Axiomen aus.

§ 2. Euklidische und nichteuklidische Geometrie.

1. **Gechichtlicher Überblick.** Das fünfte Postulat Euklids, das wir bereits oben (S. 4) mitgeteilt haben, weicht nicht nur in der Form, sondern auch in seiner Anwendung wesentlich von den übrigen Voraussetzungen ab, auf denen Euklid sein System aufbaut. Während die übrigen Voraussetzungen bereits in den Beweisen der ersten Sätze und dann durch das ganze Werk hin wiederholt benutzt werden, begegnet uns die fünfte Forderung nur ein einziges Mal, und

1) Grundlagen (2. Aufl.) S. 22.

zwar an einer ziemlich späten Stelle. Die 26 ersten Propositionen des ersten Buches geben bereits ziemlich viele Sätze vom Dreieck. Hier werden Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines einzelnen Dreiecks angegeben; wir finden die Kongruenzsätze, sowie Vergleiche von Dreiecken, die in einzelnen Stücken übereinstimmen, in andern nicht; auch die Sätze über Scheitel- und Nebelwinkel haben hier ihren Platz gefunden. Der Beweis all dieser Sätze ist vom fünften Postulat unabhängig. Ebensowenig wird diese Forderung in den Propositionen 27 und 28 angewandt, wo die Bedingungen für den Parallelismus zweier Geraden (Gleichheit der Wechselwinkel u. dgl.) aufgestellt werden. Erst bei der Umkehrung dieser Sätze in Proposition 29 wird der Beweis, und zwar ohne jede nähere Erläuterung, auf das fünfte Postulat gestützt; dann tritt uns dasselbe niemals wieder entgegen.

Euklid hat demnach erkannt, daß ein Satz, der für sein Lehrgebäude von hervorragender Wichtigkeit ist, mit Hilfe der übrigen Voraussetzungen nicht bewiesen werden kann. Er verschmäht es, einen Scheinbeweis zu liefern; vielmehr sucht er (so müssen wir aus seiner Behandlungsart schließen) dem Leser das Vorhandensein einer Lücke zum vollen Bewußtsein zu bringen. Zu dem Ende setzt er die Umkehrung eines Lehrsatzes, den er streng beweisen kann, in leicht veränderter Form an die Spitze seines Werkes, nimmt sie aber nicht unter die Grundsätze, sondern unter die Forderungen auf, obwohl sie gerade zu den übrigen Forderungen weder der Form noch dem Inhalt nach irgendwie passen will. Die Anwendung dieses Postulates schiebt er möglichst weit hinaus und befaßt sich anfangs nur mit Wahrheiten, die von der neu eingeführten Hypothese unabhängig sind. Er behandelt sogar den Satz vom Außenwinkel eines Dreiecks zweimal: ehe er nämlich mit Hilfe der Parallelentheorie in Proposition 32 nachweist, daß dieser Winkel gleich ist der Summe der Innenwinkel an den andern Ecken, leitet er in Proposition 16 aus seinen übrigen Voraussetzungen den Satz her, daß der Außenwinkel größer ist als jeder einzelne Innenwinkel an einer andern Ecke.

Diese Lücke in Euklids System ist denn auch von jeher allgemein empfunden worden; man hat darin vielfach geradezu eine Makel seines Lehrgebäudes erblickt. Zahllose Versuche sind von den ältesten Zeiten an bis in unsere Tage gemacht worden, die Parallelentheorie streng zu beweisen, d. h. aus den übrigen Voraussetzungen Euklids herzuleiten. Schon Proclus hat uns viele derartige „Beweise“ überliefert; aber keiner von ihnen kann als genügend betrachtet werden. Der Mißerfolg der früheren Mathematiker hat die späteren keineswegs abgeschreckt, vielmehr zu immer neuen Versuchen verleitet. Unzählige Male wurde die Behauptung aufgestellt, jetzt endlich sei der erste strenge Beweis für die Parallelentheorie erbracht. Auch wurde der Trugschluß, auf dem der sogenannte Beweis beruhte, bisweilen nicht sofort erkannt; aber eine sorgfältige Prüfung hat jedesmal ergeben, daß in dem angewandten Verfahren der zu beweisende Satz bereits vorausgesetzt war. Aus diesem Grunde sind die meisten derartigen Versuche mit Recht der Vergessenheit anheimgefallen; nur einige wenige haben bleibenden Wert. Indem wir uns zu den letzteren wenden, glauben wir an erster Stelle das Werk besprechen zu sollen, welches der Italiener Saccheri (1667—1733) in seinem Todesjahre herausgegeben hat und das den Titel trägt: Euclides ab omni naevo vindicatus (Euklid von jeder Makel gereinigt). Die Gründlichkeit der Untersuchung und die Fülle merkwürdiger Resultate, die hier zum ersten Male bewiesen sind, sichern diesem Werke dauernde Anerkennung.

Saccheri geht von einer beliebigen Strecke AB aus und errichtet auf ihr in ihren Endpunkten zwei Senkrechte AC und BD, die in derselben Ebene liegen und gleich lang sind. Dann sind, wie er durch Kongruenz zeigt, auch die Winkel gleich, welche die Strecken AC und BD mit der Strecke CD bilden. Da er aber die Größe dieses Winkels nicht unmittelbar bestimmen kann, unterscheidet er von vornherein (ab initio) nach der Größe dieses Winkels drei verschiedene Möglichkeiten, die Hypothese des rechten, des stumpfen und des spitzen Winkels. Es gelingt ihm, den fundamentalen Satz zu beweisen, daß, wofern eine dieser Möglichkeiten in einem einzigen Falle zutrifft, sie allgemeine Gültigkeit besitzt. Für jede seiner drei Hypothesen findet er eine Reihe weiterer Sätze, von denen jeder für die einzelne Möglichkeit charakteristisch ist. Wir heben nur den Satz über die Winkelsumme eines Dreiecks hervor, welche für die erste Hypothese gleich zwei Rechten ist, aber für die zweite Hypothese mehr, für die dritte weniger als zwei Rechte beträgt.

Mit der zweiten Hypothese, der des stumpfen Winkels, wird Saccheri sehr rasch fertig. Da sie, wie er zeigt, zu Folgerungen führt, welche mit einigen Sätzen Euklids in Widerspruch stehen, so glaubt er sie verwerfen zu müssen; er erklärt daher die Hypothese des stumpfen Winkels für absolut falsch.

Die Hypothese des spitzen Winkels verfolgt er noch weiter und gelangt zu äußerst merkwürdigen Sätzen. Er zeigt, daß bei ihrer Annahme irgendeiner gegebenen Geraden gegenüber die übrigen Geraden der Ebene in drei Gruppen zerfallen:

a) schneidende Gerade, die sich vom Schnittpunkte an nach beiden Richtungen hin unbegrenzt von der gegebenen Geraden entfernen;

b) nicht schneidende Gerade, die mit der gegebenen eine gemeinsame Senkrechte besitzen und sich von deren Fußpunkte aus nach beiden Seiten unbegrenzt von der gegebenen Geraden entfernen;

c) Gerade, welche den Übergang von der ersten zur zweiten Gruppe bilden; jede Gerade dieser Art entfernt sich nach der einen Richtung hin unbegrenzt von der gegebenen Geraden, kommt ihr aber nach der andern unbegrenzt nahe, ohne sie jedoch je zu erreichen.

Trotz dieser schönen Resultate kann Saccheri zu dem Gedanken nicht vordringen, seine Hypothese des spitzen Winkels führe zu einem in sich abgeschlossenen System, das neben der euklidischen Geometrie innere Berechtigung hat. Durch sein Vorurteil geblendet, beginnt er einen heftigen Kampf gegen diese Hypothese und glaubt sie widerlegen zu können. Seine Gründe sind aber so wenig stichhaltig, daß man sie heute kaum noch versteht.

Mehr oder minder von Saccheri beeinflußt, hat Joh. Heinr. Lambert (1728—1777), der sich nicht nur in der Mathematik und Physik, sondern auch in der Philosophie große Verdienste erworben hat, im Jahre 1766 eine große Abhandlung über die Parallelentheorie verfaßt, welche erst nach seinem Tode 1786 veröffentlicht und auch dann nur wenig beachtet worden ist. Der Ausgangspunkt ist dem von Saccheri gewählten sehr ähnlich. Lambert geht von einem Viereck aus, das drei rechte Winkel besitzt, und unterscheidet die erste, zweite und dritte Hypothese, je nachdem der vierte Winkel ein rechter, stumpfer oder spitzer ist. Diese drei Hypothesen werden zum Teil weiter als bei Saccheri entwickelt. Namentlich beweist er, daß sowohl bei der zweiten wie bei der dritten Hypothese flächengleiche Dreiecke auch gleiche Winkelsummen besitzen und daß der Flächeninhalt eines Dreiecks proportional ist zu der Abweichung seiner Winkelsumme von zwei Rechten. Daraus schließt er, daß die zweite Hypothese auf der Kugel verwirklicht sei, und möchte „fast den Schluß machen, die dritte Hypothese komme bei einer imaginären Kugelfläche vor".

Der von Saccheri zuerst eingeschlagene und von Lambert fortgesetzte Weg ist leider in der zunächst folgenden Zeit verlassen worden. Die soeben kurz skizzierten Schriften gerieten sogar sehr bald in Vergessenheit und mußten vor wenigen Jahren wieder neu entdeckt werden. Indessen kam die behandelte Frage nicht mehr in Ruhe. Großes Verdienst erwarb sich Legendre (1752—1833) durch das Interesse, das er in seinem weit verbreiteten Lehrbuche der Parallelentheorie zuwandte. Er versuchte die euklidische Theorie auf verschiedenen Wegen zu erhärten, sah sich aber regelmäßig genötigt, die eigenen Versuche später zu verwerfen. In seinem Todesjahre gab er eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen über die

Parallelen und zeigte, daß die Winkelsumme in jedem Dreieck zwei Rechte beträgt, sobald dies bei einem einzigen Dreieck der Fall ist. Dadurch wurde dieser Satz, den Saccheri bereits hundert Jahre vorher bewiesen und als einzelnes Glied in einer Kette allgemeiner Sätze erkannt hatte, weiten Kreisen bekannt.

Als Legendre diesen Überblick schrieb, war die Sache selbst bereits viel weiter gefördert worden. Seit 1792 hatte sich Gauß mit dem Problem beschäftigt und sich bemüht, einen einwandfreien Beweis für die Richtigkeit der Parallelentheorie zu finden. Bis zum Jahre 1799 hatte er, wie er seinem Freunde Wolfgang Bolyai schrieb, manches gefunden, was wohl bei den meisten als Beweis gelten könne, was aber in seinen Augen nichts beweise; namentlich wußte er, daß im Falle der Unrichtigkeit des euklidischen Systems der Inhalt des Dreiecks eine endliche obere Grenze haben müsse; er bedauerte, daß der eingeschlagene Weg ihn nicht zu dem gewünschten Ziele geführt habe. Auch 1804 ist er, wie aus einem Brief an denselben Freund hervorgeht, nicht viel weiter; er spricht von Klippen, an denen seine Versuche bisher gescheitert seien, hofft aber, daß jene Klippen noch eine Durchfahrt gestatten. Selbst 1808 hält er im Gespräch mit Schumacher die Sache nicht für abgeschlossen. Aber während der folgenden Jahre vollzieht sich ein Umschwung in seiner Anschauung. In der Erwartung, endlich einmal einen innern Widerspruch in der Annahme zu finden, die Winkelsumme eines Dreiecks sei kleiner als zwei Rechte, sieht er sich veranlaßt, diese Hypothese immer weiter zu verfolgen; dabei gelangt er aber zu einem in sich folgerichtigen Systeme; bis zum Jahre 1816 gelingt es ihm sogar, die zugehörige Trigonometrie aufzubauen. Leider hat Gauß diese Entdeckungen nicht im Zusammenhang dargelegt; Andeutungen in Rezensionen und briefliche Mitteilungen, bei denen er ausdrücklich „wegen des Geschreis der Böotier“ Geheimhaltung verlangte, belehren uns, wieweit er in seinen Untersuchungen gekommen war.

Kurze Zeit nach Gauß gelangten zwei andere Mathematiker, ein Russe und ein Ungar, unabhängig von ihm und voneinander, zu denselben Ergebnissen. N. J. Lobatschewsky (1793—1850), Professor der Mathematik an der Universität Kasan, suchte lange Zeit einen Beweis für die Parallelentheorie und teilte in seinen Vorlesungen 1815—1817 verschiedene derartige Versuche mit. Im Jahre 1823 drang er zu der Überzeugung vor, daß alle bisherigen Beweise ungenügend seien, und am 12. (24.) Februar 1826 konnte er der physikomathematischen Abteilung der Universität Kasan eine Arbeit vorlegen, in der er zeigte, daß die Parallelentheorie nicht bewiesen werden könne, weil es eine in sich widerspruchsfreie Geometrie gibt, in welcher die Winkelsumme des Dreiecks kleiner ist als zwei Rechte.

Diese Abhandlung veröffentlichte er 1829, 1830 im Kasaner Boten unter dem Titel: „Über die Anfangsgründe der Geometrie". Neben dieser Arbeit muß das größere Werk: „Neue Anfangsgründe der Geometrie", welches 1835—1837 in den Kasaner Gelehrten Schriften erschien, als sein Hauptwerk bezeichnet werden.

Mit Gauß wandte auch sein Jugendfreund Wolfgang Bolyai der Parallelentheorie sein besonderes Augenmerk zu. Auch wußte er aus den zwei oben erwähnten Briefen, daß Gauß bis zum Jahre 1804 nicht zu einem befriedigenden Beweise für den Hauptsatz gekommen war. Den entscheidenden Schritt tat aber nicht er selbst, sondern sein Sohn Johann Bolyai (1802—1860), der sehr früh die Berechtigung einer vom Parallelaxiom unabhängigen, sogenannten absoluten Geometrie erkannte. Dieser veröffentlichte seine Entdeckung in der Arbeit: Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, welche 1832 als Anhang zu dem Werke seines Vaters erschien: Tentamen iuventutem in elementa matheseos .... introducendi.

Noch zwei andere Gelehrte müssen hier erwähnt werden, obwohl ihre Arbeiten für die weitere Entwicklung der Theorie ohne Einfluß geblieben sind. Der Jurist Schweikart hat die wahre Sachlage noch vor Lobatschewsky erkannt, aber nichts über die Ergebnisse seiner Studien veröffentlicht. Sein Neffe Taurinus hat, von ihm und von Gauß beeinflußt, sehr früh die trigonometrischen Formeln für den Fall aufgestellt, daß die Winkelsumme des Dreiecks kleiner ist als zwei Rechte; dennoch hielt er an der Hoffnung fest, die euklidische Theorie noch beweisen zu können.

Hier tritt uns die merkwürdige Tatsache entgegen, daß mehrere Gelehrte, unabhängig voneinander und ungefähr zu derselben Zeit, auf die Berechtigung einer neuen Geometrie geführt worden sind. Zudem finden wir, daß alle diese Entdecker mit Ausnahme des jüngeren Bolyai zunächst nur versucht haben, die im euklidischen System vorhandene Lücke auszufüllen, während dieses Strebens sich genötigt sahen, eine zweite Hypothese immer weiter zu verfolgen, um einen Widerspruch zu entdecken, und hierbei fast wider ihren Willen gezwungen wurden, diese zweite Möglichkeit als gleichberechtigt mit Euklids System anzuerkennen. Wenn aber Johann Bolyai auf einem direkteren Wege zur richtigen Erkenntnis vordrang, so müssen wir berücksichtigen, daß er durch seinen Vater auf die Unzulänglichkeit der früheren Beweisverfahren hingewiesen war; hier verteilt sich, wie Engel treffend bemerkt, die Geistesarbeit auf zwei Generationen.

Durch die Untersuchungen von Gauß, Lobatschewsky und Bolyai war jetzt bewiesen, daß die dritte Hypothese Saccheris, die des spitzen Winkels, mit der Hypothese des rechten Winkels gleichberechtigt ist. Wir dürfen daher auch nicht so leichthin, wie Saccheri es tut, an seiner Hypothese des stumpfen Winkels vorbeigehen, müssen vielmehr die Gründe ins Auge fassen, aus denen Saccheri die Hypothese glaubt verwerfen zu müssen. Dann zeigt sich aber, daß die Sätze Euklids, mit denen diese Hypothese nicht vereinbar ist, aus der Annahme hervorgehen, die Gerade sei unendlich. An dieser Annahme haben Lobatschewsky und Bolyai immer festgehalten. Dagegen scheint sich Gauß, wie aus einer kurzen Bemerkung, die er 1846 brieflich Schumacher gegenüber macht, in seinen späteren Jahren von dieser Beschränkung freigemacht zu haben. Aber erst Riemann (1826 bis 1866) hat öffentlich den Satz ausgesprochen, daß die Gerade eine geschlossene Linie sein könne, nachdem er durch analytische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie zur Erkenntnis dieser Wahrheit geführt war. In einem Vortrage, den er 1854 vor der philosophischen Fakultät zu Göttingen hielt, der aber erst 1867 gedruckt wurde, wies er auf diese Möglichkeit hin und gab kurz die wichtigsten Folgerungen an, die aus dieser Annahme hervorgehen.

So war denn endlich die Schwierigkeit gehoben, welche Euklid zur Aufstellung seiner fünften Forderung bewogen hatte. Etwa zweitausend Jahre waren mittlerweile verflossen, und vielfach hatten gerade die hervorragendsten Mathematiker ihre volle Kraft einsetzen müssen, um die ersehnte Klarheit herbeizuführen. Das Ergebnis der Forschungen, die zu diesem Zwecke angestellt waren, kann kurz in die Worte gefaßt werden: es gibt nicht bloß eine Geometrie, sondern drei Möglichkeiten sind an sich gleichberechtigt. Wenn Saccheri 1733 drei verschiedene Fälle nur von vornherein (ab initio) als möglich betrachtete, so müssen wir jetzt anerkennen, daß keiner von ihnen an einem inneren Widerspruche leidet. Seine Hypothese des rechten Winkels liefert das von Euklid behandelte System, seinen beiden andern Hypothesen entsprechen die beiden nichteuklidischen Geometrien, und zwar der Hypothese des spitzen Winkels die zuerst von Lobatschewsky öffentlich behandelte und deshalb vielfach nach ihm benannte Geometrie, während die Hypothese des stumpfen Winkels auf die Riemannsche Geometrie führt.

2. **Die Geometrie eines unendlich kleinen Gebietes.** Die neueren Untersuchungen haben nicht nur neue Zugänge geschaffen und die Theorie weiterentwickelt, sondern haben uns auch gelehrt, daß die Übereinstimmung größer ist, als man anfangs annahm. Wenn auch die Winkelsumme des Dreiecks in den beiden nichteuklidischen Raumformen von zwei Rechten verschieden ist, so kommt sie doch immer mehr an zwei Rechte heran, je kleiner der Inhalt des Dreiecks ist. Daraus folgt, daß die drei Raumformen in allen ihren Eigenschaften um so mehr übereinstimmen, je kleiner das Gebiet ist, auf das man sich beschränkt. Man drückt diese Wahrheit wohl in den

Worten aus: In jedem unendlich kleinen Gebiet gelten die Gesetze der euklidischen Geometrie.

Diesen Gedanken kann man aber umgekehrt auch benutzen, um die verschiedenen Möglichkeiten herzuleiten. Dabei beachte man, daß der Umfang eines jeden Kreises eine bloße Funktion des Radius ist; wir dürfen daher, wenn der Radius gleich r gesetzt wird, den Umfang gleich $2\pi f(r)$ setzen und uns die Aufgabe stellen, die Funktion $f(r)$ zu bestimmen. Legt man jetzt an eine feste Strecke x in dem einen Endpunkte einen rechten Winkel an und läßt den Winkel, der im anderen Endpunkte angelegt wird, unbegrenzt abnehmen, so geht in dem so gebildeten Dreieck das Verhältnis der Seite, welche dem letzten Winkel gegenüberliegt, zu dem Winkel selbst immer mehr in $f(x)$ über. Indem man alsdann den Satz über unendlich kleine Gebiete beachtet, kann man nachweisen, daß die Funktion $f(x)$ eine Ableitung $f'(x)$ hat und mit ihr durch die Beziehung verbunden ist:

$$\frac{1-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = \pm k^2.$$

Je nachdem die rechte Seite gleich null, positiv oder negativ ist, wird $f(x)$ entweder gleich x oder gleich $\frac{\sin kx}{k}$ oder gleich $\frac{e^{kx}-e^{-kx}}{2k}$. Wir werden also wieder auf die drei Hypothesen geführt, von denen Saccheri bei seiner Untersuchung ausging.

3. **Beziehung zur projektiven Geometrie.** Noch wichtiger als die soeben besprochene Übereinstimmung ist die Tatsache, daß die projektiven Eigenschaften den nichteuklidischen Raumformen in gleicher Weise wie dem euklidischen Raume zukommen. Hier berühren sich die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie mit der eigentümlichen Art, in der Staudt die Geometrie der Lage geschaffen hat. Ausgehend von der Figur des vollständigen Vierseits macht Staudt den Begriff von vier harmonischen Punkten einer Geraden von der Messung unabhängig, indem er ihn auf eine einfache Konstruktion gründet. Alsdann kann er ohne weitere Hülfsmittel gerade Punktreihen, Strahlen- und Ebenenbüschel einander projektiv zuordnen, für ebene Felder und Strahlenbündel kollineare und reziproke Verwandtschaft begründen. Hierdurch ist die Geometrie der Lage oder die projektive Geometrie geschaffen. Dieselbe kann einmal auf synthetischem Wege entwickelt werden, wie es Staudt in seiner „Geometrie der Lage“ und in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ getan hat. Man kann aber auch unter alleiniger Benutzung der Doppelverhältnisse und ohne jeden Gebrauch der Gleichheit die sogenannten homogenen Koordinaten einführen und mit ihrer Hülfe zahllose Eigenschaften der Figuren, namentlich der algebraischen Kurven

und Flächen finden. Die Sätze, welche auf diese Weise hergeleitet werden, stützen sich nur auf die ersten Eigenschaften der Geraden und der Ebene; sie sind aber vom Parallelenaxiom ganz unabhängig und gelten aus diesem Grunde nicht bloß für die euklidische Geometrie, sondern auch für die beiden anderen Raumformen.

Umgekehrt kann man nachträglich die Messung selbst auf projektivem Wege begründen. Der erste derartige Versuch ist von Cayley gemacht worden. Um die Lobatschewskysche Ebene zu erhalten, betrachtet er die Punkte, die im Innern eines Kegelschnitts liegen; den mit einer beliebig gewählten Konstanten multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches irgend zwei derartige Punkte mit den Punkten bilden, in denen ihre Verbindungslinie den festen Kegelschnitt trifft, definiert er als die Entfernung der beiden Punkte. Ebenso zieht er von dem Schnittpunkte zweier Geraden, die sich im Innern des Kegelschnitts treffen, die (imaginären) Tangenten an diesen, und setzt den mit einer geeigneten (imaginären) Konstanten multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die Tangenten mit den Geraden bilden, als den Winkel der Geraden an. Während aber hierbei die Übereinstimmung nur zufällig ist, kann man auf mancherlei natürliche Weise von der Projektivität zur Metrik gelangen. Wenn man z. B. den Satz beachtet, daß alle Punkte der Ebene, welche von einem festen, in ihr gelegenen Punkte gleiche Entfernung haben, einer einzigen geschlossenen Kurve angehören, so wird man wieder auf die drei angegebenen Möglichkeiten geführt.

4. **Einige Abbildungen der nichteuklidischen Raumformen.** Die Berechtigung der nichteuklidischen Raumformen ergibt sich auch durch verschiedene Methoden, nach denen man ein in sich abgeschlossenes Gebiet von Sätzen der euklidischen Geometrie so deuten kann, daß es vollständig den Sätzen in einer der beiden nichteuklidischen Raumformen entspricht. Nimmt man z. B. mit den Punkten, Geraden und Ebenen des euklidischen Raumes alle diejenigen kollinearen Umformungen vor, bei denen eine feste eigentliche ungeradlinige Fläche zweiter Ordnung in Deckung mit sich selbst bleibt, so entspricht jedem Satze, der hierbei gewonnen wird, ein Satz der Lobatschewskyschen Geometrie. Um in gleicher Weise ein Abbild der Riemannschen Geometrie zu erhalten, braucht man nur eine eigentliche imaginäre Fläche zweiter Ordnung zugrunde zu legen. Hierbei entspricht einer Geraden wieder eine Gerade, einer Ebene wieder eine Ebene. Der Lobatschewskysche Raum wird ganz auf das Innere der Fläche abgebildet; bei der Abbildung des Riemannschen Raumes gebraucht man den ganzen euklidischen Raum.

Noch weit schöner ist eine Abbildung, die uns J. Wellstein gelehrt hat. Er betrachtet alle Kugeln, für welche ein fester Punkt eine konstante Potenz hat, und nimmt die Kugeln eines solchen Gebüsches als Ersatz für die Ebenen, und die Kreise, in denen sich zwei derartige Kugeln schneiden, als Ersatz für die geraden Linien. Der Begriff des Winkels bleibt ganz ungeändert; ferner entsprechen den Kugeln wiederum Kugeln, den Kreisen wiederum Kreise. Wenn die Potenz gleich null ist, die Kugeln also sämtlich durch einen festen Punkt gehen, so liefert das Kugelgebüsch eine Geometrie, die mit der euklidischen übereinstimmt; d. h. vermittelst der angegebenen Umdeutung kann man aus jedem Satze der euklidischen Geometrie einen Lehrsatz für das Kugelgebüsch herleiten (vgl. § 3, 2). Durch einen positiven Wert der Potenz wird man in gleicher Weise auf die Lobatschewskysche Geometrie und durch einen negativen Wert der Potenz auf die Riemannsche Geometrie geführt. Hierauf brauchen wir schon aus dem Grunde nicht näher einzugehen, weil Wellstein selbst diesen Zusammenhang in der „Encyklopädie der Elementar-Mathematik" (Bd. II S. 34—82) eingehend dargelegt hat.

5. **Hauptsätze der Lobatschewskyschen Geometrie.** Der Raum gestattet uns nicht, die nichteuklidischen Raumformen zu behandeln und ihre Berechtigung nachzuweisen. Wir müssen es vielmehr dem Leser überlassen, ob er lieber auf die Originalarbeiten zurückgreifen oder eine der zahlreichen neueren Bearbeitungen benutzen will. Nur glauben wir, die wichtigsten Sätze über die einzelnen Raumformen der Vergleichung wegen zusammenstellen zu sollen.

In der Lobatschewskyschen Geometrie ist die Winkelsumme eines jeden Dreiecks kleiner als zwei Rechte, und der Flächeninhalt ist proportional der Größe, um welche der gestreckte Winkel die Summe der Dreieckswinkel übertrifft. Zwei gerade Linien, die in derselben Ebene liegen, haben entweder einen Punkt gemein oder sie haben eine gemeinschaftliche Senkrechte oder sie nähern sich unbegrenzt, ohne je einen Punkt gemein zu haben. Im ersten Falle nennt man sie schneidende, im zweiten nichtschneidende, im dritten parallele Gerade. Gerade der ersten Art entfernen sich vom Schnittpunkte aus, solche der zweiten Art von den Fußpunkten der gemeinsamen Senkrechten aus immer mehr voneinander; parallele Gerade nähern sich nach der einen, entfernen sich aber nach der andern Richtung unbegrenzt. Durch jeden Punkt, der einer gegebenen Geraden nicht angehört, lassen sich zwei Parallelen zu ihr ziehen; in einem der vier Winkelfelder, welche von diesen beiden Geraden begrenzt werden, liegt die gegebene Gerade; jede gerade Linie, welche durch den Scheitelpunkt gelegt wird und in diesem Winkelfelde und in dem des Scheitelwinkels verläuft, schneidet die gegebene Gerade; legt man aber durch den Scheitel eine Gerade, welche in den Feldern der beiden Nebenwinkel liegt, so hat sie mit der gegebenen Geraden eine gemeinsame

Senkrechte. Wir können kurz sagen: Die von einem Punkte ausgehenden Parallelen trennen in der Ebene die durch den Punkt gehenden schneidenden und nichtschneidenden Geraden gegeneinander ab.

Wenn eine Gerade a und eine auf ihr senkrechte Gerade m gegeben sind, so kann man zwei Gerade b und c konstruieren, welche zu m nach derselben Richtung und zu a nach verschiedenen Richtungen hin parallel sind; dann hat die von den drei Geraden a, b, c begrenzte Fläche einen festen endlichen Inhalt, der bei geeigneter Wahl des Flächenmaßes gleich π gesetzt werden kann. Für eine derartig gewählte Flächeneinheit ist der Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ gleich $\pi - \alpha - \beta - \gamma$, also kleiner als die oben angegebene Fläche. Um mit diesem Flächenmaß eine passende Längeneinheit in Verbindung zu bringen, setzen wir etwa fest, daß der Inhalt eines unendlich kleinen Quadrats gleich der zweiten Potenz der Seite sein soll. Für eine solche Längeneinheit werden die trigonometrischen Formeln besonders einfach; man hat nämlich in den Formeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie nur die Seiten a, b, c der Reihe nach durch ai, bi, ci $(i = \sqrt{-1})$ zu ersetzen. Um die Formeln in reeller Form zu erhalten, führen wir die hyperbolischen Funktionen Shx und Chx durch die Gleichungen ein:

$$Shx = \frac{\sin xi}{i} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad Chx = \cos xi = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Dann gelten für das Dreieck u. a. folgende Formeln:

$$\frac{Sha}{\sin\alpha} = \frac{Shb}{\sin\beta} = \frac{Shc}{\sin\gamma}, \quad Cha = Chb\,Chc - Shb\,Shc\cos\alpha.$$

Wir sehen, daß sehr viele dieser Sätze bereits von Saccheri gefunden sind. Zugleich zeigt sich, wie berechtigt die Vermutung Lamberts war, seine dritte Hypothese werde auf einer Kugel mit imaginärem Radius verwirklicht.

6. **Hauptsätze der Riemannschen Geometrie und ihres Polarsystemes.** Die zweite Hypothese Saccheris, die des stumpfen Winkels, verlangt, daß die gerade Linie geschlossen sei; sie entspricht demnach der Riemannschen Geometrie. Dann ist die Winkelsumme eines jeden Dreiecks größer als zwei Rechte. Die Trigonometrie des ebenen Dreiecks wird bei geeigneter Wahl der Längeneinheit identisch mit der sphärischen Trigonometrie des euklidischen Raumes, ganz wie es Lambert für seine zweite Hypothese angegeben hatte. Wie sich zwei Gerade der Ebene stets gegenseitig schneiden, so haben auch zwei verschiedene Ebenen regelmäßig eine gerade Linie gemeinschaftlich. Zwei gerade Linien haben immer zwei gemeinschaftliche Senkrechten; für schneidende Gerade liegt die eine von diesen mit ihnen in derselben Ebene, während die andere auf der Ebene

der Geraden senkrecht steht. Es gibt aber auch gerade Linien, die von unendlich vielen Geraden senkrecht durchschnitten werden und dann überall gleichen Abstand voneinander haben; nur liegen zwei derartige Gerade nicht in einer Ebene.

Im weiteren ergeben sich hier zwei Möglichkeiten: zwei Gerade derselben Ebene schneiden sich nämlich entweder in einem oder in zwei verschiedenen Punkten. Im zweiten Falle zerlegt die Ebene den Raum, die Gerade die Ebene; alle von einem festen Punkte ausgehenden Geraden treffen sich noch in einem zweiten Punkte, dem sog. Gegenpunkte des ersten. Die ebene Geometrie eines solchen Raumes entspricht vollständig der Geometrie auf der Kugel. Die Raumform selbst befriedigt am genauesten die Angaben, die Riemann über seinen „Raum von konstanter positiver Krümmung“ macht, und wird aus diesem Grunde vielfach nach ihm benannt. Klein nennt sie die sphärische Geometrie. Sie wird durch das Wellsteinsche Kugelgebüsch bei negativer Potenz abgebildet, wenn man jeden Punkt des (euklidischen) Bildraumes auch als einen Punkt des abgebildeten Raumes auffaßt.

Neben diese Möglichkeit tritt die an erster Stelle genannte, wo sich zwei verschiedene Gerade derselben Ebene stets in einem einzigen Punkte schneiden. Bei dieser Voraussetzung wird weder der Raum durch die Ebene, noch die Ebene durch eine in ihr gelegene Gerade in zwei Teile zerlegt. Alle von einem Punkte ausgehenden Geraden kehren zu diesem Punkte zurück, ohne einen weiteren Punkt gemeinschaftlich zu haben. Diese Möglichkeit ist zuerst von Newcomb und von Klein behandelt; sie wird daher zuweilen die Klein-Newcombsche genannt, während Klein selbst sie als elliptisch bezeichnet. Sie wird durch das Wellsteinsche Kugelgebüsch bei negativer Potenz dargestellt, wenn man mit Wellstein darin als „Scheinpunkt“ die Vereinigung von je zwei zusammengehörigen Punkten auffaßt, d. h. von zwei Punkten, die mit dem Pol in gerader Linie liegen, und deren Abstände vom Pol unter Berücksichtigung der Zeichen ein der Potenz gleiches Produkt ergeben. Man kann statt dessen auch in diesem Gebüsch jede einzelne Kugel als Scheinpunkt, alle Kugeln eines Büschels als Scheingerade und alle Kugeln eines Bündels als Scheinebene auffassen und dadurch zu dieser Raumform gelangen. Ebenso kann man sie aus der Riemannschen Geometrie dadurch erhalten, daß man in der letzteren die Ebene als Element ansieht. Aus diesem Grunde bezeichnet Killing die zuletzt charakterisierte Möglichkeit als die Polarform des Riemannschen Raumes.

8. **Die nichteuklidischen Raumformen in ihrer Beziehung zu den Hilbertschen Axiomen.** Bei dem in den vorangehenden Nummern gegebenen Überblick haben wir versucht darzulegen, in

welcher Weise die Wissenschaft in dem Bestreben, das Lehrgebäude Euklids zu verbessern, gezwungen wurde, über dasselbe hinauszugehen, und dadurch zu den nichteuklidischen Raumformen geführt wurde. Wir möchten jetzt die Beziehung dieser Raumformen zu den Axiomen Hilberts besprechen. Der Übergang von der euklidischen zur Lobatschewskyschen Geometrie macht nur geringe Änderungen notwendig. Hierbei kann man nämlich alle Axiome bis auf das Parallelenaxiom beibehalten und dieses durch eine Forderung ersetzen, die wir weiter unten erwähnen werden.

Für die Klein-Newcombsche Raumform, die wir in Nr. 7 an letzter Stelle charakterisiert haben, bleiben die Axiome der Verknüpfung und der Kongruenz ungeändert, während die Axiome der Anordnung eine kleine Änderung erleiden, die bereits öfter u. a. von Dehn (Math. Ann. Bd. 53) angegeben worden ist. Das Parallelenaxiom fällt in diesem Falle ganz weg.

Dieselbe Änderung, die in dieser Raumform an den Axiomen der Anordnung angebracht werden muß, ist auch im Riemannschen Raume (dem sphärischen Raume nach Kleins Bezeichnung) notwendig. Da zudem jede Gerade, die durch einen Punkt geht, notwendig seinen Gegenpunkt enthält, so gelten die Axiome der Verknüpfung nicht in der von Hilbert aufgestellten Form. Dem Zwecke unseres Buches liegt es fern, die Änderungen anzugeben, die notwendig werden, damit diese Axiome für den Riemannschen Raum in Gültigkeit bleiben. Nur eine Bemerkung sei gestattet. Man könnte versucht sein, die Schwierigkeit dadurch zu beseitigen, daß man in den Axiomen die Zusammenfassung von zwei Gegenpunkten als einen Punkt oder auch nur als einen Scheinpunkt hinstellte. Ein derartiger Versuch scheint uns aber höchst bedenklich zu sein. Eine solche Ausdrucksweise ist wohl berechtigt, wenn es sich um Abbildungen handelt; sie ist auch zulässig, wenn zuvor der wahre Sachverhalt dargelegt ist und ein Mißverständnis nicht mehr befürchtet werden kann. Aber in den Axiomen muß die Wahrheit zum klaren Ausdruck gebracht werden.

Um unsern Überblick über die möglichen Raumformen nicht zu weit ausdehnen zu müssen, haben wir bisher ganz von denjenigen Raumformen abgesehen, auf die im Anschluß an eine Bemerkung von Clifford zuerst Klein (Math. Ann. Bd. 37) genauer eingegangen ist, und die dann Killing im 39. Bande der Mathematischen Annalen und in seiner „Einführung" (Bd. I S. 271 ff.) weiter behandelt und als Clifford-Kleinsche Raumformen bezeichnet hat. Um zu ihnen zu gelangen, behandelt man erst einen allseitig begrenzten Teil des Raumes, fügt dann immer weitere Teile hinzu und ermittelt die verschiedenen Möglichkeiten, zu denen man hierbei geführt wird, wenn man noch verlangt, daß die für den anfangs gewählten Bereich gefundenen Gesetze auch in jedem passend gewählten Raumteile gültig bleiben. Es dürfte höchst schwierig sein, die Hilbertschen Axiome so umzuformen, daß sie für diese Raumformen Gültigkeit behalten.

Bis jetzt haben wir immer das archimedische Prinzip beibehalten. Indem wir für die folgenden Angaben davon absehen, wollen wir zunächst geradezu die drei ersten Axiomgruppen des Hilbertschen Systems zu grunde legen. Aus diesen Voraussetzungen folgt die Tatsache, daß alle Dreiecke gleichartige Winkelsummen haben, d. h. daß die Summe der drei Winkel entweder in allen Dreiecken zwei Rechte beträgt oder in keinem Dreiecke diesen Betrag erreicht oder endlich in jedem Dreieck ihn überschreitet. Der erste Teil dieses dreifachen Satzes wird zuweilen nach Legendre benannt, obgleich Saccheri ihn genau hundert Jahre vor Legendre gefunden hat. Alle älteren Beweise benutzen stillschweigend das archimedische Axiom. Erst neuerdings hat M. Dehn[1]) und nach ihm F. Schur[2]) gezeigt, daß der Satz von der Gleichartigkeit der Winkelsumme im Dreieck seinem ganzen Umfange nach von der archimedischen Forderung unabhängig, also eine reine Folgerung der drei ersten Axiomgruppen ist.

Fügt man das Parallelenaxiom hinzu, das durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nur e i n e Nichtschneidende zuläßt, so folgt in bekannter Weise sogleich, daß die Winkelsumme in allen Dreiecken zwei Rechte beträgt. Dieser Schluß ist umkehrbar, wenn das archimedische Axiom zugelassen wird. Unter dieser Voraussetzung kann also das Parallelenaxiom auf nur e i n e Gerade und e i n e n ihr nicht angehörenden Punkt eingeschränkt oder auch durch die Annahme ersetzt werden, daß es e i n Dreieck gebe, dessen Winkelsumme genau zwei Rechte ausmacht. Daß der Schluß ohne das archimedische Axiom nicht umkehrbar ist, ergibt sich aus den folgenden weiteren Angaben.

Die Hypothese, daß in einer Ebene durch einen Punkt außerhalb einer Geraden b e l i e b i g v i e l e N i c h t s c h n e i d e n d e möglich seien, ist mit den drei ersten Axiomgruppen auch vereinbar, führt aber auf ganz verschiedene Möglichkeiten. Man kann einmal das neue Axiom mit Hilbert in folgende Form bringen (Grundlagen, II. Aufl., S. 109):

Ist b eine beliebige Gerade und A ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so gibt es stets durch A zwei Halbgerade a_1 und a_2, die nicht ein und dieselbe Gerade ausmachen und die Gerade b nicht schneiden, während jede in dem durch a_1, a_2 gebildeten Winkelraume gelegene, von A ausgehende Halbgerade die Gerade b schneidet.

Aus dieser Voraussetzung in Verbindung mit den Axiomgruppen I, II, III hat Hilbert in sehr einfacher Weise die Grundeigenschaften

1) Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Math. Ann. Bd. 53 (1900).

2) Über die Grundlagen der Geometrie. Math. Ann. Bd. 55 (1901).

des Lobatschewskyschen Raumes hergeleitet, ohne das archimedische Prinzip oder das Vollständigkeitsaxiom zu benutzen.

Ferner kann man über die gegenseitige Lage der nichtschneidenden Geraden keine besondere Annahme machen, aber das archimedische Prinzip heranziehen. Dann wird das soeben aufgestellte Axiom zu einem Lehrsatz und die Winkelsumme bleibt unter zwei Rechten.

Läßt man endlich die gegenseitige Lage der Nichtschneidenden unbestimmt und setzt zudem die beiden Stetigkeitsaxiome außer Kraft, so lassen sich, wie die Untersuchung von Dehn (Math. Ann. Bd. 53) ergeben hat, noch zwei weitere Geometrien aufbauen. In der einen beträgt die Winkelsumme aller Dreiecke zwei Rechte, weshalb sie halbeuklidisch (Dehn: semieuklidisch) genannt werden kann. In der andern ist die fragliche Winkelsumme stets größer als zwei Rechte; Dehn bezeichnet sie als nichtlegendresche Geometrie, womit auf den Umstand hingedeutet wird, daß Legendre aus Voraussetzungen, welche den drei ersten Axiomgruppen entsprechen, unter Benutzung der Stetigkeit den Satz bewies: Die Winkelsumme des Dreiecks kann zwei Rechte nicht übersteigen.

Die dritte noch mögliche Hypothese, nach der zwei gerade Linien, die in derselben Ebene liegen, sich immer schneiden, zieht die weitere Folgerung nach sich, daß die Summe der Dreieckswinkel größer ist als zwei Rechte.

Als nichteuklidisch im engeren Sinne des Wortes bezeichnet man die archimedischen Geometrien, in denen die Winkelsumme des Dreiecks von zwei Rechten abweicht, unter Ausschluß der Clifford-Kleinschen Raumformen.

9. **Literaturnachweis.** Die ältere Literatur über den behandelten Gegenstand ist vollständig und übersichtlich zusammengestellt in dem in Gemeinschaft mit Engel von Stäckel herausgegebenen Werke: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß (Leipzig 1895). Dies Werk ist auch uns für den geschichtlichen Überblick von großem Nutzen gewesen. Vor allem aber glaubten wir uns hierbei auf die sorgfältigen Untersuchungen stützen zu sollen, die Engel seiner deutschen Übersetzung der beiden Hauptwerke Lobatschewskys beigegeben hat („N. J. Lobatschefskiy, Zwei geometrische Abhandlungen", von Friedrich Engel, Leipzig 1898/99). Diese Arbeit ist auch für die erste Einführung in die nichteuklidische Geometrie sehr geeignet. Johann Bolyais Hauptwerk (appendix) ist zur hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in einer prächtigen Form mit großer Sorgfalt herausgegeben, und zwar sowohl gesondert (Budapestini 1902), wie auch als Anhang zum Hauptwerk (Tentamen) seines Vaters (1904), nachdem bereits früher J. Frischauf die „Elemente der absoluten Geometrie" (Teubner 1876) hauptsächlich im Anschluß an Bolyai bearbeitet hatte. Für die erste Einführung dürften außerdem u. a. in Betracht kommen:

Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie (Paderborn 1893/98).
Klein, Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie (autographiert).
Liebmann, Nicht-euklidische Geometrie (Sammlung Schubert LXIX, 1905).

Bonola-Liebmann, Die nichteuklidische Geometrie (Teubner 1908).

Für den rein projektiven Aufbau der Geometrie vergleiche man außer Staudts Werken die Vorlesungen von Reye über die Geometrie der Lage. Den Übergang von der projektiven zur nichteuklidischen Geometrie behandeln außer zahlreichen Abhandlungen Kleins und seinen eben erwähnten Vorlesungen ein größerer Abschnitt im zweiten Bande des von Lindemann im Anschluß an Clebsch' Vorlesungen bearbeiteten Lehrbuches der analytischen Geometrie (Teubner 1891), sowie Enriques' geometria proiettiva (deutsch von Fleischer) und die schon genannte „Einführung" Killings.

Zur ersten Einführung glauben wir den Artikel von F. Enriques: Prinzipien der Geometrie, im dritten Bande der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, nicht empfehlen zu können; so sehr wir auch die Fülle des behandelten Stoffes anerkennen, dürfen wir nicht verschweigen, daß der Artikel sehr viele Ungenauigkeiten und selbst Unrichtigkeiten enthält.

Wie schon oben erwähnt wurde, verdanken wir J. Wellstein die Erkenntnis, daß man die nichteuklidischen Raumformen (im engern Sinne) auf den euklidischen Raum abbilden kann, wenn man darin die sämtlichen Kugeln, die für einen festen Punkt eine konstante, von null verschiedene Potenz haben, als Ebenen (Scheinebenen) und die Kreise, in denen sich zwei solche Kugeln schneiden, als Gerade (Scheingerade) auffaßt (vgl. Encykl. d. Elem.-Math. Bd. II). Hierbei erklärt Wellstein, man müsse notwendig das System von je zwei zusammengehörigen Punkten des euklidischen Bildraumes als einen einzigen Punkt (Scheinpunkt) des abgebildeten (nichteuklidischen) Raumes auffassen, während es doch offenbar natürlicher ist, die Räume einander punktweise zuzuordnen. Indessen ist die letzte Art der Zuordnung nicht nur gestattet, sondern in einem Falle sogar notwendig. Dadurch tritt beim hyperbolischen Gebüsch (d. h. bei positiver Potenz), das dem Lobatschewskyschen Raume entspricht, keine Änderung ein. Man braucht sich nur auf das Innere oder das Äußere der Kugel zu beschränken, durch welche alle Kugeln des Gebüsches senkrecht geschnitten werden, eine Beschränkung, die schon aus dem Grunde notwendig ist, weil keine geometrische Operation gestattet, von dem einen durch jene Kugel begrenzten Raumteile zum andern überzugehen. Das elliptische Gebüsch, bei dem die Potenz negativ ist, stellt bei punktweiser Abbildung den Riemannschen (sphärischen) Raum dar; je zwei Punkte, die mit dem festen Potenzpunkte der Kugeln des Gebüsches in gerader Linie liegen und einander durch die negative Potenz zugeordnet werden, sind die Bilder von zwei Gegenpunkten. Will man durch das Gebüsch den Klein-Newcombschen (elliptischen) Raum abbilden, so kann man je die Zusammenstellung von zwei solchen Punkten als einen einzigen Punkt auffassen; man kann aber, wie oben schon bemerkt wurde, noch in anderer Weise zu demselben Ziele gelangen.

An dieser Stelle möge dem einen der beiden Verfasser eine persönliche Bemerkung gestattet sein. E. Pascal bespricht im zweiten Bande seines „Repertoriums der höheren Mathematik" (deutsche Ausgabe von Schepp, Leipzig 1902) auf Seite 625—627 die beiden Formen des „Riemannschen Raumes"; er schreibt die Auffindung der unterscheidenden Sätze jedesmal Klein zu und fährt dann fort: „Die Zweiteilung der Riemannschen Geometrie entging einigen Autoren, wie z. B. Beltrami; sie wurde von Klein entdeckt Math. Ann. 4, p. 604 Anm. u. 6, p. 125." Dieser Irrtum ist um so schwerer zu begreifen, als Klein selbst in der (auch von Pascal zitierten) Abhandlung im 37. Bande der mathematischen Annalen (S. 556) ausdrücklich sagt: „Killing hat vornehmlich den Gedanken verfolgt . . ., daß der sphärische Raum auch neben dem elliptischen Raume noch ein besonderes Interesse behält. Als einen wirklichen Fortschritt betrachte ich den Killingschen Beweis, daß bei den von ihm festgehaltenen Hypothesen . . . als Raumformen konstanten positiven Krümmungsmaßes keine andern möglich sind, als eben der elliptische und der sphärische Raum . . . Clifford und ich sind an diesem Satze vorbeigeführt worden, weil wir unsere Aufmerksamkeit . . . auch auf komplexe Werte der Koordinaten gerichtet hatten."

§ 3. Die Grundbegriffe.

1. **Natürliche Geometrie.** Als Grundbegriffe eines geometrischen Systems sind alle in seinen Axiomen ohne vorausgehende ausdrückliche Definition auftretenden Begriffe zu bezeichnen. Im Hilbertschen System gehören dazu also in erster Linie: der Punkt, die Gerade und die Ebene. Weiterhin aber auch die Verknüpfungsbegriffe, der mit dem Worte „zwischen" bezeichnete Anordnungsbegriff und endlich die Kongruenz oder Gleichheit von Strecken und Winkeln.

In der natürlichen Geometrie (vgl. § 12, 2), deren verfeinerte Form die zeichnende Geometrie ist, sind die Ebenen, geraden Linien und Punkte sichtbare körperliche Dinge, und an ihnen werden auch die Begriffe der Verknüpfung und Anordnung durch Anschauung gewonnen. Den vom ersten Kongruenzaxiom geforderten Punkt B' findet man mit Hülfe des als Streckenträger dienenden Zirkels durch ein nach praktischer Anleitung auszuführendes physikalisches Experiment. Die entsprechende Benutzung eines natürlichen Winkelträgers zur Bestimmung des vom vierten Kongruenzaxiom beanspruchten Halbstrahles k' wird dadurch umgangen, daß man den Zirkel nicht bloß als Streckenträger, sondern auch als Cyklographen (d. h. zum Ziehen von Kreisen) gebraucht. In dem Abschnitt über „ebene Konstruktionen" wird sich zwar ergeben, daß die übliche Zurückführung der Winkelgleichheit auf Streckengleichheit durch Vermittlung des dritten Kongruenzsatzes etwas Zufälliges und Willkürliches enthält und in mannigfaltiger Weise abgeändert werden könnte. Aber welchen Weg man auch einschlagen mag, immer bleibt die Bestimmung des Punktes B' und des Halbstrahles k' mit dem Charakter eines physikalischen Versuches behaftet.

Die allgemeine und bereitwillige Anerkennung, deren sich die geometrischen Sätze erfreuen, beruht ohne Zweifel darauf, daß sie in der natürlichen Geometrie durch die Erfahrung bestätigt werden. Die Art der Bestätigung genügt indessen bloß unserer beschränkten Sinneswahrnehmung. Tatsächlich ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung unvollkommen; das zeichnerische Experiment hat, wie jedes physikalische, seine Fehlerquellen. Es kann für die praktische Zeichenkunst einiges Interesse bieten, diesen Fehlerquellen nachzugehen; welcher Art sie aber auch sein mögen, sie kommen schließlich alle darauf hinaus, daß die natürliche Geometrie nicht imstande ist, allen Axiomen in der strengen Form Geltung zu verschaffen, in der sie ausgesprochen werden. Es ist leicht, sich davon im einzelnen zu überzeugen. Zwei gezeichnete Punkte bestimmen die mit dem Lineal durch sie zu ziehende Gerade um so weniger eindeutig, je geringer ihre Entfernung ist. Zwischen zwei Punkten, die sich beliebig nahe liegen, gibt es nicht immer einen dritten Punkt. Der Punkt B' des ersten und der Halbstrahl k' des vierten Kongruenzaxiomes werden mit Zirkel und Lineal nicht eindeutig gefunden.

Wenn man gleichwohl die Axiome in der strengen Form ausspricht, die für die deduktive Entwicklung bequem ist und zu Lehrsätzen führt, die von ermüdenden Einschränkungen frei sind, so läßt sich das rechtfertigen, indem man die Punkte, Geraden und Ebenen als uneigentliche Gebilde der natürlichen Geometrie auffaßt. Die unmittelbare Folge dieser der heutigen mathematischen Denkweise durchaus entsprechenden Auffassung ist aber die, daß nun sämtliche Grundbegriffe nur noch insoweit definiert sind, als ihnen die Erfüllung der Axiome auferlegt ist. Es ist notwendig, zu beachten, daß dadurch ihre Beziehung zur natürlichen Geometrie keineswegs gewahrt wird, wie sich schon aus dem Umstande ergibt, daß man auch eine den Axiomen gehorchende reine Zahlengeometrie aufbauen kann, deren Grundbegriffe sämtlich der Arithmetik entnommen sind. Die Vieldeutigkeit der bloß durch die Axiome gebundenen Grundbegriffe geht aber, wie nun an zwei besonders einfachen Beispielen gezeigt werden soll, noch erheblich weiter.

2. **Nichtnatürliche Geometrie.** Eine Geometrie möge nichtnatürlich heißen, wenn ihre Grundbegriffe zwar ebenso wie in der natürlichen durch Anschauung übermittelt werden, sich aber nicht sämtlich mit denen der natürlichen Geometrie decken. Als Beispiele sollen hier zwei nichtnatürliche Planimetrien angeführt werden. Im Anschluß an den bestehenden Sprachgebrauch kann man von der einen sagen, daß sie mit der natürlichen Planimetrie affin, von der andern, daß sie zu ihr invers sei.

Affine Planimetrie. Es seien α, β zwei sich schneidende Ebenen, deren Winkel von einem Rechten verschieden ist. Für die Ebene α mögen alle Grundbegriffe im natürlichen Sinne verstanden werden. In der Ebene β soll nur der Kongruenzbegriff für Strecken und Winkel eine nichtnatürliche Bedeutung erhalten: zwei Strecken mögen hier kongruent oder einander gleich heißen, wenn sie senkrechte Projektionen von natürlich gleichen Strecken der Ebene α sind. Ganz entsprechend werde in β die Kongruenz zweier Winkel verstanden. Die Einführung dieser nichtnatürlichen oder Pseudokongruenz stört, wie leicht ersichtlich, die Kongruenzaxiome gar nicht. Demnach definieren diese Axiome die natürliche Kongruenz der Strecken und Winkel selbst dann nicht, wenn man bereits die übrigen Grundbegriffe im Sinne der natürlichen Geometrie angenommen hat. Die Mehrdeutigkeit eines nur an die Axiome gebundenen Grundbegriffes wird dadurch augenscheinlich. Damit ist der an dieser Stelle mit der Einführung des vorliegenden einfachen Beispiels einer nichtnatürlichen Planimetrie zunächst beabsichtigte Zweck erreicht. Wir benutzen indessen die Gelegenheit zur Erläuterung von zwei weiteren Gesichtspunkten.

Da für die nichtnatürliche Geometrie in der Ebene β sämtliche Axiome der Planimetrie in Kraft bleiben, so behalten auch alle Lehrsätze der euklidischen Planimetrie ihre Gültigkeit. Im Gefolge der Pseudokongruenz tritt nun aber in diesen Sätzen eine Reihe von weiteren Pseudobegriffen auf. Geht man diesen nach und übersetzt sie wieder in die Sprache der natürlichen Geometrie, so kann man zu brauchbaren, von Pseudobegriffen freien, also der gewöhnlichen Planimetrie angehörigen Sätzen gelangen. So erzeugt z. B. die Drehung von Strecken um je einen Endpunkt in der Ebene β Pseudokreise, d. h. natürliche Ellipsen, die einander ähnlich sind, und deren große Achsen sämtlich die Richtung der Schnittgeraden g von α und β haben. Da nun je drei Punkte, die nicht derselben Geraden angehören, immer einen Kreis bestimmen, so folgt, daß durch sie auch immer eine und nur eine Ellipse geht, für deren Hauptachsen die Richtung und das Längenverhältnis vorgeschrieben ist. Die Herleitung von Eigenschaften der Ellipse aus denen des Kreises nach dem Vorgange von Stevin kann in gleichem Sinne aufgefaßt werden. Das Wort „pseudosenkrecht“ wird dabei z. B. durch „konjugiert“ ersetzt. Für Konstruktionen mit Lineal und Zirkel wäre in der Ebene β ein Pseudozirkel zu benutzen, d. h. ein Ellipsograph, mit dem sich Ellipsen von konstantem Achsenverhältnis und unveränderlicher Achsenrichtung zeichnen ließen. Von erheblich größerem Interesse ist aber die Tatsache, daß alle elementaren Aufgaben in der Ebene β mit dem Lineal gelöst werden können, sobald eine von diesen Ellipsen gezeichnet vorliegt; es ist nur nötig, dieser die Rolle des festen Kreises in den Steinerschen Konstruktionen (vgl. § 9, 12) zu übertragen. Wie die natürliche Planimetrie durch einen Kreis, ist also jede ihr affine durch eine Ellipse vollständig bestimmt.

Der heuristische Wert und der beweisökonomische Vorteil von Übertragungen der angedeuteten Art bedürfen keiner Erklärung. Sehr bestimmt muß aber hervorgehoben werden, daß das Verfahren an eine durchaus unerläßliche Bedingung geknüpft ist: die bloße Berufung auf die ungestörte Gültigkeit der Axiome in irgendeiner Pseudogeometrie ist nur dann beweiskräftig, wenn die in diese Geometrie zu übertragenden Sätze ohne Rest auf die Axiome zurückgeführt sind. Es wird dadurch verständlich, daß es eine notwendige und nützliche Arbeit ist, auch gerade die ersten und einfachsten Lehrsätze der natürlichen Geometrie, die uns die Anschauung unmittelbar verrät, durch sorgfältige Schlüsse aus den Axiomen herzuleiten. Das unter dem Einflusse der Anschauung sich aufdrängende Wort „selbstverständlich“ ist dabei ganz auszuschließen.

Es bietet sich endlich an dieser Stelle noch Gelegenheit zu einem einfachen Schlusse über die Unabhängigkeit der Axiome voneinander. Wenn man nämlich in der Ebene β nur für Strecken die oben definierte Pseudokongruenz einführt, dagegen für Winkel die natürliche Kongruenz beibehält, was dann die Benutzung eines natürlichen Winkelträgers notwendig macht, so verliert das Axiom der Dreieckskongruenz, einerlei, welche Fassung man ihm gibt, seine Allgemeingültigkeit. Dreiecke können dann nur noch mit parallel bleibenden Seiten verschoben werden, verlieren aber vollständig ihre in der affinen Planimetrie unbeschränkt mögliche Pseudobewegung. Man gelangt so zu einer verkümmerten Planimetrie, die an sich geringes Interesse bietet. Da aber alle übrigen für die Planimetrie in Betracht kommenden Axiome gültig bleiben, so ergibt sich, daß aus ihnen das Axiom der Dreieckskongruenz nicht gefolgert werden kann.

Inverse Planimetrie. Es sei J ein fester Punkt auf einer Kugel und α eine zu dem von J ausgehenden Durchmesser senkrechte Ebene, die entweder einen Punkt des Durchmessers selbst oder auch seiner Verlängerung trifft. Jndem man die Punkte der Kugelfläche durch geradlinige, von J aus gezogene Strahlen auf die Ebene α projiziert, erhält man die sogenannte stereographische Abbildung der ersten Fläche auf die zweite und umgekehrt. Für die Ebene α wollen wir die Grundbegriffe der natürlichen Geometrie unverändert beibehalten. Auf der Kugel soll dagegen eine nichtnatürliche Planimetrie eingerichtet werden, und zwar in der Weise, daß wir die Grundbegriffe für sie einfach der Bildebene α entlehnen. Die Pseudopunkte der Kugel werden dann mit ihren natürlichen Punkten identisch, weil diese und die natürlichen Punkte in α einander zugeordnet sind. Dagegen ist jeder durch J gehende Kugelkreis als eine Pseudogerade zu definieren, da sein stereographisches Bild eine gerade Linie der Ebene α ist. Die Kugelfläche selbst wird zur Pseudoebene und soll als solche mit α' bezeichnet werden. Das stereographische Bild des Punktes J ist die unendlich ferne Gerade der Ebene α. Die Pseudoebene α' enthält also, ebenso wie die natürliche, eine unendliche Menge von uneigentlichen Punkten, doch fallen diese sämtlich in J zusammen. Dadurch erfährt nun auch die Verknüpfung eine teilweise Umdeutung. Schneiden sich nämlich in J zwei Kugelkreise, so gehören ihnen von den dort vereinigten uneigentlichen Punkten zwei verschiedene an; berühren sie sich aber in J, so haben sie einen dieser Punkte gemein. Mit anderen Worten: J zählt nicht mehr als Schnittpunkt zweier Pseudogeraden, aber zwei Kugelkreise, die sich in J berühren, sind zwei Pseudoparallelen. Um unter drei Punkten einer Pseudogeraden den Zwischenpunkt richtig zu bestimmen, hat man nur nötig, den Zwischenpunkt in der Abbildung der Geraden aufzusuchen. Man bemerkt, daß er auch unmittelbar gefunden werden kann, wenn man die Pseudogeraden als bei J geöffnet ansieht. Da die stereographische Abbildung winkeltreu ist, so behält für Winkel der Kongruenzbegriff seine natürliche Bedeutung. Dagegen tritt bei Strecken eine von der natürlichen verschiedene Pseudokongruenz ein. Denn zwei Strecken in α' heißen gleich, wenn ihre Bildstrecken in α natürlich gleich sind. Auf derselben Pseudogeraden in α' sind daher zwei pseudogleiche Strecken nur dann zwei natürlich gleiche Kreisbogen, wenn sie gegen den Punkt J symmetrisch liegen. Gleichwohl sind die Pseudokreise in α' natürliche Kugelkreise, da ihre stereographischen Bilder Kreise der Ebene α sind. Aber an die Stelle der natürlichen sphärischen Mittelpunkte der Kugelkreise treten, abgesehen von einem leicht ersichtlichen Ausnahmefall, Pseudomittelpunkte. Es sind die Punkte, deren Bilder die Mittelpunkte der zugeordneten Kreise in α sind.

Die angegebenen Umdeutungen der natürlichen Grundbegriffe heben die Gültigkeit der Axiome, deren man zum Aufbau der Geometrie bedarf, nicht auf, wie sich einfach aus dem Umstande ergibt, daß die fraglichen Axiome in der Ebene α gelten. Dadurch wird in erheblich weiterem Umfange als durch das zuerst angeführte Beispiel einer Pseudoplanimetrie erläutert, welches Maß von Freiheit die Axiome den Grundbegriffen gewähren.[1])

Von den beiden Flächen α und α' ist jede das inverse Bild der andern in bezug auf den Punkt J als Zentrum der Inversion. Dieser Umstand möge die an die Spitze gestellte Benennung der Pseudoplanimetrie in α' rechtfertigen.

Um auf einer vorgelegten Kugel die elementaren Konstruktionen der inversen Planimetrie ausführen zu können, muß man zunächst imstande sein, durch zwei gegebene Punkte A und B die Pseudogerade zu ziehen. Dazu muß der uneigentliche Punkt J in α' gegeben sein. Dann hat man nur durch A, B, J den natürlichen Kreis zu legen. An die Stelle des Lineals tritt also der Zirkel, mit dem diese Aufgabe in bekannter Weise gelöst wird. Darüber hinaus kann aber der Zirkel unmittelbar weder als Streckenträger dienen, noch auch

1) Eine sehr eingehende Behandlung widmet Wellstein dem Gegenstande in der „Encyklopädie der elementaren Geometrie“, § 8 u. ff.

nur zur Lösung der Aufgabe: um einen gegebenen Pseudomittelpunkt einen Kreis zu beschreiben, der durch einen vorgeschriebenen Punkt geht. Den hieraus erwachsenden Schwierigkeiten kann man sich ganz entziehen, indem man die Steinerschen Linealkonstruktionen benutzt, die nur einen Kreis mit seinem Mittelpunkte als gegeben voraussetzen. Im vorliegenden Falle handelt es sich dabei um einen Kugelkreis mit seinem Pseudomittelpunkte, und es ist nichts weiter notwendig, als den uneigentlichen Punkt J zu ermitteln, den man braucht, um pseudogerade Linien ziehen zu können. Diese Aufgabe löst man durch die folgende ebene Hilfskonstruktion (Fig. 2). Der natürliche und der Pseudomittelpunkt des gegebenen Kreises bestimmen einen Hauptkreis der Kugel, der den gegebenen Kreis in den Punkten A' und C' treffen möge; der vorgeschriebene Pseudomittelpunkt sei B'. Man überträgt den Hauptkreis (O) mit den drei Peripheriepunkten A', B', C' in eine Ebene und zeichnet in dieser einen zweiten Kreis, der jenen in B' rechtwinklig schneidet, und dessen Mittelpunkt M auf der Geraden $A'C'$ liegt. Der zweite Schnittpunkt dieser beiden Kreise ist der zu bestimmende Punkt J. Denn die vier von J aus nach den Punkten M, B' und A', C' gezogenen Strahlen sind harmonisch, da JB' die Polare von M in bezug auf den Kreis (O) ist. Jede Parallele zu JM wird also von den übrigen drei Strahlen in drei Punkten A, B, C getroffen, die so liegen, daß $AB = BC$ ist.[1])

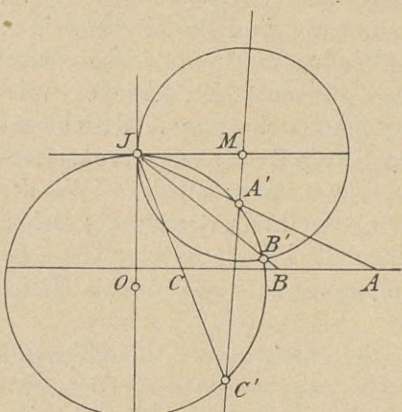

Fig. 2.

Die hier betrachtete Pseudoplanimetrie läßt sich auch in einer natürlichen Ebene einrichten. Es sei, wie bisher, α eine Ebene, in der die natürliche Geometrie gilt. Sie werde von einem in ihr liegenden Punkte J aus durch Inversion nach einer beliebigen positiven Potenz in sich selbst abgebildet und heiße als Bildebene α'. Der Punkt J in α' ist auch hier das Bild aller unendlich fernen Punkte der Ebene α. Die durch J gehenden Kreise sind die Pseudogeraden in α'; doch gesellen sich ihnen jetzt auch die durch J gehenden natürlichen Geraden in α' zu, und jede von diesen hat nicht einen, sondern zwei uneigentliche Punkte, nämlich den Punkt J und ihren eigenen unendlich

1) Es bezeichnet: (O) einen Kreis um O als Mittelpunkt, $(O)r$ einen Kreis um O mit dem Radius r, $(O)A$ einen Kreis von O, der durch A geht.

fernen Punkt. Zugleich tritt in α' eine uneigentliche Gerade als Bild des eigentlichen Punktes J der Ebene α auf. Das wird vermieden, indem man den Punkt J auch in α als uneigentlich ansieht. Dann ist jede der beiden Ebenen α und α' das inverse Bild der andern in der Weise, daß immer nur gleichartige Punkte einander zugeordnet sind. Man erreicht dadurch, daß in beiden Ebenen die Axiome in genau gleichem Umfange erfüllt werden. Indem man aber in α den Fehlpunkt J zuläßt, wird dem vierten Axiom der Anordnung, dem ersten Axiom der Kongruenz und dem Parallelenaxiom ihre Allgemeingültigkeit durch offensichtliche Ausnahmen genommen, und dasselbe gilt für die Ebene α'. Die im Hilbertschen System dem archimedischen Axiom gegebene Fassung läßt sich leicht so abändern, daß es keine Beeinträchtigung erfährt.

Die Verletzung des Parallelenaxioms in α' ist in Fig. 3 dargestellt. Ist g eine der durch J gehenden natürlichen Geraden in α', so kann man durch einen nicht auf g liegenden Punkt P zwei Gerade ziehen, die g nicht schneiden: die natürliche Gerade durch P und J, sowie die Pseudoparallele durch P zu g, d. h. den Kreis, der durch P geht und g in J berührt. Natürlich würde diese Verletzung auch dann eintreten, wenn J in α nicht zum uneigentlichen Punkte gemacht wäre. Die Planimetrie in α wie in α' kann als halbeuklidisch bezeichnet werden, wenn man das Wort in dem Sinne versteht, daß das euklidische Parallelenaxiom nicht allgemeingültig ist und die Winkelsumme aller Dreiecke doch zwei Rechte beträgt.

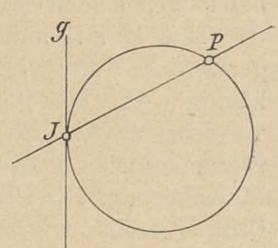

Fig 3.

3. **Allgemeine und besondere Geometrie.** Aus den vorhergehenden Erörterungen ist zur Genüge ersichtlich, daß die von den Axiomen geduldete Mehrdeutigkeit der Grundbegriffe nicht als ein Mangel aufzufassen ist, sondern als ein Vorzug. Durch die Unbestimmtheit der Grundbegriffe wird einem aus Axiomen und erwiesenen Sätzen bestehenden geometrischen System sein ihm überhaupt zugängliches Anwendungsgebiet unverkürzt gewahrt.

Ein geometrisches System mit noch nicht näher bestimmten Grundbegriffen stellt eine allgemeine Geometrie dar. Indem man unter den möglichen, d. h. mit den Axiomen verträglichen Grundbegriffen ganz bestimmte auswählt, gewinnt man eine besondere Geometrie.

Es steht nichts im Wege, von den ohne vorausgeschickte Definition in die Axiome eingeführten Grundbegriffen zu sagen, ihre Definition sei eben in den Axiomen selbst enthalten. Es kann sich dabei aber nur um die mehrdeutige Definition von Sammelbegriffen handeln, nicht um die eindeutige Bestimmung von Sonderbegriffen. Wird der Unterschied nicht beachtet, so sind Mißverständnisse unvermeidlich.

Das Hilbertsche System von Axiomen will die Grundlage für eine allgemeine euklidische Geometrie abgeben, in der dann besondere Geometrien, wie die natürliche, die aus dieser abgeleiteten nichtnatürlichen, die Cartesische Zahlengeometrie enthalten sind. Diese Bemerkung dürfte genügen, um gewisse, auf den ersten Blick vielleicht befremdliche Sätze in Hilberts „Grundlagen der Geometrie" verständlich zu machen. So namentlich den ersten Satz: „Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen; die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit $A, B, C, \ldots$, die Dinge des zweiten Systems nennen wir Gerade und bezeichnen sie mit $a, b, c, \ldots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$" usw.

Man könnte auf den Einwand verfallen, daß bei der hier geltend gemachten Auffassung eine allgemeine Geometrie ihre Sätze unabhängig von jeder besonderen begründen müsse. Diese Forderung würde menschliche Kräfte wohl übersteigen, und tatsächlich hat noch niemand auch nur den Versuch gemacht, das verwickelte geometrische Gedankennetz ohne Benutzung einer Sonderform, in der es verwirklicht ist, rein logisch auszuspinnen. Indessen ist die Forderung auch nicht begründet. Vielmehr läßt sich eine allgemeine Geometrie an jeder ihr untergeordneten Sonderform entwickeln, wenn nur alle Sätze vollständig und ausschließlich auf die ausdrücklich ausgesprochenen Axiome des Systems zurückgeführt werden. Die Erfahrung hat freilich gezeigt, daß auch dieser unerläßliche Anspruch nicht leicht zu erfüllen ist, doch stellt er keine unlösbare Aufgabe dar. Von den besonderen Geometrien, die unter das allgemeine euklidische System fallen, nimmt die natürliche Geometrie eine durchaus beherrschende Stellung ein. Sie ist lange Zeit nicht als eine, sondern als die Geometrie betrachtet worden. Nur da, wo diese irrige Auffassung noch besteht, kann die Meinung aufkommen, es handle sich bei dem beschwerlichen Unternehmen, sie rein auf Axiome zurückzubringen, um den Ausfluß einer „Spitzfindigkeit", die durchaus „alles beweisen" und „offenbare Tatsachen" oder „selbstverständliche Dinge" nicht einfach als solche anerkennen will.

Es bedarf schließlich kaum noch der ausdrücklichen Bemerkung, daß die nichteuklidischen Geometrien Systeme von ebenso allgemeinem Charakter sind wie das euklidische und diesem, wenigstens rein logisch gesprochen, ebenbürtig zur Seite stehen.

4. **Weiterbildung der natürlichen Grundbegriffe.** Der Um-

stand, daß die Grundbegriffe der natürlichen Geometrie durch eine auf Sinneswahrnehmung gestützte praktische Belehrung leicht übermittelt werden können, ist für die erste Einführung in das geometrische Denken von größter Bedeutung. Diesem Vorteil steht indessen der schon an früherer Stelle berührte Nachteil gegenüber, daß die so leicht zugänglichen Begriffe den Axiomen in ihrer strengen Fassung nicht zu genügen vermögen.

Die natürliche Geometrie besitzt also die eigentlichen Begriffe, die von den Axiomen vorausgesetzt und in Anspruch genommen werden, gar nicht; sie ist lediglich eine Annäherungsgeometrie.

Will man bei der einfachen Anerkennung dieser Tatsache stehen bleiben und auf den Versuch einer Weiterbildung der natürlichen Grundbegriffe verzichten, so muß man folgerichtig zugeben, daß die Sprache der exakten Geometrie überhaupt nicht auf Dinge bezogen werden könne, die im Raume gedacht sind. Die strenge Geometrie erhält dadurch den Charakter eines Gedankennetzes, dem ein im engeren Sinne geometrischer Inhalt fehlt. Innerhalb der allgemeinen Geometrie mit nicht näher bestimmten Grundbegriffen ist dann nur noch die Zahlengeometrie als besondere Form erkennbar. Dagegen ist es nicht möglich, Sonderformen, die der natürlichen Geometrie und den aus ihr ableitbaren Pseudosystemen entsprechen, voneinander zu unterscheiden. Denn die Definition von Pseudobegriffen setzt immer schon die Kenntnis der wahren, d. h. ursprünglichen Begriffe voraus. Daraus geht hervor, wie wenig befriedigend der angedeutete Standpunkt sein würde.

Tatsächlich ist nun auch das Bestreben, in Anlehnung an die natürlichen Grundbegriffe Definitionen zu gewinnen, durch die man den Axiomen in nicht bloß beschränktem Maße gerecht werden könnte, ebenso alt wie die wissenschaftliche Beschäftigung mit Geometrie überhaupt. Das in diesen Bemühungen sich verratende Bedürfnis nach einer mehr befriedigenden Auffassung erscheint seit Entdeckung der Möglichkeit von nichtnatürlichen Pseudogeometrien in noch erheblich höherem Maße gerechtfertigt als früher. Es ist daher nicht angängig, die in Rede stehenden Versuche hier mit Stillschweigen zu übergehen.

Euklid beginnt die „Elemente“ mit den vielbesprochenen Definitionen (ὅροι), von denen drei folgendermaßen lauten:

„Der Punkt ist ein Ding, von dem es keinen Teil gibt.“

„Die Linie ist Länge ohne Breite.“

„Die Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.“

Augenscheinlich handelt es sich hier um den Versuch einer Weiterbildung der natürlichen Grundbegriffe durch Zurückführung auf gewisse Hilfsbegriffe, wie: Teil, Länge, Breite usw., die als bekannt vorausgesetzt werden. Daß sich aus dem axiomatischen Sammelbegriffe des Punktes durch die bloße Forderung der noch näher zu bestimmenden Unteilbarkeit ein befriedigender Sonderbegriff ausscheiden lasse, wird heute wohl kaum noch angenommen. Länge und Breite sind als Hilfsbegriffe von der Wissenschaft ganz aufgegeben. Dagegen benutzen die Schulbücher in ihrer überwiegenden Mehrzahl diese Hilfsbegriffe noch immer; es scheint also die Meinung verbreitet zu sein, dadurch könnten die Begriffe von Punkt, Linie und Fläche dem Verständnisse der Schüler näher gebracht werden.

Bei den Versuchen, über Euklid hinauszukommen, hat man den Raum, mit dem wir alle geometrischen Gebilde verknüpfen, und seine Teilbarkeit als Hilfsbegriffe in Anspruch genommen.

Unter Beschränkung auf diese zwei Hilfsbegriffe hat H. Weber einen Gedankengang skizziert, durch den man zum Begriffe des Punktes gelangen könnte.[1]) Das Ergebnis nähert sich, wenigstens in der Form, der von Euklid für den Punkt aufgestellten Forderung. Weber selbst fügt hinzu, daß die Entwicklung entsprechender Definitionen für die Begriffe Linie und Fläche sich erst „auf tiefer gehende Untersuchungen über die analysis situs[2]) stützen" könnte.

W. Killing hat den Versuch unternommen[3]), folgende Erklärung wissenschaftlich auszugestalten: die Fläche ist die Grenze zweier Raumteile; die Linie die Grenze zweier Flächenteile; der Punkt die Grenze zweier Linienteile. Er führt, außer dem Raum und dessen Teilbarkeit, als dritten Hilfsbegriff den mathematischen Körper ein, der von keinem natürlichen Körper ganz, aber von denen, die wir starr nennen, annähernd verwirklicht wird. Dabei ist, wohl zum ersten Male, zur Geltung gebracht, daß die ohne Definition benutzten Hilfsbegriffe durch ausdrücklich ausgesprochene Axiome dem Denken zugänglich gemacht werden müssen. Die Killingschen Axiome sind der Erfahrung entnommen und bewahren dadurch, obwohl sie zu einer Erweiterung des Raumbegriffes führen, die Beziehung zum Raume im eigentlichen Sinne. Die folgenden Bemerkungen sollen einen Einblick in diese Axiome gewähren und andeuten, in welcher Weise die Erklärung der Fläche versucht wird.

Jedem mathematischen Körper wird ein Raum zugeordnet; man sagt, daß er diesen Raum einnehme.

Von jedem Körper dürfen Teile gedacht werden. Jeder Teil ist, für sich betrachtet, wieder ein Körper. Von den Teilen eines Körpers sagt man, sie

1) Encyklop. der elem. Geometrie. Erste Aufl. S. 591.

2) Vgl. Encykl. der math. Wissensch. Bd. III, 1. S. 153.

3) Zuerst im Jahresbericht 1880 des Briloner Gymnasiums, dann wieder in der „Einf. in d. Grundl. d. Geom." II S. 194 ff. und 226 ff.

seien in ihm enthalten. Wenn der Körper K den Teil K_1 und K_1 wieder den Teil K_2 enthält, so ist K_2 auch in K enthalten. Auf die den Körpern K, K_1, K_2 zugeordneten Räume R, R_1, R_2 werden diese Beziehungen in unveränderten Ausdrücken übertragen.

Ein und demselben Körper können nacheinander verschiedene Räume zugeordnet werden, wobei man sich der Wendung bedient: der Körper werde aus dem einen Raume in den andern übergeführt. Alle auf diese Weise mit demselben Körper verknüpften Räume heißen untereinander kongruent. Wird ein Körper oder irgendein Teil von ihm aus einem Raume in einen andern übergeführt, so sagt man, der Körper erfahre eine Bewegung. Im andern Falle gebraucht man die Wendung: er bleibe in Ruhe. Bei der Bewegung eines Körpers bleibt kein Teil von ihm in Ruhe.

Von jedem Körper K darf gesagt werden, er lasse sich in eine beliebige Anzahl von Teilen $K_1, \ldots, K_n$ zerlegen. Es ist dazu notwendig und hinreichend, daß jeder überhaupt in K enthaltene Teil selbst wieder Teile von wenigstens einem der Körper $K_1, \ldots, K_n$ enthalte. Man sagt auch, daß diese n Körper zusammen K bilden, daß K aus ihnen zusammengesetzt sei oder aus ihnen bestehe.

Ein Raumteil R, der von einem einzigen Körper eingenommen werden kann, sei in die beiden Teile R_1 und R_2 zerlegt. Wenn dann ein Körper ganz dem Raume R, aber nicht ganz dem Teile R_1 oder dem Teile R_2 angehört, so sagen wir, der Körper liege auf der Grenze von R_1 und R_2.

Hiernach führt die Teilung eines Raumes in zwei Teile oder, was für die Darlegung vielleicht besser ist, die Zerlegung eines Körpers in zwei Teile zu einer oder zu mehreren Flächen. Um diese beiden Fälle zu unterscheiden, trennt Killing von jedem der beiden Teile solche Bestandteile ab, die mit dem andern nicht in Zusammenhang stehen. Falls bei jeder solchen Abtrennung ein einziger Körper zurückbleibt, besteht die Grenze aus einer einzigen Fläche. Wenn aber der Körper hierbei in getrennte Teile zerfällt, so wird die Grenze von mehreren Flächen gebildet. Dabei muß ohne Beweis vorausgesetzt werden, daß, nachdem derartige Abtrennungen in endlicher Anzahl vorgenommen sind, die fernere Absonderung keine weitere Teilung hervorrufe. Weit besser wäre es, wenn man sich auf solche Körper beschränken könnte, durch deren Zerlegung immer nur eine Fläche entsteht. Aber die Absonderung derartiger Körper bietet wiederum besondere Schwierigkeiten, die sich gleichfalls nur durch Untersuchungen aus dem Gebiete der analysis situs überwinden lassen. Überdies sind wir noch nicht zu dem allgemeinsten Begriffe der Fläche gelangt, da die erhaltenen Flächen immer zweiseitig sind. Wie aber jede einseitige Fläche in zweiseitige Teile zerlegt werden kann, kommt es jetzt umgekehrt darauf an, zu erklären, was man unter Erweiterung einer Fläche versteht. Auf diese Frage soll hier, wie auf die Erklärung der Begriffe Linie und Punkt, nicht eingegangen werden.

5. **Weitere Versuche, die allgemeinen Begriffe der Linie und der Fläche aufzustellen.** Manche Lehrbücher lassen die Linie durch Bewegung eines Punktes, die Fläche durch Bewegung einer Linie entstehen und glauben dadurch die allgemeinen Begriffe dieser Gebilde zu erhalten. Diesen Versuch hat der eine der beiden Verfasser an einer andern Stelle[1]) besprochen und die Schwierigkeiten hervorgehoben, die ihm entgegenstehen. Es dürfte nicht nötig

1) Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie. I. S. 172.

sein, die dort geäußerten Bedenken hier zu wiederholen. Ohne Zweifel ist es im Lehrgebäude häufig sehr nützlich, eine Linie durch Bewegung eines Punktes und eine Fläche durch Bewegung einer starren oder veränderlichen Linie zu erzeugen. Aber zur allgemeinen Begriffsbildung ist diese Methode in der gebräuchlichen Form ganz ungeeignet; auch dürfte sie sich schwerlich so umgestalten lassen, daß sie den Anforderungen der Strenge genügte.

Linien und Flächen werden sehr häufig als geometrische Örter eingeführt. Diese Methode hat wesentlich zum Fortschritt der Wissenschaft beigetragen; sie hat auch unbestreitbare Vorzüge, wenn es gilt, den Anfänger mit neuen Gebilden bekannt zu machen. Aber auch dieser Weg ist nicht frei von Bedenken, indem er dazu verleitet, über die Definition hinauszugehen und dem eingeführten Orte ohne Beweis eine Eigenschaft beizulegen, deren Begründung nicht ganz einfach ist. Wir wollen diesen Gedanken an einem möglichst einfachen Beispiele erläutern. Der Kreis stellt die Gesamtheit aller Punkte der Ebene dar, die von einem festen Punkte derselben eine vorgeschriebene Entfernung haben. Im Anschluß an diese Definition bezeichnet man einen beliebigen Punkt der Ebene als Innen- oder als Außenpunkt, je nachdem seine Entfernung vom Mittelpunkte kleiner oder größer ist als der Radius. Nun hält man es für selbstverständlich, daß jeder Linienzug, der einen Innen- und einen Außenpunkt miteinander verbindet, mindestens einen Punkt mit dem Kreise selbst gemeinsam hat. Wie wir aber in § 15, 1 näher darlegen werden, ist es möglich, daß eine Strecke, durch die ein Innen- und ein Außenpunkt miteinander verbunden werden, keinen Punkt des Kreises enthält. Um das zu erkennen, braucht man nur vom Vollständigkeitsaxiom abzusehen, während man alle übrigen Axiome Hilberts beibehält. Es erfordert sogar noch einige Überlegung, zu zeigen, daß der Satz aus der Gesamtheit der Axiome wirklich hervorgeht. Noch größere Schwierigkeiten macht es, den entsprechenden Satz für höhere Kurven und Flächen herzuleiten. Wenn schon dieser Umstand nicht gestattet, in dieser Weise Flächen und Linien einzuführen, so wird die Schwierigkeit dadurch noch größer, daß es höchst zweifelhaft ist, ob man durch die geometrischen Örter wirklich zu allen Flächen und Linien gelangt.

Um wenigstens auf analytischem Wege eine umfassende Definition zu gewinnen, hat man versucht, vom allgemeinen Begriff einer n-fach ausgedehnten Größe auszugehen. Namentlich hat Riemann diesen Gedanken in seinem Habilitationsvortrag (Ges. Werke S. 254 ff.) entwickelt und zur Grundlage seiner Untersuchungen gemacht. Indessen hat sich auch dieser Weg nicht als gangbar erwiesen. Zuerst zeigte nämlich G. Cantor (Crelles Journal Bd. 84), daß jeder Linienzug eineindeutig auf eine allseitig begrenzte Mannigfaltigkeit von beliebig hoher Dimensionenzahl abgebildet werden kann, daß sich speziell die Punkte der Einheitsstrecke den Punkten im Innern eines Würfels so zuordnen lassen, daß jedem Punkte des einen Gebildes ein einziger Punkt des andern entspricht. Während aber diese Abbildung unstetig ist, bezieht Peano (Math. Ann. Bd. 36) durch eine stetige Zuordnung eine Strecke auf das Innere und die Begrenzung eines Quadrates in der Weise, daß jedem Punkte der Strecke ein einziger Punkt des Quadrates zugeordnet wird und jedem Punkte des Quadrates im allgemeinen ein einziger Punkt der Strecke, höchstens aber zwei oder vier Punkte derselben entsprechen. Auch haben gewisse transzendente Kurven, deren Koordinaten analytische Funktionen der Zeit sind, die Eigenschaft, bei unbegrenzter Fortsetzung jedem Punkte eines gewissen Bereiches, wofern sie ihn nicht wirklich erreichen, wenigstens beliebig nahe zu kommen.

Diese Beispiele belehren uns, daß auch die dritte Methode aussichtslos ist.

6. **Beziehungen zur Lehre von den allgemeinen Punktmannigfaltigkeiten.** Wir gehen jetzt zu einem Wege über, auf dem man, ausgehend vom Punkte, die Theorie der Linien und der Flächen einwandsfrei begründen kann. Dabei wollen wir uns aber auf die geschlossene ebene Kurve beschränken. Zwar gestatten die mitzuteilenden Erwägungen nach mancher Richtung hin eine wesentliche Erweiterung; indessen dürften zur vollen Erledigung noch neue Untersuchungen notwendig sein, deren Abschluß so bald nicht zu erwarten ist. Abgesehen davon sind die hierbei auftretenden Beziehungen zu mannigfaltig, als daß sie an dieser Stelle besprochen werden könnten.

Das Mittel, das dem bezeichneten Zwecke dient, ist die sog. Mengenlehre, ein neuer Zweig der Mathematik, der erst vor etwa 30 Jahren von G. Cantor begründet und dann von ihm in zahlreichen Abhandlungen wesentlich gefördert wurde, der einerseits von Anfang an bis zur Gegenwart einer starken Skepsis begegnet ist, andererseits aber viele begeisterte Anhänger gefunden und sich durch ihre Arbeiten kräftig weiterentwickelt hat, so daß er jetzt bereits eine große Bedeutung für die gesamte Mathematik, namentlich für die Funktionentheorie und die Geometrie, besitzt. Auf die Literatur brauchen wir nicht einzugehen, nachdem Schönflies, der bereits 1900 in seinem ersten Berichte die Grundbegriffe und die analytischen Anwendungen behandelt hatte, vor kurzem einen zweiten Bericht hat folgen lassen, der die Beziehungen zur Geometrie bevorzugt.[1]) Auch

1) Schönflies, Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten;

die folgenden Darlegungen, welche nur den Grundgedanken angeben und zum Studium anregen wollen, schließen sich eng an den zweiten Teil dieses Berichtes an.

Wie aus den Axiomen der Anordnung hervorgeht, zerlegt jedes einfache Polygon die Ebene in zwei Teile, das Innere $\mathfrak{I}$ und das Äußere $\mathfrak{A}$, in der Weise, daß zwei Punkte von $\mathfrak{I}$ oder zwei Punkte von $\mathfrak{A}$ durch einen endlichen Streckenzug verbunden werden können, der ganz zu $\mathfrak{I}$ oder ganz zu $\mathfrak{A}$ gehört, während jeder Streckenzug, der einen Punkt von $\mathfrak{I}$ mit einem Punkte von $\mathfrak{A}$ verbindet, mindestens einen Punkt des Polygons enthält (vgl. § 4, 6). Wenn jetzt irgendeine ebene Punktmenge gegeben ist, die ganz dem Endlichen angehört, so denkt man sich in der Ebene zwei unendliche Scharen von Parallelen derartig gezogen, daß die Parallelen der einen Schar auf denen der anderen senkrecht stehen und je zwei benachbarte Parallelen derselben Schar den Abstand $\frac{1}{2}\varepsilon$ haben. Von den Quadraten, in die die Ebene hierdurch zerlegt wird, bestimmen wir alle diejenigen, die selbst, nebst den acht benachbarten, von Punkten der Menge frei sind, d. h. weder im Innern noch auf der Begrenzung einen Punkt der Menge enthalten. Die Grenze dieser Quadrate besteht aus einer endlichen Anzahl von Polygonen, die wieder gewisse endliche Flächenstücke einschließen, in denen die Punktmenge enthalten ist. Die Gesamtheit dieser Flächenstücke bestehe aus $\varkappa$ Quadraten von der Seite ε, allgemein aus $\varkappa_\nu$ Quadraten von der Seite ε/ν, wobei wir die letzteren dadurch entstehen lassen, daß wir jedes der ersten Quadrate in ν^2 kongruente Teilquadrate zerlegen.

Nun erinnern wir an den Satz: Wenn in einem ebenen Bereiche unendlich viele Punkte einer Punktmenge liegen, so gibt es im Bereiche mindestens einen Punkt von der Beschaffenheit, daß in jeder beliebig kleinen Umgebung desselben unendlich viele Punkte der Menge enthalten sind. Jeder derartige Punkt heißt ein Grenzpunkt der Menge. Die Menge selbst wird als abgeschlossene bezeichnet, wenn sie jeden ihrer Grenzpunkte wirklich enthält; sie heißt perfekt, wenn jeder ihrer Punkte ein Grenzpunkt ist.

Indem wir die vorhin charakterisierte Figur auf eine abgeschlossene Punktmenge anwenden, können wir nachweisen, daß folgende Definition zulässig ist:

Eine abgeschlossene Menge heißt dann und nur dann zusammenhangend, falls sie nicht in zwei Teilmengen zerlegbar ist, von denen jede abgeschlossen ist.

Zugleich zeigt sich, daß jede zusammenhangende abgeschlossene Menge perfekt ist.

erster Teil im Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung Bd. VII, zweiter Teil als zweiter Ergänzungsband dieses Jahresberichtes (Teubner 1908).

Daran schließen wir folgende Definitionen:

Eine abgeschlossene Menge, die keine zusammenhangende Teilmenge besitzt, heißt zusammenhangslos oder punkthaft; dagegen soll eine zusammenhangende abgeschlossene Menge als linienhaft oder als flächenhaft bezeichnet werden, je nachdem bei der obigen Bezeichnung der Quotient $\varkappa_\nu : \nu^2$ bei unbegrenztem Wachstum von ν der Null oder einer von null verschiedenen Zahl zustrebt.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich die Definition aufstellen:

Die ebene geschlossene Kurve ist eine perfekte, linienhafte, zusammenhangende Menge.

Die Mengenlehre zeigt, daß einerseits die Grenze eines jeden einfach zusammenhangenden ebenen Gebietes eine Kurve im Sinne dieser Definition ist, und daß umgekehrt jede ebene Punktmannigfaltigkeit, der die in der Definition genannten Eigenschaften zukommen, die Ebene in zwei einfach zusammenhangende Gebiete, das Innere und das Äußere, zerlegt. Darauf einzugehen würde zu weit führen.

Zum Schluß verweisen wir noch auf den Artikel von v. Mangold: Die Begriffe „Linie" und „Fläche" (Band III, 1 der Encyklopädie der math. Wissenschaften S. 130 ff.).

§ 4. Die Begriffe „rechts" und „links" in der Ebene. Theorie der Polygone.

1. **Der Sinn einer geraden Linie.**[1]) Von den drei in einer Geraden enthaltenen Punkten A, B, C möge der Punkt A zwischen

1) Wie wichtig es ist, auf einer Geraden die beiden Richtungen und in der Ebene die beiden Seiten einer Geraden zu unterscheiden, und demnach jedem Winkel einen bestimmten Drehungssinn, jedem Vieleck einen bestimmten Umlaufssinn beizulegen, zeigen die Arbeiten von Möbius. Gerade seine glänzendsten Entdeckungen, auf die wir im folgenden Abschnitt und in § 7 näher eingehen werden, sind ihm nur dadurch möglich geworden, daß er diese Unterscheidung in aller Schärfe durchgeführt hat. Ihre Bedeutsamkeit geht aber viel weiter. Gar häufig ist die Ansicht ausgesprochen worden, der Unterschied zwischen rechts und links gehöre nur der Anschauung an und entzöge sich einer rein begrifflichen Behandlung; zum mindesten müsse die Bewegung herangezogen werden, um diesen Unterschied zu begründen. Es ist das Verdienst Hilberts, die Unrichtigkeit dieser Ansicht zuerst mit voller Klarheit ausgesprochen zu haben. In seiner Arbeit über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck (Proc. of the London Math. Soc. XXXV, wieder abgedruckt in der zweiten Aufl. seiner „Grundlagen" S. 88—107) will er sein letztes Kongruenzaxiom nur für Dreiecke von gleichem Umlaufssinn als gültig hinstellen und erläutert diese Beschränkung in folgender Weise (Grundlagen S. 91):

„Um diesen einschränkenden Zusatz scharf zu formulieren, nehmen wir irgendeine durch zwei Punkte A, B bestimmte Gerade in der Ebene beliebig an, und

B und C liegen. Wir sprechen von einer Richtung von A nach B oder kurz von einer Richtung AB, und sagen, jeder Punkt des Halbstrahls AB liege in der Richtung AB, dagegen liege jeder Punkt des Halbstrahls AC in der zu AB entgegengesetzten Richtung. Da das Wort „Richtung“ im wesentlichen auf den Begriff des Halbstrahls hinauskommt, können wir auch von folgender Feststellung ausgehen:

Zwei Halbstrahlen, die in derselben Geraden liegen, heißen gleichgerichtet, wenn einer von ihnen ganz dem andern angehört; wir legen ihnen aber entgegengesetzte Richtung bei, wenn sie höchstens eine Strecke gemeinschaftlich haben.

Hiernach haben gleichgerichtete Halbstrahlen die Punkte eines Halbstrahls, entgegengesetzt gerichtete entweder keinen Punkt oder den Grenzpunkt oder eine Strecke gemein.

Gleichwie diese Definitionen auf den Hilbertschen Axiomen der Anordnung beruhen, ergeben sich aus denselben Axiomen in einfacher Weise folgende Gesetze:

Wenn zwei Halbstrahlen, die in derselben Geraden liegen, zu demselben dritten Halbstrahl dieser Geraden gleich- oder entgegengesetzt gerichtet sind, so sind sie untereinander gleichgerichtet; wenn aber von zwei solchen Halbstrahlen der eine mit dem dritten dieselbe, der andere die entgegengesetzte Richtung hat, so sind sie zueinander entgegengesetzt gerichtet.

Die angegebenen Begriffe können wir auch mit der Anschauung von rechts und links in Zusammenhang bringen, indem wir rein begrifflich folgende Festsetzungen treffen:

a) Sobald ein Punkt eines Halbstrahls $\begin{Bmatrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{Bmatrix}$ vom Grenzpunkte liegt, liegen auch alle Punkte dieses Halbstrahls $\begin{Bmatrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{Bmatrix}$ vom Grenzpunkt; dagegen liegen alle Punkte des zweiten, derselben Ge-

bezeichnen eine der beiden Halbebenen, in die diese Gerade die Ebene teilt, als rechts von der Geraden in der Richtung von A nach B, und dieselbe Halbebene zugleich auch als links von BA in der Richtung von B nach A; die andere Halbebene bezeichnen wir als links von der Geraden AB und zugleich als rechts von der Geraden BA gelegen. Ist nun C irgendein Punkt auf der rechten Halbebene von AB, so bezeichnen wir diejenige Halbebene von AC, auf welcher der Punkt B liegt, als die linke Halbebene von AC. Auf diese Weise können wir durch analoge Festsetzungen schließlich in eindeutig bestimmter Weise für jede Gerade angeben, welche Halbebene rechts oder links von dieser Geraden in gegebener Richtung gelegen ist. Zugleich wird von den Schenkeln irgendeines Winkels in eindeutig bestimmter Weise stets der eine als der rechte Schenkel und der andere als der linke Schenkel zu bezeichnen sein.“

Mit diesen wenigen Worten hat Hilbert die Sachlage aufs klarste dargelegt und die weitere Durchführung deutlich vorgezeichnet.

raden angehörenden und im selben Punkte begrenzten Halbstrahls $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ vom Grenzpunkte;

b) Jedesmal, wenn ein Punkt B $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ vom Punkte A liegt, liegt A $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von B.

Auch einer Strecke AB kann man eine Richtung zuschreiben; man sieht den Punkt A als ihren Anfangs- und den Punkt B als ihren Endpunkt an und läßt die Richtung der Strecke AB mit der des Halbstrahls zusammenfallen. Indem man das tut, darf man den Strecken auch die algebraischen Vorzeichen plus und minus beilegen. Dabei gelten für beliebig viele in gerader Linie liegende Punkte A, B, C, D, ... die folgenden allgemeinen Gesetze:

$$
\begin{aligned}
&AB + BA = 0\\
&AB + BC + CA = 0\\
&AB + BC + CD + DA = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&AB = AC + CB\\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Nachdem wir in einer Geraden einem Halbstrahl oder einer Strecke einen bestimmten Sinn beigelegt haben, dürfen wir auch vom Sinn der Geraden sprechen. Das ist u. a. auch notwendig, wenn man sagt, zwei Gerade bildeten einen bestimmten Winkel miteinander.

2. **Rechts und links in einer Ebene.** Im folgenden beschränken wir uns auf eine Ebene; es ist daher nicht notwendig, eigens hervorzuheben, daß die untersuchten Gebilde einer einzigen Ebene angehören. Im Anschluß an die soeben getroffenen Festsetzungen legen wir jeder Geraden einen bestimmten Sinn bei.

Die beiden Halbebenen, in die die Ebene durch die Gerade AB zerlegt wird, unterscheiden wir als die rechte und die linke Seite dieser Geraden, indem wir einen dritten Punkt C der Ebene hinzunehmen, der nicht in der Geraden AB liegt, und dann folgende Festsetzungen treffen:

a) Wenn der Punkt C $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von der Geraden AB liegt, so liegt auch jeder Punkt, der mit C auf derselben Seite der Geraden liegt, $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von AB; dagegen liegt jeder Punkt, welcher der andern in AB begrenzten Halbebene angehört, $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von AB.

b) Jedesmal, wenn der Punkt $C \begin{Bmatrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{Bmatrix}$ von der Geraden AB liegt, liegt er $\begin{Bmatrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{Bmatrix}$ von der Geraden BA.

c) Jedesmal, wenn der Punkt $C \begin{Bmatrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{Bmatrix}$ von der Geraden AB liegt, liegt der Punkt $B \begin{Bmatrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{Bmatrix}$ von der Geraden AC.

Wie aus den beiden letzten Forderungen hervorgeht, vertauschen sich die Begriffe rechts und links jedesmal, wenn von den drei benutzten Punkten irgend zwei miteinander vertauscht werden. Diesen Satz können wir auch in folgender Weise aussprechen:

Sobald die drei Punkte A, B, C nicht in gerader Linie liegen, sind die drei Behauptungen: A liegt rechts von BC, B liegt rechts von CA, C liegt rechts von AB, derartig miteinander verknüpft, daß aus jeder von ihnen die beiden andern hervorgehen; wenn aber ein einziger Eckpunkt des Dreiecks ABC links von seiner Gegenseite liegt, gehört jeder Eckpunkt der linken Seite seiner Gegenseite an, falls man bei der Bezeichnung der Seiten den Punkt B auf A, C auf B und A wieder auf C folgen läßt.

Wir gehen von einer beliebigen Geraden der Ebene aus, legen ihr einen bestimmten Sinn bei und setzen willkürlich fest, daß ein beliebig gewählter Punkt, der der Geraden nicht angehört, etwa auf ihrer linken Seite liegen soll. Dann ermöglichen es die aufgestellten Forderungen, für jede andere Gerade die linke und die rechte Seite zu bestimmen, sobald nur ihr Sinn festgelegt ist. Hierdurch wird der Ebene selbst ein bestimmter Sinn beigelegt. Statt nämlich von einer Geraden g auszugehen und mit ihrer Hilfe für jede zweite Gerade die rechte und die linke Seite zu bestimmen, dürfen wir auch eine zweite Gerade h zugrunde legen; wofern wir für die rechte und die linke Seite von h diejenige Bedeutung beibehalten, auf die wir durch die Vermittlung der Geraden g geführt worden sind, ergibt sich für alle weiteren Geraden dieselbe Zuordnung wie bei der Benutzung der Geraden g.

Um sich hiervon zu überzeugen, genügt es, drei Gerade g, h, i zu betrachten, welche nicht durch einen Punkt gehen, und von denen keine zwei parallel sind. Wir bezeichnen das von den Geraden g, h, i gebildete Dreieck mit ABC, wobei die Seite BC in g, die Seite CA in h und die Seite AB in i hineinfallen soll. Wenn jetzt noch die Richtung von g mit BC, die von h mit CA und die von i mit AB zusammenfällt, so liegt gleichzeitig $A \begin{Bmatrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{Bmatrix}$ von g, $B \begin{Bmatrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{Bmatrix}$

von h und $C \left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von i. Hiernach geht z. B. aus der Feststellung, daß A links von g liegt, hervor, daß auch B links von h und C links von i liegt. In gleicher Weise ergibt sich aus der Festsetzung, daß B links von h liegen soll, auch, daß C links von i und A links von g liegt. Es ist also gleichgültig, ob wir von der Geraden g oder der Geraden h ausgehen. Daran ändert sich auch nichts Wesentliches, wenn den Geraden sämtlich oder zum Teil der entgegengesetzte Sinn beigelegt wird..

Nur über parallele Gerade glauben wir noch ein Wort beifügen zu sollen. Vielfach ist es am angemessensten, gleichgerichteten Halbstrahlen in parallelen Geraden denselben Sinn beizulegen. Dann kann man die rechte und die linke Seite für parallele Gerade in derselben Weise festlegen, die oben (Nr. 1) für die Richtung auf einer Geraden maßgebend war. Das hängt damit zusammen, daß man bei einer Schar von Parallelen, die in einer Ebene liegen, das Wort „zwischen" gebrauchen darf, und daß hierfür die drei ersten Hilbertschen Axiome der Anordnung in Geltung bleiben (vgl. Nr. 6). Indessen ist es keineswegs notwendig, in dieser Weise zu verfahren; man darf vielmehr auch auf jeder einzelnen Parallelen den Sinn ganz willkürlich festlegen; nimmt man dann noch zwei weitere Gerade hinzu, durch welche die Schar der Parallelen getroffen wird, so lassen sich die obigen Betrachtungen ohne jede Änderung durchführen.

3. **Der Sinn eines Dreiecks.** Für das Dreieck ABC soll A der erste, B der zweite, C der dritte Eckpunkt sein; die Gegenseiten sind in diesem Falle der Reihe nach die Strecken BC, CA und AB. Um dies kurz auszusprechen, sagen wir, der Umfang des Dreiecks sei dadurch beschrieben, daß sich ein veränderlicher Punkt längs der Seiten von A nach B und von dort über C nach A zurückbewegt. Wählen wir statt des Dreiecks ABC das Dreieck BCA oder das Dreieck CAB, so erhalten zwar die Seiten und die Eckpunkte andere Ordnungszahlen, aber die Seiten behalten ihren Sinn bei, weil für jede einzelne je derselbe Punkt Anfangs- und je derselbe Punkt Endpunkt ist. Dagegen haben die Dreiecke ACB, BAC und CBA zwar mit den früheren dieselben Eckpunkte, aber jede einzelne Seite erhält den entgegengesetzten Sinn. Die sechs Dreiecke, welche dieselben drei Eckpunkte haben, ordnen sich hiernach in zwei Gruppen; Seiten, welche in denselben beiden Eckpunkten begrenzt werden, haben bei Dreiecken derselben Gruppe jedesmal denselben, bei Dreiecken aus verschiedenen Gruppen entgegengesetzten Sinn. Sobald ferner in einem Dreieck ein einziger Eckpunkt $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von einer Gegenseite liegt, gehört auch für dieselbe Gruppe jeder Eckpunkt

der $\left\{\begin{matrix}\text{linken}\\ \text{rechten}\end{matrix}\right\}$ Seite ihrer Gegenseite an; dagegen liegt er für jedes Dreieck der andern Gruppe alsdann $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von seiner Gegenseite.

Hiernach darf man vom Sinn eines Dreiecks sprechen; dieser geht dadurch in den entgegengesetzten über, daß man zwei Eckpunkte miteinander vertauscht. Durch den Sinn, der einem einzigen Dreieck beigelegt wird, ist der Sinn eines jeden Dreiecks in der Ebene und damit der Sinn der Ebene selbst bestimmt.

Zwei Dreiecke heißen *gleichläufig*, wenn jeder Eckpunkt entweder in beiden rechts oder in beiden links von seiner Gegenseite liegt; dagegen heißen sie *gegenläufig*, wenn in einem Dreieck jeder Eckpunkt rechts und im andern jeder Eckpunkt links von seiner Gegenseite liegt.

4. **Der allgemeine Begriff des Polygons.** In der Ebene seien n Punkte $A, B, C, \ldots, M, N$ gegeben, von denen wir voraussetzen, daß keine zwei von ihnen zusammenfallen. Wir wählen jeden dieser Punkte zum Anfangspunkte einer Strecke, die ihn mit dem nachfolgenden, und zum Endpunkte einer Strecke, die ihn mit dem vorangehenden Punkte verbindet, wobei wir auf den letzten Punkt N wieder den ersten Punkt A folgen lassen. Den hierdurch erhaltenen geschlossenen Linienzug bezeichnen wir als das Polygon $ABC \ldots MN$. Die Strecken $AB, BC, \ldots, MN, NA$ werden meistens als die Seiten des Vielecks bezeichnet. Da aber das Wort Seite in den vorhergehenden Erwägungen, die für die Theorie der Polygone von hervorragender Wichtigkeit sind, eine andere Bedeutung erhalten hat, empfiehlt es sich, lieber mit *Möbius* von den *Kanten* des Vielecks zu sprechen. Jeder Kante wird der durch die Wahl des Anfangs- und des Endpunktes bedingte Sinn beigelegt. Jede Strecke, welche zwei nicht benachbarte Endpunkte verbindet, heißt eine Diagonale des Vielecks.

Durch eine zyklische Vertauschung der Endpunkte erhält man ein Polygon, welches dieselben Eckpunkte, dieselben Kanten und in jeder Kante denselben Sinn hat. Nimmt man aber die Punkte in der entgegengesetzten Reihenfolge, so wird in jeder Kante die Richtung mit der entgegengesetzten vertauscht. Wir sagen, zwei derartige Vielecke unterschieden sich durch den Sinn.

So allgemein bereits der aufgestellte Begriff des Vielecks ist, möchten wir doch darauf hinweisen, daß die aufgestellte Forderung, nach der nicht zwei Eckpunkte zusammenfallen sollen, keineswegs in sich berechtigt ist. Gewisse Untersuchungen, auf die wir nicht eingehen, nötigen sogar, die Zusammenstellung von mehreren getrennten Polygonen zuweilen als ein einziges Polygon aufzufassen. Von allen derartigen Erweiterungen des Begriffs sehen wir hier ab; wir möchten sogar noch die Beschränkung hinzunehmen, daß kein Eckpunkt in eine Kante hineinfallen soll.

5. **Die konvexen Polygone.** Ein n-Eck heißt konvex, wenn die $n-2$ irgendeiner Kante nicht angehörenden Eckpunkte jedesmal auf derselben Seite dieser Kante liegen. Darin ist auch die Forderung eingeschlossen, daß niemals drei Eckpunkte in gerader Linie liegen. Ein Halbstrahl, der durch keinen Eckpunkt eines solchen Polygons hindurchgeht, hat mit seinen Kanten entweder einen oder keinen oder zwei Punkte gemein. Sobald ein Halbstrahl die Kanten eines konvexen Polygons ein einziges Mal trifft, hat auch jeder von seinem Grenzpunkte ausgehende weitere Halbstrahl nur einen einzigen Punkt mit dem Polygon gemein; sobald aber durch einen Halbstrahl das Polygon gar nicht oder zweimal getroffen wird, gehen von seinem Endpunkte sowohl Halbstrahlen aus, die zwei Punkte mit ihm gemeinsam haben, als auch solche, die dasselbe gar nicht treffen. (Um diesen Satz zu beweisen, braucht man nur zu beachten, daß die Schenkel eines Winkels die Ebene in zwei Teile zerlegen.) Hiernach teilt das konvexe Polygon die Ebene in zwei Teile, das Innere und das Äußere. Das Innere eines konvexen Polygons liegt entweder ganz auf der rechten oder ganz auf der linken Seite einer jeden Kante. Liegt z. B. das konvexe Polygon $ABC\ldots EF\ldots MN$ auf der rechten Seite von AB, so liegt es auch auf der rechten Seite von EF. Zwei konvexe Polygone heißen gleichläufig, wenn das Innere entweder in beiden auf der rechten oder in beiden auf der linken Seite einer jeden Kante liegt; dagegen heißen sie gegenläufig, wenn das Innere der einen auf der rechten und das Innere der andern auf der linken Seite von jeder Kante liegt.

Jedem Winkel eines konvexen Polygons ordnen wir sein natürliches Winkelfeld zu. Bei dieser Zuordnung beträgt die Summe der Winkel eines konvexen n-Ecks $(n-2)\cdot 2R$.

Indem man zwei Punkte, die in zwei aufeinanderfolgenden Kanten eines konvexen n-Ecks je zwischen den Endpunkten liegen, durch eine Strecke verbindet, erhält man ein konvexes $(n+1)$-Eck. Umgekehrt kann man für $n>4$ aus jedem konvexen n-Eck dadurch ein konvexes $(n-1)$-Eck erhalten, daß man die an einer Kante anstoßenden Kanten bis zum Schnittpunkte verlängert; dabei muß die Kante so gewählt werden, daß die an ihr liegenden Winkel zusammen größer als zwei Rechte sind, was für $n>4$ immer möglich ist. Im andern Falle müßte, wofern $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ die Winkel des Vielecks sind, sein:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \leqq \pi$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 \leqq \pi$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_n + \alpha_1 \leqq \pi,$$

oder $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n) \leqq n\pi$ oder $2(n-2)\pi \leqq n\pi$ oder $n \leqq 4$.

Ebenso kann man zu den Eckpunkten eines konvexen Polygons einen weiteren Eckpunkt hinzufügen, falls dieser in beiden natürlichen Winkelfeldern der Nebenwinkel zu solchen zwei Vieleckswinkeln angenommen wird, die an einer Kante des Vielecks liegen. Dagegen wird die Eckenzahl um eins vermindert, indem man ein Dreieck abtrennt, das durch zwei aufeinanderfolgende Kanten und die Verbindungsstrecke ihrer freien Eckpunkte gebildet wird.

Beiläufig folgt hieraus, daß es konvexe Polygone von jeder Eckenzahl gibt.

Ein konvexes n-Eck ist durch $n-1$ Kanten und die $n-2$ von ihnen gebildeten Winkel bestimmt. Dabei unterliegen die beiden ersten Kanten und der von ihnen eingeschlossene Winkel keiner Beschränkung. Dagegen gibt es für jeden folgenden Winkel eine untere Grenze, die nicht erreicht werden darf. Wenn es zudem eine Zahl $r < n-2$ gibt, für welche $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r < (r-1)\pi$ ist, so läßt sich für die letzten $n-1-r$ Kanten je eine Länge bestimmen, unter der jede einzelne von ihnen bleiben muß.

Jede Diagonale eines konvexen Polygons liegt ganz in seinem Innern und zerlegt dasselbe in zwei konvexe Polygone. Gibt man in den Teilpolygonen den Kanten diejenige Richtung, die sie im gegebenen Polygon haben, läßt man also die Eckpunkte in gleicher Weise aufeinander folgen wie im Polygon selbst, so sind die Teilpolygone mit dem gegebenen gleichläufig; die zerlegende Diagonale hat in den beiden Teilpolygonen entgegengesetzten Sinn.

Die letzte Behauptung läßt eine Erweiterung zu. Wenn in zwei konvexen Polygonen, die in einer Kante oder in einem Teile der Kante aneinanderstoßen, ohne daß ihr Inneres einen Teil gemein hat, der Sinn so bestimmt wird, daß sie gleichläufig werden, so hat die gemeinschaftliche Strecke in dem einen Polygon die entgegengesetzte Richtung als im andern.

6. **Die einfachen Polygone.** Ein einfaches Polygon ist nach Hilbert ein solches, von dem keine zwei Kanten einen Punkt gemein haben und kein Eckpunkt in eine Kante fällt.

Wenn man sich zunächst auf das Dreieck beschränkt und dies als einfaches Polygon betrachtet, gilt offenbar der Satz:

a) Wenn von einem Punkte, der keiner Kante eines einfachen Polygons angehört, ein einziger Halbstrahl ausgeht, der, ohne durch einen Eckpunkt hindurchzugehen, mit dem Polygon eine $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ Anzahl von Punkten gemein hat, so trifft jeder von demselben Punkte ausgehende Halbstrahl, der durch keinen Eckpunkt geht, die Kanten des Polygons in einer $\left\{\begin{matrix}\text{geraden}\\ \text{ungeraden}\end{matrix}\right\}$ Anzahl von Punkten.

Sobald für ein einfaches Polygon dieser Satz gilt, dürfen wir die Definition aufstellen:

Ein Punkt liegt im $\left\{\begin{matrix}\text{Äußern}\\ \text{Innern}\end{matrix}\right\}$ eines einfachen Polygons, wenn jeder von ihm ausgehende Halbstrahl, der keinen Eckpunkt enthält, mit den Kanten eine $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ Anzahl von Punkten gemein hat.

Unter der angegebenen Beschränkung sind jetzt auch die folgenden Gesetze gültig:

b) Irgend zwei Punkte, die entweder beide im Äußern oder beide im Innern des Polygons liegen, lassen sich durch einen Streckenzug verbinden, der keine Kante trifft; dagegen hat jeder Streckenzug, der einen Punkt des Innern mit einem Punkte des Äußern verbindet, mindestens einen Punkt mit den Kanten gemein. Wenn umgekehrt zwei Punkte der Ebene durch einen Streckenzug verbunden werden können, der keinen Punkt mit dem Polygon gemein hat, so gehören sie entweder beide dem Innern oder beide dem Äußern an.

c) Irgend zwei Punkte, die beide einem einfachen Polygon selbst angehören, lassen sich sowohl durch einen Streckenzug verbinden, der mit Ausnahme der Endpunkte ganz im Äußern liegt, als auch durch einen Streckenzug, der bis auf die Endpunkte ganz im Innern verläuft.

d) Wenn zwei einfache Polygone eine Kante gemeinsam haben und im übrigen sich die Kanten in keinem Punkte treffen, so liegt, abgesehen von der gemeinsamen Kante, entweder jedes von ihnen ganz im Äußern des andern oder das eine im Innern des andern und damit zugleich das zweite im Äußern des ersten.

Diese Sätze lassen sich leicht für das einfache Viereck erhärten. Wir wollen aber sofort ihre allgemeine Gültigkeit beweisen, indem wir annehmen, die Sätze seien als richtig erkannt, sobald die Eckenzahl kleiner ist als eine bestimmte Zahl n, und zeigen, daß sie alsdann auch für die Eckenzahl n gelten. Zu dem Ende beachten wir, daß der Begriff „zwischen“, den wir bisher nur auf Punkte einer Geraden angewandt haben, auf eine Schar von Parallelen übertragen werden kann, die in einer Ebene liegen. Wir gehen von drei Parallelen a, b, c einer Ebene aus und schneiden sie durch zwei beliebige Gerade; das geschehe in den Punkten A, B, C bzw. A', B', C'. Wenn dann B zwischen A und C liegt, so zeigt sich, daß auch B' zwischen A' und C' gelegen ist; wir dürfen in diesem Falle sagen, die Gerade b liege zwischen den Parallelen b und c. Hiernach dürfen wir den auf S. 9 für beliebig viele Punkte einer Geraden bewiesenen Satz auf irgendeine Anzahl von Parallelen übertragen, die in derselben Ebene liegen.

Wenn jetzt ein einfaches Polygon Π oder $ABC \ldots FGH \ldots MN$ von n Ecken gegeben ist, so legen wir durch die einzelnen Eckpunkte eine Schar von Parallelen und ordnen diese auf die soeben angegebene Weise. Es gibt dann zwei Parallele, zwischen denen alle übrigen liegen. Eine von diesen werde mit q bezeichnet, und in dieser sei etwa der Eckpunkt A enthalten. Dann liegt das Dreieck NAB auf derselben Seite von q, auf der alle Kanten und Diagonalen von Π liegen. Enthält das Innere des Dreiecks NAB keinen Eckpunkt des Polygons, so kann die Diagonale NB keine Kante des Polygons schneiden. Wenn aber Eckpunkte von Π dem Innern des Dreiecks NAB angehören, so ziehe man von B Halbstrahlen nach allen diesen Punkten hin, wähle unter ihnen denjenigen Halbstrahl, der mit BA den kleinsten Winkel bildet, und in ihm den Eckpunkt G so, daß über G hinaus in diesem Halbstrahl kein Eckpunkt liegt, der zugleich dem Innern von NAB angehört. Wir wollen zeigen, daß die Diagonale AG keine Kante von Π schneidet.

Soweit die Kanten von Π nicht in einem der Punkte A und G begrenzt werden, können sie erstens in einem der Punkte N und B einen Endpunkt haben, zweitens ganz in das Dreieck NAB hineinfallen, drittens mit einem Endpunkte im Inneren, mit dem anderen im Äußeren von NAB liegen, und viertens zwei Endpunkte haben, die beide dem Äußeren von NAB angehören. Unter den von N oder B ausgehenden Strecken, von denen keine der Kanten AB und AN geschnitten wird, können nur solche die Strecke AG treffen, deren zweiter Endpunkt zugleich dem Innern des Dreiecks NAB und dem natürlichen Winkelfelde ABG angehören; das ist aber durch die Wahl des Punktes G ausgeschlossen. Strecken, die ganz im Innern von NAG liegen und die Diagonale AG treffen, müssen einen Endpunkt haben, der im Innern des Dreiecks ABG und somit auch im natürlichen Winkelfelde ABG liegt; solche Strecken können aber bei unserer Wahl des Winkels ABG keine Kanten des Polygons sein. Soll drittens von der Kante JK der eine Endpunkt J im Innern des

Dreiecks NAB, der andere K in seinem Äußeren liegen, so muß sie, da sie die Kanten NA und AB nicht treffen darf, die Diagonale NB durchsetzen; eine Strecke, die in einem Punkte von NB und in J begrenzt ist und zugleich die Diagonale AG trifft, muß zum Teil im natürlichen Winkelfelde ABG liegen, was wiederum ausgeschlossen ist. Endlich muß eine Strecke JK, die zwei Außenpunkte des Dreiecks NAB miteinander verbindet und die Strecke AG trifft, auch eine der Seiten NA oder NB schneiden; das ist aber unmöglich, wenn JK, NA und NB Kanten eines einfachen Polygons sein sollen.

Demnach hat entweder die Diagonale NB oder die Diagonale AG die Eigenschaft, keine Kante des Polygons zwischen ihren Endpunkten zu treffen. Im ersten Falle bilden wir die Polygone NAB und $BC \ldots FGH \ldots MN$, im zweiten die Polygone $AGH \ldots MN$ und $GABC..F$. Die neuen Polygone mögen mit Π_1 und Π_2 bezeichnet werden. Da sie ebenfalls einfach sind und die Eckenzahl in jedem einzelnen kleiner ist als n, so dürfen für Π_1 und Π_2 die Sätze a) bis d) als bewiesen vorausgesetzt werden.

Die Anzahl der Punkte, in denen ein Halbstrahl, der von einem festen Punkte P ausgeht und keinen Eckpunkt von Π enthält, die Kanten von Π, Π_1 und Π_2 trifft, möge bzw. durch $\varkappa$, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ bezeichnet werden. Nun kann man P und den Halbstrahl einmal so wählen, daß $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 0$, dann aber auch so, daß $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 1$ wird. Daher liegt jedes der beiden Polygone Π_1 und Π_2 im Äußeren des anderen, oder von den Zahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ kann höchstens eine ungerade sein. Ferner ist $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$ oder $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 - 2$, je nachdem die Diagonale AG (bzw. NB) getroffen wird oder nicht. Die Zahl $\varkappa$ ist also ungerade, wenn eine der Zahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ ungerade ist, dagegen gerade, wenn die Zahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ beide gerade sind. Daher gilt der Satz a) auch für das Polygon Π; alle Punkte, die dem Innern eines der Polygone Π_1 oder Π_2 angehören, liegen auch im Innern von Π.

Daß der Satz b) auch für das Polygon Π gültig bleibt, läßt sich leicht zeigen. Für zwei Punkte S und T, die beide entweder im Innern von Π_1 oder im Innern von Π_2 liegen, kann man die Verbindung so wählen, daß sie ganz dem Innern des entsprechenden Teilpolygons angehört. Wenn aber von den Punkten S und T der eine innerhalb Π_1, der andere innerhalb Π_2 liegt, so füge man, was leicht möglich ist, zwei Punkte U und V so hinzu, daß die Strecke UV die Diagonale AG (bzw. BN), aber keine Kante des gegebenen Polygons trifft; wenn dann etwa S und U innerhalb Π_1, T und V innerhalb Π_2 liegen, so hat man noch innerhalb Π_1 eine gebrochene Strecke von S nach U und innerhalb Π_2 eine gebrochene Strecke von T nach V zu ziehen. Auf den weiteren Teil von b) und auf die Sätze c) und d) brauchen wir wohl nicht eigens einzugehen.

Da die Diagonale AG (bzw. NB) dem Innern von Π angehört, geht aus unserer Betrachtung der Satz hervor: In jedem einfachen Polygon läßt sich mindestens eine Diagonale ziehen, die ganz seinem Innern angehört. Nun kann man aber den Satz wieder auf jedes der beiden Teilpolygone anwenden und hiermit fortfahren, bis man auf lauter Dreiecke geführt wird. Demnach erhalten wir folgende Sätze:

In jedem einfachen n-Eck gibt es mindestens $n-3$ Diagonalen, die ganz seinem Inneren angehören.

Jedes einfache n-Eck läßt sich durch Diagonalen in $n-2$ Dreiecke zerlegen.

Wenn es in einem einfachen n-Eck nur $n-3$ Diagonalen gibt, die seinem Inneren angehören, so können sich diese nicht zwischen ihren Endpunkten schneiden. Ist aber die Zahl von derartigen Diagonalen größer als $n-3$, so kann man aus ihnen immer $n-3$ so auswählen, daß unter ihnen keine zwei einen Punkt des Inneren gemein haben.

Dem durch zwei aufeinander folgende Kanten gebildeten Winkel ordnen wir denjenigen durch die Schenkel begrenzten Ebenenteil zu, dem in hinreichender Nähe an dem Scheitel das Innere des Vielecks angehört. Zwei Punkte, die in zwei aufeinander folgenden Kanten liegen, können wir nämlich durch einen Streckenzug verbinden, der ganz dem Inneren des Vielecks angehört und zudem weder sich selbst schneidet noch die Verlängerung einer der übrigen Kanten trifft. Alle Streckenzüge, die in dieser Weise zwischen den beiden Kanten gezogen werden können, gehören einem und demselben von den beiden Teilen an, in welche die Ebene durch die Schenkel des entsprechenden Winkels zerlegt wird. Dieser Ebenenteil soll dem Winkel als sein Feld zugeordnet werden.

Winkel, denen man ihr natürliches Winkelfeld beilegt, werden als gewöhnliche oder hohle Winkel bezeichnet; dagegen nennt man einen Winkel überstumpf oder erhaben, um anzudeuten, daß man ihm denjenigen Teil der Ebene als Feld zuordnet, der das natürliche Winkelfeld zur ganzen Ebene ergänzt.

Wenn durch einen Eckpunkt eines einfachen Vielecks eine Gerade so gezogen werden kann, daß das zugehörige Winkelfeld ganz auf der einen Seite dieser Geraden liegt, so ist der entsprechende Winkel selbst hohl. Dieser Fall tritt jedesmal ein, wenn das Vieleck selbst ganz auf der einen Seite einer solchen Geraden liegt. Nun hat die obige Untersuchung gezeigt, daß das Vieleck zwischen zwei Parallele von beliebiger Richtung eingeschlossen werden kann, von denen jede durch einen Eckpunkt geht. Dadurch werden wir bereits auf zwei hohle Winkel geführt. Die Verbindungsgerade ihrer Scheitel werde mit t bezeichnet. Zieht man jetzt durch die übrigen Eckpunkte die Parallelen zu t, so nimmt die Gerade t in dieser Schar entweder eine Zwischen- oder eine Endlage ein. Im ersten Falle treten zwei hohle Winkel hinzu; im zweiten Falle liefert diejenige Parallele, durch welche in Verbindung mit t die übrigen Parallelen eingeschlossen werden, einen dritten Winkel, dem sein natürliches Winkelfeld zugeordnet werden muß. Daraus ergibt sich der Satz:

Jedes einfache Vieleck hat mindestens drei hohle Winkel.

Zerlegt man ein einfaches n-Eck durch $n-3$ Diagonalen in $n-2$ Dreiecke, so stellt sich jeder Winkel des Vielecks als Summe derjenigen Winkel von Teildreiecken heraus, die in demselben Eckpunkt ihren Scheitel haben. Somit gilt der Satz:

Die Winkelsumme in jedem einfachen n-Eck beträgt $(n-2) \cdot 2R$.[1])

Sobald von zwei aufeinander folgenden Kanten eines einfachen Polygons, die einen hohlen Winkel miteinander bilden, ein einziges Mal die folgende auf der $\left\{\begin{matrix}\text{rechten}\\ \text{linken}\end{matrix}\right\}$ Seite der vorangehenden liegt, liegt jedesmal von zwei unter einem hohlen Winkel zusammenstoßen-

1) Daß das einfache Polygon die Ebene in ein Inneres und ein Äußeres zerlegt, wird von Hilbert in seinen „Grundlagen" ausdrücklich als eine Folge aus den Axiomen der Anordnung bezeichnet, wenn er auch den Beweis nicht mitteilt. Einen ausführlichen Beweis gibt Veblen in seiner Arbeit: A system of axioms for geometry (Transact. of amer. math. soc. 1904, S. 365, 366). Der von uns mitgeteilte Beweis gründet sich auf den Begriff „zwischen". Man kann daher die Schar der Parallelen durch eine Schar von anderen Gebilden ersetzen, auf die dieser Begriff übertragen werden kann. So erleidet der Beweis keine wesentliche Änderung, wenn man um einen beliebigen Punkt Kreise beschreibt, von denen jeder durch einen Eckpunkt des Vielecks geht.

Als der vorliegende Abschnitt bereits gesetzt war, erschien die Abhandlung: H. Hahn, über die Anordnungssätze der Geometrie (Monatshefte für Math. u. Phys. XIX. S. 289 ff.), die uns ihr Verfasser freundlichst zusandte. In dieser Arbeit wird aus den Axiomen der Verknüpfung und der Anordnung ohne Benutzung des Parallelenaxioms der Satz hergeleitet, daß jedes einfache Polygon die Ebene in zwei Teile, das Innere und das Äußere, zerlegt. Der Verfasser ersetzt die Hilbertschen Axiome der Verknüpfung und der Anordnung durch acht andere Axiome, bei denen der Begriff „zwischen" oder, wie es hier heißt, der Begriff der „Ordnung dreier Punkte" an die Spitze gestellt wird.

Über den oben mitgeteilten Beweis sei hier noch eine Bemerkung gestattet. Wenn darin die Winkel als größer und kleiner unterschieden werden, so liegt darin keine Anwendung eines Kongruenzaxiomes; vielmehr wird hierbei nur der Begriff „zwischen" auf Halbstrahlen übertragen, die innerhalb eines Winkels von seinem Scheitel aus gezogen sind. Es ist sogar leicht möglich, den Beweis der Sätze a) bis d) so umzuändern, daß er auch vom Parallelenaxiom unabhängig wird.

den Kanten die folgende $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von der vorangehenden; dagegen liegt zugleich die folgende jedesmal $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von der vorangehenden, sobald diese beiden einen überstumpfen Winkel miteinander bilden.

Um zu erkennen, ob zwei einfache Vielecke gleich- oder gegenläufig sind, wählt man in jedem von ihnen drei aufeinander folgende Eckpunkte; es seien dies etwa im ersten Polygon die Punkte A, B, C, im zweiten die Punkte G', H', J'. Sind jetzt die Vieleckswinkel B und H' entweder beide hohl oder beide erhaben, so sind die Vielecke $\left\{\begin{matrix}\text{gleich-}\\ \text{gegen-}\end{matrix}\right\}$läufig, falls die Dreiecke ABC und $G'H'J'$ $\left\{\begin{matrix}\text{gleich-}\\ \text{gegen-}\end{matrix}\right\}$läufig sind. Wenn aber von den Winkeln ABC und $G'H'J'$ der eine hohl und der andere erhaben ist, so sind die Vielecke $\left\{\begin{matrix}\text{gleich-}\\ \text{gegen-}\end{matrix}\right\}$ läufig, wofern die beiden Dreiecke $\left\{\begin{matrix}\text{gegen-}\\ \text{gleich-}\end{matrix}\right\}$läufig sind.

7. **Kongruenz und Symmetrie in der Ebene.** Die beiden in derselben Ebene gelegenen Vielecke $ABC \ldots MN$ und $A'B'C' \ldots M'N'$ mögen in der Beziehung zueinander stehen, daß

$$\begin{aligned} AB = A'B',\ AC = A'C', \ldots AM = A'M',\ AN = A'N', \\ BC = B'C', \ldots BM = B'M',\ BN = B'N' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ MN = M'N' \end{aligned}$$

ist. Dadurch ist eine Beziehung zwischen den beiden Polygonen aufgestellt, nach der jedem Eckpunkt, jeder Kante und jeder Diagonale des einen ein Eckpunkt, eine Kante und eine Diagonale in der Weise entspricht, daß entsprechende Kanten und Diagonalen jedesmal gleich sind. Zugleich wird jedem Dreieck, das irgend drei Eckpunkte des ersten Polygons zu Eckpunkten hat, dasjenige Dreieck zugeordnet, welches die im zweiten Polygon entsprechenden Punkte zu Eckpunkten hat. Irgend zwei in dieser Weise einander zugeordnete Dreiecke sind kongruent; auch sind die beiden Dreiecke eines jeden solchen Paares gleich- oder gegenläufig, je nachdem die Dreiecke eines einzigen Paares gleich- oder gegenläufig sind. Wenn z. B. die Punkte A, B, C nicht in gerader Linie liegen und G und G', K und K', M und M' irgend drei weitere Paare entsprechender Punkte sind, so sind die Dreieckspaare ABC, $A'B'C'$ und GKM, $G'K'M'$ gleichzeitig entweder gleichläufig oder gegenläufig.

Dementsprechend legen wir zwei Polygonen, die in entsprechenden Kanten und Diagonalen übereinstimmen, denselben oder entgegengesetzten Sinn bei, je nachdem paarweise einander entsprechende Dreiecke denselben oder entgegengesetzten Sinn haben.[1]) Wir dürfen daher folgende Definition aufstellen:

Zwei Polygone derselben Ebene, welche einander so zugeordnet werden können, daß entsprechende Kanten und Diagonalen einander gleich sind, heißen kongruent oder symmetrisch, je nachdem sie denselben oder entgegengesetzten Sinn haben.

Die Definition kann auf die Ebene als Ganzes übertragen werden, wofern man dieselbe als Doppelgebilde, als die Vereinigung von zwei konlokalen Ebenen denkt. Dabei muß man bei jedem einzelnen Punkte der vereinigten Ebenen unterscheiden, ob man ihn als der ersten oder der zweiten Ebene angehörig auffaßt. Sind die beiden Ebenen so aufeinander bezogen, daß irgend zwei Punkte der einen jedesmal dieselbe Entfernung haben wie die entsprechenden Punkte der anderen, so haben je zwei entsprechende Dreiecke entweder stets denselben oder stets den entgegengesetzten Sinn. Im ersten Falle wird die Beziehung als Kongruenz, im zweiten als Symmetrie bezeichnet.

Das Wort symmetrisch wird noch in einem anderen Sinne gebraucht. Man sagt, zwei Polygone lägen symmetrisch in bezug auf einen Punkt, wenn die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte durch den festen Punkt gehen und in ihm halbiert werden. Dagegen heißen zwei Polygone symmetrisch in bezug auf eine Gerade, wenn die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte auf der Geraden senkrecht stehen und in ihr halbiert werden. Zwei Polygone derselben Ebene, die in bezug auf einen Punkt symmetrisch liegen, sind zueinander kongruent; dagegen sind zwei Polygone, die zu einer Geraden symmetrisch liegen, auch symmetrisch in dem oben definierten Sinne.

Wenn das Polygon $ABC \ldots MN$ gegeben ist, so kann man den Punkt A' und den Halbstrahl $A'B'$ willkürlich wählen. Soll jetzt $A'B' = AB$ sein, so ist der Punkt B' eindeutig bestimmt. Wenn aber die Punkte A, B, C nicht in gerader Linie liegen, so gibt es zwei Lagen des Punktes C', für die $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ ist. Nachdem eine von diesen Lagen gewählt ist, kann man jedem weiteren Punkte D der Ebene nur einen einzigen Punkt D' derartig zuordnen, daß $AD = A'D'$, $BD = B'D'$, $CD = C'D'$ ist. Zwar genügen den beiden ersten Forderungen zwei verschiedene Lagen des Punktes D'; indem aber die dritte Forderung hinzugenommen wird, erhält man für D' eine einzige Lage.

---

1) Während der Sinn von einfachen Polygonen, wie wir in Nr. 6 gesehen haben, sich leicht bestimmen läßt, ist dies bei überschlagenen Polygonen im allgemeinen nicht möglich. Dagegen läßt sich bei beliebigen Polygonen, die in den entsprechenden Kanten und Diagonalen übereinstimmen, nach der angegebenen Methode entscheiden, ob ihnen derselbe Sinn beigelegt werden muß oder nicht. Für einfache Polygone kommen beide Bestimmungsarten auf dasselbe hinaus.

Hiernach gibt es in der Ebene nur ein einziges zu $ABC \ldots MN$ kongruentes Polygon $A'B'C' \ldots M'N'$, für welches A' eine vorgeschriebene Lage annimmt und B' in einen vorgeschriebenen, von A' ausgehenden Halbstrahl fällt. Somit werden zwei kongruente Polygone derselben Ebene identisch, sobald zwei Punkte des einen mit den entsprechenden Punkten des anderen zusammenfallen.

Die oben aufgestellten Bedingungen sind nicht unabhängig voneinander. Will man nur die hinreichenden Bedingungen aufstellen, so kann man etwa verlangen, daß ist:

$$AB = A'B',\ AC = A'C, \ldots AM = A'M',\ AN = A'N'$$
$$BC = B'C, \ldots BM = B'M',\ BN = B'N',$$

und daß die Dreieckspaare ABC und $A'B'C'$, ... ABM und $A'B'M'$, ABN und $A'B'N'$ entweder sämtlich gleichläufig oder sämtlich gegenläufig sind.

Aus den aufgestellten Definitionen folgt unmittelbar der Satz:

Wenn zwei Polygone derselben Ebene angehören und zu einem in der Ebene gelegenen dritten Polygon entweder kongruent oder symmetrisch sind, so sind sie zueinander kongruent; wenn aber von den beiden ersten Polygonen das eine zum dritten kongruent, das andere symmetrisch ist, so sind sie zueinander symmetrisch.

Hiermit hängt ein charakteristischer Unterschied zwischen kongruenten und symmetrischen Polygonen zusammen, den wir in folgende Worte kleiden können: Kongruente Polygone derselben Ebene können durch eine Bewegung, die ganz in ihrer Ebene verläuft, zur Deckung gebracht werden; um aber symmetrische Polygone miteinander zur Deckung zu bringen, muß man das eine aus der gemeinschaftlichen Ebene herausbewegen.

Auch bei krummen Linien kann man von Kongruenz und Symmetrie sprechen. Zu dem Ende darf man etwa folgende Definition aufstellen:

Zwei in derselben Ebene gelegene krumme Linien heißen $\left\{\begin{matrix}\text{kongruent}\\ \text{symmetrisch}\end{matrix}\right\}$, wenn sich jedem in die erste eingeschriebenen Polygon ein $\left\{\begin{matrix}\text{kongruentes}\\ \text{symmetrisches}\end{matrix}\right\}$ Polygon zuordnen läßt, welches in die zweite eingeschrieben ist.

Wir möchten aber folgende Definition vorziehen:

Zwei krumme Linien derselben Ebene mögen in der Weise aufeinander bezogen sein, daß jedem Punkte der ersten ein Punkt der zweiten zugeordnet ist und irgend zwei Punkte der ersten dieselbe Entfernung haben wie die entsprechenden Punkte der zweiten; in diesem Falle heißen die Linien kongruent oder symmetrisch.

Statt dessen können wir auch sagen:

Wenn in zwei konlokalen kongruenten oder symmetrischen Ebenen zwei krumme Linien einander entsprechen, so heißen sie selbst kongruent oder symmetrisch.

Für eine Ebene, die kongruent auf sich selbst bezogen ist, gilt der Satz:

Wenn bei der kongruenten Zuordnung einer Ebene zu sich selbst nicht jede Strecke mit ihrer entsprechenden Strecke gleiche Richtung hat, so gibt es einen Punkt, der mit seinem entsprechenden Punkte zusammenfällt. Sobald hierbei noch ein zweiter Punkt sich selbst entspricht, fällt jeder Punkt mit seinem entsprechenden Punkte zusammen.

Der Fall, daß die einander zugeordneten gleichen Strecken AB und $A'B'$ gleiche Richtung haben, darf als ausgeschlossen betrachtet werden. Sind die gleichen Strecken AB und $A'B'$ entgegengesetzt gerichtet, so werden die Strecken AA' und BB' in ihrem Schnittpunkte S halbiert. Dieser Punkt ist sich selbst zugeordnet und zugleich die Mitte einer jeden Strecke, durch welche irgend zwei einander entsprechende Punkte miteinander verbunden werden. Wenn aber die Geraden AB und $A'B'$ einander schneiden, so wollen wir den Schnittpunkt als einen Punkt der ersten Ebene mit P und als einen Punkt der zweiten Ebene mit R' bezeichnen. Jetzt bestimmen wir auf der Geraden AB einen Punkt R und auf der Geraden $A'B'$ einen Punkt P' so, daß:

$$AR = A'R', \; BR = B'R', \; A'P' = AP, \; B'P' = BP$$

ist. Die Mittelsenkrechten der Strecken PR und $P'R'$ haben einen Punkt S gemein. Auch sind die Dreiecke SPR und $S'P'R'$ kongruent und von demselben Sinne. Dasselbe gilt auch von den Dreiecken SAB und $S'A'B'$. Daraus geht hervor, daß der Punkt S in den beiden konlokalen Ebenen sich selbst entspricht. Der letzte Teil der Behauptung leuchtet unmittelbar ein.

Der Satz kann auch in folgender Weise ausgesprochen werden:

Wenn die beiden in einer Ebene gelegenen Polygone $ABC \ldots MN$ und $A'B'C' \ldots M'N'$ einander kongruent sind, ohne daß jede Kante und jede Diagonale der einen der entsprechenden Kante oder Diagonale im andern parallel ist, so gibt es in der Ebene einen Punkt S, für den:

$$SA = SA', \; SB = SB', \ldots SN = SN' \text{ und}$$
$$\sphericalangle\, ASA' = BSB' = \ldots NSN' \text{ ist.}$$

Diese Behauptung kann kurz in folgende Worte gekleidet werden:

Zwei in einer Ebene gelegene kongruente Polygone können durch Drehung um einen Punkt zur Deckung gebracht werden, falls nicht jede Kante des einen mit der entsprechenden Kante des andern gleiche Richtung hat.

In dem ausgeschlossenen Falle wird die Drehung durch eine Parallelverschiebung ersetzt; man sagt in diesem Falle auch, der sich selbst entsprechende Punkt liege unendlich fern (vgl. § 8).[1])

1) Hilbert unterscheidet in seinen „Grundlagen" nicht zwischen kongruent und symmetrisch. Dieser Brauch ist für die Ebene ziemlich allgemein verbreitet. Auch bei räumlichen Gebilden faßt man zuweilen Kongruenz und Symmetrie mit dem Worte Kongruenz zusammen, unterscheidet dann aber zwischen „gleichsinniger" und „gegensinniger Kongruenz" oder, wie Huebner in seiner „Geometrie des Maßes" (Teubner 1888) es nennt, zwischen „ebenbildlicher" und

8. **Der allgemeine Begriff des Winkels.** Solange wir einem Winkel BAC sein natürliches Winkelfeld zuordnen, können wir ihm ein bestimmtes Vorzeichen beilegen, indem wir etwa festsetzen, der Winkel BAC solle $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sein, wenn der zweite Schenkel AC auf der $\left\{\begin{matrix}\text{linken}\\\text{rechten}\end{matrix}\right\}$ Seite des ersten Schenkels AB liegt. Um den Begriff des Winkels zu verallgemeinern, ziehen wir in der Ebene ABC durch den Scheitel A beliebig viele Halbstrahlen $AB_1, AB_2 \ldots AB_n$ und stellen die Forderung, daß AB_1 links von AB, AB_2 links von AB_1 usw. und AC links von AB_n liegt. Dann wollen wir sagen, ein Punkt liege im erweiterten Winkelfelde BAC, wofern er dem natürlichen Winkelfelde eines der Winkel $BAB_1, B_1AB_2, \ldots, B_nAC$ angehört oder in einem Halbstrahl $AB_1, AB_2, \ldots AB_n$ liegt. Indem man die Konstruktion hinreichend oft wiederholt, kann man erreichen, daß die Gesamtheit der Winkelfelder $BAB_1, B_1AB_2, \ldots B_nAC$ und somit auch das neu eingeführte Winkelfeld BAC die Ebene einmal oder mehrmals überdeckt. Als Größe des Winkels BAC betrachten wir die Summe der Winkel BAB_1, $B_1AB_2, \ldots B_nAC$; diese ist insofern von der Wahl der Halbstrahlen $AB_1, AB_2, \ldots AB_n$ unabhängig, als sich bei verschiedener Wahl derselben nur solche positive Werte ergeben können, die sich nur um Vielfache des sog. Vollwinkels (nämlich des Winkels von vier Rechten) unterscheiden.

Man kann aber auch einem jeden Winkel BAC ein negatives Vorzeichen beilegen. Zu dem Ende nimmt man beliebig viele Halbstrahlen $AB', AB'', \ldots AB^{(n)}$ in der Weise hinzu, daß AB' rechts von AB, AB'' rechts von $AB', \ldots AC$ rechts von $AB^{(n)}$ liegt, und betrachtet den Winkel BAC als die Summe der Winkel BAB', $B'AB'', \ldots B^{(n)}AC$, indem man jedem das negative Vorzeichen beilegt.

Statt in beiden Fällen die Halbstrahlen auf die bezeichnete Art einzuschieben, sagt man kurz, der Winkel sei dadurch beschrieben

---

„gegenbildlicher Kongruenz“. Möbius faßt die beiden Begriffe, die wir vorhin als Kongruenz und Symmetrie unterschieden haben, in dem Begriffe der „Gleichheit und Ähnlichkeit“ zusammen; in dieser Bezeichnung ist ihm nur Baltzer gefolgt. Möbius hat auch versucht, für das Wort „symmetrisch“ eine neue Bedeutung einzuführen, indem er eine Figur symmetrisch nennt, „sobald sie auf mehr als eine Weise gleich und ähnlich ist“; indessen hat dieser Gebrauch keine weitere Verbreitung gefunden.

Bei der Bezeichnung von kongruenten (bzw. symmetrischen) Gebilden benutzt Möbius zwei Zeilen und setzt darin entsprechende Punkte übereinander. Dies Verfahren ist allerdings sehr übersichtlich, dürfte aber im allgemeinen nicht notwendig sein. Immerhin muß aber aus der Bezeichnung deutlich hervorgehen, welche Punkte einander entsprechen. Leider wird das von manchen Lehrbüchern auch heute noch nicht beachtet, obwohl bereits Chasles mit großer Entschiedenheit hierauf gedrungen hat.

worden, daß sich ein veränderlicher Halbstrahl im positiven oder negativen Sinne von der Lage des ersten Schenkels aus in die Lage des zweiten Schenkels um den Scheitel dreht. In der Praxis verfährt man meistens in folgender Weise: Man blickt auf diejenige Seite der Ebene, auf der die Zeichnung ausgeführt wird, und betrachtet als positive Drehung eine solche, welche im entgegengesetzten Sinne verläuft wie der Zeiger der Uhr.

Häufig verbindet man auch positive und negative Drehungen miteinander; nur muß man dann die algebraische Summe der einzelnen Drehungen als die Größe des Winkels ansehen.

Hiernach muß man auch bei der winkeltreuen (konformen) Abbildung einer Ebene auf sich selbst einen doppelten Sinn der Abbildung unterscheiden, nämlich eine Abbildung, bei der die Winkel ihren Drehungssinn beibehalten, und eine Abbildung, bei der einander zugeordnete Winkel jedesmal entgegengesetzten Drehungssinn haben. In entsprechender Weise zerfallen die winkeltreuen Abbildungen von zwei verschiedenen Ebenen aufeinander in zwei Gruppen, die einander ausschließen. Diese wichtige Unterscheidung dürfte R. von Lilienthal zuerst ausdrücklich hervorgehoben haben (Vorlesungen über Differentialgeometrie I S. 170).

9. **Die Winkel eines beliebigen Polygons.** Wir müssen versuchen, den Winkeln, welche von zwei aufeinander folgenden Kanten eines Vielecks gebildet werden, solche Felder zuzuordnen, daß man für die gegenseitige Beziehung dieser Winkel zueinander allgemeine Gesetze erhält. Daß dies Ziel nicht erreicht wird, wenn man jedem Winkel sein natürliches Winkelfeld zuordnet, haben wir bei den einfachen Polygonen gesehen. Man kann geneigt sein, folgende Definition aufzustellen. Unter dem Innenwinkel, den die in einem Eckpunkte eines Polygons zusammenstoßenden Kanten miteinander bilden, versteht man die Drehung, die ein beweglicher Halbstrahl um den Eckpunkt macht, wenn er sich aus der Lage des einen heraus im Sinne des Polygons bis zur Deckung mit der vorangehenden Kante bewegt. Hierbei erscheint der einzelne Winkel als Summe von Winkeln, die im allgemeinen nicht denselben Drehungssinn haben; seine Größe ergibt sich dementsprechend als die algebraische Summe der Winkel, welche bei Drehungen durch die einzelnen Kanten hindurch beschrieben werden. So ist $BAN = BAC + CAD + \cdots + MAN$, wo jeder einzelne Winkel mit dem ihm zukommenden Vorzeichen genommen werden muß. Diese Definition fällt für einfache Vielecke mit der oben (S. 66) gegebenen zusammen; sie stimmt auch mit derjenigen überein, die H. Weber in der „Enzykl. der Elem.-Math.“ (Bd. II S. 308) gibt, wenn er es als naturgemäß ansieht, daß der Winkel durch das Flächenstück erklärt wird, das zwischen zwei zusammenstoßenden Kanten im Innern des Vielecks liegt.

Indessen bevorzugen gerade die wichtigsten Arbeiten, in denen die allgemeine Theorie des Vielecks behandelt ist, eine andere Festsetzung. Indem wir ihnen folgen, stellen wir die beiden Definitionen auf:

Unter dem $\left\{\begin{matrix}\text{Außenwinkel}\\ \text{Innenwinkel}\end{matrix}\right\}$ eines Vielecks verstehen wir den Winkel, um den sich die positive Richtung einer Kante im positiven

Sinne drehen muß, um mit der $\left\{\begin{array}{l}\text{positiven Richtung der folgenden}\\ \text{negativen Richtung der vorangehenden}\end{array}\right\}$ Kante zusammenzufallen.

Hiernach haben alle Innen- und Außenwinkel positive Werte, die kleiner sind als vier Rechte. Im Polygon $ABC\ldots MN$ ist der Außenwinkel an A der kleinste positive Winkel, den die Richtungen NA und AB bei positiver Drehung miteinander bilden; der Innenwinkel an A ist der kleinste positive Winkel, den die Richtung AB mit der Richtung AN bei positiver Drehung bildet.

Man ziehe durch einen beliebigen Punkt der Ebene Halbstrahlen in der Richtung der einzelnen Kanten $AB, BC\ldots NA$; der Winkel, den die zu zwei aufeinander folgenden Kanten gezogenen Parallelen miteinander bilden, ist ein Außenwinkel des Vielecks; die Summe aller dieser Winkel ist ein Vielfaches von vier Rechten, oder die Summe der Außenwinkel beträgt $2a\pi$, wo a eine ganze positive Zahl ist. Diese Zahl a wird als die Art des Vielecks bezeichnet.

Läßt man die Drehungen, durch welche ein Außen- und Innenwinkel mit demselben Scheitel erhalten werden, aufeinander folgen, so führt man durch eine positive Drehung eine Kante in ihre entgegengesetzte Richtung über; die Summe von zwei solchen Winkeln ist also ein ungerades Vielfache von π, oder, da jede einzelne $< 2\pi$ ist, entweder gleich π oder gleich 3π. Soll die Summe der beiden Winkel gleich π sein, so muß jeder einzelne $< \pi$ sein; dagegen kann 3π als Summe von zwei Bestandteilen, von denen jeder $< 2\pi$ ist, nur dann erhalten werden, wenn jeder einzelne $> \pi$ ist. Innen- und Außenwinkel mit demselben Scheitel sind entweder beide hohl oder beide erhaben.

Neben der Zahl a ist auch die Anzahl k der erhabenen Innenwinkel für die Einteilung der Vielecke von sehr großer Wichtigkeit. Für ein eingehenderes Studium verweisen wir auf das inhaltsreiche Werk: Brückner, Vielecke und Vielflache (Teubner 1900), in dem auch die ganze Literatur eingehend gewürdigt ist.

Wir bemerken nur, daß die Winkel, die wir Außenwinkel genannt haben, von Brückner als Umfangswinkel bezeichnet werden; da das Wort Außenwinkel bei konvexen Polygonen eine allgemein feststehende Bedeutung hat, glauben wir dasselbe nur in einem Sinne gebrauchen zu dürfen, der für konvexe Polygone auf den gebräuchlichen hinauskommt; zudem haben die Winkel, die Brückner als Außenwinkel bezeichnet, für die Theorie nur geringe Bedeutung.

An dieser Stelle sei noch folgende Bemerkung gestattet. Brückner erreicht unter Beibehaltung des Drehungssinnes durch Umänderung des Umlaufssinnes, daß die obige Zahl k nicht größer ist als die halbe Anzahl der Eckpunkte, und weist dann nach, daß bei gegebenen Werten von n und k stets $\frac{k}{2} < a < \frac{n+k}{2}$ ist. Daraus darf man aber nicht, wie Brückner tut, den Schluß ziehen, die Anzahl aller Werte von a, die bei gegebenem Werte von k noch möglich seien, müsse $< n/2$ sein.

§ 5. Der Flächeninhalt ebener Flächen.

1. **Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit.** Ehe wir an das Problem herantreten, das uns in diesem Abschnitt beschäftigen soll, schicken wir einige Definitionen voraus.

Wir nennen zwei ebene Flächen zerlegungsgleich, wenn sie in dieselbe Zahl von paarweise kongruenten Teilen zerlegt werden können. Zwei Flächen sollen als ergänzungsgleich bezeichnet werden, wenn sich aus ihnen durch Hinzufügung von paarweise kongruenten Flächen zerlegungsgleiche Flächen herstellen lassen.

Für die Zerlegungsgleichheit gilt der wichtige Satz:

Wenn zwei ebene Flächen je mit derselben dritten zerlegungsgleich sind, so sind sie auch untereinander zerlegungsgleich.

Wir gehen von den drei Flächen A, B, Γ aus und nehmen an, daß A sowohl mit B als auch mit Γ zerlegungsgleich ist. Wir setzen also voraus, A könne in die Teile U_1, $U_2 \ldots U_m$ und B in die Teile U_1', $U_2' \ldots U_m'$ so zerlegt werden, daß für jeden Wert von $k = 1, \ldots m$ stets $U_k \cong U_k'$ ist. Ebenso soll A auch in die n Teile V_1, $V_2 \ldots V_n$ und Γ in die n Teile V_1'', $V_2'' \ldots V_n''$ so zerlegt werden können, daß für $\lambda = 1 \ldots n$ jedesmal $V_\lambda \cong V_\lambda''$ ist. Indem wir die Fläche A sowohl in die Teile U_1, $U_2 \ldots U_m$ als auch in die Teile V_1, $V_2 \ldots V_n$ zerlegen, möge sie in die r Teile W_1, $W_2 \ldots W_r$ in der Weise zerfallen, daß jeder Teil W_ν (für $\nu = 1 \ldots r$) sowohl nur einem einzigen Teile U_α als auch nur einem einzigen Teile V_β angehört. Bringen wir jetzt U_α zur Deckung mit dem entsprechenden Teile U_α' von B, so zerlegt sich auch U_α' in eine gewisse Anzahl Teile W_γ', $W_\delta' \ldots$, von denen jeder mit einem Teile W_γ, $W_\delta \ldots$ kongruent ist. Daher zerfällt auch die Fläche B in r Teile W_1', $W_2' \ldots W_r'$, von denen jeder zu einem Teile W_1, $W_2 \ldots W_r$ kongruent ist. Eine ganz entsprechende Konstruktion zerlegt die Fläche Γ auf die Weise in die Teile W_1'', $W_2'' \ldots W_r''$, daß für $\nu = 1 \ldots r$ jedesmal $W_\nu \cong W_\nu''$ ist. Daher ist auch $W_\nu' \cong W_\nu''$ für jeden Wert von ν oder die Flächen B und Γ sind in die zueinander paarweise kongruenten Teile W_1', $W_2' \ldots W_r$ bzw. W_1'', $W_2'' \ldots W_r''$ zerlegt; sie sind also zerlegungsgleich.

Erst die neuere Zeit hat auf die Begriffe der Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit aufmerksam gemacht. Für Euklid ist der Flächeninhalt ein Grundbegriff, auf den er glaubt die Größensätze anwenden zu dürfen. Während ihm für den Begriff der Kongruenz ein eigenes Wort fehlt, hebt er beim ersten Kongruenzsatz, auf den er die übrigen zurückführt, ausdrücklich die Gleichheit der Flächen hervor. In den letzten Propositionen seines ersten Buches, wo er die Flächengleichheit selbst behandelt, subtrahiert er von derselben Fläche kongruente Dreiecke, leitet dadurch seinen Hauptsatz über die Flächengleichheit von Parallelogrammen her, geht dann zum Dreieck als der Hälfte des Parallelogramms über und folgert endlich aus dem Größensatze, nach welchem der Teil kleiner ist als das Ganze, daß Dreiecke von gleichem Inhalt und gleicher Grundlinie auch gleiche Höhen besitzen. So bilden die Größensätze bei ihm die wahre Grundlage für die Lehre von der Flächengleichheit.

Wenden wir dagegen die oben eingeführten Begriffe an, so müssen wir gestehen, daß Euklid zwar die Ergänzungsgleichheit für Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe in aller Strenge nachgewiesen, dagegen bei der Umkehrung dieses Satzes durch Benutzung des angegebenen Größensatzes ein neues Axiom eingeführt hat, nämlich die Voraussetzung, daß niemals ein Dreieck mit einem seiner Teile ergänzungsgleich sein kann. Diese Voraussetzung kann aber durchaus nicht als selbstverständlich betrachtet werden.

Schon dadurch, daß man ein vorgelegtes Polygon in Teile zerlegt und diese in veränderter Anordnung zu einem neuen Polygon zusammensetzt, erhält man eine geradezu unabsehbare Reihe von neuen Polygonen, und es ist keineswegs sofort zu übersehen, ob nicht vielleicht eines der neuen Polygone einem Teile des ersten kongruent ist. Und doch müssen wir diese Möglichkeit ausschließen, wenn wir in der Lehre von der Flächengleichheit die Flächen als gleich, größer oder kleiner unterscheiden wollen. Man kann sich nur fragen, ob man mit den früher angegebenen Voraussetzungen auskommt oder ein neues Axiom hinzufügen muß. O. Stolz hat die letztere Ansicht vertreten; ihm war es genug, die Forderung auf ihr geringstes Maß zurückzuführen; demnach wollte er die Lehre von der Flächengleichheit auf das Axiom gründen:

Zerlegt man ein gegebenes Polygon in irgendeine Anzahl von Teilpolygonen und läßt auch nur einen dieser Teile weg, so ist es nicht mehr möglich, mit den übrigen durch veränderte Anordnung das gegebene Polygon zu überdecken.

Ehe wir die aufgeworfene Frage eingehend prüfen, wollen wir die Zerlegungsgleichheit selbst genauer untersuchen.

2. **Zerlegungsgleichheit von Polygonen.** Wir gehen von zwei Parallelogrammen $ABCD$ und $ABEF$ aus, welche über derselben Grundlinie AB so konstruiert sind, daß die vier Eckpunkte C, D, E, F in einer geraden Linie liegen. Dabei wollen wir annehmen, daß die Punkte D und E zwischen C und F liegen.

Wenn jetzt die Strecken AD und BE keinen Punkt gemein haben oder wenn die Punkte D und E zusammenfallen, so zerfallen die Parallelogramme offenbar in zwei paarweise kongruente Teile.

Wenn aber die Strecken AD und BE einen Punkt gemein haben, der als Punkt von AD mit D_1 und als Punkt von BE mit E_1 bezeichnet werden soll, so trage man die Strecke AD_1, so oft es angeht, auf AD ab; man mache also auf dieser Strecke
$AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \ldots$
und fahre damit fort, bis entweder der Punkt D_n auf D fällt, oder D zwischen D_n und D_{n+1} zu liegen kommt. Nun zieht man durch die Punkte $D_1, D_2, \ldots D_n$ die Parallelen zu AB und erhält dadurch auf AC die Punkte $C_1, C_2, \ldots C_n$, auf AF die Punkte $F_1, F_2, \ldots F_n$, auf BE die Punkte $E_1, E_2, \ldots E_n$. Ferner ziehe man alle Strecken $F_{k-1}E_k$ und $C_{k-1}D_k$, sowie $F_nD' \| BC$ und $C_nF' \| AF$. Dann ist:

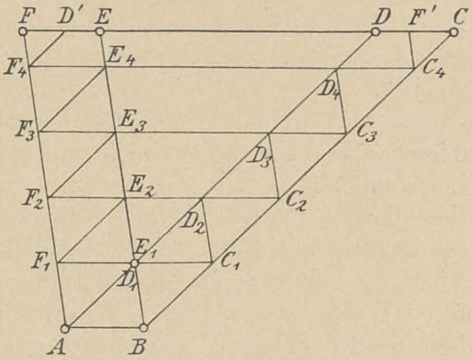

Fig. 4.

$$AF_1D_1 \cong BE_1C_1,\ F_{k-1}E_{k-1}E_k \cong D_{k-1}C_{k-1}D_k,\ E_kF_kF_{k-1} \cong C_kD_kC_{k-1},$$
sowie
$$FF_nD' \cong F'C_nC \quad \text{und} \quad E_nF_nD'E \cong C_nD_nDF'.$$

Die Parallelogramme sind hiernach in paarweise kongruente Stücke zerlegt, oder: Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind zerlegungsgleich.

Für eine spätere Anwendung weisen wir darauf hin, daß in der obigen Figur jeder Teil durch Parallelverschiebung zur Deckung mit dem entsprechenden Teile gebracht werden kann, daß also, wie wir kurz sagen wollen, Parallelogramme, die über derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen liegen, in parallel-kongruente Teile zerlegt werden können.

Zu einem Dreieck ABC können wir sehr leicht ein zerlegungsgleiches Parallelogramm konstruieren; wir ziehen etwa durch die Mitte M von BC die Parallele MN zu AB und durch A die Parallele AN zu BC. Dann ist ABC zum Parallelogramm $ABMN$ zerlegungsgleich. Daraus folgt dann weiter, daß Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe zerlegungsgleich sind.

Bei einem beliebigen konvexen Vieleck $ABC \ldots LMN$ können wir durch N die Parallele zu AM bis zu ihrem Schnittpunkte M' mit LM ziehen und dadurch das gegebene Vieleck in das zerlegungsgleiche Vieleck $ABC \ldots LM'$ umwandeln. Mit dieser Konstruktion können wir fortfahren, bis wir das gegebene Vieleck in ein zerlegungsgleiches Dreieck umgewandelt haben. Nun kann man zu jedem Dreieck ein zerlegungsgleiches Rechteck und zu dem Rechteck ein zerlegungsgleiches Quadrat (nach der bekannten euklidischen Figur zum pythagoreischen Lehrsatze) finden. Diese Konstruktion führt somit zu dem Satze:

Jedes konvexe Vieleck ist mit einem Quadrat zerlegungsgleich.

Daraus geht aber weiter hervor, daß zwei beliebige konvexe Vielecke entweder selbst zerlegungsgleich sind oder daß das eine von ihnen mit einem Teile des andern zerlegungsgleich ist. Die Konstruktion liefert uns aber keinen Anhalt, um darüber eine Entscheidung zu treffen, ob diese beiden möglichen Fälle einander ausschließen. Vielmehr läßt sich die Umwandlung in ein Quadrat auf gar mannigfache Weise durchführen; wir erhalten daher, wenn wir von einem bestimmten Vieleck ausgehen, ganz verschiedene Dreiecke und ganz verschiedene Rechtecke. Bei der Konstruktion brauchen wir keineswegs, wie wir vorhin getan haben, von einem Eckpunkte auszugehen; wir können etwa auch das gegebene Vieleck von einem in seinem Innern gelegenen Punkte aus in Dreiecke zerlegen, alle einzelnen Dreiecke in Rechtecke von einer festen Grundlinie umwandeln und diese zu einem einzigen Rechtecke zusammensetzen. Wenn wir dann von diesem Rechteck zum Quadrate übergehen, müssen wir uns fragen, ob wir stets zu demselben Quadrate geführt werden.

3. **Einige Beispiele von Zerlegungen in paarweise kongruente Teile.** Wir haben soeben nur die Möglichkeit erwiesen, in gewissen Fällen zwei Polygone in paarweise kongruente Teile zu zerlegen. Es gewährt aber einiges Interesse, diese Zerlegungen wirklich auszuführen. Hiermit hat sich schon Wolfgang Bolyai in seinem „Tentamen“ beschäftigt; es ist ihm dabei möglich geworden, nicht nur für Polygone, sondern auch für krummlinig begrenzte ebene Flächen interessante Sätze aufzustellen. Réthy hat dann in den Berichten der ungarischen Akademie 1890 und in den Mathematischen Annalen (Bd. 38, S. 405ff) versucht, die Beweise so umzuformen, daß sie den Anforderungen der Strenge genügen. Darauf können wir hier nicht eingehen; wir möchten aber wenigstens im Anschluß an Réthys Arbeit bei einigen flächengleichen Figuren die Art der Zerlegung in kongruente Teile angeben.

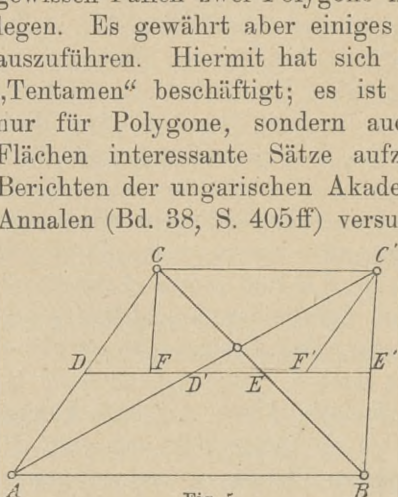

Fig. 5.

An erster Stelle betrachten wir zwei Dreiecke ABC und ABC', welche bei gleicher Höhe über derselben Grundlinie errichtet sind. Unserer Annahme nach sind die Geraden AB und CC' parallel. Wir konstruieren zu diesen beiden Geraden die Mittelparallele, welche die Gerade AC in D, AC' in D', BC in E, BC' in E' schneiden möge. Wenn jetzt D' zwischen D und E liegt (Fig. 5), so zieht man noch $CF \parallel BC'$, $C'F' \parallel AC$ je bis zur Mittelparallelen; alsdann ist

$$ADD' \cong C'F'D',\quad CDF \cong C'F'E',\quad CEF \cong BEE',$$
$$ABED' \cong ABED'.$$

Wenn aber (Fig. 6) der Schnittpunkt O von AC' und BC zwischen B und E liegt, jedoch so, daß

$$BO > EO$$

ist, so zieht man noch

$$AF \parallel BE',\ BF' \parallel AD,$$

macht

$$EG = OE,\ D'G' = OD'$$

und zieht ferner $GH \parallel AC'$, $G'H' \parallel BC$, wo die Punkte F, F', H, H' in der Geraden DE' liegen sollen. Alsdann ist

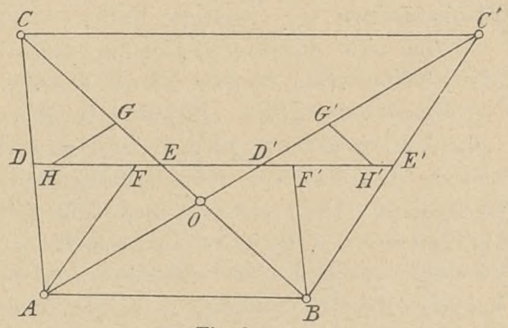

Fig. 6.

$$CDHG \cong BF'D'O,\quad EGH \cong H'G'D',\quad ADF \cong BF'E',$$
$$AOEF \cong C'G'H'E',\quad ABO \cong ABO.$$

Die beiden Dreiecke sind also jetzt in je fünf paarweise kongruente Teile zerlegt.

Ferner möge ein Rechteck mit einem inhaltsgleichen Quadrate in dem Falle verglichen werden, daß die größere Seite des Rechtecks kleiner ist als das Doppelte der kleineren Seite. Wir denken uns die beiden Flächen mit einem Eckpunkte und einer Seite aneinander gelegt. Es sei demnach $ABCD$ das Quadrat, $AEFG$ das Rechteck. Man macht $DH = GJ = BE$ und zieht die weiteren Hilfslinien in der Weise, die aus der Zeichnung hervorgeht. Dann zerlegt sich das Quadrat in die sechs Teile 1, 2, 3, 4, 5, 6, und das Rechteck in die Teile 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, und man überzeugt sich leicht, daß $1 \cong 1', \ldots 6 \cong 6'$ ist.

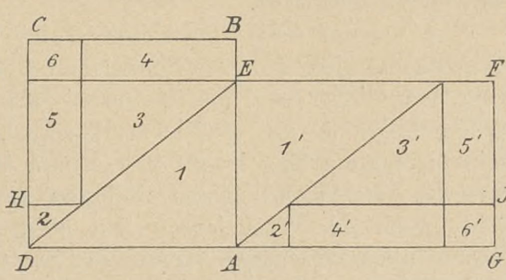

Fig. 7.

4. **Das Inhaltsmaß.** Nachdem der elementare Unterricht gelehrt hat, die Flächen als gleich, größer oder kleiner miteinander zu vergleichen, geht er an einer späteren Stelle dazu

über, sie zu messen, d. h. ihren Flächeninhalt, ihr Flächenmaß oder Inhaltsmaß zu bestimmen. Dadurch wird jeder allseitig begrenzten ebenen Figur eine absolute (positive) Zahl in der Weise zugeordnet, daß folgende Regeln allgemeine Gültigkeit besitzen:

a) Kongruente Figuren sollen dasselbe Inhaltsmaß besitzen,

b) Wenn eine Figur in irgendeine (endliche) Anzahl von Teilen zerlegt ist, so soll ihr Flächenmaß gleich sein der Summe aus den Flächenmaßen der einzelnen Teile.

Aus der zweiten Forderung geht hervor, daß das Flächenmaß eines Teiles stets kleiner ist als das des Ganzen.

Diese Zuordnung erscheint in den älteren Werken und in den Lehrbüchern als Folge aus der Lehre von der Flächengleichheit. In neuerer Zeit hat man umgekehrt geglaubt, vom Inhaltsmaß ausgehen zu können. Dem entsprechend definiert man inhaltsgleiche Figuren als solche, die gleiches Inhaltsmaß haben. Indem man sich, was offenbar gestattet ist, zunächst auf einfache Polygone beschränkt, begnügt man sich damit, zu zeigen, daß nach einer beliebigen Wahl der Flächeneinheit jeder Fläche eine Zahl in der Weise zugeordnet werden kann, daß den obigen Gesetzen genügt wird.

Gegen eine solche Behandlung hat M. Dehn schwere Bedenken erhoben, die als berechtigt anerkannt werden müssen. Nachdem nämlich eine Zuordnung dieser Art gefunden ist, können wir nicht wissen, ob nicht (abgesehen von einem konstanten Faktor, der hier selbstverständlich nicht in Betracht kommt) noch andere Zuordnungen möglich sind, für welche dieselben Gesetze gelten. Dieses Bedenken erläutert Dehn durch einige einfache Beispiele.

Zunächst beschränkt er sich auf drei Figuren, von denen die beiden ersten genau die dritte zusammensetzen. Dann darf man das Inhaltsmaß der beiden ersten ganz willkürlich annehmen und muß nur verlangen, daß das Inhaltsmaß des dritten gleich der Summe aus den beiden ersten ist.

An zweiter Stelle betrachtet Dehn die Gesamtheit aller ebenen Kreisbogendreiecke, deren Winkelsumme zwei Rechte übersteigt, oder wenn man lieber will, die Gesamtheit aller aus Kreisbogen gebildeten ebenen Polygone mit positivem Exzeß, d. h. solcher Polygone, deren Winkelsumme größer ist als $(n-2)2R$, falls n die Anzahl der Seiten darstellt. In jedem solchen Polygon genügt aber, wie man leicht sieht, auch der Winkelexzeß den obigen Gesetzen, obwohl er vom Flächeninhalt wesentlich verschieden ist. (Dies zweite Beispiel ist um so interessanter, als man bei einer gewissen Beschränkung der Polygone nur auf solche geführt wird, welche sich durch stereographische Projektion einer Kugel auf eine Ebene als Bilder von Kugelpolygonen ergeben, die aus lauter Hauptkreisen gebildet werden, wobei dieser

Exzeß geradezu als Flächenmaß der zugeordneten Kugelpolygone aufgefaßt werden kann.)

Dazu kommt ein weiteres Bedenken. Bei den Anwendungen der Mathematik auf die Naturwissenschaften verlangt man, daß inhaltsgleiche Figuren entweder selbst zerlegungsgleich sind oder doch durch einen unbegrenzten Prozeß der Zerlegungsgleichheit immer näher gebracht werden können. Wenn nämlich zwei inhaltsgleiche Figuren Ω und Ω' vorliegen, so muß es, falls sie nicht bereits zerlegungsgleich sind, nach beliebiger Wahl einer (beliebig kleinen) Fläche E immer möglich sein, Ω in zwei Teile Ω_1 und Ω_2, Ω' in zwei Teile Ω_1' und Ω_2' so zu zerlegen, daß Ω_1 und Ω_1' untereinander, dagegen Ω_2 und Ω_2' je mit einem Teile von E zerlegungsgleich sind.

Hiernach tritt auch in wissenschaftlicher Beziehung die Inhaltsgleichheit an die erste Stelle. Dennoch glauben wir im folgenden das Inhaltsmaß voranstellen zu sollen. Solange Dehn seine Theorie, auf die er bisher nur in einzelnen Bemerkungen hingewiesen hat, nicht systematisch darlegt, dürfte die gewählte Reihenfolge am ehesten den Leser zur Würdigung aller in Betracht kommenden Fragen anleiten.

5. **Das Flächenmaß durch Zerlegung in Quadrate hergeleitet: Grundlage des Beweises.** Für die Berechtigung des Inhaltsmaßes wollen wir an erster Stelle einen Beweis erbringen, der in gleicher Weise für Vielecke wie für krummlinig begrenzte Flächen gilt. Um das Wesen dieses Beweises recht deutlich hervortreten zu lassen, beschränken wir uns bei der Durchführung auf den Fall, wo das Flächenstück von einer einzigen geschlossenen Linie, dem Umfang, begrenzt wird, wo ferner der Umfang keine Doppelpunkte hat und zudem von jeder durch einen inneren Punkt gehenden Geraden nur in zwei Punkten geschnitten wird. Ohne Zweifel wird der Leser nachträglich selbst die kleinen Änderungen vornehmen, welche notwendig werden, wenn man sich von diesen beschränkenden Annahmen frei machen will. Zudem werden wir den entsprechenden Beweis für die Berechtigung des Raummaßes ohne diese speziellen Voraussetzungen durchführen; dadurch wird es leicht, auch dem zunächst folgenden Beweise einen sehr allgemeinen Charakter zu geben. Nur wenn es Gerade gibt, die den Umfang in einer unendlichen Anzahl von Punkten treffen, wird eine neue Erwägung notwendig, auf die wir nicht eingehen wollen.

Zum Beweise gehen wir von zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden M und N aus und ziehen zu ihnen je eine unendliche Schar von Parallelen in der Weise, daß je zwei aufeinander folgende stets denselben, und zwar für beide Systeme den gleichen Abstand haben. Wir zerlegen mit andern Worten die Ebene derartig in ein Netz von

Quadraten, daß jede Seite eines Quadrates noch einem zweiten Quadrate als Seite angehört und jeder Eckpunkt eines Quadrates auch Eckpunkt für drei weitere Quadrate ist. Von diesen Quadraten betrachten wir an erster Stelle diejenigen, welche ganz im Innern der Fläche liegen; ein einzelnes Quadrat dieser Art möge mit A bezeichnet und die Anzahl aller gleich a gesetzt werden. Nach dem archimedischen Axiom ist diese Anzahl endlich. Dann betrachtet man diejenigen Quadrate B, welche wenigstens einen Teil mit der Fläche gemein haben, und bezeichnet ihre Anzahl mit b. Unter den letzten sind die a zuerst betrachteten Quadrate jedenfalls enthalten. In dem speziellen Falle, daß der Umfang der Fläche ganz aus Strecken besteht, die sämtlich auf den gezogenen Parallelen liegen oder, wie wir kurz sagen wollen, den Linien des Systems angehören, ist $b = a$. In jedem andern Falle gibt es aber Quadrate, die zum Teil innerhalb und zum Teil außerhalb der Fläche liegen; ein derartiges Quadrat möge mit C bezeichnet werden; ihre Anzahl sei c. Diese gehören zu den Quadraten B, aber nicht zu den Quadraten A; daher ist $b = a + c$.

Jetzt wählt man den Abstand von je zwei aufeinander folgenden Parallelen gleich dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit; A_ν, B_ν, C_ν seien die dieser Wahl entsprechenden Quadrate, a_ν, b_ν, c_ν die entsprechenden Zahlen. Dann weisen wir folgende zwei Sätze nach:

a) daß durch die Forderung, für jeden Wert von ν solle

$$\frac{a_\nu}{\nu^2} \leqq F \leqq \frac{b_\nu}{\nu^2}$$

sein, eine einzige Zahl F definiert wird, und

b) daß diese Zahl F unabhängig ist von der Wahl der beiden zueinander senkrechten Geraden M und N.

Nachdem diese beiden Sätze bewiesen sind, dürfen wir die Zahl F als die Maßzahl der Fläche oder als ihr Inhaltsmaß definieren.

6. **Beweis des ersten Satzes.** Um die erste Behauptung zu erhärten, vergleichen wir die Anzahl s_ν der Punkte, in denen der Umfang der Fläche für ein gegebenes ν von Linien des Systems geschnitten wird, mit der vorhin angegebenen Zahl c_ν und leiten dadurch die Beziehung her:

$$b_\nu - a_\nu \leqq s_\nu. \tag{1}$$

Hierbei können wir auf verschiedene Weise verfahren. Wir können z. B. danach fragen, inwieweit der Umfang aus Strecken besteht, welche Linien des Systems angehören. In dieser Hinsicht lassen sich drei Fälle unterscheiden: 1. der Umfang besteht nur aus derartigen Strecken; 2. Strecken dieser Art bilden einen Teil des Umfanges; 3. kein Teil des Umfanges fällt in eine Linie des Systems. Im ersten Falle ist sowohl die Zahl s_ν wie die Zahl c_ν gleich null. Im zweiten Falle brauchen wir nur diejenigen Teile des Umfanges zu betrachten, welche nach Abtrennung jener geraden Strecken übrig bleiben. Auf einem hiernach verbleibenden Teile mögen der Reihe nach die Schnittpunkte $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{k-1}, S_k$ liegen, auf einem zweiten $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_{k+l}$ usw. Der erste Teil wird von S_1 und S_k, der zweite von S_{k+1} und S_{k+l} usw. begrenzt. Zugleich wird der erste Teil in die $k-1$ Abschnitte $S_1 S_2, S_2 S_3, \ldots, S_{k+1} S_k$, der zweite in die $l-1$ Abschnitte $S_{k+1} S_{k+2} \ldots S_{k+l-1} S_{k+l}$ usw. zerlegt. Nun fällt jeder derartige Abschnitt in ein Quadrat C_ν hinein; dagegen kann ein Quadrat C_ν mehrere Abschnitte des Umfanges enthalten. Die Zahl c_ν dieser Quadrate ist daher zum mindesten nicht größer als die Zahl der Abschnitte oder als die Zahl $(k-1)+(l-1)+\cdots$, während die Zahl s_ν der Schnittpunkte $k+l+\cdots$ beträgt. Daher ist in diesem Falle $c_\nu < s_\nu$. Im dritten Falle endlich ist die Anzahl s_ν der Schnittpunkte gleich der Anzahl der Abschnitte, und da wieder verschiedene Abschnitte in dasselbe Quadrat C_ν hineinfallen können, so kann die Zahl c_ν die Zahl s_ν höchstens erreichen, aber nicht übertreffen. Dadurch ist die Beziehung (1) bewiesen.

Nun betrachten wir diejenigen Geraden des Systems, auf denen Schnittpunkte mit dem Umfang liegen, schließen hierbei aber alle Geraden mit ein, welche eine Strecke mit dem Umfang gemeinsam haben. Wir zählen somit alle Geraden des Systems, auf denen einzelne Punkte oder Teile des Umfangs liegen. Der ersten Schar, den Parallelen zu M, mögen m_ν, der zweiten Schar, den Parallelen zu N, mögen n_ν derartige Gerade angehören. Nach unserer Annahme schneidet jede Gerade den Umfang höchstens in zwei Punkten. Jede der $m_\nu + n_\nu$ angegebenen Geraden liefert somit höchstens zwei Schnittpunkte; auf einigen unter diesen Geraden kann aber auch kein Schnittpunkt oder ein einziger Schnittpunkt liegen. Endlich zählt jeder Schnittpunkt als solcher nur einmal, wenn in ihm zwei Geraden aus verschiedenen Scharen zusammenstoßen. Daher ist

$$s_\nu \leqq 2m_\nu + 2n_\nu, \tag{2}$$

oder wegen der Beziehung (1):

$$b_\nu - a_\nu \leqq 2m_\nu + 2n_\nu. \tag{3}$$

Nun ziehen wir zum Vergleich dasjenige System hinzu, welches unter Beibehaltung der Geraden M und N dadurch erhalten wird, daß wir den Abstand von je zwei aufeinander folgenden Parallelen gleich der Längeneinheit setzen. Die Zahlen $m_1 = m$ und $n_1 = n$ mögen die Anzahl der hierbei auftretenden Geraden angeben, welche mit dem Umfang entweder einzelne Punkte oder Strecken gemeinschaftlich haben. Die Geraden der ersten Schar, bei denen dies eintrifft, seien der Reihe nach $M_1, M_2, \ldots, M_m$; die vor M_1 vorhergehende sei M_0, die nach M_m folgende M_{m+1}. Dann können für ein beliebiges ν (mit anderen Worten, bei einem Abstande, der ein ν^{tel} der Längeneinheit beträgt) nur solche Parallele zu M den Umfang treffen, welche zwischen M_0 und M_{m+1} liegen. Die Anzahl der zwischen M_0 und M_{m+1} gelegenen Parallelen, welche im gegenseitigen Abstande $1/\nu$ gezogen werden können, beträgt aber $\nu m + \nu - 1$, oder es ist:

$$m_\nu \leqq \nu m + \nu - 1.$$

Ebenso zeigt man, daß auch

$$n_\nu \leqq \nu n + \nu - 1.$$

Hiernach geht die Beziehung (3) in die folgende über:

$$(4) \qquad \frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} \leqq \frac{2m + 2n}{\nu} + \frac{4}{\nu} - \frac{4}{\nu^2}.$$

Da aber m und n feste Zahlen sind, kann man ν so groß wählen, daß die rechte Seite von (4) beliebig klein wird. Die oben angegebene Operation liefert somit eine feste Zahl F. Diese stellt den Grenzwert dar, dem sich die Brüche $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ bei unbeschränkt wachsendem ν unbegrenzt nähern. (Wofern speziell für einen bestimmten Wert von ν einmal $a_\nu = b_\nu$ wird, ist $F = \frac{a_\nu}{\nu^2}$.)

Damit ist unsere erste Behauptung erwiesen.

7. **Beweis des zweiten Satzes.** Ehe wir zum Nachweis unserer zweiten Behauptung übergehen, wollen wir eine Reihe von Sätzen herleiten, bei denen die beiden anfangs gewählten, aufeinander senkrecht stehenden Geraden M und N beibehalten werden. Auch wollen wir den Grenzwert des Bruches $a_\nu : \nu^2$ der Kürze wegen als Maßzahl der Fläche bezeichnen, obwohl wir streng genommen sagen müßten: Maßzahl in bezug auf das gewählte System.

a) Die Maßzahl einer in beliebige Teile zerlegten Fläche ist gleich der Summe aus den Maßzahlen der einzelnen Teile.

Wir denken uns die gegebene Fläche Φ in die Teile $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$ zerlegt. Für die einzelnen Teile $\Phi_\varkappa$ seien $a_\nu^{(\varkappa)}$ und $b_\nu^{(\varkappa)}$ diejenigen Zahlen, welche bei dem vorhin gewählten Netz von Quadraten den obigen Zahlen a_ν und b_ν entsprechen. Dann gehören jedenfalls alle Quadrate $A_\nu^{(\varkappa)}$ (d. h. alle ganz im Innern eines Teiles gelegenen Quadrate) zu den Quadraten A_ν; es können aber einzelne unter den Quadraten A_ν von Grenzlinien der Teile getroffen werden, oder es ist:

$$a_\nu \geqq \sum_{\varkappa=1}^{r} a_\nu^{(\varkappa)}.$$

In gleicher Weise zeigt man, daß ist:

$$b_\nu \leqq \sum_{\varkappa=1}^{r} b_\nu^{(\varkappa)}.$$

Somit muß sein:

$$a_\nu = \sum_\varkappa a_\nu^{(\varkappa)} + p_\nu, \quad b_\nu = \sum_\varkappa b_\nu^{(\varkappa)} - q_\nu,$$

wo p_ν und q_ν positive Zahlen mit Einschluß von Null sind. Daher ist auch

$$\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} = \sum_\varkappa \frac{b_\nu^{(\varkappa)} - a_\nu^{(\varkappa)}}{\nu^2} - \frac{p_\nu + q_\nu}{\nu^2}.$$

In dieser Gleichung hat die linke Seite und jeder der r ersten Summanden auf der rechten Seite den Grenzwert null, folglich auch das rechte Glied der rechten Seite, oder, da p_ν und q_ν nicht negativ sein können, $p_\nu : \nu^2$ und $q_\nu : \nu^2$ selbst. Setzt man jetzt:

$$F = \lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{\nu^2}, \quad F_\varkappa = \lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu^{(\varkappa)}}{\nu^2},$$

so folgt:

$$F = \lim \frac{a_\nu}{\nu^2} = \lim \left(\frac{\sum a_\nu^{(\varkappa)}}{\nu^2} + \frac{p_\nu}{\nu^2} \right) = \lim \frac{\sum a_\nu^{(\varkappa)}}{\nu^2} = \sum F_\varkappa.$$

b) Wenn zwei kongruente Flächen durch Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden können, so haben sie für dasselbe Netz gleiche Maßzahlen.

Nachdem man durch eine bloße Parallelverschiebung die Fläche Φ zur Deckung mit Φ' gebracht hat, haben die a_ν Quadrate A_ν eine solche Lage angenommen, daß ihre Seiten zu den Seiten der a_ν' Quadrate A_ν' parallel sind, welche ganz im Innern von Φ' liegen. Sobald also nur ein Eckpunkt eines der Quadrate A_ν mit dem Eckpunkte eines der Quadrate A_ν' zusammenfällt, gelangen die ersten Quadrate selbst mit den letzten Quadraten zur Deckung; es ist alsdann $a_\nu = a_\nu'$, $b_\nu = b_\nu'$. Wenn das nicht der Fall ist, wählen wir ein beliebiges Quadrat A_ν und einen beliebigen seiner Eckpunkte heraus. Dieser Eckpunkt liegt dann im Innern oder auf einer Seite eines bestimmten Quadrates A_ν'. Jetzt verschieben wir die Fläche Φ mit den in ihr gelegenen Quadraten so, daß das ausgewählte Quadrat in teilweiser Deckung mit seiner Anfangslage bleibt und durch die Bewegung die Eckpunkte dieses Quadrats auf die Eckpunkte des angegebenen Quadrates A_ν' zu liegen kommen. Dadurch gelangt jedes Quadrat, welches zur Ausmessung von Φ benutzt ist, je zur Deckung mit einem der für die Ausmessung von Φ' benutzten Quadrate. Zugleich kann aber keines der Quadrate A_ν außerhalb der Fläche Φ' fallen, weil jedes Quadrat in teilweiser Deckung mit seiner Anfangslage geblieben ist. Die Quadrate A_ν kommen somit hierbei zur Deckung entweder je mit einem Quadrate A_ν' oder mit einem Quadrate C_ν', welches einen Teil des Umfanges von Φ' in sich enthält. Demnach ist die Differenz von a_ν und a_ν' höchstens gleich $(b_\nu - a_\nu) + (b_\nu' - a_\nu')$. Da aber $\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} + \frac{b_\nu' - a_\nu'}{\nu^2}$ beliebig klein gemacht werden kann, ist $F = F'$.

c) Wenn zwei Flächen Φ und Φ' in dieselbe Anzahl von Teilen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_r$ und $\Phi_1', \Phi_2', \ldots \Phi_r'$ derartig zerlegt werden können, daß jedesmal Φ_1 mit Φ_1', Φ_2 mit $\Phi_\varkappa'$, ... Φ_r mit Φ_r' durch bloße Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden kann, so haben auch Φ und Φ' dieselben Maßzahlen.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus den beiden vorangehenden.

d) Wenn zwei Parallelogramme dieselbe Grundlinie haben und zwischen denselben Parallelen liegen, so haben sie für dasselbe Netz gleiche Maßzahlen.

Wir haben in Nr. 2 darauf hingewiesen, daß solche Parallelogramme in Teile zerlegt werden können, die einzeln durch Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden können. Daher ist dieser Satz nur ein spezieller Fall des vorangehenden.

e) Wenn von k Parallelogrammen $P_1, P_2, \ldots, P_k$ jedesmal zwei aufeinanderfolgende mit gleichen Seiten zwischen denselben Parallelen liegen, so haben sie sämtlich dieselbe Maßzahl.

Sind $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_k$ die Maßzahlen der einzelnen Parallelogramme, so ist nach dem vorhergehenden Satze $F_1 = F_2$, $F_2 = F_3$ usw.

f) Zwei kongruente Quadrate haben gleiche Maßzahlen.

Es genügt offenbar, diesen Satz unter der Annahme zu beweisen, daß die Quadrate einen Eckpunkt gemein haben und einander teilweise überdecken. Zwei solche 'Quadrate seien $ABCD$ und $AB'C'D'$. Zugleich liege AB' ganz außerhalb des ersten, AD ganz außerhalb des zweiten Quadrats. Dagegen mögen die Geraden AD' und DC einander in E, AB und $B'C'$ in G schneiden; die durch D' zu AB gezogene Parallele möge in L mit $B'C'$ und die durch B zu AD' gezogene Parallele in F mit DC zusammentreffen. Die Schnittpunkte von EG mit BF und mit $D'L$ seien J und H, und in N mögen BF und $D'L$ einander schneiden. Da $AB = AD'$ und [wie man leicht nachweist] $AG = AE$ ist, so sind die Geraden $D'B$ und EG parallel. Von den Parallelogrammen $D'EFN$, $D'EJB$, $D'BGH$ und $BGLN$ liegen je zwei aufeinanderfolgende bei gleicher Grundlinie zwischen denselben Parallelen. Die Parallelogramme $ABFE$ und $AGLD'$ haben also gleiche Maßzahlen; dasselbe gilt auch von den Quadraten $ABCD$ und $AB'C'D'$.

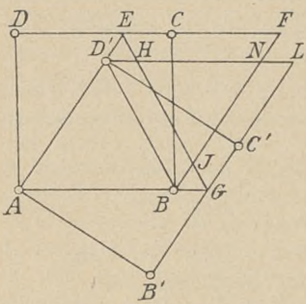

Fig. 8.

g) Die Maßzahl eines jeden Quadrats ist gleich der zweiten Potenz von der Maßzahl der Seite.

Zum Beweise konstruiere man ein kongruentes Quadrat, von dem eine Seite in die Gerade M, eine zweite in die Gerade N hineinfällt. Ist a die Maßzahl einer Seite, so ist a^2 die Maßzahl dieses neuen, also auch die des gegebenen Quadrats.

Nach diesen Vorbereitungen können wir leicht den Satz beweisen, daß wir für die betrachtete ebene Fläche dieselbe Maßzahl erhalten, wenn wir statt den Geraden M und N irgend zwei andere aufeinander senkrecht stehende Gerade zugrunde legen.

Unter Benutzung der Geraden M und N mögen die Zeichen a_ν, b_ν die angegebene Bedeutung beibehalten. Ist hierbei

$$\frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} = \delta,$$

so ist

$$F - \frac{a_\nu}{\nu^2} < \delta.$$

Man kann aber ν so groß wählen, daß die Größe δ beliebig klein wird.

Jetzt wählen wir irgend zwei andere Gerade M' und N', die ebenfalls aufeinander senkrecht stehen, und konstruieren zu ihnen die beiden Scharen von Parallelen für einen Abstand, der nur den $(\nu\varrho)^{\text{ten}}$ Teil der Längeneinheit beträgt. Von den hierdurch erhaltenen Quadraten mögen $a'_{\nu\varrho}$ in das Innere der gegebenen Flächen hineinfallen, so daß der Grenzwert des Quotienten $a'_{\nu\varrho}/(\nu\varrho)^2$ die Maßzahl der Fläche für das neue System wird. Zugleich betrachten wir eines der vorhin erhaltenen Quadrate A_ν. Wenn in dies Quadrat q_ϱ der neuen Quadrate hineinfallen, so nähert sich der Quotient $q_\varrho/(\nu\varrho)^2$ für wachsende Werte von ϱ der Maßzahl des Quadrats A_ν unbegrenzt. Die Differenz

$$\frac{1}{\nu^2} - \frac{q_\varrho}{(\nu\varrho)^2}$$

kann also durch Vergrößerung von ϱ beliebig klein gemacht werden.

Man denke sich ϱ so gewählt, daß diese Differenz für jedes der a_ν ersten Quadrate A_ν kleiner als eine feste Größe ε ist. Dann bleibt der Unterschied der beiden Zahlen

$$\frac{a_\nu}{\nu^2} \quad \text{und} \quad \frac{a'_{\nu\varrho}}{\nu^2\varrho^2}$$

unterhalb des Produktes $a_\nu \varepsilon$. Man kann aber durch bloße Vergrößerung von ϱ stets erreichen, daß das Produkt $a_\nu \varepsilon$ kleiner wird als die zuerst festgesetzte Zahl δ. Hiernach können sich die beiden Maßzahlen, von denen die erste unter Benutzung der Geraden M und N, die zweite unter Benutzung der Geraden M' und N' ermittelt ist, höchstens um die Größe 2δ unterscheiden. Da man aber die Größe δ dadurch beliebig klein machen kann, daß man ν hinreichend wachsen läßt, müssen die beiden Maßzahlen einander gleich sein.

Durch diese Erwägung ist auch der zweite Satz, den wir oben aufgestellt haben, in aller Strenge erwiesen.

8. **Nachträge zum vorangehenden Beweise.** Wir wollen an die soeben bewiesenen Sätze a)—g) einige mit ihnen verwandte Sätze anschließen, welche uns erkennen lassen, daß für jedes Polygon die mit Hilfe eines beliebigen Systems (M, N) gefundene Maßzahl F in natürlicher Beziehung zum Polygon selbst steht.

In enger Beziehung zum Satze b) steht der folgende:

h) Können kongruente Flächen dadurch zur Deckung gebracht werden, daß man neben einer Parallelverschiebung noch um einen Punkt eine Drehung von einem oder von zwei rechten Winkeln ausführt, so haben sie gleiche Maßzahlen.

Nachdem man die beiden Flächen zur Deckung gebracht hat, sind die Seiten der benutzten Quadrate paarweise parallel. Daher dürfen wir dieselben Erwägungen anstellen, welche beim Beweise von b) zum Ziele geführt haben.

i) Kongruente Rechtecke haben gleiche Maßzahlen.

Sehen wir in der Figur 8 (S. 86) davon ab, daß die Seiten AB und AD einander gleich sind, setzen wir also voraus, daß $ABCD$ und $AB'C'D'$ kongruente Rechtecke sind, so sind die Dreiecke $AB'G$ und ADE nicht mehr kongruent, sondern nur ähnlich. Daraus folgt, wie sich ohne Benutzung der Lehre von der Flächengleichheit zeigen läßt, daß die Geraden BD' und EG parallel sind. Der weitere Beweis ändert sich aber nicht, wenn wir die Quadrate durch Rechtecke ersetzen.

k) Die Maßzahl eines jeden Recktecks ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen von Grundlinie und Höhe.

Man braucht zum Beweise nur ein kongruentes Rechteck hinzuzunehmen, dessen Seiten paarweise den Geraden M und N parallel sind.

l) Die Maßzahl eines jeden Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen von Grundlinie und Höhe.

Der Satz ist eine unmittelbare Folge von d) und k).

m) Die Maßzahl eines jeden Dreicks ist gleich dem halben Produkte der Maßzahlen für Grundlinie und Höhe.

Zum Beweise ersetze man das Dreieck ABC durch das in Nr. 2 angegebene Parallelogramm $ABMN$, indem man für den einen Teil CMN den Satz h) in Anwendung bringt.

n) Die Maßzahl eines jeden konvexen Polygons wird erhalten als die Summe aus den Maßzahlen der Dreiecke, in welche man dasselbe zerlegen kann. Diese Maßzahl ist unabhängig von der Art und Weise, in welcher die Zerlegung ausgeführt ist.

Dieser Satz geht sehr leicht aus a) hervor.

o) Kongruente oder zerlegungsgleiche Vielecke haben gleiche Maßzahlen.

Kongruente Vielecke können in paarweise kongruente Dreiecke zerlegt werden; kongruente Dreiecke haben nach m) gleiche Maßzahlen; also sind auch die Summen dieser Maßzahlen oder die Maßzahlen der Vielecke gleich. Wenden wir diesen Satz auf die einzelnen Teile an, aus denen sich zwei zerlegungsgleiche Vielecke zusammensetzen lassen, so zeigt sich, daß er auch für zerlegungsgleiche Vielecke gilt.

In gleicher Weise kann man zeigen, daß auch ergänzungsgleiche Vielecke dieselbe Maßzahl besitzen.

9. **Abschluß des vorangehenden Beweises.** Der vorangehende Beweis, für den wir von den soeben mitgeteilten Nachträgen ganz absehen können, zeigt, daß inhaltsgleiche Figuren bis auf einen beliebig kleinen Rest stets zerlegungsgleich sind. Für zwei ebene Figuren seien die Maßzahlen V und V'; zudem seien nach der gegebenen Vorschrift die Zahlen a_ν, b_ν; a_ν', b_ν' bestimmt, und infolgedessen sei also:

$$\frac{a_\nu}{\nu^2} \leqq V \leqq \frac{b_\nu}{\nu^2}, \quad \frac{a_\nu'}{\nu^2} \leqq V' \leqq \frac{b_\nu'}{\nu^2}.$$

Jetzt kann man ν so wählen, daß die $b_\nu - a_\nu$ und die $b_\nu' - a_\nu'$ Quadrate (mit der Seite $1 : \nu$) in die beliebig gewählte Fläche E eingeschlossen werden können. Ist jetzt $V = V'$, aber für den gerade gewählten Wert von ν etwa $a_\nu < a_\nu'$, so ist es auch möglich, $a_\nu' - a_\nu$ dieser Quadrate in E einzuschließen. Die Flächen, welche in der ersten oder der zweiten Figur durch a_ν dieser Quadrate bedeckt werden, sind offenbar zerlegungsgleich. Der übrig bleibende Teil kann aber leicht durch andere Anordnung der Teile in das Doppelte der Fläche E hineingelegt werden.

10. **Das Flächenmaß unter Benutzung des Dreiecks hergeleitet.** Bei der Bestimmung des Inhaltsmaßes kann man statt vom Quadrat auch vom Dreieck ausgehen, und zwar ist dies auf mancherlei Weise möglich. Die verschiedenen Wege führen aber sämtlich auf

F. Schur zurück, der seine Gedanken in den Dorpater Berichten von 1892 (S. 2ff.) dargelegt hat. Die Form, in der wir den Beweis mitteilen wollen, dürfte keineswegs die einfachste sein; wir bevorzugen sie aber, weil die leitenden Gedanken bei ihr sehr klar hervortreten. Dabei setzen wir den Satz voraus, daß in zwei Dreiecken, die in den Winkeln übereinstimmen, die homologen Seiten dasselbe Verhältnis haben. Zwar stützt sich der Beweis dieses Satzes bei Euklid und in einigen älteren Lehrbüchern auf die Lehre von der Flächengleichheit; alle neueren Bücher dürften den Beweis aber auf die bloße Vergleichung von Strecken zurückführen. Wir setzen hier ausdrücklich voraus, daß der Satz auf die zuletzt angedeutete Weise erhärtet ist.

Jetzt gehen wir von einem Dreieck ABC aus und ziehen darin die Höhen AD, BE, CF. Da die Dreiecke ADC und BEC gleiche Winkel haben, so gilt nach dem angeführten Satze die Proportion:

$$BC : CA = BE : AD.$$

Somit sind die drei Produkte $BC \cdot AD$, $CA \cdot BE$ und $AB \cdot CF$ einander gleich. Wir definieren daher, vorläufig scheinbar willkürlich, als Inhaltsmaß eines Dreiecks das halbe Produkt aus einer Seite in die zugehörige Höhe. Diese Zahl soll, wenn Δ das Dreieck ist, mit $I(\Delta)$ bezeichnet werden; sie ist, wie wir gesehen haben, von der Wahl der Seite unabhängig.

Aus unserer Definition geht hervor, daß jedesmal, wenn ein Dreieck durch eine von einem Eckpunkt ausgehende Transversale in zwei Teile zerlegt wird, das Inhaltsmaß des ganzen Dreiecks gleich ist der Summe aus den Inhaltsmaßen der Teile. Die von dem gewählten Eckpunkte ausgehende Höhe des gegebenen Dreiecks ist auch Höhe für die beiden Teildreiecke, und die gegenüberliegende Seite des ersten ist gleich der Summe aus den entsprechenden Seiten der beiden Teile.

Als Inhaltsmaß eines konvexen Vierecks müssen wir die Summe aus den Inhaltsmaßen der beiden Dreiecke ansehen, in welche das Viereck durch eine Diagonale zerlegt ist.

Dies Viereck sei $ABCD$; E sei der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Nach dem vorangehenden Satze ist:

$$I(ABC) = I(ABE) + I(CBE)$$
$$I(ADC) = I(ADE) + I(EDC),$$

also

$$I(ABC) + I(ADC) = I(ABE) + I(BCE) + I(CDE) + I(DAE).$$

Hier bezieht sich die Summe auf der rechten Seite auf die vier Dreiecke, in die das Viereck durch die beiden Diagonalen zerlegt wird; sie ist aber auch gleich der Summe aus den Inhaltsmaßen der

Dreiecke BAD und BCD. Die in der Definition auftretende Summe ist also von der Wahl der Diagonale unabhängig.

In gleich einfacher Weise ergibt sich der Satz:

Wenn ein Dreieck durch eine Gerade in ein Dreieck und ein Viereck oder ein Viereck durch eine Gerade in zwei Vierecke zerlegt wird, so ist jedesmal das Inhaltsmaß des Ganzen gleich der Summe aus den Inhaltsmaßen der Teile.

Der zweite Teil des Satzes, bei dem wir voraussetzen, daß die teilende Gerade zwei Gegenseiten des Vierecks trifft, wird unmittelbar auf den ersten Teil zurückgeführt.

11. **Inhaltsmaß für konvexe Polygone.** Als Inhaltsmaß für ein konvexes Polygon sehen wir die Summe aus den Inhaltsmaßen der Dreiecke an, in die das Polygon von irgendeiner Ecke aus zerlegt wird.

Wir müssen nachweisen, daß diese Summe von der Wahl des Eckpunktes unabhängig ist. Wählen wir etwa bei dem gewöhnlichen Vieleck $ABC \ldots MN$ zur Zerteilung das eine Mal die von A und dann die von F ausgehenden Diagonalen. Dann werden die Dreiecke ABC, ACD, ADE, AEF der Reihe nach durch die von F nach den Punkten B, C, D und die Dreiecke AFG, $AGH, \ldots AMN$ durch die von F nach H, $J, \ldots M$, N gezogenen Diagonalen zerlegt. Um die Art der Zerlegung zu übersehen, greifen wir das Dreieck ADE heraus. Dies wird durch die Diagonale FB in ein Dreieck und ein Viereck, das letztere durch FC in zwei Vierecke und das eine dieser Vierecke wiederum in ein Viereck und ein Dreieck zerlegt. In ähnlicher Weise werden die übrigen Dreiecke zerlegt. Alle Teilungen lassen sich zurückführen auf die Teilung eines Dreiecks in zwei Dreiecke oder in ein Dreieck und ein Viereck und auf die Zerlegung eines Vierecks in zwei Vierecke. Wir können daher den vorangehenden Satz anwenden.

Nun möge das Vieleck durch die von A ausgehenden Diagonalen in die Dreiecke Δ_a und diese Dreiecke durch die von F ausgehenden Diagonalen in die Teile Π_{af} geteilt werden. Dann ist nach dem erwähnten Satze:

$$\sum I(\Delta_a) = \sum I(\Pi_{af}).$$

Die Teile Π_{af} wurden aber dadurch erhalten, daß man in dem gegebenen Vieleck sowohl von A als von F aus die Diagonalen zieht. Bezeichnet man daher noch mit Δ_f die Dreiecke, in die das Polygon durch die Diagonalen des Punktes F zerlegt wird, so ist auch:

$$\sum I(\Delta_f) = \sum I(\Pi_{af}),$$

und daraus folgt:

$$\sum I(\Delta_a) = \sum I(\Delta_f).$$

Hieran schließen wir den weiteren Satz:

Zerlegt man ein konvexes Polygon durch irgendeine Gerade in zwei Teile, so ist jedesmal das Inhaltsmaß des Ganzen gleich der Summe aus den Inhaltsmaßen der beiden Teile.

Die Wahrheit dieses Satzes leuchtet sofort ein, wenn die schneidende Gerade durch zwei Eckpunkte des Polygons geht. Wenn aber die Gerade nur durch einen Eckpunkt, etwa durch A geht und die Seite GH in einem Punkte R trifft, so möge das gegebene Polygon durch Ω, das Polygon $AB \ldots GR$ durch Ω_1 und das Polygon $ARH \ldots N$ durch Ω_2 bezeichnet werden. Jetzt setzt sich der Inhalt von Ω_1 aus dem Inhalt der Dreiecke ABC, $CAD \ldots AFG$, AGR, ebenso der Inhalt von Ω_2 aus dem der Dreiecke ARH, AHJ, .. AMN, sowie endlich der des Dreiecks AGH aus dem der Dreiecke AGR und ARH zusammen; daher ist $I(\Omega) = I(\Omega_1) + I(\Omega_2)$.

Wenn aber endlich AB in S, GH in R getroffen und $SB \ldots GR$ mit Ω_3 und $RH \ldots MAS$ mit Ω_4, sowie Dreieck ASR mit Δ bezeichnet wird, so ist $I(\Omega_4) = I(\Omega_1) - I(\Delta)$, und $I(\Omega_4) = I(\Omega_2) + I(\Delta)$, so daß $I(\Omega_3) + I(\Omega_4) = I(\Omega_1) + I(\Omega_2) = I(\Omega)$ wird.

12. **Invarianz des Inhaltsmaßes bei beliebiger Zerlegung.** Jetzt denken wir uns irgendein konvexes Polygon in beliebige Teile zerlegt, die sämtlich konvexe Vielecke sein sollen. Wir wollen zeigen, daß auch jetzt das Inhaltsmaß des Ganzen gleich ist der Summe aus den Inhaltsmaßen der einzelnen Teile.

Das gegebene Polygon möge mit Ω, die einzelnen Teile mit Π_m bezeichnet werden. Wir verlängern die einzelnen Seiten dieser Teilpolygone unbegrenzt, so daß jede das gegebene Polygon durchsetzt und ihre Gesamtheit dasselbe in neue konvexe Teile Σ_r zerlegt. Diese Teilung kann dadurch erhalten werden, daß man die einzelnen Geraden in irgendeine Ordnung bringt und zuerst das gegebene Polygon durch die erste Gerade in zwei Teile zerlegt, dann die erhaltenen Teile durch die zweite Gerade teilt und hiermit fortfährt, bis alle teilenden Geraden erledigt sind. Da man auf die einzelnen Teilungen jedesmal den vorangehenden Satz anwenden kann, so besteht die Gleichung:

$$I(\Omega) = \sum I(\Sigma_r).$$

Durch die teilenden Geraden werden aber auch die einzelnen Polygone Π_m zerlegt, soweit jene Geraden in einige von ihnen eindringen. Da aber diese Geraden nur die Verlängerungen der einzelnen Seiten dieser Polygone sind, so setzt sich jedes einzelne Polygon Π_m aus bestimmten Teilen Σ_r zusammen, und diese Teilung kann wieder auf eine Folge von Zweiteilungen zurückgeführt werden. Es ist also auch:

$$\sum I(\Pi_m) = \sum I(\Sigma_r),$$

und somit

$$I(\Omega) = \sum I(\Pi_m).$$

13. **Abschluß des zweiten Beweises.** Da wir jedes einfache Polygon (nach § 4, 6, S. 66) in konvexe zerlegen können, ergibt sich auch für einfache Polygone eine bestimmte positive Zahl, die den für das Inhaltsmaß aufgestellten Forderungen entspricht. Daß diese Zahl aber wirklich als Inhaltsmaß angesehen werden darf, kann man auf ganz verschiedene Weise zeigen.

Man kann einmal im Anschluß an Schur durch eine bekannte elementare Konstruktion ein Dreieck in ein Rechteck mit vorgeschriebener Grundlinie verwandeln, d. h. ein zerlegungsgleiches Rechteck finden, von dem eine Seite gegeben ist. Hierbei hat man nur nachzuweisen, daß man bei Abänderung der Konstruktion stets dieselbe Höhe für das gesuchte Rechteck erhält; dieser Nachweis kommt auf den Satz zurück, den wir in Nr. 10 zugrunde gelegt haben. Indem wir dann die in unserer Untersuchung benutzten Dreiecke durch Rechtecke ersetzen, die in einer Seite übereinstimmen, erhalten wir für jedes Polygon ein zerlegungsgleiches Rechteck. Unsere Entwicklungen lehren uns aber, daß dies Rechteck von der Art der Zerlegung ganz unabhängig ist.

Wir können aber auch den oben (S. 78) bewiesenen Satz benutzen, daß jedes Polygon mit einem Quadrate zerlegungsgleich ist. Nun haben die durchgeführten Entwicklungen gezeigt, daß nur solche Polygone zerlegungsgleich sein können, welche in dem angenommenen Sinne dasselbe Inhaltsmaß besitzen. Hiernach lassen sich Polygone, denen bei der getroffenen Festsetzung dasselbe Flächenmaß zukommt, in dasselbe Quadrat verwandeln; sie sind aber auch stets zerlegungsgleich. Wir erhalten demnach das Resultat:

Liegen irgend zwei einfache Polygone Ω_1 und Ω_2 vor, so ist entweder Ω_1 mit Ω_2 oder Ω_1 mit einem Teile von Ω_2 oder es ist Ω_2 mit einem Teile von Ω_1 zerlegungsgleich. Diese drei Möglichkeiten schließen sich gegenseitig aus. Indem wir dann das Inhaltsmaß in der Weise definieren, welche der letzten Untersuchung als Grundlage dient, ist im ersten Falle $I(\Omega_1) = I(\Omega_2)$, im zweiten $I(\Omega_1) > I(\Omega_2)$ und im dritten $I(\Omega_1) < I(\Omega_2)$.

14. **Hilberts Nachweis für die Berechtigung des Flächenmaßes.** Während der in den Nummern 5—9 geführte Beweis für die Berechtigung des Flächenmaßes den Grenzbegriff in der ausgiebigsten Weise benutzt, beschränkt sich der zweite Beweis (Nr. 10 bis 13) im wesentlichen auf endliche Operationen. Nur der Satz von

der Proportionalität der Strecken, auf dem sich die ganze Entwicklung aufbaut, macht in seinem gebräuchlichen Beweise einen Grenzübergang notwendig. Es ist daher ein großer Fortschritt, daß es Hilbert in seinen „Grundlagen der Geometrie“ gelungen ist, auch beim Beweise dieses Satzes jede Grenzbetrachung zu vermeiden.

Um dies Ziel zu erreichen, führt Hilbert eine Streckenrechnung ein, für die dieselben Gesetze gelten wie beim Rechnen mit reellen Zahlen. Die erste Aufgabe muß es sein, die Analoga zu den vier Grundrechnungen aufzustellen, und diese kommt, da Subtraktion und Division die Umkehrungen der Addition und der Multiplikation sind, nur darauf hinaus, die Summe und das Produkt zweier Strecken wieder als Strecke darzustellen. Die erste von diesen beiden Aufgaben ist schon durch die Kongruenz-Axiome gelöst; für die zweite kann ebensowenig wie bei der gebräuchlichen Messung der Strecken die Einheitsstrecke oder die Strecke 1 entbehrt werden, und gleichwie die Maßeinheit für zusammenhängende Untersuchungen beibehalten werden muß, so verlangt auch Hilbert, daß die Strecke 1 für die ganze Betrachtung die nämliche bleibt. Um jetzt das Produkt zweier Strecken zu definieren, trägt er auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels vom Scheitel O die Strecke $OE = 1$ und die Strecke $OB = b$, auf dem andern die Strecke $OA = a$ ab; wenn jetzt die durch B zu AE gezogene Parallele den zweiten Schenkel in C schneidet, so setzt er die Strecke OC gleich dem Produkte ab.

Für diese Streckenrechnung gelten, wie Hilbert nachweist, die drei Grundgesetze der Multiplikation; es ist also

$$ab = ba$$
$$a(bc) = (ab)c$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

Um hieraus die Lehre von der Proportionalität der Strecken herzuleiten, kann man entweder das Verhältnis zweier Strecken als einen Quotienten auffassen und diesen durch Umkehrung der Multiplikation wieder als eine Strecke darstellen; oder man kann rein formell festsetzen, daß die Proportion $a : b = a' : b'$ zwischen irgend vier Strecken a, b, a', b' nichts anderes bedeuten soll als die Streckengleichung $ab' = ba'$. Alsdann läßt sich leicht der Satz beweisen, daß in zwei Dreiecken, die in den Winkeln übereinstimmen, entsprechende Seiten in demselben Verhältnisse stehen. Das ist aber der Satz, von dem wir oben ausgegangen sind.

Die Streckenrechnung Hilberts ist schon an sich von großer prinzipieller Bedeutung, da sie uns eine Gruppe von Operationen liefert, die denselben Gesetzen folgt wie die Rechnung mit ganzen Zahlen, obwohl die Voraussetzungen, denen die reellen Zahlen unterworfen sind, für die Strecken nicht bestehen. Ihre Wichtigkeit tritt, wenngleich nicht immer direkt, auch in den späteren Abschnitten des Hilbertschen Buches hervor, wo es sich darum handelt, die Abhängigkeit fundamentaler Theoreme voneinander und von den einzelnen Gruppen der Hilbertschen Axiome zu prüfen. Ferner kann man, von der Streckenlehre Hilberts ausgehend, die analytische Geometrie in der Weise aufbauen, daß sowohl die Koordinaten als auch die Koeffizienten in sämtlichen Gleichungen nicht Zahlen, sondern Strecken sind, während die weitere Durchführung sich von der gebräuchlichen gar nicht unterscheidet. Hierdurch wird es möglich, von den vier ersten Axiomgruppen ausgehend, die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes streng zu begründen; man erkennt aber bei diesem Ausgangspunkte sehr leicht, welche weiteren Axiome hinzugefügt werden müssen, um die gewöhnliche analytische Geometrie zu erhalten.

Die Beweise, durch die Hilbert seine Streckenrechnung begründet und aus ihr die Ähnlichkeitslehre hergeleitet hat, sind vielfach umgeändert worden; man hat sogar die Ähnlichkeitslehre an die Spitze und die Streckenrechnung an die zweite Stelle gesetzt. Die verschiedenen Methoden auch nur anzudeuten, würde zu weit führen. Wir begnügen uns damit, außer auf Hilberts Werk auf eine Arbeit von Kneser im Arch. für Math. u. Phys. R. III B. 2, eine Arbeit von Schur im 57. Bd. der math. Ann. und auf die entsprechenden Entwicklungen in Weber-Wellsteins Encyklopädie (Bd. II, S. 247—257) zu verweisen.

Wir möchten nur kurz andeuten, in welcher Weise sich unter Benutzung der Streckenrechnung das Flächenmaß als berechtigt nachweisen läßt. Genau wie in Nr. 9, definieren wir das Inhaltsmaß eines Dreiecks als das halbe Produkt aus einer Seite in die zugehörige Höhe, stellen dies Produkt aber nicht als eine Zahl, sondern als eine Strecke dar. Nun können wir die Untersuchungen der Nummern 10—13 wiederum durchführen. Dadurch ordnen wir jedem einfachen Polygon eine bestimmte Strecke in der Weise zu, daß

a) nicht nur allen kongruenten, sondern auch allen zerlegungsgleichen Polygonen dieselbe Strecke entspricht, und

b) zwei Polygone, die derselben Strecke entsprechen, stets zerlegungsgleich sind.

Hierdurch wird die Lehre von der Flächengleichheit und von der Ausmessung der Polygone unabhängig von den beiden Stetigkeitsaxiomen. Der durch Hilbert begründete Fortschritt besteht somit nicht nur darin, daß die Beweisführung von allen Grenzbetrachtungen frei wird, sondern auch darin, daß der Bereich, für den die Sätze über die ebenen Polygone ihre Gültigkeit bewahren, wesentlich erweitert wird.

15. Möbius' Methode zur Bestimmung des Flächenmaßes. Die Methode, nach der Möbius den Flächeninhalt bestimmt, ist nicht nur geeignet, den in Nr. 10ff. durchgeführten Beweis zu vereinfachen, sondern ermöglicht es auch, jedem beliebigen Polygon ein Inhaltsmaß beizulegen, ja mit jeder endlichen geschlossenen Kurve eine gewisse Invariante als Flächeninhalt in Verbindung zu setzen.

Zu dem Ende gehen wir vom Flächeninhalt eines Dreiecks aus. Wir verwandeln dasselbe etwa mit Schur in ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Längeneinheit ist. Alsdann versehen wir die Maßzahl der Höhe (oder wenn man lieber will, die Maßzahl des zerlegungsgleichen Rechtecks) mit dem positiven oder dem negativen Vorzeichen, je nachdem der Sinn des Dreiecks positiv oder negativ ist. Statt dessen können wir auch die Höhe des entsprechenden Rechtecks auf einer vorgeschriebenen Geraden von einem festen Punkte aus in positiver oder negativer Richtung je nach dem Sinne des Dreiecks abtragen. Im letzteren Falle benutzen wir Hilberts Streckenrechnung und sind damit vom archimedischen Axiom unabhängig.

Bei dieser Anwendung der Vorzeichen gilt offenbar die Beziehung:

$$ABC + ACB = 0. \tag{a}$$

Gehören die Punkte A, B, C einer geraden Linie an, so liegt jedesmal einer zwischen den beiden andern. Wenn speziell B zwischen A und C liegt, so ergibt sich wegen der Gleichheit der Zeichen bei beliebiger Lage des Punktes D die Beziehung:

$$DAB + DBC = DAC,$$

die wir wegen der Gleichung (a) auch in der Form schreiben können:

$$DBC + DCA + DAB = 0. \tag{b}$$

In dieser Gleichung kommen die drei in gerader Linie liegenden Punkte A, B, C ganz gleichmäßig vor; sie gilt daher unabhängig von der Annahme, daß B zwischen A und C liegen soll.

Endlich gilt für irgend vier Punkte A, B, C, D die Gleichung:

$$ABC = DBC + DCA + DAB, \tag{c}$$

die wir auch in der Form schreiben können:

$$BCD - CDA + DAB - ABC = 0. \tag{d}$$

Beim Beweise dürfen wir voraussetzen, daß keine drei der gegebenenen Punkte in gerader Linie liegen, da im andern Falle die Beziehung (c) auf die Gleichung (b) hinauskommt. Dann muß es mindestens einmal vorkommen, daß eine der drei Geraden DA, DB, DC die Gegenseite des Dreiecks ABC trifft. Wenn jetzt speziell die Geraden DA und BC einen Punkt E gemeinschaftlich haben, so gelten nach (b) die vier Gleichungen:

$$ACB + ABE + AEC = 0,$$
$$DBC + DCE + DEB = 0,$$
$$CDA + CAE + CED = 0,$$
$$BDA + BAE + BED = 0.$$

Bei der Addition dieser vier Gleichungen heben sich alle diejenigen Dreiecke weg, für welche E ein Eckpunkt ist, und dann geht aus der Summe die Gleichung (c) hervor.

Aus der Gleichung (c) können wir folgenden Satz herleiten:

Die algebraische Summe der Dreiecke, welche die im Umlaufssinne genommenen Kanten eines Polygons der Reihe nach mit einem beliebigen Punkte der Ebene bilden, ist von der Wahl dieses Punktes unabhängig.

Gegeben sei ein Polygon $ABC \ldots LMN$. Wir bilden für zwei beliebige Punkte O und Q unter Berücksichtigung der Vorzeichen die Summen:

$$(O) = OAB + OBC + \cdots + OLM + OMN + ONA,$$
$$(Q) = QAB + QBC + \cdots + QLM + QMN + QNA.$$

Nach (c) gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} OAB &= QAB + QBO + QOA, \\ OBC &= QBC + QCO + QOB, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ OMN &= QMN + QNO + QOM, \\ ONA &= QNA + QAO + QON. \end{aligned}$$

Bei der Addition hebt sich QOA gegen QAO, QOB gegen $QBO, \ldots QON$ gegen QNO weg; es folgt also:

$$(O) = (Q).$$

Dieser Satz gestattet uns, den Inhalt eines beliebigen Vielecks als die algebraische Summe der Dreiecke zu definieren, welche die im Umlaufssinn genommenen Seiten mit einem beliebigen Punkte der Ebene bilden.

Es braucht wohl kaum darauf hingewiesen zu werden, daß die Integralrechnung beim Gebrauch von Polarkoordinaten genau in derselben Weise verfährt wie Möbius bei Benutzung der aufgestellten Regel. Sind etwa der Radiusvektor r und die Amplitude φ als Funktionen einer Variabeln t gegeben und wird ein geschlossener Zweig der Kurve dadurch erhalten, daß man t alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt, so erhält man die von diesem Zweige umschlossene Fläche, indem man den Ausdruck $\frac{1}{2}r^2 d\varphi$ durch t darstellt und zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integriert.

Da das Inhaltsmaß durch eine algebraische Summe erhalten wird, kann es negative Werte und den Wert null annehmen. Dasselbe ergibt sich in der Integralrechnung. Betrachtet man z. B. die Fläche, welche von der Kurve

$y = \sin x$ und der x-Achse begrenzt wird, so liefert die Integralrechnung für die Grenzen $x = 0$ und $x = 2\pi$ den Flächeninhalt null. Die ganze Fläche zerlegt sich in zwei Teile, die, absolut genommen, gleich sind, von denen aber der eine auf der positiven, der andere auf der negativen Seite der x-Achse liegt.

16. **Die Methode von Möbius für einfache Polygone.** Wir haben oben (§ 4, 6) im Anschluß an Hilbert ein Polygon $ABC\ldots MN$ einfach genannt, falls die Seiten (Kanten) keinen Punkt gemein haben und kein Eckpunkt in eine Seite fällt. Indem wir dasselbe durch $n-3$ passend gewählte, einander nicht schneidende Diagonalen in $n-2$ Dreiecke zerlegen, hat jedes Dreieck mindestens eine Seite mit dem Polygon gemeinschaftlich; jede Seite müssen wir in demselben Sinne nehmen, mag man sie als Seite des Polygons oder eines Dreiecks auffassen. Alsdann können wir durch geeignete Wahl von rechts und links noch erreichen, daß alle diese Dreiecke ein positives Inhaltsmaß erhalten.

Ein derartiges Teildreieck sei etwa FKL, wo K und L zwei aufeinander folgende Eckpunkte sind, während F ein beliebiger dritter Eckpunkt sein kann. Der Inhalt dieses Dreiecks ist gleich der algebraischen Summe

$$OKL + OLF + OFK.$$

Die Seite KL kommt in keinem zweiten Teildreieck vor, während ein zweites Teildreieck die Diagonale LF noch in dem Sinne FL und ein drittes Teildreieck die Diagonale FK noch im Sinne KF enthält. Bilden wir also die Summe des Inhaltsmaßes für alle Teildreiecke, so heben sich die Dreiecke weg, welche der Punkt O mit den einzelnen Diagonalen bildet; es bleiben also nur diejenigen Dreiecke, welche die im Sinne des Umlaufs genommenen Seiten des Polygons mit dem Punkte O bilden. Somit ist die Summe der Inhaltsmaße der Teildreiecke gleich

$$OAB + OBC + \cdots + OMN + ONA,$$

oder gleich dem Inhalt des Polygons.

Daraus ergibt sich der Satz:

Wenn ein einfaches Polygon durch Diagonalen in $n-2$ Dreiecke zerlegt wird, so ist im absoluten Sinne der Inhalt des Polygons gleich der Summe aus den Inhalten der einzelnen Dreiecke.

Dieser Satz läßt sich ganz beträchtlich erweitern.

Das einfache Polygon $ABC\ldots MN$ sei auf irgendeine Weise in eine beliebige Anzahl von lauter einfachen Teilpolygonen zerlegt. Wenn einer dieser Teile mit einer Seite (Kante) des Polygons eine Strecke RS gemeinschaftlich hat und zwischen R und S kein Eckpunkt eines Teilpolygons liegt, so muß, damit die Teilpolygone mit dem gegebenen auch im Sinn übereinstimmen, die Strecke RS als Kante eines Teilpolygons in dem durch die aufeinander folgenden Endpunkte der entsprechenden Kante des gegebenen Polygons bestimmten Sinne genommen werden. Dadurch ist denn auch der Sinn für jede andere Kante dieses Teilpolygons bestimmt. Die Strecke RS ist Kante eines Teilpolygons; sie enthält aber kein Stück in sich, welches einer Kante irgendeines andern Teilpolygons angehört.

Wenn dagegen TU eine im Innern des gegebenen Polygons gelegene Strecke ist, deren Endpunkte Ecken von Teilpolygonen sind, die selbst Stück einer Kante für ein Teilpolygon ist, während zwischen ihren Endpunkten keine Eckpunkte von Teilpolyedern liegen, so muß dasselbe Stück noch einem zweiten Teilpolygon als Kantenstück angehören. Aber die Kante, auf der diese Strecke enthalten ist, hat in dem einen Teilpolygon die Richtung TU und im andern die Richtung UT.

Die Kanten des gegebenen Polygons zerlegen sich hiermit in lauter Stücke von der Art der Strecke RS, welche sämtlich nur einmal vorkommen und dieselbe Richtung haben wie die entsprechenden Kanten des gegebenen Polygons. Dagegen zerlegen sich diejenigen Kanten der Teilpolygone, welche im Innern des gegebenen Polygons liegen, in lauter Stücke von der Art TU, welche sämtlich zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung vorkommen. Bildet man jetzt die Summe aller Teilpolygone nach der Möbiusschen Regel, so stellt sich diese Summe dar als Summe von Dreiecken von der Art ORS und von Dreiecken von der Art OTU und OUT. Da aber die Summe der Strecken RS den Umfang des Polygons $ABC \ldots MN$ darstellt, so liefert die Summe der Dreiecke der ersten Art den Inhalt des Polygons, während die Inhaltsmaße der übrigen Dreiecke sich paarweise wegheben.

Daraus ergibt sich der Satz:

Wenn man ein einfaches Polygon in irgendeiner Weise in Teile zerlegt, die ebenfalls einfache Polygone sind, und den Inhalt des Ganzen und seiner Teile nach der Vorschrift von Möbius bestimmt, so ist das Inhaltsmaß des Ganzen, absolut genommen, gleich der Summe aus den Inhaltsmaßen der Teile.

17. **Praktische Regel zur Bestimmung des Flächeninhalts von überschlagenen Polygonen.** Durch den letzten Satz ist der Begriff des Flächeninhalts für Polygone, deren Kanten sich nicht schneiden, auf eine überaus einfache Weise begründet. Die Theorie von Möbius kann aber durch einen einfachen Grenzübergang auf krummlinig begrenzte ebene Flächen übertragen werden; sie vereinigt daher in der vollkommensten Weise Allgemeinheit der Resultate und Einfachheit der Beweise.

Wir gehen jetzt dazu über, in Anwendung dieser Theorie eine Regel aufzustellen, nach der wir den Flächeninhalt beliebiger Polygone bestimmen können, ohne, wie es bei der Begründung geschieht, einen Punkt O hinzuzunehmen, der der Figur ganz fremd ist. Dabei dürfen wir das Inhaltsmaß eines einfachen Polygons als bekannt voraussetzen, da dasselbe als Summe aus einer beschränkten Zahl von Dreiecken erscheint. Im weiteren beschränken wir uns auf Polygone, deren Kanten weder zu dreien durch denselben Punkt gehen, noch einander in einem Eckpunkte schneiden.

Ein Polygon dieser Art zerfällt in lauter einfache Vielecke, Zellen, die wir mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ bezeichnen wollen. Wir betrachten zwei hinreichend kleine Flächenteile ω_1 und ω_2, welche in derselben Zelle liegen und aneinander stoßen. Jeder dieser Flächenteile muß bei der Bestimmung des Flächeninhalts so oft als positiv in Anrechnung gebracht werden, als er bei der Bewegung des von dem gewählten Punkte O ausgehenden Strahles in positivem, und so oft negativ genommen werden, als er in negativem Sinne getroffen wird. Setzt man voraus, daß der Punkt O der Zelle nicht angehört, in der die beiden Teile ω_1 und ω_2 liegen, so werden diese Flächenstücke offenbar jedesmal in demselben Sinne überschritten. Es möge hierbei der Teil ω_1 etwa a mal bei positiver und b mal bei negativer Drehung erhalten werden. Da diese beiden Zahlen auch für den Teil ω_2 erhalten werden, so muß das Maß für jeden der beiden Teile $(a-b)$ mal in Anrechnung gebracht werden. Nun kann man zwischen irgend zwei Flächenstücke, die in derselben Zelle liegen, eine Reihe von Stücken einschieben, die sämtlich dieser Zelle angehören und zu je zweien zusammenstoßen; die obige Differenz hat also für irgend zwei in derselben Zelle gelegenen Stücke denselben Wert. Demnach kommt auch jeder einzelnen Zelle φ_α eine bestimmte positive oder negative Zahl c_α zu, welche angibt, wie oft der absolut genommene Flächeninhalt der Zelle in Anrechnung gebracht werden muß.

Jetzt betrachten wir zwei Flächenstücke ω_3 und ω_4, welche verschiedenen Zellen φ_α und φ_β angehören, aber in einem Kantenstücke aneinander stoßen. Wählen wir den Punkt O auf der positiven Seite dieser Kante und bezeichnen wir das gemeinsame Kantenstück mit RS, so gehört dasjenige Flächenstück, welches auf der positiven Seite von RS liegt, dem Dreieck ORS an, während das andere Flächenstück diesem Dreieck nicht angehört. Den übrigen Dreiecken, welche durch Verbindung von O mit den einzelnen Kanten gebildet werden, gehören aber die Flächenstücke ω_3 und ω_4 entweder beide an oder beide nicht an. Wenn daher etwa ω_3 auf der positiven Seite von RS liegt, so gehört zu ω_3 eine um eins höhere Zahl als zu ω_4. Daher haben auch irgend zwei Zellen φ_α und φ_β, welche in einer Kante des

Polygons aneinander stoßen, eine um eins verschiedene Zahl c, und zwar ist $c_\alpha = c_\beta + 1$, falls φ_α dem Kantenstück gegenüber auf der positiven Seite liegt. Für den unendlichen Ebenenteil φ_0, der keine Zelle des Polygons enthält, muß die entsprechende Zahl c_0 gleich null sein, da bei jeder Wahl von O gewisse Teile von φ_0 durch kein Dreieck $OAB, \ldots ONA$ bedeckt werden. Tritt man von diesem Teile aus über eine Kante in eine Zelle ein, so ist die dieser Zelle entsprechende Zahl gleich $+1$ oder -1, je nachdem der Übergang nach der positiven oder der negativen Seite hin erfolgt. Indem man immer weiter zu benachbarten Zellen übergeht, kann man die den einzelnen Zellen beizulegenden Zahlen bestimmen, und diese Zahlen sind unabhängig von den Zellen, die man zur Vermittlung benutzt hat.

Aus dieser Betrachtung, die bereits Möbius angestellt hat, geht eine praktische Regel hervor, die wir im Anschluß an Baltzer folgendermaßen aussprechen können:

Man durchläuft den Umfang des Polygons im positiven Sinne und schraffiert jedesmal die positive Seite. Wenn jetzt zwei Zellen φ_α und φ_β in einem Kantenstück zusammenstoßen und man beim Übergange von φ_β zu φ_α zu der schraffierten Seite gelangt, so ist $c_\alpha = c_\beta + 1$. Indem man vom Äußeren des Polygons durch Übergang zur schraffierten Seite zu einer Zelle $\varphi_\varkappa$ gelangt, ist $c_\varkappa = +1$; im entgegengesetzten Falle muß man $c_\varkappa = -1$ setzen. Hiermit fährt man fort und bestimmt nach der angegebenen Vorschrift zu jeder Zelle φ_α eine Zahl c_α. Indem man dann den Flächeninhalt einer jeden Zelle mit c_α multipliziert und alle diese Produkte addiert, erhält man den Flächeninhalt des Polygons.

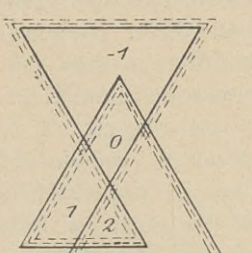

Fig. 9.

Hiernach ist der Inhalt eines überschlagenen Vierecks gleich der Differenz der beiden Dreiecke, aus denen es besteht. Ein sternförmiges Fünfeck zerfällt in sechs Zellen, ein Fünfeck und sechs Dreiecke; wir haben jedem Dreieck den Koeffizienten $+1$, dem Fünfeck den Koeffizienten $+2$ beizulegen. Das nebenstehende Siebeneck zerfällt in ein Dreieck φ_3, zwei Vierecke φ_4 und φ_4', ein Fünfeck φ_5 und ein Sechseck φ_6. Das Sechseck erhält die Zahl $+1$, das Fünfeck die Zahl -1, das eine Viereck φ_4 die Zahl $+1$, das andere φ_4' die Zahl 0, das Dreieck die Zahl 2; daher ist der Flächeninhalt gleich $2\varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_5 + \varphi_6$.

§ 6. Die Begriffe „rechts“ und „links“ im Raume. Theorie der Polyeder.

1. **Teilung des Raumes durch eine Ebene und durch einen Flächenwinkel.** Jede Ebene teilt den Raum so in zwei Teile, Halbräume oder Seiten der Ebene, daß die Verbindungsstrecke von je zwei Punkten, die auf derselben Seite liegen, keinen Punkt mit der Ebene gemein hat, während jede Strecke, die von zwei auf verschiedenen Seiten gelegenen Punkten begrenzt wird, die Ebene trifft.

Das Gebilde, das aus zwei in einer Geraden zusammenstoßenden, aber nicht derselben Ebene angehörenden Halbebenen besteht, heißt ein Flächenwinkel oder ein Keil. In einer Strecke, welche einen Punkt der einen Halbebene mit einem Punkte der andern verbindet, sei ein Punkt A angenommen. Wenn dann auch von den Punkten B, C, D, E keiner in einer der beiden Halbebenen liegt, und die Strecken AB und AC mit keiner der beiden Halbebenen einen Punkt gemein haben, dagegen die Strecken AD und AE je eine der Halbebenen treffen, so muß auch zwischen den Punkten B und D, B und E, C und D, C und E je ein Punkt auf einer Halbebene liegen; dagegen können sowohl die Punkte B und C als auch die Punkte D und E durch einen Streckenzug verbunden werden, der keine der beiden Halbebenen trifft. Daher teilt der Flächenwinkel den Raum in zwei Teile. Der eine von diesen beiden Teilen enthält jede Strecke, durch welche ein Punkt der einen Halbebene mit einem Punkte der andern verbunden wird; dieser Teil heißt der natürliche Winkelraum des Flächenwinkels.

2. **Rechts und links von einer Ebene.** Wie wir in § 4 gesehen haben, können wir jeder Ebene einen gewissen Sinn beilegen. Dieser Sinn ist bestimmt, sobald in der Ebene ein Dreieck ABC gegeben ist und man festgelegt hat, auf welcher Seite der Punkt C gegen die in der Richtung von A nach B genommene Gerade AB liegen soll. Demnach können wir den Sinn einer Ebene durch die Anordnung von drei Punkten bezeichnen, die ihr angehören, aber nicht in gerader Linie liegen. Wenn wir daher im folgenden von einer Ebene ABC sprechen, so soll der durch diese drei Punkte gelegten Ebene derjenige Sinn beigelegt werden, der dadurch bestimmt ist, daß der Punkt C auf der linken Seite der in der Richtung von A nach B genommenen Geraden AB liegt. Bei einer solchen Bezeichnung fallen zwar die Ebenen ABC und ACB in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen, unterscheiden sich aber durch ihren Sinn.

Nachdem der Sinn einer Ebene festgelegt ist, sollen die beiden

Teile, in die der Raum durch die Ebene zerlegt wird, als die rechte und die linke Seite der Ebene unterschieden werden. Für diese Anordnung sollen folgende Gesetze gelten:

a) Alle Punkte auf derselben Seite einer Ebene (in demselben Halbraum) liegen $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von einer Ebene, sobald ein einziger Punkt dieses Raumteiles $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von der Ebene liegt; dagegen liegen in diesem Falle alle Punkte des andern Raumteiles $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von der Ebene.

b) Jedesmal, wenn ein Punkt $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von einer mit einem bestimmten Sinn behafteten Ebene liegt, liegt er $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von derselben Ebene, sobald der Sinn der Ebene geändert wird.

c) Jedesmal, wenn ein Punkt D $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von der Ebene ABC liegt, liegt C $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von der Ebene ABD.

Um nach diesen Vorschriften die Begriffe rechts und links festzulegen, muß man von vier Punkten A, B, C, D ausgehen, die nicht in einer Ebene liegen und somit die Eckpunkte eines Tetraeders bilden. Die Forderung b) besagt, daß für den Punkt D die linke und die rechte Seite gegen die durch die drei ersten Punkte gelegte Ebene sich jedesmal vertauschen, wenn irgend zwei der drei Punkte A, B, C miteinander vertauscht werden. Indem man die Forderung c) hinzunimmt, erkennt man, daß überhaupt jedesmal die Begriffe rechts und links miteinander vertauscht werden müssen, sobald man irgend zwei unter den vier Punkten A, B, C, D miteinander vertauscht. Speziell läßt sich hiernach die rechte und die linke Seite für jede Grenzfläche des Tetraeders $ABCD$ bestimmen, sobald die rechte und die linke Seite für irgendeine von ihnen festgelegt ist, und zwar muß nicht nur, wenn A $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von BDC liegt, auch B $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von ADC, C $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von DAB und D $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von CBA liegen, sondern jede einzelne der vier Festsetzungen zieht die entsprechenden Festsetzungen für die drei anderen Punkte nach sich.

Diese einfache Überlegung ermöglicht es, für jede Ebene, deren Sinn festgelegt ist, die rechte und die linke Seite zu bestimmen, sobald für irgendeine mit einem gewissen Sinn versehene Ebene die entsprechende Festsetzung willkürlich getroffen ist. So denken wir uns irgendeine Anzahl von Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda$ gegeben und für jede einen Sinn festgelegt. Die Ebene α zerteile den Raum in die beiden Teile A' und A'', von denen der erste als die linke, der zweite als die rechte Seite willkürlich angesetzt sein soll. Alsdann läßt sich, wie wir noch näher ausführen werden, eindeutig bestimmen, welchen von den beiden Teilen, in die eine der übrigen Ebenen den Raum zerlegt, wir als die rechte und als die linke Seite bezeichnen müssen. So seien B' und B'' die beiden Seiten von β, Γ' und Γ'' die beiden Seiten von γ, Δ' und Δ'' die beiden Seiten von δ, Λ' und Λ'' die beiden Seiten von λ. Wir wollen speziell annehmen, dadurch, daß wir A' als die linke Seite von α angenommen haben, hätten wir $B', \Gamma', \Delta', \ldots, \Lambda'$ jedesmal als die linke, $B'', \Gamma'', \Delta'', \ldots, \Lambda''$ jedesmal als die rechte Seite erhalten. Nun gehen wir von der Ebene β aus, setzen B' als ihre linke, B'' als ihre rechte Seite voraus und bestimmen hiernach die linken Seiten der Ebenen $\alpha, \gamma, \delta, \ldots, \lambda$. Alsdann wird sich zeigen, daß wir wieder die Raumteile $A', \Gamma', \Delta', \ldots, \Lambda'$ als die linken Seiten der einzelnen Ebenen erhalten.

Zur Begründung dieser Behauptungen genügt es, drei Ebenen zu betrachten, die nicht durch dieselbe gerade Linie gehen; wir wollen aber eine vierte Ebene hinzunehmen, die mit den drei ersten ein Tetraeder begrenzt. Dementsprechend gehen wir von den vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines Tetraeders $ABCD$ aus und nehmen an, daß das Dreieck BCD in der Ebene α, das Dreieck ACD in der Ebene β, das Dreieck ABD in der Ebene γ und das Dreieck ABC in der Ebene δ liege. Wenn jetzt der Sinn von α mit BCD, der von β mit ADC, der von γ mit DAB und der von δ mit CBA zusammenfällt, so liegen gleichzeitig $A \left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von α, $B \left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von β, $C \left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von γ und $D \left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von $\mathfrak{d}$. Sobald daher die linke und die rechte Seite für irgendeine Ebene willkürlich angenommen sind, kann man die linke und die rechte Seite für jede andere, mit der ersten nicht parallele Ebene eindeutig bestimmen, da man durch Hinzunahme von drei weiteren Ebenen ein Tetraeder erhält. Wir sehen aber zugleich, daß es für das Ergebnis ganz gleichgültig ist, von welcher Ebene man ausgeht, da aus irgendeiner der obigen vier Festsetzungen die übrigen drei jedesmal in ganz übereinstimmender Weise hervorgehen. Der Zusammenhang, der zwischen den linken und den rechten Seiten der Grenzflächen eines Tetraeders besteht, wird aber nicht aufgehoben, wenn die einzelnen Seitenflächen nicht gerade den soeben angenommenen Sinn haben: wir brauchen nur zu beachten, daß sich rechts und links vertauscht, sobald der Sinn der Ebene geändert wird.

Bei parallelen Ebenen liegt es nahe, parallelen Dreiecken mit gleichgerichteten Seiten, von denen jedes in einer dieser Ebenen liegt, denselben Sinn beizulegen. Indessen ist es auch gestattet, den Sinn in jeder einzelnen Ebene willkürlich festzusetzen. In beiden Fällen sind die Änderungen, die an den angestellten Beobachtungen angebracht werden müssen, so geringfügig, daß wir darauf nicht einzugehen brauchen.

3. **Sinn eines Tetraeders und eines Dreikants.** Zwei Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ haben gleichen Sinn, wenn der Punkt A auf derselben Seite von der Ebene BCD liegt, wie der Punkt A' gegen die Ebene $B'C'D'$; dagegen legt man ihnen verschiedenen Sinn bei, wenn von den Punkten A und A' der eine auf der linken, der andere auf der rechten Seite seiner Gegenebene liegt, wofern man der einen Ebene den Sinn BCD, der anderen den Sinn $B'C'D'$ beilegt.

Sobald zwei Tetraeder einem dritten gegenüber denselben Sinn haben, haben sie auch untereinander denselben Sinn. Sobald von zwei Tetraedern das eine im Sinne mit einem dritten übereinstimmt, das andere aber nicht, haben sie selbst verschiedenen Sinn.

Um zu erkennen, ob die beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ denselben Sinn haben oder nicht, kann man ein drittes Tetraeder $AA'MN$ hinzunehmen, für welches die Eckpunkte M und N auf der Schnittlinie der Ebenen BCD und $B'C'D'$ liegen. Durch den Sinn der Dreiecke BCD und $B'C'D'$ ist auch der Sinn der Dreiecke BMN und $B'MN$ bestimmt. Sobald man aber weiß, ob A links oder rechts von BCD liegt, kann man auch bestimmen, auf welcher Seite A von BMN liegt. Dadurch erhält man den Sinn des Tetraeders $ABMN$ und daraus den von $A'BMN$, somit auch den Sinn von $A'B'MN$ und schließlich den Sinn von $A'B'C'D'$.

Wofern die Ebenen BCD und $B'C'D'$ parallel sind, läßt sich die Entscheidung noch weit einfacher treffen.

Zwei Dreikante $O:ABC$ und $O':A'B'C'$ heißen $\left\{\begin{matrix}\text{gleichläufig}\\ \text{gegenläufig}\end{matrix}\right\}$, wenn der Punkt O der Ebene ABC gegenüber auf $\left\{\begin{matrix}\text{derselben}\\ \text{der entgegengesetzten}\end{matrix}\right\}$ Seite liegt wie der Punkt O' gegen die Ebene $A'B'C'D'$.

Der Sinn eines Dreikants ändert sich stets bei Vertauschung zweier Kanten.

Zwei Dreikante, die demselben dritten gegenüber entweder beide gleichläufig oder beide gegenläufig sind, sind untereinander gleichläufig; wenn aber von zwei Dreikanten das eine mit einem dritten gleichläufig, das andere gegenläufig ist, so sind sie untereinander gegenläufig.

Zwei Gegendreikante sind stets gegenläufig zueinander.

Es seien die Halbstrahlen OA und OA', OB und OB', OC und OC' je einander entgegengesetzt. Der Kürze wegen sei es für den Augenblick gestattet, unter dem Symbol $[O, ABC]$ entweder $+1$ oder -1 zu verstehen, je nachdem O auf der linken oder auf der rechten Seite von ABC liegt. Dann ist:

$$\begin{aligned}[O, ABC] &= -[A, OBC] = -[A, OB'C'] \\ &= [A', OB'C'] = -[O, A'B'C'].\end{aligned}$$

Gewöhnlich nimmt man zum Vergleich das Dreikant hinzu, welches für jeden Menschen aus den Richtungen nach vorn, nach links und nach oben gebildet wird. Praktisch ist es natürlich von Bedeutung, daß hierdurch die Vergleichung nicht bloß von Dreikanten, sondern auch von Tetraedern erleichtert wird, aber die theoretischen Untersuchungen sind von einem derartigen Hilfsmittel unabhängig.

4. **Rechts und links auf einer Kugel.** Indem wir durch den Mittelpunkt einer Kugel eine Ebene legen, können wir die vorangehende Theorie auf die Kugel übertragen und die beiden Halbkugeln, in welche die Oberfläche der Kugel durch eine derartige Ebene zerlegt wird, als rechte und linke Seite des begrenzenden Hauptkreises unterscheiden. Dementsprechend bezeichnen wir zwei sphärische Dreiecke ABC und $A'B'C'$, die auf derselben, um den Mittelpunkt O beschriebenen Kugel liegen, als $\left\{\begin{matrix}\text{gleichläufig}\\ \text{gegenläufig}\end{matrix}\right\}$, falls die Dreikante $O : ABC$ und $O : A'B'C'$ $\left\{\begin{matrix}\text{gleichläufig}\\ \text{gegenläufig}\end{matrix}\right\}$ sind.

Wir können diese Theorie aber auch selbständig begründen. Zu dem Ende ordnen wir zuvörderst je zwei Punkte desselben Hauptkreises, die nicht Gegenpunkte voneinander sind, einander nach links und rechts zu, indem wir folgende Gesetze aufstellen:

a) Jedesmal, wenn B $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von A liegt, liegt jeder Punkt in dem von A ausgehenden Halbkreise, der den Punkt B enthält, $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von A, dagegen jeder Punkt des entgegengesetzten, von A ausgehenden Halbkreises $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von A.

b) Jedesmal, wenn B $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von A liegt, liegt A $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von B.

Hiernach vertauschen sich die Begriffe rechts und links, wenn man einen der beiden Punkte durch seinen Gegenpunkt ersetzt.

Indem man die beiden aufgestellten Forderungen festhält, kann man, ausgehend von zwei Punkten, die nicht Gegenpunkte sind, dem durch sie gelegten Hauptkreise eine bestimmte Richtung beilegen und dann die in dem Hauptkreise zusammenstoßenden Halbkugeln als die rechte und die linke Seite des Hauptkreises unterscheiden. Dabei beachten wir folgendes. Jeder Hauptkreis a der Kugel zerlegt diese in zwei Halbkugeln α und α'; wenn zwei Punkte M und N, von denen keiner in dem Hauptkreise a liegt, entweder beide der Halbkugel α oder beide der Halbkugel α' angehören, so trifft derjenige Hauptkreisbogen MN, der kleiner ist als sein Halbkreis, den Hauptkreis a nicht; wenn dagegen von den Punkten M und N der eine in α, der andere in α' liegt, so wird der Hauptkreis a von jedem der beiden in M und N begrenzten Hauptkreisbogen geschnitten. Die weitere Durchführung dürfen wir dem Leser überlassen.

Um das Kugelpolygon $ABC \ldots MN$ zu erhalten, gehen wir von den n Punkten $A, B, C, \ldots, M, N$ aus, von denen keine zwei zusammenfallen, auch keine zwei aufeinanderfolgende, noch zwei nur durch einen Punkt getrennte Punkte Gegenpunkte voneinander sind, und verbinden je zwei aufeinander folgende durch einen Hauptkreisbogen, der kleiner ist als die Hälfte des Hauptkreises. Jeder einzelne Bogen erhält den Sinn, der durch die Reihenfolge der Grenzpunkte bestimmt ist.

Die Theorie der Polygone läßt sich sehr leicht von der Ebene auf die Kugel übertragen; auf die Theorie der Kugelpolygone kommt aber die der Vielkante hinaus. Es dürfte daher nicht nötig sein, diese Gebilde eigens zu besprechen.

5. **Allgemeiner Begriff des Polyeders.** Wenn f ebene Polygone in der Beziehung zueinander stehen, daß jede Kante eines unter ihnen noch Kante für ein zweites Polygon ist, so nennen wir die aus diesen f Polygonen bestehende Figur ein Polyeder oder ein Vielflach.

Wir wollen die Beschränkungen einführen, daß keine zwei Polygone derselben Ebene angehören und daß an jeder Kante nur zwei Polygone zusammenstoßen sollen.

Die Polygone eines Polyeders werden auch wohl als seine Flächen oder als seine Seitenflächen bezeichnet. Die Kanten der einzelnen Polygone sollen auch für das Polyeder als seine Kanten und die Eckpunkte der Polygone auch für das Polyeder als Eckpunkte angesehen werden.

Sobald ein n-Eck Polygon eines Polyeders ist, muß jede seiner Kanten noch Kante für ein zweites Polygon sein; daher hat ein Polyeder mindestens $n + 1$ Ecken und $n + 1$ Flächen; die geringste Ecken- und Flächenzahl für ein Polyeder ist demnach gleich vier.

Statt von den einzelnen Polygonen kann man auch von den einzelnen Vielkanten des Polyeders ausgehen. Theoretisch ist diese

Herleitung gleich berechtigt; sie erfreut sich einer geringeren Beliebtheit, weil sie nicht so anschaulich ist. Überhaupt ist es für die Theorie der Vielflache sehr wichtig, die Dualität zu beachten, die es gestattet, in vielen Lehrsätzen Ecken und Flächen miteinander zu vertauschen, und die u. a. zu dem Satze führt:

Sobald ein Polyeder e Ecken, f Flächen und k Kanten besitzt, existiert auch ein Polyeder von f Ecken, e Flächen und k Kanten.

Gleichwie jede Fläche mindestens drei Eckpunkte und drei Kanten besitzt, stoßen auch in jedem Eckpunkte mindestens drei Kanten und mindestens drei Flächen zusammen.

6. **Die konvexen Polyeder.** Ein Polyeder heißt konvex oder gewöhnlich, wenn jeder Ebene gegenüber, die eines seiner Polygone enthält, alle diesem Polygone nicht angehörenden Eckpunkte auf derselben Seite liegen.

Aus dieser Definition geht hervor, daß ein konvexes Polyeder nur konvexe Polygone enthält und daß es von jeder dasselbe durchsetzenden Ebene in einem konvexen Vieleck geschnitten wird. Jede Ebene, in welcher ein Polygon eines gewöhnlichen Polyeders gelegen ist, geht nur dann durch einen Punkt hindurch, der zwischen irgend zwei Eckpunkten des Polyeders liegt, wenn sie auch die beiden Eckpunkte selbst enthält; die Strecke, welche irgend zwei Eckpunkte eines gewöhnlichen Polyeders verbindet, wird nur von denjenigen Polygonebenen getroffen, in denen mindestens einer der beiden Eckpunkte liegt.

Als Flächenwinkel zwischen zwei in einer Kante zusammenstoßenden Flächen eines konvexen Polyeders ist der Winkel derjenigen beiden Halbebenen aufzufassen, die von der die Kante enthaltenden Geraden begrenzt werden, und von denen jede eines der beiden Polygone in sich enthält. Jedem solchen Flächenwinkel ordnet man seinen natürlichen Winkelraum zu und legt ihm eine Größe bei, die kleiner ist als zwei Rechte.

Wenn das Polygon $AB \ldots E$ Fläche eines konvexen Polyeders ist, so errichte man im Punkte X im Innern dieses Polygons einen senkrechten Halbstrahl XY auf seiner Ebene, und zwar nach derjenigen Seite hin, auf der die weiteren Eckpunkte nicht liegen. Dann ist es möglich, daß dieser Halbstrahl von Ebenen geschnitten wird, in denen Seitenflächen des Polyeders liegen; man kann aber immer einen Punkt U in XY so bestimmen, daß zwischen U und X kein Schnittpunkt dieser Art liegt. Nimmt man jetzt einen Punkt T, der zwischen X und U liegt, zu den Eckpunkten des Polyeders hinzu, ebenso die Strecken $TA, TB, \ldots, TE$ zu den Kanten, die Dreiecke TAB, $TBC, \ldots, TAE$ zu den Flächen, während das Polygon $AB \ldots E$

dem neuen Polyeder nicht angehören soll, so erhält man ein konvexes Polyeder, dessen Eckenzahl um eins vergrößert ist.

Bei einem gegebenen konvexen Polyeder mögen von einem Punkte A die Kanten AB, $AC, \ldots, AE$ ausgehen. Man wähle zwischen A und B einen Punkt S, zwischen A und C einen Punkt T, lege durch ST und jeden Eckpunkt des Polyeders eine Halbebene und nehme eine weitere durch ST begrenzte Halbebene derartig hinzu, daß zwischen ihr und der Halbebene ST, A keine der eben konstruierten Halbebenen liegt. Das von dieser Ebene ausgeschnittene Polygon $STU \ldots W$ vereinigt man mit den Polygonen, die nun auf den übrigen Flächen des Polyeders liegen. Dadurch hat man ein konvexes Polyeder erhalten, dessen Flächenzahl die des gegebenen Polyeders um eins übertrifft.

Hiernach kann man sowohl die Ecken- wie die Flächenzahl um eins erhöhen; es gibt daher konvexe Polyeder von jeder Ecken- und von jeder Flächenzahl.

Eine andere Frage ist es aber, ob man durch Vereinigung und durch Wiederholung dieser Operationen von den einfachsten Polyedern aus zu jedem beliebigen konvexen Polyeder gelangen kann. Diese Frage vermögen wir, wenigstens an dieser Stelle, nicht zu beantworten.

7. **Das Kantengesetz von Möbius.** In jedem Polyeder können wir den Sinn eines jeden seiner Polygone in doppelter Weise wählen; wir können daher bei einem konvexen Polyeder allen Polygonen einen solchen Sinn beilegen, daß alle einem bestimmten Polygon nicht angehörenden Eckpunkte des Polyeders auf der linken Seite dieses Polygons liegen. Betrachten wir speziell die Polygone $ABC \ldots F$ und $ABG \ldots K$, welche die Kante AB gemein haben. Wir nehmen an, der Umlauf des ersten Polygons sei so gewählt, daß die Punkte $G, \ldots, K$ auf der linken Seite der Ebene ABC liegen; dann liegt C auf der rechten Seite von ABG, also auf der linken Seite von GBA. Damit also alle nicht in der Ebene ABG gelegenen Eckpunkte des Polyeders links von dieser Ebene liegen, muß man dem zweiten Polygon den Sinn $BAK \ldots G$ geben. Die den beiden Polygonen gemeinsame Kante hat in dem einen Polygon die Richtung AB, in dem andern die Richtung BA. Dasselbe gilt aber, nachdem der Umlaufsinn aller Polygone in der vorgeschriebenen Weise festgelegt ist, für jede Kante; es ist also möglich, in jedem gewöhnlichen Polyeder den Polygonen einen solchen Sinn beizulegen, daß jede Kante für die beiden in ihr zusammenstoßenden Polygone entgegengesetzte Richtung erhält.

Diese Eigentümlichkeit, die für die Theorie der Polyeder von hervorragender Wichtigkeit ist, hat Möbius zuerst bemerkt. Wir wollen sagen, ein Polyeder gehorche dem Kantengesetz von Möbius, falls es möglich ist, seine Polygone in einem solchen Sinne zu nehmen, daß jede Kante in entgegengesetzten Richtungen auftritt.

Wenn das Kantengesetz für ein Vielflach gültig ist, so kann man den Umlaufssinn eines Polygons willkürlich wählen; dadurch ist, wofern die vorgeschriebene Ordnung eintreten soll, der Umlaufssinn für jedes Polygon bestimmt.

Das Kantengesetz ist keineswegs auf konvexe Polyeder beschränkt. Es seien $ABC \ldots H$ und $A'B'C' \ldots H'$ zwei kongruente parallele Polygone von gleichem Sinne. Wir nehmen sie zu Grundflächen eines Prismas und nehmen die Polygone desselben in folgendem Sinne:

$$ABC \ldots H, \quad BAA'B', \quad CBB'C', \ldots AHH'A', \quad A'H' \ldots C'B'.$$

Daher gilt das Kantengesetz ganz unabhängig davon, ob das Polygon einfach oder überschlagen ist. Dasselbe erkennt man für eine Pyramide, die über einem beliebigen Polygon als Grundfläche errichtet ist.

Ehe wir weitere Gruppen von Polyedern angeben, die dem Kantengesetze gehorchen, müssen wir eine Definition vorausschicken.

Es seien n Polygone derartig miteinander verbunden, daß jede Kante des einzelnen entweder noch Kante für ein zweites Polygon ist oder keinem weiteren Polygon angehört, wobei die Kanten der letzten Art einen geschlossenen Linienzug bilden, für den jeder Endpunkt einer Kante noch Endpunkt einer zweiten Kante ist; die Vereinigung dieser Polygone wird eine gebrochene Fläche genannt. Einer derartigen Fläche legt man einen einfachen Zusammenhang bei, falls sie durch jede auf ihr verlaufende Linie, die durch keinen Punkt mehrmals hindurchgeht und zwei Punkte der Grenze miteinander verbindet, in zwei getrennte Teile zerlegt wird. Eine solche Zerlegung soll insbesondere durch einen jeden Kantenzug herbeigeführt werden, der, ohne durch einen Punkt mehrmals hindurchzugehen, zwei Punkte der Grenze miteinander verbindet.

Hieran schließen wir folgende Definition:

Ein Polyeder heißt einfach zusammenhängend, wenn es durch jeden geschlossenen Kantenzug, der keinen Punkt mehrmals enthält, in zwei einfach zusammenhängende Teile zerlegt wird.

Wir denken uns jetzt auf einem einfach zusammenhängenden Polyeder einen Kantenzug $ABCD \ldots GH$ gezogen. Nach unserer Annahme zerlegt derselbe das Polyeder in zwei einfach zusammenhängende gebrochene Flächen I und II; als Grenze von I möge er mit $ABCD \ldots GH$, als Grenze von II mit $AHG \ldots DCB$ bezeichnet werden. Im Teil I ziehen wir einen nicht sich selbst durchsetzenden Kantenzug $AKL \ldots ND$, welcher eine Zerlegung in die Teile III und IV herbeiführen möge. Die Grenze eines jeden dieser Teile besteht aus dem neuen Kantenzuge und einem Teile des zuerst gezogenen Kantenzuges. Wenn der letztere jedesmal den früheren Sinn beibehalten soll, so wird das windschiefe Polygon $ABCDN \ldots LK$ die Grenze von III, dagegen das windschiefe Polygon $D \ldots HAKL \ldots N$ die Grenze von IV. Hierbei erhalten alle Kanten, welche auf der gegenseitigen Grenze von III und IV liegen, entgegengesetzte Richtung, je nachdem sie dem einen oder dem andern Teile zugewiesen werden. Dieselbe Eigenschaft bleibt aber bei jeder weiteren Zerlegung bestehen. Setzt man also die Teilung so weit fort, bis man das Polyeder in seine einzelnen Polygone zerlegt hat, so kommt jede Kante in den beiden entgegengesetzten Richtungen vor. Wir erhalten also den Satz:

Für jedes einfach zusammenhängende Polyeder gilt das Möbiussche Kantengesetz.

8. **Die einfachen Polyeder.** Wir bezeichnen ein Polyeder als *einfach*, wenn seine Polygone sämtlich einfach sind, wenn ferner keiner seiner Eckpunkte in das Innere eines seiner Polygone fällt und endlich irgend zwei nicht zusammenstoßende Polygone niemals einen Punkt gemeinschaftlich haben.

Aus dieser Definition geht hervor, daß jede Ebene, die eine Kante eines einfachen Polyeders trifft, aber durch keinen Eckpunkt hindurchgeht, das Polyeder in einem oder mehreren einfachen Vielecken durchschneidet, wobei auch verschiedene Vielecke keinen Punkt gemein haben. Demnach hat auch jeder Halbstrahl, der von einem festen Punkte ausgeht und keine Kante trifft, mit dem Polyeder eine $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ Anzahl von Punkten gemein, sobald ein einziger in diesem Punkte begrenzter Halbstrahl das Polyeder in einer $\left\{\begin{matrix}\text{geraden}\\ \text{ungeraden}\end{matrix}\right\}$ Anzahl von Punkten trifft. Das einfache Polyeder trennt den Raum in zwei Teile, das *Äußere* und das *Innere*; jeder Halbstrahl, der von einem Punkte des Innern ausgeht, trifft, wofern er nicht durch eine Kante hindurchgeht, das Polyeder in einer ungeraden Anzahl von Punkten. Zwischen zwei Punkten, die entweder beide dem Innern oder beide dem Äußeren angehören, läßt sich stets ein Streckenzug ziehen, der das Polyeder nicht trifft; dagegen hat jeder Streckenzug, der zwischen einem Außen- und einem Innenpunkte gezogen wird, mit dem Polyeder mindestens einen Punkt gemein.

Es seien α und β zwei zusammenstoßende Polygone eines einfachen Polyeders, A ein Punkt im Innern von α, B ein Punkt im Innern von β; dann läßt sich stets ein Streckenzug zwischen A und

B ziehen, der ganz im Innern des Polyeders verläuft, ohne mit irgendeinem weiteren Polygon einen Punkt gemein zu haben. Alle Streckenzüge, die in dieser Weise zwischen Innenpunkten von α und β gezogen werden können, liegen in einem der beiden Raumteile, in welche der Raum durch die Halbebenen zerlegt wird, denen die Polygone α und β angehören. Diesen Raumteil ordnen wir dem durch die Halbebenen gebildeten Flächenwinkel als seinen Winkelraum zu.

Der Umlaufssinn, der einem einfachen Polygon $ABC \ldots F$ beigelegt wird, bestimmt auch, wie wir oben gesehen haben, den Umlaufssinn für die Ebene, und dieser stimmt, falls der Winkel ABC ein hohler ist, mit dem des Dreiecks ABC überein. Jetzt bestimmen wir, falls dies Polygon einem einfachen Polyeder angehört, einen gewissen Teil des Polyederinnern in folgender Weise. Wir lassen vom Innern des Polygons $ABC \ldots G$ beliebige Strecken ausgehen, welche erstens ganz im Innern des Polyeders verlaufen und zweitens keine der Ebenen treffen sollen, in denen die an $ABC \ldots F$ anstoßenden Polygone liegen. Von dem Teile des Innern, der alle Strecken dieser Art enthält, sagen wir, er sei dem Polygon $ABC \ldots F$ benachbart. Nun dürfen wir den Sinn des Polygons $ABC \ldots F$ so wählen, daß dieser Raumteil ganz auf der linken Seite der Ebene dieses Polygons liegt. Die entsprechende Festsetzung treffen wir für alle Polygone des Polyeders.

Ist jetzt X ein Punkt in der Ebene des Polygons $ABC \ldots F$ und Y ein Punkt in der Ebene des zweiten an AB anstoßenden Polygons $ABG \ldots K$, und sind diese Punkte so gewählt, daß das Dreieck ABC im natürlichen Winkelfelde der Winkel XAB und XBA, und das Dreieck ABG im natürlichen Winkelfelde der Winkel YAB und YBA liegt, so liegt nach unsern Festsetzungen Y auf der $\left\{\begin{matrix}\text{linken}\\ \text{rechten}\end{matrix}\right\}$ Seite der ersten und X auf der $\left\{\begin{matrix}\text{linken}\\ \text{rechten}\end{matrix}\right\}$ Seite der zweiten Ebene, falls die Flächen einen $\left\{\begin{matrix}\text{hohlen}\\ \text{erhabenenen}\end{matrix}\right\}$ Winkel miteinander bilden. Daher muß die gemeinschaftliche Kante in entgegengesetzter Richtung genommen werden, je nachdem sie dem einen oder dem andern Polygon zugewiesen wird. Das Kantengesetz bleibt somit auch für alle einfachen Polyeder in Gültigkeit.

Statt zu verlangen, daß der einem Polygon benachbarte Teil jedesmal auf der linken Seite des Polygons liege, können wir auch den Umlaufssinn eines Polygons beliebig wählen; soll dann das Kantengesetz in Gültigkeit treten, so ist mit dem Sinn des ersten Polygons der Sinn eines jeden andern Polygons eindeutig bestimmt. Zugleich liegt jetzt derjenige Teil des Innern, der in dem angegebenen

Sinne einem Polygon benachbart ist, regelmäßig entweder auf der linken oder auf der rechten Seite des entsprechenden Polygons. Wir dürfen dabei auch von einem bestimmten Sinn sprechen, der hierdurch dem Polyeder selbst beigelegt wird.

Wenn zwei einfache Polyeder, von denen das eine einen Teil des andern bildet, in der Beziehung zueinander stehen, daß eine Seitenfläche des einen ganz in einer Seitenfläche des andern enthalten ist, so haben die Polyeder nur dann denselben Sinn, wenn auch die betrachteten Seitenflächen im Sinn übereinstimmen; wenn dagegen zwei Polyeder, die keinen Teil des Innern gemein haben, in einer Seitenfläche so zusammenstoßen, daß die Seitenflächen nicht nur in derselben Ebene liegen, sondern auch einen Teil gemein haben, so kann den Polyedern nur dadurch derselbe Sinn beigelegt werden, daß die beiden Seitenflächen, in denen sie aneinander stoßen, entgegengesetzten Sinn haben.

Im ersten Falle nämlich fallen auch die der betreffenden Seitenfläche benachbarten Teile des Innern teilweise zusammen; es gibt also einen Raumteil, der der gemeinsamen Ebene gegenüber auf derselben Seite liegt; soll dieser beidemal als links oder beidemal als rechts angesehen werden, so hat die Ebene beidemal denselben Sinn, und damit auch die beiden Polygone, die in dieser Ebene liegen. Im zweiten Falle gehören die den beiden anstoßenden Seitenflächen benachbarten Teile des Innern verschiedenen Seiten der gemeinsamen Ebene an; sollen sie beidemal als links oder als rechts bezeichnet werden, so muß der Sinn der Ebene ein verschiedener sein, je nachdem man sie dem einen oder dem andern Polyeder zuordnet; die beiden in dieser Ebene gelegenen Seitenflächen haben somit verschiedenen Sinn.

9. **Flächenwinkel beliebiger Polyeder. Die Möbiusschen Vielkante.** Ein allgemeines Gesetz, nach dem sich in einem Polyeder dem durch zwei in einer Kante zusammenstoßenden Polygone gebildeten Flächenwinkel ein bestimmter Flächenraum in der Weise zuordnen läßt, daß diese Zuordnung für einfache Polyeder auf die vorhin getroffene Festsetzung hinauskommt, kann nur für solche Polyeder aufgestellt werden, die dem Kantengesetze gehorchen. Wir denken uns demnach den Umlauf der einzelnen Polygone in der diesem Gesetze entsprechenden Weise festgelegt und betrachten etwa den Winkel, den die Polygone $ABC\ldots E$ und $BAF\ldots J$ miteinander bilden. Alsdann wählen wir zwei Punkte X und Y derartig hinzu, daß der Sinn des Tetraeders $ABXY$ positiv ist, und drehen die Halbebene AB, C entsprechend der von X nach Y führenden Richtung, bis sie mit der Halbebene AB, F zusammenfällt; der hierbei beschriebene Raumteil soll der Winkelraum des betrachteten Flächen-

winkels sein. Wir dürfen also auch hier wieder alle Flächenwinkel positiv und kleiner als vier Rechte voraussetzen.

Vertauschen wir die beiden in AB zusammenstoßenden Polygone miteinander, ohne den Sinn des Polyeders zu ändern, so wird das Tetraeder $BAXY$ positiv. Daher muß der Sinn der Drehung geändert werden; da sich aber zugleich die den Winkel bildenden Halbebenen miteinander vertauschen, so bleibt die Größe der Drehung ungeändert. Wenn man dagegen nur den Sinn des Polyeders ändert, dementsprechend den Winkel der Polygone $BAE\ldots C$ und $ABJ\ldots F$ betrachtet, so muß, weil jetzt das Tetraeder $BAYX$ positiv ist, der früher gefundene Winkel φ durch den Winkel $2\pi - \varphi$ ersetzt werden. Durch geeignete Wahl des Sinnes, der dem Polyeder beigelegt wird, kann man daher erreichen, daß höchstens die Hälfte der Flächenwinkel erhaben ist.

Man überzeugt sich leicht, daß diese Festsetzung für einfache Polyeder auf die frühere Regel hinauskommt, falls man den Sinn des Polyeders in geeigneter Weise wählt.

Nach § 4, 19 (S. 73) ist das Winkelfeld für jeden Winkel eines Polygons einer der beiden Teile, in welche die Ebene durch die Schenkel des Winkels zerlegt wird; die soeben gegebene Festsetzung verlangt, daß man als Winkelraum für die Winkel eines Polyeders einen bestimmten von den beiden Raumteilen ansieht, welche durch die beiden Halbebenen gegeneinander abgegrenzt werden.

Die in einem Eckpunkt eines Polyeders zusammenstoßenden Polygone eines Polyeders bilden ein Vielkant, für das die Kanten- und die Flächenwinkel, soweit sie in dem betrachteten Eckpunkt ihren Scheitel haben, zu Seiten bzw. zu Winkeln werden. Da das Vielkant vom Polyeder nicht abgesondert werden darf, so muß die Zuordnung der Winkelfelder für die Seiten und der Winkelräume für die Winkel des Vielkants in gleicher Weise wie im Polyeder geschehen. Wir werden dadurch auf Vielkante geführt, die sowohl erhabene Seiten als erhabene Winkel besitzen. Zu derartigen Vielkanten gelangt man schon durch die einfachen Polyeder, da man für ihre Kantenwinkel und für ihre Flächenwinkel auch Maßzahlen zulassen muß, die größer als π sind. Diese Erweiterung des Begriffs eines Vielflachs, bei der die Seiten und die Winkel als positive Größen kleiner als 2π vorausgesetzt werden, ist systematisch zuerst durch Möbius eingeführt worden. Namentlich hat er die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie nach einer Methode hergeleitet, die in gleicher Weise für hohle und für erhabene Seiten und Winkel gültig bleibt. Es ist daher angemessen, derartige Vielkante nach Möbius zu benennen. Leider können wir hier ihre Eigenschaften nicht eingehend entwickeln; wir verweisen auf den Abschnitt über sphärische

Trigonometrie, den *Jacobsthal* im zweiten Bande von Weber-Wellsteins Elementar-Mathematik bearbeitet hat. Dem Leser, der sich mit den Grundeigenschaften der sphärischen Dreiecke, welche für die Herleitung der Formeln vorausgesetzt werden müssen, nach der Anleitung dieses Werkes vertraut gemacht hat, kann es nicht schwer fallen, einen hinreichenden Einblick in die Theorie der *Möbius*schen Vielkante von beliebiger Kantenzahl zu gewinnen.

10. **Kongruenz und Symmetrie.** Wenn zwei Polyeder so aufeinander bezogen sind, daß immer zwei Eckpunkte des einen dieselbe Entfernung haben wie die entsprechenden Punkte des andern, so haben je zwei Tetraeder, welche Quadrupel von entsprechenden Punkten zu Eckpunkten haben, entweder stets gleichen oder stets entgegengesetzten Sinn; im ersten Falle heißen die Polyeder *kongruent*, im zweiten *symmetrisch*.

Von einem Polyeder seien fünf Eckpunkte A, B, C, D, E so gewählt, daß keine vier in einer Ebene, also auch keine drei in gerader Linie liegen. Dann wählt man einen Punkt A' ganz willkürlich, den Punkt B' in einem noch beliebig von A' ausgehenden Halbstrahl und C' in einer beliebigen durch $A'B'$ begrenzten Halbebene, und setzt fest, daß die Gleichungen befriedigt werden:

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C'.$$

Sobald der Punkt A', der Halbstrahl $A'B'$ und die Halbebene $A'B'$, C' fest gewählt sind, wird durch die aufgestellten Forderungen die Lage der Punkte B' und C' eindeutig bestimmt. Jetzt gibt es aber noch zwei Lagen für den Punkt D', für welche die Bedingungen erfüllt werden:

$$AD = A'D', \quad BD = B'D', \quad CD = C'D',$$

und diese beiden Lagen sind dadurch charakterisiert, daß die Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ in der einen denselben und in der andern entgegengesetzten Sinn haben. Nachdem aber die Lage des Punktes D' gewählt ist, wird durch die Forderungen:

$$AE = A'E', \quad BE = B'E', \quad CE = C'E', \quad DE = D'E'$$

die Lage des Punktes E' eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt natürlich, wenn man im gegebenen Polyeder beliebig viele weitere Punkte hinzunimmt. Wenn die Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ $\left\{\begin{matrix}\text{gleichen}\\ \text{entgegengesetzten}\end{matrix}\right\}$ Sinn haben, so haben auch zwei Tetraeder, deren Eckpunkte einander in der angegebenen Weise zugeordnet sind, jedesmal $\left\{\begin{matrix}\text{gleichen}\\ \text{entgegengesetzten}\end{matrix}\right\}$ Sinn. Während demnach die Gleichheit der Entfernungen entsprechender Punkte für Kongruenz und Symmetrie gemeinsame Forderung ist, wird der Unterschied durch den Sinn entsprechender Tetraeder bedingt.

Die allgemeinen Sätze, welche wir über Kongruenz und Symmetrie oben (§ 4, 7, S. 70) für Polygone, die in einer Ebene liegen, aufgestellt haben, gelten in gleicher Weise für Polyeder.

Um zu einem Polyeder ein kongruentes zu finden, kann man einen Eckpunkt willkürlich annehmen, für einen zweiten einen Halbstrahl und für einen dritten eine Halbebene willkürlich wählen, wofern nur der Halbstrahl von dem ersten Punkte ausgeht und zugleich auf der Grenze der Halbebene liegt. Speziell gilt der Satz:

Sobald von zwei kongruenten Polyedern drei nicht in gerader Linie liegende Eckpunkte des einen mit den entsprechenden Punkten des andern zusammenfallen, werden die Polyeder identisch.

Bei einfachen Polyedern können wir von vornherein unterscheiden, ob sie im Sinn übereinstimmen oder nicht; wir dürfen daher in diesem Falle folgende Definition aufstellen:

Wenn zwei einfache Polyeder von $\left\{\begin{matrix}\text{gleichem}\\ \text{entgegengesetztem}\end{matrix}\right\}$ Sinn so aufeinander bezogen sind, daß die Verbindungsstrecke von irgend zwei Punkten des einen jedesmal gleich ist der Verbindungsstrecke der entsprechenden Punkte des andern, so heißen sie $\left\{\begin{matrix}\text{kongruent}\\ \text{symmetrisch}\end{matrix}\right\}$.

Baltzer gründet den Begriff der Kongruenz und Symmetrie, oder, wie er im Anschluß an Möbius sagt, der „Gleichheit und Ähnlichkeit“ auf die Übereinstimmung von Tetraedern; der Ausdruck wird aber weit einfacher, wenn man sich, wie wir hier im Anschluß an Hilbert getan haben, nur auf die Gleichheit von entsprechenden Strecken stützt.

Unter Anwendung der ersten Sätze der Stereometrie läßt sich über kongruente Vielflache ein interessanter Satz beweisen, den wir jetzt herleiten wollen. Zu dem Ende bemerken wir, daß der in § 4, 7 (S. 70,71) für die Ebene erwiesene Satz auch auf der Kugel gilt, ohne daß der gegebene Beweis geändert zu werden braucht. Daran fügen wir den Hilfssatz:

Zu zwei kongruenten Dreiecken ABC und $A'B'C'$, die in zwei sich schneidenden Ebenen liegen, gibt es eine Achse s von der Art, daß sowohl die Flächenwinkel AsA', BsB', CsC', als auch die senkrechten Projektionen der Strecken AA', BB', CC' auf s einander gleich werden.

Zuerst bestimmen wir zwei gleichgerichtete Halbstrahlen AL und $A'L'$ so, daß die Dreikante $A:BCL$ und $A':B'C'L'$ einander kongruent sind. Zu dem Ende beschreiben wir um einen beliebigen

Punkt O eine Kugel, ziehen die Radien $O\beta$, $O\gamma$, $O\beta'$, $O\gamma'$ bzw. parallel zu AB, AC, $A'B'$, $A'C'$ und bestimmen den Punkt σ auf der Kugel so, daß die sphärischen Dreiecke $\sigma\beta\gamma$ und $\sigma\beta'\gamma'$ kongruent sind. Die Halbstrahlen AL und $A'L'$, welche mit $O\sigma$ gleich gerichtet sind, haben die verlangte Eigenschaft.

Die beiden Ebenen, von denen die eine in A senkrecht auf AL, die andere in A' senkrecht auf $A'L'$ steht, sind einander parallel. Ihr Sinn werde so festgesetzt, daß jedesmal parallele Dreiecke mit gleich gerichteten Seiten im Sinn übereinstimmen. Jetzt seien die Punkte M und N die Projektionen der Punkte B und C auf die erste, M' und N' die Projektionen der Punkte B' und C' auf die zweite Ebene, und die Punkte A'', M'', N'' die Projektionen von A', M', N' auf die erste Ebene. Dann haben die gleichen Strecken AB und $A'B'$, sowie die gleichen Strecken AC und $A'C'$ je gegen die beiden Hilfsebenen gleiche Neigung; daher ist $AM = A'M'$, $AN = A'N'$. Ferner sind die Winkel MAN und $M'A'N'$ einander gleich als Neigungswinkel der gleichen Flächenwinkel $B(AL)C$ und $B'(A'L')C'$. Daher sind die Dreiecke AMN und $A'M'N'$ kongruent und von demselben Sinn. Die Seiten, die Winkel und der Sinn ändern sich aber nicht bei der Projektion auf eine parallele Ebene; somit sind auch die Dreiecke AMN und $A''M''N''$ einander kongruent. Man kann also den Punkt S so in der Ebene AMN bestimmen, daß die Vierecke $SAMN$ und $SA''M''N''$ kongruent sind. Dann sind auch die Winkel ASA'', MSM'' und NSN'' einander gleich und von gleichem Sinn. Errichtet man jetzt auf der Ebene AMN in S die Senkrechte s, so ist der Winkel ASA'' Neigungswinkel zu AsA', der Winkel MSM'' Neigungswinkel zu BsB', der Winkel NSN'' Neigungswinkel zu CsC'; es ist also auch $\sphericalangle AsA' = BsB' = CsC'$. Ferner sind die Projektionen der Strecken AA', BB' und CC' auf s sämtlich gleich $A''A'$, und somit auch untereinander gleich. Damit sind die aufgestellten Behauptungen erwiesen.

Sind jetzt D und D', E und E', ... L und L' beliebig viele weitere Paare von Punkten, die einander in zwei kongruenten Polyedern entsprechen, so hat die soeben gefundene Gerade s die Eigenschaft, daß die Winkel DsD', EsE', ... LsL' gleich dem Winkel AsA' werden und auch die Strecken DD', $E'E'$, ... LL' auf s dieselbe Projektion haben, wie die Strecke AA'. Jetzt konstruiert man zu den Punkten $A, B, \ldots L$ je einen entsprechenden Punkt $A'', B'', \ldots L''$ in der Weise, daß die von A und A'', B und B'', ... L und L'' auf s gefällten Senkrechten a) jedesmal paarweise denselben Fußpunkt haben, b) paarweise einander gleich sind und c) paarweise gleiche Winkel von demselben Sinn miteinander bilden, dann sind die Strecken $A''A'$, $B''B'$, ... $L''L'$ je einander gleich, sowie untereinander und zu der

Geraden s parallel. Diese Eigenschaften können wir in folgender Weise aussprechen:

Zu zwei kongruenten Polyedern gibt es stets eine gewisse Gerade von der Art, daß eine geeignete Drehung um diese Gerade und eine bestimmte Verschiebung längs derselben Geraden das erste Polyeder zur Deckung mit dem zweiten bringt.

Diese Gerade heißt die Zentralachse der beiden kongruenten Polyeder.

Wir haben beim Beweise allerdings die Annahme gemacht, daß die Ebenen ABC und $A'B'C'$ einander schneiden. Indessen sind an den durchgeführten Entwicklungen nur geringe Änderungen anzubringen, falls die beiden Ebenen parallel sind; es ist daher nicht nötig, hierauf näher einzugehen. Ebensowenig brauchen wir die Bedingungen aufzuzählen, unter denen man die Deckung durch eine bloße Verschiebung oder eine bloße Drehung herbeiführen kann.

Ein entsprechender Satz von gleicher Schönheit besteht auch, wie Baltzer (Über Gleichheit und Ähnlichkeit, Dresden 1852, sowie Elemente II § 6, 16) bewiesen hat, für symmetrische Polyeder; weil aber dieser Satz für die Anwendungen nicht dieselbe Bedeutung hat, die den obigen Lehrsatz auszeichnet, glauben wir ihn nicht mitteilen zu sollen.

§ 7. Rauminhalt der Körper, namentlich der Polyeder.

1. **Aufstellung des Problems.** Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit von Körpern werden in derselben Weise definiert, die wir für diese beiden Begriffe oben bei ebenen Flächen angegeben haben. Dementsprechend heißen zwei Körper zerlegungsgleich, wenn sie sich in die gleiche Anzahl von paarweise kongruenten Teilen zerlegen lassen. Zwei Körper sollen als ergänzungsgleich bezeichnet werden, wenn sich aus ihnen durch Hinzufügung der gleichen Anzahl von paarweise kongruenten Körpern zerlegungsgleiche Körper bilden lassen. Auch für Körper gilt der Satz:

Wenn zwei Körper mit demselben dritten Körper zerlegungsgleich sind, so sind sie auch untereinander zerlegungsgleich.

Dieser Satz läßt sich in derselben Weise erhärten wie der entsprechende Satz der Ebene.

Wir legen jedem allseitig begrenzten Teile des Raumes, speziell jedem einfachen Polyeder, ein Volumen, ein Raum- oder Inhaltsmaß bei; d. h. wir ordnen ihm eine positive Zahl zu und verlangen, daß bei dieser Zuordnung

a) kongruenten Körpern und

b) zerlegungsgleichen Körpern dieselbe Zahl zukommt. Wenn daher ein Körper auf irgendeine Weise in eine endliche Zahl von Teilen zerlegt ist, so soll die Maßzahl des Ganzen jedesmal gleich sein der Summe aus den Maßzahlen der einzelnen Teile.

Indem wir eine derartige Zuordnung voraussetzen, nennen wir zwei Körper inhaltsgleich, wenn sie dasselbe Inhaltsmaß besitzen.

Die Zuordnung des Inhaltsmaßes unterliegt aber den Bedenken, die wir oben (§ 5, S. 80) nach dem Vorgange von Dehn erhoben haben. Wir können nämlich von vornherein nicht erkennen, ob es nur eine einzige Zuordnung gibt, die den angeführten Forderungen genügt, selbst wenn wir alle Körper einerseits und alle Inhaltsmaße andererseits in Betracht ziehen. Zweitens müssen wir aber mit Rücksicht auf die Anwendungen der Mathematik verlangen, daß inhaltsgleiche Körper wenigstens unter Benutzung eines Grenzbegriffes als zerlegungsgleich angesehen werden können. Demnach müssen wir Dehn beistimmen, wenn er nicht das Inhaltsmaß, sondern die Inhaltsgleichheit an die Spitze der Untersuchung stellen will und demnach von der Definition ausgeht: Zwei Körper sind inhaltsgleich, wenn man sie aus paarweise kongruenten Teilen aufbauen kann je bis auf einen Rest, der in einen beliebig gewählten (und demnach auch in einen beliebig kleinen) Körper eingeschlossen werden kann.

Wir glauben aber, den Leser dadurch mit den schwebenden Fragen am ehesten vertraut zu machen, wenn wir vom Inhaltsmaß ausgehen. Dabei wollen wir auch in der Form uns möglichst eng an die Entwicklungen anschließen, die wir in § 5 für die Ebene durchgeführt haben. Dadurch wird es uns auch möglich werden, die Unterschiede klar hervortreten zu lassen, welche in dieser Hinsicht zwischen den ebenen und den räumlichen Gebilden bestehen.

2. **Das Raummaß mit Hilfe des Würfels hergeleitet.** Indem wir jetzt dazu übergehen, den ersten Beweis, den wir für die Berechtigung des Inhaltsmaßes ebener Flächen geführt haben, auf den Raum zu übertragen (vgl. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie Bd. II S. 33—36), wollen wir annehmen, der Körper werde von einer oder mehreren endlichen geschlossenen Flächen begrenzt; die Gesamtheit dieser Flächen soll als die Oberfläche des Körpers bezeichnet werden. Den Fall, daß die Oberfläche sich selbst durchsetzt, behalten wir einer späteren Untersuchung vor (Nr. 7); wir setzen demnach an dieser Stelle voraus, daß die Oberfläche sich nirgends selbst schneidet. Dabei lassen wir natürlich den Fall zu, daß eine in einer Geraden enthaltene Strecke ganz in die Oberfläche hineinfällt. Als Schnittpunkt einer Geraden mit der Oberfläche bezeichnen wir

demnach einen Punkt, in welchem die Gerade entweder vom Äußern zum Innern oder von der Oberfläche zum Äußern oder von der Oberfläche zum Innern übergeht. Zur Vereinfachung des Beweises wollen wir annehmen, daß die Zahl der Schnittpunkte für jede Gerade endlich sein soll. Wir können daher eine endliche Zahl ϑ so bestimmen, daß die Anzahl der Schnittpunkte für irgendeine Gerade immer höchstens gleich ϑ wird.

Wenn wir jetzt den Rauminhalt eines Körpers bestimmen wollen, so können wir von drei Ebenen L, M, N ausgehen, die zu je zweien aufeinander senkrecht stehen. Zu jeder von diesen Ebenen legen wir eine Schar von parallelen Ebenen in der Weise, daß je zwei aufeinander folgende einen Abstand haben, der dem ν^{ten} Teile der Längeneinheit gleich ist. Alle auf diese Weise erhaltenen Ebenen mögen als Ebenen des Systems bezeichnet werden. Diese Ebenen zerfallen in drei Gruppen: die Ebenen der ersten Gruppe sollen zu L, die der zweiten zu M und die der dritten zu N parallel sein. Ebenso möge jede Gerade, in der sich zwei Ebenen aus verschiedenen Gruppen schneiden, eine Linie des Systems genannt werden. Auch bei diesen Linien unterscheiden wir drei Gruppen: eine jede Linie der ersten Gruppe steht auf L, eine jede Linie der zweiten Gruppe auf M und eine jede Linie der dritten Gruppe auf N senkrecht.

Durch unsere Konstruktion wird der Raum in lauter Würfel zerlegt, von denen jeder den ν^{ten} Teil der Längeneinheit zur Kante hat. Von diesen Würfeln mögen a_ν ganz dem Innern des Körpers angehören und b_ν mögen ganz oder teilweise mit dem Körper in Deckung sein, so daß $c_\nu = b_\nu - a_\nu$ dieser Würfel durch die Oberfläche des Körpers in Teile zerlegt werden, von denen mindestens einer dem Innern und mindestens einer dem Äußern des Körpers angehört.

Jetzt setzen wir fest, daß für jeden Wert von ν:

$$(1) \qquad \frac{a_\nu}{\nu^3} \leqq V \leqq \frac{b_\nu}{\nu^3}$$

sein soll, und weisen nach:

a) daß durch diese Festsetzung eine einzige Zahl V bestimmt wird, und

b) daß diese Zahl von der Wahl der Ebenen L, M, N unabhängig ist.

Alsdann sind wir berechtigt, diese Zahl V als das Raummaß (Volumen) des Körpers zu bezeichnen.

Beim Beweis des ersten Satzes spielt die Anzahl s_ν der Punkte, in denen die Oberfläche des Körpers von den Linien des Systems geschnitten wird, eine wichtige Rolle. Hierbei muß ein einzelner Punkt mehrmals gerechnet werden, wenn in ihm mehrere Linien des Systems zusammentreffen und er für jede als Schnittpunkt im obigen Sinne aufzufassen ist.

Für $\nu = 1$, wo je zwei aufeinander folgende Ebenen derselben Gruppe um die Längeneinheit voneinander abstehen, mögen l Ebenen der ersten, m Ebenen der zweiten und n Ebenen der dritten Gruppe die Oberfläche treffen. Hier sind l, m, n natürliche Zahlen mit Einschluß der Null. Die entsprechenden Zahlen mögen l_ν, m_ν, n_ν sein, falls der Abstand von je zwei benachbarten Ebenen derselben Gruppe den ν^{ten} Teil der Längeneinheit beträgt.

Für diese Zahlen gelten die Beziehungen:

$$(2) \qquad l_\nu \leqq \nu l + l - 1, \quad m_\nu \leqq \nu m + m - 1, \quad n_\nu \leqq \nu n + n - 1.$$

Unter den Linien der ersten Gruppe mögen l_ν', von denen der zweiten m_ν' und von denen der dritten n_ν' die Oberfläche treffen. Da jede Linie der ersten Gruppe in einer Ebene der zweiten und in einer Ebene der dritten Gruppe liegt und Entsprechendes für die andern Gruppen gilt, so muß sein:

$$(3) \qquad l_\nu' \leqq m_\nu n_\nu, \quad m_\nu' \leqq n_\nu l_\nu, \quad n_\nu' \leqq l_\nu m_\nu.$$

Nach unserer Annahme hat jede Gerade höchstens ϑ Schnittpunkte mit der Oberfläche; somit ist:

$$(4) \qquad s_\nu \leqq \vartheta(l_\nu' + m_\nu' + n_\nu').$$

Sobald ein Würfel zum Teil dem Innern und zum Teil dem Äußern des Körpers angehört, müssen mindestens drei Kanten desselben die Oberfläche schneiden. Umgekehrt entsprechen jedem Schnittpunkte höchstens vier Würfel des Systems. Da die Anzahl dieser Würfel gleich $b_\nu - a_\nu$ gesetzt ist, gilt die Beziehung:

$$(5) \qquad b_\nu - a_\nu \leqq \frac{4}{3} s_\nu.$$

Die Zusammenstellung der Relationen (2) bis (5) führt auf die Beziehung:

$$(6) \qquad \frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^3} \leqq \frac{4}{3} \vartheta \left(\frac{mn + nl + lm + 2l + 2m + 2n}{\nu} - 2 \frac{l + m + n - 3}{\nu^2} + \frac{3}{\nu^3} \right).$$

Hier sind ϑ, l, m, n feste Zahlen, während ν beliebig groß gewählt werden kann. Demnach kann die rechte Seite von (6) beliebig klein gemacht werden; die Grenzen, zwischen denen der Wert von V durch die Festsetzung (1) eingeschlossen wird, rücken mit wachsendem ν immer mehr aneinander. Wir erhalten für V eine bestimmte Zahl, welche durch die Gleichung definiert werden kann:

$$(7) \qquad V = \lim_{\nu = \infty} \frac{a_\nu}{\nu^3}.$$

Wir dürfen diese Zahl als die dem System der Ebenen L, M, N entsprechende Maßzahl des Körpers bezeichnen und können hierfür folgende Sätze aufstellen:

a) Die Maßzahl eines in irgendeine endliche Anzahl von Teilen zerlegten Körpers ist gleich der Summe aus den Maßzahlen der einzelnen Teile.

b) Wenn zwei Körper durch Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden können, so haben sie gleiche Maßzahlen.

c) Wenn zwei gerade Prismen von gleicher Höhe auf derselben Ebene stehen und ihre Grundflächen aus lauter Teilen zusammengesetzt sind, welche paarweise durch Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden können, so haben sie gleiche Maßzahlen.

Da sich diese Sätze in derselben Weise erhärten lassen wie die entsprechenden Sätze der Ebene, so brauchen wir auf den Beweis nicht einzugehen.

Wir wollen jetzt kongruente Würfel miteinander vergleichen. Dabei möge es gestattet sein, einen Würfel, für den der Punkt O ein Eckpunkt ist und der die drei in diesem Punkte zusammenstoßenden Strecken OA, OB, OC zu Kanten hat, kurz durch $[O, ABC]$ zu bezeichnen.

Wir betrachten zuerst zwei Würfel $[O, ABC]$ und $[O, A'B'C]$, welche die Kante OC gemeinschaftlich haben. Indem wir die Würfel als Quader mit der gemeinsamen Höhe OC betrachten, dürfen wir die Quadrate über OA und OA' als ihre Grundflächen ansehen; diese können aber (nach § 5, 7, S. 86) in paarweise kongruente Teile zerlegt werden, welche je durch bloße Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden können. Indem wir über jedem einzelnen Teile ein gerades Prisma errichten, dessen Höhe gleich OC ist, erkennen wir unter Benutzung von c), daß die beiden Würfel dieselbe Maßzahl haben.

Um jetzt zwei kongruente Würfel $[O, ABC]$ und $[O, A'B'C']$ miteinander zu vergleichen, welche den Eckpunkt O gemeinschaftlich haben, tragen wir auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen OAB und $OA'B'$ eine Strecke $OD = OA$ ab und ziehen zwei weitere Strecken OE und OE', die ebenfalls gleich OA sind, und von denen die erste auf OC und OD, die zweite auf OC' und OD senkrecht steht. Vollenden wir jetzt noch die einzelnen Würfel, welche durch diese Strecken bestimmt sind, so wird durch die Konstruktion erreicht, daß die Würfel $[O, ABC]$ und $[O, CDE]$ die Kante OC, die Würfel $[O, CDE]$ und $[O, C'DE']$ die Kante OD und die Würfel $[O, C'DE']$ und $[O, A'B'C']$ die Kante OC' gemeinschaftlich haben. Daher haben alle nach dem soeben bewiesenen Satze dieselbe Maßzahl; oder das Inhaltsmaß von $[O, ABC]$ ist gleich dem von $[O, A'B'C']$.

Indem wir noch berücksichtigen, daß die Maßzahl sich durch bloße Parallelverschiebung nicht ändert, erhalten wir den Satz:

Kongruente Würfel haben für dasselbe Ebenensystem gleiche Maßzahlen,

oder auch:

Die Maßzahl eines Würfels ist für jedes Ebenensystem gleich der dritten Potenz der Maßzahl seiner Kante.

Hieraus geht aber sehr leicht hervor, daß das oben definierte Inhaltsmaß V von der Wahl der drei Ebenen L, M, N unabhängig ist und daß man demnach stets dieselbe Maßzahl erhält, wenn man irgend drei andere Ebenen benutzt, die ebenfalls zu je zweien aufeinander senkrecht stehen. Wir brauchen zu dem Ende bloß die Schlußbemerkung von § 5, 8 auf den Raum zu übertragen.

Endlich bedarf es unter Berücksichtigung von § 5, 9 keiner weiteren Ausführung, um zu erkennen, daß für das auf diese Weise definierte Inhaltsmaß inhaltsgleiche Körper bis auf einen Rest, der beliebig klein gewählt werden kann, zerlegungsgleich sind.

3a. **Der Rauminhalt eines Polyeders durch Zerlegung in Tetraeder hergeleitet. Grundlage des Beweises.** Gleichwie wir oben nach dem Vorgange von Schur die Berechtigung des Inhaltsmaßes für Polygone dadurch bewiesen haben, daß wir sie in Dreiecke zerlegten, können wir auch versuchen, den Rauminhalt der Polyeder dadurch zu begründen, daß wir sie in Tetraeder zerlegen. Derartige Versuche sind von Veronese (Atti del R. Istituto Veneto VI 1899) und von Schatunowsky (math. Ann. Bd. 57 S. 497—508) gemacht worden. Es sei gestattet, die Grundgedanken dieser Arbeiten in etwas veränderter Form darzulegen.

Zu dem Ende gehen wir von der Definition aus, die wir vorläufig rein willkürlich aufstellen:

Unter dem Inhaltsmaß eines Tetraeders verstehen wir den dritten Teil des Produktes aus Grundfläche und Höhe.

Das Inhaltsmaß eines Tetraeders T soll mit $V(T)$ bezeichnet werden. Ist Δ_a das Inhaltsmaß einer Grenzfläche desselben und h_a die Maßzahl der zugehörigen Höhe, so ist

$$V(T) = \frac{1}{3} \Delta_a \cdot h_a. \tag{8}$$

Diese Definition kann nur dann gestattet sein, wenn das angegebene Produkt von der Wahl der Grenzfläche unabhängig ist. Das erkennen wir durch folgende Betrachtung.

$ABCD$ sei das gegebene Tetraeder und Aa, Bb, Cc, Dd seine Höhen. Zudem sei von A die Senkrechte AE und von B die Senkrechte BF auf die Kante CD gefällt. Alsdann sind die Winkel AEa und BFb als Neigungswinkel der beiden in CD zusammenstoßenden Halbebenen ACD und BCD einander gleich. Es verhält sich demnach:

$$Aa : Bb = AE : BF,$$

oder es ist:

$$Aa \cdot BF = Bb \cdot AE$$

und somit auch:

$$\frac{1}{2}(CD \cdot BF) \cdot Aa = \frac{1}{2}(CD \cdot AE) \cdot Bb.$$

In jedem Tetraeder liefert daher die Multiplikation einer Grenzfläche mit der zugehörigen Höhe dasselbe Produkt.

Wenn eine Pyramide eine konvexe Grundfläche hat und diese auf irgendeine Weise in Dreiecke zerlegt wird, so ist die Summe aus den Maßzahlen der einzelnen Dreiecke, in die die Grundfläche geteilt ist, von der Art der Zerlegung unabhängig und gleich der Maßzahl der Grundfläche selbst. Ist daher die obige Definition für die Maßzahl eines Tetraeders gestattet, so müssen wir auch als Inhaltsmaß einer Pyramide den dritten Teil der Produkte aus der Maßzahl der Grundfläche in die der Höhe hinstellen.

Um jetzt das Inhaltsmaß irgendeines konvexen Vielflachs Ω zu erhalten, zerlegen wir dasselbe in lauter Pyramiden, welche einen festen Eckpunkt zur Spitze und je eine Grenzfläche von Ω zur Grundfläche haben; dann muß das Inhaltsmaß $V(\Omega)$ des Polyeders gleich der Summe aus den Inhaltsmaßen der einzelnen auf diese Weise erhaltenen Pyramiden sein. Unsere nächste Aufgabe muß es sein, zu zeigen, daß wir stets dieselbe Zahl erhalten, von welchem Eckpunkte wir auch ausgehen mögen. Diesem Nachweis schicken wir einige Hilfssätze voraus.

3b. **Einige Hilfssätze zum Beweise.** Die letzte Definition wenden wir zunächst auf ein konvexes sechseckiges Fünfflach an. Dasselbe ist, wie man leicht sieht, von zwei Dreiecken und drei konvexen Vierecken begrenzt. Wir bezeichnen die Dreiecke mit ABC und $A'C'B'$, die Vierecke mit $CBB'C'$, $ACC'A'$, $BAA'B'$. Wir können dasselbe in das Tetraeder $AA'B'C'$ und die vierseitige Pyramide $A:CBB'C'$ zerlegen. Indem wir aber die Grundfläche der Pyramide durch eine Diagonale zerteilen, wird das Fünfflach in drei Pyramiden zerlegt. Dadurch erhalten wir unter andern folgende Zerlegungen:

$$AA'B'C', \quad ABCC', \quad ABB'C',$$
$$AA'B'C', \quad ACBB', \quad ACC'B',$$
$$ABCC', \quad ABA'C', \quad BA'B'C'.$$

Bei den beiden ersten Zerlegungen erhält man das Fünfflach durch Zusammensetzung aus demselben Tetraeder und derselben Pyramide; die Maßzahlen der drei Tetraeder liefern also dieselbe Summe. Ebenso kommt die erste und die dritte Zerlegung auf eine Teilung in eine drei- und eine vierseitige Pyramide hinaus, welche beide in C' ihre Spitze haben. Die dritte Zerlegung kann aber auch aufgefaßt werden als eine Zerlegung in die Pyramiden $B:A'B'C'$ und $B:ACC'A'$. Statt vom Punkte A können wir also auch die Teilung vom Punkte B aus vornehmen; dabei liefert die obige Definition des Inhaltsmaßes, auf das sechseckige Pentaeder angewandt, ein von der Wahl des Eckpunktes unabhängiges Resultat.

Erster Satz: Zerteilt man ein Tetraeder durch irgendeine Ebene, so ist die Maßzahl des Ganzen gleich der Summe aus den Maßzahlen der Teile.

Dieser Satz ist selbstverständlich, sobald die zerteilende Ebene durch einen Eckpunkt des Tetraeders geht. Geschieht das nicht, so trifft die Ebene entweder drei von einem Eckpunkt ausgehende Kanten oder zwei Paare von Gegenkanten. Im ersten Falle mögen die Kanten DA, DB, DC des Tetraeders $ABCD$ je in den Punkten A', B', C' geschnitten werden. Indem wir dann die Teilung durch die Ebene $A'B'C'$ hinzunehmen, können wir das durch die Ebene $A'B'C'$ abgeschnittene Fünfflach durch die Pyramiden $A':ABC$ und $A':BCC'B'$, das Tetraeder $ABCD$ zuerst durch die Tetraeder $A'ABC$ und $A'BCD$, letzteres aber durch $A':BCC'B'$ und $A':B'C'D$ ersetzen. Demnach ist der Satz bewiesen, sobald die zerteilende Ebene drei von einem Eckpunkte ausgehende Kanten trifft. Wenn aber endlich etwa die Kanten AB und CD je in den Punkten M und M', die Kanten AC und BD je in N und N' getroffen werden und demnach das Tetraeder in die sechseckigen Fünfflache $MNM'N'AO$ und $MNM'N'BC$ zerlegt wird, so kann man durch Hinzunahme der Ebenen CNN', $M'NN'$, ANN' und MNN' eine Teilung herbeiführen, bei der die zerteilende Ebene jedesmal durch eine Kante hindurchgeht.

Zweiter Satz: Wenn ein sechseckiges Fünfflach durch eine Ebene zerlegt wird, welche keines der beiden Grenzdreiecke trifft, so ist das Inhaltsmaß des Ganzen gleich der Summe aus den Inhaltsmaßen der Teile.

Der Beweis kann leicht durch wirkliche Zerlegungen erbracht werden. Wir gebrauchen den Satz aber nur in dem Falle, daß die drei Seitenflächen sich bei Erweiterung in einem Punkte schneiden, und können dann den Beweis auch in anderer Weise führen. Demnach nehmen wir an, das Fünfflach Π werde von dem Tetraeder $DABC$ durch das Dreieck $A'B'C'$ abgeschnitten. Durch eine weitere

Ebene soll die Kante AA' in A'', BB' in B'', CC' in C'' getroffen werden. Dann mögen die Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D$, $A''B''C''D$ der Reihe nach durch T, T', T'' bezeichnet werden. Das Fünfflach Π möge durch die Ebene $A''B''C''$ in Π_1 und Π_2 zerlegt werden, wo das erste an ABC, das zweite an $A'B'C'$ anstößt.

Nach dem Früheren ist:

$$V(T) = V(\Pi) + V(T') = V(\Pi_1) + V(T''),$$
$$V(T'') = V(T') + V(\Pi_2),$$

also auch:

$$V(\Pi) = V(\Pi_1) + V(\Pi_2).$$

3c. **Inhaltsmaß für konvexe Polyeder.** Um die Maßzahl für konvexe Polyeder anzugeben, konstruiert man alle Pyramiden, welche einen festen Eckpunkt zum Scheitel und je eine Grenzfläche, welche nicht durch den gewählten Punkt hindurchgeht, zur Grundfläche hat. Dann muß, wenn die obige Definition für das Inhaltsmaß eines Tetraeders berechtigt sein soll, die Summe aus den Inhaltsmaßen dieser Pyramiden das Inhaltsmaß des Polyeders sein. Zugleich muß aber alsdann zum mindesten diese Summe von der Wahl des Eckpunktes unabhängig sein.

Statt vom Eckpunkte A des Polyeders aus die eben angegebenen Pyramiden zu konstruieren, kann man auch alle von A ausgehenden Diagonalen und Kanten des Polyeders ziehen, diese zu je dreien in der Weise zu Dreikanten vereinigen, daß jedes Dreikant im Äußeren aller übrigen liegt, und die Summe aus den Inhaltsmaßen aller Tetraeder T_a bilden, welche durch diese Dreikante aus dem Polyeder ausgeschnitten werden. Ein solches Tetraeder sei $AGHJ$.

Jetzt ziehe man alle von einem zweiten Eckpunkte E ausgehenden Diagonalen und beachte diejenigen, welche in das Innere von $AGHJ$ eindringen. Jede solche muß zwei von A ausgehende Seitenflächen treffen. Jeden einzelnen Schnittpunkt verbinde man mit A und vereinige die einzelnen dadurch erhaltenen Halbstrahlen wieder in der Weise zu Dreikanten, daß jedes einzelne dem Äußern aller übrigen angehört. Dadurch wird das Tetraeder $AGHJ$ in weitere Tetraeder zerlegt, deren Grundflächen in das Dreieck GHJ hineinfallen und die sämtlich in A ihren Scheitel haben. Indem man dieselbe Konstruktion bei allen von A ausgehenden Tetraedern T_a macht, zerlegt man das Polyeder in neue Tetraeder T_{ae}, und es ist offenbar

$$\sum V(T_a) = \sum V(T_{ae}).$$

Durch die neue Zerlegung ist erreicht worden, daß keine von E ausgehende Diagonale in das Innere eines der Tetraeder T_{ae} eindringt und jede durch zwei von B ausgehende Kanten oder Diagonalen gelegte Ebene, falls sie überhaupt ein bestimmtes Tetraeder T_{ae} trifft, dasselbe in ein Tetraeder und ein sechseckiges Fünfflach zerlegt. Zwei derartige Ebenen haben niemals eine Gerade gemein, welche in das Innere eines der beiden durch sie ausgeschnittenen Dreiecke eindringt, da eine solche Gerade das konvexe Polyeder außer im Punkte B noch in mindestens zwei Punkten treffen müßte, was unmöglich ist. Die einzelnen derartigen Ebenen lassen sich daher in eine solche Ordnung bringen, daß die Gesamtzerlegung von T_{ae} auf eine schrittweise Zerlegung eines Tetraeders in ein Tetraeder und ein Pentaeder und in die Zerlegung eines Pentaeders in zwei Pentaeder hinauskommt. Wir dürfen daher die beiden Hilfssätze anwenden. Nennen wir Π_{ae} die einzelnen Teile, in welche hiernach die Tetraeder T_{ae} zerlegt werden, so ist:

$$\sum V(T_{ae}) = \sum V(\Pi_{ae}).$$

Die Teile Π_{ae} werden aber auch erhalten, indem man das vorgelegte Polyeder Ω einmal von A und dann von E aus in Tetraeder zerlegt; sie ändern sich also nicht, wenn man erst von E aus die einzelnen Tetraeder T_e bildet, diese entsprechend den Schnittpunkten der einzelnen Seitenflächen mit den von A ausgehenden Diagonalen in Tetraeder T_{ea} und die letzten durch Diagonalebenen zerlegt, welche von A ausgehen. Somit ist auch:

$$\sum V(T_e) = \sum V(T_{ea}) = \sum V(\Pi_{ae}).$$

Daraus ergibt sich aber:

$$\sum V(T_a) = \sum V(T_e).$$

3d. **Das angegebene Inhaltsmaß bleibt bei Zerlegung ungeändert.** Wir beweisen jetzt den Satz:

Wird ein konvexes Polyeder durch irgendeine Ebene zerlegt, so ist das Inhaltsmaß des Ganzen gleich der Summe aus den Inhaltsmaßen der Teile.

Wenn die zerteilende Ebene durch einen Eckpunkt geht, so wendet man, um den Satz zu beweisen, zur Ermittlung des Inhaltsmaßes nur die von diesem Eckpunkt ausgehenden Pyramiden an, und zwar nicht bloß für das gegebene Polyeder, sondern auch für seine Teile. Wenn die zerstückelnde Ebene durch keinen Eckpunkt geht, aber etwa die Kante AB durchschneidet, so fügt man eine Teilung hinzu durch eine Ebene, in der die Kante AB enthalten ist, und kann alsdann die allgemeine Gültigkeit des Satzes auf den bereits bewiesenen Fall zurückführen. Daraus geht endlich der allgemeine Satz hervor:

Wird ein konvexes Polyeder in eine beliebige Anzahl konvexer Polyeder zerlegt, so ist das auf die angegebene Weise definierte Inhaltsmaß des Ganzen gleich der Summe aus den Inhaltsmaßen der Teile.

Es sei das konvexe Polyeder Ω in konvexe Teile zerlegt, von denen ein einzelner mit Ω_m bezeichnet werden möge. Die Grenzflächen der einzelnen Teile mögen unbegrenzt erweitert und in eine feste Ordnung $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ gebracht werden. Dadurch wird der Körper Ω in Teile Π_r zerlegt. Diese Teilung kann dadurch herbeigeführt werden, daß man zuerst den Körper Ω durch α_1 in zwei Teile, dann jeden dieser Teile durch α_2 usw. zerlegt und jede Ebene in gleicher Weise benutzt. Daraus folgt:

$$V(\Omega) = \sum V(\Pi_r).$$

Die Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zerlegen aber auch die Teile Ω_m. Da sich auf jede solche Teilung dieselbe Erwägung anwenden läßt und auch hierbei die Teile Π_r erhalten werden, so ist auch:

$$\sum V(\Omega_m) = \sum V(\Pi_r).$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Gültigkeit des Satzes.

3e. **Abschluß des Beweises.** Im Vorangehenden ist bewiesen, daß die Zahl, die wir als Inhaltsmaß eingeführt haben, wirklich den aufgestellten Forderungen genügt. Da zudem die einfachen Polyeder sich in konvexe zerlegen lassen, haben wir zwischen der Gesamtheit der einfachen Polyeder und der Gesamtheit der positiven Zahlen eine Zuordnung eingeführt.

Jedem Polyeder ist eine einzige Zahl und jeder Zahl eine Schar von Polyedern in der Weise zugeordnet, daß die einem Polyeder entsprechende Zahl sowohl von der Bewegung als von der Zerlegung unabhängig ist. Daraus geht hervor, daß diese Zahl für das Polyeder eine große Bedeutung hat. Dennoch bleiben die Bedenken bestehen, welche Dehn gegen den Gebrauch des Wortes „Inhaltsmaß“ angeregt hat. Da wir aber schwerlich beweisen können, daß es nur eine einzige Zuordnung der Polyeder zu den positiven Zahlen gibt, bei der jene Invarianz erhalten bleibt, müssen wir noch zeigen, daß Polyeder, die nach der aufgestellten Definition inhaltsgleich sind, bis auf einen beliebig kleinen Rest auch zerlegungsgleich sind. Das gelingt uns aber, wenn wir den bekannten Satz Euklids benutzen: Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleiches Volumen. Diesen Satz können wir auch in folgender Weise aussprechen: Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind zerlegungsgleich bis auf einen Rest, der sich für einen ganz beliebigen Wert von n jedesmal ganz in ein Prisma von derselben Grundfläche und dem n^{ten} Teile der Höhe hineinlegen läßt. Setzen wir aber das archimedische Axiom voraus, so können wir für ein hinlänglich großes n und bei passender Zerlegung dieses Prismas seine Teile in einen beliebig gewählten Körper legen und überzeugen uns hierdurch, daß das eingeführte Inhaltsmaß wirklich diesen Namen verdient.

4. **Das Inhaltsmaß ohne Benutzung des archimedischen Axioms.** Das archimedische Axiom ist bei der vorangehenden Entwicklung nur zweimal benutzt worden, und zwar zuerst bei der Aufstellung der Zahl, die als Inhaltsmaß eines Tetraeders gelten sollte, und dann bei dem Nachweis, daß die Inhaltsgleichheit unter Benutzung eines Grenzüberganges auf Zerlegungsgleichheit hinauskommt. Die Hilbertsche Streckenrechnung gestattet uns aber, im Anschluß an die gegebene Definition eine Strecke als Inhaltsmaß eines Tetraeders einzuführen und dadurch unserer Untersuchung eine Grundlage zu geben, die vom archimedischen Axiom unabhängig ist. Die durchgeführten Entwicklungen liefern uns aber auch eine Beziehung zwischen der Gesamtheit aller Polyeder und der Gesamtheit aller Strecken, die von einem festen Punkte aus auf einem vorgeschriebenen Halbstrahl abgetragen werden können; dabei entspricht jedem Polyeder eine Strecke und jeder Strecke eine Schar von Polyedern in der Weise, daß diese Zuordnung weder bei der Bewegung noch bei der Zerlegung des Polyeders eine Änderung erleidet. Dagegen ist es nicht möglich, die Theorie durch den angeführten Satz Euklids zum Abschluß zu bringen, da die Anwendung desselben zu diesem Zwecke nur unter der Voraussetzung des archimedischen Axioms möglich ist. In der Ebene kann man zu jedem Polygon ein zerlegungsgleiches Polygon von vorgeschriebener Gestalt, z. B. ein zerlegungsgleiches Quadrat finden und aus diesem Grunde die Lehre von der Flächengleichheit und vom Flächeninhalt ohne das archimedische Axiom zum vollen Abschluß bringen. Dem entsprechend kommt Euklid auch in der Lehre von der Flächengleichheit ohne jeden unendlichen Prozeß aus. Dagegen wendet Euklid schon bei der Lehre von der Inhaltsgleichheit der Pyramiden einen Grenzübergang an, der die Gültigkeit des archimedischen Axioms voraussetzt. Auch die spätere Zeit hat für diesen Satz keinen Beweis geliefert, der mit endlichen Operationen ausreicht. Im Gegenteil hat Dehn, wie wir in Nr. 10 darlegen wollen, bewiesen, daß nur solche Polyeder in paarweise kongruente Teile zerlegt werden können, zwischen deren Flächenwinkeln bestimmte Beziehungen bestehen, daß z. B. eine Pyramide im allgemeinen nicht in einen Quader verwandelt werden kann. Daher ist es zwar noch möglich, jedem Polygon eine Strecke zuzuordnen, welche zu ihm in enger Beziehung steht; aber eine vollständige Begründung des Inhaltsmaßes dürfte sich ohne Benutzung des archimedischen Axioms nicht durchführen lassen.

5. **Möbius' Methode, den Rauminhalt zu bestimmen.** Wir wollen jetzt den Rauminhalt auf einem Wege bestimmen, den uns Möbius gelehrt hat[1]). Zu dem Ende denken wir für das Tetraeder

1) Für diese und die folgenden Nummern kommen außer der großen Abhandlung von Möbius über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders (Leipz. Ber. 1865, Bd. 17; ges. Werke II, S. 473—512) die von Reinhardt bearbeiteten Papiere „Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandtschaft“ (II, S. 519 bis 522), sowie mehrere Abhandlungen des letzteren in den Leipziger Berichten in Betracht.

die Lehre vom Rauminhalt begründet und setzen als erwiesen voraus, daß man als Volumen dieses Körpers den dritten Teil des Produktes aus einer Seitenfläche in die zugehörige Höhe ansehen darf. Dieser Zahl legen wir das positive oder das negative Vorzeichen bei, je nachdem das Tetraeder selbst einen positiven oder einen negativen Sinn hat.

Aus dieser Definition gehen vier Formeln hervor, von denen die drei ersten auf dieselbe Weise bewiesen werden wie die Formeln (a), (b), (c) in § 5, 15 (S. 95).

a) Zunächst ist allgemein $ABCD + ABDC = 0$.

b) Wenn die Punkte C, D, E in einer geraden Linie liegen, so gilt die Gleichung:

$$ABCD + ABDE + ABEC = 0.$$

c) Wenn die vier Punkte B, C, D, E in einer Ebene liegen, so besteht die Gleichung:

$$ABCD - ACDE + ADEB - AEBC = 0.$$

Jetzt mögen fünf Punkte A, B, C, D, E beliebig im Raum gegeben sein. Dann muß mindestens eine Ebene, welche durch drei von diesen Punkten hindurchgeht, von der durch die beiden andern Punkte gelegten Geraden geschnitten werden. Wir dürfen daher annehmen, daß die Ebene ABC mit der Geraden DE den Punkt F gemein hat. Da hiernach die Punkte D, E, F in gerader Linie liegen, gelten nach b) die Beziehungen:

$$ABDE + ABEF + ABFD = 0,$$
$$BCDE + BCEF + BCFD = 0,$$
$$CADE + CAEF + CAFD = 0.$$

Es liegen aber auch die Punkte A, B, C, F in einer Ebene; es muß also nach c) sein:

$$DBCF - DCFA + DFAB - DABC = 0,$$
$$EBCF - ECFD + EFAB - EABC = 0.$$

Bei der Addition dieser fünf Gleichungen fallen alle Tetraeder weg, für die der Punkt F ein Eckpunkt ist; wir erhalten dadurch die Gleichung:

$$\text{(d)} \qquad ABCD + BCDE + CDEA + DEAB + EABC = 0.$$

Diese Gleichung ist aber gleichmäßig in den Punkten A, B, C, D, E und somit von der speziellen Annahme unabhängig.

Jetzt können wir den Rauminhalt einer Pyramide $P:ABC\ldots M$, die ein beliebiges Polygon $ABC\ldots M$ zur Grundfläche und den Punkt P zur Spitze hat, dadurch definieren, daß wir in der Ebene der Grundfläche einen beliebigen Punkt O hinzunehmen und dann die algebraische Summe aller Tetraeder bilden, welche den Scheitel P der Pyramide zum ersten, den Punkt O zum zweiten Eckpunkt haben, während zu Gegenkanten der Reihe nach die Kanten (Seiten) des Polygons $ABC \ldots M$ gewählt werden. Es soll also sein:

$$P : ABC \cdots M = POAB + POBC + \cdots + POMA. \tag{e}$$

Wir vergleichen zwei Pyramiden über derselben Grundfläche $ABC \ldots M$, von denen die eine im Punkte P, die andere in einem Punkte R ihren Scheitel hat. Ist O ein beliebiger Punkt in der Ebene ABC, so tritt zur Gleichung (e) die folgende hinzu:

$$R : ABC \cdots M = ROAB + ROBC + \cdots + ROMA.$$

Wenn zunächst die Gerade PR zur Ebene ABC nicht parallel ist, so wählt man für O den Schnittpunkt der Geraden PR mit der Ebene ABC. Alsdann gelten nach b) die Gleichungen:

$$\begin{gathered} ABPO + ABOR + ABRP = 0, \\ BCPO + BCOR + BCRP = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ MAPO + MAOR + MARP = 0, \end{gathered}$$

oder

$$\begin{gathered} POAB - ROAB = PRAB, \\ POBC - ROBC = PRBC, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ POMA - ROMA = PRMA. \end{gathered}$$

Demnach ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{gathered} P : ABC \cdots M - R : ABC \cdots M \\ = PRAB + PRBC + \cdots + PRMA. \end{gathered} \tag{f}$$

Der Unterschied zweier Pyramiden über derselben Grundfläche ist gleich der algebraischen Summe der Tetraeder, von denen jedes die Verbindungsstrecke der Scheitel zu einer Kante und je eine der Kanten der Grundfläche in ihrer natürlichen Reihenfolge zur Gegenkante hat.

Um die Gültigkeit der Formel (f) für den Fall zu beweisen, daß die Gerade PR zur Ebene ABC parallel ist, nehmen wir einen dritten Punkt S in der Weise hinzu, daß PS und RS zur Ebene nicht parallel sind, stellen die der Formel (f) entsprechenden Punkte für die Punktepaare (P, S) und (R, S) auf und leiten daraus ihre Gültigkeit für das Paar (P, R) ab.

Nach diesen Vorbereitungen können wir mit Möbius den Rauminhalt für ein beliebiges Polyeder definieren, das keiner weiteren Beschränkung unterliegt, als daß es dem Kantengesetze gehorchen soll. In den einzelnen Grenzflächen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_f$ denken wir uns die Eckpunkte so angeordnet, daß jede Kante in den beiden einander entgegengesetzten Richtungen vorkommt. Alsdann nehmen wir einen beliebigen Punkt P des Raumes hinzu und bilden die f Pyramiden, von denen jede eine Fläche φ_ν zur Grundfläche und den Punkt P zum Scheitel hat; jede derartige Pyramide werde mit $P\varphi_\nu$ bezeichnet und ihr Rauminhalt nach der Gleichung (e) definiert. Die algebraische Summe:

(g) $$(P) = P\varphi_1 + P\varphi_2 + \cdots + P\varphi_f$$

soll dann als Rauminhalt des Polyeders definiert werden.

Zunächst müssen wir nachweisen, daß die Summe (P) von der Wahl des Punktes P unabhängig ist. Zu dem Punkte nehmen wir einen weiteren beliebigen Punkt R hinzu und bilden in ganz entsprechender Weise die Summe:

$$(R) = R\varphi_1 + R\varphi_2 + \cdots + R\varphi_f.$$

Dann ist offenbar:

(h) $$(P) - (R) = (P\varphi_1 - R\varphi_1) + (P\varphi_2 - R\varphi_2) + \cdots + (P\varphi_f - R\varphi_f).$$

Nach (f) kann die Differenz $P\varphi_\nu - R\varphi_\nu$ ersetzt werden durch die Summe von Tetraedern, für welche die Strecke PR gemeinschaftliche Kante ist, während die Gegenkante eines einzelnen Tetraeders jedesmal mit einer Kante des Polygons φ_ν zusammenfällt, wobei dieser Kante dasjenige Zeichen beigelegt werden muß, welches durch die Anordnung der Punkte in φ_ν gefordert wird. Es sei hiernach HJ eine Kante von φ_ν. Wegen des Kantengesetzes kommt die Kante JH in einem zweiten Polygon φ_ϱ vor. Demnach enthält die Differenz $P\varphi_\nu - R\varphi_\nu$ das Tetraeder $PRHJ$, dagegen die Differenz $P\varphi_\varrho - R\varphi_\varrho$ das Tetraeder $PRJH$, wobei $PRHJ + PRJH = 0$ ist (nach a). In gleicher Weise tritt jede Kante des Polyeders zweimal als Kante in einem der Tetraeder auf, in welche sich nach (f) die einzelnen Differenzen zerlegen, die auf der rechten Seite von (h) stehen; für diese beiden Tetraeder hat aber die Kante entgegengesetzte Richtung, während stets die Strecke PR Gegenkante ist. Die Differenz $(P) - (R)$ ist also gleich null und die obige Definition des Inhaltsmaßes von der Wahl des Punktes P unabhängig.

6. **Wichtigkeit der durch Möbius einem Polyeder zugeordneten Zahl.** Es sei gestattet, die letzten Entwicklungen nochmals zu überblicken. Wir sind von einem Polyeder Ω ausgegangen, welches keiner weiteren Beschränkung unterliegt, als daß es dem Kantengesetz gehorcht. Die in diesem Polyeder vereinigten Polygone φ_ν haben wir in der Weise geschrieben, daß jede einzelne Kante in den beiden Polygonen, die in ihr zusammenstoßen, entgegengesetzten Sinn hat. Dadurch wird jeder Kante von φ_ν

ein bestimmter Anfangs- und Endpunkt beigelegt. Jetzt wählen wir im Raume einen Punkt P und in der Ebene eines jeden Polygons φ_ν einen Punkt O_ν und bilden die sämtlichen Tetraeder, welche den Punkt P zum ersten, je einen Punkt O_ν zum zweiten und den Anfangs- und den Endpunkt einer jeden Kante von φ_ν zum dritten und vierten Eckpunkte haben. Die Zahl dieser Tetraeder ist gleich der doppelten Anzahl der Kanten. Jedem einzelnen der auf diese Weise erhaltenen Tetraeder ordnet man den dritten Teil des Produktes aus einer Seitenfläche in die zugehörige Höhe zu und legt ihm je nach dem Sinne des Tetraeders das positive oder das negative Vorzeichen bei. Dann ist die algebraische Summe der so bestimmten Zahlen unabhängig von der Wahl des Punktes P im Raume und von der Wahl der Punkte O_ν in den einzelnen Ebenen. Diese Summe wird also a) für alle Polyeder, die dem Kantengesetze gehorchen, nach derselben Vorschrift bestimmt und ist b) trotz der großen Willkür, nach der die vermittelnden Punkte gewählt werden können, von diesen Punkten ganz unabhängig; sie muß somit zum Polyeder selbst in enger Beziehung stehen.

Eine einfache Betrachtung zeigt uns, daß die Summen, die man für kongruente Polyeder erhält, einander gleich sind. Es seien Ω und Ω' zwei kongruente Polyeder. Bei der durch sie vermittelten Zuordnung des Raumes möge dem Punkte P ein Punkt P' und jedem Punkte O_ν ein Punkt O_ν' entsprechen. Für das erste Polyeder benutze man in der angegebenen Weise den Punkt P und die Punkte O_ν, für das zweite Polyeder die Punkte P' und O_ν'. Dann ist jedes Tetraeder, welches bei der Bestimmung der dem Polyeder Ω zugeordneten Zahl ω benutzt wird, kongruent mit dem entsprechenden Tetraeder, das wir zur Ermittlung der dem Polyeder Ω' entsprechenden Summe ω' gebrauchen. Die einzelnen Summanden von ω sind also dem absoluten Betrage und dem Vorzeichen nach gleich den einzelnen Summanden von ω', somit auch $\omega = \omega'$.

Die Summe ω, welche wir hiernach dem Polyeder Ω zugeordnet haben, ändert sich nicht bei beliebiger Zerlegung, falls wir das Polyeder nur als einfach voraussetzen. Wir wollen diese Behauptung zunächst für konvexe Polyeder beweisen.

Wir legen, falls AB und BC zwei aufeinander folgende Kanten der Seitenfläche φ_α sind und M ein beliebiger Eckpunkt des Polyeders ist, der nicht in der Ebene ABC liegt, dem Tetraeder $MABC$ den positiven Sinn bei und geben dem Polygon φ_α den Sinn $ABC\ldots$ Wählt man jetzt den Punkt P im Innern des Polyeders und läßt jeden Punkt O_ν in das Innere des entsprechenden Polygons φ_ν fallen, so muß man jedem einzelnen Tetraeder, das nach der obigen Vorschrift gebildet ist, eine positive Zahl zuordnen.

Jetzt sei das konvexe Polyeder Ω in lauter konvexe Polyeder $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ zerlegt. Auch in den Teilpolyedern sollen die Seitenflächen so geordnet sein, daß das Innere jedesmal allen Seitenflächen gegenüber auf derselben Seite liegt, wie im Polyeder Ω. Dadurch wird erreicht, daß die einem jeden Teilpolyeder zugeordnete Zahl positiv ist, und daß die Summe derjenigen Zahlen, welche den einzelnen in einem Ω_μ enthaltenen Tetraedern zugeordnet werden, positiv ist. Dagegen brauchen keineswegs den sämtlichen Tetraedern dieser Art positive Zahlen zu entsprechen.

Bei den Seitenflächen der Teilpolyeder haben wir zu unterscheiden, ob sie in das Innere oder in eine Seitenfläche von Ω hineinfallen. Es sei $\psi_\varkappa$ eine Seitenfläche der letzten Art, indem sie wenigstens zum Teil mit einem Teile einer Seitenfläche $\varphi_\varkappa$ von Ω zusammenfallen soll. Dann ist das Polygon $\psi_\varkappa$ entweder identisch mit dem Polygon $\varphi_\varkappa$ oder es bildet einen Teil von $\varphi_\varkappa$. Hiernach zerlegen sich die sämtlichen Flächen $\varphi_\varkappa$ in lauter Teile $\psi_\varkappa$, von denen jeder einzelne nur Seitenfläche für ein einziges unter den Teilpolyedern $\Omega_1, \ldots \Omega_m$ ist. Zugleich hat jedes Polygon $\psi_\varkappa$ denselben Sinn wie die entsprechende Fläche $\varphi_\varkappa$, und den Pyramiden $P\psi_\varkappa$ muß bei der getroffenen Festsetzung ein positives Vorzeichen beigelegt werden.

Dagegen stoßen an jede im Innern von Ω gelegene Seitenfläche eines Polyeders Ω_ϱ noch weitere Teilpolyeder an. Demnach zerlegt sich jede Seitenfläche dieser Art auf die Weise in Teile χ_λ, daß jeder einzelne dieser Teile noch einer Seitenfläche eines zweiten Teilpolyeders angehört. Die beiden Polyeder Ω_ϱ und Ω_σ, die in der Fläche χ_λ zusammenstoßen, liegen auf verschiedenen Seiten von χ_λ; die Fläche χ_λ ist also mit verschiedenen Vorzeichen zu versehen, je nachdem sie dem Vielflach Ω_ϱ oder dem Vielfach Ω_σ zugeordnet wird.

Die Summe der einzelnen Zahlen, welche nach der Vorschrift von Möbius den Teilpolyedern $\Omega_1, \ldots \Omega_m$ zugeordnet werden, setzen sich hiernach unter Beachtung der Zeichen zusammen aus den Zahlen, welche den einzelnen Pyramiden $P\psi_\varkappa$ und $P\chi_\lambda$ entsprechen. Die erste Summe, welche zu den Pyramiden $P\psi_\varkappa$ gehört, besteht nur aus positiven Gliedern und ist identisch mit der Summe der zu den Pyramiden $P\varphi_\nu$ zugordneten Zahlen und hiernach mit der dem Polyeder Ω entsprechenden Zahl. Dagegen heben sich die Zahlen, welche aus den Pyramiden $P\chi_\lambda$ erhalten werden, bei der Summation fort, weil je zwei derartige Pyramiden denselben Scheitel und gleiche Grundflächen haben, die letzteren aber mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen werden müssen. Wenn also dem Polyeder Ω die Zahl ω, den Polyedern $\Omega_1, \ldots \Omega_m$ die Zahlen $\omega_1, \ldots \omega_m$ zugeordnet werden, so ist $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_m$.

Nach den Ergebnissen, die wir in § 5, 16. S. 98 gefunden haben, können wir die ganze Beweisführung auf einfache Polyeder übertragen. Ist nämlich ein einfaches Polyeder Ω in lauter einfache Teilpolyeder $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ zerlegt, so können wir stets die einzelnen Polygone so schreiben, daß erstens das Kantengesetz bei jedem Polyeder in Kraft tritt und zweitens jedem Polyeder eine positive Zahl zugeordnet wird. Die einzelnen Polygone der Vielflache $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ zerlegen sich hiernach wieder in lauter Teile $\psi_\varkappa$ und χ_λ, von denen die ersten sich zu den Polygonen von Ω zusammensetzen, die letzten sich gegenseitig wegheben. Demnach erhalten wir folgenden Satz:

Wenn irgendein einfaches Polyeder in lauter einfache Polyeder zerlegt ist und nach der Vorschrift von Möbius sowohl dem Ganzen wie den einzelnen Teilen positive Zahlen zugeordnet werden, was immer möglich ist, so ist die dem Ganzen zugeordnete Zahl gleich der Summe aus den Zahlen, welche den einzelnen Teilen zugewiesen werden.

Die auf die angegebene Weise ermittelte Zahl hat hiernach die wichtigen Eigenschaften, daß sie für alle Polyeder, die dem Kantengesetze folgen, nach demselben Gesetze bestimmt wird, in der Art der Bestimmung eine sehr große Willkür zuläßt, von der Bewegung und bei einfachen Polyedern auch von der Zerlegung unabhängig ist. Hieraus geht hervor, daß diese Zahl für das Polyeder eine sehr große Bedeutung haben muß.

Wir können aber auch unter Anwendung der Hilbertschen Streckenrechnung jedem Tetraeder und dann bei leichter Änderung des angegebenen Verfahrens jedem Polyeder eine Strecke zuordnen, die auf einer gegebenen Geraden von einem vorgeschriebenen Punkte aus in der einen oder der andern Richtung abgetragen wird. Dann übertragen sich die soeben angegebenen charakteristischen Eigenschaften auf die entsprechende Strecke. Zugleich machen wir uns aber vom archimedischen Axiom unabhängig. Diese Zuordnung besteht also für jede Geometrie, in der nur die vier ersten Axiom-Gruppen Hilberts gültig sind, aber seine beiden Stetigkeits-Axiome ihre Gültigkeit verlieren.

Im folgenden setzen wir wieder voraus, daß die zugeordnete Zahl das Inhaltsmaß ist; wir stützen uns dabei etwa wieder auf den erwähnten Satz Euklids, indem wir zugleich das archimedische Axiom unsern Voraussetzungen hinzufügen.

7. **Das Inhaltsmaß für überschlagene Polyeder.** Die Methode, nach der wir in der Ebene das Inhaltsmaß für überschlagene Polygone bestimmt haben (§ 5, 17. S. 98), läßt sich auf Vielflache übertragen, deren Seitenflächen sich gegenseitig durchsetzen. Ein Polyeder dieser Art zerlegt sich in einzelne Zellen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$, d. h. in einfache Polyeder, von denen keines mit einem andern einen Teil gemein hat. Eine einzelne Zelle stößt in einer Seitenfläche entweder an eine andere Zelle oder an denjenigen Teil des Raumes, der keine Zelle enthält. Um den Rauminhalt des gegebenen Polyeders zu bestimmen, hat man den Rauminhalt einer jeden Zelle Φ_ν mit einer bestimmten positiven oder negativen ganzen Zahl c_ν zu multiplizieren und die Summe $c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \cdots + c_r\Phi_r$ zu bilden. Dabei dürfen wir festsetzen, daß jedesmal, wenn man von der rechten Seite einer Seitenfläche auf ihre linke Seite übertritt, der zugehörige Koeffizient um eins zunimmt, daß also, wenn die Zellen Φ_ν und $\Phi_{\nu+1}$ in einer Fläche aneinander stoßen, und Φ_ν auf der rechten, $\Phi_{\nu+1}$ auf der linken Seite dieser Fläche liegt, $c_{\nu+1} = c_\nu + 1$ ist.

Um diese Regel zu erläutern, möchten wir auf die Prismen und Pyramiden verweisen, welche über den in § 5, 17. S. 100 erwähnten ebenen Flächen konstruiert werden können; für die Körperzellen erhalten wir dieselben Koeffizienten, welche wir oben für die Flächenzellen angegeben haben.

Ein weiteres Beispiel bilden wir dadurch, daß wir auf drei geraden Linien, die in verschiedenen Ebenen durch einen Punkt O gehen, die Strecken OA und OA', OB und OB', OC und OC' je in entgegengesetzter Richtung abtragen und die drei überschlagenen Vierecke $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'A'A$ und die beiden Dreiecke ABC und $C'B'A'$ zu einem Fünfflach zusammensetzen. Sowohl die direkte Anwendung der allgemeinen Methode, falls wir dabei den Punkt P durch den Punkt O ersetzen, als auch die zuletzt angegebene Regel verlangen, daß wir als Inhaltsmaß dieses Fünfflachs die Differenz der Tetraeder $OABC$ und $OA'B'C'$ auffassen.

Endlich errichten wir über einem konvexen n-Eck $ABC\ldots H$ nach derselben Seite zwei Pyramiden $M\colon ABC\ldots H$ und $N\colon ABC\ldots H$, von denen wir voraussetzen, daß der Scheitel einer jeden außerhalb der andern gelegen ist. Wir setzen die Seitendreiecke ABM, $BCM, \ldots,$ HAM; BAN, CBN, $\ldots AHN$ zu einem $2n$-Flach zusammen. Wählen wir an Stelle des früher benutzten Punktes P den Punkt

M, so setzt sich der Rauminhalt aus den n Tetraedern $MNAB$, $MNBC$, ... $MNHA$ zusammen. Die Summe dieser Tetraeder ist aber, wie wir vorhin gesehen haben, gleich der Differenz der beiden Pyramiden, die über dem Polygon $ABC \ldots H$ konstruiert sind. Dabei fällt der beiden Pyramiden gemeinsame Raum fort, und die übrig bleibenden Teile der einen werden mit dem positiven, die der andern mit dem negativen Zeichen in Ansatz gebracht. Die Koeffizienten c_ν sind also entweder $+1$ oder -1, je nachdem die Zelle der einen oder der andern Pyramide angehört, ganz in Übereinstimmung mit der zuletzt aufgestellten Regel.

8. **Polyeder, die dem Kantengesetze nicht gehorchen.** Wir haben gesehen, daß für die einfachen Vielflache, welche den Raum in zwei Teile, das Innere und das Äußere, teilen und denen schon aus diesem Grunde ein Rauminhalt beigelegt werden muß, das Kantengesetz von Möbius gilt. Andererseits ist die Erweiterung des Inhaltsbegriffes, wie sie Möbius gegeben hat, von diesem Gesetze abhängig. Wir müssen uns also fragen, ob es auch Polyeder gibt, für die das Kantengesetz seine Gültigkeit verliert. Auch diese Frage ist von Möbius beantwortet und hat ihn gerade zu seinen schönsten Entdeckungen geführt.

Um ein recht einfaches Polyeder zu konstruieren, das dem Kantengesetze nicht gehorcht, gehen wir von fünf Punkten A, B, C, D, E aus, die keiner weiteren Beschränkung unterworfen sind, als daß keine vier von ihnen in einer Ebene liegen, und setzen die fünf Dreiecke:

(R) $\qquad ABC,\ BCD,\ CDE,\ DEA,\ EAB$

zu einer gebrochenen Fläche zusammen. Die freien Kanten AC, CE, EB, BD, DA bilden ein windschiefes Fünfeck $ACEBD$. Konstruieren wir also unter Hinzunahme eines sechsten Punktes F, der mit keinem der fünf Dreiecke (R) in einer Ebene liegt, die fünf Dreiecke:

(S) $\qquad FAC,\ FCE,\ FEB,\ FBD,\ FDA,$

so bilden die zehn Dreiecke (R) und (S) zusammen eine geschlossene Fläche, ein Zehnflach.

Die zehn Dreiecke lassen sich nicht in der Weise anordnen, daß das Kantengesetz befriedigt wird. Schreiben wir z. B. die Dreiecke (R) in der Form:

$$ABC,\ CBD,\ CDE,\ EDA,\ EAB,$$

so haben wir zwar erreicht, daß die Kanten BC, CD, DE, EA je in verschiedener Richtung auftreten, aber jetzt hat die Kante AB für die beiden in ihr zusammenstoßenden Dreiecke dieselbe Richtung.

Statt die Dreiecke in die beiden Gruppen (R) und (S) zusammenzufassen, können wir sie auch in die beiden Gruppen:

(R′) $BCD,\ DCE,\ CEF,\ EFB,\ FBD$

und

(S′) $ABC,\ ACF,\ AFD,\ ADE,\ AEB$

zerlegen. Dadurch ist erreicht, daß in (R′) alle Dreiecke enthalten sind, für welche der Punkt A kein Eckpunkt ist, während die Gruppe (S′) alle Dreiecke mit dem Eckpunkt A enthält. Da aber die ersten fünf Punkte ganz gleichmäßig auftreten, so geht hieraus hervor, daß die von einem Eckpunkte ausgehenden Dreiecke eine gebrochene Fläche bilden, die von einem windschiefen Fünfeck begrenzt wird, während die übrigen Dreiecke sich zu einer Kette von der Form (R′) zusammensetzen.

Das Polyeder hat keinen einfachen Zusammenhang, indem es z. B. durch das Dreieck ABF, welches aus Kanten gebildet wird, ohne eine Grenzfläche zu sein, nicht zerteilt wird. Indem man nämlich die Dreiecke in der Reihenfolge anordnet:

(T) $ABC,\ FAC,\ FCE,\ CDE,\ BCD,\ FBD,\ FDA,$
$DEA,\ EAB,\ FEB,$

stoßen aufeinander folgende Dreiecke in Kanten zusammen, von denen keine dem Dreieck ABF angehört. Man kann also von jedem Dreieck zu jedem andern gelangen, ohne eine Kante des Dreiecks ABF zu überschreiten. So führt die Hinzunahme der acht in (T) zwischen ABC und FEB liegenden Dreiecke vom ersten zum letzten Dreiecke. Will man aber die Dreiecke FCE und FDA durch einen Streckenzug verbinden, der die Kanten des Dreiecks ABF nicht schneidet, so braucht man nur CDE, BCD und FBD hinzuzunehmen. Das Polyeder enthält sechs Ecken, zehn Flächen und fünfzehn Kanten; daß diese Zahlen dem Eulerschen Lehrsatze nicht entsprechen, darf uns nicht wundern, da dieser Satz eben nur für einfach zusammenhängende Polyeder gilt.

Auf unser Zehnflach läßt sich die Möbiussche Definition des Rauminhalts nicht anwenden. Denn zuvörderst läßt sich keine Regel für den Sinn aufstellen, in dem die einzelnen Dreiecke und somit auch die einzelnen Pyramiden genommen werden müssen. Wollte man aber nach irgendeiner Festsetzung die Zeichen bestimmen, in denen die einzelnen Tetraeder genommen werden sollen, welche die einzelnen Dreiecke mit irgendeinem Punkte P bilden, so erhielten wir eine Summe, die nicht einzig von dem Polyeder, sondern zugleich von der Wahl des Punktes P abhängt.

Manche stellen die Sache lieber in folgender Weise dar. Will man die Dreiecke, aus denen das Zehnflach besteht, so anordnen, daß das Kantengesetz befriedigt wird, so muß man jedes Dreieck zweimal, und zwar in entgegengesetztem Sinne auftreten lassen. Dann wird aber der Rauminhalt unter Anwendung der Möbiusschen Vorschrift gleich null. Auch die Oberfläche ist gleich null zu setzen, weil sich je zwei Dreiecke gegenseitig wegheben.

9. **Die einseitigen Flächen.** Die in der Kette (R) zusammengestellten fünf Dreiecke bilden eine gebrochene Fläche, welche für sich großes Interesse gewährt. Wir wählen die fünf Punkte A, B, C, D, E so, daß von den fünf Dreiecken keine zwei einander durchsetzen. Soll derjenige Teil der linken Seite der Ebene ABC, der zugleich zur Ebene BCD benachbart ist, ebenfalls auf der linken Seite der zweiten Ebene liegen, so muß dieser Ebene der Sinn CBD gegeben werden. Indem man die gleiche Forderung für je zwei aufeinander folgende Dreiecke der Kette (R) stellt, wird man genötigt, ihnen der Reihe nach folgenden Sinn beizulegen:

$$ABC,\quad CBD,\quad CDE,\quad EDA,\quad EAB,$$
$$BAC,\quad BCD,\quad DCE,\quad DEA,\quad AEB.$$

Schließt man daher in zwei benachbarten Dreiecken der Fläche auch benachbarte Raumteile aneinander an, so wird man durch Vermittlung der aufeinander folgenden Dreiecke von der einen Seite eines einzelnen Dreiecks auf die andere Seite desselben Dreiecks geführt. Somit ist es unmöglich, bei der gebrochenen Fläche als solcher die beiden Seiten zu unterscheiden. Flächen dieser Art werden als einseitige Flächen bezeichnet. Klein nennt sie Doppelflächen, da ein stetiger Fortgang auf der Fläche zu den beiden Seiten eines jeden Teiles führt.

Diese Eigenschaft der Flächen kann man in einer praktischen Weise zur Anschauung bringen. Man stelle sich ein Modell einer solchen Fläche her und überstreiche dasselbe, an irgendeiner Stelle beginnend, mit Farbe; indem man hierbei von einem Dreieck stetig zu dem benachbarten Dreieck übergeht, wird man dazu geführt, allmählich beide Seiten eines jeden Dreiecks mit Farbstoff zu versehen.

Um weitere Flächen dieser Art zu konstruieren, denkt sich Möbius n Punkte A, B, C, D, ..., M, N beliebig gegeben und daraus eine „Periode“ von n Dreiecken

$$ABC,\quad BCD,\quad \ldots,\quad MNA,\quad NAB$$

gebildet. Wird die aus diesen n Dreiecken bestehende gebrochene Fläche längs AB zerschnitten und in eine Ebene ausgebreitet, so kommen die Punkte A und B noch ein zweites Mal als A' und B' vor; die beiden letzten Dreiecke müssen daher durch MNA' und

$NA'B'$ ersetzt werden. Die Grenze des ebenen Streifens ist bei geradem n das $(n+2)$-Eck:

$$ABDF \dots NB'A'M \dots C,$$

bei ungeradem n aber

$$ABDF \dots MA'B'NL \dots C.$$

Für die Begrenzung der gebrochenen Fläche fallen die Strecken AB und $A'B'$ weg; sie besteht also im ersten Falle aus den beiden $\frac{1}{2}n$-Ecken $BDF \dots N$ und $AC \dots M$, im zweiten Falle aber aus dem n-Eck:

$$ACE \dots NBD \dots M.$$

Eine Periode aus einer ungeraden Anzahl von Dreiecken führt also immer auf eine einseitige Fläche.

Das interessanteste Beispiel einer einseitigen Fläche, das auch bereits von Möbius angegeben ist, wird erhalten, indem man einen rechteckigen Streifen $ABA'B'$ so verbiegt, daß jeder Eckpunkt mit seinem Gegenpunkte zusammenfällt. Wenn hierbei etwa die Kanten AB' und $A'B$ zusammenfallen, so setzen sich die Kanten AB und $B'A'$ zu einer geschlossenen Linie und die beiden Seiten der Fläche zu einer in sich zusammenhängenden einseitigen Fläche zusammen. Die neue Fläche ist mehrfach zusammenhängend und wird durch einen in sich zurückkehrenden Schnitt nicht notwendig zerlegt. Besonders interessant ist diejenige neue Fläche, die man dadurch erhält, daß man einen Schnitt durch die Mitte der gegebenen Fläche führt.

10. **Inhaltsgleiche Polyeder sind nicht immer zerlegungsgleich.** Für zwei ebene Polygone Π_1 und Π_2 haben wir oben (§ 5, 13, S. 92) den Satz gefunden, daß entweder Π_1 mit Π_2 oder Π_1 mit einem Teile von Π_2 oder Π_2 mit einem Teile von Π_1 zerlegungsgleich ist. Dieser Satz macht es möglich, das Inhaltsmaß von Polygonen ohne jeden Grenzübergang und demnach auch ohne Benutzung des archimedischen Axioms zu begründen. Wir müssen uns jetzt fragen, ob auch für Polyeder ein entsprechender Satz gilt, ob also, falls wir unter Π_1 und Π_2 Polyeder verstehen, entweder Π_1 mit Π_2, oder Π_1 mit einem Teile von Π_2, oder Π_2 mit einem Teile von Π_1 zerlegungsgleich ist. Nachdem wir in den vorangehenden Entwicklungen das Inhaltsmaß auf verschiedenen Wegen begründet haben, können wir diese Frage auch in der Form aussprechen: Sind inhaltsgleiche Polyeder notwendig auch zerlegungsgleich? Vielleicht tritt das Wesen der Sache noch deutlicher hervor, wenn wir folgende Frage stellen: Ist es möglich, aus einem gegebenen Polyeder durch passende Zerlegung und geeignete Anordnung der Teile ein neues Polyeder aufzubauen, dessen Flächen vorgeschriebene Winkel mitein-

ander bilden? Kann man speziell nach passender Zerlegung aus den Teilen eines jeden Polyeders einen Quader zusammensetzen?

Diese Frage muß nicht nur rein theoretisch das Interesse in hohem Grade erregen; sie hat für die Lehre vom Rauminhalt geradezu einschneidende Bedeutung. Kann sie bejaht werden, so ist es möglich, auch für die Ermittlung des Inhaltsmaßes von Polyedern ohne den Grenzbegriff auszukommen; muß sie aber verneint werden, so fehlt jede Hoffnung, diese Lehre ohne die Exhaustionsmethode zu erledigen. So haben denn vom Anfange des 19. Jahrhunderts an manche Mathematiker (u. a. Legendre, Gudermann und Gauß) es als einen Mangel empfunden, daß man, um den Fundamentalsatz von der Inhaltsgleichheit von Pyramiden zu beweisen, allgemein das Exhaustionsverfahren, also einen unendlichen Prozeß benutze. Da es aber nicht gelang, mit endlichen Operationen auszukommen, drängte sich gegen Ende des Jahrhunderts immer mehr die Ansicht auf, der unendliche Prozeß lasse sich bei der Begründung dieser Lehre nicht vermeiden, weil inhaltsgleiche Polyeder wohl schwerlich immer zerlegungs- oder ergänzungsgleich seien. So forderte denn Hilbert 1900 auf dem Mathematikerkongreß zu Paris unter anderem auch zum Beweise der Vermutung auf, daß es unmöglich sei, zwei inhaltsgleiche Polyeder stets in paarweise kongruente Teile zu zerlegen. Der Beweis wurde kurz darauf von Dehn in aller Strenge erbracht, und die Göttinger Nachrichten konnten bereits 1900 seinen ersten Beweis bringen. Eine Abänderung des Beweises veröffentlichte Dehn im 51. Bande der math. Annalen (S. 456—478). Der von Vahlen gemachte Versuch (math. Ann. Bd. 56), den Beweis zu vereinfachen, kann nicht befriedigen. Dagegen gelang es Kagan, an dem Dehnschen Beweise einige Vereinfachungen anzubringen (math. Ann. Bd. 57.)

Indem wir den Leser bitten, den Dehnschen Beweis, wie er im 51. Bande der Annalen mitgeteilt ist, dort einzusehen, möchten wir uns damit begnügen, einen Einblick in den Kaganschen Gedankengang zu ermöglichen.

Ein Polyeder Π, dessen Flächenwinkel mit $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ bezeichnet werden sollen, sei in m Polyeder $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ zerlegt. Die einzelne Kante eines Teilpolyeders braucht nicht ihrer ganzen Länge nach eine Kante für andere Teilpolyeder zu sein; sie wird vielmehr im allgemeinen durch in ihr liegende Eckpunkte von andern Teilpolyedern in einzelne Strecken zerlegt. Jede Strecke dieser Art möge eine Zerlegungsstrecke heißen und mit L bezeichnet werden. Sie gehört einer oder mehreren Kanten von Teilpolyedern an, wird durch zwei Eckpunkte von Teilpolyedern begrenzt, enthält aber zwischen ihren Endpunkten keinen derartigen Eckpunkt. Jede Zerlegungsstrecke soll nur ein einziges Mal gezählt werden, auch wenn sie mehreren Teilpolyedern gemeinschaftlich ist. Sie liegt entweder im Innern des Polyeders Π oder im Innern einer Seitenfläche desselben oder in einer seiner Kanten. Die Summe der Flächenwinkel in denjenigen Teilpolyedern, denen sie angehört, ist im ersten Falle gleich 2π, im zweiten gleich π und im dritten gleich einem der Werte $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$. Diese Winkelsumme soll jedesmal das Argument der Zerlegungsstrecke genannt und mit T bezeichnet werden.

Jetzt sei durch andere Anordnung der Teile $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ ein Polyeder Π' erhalten. Dann sind die Polyeder Π und Π' zerlegungsgleich. Umgekehrt können zwei Polyeder nur dann zerlegungsgleich sein, wenn sie sich aus denselben Teilen durch verschiedene Anordnung zusammensetzen lassen.

Eine bestimmte Zerlegungsstrecke L gehöre bei der ersten Zusammensetzung, wo das Polyeder Π gebildet ist, als Kantenstück etwa den Polyedern $\Pi_a, \Pi_b, \Pi_c, \ldots$ an. Wir sehen sie zuerst als Teil einer Kante von Π_a an und betrachten die Lage, welche dies Polyeder bei der Bildung von Π' annimmt. Hierbei kann das Kantenstück L noch Eckpunkte weiterer Teilpolyeder in sich enthalten; es wird also im allgemeinen noch in weitere Teile zerlegt, die wir mit $l_1^{(1)}, l_1^{(2)}, \ldots, l_1^{(r)}$ bezeichnen wollen. Jede derartige Strecke soll eine Elementarstrecke genannt werden.

Ebenso ist die Strecke L, wie wir vorausgesetzt haben, Teil einer Kante von Π_b und wird durch die Eckpunkte von Teilpolyedern, welche bei der zweiten Anordnung auf dem entsprechenden Stücke dieser Kante liegen, in die Elementarstrecken $l_2^{(1)}, l_2^{(2)}, \ldots, l_2^{(s)}$ zerlegt. In entsprechender Weise möge die Strecke L als Teil einer Kante von Π_c die Elementarstrecken $l_3^{(1)}, l_3^{(2)}, \ldots, l_3^{(t)}$ enthalten usw. Dann ist offenbar:

$$L = l_1^{(1)} + l_1^{(2)} + \cdots + l_1^{(r)} = l_2^{(1)} + l_2^{(2)} + \cdots + l_2^{(s)} \text{ usw.}$$

Wir wollen diese Gleichungen kurz in der Form schreiben:

$$(14) \qquad L = \sum l_1 = \sum l_2 = \sum l_3 = \cdots$$

Jede Elementarstrecke wird jedesmal gezählt, so oft sie als Stück einer Kante eines der Polyeder $\Pi_1 \ldots \Pi_m$ vorkommt. Jede einzelne gehört infolgedessen zu einer bestimmten Kante eines bestimmten Teilpolyeders. Daher ordnen wir der Elementarstrecke $l_\alpha^{(\varrho)}$ als Argument $\tau_\alpha^{(\varrho)}$ den Winkel zu, welchen die an der entsprechenden Kante zusammenstoßenden Flächen des Teilpolyeders miteinander bilden. Nun betrachten wir alle diejenigen Elementarstrecken $l_\alpha^{(\varrho)}$, welche sich nach einer der Gleichungen (14) zu der festgewählten Zerlegungsstrecke L zusammensetzen. Dabei schreiben wir $\sum l_\alpha \tau_\alpha$ statt $\sum\limits_\varrho l_\alpha^{(\varrho)} \tau_\alpha^{(\varrho)}$ und bilden die Summe:

$$\sum l_1 \tau_1 + \sum l_2 \tau_2 + \sum l_3 \tau_3 + \cdots$$

für alle diejenigen Zerlegungsstrecken, welche nach den Gleichungen (14) in der Zelegungsstrecke L enthalten sind. Hierbei gehören alle Strecken $l_1^{(\varrho)}$ einer bestimmten Kante von Π_a an; daher sind alle Winkel $\tau_1^{(\varrho)}$ für die verschiedenen Werte von ϱ einander gleich. Die obige Summe geht also über in:

$$\tau_1 \sum l_1 + \tau_2 \sum l_2 + \tau_3 \sum l_3 + \cdots$$

oder nach (14) in:

$$\tau_1 L + \tau_2 L + \tau_3 L + \cdots$$

Die Summe $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots$ stellt aber die Summe aller um das Stück L liegenden Flächenwinkel oder das Argument T der Zerlegungsstrecke L dar. Wenn somit entsprechend der Gleichung (14) alle möglichen Elementarstrecken aufgesucht sind, welche in einer festen Zerlegungsstrecke L liegen, und jede einzelne mit ihrem Argumente multipliziert ist, so ist die Summe der auf diese Weise erhaltenen Produkte gleich dem Produkte der Zerlegungsstrecke L in ihr Argument T. In diesem Sinne ist die Gleichung:

$$\sum l_1 \tau_1 + \sum l_2 \tau_2 + \sum l_3 \tau_3 + \cdots = LT$$

zu verstehen.

Dieselbe Betrachtung wenden wir auf jede einzelne Zerlegungsstrecke an, stellen sie, so oft es angeht, als Summe von Elementarstrecken dar, bilden für jede Zerlegungsstrecke die Gleichung, welche der vorangehenden entspricht, und gelangen durch Summation der so erhaltenen Gleichungen zu der Relation:

$$\sum l\tau = \sum LT, \tag{15}$$

wo auf der linken Seite das Produkt einer jeden Elementarstrecke mit ihrem Argument und auf der rechten Seite das Produkt jeder Zerlegungsstrecke in ihr Argument vorkommt.

Jetzt betrachten wir die Zerlegung des Polyeders Π' in die m Teile $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$. Dabei möge eine einzelne Zerlegungsstrecke mit L', ihr Argument mit T' bezeichnet werden. Dann bleiben die Elementarstrecken $l_\alpha^{(\varrho)}$ und ihre Argumente $\tau_\alpha^{(\varrho)}$ ungeändert. Bildet man also jetzt diejenige Gleichung, welche der Gleichung (15) für die zweite Anordnung entspricht, so bleibt die linke Seite ungeändert. Demnach muß sein:

$$\sum LT = \sum L'T'. \tag{16}$$

Die Kanten des ersten Körpers Π sollen in irgendeiner Reihenfolge mit $K_1, K_2, \ldots, K_k$, die des zweiten Körpers mit $K_1', K_2', \ldots, K_{k'}'$ bezeichnet werden. Für alle Zerlegungsstrecken, welche in der Kante

K_a enthalten sind, ist das zugehörige Argument gleich π_a; wir setzen alle diese Zerlegungsstrecken zu der Kante K_a zusammen. Ebenso vereinigen wir alle Zerlegungsstrecken L, welche im Innern von Grenzflächen des Polyeders Π liegen, zu einer einzigen Strecke M; alle diese haben das gemeinschaftliche Argument π. Indem wir endlich die Summe aller Zerlegungsstrecken, welche im Innern von Π liegen, gleich N setzen, geht die linke Seite von (15) über in:

$$K_1\pi_1 + K_2\pi_2 + \cdots + K_k\pi_k + M\pi + 2N\pi.$$

In gleicher Weise wird die Summe $\sum L'T'$ gleich:

$$K_1'\pi_1' + K_2'\pi_2' + \cdots + K'_{k'}\pi'_{k'} + M'\pi + 2N'\pi,$$

wo $K_1' \ldots K'_{k'}$ die Kanten, $\pi_1' \ldots \pi'_{k'}$ die Flächenwinkel von Π' darstellt, M' die Summe der auf den Grenzflächen, N' die Summe der im Innern von Π' gelegenen Zerlegungsstrecken L' ist. Hiernach geht die Gleichung (16) in die fundamentale Gleichung über:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &K_1\pi_1 + K_2\pi_2 + \cdots + K_k'\pi_k + M\pi + 2N\pi = \\ &K_1'\pi_1' + K_2'\pi_2' + K'_{k'}\pi_{k'} + M'\pi + 2N'\pi. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (13) und den entsprechenden Gleichungen, durch welche die Zusammensetzung der Zerlegungsstrecken L' aus den Elementarstrecken dargestellt wird, gehen gewisse Beziehungen zwischen den $k + k' + 4$ Strecken $K_1 \ldots K_k$, $K_1' \ldots K'_{k'}$, M, N, M', N' hervor. Da die ersten Gleichungen nur die Koeffizienten eins oder null haben, können auch in den neuen Beziehungen nur ganzzahlige Koeffizienten auftreten. Bei der Herleitung der Relation (I) haben wir aber nur die Gleichungen (13) und die ihnen entsprechenden benutzt. Daher muß die Relation (I) für jedes System von Größen $K_1, \ldots N'$ gelten, welches aus jenen Gleichungen hervorgeht. Zwar sind diese Gleichungen selbst unbekannt, solange wir die Art der Zerlegung nicht kennen. Indem wir aber die Zerlegungsgleichheit von Π und Π' voraussetzen, verlangen wir, daß diese Gleichungen wirklich Lösungen besitzen. Nun kann jedes System von homogenen linearen Gleichungen, deren Koeffizienten sämtlich ganzzahlig sind, durch ganze Zahlen befriedigt werden, sobald es überhaupt Lösungen hat.

Damit also die beiden Polyeder zerlegungsgleich seien, muß es mindestens ein System von ganzen Zahlen

$$\text{(17)}\qquad K_1, K_2, \ldots, M, N, K_1', K_2', \ldots, M', N'$$

geben, welches der Gleichung (I) genügt. In vielen Fällen können wir aber an den Maßzahlen für die Kanten der beiden Polyeder erkennen, daß jenes Gleichungssystem auf mehrfache Weise gelöst werden kann. Dann müssen auch die Gleichungen (I) für verschiedene ganzzahlige Werte der Größen (17) befriedigt werden können.

11. **Beispiele von inhaltsgleichen Körpern, die nicht zerlegungsgleich sind.**

a) Wir weisen nach, daß kein regelmäßiger Körper (mit der selbstverständlichen Ausnahme des Würfels) mit einem Quader zerlegungsgleich ist.

Indem wir den Flächenwinkel eines regelmäßigen Körpers mit α bezeichnen, geht die Gleichung (I) über in:

$$n\alpha = m\frac{\pi}{2}, \tag{18}$$

wo m und n ganze Zahlen sind.

Nun gehen aus dem Moivreschen Lehrsatze

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

die beiden Gleichungen hervor:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \cdots$$

$$\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \cdots$$

Diese schreiben wir in der Form:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha\left(1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4\alpha - \cdots\right)$$

$$\sin n\alpha = \cos^n\alpha\operatorname{tg}\alpha\left(n - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^2\alpha + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^4\alpha - \cdots\right).$$

Soll die Gleichung (18) für ein ungerades m befriedigt werden, so muß $\cos n\alpha = 0$ sein. Dann muß für eine ganze Zahl n die Gleichung bestehen:

$$1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \binom{n}{2}\operatorname{tg}^4\alpha - \cdots = 0. \tag{19}$$

Wenn aber in (18) die Zahl m gerade ist, so dürfen wir n als ungerade voraussetzen. Demnach muß bei Zerlegungsgleichheit entweder für irgendein ganzzahliges n die Gleichung (19) oder für ein ungerades n die Gleichung bestehen:

$$n - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^2\alpha + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^4\alpha - \cdots = 0. \tag{20}$$

Beides ist unmöglich. Für das regelmäßige Tetraeder und Oktaeder hat nämlich $\operatorname{tg}^2\alpha$ den Wert 8, für das regelmäßige Dodekaeder den Wert 4 und für das regelmäßige Ikosaeder den Wert 4/5. Da aber in den Gleichungen (19) und (20) die Binomialkoeffizienten ganze Zahlen sind, so sind für das Vier-, Acht- und Zwölfflach alle Glieder in diesen Gleichungen gerade Zahlen mit Ausnahme des ersten, welches ungerade ist. Beim Zwanzigflach erreicht man dasselbe dadurch, daß man die Gleichungen mit einer passenden Potenz von 5 multipliziert.

Hiernach ist kein regelmäßiges Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder oder Ikosaeder mit einem Quader zerlegungsgleich.

b) Unter einem gleichschenklig-rechtwinkligen Tetraeder wollen wir mit Dehn ein Tetraeder $OABC$ verstehen, von dem drei in einem Eckpunkt O zusammenstoßende Kanten OA, OB, OC einander gleich sind und aufeinander senkrecht stehen. Nennen wir β den Winkel, unter dem die Ebene ABC gegen eine der drei andern Ebenen geneigt ist, und α den Flächenwinkel des regelmäßigen Tetraeders, so ist:

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

und demnach:

$$2\beta + \alpha = \pi.$$

Ein solches Tetraeder kann mit einem Quader nur dann zerlegungsgleich sein, wenn für zwei ganze Zahlen m und n die Beziehung besteht:

$$n\beta = m\,\frac{\pi}{2} \text{ oder } (n-m)\,\frac{\pi}{2} = n\cdot\frac{\alpha}{2}.$$

Daß dies nicht möglich ist, haben wir soeben bewiesen.

c) Beim Vergleich eines gleichschenklig-rechtwinkligen Tetraeders mit einem inhaltsgleichen regulären Tetraeder überzeugen wir uns zunächst, daß die eben genannte Strecke AB und die Kante des regelmäßigen Tetraeders in irrationalem Verhältnisse stehen. Daher müßte es möglich sein, nach beliebiger Wahl der ganzen Zahlen m und n eine rationale Zahl r so zu bestimmen, daß ist:

$$m\alpha + n\beta = r\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Das ist aber unmöglich.

d) Endlich wollen wir nachweisen, daß zwei regelmäßige Körper von verschiedener Flächenzahl niemals zerlegungsgleich sein können. Dabei dürfen wir vom Würfel absehen, weil dieser ein spezieller Fall des Quaders ist. Sind α und β die Winkel der beiden regelmäßigen Körper, so geht die Beziehung (I) über in:

$$m\alpha = n\beta + r\pi, \tag{21}$$

wo man für m, n, r jedes System von ganzzahligen Werten zulassen muß, welches den aus den Beziehungen (14) hervorgehenden Gleichungen genügt. Die Zahl dieser Gleichungen, soweit sie voneinander unabhängig sind, kann nicht größer als zwei sein, da sie auch befriedigt werden müssen, wenn man für m und n die Längen der Kanten einsetzt, drei voneinander unabhängige homogene lineare Gleichungen zwischen drei Unbekannten aber nur den Wert null gestatten. Wäre die Zahl der voneinander unabhängigen Gleichungen gleich zwei, so würde sich ein rationales Verhältnis für die Zahlen m und n ergeben; das ist aber nicht möglich, da dies Verhältnis auch für die Kanten der beiden Körper bestehen müßte, was bei der Gleichheit des Inhalts ebenfalls ausgeschlossen ist. Wenn aber zwischen den Größen m, n, r nur eine Gleichung besteht, so kann man diese noch dadurch befriedigen, daß man zuerst m und dann n gleich null wählt und jedesmal für die beiden andern Größen ganze Zahlen ansetzt; daß aber hierfür die obige Gleichung nicht befriedigt werden kann, ist unter a) bewiesen. Sollte aber keine Gleichung zwischen m, n, r bestehen, so müßte die Gleichung (21) für alle ganzzahligen Werte befriedigt werden, was offenbar nicht angeht.

Weitere Beispiele finden sich in den angegebenen Arbeiten von Dehn. Dieser selbst und Kagan haben ferner bewiesen, daß auch die Ergänzungsgleichheit von Polyedern nicht notwendig mit der Inhaltsgleichheit verbunden ist. Endlich hat Dehn (Math. Ann. Bd. 59, S. 84ff.) mit Hilfe der Mengenlehre gezeigt, daß es eine nicht abzählbare unendliche Anzahl von Paaren inhaltsgleicher Polyeder gibt, die weder zerlegungs- noch ergänzungsgleich sind.

12. **Nachträgliche Bemerkung.** Bei einem ebenen Polygon haben zwei Begriffe eine hervorragende Wichtigkeit, nämlich die Gesamtheit der zu ihm vereinigten Strecken und der Flächeninhalt. Für das praktische Leben kommt es vor allem auf den zweiten Begriff an, gegen den der erste weit zurücktritt. Auch der sprachliche Ausdruck bevorzugt den Flächeninhalt und betrachtet die Gesamtheit der Seiten als das Sekundäre. Indem man von Teilen eines Polygons spricht, denkt man an den Inhalt, der sich als Ganzes aus seinen Teilen zusammensetzt. Das allgemein verbreitete Wort „Seite" deutet darauf hin, daß ein Flächenteil durch die einzelnen Strecken in ihrer Gesamtheit abgegrenzt wird. Am schärfsten tritt aber der Inhalt als das Ursprüngliche hervor, wenn man dem Polygon selbst seinen Umfang entgegensetzt und dadurch die Gesamtheit der Strecken als den abgeleiteten Begriff hinstellt.

Ganz dasselbe gilt für die Polyeder; auch hier sieht der Sprachgebrauch den begrenzten Raumteil als das Wesentliche und die Gesamtheit der Polygone als das minder Wichtige an.

Die Schule kann sich einer Gewohnheit, die der Sprachgebrauch eingeführt hat, nicht entziehen; sie darf sich auch nicht geradezu in Gegensatz setzen zu den Bedürfnissen des Lebens. Sie kann in diesem Falle aber dem allgemeinen Gebrauche um so eher folgen, da die allgemeine Theorie der Vielecke und der Vielflache gar nicht Gegenstand des Unterrichts sein kann, vielmehr die Beschränkung auf die gewöhnlichen (konvexen) Polygone und Polyeder dringend geboten ist. Dennoch glauben wir hier darauf hinweisen zu sollen, daß die Wissenschaft genau den entgegengesetzten Standpunkt zu vertreten hat.

Um eine allgemeine Definition des Polygons geben zu können, muß man dasselbe als eine Vereinigung von Strecken ansehen, welche in der Beziehung zueinander stehen, daß der Endpunkt einer jeden Strecke zugleich Anfangspunkt einer andern Strecke ist. Der Begriff des Inhalts setzt zunächst voraus, daß die miteinander vereinigten Strecken zwei Teile der Ebene gegeneinander abgrenzen. Das gilt aber nur für einfache Polygone, ist auch für sie nicht selbstverständlich, bedarf vielmehr eines Beweises. Man läßt sich hier sehr leicht dazu verleiten, einen Satz, der durch die Anschauung für die kleinsten Zahlen bestätigt wird, als allgemein gültig anzusehen, und bedenkt nicht, daß die Anschauung den Beweis nicht ersetzen darf und daß zudem die Anschauung für größere Seitenzahlen ganz versagt. Neue Schwierigkeiten erwachsen aus den Begriffen der Flächengleichheit und des Flächenmaßes, und diese sind so erheblich, daß sie erst in der jüngsten Zeit haben beseitigt werden können. Endlich ist es für überschlagene Vielecke gar nicht von selbst klar, was man unter dem Inhalt verstehen soll; nur die schönen Sätze, die mit der Methode von Möbius verbunden sind, haben seiner Art der Inhaltsbestimmung allgemeine Anerkennung verschafft.

Alle diese Erwägungen gelten auch für das Polyeder; hier tritt aber ein ganz neuer Umstand hinzu. Damit es nämlich möglich wird, einem Polyeder einen Rauminhalt beizulegen, muß man den einzelnen in ihm vereinigten Vielecken je einen solchen Sinn geben können, daß das Möbiussche Kantengesetz in die Erscheinung tritt; der Inhalt ist eben keine allgemeine Eigenschaft der Polyeder, muß vielmehr auf diejenigen Polyeder beschränkt werden, deren Polygone einer bestimmten Bedingung genügen.

§ 8. Die uneigentlichen Gebilde der Ebene.

1. **Die unendlich fernen Punkte der Ebene.** Während der Satz, daß zwei Punkte durch eine Gerade verbunden werden können, immer gilt, erleidet seine Umkehrung, wonach zwei in derselben Ebene gelegene Gerade einen Punkt gemein haben, jedesmal eine Ausnahme, sobald die Geraden parallel sind. Wir müssen aber wünschen, einerseits die Lehrsätze ganz allgemein aussprechen, andererseits den Beweisen eine solche Form geben zu können, daß wir nicht nötig haben, den Fall des Parallelismus jedesmal eigens für sich zu betrachten. Dies Ziel erreichen wir dadurch, daß wir uneigentliche, d. h. nicht existierende Punkte einführen, mit denen sich dieselben Operationen vornehmen lassen wie mit den eigentlichen Punkten. Zu diesem Zwecke legen wir jeder Geraden einen einzigen uneigentlichen Punkt bei und setzen fest, daß dieser auch allen ihr parallelen Geraden angehören soll.

Diesen Punkt nennen wir den unendlich fernen Punkt der Geraden, indem wir uns auf folgende Betrachtung stützen. Wir gehen von einer Geraden g und einem ihr nicht angehörenden Punkte P aus. Wenn der Fußpunkt A der von P auf g gefällten Senkrechten die Gerade g in die Halbstrahlen AB und AC zerlegt, so trifft jeder von P ausgehende Halbstrahl PQ, der in der Halbebene (APB) liegt und mit PA einen spitzen Winkel bildet, den Halbstrahl AB. Ebenso hat jeder Halbstrahl PR, der in der Halbebene (APC) enthalten und gegen PA unter einem spitzen Winkel geneigt ist, einen Punkt mit dem Halbstrahl AC gemein. Je größer in beiden Fällen der spitze Winkel wird, um so weiter entfernt sich der Schnittpunkt mit g vom

Punkte A. Wenn PQ aus der Lage PA stetig in die Lage der Senkrechten PS übergeht, so entfernt sich der Schnittpunkt von PQ mit g auf dem Halbstrahl AB immer weiter vom Punkte A und geht in den uneigentlichen Punkt von g über, wenn PQ mit PS zusammenfällt. Dasselbe findet statt, wenn wir den Winkel APR von null bis zu einem Rechten wachsen lassen. Wir müssen daher sagen, daß der unendlich ferne Punkt von g sowohl dem Halbstrahl AB als auch dem Halbstrahl AC angehört und vom Punkte A unendlich weit entfernt ist.

Während parallele Gerade denselben unendlich fernen Punkt haben, müssen unendlich ferne Punkte, die zwei sich schneidenden Geraden angehören, als verschieden betrachtet werden. Denn zwei nicht parallele Gerade, die in einer Ebene liegen, schneiden sich in einem eigentlichen Punkte; wären ihre uneigentlichen Punkte identisch, so hätten sie zwei Punkte gemein, und das widerspricht der Forderung, daß zwei verschiedene Gerade höchstens in einem Punkte zusammentreffen sollen. Zwei unendlich ferne Punkte, die auf Geraden von verschiedener Richtung liegen, müssen daher als voneinander verschieden betrachtet werden.

2. **Die unendlich ferne Gerade.** Durch die Einführung der unendlich fernen Punkte haben wir erreicht, daß gesagt werden darf: zwei eigentliche Gerade derselben Ebene haben stets einen Punkt gemein. Wir müssen aber zusehen, ob auch jetzt die weitere Forderung befriedigt werden kann, nach welcher es möglich sein muß, zwei beliebige Punkte durch eine gerade Linie zu verbinden. Nun kommt die Aufgabe, einen eigentlichen Punkt P mit dem unendlich fernen Punkt der Geraden g zu verbinden, darauf hinaus, durch P die Parallele zu g zu ziehen; diese Aufgabe hat ebenfalls eine einzige Lösung. Es braucht also nur noch die Aufgabe gelöst zu werden: Durch zwei unendlich ferne Punkte eine Gerade zu legen. Sobald aber eine Gerade auch nur einen einzigen eigentlichen Punkt enthält, ist sie eine eigentliche Gerade und besitzt nur einen einzigen unendlich fernen Punkt. Daher liegen auf einer Geraden, die durch zwei uneigentliche Punkte geht, nur unendlich ferne Punkte. Nun muß aber eine derartige Gerade auch mit jeder eigentlichen Geraden der Ebene einen Punkt gemein haben; wir sind daher genötigt, alle unendlich fernen Punkte einer einzigen Geraden, der *unendlich fernen Geraden*, zuzuweisen.

Indem wir in der Ebene jeder Geraden einen einzigen uneigentlichen Punkt und alle uneigentlichen Punkte einer einzigen Geraden zuweisen, bilden wir eine Sprechweise aus, bei der für die Ebene die beiden Sätze in voller Allgemeinheit gelten:

Durch je zwei verschiedene Punkte läßt sich stets eine einzige

Gerade legen, und zwei verschiedene Gerade einer Ebene haben stets einen einzigen Punkt gemein.[1])

3. **Beziehung zur Kollinearität.** Wir nennen zwei Ebenen kollinear aufeinander bezogen, wenn jedem Punkte der einen Ebene ein Punkt der andern in der Weise zugeordnet ist, daß den in einer Geraden liegenden Punkten der einen Ebene in der andern Ebene solche Punkte entsprechen, die ebenfalls einer geraden Linie angehören. Zur analytischen Darstellung dieser Zuordnung können wir in jeder Ebene ein Cartesisches Koordinatensystem benutzen, in der ersten das System der x, y, in der zweiten Ebene das der x', y'. Soll dem Punkte (x, y) der ersten Ebene der Punkt (x', y') der zweiten Ebene zugeordnet sein, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(1) \qquad x' = \frac{a'x + b'y + c'}{ax + by + c}, \quad y' = \frac{a''x + b''y + c''}{ax + by + c},$$

wo die Koeffizienten Konstante sind, deren Determinante von null verschieden ist.

1) Zum Vergleich weisen wir kurz auf die uneigentlichen Gebilde in einer Lobatschewskyschen Ebene hin. Da zwei parallele Gerade keinen eigentlichen Punkt gemein haben, weisen wir allen Geraden, die einander nach einer bestimmten Richtung hin parallel sind, denselben uneigentlichen Punkt zu und bezeichnen ihn als einen unendlich fernen Punkt dieser Geraden. Da wir aber von demselben Punkte aus zwei Parallele zu einer festen Geraden ziehen können, müssen wir auf jeder Geraden zwei verschiedene unendlich ferne Punkte annehmen. Die Gesamtheit aller unendlich fernen Punkte der Ebene hat mit jeder Geraden zwei Punkte gemein; sie bildet daher eine Kurve 2. Ordnung, den unendlich fernen oder den Grundkegelschnitt der Lobatschewskyschen Ebene.

Aber auch zwei „nicht schneidende Gerade" in derselben Lobatschewskyschen Ebene haben keinen Punkt gemein. Wir wollen daher sagen: Zwei Gerade derselben Ebene, die eine gemeinschaftliche Senkrechte besitzen, haben einen idealen Punkt gemein. Dabei sollen alle geraden Linien, die in einer Ebene auf derselben Geraden senkrecht stehen, durch denselben idealen Punkt gehen.

Hiernach können wir die Lobatschewskysche Ebene so auf die euklidische Ebene abbilden, daß jedem Punkte ein Punkt, jeder Geraden eine Gerade entspricht, die eigentlichen Punkte der ersteren den Punkten im Innern, die idealen Punkte den Punkten im Äußern eines Kegelschnitts entsprechen. Die Geraden der Lobatschewskyschen Ebene zerfallen in drei Gruppen:

a) eigentliche Gerade, die außer eigentlichen und idealen Punkten auch zwei unendlich ferne Punkte besitzen,

b) Tangenten an dem unendlich fernen Kegelschnitt, welche bis auf einen unendlich fernen Punkt nur ideale Punkte enthalten,

c) ideale Gerade, auf denen nur ideale Punkte liegen.

Indem wir diese Punkte und diese Gerade einführen, bilden wir eine Ausdrucksweise aus, nach der wir je zwei verschiedene Punkte durch eine Gerade verbinden können und je zwei verschiedene Gerade einer Ebene einen Punkt gemein haben.

Durch Auflösung der Gleichungen (1) erhalten wir die neuen Gleichungen:

$$x = \frac{A'x' + B'y' + C'}{Ax' + By' + C}, \quad y = \frac{A''x' + B''y' + C''}{Ax' + By' + C}, \tag{2}$$

deren Koeffizienten sich rational durch die Koeffizienten der Gleichungen (1) darstellen lassen.

Will man die uneigentlichen Punkte der Ebene nicht zulassen, so erleidet die Zuordnung mehrfache Ausnahmen, indem einerseits jedem Punkte der ersten Ebene, der in der Geraden $ax + by + c = 0$ liegt, kein Punkt der zweiten Ebene entspricht, und andererseits jedem Punkte der zweiten Ebene, der der Geraden $Ax' + By' + C = 0$ angehört, kein Punkt der ersten Ebene zugeordnet werden kann. Dagegen wird die Zuordnung bei der Fiktion der unendlich fernen Geraden ganz einheitlich; jetzt entspricht jedem Punkte der einen Ebene ein Punkt der andern und jeder Geraden der einen eine Gerade der andern; der unendlich fernen Geraden der ersten Ebene ist die Gerade $Ax' + By' + C = 0$ in der zweiten und der unendlich fernen Geraden der zweiten Ebene ist in der ersten die Gerade $ax + by + c = 0$ zugeordnet. Die Forderung, bei der kollinearen Zuordnung zweier Ebenen von Ausnahmen frei zu bleiben, zwingt uns somit, die unendlich fernen Punkte in der oben angegebenen Weise einzuführen.

Die Gleichungen (1) können wir noch in einer andern Weise schreiben. Wir setzen:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x' = \frac{y_1}{y_3}, \quad y' = \frac{y_2}{y_3}, \tag{3}$$

und erhalten statt der Gleichungen (1) die folgenden:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= a'x_1 + b'x_2 + c'x_3, \\ \varrho y_2 &= a''x_1 + b''x_2 + c''x_3, \\ \varrho y_3 &= ax_1 + bx_2 + cx_3, \end{aligned} \tag{4}$$

wo ϱ einen beliebigen Proportionalitäts-Faktor darstellt. Hierbei denken wir jeden Punkt der ersten Ebene durch die Verhältnisse der Größen x_1, x_2, x_3 und jeden Punkt der zweiten Ebene durch die Verhältnisse der Größen y_1, y_2, y_3 bestimmt. Für einen eigentlichen Punkt der ersten Ebene wird x_3 von null verschieden, und dann dürfen wir die beiden ersten Gleichungen (3) anwenden. Dagegen wird jeder unendlich ferne Punkt der ersten Ebene durch die Gleichung $x_3 = 0$ und das Verhältnis $x_1 : x_2$ bestimmt. In gleicher Weise verfahren wir für die zweite Ebene.

An dieser Stelle möchten wir noch daran erinnern, daß wir in den Gleichungen (4) die Größen x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 auch als

Dreieckskoordinaten ansehen dürfen. Jedoch brauchen wir diesen Gedanken nicht weiter auszuführen.

Besonders wichtig ist die kollineare Zuordnung in dem Falle, daß die beiden Ebenen zusammenfallen. Alsdann sagt man wohl, die Ebene sei Träger von zwei ebenen Feldern, von denen eines, das der Koordinaten x, y, als das erste, das andere aber, das der x', y', als das zweite angesehen wird. Wir dürfen alsdann sogar für die Bestimmung der Koordinaten x, y und x', y' dasselbe Achsensystem zugrunde legen.

4. **Projektive Zuordnung in kollinearen Ebenen.** In der Ebene der x, y mögen zwei Punkte durch ihre Koordinaten ξ_0, η_0 und ξ_1, η_1 gegeben sein. Soll ein Punkt (x, y) mit diesen beiden Punkten in gerader Linie liegen, so muß sich ein Parameter λ so bestimmen lassen, daß ist:

$$x = \frac{\xi_0 + \lambda\xi_1}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\eta_0 + \lambda\eta_1}{1+\lambda}. \tag{5}$$

Diesen drei Punkten sollen in der (x', y')-Ebene die Punkte (ξ_0', η_0'), (ξ_1', η_1') und (x', y') entsprechen. Setzt man ferner:

$$a\xi_0 + b\eta_0 + c = M,$$
$$a\xi_1 + b\eta_1 + c = N,$$

so leitet man aus den Gleichungen (1) in Verbindung mit (5) leicht die Beziehungen her:

$$x' = \frac{M\xi_0' + N\lambda\xi_1'}{M+N\lambda}, \quad y' = \frac{M\eta_0' + N\lambda\eta_1'}{M+N\lambda},$$

oder, wenn man noch:

$$\frac{N\lambda}{M} = \lambda'$$

setzt:

$$x' = \frac{\xi_0' + \lambda'\xi_1'}{1+\lambda'}, \quad y' = \frac{\eta_0' + \lambda'\eta_1'}{1+\lambda'}. \tag{6}$$

Aus diesen Gleichungen geht wieder hervor, daß allen Punkten der (x, y)-Ebene, die in einer Geraden liegen, die Punkte einer Geraden in der (x', y')-Ebene entsprechen.

In der durch die Punkte (ξ_0, η_0) und (ξ_1, η_1) gelegten Geraden nehmen wir einen vierten Punkt hinzu, dessen Koordinaten sind:

$$\bar{x} = \frac{\xi_0 + \mu\xi_1}{1+\mu}, \quad \bar{y} = \frac{\eta_0 + \mu\eta_1}{1+\mu}.$$

Diesem ist ein Punkt $(\bar{x}', \bar{y}')$ zugeordnet:

$$\bar{x}' = \frac{\xi_0' + \mu'\xi_1'}{1+\mu'}, \quad \bar{y}' = \frac{\eta_0' + \mu'\eta_1'}{1+\mu'},$$

wo $\mu' = \frac{N\mu}{M}$ ist. Das Doppelverhältnis der vier Punkte in der ersten

Geraden ist $\lambda : \mu$; die vier ihnen entsprechenden Punkte haben das Doppelverhältnis $\lambda' : \mu'$, welches wegen der angegebenen Beziehung gleich $\lambda : \mu$ ist. Irgend vier in gerader Linie liegende Punkte haben somit dasselbe Doppelverhältnis wie die vier ihnen zugeordneten Punkte. Dasselbe läßt sich für Strahlenbüschel beweisen, die in den beiden Ebenen einander zugeordnet sind.

Wir nennen Punktreihen oder Strahlenbüschel projektiv aufeinander bezogen, wenn irgend vier Elementen des einen Gebildes im andern solche vier Elemente entsprechen, die mit jenen dasselbe Doppelverhältnis haben. Aus der vorstehenden Entwicklung geht somit der Satz hervor:

Wenn zwei Ebenen kollinear aufeinander bezogen sind, so sind entsprechende einstufige Grundgebilde (Punktreihen oder Strahlenbüschel) einander projektiv zugeordnet.

Unter den Eigenschaften der Figuren sind diejenigen besonders bemerkenswert, die bei beliebigen kollinearen Umformungen ungeändert bleiben. Derartige Eigenschaften werden meist als projektiv bezeichnet. Die Namen: visuell und deskriptiv, die in neuester Zeit vorgeschlagen sind, haben bisher kaum Anklang gefunden. Den projektiven stehen die metrischen Eigenschaften gegenüber, die nur bei speziellen Zuordnungen ungeändert bleiben.

Zu den projektiven Eigenschaften gehört an erster Stelle das Doppelverhältnis, wie wir soeben bewiesen haben. Dasselbe ergibt sich auch aus dem bekannten Satze, daß irgend vier durch denselben Punkt gehende Strahlen dasselbe Doppelverhältnis haben wie die vier Punkte, in denen sie von irgendeiner Transversalen geschnitten werden. Man faßt diesen Satz häufig kurz in dem Ausspruch zusammen, ein Doppelverhältnis werde durch Schneiden und Projizieren nicht geändert.

5. **Imaginäre Punkte.** Bei der Berechnung der Koordinaten eines Punktes kann man auf komplexe Werte geführt werden. Obwohl in diesem Falle der gestellten Aufgabe kein Punkt entspricht, ist man übereingekommen, auch jetzt von einem Punkte zu sprechen, ihn aber als einen imaginären Punkt zu bezeichnen.

Eine der einfachsten Aufgaben, die zu solchen Punkten führen, dürfte die folgende sein:

Auf einer Geraden sind zwei Punktepaare A, A' und B, B' gegeben; es sollen zwei Punkte M und N gesucht werden, die zu beiden harmonisch liegen.

Bei der Lösung dieser Aufgabe haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden, ob die beiden Punktepaare einander ausschließen oder nicht. Im ersten Falle, wo die Punkte A und A' entweder beide Punkte des andern Paares oder keinen zwischen sich enthalten, gibt es ein Punktepaar M und N von der verlangten Eigenschaft. Dann kann man aber jedem Punkte C der Geraden einen Punkt C' so zuordnen, daß auch die Punkte C und C' zu M und N harmonisch liegen. Bei dieser Zuordnung bleibt das Doppelverhältnis von je vier Punkten ungeändert; die Zuordnung ist projektiv und wird speziell eine Involution genannt, weil man die Punkte eines jeden Paares miteinander vertauschen kann.

Wenn aber die Punktepaare einander trennen, etwa B, aber nicht B', zwischen A und A' liegt, so gibt es kein Punktepaar, das zu den gegebenen Paaren harmonisch liegt. Dennoch können wir auch jetzt wieder die Punkte der Geraden einander so zuordnen, daß irgend vier Punkte dasselbe Doppelverhältnis haben wie die ihnen entsprechenden Punkte; auch in diesem Falle bestimmen die Punktepaare A, A' und B, B' eine involutorische Zuordnung der Punkte der Geraden. Aber die Involution hat in diesem Falle keine, oder wie wir lieber sagen, imaginäre Hauptpunkte.

Jede Gleichung mit reellen Koeffizienten hat, außer den reellen, nur paarweise konjugiert komplexe Wurzeln. Sobald also ein geometrisches Problem auf einen imaginären Punkt führt, liefert es auch den konjugiert komplexen Punkt. Zwei so miteinander verbundene Punkte liegen aber stets auf einer reellen geraden Linie und können als Hauptpunkte einer Involution aufgefaßt werden; sie lassen sich daher in ihrer Verbindung durch eine Involution vertreten. Es ist Staudt (Beiträge zur Geometrie der Lage) aber auch gelungen, eine jede Involution in doppelter Weise aufzufassen und dadurch auch jedem einzelnen imaginären Punkte eine reelle Bedeutung beizulegen.

6. **Die unendlich fernen Kreispunkte.** Nach unserer Entwicklung hat jeder unendlich ferne reelle Punkt von jedem reellen eigentlichen Punkte eine unendlich große Entfernung. Indessen darf diese Eigenschaft auf die imaginären Punkte von vornherein nicht übertragen werden. Gleichwie wir aber jeder eigentlichen Geraden auch imaginäre Punkte zuweisen müssen, sind wir genötigt, auf der unendlich fernen Geraden imaginäre Punkte zuzulassen. Auch diese sollen, als Punkte der unendlich fernen Geraden, selbst unendlich ferne Punkte genannt werden. Wir verstehen daher unter den unendlich fernen Punkten einer Kurve ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden, und zwar auch in dem Falle, daß derartige Punkte imaginär sind.

Die unendlich fernen Punkte einer Kurve können analytisch auf doppelte Weise erhalten werden. Wir können einmal von einem rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensysteme ausgehen, hierin den Koordinaten x, y unendlich große Werte beilegen und die Verhältnisse $x : y$ ermitteln, die alsdann der Gleichung der Kurve genügen. Statt dessen können wir auch durch Benutzung der beiden ersten Gleichungen (3) die Gleichung homogen in x_1, x_2, x_3 machen und die Verhältnisse $x_1 : x_2$ berechnen, die aus der neuen Gleichung für $x_3 = 0$ hervorgehen.

Um die unendlich fernen Punkte des Kreises:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \tag{7}$$

zu finden, können wir die Gleichung durch y^2 dividieren und die Grenzwerte von $x : y$ aufsuchen, denen dieser Quotient sich bei einem unbegrenzt wachsenden Werte von y immer mehr nähert. Bei diesem Prozesse geht aber die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{a}{y}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{y}\right)^2 = \left(\frac{c}{y}\right)^2$$

in die Gleichung:

$$\frac{x^2}{y^2} + 1 = 0$$

über, so daß $x : y = \pm i$ wird.

Besser ist es, in der Gleichung (7) mit Hilfe von (3) die Größen x_1, x_2, x_3 einzuführen, die neue Gleichung durch Multiplikation mit $x_3{}^2$ homogen zu machen und in der so gefundenen Gleichung:

$$(x_1 - a x_3)^2 + (x_2 - b x_3)^2 = c^2 x_3{}^2$$

$x_3 = 0$ zu setzen. Dadurch erhält man zur Ermittlung des unendlich fernen Punktes des Kreises (7) die Gleichung $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 0$, in der die Koeffizienten a, b, c nicht vorkommen. Die beiden Punkte: $x_1 : x_2 = \pm i$, $x_3 = 0$ sind daher allen Kreisen gemeinschaftlich; sie werden, als Schnittpunkte der unendlich fernen Geraden mit einem jeden Kreise, selbst unendlich ferne Kreispunkte genannt.

Wir wollen diesen Ausspruch noch in anderer Weise erläutern. Zu dem Ende drehen wir die Ebene um einen festen Punkt O in sich selbst. Alsdann bleibt neben der unendlich fernen Geraden auch jeder Kreis, der in O seinen Mittelpunkt hat, in Deckung mit seiner Anfangslage. Daher ändern diejenigen Punkte ihre Lage nicht, welche irgendeiner dieser Kreise mit der unendlich fernen Geraden gemein hat. Sobald aber drei Punkte auf einer Geraden sich selbst zugeordnet werden, kann auf der Geraden überhaupt keine Änderung vor sich gehen. Wir dürfen somit in unserm Falle nur zwei Punkte der unendlich fernen Geraden als unbewegt voraussetzen und sind hierdurch genötigt, allen konzentrischen Kreisen dieselben unendlich fernen Punkte beizulegen. Bei Parallelverschiebung behält aber jeder Punkt auf der unendlich fernen Geraden seine Lage bei. Da wir hierbei aber den Mittelpunkt eines Kreises beliebig verändern können, sehen wir wiederum, daß wir allen Kreisen dieselben Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden beilegen müssen.

Zu demselben Ergebnisse kommen wir auch durch manche andere Betrachtung. So wollen wir jetzt von der Aufgabe ausgehen: Ein Strahlenpaar zu bestimmen, das zu zwei durch denselben Punkt gehenden Strahlenpaaren harmonisch liegt. Das eine Strahlenpaar bilde mit einer festen Richtung die Winkel α, α', das zweite die Winkel β, β', und das gesuchte Strahlenpaar soll mit dieser Richtung die Winkel φ und ψ bilden. Dann müssen die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin(\varphi-\alpha')} = -\frac{\sin(\psi-\alpha)}{\sin(\psi-\alpha')}, \quad \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin(\varphi-\beta')} = -\frac{\sin(\psi-\beta)}{\sin(\psi-\beta')}.$$

Diesen Gleichungen können wir leicht folgende Form geben:

$$2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi - (\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha') + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha' = 0,$$
$$2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi - (\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi)(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta') + 2\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\beta' = 0.$$

Wir wollen jetzt annehmen, die Strahlen eines jeden der beiden gegebenen Paare stünden aufeinander senkrecht, es wäre demnach:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha' = -1, \quad \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\beta' = -1.$$

Dann gehen die beiden vorhergehenden Gleichungen über in:

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi = 1, \quad \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = 0,$$

oder:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\psi = \pm i. \tag{8}$$

Aus diesen Gleichungen sind die Werte von α, α', β, β' ganz weggefallen. Die gefundenen imaginären Richtungen haben daher die Eigenschaft, zu jedem Paare von senkrechten Geraden, die durch den Punkt gelegt werden können, harmonisch zu liegen. In der Tat erhält man eine Strahleninvolution, wenn man jedem Strahle eines Büschels die durch den Scheitel zu ihm gelegte Senkrechte zuordnet; die beiden durch die Gleichungen (8) bestimmten Strahlen sind die Hauptstrahlen dieser Involution.

Diese Gleichungen sind unabhängig von der Richtung, von der aus die Messung des Winkels erfolgt; daher bilden die beiden gefundenen Strahlen mit jeder reellen Geraden Winkel, deren Tangenten aus diesen Gleichungen hervorgehen. In der Tat kann man leicht verifizieren, daß aus $\operatorname{tg}\varphi = i$ für jeden reellen Wert von α auch $\operatorname{tg}(\alpha+\varphi) = i$ hervorgeht.

Die durch die Gleichung $\operatorname{tg}\varphi = \pm i$ gefundenen Richtungen sind nicht nur von der Wahl der Anfangsrichtung, sondern auch von der Wahl des Scheitels unabhängig; sie haben daher mit der unendlich fernen Geraden dieselben Punkte gemein. Soll der nach einem Punkt (x, y) oder, was dasselbe ist, nach einem Punkte (x_1, x_2, x_3)

vom Anfangspunkte der Koordinaten gezogene Halbstrahl mit der x-Achse den Winkel φ bilden, so ist:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Daher treffen die durch die Gleichungen (8) bestimmten Richtungen die unendlich ferne Gerade in den beiden Punkten $x_3 = 0$, $x_1 : x_2 = \pm i$, d. h. in den unendlich fernen Kreispunkten. Die Hauptstrahlen einer jeden rechtwinkligen Strahleninvolution gehen somit durch die unendlich fernen Kreispunkte.

Die Berechtigung dieser Auffassung leuchtet noch in folgender Weise ein. Jedes Paar konjugierter Durchmesser eines Kegelschnitts liegt harmonisch zu den Verbindungsgeraden seines Mittelpunktes mit den unendlich fernen Punkten der Kurve. Beim Kreise stehen je zwei konjugierte Durchmesser aufeinander senkrecht. Die Schnittpunkte eines Kreises mit der unendlich fernen Geraden sind somit die Punkte, in denen die Hauptstrahlen einer durch den Mittelpunkt gelegten Strahleninvolution, für welche zugeordnete Strahlen jedesmal aufeinander senkrecht stehen, die unendlich ferne Gerade treffen. Bei derartigen Involutionen kann man aber, falls sie nicht denselben Scheitel haben, parallele Strahlen einander zuordnen; sie bestimmen daher auf der unendlich fernen Geraden dieselbe Involution und somit auch dieselben Hauptpunkte. Der eigentliche Grund, warum wir allen Kreisen dieselben unendlich fernen Punkte beilegen müssen, liegt somit in dem elementaren Satze, nach welchem jede Sehne dieses Kreises durch die vom Mittelpunkte auf sie gefällte Senkrechte halbiert wird.

Die beiden unendlich fernen Kreispunkte haben die merkwürdige Eigenschaft, daß sie von jedem eigentlichen Punkte jeden beliebigen Abstand haben und daß eine Gerade, die nach einem dieser Punkte gezogen ist, mit jeder eigentlichen Geraden denselben Winkel bildet.

Wir glauben auch auf eine Beziehung zur Funktionentheorie hinweisen zu sollen. Dort wird gezeigt, daß eine transzendente Funktion einer komplexen Variabeln, welche für alle endlichen Werte eindeutig ist, für den unendlich fernen Punkt alle möglichen Werte annimmt, daß aber höchstens zwei Werte existieren, welche die Funktion nicht auch schon für endliche Werte des Arguments annimmt. Für die Funktion $\operatorname{tg} x$ sind $\pm i$ gerade diese beiden singulären Werte, welche die Funktion nur dadurch erreichen kann, daß die Variabele auf der imaginären Achse nach der einen oder andern Richtung ins Unendliche übergeht. Diese Werte von $\operatorname{tg} x$, welche in der Analysis eine solche Ausnahmestellung einnehmen, sind, wie wir gesehen haben, auch für die Geometrie von hervorragender Bedeutung.

7. **Zurückführung der Metrik auf die Projektivität.** Der erste Anlaß zur Einführung der uneigentlichen Gebilde war, wie oben bemerkt wurde, das Bestreben, sich beim Ausspruch von Sätzen und bei der Durchführung der Beweise von Ausnahmen frei zu

machen. So groß auch der Vorteil ist, der für die Wissenschaft hieraus erwächst, möchten wir doch die größte Wichtigkeit dieser Gebilde darin erblicken, daß sie es ermöglichen, die Metrik auf die Projektivität zurückzuführen und dadurch weite Gebiete der Geometrie einheitlich zu behandeln. Dies vollständig durchzuführen, dürfte hier nicht nötig sein; einige Bemerkungen über diesen Punkt sind aber für den folgenden Paragraphen unerläßlich.

Das Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, C, U ist:

$$(ABCU) = \frac{AC}{CB} : \frac{AU}{UB}.$$

Wenn hier der Punkt U zum unendlich fernen Punkt der Geraden wird, so ist:

$$\frac{AU}{UB} = -\frac{AU}{BU} = -\frac{AB+BU}{BU} = -1 - \frac{AB}{BU} = -1.$$

Hiernach geht das Doppelverhältnis $(ABCU)$ in diesem Falle in das Schnittverhältnis $AC : BC$ über.

Speziell kann die Mitte einer Strecke angesehen werden als der vierte harmonische Punkt zu ihren Endpunkten und dem unendlich fernen Punkte der Geraden.

Ehe wir eine weitere Beziehung zwischen der Metrik und der Projektivität darlegen, schicken wir einige Worte über eine wichtige projektive Zuordnung voraus. Wir wollen die Punkte einer Geraden so auf die Punkte derselben Geraden projektiv beziehen, daß ein Punkt sich selbst entspricht. Mit andern Worten, wir nehmen eine Gerade zum Träger von zwei projektiv aufeinander bezogenen Punktreihen und setzen voraus, daß hierbei ein Punkt U mit dem zugeordneten Punkte zusammenfällt. Dann gibt es, wie die synthetische Geometrie lehrt, im allgemeinen noch einen zweiten Punkt A, der sich selbst zugeordnet ist; ausnahmsweise kann aber auch nur ein einziger Punkt sich selbst entsprechen. Im ersten Falle, wo die Punkte A und U die Hauptpunkte der projektiven Zuordnung sind, möge dem Punkte B der Punkt B' zugeordnet sein. Um jetzt zu einem weiteren Punkte C den entsprechenden Punkt C' zu konstruieren, wählt man in einer durch U gehenden Geraden zwei Punkte S und S' beliebig, verbindet den Schnittpunkt B_1 der Geraden SB und $S'B'$ mit A, nennt C_1 den Schnittpunkt der Geraden SC und AB_1;

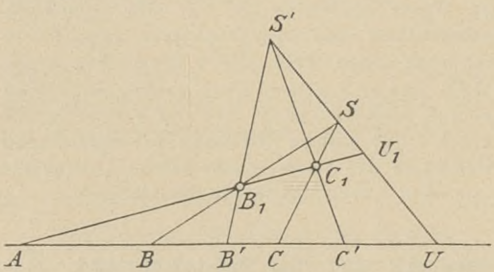

Fig. 10.

dann ist C' der Schnittpunkt von $S'C_1$ mit AB. Zum Beweise nennen wir U_1 den Schnittpunkt von AB_1 und US und beachten, daß die Punkte A, U, B, C von S aus auf die Punkte A, U_1, B_1, C_1 und diese von S' aus auf die Punkte A, U, B', C' projiziert werden; es ist also:

$$(AUBC) = (AU_1B_1C_1) = (AUB'C').$$

Wenn jetzt der Punkt U zum unendlich fernen Punkte der Geraden AB wird, so geht das Doppelverhältnis $(AUBC)$ in das Schnittverhältnis $AB:AC$ und das Doppelverhältnis $(AUB'C')$ in das Verhältnis $AB':AC'$ über. Wir haben daher für die Aufgabe: Zu drei in einer Geraden gelegenen und von demselben Punkte ausgehenden Strecken die vierte Proportionale zu finden, eine projektive Grundlage geschaffen.

Wenn aber der Punkt U der einzige Hauptpunkt in der projektiven Zuordnung ist, während A' zu A, B' zu B zugeordnet sein soll, so kann man wieder die Punkte S und S' in gerader Linie mit U annehmen; wofern sich jetzt die Geraden SA und $S'A'$ in A_1, die Geraden SB und $S'B'$ in B_1 schneiden, müssen die Punkte U, A_1, B_1 in gerader Linie liegen. Hiernach kann man, falls die Punkte U, A, A' gegeben sind, zu jedem Punkte B den entsprechenden Punkt B' finden. Nachdem man die Punkte S und S' in einer beliebigen, durch U gehenden Geraden gewählt hat, ist der Punkt A_1 als Schnittpunkt von SA und $S'A'$, der Punkt B_1 als Schnittpunkt von SB und UA_1 bekannt, und dann liefert der Schnitt von $S'B_1$ mit AB den Punkt B'. Wird U zum unendlich fernen Punkte, so werden die Geraden SS' und A_1B_1 zu AB parallel und daher $AB = A'B'$. Die Aufgabe, eine Strecke in ihrer Geraden ohne Veränderung der Länge zu verschieben, kann hiernach auf eine projektive Aufgabe zurückgeführt werden.

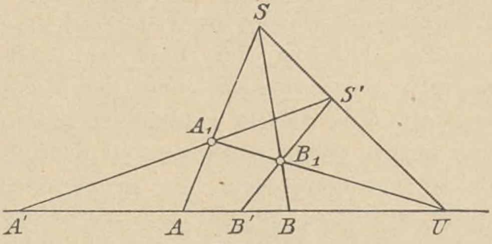

Fig. 11.

Endlich wollen wir den Winkel mit einem Doppelverhältnis in Zusammenhang bringen. Es mögen die beiden Schenkel eines Winkels mit einer festen Richtung die Winkel α und β bilden; ebenso sollen vom Scheitel nach den unendlich fernen Kreispunkten gezogene Gerade mit dieser Richtung unter den Winkeln φ und ψ geneigt sein, wo $\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\psi = i$ oder auch $\operatorname{cotg}\varphi = -i$, $\operatorname{cotg}\psi = i$ ist. Das Doppelverhältnis ω dieser vier Strahlen ist:

$$\omega = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\varphi-\beta)} : \frac{\sin(\alpha-\psi)}{\sin(\psi-\beta)} = \frac{(\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi)(\sin\beta\cos\psi - \cos\beta\sin\psi)}{(\sin\beta\cos\varphi - \cos\beta\sin\psi)(\sin\alpha\cos\psi - \cos\alpha\sin\psi)}.$$

Indem man jeden Faktor durch $\sin\varphi$ oder $\sin\psi$ dividiert und die obigen Werte einsetzt, folgt:

$$\omega = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\alpha - i\sin\alpha)} = e^{2(\alpha-\beta)i},$$

oder

$$\beta - \alpha = \frac{i}{2}\,ln\,\omega.$$

Der Winkel zweier Halbstrahlen ergibt sich also gleich dem mit einer gewissen Konstanten multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, das die Schenkel mit den vom Scheitel nach den unendlich fernen Kreispunkten gezogenen Geraden bilden.

Speziell liegen, wie bereits bemerkt wurde, die Schnittpunkte der Schenkel eines jeden rechten Winkels mit der unendlich fernen Geraden zu den unendlich fernen Kreispunkten harmonisch. Die Geraden, welche die beiden durch zwei sich schneidende Gerade gebildeten Winkel halbieren, liegen harmonisch sowohl zu diesen beiden Geraden als auch zu den Linien, welche den Schnittpunkt mit den unendlich fernen Kreispunkten verbinden.[1])

8. **Die uneigentlichen Gebilde beim Unterricht.** Für die Entwicklung, welche die Arithmetik in den letzten Jahrhunderten genommen hat, ist das Bestreben maßgebend geworden, alle Ausnahmen zu verbannen und den Gesetzen volle Allgemeinheit zu sichern. Von diesem Prinzip ist heutigen Tages auch der Unterricht von seinen ersten Anfängen an durchdrungen. Der Schüler kann es daher würdigen, wenn der geometrische Unterricht eine Ausdrucksweise ausbildet, bei der alle Ausnahmen vermieden werden, und der Lehrer wird gern von den Erleichterungen Gebrauch machen, die sich bei der Benutzung der uneigentlichen Gebilde erreichen lassen. Alle Partieen aufzuzählen, in denen speziell die unendlich fernen Punkte

1) In der Lobatschewskyschen Ebene vermittelt der unendlich ferne Kegelschnitt in einer sehr einfachen Weise den Übergang von der Projektivität zur Metrik. Um die Länge einer Strecke AB zu definieren, nimmt man die beiden Punkte U und V hinzu, in denen ihre Verbindungsgerade diesen Kegelschnitt schneidet; dann kann man die Länge der Strecke bis auf einen konstanten Faktor als den natürlichen Logarithmus des Doppelverhältnisses $(ABUV)$ definieren. Indem man ferner von dem gemeinsamen Endpunkte zweier Halbstrahlen a und b die (imaginären) Tangenten u und v an den unendlich fernen Kegelschnitt legt, darf der Winkel (a, b) geradezu als die Größe $i\,ln(abuv)$ definiert werden, wo unter i die Quadratwurzel aus -1 und unter ln der natürliche Logarithmus verstanden wird. Diese beiden Definitionen können auf die Riemannsche Ebene übertragen werden; nur ist hier der unendlich ferne Kegelschnitt imaginär, d. h. die linke Seite seiner Gleichung stellt sich in projektiven Koordinaten als die Summe von drei positiven Quadraten dar.

von Wichtigkeit sind, dürfte nicht nötig sein; es ist aber vielleicht ganz passend, an einige zu erinnern.

Der Schüler lernt den Satz, daß in bezug auf den Kreis jeder Punkt eine Polare und jede Gerade einen Pol hat; indessen wird dieser Doppelsatz erst dadurch allgemein gültig, daß man die unendlich fernen Punkte hinzunimmt. Denn die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade, und der Pol eines jeden Durchmessers ein unendlich ferner Punkt.

Zwei nicht-konzentrische Kreise haben zwei Ähnlichkeitspunkte; aber der eine fällt ins unendlich Ferne, sobald die Radien einander gleich sind.

In der Kegelschnittlehre wird der Satz bewiesen: Wenn der Fußpunkt der von einem Brennpunkte einer Hyperbel auf eine Gerade gefällten Senkrechten außerhalb des Kreises liegt, der um die reelle Achse als Durchmesser beschrieben ist, so hat die Gerade zwei Punkte mit der Hyperbel gemein. Aber der eine von diesen beiden Punkten wird ein unendlich ferner Punkt, sobald die Gerade einer Asymptote parallel ist. Ein entsprechender Satz gilt für die Parabel, und auch dieser erlangt erst dadurch seine allgemeine Gültigkeit, daß man den unendlich fernen Punkt der Parabel hinzunimmt.

Das sind einige Beispiele, bei denen der Unterricht dazu drängt, die unendlich fernen Punkte zu benutzen; der Lehrer wird aber ihre Zahl durch seine Erfahrungen ohne Zweifel beträchtlich vermehren.

Auch für den algebraischen Unterricht leisten die unendlich fernen Punkte gute Dienste. Der Satz, daß die Anzahl der Lösungen zweier algebraischen Gleichungen vom m^{ten} und vom n^{ten} Grade gleich dem Produkte mn ist, erleidet jedesmal eine Ausnahme, sobald die durch die Gleichungen dargestellten Kurven parallele Asymptoten haben. Nun wird in neuerer Zeit mit vollem Rechte darauf gedrungen, sich nicht mit der algebraischen Lösung zu begnügen, sondern das Resultat durch eine Zeichnung zu verifizieren. Es bietet sich in dem angegebenen Ausnahmefalle die schönste Gelegenheit, den Grund für die Ausnahme klar zu machen. So haben, um ein möglichst einfaches Beispiel anzuführen, die Gleichungen:

$$x^2 + ky^2 = a, \quad x + y = b$$

im allgemeinen zwei Lösungen. Aber für $k = -1$ liefert die Algebra nur eine einzige Lösung; die Zeichnung belehrt den Schüler, daß in diesem Falle die Gerade auch durch einen unendlich fernen Punkt der Hyperbel hindurchgeht.

Aus diesen Beispielen geht hervor, daß die unendlich fernen Punkte keine müßige Spielerei, sondern ein Instrument bilden, das, richtig angewandt, reichen Nutzen stiften kann. Dabei darf aber der

Lehrer nicht vergessen, daß die Wahrheit stets das höchste Prinzip des Unterrichts sein muß. Dem entsprechend muß der Schüler lernen, daß parallele Gerade sich niemals schneiden, daß die unendlich fernen Punkte gar nicht existieren und daß ihre Anwendung nur auf eine Ausdrucksweise hinauskommt, welche ganz bestimmten Zwecken dient. Schon aus diesem Grunde dürfen diese Gebilde erst dann eingeführt werden, wenn einerseits die Erkenntnis der wahren Sachlage zum vollen Eigentum der Schüler geworden ist, andererseits ihr Geist so weit gebildet ist, daß sie trotz der ungewöhnlichen Ausdrucksweise am richtigen Verständnis festhalten. Aber auch auf den höhern Stufen ist die größte Vorsicht geboten, falls die Benutzung dieser Gebilde nicht unklare Ansichten oder gar volle Mißverständnisse herbeiführen soll. Die Schüler sollen mit den uneigentlichen Gebilden so operieren, als ob sie existierten, und doch daran festhalten, daß ihre Einführung nur auf einer Fiktion beruht; sie müssen in der Anwendung dieser Punkte geübt werden, aber dabei jede Anschauung verbannen, während sonst der geometrische Unterricht in der Pflege der Anschauung kaum je genug tun kann. Wie schwer es aber ist, sich von Fehlern frei zu halten, geht aus zahlreichen Beispielen hervor. So glaubte ein tüchtiger Mathematiker versichern zu können, er besitze eine klare Anschauung von den uneigentlichen Gebilden. Auch wurde es vor nicht zu langer Zeit bei Besprechung eines Schulbuches als Fehler bezeichnet, daß darin parallelen Geraden kein Schnittpunkt beigelegt werde, während sie sich doch im Unendlichen schnitten; und der Verfasser erwiderte nicht etwa, seine Definition sei die richtige, und der Rezensent habe eine falsche Ansicht über das Wesen der unendlich fernen Punkte, sondern er gestand zu, einen Fehler gemacht zu haben, und suchte ihn nur zu entschuldigen. Derartige Beispiele sind wohl geeignet, zur Vorsicht zu mahnen. Sie zeigen aber auch, daß eine einheitliche Methode gerade auf diesem Gebiete kaum von Vorteil sein kann. Der Lehrer muß sich klar machen, auf welchem Wege er allmählich seine Schüler mit einer zwar sehr wichtigen, aber auch leicht mißverständlichen Ausdrucksweise bekannt machen will.

Die unendlich fernen Punkte des Raumes eingehend zu besprechen, wird wohl nicht nötig sein; hier dürfte ein kurzer Hinweis genügen.

In der analytischen Geometrie drängen sich die imaginären Punkte ganz von selbst auf; sie dürfen um so eher benutzt werden, da Mißverständnisse nicht zu befürchten sind. Dagegen wird es nicht nötig sein, die unendlich fernen Kreispunkte durchzunehmen; die Anwendungen, welche die Geometrie von ihnen macht, liegen dem elementaren Unterricht recht fern; ihr Verständnis setzt zudem eine größere geistige Reife voraus, als wir bei unsern Schülern voraussetzen dürfen.

§ 9. Die ebenen Konstruktions-Aufgaben.[1])

1. **Bedingungen für die Möglichkeit, eine Aufgabe mit Zirkel und Lineal zu lösen.** Die ebenen Konstruktionsaufgaben spielen bereits bei den Mathematikern des Altertums eine große Rolle. Zwar dienen sie in Euklids Elementen meistens dazu, Existenzbeweise zu ersetzen; aber neben diesem Zwecke tritt ihre selbständige Bedeutung keineswegs zurück. Die hohe mathematische Begabung der alten Griechen ermöglichte es ihnen, auch auf diesem Gebiete Hervorragendes zu leisten; so verdient die Lösung des Taktionsproblems durch Apollonius volle Bewunderung, wenn auch jetzt einfachere Methoden aufgefunden sind. Für manche Aufgaben aber, die sich den Mathematikern bereits sehr früh aufdrängten, konnte man entweder gar keine Lösung finden, oder man sah sich genötigt, neben dem Kreis und der geraden Linie weitere Kurven zu benutzen. Gerade die Aufgaben dieser Art übten vielfach den größten Reiz aus und erlangten geradezu Berühmtheit selbst in solchen Kreisen, die sonst der Mathematik teilnahmlos gegenüberstanden. Das gilt an erster Stelle von der Rektifikation und der Quadratur des Kreises, nämlich von den Aufgaben: Wenn der Radius eines Kreises gegeben ist, so soll eine Strecke und ein Quadrat in der Weise bestimmt werden, daß die Strecke gleich dem Umfange und der Inhalt des Quadrats gleich dem des Kreises ist. Wohl wußte bereits Euklid, daß sich diese beiden Aufgaben aufeinander zurückführen lassen; aber alle Versuche, eine Lösung zu finden, erwiesen sich als vergeblich. Ebensowenig hat sich die Teilung eines beliebigen Winkels in drei gleiche Teile mit Hilfe von Zirkel und Lineal durchführen lassen. Über eine weitere Aufgabe, die Verdoppelung des Würfels, wird uns erzählt, zur Zeit einer Seuche hätten sich die Delier an Apollo mit der Bitte um Hilfe gewandt, und dieser habe ihnen den Auftrag gegeben, einen Altar, der die Form eines Würfels hatte, zu verdoppeln. Aus diesem

---

1) Der Inhalt dieses Abschnittes berührt sich sehr eng mit dem der Werke: F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie, deutsche Ausgabe von Fleischer, II. Teil, Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit (Leipzig 1907).

A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen (Band LII der Sammlung Schubert).

Für einzelne Fragen, die in diesem Abschnitt behandelt werden, sind die §§ 98, 99, 127—130 im ersten Bande von Weber-Wellsteins „Encyklopädie der El.-Math." von Wichtigkeit.

Das Werk von Enriques werden wir kurz mit E., das von Adler mit A. zitieren. Da das erstere Werk aus Beiträgen verschiedener Mathematiker besteht, wird es zuweilen nötig, den betr. Verfasser selbst zu nennen.

Grunde wird die Aufgabe: einen Würfel zu finden, dessen Inhalt dem Doppelten eines gegebenen Würfels gleichkommt, auch heute noch als das Delische Problem bezeichnet; trotz zahlloser Versuche hat sich eine elementare Lösung nicht finden lassen.

Weiter konnten die Alten den Kreis nur dann in n gleiche Teile zerlegen, wenn die Zahl n das Produkt einer der Zahlen 1, 3, 5, 15 in eine bloße Potenz von zwei darstellt. Damit hielt man vielfach das Problem für erledigt, bis der 19jährige Gauß zeigte, daß auch ein regelmäßiges Siebzehneck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden könne, und kurz darauf den Satz bewies: Die Teilung des Kreises in n gleiche Teile kann dann und nur dann auf elementarem Wege durchgeführt werden, wenn die Zahl n die Form hat:

$$n = 2^{\nu} \cdot a \cdot b \cdot c, \ldots$$

wo $a, b, c, \ldots$ ungleiche Primzahlen von der Form $2^{\mu} + 1$ sind. Gauß kannte demnach das Prinzip, nach dem man entscheiden kann, ob eine vorgelegte geometrische Aufgabe sich mit Zirkel und Lineal lösen läßt. Dies Prinzip kommt darauf hinaus, zuerst die Aufgabe analytisch zu lösen und aus der Natur der analytischen Lösung auf ihre geometrische Lösbarkeit zu schließen. Dadurch sind dann die geometrischen Aufgaben in die engste Beziehung zur Algebra getreten, namentlich zu den wichtigen Untersuchungen, die das Genie Galois' angebahnt hat.

Die ebenen Konstruktionsaufgaben lassen sich in ihrer Mehrzahl auf das allgemeine Problem zurückführen: In der Ebene ist die Lage für gewisse Punkte gegeben; man soll andere Punkte derartig bestimmen, daß sie in ihrer Lage zueinander und zu den gegebenen Punkten vorgeschriebene Eigenschaften besitzen. Die Konstruktion selbst besteht in der wiederholten Anwendung der beiden Fundamentalaufgaben (Postulate):

Durch zwei gegebene Punkte eine gerade Linie zu legen und einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Punkt zum Mittelpunkt hat und durch einen zweiten gegebenen Punkt geht. (Daß die Aufgabe: Um einen gegebenen Punkt mit einem seiner Länge nach gegebenen Radius einen Kreis zu beschreiben, auf die beiden angegebenen hinauskommt, hat Euklid in der zweiten Proposition des ersten Buches bewiesen.) Bei der Lösung der Aufgabe wendet man eine der beiden Fundamentalaufgaben auf je zwei der gegebenen Punkte an. Darauf sieht man auch die Schnittpunkte der in dieser Weise konstruierten Geraden und Kreise als bekannt an, fügt sie demnach zu den gegebenen Punkten hinzu und benutzt sie für die Konstruktion von weiteren Geraden und Kreisen. In dieser Weise fährt man fort, bis man zu den gesuchten Punkten gelangt.

Es handelt sich jetzt darum, das geometrische Verfahren mit der Analysis in Zusammenhang zu bringen. Zu dem Ende bezieht man die gegebenen Punkte auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Wenn Strecken gegeben sind, so denkt man sich dieselben auf der positiven x-Achse vom Anfangspunkte aus abgetragen. Treten auch Winkel hinzu, so legt man sie im Anfangspunkte an die positive x-Achse an und sucht die Schnittpunkte je ihrer zweiten Schenkel mit einer Geraden, die auf der x-Achse in einem geeigneten Punkte senkrecht steht; umgekehrt kann man diese Schnittpunkte zur Bestimmung der Winkel benutzen.

Die Koordinaten der gegebenen Punkte müssen wir für die weitere Untersuchung als bekannt voraussetzen. Die Koeffizienten in der Gleichung einer Geraden, die durch zwei gegebene Punkte geht, oder in der Gleichung eines Kreises, der einen gegebenen Punkt zum Mittelpunkte hat und durch einen zweiten gegebenen Punkt geht, setzen sich aber rational aus den Koordinaten der beiden Punkte zusammen. Ebenso lassen sich die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden rational durch die Koeffizienten in ihren Gleichungen darstellen. Dagegen führt die Bestimmung der Schnittpunkte zweier Kreise oder eines Kreises mit einer Geraden auf quadratische Gleichungen; die Benutzung der Kreise führt also im allgemeinen auf Quadratwurzeln und nur in speziellen Fällen auf rationale Ausdrücke aus den Koordinaten der gegebenen Punkte. Hiernach können wir durch unsere Konstruktion neben den Koordinaten der gegebenen Punkte noch weitere Größen erhalten, die aus ihnen in rationaler Weise zusammengesetzt sind; alle derartigen Ausdrücke sollen mit

$$A_0,\ B_0,\ C_0,\ \ldots,\ P_0,\ Q_0,\ \ldots$$

bezeichnet werden.

Bei der Benutzung von Kreisen können dann Punkte hinzutreten, deren Koordinaten die Form $P_0 + \sqrt{Q_0}$ haben, und da derartige Ausdrücke wiederum rational miteinander verbunden werden können, gelangen wir auf Größen, die nach dem Schema

$$A_0 + \sqrt{B_0} + \sqrt{C_0} + \cdots + \sqrt{F_0}$$

gebildet sind; derartige Ausdrücke mögen mit

$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ \ldots,\ P_1,\ Q_1,\ \ldots$$

bezeichnet werden. Dies Bildungsgesetz muß fortgesetzt werden. Wir bezeichnen Ausdrücke mit A_ν, B_ν, C_ν, ..., falls sie nach der Vorschrift

$$A_{\nu-1} + \sqrt{B_{\nu-1}} + \sqrt{C_{\nu-1}} + \cdots$$

gebildet sind. Gleichwie die wiederholte Benutzung von Lineal und Zirkel uns auf die gesuchten Punkte führt, liefert uns auch die Verbindung der vier Grundrechnungen mit dem Ausziehen von Quadratwurzeln allmählich die Koordinaten der gesuchten Punkte. Sollen daher gewisse Punkte durch eine elementare Konstruktion ermittelt werden können, so müssen sich die Koordinaten dieser Punkte dadurch darstellen lassen, daß man die genannten fünf Operationen auf die Koordinaten der gegebenen Punkte hinreichend oft anwendet.

Umgekehrt lassen sich aber auch, wie aus bekannten Konstruktionen der Elementargeometrie leicht hervorgeht, diejenigen Punkte, deren Koordinaten auf die angegebene Art dargestellt werden können, durch Wiederholung der beiden Fundamentalaufgaben bestimmen.

Nachdem eine geometrische Konstruktion ausgeführt und ihrem Gange entsprechend allmählich die Koordinaten der benutzten und der gesuchten Punkte in der angegebenen Weise durch die Koordinaten der gegebenen Punkte dargestellt sind, schaffe man in jedem einzelnen so erhaltenen Ausdrucke die Quadratwurzeln weg. Dadurch erhält man sowohl die Abszisse als die Ordinate eines jeden der gesuchten Punkte als Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Grad eine Potenz von zwei ist.

Umgekehrt bestimme man auf analytischem Wege die Beziehung zwischen den Koordinaten eines jeden der gesuchten Punkte und den Koordinaten der gegebenen Punkte. Aus den durchgeführten Entwicklungen geht hervor, daß die entsprechende geometrische Aufgabe nur dann eine elementare Lösung hat, wenn zunächst diese Beziehung durch eine algebraische Gleichung dargestellt wird, deren Koeffizienten rationale Funktionen von den Koordinaten der gegebenen Punkte sind. Wenn die linke Seite dieser Gleichung in Faktoren zerlegt werden kann, deren Koeffizienten wiederum rational aus den Koordinaten der gegebenen Punkte gebildet sind, so genügt es, einen einzigen unter ihnen zu betrachten. Wir dürfen demnach die Gleichung als irreduzibel voraussetzen. Wie wir gesehen haben, muß der Grad dieser Gleichung eine bloße Potenz von zwei sein. Wenn diese Bedingungen nicht beide erfüllt sind, ist es unmöglich, die Aufgabe mit Zirkel und Lineal zu lösen. Aber selbst in dem Falle, daß sich die Koordinaten aller Punkte als Wurzeln von algebraischen Gleichungen ergeben, deren Grad je gleich 2^α, 2^β, ... ist, muß man noch prüfen, ob die Lösung aller dieser Gleichungen unter alleiniger Benutzung von Quadratwurzeln möglich ist; nur in dem Falle, daß auch die letzte Bedingung erfüllt ist, kommt man bei der Lösung der geometrischen Aufgabe mit Zirkel und Lineal aus.

Als Korollar zu dem vorangehenden Satze können wir den folgenden hinstellen:

Sind irgendwelche Strecken gegeben, so lassen sich mit Zirkel und Lineal nur solche Strecken darstellen, die sich unter bloßer Anwendung von Quadratwurzeln durch die gegebenen Strecken ausdrücken lassen.

Will man den letzten Satz auch in dem Falle anwenden, wo entweder Winkel gegeben sind oder gesucht werden, so ersetze man die Winkel durch ihre trigonometrischen Funktionen, also durch die Verhältnisse von Strecken.

2. **Die einfachsten Anwendungen des aufgestellten Prinzips.** Wir nehmen an, es sei eine einzige Strecke gegeben und man solle auf elementarem Wege eine zweite Strecke bestimmen, die mit der ersten durch ein vorgeschriebenes Gesetz verbunden ist. Indem wir die gegebene Strecke zur Längeneinheit wählen, muß sich die gesuchte Strecke als Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten ergeben. Daraus geht schon hervor, daß die Aufgaben der Rektifikation und der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal nicht gelöst werden können, da, wie Lindemann zuerst bewiesen hat, die Zahl π eine transzendente Zahl ist, d. h. nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten sein kann (vgl. Weber-Wellstein, Encykl. d. Elem.-Math. I, S. 427ff.).

Indessen kann auch eine algebraische Gleichung nur in seltenen Fällen durch Quadratwurzeln gelöst werden. Dazu ist nämlich notwendig, daß ihre linke Seite nach Adjunktion einer Quadratwurzel in zwei Faktoren zerfällt werden kann, und daß man jeden einzelnen Faktor wiederum durch Adjunktion einer Quadratwurzel in zwei Faktoren zerlegen und dieselbe Operation so lange fortsetzen kann, bis man die linke Seite der Gleichung in lineare Faktoren zerlegt hat. Zunächst muß also, wie bereits erwähnt, der Grad der Gleichung eine bloße Potenz von zwei sein. Ist z. B. die entsprechende Gleichung irreduzibel vom dritten Grade, so ist eine elementare Lösung der entsprechenden Aufgabe unmöglich (vgl. Weber-Wellstein, l. c. I, S. 349). Die Delische Aufgabe kann hiernach nicht mit Zirkel und Lineal gelöst werden, da sie auf die irreduzible Gleichung $x^3 = 2$ hinauskommt.

Der Teilung des Kreises in n gleiche Teile entspricht analytisch die Auflösung der Gleichung: $x^n = 1$ (vgl. Weber-Wellstein, l. c. I, S. 302ff.). Nun ist, wenn n eine Primzahl ist, die Gleichung:

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

irreduzibel; sie läßt sich aber, wie Gauß gezeigt hat, falls

$$n - 1 = 2^{\nu} \cdot a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \ldots$$

ist, wo $a, b, \ldots$ ungerade verschiedene Primzahlen, $\nu, \alpha, \beta, \ldots$ ganze Zahlen sind, auf ν Gleichungen zweiten, α irreduzible Gleichungen a^{ten}, β irreduzible Gleichungen b^{ten} Grades usw. zurückführen. Hiernach läßt sich, falls n eine Primzahl ist, einem Kreise dann und nur dann ein regelmäßiges n-Eck einbeschreiben, wenn $n-1$ eine bloße Potenz von zwei ist; das gilt für $n = 3, 5, 17, 257, 65537$. Dagegen ist es nicht möglich, mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges n-Eck zu konstruieren, wenn n eine der Zahlen 7, 9, 11, 13, 19, ... ist.

3. **Weitere Anwendungen des obigen Prinzips.** Wir wollen das allgemeine Prinzip jetzt auf den Fall anwenden, daß mehrere Strecken gegeben sind, eine weitere gesucht wird und die letzte einer algebraischen Gleichung genügt, deren Koeffizienten sich rational durch die gegebenen Strecken ausdrücken lassen. Dabei verlangen wir, daß die Lösung allgemein, oder mit anderen Worten, daß die gegebenen Strecken voneinander unabhängig seien. Wenn jetzt die geometrische Aufgabe überhaupt eine Lösung hat, so dürfen wir die Längen der einzelnen Strecken noch verändern, ohne daß die vorgenommenen Operationen aufhören, zu einer Lösung zu führen, wofern nur die einzelnen Änderungen sämtlich nicht zu groß sind. Somit ist es gestattet, den einzelnen Strecken rationale und, da die Längeneinheit noch willkürlich ist, sogar ganzzahlige Werte beizulegen.

Die Gleichung für die unbekannte Strecke sei:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

wo die einzelnen Koeffizienten rationale Funktionen der gegebenen Strecken sind. Indem man den einzelnen Strecken ganzzahlige Werte $p, q, \ldots$ gibt, gehe diese Gleichung über in:

$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n = 0,$$

deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen der ganzen Zahlen $p, q, \ldots$ sind. Ersetzt man $b_0 x$ durch y, so erhält man die Gleichung:

$$y^n + c_1 y^{n-1} + \cdots + c_{n-1} y + c_n = 0,$$

worin die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$ für alle ganzzahligen Werte von $p, q, \ldots$ ganze Zahlen sind. Diese Gleichung, die als irreduzibel vorausgesetzt werden darf, muß durch bloße Adjunktion von Quadratwurzeln lösbar sein, falls die entsprechende geometrische Aufgabe eine elementare Lösung zuläßt.

Daraus geht hervor, daß ein Winkel im allgemeinen vermittelst Zirkel und Lineal nicht in drei gleiche Teile zerlegt werden kann. Mit dem Winkel α ist auch sein Kosinus gegeben. Setzt man

$$x = 2 \cos \frac{\alpha}{3},$$

so besteht die Gleichung:

$$x^3 - 3x = 2 \cos \alpha,$$

welche für $\cos \alpha = 1/2$ irreduzibel und somit nicht durch Quadratwurzeln lösbar ist. (Weitere Fälle, in denen sich die Irreduzibilität dieser Gleichung leicht erkennen läßt, gibt Weber im ersten Bande der Encykl. der Elem.-Math., S. 321.)

Um eine Reihe weiterer Aufgaben dieser Art bequem anführen zu können, wollen wir den Höhenpunkt eines Dreiecks mit H, den Schwerpunkt mit S, den Mittelpunkt des Umkreises mit K, die Mittelpunkte der Berührungskreise mit O, O_a, O_b, O_c, den Radius des Umkreises mit r, den des Inkreises mit ϱ, den Umfang mit $2s$, die winkelhalbierenden Transversalen mit w_a, w_b, w_c, die Abstände der Seiten vom Mittelpunkte des Umkreises mit k_a, k_b, k_c bezeichnen. Beim rechtwinkligen Dreieck soll c die Hypotenuse, h die Hypotenusenhöhe, p die Projektion von a auf c, q die Projektion von b auf c sein. Für ein gleichschenkliges Dreieck soll α den Winkel an der Spitze, β den Basiswinkel bedeuten.

Dann ist es unmöglich, folgende Aufgaben auf elementarem Wege zu lösen:

a) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn je die Lage der drei Punkte gegeben ist: α) H, K, O; β) H, K, O_a; γ) S, O, K; δ) S, H, O; ε) S, H, O_a.

b) Ein Dreieck zu konstruieren: α) aus s, r, ϱ, β) aus k_a, k_b, k_c, γ) aus w_a, w_b, w_c, δ) aus $a, c, \beta - \gamma$.

c) Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, von dem bekannt ist: α) c, ph; β) $h, c+a$; γ) $a+q, b+p$; δ) $h, a+q$.

d) Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren: α) aus s, r; β) aus s, ϱ; γ) aus r und dem Inhalt I.

Über diese Aufgaben werden einige kurze Bemerkungen genügen. Die unter a) zusammengestellten Aufgaben sind einander so ähnlich, daß wir nur die erste zu besprechen brauchen. Indem wir $KH = l$, $OK = m$, $OH = n$ setzen, wird $m^2 = r^2 - 2r\varrho$, $l^2 = r^2 - 4r\varrho'$, $n^2 = 2\varrho^2 - 2r\varrho'$, wo ϱ' der Radius des dem Dreieck der Höhenfußpunkte einbeschriebenen Kreises ist. Diese Gleichungen gestatten uns, r^2, ϱ^2 und ϱ'^2 eindeutig durch l, m, n darzustellen. Es ist z. B.

$$r^2 = \frac{m^4}{2m^2 + 2n^2 - l^2}.$$

Da zudem $\varrho = 4r \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$, $\varrho' = 2r\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ ist, kann man die Größen $\lambda = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ und $\mu = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ rational durch l, m, n ausdrücken. Zugleich sind die Kosinus der Dreieckswinkel Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 - (4\lambda + 1)x^2 + (8\lambda^2 + 4\lambda + \mu)x - \mu = 0,$$

die im allgemeinen irreduzibel ist.

Bei der Aufgabe b)α) ergibt sich der Winkel α aus der Gleichung:

$$s\sin\frac{\alpha}{2} - \varrho\cos\frac{\alpha}{2} = 4r\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

welche für $x = \operatorname{tg}\alpha/2$ übergeht in:

$$sx^3 - (4r + \varrho)x^2 + sx - \varrho = 0.$$

Man kann aber auch beachten, daß die drei Seiten a, b, c des Dreiecks Wurzeln der Gleichung sind:

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0,$$

wo $A = a + b + c$, $B = bc + ca + ab$, $C = abc$ ist. Daraus ergibt sich:

$$A = 2s, \quad B = s^2 + 4r\varrho + \varrho^2, \quad C = 4r\varrho s.$$

Für die Aufgabe b)β) beachte man, daß ist:

$$r \cos\alpha = k_a, \quad r\cos\beta = k_b, \quad r\cos\gamma = k_c.$$

Nun besteht zwischen den Kosinus der Winkel eines Dreiecks die Beziehung:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Demnach ist r eine Wurzel der Gleichung:

$$x^3 - (k_a{}^2 + k_b{}^2 + k_c{}^2)x - 2k_a k_b k_c = 0.$$

Über die Aufgabe b)γ) und verwandte Aufgaben vergleiche man die Arbeiten von W. Heymann in Hoffmanns Zeitschr., B. 28 und von Korselt in Schlömilchs Zeitschr., B. 42.

Die Aufgabe b)δ) führt auf die Gleichung:

$$a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - a\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = c\sin\alpha,$$

die für

$$x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \mu = \frac{2c}{a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

übergeht in:

$$x^4 + 2\left(\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} - \mu\right)x^3 + 2\left(\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} + \mu\right)x - 1 = 0.$$

In der Aufgabe c)α) setzt man $x = \cos\alpha$, $\mu = c^2 : ph$; alsdann erhält man die Gleichung:

$$x^3 - x + \mu = 0.$$

Ebenso führt die Aufgabe c)β) für $x = \sin\alpha$, $(c + a)/h = \mu$ auf die Gleichung:

$$x^3 - x^2 + \mu^2 x + \mu^2 = 0.$$

Zur Lösung der Aufgabe c)γ) setze man $\operatorname{tg}\alpha/2 = x$, $a + q = m$, $b + p = n$; dabei erhält man die Gleichung:

$$(m + n)x^4 + 2nx^3 - 2(n + 2m)x^2 + 2nx + n - m = 0.$$

Die Aufgabe c)δ) kommt für $x = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{a+q}{h} = \mu$ auf die Gleichung hinaus:

$$x^4 - (\mu^2 - 1)x^2 + 2\mu x - 1 = 0.$$

Der Aufgabe d)α) entspricht für $x = \sin\beta$, $s/r = 2\mu$ die Gleichung:

$$x^4 - 2\mu x + \mu^2 = 0.$$

Um die Aufgabe d)β) rechnerisch zu lösen, setze man $x = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\nu = \frac{\varrho}{s}$; dadurch findet man die Gleichung:

$$x^3 - x + 2\nu = 0.$$

Mit der Aufgabe d)γ) ist für $x = \sin\alpha$, $I : r^2 = \mu$ die Gleichung verbunden:

$$x^4 - 2\mu x + \mu^2 = 0.$$

Eine reiche Auswahl von Aufgaben dieser Art enthält das Werkchen: Lampe, Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen (Berlin 1877), dem auch die meisten von den angegebenen Aufgaben entnommen sind.

4. **Mascheronis Verfahren.** Nachdem wir die Bedingungen kennen gelernt haben, unter denen eine Aufgabe mit Zirkel und Lineal gelöst werden kann, wollen wir untersuchen, wie weit bei elementaren Aufgaben die Hilfsmittel der Konstruktion beschränkt werden können, und an erster Stelle den Nachweis erbringen, daß alle Aufgaben, bei denen man mit Zirkel und Lineal auskommt, auch unter alleiniger Benutzung des Zirkels gelöst werden können. Dieser Satz ist zuerst von Mascheroni in seinem Werke: Geometria del compasso (Torino 1797) aufgestellt und bewiesen. So wichtig auch der Hauptsatz dieses Werkes ist, glauben wir doch, daß der tiefere Grund für Mascheronis Verfahren erst durch A. Adler in seiner Arbeit: Die Theorie der Mascheronischen Konstruktionen (Wiener Akademie B 99 II[a] 1890) aufgedeckt worden ist. Wir müssen uns damit begnügen, die Grundzüge des Adlerschen Beweises mitzuteilen, und möchten im übrigen außer auf Mascheronis Schrift und ihre Bearbeitungen durch Frischauf (Graz 1869) und durch Hutt (Halle 1880), sowie auf die genannte Adlersche Abhandlung noch auf die zitierten Werke von Enriques und von Adler verweisen, in denen auch weitere Literatur angegeben ist.

Ehe wir den Beweis liefern, erinnern wir an die Inversion oder die Transformation durch reziproke Radien, der wir bereits auf S. 46 begegnet sind. Indem wir einen Kreis k mit dem Mittelpunkte O und dem Radius r zum Grundkreise einer hyperbolischen Inversion machen, nennen wir zwei Punkte M und M' einander invers zugeordnet, wenn sie auf demselben in O begrenzten Halbstrahl liegen und das Produkt

$$OM \cdot OM' = r^2$$

ist, mit anderen Worten, wenn sie auf demselben Durchmesser liegen und konjugierte Pole voneinander sind.

Jetzt wollen wir einige einfache Aufgaben mit dem Zirkel allein lösen.

a) Eine gegebene Strecke AB zu verdoppeln.

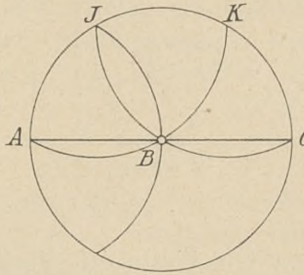

Fig. 12.

Es sei J ein Schnittpunkt der Kreise $(B)A$ und $(A)B$. Der Kreis $(B)A$ möge vom Kreise $(J)A$ noch in K und vom Kreise $(K)J$ noch im Punkte C geschnitten werden. Dann bilden die Strecken AJ, JK, KC drei Seiten eines regelmäßigen Sechsecks; daher liegen die Punkte A, B, C in gerader Linie, und es ist $AC = 2 \cdot AB$.

Durch Wiederholung dieser Konstruktion kann man eine Strecke beliebig vervielfältigen.

b) Zu einem Punkte M den inversen Punkt in bezug auf einen Kreis zu konstruieren.

Der Grundkreis k der Inversion habe den Mittelpunkt O und den Radius r. Wenn $OM > r/2$ ist, so schneidet der Kreis $(M)O$ den Kreis k. Sind die Schnittpunkte A und B, so ist der zweite Schnittpunkt der Kreise $(A)O$ und $(B)O$ der gesuchte Punkt.

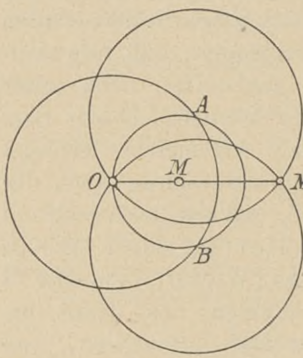

Fig. 13.

Denn zunächst liegen wegen der Kongruenz der Dreiecke OMA und OMB, sowie der Dreiecke $OM'A$ und $OM'B$ die Punkte O, M, M' in gerader Linie; ferner sind die Dreiecke AOM' und MOA ähnlich, also ist $OM \cdot OM' = r^2$.

Wenn aber $OM < r/2$ ist, so ermittle man im Halbstrahl OM einen Punkt N so, daß $ON = n \cdot OM$ für ein ganzzahliges n und $ON > r/2$ ist. Ist N' der inverse Punkt von N und die Strecke OM' das n-fache von ON', so ist M' der inverse Punkt zu M.

c) Es soll der Mittelpunkt des Kreises gefunden werden, welcher der durch die Punkte K und L bestimmten Geraden in der Inversion entspricht.

Der zweite Schnittpunkt M der beiden Kreise $(K)O$ und $(L)O$ ist der Gegenpunkt des Punktes O in bezug auf die Gerade KL und der inverse Punkt M' von M der gesuchte Punkt.

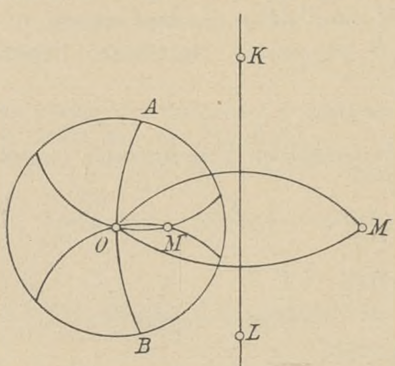

Fig. 14.

Zum Beweise nehme man den Schnittpunkt H der Geraden KL und MO und seinen inversen Punkt H' hinzu. Dann ist $OM \cdot OM' = r^2$ und $OH \cdot OH' = r^2$; da aber $OM = 2\,OH$ ist, muß $OH' = 2\,OM'$ sein. Der Kreis, welcher der Geraden KL in der Inversion entspricht, geht durch die Punkte O und H' und hat seinen Mittelpunkt in der Geraden OH'; er ist also mit dem Kreise $(M')O$ identisch.

d) Den Mittelpunkt des Kreises zu bestimmen, der einem gegebenen Kreise k_1 in der Inversion entspricht.

Man nimmt zuerst den Kreis k_1 zum Hauptkreise einer Inversion, ermittelt hierin den Punkt M, der dem Punkte O entspricht, und bestimmt dann den Punkt M', welcher in der durch den Kreis k vermittelten Inversion dem Punkte M zugeordnet ist. Der Punkt M' ist der gesuchte Punkt.

Beim Beweise wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß der Punkt O im Äußeren des Kreises k_1 liegt. Ist Q der Berührungspunkt einer von O an k_1 gelegten Tangente und Q' der inverse Punkt von Q in bezug auf den Kreis k so gilt die Gleichung $OQ \cdot OQ' = r^2$. Ebenso ist $OM \cdot OM' = r^2$. Da aber die Punkte O und M in bezug auf den Kreis k_1 einander invers zugeordnet sind, so ist der Winkel OMQ ein Rechter. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $OM'Q'$ und OQM ist auch der Winkel $OQ'M'$ ein Rechter, oder der Kreis $(M')\,Q'$ berührt die Gerade OQ im Punkte Q' und ist daher invers zu k_1 in bezug auf k.

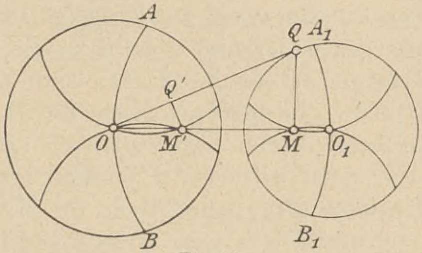

Fig. 15.

Jetzt läßt sich der Beweis des allgemeinen Mascheronischen Satzes leicht führen. Wir denken uns die Konstruktion mit Hilfe von Geraden und von Kreisen ausgeführt, alle dabei benutzten Kreise ausgezogen und alle auftretenden Strecken unbegrenzt verlängert. In dieser Figur, die mit Φ bezeichnet werden soll, gehen wir von den gegebenen Punkten $A, B, C, \ldots$ aus, bestimmen durch sie gewisse Kreise und gerade Linien, erhalten durch ihren Schnitt neue vermittelnde Punkte, die wieder zur Konstruktion von Geraden und Kreisen benutzt werden, bis wir zu den gesuchten Punkten $X, Y, \ldots$ gelangen. Die einzelnen Geraden und Kreise in der Figur Φ mögen mit $a, b, c, \ldots$ bezeichnet werden.

In der Figur Φ suchen wir die inverse Figur Φ' für einen Grundkreis k, der keiner weiteren Bedingung unterliegt, als daß sein Mittelpunkt O keiner der Linien $a, b, c, \ldots$ angehört. Um den einfachen Beweis, den wir für die Aufgabe d) angegeben haben, benutzen zu können, setzen wir noch voraus, daß der Punkt O auch nicht in das Innere eines der in Φ enthaltenen Kreise hineinfällt. Dabei entsprechen den gegebenen Punkten $A, B, C, \ldots$ gewisse Punkte $A', B', C', \ldots$ die nach b) ermittelt werden können. Diese Punkte $A', B', C', \ldots$ benutzen wir zur Konstruktion derjenigen Kreise, welche den in der Figur Φ benutzten Hilfslinien zugeordnet sind. Auch für diesen Zweck brauchen wir, wie wir unter c) und d) gesehen haben, nur Kreise anzuwenden. Indem wir hiermit fortfahren, erhalten wir Kreise $a', b', c', \ldots$ als die den Kreisen und Geraden $a, b, c, \ldots$ der Figur Φ in der Inversion zugeordneten Linien. Dadurch gewinnen wir die Punkte $X', Y', \ldots$ die den Punkten $X, Y, \ldots$ in der Inversion entsprechen. Die Punkte $X', Y', \ldots$ sind aber durch die Kreise $a', b', c' \ldots$ vollständig bestimmt, sie lassen sich also durch bloße Benutzung von Kreisen ermitteln. Umgekehrt können wir aber nach b) von den Punkten $X', Y', \ldots$ zu den Punkten $X, Y, \ldots$ übergehen und sind dadurch imstande, den Gebrauch des Lineals ganz zu vermeiden.

5. **Konstruktion von Doppelverhältnissen.** Wofern es darauf ankommt, eine Figur auf dem Zeichenblatt auszuführen, liefert der Gebrauch des Zirkels im allgemeinen genauere Resultate als der des Lineals, weil die Zirkelspitzen, falls die Zirkelöffnung zwischen passenden Grenzen bleibt, recht scharf eingesetzt werden können. Dagegen ist der Kreis eine Linie zweiten, die Gerade eine Linie ersten Grades. Es gewährt daher für die Theorie großes Interesse, zu untersuchen, ob man den Gebrauch des Zirkels entweder ganz vermeiden oder doch beträchtlich einschränken kann. Zudem bietet für größere Entfernungen, namentlich für Konstruktionen auf freiem Felde, der Lichtstrahl eine ganz außerordentliche Schärfe; für manche praktische Zwecke ist daher, wie Steiner hervorgehoben hat, der Gebrauch der geraden Linie dem des Kreises vorzuziehen. Somit drängt sich uns die Frage auf: Für welche Aufgaben kommt man mit dem Lineal allein aus, und wieweit kann man, falls der Kreis nicht entbehrt werden kann, den Gebrauch des Zirkels einschränken? Die Grundlage dieser Untersuchung bildet, wenn auch Poncelet auf diesem Gebiete wie in sehr vielen Teilen der Geometrie wertvolle Andeutungen gemacht hat, das herrliche Werkchen Steiners: Die geometrischen Konstruktionsaufgaben vermittelst der geraden Linie und eines festen Kreises (Berlin 1833; in Steiners gesammelten Werken Bd. I S. 461 ff.; auch in Ostwalds „Klassiker der exakten Wissenschaften" unter Nr. 60 von A. J. v. Öttingen bearbeitet). Dieses kleine Buch enthält bereits die Keime zu allen in den Nrn. 5—12 durchgeführten Untersuchungen. Den Konstruktionen selbst schicken wir einige Bemerkungen voraus.

Wir erinnern daran, daß harmonische Punkte beim vollständigen Viereck auftreten und deshalb leicht durch bloßes Ziehen von geraden Linien konstruiert werden können. Wenn etwa in einer Geraden g die Punkte A, B, C gegeben sind und man den vierten harmonischen Punkt finden will, so legt man durch C eine zweite Gerade h und wählt in der Ebene (g, h) einen beliebigen Punkt S. Von den beiden Geraden SA und SB möge die erstere mit h in K, die zweite in L zusammentreffen, während die Geraden AL und BK den Punkt M gemein haben sollen. Dann ist der Schnittpunkt D von SM mit g der vierte harmonische Punkt zu A, B, C.

Ferner weisen wir darauf hin, daß ein Doppelverhältnis sich beim Schneiden und Projizieren nicht ändert; wenn demnach durch einen Punkt vier Strahlen a, b, c, d gehen, die in einer Ebene liegen, und diese durch eine Gerade in den vier Punkten A, B, C, D geschnitten werden, so sind die Doppelverhältnisse $(abcd)$ und $(ABCD)$ einander gleich.

Dieser Satz ermöglicht es uns, ein Doppelverhältnis in eine vorgeschriebene Lage überzuführen, oder genauer ausgedrückt, die Aufgabe zu lösen:

Wenn sowohl die vier Punkte A, B, C, D als auch die drei Punkte A', B', C' je in einer Geraden liegen, so soll in der zweiten Geraden ein Punkt D' so bestimmt werden, daß die Doppelverhältnisse $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$ einander gleich sind. Für die Konstruktion nehmen wir zuerst an, die Geraden AB und $A'B'$ fielen nicht zusammen. Dann mögen die Geraden AB' und $A'B$ einander in B_1, die Geraden AC' und $A'C$ einander in C_1 treffen. Die Gerade B_1C_1 möge von $A'D$ in D_1 und die Gerade $A'B'$ von der Geraden AD_1 in D' geschnitten werden. Jetzt ist D' der gesuchte Punkt. Wenn die Geraden AB und $A'B'$ zusammenfallen, so nehme man eine zweite Gerade hinzu und führe die angegebene Konstruktion zweimal aus.

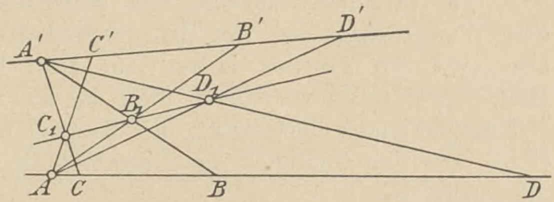

Fig. 16.

Für die weitere Untersuchung beachten wir die bekannten Formeln:

$$(ABCD) . (ABDC) = 1$$
$$(ABCD) + (ACBD) = 1$$
$$(ABCD) + (ABCD') = 0,$$

in denen A, B, C, D irgend vier Punkte einer geraden Linie und D' der vierte harmonische Punkt zu A, B, D ist.

Daraus geht hervor, daß ist:

$$(ACBD') = 1 - (ABCD') = (ABCD) + 1.$$

Ist jetzt D'' der vierte harmonische Punkt zu A, C, D, so ist

$$(ACBD'') = -(ACBD) = (ABCD) - 1.$$

Die beiden letzten Formeln ermöglichen es, falls ein Doppelverhältnis gegeben ist, ein neues Doppelverhältnis zu konstruieren, welches sich von dem gegebenen um einen ganzzahligen Wert unterscheidet.

Jetzt mögen die vier Punkte A, B, C, D das Doppelverhältnis λ und vier andere in gerader Linie liegende Punkte das Doppelverhältnis μ haben. Wir konstruieren zwei Punkte D_1 und E so, daß $(ABCD_1) = \lambda + 1$ und $(ADD_1E) = \mu$ ist; dann ist, wie man leicht sieht, $(ABCE) = \lambda + \mu$. Umgekehrt ist, wenn $(ABCD) = \lambda$, $(ABCE) = \nu$ und $(ABCD_1) = \lambda + 1$ ist, $(ADD_1E) = \nu - \lambda$.

Setzt man endlich $(ABCD) = \lambda$, $(ABCE) = \mu$, so ist $(ABDE)$

$= \mu : \lambda$, und in gleicher Weise muß für $(ABCD) = \lambda$ und $(ABDE) = \nu$ zugleich $(ABCE) = \nu\lambda$ sein.

Indem man die vorstehenden Konstruktionen auf das Doppelverhältnis $(ABCC) = 1$ anwendet, erhält man die Möglichkeit, jedes Doppelverhältnis zu konstruieren, das einen rationalen Wert hat.

Jede rationale Funktion von gegebenen Größen läßt sich auf eine Wiederholung der vier Grundrechnungen zurückführen. Da sich aber, wie wir gesehen haben, aus zwei Doppelverhältnissen jedes Doppelverhältnis konstruieren läßt, das aus ihnen durch eine der vier Grundrechnungen hervorgeht, und da man bei allen diesen Konstruktionen nur den Gebrauch des Lineals nötig hat, so ergibt sich der allgemeine Satz:

Jedes Doppelverhältnis, das sich aus gegebenen Doppelverhältnissen auf rationale Weise darstellen läßt, kann durch bloßes Ziehen von geraden Linien, ohne Gebrauch des Kreises, konstruiert werden.

Nehmen wir z. B. an, die Doppelverhältnisse $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ seien je durch vier in einer Geraden liegende Punkte bestimmt; ein weiteres Doppelverhältnis ω sei aus ihnen analytisch als rationale Funktion gewonnen. Dann kann man, sobald in irgendeiner Geraden die drei (unter einander verschiedenen) Punkte K, L, M beliebig gewählt sind, unter alleinigem Gebrauche des Lineals einen vierten Punkt N so finden, daß das Doppelverhältnis $(KLMN) = \omega$ wird.

6. **Projektive Aufgaben ersten Grades.** Wenn wir die einzelnen geometrischen Operationen, die wir bei der Lösung einer projektiven Konstruktionsaufgabe ausführen, analytisch verfolgen wollen, so empfiehlt es sich, Dreieckskoordinaten zu benutzen. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem enthält metrische Elemente in sich, die wir in den drei ersten Nummern schon aus dem Grunde zulassen durften, weil wir dort ganz allgemein den Gebrauch von Zirkel und Lineal gestatteten. Wollen wir aber einerseits nur projektive Eigenschaften betrachten, andererseits untersuchen, wie weit wir mit dem bloßen Gebrauch des Lineals auskommen, so müssen wir auch eine Koordinatenbestimmung wählen, bei der wir nur auf das Ziehen von geraden Linien angewiesen sind. Das können wir dadurch erreichen, daß wir ein Koordinaten-Dreieck zugrunde legen und uns auf die Verhältnisse der drei Koordinaten beschränken oder mit anderen Worten homogene Koordinaten anwenden. Dann wissen wir, daß unter Hinzunahme eines vierten Punktes, des sogenannten Einheitspunktes, das Verhältnis von je zwei Koordinaten eines Punktes einem Doppelverhältnisse gleich ist, das durch vier Strahlen bestimmt wird.

Jetzt sei eine bestimmte Anzahl von Punkten gegeben und es werde ein weiterer Punkt gesucht, für den die Verhältnisse der

Koordinaten sich als homogene rationale Funktionen der Koordinaten der gegebenen Punkte darstellen lassen. Es seien (a_1, a_2, a_3) (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3), ... die homogenen Funktionen der gegebenen Punkte, während der gesuchte Punkt durch die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ bestimmt sein soll. Nach unserer Voraussetzung müssen die Gleichungen bestehen:

$$x_1 : x_2 : x_3 = R_1 (a, b, c, \ldots) : R_2 (a, b, c, \ldots) : R_3 (a, b, c, \ldots),$$

wo R_1, R_2, R_3 ganze rationale Funktionen sind, in denen die Koordinaten jedes einzelnen Punktes homogen vorkommen. Sobald etwa a_1 von null verschieden ist, darf man die Funktionen R_1, R_2, R_3 durch dieselbe Potenz von a_1 dividieren, so daß nur die Verhältnisse $a_2 : a_1$ und $a_3 : a_1$ auftreten. Dasselbe gilt von den Koordinaten der übrigen Punkte, die gegeben sind. Daher lassen sich die Doppelverhältnisse $x_2 : x_1$ und $x_3 : x_1$ als rationale Funktionen aus den gegebenen Doppelverhältnissen darstellen. Die Bestimmung des gesuchten Punktes kommt somit auf die Konstruktion von Doppelverhältnissen hinaus, und diese Aufgabe läßt sich, wie wir in der vorangehenden Nummer erkannt haben, auf rein linearem Wege erledigen. Wir dürfen dies Ergebnis in dem Lehrsatze aussprechen:

Jede projektive Aufgabe ersten Grades kann durch bloßes Ziehen von geraden Linien gelöst werden.

Die Lehrsätze, die wir bei der Herleitung dieser Resultate benutzt haben, werden in den gebräuchlichen Lehrbüchern durch metrische Beziehungen erhärtet. Man kann aber auch nach dem Vorgange von Staudt die Projektivität selbständig begründen und braucht dabei nur von den beiden Sätzen Gebrauch zu machen, daß zwei verschiedene Ebenen höchstens eine Gerade, und zwei Gerade derselben Ebene höchstens einen Punkt gemein haben. Hierdurch erhält, so lange man sich auf eine einzige Ebene beschränkt, die Gerade eine ganz hervorragende Bedeutung. Daher ist für projektive Aufgaben das Lineal das wichtigste Instrument, und der Gebrauch einer höheren Kurve, selbst des Kreises, kann nun dazu dienen, unendlich viele, mit dem Lineal auszuführende Operationen in eine einzige Operation zusammenzufassen.

Indem man die von Staudt gelegte Grundlage weiter verfolgt, kann man auch die Theorie des Doppelverhältnisses auf das Ziehen von geraden Linien zurückführen. Die vorhin angeführten Sätze sind daher von der Metrik ganz unabhängig; sie gehören einem in sich abgeschlossenen System an, das im wesentlichen auf den Hilbertschen Axiomen der Verknüpfung und der Anordnung aufgebaut werden kann. Die Durchführung dieses Gedankens geht über die Grenzen hinaus, die unserem Werke gesteckt sind; zur ersten Einführung dürften sich auch heute noch folgende Arbeiten am besten eignen:

Staudt, Geometrie der Lage, und Beiträge zur Geometrie der Lage.

Klein, Abhandlungen in Bd. 4, 6 u. f. der Math. Annalen, und Vorlesungen über die nichteuklidische Geometrie (autographiert).

Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie (Bd. I, S. 97 ff.).

Weitere Arbeiten sind der exakten Begründung der Theorie gewidmet. Sie sämtlich aufzuzählen, dürfte zu weit führen. Es genüge, auf die beiden Arbeiten zu verweisen:

Schönflies, über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter Maßbestimmung (Jahresbericht der Mathem.-Vereinigung XV. S. 26 ff.).

Hölder, die Zahlenskala auf der projektiven Geraden und die indepedente Geometrie dieser Geraden (Math. Ann. Bd, 65 S. 161 ff.).

Es erübrigt noch, einige projektive Aufgaben anzuführen, die nach dem vorhin bewiesenen Satze mit dem Lineal allein gelöst werden können:

a) Zwei Punktepaare einer Involution sind gegeben; man soll zu irgendeinem weiteren Punkte des Trägers den zugeordneten Punkt bestimmen.

b) Von einem Kegelschnitt sind fünf Punkte gegeben; man soll

α) in einem dieser Punkte die Tangente an den Kegelschnitt legen;

β) den zweiten Schnittpunkt mit irgendeiner Geraden aufsuchen, die durch einen dieser Punkte hindurchgeht;

γ) zu einem Punkte der Ebene die Polare in bezug auf den Kegelschnitt bestimmen.

c) Man kennt zwei Punkte, die zwei Kegelschnitte gemein haben, und von jedem Kegelschnitte noch drei weitere Punkte; man soll die Gerade konstruieren, auf der die beiden anderen Schnittpunkte der Kegelschnitte liegen.

d) Von einer ebenen Kurve dritter Ordnung sind neun Punkte gegeben; man soll

α) den dritten Schnittpunkt der Kurve mit einer Geraden finden, die durch zwei von den gegebenen Punkten hindurchgeht;

β) den sechsten Schnittpunkt der Kurve mit einem Kegelschnitt aufsuchen, der durch irgend fünf von den gegebenen Punkten gelegt werden kann;

γ) in einem der gegebenen Punkte die Tangente an die Kurve legen und den Schnittpunkt dieser Tangente mit der Kurve finden;

δ) zu einem beliebigen Punkt der Ebene die zweite (die lineare) Polare für die Kurve konstruieren.

e) Den neunten Schnittpunkt aller Kurven dritter Ordnung finden, die durch acht gegebene Punkte gehen.

f) Von einer Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt kennt man diesen und sechs weitere Punkte; man soll die Gerade aufsuchen, in der die Wendepunkte liegen.

Wir möchten die unter d) angegebenen Aufgaben durch einige Worte erläutern. Nachdem man ein beliebiges Koordinatendreieck gewählt hat, darf man die Verhältnisse zwischen den Koordinaten eines jeden der neun Punkte als gegeben betrachten. Aus diesen Größen setzen sich die Koeffizienten in der Gleichung der Kurve rational zusammen; die Verhältnisse dieser Koeffizienten können daher durch lineare Gleichungen ermittelt werden. Für die Aufgaben α) und β) werden die Koordinaten der gesuchten Punkte jedesmal rational in den Koeffizienten der Gleichung der Kurve und in den Koeffizienten der Gleichung der

Geraden bzw. des Kegelschnitts, die ebenfalls rationale Funktionen von gegebenen Größen sind; der Punkt kann daher durch bloßes Ziehen von geraden Linien gefunden werden. Für die beiden Aufgaben γ) und δ) beachte man folgendes. Wenn (x') die Koordinaten des gegebenen Punktes, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gleichung der Kurve und f_1', f_2', f_3' die partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2, x_3)$ nach x_1, x_2, x_3 sind, so ist die Gleichung der gesuchten Geraden:

$$x_1 f_1'(x') + x_2 f_2'(x') + x_3 f_3'(x') = 0.$$

Die Koeffizienten in dieser Gleichung setzen sich rational aus den Koeffizienten der Kurvengleichung und den Koordinaten des gegebenen Punktes, also auch rational aus gegebenen Doppelverhältnissen zusammen; daher kann man die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Seiten des Koordinatendreiecks mit Hilfe von geraden Linien ermitteln.

7. **Projektive Aufgaben zweiten Grades.** Indem man durch Ziehen von geraden Linien aus gegebenen Doppelverhältnissen neue herleitet, wird man nur zu solchen Doppelverhältnissen geführt, die aus den gegebenen auf rationale Weise hervorgehen. Wenn also die analytische Behandlung einer Aufgabe ein Doppelverhältnis liefert, das die Wurzel aus einer irreduzibeln Gleichung höheren Grades ist, so kommt man mit dem Ziehen von geraden Linien nicht mehr aus; man muß vielmehr krumme Linien hinzunehmen. So sei eine Kurve zweiter Ordnung auf rationalem Wege, etwa durch fünf ihrer Punkte, bestimmt; die Koordinaten der Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden ergeben sich aus einer Gleichung zweiten Grades. Das Doppelverhältnis der vier Strahlen, welche von einem Eckpunkt des Koordinatendreiecks aus nach den beiden anderen Eckpunkten, dem Einheitspunkte und einem der gesuchten Schnittpunkte gezogen werden können, enthält neben rationalen Größen noch eine Quadratwurzel. Umgekehrt ergibt sich aber bereits jede Quadratwurzel, sobald man irgendeinen reellen Kegelschnitt zugrunde legt und die durchschneidende Gerade ganz willkürlich wählt. So habe der Kegelschnitt die Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2.$$

Sucht man seine Schnittpunkte mit der Geraden $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, so erhält man für das Verhältnis von irgend zwei Koordinaten neben einem rationalen Ausdruck jedesmal die Quadratwurzel aus $a_1^2 + a_2^2 - a_3^2$. Die drei Koeffizienten a_1, a_2, a_3 lassen sich aber so wählen, daß dieser Ausdruck irgendeine vorgeschriebene Größe hat. Demnach gilt der Satz:

Jede ebene projektive Aufgabe, die analytisch auf wiederholtes Ausziehen von Quadratwurzeln hinauskommt, kann geometrisch dadurch gelöst werden, daß man einen beliebigen Kegelschnitt als gezeichnet voraussetzt und den unbeschränkten Gebrauch des Lineals gestattet.

Natürlich nimmt man als Hilfskegelschnitt in der Praxis einen Kreis; aber man macht nur von denjenigen Eigenschaften des Kreises

Gebrauch, die allen Kegelschnitten gemeinschaftlich sind; speziell ist es nicht nötig, seinen Mittelpunkt zu kennen.

Für die wirkliche Ausführung derartiger Konstruktionen beachte man, daß die Punkte eines Kegelschnitts sich ergeben als die Schnittpunkte entsprechender Strahlen in zwei projektiv aufeinander bezogenen Strahlenbüscheln. Dabei können als Scheitel der Strahlenbüschel irgend zwei Punkte des Kegelschnitts gewählt werden. Demnach ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen, welche von einem beliebigen Punkte des Kegelschnitts aus nach vier festen Punkten desselben gezogen werden können, von der Wahl dieses Punktes unabhängig, wofern er nur auf dem Kegelschnitte selbst angenommen wird. Dieser Satz gestattet uns, ein durch irgend vier Punkte oder Strahlen gegebenes Doppelverhältnis auf einen Kegelschnitt zu übertragen.

Zur Erläuterung führen wir folgende Aufgabe durch:

Wenn eine Gerade Träger von zwei projektiv aufeinander bezogenen Punktreihen ist, so sollen die Hauptpunkte ermittelt werden, d. h. diejenigen Punkte, von denen jeder mit dem ihm zugeordneten Punkte zusammenfällt.

So seien in der Geraden g die Punkte A und A', B und B', C und C' einander zugeordnet; man soll einen Punkt M so bestimmen, daß die Doppelverhältnisse $(ABCM)$ und $(A'B'C'M)$ einander gleich sind. Auf einem Kegelschnitt, der gezeichnet vorliegt, wählen wir einen Punkt P ganz beliebig und nennen α, α', β, β', γ, γ' jedesmal die zweiten Schnittpunkte der Geraden PA, PA', PB, PB', PC, PC' mit dem Kegelschnitt. Die Geraden $\alpha'\beta$ und $\alpha\beta'$ mögen einander in β_1, die Geraden $\alpha'\gamma$ und $\alpha\gamma'$ einander in γ_1 schneiden, und die Gerade $\beta_1\gamma_1$ den Kegelschnitt in den Punkten μ und ν treffen. Wenn jetzt die Gerade g durch $P\mu$ in M und durch $P\nu$ in N getroffen wird, so sind M und N die gesuchten Punkte.

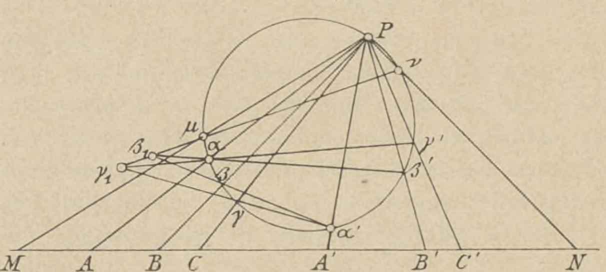

Fig 17.

Zum Beweise nennen wir α_1 den Schnittpunkt von $\alpha\alpha'$ mit der Geraden $\beta_1\gamma_1$ und bezeichnen das Doppelverhältnis der vier Strahlen PA, PB, PC, PM kurz mit $(P:ABCM)$. Dann ist:

$$ABCM) = (P:ABCM) = (P:\alpha\beta\gamma\mu) = (\alpha':\alpha\beta\gamma\mu) = (\alpha_1\beta_1\gamma_1\mu) = (\alpha:\alpha_1\beta_1\gamma_1\mu)$$
$$= (\alpha:\alpha'\beta'\gamma'\mu) = (P:\alpha'\beta'\gamma'\mu) = (P:A'B'C'M) = (A'B'C'M).$$

Auf diese Aufgabe lassen sich leicht die folgenden zurückführen:

a) Zwei Punkte zu finden, die mit zwei auf einer Geraden gegebenen Punktepaaren harmonisch liegen.

b) Von einem Kegelschnitt kennt man fünf Punkte; man soll

α) die Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden finden;

β) von einem beliebigen Punkte aus die Tangenten an den Kegelschnitt legen.

c) Es ist ein Dreieck zu konstruieren, das einem gegebenen Dreieck umbeschrieben und einem zweiten gegebenen Dreiecke einbeschrieben ist.

d) Ein Dreieck soll einem gegebenen Kegelschnitte $\left\{\begin{matrix}\text{einbeschrieben}\\ \text{umbeschrieben}\end{matrix}\right\}$ und einem gegebenen Dreiecke $\left\{\begin{matrix}\text{umbeschrieben}\\ \text{einbeschrieben}\end{matrix}\right\}$ werden.

e) Wenn ein Kegelschnitt durch vier gegebene Punkte hindurchgehen und eine vorgeschriebene Gerade berühren soll, so wird der Berührungspunkt mit der Geraden gesucht.

f) Wenn von einem Kegelschnitt drei Punkte und zwei Tangenten gegeben sind, so soll auf jeder der zwei Tangenten der Berührungspunkt bestimmt werden.

g) $\left\{\begin{matrix}\text{Um}\\ \text{In}\end{matrix}\right\}$ einen durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitt soll ein n-Eck beschrieben werden, das zugleich einem gegebenen n-Eck $\left\{\begin{matrix}\text{ein-}\\ \text{um-}\end{matrix}\right\}$beschrieben ist.

h) Von drei Kegelschnitten kennt man zwei (reelle oder imaginäre) Punkte, die ihnen gemeinschaftlich sind, und je drei weitere Punkte; man soll einen vierten Kegelschnitt bestimmen, der ebenfalls durch die zwei gemeinsamen Punkte geht und jeden der drei gegebenen Kegelschnitte berührt.

Wir möchten hier noch auf zwei metrische Aufgaben hinweisen, die zu den mitgeteilten in enger Beziehung stehen:

Es sind zwei Gerade g und h und auf der ersten der Punkt A, auf der zweiten der Punkt B gegeben; man soll durch einen festen Punkt P eine Gerade ziehen, durch welche die Gerade g in X, die Gerade h in Y so getroffen wird, daß

i) das Verhältnis $AX : BY$ eine vorgeschriebene Größe hat,

k) das Produkt $AX \cdot BY$ gleich einem gegebenen Quadrat wird.

Für die Lösung der Aufgaben a)—h) verweisen wir auf den Anhang, den Steiner dem genannten Werkchen beigegeben hat. Über die beiden letzten Aufgaben sei folgende Bemerkung gestattet. Denkt man sich jedem Punkte X von g denjenigen Punkt Y von h zugeordnet, für den bei i) das Verhältnis $AX : BY$ und bei k) das Produkt $AX \cdot BY$ den vorgeschriebenen Wert hat, so sind die Geraden einander projektiv zugeordnet. Man braucht also nur auf metrischem Wege zu drei Punkten X_1, X_2, X_3 von g die entsprechenden Punkte

Y_1, Y_2, Y_3 von h nach der gegebenen Vorschrift zu bestimmen; dadurch erhält man zwei projektive Strahlenbüschel, die beide in P ihren Scheitel haben; hierdurch werden die Aufgaben i) und k) auf die Aufgabe zurückgeführt: In zwei konzentrischen projektiven Strahlenbüscheln die Hauptstrahlen zu finden.

8. **Charakter der metrischen Aufgaben.** Daß der Gebrauch des Lineals für die projektiven Aufgaben eine weit größere Bedeutung hat als für metrische Aufgaben, leuchtet sofort ein. Beim alleinigen Gebrauch des Lineals bilden erst vier Elemente eines einstufigen Grundgebildes eine invariante Größe, während bereits zwei Punkte in ihrer Entfernung und zwei Strahlen in ihrem Winkel eine metrische Invariante besitzen. Zum mindesten muß man daher beim Gebrauche des Lineals gewisse Beschränkungen einführen, wenn man es für metrische Aufgaben benutzen will. Ferner kann in der projektiven Geometrie die Frage, wann man mit dem Lineal auskommt und wann man eine höhere Kurve hinzunehmen muß, sofort entschieden werden. Es genügt, irgend drei Gerade zu Seiten eines Koordinatendreiecks zu wählen; unter Benutzung eines solchen Dreiecks kommt es darauf an, alles auf Doppelverhältnisse zurückzuführen; wir müssen daher unbekannte Doppelverhältnisse durch bekannte darstellen. Der Grad der hierzu nötigen Gleichungen ist von der Wahl des Dreiecks unabhängig. Falls die Beziehung durch Gleichungen ersten Grades dargestellt wird, kann die vorgelegte Aufgabe mit dem Lineal allein gelöst werden.

Ganz anders liegt die Sache in der Metrik. Ehe wir überhaupt eine metrische Aufgabe in die Sprache der Analysis einkleiden können, müssen wir gewisse metrische Aufgaben als gelöst betrachten. Um das zu erkennen, wollen wir das gewöhnliche Mittel, das diesem Zwecke dient, das rechtwinklige Cartesische Koordinatensystem, etwas näher betrachten. Die Lage des einzelnen Punktes wird mit seiner Hilfe bestimmt, indem man von dem Punkte Senkrechte auf die Achsen fällt und die hierdurch auf den Achsen abgeschnittenen Strecken durch dieselbe Längeneinheit mißt. Wir müssen somit, ehe wir eine metrische Aufgabe vermittelst eines solchen Koordinatensystems einer analytischen Untersuchung unterwerfen können, die beiden Aufgaben als gelöst betrachten:

a) von einem Punkte aus auf eine Gerade die Senkrechte zu fällen, und

b) auf zwei sich schneidenden Geraden vom Schnittpunkte aus gleiche Strecken abzutragen.

Man kann aber auch, wie wir sehen werden, von anderen Figuren ausgehen, und da kann es vorkommen, daß je nach der vorausgesetzten Figur der Grad der Gleichung sich ändert. Somit ist die analytische Einkleidung einer metrischen Aufgabe nicht geeignet, uns ihren wahren Charakter klarzulegen, weil notwendig ein der Aufgabe selbst fremdes Element in die Behandlung eingeführt wird.

Wenn wir aber berücksichtigen, daß man für die elementaren Aufgaben von projektivem Charakter entweder mit dem Lineal für sich allein oder unter Hinzunahme eines festen Kegelschnittes auskommt, so müssen wir wünschen, die metrischen Aufgaben auf projektive zurückführen zu können. Der vorige Abschnitt hat uns gezeigt, daß dies Ziel durch die Einführung der uneigentlichen Gebilde erreicht werden kann. Da diese Gebilde aber, wie man wohl sagt, sich der Anschauung entziehen, oder, wie es genauer heißen muß, gar nicht existieren, so muß eine Figur gezeichnet vorliegen, welche die in der gestellten Aufgabe auftretenden uneigentlichen Elemente ersetzt. Dadurch wird es möglich, die metrische Aufgabe durch eine projektive zu ersetzen. Nachdem die Hilfsfigur eingeführt ist, ergibt sich auch für die metrische Aufgabe ein bestimmter Grad, der höchstens noch von der benutzten Hilfsfigur abhängt. Zugleich zeigt sich aber, daß die metrische Aufgabe in derselben Weise gelöst werden kann wie die entsprechende projektive Aufgabe, und daß speziell die metrische Aufgabe auch mit dem Lineal allein bewältigt werden kann, sobald ihr Grad unter Benutzung der eingeführten Hilfsfigur gleich eins ist.

Das ist der Gedanke, der in dem genannten Werke Steiners zwar nicht ausgesprochen wird, aber doch die Grundlage aller darin durchgeführten Konstruktionen bildet; wir müssen ihn jetzt auf die verschiedenen metrischen Aufgaben anwenden.

9. **Metrische Aufgaben ersten Grades: erste Gruppe.** Unter den metrischen Aufgaben gibt es gar manche, die ihres metrischen Charakters entkleidet und der reinen Projektivität untergeordnet werden können, sobald man einen einzigen unendlichfernen Punkt als bekannt ansehen kann. In der Tat haben wir im vorigen Abschnitt (§ 8, 7, S. 156) gesehen, daß die beiden Aufgaben:

a) zu drei Strecken AB, AB' und AC, die einer Geraden g angehören, in dieser Geraden die vierte Proportionale AC' zu finden und

b) auf einer Geraden g eine Strecke $A'B'$ zu bestimmen, welche einer gegebenen Strecke AB dieser Geraden gleich ist,

unter Benutzung des unendlichfernen Punktes dieser Geraden sich auf projektive Aufgaben zurückführen lassen. Nun muß aber der unendlichferne Punkt der Geraden g als bekannt gelten, sobald irgendeine Parallele h zu g gezeichnet vorliegt. In diesem Falle kann man nämlich den unendlichfernen Punkt der Geraden mit jedem Punkte der Ebene durch eine gerade Linie verbinden; das kommt auf die bekannte Lösung der Aufgabe hinaus: Durch einen Punkt eine Gerade zu legen, die durch den unzugänglichen Schnittpunkt von zwei gegebenen

Geraden hindurchgeht, und diese Lösung benutzt nur das Lineal. Ebenso setzt die oben (Nr. 5, S. 172) mit dem Lineal allein gelöste Aufgabe: Zu drei Punkten A, B, C einer Geraden den vierten harmonischen Punkt zu finden, nur voraus, daß man eine zweite durch den Punkt C gehende Gerade kennt. Indem man diese beiden Aufgaben und die beiden Aufgaben a) und b) hinreichend oft wiederholt, kann man in der gegebenen Geraden g eine Strecke bestimmen, die sich aus beliebig vielen in g gegebenen Strecken auf rationale Weise darstellen läßt. Das zeigt dieselbe Betrachtung, die wir in Nr. 5 für Doppelverhältnisse angestellt haben. Somit erhalten wir den Satz:

Wenn in der Ebene zwei parallele Gerade gezeichnet vorliegen und in der einen von ihnen eine beliebige Anzahl von Strecken gegeben ist, so kann man jede Strecke, die sich aus ihnen als rationale Funktion darstellen läßt, in dieser Geraden durch bloßes Ziehen von geraden Linien konstruieren.

Es sei gestattet, kurz an die Lösung der einfachsten Aufgaben dieser Art, die größtenteils bereits Steiner behandelt hat, zu erinnern. Um eine Strecke AB zu halbieren, wenden wir die Konstruktion an, durch die wir in Nr. 5 (S. 172) zu drei Punkten den vierten harmonischen Punkt gefunden haben. Wir ersetzen den dort benutzten Punkt C durch den unendlichfernen Punkt der Geraden AB, die Gerade h durch die gezeichnete Parallele; dann geht der Punkt D in die Mitte der Strecke AB über.

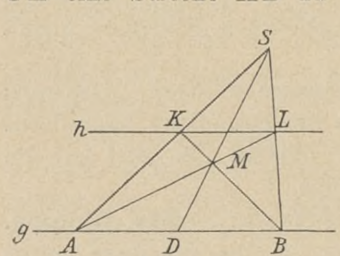

Fig. 18.

Eine kleine Veränderung dieser Konstruktion ermöglicht es, irgendeine in der Geraden g gelegene Strecke zu verdoppeln. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, eine gegebene Strecke beliebig zu vervielfältigen. Man kann aber auch, nachdem die beiden Parallelen g und h gegeben sind, zu ihnen durch jeden Punkt P der Ebene die Parallele ziehen. Zu dem Ende geht man von einer beliebig in g angenommenen Strecke AB aus, bestimmt mit Hilfe von h die Mitte D von AB, nimmt in AP einen beliebigen Punkt S hinzu und bezeichnet mit T den Schnittpunkt von BP und SD, und mit R den Schnittpunkt von SB und AT; dann ist PR die Parallele.

Daran schließen sich die Aufgaben: Eine in der Geraden g gelegene Strecke AB in beliebig viele gleiche Teile zu zerlegen, und:

In g eine Strecke AM zu konstruieren, die zu AB in einem vorgeschriebenen rationalen Verhältnisse steht.

Diese beiden Aufgaben können entweder im direkten Anschlusse an die zuletzt erwähnten Aufgaben gelöst oder auf die obige Aufgabe zurückgeführt werden.

Die Aufgabe: Eine Strecke AB der Geraden g von einem beliebig vorgeschriebenen Punkte A' dieser Geraden aus auf ihr abzutragen, läßt sich im Anschlusse an § 8, 7 (S. 156) in folgender Weise lösen: Man wähle (Fig. 19) die Punkte S und S' in der Geraden h und ziehe durch den Schnittpunkt von SA und $S'A'$ die Parallele k zu g. Sollen jetzt die Strecken AB und $A'B'$ einander gleich sein, so müssen sich auch die Geraden SB und $S'B'$ in einem Punkte der Geraden k treffen.

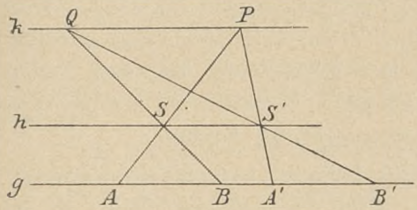

Fig. 19.

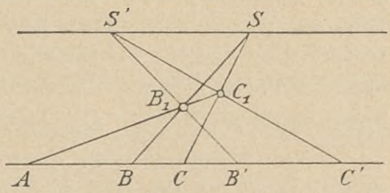

Fig. 20.

Zur allgemeinen Lösung der Aufgabe: Zu drei beliebigen Strecken AB, AB' und AC der Geraden g die vierte Proportionale zu finden, ersetzen wir den in § 8, 7 (S. 156) benutzten Punkt U durch den unendlichfernen Punkt von g und dem entsprechend die Gerade US durch die gegebene Parallele h. In h wählen wir (Fig. 20) beliebig die Punkte S und S', legen durch A und den Schnittpunkt B_1 der Geraden SB und $S'B'$ die Gerade AB_1 und verbinden den Schnittpunkt C_1 von SC und AB_1 mit S'. Der gesuchte Punkt C' ist der Punkt, in dem die Gerade g von der Geraden $S'C_1$ geschnitten wird.

Um wenigstens eine Anwendung des oben aufgestellten allgemeinen Theorems zu geben, erwähnen wir folgenden Satz:

Von zwei Kreisen kennt man die Mittelpunkte und je einen Punkt des Umfangs, der in der Zentrale liegt; wenn jetzt eine Parallele zur Zentrale gezeichnet vorliegt, so kann man auf linearem Wege die Ähnlichkeitspunkte und den Schnittpunkt der Potenzlinie mit der Zentrale bestimmen.

Der unendlichferne Punkt der Geraden g kann auch auf manche andere Weise bestimmt werden. Ist z. B. die Mitte D einer in g gelegenen Strecke AB gegeben, so ist der unendlichferne Punkt der Geraden der vierte harmonische Punkt zu A, B, D. In der Tat kann man jetzt leicht durch bloßes Ziehen von geraden Linien von jedem Punkte der Ebene aus die Parallele zu AB konstruieren. Allgemein nehme man an, in der Geraden g seien die Punkte A, B, C derartig gegeben, daß die Strecken AB und AC irgendein vorgeschriebenes rationales Verhältnis haben; auch in diesem Falle kann man die oben angeführten Aufgaben mit dem Lineal allein lösen. Indessen würde uns die Durchführung des Beweises zu weit führen; wir begnügen uns damit, auf das Steinersche Werkchen zu verweisen.

10. **Metrische Aufgaben ersten Grades: zweite Gruppe.** Sobald irgend zwei unendlichferne Punkte bekannt sind, muß man auch ihre Verbindungslinie, also die unendlichferne Gerade, als bekannt voraussetzen. Somit kennt man auf jeder eigentlichen Geraden den unendlichfernen Punkt und kann mit dem Lineal allein alle Aufgaben lösen, die wir in der vorigen Nummer für eine einzige Gerade behandelt haben. Da zudem in jedem Parallelogramm die Gegenseiten einander gleich sind, kann man jede Strecke auf irgendeine parallele Gerade übertragen. Hiernach wird der Bereich der mit dem Lineal allein lösbaren Aufgaben wesentlich erweitert, sobald zwei verschiedene unendlichferne Punkte als bekannt vorausgesetzt werden.

Zwei unendlichferne Punkte sind bekannt, wenn ein Parallelogramm $ABCD$ gezeichnet vorliegt. Die Geraden AB und CD bestimmen nämlich den unendlichfernen Punkt der Geraden AB und die Geraden AD und BC den unendlichfernen Punkt von AD, und diese beiden Punkte sind voneinander verschieden.

Demnach erhalten wir folgenden Lehrsatz:

Sobald in der Ebene ein Parallelogramm gezeichnet ist und beliebig viele untereinander parallele Strecken gegeben sind, kann man unter alleiniger Anwendung des Lineals jede Strecke derselben Richtung konstruieren, die sich als rationale Funktion der gegebenen Strecken darstellen läßt.

Um diese Behauptung als berechtigt zu erkennen, braucht man im Anschluß an die Entwicklungen der vorigen Nummer nur zu zeigen, daß man zu jeder Geraden eine Parallele ziehen kann, sobald in der Ebene irgendein Parallelogramm gegeben ist. In der Tat kann man jetzt, wie in der vorigen Nummer gezeigt ist, durch den Schnittpunkt E von AD und BC die Parallele EF zu AD ziehen. Eine beliebige Gerade g möge von den Geraden AD, BC und EF der Reihe nach in G, H, J geschnitten werden. Da aber, wie man leicht sieht, der Punkt J die Mitte von GH ist, kann man für die Gerade g alle diejenigen Aufgaben lösen, die in der vorigen Nummer angegeben sind. Damit ist aber der aufgestellte Satz erwiesen.

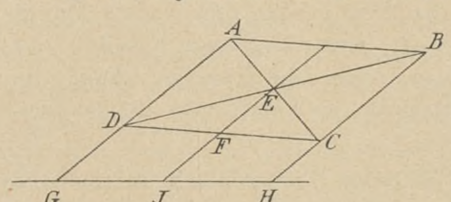

Fig. 21.

Dieser Lehrsatz ermöglicht es, sobald in der Ebene ein Parallelogramm gezeichnet vorliegt, mit dem Lineal allein die folgenden Aufgaben zu lösen:

a) Wenn vier Tangenten einer Parabel gegeben sind, so soll

α) in jeder dieser Tangenten der Berührungspunkt gefunden werden,

β) die Richtung der Achse bestimmt werden,

γ) von einem Punkte aus, der in einer der vier Tangenten liegt, die zweite Tangente an die Parabel gelegt werden,

δ) zu irgendeiner Geraden die parallele Tangente konstruiert werden.

b) Wenn fünf Punkte oder fünf Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, so soll man

α) den Mittelpunkt finden,

β) zu jedem Durchmesser den konjugierten Durchmesser konstruieren.

c) Von einem Kegelschnitt sind der Mittelpunkt, die Richtungen von zwei konjugierten Durchmessern und zwei Punkte (oder zwei Tangenten) gegeben; man soll zu jedem beliebig gewählten Durchmesser den konjugierten Durchmesser finden.

d) Von einem Kegelschnitt kennt man

α) die Richtungen von zwei Paaren konjugierter Durchmesser und drei Punkte,

β) die Richtungen eines Paares konjugierter Durchmesser und vier Punkte; man soll den Mittelpunkt bestimmen.

e) Von einem Kegelschnitt kennt man die Endpunkte eines Durchmessers, die Richtung des konjugierten Durchmessers und einen weiteren Punkt (oder eine Tangente); man soll beliebig viele weitere Punkte finden.

f) Von einer Hyperbel kennt man die Asymptoten und einen Punkt; man soll

α) in dem Punkte die Tangente anlegen,

β) auf einer beliebigen von dem Punkte ausgehenden Geraden den zweiten Schnittpunkt finden,

γ) von einem beliebigen Punkte, der in einer Asymptote liegt, die Tangente an die Kurve legen,

δ) den Pol zu einer beliebig gegebenen Geraden und die Polare zu irgendeinem Punkte konstruieren.

g) Die entsprechenden Aufgaben, falls neben den Asymptoten der Hyperbel eine Tangente gegeben ist.

h) Von einer Hyperbel sind

α) die Richtungen der Asymptoten und drei Punkte,

β) eine Asymptote und drei Punkte,

γ) eine Asymptote und drei Tangenten

gegeben; man soll den Mittelpunkt aufsuchen.

i) Die unter a) gestellten Aufgaben sollen gelöst werden, wenn von einer Parabel

α) Die Durchmesserrichtung und drei Punkte,

β) die Durchmesserrichtung und drei Tangenten,

γ) die Durchmesserrichtung, die Tangente in einem Punkte und ein weiterer Punkt (oder eine weitere Tangente) gegeben sind.

Für die analytische Behandlung nehmen wir die Seiten AB und AD des Parallelogramms $ABCD$ zu Achsen eines Cartesischen Koordinatensystems und wählen auf der ersten Achse etwa die Strecke AB und auf der zweiten die Strecke AD zur Längeneinheit. Hierbei mögen n gegebene Punkte die Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; $\ldots$ x_n, y_n haben; dann ist es möglich, durch bloßes Ziehen von geraden Linien einen Punkt zu bestimmen, dessen x-Koordinate eine rationale Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist und dessen y-Koordinate sich ebenfalls rational durch $y_1, y_2, \ldots y_n$ ausdrücken läßt. Dagegen ist es unmöglich, die Koordinaten selbst, sowie überhaupt Strecken, die in verschiedenen Richtungen liegen, miteinander zu vergleichen.

Steiner hat noch manche andere Figur angegeben, durch welche die unendlich ferne Gerade bestimmt wird; indessen brauchen wir hierauf nicht einzugehen.

11. **Metrische Aufgaben ersten Grades: dritte Gruppe.** Wenn man die unendlich ferne Gerade als bekannt voraussetzt, vermag man weder Strecken, die auf Geraden von verschiedener Richtung liegen, miteinander zu vergleichen noch Winkel zu messen. Aber selbst die Möglichkeit, Strecken zu messen, genügt nicht, um die Größe der Winkel zu bestimmen, da die Formeln der ebenen Trigonometrie, in denen Strecken und Winkel miteinander in Beziehung gesetzt werden, entweder mehrere Winkel enthalten, oder, falls nur ein einziger Winkel vorkommt, die Produkte von Strecken, also die Figur des Rechtecks und damit den rechten Winkel voraussetzen. Dagegen ermöglicht die Kenntnis des Winkels auch die Vergleichung beliebiger Strecken.

Will man den Winkel der projektiven Behandlung zugänglich machen, so muß man die unendlichfernen Kreispunkte als bekannt voraussetzen. Zu dem Zwecke darf man annehmen, daß neben einem Parallelogramm noch zwei rechte Winkel mit nicht parallelen Schenkeln gegeben sind. Durch das Parallelogramm ist die unendlichferne Gerade und durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Schenkeln der Winkel diejenige Involution bestimmt, deren Hauptpunkte die unendlichfernen Kreispunkte sind. Dann kommt die Aufgabe: Auf eine Gerade eine Senkrechte zu fällen, auf die Aufgabe a) in Nr. 6 (S. 176), und die Aufgabe: Einen gegebenen Winkel an einen Halbstrahl in seinem Endpunkte anzulegen, auf die Aufgabe hinaus: Einem Doppelverhältnis eine solche Lage zu geben, daß zwei seiner Elemente ungeändert bleiben und das dritte Element durch ein vorgeschriebenes Element ersetzt wird. Außer diesen beiden Aufgaben läßt sich jetzt mit dem Lineal allein auch die Aufgabe lösen: Einen Winkel beliebig zu vervielfältigen. Dagegen ist die Aufgabe: Einen Winkel zu halbieren, vom zweiten Grade, da sie mit der projektiven Aufgabe identisch wird: In einer durch zwei Strahlenpaare bestimmten Involution die Hauptstrahlen zu finden.

Da man allgemein parallele Linien ziehen kann, sobald ein Parallelogramm gezeichnet vorliegt, darf man die eben gemachte Voraussetzung durch die folgende ersetzen:

Es sei ein Rechteck und außerdem ein rechter Winkel gegeben, dessen Schenkel zu den Seiten des Rechtecks nicht parallel sind.

Indem man die Seiten des Rechtecks zu Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems wählt, fehlt nur noch das Mittel, die in den Achsen gewählten Einheiten miteinander zu vergleichen. Daher muß man an den gebräuchlichen Formeln eine kleine Änderung anbringen, durch die ihre direkte Benutzung etwas erschwert wird.

Steiner vereinfacht die Voraussetzungen, indem er ein Quadrat $ABCD$ als gezeichnet annimmt. In der Tat kennt man außer dem rechten Winkel des Quadrats selbst noch den rechten Winkel, den die Diagonalen miteinander bilden. Um jetzt auf einer beliebigen Geraden g eine Senkrechte zu errichten, legt Steiner durch den Mittelpunkt E des Quadrats die Parallele zu g; diese möge AB in G und CD in F schneiden. Wenn die Parallele, welche durch F zu AD gezogen ist, die Seite AB in H schneidet und die durch H zu AC gezogene Parallele mit BC in J zusammentrifft, so steht EJ auf FG und somit auch auf g senkrecht. Zugleich ist, wie man leicht sieht, das Dreieck EFJ gleichschenklig; daher wird der rechte Winkel FEJ durch die Gerade halbiert, welche den Punkt E mit der Mitte von FJ verbindet. Man kann daher jetzt auch jeden rechten Winkel in zwei gleiche Teile teilen. Durch Verbindung der beiden letzten Aufgaben kann man über jeder gegebenen Strecke ein Quadrat konstruieren.

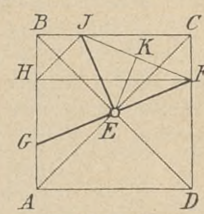

Fig. 22.

Sobald ein Quadrat $ABCD$ gezeichnet vorliegt, kann man die Seiten AB und AD zu Achsen eines Koordinatensystems und auf jeder die Seite zur Längeneinheit wählen. Alsdann läßt sich jede Aufgabe lösen, für welche die Koordinaten des gesuchten Punktes rationale Funktionen der Koordinaten der gegebenen Punkte sind, oder mit anderen Worten: Wenn ein Quadrat gegeben ist, so kann man jede Aufgabe ersten Grades auf das Ziehen von geraden Linien zurückführen. So sei $L \cdot x = M$, wo L und M rationale Funktionen von den Koordinaten der gegebenen Punkte sein sollen. Wir nehmen zuvörderst an, es sei M eine quadratische und L eine lineare Form in diesen Koordinaten; dann läßt sich, weil man über jeder Strecke ein Quadrat konstruieren kann, jede Strecke, die in der einen Achse liegt, auf die andere Achse übertragen. Da man zudem jede Strecke beliebig in ihrer Geraden verschieben kann, so ist es möglich, den Ausdruck L als eine einzige Strecke und den Ausdruck M als ein Rechteck darzustellen. Die Konstruktion der Strecke x kommt somit darauf hinaus, zu drei Strecken die vierte Proportionale zu finden. Falls die Formen L und M von höherem Grade sind, erniedrigt man den Grad allmählich durch Division mit einer beliebig gewählten Strecke.

Neben den bereits erwähnten Aufgaben kann man demnach die folgenden mit dem Lineal allein lösen, sobald ein Quadrat gezeichnet vorliegt:

a) Von einem Kreise ist der Mittelpunkt und ein Punkt oder eine Tangente (und damit beides) gegeben; man soll

α) den zweiten Schnittpunkt mit irgendeiner von dem Punkte ausgehenden Geraden ermitteln,

β) von irgendeinem Punkte der Tangente aus die zweite Tangente an den Kreis ziehen,

γ) zu einer Geraden den Pol und zu einem Punkte die Polare konstruieren.

b) Von zwei Kreisen kennt man je den Mittelpunkt und einen Punkt des Umfanges; ihre Potenzlinie zu zeichnen.

c) Von einem Kegelschnitt kennt man entweder

α) die Brennpunkte und eine Tangente, oder

β) einen Brennpunkt und drei Tangenten, oder

γ) einen Brennpunkt, die zugehörige Direktrix und eine Tangente oder einen Punkt; man soll von einem beliebigen Punkte einer bekannten Tangente die zweite Tangente an den Kegelschnitt legen, auf einer von einem bekannten Punkte ausgehenden Geraden den zweiten Schnittpunkt ermitteln, zu jedem Punkte die Polare und zu jeder Geraden den Pol konstruieren.

d) Von einer Parabel sind gegeben entweder

α) der Brennpunkt und die Leitlinie, oder

β) der Brennpunkt, die Durchmesserrichtung und eine Tangente, oder

γ) der Brennpunkt und zwei Tangenten; man soll außer den unter c) genannten Aufgaben noch die Aufgabe lösen: In einer vorgeschriebenen Richtung die Tangente an die Kurve legen.

e) Von einer Ellipse kennt man die Endpunkte der beiden Achsen; man soll

α) von einer beliebigen Geraden, die von einem dieser Punkte ausgeht, den zweiten Schnittpunkt bestimmen,

β) zu jeder Richtung die konjugierte finden,

γ) zu jeder Geraden den Pol und zu jedem Punkte die Polare konstruieren.

f) Die entsprechenden Aufgaben, wenn von einem Kegelschnitt die Endpunkte einer Achse und ein weiterer Punkt gegeben sind.

g) Ebenso, falls von einer Hyperbel die Endpunkte der reellen Achse und die Richtung einer Asymptote gegeben sind.

h) Es sind zwei von demselben Punkte ausgehende Strecken OA und OB gegeben; man soll auf einer von O ausgehenden und $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{außerhalb}\end{matrix}\right\}$ des Winkelfeldes AOB gelegenen Geraden einen Punkt X so finden, daß die Winkel OXA und OXB $\left\{\begin{matrix}\text{einander gleich}\\ \text{zueinander supplementär}\end{matrix}\right\}$ sind.

i) Von einer Zissoide kennt man die Spitze und den Mittelpunkt des erzeugenden Kreises; man soll den weiteren Schnittpunkt der Kurve mit einer beliebigen von der Spitze ausgehenden Geraden finden.

k) Vom Folium Cartesii ist der Doppelpunkt und der Fußpunkt der von ihm auf die Asymptote gefällten Senkrechten bekannt; man soll den Punkt bestimmen, in dem die Kurve durch eine beliebige, vom Doppelpunkte ausgehende Gerade geschnitten wird.

l) Halbierung der Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Seiten zueinander in bekannten rationalen Verhältnissen stehen.

Im Anschluß an die letzte Aufgabe seien einige Bemerkungen gestattet.

In jedem Dreieck der verlangten Art, einem pythagoreischen Dreieck, haben die trigonometrischen Funktionen der Winkel rationale Werte. Wegen der Formel:

$$\text{(a)}\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

dürfen wir demnach auch:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{m}{n}$$

setzen, wo m und n ganze Zahlen sind. Dadurch wird

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{n-m}{n+m},\ \sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2mn}{n^2+m^2},\ \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}.$$

Demnach verhält sich $a:b:c=2mn:n^2-m^2:n^2+m^2$.

Wenn die Zahlen m und n beide ungerade sind, so drückt sich das Verhältnis $n-m:n+m$ durch zwei Zahlen aus, von denen die eine gerade und die andere ungerade ist. Man erhält demnach alle verschiedenen Formen von rechtwinkligen pythagoreischen Dreiecken und jede Form nur einmal, wenn man für m und n alle natürlichen Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler wählt, für welche $m<n$ und von denen die eine gerade, die andere ungerade ist.

Aus der Formel (a) darf man nicht etwa schließen, jeder Winkel lasse sich unter Zugrundelegung eines Quadrats auf linearem Wege halbieren; denn die Formel kann nur dadurch konstruiert werden, daß man die Hypotenuse auf einer Kathete abträgt. Diese Aufgabe ist im allgemeinen vom zweiten Grade und kommt nur dann auf den ersten Grad hinab, wenn der Kosinus einen bekannten rationalen Wert hat.

Der Punkt, dessen rechtwinklige Koordinaten a und b sind, hat vom Anfangspunkte den Abstand $\sqrt{a^2+b^2}$. Da man nach Wahl der Längeneinheit diesen Punkt stets konstruieren kann, wenn a und b rationale und speziell ganze Zahlen sind, außerdem jede Strecke in beliebig viele gleiche Teile zerlegt werden kann, so ist es möglich, eine jede Länge $\sqrt{m/n}$ zu konstruieren, falls m und n ganze Zahlen sind, und unter den in m enthaltenen Primzahlen, deren Exponent ungerade ist, keiner die Form $4q+3$ hat. Aber jeder einzelnen, auf diese Weise erhaltenen Irrationalität entspricht eine bestimmte Richtung, und wenn man auch nach Aufgabe a) andere Strecken von gleicher Länge ermitteln kann, so ist es doch unmöglich, die gefundene Länge auf eine beliebig gewählte Gerade zu übertragen.

Die letzte Konstruktion dürfte den Grund bilden, aus dem A. Giacomini bei Enriques (S. 78, Fußnote) sagt, das Gegebensein eines Quadrats füge dem Rationalitätsbereiche die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl hinzu. Wir können diesen Ausdruck nicht als berechtigt ansehen. Die vorhin vorgenommene Berechnung der konstruierten Strecke setzt Lehrsätze voraus, bei deren Beweis man weit über die Hilfsmittel hinausgeht, auf die sich die Konstruktionen der vorliegenden Nummer beschränken. Solange wir auf dem Boden dieser Konstruktionen verbleiben, fehlt uns jedes Mittel, die in den Koordinatenachsen gelegenen Längen mit den konstruierten Strecken zu vergleichen. Speziell ist es unmöglich, einen Ausdruck von der Form $a+\sqrt{b}$ zu konstruieren, falls a und b rationale Ausdrücke sind, aber $\sqrt{b}$ einen irrationalen Wert hat.

12. **Lösung aller elementaren Aufgaben mit dem Lineal, sobald ein fester Kreis mit seinem Mittelpunkte gegeben ist.** Sobald ein einziger Kreis gezeichnet vorliegt und außerdem der Mittelpunkt gegeben ist, darf man die unendlichferne Gerade als die Polare

des Mittelpunktes, sowie die unendlichfernen Kreispunkte als die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreise als gegeben voraussetzen. Mit Hilfe dieser Gebilde kann man aber jede metrische Aufgabe als eine projektive auffassen; da man aber jede projektive Aufgabe von elementarem Charakter unter alleinigem Gebrauch des Lineals lösen kann, sobald ein Kegelschnitt gegeben ist, so leuchtet ein, daß jede Aufgabe, die überhaupt mit Zirkel und Lineal lösbar ist, nur den Gebrauch des Lineals verlangt, wofern man einen Kreis mit seinem Mittelpunkte gezeichnet hat.

In der Tat liefern die Verbindungslinien der Endpunkte von zwei beliebigen Durchmessern ein Rechteck und dadurch die Möglichkeit, nach allen Richtungen Parallele zu ziehen. Indem man aber durch den Mittelpunkt des Kreises Parallele zu den Seiten eines Rechtecks zieht, erhält man leicht ein Quadrat, dessen Seite dem Radius des Kreises gleich ist. Somit kann man, wie wir soeben gesehen haben, alle Aufgaben ersten Grades auf linearem Wege lösen. Da zudem der Schnitt des gegebenen Kreises mit geraden Linien alle möglichen Quadratwurzeln liefert, so lassen sich jetzt unter alleiniger Anwendung des Lineals alle diejenigen Aufgaben lösen, die sich analytisch auf Quadratwurzeln zurückführen lassen.

Diese Tatsache können wir aber auch auf einem elementaren Wege beweisen. Nachdem wir gezeigt haben, daß wir ein Quadrat konstruieren und somit die in der vorigen Nummer charakterisierten Aufgaben mit dem Lineal allein erledigen können, kommt es nur noch darauf an zu zeigen, daß in gleicher Weise die Fundamental-Aufgaben gelöst werden können:

A) die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden, und

B) die Schnittpunkte zweier Kreise zu finden,

falls vorausgesetzt wird, daß von jedem Kreise nur der Mittelpunkt und ein Punkt des Umfanges gegeben ist.

Wir wollen von diesen beiden Aufgaben eine einheitliche Lösung angeben. Dabei setzen wir voraus, daß der Kreis k mit seinem Mittelpunkte O gezeichnet vorliegt. Für die Aufgabe A) sei eine Gerade g und von einem Kreise k_1 der Mittelpunkt Q und ein Punkt A des Umfanges gegeben. Bei der Aufgabe B) kennt man von einem weiteren Kreise k_2 noch den Mittelpunkt R und einen Punkt B. Für die Lösung beider Aufgaben bestimmt man einen Ähnlichkeitspunkt S der Kreise k und k_1 und denkt durch eine ähnliche Abbildung den Kreis k_1 in k übergeführt. Bei dieser Abbildung geht in der ersten Aufgabe die Gerade g in eine Gerade g', in der zweiten Aufgabe der Kreis k_2 in einen Kreis k_2' über. Die Schnittpunkte M' und N' des Kreises k mit der Geraden g' sind den Punkten M und N zugeordnet, in denen der Kreis k_1 von der Geraden g geschnitten wird. Bei der zweiten Aufgabe bestimmt man die Potenzlinie der Kreise k und k_2'; ihre Schnittpunkte M' und N' mit dem Kreise k gehören auch dem Kreise k_2' an und entsprechen in der angegebenen Weise den Schnittpunkten M und N der Kreise k_1 und k_2.

Die Aufgabe A) kann demnach in folgender Weise gelöst werden. Man zieht im Kreise k einen zu QA parallelen Radius OA', bestimmt den Schnittpunkt S der Geraden OQ und AA', zieht die Strecken QD und QE nach zwei beliebigen Punkten D und E der Geraden g und ordnet ihnen die Punkte D' und E' so zu, daß S, D, D', sowie S, E, E' je in gerader Linie liegen und $OD' \parallel QD$, $OE' \parallel QE$ ist. Wenn jetzt die Gerade $D'E'$ den Kreis k in den Punkten M' und N' schneidet, so sind die Punkte M und N, in denen die Gerade g von den Strahlen SM' und SN' getroffen wird, die gesuchten Punkte.

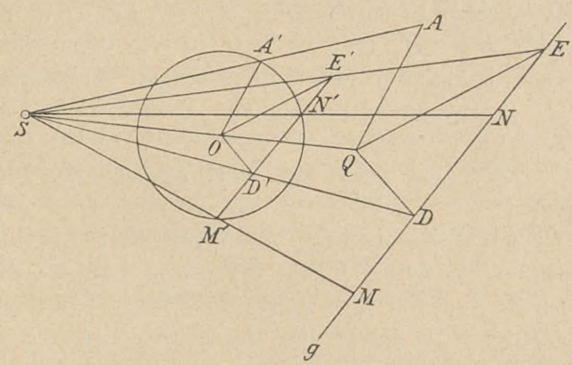

Fig. 23.

Um die Aufgabe B) zu lösen, bestimmt man die Punkte A' und S wieder in der angegebenen Weise und ermittelt die Punkte R' und B' durch die Forderungen, daß S, R, R' und S, B, B' je in gerader Linie liegen und $QR \parallel OR'$, $QB \parallel OB'$ ist. Die Potenzlinie der Kreise k und $(R')B'$ kann nach Nr. 11, b) gefunden werden. Ihre Schnittpunkte mit k seien M' und N'. Alsdann sucht man die Punkte M und N in der Weise, daß S, M', M und S, N', N je in gerader Linie liegen und $M'O \parallel MQ$, $N'O \parallel NQ$ sei. Dann sind die Punkte M und N die Schnittpunkte der beiden Kreise $(Q)A$ und $(R)B$.

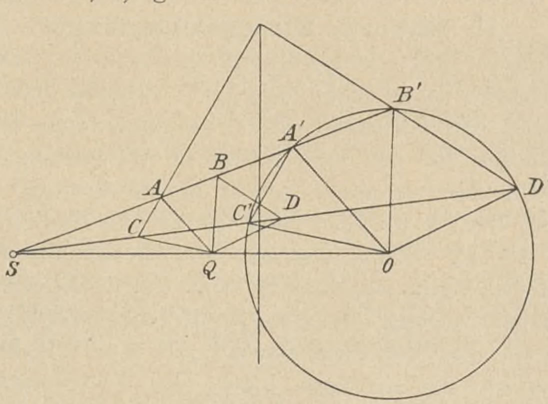

Fig. 24.

Die Potenzlinie zweier Kreise, von denen der eine mit seinem Mittelpunkte gezeichnet vorliegt, kann noch in anderer Weise gefunden werden. Es sei der Kreis k mit seinem Mittelpunkte

O gezeichnet. Um jetzt die Potenzlinie dieses Kreises und eines zweiten Kreises zu finden, von dem nur der Mittelpunkt Q und ein Punkt A des Umfanges gegeben ist, zieht man in k einen zu QA parallelen Radius OA' und nennt S den Schnittpunkt der Geraden OQ und AA'. Die Gerade SA' treffe den Kreis k zum zweiten Male in B' und eine zweite durch S gelegte Gerade in C' und D'. Den Punkten B', C', D' sollen die Punkte B, C, D in der Weise entsprechen, daß auch B in der Geraden SA, C und D in der Geraden SC' liegen und $QB \parallel OB'$, $QC \parallel OC'$ $QD \parallel OD'$ ist. Dann schneiden sich nach einem bekannten Satze die Geraden AC und $B'D'$, sowie $A'C'$ und BD je in einem Punkte der Potenzlinie. Dadurch ist diese Gerade konstruiert.

Hiernach geht aus der Ähnlichkeit zweier Kreise der Satz hervor:

Alle Aufgaben, die sich mit Zirkel und Lineal lösen lassen, können auch mit dem Lineal allein gelöst werden, sobald man in der Ebene einen einzigen festen Kreis mit seinem Mittelpunkte als gezeichnet voraussetzt.

Wenn man auf die Weise, die in diesem Lehrsatze angegeben ist, die Hilfsmittel beschränkt, so erfordert es sehr viel Überlegung, um eine nicht gar zu komplizierte Lösung zu erhalten. Daß man aber auch bei dieser Beschränkung durch passende Anordnung sehr einfache Konstruktionen erhalten kann, hat Staudt durch seine Lösung der Aufgabe gezeigt: In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges 17-Eck zu zeichnen. (Man vergleiche darüber das mehrfach zitierte Werk von Enriques (deutsche Ausgabe, S. 179ff.).)

13. **Hilberts Streckenübertrager.** Wofern man unter den von Hilbert aufgestellten Axiomen nur sein Vollständigkeitsaxiom ausläßt, ist es nicht möglich, die beiden Sätze zu beweisen: Jede Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkte eines Kreises kleiner ist als der Radius, hat mit dem Kreise zwei Punkte gemein, und: Zwei Kreise schneiden einander, wofern die Entfernung der Mittelpunkte kleiner ist als die Summe, aber größer als die Differenz der Radien (vgl. § 15, 1). Wenn man also von diesem Axiom absieht, kann man den Kreis nicht zur Lösung von Konstruktionsaufgaben benutzen. Dagegen verlangt das erste Kongruenzaxiom Hilberts ausdrücklich, daß man eine beliebige Strecke auf jedem Halbstrahl von seinem Endpunkte aus abtragen kann. Ein Instrument, mit dessen Hilfe sich diese Operation ausführen läßt, nennt Hilbert einen Streckenübertrager. Gleichwie aber nach dem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze alle Aufgaben, die überhaupt mit Zirkel und Lineal gelöst werden können, auch schon lösbar sind, wenn man den Gebrauch des

Lineals zuläßt und zudem einen einzigen festen Kreis mit seinem Mittelpunkte als gegeben voraussetzt, können auch alle mit dem Lineal und dem Streckenübertrager lösbaren Aufgaben schon gelöst werden, wenn man neben der Möglichkeit, zwei beliebige Punkte durch eine Gerade zu verbinden, mit J. Kürschák (Math. Ann. Bd. 55) nur voraussetzt, daß man eine einzige feste Strecke, das Eichmaß, auf jedem Halbstrahl von seinem Endpunkte aus abtragen kann. Es ist daher theoretisch wichtig, zu ermitteln, welche Aufgaben sich mit dem Lineal und dem Eichmaß lösen lassen, da alle diese Aufgaben ihre Berechtigung auch in allen denjenigen Raumformen beibehalten, die von dem erwähnten Axiom unabhängig sind.

Zunächst sind alle projektiven Aufgaben ersten Grades lösbar, da der unbeschränkte Gebrauch des Lineals gestattet ist. Indem man ferner das Eichmaß auf einer Geraden von einem ihrer Punkte aus A nach beiden Richtungen als die Strecken AB und AC abträgt, wird der Punkt A die Mitte der Strecke BC. Man kann daher (nach Nr. 9) zu jeder Geraden durch einen beliebig vorgeschriebenen Punkt die Parallele ziehen.

Ist jetzt ein Winkel XAY gegeben, so kann man auf dem Schenkel AX die Strecke AB und auf AY die Strecke AD je gleich dem Eichmaß abtragen. Indem man dann noch durch B die Parallele zu AY und durch D die Parallele zu AX zieht, erhält man einen Rhombus $ABCD$. Wird der Schnittpunkt seiner Diagonalen mit E bezeichnet, so ist der Winkel AEB ein Rechter. Man kann daher leicht ein Quadrat konstruieren, dessen Seite gleich dem Eichmaß ist und von dem eine Seite in EA, eine zweite in EB hineinfällt. Somit lassen sich alle metrischen Aufgaben ersten Grades mit dem Lineal und dem Eichmaß lösen.

Man sieht aber sofort, daß auch manche Aufgaben zweiten Grades mit unseren beiden Instrumenten gelöst werden können. Da die Diagonale AC des Rhombus $ABCD$ den Winkel BAD halbiert, so ermöglicht es die vorhin angegebene Konstruktion, einen jeden Winkel zu halbieren.

Um eine Strecke OA auf einem beliebigen von O ausgehenden Halbstrahl OX abzutragen, legt man das Eichmaß auf OA und auf OX vom Punkte O aus. Dadurch möge man auf OA die Strecke OM und auf OX die Strecke ON erhalten. Ist jetzt B der Schnittpunkt von OX mit der durch A zu MN gezogenen Parallelen, so ist $OB = OA$.

Hiernach kann man die Strecke OA auf einem beliebigen Halbstrahl QY von Q aus abtragen, indem man zuerst durch Ziehen von zwei Parallelen den vierten Eckpunkt C des Parallelogramms $QOAC$ bestimmt und dann auf die angegebene Weise auf dem Halbstrahl QY

die Strecke $QD = QC$ macht. Wir sehen hieraus, daß in der Tat der Streckenübertrager durch das Eichmaß ersetzt werden kann.

Die Frage, welche Aufgaben mit den angegebenen Hilfsmitteln erledigt werden können, ist von Hilbert eingehend behandelt. Seine Antwort kann im Anschluß an die Entwicklungen der ersten Nummern dieses Abschnitts in folgende Form gebracht werden:

Es sei ν die geringste Anzahl von Quadratwurzeln, die wir bei Benutzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems nötig haben, um von den Koordinaten der gegebenen Punkte aus zu den Koordinaten der gesuchten Punkte zu gelangen; soll sich dann die entsprechende geometrische Aufgabe mit Hilfe des Eichmaßes und des Lineals lösen lassen, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß für alle Lagen der gegebenen Punkte die auftretenden Quadratwurzeln und somit auch die ν^2 Lösungen der Aufgabe reell sind.

Der Beweis dieses Satzes, aus dem so deutlich der innige Zusammenhang der Geometrie mit der Algebra hervorleuchtet, kann hier nicht mitgeteilt werden. Indem wir uns damit begnügen, auf Hilberts Grundlagen (II. Aufl., S. 79) zu verweisen, bemerken wir nur, daß Castelnuovo in Enriques' Fragen der Elem.-Geometrie (II. deutsche Ausg., S. 133) die Notwendigkeit dieser Bedingung durch eine ziemlich einfache Betrachtung erwiesen hat.

14. **Das Zweikantenlineal.** Wir wollen jetzt die Frage beantworten, welche Aufgaben mit einem Lineal, das zwei parallele Kanten hat, oder, wie wir kurz sagen wollen, mit Hilfe eines Zweikantenlineals gelöst werden können, indem wir uns auf die Untersuchungen stützen, welche Giacomini und Castelnuovo in Enriques' oft genanntem Werke (S. 95—100, 135, 136) angestellt haben.

Zunächst kann jede einzelne Kante als Lineal gebraucht werden. Man kann aber auch die eine Kante an eine gegebene Gerade legen und längs der anderen Kante eine Parallele zu der gegebenen Geraden ziehen. Demnach ist dies Instrument nicht nur genügend, um alle projektiven Aufgaben ersten Grades zu lösen, sondern ermöglicht es nach Nr. 9 auch, zu jeder Geraden durch einen beliebig gegebenen Punkt die Parallele zu konstruieren.

Ist der Winkel XAY gegeben, so kann man die eine Kante des Lineals je an einen Schenkel legen und längs der anderen Kante eine Gerade ziehen. Dadurch erhält man einen Rhombus $ABCD$, dessen Höhe gleich der Breite des Lineals ist und von dem die Seite AB in den Schenkel AX, die Seite DA in den Schenkel AY fällt. Dieselbe Konstruktion kann man auf den rechten Winkel AEB anwenden, den die Diagonalen AC und BD in ihrem Schnittpunkte E miteinander bilden, und gelangt dadurch zu einem Quadrat. Man kann also nach Nr. 11 alle metrischen Aufgaben ersten Grades lösen, speziell von jedem Punkte aus auf eine gegebene Gerade die Senkrechte fällen.

Der Satz, daß die Winkel eines Rhombus durch seine Diagonalen halbiert werden, zeigt die Möglichkeit, mit dem Zweikantenlineal jeden Winkel zu halbieren.

Ferner wird der Schnittpunkt eines Kreises, von dem der Mittelpunkt O und ein Punkt A des Umfanges gegeben sind, mit einem beliebigen vom Mittelpunkte ausgehenden Halbstrahl OX in folgender Weise erhalten. Man halbiert den Winkel AOX durch den Halbstrahl OY und fällt von A auf OY die Senkrechte AM; der Schnittpunkt B der Geraden AM und OX ist der gesuchte Punkt.

Will man jetzt eine Strecke AB auf einem beliebigen Halbstrahl CY von seinem Endpunkte C aus abtragen, so vervollständigt man durch das Ziehen von zwei Parallelen das Parallelogramm $BACD$ und überträgt nach der soeben gegebenen Vorschrift die Strecke CD auf CY. Hiernach ist es möglich, eine jede Strecke an einen beliebig gegebenen Halbstrahl in seinem Endpunkte anzulegen.

Wir drücken dies Resultat in folgender Weise aus:

Gebraucht man ein Lineal mit zwei parallelen Kanten einmal als bloßes Lineal und dann in der Weise, daß man eine Kante an eine gegebene Gerade legt und längs der anderen eine Parallele zieht, so lassen sich durch Wiederholung dieser beiden Operationen alle diejenigen Aufgaben lösen, für die der Gebrauch des Lineals und des Hilbertschen Streckenübertragers ausreicht.

Das Lineal mit zwei parallelen Kanten kann noch in einer dritten Weise benutzt werden. Sobald nämlich die Entfernung der beiden Punkte A und B größer ist als die Breite des Lineals, kann man es auch so legen, daß die eine Kante durch A, die andere durch B hindurchgeht; und zwar kann diese Operation unter der gestellten Bedingung auf doppelte Weise ausgeführt werden. Die Geraden, welche in den beiden so erhaltenen Lagen längs den Kanten gezogen werden, bilden je ein Paar Gegenseiten eines Rhombus, für den die Strecke AB eine Diagonale ist, während seine Höhe gleich der Breite des Lineals ist. Wir wollen ermitteln, welche Aufgaben sich dadurch lösen lassen, daß man die dritte Gebrauchsart mit den beiden ersten verbindet.

An erster Stelle wollen wir die Schnittpunkte einer Geraden g mit einem Kreise bestimmen, von dem der Mittelpunkt O und ein Punkt A des Umfanges bekannt sind. Wie wir vorhin gesehen haben, können wir den Schnittpunkt eines Kreises mit einem beliebigen vom

Mittelpunkte ausgehenden Halbstrahl konstruieren, sobald noch irgend ein Punkt des Umfanges gegeben ist. Dementsprechend dürfen wir annehmen, daß der gegebene Radius OA des Kreises zu der Geraden g parallel ist. Jetzt legt man die eine Kante des Lineals an OA an und zieht längs der anderen Kante die Parallele g' zu OA (und zu g). Eine beliebige von O ausgehende Gerade möge die Gerade g in B und g' in B' treffen und die Parallele, welche durch B' zu BA gezogen wird, die Gerade OA in A' schneiden. Nach diesen Vorbereitungen wendet man die dritte Gebrauchsart an. Man legt das Lineal so, daß eine Kante durch O, die andere durch A' geht, und zieht längs der Kanten die Geraden OD' und $A'C'$ je bis zu den Schnittpunkten D' und C' mit g'. Dadurch erhält man einen Rhombus $OA'C'D'$. Der Schnittpunkt D von OD' mit g ist ein Schnittpunkt mit dem Kreise $(O)A$, da offenbar $OD' = OA'$ und somit auch $OD = OA$ ist. Der andere Schnittpunkt wird dadurch erhalten, daß man auf die zweite Weise das Lineal mit der einen Kante durch O und mit der anderen durch A' legt.

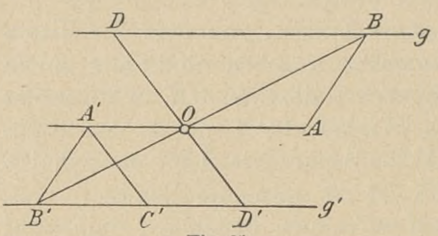

Fig. 25.

Um die Schnittpunkte zweier Kreise zu finden, von denen jeder durch den Mittelpunkt und einen Punkt des Umfanges bestimmt ist, genügt es, die Potenzlinie zu konstruieren, da die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem einen Kreise auch dem anderen angehören. Die Potenzlinie ist aber bekannt, sobald man ihren Schnittpunkt mit der Zentrale kennt. Um diesen Punkt zu konstruieren, wollen wir, was nach dem Früheren gestattet ist, annehmen, die beiden gegebenen Radien OA und QB stünden auf der Verbindungsgeraden OQ ihrer Mittelpunkte senkrecht. Durch Ziehen von Parallelen macht man auf der Geraden OA die Strecke OC gleich QB und auf QB die Strecke QD gleich OA. Dann ist der Punkt M, in dem die Zentrale OQ durch die Mittelsenkrechte von CD geschnitten wird, ein Punkt der Potenzlinie p der Kreise $(O)A$ und $(Q)B$, und die in M auf OQ errichtete Senkrechte die Potenzlinie p selbst. Es ist nämlich:

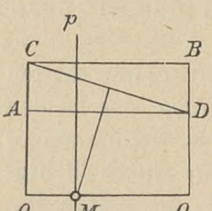

Fig. 26.

$$OC^2 + OM^2 = QC^2 + QM^2$$

oder

$$OM^2 - QM^2 = OA^2 - QB^2.$$

Aus der Verbindung der beiden letzten Aufgaben geht der Satz hervor:

Alle mit Hilfe des Zirkels und des Lineals lösbaren Aufgaben können dadurch konstruiert werden, daß man ein Lineal mit zwei parallelen Kanten benutzt.

Wie wir gesehen haben, genügen die beiden ersten Gebrauchsarten für alle Aufgaben, die mit dem Streckenübertrager gelöst werden können; die dritte Gebrauchsart wird erst notwendig, wenn die vorgelegte Aufgabe der in Nr. 13 aufgestellten Bedingung nicht genügt. Indessen vereinfacht die dritte Art, das Zweikantenlineal zu benutzen, die Konstruktionen vielfach auch in den Fällen, wo die beiden ersten an sich schon ausreichen. Wir möchten nur an die Aufgabe erinnern: Zu einer Strecke AB, die größer ist als die Breite des Lineals, die Mittelsenkrechte zu konstruieren.

15. **Der Winkelhaken.** Wir wollen uns damit begnügen, wiederum im Anschluß an das von Enriques herausgegebene Werk (S. 100ff.), den Satz zu beweisen, daß die elementaren Konstruktionsaufgaben auch mit dem alleinigen Gebrauch des Winkelhakens gelöst werden können. Demgemäß lassen wir die Größe des Winkels ganz unbestimmt und bemerken nur folgendes. Wenn der benutzte Winkel in dem bekannten rationalen Verhältnis $m:n$ zu einem Rechten steht, wobei die Zahlen m und n als relativ prim vorausgesetzt werden, so tritt der in Nr. 11 besprochene Unterschied auch hier hervor, je nachdem die Zahl n gerade oder ungerade ist.

Ein Winkelhaken, d. h. ein starres Modell eines Winkels, das frei bewegt werden kann, läßt sich in dreifacher Weise benutzen. Erstens kann man jeden einzelnen Schenkel als Lineal gebrauchen. Zweitens kann man das Instrument an eine gegebene Gerade g so anlegen, daß entweder der Scheitel in einen vorgeschriebenen Punkt dieser Geraden zu liegen kommt oder der andere Schenkel durch einen beliebig vorgeschriebenen Punkt der Ebene geht. Drittens kann man dem Instrument auch verschiedene Lagen geben, in denen der eine Schenkel durch einen festen Punkt A und der andere durch einen festen Punkt B geht. Die erste Gebrauchsart dient dazu, durch zwei Punkte eine Gerade zu legen. Die zweite ermöglicht die Lösung von manchen metrischen Aufgaben ersten Grades. Um z. B. durch den Punkt P zu einer gegebenen Geraden g die Parallele zu ziehen, braucht man durch P nur eine Gerade h in der Weise zu legen, daß die Geraden g und h mit einer Transversalen PA Wechselwinkel bilden, deren Größe gleich dem Winkel σ des Winkelhakens ist. Zu dem Ende legt man das Instrument mit dem einen Schenkel an g und mit dem anderen durch P. Wenn hierbei der zweite Schenkel die Lage AP annimmt, wo der Punkt A in g liegen soll, so legt man darauf den Winkelhaken mit dem einen Schenkel so an AP, daß der Scheitel mit P zusammenfällt und die beiden Lagen des Winkels

Wechselwinkel werden. In dieser Lage ist der zweite Schenkel zu g parallel.

In ähnlicher Weise kann man, falls der Winkel σ ein spitzer ist, ein gleichschenkliges Dreieck konstruieren, dessen Basiswinkel gleich σ ist. Wenn z. B. die Basis dieses Dreiecks mit der gegebenen Strecke AB zusammenfallen soll, so legt man den Winkelhaken an AB so an, daß der Scheitel zuerst mit A und dann mit B zusammenfällt; die beiden Lagen, welche hierbei der andere Schenkel annimmt, liefern die Schenkel des Dreiecks. Indem man zwei derartige Dreiecke mit der Basis AB zusammenfallen läßt, erhält man einen Rhombus, für den die Strecke AB eine Diagonale ist. Hiernach ist es auch möglich, einen Rhombus mit dem Winkel 2σ zu konstruieren, falls entweder die Seite oder diejenige Diagonale gegeben ist, an deren Endpunkten der Winkel 2σ liegt. Da die Diagonalen eines Rhombus aufeinander senkrecht stehen, wird es auch möglich, von jedem Punkte aus die Senkrechte auf eine beliebige Gerade zu fällen.

Um die Schnittpunkte einer Geraden g mit einem Kreise zu finden, der durch seinen Mittelpunkt und einen Punkt A des Umfanges bestimmt ist, muß man die dritte Art hinzu nehmen, in der man den Winkelhaken gebrauchen kann. Ist der Winkelhaken ein Rechter, so verlängert man, was mit Hilfe einer Parallelen möglich ist, den Radius OA über O hinaus um sich selbst bis zum Punkte B und legt das Instrument so, daß der eine Schenkel durch A, der andere durch B geht und der Scheitel auf die Gerade g zu liegen kommt. Die Lagen, welche der Scheitel hierbei annehmen kann, liefern die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden. Wenn aber der Winkel σ spitz ist, so konstruiert man einen Rhombus $AOBC$, dessen Seite AO mit dem gegebenen Radius zusammenfällt und dessen Winkel $AOB = 2\sigma$ ist. Da der Bogen AB des Kreises $(O)A$ den Winkel σ faßt, so braucht man nur den Winkelhaken so zu legen, daß der eine Schenkel durch A, der andere durch B geht und der Scheitel in die Gerade g fällt. Die Schnittpunkte des Kreises $(O)A$ sind die beiden Punkte, in die der Scheitel hierbei fallen kann.

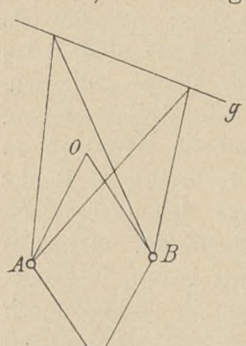

Fig. 27.

Die Potenzlinie zweier Kreise läßt sich in derselben Weise finden, die wir bei der Besprechung des Zweikantenlineals dargelegt haben. Es ist daher auch möglich, die Schnittpunkte zweier Kreise zu ermitteln, sobald von jedem der Mittelpunkt und ein Punkt des Umfanges gegeben ist. Somit erhalten wir den Satz:

Alle elementaren Konstruktionsaufgaben können gelöst werden, sobald man nur den freien Gebrauch des Winkelhakens gestattet.

16. **Lemoines Geometrographie.** Die Nummern 4—15 stellen eine Untersuchung darüber an, wieweit bei elementaren Aufgaben die Hilfsmittel der Konstruktion beschränkt werden können. Dementgegen kann sich das Streben auch dahin richten, unter Zulassung aller Hilfsmittel die Lösung selbst möglichst zu vereinfachen. Auch dies Problem ist von den älteren Mathematikern kaum beachtet worden. Gleichwie man beim Beweise eines neuen Lehrsatzes die vorangehenden Sätze ohne jedes Bedenken benutzt, begnügt man sich von alters her auch heute meistens noch damit, die gestellte Aufgabe auf eine Reihe von bereits gelösten Aufgaben zurückzuführen. Das genügt auch, wenn die Konstruktion nur einen Existenzbeweis vertreten soll oder wenn man nur die Möglichkeit der Lösung erkennen will. Andererseits wird aber bei diesem Verfahren die Konstruktion vielfach so kompliziert, daß sie kaum noch durchgeführt werden kann.

Auch auf diesen Mangel der gebräuchlichen Methode hat zuerst Steiner in dem erwähnten Werkchen (§ 19, Schlußbemerkung) hingewiesen. Er erinnert daran, daß es eine ganz andere Sache sei, die Konstruktion in der Tat, d. h. mit den Instrumenten in der Hand oder bloß mit der Zunge auszuführen. Demgemäß dringt er darauf, „zu untersuchen, auf welche Weise jede geometrische Aufgabe, theoretisch oder praktisch, am einfachsten, genauesten oder sichersten konstruiert werden könne, und zwar 1) welches im allgemeinen, 2) welches bei beschränkten Hilfsmitteln, und 3) welches bei obwaltenden Hindernissen das zweckmäßigste Verfahren sei“. Damit hat Steiner ein Problem aufgestellt, dessen Erledigung um so schwieriger sein dürfte, weil es kaum möglich sein wird, es auf einzelne allgemeine Prinzipien zurückzuführen, man vielmehr wahrscheinlich jede einzelne Aufgabe für sich untersuchen muß. Steiners Mahnung wird denn auch heute noch immer sehr wenig beachtet, vielfach ganz überhört. Wenn wir von einigen Arbeiten Studys absehen, die für die Zwecke unseres Buches kaum in Betracht kommen dürften, so kann nur der französische Mathematiker Lemoine genannt werden, der im Sinne Steiners, vielleicht ohne seine Äußerung zu kennen, mit großem Eifer gearbeitet hat. Die Mehrzahl seiner Arbeiten ist in französischen Zeitschriften veröffentlicht; er hat aber auch einen Überblick über seine Methode im Archiv für Mathematik und Physik (3) B. 1 S. 99—115 gegeben. Im Anschluß an diese letzte Arbeit möchten wir seine Theorie kurz charakterisieren und verweisen den Leser, der sich genauer damit bekannt machen will, auf das Werk von J. Reusch, planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung (Leipzig 1904).

Mit Lemoine wollen wir bei diesem Überblick einen Kreis, der den Mittelpunkt A und den Radius ϱ (bzw. den Radius MN) hat, durch $A(\varrho)$ (bzw. durch $A(MN)$) bezeichnen. Die Methode zerlegt zunächst die beiden Fundamentalaufgaben in ihre einzelnen Operationen. Dem entsprechend bezeichnet Lemoine mit R_1 die Operation, die Kante des Lineals durch einen vorgeschriebenen Punkt zu legen; die Operation R_2 besteht darin, längs des Lineals eine Gerade zu ziehen. Hiernach setzt sich die Aufgabe, durch zwei Punkte eine Gerade hindurchzulegen, aus $2R_1$ und R_2 zusammen und erhält das Symbol $(2R_1 + R_2)$. Die Operation C_1 setzt eine Zirkelspitze in einen vorgeschriebenen Punkt, $2C_1$ schließt entsprechend eine gegebene Strecke zwischen die Spitzen des Zirkels ein. Durch die Operation C_2 setzt man die Zirkelspitze in einen unbestimmten Punkt einer gezeichnet vorliegenden Linie; das Ziehen eines Kreises selbst ist die Operation C_3. Lemoine prüft eine Konstruktion dadurch, daß er angibt, wie oft jede einzelne unter den hier angegebenen Operationen ausgeführt werden muß, und charakterisiert sie durch das Symbol $l_1R_1 + l_2R_2 + m_1C_1 + m_2C_2 + m_3C_3$, worin die Zahlen l_1, l_2, m_1, m_2, m_3 der Reihe nach angeben, wie oft die einzelnen Operationen R_1, R_2, C_1, C_2, C_3 ausgeführt werden. Die Summe $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$ bezeichnet er als den Einfachheits-Koeffizienten (S), die Summe $l_1 + m_1 + m_2$ als den Exaktheits-Koeffizienten (E). Jetzt vergleicht er die verschiedenen Konstruktionen, welche für die Lösung einer bestimmten Aufgabe bekannt sind, nach ihrem Einfachheits-Koeffizienten und zeichnet diejenige, für welche dieser Koeffizient S den kleinsten Wert hat, als die geometrographische Konstruktion aus. Dementsprechend legt er seiner Methode den Namen Geometrographie bei.

Zur Erläuterung dieser Theorie möge es genügen, einige geometrographische Konstruktionen für zwei einfache Aufgaben mitzuteilen, wobei wir den Charakter der einzelnen Operationen jedesmal in einer Klammer beifügen.

a) In einem Punkte C einer Geraden g auf ihr die Senkrechte zu errichten.

Man setzt bei beliebiger Zirkelweite die eine Zirkelspitze in den Punkt $C(C_1)$; wenn dann die andere Spitze den Punkt O einnimmt, so beschreibt man den Kreis $O(OC)(C_3)$, welcher die Gerade g noch im Punkte A schneidet. Dann zieht man die Gerade $AO(2R_1 + R_2)$ bis zu ihrem zweiten Schnittpunkte D mit dem Kreise $O(OC)$ und zieht die Gerade $CD(2R_1 + R_2)$.

$4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3$; $S = 8$, $E = 5$; zwei Gerade, ein Kreis.

b) Durch einen Punkt A zu einer Geraden g die Parallele zu ziehen.

α) Mit einem an sich beliebigen, aber passend gewählten Radius beschreibt man den Kreis $A(\varrho)(C_1 + C_3)$, welcher die Gerade g in B schneidet, dann mit demselben Radius den Kreis $B(\varrho)(C_1 + C_3)$, durch den die Gerade g in C geschnitten wird, ferner den Kreis $C(\varrho)(C_1 + C_3)$, welcher mit dem Kreise $A(\varrho)$ den Punkt D gemein hat, und zieht die Gerade $AD(2R_1 + R_2)$.

$2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3$; $S = 9$, $E = 5$. Drei Kreise und eine Gerade.

β) Um einen beliebigen Punkt O der Ebene beschreibt man den Kreis $O(OA)(C_1 + C_3)$, welcher die Gerade g in den Punkten B und C trifft, nimmt AB in den Zirkel $(2C_1)$ und beschreibt den Kreis $C(AB)(C_1 + C_3)$; den einen Schnittpunkt D der Kreise $O(OA)$ und $C(AB)$ verbindet man mit A durch die Gerade $AD(2R_1 + R_2)$.

$2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_2$, $S = 9$, $E = 6$; eine Gerade und zwei Kreise.

Näher brauchen wir wohl auf Lemoines Arbeiten nicht einzugehen. Die Theorie kann beim Unterricht an sich keine Anwendung finden; sie sollte aber wenigstens den Lehrer dazu mahnen, für diejenigen Aufgaben, die sich als Hilfskonstruktionen in späteren Aufgaben sehr häufig wiederholen, die einfachste Lösung einzuführen. Bei solchen Aufgaben genügt es nicht, bloß die Möglichkeit der Lösung zu zeigen; vielmehr müssen die Zeichnungen so einfach sein, daß sie auch bei mehrfacher Wiederholung an derselben Figur durchgeführt werden können. Es ist für den Schüler doch gar zu entmutigend, wenn er etwa bei der Lösung des Taktionsproblems trotz aller Sorgfalt einen Kreis erhält, der weit davon entfernt ist, die gegebenen Kreise zu berühren.

Nun noch einige Worte zur wissenschaftlichen Würdigung der Theorie! Wie wir gesehen haben, hat Steiner ein allgemeines Problem aufgestellt, das sich in drei getrennte Forderungen zerlegt. Lemoine geht nur auf die erste Forderung ein, vermag aber auch diese nicht vollständig zu erledigen. Es kann schon zweifelhaft sein, ob die beiden Fundamentalaufgaben durch die fünf aufgezählten Operationen vollständig erschöpft sind. Jedenfalls dürfen die fünf Operationen nicht als gleichwertig angesehen werden; so kommt z. B. die Operation C_1, durch welche die Zirkelspitze in einen vorgeschriebenen Punkt gesetzt wird, stets auf zwei Operationen C_2 hinaus, wofern der Punkt, was doch die Regel bildet, als Schnitt von zwei Linien gegeben ist. Diese Mängel scheinen allgemein empfunden zu werden.

Auf einen weiteren Mangel hat Adler zuerst hingewiesen. Neben dem Lineal und dem Zirkel stehen dem Zeichner das Parallellineal und der Winkelhaken zur Verfügung. Es liegt also kein Grund vor, sich mit Lemoine auf die beiden ersten Instrumente zu beschränken; vielmehr muß man versuchen, auch die beiden letzten zur Vereinfachung der Zeichnung heranzuziehen. Aber auch hierbei dürfen die verschiedenen Operationen nicht als gleichwertig angesehen werden, vielmehr ist ein Prinzip zu ermitteln, das gestattet, die einzelnen nach ihrer Einfachheit miteinander zu vergleichen. Darin dürfte aber ohne Zweifel eine große Schwierigkeit liegen.

Von ganz anderen Prinzipien geht H. Brandes in seiner Haller Dissertation (Über die axiomatische Einfachheit, 1908) aus, indem er ein strenges Maß für die Einfachheit aufstellt, das zwar an erster Stelle für Beweise gilt, aber auch auf Konstruktionen übertragen werden kann. Er denkt sich die Aufgabe gestellt, alle Beweise miteinander zu vergleichen, die mit Benutzung derselben n Axiome α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ geführt werden können. Bezüglich eines bestimmten Axioms $\alpha_\varkappa$, welches unter ihnen enthalten ist, gilt ihm derjenige Beweis als der einfachste, der bei einer beliebig häufigen Verwendung der übrigen $n-1$ Axiome das Axiom $\alpha_\varkappa$ möglichst selten anwendet. Diese Einfachheit nennt er axiomatische Einfachheit. Wenn es nun, was allerdings nur sehr selten vorkommen wird, einen Beweis gibt, der bezüglich sämtlicher n Axiome der axiomatisch einfachste ist, so nennt er diesen den (für das ausgewählte System von Axiomen) absolut einfachsten.

Diese Theorie wendet er auf die Zerlegungsbeweise des pythagoreischen Lehrsatzes (§ 16, 2) an und zeigt, daß man hierbei, falls man beliebige Lagen der Kathetenquadrate voraussetzt, mindestens sieben Paare von kongruenten Dreiecken benutzt, daß demnach, wofern man den Beweis nur mit Hilfe des letzten Kongruenzaxioms von Hilbert führen will, dieses mindestens siebenmal anwenden muß.

Auf Konstruktionen ist die neue Theorie bisher nicht angewandt worden.

Indessen dürfen wir nicht vergessen, daß die Ausführung einer möglichst einfachen Zeichnung im allgemeinen gar nicht den Hauptzweck der Konstruktionsaufgaben bildet, daß es sich vielmehr wesentlich darum handelt, die gegenseitige Abhängigkeit verschiedener Gebilde voneinander darzulegen. Gleichwie man neue Lehrsätze auf früher bewiesene Sätze zurückführt, muß auch jeder, der an eine geometrische Aufgabe herantritt, sein Bestreben an erster Stelle darauf richten, den inneren Zusammenhang der neuen Aufgabe mit bereits gelösten Aufgaben zu ermitteln. Darin besteht auch vor allem die wissenschaftliche und die pädagogische Bedeutung der Konstruktionsaufgaben. Erst nachträglich kann man versuchen, die Konstruktion zu vereinfachen. In den seltenen Fällen, wo ein solcher Versuch angebracht ist, verdienen Lemoines Arbeiten als erster Schritt, den Grad der Einfachheit zu charakterisieren, berücksichtigt zu werden.

17. **Die Genauigkeit der geometrischen Konstruktionen.** Die ersten Versuche, die Genauigkeit geometrischer Operationen beim Feldmessen und beim Zeichnen zu schätzen, reichen etwa 200 Jahre zurück. Während aber die Fehlerrechnung in der Geodäsie bereits gründlich ausgebildet ist, begnügte man sich für das geometrische Zeichnen bis vor kurzem mit der Angabe von einigen mehr oder minder sicheren Sätzen. Den ersten Versuch einer rationellen Begründung der Fehlertheorie bei Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden, hat K. Nitz in seiner auf Anregung von Fr. Meyer verfaßten Dissertation (Anwendung der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Königsberg 1905) und seiner Abhandlung: Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen (Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 53 S. 1 ff.) gemacht. In diesen Arbeiten finden sich auch zahlreiche geschichtliche Notizen. Wenn wir auch davon Abstand nehmen müssen, den ganzen Inhalt dieser Arbeiten wiederzugeben, so wollen wir wenigstens versuchen, dem Leser einen Einblick in das Wesen dieser Untersuchungen zu ermöglichen.

Ein Punkt sei durch den Schnitt zweier Geraden bestimmt, die den Winkel ω miteinander bilden. Die mittleren Fehler beim Einsetzen der Zirkelspitze in die erste bzw. die zweite Gerade seien m_1 und m_2. Die Wahrscheinlichkeit, daß man beim Versuche, die Zirkelspitze in den Schnittpunkt einzusetzen, einen Punkt der Umgebung trifft, ist, wie nachgewiesen wird, für alle Punkte einer gewissen Ellipse gleich groß. Diese Ellipse, die Fehlerellipse, hat die beiden Geraden zu konjugierten Durchmessern und wird, wofern man diese zu Koordinatenachsen wählt, durch die Gleichung dargestellt:

$$\text{(a)} \qquad \frac{x^2}{m_1{}^2} + \frac{y^2}{m_2{}^2} = \frac{2\varkappa^2}{\sin^2\omega},$$

wo $\varkappa$ eine Konstante bezeichnet.

Unter der Fehlerkomponente in einer bestimmten Richtung versteht Nitz den mittleren Wert der Quadrate aller Projektionen der Fehler auf die Gerade. Wird die Fehlerkomponente für eine Gerade, welche unter dem Winkel ψ gegen die erste Gerade geneigt ist, mit K_ψ bezeichnet, so gilt die Gleichung:

$$\text{(b)} \qquad K_\psi{}^2 = \frac{m_1{}^2\cos^2(\omega-\psi) + m_2{}^2\cos^2\psi}{\sin^2\omega}.$$

Wenn die beiden Geraden sich rechtwinklig schneiden und die Größen m_1 und m_2 einander gleichgesetzt werden dürfen, so gehen die Ellipsen (a) in konzentrische Kreise über. Dasselbe tritt ein, falls der Punkt nicht als Schnittpunkt von zwei Geraden bestimmt, sondern durch einen kleinen Kreis markiert ist.

Soll die Zirkelspitze in den Schnittpunkt einer Geraden mit einem Kreise oder zweier Kreise eingesetzt werden, so verlangt zwar die Theorie, daß an die Stelle der Ellipsen (a) gewisse Ovale treten; für praktische Zwecke dürfen wir aber jeden Kreis durch die Tangente im Schnittpunkte ersetzen und daher wieder die Fehlerellipsen benutzen.

Der Versuch, das Lineal an zwei gegebene Punkte O_1 und O_2 anzulegen, wird schwerlich je in voller Genauigkeit gelingen; vielmehr wird die Kante im allgemeinen von den Punkten gewisse Abstände ϱ_1 und ϱ_2 haben. Dabei sind alle Geraden gleicher Wahrscheinlichkeit durch die Gleichung:

$$\text{(c)} \qquad \frac{\varrho_1^2}{\mu_1^2} + \frac{\varrho_2^2}{\mu_2^2} = 2\varkappa^2$$

verbunden, wo μ_1 und μ_2 die Fehlerkomponenten in den Punkten O_1 und O_2 längs der Geraden $O_1 O_2$ sind. Die der Gleichung (c) genügenden Geraden umhüllen einen gewissen Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt die Strecke $O_1 O_2 (= o)$ nach dem Verhältnis $\mu_1^2 : \mu_2^2$ teilt. Für ein rechtwinkliges Cartesisches Koordinatensystem, das den Mittelpunkt zum Anfangspunkte und die Gerade $O_1 O_2$ zur x-Achse hat, bekommt dieser Kegelschnitt die Gleichung:

$$\text{(d)} \qquad \frac{y^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)}{2\varkappa^2} - \frac{x^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)^2}{o^2 - 2\varkappa^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)} = \mu_1^2 \mu_2^2.$$

Da in dieser Gleichung $\varkappa$ nur kleine Werte haben kann, kommen aus dieser Schar von konfokalen Kegelschnitten nur Hyperbeln, die Fehlerhyperbeln, in Betracht.

Für den mittleren Richtungswinkel Θ der Geraden $O_1 O_2$ findet Nitz die Formel:

$$\text{(e)} \qquad \sin^2 \Theta = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{o^2}.$$

Hat ferner ein Punkt der wirklichen Strecke $O_1 O_2$ von O_1 die Entfernung p und setzt man den mittleren Abstandsfehler der gezeichneten Strecke von diesem Punkte gleich M_p, so ergibt sich die Gleichung:

$$\text{(f)} \qquad M_p^2 = \mu_1^2 \left(1 - \left(\frac{p}{o}\right)^2\right) + \mu_2^2 \left(\frac{p}{o}\right)^2.$$

Diese wenigen Formeln ermöglichen es bereits, bei einer Reihe von einfachen Konstruktionen die Fehler abzuschätzen. Wir gehen nur auf die Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke AB ein. Diese wird bekanntlich dadurch erhalten, daß man um die Punkte A und B mit demselben Radius r Kreise beschreibt und die Schnittpunkte C und D durch eine Gerade verbindet.

Für die Rechnung setzen wir:

$$AB = a, \quad CD = o = \sqrt{4r^2 - a^2}, \quad \sphericalangle ACB = \omega,$$

wobei $\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a}{2r}$ ist.

Indem wir die Punkte A und B durch Striche bestimmt denken, die senkrecht zur Strecke AB stehen, dürfen wir voraussetzen, daß die Ellipse (a) jedesmal in einen Kreis vom Radius δ übergeht.

Die Fehlerkomponente m_1 für den Punkt C längs CA setzt sich aus der mittleren Parallelverschiebung δ der Geraden CA und dem ebenso großen subjektiven Fehler in C zusammen. Demnach ist $m_1{}^2 = \delta^2 + \delta^2 = 2\delta^2$. Ebenso groß ist der Fehler m_2 in C längs CB, sowie die Fehler für D längs DA und DB. Um daher die Fehlerellipsen für den Punkt C (bzw. für D) zu bestimmen, hat man in (a) m_1 und m_2 durch $\delta\sqrt{2}$ zu ersetzen und dem Winkel ω den eben angegebenen Wert zu erteilen. Dieselben Werte muß man in die Gleichung (b) einsetzen und dann $\psi = \frac{\omega}{2}$ wählen, um die Fehlerkomponenten μ_C und μ_D für die Punkte C und D längs der Geraden CD zu erhalten. Dadurch wird:

$$\mu_C{}^2 = \mu_D{}^2 = \frac{2m_1{}^2\cos^2\frac{\omega}{2}}{\sin^2\omega} = \frac{m_1{}^2}{2\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

oder

$$\mu_C = \mu_D = \frac{2r}{a}\delta.$$

Der Fehler M für die Mitte E der Strecke CD längs der Richtung AB ergibt sich hiernach aus (f) durch $p = \frac{o}{2}$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_C$ und wird:

$$\text{(g)} \qquad M = \pm\frac{\mu_C}{\sqrt{2}} = \pm\,\delta\frac{r}{a}\sqrt{2}.$$

Der mittlere Winkelfehler Θ der Senkrechten CD geht in gleicher Weise aus (e) hervor und wird durch die Gleichung bestimmt:

$$\text{(h)} \qquad \sin\Theta = \pm\,\delta\frac{r}{a}\sqrt{\frac{8}{4r^2 - a^2}}.$$

Die Größe δ glaubt Nitz gleich 0,04 mm setzen zu dürfen.

Aus der Formel (g) geht hervor, daß die Mitte E der Strecke AB um so genauer gefunden wird, je kleiner man den Radius r wählt; der Fehler nähert sich der Grenze $\frac{1}{2}\delta\sqrt{2}$ um so mehr, je weniger r über $\frac{1}{2}a$ hinausgeht. Dagegen weicht nach (h) der Winkel AEC um so weniger von 90^0 ab, je größer r genommen wird. Die Grenze, der dieser Fehler für unbegrenzt wachsende Werte von r immer mehr zustrebt, ist aber für kleine Werte von a recht bedeutend.

18. **Aufgaben dritten und vierten Grades: die Methoden von Smith und von Kortum.** Wir möchten noch einen Blick auf solche Aufgaben werfen, die auf elementarem Wege nicht gelöst werden können, weil die entsprechende Gleichung nicht durch bloße Adjunktion von Quadratwurzeln lösbar ist, vielmehr zu ihrer Lösung höherer Irrationalitäten bedarf. Bisher hat man sich in dieser Hinsicht nur auf den Fall beschränkt, daß man mit Gleichungen dritten Grades in Verbindung mit quadratischen Gleichungen auskommt; es fehlt uns daher noch jedes allgemeine Prinzip, das sich in dem Falle anwenden läßt, wo die der Aufgabe entsprechende Gleichung auf Irrationalitäten führt, die über den vierten Grad hinausgehen. Um so zahlreicher sind die Versuche, die zur Auflösung der beiden bekanntesten Aufgaben dritten Grades, der Verdoppelung des Würfels und der Dreiteilung des Winkels, gemacht sind; wir verweisen auf die Übersicht, die A. Conti bei Enriques (S. 189ff.) gegeben hat. Uns muß es genügen, einige allgemeine Methoden anzugeben, vermittelst deren sich alle Aufgaben lösen lassen, die auf Gleichungen dritten und vierten Grades führen.

Da man jede Gleichung vierten Grades in x dadurch erhalten kann, daß man aus zwei quadratischen Gleichungen in x und y die Unbekannte y eliminiert, so kann man jede Aufgabe der vier ersten Grade darauf zurückführen, die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zu bestimmen, von denen je fünf Punkte gegeben sind. Diese Aufgabe kann man aber dadurch lösen, daß man einen Kegelschnitt als gezeichnet annimmt und den unbeschränkten Gebrauch des Zirkels und des Lineals gestattet. Der Nachweis ist gleichzeitig von Kortum und von Smith geführt worden; der erstere bevorzugt die Ellipse, der zweite die Parabel.[1])

Am einfachsten wird der Nachweis für das Verfahren von Smith. In der Tat wissen wir, daß sich jede Gleichung vierten Grades auf eine kubische Gleichung zurückführen, die letztere aber stets auf die Form $x^3 + px + q = 0$ bringen läßt. Es genügt also zu zeigen, daß die Verbindung einer festen Parabel $y = x^2$ mit einem durch den Scheitel gehenden Kreise $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$ bei beliebigen Werten von α und β auf kubische Gleichungen der angegebenen Form für beliebige Werte von p und q führt. Das ist wirklich der Fall, denn man erhält die Gleichung:

1) Kortum, Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades, Bonn 1869.

Smith, Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques 1868.

$$x^3 - (2\beta - 1)x - 2\alpha = 0,$$

wenn man in der Gleichung des Kreises y durch x^2 ersetzt und dann durch x dividiert.

Wenn man statt der Parabel einen anderen Kegelschnitt, etwa die Ellipse, wählt und dann die entsprechende Rechnung anstellt, so muß man einige Sorgfalt anwenden, um zu erkennen, daß man das Resultat durch reelle Umformungen erreichen kann. Es möge daher noch ein zweiter Beweis angedeutet werden.

Dabei beachte man, daß eine projektive Umformung nur den Gebrauch des Lineals erfordert, während die Lage und die Größe der Achsen eines Kegelschnitts, von dem fünf Punkte bekannt sind, durch Benutzung von Kreis und Gerade ermittelt werden können.

Nun liege ein Kegelschnitt k gezeichnet vor, und es sollen die Schnittpunkte der Kegelschnitte k_1 und k_2 gefunden werden, von denen je fünf Punkte gegeben sind. Man wählt eine Gerade g so, daß sie den Kegelschnitt k_2 nicht schneidet, und transformiert die zur Bestimmung von k_1 und k_2 gegebenen Punkte (und damit in der Idee diese Kegelschnitte selbst) kollinear in der Weise, daß die Gerade g in die unendlichferne Gerade und ihre imaginären Schnittpunkte mit k_2 in die unendlichfernen Kreispunkte übergehen. Dadurch wird k_2 in einen Kreis k_4 und k_1 in einen Kegelschnitt k_3 übergeführt. Die Achsen von k_3 sowie der Mittelpunkt und der Radius von k_4 lassen sich mit Zirkel und Lineal bestimmen, somit auch die Achsen einer jeden Kurve des Büschels $k_3 + \lambda k_4$. Man wählt λ so, daß die Achsen des Kegelschnitts $k_3 + \lambda k_4$ sich wie die Achsen von k verhalten, mit anderen Worten, daß die Kegelschnitte $k_3 + \lambda k_4$ und k ähnlich werden. Jetzt führt man durch eine kollineare Umgestaltung, bei der die unendlichferne Gerade sich selbst entspricht, den Kegelschnitt $k_3 + \lambda k_4$ in den Kegelschnitt k über; dadurch wird zugleich der Kreis k_4 in einen Kreis k_4' übergeführt. Die Schnittpunkte des Kegelschnitts k mit dem Kreise k_4', welche als gefunden gelten können, wenn k gezeichnet vorliegt und k_4' ermittelt werden kann, sind diejenigen Punkte, in die die Schnittpunkte von $k_3 + \lambda k_4$ und k_4 oder die Schnittpunkte von k_3 und k_4 durch die letzte kollineare Umgestaltung übergeführt werden; die letzteren Punkte sind aber vermittelst der ersten Kollinearität aus den Schnittpunkten von k_1 und k_2 hervorgegangen. Somit können auch umgekehrt die Schnittpunkte von k_1 und k_2 aus denen von k und k_4' ermittelt werden.

19. **Gebrauch einer festen Kurve dritter Ordnung.** London[1]) hat darauf hingewiesen, daß die Methoden von Smith und

1) Für den vorliegenden Zweck kommt vor allem eine Arbeit Londons im 41. Bande der Zeitschrift für Math. u. Phys. in Betracht; die Arbeiten im 36. und 38. Bande der Annalen hängen nicht direkt mit dem Problem zusammen.

Kortum nicht als Analoga zu dem Steinerschen Verfahren angesehen werden können, man vielmehr dem Steinerschen Gedanken am besten entspricht, wenn man eine Kurve dritter Ordnung als gezeichnet annimmt und nur den Gebrauch des Lineals gestattet. In der Tat lassen sich alle projektiven Konstruktionsaufgaben, welche bei ihrer algebraischen Lösung auf eine Reihe von Gleichungen dritten Grades zurückgeführt werden können, mit dem alleinigen Gebrauch des Lineals lösen, sobald eine Kurve dritter Ordnung gezeichnet vorliegt. Derartige Aufgaben sind:

a) Zwei Kegelschnitte sind durch je fünf Punkte gegeben; man soll ihre Schnittpunkte auffinden.

b) Von einer Kurve dritter Ordnung kennt man neun Punkte; man soll

α) die Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden finden;

β) von einem der neun Punkte aus die Tangenten an die Kurve legen;

γ) durch drei von diesen Punkten je eine Gerade so legen, daß die Eckpunkte des von ihnen gebildeten Dreiecks auf der Kurve liegen;

δ) die Wendepunkte der Kurve finden.

c) Es sind dreizehn Punkte gegeben; man soll die drei übrigen Punkte ermitteln, in denen sich alle durch die gegebenen Punkte gehenden Kurven vierter Ordnung schneiden.

Um bei metrischen Aufgaben dieser Art mit dem Lineal allein auszukommen, muß man neben der Kurve dritter Ordnung noch die unendlichferne Gerade und in ihr die unendlichfernen Kreispunkte kennen. A. Conti wählt bei Enriques (S. 262) die kubische Parabel und ein Quadrat; das gezeichnete Quadrat ermöglicht die Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems und gestattet, mit dem Lineal allein alle Aufgaben zu lösen, die auf Gleichungen ersten Grades in den Koordinaten führen. Die Gleichung der Kurve dürfen wir in der Form $y = x^3$ voraussetzen. Indem wir sie mit der Gleichung einer Geraden $y = px + q$ verbinden, erhalten wir die Gleichung $x^3 = px + q$, auf die sich jede Gleichung dritten Grades zurückführen läßt.

Während bei diesem Verfahren der Beweis für die Möglichkeit der Lösung überaus einfach wird, kann man auf möglichst einfache Konstruktionen hoffen, wenn die gezeichnete vorausgesetzte Figur ein einheitliches Ganzes bildet. Aus diesem Grunde empfiehlt London, die Zissoide:

$$x(x^2 + y^2) = 2ay^2$$

und den Mittelpunkt $(a, 0)$ ihres Erzeugungskreises als gegeben anzunehmen. Da die Kurve durch die unendlichfernen Kreispunkte geht, kommt es nur darauf an, die unendlichferne Gerade zu bestimmen.

Statt dessen kann man aber auch, wie Enriques (a. a. O. S. 263 Fußnote) zeigt, durch bloßes Ziehen von geraden Linien ein Quadrat konstruieren, das die reellen Schnittpunkte der Zissoide mit dem erzeugenden Kreise und einen Punkt der Asymptote zu Eckpunkten hat.

Wir selbst möchten auf diejenigen Kurven hinweisen, von deren Punkten aus zwei in der Ebene gelegene Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen und die zuweilen geradezu als kubische Kreise bezeichnet werden. Die einfachste Kurve dieser Art hat in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung:

$$(x+y)(x^2+y^2)=6mxy.$$

Außer dieser Kurve soll noch der Punkt $x=y=m$ gegeben sein. Da man mit dem Lineal allein zu jedem Punkte der Ebene die lineare Polare ermitteln kann, dürfen wir die unendlichferne Gerade als die Polare des Punktes (m, m), sowie die unendlichfernen Kreispunkte, die in dieser Geraden liegen, als bekannt voraussetzen. Dadurch können alle metrischen Aufgaben auf projektive zurückgeführt und diese, weil die Kurve gezeichnet vorliegt, mit dem Lineal allein gelöst werden. Statt dessen können wir auch direkt die Tangenten im Doppelpunkte (die Koordinatenachsen) konstruieren; der von diesen eingeschlossene Winkel wird durch die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Punkte (m, m) halbiert; dadurch ist die Konstruktion eines Quadrates ermöglicht.

Wir machen noch auf einige Einzelheiten aufmerksam. Durch den gegebenen Punkt und die Kurve sind auf der Geraden $x=y$ zwei Strecken bestimmt, die im Verhältnisse 2 : 3 stehen; es ist aber nach Nr. 7 möglich, zu der Geraden beliebige Parallele zu ziehen. Die linearen Polaren zu den Punkten dieser Geraden stehen auf ihr senkrecht; dadurch treten diese Senkrechten in enge Beziehung zu der Kurve selbst.

§ 10. Zur geometrischen Logik.

1. **Notwendige Ergänzung der geometrischen Axiome.** Es gibt geometrische Sätze, die sich aus den Axiomen der Geometrie herleiten lassen, ohne daß man sich irgendeines weiteren Hilfsmittels bedient. Das gilt z. B. von dem Satze: Zwei verschiedene Ebenen mit einem gemeinsamen Punkte haben eine Gerade gemein. Da nämlich angenommen ist, daß es einen Punkt gebe, der beiden Ebenen zugleich angehört, so muß ihnen nach dem siebenten Axiom der Verknüpfung mindestens noch ein zweiter gemeinsamer Punkt zugestanden werden. Die beiden Punkte bestimmen aber nach dem ersten Ver-

knüpfungsaxiom eine Gerade. Diese Gerade endlich gehört nach dem sechsten Axiom beiden Ebenen zugleich an.

Wollte man sich indessen auf derartige direkte Schlußketten beschränken, so würde die Geometrie über einen sehr ärmlichen Inhalt nicht hinauskommen. Es steht damit nicht etwa in Widerspruch, wenn man von einem System geometrischer Axiome sagt, es sei vollständig, d. h. zum Aufbau der Geometrie ausreichend. Denn der Ausdruck wird nur in dem Sinne verstanden, daß das System alle spezifisch geometrischen Denkvorschriften enthalte, die in Anspruch genommen werden. Stillschweigend wird dabei die Benutzung von weiteren Denkgesetzen zugestanden, die auch außerhalb des Bereiches der Geometrie Anwendung finden.

Diese Gesetze bilden eine notwendige Ergänzung der geometrischen Axiome, und es ist keineswegs unfruchtbar, sich ihrer ausdrücklich bewußt zu werden. Im folgenden ist der Versuch gemacht, sie nicht nur in bestimmter Form auszusprechen, sondern sie auch in Axiome und aus diesen ableitbare Folgerungen zu gliedern. Es soll nicht behauptet werden, das so erhaltene System sei bereits vollständig, da es schwer ist, sich von allen Hilfsmitteln, die wir gerade bei den uns geläufig gewordenen Schlußreihen benutzen, genaue Rechenschaft zu geben.

2. **Das erste Axiom des Widerspruchs:** *Jede Aussage, die wir in unser Denken einführen, wird entweder als richtig oder als falsch eingeführt.*

In diesem Axiom sind unter „Aussagen“ nur Sätze zu verstehen, in denen eine Verknüpfung von Begriffen miteinander ausgesprochen wird, wie es z. B. geschieht, wenn wir sagen: die Strecke AB ist gleich CD, oder: 5 ist größer als 2. Derartige Sätze sollen im folgenden mit den Buchstaben: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... bezeichnet werden.

Die Begriffe „richtig“ und „falsch“ werden nicht näher definiert. Das Axiom gibt lediglich eine Vorschrift über die Art ihrer Verwendung, wenn eine Aussage in unser Denken eingeführt, d. h. für logische Schlüsse benutzt werden soll. Man sagt von den beiden Begriffen auch, daß sie sich gegenseitig ausschließen und nennt sie kontradiktorisch. — Aus dem Axiom des Widerspruchs ergibt sich unmittelbar der folgende, in jeder Wissenschaft gültige

Satz vom Widerspruch: Wenn dadurch, daß eine Aussage $\mathfrak{A}$ als richtig angesehen wird, ausgeschlossen sein soll, daß die Aussage $\mathfrak{B}$ als richtig zugelassen werde, so muß umgekehrt die Zulassung von $\mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{A}$ ausschließen. Denn sonst müßte $\mathfrak{B}$ zugleich als richtig und als falsch gelten.

Von irgend zwei Aussagen kann also immer nur jede oder keine die andere ausschließen. Wenn jede die andere ausschließt, so sagt man, daß die beiden sich widersprechen. So stehen z. B. die in die Form von Gleichungen gekleideten Aussagen:

$$x + 3y = 8$$
$$2x + 6y = 15$$

miteinander in Widerspruch.

Widerspruchsfreie Systeme. Ein System von Aussagen: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{K}$, sei so beschaffen, daß nicht zwei von ihnen sich widersprechen. Es ist dann noch nicht gesichert, daß man sie alle zugleich als richtig einführen dürfe. Denn es kann der Fall eintreten, daß aus dem System von Voraussetzungen: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{K}$ eine direkte Folgerung hervorgeht, die mit einer von ihnen in Widerspruch steht. Sind z. B. a, b, c drei gerade Strecken, so gibt es unter den drei Aussagen:

$$a > c, \quad b < c, \quad a = b$$

nicht zwei, die sich widersprechen, aber aus den beiden ersten ergibt sich: $a > b$, was der dritten widerspricht. Ebenso ist von den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ x + 2y + z &= 16 \\ 2x + 3y + 2z &= 25 \end{aligned}$$

keine mit einer anderen in Widerspruch; wenn man aber die beiden ersten addiert, so widerspricht das Ergebnis der dritten Gleichung.

Demnach nennt man das System $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{K}$ dann und nur dann widerspruchsfrei, wenn es nicht möglich ist, aus ihm eine Folgerung zu gewinnen, die mit einer von seinen Aussagen in Widerspruch steht.

Bei der Entwicklung einer jeden Geometrie werden ihre spezifischen Axiome als ein widerspruchsfreies System von Aussagen vorausgesetzt. Wenn man die Berechtigung dieser Annahme bei der euklidischen Geometrie aus der Tatsache ableitet, daß sich eine Zahlengeometrie angeben läßt, in der ihre Axiome sämtlich erfüllt sind, so wird damit die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome in Anspruch genommen. Denn die Zahlengeometrie definiert die in den geometrischen Axiomen mehrdeutig gelassenen Begriffe so, daß diese Axiome zu arithmetischen Sätzen werden.

3. **Das zweite Axiom des Widerspruchs:** *Wenn man zu einem widerspruchsfreien System von Voraussetzungen irgendeine seiner direkten Folgerungen hinzufügt, so ergibt sich stets ein widerspruchsfreies System von Aussagen.*

Von diesem Axiom der Logik macht man in der Geometrie Gebrauch, indem man jeden aus den geometrischen Axiomen durch direkte Schlüsse abgeleiteten Satz diesen Axiomen ohne weiteres als gleichberechtigt zugesellt. Man nimmt also an, daß es nicht möglich sei, aus widerspruchsfreien Voraussetzungen durch direkte Schlüsse zwei sich widersprechende Folgerungen abzuleiten. Wie man sieht, ist dieses zweite Axiom des Widerspruchs eine notwendige Voraussetzung für die konsequente Durchführbarkeit des ersten.

4. **Das dritte Axiom des Widerspruchs:** *Es ist ausgeschlossen, daß irgendeine Aussage sich weder als richtig noch als falsch mit einem widerspruchsfreien System von Voraussetzungen zu einem widerspruchsfreien System von Aussagen vereinigen lasse.*

Das dritte Axiom bildet die Grundlage aller indirekten Beweise von geometrischen Sätzen. Eine Behauptung wird probeweise als falsch eingeführt. Sobald es gelungen ist, daraus einen Widerspruch mit dem bis dahin ausgebauten geometrischen System abzuleiten, wird die Behauptung als richtig angesehen und dem System eingefügt. Das dritte Axiom des Widerspruchs steht in derselben Beziehung zum ersten wie das zweite. Erst beide zusammen gewähren die Möglichkeit, das erste ohne jede Einschränkung durchzuführen.

Die Sätze der Geometrie werden zuweilen auch als geometrische „Wahrheiten“ oder „Tatsachen“ bezeichnet. Diese Bezeichnung kann zur Folge haben, daß man die Anwendung der beiden letzten logischen Axiome übersieht. Noch ein zweiter Umstand ist zu erwähnen, der in gleichem Sinne wirken kann.

In dem Wortlaut eines geometrischen Satzes werden die Voraussetzungen, aus denen seine Behauptungen hergeleitet werden sollen, ausdrücklich angegeben, und man pflegt zu sagen, daß jene für diese hinreichend seien; auch, daß diese aus jenen folgen. Nun gibt es aber keinen geometrischen Beweis, bei dem nicht entweder unmittelbar oder mittelbar (durch Benutzung eines vorher bewiesenen Satzes) mindestens ein geometrisches Axiom gebraucht wird. Die benutzten Axiome werden aber in den Lehrsätzen gar nicht erwähnt, man beschränkt sich vielmehr auf die Angabe der nichtaxiomatischen Voraussetzungen, auf die der Beweis zurückgeführt werden soll. Dieser Brauch wird hinreichend gerechtfertigt durch den Umstand, daß die Angabe der in Anspruch genommenen Axiome den Sätzen eine schleppende Form geben würde. Auch bilden die nichtaxiomatischen Voraussetzungen das eigentlich schöpferisch wirkende Element der Geometrie, durch das die Axiome erst fruchtbar gemacht werden. Aber der genannte Brauch kann dazu verleiten, daß man, ausdrücklich oder unbewußt, die geometrischen Axiome als ein für allemal bestehende Denknotwendigkeiten ansieht, denen man sich überhaupt nicht entziehen könne.

Daß wir tatsächlich das zweite und dritte Axiom vom Widerspruch anwenden, springt in die Augen, wenn man sich erinnert, daß keine Geometrie aus Denknotwendigkeiten oder aus unbestreitbaren Wahrheiten hervorgeht, sondern jede nur das Ergebnis eines widerspruchsfreien Systems von Voraussetzungen ist.

5. **Das Axiom der Unterordnung.** *Was von allen Dingen gilt, die zu einer bestimmt abgegrenzten Menge gehören, das gilt auch von den Dingen, die irgendeine ihrer Teilmengen bilden.*

Es mag genügen, das an einem einfachen Beispiele zu erläutern. Die Parallelogramme bilden eine bestimmt abgegrenzte Menge von Vierecken. Sowohl die Rechtecke als auch die Rhomben sind zugehörige Teilmengen. Die Quadrate endlich bilden eine Teilmenge sowohl der Rechtecke als auch der Rhomben. Daher darf von den Diagonalen der Quadrate behauptet werden, daß sie sich gegenseitig halbieren, gleichlang sind und sich senkrecht schneiden.

6. **Identität.** Es sei A ein durch irgendeine Definition bestimmtes Einzelding und B ein durch eine andere Definition festgelegtes Einzelding. Dann kann der Fall eintreten, daß gesagt werden darf: A sei dasselbe Ding wie B, oder A sei identisch mit B, was in Zeichen so wiedergegeben werden soll:

$$A \equiv B.$$

Ein sehr einfaches Beispiel diene zur Erläuterung. Wenn in einer Ebene eine Gerade gegeben ist und ein Punkt außerhalb dieser, so gibt es unter den Strecken, die den gegebenen Punkt mit Punkten der Geraden verbinden, immer eine und nur eine, die auf der gegebenen Geraden senkrecht steht. Dieses „Lot" ist also ein bestimmtes Einzelding. Es ist nun dadurch ausgezeichnet, daß es kürzer ist als alle anderen hier in Betracht gezogenen Verbindungsstrecken. Demnach gibt es unter diesen auch eine eindeutig bestimmte „Kürzeste", und man darf sagen: das Lot sei identisch mit der Kürzesten.

Die Regeln, nach denen wir den Begriff der Identität gebrauchen, können auf zwei Axiome zurückgeführt werden.

Das erste Axiom der Identität: *Jedes Ding ist mit sich selbst identisch, oder es ist immer:*

$$A \equiv A.$$

Das zweite Axiom der Identität: *Wenn zugleich A identisch ist mit B und mit C, so ist auch B identisch mit C. Oder aus:*

$$A \equiv B, \quad A \equiv C$$

folgt:

$$B \equiv C.$$

Aus diesen beiden Axiomen ergeben sich zwei Sätze über Identität, von denen wir oft Gebrauch machen.

Erster Satz über Identität: Wenn A mit B identisch ist, so ist auch umgekehrt B mit A identisch.

Denn aus:

$$A \equiv B, \quad A \equiv A$$

folgt nach dem zweiten Axiom:

$$B \equiv A.$$

Zweiter Satz über Identität: Wenn von den Einzeldingen $A, B, \ldots, K$ das erste identisch ist mit allen folgenden, so sind je zwei von ihnen identisch.

In Nr. 9 dieses Paragraphen wird gezeigt werden, wie oft sich in der Geometrie Gelegenheit bietet, die beiden Sätze über Identität mit Vorteil zu gebrauchen, und daß ihre Nichtbeachtung vielfach dazu verleitet hat, die Beweisarbeit beim Aufbau der Geometrie ganz unnötig zu vermehren.

7. **Der Satz von der vollständigen Induktion.** Es sei $\mathfrak{A}(n)$ eine Aussage, in der die unbestimmte natürliche Zahl n auftritt, und axiomatisch oder erweislich seien die Aussagen:

$$\mathfrak{A}(k), \mathfrak{A}(k+1), \ldots, \mathfrak{A}(m)$$

richtig. Ferner sei erwiesen, daß aus der Richtigkeit von $\mathfrak{A}(n)$ immer die von $\mathfrak{A}(n+1)$ folgt, falls $n \geqq m$ ist. Dann gilt der Satz:

Die Aussage $\mathfrak{A}(n)$ ist stets richtig, wenn $n \geqq k$ ist.

Um diesen Satz zu sichern, genügt die Tatsache, daß man zu jeder natürlichen Zahl über 1 gelangen kann, indem man, von einer beliebigen kleineren ausgehend, weiterzählt.

Das Induktionsgesetz bildet, nach Einführung der natürlichen Zahlen, die wichtigste Grundlage der Arithmetik. Es wird aber dort in einer Form gebraucht, die etwas einfacher ist als der vorstehende Satz, und die man erhält, wenn man $k = m$ setzt. Ein Beispiel für seine Verwendung bietet die Bestimmung der Anzahl von Permutationen, die bei einer Menge von n Dingen möglich sind. Daß für die Geometrie die oben gegebene Fassung notwendig ist, sieht man an dem Satze über die Anordnung von n Punkten auf einer Geraden (vgl. S. 9). Hier ist $\mathfrak{A}(3)$ ein Axiom, $\mathfrak{A}(4)$ ein beweisbarer Satz, und für den Schluß von $\mathfrak{A}(n)$ auf $\mathfrak{A}(n+1)$ braucht man sowohl $\mathfrak{A}(3)$ als auch $\mathfrak{A}(4)$.

8. **Bemerkungen über Umkehrung geometrischer Sätze.** Zu dem Wortlaut aller geometrischen Sätze ist als gemeinsame Ergänzung in Gedanken beizufügen: „vorausgesetzt, daß die Axiome gültig sind“. Nachdem das geschehen ist, kann man jeden Satz in dem Sinne auffassen, daß er die hinreichenden Bedingungen für seine Behauptung angibt und die Frage offen läßt, ob diese Bedin-

gungen auch notwendig seien. Es ist nur natürlich, daß diese Frage, die nichts anderes ist als die Frage der Umkehrbarkeit, bei verschiedenen Sätzen eine ganz verschiedene Behandlung erfährt.

Sie wird gar nicht berührt, wenn die Umkehrung offenbar falsch ist, wie bei dem Satze: „Alle rechten Winkel sind gleich.“ Wenn bei Sätzen, die eine Mehrzahl von nichtaxiomatischen Voraussetzungen enthalten, die vollständige Umkehrung falsch ist, so bleibt freilich doch die Möglichkeit einer teilweisen Umkehrung noch besonders zu prüfen. So läßt z. B. der Satz: „Zwei sich schneidende Gerade und die Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel sind vier harmonische Strahlen“ die vollständige Umkehrung nicht zu, wohl aber die folgende teilweise: „Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei konjugierte aufeinander senkrecht stehen, so halbieren sie die Winkel der beiden anderen.“

Man schweigt ferner ganz von Umkehrungen, die nichtssagend sind, wie z. B. die Umkehrungen der Sätze über die Kongruenz von Dreiecken.

Endlich macht man bei keinem Lehrsatze den Versuch, seine axiomatischen Voraussetzungen durch Umkehrung in die Behauptung einzubeziehen; denn das hieße, den Aufbau der Geometrie durch eine Untersuchung über ihre Axiome unterbrechen. Wohin das führen würde, sieht man z. B. an dem Satze über die Winkelsumme des Dreiecks.

Es könnte scheinen, als ob damit alles, was sich über die Umkehrbarkeit von Lehrsätzen im allgemeinen sagen läßt, erschöpft sei und nach Ausscheidung der vorstehenden Fälle jede beanspruchte Umkehrung durch einen ihr besonders angepaßten Gedankengang erwiesen werden müßte. Diese Auffassung wäre irrig. Bei genauer Betrachtung der geometrischen Sätze ergeben sich vielmehr noch zwei Gesichtspunkte, die eine beträchtliche Ersparnis an Beweisarbeit für sog. Kehrsätze ermöglichen. Das gewinnt besondere Bedeutung durch den Umstand, daß sich die Ersparnis ganz vorwiegend auf Beweise erstreckt, die man in wenig ansprechender Form indirekt zu führen pflegt.

Es zeigt sich nämlich erstens, daß, wenn auch alle geometrischen Sätze als Bedingungssätze aufgefaßt werden können, doch nicht bei allen diese Auffassung alleinberechtigt ist. Es gibt vielmehr eine große Zahl von Sätzen, die auch noch eine andere Auffassung zulassen, und zwar eine Auffassung, aus der sich ihre Umkehrbarkeit ohne weiteres ergibt. Sie können passend Identitätssätze genannt werden.

Zweitens gibt es gewisse Gruppen von zusammengehörigen Sätzen, die so geartet sind, daß ihre Umkehrbarkeit ein für allemal bewiesen werden kann, wodurch eine ermüdende Wiederholung des Beweisganges für jede einzelne Gruppe überflüssig wird. Diese Gruppen können mit Rücksicht auf ihre besondere Beschaffenheit als geschlossene Systeme bezeichnet werden.

9. **Identitätssätze in der Geometrie.** Ein geometrischer Satz soll als einfacher Indentitätssatz bezeichnet werden, wenn sein Inhalt auf nur eine Identität von der Form: $A \equiv B$ zurückgeführt werden kann. Sätze dieser Art gestatten nur die eine Umkehrung: $B \equiv A$, und diese ist nach dem ersten Satze über Identität richtig.

Sätze, deren Inhalt auf zwei oder mehr Identitäten von der Form: $A \equiv B$, $A \equiv C, \ldots, A \equiv K$ hinauskommt, sind entsprechend als zusammengesetzte Identitätssätze zu bezeichnen. Die Zahl ihrer Umkehrungen ist gleich der Anzahl dieser Identitäten, und alle sind nach dem zweiten Satze über Identität richtig.

Die einfachen Identitätssätze sollen zunächst an einem Beispiele erläutert werden. Bezeichnet man die beiden parallelen Seiten eines Trapezes als seine Grundlinien, die nicht parallelen als seine Schenkel, die Verbindungsgerade der Schenkelmitten als seine Mittellinie, so gelten die beiden Sätze:

Die durch die Mitte des einen Schenkels parallel zu den Grundlinien gezogene Gerade trifft auch die Mitte des anderen Schenkels. Die Mittellinie ist den Grundlinien parallel.

Die durch die Mitte des einen Schenkels parallel zu den Grundlinien gezogene Gerade ist eindeutig bestimmt und mag als das Einzelding A bezeichnet werden. Auch die Mittellinie ist eindeutig und heiße das Einzelding B. Dann kann man den ersten der beiden angeführten Sätze auch in der Form aussprechen: A ist identisch mit B, oder in Zeichen: $A \equiv B$. Der zweite Satz spricht dann die Umkehrung aus: $B \equiv A$, und es ist nicht notwendig, ihn auf seine Richtigkeit zu prüfen.

Nun besteht aber die merkwürdige Tatsache, daß in den Lehrbüchern der Geometrie für die Umkehrung $B \equiv A$ vielfach ein besonderer, und zwar indirekter Beweis geführt wird, der folgendermaßen wiedergegeben werden kann. Wäre die Mittellinie den Grundlinien nicht parallel, so wäre sie eine eindeutig bestimmte Nichtparallele, ein von A verschiedenes Einzelding A'. Nun beständen also zugleich die beiden Identitäten:

$$A \equiv B, \quad B \equiv A'.$$

Setzt man dafür:

$$A \equiv B, \quad A' \equiv B,$$

so gelangt man zu dem Schlusse, daß zwei verschiedene gerade Linien A und A' durch die Mittelpunkte der beiden Schenkel des Trapezes gehen müßten, was dem bekannten Axiome der Verknüpfung widerspricht. Wie man sieht, wird hier (und ebenso bei allen ähnlichen Beweisführungen) die Anwendung des ersten Satzes über Identität nicht etwa vermieden; die ganze Wirkung des Beweisverfahrens kommt vielmehr nur darauf hinaus, daß die Aufmerksamkeit von dem eigentlich springenden Punkte abgelenkt und dann der bezeichnete Satz in versteckter Weise benutzt wird, indem man die Identität: $B \equiv A'$ stillschweigend ersetzt durch: $A' \equiv B$.

Es braucht kaum ausdrücklich gesagt zu werden, daß die vorstehenden Bemerkungen sich nicht gegen direkte Beweise für Umkehrungen von Identitätssätzen richten. Doch sind diese durchaus als neue Beweise für bereits logisch gesicherte Sätze anzusehen.

Dem ersten Satze über Proportionen gibt man zweckmäßig die Form: Jede Parallele zu den Grundlinien eines Trapezes teilt dessen Schenkel nach ein und demselben Verhältnis. Auch diese Aussage läßt sich auf eine Identität zurückführen, wenn man wieder, genau wie in dem soeben behandelten Falle, beachtet, daß die Parallele durch einen Punkt außerhalb einer Geraden und die Gerade durch zwei gegebene Punkte eindeutig bestimmte Dinge sind. Von dem indirekt geführten Umkehrungsbeweise gilt also auch das oben Gesagte.

Auch der nach Menelaus benannte Satz geht auf eine einfache Identität zurück, die nur etwas versteckter liegt. Man bemerkt sie aber, wenn man folgendes bedenkt. Zwei beliebig gewählte Teilpunkte auf zwei Seiten eines Dreiecks bestimmen eine Gerade, und diese trifft die dritte Seite in einem eindeutig bestimmten Punkte. Andererseits gibt es auf der dritten Seite auch nur einen Punkt, der so liegt, daß das Produkt der Teilverhältnisse, die auf den drei Seiten erzeugt werden, gleich -1 wird. Hiernach bemerkt man leicht, daß auch der Satz von Ceva unter denselben Gesichtspunkt gebracht werden kann. Von weniger nahe liegenden Beispielen sei hier noch der Satz vom Sehnenviereck im Kreise hervorgehoben. Man wird endlich leicht bemerken, wie oft sich bei geometrischen Aufgaben mit Vorteil der erste Satz über Identität anwenden läßt.

Von zusammengesetzten Identitätssätzen soll hier nur das erste und einfachste Beispiel zergliedert werden. Es ist der Satz: Die Gerade, die den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbiert, trifft die Mitte der Grundlinie und steht auf dieser senkrecht. Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze sei das Ding A, die Verbindungslinie der Spitze mit der Mitte der Grundlinie das Ding B, das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Lot das Ding C, endlich das auf der Grundlinie errichtete Mittellot das Ding D. Dann sagt der ausgesprochene Satz, es sei $A \equiv B$, $A \equiv C$, $A \equiv D$. Demnach erlaubt der zweite Satz über Identität, auszusprechen, daß auch B mit drei übrigen Dingen identisch sei und ganz ebenso C und D.

Diese Aussagen sind die bekannten Umkehrungen des in Rede stehenden Lehrsatzes.

Die zahlreichen hierher gehörigen Beispiele, die sich sowohl in der Planimetrie als auch in der Stereometrie finden, sollen an dieser Stelle nicht aufgezählt werden. Nur ein besonders lehrreiches Beispiel sei noch hervorgehoben: der Satz vom Feuerbachschen Kreise. Dieser Kreis geht durch neun ausgezeichnete Punkte, ist aber durch je drei von diesen Punkten schon vollständig bestimmt. Der fragliche Satz kann also in eine lange Reihe von Identitäten aufgelöst werden, deren erste lauten würde: Der durch die Mitten der Seiten eines Dreiecks gehende Kreis ist nicht verschieden von dem durch die Fußpunkte der drei Höhen gelegten Kreise. Wir überlassen es dem Leser, die weiteren Identitäten aufzustellen und zu erwägen, wohin es führen würde, wenn man etwa ihre Umkehrungen mit indirekten Beweisen versehen wollte.

10. **Geschlossene Systeme von geometrischen Sätzen.** In einem Lehrsatze kann man den ganzen Umfang seiner nichtaxiomatischen Voraussetzungen zu einer Aussage $\mathfrak{A}$ zusammenfassen. Die Aussage $\mathfrak{A}'$ enthalte seine ganze Behauptung oder einen Teil davon. Dann ist $\mathfrak{A}'$ eine Folgerung aus $\mathfrak{A}$. In gleicher Weise seien einander zugeordnet: $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, ..., $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$. Dann besteht also eine Gruppe von geometrischen Sätzen, die schematisch in folgender Form wiedergegeben werden kann:

$$\left.\begin{array}{cccc} \text{Aus} & \mathfrak{A} & \text{folgt} & \mathfrak{A}' \\ „ & \mathfrak{B} & „ & \mathfrak{B}' \\ & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ „ & \mathfrak{K} & „ & \mathfrak{K}' \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Diese Gruppe soll als ein geschlossenes System bezeichnet werden, wenn die Aussagen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{K}$ so beschaffen sind, daß je zwei von ihnen sich widersprechen und nicht alle zugleich als falsch eingeführt werden können (also stets eine und nur eine als richtig anzusehen ist), und wenn außerdem auch $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \ldots, \mathfrak{K}'$ sich zu je zweien widersprechen.

Bezeichnet man mit a, b zwei Seiten eines Dreiecks und mit α, β die ihnen gegenüberliegenden Winkel, so besteht z. B. das dreizählige geschlossene System:

$$\begin{array}{cccc} \text{Aus} & a = b & \text{folgt} & \alpha = \beta \\ „ & a > b & „ & \alpha > \beta \\ „ & a < b & „ & \alpha < \beta. \end{array}$$

Ein geschlossenes System ist stets umkehrbar, d. h. auch die Aussagen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, ..., $\mathfrak{K}'$ können nicht alle zugleich als falsch angesehen werden (was leicht ersichtlich ist) und die Sätze:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Aus} & \mathfrak{A}' & \text{folgt} & \mathfrak{A} \\ \text{"} & \mathfrak{B}' & \text{"} & \mathfrak{B} \\ & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ \text{"} & \mathfrak{K}' & \text{"} & \mathfrak{K} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

sind sämtlich gültig. Denn wenn $\mathfrak{A}'$ zutrifft, so können $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{K}$ nicht zutreffen, usw.

Ein dreizähliges geschlossenes System von Sätzen spricht aus, wie die Länge des Lotes vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine in seiner Ebene liegende Gerade die Lage der Geraden zum Kreise bestimmt. Ein entsprechendes System bezieht sich in der Stereometrie auf die Lage einer Ebene zu einer Kugel. Die angegebenen Satzgruppen und andere, die ihnen entsprechen, beruhen darauf, daß die Begriffe: gleich, größer, kleiner sich gegenseitig ausschließen. Eine bekannte fünfzählige Gruppe von Sätzen macht (in derselben Ebene) die Lage zweier Kreise zueinander abhängig von der Länge ihrer Zentrale. Auch die vollständige Begründung geometrischer Örter kann zur Bildung von geschlossenen Systemen Anlaß geben.[1])

§ 11. Der sprachliche Ausdruck beim mathematischen Unterricht.

1. **Allgemeines über den sprachlichen Ausdruck.** Während die Griechen in der Pflege der Schönheit alle Völker weit übertroffen

1) Der Leser wird es würdigen, daß wir uns im vorstehenden Abschnitt auf die Logik beschränken und metaphysische Fragen über Zahl und Raum nicht berühren. Diese Beschränkung ist gestattet, weil derartige Fragen für den Unterricht nur geringe Bedeutung haben; sie wird notwendig, weil eine eingehende Behandlung, die allein Zweck haben könnte, die Grenzen unseres Buches weit überschreiten müßte. Ebenso müssen wir uns eine Kritik fremder Arbeiten versagen. Wir möchten aber den Leser, der sich für diese Fragen interessiert, auf das Werk verweisen:

L. Couturat, les principes des Mathématiques (1905), das unter dem Titel: Die philosophischen Prinzipien der Mathematik, als 7. Band der philosophisch-soziologischen Bücherei von C. Siegel in deutscher Bearbeitung herausgegeben ist (Leipzig 1908). Dies Werk berücksichtigt aufs genaueste alle neueren mathematischen Untersuchungen. Auch erwähnen wir die zahlreichen Arbeiten, die E. v. Cyon über Raum, Zahl und Zeit teils als Monographien, teils in Zeitschriften, namentlich in Pflügers Archiv, veröffentlicht hat, und in denen namentlich die physiologische Seite der Frage untersucht wird.

haben, während sie im allgemeinen auf eine schöne Form sehr großes Gewicht legten, während z. B. Plato selbst seine philosophischen Schriften zu wahren Kunstwerken zu gestalten wußte, ist die Sprache der griechischen Mathematiker starr und unbeholfen. Die Form, in der Euklid sein unsterbliches Hauptwerk verfaßt hat, sucht die Voraussetzungen eines Lehrsatzes genau zu formulieren, ihnen die daraus fließenden Folgerungen deutlich entgegenzusetzen und selbst die einzelnen Beweismomente scharf voneinander zu trennen. Hiernach machen die „Elemente“ den Eindruck eines starren Gerippes, dem jedes Leben, ja jede innere Verbindung der Teile fehlt.

Diese Form ist sehr lange beibehalten, ja zuweilen noch überboten worden. Man hat vielfach diese Äußerlichkeiten für das Wesen der Sache gehalten, man hat darin den Grund für die Beweiskraft der Mathematik sehen wollen. So versuchte Spinoza seiner Philosophie die höchste Folgerichtigkeit zu verschaffen, wenn er seine „Ethik“, wie er es nannte, auf geometrischem Wege behandelte, in Wirklichkeit aber nur die äußere Form der alten mathematischen Werke nachahmte. Sollte es eines Beweises bedürfen, daß die Strenge der Mathematik nicht von dieser Form abhängt, sondern in ihrem Inhalt begründet ist, so bietet gerade dies Werk den deutlichsten Beweis dafür.

In späteren Zeiten haben sich mathematische Werke ohne alles Bedenken über die Regeln der Sprache hinweggesetzt; manche Lehrbücher aus der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts enthalten zahlreiche Verstöße gegen die Wort- und Satzbildung, ja sogar gegen die Rechtschreibung.

Die neueren Lehrbücher der elementaren Mathematik schließen sich im ganzen recht eng an die von den Alten übernommene Form an; manche vermeiden sogar jede eigentlich sprachliche Darlegung und schreiben namentlich den Beweisen feste Schemata vor. Indessen hüten sie sich vor sprachlichen Fehlern und arbeiten auf Klarheit und Strenge im Ausdruck hin, glauben aber auch dadurch allen Anforderungen genügt zu haben, die man an die Sprache der Mathematik stellen könne. Ziemlich allgemein ist sogar die Meinung verbreitet, in mathematischen Werken könne die Schönheit der Sprache mit Strenge und Klarheit nicht verbunden werden. Und doch ist eine solche Ansicht durch die Tatsachen längst widerlegt. Gerade diejenigen Arbeiten, die an die Strenge der Beweisführung die höchsten Anforderungen stellen, legen meistens auch auf eine gute Sprache großes Gewicht, wie durchweg die Abhandlungen zeigen, die in unseren besten Fachzeitschriften veröffentlicht werden. Wir erinnern des weiteren an die Anzeigen, in denen Gauß über seine größeren Arbeiten berichtet, und verweisen auf Hesses Lehrbücher der analytischen Geometrie und auf Reyes Vorträge über die Geometrie der Lage.

Dabei wird die Wichtigkeit des mathematischen Unterrichts für die sprachliche Ausbildung allgemein anerkannt. So hebt, um von anderen Autoren zu schweigen, Reidt in seiner „Anleitung zum mathematischen Unterricht“ (Berlin 1886) in § 5 und § 17 diese Bedeutung mit großer Entschiedenheit hervor und entwickelt seine Gründe in ausführlicher Breite.

In der Tat ist es allgemein anerkannt, daß jeder Unterrichtszweig der Pflege der Muttersprache dienen müsse. Diese Aufgabe ist für den mathematischen Unterricht um so wichtiger, da er berufen ist, eine Lücke auszufüllen, die durch die übrigen Fächer gelassen wird. Gewiß wird der Gebildete im allgemeinen während seines späteren Lebens kaum genötigt sein, rein mathematische Fragen schriftlich oder mündlich zu behandeln; aber Darlegungen über Raum- und Größenbeziehungen, die gar oft nötig werden, finden nur im mathematischen Unterricht genügende Berücksichtigung. Noch wichtiger ist aber die Sprache der Mathematik an sich; sie will nicht anspornen und begeistern, sondern nur belehren und überzeugen; sie verzichtet auf allen äußeren Schmuck, verlangt aber Klarheit und Einfachheit, also gerade diejenigen Eigenschaften, die für das Leben von großer Bedeutung sind.

Diese Seite des mathemathischen Unterrichts müssen doch auch die Lehrbücher zu fördern suchen. Leider ist das aber vielfach nicht wahrzunehmen. Zwar darf man den Verfassern keinen Vorwurf daraus machen, wenn sie an erster Stelle nach Deutlichkeit streben, mehr auf eine streng richtige als schöne Form sehen, ja selbst eine sprachliche Härte nicht vermeiden, falls es gilt, das Verständnis zu erleichtern. Wenn aber unsere wissenschaftlichen Werke und Abhandlungen, und zwar gerade solche, die auf die Strenge in der Beweisführung das höchste Gewicht legen, sich vielfach durch Formschönheit auszeichnen, so dürfen wir in elementaren Lehrbüchern zum mindesten eine einfache, klare und zugleich gefällige Sprache erwarten. Auch läßt sich manches schon dadurch bessern, daß man die Sucht nach übertriebener Kürze und nach Starrheit in der äußeren Form etwas mäßigt.

Von recht bedenklichem Einfluß sind auch die übertriebenen Forderungen, die zuweilen an die Strenge im Ausdruck gestellt werden. Wenn z. B. Reidt (a. a. O. S. 59) den Satz tadelt: „a und b seien die Maßzahlen der Katheten BC und AC“, so sind wir der Meinung, daß jeder Leser a als Maßzahl von BC und b als Maßzahl von AC auffaßt, und daß aus diesem Grunde der Ausdruck erlaubt ist. Noch weniger können wir mit Reidt in dem Satze: „Ein Winkel heißt ein stumpfer, wenn er größer ist als ein rechter“, einen Verstoß gegen die deutsche Sprache erblicken (Reidt tadelt es, daß die überstumpfen und die gestreckten Winkel in der Definition nicht berücksichtigt seien). Wir können es nicht einmal für ein großes Unglück halten, daß ein Lehrbuch vom Neigungswinkel zweier zusammenstoßenden Seitenflächen eines Tetraeders spricht, wenn wir auch Reidt gern zugeben, daß das Wort „zusammenstoßend“ überflüssig ist.

Unter dem Einfluß der verschiedenen Momente, die wir hiermit glauben genügend charakterisiert zu haben, hat sich vielfach die Sitte gebildet, daß man Lagenbeziehungen nicht bespricht, nur die Größenbeziehungen angibt und diese rein schematisch, in einer starr festgehaltenen Form darlegt. Manche vermeiden jedes erläuternde Wort, halten aber um so strenger darauf, daß die Folgerungen rein äußerlich, etwa durch Unterstreichen, charakterisiert werden.

Dies Verfahren ist aber ganz verwerflich. Der wichtigste Teil der geometrischen Beweise beruht auf Lagenbeziehungen; werden diese nicht genügend hervorgehoben, so bleibt die Beweisführung unvollständig. Der Schüler dringt somit gar nicht in das innere Wesen der Beweise ein, da ihm der wichtigste Teil derselben nicht zum Bewußtsein gebracht wird. Damit schleichen sich auch ganz falsche Ansichten über die Grundlagen der Geometrie ein. Wenn in einzelnen philosophischen Werken das Wesen der geometrischen Beweise ganz verkannt wird, so möchten wir hierfür die Form verantwortlich machen, in der viele Lehrbücher die Beweise bringen.

Auch die bildende Kraft, die in der Geometrie liegt und die auf der Verschiedenheit in ihren Beweisen beruht, wird ihr großenteils genommen. Die Beweise erhalten dadurch, daß der jedesmal charakteristische Teil unterdrückt wird, eine Gleichförmigkeit, die ermüdend wirken muß und die im geraden Gegensatze steht zu der großen Mannigfaltigkeit, durch die sie sich ihrem innern Wesen nach auszeichnen. Somit leistet das angegebene Verfahren zu wenig für den geistigen Fortschritt, dürfte vielmehr geradezu der Trägheit förderlich sein.

Endlich können wir nicht verschweigen, daß die Vernachlässigung der Lagenbeziehungen zu Fehlern verleitet. Man zeichnet eine Figur, die den gemachten Voraussetzungen entspricht, und stellt die Folgerungen, die aus den zufälligen Eigenschaften dieser Figur hervorgehen, als eine Folge der Voraussetzungen hin. Daß hierbei Sätze speziellen Charakters ohne innere Berechtigung verallgemeinert werden können, liegt auf der Hand. Wenn selbst heute noch, nachdem die Elemente der Geometrie so oft durchforscht sind, die Lehrbücher nicht ganz frei von unrichtigen Behauptungen sind, so möchten wir den Grund des Irrtums vielfach darin erblicken, daß man auf die gegenseitige Lage der in einer Figur vereinigten Gebilde zu wenig achtet.

Sollte aber jemand Bedenken tragen, die Behauptung anzuerkennen, daß sich der wichtigste Teil der geometrischen Beweise auf die gegenseitige Lage bezieht, so möge er nur Hilberts Grundlagen, namentlich das erste Kapitel dieses Buches studieren. Wir erinnern speziell daran, daß der Begriff „zwischen“ für die Geometrie eine große Wichtigkeit besitzt, ein Begriff, der in der älteren Zeit kaum beachtet und wohl zuerst von Pasch genauer untersucht worden ist. Des weiteren dürfen wir auf die §§ 4—7 des vorliegenden Werkes verweisen, in denen die ganze Beweisführung auf die Untersuchung der gegenseitigen Lage hinauskommt. Dabei müssen wir ausdrücklich hervorheben, daß die Anwendung der Größensätze für den Flächen- und Rauminhalt neue Axiome involviert, während rein geometrische Untersuchungen gestatten, ohne neue Axiome auszukommen. Wir möchten aber auch auf einige Lücken aufmerksam machen, an denen manche Beweise in weitverbreiteten Lehrbüchern leiden. Wenn wir uns dabei auf Sätze der Planimetrie beschränken, so müssen wir ausdrücklich hervorheben, daß das Bedürfnis, die gegenseitige Lage zu beachten, in der Stereometrie sich in erhöhtem Maße geltend macht.

Beim Beweise des Satzes, daß von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises die größere den kleineren Abstand vom Mittelpunkte hat, begnügt man sich damit, die Sehnen von einem Punkte ausgehen zu lassen, ohne auf ihre Lage zum Mittelpunkte hinzuweisen, und doch ist gerade diese für die Art des Beweises charakteristisch (vgl. § 15, 4).

Wenn man den Satz herleitet, daß die Seiten eines Dreiecks von vier Kreisen berührt werden (vgl. § 15, 6), so zeigt man vielfach nur, daß der Punkt, in dem die Halbierungslinien zweier Außenwinkel sich schneiden, von den im dritten Eckpunkte zusammenstoßenden Seiten gleichen Abstand habe; daß der Schnittpunkt aber in der Halbierungslinie des dritten Innenwinkels liegt, scheint der Schüler aus der Figur entnehmen zu müssen; wenigstens hält man es nicht für nötig, darauf auch nur hinzuweisen. Ebensowenig untersucht man die Lage der drei Punkte, in denen ein Ankreis berührt, und doch ist es sehr wichtig zu wissen, daß nicht nur in der gerade gezeichneten Figur, sondern ganz allgemein zwei Seiten in ihren Verlängerungen und eine zwischen den sie begrenzenden Eckpunkten berührt wird.

Der Satz, daß im Sehnenviereck die Summe der Gegenwinkel zwei Rechte beträgt, gilt nur für konvexe Vierecke; obwohl die Konvexität für den Beweis von wesentlicher Bedeutung ist, wird sie kaum in einem Lehrbuche erwähnt.

Die Sätze von Ceva und Menelaus unterscheiden sich wesentlich durch die Lage, welche die drei hinzutretenden Punkte zu den Eckpunkten des Dreiecks haben; obwohl es unbedingt notwendig ist, für die Umkehrungen auf die Lage hinzuweisen, können sich einzelne Lehrbücher nicht einmal hierzu verstehen. Mit Recht betont Schwering (Handbuch S. 226, 227), daß der Beweis aus zwei Teilen bestehe, und daß der erste, der nur die Lage betrifft, nicht ausgelassen werden dürfe.

Aber nicht nur in wissenschaftlicher Hinsicht ist es verkehrt, die Lagenbeziehungen außer acht zu lassen; auch die Schule muß verlangen, daß diese Beziehungen beim Unterricht sorgfältig beachtet werden. Der Schüler soll zur Raumanschauung erzogen werden; zu dem Zwecke muß er angehalten werden, auf die gegenseitige Beziehung der geometrischen Gebilde zueinander zu achten. Er soll ferner im sprachlichen Ausdruck über räumliche Beziehungen geübt werden; dennoch verschließt man ihm jede Gelegenheit, wo dies in ausgiebigem Maße möglich ist.

Wenn die Anforderungen an den sprachlichen Ausdruck gar zu hoch gespannt werden, wenn vielleicht gar der Lehrer nur ganz bestimmte Ausdrücke gestattet und alle anderen für ungenau erklärt, so verliert der mathematische Unterricht das Unmittelbare und damit das Anregende. Das ist um so bedauerlicher, als der mathematische Unterricht durch seinen Inhalt eine etwas isolierte Stellung einnimmt. Während der Lehrer sich Mühe geben sollte, eine engere Beziehung zu den übrigen Unterrichtszweigen herbeizuführen, erbreitert man die Kluft noch unnötigerweise, obwohl dadurch nur Widerwillen gegen das Fach selbst erzeugt wird. Daß der Schüler alle Lust verliert, sich selbst im sprachlichen Ausdruck zu üben, wenn man die Anforderungen gar zu hoch spannt, mag nur beiläufig erwähnt werden.

2. **Andeutungen über Übungen im sprachlichen Ausdruck.** Daß die Analysis zu den Konstruktionsaufgaben, wie die Herleitung und Begründung der Gleichungen, auf die man durch eine sogenannte eingekleidete Aufgabe der Algebra geführt wird, für den sprachlichen Ausdruck sehr wichtig sind, dürfte allgemein anerkannt sein. Die häuslichen Arbeiten können aber dem hier bezeichneten Zwecke auch auf mancherlei andere Weise dienstbar gemacht werden. Man kann sogar (wenn auch vielleicht nicht gerade regelmäßig) verlangen, daß im allgemeinen in einer Arbeit nicht zwei Formeln direkt aufeinander folgen, sondern daß die Beziehung der folgenden zur vorhergehenden deutlich ausgesprochen werde.

Diese Forderung kann man sowohl bei geometrischen Beweisen als auch bei der Lösung algebraischer Gleichungen stellen. Wir möchten diesen Vorschlag, der vielleicht auf den ersten Blick zu weitgehend scheinen mag, nicht ausführlich begründen, sondern nur erwähnen, daß er durch mancherlei Gründe pädagogischer Art unterstützt wird.

Über die Konstruktionsaufgaben möge hier eine kurze Bemerkung gestattet sein. Wenn für jede einzelne Aufgabe die Analysis, die Konstruktion, der Beweis und die Determination verlangt werden, so erhält fast jede eine ermüdende Ausdehnung, die dem Nutzen einer solchen Übung vielfach nicht ganz entspricht. Die Zeit und Mühe, die hierbei einer einzigen Aufgabe gewidmet werden muß, kann ohne Zweifel nutzbringender verwandt werden. Im allgemeinen darf man voraussetzen, daß jemand, der die Analysis vollständig erfaßt hat, auch die Konstruktion und den Beweis erledigen kann. Demnach braucht der Lehrer oft auch nur die Analysis zu verlangen. In manchen Aufgaben ist es aber angebracht, nur die Konstruktion und den Beweis durchführen zu lassen. Die Determination übersteigt vielfach die Kräfte solcher Schüler, die der Konstruktion wohl gewachsen sind. Andererseits ist aber die Determination zuweilen recht wichtig als Quelle von interessanten Lehrsätzen, namentlich aus der Theorie der Maxima und Minima. Aber der Schüler wird kaum ohne genügende Anleitung imstande sein, diese Folgerungen aus der gestellten Aufgabe zu ziehen. Daher dürfte es wohl am besten sein, die Determination nur zu verlangen, wenn sie wirkliches Interesse bietet, dann aber durch passende Fragen, die geradezu mit der Aufgabe diktiert werden, die Auffindung der zugehörigen Lehrsätze zu erleichtern.

Gleichwie aber der ganze mathematische Unterricht seinen Schwerpunkt in die Schule legen muß, will auch der sprachliche Ausdruck an erster Stelle im mündlichen Verkehr mit den Schülern geübt sein. Natürlich muß hierbei die mathematische Durchbildung das wichtigste Ziel bilden, das erstrebt wird; aber daneben kann der Lehrer dafür sorgen, daß auch die Sprache zu ihrem Rechte kommt. Wenn der Schüler sich über die Lehrsätze, die Aufgaben, die Beweise klar und bestimmt aussprechen muß, so übt er sich zugleich im Gebrauche seiner Muttersprache. Soll er dazu angeleitet werden, den Inhalt des mathematischen Unterrichts geistig zu durchdringen, so genügt es nicht, die einzelnen Lehrsätze mit ihm durchzunehmen; es wird vielfach notwendig, den inneren Zusammenhang, in dem größere Partien zueinander stehen, allseitig zu beleuchten. Diesen Zusammenhang sollen aber die Schüler unter Anleitung des Lehres selbst auffinden; er darf ihnen nicht als etwas Fertiges überliefert, sondern muß von ihnen möglichst selbständig entwickelt werden. Dadurch werden diese Besprechungen auch zu sprachlichen Übungen.

Ebenso verdienen die einzelnen Bestandteile eines längeren Beweises in ihrer gegenseitigen Beziehung besprochen zu werden. Auch hierbei ist das Übermaß vom Übel. Wenn z. B. Reidt vorschreibt, der

Schüler dürfe bei einer Beweisführung keinen Schritt tun, ohne sich zuvor von seiner Notwendigkeit überzeugt zu haben, so befindet er sich in einer argen Selbsttäuschung. Immerhin muß der Lehrer dahin streben, die Schüler möglichst tief in das innere Wesen der Beweise einzuführen. Das wahre Ziel muß auch hier das volle Verständnis sein; die sprachliche Gewandtheit wird dann ganz von selbst gefördert werden.

Endlich kann man die Schüler dazu anleiten, aus jedem Lehrsatze einfache Folgerungen zu ziehen. Hierzu eignen sich an erster Stelle die in § 10, 9 (S. 216) besprochenen Identitätssätze. Das Lehrbuch braucht die einzelnen Sätze, die aus einem solchen Satze hervorgehen, gar nicht zu bringen; dagegen bilden sie für den Schüler einen passenden Übungsstoff. Hierbei wird man aber nicht stehen bleiben. Jeder einzelne Lehrsatz wird erst dadurch zum vollen Eigentume der Schüler, daß sie ihn nicht nur anzuwenden, sondern auch weiter zu führen verstehen. Derartige Übungen bilden für die schwächeren Schüler den Weg, auf dem sie allmählich zur Selbsttätigkeit vordringen; dies Ziel darf aber der mathematische Unterricht niemals aus den Augen verlieren.

Weitere Übungen mögen sich an die mathematischen Formeln anschließen. Gewiß stellt die Formel eine mathematische Wahrheit einerseits nach ihrem vollem Inhalt, anderseits auf die kürzeste Weise dar, im Gegensatz zum sprachlichen Ausdruck, der durchweg nur einen Teil vom Inhalt der Formel umfaßt. Auch gehören die Formeln zu den wichtigsten Instrumenten, die sich die Wissenschaft zu ihrem Gebrauche schafft. Aber die Formelsprache ist eben eine neue Sprache, die man erlernen muß, ehe man sie versteht. Auch ist jeder, der eine Formel mechanisch anwenden kann, noch längst nicht in ihren Sinn eingedrungen. Hiernach dürfte eine eingehende Unterhaltung das beste Mittel sein, durch das dem Anfänger das volle Verständnis erschlossen wird.

Zur Erläuterung wählen wir die Formel:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n},$$

oder die Regel über die Addition gleichnamiger Brüche. Über die Form, wie diese Regel am besten in Worte gefaßt werde, handelt Reidt sehr ausführlich (a. a. O. S. 60) und bespricht insbesondere drei Ausdruckformen. Die erste Form: „Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man ihre Zähler addiert,“ genügt unseres Erachtens den Geboten der Schärfe weit weniger als die oben von Reidt wegen ihrer sprachlichen Ungenauigkeit getadelten Beispiele, weil ein wesentlicher Teil der Regel ganz ausgelassen wird; dennoch lehnt Reidt diese Form der Regel keineswegs ab. An der zweiten Fassung: „Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und die Summe derselben durch den gemeinsamen Nenner dividiert," tadelt er, daß sie für den Anfänger zu lang sei, und daß sie die Hauptsache, nämlich die Addition der Zähler, nicht als solche hervorhebe, vielmehr mit dem übrigen gleichwertig erscheinen lasse. Die dritte Form: „Die Summe gleichnamiger Brüche ist gleich dem Quotienten aus der Summe der Zähler als Dividendus und dem gemeinsamen Nenner als Divisor," wird von ihm für ungeschickt erklärt. Wenn er dann aber fortfährt: „Gleichwohl wird man sich für eine dieser Formen oder eine ähnliche entscheiden und Sorge tragen müssen, daß durch hinreichende Erklärung und Anwendung die Gefahr des Mißverstehens und des Nichtverstehens beseitigt werde", so macht sich darin wieder der Gedanke bemerklich, die Lehrsätze müßten eine feste und starre Form erhalten, an die jeder Schüler gebunden sein soll.

Wir möchten im Gegenteil das Hauptgewicht auf die Formel legen und meinen, sobald diese vollständig verstanden sei, brauche sie gar nicht mehr mit Worten erläutert zu werden. Die Versuche, die Formeln in Worte zu kleiden, sind für uns nur wichtig als Mittel, die Schüler recht gründlich in ihren Sinn einzuführen. Zu dem Zwecke ist es aber gut, wenn dieselbe Formel auf recht verschiedene Weise in Worte gefaßt und als Quelle von allen Gesetzen erkannt wird, die in ihr enthalten sind. Als Beispiel wählen wir die zuletzt angegebene Formel. Dabei beachten wir, daß, wie Reidt ebenfalls zuläßt, der Bruchstrich auch als Divisionszeichen aufgefaßt werden darf. Hiernach erwähnen wir folgende Sätze, die aus der obigen Formel hervorgehen, aber natürlich nicht auswendig gelernt werden sollen.

„Die Summe von gleichnamigen Brüchen ist gleich einem einzigen Bruche, der aus der Summe der Zähler und dem gemeinsamen Nenner gebildet ist."

„Statt zwei Zahlen durch dieselbe Zahl zu dividieren und die Quotienten zu addieren, darf man die Summe der Dividenden durch den gemeinsamen Divisor dividieren."

„Die Summe zweier Quotienten mit demselben Divisor ist gleich einem einzigen Quotienten, der denselben Divisor hat und dessen Dividend gleich der Summe aus den beiden gegebenen Dividenden ist."

„Statt eine Summe zu dividieren, darf man die einzelnen Summanden dividieren und die erhaltenen Quotienten addieren."

„Statt eine Zahl zu dividieren, darf man sie in zwei Summanden zerlegen, jeden einzelnen durch den gegebenen Divisor dividieren und die Quotienten addieren."

„Jeder Bruch kann in die Summe zweier Brüche zerlegt werden, die mit dem gegebenen Bruch denselben Nenner haben und deren Zähler den gegebenen Zähler als Summe ergeben."

Bei diesen Übungen handelt es sich darum, den Schüler mit dem vollen Inhalt einer Formel vertraut zu machen. Längere Formeln sind für diesen Zweck nicht geeignet. Denn derartige Formeln werden erst mit gereifteren Schülern durchgenommen, die so weit vorgebildet sind, daß sie den Inhalt der Formel auch ohne Unterweisung erfassen. Sobald eine Formel nicht ganz kurz ist, wird der sprachliche Ausdruck so weitläufig, daß er das Verständnis nicht erleichtert, sondern erschwert; zudem dienen häßliche und schleppende Sätze nicht zur Förderung der Sprachfertigkeit. Statt diese Behauptungen im einzelnen zu beweisen, begnügen wir uns damit, aus Gudermanns „Lehrbuch der niederen Sphärik" folgenden Lehrsatz zu entnehmen:

„Um aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines sphärischen Dreieckes die Tangente eines anderen Winkels zu finden, dividiere man das Produkt aus dem Sinus der Gegenseite des gesuchten Winkels und dem Sinus des gegebenen Winkels durch den Rest, welcher bleibt, wenn man vom Produkt aus dem Kosinus der Gegenseite und dem Sinus der anderen Seite subtrahiert das Produkt aus dem Sinus der Gegenseite, dem Kosinus der anderen Seite und dem Kosinus des gegebenen Winkels."

Der Leser wird wünschen, daß ihm hier die Formel selbst angegeben werde und er nicht gezwungen sei, sie aus den gemachten Angaben sich mühsam selbst zu bilden.

3. **Der mathematische Wortschatz.** Gewiß ist es nicht angenehm, daß die Mathematik so viele Fremdwörter gebraucht. Aber die übrigen Wissenschaften sind genau in derselben Lage. Zwar hat Martus in seinem „Lehrbuch" versucht, die fremden Wörter aus dem ersten Unterricht zu entfernen; da er aber die Fremdwörter auf der Oberstufe wieder einführt, durchbricht er sein Prinzip und kann einen dauernden Erfolg nicht erreichen. Zudem führen seine Vorschläge nicht nur zu einer schleppenden Ausdrucksweise, sondern sind auch an sich recht bedenklich. Anstatt des Wortes „Kongruenz" will er „völlige Übereinstimmung" sagen. Wie lästig hierdurch die Form der einzelnen Lehrsätze wird, brauchen wir kaum zu erwähnen; wir bemerken aber, daß zur vollen Übereinstimmung auch die Indentität der Lage gehören würde, die doch ausdrücklich ausgeschlossen wird. Statt von parallelen spricht Martus von gleichlaufenden Geraden. Raute ist bei Martus ein allgemeines, in den meisten anderen Lehrbüchern ein gleichseitiges Parallelogramm. Das Wort „Eckenlinie" statt Diagonale wird sich schwerlich einbürgern. Beim rechtwinkligen ebenen Dreieck unterscheidet Martus die „größte Seite" (Hypotenuse) von den „kleinen Seiten" (Katheten); die Lehrsätze werden dadurch nahezu

unverständlich. Da beim sphärischen Dreieck die gebräuchliche Terminologie wieder eingeführt wird, erhalten die Sätze der Sphärik eine ganz andere Form als die der Planimetrie. Die Zentrale zweier Kreise als ihre Achse zu bezeichnen, ist an sich zu empfehlen; indessen wird in manchen Büchern die Potenzlinie oder Chordale zweier Kreise ihre Radikalachse oder auch kurz die Achse des Kreisbüschels genannt. Wegen dieses Gebrauches muß das Wort Zentrale beibehalten werden.

In vielen Fällen ist der deutsche Ausdruck ebensogut oder wohl noch prägnanter als der fremdsprachliche; dann verdient der deutsche beim Anfangsunterricht bevorzugt zu werden. Wir dürfen daher neben Segment und Sektor bei der Anwendung auf den Kreis und die Kugel Abschnitt und Ausschnitt sagen. Kugelkappe scheint uns für Kalotte ganz passend zu sein; auch darf das Wort Kappe wohl noch bei anderen Umdrehungsflächen, vielleicht neben dem von Martus gebrauchten Worte Napf angewandt werden. Das Wort Kugelschicht dürfte ganz geeignet sein für einen Teil der Kugel, der zwischen zwei parallelen Ebenen enthalten ist. In Kommerell-Haucks Lehrbuch der Stereometrie wird hierfür das Wort Kugelzone angewandt, unseres Erachtens im Gegensatz zur Herleitung des Wortes und zum allgemeinen Sprachgebrauch, der unter Zone einen Teil der Oberfläche der Kugel versteht. Das Wort Parallelepipedon will uns nicht recht gefallen; wir können uns aber nicht entschließen, es mit Martus durch das Wort „Rautenprisma“ zu ersetzen, weil hierbei das Wort „Raute“ in einer vom allgemeinen Gebrauch abweichenden Bedeutung genommen wird; am meisten gebraucht man statt dessen Parallelflach und Parallelflächner; bei Kommerell-Hauck wird auch das Wort Spat vorgeschlagen. Für das rechtwinklige Parallelepipedon hat man unbedingt einen kurzen Ausdruck nötig; hierfür hat sich das schöne Wort Quader bereits ziemlich allgemein eingebürgert.

Die Kreise auf der Kugel werden von Steiner als Haupt- und Nebenkreise unterschieden; die Ausdrücke größte und kleine Kreise wollen aber noch immer nicht verschwinden; auch die Wörter Großkreis und Kleinkreis halten den Vergleich mit der Steinerschen Bezeichnung nicht aus. Die Wörter Umkreis, Inkreis und Ankreis sind kurz und bezeichnend. Der fehlerhafte Ausdruck „umschriebener“ statt „umgeschriebener Kreis“ wird auch heute noch zuweilen gefunden.

Für die Zuordnung der Winkel, welche zwei Parallele mit einer sie durchbrechenden Geraden bilden, hat man keine allgemein angenommene Bezeichnung; das Wort Gegenwinkel wird sogar in ganz verschiedenen Bedeutungen genommen. Eine Einigung wäre sehr erwünscht.

Das Wort Büschel wird in den Schulbüchern meistens als Neutrum gebraucht; die genauen Untersuchungen, welche B. Sturm im 79. Bande des Crelleschen Journals (S. 100 Fußnote) über das Geschlecht dieses Wortes angestellt hat und aus denen er schließt, daß das männliche Geschlecht allein berechtigt sei, scheinen ganz übersehen zu werden. Noch mehr ist es zu tadeln, wenn manche Lehrbücher dies Wort in zwei ganz verschiedenen Bedeutungen gebrauchen. Der Strahlenbüschel umfaßt immer die Gesamtheit aller in einer Ebene gelegenen Geraden, die durch einen festen Punkt gehen. Glaubt man für vier durch einen Punkt gehende und in einer Ebene enthaltene Gerade ein eigenes Wort nicht entbehren zu können, so erinnern wir an das schöne Wort Wurf, das Staudt geprägt hat und das in gleicher Weise für vier Punkte einer Punktreihe und für vier Strahlen eines Strahlenbüschels paßt.

Warum manche Bücher an die Wörter perspektiv und projektiv, die bereits Adjektive sind, noch die Endung „-isch" anhängen, ist uns unverständlich.

Es heißt reduzibel und irreduzibel, (nicht -duktibel), weil die Komposita von ducere bei der Endung -ibilis vom Infinitiv und nicht vom Supin abgeleitet werden.

Trotz der griechischen Endung *-εῖος* wird pythagoreisch vielfach -äisch geschrieben.

Beim Trapez werden die parallelen Seiten allgemein als Grundlinien, ihr Abstand als die Höhe bezeichnet; der Brauch, die konvergenten Seiten seine Schenkel zu nennen, befestigt sich immer mehr; die Strecke, welche die Mitten der Schenkel verbindet, heißt die Mittellinie des Trapezes. Diese Bezeichnungen dürften ganz passend gewählt sein.

Die seitenhalbierenden Transversalen eines Dreieckes seine Mittellinien zu nennen, paßt nicht recht zu der Bedeutung, die dies Wort beim Trapez erhalten hat; indessen scheint sich dieser Gebrauch vollständig eingebürgert zu haben. Das mehrfach vorgeschlagene Wort Mediane ist nicht in Aufnahme gekommen. Wir möchten diese Strecken am liebsten als Schwerlinien bezeichnen, da sie diejenigen Ecktransversalen sind, die durch den Schwerpunkt gehen.

Die Wörter Zentriwinkel und Mittelpunktswinkel werden nebeneinander gebraucht; nur Martus spricht stets vom „Winkel am Mittelpunkte". Ebenso wendet Martus statt Peripherie- oder Umfangswinkel den schleppenden Ausdruck „Winkel am Umfange" an; Schwering bevorzugt das Wort „Umkreiswinkel"; wir selbst möchten auf den Ausdruck „Randwinkel" hinweisen. Das Wort Sehnen-Tangenten-Winkel erinnert sehr deutlich daran, daß der eine Schenkel eine Sehne, der andere eine Halbtangente ist; nur ist es etwas lang; das Wesen dürfte durch das Wort Abschnittswinkel bezeichnet werden, indem dadurch angedeutet wird, daß in seinem Felde ein Kreisabschnitt liegt. Die Ausdrücke Sehnen- und Tangentenviereck müssen in den Elementen gestattet werden, da der Kreis die einzige krumme Linie ist, die beim ersten Unterricht behandelt wird.

Das Polygon bedeutet, wie wir oben (S. 145) gesehen haben, an erster Stelle die Gesamtheit der in ihm vereinigten Strecken; die Schule aber, die sich fast ausschließlich auf konvexe Vielecke beschränkt, bevorzugt durchweg den abgegrenzten Ebenenteil. Entsprechendes gilt vom Polyeder.

Die neueren Schulbücher führen durchweg den Kreis als Linie, die Kugel als Fläche ein und halten an der hierdurch gegebenen Bedeutung im allgemeinen fest; daneben darf man, falls kein Mißverständnis zu befürchten ist, die Wörter zur Bezeichnung der Kreisfläche und des Kugelinhalts benutzen.

Tangente, Sekante und Zentrale bezeichnen an sich unbegrenzte gerade Linien; es ist aber gebräuchlich, ihnen eine Länge beizulegen, falls aus dem Zusammenhange deutlich hervorgeht, welche Strecke auf ihnen abgegrenzt werden soll. In diesem Sinne bezeichnet die Zentrale zweier Kreise die Entfernung ihrer Mittelpunkte.

In der Bildung des Plurals von Bogen herrscht große Verschiedenheit; einige Bücher wenden im Plural regelmäßig den Umlaut an, andere vermeiden ihn gänzlich. Von sachkundiger Seite wird uns darüber mitgeteilt, daß der Plural Bögen erst seit dem 17. Jahrhundert vorkommt, dann aber immer mehr herrschend wird. Nur beim Papierbogen vermeidet man meistens den Umlaut; Schiller schreibt aber auch in diesem Falle „Bögen“: „Das Buch müßte . . . seine 18 Bögen haben.“ Demgemäß ist es in der Geometrie angebracht, den Plural „Bögen“ stets dann anzuwenden, wenn es die Deutlichkeit wünschenswert erscheinen läßt, namentlich wenn es ohne den Umlaut nicht selbstverständlich ist, ob der Singular oder der Plural gemeint wird. Es ist auch gestattet, das Wort im Plural regelmäßig umzulauten.

Der Umstand, daß ein Lehrbuch niemals das Wort „die Ecke“ gebraucht, sondern nur „das Eck“ sagt, also z. B. regelmäßig vom Eck A des Dreiecks ABC spricht, gab uns Veranlassung, unseren Gewährsmann auch hierüber zu befragen. Darauf ist uns mitgeteilt worden, daß (entsprechend dem allgemeinen Gebrauche der Lehrbücher) für die Zusammensetzungen Dreieck, Viereck usw. nur das Neutrum gestattet ist, daß aber das Neutrum Eck für sich nur eine Nebenform für das gewöhnliche weibliche Ecke ist, ohne daß in der Bedeutung eine Verschiedenheit eintritt. Wenn diese Nebenform sich auch bereits im Mittelhochdeutschen findet, so liegt doch kein Grund vor, sie allein zu benutzen; vielmehr empfiehlt es sich aus mancherlei Gründen, beim Unterricht, abgesehen von den Zusammensetzungen, die Hauptform zu bevorzugen.

Zum Schluß muß noch erwähnt werden, daß die Zeichen für kongruent, gleich, parallel, ähnlich usw. ($\cong$, $=$, $//$, $\sim$) nicht in den eigentlichen Text gehören, vielmehr, streng genommen, den Formeln vorbehalten werden müssen. Es empfiehlt sich, auch die Schüler in ihren schriftlichen Arbeiten hierauf achten zu lassen.

§ 12. Über den Unterricht in der elementaren Geometrie.

1. **Leitende Gesichtspunkte.** Die Frage, wie der Unterricht in der elementaren Mathematik einzurichten sei, hängt ganz davon ab, welche Ziele man ihm steckt. In diesem Handbuche ist ein doppeltes Ziel ins Auge gefaßt: Einsicht in den besonderen Charakter, der die Mathematik als ein eigenartiges Gebiet menschlichen Wissens auszeichnet, und Verständnis für die wichtige Rolle, die sie in ihren mannigfaltigen praktischen Anwendungen spielt. Von diesen beiden Zielen ist bald das eine, bald das andere lebhafter betont worden. Wir halten es für unzulässig, das eine zugunsten des andern zu vernachlässigen; nur beide zusammen rechtfertigen die Stellung, die der Mathematik unter den übrigen Unterrichtsfächern eingeräumt ist.

Fügt man die nicht erst zu begründende Forderung hinzu, daß der Unterricht mit größter Sorgfalt der allmählichen geistigen Entwicklung der Schüler angepaßt werden soll, so sind die maßgebenden Gesichtspunkte für die Gestaltung des mathematischen Unterrichtes im allgemeinen und insbesondere des geometrischen gegeben.

2. **Die natürliche Geometrie als Grundlage des Unterrichtes.** Der Versuch, eine Einführung in die Geometrie mit der Angabe der Axiome zu beginnen, um darauf sogleich eine allgemeine Geometrie in dem früher (§ 3, 3. S. 47) erläuterten Sinne aufzubauen, würde unter allen Umständen völlig aussichtslos sein. Jede Unterweisung wird notwendig von der besonderen Form, die man als natürliche Geometrie bezeichnet, ausgehen müssen. Die Rücksicht auf das noch jugendliche Alter der Schüler, die den ersten geometrischen Unterricht erhalten, fordert überdies, daß der Lehrer sich die ersten Jahre hindurch ganz und gar auf natürliche Geometrie beschränke; erst später kann er versuchen, den Gesichtskreis der Schüler nach und nach zu erweitern.

Der pädagogische Vorzug der natürlichen Geometrie entspringt aus der besonderen Deutung, die sie den von den Axiomen unbestimmt gelassenen Grundbegriffen gibt. Sie macht es möglich, deren Kenntnis ausschließlich durch Anschauung und praktische Unterweisung zu erwerben, und jede Einmischung theoretischer Definitionen hat keinen anderen Erfolg, als daß der pädagogische Vorteil in Frage gestellt wird.

Die in den Axiomen vorausgesetzten Grundbegriffe sind der Reihe nach: die Grundgebilde, von denen alle Axiome sprechen, die Verknüpfungsbegriffe der ersten und die Anordnungsbegriffe der zweiten Axiomgruppe, endlich die Begriffe der Strecken- und der Winkelgleichheit in der Gruppe der Kongruenzaxiome. Ihre Deutung in der natürlichen Geometrie soll hier etwas eingehender erläutert werden.

3. **Die natürlichen Grundgebilde.** Punkte, Linien und Flächen werden in der natürlichen Geometrie ohne jeden Vorbehalt als körperliche Gebilde anerkannt. Punkte sind Körper, die uns klein erscheinen, d. h. von uns unter kleinen Winkeln gesehen werden. Auch die Fixsterne sind für uns Punkte. Linien sind fadenförmige, Flächen sind blattartige Körper. Auch treten die drei Gebilde in Gestalt von Ecken, Kanten und Oberflächen an festen Körpern auf. Jeder Versuch, den Flächen eine, den Linien zwei und den Punkten alle drei Dimensionen zu nehmen, ist durchaus abzulehnen. Aber je kleiner uns die Punkte, je dünner die Linien und Flächen erscheinen, desto besser. Es wird also weder für die Größe eines Punktes noch für die Dicke einer Linie oder Fläche eine untere Grenze zugestanden.

Geradlinig ist der frei im Raume gespannte Faden und ebenso die Kante des Lineals; eben ist die Oberfläche einer Zeichentafel und das auf ihr ausgebreitete Zeichenblatt.

Für die Planimetrie, auf die sich der Unterricht mit Recht immer zunächst beschränkt, kommen so gut wie ausschließlich gezeichnete Punkte und Linien in Betracht. In der Tat sind gute Zeichnungen sehr verfeinerte und zugleich sehr bequeme Formen von Gebilden der natürlichen Geometrie. Da dem jugendlichen Anfänger in der Geometrie der Punkt als Satzzeichen wohlbekannt, und der Gebrauch des Lineals zum Ziehen von geraden Linien geläufig ist, so bedarf er nicht erst einer ausführlichen Belehrung über die Begriffe des Punktes und der Geraden. Ganz im Gegenteil muß die natürliche Wißbegierde, die er einem ihm noch fremden Gegenstande entgegenbringt, im Keime erstickt werden durch eine Unterweisung, die nur die Wahl hat, entweder längst bekannte Dinge zu wiederholen oder unverständlich zu sein. Dagegen ist wohl zu beachten, daß sich der Knabe an die für ihn neue und fremdartige Bezeichnung von Punkten und geraden Linien durch Buchstaben erst gewöhnen muß.

4. **Die Verknüpfungsbegriffe der natürlichen Geometrie.** Gleich beim ersten Eintritt in die Geometrie haben sich die Schüler mit den mannigfaltigen Wendungen vertraut zu machen, durch die

wir die Verknüpfungen von Punkten und Geraden in einer Ebene ausdrücken. Ein Punkt A kann auf der Geraden g liegen. Wir sagen dann auch: A sei ein Punkt von g, oder: g enthalte den Punkt A. Und umgekehrt: g treffe den Punkt A oder gehe durch A. Der gemeinsame Sinn dieser Ausdrücke ist an einer Zeichnung unmittelbar dem Augenschein zu entnehmen. Versuche, ihn durch Worte zu umschreiben, sind mindestens überflüssig. Die Ausdrücke werden dem Schüler nicht dadurch geläufig, daß er solche Umschreibungsversuche auswendig lernt, sondern indem er kleine zeichnerische Aufgaben löst, wie etwa: auf einer gegebenen, d. h. vorgezeichneten Geraden die Punkte $A, B, \ldots$ zu wählen und zu bezeichnen; durch einen gegebenen Punkt die geraden Linien $g, h, \ldots$ zu ziehen. Wenn die Geraden $g, h, \ldots$ durch denselben Punkt A gehen, so sagen wir, daß sie sich in A schneiden, auch daß sie den Punkt A gemein haben. Der gemeinsame Punkt heißt daher auch ihr Schnittpunkt. Alle diese Wendungen sind bei den ersten zeichnerischen Übungen zu gebrauchen.

Von räumlichen Verknüpfungen kommt für die Planimetrie nur in Betracht, daß eine Gerade ganz in einer Ebene liegen oder in der Ebene gezogen sein kann. Man darf sich die Zeichenebene erweitert und eine in ihr gezogene Gerade zugleich verlängert denken; dann liegt auch die verlängerte Gerade ganz in der erweiterten Ebene.

Die Schwierigkeit, die es dem Schüler bereitet, sich in allen diesen und anderen Wendungen des geometrischen Sprachgebrauches zurechtzufinden, wird häufig unterschätzt. Der Erfolg des Unterrichts kann aber schon dadurch in Frage gestellt werden, daß man sie als mehr oder weniger selbstverständlich betrachtet und daher nur oberflächlich behandelt. Jeder Lehrer kann sich leicht durch den Versuch davon überzeugen, wie häufig Anfänger die Sprache der Geometrie mißverstehen.

5. **Die Anordnungsbegriffe der natürlichen Geometrie.** Die Kenntnis der natürlichen Bedeutung des Wortes „zwischen“ für Dinge, die in einer offenen Reihe angeordnet sind, darf bei der ersten Einführung in die Geometrie unbedenklich schon vorausgesetzt werden. Es liegt hier eines der augenfälligsten Beispiele dafür vor, daß ein Begriff ganz ausschließlich durch Anschauung erworben wird, ohne daß irgendein Versuch gemacht würde, ihn in Worte zu fassen.

Zu der Strecke AB gehören nur die Punkte, die zwischen A und B liegen; sie wird durch diese beiden Punkte, die auch ihre Endpunkte heißen, begrenzt. Die gerade Linie AB dagegen enthält auch Punkte, die nicht zwischen A und B liegen. Man beachte auch den Unterschied der beiden Ausdrucksweisen: die Strecke AB verbindet A mit B, die Gerade AB geht durch A und B. Zu der Geraden gehört jede Verlängerung der Strecke AB, die auf der Zeichentafel Platz findet.

Auch bloß gedachte Verlängerungen, die über die Zeichenebene hinausgehen, gehören ihr noch an: sie darf beliebig lang gedacht werden. Aber das Wort „unendlich“ kommt in einem verständigen Unterricht auf lange Zeit überhaupt nicht vor.

Der Halbstrahl darf aufgefaßt werden als eine gerade Strecke, die einen bestimmten und einen unbestimmten Grenzpunkt und somit eine beliebige Länge hat. Der feste Grenzpunkt heißt sein Anfangs- oder Ausgangspunkt.

Wenn zwei Halbstrahlen in der Zeichenebene von demselben Punkte ausgehen, so sagt man: sie bilden miteinander einen Winkel. Alle Strecken, durch die man Punkte des einen Schenkels mit Punkten des andern verbinden kann, fallen in ein bestimmtes Gebiet der Zeichenebene: das natürliche Winkelfeld.

Die bekannten „Definitionen“ des Winkels, die über diese einfache Beschreibung hinausgehen, werden tatsächlich, da man gar nicht einmal versucht, sie je anzuwenden, nur ohne Verständnis und Zusammenhang auswendig gelernt, wirken also direkt schädlich.

Flache und erhabene Winkel sind Erweiterungen des ursprünglichen Winkelbegriffs, mit denen der Anfänger bekannt gemacht werden darf, sobald er verstehen kann, daß diese Erweiterungen nützlich sind.

Als Winkeleinheit wird man im Unterricht zunächst nur den „Grad“ gebrauchen. Wenn man später den Zentriwinkel, dessen Bogen gleich dem Kreisradius ist, als „natürliche“ Winkeleinheit einführt, so hat diese Bezeichnung selbstverständlich keine Beziehung zur natürlichen Geometrie. Sie ist vielmehr in demselben Sinne zu verstehen wie der „natürliche“ Logarithmus, d. h. es handelt sich nur um eine Einheit, die zu bequemen Formeln führt. Daß ihre Wahl nur durch Zweckmäßigkeitsgründe bestimmt wird, ersieht man leicht daraus, daß an sich ja der Zentriwinkel, dessen Bogen dem Kreisdurchmesser gleichkommt, mit demselben Rechte zur Einheit gemacht werden könnte.

6. **Die natürliche Streckengleichheit.** Die natürliche Geometrie besitzt einen ihr eigentümlichen Begriff der Streckengleichheit. Sie findet den vom ersten Kongruenzaxiom (vgl. S. 10) geforderten Punkt B' durch Abstecken mit dem Zirkel, auch durch ein mit Marken versehenes Lineal (Meßlineal) oder durch Anwendung eines gespannten Streifens (Meßband). In jedem Falle überträgt sie einem natürlichen Körper die Rolle eines Streckenträgers.

In der natürlichen Geometrie ist also die Bewegung von Strecken (und ebenso die von anderen Gebilden) immer natürliche Bewegung. Wie diese auszuführen sei, kann nur durch eine praktische Unterweisung über die Handhabung von Zirkel, Lineal oder Meßband gelehrt werden. Die bekannten Versuche, die „starre Bewegung“ theoretisch zu definieren, kommen auf Zirkeldefinitionen hinaus. Unter verschiedenen in der Geometrie möglichen Bewegungen ist die natürliche nur eine besondere (vgl. S. 43).

Wahl und Handhabung des Streckenträgers werden durch das Bestreben geleitet, bei wiederholter Bestimmung des Punktes B' die Mehrdeutigkeit dieses Punktes zu vermeiden. Tatsächlich läßt sich das nicht vollkommen erreichen. Außerdem wird zumal das dritte Kongruenzaxiom von allen Streckenträgern auch bei sorgfältigem Verfahren immer nur recht mangelhaft erfüllt werden. Der praktischen Meßkunst erwachsen aus diesem Mangel mühsame Korrekturen. Ganz im Gegensatz dazu benutzt man beim Unterricht in der Geometrie Streckenträger von fragwürdiger Beschaffenheit mit naivem Vertrauen. Das ist durchaus berechtigt und bedeutet weiter nichts, als daß beim Aufbau der Geometrie unser Denken sich allein auf die Axiome stützt und nicht auf einen nur oberflächlich erfaßten Begriff der Streckenkongruenz, dessen genauere Prüfung in unabsehbare Schwierigkeiten führen würde. Ganz mit Recht bringt man diese Schwierigkeiten gar nicht, die Gesetze der Streckengleichheit aber deutlich zum Bewußtsein.

7. **Die natürliche Winkelgleichheit.** Was über die Streckengleichheit in der natürlichen Geometrie gesagt ist, das gilt, mit entsprechender Abänderung, auch für die Winkelgleichheit. Bis zum Beweise des dritten Kongruenzsatzes für Dreiecke ist ein natürlicher Winkelträger erforderlich, um den im vierten Kongruenzaxiom verlangten Halbstrahl k' zu bestimmen. Man gebraucht den sog. Transporteur oder ein Winkellineal oder auch einen Ausschnitt aus dem Zeichenblatt selbst. Nachdem aber der dritte Kongruenzsatz gewonnen ist, läßt sich der Winkel auch ohne Anwendung eines besonderen Trägers bewegen, so daß von da ab die natürliche elementare Geometrie sich auf zwei Instrumente beschränken kann, auf Lineal und Zirkel. Es ist nützlich, die Schüler auf diesen ersten greifbaren Erfolg des Nachdenkens über geometrische Dinge ausdrücklich aufmerksam zu machen.

8. **Die Axiome im Unterricht.** Von der Ansicht ausgehend, daß das Hilbertsche System von Axiomen sich für die Einführung in die Geometrie besser eigne als irgendein anderes, haben wir diesem (in § 1) eine ausführliche Darstellung gewidmet, die dazu dienen soll, sowohl seine Verwendung beim Unterricht zu erleichtern, als auch auf das Studium von Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ vorzubereiten. Es wird aber wohl niemand auf den Gedanken verfallen, man könne den Unterricht mit einer Aufzählung der Axiome beginnen. Es kann sich vielmehr nur darum handeln, die Beweisquellen der Geometrie nach und nach zum Bewußtsein zu bringen und sich mit den Schülern ganz allmählich über sie zu verständigen. Auf keiner

Stufe sollten sie zum Auswendiglernen mißbraucht werden. In den nächstfolgenden Nummern ist der hier angedeutete Gedanke etwas näher erläutert.

9. **Die Axiome der Verknüpfung.** Von den Axiomen dieser Gruppe werden die beiden ersten dem Anfänger, der nur natürliche, und zwar zeichnende Geometrie treibt, alsbald einleuchten. Man wird aber wohl vorziehen, sie in der früher (§ 1, S. 6) angegebenen Weise zusammenzufassen. Für die Planimetrie erscheint es angemessen, auch noch zu prüfen, ob die Linealkante und die Zeichentafel das sechste Axiom erfüllen. Die weiteren räumlichen Axiome gehören an den Anfang des stereometrischen Unterrichts, wo sie erfahrungsmäßig von den inzwischen herangereiften Schülern gut aufgefaßt und ohne Schwierigkeit in bewußter Weise zum Aufbau der Stereometrie benutzt werden. Das vierte und fünfte Axiom kann man dann in ähnlicher Weise vereinigen wie das erste und zweite. Nunmehr kann auch die erste Gruppe vollständig aufgestellt und mit Aussicht auf Erfolg versucht werden, das Verständnis für die Rolle, die die Axiome in der Geometrie überhaupt spielen, und für die Schwierigkeit, sich von ihnen vollständige und genaue Rechenschaft zu geben, durch gelegentliche Besprechungen allmählich anzubahnen, wobei historische Bemerkungen gute Dienste leisten können.

10. **Die Axiome der Anordnung** werden bei der Einführung in die Geometrie am besten zunächst ganz übergangen. Der Lehrsatz des Menelaus bietet Gelegenheit, das vierte dieser Axiome ausdrücklich als Beweismittel hinzustellen. Aber erst nachdem durch Behandlung der Stereometrie der Sinn für vollständige Zurückführung geläufiger Anschauungstatsachen auf bestimmte Axiome mehr geweckt ist, dürfte es sich empfehlen, auf die zweite Gruppe etwas näher einzugehen. Bis dahin wird man wohl die Anordnungsgesetze, soweit man sie braucht, unmittelbar der Beobachtung entnehmen, ohne sie auf ihre Abhängigkeit voneinander zu prüfen.

11. **Die Axiome der Kongruenz.** Daß mit dem Worte „gleich“ eine umkehrbare oder Wechselbeziehung zwischen zwei Dingen bezeichnet wird, ist dem Knaben schon geläufig, bevor er sich mit der Geometrie beschäftigt, und es wird daher im Unterricht gewöhnlich stillschweigend vorausgesetzt. Im übrigen ist es Sitte, die Gesetze der Strecken- und Winkelgleichheit zwar ausdrücklich auszusprechen, aber nicht, sie in Axiome und Folgerungen aus diesen zu sondern. Das ist für den Anfang gewiß zu billigen, doch dürfte es möglich und auch angebracht sein, gereiftere Schüler über beide Punkte aufzuklären.

Häufig spricht man die Gleichheitsgesetze nicht für Strecken und Winkel besonders aus, sondern sagt z. B. allgemeiner: „Zwei

Größen, die derselben dritten gleich sind, sind unter sich gleich", ferner: „Gleiches zu gleichem addiert, gibt gleiches" usw. Das mag statthaft sein, wenn sich der Schüler bewußt ist, daß hier mit „Größen" eben nur Strecken und Winkel zusammen gemeint sind. Es muß aber als ganz unzulässig bezeichnet werden, ihn mit einem nicht näher bestimmten allgemeinen Größenbegriff zu beunruhigen.

In der natürlichen Geometrie wird man selbstredend als Axiom der Dreieckskongruenz die Bewegbarkeit des Dreiecks (vgl. S. 15) bevorzugen. Die üblichen Beweise des ersten und zweiten Kongruenzsatzes, bei denen man ein Dreieck auf das andere legt, haben den Vorzug der Anschaulichkeit, aber den Nachteil, daß die Bewegbarkeit des Dreiecks innerhalb derselben Ebene und von einer Ebene in eine andere leicht als selbstverständlich angesehen wird. Um das zu verhüten, kann man darauf hinweisen, daß weder die Wahl des Stoffes, aus dem ein natürliches Dreieck besteht, noch die Art, wie man seine Bewegung ausführt, gleichgültig ist. Dieselbe Bemerkung gilt auch schon für natürliche Strecken und Winkel. Wenn die Gebilde aus augenfällig dehnbarem Stoffe bestehen, so kann man sie leicht in einer Weise „bewegen", die auch von den Schülern als unzulässig bezeichnet werden wird. Die natürliche Bewegung ist hierbei immer so wenig selbstverständlich, daß sie überhaupt nicht einmal theoretisch definiert, sondern nur praktisch gezeigt werden kann. Für die gedankliche Entwicklung der Geometrie ist das bedeutungslos, da sie sich nur auf Axiome stützt.

Um die Notwendigkeit einer besondern axiomatischen Annahme für den Beweis der beiden ersten Kongruenzsätze, entweder beim ersten Unterricht oder bei einer späteren Besprechung, zum Bewußtsein zu bringen, kann man auch so verfahren, daß man die drei bestimmenden Stücke eines gezeichnet vorliegenden Dreiecks mit Hilfe von Maßstab und Transporteur nach einer beliebigen Stelle der Zeichenebene überträgt und nun das Augenmerk darauf lenkt, daß nur zwei Fälle möglich sind. Entweder finden sich in dem durch die drei Stücke vollständig bestimmten zweiten Dreieck die nicht übertragenen Stücke des ersten auch vor oder nicht. Im ersten Falle gilt das Axiom der Bewegbarkeit für Dreiecke, im zweiten nicht.

12. **Das Parallelenaxiom.** Die Wahl eines für den Unterricht geeigneten Parallelenaxioms soll an anderer Stelle ausführlich besprochen werden (vgl. § 14, 5). Daß die natürliche Geometrie euklidisch sei, kann zwar durch Beobachtung nicht streng nachgewiesen werden, wird aber durch sie etwa in demselben Maße nahegelegt, wie das Gesetz von der Erhaltung der Materie bei chemischen Stoffwandlungen oder wie das Newtonsche Anziehungsgesetz.

Das euklidische oder ein ihm äquivalentes Parallelenaxiom in unauffälliger Weise oder sogar als mehr oder weniger selbstverständlich oder unvermeidlich einzuführen, wäre ebenso verfehlt, wie wenn man mit den erwähnten beiden Naturgesetzen so verfahren wollte.

13. **Die Axiome der Stetigkeit.** Das archimedische Axiom ist leicht aufzufassen, und für seine Anwendung bietet schon der Unterricht in der Planimetrie wiederholt Gelegenheit. Es ist für die natürliche Geometrie eine Hypothese, die in beschränktem Umfange leicht durch den Versuch bestätigt werden kann, aber als unbeschränkt gültig angesehen wird. Man wird zu erwägen haben, auf welcher Unterrichtsstufe man das Axiom aussprechen und als unentbehrliches Beweismittel hinstellen will, nachdem man es zunächst eine Zeitlang stillschweigend zugelassen hat. Wir sind der Ansicht, daß das spätestens bei der Rektifikation des Kreises geschehen sollte.

Was endlich das Axiom der Vollständigkeit betrifft, so sind die Schüler zwar nicht imstande, zu erfassen, daß in ihm die notwendige und hinreichende Ergänzung der vorhergehenden Axiome enthalten sei, dagegen dürfte es keine Schwierigkeit bieten, ihnen die Notwendigkeit einer Ergänzung verständlich zu machen. Denn auch in der elementaren Geometrie werden den Punkten einer geraden Linie reelle Zahlen zugeordnet, sei es, daß man auf der Geraden einen beliebigen Nullpunkt wählt und von ihm aus nach beiden Seiten eine vorgeschriebene Einheitsstrecke fortgesetzt abträgt, sei es, daß man eine gegebene Strecke nach veränderlichem Zahlenverhältnis teilt. In beiden Fällen bietet das archimedische Axiom die Gewähr dafür, daß zu jedem Punkte eine Zahl gehört, aber keineswegs dafür, daß auch umgekehrt jeder reellen Zahl ein Punkt zugeordnet ist. Ganz im Gegenteil wird ja durch die Gesamtheit der mit Lineal und Zirkel auf der Geraden konstruierbaren Punkte nur eine ganz bestimmte Teilmenge der reellen Zahlen erschöpft: es sind die Wurzeln von quadratischen Gleichungen und solchen Gleichungen höheren Grades, deren Lösung vollständig auf quadratische Gleichungen zurückgeführt werden kann. Die stetige Punktreihe, in der zu jeder reellen Zahl ein Punkt gehört, muß also noch durch ein besonderes Axiom ausdrücklich gefordert werden.

14. **Die Strenge der Beweisführung.** Die wissenschaftliche Geometrie erstrebt als letzes Ziel, alle ihre Sätze restlos und in voller Strenge auf bestimmt ausgesprochene Axiome zurückzuführen. Es ist unmöglich, diese Forderung auch im elementaren Unterricht zu erfüllen. Wer sie nach ihrem ganzen Umfange zu würdigen versteht, wird ohne weiteres zugeben, daß es durchaus notwendig ist, beim ersten Unterricht in natürlicher Geometrie die Beweisführung zum Teil durch Beobachtung zu ersetzen oder zu ergänzen. Auf späteren Unterrichtsstufen kann die Rolle der sinnlichen Wahrnehmung stark

eingeschränkt werden; sie vollständig entbehrlich zu machen, dürfte aber auch auf der letzten Stufe nicht gelingen. Um nicht mißverstanden zu werden, wollen wir indessen genauer angeben, in welchem Sinne und Umfange wir diese Bemerkung verstehen.

Von einem Beweise der S. 8—9 abgeleiteten Anordnungssätze kann natürlich bei der ersten Einführung in die Geometrie keine Rede sein. Wenn indessen bei Gelegenheit des Satzes von Menelaus das vierte Axiom der Anordnung ausgesprochen wird, so ist es gewiß angebracht, einmal in einer Unterrichtsstunde, je nach Umständen mehr oder weniger ausführlich, zu erläutern, daß die in der zeichnenden Geometrie sich aufdrängenden Tatsachen der Anordnung sämtlich auf vier Axiome zurückgeführt werden können. Gewiß wäre es aber ein sehr unglücklicher Gedanke, zu verlangen, daß die Schüler den Inhalt einer solchen Stunde sich auch gedächtnismäßig aneignen sollten.

Auch die Regeln für den Gebrauch der Begriffe „größer“ und „kleiner“ bei Strecken und Winkeln wird man zunächst anwenden lassen, ohne über ihre Herkunft Rechenschaft zu fordern. Doch kann später gelegentlich auf ihre Beweisbarkeit (vgl. S. 13 und 17) wenigstens hingewiesen werden.

Wir empfehlen ferner, die Sätze über Nebenwinkel und Scheitelwinkel, die Möglichkeit und Eindeutigkeit des durch einen vorgeschriebenen Punkt gehenden Lotes einer Geraden und die Gleichheit der rechten Winkel anfangs nur aus Beobachtung und Erfahrung abzuleiten und stillschweigend anzunehmen, daß jede Strecke einen und nur einen Mittelpunkt, jeder Winkel eine und nur eine Halbierungslinie habe. Maßgebend hierfür ist schon der Umstand, daß das Interesse jugendlicher Schüler nur durch die Erkenntnis von neuen Tatsachen wachgehalten werden kann, durch umständliche Beweise für Dinge, die ihnen längst geläufig sind oder leicht an Zeichnungen wahrgenommen werden können, aber sicher ertötet wird.

Ausdrücklich warnen wir vor Scheinbeweisen. Wenn man sich z. B. für die Gleichheit der rechten Winkel darauf beruft, daß jeder von ihnen die Hälfte eines flachen sei, so ist das ein wertloser Beweisversuch. Denn der sog. flache Winkel ist kein eigentlicher Winkel, sondern bedeutet eine Erweiterung dieses Begriffes; überdies hätte man selbst von eigentlichen Winkeln erst zu erweisen, daß sie je eine und nur eine Halbierungslinie haben. Bei Schülern, die man gezwungen hat, solche und ähnliche Scheinbeweise zu lernen, ist eine spätere Aufklärung über den wahren logischen Sachverhalt (vgl. S. 17—19) so gut wie unmöglich.

Beweise, die das Axiom der Vollständigkeit in Anspruch nehmen, können auf keiner Unterrichtsstufe mit Strenge durchgeführt werden.

Es ist aber weder notwendig noch nützlich, gar nicht oder nur undeutlich ausgesprochene Stetigkeitsvorstellungen zur Grundlage von Beweisen zu machen. Wir halten es vielmehr für angemessen, daß der Lehrer sich von den Stetigkeitssätzen, die er ohne Beweis zulassen will, vielleicht um nachträglich ihre Beweisbarkeit anzudeuten, genaue Rechenschaft gebe. Wir empfehlen die beiden folgenden, der Anschauung entnommenen, aber ganz ausdrücklich ausgesprochenen Sätze:

Jede gerade Strecke, die einen Punkt innerhalb eines Kreises mit einem äußeren Punkte verbindet, enthält einen Punkt der Kreisperipherie. Dasselbe gilt von jedem Kreisbogen, der einen inneren Punkt mit einem äußeren verbindet.

Über den Beweis für diese beiden Sätze vergleiche man § 15, 1. 2. Die Definition der inneren und äußeren Punkte ergibt sich in folgender Weise. Die Punkte einer Ebene, in der ein Kreis (O) vom Radius r liegt, zerfallen, soweit sie nicht dem Kreise selbst angehören, in zwei getrennte Mengen, je nachdem ihre Entfernung von der Kreismitte O kleiner oder größer ist als der Radius r. Gehört der Punkt A zur ersten Menge, ist also $OA < r$, so gibt es auf dem Halbstrahl OA einen Punkt B der Art, daß $OB = r$ ist, und A zwischen O und B liegt. Daraufhin wird A ein innerer Punkt genannt. Entsprechend ist der äußere Punkt zu definieren. Sind A und C zwei Punkte, von denen keiner außerhalb des Kreises liegt, so beweist man mit Hilfe des Satzes vom Außenwinkel leicht, daß zwischen A und C nur innere Punkte liegen. Ist aber A ein innerer, C ein äußerer Punkt, so tritt der oben angeführte Satz in Kraft.

Hiernach läßt sich dann leicht zeigen, wie der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkte eines Kreises, in dessen Ebene sie liegt, ihre Lage zum Kreise bestimmt. Ebensoleicht erledigt man die Beziehungen zweier Kreise derselben Ebene zueinander in ihrer Abhängigkeit von der Länge der Zentrale. In beiden Fällen handelt es sich um geschlossene Systeme von Sätzen (§ 10, S. 218); man wird daher die ermüdende mechanische Ausführung der Umkehrungsbeweise vermeiden. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich aus drei gegebenen Strecken ein Dreieck zeichnen läßt, kann nun recht wohl besprochen werden, bevor weitere Sätze der Kreislehre, die damit nichts zu schaffen haben, behandelt sind.

Wohl ganz allgemein erleichtert man sich beim Unterricht die Entwicklung der Lehre vom Flächeninhalt ebener Figuren dadurch, daß man stillschweigend den unbewiesenen Satz benutzt: Eine ebene Figur kann mit keinem ihrer Teile zerlegungsgleich sein.

In der Tat wird man auch zugeben müssen, daß jüngeren Schülern die Notwendigkeit eines Beweises für diesen Satz nicht recht verständlich sein würde, wie sie es ja auch für selbstverständlich halten, daß ein Körper durch Zerstückelung an Gewicht weder gewinnen noch verlieren könne. Es scheint aber doch angemessen, wenigstens auf der letzten Unterrichtsstufe den Schülern diesen axiomatisch zugelassenen Satz zum Bewußtsein zu bringen; auch anzudeuten, daß er keineswegs zu den notwendigen Axiomen der Geometrie gehöre, daß aber ohne ihn die Lehre vom Flächeninhalt große Schwierigkeiten biete (vgl. § 5).

Da endlich in diesem Handbuche die Stereometrie ausführlich dargestellt werden soll, so bedarf es an dieser Stelle keiner Erörterung über die Behandlung der Lehre vom Rauminhalt der Körper.

15. **Schlußbemerkung.** Wenn wir einerseits das erschöpfende Verständnis für alles, was den Schülern zu lernen auferlegt wird, als unerläßliche Forderung hinstellen, so sind wir andrerseits doch weit davon entfernt, zu glauben, das ließe sich durch systematisch fortschreitenden Vortrag erreichen. Es gibt eine Reihe von schwierigen Gegenständen, deren Verständnis nur ganz allmählich durch wiederholtes Nachdenken und fortschreitende geistige Entwicklung erreicht werden kann. Dazu gehören: die Tragweite der verschiedenen Parallelenaxiome, die Stetigkeit, die irrationalen Verhältnisse, die geometrische Logik, insbesondere die Natur der Identitätssätze und der geschlossenen Systeme, die Zurückführbarkeit der ganzen Geometrie auf Axiome bis zur völligen Ausschaltung des Wortes „selbstverständlich“, die Möglichkeit verschiedener Geometrien.

Dinge dieser Art sollten nach unserer Auffassung ausschließlich Gegenstand einer immer wieder neu aufgenommenen, jedesmal nur kurzen, mehr anregenden als belehrenden Unterhaltung sein, an der sich die Schüler weniger durch Antworten als durch Fragen beteiligen müßten. Ein Unterricht, der von dem Anfänger zu viel fordert und dem gereifteren Schüler zu wenig bietet, kann nicht den Anspruch erheben, mehr zu sein als eine Art von technischer Fortbildung.

§ 13. Der erste Teil der Dreieckslehre.

1. **Anordnung der Sätze.** Die Sucht, die Sätze der Geometrie nach festen Regeln anzuordnen, welche vor 50 Jahren sehr verbreitet war, ist zwar geringer geworden, aber durchaus nicht überwunden. Wie verwerflich dies Verfahren gerade für die ersten Sätze der Dreieckslehre ist, glauben wir dadurch am besten charakterisieren zu können, daß wir die Worte anführen, durch die Reidt dasselbe rechtfertigen will. Er sagt in seiner „Anleitung zum mathematischen Unterricht“

(S. 190): „Es ist wünschenswert, daß die Kongruenzsätze im Unterricht unmittelbar aufeinander folgen, daß also der Zusammenhang derselben nicht durch Sätze aus andern Abschnitten unterbrochen werde... Dies ist u. a. dadurch möglich, daß man den Satz: Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber, mit den dazu gehörigen der Kongruenzlehre vorausschickt. Zum Beweise wird freilich schon das Aufeinanderlegen zweier Dreiecke zur Deckung derselben benutzt werden, allein dies kann für den einzelnen Fall besonders geschehen, und es ist nicht nötig, dabei von der Kongruenz der Dreiecke zu reden. Ein logischer Fehler liegt ja nicht darin, und man hält es auch an andern Stellen des Systems für unbedenklich, daß man einen Spezialfall vor dem allgemeinen Satze, welcher denselben umfaßt, besonders beweist, wenn dies irgendwie für den weiteren Aufbau vorteilhaft erscheint. In einem solchen vorhergegangenen Deckungsbeweis an einem einfachen Fall liegt auch zugleich eine Vorübung für die kommenden Beweise der Kongruenzsätze."

Der einzige Grund, aus dem Reidt die Kongruenzsätze direkt nebeineinander stellen will, liegt, wie andere Stellen seines Buches und speziell die unmittelbar auf die zitierten Worte folgende Ausführung zeigen, in dem Bestreben, die Sätze über die Beziehungen, in denen die Winkel und die Seiten eines einzelnen Dreiecks je unter sich und zueinander stehen, der Vergleichung mehrerer Dreiecke vorangehen zu lassen. Um das zu erreichen, schiebt er den Beweis des ersten Kongruenzsatzes in den Beweis des von ihm erwähnten Satzes ein, will aber dabei gar nicht von Kongruenz sprechen, also das Beweisprinzip absichtlich verschleiern. Dabei stellt er die Sache so dar, als ob der Beweis des ersten Kongruenzsatzes in seiner Anwendung auf das gleichschenklige Dreieck einfacher sei als im allgemeinen Falle. Nun widerspricht es doch allen pädagogischen Grundsätzen, eine Ausführung zuerst in einen Beweis einzuschieben und dann genau dieselbe Ausführung als selbständigen Beweis zu wiederholen. Das ist doch wahrlich keine Vorübung für die folgenden Beweise. Im Gegenteil darf man vielleicht die Art, wie hierbei das gleichschenklige Dreieck unter Vertauschung zweier Eckpunkte zur Deckung mit seiner Anfangslage gebracht wird, für schwieriger halten als die Deckung mit einem zweiten Dreiecke. Wenigstens scheint Euklid dieser Meinung gewesen zu sein, da man sonst kaum verstehen kann, warum er für den Satz über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck einen so lästigen Beweis bringt. Wir wollen mit Reidt nicht darüber streiten, ob sein Verfahren einen logischen Fehler enthalte; aber um so entschiedener müssen wir betonen, daß darin ein starker Verstoß gegen die Forderungen der Pädagogik liegt.

2. **Die beiden ersten Kongruenzsätze.** Wir selbst möchten,

wie im nächsten Abschnitt (§ 14, 6) noch näher auseinandergesetzt werden soll, den Satz über die Winkelsumme eines Dreiecks an die Spitze der Dreieckslehre setzen und damit den Satz vom Außenwinkel sowie die Einteilung der Dreiecke in spitz-, recht- und stumpfwinklige verbinden. Hieran fügen sich am besten die beiden ersten Kongruenzsätze an, und zwar zuerst der Satz über zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, und dann der Satz über eine Seite und die anliegenden Winkel. Der Satz über die Kongruenz zweier Dreiecke, die in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, ist alsdann nur ein Zusatz zum zweiten Kongruenzsatze.

Wenn man bei der Vergleichung der Dreiecke ABC und DEF, auf der die Beweise der beiden ersten Kongruenzsätze beruhen, das Dreieck ABC bewegt, so ist es vielleicht gut, anzudeuten, daß man dabei streng genommen das Dreieck ABC durch ein anderes Dreieck ersetzt. Um dann auch in der äußern Form die Beziehung von ABC zu seiner neuen Lage hervorzuheben, kann man etwa sagen, man bringe das Dreieck ABC in eine neue Lage $A'B'C'$, für die der Punkt A' auf D, der Punkt B' in den Halbstrahl DE und der Punkt C' in die Halbebene D, E, F fällt. Der Lehrer wird sich dann die Gründe dafür angeben lassen, warum die Lage der Punkte B' und C' immer spezieller wird und schließlich der erstere auf E, der letztere auf F fällt; auf diese Weise überzeugt er sich, ob die einfachen Begriffe, auf denen der Beweis beruht, wirklich verstanden sind.

Noch wichtiger ist es, die beiden ersten Kongruenzsätze vor den Augen des Schülers entstehen zu lassen (vgl. § 12, 11, S. 237). Man geht etwa beidemal von einem Dreieck ABC aus. Um in den ersten Kongruenzsatz einzuführen, konstruiert man einen Winkel MDN, der gleich ABC ist, trägt auf dem Schenkel DM die Strecke $DE = AB$ auf dem Schenkel DN die Strecke $DF = AC$ ab und zieht die Strecke EF. Bei der Erläuterung des zweiten Kongruenzsatzes macht man eine Strecke $DE = AB$, legt an die Strecke DE den Winkel $EDM = BAC$ und den Winkel $DEN = ABC$. Da die Geraden AC und BC einander schneiden, müssen auch die Halbstrahlen DM und EN einen, und zwar einen einzigen Punkt gemein haben. Es verschlägt nichts, daß man, um gleiche Winkel zu erhalten, den Transporteur, und für das Abtragen gleicher Strecken den Zirkel benutzt. Diese Hilfsmittel ermöglichen eben selbst dem schwächsten Schüler das Verständnis. Der einzige Zweck dieser Instrumente besteht aber darin, erkennen zu lassen, daß auf jedem Halbstrahl vom Endpunkte aus eine gegebene Strecke abgetragen und an jeden Halbstrahl in einer von ihm begrenzten Halbebene ein beliebig vorgeschriebener Winkel angelegt werden könne. Demnach bereitet die letzte Betrachtung bereits die Hilbertsche Auffassung der Dreieckskongruenz vor.

Um die beiden ersten Kongruenzsätze ihres abstrakten Charakters zu entkleiden und dem Schüler zu zeigen, daß sie auch dem Leben nicht ganz fernstehen, wird man gern auf die längst bekannten Anwendungen hinweisen. Bei der Anwendung des ersten Kongruenzsatzes handelt es sich darum, den Abstand zweier Punkte A und B zu ermitteln, die etwa durch einen Sumpf voneinander getrennt sind, während man an die Punkte selbst herankommen kann. Man wählt einen dritten Punkt C so, daß man von ihm aus nach A und nach B gelangen kann, verlängert die Strecken AC und BC über C bis D bzw. E so, daß $AC = CD, BC = CE$ wird. Jetzt gibt die Strecke DE den Abstand der Punkte A und B an.

Bei der Anwendung des zweiten Kongruenzsatzes will man den Abstand zugänglicher Punkte von einem Punkte bestimmen, den man zwar sehen, aber nicht erreichen kann. Es kommt dies im wesentlichen auf die berühmte Methode an, nach der bereits Thales ermitteln konnte, wieweit ein im Hafen von Milet gelegenes Schiff vom Leuchtturm entfernt war (Cantor, Geschichte der Mathematik I, S. 122). Will man z. B. den Abstand eines Punktes A, der auf der andern Seite eines Flusses oder innerhalb einer belagerten Festung liegt, vom Standorte B ermitteln, so errichtet man mit Hilfe des Winkelhakens in B auf BA die Senkrechte BC, verlängert die Strecke BC über C um sich selbst bis D, errichtet dann auch in D auf CD die Senkrechte und bestimmt in ihr einen Punkt E so, daß die Punkte A und C mit ihm in gerader Linie liegen. Dann ist $AB = DE$, $AC = EC$.

3. **Beziehungen der Seiten eines Dreiecks zu seinen Winkeln und der Seiten zueinander.** Auf die beiden ersten Kongruenzsätze darf man den Satz über die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks folgen lassen. Der lästige Beweis Euklids ist mit Recht aufgegeben. Die neueren Lehrbücher bringen zwei verschiedene Beweismethoden, die kaum wesentliche Vorzüge voreinander haben. Entweder bringt man das Dreieck so in Deckung mit seiner Anfangslage, daß die gleichen Seiten ihre Lage vertauschen, was nach dem ersten Kongruenzsatze möglich ist, oder man halbiert den Winkel, den die gleichen Seiten miteinander bilden, und wendet auf die so entstehenden Dreiecke den ersten Kongruenzsatz an. Im ersten Falle treten Satz und Beweis uns in voller Reinheit entgegen; im zweiten Falle führt der Beweis auf die Mittelsenkrechte einer Strecke, die recht bald hinzugenommen werden muß.

An den Satz selbst schließt sich eine Besprechung des gleichschenkligen und des gleichseitigen Dreiecks. Hierauf darf man den Satz folgen lassen, daß im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt. Beim Beweise trägt man meistens die kleinere

Seite auf der größeren ab. Eine kleine Vereinfachung erhält man auf folgendem Wege: Man gebe dem Dreieck ABC, worin $AB > AC$ ist, eine neue Lage, in der die Schenkel des Winkels BAC ihre Lage vertauschen; fällt hierbei B auf D, C auf E, so müssen die Seiten BC und DE einander schneiden, etwa in F; da $\sphericalangle ACF$ Außenwinkel des Dreiecks CFD ist, folgt die Behauptung jetzt unmittelbar.

Die beiden genannten Sätze: Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber, und: Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber, bilden im Sinne von § 10, 10 (S. 218) ein geschlossenes System; sie lassen sich daher sofort umkehren. Indessen gewährt es einiges Interesse, die Reihenfolge ändern und demnach von den beiden Sätzen ausgehen zu können: Gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten, dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber. Der Beweis des ersteren Satzes stützt sich auf den zweiten Kongruenzsatz; beim Beweise des zweiten kommt es, wenn im Dreieck ABC der Winkel an B größer als der an C ist, darauf an, in der Seite AC einen Punkt E so zu bestimmen, daß die Winkel AEB und ABE einander gleich sind. Das kann dadurch erreicht werden, daß man vom Winkel ABC einen Teil $ABD = ACB$ abtrennt und den Winkel DBC durch BE halbiert. Dann ist wegen der Gleichheit der Winkel AEB und ABE auch $AE = AB$ und $AC > AB$. Noch einfacher halbiert man den Winkel A durch AD und trägt von den beiden Nebenwinkeln, die in D an BC entstehen, den kleineren auf dem größeren ab.

Aus dem Satze: Dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber, folgt, daß jede Dreiecksseite kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der beiden andern Seiten des Dreiecks ist. Es ist am natürlichsten, beim ersten Satze die Summe, beim zweiten die Differenz wirklich zu konstruieren, um so mehr, da die beiden hierbei erhaltenen Figuren für manche Konstruktionsaufgaben und zur Veranschaulichung trigonometrischer Formeln Bedeutung haben. Dabei mag man noch auf die algebraische Beziehung der Sätze zueinander hinweisen, um zu zeigen, daß es sich streng genommen nur um zwei Beziehungen handelt. Übrigens liefert die Konstruktion des Inkreises auch einen Beweis des Doppelsatzes, da sie auf die Strecken $\frac{b+c-a}{2}$, $\frac{c+a-b}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}$ führt; die Länge der ersten Strecke zeigt, daß $a < b + c$, $c > a - b$ ist.

Aus dem ersten Teil des Satzes ergibt sich sehr leicht die Wahrheit des Satzes: Die gerade Strecke ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Es ist ganz passend, diese Wahrheit schon hier zu besprechen.

4. **Die Mittelsenkrechte und der dritte Kongruenzsatz.** Mit dem Satze über die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist auch der Satz bewiesen: Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbiert die Grundlinie und steht auf ihr senkrecht. Dieser Satz legt der gezogenen Geraden vier Eigenschaften bei, von denen je zwei geeignet sind, sie eindeutig zu be-

stimmen (§ 10, 9 S. 217). Hierin sind auch die Eigenschaften der Mittelsenkrechten enthalten. Man kann auch ebensoleicht von dieser selbst ausgehen und zeigen, daß jeder Punkt der Mittelsenkrechten gleiche Entfernungen von den Endpunkten der Strecke hat, dagegen jeder Punkt, der nicht in der Mittelsenkrechten liegt, von dem einen Endpunkt der Strecke weiter absteht als von dem andern. Die Umkehrungen fügen sich ganz natürlich an, und zwar wieder nach dem in § 10, 10 (S. 218) angegebenen Prinzip.

Für den Beweis des Satzes: Dreiecke sind kongruent, falls sie in den drei Seiten übereinstimmen, benutzen die neueren Lehrbücher fast ausnahmslos zwei Dreiecke ABC und ABD, die in der Weise auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen, daß $AC = AD$, $BC = BD$ ist. Will man den ersten Satz vom gleichschenkligen Dreieck anwenden, so muß man drei Fälle unterscheiden. Zwar wird zuweilen dadurch eine Vereinfachung versucht, daß man keine der beiden Seiten AC und BC größer als AB sein läßt. In der Tat erreicht man hierdurch, daß der Schnitt der Geraden AB und CD zwischen den Punkten A und B liegt und man aus diesem Grunde sich auf einen Fall beschränken kann. Indessen wird dies gar nicht nachgewiesen, indem man der falschen Ansicht zu sein scheint, es genüge, Größenbeziehungen zu beweisen, während man Lagenbeziehungen ohne Beweis aus der Figur entnehmen dürfe. Weit einfacher wird der Beweis unter Benutzung der Mittelsenkrechten. Wegen der Gleichheit von AC und AD liegt A, und wegen der Beziehung $BC = BD$ der Punkt B in der Mittelsenkrechten von CD; daher ist AB die Mittelsenkrechte von CD. Nun wird die Wichtigkeit der Mittelsenkrechten allgemein anerkannt; wohl alle neueren Lehrbücher setzen sie in den ersten Teil der Dreieckslehre; da der Beweis des dritten Kongruenzsatzes mit ihrer Benutzung wesentlich vereinfacht wird, empfiehlt sich die hier angegebene Reihenfolge.

5. **Der vierte Kongruenzsatz.** An die Lehre von den Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks schließt sich naturgemäß die Vergleichung der Strecken, welche von einem festen Punkte aus nach den Punkten einer Geraden gezogen werden können. Da die Sätze und die Beweise sehr einfach sind, genügt es, im Lehrbuche kurz auf sie hinzuweisen und sie im übrigen ganz der Besprechung in der Klasse vorzubehalten. Sie lassen sich am bequemsten aussprechen, wenn schon an dieser Stelle der Begriff der Projektion einer Strecke auf eine Gerade eingeführt wird. Die Sätze können in ganz verschiedener Weise aufgefaßt werden, tragen somit einen reichen Bildungsstoff in sich und sind außerdem für sprachliche Übungen sehr geeignet.

Diese Untersuchung führt ganz von selbst auf den Satz: Rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Hypotenuse und einer Kathete übereinstimmen. Beim weiteren Aufbau wird der vierte Kongruenzsatz aber nur in seiner Beschränkung auf das rechtwinklige Dreieck benutzt. Man darf sich daher beim ersten Unterrichte um so eher auf diesen speziellen Fall beschränken, da der Beweis des allgemeinen Satzes durchaus nicht einfach ist. Manche Lehrbücher schieben in den Beweis die ganze Lehre über die von einem festen Punkte nach einer Geraden gezogenen Strecken ein und schließen indirekt auf die Richtigkeit des Satzes, indem sie sogar absichtlich falsche Figuren zeichnen; wir erblicken darin eine Belästigung des Schülers, deren Nutzen sehr zweifelhaft, die aber dazu angetan ist, den Anfänger mit Abneigung gegen die Geometrie zu erfüllen.

Wenn wir hiernach den vierten Kongruenzsatz in seiner Allgemeinheit nicht an dieser Stelle bringen möchten, so darf das nicht in dem Sinne verstanden werden, als solle der allgemeine Satz gar nicht bewiesen werden. Wir wollen ihn nur in Zusammenhang mit andern Untersuchungen setzen, aus denen seine Richtigkeit unmittelbar hervorgeht (vgl. Nr. 7).

6. **Die sog. Nicht-Kongruenzsätze.** Die Vergleichung von Dreiecken, die in gewissen Stücken übereinstimmen, in anderen nicht, wird jetzt wohl allgemein vom ersten Unterricht ausgeschlossen. Da die meisten dieser Sätze erst später Verwendung finden, kann sie nur eine falsche Sucht nach Systematisierung direkt auf die Kongruenzsätze folgen lassen. Am angemessensten ist es, die Sätze erst dann durchzunehmen, wenn sie gebraucht werden.

Hierher gehört vor allem der Satz: Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten übereinstimmen, der eingeschlossene Winkel im ersten aber größer ist als im zweiten, so ist auch die dritte Seite im ersten größer als im zweiten. Der Beweis, den die älteren Lehrbücher bringen, ist gar zu lästig. Eine Vereinfachung kann dadurch herbeigeführt werden, daß man ihn in Beziehung zur Kreislehre setzt, indem man die Strecken betrachtet, die von einem festen Punkte aus nach den Punkten der Peripherie gezogen werden können. Auch läßt sich der Satz mit Stetigkeits-Betrachtungen in Zusammenhang bringen: wählt man in einem veränderlichen Dreieck zwei Seiten a und b fest und läßt den eingeschlossenen Winkel von der unteren Grenze null bis zur oberen Grenze 180^0 wachsen, so geht die dritte Seite von der unteren Grenze $a-b$ bis zur oberen Grenze $a+b$ über. Indessen möchten wir hierauf nicht näher eingehen, sondern nur kurz zeigen, daß der Beweis durch Benutzung der Mittelsenkrechten wesentlich vereinfacht werden kann.

Wenn die beiden Dreiecke ABC und ABD mit der gemeinschaftlichen Seite AB übereinander liegen, zudem $AC=AD$ und

$\sphericalangle DAB$ ein Teil des Feldes vom Winkel CAB ist, so liegen B und D auf derselben Seite der Mittelsenkrechten von CD; daher ist $BC > BD$.

Der letzte Satz bildet im Verein mit dem ersten Kongruenzsatz ein geschlossenes System; daher ergibt sich die Umkehrung aus § 10, 10 (S. 218).

Auf die Vergleichung nichtkongruenter rechtwinkliger Dreiecke, die gleiche Hypotenusen haben, werden wir in der Kreislehre (§ 15, 4) eingehen.

Viele Lehrbücher bringen in der Dreieckslehre auch schon den Satz: Die Mitte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks hat von den Eckpunkten gleiche Entfernung. Es dürfte aber genügen, ihn an den Satz von der Gleichheit der Diagonalen eines Rechtecks anzuschließen oder ihn der Kreislehre vorzubehalten.

7. **Die ersten Konstruktionsaufgaben.** Obwohl wir hiernach den ersten Teil der Dreieckslehre tunlichst beschränkt und nur leicht verständliche Beweise gebracht haben, zudem der angegebene Stoff wohl geeignet ist, das Interesse des Anfängers zu fesseln, dürfte eine so lange Folge von theoretischen Erörterungen, wie wir sie eben skizziert haben, ermüdend auf den Schüler wirken. Schon aus diesem Grunde ist es gut, zwischen den Lehrstoff die ersten Konstruktionsaufgaben einzuschieben. Da diese Aufgaben sehr häufig wieder benutzt werden, muß man die einfachsten Lösungen bevorzugen (vgl. § 9, 16, S. 201). Hierher gehören die Aufgaben: Konstruktion der Mittelsenkrechten, des gleichseitigen und des gleichschenkligen Dreiecks, Fällen und Errichten einer Senkrechten, Halbierung eines Winkels.

In dem Bestreben, von jeder konstruierten Linie recht viele Eigenschaften anzugeben und dadurch Interesse für dieselbe zu erwecken, wird man geneigt sein, schon an dieser Stelle die Halbierungslinie eines Winkels als die Symmetrieachse seiner Schenkel aufzufassen, und zwar um so lieber, da aus den Kongruenzsätzen sofort die Sätze hervorgehen: Jeder Punkt in der Halbierungslinie eines Winkels hat von den Schenkeln gleichen Abstand, und: Wenn ein Punkt von zwei sich schneidenden Geraden gleichen Abstand hat, so liegt er auf einer der beiden Geraden, durch welche die von ihnen gebildeten Winkel halbiert werden. Die durchgenommenen Lehrsätze gestatten sogar, den Satz zu beweisen: Ein Punkt innerhalb eines Winkelfeldes liegt demjenigen Schenkel am nächsten, der in Verbindung mit der Halbierenden ein den Punkt einschließendes Winkelfeld bildet. Wenn $\sphericalangle XOY$ durch OJ halbiert wird und der Punkt P im Winkelfelde XOJ liegt, so sei von P die Senkrechte PA auf OX und die Senkrechte PB auf OY gefällt. Die Strecke PB muß den Halbstrahl OJ treffen. Ist C der Schnittpunkt und steht $CD \perp OX$, so ist:

$$PB = PC + CB = PC + CD > PD > PA.$$

Hierdurch treten die Halbierungslinien der von zwei einander schneidenden Geraden gebildeten Winkel in enge Beziehung zur Mittelsenkrechten einer Strecke. Indessen sprechen manche Gründe dafür, diese ganze Betrachtung einer späteren Stelle vorzubehalten.

An die Aufgabe: Einen Winkel an einen gegebenen Halbstrahl anzulegen, die mit Hilfe eines gleichschenkligen Dreiecks gelöst wird, schließen sich die Konstruktionen des Dreiecks aus den drei Seiten, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, aus einer Seite und den anliegenden Winkeln, und endlich die Konstruktion aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen. Indem man bei der letzten Aufgabe die Bedingung untersucht, unter der man hierbei ein einziges Dreieck erhält, wird man auf den vierten Kongruenzsatz in seiner vollen Allgemeinheit geführt, und zwar auf die beiden Formen:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren übereinstimmen,
und:

Dreiecke, die in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen übereinstimmen, sind kongruent, falls die Gegenwinkel der andern nicht Supplemente voneinander sind.

In dem Zusammenhang mit der Konstruktion werden die Sätze sofort als richtig erkannt, während die selbständigen Beweise nicht ganz einfach sind; sie in das eigentliche Lehrgebäude aufzunehmen, ist um so weniger nötig, da man in der Trigonometrie nochmals auf die Sätze zurückkommen muß.

Wieweit es angebracht ist, an dieser Stelle noch andere Aufgaben zu behandeln, wird der Lehrer je nach dem Stande der Klasse am besten selbst ermessen.

Bei den Konstruktionsaufgaben lernt der Schüler, daß jede Dreieckskonstruktion, die nur eine einzige Lösung hat, auf einen Kongruenzsatz schließen läßt. Es fragt sich demnach, ob es angemessen ist, mit einigen Lehrbüchern die vier wichtigsten Kongruenzsätze nur aus der Konstruktion des Dreiecks herzuleiten. Wir bemerken dazu folgendes. In allen vier Fällen handelt es sich darum, ein Dreieck $A'B'C'$ aus drei Stücken zu zeichnen, die jedesmal in dem Kongruenzsatze genannt werden und einem gegebenen Dreieck ABC zu entnehmen sind. Zeichnet man immer zuerst $A'B' = AB$, so ist beim ersten Kongruenzsatze sogleich ersichtlich, daß der Punkt C' stets gefunden werden kann und eindeutig bestimmt ist. Das Axiom der Dreieckskongruenz wird hier nur gebraucht, um zu begründen, daß $A'B'C' \cong ABC$ ist. Bei den übrigen Kongruenzsätzen wird C' durch zwei geometrische Örter bestimmt, und zwar beim zweiten durch zwei gerade Linien, beim dritten durch zwei Kreise, beim vierten durch einen Kreis und eine Gerade. In allen drei Fällen braucht man das genannte Axiom bereits, um sicher zu stellen, daß die beiden Örter überhaupt einen gemeinsamen Punkt haben. Die Eindeutigkeit dieses Punktes ist dann beim zweiten Kongruenzsatz sofort zu bemerken, beim dritten und vierten dagegen muß sie erst besonders erwiesen werden. Der erforderliche Nachweis ist aber beim dritten Kongruenzsatze so wenig ansprechend, daß das konstruktive Verfahren hier mindestens keinen Vorteil mehr bietet.

Da die vier Kongruenzsätze häufig zitiert werden, empfiehlt es sich, für die einzelnen eine kurze Bezeichnung einzuführen. Wir haben im Vorstehenden eine feste Reihenfolge eingeführt, die wir für die geeignetste halten; schließt man sich dem an, so genügt die Angabe der entsprechenden Zahl. Andere ziehen die von Worpitzky vorgeschlagene, nicht eben geschmackvolle Bezeichnung vor (*sws*, *wsw*, *sss*, *Ssw* bzw. *ssw*). Hierbei ist jedesmal, wenn eine Seite (*s*) mit einem Winkel (*w*) zusammensteht, die Seite ein Schenkel des Winkels. Das Zeichen (*Ssw*) entspricht dem vierten Kongruenzsatz in seiner gebräuchlichen Form, während das Zeichen (*ssw*) den Satz vertritt: Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen übereinstimmen, sind kongruent, wofern die Gegenwinkel der andern Seite nicht Supplemente voneinander sind.

§ 14. Behandlung der Parallelentheorie.

1. **Thibauts Versuch, die Parallelentheorie zu begründen.** Die Berechtigung der nichteuklidischen Raumformen, über die wir in § 2 einen kurzen Bericht erstattet haben, zeigt, daß es nicht möglich ist, die Parallelensätze ohne ein neues Axiom zu beweisen. Dennoch wollen die sogenannten Beweise aus den Lehrbüchern nicht verschwinden. Für jeden, der sich mit den Eigenschaften des Lobatschewskyschen und des Riemannschen Raumes vertraut gemacht hat, bedarf es keines Nachweises, daß derartige Versuche auf Strenge keinen Anspruch machen können. Dennoch glauben wir hier in eine Prüfung derjenigen Beweisversuche eingehen zu sollen, die in den gebräuchlichen Lehrbüchern auch heute noch mitgeteilt werden.

Wir wenden uns zunächst dem Verfahren zu, welches der Göttinger Professor Thibaut 1837 angegeben hat. Um den Satz zu erhärten, daß die Winkelsumme eines Dreiecks zwei Rechte beträgt, verlängert man nach seiner Anweisung etwa die Seite CA des Dreiecks ABC um eine Strecke AD, die größer ist als der Umfang des Dreiecks. Jetzt dreht man die Strecke AD um A und läßt sie den Winkel DAB beschreiben; dadurch gelangt D auf einen Punkt E in der Verlängerung von AB. Darauf läßt man die Strecke BE durch Drehung um B den Winkel EBC beschreiben und führt dadurch den Punkt E in einen Punkt F auf der Verlängerung von BC über. Endlich dreht man CF um C bis zur Richtung CA so, daß der Winkel FCA beschrieben wird und der Punkt F die Lage G auf der Verlängerung von CA annimmt. Hierbei hat man die Drehung stets in demselben Sinne ausgeführt und ist zu der Anfangsrichtung zurückgekehrt. Nun setzt man voraus, daß die Summe von Drehungen, die in demselben Sinne in der Ebene ausgeführt werden, bis auf volle Umdrehungen nur von der Anfangs- und der Endlage abhängt. Dann führt das durchgeführte Verfahren zu dem Satze, daß die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks vier Rechte, die Summe der Dreieckswinkel selbst zwei Rechte beträgt.

Dies Verfahren läßt sich auch auf Vielecke übertragen und liefert unmittelbar den allgemeinen Satz: In jedem konvexen Vieleck beträgt die Summe der Außenwinkel vier Rechte. Auch gestattet es, die Dreieckslehre vor der Parallelentheorie zu behandeln, was von sehr großer Wichtigkeit ist. Leider unterliegt es aber schweren Bedenken, da es, wie wir gesehen haben, auf einer Annahme beruht, die selbst wieder eines Beweises bedarf.

Man muß sich schon fragen, warum ein Satz in der Ebene selbstverständlich sein soll, der auf der Kugel gar nicht richtig ist. Auch läßt sich kein Grund angeben, warum jene Annahme nur für Drehungen von Geraden in der Ebene, aber nicht für Drehungen von Ebenen im Raume gilt, wo keineswegs die Summe der Drehungen nur von der Anfangs- und der Endlage abhängt. Die Thibautsche Methode setzt daher bereits die Parallelentheorie voraus, die doch erst bewiesen werden soll, und mutet dem Schüler zu, eine Eigenschaft der Ebene auf das Wort des Lehrers hin als selbstverständlich anzusehen, welche einer Begründung bedarf und diese erst durch die Parallelentheorie finden kann. Wie wenig es aber den meisten Lehrbüchern, die dies Verfahren anwenden, darauf ankommt, den Schüler zum wirklichen Verständnis gelangen zu lassen, geht schon daraus hervor, daß die wahre Grundlage des Beweises nur in den seltensten Fällen ausgesprochen und damit sein Wesen vor dem Auge des Schülers geradezu verschleiert wird.

Die erhobenen Bedenken fallen weg, wenn man mit S. Günther (Ansbacher Programm 1876/77) die obige Annahme ausdrücklich als Axiom hinstellt. Aber auch in dieser Frage möchten wir das Verfahren nicht gerade befürworten, da das Verständnis dem Anfänger einige Schwierigkeit bereitet und die Vorteile auch auf anderem Wege erreicht werden können.

2. **Die Richtung als geometrischer Grundbegriff.** Nach den Lehrbüchern zu urteilen, erfreut sich die Begründung der Parallelentheorie vermittelst des Begriffs der Richtung einer sehr großen Beliebtheit. Man sagt etwa: Die Gerade ist durch einen ihrer Punkte und ihre Richtung bestimmt. Verschiedene Gerade, die von demselben Punkte ausgehen, haben ungleiche Richtung; demgemäß kann von einem Punkte nur eine einzige Gerade ausgehen, die mit einer zweiten Geraden dieselbe Richtung hat. Dagegen müssen gleichgerichtete Gerade mit jeder schneidenden Geraden gleiche Richtungsunterschiede haben; sie bilden mit ihr gleiche Winkel. Indem man jetzt noch gleichgerichtete Gerade parallel nennt, behauptet man, durch eine einfache Überlegung zur Parallelentheorie geführt zu sein.

Dementgegen möchten wir zunächst daran erinnern, daß jede Gerade zwei einander entgegengesetzte Richtungen hat, man also nicht berechtigt ist, die eine von diesen Richtungen vor der andern willkürlich zu bevorzugen. Man muß daher, was nirgends geschieht, zum mindesten beide Richtungen in gleicher Weise berücksichtigen. (Hierüber vergleiche man die Ausführungen in Schlömilchs Handbuch der Mathematik, zweite Auflage, S. 218, 219.)

Wollen wir einmal zugeben, dies Bedenken sei äußerlich und treffe das Wesen der Sache nicht, so bleibt es doch unerlaubt, als Grundbegriff einen Begriff aufzustellen, der definiert werden kann und der auch bis in die neueste Zeit regelmäßig definiert worden ist. Zudem ist mit der bloßen Aufstellung eines Grundbegriffes für die Wissenschaft nichts erreicht, da er ja erst dann benutzt werden kann, wenn seine Beziehung zu den übrigen Grundbegriffen durch Axiome festgelegt ist. Das geschieht aber im vorliegenden Falle nicht; man glaubt genug zu tun, wenn man einige oberflächliche Bemerkungen beifügt, deren Sinn vielfach trotz des eifrigsten Nachdenkens nicht ergründet werden kann.

Daß je zwei Gerade von derselben Richtung in einer einzigen Ebene liegen, geht aus dem Begriff keineswegs hervor, muß vielmehr axiomatisch vorausgesetzt werden. Und doch ist gerade diese Eigenschaft für die Theorie der Parallelen von fundamentaler Bedeutung. Überhaupt ist es sehr mißlich, daß man sich bei der Einführung eines neuen Grundbegriffes nur auf die Ebene beschränkt. Man stellt es als selbstverständlich hin, daß zwei gleichgerichtete Gerade mit jeder sie schneidenden dritten Geraden gleiche Richtungsunterschiede haben. Wenn aber dieser Satz keines Beweises bedarf, so liegt es nahe, auch vorauszusetzen, daß überhaupt die Differenz der Richtungsunterschiede, welche zwei Gerade einer dritten gegenüber haben, gleich dem Richtungsunterschiede der beiden Geraden selbst ist. In der Tat gilt dieser Satz für die euklidische Ebene. Man muß sich aber wohl hüten, ihn auf zwei windschiefe Gerade übertragen zu wollen; man kann vielmehr die beiden Winkel, unter denen zwei solche Gerade von einer dritten getroffen werden sollen, im wesentlichen ganz willkürlich festsetzen, da sie im Verein mit dem Winkel der windschiefen Geraden zu Seiten eines Dreikants genommen werden können. Hier tritt uns aber die auffällige Tatsache entgegen, daß ein Satz, der für die Ebene unmittelbare Folge eines Grundbegriffes sein soll, bei der Übertragung auf den Raum geradezu unrichtig wird.

Wenn wir aber auch den Begriff der Richtung auf die Ebene beschränken, so ist er an sich weder der Messung noch der Konstruktion zugänglich. Das Wort wird sogar niemals für sich gebraucht, sondern muß, um wenigstens einigen Inhalt zu erhalten, entweder mit dem Worte „gleich“ oder dem Worte „verschieden“ verbunden werden. Aber selbst in dieser Verbindung kann man es keineswegs auf beliebige Raumgebilde, sondern zunächst nur auf Halbstrahlen und dann erst, indem man in Anschluß an § 4, 1 in der Geraden einen bestimmten Halbstrahl bevorzugt, auf die Geraden selbst anwenden.

Der Begriff leistet aber endlich gar nicht das, was man mit seiner Hilfe erreichen will. Um den Richtungsunterschied von zwei geraden Linien zu ermitteln, die in einer Ebene liegen, bei denen es aber ungewiß ist, ob sie einander schneiden, legt man eine dritte Gerade hindurch und bezeichnet die Differenz der Winkel, welche sie mit der dritten bilden, als den Richtungsunterschied der Geraden zu einander. Das ist aber nicht gestattet; diese Differenz stellt vielmehr nur den Richtungsunterschied in bezug auf die dritte Gerade dar. Ehe man jene Differenz als den Richtungsunterschied der gegebenen Geraden selbst ansehen darf, muß man vielmehr beweisen, daß sie von der Wahl der dritten Geraden unabhängig ist. Dieser Nachweis kann nur mit Hilfe der Parallelen geführt werden; die obige Deduktion setzt also gerade das voraus, was mit ihrer Hilfe bewiesen werden soll.

(Wir verweisen noch auf eine Rezension von Gauß, die sich in seinen Werken Bd. 4, S. 364 u. Bd. 8, S. 170, sowie in Stäckel-Engels Parallellinien S. 220 findet. Statt des dort gebrauchten Wortes „Lage“ sagt man heute lieber „Richtung“.)

3. **Das Winkelfeld als Größe.** In einigen Lehrbüchern wird die Parallelentheorie auf folgende Weise begründet. Man sagt: Wenn sich durch einen Punkt zwei gerade Linien legen ließen, die mit einer gegebenen Geraden in einer Ebene liegen und sie nicht schneiden, so bildete das Feld eines gestreckten Winkels nur einen Teil eines kleineren Winkelfeldes; hier wäre also der Teil größer als das Ganze, was mit dem Begriff einer Größe unvereinbar ist. Hierbei ist folgender Gedanke maßgebend, der vielfach auch ausgesprochen wird. Jedes Winkelfeld ist zwar unendlich groß, hat aber zur ganzen Ebene ein festes Verhältnis, und zwar entspricht dem größeren Winkel auch das größere Verhältnis. Daher ist es nicht möglich, daß ein Winkel ganz in das Feld eines kleineren Winkels hineinfällt.

In der Analysis wagt niemand, ein derartiges Verfahren einzuschlagen, weil es allgemein als unstatthaft bekannt ist. Obwohl die Funktion e^x für jeden endlichen Wert von x eindeutig und stetig ist, darf man ihr doch für $x = \infty$ keinen bestimmten Wert beilegen. Von einer bedingt konvergenten Reihe weiß man, daß sie je nach der Anordnung der Glieder jeden beliebigen Wert erhalten kann. Der Wert eines Doppelintegrals, das über einen unendlichen Bereich erstreckt wird, hängt wesentlich von der Art ab, wie man ins Unendliche übergeht. Dem Quotienten aus zwei Funktionen, die für ein bestimmtes Wertsystem der Variabeln unendlich werden, legt man für dieses System nur dann einen bestimmten Wert bei, wenn derselbe als Grenzwert bei allen möglichen Wegen erhalten wird, auf denen man zu jenem Wertsystem gelangen kann.

Derartige Sätze scheinen den Verfassern jener Lehrbücher ganz unbekannt zu sein. Sie beschreiben um den Scheitel des Winkels einen Kreis, und da offenbar das Verhältnis des im Winkelfelde enthaltenen Kreisausschnittes zum Kreisinhalt vom Radius unabhängig ist, so halten sie sich für berechtigt, dasselbe als Verhältnis des Winkelfeldes zur Ebene anzusehen. Sie bedenken aber nicht, daß man dies Verhältnis nach manchen anderen Methoden bestimmen kann. So kann man, wenn ein Winkel XOY gegeben ist, um einen beliebigen Punkt A, der innerhalb des Winkelfeldes oder auf seiner Begrenzung liegt, einen Kreis mit einem Radius beschreiben, der größer ist als OA. Nennt man B und C die Schnittpunkte des Kreises mit den Schenkeln des Winkels, so hat man das Verhältnis der Figur, welche aus dem Viereck $OBAC$ und dem Kreisausschnitt BAC besteht, zum Kreisinnern zu bestimmen; zu untersuchen, ob dies Verhältnis für unbegrenzt wachsende Werte des Radius einem festen Grenzwert zustrebt und bejahendenfalls diesen Grenzwert zu ermitteln. Derartige Untersuchungen können aber im Beginn der Geometrie gar nicht angestellt werden; aber wenn das auch möglich wäre und wenn sich hierbei, unabhängig von der Wahl des Punktes A, derselbe Grenzwert ergeben sollte, so dürfte man die obige Folgerung doch nicht ziehen, da die Vergleichung eines Winkelfeldes mit der Ebene auch auf mancherlei andere Weise durchgeführt werden kann.

Um dies deutlich hervortreten zu lassen, wollen wir zwei beliebige Winkel XAY und $X'A'Y'$ miteinander vergleichen. Auf den Schenkeln des ersten Winkels lassen sich immer zwei Punkte B und C, und auf den Schenkeln des zweiten zwei Punkte B' und C' in der Weise bestimmen, daß a) die Gerade BC von A denselben Abstand hat wie die Gerade $B'C'$ von A', und daß b) die Strecken BC und $B'C'$ in einem beliebig vorgeschriebenen Verhältnisse $p:q$ stehen. Auf den Senkrechten AD und $A'D'$, die von A auf BC, bzw. von A' auf $B'C'$ gefällt werden können, wählt man zwei Punkte P und P' so, daß $AP = A'P'$ gleich einer beliebig gewählten Strecke x wird, und zieht dann durch P die Parallele MN zu BC und durch P' die Parallele $M'N'$ zu $B'C'$. Dann stehen die Dreiecke, welche durch je eine dieser Parallelen in Verbindung mit den Schenkeln des entsprechenden Winkels gebildet werden, bei jeder Wahl von x im Verhältnisse $p:q$. Bei unbegrenzter Zunahme von x geht aber das Dreieck AMN in das Winkelfeld XAY, das Dreieck $A'M'N'$ in das Winkelfeld $X'A'Y'$ über. Wir können auf diese Weise immer erreichen, daß unabhängig von der Größe zweier Winkel das Verhältnis ihrer Felder einem beliebig vorgeschriebenen Grenzwerte zustrebt.[1])

Ähnliche Beobachtungen wollen wir jetzt für die Parabel anstellen. An erster Stelle beschreiben wir um den Scheitel der Parabel einen Kreis mit dem Radius r und suchen das Verhältnis des im Innern der Parabel enthaltenen Kreisstückes zum Inhalt des Kreises zu ermitteln. Die Rechnung dürfen wir wohl dem Leser überlassen und uns mit der Angabe des Resultates begnügen. Dies läßt sich in folgender Weise aussprechen. Wir bestimmen einen spitzen Winkel φ durch die Gleichung:

$$\cos\varphi = \frac{-a + \sqrt{a^2 + r^2}}{r},$$

wo $2a$ den Parameter der Parabel darstellt und der Quadratwurzel ein positiver Wert beigelegt werden soll. Dann wird jenes Verhältnis gleich

$$\frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{r}}\sqrt{\cos^3\varphi}\,.$$

Für unbegrenzt wachsende Werte von r tritt $\cos\varphi$ immer näher an eins, φ immer näher an null heran; der gesuchte Grenzwert wird also selbst gleich null.

An zweiter Stelle trägt man auf der Achse der Parabel vom Scheitel O eine Strecke OA gleich x ab, errichtet in A auf OA die Senkrechte bis zu ihren Schnittpunkten B und C mit der Parabel und verlängert die Strecken OB und OC über O hinaus um sich selbst bis zu den Punkten D und E. Dann verhält sich die von der Sehne BC und dem zugehörigen Parabelbogen begrenzte Fläche zum Rechteck $BCDE$ wie $1:3$. Dies Verhältnis ist unabhängig von der Größe x, bleibt also auch bei unbegrenzter Vergrößerung von x ungeändert, während alsdann das Parabelsegment immer mehr in das Innere der Parabel, das Rechteck in die Ebene selbst übergeht.

Ist F der Schnittpunkt der Tangenten, welche in den soeben bestimmten Punkten B und C an die Parabel gelegt werden können, so ist das Verhältnis des Segments OBC zum Dreieck BCF gleich $2:3$, unabhängig von der Größe x. Mit wachsendem x geht das Segment OBC in das Innere der Parabel, das Dreieck BCF in die ganze Ebene über.

Ein ganz anderes Verhältnis erhält man auf folgendem Wege. Die Buchstaben O, A, B, C, D, E, F mögen dieselben Punkte darstellen wie oben. Man trage die Strecke $OA_m = m \cdot OA$ auf dem Halbstrahl OA und die Strecke $OF_m = m \cdot OF$ auf dem entgegengesetzten Halbstrahl ab. Durch die in A_m und F_m auf der Achse errichteten Senkrechten mögen die Punkte B_m, C_m, D_m, E_m in der Weise bestimmt werden, daß B_m und E_m in der Geraden BE, C_m und D_m in der Geraden CD liegen. Dann wird das Rechteck $B_mC_mD_mE_m$ durch die Parabel in zwei Teile zerlegt, die sich verhalten wie $1 + 3m : 4 + 3m$. Bei unbegrenzter Vergrößerung von m nähert sich dies Verhältnis immer mehr der Einheit, und da dasselbe zugleich vom Bogen BC unabhängig ist, darf für diesen Grenzübergang das Verhältnis des Innern der Parabel zur ganzen Ebene gleich $1:2$ gesetzt werden.

Zum Schluß eine geschichtliche Bemerkung. Der mit Gauß befreundete Astronom Schumacher glaubte die Parallelentheorie auf einem Wege begründen

1) Die durchgeführte Konstruktion läßt sich auf zwei beliebige Dreikante übertragen. Es ist daher ein grober Fehler, wenn in einem weit verbreiteten Lehrbuche eine spezielle Stellung der durchschneidenden Ebene zum Beweise des „Lehrsatzes“ benutzt wird, daß „zwei symmetrische dreiseitige Ecken gleichen räumlichen Inhalt haben“.

zu können, der mit der zuletzt besprochenen Methode einige Ähnlichkeit hat. Indem Gauß diesen Versuch, der keine weitere Beachtung gefunden hat, zurückweist, „protestiert er gegen den Gebrauch der unendlichen Größe als einer vollendeten, der in der Mathematik nimmer erlaubt ist," und fährt fort: „Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen, als man will, während andern ohne Einschränkung zu wachsen gestattet ist." Er schließt mit der Aufforderung, „der endliche Mensch solle sich nicht vermessen, etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen." (Gauß' Werke, Bd. 8, S. 215 ff., Stäckel-Engel, Parallellinien S. 232 ff.)

4. **Verschiedene Formen, in denen das Parallelenaxiom ausgesprochen werden kann.** Die in den vorangehenden Nummern besprochenen Versuche, die Parallelentheorie zu begründen, dürften die einzigen sein, die heute noch in den Lehrbüchern eine Rolle spielen. Je mehr die nichteuklidischen Raumformen zum Gemeingut der Mathematiker werden, um so mehr wird man ganz von selbst nicht bloß von den genannten Versuchen, sondern auch von allen weiteren abstehen. Wir dürfen aber nicht denken, daß dann die parallelen Geraden auch von allen Lehrern nach derselben Methode behandelt werden; vielmehr sind wir sicher, daß in der Methode auch später noch große Mannigfaltigkeit herrschen wird. Zwar werden die von Gauß schon 1799 erwähnte Voraussetzung: Der Inhalt eines Dreiecks hat keine endliche obere Grenze, und die vom älteren Bolyai empfohlene Hypothese: Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, läßt sich stets ein Kreis legen, schwerlich für die Schule Bedeutung erlangen. Auch das von Worpitzky in seinem Lehrbuche gebrauchte Axiom: Die Winkelsumme eines Dreiecks kann nicht beliebig klein werden, kann nicht empfohlen werden, da der Weg, auf dem mit seiner Hilfe die Theorie begründet werden kann, gar zu lästig ist.

In manchen Lehrbüchern wird das bereits 1791 von Lorenz aufgestellte und 1823 von Legendre wiederholte Axiom zugrunde gelegt: Durch jeden Punkt im Innern eines Winkelfeldes läßt sich mindestens eine Gerade ziehen, die beide Schenkel schneidet. Ganz ähnlich ist die Voraussetzung: Jede Gerade, die durch einen Punkt im Innern eines Winkelfeldes gezogen wird, muß mindestens einen Schenkel des Winkels treffen. Andere Lehrbücher gehen unmittelbar von dem Axiom aus: Durch jeden Punkt, der einer geraden Linie nicht angehört, läßt sich zu ihr nur eine einzige Parallele ziehen.

Alle diese Formen haben an sich gleiche Berechtigung; wir wollen sie daher nicht gegeneinander abwägen. Wir möchten nur hervorheben, daß das fünfte Postulat Euklids mit den erwähnten Hypothesen nicht nur den Vergleich aushält, sondern ihnen sogar vor-gezogen werden muß. Es ist ja nicht nötig, die alte Form beizubehalten; man kann diesem Postulat auch die Form geben: Aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln läßt sich stets ein Dreieck konstruieren, sobald die Summe der beiden Winkel kleiner ist als zwei Rechte. In dieser Form schließt sich das Postulat naturgemäß an die Kongruenz-Axiome Hilberts an.

Diejenigen, welche die Parallelentheorie auf eines der genannten Axiome stützen, setzen jene durchgehends an die Spitze der Planimetrie. Sie ordnen die Winkel, unter denen zwei Gerade derselben Ebene von einer dritten Geraden geschnitten werden, in mehrfacher Weise einander zu. Leider herrscht in der Bezeichnung große Verschiedenheit. So sehr wir auch Übereinstimmung wünschen möchten, enthalten wir uns eigener Vorschläge, da wir nicht hoffen dürfen, eine Einigung herbeizuführen. Wir stellen fest, daß wenigstens das Wort Wechselwinkel überall in demselben Sinne gebraucht wird. Nun wird der Satz bewiesen, daß mit der Gleichheit zweier Wechselwinkel noch weitere Beziehungen zwischen den Winkeln verbunden sind, indem gewisse Paare von Winkeln einander gleich, andere zueinander supplementär sind. Bei den Umkehrungen hält man sich gar zu lange auf und ermüdet die Schüler durch eine Reihe von Sätzen, an denen sie kein Interesse finden können und die für den weiteren Aufbau kaum Bedeutung haben. Darauf läßt man den Satz folgen: Werden zwei Gerade durch eine dritte so geschnitten, daß ein Winkel seinem Wechselwinkel gleich ist, so sind sie parallel. Diesen Satz beweist man im Anschluß an Ptolemäus dadurch, daß man den an der einen Seite der schneidenden Geraden gelegenen Streifen in passender Weise auf die andere Seite der schneidenden Geraden legt. Mit andern Worten, man dreht die Ebene um die Mitte der durch die Schnittpunkte begrenzte Strecke so lange, bis die Schnittpunkte selbst ihre Lage vertauschen. Die Umkehrung stellt den Hauptsatz der Parallelentheorie dar; sie wird unter Anwendung eines der angegebenen Axiome indirekt bewiesen.

Statt dessen kann man auch mit Euklid zunächst alle diejenigen Dreieckssätze beweisen, die vom Axiom unabhängig sind. Dahin gehört auch der Satz, daß jeder Außenwinkel eines Dreiecks größer ist als der Innenwinkel an einer andern Ecke. Dieser Satz gestattet, die Dreieckslehre zu einem gewissen Abschluß zu bringen; er ermöglicht auch die Einteilung in stumpf-, recht- und spitzwinklige Dreiecke. Er führt aber auch zu dem Satze, daß Gerade, die von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, parallel sind. Die Umkehrung ergibt sich wieder aus dem gewählten Axiom auf indirektem Wege. Diese Art der Behandlung, bei der man sich ziemlich eng an Euklid anschließen kann, hat den Vorzug, daß man im Grunde genommen nur mit endlichen Gebilden zu operieren hat, und nicht genötigt ist, einen unendlichen Streifen zu bewegen. Nur muß man den Außenwinkel zweimal behandeln, zuerst unter bloßer Benutzung des ersten Kongruenzsatzes, dann nach Einführung der Parallelen, wie es Euklid auch selbst tut.

5. **Ein neuer Vorschlag für die Behandlung der Parallelentheorie: allgemeine Besprechung.** Entgegen den soeben charakterisierten Methoden möchten wir vorschlagen, auf der untern Stufe der Erfahrung das Axiom zu entnehmen:

𝔄) In *jedem* Dreieck beträgt die Winkelsumme zwei Rechte,

und dann auf der oberen Stufe die Parallelentheorie auf das Axiom zu gründen:

𝔅) In *einem einzigen* Dreieck beträgt die Winkelsumme zwei Rechte.

Wir können uns denken, daß unser Vorschlag beim ersten Lesen geradezu Verwunderung hervorrufen wird. Man wird uns entgegenhalten: Es sei Aufgabe der Wissenschaft, die Einzelerscheinungen allgemeinen Prinzipien unterzuordnen, während wir umgekehrt eine unendliche Reihe von Einzelerscheinungen zur Grundlage der Geometrie machen wollten. Daher sei unser Verfahren geradezu unwissenschaftlich; es passe für keine Wissenschaft, am wenigsten für die Mathematik, die von ihren Jüngern gern als die Königin der Wissenschaften bezeichnet werde. Auf diese Anklage werden wir gar nicht antworten; sie ist unserer Überzeugung nach schon durch die früheren Darlegungen entkräftet. Zudem werden die folgenden Auseinandersetzungen, ohne daß wir es eigens hervorheben, noch deutlicher hervortreten lassen, wie unbegründet dieser Einwurf ist.

Ferner wird man uns sagen: Das Axiom 𝔄) müsse dem Schüler geradezu auffallen; er solle einen Satz ohne Beweis hinnehmen, der seinem ganzen Charakter nach für das Empfinden eines jeden Menschen unbedingt einen Beweis verlangt; viel eher werde der Schüler etwa auf den Beweis des Satzes verzichten, daß gleichen Seiten im Dreieck gleiche Winkel gegenüberliegen, als daß er sich bei dem Satze 𝔄) beruhige. Darauf antworten wir: Das ist gerade der Zweck unseres Axioms. Während die unter Nr. 4 besprochenen Versuche den Schüler täuschen und ihm die Meinung beibringen, es handle sich um etwas Selbstverständliches, gehen wir, ähnlich wie Euklid, von einem Satze aus, der den Charakter einer einschneidenden Hypothese an der Stirn trägt. Unsere Wissenschaft steht so hoch, daß sie die volle Wahrheit vertragen kann; wir glauben, uns an ihr zu versündigen, wenn wir einen Täuschungsversuch begünstigen wollten.

Wir vergleichen jetzt das Axiom 𝔄) mit irgendeiner unter den andern Hypothesen, die in Nr. 4 angegeben sind, etwa mit dem Satze: Jede Gerade, welche durch einen Punkt im Innern eines Winkelfeldes geht, muß mindestens einen Schenkel des Winkels treffen, den wir kurz mit 𝔈) bezeichnen wollen. Dabei wollen wir gern zugestehen, daß das Axiom 𝔄) Messungen betrifft, das Axiom 𝔈) aber nur auf Lagenbestimmungen hinauskommt, und daß in dieser Hinsicht 𝔈) einfacher ist als 𝔄). Das ist aber auch der einzige Vorzug, den 𝔈) vor 𝔄) hat. Dem Umfange nach geht das Axiom 𝔈) noch weiter als 𝔄). Gewiß, 𝔄) umfaßt alle möglichen Dreiecke. Aber 𝔈) verlangt, daß 1. sämtliche Winkel, 2. bei jedem einzelnen Winkel sämtliche Punkte des Winkelfeldes und 3. für jeden Punkt des Winkelfeldes sämtliche hindurchgehende Gerade in Betracht gezogen werden. Die experimentelle Prüfung ist bei beiden Axiomen unmöglich, da es sich beidemal um unendlich viele Einzelfälle handelt. Aber beim Dreieck kann die Prüfung weiter ausgedehnt werden als beim Winkelfelde. Da der Lichtstrahl geradlinig ist, kann man irgend drei zugängliche Punkte, von denen jeder gestattet, daß man von ihm aus zu den beiden andern hinsehen kann, zu Eckpunkten eines Dreiecks wählen und findet jedesmal den Satz bestätigt. Ja, die Geodäsie gestattet, die Messung auch für Dreiecke auszuführen, deren Eckpunkte noch weiter voneinander entfernt sind; wir erinnern nur an das von Gauß benutzte Dreieck: Brocken, Inselsberg, Hohen-Hagen. Dagegen ist man zur Prüfung der Hypothese 𝔈) auf den kleinen Raum eines Zeichenbrettes angewiesen; ja, streng genommen versagt die experimentelle Prüfung, sobald man das Axiom von Pasch nicht anwenden kann. Der Schüler aber wird nur zu leicht geneigt sein, eine Wahrnehmung, die wesentlich nur auf das Paschsche Axiom hinauskommt, als identisch mit der Hypothese 𝔈) und demnach die letzte als unvermeidlich anzusehen. Hiernach ist diese Hypothese geeignet, ihn in falsche Sicherheit einzuwiegen.

Aus diesen Gründen verdient das Axiom 𝔄) in theoretischer Hinsicht den Vorzug vor den gebräuchlichen Voraussetzungen. Das Axiom 𝔅) ist aber so einfach, daß es kaum von einer andern Hypothese übertroffen werden kann. Beide Axiome sind einander sehr ähnlich und tragen einen ganz übereinstimmenden Charakter; die Aufstellung von 𝔅) stellt somit die Vollendung des Gedankens dar, der zur Aufstellung des Axioms 𝔄) geführt hat.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Benutzung unserer beiden Axiome in pädagogischer Hinsicht ganz erhebliche Vorzüge besitzt.

6. **Die Parallelentheorie auf der Unterstufe.** Das Axiom 𝔄) stellen wir an die Spitze der Dreieckslehre. Daraus folgen sofort die Eigenschaften des Außenwinkels und der Satz, daß sich von jedem

Punkte aus nur eine Senkrechte auf eine gegebene Gerade fällen läßt. Des weiteren wird der Schüler bei der Behandlung, die wir im vorigen Paragraphen besprochen haben, mit einer Reihe von Sätzen bekannt gemacht, die sein Interesse erwecken und deren Verständnis ihm leicht werden muß.

Vom Dreieck gehen wir zum Viereck über, und zwar zu dem Satze: In jedem einfachen Viereck beträgt die Winkelsumme vier Rechte. Während dieser Satz im allgemeinen ohne jeden innern Zusammenhang mit dem weiteren Inhalt der Planimetrie steht, dient er uns zur Begründung der Parallelentheorie. Zu dem Zwecke führen wir eine neue Bezeichnung ein. Wir sagen, „zwei Gerade seien an eine dritte Gerade unter gleichen Winkeln angelegt,“ oder „zwei Gerade bilden mit einer dritten übereinstimmende Winkel“, oder „zwei Gerade seien gegen eine dritte gleich gerichtet“, falls die Winkelpaare, welche die beiden ersten Geraden mit der dritten bilden, die bekannten Verknüpfungen aufweisen, von denen jede die übrigen nach sich zieht. Bei dieser Bezeichnung gilt der Satz:

Sobald zwei gerade Linien derselben Ebene gegen irgendeine dritte Gerade gleich gerichtet sind, sind sie auch gleich gerichtet gegen jede sie durchschneidende Gerade.

Wenn die Geraden a und b unter gleichen Winkeln an die Gerade c gelegt sind, so folgt der Satz unmittelbar für jede Schnittgerade d, welche mit a, b, c ein gewöhnliches Viereck bildet. Für jede Gerade e aber, durch welche die Gerade c zwischen ihren Schnittpunkten mit a und b getroffen wird, folgt der Satz vermittelst des von den Seiten a, b, d, e gebildeten Vierecks.

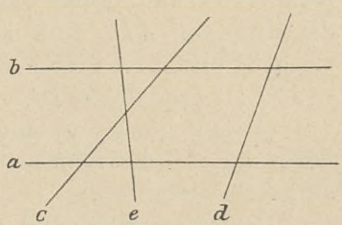

Fig. 28.

Dieser Satz gestattet folgende Definition: Linienpaare, die mit jeder Schnittgeraden übereinstimmende Winkel bilden, heißen parallel.

Parallele Gerade sind hiernach zu jeder durchschneidenden Geraden gleichgerichtet; wir dürfen ihnen daher gleiche Richtung beilegen.

Aus dem Axiom 𝔄) folgt jetzt unmittelbar der Satz:

Parallele Linien können einander nicht schneiden.

Nachdem hiermit die Parallelentheorie in einer für den Anfänger leicht verständlichen Weise begründet ist, schließt sich die Lehre vom Parallelogramm und vom Trapez an.

Auf die Behandlung des Parallelogramms brauchen wir wohl nicht näher einzugehen; wir möchten nur daran erinnern, daß es gar nicht nötig ist, den Umkehrungen der einzelnen Sätze einen so breiten Raum zu gewähren, wie gewöhnlich geschieht, da man doch nicht alle Mögkeiten, die bei Konstruktionsaufgaben allenfalls vorkommen könnten, erschöpft.

Für das (gewöhnliche) Trapez hat nur der Satz von der Mittellinie Bedeutung, d. h. von derjenigen Strecke, welche die Mitten der Schenkel verbindet. Ob man aber von dieser Strecke selbst ausgeht und nachweist, daß sie zu den Grundlinien parallel und gleich ihrer halben Summe ist, oder ob man die Strecke dadurch bestimmt, daß man durch die Mitte eines Schenkels die Parallele zu der Grundlinie zieht, ist belanglos, da beide Sätze auf dasselbe hinauskommen (vgl. § 10, 9, S. 216). Dagegen kommen die weiteren Umkehrungen gar nicht in Betracht; es hat daher keinen Zweck, eingehend zu untersuchen, durch welche von den vier dieser Strecke zukommenden Eigenschaften dieselbe eindeutig bestimmt ist.

Mit diesem Satze über das Trapez verbindet sich in der natürlichsten Weise der entsprechende Satz für das Dreieck. Unter den zahlreichen Anwendungen, die man von dem letzteren Satze machen kann, erwähnen wir den Satz vom Schwerpunkt des Dreiecks, d. h. den Satz, daß die drei seitenhalbierenden Transversalen (Schwerlinien) durch einen Punkt gehen. Für ein Dreieck ABC sei L die Mitte von BC, M die von CA und N die von AB; AL und BM mögen einander in S schneiden. Verlängert man SL über L um sich selbst bis D, so ist das Viereck $BSCD$ ein Parallelogramm, da sich seine Diagonalen in L halbieren. Da hiernach die Gerade BS zu CD parallel ist und durch die Mitte M von AC geht, ist der Punkt S die Mitte von AD. Nun ist aber auch die Gerade CS zu BD parallel; sie geht also auch durch die Mitte N von AB. Zudem ist $AS = SD = 2SL$; ferner $BS = DC = 2SM$, $CS = DB = 2SN$.

(Dieser Beweis ist auch aus dem Grunde beachtenswert, da die darin angewandte Hilfskonstruktion die Lösung vieler Konstruktionsaufgaben vermittelt.)

Bei dieser Behandlung der Parallelentheorie kann man die Dreieckslehre in den Anfang der Geometrie setzen und daran das Viereck direkt anschließen; alles, was der Anfänger über die Parallelen zu wissen braucht, fügt sich ganz einfach in die Lehre vom Viereck ein. Unendliche Ebenenteile werden vorläufig gar nicht betrachtet. Der erste Lehrstoff ist höchst einfach; er behandelt nur interessante Figuren mit leicht verständlichen Beweisen.

Noch eine Bemerkung über den Satz:

Zwei Gerade, die derselben dritten parallel sind, sind einander parallel.

Auch hier hat das Wort „parallel“ zunächst nur den oben angegebenen Sinn. Daß es auch in der Bedeutung „nichtschneidend“ verstanden werden darf, wird besser erst auf einer späteren Stufe nachgewiesen.

Mit den wenigen Sätzen, die wir soeben über parallele Linien angeführt haben, reicht man im wesentlichen für die elementare Planimetrie aus. Nur für zwei wichtige Konstruktionen ist es nicht möglich, die Determination zum Abschluß zu bringen. Die angeführten Sätze genügen nämlich noch nicht, um den Satz zu beweisen, daß durch je drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, ein Kreis gelegt werden könne, oder mit anderen Worten, daß sich jedem Dreieck ein Kreis umbeschreiben lasse. Ebensowenig läßt sich mit Hilfe der angeführten Sätze zeigen, daß zu jedem Dreieck drei Ankreise gehören. Indessen erblicken wir hierin keinen Mangel. Es genügt, auf der unteren Stufe in der Unterhaltung, die sich an die genannten Konstruktionen anschließt, darauf hinzuweisen, daß die Determination noch nicht ganz erledigt werden könne. Dadurch wird der Schüler zum eigenen Nachdenken angeregt; die Erledigung selbst kann ganz gut einer späteren Stufe vorbehalten bleiben.

7. **Die Parallelentheorie auf der Mittelstufe.** Auf der mittleren Stufe wird es notwendig, näher auf die Parallelentheorie einzugehen. Der Schüler muß erfahren, daß durch jeden Punkt nur eine einzige Gerade gelegt werden kann, welche mit einer gegebenen Geraden in einer Ebene liegt und sie nicht schneidet, und daß diese Gerade die einzige Grenzlinie aller Schneidenden ist. Zu dem Ende sei vom Punkte A auf die gegebene Gerade die Senkrechte AB gefällt und nach einem beliebigen andern Punkte C der Geraden die Strecke AC gezogen.

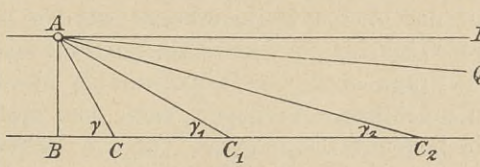

Fig. 29.

Nun trage man auf dem Halbstrahl BC von C aus die Strecken $CC_1 = AC$, $C_1C_2 = AC_1$, $C_2C_3 = AC_2$ usw. ab. Setzt man dann $\sphericalangle ACB = \gamma$, $AC_1B = \gamma_1$, $AC_2B = \gamma_2$ usw., so findet man $\gamma_1 = \frac{1}{2}\gamma, \gamma_2 = \frac{1}{4}\gamma, \gamma_3 = \frac{1}{8}\gamma, \ldots$ Man kann also γ_n so klein machen, als man will, etwa kleiner als eine Sekunde. In A sei in der Ebene ABC auf AB die Senkrechte AR errichtet und im Winkelfelde RAB ein beliebiger Halbstrahl AQ gezogen. Dann kann man n so groß wählen, daß $\sphericalangle \gamma_n < RAQ$ wird. Da aber $\sphericalangle RAC_n = \gamma_n$ ist, tritt AQ in das Innere des Dreiecks BAC_n ein; somit schneidet AQ die Gerade BC. Also kann in der Ebene ABC durch A nur eine einzige Gerade gelegt werden, welche BC nicht schneidet. An diese Parallele treten aber die schneidenden Geraden beliebig nahe heran.

Diese Betrachtung führt unmittelbar zu den weiteren Sätzen:

Sobald zwei Gerade einer Ebene eine in derselben Ebene gelegene dritte Gerade nicht schneiden, sind sie parallel.

Jede Gerade, welche mit zwei Parallelen in einer Ebene liegt und eine von ihnen schneidet, trifft auch die andere.

Ebenso lassen sich jetzt die Sätze beweisen, daß man um jedes Dreieck einen Kreis beschreiben kann, und daß man an jedes Dreieck drei Kreise anlegen kann, von denen jeder eine Seite und die Verlängerungen der beiden anderen berührt.

Der geeignetste Zeitpunkt für diese Untersuchung dürfte der sein, wo der Verlauf der trigonometrischen Tangente für spitze Winkel besprochen wird. Es sei

$$\sphericalangle BAQ = \alpha < 90^0,\ \alpha + \delta = 90^0,\ \sphericalangle \gamma_{n-1} \leqq \delta < \gamma_n.$$

Dann ist allgemein $CC_n > n \cdot CC_1$ oder

$$\operatorname{tg} \alpha \geqq \frac{BC_{n-1}}{AB} > \frac{(n-1)CC_1}{AB}.$$

Demnach wächst die trigonometrische Tangente eines spitzen Winkels über jede beliebige Zahl hinaus, falls nur der Winkel einem Rechten hinlänglich nahe kommt.

Indem man der obigen Darlegung diese Stelle anweist, erreicht man, daß dieselbe Betrachtung dem Schüler mit einem Schlage zwei wichtige Wahrheiten vermittelt.

8. **Die Parallelentheorie auf der Oberstufe.** Nachdem auf der oberen Stufe erkannt worden ist, daß in jedem Kugeldreieck die Winkelsumme zwei Rechte übersteigt, ist Veranlassung gegeben, die Frage nach der Winkelsumme eines ebenen Dreiecks von neuem aufzunehmen. Vielleicht kann man die Schüler darauf hinweisen, daß die bekannte Lösung der Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu legen, die mit einer gegebenen Geraden in einer Ebene liegt und sie nicht schneidet, die Frage nicht entscheiden kann, ob die bei Benutzung verschiedener Hilfsgeraden gefundenen Nichtschneidenden in eine einzige Gerade zusammenfallen oder nicht. Jedenfalls ist es aber gut, zu zeigen, daß man das Axiom 𝔄) einschränken und durch das Axiom 𝔅) ersetzen kann. Der Satz: Sobald in einem einzigen Dreieck die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist, beträgt die Winkelsumme in jedem Dreieck zwei Rechte, ist ja bereits sehr oft bewiesen worden; Dehn hat sich bei dem Nachweise sogar vom archimedischen Axiom unabhängig gemacht. Wir möchten hier zwei Beweise mitteilen, die dem Verständnis des Primaners keine Schwierigkeiten bieten. Daß wir dabei das archimedische Prinzip benutzen, versteht sich von selbst.

Die neue Untersuchung braucht nicht dem eigentlichen Unterrichtsstoffe zugewiesen zu werden; es ist auch gar nicht nötig, daß der Schüler die Herleitung im Gedächtnis behält. Wenn er sie nur verstanden hat, so liegt darin für ihn schon ein großer geistiger Gewinn. Die Parallelentheorie selbst aber erlangt hierdurch ihren natürlichen Abschluß, da sie schwerlich auf eine einfachere Voraussetzung gegründet werden kann als auf das Axiom $\mathfrak{B}$). Zugleich bewahrt die ganze Behandlung einen einheitlichen Charakter; dieselbe Eigenschaft, die auf der Unterstufe für jedes Dreieck vorausgesetzt wurde, wird auf der Oberstufe nur einem einzigen Dreieck beigelegt. Der axiomatische Charakter der Grundlage wird aber weder bei der ersten Einführung noch beim Abschluß der Theorie verdunkelt.

Indem wir das Dreieck ABC, dessen Winkelsumme unserer Annahme nach gleich zwei Rechten ist, um eine seiner Seiten, etwa um AC, umlegen, erhalten wir ein Viereck $ABCD$, dessen Winkelsumme vier Rechte beträgt, in welchem die Gegenwinkel und die Gegenseiten paarweise einander gleich sind und die Diagonalen einander halbieren. Wenn in diesem Viereck ein Winkel ein Rechter ist, so müssen auch seine übrigen Winkel Rechte sein. Im andern Falle enthält das Viereck zwei spitze und zwei stumpfe Winkel; es sei etwa der Winkel A ein stumpfer. Von den beiden Winkeln, in die dieser Winkel durch die Diagonale AC geteilt wird, muß mindestens einer ein spitzer sein. Ist dies der Winkel DAC, so errichte man in A auf AD die Senkrechte. Da diese in das Innere des Dreiecks ABC eintritt, muß sie die Seite BC in einem Punkt E treffen. Nun kann man dem Dreieck ABC eine neue Lage geben, in der BA auf CD und die Seite BC in ihre Verlängerung fällt. Daher schneidet auch die in D auf AD errichtete Senkrechte die Verlängerung von BC in einem Punkte F. Jetzt ist nach dem zweiten Kriterium das Dreieck $ABE \cong DCF$, also ist $BE = CF$, $AE = DF$ und $\sphericalangle AEB = DFC$. Indem man aber das Viereck $ADFE$ um die Mittelsenkrechte von AD dreht, folgt $\sphericalangle DFE = AEF$ oder $\sphericalangle AEB = AEF = R$. Wir finden, daß das Viereck $ADFE$ lauter rechte Winkel und gleiche Gegenseiten besitzt; wir nennen es ein Rechteck.

Durch Umklappen um DF erhalten wir ein weiteres Rechteck, in dem eine Seite gleich $2AD$ ist.

Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert uns Rechtecke, die sämtlich die Strecke AE zur Höhe haben und deren Grundlinien der Reihe nach gleich $3AD$, $4AD$ ..., überhaupt gleich einem beliebigen Vielfachen von AD sind.

Dreht man ferner das Rechteck $ADFE$ um die Mittelsenkrechte von AD, so vertauschen auch die Punkte E und F ihre Lage. Der in der Mitte M von AD auf ihr errichteten Senkrechten gehört somit auch die Mitte N von EF an. Es ist auch $AM = EN = \frac{1}{2}AD$, $MN = AE$ und das Viereck $AMNE$ ebenfalls ein Rechteck.

Auch diese Operation kann beliebig oft wiederholt werden und führt auf Rechtecke, deren eine Seite durch fortgesetzte Halbierung von AD erhalten werden kann. Indem man derartige Rechtecke längs der Geraden AD verschiebt, erhält man ein Rechteck, dessen eine Seite gleich AE und dessen andere Seite gleich $\frac{\mu}{2^\nu} \cdot AD$ ist, wo μ und ν beliebige ganze Zahlen sind.

Daraus geht der Satz hervor:

Sind auf den Halbstrahlen AD und EF zwei gleiche Strecken AG und EH abgetragen, so steht die Strecke GH auf AG und EH senkrecht und ist gleich AE.

Wenn das Verhältnis $AG : AD$ eine ganze Zahl oder ein Bruch ist, der eine bloße Potenz von 2 zum Nenner hat, so folgt der Satz aus den vorangehenden Entwicklungen. Läßt sich das Verhältnis nicht in dieser Weise darstellen, so drückt man dasselbe durch eine Dualzahl (vgl. § 17, 10), also in der Form aus:

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \cdots,$$

wo α_0 eine beliebige ganze Zahl, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ je eine der Zahlen 0 und 1 ist. Nun setze man:

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_0 + \frac{\alpha_2}{2} = a_1, \quad \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} = a_2 \text{ usw.}$$

und bestimme auf den Halbstrahlen AD und EF die Punkte $G_0, G_1, G_2, \ldots$ bzw. $H_0, H_1, H_2, \ldots$ so, daß $AG_0 = a_0 \cdot AD$, $AG_1 = a_1 \cdot AD$, $AG_2 = a_2 \cdot AD, \ldots$ $EH_0 = a_0 \cdot EF$, $EH_1 = a_1 \cdot EF$, $EH_2 = a_2 \cdot EF, \ldots$ ist. Wie wir bewiesen haben, stehen die Geraden G_0H_0, G_1H_1, $G_2H_2, \ldots$ sämtlich auf AD und EF senkrecht. Dasselbe gilt auch von GH als der Grenzlage dieser Strecken.

Jetzt kann man AG beibehalten und AD durch eine beliebige, in demselben Halbstrahle enthaltene Strecke AK ersetzen. Demnach gilt ganz allgemein der Satz:

Errichtet man auf den Schenkeln eines rechten Winkels in beliebigen Punkten Senkrechte, so schneiden sich dieselben unter einem rechten Winkel so, daß in dem entstehenden Viereck die Gegenseiten paarweise gleich sind.

In einem solchen Viereck braucht man nur eine Diagonale zu ziehen, um zu erkennen, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme zwei Rechte beträgt. Derselbe Satz gilt auch für jedes beliebige Dreieck, da dasselbe sich stets aus rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzen läßt.

Der durchgeführte Beweis zeichnet sich dadurch aus, daß er nur von den beiden ersten Kongruenzsätzen Gebrauch macht.

9. **Andere Methode, die Parallelentheorie zum Abschluß zu bringen.** Wir teilen hier noch eine andere Methode mit, um

den Satz 𝔄) aus der Voraussetzung 𝔅) herzuleiten, die zwar etwas weitläufiger ist, dafür aber keinen Grenzübergang gebraucht, sondern ganz mit endlichen Operationen ausreicht. Wir gehen dabei von der Unendlichkeit der Geraden aus; mit andern Worten, wir setzen alle diejenigen Eigenschaften des Raumes voraus, welche Hilbert in seinen drei ersten Axiomgruppen zusammengestellt hat. Dazu fügen wir das archimedische Prinzip.

Der Übersichtlichkeit wegen beweisen wir zuerst eine Reihe von Hilfssätzen.

a) Die Winkelsumme kann in keinem Dreieck größer sein als zwei Rechte.

Den Beweis kann man einmal durch wiederholte Benutzung des Satzes (Euklid I, 16) erbringen, nach welchem der Außenwinkel eines Dreiecks größer ist als jeder Innenwinkel, der an einer andern Ecke liegt. Wir ziehen aber einen andern Beweis vor, der wohl zuerst von Legendre, später von Gauß gefunden ist.

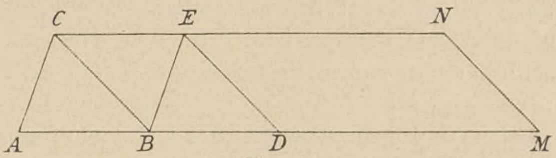

Fig. 30.

Das Dreieck ABC verschieben wir längs der Geraden AB; es möge dabei die Lagen BDE, DFG ... und endlich KMN annehmen, wobei die Punkte A, B, D, ... K, M in gerader Linie, die Punkte C, E, G, ... N auf derselben Seite der Geraden AB liegen. Wenn jetzt die Winkelsumme im Dreiecke ABC größer ist als zwei Rechte, so ist $\sphericalangle\, CBE < ACB$, also nach einem bekannten Satze auch $AB > CE$.

Es sei $AM = (n+1) \cdot AB$ und n so groß gewählt, daß

$$n(AB - CE) > AC + BC - AB$$

ist. Alsdann ist auch:

$$n \cdot AB > n \cdot CE + AC + BC - AB,$$

oder

$$(n+1) \cdot AB > AC + BC + n \cdot CE.$$

Somit wäre die gerade Strecke AM größer als die gebrochene Strecke $ACEG \ldots NM$, was unmöglich ist.

b) Wenn ein Dreieck, dessen Winkelsumme zwei Rechte beträgt, durch eine von einem Eckpunkte ausgehende Transversale in zwei Dreiecke zerlegt wird, so ist auch die Winkelsumme in jedem Teildreieck gleich zwei Rechten.

Wenn die Winkelsumme des Dreiecks ABC zwei Rechte beträgt und D ein beliebiger Punkt zwischen B und C ist, so kann die Winkelsumme in keinem der beiden Dreiecke ADB und ADC kleiner sein als zwei Rechte, weil sie sonst im andern Teildreieck über zwei Rechte hinausgehen müßte.

c) Wenn im Dreieck ABC die Summe der Winkel gleich zwei Rechten ist und man auf dem Halbstrahl AB die Strecke $AM = n \cdot AB$ und auf dem Halbstrahl AC die Strecke $AN = n \cdot AC$ macht, so beträgt auch im Dreieck AMN die Winkelsumme zwei Rechte.

Zum Beweise benutzen wir die allgemeine Induktion. Wir bestimmen im Halbstrahl AB den Punkt B_{n-1}, im Halbstrahl AC den Punkt C_{n-1} so, daß $AB_{n-1} = n \cdot AB$, $AC_{n-1} = n \cdot AC$ ist, und nehmen an, es sei bewiesen, daß das Dreieck $AB_{n-1}C_{n-1}$ in n^2 Dreiecke zerlegt werden könne, die sämtlich dem Dreieck ABC kongruent sind. Dabei habe sich ergeben, daß die Strecke $B_{n-1}C_{n-1} = n \cdot BC$, $\sphericalangle B_{n-1} = B$, $\sphericalangle C_{n-1} = C$ sei. Die Teilpunkte auf $B_{n-1}C_{n-1}$ seien $S', S'' \ldots S^{(n-1)}$. Man verlängert noch AB_{n-1} um $B_{n-1}B_n = AB$ und AC_{n-1} um $C_{n-1}C_n = AC$, und kann die Punkte $T', T'' \ldots T^{(n)}$ so bestimmen, daß die $2n+1$ Dreiecke $B_{n-1}B_nT'$, $T'S'B_{n-1}$, $S'T'T''$, $T''S''S' \ldots$ $T^{(n)}C_{n-1}S^{(n-1)}$, $C_{n-1}T^{(n)}C_n$ sämtlich zu ABC kongruent sind. Dann zeigt sich, daß die Punkte B_n, $T', T'', \ldots T^{(n)}$, C_n in gerader Linie liegen. Das Dreieck AB_nC_n hat also dieselben Winkel wie das gegebene Dreieck, und wird in $(n+1)^2$ Dreiecke zerlegt, von denen jedes mit ABC kongruent ist.

Nach diesen Vorbereitungen kann man den Beweis in folgender Weise führen: Angenommen, man wisse, daß die Winkelsumme des Dreiecks ABC zwei Rechte beträgt, und man will beweisen, daß auch die Summe der Winkel in einem beliebigen anderen Dreiecke DEF gleich zwei Rechten ist. Von dem Dreieck ABC geht man im Anschluß an c) zu einem Dreieck LMN über, für welches $LM = n \cdot AB$, $MN = n \cdot BC$, $NL = n \cdot CA$ ist. Hier kann man die Zahl n so groß wählen, daß jede Strecke, welche einen Eckpunkt des Dreiecks LMN mit irgendeinem Punkte der Gegenseite verbindet, größer ist als die größte Seite des Dreiecks DEF. Nach c) haben die Winkel des Dreiecks LMN als Summe zwei Rechte. Wenn die Winkelsumme des Dreiecks DEF von zwei Rechten verschieden, aber kleiner als 180^0 ist, und wenn dann L der Scheitel des größten Winkels in in LMN, D der Scheitel des kleinsten Winkels in DEF ist, so kann man dem Dreieck DEF eine solche Lage LPQ geben, daß P zwischen L und M, und Q in das Innere des Dreiecks LMN fällt. Verlängert man noch LQ bis zum Schnittpunkte R mit MN und zieht die Strecke PR, so ist nach b) die Winkelsumme in den Dreiecken LNR und LMR, sowie in den Dreiecken LPR und MPR, sowie endlich in den Dreiecken LPQ und RPQ je gleich zwei Rechten. Dasselbe gilt für das Dreieck DEF, da es zu LPQ kongruent ist.

§ 15. Niedere Kreislehre.

1. **Gegenseitige Lage eines Kreises und einer Geraden.** Wie wir schon in der Fußnote auf S. 46 angegeben haben, bezeichnen wir mit (O) einen Kreis um O als Mittelpunkt, mit $(O)r$ einen Kreis um O mit dem Radius r, und mit $(O)A$ einen Kreis um O, der durch A geht.

In vielen Lehrbüchern wird der Lehrsatz aufgestellt: Je nachdem die Entfernung eines Punktes vom Mittelpunkte kleiner oder größer als der Radius ist, liegt der Punkt innerhalb oder außerhalb des

Kreises. Das ist aber gar kein Lehrsatz, sondern eine bloße Definition. Dies Verfahren ist nicht nur an sich unerlaubt, sondern auch geeignet, im Schüler ganz falsche Ansichten hervorzurufen (vgl. § 12, 14. S. 241).

Wir wollen jetzt zunächst drei Fragen besprechen, bei denen zwar das theoretische Interesse an erster Stelle steht, die aber zugleich für den Unterricht von Bedeutung sind.

Um die gemeinschaftlichen Punkte einer Geraden und eines Kreises zu bestimmen, legt man vielfach den Abstand zugrunde, den die Gerade vom Mittelpunkte hat. Offenbar liegt die Gerade ganz außerhalb des Kreises, wenn dieser Abstand größer ist als der Radius. Ebenso hat eine Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkte gleich dem Radius ist, nur einen einzigen Punkt mit dem Kreise gemein; ihre andern Punkte liegen sämtlich im Äußern des Kreises, und wir sagen, die Gerade berühre den Kreis. Ist aber die vom Mittelpunkte auf eine Gerade gefällte Senkrechte kleiner als der Radius, so gibt es in jedem der beiden Halbstrahlen, die in der Geraden durch den Fußpunkt der Senkrechten begrenzt werden, sowohl Innen- als auch Außenpunkte des Kreises. Da außerdem die Punkte der Geraden sich vom Mittelpunkte immer weiter entfernen, je größer ihr Abstand vom Fußpunkte der Senkrechten wird, so glaubt man schließen zu dürfen, daß die Gerade in diesem Falle mit dem Kreise zwei Punkte gemein hat. In jedem von diesen beiden Punkten tritt, wie aus der angestellten Erwägung hervorgeht, die Gerade aus dem Innern des Kreises zum Äußern, und der Kreis von der einen Seite der Geraden zur andern über; wir sagen daher, Kreis und Gerade schnitten einander. Dies Verfahren enthält aber eine Lücke. Der Kreis ist nur definiert als die Gesamtheit aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkte gleiche Entfernung haben; man darf daher nicht von vornherein voraussetzen, daß jede Strecke, die einen Innen- und einen Außenpunkt miteinander verbindet, auch einen Punkt des Kreises enthalte.

Manche Bücher behandeln die Lage einer Geraden zu einem Kreise in anderer Weise. Sie legen durch zwei beliebige Punkte des Kreises eine Gerade; dann gehören offenbar alle Punkte der durch die beiden Punkte begrenzten Strecke dem Innern, alle weiteren Punkte der Geraden dem Äußern des Kreises an. Im Anschluß hieran zeigen sie, daß jede Gerade, die zu einem Radius in seinem Endpunkte unter einem schiefen Winkel geneigt ist, noch einen zweiten Punkt mit dem Kreise gemein hat. Zugleich sieht man, daß jede Gerade, die zwei Punkte des Kreises enthält, vom Mittelpunkte einen Abstand hat, der kleiner ist als der Radius. Dagegen hat die im Endpunkte eines Radius auf ihm errichtete Senkrechte keinen weiteren Punkt mit dem Kreise gemein; eine Gerade aber, deren Abstand vom

Mittelpunkt größer ist als der Radius, enthält keinen einzigen Punkt des Kreises. Nun behauptet man aber umgekehrt, daß jede Gerade, die keinen Punkt mit dem Kreise gemein hat, vom Mittelpunkt einen Abstand hat, der größer ist als der Radius, obwohl diese Behauptung durch die angestellte Untersuchung keineswegs bewiesen ist.

Um über diese Frage Klarheit zu gewinnen, nehmen wir zu Hilberts Axiomen der vier ersten Gruppen das archimedische Axiom hinzu, sehen aber von seinem Vollständigkeitsaxiom ab. Die hiernach zugelassenen Axiome gelten, wie wir schon oben (S. 22 ff.) gezeigt haben, für eine gewisse Zahlengeometrie, die nur „elementare Strecken" enthält. Der hierbei benutzte Zahlkörper Ω soll außer den vier Grundrechnungen noch für jede in ihm enthaltene Zahl ω die Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ zulassen, und zwar soll er der einfachste Zahlkörper sein, der diesen Forderungen genügt. Mit andern Worten: Man geht von der Zahl eins aus, bildet aus ihr durch die vier Grundrechnungen und die Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ neue Zahlen, und ordnet dem Zahlkörper Ω alle Zahlen zu, die man durch Wiederholung dieser fünf Operationen erhalten kann. Indem man dann den geometrischen Begriffen die auf S. 22 angegebene Bedeutung beilegt, erhält man eine Geometrie, die allen Axiomen Hilberts mit Ausschluß des Vollständigkeitsaxioms genügt. Jede Zahl dieses Zahlkörpers läßt sich durch bloße Quadratwurzeln darstellen. Indem man in einer solchen Zahl einer Quadratwurzel das entgegengesetzte Vorzeichen beilegt, erhält man eine neue Zahl, die nach der allgemeinen Theorie der algebraischen Zahlkörper ebenfalls dem Zahlkörper Ω angehören muß. Nach dem angegebenen Bildungsgesetze sind alle Zahlen von Ω reell; infolge des angeführten Satzes kann also Ω nur solche Zahlen enthalten, die auch dann noch reell bleiben, wenn man irgendeiner bei der Darstellung benutzten Quadratwurzel das entgegengesetzte Vorzeichen beilegt.

Jetzt nehme man mit Hilbert (Grundlagen, II. Aufl., S. 77) an, der Radius eines Kreises sei r und eine Gerade habe vom Mittelpunkte den Abstand $r(\sqrt{2}-1)$. Wenn die Gerade den Kreis schnitte, so hätte die gemeinschaftliche Sehne die Länge $2r\sqrt{2\sqrt{2}-2}$. Diese Zahl kann aber im Zahlkörper Ω nicht vorkommen, da sonst auch die Zahl $2r\sqrt{-2\sqrt{2}-2}$ darin enthalten sein müßte; das ist aber unmöglich, weil die letzte Zahl imaginär ist. In der angegebenen Geometrie gibt es also gerade Linien, die mit einem Kreise auch in dem Falle keinen Punkt gemein haben, daß ihr Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist als der Radius.

Eine Zahlengeometrie, die dem Vollständigkeitsaxiom genügt, umfaßt alle reellen Zahlen (vgl. S. 23). In einer solchen Geometrie gilt also der Satz: Ein Kreis wird von jeder Geraden geschnitten, deren Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist als der Radius.

Wollen wir diesen Satz geometrisch beweisen, so kommen wir ohne das Vollständigkeitsaxiom, wie wir gesehen haben, nicht aus. Daher kann der Beweis nur mit Hilfe eines Grenzüberganges durchgeführt werden.

Eine sehr rasche Annäherung an die Grenze wird durch eine Konstruktion erreicht, die Wellstein (Elem.-Geom. S. 228) angegeben hat. Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius r, und u eine Gerade, deren Abstand MO vom Mittelpunkte kleiner als r sein soll. Der Fußpunkt O der von M auf u gefällten Senkrechten ist ein Innenpunkt; der Halbstrahl MO trifft somit den Kreis in einem Punkte K_0 so, daß O zwischen M und K_0 liegt. Trägt man auf dem einen in O begrenzten und in u enthaltenen Halbstrahle die Strecke $OJ_0 = OK_0$ ab, so ist auch J_0 ein Innenpunkt. Man verlängert jetzt die Strecke MJ_0 über J_0 bis zum Schnittpunkte K_1 mit dem Kreise und trägt auf u in der Richtung OJ_0 die Strecke $J_0J_1 = J_0K_1$ ab. Auch der Punkt J_1 liegt im Innern des Kreises, und man kann die Konstruktion beliebig oft wiederholen. Nachdem man auf diese Weise einen Punkt $J_{\lambda-1}$ erhalten hat, bestimmt man den Endpunkt K_λ des durch $J_{\lambda-1}$ gehenden Radius und trägt auf u in der Richtung OJ_0 die Strecke $J_{\lambda-1}J_\lambda$ so ab, daß sie der Strecke $J_{\lambda-1}K_\lambda$ gleich wird. Dadurch erhält man eine unbegrenzte Reihe von Punkten $J_0, J_1, J_2, J_3, \ldots$, für die die Beziehung besteht:

$$\text{(a)} \qquad MJ_0 < MJ_1 < MJ_2 < MJ_3 \cdots < r.$$

Nun braucht man auf demselben Halbstrahl von O aus nur eine Strecke $OA_0 \geqq r$ abzutragen, um einen Punkt A_0 zu erhalten, der außerhalb des Kreises liegt. Die Strecke MA_0 enthält einen Punkt L_0 des Kreises, und zwischen O und A_0 liegt ein Punkt A_1, für den $A_0A_1 = A_0L_0$ ist; auch der Punkt A_1 ist ein Außenpunkt des Kreises. Zwischen M und A_1 liegt ein Punkt L_1 des Kreises, und zwischen O und A_1 ein Punkt A_2 in der Weise, daß $A_1A_2 = A_1L_1$ ist. Auch diese Konstruktion kann man beliebig oft fortsetzen. Man erhält somit zwischen O und A_0 unendlich viele Punkte $A_1, A_2, \ldots$, welche der Bedingung genügen:

$$\text{(b)} \qquad MA_0 > MA_1 > MA_2 > \cdots > r.$$

Aus den beiden Beziehungen (a) und (b) kann man aber nicht folgern, daß die beiden Punktreihen J_m und A_n einen gemeinsamen Grenzpunkt haben. Man kann nämlich durch Abänderung der Konstruktion erreichen, daß diese beiden Beziehungen ungeändert bleiben, die Strecke J_mA_n aber für alle Marken m und n größer bleibt als eine feste endliche Größe. Zu dem Ende beschreibt man um M noch zwei weitere Kreise mit den Radien r' und r'', wo $MO < r' < r$ und $MA_0 > r'' > r$ sein soll. Jetzt ersetze man die vorhin benutzten Punkte $K_0, K_1, K_2 \ldots$ durch die Schnittpunkte mit dem Kreise $(M)r'$ und die Punkte $L_0, L_1, L_2, \ldots$ durch die Schnittpunkte mit dem Kreise $(M)r''$, und lasse im übrigen die Konstruktion ungeändert. Die hierbei erhaltenen Punkte $J_0, J_1, J_2, \ldots$ bleiben im Innern des ersten, die neuen Punkte $A_0, A_1, A_2, \ldots$ im Äußern des zweiten Kreises. Die Ungleichungen (a) und (b) bleiben auch jetzt in Gültigkeit, aber einen gemeinsamen Grenzpunkt der beiden Reihen gibt es nicht.

Beim Beweise müssen wir also darauf Rücksicht nehmen, daß sowohl die Punkte $K_0, K_1, \ldots$ als auch die Punkte $L_0, L_1, \ldots$ dem gegebenen Kreise $(M)r$ angehören. Nun ist:

$$J_0 J_m = J_0 K_1 + J_1 K_2 + \cdots + J_{m-1} K_m.$$

Weil aber für $\mu < \nu$ auch stets $J_\mu K_\mu > J_\nu K_\nu$ ist, so ist $J_0 J_m > m \cdot J_{m-1} K_m$, und weil die Strecke $J_0 J_m < r$ ist, so folgt aus dem archimedischen Axiom, daß die Strecke $J_{m-1} K_m$ für hinlänglich große Marken m beliebig klein gemacht werden kann. In gleicher Weise zeigt sich, daß die Strecken $A_n L_n$ für alle Marken n, die eine gewisse Zahl übersteigen, kleiner sind als eine beliebig klein gewählte Strecke. Nachdem mit irgendeinem Radius r', der kleiner ist als r, um M ein Kreis beschrieben ist, liegen von einer gewissen Marke m an alle $J_m, J_{m+1}, J_{m+2}, \ldots$ auf der Geraden u zwischen den Kreisen $(M)r'$ und $(M)r$. Ebenso liegen von einer gewissen Marke n an alle Punkte $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ auf u zwischen den Kreisen $(M)r$ und $(M)r''$, wenn nur $r'' > r$ ist. Weil man aber die Differenzen $r - r'$ und $r'' - r$ beliebig klein machen kann, haben die beiden Punktreihen nach dem Vollständigkeitsaxiom einen gemeinsamen Grenzpunkt, und dieser gehört auch dem Kreise $(M)r$ an. Denn das Axiom verlangt, daß zwei getrennte Punktmengen einer Geraden, zwischen denen keine Strecke liegt, durch einen Punkt voneinander geschieden werden.

Dasselbe Resultat kann man auch durch folgende Betrachtung herleiten. Es sei wieder O der Fußpunkt der vom Mittelpunkte des Kreises $(M)r$ auf die Gerade u gefällten Senkrechten und $MO < r$. In der Geraden u wählt man einen Punkt A so, daß $OA \geqq r$ ist. Die Strecke OA teilt man in n gleiche Teile durch die Punkte $B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, \ldots B_{n-1}^{(n)}$, die in der durch die unteren Marken angedeuteten Weise von O aus aufeinander folgen sollen. Bei dieser Anordnung ist $MO < MB_1^{(n)} < MB_2^{(n)} \cdots < MB_{n-1}^{(n)} < MA$. Wenn etwa der Punkt $B_k^{(n)}$ dem Kreise angehört, so liegen alle Punkte der Strecke $OB_k^{(n)}$ im Innern und alle Punkte $B_k^{(n)}A$ im Äußern des Kreises. Wenn aber kein Teilpunkt auf dem Kreise liegt, so liegen die Punkte $O, B_1^{(n)}, \ldots B_{n-1}^{(n)}, A$ teils im Innern und teils im Äußern des Kreises. Bezeichnet man noch O mit $B_0^{(n)}$ und A mit $B_n^{(n)}$, so gibt es in der Reihe $0, 1, 2, \ldots n-1$ eine Marke i von der Beschaffenheit, daß $MB_i^{(n)} < r$, aber $MB_{i+1}^{(n)} > r$ ist. Diese Erwägung kann für jede Zahl n angestellt werden. Entweder erhält man hierdurch bereits einen Punkt des Kreises, oder das Vollständigkeitsaxiom verlangt die Existenz eines Punktes X, der für jeden Wert von n zwischen den soeben definierten Punkten $B_i^{(n)}$ und $B_{i+1}^{(n)}$ liegt, und dieser Punkt gehört dem Kreise selbst an. Die Existenz eines zweiten Schnittpunktes ergibt sich sehr leicht.

2. **Gegenseitige Lage zweier Kreise.** Um die verschiedenen Lagen zu ermitteln, die zwei Kreise zueinander einnehmen können, gehen viele Lehrbücher von der Länge der Zentrale aus. Wenn diese größer ist als die Summe, oder kleiner als die Differenz der Radien, so haben die Kreise keinen Punkt gemein. Ferner haben sie einen einzigen Punkt und in ihm die Tangente gemein, wenn ihre Zentrale entweder gleich der Summe oder gleich der Differenz der Radien ist. Wenn dagegen die Zentrale kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Radien ist, so enthält jeder der beiden Kreise sowohl Innen- als auch Außenpunkte des andern. Daraus glaubt man auf die Existenz von gemeinschaftlichen Punkten schließen zu dürfen, und weil zwei Kreise ganz zusammenfallen, sobald sie drei Punkte gemein haben, so behauptet man, die Zahl der gemeinschaftlichen Punkte sei gleich zwei.

Manche Bücher schlagen einen andern Weg ein. Sie gehen von dem Satze aus, daß zwei verschiedene Kreise höchstens zwei Punkte gemein haben, und daß man durch zwei Punkte beliebig viele Kreise legen kann. Für zwei Kreise, die durch dieselben zwei Punkte gehen, ist aber die Zentrale größer als die Differenz und kleiner als die Summe der Radien. Sobald ferner zwei Kreise einen Punkt gemein haben, der nicht in der Zentrale liegt, treffen sie sich noch in einem zweiten Punkte. Man kann aber auch zwei Kreise konstruieren, die einen Punkt der Zentrale gemein haben; dann haben sie in diesem Punkte dieselbe Tangente. In diesem Falle haben die Kreise keinen weiteren Punkt gemein; vielmehr liegt, abgesehen von dem gemeinsamen Punkte entweder jeder Kreis im Äußern des andern oder der eine Kreis im Innern des andern. Dieser Unterschied wird durch die gegenseitige Lage der beiden Mittelpunkte und des gemeinsamen Punktes bedingt; dementsprechend ist die Zentrale entweder gleich der Summe oder gleich der Differenz der Radien. Ferner stellt sich die Möglichkeit heraus, daß jeder von zwei Kreisen ganz außerhalb des andern liegt; dann ist ihre Zentrale größer als die Summe der Radien. Wenn endlich zwei Kreise keinen Punkt gemein haben und der eine ganz im Innern des andern liegt, so ist die Zentrale kleiner als die Differenz der Radien. Nun glaubt man alle Möglichkeiten erschöpft zu haben. Den Fall, daß ein Kreis sowohl Innen- als auch Außenpunkte eines zweiten Kreises enthält, ohne ihn zu schneiden, schließt man ohne jede Untersuchung aus, weil man ihn für unmöglich hält.

Und doch ist der letzte Fall ganz wohl mit den Axiomen Hilberts vereinbar, wenn man nur von seinem Vollständigkeitsaxiom absieht. Um das zu erkennen, gehen wir wieder auf die Zahlengeometrie zurück, die wir im Anschluß an Hilbert bereits auf S. 22 eingeführt und auch in der vorigen Nummer benutzt haben. Wir setzen in ihr zwei Kreise voraus, die beide den Radius eins haben, während der Abstand ihrer Mittelpunkte gleich $2(\sqrt{2}-1)$ sein soll. Die Kreise haben entweder keinen oder zwei Punkte gemein. Im zweiten Falle wäre die gemeinschaftliche Sehne gleich $2\sqrt{2\sqrt{2}-2}$. Da aber eine Strecke von dieser Länge, wie wir vorhin gesehen haben, in der angenommenen Zahlengeometrie nicht vorkommt, so haben die Kreise keinen Punkt gemein, obwohl ihre Zentrale kleiner ist als die Summe und größer ist als die Differenz der Radien. Dabei enthält jeder der beiden Kreise sowohl Innen- als auch Außenpunkte des andern.

Hiernach kann der Satz, daß zwei Kreise einander jedesmal schneiden, wenn ihre Zentrale kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Radien ist, nur dann bewiesen werden, wenn man zu den übrigen Axiomen Hilberts auch sein zweites Stetigkeitsaxiom hinzunimmt. Der Nachweis kann dadurch geführt werden, daß man auf einem passend gewählten Bogen des einen Kreises eine Reihe von Punkten bestimmt, die zum Teil dem Innern und zum Teil dem Äußern des andern Kreises angehören, und zeigt, daß sie auf einen gemeinsamen Grenzpunkt führen, der auch dem zweiten Kreise angehört. Indessen können wir uns beim Beweise auch auf den in der vorigen Nummer bewiesenen Lehrsatz stützen und brauchen zu dem Ende nur zu zeigen, daß zwei nicht-konzentrische Kreise jedesmal eine Potenzlinie besitzen.

Dementsprechend gehen wir von den zwei Kreisen $(O)r$ und $(Q)\varrho$ aus, deren Mittelpunkte nicht zusammenfallen. Wir setzen $r \geqq \varrho$ voraus, bezeichnen die Länge der Strecke OQ mit c und nehmen an, es sei $r+\varrho > c > r-\varrho$. In den beiden Kreisen ziehen wir zwei parallele Radien OA und QB, indem wir nur verlangen, daß die Gerade AB weder mit der Zentrale, noch mit einer gemeinsamen Tangente zusammenfalle. Unter dieser Annahme schneidet die Gerade AB den ersten Kreis noch in einem Punkte C. Die Geraden, von denen die eine den ersten Kreis in C und die andere den zweiten

Kreis in B berührt, sind nicht parallel; ihr Schnittpunkt heiße D. Dann schneidet, wie wir zeigen werden, die von D auf die Zentrale gefällte Senkrechte unter der gemachten Voraussetzung jeden der beiden Kreise, und zwar in denselben beiden Punkten.

Den Beweis wollen wir führen, ohne die Ähnlichkeitslehre zu benutzen, indem wir zu den ersten Sätzen der Planimetrie nur noch den Satz des Pythagoras hinzunehmen.

Weil $\sphericalangle DBC = DCB$ ist, so ist auch $DC = DB$. Da aber die Winkel OCD und QBD Rechte sind, so muß sein: $OD^2 = OC^2 + CD^2$ und $QD^2 = QB^2 + BD^2$, also auch $OD^2 - QD^2 = r^2 - \varrho^2$. Daher besteht für jeden Punkt G der Geraden DE die Beziehung: $OG^2 - QG^2 = r^2 - \varrho^2$. Speziell ist auch $OE^2 - QE^2 = r^2 - \varrho^2$, wo E der Fußpunkt der Senkrechten sein soll. Indem wir noch $OE = a$ und demnach $QE = c - a$ setzen, können wir die letzte Gleichung in der Form schreiben: $c(2a - c) = (r + \varrho)(r - \varrho)$. Daraus geht aber wegen der Beziehung $c > r - \varrho$ die Relation hervor: $2a - c < r + \varrho$, und hieraus ergibt sich, weil $c > r - \varrho$ ist, daß $2a < 2r$ oder $a < r$ ist. Nach dem in Nr. 1 bewiesenen Satze schneidet die Gerade DE den ersten Kreis; sie enthält somit zwei Punkte M und N, für die $OM = ON = r$ ist. Dann ist aber wegen der Beziehungen $OM^2 - QM^2 = r^2 - \varrho^2$ und $ON^2 - QN^2 = r^2 - \varrho^2$, auch $QM = QN = \varrho$. Die Punkte M und N sind somit den beiden Kreisen gemeinschaftlich.

3. **Der Bogen als Größe.** In der natürlichen Geometrie läßt sich praktisch zeigen, wie man einen Kreisbogen auf dem Kreise, dem er angehört, bewegen kann. Die allgemeine Geometrie hat zunächst eine mit dieser natürlichen Bewegung in Einklang stehende Definition der Kongruenz zweier Bögen desselben Kreises zu geben.

Indem wir die Definition benutzen, die wir oben (§ 4, 7. S. 70) für die Kongruenz krummer Linien aufgestellt haben, hönnen wir den Satz beweisen: Zwei Bogen desselben Kreises, die zu gleichen Zentriwinkeln gehören, sind einander kongruent. Wenn nämlich die Winkel AOB und COD gleich sind und die Punkte B, C, D auf dem Kreise $(O)A$ liegen, so nehmen wir im Bogen AB die Punkte $L_1, L_2, \ldots L_n$ ganz beliebig an. Jetzt konstruieren wir die Winkel $COM_1 = AOL_1$, $COM_2 = AOL_2, \ldots COM_n = AOL_n$ so, daß sie sämtlich denselben Sinn haben wie der Winkel COD, und nennen $M_1, M_2, \ldots M_n$ die Punkte, in denen je die zweiten Schenkel dieser Winkel den Kreis treffen. Dann ist für irgendzwei Marken μ und ν jedesmal $L_\mu L_\nu = M_\mu M_\nu$. Daher sind die Polygone $L_1 L_2 \ldots L_n$ und $M_1 M_2 \ldots M_n$ kongruent. Jedem Polygon, das in den einen Bogen eingeschrieben ist, läßt sich ein kongruentes Polygon zuordnen, das dem anderen Bogen eingeschrieben ist. Die Bögen selbst sind also kongruent.

Zwei Ebenen können, wie wir ebenfalls bereits oben (§ 4, 7. S. 70) bemerkt haben, kongruent aufeinander bezogen werden. Dabei entspricht jedem in der einen Ebene gelegenen Kreise in der andern Ebene ein Kreis mit einem gleichen Radius; zwei Bogen, die hierbei einander zugeordnet werden, müssen als kongruent angesehen werden. Wenn speziell eine Ebene in der Weise sich selbst kongruent zugeordnet ist, daß ein Punkt sich selbst entspricht, so wird jeder Kreis, der diesen Punkt zum Mittelpunkte hat, sich selbst zugeordnet; dabei entspricht jedem Bogen eines solchen Kreises ein bestimmter Bogen desselben Kreises.

Auf die Punkte eines Kreisbogens kann nun auch der Begriff „zwischen“ übertragen werden. Wir dürfen daher auch von Teilen eines Bogens sprechen und können im Anschluß an die soeben durchgeführten Entwicklungen den Satz beweisen: Zwei Bogen desselben Kreises sind entweder kongruent, oder der eine von ihnen ist mit einem Teile des andern kongruent. Hiernach dürfen auch zwei Bogen desselben Kreises als gleich, größer oder kleiner unterschieden werden.

4. **Sehnen und Tangenten eines Kreises.** In welcher Weise die Punkte, die wir in den vorhergehenden Nummern nach ihrer wissenschaftlichen Seite besprochen haben, am besten beim Unterrichte behandelt werden, brauchen wir wohl nicht näher darzulegen. Wir verweisen auf die Anweisungen, die wir in § 12, 14 (S. 241) gegeben haben, und fügen nur eine kurze Bemerkung bei. Nachdem die verschiedenen Lagen eines Kreises zu einer Geraden und die verschiedenen Lagen zweier Kreise zueinander ermittelt sind, hat man jedesmal ein vollständiges System von Lehrsätzen gefunden; die Umkehrungen ergeben sich somit unmittelbar aus dem allgemeinen Prinzip, das wir in § 10, 10 (S. 218) aufgestellt haben.

Zu jedem Bogen gehört eine bestimmte Sehne, aber zu jeder Sehne gehören zwei verschiedene Bögen. Vielfach ordnet man einer Sehne, die nicht durch den Mittelpunkt geht, nur den kleineren Bogen zu (häufig, ohne dies ausdrücklich zu sagen). Eine solche Zuordnung ist an sich rein willkürlich; sie dürfte auch kaum von wirklichem Nutzen sein. Sonst würde es doch unmöglich sein, in weit verbreiteten Lehrbüchern den „Lehrsatz“ zu finden: „Zu dem größeren von zwei Mittelpunktswinkeln oder Bögen eines Kreises gehört eine größere Sehne, und umgekehrt.“ Da macht es Martus besser, indem er sich mit dem Satze begnügt: „In demselben Kreise gehört zum größeren Winkel am Mittelpunkte der größere Bogen, Ausschnitt und Abschnitt (aber nicht notwendig die größere Sehne).“ Hier ist alles irgend Notwendige angegeben, und die Klammer fordert den Schüler auf, sich die Beziehungen der Bögen und der zugehörigen Sehnen selbst klar zu machen.

Wenn die Sehne AB nicht durch den Mittelpunkt O geht, so gibt es eine Gerade, die durch den Mittelpunkt des Kreises, die Mitte der Sehne, die Mitten der zugehörigen Bögen geht, auf der Sehne senkrecht steht und den Winkel AOB halbiert. Diese Gerade kann auf acht verschiedene Weisen eindeutig bestimmt werden. Dadurch erhalten wir acht Lehrsätze, die durch das Identitätsprinzip mit einander verbunden sind. Es genügt daher, einen einzigen aus ihnen zu beweisen; dann ergeben sich die übrigen unmittelbar von selbst. Diese Sätze durch die Schüler in Worte kleiden zu lassen, ist eine ganz passende Übung.

Beim Beweise des Satzes, daß die größere Sehne den kleineren Abstand vom Mittelpunkte hat, gebraucht man einen Hilfssatz, der meist in einer recht schleppenden Form ausgesprochen wird. Wir möchten vorschlagen, ihm folgende Fassung zu geben: „In zwei rechtwinkligen Dreiecken, die nicht kongruent sind und in der Hypotenuse übereinstimmen, sind die Katheten wechselweise ungleich.“ Zwar bedarf der Ausdruck „wechselweise ungleich“ einer Erklärung; nachdem diese aber gegeben ist, genügt die kurze Fassung, um den Sinn klar zu machen. Zum Beweise legt man die Dreiecke am besten mit der Hypotenuse so aneinander, daß sie auf verschiedenen Seiten der Hypotenuse liegen. Bei der Anwendung auf die beiden ungleichen Sehnen AB und CD des Kreises (O) fügt man eine Sehne $AE = CD$ so hinzu, daß die Punkte B und E auf verschiedenen Seiten der Geraden AO liegen. Wenn man die rechtwinkligen Dreiecke über einander legt oder die Sehnen AB und AE auf derselben Seite von AO annimmt, so kommt der Schüler leicht in die Versuchung, den wesentlichsten Punkt des Beweises zu übersehen. Nachdem der pythagoreische Lehrsatz durchgenommen ist, kann man die Beziehung hervorheben, in der er zu dem hier besprochenen Lehrsatze steht.

Die Konstruktion der Geraden, die einen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt, kommt auf die Aufgabe hinaus: In einem gegebenen Punkte einer Geraden auf ihr die Senkrechte zu errichten. Zwei Lösungen dieser Aufgabe sind allgemein bekannt. Wir möchten aber außerdem auf eine Konstruktion der Tangente hinweisen, die Adler (Konstruktions-Aufgaben S. 116) mitteilt, weil sie den Satz vom Sehnen-Tangenten-Winkel auf eine ganz interessante Weise anwendet und zudem die Kenntnis des Mittelpunktes nicht verlangt. Wenn auf dem Kreise k der Punkt A gegeben ist, so wählt man auf k noch den Punkt B und beschreibt den Kreis $(B)A$, der k zum zweiten Male in C trifft, sowie den Kreis $(A)C$, der (B) in D schneidet. Dann ist AD Tangente an k, wie sich ergibt, wenn man noch AB

zieht und beachtet, daß (B) der Umkreis des gleichschenkligen Dreiecks ADB ist.

Indem man in einem gegebenen Kreise einen Radius zieht und in seinem Endpunkte auf ihm die Senkrechte errichtet, erhält man ein Geradenpaar, das folgende Eigenschaften hat: die Geraden stehen aufeinander senkrecht, sie treffen sich in einem Punkte des Kreises, die eine ist Tangente, und die andere geht durch den Mittelpunkt. Da dies Geradenpaar noch in anderer Weise bestimmt werden kann, führt das Identitätsprinzip zu den drei weiteren Sätzen: Die vom Mittelpunkte auf eine Tangente gefällte Senkrechte geht durch den Berührungspunkt; die Verbindungsgerade des Mittelpunktes mit dem Berührungspunkte einer Tangente steht auf ihr senkrecht; die im Berührungspunkte einer Tangente auf ihr errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt.

Für die Aufgabe: Von einem Punkte A im Äußern des Kreises (O) die Tangente an ihn zu legen, wird fast ausschließlich der über der Strecke AO als Durchmesser beschriebene Kreis benutzt. Diese Konstruktion rührt nach einer Bemerkung Simons von Clavius her. Euklid legt in einem beliebigen Punkte B des Kreises die Tangente an; ist C der Schnittpunkt dieser Tangente mit dem Kreise $(O)A$, so stellen die Schnittpunkte des gegebenen Kreises und des um A mit dem Radius BC beschriebenen Kreises die Berührungspunkte der gesuchten Tangenten dar. Eine dritte Konstruktion, die von M. Simon gegeben wurde, nimmt den um O mit dem doppelten Radius beschriebenen Kreis hinzu; sind B und C die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem Kreise $(A)O$, und M und N die Punkte, in denen der gegebene Kreis von den Geraden OB und OC getroffen wird, so sind AM und AN die gesuchten Tangenten. Die Ansicht, daß die beiden letzten Konstruktionen auch ein Anrecht darauf haben, neben der ersten gelehrt zu werden, scheint immer allgemeiner zu werden. Während die gebräuchliche Konstruktion sich auf die euklidische Ebene beschränkt, bleiben die beiden letzten auch auf der Kugel gültig; die an der dritten Stelle erwähnte Konstruktion läßt sich zudem auf die Ellipse mit gegebenen Brennpunkten übertragen.

5. **Die Winkel am Kreise.** So lange man einem Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkte eines Kreises liegt, sein natürliches Winkelfeld zuordnet, bleibt der darin enthaltene Bogen kleiner als der Halbkreis. Will man auch einem Bogen, der größer ist als der Halbkreis, einen Zentriwinkel zuordnen, so muß man als sein Winkelfeld denjenigen durch die Schenkel abgegrenzten Ebenenteil ansehen, der den Bogen in sich enthält. Indem man das tut, erreicht man, daß zu jedem Bogen ein bestimmter Zentriwinkel gehört. Dadurch wird man gezwungen, erhabene oder überstumpfe Winkel einzu-

führen. Die Beziehung auf den Bogen macht eine Ausnahme von der Regel nötig, nach der man im allgemeinen jedem Winkel sein natürliches Winkelfeld zuordnen soll. Die Berechtigung, diese Ausnahme zu machen, leuchtet dem Schüler sehr leicht ein. Auch ist dies die einzige Ausnahme, die in den Elementen der Planimetrie nötig wird. Zwar kommen erhabene Winkel noch in der allgemeinen Theorie der Polygone vor; aber der Unterricht beschränkt sich auf konvexe Polygone, bei denen man mit hohlen Winkeln auskommt.

Als Peripheriewinkel im eigentlichen Sinne werden nur diejenigen angesehen, deren Schenkel den Kreis schneiden (also Sehnen in sich enthalten). Der allgemein verbreitete Beweis über die Beziehung zum zugeordneten Zentriwinkel benutzt außer den Sätzen vom Außenwinkel eines Dreiecks und von den Basiswinkeln eines gleichschenkligen Dreiecks noch die algebraische Formel:

$$\frac{\alpha \pm \beta}{2} = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\beta}{2};$$

auf den letzten Umstand wird vielfach nicht bestimmt genug hingewiesen. Aus dem Satze geht hervor, daß alle Peripheriewinkel über demselben Bogen einander gleich sind. Man bildet die teilweise Umkehrung, indem man den Satz aufstellt: Wenn die Schenkel eines Winkels von vorgeschriebener Größe durch die Endpunkte einer Strecke gehen und der Scheitel immer auf derselben Seite dieser Strecke liegt, so gehört der Scheitel einem festen Kreisbogen an; oder: Der geometrische Ort für den Scheitel eines Winkels von unveränderlicher Größe, dessen Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, besteht aus zwei Kreisbögen; oder: Wenn in einem Dreieck zwei Eckpunkte feste Lagen haben und der dritte Winkel eine vorgeschriebene Größe hat, so besteht der geometrische Ort für den dritten Eckpunkt aus zwei Kreisbogen. Die letzten Aussprüche gehen aber über den Satz vom Peripheriewinkel hinaus; denn dieser sagt nichts aus über die Winkel, deren Schenkel durch die Endpunkte eines Bogens gehen, und deren Scheitel beliebige Lagen haben. Da aber der Bogen als der geometrische Ort für den Scheitel eines Winkels von vorgeschriebener Größe sehr wichtig ist, muß der Unterricht ausdrücklich darauf hinweisen, daß unter den Winkeln, deren Schenkel durch die Endpunkte eines Bogens gehen, und deren Scheitel auf derselben Seite der zugehörigen Sehne liegen, nur jene einander gleich sind, deren Scheitel auf dem Bogen liegen, alle andern aber größer oder kleiner. Man kann aber auch weiter gehen und die beiden Sätze hinzunehmen:

Ein Winkel, dessen Scheitel im Innern eines Kreises liegt, ist gleich der Summe der Peripheriewinkel über den beiden Bögen, von denen der eine im Felde des Winkels selbst und der andere im Felde seines Scheitelwinkels liegt.

Ein Winkel, dessen Scheitel im Äußern eines Kreises liegt, und dessen Schenkel den Kreis schneiden oder berühren, ist gleich der Differenz aus den Peripheriewinkeln über den beiden Bögen, die in seinem Felde liegen.

Der Grenzfall des Peripheriewinkels ist der Sehnen-Tangenten-Winkel (Abschnittswinkel). Beim Beweise des Satzes, der für diesen Winkel gilt, beschränkt man sich leider häufig auf den Fall, daß der Winkel ein spitzer ist. Dazu liegt aber kein Grund vor; es genügt, folgende Betrachtung anzustellen. Es sei BAT ein Sehnen-Tangenten-Winkel, AB die zugehörige Sehne, AT eine Halbtangente in A, O der Mittelpunkt des Kreises, M die Mitte des im Winkelfelde gelegenen Bogens. Je nachdem der Mittelpunkt diesem Winkelfelde angehört oder nicht, ist $\sphericalangle AOM = 90^0 \pm OAB$ und $TAB = 90^0 \pm OAB$, somit in beiden Fällen $\sphericalangle AOM = TAB$. Bei diesem Beweise tritt der Winkel in enge Beziehung zu dem soeben besprochenen geometrischen Orte. Die partielle Umkehrung stützt man leicht auf Identität. (Verschiedene Konstruktionen dieses Ortes findet man in Schwerings Handbuch S. 106, 107.)

Es ist sehr wichtig, die Tangente auch als Grenzlage der Sekante aufzufassen. Zu dem Zwecke läßt man von einem festen Punkte A eines Kreises $(O)A$ beliebig viele Sekanten AB ausgehen, wo der zweite (der veränderliche) Schnittpunkt mit B bezeichnet werden möge. Je mehr der Winkel OAB sich einem Rechten nähert, um so kleiner wird die Sehne AB, und um so kleiner wird der Winkel, den die Sekante mit der einen Halbtangente in A bildet.

Um den Satz vom Peripheriewinkel zu erläutern, kann man folgende Betrachtung anstellen. Die Punkte A, B, C mögen auf dem Kreise (O) liegen. Bewegt man den Winkel ACB unter Beibehaltung seiner Größe so, daß seine Schenkel beständig durch die Punkte A und B gehen, so kann der Scheitel jede Lage auf dem Bogen ACB annehmen. Wenn dann der Scheitel mit A zusammenfällt, so geht ein Schenkel in eine von A ausgehende Halbtangente über. Will man die Bewegung weiter fortsetzen, so muß man zunächst den Halbstrahl AT durch den Halbstrahl AT' ersetzen, der zu AT symmetrisch gegen die Gerade AB liegt. Von da geht der Scheitel auf einen zweiten Bogen über, der symmetrisch zum Bogen ACB in bezug auf die Sekante AB liegt. Diese beiden Bögen gehören nur dann demselben Kreise an, wenn der Winkel ein Rechter ist.

Statt dessen kann man aber den Winkel auch so bewegen, daß der eine Schenkel stets durch A geht und der Scheitel auf dem Kreise verbleibt. Fällt hierbei der Scheitel mit A zusammen, so geht der eine Schenkel in eine Halbtangente über; der andere enthält noch den Punkt B, und das Winkelfeld schließt immer denselben Bogen ein. Wenn aber der Scheitel auf den andern Bogen übergeht, der in den Punkten A und B begrenzt wird, so geht nicht mehr der zweite Schenkel, sondern der zu ihm entgegengesetzte Halbstrahl durch B hindurch. Wir werden dadurch auf einen Winkel geführt, dessen Scheitel auf der Peripherie liegt, von dessen Schenkeln aber nur einer den Kreis schneidet. Derartige Winkel kommen sehr häufig in Konstruktionsaufgaben vor. Die angestellte Betrachtung dürfte zudem geeignet sein, den Begriff der Funktion vorzubereiten. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, den Begriff des Peripheriewinkels auf jeden Winkel zu übertragen, dessen Scheitel im Umfange eines Kreises liegt. Die beiden Bögen, die im Felde selbst und in dem des Scheitelwinkels liegen, setzen sich zu einem einzigen Bogen zusammen, und dieser Bogen muß dem Peripheriewinkel zugeordnet werden.

Bei dem Satze über die Winkel eines Sehnenvierecks legt man in neuerer Zeit auf Anschaulichkeit ein größeres Gewicht, als früher geschah. Will man den Begriff des Peripheriewinkels in der soeben besprochenen Weise erweitern, so wird der Beweis sehr einfach; jeder Außenwinkel des Vierecks enthält in seinem Felde im Verein mit dem Felde seines Scheitelwinkels denselben Bogen, wie der Innenwinkel an der Gegenecke. Weniger empfiehlt es sich, die Winkel zu benutzen, die die einzelnen Seiten mit den nach ihren Endpunkten führenden Radien bilden; denn hierbei kann der Beweis nicht einheitlich durchgeführt werden; vielmehr muß man die drei Fälle unterscheiden, ob der Mittelpunkt im Innern oder im Äußern des Vierecks oder auf einer Seite liegt. Besser dürfte es sein, jeden Viereckswinkel durch die von seinem Scheitel ausgehende Diagonale in zwei Teile zu zerlegen und die einzelnen auf diese Weise entstandenen Teile miteinander zu vergleichen. Vielleicht ist es am besten, die Tangente hinzuzunehmen, die man in einem Eckpunkte des Vierecks an den Kreis legt. Es möge etwa die Gerade TU den Kreis im Eckpunkte A des Vierecks $ABCD$ berühren, wo B und T auf der einen, D und U auf der andern Seite von AC liegen sollen. Dann ist $\sphericalangle ABC = CAU$, $\sphericalangle CDA = CAT$, also $\sphericalangle B + D = 2R$.

Die Benutzung dieser Tangente ermöglicht es auch, die Umkehrung auf Identität zurückzuführen. Auf der Geraden, die den Umkreis (O) eines Dreiecks ABC im Punkte C berührt, sei M ein Punkt, der nicht mit B auf derselben Seite der Geraden AC liegt. Um das Dreieck zu einem einfachen Viereck zu ergänzen, in dem AC Diagonale und die Summe der Winkel bei A und C gleich $2R$ ist, hat man, wie ersichtlich, von C aus einen Halbstrahl zu ziehen, der im Felde des Winkels ACM liegt. Ein beliebig gewählter Halbstrahl dieser Art treffe (O) in D. Dann gibt es erstens einen eindeutig bestimmten Halbstrahl, der von A ausgeht und D trifft, zweitens einen ebensolchen, der von A ausgeht und die Summe der Winkel bei A und C zu $2R$ macht. Die Identität des ersten mit dem zweiten ist erwiesen, also ist auch der zweite vom ersten nicht verschieden.

Dem Sehnenviereck ist das Tangentenviereck dual zugeordnet. Der Satz, daß in jedem konvexen Tangentenviereck je zwei Gegenseiten gleiche Summe haben, wird bekanntlich in einer sehr einfachen Weise bewiesen. Dagegen macht der Beweis der Umkehrung einige Schwierigkeiten. Die meisten Lehrbücher helfen sich dadurch, daß sie einen Kreis benutzen, der drei Seiten berührt, und über die Berührungspunkte spezielle Annahmen machen, deren Berechtigung durchaus nicht selbstverständlich ist. Einen strengen Beweis gibt J. K. Becker in seinem Lehrbuche; aber dieser ist so weitläufig, daß er dem Schüler große Schwierigkeiten bereitet. Da werden vielleicht manche Lehrer der Meinung sein, es sei besser, den Satz gar nicht zu bringen, als den Beweis entweder zu erschleichen oder auf höchst schwierige Erwägungen zu stützen. Man könnte sich allenfalls darauf beschränken, zu zeigen, daß in jeden Rhombus ein Kreis eingezeichnet werden kann, was keine Schwierigkeit bietet. Indessen läßt sich auch für die allgemeine Umkehrung ein Beweis führen, der zugleich streng und einfach ist.

In dem Viereck $ABCD$ sei $AB + CD = BC + DA$. Wenn es nicht ein Rhombus ist, so hat es mindestens zwei nicht parallele Gegenseiten. Demnach mögen DA und CB sich in S schneiden. Weil das Viereck konvex ist, liegt entweder A zwischen S und D oder D zwischen S und A. Wir nehmen an, A liege zwischen S und D, und damit auch B zwischen S und C. Der zur Seite AB gehörige Ankreis (O) des Dreiecks SAB berühre die drei Vierecksseiten DA, AB, BC der Reihe nach in E, F, G. Dann liegt E zwischen A und D, ebenso G zwischen B und C. Verbindet man nämlich einen Punkt L der Verlängerung von BG mit E, so ist $LE > LG$, da der Winkel EGL stumpf ist. Nun gibt es auf CD einen Punkt H, der so liegt, daß $CH = CG$ und $DH = DE$ ist. Die vier Punkte E, F, G, H sind Ecken eines einfachen Vierecks, in dem die Summe der Winkel E und G gleich der von F und H ist, wie sich aus gleichschenkligen Dreiecken leicht ergibt. Demnach geht der Kreis (O) auch durch H, und da $CG = CH$ ist, so berührt er in H die Seite CD des Vierecks.

Jetzt noch ein Wort über die Aufgabe: Durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu legen. Bekanntlich findet man für den Mittelpunkt drei geometrische Örter, nämlich die Mittellote der drei Strecken, durch die je zwei der Punkte miteinander verbunden werden. Ob aber diese Geraden wirklich einen Punkt gemein haben, kann bei der von uns empfohlenen Behandlung der Parallelentheorie (§ 14, 5 S. 259) erst ermittelt werden, nachdem erkannt worden ist, daß durch jeden Punkt nur eine Gerade geht, die mit einer gegebenen Geraden in einer Ebene liegt und sie nicht schneidet (S. 263). Wenn man sich mit der Lösung der Aufgabe begnügt, so kann man bei Besprechung der Determination die Sache in der Schwebe lassen und später darauf zurückkommen. Immerhin erkennt man auch auf dieser Stufe schon, daß durch die drei Punkte nicht mehr als ein Kreis geht, und daß daher zwei verschiedene Kreise höchstens zwei Punkte gemein haben. Will man aber bereits an dieser Stelle den Satz bringen: Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte läßt sich stets ein Kreis legen, so kann man die auf S. 263 angestellte Erwägung hier einschieben. Dadurch wird es möglich, den niedern Teil der Kreislehre zum vollen Abschluß zu bringen, da man jetzt auch beweisen kann, daß jedes Dreieck drei Ankreise besitzt.

6. **Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.** Über den Schwerpunkt haben wir schon in § 14 (S. 262) gesprochen. Die übrigen merkwürdigen Punkte des Dreiecks sind so eng mit der Kreislehre verbunden, daß sie von ihr nicht getrennt werden dürfen. Auf den Mittelpunkt des Umkreises als den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten sowie auf den Mittelpunkt des Inkreises als den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden brauchen wir nicht einzugehen. Dagegen glauben wir über die Behandlung der Ankreise einige Worte beifügen zu sollen. Wir gehen etwa von der Geraden aus, durch die im Dreieck ABC die Außenwinkel an B und an C halbiert werden. Die Verlängerung von AB möge BD und die Verlängerung von AC möge CE genannt werden; O_a sei der Schnittpunkt der Geraden, durch die die Winkel CBD und BCE halbiert werden. Da die Winkel O_aBC, O_aBD, O_aCB und O_aCE sämtlich spitz sind, so liegt für die drei Senkrechten, die man von O_a auf die drei Seiten fällen kann, ein Fußpunkt zwischen B und C, ein zweiter im Halbstrahl BD und der dritte im Halbstrahl CE. Der Punkt O_a liegt mit C auf derselben Seite von AB, und mit B auf derselben Seite von AC, also im Winkelfelde BAC; er gehört demnach wegen der Gleichheit der auf die Schenkel gefällten Senkrechten der Halbierenden dieses Winkels an.

Die Strecken, welche auf den einzelnen Seiten von einem Eckpunkte und dem Berührungspunkte des In- oder eines Ankreises begrenzt werden, lassen sich leicht bestimmen; für denselben Kreis erhält man jedesmal ein einfaches System von linearen Gleichungen mit drei Unbekannten. Daraus geht bekanntlich hervor, daß auch die Punkte, in denen eine jede Seite von verschiedenen Kreisen berührt wird, Entfernungen haben, die zu der Länge der Seiten in naher Beziehung stehen. Alle diese Strecken sind für viele Konstruktionsaufgaben von hoher Wichtigkeit; indessen erhalten sie ihre volle Bedeutung erst in der Trigonometrie.

Daß die drei Höhen eines Dreiecks durch denselben Punkt, den Höhenpunkt, hindurchgehen, wird mit Recht gewöhnlich auf dem von Gauß angegebenen Wege bewiesen; indem man durch jeden Eckpunkt des Dreiecks zu der Gegenseite die Parallele zieht, erhält man ein neues Dreieck, für das die Höhen des gegebenen Dreiecks zu Mittelsenkrechten der Seiten werden. Etwas weitläufiger wird der Beweis, wenn man über den Seiten als Durchmessern drei Kreise beschreibt und die Winkel vergleicht, die auf demselben Bogen stehen (vgl. Schwering, Handbuch S. 256). Dieser Beweis hat außerdem den Nachteil, daß er für spitz- und stumpfwinklige Dreiecke nicht in gleicher Weise geführt werden kann. Gudermann hat für den Satz einen Beweis gefunden, der vom Parallelenaxiom unabhängig ist und deshalb auch für das sphärische Dreieck gilt. Ist das Dreieck ABC gegeben, so geht man etwa von den Höhen AD und BE aus, die sich in H schneiden mögen, und fügt einen Punkt F so hinzu, daß die von den Geraden DE und DF gebildeten Winkel durch DH und BC, die Winkel der Geraden ED und EF durch EH und CA halbiert werden. Zu dem Ende legt man den Winkel HDE an die andere Seite von HD und den Winkel HED an die andere Seite von HE so an, daß für den ersten Winkel der Halbstrahl DH, für den zweiten der Halbstrahl EH ein Schenkel bleibt. Der gesuchte Punkt F ist der Punkt, in dem sich die zweiten Schenkel der neuen Winkel (bzw. ihre Verlängerungen) schneiden. Hiernach kennt man für das Dreieck DEF die Halbierungslinien der Innen- und der Außenwinkel an den Eckpunkten D und E; die Punkte A, B, C, H sind daher die Mittelpunkte für die Berührungskreise der Seiten des Dreiecks DEF. Infolgedessen halbieren die Geraden CH und AB die von den Geraden FD und FE gebildeten Winkel; CH und AB gehen somit durch F und stehen aufeinander senkrecht.

Man findet vielfach die Behauptung ausgesprochen, der Punkt H sei der Mittelpunkt des Inkreises vom Dreieck DEF. Diese Behauptung ist nur richtig, wenn das Dreieck ABC spitzwinklig ist. Zudem sind die Punkte D, E, F Fußpunkte der Höhen für vier Dreiecke, nämlich für die Dreiecke ABC, BCH, CAH und ABH. Nimmt man aus den vier Punkten A, B, C, H irgend drei heraus, so ist der vierte Punkt jedesmal Höhenpunkt für das Dreieck, das die gewählten Punkte zu Eckpunkten hat. Die vier auf diese Weise gebildeten Dreiecke haben dieselben drei Punkte zu Fußpunkten der Höhen.

Der Satz vom Höhenpunkte eines Dreiecks kann auch in folgender Form ausgesprochen werden:

Durch die vier Punkte, in denen sich die allseitig verlängerten Schenkel von zwei rechten Winkeln schneiden, gehen noch zwei weitere Gerade, die aufeinander senkrecht stehen.

Wir dürfen in der angegebenen Figur von den Geradenpaaren AD, BC und BE, CA ausgehen, wo die Winkel ADB und AEB Rechte sind. Die Geradenpaare schneiden sich in den Punkten A, B, C, H, und die Geraden AB und CH, die noch durch die vier Punkte gehen, stehen ebenfalls aufeinander senkrecht. Dadurch tritt der Satz, daß die Höhen eines Dreiecks durch einen Punkt gehen, in enge Beziehung zu dem Satze: Die Kurven eines Büschels von Kegelschnitten schneiden jede beliebige Gerade in Punkten einer Involution. Setzt man speziell voraus, die in dieser Weise auf der unendlichfernen Geraden gebildete Involution habe die unendlichfernen Kreispunkte zu Hauptpunkten, so geht aus dem angegebenen Satze der folgende hervor:

Zwei gleichseitige Hyperbeln, deren Asymptoten nicht parallel sind, schneiden sich stets in vier reellen Punkten; jeder weitere Kegelschnitt, der durch diese vier Punkte gelegt werden kann, ist ebenfalls eine gleichseitige Hyperbel. Die Geraden eines jeden Geradenpaares, das durch die vier Punkte geht, stehen aufeinander senkrecht. Nimmt man irgenddrei von diesen Punkten zu Eckpunkten eines Dreiecks, so fällt ein Höhenpunkt jedesmal mit dem vierten Punkte zusammen.

Zwar kann man noch manche andere Sätze über den Kreis, das Dreieck und das Vieleck bereits an dieser Stelle beweisen. Es empfiehlt sich aber, über die angegebenen Sätze nicht hinauszugehen, vielmehr den weiteren Ausbau der Kreislehre späteren Abschnitten vorzubehalten.

§ 16. Die Lehre von der Flächengleichheit.

1. **Der Unterrichtsstoff und seine Anordnung.** Der Beweis für die Berechtigung des Flächenmaßes ebener Flächen gehört nicht in die Schule. Dagegen ist die Flächengleichheit zu erläutern. Zu dem Ende bedarf es keiner scharfen Definition; man kann den Begriff auch ohne streng doktrinäre Unterweisungen zum vollen Verständnis bringen. Der Unterschied zwischen Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit ist so wichtig, daß er erwähnt zu werden verdient, wenn man auch vielleicht die Worte selbst nicht gebrauchen will. Wer ohne Definition nicht glaubt auskommen zu können, darf die Inhaltsgleichheit nicht auf Zerlegungsgleichheit allein zurückführen, wie zuweilen geschieht. Das ist schon aus dem Grunde unstatthaft, weil die gebräuchlichen Beweise auf Ergänzungsgleichheit hinauskommen. Daß inhaltsgleiche ebene Polygone immer zerlegungsgleich sind, ist ein Lehrsatz, der sich, wie wir oben (S. 78) gesehen haben, beweisen läßt. An sich sind Inhalts- und Zerlegungsgleichheit ganz verschiedene Begriffe, wie die konvexen Polyeder zeigen, die inhaltsgleich sein können, ohne zerlegungsgleich zu sein (§ 7, 10. S. 142).

Im Abschnitt über die Flächengleichheit werden die Beweise vielfach durch einfache Konstruktionen vertreten. Dadurch gewinnt der Lehrgang an Abwechslung und Anschaulichkeit. Es ist also verfehlt, wenn man erst die ganze Theorie im Zusammenhang durchnimmt und darauf erst die zugehörigen Aufgaben folgen läßt. Vielmehr muß der Lehrer sich freuen, die Lehrsätze und die Konstruktionen zu einem einheitlichen Ganzen verschmelzen zu können; er wird aber darauf dringen, daß aus den Konstruktionen die Folgerungen gezogen und diese als Lehrsätze ausgesprochen werden.

Der gebräuchliche Gang kann im wesentlichen beibehalten werden. Man geht aus von zwei Parallelogrammen, die zwischen denselben Parallelen liegen und eine Seite gemein haben, und schließt daraus auf die Flächengleichheit von Parallelogrammen, die gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben. Das Dreieck wird in ein zerlegungsgleiches Parallelogramm verwandelt; daraus geht der erste (und zugleich wichtigste) Satz über die Gleichheit von Dreiecken hervor. Dieser Satz ermöglicht es, jedes konvexe Polygon allmählich in ein Rechteck zu verwandeln. Das Trapez mag noch eigens erwähnt werden, weil dabei der Satz über die Mittellinie (§ 14, 6 S. 262) eine schöne Anwendung findet. Dazu kommt noch der pythagoreische Lehrsatz nebst einem wichtigen Satze, der in dem gebräuchlichen Beweise desselben enthalten ist; hierauf wollen wir nachher noch eigens eingehen.

Eine weitere Ausdehnung des Gebietes ist nicht notwendig. Die Bedeutung, welche der Satz von den sogenannten Ergänzungsparallelogrammen für Euklid hatte, ist für die neuere Mathematik verloren gegangen. Der Satz braucht daher jetzt nicht mehr ins Lehrgebäude aufgenommen zu werden. Da man aber die aus diesem Satze hervorgehende Umwandlung von Parallelogrammen für mancherlei Aufgaben gebrauchen kann, mag der Satz auch ferner erwähnt werden. Andere Sätze können unbedenklich bis zur Ähnlichkeitslehre oder gar bis zur Trigonometrie hinausgeschoben werden. Zwar ist es ganz gut möglich, mit Henrici-Treutlein (Lehrbuch der Elementar-Geometrie I S. 97) und andern auf dieser Stufe den Satz beweisen, daß das Quadrat über der Hypotenusenhöhe eines rechtwinkeligen Dreiecks gleich ist dem Rechteck aus den Abschnitten der Hypotenuse; während der Satz an dieser Stelle aber ganz isoliert dasteht, bildet er in der Ähnlichkeitslehre ein Glied in einer Reihe von Sätzen, die notwendig behandelt werden müssen. Derjenige Satz, welcher dem pythagoreischen Lehrsatze für schiefwinklige Dreiecke entspricht, läßt sich in diesem Abschnitte schon recht schwer in Worte kleiden; die gebräuchliche Form des Beweises muß mehrere Fälle unterscheiden und ermangelt der Anschaulichkeit, trägt sogar mehr einen arithmetischen als einen geometrischen Charakter. Zwar hat der Beweis, den Henrici und Treutlein in ihrem soeben genannten Lehrbuche geben, unbestreitbare Vorzüge. Indessen geht es ganz gut an, den Satz der Trigonometrie vorzubehalten, wo er auf den Kosinussatz hinauskommt und wo er höchst einfach ist. Die tiefere Begründung dieses Vorschlages müssen wir der Trigonometrie vorbehalten.

Wenn man auf den zuletzt genannten Satz verzichtet, mag man die Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes etwa auf die von Euklid angegebene Weise erhärten.

Der Satz des Pappus endlich und ähnliche Sätze sind zu kompliziert, als daß sie zum dauernden Besitztum der Schüler werden können; schon aus diesem Grunde darf man sie beim Unterricht ganz übergehen.

2. **Der Satz des Pythagoras.** Der allbekannte Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes, den alle Lehrbücher bringen, rührt, wie die Alten ausdrücklich bezeugen, von Euklid her. Wie hoch die griechischen Mathematiker diesen Beweis schätzten, geht schon daraus hervor, daß alle früheren Beweise der Vergessenheit anheimgefallen sind und uns nur dieser eine Beweis überliefert worden ist. In der Tat ist die große Wertschätzung des euklidischen Beweises in seiner Einfachheit und seiner Einheitlichkeit wohlbegründet. Seinem Wesen nach kommt der Beweis auf die zweimalige Benutzung des Satzes hinaus: Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich mit dem Rechteck, das aus der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse gebildet wird. Dieser Satz ist aber auch an sich sehr wichtig; er macht es möglich, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, dient also mit andern Worten zur Lösung einer jeden Aufgabe, die einer rein quadratischen Gleichung entspricht. Dem entsprechend führt dieser Satz dazu, jedes Polygon in ein inhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln. Es ist daher nur zu billigen, daß die neueren Lehrbücher diesen Satz nicht mit Euklid in den Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes einschieben, sondern ihm durchweg eine selbständige Stellung zuweisen.

Dennoch dürfen wir nicht übersehen, daß der euklidische Beweis etwas Künstliches an sich hat und daß bei der Form, die man ihm meistens gibt, seine wahre Grundlage nur zu leicht übersehen wird.

Um hierauf einzugehen, verwandeln wir ein ungleichseitiges, schiefwinkliges Parallelogramm auf doppelte Weise in ein Rechteck, indem wir der Reihe nach je eine von zwei zusammenstoßenden Seiten als Grundlinie auffassen. Dadurch erhalten wir zwei Rechtecke, die beide mit dem gegebenen Parallelogramm und somit auch untereinander gleichen Inhalt haben. Um diese beiden Rechtecke in möglichst enge Beziehung zueinander zu setzen, liegt es nahe, das

Parallelogramm in zwei verschiedenen Lagen vorauszusetzen, in denen sie einen Eckpunkt miteinander gemein haben, während die Seiten paarweise aufeinander senkrecht stehen. Die hierbei auftretenden Rechtecke werden aber auch sehr einfach durch zwei von demselben Punkte ausgehende Strecken erhalten. Wenn nämlich die Strecken AB und AC gegeben sind und von B die Senkrechte BB_1 auf AC und von C die Senkrechte CC_1 auf AB gefällt wird, so ergibt sich durch Hinzunahme von zwei kongruenten Parallelogrammen, daß das Rechteck aus den Strecken AB und AC_1 gleich ist dem aus den Strecken AC und AB_1 gebildeten Rechtecke. Der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks, das aus einer Strecke und der Projektion der andern auf sie gebildet wird, ist nicht bloß für die synthetische und analytische Geometrie von Bedeutung, sondern dient auch in der Mechanik zur Definition der Arbeit; er kommt hinaus auf das Produkt zweier Strecken in den Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Diese Größe wird zuweilen mit einem eigenen Namen belegt und als das innere Produkt der beiden Strecken bezeichnet

Der euklidische Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes wendet sich an erster Stelle an den Verstand; die hohe Bedeutung des Satzes macht es aber wünschenswert, ihn außerdem nach einer Methode zu beweisen, bei der auch die Anschauung zu ihrem vollen Rechte kommt. Zu dem Ende vereinigt man die beiden Kathetenquadrate zu einer einzigen Figur, einem Sechseck, von dem fünf Winkel je gleich einem Rechten und einer gleich drei Rechten ist. Dies Sechseck zerlegt man in eine gewisse Anzahl von Flächen, aus denen durch andere Anordnung das Quadrat der Hypotenuse hervorgeht. Die Figur 31 zeigt, daß jede der beiden Flächen sich zusammensetzen läßt aus dem Quadrat über der Differenz der Katheten und aus vier Dreiecken, von denen jedes mit dem gegebenen Dreieck kongruent ist.

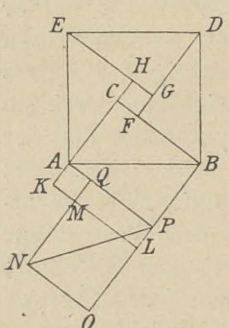

Fig. 31.

Noch einfacher ist vielleicht die Zerlegung, die in Figur 32 durchgeführt ist. Das Quadrat $ABDE$ liegt auf derselben Seite von AB wie das in C rechtwinklige Dreieck ABC. Man fälle von D die Senkrechte DJ auf BC und lege an das Quadrat die Dreiecke EDH und AEF an, welche beide zu ABC kongruent sind. Dann liegen die Punkte H, E, FJ in gerader Linie. Wenn sich jetzt die Geraden HE und BC in G schneiden, so ist $ACGH$ das Quadrat über AC, und $DHGJ$ gleich dem Quadrat über BC. Fügt man jetzt zu dem Fünfeck $EACJD$ die Dreiecke

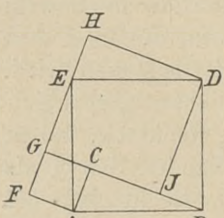

Fig. 32.

ABC und BDJ hinzu, so erhält man das Quadrat über AB, während die Summe der Kathetenquadrate aus demselben Fünfeck und den Dreiecken EAF und EDH besteht.

Die Art und Weise, wie man den pythagoreischen Lehrsatz bei beliebiger Lage der Kathetenquadrate durch Zerlegung in Paare kongruenter Dreiecke führen könne, hat Brandes in der oben (S. 202) erwähnten Dissertation streng systematisch untersucht.

§ 17. Die geometrischen Proportionen, Theorie der Irrationalzahlen.

1. **Vorbemerkungen.** Bekanntlich haben bereits die alten Pythagoreer bemerkt, daß es Strecken gibt, die kein gemeinsames Maß besitzen. Es scheint, daß sie durch die Erkenntnis dieser Tatsache, die ihnen, wie berichtet wird, zuerst an der Seite und der Diagonale des Quadrats entgegentrat, anfangs selbst überrascht und dadurch zu mancher phantastischen Ansicht verleitet wurden, die von der fortschreitenden Wissenschaft verworfen werden mußte. Jedenfalls wurde aber durch die neue Entdeckung der Boden der bloßen Praxis verlassen und der rein wissenschaftliche Charakter der Geometrie gesichert. Indem dann die alten Griechen auf dem betretenen Wege weiter fortschritten, klärten sie ihre Anschauungen immer mehr und drangen immer tiefer in das Wesen der Sache ein. Die Theorie des Irrationalen, die Euklid im zehnten Buche seiner Elemente entwickelt, steht bereits auf einer hohen wissenschaftlichen Stufe; ja, sie enthält Keime in sich, die erst in der neuesten Zeit zur vollen Entwicklung gebracht sind.

Die naive Auffassung hält alle Messungen für exakt und erachtet es deshalb für selbstverständlich, daß gleichartige Größen stets ein gemeinschaftliches Maß haben. Ehe man den Schüler mit den inkommensurabeln Größen bekannt machen kann, muß diese Ansicht zerstört und die Überzeugung gewonnen sein, daß alle Messungen mit Fehlern behaftet und deshalb ungenau sind. Man kann daher unmöglich auf wirkliches Verständnis rechnen, wenn man den Schüler rein dogmatisch in die Theorie des Irrationalen einführt. Vielmehr sind mancherlei Vorbereitungen, die längere Zeit in Anspruch nehmen, unbedingt notwendig, ehe der jugendliche Geist befähigt wird, eine so abstrakte Theorie zu erfassen.

Man kann zu dem Ende den Schüler anhalten, selbst Messungen auszuführen. Diese mögen anfangs ziemlich roh sein, müssen aber allmählich zu immer größerer Genauigkeit fortschreiten. Indem die Ergebnisse, die hierbei von verschiedenen Schülern oder auch von demselben Schüler zu verschiedenen Zeiten gewonnen sind, miteinander verglichen werden, drängt sich unabweisbar die Überzeugung auf, daß alle Messungen ungenau sind.

Es empfiehlt sich auch, an die bekannte Aufgabe anzuknüpfen: Eine Strecke in eine beliebige Anzahl von gleichen Teilen zu zerlegen und mit ihrer Hilfe die Aufgabe zu lösen: Eine gegebene Strecke in einem zu bestimmenden Punkte nach einem vorgeschriebenen rationalen Verhältnisse zu teilen. Man löst diese Aufgabe für zwei verschiedene Verhältnisse, die man so wählt, daß die Teilpunkte in der Zeichnung kaum noch unterschieden werden können. Teilt man z. B. eine Strecke nach den Verhältnissen $m : n$ und $p : q$, indem man die vier ganzen Zahlen m, n, p, q so wählt, daß zwischen ihnen die Beziehung besteht: $mq - np = 1$, so ist der Abstand der Teilpunkte nur gleich dem $(m+n)(p+q)^{\text{ten}}$ Teile der gegebenen Strecke. Schon die Teilung nach den Verhältnissen $4 : 7$ und $7 : 12$ liefert zwei Teilpunkte, die nur um den 209^{ten} Teil der Strecke voneinander abstehen. Wenn man aber ein Meter erst nach dem Verhältnisse: $13 : 33$ und dann nach dem Verhältnisse: $11 : 28$ teilt, so sind die Teilpunkte nur um ein wenig mehr als ein halbes Millimeter voneinander entfernt.

Die letzte Übung bereitet schon den Begriff der Proportion vor; sie führt ferner zu der Erkenntnis, daß die Frage, ob zwei Strecken kommensurabel sind oder nicht, keineswegs durch wirkliche Messung beantwortet werden kann, daß man vielmehr zu ihrer Entscheidung die Figur untersuchen muß, in der die Strecken miteinander vereinigt sind. Vor allem aber belehrt sie den Schüler, daß auch die feinste Teilmarke auf einer gezeichneten Strecke immer noch eine unendliche Menge von gedachten rationalen Teilpunkten vertritt.

2. **Rein geometrische Beweise für die Existenz von inkommensurabeln Strecken.** Gleichwie die Geometrie den ersten Anstoß zur Entdeckung des Irrationalen gegeben hat, ist es auch gut, auf geometrischem Wege zu zeigen, daß gewisse Strecken kein gemeinschaftliches Maß besitzen. Zu diesem Zwecke eignen sich vor allem drei Figuren, die auch an sich große Bedeutung besitzen, nämlich das gleichseitige Dreieck, das Quadrat und das regelmäßige Zehneck. Bei den Beweisen kommt man mit den ersten Sätzen der Dreieckslehre aus und braucht weder die Proportionen noch die Ähnlichkeit der Dreiecke heranzuziehen. Natürlich sollen diese Beweise dem eigentlichen Lehrgange nicht eingefügt werden; sie wollen nur die Auffassung erleichtern und dürfen, nachdem sie diesen Zweck erfüllt haben, ohne Bedenken vergessen werden.

An erster Stelle vergleichen wir die Seite und die Diagonale eines Quadrats oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Seiten eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks. Das in C rechtwinklige Dreieck ABC möge die gleichen Katheten CA und CB haben. Man trage auf BA die Strecke $BC_1 = BC$ ab und errichte in C_1 die Senkrechte bis zu ihrem Schnittpunkte B_1 mit AC. Dann ist einerseits $CB_1 = C_1B_1$, andererseits auch das Dreieck AB_1C_1 gleichschenklig-rechtwinklig, und somit auch $AC_1 = C_1B_1$. Hätten AB und AC ein gemeinsames Maß, so müßte dasselbe wegen der Eigenschaften der Figur auch in AC_1 und somit auch in $AB_1 = AC - AC_1$ aufgehen, also auch ein gemeinsames Maß für die Seiten des Dreiecks AB_1C_1 sein. Nun ist $AB_1 > B_1C_1$ oder $B_1C_1 < \frac{1}{2}AC$; das gemeinschaftliche Maß müßte also kleiner sein als die Hälfte von AC. Dieselbe Konstruktion läßt sich aber auch beim Dreieck AB_1C_1 machen, indem man von B_1A die Strecke $B_1C_2 = B_1C_1$ abschneidet und in C_1 auf AB_1 die Senkrechte C_2B_2 errichtet bis zu ihrem Schnittpunkte B_2 mit AC_1; das gemeinschaftliche Maß müßte hiernach auch in den Seiten des Dreiecks AB_2C_2 aufgehen. Da man aber in gleicher Weise unbegrenzt oft fortfahren kann, müßte das gemeinschaftliche Maß kleiner sein als jede Strecke, die man durch beliebig oft wiederholte Halbierung der Seite AC erhalten kann. Die Existenz einer solchen Strecke widerstreitet aber dem archimedischen Axiom.

Um die Seite und die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks miteinander zu vergleichen, betrachten wir ein Dreieck ABC, worin $\sphericalangle C = 90^0$, $\sphericalangle A = 60^0$ und $\sphericalangle B = 30^0$ ist. Da $AB = 2AC$ ist, muß jede Strecke m, die für die Strecken AC und BC ein gemeinsames Maß ist, auch in AB aufgehen. Trägt man die Strecke $BC_1 = BC$ auf BA ab und errichtet in C_1 auf BA die Senkrechte, welche mit AC im Punkte B_1 zusammentrifft, so ist $AB_1C_1 = 30^0$, also auch $AB_1 = 2AC_1$, ferner $CB_1 = B_1C_1$. Hiernach geht die Strecke m auch in AC_1, also auch in AB_1 und BC_1 auf; sie ist auch gemeinsames Maß für die Seiten des Dreiecks AB_1C_1. Jetzt kann man die angegebene Konstruktion beliebig oft wiederholen und von jedem in dieser Weise erhaltenen Dreieck $AB_{\nu-1}C_{\nu-1}$ zu einem Dreieck $AB_\nu C_\nu$ übergehen, in dem $B_{\nu-1}C_\nu = B_{\nu-1}C_{\nu-1}$ auf $B_{\nu-1}A$ liegt und $B_\nu C_\nu$ auf $B_{\nu-1}A$ senkrecht steht. Es ist aber allgemein:

$$3AC_\nu = AB_\nu + AC_\nu < AB_\nu + B_\nu C_{\nu-1},$$

also $3AC_\nu < AC_{\nu-1}$ oder $3^\nu \cdot AC_\nu < AC$ oder, da $m < AC$ ist, muß auch $3^\nu \cdot m < AC$ sein, was unmöglich ist.

An dritter Stelle betrachten wir ein gleichschenkliges Dreieck ABC, in dem $\sphericalangle A = B = 72^0$, $\sphericalangle C = 36^0$ ist. Halbiert man den Winkel ABC durch BC_1 und zieht durch C_1 die $C_1B_1 \parallel BC$, wo der Punkt C_1 in AC und der Punkt B_1 in AB liegen soll, so ist $\sphericalangle CBC_1 = C_1BA = BCA$ und $\sphericalangle BC_1B_1 = B_1C_1A = BCA$, $\sphericalangle C_1B_1A =$

CBA; daher ist $CC_1 = C_1B = AB$, $B_1C_1 = C_1A$. Hiernach zeigt sich, genau wie in den früheren Fällen, daß es kein gemeinsames Maß für die Seiten des Dreiecks ABC gibt.

3. **Nicht-periodische unendliche Dezimalbrüche.** Bei der Theorie des Irrationalen kann die Algebra schon aus dem Grunde nicht entbehrt werden, weil aus ihren Gesetzen leicht die Möglichkeit von irrationalen Zahlen erschlossen werden kann. Für die erste Einführung sind die Dezimalbrüche am geeignetsten. Der Schüler wird mit ihnen auf einer sehr frühen Stufe bekannt gemacht und lernt den Satz, daß jede rationale Zahl sich entweder durch einen endlichen Dezimalbruch darstellen oder in einen unendlichen Dezimalbruch entwickeln läßt, der periodisch ist. In seiner Auffassung setzt er die unendliche Dezimalzahl gleich dem rationalen Bruche, aus dem sie entwickelt ist, ohne sich von dem wahren Sinne dieser Gleichung volle Rechenschaft zu geben. Es würde verkehrt sein, diese Auffassung gleich anfangs zu stören; doch sollte man Schüler, die mit unendlichen Reihen aus lauter positiven Gliedern vertraut zu machen sind, in eine strenge Begründung der periodischen Dezimalbrüche einführen.

Man kann leicht unendliche Dezimalbrüche angeben, die nicht periodisch sind. So sind z. B. von den folgenden Dezimalbrüchen:

$$
\begin{array}{l}
0{,}11111\ldots \\
0{,}1010010001\ldots \\
0{,}115115511\ldots \\
0{,}111811188111\ldots
\end{array}
$$

der zweite, dritte und vierte nichtperiodisch, und diese drei gehen aus dem ersten, der periodisch ist, dadurch hervor, daß man seine Periode in leicht zu übersehender Weise stört. Man bemerkt, daß sich so aus jedem einzelnen periodischen Bruche unendlich viele nichtperiodische herleiten lassen, die alle voneinander verschieden sind.

4. **Die algebraischen Irrationalzahlen.** Wir fügen weitere Beispiele von Irrationalzahlen bei, möchten uns aber hierbei nicht ganz auf die Bedürfnisse der Schule beschränken.

Schon des historischen Interesses wegen ist die Art und Weise beachtenswert, nach der die Alten die Irrationalität von $\sqrt{2}$ bewiesen haben. Setzt man: $\sqrt{2} = p/q$, wo p und q keinen gemeinsamen Faktor besitzen sollen, so folgt: $2q^2 = p^2$. Da hiernach p^2 eine gerade Zahl ist, muß auch p selbst eine gerade Zahl $= 2r$ sein. Dann ist aber $q^2 = 2r^2$. Hiernach müßte auch q eine gerade Zahl sein, während wir bei der obigen Darstellung voraussetzen, daß p und q keinen gemeinsamen Faktor besitzen.

Die Schule beweist allgemein den Satz, daß jede Wurzel aus einer ganzen Zahl entweder wieder eine ganze Zahl oder eine Irrationalzahl ist. Schon aus diesem Satze geht die Existenz von unendlich vielen irrationalen Zahlen hervor. Ebensoleicht ist es aber, den folgenden Satz zu beweisen[1]):

Wenn in der Gleichung:

$$(1)\qquad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

alle Koeffizienten ganzzahlig sind, so ist jede rationale Wurzel eine in a_n enthaltene ganze Zahl.

Wofern die Schule überhaupt auf die Gleichungen höheren Grades eingeht, kann sie auch diesen Satz behandeln und mit seiner Hilfe die Existenz von weiteren Irrationalzahlen beweisen. Verlangt man, daß die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ unter der Annahme, daß a, b, c ganze Zahlen sind und c etwa den Wert fünf hat, überhaupt durch einen rationalen Wert befriedigt werde, so muß zwischen den Koeffizienten a und b eine der vier Relationen bestehen: $a + b = -6$, $a - b = -4$, $5a + b = -26$, $5a - b = 24$; nachdem man für a einen ganzzahligen Wert beliebig angenommen hat, braucht man dem Koeffizienten b nur einen ganzzahligen Wert zu geben, der von $-6 - a$, $a + 4$, $-26 - 5a$, $5a - 24$ verschieden ist, um sicher zu sein, daß die obige Gleichung keine einzige rationale Wurzel besitzt. Verlangt man aber, daß unter der gemachten Annahme alle Wurzeln rational seien, so muß man etweder $a = -5$, $b = -1$ oder $a = 3$, $b = -9$ oder $a = 7$, $b = 11$ ansetzen.

Wir möchten auch noch daran erinnern, daß die in Nr. 2 durchgeführten Untersuchungen darauf hinauskommen, auf geometrischem Wege zu zeigen, daß die Quadratwurzeln aus den Zahlen zwei, drei und fünf irrational sind.

5. **Die Briggsschen Logarithmen der rationalen Zahlen.** Eine beliebige positive rationale Zahl a möge auf die Form gebracht werden:

$$(2)\qquad a = \frac{b}{c} \cdot 10^n,$$

wo b, c und n ganze Zahlen bezeichnen, von denen die beiden ersten positiv sind, während n auch negative Werte annehmen darf. Die beiden Zahlen b und c sollen keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen; auch soll keine von ihnen durch zehn teilbar sein. Wir wählen die Zahl zehn zur Grundzahl des Logarithmensystems und wollen die Bedingung aufsuchen, unter der $\log a$ eine rationale Zahl sein kann. Zu dem Ende setzen wir:

$$(3)\qquad \log a = \frac{p}{q},$$

1) Vgl. Weber, Elem.-Mathem. Bd. I S. 194.

wo p und q ganze Zahlen sein sollen und q als positiv vorausgesetzt wird. Aus dieser Gleichung folgt:

$$c^q = b^q \cdot 10^{nq-p} \tag{4}$$

oder

$$b^q = c^q \cdot 10^{p-nq}. \tag{5}$$

Die Gleichung (4) benutzen wir für den Fall, daß $nq > p$ ist, während wir in der Gleichung (5) $p > nq$ voraussetzen. Für $nq = p$ erhalten wir die Gleichung: $c^q = b^q$. Da aber die Annahme $q = 0$ durch die Gleichung (3) ausgeschlossen ist, muß jetzt auch $b = c$ sein, was mit unserer Annahme nur vereinbar ist, wenn b und c beide gleich eins sind. Wegen der getroffenen Festsetzungen stellen die beiden Seiten der Gleichungen (4) oder (5) ganze positive Zahlen dar. Besteht die Gleichung (4), so muß c^q und somit auch c durch zehn teilbar sein. Ebenso geht aus der Gleichung (5) hervor, daß die Zahl b den Faktor 10 enthält. Da beide Folgerungen mit unseren Annahmen unvereinbar sind, so führt unsere Überlegung zu dem Satze:

Der Briggssche Logarithmus einer rationalen Zahl ist nur dann rational, wenn er ganzzahlig ist und demnach die Zahl im dekadischen Zahlsystem als eine Eins mit lauter Nullen geschrieben wird.

6. **Der Dedekindsche Schnitt.** Wir gehen jetzt zu theoretischen Erörterungen über, die zwar in der Schule direkte Anwendung nicht finden können, aber bei ihrer mittelbaren Wichtigkeit für den Unterricht in unserm Buche einen Platz finden müssen. An erster Stelle behandeln wir diejenige Einführung der irrationalen Zahlen, die wir Dedekind verdanken. Wir verfehlen nicht, den Leser auf die Darstellung zu verweisen, die Weber in der Enzyklopädie der Elem.-Mathematik (Bd. I S. 62 ff.) gegeben hat. Diese verschmäht jede Bezugnahme auf die Geometrie und vermeidet alle Ausdrücke, die auch nur den Schein erwecken können, als würde die Existenz der Irrationalzahl vor der Einführung der sie vertretenden Operation vorausgesetzt. Dadurch erlangt auch die Methode selbst einen hohen Grad von Vollkommenheit. Indessen will es uns scheinen, als ob dies Verfahren zur ersten Einführung weniger geeignet wäre. Wir legen daher die Theorie in einer andern Weise dar, die in ihrer äußeren Form weniger streng ist und die Geometrie absichtlich heranzieht.

Um eine Irrationalzahl zu bestimmen, zerlege man die Gesamtheit aller rationalen Zahlen in zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ in der Weise, daß jede rationale Zahl einer der beiden Mengen angehört und daß jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}$ kleiner ist als jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}'$. Jede derartige Zerlegung der Gesamtheit der rationalen Zahlen wird nach dem Entdecker dieser Methode ein Dedekindscher Schnitt genannt und als neue Zahl eingeführt.

Wir wollen die getroffene Festsetzung näher erläutern. Dabei bezeichnen wir die Rationalzahlen mit kleinen deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$, wobei die Entscheidung, ob die Zahl ganz oder gebrochen ist, soweit sie nicht aus dem Zusammenhang hervorgeht, eigens angegeben werden soll. Für die eingeführten neuen Zahlen gebrauchen wir die kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Zur Bezeichnung von Strecken wenden wir kleine lateinische Buchstaben $a, b, c, \ldots$ an.

Wir legen zwei Strecken a und b das Verhältnis $\mathfrak{m} : \mathfrak{n}$ bei, wenn ein und dieselbe Strecke sich $\mathfrak{m}$-mal auf a und $\mathfrak{n}$-mal auf b abtragen läßt, wenn also der $\mathfrak{m}^{\text{te}}$ Teil der Strecke a gleich ist dem $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Teil der Strecke b. Aus dieser Festsetzung geht umgekehrt hervor, daß zwei Strecken, die in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, ein gemeinschaftliches Maß besitzen. Wollen wir jetzt auch zwei inkommensurabeln Strecken a und b ein festes Verhältsnis α beilegen, so beachten wir, daß bei kommensurablen Strecken der Satz gilt: Von zwei ungleichen Strecken hat die größere zu derselben dritten auch das größere Verhältnis, und verlangen, daß dies Gesetz allgemeine Gültigkeit besitze. Wenn jetzt $OA = a$ ist, so trage man auf dem Halbstrahl OA den $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Teil von b fortgesetzt ab. Hierbei kann keine der abgetragenen Strecken mit einem ihrer Endpunkte auf A fallen, weil nach unserer Voraussetzung a und b inkommensurabel sind. Dagegen gibt es nach dem archimedischen Axiom eine Zahl $\mathfrak{m}$ von der Beschaffenheit, daß die Endpunkte der $\mathfrak{m}^{\text{ten}}$ Strecke noch beide auf die Strecke OA selbst fallen, dagegen der Punkt A zwischen den beiden Endpunkten der $(\mathfrak{m}+1)^{\text{ten}}$ Strecke liegt. Setzen wir $OA_{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m} \cdot \frac{b}{\mathfrak{n}}$, $OA'_{\mathfrak{n}} = (\mathfrak{m}+1) \cdot \frac{b}{\mathfrak{n}}$ und verlangen, daß die Punkte $A_{\mathfrak{n}}$ und $A'_{\mathfrak{n}}$ auf dem Halbstrahl OA liegen, so liegt $A_{\mathfrak{n}}$ zwischen O und A, dagegen A zwischen $A_{\mathfrak{n}}$ und $A'_{\mathfrak{n}}$. Die Strecke $OA_{\mathfrak{n}}$ hat zu b das Verhältnis $\mathfrak{m} : \mathfrak{n}$, die Strecke $OA'_{\mathfrak{n}}$ zu b das Verhältnis $(\mathfrak{m}+1) : \mathfrak{n}$. Da aber A zwischen $A_{\mathfrak{n}}$ und $A'_{\mathfrak{n}}$ liegt, so muß die Beziehung bestehen:

$$\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}} < \alpha < \frac{\mathfrak{m}+1}{\mathfrak{n}}. \tag{6}$$

Die Brüche vom Nenner $\mathfrak{n}$ ordnen wir jetzt in zwei Gruppen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}$ und $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{n}}$; der Gruppe $\mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}$ weisen wir den Bruch $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$ und alle kleineren Brüche von demselben Nenner zu; dagegen soll der Bruch $\mathfrak{m}+1/\mathfrak{n}$ nebst allen größeren Brüchen vom Nenner $\mathfrak{n}$ der Gruppe $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{n}}$ angehören. Diese Operation können wir der Idee nach für jeden Nenner $\mathfrak{n}$ durchführen. Die Gruppen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}$ und $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{n}}$ können somit für jeden Nenner $\mathfrak{n}$ bestimmt werden. Die Gesamtheit der den Gruppen

$\mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}$ angehörenden rationalen Zahlen fassen wir zu der Menge $\mathfrak{A}$, die Gesamtheit der in den Gruppen $\mathfrak{A}'_{\mathfrak{n}}$ enthaltenen Zahlen zu der Menge $\mathfrak{A}'$ zusammen. Alsdann gehört jede rationale Zahl einer und nur einer der beiden Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ an.

Für einen andern Nenner $\mathfrak{p}$ mögen in gleicher Weise die Brüche $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p} + 1/\mathfrak{q}$ bestimmt sein. Die Strecken $OA_{\mathfrak{q}}$ und $OA'_{\mathfrak{q}}$ mögen wieder dem Halbstrahl OA angehören. $OA_{\mathfrak{q}}$ enthalte $\mathfrak{p}$ und $OA'_{\mathfrak{q}}$ genau $\mathfrak{p} + 1$ Teile, von denen jeder gleich dem $\mathfrak{q}^{\text{ten}}$ Teile von b ist. Der Punkt $A_{\mathfrak{q}}$ gehöre der Strecke OA an; dagegen liege A zwischen $A_{\mathfrak{q}}$ und $A'_{\mathfrak{q}}$. Alsdann ist $OA_{\mathfrak{q}} < OA < OA'_{\mathfrak{n}}$ und $OA_{\mathfrak{n}} < OA < OA'_{\mathfrak{q}}$, daher ist auch:

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} < \frac{\mathfrak{m}+1}{\mathfrak{n}} \text{ und } \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}} < \frac{\mathfrak{p}+1}{\mathfrak{q}}.$$

Daraus geht hervor, daß jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}$ kleiner ist als jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}'$.

Die beiden Forderungen, daß beliebige Strecken in einem festen Verhältnisse stehen, und daß von zwei ungleichen Strecken jedesmal die größere auch ein größeres Verhältnis zu derselben dritten Strecke haben soll, bestimmen in dem Falle, daß das Verhältnis von zwei inkommensurabeln Strecken gesucht wird, eine Zerlegung der sämtlichen rationalen Zahlen in zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ von der Beschaffenheit, daß jede Zahl der ersten Menge kleiner ist als jede Zahl der zweiten Menge. Wir werden dadurch zu einem einzigen Dedekindschen Schnitte geführt.

Wenn umgekehrt ein Dedekindscher Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ das Verhältnis einer unbekannten Strecke a zu einer gegebenen Strecke b darstellen soll, so vermittelt diese Forderung eine einzige Länge a. Unter den Brüchen mit dem Nenner $\mathfrak{n}$ gibt es nämlich einen größten, der noch zu $\mathfrak{A}$, und einen kleinsten, der schon zu $\mathfrak{A}'$ gehört. Der erste sei $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$, der zweite $\mathfrak{m} + 1/\mathfrak{n}$. Bestimmt man jetzt auf einem beliebig gewählten Halbstrahl OX zwei Punkte $A_{\mathfrak{n}}$ und $A'_{\mathfrak{n}}$ so, daß $OA_{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m} \cdot \frac{b}{\mathfrak{n}}$ und $OA'_{\mathfrak{n}} = (\mathfrak{m} + 1) \cdot \frac{b}{\mathfrak{n}}$ ist, so muß, falls $OA = a$ sein soll, der Punkt A zwischen $A_{\mathfrak{n}}$ und $A'_{\mathfrak{n}}$ liegen. Solange man nur einen einzelnen Wert von $\mathfrak{n}$ betrachtet, kann der Punkt A noch jede Lage annehmen, die einer gewissen Strecke von der Länge $b/\mathfrak{n}$ angehört. Die Forderung, daß der Nenner $\mathfrak{n}$ jeden beliebigen Wert annehmen soll, bestimmt aber die Lage von A eindeutig, da man nach dem archimedischen Axiom immer die Zahl $\mathfrak{n}$ so groß wählen kann, daß der $\mathfrak{n}^{\text{te}}$ Teil von b kleiner wird als eine beliebig klein gewählte Strecke.

7. **Einige Beispiele von Dedekindschen Schnitten.** Für positive rationale Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gilt das Gesetz, daß jedesmal, wenn

$\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ ist, auch $\mathfrak{a}^2 < \mathfrak{b}^2$ wird. Wollen wir die positive Quadratwurzel aus fünf ermitteln, so lassen wir alle negativen rationalen Zahlen der Menge $\mathfrak{A}$ angehören und rechnen eine positive rationale Zahl zu $\mathfrak{A}$ oder zu $\mathfrak{A}'$, je nachdem ihr Quadrat kleiner oder größer als fünf ist. Hiernach gehören die Zahlen 1 und 2 zu $\mathfrak{A}$, die Zahlen 3, 4, 5, ... zu $\mathfrak{A}'$. Ebenso müssen die Zahlen 4/2, 6/3, 8/4, 11/5 noch zu $\mathfrak{A}$, die Zahlen 5/2, 7/3, 9/4, 12/5 bereits zu $\mathfrak{A}'$ gerechnet werden.

Die Gleichung $x^3 - 7x + 7 = 0$ hat eine negative und zwei positive Wurzeln. Von den beiden letzten liegt die eine zwischen 1 und 1,5; die andere zwischen 1,5 und 2. Um die größere positive Wurzel durch einen Schnitt zu bestimmen, lassen wir alle Zahlen, die kleiner als 1,5 sind, zu $\mathfrak{A}$, und alle Zahlen, die größer als 2 sind, zu $\mathfrak{A}'$ gehören. Für eine rationale Zahl, die zwischen 1,5 und 2 enthalten ist, berechnet man den Wert, den die linke Seite der Gleichung annimmt, falls man in ihr die Unbekannte durch diese Zahl ersetzt, und weist sie der Menge $\mathfrak{A}$ oder der Menge $\mathfrak{A}'$ zu, je nachdem dieser Wert negativ oder positiv wird. Dem entsprechend sind die Zahlen 5/3, 6/4, 8/5, 16/10, 169/100 der Menge $\mathfrak{A}$, die Zahlen 6/3, 7/4, 9/5, 17/10, 170/100 der Menge $\mathfrak{A}'$ zuzuweisen. Will man in ähnlicher Weise die kleinere positive Wurzel ermitteln, so rechnet man alle rationalen Zahlen unter 1 zu $\mathfrak{A}$ und alle rationalen Zahlen über 1,5 zu $\mathfrak{A}'$. Eine zwischen 1 und 1,5 enthaltene Zahl setzt man statt x in die linke Seite der Gleichung ein und ordnet sie zu $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}'$, je nachdem diese hierbei einen positiven oder einen negativen Wert annimmt. Zu $\mathfrak{A}$ gehören jetzt die Zahlen 4/3, 5/4, 6/5, 8/6, 9/7, 10/8, 12/9, 13/10, zu $\mathfrak{A}'$ die Zahlen 5/3, 6/4, 7/5, 9/6, 10/7, 11/8, 13/9, 14/10.

Um den Briggsschen Logarithmus von 17 zu ermitteln, berechnen wir die Potenzen von 17, und zwar die höheren Potenzen durch abgekürzte Multiplikation. Es ist:

$$17^2 = 289,\ 17^3 = 4913,\ 17^4 = 83521,\ 17^5 = 1419257,\ 17^6 = 24137569,$$
$$17^{10} \text{ etwa } 202 \cdot 10^{10},\ 17^{20} \text{ etwa } 408 \cdot 10^{22},$$
$$17^{40} \text{ etwa } 1665 \cdot 10^{46},\ 17^{80} \text{ etwa } 2872 \cdot 10^{95},\ 17^{100} \text{ etwa } 11718 \cdot 10^{119}.$$

Hiernach ist

$$10^2 < 17^2 < 10^3,\ 10^3 < 17^3 < 10^4,\ 10^4 < 17^4 < 10^5,\ 10^6 < 17^5 < 10^7,$$
$$10^7 < 17^6 < 10^8 \text{ usw.}$$

Setzen wir daher $\log 17 = \alpha$, so muß sein:

$$\frac{2}{2} < \alpha < \frac{3}{2},\ \frac{3}{3} < \alpha < \frac{4}{3},\ \frac{4}{4} < \alpha < \frac{5}{4},\ \frac{6}{5} < \alpha < \frac{7}{5},\ \frac{7}{6} < \alpha < \frac{8}{6},$$
$$\frac{12}{10} < \alpha < \frac{13}{10},\ \frac{24}{20} < \alpha < \frac{25}{20},\ \frac{49}{40} < \alpha < \frac{50}{40},\ \frac{98}{80} < \alpha < \frac{99}{80},\ \frac{123}{100} < \alpha < \frac{124}{100}.$$

8. **Eigenschaften eines Dedekindschen Schnittes.** Zu jedem Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ gibt es nach beliebiger Wahl der ganzen Zahl $\mathfrak{n}$ stets eine Zahl $\mathfrak{m}$ von der Beschaffenheit, daß der Bruch $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$ der Menge $\mathfrak{A}$, aber der Bruch $\mathfrak{m}+1/\mathfrak{n}$ der Menge $\mathfrak{A}'$ angehört. Man kann daher zwei Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ so bestimmen, daß die erste der Menge $\mathfrak{A}$, die zweite der Menge $\mathfrak{A}'$ angehört und die Differenz $\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}$ kleiner wird als eine beliebig klein gewählte Größe $\mathfrak{d}$. Zu dem Ende braucht man nur die Zahl $\mathfrak{n}$ so zu wählen, daß $1/\mathfrak{n} < \mathfrak{d}$ wird, und für $\mathfrak{a}$ den größten in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Bruch vom Nenner $\mathfrak{n}$ und für $\mathfrak{a}'$ die kleinste in $\mathfrak{A}'$ enthaltene Zahl von demselben Nenner zu nehmen. Daraus geht der Satz hervor:

In jedem Dedekindschen Schnitt treten die Zahlen der unteren Menge beliebig nahe an die Zahlen der oberen Menge heran.

Ehe wir weitergehen, betrachten wir einen besonderen Schnitt, der dadurch entsteht, daß wir zur Menge $\mathfrak{A}$ alle Rationalzahlen rechnen, die kleiner sind als eine feste Zahl $\mathfrak{a}$, und zu $\mathfrak{A}'$ alle Rationalzahlen, die größer sind als dieselbe rationale Zahl $\mathfrak{a}$. Nun verlangt die Definition des Dedekindschen Schnittes, daß man alle Rationalzahlen in einem der beiden Schnitte unterbringt. Hier kann man die Zahl $\mathfrak{a}$ beliebig zu $\mathfrak{A}$ oder zu $\mathfrak{A}'$ rechnen. Ein derartiger Schnitt kann hiernach als die Vereinigung von zwei Schnitten aufgefaßt werden (vgl. Weber a. a. O. S. 67). Derartige Schnitte mögen rationale, alle andern irrationale Schnitte genannt werden.

Nun stellen wir den Satz auf:

In jedem irrationalen Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ gibt es weder in der Menge $\mathfrak{A}$ eine größte, noch in der Menge $\mathfrak{A}'$ eine kleinste Zahl.

Wir wollen diesen Satz zuerst für den Schnitt nachweisen, der das Verhältnis α von zwei inkommensurabeln Strecken a und b darstellt. Dabei schließen wir uns an die in Nr. 6 angewandte Bezeichnung an. Dementsprechend sei $OA = a$, $OA_\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cdot \frac{b}{\mathfrak{n}}$, $OA'_\mathfrak{n} = (\mathfrak{m}+1) \cdot \frac{b}{\mathfrak{n}}$, und $OA_\mathfrak{n} < OA < OA'_\mathfrak{n}$. Jetzt kann man zwei ganze positive Zahlen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ so bestimmen, daß

$$\frac{b}{\mathfrak{n}\mathfrak{r}} < A_\mathfrak{n} A, \text{ und } \frac{b}{\mathfrak{n}\mathfrak{s}} < AA'_\mathfrak{n} \text{ ist.}$$

Alsdann ist $(\mathfrak{r}\mathfrak{m}+1)\frac{b}{\mathfrak{r}\mathfrak{n}} < OA < [\mathfrak{s}(\mathfrak{m}+1)-1]\frac{b}{\mathfrak{s}\mathfrak{n}}$.

Somit gehört die Zahl $\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{m}+1}{\mathfrak{r}\mathfrak{n}}$ noch zur Menge $\mathfrak{A}$, die Zahl $\frac{\mathfrak{s}(\mathfrak{m}+1)-1}{\mathfrak{s}\mathfrak{n}}$ zur Menge $\mathfrak{A}'$. Da aber die erste von ihnen größer ist als $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$, die zweite kleiner als $\mathfrak{m} + 1/\mathfrak{n}$, so kann weder die Zahl $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$ die größte unter den Zahlen der Menge $\mathfrak{A}$, noch die Zahl $\mathfrak{m} + 1/\mathfrak{n}$ die kleinste unter den Zahlen von $\mathfrak{A}'$ sein.

Machen wir jetzt die Annahme, im Schnitte $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ sei die rationale Zahl $\mathfrak{a}$ die größte unter allen Zahlen der Menge $\mathfrak{A}$. Dann gehört jede rationale Zahl $\mathfrak{b}$, die größer ist als $\mathfrak{a}$, der Menge $\mathfrak{A}'$ an. Da aber die Differenz $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ beliebig klein gemacht werden kann, darf die zu bestimmende Zahl α nicht größer sein als $\mathfrak{a}$. Sie kann aber auch nicht kleiner sein. Der Schnitt stellt somit die Zahl $\mathfrak{a}$ selbst dar; er ist rational.

9. **Einreihung der Irrationalzahlen in die Zahlenreihe.** Für rationale Zahlen gilt das allgemeine Gesetz:

Zwei Zahlen sind entweder gleich oder die eine ist größer als die andere. Zwei Zahlen, die derselben dritten Zahl gleich sind, sind auch einander gleich; wenn aber $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} > \mathfrak{c}$ ist, so ist auch $\mathfrak{a} > \mathfrak{c}$.

Wir wollen nachweisen, daß dies Gesetz auch auf irrationale Zahlen übertragen werden kann. Zu dem Ende treffen wir folgende Festsetzung:

Wenn eine Irrationalzahl α durch den Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ bestimmt ist, so soll α selbst größer sein als jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}$, und kleiner als jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}'$.

Sind $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ irgend zwei rationale Zahlen und etwa $\mathfrak{c} > \mathfrak{d}$, und gehört $\mathfrak{d}$ der Menge $\mathfrak{A}'$ an, so ist nach unserer Festsetzung $\mathfrak{d} > \alpha$. Zugleich ist aber $\mathfrak{d}$ größer als jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}$, um so mehr $\mathfrak{c}$ größer als jede Zahl von $\mathfrak{A}$. Daher gehört $\mathfrak{c}$ der Menge $\mathfrak{A}'$ an und ist größer als α. Aus der Annahme $\mathfrak{c} > \mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d} > \alpha$ geht also hervor, daß $\mathfrak{c} > \alpha$ ist. In gleicher Weise ergibt sich aus der Annahme $\mathfrak{c} < \mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d} < \alpha$, daß $\mathfrak{c} < \alpha$ ist. Wenn aber $\mathfrak{c} < \alpha$ und $\alpha < \mathfrak{d}$ ist, so gehört $\mathfrak{c}$ der Menge $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{d}$ der Menge $\mathfrak{A}'$ an; es ist also $\mathfrak{c} < \mathfrak{d}$.

Jetzt betrachten wir zwei Irrationalzahlen α und β. Die erste werde durch den Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$, die zweite durch den Schnitt $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ bestimmt. Dann kann einmal jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ und jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{B}'$ gehören. Dann ist auch jede Zahl von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ und jede Zahl von $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{A}'$ enthalten. Unter dieser Voraussetzung setzen wir die Zahlen α und β einander gleich.

Ferner kann die Zahl $\mathfrak{a}$ der Menge $\mathfrak{A}$ gleich sein einer Zahl $\mathfrak{b}'$ der Menge $\mathfrak{B}'$. Dann teilt die Zahl $\mathfrak{a}$ die Menge $\mathfrak{A}$ in zwei Bereiche $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, wo die Zahlen von $\mathfrak{A}_1$ kleiner als $\mathfrak{a}$, die Zahlen des Bereiches $\mathfrak{A}_2$ größer als $\mathfrak{a}$ sein sollen. Ebenso wird die Menge $\mathfrak{B}'$ durch $\mathfrak{b}'$ in die Bereiche $\mathfrak{B}_1'$ und $\mathfrak{B}_2'$ zerlegt, wo alle Zahlen von $\mathfrak{B}_1'$ kleiner als $\mathfrak{b}'$, aber die Zahlen von $\mathfrak{B}_2'$ größer als $\mathfrak{b}'$ sein sollen. Die Gesamtheit der Rationalzahlen besteht einmal aus $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'$ und zweitens aus

$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{B}_2'$. Nach der obigen Festsetzung ist $\beta < \mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{a} < \alpha$. Da aber $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}$ ist, so muß auch $\beta < \alpha$ gesetzt werden, damit die allgemeine Regel in Gültigkeit bleibt. Aus der doppelten Art, in der die Gesamtheit der rationalen Zahlen zerlegt werden kann, ergibt sich, daß die obige Regel auch bei der Hinzunahme einer Rationalzahl keine Ausnahme erleidet. Ebenso einfach ist es, drei Irrationalzahlen miteinander zu vergleichen.

10. **Beschränkung der bei einem Schnitt benutzten Rationalzahlen.** Statt bei der Ausführung eines Schnittes, wie es die obige Regel verlangt, die Gesamtheit der rationalen Zahlen zugrunde zu legen, kann man sich auf solche Zahlen beschränken, deren Nenner Potenzen einer positiven ganzen Zahl sind. Alle derartigen Zahlen können in der Form $\mathfrak{l}/\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}$ geschrieben werden, wo auch $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}$ ganze Zahlen sein sollen und negative Werte von $\mathfrak{n}$ ausgeschlossen werden. Die Gesamtheit dieser Zahlen möge ein $\mathfrak{r}$-System genannt werden. Alle Zahlen dieser Art zerlegen wir in zwei Mengen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ in der Weise, daß jede Zahl des Systems einer der beiden Mengen zugewiesen wird, und jede Zahl der Menge $\mathfrak{R}$ kleiner ist als jede Zahl der Menge $\mathfrak{R}'$. Eine solche Zerlegung soll kurz als ein $\mathfrak{r}$-Schnitt bezeichnet werden.

Falls in $\mathfrak{R}$ eine größte oder in $\mathfrak{R}'$ eine kleinste Zahl vorkommt, wird diese Zahl durch den Schnitt selbst dargestellt; der $\mathfrak{r}$-Schnitt, der in diesem Falle als Doppelschnitt aufgefaßt werden kann, liefert eine Zahl des $\mathfrak{r}$-Systems. Sobald also ein $\mathfrak{r}$-Schnitt keine Zahl des $\mathfrak{r}$-Systems darstellt, gibt es weder in $\mathfrak{R}$ eine größte noch in $\mathfrak{R}'$ eine kleinste Zahl.

Eine rationale Zahl $\mathfrak{g}$, die dem $\mathfrak{r}$-System nicht angehört, zerlegt die Zahlen dieses Systems in zwei Mengen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, von denen die erstere alle Zahlen kleiner als $\mathfrak{g}$, die zweite alle Zahlen größer als $\mathfrak{g}$ umfaßt. Ist $\mathfrak{h}$ eine von $\mathfrak{g}$ verschiedene rationale Zahl, so liegen unendlichviele Zahlen des $\mathfrak{r}$-Systems zwischen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}$. Diese gehören für $\mathfrak{h} > \mathfrak{g}$ der Menge $\mathfrak{R}'$ und für $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ der Menge $\mathfrak{R}$ an. Ebenso enthält das Intervall zwischen $\mathfrak{g}$ und irgendeiner Irrationalzahl unendlichviele Zahlen des $\mathfrak{r}$-Systems. Die Zahl $\mathfrak{g}$ ist also die einzige Zahl, die größer ist als alle Zahlen von $\mathfrak{R}$ und kleiner als alle Zahlen von $\mathfrak{R}'$. Der Schnitt $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ stellt unter der angegebenen Bedingung die Zahl $\mathfrak{g}$ dar.

Wir nehmen jetzt an, eine rationale Zahl $\mathfrak{g}$ liege weder zwischen Zahlenpaaren von $\mathfrak{R}$ noch zwischen Zahlenpaaren von $\mathfrak{R}'$, ohne dem $\mathfrak{r}$-System selbst anzugehören. Dann muß $\mathfrak{g}$ größer sein als alle Zahlen von $\mathfrak{R}'$. Somit kommen wir auf den soeben betrachteten Fall zurück.

In einem beliebig gegebenen $\mathfrak{r}$-Schnitte $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ können wir, nachdem $\mathfrak{n}$ beliebig gewählt ist, eine ganze Zahl $\mathfrak{l}$ so bestimmen, daß die

Zahl $\mathfrak{l}/\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}$ zu $\mathfrak{R}$ und die Zahl $\mathfrak{l} + 1/\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}$ zu $\mathfrak{R}'$ gehört. Für irgendeine Rationalzahl $\mathfrak{a}$, die dem $\mathfrak{r}$-System nicht angehört, sind jetzt drei Möglichkeiten vorhanden: es muß

$$\text{entweder } \mathfrak{a} < \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}} \text{ oder } \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}} < \mathfrak{a} < \frac{\mathfrak{l}+1}{\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}} \text{ oder } \mathfrak{a} > \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}} \text{ sein.}$$

Die zweite Möglichkeit kann für jeden Wert von $\mathfrak{n}$ nur dann erfüllt sein, wenn $\mathfrak{a}$ zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ liegt und somit, wie wir gesehen haben, durch den Schnitt selbst dargestellt wird. Sobald also das Gesetz, nach dem der Schnitt ausgeführt wird, keine Rationalzahl zuläßt, muß sich der Exponent $\mathfrak{n}$ immer so bestimmen lassen, daß entweder die erste oder die dritte Möglichkeit eintritt. Im ersten Falle können wir die Zahl $\mathfrak{a}$ zu den Zahlen von $\mathfrak{R}$, im zweiten Falle zu den Zahlen von $\mathfrak{R}'$ hinzufügen. Dadurch wird es möglich, von dem $\mathfrak{r}$-Schnitt $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ zu einem irrationalen Dedekindschen Schnitte $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ überzugehen, der alle rationalen Zahlen entweder der Menge $\mathfrak{A}$ oder der Menge $\mathfrak{A}'$ in der Weise zuordnet, daß die Zahlen der ersten Menge kleiner sind als die der zweiten. Der Schnitt $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ stellt somit in diesem Falle eine Irrationalzahl dar.

In der Praxis spielt die besprochene Methode eine große Rolle für $\mathfrak{r} = 10$. Die auf diese Weise gewonnenen Zahlen, die Dezimalzahlen, bilden die natürliche Fortsetzung der Art und Weise, wie wir in unserm Zahlensystem die ganzen Zahlen schreiben. In theoretischer Hinsicht empfiehlt es sich vielfach, die Zahl zwei zur Grundzahl zu wählen. Schon die Schreibweise in diesem System der Dualzahlen ist bemerkenswert, weil man mit zwei Ziffern, etwa 0 und 1, auskommt. So stellt im Dualsystem das Zeichen 10100,101001 die Zahl $2^4 + 2^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6}$ dar. Besonders wichtig sind diese Zahlen aber wegen der Anwendungen, die man von ihnen machen kann. Man kann sich nämlich bei der Messung auf wiederholtes Verdoppeln und wiederholtes Halbieren beschränken. Wenn z. B. eine Figur, die aus einer bestimmten Strecke in vorgeschriebener Weise hervorgeht, eine gewisse Eigenschaft hat, und wenn man dann nachweisen kann, daß diese Eigenschaft durch Verdoppeln und Halbieren nicht verloren geht, so folgt durch Anwendung des Dualsystems, daß die Eigenschaft auch der Figur zukommt, die nach der gegebenen Regel aus einer beliebigen Strecke hervorgeht. (Ein Beispiel für diesen Gebrauch der Dualzahlen haben wir in § 14, 8 S. 266 durchgeführt.)

Die Gesetze, nach denen eine rationale Zahl in einen Dezimalbruch verwandelt wird, lassen sich leicht auf ein Zahlensystem übertragen, dessen Grundzahl eine beliebige Zahl $\mathfrak{r}$ ist. Wenn der Nenner eines Bruches nur solche Primfaktoren enthält, die in $\mathfrak{r}$ aufgehen, so kann der Bruch selbst durch eine Zahl des Systems dargestellt werden.

Dagegen ist ein echter Bruch, dessen Nenner keine in $\mathfrak{r}$ aufgehende Primzahl enthält, gleich einer unendlichen Reihe von der Form:

$$\mathfrak{l}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}^{\mathfrak{m}}}+\frac{1}{\mathfrak{r}^{2\mathfrak{m}}}+\frac{1}{\mathfrak{r}^{3\mathfrak{m}}}+\cdots\right).$$

Wenn endlich der Nenner eines Bruches neben Primfaktoren, die in $\mathfrak{r}$ aufgehen, auch solche enthält, die dies nicht tun, so erhält der Bruch im $\mathfrak{r}$-System die Form:

$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{r}^{\mathfrak{m}}}+\frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{r}^{\mathfrak{m}}}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}^{\mathfrak{m}}}+\frac{1}{\mathfrak{r}^{2\mathfrak{m}}}+\frac{1}{\mathfrak{r}^{3\mathfrak{m}}}\cdots\right)$$

Will man die gebräuchliche Schreibweise auf ein $\mathfrak{r}$-System übertragen, so wählt man $\mathfrak{r}$ Zahlzeichen, Ziffern, die, falls sie direkt links vom Komma stehen, je einen der Werte 0, 1, 2 . . ., $\mathfrak{r} - 1$ haben, während der Wert der einzelnen Ziffer mit $\mathfrak{r}$ multipliziert oder durch $\mathfrak{r}$ dividiert wird, je nachdem sie um eine Stelle weiter nach links oder nach rechts rückt. Bei dieser Darstellung wird jede rationale Zahl, deren Nenner nicht aus den in $\mathfrak{r}$ enthaltenen Primfaktoren zusammengesetzt werden kann, in der Weise geschrieben, daß eine gewisse Gruppe von Ziffern, eine Periode, von einer gewissen Stelle an unbegrenzt oft wiederholt wird. Die Gesetze, nach denen diese Perioden gebildet sind, entsprechen ganz den Gesetzen, die Gauß im sechsten Abschnitte seiner disquisitiones arithmeticae für periodische Dezimalbrüche mitteilt, und können, wie er selbst hervorhebt, in ganz ähnlicher Weise bewiesen werden.

11. **Die Cantorsche Einführung der irrationalen Zahlen.** In der vorigen Nummer zerlegten wir die Gesamtheit aller Zahlen, deren Nenner Potenzen einer festen Zahl $\mathfrak{r}$ sind, in zwei Mengen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ in der Weise, daß jede Zahl der Menge $\mathfrak{R}$ kleiner war als jede Zahl der Menge $\mathfrak{R}'$, und wurden dadurch auf eine bestimmte Zahl geführt. Um eine Erweiterung dieser Operation vorzubereiten, bezeichnen wir die größte in $\mathfrak{R}$ enthaltene Zahl vom Nenner $\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}$ mit $\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}}$ und erhalten dadurch die unendliche Zahlenreihe:

$$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{\mathfrak{n}}, \ldots \tag{7}$$

Diese Reihe hat folgende Eigenschaften:

a) jede Zahl ist entweder größer oder zum mindesten ebensogroß wie die vorhergehende,

b) die Differenz $\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}+\mathfrak{k}} - \mathfrak{a}_{\mathfrak{n}}$ ist für jeden Wert von $\mathfrak{k}$ kleiner als $1/\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}$.

Der Kürze wegen setzen wir noch

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}}+\frac{1}{\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}}=\mathfrak{a}'_{\mathfrak{n}}.$$

Nun ordneten wir soeben jede Zahl $\mathfrak{a}_\mathfrak{n}$ und jede kleinere rationale Zahl einer Menge $\mathfrak{A}$ zu und reihten in ganz entsprechender Weise jede Zahl $\mathfrak{a}'_\mathfrak{n}$ und jede größere rationale Zahl einer Menge $\mathfrak{A}'$ ein. Wir konnten nachweisen, daß dadurch ein Dedekindscher Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ bestimmt wird, der nur dann in einen Doppelschnitt übergeht, wenn es eine rationale Zahl gibt, die größer ist als alle Zahlen $\mathfrak{a}_\mathfrak{n}$ und zugleich kleiner als alle Zahlen $\mathfrak{a}'_\mathfrak{n}$. Beim Beweise kam es gar nicht auf den genauen Wert für die in b) angegebene Differenz an, sondern nur darauf, daß diese Differenz beliebig klein gemacht werden konnte.

Dementsprechend wollen wir jetzt für die Zahlenreihe (7) die Eigenschaft a) beibehalten, aber die Eigenschaft b) durch die folgende ersetzen:

c) Nachdem eine rationale Zahl $\mathfrak{d}$ beliebig klein gewählt ist, läßt sich immer eine Marke $\mathfrak{n}$ derart bestimmen, daß für jeden Wert von $\mathfrak{k}$ die Differenz $\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}+\mathfrak{k}} - \mathfrak{a}_\mathfrak{n}$ kleiner als $\mathfrak{d}$ bleibt.

Sobald diese Forderung für jeden Wert von $\mathfrak{d}$ erfüllt werden kann, steht auch mit jeder Marke $\mathfrak{n}$ eine Zahl $\mathfrak{d}_\mathfrak{n}$ in der Beziehung, daß bei beliebigem positiven $\mathfrak{k}$ stets $\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}+\mathfrak{k}} - \mathfrak{a}_\mathfrak{n} < \mathfrak{d}_\mathfrak{n}$ ist. Die Zahl $\mathfrak{d}_\mathfrak{n}$ kommt bei unbegrenzt wachsendem $\mathfrak{n}$ der Null beliebig nahe.

Auch jede Reihe dieser Art führt auf einen Dedekindschen Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$. Wir setzen fest, daß jede Zahl $\mathfrak{a}_\mathfrak{n}$ und jede kleinere rationale Zahl einer Menge $\mathfrak{A}$ angehören soll; dagegen reihen wir jede Zahl $\mathfrak{a}'_\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_\mathfrak{n} + \mathfrak{d}_\mathfrak{n}$ und jede größere rationale Zahl einer Zahlenmenge $\mathfrak{A}'$ ein. Genau wie in der vorhergehenden Nummer zeigt sich, daß jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}$ kleiner ist als jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}'$, und daß es höchstens eine einzige rationale Zahl $\mathfrak{g}$ gibt, die weder der Menge $\mathfrak{A}$ noch der Menge $\mathfrak{A}'$ angehört. Tritt dieser Fall ein, so ist $\mathfrak{g}$ größer als alle Zahlen von $\mathfrak{A}$, aber kleiner als alle Zahlen von $\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{g}$ kann dann jeder von beiden Mengen zugewiesen werden und wird jedesmal durch den Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ dargestellt. Im übrigen umfassen aber die Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ vereint alle rationalen Zahlen, und der Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ stellt eine irrationale Zahl dar. Dasselbe gilt unter den Bedingungen a) und c) von der Zahlenreihe (7), die zur Bildung des Schnittes geführt hat.

Wir können aber endlich auch von der Forderung a) absehen und nur die Forderung c) festhalten, wofern wir darin die Differenz $\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}+\mathfrak{k}} - \mathfrak{a}_\mathfrak{n}$ durch ihren absoluten Betrag ersetzen. Indem wir dementsprechend jedes $\mathfrak{d}_\mathfrak{n}$ als eine positive Zahl voraussetzen, schreiben wir $\mathfrak{a}_\mathfrak{n} - \mathfrak{d}_\mathfrak{n} = \mathfrak{b}_\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}_\mathfrak{n} + \mathfrak{d}_\mathfrak{n} = \mathfrak{b}'_\mathfrak{n}$. Mit den Zahlen $\mathfrak{b}_\mathfrak{n}$ nehmen wir alle rationalen Zahlen zusammen, die kleiner sind als irgendeine von ihnen, und bezeichnen ihre Gesamtheit mit $\mathfrak{A}$; ebenso setzen wir alle rationalen Zahlen, die größer sind als eine Zahl $\mathfrak{b}'_\mathfrak{n}$, mit den Zahlen $\mathfrak{b}'_\mathfrak{n}$ selbst zu einer Menge $\mathfrak{A}'$ zusammen. Jetzt kann es höchstens eine einzige rationale Zahl $\mathfrak{g}$ geben, die größer als alle Zahlen $\mathfrak{b}_n$ und kleiner als alle Zahlen $\mathfrak{b}'_n$ ist und daher weder der Menge $\mathfrak{A}$ noch der Menge $\mathfrak{A}'$ angehört; indem man sie willkürlich entweder der ersten oder der zweiten Menge zuweist, erhält man einen Dedekindschen Schnitt, der diese Zahl darstellt. Gibt es keine solche Zahl $\mathfrak{g}$, so schließen die Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ alle rationalen Zahlen ein; die Zahlenreihe (7) vertritt die irrationale Zahl, die durch den Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ dargestellt wird.

Auf diese Weise führt G. Cantor die Irrationalzahlen ein. Seine Theorie ist von Heine in der Abhandlung entwickelt: Die Elemente der Funktionenlehre (Crelles Journal Bd. 74, S. 172). Wir haben hier gezeigt, daß man auch diese Art der Einführung auf den Dedekindschen Schnitt zurückführen kann.

Nachdem die Theorie der Irrationalzahlen begründet ist, kann man aus ihnen Reihen der Form (7) bilden, deren Glieder der Bedingung c) genügen. Dadurch gelangen wir aber nicht zu neuen Zahlen, da zwischen irgend zwei ungleichen irrationalen Zahlen, wie wir in Nr. 7 erkannt haben, stets unendlich viele rationale Zahlen liegen. Dennoch empfiehlt es sich in vielen Fällen, irrationale Zahlen zur Bildung von Zahlenreihen zu benutzen. Auf diese Weise verfährt z. B. die älteste und wichtigste Methode, nach der der Umfang und der Inhalt eines Kreises gemessen wird (vgl. § 19, 1).

12. **Das Rechnen mit Schnitten.** Ihre volle Berechtigung erhalten die durch die Dedekindschen Schnitte eingeführten irrationalen Zahlen erst dadurch, daß man mit ihnen nach denselben Regeln rechnen kann, die für rationale Zahlen gelten. Es genüge, diesen Nachweis für den Fall durchzuführen, daß zwei Irrationalzahlen miteinander verbunden werden; die Verbindung einer Rational- und einer Irrationalzahl ergibt sich dann von selbst und macht keine neue Überlegung notwendig.

Dementsprechend sei eine Irrationalzahl α durch den Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ bestimmt; eine beliebige Zahl der Menge $\mathfrak{A}$ werde mit $\mathfrak{a}$, eine beliebige Zahl der Menge $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{a}'$ bezeichnet. Für eine zweite Irrationalzahl mögen in gleicher Weise die Zeichen β, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ benutzt werden.

Um jetzt die Summe $\alpha + \beta$ zu finden, addieren wir zu jeder Zahl der Menge $\mathfrak{A}$ jede Zahl der Menge $\mathfrak{B}$ und ordnen alle auf diese Weise erhaltenen Zahlen $\mathfrak{c}$ einer Menge $\mathfrak{C}$ zu; in gleicher Weise bilden wir die Summe einer jeden Zahl von $\mathfrak{A}'$ und einer jeden Zahl von $\mathfrak{B}'$ und vereinigen alle diese Summen zu einer Menge $\mathfrak{C}'$. Mit anderen Worten: Wir wählen für $\mathfrak{a}$ jede Zahl aus $\mathfrak{A}$ und für $\mathfrak{b}$ jede Zahl von $\mathfrak{B}$ und setzen jedesmal $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$; in gleicher Weise bilden wir alle Zahlen $\mathfrak{c}' = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$, indem wir für $\mathfrak{a}'$ jede Zahl der Menge $\mathfrak{A}'$, für $\mathfrak{b}'$ jede

Zahl der Menge $\mathfrak{B}'$ wählen; die Gesamtheit der Zahlen $\mathfrak{c}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}$, die Gesamtheit der Zahlen $\mathfrak{c}'$ mit $\mathfrak{C}'$.

Für die Differenz $\alpha - \beta$ verbinden wir die Zahlen der Menge $\mathfrak{A}$ mit denen der Menge $\mathfrak{B}'$, und die Zahlen der Menge $\mathfrak{A}'$ mit denen der Menge $\mathfrak{B}$; wir setzen demnach $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}' = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}' - \mathfrak{b} = \mathfrak{c}'$, indem wir für $\mathfrak{a}$ alle Zahlen von $\mathfrak{A}$, für $\mathfrak{a}'$ alle Zahlen von $\mathfrak{A}'$, für $\mathfrak{b}$ alle Zahlen von $\mathfrak{B}$ und für $\mathfrak{b}'$ alle Zahlen von $\mathfrak{B}'$ wählen.

Für die Multiplikation und die Division dürfen wir, weil der Einfluß, den die Vorzeichen auf das Produkt und den Quotienten ausüben, bekannt ist, nicht nur α und β als positiv voraussetzen, sondern uns auch auf positive Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$, beschränken. Bei dieser Beschränkung setzen wir, um das Produkt $\alpha \cdot \beta$ zu bilden, $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}' = \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}'$, und zur Ermittlung des Quotienten $\alpha : \beta$ entsprechend $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}' = \mathfrak{a}' : \mathfrak{b}$.

Für die Gesamtheit der Zahlen $\mathfrak{c}$ und die Gesamtheit der Zahlen $\mathfrak{c}'$ gelten mehrere allgemeine Gesetze. Zunächst ist jede Zahl $\mathfrak{c}$ kleiner als jede Zahl $\mathfrak{c}'$. Dies geht daraus hervor, daß allgemein $\mathfrak{a}' > \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' > \mathfrak{b}$ ist, und daß wir uns bei der Multiplikation und der Division auf positive Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ beschränkt haben.

Zweitens kann man, nachdem eine Zahl $\mathfrak{d}$ beliebig gegeben ist, eine Zahl $\mathfrak{c}$ und eine Zahl $\mathfrak{c}'$ so auswählen, daß die Differenz $\mathfrak{c}' - \mathfrak{c} < \mathfrak{d}$ wird. Um das zu erkennen, wählen wir für $\mathfrak{a}$ die größte in $\mathfrak{A}$ enthaltene Zahl von einem gewissen Nenner $\mathfrak{m}$, für $\mathfrak{b}$ die größte in $\mathfrak{B}$ enthaltene Zahl von einem zweiten Nenner $\mathfrak{n}$, setzen, was beidemal gestattet ist, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \frac{1}{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} + \frac{1}{\mathfrak{n}}$, und zeigen, daß bei passender Wahl von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die hieraus berechneten Zahlen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ der aufgestellten Forderung genügen. Bei der Addition und Subtraktion wird jetzt:

$$\mathfrak{c}' - \mathfrak{c} = \frac{1}{\mathfrak{m}} + \frac{1}{\mathfrak{n}};$$

bei der Multiplikation:

$$\mathfrak{c}' - \mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}} + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{m}} + \frac{1}{\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}}$$

und bei der Division:

$$\mathfrak{c}' - \mathfrak{c} = \frac{\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{m}} + \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}} + \frac{1}{\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}}}{\mathfrak{b}\left(\mathfrak{b} + \frac{1}{\mathfrak{n}}\right)}.$$

Wir genügen also der Forderung bei der Addition und Subtraktion, sobald wir $\frac{1}{\mathfrak{m}} < \frac{\mathfrak{d}}{2}$ und $\frac{1}{\mathfrak{n}} < \frac{\mathfrak{d}}{2}$ wählen. Für die Multiplikation beachte man, daß die sämtlichen Zahlen $\mathfrak{a}$ kleiner bleiben als eine feste ganze Zahl $\mathfrak{a}_1$, und die Zahlen $\mathfrak{b}$ als eine feste ganze Zahl $\mathfrak{b}_1$;

wählt man also $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ so groß, daß jede der drei Zahlen $\mathfrak{a}_1/\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}_1/\mathfrak{m}$ und $1/\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$ kleiner ist als $\mathfrak{d}/3$, so wird unsere Forderung erfüllt.

Im Falle der Division muß β als eine positive, von null verschiedene Zahl vorausgesetzt werden. Demnach bleibt für hinreichend große Werte von $\mathfrak{n}$ die Zahl $\mathfrak{b}$ oberhalb einer gewissen Grenze; dasselbe gilt von dem oben angegebenen Nenner, während der Zähler durch Vergrößerung von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ der Null beliebig nahe gebracht werden kann.

Jetzt bilden wir die Gesamtheit $\mathfrak{L}$ aller Rationalzahlen $\mathfrak{l}$, von denen jede einzelne kleiner ist als irgendeine Zahl $\mathfrak{c}$, und bestimmen die Gesamtheit $\mathfrak{L}'$ aller Zahlen $\mathfrak{l}'$, von denen jede größer ist als eine Zahl $\mathfrak{c}'$. Aus dem ersten Gesetze, das wir über die Zahlen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ bewiesen haben, geht unmittelbar hervor, daß auch jede Zahl $\mathfrak{l}'$ größer ist als jede Zahl $\mathfrak{l}$. Weil außerdem die Zahlen $\mathfrak{c}$ zur Menge $\mathfrak{L}$ und die Zahlen $\mathfrak{c}'$ zur Menge $\mathfrak{L}'$ gehören, so gilt das zweite Gesetz, das wir über die Zahlen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ bewiesen haben, auch für die Zahlen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$; demnach läßt sich aus der Menge $\mathfrak{L}$ stets eine Zahl $\mathfrak{l}$ und aus der Menge $\mathfrak{L}'$ eine Zahl $\mathfrak{l}'$ so auswählen, daß die Differenz $\mathfrak{l}'-\mathfrak{l}$ kleiner wird als eine beliebig gewählte Zahl $\mathfrak{d}$. Daraus geht aber, wie wir in den vorhergehenden Nummern bewiesen haben, hervor, daß die Mengen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ entweder alle rationalen Zahlen enthalten, oder daß es eine einzige Rationalzahl $\mathfrak{g}$ gibt, die größer ist als alle Zahlen $\mathfrak{l}$ und kleiner als alle Zahlen $\mathfrak{l}'$. Im ersten Falle ist das Ergebnis der Rechnung eine irrationale Zahl, im zweiten die rationale Zahl $\mathfrak{g}$.

Hiernach kommt das Rechnen mit irrationalen Zahlen auf das Rechnen mit Rationalzahlen hinaus. Daraus geht hervor, daß in beiden Fällen für die Rechnungen dieselben Gesetze gelten.

Dedekind hat noch nachgewiesen, daß erst durch Einführung der Irrationalzahlen die volle Stetigkeit begründet wird. Auf diesen Nachweis gehen wir hier nicht ein, verweisen vielmehr nur auf die Darlegungen, die Weber am angeführten Orte gibt.

13. **Die Verhältnisse von Strecken.** Wir haben zwar schon in Nr. 6 das Verhältnis zweier Strecken definiert; wir kommen hier nochmals auf die angenommene Definition zurück, um die Theorie im Zusammenhange darzulegen und durch einige weitere Sätze zu vervollständigen.

Für zwei Strecken, die ein gemeinschaftliches Maß besitzen, definiert man das Verhältnis als den Quotienten aus den beiden Zahlen, welche angeben, wie oft das gemeinschaftliche Maß in den beiden gegebenen Strecken aufgeht. Kann man demnach die Strecke c auf der Strecke a $\mathfrak{m}$-mal und auf der Strecke b $\mathfrak{n}$-mal abtragen, so bezeichnet man den Quotionten $\mathfrak{m}:\mathfrak{n}$ als das Verhältnis der Strecke a zur Strecke b (kurz als Verhältnis $a:b$). Nun gibt es aber zu zwei kommensurablen Strecken unendlich viele Strecken, die sich in beiden ohne Rest abtragen lassen. Die Definition ist daher nur erlaubt, wenn der Quotient von der Wahl der benutzten Strecke unabhängig ist. Das erkennt man aber sehr leicht. Geht nämlich eine zweite Strecke d $\mathfrak{p}$-mal in a und $\mathfrak{q}$-mal in b auf, so ist der $\mathfrak{p}^{\text{te}}$ Teil der Strecke c gleich dem $\mathfrak{m}^{\text{ten}}$ Teil der Strecke d und zugleich der $\mathfrak{q}^{\text{te}}$ Teil der Strecke c gleich dem $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Teile der Strecke d. Demnach sind die Quotienten $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ einander gleich.

Aus dieser Definition gehen für kommensurable Strecken folgende vier Sätze hervor:

a) Von zwei ungleichen Strecken hat die größere zu derselben dritten ein größeres Verhältnis als die kleinere.

b) Die Verhältnisse $a:b$ und $b:a$ sind zueinander reziprok.

c) Das Verhältnis zweier Strecken wird vergrößert oder verkleinert, je nachdem man die erste oder die zweite Strecke durch eine größere ersetzt, wofern man nur jedesmal die andere Strecke unverändert läßt.

d) Das Verhältnis zweier Strecken zueinander ist gleich dem Quotienten aus den Verhältnissen, in denen die beiden Strecken zu derselben dritten Strecke stehen.

Um den ersten Satz zu beweisen, gehen wir von den beiden ungleichen Strecken a und b aus, die beide zu der Strecke c kommensurabel sein sollen und von denen $a > b$ ist. Aus unserer Annahme geht hervor, daß die drei Strecken ein gemeinsames Maß d besitzen. Wenn dieses $\mathfrak{m}$-mal in a, $\mathfrak{n}$-mal in b und $\mathfrak{q}$-mal in c aufgeht, so ist $a : c = \mathfrak{m} : \mathfrak{q}$ und $b : c = \mathfrak{n} : \mathfrak{q}$. Weil $a > b$ ist, muß $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ und somit auch der Quotient $\mathfrak{m} : \mathfrak{q} > \mathfrak{n} : \mathfrak{q}$ sein.

Der Satz b) ist eine unmittelbare Folge aus der Definition. Wenn die Strecke c $\mathfrak{m}$-mal in a und $\mathfrak{n}$-mal in b aufgeht, so ist $a : b = \mathfrak{m} : \mathfrak{n}$ und $b : a = \mathfrak{n} : \mathfrak{m}$.

Der erste Teil des Satzes c) kommt auf den Satz a) hinaus; der zweite Teil geht daraus hervor, indem man den Satz b) hinzunimmt.

Der Satz d) ergibt sich durch folgende Erwägung. Wenn das Verhältnis $a : c = \mathfrak{m} : \mathfrak{n}$, das Verhältnis $b : c = \mathfrak{p} : \mathfrak{q}$ ist, so läßt sich der $\mathfrak{n}\mathfrak{q}^{\text{te}}$ Teil der Strecke c genau $\mathfrak{m}\mathfrak{q}$-mal auf a und $\mathfrak{n}\mathfrak{p}$-mal auf b abtragen. Demnach ist das Verhältnis $a : b = \mathfrak{m}\mathfrak{q} : \mathfrak{n}\mathfrak{p}$, was der angegebenen Regel entspricht.

Um jetzt auch für zwei inkommensurable Strecken a und b ein Verhältnis α festsetzen zu können, vergleicht man mit der Strecke a alle Strecken, die mit b ein gemeinsames Maß haben, und verlangt, daß α größer sei als das Verhältnis einer jeden Strecke, die kleiner ist als a, aber kleiner als das Verhältnis einer jeden Strecke, die größer ist als a. Dadurch erhält man einen einzigen Wert für die Zahl α.

Unsere Untersuchungen haben uns aber gelehrt, daß zwischen irgend zwei irrationalen Zahlen unendlich viele rationale Zahlen liegen. Daraus geht unmittelbar die allgemeine Gültigkeit des Satzes a) hervor.

Um zu zeigen, daß der Satz b) auch für inkommensurable Strecken gilt, setzen wir das Verhältnis $a : b$ gleich α, das Verhältnis $b : a$ gleich β und denken die Zahl α durch den Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$, die Zahl β durch den Schnitt $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ bestimmt. Wir bezeichnen eine rationale Zahl durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, je nachdem sie der Menge $\mathfrak{A}$ oder der Menge $\mathfrak{A}'$ oder der Menge $\mathfrak{B}$ oder der Menge $\mathfrak{B}'$ angehört, beschränken uns aber dabei, was offenbar gestattet ist, auf positive Zahlen. Alsdann gelten die Beziehungen:

$$\mathfrak{a} \cdot b < a < \mathfrak{a}' \cdot b$$
$$\mathfrak{b} \cdot a < b < \mathfrak{b}' \cdot a.$$

Die Strecke b in den zuerst geschriebenen Ungleichheiten dürfen wir links durch einen kleineren, rechts durch einen größeren Wert ersetzen. Es ist also:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot a < a < \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}' \cdot a$$

oder

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} < 1 < \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}'. \tag{8}$$

Die Einschließung einer Zahl zwischen die sämtlichen Produkte $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}'$ liefert aber, wie wir in der vorigen Nummer gesehen haben, eine einzige Zahl, und zwar das Produkt $\alpha\beta$. Aus der Beziehung (8) geht also hervor, daß $\alpha\beta = 1$ ist, oder daß die Verhältnisse α und β reziproke Werte haben. Demnach ist das Gesetz b) und damit auch das Gesetz c) allgemein gültig.

Den Nachweis des Satzes d) können wir auf den Fall beschränken, daß die beiden ersten Strecken in irrationalen Verhältnissen zu der dritten Strecke stehen. Der Fall, daß eines dieser Verhältnisse rational ist, macht nur eine unbedeutende Änderung notwendig. Wir nennen α das Verhältnis $a : c$, β das Verhältnis $b : c$ und γ das Verhältnis $a : b$. Für den Schnitt α sollen die Bezeichnungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, für den Schnitt β die Bezeichnungen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ in der bereits öfter angegebenen Weise benutzt werden. Auch beschränken wir die Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ auf positive Werte.

Jeder rationalen Zahl $\mathfrak{a}$ ordnen wir eine Strecke a_0 zu, die zu c im Verhältnis $\mathfrak{a}$ steht; in entsprechender Weise bestimmen wir durch jedes $\mathfrak{a}'$ eine Strecke a'_0, durch jedes $\mathfrak{b}$ eine Strecke b_0 und durch jedes $\mathfrak{b}'$ eine Strecke b'_0. Dann ist jedesmal:

$$a_0 < a < a'_0, \qquad b_0 < b < b'_0.$$

Daraus gehen unter Benutzung das Satzes c) die Beziehungen hervor:

$$(9)\qquad \begin{aligned} a : b &> a_0 : b > a_0 : b'_0 \\ a : b &< a'_0 : b < a'_0 : b_0. \end{aligned}$$

Die Strecken a_0, a'_0, b_0, b'_0, sind mit c kommensurabel. Wir dürfen also, wie wir bereits vorhin bewiesen haben, vermittelst des Satzes d) aus ihren Verhältnissen zur Strecke c ihre Verhältnisse zueinander herleiten. Somit ist:

$$a_0 : b'_0 = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}'}, \qquad a'_0 : b_0 = \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{b}}.$$

Aus den Beziehungen (9) geht hiernach hervor, daß ist:

$$(10)\qquad \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}'} < \gamma < \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{b}}.$$

Die Quotienten $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{a}'/\mathfrak{b}$ schließen aber, wie wir in der vorigen Nummer bewiesen haben, nur den Quotienten α/β ein. Also ist $\gamma = \alpha : \beta$, wie behauptet worden ist.

14. **Erste Unterweisung über das Verhältnis zweier Strecken.** Nach diesen theoretischen Erörterungen knüpfen wir wieder an den Inhalt der ersten Nummern dieses Paragraphen an. Der Satz über die Mittellinie des Trapezes (§ 14, 6 S. 262) ermöglicht die Lösung der Aufgabe: Eine gegebene Strecke in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Teile zu zerlegen. Im Anschluß an diese Aufgabe ist es angemessen, zunächst auf einfache rationale Schnittverhältnisse hinzuweisen. Der Schüler, der eine Strecke in fünf gleiche Teile zerlegen kann, vermag sie auch nach dem Verhältnisse 2 : 3 zu teilen. Da das Verständnis der geometrischen Proportionen nur allmählich gewonnen werden kann, ist es gut, rationale Verhältnisse möglichst früh zu erwähnen, natürlich nur in solchen Fällen, in denen die ganzen Zahlen, durch die das Verhältnis dargestellt wird, in der Figur deutlich hervortreten, z. B. bei den Sätzen über den Schwerpunkt eines Dreieckes (§ 14, 6. S. 262). Da die Wissenschaft Jahrhunderte gebraucht hat, um den Begriff des Irrationalen vollständig zu klären, muß auch der jugendliche Geist durch wiederholte Besprechungen in längeren Zwischenzeiten vorbereitet werden, ehe er den allgemeinen Begriff der Proportion erfassen kann.

Eine weitere Vorbereitung bilden die in der vorigen Nummer besprochenen Gesetze, natürlich in ihrer Beschränkung auf einfache rationale Verhältnisse. Dabei ist es völlig ausreichend, wenn im Anschlusse an ausgeführte Zeichnungen der Inhalt der Sätze zum Eigentum der Schüler gemacht wird; rein theoretische oder gar dogmatische Unterweisungen sind für den beabsichtigten Zweck wenig geeignet; auch muß man sich hüten, durch übermäßige Breite das Interesse am Gegenstande zu ersticken.

Jetzt handelt es sich darum, dem Schüler klar zu machen, daß nicht notwendig zwei Strecken ein gemeinsames Maß besitzen. Hierbei mag der Lehrer die Bemerkungen benutzen, die wir in die theoretischen Erörterungen dieses Abschnitts eingestreut haben. Von einer allgemeinen Methode kann keine Rede sein. Jeder wähle sich die Erwägungen aus, die ihm am passendsten zu sein scheinen. Je mehr der Lehrer hierbei seiner Individualität folgt, um so fruchtbringender wird er den Unterricht gestalten.

Nach diesen Vorbereitungen kommt es darauf an, dem Schüler zu zeigen, daß das Verhältnis zweier Strecken wenigstens angenähert bestimmt werden kann. Dazu eignen sich wohl am besten die Dezimalbrüche, und zwar die unvollständigen Dezimalzahlen, die auch sonst beim Unterrichte nicht entbehrt werden können. Auch bei der Berechnung einer Quadratwurzel begnügt man sich mit wenigen Stellen; der Schüler weiß, daß auf die berechneten Stellen keineswegs lauter Nullen folgen; er verzichtet aber auf die Fortsetzung der Rechnung, indem er die folgenden Stellen unbestimmt läßt. In entsprechender Weise macht man ihn darauf aufmerksam, daß zur genauen Angabe des Verhältnisses zweier Strecken die Kenntnis der ersten Dezimalen nicht ausreicht, daß man vielmehr, streng genommen, in der Ermittlung der folgenden Stellen immer weitergehen muß. Gleichwie man durch Fortsetzung der Rechnung die Quadratwurzel auf immer mehr Stellen berechnen kann, mag man ihm auch klar machen, daß bei immer größerer Verfeinerung der Instrumente auch für das Verhältnis zweier Strecken immer mehr Dezimalstellen ermittelt werden können. Dabei setzt man, wie schon in Nr. 3 bemerkt wurde, zwei Zahlen als gleich voraus, wenn sie in allen Dezimalstellen übereinstimmen.

Weiter braucht man anfangs in der allgemeinen Theorie nicht zu gehen. Es ist nur noch notwendig, den Satz c) der vorigen Nummer zum Eigentum der Schüler zu machen. Dieser Satz kann nicht entbehrt werden; ihn stillschweigend zu benutzen, wie wohl geschieht, dürfte sich nicht empfehlen. Aus diesem Satze geht die Folgerung hervor, daß eine Strecke nur in einem Punkte nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse geteilt werden kann. Auch diesen Satz muß der Schüler kennen; er muß wissen, daß, wenn auf einer Strecke AB zwei verschiedene Punkte C und D angenommen sind, auch die Verhältnisse $AC : CB$ und $AD : DB$ ungleich sind. Vielfach beweist man diesen Satz auf indirektem Wege. Man setzt die beiden Verhältnisse einander gleich, vergrößert jedes von ihnen um eins und leitet dadurch die Gleichung her: $AB : CB = AB : DB$, die mit der Voraussetzung, daß C und D verschiedene Punkte seien, unvereinbar ist. Wir möchten den Satz lieber durch zweimalige Anwendung des soeben genannten Satzes beweisen. Wenn die Punkte C und D so gewählt sind, daß C zwischen A und D und demnach D zwischen C und B liegt, so ist:

$$\frac{AC}{CB} < \frac{AD}{CB} < \frac{AD}{DB}.$$

Hier wird bei jedem Übergange nur ein Glied geändert.

Hiernach ist, solange man sich auf eine wirkliche Teilung einer Strecke durch einen ihr angehörenden Punkt beschränkt, das Schnittverhältnis durch die Lage des teilenden Punktes eindeutig bestimmt. Der Schüler muß angehalten werden, dies Verhältnis als eine Funktion der Lage des teilenden Punktes aufzufassen; er muß wissen, wie sich diese Funktion verändert, wenn der Teilpunkt alle verschiedenen Lagen auf der Strecke von ihrem Anfangspunkte an bis zu ihrem Endpunkte annimmt.

Jetzt kann man zu dem Lehrsatze übergehen, der in der folgenden Nummer besprochen werden soll. Im weiteren Verlaufe des Unterrichts wird man aber dahin streben, den Schüler immer tiefer in die Natur des Irrationalen einzuführen. Der erste Schritt, der zu diesem Ziele führt, kann darin bestehen, die Operationen näher zu erläutern, die es ermöglichen, ein Verhältnis als Dezimalbruch darzustellen. Hierfür kommt es darauf an, wenn n eine Potenz von zehn ist, eine gegebene Strecke in n gleiche Teile zu zerlegen und dann zu ermitteln, wie oft der n^{te} Teil dieser Strecke auf einer zweiten Strecke abgetragen werden kann. Nachdem dies zum klaren Bewußtsein gebracht ist, braucht man nur darauf hinzuweisen, daß beide Operationen für jede beliebige Zahl n ausgeführt werden können. Dabei verlangt die zweite Operation, der gewählten Zahl n jedesmal eine Zahl m so zuzuorden, daß sich m der erhaltenen Teile auf der andern Strecke abtragen lassen, während die aus $m+1$ solchen Teilen bestehende Strecke die gegebene an Größe übertrifft. Damit ist das Wesen des Dedekindschen Schnittes dargelegt; ihn selbst zu besprechen, dürfte nicht notwendig sein. Dagegen ist es unbedingt notwendig, das archimedische Axiom wegen seiner hervorragenden Wichtigkeit ausdrücklich hervorzuheben und dem Verständnis näher zu bringen.

15. **Hauptsatz über geometrische Proportionen.** An die Spitze der Lehre von den geometrischen Proportionen stellen die Lehrbücher einen Lehrsatz, der in folgender Weise ausgesprochen werden kann:

Die Schenkel eines Trapezes werden von jeder sie durchschneidenden Geraden, die zu den Grundlinien parallel ist, nach ein und demselben Verhältnisse geteilt; ebenso sind sowohl die oberen als die unteren Abschnitte zu den Schenkeln proportional.

Es sei $ABCD$ das gegebene Trapez mit den Grundlinien AB und CD. Wird der Schenkel AD in M, der Schenkel BC in N von einer zu AB parallelen Geraden geschnitten, so bestehen die Proportionen:

$$AM : MD = BN : NC,$$

$$AM : AD = BN : BC,$$

$$MD : AD = NC : BC.$$

Für die Schenkel AD und BC muß jedesmal der an der einen Grundlinie liegende Eckpunkt des Trapezes als Anfangspunkt und der mit der andern Grundlinie gemeinsame Eckpunkt als Endpunkt angesehen werden. Ebenso werden die Teile eines Schenkels als obere und untere unterschieden, je nachdem sie an die eine oder die andere Grundlinie anstoßen.

Vielfach spricht man den Satz nicht für das Trapez, sondern für das Dreieck aus. Weil man aber das Dreieck als einen Spezialfall eines Trapezes auffassen kann, ist die hier gewählte Form etwas allgemeiner. Für den Beweis macht es keinen Unterschied, ob man das Dreieck oder das Trapez zugrunde legt. Bei manchen Anwendungen ist es aber notwendig, den Satz für das Trapez zu benutzen. Daher empfiehlt es sich, den Satz so auszusprechen, daß dies möglich wird. Immerhin mag man im Anfange daneben auch die Form angeben, die er für das Dreieck erhält.

Wir haben in dem Satze drei verschiedene Behauptungen vereinigt. Diese kommen auf dasselbe hinaus, wenn man den Begriff des Schnittverhältnisses in voller Allgemeinheit benutzt. Dann kann man sich auch von der Beschränkung frei machen, daß die Parallele zwischen den beiden Grundlinien liegen soll. Indessen halten wir es nicht für angebracht, schon auf dieser Stufe den Begriff des Schnittverhältnisses in der Weise zu erweitern, die wir in § 20 besprechen werden. Ein Begriff muß erst in seiner vollen Reinheit aufgefaßt sein, bevor man ihm eine uneigentliche Bedeutung beilegen darf. Auf natürliche Art kann eine Strecke nur durch einen in ihr enthaltenen Punkt geteilt werden; zu der Zeit, wo die sogenannte äußere Teilung eingeführt wird, muß der Schüler die Gründe würdigen können, die dafür sprechen, den Begriff der Teilung zu erweitern. Zudem ist für die ganze Beweisführung der Satz unerläßlich, daß eine jede Strecke nur in einem Punkte nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse geteilt werden kann. Dieser Satz aber verliert seine Gültigkeit, wenn man die äußere Teilung hinzunimmt. Die äußere Teilung drängt deshalb dazu, den Strecken je nach ihrer Richtung verschiedene Vorzeichen beizulegen. Dafür sind aber die Schüler, die erst in die Ähnlichkeitslehre eingeführt werden sollen, noch nicht reif.

Dadurch, daß wir die drei Behauptungen aufstellen und uns nicht mit einer einzigen begnügen, wird der Lehrstoff nicht vermehrt, weil die Beweise genau auf demselben Gedanken beruhen. Um zu beweisen, daß die vier angegebenen Strecken in Proportion stehen, wählt man jedesmal die zweite aus, teilt sie in n gleiche Teile und trägt einen dieser Teile, so oft es angeht, auf der ersten Strecke ab. Durch die einzelnen Teilpunkte, die man bei der Teilung der zweiten Strecke und bei dem Abtragen auf der ersten Strecke erhält, zieht man die Parallelen zu den Grundlinien und untersucht die Teile, die dadurch auf dem anderen Schenkel abgegrenzt werden. Der Fall, daß die erste und die zweite Strecke kommensurabel sind, wird zweckmäßig für sich behandelt; im Falle der Inkommensurabilität empfiehlt es sich, die angegebene Zahl n als eine Potenz von zehn vorauszusetzen.

Diesen Gedanken wollen wir für den ersten Teil des Satzes durchführen und beweisen, daß unter den angegebenen Bedingungen die Proportion besteht: $AM : MD = BN : NC$, dabei aber von dem Falle absehen, daß die Strecken AM und MD ein gemeinsames Maß besitzen. Sind diese beiden Strecken inkommensurabel, so teilt man die Strecke MD in 10, 100, . . . gleiche Teile und zieht jedesmal die Parallelen zu AB. Dann wird auch die Strecke NC in dieselbe Anzahl gleicher Teile zerlegt. Ein einzelner Teil von MD, der auf diese Weise erhalten wird, möge mit p, der entsprechende Teil von NC mit q bezeichnet werden. Die Strecke p trägt man von M aus auf MA ab. Da die Strecken AM und MD als inkommensurabel vorausgesetzt sind, liegt A zwischen zwei Punkten A' und A'' in der Weise, daß $MA' = m \cdot p$ und $MA'' = (m + 1) \cdot p$ ist. Indem man wieder durch die einzelnen hierbei erhaltenen Punkte die Parallelen zu AB zieht, findet man, daß auch der Punkt B zwischen zwei Punkten B' und B'' liegt, für die $NB' = m \cdot q$ und $NB'' = (m + 1) \cdot q$ ist. Für die beiden Verhältnisse $AM : MD$ und $BN : NC$ erhält man also denselben Dezimalbruch. (Später nimmt man an, daß p für ein ganz beliebiges n der n^{te} Teil von MD ist, und verfährt im übrigen auf dieselbe Weise. Nennt man jetzt α das Verhältnis $AM : MD$ und β das Verhältnis $BN : NC$, so gelten für jeden Wert von n die Beziehungen:

$$\frac{m}{n} < \alpha < \frac{m+1}{n}, \qquad \frac{m}{n} < \beta < \frac{m+1}{n}.$$

Daraus geht die Gleichheit der Verhältnisse α und β hervor.)

In dem Falle, daß die Verhältnisse irrational sind, beweisen die meisten Lehrbücher nach dem Vorbild der Alten den Satz auf indirektem Wege. Wir glauben aber, daß das soeben angedeutete direkte Verfahren leichter aufgefaßt wird und ein tieferes Verständnis vermittelt.

Daß auch umgekehrt eine Gerade, die die Schenkel eines Trapezes nach demselben Verhältnisse teilt, zu den Grundlinien parallel ist, läßt sich auf Identität zurückführen (§ 10, 9 S. 217). Der vielfach übliche, indirekte Umkehrungsbeweis hat also keine Berechtigung.

Euklid stützt den Beweis des Satzes, daß jede Parallele zu einer Dreieckseite die beiden andern in proportionale Teile zerlegt, auf die beiden Sätze, daß Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe inhaltsgleich sind, und daß Dreiecke von gleicher Höhe sich wie ihre Grundlinien verhalten. Das ist aber ein Umweg, der nur geeignet ist, das eigentliche Beweisprinzip zu verdunkeln. Der Beweis des an zweiter Stelle benutzten Hülfssatzes ist um nichts einfacher als der oben angegebene Beweis des Hauptsatzes selbst. Zudem leidet Euklids Beweis an dem Fehler, daß er sich auf den Begriff des Verhältnisses zweier Flächen stützt und damit einen Begriff benutzt, dessen Berechtigung, wie wir in § 5 gesehen haben, nur durch recht komplizierte Erwägungen bewiesen werden kann. Es ist daher als ein wirklicher Fortschritt zu begrüßen, daß man seit längerer Zeit in Deutschland durchweg nicht mehr Euklid folgt, sondern die beiden Verhältnisse, deren Gleichheit bewiesen werden soll, direkt miteinander vergleicht.

An den Hauptsatz über Proportionen schließen sich naturgemäß die beiden Aufgaben an: Eine Strecke nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu teilen, und: Zu drei Strecken die vierte Proportionale zu finden. Bei der Lösung dieser Aufgaben ist der Winkel beliebig, unter dem zwei Strecken, deren Länge gegeben ist, aneinander gelegt worden. Der Schüler muß aber darauf aufmerksam gemacht werden, daß durch die Wahl dieses Winkels das Ergebnis nicht beeinflußt wird.

Der Satz über das Verhältnis, nach dem eine Seite eines Dreiecks durch die Halbierende ihres Gegenwinkels geteilt wird, ist eine einfache Folge aus dem besprochenen Satze. Die Theorie der harmonischen Strahlen macht es notwendig, den entsprechenden Satz für den Außenwinkel hinzuzunehmen; es ist aber wohl besser, diesen Teil des Satzes erst dann zu bringen, wenn der Begriff des Schnittverhältnisses erweitert ist.

16. **Herleitung neuer Proportionen aus einer gegebenen.** Dem in der vorigen Nummer besprochenen Lehrsatze schicken die meisten Lehrbücher einige allgemeine Sätze über Proportionen voraus, die es ermöglichen, aus einer als richtig erkannten Proportion weitere Proportionen herzuleiten. Diese Sätze erhalten vielfach eine feste Ordnung und werden dann genau als erster, zweiter, dritter ... Satz über Proportionen zitiert. Einzelne Lehrer verlangen sogar, daß bei

der Anwendung eines dieser Sätze die Schüler jedesmal angeben, welche Stelle der Satz im Lehrbuch einnimmt. Man sollte schon eine so überflüssige Belastung des Gedächtnisses vermeiden. Zwar ist es notwendig, die Kongruenzsätze bei ihrer hervorragenden Wichtigkeit kurz zu zitieren. Aber hier liegt doch für eine feste Anordnung keinerlei Grund vor. Wenn die Schüler gezwungen werden, diesen Sätzen eine feste Ordnung beizulegen und diese auswendig zu behalten, so muß ihnen die Mathematik als ein totes Gerippe erscheinen, von dem sie geradezu abgestoßen werden.

Die erwähnten Sätze liefern einige allgemeine Regeln, nach denen aus einer als richtig erkannten Proportion neue Proportionen hergeleitet werden können. Beim Beweise beschränkt man sich auf vier Zahlen, die in Proportion stehen, und setzt diese sogar stillschweigend als rational voraus. Nachträglich wendet man diese Regeln auf geometrische Proportionen an. Dies Verfahren kann schon an sich als befriedigend nicht angesehen werden. Zudem führt es den Schüler nicht in das Wesen der geometrischen Proportionen ein, erschwert ihm vielmehr durch Vermischung der arithmetischen und der geometrischen Proportionen das Verständnis in hohem Grade.

Wir möchten daher ein anderes Verfahren empfehlen. Nach den in Nr. 14 besprochenen Vorbereitungen gehen wir zu dem in Nr. 15 behandelten Lehrsatze über. Im Anschluß daran beweisen wir die gewöhnlich vorausgeschickten Sätze, aber nur für geometrische Proportionen. Wir nehmen an, zwischen den vier Strecken a, b, c, d, von denen etwa $a > b$ sein möge, bestehe die Beziehung:

$$a : b = c : d,$$

und weisen nach, daß aus dieser Streckenproportion die weiteren Proportionen folgen:

$$a \pm b : b = c \pm d : d$$
$$a \pm b : a = c \pm d : c$$
$$a + b : a - b = c + d : c - d,$$

wo in den beiden ersten Gleichungen auf beiden Seiten dieselben Vorzeichen stehen müssen.

Zum Beweise lassen wir von einem Punkte A unter einem beliebigen Winkel die Strecken $AD = a$ und $AE = c$ ausgehen und verlängern AD über D um $DB = b$ und AE über E um $EC = d$. Von AD schneiden wir die Strecke $DF = DB$ ab und ziehen durch F die Parallele zu BC bis zu ihrem Schnittpunkte G mit AC. Dann ist E die Mitte von CG. Weil die Geraden BC, DE und FG einander parallel sind, gelten die Beziehungen:

$$AB : BD = AC : CE,\ AB : AD = AC : AE,\ AF : FD = AG : GE,$$
$$AF : AD = AG : AE,\ AB : AF = AC : AG.$$

Dadurch sind die obigen Behauptungen bewiesen.

Eine ähnliche Figur zeigt, daß aus den beiden Proportionen $a : b = c : d$ und $a' : b = c' : d$ die neue Proportion hervorgeht: $a' : a = c' : c$.

Aber auch der Satz, daß in jeder Proportion die mittleren Glieder miteinander vertauscht werden können, läßt sich rein geometrisch ohne jede Rechnung beweisen. Hierzu kann jede Konstruktion benutzt werden, durch die ein Rechteck in ein anderes verwandelt wird, von dem eine Seite gegeben ist. Wir möchten die Konstruktion und damit den Beweis des Satzes an die sog. Ergänzungsparallelogramme (§ 16 S. 286) anschließen. In einem Rechteck $ABCD$ ziehen wir durch einen Punkt O der Diagonale AC die Parallelen zu den Seiten und bestimmen dadurch auf den Seiten die Punkte E, F, G, H, wo E in AB, F in BC, G in CD und H in DA liegen soll. Dann haben die Rechtecke $OEBF$ und $OGDH$ gleichen Inhalt. Ist jetzt das Rechteck $OGDH$ aus den Seiten $OH = b$ und $OG = c$ gegeben und suchen wir ein inhaltsgleiches Rechteck, das die Seite a hat, so verlängert man HO um $OF = a$, zieht durch F die Parallele zu OG bis zu ihrem Schnittpunkte C mit der Geraden DG und bestimmt den Punkt A als Schnittpunkt der Geraden OC und DH. Die durch A zu OH gezogene Parallele liefert durch ihren Schnitt mit OF den Punkt E und durch ihren Schnitt mit CF den Punkt B. Setzen wir jetzt $OE = d$, so haben die beiden Rechtecke, von denen das eine die Seiten b und c, das andere die Seiten a und d hat, gleichen Inhalt. Zugleich verhält sich aber auch:

$$CG : GD = CO : OA = CF : FB,$$

oder

$$a : b = c : d.$$

Da aber sowohl die zu bestimmende Rechteckseite als auch die vierte Proportionale durch die drei Strecken a, b, c eindeutig bestimmt ist, so folgt, daß die beiden konstruierten Strecken identisch sind. Somit gehen aus der Proportion $a : b = c : d$ die Proportionen hervor: $a : c = b : d$ und $d : b = c : a$.

Nachträglich mag man darauf hinweisen, daß die hier angedeuteten geometrischen Beweise ihrem Wesen nach auf die gebräuchlichen arithmetischen Beweise hinauskommen. Für den Satz über die Vertauschung der inneren Glieder einer Proportion geht das natürlich erst, nachdem die Messung der Rechtecke begründet ist.

Jetzt sei es gestattet, das von uns empfohlene Verfahren mit dem gebräuchlichen zu vergleichen. Zunächst dürfen wir auch die Anschaulichkeit unserer Beweise hervorheben. Schon bei rein arithmetischen Sätzen legt man mit Recht Gewicht darauf, sie durch Zeichnungen der Auffassung näher zu bringen. Hier handelt es sich um Sätze, die in geometrischen Beweisen benutzt werden sollen, also im wesentlichen um geometrische Sätze. Dennoch verzichtet man auf die Anschauung und begnügt sich mit rein arithmetischen Operationen.

Ferner kann die Stelle, an der diese Sätze gebracht werden, als angemessen nicht betrachtet werden. Die Sätze gehen den geometrischen Proportionen voraus, erscheinen in arithmetischer Form und werden durch arithmetische Operationen bewiesen. Somit ist es dem Schüler unmöglich gemacht, in ihren geometrischen Inhalt einzudringen. Dessenungeachtet werden sie fortwährend auf geometrische Proportionen angewandt, an die der Schüler beim Erlernen gar nicht denken konnte. Unser Verfahren dagegen führt zunächst in die geometrischen Proportionen ein, macht mit ihrem Wesen bekannt und schließt daran erst die weiteren Lehrsätze an.

Endlich dürfen wir nicht verschweigen, daß dem gebräuchlichen Verfahren geradezu ein falsches Prinzip zugrunde liegt, daß man nämlich systematisch eine Strecke mit ihrer Maßzahl verwechselt. Und doch stellt die Maßzahl nur das Verhältnis zu einer willkürlich gewählten Einheit dar; sie führt somit ein ganz fremdes Element in die Betrachtung ein. Manche Lehrbücher vermeiden aber möglichst den Gebrauch von Verhältnissen und bevorzugen die Maßzahlen, was dann den Anschein erweckt, als ob sie mit den Strecken selbst operierten. Sie sprechen bei den Sätzen von Menelaus und von Ceva vom Produkte aus je drei Strecken, obwohl hierbei nur die Maßzahlen, also die Verhältnisse zu einer willkürlich hinzugenommenen Strecke benutzt werden können. Einzelne glauben die Definition der harmonischen Teilung zu vereinfachen, wenn sie darin ganz von Verhältnissen absehen und statt dessen gewisse Produkte heranziehen. Auch die arithmetischen Sätze über Proportionen können ohne weiteres nur dann auf Strecken angewandt werden, wenn man stillschweigend die Strecken durch ihre Maßzahlen ersetzt.

17. **Messung der Polygone.** Eine Gerade, die zwei Gegenseiten eines Rechtecks R trifft und den beiden andern Seiten parallel ist, werde als ein Hauptschnitt von R bezeichnet. Nun sei AB die Grundlinie von R, und ein Hauptschnitt treffe AB in E, die Gegenseite in F. Dadurch wird R in zwei neue Rechtecke: R_1 mit der Grundlinie AE und R_2 mit der Grundlinie EB, zerlegt.

Ist nun E ein rationaler Teilpunkt von AB und $AE:EB = m:n$, so kann man R durch Hauptschnitte, die parallel zu EF sind, in $(m+n)$ kongruente Rechtecke zerlegt denken. Da von diesen m auf R_1 und n auf R_2 entfallen, so sagt man, es sei auch $R_1:R_2 = m:n$. In diesem Falle kann man EF als einen rationalen Hauptschnitt von R bezeichnen.

Teilt aber der Punkt E die Seite AB nach der irrationalen Zahl α, so zerlegen alle rationalen Hauptschnitte von R, die auf der durch den Punkt A bestimmten Seite von EF liegen und zu EF parallel sind, das Rechteck R in je zwei Teile, deren Verhältnis kleiner als α ist; dagegen alle Hauptschnitte, die auf der durch B bestimmten Seite von EF liegen, in Teile, deren Verhältnis größer als α ist. Daher sagt man nun, R werde durch EF nach dem Verhältnisse α geteilt, oder es sei $R_1 : R_2 = \alpha$. In diesem Falle kann EF auch ein irrationaler Hauptschnitt von R genannt werden.

Das Ergebnis läßt sich in der Form aussprechen: Zwei Rechtecke, die in einer Seite übereinstimmen, verhalten sich zueinander wie die beiden andern Seiten.

Es seien zwei Rechtecke gegeben: R_1 mit den Seiten a, b und R_2 mit den Seiten c, d. Ferner sei $a : c = \alpha$ und $b : d = \beta$, wo α, β irgend zwei reelle Zahlen sind. Das Produkt $\alpha \cdot \beta = \gamma$ ist stets eine bestimmte Zahl, die sich auf eine beliebige Anzahl von Stellen in einen Dezimalbruch entwickeln läßt, auch wenn α, β nicht rational sind.

Nun sei R ein drittes Rechteck mit den Seiten $\gamma \cdot c$ und d. Dann ist $R : R_2 = \gamma$. Zugleich ist aber $R = R_1$, da die Proportion besteht:

$$\gamma c : a = b : d.$$

Man wird also schließen: $R_1 : R_2 = \gamma$.

Hierdurch ist das Verhältnis von zwei beliebigen Rechtecken ermittelt. Indem man jetzt R_2 durch ein Quadrat ersetzt, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist, erhält man den bekannten Satz über die Maßzahl eines Rechtecks. Jedes andere Polygon läßt sich aber in ein Rechteck verwandeln; man kann daher auch für jedes Polygon die Maßzahl bestimmen, d. h. sein Verhältnis zu dem über der Längeneinheit errichteten Quadrate. Hieraus gehen die bekannten Sätze über das Inhaltsmaß eines Parallelogramms, eines Dreiecks und eines Trapezes hervor.

§ 18. Die Ähnlichkeitslehre.

1. **Die Ähnlichkeitslehre für das Dreieck.** Da die allgemeine Definition der Ähnlichkeit nicht ganz einfach ist, tut man gut, sich anfangs ganz auf das Dreieck zu beschränken. Petersen und Hilbert definieren ähnliche Dreiecke geradezu als solche, die in den Winkeln übereinstimmen. In zwei Dreiecken dieser Art läßt man solche Seiten einander entsprechen, die gleichen Winkeln gegenüberliegen, und beweist in bekannter Weise den Satz, daß entsprechende Seiten in ein und demselben Verhältnisse zueinander stehen. Ob man sich dann für die Definition ähnlicher Dreiecke auf die Gleichheit der

Winkel beschränkt oder die Proportionalität der Seiten hinzunimmt, dürfte wenig verschlagen, da der angeführte Lehrsatz zeigt, daß die zweite Eigenschaft mit der ersten notwendig verbunden ist. Neben diesem Satze müssen auch die beiden folgenden durchgenommen werden:

a) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und in dem Verhältnisse der einschließenden Seiten übereinstimmen;

b) Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten paarweise in demselben Verhältnisse zueinander stehen.

Der dem vierten Kongruenzsatze entsprechende Satz wird kaum benutzt; es kann daher zweifelhaft sein, ob er verdient, dem eigentlichen Lehrstoffe einverleibt zu werden.

Wie bei den Formeln für die Kongruenz ist es auch bei der Bezeichnung der Ähnlichkeit geboten, entsprechenden Eckpunkten gleiche Stelle anzuweisen. So vertritt die Formel: $ABC \sim A'B'C'$ die Behauptungen: $\sphericalangle A = A'$, $\sphericalangle B = B'$, $\sphericalangle C = C'$, $BC : B'C' = CA : C'A' = AB : A'B'$.

Das Verhältnis, in dem zwei entsprechende Seiten von ähnlichen Dreiecken zueinander stehen, heißt ihr Ähnlichkeitsverhältnis (Ähnlichkeitszahl) oder auch ihr lineares Verhältnis. Dies besteht auch allgemein für entsprechende Strecken, also für die Radien der Umkreise, der Inkreise und entsprechender Ankreise, für entsprechende Höhen, Winkelhalbierende, Schwerlinien usw. Man kann noch weiter gehen und etwa, wenn die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ähnlich sind, auf AB einen Punkt D, auf AC einen Punkt E, auf $A'B'$ einen Punkt D' und auf $A'C'$ einen Punkt E' in der Weise wählen, daß ist:

$$AD : DB = A'D' : D'B'$$

$$AE : EC = A'E' : E'C'.$$

Dann ist auch das Verhältnis der Strecken DE und $D'E'$ gleich dem Ähnlichkeitsverhältnisse. Zugleich ergibt sich, daß das Flächenverhältnis ähnlicher Dreiecke gleich dem Quadrate ihres linearen Verhältnisses ist.

2. **Einige Anwendungen der ersten Sätze der Ähnlichkeitslehre.** Von der Ähnlichkeit der Dreiecke kann man viele interessante Anwendungen machen, die in alle Lehrbücher aufgenommen sind. Indem man zunächst in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenusenhöhe zieht, erhält man drei Paare ähnlicher Dreiecke, die in einer nicht zu sich selbst homologen Seite übereinstimmen. Dadurch wird man auf drei Lehrsätze geführt, die in ihrer Gesamtheit vielfach als „Satz vom rechtwinkligen Dreieck“ zusammengefaßt werden. Aus zweien dieser Sätze geht bekanntlich ein neuer Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes hervor.

Daran schließen sich der Sehnen-, der Sekanten- und der Tangentensatz. Allerdings bezeichnet das Wort „Sekante" an sich eine unbegrenzte Gerade; da aber hier aus dem Zusammenhang deutlich hervorgeht, welche Strecke abgegrenzt werden soll, ist die gebräuchliche Ausdrucksweise gestattet. Diese Sätze enthalten den Begriff der „Potenz des Kreises in einem Punkte"; es ist aber angebracht, die scharfe Umgrenzung dieses Begriffes einer späteren Stelle vorzubehalten.

Die zuletzt angegebenen Sätze ermöglichen die Konstruktion einer Strecke x, die mit zwei gegebenen Strecken a und b durch eine Gleichung von der Form: $x(a \pm x) = \pm b^2$ verbunden ist. Zur Vereinfachung der Zeichnung trägt es bei, die Strecke a zum Durchmesser eines Hilfskreises zu wählen.

In der letzten Konstruktion ist die Teilung einer Strecke nach dem goldenen Schnitt, die stetige Teilung einer Strecke, enthalten; denn bei dieser Teilung wird die Strecke a mit ihrem größeren Abschnitte x durch die Gleichung verbunden: $a(a-x) = x^2$. Wir erwähnen hier die gebräuchliche Lösung, um eine Bemerkung anzuknüpfen.

Im Endpunkt B der gegebenen Strecke AB errichtet man auf ihr die Senkrechte $BO = \frac{1}{2}AB$ und beschreibt den Kreis $(O)B$, den die Gerade AO in den Punkten C und D schneiden möge, wo der Punkt C zwischen A und O liegen soll. Indem man auf AB die Strecke $AE = AC$ abträgt und die Strecke BA (über A hinaus) um $AF = AC$ verlängert, wird die Strecke AD in C, die Strecke AB in E und die Strecke BF in A nach dem goldenen Schnitte geteilt. Die Konstruktion ändert sich aber nicht wesentlich, wenn man entweder die Strecke selbst oder einen ihrer Teile als gegeben betrachtet.

Dieser Zusammenhang tritt auch bei der algebraischen Darstellung hervor. Ist a die Strecke, b der größere Abschnitt, so bestehen die Gleichungen:

$$b^2 = a(a-b), \quad a^2 = (a+b)b, \quad (a+b)^2 = (2a+b)a,$$

von denen die zweite aus der ersten hevorgeht, wenn man beiderseits das Produkt $a \cdot b$ addiert, während die dritte aus der zweiten durch Addition von $a(a+b)$ erhalten wird.

Den ptolemäischen Lehrsatz möchten wir der Trigonometrie zuweisen.

3. **Die regelmäßigen Vielecke.** Die regelmäßigen Vielecke von drei, vier und sechs Seiten können zwar schon auf einer niedern Stufe behandelt werden. Auch kann der Satz, daß sich in und um jedes regelmäßige Vieleck ein Kreis beschreiben läßt, der niederen Kreislehre eingereiht werden. Da man aber zur Konstruktion des regelmäßigen Zehnecks die Teilung einer Strecke nach dem goldenen Schnitte benutzt, ist es besser, die Lehre von den regelmäßigen Viel-

ecken erst zu bringen, nachdem die ähnlichen Dreiecke behandelt sind. Es leuchtet sofort ein, daß regelmäßige Vielecke von derselben Seitenzahl in den Winkeln und im Verhältnisse der Seiten übereinstimmen. Demnach schließen sich die regelmäßigen Vielecke eng an die ähnlichen Dreiecke an. Das Ähnlichkeitsverhältnis tritt uns aber auch als Verhältnis entsprechender Diagonalen, sowie als Verhältnis der Radien der Um- und der Inkreise entgegen. Wegen dieser Eigenschaft dient die Untersuchung der regelmäßigen Polygone auch als Vorbereitung auf die allgemeine Ähnlichkeitslehre.

Wir möchten aber auf das bestimmteste raten, von der Ähnlichkeitslehre zunächst nur die Teile durchzunehmen, die wir in den Nummern 1, 2, 3 dieses Paragraphen behandelt haben, und hierauf die Kreismessung folgen zu lassen, die aufs engste mit der Lehre von den regelmäßigen Vielecken verbunden ist. Auch dann braucht man noch nicht sofort die Ähnlichkeitslehre zum Abschluß zu bringen; vielmehr können unbedenklich einzelne Partien aus den §§ 20 und 21 vorher durchgenommen werden. Wer zu früh auf die Ähnlichkeit beliebiger Vielecke eingeht, vergeudet unnütz Zeit und Mühe.

Der Zweck unseres Buches läßt es uns dagegen am angemessensten erscheinen, an dieser Stelle die allgemeine Ähnlichkeitslehre zu behandeln und die Kreismessung dem folgenden Paragraphen vorzubehalten.

4. **Allgemeiner Begriff der Ähnlichkeit.** Die beiden Polygone $ABCD \ldots MN$ und $A'B'C'D' \ldots M'N'$ heißen ähnlich, wenn die Verhältnisse:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{AB}{A'B'}, & \frac{AC}{A'C'}, & \frac{AD}{A'D'}, & \ldots & \frac{AM}{A'M'}, & \frac{AN}{A'N'}, \\
 & \frac{BC}{B'C'}, & \frac{BD}{B'D'}, & \ldots & \frac{BM}{B'M'}, & \frac{BN}{B'N'}, \\
 & & \frac{CD}{C'D'}, & \ldots & \frac{CM}{C'M'}, & \frac{CN}{C'N'}, \\
 & & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & \frac{MN}{M'N'},
\end{array}$$

sämtlich denselben Wert haben.

Durch diese Festsetzung ist jedem Eckpunkt, jeder Seite und jeder Diagonale des einen je ein bestimmter Eckpunkt, eine bestimmte Seite und eine bestimmte Diagonale des andern als entsprechend (homolog) zugeordnet. Dabei stehen entsprechende Seiten und Diagonalen in demselben Verhältnisse; entsprechende Winkel sind einander gleich, entsprechende Dreiecke einander ähnlich. Das konstante Verhältnis entsprechender Strecken wird als das Ähnlichkeitsverhältnis der Polygone oder als ihr lineares Verhältnis bezeichnet.

Wenn zwei ähnliche Vielecke in derselben Ebene liegen, so haben zwei entsprechende Dreiecke entweder jedesmal denselben oder jedesmal entgegengesetzten Sinn; im ersten Falle legen wir auch den Polygonen selbst denselben, im zweiten Falle entgegengesetzten Sinn bei. Auch geben wir bei gleichem Sinn dem Ähnlichkeitsverhältnisse das positive, bei entgegengesetztem Sinne das negative Vorzeichen.

Um diese Zuordnung auf zwei verschiedene Ebenen übertragen zu können, legen wir jeder von ihnen ganz willkürlich einen bestimmten Sinn bei. Liegt jetzt in jeder Ebene ein Dreieck und stimmt beidemal der Sinn des Dreiecks mit dem der Ebene überein, so sollen auch die Dreiecke denselben Sinn haben. Ebenso wird der Sinn der Dreiecke als übereinstimmend angesehen, wenn jedesmal der Sinn von dem der Ebene verschieden ist. Dagegen haben die Dreiecke verschiedenen Sinn, wenn das eine Dreieck in seinem Sinne mit dem der Ebene übereinstimmt, das andere aber nicht. Diese Festsetzungen ermöglichen es, den Sinn ähnlicher Polygone auch in dem Falle zu ermitteln, wo sie in verschiedenen Ebenen liegen. Das Vorzeichen, das hiernach dem Ähnlichkeitsverhältnisse beigelegt werden muß, hängt aber wesentlich von dem Sinne ab, den wir den Ebenen beigelegt haben.

Die Forderungen, die wir für die Ähnlichkeit von Polygonen aufgestellt haben, sind nicht unabhängig voneinander. Will man sie auf ihr geringstes Maß beschränken, so kann man etwa verlangen, daß die Dreieckspaare ABC und $A'B'C'$, ABD und $A'B'D'$, ... ABM und $A'B'M'$, ABN und $A'B'N'$ ähnlich sind und entweder stets denselben oder stets den entgegengesetzten Sinn haben.

Um zu einem gegebenen Polygon $ABCD \ldots MN$ ein ähnliches Polygon $A'B'C'D' \ldots M'N'$ zu konstruieren, kann man in der Ebene, in der das zweite liegen soll, die Strecke $A'B'$ ganz willkürlich wählen. Wenn dann die Punkte A, B, C nicht in gerader Linie liegen, so gibt es noch zwei verschiedene Lagen für den Punkt C'. Nachdem aber einmal die Lage dieses Punktes gewählt ist, sind die Punkte $D', \ldots M', N'$ eindeutig bestimmt, mag man von der einen oder der andern Definition ausgehen.

Auch zwei Ebenen können einander als ähnlich zugeordnet werden. Man läßt im Anschluß an die erste Definition, die wir für die Ähnlichkeit von Polygonen aufgestellt haben, jedem Punkte der einen Ebene einen Punkt der andern Ebene entsprechen und verlangt, daß die Entfernung von irgend zwei Punkten der einen Ebene in konstantem Verhältnisse zu der Entfernung der entsprechenden Punkte in der andern Ebene steht. Durch die vorhin getroffenen Festsetzungen wird es ermöglicht, auch in diesem Falle der Ähnlichkeit einen bestimmten Sinn beizulegen.

Die Möglichkeit einer derartigen Zuordnung kann leicht bewiesen werden. Nachdem der Sinn der Ebenen festgelegt ist, kann man einem beliebig gewählten Punkte A der ersten Ebene einen Punkt A' der zweiten willkürlich zuordnen, ebenso einem Halbstrahle AX der ersten einen Halbstrahl $A'X'$ der zweiten. Außerdem darf man das Ähnlichkeitsverhältnis seiner Größe und seinem Vorzeichen nach beliebig festsetzen. Durch die Größe desselben wird jedem Punkte X in dem Halbstrahl AX ein bestimmter Punkt X' des Halbstrahls $A'X'$ zugewiesen. Das Vorzeichen bestimmt den Halbstrahl $A'Y'$, der einem beliebigen von A ausgehenden Halbstrahle AY der ersten Ebene zugeordnet werden muß. Wie dann endlich die Zuordnung der einzelnen Punkte in den Halbstrahlen AY und $A'Y'$ erfolgen muß, geht wiederum eindeutig aus dem absoluten Betrage des Ähnlichkeitsverhältnisses hervor.

Hierbei entspricht jedem Polygon in der ersten Ebene ein ähnliches Polygon in der zweiten. Ihr Flächenverhältnis ist gleich dem Quadrate des Ähnlichkeitsverhältnisses; wenn sie nach der Vorschrift von Möbius mit Vorzeichen versehen werden, so ist auch dem Verhältnisse der Flächen das positive oder das negative Vorzeichen beizulegen, je nachdem die ähnliche Zuordnung selbst den einen oder den andern Sinn hat.

Ebene Kurven können als ähnlich angesehen werden, wenn sie einander in Ebenen entsprechen, die einander ähnlich zugeordnet sind. Statt dessen können wir auch sagen: Zwei krumme Linien sind einander ähnlich, wenn es zu jedem in die eine eingeschriebenen Polygon ein ähnliches Polygon gibt, das in die andere eingeschrieben werden kann. Hiernach können Kreisbögen, die zu gleichen Zentriwinkeln gehören, als ähnliche Linien betrachtet werden.

5. **Die perspektive Ähnlichkeit.** Es ist allgemeine Sitte, auch dann von der Teilung einer Strecke AB durch einen Punkt C zu sprechen, wenn der Punkt C zwar nicht zwischen A und B liegt, aber doch der Geraden AB angehört. Eine solche Teilung wird als äußere Teilung bezeichnet. Als Schnittverhältnis (ABC) sieht man stets das Verhältnis $AC : CB$ an.

Hiernach können wir die Definition aufstellen:

Zwei Gebilde heißen perspektiv ähnlich, wenn jedem Punkte des einen ein Punkt des andern so zugeordnet werden kann, daß die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte in einem festen Punkte, dem Ähnlichkeitspunkte, nach ein und demselben Verhältnisse, dem Ähnlichkeitsverhältnisse, geteilt werden.

Wir sagen in diesem Falle auch, die Gebilde seien „ähnlich und ähnlich liegend“ oder „ähnlich in perspektiver Lage“.

Bei Beschränkung auf Polygone können wir die Definition auch in folgender Weise aussprechen:

Die beiden Polygone $ABC \ldots MN$ und $A'B'C' \ldots M'N'$ sind ähnlich und ähnlichliegend, wenn die Punktepaare A und A', B und B', C und C', ... M und M', N und N' je mit einem festen Punkte S in gerader Linie liegen und die Verhältnisse:

$$\frac{SA}{SA'}, \frac{SB}{SB'}, \frac{SC}{SC'}, \ldots \frac{SM}{SM'}, \frac{SN}{SN'}$$

im Werte und im Zeichen übereinstimmen.

Die Ähnlichkeit wird als äußere oder innere bezeichnet, je nachdem diese Verhältnisse positiv oder negativ sind.

Man kann auch eine Ebene perspektiv-ähnlich auf sich selbst beziehen. Hierbei denkt man sich die Ebene doppelt und ordnet jedem Punkte der ersten Ebene einen Punkt der zweiten so zu, daß die Strecken, durch die entsprechende Punkte mit einem festen Punkte verbunden werden, in gerader Linie liegen und in einem konstanten Verhältnisse stehen. Nach dem Vorzeichen, das dies Verhältnis hat, unterscheidet man auch hier äußere und innere Ähnlichkeit. Jeder Geraden entspricht eine Gerade, jeder Strecke eine Strecke, jedem Winkel ein Winkel, jedem Dreieck ein Dreieck usw. Entsprechende

Strecken stehen in demselben Verhältnisse, entsprechende Winkel sind einander gleich, entsprechende Dreiecke einander ähnlich und von demselben Sinn. Jede Gerade, die durch den Ähnlichkeitspunkt geht, ist sich selbst zugeordnet; sie heißt ein Ähnlichkeitsstrahl. Jeder andern Geraden entspricht eine von ihr verschiedene parallele Gerade.

Auch der Raum kann perspektiv-ähnlich auf sich selbst bezogen werden. Die aufgestellten Definitionen verlangen gar nicht, daß die Gebilde derselben Ebene angehören; die erste setzt nicht einmal voraus, daß das einzelne Gebilde in einer Ebene liegt. Bei einer perspektiv-ähnlichen Abbildung des Raumes wird jede Ebene, die durch den Ähnlichkeitspunkt geht, perspektiv-ähnlich auf sich selbst bezogen. Dagegen entspricht einer Ebene, die den Ähnlichkeitspunkt nicht enthält, eine parallele Ebene, die mit ihr nicht zusammenfällt. Entsprechende Tetraeder stimmen in den Kanten- und den Flächenwinkeln überein und werden von paarweise ähnlichen Dreiecken begrenzt; sie haben denselben oder entgegengesetzten Sinn, je nachdem die Ähnlichkeit eine äußere oder eine innere ist. Das Verhältnis ihrer Volumina ist die dritte Potenz ihres linearen Verhältnisses.

Die perspektive Ähnlichkeit ist ein spezieller Fall der kollinearen Zuordnung, die wir in § 8, 3 (S. 148) für die Ebene besprochen haben. Bei der kollinearen Zuordnung des Raumes läßt man einem jeden Punkte einen Punkt und jeder Ebene eine Ebene entsprechen und verlangt, daß jedesmal, wenn ein Punkt in einer Ebene liegt, auch der entsprechende Punkt der entsprechenden Ebene angehört. Soll eine solche Zuordnung in die perspektive Ähnlichkeit übergehen, so ordnet man jeden unendlich fernen Punkt sich selbst zu und läßt außerdem einen eigentlichen Punkt sich selbst entsprechen. Auf diese Beziehung brauchen wir wohl nicht näher einzugehen. Der vor einiger Zeit gemachte Versuch, die Projektivität beim Unterrichte zur Grundlage der Geometrie zu machen, dürfte endgültig aufgegeben sein und schwerlich erneuert werden.

Wenn man die perspektive Ähnlichkeit an die Spitze stellt, so kann man die oben aufgestellte Definition der Ähnlichkeit durch die folgende ersetzen: Zwei Gebilde sind ähnlich, wenn es zu dem einen ein kongruentes oder symmetrisches Gebilde gibt, das zu dem andern perspektiv-ähnlich liegt.

In der Tat stimmen perspektiv-ähnliche Gebilde im Verhältnisse entsprechender Strecken überein; sie sind also nicht nur selbst im Sinne unserer früheren Definition einander ähnlich, sondern auch jedes Gebilde, das kongruent oder symmetrisch zu dem einen ist, ist dem andern ähnlich. Sind umgekehrt die Gebilde $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ im Sinne unserer ersten Definition einander ähnlich, so kann man stets ein Gebilde $\mathfrak{G}''$ finden, das zu $\mathfrak{G}'$ kongruent oder symmetrisch ist und mit $\mathfrak{G}$ perspektiv ähnlich liegt. Zu dem Ende wählen wir den Ähnlichkeitspunkt S ganz beliebig und konstruieren nach dem linearen Verhältnisse, in dem jede Strecke von $\mathfrak{G}$ zu der entsprechenden Strecke von $\mathfrak{G}'$ steht, zu $\mathfrak{G}$ ein perspektiv-ähnliches Gebilde $\mathfrak{G}''$. Alsdann ist, wie man leicht sieht, $\mathfrak{G}''$ kongruent oder symmetrisch zu $\mathfrak{G}'$. Nehmen wir speziell an, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ seien Gebilde, die derselben Ebene angehören, so wird auch das Gebilde $\mathfrak{G}''$ in derselben Ebene liegen, sobald nur der Punkt S in dieser Ebene angenommen wird. Nun kann man aber, wenn die Gebilde $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ kongruent sind, nach § 4, 7 (S. 71) einen Punkt Q in der Weise bestimmen, daß durch eine Drehung um Q das Gebilde $\mathfrak{G}'$ mit $\mathfrak{G}''$ zur Deckung gelangt. Soeben haben wir den Ähnlichkeitspunkt S ganz beliebig gewählt. Wir können zeigen, daß er bei passender Wahl mit Q zusammenfällt. Es gibt nämlich immer einen Punkt, der nicht nur in der durch die Gebilde $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}''$ vermittelten perspektiven Ähnlichkeit, sondern auch bei der durch die Gebilde $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ bestimmten kongruenten Abbildung sich selbst entspricht.

Wir können diesen Satz in folgender Weise aussprechen:

Enthält eine Ebene zwei ähnliche Polygone von demselben Sinne, so kann man das eine um einen bestimmten Punkt der Ebene so drehen, daß seine neue Lage zum andern Gebilde auch ähnlich liegt und der gefundene Punkt Ähnlichkeitspunkt wird.

Will man das Wort Drehung nicht gebrauchen, so kann man dem Satze folgende Form geben:

Zu zwei in einer Ebene gelegenen ähnlichen Polygonen $ABC\ldots MN$ und $A'B'C'\ldots M'N'$ von demselben Sinne gibt es stets einen Punkt S von der Eigenschaft, daß die Dreiecke SAB und $SA'B'$, SBC und $SB'C'$, ... SMN und $SM'N'$, SNA und $SN'A'$ paarweise einander ähnlich sind und im Ähnlichkeitsverhältnisse und im Sinne übereinstimmen.

Beweis. Wenn in den beiden Polygonen ein Paar entsprechender Kanten parallel ist, so ist wegen der Übereinstimmung des Sinnes auch jede Kante des ersten zu der entsprechenden Kante des zweiten parallel, und die Polygone haben auch ähnliche Lage. Tritt dieser Fall nicht ein, so möge R der Schnittpunkt der Geraden AB und $A'B'$ sein. Die Kreise RAA' und RBB' mögen noch den Punkt S gemein haben, der im Falle der Berührung mit R zusammenfällt. Alsdann sind die Winkel $A'SA$ und $B'SB$, sowie die Winkel $SA'A$ und $SB'B$ je einander gleich und von demselben Sinne. Die Dreiecke SAB und $SA'B'$ sind daher einander ähnlich und haben denselben Sinn. Macht man jetzt im Halbstrahl SA die Strecke $SA'' = SA'$, im Halbstrahl SB die Strecke $SB'' = SB'$, und konstruiert zu $A'B'C'\ldots M'N'$ ein kongruentes Polygon $A''B''C''\ldots M''N''$, so ist offenbar der Punkt S Ähnlichkeitspunkt der Polygone $ABC\ldots MN$ und $A''B''C''\ldots M''N''$. Zugleich sind die Winkel $A'SA''$, $B'SB''$, ... $N'SN''$ sämtlich gleich $A'RA$.

Hieran schließen wir folgende Bemerkung. Wenn von zwei perspektiv-ähnlichen Gebilden derselben Ebene das eine in dieser Ebene parallel seiner Anfangslage verschoben wird, so bleibt es in ähnlicher Lage zu dem andern. Die Strecke, die hierbei der Ähnlichkeitspunkt beschreibt, ist parallel zu jeder Geraden, auf der sich irgendein Punkt des bewegten Gebildes bewegt.

6. **Die perspektive Ähnlichkeit als Gegenstand des Unterrichts.** Die Definition der Ähnlichkeit schließt sich in den meisten Lehrbüchern an das Prinzip an, das wir in Nr. 4 dargelegt haben. Indem man sich, den Zwecken der Schule entsprechend, auf konvexe Polygone beschränkt, geht man von der Definition aus: Vielecke sind ähnlich, wenn man ihre Ecken und Seiten einander so zuordnen kann, daß zunächst entsprechende Seiten durch Paare entsprechender Ecken begrenzt werden, zudem entsprechende Winkel einander gleich sind und entsprechende Seiten in demselben Verhältnisse stehen.

Welche Schwierigkeiten diese Definition dem Schüler bietet, hat Schwering (Handbuch S. 200) eingehend dargelegt. Zwar glauben wir, durch den von uns empfohlenen Gang die Definition vorbereitet und dadurch das Verständnis erleichtert zu haben. Dennoch erachten wir es für angebracht, beim Unterricht zunächst die perspektive Ähnlichkeit zu behandeln und dann erst die angegebene allgemeine Definition durchzunehmen.

Um diese Ansicht zu begründen, erinnern wir an erster Stelle daran, daß man von einer Definition keinen Gebrauch machen darf, bevor ihre Berechtigung nachgewiesen ist. Es ist aber keineswegs an sich klar, daß es ähnliche Figuren im Sinne der aufgestellten Definition gibt. Bevor man demnach die Eigenschaften ähnlicher Figuren untersucht, muß man zeigen, daß es auch ähnliche Figuren gibt. Leider wird diese Forderung von manchen Lehrbüchern zu wenig beachtet. Sie entwickeln vielfach erst die ganze Theorie der Ähnlichkeit und glauben genug zu tun, wenn sie in einem Anhang die Aufgabe stellen: Zu einem gegebenen Vieleck ein ähnliches zu konstruieren. Schon um das Verständnis zu erleichtern, sollte man diese Aufgabe von der Definition nicht trennen.

Die Lösung dieser Aufgabe wird aber allgemein auf die perspektive Ähnlichkeit zurückgeführt. Ein Unterschied zeigt sich nur darin, daß man zuweilen dem Ähnlichkeitspunkt eine ganz beliebige Lage gibt, ihn aber meistens mit einem Eckpunkt des gegebenen Polygons zusammenfallen läßt. Die gebräuchlichste Konstruktion dürfte die folgende sein: Ist das Vieleck $ABCD \ldots MN$ gegeben, so zieht man etwa die von A ausgehenden Diagonalen $AC, AD, \ldots AM$. Im Hauptstrahl AB wählt man einen Punkt B' ganz beliebig und bestimmt im Halbstrahl AC einen Punkt C', im Halbstrahl AD einen Punkt $D', \ldots$ im Halbstrahl AM einen Punkt M' und im Halbstrahl AN einen Punkt N' so, daß $B'C' \parallel BC, C'D' \parallel CD, \ldots M'N' \parallel MN$ wird. Alsdann sind die Vielecke $ABCD \ldots MN$ und $AB'C'D' \ldots M'N'$ einander ähnlich. Diese Konstruktion benutzt, wie wir sehen, die ähnliche Lage.

Ferner ist die perspektive Ähnlichkeit ein wichtiges Hilfsmittel für die Lösung vieler Konstruktionsaufgaben. Häufig gelingt es, zuerst eine Figur zu konstruieren, die der gesuchten Figur ähnlich ist, und dann diese selbst durch perspektive Ähnlichkeit zu ermitteln. Hierüber handelt Petersen in seinem Werke: Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben (Kopenhagen, 1879) auf S. 28—34 und wendet das Prinzip auf die Aufgaben 151—191 an. Aber auch die „Drehungstheorie", der Petersen das dritte Kapitel seines Werkes widmet, setzt die perspektive Ähnlichkeit voraus; er zeichnet erst zu einer Figur eine ähnliche und ähnlich liegende und dreht die neue Figur um den Ähnlichkeitspunkt (Aufgabe 349—396). So benutzt Petersen etwa beim vierten Teile aller von ihm aufgenommenen Aufgaben die perspektive Ähnlichkeit.

In allen Lehrbüchern werden die Kreise als ähnliche Figuren betrachtet. Euklid begnügt sich mit einer bloßen Worterklärung; die elfte Definition des dritten Buches sagt: Ähnliche Kreisabschnitte sind solche, die gleiche Winkel fassen; auf eine nähere Begründung gehen die Elemente nicht ein. Die neueren Bücher benutzen fast ausnahmslos die regelmäßigen Vielecke und glauben, aus dem Satze, daß regelmäßige Vielecke von derselben Seitenzahl ähnlich sind, den Satz herleiten zu können: Die Kreise sind ähnliche Figuren. Auf die Frage, ob dieser Schluß berechtigt ist, werden wir in § 19, 3 näher eingehen. Hier möchten wir uns auf folgende Bemerkung beschränken: Die bloße Ähnlichkeit zweier Kreise ist für die Geometrie von geringer Bedeutung. Die Sätze, die daraus hervorgehen, ergeben sich bei der Berechnung ganz von selbst. Um z. B. den Kreisumfang zu berechnen, braucht man nur den Radius als Faktor abzutrennen; dann werden die übrigen Faktoren vom Radius unabhängig. Dagegen ist es äußerst wichtig, daß zwei beliebige Kreise nicht nur ähnlich sind, sondern auch ähnliche Lage besitzen.

Daß der Schüler leichter in die Inversion eingeführt werden kann, wenn er zuvor mit der perspektiven Ähnlichkeit bekannt gemacht ist, möge nur beiläufig bemerkt werden.

Endlich erinnern wir an eine wichtige Anwendung, die man in der Stereometrie von der perspektiven Ähnlichkeit macht. Um den Rauminhalt der Pyramide zu ermitteln, gebraucht man den Satz, daß jede Ebene, die zur Grundfläche parallel ist, aus dem Körper ein zur Grundfläche ähnliches Polygon ausschneidet. Hierbei tritt uns aber wieder die perspektive Ähnlichkeit entgegen, wobei die Spitze der Pyramide der Ähnlichkeitspunkt ist. Zwar liegen die Ähnlichkeitsstrahlen nicht in einer Ebene; aber die ganze Beweisführung bleibt ungeändert.

Hiernach ist die perspektive Ähnlichkeit für den Unterricht sehr wichtig. Sie wird auch ihrem Wesen nach wohl in allen Lehrbüchern behandelt, nur scheut man sich vielfach, den Namen zu gebrauchen. In der Tat ist es sehr leicht, den Schüler darin einzuführen. Dafür sind theoretische Erörterungen gar nicht notwendig; einige Zeichnungen, die von den Schülern ausgeführt werden, genügen vollauf, den Begriff vollständig klar zu machen. Man geht von einem Vieleck aus, nimmt den Ähnlichkeitspunkt ganz beliebig an und wählt zunächst Ähnlichkeitsverhältnisse, die durch kleine ganze Zahlen dargestellt werden. Später bestimmt man das Ähnlichkeitsverhältnis durch zwei Strecken. Der Unterschied zwischen der äußeren und der inneren Ähnlichkeit tritt bei der Zeichnung so deutlich hervor, daß ihn die Schüler leicht auffassen. Sie erkennen auch unmittelbar, daß in derartigen Vielecken entsprechende Strecken dasselbe Verhältnis haben und homologe Winkel einander gleich sind.

An die perspektive Ähnlichkeit der Polygone schließt sich die der Kreise an. Um zu einem gegebenen Kreise $(O)A$ für einen gegebenen Ähnlichkeitspunkt S und ein vorgeschriebenes Verhältnis das Bild zu ermitteln, suchen wir zuerst in den Geraden SO den dem Punkte O entsprechenden Punkt O'. Die Bildpunkte der auf dem Kreise $(O)A$ gelegenen Punkte haben alsdann von O' gleiche Entfernung; sie liegen also sämtlich auf einem Kreise $(O')A'$. Das Bild des gegebenen Kreises ist somit ein Kreis; dem Mittelpunkte des einen entspricht in der Abbildung der Mittelpunkt des andern, und das Verhältnis der Radien ist gleich dem Ähnlichkeitsverhältnis. Wenn der Ähnlichkeitspunkt auf dem Kreise angenommen wird, so berühren die beiden Kreise einander im Ähnlichkeitspunkte. Liegt dieser Punkt im Innern des gegebenen Kreises, so gehört er auch dem Innern des neuen Kreises an. Ist aber der Ähnlichkeitspunkt im Äußern des gegebenen Kreises angenommen, so berühren die beiden von ihm ausgehenden Tangenten auch den neuen Kreis; jede andere, durch den Ähnlichkeitspunkt gelegte Gerade schneidet entweder beide Kreise oder keinen von ihnen.

Umgekehrt können zwei beliebige Kreise stets in doppelter Weise perspektiv ähnlich aufeinander bezogen werden. Fallen zunächst die Mittelpunkte O und O' nicht zusammen, so zieht man in ihnen irgend zwei parallele Radien OA und $O'A'$. Dann ist der Punkt S, in dem die Zentrale mit der Geraden AA' zusammentrifft, ein Ähnlichkeitspunkt. Dadurch findet man zwei Ähnlichkeitspunkte: der eine wird jedesmal erhalten, wenn die Radien OA und $O'A'$ gleiche Richtung haben; auf den andern wird man durch zwei Radien von entgegengesetzter Richtung geführt. Zwei nicht-konzentrische Kreise haben stets einen äußern und einen innern Ähnlichkeitspunkt. Wenn die

Radien einander gleich sind, so wird der äußere Ähnlichkeitspunkt ein uneigentlicher Punkt, ein Punkt der unendlich fernen Geraden.

Für zwei konzentrische Kreise fallen die beiden Ähnlichkeitspunkte mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte zusammen. Dem entsprechend können sie selbst vom Mittelpunkte aus in doppelter Weise einander als ähnliche Figuren zugeordnet werden.

Bei der perspektiven Ähnlichkeit von zwei nicht-konzentrischen Kreisen werden zwei Punkte einander zugeordnet, die auf demselben Ähnlichkeitsstrahle liegen und Endpunkte paralleler Radien sind. Jetzt liegt es nahe, jedem Punkte des einen Kreises den Punkt des andern zuzuordnen, der zwar demselben Ähnlichkeitsstrahl angehört, aber nicht Endpunkt eines parallelen Radius ist. Diese Zuordnung ist ein spezieller Fall der Inversion (§ 23); der Anwendungen wegen wird aber mancher Lehrer diese spezielle Zuordnung schon an dieser Stelle besprechen.

Ist S ein Ähnlichkeitspunkt der Kreise (O) und (O') und schneidet ein Ähnlichkeitsstrahl den einen Kreis in A und B, den andern in A' und B', ein zweiter Ähnlichkeitsstrahl entsprechend in C, D, C' und D', ist $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$, $OC \parallel O'C'$, $OD \parallel O'D'$, so wendet man auf das Viereck $ABCD$ den Satz an: Vier Gerade, die je den Seiten eines Sehnenvierecks parallel sind, schließen wieder ein Sehnenviereck ein. Somit sind die Vierecke $BCD'A'$ und $ADC'B'$ Sehnenvierecke, und die Produkte $SA \cdot SB'$, $SC \cdot SD'$, $SA' \cdot SB$ und $SC' \cdot SD$ einander gleich. Zwei Punkte der beiden Kreise, die auf demselben Ähnlichkeitsstrahle liegen, ohne einander in der ähnlichen Abbildung zu entsprechen, haben hiernach die Eigenschaft, daß das Produkt ihrer Abstände vom Ähnlichkeitspunkte einen festen Wert hat. Aus diesem Grunde nennt Steiner sie „potenzhaltende Punkte“.

Schon hieran zeigt sich, wie eng die Inversion mit der perspektiven Ähnlichkeit verwandt ist.

7. **Einige Anwendungen der perspektiven Ähnlichkeit.** Wie zahlreich die Anwendungen sind, die man von der perspektiven Ähnlichkeit machen kann, geht aus Petersens „Methoden und Theorien“, namentlich aus den beiden oben erwähnten Abschnitten hervor. Die Zahl der Aufgaben, die er mit ihrer Hilfe löst, ist bereits sehr groß; jeder Leser seines Buches wird aber mit Leichtigkeit die Zahl ganz beträchtlich vermehren können. Wir halten es daher nicht für nötig, hier einige derartige Konstruktionsaufgaben anzuführen und an ihnen die Brauchbarkeit der Methode zu zeigen; wir möchten glauben, ein bloßer Hinweis auf Petersens Buch genüge in dieser Hinsicht vollständig. Dagegen wollen wir einige Lehrsätze erwähnen, die mit Hilfe der perspektiven Ähnlichkeit leicht bewiesen werden können.

Schon in § 14, 6 (S. 262) haben wir einen recht einfachen Beweis für den Satz geliefert, daß die seitenhalbierenden Transversalen eines Dreiecks durch einen Punkt gehen. Wir erinnern daran, daß die perspektive Ähnlichkeit zu einem noch einfacheren Beweise dieses Satzes führt.

Eine Reihe von weiteren Anwendungen findet sich in dem Schriftchen Steiners, das wir schon in § 10, 5 (S. 172) erwähnt haben. Wir möchten wenigstens einige hervorheben.

(Eulersche Gerade.) Nach § 15, 6 (S. 284) ist der Höhenpunkt H des Dreiecks ABC zugleich Mittelpunkt des Umkreises für das Dreieck $A'B'C'$, welches man erhält, wenn man durch die Eckpunkte des gegebenen Dreiecks je die Parallele zu der Gegenseite zieht. Diese beiden Dreiecke liegen aber ähnlich für den Schwerpunkt S als inneren Ähnlichkeitspunkt und das Ähnlichkeitsverhältnis $1:2$. Hierbei entspricht dem Mittelpunkte K des Umkreises von ABC der Mittelpunkt H des Umkreises von $A'B'C'$. Daher liegt S so zwischen den Punkten H und K, daß $HS = 2\,SK$ ist.

(Feuerbachs Kreis.) Jetzt nennen wir A_1, B_1, C_1 je die Mitten der Seiten BC, CA und AB. Ferner sollen AA_2, BB_2 und CC_2 die Höhen des Dreiecks ABC und F der Mittelpunkt des Kreises sein, der durch die Punkte A_1, B_1, C_1 gelegt werden kann. Da S auch der Ähnlichkeitspunkt für die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ ist, so liegen auch die Punkte S, F, K so in gerader Linie, daß $KS = 2\,SF$ ist. Demnach ist F die Mitte der Strecke HK; die Punkte S und H sind die Ähnlichkeitspunkte für die Kreise (K) und (F).

Da F die Mitte von KH ist und KA_1 und HA_2 auf BC senkrecht stehen, so ist die von F auf BC gefällte Senkrechte Mittellinie des Trapezes KA_1A_2H und demnach Mittellot der Strecke A_1A_2. Hiernach ist $FA_1 = FA_2$ und ebenso $FB_1 = FB_2$, $FC_1 = FC_2$. Der Kreis (F) geht also durch die Fußpunkte A_2, B_2, C_2 der Höhen.

Die zweiten Schnittpunkte der Höhen mit dem Kreise (F) mögen A_3, B_3, C_3 sein. Da der Punkt H äußerer Ähnlichkeitspunkt der Kreise (K) und (F) bei dem Ähnlichkeitsverhältnisse $2:1$ ist, so ist auch $HA = 2\,HA_3$, $HB = 2 \cdot HB_3$, $HC = 2 \cdot HC_3$. Der Kreis (F) trifft also auch die Mitten der oberen Höhenabschnitte. Die neun wichtigsten Punkte, durch die der Feuerbachsche Kreis geht, sind hiernach in einer sehr einfachen und einheitlichen Weise ermittelt.

Ferner seien A_4, B_4, C_4 die Punkte, in denen die Geraden AA_2, BB_2, CC_2 je vom Kreise (K) zum zweiten Male getroffen werden. Wegen der perspektiven Ähnlichkeit ist $HA_4 = 2 \cdot HA_2$, $HB_4 = 2 \cdot HB_2$, $HC_4 = 2 \cdot HC_2$. Jede Seite des Dreiecks ist Mittelsenkrechte für die Strecke, welche durch den Höhenpunkt und den zweiten Schnittpunkt der zugehörigen Höhe mit dem Umkreise begrenzt wird. Mit andern

Worten: Die symmetrischen Gegenpunkte des Höhenpunktes in bezug auf die Seiten liegen auf dem Umkreise des Dreiecks, oder: Jede Seite eines Dreiecks spiegelt den Höhenpunkt auf den Umkreis.

Die drei Geraden AA_1, BB_1, CC_1, die Schwerlinien des Dreiecks, mögen vom Kreise (K) zum zweiten Male je in den Punkten α, β, γ und vom Kreise (F) zum zweiten Male je in den Punkten α_1, β_1, γ_1 geschnitten werden. Da der Punkt S innerer Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise ist, so ist auch: $\alpha_1 S = 2 \cdot S\alpha$, $\beta_1 S = 2 \cdot S\beta$, $\gamma_1 S = 2 \cdot S\gamma$. Durch diese Beziehungen ergeben sich drei weitere Punkte, die auf dem Kreise (F) liegen. Diese drei Punkte sind von Steiner hinzugefügt.

Aus der Theorie der potenzhaltenden Punkte geht ferner hervor, daß: $SA \cdot S\alpha_1 = S\alpha \cdot SA_1 = SB \cdot S\beta_1 = S\beta \cdot SB_1 = SC \cdot S\gamma_1 = S\gamma \cdot SC_1$, sowie $HA \cdot HA_2 = HA_3 \cdot HA_4 = HB \cdot HB_2 = HB_3 \cdot HB_4 = HC \cdot HC_2 = HC_3 \cdot HC_4$ ist.

Wenn man das Dreieck ABC durch eines der Dreiecke BCH, CAH oder ABH ersetzt, so werden die neun ersten Punkte des Feuerbachschen Kreises nur untereinander vertauscht; dagegen führen die drei von Steiner hinzugefügten Punkte zu weiteren Punkten dieses Kreises.

Die Eigenschaft des Feuerbachschen Kreises, den Inkreis und die Ankreise des Dreiecks zu berühren, scheint ohne einige Rechnung nicht bewiesen werden zu können. Wir möchten hierauf in der Trigonometrie zurückkommen.

An dieser Stelle erinnern wir daran (§ 15, 6 S. 284), daß die Punkte A, B, C, H die Mittelpunkte der Berührungskreise für das Dreieck $A_2B_2C_2$ sind, das den Kreis (F) zum Umkreise hat. Daraus geht der Satz hervor:

Der Umkreis eines jeden Dreiecks geht auch durch die Mitten der sechs Strecken, durch welche die Mittelpunkte von irgend zwei Berührungskreisen des Dreiecks miteinander verbunden werden.

Dieser Satz wird vielfach bei der Behandlung von Konstruktionsaufgaben dadurch hergeleitet, daß man unter Anwendung des Satzes vom Peripheriewinkel die Größe mehrerer Winkel berechnet und daraus auf die Gleichheit gewisser Strecken schließt. Diese Herleitung benützt zwar nur sehr einfache Sätze; weil aber die Anzahl der berechneten Winkel recht groß ist, wird der Beweis ziemlich weitläufig.

7. **Die freie Ähnlichkeit beim Unterrichte.** Wenn man die wichtigen Anwendungen beachtet, die von der perspektiven Ähnlichkeit gemacht werden können, so liegt der Gedanke nahe, es sei gestattet, die nicht perspektive oder freie Ähnlichkeit ganz vom Unterrichte auszuschließen. Einer solchen Meinung können wir aber nicht beitreten. Die perspektive Ähnlichkeit setzt eine feste gegenseitige Lage der Ge-

bilde voraus. Gewisse Beziehungen, die zwischen den Gebilden bestehen, sind durch diese Lage bedingt; andere gelten aber auch noch, wenn die beiden Gebilde für sich beliebig bewegt werden. Wenn demnach von zwei Gebilden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$, die durch perspektive Ähnlichkeit verbunden sind, das eine, $\mathfrak{G}'$, durch ein kongruentes oder symmetrisches Gebilde $\mathfrak{G}''$ ersetzt wird, so bestehen auch zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}''$ mancherlei Beziehungen. Von ihnen darf der Unterricht nicht absehen. Im Gegenteil erlangt die Theorie erst dann ihren vollen Abschluß, wenn man die beiden Gebilde auch ohne Rücksicht auf die besondere gegenseitige Lage betrachtet.

Auch die Bedürfnisse des Lebens drängen dazu, den Begriff der freien Ähnlichkeit in der Schule eingehend zu behandeln. Schließt man von den Eigenschaften eines Bildes auf die des Gegenstandes, so setzt man voraus, daß das Bild dem Gegenstande ähnlich sei. Die Orientierung wird am leichtesten, wenn die Ähnlichkeit im streng geometrischen Sinne besteht. Die Kenntnis des Ähnlichkeitsverhältnisses gibt dann dem Beschauer die Möglichkeit, aus den Eigenschaften des Bildes die des Gegenstandes herzuleiten. Aus diesem Grunde wird neben dem Bilde vielfach das Ähnlichkeitsverhältnis angemerkt. Bei Zeichnungen von Gegenständen gibt man den Grad der Verkleinerung oder Vergrößerung an; ebenso bei Bildern, die auf optischem Wege erhalten werden. Beim Mikroskop spricht man naturgemäß nur vom Grade der Vergrößerung. Auf jeder Landkarte wird der Maßstab angegeben, in dem die Karte entworfen ist. Wenn aber diese Angaben in reeller Strenge richtig sein sollen, so setzen sie die Ähnlichkeit im geometrischen Sinne voraus. Dessen ist sich auch der Beschauer bewußt. Wenn sich z. B. jemand in einer unbekannten Gegend nach einer Karte orientieren will, so vergleicht er die zurückgelegten Strecken nach der Größe ihrer Bilder; er erwartet unter anderem auch, daß Seitenwege, die vom Hauptwege abbiegen, mit diesem dieselben Winkel bilden, die er auf der Karte findet.

Aber häufig ist es gar nicht möglich, von einem Gegenstande ein Bild zu entwerfen, das ihm im strengen Sinne ähnlich ist. So kann eine Landkarte nur dann ein ähnliches Bild liefern, wenn der abgebildete Teil der Erdoberfläche als eben betrachtet werden kann. Bei Karten, die einen größeren Teil der Erde darstellen, läßt sich daher kein Maßstab angeben, der für die ganze Karte paßt. Dennoch soll der Beschauer durch die Karte über die Beziehungen auf der Erde unterrichtet werden. Zu dem Ende muß er sich klar machen, daß der auf der Karte angegebene Maßstab höchstens für einen sehr kleinen Teil richtig ist. In die verwickelten Beziehungen, die zwischen der Karte und dem abgebildeten Teile der Erdoberfläche bestehen, kann er erst dann eindringen, wenn er die ähnliche Abbildung vollständig erfaßt hat. Dies eine Beispiel zeigt, wie wichtig der Begriff der Ähnlichkeit für das Leben ist.

Die allgemeine Definition der freien Ähnlichkeit zu verstehen, kann dem Schüler keine Schwierigkeit machen, nachdem er sich durch zahlreiche Anwendungen mit der perspektiven Ähnlichkeit vertraut gemacht hat. Zur Einübung dienen vor allem Bilder, die von ebenen Figuren in einem bekannten Maßstabe entworfen sind. Der Schüler ermittelt mit Hilfe des Bildes die Länge von Strecken, die der Figur selbst angehören; er achtet auf die Winkel, die Linien des Bildes miteinander bilden, um sie den entsprechenden Winkeln des Gegenstandes gleich zu setzen. Ferner lernt er, zwischen dem linearen und dem Flächenverhältnisse unterscheiden. Dem dazu dienenden Satze möchten wir die Form geben: Das Flächenverhältnis ähnlicher Polygone ist gleich dem Quadrate des linearen Verhältnisses. Alles das will natürlich gründlich eingeübt sein. Der Lehrer hat es aber in der Hand, die ganze Unterweisung ihres doktrinären Charakters zu entkleiden; er braucht nur Beispiele, die sich im Leben täglich darbieten, sorgfältig erläutern zu lassen, um diesen wichtigen Begriff zur vollen Klarheit zu bringen.

Die Form, in die wir vorhin den Satz über den Inhalt ähnlicher Flächen gekleidet haben, unterscheidet sich wesentlich von der Form, die ihm im Anschluß an Euklid die meisten Lehrbücher geben. Bei der Beschränkung, die die Alten dem Zahlbegriff gaben, konnten sie beliebige Verhältnisse nicht durch Zahlen, sondern nur durch Strecken oder Flächen darstellen. Auch boten die mangelhaften Zahlzeichen ein Hindernis für die Bezeichnung beliebiger Zahlen. Hiernach war es für Euklid am natürlichsten, dem angegebenen Satze die Form zu geben: Die Flächenräume ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate, die über entsprechenden Seiten errichtet werden.

In unserm Denken nimmt aber die Zahl die erste Stelle ein; schon aus diesem Grunde ist es für uns am natürlichsten, die Verhältnisse durch Zahlen zu bestimmen. Die Alten dachten sich die Strecken und die Quadrate gezeichnet. Das mochte auch für die Anwendungen genügen, die die Alten von dem Satze machten. Bei den Maßstäben, die wir nötig haben, wird die Zeichnung schon für Strecken zuweilen recht schwierig, für Flächen aber vielfach ganz unmöglich. Dagegen bedarf es bei der Form, die wir dem Satze geben, nur einer einzigen Zahl, um das lineare und das Flächenverhältnis vollständig zu bestimmen.

§ 19. Die Kreismessung.

1. **Grundgedanken der archimedischen Kreismessung.** In den folgenden Entwicklungen bezeichnen wir die Seite des in einen Kreis mit dem Radius r beschriebenen regelmäßigen n-Ecks mit s_n, seinen Umfang mit u_n und seinen Inhalt mit F_n. Entsprechend soll s_n' die Seite, u_n' der Umfang und F_n' der Inhalt des demselben Kreise umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks sein.

Wir betrachten, ausgehend von einem beliebigen n, die beiden Größenreihen:

(1) $$u_n, u_{2n}, u_{4n}, u_{8n}, \ldots$$

(2) $$u_n', u_{2n}', u_{4n}', u_{8n}', \ldots$$

Aus dem Satze, daß in jedem Dreieck eine Seite stets kleiner ist als die Summe der beiden andern, geht unmittelbar hervor, daß

a) in der Reihe (1) jedes Element größer ist als das vorhergehende, dagegen

b) in der Reihe (2) jedes Element kleiner ist als das vorhergehende, und endlich

c) jedes der zweiten Reihe angehörende Element größer ist als das über ihm stehende Element der ersten Reihe.

Um jetzt auch die Gesamtheit der Elemente (1) und (2) miteinander zu vergleichen, setzen wir für einen Augenblick:

$$p = 2^\mu \cdot n \text{ und } q = 2^\nu \cdot n.$$

Wenn jetzt $\nu > \mu$ und somit auch $q > p$ ist, so ist, wie wir bereits wissen:

$$u_q > u_p, \quad u_q' < u_p', \quad u_p < u_p', \quad u_q < u_q'.$$

Es ist also:

$$u_p < u_q < u_q', \quad u_q < u_q' < u_p',$$

und somit auch:

$$u_p < u_q', \quad u_q < u_p',$$

oder jedes Element der ersten Reihe ist kleiner als jedes Element der zweiten.

Für jeden beliebigen Wert von m sind bekanntlich die Größen u_m und u_m' durch die Formel verbunden:

(3) $$u_m' = \frac{u_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{m^2}\left(\frac{u_m}{2r}\right)^2}}.$$

Wie man aber leicht herleiten kann, bleibt das Verhältnis $u_m : 2r$ stets kleiner als vier. Daher kann das Verhältnis $u_m' : u_m$ für hinreichend große Werte von m beliebig nahe an eins und somit die Differenz $u_m' - u_m$ beliebig nahe an null gebracht werden.

Hiernach haben die Größen (1) und (2) die Eigenschaften: a) daß die Elemente der ersten Reihe beständig zu-, dagegen b) die Elemente der zweiten Reihe beständig abnehmen, c) daß jedes Element der ersten Reihe kleiner ist als jedes Element der zweiten, aber zugleich d) Elemente der einen Reihe beliebig nahe an Elemente der andern gebracht werden können. Mit Reihen dieser Art haben wir uns im § 17 mehrfach beschäftigt (so in 11 S. 302) und dürfen aus den dort durchgeführten Untersuchungen den Schluß ziehen, daß die Reihen (1) und (2) denselben Grenzwert u haben. Zwar nahmen wir bei den früheren Untersuchungen an, die Elemente seien rational, während wir hier bei der Berechnung Quadratwurzeln benutzen müssen, also bereits irrationale Maßzahlen erhalten. Indessen hat dieser Unterschied auf den angegebenen Schluß keinen Einfluß.

Dieselben Betrachtungen kann man auch für die Reihen:

$$(4) \qquad F_n, F_{2n}, F_{4n}, F_{8n}, \ldots$$

$$(5) \qquad F_n', F_{2n}', F_{4n}', F_{8n}', \ldots$$

anstellen und findet, daß auch die in ihnen zusammengestellten Größen denselben Grenzwert haben.

Den Grenzwert der Reihen (1) und (2) setzt man als den Umfang, den Grenzwert der Reihen (4) und (5) als den Inhalt des Kreises an.

Dabei dürfen wir aber nicht vergessen, daß wir bei den Reihen (1) und (2), sowie bei den Reihen (3) und (4) jedesmal von einem bestimmten Werte von n ausgegangen sind und die folgenden Marken je durch Verdoppelung der vorangehenden erhalten haben. Die aufgestellten Definitionen sind also nur gestattet, wenn wir nachweisen können, daß weder die Wahl der Seitenzahl n noch die spezielle Art, in der wir zu höhern Marken übergegangen sind, den Grenzwert beeinflussen. Dieser Nachweis darf nicht fehlen, wenn die angestellten Betrachtungen ihren vollen Abschluß finden sollen. Zwar wird man ihn in der Schule nicht durchnehmen; dort dürfte er wohl eher Verwirrung als Aufklärung schaffen. Auch hat die ältere Mathematik es als selbstverständlich betrachtet, daß der Umfang eines ein- oder umbeschriebenen regelmäßigen konvexen Vielecks sich immer mehr dem Umfange des Kreises nähert und der Inhalt dieser Vielecke immer näher an den des Kreises heranrückt, je größer die Seitenzahl wird, ohne jede Rücksicht auf die Regel, nach der die unbegrenzte Vergrößerung der Seitenzahl erfolgt. Dennoch glauben wir hier in eine nähere Begründung eintreten zu sollen.

Daß zunächst der Grenzwert der Reihen (4) und (5) von dem eingeschlagenen Wege unabhängig ist, geht unmittelbar aus dem ersten Beweise hervor, den wir für die Berechtigung des Inhaltsmaßes ebener

Flächen erbracht haben (§ 5, 5—9 S. 81ff). Hiernach hat der Inhalt einen festen Wert sowohl für den Kreis als auch für jedes eingeschriebene und jedes umgeschriebene regelmäßige Vieleck, und zwar liegt der Inhalt des Kreises zwischen dem eines jeden eingeschriebenen und dem eines jeden umgeschriebenen Vielecks. Somit ist der Inhalt des Kreises größer als jede Größe (4) und kleiner als jede Größe (5). Da die in diesen beiden Reihen zusammengestellten Größen aber denselben Grenzwert haben, so ist dieser mit dem Inhalt des Kreises identisch und somit von der speziellen Wahl dieser Größen unabhängig.

Nun bestehen für jeden Wert von n die bekannten Beziehungen:

$$F_{2n} = \frac{1}{2} r \cdot u_n, \quad F_n' = \frac{1}{2} r \cdot u_n'. \tag{6}$$

Man braucht daher den gemeinschaftlichen Grenzwert der Reihen (4) und (5) nur durch $\frac{1}{2}r$ zu dividieren, um den Grenzwert der Reihen (1) und (2) zu erhalten. Da der eine dieser Grenzwerte, wie wir gesehen haben, von der Wahl von n unabhängig ist, muß es auch der andere sein.

Zugleich geht aus den Formeln (6) der Satz hervor:

Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.

Der gewünschte Nachweis läßt sich noch auf einem andern Wege erbringen. Wir beschränken uns hierbei auf den Umfang, weil der Leser leicht erkennt, daß die leitenden Gedanken auch für den Inhalt gültig bleiben.

Hierbei gehen wir von dem Lehrsatz aus:

Sobald die Ecken eines konvexen Polygons sämtlich im Innern oder auf dem Umfang eines zweiten konvexen Polygons liegen, hat das erste einen kleineren Umfang als das zweite.

Der Beweis soll nur in dem Falle durchgeführt werden, daß die Polygone eine Seite gemein haben und die sämtlichen Ecken des ersten, mit Ausnahme der Endpunkte der gemeinsamen Seite, im Innern des zweiten liegen. Demgemäß sei $ABCD \ldots LMN$ das innere Polygon Π; die Punkte A und N seien auch Eckpunkte des andern konvexen Polygons Π'. Die Polygone Π und Π' sollen auf derselben Seite der Geraden AN liegen und zugleich die Punkte $B, C, D, \ldots L, M, N$ dem Innern von Π' angehören.

Wir verlängern die Seite AB von Π bis zu ihrem Schnittpunkte B' mit dem Umfange von Π'. Alsdann zerfällt der Umfang von Π' in drei Teile: einen Streckenzug (AB'), einen Streckenzug $(B'N)$ und die Seite NA. Hierbei soll der Streckenzug (AB') auf der entgegengesetzten Seite der Geraden AB liegen wie der Punkt N. Verlängert man jetzt die Seite BC über C hinaus bis zum Schnittpunkt C' mit dem Umfange von Π', so gehört wegen der Konvexität der beiden Polygone der Punkt C' dem Streckenzuge $(B'N)$ an und zerlegt ihn in die Streckenzüge $(B'C')$ und $(C'N)$. Ebenso trifft der Halbstrahl CD den Streckenzug $(C'N)$ in einem Punkte D' und führt eine Zerlegung in $(C'D')$ und $(D'N)$ herbei. Indem man in gleicher Weise fortfährt, zerfällt der Umfang von Π' in die Bestandteile (AB'), $(B'C')$, $(C'D')$, ... $(L'M')$, $(M'N)$ und NA. Hierbei besteht (AB') jedenfalls aus mehreren Strecken, während sich unter den Bestandteilen $(B'C')$, ... $(M'N)$ auch solche befinden können, die nur eine einzige Strecke enthalten.

Alsdann ist offenbar:

$$\begin{aligned} (AB') &> AB + BB', \\ BB' + (B'C') &> BC + CC', \\ CC' + (C'D') &> BD + DD', \\ &\cdots\cdots\cdots \\ MM' + (M'N) &> MN, \\ NA &= NA. \end{aligned}$$

Aus der Addition dieser Beziehungen geht die aufgestellte Behauptung hervor.

Die archimedische Kreismessung benutzt konvexe regelmäßige Vielecke. Nach dem soeben bewiesenen Hilfssatze ist der Umfang eines jeden dem Kreise eingeschriebenen konvexen Polygons kleiner als der Umfang eines jeden umgeschriebenen Polygons. Bei gleicher Seitenzahl kann man nach (3) die Umfänge der ein- und der umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke beliebig nahe aneinander bringen, falls man nur die Seitenzahl groß genug werden läßt. Sind jetzt a und b irgend zwei natürliche Zahlen, so ist unter Beibehaltung der eingeführten Bezeichnung: $u_a' = u_a + \delta_a$, $u_b' = u_b + \delta_b$, wo die Größen δ_a und δ_b positive Werte haben. Zugleich ist $u_a' > u_b$, $u_b' > u_a$, oder: $u_a + \delta_a > u_b > u_a - \delta_b$, $u_b + \delta_b > u_a > u_b - \delta_a$. Da aber die Größen δ_a und δ_b für hinreichend große Werte von a und b beliebig klein werden, so haben u_a und u_b denselben Grenzwert. Demnach ist auch der Grenzwert der Reihen (1) und (2) nicht nur von der Wahl der Zahl n, sondern auch von der Festsetzung unabhängig, daß die Seitenzahl jedesmal verdoppelt werden soll.

2. **Methoden der wirklichen Berechnung.** Von den verschiedenen Methoden, nach denen man im Anschluß an die dargelegten Gedanken die Zahl π berechnen kann, möchten wir drei erwähnen. Die dazu nötigen Formeln werden in den meisten Lehrbüchern auf rein geometrischem Wege bewiesen. Ihre trigonometrische Herleitung,

die wir bei Henrici-Treutlein finden, gibt zwar Veranlassung, von den goniometrischen Formeln einige recht schöne Anwendungen zu machen, dürfte aber für den eigentlichen Lehrgang weniger geeignet sein. Die Beweise, die in den Lehrbüchern erbracht werden, beruhen durchweg auf denselben Grundgedanken, werden aber in nebensächlichen Punkten auf mancherlei Art modifiziert. Darauf einzugehen, würde zu weit führen. Daher erachten wir es für angemessen, von den Beweisen hier ganz abzusehen.

Die verbreitetste Methode, deren sich bereits Archimedes bedient hat, benutzt die Formeln:

$$(7) \qquad s_{2n} = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - s_n^2}\right)}, \quad s_n' = \frac{2 s_n \cdot r}{\sqrt{4r^2 - s_n^2}}.$$

Man braucht nur den Wert von s_n für irgendein n (etwa für $n = 4$ oder 6 oder 10) selbständig zu ermitteln und kann dann nach den Formeln (7) die Reihen (1) und (2) beliebig weit fortsetzen.

Diese Methode stellt den Grundgedanken am reinsten dar; sie ist aber leider in der Ausführung recht beschwerlich.

Eine zweite Methode nimmt den Radius ϱ_n des Inkreises für ein regelmäßiges n-Eck hinzu, das in den Kreis vom Radius r eingeschrieben wird. Hierbei benutzt man etwa die Formeln:

$$(8) \qquad \varrho_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2} r(r + \varrho_n)}, \quad u_m = 2m\sqrt{r^2 - \varrho_m^2}, \quad u_m' = \frac{r u_m}{\varrho_m}.$$

Nachdem man auf geometrischem Wege den Wert ϱ_n für irgend eine Zahl n berechnet hat, leitet man nach der ersten Formel (8) die Werte $\varrho_{2n}, \varrho_{4n}, \varrho_{8n}, \ldots$ bis zu einer passenden Marke m her und benutzt dann die beiden letzten Formeln zur Berechnung von u_m und u_m'. Die Grenzen, zwischen denen diese beiden Größen liegen, lassen sich aber schon abschätzen, nachdem man ϱ_m gefunden hat. Setzt man nämlich:

$$\varrho_m = r(1 - \alpha),$$

so ist:

$$\frac{u_m' - u_m}{r} = \frac{2m\alpha\sqrt{2\alpha - \alpha^2}}{1 - \alpha}.$$

Man braucht daher u_m und u_m' erst zu berechnen, nachdem man einen Wert von ϱ_m gefunden hat, der die gewünschte Genauigkeit liefert. Es ist auch nicht nötig, wie vielfach geschieht, die Formel beizufügen: $\varrho_{2n} \cdot u_{2n} = r \cdot u_n$.

Eine dritte Methode geht von den Formeln aus:

$$(9) \qquad u_{2n}' = \frac{2u_n \cdot u_n'}{u_n + u_n'}, \quad u_{2n} = \sqrt{u_n \cdot u_{2n}'}.$$

Hier ist es bequemer, die reziproken Werte zu benutzen und demgemäß die Formeln zugrunde zu legen:

(10) $$\frac{2r}{u'_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{u_n} + \frac{2r}{u'_n}\right), \quad \frac{2r}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{2r}{u_n} \cdot \frac{2r}{u'_{2n}}}.$$

Für den Inhalt gelten ganz ähnliche Formeln, die wegen der Beziehungen (6) aus den Gleichungen (9) unmittelbar hervorgehen, aber auch leicht direkt hergeleitet werden können. Diese Gleichungen sind:

(11) $$F_{2n} = \sqrt{F_n \cdot F'_n}, \quad F'_{2n} = \frac{2F_{2n} \cdot F'_n}{F_{2n} + F'_n}.$$

Auch hier empfiehlt es sich, für die Rechnung folgende Form zu benutzen:

(12) $$\frac{r^2}{F_{2n}} = \sqrt{\frac{r^2}{F_n} \cdot \frac{r^2}{F'_n}}, \quad \frac{r^2}{F'_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{F_{2n}} + \frac{r^2}{F_n}\right).$$

Bei den hier zusammengestellten Formeln kommt es nicht so sehr auf die Umfänge und die Inhaltsmaße der Polygone, als vielmehr auf ihre Verhältnisse zum Durchmesser oder zum Quadrat des Radius an. Diese Verhältnisse treten am deutlichsten in den Formeln (10) und (12) hervor. Auch die Formeln (7) und (8) können leicht so geschrieben werden, daß die Unabhängigkeit dieser Verhältnisse vom Radius, die zwar schon aus den ersten Sätzen der Ähnlichkeitslehre hervorgeht, auch äußerlich sichtbar wird.

3. **Würdigung des archimedischen Verfahrens.** In vielen Büchern findet sich die Behauptung, die zuweilen geradezu als Lehrsatz hingestellt wird: Der Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten. Einen strengen Nachweis dafür, daß dieser Ausdruck berechtigt ist, sucht man vergebens; vielfach fehlt sogar jede Erläuterung, die schon aus dem Grunde notwendig sein dürfte, da das Vieleck aus lauter geradlinigen Teilen besteht, wogegen jeder noch so kleine Kreisbogen krummlinig ist. Wir möchten versuchen, diese Lücke auszufüllen.

Zu dem Ende erinnern wir an die Art, wie im Anschluß an § 17 (S. 295) die Punkte eines Halbstrahls durch Zahlen bestimmt werden können, sobald man eine feste Längeneinheit zugrunde legt. Hierbei denken wir uns alle Strecken konstruiert, deren Maßzahl rational ist, und diese so auf den Halbstrahl gelegt, daß jedesmal der eine Endpunkt der Strecke mit dem Grenzpunkt des Halbstrahls zusammenfällt. Diese Konstruktion ordnet jeder rationalen Zahl einen bestimmten Punkt des Halbstrahls zu; die Punkte, die den irrationalen Zahlen entsprechen, werden dadurch bestimmt, daß man angibt, wie sie die rationalen Teilpunkte scheiden.

In ähnlicher Weise kann man die regelmäßigen konvexen Polygone benutzen, um das Verhältnis eines Bogens AB zum Kreisumfang zu bestimmen. Auch das ist eine Art von Messung, bei der man den Umfang zur Einheit wählt. Man denkt sich regelmäßige konvexe Polygone von jeder beliebigen Seitenzahl so in den Kreis einbeschrieben, daß der erste Eckpunkt des Polygons jedesmal mit A zusammenfällt und daß der Sinn, in dem der Umfang des Polygons durchlaufen wird, mit dem des Bogens AB übereinstimmt. Wenn hierbei der Punkt B mit der $(m+1)^{\text{ten}}$ Ecke des regelmäßigen n-Ecks zusammenfällt, so ist das gesuchte Verhältnis gleich m/n. Wenn aber hierbei kein Eckpunkt eines regelmäßigen Vielecks mit dem Punkte B zusammenfällt, so ordnen sich ihre Eckpunkte, abgesehen vom Punkte A, in zwei Gruppen in der Weise, daß die Eckpunkte der einen Gruppe auf dem Bogen AB liegen, die der andern Gruppe ihm nicht angehören. Jedem Eckpunkte entspricht eine bestimmte rationale Zahl. Man erhält also, entsprechend der Anordnung der Eckpunkte, auch für die rationalen Zahlen zwischen null und eins zwei Gruppen, und hierbei ist jede Zahl der ersten Gruppe kleiner als jede Zahl der zweiten Gruppe. Die Konstruktion führt daher auf einen Dedekindschen Schnitt. Die durch diesen Schnitt bestimmte Irrationalzahl stellt das Verhältnis des Bogens AB zum Umfange dar. Sobald also ein Kreis gegeben und auf seinem Umfange ein Punkt gewählt ist, macht die Gesamtheit der eingeschriebenen regelmäßigen konvexen Vielecke es möglich, jedem Punkte seines Umfanges eine einzige Zahl zwischen 0 und 1, und jeder solchen Zahl einen einzigen Punkt des Kreises zuzuordnen.

Diese Zuordnung setzt bereits den Kreis als gegeben voraus. Der angegebene Ausdruck kann aber erst dann als voll berechtigt anerkannt werden, wenn man auch umgekehrt, ausgehend vom Mittelpunkte O und einem beliebigen Punkte A des Kreises, alle seine Punkte mit Hilfe der regelmäßigen Vielecke erhalten kann. Dementsprechend denken wir uns für jeden Wert von n dasjenige regelmäßige konvexe Vieleck konstruiert, das in A einen Eckpunkt hat und für das die von A ausgehenden Seiten durch die von O auf sie gefällten Senkrechten halbiert werden. Wir gehen etwa von einem regelmäßigen n-eck aus, dessen Seite eine beliebige Länge hat, und legen es so, daß ein Eckpunkt mit A zusammenfällt und der Winkel an A durch den Halbstrahl AO halbiert wird. Wenn jetzt die eine von A ausgehende Seite durch die von O auf sie gefällte Senkrechte in X getroffen wird, so geben wir der Seite die Länge $2 \cdot AX$. Dadurch erreichen wir, daß alle Ecken des neuen Vielecks von O die Entfernung AO haben. Indem wir diese Konstruktion für jedes beliebige n ausgeführt denken, erhalten wir alle Punkte B des Kreises $(O)A$, für die der Bogen AB zum Umfange in einem rationalen Verhältnisse steht. Wollen wir aber einen Punkt B derartig bestimmen, daß der Bogen AB zur Peripherie in dem irrationalen Verhältnisse α steht, wo $0 < \alpha < 1$ ist, so ordnen wir jeder Zahl n diejenige Zahl m zu, für die $\frac{m-1}{n} < \alpha < \frac{m}{n}$ ist. Zugleich sei B_n' der m^{te}, B_n'' der $(m+1)^{\text{te}}$ Eckpunkt des regelmäßigen n-Ecks. Der Schnitt, durch den die Zahl α bestimmt wird, liefert hiernach eine unendliche Reihe von Strecken $B_n' B_n''$, von denen jede einer natürlichen Zahl n entspricht. Wie aus den beiden Stetigkeitsaxiomen Hilberts hervorgeht, haben alle diese Strecken einen bestimmten Grenzpunkt B, der ebenfalls auf dem Kreise liegt und der Zahl α zugeordnet werden muß. In dieser Weise liefern die regelmäßigen Vielecke alle Punkte des Kreises.

Hierbei ist es aber nicht nötig, alle diese Vielecke zu benutzen. Gleichwie man zur Bestimmung einer Irrationalzahl nicht alle Rationalzahlen heranzuziehen braucht, vielmehr in der Auswahl der Nenner manche Beschränkung einführen kann (§ 17, 11 S. 300), so kann man sich hier mit solchen Seitenzahlen begnügen, die aus einer festen Zahl durch Multiplikation mit sämtlichen Potenzen von zwei erhalten werden. Demnach führt schon die Konstruktion aller regelmäßigen Vielecke von n, $2n$, $4n$, $\ldots$ $2^{\mu}n$, $\ldots$ Seiten in der dargelegten Weise zu sämtlichen Punkten des Kreises.

Hiernach ist der Ausdruck: Der Kreis ist ein regelmäßiges konvexes Polygon von unendlich vielen Seiten, in dem Sinne gestattet, daß der Kreis als Grenzform von regelmäßigen Vielecken bei unbegrenzt wachsender Seitenzahl angesehen werden kann. Es wäre aber verkehrt, annehmen zu wollen, hierzu eigneten sich nur die regelmäßigen Vielecke. Denken wir uns den Kreis zunächst bereits gegeben und ihm ein konvexes Polygon einbeschrieben, so können wir daran nach mancherlei Regeln eingeschriebene konvexe Polygone von immer größerer Seitenzahl in der Weise sich anschließen lassen, daß die Fortsetzung des Prozesses für alle Punkte des Kreises, die nicht selbst erreicht werden, immer engere Grenzen festlegt. Es genüge, einen einzigen derartigen Prozeß anzugeben. Nachdem in einen Kreis ein konvexes n-Eck beschrieben ist, kann man zu seinen Eckpunkten die n Halbierungspunkte der zu den einzelnen Seiten gehörenden Bogen hinzunehmen und auf diese Weise ein eingeschriebenes konvexes $2n$-Eck erhalten. Indem man sich diese Konstruktion unbegrenzt oft wiederholt denkt, ergibt sich die Möglichkeit, alle Punkte des Kreises nach ähnlichen Gesetzen zu bestimmen wie beim Gebrauche von regelmäßigen Polygonen.

Auch hierbei ist es nicht nötig, den Kreis selbst zu benutzen. Wir setzen ein konvexes n-Eck $ABC\ldots N$ als gegeben voraus, von dem wir wissen, daß sich ihm ein Kreis umbeschreiben läßt, und zeigen, daß man ohne Hilfe dieses Kreises ein $2n$-Eck konstruieren kann, das demselben Kreise einbeschrieben ist. Zu dem Zwecke beschreibt man einen Kreis, der durch A und die Mitten der Seiten AB und AN geht; nachdem zwischen A und B der Punkt X ermittelt ist, für den $AX = \frac{1}{4}AB$ ist, möge die in X auf AB errichtete Senkrechte diesen Kreis in einem Punkte Y schneiden, der im Äußern des gegebenen Polygons liegt, und die Gerade AY das Mittellot von AB in B' treffen. In gleicher Weise ermittelt man mit Hilfe der Punkte B und C einen Punkt C' usw. Man findet auf diese Weise ein konvexes $2n$-Eck $AB'BC'C\ldots MN'NA'$, dessen Eckpunkte von einem Punkte gleiche Entfernung haben. Nun kann man von einem beliebigen Dreieck oder von einem konvexen Viereck ausgehen, in dem die Summe zweier Gegenwinkel zwei Rechte beträgt, und dann beliebig oft zu der doppelten Seitenzahl übergehen. Man erhält dabei unendlich viele Punkte, die auf einem Kreise liegen; als Grenzgestalt der Figur muß der Kreis selbst angesehen werden. Geht man hierbei von einem unregelmäßigen Vieleck aus, so ist keines der hinzugenommenen Vielecke regelmäßig. Derartige Erwägungen können wegen ihres abstrakten Charakters in der Schule nicht durchgenommen werden; daher dürfte es dem Lehrer unmöglich werden, den Sinn des angegebenen Ausdrucks klar zu machen. Wahrscheinlich wird also der Schüler den Satz ohne Verständnis hersagen; vielleicht legt er ihm sogar einen falschen Sinn bei. Weil aber dem Lehrer die Möglichkeit fehlt, beiden Gefahren vorzubeugen, muß der Ausdruck ganz aus dem Unterricht verbannt werden. Zudem glauben wir nicht, daß sein Gebrauch irgendeinen Nutzen stiften könne. Er vermittelt weder ein tieferes Verständnis des Kreises, noch eignet er sich zum Beweise von Lehrsätzen. Nach unserer Ansicht ist es schon bedenklich, ihn zum Beweis des Satzes heranzuziehen, daß beliebige Kreise als ähnliche Figuren angesehen werden können, eines Satzes, der auf andere Weise leicht in aller Strenge bewiesen werden kann. Und doch scheint hier der hauptsächlichste Grund zu liegen, weshalb so viele Lehrbücher diesen Ausdruck empfehlen.

Auch bei der Kreismessung ist man keineswegs einzig auf die regelmäßigen Vielecke angewiesen. Solange es sich nur um die Möglichkeit handelt, den Umfang des Kreises zwischen Grenzen einzuschließen, die immer enger werden, kann man auch von unregelmäßigen Vielecken ausgehen. Man kann dabei auf ganz verschiedene Weise Größenreihen bilden, die in ihren Beziehungen zueinander ganz den Reihen (1) und (2) entsprechen. Demnach darf man bei den Schülern nicht die Meinung aufkommen lassen, nur die regelmäßigen Vielecke könnten zur Berechnung der Zahl π benutzt werden.

Um so entschiedener möchten wir wünschen, daß die Schüler über die engen Beziehungen aufgeklärt würden, in denen der Kreis zu den regelmäßigen Vielecken steht, und daß sie auch die großen Vorteile erkennen, die für die Rechnung aus der Benutzung regelmäßiger Vielecke erwachsen. Zur Aufklärung über den ersten Punkt genügt es aber nicht, den allbekannten Satz durchzunehmen, daß sich in und um jedes regelmäßige Vieleck ein Kreis beschreiben läßt. Wir empfehlen, die Schüler ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß auch umgekehrt der Kreis die einzige Kurve ist, in die und um die sich ein regelmäßiges Vieleck von beliebiger Seitenzahl beschreiben läßt, daß hierbei sogar, nachdem die Seitenzahl vorgeschrieben ist, im ersten Ealle ein Eckpunkt, im zweiten ein Berührungspunkt ganz beliebig auf dem Kreise angenommen werden kann. Nachdem im späteren Unterricht die Ellipse behandelt ist, erkennen die Schüler, daß diese Kurve immer ein und nur ein Sehnenquadrat zuläßt und ebenso immer ein und nur ein Tangentenquadrat; ferner, daß die Ecken des ersten Quadrates nicht die Berührungspunkte der Seiten des anderen sein können, solange die Achsen der Ellipse ungleich sind.

Ebenso ist es gut, die Schüler darauf hinzuweisen, daß es für die Rechnung von sehr großem Nutzen ist, mit Archimedes von den regelmäßigen Vielecken auszugehen.

Wollte man die Kreismessung an beliebige Vielecke anschließen, so würde man recht viele lästige Formeln bewältigen müssen. Dagegen stützen sich die oben angegebenen Methoden, die sich an die regelmäßigen Vielecke anschließen, auf nur wenige Formeln, die ziemlich einfach sind und deren Anwendung nicht zu große Schwierigkeiten macht.

Vor allem aber zeichnet sich die Methode des Archimedes durch die größte Annäherung aus, die überhaupt bei Benutzung geradliniger Figuren von vorgeschriebener Seitenzahl möglich ist. Die Wahrheit dieser Behauptung geht aus dem Doppelsatze hervor:

Unter allen $\left\{\begin{matrix}\text{in}\\ \text{um}\end{matrix}\right\}$ einen Kreis beschriebenenen konvexen Polygonen von fester Seitenzahl hat das regelmäßige den $\left\{\begin{matrix}\text{größten}\\ \text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ Umfang und den $\left\{\begin{matrix}\text{größten}\\ \text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ Inhalt.

Dieser Satz läßt sich sehr einfach mit Hilfe der bekannten Regel beweisen, welche in der Differentialrechnung für die extremen Werte einer Funktion von mehreren Variabeln aufgestellt wird; man braucht nur das Maximum der Funktion $\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \ldots + \sin\varphi_n$ und das Minimum der Funktion $\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \ldots + \operatorname{tg}\varphi_n$ unter der Bedingung: $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = 180^0$ zu ermitteln. Indessen lassen sich die beiden Teile des Satzes auch durch elementare Betrachtungen erhärten. Für das eingeschriebene Vieleck kann man sich auf den Satz stützen:

Unter allen Dreiecken ABC, von denen zwei Ecken mit den Endpunkten eines Kreisbogens AB zusammenfallen, während die dritte dem Bogen selbst angehört, hat dasjenige den größten Umfang und den größten Inhalt, für welches der dritte Eckpunkt in die Mitte des Bogens fällt.

Die Behauptung braucht nur für den Umfang bewiesen zu werden. Der Beweis wird höchst einfach, wenn man eine Mollweidesche Formel benutzt. Auch führt folgende einfache Konstruktion zum Ziel. Verlängert man AC um $CD = CB$, so kommt es darauf an, dem Punkte C eine solche Lage zu geben, daß die Strecke AD möglichst groß wird. Der Punkt D liegt aber auf einem Kreise, der die Mitte M des Bogens AB zum Mittelpunkte hat und durch die Punkte A und B hindurchgeht. Daher wird die Strecke AD möglichst lang, wenn sie durch den Punkt M hindurchgeht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn der Punkt C mit M zusammenfällt.

Aus diesem speziellen Satze kann (auf etwas umständliche Weise) der erste Teil des Doppelsatzes hergeleitet werden.

In ähnlicher Weise kann der zweite Teil auf folgenden Satz zurückgeführt werden:

An einen Kreis (O) seien von einem Punkte A aus zwei Tangenten gelegt, von denen die eine in M, die andere in N berührt. Zieht man an den Kreis eine dritte Tangente, die mit AM einen Punkt B zwischen A und M, und mit AN einen Punkt C zwischen A und N gemein hat, so wird die Seite BC am kleinsten und der Inhalt des Dreiecks ABC am größten für das Dreieck, in welchem die Seiten AB und AC einander gleich sind.

Der Inkreis des Dreiecks ABC habe Q zum Mittelpunkte und berühre die Seite AB in L. Da $LM = BC$ ist, und der Inhalt mit dem Radius QL wächst, so nimmt BC seinen kleinsten und der Inhalt seinen größten Wert an, wenn OQ möglichst klein gewählt wird. Hat die Strecke AO mit dem Kreise (O) den Punkt D gemein und bestimmt man in ihr einen Punkt E so, daß ED gleich der von E auf AM gefällten Senkrechten ist, so kann der Punkt Q nicht zwischen D und E fallen, weil es möglich sein soll, an die Kreise (O) und (Q) eine gemeinsame innere Tangente zu ziehen.

Schließt man hiernach den Kreis zwischen zwei n-Ecke ein, von denen das eine ein-, das andere umbeschrieben ist, so erhält man die engsten Grenzen für den Fall, daß beide n-Ecke regelmäßig sind. Um die Grenzen anzugeben, zwischen denen der Wert von π eingeschlossen ist, wenn man zu seiner Ermittlung regelmäßige n-Ecke benutzt, schreiben wir die Gleichung (3) in der Form:

$$\frac{u_n'}{2r} = \frac{u_n}{2r}\left[1 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{u_n}{2r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Daraus geht hervor:

$$\frac{u_n'}{2r} - \frac{u_n}{2r} = \frac{1}{2n^2}\left(\frac{u_n}{2r}\right)^3 + \cdots$$

Nun ist $u_n/2r < 3{,}2$ und somit für hinlänglich große Werte von n:

$$\frac{u_n'}{2r} - \frac{u_n}{2r} < \frac{3{,}2^3}{2n^2}.$$

Der Unterschied ist also dem reziproken Quadrate von n proportional.

Die angegebenen Verhältnisse unterscheiden sich hiernach für $n = 96$ um weniger als 0,0018 und für $n = 1536$ um weniger als 0,000007.

4. **Messung eines Bogens und eines Kreisausschnittes.** Um das Verhältnis zu bestimmen, in dem zwei Bogen a und b desselben Kreises zueinander stehen, denkt man den Bogen b in gleiche Teile zerlegt, deren Anzahl n ganz beliebig sein soll. Einen solchen Teil trägt man, so oft es angeht, auf dem Bogen a ab. Dabei braucht bekanntlich nur die zu einem solchen Teile gehörende Sehne übertragen zu werden. Enthält der Bogen a genau m dieser Teile, so stellt der Bruch $m:n$ das Verhältnis der Bogen a und b dar. Wenn aber keiner Zahl n eine Zahl m in der angegebenen Weise zugeordnet werden kann, so entspricht jedem Nenner n eine bestimmte Zahl m in der Weise, daß ist:

$$m \cdot \frac{b}{n} < a < (m+1) \cdot \frac{b}{n} \cdot$$

Demnach ergibt sich in diesem Falle eine bestimmte Irrationalzahl α als das Verhältnis $a:b$.

Hierbei kann man mit elementaren Konstruktionen auskommen, wenn man sich nur auf wiederholte Halbierung des Bogens b beschränkt.

In derselben Weise kann man das Verhältnis ermitteln, in dem zwei Ausschnitte desselben Kreises zueinander stehen.

Die archimedische Kreismessung ermöglicht es auch, die Länge eines jeden Kreisbogens zu bestimmen. Zu dem Zwecke teilen wir den Bogen in n gleiche Teile und verbinden die Teilpunkte durch einen gebrochenen Streckenzug u_n. Zudem legen wir in den Endpunkten und den einzelnen Teilpunkten die Tangenten an den Kreis und setzen sie zu einem zweiten Streckenzuge u_n' zusammen. Für unbeschränkt wachsende Werte von n haben die Größen u_n und u_n' einen gemeinsamen Grenzwert, der die Länge des Bogens darstellt. Zur wirklichen Ausrechnung empfiehlt es sich, nur solche Zahlen n zu benutzen, die Potenzen von 2 sind. Die hierzu dienenden Formeln sind nicht wesentlich verschieden von denen, die wir zur Ermittlung des Kreisumfanges benutzt haben.

Auch der Flächeninhalt eines Kreissektors wird auf eine ganz ähnliche Weise gefunden.

Aus diesen Messungen ergibt sich dann endlich auch die Möglichkeit, das Verhältnis zu ermitteln, in dem Bogen oder Abschnitte beliebiger Kreise zueinander stehen.

Besondere Wichtigkeit legt man dem Verhältnisse bei, in dem ein Kreisbogen zum Radius steht. Diese Größe ist nur von dem zugehörigen Zentriwinkel abhängig und wird als seine „natürliche" Maßzahl bezeichnet. Die Anwendung der natürlichen Winkeleinheit, deren Bogen gleich dem Radius ist, bietet den Vorteil, daß die Länge eines Kreisbogens einfach als das Produkt aus Zentriwinkel und Radius erscheint, während durch jede andere Winkeleinheit dies Produkt noch mit einem lästigen konstanten Faktor behaftet wird. Daraus ergibt sich, daß, wenn α die natürliche Maßzahl eines kleines Winkels ist, $\sin \alpha$ und $\operatorname{tg} \alpha$ in erster Annäherung durch α selbst ersetzt werden dürfen. Darin liegt ein Vorteil für theoretische Darstellungen; praktische Verwendung findet die natürliche Winkeleinheit nicht.

5. **Die Methode von Huygens.** Daß die Methode des Archimedes in der Hand eines geschickten Rechners etwas leisten könne, hat Ludolf von Ceulen (1539—1610) bewiesen. Indem er vom regelmäßigen 30-Eck ausging und die Verdoppelung der Seitenzahl bis zu einem Vieleck von $30 \cdot 2^{30}$ Seiten fortsetzte, konnte er die 20 ersten Dezimalstellen der Zahl π angeben. Später ist er noch weiter gegangen und hat die Zahl bis auf 35 Dezimalen berechnet. Da er aber die Methode nicht im geringsten verbessert hat und die Kenntnis einer größeren Anzahl von Dezimalstellen für die Wissenschaft von sehr geringer Bedeutung ist, so sollte man die Zahl π nicht nach ihm, sondern nach Archimedes benennen. Später gelang es Huygens (1629—1695) in seiner bereits 1654 erschienenen Arbeit: De circuli magnitudine inventa, weit über Archimedes hinauszukommen. Die Überlegungen, durch die er zu seinen Resultaten geführt ist, gibt er nicht an. Dadurch erhalten seine Beweise den Charakter der Künstlichkeit. Sie werden aber sehr einfach, wenn man im archimedischen Verfahren an die Stelle der regelmäßigen Vielecke solche Polygone setzt, die von lauter kongruenten Parabelbogen begrenzt werden. Mit dieser Änderung wollen wir die Resultate hier entwickeln, die Huygens im ersten Teile seiner Arbeit bringt; dagegen müssen wir uns versagen, auf den zweiten Teil des Werkchens einzugehen.

Ein Kreisbogen AB, der kleiner ist als der Halbkreis, bestimmt eindeutig eine Parabel, die durch die Punkte A und B geht und den Kreisbogen in seiner Mitte C berührt. Diese Parabel wird von der in C an den Kreis gelegten Tangente berührt und geht außer durch die Punkte A und B noch durch den unendlich fernen Punkt der von C auf AB gefällten Senkrechten. Daß sie außerdem die unendlich ferne Gerade berührt, geht aus bekannten Sätzen hervor. Da diese Parabel in jedem der beiden Punkte A und B vom Äußern des Kreises in sein Inneres übergeht, liegt der Parabelbogen ACB im Innern des Kreisabschnittes ACB.

Ebenso kann man eine einzige Parabel konstruieren, die den Kreis in den Punkten A und B berührt. Man kennt von dieser Parabel für zwei sie berührende Gerade, nämlich die in A und B an den Kreis gelegten Tangenten, die Berührungspunkte und außerdem noch eine weitere Tangente, nämlich die unendlich ferne Gerade. Diese Parabel kann an keiner Stelle in das Innere des Kreises eintreten. Daher umschließt auch das über der Sehne AB stehende Parabelsegment den Kreisabschnitt ACB.

Jetzt gehen wir von einem regelmäßigen n-Eck aus, das in den Kreis beschrieben ist. Für je zwei aufeinander folgende Ecken desselben konstruieren wir die beiden Parabelbogen, die der angegebenen Festsetzung entsprechen. Wir bestimmen demnach:

a) die n Parabelbogen, von denen jeder durch zwei aufeinander folgende Eckpunkte des regelmäßigen Vielecks begrenzt wird und den Kreis in der Mitte des zugehörigen Bogens berührt,

b) die n Parabelbogen, von denen jeder zwei solche Punkte zu Endpunkten hat und in beiden den Kreis berührt.

Hierdurch erhalten wir zwei aus Parabelbogen zusammengesetzte regelmäßige n-Ecke, von denen das erste dem Kreise ein-, das andere dem Kreise umbeschrieben ist. Den Inhalt des ersten bezeichnen wir mit P_n, den des zweiten mit P_n'.

Dementsprechend betrachten wir die vorhin benutzte Strecke AB als die Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Das von den Radien OA und OB und dem Parabelbogen ACB begrenzte Flächenstück setzt sich aus dem Dreieck AOB und dem Parabelabschnitt ACB zusammen. Der letztere ist aber gleich vier Drittel des Dreiecks ACB. Indem wir mit AOB den Inhalt des Dreiecks AOB und mit ACB den Inhalt des Dreiecks ACB bezeichnen, wird die Fläche, die von den n nach der Vorschrift a) konstruierten Parabelbögen begrenzt wird, gleich $n \cdot AOB + \frac{4}{3} n \cdot ACB$. Das erste Produkt ist aber der Inhalt des dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, während das Produkt $n \cdot ACB$ den Überschuß vom Inhalte des eingeschriebenen $2n$-Ecks über den Inhalt des eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks darstellt; oder es ist unter Benutzung der oben eingeführten Bezeichnung: $n \cdot ACB = F_{2n} - F_n$. Somit erhalten wir die Gleichung:

$$(13) \qquad P_n = F_n + \frac{4}{3}(F_{2n} - F_n) = \frac{4}{3} F_{2n} - \frac{1}{3} F_n.$$

Um die Größe von P_n' zu ermitteln, bezeichnen wir den Schnittpunkt der in A und B an den Kreis gelegten Tangenten mit D. Das Dreieck, welches von den Strecken OA und OB und dem nach der Vorschrift b) konstruierten Parabelbogen gebildet wird, setzt sich aus dem Dreieck AOB und dem entsprechenden Parabelsegment zusammen; sein Inhalt ist daher nach einem bekannten Satze gleich $AOB + \frac{2}{3} ABD$. Zugleich ist aber $n \cdot AOB = F_n$ und das Produkt $n \cdot ABD$ gleich der Differenz $F_n' - F_n$. Demnach schließen die nach der Vorschrift b) konstruierten Parabelbogen eine Fläche ein gleich $F_n + \frac{2}{3}(F_n' - F_n)$, oder es ist:

$$(14) \qquad P_n' = \frac{2}{3} F_n' + \frac{1}{3} F_n.$$

Nun gelten für die beiden Reihen:

(15) $$P_n, P_{2n}, P_{4n}, P_{8n}, \ldots$$

(16) $$P'_n, P'_{2n}, P'_{4n}, P'_{8n}, \ldots$$

wieder die Gesetze, die wir oben für die Reihen (1) und (2), sowie für die Reihen (4) und (5) bewiesen haben. Mit wachsender Seitenzahl nehmen die Elemente der ersten Reihe stets zu, die der zweiten stets ab; zudem sind die Elemente der ersten Reihe sämtlich kleiner als die der zweiten, kommen diesen aber bei hinreichend großer Marke beliebig nahe. Die beiden Reihen haben daher einen gemeinsamen Grenzwert, den Inhalt des Kreises.

Indem man die Formeln (6) benutzt und n durch $2m$ ersetzt, leitet man aus der Beziehung zwischen P_n und P_n' das Gesetz her:

$$\frac{1}{3}(4u_{2m} - u_m) < 2\pi r < \frac{1}{3}(2u'_{2m} + u_m).$$

Hiernach kann man die Methode von Huygens auch zur Berechnung des Kreisumfanges benutzen. Da man aber den Inhalt eines regelmäßigen Vielecks ebensoleicht berechnen kann wie den Umfang, empfiehlt es sich, bei den früheren Gleichungen (13) und (14) stehen zu bleiben.

6. **Vergleich zwischen den Methoden von Archimedes und von Huygens.** Zur angenäherten Berechnung der Länge einer krummen Linie oder des Inhalts der von ihr begrenzten Fläche ersetzt man die Kurve an erster Stelle durch einen ihr ein- oder umgeschriebenen Streckenzug. Um eine raschere Annäherung zu erhalten, beschreibt man aber wohl Bogen von Kurven, deren Länge oder deren Inhalt bereits bekannt ist, in der Weise in oder um die krumme Linie, daß sich ihr die einzelnen Bogen möglichst eng anschließen. Zur Berechnung des Flächeninhaltes empfiehlt es sich, Parabelbögen zu Hilfe zu nehmen, da sich der Inhalt eines Parabelsegments, wie schon Archimedes bewiesen hat, durch eine sehr einfache Formel darstellen läßt. Das ist auch der Grund, aus dem die bekannte Simpsonsche Regel eine große Annäherung liefert.

Für den Kreis haben wir erkannt, daß unter allen Vielecken von vorgeschriebener Seitenzahl das regelmäßige sich ihm am genauesten anschließt. Nun ist es zur Berechnung der Zahl π gleichgültig, ob man den Umfang oder den Inhalt benutzt. Es liegt also nahe, aus je n Parabelbogen zwei Figuren zu bilden, von denen die erste ganz im Innern des Kreises liegt und einen möglichst großen Inhalt hat, während die zweite bei möglichst kleinem Inhalt den Kreis in sich einschließt. Wir werden sehen, daß diese beiden Forderungen auf die in Nr. 5 angegebene Methode führen.

Um die erste Aufgabe zu erledigen, ermitteln wir zuerst das größte Parabelsegment, das in einen gegebenen Kreisabschnitt beschrieben werden kann. Der Kreisabschnitt sei durch die Sehne AB und den zugehörigen Bogen ACB begrenzt, wo der Punkt C mit der Mitte des Bogens zusammenfallen soll. Ein Parabelsegment, das über der Sehne AB in den Kreisabschnitt einbeschrieben werden soll, ist bestimmt, sobald man den Berührungspunkt N der zu AB parallelen Tangente kennt. Alsdann ist die Gerade, die den Punkt N mit der Mitte M der Sehne AB verbindet, ein Durchmesser der Parabel. Damit der gesuchte Parabelbogen ganz in den Kreisabschnitt fällt, muß zum mindesten der Punkt N in diesem Abschnitt liegen. Nun ist der Inhalt des Parabelsegments ABN gleich vier Drittel des Dreiecks ABN; er nimmt also seinen größten Wert an, wenn der Punkt N mit der Mitte C des Bogens zusammenfällt, oder mit anderen Worten, wenn die Parabel den zugehörigen Kreisbogen in seiner Mitte berührt.

Der Inhalt der Fläche, die von den Radien OA und OB des Kreises und dem angegebenen Parabelbogen begrenzt wird, setzt sich aus dem Dreieck OAB und dem Parabelsegment ACB zusammen. Dies Segment beträgt vier Drittel des Dreiecks ABC. Demnach wird der Inhalt der angegebenen Fläche gleich $\frac{1}{6}r^2\left(8 \sin\frac{\varphi}{2} - \sin\varphi\right)$, wo $OA = r$ und $\sphericalangle AOB = \varphi$ gesetzt ist.

Wir müssen jetzt, um die erste Aufgabe zu lösen, die n Punkte auf dem Kreise so wählen, daß die n nach der gegebenen Vorschrift konstruierten Parabelbogen einen möglichst großen Inhalt einschließen. Es kommt dies darauf hinaus, n Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, deren Summe vier Rechte beträgt, so zu wählen, daß die Funktion:

$$\left(8 \sin\frac{\varphi_1}{2} - \sin\varphi_1\right) + \left(8 \sin\frac{\varphi_2}{2} - \sin\varphi_2\right) + \cdots + \left(8 \sin\frac{\varphi_n}{2} - \sin\varphi_n\right)$$

ein Maximum wird. Eine elementare Lösung dieser Aufgabe ist vielleicht nicht ganz einfach. Wir begnügen uns damit, die Hilfsmittel der Differentialrechnung anzuwenden. Hiernach wird das Maximum der Funktion unter der Bedingung erreicht, daß für je zwei Marken ι und $\varkappa$ die Gleichung erfüllt wird:

$$4 \cos\frac{\varphi_\iota}{2} - \cos\varphi_\iota = 4 \cos\frac{\varphi_\varkappa}{2} - \cos\varphi_\varkappa.$$

Diese Bedingung kann auf die Form gebracht werden:

$$\left(\cos\frac{\varphi_\iota}{2} - \cos\frac{\varphi_\varkappa}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi_\iota}{2} + \cos\frac{\varphi_\varkappa}{2} - 2\right) = 0.$$

Da aber die zweite Klammer nur für $\varphi_\iota = \varphi_\varkappa = 0$ verschwindet, ergibt sich die Forderung: $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n$, was der von Huygens aufgestellten Regel entspricht.

Wir wollen jetzt die zweite Aufgabe erledigen und zuerst einen Parabelbogen konstruieren, der durch die Punkte A und B geht und in Verbindung mit der zugehörigen Sehne den Kreisbogen in sich schließt, zugleich aber auch einen möglichst kleinen Flächeninhalt bestimmt. Der Schnittpunkt der beiden in A und in B an die Parabel gelegten Tangenten möge mit L bezeichnet werden. Dieser Punkt muß wegen der bekannten Größe eines Parabelsegments so gewählt werden, daß einerseits die Strecken AL und BL den Kreis nicht treffen, andererseits das Dreieck ABL möglichst klein wird. Um das zu erreichen, muß der Punkt L mit dem Schnittpunkte D der in A und B an den Kreis gelegten Tangenten zusammenfallen; die Parabel muß den Kreis in den Punkten A und B berühren.

Der auf diese Weise bestimmte Parabelbogen schließt im Verein mit den Radien OA und OB eine Fläche von der Größe:

$$\frac{1}{6}r^2\left(4 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \sin \varphi\right)$$

ein, wo wieder $OA = r$, $\sphericalangle AOB = \varphi$ gesetzt ist.

Hiernach ist es notwendig, n Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, deren Summe 360^0 beträgt, so zu bestimmen, daß die Funktion:

$$\left(4 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} + \sin \varphi_1\right) + \left(4 \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} + \sin \varphi_2\right) + \cdots + \left(4 \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2} + \sin \varphi_n\right)$$

einen möglichst kleinen Wert erhält. Das tritt ein, wenn allgemein ist:

$$\frac{2}{\cos^2 \frac{\varphi_\iota}{2}} + \cos \varphi_\iota = \frac{2}{\cos^2 \frac{\varphi_\varkappa}{2}} + \cos \varphi_\varkappa .$$

Diese Bedingung nimmt nach einigen Umformungen die Gestalt an:

$$(\cos \varphi_\iota - \cos \varphi_\varkappa)(4 - (1 + \cos \varphi_\iota)(1 + \cos \varphi_\varkappa)) = 0.$$

Daraus geht hervor, daß $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n$ sein muß, was wieder auf die Huygenssche Vorschrift hinauskommt.

Will man daher den Kreis zwischen zwei Flächen einschließen, die beide von n Parabelbogen begrenzt werden, und von denen die Begrenzung der einen ganz dem Innern, die Begrenzung der andern ganz dem Äußern des Kreises angehört, so erhält man die engsten Grenzen durch die Wahl derjenigen Figuren, welche zu den von Huygens bewiesenen Formeln führen. Daß die hierbei gewonnenen Grenzen enger sind als die, welche Archimedes unter Benutzung von regelmäßigen Vielecken erhält, geht schon aus der Zeichnung hervor. Wir wollen diese Grenzen aber auch numerisch angeben.

Aus den Formeln (13) und (14) folgt, daß der Unterschied der beiden Flächen P_n und P_n' gleich ist:

$$\frac{2}{3}(F_n' + F_n - 2F_{2n})$$

oder, wie aus der ersten Formel (11) hervorgeht, gleich:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{F_{2n}^2}{F_n}+F_n-2F_{2n}\right)=\frac{2}{3}\frac{(F_{2n}-F_n)^2}{F_n}.$$

Um diesen Wert durch F_n allein auszudrücken, benutzen wir die erste Gleichung (6) und die erste Gleichung (7). Hiernach ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{P_n'-P_n}{r^2}=\frac{1}{6}\left(\frac{F_n}{r^2}\right)^5\frac{1}{n^4}+\cdots\cdot$$

Da für größere Werte von n die höhern Potenzen vernachlässigt werden dürfen, ist die Differenz der vierten Potenz von n umgekehrt proportional; sie wird, weil der Quotient $F_n : r^2$ unter $3,2$ bleibt, kleiner als:

$$\frac{3,2^5}{6}\cdot\frac{1}{n^4},$$

oder, wenn man $n = 64\,m$ setzt, kleiner als:

$$\frac{1}{3010^5\cdot m^4}.$$

Für $r = 1$ beträgt der Unterschied zwischen $3\cdot P_{64}'$ und $3\cdot P_{64}$ noch nicht 0,00001. Für $n = 192$ erhält man die Zahl π bereits auf sieben Dezimalen richtig. Während beim archimedischen Verfahren das 16384-Eck die Zahl π erst auf sieben Dezimalen richtig liefert, genügt die gleiche Seitenzahl unter Benutzung der Methode von Huygens, um fünfzehn Dezimalstellen zu berechnen.

Die Methode von Huygens eignet sich nicht für den ersten Unterricht. Zwar können die Beweise, die er selbst in seinem Werkchen mitteilt, ziemlich leicht verstanden werden; sie sind aber so weitläufig und so künstlich, daß ihre Durchführung kaum von Nutzen sein kann. Für Schüler aber, die mit dem Satze vom Parabelsegment bekannt gemacht sind, bietet sich hier eine günstige Gelegenheit zu einer nützlichen Anwendung dieses Satzes.

Manche Lehrbücher machen über die Berechnung der Zahl π historische Angaben, die geeignet sind, den Schülern ganz falsche Ansichten über die Verdienste der einzelnen Forscher beizubringen. Das hohe Verdienst des Archimedes wird vielfach nicht genügend hervorgehoben, und doch hat er zuerst eine Methode angegeben, nach der selbst ein ungeschickter Rechner ziemlich leicht die ersten Dezimalstellen ermitteln kann, die aber bei geschickter Anlage ein recht genaues Resultat ermöglicht. Obwohl die Mathematik mittlerweile große Fortschritte gemacht hat, ist seine Methode auch jetzt noch für die Geometrie die wichtigste. Endlich hat er trotz der großen Schwierigkeiten, die in den griechischen Zahlzeichen lagen, das Verhältnis des Umfanges zum Durchmesser in ein Intervall gleich 1 : 497 eingeschlossen. Wenn Ludolf von Ceulen erheblich weitergehen konnte, so liegt der Grund dafür (außer in seiner großen Rechenfertigkeit) in der Brauchbarkeit der Dezimalzahlen. Dagegen hat sich Huygens dadurch ein großes Verdienst erworben, daß er die Methode des Archimedes auf eine rein geometrische Weise verbessert hat. Der weitere, ganz erstaunliche Fortschritt, der in den beiden letzten Jahrhunderten erreicht ist, gehört dem Gebiete der höhern Analysis an und kann hier nicht besprochen werden. Die neueren Be-rechner verdienen aber nicht genannt zu werden, da sie mit einigem Geschick und großer Geduld die von der Analysis gebotenen Hilfsmittel auf ein Problem angewandt haben, das weder praktische noch theoretische Bedeutung hat.

Die geschichtliche Entwicklung des Problems hat Rudio in dem Werkchen zusammengestellt: Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage (Teubner 1892). Der Zusammenhang der Huygensschen Methode mit der Parabel scheint trotz seiner Einfachheit nicht bemerkt worden zu sein.

§ 20. Schnittverhältnisse und Doppelverhältnisse.

1. **Schnittverhältnis einer Strecke.** Man soll einen Begriff über seinen natürlichen Bereich hinaus nicht eher erweitern, als bis sich diese Erweiterung als notwendig oder mindestens als zweckmäßig erwiesen hat. Bevor man demnach die sogen. äußere Teilung einer Strecke einführt, muß der Schüler erkennen, daß die Beschränkung auf die eigentliche, die innere Teilung zu Unzuträglichkeiten führt. Zwar zeigt gerade für den vorliegenden Fall der weitere Aufbau der Geometrie, wie wichtig diese Erweiterung des Begriffs der Teilung ist, dennoch möchten wir von der aufgestellten Forderung nicht gänzlich absehen. Man kann zu dem Zwecke an den ersten Satz über die Proportionalität der Strecken erinnern und zeigen, daß durch die Einführung der äußeren Teilung die drei in diesem Satze vereinigten Behauptungen auf eine einzige zurückgeführt werden können und daß man sich hierdurch auch von der Annahme unabhängig macht, als müsse die zu den Grundlinien des Trapezes gezogene Parallele die Schenkel zwischen ihren Endpunkten treffen. Ferner kann man zeigen, daß der Satz über das Verhältnis der Teile, in die eine Seite eines Dreiecks durch die Halbierende des Gegenwinkels zerlegt wird, auch für den Außenwinkel gilt, sobald man die äußere Teilung einführt.

Der Satz, daß eine Strecke nur in einem Punkte nach einem vorgeschriebenen Verhältnis geteilt werden kann, ist so wichtig, daß seine Gültigkeit auch bei der Einführung der äußeren Teilung aufrecht erhalten werden muß. Zu dem Zwecke definieren wir allgemein als das Schnittverhältnis (ABC) einer Strecke AB in einem Punkte C das Verhältnis $AC:CB$, legen ihm aber das positive oder das negative Vorzeichen bei, je nachdem die Teile dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung haben. Zugleich verlangen wir, daß für jede Lage, die der Punkt C auf der Geraden AB annehmen kann, die Gleichung besteht:

$$AC + CB = AB.$$

Hiernach kann der aufgestellte Satz leicht bewiesen werden. Wir setzen:

$$\frac{AC}{CB} = \gamma, \quad \frac{AD}{DB} = \delta.$$

Hieraus folgt:

$$\gamma + 1 = \frac{AB}{CB}, \quad \delta + 1 = \frac{AB}{DB}.$$

Soll $\gamma = \delta$ sein, so muß der Größe und der Richtung nach $CB = DB$ sein; der Punkt D fällt mit C zusammen. Für $\gamma > \delta$ muß, wenn man AB das positive Vorzeichen beilegt, $CB < DB$ sein; die Strecke CD muß somit die entgegengesetzte Richtung haben wie AB. Dagegen müssen für $\gamma < \delta$ die Strecken AB und CD in der Richtung übereinstimmen.

Wir leiten den Satz noch in zweiter Weise her. In B errichten wir auf AB die Senkrechte BO gleich der Längeneinheit. Wenn jetzt die Gerade OC die in A auf AB errichtete Senkrechte g im Punkte C' trifft, so bestimmt man die Maßzahl von AC' und legt ihr das negative oder das positive Vorzeichen bei, je nachdem die Punkte O und C' auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen.

Diese Konstruktion stellt zugleich, wenn die Punkte A und B festgehalten werden, aber der Punkt C seine Lage auf der Geraden AB beliebig ändern darf, das Schnittverhältnis als eine eindeutige Funktion der Lage des Punktes C dar. Somit bietet das Schnittverhältnis eine sehr willkommene Gelegenheit, die Schüler mit einer wichtigen Funktion bekannt zu machen. Diese Gelegenheit wird der Lehrer um so lieber ergreifen, weil es sich nicht um eine willkürlich gebildete, sondern um eine sich ganz natürlich ergebende Funktion handelt.

Schon dieser Umstand müßte genügen, um die Bedenken zu zerstreuen, die mancher Lehrer noch immer gegen die Einführung der Vorzeichen von Strecken hegt. Wir können diese Bedenken nicht im mindesten teilen. Im Gegenteil müssen doch Schüler, die jahrelang mit negativen Größen gerechnet haben, endlich einmal zeigen, daß sie wirklich den Unterschied der Zeichen erfaßt haben. Das kann ihnen auch nicht schwer fallen, da sie von einer frühen Unterrichtsstufe an angehalten werden, algebraische Ausdrücke graphisch darzustellen. Die Vorzeichen spielen zudem in vielen Teilen der Planimetrie eine wichtige Rolle, so bei der perspektiven Ähnlichkeit, bei der Potenz eines Kreises und bei der inversen Abbildung. Die Trigonometrie und die analytische Geometrie können ohne die Beachtung der Vorzeichen für Strecken nicht auskommen. Man erschwert daher den Unterricht geradezu, wenn man eine Unterscheidung, die in andern Zweigen des Unterrichts notwendig ist, in der Planimetrie nicht beachtet.

Das Schnittverhältnis (ABC) kann noch in anderer Weise dargestellt werden. Fällt man nämlich auf eine beliebige durch C gelegte Gerade g von A und B die Senkrechten AA_1 und BB_1, so sind die Verhältnisse $AC:CB$ und $AA_1:BB_1$ ihrem absoluten Betrage nach gleich. Den beiden Senkrechten legt man am passendsten gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen bei, je nachdem sie auf derselben oder entgegengesetzten Seite von g liegen. Bei dieser Festsetzung gilt die Gleichung: $(ABC) = -AA_1 : BB_1$.

Wir haben im Vorstehenden das Schnittverhältnis (ABC) durch das Verhältnis $AC:CB$ definiert. Wir wissen wohl, daß viele Gründe dafür sprechen, das Verhältnis $AC:BC$ als das Schnittverhältnis anzusehen. Hierbei stimmt das Verhältnis $AA_1 : BB_1$ der soeben benutzten Senkrechten auch im Vorzeichen mit dem Schnittverhältnisse überein. Dennoch halten wir unsere Festsetzung für die passendste. Soll a in die Teile b und c zerlegt sein, so muß die Gleichung bestehen: $a = b + c$. Demnach müssen wir AC und CB als die Teile der Strecke AB ansehen. Zudem verdient die eigentliche Teilung bevorzugt zu werden; das geschieht aber nur, wenn man bei einer inneren Teilung dem Schnittverhältnisse das positive Vorzeichen beilegt.

2. **Die Sätze von Menelaus und Ceva.** Drei Punkte A, B, C, die in gerader Linie liegen, bestimmen sechs Schnittverhältnisse. Wenn wir die beiden Endpunkte der geteilten Strecke mit einander vertauschen, so nimmt das Schnittverhältnis seinen reziproken Wert an. Aus § 17, 13 (S. 307) geht unmittelbar hervor, daß ist:

$$(ABC)\cdot(BAC) = 1. \tag{1}$$

Dagegen führt die zyklische Vertauschung der drei Punkte auf drei Schnittverhältnisse, die sich ebenfalls zyklisch durch die Verhältnisse von drei Strecken darstellen lassen. Es ist nämlich:

$$(ACB) = AB:BC,\quad (BAC) = BC:CA,\quad (CBA) = CA:AB.$$

Wir sehen als erste Teilung die an, für die der Punkt A teilender Punkt ist, setzen die Teilung durch B an die zweite, die Teilung durch C an die dritte Stelle, bezeichnen BC durch a, CA durch b, AB durch c; alsdann nehmen die Gleichungen in veränderter Folge die Form an:

$$(CBA) = b : c,\quad (ACB) = c : a,\quad (BAC) = a : b.$$

Auf der rechten Seite wird eine zyklische Vertauschung der Strecken a, b, c vorgenommen, während die linken Seiten die Schnittverhältnisse in der angegebenen Folge, aber die einzelnen Buchstaben regelmäßig in der zur Folge ABC entgegengesetzten Folge bringen. Dabei ist unter Beachtung der Zeichen: $a + b + c = 0$.

Jetzt ersetzen wir die Strecken a, b, c durch drei Strecken m_1, m_2, m_3, von denen eine willkürlich ist. Es soll m_1 der Strecke a

oder BC, also der Strecke entsprechen, die den Punkt A nicht enthält usw. Wir wählen etwa m_1 willkürlich und bestimmen m_2 und m_3 durch die Gleichungen:

$$a : b = m_1 : m_2, \quad c : a = m_3 : m_1.$$

Dann ist nach § 17, (S. 314) auch $b : c = m_2 : m_3$.

Somit bestehen jetzt die Gleichungen:

(2) $$(CBA) = m_2 : m_3, \quad (ACB) = m_3 : m_1, \quad (BAC) = m_1 : m_2.$$

Zugleich ist noch:

(3) $$m_1 + m_2 + m_3 = 0.$$

Sind umgekehrt drei Strecken m_1, m_2, m_3 so gewählt, daß sie der Gleichung (3) genügen, so kann man irgend zwei Punkten A und B einen dritten Punkt C in der Geraden AB so zuordnen, daß die Beziehungen (2) gelten.

In ähnlicher Weise, wie nach den Gleichungen (2) drei Strecken m_1, m_2, m_3 zur Darstellung dreier Schnittverhältnisse dienen, können, abgesehen vom Vorzeichen, auch drei Strecken zur Darstellung von drei Schnittverhältnissen dienen, die in den Sätzen des Menelaus und des Ceva vorkommen. In beiden Sätzen lassen wir die drei Seiten eines Dreiecks ABC durch drei Punkte D, E, F geteilt werden, und zwar BC durch D, CA durch E und AB durch F; die drei Teilpunkte lassen wir im Satze des Menelaus einer geraden Linie angehören, während der Satz des Ceva verlangt, daß die nach ihnen gezogenen Ecktransversalen durch einen Punkt O hindurchgehen. Alsdann sollen sich drei Strecken m_1, m_2, m_3 so bestimmen lassen, daß, abgesehen vom Vorzeichen, die Gleichungen bestehen:

(4) $$(BCD) = m_2 : m_3, \quad (CAE) = m_3 : m_1, \quad (ABF) = m_1 : m_2.$$

Diese drei Gleichungen fassen wir in dem Ausspruch zusammen: Die Schnittverhältnisse der drei Seiten stellen sich zyklisch durch die Verhältnisse der drei Strecken dar; oder auch: Die Seiten des Dreiecks werden zyklisch nach drei Strecken geteilt.

Für den Satz des Menelaus empfehlen wir folgenden Beweis. Wir fällen von den Ecken des Dreiecks auf die Gerade DEF die Senkrechten AA_1, BB_1 und CC_1. Dann ist dem absoluten Betrage nach:

$$(BCD) = BB_1 : CC_1, \ (CAE) = CC_1 : AA_1, \ (ABF) = AA_1 : BB_1.$$

Die Schnittverhältnisse werden hiernach zyklisch durch die drei Senkrechten dargestellt. Wir können aber auch von drei Strecken m_1, m_2, m_3 eine willkürlich wählen und die beiden andern durch die Gleichungen bestimmen:

(5) $$m_1 : m_2 : m_3 = AA_1 : BB_1 : CC_1.$$

Dann werden wir auf die Gleichungen (4) geführt.

Um die Vorzeichen der Schnittverhältnisse zu finden, unterscheiden wir die beiden Halbebenen, in die die Ebene durch die Gerade DEF zerlegt wird, durch das Vorzeichen, und verlangen, daß jede einzelne Senkrechte das positive oder das negative Vorzeichen erhält, je nachdem sie der einen oder der andern Halbebene angehört. Zudem soll m_1 mit AA_1, m_2 mit BB_1 und m_3 mit CC_1 im Vorzeichen übereinstimmen. Dann wird der Satz des Menelaus durch die Formeln dargestellt:

(6) $$(BCD) = -m_2 : m_3,\ (CAE) = -m_3 : m_1,\ (ABF) = -m_1 : m_2.$$

Den Cevaschen Satz im direkten Anschluß an die Definition der Schnittverhältnisse zu beweisen, macht einige Schwierigkeit. Wir möchten uns deshalb an den Beweis anschließen, den die meisten Lehrbücher bringen, halten es aber für notwendig, daß auch den Schülern das Prinzip dieses Beweises zum vollen Bewußtsein gebracht wird. Dies kommt darauf hinaus, den Satz des Menelaus auf die beiden Dreiecke anzuwenden, in die das Dreieck ABC (mindestens im uneigentlichen Sinne) durch eine Ecktransversale zerlegt wird. Wir wählen etwa die Dreiecke ABD und CAD. Da es keinen Zweck hat, den Satz des Menelaus auf eine Ecktransversale eines Dreiecks anzuwenden, so betrachten wir die Schnittverhältnisse, nach denen die Seiten des Dreiecks ABD durch die Transversale COF und die Seiten des Dreiecks CAD durch die Transversale BOE geteilt werden. Nach den Gleichungen (6) gibt es sechs Strecken m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, für die die sechs Gleichungen bestehen:

$$(ABF) = -m_2 : m_3,\quad (BDC) = -m_3 : m_1,\quad (DAO) = -m_1 : m_2,$$
$$(DCB) = -n_2 : n_3,\quad (CAE) = -n_3 : n_1,\quad (ADO) = -n_1 : n_2.$$

Die Schnittverhältnisse (DAO) und (ADO) unterscheiden sich nur dadurch, daß die Endpunkte der geteilten Strecke miteinander vertauscht sind. Nun können wir eine der drei Strecken n_1, n_2, n_3 willkürlich wählen. Setzen wir $n_1 = m_2$, so wird $n_2 = m_1$.

Die Schnittverhältnisse (BDC) und (DCB) benutzen dieselben drei Punkte. Beachten wir noch, daß $m_1 = n_2$ ist, so geht aus den Werten dieser beiden Schnittverhältnisse hervor, daß $(BCD) = m_3 : n_3$ ist. Setzen wir also: $p_1 = -m_2$, $p_2 = m_3$, $p_3 = n_3$, so erhalten wir die Beziehungen:

(7) $$(BCD) = p_2 : p_3,\quad (CAE) = p_3 : p_1,\quad (ABF) = p_1 : p_2.$$

Für die Umkehrungen dieser beiden Sätze ist es besonders wichtig, die Vorzeichen der Schnittverhältnisse oder, was dasselbe ist, die äußere und die innere Teilung der Dreiecksseiten zu beachten. Solange man nur die absoluten Beträge der Schnittverhältnisse in Betracht zieht, besteht zwischen den beiden Sätzen kein Unterschied. Je nachdem aber die Anzahl der negativen Schnittverhältnisse ungerade oder gerade ist, liegen die Teilpunkte in gerader Linie oder sie liefern durch ihre Verbindung mit den Gegenecken drei Gerade, die durch einen Punkt gehen.

Die Beweise werden, wie wir schon in § 10, 9 (S. 217) dargelegt haben, beidemal am besten auf das Identitätsprinzip zurückgeführt. Nachdem das Dreieck ABC und die Punkte D und E gewählt sind, macht jeder der beiden Sätze es in doppelter Weise möglich, den Punkt F eindeutig zu bestimmen. Durch diesen Gedanken ist die Umkehrung beidemal sofort gegeben.

Durch die Art, wie wir die beiden Sätze vorhin ausgesprochen haben, glauben wir ihren Inhalt möglichst anschaulich zu machen. Daneben verdient beachtet zu werden, daß das Produkt der Schnittverhältnisse, nach denen die Seiten des Dreiecks geteilt werden, beim Satze des Menelaus -1 und beim Satze des Ceva gleich $+1$ ist. Dagegen können wir es nicht billigen, daß manche Lehrbücher die Produkte der auf den Seiten des Dreiecks erzeugten, nicht zusammenstoßenden Abschnitte einander gleich setzen. Um diese Aussage zu verstehen, muß man die einzelnen Abschnitte durch dieselbe Längeneinheit messen und die Maßzahlen nach der angegebenen Regel miteinander multiplizieren. Man kann sich daher nicht, wie bei den vorher angegebenen Formen der Sätze, mit drei Verhältnissen begnügen, sondern muß sechs Verhältnisse in Betracht ziehen, was weit lästiger ist. Außerdem kommt ein ganz fremdes Element in die Sätze hinein, nämlich die gewählte Längeneinheit. Der Schüler aber wird durch diese Form auf den Gedanken gebracht, die Längeneinheit sei durch die Natur gegeben; er unterscheidet nicht genug zwischen den Strecken und ihren Maßzahlen. Die Beweise stützen sich in Wirklichkeit auf Verhältnisse; dennoch rechnet man mit den Strecken selbst. Bei den Umkehrungen muß man aber auf die Schnittverhältnisse zurückgreifen, die man bis dahin ganz außer acht gelassen hat.

Der Satz des Menelaus wird zuweilen in einer Form bewiesen, die wir nicht billigen können. Indem man durch eine Ecke des Dreiecks die Parallele zur Gegenseite zieht, treten freilich zwei Paare ähnlicher Dreiecke auf. Aber die Figur bietet keinen Anhalt für die Wahl der Seiten, die zueinander in Beziehung gesetzt werden müssen. Die Auswahl der Seiten wird vielmehr nur durch die Rücksicht auf die zu erhärtende Behauptung bestimmt. Das ist kein eigentlicher Beweis, sondern nur eine Verifikation. Gründet man aber den Beweis auf ein einheitliches Prinzip, so erleichtert man nicht nur das

Verständnis und das Behalten, sondern trägt auch zur mathematischen Durchbildung bei.

Anders liegt die Sache beim Cevaschen Satze. Wenn man hier, wie es Heilermann in seinem Lehrbuch der Geometrie tut, direkt von der Definition der Schnittverhältnisse ausgeht, so kommt man ohne lästige Rechnungen nicht aus. Eine Erleichterung erreicht man dadurch, daß man durch den Punkt O die Parallelen zu den Dreiecksseiten zieht; aber auch hierdurch wird der Beweis nicht einfach genug. Endlich kann man die Theorie der harmonischen Strahlen und den Satz vom vollständigen Vierseit benutzen, um den Satz des Ceva auf den des Menelaus zurückzuführen. Man sucht auf jeder Dreiecksseite den vierten harmonischen Punkt zu ihren Endpunkten und dem Schnittpunkte mit einer Ecktransversale und zeigt, daß die drei so gefundenen Punkte in gerader Linie liegen. Die Schnittverhältnisse der Seiten werden durch die drei Senkrechten dargestellt, die man von den Endpunkten auf die neue Gerade fällt. Jedoch können wir auch dies Verfahren nicht empfehlen.

Von den Umkehrungen der beiden Sätze werden in den Lehrbüchern viele Anwendungen gemacht. Manche liegen in der Tat so nahe, daß sie volle Empfehlung verdienen. Vor allem ist es angebracht, die Schnittverhältnisse zu beachten, nach denen die Seiten des Dreiecks durch die Halbierungslinien der Winkel und der Außenwinkel geteilt werden. Die Rolle der oben benutzten Strecken m_1, m_2, m_3 übernehmen hierbei jedesmal die Seiten des Dreiecks. Die Figur enthält vier menelaische Linien und vier Cevasche Punkte.

Will man uneigentliche Punkte hinzunehmen, so darf man die drei Strecken, die zur Darstellung der Schnittverhältnisse dienen, einander (absolut) gleich setzen. Die Umkehrung des Cevaschen Satzes führt dann auf den Satz vom Schwerpunkt und auf einen einfachen Satz über das Parallelogramm. Auch hier treten vier Cevasche Punkte und vier menelaische Linien auf; eine der letzten ist die unendlichferne Gerade.

Auch kann man darauf hinweisen, daß die beiden von den Scheiteln der spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ausgehenden Hilfslinien, die Euklid beim Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes benutzt, sich auf der Hypotenusenhöhe schneiden. Die drei Strecken, durch die in diesem Falle die Schnittverhältnisse sich darstellen lassen, sind die Höhe und die durch sie auf der Hypotenuse erzeugten Abschnitte.

Ebenso kann der vielfach nach Simson benannte Satz: Die Fußpunkte der Senkrechten, die man auf die Seiten eines Dreiecks von einem beliebigen Punkte seines Umkreises fällen kann, liegen in gerader Linie, leicht auf die Umkehrung des menelaischen Lehrsatzes zurückgeführt werden.

Als passende Übung kann auch wohl der Beweis des Gaußschen Satzes angesehen werden: Die Mitten der Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in gerader Linie. In der Bezeichnung schließen wir uns an § 21, 3 an. Zudem nennen wir D die Mitte von AA_1, E die von BB_1 und F die von CC_1, ferner A_2 die Mitte von B_1C_1, B_2 die von C_1A_1 und C_2 die von A_1B_1. Der Punkt D liegt auch auf der Seite B_2C_2 und teilt sie nach demselben Verhältnisse, nach welchem die Strecke B_1C_1 in A geschnitten wird. Entsprechendes gilt von den Punkten E und F. Da aber die Punkte A, B, C in gerader Linie liegen und demnach die Verhältnisse, nach denen die Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ in ihnen geteilt werden, in der durch den menelaischen Satz geforderten Beziehung stehen, geht die Behauptung aus den Schnittverhältnissen hervor, nach denen die Seiten des Dreiecks $A_2B_2C_2$ in den Punkten D, E, F geteilt werden.

Dagegen erfordert es zu große Rechnungen, wenn man den Satz, daß die Höhen eines Dreiecks durch einen Punkt gehen, auf die Umkehrung des Cevaschen Satzes zurückführen will.

Ebenso unterliegt es einigen Bedenken, den Pascalschen Satz unter Benutzung des menelaischen Lehrsatzes, wie vielfach geschieht, für den Kreis zu beweisen. Ohne Zweifel hat der Pascalsche Satz für die Kegelschnitte geradezu eine fundamentale Bedeutung. Er stellt in der einfachsten und natürlichsten Form die Bedingung dar, unter der sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Zudem ermöglicht er es, sobald ein Kegelschnitt durch fünf Punkte bestimmt ist, beliebig viele andere Punkte desselben durch Ziehen von geraden Linien zu finden. Dagegen ist der Kreis bereits durch drei Punkte bestimmt. Demgemäß ist die Frage berechtigt, unter welcher Bedingung vier Punkte auf einem Kreise liegen, und diese wird durch den Satz vom Sehnenviereck beantwortet. Sollen sechs Punkte auf einem Kreise liegen, so müssen zwischen ihnen mancherlei Beziehungen bestehen, von denen der Pascalsche Satz nur eine einzige darstellt. Deshalb hat der Satz an sich für den Kreis nur geringe Bedeutung. Der Beweis, der sich auf den menelaischen Satz stützt, ist künstlich und außerdem ziemlich schwer. Man kann daher die Frage aufwerfen, ob es nicht besser ist, die Kraft der Schüler auf Probleme verwenden zu lassen, die mathematische Bildung in höherem Maße vermitteln.

Andererseits dürfen wir aber auch nicht vergessen, daß die im Pascalschen Satz hervortretende Beziehung von der dem Sehnenviereck zukommenden Eigenschaft wesentlich verschieden ist. Das eine Mal kommt es nur darauf an, daß drei Punkte in gerader Linie liegen; im anderen Falle soll die Summe zweier Winkel gleich zwei Rechten sein. Ohne Zweifel ist man berechtigt, die Frage zu stellen: Wieviel Punkte eines Kreises müssen gegeben sein, damit man beliebig viele weitere Punkte des Kreises durch bloßes Ziehen von geraden Linien erhalten kann? Diese Frage kann aber erst durch den Pascalschen Satz beantwortet werden. Zudem kann man jeden Kegelschnitt durch Projizieren aus dem Kreise erhalten. Nachdem man den Pascalschen Satz, wenn auch auf künstlichem Wege, für den Kreis hergeleitet hat, kann man ihn leicht auf beliebige Kegelschnitte übertragen. Die Schüler werden dann mit einer höchst interessanten Figur bekannt gemacht. Sie lernen einen der wichtigsten Sätze der Kegelschnittslehre kennen, den man sonst, namentlich am Gymnasium, kaum durchnehmen kann, und werden in den Stand gesetzt, ihn für zahlreiche Anwendungen zu benutzen.

Beschränkt man den Pascalschen Satz aber auf den Kreis, ohne durch passende Konstruktionen mit seinem Wesen vertraut zu machen, so hat er im Lehrgebäude keine Berechtigung.

3. **Das Schnittverhältnis für Winkel.** Wenn ein Winkel (ab) mit den Schenkeln a und b durch eine Gerade c, die durch seinen Scheitel geht, in die beiden Winkel (ac) und (cb) zerlegt wird, so definieren wir das Schnittverhältnis (abc) als den Quotienten aus den Sinus der Teile, setzen demnach: $(abc) = \sin(ac) : \sin(cb)$. Wenn der Halbstrahl c im Felde des Winkels (ab) liegt und somit den Winkel im eigentlichen Sinne teilt, so erhält das Schnittverhältnis das positive Vorzeichen. Ist das nicht der Fall, so kann man im Anschluß an § 4, 8 (S. 72) verlangen, daß alle Winkel durch eine in einem festen Sinne erfolgende Drehung erzeugt werden. Alsdann findet man, daß entgegengesetzte Halbstrahlen einen Winkel nach demselben Schnittverhältnisse teilen. Wir dürfen demnach von einer teilenden Geraden sprechen und finden ein positives oder negatives Vorzeichen, je nachdem die teilende Gerade im Felde des Winkels und seines Scheitelwinkels oder in den Feldern der Nebenwinkel verläuft.

Wir können das Schnittverhältnis eines Winkels aber auch rein planimetrisch behandeln. Zu dem Zwecke erinnern wir uns daran, daß nach der Schlußbemerkung von Nr. 1 das Schnittverhältnis einer Strecke, abgesehen vom Vorzeichen, gleich dem Verhältnis der Senkrechten ist, die von den Endpunkten der Strecke auf eine beliebige durch den Teilpunkt gelegte Gerade gefällt werden können. Dementsprechend setzen wir als den absoluten Betrag des Schnittverhältnisses (abc) das Verhältnis der Abstände eines beliebigen Punktes der teilenden Geraden c von den Schenkeln a und b des Winkels (ab) an; diesem Verhältnisse geben wir das positive oder das negative Vorzeichen, je nachdem die teilende Gerade durch das Winkelfeld hindurchgeht oder nicht.

Wenn die Halbstrahlen a, b, c vom Punkte O ausgehen und in a ein Punkt A, in b ein Punkt B und in c ein Punkt C liegt, so wollen wir statt (abc) auch $(O : ABC)$ schreiben.

Wir haben jetzt nachzuweisen, daß ein gegebener Winkel nur durch eine einzige Gerade nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse geteilt wird. Dieser Nachweis ergibt sich aus folgender Konstruktion. Auf dem Schenkel a des Winkels (ab) tragen wir vom Scheitel O aus die Strecke OA gleich der Längeneinheit ab. Durch A ziehen wir die Parallele zu b und nennen AX den im Winkelfelde (ab) gelegenen, AX' den zu AX entgegengesetzten Halbstrahl. Eine beliebige durch den Scheitel O gelegte Gerade c möge die Parallele in C treffen. Wird jetzt die Maßzahl der Strecke AC mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen, je nachdem der Punkt C dem Halbstrahl AX oder dem Halbstrahl AX' angehört, so stellt sie das Schnittverhältnis (abc) dar.

Offenbar stimmt das Schnittverhältnis (abc) mit der Maßzahl von AC im Zeichen überein. Fällen wir von C die Senkrechte CC_1 auf a und die Senkrechte CC_2 auf b und nennen wir C' den Punkt, in dem OB von der durch C zu OA gezogenen Parallelen getroffen wird, so ist dem absoluten Betrage nach: $(abc) = CC_1 : CC_2 = CA : CC' = CA : AO$, oder, da OA gleich der Längeneinheit ist, gleich der Maßzahl der Strecke AC.

Hält man bei der angebenen Konstruktion die Halbstrahlen a und b fest, läßt aber die Gerade c sich beliebig um den Scheitel O drehen, so nimmt das Schnittverhältnis (abc) alle reellen Werte, und jeden nur einmal an. Aus der Konstruktion geht hervor, daß zu jedem Strahle c des Büschels (O) ein einziges Schnittverhältnis (abc) und umgekehrt zu jedem Werte des Schnittverhältnisses ein einziger Strahl c gehört. Zugleich tritt die gegenseitige Abhängigkeit deutlich hervor.

Drei Halbstrahlen, die von einem Punkte ausgehen, bestimmen sechs Schnittverhältnisse, zwischen denen dieselben Beziehungen bestehen wie zwischen den sechs Schnittverhältnissen, die durch drei Punkte einer Geraden bestimmt werden. Zunächst ist offenbar: $(abc) \cdot (bac) = 1$. Um die Beziehung (2) auf Winkel zu übertragen, beschreiben wir um den Punkt O einen Kreis mit einem beliebigen Radius. Dieser treffe den Halbstrahl a in A, den Halbstrahl b in B und den Halbstrahl c in C. Von A fällen wir die Senkrechten AB_1 auf b und AC_1 auf c, ebenso von B die Senkrechten BC_2 und BA_2 auf c und a, von C die Senkrechten CA_3 und CB_3 auf a und b. Nun ist ohne Rücksicht auf die Zeichen:

$$(bca) = AB_1 : AC_1, \quad (cab) = BC_2 : BA_2, \quad (abc) = CA_3 : CB_3.$$

Weil aber die Senkrechten paarweise gleich sind, darf man setzen:

$$BC_2 = CB_3 = m_1, \quad CA_3 = AC_1 = m_2, \quad AB_1 = BA_2 = m_3.$$

Daher wird:

$$(bca) = m_3 : m_2, \quad (cab) = m_1 : m_3, \quad (abc) = m_2 : m_1.$$

Die Darstellung wird aber weit übersichtlicher, wenn man die reziproken Werte dieser drei Schnittverhältnisse oder mit anderen Worten die Schnittverhältnisse (cba), (acb) und (bac) betrachtet. Hierfür erhält man die Werte:

$$(cba) = m_2 : m_3, \quad (acb) = m_3 : m_1, \quad (bac) = m_1 : m_2.$$

Diese drei Schnittverhältnisse können also zyklisch durch die Verhältnisse dreier Strecken dargestellt werden. Ihr Produkt ist $+1$.

Jetzt kann man zu den Sätzen des Menelaus und des Ceva die reziproken (dualen) Sätze bilden. Der erste lautet: Durch drei Ecktransversalen eines Dreiecks, die durch einen Punkt gehen, werden die Winkel nach Schnittverhältnissen geteilt, die sich zyklisch durch drei Strecken darstellen lassen und von denen entweder keines oder zwei negativ sind.

Dem Satz des Ceva entspricht der folgende: Verbindet man jeden der drei Punkte, in denen die Seiten eines Dreiecks von einer Geraden getroffen werden, mit der Gegenecke, so teilen diese Linien die Winkel nach Schnittverhältnissen, die sich dem absoluten Betrage nach zyklisch durch drei Strecken darstellen lassen; hierbei ist die Anzahl der negativen Schnittverhältnisse ungerade.

Um den ersten Satz zu beweisen, braucht man nur vom Schnittpunkte die Senkrechten auf die drei Seiten zu fällen; dann stellt sich jedes Schnittverhältnis durch zwei von diesen Senkrechten dar.

Der Beweis des zweiten Satzes ergibt sich aus dem des Cevaschen Satzes durch duale Übertragung. Man wendet daher den vorhergehenden Satz auf die Dreiecke ABD und CAD an, indem man im ersten die Ecktransversalen zum Punkte E, im zweiten zum Punkte F zieht. Indem man die Vorzeichen unberücksichtigt läßt, kann man die Gleichungen aufstellen:

$$(A:BDE) = m_2 : m_3, \quad (B:DAE) = m_3 : m_1, \quad (D:ABE) = m_1 : m_2,$$
$$(C:ADF) = n_2 : n_3, \quad (A:DCF) = n_3 : n_1, \quad (D:CAF) = n_1 : n_2.$$

Da die Punkte B, C, D in gerader Linie liegen, haben die Schnittverhältnisse $(D:ABE)$ und $(D:CAF)$ reziproke Werte. Man darf daher $n_1 = m_2$, $n_2 = m_1$ wählen. Weil aber $(A:DCF) = (A:DEF)$, $(A:BDE) = (A:FDE)$ ist, so ergibt sich der absolute Betrag von $(A:FED)$ oder $(A:BCD)$ gleich $n_3 : m_3$. Es folgt also:

$$(A:BCD) = n_3 : m_3, \quad (B:CAE) = m_3 : m_1, \quad (C:ABF) = m_1 : n_3.$$

Um die Vorzeichen zu bestimmen, legen wir drei Strecken p_1, p_2, p_3 passende Vorzeichen bei, alsdann dürfen wir setzen:

$$(A:BCD) = -p_2 : p_3, \quad (B:CAE) = -p_3 : p_1, \quad (C:ABF) = -p_1 : p_2.$$

Wie weit der Lehrer glaubt, die Schnittverhältnisse von Winkeln in den Unterricht aufnehmen zu sollen, möchten wir seinem eigenen Ermessen überlassen. Nur eine Bemerkung sei gestattet: Wer seine Schüler mit den Doppelverhältnissen bekannt machen will, tut gut, auch den Begriff des Schnittverhältnisses von Winkeln klarzulegen und etwa durch die beiden mitgeteilten Sätze zu erläutern.

4. **Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden.** Wenn die Strecke AB erst im Punkte C und dann im Punkte D geteilt wird, so nennt man den Quotienten aus den Schnittverhältnissen (ABC) und (ABD) das Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, C, D und bezeichnet es kurz durch das Zeichen $(ABCD)$. Hiernach ist:

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}. \tag{7}$$

Nachdem die Punkte A, B, C fest angenommen sind, nimmt, wie aus dieser Gleichung hervorgeht, das Doppelverhältnis $(ABCD)$ in jedem Punkte D einen festen Wert an. Aber auch umgekehrt kann nach fester Wahl der Punkte A, B, C, von denen nicht zwei zusammenfallen sollen, zu jedem Werte des Doppelverhältnisses nur ein einziger Punkt D gehören. Da das Schnittverhältnis (ABC) bei der gemachten Annahme einen endlichen, von null verschiedenen Wert hat, geht aus einem vorgeschriebenen Werte von $(ABCD)$ ein einziger Wert des Schnittverhältnisses (ABD) und somit ein einziger Punkt D hervor.

Das ersieht man noch deutlicher an folgender Konstruktion. Man errichtet in B die Senkrechte auf AB und trägt auf ihr die Strecke BE gleich der Längeneinheit ab. Die Gerade CE möge die in A auf AB errichtete Senkrechte im Punkte M schneiden. Wird jetzt die Gerade BE von der Geraden MD im Punkte D' getroffen, so stellt die Strecke BD' das Doppelverhältnis $(ABCD)$ dar, wenn man nur noch der Maßzahl der Strecke das positive oder das negative Vorzeichen beilegt, je nachdem der Punkt D' auf dem Halbstrahl BE oder auf dem entgegengesetzten Halbstrahl liegt. Es ist nämlich:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AM}{BE} : \frac{AM}{BD'} = \frac{BD'}{AM} : \frac{BE}{AM} = \frac{BD'}{BE}$$

oder gleich der Maßzahl von BD'.

5. **Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels.** Wenn vier Halbstrahlen a, b, c, d von einem Punkte O ausgehen, so wird der Winkel (ab) sowohl durch c als auch durch d geteilt; den Quotienten aus den Schnittverhältnissen (abc) und (abd) bezeichnet man als das Doppelverhältnis der Halbstrahlen a, b, c, d. Hiernach können wir setzen:

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}.$$

Wir können aber auch von einem beliebigen Punkte C von c die Senkrechten CA_1 und CB_1 auf a und b, und von einem beliebigen Punkte D von d die Senkrechten DA_2 und DB_2 auf a und b fällen und das Doppelverhältnis $(abcd)$ durch die Gleichung definieren:

$$(8) \qquad (abcd) = \frac{CA_1}{CB_1} : \frac{DA_2}{DB_2}.$$

Dabei müssen wir aber dem Verhältnis $CA_1 : CB_1$ das positive oder das negative Vorzeichen beilegen, je nachdem die Gerade OC durch das Winkelfeld (ab) hindurchgeht oder nicht; eine entsprechende Festsetzung müssen wir für das Verhältnis $DA_2 : DB_2$ treffen.

Das Schnittverhältnis (abc) bleibt ungeändert, wenn der Halbstrahl c durch den entgegengesetzten ersetzt wird. Wenn man aber statt des Halbstrahls a den entgegengesetzten Halbstrahl wählt, so wechseln die Schnittverhältnisse (abc) und (abd) beide ihr Vorzeichen, ohne ihren absoluten Wert zu ändern. Demnach dürfen wir jeden der vier Halbstrahlen a, b, c, d durch den entgegengesetzten Halbstrahl ersetzen, ohne im Werte des Doppelverhältnisses eine Änderung herbeizuführen. Aus diesem Grunde sprechen wir vom Doppelverhältnisse der vier Strahlen a, b, c, d.

Der Wert des Doppelverhältnisses $(abcd)$ läßt sich in folgender Weise zur Anschauung bringen. Man gebe einer Parallelen zu a eine solche Lage, daß die auf ihr durch die Strahlen b und c abgeschnittene Strecke BC gleich der Längeneinheit wird. Wenn jetzt der Strahl d die Gerade BC in D trifft, so stellt die Strecke BD das Doppelverhältnis $(abcd)$ dar. Dabei muß die Maßzahl von BD das positive oder das negative Vorzeichen erhalten, je nachdem der Punkt D im Halbstrahl BC oder im entgegengesetzten Halbstrahl liegt.

Um das zu beweisen, fällen wir vom Punkte C die Senkrechten CA_1 und CB_1 auf a und b, und von D die Senkrechten DA_2 und DB_2 auf a und b. Alsdann ist:

$$(abcd) = \frac{CA_1}{CB_1} : \frac{DA_2}{DB_2},$$

oder, da $CA_1 = DA_2$ ist:

$$(abcd) = \frac{DB_2}{CB_1} = \frac{DB}{CB} = \frac{BD}{BC}$$

oder gleich der Maßzahl von BD.

Da die Längeneinheit willkürlich ist, so können wir die Gerade BC durch eine beliebige Parallele zu a ersetzen. Dann wird immer: $(abcd) = BD : BC = -(DCB)$. Das Doppelverhältnis der vier Strahlen a, b, c, d ist also bis auf das Vorzeichen gleich dem Schnittverhältnis der drei Punkte, in denen eine beliebige Parallele zu a von den Strahlen d, c, b getroffen wird.

6. **Der Fundamentalsatz über Doppelverhältnisse.** Wenn ein Winkel (ab) gegeben ist, so können wir immer auf dem Schenkel a einen Punkt A und auf dem Schenkel b einen Punkt B so wählen, daß die Strecke AB eine vorgeschriebene Länge hat. Aber auch drei beliebige Strahlen a, b, c eines Büschels (O) können wir immer auf unendlich viele Arten durch eine Gerade g so durchschneiden, daß das durch die Schnittpunkte mit den Strahlen bestimmte Schnittverhältnis einen vorgeschriebenen endlichen, von null verschiedenen Wert $m:n$ hat. Wenn zunächst das Verhältnis $m:n$ von -1 verschieden ist, so wählen wir in c einen Punkt C ganz beliebig, tragen auf diesem Strahle eine Strecke CG so ab, daß, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, die Proportion besteht: $CO : CG = m : n$. Wir bezeichnen mit A den Schnittpunkt von a mit der durch G zu b gezogenen Parallelen und mit B den Schnittpunkt von AC und b. Alsdann ist dem abso-

luten Betrage nach: $AC:CB = GC:BO = m:n$. Nun kann man die Strecke CG nach zwei verschiedenen Richtungen abtragen. Wenn das Verhältnis $m:n$ von -1 verschieden ist, so fällt keine der beiden Lagen, die G hierbei erhalten kann, mit O zusammen. Wir können somit in diesem Falle durch C zwei Gerade so legen, daß das auf ihnen durch ihre Schnittpunkte mit a und mit b abgegrenzte Stück in C für die eine nach dem Verhältnisse $m:n$ und für die andere nach dem Verhältnisse $-m:n$ geteilt wird.

Das Schnittverhältnis -1 wird auf jeder Strecke erhalten, die auf einer Parallelen zu c durch die Strahlen a und b abgeschnitten wird.

Während hiernach das Schnittverhältnis dreier Strahlen eines Büschels und das Schnittverhältnis der drei Punkte, in denen sie von einer Transversalen geschnitten werden, ganz verschieden sein können, gilt der fundamentale Satz:

Das Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels ist gleich dem Doppelverhältnisse der vier Punkte, in denen sie von einer beliebigen Transversalen geschnitten werden.

Es seien a, b, c, d vier durch einen Punkt O gehende Strahlen; eine fünfte Gerade, die nicht durch O geht, treffe den Strahl a in A, b in B, c in C und d in D. Dann behauptet unser Satz, daß $(abcd) = (ABCD)$ ist.

Den Beweis können wir auf die Konstruktionen gründen, die wir in den beiden letzten Nummern durchgeführt haben. Nur beachten wir, daß es nicht nötig ist, die Hilfslinie, wie wir in Nr. 4 getan haben, als senkrecht zu der gegebenen Geraden vorauszusetzen. Dementsprechend ziehen wir durch B die Parallele zu a; diese treffe den Strahl c in C', den Strahl d in D'. Alsdann ist, ähnlich wie in Nr. 4:

$$(ABCD) = BD':BC',$$

und nach Nr. 5:

$$(abcd) = BD':BC', \text{ also } (ABCD) = (abcd).$$

Der Beweis kommt darauf hinaus, statt der beliebigen Transversalen zuerst eine Parallele zum Strahle a zu nehmen und hierfür die Übereinstimmung der Doppelverhältnisse zu beweisen. Hierdurch wird eine Erleichterung herbeigeführt, da bei einer solchen Wahl der Transversalen das Doppelverhältnis in ein Schnittverhältnis übergeht. Wir können den Beweis aber auch unmittelbar an die Definition der Doppelverhältnisse anschließen, indem wir zuerst, was sehr leicht ist, zeigen, daß die Doppelverhältnisse im Vorzeichen übereinstimmen. Dann fällen wir von C und von D die Senkrechten auf a und auf b; CA_1 und DA_2 mögen auf a, CB_1 und DB_2 auf b senkrecht stehen. Nun beachten wir, daß nach § 17 ist:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{CB}, \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AD}{CB} \cdot \frac{CB}{DB}.$$

Hiernach ist:

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\left(\frac{AC}{AD}\cdot\frac{AD}{CB}\right):\left(\frac{AD}{CB}\cdot\frac{CB}{DB}\right).$$

Hier treten nur Verhältnisse, also Zahlen auf, mit denen wir in bekannter Weise rechnen können. Wir dürfen somit den gemeinsamen Faktor auslassen und finden, daß ist:

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{AD}:\frac{CB}{DB}.$$

Jetzt ist dem absoluten Betrage nach:

$$(ABCD)=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{AD}:\frac{CB}{DB}=\frac{CA_1}{DA_2}:\frac{CB_1}{DB_2}$$

$$=\frac{CA_1}{CB_1}:\frac{DA_2}{DB_2}=(abcd).$$

7. **Anwendungen des Satzes über Doppelverhältnisse.** Der soeben bewiesene Satz war bereits den Alten bekannt; er wird schon von Pappus erwähnt, und zwar in einer Weise, die darauf hindeutet, daß er ihn nur von anderen übernommen habe. Indessen wurde der Satz seinem wahren Werte nach erst in der neuesten Zeit gewürdigt. Es ist unmöglich, die vielen Anwendungen auch nur anzudeuten, die man von ihm macht; wir erwähnen nur, daß er die Grundlage einer neuen Untersuchungsmethode bildet, die, durch Poncelet und Steiner begründet, als neuere synthetische Geometrie bezeichnet wird. Wir wollen versuchen, einen Einblick in diesen Zweig der Geometrie zu ermöglichen, glauben uns aber auf die Ebene beschränken zu sollen.

Die in der Ebene enthaltenen Grundgebilde sind der Punkt und die Gerade. Wir betrachten bald die Gerade für sich, bald die Gesamtheit aller Punkte, die in ihr enthalten sind. Um die erste Auffassung anzudeuten, nennen wir sie einen Strahl; soll sie aber als Träger aller in ihr enthaltenen Punkte aufgefaßt werden, so sprechen wir von einer Punktreihe. Ebenso unterscheiden wir den Punkt für sich von der Gesamtheit der durch ihn gehenden Strahlen (Strahlenbüschel).

Während die Alten, denen die Schule auch fernerhin folgen muß, den Begriff der Kongruenz an die Spitze stellten und daraus die Begriffe der Flächengleichheit und der Ähnlichkeit herleiteten, geht die neuere Geometrie von einer allgemeineren Zuordnung der Gebilde aus. An erster Stelle steht die perspektive Zuordnung. Wir nennen eine Punktreihe und einen Strahlenbüschel perspektiv aufeinander bezogen, wenn jeder Strahl des Strahlenbüschels durch den entsprechenden Punkt der Punktreihe geht. Ebenso heißen zwei Punktreihen einander perspektiv zugeordnet, wenn entsprechende Punkte je auf demselben Strahle eines Strahlenbüschels liegen. Zwei Strahlenbüschel entsprechen einander perspektiv, wenn entsprechende Strahlen durch denselben Punkt einer Punktreihe gehen. Indem man diese Definitionen benutzt, kann der in der vorigen Nummer bewiesene Satz in der Form ausgesprochen werden: In zwei perspektiven Grundgebilden haben irgend vier Elemente des einen dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden Elemente des andern.

Man kann die perspektive Zuordnung mehrmals wiederholen. So sei ein Gebilde $\mathfrak{A}$ perspektiv zu $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ perspektiv zu $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ perspektiv zu $\mathfrak{D}$ usw. Dann werden die Gebilde $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ... im allgemeinen dem Gebilde $\mathfrak{A}$ nicht mehr perspektiv zugeordnet sein, aber immer bleiben die Doppelverhältnisse für entsprechende Quadrupel von Elementen ungeändert. Demnach stellen wir die Definition auf: Zwei Grundgebilde heißen projektiv aufeinander bezogen, wenn irgend vier Elemente des einen dasselbe Doppelverhältnis haben wie die entsprechenden Elemente des andern. Um zwei Grundgebilde erster Stufe einander projektiv zuzuordnen, kann man in jedem drei Elemente beliebig annehmen und diese einander paarweise zuordnen. Um jetzt die projektive Zuordnung durchzuführen, braucht man nur ein drittes Gebilde hinzuzunehmen, das sowohl zu dem ersten als auch zu dem zweiten Gebilde perspektiv ist. Für projektive Punktreihen haben wir diese Konstruktion in § 9, 5 (S. 173, Fig. 16) durchgeführt.

Die projektive Zuordnung ermöglicht es, die Kegelschnitte auf synthetischem Wege zu erzeugen. Man kann von zwei projektiven Strahlenbüscheln ausgehen; dann bilden die Schnittpunkte entsprechender Strahlen in ihrer Gesamtheit einen Kegelschnitt. In gleicher Weise berühren die Geraden, durch die entsprechende Punkte in zwei projektiven Punktreihen miteinander verbunden werden, denselben Kegelschnitt.

Auf die Erzeugung eines Kegelschnitts durch zwei projektive Punktreihen gehen wir etwas näher ein. Es seien S und S' die Scheitel von zwei Strahlenbüscheln. Um sie projektiv aufeinander zu beziehen, wählt man im ersten Strahlenbüschel drei Strahlen a, b, c und im zweiten die Strahlen a', b', c' und ordnet a und a', b und b', c und c' einander zu. Dadurch wird es möglich, jedem Strahle des Büschels (S) einen bestimmten Strahl von (S') zuzuordnen. Der Schnittpunkt stellt einen Punkt des Kegelschnitts dar. Hierbei entspricht der Geraden SS' als einem Strahle von (S) ein bestimmter Strahl von (S'). Da diese beiden sich in S' schneiden, so gehört der Punkt S' dem Kegelschnitt an; ebenso der Punkt S. Weil aber jedem Strahle von (S) ein bestimmter Strahl von (S) entspricht, so liegt in jeder durch S gehenden Geraden noch ein zweiter Punkt des Kegelschnitts und ebenso in jeder Geraden, die durch S' geht.

Wir haben soeben die beiden Strahlenbüschel (S) und (S') einander dadurch projektiv zugeordnet, daß wir den Strahlen a, b, c von (S) der Reihe nach die Strahlen a', b', c' von (S') entsprechen ließen. Hierbei mögen, wenn d, e, f weitere Strahlen von (S) sind, d und d', e und e', f und f' einander entsprechen, wo d', e', f' dem Strahlenbüschel (S') angehören. Alsdann erhalten wir dieselbe projektive Zuordnung der Strahlenbüschel, wenn wir von den Strahlen d, e, f ausgehen und ihnen d', e', f' entsprechen lassen.

Wir denken jetzt den Kegelschnitt auf die angegebene Weise erzeugt, indem wir den Strahlen a, b, c des Büschels (S) die Strahlen a', b', c' des Büschels (S') zuordnen. Die Strahlen a und a' mögen einander in A, b und b' in B, c und c' in C schneiden. Diese drei Punkte bestimmen auch umgekehrt die einander entsprechenden Strahlenpaare. Daher ist der Kegelschnitt durch die Scheitel S und S' der beiden Büschel und die Punkte A, B, C bestimmt. Gleichwie wir aber bei der projektiven Zuordnung der Büschel von drei beliebigen Strahlen des einen Büschels ausgehen können, dürfen wir die Punkte A, B, C durch drei beliebige andere Punkte des Kegelschnitts ersetzen. Wir wollen jetzt nachweisen, daß auch die Punkte S und S' durch zwei beliebige Punkte des Kegelschnitts ersetzt werden können.

Zu dem Ende nehmen wir zu den Punkten S und S' vier weitere Punkte des Kegelschnitts hinzu. Nach diesen vier Punkten A, B, C, D sollen die Strahlen a, b, c, d des ersten und die Strahlen a', b', c', d' des zweiten Büschels führen. Die Gerade AC möge von b in L und von d in T, die Gerade CD von a' in U und von b' in N geschnitten werden. Nach unserm Fundamentalsatz ist: $(abcd) = (ALCT)$ und $(a'b'c'd') = (UNCD)$, also auch $(ALCT) = (UNCD)$.

Die Geraden AU oder a' und TD oder d mögen einander in M schneiden. Dann sind auch die Doppelverhältnisse $(M:ALCT)$ und $(M:UNCD)$ einander gleich. Da aber die Geraden MA und MU, MT und MD, MC und MC je zusammenfallen, so gilt dasselbe für die Geraden ML und MN, oder die Punkte L, M, N liegen in gerader Linie.

Denken wir uns die Punkte S und S' sowie die Strahlen a, b, c von (S) und a', b', c' von (S') gegeben, so ist auch der Punkt L bestimmt. Lassen wir den Strahl d sich beliebig um S drehen, so entspricht jeder Lage von d ein bestimmter Punkt des Kegelschnitts und somit ein bestimmter Punkt M auf der Geraden a' und ein bestimmter Punkt N auf der Geraden b'. Hierbei liegen aber die Punkte M und N stets auf demselben Strahl des Büschels (L). Bezeichnen wir den Punkt C mit S'' und demnach CA mit a'', CB mit b'', CD mit d'', so entspricht jedem Strahle d von (S) perspektiv ein bestimmter Punkt M auf dem Träger a' als Schnittpunkt von d mit a', dem Punkte M aber perspektiv ein Punkt N auf dem Träger b' als Schnittpunkt des Strahles LN mit b', und endlich dem Punkte N perspektiv im Büschel (S'') der Strahl d'', der ihn mit S'' (oder C) verbindet. Dem Strahl d von (S) ist somit der Strahl d'' von (S'') projektiv zugeordnet.

Hiernach können die Scheitel der beiden erzeugenden Strahlenbüschel beliebig auf dem Kegelschnitt angenommen werden. Daraus geht der Satz hervor:

Der Kegelschnitt ist durch fünf seiner Punkte eindeutig bestimmt.

Zwei dieser Punkte wählt man zu Scheiteln der erzeugenden Strahlenbüschel, durch die drei andern bestimmt man die projektive Zuordnung.

In entsprechender Weise kann man in der betrachteten Figur die sechs Punkte A, C, D, S, B, S' als sechs beliebige Punkte eines Kegelschnitts auffassen. Es ist dann AC die erste, CD die zweite, DS die dritte, SB die vierte, BS' die fünfte und $S'A$ die sechste Seite eines in den Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks. Es schneiden sich aber AC und SB in L, CD und BS' in N, DS und $S'A$ in M. Wir haben somit den Pascalschen Satz gefunden:

Die Gegenseiten eines in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks schneiden sich auf einer Geraden.

Wählen wir ferner die vier Punkte A, B, C, D fest auf einem Kegelschnitte, so sind die Doppelverhältnisse der vier Strahlen, die nach ihnen von den Punkten S und S' gezogen werden, einander gleich. Die Punkte S und S' können aber durch zwei beliebige Punkte des Kegelschnitts ersetzt werden. Das Doppelverhältnis $(S:ABCD)$ der vier Strahlen, die man vom Punkte S nach den Punkten A, B, C, D ziehen kann, ändert sich also nicht, wenn man statt des Punktes S irgendeinen andern Punkt des Kegelschnitts wählt.

Aus diesen beiden Sätzen über die Kegelschnitte ergeben sich ihre weiteren Eigenschaften in ziemlich einfacher Weise. Aus dem Pascalschen Satze leitet man die Polarentheorie her. Um zu den metrischen Eigenschaften zu gelangen, nimmt man die uneigentlichen Gebilde hinzu und führt im Anschluß an die in § 8 gegebenen Entwicklungen die Metrik auf die Projektivität zurück.

Wie wichtig diese Erzeugungsweise der Kegelschnitte ist, haben wir in § 9 an sehr vielen Stellen gesehen. So glaubten wir denn, hier einen kurzen Überblick über die Theorie geben zu sollen, damit auch solche Leser, die vielleicht mit diesen Untersuchungen weniger vertraut sind, in den Stand gesetzt werden, sich die Beweise für die angegebenen Konstruktionen selbst zu bilden.

Vielleicht kann aber die Schule auch noch einen andern Gebrauch von diesem Überblick machen. Infolge der Art und Weise, wie zuweilen der mathematische Unterricht erteilt wird, neigen die Schüler vielfach der Ansicht zu, die höhere Mathematik bezwecke nur, noch kompliziertere Dreieckskonstruktionen und noch schwierigere Gleichungen, als mit ihnen durchgenommen sind, zu bewältigen. Um diesem Irrtum vorzubeugen, kann es nicht schaden, wenn der Lehrer auch einige neue Gebiete andeutet, die von der Wissenschaft bebaut werden müssen. So mag es vielleicht möglich sein, auch auf die besprochene Erzeugungsweise der Kegelschnitte hinzuweisen.

Manche Lehrbücher begnügen sich nicht damit, den Begriff des Doppelverhältnisses darzulegen, sondern halten es für notwendig, ihn durch eine große Zahl von Formeln zu erläutern. Derartige Formeln mochten zu der Zeit berechtigt sein, als die Projektivität zuerst eingeführt wurde; da lag es nahe, sie in möglichst enge Beziehung zur Metrik zu bringen, die bis dahin allein gepflegt war. Jetzt hat aber die Projektivität allgemeine Anerkennung gefunden; sie kann sogar selbständig begründet werden. Demnach braucht die Metrik auch nur soweit herangezogen zu werden, als es für die Erleichterung des Verständnisses von Nutzen ist. Zudem bieten die metrischen Beziehungen dieser Art zu wenig Interesse, als daß sie einen Platz im Lehrgebäude beanspruchen könnten. Wenn wirklich der Lehrer glaubt, genauer auf die Doppelverhältnisse eingehen zu dürfen, so möge er zeigen, daß ihre Theorie für den weiteren Aufbau der Geometrie von weittragender Bedeutung ist. Statt Formeln von zweifelhaftem Werte herzuleiten, versuche er, seine Schüler mit der projektiven Erzeugung der Kegelschnitte bekannt zu machen. Indessen ist der Unterrichtsstoff, den wir in den noch folgenden Abschnitten behandeln werden, bereits so groß, daß sich kaum Zeit finden dürfte, ihn ganz zu bewältigen, geschweige denn, über ihn hinauszugehen. Auch sind gerade diese Teile von großer bildender Kraft und wohl geeignet, den Schüler mit Interesse an der Geometrie zu erfüllen. Daher verdienen sie bei der Auswahl des Lehrstoffes an erster Stelle berücksichtigt zu werden.

Wir möchten aber noch aus einem andern Grunde vor der Aufnahme jener Formeln warnen. Gewiß soll der mathematische Unterricht den Schüler befähigen, die Rechnung für die Geometrie nutzbar zu machen. Diesem Zweck dienen aber bereits die Trigonometrie und die analytische Geometrie, und wir möchten glauben, daß diese beiden Zweige für diesen Zweck vollständig ausreichen. Der geometrische Unterricht darf aber nicht vergessen, daß er für die Pflege der Raumanschauung niemals genug tun kann. Diesem Zwecke sollen die Lehrsätze und die Beweise an erster Stelle dienen. Jene Formeln haben aber nur geringen geometrischen Inhalt, und ihre Herleitung verläßt geradezu das Gebiet der Geometrie und stellt sich ganz auf den Boden der Algebra. Es fehlt daher jeder Grund, sie eingehend zu behandeln. Wer sie aufnimmt, verschwendet die Zeit, die für die Pflege der Raumanschauung nutzbar gemacht werden kann.

Endlich möchten wir die Behandlung derartiger Formeln nahezu für schädlich halten. Ohne Zweifel ist die Streckenrechnung in der Form, die Hilbert in seinen „Grundlagen der Geometrie“ geschaffen hat, ein wichtiges Hilfsmittel für geometrische Untersuchungen. Aber die Schule rechnet nur mit Zahlen. Sie muß daher, wenn sie die Rechnung auf Strecken anwenden will, zuvor eine Längeneinheit einführen und die Maßzahlen der benutzten Strecken, d. h. ihre Verhältnisse zu der gewählten Einheit ermitteln. Dessen wird sich der Schüler zu wenig bewußt. Weil bei den Rechnungen die Strecken ebenso bezeichnet werden wie in rein geometrischen Betrachtungen, achtet er kaum darauf, daß er in dem einen Falle wirklich mit den Strecken, im andern nur mit ihren Maßzahlen für eine beliebig gewählte Längeneinheit operiert. Rechnungen, die ohne wirkliches Verständnis ausgeführt werden, bringen aber eher Schaden als Nutzen.

Damit der Schüler nur mit solchen Begriffen operiert, die von ihm vollständig aufgefaßt sind, muß er angehalten werden, unter dem Quotienten aus zwei Strecken nur ihr Verhältnis und unter dem Produkte zweier Strecken nur das aus ihnen gebildete Rechteck zu verstehen. Mit diesen beiden Begriffen muß der Schüler ihrer hervorragenden Bedeutung wegen vollständig vertraut sein. Auch zieht die Gleichheit zweier Verhältnisse stets die Gleichheit zweier Rechtecke nach sich (§ 17, 16, S. 316). Diese beiden Begriffe bilden daher nicht nur einen wesentlichen Bestandteil der Geometrie, sondern stehen auch zueinander in der engsten Beziehung. Dagegen fehlt schon dem Produkte aus drei Strecken in der Planimetrie die geometrische Bedeutung. Um derartigen Produkten überhaupt einen Sinn beilegen zu können, muß man daher in der Planimetrie, wie schon oben erwähnt wurde, die Längeneinheit, also ein ganz fremdes Element hinzunehmen.

Auch in denjenigen Teilen der Planimetrie, die wir in den folgenden Abschnitten zu besprechen haben, sind die Beweise weit anschaulicher zu gestalten, als gewöhnlich geschieht. Daß dies ganz gut möglich ist, dürfte aus unsern Darlegungen hervorgehen. Um aber den Sinn unserer Mahnung deutlich hervortreten zu lassen, möchten wir hier eine Bemerkung beifügen, die sich an zwei bekannte Formeln anschließen soll.

Die Strecke AB sei in den Punkten C und D harmonisch geteilt und M sei die Mitte der Strecke CD. Alsdann gelten unter Berücksichtigung der Vorzeichen die Formeln:

$$MC^2 = MA \cdot MB,$$

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}.$$

Beide werden meistens durch Rechnung hergeleitet. Indessen geht die erste Beziehung unmittelbar aus einer einfachen Figur hervor (vgl. § 21, 7); es empfiehlt sich aus diesem Grunde, sie anschaulich herzuleiten und geometrisch zu deuten. Die zweite Formel kann man zwar ebenfalls mit einer Figur in Zusammenhang bringen, somit geometrisch auffassen und ohne Rechnung begründen. Leichter ist es aber, die Formel durch eine rechnerische Umformung herzuleiten. Der Unterricht begründet daher am besten diese zweite Formel durch Rechnung, obwohl man, um sie zu deuten, entweder in den Zählern dasselbe Rechteck hinzunehmen oder die Strecken durch ihre Maßzahlen ersetzen muß.

Diese Formel spielt aber in der Optik eine wichtige Rolle. Ist r der Krümmungsradius eines sphärischen Hohlspiegels, sind a und a' die Entfernungen konjugierter Punkte der Achse vom Spiegel, so gilt die Beziehung:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{r},$$

die man unter Einführung der Brennweite f auch in der Form schreiben kann:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}.$$

Der Vergleich mit der obigen Formel ermöglicht es, die Theorie des Hohlspiegels mit der Lehre von den harmonischen Punkten in Zusammenhang zu bringen und somit rein geometrisch zu deuten. So dient denn die Formel, nachdem sie rechnerisch hergeleitet ist, eminent anschaulichen Zwecken.

Zum Schluß noch folgende Bemerkung. In der Algebra legt man mit Recht großes Gewicht auf die Veranschaulichung der Formeln. Da darf man doch wahrlich in der Geometrie die Figur nicht zurückdrängen, soll vielmehr die Anschauung zu ihrem vollen Rechte gelangen lassen. Nur auf diese Weise werden die Schüler zur Raumanschauung erzogen. Auch gewährt ein geometrischer Beweis größere Befriedigung als eine rechnerische Herleitung, in der vielfach der wahre Grund kaum hervortritt.

§ 21. Harmonische Punkte und Strahlen. Pol und Polare am Kreise.

1. **Übergang vom Doppelverhältnis zur harmonischen Teilung.** An die Theorie der Doppelverhältnisse schließt sich die Frage an, welche Werte des Doppelverhältnisses vor den übrigen bevorzugt zu werden verdienen. Die speziellen Werte 0, 1 und ∞ bieten aus

dem Grunde geringes Interesse dar, weil sie nur erhalten werden können, wenn zwei Elemente zusammenfallen. Unter den Doppelverhältnissen aus vier verschiedenen Elementen ist dasjenige am wichtigsten, dessen Wert -1 beträgt. In diesem kann man nämlich erstens die beiden ersten, zweitens die beiden letzten Elemente und endlich auch das erste und das zweite Paar miteinander vertauschen. Wenn $(ABCD) = -1$ ist, so sind auch $(BACD)$, $(ABDC)$, $(BADC)$, $(CDAB)$, $(CDBA)$, $(DCAB)$, $(DCBA)$ gleich -1. Wir sagen demnach, vier Elemente liegen h a r m o n i s c h, wenn ihr Doppelverhältnis gleich -1 ist. Bei vier Punkten A, B, C, D, für die das Doppelverhältnis $(ABCD) = -1$ ist, nennen wir D den vierten harmonischen Punkt zu A, B, C; es ist dann auch C der vierte harmonische Punkt zu A, B, D, ferner A der vierte harmonische Punkt zu C, D, B und B der vierte harmonische Punkt zu C, D, A. Wir sagen auch, die Strecke AB werde durch die Punkte C und D harmonisch geteilt; ebenso wird die Strecke CD in den Punkten A und B harmonisch geteilt. Jedes Punktepaar wird durch das andere harmonisch getrennt, und die Punkte eines jeden Paares können miteinander vertauscht werden. Entsprechende Ausdrucksweisen benutzen wir, wenn für vier Strahlen a, b, c, d eines Büschels das Doppelverhältnis $(abcd) = -1$ ist. Durch die Reihenfolge deuten wir an, welche Punkte und welche Strahlen einander zugeordnet (konjugiert) sind. Der Schüler wird durch den Ausdruck daran erinnert, daß es sich um zwei Paare von Elementen handelt. Daher ist es nicht nötig, eigens noch anzugeben, welche Elemente einander zugeordnet sind. Für fehlerhaft halten wir es, die Elemente in der Reihenfolge anzugeben, die sie in der gerade vorliegenden Zeichnung einnehmen. Dadurch bringt man die Schüler absichtlich in eine Abhängigkeit von den Zufälligkeiten der gezeichneten Figur. Der Beweis eines Lehrsatzes muß allgemeine Gültigkeit besitzen. Er muß aus diesem Grunde für alle Möglichkeiten gelten, die mit der Voraussetzung des Satzes vereinbar sind. Eigenschaften, die von ihr unabhängig sind, dürfen im Beweise auch nicht berücksichtigt werden.

Ohne Zweifel ist es am natürlichsten, die harmonische Teilung an die Doppelverhältnisse anzuschließen. Indessen ist es vielfach nicht möglich, beim Unterricht auf die Doppelverhältnisse einzugehen. Dann führt man die harmonischen Punkte dadurch ein, daß man eine Strecke innerlich und äußerlich nach demselben Verhältnisse oder nach zwei entgegengesetzt gleichen Schnittverhältnissen teilt. Dem entsprechend kann man einen Winkel (ab) durch zwei Strahlen c und d so teilen, daß die Schnittverhältnisse (abc) und (abd) sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Aber auch die Schnittverhältnisse von Winkeln können in der Schule nicht immer behandelt werden.

In diesem Falle begnügt man sich wohl damit, harmonische Punkte in der angegebenen Weise zu definieren, daran den Satz zu schließen: Vier Gerade, die einen beliebigen Punkt mit vier harmonischen Punkten verbinden, werden von jeder beliebigen Transversalen in vier harmonischen Punkten geschnitten, und auf diesen Satz die Definition der harmonischen Strahlen zu gründen. Dem entgegen halten wir es für angemessener, die harmonischen Strahlen auch selbstständig zu definieren. Die Art, wie das geschehen kann, wollen wir jetzt eingehend besprechen.

2. **Einfachere Behandlung der harmonischen Punkte und Strahlen.** Im Anschluß an den Satz: In jedem Dreieck teilt die Halbierungslinie eines Innen- oder eines Außenwinkels die Gegenseite nach dem Verhältnisse der anliegenden Seiten, gehen wir von zwei Geraden a und b aus und fügen die beiden Geraden c und d hinzu, durch die die Winkel der beiden ersten Geraden halbiert werden. Ist O der Schnittpunkt dieser vier Geraden, und trifft irgendeine sie durchsetzende Gerade in den Punkten $A, B, C, D,$ so besteht nach dem angeführten Satze die Beziehung:

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

Diese vier Geraden haben die Eigenschaft, jede Transversale in vier harmonischen Punkten zu treffen. Um weitere Eigenschaften zu ermitteln, ziehen wir eine Parallele zu einem von diesen vier Strahlen; dann erhalten wir auf den drei andern Strahlen drei Schnittpunkte, von denen jedesmal einer mitten zwischen die beiden andern fällt. Jede Parallele zu a bestimmt durch ihre Schnittpunkte mit c und d eine Strecke, die durch b halbiert wird. Ebenso liegt die Mitte einer jeden zu b parallelen und durch c und d begrenzten Strecke im Strahle a. Auf jeder Parallelen zu $\begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix}$ begrenzen die Schnittpunkte mit a und b eine Strecke, deren Mitte in $\begin{Bmatrix} d \\ c \end{Bmatrix}$ liegt.

Dadurch sind wir auf eine natürliche Erweiterung der zuerst betrachteten Figur geführt. Sind irgend drei Strahlen a, b, c eines Punktes O gegeben, so ziehen wir zu c eine beliebige Parallele und verbinden den Punkt O mit der Mitte der auf ihr durch die Schnittpunkte mit den Strahlen a und b begrenzten Strecke durch einen Strahl d. Dann enthält nicht nur d die Mitten aller entsprechenden Strecken, die zu c parallel sind, sondern es ordnen sich auch wieder die vier Strahlen in zwei Paare, an denen man leicht ganz entsprechende Eigenschaften nachweist.

Zu dieser Figur kann man auch noch auf andere Weise gelangen. Man nimmt etwa zu einem Parallelogramm ein zweites hinzu, das die

Mitten der Seiten des ersten zu Eckpunkten hat. Die Diagonalen dieser beiden Parallelogramme sind vier Strahlen der betrachteten Art.

Die Sätze, die wir über solche vier Strahlen angegeben haben, rechtfertigen es, ihnen einen eigenen Namen beizulegen und sie als harmonische Strahlen zu bezeichnen. Dann gelten die beiden Sätze:

Irgend vier harmonische Strahlen werden durch jede Transversale in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Die Strahlen, durch die ein beliebiger Punkt mit vier harmonischen Punkten verbunden wird, sind harmonisch.

Es seien a, b, c, d vier harmonische Strahlen. Eine fünfte Gerade derselben Ebene schneide den Strahl a in A, b in B, c in C und d in D. Ziehen wir durch B die Parallele zu a und trifft diese mit c in C' und mit d in D' zusammen, so ist der Größe und dem Zeichen nach: $AC:CB = OA:BC'$ und $AD:DB = OA:BD'$. Weil aber $BC' = -BD'$ ist, so folgt: $AC:CB = -AD:DB$.

Der zweite Satz kann in derselben Weise bewiesen oder durch das Identitätsprinzip auf den ersten Satz zurückgeführt werden.

Indem wir jetzt zu der speziellen Figur zurückkehren, von der wir ausgegangen sind, können wir sagen:

Die beiden Strahlen, durch die ein Winkel und sein Nebenwinkel halbiert werden, liegen zu den Schenkeln harmonisch.

Daraus leitet das Identitätsprinzip noch den folgenden Satz her:

Wenn von zwei harmonischen Strahlenpaaren die Strahlen des einen Paares aufeinander senkrecht stehen, so halbieren sie die Winkel, die von den Strahlen des anderen Paares gebildet werden.

Auf diesen Satz gestützt, erhält man den apollonischen Kreis als geometrischen Ort des Punktes, dessen Abstände von zwei festen Punkten A und B in einem vorgeschriebenen Verhältnisse $m:n$ stehen. Man teilt die Strecke AB in den Punkten C und D harmonisch nach dem Verhältnisse $m:n$ und beschreibt über CD als Durchmesser den Kreis. Die von einem beliebigen Punkte X dieses Kreises nach den Punkten A, B, C, D gezogenen Geraden bilden vier harmonische Strahlen, und da der Winkel CXD ein Rechter ist, werden die durch die Strahlen XA und XB gebildeten Winkel von den Geraden XC und XD halbiert.

Obgleich bei dieser Untersuchung der in § 20, 6 (S. 363) aufgestellte Fundamentalsatz nicht benutzt ist, bildet er doch die eigentliche Grundlage für die ganze Untersuchung. Indem wir voraussetzen, daß auf einer Parallelen zu c die zwischen den Schnittpunkten mit a und b enthaltene Strecke durch den Strahl d halbiert wird, erhalten wir auf ihr unter Hinzunahme ihres unendlich fernen Punktes vier Punkte, deren Doppelverhältnis gleich -1 ist. Daher müssen nach dem angeführten Satze die vier Strahlen auf jeder weiteren Geraden vier Punkte bestimmen, deren Doppelverhältnis denselben Wert hat.

Wie in mehreren, bereits früher behandelten Fällen erleichtert auch hier die Hinzunahme eines unendlich fernen Punktes die Beweisführung.

3. **Das vollständige Vierseit.** Vier Gerade einer Ebene, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, bilden ein vollständiges Vierseit. Die Geraden werden als die Seiten des Vierseits angesehen. Als Eckpunkt gilt jeder Punkt, in dem sich zwei Seiten schneiden. Nachdem ein Eckpunkt gewählt ist, gibt es nur einen einzigen, der mit ihm nicht in einer Seite des Vierseits liegt; zwei einander in dieser Weise entsprechende Punkte heißen Gegenpunkte. Die Verbindungsgerade zweier Gegenpunkte heißt eine Diagonale. Die Zahl der Ecken ist sechs, die der Diagonalen gleich drei.

Um die gegenseitige Lage der Eckpunkte durch die Bezeichnung möglichst deutlich hervortreten zu lassen, bezeichnen wir drei in einer Seite liegende Ecken mit A, B, C, nennen A_1 den Gegenpunkt von A, B_1 den von B, C_1 den von C. Die drei weiteren Seiten sind AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Die Diagonalen BB_1 und CC_1 mögen einander in L, CC_1 und AA_1 in M, AA_1 und BB_1 in N schneiden.

Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch die beiden anderen harmonisch geteilt. Dieser wichtige Satz wird am natürlichsten mit Hilfe des Hauptsatzes in § 20, 6 bewiesen. Es sei $(AA_1MN) = \omega$. Die vier Punkte A, A_1, M, N werden von C aus in die Punkte B, B_1, L, N und von C_1 aus in die Punkte B_1, B, L, N projiziert. Folglich ist: $(BB_1LN) = \omega$ und $(B_1BLN) = \omega$; somit $\omega = 1 : \omega$. Weil aber ω nicht gleich $+1$ sein kann, muß es den Wert -1 haben.

Wollen wir den Begriff des Doppelverhältnisses nicht benutzen, so können wir folgende Erwägung anstellen. Gehen wir von den Diagonalen AA_1 und BB_1 aus, die sich in N schneiden, so behauptet der Satz, daß der Punkt M auf AA_1 auf doppelte Weise eindeutig bestimmt werden kann, einmal als Schnittpunkt mit CC_1, aber auch als vierter harmonischer Punkt zu A, A_1, N. Entsprechendes gilt von dem Punkte L als einem Punkte der Diagonale BB_1: er soll erstens Schnittpunkt mit CC_1 und zweitens vierter harmonischer Punkt zu B, B_1, N sein. Es liegt also nahe, die Punkte M und L in der zuletzt angegebenen Weise zu bestimmen, oder mit andern Worten, die Punkte A, A_1, N, M und B, B_1, N, L je als harmonische Punkte vorauszusetzen. Diese beiden Quadrupel werden von C aus durch vier harmonische Strahlen projiziert, und da hier die Strahlen CA und CB, CA_1 und CB_1, CN und CN zusammenfallen, so liegen auch die Punkte M und L auf demselben von C ausgehenden Strahle. Indem man aber die beiden Punktquadrupel von C_1 aus projiziert, findet man auch drei Paare zusammenfallender Strahlen; daher liegen die Punkte M und L auch in gerader Linie mit C_1. Die Gerade ML fällt also mit der Geraden CC_1 zusammen oder die Punkte M und L liegen auch auf der dritten Diagonale.

Man führt diesen Gedanken gewöhnlich in folgender Weise aus. Indem man wieder den Schnittpunkt der Diagonalen AA_1 und BB_1 mit N bezeichnet, bestimmt man den vierten harmonischen Strahl zu CA, CA_1, CN. Dieser trifft AA_1 in dem vierten harmonischen Punkte zu A, A_1, N und BB_1 im vierten harmonischen Punkte zu B, B_1, N. Durch diese beiden Punkte geht aber auch der vierte harmonische Strahl zu C_1A, C_1A_1, C_1N. Daher fallen die beiden gesuchten Linien mit der Diagonale CC_1 und die vierten harmonischen Punkte zu A, A_1, N bzw. zu B, B_1, N mit den Punkten zusammen, in denen die Diagonalen AA_1 und BB_1 durch CC_1 getroffen werden.

Weit einfacher ist es allerdings, die Seiten des Dreiecks AA_1C einmal durch die von C_1 ausgehenden Ecktransversalen und dann durch die Gerade BB_1 zu teilen und auf die Schnittverhältnisse der Seiten die Sätze von Ceva und von Menelaus anzuwenden. Es ist nämlich:

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A_1}\cdot\frac{A_1M}{MA}=+1,\quad \frac{AB}{BC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A_1}\cdot\frac{A_1N}{NA}=-1.$$

Daraus folgt:

$$\frac{A_1M}{MA}=-\frac{A_1N}{NA}.$$

Statt dessen können wir im Anschluß an § 20, 2 (S. 355) auch sechs Strecken m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 so wählen, daß ist:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{m_2}{m_3},\quad \frac{CB_1}{B_1A_1}=\frac{m_3}{m_1},\quad \frac{A_1M}{MA}=\frac{m_1}{m_2},$$

$$\frac{AB}{BC}=-\frac{n_2}{n_3},\quad \frac{CB_1}{B_1A_1}=-\frac{n_3}{n_1},\quad \frac{A_1N}{NA}=-\frac{n_1}{n_2}.$$

Setzen wir hier $m_3=-n_3$, so wird $m_1=n_1$, $m_2=n_2$, also $A_1M:MA=-A_1N:NA$.

Bei der Würdigung der mitgeteilten Beweise dürfen wir aber nicht vergessen, daß die beiden ersten Beweise, wenn sie auch dem Verständnisse größere Schwierigkeiten machen, tiefer in den wahren Grund einführen. Dieser liegt darin, daß die Quadrupel A, A_1, M, N und B, B_1, L, N in doppelter Weise einander perspektiv zugeordnet werden können. Auf diese Eigenschaft muß der Schüler sein Augenmerk richten und die ganze Figur einheitlich erfassen, wenn er den Beweis verstehen will. Weil aber diese Figur sich wesentlich von den bis dahin auftretenden Figuren unterscheidet, so kommt diesen Beweisen eine höhere pädagogische Bedeutung zu. Der letzte Beweis in seinen beiden Formen wiederholt nur frühere Figuren und läßt somit vor den Augen des Schülers keine neue Figur entstehen. Zudem steht dieser Beweis auch darin hinter den beiden ersten zurück, daß er nicht so unmittelbar auf das Ziel zusteuert wie die beiden andern.

Es bietet keine Schwierigkeit, dem vollständigen Vierseit das vollständige Viereck an die Seite zu stellen. Auch ist das vollständige Viereck für die Polarentheorie (vgl. Nr. 5) von Bedeutung, indem die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks, das durch irgend vier Punkte eines Kegelschnitts bestimmt wird, Ecken eines Poldreiecks sind, und diese Figur für die Konstruktion der Polare wichtig ist. Indessen kann man diese Eigenschaft auch mit Hilfe des vollständigen Vierseits herleiten. Aus diesem Grunde ist es gestattet, vom vollständigen Viereck abzusehen.

4. **Die Ähnlichkeitspunkte von Kreisen.** Daß zwei beliebige Kreise in doppelter Weise als ähnliche Figuren in perspektiver Lage aufgefaßt werden können, haben wir bereits in § 18, 6 (S. 328) erwähnt. Wenn die Mittelpunkte der Kreise nicht zusammenfallen, so wird die Zentrale in den beiden Ähnlichkeitspunkten harmonisch nach dem Verhältnisse der Radien geteilt. Bei der ähnlichen Abbildung entspricht jede durch den Ähnlichkeitspunkt gelegte Gerade sich selbst (Ähnlichkeitsstrahl); sie hat die Eigenschaft, daß die Abstände von entsprechenden Punkten, speziell von den Mittelpunkten, in einem Verhältnisse stehen, das der Größe und dem Zeichen nach der Abbildungszahl gleich ist. Das gilt auch umgekehrt: sobald die Abstände einer Geraden von entsprechenden Punkten, speziell von den Mittelpunkten, in diesem Verhältnisse stehen, entspricht sie sich in der Abbildung selbst und ist ein Ähnlichkeitsstrahl.

Drei Kreise haben sechs Ähnlichkeitspunkte. Es empfiehlt sich, die Steinersche Bezeichnung anzuwenden. Es seien O_1, O_2, O_3 die Mittelpunkte der drei Kreise; A_1 und J_1 sollen die Ähnlichkeitspunkte der Kreise (O_2) und (O_3), A_2 und J_2 die der Kreise (O_3) und (O_1), A_3 und J_3 die der Kreise (O_1) und (O_2) sein, und zwar sollen A_1, A_2, A_3 die äußern, J_1, J_2, J_3 die innern Ähnlichkeitspunkte sein. Diese sechs Punkte bilden die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, in welchem zwei Ähnlichkeitspunkte, die zu demselben Kreispaare gehören, Gegenpunkte voneinander sind und dessen Diagonalen sich in den Mittelpunkten der Kreise schneiden. Eine Seite dieses Vierseits enthält die äußern, jede andere Seite zwei innere und einen äußeren Ähnlichkeitspunkt. Es liegen nämlich in gerader Linie je die drei Punkte:

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,$$
$$A_1,\quad J_2,\quad J_3,$$
$$J_1,\quad A_2,\quad J_3,$$
$$J_1,\quad J_2,\quad A_3.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Umkehrung des menelaischen Lehrsatzes für das Dreieck $O_1 O_2 O_3$; die Zahl der negativen Schnittverhältnisse ist ungerade, und die absoluten Beträge der Schnittverhältnisse werden zyklisch durch die drei Radien bestimmt. Indessen geht der Satz auch direkt aus dem Begriff der Ähnlichkeitsstrahlen hervor. So ist die Gerade $A_1 A_2$ äußerer Ähnlichkeitsstrahl für die Kreispaare (O_2), (O_3) und (O_1), (O_3), also auch für das Paar (O_1), (O_2); sie enthält also auch den Punkt A_3.

Die vier gemeinsamen Ähnlichkeitsstrahlen dreier Kreise werden kurz als ihre Ähnlichkeitsachsen bezeichnet.

5. **Die Polarentheorie für den Kreis.** In der analytischen Geometrie kann man die Polarentheorie auf einem ganz direkten Wege begründen. Man geht von einem Kegelschnitt aus und nimmt seine Gleichung als gegeben an. Indem man die Punkte sucht, in der die Verbindungsgerade zweier gegebenen Punkte den Kegelschnitt schneidet, wird man ganz von selbst auf die Bedingung geführt, der die Koordinaten der beiden Punkte genügen müssen, falls ihre Verbindungsgerade in zwei Punkten schneiden soll, die zu den gegebenen Punkten harmonisch liegen. Zwei derartige Punkte nennt man konjugierte Pole. Die gefundene Bedingungsgleichung ist für die Koordinaten eines jeden der beiden Punkte vom ersten Grade. Hält man den einen der beiden Punkte fest, so liegen, wie aus der Form der Gleichung hervorgeht, alle konjugierten Pole in einer geraden Linie. Diese einfache Betrachtung führt in der natürlichsten Weise zu der ganzen Polarentheorie. Die synthetische Geometrie kann das Problem in dieser direkten Weise nicht angreifen. Dasselbe gilt von den Methoden, deren sich die Elementar-Geometrie bedienen muß, um die Polarentheorie für den Kreis zu begründen; sie müssen daher mehr oder minder den Charakter der Künstlichkeit an sich tragen. Daß die Theorie in allen Schulen auf dieselbe Weise behandelt werde, ist nicht zu erwarten, aber auch nicht notwendig. Vielmehr mag sich jeder Lehrer getrost den Weg nach seinem persönlichen Gefallen auswählen. Nur gegen die rechnerischen Beweise glauben wir uns auch in diesem Falle mit aller Entschiedenheit aussprechen zu müssen (vgl. § 20, 7 S. 368). Von den geometrischen Methoden möchten wir drei anführen, von denen jede ihre Vorzüge hat. Es liegt uns fern, sie gegeneinander abzuwägen. Noch weniger können wir alle kleinen Änderungen anführen, die man an ihnen anbringen kann.

Um die Darlegung des Weges zu erleichtern, den wir an erster Stelle besprechen wollen, führen wir folgende Bezeichnung ein. Wir nennen zwei Punkte konjugierte Punkte oder Pole an einem Kreise, wenn sie harmonisch liegen zu den beiden Punkten, in denen ihre Verbindungsgerade den Kreis trifft.

Jetzt gehen wir von einem Kreise (O) und einem beliebigen Punkte P seiner Ebene aus. Durch P legen wir zwei Sekanten, bestimmen auf jeder den Pol zu P und wollen zeigen, daß diese auf einer Geraden liegen, die durch den Punkt P und den Kreis bestimmt ist. Zu dem Ende empfiehlt es sich, die eine Sekante nicht willkürlich anzunehmen, sondern sie durch den Mittelpunkt des Kreises zu legen.

Dementsprechend möge die Gerade PO den Kreis in A und B, und eine beliebige zweite durch P gelegte Sekante in C und D

schneiden. Der Schnittpunkt der Geraden AC und BD sei R, der Schnittpunkt der Geraden AD und BC sei S. Ferner treffe die Gerade RS mit AB in E und mit CD in F zusammen. Dann ist nach dem Satze vom vollständigen Viereck oder vom vollständigen Vierseit der Punkt E der vierte harmonische Punkt zu A, B, P und der Punkt F der vierte harmonische Punkt zu C, D, P, oder mit andern Worten, die Punkte E und F sind beide konjugierte Pole zu P. Weil aber die Strecke AB Durchmesser des Kreises ist, sind die Winkel ACB und ADB Rechte; die Geraden AD und BC sind somit Höhen des Dreiecks ABR. Da die dritte Höhe dieses Dreiecks auch durch den Schnittpunkt S von AD und BC hindurchgehen muß, steht die Gerade RE auf AB senkrecht. Hiernach ist die Gerade RS durch den Punkt P und den Kreis (O) eindeutig bestimmt; man braucht nur in dem durch P gehenden Durchmesser den konjugierten Punkt E zu ermitteln und in ihm die Senkrechte auf dem Durchmesser zu errichten. Diese Senkrechte enthält alle Pole des Punktes P für den Kreis und heißt aus diesem Grunde die Polare des Punktes P.

Steiner hat im Anschluß an die vorausgesetzte Figur einen andern Beweis geliefert, der zwar nicht so einfach ist wie der angeführte, den wir aber glauben ebenfalls mitteilen zu sollen. Es seien wieder A und B die Endpunkte des durch den Punkt P gehenden Durchmessers, E der vierte harmonische Punkt zu A, B, P, während eine beliebige durch P gelegte Sekante in den Punkten C und D schneiden soll. Die Geraden DA, DB, DP und DE sind vier harmonische Strahlen. Weil aber DA und DB aufeinander senkrecht stehen, halbieren sie die von den Geraden DE und DP gebildeten Winkel. Trifft also DE den Kreis noch im Punkte G, so sind die Bogen AC und AG einander gleich. Sie liegen also symmetrisch zum Durchmesser AB. Daraus folgt, daß auch die Winkel GEA und CEA einander gleich sind. Somit bilden EG, EC, EA und die in E auf AB errichtete Senkrechte p vier harmonische Strahlen; p enthält also auch den vierten harmonischen Punkt zu C, D, P oder den in PC gelegenen Pol von P.

Damit die Schüler erkennen, daß die angegebenen Beweise nur dann ihre Gültigkeit verlieren, wenn der Punkt P auf dem Kreise liegt, ist es angebracht, jedesmal zwei verschiedene Figuren zu benutzen und in der einen P im Innern, in der andern im Äußern des Kreises anzunehmen. Ist P ein Innenpunkt, so liegt die Polare ganz im Äußeren des Kreises. Dagegen trifft die Polare eines Außenpunktes den Kreis in zwei Punkten, nämlich den Berührungspunkten der vom Pole ausgehenden Tangenten. Nennen wir J und K die Schnittpunkte der Polare des Punktes P, so kann die Gerade PJ

den Kreis nicht schneiden, da sonst der in PJ enthaltene Pol von P zwischen den beiden Schnittpunkten, also nicht auf der Polare liegen würde. Dasselbe kann man auch direkt zeigen. Sind nämlich J, K die Berührungspunkte der durch P gehenden Tangenten, so halbieren JA und JB die von den Geraden JK und JP gebildeten Winkel. Daher ist JK die Polare des Punktes P, oder die Polare eines jeden Außenpunktes enthält die zugehörige Berührungssehne.

Umgekehrt ist der Pol einer jeden Geraden, die den Kreis schneidet, ein Außenpunkt, und zwar der Punkt, in dem die in den Schnittpunkten an den Kreis gelegten Tangenten zusammentreffen. Der Pol einer jeden Geraden, die außerhalb des Kreises verläuft, ist ein Innenpunkt. Sollen diese beiden Sätze allgemein gültig bleiben, so muß man die uneigentlichen Gebilde hinzunehmen. Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade, und der Pol eines jeden Durchmessers ein unendlich ferner Punkt, nämlich der gemeinschaftliche Punkt aller Senkrechten, die auf dem Durchmesser errichtet werden.

Schon hiernach ist man berechtigt, die Tangente als Polare ihres Berührungspunktes anzusehen. Es stimmt dies auch damit überein, daß jede Polare auf dem Poldurchmesser senkrecht steht. Noch deutlicher geht die Berechtigung aus folgender Betrachtung hervor. Auf einer durch einen Kreispunkt A gehenden Sekante wählen wir einen Punkt P ganz willkürlich und verlangen nur, daß die Strecke AP ganz dem Äußeren des Kreises angehört. Die Gerade AP drehen wir um den Punkt A, indem wir die Strecke AP ungeändert lassen. Solange diese Gerade den Kreis schneidet, liegt der auf ihr enthaltene Pol von P zwischen den Schnittpunkten. Dieser Pol fällt aber mit dem Punkte A zusammen, sobald die Sekante in die Tangente übergeht. Der Berührungspunkt kann demnach als Pol für jeden in ihr liegenden Punkt aufgefaßt werden.

Nachdem wir erkannt haben, daß alle einem festen Punkte konjugierte Pole in einer festen Geraden liegen, können wir die im Anfange der Untersuchung benutzte Figur von der Annahme frei machen, daß die Gerade PA durch den Mittelpunkt geht. Sind also AB und CD irgend zwei durch P gehende Sekanten und gehen die Geraden AC und BD durch R, AD und BC durch S, so hat die Gerade RS zwei Punkte mit der Polare des Punktes P gemein; die Gerade RS fällt also mit der Polare zusammen. Diese Figur ermöglicht es, die Polare eines jeden Punktes, der nicht auf dem Kreise liegt, durch eine Linearkonstruktion zu ermitteln, sobald der Kreis gezeichnet vorliegt. Am wichtigsten wird diese Konstruktion in dem Falle, daß der Punkt P ein Außenpunkt ist, weil man dann auch die Berührungspunkte der von P ausgehenden Tangenten erhält. Um hierbei nur solche Punkte zu benutzen, die dem Zeichenfelde angehören, legt man durch P drei Sekanten AB, CD und EF. Wenn hier A zwischen P und B, C zwischen P und D, E zwischen P und F liegt, so zieht man die Geraden AD, BC, CF und DE. Ist G der Schnittpunkt von AD und BC, H der Schnittpunkt von CF und DE, so wird die Gerade GH die gesuchte Polare des Punktes P.

Nehmen wir wieder an, AB und CD seien zwei beliebige durch den Punkt P gehende Sekanten und die Punkte R und S seien in der angegebenen Weise bestimmt, so ist nicht nur die Gerade RS die Polare des Punktes P, sondern es ist auch SP die Polare von R und PR die Polare von S. Das Dreieck PRS heißt ein Poldreieck oder ein Polardreick des Kreises, weil jede seiner Seiten die Polare der Gegenecke ist. Vier beliebige Punkte des Kreises bestimmen ein Poldreieck. Von seinen Eckpunkten liegt einer im Innern, die beiden andern im Äußern. Man kann darauf hinweisen, daß der Mittelpunkt des Kreises Höhenpunkt für jedes Poldreieck ist.

Aus dieser Figur geht hervor, daß jedesmal, wenn ein Punkt R auf der Polare des Punktes P liegt, auch die Polare des Punktes R durch P hindurchgeht. Nachdem die Polare des Punktes P bestimmt ist, kann man jeden in ihr gelegenen Punkt zum Punkt R wählen, und dann muß jedesmal die Polare von R durch P gehen. Dieser Satz ergibt sich auch ohne Poldreieck, wenn einer der beiden Punkte ein Punkt des Innern oder des Kreises selbst ist. Man darf sich aber nicht, wie vielfach geschieht, mit dieser beschränkenden Annahme begnügen.

Der letzte Satz kann in den Doppelsatz aufgelöst werden:

Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden.

Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf der Polare des Punktes.

Die gegenseitige Abhängigkeit, die hier zwischen den Punkten einer Geraden und den Geraden eines Strahlenbüschels besteht, verdient beim Unterricht genau betrachtet zu werden. Sowohl für den Punkt als auch für die Gerade müssen hierbei die drei Lagen unterschieden werden, die diese Gebilde dem Kreis gegenüber erhalten können.

Der letzte Satz ermöglicht auch die Lösung der Aufgabe:

Zu einer Geraden p den Pol P an einem Kreise zu bestimmen.

Man wähle in p zwei beliebige Punkte und konstruiere zu jedem von ihnen die Polare. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Pol P.

Die Polarentheorie ermöglicht es auch, jedesmal, wenn fünf Punkte eines Kreises gegeben sind, in einem jeden von ihnen die Tangente durch eine lineare Konstruktion zu ermitteln.

6. **Andere Art, die Polarentheorie für den Kreis zu behandeln.** Man versteht zuweilen unter konjugierten Punkten am Kreise nicht zwei beliebige Punkte, die zu den Schnittpunkten ihrer Verbindungsgeraden mit dem Kreise harmonisch liegen, sondern beschränkt sich auf Punkte, die demselben Durchmesser angehören. Auch setzt man nicht die Eigenschaft, zu den Endpunkten des Durchmessers harmonisch zu liegen, in den Vordergrund, sondern stützt die Definition auf die Forderung, daß das Rechteck aus ihren Abständen vom Mittelpunkte gleich dem Quadrate des Radius sein soll. Dementsprechend nennt man die Punkte A und A' konjugierte Punkte oder Pole am Kreise $(O)r$, wenn die Strecken OA und OA' gleiche Richtung haben und zudem $OA \cdot OA' = r^2$ ist. Für den Kreis hat diese Methode ihre volle Berechtigung. Sie hat den Vorzug, die Polarentheorie in engen Zusammenhang mit der Inversion (§ 23) zu bringen. Nimmt man den gegebenen Kreis zum Grundkreis einer hyperbolischen Inversion, so ist jeder der beiden konjugierten Pole das inverse Bild des andern. Nur muß man bei der allgemeinen Theorie der Kegelschnitte das Wort „konjugiert" in seiner erweiterten Bedeutung gebrauchen. Für die zunächst folgende Untersuchung benutzen wir die engere Definition und verlangen demnach, daß konjugierte Punkte in demselben Durchmesser liegen. Dann nennen wir die Polare eines Punktes die Senkrechte, die im konjugierten Pol auf dem zugehörigen Durchmesser errichtet ist.

Aus der angegebenen Definition geht der Satz hervor: Wenn der Punkt B auf der Polare des Punktes A liegt, so liegt auch A auf der Polare von B. Zum Beweise fällen wir die Senkrechte AB' auf OB und BA' auf OA. Dann ist $OAB' \sim OBA'$, also:

$$OA : OB = OB' : OA' \quad \text{oder} \quad OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = r^2.$$

Hiernach ist auch B' der konjugierte Pol zu B und AB' die Polare des Punktes B.

Die Polare eines Innenpunktes liegt ganz im Äußern des Kreises; die Polare eines Kreispunktes ist die zugehörige Tangente. Dagegen schneidet die Polare eines Außenpunktes den Kreis, und zwar in den Berührungspunkten der vom Pol ausgehenden Tangenten. Ist nämlich C ein Punkt, in dem die Polare des Außenpunktes A mit dem Kreise zusammentrifft, so geht die Polare des Punktes C oder die in C an den Kreis gelegte Tangente durch den Punkt A.

Daraus folgt nun, daß zwei konjugierte Pole zu den Endpunkten des zugehörigen Durchmessers harmonisch liegen.

Wenn eine beliebige durch den Punkt A gehende Gerade den Kreis in den Punkten D und E trifft und die in diesen beiden Punkten an den Kreis gelegten Tangenten einander in dem Punkte H

schneiden, so ist DE die Polare des Punktes H. Da aber die Gerade DE durch A geht, so liegt H auf der Polare des Punktes A. Die Tangenten, die man in den Schnittpunkten einer durch A gehenden Sekante an den Kreis legen kann, schneiden sich somit auf der Polare von A.

Wiederum seien A und A' zwei konjugierte Pole, B und C die Endpunkte des zugehörigen Durchmessers, D ein beliebiger Punkt des Kreises (O). Die Gerade BD treffe die Polare von A in L und die Gerade LC den Kreis noch in E. Dann sind CD und LA' zwei Höhen des Dreiecks BCL. Durch ihren Schnittpunkt M geht auch die dritte Höhe dieses Dreiecks. Diese fällt mit BE zusammen. Nun sind EB, EC, EA', ED vier harmonische Strahlen (vgl. S. 284 und S. 373). Daher geht ED durch A. Ebenso sind auch die Strahlen $A'A$, $A'L$, $A'D$, $A'E$ harmonisch; somit enthält die Polare $A'L$ von A auch den vierten harmonischen Punkt zu den drei Punkten D, E, A.

Diese Eigenschaft der Polare macht es möglich, sie durch die in der vorigen Nummer angegebene Linearkonstruktion zu finden.

7. **Die Polarentheorie des Kreises nach der von Weierstraß angegebenen Methode.** Wir haben bereits in § 16, 2 (S. 288) folgenden Satz erwähnt: Gehen von einem Punkte O zwei Strecken OA und OB aus und fällt man von A die Senkrechte AB' auf OB und von B die Senkrechte BA' auf OA, so sind die Rechtecke aus OA, OA' und aus OB, OB' einander gleich. Legt man Strecken, die auf derselben Geraden liegen, dasselbe oder verschiedenes Vorzeichen bei, je nachdem sie dieselbe oder entgegengesetzte Richtung haben, so stimmen die Produkte $OA \cdot OA'$ und $OB \cdot OB'$ auch im Vorzeichen überein. Dementsprechend bezeichnen wir (mit Graßmann) das Produkt aus einer Strecke und der Projektion der andern auf sie als das innere Produkt der beiden Strecken. Daran schließen wir die Definition: Zwei Punkte heißen konjugierte Pole an einem Kreise, wenn das innere Produkt ihrer Abstände vom Mittelpunkte gleich dem Quadrate des Radius ist.

Diese Definition schließt sich eng an die analytische Behandlung an. Ist in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung eines Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, so liegen zwei Punkte (x', y') und (x'', y'') harmonisch zu den beiden Punkten, in denen ihre Verbindungsgerade den Kreis schneidet, wenn die Bedingung erfüllt ist: $x'x'' + y'y'' = r^2$. Die geometrische Deutung dieser Bedingung führt auf die angegebene Definition.

Sind A und B zwei konjugierte Pole für den Kreis $(O)r$ und steht BA' auf OA senkrecht, so haben die Strecken OA und OA' gleiche Richtung, und es ist $OA \cdot OA' = r^2$. Daher liegen alle konjugierten Pole zu einem festen Punkte auf einer Geraden, die in einem bestimmten Punkte auf dem zugehörigen Durchmesser senkrecht steht. Nennen wir diese Gerade die Polare des Punktes A, so geht aus der Definition unmittelbar der Satz hervor: Wenn ein Punkt B auf der Polaren von A liegt, so liegt auch A auf der Polaren des Punktes B. Dieser Satz läßt sich wieder in die beiden Behauptungen zerlegen, die wir in Nr. 5 angegeben haben.

Da die Polare eines Kreispunktes die zugehörige Tangente ist, so enthält, wie aus dem letzten Satze hervorgeht, die Polare eines Außenpunktes die Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten.

Wir beweisen jetzt den allgemeinen Satz: Zwei konjugierte Pole eines Kreises teilen die in ihrer Verbindungsgeraden enthaltene Sehne harmonisch.

Zuerst betrachten wir den Fall, daß die konjugierten Pole A und A' mit dem Mittelpunkte in gerader Linie liegen. Unter dieser Voraussetzung liegt der eine der konjugierten Punkte im Innern, der andere im Äußern des Kreises. Eine von dem letzteren Punkte ausgehende Tangente möge in G berühren, und M, N seien die Endpunkte des in der Geraden AO enthaltenen Durchmessers. Dann werden die von den Geraden GA und GA' gebildeten Winkel durch die Geraden GM und GN halbiert; also liegen die Punkte A, A' harmonisch zu den Punkten M, N.

Liegen die konjugierten Punkte A und B nicht mit dem Mittelpunkt in gerader Linie und trifft die Gerade AB den Kreis in den Punkten D und E, so möge der durch A, B, A', B' gehende Kreis, dessen Mittelpunkt Q heiße, den gegebenen Kreis in F treffen. Dann ist $\sphericalangle AA'B$ ein Rechter und $OA \cdot OA' = r^2 = OF^2$. Daher ist OF Tangente an (Q), und da hiernach die Geraden OF und QF aufeinander senkrecht stehen, auch QF Tangente an $(O)r$. Es ist also $QF^2 = QD \cdot QE$, oder die Punkte D und E sind auch konjugierte Pole für den Kreis (Q). Da sie zudem mit dem Mittelpunkte Q in gerader Linie liegen, teilen sie den Durchmesser AB harmonisch.

Aus diesem Satze geht hervor, daß die Polare eines jeden Punktes für einen Kreis, der gezeichnet vorliegt, durch die unter Nr. 5 angegebene lineare Konstruktion ermittelt werden kann.

Beiläufig gewinnt man den Satz: Wenn zwei Kreise sich rechtwinklig schneiden, so wird jeder Durchmesser des einen, der den andern trifft, von diesem harmonisch geteilt.

8. **Die Dualität in der Ebene.** In der Ebene sei eine Figur gegeben. Für jede einzelne in ihr enthaltene Kurve wollen wir festlegen, ob sie als Gesamtheit ihrer Punkte oder ihrer Tangenten aufgefaßt werden soll. In diesem Sinne dürfen wir sagen, die Figur be-

stehe nur aus Punkten und aus Geraden. Für diese Figur betrachten wir einen gewissen Bereich von projektiven Eigenschaften. Mit andern Worten: wir beschränken uns auf die Fragen, ob gewisse Punkte in gerader Linie liegen, ob mehrere Gerade durch einen Punkt gehen, und ermitteln für Quadrupel von Punkten, die in einer Geraden liegen, oder von Geraden, die durch einen Punkt gehen, die Doppelverhältnisse. Die Gesamtheit der hiernach der Figur beigelegten Eigenschaften werde mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Nach unsern Festsetzungen sehen wir nicht nur von der Länge der auftretenden Strecken, von der Größe der Winkel, sondern auch von den Schnittverhältnissen der Strecken und der Winkel ab.

Jetzt nehmen wir einen beliebigen Kreis hinzu und bestimmen an ihm für jeden Punkt der Figur die Polare und zu jeder in ihr auftretenden Geraden den Pol. Jede der beiden auf diese Weise einander zugeordneten Figuren nennen wir die Polarfigur der anderen. Irgend zwei Punkte A, B der ersten Figur entsprechen in der zweiten Figur zwei Gerade a', b' in der Weise, daß auch der Geraden AB der Schnittpunkt (a', b') zugeordnet ist. Liegen vier Punkte A, B, C, D der ersten Figur in gerader Linie und sind ihnen in der zweiten Figur je die Geraden a', b', c', d' zugeordnet, so gehen diese vier Geraden nicht nur durch einen Punkt, sondern es sind auch, wie man im Anschluß an die obigen Entwicklungen leicht zeigt, die Doppelverhältnisse $(ABCD)$ und $(a'b'c'd')$ einander gleich. Jeder Eigenschaft, die unter $\mathfrak{A}$ der ersten Figur beigelegt wird, entspricht eine bestimmte Eigenschaft der zweiten Figur, die ebenfalls projektiven Charakters ist. Für die zweite Figur ergeben sich hieraus Eigenschaften, deren Gesamtheit unter dem Zeichen $\mathfrak{A}'$ zusammengefaßt werden soll.

Jetzt mögen die Eigenschaften $\mathfrak{A}$ eine Folge von gewissen Eigenschaften $\mathfrak{B}$ sein. Nennen wir $\mathfrak{B}'$ die Gesamtheit der Eigenschaften, die in der zweiten Figur den Eigenschaften $\mathfrak{B}$ entsprechen, so sind auch alle Eigenschaften $\mathfrak{A}'$ regelmäßig mit den Eigenschaften $\mathfrak{B}'$ verbunden; die Eigenschaften $\mathfrak{A}'$ sind eine Folge der Eigenschaften $\mathfrak{B}'$. Daraus ergibt sich für die Planimetrie das folgende allgemeine Prinzip:

Aus jedem Lehrsatz der ebenen Geometrie, der sich nur auf projektive Eigenschaften bezieht, geht ein zweiter Lehrsatz dadurch hervor, daß man in ihm Punkt und Gerade jedesmal miteinander vertauscht.

Dies Prinzip folgt auch in anderer Weise. Nach Einführung der uneigentlichen Gebilde (§ 8) gelten allgemein die Sätze: Durch zwei Punkte der Ebene läßt sich stets eine Gerade legen, und: Zwei Gerade der Ebene haben stets einen Punkt gemein. Außerdem ist in § 20, 6 (S. 363) der Satz bewiesen: Das Doppelverhältnis von vier

Strahlen eines Büschels ist gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen sie von einer beliebigen Geraden geschnitten werden. Aus diesen Sätzen läßt sich aber die projektive Geometrie herleiten (vgl. § 9, 6 S. 174). Daher ändert sich die Beweisführung nicht, wenn man in der Voraussetzung und im Beweise regelmäßig Punkt und Gerade miteinander vertauscht.

Dies Prinzip gilt in voller Allgemeinheit nur für projektive Eigenschaften. Das zeigt sich schon an den uneigentlichen Gebilden; während es nur eine einzige unendlich ferne Gerade gibt, enthält jede eigentliche Gerade einen unendlich fernen Punkt. Indessen erleiden einzelne metrische Sätze durch duale Übertragung keine oder nur unwesentliche Änderungen. So haben wir in § 20, 3 (S. 360) gesehen, daß durch die angegebene Vertauschung aus den Sätzen des Menelaus und des Ceva ganz ähnliche Sätze hervorgehen, in denen nur die Vorzeichen der Schnittverhältnisse geändert werden. Zahlreiche weitere Beispiele finden sich in der niederen Kreislehre; sie im einzelnen aufzuzählen, würde zu weit führen.

§ 22. Kreispotenz. Kreisbüschel. Kreisbündel.

1. **Potenz eines Kreises in einem Punkte seiner Ebene.** In der Ebene des Kreises $(O)r$ sei A ein beliebiger Punkt und B ein Punkt der Kreislinie; die durch A und B gehende Gerade treffe den Kreis noch im Punkte C. Dann ändert sich das Streckenprodukt $AB \cdot AC$ nicht, wenn B die Kreisperipherie durchläuft; es heißt die Potenz des Kreises (O) im Punkte A, etwas schwerfällig auch: die Potenz von A in bezug auf (O). Zieht man die Richtung der Strecken AB und AC in Betracht, so hat der Kreis in allen äußeren Punkten positive, in allen inneren negative Potenz, während auf seiner Peripherie die Potenz überall null ist. Für jede Lage von A kann die Potenz dargestellt werden in der Form:

$$(AO + r) \cdot (AO - r) = AO^2 - r^2.$$

Liegt A außerhalb (O), so berühre eine durch A gehende Tangente den Kreis in D; dann ist die Potenz in A auch gleich AD^2, und der Kreis $(A)D$ schneidet (O) rechtwinklig. Dem Kreise (O) und dem Punkte A ist die Strecke AD als Potenzradius und der Kreis $(A)D$ als (äußerer) Potenzkreis zugeordnet. Von zwei Kreisen in derselben Ebene kann immer nur jeder oder keiner den andern rechtwinklig treffen (Orthogonalkreis des andern sein); im ersten Falle ist jeder von ihnen ein äußerer Potenzkreis des andern, im zweiten keiner. Läßt man A die äußeren Punkte einer Geraden durchlaufen, die den

Punkt O trifft, und trägt rechtwinklig zu den Abszissen OA die Ordinaten AD ab, so erhält man eine gleichseitige Hyperbel.

Liegt A innerhalb (O), so treffe das auf OA in A errichtete Lot den Kreis in E; dann ist AE die Hälfte der kürzesten Sehne, die durch A geht, und die Potenz in A wird gleich $-AE^2$. Zu (O) und A gehört dann AE als Potenzradius und der Kreis $(A)E$ als (innerer) Potenzkreis. Da (A) von (O) in den Endpunkten eines Durchmessers (diametral) getroffen wird, so heißt (A) auch Diametralkreis von (O). Von zwei Kreisen in derselben Ebene kann immer nur einer ein Diametralkreis des andern sein.

Wenn endlich A auf (O) selbst liegt, so wird der Potenzkreis zu einem Punktkreise, der als Grenze sowohl der Orthogonal- als auch der Diametralkreise angesehen werden kann.

Die Potenz eines Kreises in einem äußeren oder inneren Punkte kann, absolut genommen, jeden beliebig gewählten Betrag übersteigen, wenn nur sein Radius hinreichend groß genommen wird. Demnach kann einer geraden Linie in keinem außer ihr liegenden Punkte eine endliche Potenz zugeschrieben werden. Für Punkte der Geraden selbst nimmt ihre Potenz den unbestimmten Wert $\pm 0 \cdot \infty$ an. Dem entspricht es auch, daß jeder Kreis, dessen Mittelpunkt auf einer Geraden liegt, unabhängig von der Größe seines Radius, sowohl Orthogonal- als auch Diametralkreis von ihr ist.

2. **Lote auf der Zentrale zweier Kreise.** In einer Ebene, in der die beiden Kreise $(O_1)r_1$ und $(O_2)r_2$ liegen, sei A ein beliebiger Punkt. Dann kann der Unterschied der beiden Kreispotenzen im Punkte A in der Form:

$$AO_1^2 - AO_2^2 - (r_1^2 - r_2^2)$$

dargestellt werden. Wenn nun eine durch A gehende Gerade die Zentrale der beiden Kreise im Punkte B senkrecht trifft, so ist:

$$AO_1^2 - AO_2^2 = BO_1^2 - BO_2^2.$$

Der Potenzunterschied der beiden Kreise im Punkte A ändert sich also nicht, wenn dieser Punkt sich auf einer zu ihrer Zentrale senkrechten Geraden bewegt. Auch umgekehrt ist jedem Betrage dieses Unterschiedes immer ein und nur ein Lot der Zentrale zugeordnet. Sieht man nämlich auf der Zentrale etwa die Richtung von O_1 nach O_2 als positiv an und bezeichnet noch die Mitte der Zentrale mit M, so ist für jede Lage von B:

$$BO_1 = BM + MO_1$$
$$BO_2 = BM + MO_2.$$

Wenn man $MB = e$ setzt, so wird demnach:

$$BO_1^2 - BO_2^2 = 2e \cdot O_1O_2,$$

und in dieser Gleichung ist die Strecke e positiv oder negativ, je nachdem B mit O_2 auf derselben Seite von M liegt oder nicht. Durch passende Wahl von e kann man somit dem Potenzunterschied auf dem Lote der Zentrale jeden beliebigen Wert geben und umgekehrt.

Die Differenz $AO_1^2 - AO_2^2$, die den in Rede stehenden Potenzunterschied eindeutig bestimmt und ebenso durch ihn bestimmt wird, erlaubt eine Auffassung, die sich mit Vorteil verwenden läßt. Beschreibt man nämlich um den Punkt A einen Kreis mit dem beliebigen Radius r, so hat dieser Kreis in den Punkten O_1 und O_2 die beiden Potenzen $O_1A^2 - r^2$ und $O_2A^2 - r^2$; deren Unterschied ist also immer gleich $AO_1^2 - AO_2^2$.

3. **Die Chordale zweier Kreise.** Unter den Loten der Zentrale zweier Kreise (O_1) und (O_2) ist das eine ausgezeichnet, auf dem der Potenzunterschied der beiden gleich null, also:

$$AO_1^2 - AO_2^2 = r_1^2 - r_2^2$$

ist. Es wird als ihre Chordale, Potenzlinie oder Potenzachse (in älteren Darstellungen auch als Radikalachse) bezeichnet. Diese Gerade wird gebildet von den Mittelpunkten aller den Kreisen (O_1) und (O_2) gemeinsamen Potenzkreise.

Wenn (O_1) und (O_2) sich schneiden, so geht ihre Chordale durch die Schnittpunkte, da beide Kreise in diesen die Potenz null haben. Trifft umgekehrt die Chordale zweier Kreise den einen von ihnen in zwei Punkten, so geht auch der andere durch diese Punkte, da in ihnen auch seine Potenz verschwinden muß. Die gemeinsamen Potenzkreise zerfallen in zwei Gruppen. Zur ersten gehören die gemeinsamen Orthogonalkreise von (O_1) und (O_2); ihre Mittelpunkte sind die äußeren Punkte der Chordale. Zur zweiten gehören die gemeinsamen Diametralkreise, und deren Mittelpunkte sind die inneren Punkte der Chordale oder die Punkte der Schnittsehne der gegebenen Kreise. Die Schnittpunkte selbst gehören, als Punktkreise gedacht, beiden Gruppen zugleich an.

Berühren sich (O_1) und (O_2), so ist ihre gemeinsame Tangente im Berührungspunkte die Chordale, und umgekehrt: wenn die Chordale zweier Kreise einen von diesen berührt, so berührt sie auch den andern in demselben Punkte. Da die Chordale hier keine inneren Punkte enthält, so sind die gemeinsamen Potenzkreise sämtlich Orthogonalkreise, und zu ihnen gehört, als Punktkreis, der Berührungspunkt von (O_1) und (O_2).

Haben endlich (O_1) und (O_2) keinen Punkt gemein, so kann auch ihre Chordale keinen von beiden treffen. Die gemeinsamen Potenzkreise sind also sämtlich Orthogonalkreise, und es ist unter ihnen kein Punktkreis. Beschreibt man um einen Punkt, der nicht auf der

Zentrale der beiden gegebenen Kreise liegt, irgendeinen dritten Kreis, der beide zugleich schneidet, so treffen sich die verlängerten Schnittsehnen auf ihrer Chordale, die dadurch bestimmt werden kann. Diese Konstruktion ist auch noch möglich, wenn etwa (O_2) zum Punktkreise wird. Als Schnittsehne des Hilfskreises mit O_2 ist dann seine Tangente in O_2 zu nehmen. Die Chordale zweier Punktkreise ist nichts anderes als das Mittellot ihrer Verbindungsstrecke. Haben endlich zwei Kreise denselben Mittelpunkt, so ist ihre Chordale die unendlich ferne Gerade, und ihre Durchmesser sind entartete gemeinsame Orthogonalkreise.

Als Chordale einer Geraden und eines Kreises kann nach der am Schlusse von Nr. 1 gemachten Bemerkung stets nur die Gerade selbst angesehen werden.

Als Chordale zweier Geraden g und h darf jede durch ihren Schnittpunkt A gehende Gerade k gelten. Denn es gibt immer zwei Kreise, die sich in einem beliebig gewählten Punkte von k schneiden und je eine der beiden Geraden g, h in A berühren, also k zur Chordale haben. Durch passende Wahl des Punktes auf k können die Kreise beliebig groß gemacht werden. Läßt man k mit h zusammenfallen, so ist h Chordale zu sich selbst und einem beliebig großen Kreise, der g in A berührt. Zu beachten ist aber, daß in jedem Falle die gemeinsamen Potenzkreise von g und h sämtlich konzentrische Kreise um den Punkt A sind. Alle übrigen Punkte von k verlieren also die wichtigste Eigenschaft der Punkte einer Chordale.

4. **Der Chordalpunkt dreier Kreise.** Wenn die Mittelpunkte dreier Kreise nicht in einer Geraden liegen, so haben ihre drei Chordalen immer einen und nur einen Punkt gemein. Er heißt Chordalpunkt oder Potenzzentrum der drei Kreise und ist der Mittelpunkt ihres einzigen gemeinsamen Potenzkreises, der ein Orthogonal-, ein Diametral- oder ein Punktkreis ist, je nachdem die gemeinsame Potenz positiv, negativ oder null ist.

Sind zwei eigentliche Kreise und ein Punktkreis gegeben, so ist der Chordalpunkt die Mitte des Kreises, der durch den Punkt geht und die beiden gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet. Entsprechend ist der Chordalpunkt für einen Kreis und zwei Punkte sowie für drei Punkte leicht zu kennzeichnen.

Der Chordalpunkt zweier Kreise und einer Geraden ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Chordale der beiden Kreise. Der Chordalpunkt eines Kreises und zweier Geraden ist der Schnittpunkt der beiden Geraden. Drei gerade Linien, die nicht durch denselben Punkt gehen, haben keinen Chordalpunkt.

Der Satz vom Chordalpunkt dreier Kreise gestattet eine partielle Umkehrung, die auf Identität zurückgeht. Zieht man durch einen

Punkt A der Chordale von (O_1) und (O_2) irgend zwei verschiedene Gerade, von denen die eine (O_1) in B und C, die andere (O_2) in D und E trifft, so liegen die vier Punkte B, C, D, E auf einem Kreise; denn der durch B, C, D gelegte Kreis kann (O_2) in nur noch einem Punkte treffen, und dasselbe gilt von der Geraden, die durch A und D geht.

Der durch die vier Punkte B, C, D, E gehende Kreis berührt (O_1), wenn B und C zusammenfallen; ebenso (O_2), wenn man D und E zusammenfallen läßt. Hiernach kann man einen Kreis finden, der (O_1) in zwei vorgeschriebenen Punkten trifft und (O_2) halbiert oder berührt. Die auf (O_1) vorgeschriebenen Punkte können auch Endpunkte eines Durchmessers sein und auch zu einem Berührungspunkte vereinigt werden.

Wenn die Mittelpunkte dreier Kreise auf einer Geraden liegen, so sind ihre Chordalen entweder drei voneinander verschiedene Lote der gemeinsamen Zentrale oder alle drei fallen in einem Lote zusammen. Im ersten Falle haben die drei Kreise einen unendlich fernen Chordalpunkt; im zweiten gehören sie zu einer Schar von Kreisen, die man als einen Büschel bezeichnet, ein Gebilde, das nun genauer zu untersuchen ist. Auch drei konzentrische Kreise haben nur eine Chordale, die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene.

5. **Kreisbüschel. Paare von konjugierten Büscheln.** Alle Kreise einer Ebene, die in jedem Punkte einer festen Geraden ein und dieselbe Potenz haben, bilden zusammen einen Kreisbüschel. Jeder Büschel hat also eine Chordale, in jedem Punkte der Chordale eine bestimmte Potenz nebst zugehörigem Potenzkreis und eine zur Chordale senkrechte Zentrale. Der Punkt O, in dem die Chordale und die Zentrale sich schneiden, heiße die Mitte des Büschels. In dieser Mitte ist seine Potenz entweder positiv oder negativ oder null; im ersten Falle heißt der Büschel hyperbolisch, im zweiten elliptisch, im dritten parabolisch. Der um O mit dem Potenzradius r beschriebene Kreis treffe die Zentrale in A und B, die Chordale in C und D.

Der hyperbolische Büschel umfaßt dann die Orthogonalkreise von $(O)r$, deren Mittelpunkte auf der Geraden AB liegen. Demnach ist jeder Punkt dieser Geraden, mit Ausnahme der zwischen A und B liegenden Punkte, die Mitte eines Büschelkreises. Im ganzen Büschel gibt es nicht zwei Kreise, die einen Punkt gemein haben, da kein Kreis die Chordale trifft. Die Punkte A und B heißen Hauptpunkte des Büschels; man kann sie als dem Büschel noch angehörige Punktkreise auffassen. Auch die Chordale kann als entarteter Büschelkreis angesehen werden.

Der elliptische Büschel wird erschöpft durch die Kreise, die den Potenzkreis $(O)r$ halbieren, und deren Mittelpunkte auf der Geraden

AB liegen. Man kann demnach auch sagen, dieser Büschel werde gebildet von den durch die beiden Punkte C und D gehenden Kreisen. Diese Schnittpunkte des Büschels werden wohl auch als seine zwei Knotenpunkte bezeichnet. Jeder Punkt der Zentrale ist die Mitte eines Büschelkreises. Der elliptische Büschel hat keinen Punktkreis, vielmehr ist $(O)r$ selbst sein kleinster Kreis.

Der parabolische Büschel setzt sich aus den Kreisen zusammen, die die gegebene Chordale in O berühren. Betrachtet man O als Punktkreis, so darf man sagen, dieser werde von allen Büschelkreisen sowohl rechtwinklig getroffen als auch halbiert. Der parabolische Büschel ist also die gemeinsame Grenze des hyperbolischen und des elliptischen.

Was in Nr. 3 über die gemeinsamen Potenzkreise solcher Paare von Kreisen bemerkt ist, die sich schneiden, berühren oder nicht treffen, gilt der Reihe nach für die Potenzkreise des elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Büschels.

Ein Kreisbüschel kann auch bestimmt werden durch seine Zentrale und einen Potenzkreis, dessen Mittelpunkt nicht auf dieser liegt. Die Art der so bestimmten Büschel ergibt sich dann leicht, wenn man ihre kleinsten Kreise ermittelt. Trifft die Zentrale den Potenzkreis nicht, so ist der Büschel stets elliptisch; er geht in einen Strahlenbüschel über, wenn man als Zentrale die unendlich ferne Gerade wählt. Auch durch zwei gegebene Kreise wird der Büschel, dem sie angehören sollen, immer eindeutig bestimmt, da sie die Zentrale, die Chordale und die gemeinsame Potenz im Schnittpunkte beider festlegen. Es ist statthaft, auch alle Kreise, die ein und denselben Mittelpunkt haben, zusammen als einen (hyperbolischen) Büschel zu bezeichnen, dessen Chordale die unendlich ferne Gerade ist. Demnach bestimmen auch zwei konzentrische Kreise einen Büschel, zu dem sie gehören. Wie endlich ein Büschel durch einen seiner Kreise und die Chordale bestimmt wird, bedarf keiner weiteren Erläuterung, wenn die Chordale den Kreis schneidet oder berührt. Trifft sie ihn gar nicht, so fällt man vom Mittelpunkte des Kreises das Lot auf die Chordale und zeichnet den Potenzkreis, dessen Mitte der Fußpunkt des Lotes ist.

Zwei Kreisbüschel heißen konjugiert, wenn die Zentrale eines jeden die Chordale des andern ist und ihre Potenzen in der gemeinsamen Mitte entgegengesetzt gleich sind. Demnach ist entweder der eine Büschel hyperbolisch und der andere elliptisch, oder beide sind parabolisch. Sollen im ersten Falle die Büschel im gemeinsamen Mittelpunkte die Potenzen $+r^2$ und $-r^2$ haben, so zieht man im Kreise $(O)r$ zwei aufeinander senkrechte Durchmesser, AB und CD, und macht die Endpunkte des einen, etwa A und B, zu Punktkreisen eines hyperbolischen und zugleich zu Schnittpunkten eines elliptischen

Büschels. Läßt man $(O)r$ zum Punktkreise werden, so erhält man zwei konjugierte parabolische Büschel, deren Kreise alle durch O gehen und deren Mittelpunkte zwei in O aufeinander senkrecht stehende Geraden bilden.

Von zwei konjugierten Büscheln besteht immer jeder aus den Orthogonalkreisen des andern. Das ist bei einem parabolischen Büschelpaar direkt ersichtlich; bei einem andern Paare beachte man, daß die Kreise des hyperbolischen Büschels den zum elliptischen gehörigen Kreis $(O)r$ rechtwinklig treffen, und ebenso die Kreise des elliptischen Büschels durch die zum hyperbolischen gehörigen Punktkreise gehen.

In jedem Punkte einer Ebene, in der zwei konjugierte Kreisbüschel liegen, schneiden sich rechtwinklig zwei Kreise, von denen der eine dem einen, der andere dem andern Büschel angehört. Den zum elliptischen gehörigen bestimmen die beiden Schnittpunkte dieses Büschels und der gegebene Punkt, der zum hyperbolischen gehörige ist dadurch bestimmt, daß er den Potenzkreis $(O)r$ rechtwinkelig treffen und durch den gegebenen Punkt gehen muß. Es kann auch jeder der beiden Kreise mit Hilfe des andern gefunden werden.

Wenn man eine Schar von konzentrischen Kreisen als einen hyperbolischen Büschel ansieht, so bilden die durch den gemeinsamen Mittelpunkt gehenden Geraden den konjugierten elliptischen Büschel der entarteten Orthogonalkreise, deren Zentrale die unendlich ferne Chordale der konzentrischen Kreise ist.

6. **Bestimmung eines Kreisbüschels durch zwei Potenzkreise.** In einer Ebene seien zwei beliebige Kreise $(O_1)r_1$ und $(O_2)r_2$ gegeben. Es sollen die Kreise bestimmt werden, denen beide als Potenzkreise zugeordnet sind. Die Forderung umfaßt drei verschiedene Möglichkeiten; es kann verlangt werden, daß die beiden gemeinsamen Potenzwerte der gesuchten Kreise in den Punkten O_1 und O_2 seien:

$$\begin{array}{lccc} \text{a)} & +r_1^2 & \text{und} & +r_2^2 \\ \text{b)} & -r_1^2 & \text{„} & -r_2^2 \\ \text{c)} & +r_1^2 & \text{„} & -r_2^2. \end{array}$$

Demnach sind zu bestimmen: entweder alle Kreise, die (O_1) und (O_2) rechtwinklig treffen, oder alle, von denen beide halbiert werden, oder endlich alle, die den ersten rechtwinklig treffen und den zweiten halbieren. In jedem Falle handelt es sich nur darum, einen Kreis zu finden, der die beiden Forderungen erfüllt. Sie werden dann immer und ausschließlich von den Kreisen des Büschels erfüllt, dessen Chordale $O_1 O_2$ ist, und dem dieser eine Kreis angehört.

a) Im ersten Falle bestimmen die beiden gegebenen Kreise (O_1) und (O_2) einfach den Büschel ihrer Orthogonalkreise.

b) Im zweiten Falle läßt sich nach Nr. 4 ein Kreis finden, der (O_1) und (O_2) halbiert. Man zieht von einem Punkte ihrer Chordale aus durch O_1 und O_2 je eine Gerade und bestimmt den Kreis, auf dem die Endpunkte der entstehenden beiden Durchmesser liegen. Der Büschel der halbierenden Kreise ist immer elliptisch, da alle in den beiden Punkten O_1 und O_2 ihrer Chordale negative Potenz haben.

Statt einen Kreis des fraglichen Büschels zu konstruieren, kann man auch gleich seine Zentrale ermitteln. Nach einer Bemerkung am Schlusse von Nr. 2 ist für jeden Punkt A dieser Zentrale:

$$A O_1^2 - A O_2^2 = r_2^2 - r_1^2.$$

Daraus geht hervor, daß die Zentrale zur Chordale von (O_1) und (O_2) symmetrisch (in bezug auf das Mittellot der Strecke $O_1 O_2$) liegt. Man kann also in gewöhnlicher Weise die Chordale der beiden gegebenen Kreise bestimmen und sie parallel zu sich selbst in die symmetrische Lage verschieben. Unmittelbar wird sie endlich erhalten, wenn man die Kreise $(O_1)r_2$ und $(O_2)r_1$ zeichnet und zu ihnen die Chordale konstruiert.

Zuweilen ist die Zentrale der halbierenden Kreise auch als die zweite oder Gegenchordale der beiden gegebenen Kreise bezeichnet worden.

Wenn unter den zwei gegebenen Kreisen ein Punktkreis ist, so ist nur zu beachten, daß ein Kreis, der durch einen Punkt geht, mit gleichem Rechte als Orthogonalkreis und als halbierender Kreis des Punktes angesehen werden darf.

c) Im dritten Falle erhält man einen Kreis, der (O_1) rechtwinklig trifft und (O_2) halbiert, durch folgende Überlegung. Es sei O irgendein Punkt, der nicht auf der Geraden $O_1 O_2$ liegt. Dann kann man die Zentrale der Kreise bestimmen, die (O_1) rechtwinklig treffen und durch O gehen; ebenso die Zentrale der Kreise, die (O_2) halbieren und durch O gehen. Schneiden sich die beiden Zentralen in A, so ist $(A)O$ ein Kreis, der (O_1) rechtwinklig trifft und (O_2) halbiert. Die Zentrale des Büschels, zu dem (A) gehört, ist das durch A gehende Lot von $O_1 O_2$. Der Büschel ist wieder elliptisch, da seine Kreise in dem der Chordale angehörenden Punkte O_2 negative Potenz haben.

Nach der am Schlusse von Nr. 2 gemachten Bemerkung ist für alle Punkte A der Zentrale des fraglichen Büschels:

$$A O_1^2 - A O_2^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Symmetrisch mit ihm liegt ein zweiter Büschel, dessen Kreise (O_1) halbieren und (O_2) rechtwinklig treffen.

Wenn zwei konzentrische Potenzkreise gegeben sind, so gilt für alle drei Fälle die Bemerkung, daß sie von den durch ihren gemeinsamen Mittelpunkt gehenden Geraden zugleich rechtwinklig getroffen und halbiert werden.

7. **Die Potenzkreise eines elliptischen Büschels.** Nach den Ausführungen der vorhergehenden Nummer ist es möglich, die Zentrale eines elliptischen Kreisbüschels mit seinen sämtlichen Potenzkreisen zu verknüpfen. Diese Potenzkreise zerfallen in äußere und innere. Die äußeren sind die Orthogonalkreise des Büschels; sie bilden den konjugierten hyperbolischen Büschel, dessen Chordale die Zentrale des elliptischen ist.

Die inneren sind die Diametralkreise des gegebenen elliptischen Büschels; sie bilden keinen Büschel. Der größte von ihnen ist zugleich der kleinste Büschelkreis. Aus diesem größten erhält man die übrigen, wenn man in ihm alle zur Zentrale des Büschels parallelen Sehnen zieht und sie zu Durchmessern von Kreisen macht. Die so erhaltene Schar von Kreisen trägt keinen besonderen Namen. Da aber alle durch die Kreise des elliptischen Büschels halbiert werden, so ist die Zentrale des Büschels die Gegenchordale für je zwei von ihnen oder die gemeinsame Gegenchordale der ganzen Schar. Auch umfaßt andrerseits die Schar alle Kreise, zu denen diese Gegenchordale gehört, da die Büschelkreise in jedem äußeren Punkte ihrer Chordale eine positive Potenz haben. Demnach bildet die in Rede stehende Kreisschar ein Gegenstück zu einem Kreisbüschel.

Man bemerkt, daß man auch in den Fällen b) und c) der vorhergehenden Nummer zu den zwei Potenzkreisen, die einen elliptischen Büschel bestimmen, beliebig viele Potenzkreise hinzufügen kann, die demselben Büschel zugeordnet sind, indem man zunächst den kleinsten Büschelkreis bestimmt und ihn zur Konstruktion von weiteren Potenzkreisen benutzt.

8. **Bestimmung eines Kreises durch drei Potenzkreise.** In einer Ebene seien drei Kreise $(O_1)r_1$, $(O_2)r_2$, $(O_3)r_3$ gegeben; es soll ein vierter Kreis gefunden werden, dem alle drei als Potenzkreise zugeordnet sind. Die Forderung kann in vierfachem Sinne verstanden werden, nämlich so, daß der gesuchte Kreis in den Punkten O_1, O_2, O_3 der Reihe nach die folgenden Potenzen haben soll:

a) $+r_1^2, \quad +r_2^2, \quad +r_3^2$

b) $-r_1^2, \quad -r_2^2, \quad -r_3^2$

c) $+r_1^2, \quad +r_2^2, \quad -r_3^2$

d) $+r_1^2, \quad -r_2^2, \quad -r_3^2.$

Zunächst soll vorausgesetzt werden, daß O_1, O_2, O_3 nicht in gerader Linie liegen. Die drei gegebenen Kreise können dann nicht

Potenzkreise eines Büschels sein und daher auch nicht Potenzkreise von zwei verschiedenen Kreisen. Denn sobald sie zwei verschiedenen zugeordnet wären, würden sie auch allen Kreisen des Büschels zugeordnet sein, dem die beiden angehörten.

a) Einen Kreis, der die drei gegebenen Kreise rechtwinklig trifft, gibt es nach Nr. 4 immer, wenn die drei einen äußeren, dagegen nicht, wenn sie einen inneren Chordalpunkt haben. Einen inneren haben sie aber dann und nur dann, wenn sie ein inneres Kreisbogendreieck bilden. Dem Bogendreieck ist ein Sehnendreieck zugeordnet; in diesem sind die drei Chordalen Ecktransversalen, die in das Innere des Dreiecks eintreten, weshalb sie sich auch innerhalb des Dreiecks schneiden. Wenn es keinen Punkt gibt, der innerhalb aller drei Kreise liegt, so können sie auch keinen inneren Chordalpunkt haben. Schneiden sich die drei Kreise in einem Punkte, so stellt dieser ihren entarteten Orthogonalkreis dar.

b) Im zweiten Falle bilden nach Nr. 6 die Kreise, die (O_1) und (O_2) halbieren, einen Büschel, der stets elliptisch ist. Daher ist jeder Punkt der Zentrale dieses Büschels Mittelpunkt eines Kreises, der die beiden genannten halbiert. Genau dasselbe gilt von den Kreisen, die (O_1) und (O_3) halbieren. Die Zentralen der beiden elliptischen Büschel schneiden sich stets. Beschreibt man um ihren Schnittpunkt den Kreis, der (O_1) halbiert, so werden durch ihn auch (O_2) und (O_3) halbiert. Die Zentrale des durch die beiden letzten Potenzkreise bestimmten (elliptischen) Büschels geht somit auch durch den Schnittpunkt der beiden zuerst eingeführten Zentralen.

Um den Kreis zu erhalten, der durch die gegebenen Punkte A, B geht und den gegebenen Kreis (O) halbiert, könnte man hiernach A oder B als Punktkreis ansehen und die Gegenchordale zu (O) und dem Punktkreise ermitteln. Man erhält aber eine einfachere Lösung nach Nr. 4, indem man durch A und B irgendeinen Kreis legt und die zu ihm und (O) gehörende Chordale zeichnet. Wird diese Chordale von der Geraden AB in C getroffen, so schneide die Gerade OC den Kreis (O) in D und E. Dann geht der verlangte Kreis durch A, B, D, E.

c) Im dritten Falle gibt es einen elliptischen Büschel von Kreisen, die (O_3) halbieren und (O_1) rechtwinklig treffen, sowie einen zweiten elliptischen Büschel, dessen Kreise (O_3) halbieren und (O_2) rechtwinklig schneiden. Die zwei Büschel haben notwendig einen Kreis gemein, der nun auch Orthogonalkreis von (O_1) und (O_2) ist. In seinem Mittelpunkte schneiden sich also die Zentralen der drei Büschel, denen die gegebenen Potenzkreise zu je zweien zugeordnet sind.

d) Im vierten Falle sind wieder alle drei Büschel, die durch je zwei der gegebenen Potenzkreise bestimmt werden, elliptisch. Sie haben also auch einen Kreis gemein, durch dessen Mittelpunkt dann ihre drei Zentralen gehen.

Liegen die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise auf einer Geraden, so sind die Zentralen der ihnen zugeordneten drei Büschel entweder drei verschiedene Lote der Geraden, oder alle drei fallen in einem Lote zusammen. Im ersten Falle gibt es keinen eigentlichen Kreis, zu dessen Potenzkreisen die drei gegebenen Kreise gehören; im zweiten sind diese drei Potenzkreise eines Büschels, dessen Zentrale das gemeinsame Lot ist.

Das Ergebnis kann in dem Satze zusammengefaßt werden, daß drei vorgeschriebene Potenzkreise entweder einem ganzen Büschel oder nur einem Kreise zugeordnet sind, (der auch in einen Punkt oder in eine Gerade ausarten kann); wenn die drei jedoch einen inneren Chordalpunkt haben, so gibt es keinen Kreis, an dem sie als äußere Potenzkreise auftreten. Nach Nr. 4 bestimmen umgekehrt drei gegebene Kreise, die nicht selbst zu einem Büschel gehören, stets einen und nur einen gemeinsamen Potenzkreis, dessen Mittelpunkt ihr Chordalpunkt ist.

Der vorstehende Doppelsatz läßt sich auf Grund folgender Bemerkung in eine sehr übersichtliche Form bringen. Aus drei gegebenen Kreisen lassen sich immer zwei Paare bilden, die einen Kreis gemein haben. Jedes Paar bestimmt sowohl einen Kreisbüschel, dem es selbst angehört, als auch einen Büschel, dem es als ein Paar von Potenzkreisen zugeordnet ist. Man kann also den Satz aussprechen:

Zwei Kreisbüschel mit einem gemeinsamen Büschelkreis haben immer einen gemeinsamen Potenzkreis; auch umgekehrt haben zwei Büschel mit einem gemeinsamen Potenzkreise immer einen gemeinsamen Büschelkreis, ausgenommen den Fall, daß der gemeinsame Potenzkreis ein Orthogonalkreis ist und die Zentralen der beiden Büschel sich innerhalb dieses Kreises schneiden.

9. **Kreisbündel.** Durch drei Potenzkreise kann nach Nr. 8 ein einzelner Kreis bestimmt werden; zwei gegebene Potenzkreise bestimmen nach Nr. 6 einen Büschel von Kreisen. Ist nur ein Potenzkreis $(O)r$ gegeben, so erweitert sich die Menge von Kreisen, denen er zugeordnet ist, zu einem sogenannten Bündel. Demnach umfaßt ein Kreisbündel sämtliche Kreise einer Ebene, die in einem Punkte dieselbe Potenz haben. Ist diese gleich $+ r^2$, so besteht das Bündel aus den Orthogonalkreisen von $(O)r$, heißt hyperbolisch und enthält als Grenzformen einerseits die Punkte der Peripherie von $(O)r$, andrerseits den durch O gehenden Strahlenbüschel. Wenn die Potenz gleich $- r^2$ ist, so nennt man das Bündel elliptisch; seine Kreise halbieren dann $(O)r$, und dieser Potenzkreis gehört selbst als kleinster Kreis dem Bündel an. Wird die gemeinsame Potenz in O gleich null, so heißt das Bündel parabolisch und umfaßt die durch den Punkt O gehenden Kreise, denen dann auch dieser Punkt selbst zugerechnet

wird. Auch in den beiden letzten Bündeln ist der Strahlenbüschel mit dem Schnittpunkt O enthalten.

Die Bündelkreise, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Geraden liegen, bilden nach Nr. 5 stets einen Kreisbüschel. In einem hyperbolischen Bündel sind alle drei Arten von Büscheln enthalten. Man gewinnt aus ihm einen hyperbolischen, elliptischen oder parabolischen Büschel, je nachdem man als Zentrale eine Gerade wählt, die den Potenzkreis des Bündels schneidet, nicht trifft oder berührt. Das elliptische Bündel enthält dagegen nur elliptische Büschel. Auch das parabolische Bündel liefert elliptische Büschel, es sei denn, daß die vorgeschriebene Zentrale durch den Punkt O geht, in welchem Falle sich ein parabolischer Büschel ergibt. Die Gesamtheit der Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, darf (im uneigentlichen Sinne) als ein hyperbolisches Bündel angesehen werden, dessen entarteter Potenzkreis die Gerade ist.

Wenn irgend zwei Kreise zu einem Bündel gehören, so ist der ganze Büschel, den sie bestimmen, in dem Bündel enthalten, und das gilt auch von einem Kreise und einer Geraden, sowie von zwei Geraden.

Nach Nr. 6 kann man den Satz aussprechen: Zwei Kreisbündel in derselben Ebene haben immer einen Kreisbüschel gemein.

Dem Doppelsatz, der am Schlusse von Nr. 8 besprochen ist, kann man auch unter Anwendung des hier neu eingeführten Begriffes wieder zwei verschiedene Formen geben, wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, daß nur von Kreisen in derselben Ebene die Rede ist. In der ersten Form lautet der Satz:

Drei Kreise, die nicht zu einem Büschel gehören, bestimmen eindeutig ein Bündel, in dem sie enthalten sind; und: Drei Kreisbündel, die nicht einen Büschel gemein haben, enthalten e i n e n gemeinsamen Kreis, ausgenommen drei hyperbolische Bündel, deren Potenzkreise einen inneren (oder bei Entartung keinen) Chordalpunkt haben.

In der zweiten Form ergibt sich der folgende Wortlaut für denselben Satz:

Zwei Kreisbüschel, die einen Kreis gemein haben, gehören stets zu demselben Bündel; und: Zwei Kreisbüschel, die zu demselben eigentlichen Bündel gehören, haben stets e i n e n Kreis gemein, ausgenommen den Fall, daß das Bündel hyperbolisch ist, und die Zentralen der beiden Büschel sich innerhalb seines Potenzkreises schneiden. Auch zwei Büschel mit gemeinsamer Zentrale, die also zu einem uneigentlichen Bündel gehören, haben e i n e n Kreis gemein, nur nicht zwei hyperbolische Büschel, deren kleinste Orthogonalkreise sich schneiden.

10. **Bemerkungen.** Es wäre möglich gewesen, den vorstehenden Entwickelungen durch frühere Einführung des Kreisbündels eine

knappere Form zu geben. Wir sind aber der Ansicht, daß dadurch der ganze Abschnitt an Brauchbarkeit für den Unterricht verloren hätte. Auch mußte bei der Darstellung mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß nur ein kleinerer oder größerer Teil der Potenzlehre im Unterricht behandelt werden soll, was gewiß oft der Fall sein wird. Bei der hier bevorzugten Darstellung bietet der Inhalt der letzten Nummer Gelegenheit zu einer Übung in der Umgestaltung von Sätzen, deren Inhalt in anderer Form schon bekannt geworden ist. Niemand wird daran denken, mit den verschiedenen Formen das Gedächtnis der Schüler zu belasten.

Aufgaben zu diesem Abschnitt der Kreislehre findet man in größerer Zahl in dem Lehrbuche von A. Milinowski: „Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen", I. Teil (Leipzig, 1881).

§ 23. Inversion in der Ebene.

1. **Paare von inversen Punkten.** In der Ebene eines Kreises $(O)r$ sei A ein beliebiger Punkt. Auf dem Halbstrahle OA liege ein zweiter Punkt A' so, daß $OA \cdot OA' = r^2$ ist. Von den beiden Punkten A und A', die nichts anderes sind als zwei konjugierte Pole auf einem Kreisdurchmesser, heißt jeder die hyperbolische Inversion oder das hyperbolisch inverse Bild des andern. Wenn man von Inversion spricht, ohne eine nähere Angabe zu machen, so ist immer die hyperbolische gemeint. Sie wird zuweilen auch noch als Abbildung nach reziproken Radien bezeichnet.

Zwei Punkte A und A'' auf einem Durchmesser des Kreises (O) heißen elliptisch invers, wenn $OA \cdot OA'' = -r^2$ ist. Die demselben Punkte A zugeordneten Bildpunkte A', A'' liegen symmetrisch zum Punkte O.

In beiden Inversionen heißt (O) Grundkreis, Inversionskreis oder invertierender Kreis; der Punkt O Mittelpunkt der Inversion oder auch Inversionspunkt; r ist der Radius und $\pm r^2$ ist die Potenz der Inversion.

Man kann auch eine parabolische Inversion mit der Potenz null zulassen, indem man (O) zum Punktkreise werden läßt. Dadurch wird O zu jedem Punkte der Ebene invers.

Zu dem gegebenen Punkte A läßt sich der hyperbolisch inverse Punkt A' am Grundkreise (O) immer durch folgende einfache Konstruktion bestimmen (vgl. S. 379). Man zieht die Gerade OA, die (O) in B und C treffe. Eine zweite Gerade durch A schneide (O) in D und E. Der Kreis $(B)D$ treffe (O) zum zweiten Male in F. Dann geht EF durch A'. Wenn A um mehr als $^r/_2$ von O entfernt ist, so läßt sich A' auch bequem durch Mascheronis Zirkelinversion (§ 9, Nr. 4) bestimmen.

Von den beiden Punkten A und A' liegt der eine innerhalb, der andere außerhalb des Inversionskreises, oder es fallen beide auf diesem Kreise zusammen. Dasselbe gilt von A und A'', nur daß sie auch auf dem Grundkreise nicht zusammenfallen, sondern die beiden Endpunkte eines Durchmessers sind. Der Punkt O ist zu allen unendlich fernen Punkten der Kreisebene invers. Man übersieht die Lage, die zwei hyperbolisch inverse Punkte auf einem von O ausgehenden Halbstrahle zueinander haben, am leichtesten, wenn man beachtet, daß die Berührungssehne der von dem äußeren Punkte an den Inversionskreis gezogenen Tangenten (die Polare des äußeren Punktes) immer durch den inneren Punkt geht. Denkt man sich O als den Brennpunkt eines sphärischen Hohlspiegels von der Brennweite r (also dem Krümmungsradius $2r$), so ist auf der Achse des Spiegels jeder der beiden Punkte A und A' das Spiegelbild des andern.

2. **Inverse Figuren.** Wenn ein Punkt in der Ebene des Inversionskreises eine Figur beschreibt, so durchläuft der zu ihm inverse Punkt die zugeordnete inverse Figur. Jede der beiden Figuren kann als die inverse Abbildung der andern betrachtet werden. Man sagt auch, es bestehe Inversion zwischen den beiden; denkt man sich die Inversion auf alle Punkte der Ebene ausgedehnt, so wird jede von beiden in die andere invertiert.

Besteht die Figur aus Linien, die einen Punkt gemein haben, so ist dessen Inversion ein gemeinsamer Punkt der invertierten Linien.

Die elliptische Inversion einer Figur wird erhalten, indem man die hyperbolische vom Inversionspunkte aus nach der Zahl -1 ähnlich abbildet.

Der Grundkreis wird hyperbolisch und elliptisch auf sich selbst abgebildet, doch ist hyperbolisch jeder Kreispunkt mit sich selbst invers, elliptisch aber mit seinem Gegenpunkte. Der Mittelpunkt des Grundkreises ist das inverse Bild der unendlich fernen Geraden.

3. **Kreise und gerade Linien, die zu sich selbst invers sind.** Der Grundkreis (O) einer hyperbolischen Inversion ist Potenzkreis (§ 22 Nr. 1) zu jedem Kreise (M), von dem er rechtwinklig getroffen wird. Daher besteht (M) aus Paaren von inversen Punkten. Dasselbe gilt von jedem Kreise, der den Grundkreis einer elliptischen Inversion halbiert.

Bezeichnet man das dem Grundkreise zugeordnete und mit der Inversion selbst gleichnamige Kreisbündel (§ 22 Nr. 9) als Inversionsbündel, so kann man beide Aussagen in die eine zusammenfassen:

Bei jeder Inversion werden alle Kreise des Inversionsbündels auf sich selbst abgebildet.

Der Grundkreis einer elliptischen Inversion gehört selbst seinem eigenen Bündel an und wird daher auch nach Art seiner Bündelkreise in sich selbst invertiert. Dagegen gehört der Grundkreis einer hyperbolischen Inversion nicht zu seinem Bündel; er besteht aber aus den Punktkreisen seines Bündels, und seine Punkte werden als solche in sich selbst invertiert.

Man bemerkt leicht, daß jeder Kreis, der durch irgend zwei (voneinander verschiedene) inverse Punkte geht, immer zum Inversionsbündel gehört.

Im Inversionsbündel ist stets auch der durch O gehende Strahlenbüschel enthalten; seine Geraden sind die Grenzformen der Bündelkreise und werden wie diese in sich selbst invertiert.

Während die Kreise eines Inversionsbündels in sich selbst abgebildet werden, gehen ihre Mittelpunkte nicht in sich selbst über. Die im gewöhnlichen Sinne verstandenen Mittelpunkte der Bündelkreise sollen als ihre natürlichen, die durch Inversion aus diesen erhaltenen Punkte dagegen als ihre inversen Mittelpunkte bezeichnet werden. Wenn der Kreis (M) zum Bündel einer hyperbolischen Inversion gehört und deren Grundkreis (O) in A und B trifft, so liegt sein inverser Mittelpunkt M' auf der Schnittsehne AB, was unmittelbar dem rechtwinkligen Dreieck OAM entnommen werden kann. Gehört aber der Kreis (M) zum Bündel einer elliptischen Inversion und schneidet er deren Grundkreis (O) in A, so treffe die in A an (M) gelegte Tangente die Gerade OM in M''. Dann ist M'' der inverse Mittelpunkt von (M), wie sich aus dem rechtwinkligen Dreieck MAM'' ergibt. Für jeden Bündelkreis ist also die hyperbolisch inverse Mitte ein innerer, die elliptisch inverse ein äußerer Punkt.

Eine durch den Inversionspunkt O gehende Gerade g wird durch O in zwei Halbstrahlen zerlegt. Durchläuft A einen der beiden Halbstrahlen, so durchläuft sein hyperbolisches Bild A' denselben Halbstrahl in entgegengesetzter Richtung und trifft auf dem Grundkreise mit A zusammen. Das elliptische Bild A'' dagegen durchläuft den andern Halbstrahl von g, bewegt sich in derselben Richtung wie A und trifft zugleich mit A, aber als dessen Gegenpunkt, auf dem Grundkreise ein. Die hyperbolische Inversion einer Strecke OA ist ein von A' ausgehender Halbstrahl, die elliptische ebenso ein Halbstrahl aus A''. Wenn eine auf g liegende Strecke AB den Punkt O nicht enthält, so sind die Bildstrecken $A'B'$ und $A''B''$ endlich. Liegt aber O zwischen A und B, so wird die Strecke AB in zwei Halbstrahlen aus A' und B' oder aus A'' und B'' invertiert.

Es seien A, B, C irgend drei Punkte auf g, von denen zunächst keiner mit O zusammenfallen soll. Sind A', B', C' ihre hyperbolischen Bilder, so ist immer:

$$\left.\begin{array}{ll} AC = AO + OC, & A'C' = A'O + OC' \\ CB = CO + OB, & C'B' = C'O + OB' \\ \multicolumn{2}{l}{OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = r^2} \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Daraus ergibt sich die Beziehung:

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{OA'}{OB'}. \qquad (2)$$

Dieselbe Gleichung erhält man, wenn man statt der hyperbolischen Bildpunkte die elliptischen einsetzt und dem entsprechend auch r^2 durch $-r^2$ ersetzt. Läßt man einen der Punkte A, B, C mit O zusammenfallen, so wird sein Bildpunkt der unendlich ferne Punkt von g. Die Gleichung (2) nimmt dann eine einfachere Form an, in der sie leicht unmittelbar aus (1) bestätigt werden kann. Demnach ist (2) für jede beliebige Lage von A, B, C auf g gültig.

Sind A, B, C, D irgend vier Punkte auf g, so besteht neben (2) noch die entsprechende Gleichung für den Punkt D:

$$\frac{A'D'}{D'B'} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{OA'}{OB'}. \tag{3}$$

Ans (2) und (3) folgt aber:

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Das Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer durch den Inversionspunkt gehenden Geraden wird also durch (hyperbolische und elliptische) Inversion nicht geändert.

Hiernach werden vier harmonische Punkte auf g hyperbolisch und elliptisch stets wieder in vier harmonische invertiert. Sind insbesondere die Punkte A, B, C, O harmonisch, so wird das Bild von C die Mitte zwischen den Bildpunkten von A und B. Daher heißt dann C die inverse Mitte zwischen A und B. Wenn O zwischen A und B liegt, so fällt der inverse Mittelpunkt außerhalb der Strecke AB.

4. **Inversion zwischen einem Kreise und einer Geraden.** Wir beweisen an erster Stelle den folgenden Satz:

Durch hyperbolische Inversion wird jeder Kreis, der durch den Mittelpunkt des Grundkreises geht, auf die Chordale der beiden Kreise abgebildet.

Es sei $(O)r$ der Grundkreis und (M) ein durch O gehender Kreis. Zunächst werde angenommen, daß die beiden sich in A und B schneiden. Ein von O ausgehender Halbstrahl (Inversionsstrahl) treffe die Gerade AB in C und den Kreis (M) zum zweiten Male in D. Man zieht noch OA, OB, AD. Liegt nun C zwischen A und B, so ist $\sphericalangle\, ODA = OBA = OAB$; also berührt der durch A, C, D gelegte Kreis OA im Punkte A nach der Umkehrung des Satzes vom Sehnen-Tangentenwinkel. Dieser Kreis gehört also zum Inversionsbündel, und auf ihm sind die Punkte C und D invers. Liegt C nicht zwischen A und B, so findet man, vom Sehnenviereck $OBAD$ ausgehend, daß $\sphericalangle\, ADC = OBA = OAB$ und somit $\sphericalangle\, ADC$ gleich dem Scheitelwinkel von OAB ist.

Man kann auch so verfahren, daß man den Durchmesser OE des Kreises (M) zieht, der AB in F trifft, und D mit E verbindet. Aus den ähnlichen Dreiecken ODE und OFC ergibt sich dann, daß $OC \cdot OD = OE \cdot OF = OA^2$ ist.

Wenn (O) und (M) sich in A berühren, während zugleich (M) durch O geht, so ist sehr leicht zu bemerken, daß die gemeinsame Tangente in A das inverse Bild von (M) ist.

Haben (O) und (M) keinen Punkt gemein, so legt man durch den Punkt O einen Hilfskreis, der (O) in A und B und (M) zum zweiten Male in C trifft. Dann ist die Gerade AB die Inversion des Hilfskreises. Trifft also OC diese Gerade in D, so ist D invers zu C. Aus der Konstruktion des Punktes D geht aber unmittelbar hervor, daß er stets der Chordale von (O) und (M) angehört (§ 22, 3).

Man kann den vorstehenden Satz auch rechnerisch nachweisen, was allerdings dem Geiste dieses Teiles der Kreislehre weniger entspricht. Ist c die Chordale von $(O)r$ und (M), so treffe ein aus O gezogener Halbstrahl (M) in A und c in A'. Da in A' beide Kreise dieselbe Potenz haben, so ist:

$$A'A \cdot A'O = A'O^2 - r^2$$

oder:

$$A'O(A'O - A'A) = r^2.$$

Nun ist immer:

$$A'O + OA = A'A,$$

also:

$$A'O - A'A = AO$$

und somit:

$$A'O \cdot AO = r^2,$$

also auch:

$$OA \cdot OA' = r^2.$$

Zuweilen begnügt man sich in dem Falle, daß (O) und (M) keinen gemeinsamen Punkt haben, mit der Tatsache allein, daß die Inversion von (M) ein Lot der Zentrale OM ist. Man zieht in (M) den Durchmesser OA, invertiert A nach A' und errichtet in A' die Senkrechte auf OA'. Trifft nun ein Halbstrahl aus O diese Senkrechte in B' und den Kreis (M) in B, so schließt man aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OAB und $OB'A'$, daß B und B' invers sind. Das Verfahren ist weniger zu empfehlen, da es den geometrischen Zusammenhang nicht vollständig aufklärt.

Wenn der gegebene Kreis (M) vom Punkte O seiner Peripherie aus invertiert werden soll, so hat man hiernach nur in bekannter Weise die Chordale von (M) und $(O)r$ zu zeichnen oder diese noch von O aus nach der Zahl -1 abzubilden, je nachdem die hyperbolische oder die elliptische Inversion verlangt wird. Bei abnehmendem r ist die gemeinsame Grenze beider Inversionen die in O an (M) gezogene Tangente. Daraufhin kann man einen Kreis und eine ihn berührende Gerade als parabolisch invers bezeichnen.

Ist der Grundkreis (O) einer hyperbolischen Inversion und eine nicht durch O gehende Gerade c gegeben, so gibt es einen Kreisbüschel, dem sie beide angehören, und zwar c als Chordale oder, wenn man will, als Grenzform der Büschelkreise. In dem Büschel gibt es immer einen und nur einen Kreis, der durch O geht; er ist hyperbolisch invers zu c. Demnach wird j e d e nicht durch O gehende Gerade (hyperbolisch und elliptisch) in einen Kreis invertiert, der durch O geht. Wenn die Gerade c den Kreis (O) schneidet oder berührt, d. h. wenn die beiden einen elliptischen oder parabolischen Büschel bestimmen, so ist (M) sehr einfach zu konstruieren. Haben die beiden keinen Punkt gemein, so bestimmen sie einen hyperbolischen Büschel, und man kann die hyperbolische Inversion von c konstruieren, indem man um einen Punkt von c den Orthogonalkreis von (O) beschreibt, der ein Potenzkreis des Büschels ist, und dann durch O den Kreis legt, der diesen Potenzkreis ebenfalls rechtwinklig trifft.

Angemessener und einfacher ist aber folgende Konstruktion. Man zeichnet einen Hilfskreis, der durch O geht, den Kreis (O) in A und B, die Gerade c in C und D schneidet. Dieser Hilfskreis wird in die Gerade AB invertiert. Wird also die Gerade AB von OC in C' und von OD in D' getroffen, so ist der durch die drei Punkte O, C', D' gelegte Kreis die hyperbolische Inversion von c, aus der die elliptische in bekannter Weise hervorgeht.

Man kann auch in jedem Falle direkt den Mittelpunkt M des mit der Geraden c hyperbolisch inversen Kreises nach folgender Überlegung bestimmen. Das von O auf c gefällte Lot treffe (M) in A und c in A'. Dann sind auf diesem Lote die vier Punkte: O, A, M, O' harmonisch, wenn unter O' der unendlichferne Punkt des Lotes verstanden wird. Diese vier Punkte gehen durch die Inversion in vier wiederum harmonische (Nr. 3) Punkte: O', A', M', O über, falls M' mit M invers ist. Demnach ist A' die Mitte von OM'. Man findet also M', indem man das von O auf c gefällte Lot um sich selbst verlängert, und M, indem man M' invertiert.

Nach den vorstehenden Entwickelungen ist jeder natürliche Kreis (M), der durch den Inversionspunkt O geht, als eine inverse Gerade zu bezeichnen. Umgekehrt wird jede natürliche Gerade c, die nicht durch O geht, zu einem inversen Kreise (vgl. hierzu § 3, 2). Der zugehörige inverse Mittelpunkt wird immer durch c auf den Inversionspunkt O gespiegelt; die inversen Radien liefern die Kreise eines elliptischen Büschels, die durch O und M' gehen und deren Zentrale c ist. Die Gesamtheit aller Geraden, die in der Inversionsebene liegen, stellt ein inverses parabolisches Kreisbündel dar.

Schließlich seien noch der Kreis (M) und die Gerade c in derselben Ebene beliebig gegeben, und es werde nach den zwischen beiden etwa möglichen Inversionen gefragt. Trifft das durch M gehende Lot von c den Kreis in O_1 und O_2, so können überhaupt nur diese zwei Punkte als Inversionspunkte in Betracht kommen.

Wenn nun (M) und c sich schneiden, so gibt es zwischen ihnen zwei hyperbolische Inversionen, deren Grundkreise (O_1) und (O_2) durch die Schnittpunkte gehen, dem durch (M) und c bestimmten elliptischen Kreisbüschel angehören und sich rechtwinklig treffen.

Wenn aber (M) und c sich in O_2 berühren, so besteht zwischen ihnen eine hyperbolische Inversion, deren Grundkreis (O_1) die Gerade c auch in O_2 berührt. Die Inversion aus dem Punkte O_2 wird parabolisch.

Haben (M) und c keinen gemeinsamen Punkt, so treffe das von M auf c gefällte Lot diese Gerade in A, und es möge O_2 zwischen O_1 und A liegen. Dann sind (M) und c hyperbolisch invers aus O_1

und elliptisch aus O_2. Denn zunächst gibt es immer einen und nur einen Kreis (O_1), der mit (M) und c zu demselben (hyperbolischen) Büschel gehört. Er ist dadurch bestimmt, daß er jeden Potenzkreis des Büschels rechtwinklig schneidet, insbesondere auch den kleinsten Potenzkreis (A). Wenn aber (O_1) und (A) sich in B schneiden, so ist $(O_2)B$ der Grundkreis einer elliptischen Inversion zwischen (M) und c. Denn das Dreieck ABO_1 ist rechtwinklig, und überdies ist $O_1A \cdot O_1O_2 = O_1B^2$, also ist $O_2B \perp O_1A$ und somit auch $O_2A \cdot O_2O_1 = -O_2B^2$. Der Kreis (O_1) gehört zum Inversionsbündel von (O_2), und der Potenzkreis (A) gehört zugleich dem Inversionsbündel von (O_1) und dem von (O_2) an. Natürlich ist der Grundkreis (O_1) auch dadurch bestimmbar, daß er jeden Kreis senkrecht trifft, der durch die beiden inversen Punkte auf irgendeinem von O_1 aus gezogenen Halbstrahle geht; ebenso der Kreis (O_2) dadurch, daß er von jedem Kreise halbiert wird, der durch die beiden inversen Punkte auf einer durch O_2 gezogenen Geraden geht.

Man kann die vorstehenden Ergebnisse in anderer Form zusammenfassen, wenn man noch beachtet, daß, falls (M) und c einen hyperbolischen Kreisbüschel bestimmen, der Grundkreis (O_2) ihrer elliptischen Inversion zu den inneren Potenzkreisen des konjugierten Büschels gehört (§ 22, 7). Dann ergibt sich:

Jeder Kreis eines hyperbolischen Büschels wird durch den Büschelkreis, dessen Mittelpunkt er trifft, hyperbolisch in die Chordale des Büschels invertiert; zugleich elliptisch durch den Potenzkreis des konjugierten Büschels, dessen Mittelpunkt auf ihm liegt. Der Grundkreis der ersten Inversion gehört zum Bündel der zweiten.

Jeder Kreis eines elliptischen Büschels wird durch die beiden zueinander senkrechten Büschelkreise, deren Mittelpunkte er trifft, hyperbolisch in die Chordale des Büschels invertiert.

Jeder Kreis eines parabolischen Büschels wird durch den Büschelkreis, dessen Mittelpunkt er trifft, hyperbolisch in die Chordale des Büschels invertiert; zugleich parabolisch durch den Punktkreis des Büschels.

5. **Winkeltreue der inversen Abbildung.** Der durch Inversion einer Geraden erhaltene Kreis hat im Inversionspunkte O eine der Geraden selbst parallele Tangente. Demnach entstehen durch Inversion von parallelen Geraden immer Kreise, die sich in O berühren.

Invertiert man zwei Halbstrahlen, die von dem Punkte A der Inversionsebene ausgehen und hier den Winkel α bilden, so erhält man zwei Kreisbogen, die von dem zu A inversen Punkte ausgehen und sich zum zweiten Male in O treffen. In O haben sie zwei Halbtangenten, die zu den Schenkeln von α parallel und mit diesen gleich oder beide entgegengesetzt gerichtet sind. Also bilden die zwei Kreisbogen auch in dem zu A inversen Punkte den Winkel α miteinander. Ihr Winkelfeld kann man so definieren: Jeder Kreisbogen, der einen Punkt des einen Kreisschenkels mit einem Punkte des andern verbindet, den Punkt O nicht enthält, aber einem durch O gehenden Kreise angehört, liegt ganz in dem Felde. Das natürliche Feld des Winkels, den die beiden von A ausgehenden Halbstrahlen bilden, wird bei der Inversion auf das in der angegebenen Weise festgelegte Feld des Bogenwinkels abgebildet. Wenn der Inversionspunkt O außerhalb des Winkelfeldes der beiden Halbstrahlen liegt, so wird dies Feld auf das Innere eines konvexen Bogenzweiecks abgebildet; dagegen auf das Äußere eines nicht konvexen Bogenzweiecks, wenn O innerhalb des Feldes liegt. Geht ein Halbstrahl durch O, so wird das natürliche Winkelfeld in eine Halbebene mit Ausschluß eines Kreisabschnittes invertiert.

Die Inversion eines Dreiecks von einem äußeren Punkte aus ergibt ein winkeltreues Kreisbogendreieck. Liegt der Inversionspunkt innerhalb des Dreiecks, so erhält man das ebenfalls winkeltreue Außenfeld eines nichtkonvexen Bogendreiecks als inverse Abbildung. Legt man den Inversionspunkt auf eine Dreiecksseite, so wird das Dreieck auf eine Halbebene abgebildet unter Ausschluß einer Fläche, die aus einem Dreieck und zwei Kreisabschnitten besteht. Invertiert man endlich ein Dreieck von einer seiner Ecken aus, so ergibt sich eine leicht zu übersehende offene Figur, die nur zwei Ecken hat.

6. **Inversion zwischen zwei Kreisen.** Die aus der Inversion hervorgehenden Beziehungen zwischen zwei Kreisen beruhen auf folgenden Sätzen:

Das inverse Bild eines Kreises (M), der nicht durch den Inversionspunkt O geht, ist immer ein Kreis.

Stets ist der Inversionspunkt ein Ähnlichkeitspunkt des Kreises (M) und des inversen Bildkreises. Bei hyperbolischer Inversion ist der Punkt O der äußere oder der innere Ähnlichkeitspunkt, je nachdem er außerhalb oder innerhalb des Kreises (M) liegt; bei elliptischer dagegen umgekehrt der äußere oder der innere, je nachdem er innerhalb oder außerhalb (M) liegt.

Der durch hyperbolische Inversion des Kreises (M) erhaltene Bildkreis (N) gehört stets mit (M) und dem Inversionskreise (O) zu demselben Kreisbüschel.

Die beiden ersten Sätze ergeben sich leicht durch folgende Überlegung. Der Kreis (M) habe in O die Potenz $\pm p^2$, je nachdem O außerhalb oder innerhalb dieses Kreises liegt. Eine durch O gehende Gerade treffe (M) in A und B. Ist dann r der Radius des Inversionskreises und A' die hyperbolische Inversion von A, so hat man:

$$OA \cdot OB = \pm p^2$$
$$OA \cdot OA' = r^2,$$

also ist:

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{r^2}{\pm p^2}.$$

Demnach ist das inverse Bild A' von A zugleich das von O aus perspektiv ähnliche Bild von B. Wenn also der Punkt B den Kreis (M) durchläuft, so durchläuft A' den nach der Zahl $r^2/\pm p^2$ ähnlichen Kreis, und O ist äußerer oder innerer Ähnlichkeitspunkt, je nachdem diese Zahl positiv oder negativ ist. Bei elliptischer Inversion wird ebenso der zu A inverse Punkt A'' den nach der Zahl $-r^2/\pm p^2$ ähnlichen Kreis durchlaufen, und für den Ähnlichkeitspunkt O gilt wieder dieselbe Bemerkung.

Die beiden Bildpunkte M' und M'' von M sind die inversen Mittelpunkte der beiden Bildkreise. Der hyperbolisch inverse Mittelpunkt M' von (N) ist nichts anderes als der mit O harmonisch konjugierte Pol am Kreise (N).

Die zwischen zwei inversen Kreisen bestehende Ähnlichkeit führt zu einer sehr einfachen Ausführung der Inversion, wenn die Kreise (O) und (M) sich schneiden oder berühren. Denn ein gemeinsamer Punkt beider ist zu sich selbst oder zu seinem Gegenpunkte auf (O) invers. Man hat also nur den Kreis (M) vom Punkte O aus in der Weise perspektiv abzubilden, daß der Bildkreis einen gegebenen Punkt von (O) trifft, was leicht auszuführen ist. Wenn aber (M) und (O) keinen Punkt gemein haben, so kann man folgende Konstruktion anwenden. Man zieht durch O eine von OM verschiedene Gerade, die den zu invertierenden Kreis (M) in A und B trifft. Durch Inversion des Punktes A ergibt sich der Bildpunkt A' oder A''. Die durch den Bildpunkt parallel zu MB gezogene Gerade liefert in ihrem Schnittpunkte mit OM die Mitte des Bildkreises.

Für den Nachweis des dritten Satzes ist folgendes zu beachten. Invertiert man einen Kreis mit einer Tangente, so erhält man zwei sich berührende Kreise, von denen der eine durch O geht. Sind zwei Kreise gegeben, die sich beliebig schneiden, so kann man durch zwei von einem Schnittpunkte ausgehende Halbtangenten einen der Winkel festlegen, die sie miteinander bilden. Die zu ihnen inversen Halbtangenten sind Kreisbögen, bilden aber miteinander denselben Winkel. Man kann also sagen, daß die Winkeltreue der Inversion auch für zwei Kreise gilt, die sich schneiden.

Nun sei zu den beiden Kreisen (O) und (M) die Chordale gezeichnet und um einen ihrer äußeren Punkte der Orthogonalkreis zu beiden beschrieben. Wird dann hyperbolisch invertiert, so geht der zum Inversionsbündel gehörige Orthogonalkreis in sich selbst über; also verlangt die Winkeltreue, daß er auch den inversen Bildkreis (N) rechtwinklig treffe. Es gehört demnach (N) mit (O) und (M) zu demselben Büschel. Sind (O) und (M) konzentrisch, so wird der

Beweis hinfällig, doch ist unmittelbar ersichtlich, daß dann auch (N) mit den beiden Kreisen konzentrisch ist. Wenn (O) und (M) sich schneiden oder berühren, so würde auch schon die Bemerkung genügen, daß ein den beiden gemeinsamer Punkt in sich selbst invertiert wird, also auch auf dem inversen Bilde von (M) liegen muß.

Die elliptische Inversion des Kreises (M) kann in der Regel keinen von (M) verschiedenen Kreis des Büschels erzeugen, dem (O) und (M) angehören. Wird nämlich dieser Büschel von O aus nach der Zahl -1 ähnlich abgebildet, so entsteht ein neuer Büschel mit derselben Zentrale und paralleler Chordale. Zwei verschiedene Büschel haben aber nie mehr als einen Kreis gemein (vgl. § 22, 5). Wenn aber (O) und (M) konzentrisch sind, so bringt die elliptische Inversion denselben Kreis (N) hervor wie die hyperbolische. In der Tat ist die Chordale konzentrischer Kreise die unendlich ferne Gerade; sie wird vom gemeinsamen Mittelpunkte aus nach der Zahl -1 auf sich selbst abgebildet, daher kann auch die Abbildung des ganzen Büschels keinen neuen Büschel ergeben.

Es bleibt endlich noch zu untersuchen, welche Inversionen zwischen zwei beliebig gegebenen Kreisen (M) und (N) möglich sind. Man bemerkt von vornherein, daß als etwaige Inversionspunkte nur die Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise in Betracht kommen können, von denen der äußere mit A, der innere mit J bezeichnet werden soll. Ferner ist immer von A und von J aus höchstens je eine Inversion zwischen (M) und (N) möglich, da diese Kreise ihre beiden entgegengesetzt gleichen Abbildungszahlen eindeutig festlegen. Zwei konzentrische Kreise sind allerdings von ihrem gemeinsamen Mittelpunkte aus offenbar sowohl hyperbolisch als auch elliptisch invers, doch fallen hier eben auch A und J im Mittelpunkte selbst zusammen. Der Fall kann demnach bei der weiteren Betrachtung als erledigt ausgeschlossen werden. Noch ist zu beachten, daß eine beanspruchte hyperbolische Inversion zwischen (M) und (N) einen Grundkreis (A) oder (J) voraussetzt, der mit den beiden gegebenen Kreisen zu demselben Büschel gehört. Um die Darstellung zu vereinfachen, soll der eindeutig bestimmte Kreisbüschel, dem (M) und (N) angehören, mit (M, N) bezeichnet werden. Je nach der Lage der beiden gegebenen Kreise sind die folgenden Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: Die Kreise (M) und (N) schneiden sich in den beiden Punkten B und C. Dann gehören die Kreise $(A)B$ und $(J)B$ beide zum Büschel (M, N), und jeder von ihnen invertiert (M) und (N) hyperbolisch ineinander. Denn die hyperbolische Inversion von (M) durch den Grundkreis $(A)B$ ist äquivalent mit der perspektiven Abbildung des Kreises (M) aus dem Punkte A auf einen von (M) verschiedenen Kreis des Büschels (A, M). Aber der einzige durch die Punkte B und C gehende Kreis, auf den (M) von A aus perspektiv abgebildet werden kann, ist der Kreis (N). Genau dasselbe gilt für die hyperbolische Inversion von (M) durch den Grundkreis $(J)B$. In beiden Fällen kann (M) nicht zum Inversionsbündel gehören und daher auch nicht in sich selbst invertiert werden.

In dem Dreieck MBN wird die Seite MN innerlich durch J und äußerlich durch A nach dem Verhältnis der Seiten BM und BN geteilt. Demnach halbiert JB den Winkel MBN und AB dessen Nebenwinkel, d. h. die beiden Inversionskreise $(A)B$ und $(J)B$ schneiden sich rechtwinklig.

Zweiter Fall: Die Kreise (M) und (N) berühren sich. Ist dann J der Berührungspunkt, so gehört der Kreis $(A)J$ zum Büschel (M, N) und invertiert (M) und (N) hyperbolisch ineinander. Denn der einzige durch J gehende Kreis, auf den (M) von A aus perspektiv abgebildet werden kann, ist (N). Es gibt aber keinen Kreis (J), durch den (M) hyperbolisch oder elliptisch in den Kreis (N) invertiert werden könnte. Denn jede Inversion der genannten Art verwandelt (M) in eine gerade Linie (Nr. 4). Nun gehört aber zum Büschel (M, N) der Punktkreis J; es ist statthaft, diesen als Grundkreis einer parabolischen Inversion in Anspruch zu nehmen und zu sagen, (M) und (N) seien zueinander parabolisch invers. Denn der Punktkreis invertiert alle Punkte von (M) in einen Punkt J des Kreises (N) und umgekehrt. In demselben Sinne ist auch jeder Kreis mit jeder seiner Tangenten parabolisch invers (vgl. Nr. 4). Berühren sich die beiden gegebenen Kreise in A, so sind sie hyperbolisch invers am Grundkreise $(J)A$ und parabolisch am Punktkreise A.

Dritter Fall: Die Kreise (M) und (N) haben keinen gemeinsamen Punkt. Dann sei O der Schnittpunkt der Zentrale mit der Chordale der beiden Kreise oder die Mitte des Büschels (M, N) und (O) der kleinste Orthogonalkreis dieses Büschels. Der Kreis (O) treffe auf der einen Seite der Zentrale MN den Kreis (M) in B und den Kreis (N) in B'; ebenso auf der anderen Seite den Kreis (M) in C und den Kreis (N) in C'. Die vier Schnittpunkte B, B', C, C' bestimmen ein gleichschenkliges Trapez, und es gilt der Satz: Wenn von den beiden Kreisen (M) und (N) jeder außerhalb des andern liegt, so schneiden sich die Schenkel des Trapezes im äußern, seine beiden Diagonalen im inneren Ähnlichkeitspunkte der Kreise; liegt aber ein Kreis innerhalb des andern, so schneiden sich umgekehrt die Schenkel im inneren, die Diagonalen im äußeren Ähnlichkeitspunkte. Für den ersten Teil des Satzes zieht man zunächst die Kreisradien: MB, OB, OB', NB', ND', wobei D und D' die Punkte sind, in denen die Gerade BB' die Kreise (M) und (N) noch schneidet. Dann ist $MB \parallel ND'$, wie sich leicht aus gleichschenkligen Dreiecken entnehmen läßt; somit trifft BB' die Zentrale MN im äußeren Ähnlichkeitspunkte A, und dasselbe gilt von CC'. Ferner zieht man die Kreisradien: MB, OB, OC', NC', NE', wobei E und E' die Punkte sind, in denen die Gerade BC' die Kreise (M) und (N) noch schneidet. Dann ergibt sich wiederum aus gleichschenkligen Dreiecken, daß $MB \| NE'$ ist; also trifft BC' die Zentrale im inneren Ähnlichkeitspunkte J, und ebenso die Gerade $B'C$. In derselben Weise ist die zweite Hälfte des über das Trapez der Schnittpunkte des Orthogonalkreises (O) ausgesprochenen Satzes zu begründen. Aus dem Satze geht unmittelbar hervor, daß, unabhängig von den beiden möglichen Lagen der Kreise (M) und (N) zueinander, immer A und J zwei harmonisch konjugierte Pole am Kreise (O) sind. Daraus folgt weiter, daß der Kreis, der AJ zum Durchmesser hat, im Büschel (M, N) enthalten ist. Denn durch jeden Punkt der Geraden MN geht ein Kreis des Büschels und stets trifft er MN in zwei am Kreise (O) konjugierten Polen, weil er (O) rechtwinklig schneidet.

Liegt nun von den beiden Kreisen (M) und (N) jeder außerhalb des andern, so sind die beiden hyperbolisch invers an einem Grundkreise (A), der dadurch bestimmt ist, daß er zum Büschel (M, N) gehört, also den Kreis (O) rechtwinklig trifft. Denn die Inversion von (M) durch (A) führt den Punkt B in B' und C in C' über, weil (O) zum Inversionsbündel gehört. Die Inversion ist nun äquivalent mit einer perspektiven Abbildung des Kreises (M) vom Punkte A aus. Der einzige durch B' und C' gehende Kreis, auf den (M) von A aus perspektiv abgebildet werden kann, ist aber (N). Am Grundkreise (A) ist ferner der Kreis mit dem Durchmesser AJ invers zur Chordale des Büschels (M, N), da dieser Kreis im Büschel enthalten ist und durch den Inversionspunkt A geht (vgl. Nr. 4). Demnach sind J und O inverse Punkte an (A), und es ist $AJ \cdot AO = AS^2$, wenn (O) und (A) sich in S schneiden. Da außerdem ASO ein rechter Winkel ist, so folgt, daß SJ zu AO senkrecht ist. Der Kreis $(J)S$ wird demnach sowohl von (A) als auch von (O) halbiert; macht man ihn also zum Grundkreise einer elliptischen Inversion, so gehören (A) und (O) zum Inversionsbündel. Daher wird B nach C' und C nach B' invertiert. Weil aber auch die elliptische Inversion des Kreises (M) äquivalent ist mit einer perspektiven Abbildung von J aus, so invertiert $(J)S$ den Kreis (M) in den Kreis (N) und den Kreis mit dem Durchmesser AJ in die Chordale des Büschels (M, N).

Liegt der Kreis (M) innerhalb des Kreises (N), so kann genau dieselbe Überlegung angestellt werden, wobei nur die Punkte A und J die Rollen tauschen: A wird Mittelpunkt der elliptischen und J Mittelpunkt der hyperbolischen Inversion zwischen (M) und (N)

sowie zwischen der Chordale des Büschels (M, N) und dem Kreise, dessen Durchmesser AJ ist.

Im ganzen ergibt sich also, daß zwei Kreise in jeder Lage, die sie zueinander haben können, doppelt invers sind. Der Mittelpunkt jeder Inversion zwischen ihnen ist einer ihrer beiden Ähnlichkeitspunkte. Je nachdem es der äußere oder innere ist, bezeichnet man die Inversion selbst als äußere oder innere. Nennt man auch noch den Kreis, dessen Durchmesser die zwischen den beiden Ähnlichkeitspunkten liegende Strecke ist, den Ähnlichkeitskreis der beiden gegebenen Kreise, so kann man folgenden Satz aussprechen:

Zwischen zwei (eigentlichen) Kreisen derselben Ebene besteht immer eine äußere und eine innere Inversion. In jeder von diesen ist ihre Chordale invers zu ihrem Ähnlichkeitskreise. Mindestens eine der beiden Inversionen ist hyperbolisch. Der Grundkreis jeder hyperbolischen Inversion gehört mit den beiden Kreisen, die sie ineinander verwandelt, zu einem Büschel und ist zugleich in dem Bündel der zugeordneten zweiten Inversion zwischen denselben Kreisen enthalten.

Schneiden sich die beiden Kreise, so ist sowohl ihre äußere als auch ihre innere Inversion hyperbolisch. Berühren sie sich im inneren Ähnlichkeitspunkte, so ist ihre äußere Inversion hyperbolisch, ihre innere parabolisch; umgekehrt, wenn sie sich im äußeren Ähnlichkeitspunkte berühren. Liegt jeder Kreis außerhalb des andern, so ist ihre äußere Inversion hyperbolisch, die innere elliptisch; umgekehrt, wenn der eine Kreis innerhalb des andern liegt.

7. **Inversion eines Kreisbüschels in sich selbst.** Aus den beiden vorhergehenden Nummern folgt, daß ein gegebener Kreisbüschel immer von einem vorgeschriebenen Punkte P seiner Zentrale aus entweder hyperbolisch oder elliptisch ganz in sich selbst invertiert werden kann, wenn nur der zum Büschel gehörige Kreis (P) nicht ein Punktkreis ist.

Ist nämlich der gegebene Büschel elliptisch, so macht man den in ihm enthaltenen Kreis (P) zum Grundkreise einer hyperbolischen Inversion. Diese verwandelt jeden Büschelkreis (M) in einen Kreis (N), der ebenfalls in dem Büschel enthalten ist, weil (M) und (P) beide dazu gehören. Der Punkt P wird äußerer oder innerer Ähnlichkeitspunkt von (M) und (N), je nachdem er außerhalb oder innerhalb des Kreises (M) liegt. Fällt er aber auf (M) selbst, so entartet (N) in die Chordale des Büschels. Es können nicht zwei verschiedene Büschelkreise in denselben dritten invertiert werden, weil dann dieser dritte Kreis in ein und derselben Inversion zwei verschiedene Bildkreise hätte. Legt man P in die Mitte des Büschels, so wird der kleinste Büschelkreis zum Grundkreise einer elliptischen Inversion, die keinen Büschelkreis in einen andern, sondern jeden in sich selbst überführt.

Für einen parabolischen Büschel gilt genau dasselbe wie für den elliptischen, doch darf P nicht mit dem Mittelpunkte des Büschels zusammenfallen, weil dann von ihm aus kein Büschelkreis hyperbolisch oder elliptisch in einen andern oder in sich selbst invertiert werden könnte.

Wenn aber der gegebene Büschel hyperbolisch und (O) sein kleinster Orthogonalkreis ist, so muß man unterscheiden, ob der vorgeschriebene Punkt P außerhalb oder innerhalb des Kreises (O) liegt. Im ersten Falle ist auch hier nur zu wiederholen, was beim elliptischen Büschel gesagt wurde. Im zweiten Falle dagegen macht man den Kreis (P), der von (O) halbiert wird, zum Grundkreise einer elliptischen Inversion. Wenn diese den Büschelkreis (M) in den Kreis (N) verwandelt, so kann (N) auch durch eine hyperbolische Inversion von (M) erhalten werden, deren Grundkreis (Q) zum gegebenen Büschel gehört und den Grundkreis (P) der elliptischen Inversion halbiert. Demnach gehört (N) zum gegebenen Kreisbüschel und sind P, Q die beiden Ähnlichkeitspunkte von (M) und (N). Der Punkt P darf mit keinem der beiden Punktkreise des gegebenen Büschels zusammenfallen, da von ihnen aus der Büschel weder hyperbolisch noch elliptisch in sich selbst invertiert werden kann. Das geht schon aus dem Umstande hervor, daß durch die Punktkreise keiner von den eigentlichen Kreisen des Büschels geht, also auch von ihnen aus keiner mit der Chordale invers ist. Legt man den Punkt P in die Mitte O des Büschels, so ist (O) der Grundkreis einer elliptischen Inversion, die jeden Büschelkreis in den ihm gleichen auf der entgegengesetzten Seite der Chordale überführt, zugleich aber der Grundkreis einer hyperbolischen Inversion, die keinen Büschelkreis auf einen andern, aber jeden auf sich selbst abbildet.

Um innerhalb eines elliptischen oder parabolischen Büschels den zum gegebenen Kreise (M) von P aus inversen Kreis (N) zu finden, ersetzt man die Inversion in bekannter Weise durch eine perspektive Abbildung (Nr. 6). Gehört aber (M) zu einem hyperbolischen Büschel, dessen kleinster Orthogonalkreis (O) gegeben ist, so invertiert man einen der Schnittpunkte von (M) und (O) durch eine Gerade, die ihn mit P verbindet, indem man beachtet, daß (O) stets zum (hyperbolischen oder elliptischen) Inversionsbündel gehört, also in sich selbst invertiert wird. Durch den gefundenen inversen Punkt hat man nur noch den zum gegebenen Büschel gehörigen Kreis zu legen.

8. **Winkel, unter denen zwei Kreise sich schneiden.** Wie man den Winkel, den zwei gerade Linien miteinander bilden, dadurch eindeutig bestimmt, daß man jeder von ihnen eine feste Richtung beilegt, so gewinnt man auch, wenn zwei Kreise sich schneiden, an jedem Schnittpunkte einen ganz bestimmten Winkel, indem man jedem der beiden Kreise ausdrücklich einen Umlaufssinn erteilt. Zu dem Zwecke wählt man auf dem einen Kreise drei Punkte A, B, C, versteht unter AB den von den Punkten A und B begrenzten Bogen, der den Punkt C nicht enthält, und bestimmt die Bögen CA und BC in entsprechender Weise. Dann stimmen die drei Bögen BC, CA, AB im Sinne überein und heißen auch gleichläufig. Den so festgelegten Sinn legt man auch dem ganzen Kreise und jedem in ihm enthaltenen Bogen bei. Auf einem zweiten Kreise wählt man die drei Punkte A', B', C' und bestimmt wieder den Sinn in der angegebenen Weise. Wenn dann die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ denselben Sinn haben, so soll auch den beiden Kreisen gleicher Sinn zugeschrieben werden.

In der natürlichen Geometrie genügt es, für die gezeichneten Kreise anzugeben, ob ihr Umlaufssinn mit dem des Uhrzeigers übereinstimmen oder diesem entgegengesetzt sein soll.

Jetzt mögen die beiden Kreise (K) und (K') sich in den Punkten A und B schneiden. Man läßt vom Punkte A auf jedem Kreise einen Bogen ausgehen, der die für den Kreis vorgeschriebene Richtung hat, und betrachtet den Winkel dieser beiden Bögen als den Winkel, unter dem sich die Kreise im Punkte A schneiden. Selbstverständlich ist darunter der Winkel der von A ausgehenden Halbtangenten zu verstehen. Auch bei den Winkeln selbst soll der doppelte Umlaufssinn unterschieden werden. Zwei Winkel sollen nur dann als gleich gelten, wenn sie auch im Sinne übereinstimmen. Bezeichnet man noch die zur Bestimmung der Winkel benutzten Kreisbögen mit k und k', so ergibt sich aus dieser Festsetzung, daß der Winkel (kk') am Schnittpunkte A gleich dem Winkel $(k'k)$ am Schnittpunkte B ist.

Beiläufig sei bemerkt, daß hiernach in einem Dreieck ABC mit den gleichen Seiten AB und AC die Winkel ABC und BCA einander gleich sind, während ABC und ACB entgegengesetzten Sinn haben.

9. **Isogonalkreise an zwei gegebenen Kreisen.** Da zwei beliebige Kreise (M) und (N) von ihren beiden Ähnlichkeitspunkten A und J aus zugleich perspektiv und invers sind, so ist jede Gerade, die durch einen dieser beiden Punkte geht, sowohl ein Ähnlichkeits- als auch ein Inversionsstrahl. Um die Darstellung zu vereinfachen, mag eine Gerade, die durch A geht, als ein A-Strahl und ebenso eine durch J gelegte Gerade als ein J-Strahl bezeichnet werden.

Wenn ein A-Strahl den Kreis (M) schneidet, so schneidet er auch den Kreis (N), und die vier Schnittpunkte ordnen sich einerseits in zwei perspektive, andrerseits in zwei inverse Paare. Die nach den vier Schnittpunkten gezogenen Radien von (M) und (N) liegen alle auf derselben Seite des A-Strahles. Sie bilden mit den auf ihm liegenden Schnittsehnen vier gleiche Winkel, und zwar so, daß die nach einem perspektiven Punktepaar gezogenen einander parallel sind, während die zu einem inversen Paare gehenden symmetrisch am A-Strahle liegen. Ein A-Strahl, der die Kreise schneidet, zerlegt sie demnach in vier Abschnitte, von denen je zwei, die auf derselben Seite von ihm liegen, gleichwinklig sind. Berührt ein A-Strahl den Kreis (M), so berührt er auch (N); die Berührungsradien sind parallel und liegen auf derselben Seite des Strahles. Die angegebenen Beziehungen werden vereinfacht, aber nicht gestört, wenn die beiden Kreise sich im Punkte A berühren.

Bei einem J-Strahl tritt nur der Unterschied ein, daß zwei nach perspektiven Punkten gehende parallele Radien immer auf verschiedenen Seiten des Strahles liegen; ebenso auch je zwei symmetrische Radien, die nach inversen Punkten gehen. Daher zerlegt ein J-Strahl, der (M) und (N) schneidet, die Kreise in vier Abschnitte, von denen je zwei, die auf verschiedenen Seiten von ihm liegen, gleichwinklig sind.

Zwischen den beiden Kreisen (M) und (N) besteht immer eine äußere und eine innere Inversion, und zu jeder von beiden gehört ein Inversionsbündel von Kreisen. Da ein Ähnlichkeitsstrahl zugleich Inversionsstrahl ist, so kann er als entarteter Bündelkreis aufgefaßt werden. Bezeichnet man mit (K) einen Kreis, der zu einem der beiden Inversionsbündel gehört, so ist demnach zu erwarten, daß die beiden Kreise (M) und (N) zu (K) in ähnlicher Beziehung stehen wie zu einem Inversionsstrahle. In der Tat, wenn man beachtet, daß der Kreis (K) durch die Inversion, zu der er gehört, in sich selbst übergeführt wird, während (M) und (N) miteinander vertauscht werden, und daß überdies jede Inversion winkeltreu ist, so findet man leicht folgendes. Wenn der Kreis (K) den Kreis (M) schneidet, so schneidet er auch (N). Die vier Schnittpunkte sind paarweise invers. Durch (K) werden (M) und (N) in je zwei Bogenzweiecke zerlegt; je ein Zweieck, das zu (M) gehört, ist gleichwinklig mit einem zu (N) gehörigen.

Aus den angegebenen Gründen geht aber nicht ohne weiteres hervor, daß die gleichwinkligen Bogenzweiecke auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten (innerhalb und außerhalb) des Kreises (K) liegen, je nachdem dieser Kreis zum Bündel der äußeren oder der inneren Inversion zwischen (M) und (N) gehört. Überdies ist nicht ersichtlich, welche Bogenwinkel an zwei inversen Schnittpunkten von (K) mit (M) und (N) in dem früher (Nr. 8) genau definierten Sinne einander gleich sind.

Gibt man den drei Kreisen (K), (M), (N) ein und denselben Umlaufssinn und bezeichnet mit k, m, n die von ihren Schnittpunkten aus in eben diesem Sinne genommenen Bögen, so können alle überhaupt in Betracht kommenden Aussagen in dem Satze vereinigt werden:

Wenn der Kreis (K) den Kreis (M) schneidet, so schneidet er auch (N), und die vier Schnittpunkte sind paarweise invers. An je zwei inversen Schnittpunkten ist: $(mk) = (kn)$ oder $(mk) + (kn) = 2R$, je nachdem der Kreis (K) zum äußeren oder zum inneren Inversionsbündel der Kreise (M) und (N) gehört.

Zur Begründung dieses Satzes ist außer der Winkeltreue der Inversion noch der Umstand in Betracht zu ziehen, daß jede Inversion einen gegebenen Kreis in einen mit ihm gleichläufigen oder gegenläufigen Kreis verwandelt, je nachdem der Inversionspunkt innerhalb oder außerhalb des gegebenen Kreises liegt. Das ist leicht zu übersehen, wenn man beachtet, daß die Inversion immer aus einer perspektiven Abbildung des gegebenen Kreises hergeleitet werden kann. Die hyperbolische Inversion ändert hiernach den Umlaufssinn der Kreise ihres Inversionsbündels; die elliptische dagegen nicht. Geht man nun die zwischen zwei gegebenen Kreisen (M) und (N) in ihren verschiedenen Lagen bestehenden Inversionen einzeln durch, so findet man ohne Schwierigkeit folgende Regel bestätigt: Wenn durch eine äußere Inversion (M) auf (N) und (K) auf sich selbst abgebildet wird, so bleibt entweder der Umlaufssinn von (M) und (K) erhalten, oder der Sinn beider wird umgekehrt. Bei einer inneren Inversion wird entweder nur der Sinn von (M) oder nur der von (K) erhalten. Werden also (M) und (K) vor der Inversion gleichläufig gedacht, so sind nach einer äußeren Inversion ihre Bilder wiederum gleichläufig, nach einer inneren aber gegenläufig. Daraus ergibt sich sogleich der aufgestellte Satz. Wenn (M) und (N) sich berühren, so wird die zum Berührungspunkte gehörige Inversion parabolisch und daher die vorstehende Schlußweise hinfällig. Indessen ist die Gültigkeit des in Rede stehenden Satzes für jeden durch den Berührungspunkt gehenden Schnittkreis von (M) und (N) ganz unabhängig von inverser Abbildung leicht zu bemerken.

Umgekehrt möge der Kreis (K) die Kreise (M) und (N) unter gleichen Winkeln schneiden. Die drei Kreise seien gleichläufig gedacht und die Schnittpunkte B, C auf (M) und B', C' auf (N) so bezeichnet, daß der Winkel (mk) am Punkte B gleich dem Winkel (kn) am Punkte B' ist. Dann ist $\sphericalangle(mk) = MBK$ und $\sphericalangle(kn) = KB'N$, also $MBK = KB'N$. Da aber $KBB' = BB'K$ ist, so folgt: $MBB' = BB'N$. Demnach sind B und B' zwei inverse Punkte auf einem äußeren Ähnlichkeitsstrahle von (M) und (N). Der Kreis (K) gehört also zum äußeren Inversionsbündel dieser beiden Kreise. Ebenso ergibt sich, daß er zum inneren Inversionsbündel gehört, wenn er (M) und (N) unter supplementären Winkeln schneidet.

Ein Kreis (K), der (M) und (N) rechtwinklig trifft, gehört sowohl zum äußeren als auch zum inneren Inversionsbündel von (M) und (N).

Als Isogonalkreise von (M) und (N) sind hiernach alle Kreise zu bezeichnen, die (M) und (N) schneiden oder berühren und zu einem Inversionsbündel der beiden gehören, und umgekehrt sind alle Isogonalkreise in ihren zwei Inversionsbündeln enthalten. Dabei ist die Bezeichnung „Isogonalkreis“ im üblichen weiteren Sinne verstanden. Nimmt man sie, entsprechend dem oben formulierten Hauptsatze, im engeren Sinne, so kann sie nur auf Kreise des äußeren Inversionsbündels angewandt werden.

§ 24. Das apollonische Taktionsproblem.

1. Die ältere Lösung des Problems. Schon Apollonius von Pergae (um 200 v. Chr.) hat sich mit der Aufgabe beschäftigt: Einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt. In dieser Aufgabe kann man die Kreise zum Teil oder sämtlich durch Punkte oder Gerade ersetzen. Demnach treten zu der genannten Aufgabe weitere neun hinzu. Für alle diese zehn Aufgaben hat Apollonius bereits die Lösung angegeben; daher wird das ganze Problem auch heute noch nach ihm benannt. Seine Schrift „über Berührungen“ ist verloren gegangen. Die älteste Lösung, die wir kennen, rührt von Vieta (1600) her, der in seiner Schrift „Apollonius Gallus“ das Werk des Apollonius wiederherzustellen suchte. Wir dürfen annehmen, daß die von Vieta angegebenen Lösungen im wesentlichen mit den von Apollonius gefundenen übereinstimmen, da einfachere Lösungen erst unter Benutzung von Lehrsätzen möglich werden, die den alten Griechen unbekannt waren. Wir glauben daher, den Inhalt von Vietas Schrift hier mitteilen zu sollen, schon zu dem Zwecke, damit der Lehrer in den Stand gesetzt wird, die verschiedenen Lösungen miteinander zu vergleichen.

Um kurze Zeichen für die einzelnen Aufgaben zu erhalten, bezeichnen wir mit P einen Punkt, mit l eine Gerade und mit k einen Kreis. Dann charakterisieren wir die einzelnen Aufgaben durch Angabe der Gebilde, die als gegeben vorausgesetzt werden. Demgemäß stellen wir die zehn Aufgaben in folgender Weise zusammen:

$$\begin{array}{ll} P,\ P',\ P'' & P,\ k,\ k' \\ P,\ P',\ l & l,\ l',\ l'' \\ P,\ P',\ k & l,\ l',\ k \\ P,\ l,\ l' & l,\ k,\ k' \\ P,\ l,\ k & k,\ k',\ k''. \end{array}$$

Auf die Aufgaben P, P', P'' und l, l', l'' brauchen wir nicht einzugehen. Die Aufgabe P, P', l wird von Vieta in der noch jetzt gebräuchlichen Weise gelöst. Man kennt die Potenz des gesuchten Kreises im Schnittpunkte der Geraden l und PP' und kann demnach den Berührungspunkt finden.

Auf diese Aufgabe wird die Aufgabe P, l, l' zurückgeführt. Da der Mittelpunkt des gesuchten Kreises in der Halbierungslinie desjenigen Winkels $(l\,l')$ liegt, der in seinem Felde den Punkt P enthält, so muß der Kreis auch durch den Punkt P' gehen, in den der Punkt P durch diese Halbierende gespiegelt wird.

Zur Lösung der Aufgabe P, l, k fällt man vom Mittelpunkte O des Kreises die Senkrechte OD auf l. Sind A und B ihre Schnittpunkte mit dem Kreise, so ermittelt man einen zweiten Punkt P' durch die Forderung: $AP \cdot AP' = AB \cdot AD$, und sucht den Kreis, der durch P, P' geht und l berührt. Liegt P'' in der Geraden BP so, daß $BP \cdot BP'' = BA \cdot BD$ ist, so darf man auch zu den Punkten P, P'' die Gerade l hinzunehmen.

Für die Aufgabe l, l', k setzen wir O als Mittelpunkt, r als Radius des gegebenen Kreises voraus. Zu l, l' ziehen wir im Abstande r die Parallelen g, g' und benutzen einen Hilfskreis, der g, g' berührt und durch O geht.

Um die Aufgabe l, k, k' zu lösen, wo O, O' die Mittelpunkte, r, r' die Radien der Kreise sein sollen, zieht man zu l im Abstande r die Parallele l' und sucht den Kreis, der l' berührt, durch O geht und einen gewissen um O' beschriebenen Kreis berührt.

Die Lösung der Aufgabe P, P', k unterscheidet sich nicht wesentlich von der jetzt gebräuchlichen. Man nimmt einen Hilfskreis hinzu, der durch P, P' geht und den Kreis k schneidet. Da man die Potenz des gesuchten Kreises in dem Punkte kennt, in dem die gemeinschaftliche Sekante dieser Kreise mit der Geraden PP' zusammentrifft, so kann man den Berührungspunkt finden.

Für die Lösung der Aufgabe P, k, k' benutzt Vieta die Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise und wendet die Eigenschaften der inversen (potenzhaltenden) Punkte an. Ist S ein Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise, sind A und A' zwei Punkte der Kreise, die mit S in gerader Linie liegen, ohne daß die zu ihnen führenden Radien parallel sind, so bestimmt er in der Geraden SP einen Punkt P' so, daß $SP \cdot SP' = SA \cdot SA'$ ist. Jeder Kreis, der durch P, P' geht und k berührt, genügt der Aufgabe.

Die letzte Aufgabe k, k', k'' wird auf die vorhergehende zurückgeführt. Sind O, O', O'' die Mittelpunkte, r, r', r'' die Radien der Kreise, und ist $r \leqq r' \leqq r''$, so beschreibt man um O', O'' Kreise mit den Radien $r' - r$, $r'' - r$. Der Mittelpunkt eines jeden Kreises, der diese beiden Kreise berührt und durch den Punkt O geht, ist Mittelpunkt für einen Kreis, der die drei gegebenen Kreise berührt. Weitere Lösungen findet man, indem man Kreise mit den Radien $r' + r$ und $r'' + r$ hinzunimmt.

Man sieht, es kam den älteren Bearbeitern des Problems nur darauf an, die Möglichkeit der Lösung zu zeigen. So wird die letzte Aufgabe erst durch mehrere Zwischenstufen auf die Aufgabe zurückgeführt: Durch drei Punkte einen Kreis zu legen. Der Zusammenhang der gesuchten Kreise mit den gegebenen tritt gar nicht hervor. Auch wird es unmöglich, die notwendigen Zeichnungen wirklich auszuführen. Die Konstruktion kann nach einem bekannten Ausspruche Steiners „nur mit der Zunge, aber nicht in der Tat, d. h. mit den Instrumenten in der Hand ausgeführt werden". Die Konstruktion trägt nur den Charakter eines Existenzbeweises. Sie zeigt z. B., daß es zu drei Kreisen, von denen jeder ganz im Äußern der beiden andern liegt und deren Mittelpunkte nicht in dieselbe Gerade fallen, acht gemeinschaftliche Berührungskreise gibt. Als erster Versuch, ein schwieriges und interessantes Problem zu bewältigen, verdient die Lösung volle Anerkennung. Aber es wäre verkehrt, wenn man diese Konstruktion auch heute noch in der Schule durchnehmen wollte. Zwar kommt man beim Beweise mit wenigen einfachen Lehrsätzen aus. Wer aber wirklich in das Wesen der Konstruktion eindringen und den eigentlichen Grund vollständig erfassen will, der muß mit den meisten Theorien, die wir in den letzten Abschnitten behandelt haben, vertraut sein. Die Potenz eines Kreises in einem Punkte, die perspektive Ähnlichkeit zweier Kreise und die inverse Abbildung sind wesentliche Bestandteile der Beweise. Es wäre demnach unrichtig, diese Partien zu vernachlässigen und sich mit der älteren Behandlung des Taktionsproblems zu begnügen. Wenn dem Lehrer, was gewiß meistens der Fall ist, die Zeit fehlt, um die letzten Paragraphen ihrem ganzen Inhalte nach durchzunehmen, so wird er gut daran tun, sich Partien auszuwählen, die ihm je nach dem Stande der Klasse passend erscheinen. Er möge aber lieber auf das Taktionsproblem als auf den gesamten Inhalt der letzten Abschnitte verzichten.

2. Die Gergonnesche Lösung. Bei den neueren Untersuchungen über das Taktionsproblem muß man ein Zweifaches unterscheiden. Es kann sich einmal darum handeln, durch eine möglichst einfache Konstruktion die Mittelpunkte und die Radien der Kreise zu ermitteln, durch welche drei gegebene Kreise berührt werden. Man kann aber auch sein Augenmerk hauptsächlich darauf richten, möglichst viele Eigenschaften der Figur aufzufinden, die aus den drei gegebenen Kreisen und ihren sämtlichen Berührungskreisen besteht. Ohne Zweifel hängen diese beiden Aufgaben eng zusammen. Ohne die Eigenschaften der Figur hinreichend zu kennen, kann man die Konstruktion nicht ausführen; umgekehrt gehen aus der Konstruktion Eigenschaften der Figur hervor. Dennoch sind beide Aufgaben nicht identisch. Manche Beziehungen, in denen die drei gegebenen Kreise zu den gesuchten stehen, bieten an sich Interesse, ohne für die Zeichnung verwandt zu werden. Die Figur zeigt volle Symmetrie in den drei gegebenen Kreisen; für die Zeichnung genügt es aber, einzelne Operationen an einem einzigen Kreise auszuführen. Um diesen Unterschied hervortreten zu lassen, möchten wir bei dem folgenden Überblick zwischen Lösung und Konstruktion unterscheiden, indem wir die Gesamtheit der Eigenschaften der Figur, die mit einer Konstruktion in einem organischen Zusammenhang stehen, als die zur Konstruktion gehörende Lösung bezeichnen.

Ehe wir die neueren Lösungen für das apollonische Problem darlegen, erinnern wir an die wichtigsten Begriffe und Lehrsätze, die wir hierbei gebrauchen. Wenn zwei Kreise einander berühren, so ist die Zentrale entweder gleich der Summe oder der Differenz der Radien. Dementsprechend unterscheiden wir äußere und innere Berührung. Bei der äußeren Berührung ist der Berührungspunkt innerer, bei der inneren Berührung äußerer Ähnlichkeitspunkt.

Für unser Problem ist die Lehre von der perspektiven Ähnlichkeit der Kreise von großer Bedeutung. Schon in § 18, 6 (S. 328) haben wir gesehen, daß zwei beliebige Kreise derselben Ebene in doppelter Weise als perspektiv ähnliche Figuren aufgefaßt werden können. Wenn die Mittelpunkte nicht zusammenfallen, so haben sie zwei verschiedene Ähnlichkeitspunkte. Man kann aber auch zwei solche Kreise in doppelter Weise einander invers zuordnen (§ 23, 6). Zum Inversionszentrum kann jeder Ähnlichkeitspunkt gewählt werden. Man unterscheidet demnach zwischen inversen und ähnlichliegenden Punkten auf zwei Kreisen; die ersteren sind die „potenzhaltenden Punkte“ Steiners (vgl. § 18, 6. S. 329).

Daran schließen sich folgende Sätze: Durch zwei inverse Punkte zweier Kreise läßt sich stets ein Kreis legen, der beide berührt; die Berührung ist gleichartig oder ungleichartig, je nachdem die Berührungspunkte mit dem äußeren oder dem inneren Ähnlichkeitspunkte in gerader Linie liegen. Wenn umgekehrt zwei Kreise von einem dritten berührt werden, so geht die Berührungssehne bei gleichartiger Berührung durch den äußeren, bei ungleichartiger durch den inneren Ähnlichkeitspunkt. Die Potenzlinie der beiden ersten Kreise hat am dritten Kreise einen Pol, der bei $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartiger}\\ \text{ungleichartiger}\end{matrix}\right\}$ Berührung auf einem $\left\{\begin{matrix}\text{äußeren}\\ \text{inneren}\end{matrix}\right\}$ durch die Berührungspunkte gehenden Ähnlichkeitsstrahle liegt (vgl. § 22, 4). Wenn zwei Paare von Kreisen in der Beziehung zueinander stehen, daß die Kreise eines jeden Paares von denen des andern berührt werden, so liegt ein Ähnlichkeitspunkt des einen Paares jedesmal auf der Potenzlinie des andern; aus der Art der Berührung geht hervor, ob dieser Ähnlichkeitspunkt der äußere oder der innere ist (vgl. § 18, 6).

Aus diesen Sätzen wollen wir jetzt die Lösung des Problems herleiten, die wir Gergonne verdanken. Wir gehen von drei Kreisen (O_1), (O_2), (O_3) aus und nehmen einen Kreis (M) hinzu, der die drei ersten Kreise berührt. Die Berührung ist entweder gleichartig oder nicht. Da es aber nur zwei Arten von Berührung gibt, so müssen mindestens zwei Kreise von (M) in derselben Art berührt werden. Um die Bezeichnung zu vereinfachen, verstehen wir unter α, β, γ irgendeine Permutation der Marken 1, 2, 3 und unter ν eine von den Marken 0, 1, 2, 3. Der Kreis (M_0) soll die drei Kreise (O_1), (O_2), (O_3) gleichartig berühren; dagegen soll der Kreis (M_α) den Kreis (O_α) in andrer Weise berühren als die Kreise (O_β), (O_γ). Die Berührungspunkte des Kreises (M_ν) sollen mit $B_{\nu 1}$, $B_{\nu 2}$, $B_{\nu 3}$ bezeichnet werden, und zwar soll $B_{\nu\alpha}$ der Punkt sein, in dem die Kreise (M_ν) und (O_α) zusammenstoßen. Die Ähnlichkeitspunkte der Kreise (O_1), (O_2), (O_3) sollen in der früher (§ 21, 4. S. 376) angegebenen Weise bezeichnet werden. Die Gerade $B_{0\alpha}B_{0\beta}$ geht durch den Punkt A_γ; die Ähnlichkeitsachse, auf der die drei Punkte A_1, A_2, A_3 liegen, soll mit s_0 bezeichnet werden. Die drei andern Ähnlichkeitsachsen sollen s_1, s_2, s_3 sein, und zwar soll s_α die Ähnlichkeitspunkte A_α, J_β, J_γ enthalten. Wir schreiben für A_α bald $S_{0\alpha}$, bald $S_{\alpha\alpha}$, für J_α bald $S_{\beta\alpha}$ und bald $S_{\gamma\alpha}$. Bei dieser Bezeichnung liegen die Punkte $S_{\nu 1}$, $S_{\nu 2}$, $S_{\nu 3}$ in der Ähnlichkeitsachse s_ν, und die Gerade $B_{\nu\alpha}B_{\nu\beta}$ geht jedesmal durch den Punkt $S_{\nu\gamma}$.

Für die Herleitung der Gergonneschen Lösung empfiehlt es sich, zu jedem Berührungskreise einen zweiten hinzuzunehmen, dem wir nach der getroffenen Festsetzung dieselbe Marke ν beilegen müssen. Dementsprechend verbinden wir mit dem Berührungskreise (M_0) einen zweiten Kreis (M_0'), der ebenfalls die drei Kreise (O_1), (O_2), (O_3)

gleichartig berührt. Auch ordnen wir dem Kreise (M_α) einen Kreis (M_α') so zu, daß er ebenfalls den Kreis (O_α) in anderer Weise berührt als die Kreise (O_β), (O_γ). Der Berührungspunkt der Kreise (M_ν') und (O_α) soll mit $B'_{\nu\alpha}$ bezeichnet werden. Dann sind auch die Punkte $B'_{\nu\alpha}$, $B'_{\nu\beta}$ inverse Punkte auf den Kreisen (O_α), (O_β) für den Ähnlichkeitspunkt $S_{\nu\gamma}$. Dem Kreispaare (M_ν), (M_ν') ist eine bestimmte Ähnlichkeitsachse s_ν der gegebenen Kreise in der Weise zugeordnet, daß sich entsprechende Berührungssehnen $S_{\nu\alpha}S_{\nu\beta}$ und $S'_{\nu\alpha}S'_{\nu\beta}$ in dem Punkte $S_{\nu\gamma}$ der Geraden s_ν treffen.

Zwei Berührungskreise, die in der angegebenen Beziehung zueinander stehen, werden von Study als kopulierte Kreise bezeichnet.

Die enge Beziehung, in der zwei solche Kreise zueinander stehen, tritt noch in anderer Weise hervor. Von den Kreisen (M_0) und (M_0') haben wir nur angenommen, daß jeder die drei Kreise (O_1), (O_2), (O_3) gleichartig berühre. Dabei bleiben für die Art der Berührung noch vier Möglichkeiten, indem jeder der beiden Kreise (M_0), (M_0') den Kreis (O_1) sowohl äußerlich als auch innerlich berühren kann. Wenn die beiden Kreise (M_0) und (M_0') den Kreis (O_1) $\left\{\begin{matrix}\text{äußerlich}\\ \text{innerlich}\end{matrix}\right\}$ berühren, so berühren sie auch die Kreise (O_2), (O_3) $\left\{\begin{matrix}\text{äußerlich}\\ \text{innerlich}\end{matrix}\right\}$. Wird aber der Kreis (O_1) von (M_0) $\left\{\begin{matrix}\text{äußerlich}\\ \text{innerlich}\end{matrix}\right\}$ und von (M_0') $\left\{\begin{matrix}\text{innerlich}\\ \text{äußerlich}\end{matrix}\right\}$ berührt, so gehen auch die Kreise (O_2), (O_3) mit (M_0) eine $\left\{\begin{matrix}\text{äußere}\\ \text{innere}\end{matrix}\right\}$ und mit (M_0') eine $\left\{\begin{matrix}\text{innere}\\ \text{äußere}\end{matrix}\right\}$ Berührung ein. Jeder einzelne Kreis (O_1), (O_2), (O_3) wird also von den Kreisen (M_0) und (M_0') entweder jedesmal gleichartig oder jedesmal ungleichartig berührt.

Dieselbe Eigenschaft kommt auch jedem andern Paare kopulierter Kreise zu. Wenn (O_α) von (M_α) und (M_α') $\left\{\begin{matrix}\text{äußerlich}\\ \text{innerlich}\end{matrix}\right\}$ berührt wird, so wird jeder Kreis (O_β), (O_γ) beidemal $\left\{\begin{matrix}\text{innerlich}\\ \text{äußerlich}\end{matrix}\right\}$ berührt. Wird aber (O_α) von (M_α) $\left\{\begin{matrix}\text{äußerlich}\\ \text{innerlich}\end{matrix}\right\}$ und von (M_α') $\left\{\begin{matrix}\text{innerlich}\\ \text{äußerlich}\end{matrix}\right\}$ berührt, so gehen die Kreise (O_β), (O_γ) mit (M_α) eine $\left\{\begin{matrix}\text{innere}\\ \text{äußere}\end{matrix}\right\}$ und mit (M_α') eine $\left\{\begin{matrix}\text{äußere}\\ \text{innere}\end{matrix}\right\}$ Berührung ein. Daraus ersehen wir, daß jedesmal, wenn der Kreis (O_1) von zwei kopulierten Berührungskreisen $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ berührt wird, auch die Kreise (O_2), (O_3) von diesen beiden Kreisen $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ berührt werden. Wir sprechen dies Resultat in folgender Weise aus:

Zwei kopulierte Berührungskreise gehen entweder mit jedem der drei gegebenen Kreise eine gleichartige oder mit jedem von ihnen eine ungleichartige Berührung ein.

Hiernach können wir unser Problem auch in anderer Weise auffassen. Wir gehen von zwei Kreisen (M_ν), (M_ν') aus, ziehen durch denselben Ähnlichkeitspunkt drei Strahlen, von denen jeder die Kreise schneidet, bestimmen auf jedem Strahle ein Paar inverser Punkte und konstruieren die drei Kreise, von denen jeder in den Punkten eines Paares berührt. Jetzt fragen wir uns, ob es auch umgekehrt möglich ist, von den Kreisen (O_1), (O_2), (O_3) auszugehen und die Kreise (M_ν), (M_ν') zu bestimmen.

Da wir bei den folgenden Untersuchungen uns auf ein einziges Paar kopulierter Kreise beschränken können, dürfen wir die Marke ν weglassen. Dementsprechend seien (M) und (M') zwei kopulierte Kreise. Die Berührungspunkte seien B_1, B_2, B_3 bzw. B_1', B_2', B_3'. Die Geraden $S_\beta S_\gamma$ und $S_\beta' S_\gamma'$ schneiden sich in einem Ähnlichkeitspunkte S_α der Ähnlichkeitsachse s. Aus den oben erwähnten Sätzen ergibt sich, daß die Potenzlinie der Kreise (M), (M') durch jeden der drei Punkte S_1, S_2, S_3 geht und demnach mit der Ähnlichkeitsachse s zusammenfällt.

Die Potenzlinie der Kreise (O_α), (O_β) geht durch einen Ähnlichkeitspunkt der Kreise (M), (M'), und zwar je nach der Art der Berührung durch den äußeren oder den inneren Ähnlichkeitspunkt. Nun schneiden sich die Potenzlinien der Kreise (O_1), (O_2), (O_3) in demselben Punkte Q, dem Potenzzentrum der drei Kreise, und die Berührung, welche die Kreise (M), (M') mit jedem der Kreise (O_1), (O_2), (O_3) eingehen, ist entweder jedesmal gleichartig oder jedesmal ungleichartig. Folglich fällt der Punkt Q mit einem Ähnlichkeitspunkte der Kreise (M), (M') zusammen.

Ebenso geht jede der Geraden B_1B_1', B_2B_2', B_3B_3' durch einen Ähnlichkeitspunkt von (M), (M'). Da aber die Kreise (O_1), (O_2), (O_3) entweder jedesmal gleichartig oder jedesmal ungleichartig berührt werden, so gehen diese drei Geraden durch denselben Ähnlichkeitspunkt, und zwar durch den, der mit dem Punkte Q zusammenfällt.

Wie wir ferner gesehen haben, liegt der Pol P_α, den die Potenzlinie der Kreise (M), (M') am Kreise (O_α) hat, auf der Berührungssehne $B_\alpha B_\alpha'$. Da diese Potenzlinie mit der Ähnlichkeitsachse s zusammenfällt, geht die Gerade $B_\alpha B_\alpha'$ durch den Pol P_α von s am Kreise (O_α). Die Gerade $B_\alpha B_\alpha'$ fällt mit der Geraden QP_α zusammen und ist aus diesem Grunde bekannt.

Wir fassen die gefundenen Resultate in folgender Weise zusammen.

Für die drei Kreise (O_1), (O_2), (O_3) sei Q das Potenzzentrum, s eine Ähnlichkeitsachse, P_α der Pol von s am Kreise (O_α), und S_1, S_2, S_3 seien die auf s liegenden Ähnlichkeitspunkte. Die Gerade QP_α möge den Kreis (O_α) in den Punkten B_α, B_α' schneiden. Die sechs Punkte $B_1, B_2, B_3, B_1', B_2', B_3'$ lassen sich in zwei Tripel B_1, B_2, B_3 und B_1', B_2', B_3' so zerlegen, daß jedesmal die Geraden $B_\beta B_\gamma$ und $B_\beta' B_\gamma'$ sich im Punkte S_α schneiden. Der Kreis (M), der durch die Punkte B_1, B_2, B_3 geht, berührt die drei gegebenen Kreise; in seinem Mittelpunkte M schneiden sich die drei Geraden O_1B_1, O_2B_2, O_3B_3. Entsprechendes gilt vom Kreise (M'), der durch die Punkte B_1', B_2', B_3' gelegt werden kann. Dieser Konstruktion kann man jede Ähnlichkeitsachse der gegebenen Kreise zugrunde legen. Wird man, von der äußern Ähnlichkeitsachse ausgehend, durch die Konstruktion auf reelle Punkte B_1, B_1' geführt, so sind auch die Punkte B_2, B_2', B_3, B_3' reell; dann erhält man zwei Kreise, von denen jeder die gegebenen Kreise gleichartig berührt. Wählt man aber die Ähnlichkeitsachse s_α, auf der die Punkte A_α, J_β, J_γ liegen, so wird man auf Berührungskreise geführt, die den Kreis (O_α) in anderer Weise berühren als die Kreise (O_β), (O_γ).

3. **Konstruktion im Anschluß an Gergonnes Methode.** Wir wollen aus den durchgeführten Entwicklungen eine möglichst einfache Konstruktion herleiten. Zu dem Ende bestimmen wir den Chordalpunkt Q der gegebenen Kreise (O_1), (O_2), (O_3) und ihre sechs Ähnlichkeitspunkte. Eine Ähnlichkeitsachse sei s, und in ihr mögen die Ähnlichkeitspunkte S_1, S_2, S_3 liegen. Für den Kreis (O_1) sei P_1 der Pol der Geraden s. Die Gerade QP_1 treffe den Kreis (O_1) in den Punkten B_1, B_1'. Dem Punkte B_1 entspreche auf dem Kreise (O_2) der Punkt B_2 als inverser Punkt für das Inversionszentrum S_3. Die Geraden O_1B_1 und O_2B_2 mögen einander in M schneiden. In gleicher Weise seien B_1' und B_2' inverse Punkte, M' der Schnittpunkt der Geraden O_1B_1' und O_2B_2'. Dann behaupten wir, daß die Kreise $(M)B_1$ und $(M')B_1'$ die drei gegebenen Kreise berühren.

Da die Punkte B_1 und B_2 inverse Punkte auf den Kreisen (O_1), (O_2) sind, der Kreis $(M)B_1$ offenbar den Kreis (O_1) in B_1 berührt und sein Mittelpunkt auf O_2B_2 liegt, so berührt dieser Kreis auch den Kreis (O_2). Dasselbe gilt vom Kreise $(M')B_1'$. Daher geht die Chordale der Kreise (M), (M') durch den Punkt S_3.

Der Schnittpunkt L_1 der in B_1, B_1' an den Kreis (O_1) gelegten Tangenten ist am Kreise (O_1) Pol der Geraden B_1B_1' und gehört, da diese Gerade den Pol P_1 von s in sich enthält, der Geraden s an. Dieser Punkt hat aber nach der Konstruktion auch gleiche Potenzen für die Kreise (M), (M'). Die Potenzlinie dieser beiden Kreise hat hiernach mit der Geraden s die Punkte S_3 und L_1 gemein und fällt aus diesem Grunde mit ihr zusammen.

Nach der Konstruktion gehen die Geraden $B_1 B_2$ und $B_1' B_2'$ durch denselben Ähnlichkeitspunkt der Kreise (O_1), (O_2). Daraus geht hervor, daß auch die Berührung, die jeder der Kreise (O_1), (O_2) mit den Kreisen (M), (M') eingeht, entweder beidemal gleichartig oder beidemal ungleichartig ist. Daher gehen die Sehnen $B_1 B_1'$ und $B_2 B_2'$ durch denselben Ähnlichkeitspunkt der Kreise (M), (M'). Der Punkt, in dem sich diese beiden Geraden schneiden, ist somit ein Ähnlichkeitspunkt für die Kreise (M), (M'). Daher liegt der Punkt Q in der Geraden MM', und da diese als Zentrale der Kreise (M), (M') auf der Potenzlinie s derselben senkrecht steht, so ergeben sich M und M' als Schnittpunkte der von Q auf s gefällten Senkrechten q mit den Geraden $O_1 B_1$ und $O_1 B_1'$.

Denken wir jetzt die Konstruktion so geändert, daß der Kreis (O_2) durch den Kreis (O_3) ersetzt wird, so bleiben neben der Geraden s die Punkte Q, P_1, B_1, B_1' ungeändert. Die Mittelpunkte der neuen Kreise liegen also wieder auf der Geraden q, sowie auf der Geraden $O_1 B_1$ oder $O_1 B_1'$. Die neuen Kreise sind also mit den zuerst konstruierten identisch, während sie nach der Konstruktion auch den Kreis (O_3) berühren. Dadurch ist unsere Behauptung erwiesen.

Bei der Konstruktion kann man jede Ähnlichkeitsachse zugrunde legen. Wenn dann der Kreis (O_1) durch die Gerade QP_1 und die drei entsprechenden Geraden geschnitten wird, so erhalten wir acht Berührungspunkte auf dem Kreise (O_1) und somit acht Berührungskreise. Dieser Fall tritt immer ein, wenn jeder der drei Kreise ganz im Äußeren der beiden anderen liegt und die Mittelpunkte nicht einer geraden Linie angehören. Unter dieser Voraussetzung liegen die vier Ähnlichkeitsachsen im Äußern der drei Kreise, ihre Pole am Kreise (O_1) im Innern dieses Kreises. Da aber der Punkt Q Außenpunkt der drei Kreise ist, so wird der Kreis (O_1) durch QP_1 und die entsprechenden Geraden geschnitten. Unsere Untersuchung belehrt uns aber auch, daß die Zahl der Berührungskreise nicht größer als acht sein kann. Ein neunter Berührungskreis müßte zu einem der vier Paare von kopulierten Kreisen als dritter kopulierter Kreis hinzutreten. Wie man aber sehr leicht erkennt, wird man, ausgehend von einem Berührungskreise, nur auf einen einzigen kopulierten Kreis geführt.

Der aufmerksame Leser wird aus unserer Darstellung erkennen, daß wir mit der Art und Weise, wie die Gergonnesche Methode in den Lehrbüchern behandelt wird, vielfach nicht einverstanden sind. Es liegt uns fern, dies im einzelnen auszuführen. Nur auf ein weit verbreitetes Lehrbuch glauben wir genau eingehen zu sollen, müssen zu dem Zwecke aber auch die Art besprechen, nach der die perspektive Ähnlichkeit in dem Werke eingeführt wird.

An die Spitze wird die Definition gestellt: Liegen zwei ähnliche Vielecke so, daß je zwei entsprechende Seiten parallel sind, so sagt man, sie seien ähnlichliegend. Wir wollen davon absehen, daß die perspektive Ähnlichkeit einfacher ist und leichter begründet werden kann als die freie Ähnlichkeit. Wir wollen auch mehrere Bedenken, die wir gegen diese Definition haben, unterdrücken und nur ein einziges hervorheben. Will man aus der aufgestellten Definition die Eigenschaft herleiten, daß die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte durch einen festen Punkt gehen, so muß man voraussetzen, daß in den beiden Vielecken homologe Seiten entweder jedesmal dieselbe oder jedesmal entgegengesetzte Richtung haben. Diese Voraussetzung wird in dem Werke stillschweigend gemacht. Wir können es schon nicht billigen, daß eine so wichtige Eigenschaft der Figur als selbstverständlich behandelt wird. Im vorliegenden Falle ist das Verfahren aber geradezu fehlerhaft. In zwei ähnlichen Rechtecken $ABCD$ und $A'B'C'D'$ können nämlich die Seitenpaare AB, $A'B'$ und CD, $C'D'$ je dieselbe, dagegen die Seitenpaare BC, $B'C'$ und DA, $D'A'$ je entgegengesetzte Richtung haben. Derartige Rechtecke genügen der aufgestellten Definition, haben aber keineswegs ähnliche Lage. Demnach kann die Definition nicht als befriedigend angesehen werden.

Will man die freie Ähnlichkeit voranstellen, was wir aus den oben (§ 18, 6. S. 326) entwickelten Gründen nicht billigen, und dann zur ähnlichen Lage übergehen, so kann man von folgendem Lehrsatze ausgehen: Wenn in zwei ähnlichen Vielecken zwei Paare von homologen zusammenstoßenden Seiten je $\left\{\begin{matrix}\text{gleichgerichtet}\\ \text{entgegengesetzt gerichtet}\end{matrix}\right\}$ sind, so hat jede Seite des einen die $\left\{\begin{matrix}\text{gleiche}\\ \text{entgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ Richtung wie die entsprechende Seite des andern, und die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken gehen durch einen Punkt. Besser ist es, den Satz zugrunde zu legen: Wenn in zwei ähnlichen Vielecken, die im Sinne übereinstimmen, eine Seite zu ihrer homologen parallel ist, so ist jede Seite zu der entsprechenden parallel, und die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken gehen sämtlich durch denselben Punkt. Die Definition des erwähnten Lehrbuches ist, wie wir gesehen haben, nicht ausreichend; andererseits sind aber die in ihr vereinigten Forderungen nicht unabhängig voneinander. Aus diesen Gründen verdient die zuletzt angegebene Methode offenbar den Vorzug. Man scheint aber Bedenken zu tragen, den Begriff „Sinn eines Polygons“ beim Unterricht zu benutzen. Indessen trägt dieser Begriff in der Planimetrie und in der Trigonometrie wesentlich zur Klärung bei; in der Stereometrie ist er unentbehrlich. Schon zur Schärfung der Raumanschauung sollte man die Schüler zwingen, Polygone auch ihrem Sinne nach miteinander zu vergleichen.

Dasselbe Lehrbuch stellt auch die Behauptung auf: „Drei ähnlichliegende regelmäßige Vielecke besitzen vier Ähnlichkeitsachsen, von denen eine die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte und jede der drei andern einen äußeren und die beiden nicht zu ihm gehörigen inneren Ähnlichkeitspunkte miteinander verbindet.“ Dieser Satz gilt aber nicht allgemein, beschränkt sich vielmehr auf regelmäßige Vielecke von gerader Seitenzahl.

Wenn dann das Werk die Ähnlichkeitslehre für den Kreis selbständig begründet, so verdient es hierfür gewiß keinen Tadel. Leider hat sich aber bei diesem Versuche ein Fehler eingeschlichen. Der Satz, daß die sechs Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise, deren Mittelpunkte nicht in gerader Linie liegen, die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits bilden, soll „ohne Benutzung des Strahlenbüschelsatzes abgeleitet werden“. Zu dem Ende geht das Werk von drei beliebigen Kreisen aus und behauptet, man könne unter Beibehaltung der Mittelpunkte und der sechs Ähnlichkeitspunkte die Radien so wählen, daß die Kreise durch zwei Kreise gleichartig berührt werden. Da aber alsdann die Chordale der berührenden Kreise durch die äußeren Ähnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise geht, so müssen diese drei in gerader Linie liegen. In entsprechender Weise wird der Schluß gezogen, daß die Verbindungsgerade von zwei inneren Ähnlichkeitspunkten noch einen äußeren Ähnlichkeitspunkt enthält. Dieser „Beweis“ hat dem Verfasser eines vor kurzem erschienenen Lehrbuches so gut gefallen, daß er ihn ebenfalls aufgenommen hat.

Demgegenüber sind wir der Ansicht, die ganze Begründung könne den Vergleich mit dem gebräuchlichen Beweise, den wir oben (§ 21, 4 S. 376) mitgeteilt haben, nach keiner Richtung hin aushalten. Die Notwendigkeit, die Radien in geeigneter Weise zu verändern, und die Hinzunahme der gemeinsamen Berührungskreise können doch gewiß nicht als Vorzüge des „Beweises“ angesehen werden. Diese äußeren Mängel treten aber weit hinter dem Umstande zurück, daß die Begründung an einem schweren logischen Fehler leidet. Während man noch gar nicht weiß, ob drei Kreise gemeinschaftliche Berührungskreise haben, man vielmehr nach Lehrsätzen sucht, aus denen ihre Existenz hervorgeht, benutzt man solche Kreise, um Eigenschaften der gegebenen Kreise herzuleiten. Die angestellte Betrachtung berechtigt nur, zu sagen: Eine notwendige Bedingung für die Existenz zweier Kreise, durch welche drei gegebene Kreise gleichartig berührt werden, besteht darin, daß die äußeren Ähnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise in gerader Linie liegen. Diese Behauptung muß bewiesen sein, ehe man an das Taktionsproblem herantreten kann. Hätten die Verfasser jener Bücher den Beweis für die Gergonnesche Konstruktion durchgeführt, so würden sie sich von der Haltlosigkeit ihrer Beweisführung überzeugt haben.

Zum Schluß möchten wir noch darauf hinweisen, daß einige weitere Ausdrücke in dem zuerst erwähnten Werke zu Mißverständnissen verleiten können. So wird dort der Lehrsatz aufgestellt: „Jede Ähnlichkeitsachse dreier Kreise ist die Potenzlinie zweier Kreise, welche die drei ersten berühren.“ Später heißt es: „Jede Ähnlichkeitsachse liefert also zwei Lösungen, und somit sind $4 \cdot 2 = 8$ Lösungen der allgemeinen Apolloniusschen Aufgabe möglich.“ Wir fürchten, es werde dem Schüler schwer fallen, diese Behauptungen richtig zu verstehen.

4. **Die Plückersche Lösung.** Die Lösung, die Plücker (Crelles Journal Bd. 10 S. 293 ff, und Ges. Werke Bd. I S. 246 ff.) für das apollonische Problem gegeben hat, kann beim Unterricht kaum direkte Verwendung finden. Sie kann aber auf ganz verschiedene Weise begründet werden, und jedesmal stellen die Sätze, aus denen sie hervorgeht, einen geeigneten Übungsstoff zu den in den letzten Paragraphen behandelten Theorien dar. Zudem hat die Lösung in theoretischer Hinsicht manche Vorzüge und steht in engem Zusammenhange mit Lösungen, die wir später besprechen werden. Aus diesen Gründen möchten wir sie hier behandeln.

Plücker geht von der Aufgabe aus: Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Gerade berührt. Bei der bekannten Konstruktion sieht er davon ab, daß die Mittelpunkte durch die Halbierungslinien der Winkel gefunden werden; er benutzt die Halbierungslinien vielmehr zur Ermittlung der Berührungspunkte. Dementsprechend seien a_1, a_2, a_3 die gegebenen Geraden und α, β, γ irgendeine Permutation der Marken

1, 2, 3. In dem durch die Geraden a_α und a_β bestimmten Büschel sucht man diejenigen beiden Geraden b_γ, b_γ', welche mit a_α und a_β gleiche Winkel bilden. Die sechs Geraden b_1, b_1', b_2, b_2', b_3, b_3' lassen sich zu je dreien in der Weise auf vier Büschel verteilen, daß jede Gerade zu zwei Büscheln gehört. Es mögen b_1, b_2, b_3 sowie b_α, b_β', b_γ' je in einem Büschel liegen. In jedem Büschel dieser Art ermittelt man die drei Geraden, die auf je einer Geraden a_1, a_2, a_3 senkrecht stehen. Dann stellen die Fußpunkte dieser Senkrechten die Berührungspunkte der gesuchten Kreise dar.

Jetzt ersetzt Plücker die Geraden a_1, a_2, a_3 durch drei gegebene Kreise. In dem durch zwei von diesen bestimmten Büschel sucht er die Kreise, die mit den beiden gleiche (reelle oder imaginäre) Winkel bilden. Wenn die gegebenen zwei Kreise sich schneiden, so sind die gesuchten die zugehörigen Inversionskreise (§ 23, 6). Haben jene keinen Punkt gemein, so ist der Grundkreis der elliptischen Inversion zu ersetzen durch den imaginären Kreis, der aus dem Inversionskreise dadurch hervorgeht, daß man dem Quadrate des Radius den entgegengesetzt gleichen Wert beilegt. In dieser Weise ordnet man den drei gegebenen Kreisen sechs Kreise zu, die zum Teil reell und zum Teil imaginär sind. Auch jetzt gibt es vier Büschel, von denen jeder drei dieser Kreise enthält, indem jeder Kreis zwei verschiedenen Büscheln angehört. Jeder Büschel dieser Art enthält drei Kreise, die je einen der gegebenen Kreise rechtwinklig schneiden. Bestimmt man in einem Büschel diese drei Orthogonalkreise zu den gegebenen, so lassen sich die sechs Schnittpunkte der gegebenen und der neuen Kreise so in zwei Tripel anordnen, daß die Punkte eines Tripels die Berührungspunkte eines gemeinschaftlichen Berührungskreises sind.

Die Beweise werden von Plücker durch Rechnung geführt. Wir wollen einen geometrischen Beweis andeuten, beschränken uns aber auf hyperbolische Inversionen.

Ist (A) der Grundkreis einer hyperbolischen Inversion zwischen (O_1) und (O_2), so gehören die Kreise (O_1), (O_2), (A) einem Büschel an (§ 23, 6).

Gehen wir jetzt von den drei Kreisen (O_1), (O_2), (O_3) aus, von denen jeder dem Äußern der beiden andern angehört. Ihre äußeren Ähnlichkeitspunkte seien A_1, A_2, A_3 und (A_1), (A_2), (A_3) die zugehörigen Inversionskreise. Der gemeinschaftliche Orthogonalkreis (Q) der gegebenen Kreise ist auch Orthogonalkreis zu den Kreisen (A_1), (A_2), (A_3). Die Zentrale des Büschels, der zum Büschel (A_1, A_2) konjugiert ist, ist die Senkrechte q, die vom Potenzzentrum Q der gegebenen Kreise auf die Gerade A_1A_2 oder s_0 gefällt werden kann. Jeder Punkt der Geraden q ist Mittelpunkt und die von ihm an den

Kreis (A_1) gelegte Tangente ist Radius für einen Kreis des zu (A_1, A_2) konjugierten Büschels. Jeder solche Kreis gehört aber auch dem Büschel an, der zum Büschel (A_1, A_3) konjugiert ist. Die Büschel (A_1, A_2) und (A_1, A_3) haben somit dieselben Orthogonalkreise; sie sind infolgedessen identisch, oder die Kreise (A_1), (A_2), (A_3) gehören einem Büschel an.

Die Kreise (O_1), (O_2), (O_3) mögen sowohl von (M) als auch von (M') gleichartig berührt werden. Die Berührungspunkte seien B_1, B_2, B_3 und B_1', B_2', B_3'. Dann treffen die Geraden $B_\alpha B_\beta$ und $B_\alpha' B_\beta'$ einander in A_γ. Daher gehören die Kreise (M), (M') dem zum Büschel (A_1, A_2, A_3) konjugierten Büschel an. Wenn daher die in B_α und B_α' angelegten Tangenten einander in L_α schneiden, so schneidet der Kreis $(L_\alpha)B_\alpha$ die drei Kreise (M), (M'), (O_α) rechtwinklig. Daher gehört auch der Kreis $(L_\alpha)B_\alpha$ dem Büschel (A_1, A_2, A_3) an. Um die Berührungspunkte B_1, B_2, B_3 und B_1', B_2', B_3' zu finden, hat man nur die Kreise des Büschels (A_1, A_2, A_3) zu ermitteln, von denen jeder einen der drei gegebenen Kreise orthogonal trifft.

Daraus geht die Plückersche Lösung hervor: Man bestimme die drei Inversionskreise, deren Mittelpunkte in der Ähnlichkeitsachse s_0 der gegebenen Kreise liegen. In dem Büschel, dem diese drei Kreise angehören, suche man die drei Kreise auf, von denen jeder einen der gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet; die sechs Schnittpunkte sind die Berührungspunkte der beiden verlangten Kreise.

Um die nicht gleichartig berührenden Kreise durch eine ähnliche Betrachtung herzuleiten, kann man imaginäre Kreise kaum entbehren. Die Herleitung trägt dann mehr einen analytischen als einen geometrischen Charakter.

5. **Andere Herleitung der Plückerschen Lösung.** Wenn aus zwei Kreisen (O_1), (O_2) und dem Grundkreise (A) einer hyperbolischen Inversion zwischen beiden durch irgendeine (hyperbolische) Inversion, deren Mittelpunkt P in ihrer Ebene passend gewählt ist, die neuen Kreise (O_1'), (O_2'), (A') hervorgehen, so ist (A') wiederum Grundkreis der äußeren (hyperbolischen) Inversion zwischen (O_1') und (O_2'). Man bemerkt das, wenn man die Inversion durch (P) auch auf die zu (A) senkrechten Isogonalkreise von (O_1), (O_2) ausdehnt. Deren Bildkreise sind isogonal an (O_1'), (O_2') und orthogonal an (A'). Durch drei Isogonalkreise, die nicht zu einem Büschel gehören, wird aber das äußere Inversionsbündel eindeutig bestimmt (§ 22, 9 und § 23, 9).

Liegt der Punkt P auf dem Kreise (A), so entartet der Grundkreis (A') der äußeren Inversion zwischen (O_1') und (O_2') in eine Gerade a'. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß (O_1') und (O_2') gleiche Radien haben und symmetrisch zu a' liegen.

Sollen umgekehrt die Kreise (O_1), (O_2) durch Inversion in gleiche

Kreise verwandelt werden, so muß das Inversionszentrum auf (A) angenommen werden.

Im folgenden nehmen wir wieder an, von den Kreisen (O_1), (O_2), (O_3) liege jeder außerhalb der beiden andern. Dann schneiden die beiden Inversionskreise (A_1), (A_2) einander in zwei Punkten E und F. Wir nehmen den Punkt E als Zentrum, die Größe EF^2 als Potenz einer neuen Inversion. Diese verwandelt die Kreise (A_1), (A_2) in zwei Gerade, die durch den Punkt F gehen, und die Kreise (O_1), (O_2), (O_3) in drei gleiche Kreise (O_1'), (O_2'), (O_3'). Daher gehören auch die Punkte E und F dem Kreise (A_3) an, der die Kreise (O_1), (O_2) ineinander invertiert.

Zieht man durch den Punkt F die drei Geraden, von denen jede einen der Kreise (O_1'), (O_2'), (O_3') rechtwinklig schneidet, so sind die Schnittpunkte zu je dreien die Punkte, in denen die drei Kreise von demselben Kreise berührt werden. Um daher die Berührungspunkte zweier Kreise zu finden, von denen jeder die drei Kreise (O_1), (O_2), (O_3) gleichartig berührt, braucht man nur durch die Punkte E und F die Orthogonalkreise an je einen der gegebenen Kreise zu legen. Man hat mit andern Worten in dem Büschel der Kreise (A_1), (A_2), (A_3) die drei Kreise zu ermitteln, von denen jeder einen der gegebenen Kreise senkrecht schneidet. Die Schnittpunkte sind die gesuchten Berührungspunkte.

Leider gilt auch diese Herleitung nicht für die ungleichartig berührenden Kreise.

6. **Isogonalkreise an drei gegebenen Kreisen.** Ein gemeinschaftlicher Berührungskreis dreier Kreise gehört zu den Kreisen, von denen die drei unter gleichen Winkelpaaren geschnitten werden. Es liegt daher nahe, die in § 23 Nr. 8 und 9 entwickelte Theorie für die Lösung des Taktionsproblems zu benutzen.

Wir gehen von drei Kreisen k_1, k_2, k_3 aus, deren Mittelpunkte O_1, O_2, O_3 sein sollen, und setzen, um die Darlegung zu vereinfachen, voraus, daß jeder dieser Kreise im Äußern der beiden andern liege. Dabei schließen wir uns wieder an die frühere Bezeichnung an. Auf k_1 nehmen wir einen Punkt C_1 willkürlich an, ermitteln zu ihm für den äußeren Ähnlichkeitspunkt A_3 den inversen Punkt C_2 auf k_2 und für den äußeren Ähnlichkeitspunkt A_2 den inversen Punkt C_3 auf k_3. Der Kreis h, der durch die Punkte C_1, C_2, C_3 geht, treffe k_1 noch in D_1, k_2 in D_2, k_3 in D_3. Dann ist $\sphericalangle(k_1 h)$ an C_1 gleich $\sphericalangle(h k_2)$ an C_2 und gleich $\sphericalangle(h k_3)$ an C_3. Folglich ist $\sphericalangle(k_2 h)$ an C_2 gleich dem Winkel $(h k_3)$ an D_3. Somit sind die Punkte C_2, D_3 invers für den Ähnlichkeitspunkt A_1 und in gleicher Weise D_3, D_1 invers für A_2, endlich D_1, D_2 invers für A_3. Alle in dieser Weise bestimmten Kreise h schneiden die Inversionskreise (A_1), (A_2), (A_3) rechtwinklig. Beiläufig geht hieraus hervor, daß diese drei Kreise einem Büschel angehören. In dem zu diesem Büschel konjugierten Büschel liegen die sämtlichen Kreise h, die aus der angegebenen Konstruktion sich ergeben.

Wählen wir wieder den Punkt C_1 willkürlich auf k_1, lassen aber die Punkte C_2 und C_3 inverse Punkte zu C_1 für die inneren Ähnlichkeitspunkte J_2 bzw. J_3 sein und legen jetzt durch C_1, C_2, C_3 den Kreis h, so ist der Winkel (k_1, h) an C_1 supplementär zu $\sphericalangle(hk_2)$ an C_2 und zu $\sphericalangle(hk_3)$ an C_3. Ist daher D_2 der zweite Schnittpunkt der Kreise k_3 und h, so sind die Winkel (hk_2) an C_2 und $(k_3 h)$ an C_3 einander gleich. Die Gerade $C_2 D_3$ ist also ein äußerer Ähnlichkeitsstrahl für die Kreise k_2 und k_3; sie geht durch den Punkt A_1.

Jetzt seien S_1, S_2, S_3 drei in gerader Linie liegende Ähnlichkeitspunkte der drei Kreise, C_3 ein beliebiger Punkt von k_3, C_1 der inverse Punkt zu C_3 für S_2, C_2 der inverse Punkt zu C_1 für S_1, D_3 der inverse Punkt zu C_2 für S_1, D_1 der inverse Punkt zu D_3 für S_2 und D_2 der inverse Punkt zu C_1 für S_3; dann ist C_3 der inverse Punkt zu D_2 für S_1. Durch die sechs Punkte C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3 läßt sich ein Kreis legen, der die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkelpaaren schneidet.

Wenn umgekehrt ein Kreis h die drei Kreise unter gleichen Winkelpaaren schneiden soll, so sind, nachdem für die Kreise ein übereinstimmender Sinn bestimmt ist, vier Fälle möglich: entweder sind die drei Winkel einander gleich oder einer ist das Supplement der beiden andern. Wählt man zu Scheiteln der Winkel paarweise solche Schnittpunkte, die einander nicht invers entsprechen, so ist entweder:

$$(k_1 h) = (k_2 h) = (k_3 h)$$

oder:

$$2R - (k_1 h) = (k_2 h) = (k_3 h)$$

oder:

$$(k_1 h) = 2R - (k_2 h) = (k_3 h)$$

oder:

$$(k_1 h) = (k_2 h) = 2R - (k_3 h).$$

Jedem dieser Fälle entspricht eine bestimmte Ähnlichkeitsachse der drei Kreise, und zwar sind, wenn wir die in Nr. 2 eingeführte Bezeichnung beibehalten, den angegebenen Fällen der Reihe nach die Geraden s_0, s_1, s_2, s_3 zugeordnet. Wir werden dadurch auf vier Büschel von Isogonalkreisen geführt. Sie sollen als die vier Isogonalbüschel der drei gegebenen Kreise bezeichnet werden. Die Chordalen dieser Büschel sind die Ähnlichkeitsachsen der gegebenen Kreise, die Zentralen sind die vom Potenzzentrum Q auf die Ähnlichkeitsachsen gefällten Senkrechten. Die zugehörigen vier konjugierten Büschel mögen Plückersche Büschel heißen, da sie mit den von Plücker zur Lösung des Taktionsproblems benutzten Kreisbüscheln identisch sind.

Jeder Büschel von Isogonalkreisen an den drei gegebenen Kreisen enthält zwei gemeinschaftliche Berührungskreise in sich. Sobald nämlich ein ihm angehörender Kreis den Kreis (O_1) berührt, ist er auch Berührungskreis für die Kreise (O_2) und (O_3). Jetzt sei B_1 der Punkt, in welchem der Kreis (O_1) von einem Kreise dieses Büschels berührt wird; alsdann schneidet der durch B_1 gehende Kreis des konjugierten Plückerschen Büschels auch den Kreis (O_1) rechtwinklig. Umgekehrt erhalten wir die Punkte, in denen gemeinsame Berührungskreise den Kreis (O_1) berühren, indem wir im Plückerschen Büschel den Kreis suchen, der den Kreis (O_1) rechtwinklig schneidet. In jedem Punkte, in dem (O_1) von einem solchen Kreise getroffen wird, berührt ihn ein gemeinschaftlicher Berührungskreis der drei gegebenen Kreise. Natürlich kann man mit Plücker auch die Kreise des Büschels hinzunehmen, von denen je einer der Kreise (O_2) und (O_3) rechtwinklig geschnitten wird.

7. **Benutzung des gemeinschaftlichen Potenzkreises.** Die Plückersche Lösung benutzt einen Kreisbüschel, der eine Ähnlichkeitsachse s der gegebenen Kreise zur Zentrale hat. Dieser Büschel kann als bekannt angesehen werden, sobald man neben der Zentrale einen Kreis des konjugierten Isogonalbüschels gefunden hat. Wenn die drei gegebenen Kreise (O_1), (O_2), (O_3) einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis besitzen, so gehört dieser zu allen vier Isogonalbüscheln. Wir nehmen daher zunächst an, das Potenzzentrum Q der gegebenen Kreise sei ein eigentlicher Punkt im Äußern dieser Kreise. In diesem Falle ist der Kreis (Q), der die von Q an einen der gegebenen Kreise gelegte Tangente zum Radius hat, der gemeinsame Orthogonalkreis (Potenzkreis). Die Kreise eines jeden Plückerschen Büschels sind somit dadurch bestimmt, daß sie in einer Ähnlichkeitsachse s ihre Mittelpunkte haben und den Kreis (Q) rechtwinklig schneiden.

Nun benutzt Plücker diejenigen Kreise seines Büschels, von denen je einer der gegebenen Kreise rechtwinklig geschnitten wird. Für die Konstruktion genügt aber bereits ein einziger Kreis dieser Art. Wir brauchen also nur einen Kreis zu ermitteln, der in s seinen Mittelpunkt hat und die Kreise (Q) und (O_1) rechtwinklig schneidet. Ein solcher Kreis kann leicht gefunden werden. Sein Mittelpunkt L_1 ist der Punkt, in welchem die Gerade s von der gemeinschaftlichen Sekante der Kreise (O_1) und (Q) geschnitten wird, und der Radius ist die von L_1 an den Kreis (O_1) oder den Kreis (Q) gelegte Tangente.

Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion. Man ermittle den Chordalpunkt Q und drei in einer Geraden s gelegene Ähnlichkeitspunkte S_1, S_2, S_3 der gegebenen Kreise (O_1), (O_2), (O_3). Von Q zieht man die Tangente etwa an den Kreis (O_1) und beschreibt mit ihr um Q den Kreis, der (O_1) in den Punkten C_1, D_1 schneiden möge. Vom Punkte L_1, in dem die Gerade s mit der Geraden $C_1 D_1$ zusammentrifft, zieht man die Tangenten $L_1 B_1$ und $L_1 B_1'$ an den Kreis (O_1). Der Kreis (O_2) werde von der Geraden $S_3 B_1$ in dem zu B_1 inversen Punkte B_2 und von der Geraden $S_3 B_1'$ in dem zu B_1' inversen Punkte B_2' getroffen. Wenn jetzt die Geraden $O_1 B_1$, $O_2 B_2$ in M, die Geraden $O_1 B_1'$, $O_2 B_2'$ in M' einander schneiden, so sind die Kreise $(M) B_1$ und $(M') B_1'$ gemeinschaftliche Berührungskreise der gegebenen Kreise.

Wenn der Chordalpunkt Q im Innern der gegebenen Kreise liegt, so wird ihr gemeinsamer Potenzkreis (Q) von jedem der drei Kreise halbiert. Jeder Kreis, der (Q) halbiert, und dessen Mittelpunkt ein Ähnlichkeitspunkt für irgend zwei von den drei gegebenen Kreisen ist, stellt den Grundkreis einer Inversion zwischen diesen beiden dar (vgl. § 23, 6). Weil aber jetzt sämtliche Inversionen zwischen den gegebenen Kreisen hyperbolisch sind, so gehören je drei Inversionskreise, deren Mittelpunkte auf derselben Ähnlichkeitsachse liegen, zu einem Plückerschen Büschel (vgl. § 23, 9). Daraus ergibt sich die für den vorliegenden Fall erforderliche Abänderung der Konstruktion: man hat nur die Gerade $C_1 D_1$, die nichts anderes ist als die Chordale des Orthogonalkreises (Q) und des gegebenen Kreises (O_1), zu ersetzen durch die Zentrale des Büschels aller Kreise, die den hier auftretenden Diametralkreis (Q) halbieren und zugleich (O_1) rechtwinklig schneiden (vgl. § 22, 6 unter c).

Die angegebene Konstruktion hat C. Adams in seinem Büchlein: Die harmonischen Verhältnisse (Winterthur 1845) mitgeteilt.

8. **Maßfellers Konstruktion.** Statt des gemeinschaftlichen Potenzkreises (Q) der gegebenen Kreise (O_1), (O_2), (O_3) kann man einen beliebigen Isogonalkreis benutzen, der die Kreise eines Plückerschen Büschels rechtwinklig schneidet. Einen solchen Kreis findet man in folgender Weise. Man wählt auf dem Kreise (O_1) einen Punkt C_1 beliebig, bestimmt für das Inversionszentrum S_3 auf (O_2) den zu C_1 inversen Punkt C_2 und mit Hilfe von S_1 auf (O_3) den zu C_2 inversen Punkt C_3. Dann trifft der durch die Punkte C_1, C_2, C_3 gelegte Kreis (H) die gegebenen Kreise isogonal. Man darf daher in der Konstruktion der vorigen Nummer den Kreis (Q) durch den Kreis (H) ersetzen.

Von diesem Kreise (H) kann man noch drei weitere Punkte mit Leichtigkeit ermitteln. Wenn nämlich D_1 auf (O_1) der zu C_3 inverse Punkt für das Ähnlichkeitszentrum S_2, D_2 auf (O_2) der inverse Punkt zu D_1 für S_3 und D_3 auf (O_3) der inverse Punkt zu D_2 für S_1 als Inversionszentrum ist, so liegen auch die Punkte D_1, D_2, D_3 auf dem

Kreise (H). Zugleich fällt aber auch der zu D_3 für das Zentrum S_2 inverse Punkt mit C_1 zusammen. Der Schnittpunkt L_1 der Geraden s und C_1D_1 ist somit Potenzzentrum für die Berührungskreise (M), (M') und den Kreis (O_1). Daher liefern die von L_1 an den Kreis (O_1) gelegten Tangenten die gesuchten Berührungspunkte.

Diese Betrachtung führt auf folgende Konstruktion. Auf dem Kreise (O_1) wählen wir den Punkt C_1, ziehen die Gerade C_1S_3 und nennen C_2 den zu C_1 auf (O_2) inversen Punkt; in gleicher Weise ermitteln wir auf (O_3) durch die Gerade C_2S_1 den Punkt C_3 und durch die Gerade C_3S_2 auf (O_1) den Punkt D_1. Vom Schnittpunkt L_1 der Geraden C_1D_1 und S_1S_2 legen wir die Tangenten L_1B_1 und L_1B_1' an den Kreis (O_1). Die inversen Punkte zu B_1, B_1' auf dem Kreise (O_2) für das Inversionszentrum S_3 seien B_2, B_2'. Ferner mögen die Geraden O_1B_1, O_2B_2 einander in M, die Geraden O_1B_1', O_2B_2' einander in M' schneiden. Dann werden die drei gegebenen Kreise durch die Kreise $(M)B_1$ und $(M')B_1'$ berührt.

Der Kreis, der durch die drei Punkte C_1, C_2, C_3 gelegt werden kann, möge wieder mit (H) bezeichnet werden. Da die Punkte der drei Paare C_1 und C_2, B_1 und B_2, B_1' und B_2' jedesmal zueinander invers sind für das Inversionszentrum S_3 und dieselbe Inversionspotenz, so haben die Kreise (H), (M), (M') im Punkte S_3 gleiche Potenz. Aus dem Zusammenhang, der zwischen den Punkten C_1, C_2, C_3 besteht, geht aber hervor, daß der Kreis (H) die Kreise (O_1), (O_2), (O_3) unter gleichen Winkelpaaren schneidet. Er geht daher durch den Punkt D_1. Demnach hat auch der Punkt L_1 gleiche Potenzen für die Kreise (H), (M), (M'). Die Gerade S_3L_1 oder s ist somit gemeinschaftliche Potenzlinie oder Chordale für diese drei Kreise. Da hiernach ihre Mittelpunkte in einer Geraden liegen, die auf s senkrecht steht, so sind die Punkte M und M' die Schnittpunkte der Geraden O_1B_1 und O_1B_1' mit der von H auf s gefällten Senkrechten q, oder die Geraden O_1B_1 und O_2B_2 treffen mit q in demselben Punkte M so zusammen, daß $MB_1 = MB_2$ wird. Ist jetzt B_3 auf (O_3) der zu B_1 für das Potenzzentrum S_2 inverse Punkt, so müssen auch die Geraden O_1B_1, O_3B_3 und q im Punkte M zusammenstoßen, und es muß auch $MB_1 = MB_3$ sein. Daher geht der Kreis $(M)B_1$ auch durch die Punkte B_2, B_3 und berührt die drei gegebenen Kreise. Dasselbe gilt vom Kreise $(M')B_1'$.

Den Hilfskreis (H) hat zuerst A. Maßfeller (Programm des Gymnasiums zu Montabaur 1901 und Archiv für Mathem. u. Phys. (3) Bd. 3 S. 189) eingeführt. Nur legt er ihn durch die drei Punkte, die wir mit C_1, C_2, C_3 bezeichnet haben, und bestimmt den Punkt D_1 als den zweiten Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Kreise (O_1). Die Konstruktion wird aber offenbar vereinfacht, wenn man den Punkt

D_1, wie wir getan haben, durch die Gerade $C_3 S_2$ ermittelt. Dagegen kommt man beim Beweise mit sehr einfachen Sätzen aus, wenn man den Punkt D_1 in der von Maßfeller angegebenen Weise bestimmt.

9. **Studys Untersuchungen über das apollonische Problem.** Über die Forderungen, die an die Lösung des apollonischen Problems gestellt werden müssen, hat Study im 49. Bande der Mathem. Annalen (S. 497—542) eingehende Untersuchungen angestellt. Er verlangt:

a) daß man mit einem Mindestmaß von irrationalen Operationen auskomme,

b) daß eine geometrische Konstruktion bei reellen Lösungen auch wirklich ausgeführt werden könne,

c) daß die Lösung einen möglichst hohen Grad von Allgemeinheit besitze, und

d) daß sie bei allen eindeutig umkehrbaren Transformationen gültig bleibe.

Wir erachten es im Interesse der Schule für angemessen, vorauszusetzen, daß die drei gegebenen Kreise vollständig gezeichnet vorliegen. Dann lassen sich, wie wir in § 9, 12 (S. 189) gesehen haben, alle elementaren Aufgaben mit alleinigem Gebrauche des Lineals lösen. Die erste Forderung Studys kommt daher für uns nicht in Betracht.

Auf die zweite Forderung brauchen wir ebenfalls nicht einzugehen, da sie durch die von uns angegebenen Lösungen befriedigt wird.

Die letzte Forderung möge näher erläutert werden. Wir denken uns mit Study die Ebene, in der wir operieren, durch eine für Punkte allgemeiner Lage eindeutig umkehrbare Transformation einer andern Fläche punktweise zugeordnet. Dadurch geht aus der Mannigfaltigkeit der Kreise in unserer Ebene eine neue Mannigfaltigkeit von dreifach unendlich vielen Kurven hervor, und das apollonische Problem verwandelt sich in eine neue Berührungsaufgabe. Study verlangt jetzt, daß die Lösung des apollonischen Problems auf jede Fläche dieser Art übertragen werden könne oder, mit anderen Worten, geeignet sei, jede äquivalente Aufgabe zugleich zu erledigen.

Ein Beispiel erhält man durch die stereographische Abbildung der Ebene auf die Kugel. Legen wir an eine Kugel $\varkappa$ in einem Punkte A die Tangentialebene α, so können wir unter Benutzung des Gegenpunktes B von A die Punkte der Tangentialebene und die der Kugel einander in eindeutig umkehrbarer Weise zuordnen. Wenn nämlich ein durch B gelegter Strahl die Ebene in P und die Kugel in P' trifft und wir die Punkte P und P' einander entsprechen lassen, so bestimmt jeder Punkt P von α einen einzigen Punkt P' von $\varkappa$ und umgekehrt. Aber den unendlichfernen Punkten der Ebene entspricht auf der Kugel einzig der Punkt B. Da bei unserer Abbildung Kreise in Kreise übergehen, so überträgt diese Abbildung das apollonische

Problem auf die Kugel. Nun kann man zwar die einzelnen Operationen, die zur Lösung des ebenen Problems dienen, durch die angegebene Projektion auf die Kugel übertragen; aber die einzelnen Gebilde, die man hierbei erhält, stehen vielfach mit den drei gegebenen Kugelkreisen nicht mehr in einem natürlichen Zusammenhange. Daher muß man eine Lösung des ebenen Problems höher einschätzen, wenn man bei der Übertragung auf die Kugel nur solche Gebilde benutzt, die auch aus den Kugelkreisen durch eine einfache und natürliche Betrachtung hervorgehen.

Das apollonische Problem läßt sich aber noch in anderer Weise erweitern. In § 8, 3 (S. 148) haben wir die kollineare Umformung der Ebene besprochen. In gleicher Weise kann der Raum kollinear transformiert werden. Dabei entspricht jedem Punkte ein Punkt, jeder Ebene eine Ebene; irgend vier Punkte, die in einer Ebene liegen, werden durch die Transformation in Punkte umgewandelt, die ebenfalls einer Ebene angehören. Entspricht einem Punkte P ein Punkt P', einer Ebene ε eine Ebene ε', so liegt jedesmal, wenn der Punkt P der Ebene ε angehört, auch der Punkt P' in der Ebene ε'. Durch eine solche Transformation kann die Kugel in irgendeine eigentliche ungeradlinige Fläche zweiter Ordnung (Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid oder elliptisches Paraboloid) umgewandelt werden. Jedem Kreise auf der Kugel als einer ebenen Kurve entspricht auf der Fläche zweiter Ordnung ein Kegelschnitt. Das apollonische Problem läßt somit folgende Erweiterung zu: Auf einer eigentlichen ungeradlinigen Fläche zweiter Ordnung sind drei Kegelschnitte gegeben; man soll auf der Fläche einen vierten Kegelschnitt finden, der die drei gegebenen berührt.

Die Grenzen, die wir unserm Buche stecken müssen, gestatten uns nicht, das Problem auch in dieser Erweiterung aufzufassen. Der Leser begreift, wie angemessen es ist, Lösungen zu suchen, die bei allen derartigen Erweiterungen ungeändert bleiben. Er erkennt aber auch, daß die Beschränkung auf Kreise einer Ebene gewisse Vereinfachungen in der Konstruktion ermöglicht, namentlich wenn man die Kreise als gezeichnet voraussetzt. Daher kann er es würdigen, daß die Studyschen Lösungen, die von einer viel allgemeineren Auffassung ausgehen, scheinbar nicht so einfach sind wie die gebräuchlichen.

Wenn wir somit auch von der letzten Forderung Studys absehen, so verdient seine dritte Forderung auch beim Unterrichte sorgfältig beachtet zu werden. Die drei gegebenen Kreise können ganz verschiedene Lagen zueinander haben; sie können außerdem, entweder sämtlich oder zum Teil, in Gerade oder in Punkte übergehen. Study wünscht nun, daß die Lösung nur solche Ausnahmen erleide, die im

Wesen des Problems begründet sind, daß sie also möglichst für alle Lagen und für alle Ausartungen gültig bleibe. Um diese Forderung scharf auszusprechen, erinnern wir daran, daß es in einem hyperbolischen oder elliptischen Kreisbüschel höchstens zwei Kreise gibt, die einen vorgeschriebenen Kreis berühren, daß dagegen die Kreise eines parabolischen Büschels einander sämtlich berühren. Wenn daher die drei gegebenen Kreise einem Büschel angehören, so haben sie entweder keinen gemeinsamen Berührungskreis, oder sie werden von unendlich vielen Kreisen berührt. Daher wird jede Lösung des apollonischen Problems illusorisch, wenn die Kreise einem Büschel angehören. Das ist kein Mangel der Lösung, sondern liegt in der Natur des Problems begründet. Wir können daher die angegebene Forderung in folgender Weise aussprechen: Wir stellen solche Lösungen des apollonischen Problems am höchsten, die für alle Lagen und für alle Ausartungen der Kreise gültig bleiben, wofern nur die gegebenen Kreise nicht einem Büschel angehören.

Wenn eine Lösung für solche Lagen der Kreise versagt, in denen die Existenz von gemeinsamen Berührungskreisen klar zutage tritt, so kann sie den Schüler unmöglich befriedigen. Ist er aber mit der Lösung so wenig vertraut, daß ihm die Ausnahmen nicht zum Bewußtsein kommen, so entgeht ihm der geistige Gewinn, der aus dem vollen Verständnis der Lösung erwächst.

Für die Schule ist es aber auch wichtig, daß die Lösung für alle Ausartungen der Kreise gültig bleibt. Der Schüler kann schon einiges Interesse daran haben, zu sehen, daß zehn scheinbar verschiedene Aufgaben im wesentlichen auf dieselbe Weise gelöst werden können. Zudem wird das Verständnis einer Lösung durch ihre Übertragung auf die Einzelfälle wesentlich gefördert, weil sich hierbei Gelegenheit bietet, die vorkommenden Lehrsätze in einer einfachen und gefälligen Weise anzuwenden. Vor allem möchten wir aber die Übertragung einer Lösung des allgemeinen Problems auf die speziellen Fälle aus dem Grunde empfehlen, weil sie geeignet ist, in den Grenzbegriff einzuführen. Die Schule muß dahin streben, mit diesem Begriffe soweit als möglich vertraut zu machen. Dogmatische Erörterungen von abstraktem Charakter sind für diesen Zweck ganz ungeeignet, weil sie das Interesse eher ertöten als beleben. Die Schule muß daher den Begriff an einfachen und interessanten Beispielen erläutern. Durch diese beiden Eigenschaften zeichnen sich aber die Erwägungen aus, die dazu führen, die Lösung des allgemeinen Taktionsproblems auf die speziellen Aufgaben zu übertragen. Indem man von einer Lösung ausgeht, die für eigentliche Kreise gilt, braucht man nur irgendeinen Grenzübergang zu betrachten, der die gewünschte Ausartung herbeiführt. Man verfolgt die Änderungen, die dabei mit den in der Lösung vorgenommenen

Operationen vor sich gehen. Sobald jede solche Operation ebenfalls einer festen Grenze zustrebt, paßt sie für die spezielle Aufgabe. Dadurch werden diese Übungen weit einfacher als die meisten andern, bei denen alle verschiedenen Möglichkeiten berücksichtigt werden müssen. Es befriedigt den Lernenden, wenn er sieht, daß seine Lösung hierbei im wesentlichen ungeändert bleibt. Er sucht die so gewonnene Lösung selbständig zu begründen und vergleicht sie mit andern, die sich auf direktem Wege ergeben. Aus diesem Grunde scheut er sich nicht, den Grenzübergang vorzunehmen, der ihm sonst lästig fallen würde.

Nur meinen wir, der Schüler solle derartige Übungen möglichst selbständig machen. Wenn ihm das Resultat als etwas Fertiges, vielleicht ohne Begründung, angegeben wird, wenn er infolgedessen gar nicht genötigt ist, den Grenzübergang selbst durchzuführen, so geht der wichtigste Vorteil aus einer solchen Übung ganz verloren.

Ehe wir dazu übergehen, die mitgeteilten Konstruktionen im Hinblick auf Studys dritte Forderung miteinander zu vergleichen, möchten wir für die Ausartungen von Kreisen die Grenzlagen derjenigen Gebilde angeben, die in den Konstruktionen benutzt werden. Wir müssen hierauf trotz der großen Einfachheit schon aus dem Grunde eingehen, weil die Lehrbücher hierüber durchweg ungenaue oder gar unrichtige Angaben machen. Die Chordale können wir beiseite lassen, weil hierüber alles Nötige bereits in § 22 gesagt ist.

10. **Ähnlichkeitspunkte für ausartende Kreise.** Um die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise in dem Falle zu ermitteln, daß der eine Kreis in eine Gerade übergeht, gehen wir von einem Kreise (O) und einer festen Geraden l aus, fällen von O die Senkrechte OC auf l und nehmen einen beliebigen Punkt O' der Geraden OC zum Mittelpunkte eines Kreises $(O')C$. Dann liegen die Ähnlichkeitspunkte von (O) und (O') immer auf der Geraden OC; sie treten aber immer näher an den Kreis (O) heran, je größer der Radius des Kreises (O') wird. Als Ähnlichkeitspunkte des Kreises (O) und der Geraden l sind die Schnittpunkte des Kreises mit der Senkrechten anzusehen, die vom Mittelpunkte des Kreises auf die Gerade gefällt werden kann. Welcher von diesen beiden Punkten als innerer und welcher als äußerer Ähnlichkeitspunkt betrachtet werden muß, hängt nicht von der Lage der beiden Gebilde ab, sondern wird lediglich durch die Art bedingt, wie man den veränderlichen Kreis in die Gerade übergehen läßt. Der innere Ähnlichkeitspunkt der Kreise (O), (O') liegt immer zwischen O und O'. Da man aber den Punkt O' auf jedem der beiden Halbstrahlen annehmen kann, die auf der Geraden OC im Punkte O begrenzt werden, so darf man jeden der beiden Schnittpunkte als inneren

Ähnlichkeitspunkt auffassen. Natürlich muß man in dem Falle, daß man zwei Kreise mit einer Geraden zusammenstellt, den Übergang, durch den die Gerade aus dem Kreise erhalten wird, beidemal gleichartig vornehmen.

Dabei ist aber zu beachten, daß die beiden Schnittpunkte des Kreises mit der vom Mittelpunkte auf die Gerade gefällten Senkrechten den Charakter der Ähnlichkeitspunkte zweier eigentlichen Kreise verloren haben und nur Mittelpunkte von Inversionen geblieben sind, durch die Kreis und Gerade ineinander übergeführt werden. Statt die Ähnlichkeitspunkte durch den angegebenen Grenzübergang aufzusuchen, braucht man nur an die Theorie der Inversionen zu erinnern.

Die Ähnlichkeitspunkte für zwei Gerade sind die unendlichfernen Punkte auf den Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel. Auch diese beiden Punkte haben mehr den Charakter von Inversionspunkten; die Punkte, in denen die beiden Geraden von einer Parallelen zu einer Winkelhalbierenden geschnitten werden, können als inverse Punkte aufgefaßt werden. Die Inversionskreise werden mit den Halbierenden selbst identisch.

Um das zu erkennen, nimmt man zu den beiden Geraden l, l' zwei gleiche Kreise hinzu, von denen jeder eine der gegebenen Geraden in ihrem Schnittpunkte berührt, und halbiert die von den Geraden gebildeten Winkel. Dann fällt der eine Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise in den unendlichfernen Punkt der einen Halbierenden, während der andere auf der anderen Halbierungslinie vom Schnittpunkte aus immer weiter rückt, je größer die Radien werden. Nachträglich mag man sich überzeugen, daß es weder notwendig ist, die Radien als gleich vorauszusetzen, noch die Berührungspunkte der veränderlichen Kreise mit dem Schnittpunkte der Geraden zusammenfallen zu lassen.

Wenn der Radius eines Kreises immer kleiner wird, während der zweite Kreis ungeändert bleibt, so rücken die beiden Ähnlichkeitspunkte der Kreise immer näher an den Mittelpunkt des veränderlichen Kreises heran. Punkt und Kreis haben nur einen einzigen Ähnlichkeitspunkt, der mit dem Punkte zusammenfällt. Dieser Punkt, als Punktkreis aufgefaßt, ist auch der Inversionskreis für den Punkt und den Kreis.

Das ändert sich auch nicht, wenn man den Radius des zweiten Kreises immer größer werden läßt. Auch Punkt und Gerade haben den Punkt zum Ähnlichkeitspunkt und zum Inversionskreise.

Lassen wir die Radien zweier Kreise mit den festen Mittelpunkten P, P' immer kleiner werden, so werden die Ähnlichkeitspunkte unbestimmt je nach dem Verhältnis, das wir den Radien geben. Als Ähnlichkeitspunkte für zwei Punkte P, P' können irgend zwei Punkte aufgefaßt werden, die zu ihnen harmonisch liegen.

11. **Die Polarentheorie für ausartende Kreise.** Wir gehen von einem festen Punkte A aus und lassen den Radius eines Kreises, der in einem festen Punkte P seinen Mittelpunkt hat, immer kleiner werden. Dadurch geht die Polare von A am Kreise (P) immer mehr in die Senkrechte über, die in P auf der Geraden AP errichtet wird. Die Polare eines Punktes A an einem Punktkreise P ist die in P auf AP errichtete Senkrechte. Jeder Punkt mit Ausnahme des Punktes P hat eine bestimmte Polare. Dagegen können nur Gerade, die durch den Punkt P gehen, als Polaren aufgefaßt werden. Stehen die beiden Geraden p und q im Punkte P aufeinander senkrecht, so ist p Polare für jeden Punkt von q, und q Polare für jeden Punkt von p.

Wenn ein Punkt A und eine Gerade l gegeben ist, so fällen wir von A die Senkrechte AC auf l. Auf der Verlängerung von AC nehmen wir einen Punkt O zum Mittelpunkte eines Kreises, der durch C geht. Schneidet dieser Kreis die Gerade AC noch in D und ist B der vierte harmonische Punkt zu C, D, A, so ist die in B auf AC errichtete Senkrechte die Polare von A am Kreise $(O)C$. Rückt der Punkt O und damit der Punkt D immer weiter von C ab, so geht der Punkt B immer mehr in das Spiegelbild von A an der Geraden l über. Die Polare des Punktes A an der Geraden l ist die Parallele zu l, die von ihr denselben Abstand hat wie der Punkt A. Jeder eigentliche Punkt der Ebene hat eine bestimmte Polare an l. Dagegen können nur die Parallelen zu l als Polaren aufgefaßt werden. Die Pole einer jeden liegen auf einer zweiten Parallelen zur Geraden l, die von dieser den gleichen Abstand hat.

12. **Vergleichung der verschiedenen Lösungen des apollonischen Problems.** Jetzt können wir die verschiedenen Konstruktionen, die wir für unser Problem angegeben haben, miteinander vergleichen. Auf die älteren Methoden brauchen wir nicht einzugehen; sie halten in keiner Hinsicht den Vergleich mit den neueren Lösungen aus. Die letzteren verlangen sämtlich die Kenntnis der sechs Ähnlichkeitspunkte der drei gegebenen Kreise. Dabei genügt es, die Ähnlichkeitspunkte für zwei Kreispaare aufzusuchen, weil man dann die des dritten mit Hilfe von wenigen Geraden finden kann. Zudem muß man bei Gergonnes und bei Adams' Konstruktion das Potenzzentrum der drei Kreise kennen. Bei Gergonnes Konstruktion muß man außerdem die Pole der vier Ähnlichkeitsachsen an einem der gegebenen Kreise konstruieren, was nicht ganz einfach ist. Die Adamssche Konstruktion kommt mit der Verbindungsgeraden der Punkte aus, in denen der gemeinsame Orthogonalkreis einen der gegebenen Kreise schneidet. Nur muß man in dem Falle, wo das Potenzzentrum im Innern der Kreise liegt, die in Nr. 7 angegebene Büschelzentrale

konstruieren. Sobald die Ähnlichkeitspunkte bekannt sind, kommt man bei Maßfellers Konstruktion mit wenigen Geraden aus. Sie übertrifft somit Gergonnes Konstruktion an Einfachheit und hält auch den Vergleich mit Adams' Konstruktion vollständig aus.

Vergleichen wir jetzt die Konstruktionen nach dem Grade der Allgemeinheit in dem Falle, daß der gesuchte Kreis drei eigentliche Kreise berühren soll. Gergonnes Lösung ermittelt den Berührungspunkt auf dem Kreise (O_α) mit Hilfe der Geraden, durch die das Potenzzentrum Q mit dem Pol P_α einer Ähnlichkeitsachse am Kreise (O_α) verbunden wird. Die Konstruktion wird daher illusorisch, wenn die Punkte Q und P_α zusammenfallen. Dieser Fall tritt dann und nur dann ein, wenn die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise in gerader Linie liegen. Dann ist die gemeinsame Zentrale auch die einzige Ähnlichkeitsachse. Der Punkt Q wird der unendlichferne Punkt in der zur Zentrale senkrechten Richtung. Dieser Punkt ist auch Pol der Zentrale für jeden Kreis. In diesem Falle können die Berührungspunkte nach der Methode von Gergonne nicht gefunden werden.

Die Konstruktion von Adams versagt, wenn der gemeinsame Orthogonalkreis mit einer Ähnlichkeitsachse zusammenfällt. Daher kann auch diese Lösung nicht benutzt werden, wenn die Mittelpunkte der Kreise in gerader Linie liegen.

Maßfellers Konstruktion führt für eigentliche Kreise immer zum Ziel, wofern nur die Kreise nicht einem Büschel angehören. Sie verdient daher auch wegen ihres allgemeinen Charakters vor den beiden andern Lösungen bevorzugt zu werden.

Zum Schluß wollen wir die einzelnen Konstruktionen in dem Falle prüfen, daß die Kreise sämtlich oder zum Teil ausarten. Gergonnes Konstruktion kann zwar auf die meisten speziellen Aufgaben übertragen werden, führt aber für die Aufgabe P, P', l, die Aufgabe P, l, l' und die Aufgabe l, l', l'' nicht zum Ziele. Bei der Aufgabe P, P', l ist die Gerade PP' Ähnlichkeitsachse, sie kann aber nicht als Polare für den ausgearteten Kreis l aufgefaßt werden. Bei der Aufgabe P, l, l' erhalten wir zwar zwei gemeinsame Ähnlichkeitsachsen; aber keine von ihnen kann als Polare an einem der uneigentlichen Kreise l, l' angesehen werden. Für drei Gerade l, l', l'' fällt das Potenzzentrum ganz weg.

Wenn wir die beiden andern Konstruktionen auf Ausartungen von Kreisen übertragen wollen, so müssen wir folgendes beachten. Den Berührungspunkt des gesuchten Kreises mit dem Kreise (O_α) finden wir dadurch, daß wir von dem als L_α bezeichneten Punkte die Tangenten an den Kreis (O_α) legen. Diese Operation erleidet eine kleine Änderung, wenn der Kreis (O_α) in eine Gerade übergeht. Wir können nämlich auch die Tangente von L_α aus an den Hilfskreis legen. Berührt diese in U_α, so braucht man nur auf der entsprechenden Geraden von L_α aus die Strecke $L_\alpha V_\alpha = L_\alpha U_\alpha$ abzutragen, um den Berührungspunkt auf der entsprechenden Geraden zu finden. Auch ist es nicht immer möglich, nach Bestimmung der Punkte C_1, C_2, C_3 die Punkte D_1, D_2, D_3 mit dem Lineal allein zu bestimmen.

Indem wir das beachten, finden wir, daß Adams' Konstruktion für alle Ausartungen gültig bleibt mit Ausnahme der Aufgabe l, l', l''.

Dagegen kann Maßfellers Konstruktion auf alle Einzelfälle übertragen werden. Es genüge, an einige Aufgaben zu erinnern. Um zur Lösung der Aufgabe P, P', l zu gelangen, ersetzen wir in dem allgemeinen Problem den Kreis (O_1) durch die Gerade l, den Kreis (O_2) durch den Punkt P und den Kreis (O_3) durch den Punkt P'. Die Ähnlichkeitsachse ist die Gerade PP'. Wählen wir in l den Punkt C_1 willkürlich, so fällt C_2 mit P, C_3 mit P' zusammen. Der Kreis (H) geht durch die Punkte P, P' und den auf l beliebig gewählten Punkt C_1. Da der Punkt D_1 in der Geraden l liegt, so hat man als Punkt L_1 den Schnittpunkt der Geraden PP' und l zu nehmen. Die Potenz der Kreise (M), (M') im Punkte L_1 ist das Quadrat der von L_1 an (H) gelegten Tangente. Daraus ergeben sich die Berührungspunkte mit der Geraden l.

Für P, l, l' sind die Ähnlichkeitsachsen die Geraden, die durch P parallel zu den Halbierungslinien der Winkel von l und l' gezogen werden können. Eine solche sei s. Denkt man sich jetzt den Kreis (O_1) durch l, den Kreis (O_2) durch l', den Kreis (O_3) durch P ersetzt und nimmt man den Punkt C_1 willkürlich auf l an, so liefert die durch C_1 zu s gezogene Parallele in l' den Punkt C_2, während C_3 mit P zusammenfällt. Der Kreis (H) geht also in den Kreis über, der durch die Punkte C_1, C_2, P gelegt werden kann. Da D_1 in l liegt, wird der Punkt L_1 der Schnittpunkt von s und l. Der Punkt, in dem die Gerade l von dem gesuchten Kreise berührt wird, gehört dem Kreise an, der L_1 zum Mittelpunkte hat und den Kreis (H) senkrecht schneidet; er liegt daher auf dem Kreise, der um L_1 mit der von diesem Punkte an den Kreis (H) gelegten Tangente beschrieben wird.

Für die Aufgabe l, l', l'' endlich fällt die Ähnlichkeitsachse mit der unendlichfernen Geraden zusammen. Als zusammengehörige Ähnlichkeitspunkte können die unendlichfernen Punkte der Halbierenden der drei Außenwinkel des von l, l', l'' gebildeten Dreiecks oder von einem Außenwinkel und zwei Innenwinkeln betrachtet werden. Drei Winkelhalbierende, die in dieser Weise zusammen gehören, mögen g, g', g'' sein, wo g einen Winkel von l und l' halbiert usw. In l wählen wir C_1 willkürlich, lassen C_1C_2 zu g'', C_2C_3 zu g, C_3D_1 zu g', D_1D_2 zu g'', D_2D_3 zu g parallel sein, wo C_1, D_1 in l, C_2, D_2 in l', C_3, D_3 in

l'' liegen sollen. Dann wird $D_3 C_1$ zu g' parallel. Indem wir den Kreis, der durch die sechs Punkte C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3 geht, mit (H) bezeichnen, verlangt die Konstruktion einen Kreis, der den Schnittpunkt L_1 der Ähnlichkeitsachse mit der gegebenen Geraden l zum Mittelpunkte hat und den Kreis (H) senkrecht schneidet. Weil aber im vorliegenden Falle der Punkt L_1 der unendlichferne Punkt von l wird, muß man eine auf l senkrechte Gerade bestimmen, die auch den Kreis (H) rechtwinklig schneidet. Das kommt auf die gebräuchliche Konstruktion hinaus, da man unabhängig von der Wahl des Punktes C_1 durch die Geraden g, g', g'' auf denselben Mittelpunkt H geführt wird und die von ihm auf die Seiten gefällten Senkrechten die Berührungspunkte liefern.

13. **Die Isogonalkreise von vier gegebenen Kreisen.** Die Lehrsätze, zu denen uns die Behandlung des Taktionsproblems geführt hat, ermöglichen die Lösung von vielen weiteren Aufgaben. Es genüge, auf eine einzige hinzuweisen, nämlich auf die bereits von Steiner und von Plücker gelöste Aufgabe: Einen Kreis zu konstruieren, der vier gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneidet. Bei dieser Fassung der Aufgabe können wir von dem Sinne absehen, den wir oben (§ 23, 8) den einzelnen Kreisen gegeben haben, und nur verlangen, daß die Winkelpaare, die der gesuchte Kreis mit je einem der gegebenen Kreise bildet, einander gleich seien. Wenn wir aber den Sinn in der angegebenen Weise bestimmen, umfaßt die gestellte Aufgabe acht verschiedene Möglichkeiten. Um die einzelnen Fälle und ihre Lösungen bequem darstellen zu können, bezeichnen wir die vier gegebenen Kreise mit (O_1), (O_2), (O_3), (O_4), verstehen unter α, β, γ, δ irgendeine Permutation der Marken 1, 2, 3, 4 und unter (α) den Winkel, den der gesuchte Kreis unter Berücksichtigung des Sinnes mit dem Kreise (O_α) bildet. Die acht Möglichkeiten stellen wir in folgender Weise zusammen:

$$(1) = (2) = (3) = (4),$$
$$2R - (1) = (2) = (3) = (4),$$
$$(1) = 2R - (2) = (3) = (4),$$
$$(1) = (2) = 2R - (3) = (4),$$
$$(1) = (2) = (3) = 2R - (4),$$
$$(1) = (2) = 2R - (3) = 2R - (4),$$
$$(1) = (3) = 2R - (2) = 2R - (4),$$
$$(1) = (4) = 2R - (2) = 2R - (3).$$

Der Kreis (N) möge der ersten Möglichkeit entsprechen; für den Kreis (N_α) sei $2R - (\alpha) = (\beta) = (\gamma) = (\delta)$, und für den Kreis $(N_{\alpha\beta})$, der auch durch $(N_{\beta\alpha})$, $(N_{\gamma\delta})$, $(N_{\delta\gamma})$ bezeichnet werden kann, soll $(\alpha) = (\beta) = 2R - (\gamma) = 2R - (\delta)$ sein.

Bei der Lösung wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß jeder gegebene Kreis dem Äußern der drei andern angehört und von den Mittelpunkten nicht drei in gerader Linie liegen. Dann haben die drei Kreise (O_β), (O_γ), (O_δ) einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis, der mit (Q_α) bezeichnet werden soll. Ferner sei $A_{\alpha\beta}$ der äußere, $J_{\alpha\beta}$ der innere Ähnlichkeitspunkt der Kreise (O_γ), (O_δ). Die zwölf Ähnlichkeitspunkte verteilen sich auf sechzehn gerade Linien, die für je drei Kreise Ähnlichkeitsachsen sind. Die Gerade $s_{\alpha\alpha}$ möge die Punkte $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\gamma}$, $A_{\alpha\delta}$, die Gerade $s_{\alpha\beta}$ die Punkte $A_{\alpha\beta}$, $J_{\alpha\gamma}$, $J_{\alpha\delta}$ enthalten. Jeder Ähnlichkeitspunkt liegt in vier solchen Geraden, und zwar $A_{\alpha\beta}$ in $s_{\alpha\alpha}$, $s_{\alpha\beta}$, $s_{\beta\beta}$, $s_{\beta\alpha}$, der Punkt $J_{\alpha\beta}$ in $s_{\alpha\gamma}$, $s_{\alpha\delta}$, $s_{\beta\gamma}$, $s_{\beta\delta}$. Ferner sei vom Punkte Q_α die Senkrechte $q_{\alpha\alpha}$ auf $s_{\alpha\alpha}$ und die Senkrechte $q_{\alpha\beta}$ auf $s_{\alpha\beta}$ gefällt. Endlich seien $(A_{\alpha\beta})$, $(J_{\alpha\beta})$ die zu den Kreisen (O_γ), (O_δ) gehörenden Inversionskreise.

Beschreibt man um den Schnittpunkt N von q_{11}, q_{22} mit der von ihm aus den Kreis (A_{12}) gelegten Tangente den Kreis, so schneidet dieser die gegebenen Kreise bei Festhaltung des Sinnes unter gleichen Winkeln. Daher liegt der Mittelpunkt N auch auf den beiden Linien q_{33}, q_{44}, und der so gefundene Kreis (N) schneidet auch die Kreise (A_{13}), (A_{14}), (A_{23}), (A_{24}), (A_{34}) rechtwinklig.

Der Kreis (N_α) soll die Kreise (O_β), (O_γ), (O_δ) unter dem Winkel (β), dagegen den Kreis (O_α) unter dem Supplemente dieses Winkels schneiden. Daher liegt sein Mittelpunkt auf den vier Geraden $q_{\alpha\alpha}$, $q_{\beta\alpha}$, $q_{\gamma\alpha}$, $q_{\delta\alpha}$ und ist durch zwei dieser Geraden eindeutig bestimmt. Der Kreis selbst ist Orthogonalkreis zu den Kreisen $(A_{\alpha\beta})$, $(A_{\alpha\gamma})$, $(A_{\alpha\delta})$ und Diametralkreis zu den Kreisen $(J_{\beta\gamma})$, $(J_{\beta\delta})$, $(J_{\gamma\delta})$.

Weil der Kreis $(N_{\alpha\beta})$ die vier gegebenen Kreise so schneiden soll, daß $(\alpha) = (\beta) = 2R - (\gamma) = 2R - (\delta)$ ist, so gehört sein Mittelpunkt den Geraden $q_{\alpha\beta}$, $q_{\beta\alpha}$, $q_{\gamma\delta}$, $q_{\delta\gamma}$ an. Er schneidet die Kreise $(A_{\alpha\beta})$ und $(A_{\gamma\delta})$ rechtwinklig, halbiert aber die Kreise $(J_{\alpha\gamma})$, $(J_{\alpha\delta})$, $(J_{\beta\gamma})$, $(J_{\beta\delta})$.

Daher schneiden sich jedesmal die vier Geraden $q_{\alpha\alpha}$, $q_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\gamma}$, $q_{\alpha\delta}$ im Punkte Q_α, die Geraden q_{11}, q_{22}, q_{33}, q_{44} im Punkte N, die Geraden $q_{\alpha\alpha}$, $q_{\beta\alpha}$, $q_{\gamma\alpha}$, $q_{\delta\alpha}$ im Punkte N_α und die vier Geraden $q_{\alpha\beta}$, $q_{\beta\alpha}$, $q_{\gamma\delta}$, $q_{\delta\gamma}$ im Punkte $N_{\alpha\beta}$, der auch mit $N_{\gamma\delta}$ bezeichnet werden kann. Wir können diese Beziehungen dadurch schärfer hervortreten lassen, daß wir Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 als Eckpunkt eines Vierecks, N_1, N_2, N_3, N_4 als Eckpunkte eines zweiten und die Punkte N, N_{12}, N_{13}, N_{14} als Eckpunkte eines dritten Vierecks ansehen. Diese drei Vierecke stehen in der Beziehung zueinander, daß jede Gerade, durch welche zwei Ecken verschiedener Vierecke miteinander verbunden werden, auch durch eine Ecke des dritten Vierecks geht. Die Gerade $q_{\alpha\alpha}$ enthält nämlich die Punkte Q_α, N_α, N, die Gerade $q_{\alpha\beta}$ die Punkte Q_α, N_β, $N_{\alpha\beta}$.

Nun gehören alle Kreise, deren Mittelpunkte auf der Geraden $q_{\alpha\alpha}$ oder der Geraden $q_{\alpha\beta}$ liegen und die die drei Kreise (O_β), (O_γ), (O_δ) unter gleichen Winkelpaaren schneiden, einem Büschel an. Das gilt also für jedes Tripel von Kreisen, deren Mittelpunkte, wie wir eben sahen, in gerader Linie liegen. Um diesen Satz auszusprechen, verteilen wir die vier Orthogonalkreise für je drei der gegebenen Kreise und die acht Isogonalkreise auf drei Quadrupel; das erste soll die Kreise (Q_1), (Q_2), (Q_3), (Q_4), das zweite die Kreise (N_1), (N_2), (N_3), (N_4), das dritte die Kreise (N), (N_{12}), (N_{13}), (N_{14}) enthalten. Dann gilt der merkwürdige Satz:

Wählt man aus zwei verschiedenen Quadrupeln je einen Kreis aus, so liegt in dem durch sie bestimmten Büschel jedesmal noch ein Kreis des dritten Quadrupels.

So gehören die Kreise (Q_α), (N_α), (N), sowie auch (Q_α), (N_β), $(N_{\alpha\beta})$ je einem Büschel an. Die aus diesen zwölf Kreisen bestehende Figur nennt Study, der auf die angegebene Beziehung der Kreise zueinander zuerst (a. a. O. S. 518) aufmerksam gemacht hat, wegen ihres Zusammenhanges mit den desmischen Tetraedern eine desmische Kreisfigur. (Über desmische Tetraeder vergleiche man: Thieme, die Elemente der Geometrie S. 364.)

Aufgaben zu den §§ 23 und 24 bieten: A. Milinowski, Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen, sowie Jul. Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung geom. Konstruktionsaufgaben.

Berichtigungen.

Seite 300, Zeile 4—5 von unten, ist zu lesen:

Dann muß $\mathfrak{g}$ größer sein als alle Zahlen von $\mathfrak{R}$ und kleiner als alle Zahlen von $\mathfrak{R}'$,

statt:

Dann muß $\mathfrak{g}$ größer sein als alle Zahlen von $\mathfrak{R}'$.

Seite 302, Zeile 4 von unten, ist zu lesen:

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}+\mathfrak{k}} - \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}},$$

statt:

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}-\mathfrak{k}} - \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}}.$$

Namen- und Sachregister.

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. F., und Geheimrat Dr. Ed. **Riecke,** Professoren an der Universität Göttingen, über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen. Vorträge, gehalten in Göttingen Ostern 1900 bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik. Gesammelt von F. Klein und Ed. Riecke. Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von F. Klein. Mit 84 Figuren. [VI u. 252 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 6.—

——— neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Gesammelt von F. Klein und Ed. Riecke. Mit einem Abdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von E. Götting und F. Klein. Enthaltend Beiträge der Herren O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, Ed. Riecke, Fr. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild.

I. Teil (1. u. 2. Heft). Mit 6 Figuren im Text. [VII u. 190 S.] gr. 8. 1904. Geh. n. ℳ 3.60.
II. — (3. Heft). Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. Geh. n. ℳ 5.—
Teil I und II in einem Band gebunden n. ℳ 8.60.

Lazzeri, G., und A. Bassani, Elemente der Geometrie (und zwar Geometrie der Ebene und des Raumes verwebt). Mit Genehmigung der Verfasser aus dem Italienischen übersetzt von P. Treutlein. [ca. 400 S.] gr. 8. Geb. [Erscheint Ostern 1910.]

Lietzmann, Dr. W., Oberlehrer an der städt. evang. Oberrealschule zu Barmen, Stoff und Methode im mathematischen Lehrbuch der höheren Knabenschulen. [ca. 80 S.] [Erscheint im Oktober 1909.]

Lipps, Dr. G. F., Professor an der Universität Leipzig, das moderne Bildungsideal und der wissenschaftliche Schulunterricht. gr. 8. Geb. [In Vorbereitung.]

Repertorium der höheren Mathematik. Von E. Pascal. Deutsche Ausgabe von A. Schepp. In 2 Teilen. Analysis und Geometrie. 2. neubearbeitete Aufl. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Die Analysis. Unter Mitwirkung von E. Pascal sowie Ph. Furtwängler, A. Guldberg, H. Hahn, E. Jahnke, H. Jung, A. Loewy, H. E. Timerding, herausgegeben von P. Epstein, [ca. 800 S.] ca. n. ℳ 12.—. [Erscheint im Herbst 1909.]
II. — Die Geometrie. Unter Mitwirkung von E. Pascal sowie L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, Fr. Dingeldey, F. Enriques, P. Epstein, G. Giraud, H. Grassmann, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Mollerup, J. Neuberg, U. Perazzo, O. Staude, E. Steinitz, H. Wieleitner und K. Zindler, herausgegeben von H. E. Timerding. [ca. 900 S.] ca. n. ℳ 14.— [Erscheint Ostern 1910.]

Schwering, Prof. Dr. K., Direktor des Gymnasiums an der Apostelkirche zu Cöln a. Rh., Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Mit 193 Figuren im Text. [VIII u. 408 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M* 8.—

Simon, Dr. M., Professor am Lyzeum und Honorarprofessor an der Universität Straßburg i. E., Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. Geb. n. *M* 3.60.

——— über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Mit 28 Textfiguren. [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. *M* 8.—, in Leinwand geb. n. *M* 9.—

Stäckel, Dr. P., Prof. an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe und Dr. **Fr. Engel**, Prof. an der Universität Greifswald, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Mit 145 Textfiguren und der Nachbildung eines Briefes von Gauß. [X u. 325 S.] gr. 8. 1895. Geh. n. *M* 9.—, in Leinwand geb. n. *M* 11.—

Tannery, J., Professor an der Universität Paris, Subdirektor der École normale supérieure zu Paris, Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. P. Klaess, Gymnasiallehrer in Echternach (Luxemburg). Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 184 Textfiguren. [XII u. 364 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M* 7.—, in Leinwand geb. n. *M* 8.—

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausg. von Felix Auerbach. I. Jahrgang 1909/10. Mit 1 Bildnis Lord Kelvins. [XLIV u. 450 S.] 8. In Leinwand geb. n. *M* 6.—

Voß, Dr. A., Professor an der Universität München, über das Wesen der Mathematik. Rede, gehalten am 11. März 1908 in der öffentlichen Sitzung der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Erweitert und mit Anmerkungen versehen. [98 S.] gr. 8. 1908. Steif geh. n. *M* 3.60.

Weber, Dr. H., u. Dr. J. **Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8.

I. Band: Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von Heinrich Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinwand geb. n. *M* 9.60.

II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Walter Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Textfig. [XII u. 596 S.] 1907. In Leinw. geb. n. *M* 12.—

III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Rud. H. Weber (Rostock). Mit 358 Textfiguren. [XIII u. 666 S.] 1907. In Leinwand geb. n. *M* 14.—