ANLEITUNG

ZUM

FELDMESSEN

MIT BESONDERER RÜCKSICHT

AUF DIE ANWENDUNG DES METRISCHEN MAASSES

NEBST EINEM

ANHANG ÜBER DIE FLÄCHENBESTIMMUNG MIT HÜLFE DES AMSLER'SCHEN POLARPLANIMETERS

VON

J. J. VORLAENDER,

KÖNIGL. PREUSS. KATASTER-INSPECTOR UND STEUERRATH.

BERLIN,

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1871.

INHALT.

Berichtigungen.

Seite	1	Zeile	3	von	oben	für »Zellmannsche« lies »Zollmannsche«
»	17	»	8	»	unten	für ganze, lies , ganze
»	30	»	8	»	unten	für Fig. 5 lies Fig. 3
»	60	»	6	»	oben	für $(\beta + R + \frac{1}{2})\, C$ lies $(\beta + R + \frac{1}{2}\, C)$
»	62	»	20	»	unten	für Knotenpapier lies Kartenpapier
»	66	»	6	»	oben	für Welcher lies Welche.

EINLEITUNG.

In früherer Zeit bedienten sich die Feldmesser solcher Werkzeuge, bei denen die Figuren des Feldes entweder unmittelbar bei der Aufnahme im verkleinerten Maassstabe auf die Papierfläche übertragen wurden, wie bei dem Messtisch, oder womit Bestimmungsmaasse erhoben wurden, welche demnächst unvermittelt zur Herstellung der dem Felde ähnlichen Figuren benutzt wurden, wie bei der Zellmann'schen Scheibe und der Boussole. Das Ergebniss der Anwendung dieser Werkzeuge war, abgesehen von ihren sonstigen Unvollkommenheiten, von der Ungenauigkeit der Verzeichnung auf dem Papier, auch von der physischen Veränderlichkeit des letzteren abhängig.

Die gegenwärtige Zeit stellt strengere Anforderungen an Feldmesserarbeiten; sie verlangt, dass die Ergebnisse derselben nur noch von den unvermeidlichen Fehlern unserer verbesserten Werkzeuge, aber nicht mehr von denen der Verzeichnung und der Papierveränderlichkeit abhängig seien. Jede Figur des Feldes soll jetzt durch die in Zahlen gegebenen, bei der Vermessung unmittelbar von den Instrumenten abgelesenen Maasse oder mit den aus diesen ohne Genauigkeitsverlust abgeleiteten anderen Zahlenwerthen bestimmt werden. Nach solchen Zahlenwerthen sollen Theile der Feldfiguren, welche etwa im Laufe der Zeit an ihren Grenzen verdunkelt sind, mit derselben Zuverlässigkeit wieder hergestellt werden können, mit welcher ihre Bestimmungsmaasse bei der ursprünglichen Vermessung erhoben worden sind. Diese Zahlenwerthe sollen aber überdem so eingerichtet sein, dass aus ihnen möglichst einfach und möglichst zuverlässig das Bild des aufgenommenen Feldes auch kartlich dargestellt werden kann.

Um diesen Anforderungen zu genügen, ist hinreichend, aus den unmittelbaren Ergebnissen der Vermessung die rechtwinkligen Abstände (Coordinaten) für die Hauptpunkte des Gerippes der Hauptlinien von einer gemeinsamen geraden Linie, der Achse (Abscissenlinie), abzuleiten, nachdem schon bei der Vermessung im Felde die einzelnen Gegenstände der Aufnahme (Grenzpunkte, Grenzlinien) ebenfalls mittelst rechtwinkliger Abstände gegen die Hauptlinien bestimmt sind. Am leichtesten lassen sich jene rechtwinkligen Abstände der Hauptpunkte gegen die gemeinschaftliche gerade Linie bestimmen, wenn ihre Entfernungen von einander (Strecken) und die Winkel, unter denen sie zusammentreffen (Brechungswinkel), gemessen sind, und wenn der Neigungswinkel wenigstens einer der zusammenhängenden Hauptlinien gegen die Achse gegeben oder willkürlich angenommen ist.

Zusammenhängende Hauptlinien laufen von ihrem Anfangspunkte entweder nach einem Endpunkte fort und bilden einfache Linienzüge, oder der Endpunkt fällt mit dem Anfangspunkt zusammen und es entstehen geschlossene Vielecke. In dem einen wie in dem anderen Falle hat die Ermittelung der rechtwinkligen Achsen-Abstände für die Winkelpunkte der Hauptlinien zwei Geschäfte auszuführen, nämlich:

I. die Ableitung der Neigungswinkel der auf einander folgenden Strecken gegen die Abstands-Achse vermittelst der Anfangs-Neigung und der nachfolgenden Brechungswinkel;

II. die Berechnung der Abstands-Unterschiede und ihre Zusammensetzung zu den Achsen-Abständen vermittelst der Strecken und ihrer Neigungswinkel.

Für die Leichtigkeit, die Ordnung und die Sicherheit des ersten Geschäfts ist es dringend rathsam, die bisherige Eintheilung des Kreises in 360 Grade, des Grades in 60 Minuten, der Minute in 60 Secunden zu verlassen und die neue französische Eintheilung des Kreises in 4 Quadranten, des Quadranten in 100 Theile, die man Neugrade nennen mag, des Neugrades in 100 Neuminuten, der Neuminute in 100 Neusecunden bei Feldmesser-Arbeiten überall in Anwendung zu bringen. Astronomen und Geographen mögen die bisherige Gradeintheilung des Kreises beibehalten, aber der Feldmesser muss sich nach den bequemsten Mitteln für seine Zwecke umsehen, muss das

Bogenmaass ebenso decimal eintheilen, wie seine Längen- und Flächenmaasse. Sind auch seine Werkzeuge noch in alte Grade eingetheilt, so mag er sie umtheilen lassen, was bekanntlich in den mechanischen Werkstätten der deutschen Hauptstädte in kurzer Zeit und für wenig Geld beschafft wird. Nicht minder rathsam ist es, dass alle Winkelwerkzeuge (Theodoliten) in einer und derselben Drehungsweise, in der Richtung der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne (sonnenläufig), d. i. von links über die Brustseite nach rechts und über die Rückseite nach links zurück, getheilt werden, und dass auch die Bogen der Neigungswinkel von der Richtung der Achse oder ihrer Parallelen aus in derselben Drehungsweise gezählt werden.

Für das zweite Geschäft erleichtert es die Anschauung, die bisher gebräuchlichen Fremdwörter »Ordinate« und »Abscisse« mit den gleichbedeutenden deutschen Wörtern »Abstand« und »Abschnitt« zu vertauschen. Der Abstand eines Punktes ist also die von ihm auf die Achse senkrecht gezogene gerade Linie, der Abschnitt das Stück der Achse von ihrem Anfangspunkte bis zu dem Punkte, in welchem jene Senkrechte die Achse schneidet. Oben ist schon für die gerade Verbindungslinie zwischen zwei nächsten Brechpunkten eines Zuges das Wort »Strecke« benutzt worden, wofür man bisher das Wort »Polygonseite« setzte. Dieses Wort ist aber für Züge, welche nicht in geschlossene Vielecke zusammenlaufen, uneigentlich, auch ist das Wort »Seite« zweideutig, weil es gemeinhin zur Bezeichnung der Lage nach links oder rechts, nach vorn oder rückwärts gebraucht wird.

Gewöhnlich werden in den anzuwendenden Formeln die Achsen-Abstände mit dem Buchstaben y, die Achsen-Abschnitte mit x, die Abstands-Unterschiede mit Δy, die Abschnitts-Unterschiede mit Δx bezeichnet, und wird dieser Gebrauch in der nachfolgenden Schrift beibehalten werden. Die Strecken werden auch hier, wie gewöhnlich, mit dem Buchstaben S, die Brechungswinkel mit b, die Neigungswinkel gegen die Achsen-Richtung mit α bezeichnet. Handelt es sich um bestimmte Punkte, so bezeichnet man ihre Abstände und Abschnitte mit den angehängten Nummern dieser Punkte. So bezeichnen z. B. y_{23} und x_{23} die Abstände und Abschnitte für den Punkt 23, b_{23} bedeutet den Brechungswinkel im Standpunkt 23 zwischen der Richtung nach 22 und der nach 24 in der oben gedachten allgemeinen Drehungsweise, b'_{23} seine Ergänzung zu vier rechten Winkeln.

Eine bestimmte Strecke wird mit Anhängung der Nummern beider Endpunkte bezeichnet, so dass z. B. $S_{23.24}$ die gerade Linie und ihr Maass vom Punkt 23 nach dem Punkt 24 andeutet. Ebenso bedeutet $\alpha_{23.24}$ den Neigungswinkel der Strecke von 23 nach 24 im Punkte 23.

Will man endlich für irgend einen in der Reihenfolge der Punkte unbestimmten Punkt jene Stücke bezeichnen, so setzt man

y_n, x_n für seinen Abstand und Abschnitt,
b_n, b'_n für seinen Brechungswinkel und dessen Ergänzung,
$S_{n.n+1}$ für die Strecke vom Punkt n nach dem Punkt $n+1$.
$\alpha_{n.n+1}$ für den derselben Strecke zugehörigen Neigungswinkel,
$\Delta y_{n.n+1}$ für den ihr zugehörigen Abstands-Unterschied,
$\Delta x_{n.n+1}$ für den Abschnitts-Unterschied.

Das Bogenmaass des Kreisviertels (Quadrant), der rechte Winkel, wird allgemein mit dem Buchstaben R bezeichnet.

Zur Abkürzung lässt man auch wohl die Doppelbezeichnung unter Δy, Δx, S, α fort und setzt einfach Δy_n, Δx_n, S_n, α_n. Dann aber muss es selbstverständlich sein, dass diese Zeichen sich auf diejenige Strecke beziehen, welche in der Reihenfolge, worin der Zug durchlaufen werden soll, die nächstfolgende ist. Auch darf dabei nicht ausser Acht gelassen werden, dass unter Umständen diese Reihenfolge gegen die natürliche Zahlenfolge der Brechpunkts-Nummern gerichtet sein kann, dass also beispielsweise der Zug in der Richtung 24, 23, 22 u. s. w. durchlaufen wird.

Erster Abschnitt.

Aufnahme der einfachen Längenzüge, der Waldungen und Feldfluren von so mässiger Ausdehnung, dass sie keiner Dreiecksverbindungen bedürfen.

§ 1.

Auswahl und Bezeichnung der Standpunkte.

Die Aufnahme einfacher Längenzüge, wie die der Strassen, Flussthäler, Canäle u. dergl. kann auf Streckenzüge gegründet werden, deren Figuren durch die zu messenden Strecken und Winkelmaasse bestimmt werden und deren Achsen-Abstände und Abschnitte aus diesen abzuleiten sind.

Waldungen, Heiden, Moore, auch Feld- und Wiesenfluren, werden mit Vielecken umgeben, deren Winkelpunkte oder Brechpunkte ebenso zu behandeln sind, wie die der einfachen Züge.

Je länger die Strecken eines Zuges sind, desto geringer ist für den zu vermessenden Gegenstand die Anzahl der Brechpunkte, desto weniger Winkel sind zu messen, desto weniger Achsen-Abstände und Abschnitte zu berechnen, desto einfacher wird also die Arbeit und desto genauer auch ihr Endergebniss. Aber das Bestreben, die Strecken möglichst lang zu nehmen, findet eine Beschränkung in dem Umstande, dass dieselben so nahe als möglich an den, von ihnen aus, durch unmittelbar zu messende rechtwinklige Abstände aufzunehmenden Grenzpunkten und Linien entlang laufen müssen. Zwischen beiden Anforderungen muss also eine angemessene Vermittelung angestrebt werden.

Die Plätze für die Brechpunkte müssen mit grosser Sorgfalt ausgewählt werden. Wollte man sie mitten in Ackerstücke, in Gärten, Wiesen und Weiden setzen, so würden sie, wie man sie auch immer bezeichnen möchte, sehr bald von den durch sie behinderten Eigenthümern zerstört und verwischt werden. Dagegen ist unerlässliche Bedingung, dass von jedem dieser Punkte nach dem unmittelbar vorher angenommenen Punkte aus der Höhe des Winkel-Werkzeugs gesehen werden kann. Die Erfüllung dieser Bedingung muss also an Stellen gesucht werden, in welchen die Merkzeichen der Winkelpunkte der Benutzung des Grundeigenthums nicht hinderlich sein werden. Noch besser aber ist es, die Punkte an solche Stellen zu setzen, wo die Sicherheit der Merkzeichen nicht nur nicht gefährdet, sondern durch andere Interessen geradezu geschützt wird. Dieses geschieht z. B., wenn die Punkte auf Grenzsteinen oder in Grenzlinien angenommen werden, wo sie dann vom Grundeigenthümer mit überwacht werden. Wo auch dieses bei der Oertlichkeit nicht möglich ist, da muss sich der Feldmesser bemühen, die Punkte an die wenigst gefährdeten Plätze zu verlegen und ihre Entfernung von nahe gelegenen Grenzen oder anderen unveränderlichen Gegenständen so zu bestimmen, dass ihre Plätze, auch wenn sie im Laufe der Zeit gänzlich verdunkelt werden sollten, mit Sicherheit nach den erhobenen Maassen wieder hergestellt werden können. Könnte z. B. der Punkt in einer Grenzlinie genommen werden, so brauchte nur seine Entfernung von einem oder zur grösseren Sicherheit von beiden Endpunkten derselben gemessen zu werden. Müsste er aber seitwärts angenommen werden, so würden sein Abstand von und sein Abschnitt auf der Grenzlinie zu messen sein.

Wünschenswerth ist es, dass die Brechpunkte mit dauerhaften Zeichen (Steinen) bezeichnet werden. Wo das nicht thunlich ist, werden starke Pfähle in den Boden eingetrieben und von dem darum befindlichen Rasen oder Erdreich mit einer kegelförmigen Brustwehr umgeben.

Die Brechpunkte werden vom Anfang bis zum Ende des Zuges in ununterbrochener Reihe mit arabischen Ziffern nummerirt; diese werden möglichst haltbar an die Pfähle geschrieben und in eine Handzeichnung eingetragen, worin die Längen der Strecken und die Winkel zwischen denselben ihrer augenmaasslichen Grösse nach zu verzeichnen sind.

§ 2.
Messung der Strecken.

Um über die Längen der Strecken Sicherheit zu gewinnen, müssen sie zweimal gemessen werden; das einemal lediglich zu diesem Zwecke, das anderemal unter Mitbestimmung der seitwärts belegenen bemerkenswerthen Gegenstände (Grenzpunkte, Grenzlinien, Merkpfähle, Pegel u. dergl.).

Die Messung geschieht mit Messlatten, Messketten, Messbändern. Die Messlatte besteht aus einer Stange von wohl ausgetrocknetem, leichtem Tannenholze von etwa 4 Centimeter Kantenstärke und 2 oder 5 Meter Länge, welche in Meter und Decimeter eingetheilt und an beiden Enden mit Metallschuhen versehen ist, von denen der eine kugelförmig abgerundet, der andere senkrecht gegen die Achse der Stange abgeebnet ist. Bei der Messung werden zwei solcher Latten benutzt, welche in der Linie der zu messenden Strecke so vor einander gelegt werden, dass das Kugelende der einen Latte das ebene Ende der anderen berührt.

Die Längen von 2 oder 5 Metern für eine Latte empfehlen sich dadurch, dass diese Zahlen Factoren von 10 sind. Ob aber die eine oder die andere Länge vorzuziehen sei, entscheidet sich nach der Oberfläche der zu vermessenden Gegend. Im ebenen Lande kann die fünfmetrige Latte gute Verwendung finden, im Gebirge und an schroff abfallenden Thalwänden ist sie unbequem und ihr die zweimetrige vorzuziehen.

Die Messkette wird aus etwa 0,5 Centimeter starkem Eisendraht gefertigt und aus Gliedern von 0,5 Meter Länge zusammengesetzt. Sie ist gewöhnlich 20 Meter lang und an beiden Enden mit Ringen versehen, durch welche die mit eisernen Spitzschuhen versehenen Kettenstäbe gesteckt werden. Auch in der Mitte befindet sich ein solcher Ring, um nöthigenfalls mit der 10 Meter langen Hälfte arbeiten zu können. Die Kettengelenke für die vollen Meter müssen mit hellfarbigem Metall, die Glieder bei 5 und 15 Meter auch noch durch ihre Form augenfällig gemacht sein. Zur Kettenvorrichtung gehören endlich 10 eiserne, etwa 4 Decimeter lange, am oberen Ende durch Umbiegen greifbar gemachte Zählstifte (Zähler).

Das Messband besteht aus einem dünn gewalzten Stahlstreifen, der in Meter und Centimeter eingetheilt ist und ähnlich wie die Hausschnecke in ein rundes Futteral zusammengerollt, beim Gebrauch aus demselben entrollt werden kann, was mit Hülfe eines am vorderen Ende angebrachten Ringes geschieht.

Messung mit der Latte.

Es ist oben schon beiläufig bemerkt worden, dass die Lattenmessung der Strecken vermittelst zweier Latten geschieht, welche abwechselnd vor einander gelegt werden. Es ist nützlich, diesen beiden Latten verschiedene Farben zu geben, etwa der einen so, dass weisse mit rothen, der anderen, dass weisse mit schwarzen Decimetern abwechseln. Wird dann die Regel befolgt, beim Anfange der Messung jedesmal die rothe Latte zuerst anzulegen, so endet die schwarze Latte immer mit einer geraden Lattenzahl und die rothe mit einer ungeraden; der Anblick der Latten gewährt also dem Feldmesser ein Schutzmittel gegen Irrthum im Zählen.

Bei der Niederlegung der ersten Latte am Anfangspunkt einer Strecke muss dieselbe sehr sorgfältig nach dem Ziel des Endpunktes eingerichtet werden. Kann dieses Ziel nicht mit freiem Auge deutlich gesehen werden, so müssen vorher die nöthigen Zwischenziele, verschiedenfarbig angestrichene Stäbe, eingesetzt werden. Bei den nachfolgenden Lattenlegungen ist auf die geradlinige Fortbewegung derselben Aufmerksamkeit zu verwenden. Am meisten wird die Messung mit der Latte erschwert und an ihrer Genauigkeit gefährdet durch die Unebenheiten des Bodens, auf dem sie zu vollziehen ist. Die Oberfläche der zu vermessenden Gegend muss auf die wagrechte (horizontale) Fläche übertragen (projicirt) werden; alle Linien müssen also so gemessen werden, dass ihr Maass die Entfernung ihrer Lothpunkte auf jener wagrechten Fläche ausdrückt. Liegen sie an geneigten Gebirgswänden, so muss ihre schiefe Länge auf der Oberfläche auf die entsprechende wagrechte Länge zurückgeführt werden. Häufig geschieht dieses durch das sogenannte Treppenmessen. Die Latte wird an ihrem hinteren Ende, wenn die Messung bergauf geht, so hoch emporgehoben, dass sie möglichst genau in die wagrechte Lage kommt, dann wird dieses Lattenende möglichst genau in die

Lothlinie des Anfangspunktes der Messung und bei deren Fortsetzung in die Lothlinie des vorderen Endes der vorhergehenden Latte gebracht.

Es leuchtet ein, dass dieses Verfahren erheblichen Bedenken unterliegt. Eine 5 Meter lange Latte wird sich bei diesem Verfahren immer etwas durchbiegen und dadurch verkürzen, das Horizontallegen derselben und das Ablothen des einen Endes kann auch nicht auf grosse Zuverlässigkeit Anspruch machen. Es wirken also drei wichtige Fehlerquellen zusammen, deren Einflüsse sich im Allgemeinen summiren werden und um so gefährlicher sind, als ihre Zahl bei der Kürze des Messwerkzeugs (5 Meter) für Strecken von mittlerer Länge beträchtlich ist. Es mag auch nicht unbemerkt bleiben, dass bei diesem Verfahren das oben gedachte wichtige, unmittelbare Berühren der Lattenenden nicht stattfinden kann.

Um den Fehler-Anhäufungen dieses Verfahrens zu entgehen, hat man zur Vermeidung jener Fehlerquellen besondere Werkzeuge ersonnen. Bei Anwendung derselben können die Latten am Boden liegen bleiben und es erfolgt eine Berichtigung ihrer schiefen auf die wagrechte Länge. Setzen wir die erstere $= l$, den Neigungswinkel der schiefen Lage gegen die wagrechte $= n$, so ist die wagrechte Länge $= l'$

$$l' = l \text{ Cos } n$$

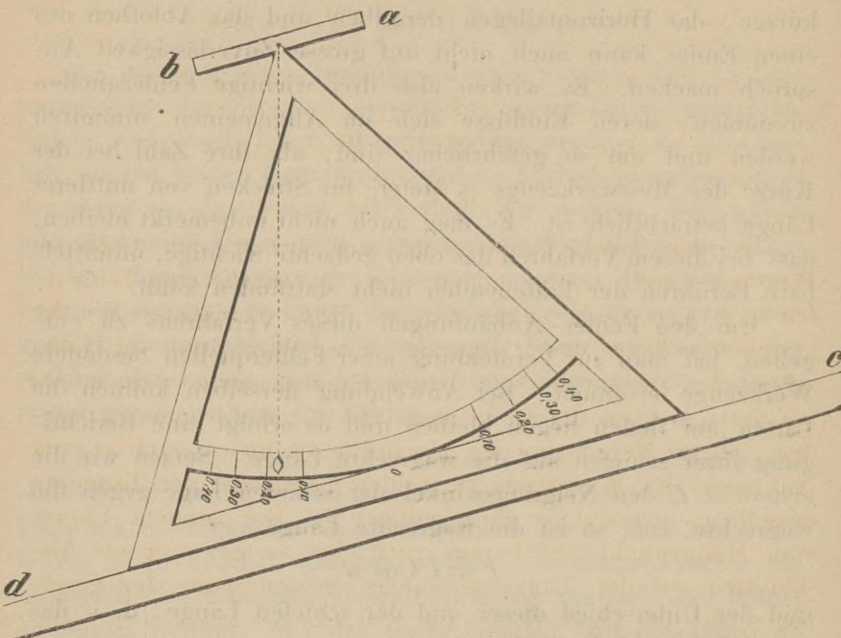
und der Unterschied dieser und der schiefen Länge, d. i. das Berichtigungsstück der letzteren:

$$l - l' = l - l \text{ Cos } n = l\,(1 - \text{Cos } n).$$

Auf diese Formel hat man ein Werzeug gegründet, welches den Berichtigungsbetrag $l - l'$ für jeden Neigungswinkel unmittelbar angibt. Man hat nämlich für die auf einander folgenden Werthe des Berichtigungsbetrages $0^{m},01$, $0^{m},02$, $0^{m},03$ u. s. w. (wobei ^{m} die Einheit des Meters andeutet) bei der Halbmesserlänge $= l$ die zugehörigen Neigungswinkel n', n'', n''' u. s. w. gesucht, diese auf eine der sogenannten Wasserwage der Bauhandwerker ähnliche Vorrichtung von der Mitte aus zu beiden Seiten aufgetragen und neben die Theilstriche die Werthe 0,01, 0,02, 0,03 u. s. w. gesetzt, endlich über gedachter Mitte, also über dem Nullpunkt des Winkelbogens senkrecht gegen die Tangente und in der Höhe seines Halbmessers ein mit spitzem Zeiger versehenes Bleiloth aufgehängt. Der untere Rand des

Werkzeugs läuft mit gedachter Tangente parallel; mit ihm wird dasselbe auf die schief liegende Latte gesetzt, wo dann der Zeiger unmittelbar angibt, um wie viel kürzer die Lattenlänge in Rechnung gebracht werden muss.

Fig. 1.



Die Figur 1 gibt ein Bild des auf die Latte gesetzten Werkzeugs, auf dem jedoch in dem kleinen Maassstabe der Zeichnung nur die Theilstriche für volle Decimeter anschaulich gemacht werden konnten.

Um die Lage der Theilstriche auf dem Werkzeug zu bestimmen, bedient man sich sehr bequem einer Tafel, wie z. B. der von Hobert und Ideler*), wo die natürlichen Längen der Cosinus und Tangenten neben einander stehen.

Setzt man in obiger Formel der Kürze wegen $l - l' = \varDelta$, wofür bei der Zahlenrechnung der Reihe nach $\varDelta' = 0{,}01$, $\varDelta'' = 0{,}02$, $\varDelta''' = 0{,}03$ u. s. w. zu nehmen sind, so wird dieselbe:

*) Neue trigonometrische Tafeln für die Decimal-Eintheilung des Quadranten von Hobert und Ideler, Berlin, Realschulbuchhandlung, 1799.

$$\varDelta = l\,(1 - \operatorname{Cos} n)$$

$$\text{oder } \operatorname{Cos} n = 1 - \frac{\varDelta}{l} = \frac{l - \varDelta}{l}$$

Ist nun die Latte 5 Meter lang, also $l = 5$, und will man auf dem Werkzeug Centimeter ablesen, so hat man der Reihe nach:

$$\operatorname{Cos} n' = \frac{5 - 0{,}01}{5} = \frac{4{,}99}{5} = 0{,}998$$

$$\operatorname{Cos} n'' = \frac{5 - 0{,}02}{5} = \frac{4{,}98}{5} = 0{,}996$$

$$\operatorname{Cos} n''' = \frac{5 - 0{,}03}{5} = \frac{4{,}97}{5} = 0{,}994$$

u. s. w.

In der Tafel findet man nun neben den Cosinus-Werthen 0,998, 0,996 0,994 u. s. w. die zugehörigen Tangenten 0,0634, 0,0898, 0,1101 u. s. w. Diese Tangenten-Werthe beziehen sich auf den Halbmesser = 1. Würde nun der Halbmesser des Werkzeugs = 4 Decimeter angenommen, so müssten diese Werthe der Reihe nach mit 0,4 malgenommen werden, um im Metermaass die Abschnitte zu finden, welche vom Nullpunkt des Werkzeugs zu beiden Seiten auf der Tangente desselben abgesetzt werden müssten*). Die geraden Linien vom Hängepunkt des Lothes nach den so gewonnenen Abschnitten auf der Tangente durchschneiden dann den Gradbogen auf den Theilstrichen für 0,01, 0,02, 0,03 u. s. w. Die dieser Schrift angehängte Tafel I enthält der Reihe nach die Längen der abzusetzenden Tangenten.

Die Anwendung dieses Werkzeugs, welchem man den Namen »Abzieher« beilegen kann, liefert zwar sehr genaue Ergebnisse, ist aber mit der Unbequemlichkeit verbunden, dass man am Ende der Messung jeder Strecke sämmtliche Abzüge, welche von dem Werkzeug abgelesen sind, zusammenrechnen und die Summe von der Meter-Anzahl aller Lattenlagen absetzen muss und dass die gleiche Arbeit bei allen auf der Strecke etwa abgesetzten Abschnitten zur Bestimmung seitwärts gelegener Punkte für die darin enthaltenen Lattenlagen geschehen muss.

---

*) Vergleiche übrigens die Anmerkung unter der Tafel II am Ende des ersten Abschnitts dieser Schrift.

Diese Unbequemlichkeit hat die Aufmerksamkeit auf eine Abänderung jenes Werkzeugs gerichtet, nach welcher das Zusammenzählen der Verbesserungen unnöthig ist und die Zurückführung der geneigten Lage auf die ihr entsprechende wagrechte Länge der Strecke durch ein von der jedesmaligen Neigung der Latte bestimmtes Verschieben derselben bewirkt wird.

Dieses abgeänderte Werkzeug, welches füglich »Verschieber« genannt werden kann, hat auf seinem Gradbogen für den Neigungswinkel der Lattenlage den Unterschied zwischen der Secante und dem Halbmesser nachzuweisen. Nach der obigen Bezeichnung ist also

$$l = (l + \varDelta) \operatorname{Cos} n$$

$$\text{also} \quad \operatorname{Cos} n = \frac{l}{l + \varDelta}$$

und für $l = 5^{\mathrm{m}}$ der Reihe nach:

$$\operatorname{Cos} n' = \frac{5}{5 + 0{,}01} = \frac{5}{5{,}01} = 0{,}9980$$

$$\operatorname{Cos} n'' = \frac{5}{5 + 0{,}02} = \frac{5}{5{,}02} = 0{,}9960$$

$$\operatorname{Cos} n''' = \frac{5}{5 + 0{,}03} = \frac{5}{5{,}03} = 0{,}9940$$

u. s. w.

Man sieht an diesen Cosinus-Werthen, dass bei kleinen Neigungswinkeln die Theilstriche des Schiebers mit denen des Abziehers übereinstimmen. Erst bei grösseren Höhenwinkeln wird die Abweichung merklich.

Da für das Abzugs-Verfahren eine Seite der Eintheilung für absteigendes Messen genügt, wenn das Werkzeug umgekehrt wie bei dem aufsteigenden benutzt wird, so kann ihm die einfachste Einrichtung gegeben werden, dass auf der einen Seite des Nullpunktes die Theilstriche der Abzugswerthe, auf der anderen die der Verschiebungswerthe abgetragen werden.

Die Anwendung des Schiebers besteht darin, dass, nachdem die vordere Latte mit der vorhergehenden in Berührung gebracht ist, der Schieber aufgesetzt und abgelesen und dann die vordere Latte um so viele Centimeter vorgeschoben wird, als das Loth des Schiebers angezeigt hat. Geschieht dieses bei jeder geneigt liegenden Latte, so summiren sich die Verbesserungen der Schiefenmessung selbst. Es ist aber nöthig, die beiden letzten Meter jeder Latte in Centimeter einzutheilen, um das Verschieben der Latte mit möglichster Genauigkeit ausführen zu können.

Anwendung der Messkette.

Durch Benutzung der Messkette wird im Vergleich zum Gebrauch der Latte die Arbeit des Längenmessens erleichtert und beschleunigt. Doch ist dabei eine unausgesetzte Aufmerksamkeit auf ihre Veränderlichkeit durch Ausschleissen und Biegen der Glieder dringend nöthig. Es darf nicht unterbleiben, ihre Längen mit Hülfe geaichter Latten oft zu untersuchen und soweit nöthig zu berichtigen.

Das Messungsverfahren mit der Kette, zu deren Führung zwei Handlanger nöthig sind, besteht darin, dass der Führer des hinteren Kettenstabes den vorderen Stab in die Linie der zu messenden Strecke einzuwinken hat, worauf der Führer des vorderen Stabes die Kette anzuspannen, diesen Stab an ihrem ausgereckten Ende in den Boden einzusetzen und diese Stelle mit einem Zählstift zu bezeichnen hat, worauf dann die Kette weiter gezogen, der hintere Stab an die Stelle des Zählstiftes gesetzt, dieser zur Sammlung genommen, demnächst in voriger Art fortgefahren wird. Sind alle 10 Zählstifte zur Sammlung gekommen, so werden dieselben dem vorderen Kettenführer zurückgegeben, und dass solches geschehen, vom Feldmesser angemerkt. Am Endpunkt der Strecke werden die Wechselvermerke mit 200, die überzähligen Zählstifte mit 20 malgenommen, die Meter auf der letzten Kettenlage, endlich die Decimeter von dem letzten Meterringe bis zum Endpunkt der Strecke abgezählt und somit die gesammte Länge erhalten.

Auch bei der Anwendung der Messkette wird die Arbeit durch die geneigte Lage der zu messenden Linien im Gebirgslande wesentlich erschwert. Das oben bei der Behandlung der Latte erwähnte Treppenmessen ist hier wo möglich noch unzuverlässiger, wenigstens sollte es niemals mit der ganzen 20 Meter langen Kette, sondern nur mit deren Hälften von 10 Metern geschehen, weil nur diese in die wagrechte Lage gehoben und darin gehörig angespannt werden können.

Um genauere Längenmaasse zu erhalten, hat man die Messung in der geneigten Lage der Strecken vorgenommen und dieselbe entweder mit Hülfe der bei der Winkelmessung erhaltenen Neigungswinkel gegen die wagrechte Ebene oder mit Benutzung eines dem oben beschriebenen Schieber im Wesentlichen gleichen und nur durch den Längenunterschied zwischen der Latte und der Messkette sowie durch das Gebrauchsverfahren sich unterscheidenden Werkzeugs auf die wagrechte Länge zurückgeführt. Das erstere Verfahren ist am geeignetsten in dem nachfolgenden Absatz für die Winkelmessung abzuhandeln; der Schieber aber wird in nachstehender Art vorgerichtet und gebraucht.

Je grösser die Länge des Messwerkzeugs ist, desto näher rücken bei gleichem Halbmesser des Schiebers die Theilstriche desselben für einzelne Centimeter zusammen und sie würden bei mässiger Ausdehnung des Schiebers für die 20 Meter lange Messkette einander so nahe kommen, dass die erforderliche Deutlichkeit verloren ginge. Es genügt in der That, hier die Eintheilung auf ganze Decimeter einzurichten. Ein Decimeter ist $^1/_{200}$ der Kettenlänge und auf dem Schieber können innerhalb eines Decimetertheils Vierteldecimeter mit hinreichender Sicherheit geschätzt werden, die Ablesung erfolgt also annähernd auf $^1/_{800}$ genau, was vollkommen genügend ist.

Für die auf einander folgenden Decimeter sind nun die Ausdrücke für die Cosinus der entsprechenden Neigungswinkel und die ihnen entsprechenden Tangenten:

$$\mathrm{Cos}\, n' = \frac{20}{20{,}1} = 0{,}9950\,,\quad \mathrm{Tang}\, n' = 0{,}1002$$

$$\mathrm{Cos}\, n'' = \frac{20}{20{,}2} = 0{,}9901\,,\quad \mathrm{Tang}\, n'' = 0{,}1425$$

$$\mathrm{Cos}\, n''' = \frac{20}{20{,}3} = 0{,}9854\,,\quad \mathrm{Tang}\, n''' = 0{,}1740$$

u. s. w.

Man hat also für den Halbmesser des Schiebers = 1 die Maasse 0,1002, 0,1425, 0,1740 u. s. w. auf der Tangente des Nullpunkts abzusetzen, um für 0,1, 0,2, 0,3 u. s. w. die zugehörigen Theilstriche auf dem Gradbogen zu finden. Die Tafel II. enthält eine Zusammenstellung dieser Tangentenwerthe bis zu einer hinreichenden Höhe hinauf, auch sind ihnen zur Sicherung des Auftragens die zugehörigen Sehnenwerthe beigefügt. Der Schieber muss nun mit Hülfe einer auf der Rückseite angebrachten Hülse auf den Kettenstab gesteckt werden können; er muss ferner an der Spitze mit einer senkrecht gegen den Kettenstab stehenden Zielröhre (*a b* Fig. 1) versehen sein. Das Verfahren bei der Messung einer aufsteigenden Linie ist nun folgendes: Der hintere Kettenführer befestigt den Schieber an das obere Ende seines Kettenstabes, winkt den vorderen Kettenstab in die zu messende Linie ein und biegt dann seinen Kettenstab so weit zurück, bis er das obere Ende des vorderen Kettenstabes in der Mitte der Zielröhre sieht. In diesem Augenblick drückt er das Bleiloth mit der linken Hand an und liest die angezeigte Stelle ab. Endlich setzt er seinen Kettenstab um so viele Decimeter und Vierteldecimeter, wie er abgelesen hat, vorwärts und lässt nun den vorderen Kettenführer die Kette straff ziehen.

Es versteht sich von selbst, dass der vordere Kettenstab dieselbe Höhe haben muss, wie die Zielröhre des hinteren. Wenn diese nun senkrecht gegen die Richtung des Hängepunktes des Lothes und des Nullpunktes der Theilung sowie des hinteren Kettenstabes steht, so folgt, dass dieser bei obiger Lage der Zielröhre gegen die geneigte Lage der Kette senkrecht steht und die Sehlinie der Röhre dieser Lage parallel ist, dass mithin das Bleiloth den Neigungswinkel der Kette, dessen Spitze endlich den in Metern gemessenen Verschiebungswerth anzeigt, der den vorderen Kettenstab in denjenigen Punkt der Linie bringt, dessen Senkrechte die durch den Anfangspunkt der Strecke oder den Endpunkt der vorhergehenden Kettenlänge gelegte wagrechte Ebene bei 20 Meter Entfernung trifft. Bei Abwärtsmessungen findet dasselbe Verfahren statt, nur mit dem Unterschiede, dass die Kettenstäbe nicht rückwärts, sondern vorwärts zu biegen sind.

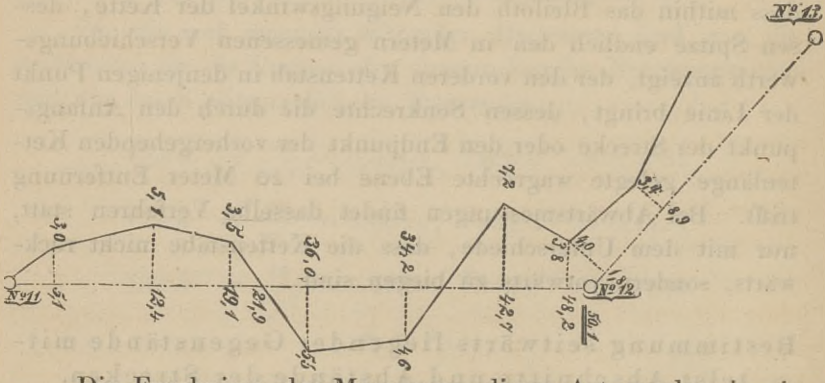
Bestimmung seitwärts liegender Gegenstände mittelst Abschnitte und Abstände der Strecken.

In den seltensten Fällen sind die durch die Messung zu bestimmenden Gegenstände (Grenzen, Merkpunkte u. s. w.) solche Punkte und gerade Linien, welche unmittelbar zu Brechpunkten und Strecken ausersehen und durch Winkel- und Längenmessung bestimmt, demnächst durch Rechnung auf eine gemeinschaftliche Achse bezogen werden können. Bei der Auswahl der Brechpunkte geht man an ihnen einstweilen vorbei, nimmt die Strecken so lang als möglich und behält sich vor, jene Gegenstände demnächst durch Abschnitte und Abstände gegen die Strecken, diese als Nebenachsen angesehen, zu bestimmen.

Es ist schon angedeutet, dass diese Arbeit gewöhnlich mit der zweiten Streckenmessung verbunden wird. Da bei dieser das Absetzen rechter Winkel nöthig ist, so bedient man sich eines einfachen Werkzeugs, Kreuzscheibe oder Winkelkreuz genannt, welches aus einem walzenförmigen Kopfe von etwa einem Decimeter Durchmesser und Höhe besteht, mit vier unter rechten Winkeln stehenden Durchsehspalten versehen und auf einen unten mit einem eisernen Spitzschuh beschlagenen gesichtshohen Stock fest aufgesetzt ist.

Mit diesem Werkzeug bewegt sich der Feldmesser der in der Strecke liegenden Latte oder Kette entlang, bis der zu bestimmende Punkt in dem einen Spaltpaar erscheint, während das andere auf die Zielstäbe der Strecke gerichtet ist. Bei diesem Stande der Kreuzscheibe wird auf der Latte oder der Kette der Abschnitt abgelesen und sodann wird mit einer Hülfslatte von etwa 2 Meter Länge der Abstand des Punktes durch Fortlegen gemessen.

Fig. 2.



Die Ergebnisse der Messungen dieser Art werden in ein Handbuch eingetragen, die Abschnitte, nach einem passend zu wählenden Handmaassstabe, ihrer Entfernung vom Anfangspunkte annähernd, abgesetzt, die Abstände, ebenfalls ihrer Länge gemäss, an die rechte oder linke Seite der Streckenlinie, mit ihrer Lage im Felde übereinstimmend, eingezeichnet, die Zahlenwerthe der Abschnitte an die Linie, die der Abstände neben dieselben geschrieben.

Die ganze Länge einer Strecke wird, wie in Figur 2 geschehen, zum Unterschiede von den übrigen Abschnitten unterstrichen. Für die spätere Flächenberechnung ist es nützlich, den gegen eine Strecke mit Abschnitt und Abstand zuletzt bestimmten Punkt, ebenso auch gegen die nächstfolgende Strecke zu bestimmen, wie dieses hier neben dem Brechpunkt No. 12 geschehen ist.

Sind Grenzpunkte im Felde mit Steinen oder anderen Malen, Grenzlinien mit Hecken, Zäunen und dergleichen versehen, so sind sie im Feldbuche mit passenden Zeichen, bei Hecken, Zäunen, Mauern u. dergl. so zu vermerken, dass erkennbar ist, zu welchem an ihrer Seite liegenden Grundstück sie gehören.

§ 3.

Messung der Brechungswinkel.

Die Winkel, unter denen sich die Strecken brechen, werden mit Winkelkreisen (Theodoliten) gemessen, die jetzt in grosser Anzahl in den mechanischen Werkstätten gefertigt werden.

Ein gut zusammengesetzter Winkelkreis für die Feldmesskunst besteht aus zwei getrennten Theilen, dem Aufsatzwerkzeug und dem Tellerstuhl (Stativ).

Ersteres ruht auf einem messingenen Dreifuss, an dessen Enden Stellschrauben angebracht sind, vermittelst deren die drei Fussstücke beliebig gehoben und gesenkt werden können. Auf der Mitte dieses Dreifusses erhebt sich eine Säule, auf welcher der eingetheilte Kreis (Limbus) senkrecht gegen sie festsitzt. Im Inneren ist die Säule durchbohrt und in ihr befindet sich die Drehungsachse des in der Ebene des eingetheilten Kreises drehbaren Kreises (Alhidade). An dem drehbaren Kreise sind zwei ganze, Centesimalminuten angebende, Gradtheiler (Nonien) und eine Klemmvorrichtung mit Feinschraube (Mikrometerschraube) befestigt. Ferner sitzt auf der Mitte des drehbaren Kreises die Dosenwage (Libelle), endlich erhebt sich auf ihm ein Stuhl, welcher oben die Drehungsachse des Höhenkreises trägt, der senkrecht gegen die beiden vorgedachten Kreise gerichtet ist. Durch die Mitte dieser Drehungsachse ist das Fernrohr so weit durchgeschoben, dass das Augenstück bei der Höhe des Stuhls unten durchbewegt und in die entgegengesetzte Lage gebracht werden kann. An dem Stuhl ist endlich ein Gradtheiler und eine Klemmvorrichtung für den Höhenkreis angebracht.

Das Fernrohr ist im Augenstück mit Kreuzfäden versehen, wovon bei wagrechter Stellung des Werkzeugs der eine wagrecht, der andere senkrecht steht.

Das Werkzeug wird beim Gebrauche auf die Oberfläche des oben erwähnten Tellerstuhls gesetzt. In den Teller desselben greifen die Gelenke dreier unten mit eisernen Schuhen versehenen Füsse ein. Der runde Teller ist in der Mitte durchbrochen, um durch diese Oeffnung von der Mitte der Säule des Kreises ein Bleiloth auf den Scheitelpunkt des zu messenden Winkels herabsenken zu können.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass vor der Messung eines Winkels die Endpunkte seiner Schenkel mit Stäben oder anderen senkrecht zu errichtenden Zielzeichen (Signalen) besetzt sein müssen. Ueber seinem Scheitelpunkt wird zunächst der Tellerstuhl so aufgestellt, dass der Teller nahe wagrecht und die Mitte seiner Oeffnung nahe senkrecht über dem Scheitelpunkt sich befindet. Die Fussspitzen der Stuhlbeine sind zur festen Aufstellung des Werkzeugs kräftig in den Boden zu treiben. Hierauf wird der Winkelkreis auf den Teller gesetzt und über dessen Oeffnung dahin geschoben, wo das von der Säule herabhängende Loth den Scheitelpunkt des Winkels trifft. Nunmehr werden die Enden des Dreifusses vermittelst der Stellschrauben nach Bedürfniss gesenkt oder gehoben, bis die Luftblase der Dosenwage in deren Mitte steht. Endlich wird das Augenstück des Fernrohrs so weit ausgezogen, bis der höchste Grad der Sehdeutlichkeit erreicht, das Fadenkreuz klar beleuchtet ist, auch gegen dasselbe kein Schwanken der Bilder stattfindet.

Nach so vollendeter Aufstellung wird das Fernrohr mit dem Drehkreise so weit bewegt, dass das Zielzeichen des einen Schenkels im Sehfelde und in der Nähe des Fadenkreuzes erscheint, die Klemmschraube wird angezogen und die feinere Einstellung des Kreuzes auf das Ziel vermittelst der Feinschraube des Drehkreises bewirkt. Jetzt werden die beiden Gradtheiler abgelesen und in das Winkelbuch eingeschrieben. Weniger scharfsehende Beobachter bedienen sich beim Ablesen eines Vergrösserungsglases. Da den Winkelkreisen für die wagrechten Winkel ein Durchmesser von nahe 15 Centimetern gegeben wird, so können die Gradtheiler füglich auf ganze Neuminuten eingerichtet werden. Ein geübter Beobachter schätzt auch noch zwischen den Strichen auf Viertelminuten, liest also 25″, 50″, 75″ (Neusecunden).

Nach erfolgter Ablesung der Gradtheiler wird die Klemme geöffnet und das Fernrohr nach dem Zielzeichen des anderen Winkelschenkels geführt, die Klemme wieder geschlossen, die scharfe Einstellung auf das Ziel mit der Feinschraube bewirkt, das Ablesen der Gradtheiler ausgeführt. Der Unterschied zwischen den Ergebnissen der beiden Ablesungen liefert für jeden der beiden Gradtheiler des Drehkreises ein Maass für den gemessenen Winkel. Das Mittel aus beiden Angaben ist der erste Näherungswerth für denselben.

Nunmehr wird das Werkzeug auf dem Teller beliebig weit versetzt, von Neuem wagrecht gestellt und das Fernrohr mit seinem Augenstück unten durchgeschlagen, womit es in die entgegengesetzte Richtung kommt, und dann die Arbeit in vorgedachter Art wiederholt. Das Ergebniss ist der zweite Näherungswerth für den wagrechten Winkel.

Durch das Ablesen zweier Gradtheiler auf verschiedenen Stellen des Kreises, so wie durch das Versetzen des Werkzeugs findet eine annähernde Ausgleichung der möglichen Theilungsfehler des Kreises und vermöge des Durchschlagens des Fernrohrs in die entgegengesetzte Lage eine Ausgleichung desjenigen Fehlers statt, welcher entsteht, wenn das Fernrohr sich nicht genau in einer gegen den wagrechten Kreis senkrechten Ebene bewegt.

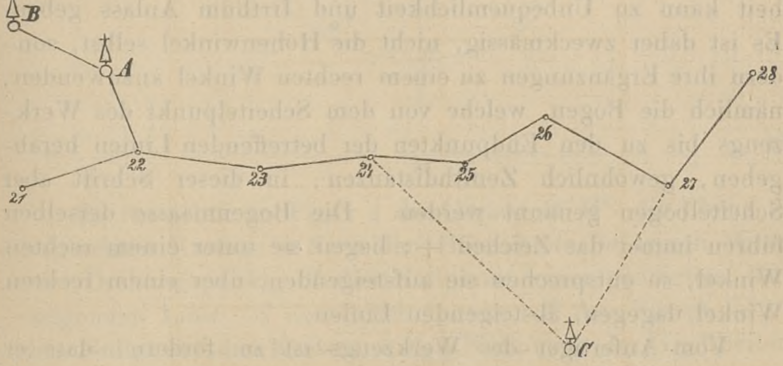
Gewöhnlich stellen die Anfertiger der Winkelkreise die beiden Gradtheiler des Drehkreises um zwei rechte Winkel, also um 200 Neugrade, gegenüber. Abgesehen von diesen 200 Graden weichen also beide Gradtheiler nur wegen der immer vorauszusetzenden Unvollkommenheit der Theilung um Minuten und Secunden ab. Es ist also nicht nöthig, die Grade beim Niederschreiben des Standes des Gradtheilers zu wiederholen, und dieser Umstand gestattet eine Vereinfachung in dem Muster zum Winkelbuche, welches in nachstehender Art eingerichtet werden kann:

Nummern der Standpunkte	Nummern der Zielpunkte	Unmittelbare Winkelbeobachtungen																				Nr.d.Beobachtg.	Wagrechte Winkel						Scheitelbogen der Ziele			
		Erster Stand des Kreises und erste Lage des Fernrohrs										Zweiter Stand des Kreises und zweite Lage des Fernrohrs											einzeln			gemittelt			dopp.		einf.	
		Höhenkreis		Wagrechter Kreis Gradtheiler								Höhenkreis		Wagrechter Kreis Gradtheiler																		
				A			B		Mittel					A			B		Mittel													
		Grad	Min.	Grad	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Grad	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.		Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Grad	Min.
							Beispiel																									
23	22	16	74	212	33	75	34	25	212	34	00	185	04	366	77	50	77	00	366	77	25	1	178	53	75	178	53	37	168	30	84	15
	24	387	46	390	87	50	88	00	390	87	75	214	32	145	31	00	31	50	145	31	25	2	178	54	00				226	86	113	43

Hält der Feldmesser es für nöthig, zur Gewähr gegen Irrthümer oder zur genaueren Ausgleichung der Beobachtungsfehler auch die Ergänzung eines Brechungswinkels zu vier rechten Winkeln zu messen, so ist die im vorstehenden Beispiel erläuterte Arbeit, jedoch in umgekehrter Reihenfolge, zu wiederholen. Für das richtige Verständniss dieses Beispiels bedarf es wohl kaum der Bemerkung, dass bei dem Abziehen der oberen Mittelstände des Kreises von den unteren, den letzteren ein ganzer Kreis von 400 Grad zugedacht werden muss, wenn er eine geringere Gradzahl hat als der obere.

Befinden sich in der Nachbarschaft der aufzunehmenden Linienzüge oder Vielecke trigonometrisch bestimmte Punkte, so sind dieselben entweder mit dahin führenden Strecken- und Winkelmessungen, oder, wenn sie zu entlegen sind, blos mittelst Winkelmessungen mit Punkten der Züge in Verbindung zu setzen. Auch nach anderen, von den Brechpunkten sichtbaren, scharf bezeichneten Gegenständen, wie Kirchthürme, Windmühlen, Essen u. dergl. m., sind die Richtungen gegen die betreffenden Strecken der Züge durch Winkelmessung aufzunehmen und in das Winkelbuch einzutragen. Gesetzt, in der Figur 3 seien B und A anderweitig trigonometrisch bestimmte Punkte und A vom Brechpunkt 22 sichtbar, so würde die Arbeit der ersteren Art darin bestehen, die Länge der Strecke $A - 22$ und die Winkel $B . A . 22$ und $A . 22 . 23$ zu messen.

Fig. 3.



Wäre aber C ein zu entlegener Punkt, ein Kirchthurm, und dieser von den Brechpunkten 24 und 27 sichtbar, so würde man sich damit zu begnügen haben, die Winkel 23 . 24 . C und 26 . 27 . C zu messen.

§ 4.

Messung der Höhenwinkel.

Die Beobachtung des Höhenkreises erfordert eine nähere Erläuterung. In Gebirgsgegenden und namentlich bei Forstvermessungen kann die Beobachtung des Höhenkreises einen doppelten Nutzen gewähren. Hält der Feldmesser bei der Messung der Streckenlängen die Anwendung des Treppenmessens oder des Abziehers oder des Vorschiebers, wie solche oben beschrieben worden, nicht für hinreichend genau, so bietet sich ihm das Auskunftsmittel dar, die Längen in der geneigten Lage des Bodens zu messen und sie dann mit Hülfe der Höhenwinkel auf die wagrechte Ebene zurückzuführen. Zweitens aber ist es auch für manche Zwecke nicht unwichtig, gleichzeitig mit der Aufnahme des wagrechten Bildes einer Gebirgsgegend auch die Höhen der Standpunkte zu bestimmen, wozu die Längen der Strecken und ihre Höhenwinkel ausreichen.

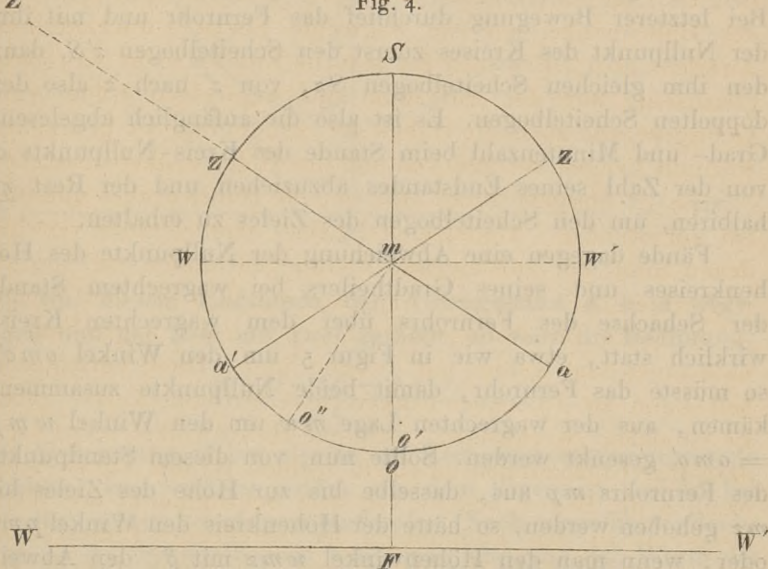
Es ist übrigens nicht rathsam, die Höhenwinkel unmittelbar anzuwenden. Höhenwinkel haben nämlich einen verschiedenen Sinn; für aufsteigende Richtungen zählen sie von der wagrechten nach oben und werden gewöhnlich mit dem Zeichen + vermerkt, für absteigende dagegen von der wagrechten aus nach unten und werden mit — bezeichnet. Diese Verschiedenheit kann zu Unbequemlichkeit und Irrthum Anlass geben. Es ist daher zweckmässig, nicht die Höhenwinkel selbst, sondern ihre Ergänzungen zu einem rechten Winkel anzuwenden, nämlich die Bogen, welche von dem Scheitelpunkt des Werkzeugs bis zu den Endpunkten der betreffenden Linien herabgehen, gewöhnlich Zenithdistanzen, in dieser Schrift aber Scheitelbogen genannt werden. Die Bogenmaasse derselben führen immer das Zeichen +; liegen sie unter einem rechten Winkel, so entsprechen sie aufsteigenden, über einem rechten Winkel dagegen, absteigenden Linien.

Vom Anfertiger des Werkzeugs ist zu fordern, dass er den Höhenkreis von 0 bis 400 Grade eintheilt und dass er den Nullpunkt dieses Kreises mit dem Nullpunkt des Gradtheilers desselben an derjenigen Stelle zusammentreffen lässt, wo das Fernrohr gleichzeitig mit dem wagrechten Kreise die wagrechte Lage hat.

Der Feldmesser darf sich aber auf die Genauigkeit dieses Zusammentreffens nicht verlassen, er muss entweder die Abweichung beider Nullpunkte von einander in jenem Zustande des Werkzeugs (den Collimationsfehler), wie klein sie auch sein mag, vor der Messung ermitteln oder ein Beobachtungsverfahren einschlagen, wobei dieselbe einflusslos ist.

Dieses Verfahren ist zwar in dem vorstehenden Zahlenbeispiel erläutert; der Leser wird indessen möglicherweise eine nähere Nachweisung der Richtigkeit desselben erwarten. Dafür möge zunächst der einfachste Fall betrachtet werden, wo das Werkzeug in der That völlig genau zusammengesetzt ist, beide Nullpunkte in dem gedachten Zustande des Werkzeugs zusammenfallen.

Fig. 4.

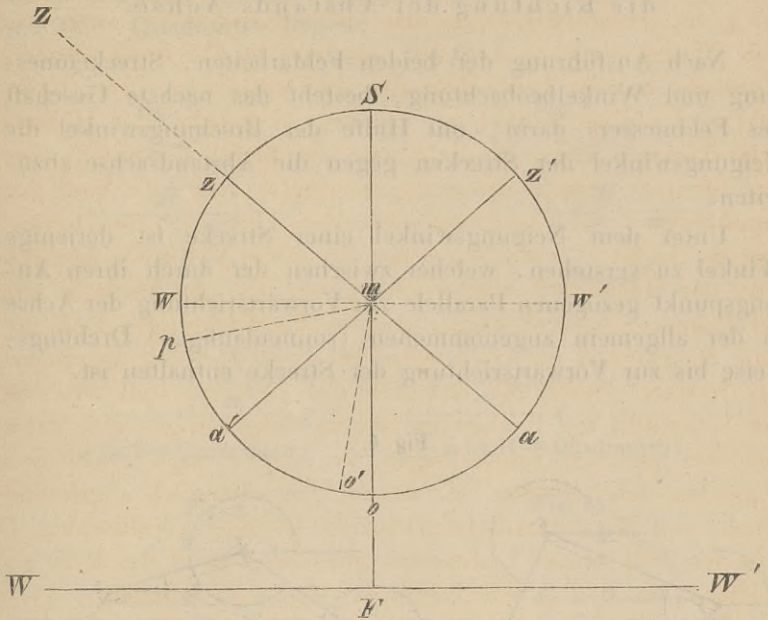


Es bezeichne in Figur 4 die Gerade $W W'$ die Ebene des wagrechten Kreises, $w S w' o$ den Höhenkreis, m seinen Mittel- oder Drehungspunkt, Z den Endpunkt einer geneigten, aufsteigenden Linie, S den Scheitelpunkt, F den Fusspunkt, o' den Nullpunkt des Kreises, o den Nullpunkt des Gradtheilers, az die Lage des nach dem Ziel Z gerichteten Fernrohrs, a sein Augenstück, z sein Zielstück, die Linie $w w'$ eine Parallele zu $W W'$.

Wurde das Fernrohr aus der wagrechten Lage mw in die geneigte mz gehoben und mit ihm der Höhenkreis um den Winkel wmz gedreht, so bewegte sich sein Nullpunkt o' nach o'' in die gegen die Richtung des Fernrohrs az Senkrechte mo'', der Gradtheiler zeigte also auf den Bogen oo'', gab also den Winkel $omo'' = wmz$ an und musste abgelesen werden. Nunmehr hat der Beobachter den drehbaren wagrechten Kreis um zwei rechte Winkel zu wenden. Fernrohr und Höhenkreis kommen dann in die Ebene des Zieles Z zurück, aber das Fernrohr nimmt die entgegengesetzte Lage $a'z'$ und der Gradtheiler o steht noch auf demselben Theilstrich des Höhenkreises; es ist $\angle z'mw' = wma' = wmz = omo''$. Endlich wird der Höhenkreis wieder gelöst, mit ihm das Fernrohr aus der Lage mz' über S nach z und in die Richtung von Z zurück bewegt und der Gradtheiler bei dieser Stellung abgelesen. Bei letzterer Bewegung durchlief das Fernrohr und mit ihm der Nullpunkt des Kreises zuerst den Scheitelbogen $z'S$, dann den ihm gleichen Scheitelbogen Sz, von z' nach z also den doppelten Scheitelbogen. Es ist also die anfänglich abgelesene Grad- und Minutenzahl beim Stande des Kreis-Nullpunkts o'' von der Zahl seines Endstandes abzuziehen und der Rest zu halbiren, um den Scheitelbogen des Zieles zu erhalten.

Fände dagegen eine Abweichung der Nullpunkte des Höhenkreises und seines Gradtheilers bei wagrechtem Stande der Sehachse des Fernrohrs über dem wagrechten Kreise wirklich statt, etwa wie in Figur 5 um den Winkel omo', so müsste das Fernrohr, damit beide Nullpunkte zusammenkämen, aus der wagrechten Lage mw um den Winkel $wmp = omo'$ gesenkt werden. Sollte nun, von diesem Standpunkte des Fernrohrs mp aus, dasselbe bis zur Höhe des Zieles bis mz gehoben werden, so hätte der Höhenkreis den Winkel pmz oder, wenn man den Höhenwinkel wmz mit β, den Abweichungswinkel $wmp = omo'$ mit Δ bezeichnen wollte, die Grad- und Minutenzahl $\beta + \Delta$ zu durchlaufen. Würde, nachdem diese abgelesen ist, der drehbare wagrechte Kreis um zwei rechte Winkel gewandt, so würde das Fernrohr in die Lage $a'z'$ kommen, der Gradtheiler des Höhenkreises aber noch den Stand $\beta + \Delta$ behaupten. Würde nun das Fernrohr von der Lage $a'z'$ aus um den doppelten Scheitelbogen, der mit $2d$ bezeichnet werden möge, bis nach z in die Richtung des Zieles Z gebracht, so würde nun der Gradtheiler der Stelle des Höhe: kreises $\beta + \varDelta + 2\,d$ gegenüberstehen. Würde schliess-

Fig. 5.



lich von diesem Endstande der Anfangsstand $\beta + \varDelta$ abgezogen und der Rest mit zwei getheilt, so wäre die Rechnung:

$$\frac{(\beta + \varDelta + 2d) - (\beta + \varDelta)}{2} = d.$$

Die Abweichung $\varDelta$ hat also in der Rechnung entgegengesetzte Zeichen, verschwindet mithin aus dem Ergebniss und ist bei dem Beobachtungsverfahren einflusslos. Nach ausgeführter Beobachtung des Scheitelbogens kann man übrigens den Werth der Abweichung $\varDelta$ ermitteln. Da nämlich $R - d = \beta$ ist, so braucht mit dem so gefundenen β nur der erste Stand des Gradtheilers $\beta + \varDelta$ verglichen zu werden, um durch Abzug sogleich den Werth für $\varDelta$ zu erhalten.

In dem obigen Zahlenbeispiel fand man:

$d = 84^0\,15'$, mithin $\beta = 100^0 - 84^0\,15' = 15^0\,85'$

der erste Stand des Gradtheilers war $= 16^0\,74'$

mithin die Abweichung $\varDelta = 0^0\,89'$

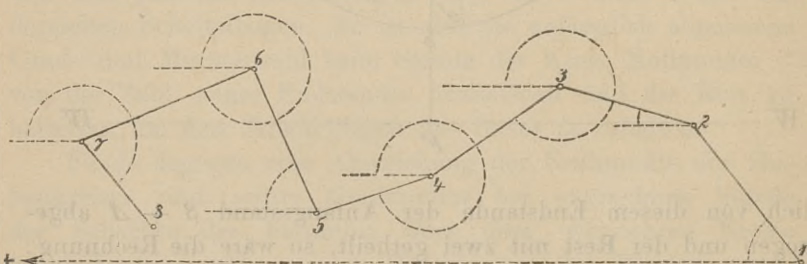
§ 5.

Ableitung der Neigungswinkel der Strecken gegen die Richtung der Abstands-Achse.

Nach Ausführung der beiden Feldarbeiten, Streckenmessung und Winkelbeobachtung, besteht das nächste Geschäft des Feldmessers darin, mit Hülfe der Brechungswinkel die Neigungswinkel der Strecken gegen die Abstandsachse abzuleiten.

Unter dem Neigungswinkel einer Strecke ist derjenige Winkel zu verstehen, welcher zwischen der durch ihren Anfangspunkt gezogenen Parallele zur Vorwärtsrichtung der Achse in der allgemein angenommenen (sonnenläufigen) Drehungsweise bis zur Vorwärtsrichtung der Strecke enthalten ist.

Fig. 6.



In der Figur 6 sind die Neigungswinkel mit kleinen Kreisbogen angedeutet. Will man auch den Neigungswinkel der Rückwärtsrichtung einer Strecke betrachten, so ist augenfällig, dass er sich von dem Neigungswinkel der Vorwärtsrichtung derselben nur um zwei rechte Winkel unterscheidet. Die nachstehenden Figuren für die Lage des Neigungswinkels im I^ten, II^ten, III^ten, IV^ten Quadranten machen dieses deutlich, nachdem berücksichtigt ist, dass die inneren Winkel α und α' in Figur 7 und 8, r und r' in Figur 9 und 10 als Wechselwinkel zwischen Parallelen einander gleich sind.

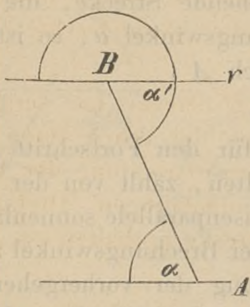
Es bezeichnen hier die Buchstaben α die Neigungswinkel für die Vorwärtsrichtungen AB, r dagegen die Neigungswinkel für die Rückwärtsrichtungen BA. Für aufsteigende Strecken, wo die Neigungswinkel im I^{ten} und II^{ten} Quadranten liegen, hat man also den Ausdruck:

$$r = \alpha + 2R,$$

für absteigende Strecken dagegen, deren Neigungen im III^{ten} und IV^{ten} Quadranten liegen:

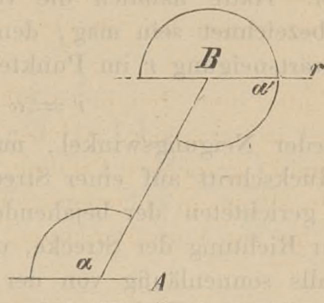
$$r = \alpha - 2R.$$

Fig. 7.



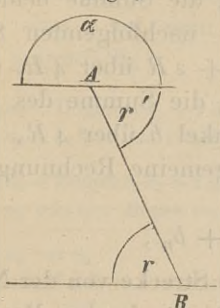
α im I^{ten} Quadranten;

Fig. 8.



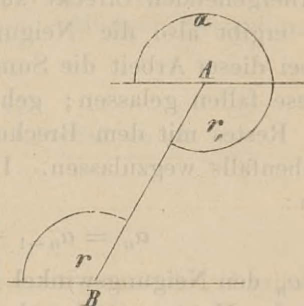
α im II^{ten} Quadranten;

Fig. 9.



α im III^{ten} Quadranten;

Fig. 10.



α im IV^{ten} Quadranten.

Man sieht sogleich, dass beide Ausdrücke auf Eins hinauslaufen, wenn man beachtet, dass die Neigungswinkel im III^{ten} und IV^{ten} Quadranten über zwei rechte Winkel hinausgehen. Setzt man den Ueberschuss über 2 Rechte $= p$, so verwandelt sich der zweite Ausdruck in

$$r = 2R + p - 2R = p.$$

Für den trigonometrischen Gebrauch würde der erste Ausdruck das gleichwerthe Ergebniss liefern, wenn man darin $2R + p$ für α an die Stelle setzte, nämlich:

$$r = 2R + p + 2R = 4R + p.$$

Den Winkeln p und $4R + p$ entsprechen nämlich gleiche trigonometrische Werthe. Man kann also allgemein setzen:

$$r = \alpha + 2R.$$

Diese Bemerkung führt zu dem allgemeinen Ausdruck für die Ableitung des Neigungswinkels einer nachfolgenden Strecke aus dem Neigungswinkel der unmittelbar vorhergehenden Strecke und dem zwischen beiden Strecken enthaltenen Brechungswinkel. Hatte nämlich die vorhergehende Strecke, die mit AB bezeichnet sein mag, den Neigungswinkel α, so ist die Rückwärtsneigung r im Punkte B nach A

$$r = \alpha + 2R.$$

Jeder Neigungswinkel, mag er für den Fortschritt oder den Rückschritt auf einer Strecke gelten, zählt von der vorwärts gerichteten (der bejahenden) Achsenparallele sonnenläufig bis zur Richtung der Strecke, und jeder Brechungswinkel zählt ebenfalls sonnenläufig von der Richtung der vorhergehenden Strecke bis zur Richtung der nachfolgenden Strecke. Diese Zählung fängt also an, wo die Zählung der Rückwärtsneigung der vorhergehenden Strecke aufhörte; die Summe beider Zählungen ergibt also die Neigung der nachfolgenden Strecke. Geht bei dieser Arbeit die Summe $\alpha + 2R$ über $4R$, so werden diese fallen gelassen; geht auch die Summe des verbleibenden Restes mit dem Brechungswinkel b über $4R$, so sind diese ebenfalls wegzulassen. Die allgemeine Rechnungsformel ist also:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + 2R + b_n,$$

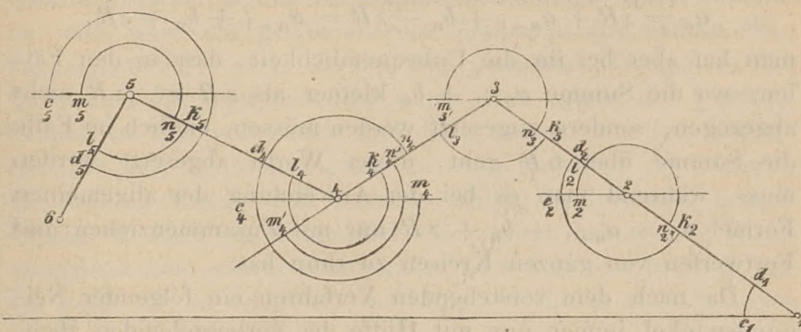
wobei α_n den Neigungswinkel für die Strecke von der Nummer n nach der Nummer $n + 1$ im Punkte n, b_n den Brechungswinkel in diesem Punkte, α_{n-1} den Neigungswinkel der Strecke vom Punkt $n - 1$ nach n im Punkt $n - 1$ bezeichnet.

In Worten ausgedrückt, erhält man also den Neigungswinkel einer Strecke, wenn man dem Neigungswinkel der vorhergehenden Strecke zwei rechte Winkel und den Brechungswinkel zwischen den beiden betreffenden Strecken zurechnet. Geht die Summe über 4 oder über 8 rechte Winkel, so werden im ersten Falle 400, im anderen 800 Neugrade abgesetzt.

In Figur 11 ist dieses Verfahren für verschiedene Lagen der Strecken anschaulich gemacht. Es bezeichnen darin c die Anfangspunkte; d die Endpunkte der Bogen der Vorwärts-

Neigungen, k und l Anfangs- und Endpunkte der Brechungswinkelbogen, m und n die Anfangs- und Endpunkte der Rückwärts-Neigungswinkelbogen, wobei die Buchstaben mit den Nummern der Brechpunkte versehen sind, auf welche sie sich beziehen.

Fig. 11.



Nachdem durch die Punkte 2, 3, 4, 5 Parallelen zur Achse gezogen sind, hat man bei sonnenläufiger Betrachtung der Winkel augenfällig:

Bogen $m_2 n_2 =$ Bogen $c_1 d_1 + 2R = \alpha_1 + 2R$

» $m_2 n_2 + k_2 l_2 = 4R + c_2 d_2 = \alpha_2$ nach Fortfall von $4R$

Bogen $m_3 n_3 =$ Bogen $c_2 d_2 + 2R$

» $m_3 n_3 + k_3 l_3 =$ Bogen $m_3 l_3 = \alpha_3$

Bogen $m_4 n_4 = \alpha_3$

» $n'_4 m'_4 = 2R$

$$\left.\begin{array}{ll} » & m_4 n_4 + n'_4 m'_4 = \alpha_3 + 2R \\ » & k_4 l_4 = k_4 m'_4 + m'_4 l_4 = b_4 \end{array}\right\} \text{das ist:} \left\{\begin{array}{l} n'_4 m'_4 = 2R \\ k_4 m'_4 = 2R \\ m_4 c_4 = n'_4 m'_4 = 2R \\ m'_4 l_4 + c_4 n_4 = 2R + c_4 d_4 \end{array}\right\} = 8R + c_4 d_4$$

» $m_4 n_4 + n'_4 m'_4 + k_4 l_4 = 4R + 4R + c_4 d_4 = \alpha_4$ nach Fortfall von $8R$

Bogen $m_5 n_5 = \alpha_4 + 2R$

» $m_5 n_5 + k_5 l_5 = c_5 d_5 = \alpha_5$

u. s. w.

Es verdient bemerkt zu werden, dass das bisher übliche Ableitungsverfahren in der Form von dem vorstehenden insofern abweicht, als bei ihm der Neigungswinkel der vorhergehenden Strecke dem Brechungswinkel zwischen dieser und der folgenden

Strecke zugesetzt und von der Summe zwei rechte Winkel abgezogen wurden. Man befolgte also die Formel:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + b_n - 2R\,.$$

Es ist leicht, diese Formel auf die obige allgemeine zurückzuführen; man braucht ihr auf der rechten Seite nur $4R$ zuzusetzen, wodurch ihre trigonometrischen Tafelwerthe nicht geändert werden, und erhält:

$$\alpha_n = 4R + \alpha_{n-1} + b_n - 2R = \alpha_{n-1} + b_n + 2R\,;$$

man hat aber bei ihr die Unbequemlichkeit, dass in den Fällen, wo die Summe $\alpha_{n-1} + b_n$ kleiner als $2R$ ist, $2R$ nicht abgezogen, sondern zugesetzt werden müssen, endlich im Falle die Summe über $6R$ geht, dieser Werth abgesetzt werden muss, während man es bei der Anwendung der allgemeinen Formel $\alpha_n = \alpha_{n-1} + b_n + 2R$ nur mit Zusammenziehen und Fortwerfen von ganzen Kreisen zu thun hat.

Da nach dem vorstehenden Verfahren ein folgender Neigungswinkel immer nur mit Hülfe des vorhergehenden abgeleitet werden kann, so folgt, dass die Neigung der Strecke, womit die Arbeit beginnen soll, anderweitig bekannt sein muss. Zwar kann sie willkürlich angenommen werden, wenn es nur darauf ankommt, mittelst rechtwinkliger Abstände von einer Achse, alle Theile des Streckenzuges in das gegenseitig richtige Verhältniss zu setzen. Gewöhnlich verbindet man aber damit noch den Nebenzweck, die Achse und damit die ganze Figur gegen die Himmelsgegenden zu richten (zu orientiren). Liegt in der Nähe ein trigonometrischer Punkt und kennt man den Neigungswinkel einer von ihm ausgehenden Richtungslinie gegen die Nordrichtung, so kann derselbe in den Streckenzug übergeleitet werden, nachdem dieser mit dem Punkte und der gedachten Richtungslinie durch einen Vermittelungszug in Verbindung gesetzt ist. Zur Herstellung einer solchen Verbindung bedurfte es z. B. bei der Figur 5 nur der Messung der Winkel *B. A.* 22 und *A.* 22. 23. Hatte hier die Linie *AB* im Standpunkt *A* den Neigungswinkel a, so brauchte nur der sonnenläufig gemessene Winkel *B. A.* 22 zugezählt zu werden, um die Neigung von *A* nach 22 zu erhalten, vorausgesetzt, dass auch der Winkel a sonnenläufig angegeben war. Mit Hülfe des Brechungswinkels *A.* 22. 23 könnte dann das Ableitungsgeschäft in obiger Weise fortgesetzt werden.

Ist aber ein solcher Anschluss nicht zu gewinnen und wird doch die Richtung der Achse gegen Norden verlangt, so muss der Feldmesser die Lage der Mittagslinie auf anderem Wege zu erlangen suchen, wobei indessen eine astronomische Genauigkeit nicht füglich von ihm verlangt werden kann.

Liegt die zu vermessende Gegend nicht allzu weit von einer Eisenbahnstation, für welche der mittlere Mittag von einer Central-Station täglich telegraphisch angezeigt wird, so kann er seine Uhr sehr genau auf den Zeitpunkt des wahren Mittags einstellen, wenn er bei dem gedachten Telegramm den bekannten Längenunterschied seines Orts gegen die Central-Station in Zeit verwandelt und diese mit der aus dem Kalender für den Beobachtungstag zu entnehmenden Abweichung des wahren Mittags vom mittleren Mittag in Rechnung bringt. Steckt er dann im Augenblick des wahren Mittags die Richtungslinie von seinem Standpunkte nach dem Stande der Sonne im Felde ab, so erhält er eine Linie, welche er zur Abstandsachse annehmen kann.

Mangelt ihm auch dieses Hülfsmittel, so kann er mit Hülfe seines Winkelwerkzeugs eine Mittagslinie ziehen. Stellt er den Winkelkreis wagrecht und den Höhenkreis auf einen beliebigen Höhenwinkel des Fernrohrs fest ein, verwahrt er sein Auge mit einem gefärbten Glase vor dem Augenstück des Fernrohrs, wartet dann an einem sonnenhellen Tage den Zeitpunkt ab, wo die Sonne des Vormittags die Höhe des Fernrohrstandes erreicht, nämlich in der Sehachse desselben erscheint, liest er sodann den Stand des drehbaren Kreises ab, nimmt er ferner den Zeitpunkt wahr, wo die Sonne des Nachmittags abermals in dem in der Höhenrichtung unverändert gebliebenen Fernrohr erscheint und liest er auch hier den Stand des drehbaren Kreises ab, so hat er nur das Mittel beider Stände zu ziehen, um die Richtung zu finden, wo die Sonne im wahren Mittag stand. Besitzt der Feldmesser eine Boussole und hat er sich nach der örtlichen Abweichung der Magnetnadel von der wahren Nordrichtung erkundigt, so kann er auch mit diesem Hülfsmittel die Abstandsachse für die gewöhnlichen Zwecke seiner Arbeit genau genug abstecken und mit einer Strecke seines Zuges durch Winkelmessung in Verbindung bringen.

Läuft der zu bearbeitende Streckenzug in seinen Anfangspunkt zurück, bildet er also ein geschlossenes Vieleck, so muss dem Geschäft der Neigungs-Ableitung noch eine Untersuchung und Berichtigung der unvermeidlich gewesenen Fehler der Summe aller Brechungswinkel vorangehen.

Bekanntlich ist der Sollbetrag der Summe der äusseren Winkel eines Vielecks von n Strecken $= (n + 2)\, 2\, R$, der inneren Winkel eines solchen $= (n - 2)\, 2\, R$.

Vergleicht man mit diesen Sollbeträgen die Summen der gemessenen Winkel, so findet man die Beträge, wozu sich die Fehler der n Winkelmessungen angehäuft haben. Selbstverständlich kann hierbei nur von kleinen Fehlern die Rede sein, nicht von groben Versehen. Amtliche Vorschriften setzen gewöhnlich die Grenze fest, welche von der Fehlersumme nicht überschritten werden darf; gewöhnlich soll sie nicht so viele Minuten betragen, als der Streckenzug Brechpunkte enthält. Da man nicht weiss, bei welchen Winkeln und mit welchem Belange bei ihnen die Fehler begangen sind, so erscheint es gerechtfertigt, die Fehlersumme auf sämmtliche Winkel des Vielecks zu gleichen Theilen zu vertheilen.

Um das Ableitungsgeschäft an einem Zahlenbeispiel zu zeigen, möge es zur Raumersparniss gestattet sein, dieses auf ein Vieleck von 5 Strecken zu beschränken. In diesem Fünfeck, dessen Brechpunkte mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet sein mögen, dessen Aussenwinkel gemessen seien und dessen Lage gegen die Abstandsachse durch den Neigungswinkel der Strecke 1.2 und zwar durch den Winkel $50^0\, 88'\, 75''$ gegeben sei, würde die Ableitung der Neigungswinkel in nachstehender Art auszuführen sein.

Zeichen der Brechpunkte	Gemessene Brechungswinkel			Verbesserung der gemessenen Winkel		Verbesserte Brechungswinkel			Neigungen gegen die Abstands-Achse		
	Grad	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.
1									50	88	75
2	259	66	80	+0	70	259	67	50	110	56	25
3	169	69	75	+0	70	169	70	45	80	26	70
4	366	12	50	+0	70	366	13	20	246	39	90
5	259	27	60	+0	70	259	28	30	305	68	20
1	345	19	85	+0	70	345	20	55	50	88	75
	1399	96	50	+3	50	1400	00	00			
Fehler = — 3.50											

Es ist rathsam, immer mit den Aussenwinkeln der Vielecke zu arbeiten, weil dann die Zählung der Neigungswinkel von der Achsenrichtung aus bis zu den betreffenden Strecken, die der Brechungswinkel von den vorhergehenden bis zu den nachfolgenden Strecken und der Umlauf der Rechnung um das Vieleck in einer und derselben Drehungsweise erfolgen.

Dass bei einem Vieleck der endliche Neigungswinkel mit dem anfänglichen übereinstimmt, ist eine nothwendige Folge der Verbesserung der gemessenen Brechungswinkel auf den Sollbetrag ihrer Summe.

§ 6.

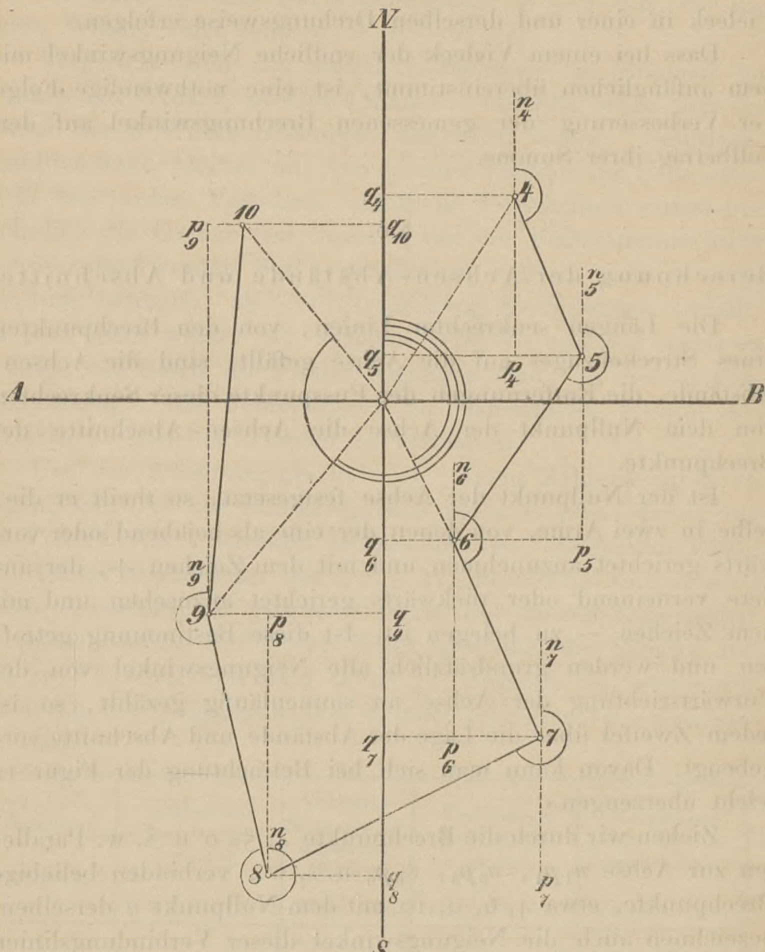
Berechnung der Achsen-Abstände und Abschnitte.

Die Längen senkrechter Linien, von den Brechpunkten eines Streckenzuges auf die Achse gefällt, sind die Achsen-Abstände, die Entfernungen der Fusspunkte dieser Senkrechten von dem Nullpunkt der Achse die Achsen-Abschnitte der Brechpunkte.

Ist der Nullpunkt der Achse festgesetzt, so theilt er dieselbe in zwei Arme, von denen der eine als bejahend oder vorwärts gerichtet anzunehmen und mit dem Zeichen +, der andere verneinend oder rückwärts gerichtet anzusehen und mit dem Zeichen — zu belegen ist. Ist diese Bestimmung getroffen und werden grundsätzlich alle Neigungswinkel von der Vorwärtsrichtung der Achse an sonnenläufig gezählt, so ist jedem Zweifel über die Lage der Abstände und Abschnitte vorgebeugt. Davon kann man sich bei Betrachtung der Figur 12 leicht überzeugen.

Ziehen wir durch die Brechpunkte 4, 5, 6 u. s. w. Parallelen zur Achse n_4p_4, n_5p_5, n_6p_6 u. s. w., verbinden beliebige Brechpunkte, etwa 4, 6, 9, 10 mit dem Nullpunkt o derselben, bezeichnen auch die Neigungswinkel dieser Verbindungslinien o4, o6, o9, o10 mit den ihrer Grösse entsprechenden Bogen von der Vorwärtsrichtung N an, errichten wir endlich im Nullpunkt o eine Senkrechte auf die Achse rechtsseitig nach B, linksseitig nach A: so sehen wir, dass den beiden im ersten und zweiten Quadranten liegenden Neigungswinkeln No4, No6 rechtsseitige Abstände $4q_4$, $6q_6$, den im dritten und vierten Quadranten befindlichen Neigungswinkeln No9, No10 linksseitige Abstände $9q_9$, $10q_{10}$ zugehören. Die beiden ersteren belegen wir mit dem Zeichen $+$, die beiden letzteren mit dem Zeichen $-$. Ferner sehen wir, dass den im ersten

Fig. 12.



und vierten Quadranten liegenden Neigungswinkeln $No4$ und $No10$ vorwärts gerichtete Abschnitte oq_4, oq_{10}, den im zweiten und dritten Quadranten liegenden Neigungswinkeln $No7$, $No9$ rückwärts gerichtete Abschnitte angehören. Ersteren beiden Abschnitten ist schon vorhin das Zeichen $+$, letzteren das Zeichen $-$ zugedacht. Da es nun in der Trigonometrie allgemeiner Gebrauch ist, die Sinus der Winkel im ersten und zweiten Quadranten mit dem Zeichen +, die im dritten und vierten Quadranten mit dem Zeichen — zu belegen, ferner die Cosinus des ersten und vierten Quadranten mit dem Zeichen +, die des zweiten und dritten Quadranten mit dem Zeichen — zu versehen, und diese trigonometrischen Linien Sinus und Cosinus gegen die Anfangsrichtung der sonnenläufigen Winkel dieselbe Lage haben, wie die Abstände und Abschnitte, so folgt, dass an der Grösse der Neigungswinkel die Lage der ihnen zugehörigen Abstände und Abschnitte, umgekehrt an der Lage dieser die Grösse der Neigungswinkel erkannt werden kann, letzteres jedoch nur, wenn zu jedem Abstand auch der zugehörige Abschnitt seiner Lage nach bekannt ist.

Dieselbe Beziehung findet nun auch zwischen den Neigungswinkeln der einzelnen Strecken und den diesen zugehörigen Abstands- und Abschnitts-Unterschieden statt. Durch die von den Brechpunkten senkrecht auf und parallel mit der Achse gezogenen Linien entsteht für jede Strecke ein rechtwinkliges Dreieck, dessen rechtwinklig gegen einander stehende Seiten die Unterschiede zwischen den Abständen und den Abschnitten der beiden Endpunkte einer Strecke sind. So ist z. B.

$$5q_5 - 4q_4 = 5p_4 \quad \text{oder} \quad y_5 - y_4 = \Delta y_4$$
$$q_5 - q_4 = 4p_4 \quad \text{oder} \quad x_5 - x_4 = \Delta x_4$$

Denkt man sich die Achse in die Parallele $n_4 p_4$ und ihren Anfangspunkt in 4 verlegt, so ist $4n_4$ ihre Vorwärts-, $4p_4$ ihre Rückwärtsrichtung, letztere hat also den verneinenden Sinn, führt das Zeichen —. Die Linie $5p_4$ steht senkrecht und rechtsseitig gegen die Achse, ist also bejahend und führt das Zeichen +. Der der Strecke 4.5 zugehörige Neigungswinkel $n_4 . 4 . 5$ oder α_4 liegt im zweiten Quadranten, ihm gehört also ein verneinender Cosinus und ein bejahender Sinus; Δx_4 und Cos α_4 führen also beide das Zeichen —, Δy_4 und Sinus α_4 beide das Zeichen +. Für die Strecke 5.6, deren Neigungswinkel $n_5 . 5 . 6$ oder α_5 im dritten Quadranten ist, liegt der Abstands-Unterschied $6p_5$ linksseitig, also verneinend oder —, der Abschnitts-Unterschied $5p_5$ ist rückwärts gerichtet, also ebenfalls verneinend oder —. Abstands- und Abschnitts-Unterschiede haben also auch hier dieselben Zeichen wie der Sinus und der Cosinus des zugehörigen Neigungswinkels. Dasselbe zeigt sich bei der Strecke 8.9, wo der Neigungswinkel im vierten, und bei der Strecke 9.10, wo er im ersten Quadranten liegt.

Nun erhält man die Länge des Abstands-Unterschiedes, wenn man die Länge der Strecke mit dem Sinus, die Länge des Abschnitts-Unterschiedes, wenn man die Streckenlänge mit dem Cosinus des Neigungswinkels malnimmt. Da nun die Länge der Strecke immer bejahend zählt, so folgt, dass das Ergebniss dieser Malnahmen immer dasselbe Zeichen hat, wie der Sinus oder der Cosinus des Neigungswinkels. In dem vorstehenden Beispiel ist also, wenn man die Strecken kurz mit S bezeichnet:

$$S_4 \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha_4 = + \varDelta y_4\,; \quad S_4 \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha_4 = - \varDelta x_4$$
$$S_5 \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha_5 = - \varDelta y_5\,; \quad S_5 \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha_5 = - \varDelta x_5$$
$$S_8 \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha_8 = - \varDelta y_8\,; \quad S_8 \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha_8 = + \varDelta x_8$$
$$S_9 \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha_9 = + \varDelta y_9\,; \quad S_9 \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha_9 = + \varDelta x_9$$

Man kann also ganz allgemein setzen: $\varDelta y_n = S_n \mathrm{Sin}\,\alpha_n$; $\varDelta x_n = S_n \mathrm{Cos}\,\alpha_n$, wobei die Zeichen von $\varDelta y_n$ und $\varDelta x_n$ beziehungsweise den Zeichen von $\mathrm{Sin}\,\alpha_n$ und $\mathrm{Cos}\,\alpha_n$ gleich sind.

Da nun $\varDelta y_n$ der Unterschied zwischen y_{n+1} und y_n, ebenso $\varDelta x_n$ der Unterschied zwischen x_{n+1} und x_n ist, so hat man schliesslich allgemein:

$$y_{n+1} = y_n + S_n \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha_n \quad \text{und} \quad x_{n+1} = x_n + S_n \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha_n\,,$$

wobei die beiden rechtsseitigen Glieder dieser Gleichungen mit Rücksicht auf ihre Zeichen mit einander zu verbinden sind.

In Worten ausgedrückt findet man den Achsen-Abstand eines Brechpunkts, wenn man die ihm vorhergehende Strecke mit dem Sinus ihres Neigungswinkels malnimmt und das Ergebniss davon zu dem Abstande des vorhergehenden Punktes setzt; ferner den Abschnitt des Punktes, wenn man die ihm vorhergehende Strecke mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels malnimmt und das Ergebniss mit dem Abschnitt des vorhergehenden Brechpunktes zusammenzieht.

In den meisten Fällen ist die Anzahl der Brechpunkte eines Streckenzuges beträchtlich. Es ist daher wichtig, sich nach der bequemsten und förderlichsten Weise umzusehen, nach welcher die Malnahmen $S\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha$ und $S\,.\,\mathrm{Cos}\,\alpha$ ausgeführt werden können. Man hat dazu Logarithmen, Rechentafeln und solche Hülfstafeln angewendet, in welchen jene Malnahmen bereits für jeden Winkel zum voraus ausgeführt sind. Es erscheint nützlich, diese drei Hülfsmittel genauer anzusehen und mit einander zu vergleichen.

a. Berechnung mit Logarithmen.

Die Strecken der Vielecke, wie der nicht geschlossenen Züge, sind selten über 1000 Meter oder ein Kilometer lang und bei ihrer Messung wird die Längenzahl füglich auf Zehntheile der Meter abgerundet. Die Längenzahl hat also in den meisten Fällen nur drei Stellen für ganze und noch eine für Zehntelmeter, zusammen also vier Stellen. Dafür genügen fünfstellige Logarithmen vollkommen. Eine Tafel der Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 9999 hat Dr. Theodor Wittstein (Hannover, Hahn'sche Buchhandlung 1859) bei sehr deutlichem Druck auf 24 Seiten gebracht und dadurch das Aufschlagen sehr erleichtert.

Leider ist die hinter dieser Tafel befindliche Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Zahlen auf die Theilung des Quadranten in 90 Grade, des Grades in 60 Minuten eingerichtet. Die Rechner mit Logarithmen müssen also eine zweite Tafel zur Hand nehmen, wenn die Winkel in hunderttheiligen Quadranten und Graden gemessen sind, etwa die oben in der Note zum § 2 angezeigte von Johann Philipp Hobert und Ludwig Ideler, welche aber für siebenstellige Logarithmen eingerichtet sind und damit das Aufschlagen erschweren.

Angenommen, es seien die Abstands- und Abschnitts-Unterschiede für eine Strecke zu berechnen, welche 735,8 Meter lang sei und gegen die Achse eine Neigung von $67^0 89'$ habe. Die Rechnung wäre:

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
\text{Log Sin } 67^0\,89' = & 9{,}94224\;; & \text{Log Cos } 67^0\,89' = & 9{,}68419 \\
\text{Log } 735{,}8 = & \underline{2{,}86676} & \text{Log } 735{,}8 = & \underline{2{,}86676} \\
 & 2{,}80900 & & 2{,}55095 \\
 & 644{,}17 & & 355{,}59
\end{array}$$

Bei dieser Arbeit waren erforderlich:

4 Tafel-Aufschlagungen,
5 Zahlen-Aushebungen,
2 Summirungen,
36 Hülfsziffern.

b. Anwendung der Rechentafeln.

Die Rechentafeln von Dr. A. L. Crelle, Stereotyp-Ausgabe von Dr. C. Bremiker, Berlin bei Georg Reimer 1857, gestatten das unmittelbare Malnehmen jeder ein- bis dreizifferigen Zahl mit jeder ein- bis dreizifferigen Zahl.

Die oben angezeigten Hobert'schen trigonometrischen Tafeln enthalten auch auf jeder linken Seite die natürlichen Längen der trigonometrischen Linien. Man hat also für die einzelne Strecke den Sinus und den Cosinus aufzuschlagen, dann mit der Meterzahl in die Rechentafel einzugehen, mit derselben zunächst die drei ersten Stellen, dann zwei folgende Stellen des Sinus und des Cosinus malzunehmen, endlich die Zehntel der Meter in Gedanken mit den ersten Stellen des Sinus und Cosinus malzunehmen, endlich die drei Ergebnisse für beide trigonometrische Linien zusammenzuziehen, wie folgt:

Sin $67^0\,89' =$	0,87547 ;	Cos $67^0\,89' =$	0,48327
+ 735,8	643,12	+ 735,8	355,00
	35		20
	70		39
	644,17		355,59

Hierbei waren erforderlich:

2 Tafel-Aufschlagungen,
4 Zahlen-Aushebungen,
2 Malnehmungen der Zehntelmeter,
2 Summirungen,
30 Hülfsziffern.

Bei dem ersten Malnehmen mit den ganzen Metern sind drei, bei dem zweiten fünf Stellen abzuschneiden, wobei jedoch die Fälle gehörig zu beachten sind, wo die letzten Stellen der Zahlen statt mit namhaften Ziffern mit Nullen besetzt sind.

c. Benutzung der Hülfstafeln.

Hülfstafeln zur Berechnung der Abstände und Abschnitte, wie die von D. W. Ulffers, Coblenz 1854, sind so eingerichtet, dass sie für die Zahlenreihe von 1 bis 9 oder von 10 bis 90 die Vielfachen des Sinus und des Cosinus für jeden Winkel von 0 bis zum Quadranten angeben; ihre Anwendung bedarf also nur einer Zusammensetzung dieser Vielfachen unter gehöriger Berücksichtigung des Zahlenranges.

Das obige Beispiel würde damit wie folgt zu behandeln sein:

Für Sin $67^0 89'$		Für Cos $67^0 89'$	
700 =	612,85	700 =	338,3
30 =	26,26	30 =	14,49
5,8 =	5,07	5,8 =	2,81
	644,18		355,60

Es waren also nöthig:

1 Tafel-Aufschlagen,
6 Zahlen-Aushebungen,
2 Summirungen,
23 Hülfsziffern.

Könnte man dem Tafel-Aufschlagen, den Zahlen-Aushebungen und den übrigen Handlungen gleiche Gewichte beilegen und sie zusammenrechnen, so würde sich für die drei Verfahrungsarten folgende Vergleichung ergeben:

Die Logarithmen	erfordern	11 Handlungen	und	36 Hülfsziffern,
» Rechentafeln	»	10 »	»	30 »
» Hülfstafeln	»	9 »	»	23 »

Nach dieser Vergleichung würde die Hülfstafel den beiden anderen Hülfsmitteln vorzuziehen sein. Es darf indessen nicht unbemerkt bleiben, dass die Anwendung der Logarithmen gleichförmiger und dem Irrthum am wenigsten unterworfen ist, und dass bei der Anwendung der beiden letzten Hülfsmittel grosse Aufmerksamkeit auf die Rangstellung der zusammenzurechnenden Theile erforderlich ist, endlich auch bei der Hülfstafel die einzelnen Centimeter nicht mehr ganz sicher sind.

Nachdem die Unterschiede der Abstände und Abschnitte sämmtlicher Strecken eines Zuges berechnet sind, können von dem Abstand und dem Abschnitt des Anfangspunktes beginnend, die Abstände und Abschnitte sämmtlicher Brechpunkte durch allmähliche Zusammensetzung nach den obigen Formeln

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n;\ x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

hergestellt werden.

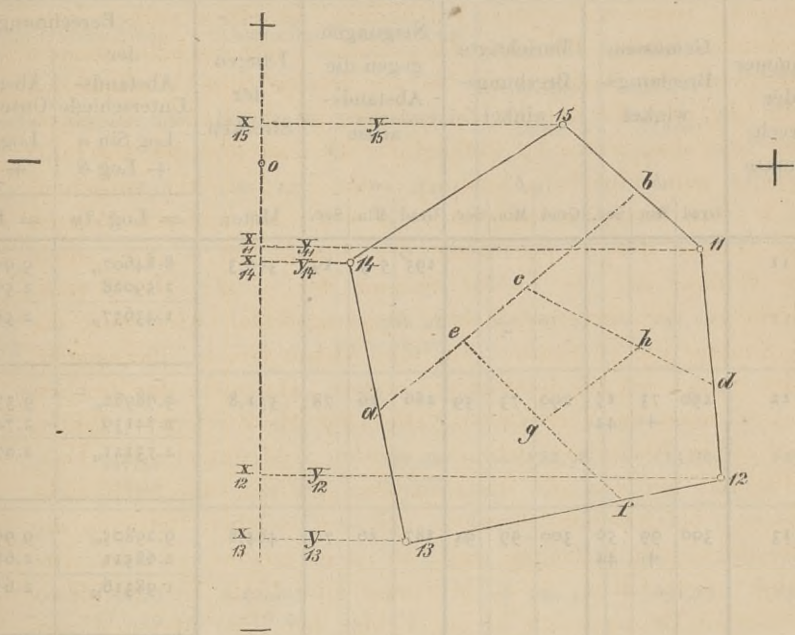
Läuft aber der Zug wie beim geschlossenen Vieleck in seinen Anfangspunkt zurück, so muss jenem Zusammensetzungsgeschäft noch eine Vorbereitung vorhergehen. Wären alle Δy und Δx völlig genau, so müsste am Ende jenes Geschäfts der

Abstand und der Abschnitt des Anfangspunktes genau wieder zum Vorschein kommen. Da aber alle Längen- und Winkelmessungen wenigstens kleinen Fehlern unterworfen sind, so würden sich am Schlusse der Rechnung kleine Abweichungen zeigen, wenn nicht eine Vertheilung derselben vorher stattgefunden hätte. Bei dem Zusammensetzungsgeschäft kommen übrigens vom Anfange an bis zur letzten Strecke allmählich alle Δy und Δx bei der Zurechnung an die Reihe, sie müssten sich also, wenn der anfängliche Abstand und der Abschnitt wieder zum Vorschein kommen sollte, gegenseitig aufheben, d. h. ihre Summen müssten $= 0$ sein, mit anderen Worten die Summe der $+\Delta y$ müsste der Summe der $-\Delta y$, sowie die Summe der $+\Delta x$ der Summe der $-\Delta x$ gleich sein. Vermöge der unvermeidlichen Messungsfehler wird nun die $+$ Summe die $-$ Summe um eine kleine Grösse überwiegen, oder umgekehrt die letztere die erstere. Hat diese das Zeichen $+$, so muss die Verbesserung aller Δy das Zeichen $-$ führen und so in Rechnung gebracht werden und umgekehrt. Dasselbe hat bei den Δx stattzufinden. Da wir nun auch nicht wissen, bei welchen Strecken und mit welchen Beträgen die Messungsfehler begangen sind, so ist es erlaubt, von der Annahme auszugehen, dass, je länger eine Linie ist, zu desto grösserem Betrage sich kleine Fehler bei ihrer Messung angehäuft haben können, und dass die Rückwirkung dieser Anhäufung auf die Δy und Δx in demselben Verhältnisse stände, wie die Strecke S zu denselben. Mit anderen Worten, es erscheint zulässig, die Abweichung der Summe der $+\Delta y$ von der Summe der $-\Delta y$ auf sämmtliche Δy im Verhältniss ihrer Längen zur Summe aller Δy, letztere ohne Rücksicht auf ihre Zeichen gezogen, zu vertheilen, jedoch überall mit dem dem Zeichen der Abweichung entgegengesetzten Zeichen, und ebenso bei den Δx zu verfahren.

Bei der Ausführung dieses Geschäfts zieht man alle $+\Delta y$ mit allen $-\Delta y$ ohne Rücksicht auf das Zeichen in eine Summe, theilt diese in die Abweichung zwischen der $+$ Summe und der $-$ Summe, schlägt die daraus hervorgegangene Verhältnisszahl in der obengedachten Rechentafel auf und vervielfältigt sie mit sämmtlichen Δy, wonach die Ergebnisse derselben den Δy mit dem entgegengesetzten Zeichen der Abweichung in Rechnung zu bringen sind. Ebenso verfährt man bei den Δx.

Zur Erläuterung des Vorstehenden werde das Fünfeck der Figur 13 mit Hülfe der Logarithmen berechnet.

Fig. 13.



Bei diesem Beispiel ist zu bemerken, dass für den Anfangspunkt 11 der Neigungswinkel gegen die Achse, sowie der Abstand und Abschnitt anderweitig bekannt geworden waren und dass bei dem Aufschlagen der Logarithmen für Sinus und Cosinus das etwas mühsame Einschalten für die einzelnen Secunden erspart werden konnte, weil sämmtliche Strecken unter einem Kilometer lang sind; es war zulässig, die Secundenzahl, wenn sie über eine halbe Minute betrug, für eine volle Minute zu nehmen und sie fallen zu lassen, wo sie weniger betrug.

Auch ist zu bemerken, dass die Bezeichnung der Logarithmen für verneinende Werthe mit einem angehängten n zur Verhütung von Irrthümern in der Bezeichnung der Δy und Δx nützlich ist.

Das nachstehende Formular ist auch bei der Anwendung der Rechentafeln und der Hülfstafeln anwendbar. Bei Benutzung der ersteren werden die natürlichen Längen für Sinus

Standortsberechnung der Brechpunkte.

Nummer der Brech-punkte	Gemessene Brechungs-winkel b			Berichtigte Brechungs-winkel b'			Neigungen gegen die Abstands-achse α			Längen der Strecken	Berechnung der Abstands-Unterschiede Log Sin α + Log S	Berechnung der Abschnitts-Unterschiede Log Cos α + Log S	Abstands-Unterschiede bejahende	Abstands-Unterschiede verneinende	Abschnitts-Unterschiede bejahende	Abschnitts-Unterschiede verneinende	Abstände von der Achse	Abschnitte auf der Achse	Nummer der Brech-punkte
	Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.	Meter	= Log Δy	= Log Δx	$+\Delta y$	$-\Delta y$	$+\Delta x$	$-\Delta x$	y	x	
11							195	5 3	19	389,3	8.84607_n 2.59028 1.43637_n	9.99893 2.59028 2.58921	27,31 — 0,03			388,43 — 0,17	+ 761,30	— 145,10	11
12	290	73 +	15 44	290	73	59	286	26	78	551,8	9.98982_n 2.74139 2.73121_n	9.33041_n 2.74139 2.07180_n		538,53 — 0,54		117,98 — 0,05	+ 788,58	— 533,70	12
13	300	99 +	50 44	300	99	94	387	26	72	484,8	9.29805_n 2.68511 1.98316_n	9 99126 2.68511 2.67637		96,20 — 0,10	474,64 — 0,20		+ 249,51	— 651,73	13
14	275	20 +	65 44	275	21	09	62	47	81	436,4	9.91976 2.63988 2.55964	9.74494 2 63988 2.38482	362,77 — 0,36		242,56 — 0,10		+ 153,21	— 177,29	14
15	282	53 +	44 44	282	53	88	145	01	69	323,5	9.88093 2.50987 2.39080	9.81270_n 2.50987 2.32257_n	245,92 — 0,24			210,17 — 10	+ 515,62	+ 65,17	15
11	250	51 +	06 44	250	51	50	195	53	19				+ 636,00 — 634,73	634,73	717,20 716,58	716,58			
Summe	1399	97	80	1400	00	00						Abweichung	+ 1,27		0,62		+ 761,30	— 145,10	11
Soll	1400	00	00																
Fehler	— 0	02	20									Summe	1270,73		1433,78				
Verb:	+ 0	00	44									Berichtig.-Verhältniss		— 0,001		— 0,000434			

und Cosinus in die Spalten für Log Sin und Log Cos gesetzt, bei der der letzteren, bleiben diese Spalten leer oder werden für das Zusammensetzen der Theilwerthe benutzt. Das vorstehende Verfahren, die am Schlusse der Berechnung der Δy und Δx hervortretenden Abweichungen zu berichtigen, ist das gemein gebräuchliche, auch für Vermessungsflächen von geringer Ausdehnung ausreichende.

Wer sich mit strengeren Verfahrungsarten bekannt zu machen wünscht, findet solche in meiner Schrift: »Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen, Leipzig 1858 bei B. G. Teubner«.

§ 7.

Aufnahme des Inneren der Vielecke.

Wenn die aufgenommenen Streckenzüge nur den Zweck haben für Längen-Ausdehnungen, etwa mit nahe liegenden Umgebungen die naturgetreuen Figuren nachzuweisen, oder wenn geschlossene Vielecke nur den Umfang von Waldungen und ähnlichen im Inneren gleichartigen Grundstücken zu bestimmen haben, so ist in dem Vorstehenden die nöthige Anleitung dazu gegeben. Sind aber im Inneren eines Vielecks Eigenthums- und Culturgrenzen, Eisenbahnen, Wege, Flüsse, Gebäulichkeiten und andere bemerkenswerthe Gegenstände aufzunehmen, so dient das gemessene und berechnete Vieleck nur zur Grundlage, zum Gerippe der Messungslinien, welche nun im Inneren desselben anzulegen sind, um gegen sie nach der Anweisung der Betheiligten jene Gegenstände ihrer Lage nach zu bestimmen.

Diese Linien sind so auszuwählen, dass von ihnen aus möglichst viele und möglichst bequem die inneren Gegenstände aufgenommen werden können.

In den meisten Fällen empfiehlt es sich, eine oder mehrere Hauptlinien so anzulegen, dass sie von einem Brechpunkte oder einer Strecke des Grund-Vielecks ausgehen und in einem anderen Brechpunkte oder einer Strecke endigen. Linien dieser Art nennt man Verbindungslinien erster Ordnung.

Sind Anfangs- und Endpunkte solcher Linien Brechpunkte des Vielecks, so ist ihre Lage ohne Weiteres bestimmt, liegt aber ein Anfangs- oder Endpunkt oder liegen beide in Strecken des Vielecks, so muss die Entfernung jedes dieser Punkte von einem der Brechpunkte der betreffenden Strecke gemessen werden.

Da Linien dieser Art in den meisten Fällen beträchtlich lang sind, so können die Zielzeichen für ihre Endpunkte von ihren Anfangspunkten meist nicht gesehen werden, wenigstens nicht mit blossem Auge; sie müssen daher gewöhnlich rückwärts eingerichtet werden, worunter zu verstehen ist, dass vom Anfangspunkt aus in der gewählten Anfangsrichtung immer wenigstens zwei Zielstäbe in der Linie stehen müssen, um rückwärts sehend den dritten Stab in die Richtung derselben einsetzen zu können. Dabei ist es dringend zu empfehlen, gleich beim Einsetzen des nächsten auf den Anfangspunkt folgenden Stabes den Punkt am fernen Gesichtskreis zu merken, welcher in dieser Richtung liegt, um sich bei den folgenden Stabsetzungen vorzugsweise nach ihm richten zu können. Wo endlich die Richtung der Linie eine gegenüberliegende Strecke des Vielecks schneidet, liegt der Endpunkt der Linie. Geht aus einem Punkte einer Verbindungslinie erster Ordnung eine seitliche Verbindungslinie aus und endigt in einem Brechpunkt oder einer Strecke des Vielecks, so nennen wir sie eine Verbindungslinie zweiter Ordnung. Verbindungslinien dritter Ordnung sind solche, welche in Verbindungslinien anfangen und endigen.

Gegen die Verbindungslinien erster, zweiter und dritter Ordnung werden die Grenzen und sonstigen bemerkenswerthen Gegenstände durch Abschnitte und Abstände dieser Linien bestimmt, bei deren Messung dasselbe Verfahren zu beobachten ist, welches oben für die Messung der Strecken angegeben ist. Da die Verbindungslinien weder rechtwinklig auf einander, noch parallel oder senkrecht gegen die Hauptachse des Vielecks stehen, so folgt, dass ihre Abschnitte und Abstände sich nicht auf die Letztere beziehen. Wenn man übrigens Werth darauf zu legen hätte, für ihre Anfangs- und Endpunkte die Abstände und Abschnitte der Hauptachse zu wissen und ihre Länge danach zu prüfen, so könnte dieses durch Rechnung leicht erreicht werden.

Angenommen, man verlange für die Verbindungslinie erster Ordnung ab in Figur 13 die Achsen-Abstände und Abschnitte der Endpunkte a und b und die Länge ab, um mit dieser die wirklich gemessene Länge dieser Linie zu prüfen, so brauchten nur die Entfernungen von 13 nach a und von 15 nach b bekannt zu sein. Man hat nämlich:

$$y_a = y_{13} + a \,.\, {}_{13} \operatorname{Sin} \alpha_{13}\,; \quad x_a = x_{13} + a \,.\, 13 \operatorname{Cos} \alpha_{13}$$

$$y_b = y_{15} + b \,.\, {}_{15} \operatorname{Sin} \alpha_{15}\,; \quad x_b = x_{15} + b \,.\, 15 \operatorname{Cos} \alpha_{15}$$

ferner

$$\operatorname{Tang} \alpha_{ab} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}\,; \quad \operatorname{Cotang} \alpha_{ab} = \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}$$

$$ab = \frac{x_b - x_a}{\operatorname{Cos} \alpha_{ab}} \quad \text{oder} \quad ab = \frac{y_b - y_a}{\operatorname{Sin} \alpha_{ab}}$$

Verlangte man auch dieselben Bestandtheile für die Verbindungslinie zweiter Ordnung cd, so hätte man

$$y_d = y_{11} + d \,.\, 11 \operatorname{Sin} \alpha_{11}\,; \quad x_d = x_{11} + d \,.\, 11 \operatorname{Cos} \alpha_{11}$$

$$y_c = y_a + ac \operatorname{Sin} \alpha_{ab}\,; \quad x_c = x_a + ac \operatorname{Cos} \alpha_{ab}$$

und

$$\operatorname{Tang} \alpha_{cd} = \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c}\,; \quad \operatorname{Cotang} \alpha_{cd} = \frac{x_d - x_c}{y_d - y_c}$$

$$cd = \frac{x_d - x_c}{\operatorname{Cos} \alpha_{cd}} \quad \text{oder} \quad cd = \frac{y_c - y_d}{\operatorname{Sin} \alpha_{cd}}$$

Dasselbe Verfahren würde der Form nach nur zu wiederholen sein, wenn es sich auch um die Beschaffenheit der Verbindungslinie zweiter Ordnung ef und um die dritter Ordnung gh handeln sollte.

Bei der Ausführung ist es nicht unwichtig, die Aufstellung der Zahlen zweckmässig einzurichten. Angenommen, man habe gemessen von 13 nach a = 231,3 Meter,

» 15 » b = 172,5 »

so würde die Rechnung bequem in folgender Art zu führen sein:

Log 13 . a	= 2.36418	Log 13 . a	= 2.36418
Log Sin α_{13}	= 9.29805_n	Log Cos α_{13}	= 9.99126 (Siehe § 6).
Log $\Delta y_{13\cdot a}$	= 1.66223_n	Log Δx_{13a}	= 2.35544
Δy_{13a}	= −45,94	Δx_{13a}	= +226,70
y_{13}	= 249,51	x_{13}	= −651,73
y_a	= +203,54	x_a	= −425,03
Log 15 . h	= 2.23679	Log 15 . b	= 2.23679
Log Sin α_{15}	= 9.88093	Log Cos α_{15}	= 9.81270_n (Siehe § 6).

$\text{Log}\, \Delta y_{15 \cdot b}$	$= 2.11772$	$\text{Log}\, \Delta x_{15 \cdot b}$	$= 2.04949_n$
$\Delta y_{15 \cdot b}$	$= +131{,}14$	$\Delta x_{15 \cdot b}$	$= -112{,}07$
y_{15}	$= +515{,}62$	x_{15}	$= +65{,}17$
y_b	$= +646{,}76$	x_b	$= +46{,}90$
$y_b - y_a$	$= +443{,}19$	$x_b - x_a$	$= +378{,}13$
$\text{Log Tang}\, \alpha_{ab}$	$= 10.06895$	$\text{Log Cotng}\, \alpha_{ab}$	$= 9.93105;\ \alpha_{ab} = 55^0 03'$
$\text{Log}\, y_b - y_a$	$= 2.64659$	$\text{Log}\, x_b - x_a$	$= 2.57764$
$\text{Log}\, x_b - x_a$	$= 2.57764$	$\text{Log}\, y_b - y_a$	$= 2.64659$
$\text{Log Cos}\, \alpha_{ab}$	$= 9.81230$	$\text{Log Sin}\, \alpha_{ab}$	$= 9.88128$
$\text{Log}\, ab$	$= 2.76534$	$\text{Log}\, ab$	$= 2.76531$
ab	$= 582{,}53$	ab	$= 582{,}53$

Es ist bequem und erspart Raum und Ziffern, die Logarithmen für $y_b - y_a$ und $x_b - x_a$ nach oben hin abzuziehen, um den Logarithmus der Tangente zu erhalten, in der Tafel dann neben demselben den Log Cos hervorzuheben, ihn unter Log $x_b - x_a$ zu setzen und von diesem nach unten abzuziehen, um sofort den Log ab zu erhalten.

Die rechtsseitig stehende Rechnung mit Hülfe der Cotangente und des Sinus war entbehrlich und ist nur der Uebersichtlichkeit wegen beigefügt worden.

Hat man für ab Abstände, Abschnitte und Neigungswinkel gefunden, so kann die Rechnung in ganz gleicher Art für die Verbindungslinien zweiter Ordnung cd und ef und demnächst auch für die der dritten Ordnung, wie z. B. gh, fortgesetzt werden, obgleich es selten vorkommen mag, dass der Feldmesser ihrer bedarf.

Von besonderem Werthe ist die Berechnung solcher Verbindungslinien erster Ordnung, wie z. B. ab, bei Forstvermessungen, wenn der Raum zwischen a und b etwa durch den Holzbestand oder einen zwischenliegenden Hügel undurchsichtig ist, dem Feldmesser aber a und b mit der Aufgabe bezeichnet sind, im Punkte a die Richtung anzugeben, in welcher das Holz abgeräumt werden muss, um mit einem sogenannten Gestelle geradlinig genau bei dem Punkte b anzukommen. Es sind dann für a und b die Abstände und Abschnitte und der Neigungswinkel dieser Linie zu berechnen, wonach dann nur noch der Winkel zu ermitteln ist, den die Linie ab mit der Strecke, in welcher a liegt, hier 13—14, einschliesst, um denselben mit Hülfe des Winkelwerkzeugs in das Feld übertragen zu können. Bei jener Berechnung des Neigungswinkels ist die Bemerkung des § 6 zu beachten, dass die Zeichen der Abstands- und Abschnitts-Unterschiede über den Quadranten entscheiden, in welchem der Neigungswinkel ihrer Verbindungslinie liegt. Im vorstehenden Beispiel haben $\varDelta y_b - \varDelta y_a$ und $\varDelta x_b - \varDelta x_a$ beide das Zeichen +, der Neigungswinkel für *ab* liegt also im ersten Quadranten und beträgt $55^0\,03'$. Nun ist auf einem Punkte (*a*) der Unterschied zwischen zwei sonnenläufig gezählten Neigungswinkeln ($\alpha_{ab} - \alpha_{a14}$) dem ebenso gezählten Winkel zwischen den beiden Richtungen gleich. Man hat daher in diesem Beispiel:

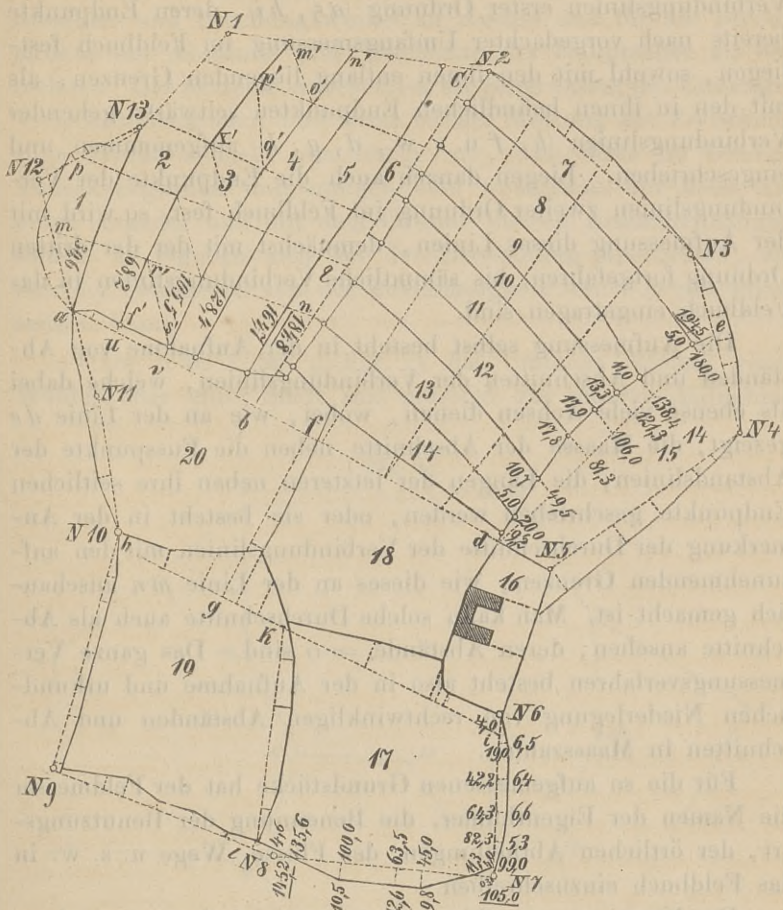
$$\text{Winkel } 14 \,.\, a \,.\, b = \overset{+\,400}{55^0\,03'} - 387^0\,27' = 67^0\,76'$$

Ist hierbei die Gradzahl des rechtsliegenden Neigungswinkels kleiner als die des linksliegenden, so muss ersterem vor dem Abziehen ein Vollkreis zugesetzt werden.

Die Figur 14 macht anschaulich, wie die Verbindungslinien zur Aufnahme des Inneren eines Grundvielecks angelegt und benutzt werden. Zunächst werden die Verbindungslinien erster Ordnung von *a* nach dem Brechpunkt 5 und von *h* nach *c* abgesteckt und bei *a*, *h*, *c* durch Einrichten ihrer Endpunkte in die Strecken 11—12, 9—10, 6—7 mit dem Grundvieleck verbunden, sodann werden von diesen Linien aus die Verbindungslinien zweiter Ordnung *bc*, *de*, *kl*, *mn* u. s. w. abgesteckt, mit denen der dritten Ordnung *fg* fortgefahren, bis sämmtliche Linien abgesteckt sind, von denen die Grenzen der Grundstücke und anderer bemerkenswerther Gegenstände bequem aufgenommen werden können. Die Bequemlichkeit der Aufnahme besteht darin, dass die Verbindungslinien den aufzunehmenden Gegenständen möglichst nahe liegen, damit die nach ihnen zu messenden Abstände nicht zu lang werden. Die zu grosse Länge der Abstände erschwert nicht nur die Arbeit, sondern macht auch ihr Ergebniss unsicher, weil das Winkelkreuz die Absteckung des rechten Winkels nur auf mässige Abstandslängen sichert.

Sind sämmtliche Verbindungslinien abgesteckt, so findet zunächst die zweite Messung der Vielecksstrecken statt, wobei nicht nur die von ihnen aufzunehmenden Aussengrenzen der Flur mittelst Abschnitte und Abstände gegen die Strecken bestimmt, sondern auch die Entfernungen der Punkte, wie *a*, *c*, *e*, *p*, *h*, *i*, *l* u. s. w., bei welchen Verbindungslinien in die Strecken einschneiden, von den Brechpunkten gemessen werden.

Fig. 14.



Zeichenerklärung.

Grenzen sind ausgezogen.
Messungslinie punktirt.
Vielecksnummern mit *N* bezeichnet.

Grundstücksnummer ohne *N*.
Gestrichelte Figur ist ein Haus.
Kleine Vierecke sind Grenzsteine.

Nachdem inmittelst, wie im § 6 gezeigt ist, die Abstände und Abschnitte der Punkte des Grundvielecks berechnet worden, kann der Umfang des Vielecks oder können Theile desselben auf besondere Blätter eines Feldbuchs möglichst naturgetreu in einem so grossen Maassstabe aufgetragen werden, dass überall im Innern der Flur die Messungszahlen mit gehöriger Deutlichkeit eingeschrieben werden können.

Ist diese Vorbereitung getroffen, so werden zunächst die Verbindungslinien erster Ordnung (a 5, hi), deren Endpunkte bereits nach vorgedachter Umfangsmessung im Feldbuch festliegen, sowohl mit den ihnen entlang liegenden Grenzen, als mit den in ihnen befindlichen Endpunkten seitwärts gehender Verbindungslinien (b, f u. s. w., d, g, k) aufgenommen und eingeschrieben. Liegen danach auch die Endpunkte der Verbindungslinien zweiter Ordnung im Feldbuch fest, so wird mit der Aufmessung dieser Linien, demnächst mit der der dritten Ordnung fortgefahren, bis sämmtliche Verbindungslinien in das Feldbuch eingetragen sind.

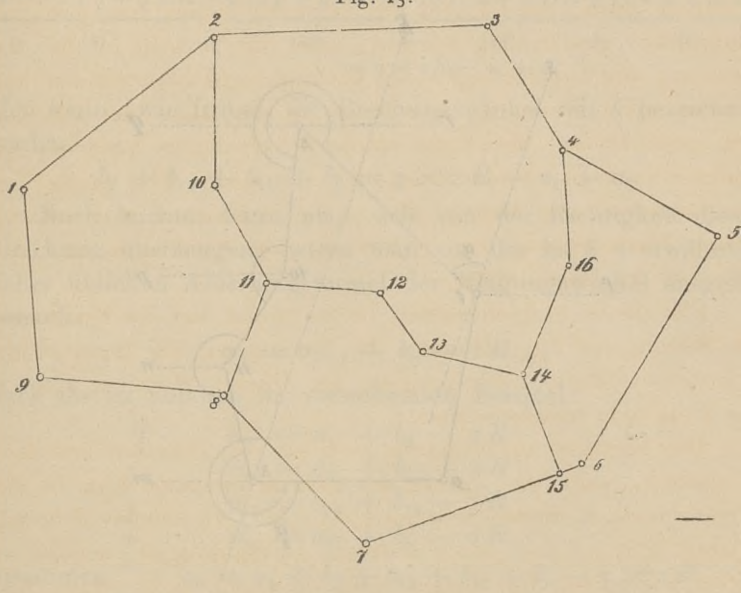
Die Aufmessung selbst besteht in der Aufnahme von Abständen und Abschnitten der Verbindungslinien, welche dabei als ebenso viele Achsen dienen, wobei, wie an der Linie de gezeigt, die Maasse der Abschnitte neben die Fusspunkte der Abstandslinien, die Längen der letzteren neben ihre seitlichen Endpunkte geschrieben werden, oder sie besteht in der Anmerkung der Durchschnitte der Verbindungslinien mit den aufzunehmenden Grenzen, wie dieses an der Linie mn anschaulich gemacht ist. Man kann solche Durchschnitte auch als Abschnitte ansehen, deren Abstände $= 0$ sind. Das ganze Vermessungsverfahren besteht also in der Aufnahme und urkundlichen Niederlegung von rechtwinkligen Abständen und Abschnitten in Maasszahlen.

Für die so aufgemessenen Grundstücke hat der Feldmesser die Namen der Eigenthümer, die Benennung der Benutzungsart, der örtlichen Abtheilungen, der Flüsse, Wege u. s. w. in das Feldbuch einzuschreiben.

Das Vermessungsverfahren gestaltet sich indessen nur dann so einfach, wenn das Innere der aufzunehmenden Flur in den gewünschten Richtungen zugänglich ist. An solcher Zugänglichkeit fehlt es aber unter anderem in Waldungen, welche mit tiefen Schluchten durchzogen sind, in denen nicht selten Wiesen und andere Ländereien aufgemessen werden müssen, zu denen vom Grund-Vieleck aus mit geraden Verbindungslinien nicht zu gelangen ist, ebenso auch in Städten von krumm laufenden Strassen, worin oft nur auf kurze Strecken geradeaus gesehen werden kann. In solchen Gegenden müssen andere Verbindungen gesucht werden. Oft genug bleibt nichts anderes übrig, als durch die krummen Windungen der Thäler und Strassen besondere gebrochene Streckenzüge zu legen, ihre Strecken und Brechungswinkel zu messen und für die Brechpunkte die Abstände und Abschnitte der Hauptachse zu berechnen. Der letzteren Arbeit muss die Berechnung des Umfangs-Vielecks vorangehen, und wenn bei der Messung der Zwischenzüge darauf Bedacht genommen war, dass diese im Grund-Vieleck beginnen und endigen oder wenigstens auf diese Art unter einander und mit dem Grund-Vieleck zusammenhängen sollen, so ergeben sich bei der Berechnung Anschlüsse, wo sich der Feldmesser von der Zuverlässigkeit seiner Arbeit überzeugen kann.

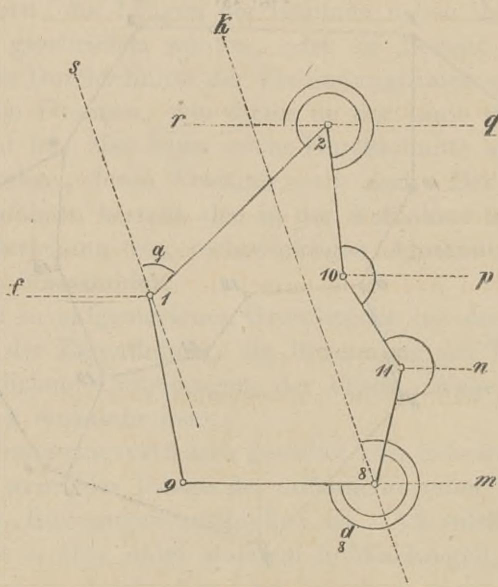
Wäre z. B. 1 bis 9 Fig. 15 das Umfangs-Vieleck eines Waldes oder einer Stadt und müssten zur inneren Aufnahme

Fig. 15.



Binnenzüge 2, 10, 11, 8, ferner 11, 12, 13, 14, 15, endlich 4, 16, 14 angelegt werden, so würden die zwischen diesen Punkten enthaltenen Strecken, ferner die Brechungswinkel, welche die Strecken der Binnenzüge mit einander und mit den Strecken des Umfangs-Vielecks einschliessen, zu messen sein. Alsdann würden sich sowohl bei der Ableitung der Neigungswinkel von 2 bis 8, von 11 bis 15, von 4 bis 14, als auch bei der Berechnung der Abstände und Abschnitte Anschlüsse ergeben. Bevor aber die Geschäfte der Ableitung der Neigungswinkel und der Zusammensetzung der Abstände und Abschnitte begonnen werden, müssen die in den §§ 5 und 6 beschriebenen Vorbereitungen zur Vertheilung der bei Vergleichung der Schlusssummen mit ihren Sollbeträgen hervortretenden Abweichungen stattfinden. Ist das Umfangs-Vieleck, wie z. B. das in Figur 15, sonnenläufig, also in der Richtung von 1 nach 2, 3 u. s. w. bis 8, 9 mit den Aussenwinkeln berechnet und handelt es sich nun darum, von der Anschlussseite 1—2 bis zur End-Anschlussseite 8—9 den Binnenzug 2, 10, 11, 8 auf die Hauptachse zu beziehen, so muss dieses ebenfalls mit den in der Figur 16 mit Bogen bezeichneten Aussenwinkeln 1. 2. 10,

Fig. 16.



2. 10. 11, 10. 11. 8, 11. 8. 9 geschehen. Seien nun die geraden Linien 8. *k* und 1. *S* Parallelen zur Abstandsachse und seien die Geraden *f*. 1, *r*. 2. *q*, 10. *p*, 11. *n* zu 8. 9 und ihrer

Verlängerung 8. m parallel gezogen, so findet man den Sollbetrag der Winkelsumme des Binnenzuges vermittelst der Gleichung:

$$(2) + (10) + (11) + (8) = 4 \times 2R - \alpha_1 + \alpha_8.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung erhellt, sobald berücksichtigt ist, dass:

der Winkel $f.1.s = \sphericalangle k.8.9$ zufolge des Schnittes zweier Parallelpaare, der Winkel $s.1.2$ der Neigungswinkel der Strecke 1.2 also $= \alpha_1$ ist, die Summe der Winkel $f.1.s + s.1.2 + r.2.1 = 2R$, auch $f.1.s = 4R - \alpha_8$ ist. Man hat also:

$$\sphericalangle r.2.1 = 2R - \alpha_1 - 4R + \alpha_8 = -2R - \alpha_1 + \alpha_8.$$

Nun ist ferner $\sphericalangle r.2.q = 2R$

$$\begin{aligned} q.2.10 + 2.10.p &= 2R \\ p.10.11 + 10.11.n &= 2R \\ n.11.8 + 11.8.m &= 2R \\ m.8.9 \qquad &= 2R \end{aligned}$$

oder die 6 Gleichungen zusammengerechnet:

$$\underbrace{r.2.1 + r.2.q + q.2.10}_{\text{d. h.} \quad (2)} + \underbrace{2.10.p + p.10.11}_{(10)} + \underbrace{10.11.n + n.11.8}_{(11)} + \underbrace{11.8.m + m.8.9}_{(8)}$$

$$= 4 \times 2R - \alpha_1 + \alpha_8$$

oder wenn, wie früher, die Brechungswinkel mit b bezeichnet werden:

$$b_2 + b_{10} + b_{11} + b_8 = 4 \times 2R - \alpha_1 + \alpha_8.$$

Noch leichter kann man sich von der Richtigkeit dieser Gleichung überzeugen, wenn man von der im § 5 erwähnten bisher üblichen Ableitungsformel der Neigungswinkel ausgeht, wonach:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + b_n - 2R.$$

Nach ihr ist nämlich im vorstehenden Beispiel:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + b_2 - 2R \\ \alpha_{10} &= \alpha_2 + b_{10} - 2R \\ \alpha_{11} &= \alpha_{10} + b_{11} - 2R \\ \alpha_8 &= \alpha_{11} + b_8 - 2R \end{aligned}$$

zusammen $\alpha_8 = \alpha_1 + b_2 + b_{10} + b_{11} + b_8 - 4 \times 2R$

also $b_2 + b_{10} + b_{11} + b_8 = 4 \times 2R - \alpha_1 + \alpha_8$.

Diese Darstellung zeigt auch, dass diese Formel unbedenklich verallgemeinert werden kann. Gewöhnlich bezeichnet man die Summe einer Reihe gleichartiger Grössen, wie hier die Brechungswinkel b, mit dem Buchstaben Σ, ihre Anzahl mit n. Bezeichnet man nun ferner die Neigung der Anfangs-Anschlussstrecke mit α_a, die der Endstrecke mit α_e, so ist augenscheinlich:

$$\Sigma b = n \times 2R - \alpha_a + \alpha_e .$$

Bevor nun mit der Ableitung der Neigungswinkel in dem Binnenzuge vorgegangen wird, ist die Summe der gemessenen Brechungswinkel des Binnenzuges zu ziehen, mit dem unveränderlichen Sollbetrage derselben ($n \times 2R - \alpha_a + \alpha_e$) zu vergleichen und die Abweichung beider Beträge mit entgegengesetztem Zeichen auf sämmtliche Brechungswinkel zu gleichen Theilen zu vertheilen. Wird sodann das Ableitungsgeschäft mit α_a begonnen, so muss es am letzten Punkte des Zuges mit α_e endigen.

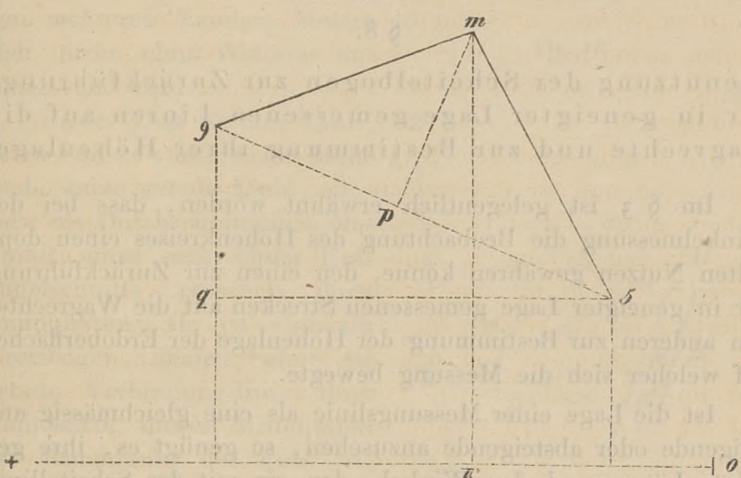
Mit den festgestellten Neigungswinkeln und den Streckenlängen sind nun die Unterschiede der Abstände und Abschnitte zu berechnen. Unter Beibehaltung der vorstehenden Bezeichnung für den Anfang (a) und das Ende (e) des Binnenzuges ist der Sollbetrag für die Summe der $\varDelta y = y_e - y_a$ und der Sollbetrag für die Summe der $\varDelta x = x_e - x_a$. Die Abweichungen dieser Summen von den Sollbeträgen sind endlich nach dem im § 6 beschriebenen Verfahren auf die einzelnen $\varDelta y$ und $\varDelta x$ zu vertheilen, endlich sind die Abstände y und die Abschnitte x von y_a bis y_e, von x_a bis x_e zu berechnen, wobei die Werthe für y_e und x_e, wie sie in der Berechnung des Umfangs-Vielecks festgestellt worden, wieder zum Vorschein kommen müssen.

Hat der Feldmesser bei der inneren Aufnahme kein Winkelwerkzeug zur Hand und gestattet die Beschaffenheit der zu vermessenden Flur das Durchlegen der vorhin beschriebenen Verbindungslinien nicht, so sucht er seine Messungslinien durch Längenmessungen in Zusammenhang zu bringen.

Gewohnlich nennen die Feldmesser dieses Verfahren »das Bestimmen mit Bogenschnitten«, indem sie daran denken, dass auf der Papierfläche von zwei ihrer Lage nach bekannten Punkten ein dritter Punkt, dessen Entfernungen von jenen beiden Punkten durch Messung bekannt geworden, durch die Bogenschnitte, welche aus den beiden Punkten mit den Halbmessern = jenen Entfernungen beschrieben würden, festgelegt werden könne. Die Absicht der gegenwärtigen Schrift schliesst aber ein solches Hülfsmittel aus und verlangt, dass der dritte Punkt in Zahlenmaassen durch Abstand und Abschnitt einer Haupt- oder Nebenachse bestimmt werde. Es liegt also die Aufgabe vor, mit Hülfe der Bestimmungsstücke der beiden gegebenen Punkte und der Entfernungen derselben von dem dritten Punkte dessen Abstand und Abschnitt zu ermitteln.

Seien z. B. 5 und 9 der Figur 17 zwar nicht unmittelbar auf einander folgende, aber durch Abschnitte x_5 und x_9 und Ab-

Fig. 17.



stände y_5 und y_9 gegen die Hauptachse des Umfangs-Vielecks gegeben, seien ferner die Entfernungen 9 nach m und 5 nach m zur Bestimmung des Punktes m gemessen, so wird das bequemste Rechnungsverfahren darin bestehen, zunächst das bei q rechtwinklige Dreieck 5. q. 9 aufzulösen, indem man setzt:

$$\text{Tang}\ \alpha_{5\cdot9} = \frac{y_9 - y_5}{x_9 - x_5} \quad \text{und} \quad S_{5\cdot9} = \frac{x_9 - x_5}{\cos \alpha_{5\cdot9}},$$

sodann erhält man die Entfernung des Fusspunkts der Senkrechten $m.\,p$ auf 5. 9 von dem Punkte 5 durch:

$$5 \cdot p = \frac{(5\cdot9)^2 + (5\cdot m)^2 - (9\cdot m)^2}{2(5\cdot9)}$$

$$\text{und}\quad m \cdot p = \sqrt{(m\,.\,5 + 5\cdot p)\,(m\,.\,5 - 5\cdot p)}\,.$$

Will man auch Abstand und Abschnitt für den Punkt m

auf der Hauptachse haben, so ist nur zu beachten, dass der Brechungswinkel bei p drei rechten Winkeln gleich ist und man in gewöhnlicher Weise zu rechnen hat:

$$y_m = y_5 + 5 \cdot p \text{ Sin } \alpha_{5 \cdot 9} + p . m \text{ Sin } (\alpha_{5 \cdot 9} + R)$$
$$x_m = x_5 + 5 \cdot p \text{ Cos } \alpha_{5 \cdot 9} + p . m \text{ Cos } (\alpha_{5 \cdot 9} + R)$$

Es ist nur zu bemerken, dass der quadratische Zähler in der obigen Formel für $5 . p$ am bequemsten mit der Crelle'schen Rechentafel gebildet wird, der übrige Theil der Rechnung mit Logarithmen auszuführen ist.

§ 8.

Benutzung der Scheitelbogen zur Zurückführung der in geneigter Lage gemessenen Linien auf die Wagrechte und zur Bestimmung ihrer Höhenlage.

Im § 3 ist gelegentlich erwähnt worden, dass bei der Winkelmessung die Beobachtung des Höhenkreises einen doppelten Nutzen gewähren könne, den einen zur Zurückführung der in geneigter Lage gemessenen Strecken auf die Wagrechte, den anderen zur Bestimmung der Höhenlage der Erdoberfläche, auf welcher sich die Messung bewegte.

Ist die Lage einer Messungslinie als eine gleichmässig ansteigende oder absteigende anzusehen, so genügt es, ihre geneigte Länge und den Winkel, den sie mit der Scheitellinie eines ihrer Endpunkte einschliesst, zu kennen, um sowohl ihren Belang auf der wagrechten Ebene als auch den Höhenunterschied ihrer beiden Endpunkte berechnen zu können.

Nennt man den Scheitelbogen $= d$, die geneigte Länge der Linie $= S'$, ihren wagrechten Belang $= S$, den Höhenunterschied ihrer beiden Endpunkte $= \varDelta h$, so findet man vermittelst der Formeln:

$S' \text{ Sin } d = S$ den wagrechten Belang,

$S' \text{ Cos } d = S \text{ Cot } d = \varDelta h$ den Höhenunterschied.

Wollte man sich statt des Scheitelbogens d des zugehörigen Höhenwinkels, der mit β bezeichnet sein mag, bedienen, so müsste man die Formeln:

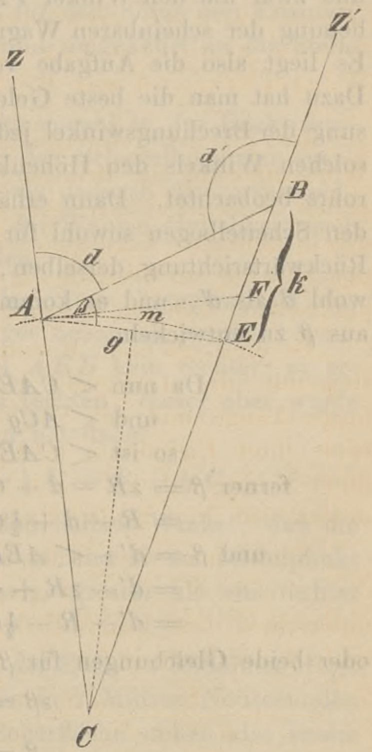
$S' \text{ Cos } \beta = S$ für den wagrechten Belang,

$S' \text{ Sin } \beta = S \text{ Tang } \beta = \varDelta h$ für den Höhenunterschied anwenden, wobei aber zu beachten wäre, ob der Winkel β das bejahende oder verneinende Zeichen führte.

Die Richtigkeit dieser Formeln leuchtet sofort ein, nachdem beachtet ist, dass geneigte Lage (S'), wagrechter Belang (S) und Höhenunterschied ($\varDelta h$) die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, in welchem der Seite des Höhenunterschiedes ($\varDelta h$) der Höhenwinkel (β) gegenübersteht.

Dabei ist indessen vorausgesetzt, dass die Wagrechte von einem Endpunkt der geneigten Linie bis zum Lothpunkt der anderen eine gerade Linie sei, was zwar bei geringen Streckenlängen unbedenklich angenommen werden könnte, bei Längen von mehreren hundert Metern aber nicht ohne Weiteres zulässig sein würde.

Fig. 18.



In der That ist eine Linie, deren Punkte von gleicher Höhe sind, keine gerade Linie, sondern die Durchschnittslinie (das Profil) eines senkrechten Erdkugelschnitts zwischen ihren Endpunkten; sie ist also ein Kreisbogen, dessen Sehne die gerade Verbindungslinie ihrer Endpunkte, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Erde ist, in welchem die Lothrichtungen ihrer Endpunkte zusammentreffen.

Zur Erläuterung bezeichne in der Figur 18 die gerade Linie AB eine auf der Erdoberfläche gegen die Wagrechte geneigt liegende Linie, C den Mittelpunkt der Erde, aus welchem der Bogen AmE beschrieben ist, innerhalb dessen also alle Punkte von gleicher Höhe sind. AF stehe senkrecht auf AC. Die Sehne des Bogens AmE sei in g halbirt, wonach die Verbindungslinie gC auch den Winkel bei C halbirt. Die Verlängerungen von CA und CB, nämlich ZA und $Z'B$, seien die Lothrichtungen der Punkte A und B. d sei der Scheitelbogen nach der Linie AB im Punkte A, d' der Scheitelbogen nach BA im Punkte B. Endlich sei β der Winkel BAE, welcher dem Höhenunterschiede $\varDelta h$ zwischen den Punkten A und B gegenübersteht. War nach der obigen Voraussetzung, dass die Lothrichtungen der Endpunkte der geneigten Linie als parallel anzunehmen seien, die Ergänzung des Scheitelbogens d zu einem rechten Winkel dem Höhenwinkel der geneigten Linie (β) gleich zu achten, so ist dieses in dem jetzt zu betrachtenden Falle nicht mehr zutreffend. Die Ergänzung ist hier der Winkel BAF, welcher kleiner ist wie der dem Höhenunterschied $BE = \varDelta h$ gegenüberstehende Winkel $BAE = \beta$ und zwar um den Winkel FAE, den man gewöhnlich die Erhebung der scheinbaren Wagrechten über die wirkliche nennt. Es liegt also die Aufgabe vor, den Winkel β zu ermitteln. Dazu hat man die beste Gelegenheit, wenn man bei der Messung der Brechungswinkel jedesmal auf beiden Schenkeln eines solchen Winkels den Höhenkreis in beiden Lagen des Fernrohrs beobachtet. Dann erhält man nämlich für jede Strecke den Scheitelbogen sowohl für die Vorwärtsrichtung als für die Rückwärtsrichtung derselben, also in vorstehender Figur sowohl d als d', und es kommt jetzt nur noch darauf an, daraus β zu entwickeln.

$$\begin{aligned}
\text{Da nun } \angle CAE &= \angle CEA \\
\text{und } \angle ACg &= \angle ECg = \tfrac{1}{2}C \\
\text{so ist } \angle CAE &= \angle CEA = R - \tfrac{1}{2}C \\
\text{ferner } \beta &= 2R - d - CAE = 2R - d - R + \tfrac{1}{2}C \\
&= R - d + \tfrac{1}{2}C \\
\text{und } \beta &= d' - \angle AEB = d' - (2R - \angle CEA) \\
&= d' - 2R + \angle CEA = d' - 2R + R - \tfrac{1}{2}C \\
&= d' - R - \tfrac{1}{2}C
\end{aligned}$$

oder beide Gleichungen für β zusammengerechnet:

$$2\beta = d' - d$$

$$\beta = \frac{d' - d}{2}.$$

Diese Formel ändert sich nicht, wenn ausser der Erhebung der scheinbaren Wagrechten über die wirkliche auch noch die Krümmung der Sehlinie von A nach B und von B nach A durch die Strahlenbrechung des Lichts beachtet wird.

Dieser zufolge sehen wir bekanntlich jeden Gegenstand um einen kleinen Winkel, der mit $\varDelta$ bezeichnet werden mag, höher über dem wirklichen Standpunkt des Gegenstandes; es wird also sowohl d als d' um die Grösse $\varDelta$ vermindert, d. h. d' geht in $d' - \varDelta$ und d in $d - \varDelta$, also $- d$ in $- d + \varDelta$ über und in vorstehender Formel hebt sich $- \varDelta$ gegen $+ \varDelta$ auf.

Ist d grösser als d', so wird der Werth $\frac{d' - d}{2}$ verneinend. Will man in der Rechnung verneinende Winkel vermeiden, so arbeite man auch hier nicht mit Höhenwinkeln, sondern mit den ihnen entsprechenden Scheitelbogen, indem man den Höhenwinkeln, welche durch die Formel $\frac{d' - d}{2}$ erhalten werden, einen rechten Winkel zusetzt und dann für den Sinus den Cosinus, für die Tangente die Cotangente und umgekehrt an die Stelle setzt.

Das Verfahren, für jede Strecke sowohl in der Rückwärtsrichtung als der Vorwärtsrichtung den Scheitelbogen zu messen, empfiehlt sich um so mehr, als dadurch die unvermeidlichen kleinen Beobachtungsfehler der Wahrscheinlichkeit nach gegen einander ausgeglichen werden.

Bei der Berechnung kann in Frage kommen, ob das Dreieck ABE als ein rechtwinkliges behandelt werden könne. Strenge genommen ist der Winkel AEB kein rechter; er ergänzt den Winkel CEA zu zwei rechten, dieser aber wurde vorhin $= R - \frac{1}{2} C$ gefunden; man hat daher

$$\sphericalangle AEB = 2 R - R + \tfrac{1}{2} C = R + \tfrac{1}{2} C.$$

Dieser Winkel ist also um den halben Winkel, den die beiden Lothrichtungen der Punkte A und B am Mittelpunkt der Erde mit einander einschliessen, grösser als ein rechter Winkel.

Bekanntlich ist ein Quadrant der Erde 10 Millionen Meter lang und ein Quadrant des Kreises in 1 Million Neusecunden eingetheilt. 10 Meter auf der Erdoberfläche stehen also einem Winkel von 1 Secunde am Erdmittelpunkte gegenüber.

Wäre nun eine Strecke 1000 Meter lang, so würden die vom Erdmittelpunkte nach ihren Endpunkten gezogenen geraden Linien einen Winkel von 100 Secunden einschliessen. Der Winkel C der vorstehenden Figur wäre also $= 100''$ und

$\frac{1}{2}C = 50''$. Die strenge Auflösung des Dreiecks ABE würde geschehen nach den Formeln

$$BE = \frac{AB \,.\, \text{Sin}\, A}{\text{Sin}\, E} \text{ und } AE = \frac{AB\, \text{Sin}\,(A+E)}{\text{Sin}\, E}$$

oder wenn, wie oben, S' die geneigte, S die wagrechte Länge der Strecke bezeichnet,

$$\varDelta h = \frac{S'\, \text{Sin}\, \beta}{\text{Sin}\,(R + \frac{1}{2}C)} = \frac{S'\, \text{Sin}\, \beta}{\text{Cos}\, \frac{1}{2}C} \text{ und } S = \frac{S'\, \text{Sin}\,(\beta + R + \frac{1}{2})\, C}{\text{Sin}\,(R + \frac{1}{2}C)}$$

$$\text{oder } S = \frac{S'\, \text{Cos}\,(\beta + \frac{1}{2}C)}{\text{Cos}\, \frac{1}{2}C}.$$

Nun weicht Cos $50''$ in der siebenten Decimalstelle der Einheit noch nicht um 1 für 1000 Meter, also noch nicht um ein Decimillimeter ab, er kann also für solche und kleinere Längen unbedenklich der Einheit gleich gesetzt werden. Ferner würde, wenn der Höhenwinkel der Strecke oder β bis zu 50 Grad betrüge, in welcher Steigung eine unmittelbare Längenmessung wohl nicht mehr möglich ist, der Cosinus für β durch den Hinzutritt von $50''$ sich nur um 0,0000555 ändern, mithin bei 1000 Metern das Ergebniss der Rechnung nur um $0{,}0555^m$, also noch nicht um ein Decimeter fehlerhaft werden, wenn jene 50 Secunden vernachlässigt würden. Das Dreieck ABE kann also als ein bei E rechtwinkliges behandelt werden. Demgemäss ziehen sich die obigen Formeln zusammen in:

$$\varDelta h = S' \,.\, \text{Sin}\, \beta \quad \text{und} \quad S = S'\ \text{Cos}\, \beta,$$

$$\text{oder } \varDelta h = S'\, \text{Cos}\left(R - \frac{d' - d}{2}\right) \text{ und } S = S'\, \text{Sin}\left(R - \frac{d' - d}{2}\right).$$

Hätte man S oder den wagrechten Belang der Strecke nicht auf trigonometrischem Wege, sondern nach § 2 durch Treppenmessen oder durch Anwendung des Abziehers oder Vorschiebers ermittelt, so fände man den Höhenunterschied:

$$\varDelta h = S \,.\, \text{Tang}\, \beta = S \,.\, \text{Cotang}\left(R - \frac{d' - d}{2}\right).$$

Sind sämmtliche Höhenunterschiede eines Zuges berechnet, so erfolgt die Zusammensetzung der Höhen über irgend einer wagrechten Fläche, welche entweder willkürlich angenommen oder, wie z. B. die Meeresfläche, zur allgemeinen Richtschnur gegeben ist und womit der Zug mittelbar oder unmittelbar in Verbindung gesetzt ist, nach demselben Verfahren, welches bei der Zusammensetzung der Abstände in der wagrechten Ebene anzuwenden ist. Hatten wir im § 6:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n,$$

so haben wir hier:

$$h_{n+1} = h_n + \Delta h_n.$$

Läuft der Zug wie bei dem geschlossenen Vieleck in sich zurück oder nach einem anderen mit der Anhaltsfläche ebenfalls in Verbindung gesetzten Punkte, so findet ebenso wie bei Abständen in der Ebene ein Prüfungsmittel gegen die berechneten Höhenunterschiede statt. Werden nämlich sämmtliche Höhenunterschiede des Zuges oder Vielecks summirt, so muss die Summe, wie bei einem Binnenzuge (§ 7) dem Höhenunterschiede zwischen dem Anfangs- und Endpunkte gleichkommen oder im geschlossenen Vieleck müssen die $+\Delta h$ dieselbe Summe ergeben wie die $-\Delta h$. Die hervortretenden Abweichungen sind übrigens hier nicht im Verhältniss der Höhenunterschiede, sondern in dem Verhältniss der diesen zum Grunde liegenden wagrechten Streckenlängen zu vertheilen, weil offenbar der Einfluss des unvermeidlichen Fehlers mit der Entfernung des Zieles, also mit der Länge der Strecke wächst.

Werden auch für das Innere gebirgiger Fluren Höhenangaben ohne Anspruch auf grosse Genauigkeit verlangt, so kann der Feldmesser, welcher mit der Messkette und dem Vorschieber arbeitet, diesem Verlangen auf sehr bequeme Weise entsprechen. Er braucht nur jeder geneigt liegenden Kettenlänge den abgelesenen Vorschub zu notiren, um dann mit Hülfe der Tafel II, die er auch immer bei sich führen kann, den Höhenunterschied zu entnehmen.

Der wagrechte Belang zwischen der Anfangsstelle des hinteren Kettenendes und dem vorgeschobenen Endpunkt ist nämlich 20 Meter und in der Tafel II ist für jeden Vorschub die Länge der Tangente des zugehörigen Höhenwinkels angegeben. Hatten wir nun oben für den Höhenunterschied Δh den Ausdruck: $\Delta h = S \times \text{Tang}\,\beta$, wo S die wagrechte Länge, β den Höhenwinkel bezeichnete, so haben wir hier:

$$\Delta h = 20 \times \text{Tang}\,\beta.$$

Man braucht also die einem abgelesenen Vorschub entsprechende Tangente nur doppelt zu nehmen und das die ganzen Zahlen abschneidende Komma um eine Stelle weiter rechts zu setzen, so erhält man die Höhenunterschiede der Kettenlängen, welche zur Herstellung der Höhen ebenso zu behandeln sind, wie die aus der trigonometrischen Berechnung hervorgegangenen Δh, wobei nur zu berücksichtigen ist, dass beim Aufwärtsmessen $+\Delta h$, beim Abwärtsmessen $-\Delta h$ genommen werden müssen.

Hätte man z. B. auf dem Ketten-Vorschieber den Vorschub 1,1 abgelesen, so würde $\Delta h = 20 \times 0{,}3358 = 6{,}716$ Meter sein.

Würde dieses Verfahren bei der Messung aller Verbindungslinien der Flur beobachtet, so würde man nahezu ein vollständiges Höhennetz ihrer Oberfläche erhalten.

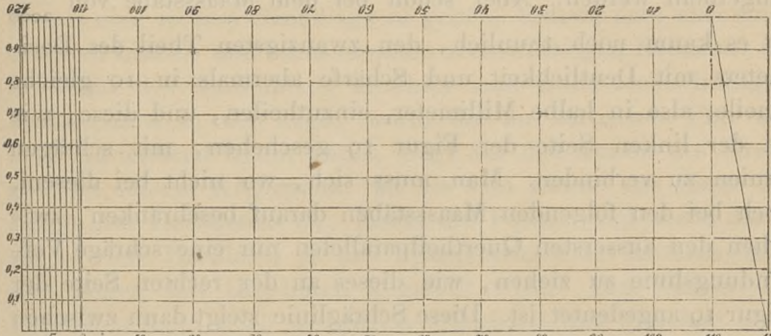
§ 9.

Kartirung gemessener Fluren.

Ist die vollständige Aufnahme einer Flur erfolgt, so liegt die Aufgabe vor, ein verkleinertes, naturgetreues Bild von ihr auf der Fläche des Knotenpapiers zu entwerfen. Dabei kommt es zunächst auf das Verhältniss der Verkleinerung an, auf das Verhältniss nämlich, in welchem eine bestimmte Länge des Feldes zu der ihr entsprechenden Länge auf dem Papier stehen soll. Man nennt dieses Verhältniss gewöhnlich das Verjüngungsverhältniss und den ihm angepassten Maasstab den verjüngten Maassstab. Wäre z. B. eine Linie im Felde 1 Hektometer oder 100 Meter lang und sollte dieselbe auf dem Papier die Länge eines Decimeters $= 0{,}1$ Meter einnehmen, so würde man sagen: die Karte soll im Maassstabe von $\frac{0{,}1}{100} = \frac{1}{1000}$ oder im tausendtheiligen Maassstab aufgetragen werden. Entspricht so $\frac{1}{10}$ Meter auf der Karte 100 Metern im Felde, so besagt der zehnte Theil dieser Papierlänge 10 Meter im Felde, der zehnte Theil letzterer Länge 1 Meter im Felde. Um also ganze Meter des Feldes auf dem Papier verjüngt wieder zu geben, hat man nur nöthig, die Länge eines Decimeters zunächst in zehn gleiche Theile, also in Centimeter und dann jeden dieser Theile abermals in zehn gleiche Theile, also in Millimeter einzutheilen, jeder der letzteren entspricht dann einem Meter im Felde. Um demnächst noch kleinere Theile verjüngt auftragen zu können, errichtet man in den Endpunkten und den Zehntheilpunkten der 1 Decimeter langen Linie Senkrechte, überträgt auf denselben zehn beliebig lange, aber unter einander gleiche Theile, verbindet sie mit geraden Linien, welche zufolge dieser Gleichheit parallel laufen. Endlich verbindet man jeden Theilpunkt der Millimeter auf der ersten Parallellinie mit dem nächstfolgenden Theilpunkt auf der letzten Parallellinie. Vermöge der Aehnlichkeit der durch diese gegen die Senkrechten schräg liegenden Linien entstehenden Dreiecke steigen diese Linien zwischen zwei nächsten Parallelen gegen die Senkrechten um ein Zehntheil. Entsprach nun ein Millimeter auf dem Maassstabe einem Meter im Felde, so folgt, dass jenes Ansteigen zwischen zwei nächsten Parallelen ein Zehntelmeter Feldlänge besagt.

Der Vollständigkeit wegen ist diese Einrichtung eines Maassstabes in der freilich sehr bekannten Figur 19 dargestellt; sein Gebrauch mit Hülfe des Zirkels ist als bekannt vorauszusetzen.

Fig. 19.



Die Wahl des Maassstab-Verhältnisses ist bedingt durch die auf der Karte darzustellenden Gegenstände. Liegen diese einander sehr nahe, so muss der das Verhältniss ausdrückende Bruch grösser sein, als wenn der umgekehrte Fall stattfindet. Je näher nämlich die Gegenstände neben einander liegen, desto mehr ist die Deutlichkeit der Darstellung gefährdet, desto mehr wird auch die Genauigkeit der Zeichnung durch die Ausdehnung der Punktstiche und der Linienstriche verringert. Städte und sehr zerstückelte Ländereien müssen mindestens im Maassstabe von $\frac{1}{1000}$ aufgetragen werden, erfordern aber auch mitunter einen noch grösseren Maassstab, etwa den von $\frac{1}{500}$. Ländereien, in denen die Grundstücke durchschnittlich nahe 1 Hektar gross sind, können im Maassstabe von $\frac{1}{2000}$ oder $\frac{1}{2500}$, grössere Besitzungen, insbesondere ungetheilte Waldungen, in dem von $\frac{1}{5000}$ gezeichnet werden.

Zur Herstellung dieser Maassstäbe muss das Decimeter auf der ersten Parallele, insbesondere bei dem Maassstabe

von $\frac{1}{500}$ in 5 gleiche Theile
» $\frac{1}{1000}$ » 10 » »
» $\frac{1}{2000}$ » 20 » »
» $\frac{1}{2500}$ » 25 » »
» $\frac{1}{5000}$ » 50 » »

eingetheilt werden. Aber schon bei dem Maassstabe von $\frac{1}{2000}$ ist es kaum noch thunlich, den zwanzigsten Theil des Decimeters mit Deutlichkeit und Schärfe abermals in 10 gleiche Theile, also in halbe Millimeter, einzutheilen, und diese, wie an der linken Seite der Figur 19 geschehen, mit schrägen Linien zu verbinden. Man muss sich, wo nicht bei diesem, doch bei den folgenden Maassstäben darauf beschränken, zwischen den äussersten Quertheilparallelen nur eine schräge Verbindungslinie zu ziehen, wie dieses an der rechten Seite der Figur 19 angedeutet ist. Diese Schräglinie steigt dann zwischen je zwei nächsten Längsparallelen um ein volles Meter des Feldes, aber ein geschickter Zeichner kann zwischen denselben, wenigstens bei den Maassstäben von $\frac{1}{2000}$ und $\frac{1}{2500}$, noch mit Sicherheit auf $\frac{1}{3}$ Meter, bei dem Maasstabe von $\frac{1}{5000}$ auf $\frac{1}{2}$ Meter schätzen. Der Maasstab von $\frac{1}{5000}$ kann übrigens auch, wie der von $\frac{1}{1000}$ in Figur 19, bequem so eingerichtet werden, dass ein Decimeter zunächst nicht in 50, sondern nur in 5 Theile eingetheilt und mit dem äussersten dieser Theile ebenso verfahren wird, wie mit dem linksseitigen äussersten Theile der Figur 19, nämlich an beiden Seiten in zehn Theile zerlegt, endlich die Theilungspunkte mit 10 schrägen Linien verbunden werden.

Die erstere Theilung geht dann von 100 zu 200 u. s. w. Meter, die zweite von 10 zu 20 u. s. w. Meter, die schrägen Linien steigen von 1 zu 2 u. s. w. Meter. Der Maassstab stimmt dann in der Figur genau mit dem von $\frac{1}{500}$ überein, nur geben seine Theile zehnmal grössere Feldlänge an.

Ist der Maassstab für die Karte gewählt, so beginnt die Zeichnung derselben mit dem Auftragen des Umfangs-Vielecks nach den berechneten Abständen und Abschnitten seiner Brechpunkte. Es würde aber nicht nur mühsamer, sondern auch weniger zuverlässig sein, wenn man jeden Abschnitt auf der Achse absetzen, dann in seinem Endpunkt eine senkrechte Linie errichten und auf dieser die Länge des Abstandes auftragen wollte. Zur Erleichterung und Sicherstellung der Arbeit ist es rathsam, zuvor das ganze Kartenblatt mit einem Quadratnetz zu überziehen, dessen Seiten für alle Maassstäbe die bequeme Länge eines Decimeters haben können. Um der Verzeichnung eines solchen Netzes eine sichere Grundlage zu geben, bedient man sich eines eisernen Lineals und eines eisernen rechtwinkligen Dreiecks. In der Mitte des Kartenblatts errichtet man einen rechtwinkligen Kreuzschnitt in der Lage, worin die zu kartirende Flur auf dem Kartenblatt Raum findet, trägt auf den Armen des Kreuzes von seinem Kreuzpunkt an bis zum Rande des Blatts die Länge des Decimeters ab, merkt die Punkte und zieht durch sie so viele Parallelen zu den beiden Armen des Kreuzes, dass der Bogen mit Quadraten angefüllt wird. Das Ziehen der Parallelen kann noch wesentlich erleichtert und gesichert werden, wenn man um einige Decimeter vom ersten Kreuzschnitt nach vorwärts und rückwärts, nach unten und oben, also vier neue Kreuzschnitte, deren Arme mit dem ersten beziehungsweise parallel laufen, errichtet und auf den Armen sämmtlicher Kreuzschnitte Decimeter absetzt. Die von den Armen des ersten Kreuzschnitts gleichweit abstehenden drei Punkte dieser Netzgrundlage müssen in einer geraden Linie liegen, gewähren also ein gegenseitiges Prüfungsmittel. Die durch sie bis zum Rande des Blatts gezogene Bleilinie muss parallel zu den bezüglichen

Armen des ersten Kreuzschnitts ausfallen. Nach Vollendung aller Parallelen wird das Kartenblatt so viele Kreuzpunkte enthalten, als Längsparallelen mit Querparallelen sich geschnitten haben. Dieselben sind mit kleinen, den Punkt selbst frei lassenden Kreuzen in Carmin zu bezeichnen.

Welche Meterzahl des Feldes einer Quadratseite von 1 Decimeter auf der Karte entspricht, hängt von dem Maassstabe ab, worin die Karte aufgetragen werden soll. Bei dem Maassstab

von	$\frac{1}{500}$	enthält	ein	Decimeter	50	Feldmeter
»	$\frac{1}{1000}$	»	»	»	100	»
»	$\frac{1}{2000}$	»	»	»	200	»
»	$\frac{1}{2500}$	»	»	»	250	»
»	$\frac{1}{5000}$	»	»	»	500	»

Ist die Wahl des Maassstabes getroffen, so lassen sich die Raumverhältnisse des Kartenblatts übersehen und man kann beurtheilen, ob der Nullpunkt der Abstandsachse des Umfangs-Vielecks innerhalb des Blattes liegen kann, um die ganze Zeichnung auf demselben ausführen zu können, oder um wie viele jener Quadratseiten von einem auf dem Blatte befindlichen Kreuzpunkt derselbe nach rückwärts oder vorwärts, nach unten oder oben, ausserhalb des Blatts angenommen werden muss, um jenem Kreuzpunkt zu demselben Zwecke die richtige Abstands- und Abschnittszahl beizulegen.

Ist dieser Kreuzpunkt ermittelt, so sind die Abschnitte und Abstände sämmtlicher auf dem Blatte befindlichen Kreuzpunkte bestimmt und könnten beigeschrieben werden, wenn es nicht zweckmässiger wäre, die betreffenden Maasszahlen nur an den Rand des Kartenblatts, dahin nämlich, wo die Quadratlinien denselben schneiden, zu setzen, um im Inneren des Blatts den Raum für die Zeichnung frei zu lassen. Die den Maasszahlen entsprechenden Kreuzpunkte finden sich überall da, wo die auf gleich hohe Randzahlen für die Parallelen zur Achse und ihrer Senkrechten gezogenen Linien einander schneiden.

Ist auf diese Art das Quadratnetz vorbereitet, so ist es sehr leicht, die Brechpunkte des Umfangsvielecks darin gehörigen Orts einzutragen.

Zunächst sieht man an den einander gegenüberstehenden gleichen Randzahlen der Parallelen zur Achse und zur Senkrechten derselben, innerhalb welches Quadrats ein Brechpunkt vermöge seines Abschnitts und seines Abstandes zu liegen kommt. Es sind dann nur noch die Ueberschüsse dieser Maasse über den Abschnitt und Abstand des zunächst liegenden Kreuzpunkts auf beiden Paaren Gegenseiten des Quadrats von dem Maassstabe abzugreifen und abzusetzen, endlich die dadurch entstehenden vier Punkte, je zwei und zwei, den Quadratseiten parallel, mit geraden Bleilinien zu verbinden. Wo diese sich schneiden, liegt der gesuchte Punkt.

Ist der nächste Brechpunkt des Vielecks ebenfalls aufgetragen, so muss die mit dem Maassstabe abzugreifende Entfernung vom ersteren Punkte der Streckenlänge gleichkommen, welche der Berechnung der Abschnitts- und Abstandsunterschiede dieser Strecke zum Grunde gelegt worden ist.

Für sämmtliche Streckenlängen ergibt sich sonach, wie für die ganze Verzeichnung des Vielecks ein strenges Prüfungsmittel.

Die Brechpunkte werden gewöhnlich in rother Tusche mit kleinen Kreisen umgeben, die Strecken bis zur Vollendung des Auftragens sämmtlicher Messungslinien mit Bleilinien ausgezogen.

Die nächste Arbeit hat nun die Verzeichnung der bei der zweiten Streckenmessung (§ 2) geschehenen Aufnahme der seitlich belegenen Punkte und Grenzlinien, wodurch der äussere Rand der Flur bestimmt wurde, zum Gegenstande. Auf jeder Strecke werden der Reihe nach alle auf derselben abgemessenen Abschnitte aufgetragen und sodann mit Hülfe kleiner rechtwinkliger Dreiecke von dichtem Holze die ihnen entsprechenden Abstände errichtet. Wo solche Grenzlinien bestimmen, sind die betreffenden Endpunkte mit schwarzen Tuschlinien zu verbinden. Bei jenem Auftragen der Abschnittsmaasse werden auch diejenigen Punkte abgesetzt, welche Endpunkte der in die Strecken einfallenden Verbindungslinien (§ 7) sind. Ist dieses geschehen, so können die Verbindungslinien erster Ordnung sogleich in Blei ausgezogen und ihre Längen auf der Karte mit Hülfe des Maassstabes nachgemessen werden. Dieselben müssen mit den im Felde gemessenen Längen innerhalb einer Fehlergrenze übereinstimmen, welche in obrigkeitlichen Vorschriften gewöhnlich auf ein $\frac{1}{300}$ der ganzen Länge festgesetzt wird. Sollte sich dabei ein grösserer Fehler zeigen, so muss derselbe durch Nachmessung im Felde untersucht und berichtigt werden, wobei zu beachten ist, dass derselbe ebensowohl in der Messung der Verbindungslinie selbst, als in der der Entfernung eines ihrer Endpunkte von dem Brechpunkte der Strecke, in welche sie einfällt, seinen Grund haben kann. Abweichungen, welche die Fehlergrenze nicht übersteigen, sind dadurch zu vertheilen, dass der Ueberschuss über das letzte Hektometer bis zur ganzen Linie am Ende derselben rückwärts aufgetragen und die Entfernung des damit abgesetzten Punktes vom Anfangspunkte der Linie in so viel gleiche Theile eingetheilt wird, als dieselbe volle Hektometer enthält. Die Theilpunkte sind sodann für den Raum zwischen je zwei nächsten von ihnen bei allen Abmessungen zum Anhalte zu nehmen.

Nunmehr werden die Abschnitte und Abstände der Verbindungslinien erster Ordnung in gleicher Art wie die der Strecken aufgetragen und behandelt. Es ergeben sich dadurch auch die Endpunkte der in sie einfallenden Verbindungslinien zweiter und dritter Ordnung, und nachdem alle in gleicher Art wie die der ersten Ordnung geprüft und mit ihren Einzelnheiten aufgetragen, insbesondere die von ihnen bestimmten Grenzen der Eigenthums- oder Benutzungsstücke in schwarzen Tuschlinien ausgezogen, Grenzsteine und andere Grenzmale mit kleinen Vierecken oder Kreisen um die betreffenden Punkte bezeichnet sind, ist die Karte im Wesentlichen vollendet und fehlt nur noch die lediglich zeichnerische Ausführung.

Die Nummern der Brechpunkte werden übereinstimmend mit dem Winkelbuch und der Standortsberechnung neben dieselben gesetzt, und zwar mit rother Tusche, die der Eigenthums- und Benutzungsstücke mit schwarzer Tusche in die Stücke eingeschrieben. Letztere Nummern beginnen in irgend einem Stück einer Flur mit 1 und laufen in den Nachbarstücken bei möglichster Vermeidung von Sprüngen bis ans Ende der Flur fort, wobei jedoch darauf zu achten ist, dass, wenn in der Flur Unterabtheilungen (Gewannen, Districte u. s. w.) vorkommen, die Nummerirung jede derselben vollständig durchlaufen haben muss, bevor in die nächste Abtheilung übergegangen werden darf.

Auf jeder Karte muss der Gesammtname der Flur, sowie die Zeit ihrer Vermessung und der Name des Feldmessers angegeben sein. Auch ist der Maassstab entweder in ausführlicher Zeichnung oder wenigstens das Maassstabsverhältniss zum Felde im Zahlenausdruck beizufügen. Die Richtung der Nordlinie gegen die Flur ist mit einem Pfeil anzudeuten. Ob und wie die Benutzungsarten des Bodens durch Farbenanlegung zu unterscheiden, Abtheilungen, Wege und Gewässer und andere bemerkenswerthe Gegenstände durch Farben oder Schrift kenntlich zu machen sind, ist nach dem Zwecke, dem die Karte vorzugsweise dienen soll, einzurichten.

§ 10.

Berechnung der Flächeninhalte.

Die Berechnung der Achsen-Abstände und Abschnitte des Umfangs-Vielecks (§ 6) und die zweite Messung der Strecken mit ihren seitlichen Bestimmungen (§ 2) setzt den Feldmesser in den Stand, die Gesammtfläche der Flur aus den erhobenen Zahlenmaassen zu berechnen, also unabhängig von den Fehlern, welche durch die Dehnbarkeit des Papiers, durch die Ungenauigkeit der Zeichnung und durch die Mängel der zur Flächenberechnung eingerichteten Werkzeuge entstehen.

Das gewöhnliche Verfahren, aus rechtwinkligen Abständen die Fläche der durch sie bestimmten Vielecke zu berechnen, besteht darin, nach einander die Parallel-Trapeze zu behandeln, welche gebildet werden aus den Abständen zweier auf einander folgender Brechpunkte, aus dem Abschnitts-Unterschied derselben und der sie verbindenden Strecke. Jedes dieser Parallel-Vierecke hat zum Flächeninhalt das Malfache aus der halben Summe der beiden Abstände und dem Abschnitts-Unterschied.

Diese Malfachen sind aber bald bejahend, bald verneinend zu nehmen, wenn man sich lediglich auf eine Betrachtung der Figur verlassen will, demnächst mit Berücksichtigung der entsprechenden Zeichen in eine Summe zusammen zu ziehen.

So hätte man z. B. in der Figur 13 zu berechnen:

$$+\left(\frac{y_{12}+y_{13}}{2}\right)(x_{12}-x_{13})+\left(\frac{y_{11}+y_{12}}{2}\right)(x_{11}-x_{12})+\left(\frac{y_{15}+y_{11}}{2}\right)(x_{15}-x_{11})$$
$$-\left(\frac{y_{14}+y_{13}}{2}\right)(x_{14}-x_{13})-\left(\frac{y_{15}+y_{14}}{2}\right)(x_{15}-x_{14})\,.$$

Würden nun die bejahenden Glieder zusammengerechnet und von ihrer Summe die Summe der verneinenden abgezogen, so erhielte man augenscheinlich die Fläche des Vielecks, die mit F bezeichnet werden mag. Da sämmtliche Glieder der Berechnung mit 2 getheilt sind, so lässt sich ihr Ausdruck vereinfachen, wenn man diesen für die doppelte Fläche einrichtet. Man hat dann

$$2F = (y_{12} + y_{13})(x_{12} - x_{13}) + (y_{11} + y_{12})(x_{11} - x_{12}) + (y_{15} + y_{11})(x_{15} - x_{11}) - (y_{14} + y_{13})(x_{14} - x_{13}) - (y_{15} + y_{14})(x_{15} - x_{14})$$

Führt man die in diesem Ausdruck angedeuteten Malnahmen aus, so erhält man:

$$2F = \begin{cases} + y_{12}x_{12} - y_{12}x_{13} + y_{13}x_{12} - y_{13}x_{13} \\ + y_{11}x_{11} - y_{11}x_{12} + y_{12}x_{11} - y_{12}x_{12} \\ + y_{15}x_{15} - y_{15}x_{11} + y_{11}x_{15} - y_{11}x_{11} \\ - y_{14}x_{14} + y_{14}x_{13} - y_{13}x_{14} + y_{13}x_{13} \\ - {}_{15}x_{15} + y_{15}x_{14} - y_{14}x_{15} + y_{14}x_{14} \end{cases}$$

Augenscheinlich heben sich die fünf linksseitigen Glieder gegen die fünf rechtsseitigen auf und es bleiben nur die zehn mittleren übrig. Da aber jeder Abstands- und jeder Abschnittswerth in zwei Gliedern vorkommt, so können die zehn Glieder in fünf zusammengezogen werden. Setzt man diese in die Reihenfolge der Standortsberechnung (§ 6), nämlich von 11 nach 15, so erhält man:

$$2F = y_{11}(x_{15} - x_{12}) + y_{12}(x_{11} - x_{13}) + y_{13}(x_{12} - x_{14}) + y_{14}(x_{13} - x_{15}) + y_{15}(x_{14} - x_{11})$$

oder auch:

$$2F = x_{11}(y_{12} - y_{15}) + x_{12}(y_{13} - y_{11}) + x_{13}(y_{14} - y_{12}) + x_{14}(y_{15} - y_{13}) + x_{15}(y_{11} - y_{14})$$

Innerhalb der Klammern stehen die Werthe beider Ausdrücke in umgekehrter Reihenfolge; es ist aber leicht, sie in dieser Rücksicht auszugleichen. Es ist nämlich augenscheinlich:

$$-2F = y_{11}(x_{12} - x_{15}) + y_{12}(x_{13} - x_{11}) + y_{13}(x_{14} - x_{12}) + y_{14}(x_{15} - x_{13}) + y_{15}(x_{11} - x_{14})$$

Man erhält also den doppelten Flächeninhalt eines Vielecks zweimal, wenn man

das einemal

jeden Abstand mit dem Unterschiede zwischen den Abschnitten des folgenden und des vorhergehenden Brechpunktes malnimmt,

das anderemal

jeden Abschnitt mit dem Unterschiede zwischen den Abständen des nächst folgenden und des nächst vorhergehenden Brechpunktes malnimmt.

Die Ausführung beider Arbeiten ist das sicherste Schutzmittel gegen Rechnungsfehler. Aber auch schon während der Arbeit liegt ein schätzbares Sicherungsmittel darin, dass die Summen der in Klammern eingeschlossenen Werthe = o sein müssen, da augenscheinlich:

$$x_{15} - x_{12} + x_{11} - x_{13} + x_{12} - x_{14} + x_{13} - x_{15} + x_{14} - x_{11} = 0$$
$$y_{12} - y_{15} + y_{13} - y_{11} + y_{14} - y_{12} + y_{15} - y_{13} + y_{11} - y_{14} = 0$$

Wünscht man das Rechnungsverfahren in allgemeinen Zeichen ausgedrückt zu sehen, worin $n-1$, n, $n+1$ die Nummern dreier auf einander folgender Brechpunkte sein mögen und das Zeichen Σ die Summirung der Zahlen–Ergebnisse sämmtlicher Rechnungsglieder verlange, so erhält man, wenn die Standortsberechnung sonnenläufig geführt wurde:

$$F_n = \tfrac{1}{2} \Sigma y_n (x_{n-1} - x_{n+1})$$

oder

$$F_n = \tfrac{1}{2} \Sigma x_n (y_{n+1} - y_{n-1}) \cdot$$

Ist die Standortsberechnung nicht sonnenläufig geführt, so ändern sich nur die Zeichen von F, während die Zahlenwerthe dieselben bleiben. Es kann aus jener Veränderung bei einiger Aufmerksamkeit kein Missverständniss erwachsen.

Beispielsweise werde der Flächeninhalt des Vielecks der Figur 13 nach der ihr nachgesetzten Standortsberechnung doppelt berechnet:

Brechpunkte	y_n	x_n	$x_{n-1} - x_{n+1}$	$y_{n+1} - x_{n-1}$	$y_n (x_{n-1} - x_{n+1})$	$x_n (y_{n+1} - y_{n-1})$
11	+ 761,30	— 145,10	+ 598,87	+ 272,96	+ 455919	— 39606
12	+ 788,58	— 533,70	+ 506,63	— 511,79	+ 399518	+ 273141
13	+ 249,51	— 651,73	— 356,41	— 635,37	— 88927	+ 414089
14	+ 153,21	— 177,29	— 716,90	+ 266,11	— 109837	— 47178
15	+ 515,62	+ 65,17	— 32,19	+ 608,09	— 16598	+ 39629
			+ 1105,50	+ 1147,16	+ 855437	+ 726859
			— 1105,50	— 1147,16	— 215362	— 86784
			o	o	+ 640075	+ 640075
				F =	+ 320037	+ 320037

Es genügt bei solchen Berechnungen, die Flächen nur in vollen Quadratmetern anzugeben.

Dem Rechnungs-Schema für die Standortsberechnung (§ 6) könnten füglich 4 Spalten

für $(x_{n-1} - x_{n+1})$, $(y_{n+1} - y_{n-1})$, $y_n\,(x_{n-1} - x_{n+1})$, $x_n\,(y_{n+1} - y_{n-1})$ zugesetzt werden, um darin die Fläche des Vielecks doppelt berechnen zu können, wodurch das abermalige Niederschreiben der Abstände und Abschnitte in einem besonderen Flächenberechnungsformular erspart würde.

Ist der Flächeninhalt des Umfangs- oder Grund-Vielecks berechnet, so erübrigt zur Ermittelung des Gesammtinhalts der Flur noch die Berechnung der zwischen den Strecken jenes Vielecks und der eigentlichen Aussengrenze der Flur enthaltenen Flächenstreifen, deren Figuren durch die im § 2 beschriebene zweite Messung der Streckenlängen durch Abstände und Abschnitte der als besondere Achsen behandelten Strecken bestimmt worden sind. Bei dieser Berechnung hat man sich zur Regel zu machen, die von den Strecken nach Aussen des Grundvielecks abgehenden, also im Sinne einer Erweiterung der Flur liegenden Abstände als bejahend anzusehen und mit dem Zeichen $+$ zu belegen, die Abschnitte auf den Strecken in der Richtung wie diese gemessen sind, ebenso zu behandeln.

Um bei der Berechnung sicher zu gehen, thut man wohl, bei der Arbeit dasselbe Verfahren zu beobachten, welches bei der Flächenberechnung des Grundvielecks angewendet wurde, nämlich die Rechnung zweimal mit verschiedenen Zahlen auszuführen und während und am Schlusse derselben die vorhin erwähnten Sicherungsmittel anzuwenden. Man kann dabei nicht irren, wenn man die über oder unter oder theilweise über und unter einer Strecke liegende Fläche als ein Vieleck ansieht, dessen Achse zugleich eine Strecke desselben ist, und dass jeder Brechpunkt dieses Vielecks selbst dann in der Aufstellung der Berechnung seinen Platz finden muss, wenn sein Abschnitt oder sein Abstand $= 0$ sein sollte.

Die Flächenberechnung der Streifen über den Strecken von 6 nach 7 und von 7 nach 8 in der Figur 14 wird diese Rathschläge deutlich machen.

Punkt	y	x	$x_{n+1}-x_{n-1}$	$y_{n-1}-y_{n+1}$	$y_n\,(x_{n+1}-x_{n-1})$	$x_n\,(y_{n-1}-y_{n+1})$
(5)						
6	0	0	− 80,0	− 6,5	0	0
(1)	6,5	19,0	+ 42,2	− 6,4	+ 274,30	− 121,60
(2)	6,4	42,2	+ 45,3	− 0,1	+ 289,92	− 4,22
(3)	6,6	64,3	+ 40,6	+ 1,1	+ 267,96	+ 70,73
(4)	5,3	82,8	+ 34,7	+ 6,6	+ 183,91	+ 546,48
(5)	0	99,0	− 82,8	+ 5,3	0	+ 524,70
6						
			+ 162,8	+ 13,0	+ 1016,09	+ 1141,91
			− 162,8	+ 13,0		− 125,82
			0	0		+ 1016,09
				F =	+ 508,04	+ 508,04
8						
7	0	0	− 144,9	+ 4,0	0	0
(6)	− 4,0	+ 0,3	+ 11,3	0	− 45,20	0
(7)	0	+ 11,3	+ 44,7	− 13,8	0	− 155,94
(8)	+ 9,8	+ 45,0	+ 52,2	− 12,6	+ 511,56	− 567,00
(9)	+ 12,6	+ 63,5	+ 55,0	− 0,7	+ 693,00	− 44,45
(10)	+ 10,5	+ 100,0	+ 72,1	+ 12,6	+ 757,05	+ 1260,00
(11)	0	+ 135,6	+ 45,2	+ 15,1	0	+ 2047,56
(12)	− 4,6	+ 145,2	+ 9,6	0	− 44,16	0
8	0	+ 145,2	− 145,2	− 4,6	0	− 667,92
7						
			+ 290,1	+ 31,7	+ 1961,61	+ 3307,56
			− 290,1	− 31,7	− 89,36	− 1435,31
			0	0	+ 1872,25	+ 1872,25
				F =	+ 936,12	+ 936,12

Bemerkungen: Nur die nicht eingeklammerten Nummern 6, 7 u. 8 gehören zu Brechpunkten des Grundvielecks.

Die ausserhalb der Striche in der Nummerspalte gesetzten Nummern (5), 6, 8, 7 sollen nur die bei der Bildung der $x_{n+1}-x_{n-1}$ und $y_{n-1}-y_{n+1}$ zu beobachtende Reihenfolge anzeigen.

Die Zeichen der obigen allgemeinen Formeln für F mussten für $x_{n-1}-x_{n+1}$ u. $y_{n+1}-y_{n-1}$ verwechselt werden, um bejahende F zu erhalten, weil hier die linksseitigen Abstände bejahend gesetzt werden mussten.

Sind die Flächenstreifen an sämmtlichen Strecken berechnet und ist ihre Summe der Fläche des Grundvielecks zugesetzt, so ist die Gesammtfläche der Flur mit der Genauigkeit der im Felde abgelesenen Maasszahlen gefunden. Ist nun das Grundeigenthum oder die Benutzungsart im Inneren der Flur getheilt, so liegt schliesslich die Aufgabe vor, die Flächen sämmtlicher Grundstücke einzeln zu berechnen.

Bei der Flächenberechnung einzelner Grundstücke sind mehrere Verfahrungsarten üblich, welche sich im Wesentlichen darin unterscheiden, dass sie entweder lediglich die Feldmaasszahlen zur Grundlage nehmen, oder diese und von der Karte nach deren Maassstabe abgegriffene Maasse benutzen, oder endlich nur die Karte zur Hülfe nehmen. Es verlohnt sich jede für sich zu betrachten.

a. Flächenberechnung aus Feldmaasszahlen.

Sind einzelne Grundstücke bei der Vermessung ihrem ganzen Umfange nach gegen eine Verbindungslinie mittelst Abschnitte und Abstände bestimmt, so findet man im Allgemeinen die Flächen derselben bei Anwendung einer der oben angegebenen Formeln:

$$F_n = \tfrac{1}{2} \Sigma y_n (x_{n-1} - x_{n+1})$$

oder

$$F_n = \tfrac{1}{2} \Sigma x_n (y_{n+1} - y_{n-1}) \,.$$

Diese lassen sich aber in besonderen Fällen etwas abkürzen.

Wäre z. B. das Grundstück durch ein Dreieck begrenzt, so würde die erstere Formel bei unveränderter Anwendung drei Glieder erhalten, nämlich:

$$F_3 = \tfrac{1}{2}[y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_1)] \text{ *)}$$

ebenso die zweite:

$$F_3 = \tfrac{1}{2}[x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] \,.$$

In jedem dieser Ausdrücke kann aber ein Glied auf o gebracht werden.

Offenbar bleibt F unverändert, wenn man in dem ersten Ausdruck von jedem der drei Abstände eine gleiche, übrigens willkürliche Länge absetzt, ebenso, wenn dieses im zweiten Ausdruck bei den Abschnitten geschieht. Sind aber die Abzüge willkürlich, so kann auch z. B. im ersten Ausdruck der Werth y_1, im zweiten Ausdruck x_1, in Abzug gebracht werden. Demzufolge verschwinden die Anfangsglieder und beide Ausdrücke ziehen sich in je zwei Glieder zusammen, nämlich:

---

*) Bei der Bildung dieser Ausdrücke ist die Reihenfolge 3]1 . 2 . 3[1 zu beachten.

$$F_3 = \tfrac{1}{2}[(y_2 - y_1)(x_1 - x_3) + (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)]$$

und $$F_3 = \tfrac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_1)(y_1 - y_2)] \,.$$

Die Glieder beider Ausdrücke erhalten dadurch aber auch, abgesehen vom Zeichen, gleiche Zahlenwerthe, wodurch die gegenseitige Sicherung gegen Rechnungsfehler geschwächt wird. Will man diese nicht entbehren, so ist es zweckmässig, nicht in beiden Ausdrücken gleich hohe Glieder verschwinden zu lassen, etwa im ersten Ausdruck, wie oben, das erste, im zweiten das zweite Glied, nämlich:

$$F_3 = \tfrac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) + (x_3 + x_2)(y_1 - y_2)] \,.$$

Gesetzt, man habe das Dreieck gemessen, wie folgt:

	y	x
1)	$+33{,}7^{\mathrm{m}}$,	$+63{,}5^{\mathrm{m}}$
2)	$+61{,}2$,	$+28{,}3$
3)	$+25{,}6$,	$+35{,}0$

so würde die Doppelberechnung seiner Fläche sein

$$(y_2 - y_1)\,(x_1 - x_3) = +27{,}5 \times +28{,}5 = +\ 783{,}75$$
$$(y_3 - y_1)\,(x_2 - x_1) = -\ 8{,}1 \times -35{,}2 = +\ 285{,}12$$
$$\tfrac{1}{2}(+1068{,}87) = 534{,}43^{\square\mathrm{m}}$$

und

$$(x_1 - x_2)\,(y_2 - y_3) = +35{,}2 \times +35{,}6 = +1253{,}12$$
$$(x_3 - x_2)\,(y_1 - y_2) = +\ 6{,}7 \times -27{,}5 = -\ 184{,}25$$
$$\tfrac{1}{2}(+1068{,}87) = 534{,}43^{\square\mathrm{m}}$$

Bestände das Grundstück aus dem Viereck 1.2.3.4, so wäre der der allgemeinen Vielecksformel entsprechende Flächen-ausdruck:

$$F_4 = \tfrac{1}{2}[y_1(x_4 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + y_4(x_3 - x_1)] \,.$$

In diesem sind aber die Klammergrössen im 1ten und 3ten, im 2ten und 4ten im Zahlenwerthe gleich und nur im Zeichen verschieden. Je zwei und zwei Glieder ziehen sich daher bei gehöriger Zeichenstellung in ein Glied, der ganze Ausdruck also in zwei Glieder zusammen, man erhält also:

$$F_4 = \tfrac{1}{2}[(y_1 - y_3)\,(x_4 - x_2) + (y_2 - y_4)\,(x_1 - x_3)] \,.$$

Man kann diesen Ausdruck übersichtlicher ordnen, wenn man in der zweiten Klammergrösse des ersten Gliedes die Zeichen und demzufolge das Zeichen des ganzen Gliedes ändert, also setzt:

$$F_4 = \tfrac{1}{2}[(y_2 - y_4)(x_1 - x_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_4)].$$

Die Zeichenziffern sind dann sämmtlich aufsteigend geordnet, und dies gestattet die Rechnungsform in Worten auszudrücken und zwar:

»Beim Aufsteigen sämmtlicher Zeichenziffern sind die geradzifferigen Abstandsunterschiede mit den ungeradzifferigen Abschnittsunterschieden, demnächst die ungeradzifferigen Abstandsunterschiede mit den geradzifferigen Abschnittsunterschieden malzunehmen, das letztere Ergebniss vom ersteren abzuziehen und der Rest mit zwei zu theilen.«

Wäre z. B. das Viereck 1.2.3.4 wie folgt gemessen:

	y	x
1)	$+ 4{,}5^m$;	$+58{,}6^m$
2)	$+13{,}6$	$+45{,}4$
3)	$+11{,}8$	$+13{,}6$
4)	$- 7{,}0$	$+42{,}4$

so würde seine Fläche gefunden durch:

$$(y_2-y_4)(x_1-x_3) = +20{,}6 \times +45{,}0 = +927{,}00$$
$$-(y_1-y_3)(x_2-x_4) = -(-7{,}3 \times +3{,}0) = +\ 21{,}90$$
$$\tfrac{1}{2}(+948{,}90) = +474{,}45$$

Bekanntlich kann jedes Vieleck von n Seiten, wenn n eine gerade Zahl ist, in $\frac{n-2}{2}$ Vierecke durch Verbindungslinien der Brechpunkte zerlegt werden. Jedes Viereck könnte nach dem Obigen in zwei Gliedern berechnet werden; das ganze Vieleck würde also $n - 2$ Malnehmungen erfordern.

Ein Vieleck von m ungerader Streckenzahl kann in 1 Dreieck und sein übriger Theil in $\frac{m-3}{2}$ Vierecke zerlegt werden. Sowohl jedes Dreieck als jedes Viereck erfordert nach dem Obigen zwei Formelglieder, mithin das ganze m Eck $2 + m - 3 = m - 1$ Glieder. Diese Abkürzung um ein Rechnungsglied könnte aber viel übersichtlicher und grössere Sicherheit gewährend erreicht werden, wenn man, wie beim Dreieck gezeigt worden, ein Rechnungsglied verschwinden lassen wollte, wozu man den allgemeinen Vielecksformeln beispielsweise folgende Einrichtung geben könnte:

$$F_n = \tfrac{1}{2}\Sigma(y_n-y_p)(x_{n-1}-x_{n+1})$$
und
$$F_n = \tfrac{1}{2}\Sigma(x_n-x_p)(y_{n+1}+y_{n-1}),$$

wo p irgend einen bestimmten Eckpunkt bezeichnet.

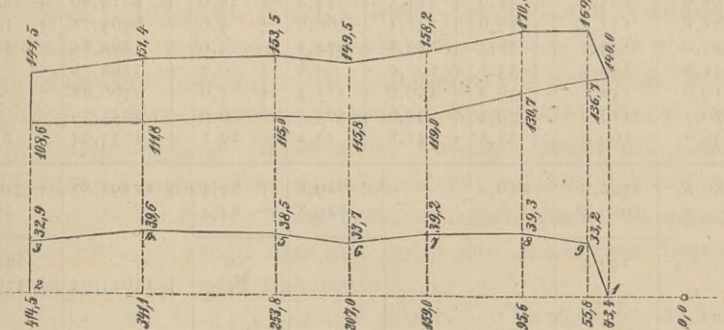
Aber das Abziehen irgend eines Abstandes von allen übrigen Abständen, oder irgend eines Abschnitts von allen übrigen Abschnitten würde bei Vielecken von grosser Streckenzahl grössere Mühe erfordern, als die Ersparniss eines einzigen Rechnungsgliedes werth wäre.

Ueber das Viereck hinaus hat solche Ersparniss überhaupt wenig Werth und sind die allgemeinen Vielecksformulare vorzuziehen.

Beim Feldmessen kommt oft der Fall vor, dass schmale und lange Ackerstücke, welche an ihren Langseiten durch nahe gleichlaufende krumme Furchen oder sogenannte Furchen-Grasnarben begrenzt sind, aufgenommen und ihre Flächen ermittelt werden müssen. Da die Genauigkeit der letzteren vorzugsweise von ihren Breitenmaassen abhängt, so sucht man diese dadurch zu bestimmen, dass auf der den Grundstücken entlang angelegten Messungslinie so viele Senkrechte, als zur naturgetreuen Aufnahme der Furchen-Krümmungen nöthig erscheinen, abgesetzt und mit diesen beide Grenzfurchen jedes der zu vermessenden Stücke durchschnitten werden. Aus den Unterschieden dieser Schnitte ergeben sich die Breitenmaasse am schärfsten, weil sie bei gehöriger Lage der Latten oder Anspannung der Kette nur von der Richtigkeit des Ablesens derselben abhängen, von der Bestimmung des Anfangspunktes der Messung dieser Senkrechten unabhängig sind.

Nicht selten kann eine Reihe solcher Grundstücke auf diese Weise gegen eine Messungslinie bestimmt werden, es wird aber genügen die einfachste Flächenberechnung derselben nur an einem Stücke zu zeigen:

Fig. 20.



Hätte man das im oberen Theile der Figur 20 verzeichnete Grundstück in angegebener Art aufgemessen, so würde es sich bei der Flächenberechnung genau genommen um ein 15 Eck handeln. Zieht man aber den Unterschied der Abstandslängen für jede Senkrechte und überträgt denselben auf die Achse, so entsteht eine Figur, welche der vermessenen an Fläche gleich ist, denn sowohl die beiden Dreiecke zwischen den ersten Senkrechten haben gleiche Grundlinien und Höhen, als auch die nachfolgenden Vierecke oben und unten zwischen Parallelen liegen und auf ihnen gleiche Maasse haben. Das unten liegende Vieleck enthält nur 9 Brechpunkte und auf sie kann die Flächenberechnung eingeschränkt werden.

Man könnte nun diese so ausführen, dass man zunächst das anfängliche Dreieck aus der Höhe und Grundlinie und dann jedes der nachfolgenden Vierecke aus der Summe der Parallelseiten und dem Abschnittsunterschied derselben berechnete, die Ergebnisse summirte und die Summe halbirte. Aber dieses Verfahren würde mühsamer sein und in seinem Fortgange der wünschenswerthen Sicherungsmittel entbehren. Es ist zweckmässiger, die allgemeine Vielecksformel anzuwenden, wie sie sonnenläufig folgt:

Punkt	Abstand einerseits −	Abstand andererseits +	y_n	x_n	$x_{n-1}-x_{n+1}$	$y_{n+1}-y_{n-1}$	$y_n\,(x_{n-1}-x_{n+1})$	$x_n\,(y_{n+1}-y_{n-1})$
1	140,0	140,0	0	+ 43,4	− 358,7	− 33,2	0	− 1440,88
2	108,6	108,6	0	+ 414,5	− 371,1	+ 32,9	0	+ 13637,05
3	108,6	141,5	+ 32,9	+ 414,5	+ 73,4	+ 39,6	+ 2414,86	+ 16414,20
4	111,8	151,4	+ 39,6	+ 341,1	+ 160,7	+ 5,6	+ 6363,72	+ 1910,16
5	115,0	153,5	+ 38,5	+ 253,8	+ 134,1	− 5,9	+ 5162,85	− 1497,42
6	115,8	149,5	+ 33,7	+ 207,0	+ 94,8	+ 0,7	+ 3194,76	+ 144,90
7	119,0	158,2	+ 39,2	+ 159,0	+ 111,4	+ 5,6	+ 4366,88	+ 890,40
8	130,7	170,0	+ 39,3	+ 95,6	+ 103,2	− 6,0	+ 4055,76	− 573,60
9	136,7	169,9	+ 33,2	+ 55,8	+ 52,2	− 39,3	+ 1733,04	− 2192,94
	1086,2	1342,6	256,4		+ 729,8	+ 84,4	+ 27291,87	+ 32996,71
	—	1086,2			− 729,8	− 84,4		− 5704,84
		256,4			0	0		27291,87
						F =	+ 13645,93	+ 13645,93

Die Werthe für y_n könnten auch unmittelbar aus dem Feldbuch durch einfaches Abziehen abgelesen werden; ihre Ursprungszahlen sind aber hier wiederholt, um darauf aufmerksam zu machen, dass auch für dieses Geschäft ein Sicherungsmittel benutzt werden kann.

Für den im § 7 besprochenen Fall, wo, wie bei Forstvermessungen oft nöthig ist, Binnenzüge durch Winkelmessung und Standortsberechnung zu bestimmen sind, ist noch zu bemerken, dass die dadurch gebildeten Abtheilungen in ebenso vielen Vielecken bei der Flächenberechnung ebenso behandelt werden müssen, wie es oben bei der Berechnung der Gesammtfläche der Flur gezeigt worden ist, wobei diese in der Flächensumme aller Abtheilungen wieder erscheinen muss.

b. Flächenberechnung aus Feldmaasszahlen unter Mitbenutzung der Karte.

Wenn an einem Dreieck eine Seite durch Feldmaasszahlen gegeben, der dritte Punkt aber anderswoher bestimmt ist, so erhält man, wenn nur der Abstand desselben oder die Höhe des Dreiecks über jener Seite von der Karte etwa mit Zirkel und Maassstab oder mit einem durchsichtigen Glasmaassstabe abgelesen und dieses Maass mit der Feldmaasszahl der Seite malgenommen und das Ergebniss halbirt wird, die Fläche des Dreiecks genauer, als wenn beide Maasse von der Karte gegriffen werden, weil nur an dem einen derselben die unvermeidlichen Fehler der Kartirung haften. Wären zwei Seiten des Dreiecks in Feldmaassen gegeben, so würde die Fläche doppelt in gleicher Art ermittelt werden können, nachdem für die zweite Seite das derselben zugehörige Höhenmaass von der Karte gegriffen wäre, darin also ein Sicherungsmittel liegen.

Sind von einem Viereck zwei Seiten durch Feldmaasse gegeben und sind diese anschliessende Seiten, so kann man sich dasselbe von ihrem Anschlusspunkt durch eine gerade Linie nach dem gegenüberstehenden Eckpunkte in zwei Dreiecke zerlegt denken. Werden die Abstände dieses Eckpunktes von den ihm gegenüberliegenden Seiten auf der Karte gegriffen, mit diesen Seiten malgenommen, die Ergebnisse summirt und halbirt, so erhält man die unter den gegebenen Umständen möglichst genaue Flächenzahl.

Lägen die in Feldmaassen gegebenen Seiten des Vierecks einander gegenüber, würde die eine dieser Seiten mit $a\,b$, die andere mit $c\,d$ bezeichnet, so könnte die Theilung in je zwei Dreiecke auf verschiedene Weise stattfinden, man könnte den Punkt a mit c durch eine gerade Linie verbunden denken, das anderemal den Punkt b mit d. Im ersteren Falle würden die Dreiecke $a\,b\,c$ und $c\,d\,a$, im letzteren $a\,b\,d$ und $c\,d\,b$ entstehen. Bezeichnete man nun die von der Karte abzugreifenden Abstände dieser vier Punkte von den gegenüberliegenden Seiten mit dem Buchstaben y und dem Anhängsel ihrer eignen Bezeichnung, so fände man die Fläche des Vierecks durch zwei Ausdrücke, nämlich:

$$\text{das einemal } F_4 = \tfrac{1}{2}(ab \times y_c + cd \times y_a)$$
$$\text{das anderemal } F_4 = \tfrac{1}{2}(ab \times y_d + cd\, y_b)\,.$$

Beide Ergebnisse sichern einander gegen Irrthümer im Abgreifen und im Rechnen.

Die Regeln für die Flächenberechnung der Dreiecke und Vierecke bilden die Grundlage des Verfahrens bei der Ermittelung der Flächen anderer Figuren.

Wäre z. B. das Ackerstück No. 3 in der Figur 14, welches auf der Strecke 1. 2 und im Innern durch Abschnitte auf Linien, die nicht mit einander parallel liegen, und auf der Linie a.5 mit zwei nahe gleich langen Abständen bestimmt ist, zu berechnen, so könnte man die Figur in 10 Dreiecke zerlegen, indem man je von dem linksseitigen Abschnitt einer Messungslinie nach dem rechtsseitigen Abschnitt der nächsten Messungslinie eine gerade Linie zöge. Dadurch würden an den beiden Enden der Figur die einfachen Dreiecke $m'n'o'$ und $r's't'$ entstehen, im Innern aber würden je zwei Dreiecke, wie $m'o'p'$ und $p'o'q'$, eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, also Vierecke bilden, deren Eckverbindungen in Feldmaasszahlen gegeben sind. Die an den Enden befindlichen Dreiecke sind in Fällen dieser Art nach dem oben erwähnten Verfahren für die Dreiecksberechnung zu behandeln. Bei den Vierecken kommt in Betracht, dass der doppelte Flächeninhalt eines Vierecks aus der Malnahme der Eckverbindungslinie mit der Summe der senkrechten Abstände der beiden anderen Ecken hervorgeht. So würde man z. B. für das Viereck $m'o'q'p'$ unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungsart den Flächenausdruck haben:

$$F_4 = \tfrac{1}{2}[o'p'(y_m' + y_q')].$$

Die Summen der Abstände, wie $y_{m'} + y_{q'}$, kann man bei gutem Augenmaass über die Richtung der Senkrechten und bei geschickter Uebertragung der in die Zirkelspitzen gefassten Länge des einen Abstandes in die Richtung des anderen auf dem Maassstab auf einmal abgreifen. Am leichtesten geschieht dieses mit einem an einem Lineal verschiebbaren Glasmaassstab.

Die Schräglinien im Grundstück 3 der Figur 14 könnten auch in den Richtungen nach der anderen Seite, also von n' nach p' und von o' nach x' u. s. w. gezogen werden, wonach dann Dreiecke und Vierecke zu berechnen wären, welche zwar auf den nämlichen, in Feldmaasszahlen gegebenen Grundlinien ruhen, diese aber je mit anderen Abständen und Abstandssummen malzunehmen sein würden. Die Wiederholung der Arbeit in dieser Richtung der Schräglinien würde ein Prüfungsmittel für das Schlussergebniss der Rechnung in der ersteren Richtung liefern, auch kann man bei einer dieser Arbeiten gegen das Ablesen der Abschnitts-Unterschiede dasselbe Sicherungsmittel anwenden, welches bei Behandlung der Figur 20 in den Spalten 2, 3, 4 des Rechnungs-Schemas gezeigt ist.

Liegen die Grundstücke nicht streifenweise, so dass sie nicht, wie vorgedacht, durch Abschnitte bestimmt werden können, sondern in unregelmässigen Vielecken, deren Grenzen durch Abstände und Abschnitte von im Inneren einer Flur angelegten Verbindungslinien bestimmt sind (§ 7), so kommt es zunächst darauf an, die Fläche der Grundfigur zu ermitteln, welche von jenen Verbindungslinien gebildet wird.

Ist diese Figur ein Dreieck und hält man das am Schlusse des § 7 erwähnte Verfahren zur Berechnung seiner Höhe für zu weitläufig, so erübrigt, sie von der Karte abzugreifen und sie zur Flächenermittelung mit der Grundlinie malzunehmen. Da aber in solchen Fällen in der Regel die Längen aller drei Seiten des Dreiecks in Messungszahlen bekannt sind, so kann nach Belieben die eine und die andere Seite genommen und jede mit der ihr zugehörigen Höhe malgenommen werden, wodurch die Ergebnisse der Arbeit sichergestellt werden.

Ist die Figur ein Viereck, so ist es bei oben erwähntem Berechnungsverfahren zur Gewähr der Genauigkeit des Erfolgs zweckmässig, alle vier in Feldmaassen gegebenen Seiten in der

Rechnung zu benutzen, also bei obiger Bezeichnung der vier Ecken mit $a\,b\,c\,d$ zu setzen:

$$F_4 = \tfrac{1}{2}(aby_c + cdy_a)$$

$$\text{und } F'_4 = \tfrac{1}{2}(ady'_c + bcy'_a),$$

wobei zu beachten ist, dass y'_a und y'_c in dem zweiten Ausdruck die Höhen über den Seiten $b\,c$ und $a\,d$, wogegen im ersten Ausdruck y_a und y_c die Höhen über den Seiten $c\,d$ und $a\,b$ sind. Durch solche Benutzung aller vier Seiten $a\,b$, $a\,d$, $b\,c$, $c\,d$ werden nicht nur die unvermeidlichen Fehler des Abgreifens der Abstände y_a, y_c, y'_a, y'_c, sondern auch sämmtliche unvermeidliche Messungsfehler der Grundfigur nach Wahrscheinlichkeit ausgeglichen. Im Allgemeinen wird der Erfolg der Flächenberechnungen um so zuverlässiger, je mehr Feldmaasszahlen im Verhältniss zu den von der Karte abgegriffenen Maassen in Anwendung gebracht sind.

Besteht endlich die Grundfigur aus einem Fünf- oder Mehreck, so ist bekannt, dass jedes Vieleck von n Seiten durch Eckverbindungen in $n - 2$ Dreiecke zerlegt werden kann, von denen jedes wenigstens eine Seite hat, welche zugleich eine Seite des Vielecks, also in Feldmaasszahlen gegeben ist. In jedem dieser Dreiecke kann also eine Feldmaasszahl zur Mitwirkung bei der Flächenberechnung gelangen. Aber jene Theilung in Dreiecke kann auf verschiedene Weise erfolgen, je nachdem andere Ecken für die Verbindungslinien zu Ausgangspunkten genommen werden. Man hat es bei einer zweiten Sicherungsrechnung in seiner Gewalt, auch diejenigen in Feldmaassen gegebenen Seiten mitwirken zu lassen, welche bei der ersten Rechnung unbenutzt blieben.

Ist die Fläche der Grundfigur gefunden, so bleibt nur noch übrig, die von ihren Seiten durch nach Aussen, also bejahend, oder nach Innen, also verneinend, liegende Abstände bestimmten Flächenstreifen ebenso zu berechnen, wie dieses an den Strecken des Umfangs-Vielecks geschehen ist.

Hätte man z. B. die Fläche des Grundstücks No. 19 in der Figur 14 zu berechnen, so würde zunächst das Grundviereck $9 . h . k . l$ zu behandeln sein, indem man zunächst die aus dem Feldbuch zu entnehmende Länge der Verbindungslinie $h\,k$ mit der auf sie von Punkt 9 fallenden, auf der Karte gemessenen Senkrechten und das Feldmaass $9\,l$ mit dem Karten-maass der Senkrechten von k auf sie malzunehmen und die Summe beider Malfachen zu halbiren, sodann zur Sicherung ebenso mit den Feldmaassen $9h$ und kl und den Kartenmaassen der auf sie von k und 9 fallenden Senkrechten zu verfahren hätte. Findet zwischen den beiden Enderfolgen hinreichende Uebereinstimmung statt, so dass sie zusammengestellt und gemittelt werden können, so erübrigt nur noch, die kleinen Flächenstreifen über $9h$, hk, kl und $l9$ in derselben Art zu berechnen, wie es oben bei der Behandlung des Umfangs-Vielecks, namentlich auf den Strecken 6.7 und 7.8, gezeigt worden ist. Augenscheinlich liefern die Streifen von 9 nach h, h nach k, k nach l bejahende, also der Grundfigur zuzurechnende Flächentheile, der Streifen von l nach 9 ein verneinendes, also derselben abzurechnendes Ergebniss.

Bei dem im § 7 beschriebenen Vermessungsverfahren gestattet die Mehrzahl der zu berechnenden Grundstücke die Benutzung der in den Feldbüchern enthaltenen Feldmaasszahlen. Wären aber die Figuren eines Theils derselben allzu verzweigt oder erschiene jene Benutzung der Messungszahlen für den beabsichtigten Zweck der Arbeit zu mühsam und zeitraubend, so bliebe endlich:

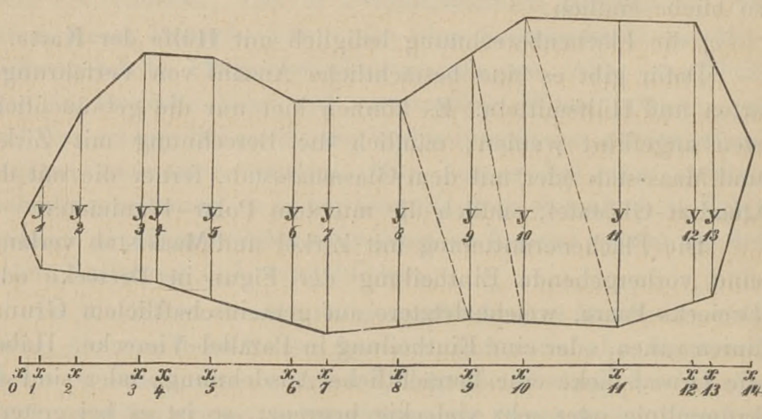
c) die Flächenberechnung lediglich mit Hülfe der Karte.

Dafür gibt es eine beträchtliche Anzahl von Verfahrungsarten und Hülfsmitteln. Es können hier nur die gebräuchlichsten angeführt werden, nämlich die Berechnung mit Zirkel und Maassstab oder mit dem Glasmaassstab, ferner die mit der Quadrat-Glastafel, endlich die mit dem Polar-Planimeter.

Die Flächenermittelung mit Zirkel und Maassstab verlangt eine vorhergehende Eintheilung der Figur in Dreiecke oder Dreiecks-Paare, welche letztere auf gemeinschaftlichen Grundlinien ruhen, oder eine Eintheilung in Parallel-Vierecke. Haben die Grundstücke eine beträchtliche Ausdehnung, oder sind sie krummlinig oder sehr vieleckig begrenzt, so ist es bei ersterer Eintheilung zweckmässig, zunächst zwischen angemessenen Grenzpunkten eine möglichst grosse, zugleich aber möglichst einfache Figur auszuschneiden und für sich zu berechnen, mit dem Vorbehalt, demnächst die Berechnung der an derselben entlang liegenden Flächenstreifen, welche dem Inhalte der Grundfigur je nach ihrer Lage nach Aussen oder Innen derselben zuzurechnen oder abzusetzen sind, nachfolgen zu lassen.

Die Eintheilung der Figuren geschieht mittelst Bleistiftlinien, welche demnächst, ohne der Karte zu schaden, wieder entfernt werden können. Die Flächenberechnung der Grundfigur erfolgt bei den in ihr enthaltenen Dreiecken durch Malnahme der mit dem Maassstabe abzugreifenden Grundlinien und Höhen, bei den Dreieckspaaren durch die der gemeinschaftlichen Grundlinien und zusammengesetzten Höhen. Für die Berechnung der Flächenstreifen am Umfange der Grundfigur ist es am rathsamsten, von den Krümmungs- oder Eckpunkten der Grenzen auf die betreffenden Seiten der Grundfigur Senkrechte zu ziehen und die dadurch entstehenden Dreiecke und Parallel-Vierecke, erstere durch Malnahme der Grundlinien und Höhen, letztere durch Malnahme der Parallelen-Abstände und ihrer Längensummen oder nach der mehrgedachten allgemeinen Vielecksformel zu berechnen. Die letztere empfiehlt sich auch, wenn man die andere Eintheilung der ganzen Figur vorzieht, nämlich diese mit soviel Parallellinien überzieht als sie Ecken oder merkliche Krümmungspunkte hat.

Fig. 21.



Gesetzt, es sei die Fläche der Figur zu berechnen, nachdem von allen Eckpunkten nach der gegenüberstehenden Grenze Parallellinien gezogen sind. Man erkennt sogleich die Aehnlichkeit dieser Aufgabe mit der der Figur 20, von welcher sie sich nur dadurch unterscheidet, dass hier die Längen der Parallelen (y) nicht durch Abzug je zweier Feldmaasszahlen, sondern durch unmittelbares Abgreifen von der Karte mit Hülfe des Maassstabes zu finden sind, dass auch die Abschnitte (x) nicht von einem gemeinschaftlichen Nullpunkt aus, sondern für jede Parallele von der nächst vorhergehenden Parallele aus bis zur nächst folgenden von der Karte zu greifen sind.

Für die Parallele y_9 z. B. ist zu greifen von x_8 nach x_{10}, für y_{10} von x_9 nach x_{11}, wenn die Parallelen bis x_8, x_9, x_{10}, x_{11} durchgezogen wären, was aber unnöthig ist, weil das Abgreifen der betreffenden Entfernungen der Parallelen innerhalb der Figur geschehen kann. Dass die Malfachen $y_9\,(x_{10} - x_8)$, $y_{10}\,(x_{11} - x_9)$ nichts anderes sind als die Doppelflächen von Dreieckspaaren, welche auf gemeinschaftlichen Grundlinien ruhen, ersieht man bei Wahrnehmung der punktirten Linien sofort. Der Flächeninhalt der Figur würde also gemäss der allgemeinen Vielecksformel $F = \frac{1}{2} \Sigma\, y_n\,(x_{n-1} - x_{n+1})$, welche jedoch hier in $F = \frac{1}{2} \Sigma\, y_n\,(x_{n+1} - x_{n-1})$ umzustellen wäre, mithin, wenn die linksseitig liegenden y bejahend genommen werden sollten, ausgedrückt werden durch:

$$F = \tfrac{1}{2}[y_1(x_2 - x_0) - y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_5 - x_3) + y_5(x_6 - x_4) + y_6(x_7 - x_5) + y_7(x_8 - x_6) + y_8(x_9 - x_7) + y_9(x_{10} - x_8) + y_{10}(x_{11} - x_9) + y_{11}(x_{12} - x_{10}) + y_{12}(x_{13} - x_{11}) + y_{13}(x_{14} - x_{12})].$$

In Worten ausgedrückt findet man die Fläche einer so vorbereiteten Figur, »wenn man die Länge einer jeden Parallele mit der Entfernung der ihr zunächst vorhergehenden Parallele von der ihr nächstfolgenden Parallele malnimmt und die Summe sämmtlicher Malfachen halbirt.«

Dieses Verfahren ist durch den Umstand besonders empfehlenswerth, dass es für das Abmessen der vorgedachten Entfernungen ein sehr einfaches Sicherungsmittel gewährt. Wären nämlich die Punkte, bei denen $y = 0$ ist, nicht unberücksichtigt gelassen und die ihnen entsprechenden Formelglieder durch Lückenbüsser, natürlich ohne Flächenerfolg, vertreten worden, so hätte an der Spitze des obigen Ausdrucks gestanden $0\,(x_1 - x_{14})$, am Ende $0\,(x_0 - x_{13})$, denn erst nach Hinzufügung dieser beiden Glieder wäre einem vollständigen Umlauf des gedachten Vielecks entsprochen. Nach dieser Vervollständigung des Ausdrucks würden sich alle Klammergrössen gegenseitig aufheben. Da nur die wirklichen Flächengeber sämmtlich als bejahend betrachtet wurden, und nur die Lückenbüsser verneinend sind, so folgt, dass die Summe der Ersteren der Summe der Letzteren gleich sein muss, also $= x_0 + x_1 - x_{13} - x_{14}$.

In der That ergibt auch die wirkliche Klammersumme des Flächenausdrucks $-x_0 - x_1 + x_{13} + x_{14}$.

Nennt man diese Summe $= S$ und schreibt man sie allgemein: $S_n = (x_{n-1} - x_0) + x_{n-2} - x_1)$, wobei vorausgesetzt ist, dass die erste Parallele durch x_0 die letzte durch x_{n-1} gezogen gedacht wird, so lässt sich das Prüfungsmittel in Worten aussprechen wie folgt:

»Die Summe aller zur Flächenberechnung abgegriffenen Parallelen-Entfernungen muss mit der Summe der Entfernung der beiden äussersten und der Entfernung der beiden nächst äussersten Parallelen übereinstimmen.«

Nachdem man also die einzelnen Entfernungen von der Karte abgegriffen und summirt hat, greift man auf einmal von der Parallele des Anfangspunkts (x_0) bis zu der des Endpunkts (x_{n-1}) und setzt zu ihr die gleichfalls auf einmal zu greifende Entfernung der zweiten Parallele (x_1) von der der letzten zunächst vorhergehenden Parallele (x_{n-2}).

Das Sicherungsmittel ist um so wichtiger, als bei vieleckigen Figuren die Anzahl der abzugreifenden Einzeln-Entfernungen beträchtlich ist und Irrthümer dabei leicht vorkommen können.

Bei der Anwendung dieses Prüfungsmittels darf übrigens nicht übersehen werden, dass möglicherweise die äussersten Parallelen nicht durch je einen Eckpunkt der Figur gehen, vielmehr durch eine Seite der Figur, ohne sie zu schneiden, dass also z. B. $x_0 = x_1$ oder $x_{n-2} = x_{n-1}$, mit Worten, dass die erste und zweite oder die vorletzte und letzte Parallele zusammenfallen, wie ersteres bei der Figur 20 stattfand, dass alsdann diesem Zusammenfallen bei Anwendung der obigen Formel gehörig Rechnung getragen werden muss. Wäre z. B. in der Figur 21 die Parallele y_1 durch den Punkt x_0 gegangen, so hätte man gefunden $S = (x_{14} - x_0) + (x_{13} - x_0)$, und wenn $x_0 = 0$ genommen wäre, einfach:

$$S = x_{14} + x_{13}.$$

Sind die Figuren der Grundstücke so verzweigt, dass keine Hülfs-Parallelen gezogen werden können, welche den Umfang nur zweimal treffen, so müssen dieselben in Abtheilungen zerlegt werden, wovon jede einen besonderen Parallelen-Bau zu erhalhat, um sodann jeden für sich zu behandeln. Die daraus hervorgehenden Flächen aller Abtheilungen bleiben dann zusammenzurechnen.

Die Anwendung abzugreifender Längenmaasse und die Malnahme derselben erfordert in den meisten Fällen einen beträchtlichen Aufwand von Mühe und Ziffern. Man hat daher auf Hülfsmittel Bedacht genommen, die Weitläufigkeit zu vermeiden und zwar auf solche, welche ein unmittelbares Ablesen der Flächen von der Karte gestatten. Eins dieser Hülfsmittel besteht in der Quadrat-Glastafel, das andere in dem Polar-Planimeter.

Die Quadrat-Glastafel kann so eingerichtet sein, dass auf der Glasfläche ein Quadrat von zwei Decimeter Seitenlänge verzeichnet, auf allen vier Seiten in Decimeter, Centimeter und Millimeter eingetheilt wird, an je zwei Seiten die gegenüberstehenden gleich hohen Theil-Punkte mit eingeätzten oder auf einem durchsichtigen Ueberzuge fein ausgezogenen geraden Linien verbunden, die Theilpunkte der Centimeter mit besonderer Farbe oder auf andere Art ausgezeichnet und an den vier Rändern mit den Ziffern 0, 10, 20 u. s. w. bis 200 beschrieben werden. Die kleinsten der dadurch entstehenden Quadrate sind bei dieser Einrichtung Quadrat-Millimeter, die nächst grösseren Quadrat-Centimeter, die von den 100 zu 100 gehenden Linien begrenzten Quadrate Quadrat-Decimeter. Ist nun eine Karte im Maassstabe von $\frac{1}{1000}$ aufgetragen, so entspricht auf ihr ein Quadrat-Millimeter einem Quadratmeter des Feldes, ein Quadrat-Centimeter einem Ar, ein Quadrat-Decimeter einem Hektar.

Bei der Anfertigung der Tafel ist darauf zu sehen, dass die äussersten Ränder des Glases mit den Seiten des eingetheilten Quadrats parallel laufen.

Sind nun die Grundstücksflächen auf einer im Maassstabe von $\frac{1}{1000}$ aufgetragenen Karte zu berechnen, so wird die Glastafel auf das zu berechnende Grundstück so gelegt, dass es ganz innerhalb des eingetheilten Raumes befindlich ist. Sollte ein Theil der Figur darüber hinausgehen, so ist derselbe durch eine Bleilinie abzutrennen und besonders zu bearbeiten. Innerhalb der so bedeckten Figur sind nun zunächst die Quadrate der vollen Ar abzuzählen und niederzuschreiben, demnächst diejenigen Ar-Quadrate zu behandeln, welche von der Grenzlinie des Grundstücks geschnitten werden. Aus jedem derselben sind dann wieder die vollen Meter-Quadrate abzuzählen und ihnen in Gedanken die geschätzten Theile der geschnittenen Meterquadrate zuzuzählen. Ist der das Ar-Quadrat schneidende Theil der Grenze eine gerade Linie, so hat man nur die auf der Mittellinie des Quadrats bis zu ihrem Durchschnitt mit der Grenze enthaltenen ganzen Theile und geschätzten Zehntheile abzulesen. Die gefundene Zahl beträgt, da sie mit 10 malzunehmen sein würde, unmittelbar Quadratmeter.

Die abgelesenen Ar und Meter sind, nachdem der Umfang der Figur vollständig durchlaufen ist, nur noch zu summiren.

Ist eine Karte nicht im Maassstabe von $\frac{1}{1000}$ aufgetragen, so kann zwar die vorgedachte Glastafel gleichwohl benutzt werden, die von ihr in obiger Art abgelesenen Flächen müssen aber mit Hülfe des quadratischen Verhältnisses zwischen dem anderen Maassstabe und dem von $\frac{1}{1000}$ auf ersteren zurückgeführt werden. Dieses geschieht bei dem Maassstabe von

$\frac{1}{500}$ durch Theilung mit 4

$\frac{1}{2000}$ durch Malnahme mit 4

$\frac{1}{2500}$ » » » 6,25

$\frac{1}{5000}$ » » » 25

Die Malnahme mit 6,25 geschieht am leichtesten nach dem Ausdruck $\frac{100}{4 \times 4}$ oder durch zweimalige Theilung des Hundertfachen der abgelesenen Fläche, die Malnahme mit 25 durch einmalige Theilung mit 4 desselben.

Obgleich von der Quadrat-Glastafel unmittelbar Flächen abgelesen werden, so ist doch das Zusammenrechnen vieler einzelner Theile nothwendig.

Um auch dieses zu ersparen, hat Amsler den Polar-Planimeter hergestellt, der aus zwei mit einem Gelenk verbundenen Stangen besteht, von denen die eine an ihrem Ende, dem Pol, auf der zu berechnenden Karte festzusetzen ist, wogegen die andere mit ihrer Endspitze, dem Führstift, bestimmt ist, den Rand des nach seiner Fläche auszumessenden Grundstücks zu durchlaufen. An der letzteren Stange ist das obengedachte Gelenk vermittelst einer Hülse zum Einstellen des Werkzeugs für den Maassstab der Karte verschiebbar, und an dieser Hülse befindet sich unterhalb eine Welle mit eingetheiltem Umkreis, welche bei Fortbewegung des Führstifts auf der Karte theils gleitet, theils sich wälzt und durch den Belang ihrer Umdrehung die Fläche des umfahrenen Grundstücks anzeigt.

Für die ausführliche Beschreibung dieses sinnreichen Werkzeugs und die Beweisführung der Richtigkeit seiner Wirkung wird auf die Schrift »Theorie des Amsler'schen Planimeters von Dr. C. Bremiker, Berlin 1863 bei R. Decker« und auf die im Anhange zu dieser Schrift befindliche Abhandlung aufmerksam gemacht.

Beim Gebrauche dieses Werkzeugs ist mit grosser Sorgfalt darauf zu sehen, dass die Oberfläche der Karte keine Beulen, Falten oder sonstige Unebenheiten haben darf, welche die freie Bewegung der Welle während der Arbeit hemmen oder stören könnten.

Im Allgemeinen ist schliesslich zu bemerken, dass, um Irrthum zu vermeiden, jede Flächenermittelung zweimal, insbesondere das zweitemal, wo nicht mit anderem Werkzeug oder Verfahren, doch mit anderer Aufstellung ausgeführt werden muss. Zeigen die beiden Ergebnisse eine hinreichende Uebereinstimmung nicht, so muss die Rechnung untersucht oder wiederholt werden. Sind sonach die Flächen aller Grundstücke einer Flur so wie der sie durchziehenden Wege, Gewässer u. s. w. gefunden, so muss ihre Summe mit der unter Zugrundlegung der Standortsberechnung zuvor berechneten Gesammtfläche innerhalb einer zulässigen Fehlergrenze übereinstimmen.

I. Tafel

für die 5 Meter lange Messlatte

zur Herstellung

des Abziehers | des Vorschiebers

bei der Länge des Lothes = 1.

Abzug	Höhenwinkel Grad	Höhenwinkel Min.	Tangente	Sehne	Vorschub	Höhenwinkel Grad	Höhenwinkel Min.	Tangente	Sehne
0,01	4	03	0,0634	0,0633	0,01	4	03	0,0634	0,0634
0,02	5	70	0,0898	0,0738	0,02	5	68	0,0893	0,0735
0,03	6	98	0,1101	0,1096	0,03	6	96	0,1098	0,1073
0,04	8	06	0,1273	0,1265	0,04	8	02	0,1266	0,1259
0,05	9	01	0,1425	0,1414	0,05	8	95	0,1415	0,1404
0,06	9	87	0,1562	0,1548	0,06	9	81	0,1553	0,1538
0,07	10	66	0,1690	0,1672	0,07	10	60	0,1681	0,1663
0,08	11	40	0,1810	0,1788	0,08	11	31	0,1796	0,1774
0,09	12	10	0,1924	0,1798	0,09	11	99	0,1906	0,1880
0,10	12	75	0,2030	0,1998	0,10	12	63	0,2010	0,1980
0,12	13	98	0,2232	0,2195	0,12	13	81	0,2204	0,2166
0,14	15	10	0,2417	0,2366	0,14	14	89	0,2383	0,2335
0,16	16	15	0,2593	0,2530	0,16	15	90	0,2551	0,2491
0,18	17	13	0,2758	0,2682	0,18	16	83	0,2707	0,2636
0,20	18	07	0,2917	0,2828	0,20	17	71	0,2856	0,2772
0,22	18	96	0,3070	0,2967	0,22	18	55	0,2999	0,4904
0,24	19	80	0,3215	0,3097	0,24	19	34	0,3135	0,3026
0,26	20	62	0,3357	0,3225	0,26	20	10	0,3267	0,3144
0,28	21	41	0,3496	0,3346	0,28	20	82	0,3392	0,3259
0,30	22	16	0,3628	0,3463	0,30	21	52	0,3515	0,3364
0,33	23	26	0,3825	0,3633	0,33	22	52	0,3693	0,3520
0,36	24	31	0,4016	0,3794	0,36	23	46	0,3861	0,3664
0,39	25	31	0,4199	0,3950	0,39	24	37	0,4027	0,3804
0,42	26	28	0,4380	0,4099	0,42	25	23	0,4185	0,3937
0,45	27	22	0,4557	0,4243	0,45	26	05	0,4337	0,4064
0,48	28	12	0,4729	0,4381	0,48	26	84	0,4485	0,4185
0,51	29	00	0,4899	0,4516	0,51	27	61	0,4631	0,4303
0,54	29	86	0,5068	0,4647	0,54	28	34	0,4771	0,4415
0,57	30	69	0,5233	0,4774	0,57	29	06	0,4911	0,4525
0,60	31	51	0,5398	0,4900	0,60	29	74	0,5043	0,4629

II. Tafel

zur Herstellung des Vorschiebers für den Werth, welcher der geneigt liegenden 20 Meter langen Doppelkette mangelt, um einer wagrechten Länge von 20 Metern zu entsprechen bei der Länge des Lothes = 1.

Vorschub Meter	Höhenwinkel Grad	Höhenwinkel Min.	Tangente	Sehne	Vorschub Meter	Höhenwinkel Grad	Höhenwinkel Min.	Tangente	Sehne
0,1	6	36	0,1002	0,0900	1,6	24	66	0,4080	0,3849
0,2	9	01	0,1425	0,1412	1,7	25	36	0,4209	0,3957
0,3	10	97	0,1740	0,1720	1,8	26	04	0,4334	0,4062
0,4	12	62	0,2009	0,1980	1,9	26	70	0,4459	0,4164
0,5	14	09	0,2250	0,2208	2,0	27	35	0,4582	0,4266
0,6	15	39	0,2466	0,2410	2,1	27	97	0,4700	0,4359
0,7	16	60	0,2668	0,2600	2,2	28	58	0,4817	0,4452
0,8	17	72	0,2858	0,2774	2,3	29	16	0,4932	0,4541
0,9	18	74	0,3032	0,2933	2,4	29	75	0,5046	0,4630
1,0	19	72	0,3201	0,3085	2,5	30	30	0,5155	0,4714
1,1	20	62	0,3358	0,3225	2,6	30	84	0,5263	0,4797
1,2	21	50	0,3515	0,3361	2,7	31	36	0,5367	0,4876
1,3	22	35	0,3662	0,3493	2,8	31	87	0,5471	0,4954
1,4	23	15	0,3806	0,3614	2,9	32	38	0,5575	0,5032
1,5	23	93	0,3947	0,3736	3,0	32	88	0,5679	0,5107

Anmerkung.

Die Angaben der vorstehenden Tafeln I und II beziehen sich auf die = 1 angenommene Länge des Lothes von seinem Aufhängepunkt bis zu seiner Zeigerspitze. Um sie auf dem Gradbogen, auf welchem sich diese Spitze bewegt, zu verzeichnen, hat man das einfache Mittel eines sogenannten verjüngten Maassstabes, dessen ganze Länge jener Lothlänge gleich ist. Diese Länge wird zunächst in 10 gleiche Theile, der letzte dieser Theile abermals in 10 solche Theile und endlich jeder der letzteren vermittelst der Längen- und der um einen dieser Theile schief liegenden Quer-Parallelen wiederum in 10 gleiche Theile, die ganze Länge also in 1000 gleiche Theile eingetheilt. Diese Theile entsprechen dann den drei ersten Decimalstellen der Tangenten und der Sehnen für den Abzug, beziehungsweise für den Vorschub.

Die Werkzeuge werden am besten von Metallblech hergestellt, welches mit einer hellen Oelfarbe zu überziehen ist, auf der die Theilstriche für die Werthe des Abzugs oder des Vorschubs schwarz augenfällig gemacht werden können.

Für den Abzieher der Messkette ist das Tangentenstück *c d* Fig. 1 überflüssig, das Werkzeug kann also nach unten mit dem Gradbogen endigen, auf welchem die Werthe für 0,1, 0,2, 0,3 u. s. w. Meter mittelst der Sehnenlängen der Tafel II aufgetragen werden können.

Zweiter Abschnitt.

Vermessung ganzer Feldmarken und Amtsbezirke.

Die Aufgabe des Feldmessers kann über die Vermessung einer einzelnen, etwa auf einem Kartenblatt darstellbaren Flur hinausgehen, sie kann die Aufnahme einer Gemeindefeldmark oder eines Amtsbezirks zum Gegenstande haben. Landestheile dieser Art erfordern die Eintheilung in eine grössere oder geringere Anzahl von Fluren, und es entsteht damit die Aufgabe, sämmtliche Fluren durch die Vermessung in dem naturgetreuen Zusammenhang darzustellen.

§ 11.

Begrenzung der Bezirke.

Bevor der Feldmesser zur Aufnahme eines Gemeinde- oder Amtsbezirks schreitet, muss er sich durch örtlichen Begang die Kenntniss seiner Umgrenzung verschaffen. Er hat dabei diejenigen Personen zuzuziehen, welche die Verwaltung der Gemeinde oder des Amts zu führen oder zu vertreten haben und mit dem Lauf der Grenzen bekannt sind. Auch sind die Vertreter derjenigen Bezirke zuzuziehen, welche an die zu vermessenden angrenzen, damit festgestellt werden kann, ob die beiderseitigen Ansprüche mit einander übereinstimmen, oder ob und welche Abweichungen derselben stattfinden.

Bei diesem Grenzbegange hat der Feldmesser den Lauf der Grenzlinie möglichst naturgetreu in dem Grenzbuch zu verzeichnen und dabei nicht zu unterlassen, Grenzsteine mit Angabe der etwa auf ihnen befindlichen Nummern oder anderer Zeichen, Grenzhügel, Grenzbäume, Grenzgräben, Hecken, Flüsse u. dergl. so zu vermerken, dass ausser Zweifel gestellt wird, ob die Grenzlinie durch die Mitte dieser Zeichen oder an welcher Seite derselben entlang läuft.

Die Zeichnungen im Grenzbuche können bei dem Begange nur nach dem Augenmaasse oder mittelst Schrittmessung und Anwendung leicht zu handhabender anderer Hülfsmittel entworfen werden. Die genaue Bestimmung des Grenzlaufes findet sich später bei der zweiten Messung der Strecken des aufzunehmenden Umfangs-Vielecks und der Standortsberechnung seiner Brechpunkte, wonach dann auch eine genaue Grenzkarte aufgetragen werden kann.

§ 12.

Herstellung eines Dreiecksnetzes.

Die gegenwärtige für Feldmesser bestimmte Schrift setzt voraus, dass, im Falle der zu vermessende Bezirk an die richtige Stelle der geographischen Karte des Landes, worin er liegt, gebracht werden soll, die dazu erforderlichen Anschlusspunkte ihm gegeben werden. Dergleichen Anschlusspunkte werden durch die mit allen Hülfsmitteln der Wissenschaft und Kunst auszuführende Messung einer Grundlinie, durch Herstellung eines Dreiecksnetzes, welches die entlegensten, von einander sichtbaren Punkte unmittelbar verbindet, dessen Winkel mit den vorzüglichsten Werkzeugen gemessen und deren Ergebnisse nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und unter Berücksichtigung der Oberflächenkrümmung der Erde berechnet werden. Mit solchen Arbeiten hat sich der Feldmesser nicht zu befassen, es liegt auch in Deutschland um so weniger ein Bedürfniss dazu vor, als wohl in fast allen Theilen desselben geographische Dreiecksmessungen dieser Art bereits ausgeführt sind.

Da ferner die Bezirke der Gemeinden selten eine ganze Quadratmeile, die der Aemter nur wenige Quadratmeilen umfassen, so kann der Feldmesser diese Bezirke als ebene Flächen behandeln, er kann sich also der Anwendung der sphärischen Trigonometrie enthalten.

Bei Gelegenheit der Ausmessung der grössten geographischen Dreiecke, welchen gewöhnlich die Benennung Dreiecke erster Ordnung gegeben wird, deren Seiten meist zwischen 40000 und 60000 Meter lang sind, werden gewöhnlich Zwischenpunkte mit bestimmt, um bequemer als die Punkte erster Ordnung zu Anschlussmessungen benutzt werden zu können. Diese Punkte nennt man Punkte zweiter Ordnung. Der Feldmesser hat nun die Aufgabe, seine Arbeiten an diese Punkte zweiter Ordnung oder, wo sie ihm nahe genug liegen, an die der ersten Ordnung anzuschliessen.

Ist der zu vermessende Bezirk grösser als eine Quadratmeile, so sind zur Sicherung des guten Zusammenhangs einige Dreiecke von etwa 4000 bis 6000 Meter Seitenlänge herzustellen, welche gewöhnlich Dreiecke der dritten Ordnung genannt werden. Zwischen den Dreieckspunkten dieser Ordnung werden dann diejenigen Dreiecke angelegt, welche unmittelbar dazu dienen sollen, die Karten der im Bezirke zu vermessenden Fluren gehörig zusammen zu fügen und welche gewöhnlich Dreiecke der vierten Ordnung genannt werden.

Der Nutzen eines Dreiecksnetzes beruht auf der Möglichkeit, aus der Länge einer Seite eines Dreiecks und den Bogenmaassen seiner Winkel die Längen der beiden anderen Seiten zu berechnen. Die beiden Winkel an den Endpunkten der ihrer Länge nach bekannten Seite sind zusammengenommen kleiner als zwei Rechte, ihre Schenkel schneiden sich in dem dritten Dreieckspunkte, und zwar um so schiefer, je näher jene Winkelsumme zwei rechten Winkeln kommt. Je schiefer aber der Schnitt ist, desto unsicherer wird die Lage des Schnittpunktes gegen die Endpunkte der gegebenen Seite, mit jedem Winkelfehler, also auch mit dem unvermeidlichen Fehler. Je kleiner also der Winkel an dem dritten Punkte ist, desto unsicherer ist die Lage des letzteren bestimmt. Aber dieser Satz darf nicht umgekehrt werden; es kann im Allgemeinen mit Wahrheit nicht gesagt werden, dass die Genauigkeit der Lage des dritten Punktes um so grösser sei, je grösser der an ihm liegende Winkel ist. Einmal ist die Genauigkeit nicht von diesem Winkel allein, sondern auch von den beiden anderen abhängig. Ist er über $\frac{1}{3}$ von zwei rechten Winkeln, also über $\frac{2}{3}\,R$, so folgt, dass wenigstens einer der beiden anderen Winkel kleiner als $\frac{2}{3}\,R$ ist. Was also etwa mit ihm für die Genauigkeit gewonnen werden möchte, würde mit dem kleineren wieder verloren gehen. Im Allgemeinen wird also ein Dreieck durch Messung seiner Winkel um so genauer bestimmt werden, je näher jeder der drei Winkel $\frac{2}{3}\,R$, d. h. wenn das Dreieck ein gleichwinkliges oder gleichseitiges ist. Bei der Wahl der Dreieckspunkte muss also das Bestreben des Feldmessers darauf gerichtet sein, im Felde solche Punkte auszusuchen, die sich zu möglichst gleichseitigen Dreiecken verbinden lassen. Die an die Seiten des ersten und jedes anderen Dreiecks sich anschliessenden Dreiecke müssen ebenfalls möglichst gleichseitig sein. Es liegt also die Aufgabe vor, ein Netz zu legen, dessen Maschen aus möglichst gleichseitigen Dreiecken bestehen. Der Lösung dieser Aufgabe treten aber in der Oertlichkeit mannigfaltige Hindernisse entgegen. Soll das Netz keine aus einander und auch keine über einander fallenden Maschen haben, sollen also weder Lücken noch einander durchschneidende Dreiecksseiten darin vorkommen, so muss jeder Dreieckspunkt eine möglichst freie Rundsicht gewähren. Gebirgskuppen bieten solche dar, wenn sie nicht bewaldet sind, ihre bestimmte Lage beschränkt aber auch dann noch die Wahl und setzt dem Bestreben, möglichst gleichseitige Dreiecke zu gewinnen, Hindernisse in den Weg. Sind aber die Kuppen bewaldet, so sind die Schwierigkeiten grösser. Hat man von einem bereits ausgewählten Punkte aus eine solche bewaldete Kuppe als zweckmässigen nächsten Punkt ausersehen, so entsteht die Aufgabe, auf der letzteren die Richtung anzugeben, in welcher der Holzbestand geschluchtet werden muss, um die Aussicht nach dem ersten Punkt zu gewinnen. Bei dieser Aufgabe leistet die Boussole treffliche Dienste. Hätte z. B. ihre Nordnadel auf dem ersten Punkte in der Richtung nach der Spitze der Waldkuppe auf 246 Neugrade gestanden, so brauchte man, auf der Kuppe selbst angekommen, das Werkzeug nur so aufzustellen, dass die Nordnadel auf 46 Grade käme, um die Richtung zu finden, in welcher das Holz weggeräumt werden müsste.

In ebenen und offenen Gegenden ist die Auswahl guter Dreiecke am leichtesten; dagegen in ebenen mit Wald oder Gestrüpp bewachsenen am schwierigsten. In Gegenden der letzteren Art ist es oft kaum möglich, eine einzige Linie von der Länge einer Dreiecksseite abzusehen. In solchen Gegenden muss sich der Feldmesser bemühen, auf hohe Gebäude, Thürme, Bäume zu steigen, um dort Uebersicht zu gewinnen und solche Plätze auszusuchen, welche die leichtesten Stellen darbieten, und mit dem geringsten Aufwand von Arbeit bei möglichster

Vermeidung unnöthigen Schadens am Holzbestande die nothwendigen Dreieckslinien aufzulichten.

Die im § 1 empfohlene Vorsicht, die Standpunkte an solchen Plätzen zu nehmen, welche am wenigsten der Zerstörung oder Verdunkelung ausgesetzt sind, ist auch bei der Auswahl der Dreieckspunkte sorgfältig zu beobachten. Es muss auch dafür gesorgt werden, dass diese Punkte mit behauenen und mit in der Folge erkennbaren Zeichen versehenen Steinen oder ähnlichen Merkmalen besetzt werden und dass die Plätze durch tiefer liegende Gegenstände wieder erkannt werden können, wenn die zu Tage gestandenen abhanden gekommen sein sollten.

Wenn die Dreieckspunkte der dritten Ordnung nicht bereits mit Kirchthürmen, Windmühlen, Wartthürmen, Essen, Monumenten u. dergl. m. zusammenfallen, so bedürfen sie zur Winkelmessung künstlicher Zielzeichen. Gewöhnlich werden dazu vier gerade Stangen in einem Quadrat aufgestellt und am oberen Ende in eine Spitze vereinigt, deren Lothpunkt mit dem Mittelpunkt des Platzes zusammenfällt, in welchem die Winkel zu messen oder auf welchen sie zurückzuführen sind, wenn das Winkelwerkzeug nicht genau in ihm aufgestellt werden kann. Von der Spitze herab wird der Zielstuhl auf eine Länge von etwa 1 Meter mit Dielen verschalt.

Dreieckspunkte vierter Ordnung bedürfen in der Regel einer so umständlichen Bezeichnung nicht; für sie genügt gewöhnlich eine gerade Stange, etwa von Tannenholz, welche senkrecht aufgestellt und dauerhaft im Boden festgerammt wird, nachdem vorher das obere Ende mit Strohbündel oder Querbrett auf angemessene Entfernung sichtbar gemacht ist.

§ 13.

Messung der Dreieckswinkel.

Sind die Dreieckspunkte dritter Ordnung mit den im § 12 beschriebenen Zielstühlen (Pyramiden-Signalen) bezeichnet, so kann in den meisten Fällen der Winkelkreis in dem Mittelpunkte des Platzes aufgestellt werden. Ist dieses geschehen und das Werkzeug wagrecht gemacht, so wird das Fernrohr auf einen Anschlusspunkt des geographischen Netzes, oder wo ein solcher nicht sichtbar ist, auf einen mit dem Standpunkt in Verbindung stehenden Dreieckspunkt der dritten Ordnung gerichtet und eingestellt und die Gradtheiler werden abgelesen. Demnächst wird das Fernrohr auf sämmtliche mit dem Standpunkte in Verbindung stehende Dreieckspunkte, sowie auf andere nähere oder weiter entfernte Anschluss- und einmessungswerthe Punkte eingestellt, und zwar in der Reihenfolge, in welcher die Grade des Winkelkreises fortlaufen. Bei jedem dieser Punkte werden die Gradtheiler abgelesen, auch hat sich der Feldmesser bei der Rückkehr des Fernrohrs auf die Anfangsrichtung zu überzeugen, dass die Gradtheiler in den anfänglichen Standpunkt zurückgekehrt sind, das Werkzeug also keine Verrückung erlitten hat. Nunmehr ist das Fernrohr in die entgegengesetzte Lage durchzuschlagen, der Winkelkreis um einige Grade zu versetzen und das Verfahren in gleicher Art wie in der ersten Lage desselben zu wiederholen. Nach Vollendung dieser Arbeit sind die Richtungen einmal aufgenommen.

Ist der Winkelkreis möglichst genau getheilt, hatte das Werkzeug einen gehörig festen Stand und waren die Beleuchtung und die sonstigen Witterungszustände günstig, so genügt in den meisten Fällen eine dreimal wiederholte Aufnahme in beiden Lagen des Fernrohrs für die Richtungen der dritten Ordnung.

Sind die mit dem Standpunkt dritter Ordnung in Verbindung stehenden Punkte vierter Ordnung nicht sehr zahlreich, so wird es die Messung auf die Punkte dritter Ordnung nicht merklich in die Länge ziehen, wenn die der vierten Ordnung in dem Kreise ihrer Messung gleich mit aufgenommen werden. Im anderen Falle können sie besonders behandelt werden, doch muss in ihrem Kreise wenigstens ein Punkt dritter Ordnung mit eingemessen werden, um den Anschluss des Netzes vierter Ordnung an das der dritten zu begründen.

Für Richtungen der vierten Ordnung, mögen sie auf Standpunkten der dritten oder der vierten Ordnung zu beobachten sein, wird bei gewöhnlicher Güte der Werkzeuge und mittleren Beobachtungsumständen die einmalige bis zweimalige Messung in beiden Lagen des Fernrohrs genügen.

Das Winkelregister kann für Dreiecksmessungen eine einfachere Einrichtung haben, wie für die Messung der Brechungswinkel in Umfangsvielecken (§ 3). Für sämmtliche in einem Dreieckspunkt zu beobachtende Richtungen hat der Feldmesser die Bequemlichkeit, seinen Standpunkt beibehalten zu können; er kann sich also dem Geschäft mit derjenigen Ruhe widmen, welche ihm gestattet, jedesmal für die beiden Ablesungen der Gradtheiler A und B in Gedanken das Mittel zu ziehen und nur dieses niederzuschreiben. Unter dieser Voraussetzung kann das Winkelregister die nachstehende einfache Einrichtung haben:

Standpunkt Ebenöde.

Reihenzahl der Beobachtung	Saalegge			Steinegge			Gohfeld			Rehme			u. s. w.		
	Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.
	Wagrechter Kreis. Unmittelbar beobachtete Richtungen.														
1	61	20	62	102	11	25	167	80	12	290	50	50			
2	265	31	00	306	22	75	371	92	25	94	61	00			
3	273	52	87	314	44	12	380	14	00	102	83	25			
4	81	02	50	121	94	75	187	64	12	310	34	37			
	Auf eine Richtung zurückgeführte Messung.														
1	0	00	00	40	90	63	106	59	50	229	29	88			
2	0	00	00	40	91	75	106	61	25	229	30	00			
3	0	00	00	40	91	25	106	61	13	229	31	38			
4	0	00	00	40	92	25	106	61	62	229	31	87			
4 fach	0	00	00	163	65	88	426	43	50	917	23	13			
1 fach	0	00	00	40	91	47	106	60	87	229	30	78			
	Höhenkreis.														
1. Lage des Fernrohrs	392	14	50	397	88	25	2	53	75	398	34	50			
2. Lage des Fernrohrs	207	90	25	202	16	50	197	51	25	201	70	75			
2. Scheitelbogen	215	75	75	204	28	25	194	97	50	203	36	25			
1. Scheitelbogen	107	87	87	102	14	12	97	48	75	101	68	12			

Gegen Irrthümer im Zielen und im Ablesen kann man sich schützen, wenn man beachtet, dass die Stände des drehbaren wagrechten Kreises einer folgenden Beobachtung von den entsprechenden einer vorhergehenden für sämmtliche Zielpunkte um eine bis auf unvermeidliche, kleine Fehler gleiche Bogenzahl abweichen. So sind z. B. die Abweichungen der Stände der 2ten Messung von denen der 1ten

bei dem Punkte	Saalegge	$= 204^0\ 10'\ 38''$
» » »	Steinegge	$= 204^0\ 11'\ 50''$
» » »	Gohfeld	$= 204^0\ 12'\ 13''$
» » »	Rehme	$= 204^0\ 10'\ 50''$

Ebenso nahe liegt das Sicherungsmittel bei der Beobachtung der Scheitelbogen. Nennen wir den Stand des Höhenkreises bei der ersten Beobachtung a, den bei der zweiten bei umgekehrter Lage des Fernrohrs b, den einfachen Scheitelbogen d und die Abweichung des Nullpunkts des Höhenkreises von dem seines Gradtheilers bei paralleler Lage des Fernrohrs zum wagrechten Kreise (den Collimationsfehler) $\varDelta$, so hat man

$$\begin{aligned} a &= R - d + \varDelta \\ b &= a + 2d \\ \hline d &= R + \varDelta - a \\ 2d &= 2R + 2\varDelta - 2a \\ \hline b &= 2R + 2\varDelta - a \\ a + b &= 2R + 2\varDelta \end{aligned}$$

Man braucht also nur die beiden Stände a und b zusammen zu rechnen, die Summe darf von zwei rechten Winkeln für über dem Standpunkt gelegene Ziele, von 6 Rechten für unter ihm gelegene Ziele nur um die doppelte Abweichung $\varDelta$ verschieden sein. So finden wir im vorstehenden Beispiel

die Summe beider Stände bei	Saalegge	$= 600^0\ 04'\ 75''$
» » » » »	Steinegge	$= 600^0\ 04'\ 75''$
» » » » »	Gohfeld	$= 200^0\ 05'\ 00''$
» » » » »	Rehme	$= 600^0\ 05'\ 25''$

und überdem die mittlere Abweichung $\varDelta = \frac{4'\ 94''}{2} = 2'\ 47''$.

Für Höhenbestimmungen mit Hülfe der gemessenen Scheitelbogen ist es übrigens nöthig, im Winkelbuche einen Vermerk über die Stelle des Zielkörpers, welche mit dem wagrechten Zielfaden des Fernrohrs angeschnitten ist, einzutragen, damit die Höhe dieser Stelle über der Sohle des Platzes, wenn sie nicht schon bekannt ist, durch Messung ermittelt werden kann, wenn der Feldmesser nach dem Platze kommt, um dort seine Winkelmessungen fortzusetzen. Auch muss bei jeder Winkelmessung der senkrechte Abstand der Drehungsachse des Fernrohrs über der Sohle des Standpunkts gemessen werden. Bezeichnet man den beobachteten Scheitelbogen mit d, den auf die Sohlen der beiden Plätze zurückgeführten mit d', die Höhe der Fernrohr-Achse über dem Standpunkt mit s, die des bezielten Körpers über dem Platze des Zielpunkts mit z, so hat man, wenn diese Höhen, wie die Entfernung beider Dreieckspunkte von einander, diese mit m bezeichnet, in demselben Maasse gegeben sind, hinreichend genau:

$$d' = d + \frac{z - s}{m \,.\, \mathrm{Sin}\, 1''} \quad \text{in Secunden,}$$

$$\text{oder auch } d' = d + \frac{63662\ (z - s)}{m} \quad \text{»} \quad \text{»}$$

Nicht immer kann die Mitte des Winkelwerkzeugs in die Lothlinie des Dreieckspunktes aufgestellt werden. Liegen die Punkte innerhalb geschlossener Bauten, z. B. in Kirchthürmen, Windmühlen, Warthürmen, Essen, Denkmälern u. dergl. m., so muss sich der Feldmesser begnügen, das Werkzeug seitwärts vom Mittelpunkt des Platzes aufzustellen, und es ist noch ein Glücksfall, wenn die Aufstellung in einem Fenster oder Schalloch so zu gewinnen ist, dass vom Werkzeug aus nach dem Mittelpunkt des Platzes gesehen und gezielt werden kann. In allen Fällen seitlicher Aufstellung liegt für die Messung der wagrechten Winkel die Aufgabe vor, die im Aufstellungspunkte gemessenen Winkel auf den Mittelpunkt des Platzes zurückzuführen. In dem zuletzt gedachten einfachsten Falle geschieht dieses zunächst durch Messung, dann durch Rechnung. Die Messung hat zunächst die Entfernung des Aufstellungspunkts vom Mittelpunkte des Platzes, oder genauer ausgedrückt, der Lothlinie der Winkelkreismitte von der Lothlinie des Dreieckspunktes mit Hülfe des Meterstabes kennen zu lernen. Sodann ist der Winkel zwischen der Richtung vom Werkzeug nach dem Mittelpunkte des Platzes und der Richtung nach einem der beobachteten Dreieckspunkte sonnenläufig zu messen. Letzteres geschieht, indem das Fernrohr zunächst nach dem Mittelpunkt des Platzes gerichtet und ein Gradtheiler abgelesen, sodann das Fernrohr nach dem Dreieckspunkte, am besten auf den im Winkelbuche zunächst stehenden gewandt und derselbe Gradtheiler ebenfalls abgelesen wird.

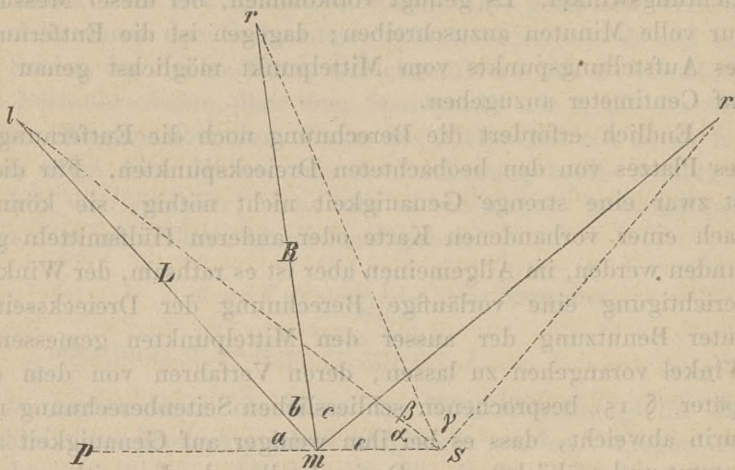
Der Unterschied beider Stände ergibt den sogenannten Richtungswinkel. Es genügt vollkommen, bei dieser Messung nur volle Minuten anzuschreiben; dagegen ist die Entfernung des Aufstellungspunkts vom Mittelpunkt möglichst genau bis auf Centimeter anzugeben.

Endlich erfordert die Berechnung noch die Entfernungen des Platzes von den beobachteten Dreieckspunkten. Für diese ist zwar eine strenge Genauigkeit nicht nöthig, sie können nach einer vorhandenen Karte oder anderen Hülfsmitteln gefunden werden, im Allgemeinen aber ist es rathsam, der Winkelberichtigung eine vorläufige Berechnung der Dreiecksseiten unter Benutzung der ausser den Mittelpunkten gemessenen Winkel vorangehen zu lassen, deren Verfahren von dem der später (§ 15) besprochenen schliesslichen Seitenberechnung nur darin abweicht, dass es bei ihm weniger auf Genauigkeit ankommt und 4, höchstens 5 Decimalstellen der Logarithmen dafür ausreichen.

Es ist noch vielfach im Gebrauch, bei Abhandlung der Regeln für die Zurückführung der ausser dem Mittelpunkte gemessenen Winkel auf denselben, die Fälle zu unterscheiden, wo der Mittelpunkt zwischen den Richtungen des Winkels im Aufstellungspunkte, oder dieser zwischen den Richtungen des Mittelpunktswinkels, oder endlich der Aufstellungspunkt so liegt, dass die eine oder die andere seiner Richtungen die eine oder die andere der vom Mittelpunkte ausgehenden Richtungen schneidet. Diese Unterscheidungen und das Anschauen der ihnen entsprechenden Figuren sind aber überflüssig, wenn man sich mit der nöthigen Aufmerksamkeit an die allgemeine Formel für die Uebertragung der Winkel aus einem Punkt in einen nahe gelegenen Punkt hält. Um diese abzuleiten, braucht man nur den Fall zu betrachten, wo die Richtungswinkel der Schenkel eines im Aufstellungspunkt gemessenen Winkels beide in einem der beiden ersten Quadranten des Kreises liegen.

Angenommen, es bezeichne in der Figur 22 m den Mittelpunkt des Platzes, s den Aufstellungspunkt des Werkzeugs, die Entfernung beider Punkte m von s sei $= e$, die Entfernungen der beiden Zielpunkte l und r vom Mittelpunkte seien L und R, α sei der Richtungswinkel für l, β der im Standpunkt s zwischen den Zielen l und r gemessene Winkel, b der gesuchte Winkel zwischen l und r im Mittelpunkte des Platzes,

Fig. 22.



bezeichne endlich a den Winkel zwischen der Verlängerung der Linie $s\,m$ und L, so hat man zunächst $\alpha + \beta$ für den Richtungswinkel nach dem Punkte r und sodann:

$$\begin{aligned} a &= \alpha + l \\ a + b &= \alpha + \beta + r \\ \hline \text{also} \quad b &= \beta - l + r \quad ^{*)}. \end{aligned}$$

Nun ist aber $\operatorname{Sin} l = \frac{e \operatorname{Sin} \alpha}{L}$

und $\operatorname{Sin} r = \frac{e \operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}{R}$.

Da aber der Feldmesser sich immer so nahe als möglich neben dem Mittelpunkte aufzustellen sucht, so folgt, dass die Winkel l und r immer sehr klein sind und ihre Bogenlängen ihren Sinus in Halbmessermaass gleich zu achten sind.

Um aber einen Sinus in Bogengradmaass, insbesondere in Neusecunden auszudrücken, hat man ihn nur mit $\operatorname{Sin} 1''$ zu theilen oder mit 63662 malzunehmen. Man kann also setzen:

$$l'' = \frac{e \operatorname{Sin} \alpha}{L \operatorname{Sin} 1''} = \frac{63662 \,.\, e \,.\, \operatorname{Sin} \alpha}{L}$$

$$r'' = \frac{e \operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}{R \operatorname{Sin} 1''} = \frac{63662 \,.\, e \operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}{R}$$

*) l und r für die kleinen Winkel zwischen dem Aufstellungspunkt und dem Mittelpunkte genommen.

und hat schliesslich:

$$b = \beta - \frac{e \operatorname{Sin} \alpha}{L \operatorname{Sin} 1''} + \frac{e \operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}{R \operatorname{Sin} 1''}$$

oder
$$b = \beta - 63662 \,.\, e \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{L} + 63662 \,.\, e \frac{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}{R}.$$

Da die Längenmaasse e, L, R vom Mittelpunkt nach dem Standpunkt und nach den Zielen l und r im bejahenden Sinne zu nehmen sind, so folgt, dass das Zeichen jedes Gliedes der Formel sich nur ändern kann, wenn die Richtungswinkel α oder $\alpha + \beta$ in den dritten oder vierten Quadranten übergehen.

Die Grösse $63662 \times e$ ist beiden Gliedern gemeinschaftlich, braucht also nur einmal berechnet zu werden. Dieser Umstand gewährt eine nicht unerhebliche Erleichterung, wenn von einem Standpunkt aus noch mehr Ziele beobachtet sind. Für drei Ziele, deren Entfernungen vom Mittelpunkte man E_1, E_2, E_3 schreiben möchte, könnte man also zunächt berechnen:

$$63662 \,.\, e = k$$

und dann der Reihe nach

$$k \,.\, \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{E_1}, \quad k \frac{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}{E_2}, \quad k \frac{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta + \gamma)}{E_3}$$
$$= \varphi_1 \qquad\quad = \varphi_2 \qquad\qquad = \varphi_3$$

und man fände die Verbesserung des Winkels

zwischen E_1 und $E_2 = -\varphi_1 + \varphi_2$
» E_1 und $E_3 = -\varphi_1 + \varphi_3$
» E_2 und $E_3 = -\varphi_2 + \varphi_3$

Um dieses Verfahren an einem Zahlenbeispiel anschaulich zu machen, werde angenommen, die vier oben betrachteten Richtungen Saalegge, Steinegge, Gohfeld und Rehme seien neben dem Mittelpunkte des Platzes Ebenöde gemessen; die Entfernung des Mittelpunktes vom Standpunkte habe 2,53 Meter, die

vom	Ziel	Saalegge	5344	Meter
»	»	Steinegge	6250	»
»	»	Gohfeld	3162	»
»	»	Rehme	1883	»

betragen und der Richtungswinkel nach Saalegge sei $82^0\,57'$ gefunden.

Es würden nun der Reihe nach die Richtungswinkel sein:

1) für Saalegge $82^0\,57' + 0^0\,00' = 82^0\,57'$
2) » Steinegge $82^0\,57' + 40^0\,91' = 123^0\,48'$
3) » Gohfeld $82^0\,57' + 106^0\,61' = 189^0\,18'$
4) » Rehme $82^0\,57' + 229^0\,31' = 311^0\,88'$

und wäre zunächst zu berechnen:

Log 63662 = 5.80388
Log 2,53 = 0.40312

	Saalegge	Steinegge	Gohfeld	Rehme
	6.20700	6.20700	6.20700	6.20700
Log Sinus des Richtungswinkels =	9.98351	9.96977	9.22825	9.99239_n
Ergänzung des Log der Entfernung =	6.27213	6.20412	6.50004	6.72515
	2.46264	2.38089	1.93529	2.92454
	$+2'90''$,	$+2'40''$,	$+0'86''$,	$-8'40''$
	$-2'90''$	$-2'90''$	$-2'90''$	$-2'90''$
	0,00	$-0,50$	$-2,04$	$-11,30$
Gemessen =	$0^0 00' 00''$,	$40^0 91' 47''$,	$106^0 60' 87''$,	$229^0 30' 78''$
Auf den Mittelpunkt zurückgeführt =	$0^0 00' 00''$,	$40^0 90' 97''$,	$106^0 58' 83''$,	$229^0 19' 48''$

Der Abzug des für Saalegge gefundenen Werthes $2'\,90''$ von den Rechnungsergebnissen der drei anderen Richtungen entspricht dem abzüglichen Zeichen (—) vor dem ersten Gliede der obigen Formel sowie dem Umstande, dass die Richtungen sämmtlicher Ziele durch ihre Winkel mit dem ersten Ziel Saalegge bestimmt sind.

Es empfiehlt sich im Allgemeinen, die Endergebnisse sämmtlicher entweder in den Mittelpunkten der Plätze bewirkter oder auf sie zurückgeführter Winkelmessungen so zu ordnen, dass jede in einem Dreieckspunkt beobachtete Richtung durch den Winkel zwischen ihr und einer für sämmtliche Richtungen gemeinschaftlichen Richtung bestimmt werde und dass die Winkelwerthe ebenso sonnenläufig wachsen, wie der benutzte Winkelkreis getheilt ist. Jeden beliebigen Dreieckswinkel findet man dann einfach durch Abzug der beiden Winkelwerthe seiner Schenkel. Die Endergebnisse des vorstehenden Beispiels werden also wie folgt zu ordnen sein:

Kreisverzeichniss.

Standpunkt	Ziel	Winkel gegen die gemeinschaftliche Richtung		
		Grad	Min.	Sec.
Ebenöde	Saalegge	0	00	00
	Steinegge	40	90	97
	Gohfeld	106	58	83
	Rehme	229	19	48

Hinsichtlich des Verfahrens bei Zurückführung der neben dem Mittelpunkte eines Platzes gemessenen Winkel auf denselben ist noch nachzutragen, dass in den Fällen, wo aus dem Aufstellungspunkt nicht nach dem Mittelpunkte gesehen und gemessen werden kann, ein zusammengesetzteres Verfahren sowohl bei der Messung des Richtungswinkels als auch bei jener der Entfernung beider Punkte von einander anzuwenden ist.

Gewöhnlich werden nur solche Bauwerke zu Dreieckspunkten gewählt, welche entweder eine scharfe Spitze, wie z. B. Kirchthürme, oder regelmässige Gestalten haben, wie z. B. Windmühlen, Wartthürme, Essen, deren senkrechte Achsen dem fernen Beobachter in der Mitte des Bildes erscheinen.

Nimmt der Feldmesser die Stellung seines Werkzeugs ausserhalb des Bauwerks, so muss er im ersten Falle die Spitze, im anderen Falle die beiden Aussengrenzen des Bauwerks beobachten können. Ist der Bau rund, so gibt er dem Fernrohr die Richtung zunächst nach der linksseitigen, dann nach der rechtsseitigen Berührungslinie, endlich nach dem Ziele eines Dreieckspunkts, liest einen Gradtheiler bei jedem der drei Stände ab, zieht die Grade und Minuten des ersten Standes von jedem der beiden folgenden ab, halbirt die Summe der beiden Reste und findet damit den Richtungswinkel des beobachteten Dreieckspunktes.

In diesem Falle ist auch die Entfernung des Aufstellungspunktes vom Mittelpunkte des Platzes ohne grosse Schwierigkeit zu bestimmen. Kann man den Umfang des Gebäudes messen, so hat man aus demselben den Halbmesser zu berechnen und dessen Länge der Entfernung des Aufstellungspunktes vom nächsten Punkte des Thurmes zuzurechnen. Kann aber der Umfang wegen örtlicher Hindernisse nicht gemessen werden, so muss die Entfernung zwischen dem Aufstellungs- und Mittelpunkt vermittelst der Entfernung des ersteren vom nächsten Punkte des runden Baues und des Winkels zwischen den beiden Berührungslinien durch Rechnung ermittelt werden. Angenommen, der Halbmesser des Thurmes sei $= r$, die Entfernung des Aufstellungspunktes vom nächsten Punkte des Thurmes $= a$, die Länge einer der beiden Berührungslinien $= t$, der Winkel zwischen den beiden Berührungslinien $= \alpha$, so hat man:

$$t = (a + r) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha$$

und $$a : t = t : a + 2r$$

oder $$t^2 = a^2 + 2ar = (a + r)^2 \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \alpha = (a + r)^2 - (a + r)^2 \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \alpha$$

also $$(a + r)^2 \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \alpha = r^2$$

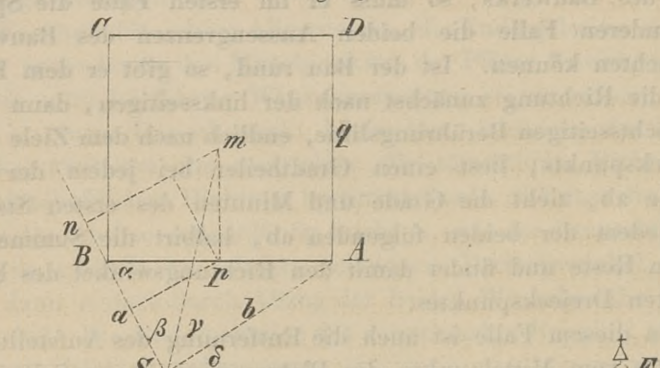
$$(a + r) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \alpha = r$$

daraus $$r = \frac{a \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \alpha}{1 - \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \alpha}$$

endlich $$a + r = \frac{a}{1 - \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \alpha}$$ = der Entfernung des Aufstellungspunktes vom Mittelpunkte des Platzes.

Die Rechnung nach der letzteren Formel ist sehr einfach, wenn man eine Tafel der natürlichen Sinuslängen zur Hand hat.

Fig. 23.



Umständlicher ist die Bestimmung des Richtungswinkels und der Entfernung bei kantigen Bauwerken. Müsste der Feldmesser sein Werkzeug beispielsweise neben einem Thurm von quadratförmigem Querschnitt aufstellen, etwa im Punkte s der Fig. 23, von wo die beiden Kanten A und B des Thurmes $ABCD$ sowohl gesehen als auch durch Messung mit dem Stabe erreicht werden können; könnte auch eine Seite des Thurmes AB oder $AD = q$ gemessen werden, so erhielte man durch Messung $AB = q$; $ap = pm = \frac{1}{2} q$; $sB = a$, $sA = b$ und den Winkel $BsA = \beta + \gamma$ und $AsE = \delta$ zwischen der Kante A und dem Dreieckspunkte E. Zur Zurückführung der im Aufstellungspunkte s nach den umliegenden Dreieckspunkten gemessenen Winkel auf den Mittelpunkt m bedürfen wir des Richtungswinkels $\gamma + \delta$ und der Entfernung von s nach m, welche wie folgt durch Rechnung gefunden werden:

Zunächst hat man $AB : \text{Sin}\,(\beta + \gamma) = As : \text{Sin}\,\alpha$

mithin $\text{Sin}\,\alpha = \frac{b}{q}\,\text{Sin}\,(\beta + \gamma)$

sodann $mn = \frac{1}{2} q\,\text{Sin}\,\alpha + \frac{1}{2} q\,\text{Cos}\,\alpha$

und $sn = a - \frac{1}{2} q\,\text{Cos}\,\alpha + \frac{1}{2} q\,\text{Sin}\,\alpha$

also $$\text{Tang}\,\beta = \frac{\frac{1}{2} q\,(\text{Sin}\,\alpha + \text{Cos}\,\alpha)}{a + \frac{1}{2} q\,(\text{Sin}\,\alpha - \text{Cos}\,\alpha)}.$$

Ist so der Winkel β gefunden, so erhält man γ durch Abzug des Winkels β von dem gemessenen Winkel $\beta + \gamma$, und den Richtungswinkel für E durch Zusammenrechnung von γ und δ, endlich die Entfernung $s\,m$ durch:

$$s\,m = \frac{s\,n}{\text{Cos}\,\beta}$$

Es ist auch schon vorgekommen, dass Feldmesser sich genöthigt sahen, neben dem Aufstellungspunkt für die Messung der Dreieckswinkel noch in einem zweiten Punkt Stellung zu nehmen, die Entfernung beider Punkte von einander mit dem Stabe zu messen, auch die Winkel, welche die Richtungen nach der Spitze oder der Achse des Thurmes an beiden Punkten mit der gemessenen Grundlinie einschlossen, und durch Berechnung des so gebildeten Hülfsdreiecks aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln die Entfernung des ersteren Aufstellungspunktes vom Mittelpunkte des Platzes zu ermitteln.

Es würde zu weit führen, noch mehr besondere Fälle beispielsweise zu behandeln. Der Feldmesser wird im Vorstehenden Fingerzeige genug finden, um ihn in jedem vorkommenden Falle den zweckmässigsten Weg zur Uebertragung der gemessenen Winkel einschlagen zu lassen. Es erübrigt nur noch die allgemeine Bemerkung, dass man wohl thut, mit dem Aufstellungspunkte dem Mittelpunkte des Platzes so nahe als möglich zu bleiben, die Uebertragung lieber ganz zu unterlassen, wenn wegen der umgebenden Hindernisse das Werkzeug so weit von dem Mittelpunkte entfernt werden müsste, dass es nicht mehr zulässig wäre, die in Sinuslängen gefundenen Uebertragungsstücke durch Malnahme mit 63662 in Gradmaass zu verwandeln, und sich lieber damit zu begnügen, die mit solchen Hindernissen umgebenen Plätze durch blosses Einschneiden von den Nachbarpunkten zu bestimmen.

Als Grund für diese Vorsichtsmaassregel braucht nur daran erinnert zu werden, dass die Entfernungen der Mittelpunkte der Plätze von den Zielpunkten nur annähernd bekannt sind und die ihnen beiwohnende Unsicherheit in dem Maasse an Einfluss gewinnt, je grösser die Entfernung des Mittelpunktes vom Aufstellungspunkte ist.

§ 14.

Längenermittelung einer Grundlinie.

Eisenbahnen und andere Kunststrassen haben im Laufe unseres Jahrhunderts eine so grosse Verbreitung gefunden, dass der mit der Vermessung eines Amtsbezirks betraute Feldmesser nicht leicht eine Strecke vermissen wird, welche in gerader Linie lang genug und zugleich hinreichend ausgeebnet ist, um mit der nöthigen Sicherheit die Längenmessung einer Grundlinie für sein Dreiecksnetz auf ihr vornehmen zu können.

Wo es gleichwohl an solchen künstlich geebneten Strecken mangelt, da wird eine wagrecht gelegene Niederung, eine Wiesen-, Weiden-, Heideflur oder eine gleichmässig sich senkende und leicht auf die wagrechte Ebene zurückführbare Thalfläche auszuersehen sein, um eine gerade Linie von etwa einem Kilometer Länge darin abzustecken und zu einer Grundlinie für das Dreiecksnetz zu bestimmen.

Die Messung der Länge einer solchen Linie erheischt nicht den Aufwand von Arbeit und Kosten, welcher von sogenannten Basismessungen für geographische Netze erster und zweiter Ordnung in Anspruch genommen wird. Für Dreiecke dritter und vierter Ordnung genügt es, wenn der Feldmesser sich überzeugt, dass die von ihm abgesteckte gerade Linie wagrecht liegt oder auf die wagrechte Ebene zurückgeführt ist, und wenn er ihre Länge mit wohl geaichten, im § 2 beschriebenen Messlatten von 5 Meter Länge so gemessen hat, dass drei solcher Latten immer in der Linie liegen, während die vierte fortbewegt und so behutsam vorgelegt wird, dass die drei liegenden Latten keine Erschütterung erleiden, auch die geradlinige Lage der Latten nöthigenfalls durch streckenweises Abschnüren der geraden Linie gesichert, auch die Messung der ganzen Grundlinie in entgegengesetzter Richtung wiederholt wird und der Unterschied der gefundenen Längen nicht mehr als $\frac{1}{5000}$ oder zwei Decimeter auf ein Kilometer beträgt.

Die gemessene Grundlinie muss mit Dreiecken oder einer Reihe von Dreiecken in Verbindung gesetzt werden, von denen wenigstens eins unmittelbar an eine Dreiecksseite des Gesammtnetzes sich anschliesst.

In den seltensten Fällen wird der Feldmesser sich genöthigt sehen, eine Grundlinie zu messen. Wo sich eine Verwaltungsbehörde entschliesst, ganze Gemeinde- oder Amtsbezirke vermessen zu lassen, da werden auch fast immer Anschlüsse an Dreiecksmessungen höherer Ordnung zu gewinnen sein, von denen aus sowohl die Längen der Dreiecksseiten niederer Ordnung, als auch die Neigungswinkel derselben gegen die zum Anhalt genommene Mittagslinie eines Hauptpunktes abgeleitet werden können.

Können zwei Dreieckspunkte höherer Ordnung von einem Punkte niederer Ordnung in solcher Lage gesehen werden, dass die drei Punkte ein Dreieck von nicht zu spitzen Winkeln bilden, und kann mit einer seiner Seiten ein zweiter dem ersten benachbarter Punkt niederer Ordnung zu einem zweiten Dreieck verbunden werden, so bedarf die vorgedachte Ableitung nur der Berechnung dieser beiden Dreiecke. Umständlicher ist dagegen das Verfahren, wenn die Punkte höherer Ordnung so weit aus einander liegen, dass der Zweck mit dem vorerwähnten unmittelbaren Herabsteigen von den Punkten der höheren auf die der niederen Ordnung nicht füglich ausführbar ist. Der Feldmesser wird sich dann genöthigt sehen, von dem einen der gegebenen Punkte höherer Ordnung nach dem anderen eine Kette von Dreiecken niederer Ordnung auszuwählen und zu beobachten und sich der Aufgabe zu unterziehen, lediglich mit Hülfe der Winkel dieser Dreiecke das Verhältniss zwischen der Entfernung der beiden Punkte höherer Ordnung und der Länge einer Dreiecksseite niederer Ordnung zu entwickeln. Er nimmt zu diesem Zwecke willkürlich oder nach Abschätzung diese Länge vorläufig zu einem gewissen Maasse an, berechnet, dieses als Maass einer Grundlinie betrachtend, die Längen sämmtlicher Seiten jener Dreieckskette, bildet daraus ein Vieleck, in welchem die beiden Punkte höherer Ordnung einander gegenüberstehen, berechnet gegen eine willkürlich anzunehmende oder bequemer mit einer Dreiecksseite zusammenfallende Abstandsachse die Abschnitte und Abstände sämmtlicher Dreieckspunkte. Dadurch erhält er die Abstände und Abschnitte für die beiden Punkte höherer Ordnung in dem angenommenen Maasse, kann also in demselben auch die Entfernung beider Punkte durch Berechnung der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ausdrücken. Findet er auf diese Weise das Verhältniss zwischen dem angenommenen und dem durch das höhere Netz bekannten wahren Längenmaass der Entfernung der beiden Punkte dieses Netzes, so kennt er es auch für die zur Grundlinie benutzte Dreiecksseite niederer Ordnung.

In dem nächsten § wird dieses Verfahren durch ein Zahlenbeispiel erläutert.

§ 15.

Berechnung der Dreiecke.

In den Dreiecken werden in der Regel alle drei Winkel gemessen und nur in dem im § 13 erwähnten Ausnahme-Fall, wo einer der drei Punkte für den Winkelmesser unzugänglich ist, hat man sich mit zwei gemessenen Winkeln zu begnügen, deren Summe gleichen Sinus mit dem dritten Winkel hat.

Die Berechnung der Dreiecksseiten beginnt an der gemessenen oder abgeleiteten Grundlinie; mit ihr und den drei Winkeln des auf ihr ruhenden Dreiecks werden die beiden anderen Seiten desselben berechnet, welche demnächst wieder als Grundlinien anderer auf ihnen ruhender Dreiecke betrachtet werden, um die Seiten der letzteren zu berechnen, und so schreitet die Rechnung von Dreieck zu Dreieck fort, bis die Längen sämmtlicher Seiten gefunden sind.

Mit der bekannten Länge einer Dreiecksseite findet man die Länge einer der anderen Seiten, wenn man den Sinus des dieser Seite gegenüberstehenden Winkels mit dem Sinus des Gegenwinkels der bekannten Seite theilt und mit der Länge der letzteren malnimmt. Bezeichnet man die drei Eckpunkte eines Dreiecks, sowie die an ihnen befindlichen Winkel mit a, b, c, so hat man, wenn $b\,c$ die bekannte Seite ist, für $a\,b$ und $a\,c$ die Formeln:

$$a\,b = b\,c\,\frac{\text{Sin}\ c}{\text{Sin}\ a}, \quad a\,c = b\,c\,\frac{\text{Sin}\ b}{\text{Sin}\ a}.$$

Für die logarithmische Ausführung der Rechnung schreibt man diese Formeln bequemer:

$$a\,b = \frac{b\,c}{\text{Sin}\ a}\,.\,\text{Sin}\ c\,,\ a\,c = \frac{b\,c}{\text{Sin}\ a}\,.\,\text{Sin}\ b.$$

Dabei ist $\frac{b\,c}{\text{Sin}\ a}$ für beide Rechnungen ein beständiger Malnehmer, der, für die erste Rechnung einmal gebildet, unverändert für die zweite benutzt werden kann. So unbedeutend die Abweichung in der Schreibart der Formeln ist, so hat sie doch zu einer Verschiedenheit im Rechnungsansatze geführt, die nicht ganz unerheblich ist. Nach der ersten Schreibart setzt man nämlich:

Log $b\,c$ =	Log $b\,c$ =
Log Sin c =	Log Sin b =
10 — Log Sin a =	10 — Log Sin a =
Log $a\,b$ =	Log $a\,c$ =

nach der zweiten Schreibart:

Log $b\,c$ — Log Sin a =	
Log Sin a =	Log $b\,c$ =
Log Sin b =	Log $a\,c$ =
Log Sin c =	Log $a\,b$ =

Ein Zahlenbeispiel wird die Verschiedenheit beider Ansätze deutlich machen.

Gesetzt, die Seite $b\,c$ sei = 3125 Meter, der Winkel a =

$57^0\,82'$, $b = 72^0\,35'$, $c = 69^0 83'$, so hat man nach dem ersten Ansatz:

$$\begin{array}{rlrl}
\text{Log } bc & = 3{,}49485 & = & 3{,}49485 \\
\text{Log Sin } c & = 9{,}94930\ , & \text{Log Sin } b & = 9{,}95769 \\
10 - \text{Log Sin } a & = 0{,}10327\ , & 10-\text{Log Sin } a & = 0{,}10327 \\
\hline
\text{Log } ab & = 3{,}54742\ , & \text{Log } ac & = 3{,}55581 \\
ab & = 3527{,}1 & ac & = 3559{,}9
\end{array}$$

nach dem zweiten Ansatz:

$$\text{Log}\, bc - \text{Log } a = 3{,}59812$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Log Sin}\, a = 9{,}89673\ , & \text{Log}\, bc = 3{,}49485\ , & bc = 3125 \\
\text{Log Sin}\, b = 9{,}95769\ , & \text{Log}\, ac = 3{,}55581\ , & ac = 3559{,}9 \\
\text{Log Sin}\, c = 9{,}94930\ , & \text{Log}\, ab = 3{,}54742\ , & ab = 3527{,}1
\end{array}$$

Bei dem ersten Ansatz hat man also 58, bei dem zweiten nur 42 logarithmische Ziffern zu schreiben, bei dem ersten drei, bei dem zweiten nur zwei Logarithmen für jede der beiden zu berechnenden Seiten zusammenzuziehen, das Abziehen des Log Sin a von Log $b\,c$ macht ebenso wenig Mühe, als das Abziehen des Log a von 10, überdem muss letzterer Rest zweimal geschrieben werden, endlich ist der zweite Ansatz übersichtlicher als der erste, jeder Winkel steht der Seite zwischen den beiden anderen Punkten gegenüber.

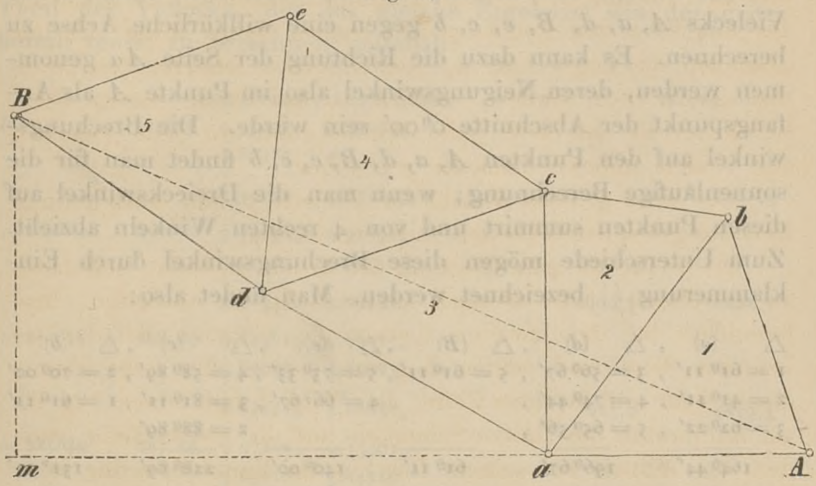
Bei einer grossen Anzahl von Dreiecken sind auch geringe Rechnungsbequemlichkeiten nicht unwichtig.

Es ist für die gute Ordnung der Arbeit nützlich, sich daran zu gewöhnen, jedes Dreieck sonnenläufig zu umfahren, insbesondere bei dem zweiten Ansatze den Gegenwinkel der bekannten Seite und seinen Log Sin, sowie den Logarithmus dieser Seite auf die erste Zeile, den Winkel und seinen Log Sin am Endpunkte des linken Schenkels auf die zweite Zeile, endlich den Winkel mit seinem Log Sin am Endpunkte des rechten Schenkels auf die dritte Zeile zu setzen. Es erübrigt dann nur, den ersten Log Sin von dem rechts neben ihm stehenden Logarithmus der gegebenen Seite abzuziehen und den Rest über ersteren zu setzen, so dass er bequem zum Log Sin des zweiten, demnächst zu dem des dritten Winkels gerechnet werden kann, um die Logarithmen der ihnen gegenüberliegenden Seiten zu finden. Manche finden es bequemer, den logarithmischen Rest Log $b\,c$ — Log Sin a auf ein besonderes Blättchen zu schreiben, um damit noch bequemer die Summirung zu Log Sin b und Log Sin c bewirken zu können. Immer aber ist es rathsam, vor dieser Summirung jenen Rest auch zum Log Sin a zu zählen, um sich zu versichern, dass der Rest ohne Fehler gebildet ist, dass nämlich Log bc genau dabei zum Vorschein kommt.

Nunmehr kann das im § 14 versprochene Zahlenbeispiel der Ableitung einer Grundlinie für das Netz niederer Ordnung aus der gegebenen Entfernung zweier Punkte höherer Ordnung ausgeführt werden. Es reicht dazu hin, dass diese beiden Punkte nur in Abständen und Abschnitten der Hauptachse des höheren Netzes gegeben sind, weil in diesem Falle sowohl die Entfernung beider Punkte von einander, als auch ihre Neigung gegen die Hauptachse durch die Auflösung eines rechtwinkligen Dreiecks leicht gefunden werden kann.

Gesetzt, in der Figur 24 sei für die Linie von A nach B aus dem höheren Netz die Entfernung = 21236 Meter, die

Fig. 24.



Neigung zur Abstandsachse = $345^0 76'$ bekannt und man habe in jedem der 5 zwischen ihnen angelegten Dreiecke sämmtliche Winkel gemessen, auf 200^0 ausgeglichen und hier der Kürze wegen auf volle Minuten abgerundet. Zunächst würden die Seiten dieser Dreiecke mit der etwa auf $\frac{1}{3}$ von AB geschätzten Länge der Seite Aa oder mit 7000 Meter zu berechnen sein, nämlich:

				3·93174
	b,	$61^0\ 11'$,	9·91336,	3·84510
1.	*a*,	$61^0\ 11'$,	9·91336,	3·84510
	A,	$77^0\ 78'$,	9·97299,	3·90473

				3·91138
	c,	$88^0\ 89'$,	9·99335,	3·90473
2.	*a*,	$41^0\ 11'$,	9·77945,	3·69083
	b,	$70^0\ 00'$,	9·94988,	3·86126

				3·97074
	d,	$56^0\ 67'$,	9·89052,	3·86126
3.	*c*,	$81^0\ 11'$,	9·98059,	3·95133
	a,	$62^0\ 22'$,	9·91856,	3·88930

				3·95176
	e,	$66^0\ 67'$,	9·93754,	3·88930
4.	*c*,	$58^0\ 89'$,	9·90235,	3·85411
	d,	$74^0\ 44'$,	9·96401,	3·91577

				3·94075
	B,	$61^0\ 11'$,	9·91336,	3·85411
5.	*e*,	$73^0\ 33'$,	9·96072,	3·90147
	d,	$65^0\ 56'$,	9·93308,	3·87383

Es ist unnöthig, die Zahlenwerthe für die Seiten anzugeben, da ihre Logarithmen genügen.

Es ist nun erforderlich, die Abschnitte und Abstände des Vielecks *A*, *a*, *d*, *B*, *e*, *c*, *b* gegen eine willkürliche Achse zu berechnen. Es kann dazu die Richtung der Seite *Aa* genommen werden, deren Neigungswinkel also im Punkte *A* als Anfangspunkt der Abschnitte $0^0\,00'$ sein würde. Die Brechungswinkel auf den Punkten *A*, *a*, *d*, *B*, *e*, *c*, *b* findet man für die sonnenläufige Berechnung, wenn man die Dreieckswinkel auf diesen Punkten summirt und von 4 rechten Winkeln abzieht. Zum Unterschiede mögen diese Brechungswinkel durch Einklammerung ( ) bezeichnet werden. Man findet also:

△ (*a*)	△ (*d*)	△ (*B*)	△ (*e*)	△ (*c*)	△ (*b*)
$1 = 61^0\ 11'$,	$3 = 56^0\ 67'$,	$5 = 61^0\ 11'$,	$5 = 73^0\ 33'$,	$4 = 58^0\ 89'$,	$2 = 70^0\ 00'$
$2 = 41^0\ 11'$,	$4 = 74^0\ 44'$,		$4 = 66^0\ 67'$,	$3 = 81^0\ 11'$,	$1 = 61^0\ 11'$
$3 = 62^0\ 22'$,	$5 = 65^0\ 56'$,			$2 = 88^0\ 89'$	
$164^0\ 44'$	$196^0\ 67'$	$61^0\ 11'$	$140^0\ 00'$	$228^0\ 89'$	$131^0\ 11'$
$235^0\ 56'$	$203^0\ 33'$	$338^0\ 89'$	$260^0\ 00'$	$171^0\ 11'$	$268^0\ 89'$
(*a*)	(*d*)	(*B*)	(*e*)	(*c*)	(*b*)

△ (*A*)
$1 = 77^0\ 78'$.
$322^0\ 22'$
(*A*)

Es genügt nun für den beabsichtigten Zweck, nur die Unterschiede der Abstände und Abschnitte zu berechnen und diese zwischen den Punkten *A* und *B* zusammenzuziehen nämlich:

	α	Log S.Sin α	Log S.Cos α	$+\Delta y-$,	$+\Delta x-$
A.	0°00′	0.00000	10.00000		
			3.84510		
			3.84510	0	7000,0
a. 235° 56′ ,	35.56	9.72426	9.92840		
		3.95133	3.95133		
		3.67559	3.87973	4737,9	7581,0
d. 203° 33′ ,	38.89	9.75860	9.91336		
		3.90147	3.90147		
		3.66007	3.81483	4571,7	6528,3
B. 338° 89′ ,	177.78				
				+9309,6 ,	+21109,3

Bis dahin würden schon die Mittel vorhanden sein, wenn man sicher sein könnte, dass kein Rechnungsfehler untergelaufen wäre. Um diese Sicherheit zu erlangen, ist auch der zweite Theil des Vielecks, der das gleiche Ergebniss wie der erste liefern muss, zu berechnen, nämlich:

	α	Log S Sin α ,	Log$S$ Cos α ,	$+\Delta y$	$-$,	$+\Delta x-$
B.	177°78′	9.53401	9 97299$_n$			
		3.87383	3.87383			
		3.40784	3.84682$_n$	2557′,7		7027,9
e. 260° 00′ ,	237.78	9.74758$_n$	9.91856$_n$			
		3.91577	3.91577			
		3.66335$_n$	3.83433$_n$		4606,3	6828,7
c. 171°11′ ,	208.89	9.14361$_n$	9.99575$_n$			
		3.69083	3.69083			
		2.83444$_n$	3.68658$_n$		683,0	4859,3
b. 286°89′ ,	277.78	9.97299$_n$	9.53401$_n$			
		3.84510	3.84510			
		3.81809$_n$	3.37911$_n$		6578,0	2393,4
A. 322°22′ ,	90.00			+2557,7 ,	−11867,3	−21109,3
					+ 2557,7	
					− 9309,6	

Beide Theile des Vielecks ergeben also übereinstimmend $Bm = 9309{,}6$ und $Am = 21109{,}3$ Meter. Es kann daher jetzt die Entfernung von A nach B wie folgt berechnet werden:

3) Log Tang *BAm*	= Log Tang $26^0 44'$	= 9.64445
1) Log *Bm*	= Log 9309,6	= 3.96893
2) Log *Am*	= Log 21109,3	= 4.32447
4) Log Cos *BAm*	= Log Cos $26^0 44'$	= 9.96141
5) Log *AB*	= Log 23070,7	= 4.36306
6) Verglichen mit Log 21236		= 4.32707 = dem Log der wahren Länge *AB*
7) Verwandlungs-Logarithmus		= 9.96401
8) Log *Aa* = Log 7000		= 3.84510
9) Log *Aa* = 6442,3		= 3.80911 = Log der wahren Länge *Aa*

Die Neigung der Linie *AB* gegen die Abstandsachse war gegeben $345^0 76'$
davon Winkel *BAm* $26^0 44'$
findet sich $319^0 32'$ = der Neigung der Linie *Aa* gegen dieselbe Achse.

Man wolle bemerken, dass die Rechnung in der Reihe der vorgesetzten Ziffern fortschreitet, dass der Logarithmus auf der dritten Zeile (2) von dem auf der zweiten Zeile (1) abgezogen, der Rest, nämlich Log Tang *BAm* oben in die erste Zeile (3) gesetzt wird. Neben dem Log Tang *BAm* findet sich dann in der Tafel der Log Cos *BAm*, welcher, von Log *Am* abgezogen, den Log *AB* übrig lässt. Die Fortsetzung der Rechnung bedarf keiner Erläuterung.

Hätte der Feldmesser den Winkel *BAa* gemessen, so könnte er die Richtung *AB* zur Abstandsachse wählen und damit die Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks *BAm* ersparen.

Ist der zu vermessende Bezirk so gross, dass einige Dreiecke dritter Ordnung gelegt werden mussten, so müssen diese zunächst berechnet werden, um sowohl für die Längen der Seiten als für die Abstände und Abschnitte des Dreiecksnetzes vierter Ordnung die nöthigen Anschlüsse zu gewähren.

Das Verfahren der Berechnung der Dreiecke dritter Ordnung braucht sich nicht von dem für die vierte Ordnung zu unterscheiden. Wohl würden für die letzteren sechsstellige Logarithmen ausreichen, aber so lange wir nicht Logarithmen-und Logarithmensinustafeln, letztere für hunderttheilige Quadranten mit sechs Stellen besitzen, würde die Beschränkung der Rechnung auf sechs Decimalstellen einen geringen, vielleicht durch die Gefahr, sich leichter irren zu können, aufgehobenen Vortheil gewähren. Für jetzt erscheint es also unnöthig, in der Darstellung des Rechnungsverfahrens für beide Dreiecksordnungen einen Unterschied zu machen.

Das erste Geschäft des Dreiecksrechners besteht in der Vertheilung der unvermeidlichen, wenn auch kleinen Winkelvermessungsfehler. Diese Fehler offenbaren sich in der Verletzung dreier Bedingungen, nämlich:

der ersten Bedingung, wonach die Summe der Winkel an einem Punkte, der einer Reihe von ihn umschliessenden Dreiecken gemeinschaftlich ist, vier rechten Winkeln gleich sein sollte;

der zweiten Bedingung, wonach die drei Winkel eines jeden Dreiecks zusammen genommen zwei rechte Winkel ausmachen sollten;

der dritten Bedingung, wonach die Berechnung einer Reihe von Dreiecken bei ihrer Rückkehr zu einer früher gefundenen Seite für diese dieselbe Länge nachweisen sollte.

Die erste und zweite Bedingung bedürfen keiner näheren Erläuterung. Weniger einfach gestalten sich die Fälle der dritten Bedingung. Am übersichtlichsten hiervon ist derjenige Fall, wo, wie bei der ersten Bedingung, eine Reihe von Dreiecken einen ihnen gemeinschaftlichen Punkt vollständig umschliessen, wo dann die Dreiecksseiten, welche sich in diesem Punkte vereinigen, wie die freilich ungleich langen Speichen eines Rades erscheinen. Geht die Rechnung von einer dieser Seiten aus, so wird die nächstfolgende gefunden, indem man die erstere mit dem Sinus ihres Gegenwinkels theilt und mit dem Sinus des Gegenwinkels der gesuchten Seite malnimmt. Und so kann man, um im obigen Bilde zu bleiben, von einer Speiche des Rades zur folgenden fortschreiten und zu der anfänglichen zurückkehren.

Bestände beispielsweise die Dreiecksreihe aus fünf Dreiecken, bezeichnete man die Umfangspunkte mit 1, 2, 3, 4, 5, den gemeinschaftlichen Punkt mit 6, das Dreieck 2.6.1 mit I, 3.6.2 mit II, 4.6.3 mit III, 5.6.4 mit IV und 1.6.5

mit V, endlich noch die Winkel an den Punkten 1 . 2 . 3 . 4 . 5 mit den angehängten Dreiecksziffern, z. B. den Winkel 6 . 1 . 5 mit 1_V, den Winkel 6 . 1 . 2 mit 1_I, den Winkel 1 . 2 . 6 mit 2_I, den Winkel 6 . 2 . 3 mit 2_{II} u. s. w., so wäre die Rundrechnung:

$$6 . 2 = \frac{6 . 1 . \operatorname{Sin} 1_I}{\operatorname{Sin} 2_I}$$

$$6 . 3 = \frac{6 . 2 . \operatorname{Sin} 2_{II}}{\operatorname{Sin} 3_{II}}$$

$$6 . 4 = \frac{6 . 3 . \operatorname{Sin} 3_{III}}{\operatorname{Sin} 4_{III}}$$

$$6 . 5 = \frac{6 . 4 . \operatorname{Sin} 4_{IV}}{\operatorname{Sin} 5_{IV}}$$

$$6 . 1 = \frac{6 . 5 . \operatorname{Sin} 5_V}{\operatorname{Sin} 1_V}$$

Werden sämmtliche Gleichungen mit einander malgenommen, so erhält man:

$$6.2 \times 6 . 3 \times 6 . 4 \times 6 . 5 \times 6 . 1 =$$
$$\frac{6.1 \times \operatorname{Sin} 1_I}{\operatorname{Sin} 2_I} \times \frac{6 . 2 \times \operatorname{Sin} 2_{II}}{\operatorname{Sin} 3_{II}} \times \frac{6 . 3 \times \operatorname{Sin} 3_{III}}{\operatorname{Sin} 4_{III}} \times \frac{6 . 4 \times \operatorname{Sin} 4_{IV}}{\operatorname{Sin} 5_{IV}} \times \frac{6 . 5 \times \operatorname{Sin} 5_V}{\operatorname{Sin} 1_V}$$

oder nach Weglassung der sich gegenseitig aufhebenden Malnehmer und übersichtlicherer Anordnung der übrigen:

$$1 = \frac{\operatorname{Sin} 1_I}{\operatorname{Sin} 1_V} \times \frac{\operatorname{Sin} 2_{II}}{\operatorname{Sin} 2_I} \times \frac{\operatorname{Sin} 3_{III}}{\operatorname{Sin} 3_{II}} \times \frac{\operatorname{Sin} 4_{IV}}{\operatorname{Sin} 4_{III}} \times \frac{\operatorname{Sin} 5_V}{\operatorname{Sin} 5_{IV}} .$$

Da nun die Rechnung mit Logarithmen geführt wird, so gestaltet sich die Bedingung wie folgt:

$$\operatorname{Log} \operatorname{Sin} 1_I + \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 2_{II} + \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 3_{III} + \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 4_{IV} + \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 5_V - \operatorname{Log} 1_V$$
$$- \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 2_I - \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 3_{II} - \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 4_{III} - \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 5_{IV} = 0 .$$

Ebenso leicht ist die Bedingung auszudrücken, wenn die Rechnung von einer früher gefundenen Seite zu einer anderen Seite dieser Art anschliesst.

Wäre z. B. die erste derselben 2 . 3, die andere 3 . 4 und lägen an denselben die Dreiecke VI = 3 . 2 . 7, VII = 3 . 7 . 8, VIII = 3 . 8 . 4, so wäre nach einander zu berechnen:

$$3 \cdot 7 = \frac{3 \cdot 2 \operatorname{Sin} 2_{VI}}{\operatorname{Sin} 7_{VI}}$$

$$3 \cdot 8 = \frac{3 \cdot 7 \operatorname{Sin} 7_{VII}}{\operatorname{Sin} 8_{VII}}$$

$$3 \cdot 4 = \frac{3 \cdot 8 \operatorname{Sin} 8_{\text{VIII}}}{\operatorname{Sin} 4_{\text{VIII}}}$$

und an beiden Seiten malgenommen:

$$3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \frac{\operatorname{Sin} 2_{\text{VI}}}{\operatorname{Sin} 7_{\text{VI}}} \times \frac{\operatorname{Sin} 7_{\text{VII}}}{\operatorname{Sin} 8_{\text{VII}}} \times \frac{\operatorname{Sin} 8_{\text{VIII}}}{\operatorname{Sin} 4_{\text{VIII}}}$$

schliesslich: $\operatorname{Log} \operatorname{Sin} 2_{\text{VI}} + \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 7_{\text{VII}} + \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 8_{\text{VIII}} - \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 7_{\text{VI}}$
$- \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 8_{\text{VII}} - \operatorname{Log} \operatorname{Sin} 4_{\text{VIII}} + \operatorname{Log} 3 \cdot 2 - \operatorname{Log} 3 \cdot 4 = 0$

Bisher beschränkten sich die Feldmesser bei der Berechnung der Dreiecksnetze gewöhnlich auf folgendes Verfahren: Hatte einer derselben alle um einen Punkt herum liegenden Winkel, jeden für sich, gemessen, so stellte er sie im Kreise zusammen, verglich ihre Summe mit vier rechten Winkeln, theilte die Abweichung von diesen mit der Anzahl der Winkel und fügte den Theil mit entgegengesetztem Zeichen dem durch die Messung gefunden Maasse jedes Winkels bei, brachte dadurch die Summe der geänderten Winkel auf vier rechte.

Die so geänderten Winkel stellte er dann in den Dreiecken, wozu sie gehörten, zusammen und verglich die Summen mit zwei rechten Winkeln, theilte die hierbei hervorgetretene Abweichung mit 3 und rechnete jedem der drei Winkel eines Dreiecks das Dritttheil seiner Abweichung mit entgegengesetztem Zeichen bei. Mit den so abgeänderten Winkeln ging nun der Feldmesser in die Seitenberechnung ein. Kehrte er dabei auf eine früher gefundene Seite zurück und bemerkte er, dass die zuletzt gefundene Längenzahl zwar nicht genau aber doch unter einer gewissen Fehlergrenze übereinstimmte, so liess er die Abweichung stecken.

Hatte der Feldmesser die Ergebnisse seiner Winkelmessung in der Form der Kreisverzeichnisse, wovon in § 13 ein Zahlenbeispiel gegeben ist, zusammengestellt und dann die Dreieckswinkel durch Abziehen der Richtungen ihrer Schenkel von einander gefunden, so stimmten selbstverständlich die um einen Punkt im Kreise herum liegenden Dreieckswinkel in der Summe mit vier rechten Winkeln überein. Doch daraus folgte nicht, dass sie auch in den betreffenden Dreiecken mit je zwei rechten Winkeln übereinkommen würden, es traten hier ebenfalls Abweichungen vom Sollbetrage hervor und diese wurden in der vorhin erwähnten Weise vertheilt.

Dieses Verfahren befriedigte in dem einen wie in dem anderen Falle aus doppeltem Grunde den denkenden Feldmesser nicht. Fürs erste hatte er das beschämende Bewusstsein, dass mit der Vertheilung der Winkelfehler in den Dreiecken die Kreissumme der um einen Punkt herum liegenden Winkel wieder von vier rechten abweichend wurde, diese Ausgleichung also nichts anderes war, als eine Unterdrückung der Fehler an der einen Stelle, um sie an eine andere Stelle zu verschieben. Sodann aber war ihm das Steckenlassen der Seitenabweichungen bei den Rundrechnungen um so bedenklicher, als er nicht wissen konnte, mit welcher der von einander abweichenden Längen die Rechnung fortzusetzen sei und ob nicht eine allmähliche Anhäufung der an sich kleinen Fehler befürchtet werden müsste.

Als nun mittlerweile Gauss die Methode der kleinsten Quadrate veröffentlichte, glaubte man anfänglich die Schwierigkeiten der Fehlervertheilung für alle Zweige der Messkunst überwunden zu sehen. In der That kann man mit ihr alle durch die kleinen unvermeidlichen Messungsfehler entstehenden Widersprüche so aufheben, dass die Gesammtheit der zu diesem Zwecke den Messungen beizulegenden Verbesserungen die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat. Auch ist die mit der Anwendung dieser Methode verbundene Arbeit nicht zu gross, um für alle geodätischen Unternehmungen, welche einem wissenschaftlichen Zwecke oder der Aufnahme eines ausgedehnten Landes zur Grundlage dienen sollen, verlangt werden zu können. Hier kann immerhin die grösste Genauigkeit oder, bestimmter ausgedrückt, die grösste Wahrscheinlichkeit der anzuwendenden Verbesserungen angestrebt werden, es kann sogar vor der eigentlichen Ausgleichungsarbeit eine besondere Untersuchung darüber angestellt werden, ob die einzelnen, in die Ausgleichung zu nehmenden Messungsergebnisse von gleicher oder von und wie weit verschiedener Zuverlässigkeit sind. Zudem fordert die strenge Anwendung der Methode, dass alle Messungen, welche einem gemeinschaftlichen Zwecke dienen, in einen Einsatz gebracht und daraus die Beiträge aller Bedingungsgleichungen der ersten, zweiten und dritten Art zu den Verbesserungen der einzelnen Messungsergebnisse nach der Lehre von der Auflösung der Gleichungen mit mehreren unbekannten Grössen aus eben so vielen Gleichungen entwickelt werden, um endlich mit Hülfe dieser Werthe die einzelnen Verbesserungen zu finden.

Einer so grossartigen Vorbereitung zu der eigentlichen Netzberechnung wird sich kein Feldmesser bei Dreiecksnetzen unterziehen, die zur Aufnahme des Grundeigenthums ausgedehnter Gemeinde- und Amtsbezirke dienen sollen, und keine Verwaltung wird geneigt sein, ihn dafür zu belohnen. In einem dem Verfasser zur Einsicht vorliegenden Dreiecksnetz eines Amtes kommen z. B. vor:

	25	geschlossene Kreise,
	82	Dreiecke,
	25	Rundrechnungen der Seitenlängen,
zusammen	132	Bedingungs-Gleichungen.

Der Feldmesser müsste also, auch wenn er alle einzelnen Winkelmaasse für gleich zuverlässig halten könnte, 132 Gleichungen bilden und eben so viele unbekannte Grössen daraus entwickeln (eliminiren) und dann erst könnte er die Verbesserungen für die 246 Winkel zusammensetzen.

So umfangreichen Vorarbeiten kann sich der Feldmesser nicht aussetzen. Die streng wissenschaftliche Fehlervertheilung muss er der höheren Geodäsie überlassen und ein einfaches, leicht ausführbares Verfahren bei Erfüllung der drei vorgedachten Bedingungen an die Stelle setzen; er muss von dem Zusammenfassen aller Theile des Netzes in einen Ausgleichungssatz Abstand nehmen und sich mit einer von einer Dreiecksgruppe zur anderen fortschreitenden, also allmählichen Fehlervertheilung begnügen, so nämlich, dass die Theile einer bereits ausgeglichenen Gruppe beim Uebergange zur Nachbargruppe unveränderlich gesetzt werden. Der Feldmesser hat ferner nicht der Ausgleichungsrechnung die Rücksicht auf verschiedene Zuverlässigkeit der Winkelmaasse zu überlassen, sondern bei der Messung dafür zu sorgen, dass er allen Winkelmaassen eine gleiche Zuverlässigkeit zutrauen kann. Erschwert ihm z. B. auf einem Standpunkte trübe Beleuchtung der Ziele oder starker Luftstrom die wünschenswerthe Schärfe der Beobachtung, so mag er die Winkel öfter als auf anderen Standpunkten, und zwar so oft messen, dass er den mittleren Ergebnissen die gleiche Zuverlässigkeit beilegen kann wie allen übrigen. Alsdann ist er für das Ausgleichungsgeschäft zu dem Grundsatze berechtigt, dass jedem einzelnen in einer Reihe von Winkeln, welche nur einer Bedingung unterworfen sind, zur Erfüllung derselben ein gleicher Antheil an ihrer thatsächlichen Verletzung aufzuerlegen ist. Wenn aber ein Theil dieser Winkel zugleich einer anderen Bedingung unterworfen ist, so geht der Ausgleichungswerth aus einer von beiden Bedingungen abhängigen Zusammensetzung hervor.

Neben der vorgedachten gruppenweisen Vertheilung des Ausgleichungsgeschäfts ist es zur Erleichterung der Arbeit auch nöthig, die drei Bedingungen, welche der Kürze wegen Kreisbedingung, Dreiecksbedingung und Längenbedingung genannt werden, nicht auf einmal in die Hand zu nehmen, vielmehr sich darauf zu beschränken, nur die beiden ersten Bedingungen mit einander zu verbinden und gleichzeitig zu erledigen, die Erfüllung der dritten Bedingung dann nachfolgen zu lassen, jedoch ohne Verletzung der beiden vorhergehenden.

Zur Erläuterung des Verfahrens möge das obige Beispiel einer Gruppe von fünf Dreiecken, welche einen gemeinschaftlichen Punkt No. 6 umschliessen, und einer Anschlussgruppe von drei Dreiecken über dem Punkte No. 3 betrachtet werden. In diesem Beispiel mögen die Winkel selbst wie oben mit den Nummern der Standpunkte und den angehängten Dreiecksnummern, die thatsächlichen Zahlenmaasse derselben mit den in Klammern eingeschlossenen laufenden Nummern der nach den beiden ersten Bedingungen geordneten Winkel, die Abweichungen ihrer Summen von den Sollbeträgen für die Kreisbedingung mit k, für die Dreiecksbedingung mit Δ, die Ausgleichungswerthe mit v bezeichnet werden, so nämlich, dass:

(1) = dem Winkel 2.6.1,	(6) = Winkel 6.1.2,	(11) = 3.4.6
(2) = » » 3.6.2	(7) = » 1.2.6	(12) = 6.4.5
(3) = » » 4.6.3	(8) = » 6.2.3	(13) = 4.5.6
(4) = » » 5.6.4	(9) = » 2.3.6	(14) = 6.5.1
(5) = » » 1.6.5	(10) = » 6.3.4	(15) = 5.1.6

oder nach der obigen Bezeichnung:

(1) = 6_{I},	(6) = 1_{I},	(11) = 4_{III}
(2) = 6_{II}	(7) = 2_{I}	(12) = 4_{IV}
(3) = 6_{III}	(8) = 2_{II}	(13) = 5_{IV}
(4) = 6_{IV}	(9) = 3_{II}	(14) = 5_{V}
(5) = 6_{V}	(10) = 3_{III}	(15) = 1_{V}.

Ist nun die Kreisbedingung:

VI) $6_{\text{I}} + 6_{\text{II}} + 6_{\text{III}} + 6_{\text{IV}} + 6_{\text{V}} - 400^0 = 0$, so findet man

$$(1) + (2) + (3) + (4) + (5) - 400 = k.$$

Ist ferner die Dreiecksbedingung:

im Dreieck I) $6_{\text{I}} + 1_{\text{I}} + 2_{\text{I}} - 200^0 = 0$, so ist im Dreieck I) $(1) + (6) + (7) - 200^0 = \varDelta$

» » II) $6_{\text{II}} + 2_{\text{II}} + 3_{\text{II}} - 200^0 = 0$ » » » » II) $(2) + (8) + (9) - 200^0 = \varDelta$

» » III) $6_{\text{III}} + 3_{\text{III}} + 4_{\text{III}} - 200^0 = 0$ » » » » III) $(3) + (10) + (11) - 200^0 = \varDelta$

» » IV) $6_{\text{IV}} + 4_{\text{IV}} + 5_{\text{IV}} - 200^0 = 0$ » » » » IV) $(4) + (12) + (13) - 200^0 = \varDelta$

» » V) $6_{\text{V}} + 5_{\text{V}} + 1_{\text{V}} - 200^0 = 0$ » » » » V) $(5) + (14) + (15) - 200^0 = \varDelta$

Die Winkel (1) bis (5) stehen sowohl in der Kreisbedingung als in der Dreiecksbedingung, sie müssen also, sollen sie beiden Bedingungen genügen, sowohl an dem Fehler k als an den Fehlern $\varDelta$ betheiligt werden, die übrigen sind zunächst nur an den Fehlern $\varDelta$ betheiligt und erhalten erst durch die Ausgleichung Antheil am Fehler k.

Bezeichnen wir den ersteren Antheil mit VI, die anderen Antheile mit den Nummern der betreffenden Dreiecke, so hat man offenbar:

$$\begin{array}{lllllll}
v_1 = & \text{I} & . & . & . & . & + \text{VI} \\
v_2 = & . & \text{II} & . & . & . & + \text{VI} \\
v_3 = & . & . & \text{III} & . & . & + \text{VI} \\
v_4 = & . & . & . & \text{IV} & . & + \text{VI} \\
v_5 = & . & . & . & . & \text{V} & + \text{VI} \\
v_6 = & \text{I} & . & . & . & . & . \\
v_7 = & \text{I} & . & . & . & . & . \\
v_8 = & . & \text{II} & . & . & . & . \\
v_9 = & . & \text{II} & . & . & . & . \\
v_{10} = & . & . & \text{III} & . & . & . \\
v_{11} = & . & . & \text{III} & . & . & . \\
v_{12} = & . & . & . & \text{IV} & . & . \\
v_{13} = & . & . & . & \text{IV} & . & . \\
v_{14} = & . & . & . & . & \text{V} & . \\
v_{15} = & . & . & . & . & \text{V} & .
\end{array}$$

Rechnet man der Reihe nach die Gleichungen zusammen, welche Antheile der Kreisbedingung führen, ferner diejenigen, welche an der Bedingung des I^ten, dann die, welche an der Bedingung des II^ten Dreiecks u. s. w. betheiligt sind, so erhält man:

$$\begin{array}{llllllll}
v_1+v_2+v_3+v_4+v_5 & = \mathrm{I} & +\mathrm{II} & +\mathrm{III} & +\mathrm{IV} & +\mathrm{V} & +5\,.\mathrm{VI} & = -k \\
v_1+v_6+v_7 & = 3\mathrm{I} & . & . & . & . & +\ \mathrm{VI} & = -\varDelta_{\mathrm{I}} \\
v_2+v_8+v_9 & = . & 3\mathrm{II} & . & . & . & +\ \mathrm{VI} & = -\varDelta_{\mathrm{II}} \\
v_3+v_{10}+v_{11} & = . & . & 3\mathrm{III} & . & . & +\ \mathrm{VI} & = -\varDelta_{\mathrm{III}} \\
v_4+v_{12}+v_{13} & = . & . & . & 3\mathrm{IV} & . & +\ \mathrm{VI} & = -\varDelta_{\mathrm{IV}} \\
v_5+v_{14}+v_{15} & = . & . & . & . & 3\mathrm{V} & +\ \mathrm{VI} & = -\varDelta_{\mathrm{V}}
\end{array}$$

Denn wenn

$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)-400 = k$ ist, und

$(1)+v_1+(2)+v_2+(3)+v_3+(4)+v_4+(5)+v_5-400 = 0$

werden soll, so ist, beide Gleichungen von einander abgezogen:

$$v_1+v_2+v_3+v_4+v_5 = -k;$$

ebenso, wenn

$(1)+(6)+(7)-200^0 = \varDelta_1$ ist und

$(1)+v_1+(6)+v_6+(7)+v_7-200^0 = 0$ werden soll, so bleibt auch hier:

$$v_1+v_6+v_7 = -\varDelta_1;$$

ebenso ist bei den folgenden Dreiecksbedingungen die Summe der drei v dem betreffenden $-\varDelta$ gleich.

Werden die fünf letzten Gleichungen zusammengerechnet, so erhält man:

$$3\mathrm{I}+3\mathrm{II}+3\mathrm{III}+3\mathrm{IV}+3\mathrm{V}+5\mathrm{VI} = -\varDelta_{\mathrm{I}}-\varDelta_{\mathrm{II}}-\varDelta_{\mathrm{III}}-\varDelta_{\mathrm{IV}}-\varDelta_{\mathrm{V}}.$$

Nimmt man auch die erste Gleichung dreimal, so wird sie:

$$3\mathrm{I}+3\mathrm{II}+3\mathrm{III}+3\mathrm{IV}+3\mathrm{V}+15\mathrm{VI} = -3k.$$

Zieht man endlich die erstere dieser Gleichungen von der letzteren ab, so bleibt

$$10\,\mathrm{VI} = -3k+\varDelta_{\mathrm{I}}+\varDelta_{\mathrm{II}}+\varDelta_{\mathrm{III}}+\varDelta_{\mathrm{IV}}+\varDelta_{\mathrm{V}}$$

oder: $\mathrm{VI} = \dfrac{\varDelta_{\mathrm{I}}+\varDelta_{\mathrm{II}}+\varDelta_{\mathrm{III}}+\varDelta_{\mathrm{IV}}+\varDelta_{\mathrm{V}}-3k}{10}$.

Man kann diesen Ausdruck kürzer schreiben, wenn man die Summe der Dreiecksfehler mit dem Zeichen $[\varDelta]$ belegt; man hat alsdann

$$\mathrm{VI} = \frac{[\varDelta]-3k}{10}.$$

Die Entstehung dieses Ausdrucks zeigt ganz augenscheinlich, dass er verallgemeinert werden kann, wenn man die Anzahl der Dreiecke $= n$ setzt und für VI ein beliebiges Zeichen, etwa M wählt. Es ist dann:

$$M = \frac{[\varDelta] - 3k}{2 \cdot n}.$$

Durch Rücksetzung dieses Werthes in die n Gleichungen der Dreiecksbedingung erhält man dann:

$$\mathrm{I} = -\frac{M + \varDelta_{\mathrm{I}}}{3}$$

$$\mathrm{II} = -\frac{M + \varDelta_{\mathrm{II}}}{3}$$

$$\mathrm{III} = -\frac{M + \varDelta_{\mathrm{III}}}{3}$$

$$\vdots$$

$$m_n = -\frac{M + \varDelta_n}{3},$$

wo m_n den Fehlerantheil aus der letzten Dreiecksbedingung bezeichnet.

Durch Einsetzung der Werthe von M, I, II, III u. s. w. in die anfänglichen Gleichungen findet man nun die einzelnen Verbesserungen, nämlich:

$$v_1 = \mathrm{I} + M$$
$$v_2 = \mathrm{II} + M$$
$$v_3 = \mathrm{III} + M$$

u. s. w.

$$v_6 = \mathrm{I}$$
$$v_7 = \mathrm{I}$$
$$v_8 = \mathrm{II}$$
$$v_9 = \mathrm{II}$$

u. s. w.

Diese Ausgleichungsweise ist so einfach, dass sie, etwa wie folgt, in Worten ausgedrückt werden kann:

1) Um den der Kreisbedingung entsprechenden Antheil eines Winkels bei der Vertheilung der Fehler zu bestimmen, hat man von der Summe der Dreiecksfehler den dreifachen Kreisfehler abzuziehen und den Rest durch die doppelte Anzahl der Dreiecke zu theilen.

2) Den der Dreiecksbedingung eines Winkels entsprechenden Antheil findet man, wenn dem Kreisantheil der Fehler des betreffenden Dreiecks zugerechnet und die Summe mit 3 getheilt wird.

3) Die Verbesserungen der Winkel am Kreismittelpunkte sind die Summen der beiden zu 1 und 2 gedachten Antheile, die der übrigen Winkel die Dreiecksantheile

zu 2 allein. Bei der Berechnung der Verbesserungen ist zu beachten, dass die Ausdrücke für die Dreiecksantheile das verneinende Zeichen führen.

Nach Ausführung dieser Arbeiten stimmen die Winkel sowohl im Kreise mit vier rechten, als in den Dreiecken mit zwei rechten Winkeln. Demungeachtet findet sich, dass sie die Längenbedingung nicht erfüllen, dass die bejahenden und verneinenden Logarithmensinussummen sich nicht gegen einander aufheben, sondern einen Unterschied, der mit L bezeichnet werden mag, herausstellen. Jetzt gilt es also, auch diese Bedingung zu erfüllen, ohne die beiden anderen so eben erfüllten wieder zu verletzen. Zum Letzteren ist aber auch eine Veranlassung um so weniger vorhanden, als die um den Kreismittelpunkt der Dreiecksgruppe liegenden Winkel in der Gleichung der Längenbedingung gar nicht vorkommen und als der Feldmesser befugt ist, von dem Grundsatze auszugehen, dass von den betheiligten Winkeln einer so zuverlässig ist als der andere.

Von jedem Dreieck wirken zwei Winkel in der Längenbedingung mit, der eine im bejahenden, der andere im verneinenden Sinne; beide haben bei der Erfüllung der Kreis- und der Dreiecksbedingung gleiche Verbesserungen erfahren und wurden auch ursprünglich für gleich zuverlässig gehalten, weil man ein Anderes nicht von ihnen wusste. Durch den Fehler L der Längenbedingung erfahren wir auch nur, dass die Messungsfehler der einerseitigen Winkel die der anderseitigen überwiegen, aber nicht wo und mit welcher Grösse. Es ist daher gerechtfertigt, allen Winkeln bei Erfüllung der Längenbedingung eine der Grösse nach gleiche Verbesserung im bejahenden oder verneinenden Sinne beizulegen, falls L das verneinende oder bejahende Zeichen führt. Dieser Grundsatz erleidet keine Abänderung durch den Umstand, dass die gleiche Veränderung an Winkeln von verschiedener Grösse ungleiche Wirkungen in den Rechnungen hervorbringt, denn die kleinen unveränderlichen Messungsfehler sind von dem Wachsen oder Abnehmen der Sinusgrössen der betreffenden Winkel nicht abhängig; sie entspringen aus ganz anderen Ursachen, aus Theilungsfehlern, anderen mechanischen Unvollkommenheiten der Werkzeuge, aus dem Schwanken der Zielbilder u. dergl. m. Wohl aber müssen die verschiedenen Wirkungen gleicher Winkelverbesserungen beachtet werden, wenn es sich darum handelt, eine Gesammtwirkung zur Aufhebung des Fehlers L herbeizuführen. Die Wirkung einer kleinen Veränderung eines Winkels auf den Logarithmus seines Sinus findet sich, wenn man die Secundenzahl jener Veränderung mit der in der Sinustafel neben dem Winkel angegebenen Veränderung für eine Secunde malnimmt. Letztere Veränderungen sind daher für sämmtliche in der Längenbedingungsgleichung enthaltene Logarithmen-Sinus der Reihe nach aufzuführen, dabei auch auf das verneinende Zeichen derselben Rücksicht zu nehmen, falls einer der Winkel ein stumpfer sein sollte.

Bezeichnen wir die gesuchte gleiche Winkelverbesserung zur Erfüllung der Längenbedingung mit x, die aus der Logarithmentafel hervorgenommenen Veränderungen der Logarithmen-Sinus der Winkel mit r und der Kürze wegen den Log Sin eines Winkels blos mit dem vorgesetzten Buchstaben l, so haben wir für das obige Beispiel, wo die einerseitigen Winkel am Umfange der Dreiecksgruppe mit den geraden Zahlen (6), (8), (10), (12), (14), die anderseitigen mit den ungeraden Zahlen (7), (9), (11), (13), (15) bezeichnet sind, die thatsächliche Gleichung:

$$l(6) - l(7) + l(8) - l(9) + l(10) - l(11) + l(12) - l(13) + l(14) - l(15) = L\,.$$

Vereinigen wir diese Gleichung mit einer anderen, nämlich mit:

$$x(r_6 + r_7 + r_8 + r_9 + r_{10} + r_{11} + r_{12} + r_{13} + r_{14} + r_{15}) = -L,$$

so wird die Summe der linken Seite = o. Setzen wir also jedem der Winkel (6) bis (15) den Winkel

$$x = \frac{-L}{r_6 + r_7 + r_8 + r_9 + r_{10} + r_{11} + r_{12} + r_{13} + r_{14} + r_{15}} \text{ oder kürzer } = -\frac{L}{[r]}$$

und zwar den einerseitigen (6), (8), (10), (12), (14) zu, den anderseitigen (7), (9), (11), (13), (15) ab, so entsteht eine Gleichung, welche, indem sie = o wird, der Längenbedingung genügt. Da nun hierbei auch

im Dreieck	I	der linksseitige Winkel		$= (6) - x$
		der rechtsseitige	»	$= (7) + x$
» »	II	der erstere	»	$= (8) - x$
		der letztere	»	$= (9) + x$

u. s. w., also in jedem Dreieck die Verbesserungen $-x$ und $+x$ sich gegen einander aufheben; die Winkelsummen in den Dreiecken also nicht ändern, auch die Kreiswinkel an dem gemeinschaftlichen Punkte an dieser Verbesserung gar nicht betheiligt sind, so folgt, dass nunmehr allen drei Bedingungen genügt ist.

Das Verfahren bei Erfüllung der Längenbedingung lässt sich in folgende Worte fassen:

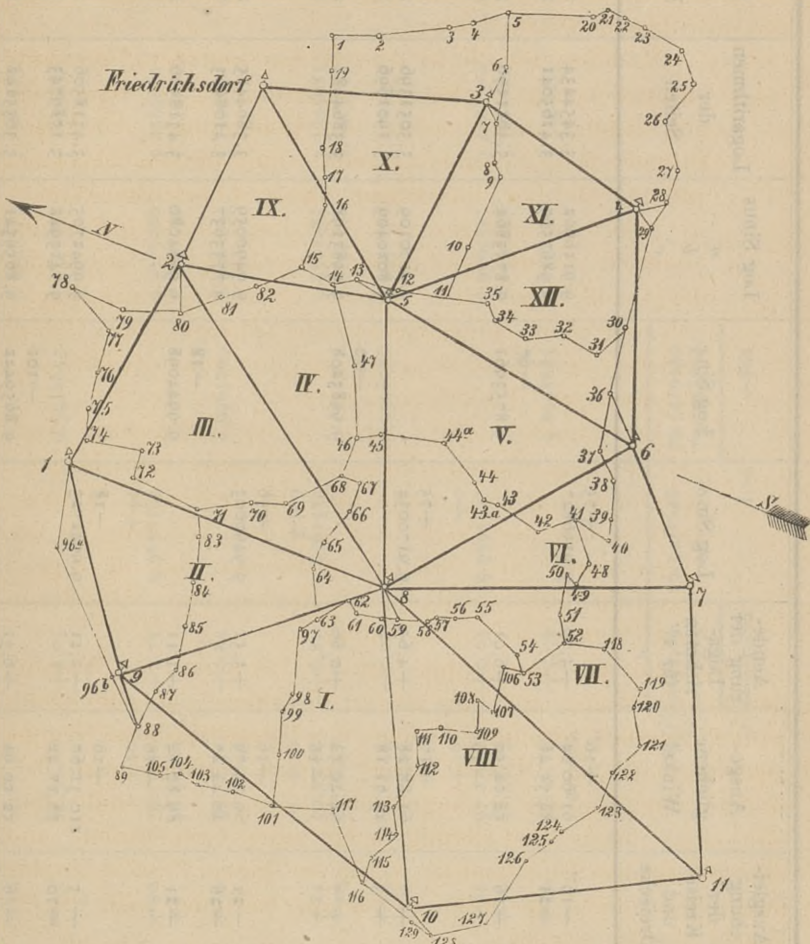
> Nachdem für die in dem Kreise und den Dreiecken ausgeglichenen Winkel die Logarithmen der Sinus aufgeschlagen, auch daneben die Aenderungen der Logarithmen für 1 Secunde vermerkt sind, werden die Logarithmen für die linksseitigen und rechtsseitigen Winkel in zwei Summen gezogen und der Unterschied beider ermittelt. Sodann wird dieser Unterschied mit der Summe der Aenderungen für 1 Secunde getheilt und das Ergebniss mit dem entgegengesetzten Zeichen jenes Unterschiedes den linksseitigen, mit gleichem Zeichen den rechtsseitigen Winkeln zugerechnet.
>
> Es ist nicht nöthig, jetzt für die verbesserten Winkel die Logarithmen-Sinus von Neuem aufzuschlagen; man berichtigt sie, indem man die gefundene Winkelverbesserung der Reihe nach mit den Aenderungen der Logarithmen für 1 Secunde malnimmt und die Ergebnisse mit Berücksichtigung der Zeichen den vorhandenen Logarithmen der Sinus beifügt.

Für die Anschlussgruppe ist das Verfahren im Wesentlichen unverändert und hier nur zu beachten, dass die Kreiswinkel-Zusammenstellung an dem allen Dreiecken dieser Gruppe gemeinschaftlichen Punkte zwei Winkel aufzunehmen hat, welche bereits in der vorhergehenden Gruppe festgestellt sind, also einer neuen Veränderung nicht unterliegen dürfen, und dass die beiden Seitenlängen, welche in diesem Punkte zusammentreffen und in der früheren Gruppe bestimmt sind, unverändert bleiben müssen.

Es erübrigt jetzt, die aufgestellten Regeln an einem Zahlenbeispiel zu zeigen.

In der Figur 25 ist aus den Dreiecken I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII eine erste Ausgleichungsgruppe, aus den Dreiecken IX, X, XI, XII eine Anschlussgruppe gebildet. Die auf sämmtlichen Standpunkten gemessenen Winkel sind in Kreisverzeichnissen (§ 13) vorgetragen und daraus die einzelnen Dreieckswinkel durch Abzug gefunden. Daraus folgt, dass die um den Punkt 8 liegenden Winkel einen Vollkreis von 400° ausmachen. Das Ausgleichungsgeschäft ist in dem nachfolgen-

Fig. 25.



den Formular bei möglichster Raum- und Ziffern-Ersparniss mit der schliesslichen Seitenberechnung verbunden. Der Gang der Rechnung ist sonnenläufig sowohl für die ganze Gruppe, wie für das einzelne Dreieck.

Man kann sich überzeugen, dass dieses Ausgleichungsverfahren nur wenig mehr Mühe verursacht, wie das bisher übliche, wobei nicht alle Bedingungen erfüllt waren, eine volle innere Uebereinstimmung des Netzes also nicht erreicht wurde.

Berechnung der Dreiecksseiten.

Dreieck	Punkt	Winkel	Ausgleichung der Kreise und Dreiecke	Ausgeglichene Winkel	Aenderung der Logarithmen für 1″ r	Log Sin a	Log Sin c	Log Sinus a b c	Logarithmen der Seiten	Seiten in Metern
				+16″		+75				
I.	9 (a	61°60′20″	−16″	61°60′04″	+4,70	9.9156827		9.9156902	3.3454434	2215,3
	8 (b	84.35.67	−21	84.35.46				9.9867509	3.4165041	2609,2
							−97			
	10 (c	54.04.66	−16	54.04.50	+6,01		9.8753961	9.8753864	3.3051396	2019,0
		200.00.53		−16						
		$\Delta_{I} = +53''$								
				+16		+75				
II.	1	61.88.21	+ 7	61.88.28	+4,65	9.9170034		9.9170109	3.3051396	2019,0
	8	43.71.15	+ 3	43.71.18				9.8020409	3.1901696	1549,4
							−10			
	9	94.40.47	+ 7	94.40.54	+0,60		9.9983208	9.9983198	3.3864485	2434,7
		199.99.83		−16						
		$\Delta_{II} = -17''$								
				+16		+56				
III.	2	69.75.00	−21	69.74.79	+3,51	9.9490003		9.9490059	3.3864485	2434,7
	8	40.44.73	−26	40.44.47				9.7733637	3.2108063	1624,8
							−18			
	1	89.80.95	−21	89.80.74	+1,11		9.9944098	9.9944080	3.4318506	2703,0
		200.00.68		−16						
		$\Delta_{III} = +68''$								
				+16		−18				
IV.	5	110.31.72	− 5	110.31.67	−1,11	9.9942723		9.9942705	3.4318506	2703,0
	8	37.17.52	−10	37.17.42				9.7413942	3.1789743	1510,0
							−101			
	2	52.50.97	− 6	52.50.91	+6,31		9.8659442	9.8659341	3.3035142	2011,5
		200.00.21		−16						
		$\Delta_{IV} = +21''$								
				+16		+60				
V.	6	67.93.17	− 5	67.93.12	+3,75	9.9423978		9.9424038	3.3035142	2011,5
	8	66.07.17	−10	66.07.07				9.9351579	3.2962683	1978,2
							−65			
	5	65.99.86	− 5	65.99.81	+4,03		9.9348653	9.9348588	3.2959692	1976,8
		200.00.20		−16						
		$\Delta_{V} = +20''$								
				+16		+44				
VI.	7	75.78.98	+30	75.79.28	+2,73	9.9678162		9.9678206	3.2959692	1976,8
	8	32.47.95	+25	32.48.20				9.6887530	3. 16916	1039,7
							− 14			
	6	91.72.22	+30	91.72.52	+0,84		9.9963209	9.9963195	3.3244681	2110,9
		199.99.15		−16						
		$\Delta_{VI} = -85''$								
				+16		+109				
VII.	11	50.98.80	+24	50.99.04	+6,81	9.8561374		9.8561483	3.3244681	2110,9
	8	47.16.27	+20	47.16.47				9.8292547	3.2975745	1984,1
							+0			
	7	101.84.25	+24	101.84.49	−0,02		9.9998176	9.9998176	3.4681374	2938,6
		199.99.32		−16						
		$\Delta_{VII} = -68''$								
				+16		+0				
VIII.	10	97.10.92	+24	97.11.16	+0,03	9.9995527		9.9995527	3.4681374	2938,6
	8	48.59.54	+19	48.59.73				9.8397019	3.3082866	2033,7
							−96			
	11	54.28.87	+24	54.29.11	+5,96		9.8768683	9.8768587	3.3454434	2215,3
		199.99.33		−16						
		$\Delta_{VIII} = -67''$								
	[8]	=400°00′00″		+[r]	=51,09	79.5418628	79.5419430			
	K	= 0		−[r]	= 1,13		79.5418628			
	[Δ]	= −75″		[r]	=+49,96	L =	−802			

Zur Erleichterung der Summirung sind die Log Sin a und Log Sin c in besondere Spalten gesetzt, die Summen derselben mit einander verglichen, und ist dadurch die Grösse L kennen gelernt.

Man hat nun nach den obigen Vorschriften:

		daher Verbesserung des Winkels $\underset{\smile}{a}$	$\underset{\smile}{b}$	$\underset{\smile}{c}$		$\underset{\smile}{a}$,	$\underset{\smile}{b}$,	$\underset{\smile}{c}$
$M = \frac{[\Delta] - 3k}{2 \cdot n} = \frac{-75'' - 0}{16}$	$= -\ 4{,}69''$;							
$\mathrm{I} = -\frac{M + \Delta_{\mathrm{I}}}{3} = -\frac{-4{,}69 + 53}{3}$	$= -16{,}10$;	-16,	-21,	-16	nämlich	I,	I $+ M$,	I
$\mathrm{II} = -\frac{M + \Delta_{\mathrm{II}}}{3} = -\frac{-4{,}69 - 17}{3}$	$= +\ 7{,}23$;	$+\ 7$,	$+\ 3$,	$+\ 7$	»	II,	II $+ M$,	II
$\mathrm{III} = -\frac{M + \Delta_{\mathrm{III}}}{3} = -\frac{-4{,}69 + 68}{3}$	$= -21{,}10$;	-21,	-26,	-21	»	III,	III $+ M$,	III
$\mathrm{IV} = -\frac{M + \Delta_{\mathrm{IV}}}{3} = -\frac{-4{,}69 + 21}{3}$	$= -\ 5{,}44$;	$-\ 5$,	-10,	$-\ 6$	»	IV,	IV $+ M$,	IV
$\mathrm{V} = -\frac{M + \Delta_{\mathrm{V}}}{3} = -\frac{-4{,}69 + 20}{3}$	$= -\ 5{,}10$;	$-\ 5$,	-10,	$-\ 5$	»	V,	V $+ M$,	V
$\mathrm{VI} = -\frac{M + \Delta_{\mathrm{VI}}}{3} = -\frac{-4{,}69 - 85}{3}$	$= +29{,}90$;	$+30$,	$+25$,	$+30$	»	VI,	VI $+ M$,	VI
$\mathrm{VII} = -\frac{M + \Delta_{\mathrm{VII}}}{3} = -\frac{-4{,}69 - 68}{3}$	$= +24{,}23$;	$+24$,	$+20$,	$+24$	»	VII,	VII $+ M$,	VII
$\mathrm{VIII} = -\frac{M + \Delta_{\mathrm{VIII}}}{3} = -\frac{-4{,}69 - 67}{3}$	$= +23{,}89$;	$+24$,	$+19$,	$+24$	»	VIII,	VIII $+ M$,	VIII

Zur Erfüllung der Längenbedingung fehlte vorstehend $L = -802$, und die Summe der Secundenveränderungen betrug $[r] = +49{,}96$. Man hat daher $x = -\frac{L}{[r]} = +\frac{802}{49{,}96} = +16{,}05''$ Diese Grösse, abgerundet $= +16''$, ist also den Winkeln a zuzusetzen, den Winkeln c abzuziehen. Ferner ist sie als gemeinschaftlicher Malnehmer in der Rechentafel aufzuschlagen und mit sämmtlichen Veränderungen der Logarithmen (r) malzunehmen, und sind die Ergebnisse unter Berücksichtigung der Zeichen derselben den Logarithmen für die Winkel a zuzurechnen, für die Winkel c abzurechnen, wobei man die vorstehend übergeschriebenen Logarithmen-Verbesserungen erhält.

Die Arbeit kann nun zur Berechnung der Anschlussgruppe übergehen, wobei zu beachten ist, dass die Winkel im Standpunkt 5 bereits in den Dreiecken IV und V ihre schliessliche Feststellung erhalten haben und dass die an ihm zusammentreffenden Seiten von 2 nach 5 und von 5 nach 6 ebenfalls schliesslich berechnet sind. Zur Andeutung ihrer ferneren Unveränderlichkeit werden die betreffenden Zahlenwerthe in Klammern eingeschlossen.

Dreieck	Punkt	Winkel	Ausgleichung der Kreise und Dreiecke	Ausgeglichene Winkel	Aenderung der Logarithmen für 1″ r	Log Sin a	Log Sin c	Log Sinus a b c	Logarithmen der Seiten	Seiten in Metern
				+58″		+266				
IX.	$a)$ F	62°37′74″	+16″	62°37′90″	+4,58	9.9192937		9.9193203	3.1789743	1510,0
	$b)$ 5	55.25.17	+15	55.25.32				9.8825148	3.1421688	1387,3
	$c)$ 2	82.36.62	+16	82.36.78	+1,94		9.9831251	9.9831138	3.2427678	1748,9
		199.99.53		−58			−113			
		$\Delta_{IX} = -47''$								
				+58		+155				
X.	3	76.30.68	−23	76.30.45	+2,66	9.9691953		9.9692108	3.2427678	1748,9
	5	63.31.09	−24	63.30.85				9.9234813	3.1970383	1574,1
	F	60.38.93	−23	60.38.70	+4,89		9.9098635	9.9098351	3.1833921	1525,4
		200.00.70		−58			−284			
		$\Delta_X = +70''$								
				+58		+271				
XI.	4	62.05.49	− 4	62.05.45	+4,66	9.9178003		9.9178274	3.1833921	1525,4
	5	49.29.22	− 4	49.29.18				9.8445995	3.1101642	1288,7
	3	88.65.40	− 3	88.65.37	+1,23		9.9930654	9.9930583	3.2586230	1813,9
		200.00.11		−58			−71			
		$\Delta_{XI} = +11''$								
				+58		+232				
XII.	6	66.21.28	+22	66.21.50	+4,00	9.9357371		9.9357603	3.2586230	1813,9
	5	55.82.94	+22	55.83.16				9.8858271	3.2086898	1616,9
	4	77.95.12	+22	77.95.34	+2,47		9.9734200	9.9734056	3.2962683	1978,2
		199.99.34		−58			−144			
		$\Delta_{XII} = -66''$								
	[Δ]	= − 32		[r] =	+26,42	39.7420264	39.8594740			
				Log	5.6 =	(3.2962683	3.1789743)	= Log 5.2		
IV.	5	(110.31 83								
V.	5	(65.99.65)				43.0382947	43.0384483			
							43.0382947			
	[5] =	399.99.90								
	K =	− 10				L =	−1536			

Demnach:

$$M = \frac{[\Delta] - 3K}{8} = \frac{-32+30}{8} = -0{,}25''; \text{ Daher Verbesserung der Winkel; für } a, \text{ für } b, \text{ für } c$$

$$IX = -\frac{M+\Delta_{IX}}{3} = -\frac{-0{,}25-47}{3} = +15{,}75\ ;\ \underset{a}{+16''},\ \underset{b}{+15''},\ \underset{c}{+16''} \text{ nämlich IX, IX}+M, \text{ IX}$$

$$X = -\frac{M+\Delta_X}{3} = -\frac{-0{,}25+70}{3} = -23{,}25\ ;\ -23,\ -24,\ -23\ \text{» X, X}+M, \text{ X}$$

$$XI = -\frac{M+\Delta_{XI}}{3} = -\frac{-0{,}25+11}{3} = -3{,}58\ ;\ -4,\ -4,\ -3\ \text{» XI, XI}+M, \text{ XI}$$

$$XII = -\frac{M+\Delta_{XII}}{3} = -\frac{-0{,}25-66}{3} = +22{,}08\ ;\ +22,\ +22,\ +22\ \text{» XII, XII}+M, \text{ XII}$$

Endlich $x = \frac{-L}{[r]} = +\frac{1536}{26{,}42} = +58{,}1''$; Daher $a + x = a + 58''$
$c - x = c - 58$

Um die innere Uebereinstimmung der mit einander verbundenen und ausgeglichenen Gruppen anschaulich zu machen, wird nun noch die Standortsberechnung so ausgeführt, dass der Umfang beider Gruppen auf einmal, dann der Durchschneidungszug 10, 8, 5, F berechnet wird, nämlich:

Standortsberechnung.

Punkt	Brechungs-winkel b	Neigungs-winkel α	Log S. Sin α	Log S. Cos α	Abstands-Unterschied Δy +	Abstands-Unterschied Δy −	Abschnitts-Unterschied Δx +	Abschnitts-Unterschied Δx −	Abstand y	Ab-schnitt x
10		16°41′84″	9.4066258 3.4165041 2.8231299	9.9853942 3.4165041 3.4018983	665,4		2522,9		+ 302,4	+ 8635,3
9	243°99′42″	60.41.26	9.9099887 3.1901696 3.1001583	9.7653180 3.1901696 2.9554876	1259,4		902,6		+ 967,8	+11158,2
1	248.30.98	108.72.24	9.9959107 3.2108063 3.2067170	9.1353963_n 3.2108063 2.3462026_n	1609,6			221,9	+2227,2	+12060,8
2	195.38.10	104.10.34	9.9990972 3.1421688 3.1412660	8.8089622_n 3.1421688 1.9511310_n	1384,4			89,4	+3836,8	+11838,9
F.	277.23 40	181.33.74	9.4608337 3.1970383 2.6578720	9.9810652_n 3.1970383 3.1781035_n	454,9			1507,0	+5221,2	+11749,5
3	235.04.18	216.37.92	9.4056107_n 3.1101642 2.5157749_n	9.9854646_n 3.1101642 3.0956288_n		327,9		1246,3	+5676,1	+10242,5
4	259.99.21	276.37.13	9.9693729_n 3.2086898 3.1780627_n	9.5595422_n 3.2086898 2.7682320_n		1506,8		586,5	+5348,2	+ 8996,2
6	174.12.28	250.49.41	9.8528297_n 3.0169016 2.8697313_n	9.8460880_n 3.0169016 2.8629896_n		740,9		729,4	+3841,4	+ 8409,7
7	222.36.23	272.85.64	9.9592669_n 3.2975745 3.2568414_n	9.6165477_n 3.2975745 2.9141222_n		1806,5		820,6	+3100,5	+ 7680,3
11	294.71.85	367.57.49	9.6880587_n 3 3082866 2.9963453_n	9.9410492 3.3082866 3.2493358		991,6	1775,6		+1294.0	+ 6859,7
10	248.84.34	216.41.83	—	—	5373,7	5373,7	5201,1	5201,1	+ 302,4	+ 8635,3
	2399.99.99									
10		70.46.18	9.9514717 3.3454434 3.2969151	9.6508079 3.3454434 2.9962513	1981,1		991,4		+ 302,4	+ 8635,3
8	205.68.53	76.14.71	9.9687747 3.3035142 3.2722889	9.5634516 3.3035142 2.8669658	1871,9		736,2		+2283,5	+ 9626,7
5	165.57.15	41.71.86	9.7849085 3.2427678 3.0276763	9.8991946 3.2427678 3.1419624	1065,8		1386,6		+4155.4	+10362,9
F.	62.38.48	304.10.34	—	—	4918,8		3114,2		+5221,2	+11749,5

Die Berechnung des äusseren Umfangs der beiden Dreiecksgruppen kommt also genau auf den anfänglichen Abstand und den anfänglichen Abschnitt des Punktes No. 10 zurück, und der am Punkt 10 beginnende, am Punkt F endigende Durchschneidungszug endigt genau mit den bei der Berechnung des Umfangs-Vielecks gefundenen Standortswerthen.

Ist der zu vermessende Bezirk so ausgedehnt, dass es nöthig erscheint, einige Dreiecke dritter Ordnung darüber zu legen, und sind die Seiten derselben benutzt, um für die Seitenberechnung der Dreiecke vierter Ordnung Grundlinien abzuleiten, so hat die Standortsberechnung bei den Dreiecken dritter Ordnung zu beginnen und sind dann die Standortswerthe der Punkte vierter Ordnung in Zügen so zu berechnen, dass zunächst von einem Punkt dritter Ordnung auszugehen und an einem solchen abzuschliessen ist. Bei diesen Abschlüssen können zufolge der Ausgleichung der Winkelfehler nur sehr geringe Rechnungs-Abweichungen hervortreten, welche dann, wie bei der Berechnung der Flurumringe gezeigt worden, vertheilt werden. Nach vollendeter Berechnung dieser sich an die Punkte dritter Ordnung unmittelbar anschliessenden Züge sind dann nur noch Züge zwischen Punkten vierter Ordnung einzuschalten.

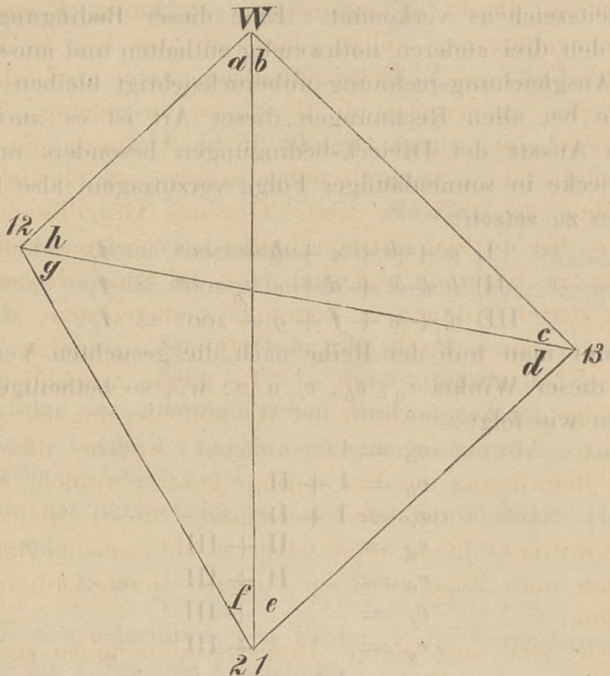
Es ist jetzt noch einiger Dreiecksverbindungen zu gedenken, die zwar nur Nothbehelfe sind, aber bei den Schwierigkeiten der Oberflächengestaltung nicht immer vermieden werden können. Dahin gehören insbesondere

a. über einander fallende Dreiecke.

Diese werden mitunter benutzt, wo sich stumpfe oder sehr spitze Winkel nicht vermeiden lassen und wo der Feldmesser Gelegenheit hat, mittelst einer die gemeinschaftliche Seite zweier benachbarten Dreiecke durchschneidenden Dreieckslinie diesen Dreiecken eine bessere Verbindung zu sichern.

Hätte z. B. der Feldmesser bei dem stumpfen Winkel $W.12.21$ in der Figur 26 Bedenken gehabt und zur Beseitigung desselben auf dem Punkte 12 die Winkel g und h, auf dem Punkte 13 die Winkel c und d gemessen, nachdem er vorher schon auf den Punkten W und 21 die Winkel a, b und e, f gemessen hätte, so entstände für ihn die Aufgabe, die durch diese Verbindung entstehenden vier Dreiecke so zu berechnen, dass die vermöge der kleinen unvermeidlichen Messungsfehler hervortretenden Widersprüche aufgehoben werden, das

Fig. 26.



Viereck also eine in allen Theilen und im Ganzen genau abgeschlossene Figur bilde.

Um diesen Zweck zu erreichen, könnte der Feldmesser wieder, wie vorhin bei der gewöhnlichen Dreiecksberechnung, von der Voraussetzung ausgehen, dass sämmtliche 8 Winkel von vornherein für gleich zuverlässig zu erachten seien, und dass, wenn eine Reihe von Winkeln gegenüber einer gleich zahlreichen Reihe anderer Winkel einen gewissen Längenfehler herausstellte, dieser mit einer gleichen Winkelverbesserung, jedoch in den beiden Reihen mit entgegengesetzten Zeichen, ausgeglichen werden könnte. Da in dem Viereck vier Dreiecke liegen, so hat es den Anschein, als ob dafür 4 Dreiecksbedingungen aufgestellt werden könnten. Setzt man aber die Winkel solchergestalt zusammen, nämlich:

$$\overbrace{a+b+c+h}^{\mathrm{I}}+\overbrace{d+e+f+g}^{\mathrm{II}}=\overbrace{b+c+d+e}^{\mathrm{III}}+\overbrace{f+g+h+a}^{\mathrm{IV}}$$

so sieht man sogleich, dass die beiderseitigen Summen immer völlig gleich sind, wie fehlerhaft die einzelnen Winkel immerhin sein mögen, weil jeder Winkel auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens vorkommt. Eine dieser Bedingungen ist also in den drei anderen nothwendig enthalten und muss daher in der Ausgleichungsrechnung unberücksichtigt bleiben.

Wie bei allen Rechnungen dieser Art ist es auch hier für den Ansatz der Dreiecksbedingungen besonders rathsam, die Dreiecke in sonnenläufiger Folge vorzutragen, also für die Figur 26 zu setzen:

$$\begin{aligned} \text{I)}\ & a + b + c + h - 200^0 = \Delta_1 \\ \text{II)}\ & b + c + d + e - 200^0 = \Delta_2 \\ \text{III)}\ & d + e + f + g - 200^0 = \Delta_3\,. \end{aligned}$$

Nennt man nun der Reihe nach die gesuchten Verbesserungen dieser Winkel v_a, v_b, v_c u. s. w., so betheiligen sich dieselben wie folgt:

$$\begin{aligned} v_a &= \text{I} \\ v_b &= \text{I} + \text{II} \\ v_c &= \text{I} + \text{II} \\ v_d &= \phantom{\text{I} +{}} \text{II} + \text{III} \\ v_e &= \phantom{\text{I} +{}} \text{II} + \text{III} \\ v_f &= \phantom{\text{I} + \text{II}} + \text{III} \\ v_g &= \phantom{\text{I} + \text{II}} + \text{III} \\ v_h &= \text{I} \end{aligned}$$

Summirt man diese zunächst für I, dann für II, zuletzt für III, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} v_a + v_b + v_c + v_h &= 4.\text{I} + 2.\text{II} &&= -\Delta_1 \\ v_b + v_c + v_d + v_e &= 2.\text{I} + 4.\text{II} + 2.\text{III} &&= -\Delta_2 \\ v_d + v_e + v_f + v_h &= \phantom{2.\text{I}} + 2.\text{II} + 4.\text{III} &&= -\Delta_3 \end{aligned}$$

und durch deren Auflösung:

$$\begin{aligned} \text{I} &= \tfrac{1}{8}(3\Delta_1 - 2\Delta_2 + \Delta_3) \\ \text{II} &= -\tfrac{1}{4}(\Delta_1 - 2\Delta_2 + \Delta_3) \\ \text{III} &= \tfrac{1}{8}(\Delta_1 - 2\Delta_2 + 3\Delta_3)\,; \end{aligned}$$

endlich durch Einsetzung der Werthe für I, II, III in die obigen Gleichungen für v_a, v_b, v_c u. s. w. diese selbst.

Es ist nicht nöthig, die Ausdrücke für I, II, III in jedem einzelnen Falle neu zu entwickeln; sie sind so übersichtlich, dass sie leicht im Gedächtniss behalten werden können.

Sind die Winkel hiernach verbessert und die Winkelsummen der Dreiecke dadurch auf zwei Rechte gebracht, so bleibt nun noch die Längenbedingung zu erfüllen. Bei diesem Geschäft werden die Aussenseiten des Vierecks in sonnenläufiger Folge ausgedrückt, nämlich:

$$W.13 = 12.W.\frac{\operatorname{Sin} h}{\operatorname{Sin} c},$$

$$13.21 = W.13.\frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} e},$$

$$12.21 = 13.21.\frac{\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Sin} g},$$

$$12.W = 12.21.\frac{\operatorname{Sin} f}{\operatorname{Sin} a}.$$

Werden diese Gleichungen sämmtlich mit einander malgenommen und die sich aufhebenden Seitenlängen fortgelassen, so bleibt

$$1 = \frac{\operatorname{Sin} h}{\operatorname{Sin} c} \times \frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} e} \times \frac{\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Sin} g} \times \frac{\operatorname{Sin} f}{\operatorname{Sin} a}$$

oder zufolge der unvermeidlichen Messungsfehler:

$$\operatorname{Log}\operatorname{Sin} b + \operatorname{Log}\operatorname{Sin} d + \operatorname{Log}\operatorname{Sin} f + \operatorname{Log}\operatorname{Sin} h - \operatorname{Log}\operatorname{Sin} a - \operatorname{Log}\operatorname{Sin} c - \operatorname{Log}\operatorname{Sin} e - \operatorname{Log}\operatorname{Sin} g = L$$

und man hat nun wieder, wie bei der gewöhnlichen Dreiecksberechnung:

$$x = \frac{-L}{r_a + r_b + r_c + r_d + r_e + r_f + r_g + r_h},$$

wobei L den logarithmischen Fehler, r die Veränderung eines Log Sin für 1 Secunde bezeichnet.

Zum Zahlenbeispiel diene das in der Figur 26 verzeichnete, einer vorliegenden Amtsvermessung entnommene Viereck $W.13.21.12$. Es wurden darin gemessen die Winkel

$$\begin{aligned}
a &= 50^0\ 88'\ 12'' \\
b &= 48\ \ 59\ \ 94 \\
c &= 40\ \ 26\ \ 48 \\
d &= 59\ \ 30\ \ 66 \\
e &= 51\ \ 83\ \ 06 \\
f &= 34\ \ 50\ \ 37 \\
g &= 54\ \ 35\ \ 68 \\
h &= 60\ \ 25\ \ 97
\end{aligned}$$

Die Zusammenstellung der Dreiecke lieferte folgende Bedingungsgleichungen:

$$\text{I)}\quad a + b + c + h - 200^0 = +51'' = \Delta_1$$

$$\text{II)}\quad b + c + d + e - 200^0 = +14'' = \Delta_2$$

$$\text{III)}\quad d + e + f + g - 200^0 = -23'' = \Delta_3$$

und nach den obigen Ausdrücken für I, II, III ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \tfrac{1}{8}(3\Delta_1 - 2\Delta_2 + \Delta_1) = \tfrac{1}{8}(+153'' - 28 - 23) = +12{,}75'' \\ \mathrm{II} &= -\tfrac{1}{4}(\Delta_1 - 2\Delta_2 + \Delta_3) = -\tfrac{1}{4}(+51 - 28 - 23) = 0 \\ \mathrm{III} &= \tfrac{1}{8}(\Delta_1 - 2\Delta_2 + 3\Delta_3) = \tfrac{1}{8}(+51 - 28 - 69) = -5{,}75 \end{aligned}$$

endlich mit Hülfe dieser Werthe

	die Verbesserungen		Gemessene Winkel	Verbesserte Winkel
$v_a = \mathrm{I}$ . .	$= +12{,}75''$,	abgerundet — 12″	$+ 50^0\,88'\,12''$,	$50^0\,88'\,00''$
$v_b = \mathrm{I} + \mathrm{II}$.	$= +12{,}75$,	» — 13	+ 48. 59. 94,	48. 59. 81
$v_c = \mathrm{I} + \mathrm{II}$.	$= +12{,}75$,	» — 13	+ 40. 26. 48,	40. 26. 35
$v_d =$. $\mathrm{II} + \mathrm{III}$	$= -\ 5{,}75$,	» + 6	+ 59. 30. 66,	59. 30. 72
$v_e =$. $\mathrm{II} + \mathrm{III}$	$= -\ 5{,}75$,	» + 6	+ 51. 83. 06,	51. 83. 12
$v_f =$ . . III	$= -\ 5{,}75$,	» + 5	+ 34. 50. 37,	34. 50. 42
$v_g =$ . . III	$= -\ 5{,}75$,	» + 6	+ 54. 35. 68,	54. 35. 74
$v_h = \mathrm{I}$ . .	$= +12{,}75$,	» — 13	+ 60. 25. 97,	60. 25. 84

Werden schliesslich diese Werthe in die Längenbedingung gesetzt, so erhält man:

	Punkt	Winkelzeichen	Winkel	Aenderung des Log für 1″	Log Sin α	Log Sin β	Winkelverbesserung aus der Längenbedingung	Festgestellte Winkel
					−55			
α	13	c	$40^0 26' 35''$	+ 9,31	9 7716821		−6″	$40^0 26' 29''$
						+29		
β	12	h	60.25.84	+ 4,92		9.9092329	+6	60.25.90
γ	W	$a+b$	99 47.81					99.47.81
			200.00.00					200.00.00
					−38			
	21	e	51.83.12	+ 6,44	9.8616246		−6	51.83.06
						+42		
	W	b	48.59.81	+ 7,13		9.8397077	+6	48.59.87
	13	$c+d$	99.57.07					99.57.07
			200.00.00					200.00.00
					−35			
	12	g	54.35.74	+ 5,94	9.8772630		−6	54.35.68
						+30		
	13	d	59.30.72	+ 5,08		9.9044844	+6	59.30.78
	21	$e+f$	86.33.54					86.33.54
			200.00.00					200.00.00
					−40			
	W	a	50.88.00	+ 6,64	9 8554060		−6	50.87.94
						+67		
	21	f	34.50.42	+11,34		9.7125171	+6	34.50.48
	12	$g+h$	114.61.58					114.61.58
			200.00.00	+56,80	39,3659757	39,3659421		200 00.00
				[r]	39,3659421			
				$L =$	336	:56,80 = 5,91″	$= x$	
					−168	+168		

Es erscheint unnöthig, mit den festgestellten Grössen die Berechnung der Seitenlängen hier durchzuführen. Augenscheinlich würde das Ende derselben auf die anfängliche Länge genau zurückführen.

b. Das Vorwärts-Einschneiden.

Schon bei der Besprechung der Winkelmessung ist darauf aufmerksam gemacht, dass der Feldmesser sich veranlasst finden kann, die Richtungen auch solcher Punkte mit aufzunehmen, welche nicht eigentlich zu dem Netze gehören, aber aus anderen Gründen bemerkenswerth sind. Er wird, wenn er solche Punkte auch von anderen Standpunkten sehen kann, nicht unterlassen, sie so oft einzumessen, als nöthig ist, ihre Lage gegen das Netzganze zu bestimmen. Am häufigsten werden solche Einmessungen auf Kirchthürme und andere Bauwerke gerichtet, welche ausserhalb des Vermessungsbezirks liegen oder, wenn innerhalb, keine Aufstellung der Winkelwerkzeuge gestatten. Die Bestimmung solcher Punkte belegt man gewöhnlich mit dem Namen: Vorwärtseinschneiden. Befindet sich die Richtung auf einen solchen Punkt in dem Kreisverzeichniss eines Standorts (§ 13), so bedarf es nur einer Winkelzusammenrechnung, um die Neigung dieser Richtung gegen die Abstandsachse des Netzes zu finden. Denn es ist vorauszusetzen, dass der Feldmesser zunächst alle Seitenlängen der Dreiecke, sowie die Abstände und Abschnitte für alle Standpunkte seines Netzes berechnet hat, ehe er zur Bestimmung der Nebenpunkte schreitet. Ist in obiger Art auf einem zweiten Standpunkte die Richtung nach demselben Zielpunkte aufgenommen und die Neigung derselben gegen die Achse gefunden, so schneiden sich die Schenkel beider Neigungswinkel in dem Orte des Zielpunktes. Die Entfernung desselben von einem der Standpunkte und sein Achsenabstand und Abschnitt finden sich leicht, wenn man beachtet, dass für den Zielpunkt die gleichen Werthe für Abstand und Abschnitt sich ergeben müssen, man möge von dem einen oder dem anderen Standpunkt ausgehen.

Nennt man den Achsen-Abstand des ersten Standpunkts y_1, den zugehörigen Abschnitt x_1, den Neigungswinkel von diesem Punkte nach dem Ziel α_1, ebenso Abstand, Abschnitt und Neigungswinkel des zweiten Standpunktes y_2, x_2, α_2, endlich die Entfernung des Ziels vom ersten Standpunkte z_1, vom zweiten z_2, so hat man offenbar:

$$y_1 + z_1 \text{ Sin } \alpha_1 = y_2 + z_2 \text{ Sin } \alpha_2$$
$$x_1 + z_1 \text{ Cos } \alpha_1 = x_2 + z_2 \text{ Cos } \alpha_2 \,.$$

In diesen beiden Gleichungen sind z_1 und z_2 unbekannt, durch Aussonderung von z_1 finden wir aber alsbald:

$$z_2 = \frac{(x_2 - x_1) \text{ Sin } \alpha_1 - (y_2 - y_1) \text{ Cos } \alpha_1}{\text{Sin } \alpha_2 \text{ Cos } \alpha_1 - \text{Sin } \alpha_1 \text{ Cos } \alpha_2} = \frac{(x_2 - x_1) \text{ Sin } \alpha_1 - (y_2 - y_1) \text{ Cos } \alpha_1}{\text{Sin } (\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\text{ebenso} \quad z_1 = \frac{(x_2 - x_1) \text{ Sin } \alpha_2 - (y_2 - y_1) \text{ Cos } \alpha_2}{\text{Sin } (\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

Mit diesen Entfernungen kann dann auch der Achsenabstand, sowie der Abschnitt für den Zielpunkt doppelt berechnet werden, wobei gleiche Ergebnisse zum Vorschein kommen müssen.

Damit erhält man aber nur eine Gewähr für die Richtigkeit der Rechnung, keineswegs für die der Messung. Um sicher zu sein, dass auf beiden Standpunkten dasselbe Ziel beobachtet ist, muss wenigstens noch auf einem dritten Standpunkt die Richtung nach demselben eingemessen werden. Alsdann findet man bei Einführung von y_3, x_3, α_3 für diesen 3ten Standpunkt

$$z_2 = \frac{(x_2 - x_3) \text{ Sin } \alpha_3 - (y_2 - y_3) \text{ Cos } \alpha_3}{\text{Sin } (\alpha_3 - \alpha_2)},$$

und dieser Werth muss, abgesehen von dem Einflusse der unvermeidlichen Winkelfehler, dem von den Punkten 1 und 2 aus gefundenen gleich kommen.

Will man nun auch diesen Einfluss ausgleichen, so ist die Aufgabe am einfachsten, wenn die drei Standpunkte unmittelbar durch Dreiecksseiten verbunden sind und diese im Punkte 2 zusammenstossen. Dann sind nicht nur die Entfernungen von 1 nach 2 und von 2 nach 3, sondern es ist auch der Winkel 1.2.3 bekannt. Man kann den Vorwärtseinschnitt wie eine Anschlussgruppe aus zwei Dreiecken bestehend, in denen die Winkel an dem eingeschnittenen Punkte nicht gemessen sind, behandeln. In dem Punkte 2 ist dann eine Kreisbedingung für drei Winkel, von denen der eine unveränderlich ist, zu erfüllen.

Es wird genügen, das Verfahren an einem Zahlenbeispiel zu zeigen. In einer vorliegenden Amtsvermessung waren auf den Standpunkten 11, 12 und 21 (Fig. 27) nach dem ausserhalb des Dreiecksnetzes belegenen Kirchthurme *R*

auf dem Standpunkt	11	der Winkel zwischen	12 u.	*R*	=	$34^0\,10'\,34''$
» » »	12	» » »	21 »	*R*	=	99.81.43
	und	» » »	*R* »	11	=	111.07.42
» » »	21	» » »	*R* »	12	=	37.50.17

gemessen und auf dem Punkte 12 war der Ergänzungswinkel zwischen 11 und 21 festgestellt $= 189^0\,11'\,05''$. Endlich hatte man für die Seite 11 nach 12 den Log = 3.2498665

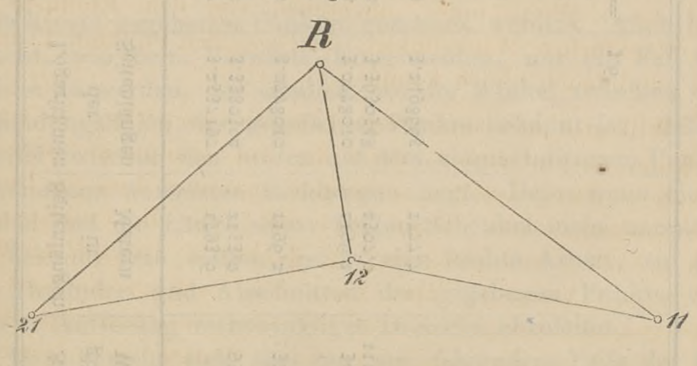
» » » 12 » 21 » » = 3.2537197.

Die Kreisbedingung war also:

Winkel	21.12.*R* =	$99^0 81' 43''$	$+ 5''$	$= 99^0 81' 48''$
»	*R*.12.11 =	111.07.42	$+ 5''$	= 111.07.47
»	11.12.21 =	189.11.05	—	= 189.11.05
		399.99.90	+10	= 400.00.00
		Fehler — $10''$.		

Für die Längenbedingung werden die fehlenden Winkel durch Abzug gefunden und in Klammern eingeschlossen, sodann die Dreiecke von einer gegebenen Dreiecksseite ausgehend, an der anderen schliessend, wie gewöhnlich berechnet:

Fig. 27.



	Punkt	Winkel	Veränderung der Logarithmen für 1″	Log Sin a	Log Sin c	Log Sin a b c	Logarithmen der Seitenlängen	Seitenlängen in Metern	Ausgeglichene Winkel
		−4		−16					
a	R	(62°68′35″)	+ 4,53	9.9206803		9.9206787	3.2537197	1793,6	
b	12	99.81.48				9.9999982	3.3330392	2153,0	99°81′48″
		+4			+37				
c	21	37.50.17	+10,20		9.7447563	9.7447600	3.0778010	1196,2	37.50.21
		−3		−41					
	11	34.10.34	+11,50	9.7079455		9.7079414	3.0778010	1196,2	34.10.31
	12	111.07.47				9 9931952	3.3630548	2307,0	111.07.47
		+3			+21				
	R	(54.82.19)	+ 5,86		8.8800048	9.8800069	3.2498665	1777,7	
		[r]	+32,09	19.6286258	9.6247611				
				3.2498665	3.2537197				
				22.8784923	22.8784808				
					22.8784923				
					115	: 32,09 =	3,6″		
				−57	+58				

Die Verbesserungen der Logarithmen-Sinus sind hier mit 3,6″, wie bei allen vorhergehenden Beispielen mit dem genauen Werthe der Winkelverbesserung berechnet, wogegen die Verbesserung der Winkel selbst auf volle Secunden abgerundet ist.

Wenn die drei Standpunkte, auf welchen die Richtungen nach dem eingeschnittenen Punkte beobachtet wurden, im Netze nicht mit Dreiecksseiten verbunden, sondern nur mit ihren Achsen–Abständen und Abschnitten gegeben sind, so ist es zur Anwendung des vorstehenden Verfahrens nöthig, die Entfernungen derselben von einander, die Neigungen der betreffenden Linien gegen die Achse und daraus die Winkel, welche sie mit einander einschliessen, durch Auflösung der von den Abstands- und Abschnitts–Unterschieden gebildeten rechtwinkligen Dreiecke abzuleiten. Man kann dabei immer denjenigen Zusammentreffungspunkt zweier solcher Linien wählen, um ihren Zwischenwinkel zu ermitteln, welcher innerhalb der beiden äussersten nach dem eingeschnittenen Punkt beobachteten Richtungen liegt. Man hat dann nicht nöthig, für verschiedene Fälle der zu behandelnden Figuren besondere Regeln zu ermitteln und anzuwenden.

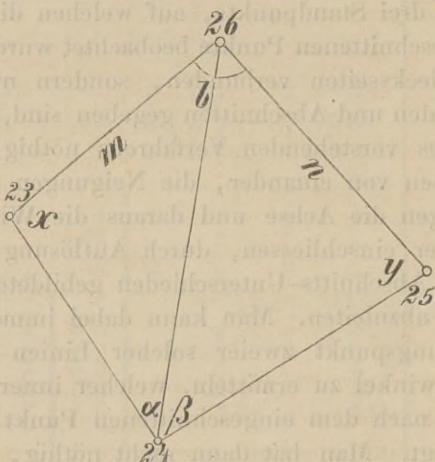
c. Das Rückwärts-Einschneiden.

Was bei dem Vorwärts-Einschneiden Zielpunkt war, ist bei dem Rückwärts-Einschneiden Standpunkt; seine Lage ist bestimmbar, wenn auf ihm die zwei Winkel zwischen drei im Dreiecksnetz gegebenen Punkten gemessen werden. Auch hier braucht, wie beim Vorwärts-Einschneiden, nur ein Fall betrachtet zu werden, der nämlich, wo der Winkel zwischen den Verbindungslinien der gegebenen Punkte bekannt ist, dessen Scheitel zwischen den beiden auf dem eingeschnittenen Punkte genommenen äussersten Richtungen liegt. Denn wenn dieser Winkel und die Länge seiner beiden Schenkel nicht unmittelbar bekannt sein sollten, ist es eine leichte Arbeit, sie aus den Abständen und Abschnitten der gegebenen Punkte vermittelst Auflösung rechtwinkliger Dreiecke abzuleiten.

Man braucht sich also nur mit folgendem Falle der bekannten Potenot'schen Aufgabe zu befassen:

Hätte man in der Figur 28 zwischen den gegebenen Punkten 23 und 26, 26 und 25 auf dem Standpunkt 24 die Winkel α und β gemessen, wären die Seitenlängen m und n und der Winkel b gegeben oder aus Abständen und Abschnitten

Fig. 28.



abgeleitet, und wollte man zunächst die Winkel x und y bei den Punkten 23 und 25 suchen, so hätte man:

$$x + y = 400^0 - b - \alpha - \beta,$$

oder wenn man den bekannten rechtsstehenden Werth $= k$ setzen will:

$$y = k - x,$$

mithin $$24 \,.\, 26 = \frac{m \,.\, \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} \alpha} = \frac{n \operatorname{Sin} (k - x)}{\operatorname{Sin} \beta},$$

also $$\frac{\operatorname{Sin} k - \beta}{\operatorname{Sin} x} = \frac{m \operatorname{Sin} \beta}{n \operatorname{Sin} \alpha},$$

$$\frac{\operatorname{Sin} k \operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} k \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{m \operatorname{Sin} \beta}{n \operatorname{Sin} \alpha},$$

$$\operatorname{Sin} k \operatorname{Cotang} x - \operatorname{Cos} k = \frac{m \operatorname{Sin} \beta}{n \operatorname{Sin} \alpha},$$

$$\operatorname{Cotang} x = \frac{m \operatorname{Sin} \beta}{n \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} k} + \operatorname{Cotang} k.$$

Die Berechnung ist leicht auszuführen mit Hülfe der Hobert'schen trigonometrischen Tafeln, wo den auf der rechten Seite befindlichen Logarithmen auf der linken Seite die natürlichen Längen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten gegenüberstehen, neben dem Log Sin k der Formel also auch die

Zahl für Cotang k hervorgehoben werden kann. Ein Zahlenbeispiel wird dieses zeigen.

In dem mehrgedachten Amtsnetze ist gegeben:

	Winkel $b =$	$100^0\,49'\,15''$,	$\text{Log}\,\frac{m}{n} =$	9.8546990
gemessen	» $\alpha =$	$35.\ 69.95$,	$10 - \text{LogSin}\,\alpha =$	0.2742228
»	» $\beta =$	$55.\ 17.46$,	$\text{Log Sin}\,\beta =$	9.8820600
		$191.\ 36.56$	$10 - \text{LogSin}\,k =$	0.8689800_n
		$400.\ 00.00$	Summa $=$	0.8799618_n
	$k =$	$208.\ 63.44$	Zahl $=$	$-\ 7.5851087$
			Cotang $k =$	7.3277920
			Cotang $x =$	$-\ 0.2573167$
		$116.\ 03.35 =$	$x =$	$116^0 03' 35''$
	$y =$	$92.\ 60.09$		

Damit sind dann die Hülfsgrössen gefunden, vermittelst deren die noch fehlenden Stücke der beiden Dreiecke und Achsen-Abstand und Abschnitt des rückwärts eingeschnittenen Punktes berechnet werden können.

Im Allgemeinen ist hinsichtlich der Vorwärts- und Rückwärts-Einschnitte zu bemerken, dass in den Fällen, wo ein Zielpunkt von mehr als drei Standpunkten vorwärts oder ein Standpunkt gegen mehr als drei gegebene Punkte rückwärts eingeschnitten ist, die fehlerausgleichende Berechnung nicht füglich ohne Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate, welche aber von dem Plane dieser Schrift ausgeschlossen ist, geführt werden kann. Wer sich über die Anwendung dieser Methode auf solche Fälle unterrichten will, findet erläuterte und ausgeführte Beispiele in den Mittheilungen des Verfassers in Schlömilch's Zeitschrift für reine und angewandte Mathematik; Leipzig bei B. G. Teubner, Jahrgang 1857, Seite 299, und in den geographischen Bestimmungen im Regierungsbezirk Minden; Minden bei Körber und Freytag 1853, Seite 114.

Nur hinsichtlich derjenigen mehr als dreistrahligen Vorwärtseinschnitte, wobei die Standpunkte ein geschlossenes Vieleck mit bereits festgestellten Dreiecksseiten bilden, kann ein bequemeres Verfahren eingeschlagen werden. Wäre z. B. in der Figur 25 der Punkt 8 mit einem für Winkelwerkzeuge unzugänglichen, aber mit guter Zielspitze versehenen Bauwerk besetzt gewesen, so hätte die Aufgabe nach Fortfall der Dreiecksbedingungen nur der Erfüllung der Kreisbedingung bedurft, wie solche oben erläutert und ausgeführt ist.

§ 16.

Anschluss der Flurumfangs-Vielecke und Vollendung des Vermessungswerks.

Nachdem das Dreiecksnetz berechnet ist, geht das Vermessungswerk zur Flureintheilung des Bezirks und zur Herstellung der Umfangsvielecke der Fluren, welche nach der im ersten Abschnitt dieser Schrift besprochenen Verfahrungsweise der Vermessung der einzelnen Grundstücke zur Grundlage dienen sollen, über.

Für die gute Ordnung und leichte Handhabung des Kartenwerks empfiehlt es sich dringend, die Eintheilung des zu vermessenden Bezirks in Fluren so einzurichten, dass jede Flur auf einem Bogen Kartenpapier, der gewöhnlich 1 Meter lang und $^2/_3$ Meter breit ist, dargestellt werden kann und zwar in demjenigen Maassstabe, welcher der durchschnittlichen Grösse der Einzelnstücke des Grundeigenthums und der davon gewöhnlich abhängigen Anforderung an die Genauigkeit des Nachweises, den die Karte gewähren soll, angemessen ist.

Welche Rücksichten bei der Auswahl der Flurumringsgrenzen zu nehmen sind, ist im § 1 erwähnt worden; ebenso was bei dem Abstecken des Umfangsvielecks und wegen Sicherstellung der gewählten Brechpunkte zu beachten ist.

Die von einem Dreieckspunkte sichtbaren und ihm zunächst stehenden Brechpunkte sind mit ihm durch Winkel- und Längenmessung in Verbindung zu setzen, wie dieses in der Figur 26 anschaulich gemacht ist.

Obgleich jede Flur mit einem Vieleck vollständig zu umschliessen ist, so ist es doch nicht zweckmässig, jedes dieser Vielecke bei der Standortsberechnung für sich rundherum zu berechnen, wie dieses bei einer einzeln zu vermessenden Flur in den §§ 5 und 6 gezeigt worden ist. Die Berechnung muss von einem Dreieckspunkt in dem nächsten Zuge nach einem benachbarten Dreieckspunkte sich bewegen und auf diesem mit dem Neigungswinkel, dem Achsenabstand und Achsenabschnitt abschliessen. Die dabei hervortretenden Abweichungen sind nach dem im § 7 gezeigten Verfahren zu vertheilen. Sind alle in Dreieckspunkten beginnenden und endigenden Züge berechnet, so bleiben nur noch die dieselben verbindenden, an Brechpunkten beginnenden und endigenden Züge einzuschalten und ist dabei hinsichtlich der Fehlerausgleichung ebenso zu verfahren.

Nachdem sämmtliche Standorte des Dreiecks- und Vielecksnetzes berechnet sind, kann an der Stelle einer für die bisherigen Arbeiten dienlichen Handzeichnung eine genaue Netzkarte des zu vermessenden Bezirks aufgetragen werden.

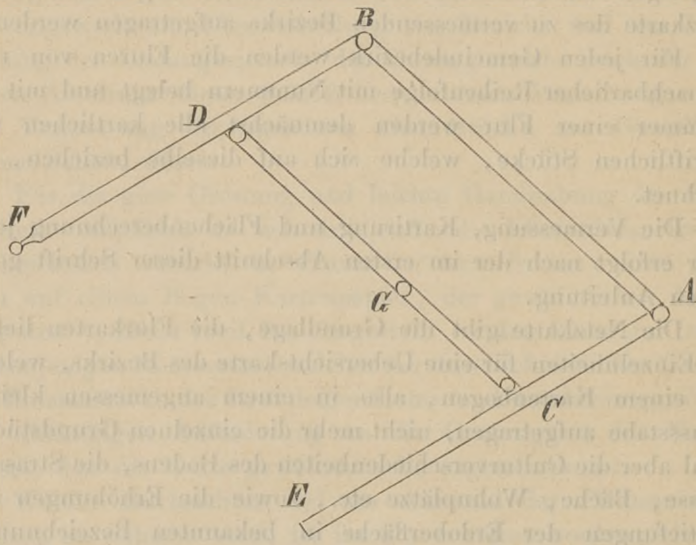
Für jeden Gemeindebezirk werden die Fluren von 1 an in nachbarlicher Reihenfolge mit Nummern belegt und mit der Nummer einer Flur werden demnächst alle kartlichen und schriftlichen Stücke, welche sich auf dieselbe beziehen, bezeichnet.

Die Vermessung, Kartirung und Flächenberechnung jeder Flur erfolgt nach der im ersten Abschnitt dieser Schrift gegebenen Anleitung.

Die Netzkarte gibt die Grundlage, die Flurkarten liefern die Einzelnheiten für eine Uebersichtskarte des Bezirks, welche, auf einem Kartenbogen, also in einem angemessen kleinen Maassstabe aufgetragen, nicht mehr die einzelnen Grundstücke, wohl aber die Culturverschiedenheiten des Bodens, die Strassen, Flüsse, Bäche, Wohnplätze etc., sowie die Erhöhungen und Vertiefungen der Erdoberfläche in bekannten Bezeichnungsarten anschaulich macht. Bei dem Entwerfen dieser Uebersichtskarte werden die Netzpunkte nach den Maasszahlen der Standortswerthe aufgetragen, die Einzelnheiten der Zeichnung durch Verkleinerungs-Vorrichtungen von den Flurkarten in die Uebersichtskarte übernommen. Dergleichen Vorrichtungen sind quadratisch eingetheilte Glastafeln, welche auf die Flurkarten gelegt werden, um danach zu bemessen, wie und in welche entsprechenden, mit Bleistift in die Uebersichtskarte im kleineren Maassstabe ausgezogenen Quadrate die zu übernehmenden Gegenstände einzuzeichnen sind. Auch bedient man sich zu solcher Uebertragung eines besonders dazu hergestellten Werkzeugs, Storchschnabel genannt, welches, wie in Figur 29 anschaulich gemacht, aus 4 runden, messingenen Hohlstangen AB, CD, BF und AE besteht, die bei A, B, C, D mit Gelenken verbunden sind und auf Rollen laufen, die sich an den Enden von wagrecht drehbaren Armen befinden.

Die Stange CD ist verschieblich und $= AB$, sie muss aber immer mit der Stange AB parallel liegen, was dadurch ermöglicht wird, dass die Stangen von B nach F und von A nach E in auf beiden Stangen gleiche Theile eingetheilt sind, wonach die mit Theilstrichen versehenen Stücke C und D nur

Fig. 29.



auf gleiche Theilstriche der Stangen eingestellt zu werden brauchen. Auch die Stange CD ist ebenso eingetheilt, und das verschiebbare Stück G muss auf den gleichhohen Theilstrich gesetzt werden, wonach $GC = AC$ und $GD = FD$, mithin die Dreiecke ACG und FDG einander ähnlich sind. Wird nun A mit Hülfe eines Bleisatzes auf der Tischplatte festgestellt, befindet sich bei F ein Führstift, bei G ein Schreibstift, so zeichnet dieser eine mit dem Führstift überfahrene Länge in dem Verhältniss wie AG zu GF, wie CG zu GD. Bei dieser Stellung des Bleisatzes und des Schreibstifts kann der letztere nur verkleinern. Beide Stücke können aber auch verwechselt, der Bleisatz kann unter G, der Schreibstift unter A gesetzt werden, und dann ist das Werkzeug sowohl zu Verkleinerungen als auch zu Vergrösserungen brauchbar.

Soll der Schreibstift in einem bestimmten Verhältniss zeichnen, so müssen die Theilstriche durch Rechnung ermittelt werden, in welche die Stücke C, G und D einzustellen sind.

Wie schon bemerkt, bezeichnet man gewöhnlich den Maassstab einer Karte mit einem Bruch, dessen Zähler die Einheit eines gewissen Maasses und dessen Nenner die Anzahl solcher Einheiten ausdrückt, welche eine Linie im Felde enthält, die auf der Karte jene Längeneinheit ausmacht. Bezeichnen wir nun den Maassstab, in welchem die Urzeichnung aufgetragen ist, mit $\frac{1}{ur}$, den Maassstab der beabsichtigten Abzeichnung mit $\frac{1}{ab}$ und benennen wir die Anzahl der gleichen Theile, in welche die gleich langen Stangen BF und CD getheilt sind, mit K, so hat man für die Stellen, wo die Stücke C, G und D stehen müssen, die Formeln:

$$x = \frac{K.ur}{ab} \text{ für die Stellung des Bleisatzes in } A,$$

$$x' = \frac{K.ur}{ur + ab} \text{ für die Stellung des Bleisatzes in } G.$$

Wäre der Maassstab der Abzeichnung gleich dem der Urzeichnung verlangt, so würde $x = K$ und die Stücke G und D fielen mit F zusammen. Verlangte man sogar, dass der Maassstab der Abzeichnung grösser als der der Urzeichnung, ab also kleiner als ur sein solle, so würde x grösser als K, die Einstellungspunkte fielen also ganz ausserhalb des Werkzeugs; beide Fälle sind also unmöglich, und die Stellung des Bleisatzes in A kann nur zu Verkleinerungen dienen. Dagegen ist x' nothwendig immer kleiner als K, das Werkzeug kann also bei der Stellung des Bleisatzes in G ebensowohl zu Verkleinerungen als zu Vergrösserungen benutzt werden.

§ 17.

Schlussbemerkung.

Für die zeitweiligen und künftigen Zwecke eines Vermessungswerks ist es wichtig, bei seiner Herstellung dafür zu sorgen, dass die entstandenen Schrift- und Zeichenstücke von langer Dauer seien und auch in später Zeit von jedem Sachverständigen zweifellos gedeutet werden können. Zu den Feldbüchern, Winkelbüchern, Dreiecks- und Standortsberechnungen muss gutes, dauerhaftes Papier, für immer tiefschwarz bleibende Dinte, zu den Handrissen und Karten wohl geleimtes und frei von verderblichen Stoffen hergestelltes Kartenpapier gewählt werden. Die Schriftstücke müssen in dauerhafte Bände gesetzt, die Karten in Mappen oder Bänden aufbewahrt werden, daher von gleichem Format sein.

Von besonderer Wichtigkeit ist die deutliche Herstellung und gute Aufbewahrung der Vermessungshandrisse mit den Maasszahlen für die Bestimmung der Grenzen der Grundstücke. Denn es ist erfahrungsmässig, dass nach ihnen von den Eigenthümern noch nach vielen Jahren verlangt wird, wenn es sich darum handelt, verdunkelte Grenzen wieder aufzufinden und herzustellen.

Anhang.

Die Flächenbestimmung

mit Hülfe des Amsler'schen Polarplanimeters.

VORWORT.

In der Schrift »Ueber die Berechnung der Flächeninhalte ganz oder überwiegend aus Originalmaassen, Leipzig bei B. G. Teubner 1858«, habe ich auf die Vorzüge des Verfahrens, die Flächeninhalte vermessener Feldstücke aus den bei der Vermessung im Felde unmittelbar erhobenen Maasszahlen zu berechnen, aufmerksam gemacht und die Wege zu zeigen versucht, auf denen die Erfolge dieses Verfahrens in kürzester Zeit und mit der geringsten Mühe erlangt werden können. Dabei habe ich jedoch keineswegs verhehlt, dass es Umgrenzungen der Grundstücke geben kann, bei welchen die Berechnung aus Originalmaassen zu allzu weitläufiger Arbeit führen würde. Auch kann in vielen Fällen nicht vorausgesetzt werden, dass dem Rechner die Originalmaasse wirklich zur Hand liegen, es ist ja nicht selten, dass ihm nur eine Karte vorliegt und er die Aufgabe überkommt, nach dieser die Flächen der auf ihr verzeichneten Grundstücke zu berechnen.

Wie gross daher auch die Vorzüge der Flächenberechnung aus Originalmaassen sein mögen, so können doch die zur Berechnung der Flächen nach der Karte dienenden Werkzeuge nicht entbehrt werden.

Unter diesen Werkzeugen nimmt das Amsler'sche Polarplanimeter einen hohen, wo nicht zur Zeit den höchsten Rang ein. Mit Vorsicht gebraucht, liefert dasselbe in der kürzesten Zeit genügend genaue Ergebnisse. Dieses Werkzeug ist bereits in verschiedenen Schriften, unter andern in der trefflichen Abhandlung des Herrn Dr. C. Bremiker »Theorie des Amsler'schen Polarplanimeters, Berlin bei R. Decker 1863« beschrieben. Gleichwohl schien es mir, dass den ausübenden Feldmessern eine nähere Auseinandersetzung dieses höchst sinnreichen Werkzeugs und deren Begleitung mit im metrischen Maasse gegebenen Beispielen wünschenswerth sein möchte. Ich übergebe eine solche in der nachfolgenden Schrift. In ihr habe ich mich der Bremiker'schen Theorie im Wesentlichen angeschlossen, auch theilweise die von ihm gewählte Bezeichnung angewendet.

In der Schrift selbst schien mir eine Bezugnahme auf die Figur überflüssig und für den Leser unbequem zu sein; ich habe jedoch, um jede daraus etwa erwachsende Undeutlichkeit zu vermeiden, die Figur und deren Zeichen-Erläuterung an besonderer Stelle gegeben.

Erläuterung
zu nebenstehender Zeichnung
für Fahrten von links nach rechts.

I. Fahrten mit ausgereckten Armen über dem Grundkreis.

P Pol des Werkzeugs.
G anfängliche, N endliche Lage des Gewindes.
Fahrstange AGH um Winkel φ nach BGK geschoben.
Fahrstift B bei festem Winkel $(\alpha-\varphi)$ nach C bewegt.
Fahrstange CNM um Winkel φ nach DNQ zurückgeschoben.
H, L, q rechte Winkel.
$HGP =$ Winkel α.
$PG = PN = a =$ Polararm.
$GH = GK = NM = NQ = b =$ Rollenarm.
$GA = GB = NC = ND = c =$ Fahrarm.
$PK = PM = x =$ Polarlinie.
$\psi =$ Winkel zwischen Polarlinie PK und Rollenarm KG.
$g =$ Winkel $BPC = KPM$.
Winkel $KPp = \frac{1}{m} g$.
$Kq =$ Rollenabwickelung für $\frac{1}{m}.g$

$$= x \frac{\frac{g}{m}\pi}{180} \operatorname{Cos} \psi.$$

Rollenabwickelung für $g = m. \; \dfrac{x \frac{g}{m} \pi}{180} \operatorname{Cos} \psi$

$$= \frac{x g \pi}{180} \operatorname{Cos} \psi = W.$$

$R = AP = FP = EP =$ Halbmesser des Grundkreises.
$r = BP = CP =$ Halbmesser des Kreisausschnitts BPC.

$GL - GK = -b + a \operatorname{Cos}(\alpha-\varphi) = KL = x \operatorname{Cos} \psi.$

$$w = \frac{x g \pi}{180} \operatorname{Cos} \psi = \frac{g \pi}{180} [-b + a \operatorname{Cos}(\alpha-\varphi)].$$

$R^2 = a^2 - b^2 + (b+c)^2 = a^2 + c^2 + 2bc.$
$r^2 - a^2 + c^2 + 2ac \operatorname{Cos}(\alpha-\varphi).$
$r^2 = R^2 = -2bc + 2ac \operatorname{Cos}(\alpha-\varphi) = 2c[-b + a \operatorname{Cos}(\alpha-\varphi)].$
Fläche $ABCD = BCEF$.

$$\text{Fläche } BCEF = (r^2 - R^2)\pi \frac{g}{360} = c \frac{g\pi}{180} [-b + a \operatorname{Cos}(\alpha-\varphi)] = f = cw.$$

Für w ist die Rolle fortläufig.

II. Fahrten mit eingereckten Armen unter dem Grundkreis.

P Pol des Werkzeugs.
G anfängliche, N' endliche Lage des Gewindes.
Fahrstange AGH um Winkel φ' nach $B'GK'$ geschoben.
Fahrstift B' bei festem Winkel $(\alpha+\varphi')$ nach C' bewegt.
Fahrstange $C'N'M'$ um Winkel φ' nach $D'N'Q'$ zurückgeschoben.
H, L', q' rechte Winkel.
$HGP =$ Winkel α.
$PG = PN' = a =$ Polararm.
$GH = GK' = N'M' = N'Q' = b =$ Rollenarm.
$GA = GB' = N'D' = N'C' = c =$ Fahrarm.
$PK' = PM' = x' =$ Polarlinie.
$\psi' =$ Winkel zwischen Polarlinie PK' und Rollenarm $K'G$.
$g' =$ Winkel $B'PC' = K'PM'$.
Winkel $K'Pp' = \frac{1}{m} g'$.
$K'q' =$ Rollenabwickelung für $\frac{1}{m} g'$

$$= \frac{x' \frac{g'}{m} \pi}{180} \operatorname{Cos} \psi'.$$

Rollenabwickelung für $g = m \; \dfrac{x' \frac{g'}{m} \pi}{180} \operatorname{Cos} \psi'$

$$= \frac{x g \pi}{180} \operatorname{Cos} \psi' = w'.$$

$R = AP = D'P =$ Halbmesser des Grundkreises.
$r' = B'P = F'P = E'P =$ Halbmesser des Kreisausschnitts $F'PE'$.

$-GL' - GK' = -b + a \operatorname{Cos}(\alpha+\varphi') = -K'L' = x' \operatorname{Cos} \psi'.$

$$w' = \frac{x' g' \pi}{180} \operatorname{Cos} \psi' = \frac{g' \pi}{180} [-b + a \operatorname{Cos}(\alpha+\varphi')].$$

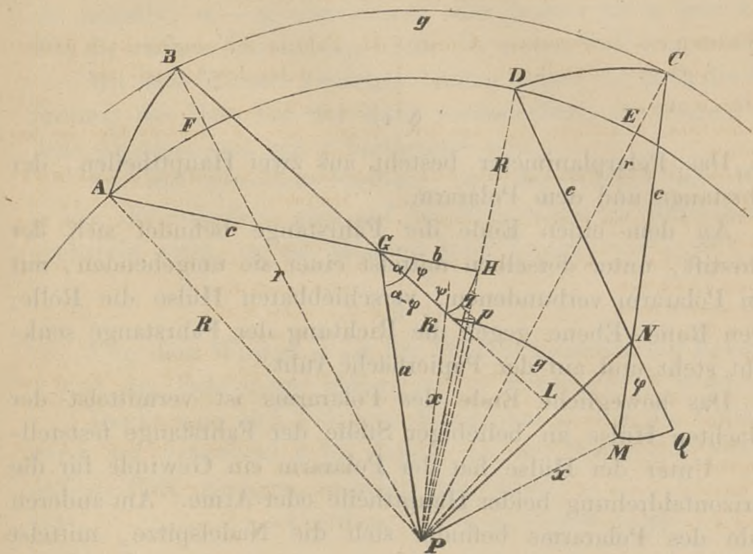
$R^2 = a^2 - b^2 + (b+c)^2 = a^2 + c^2 + 2bc.$
$r'^2 = a^2 + c^2 + 2ac \operatorname{Cos}(\alpha+\varphi').$
$r'^2 - R^2 = -2bc + 2ac \operatorname{Cos}(\alpha+\varphi') = 2c[-b + a \operatorname{Cos}(\alpha+\varphi')].$
Fläche $AB'C'D' = AD'E'F'$.

$$\text{Fläche } AD'E'F' = (r'^2 - R^2) \frac{\pi g}{360} = c \frac{g'\pi}{180} [-b + a \operatorname{Cos}(\alpha+\varphi')] = f' = cw'.$$

Für w' ist die Rolle rückläufig.

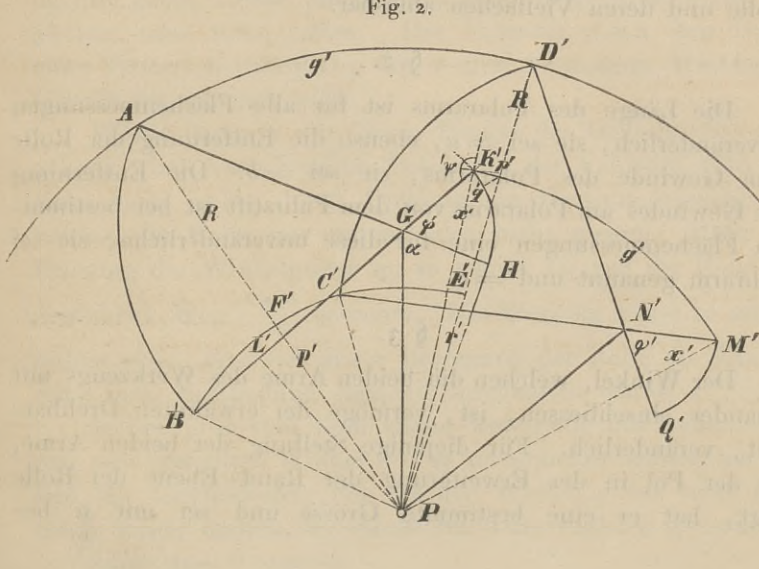
Fahrten mit ausgereckten Armen.

Fig. 1.



Fahrten mit eingereckten Armen.

Fig. 2.



§ 1.

Das Polarplanimeter besteht aus zwei Haupttheilen, der Fahrstange und dem Polararm.

An dem einen Ende der Fahrstange befindet sich der Fahrstift, unter derselben mittelst einer sie umgebenden, mit dem Polararm verbundenen, verschiebbaren Hülse die Rolle, deren Rand-Ebene gegen die Richtung der Fahrstange senkrecht steht und auf der Papierfläche ruht.

Das bewegliche Ende des Polararms ist vermittelst der gedachten Hülse an beliebiger Stelle der Fahrstange feststellbar. Unter der Hülse hat der Polararm ein Gewinde für die Horizontaldrehung beider Haupttheile oder Arme. Am anderen Ende des Polararms befindet sich die Nadelspitze, mittelst deren Einsenkung in die Papier-Ebene der Pol des Werkzeugs hergestellt wird. Vermittelst der mit einem Nonius versehenen Eintheilung der Rolle und eines mit dieser verbundenen Drehscheibenwerks sind 1000 Theile der Umfangslänge der Rolle und deren Vielfachen ablesbar.

§ 2.

Die Länge des Polararms ist für alle Flächenmessungen unveränderlich, sie sei $= a$, ebenso die Entfernung der Rolle vom Gewinde des Polararms, sie sei $= b$. Die Entfernung des Gewindes am Polararm von dem Fahrstift ist bei bestimmten Flächenmessungen eine für diese unveränderliche, sie sei Fahrarm genannt und $= c$.

§ 3.

Der Winkel, welchen die beiden Arme des Werkzeugs mit einander einschliessen, ist, vermöge der erwähnten Drehbarkeit, veränderlich. Für diejenige Stellung der beiden Arme, wo der Pol in der Erweiterung der Rand-Ebene der Rolle liegt, hat er eine bestimmte Grösse und sei mit α bezeichnet, jede Abweichung davon sei $= \varphi$, wonach bei dieser die beiden Arme des Werkzeugs den Winkel $\alpha - \varphi$ mit einander einschliessen, wobei indessen φ ebensowohl positiv als negativ; $\alpha - \varphi$ also kleiner oder grosser als α sein kann. Für die nächste Darstellung werde der erstere Fall angenommen.

Mit dem Winkel zwischen beiden Armen ist auch die Entfernung des Pols von der Rolle veränderlich; sie möge Polarlinie genannt und mit x bezeichnet sein.

Für die besondere Stellung, wo der Winkel den Werth α hat, die Polarlinie also auf der Fahrstange im Rollenpunkte senkrecht steht, ist das Quadrat ihrer Länge $= a^2 - b^2$.

§ 4.

Von dem Winkel φ ist der Winkel zwischen der Polarlinie x und der Fahrstange abhängig; er werde mit ψ bezeichnet.

Denkt man sich bei dem Armwinkel $\alpha - \varphi$ die Verlängerung des Armstücks b bis dahin, wo die Senkrechte vom Pol auf sie fällt, gezogen, so zeigt sich, dass:

(1) . . . . $x \operatorname{Cos} \psi = - b + a \,.\, \operatorname{Cos} (\alpha - \varphi)$.

§ 5.

Würde der Fahrstift bewegt, während der Winkel α zwischen beiden Armen unveränderlich bliebe, so könnte die Rolle, da ihre Rand-Ebene immer nach dem Pol gerichtet wäre, nur gleiten, also nicht rollen. Der Fahrstift würde den Bogen eines Kreises beschreiben, der wegen besonderer Wichtigkeit Grundkreis genannt wird.

Würde dagegen von einem Punkte des Grundkreises ausgehend, bei feststehendem Polararm, der Fahrstift etwa von links nach rechts durch Drehung im Gewinde bewegt, so könnte die Rolle nur rollen, also nicht gleiten. Hätte die Drehung die Winkelgrösse φ, so würde der von der Rolle abgewickelte Weg $\frac{b \varphi \pi}{180}$ betragen. Das Werzeug möge so eingerichtet sein, dass bei dieser Bewegung der Rolle die Zahlenreihe ihrer Eintheilung steigend durchlaufen würde.

Sollten aber vom Ende dieser Bewegung die beiden Arme den nun erreichten Winkel $\alpha - \varphi$ unverändert beibehalten und sich bei feststehendem Pol um den Winkel g von links nach rechts weiter drehen, so würde die Rolle zugleich gleiten und rollen, weil die Rolle jetzt eine gegen den Pol schräge Stellung eingenommen hat. Die Rolle kann sich nur in der gegen die Richtung der Fahrstange senkrechten Richtung drehen. Das bewegliche Ende der Polarlinie x, das den Kreisbogen des Winkels g beschreibt, hat bei seiner Bewegung in jedem Punkte des Bogens anfänglich die Richtung der Tangente. Denkt man sich den Bogen in so kleine Stücke getheilt, dass man sowohl in Ansehung der Länge als der Richtung das Bogenstück dem Tangentenstück gleichachten kann, und berücksichtigt man, dass der Winkel zwischen der Tangente und der Rollen-Ebene dem Winkel ψ gleich ist, so lässt sich der Rollenweg $\frac{w}{m}$, welcher von dem Rande der Rolle auf dem Bogenstück $\frac{g}{m}$, wo m eine sehr grosse oder, wenn man will, unendlich grosse Zahl bedeuten mag, abgewickelt wird, ausdrücken durch:

$$\frac{w}{m} = \frac{x \frac{g}{m} \pi}{180} \operatorname{Cos} \psi,$$

wo π die Länge des Halbkreises für den Halbmesser $= 1$ oder die Zahl 3,14159, welcher die Gradzahl 180 gegenübersteht, bezeichnet. Zur Erläuterung des Ausdrucks ist zu bemerken, dass das Product aus der Länge des kleinen Bogen- oder Tangentenstücks mit dem Cosinus des Winkels zwischen ihm und der Rollen-Ebene die Projection desselben auf der letzteren, oder auf die Papier-Ebene übertragen, der Weg ist, welchen die Rolle bei jener Doppelbewegung abwickelt.

Werden alle diese kleinen Abwickelungen summirt oder beide Seiten der vorstehenden Gleichung mit m malgenommen, so erhält man:

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots w = \frac{xg\pi}{180} \operatorname{Cos} \psi.$$

Würde am Ende des Winkels g der Polararm wieder festgestellt und der Fahrstift bis zum Grundkreise zurückgeführt, so würde sich die Fahrstange um den Winkel φ zurückbewegen und die Rolle den Weg

$$-\frac{b\varphi\pi}{180}$$

abwickeln.

Die ganze Rollenabwickelung bei der Bewegung des Fahrstifts vom Grundkreise bis wieder zu demselben zurück würde betragen:

$$+\frac{b\varphi\pi}{180}+\frac{xg\pi}{180}\text{ Cos }\psi-\frac{b\varphi\pi}{180}=w\,,$$

also nur dasselbe, was der Ausdruck (2) ergab. Dieser Werth würde, wie eben bemerkt, unverändert bleiben, wenn man von dem zuletzt erreichten Punkte des Grundkreises mit dem Fahrstift auf ihm bis zum Anfangspunkt zurückfahren wollte, weil bei dieser Bewegung die Rolle nur gleiten aber nicht rollen kann.

§ 6.

Bei solcher Gesammtbewegung hat der Fahrstift eine Figur umlaufen, welche zwischen zwei concentrischen Kreisen liegt und von vier Bogen eingeschlossen wird, von denen zwei, die zwischen den Kreisen liegen, einander gleich sind, die zwei anderen, in den Kreisen liegend, sich wie deren Halbmesser verhalten. Die Fläche dieser Figur ist, wie leicht nachzuweisen, dem Ringstücke gleich, welches zwischen den beiden Kreisen und den Schenkeln des Winkels g liegt, oder dem Unterschiede zweier Kreisausschnitte mit dem Centriwinkel g.

Nun ist der Halbmesser des Grundkreises der mit R bezeichnet sei, durch die Gleichung:

$$R^2=(b+c)^2+a^2-b^2=a^2+c^2+2bc$$

und der mit r bezeichnete des anderen Fahrkreises durch die Gleichung:

$$r^2=a^2+c^2+2ac\text{ Cos }(\alpha-\varphi)$$

gegeben. Wird die erstere Gleichung von der letzteren abgezogen, so erhält man:

$$r^2-R^2=2c\,[-b+a\text{ Cos }(\alpha-\varphi)]\,.$$

Da nun die Fläche des einen Kreises $=r^2\pi$ des anderen $=R^2\pi$, die eines Ausschnitts derselbe Theil der ganzen Kreisfläche ist, wie sein Centriwinkel vom ganzen Kreisumfange, so lässt sich die Fläche des Ringstücks, welche mit f bezeichnet werde, wie folgt:

(3) . . . . $f=(r^2-R^2)\dfrac{g\pi}{360}=\dfrac{cg\pi}{180}\,[-b+\text{Cos }(\alpha-\varphi)]$

ausdrücken.

§ 7.

Setzt man in die Gleichung (2) für $x \operatorname{Cos} \psi$ dessen Werth in der Gleichung (1), so erhält man:

$$w = \frac{g\pi}{180} \left[- b + a \left(\operatorname{Cos} \alpha - \varphi \right) \right]$$

und endlich, für den rechts stehenden Werth, w in die Gleichung (3) gesetzt, findet man:

(4) . . . . $f = c \,.\, w.$

In Worten: man erhält die Fläche des umfahrenen Ringstücks, wenn man die Länge des Arms c der Fahrstange mit der auf der Rolle abgelesenen Wegelänge ihrer Abwickelung malnimmt.

Es ist von gleichem Erfolge, d. h. w bleibt sich gleich, ob das Ringstück von den oben gedachten vier Bogenstücken umschlossen und über diese umfahren wird, oder ob es von den zwei concentrischen Kreisbogen und den beiden sie schneidenden Radien begrenzt umfahren wird. Denn das Auf- und Abfahren in den beiden einander gleichen Halbmesserstücken zwischen den beiden Kreisen hebt sich ebenso gegen einander auf wie die beiden eben gedachten Rollenbewegungen bei feststehendem Polararm.

Ist hiernach die Fläche eines Ringstücks zwischen dem Grundkreise und einem ausserhalb desselben liegenden Kreises dem Producte aus der Länge des Fahrarms und der Rollenabwickelung nach Befahrung des äusseren Bogenstücks von links nach rechts gleich, so gilt dieses auch für ein Ringstück über dem Grundkreise für den Bogen eines zwischen beiden Kreisen liegenden Kreises. Will man also die Fläche des äussersten Ringstücks erhalten, so muss man beide Werthe von einander abziehen. Man erhält aber ohne diese Rechnung dasselbe Resultat, wenn man das äussere Ringstück ringsherum befährt, wobei der Zwischenbogen nicht wie vorhin von links nach rechts, sondern jetzt von rechts nach links befahren wird, wobei die Rolle selbst die Subtraction vollzieht.

§ 8.

Es ist jetzt auch der Fall zu betrachten, wo der Fahrstift um einen gewissen Bogen φ' innerhalb des Grundkreises geschoben wird und er von da aus bei feststehendem Winkel zwischen beiden Armen des Werkzeugs einen Bogen g' um den Pol beschreibt und vom Ende desselben nach dem Grundkreise zurückkehrt.

In diesem Falle gehen die Winkel $(\alpha + \varphi')$ und ψ' (ersterer zwischen b und a, letzterer zwischen b und der Verlängerung des Polararms x') über einen rechten Winkel hinaus, die Cosinus beider Winkel werden also negativ und damit auch die rechtsseitigen Werthe der Formeln (1), (2), (3), (4). Der Winkel $-\varphi$ des ersten Falles bei ausgereckten Armen geht nämlich bei dem Armwinkel α durch 0 und bei dem Zusammenschieben der Arme in $+\varphi'$ über. Die Rollen-Abwickelung w' wird negativ, damit auch $f' = c\,w'$. Hätte man aber das Bogenstück g' rückwärts, also von rechts nach links befahren oder hätte man das ganze Ringstück zwischen dem Grundkreise und dem inneren Kreise rings umfahren, so hätte die Rolle einen Weg abgewickelt, der mit der Armlänge c malgenommen, die positive Fläche des inneren Ringstücks ergeben hätte. Daraus folgt auch für den dritten Fall, wo die Ringfläche an beiden Seiten des Grundkreises liegt, von diesem also durchschnitten wird, dass sie durch eine Ringsumfahrung derselben bestimmt wird.

§ 9.

Ist im Vorstehenden (§§ 6 — 7) mehrfach von einer Ringsumfahrung eines Ringstücks die Rede gewesen, so ist doch auch schon darauf aufmerksam gemacht, dass genau genommen die beiden einander gleichen, geraden Seitenlinien nicht befahren zu werden brauchen, weil die ihnen angehörigen Rollen-Abwickelungen sich gegenseitig aufheben. Es genügt also vollkommen, dass der äussere Bogen von links nach rechts, der innere von rechts nach links befahren wird, um die Fläche jedes Ringstücks zu ermessen.

Nehmen wir nun die Lage des Pols ausserhalb einer auszumessenden Figur von beliebiger Form und bezeichnen wir den Polarwinkel zwischen dem äussersten Punkte links und dem äussersten Punkte rechts der Figur mit E, denken wir diesen Winkel in eine sehr grosse, wenn man will, unendlich grosse Anzahl gleicher Theile getheilt und ziehen wir die Schenkel dieser Theilwinkel über die Figur bis zu ihrer äussersten Genze: so wird diese in ebenso viele Flächenstreifen zerschnitten. Jeder dieser Flächenstreifen kann als ein Ringstück zwischen zwei Kreisen angesehen werden, von denen der eine den Halbmesser des Schenkel-Eintritts in die Figur, der andere den des Austritts hat.

Wird nun der Fahrstift von einem Punkte des Umfangs um denselben herum bis zum Anfangspunkte zurückgeführt, so hat er alle äusseren und alle inneren Bogenstücke der Streifen befahren. Dieses genügt nach dem Vorstehenden für die Flächenbestimmung jedes einzelnen Streifens und folglich für die der Gesammtfläche aller Streifen. Dass die beiden Enden eines Streifens strenge genommen keine Bogenstücke sind, kann kein Bedenken erwecken, weil man die Theile des Winkels E so klein annehmen kann, als man will, und zwar so klein, dass der Unterschied zwischen dem am inneren und äusseren Ende anderweitig begrenzten Streifen und einem zwischen beiden Enden liegenden Ringstücke verschwindet.

§ 10.

Liegt aber der Pol im Inneren der Figur, so hat man sich den ganzen Umkreis desselben in hinreichend viele oder unendlich viele gleiche Theile getheilt und die Schenkel dieser Winkel überall bis an den Umfang der Figur gezogen zu denken. Diese kann ganz ausserhalb oder ganz innerhalb, oder endlich theils ausserhalb, theils innerhalb des Grundkreises liegen. In den beiden letzten Fällen mögen die Schenkel der Winkeltheile in dem innerhalb des Grundkreises liegenden Figurentheile bis an den Grundkreis verlängert gedacht werden. Alsdann ist einleuchtend, dass bei der Umfahrung der ganzen Figur die Rollenabwickelung für die ausserhalb des Grundkreises liegenden Theile die positive Fläche, für die innerhalb liegenden die negative Fläche anzeigt, dort also den Ueberschuss, hier den Mangel an der Fläche des Grundkreises nachweist. Letztere muss also in allen Fällen dem Producte cw positiv zugesetzt werden; sie werde mit k bezeichnet. Man hat hiernach:

(5) . . . . $f'' = cw + k$.

Hatte man oben für den Halbmesser des Grundkreises (§ 6):

$$R^2 = a^2 + c^2 + 2bc ,$$

so ist der Inhalt desselben:

(6) . . . . $k = (a^2 + c^2 + 2\,bc)\pi$.

§ 11.

In den Formeln $f = cw$ und $f'' = cw + k$ können c und w gegenseitig verschiedene Werthe annehmen, während die Producte cw gleich bleiben. Man kann c und w als Seiten eines Rechtecks ansehen, dessen Inhalt der Fläche der vom Fahrstift umfahrenen Figur gleich ist, welche die Kartenfläche genannt werden mag, um sie von der Feldfläche zu unterscheiden, welche je nach dem Maassstabe der Karte ein Vielfaches der Kartenfläche ist.

Für w werden zunächst nur die Tausendtheile des Rollenumfangs abgelesen, während c die Länge einer geraden Linie ist. Um auch die Rollentheile auf Längenmaass zurückzuführen, muss man den Umfang der Rolle etwa aus der Länge des Durchmessers mit Hülfe der Zahl π ermitteln. Wäre der Umfang $= u$, so hätte jeder Tausendtheil desselben die Länge $\frac{u}{1000}$. Wäre t die Anzahl der Tausendtheile zwischen dem anfänglichen und dem endlichen Rollenstande einer Umfahrung, so würde die abgewickelte Rollenlänge $w = t \,.\, \frac{u}{1000}$ sein, und wenn u in demselben Längenmaasse gemessen wäre wie c, so hätte man:

(7) . . . . $f = \frac{ctu}{1000}$.

Damit ist nun die Kartenfläche f im Quadratmaasse desselben Längenmaasses gefunden, worin c und u gemessen sind. Gesetzt, diese wären in Millimetern angegeben, so wäre für f die Anzahl der Quadrat-Millimeter der Kartenfläche gefunden worden.

Gäbe man dem Arm vom Fahrstift bis zum Gewinde eine Länge, welche $n\,\frac{1000}{u}$ Einheiten des gemeinschaftlichen Maasses hätte, wäre also

$c = n\,\frac{1000}{u}$, so wäre dieser Werth in (7) gesetzt:

(8) . . . $f = n \,.\, t$.

Setzt man $t = 1$, so wird $f = n$, d. h. n ist die Anzahl der Quadrate der Maasseinheit, welche in der Kartenfläche enthalten ist, wenn der Nonius der Rolle um eine Einheit fortrückt.

§ 12.

Die Zahl n ist willkürlich anzunehmen, ihre Wahl jedoch durch die Rücksicht zu leiten, dass sie nicht nur einen bequemen Rechnungsfactor abgebe, sondern auch das Werkzeug vermöge des von ihr abhängigen Fahrarms c zur Bestreichung der auszumessenden Figuren die gewünschte Bequemlichkeit darbiete, auch die Genauigkeit des Resultats möglichst gross sei.

Handelte es sich blos um die Bestimmung der Kartenfläche, so würde n den bequemsten Rechnungsfactor darbieten, wenn diese Zahl eine Potenz von 10 wäre, weil dann nur Nullen anzuhängen oder Stellen des Products $n.t$ abzustreichen wären. Aber das Planimeter wird gewöhnlich zur Bestimmung der Feldfläche benutzt, und zu diesem Zwecke muss dem Factor n noch ein anderer Factor zugesellt werden, welcher von dem Maassstabe der Karte abhängig ist.

Betrachten wir wie oben (§ 11) die beiden Factoren $c.u$ oder $c \times \frac{tu}{1000}$ als die zwei Seiten eines Rechtecks, dessen Kartenfläche $= f$ ist, und nennen wir ferner die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal grösser eine bestimmte Strecke im Felde als die ihr auf der Karte nachgebildete Strecke ist, mit dem Buchstaben M, oder ist nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Maassstab der Karte $= \frac{1}{M}$, so müssen beide Seiten des gedachten Rechtecks der Karte mit M malgenommen werden, d. i. die Producte

$$c\,.\,w = c \times \frac{t\,.\,u}{1000} = n\,.\,t$$

sind noch mit $M.M$ malzunehmen, um die Feldfläche zu erhalten. Nennen wir diese F, so ist:

$$F = M\,.\,M\,.\,f = M\,.\,M\,.\,cw = M\,.\,M\,.\,c\frac{tu}{1000} = M\,.\,M\,.\,nt$$

oder das Product $M\,.\,M\,.\,n$ mit N bezeichnet, endlich:

(9) . . . . $F = N\,.\,t$.

Wäre z. B. der Maassstab der Karte $\frac{1}{2500}$, so hätte man für $n = 10$:

$N = M.M.n = 2500 \times 2500 \times 10 = 62500000$, wo N keineswegs ein sehr bequemer Factor sein würde. Würde dagegen $n = 8$ gesetzt, so wäre $N = 6250000 \times 8 = 50000000 = \frac{1}{2}(100000000)$. Sollten c und $\frac{u}{1000}$ in Millimetern gegeben sein, so würden beide Factoren mit 1000 zu theilen sein, um sie auf Meter zurückzuführen, das Product beider müsste also mit 1000000 getheilt werden, um die Fläche in Quadratmetern zu erhalten, d. i. man hätte für $n = 8$:

$$N = \frac{50000000}{1000000} = 50 = \frac{1}{2}(100) .$$

Noch bequemer würde es in diesem Beispiele sein, $n = 16$ zu setzen, weil dann N in Metern $= 100$ sein würde. Aber je grösser n ist, desto kleiner ist t, und die Genauigkeit des Resultats nimmt in dem Maasse ab, je kleiner t ist.

§ 13.

Bisher waren im preussischen Staate die Kartenmaassstäbe:

$$\frac{1}{625}, \quad \frac{1}{1250}, \quad \frac{1}{2500}, \quad \frac{1}{5000}$$

vorzugsweise üblich. Für die Annahme $n = 8$ fände man N

$$\frac{625^2 \times 8}{1000^2}, \quad \frac{1250^2 \times 8}{1000^2}, \quad \frac{2500^2 \times 8}{1000^2}, \quad \frac{5000^2 \times 8}{1000^2},$$

oder $\quad 3,125, \quad 12,5, \quad 50, \quad 200,$

oder $\quad \frac{1}{4} \times \frac{100}{8}, \quad \frac{100}{8}, \quad \frac{100}{2}, \quad 2 \times 100 .$

Also nur bei dem ersten dieser Maassstäbe hätte man die Unbequemlichkeit einer wiederholten Division mit 8 und 4.

An einem von Pistor und Martins in Berlin verfertigten Polarplanimeter ist der Umfang der Rolle 58,277 Millimeter, wozu man die zugehörige Länge des Fahrarms findet:

$$c = n \frac{1000}{u} = 8 \frac{1000}{58,277} = 137,28 \text{ Millimeter.}$$

Da der Polararm dieses Werkzeugs 158 Millimeter lang ist, so sind beide Arme des Werkzeugs bei dieser Stellung nahe gleich lang, was für seine Handhabung bequem ist.

Für die Maassstäbe $\frac{1}{500}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{2000}, \frac{1}{3000}, \frac{1}{4000}$ empfehlen sich zum Theil andere und unter einander verschiedene Werthe von n und zwar für:

$$\frac{1}{500}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{2000}, \quad \frac{1}{3000}, \quad \frac{1}{4000},$$

$n = 8, = 8, = 10, = 11{,}111 \ldots, = 5$, wobei man hat: $N = 2, = 8, = 40, = 100, = 80$, und für obiges Werkzeug: $c = 137{,}28, = 137{,}28, = 171{,}6, = 190{,}66 = 85{,}8$ Millimeter.

§ 14.

An den Werkzeugen, welche jetzt gewöhnlich im Gebrauche sind, hat der Künstler für die Zahl n Marken eingeschnitten, deren Stellen sich nach der obigen Formel (§ 11)

$$c = n \frac{1000}{u}$$

bestimmen. So sind z. B. auf dem in § 13 erwähnten Pistor und Martins'schen Werkzeuge für n eingeschnitten:

die Marken $2, 2\frac{2}{9}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{2}{10}, 4, 4\frac{4}{9}, 5, 6\frac{4}{10}, 8, 8\frac{8}{9}, 10$.

Der vorstehend behandelte Werth für $n = 11, 111\ldots$ oder $n = 11\frac{1}{9}$ ist auf demselben mit einer Marke nicht vertreten. Man kann sich aber für den Maassstab $\frac{1}{3000}$ einer der Marken $4\frac{4}{9}$ oder $8\frac{8}{9}$ bedienen und erhält dann für $n = 4\frac{4}{9}$ den Werth $N = \frac{3000^2}{1000^2} \times 4\frac{4}{9} = 40$, für $n = 8\frac{8}{9}$ den Werth $N = \frac{3000^2}{1000^2} \times 8\frac{8}{9} = 80$; ebenso bei dem Maassstabe $\frac{1}{1500}$

$$\text{für } n = 4\tfrac{4}{9} \text{ den Werth } N = \frac{1500^2}{1000^2} \cdot 4\tfrac{4}{9} = 10,$$

$$\text{für } n = 8\tfrac{8}{9} \text{ den Werth } N = \frac{1500^2}{1000^2} \cdot 8\tfrac{8}{9} = 20.$$

§ 15.

Wäre die Fahrstange von der Fahrspitze an in einem gewissen Längenmaasse, etwa in Millimeter, eingetheilt und die Hülse, an welcher die Rolle befindlich ist, für Zehntheile des Millimeters mit einem Nonius versehen, dessen Nullpunkt nach der Seite des Fahrstifts den unveränderlichen Abstand d hätte, so könnte für jeden Maassstab der Karte dem Factor N ein beliebiger Werth beigelegt werden. Wünschte man z. B. mit dem Werthe $N = 40$ zu arbeiten, so hätte man nach Formel 9

$$F = 40 \, . \, t = Nt = \frac{M \, . \, M \, . \, nt}{1000000} = \frac{M \, . \, M \, . \, c \frac{u}{1000} t}{1000000},$$

also
$$N \doteq M \, . \, Mc \frac{u}{1000000000}$$

und c in Millimetern $= \frac{N \, . \, 1000000000}{M \, . \, M \, . \, u}$,

also für den Maassstab von $\frac{1}{2000}$

$$c^{\mathrm{mm}} = \frac{40000000000}{4000000 \times 58{,}277} = \frac{10000}{58{,}277} = 171{,}6^{\mathrm{mm}}$$

wie oben. Der Nullpunkt des Nonius müsste also gestellt werden auf $171{,}6^{mm} - d^{mm}$, wobei das Zeichen mm Millimeter bedeutet. Bei dem Maassstabe $\frac{1}{3000}$ fände man:

$$c^{\mathrm{mm}} = \frac{40000}{9 \times 58{,}277} = \frac{40000}{524{,}493} = 76{,}26^{\mathrm{mm}}$$

und man hätte das Werkzeug einzustellen auf $76{,}\ 26 - d$.

§ 16.

Es bleibt nun bei den Werthen von n für die verschiedenen Maassstäbe noch die Berechnung der Fläche des Grundkreises zu zeigen:

War nach der Formel (6)
$$k = R^2\pi = (a^2 + c^2 + 2bc)\pi\ ,$$

so findet man für den Werth $n = 8$ und für das erwähnte Werkzeug, an welchem die Entfernung der Rolle vom Gewinde (b) 37,8 Millimeter ist:

$$k_8 = (158^2 + 137{,}28^2 + 2 \times 37{,}8 \times 137{,}28)\ 3{,}14159$$
$$= 54188 \times 3{,}14159 = 170237 \text{ Quadrat-Millimeter}$$

Kartenfläche. Um diese in Quadratmeter zu verwandeln, hat man sie mit 1000000 zu theilen, und um die entsprechende Feldfläche zu erhalten, mit dem Quadrat des betreffenden Maassstab-Nenners malzunehmen. Die Feldfläche des Grundkreises findet man also bei dem Werthe $n = 8$, wenn man die Zahl 170237 malnimmt;

bei dem Maassstabe von $\frac{1}{500}$ mit $\frac{500^2}{1000^2} = \frac{1}{4}$, also 42559^{mm},

» » » » $\frac{1}{625}$ » $\frac{625^2}{1000^2} = \frac{25}{64}$, » 66499^{mm},

» » » » 1000 » $\frac{1000^2}{1000^2} = \frac{1}{1}$, » 170237^{mm},

» » » » $\frac{1}{1250}$ » $\frac{1250^2}{1000^2} = \frac{100}{64}$, » 265995^{mm},

» » » » $\frac{1}{2500}$ » $\frac{2500^2}{1000^2} = 6\frac{1}{4}$, » 1063981^{mm},

» » » » $\frac{1}{5000}$ » $\frac{5000^2}{1000^2} = 25$, » 4255925^{mm}.

Für den Werth $n = 10$ hat man zunächst:

$k_{10} = (158^2 + 171{,}6^2 + 2 \times 37{,}8 \times 171{,}6)\, 3{,}14159 = 211691^{\square mm}$ Kartenfläche;

für $n = 11{,}111\ldots = 11\frac{1}{9}$

$k_{11\frac{1}{9}} = (158^2 + 190{,}66^2 + 2 \times 37{,}8 \times 190{,}66)\, 3{,}14159 = 237910^{\square mm}$ Kartenfläche;

für $n = 5$

$k_5 = (158^2 + 85{,}8^2 + 2 \times 37{,}8 \times 85{,}8)\, 3{,}14159 = 121932^{\square mm}$ Kartenfläche;

sodann die Feldfläche, indem man vorstehende Kartenflächen malnimmt:

bei dem Maassstabe von $\frac{1}{2000}$ mit $\frac{2000^2}{1000^2} = 4$, also $846{,}764^{\square m}$

» » » » $\frac{1}{3000}$ » $\frac{3000^2}{1000^2} = 9$, » $2141190^{\square m}$

» » « » $\frac{1}{4000}$ » $\frac{4000^2}{1000^2} = 16$, » $1950912^{\square m}$

Bei so grossen Figuren, für welche der Fahrstift den ganzen Umfang nur dann erreichen kann, wenn der Pol im Inneren angenommen wird, bleibt es übrigens dem Führer überlassen, die Figur in zwei oder mehr Abtheilungen zu zerlegen und diese aus Polen, die ausserhalb derselben liegen, also ohne Anwendung der Grundkreisfläche zu bearbeiten. In manchen Fällen ist dieses Verfahren sogar vorzuziehen.

§ 17.

Um die Genauigkeit des Werkzeugs und seiner Einstellungen zu prüfen, wendet man die Einrichtung eines sogenannten Controllineals an, welches in einer schmalen Metallplatte besteht, auf der in bestimmten Entfernungen feine Löcher eingelassen sind, um in das eine Loch eine Nadelspitze auf der Tischebene befestigen zu können, um welche sich das Lineal im Kreise herum bewegen soll, in das andere den Fahrstift setzen zu können, um mit diesem jene Bewegung zu vollziehen. Die Entfernung der Löcher kann so bemessen werden, dass der bei solcher Bewegung beschriebene Kreis eine runde Zahl von Quadratmillimetern enthält. Sollte er etwa genau 20000 □ Millimeter einschliessen, so wäre sein Halbmesser oder die Entfernung beider Löcher von einander:

$$r = \sqrt{\frac{20000}{3{,}14159}} = 79{,}79 \text{ Millimeter}$$

oder für 10000□mm

$$r'' = \sqrt{\frac{10000}{3{,}14159}} = 56{,}42 \quad \text{»}$$

Stellt man nun das Werkzeug auf eine seiner Marken, etwa auf 8, fährt mit dem Fahrstift von einem bestimmten Punkte im Kreise herum bis zu demselben zurück, so muss der Unterschied der Rollenstände, welcher wie oben mit t bezeichnet werden mag, mit 8 malgenommen, die Kreisfläche in Millimetern ergeben, oder man hat:

$$20000 = 8 \,.\, t$$
$$10000 = 8 \,.\, t''.$$

Man kann diese Untersuchung bei sämmtlichen Marken des Werkzeugs wiederholen und sich dadurch von seiner Zuverlässigkeit oder seinem Berichtigungsbedürfnisse überzeugen.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Verlag der Weidmannschen Buchhandlung (J. Reimer) in Berlin.