PODRĘCZNIK ALGEBRY

DLA UCZNIÓW KLAS WYŻSZYCH GIMNAZYÓW I SZKÓŁ REALNYCH W GALICYI.

NAPISAŁ

Dr. MARYAN A. BARANIECKI,
PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO.

A. Pazdrowski

ZESZYT PIERWSZY.

KRAKÓW.
W DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM A. M. KOSTERKIEWICZA.
1892.

SPIS RZECZY CZĘŚCI PIERWSZEJ.

Rozdział I. Wyrażenia algebraiczne całkowite.

Rozdział II. Największy spólny dzielnik i najmniejsza spólna wielokrotność.

Rozdział III. Wyrażenia algebraiczne ułamkowe.

Rozdział IV. Stosunki i proporcye.

Rozdział V. Wielkości proporcyonalne.

Rozdział VI. Równanie stopnia 1-go z jedną niewiadomą.

Rozdział VII. Równania stopnia 1-go z wielu niewiadomemi.

Rozdział VIII. Zadania stopnia 1-go. Roztrząsanie równań stopnia 1-go.

Rozdział IX. Wyznaczniki.

Zadania.

A. Pazdrowski

CZĘŚĆ PIERWSZA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE CAŁKOWITE.

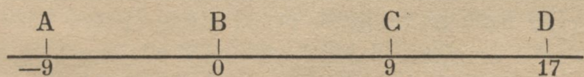
WPROWADZENIE LICZB UJEMNYCH.

1. Jedność i wszystkie liczby kolejno coraz o jedność większe,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots,$$

tworzą szereg liczb naturalnych (Reihe der natürlichen Zahlen). Kiedy do jednej z liczb tego szeregu dodajemy inną, albo też jednę z nich mnożymy przez inną, zawsze dochodzimy do liczby, do tegoż szeregu należącej. Nie zawsze jednak odejmując od jednej z liczb tego szeregu inną, albo też dzieląc jednę z nich przez inną, dojść możemy do liczby, do tegoż szeregu należącej.

2. Jeżeli na prostej mamy punkty A, B, C, D, i wiemy, że od punktu B



do D jest 17 pewnych jednostek, od punktów zaś A i C do punktu D jest odpowiednio 8 i 26 takichże jednostek, a chcemy się dowiedzieć, ile tych jednostek jest od punktu B do punktu C i od punktu A do punktu B, to wykonamy odejmowania

$$17 - 8 = 9, \qquad 26 - 17 = 9.$$

W obu razach wypadło nam 9 jednostek. Aby jednak określić położenia tych dwu punktów C i A względem punktu B, powiemy, iż są od B oddalone: pierwszy o 9 jednostek na prawo, drugi zaś o 9 jednostek w kierunku wprost przeciwnym, t. j. na lewo.

Gdybyśmy w drugiem z powyższych odejmowań chcieli liczby dane tak wypisać, aby one odpowiadały liczbom danym w pierwszem odejmowaniu, to mielibyśmy

$$17 - 26.$$

To odejmowanie możemy (podobnie jak np. $10 - 6 = 10 - 4 - 2$) napisać $17 - 17 - 9$, tak iż będziemy mieli

$$17 - 26 = -9$$

Ten wypadek: -9 wskazuje, iż mamy 9 jednostek wziąć w przeciwnym kierunku niż 9 jednostek, wypadłe z pierwszego odejmowania.

Możemy teraz rozróżnić położenia punktów C i A względem punktu B, mówiąc, iż one są oddalone od B: pierwszy o 9 jednostek, drugi zaś o -9 (»mniej« 9) jednostek.

Podobnie oznaczyć moglibyśmy położenia innych punktów na tej prostej względem punktu B.

3. Jak odpowiednio oznaczyć na tej prostej położenie punktu B? Odległość punktu B od tegoż punktu B jest żadna, czyli jest zero, a więc na naszej prostej punkt B, od którego liczymy kierunki na prawo i na lewo, oznaczymy przez: 0.

Liczby, oznaczane w kierunku wprost przeciwnym względem kierunku obranego, nazywamy liczbami ujemnemi (negative Zahlen). W poprzedniem zadaniu kierunek od B na prawo był kierunkiem obranym, w którym liczyliśmy liczby tak, jak się je liczy w arytmetyce; a więc liczba -9 jest liczbą ujemną, a kierunek od B na lewo jest kierunkiem ujemnym (negative Richtung).

Dla przeciwstawienia nazwie: liczba ujemna, liczbę taką, jak 9 w pierwszem odejmowaniu, rachowaną w kierunku pierwotnie obranym, nazywamy liczbą dodatną (positive Z.), co dobitniej piszemy $+9$ (»więcej« 9), a ten kierunek nazywamy kierunkiem dodatnym.

A więc *liczba ujemna jestto liczba, rachowana od zera w kierunku wprost przeciwnym temu kierunkowi, który uważamy za kierunek dodatny.*

4. Przez wprowadzenie zera i liczb ujemnych osiągamy to, iż od każdej z liczb w szeregu liczb naturalnych odjąć możemy którąkolwiek liczbę tego szeregu.

5. W szeregu liczb naturalnych przed drugą i przed każdą dalszą liczbą stoi liczba o jedność mniejsza. Jeżeli wykonamy odejmowania

$$1-1=0, \quad 1-2=-1, \quad 1-3=-2, \quad 1-4=-3, \ldots,$$

to spostrzeżemy, że w tych odejmowaniach odjemne są jednakowe, a odjemniki coraz większe, każdy od poprzedniego o jedność; a więc reszty tych odejmowań są kolejno, każda od poprzedniej mniejsza o jedność; co się zaś tyczy reszty 0, to wprost wynika z pierwszego odejmowania, iż 0 jest od jedności mniejsze o jedność.

Jeżeli te reszty dopiszemy kolejno z lewej strony pierwszej liczby szeregu liczb naturalnych, to mieć będziemy

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

gdzie każda liczba od bezpośrednio ją poprzedzającej jest większa o jedność, co także stosuje się do 0. A więc: gdy wyjdziemy z którejkolwiek z wypisanych liczb, to wmiarę posuwania się od niej w prawo, będziemy mieli liczby coraz większe. Pod tym względem 0 zachowuje się taksamo, jak jakakolwiek inna z tych liczb; możemy przeto powiedzieć, że *zero jest liczbą*[1]).

Widzimy zatem, że pojęcie »większy« jest związane z kierunkiem wzrastających liczb dodatnich; przeto *w wypisanym wyżej szeregu liczb: ujemnych,*

---

[1]) Należy odróżnić liczbę 0, zjawiającą się dopiero w algebrze, od cyfry 0, służącej przy pisaniu liczb do zajęcia pewnego miejsca, aby inne cyfry można było postawić na takiem z porządku miejscu, na jakiem one postawione być mają.

zera i dodatnych, ta z dwu którychkolwiek liczb jest większa, która w kierunku na prawo zajmuje miejsce dalsze.

6. W powyżej wypisanym szeregu liczb mamy dwie jedności: jedność dodatną i jedność ujemną.

Gdy w tymże szeregu weźmiemy dwie liczby jednakowo oddalone od 0 np. 4 i -4, to, podobnie jak pierwsza jest skupieniem czterech jedności dodatnych, druga -4 jest skupieniem czterech jedności ujemnych i dlatego jest liczbą całkowitą ujemną, podobnie jak liczba szeregu liczb naturalnych jest liczbą całkowitą dodatną.

Zauważmy, że np. $-7 = -4 - 3 = -3 - 2 - 2 =$ i t. d.

7. Weźmy jakąkolwiek liczbę całkowitą ujemną np. -5. Jeżeli od $+1$ odejmiemy (art. 5) dwie jedności dodatne, wskutek czego otrzymamy -1, i weźmiemy pięć takich ujemnych jedności, to mieć będziemy liczbę -5. Zamiast mówić »od więcej jedność odjąć dwie jedności dodatne, wskutek czego otrzymamy mniej jedność«, umówmy się, żeby mówić krócej »zamiast dodatnej jedności wziąć ujemną jedność«, albo jeszcze »mając $+1$, zmienić jej znak«. W tym razie będziemy mogli powiedzieć, że: aby z jedności dodatnej otrzymać -5, należy, wziąwszy $+1$, zmienić jej znak i takich liczb -1 wziąć pięć.

8. Gdy, wziąwszy z szeregu liczb naturalnych liczby 3 i 4, chcemy pierwszą z nich podzielić przez drugą, to należy 3 jedności rozłożyć na 4 równe części i wziąć jednę taką część, t. j. należy wziąć jednę czwartą trzech jedności. Jeżeli jednak, zamiast rozkładać 3 jedności na 4 równe części i brać jednę taką część, rozłożymy jedność na 4 równe części, to te części będą od poprzednich 3 razy mniejsze, a więc 3 takie części, t. j. trzy czwarte części jedności będą stanowiły tyleż, co poprzednio jedna czwarta część trzech jedności. A więc $3 : 4 = \frac{3}{4}$. Podobnie np. $9 : 4 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$. Takie liczby jak $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ i t. d. nazywają się liczbami ułamkowemi (gebrochene Z.). Te liczby są rachowane od zera w tym samym kierunku, co liczby dodatne całkowite; przeto je nazywamy liczbami ułamkowemi dodatnemi.

9. Z powyższego wynika, że liczby ułamkowe dodatne powstają z jedności dodatnej wskutek rozłożenia jej na tyle równych części ile jest jedności w mianowniku, i wzięcia tylu takich części, ile jest jedności w liczniku.

10. Przez wprowadzenie liczb ułamkowych dodatnych osiągamy to, iż każdą z liczb szeregu liczb naturalnych podzielić możemy przez którąkolwiek liczbę tego szeregu.

11. Jeżeli chcemy np. od liczby 2 odjąć liczbę $6\frac{4}{5}$, to, ponieważ $2 - 6\frac{4}{5} = 2 - 2 - 4\frac{4}{5}$, jest $2 - 6\frac{4}{5} = -4\frac{4}{5}$, liczbie pośredniej między -5 i -4. Taką liczbę, jak otrzymana tu reszta, nazywamy liczbą ułamkową ujemną.

Zauważmy, że np. $-7\frac{3}{8} = -2 - 5\frac{3}{8} = -3\frac{1}{6} - 4\frac{5}{24} =$ i t. d.

Wskutek wprowadzenia liczb ułamkowych ujemnych mamy możność otrzymania zawsze wypadku z odejmowania od siebie dwu liczb dodatnych wrazie, kiedy jedna z nich, albo obie, są ułamkowe.

1*

12. Gdy mamy liczbę ułamkową ujemną np. $-\frac{3}{5}$, to możemy przyjąć, iż ona w taki sposób powstała z jedności dodatnej: Rozłożyliśmy $+1$ na 5 równych części, a od otrzymanej liczby $+\frac{1}{5}$ odjęliśmy dwie takie liczby, wskutek czego doszliśmy do liczby $-\frac{1}{5}$ i takich liczb $-\frac{1}{5}$ wzięliśmy 3. Możemy więc (art. 7) tak powiedzieć: aby otrzymać $-\frac{3}{5}$ z jedności dodatnej, należy $+1$ rozłożyć na tyle równych części, ile jest jedności w mianowniku, a otrzymawszy liczbę $+\frac{1}{5}$, zmienić jej znak i wziąć tyle tak otrzymanych liczb $-\frac{1}{5}$, ile jest jedności w liczniku.

Łatwo objaśnić, że np. 4-tą częścią liczby -7 jest liczba $-\frac{7}{4}$, że 5-tą częścią liczby $-\frac{16}{7}$ jest liczba $-\frac{16}{35}$ i t. d.

13. W pojmowaniu liczb dodatnych i ujemnych tkwi zależność od dowolnie obranego zera i od kierunku, który dowolnie obraliśmy za dodatny (art. 3). A więc *pojęcia liczb dodatnych i ujemnych są pojęciami względnemi.*

Gdybyśmy jednak, mając np. liczby $+4\frac{5}{7}$ i $-4\frac{5}{7}$, umówili się, aby nie mieć względu na ich znaki, moglibyśmy powiedzieć, że one są równe sobie. Owóż, wartość liczby bez względu na to, czy ta liczba jest dodatna, czyteż ujemna, nazywa się w a r t o ś c i ą b e z w z g l ę d n ą l i c z b y (absoluter Werth d. Z.). A zatem liczby $4\frac{5}{7}$ i $-4\frac{5}{7}$ mają tęż samę wartość bezwzględną, a są przeciwnego znaku.

Oczywiście, że z dwu liczb dodatnych ta jest większa, której wartość bezwzględna jest większa, i że każda liczba dodatna jest większa od zera.

Z tego, cośmy powiedzieli w art. 5-ym o liczbach ujemnych całkowitych, wprost wypada, że np. $-5 < 0$, $-5 > -9$. Z tego zaś, cośmy powiedzieli w art. 11-ym o liczbach ujemnych ułamkowych, wynika, że względem każdej takiej liczby liczba 0 przypada w kierunku liczb wzrastających, z dwu zaś takich liczb ta przypada w kierunku liczb wzrastających, której wartość bezwzględna jest mniejsza. A więc ogólnie: *liczba ujemna jest mniejsza od zera; z dwu liczb ujemnych ta jest większa, której wartość bezwzględna jest mniejsza.*

14. W arytmetyce mieliśmy do czynienia z liczbami całkowitemi dodatnemi i liczbami ułamkowemi dodatnemi, przyczem uwzględnialiśmy, iż te liczby mogły być nietylko oderwane, ale także mianowane.

Nauka, którą rozpoczęliśmy, nazywa się a l g e b r ą. Nie możemy dać jeszcze określenia algebry. Zaznaczymy tu tylko, że algebra obejmuje większy obszar liczb niż arytmetyka. Ponad liczby znane z arytmetyki, wprowadziliśmy już do naszej nauki liczby ujemne, tak całkowite jak i ułamkowe.

Zauważymy nadto, że chociażby w oddzielnych zadaniach, które rozwiązywać lub roztrząsać będziemy, występowały liczby mianowane, to jednak w rozumowaniu ściśle algebraicznem, związanem z takiem zadaniem, rozważać będziemy zawsze tylko liczby oderwane.

WPROWADZENIE LITER NA OZNACZENIE LICZB.

15. W algebrze wprowadzamy litery na oznaczenie liczb. Jakąkolwiek liczbę, dodatną lub ujemną, całkowitą lub ułamkową, możemy oznaczyć przez literę np. a, albo przez jakąkolwiek inną. Odwrotnie, litera np. a może wogóle oznaczać jakąkolwiek liczbę i dlatego mówimy: liczba a. Jeżeli przez literę chcemy rozumieć pewną jednę liczbę, to mówimy, że jej nadajemy wartość liczebną (numerischer Werth), lub krócej, że nadajemy jej wartość; tak pn. jeżeli przez a chcemy rozumieć liczbę $-\frac{3}{5}$, to mówimy, że nadajemy literze a wartość $-\frac{3}{5}$, czyli przyjmujemy, że $a = -\frac{3}{5}$.

Korzyść, z takiego uogólnienia wynikającą, okażemy na prostym przykładzie.

Zadanie I. Jaką liczbę trzeba dodać do 11, aby mieć liczbę trzy razy większą niż 6?

Ponieważ po dodaniu szukanej liczby do 11 otrzymać mamy $6 \times 3 = 18$, przeto szukana liczba jest 7. Odpowiedź: 7.

Zamiast liczb danych w zadaniu wprowadźmy litery, np. liczbę 11 nazwijmy a, liczbę zaś 6 nazwijmy b. Wówczas zadanie nasze możemy ogólniej tak wypowiedzieć:

Zadanie II. Jaką liczbę trzeba dodać do a, aby mieć liczbę 3 razy większą niż b?

Ponieważ po dodaniu szukanej liczby do a otrzymać mamy liczbę 3 razy większą niż b, t. j. liczbę $b.3$, przeto szukana liczba wypadnie z odejmowania $b.3 - a$. Odpowiedź: $b.3 - a$.

Odpowiedź na zadanie I nie wskazuje, jak owa liczba 7 powstała z liczb danych 11 i 6. Odpowiedź zaś na zadanie II wskazuje wyraźnie, iż szukaną liczbę otrzymamy, jeżeli liczbę a odejmiemy od 3 razy wziętej liczby b. Jakoż, stosując tę odpowiedź do liczb zadania I, mamy $6.3 - 11 = 7$.

Zauważmy, iż wprawdzie wprowadziliśmy powyżej litery a i b jako oznaczenia liczb danych w zadaniu I, jednak owe litery a i b mogą w zadaniu II oznaczać jakiekolwiek liczby. I tak: kiedy przyjmiemy, że $a = 8\frac{1}{2}$, $b = 15$, to będzie $b.3 - a = 45 - 8\frac{1}{2} = 36\frac{1}{2}$; jakoż $8\frac{1}{2} + 36\frac{1}{2} = 15.3$.

Widzimy więc, że, oznaczywszy liczby dane w zadaniu przez litery: 1) osiągamy to, iż wiemy, jak odpowiedź powstała z liczb danych w zadaniu, 2) jeżeli przez owe litery rozumieć będziemy różne liczby, to otrzymana odpowiedź jest rozwiązaniem ogólnem, t. j. nie odnosi się wyłącznie tylko do jakiegoś oddzielnego przypadku, jak w arytmetyce, lecz obejmuje odrazu wszystkie możliwe przypadki zadań jednego rodzaju.

16. Jeżeli mając np. liczbę a, jej wartość bezwzględną nazwiemy α, to w razie, kiedy a jest liczbą dodatną, będzie $a = +\alpha$, kiedy zaś a jest liczbą ujemną, będzie $a = -\alpha$.

17. Jeżeli o liczbie a wiemy, że ona jest ułamkowa, a jej wartość bezwzględna jest $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, to zawsze albo $a = +\alpha = +\frac{\lambda}{\mu}$ albo też $a = -\alpha = -\frac{\lambda}{\mu}$. Najczęściej robimy przypuszczenie, że bezwzględne wartości λ i μ są już całkowite, co, jak wiemy z arytmetyki, zawsze osiągnąć można.

CZTERY DZIAŁANIA NA LICZBACH, OZNACZONYCH PRZEZ LITERY.

Dodawanie. **18.** Wprowadziwszy w algebrze liczby ujemne, należy podać takie określenie dodawania, któreby uwzględniało składniki ujemne, a obejmowało w sobie, jako przypadek szczególny, dodawanie liczb dodatnich.

Szukana suma ma przedstawiać skupienie (agregat) jedności i części jedności, tak dodatnych, jak i ujemnych, zachodzących w składnikach.

Możemy przeto ogólnie tak określić dodawanie: *Dodawanie jestto działanie, w którem mając liczby dane, zwane składnikami, szukamy ich sumy, będącej skupieniem wszystkich jedności i części jedności, tak dodatnych, jak i ujemnych, zachodzących w składnikach.*

19. Gdy mamy do liczby a dodać liczbę b, to ich suma jest $a+b$. Wartości bezwzględne liczb a i b nazwijmy odpowiednio α i β.

1). Jeżeli oba składniki są dodatne, $a=+\alpha$, $b=+\beta$, to suma $a+b$ czyli $(+\alpha)+(+\beta)$ jest skupieniem α dodatnych jedności i części jedności pierwszego składnika i β dodatnych jedności i części jedności drugiego składnika; jest więc ta suma: $+\alpha+\beta$. Mamy zatem

$$(+\alpha)+(+\beta)=+\alpha+\beta.$$

2). Jeżeli pierwszy składnik jest dodatny, $a=+\alpha$, zaś drugi ujemny, $b=-\beta$, to suma $(+\alpha)+(-\beta)$ jest skupieniem α dodatnych jedności i części jedności pierwszego składnika i β ujemnych jedności i części jedności drugiego składnika; jest więc ta suma: $+\alpha-\beta$. Mamy zatem

$$(+\alpha)+(-\beta)=+\alpha-\beta.$$

3). Jeżeli pierwszy składnik jest ujemny, $a=-\alpha$, zaś drugi dodatny, $b=+\beta$, to suma $(-\alpha)+(+\beta)$ jest skupieniem α ujemnych jedności i części jedności pierwszego składnika i β dodatnych jedności i części jedności drugiego składnika; jest więc ta suma: $-\alpha+\beta$. Mamy zatem

$$(-\alpha)+(+\beta)=-\alpha+\beta.$$

4). Jeżeli oba składniki są ujemne, $a=-\alpha$, $b=-\beta$, to suma $(-\alpha)+(-\beta)$ jest skupieniem α ujemnych jedności i części jedności pierwszego składnika i β ujemnych jedności i części jedności drugiego składnika; jest więc ta suma: $-\alpha-\beta$. Mamy zatem

$$(-\alpha)+(-\beta)=-\alpha-\beta.$$

Zestawiając z sobą powyższe cztery wyrażenia sumy dwu liczb, widzimy, że, *aby otrzymać sumę dwu liczb, należy do pierwszego składnika dopisać drugi z jego znakiem.*

20. Suma, w skład której mogą wchodzić składniki ujemne, nazywana bywa s u m ą a l g e b r a i c z n ą (algebraische Summe), a liczba, którą ona przedstawi, kiedy składnikom nadamy pewne wartości, w a r t o ś c i ą l i c z e b n ą s u m y a l g e b r a i c z n e j. (numerischer Werth d. a. S.).

W 1-ym i 4-ym z rozważanych powyżej przypadków otrzymaliśmy jako sumę dwu liczb dodatnych lub dwu liczb ujemnych odpowiednio liczbę dodatną lub ujemną, której wartość bezwzględna jest sumą bezwzględnych wartości składników. A więc ogólnie *suma algebraiczna dwu liczb jednakowego znaku przedstawia liczbę takiego znaku jak dane, której bezwzględna wartość jest równa sumie bezwzględnych wartości liczb danych.* Np. $-4\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}=-7\frac{1}{6}$.

W przypadkach 2-im lub 3-im w razie, kiedy składniki mają tę samę wartość bezwzględną, $\beta=\alpha$, tak suma $+\alpha-\beta$, jak suma $-\alpha+\beta$, jest równa zeru. O takich dwu składnikach sumy mówimy, iż one »znoszą się«.

W razie, kiedy składnik dodatny ma większą wartość bezwzględną niż ujemny, możemy w przypadku 2-im przyjąć $\alpha = \gamma + \beta$, wskutek czego $+\alpha - \beta = +\gamma + \beta - \beta = +\gamma$, w przypadku zaś 3-im przyjąć $\beta = \alpha + \delta$, wskutek czego $-\alpha + \beta = -\alpha + \alpha + \delta = +\delta$.

W razie, kiedy składnik ujemny ma większą wartość bezwzględną, możemy w przypadku drugim przyjąć $\beta = \alpha + \delta$, a temsamem $-\beta = -\alpha - \delta$, wskutek czego $+\alpha - \beta = +\alpha - \alpha - \delta = -\delta$, w przypadku zaś 3-im przyjąć $\alpha = \gamma + \beta$, a temsamem $-\alpha = -\gamma - \beta$, wskutek czego $-\alpha + \beta = -\gamma - \beta + \beta = -\gamma$.

A więc *suma dwu liczb różnego znaku przedstawia liczbę o wartości bezwzględnej równej różnicy wartości bezwzględnych liczb danych, którą należy wziąć ze znakiem liczby danej o większej wartości bezwzględnej.* W szczególnym razie może ta suma być równa zeru.

21. Gdy weźmiemy dwie sumy:

$$a + b \text{ i } b + a$$

to, jeżeli oba składniki a i b są jednakowego znaku, obie te sumy według pierwszego prawidła art. poprzedzającego przedstawiają liczbę tego samego znaku, a wartości bezwzględne obu są sumą bezwzględnych wartości składników, która, jak wiemy z arytmetyki, nie zależy od porządku składników. Jeżeli zaś składniki są różnego znaku, to obie te sumy według drugiego prawidła art. poprzedzającego przedstawiają liczbę tego samego znaku o tej samej wartości bezwzględnej. W każdym więc przypadku dwie te sumy przedstawiają jednakową liczbę, czyli *suma dwu składników nie zależy od ich porządku.*

22. Jeżeli mamy wykonać dodawanie trzech lub więcej składników, to do sumy algebraicznej dwu pierwszych składników, która przedstawia jednę liczbę (art. 20), a więc za jeden składnik uważana być może, według prawidła art. 19-go dopiszemy trzeci z danych składników z jego znakiem. Do tak powstałej sumy algebraicznej, którą znowu za jeden składnik uważać możemy, dopiszemy czwarty z danych składników z jego znakiem, i t. d. A więc, *aby otrzymać sumę ilukolwiek liczb danych, należy do pierwszego składnika dopisać pozostałe, zachowując ich znaki.*

23. W sumie algebraicznej kilku liczb np. $a + b + c + d + e$, w której każda liczba może być czyto dodatna, czyteż ujemna, zmieńmy dowolnie porządek składników. Przypuśćmy, że po tej zmianie otrzymaliśmy sumę $c + b + a + e + d$. Tę sumę otrzymać mogliśmy z pierwotnej, naprzód przestawiając w niej dwa pierwsze składniki, następnie w tak otrzymanej sumie przestawiając drugi z trzecim i nakoniec w tak powstałej sumie, przestawiając dwa pierwsze z sobą i dwa ostatnie z sobą. W skutek każdego takiego przestawienia dwu składników nie zmieniła się wartość ich sumy (art. 21), a więc także nie zmieniła się liczba, którą przedstawia odpowiednia suma wszystkich pięciu składników. Jest więc

$$a + b + c + d + e = c + b + a + e + d.$$

Możemy więc powiedzieć ogólnie: *suma pewnej ilości składników nie zależy od ich porządku.*

24. Gdy mamy sumę algebraiczną trzech, lub więcej składników to, kiedy nie wszystkie są jednakowego znaku, możemy tak zmienić ich porządek, aby wszystkie dodatne były obok siebie, jakoteż wszystkie ujemne następowały po sobie. Oddzielnie obliczywszy sumę składników dodatnych i oddzielnie sumę składników ujemnych, możemy daną sumę algebraiczną zastąpić przez sumę algebraiczną dwu liczb różnego znaku, której wartość otrzymać umiemy (art. 20). A więc, *aby znaleźć wartość sumy algebraicznej pewnej ilości liczb, należy oddzielnie znaleźć sumę składników dodatnych, a oddzielnie sumę składników ujemnych i różnicę wartości bezwzględnych tych dwu liczb wziąć ze znakiem tej z nich, której wartość bezwzględna jest większa.* W szczególnym przypadku wartością danej sumy algebraicznej może być liczba zero.

25. Na mocy art. 5-go i 13-go możemy powiedzieć, że, *gdy do jakiejkolwiek liczby dodajemy dodatną, to daną liczbę powiększamy,* zaś, *gdy do jakiejkolwiek liczby dodajemy ujemną, to daną liczbę zmniejszamy.*

Odejmowanie. **26.** Odejmowanie, jako działanie odwrotne dodawaniu dwu składników, ma na celu ze znanej sumy dwu składników (odjemnej) i ze znanego jednego z tych składników (odjemnika) znalezienie drugiego składnika (reszty albo różnicy). To zadanie istnieć może niezależnie od tego, czy liczby dane są dodatne, czyteż ujemne. Dlatego określenie odejmowania, podane w arytmetyce, utrzymuje się także w algebrze. Powiemy więc: *odejmowanie jestto działanie, w którem mając dwie liczby, odjemną i odjemnik, szukamy liczby, zwanej resztą albo różnicą, takiej, iżby suma jej i odjemnika przedstawiała odjemną.*

W arytmetyce przyjmowało się, iż odjemna nie jest mniejsza od odjemnika, w algebrze nie robimy żadnego pod tym względem zastrzeżenia (art. 4, 11).

27. Gdy mamy od liczby a odjąć liczbę b, to ich różnica jest $a - b$. Wartości bezwzględne liczb a i b nazwijmy odpowiednio α i β.

1). Jeżeli $a = +\alpha$, $b = +\beta$, to różnica wynikająca z odejmowania $(+\alpha) - (+\beta)$ jest liczbą, do której dodając odjemnik $+\beta$ otrzymać mamy odjemną $+\alpha$. Taką liczbą będzie liczba złożona z dwu części: jednej, która się zniesie z odjemnikiem $+\beta$, a więc $-\beta$ (art. 20); drugiej, przedstawiającej odjemną $+\alpha$. Jest przeto nią liczba $-\beta + \alpha$ czyli (art. 21) liczba $+\alpha - \beta$. Jakoż, dodając do niej odjemnik $+\beta$, otrzymujemy $+\alpha - \beta + \beta = +\alpha$, odjemnej. Jest zatem $+\alpha - \beta$ szukaną resztą, tak iż

$$(+\alpha) - (+\beta) = +\alpha - \beta.$$

2). $a = +\alpha$, $b = -\beta$. Szukana różnica, którą otrzymamy z odejmowania $(+\alpha) - (-\beta)$, jest liczbą, do której dodając odjemnik $-\beta$ otrzymać mamy odjemną $+\alpha$. Taką liczbą będzie liczba złożona z dwu części: jednej $+\beta$, znoszącej się z odjemnikiem $-\beta$; drugiej przedstawiającej odjemną $+\alpha$. Jest nią przeto liczba $+\beta + \alpha$ czyli $+\alpha + \beta$. Jakoż, $+\alpha + \beta - \beta = +\alpha$, odjemnej. Jest zatem

$$(+\alpha) - (-\beta) = +\alpha + \beta.$$

3). $a = -\alpha$, $b = +\beta$. Rozumując podobnie, jak poprzednio, znajdziemy, iż

$$(-\alpha) - (+\beta) = +\alpha - \beta.$$

4). $a = -\alpha$, $b = -\beta$. Podobnie znajdziemy, iż

$$(-\alpha) - (-\beta) = -\alpha + \beta.$$

Zestawiając z sobą powyższe cztery wyrażenia różnicy dwu liczb, widzimy, że, *aby wykonać odejmowanie dwu liczb, należy do odjemnej przypisać odjemnik ze zmienionym znakiem.*

28. Ponieważ od danej liczby odjąć pewną liczbę jest to samo, co do danej liczby dodać liczbę o przeciwnym znaku (art. 22), przeto, według art. 25-go, *gdy od danej liczby odejmujemy liczbę dodatną, to daną liczbę zmniejszamy,* zaś *gdy od danej liczby odejmujemy liczbę ujemną, to daną liczbę powiększamy.*

Mnożenie. **29.** W arytmetyce tak się ogólnie określa mnożenie: mnożenie jestto działanie, w którem, mając dane dwie liczby, mnożną i mnożnik, szukamy liczby, zwanej iloczynem, którą możemy otrzymać z mnożnej w taki sposób, w jaki mnożnik powstał z jedności. W tem określeniu przez »powstawanie mnożnika z jedności« rozumiemy, iż mnożnik całkowity jest sumą jedności, zaś mnożnik ułamkowy powstaje z jedności w sposób określony w art. 9-ym.

W algebrze jednak mamy dwie jedności: dodatną i ujemną (art. 6); przeto w określeniu mnożenia należy wprowadzić wyrażenie »powstaje z jedności dodatnej«. Powiemy więc ogólnie: *mnożenie jestto działanie, w którem mając dwie liczby, mnożną i mnożnik, szukamy liczby zwanej iloczynem, którą otrzymać możemy z mnożnej w taki sposób, w jaki mnożnik powstaje z jedności dodatnej.* Powstawanie mnożnika ujemnego z jedności dodatnej pojmować należy zgodnie z tem, cośmy mówili w art. 7-ym i 12-ym.

Ponieważ w algebrze mamy do czynienia tylko z liczbami oderwanem (art. 14), przeto o mnożnej i mnożniku możemy mówić zawsze jako o czynnikach iloczynu.

30. Gdy mamy liczbę a pomnożyć przez liczbę b, to ich iloczyn piszemy albo $a \times b$, albo $a.b$, alboteż ab. Wartości bezwzględne liczb a i b nazwijmy odpowiednio α i β. Dla ogólności rozumowania przyjmiemy, że mnożnik b jest liczbą ułamkową, której wartość bezwzględną β wyrazimy w postaci ułamka $\frac{\lambda}{\mu}$, gdzie λ i μ są liczbami całkowitemi (art. 17).

1). Liczbę dodatną pomnożyć przez dodatną; $a = +\alpha$, $b = +\beta = +\frac{\lambda}{\mu}$.

Mnożnik $+\frac{\lambda}{\mu}$ powstał z jedności dodatnej (art. 9) wskutek tego, żeśmy μ-tą część liczby $+1$, t.j. $+\frac{1}{\mu}$, wzięli jako składnik λ razy,

$$\text{mnożnik}, +\frac{\lambda}{\mu}, \ldots +1;\ \mu\text{-ta część}, +\frac{1}{\mu};\ +\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\ldots (\lambda \text{ razy}).$$

Należy taksamo postąpić z mnożną $+\alpha$, aby otrzymać z niej iloczyn $(+\alpha).(+\beta)$. Należy więc μ-tą część mnożnej $+\alpha$, t. j. liczbę $\frac{+\alpha}{\mu}$, wziąć jako składnik λ razy,

$$\text{iloczyn} \ldots +\alpha;\ \mu\text{-ta część}, +\frac{\alpha}{\mu};\ +\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\alpha}{\mu}+\ldots (\lambda \text{ razy}).$$

Ponieważ ostatnia suma jest $+\frac{\alpha.\lambda}{\mu}$, czyli $\alpha \times \frac{\lambda}{\mu}$, czyli $+\alpha.\beta$, przeto

$$(+\alpha).(+\beta) = +\alpha.\beta.$$

2). Liczbę dodatną pomnożyć przez ujemną; $a = +\alpha$, $b = -\beta = -\frac{\lambda}{\mu}$.

Mnożnik $-\frac{\lambda}{\mu}$ powstał z $+1$ w ten sposób (art. 12), iż wziąwszy μ-tą część liczby $+1$, t. j. liczbę $+\frac{1}{\mu}$, zmieniliśmy jej znak i liczbę $-\frac{1}{\mu}$ wzięliśmy jako składnik λ razy,

mnożnik, $-\frac{\lambda}{\mu}$ ... $+1$; μ-ta część, $+\frac{1}{\mu}$; zmienić znak, $-\frac{1}{\mu}$; $-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu}-\ldots$ (λ razy).

Tak, jak tu z $+1$ otrzymaliśmy mnożnik $-\beta = -\frac{\lambda}{\mu}$, należy z mnożnej $+\alpha$ otrzymać iloczyn $(+\alpha).(-\beta)$. Weźmiemy więc mnożnej $+\alpha$ część μ-tą, a tak otrzymawszy liczbę $\frac{\alpha}{\mu}$, zmienimy jej znak i liczbę $-\frac{\alpha}{\mu}$ weźmiemy jako składnik λ razy,

iloczyn ... $+\alpha$; μ-ta część, $+\frac{\alpha}{\mu}$; zmienić znak, $-\frac{\alpha}{\mu}$; $-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\alpha}{\mu}-\ldots$ (λ razy).

Otrzymaliśmy więc $-\frac{\alpha.\lambda}{\mu}$, czyli $-\alpha\times\frac{1}{\mu}$, czyli $-\alpha.\beta$; przeto

$$(+\alpha).(-\beta) = -\alpha.\beta.$$

3). Liczbę ujemną pomnożyć przez dodatną; $a = -\alpha$, $b = +\beta = +\frac{\lambda}{\mu}$.

Rozumując jak w przypadku 1-ym, mamy:

mnożnik, $+\frac{\lambda}{\mu}$, . . . $+1$; μ-ta część, $+\frac{1}{\mu}$; $+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\ldots$ (λ razy)

iloczyn . . . $-\alpha$; μ-ta część, $-\frac{\alpha}{\mu}$; $-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\alpha}{\mu}-\ldots$ (λ razy); $-\frac{\alpha.\lambda}{\mu} = -\alpha.\beta$;

$$(-\alpha).(+\beta) = -\alpha.\beta.$$

4). Liczbę ujemną pomnożyć przez ujemną; $a = -\alpha$, $b = -\beta = -\frac{\lambda}{\mu}$.

Rozumując jak w przypadku 2-im, mamy:

mnoż. $-\frac{\lambda}{\mu}$, . . . $+1$; μ-ta część, $+\frac{1}{\mu}$; zmienić znak, $-\frac{1}{\mu}$; $-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu}-\ldots$ (λ razy)

iloczyn . . . $-\alpha$; μ-ta część, $-\frac{\alpha}{\mu}$; zmienić znak, $+\frac{\alpha}{\mu}$; $+\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\alpha}{\mu}+\ldots$ (λ razy); $+\frac{\alpha.\lambda}{\mu} = +\alpha.\beta$;

$$(-\alpha).(-\beta) = +\alpha.\beta.$$

Zestawiając z sobą powyższe cztery wyrażenia iloczynu dwu liczb, widzimy, że *iloczyn dwu liczb ma wartość bezwzględną równą iloczynowi bezwzględnych wartości czynników i jest dodatny, kiedy one są jednakowego znaku, zaś ujemny, kiedy one są różnego znaku.*

31. Gdy mamy iloczyn trzech lub więcej liczb, np. liczb: a, b, c, d, e, to przez to rozumiemy, iż liczbę ab, otrzymaną z pomnożenia dwu pierwszych czynników, mnożymy przez trzeci czynnik c, tak powstałą liczbę abc przez czwarty d i t. d. Jeżeli więc mamy np. iloczyn $abcde$, a wartości bezwzględne jego czynników nazwiemy odpowiednio α, β, γ, δ, ε, i gdy jest np. $a = -\alpha$, $b = +\beta$, $c = -\gamma$, $d = -\delta$, $e = +\varepsilon$, to

$$(-\alpha).(+\beta).(-\gamma).(-\delta).(+\varepsilon) = (-\alpha\beta).(-\gamma).(-\delta).(+\varepsilon) = (+\alpha\beta\gamma).(-\delta).(+\varepsilon) =$$
$$= (-\alpha\beta\gamma\delta).(+\varepsilon) = -\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon.$$

Zauważmy, że przy wyznaczeniu znaku iloczynu, nie potrzeba zważać na czynniki dodatne, ani też na żadnę parę czynników ujemnych; możemy więc powiedzieć, że *iloczyn ma znak* $+$, *kiedy niema czynników ujemnych lub kiedy ich ilość jest parzysta, ma zaś znak* $-$, *kiedy ilość czynników ujemnych jest nieparzysta; bezwzględna zaś wartość iloczynu jest równa iloczynowi bezwzględnych wartości czynników.*

32. Z arytmetyki wiemy, że wartość iloczynu pewnej ilości czynników (dodatnych) nie zależy od ich porządku.

Jeżeli w iloczynie pewnej ilości czynników, pośród których są ujemne, zmienimy porządek czynników, to tak powstały iloczyn ma tę samę ilość czynników ujemnych, co pierwotny, a więc znak obu iloczynów będzie ten sam, bezwzględna zaś wartość każdego z tych iloczynów nie ulegnie zmianie. Możemy zatem powiedzieć ogólnie: *iloczyn pewnej ilości czynników nie zależy od ich porządku.*

Wskutek tego np. $a.b.c.d.e.f=b.d.a.f.e.c=(bd).a.f.e.c=f.e.c.a.(bd)=$ $=(fec).a.(bd)=(bd).a.(fec)$, co łatwo wysłowić.

33. W art. 30-ym nie mieliśmy na uwadze przypadku, kiedy czynnikiem iloczynu jest liczba zero (art. 5). Dlatego, ze względu na określenie mnożenia (art. 29), ten czynnik zero przyjmiemy raz jako mnożną, drugim zaś razem jako mnożnik.

Gdy mamy np. $(-3\frac{1}{2})\times 0$, to, ponieważ mnożnik $0=+1-1$ (art. 6), iloczyn równa się $(-3\frac{1}{2})+(+3\frac{1}{2})$, $-3\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}=0$. Jest więc $(-3\frac{1}{2})\times 0=0$.

Gdy zaś mamy $0\times(-3\frac{1}{2})$, to, wykonywając na mnożnej działania, które należało wykonać, aby z $+1$ otrzymać $-3\frac{1}{2}$ (art. 30), nie zmienilibyśmy mnożnej, tak iż $0\times(-3\frac{1}{2})=0$.

Wskutek tego także (art. 31) np. $(-5)\times(-4)\times 0\times(+5\frac{1}{2})=0$ i t. d.

A zatem *iloczyn pewnej ilości czynników, pośród których jest liczba 0, przedstawia liczbę 0.* Odwrotnie, jeżeli wiemy, iż iloczyn pewnej ilości czynników jest równy zeru, to nie mogą czynniki tego iloczynu być wszystkie od zera różne, gdyż w takim razie iloczyn ich byłby liczbą różną od zera; a więc, *jeżeli iloczyn pewnej ilości czynników jest równy zeru, to pośród nich jest czynnik równy zeru (przynajmniej jeden).*

Dzielenie. **34.** Dzielenie, jako działanie odwrotne mnożeniu dwu czynników, ma na celu ze znanego iloczynu dwu czynników (dzielnej) i znanego jednego z tych czynników (dzielnika) znalezienie drugiego czynnika (ilorazu). To zadanie istnieć może niezależnie od tego, czy liczby dane są dodatne, czyteż ujemne. Dlatego określenie dzielenia podane w arytmetyce, utrzymuje się także w algebrze.

Powiemy więc: *dzielenie jestto działanie, w którem mając dane dwie liczby, dzielną i dzielnik, szukamy liczby, zwanej ilorazem, takiej, iżby iloczyn ilorazu i dzielnika przedstawiał dzielną.*

35. Gdy mamy liczbę a podzielić przez liczbę b, to ich iloraz piszemy albo $a:b$, alboteż $\frac{a}{b}$. Wartości bezwzględne liczb a i b nazwijmy odpowiednio α i β.

1). Liczbę dodatną podzielić przez dodatną; $a = +\alpha$, $b = +\beta$. Ponieważ dzielna jest iloczynem dzielnika i ilorazu, przeto: popierwsze, przy dzielnej dodatnej dzielnik i iloraz są jednakowego znaku (art. 30), a zatem przy dzielniku dodatnym iloraz jest dodatny; powtóre, otrzymamy bezwzględną wartość ilorazu, dzieląc α, bezwzględną wartość dzielnej, przez β, bezwzględną wartość dzielnika. Jest więc

$$(+\alpha):(+\beta) = +\frac{\alpha}{\beta}.$$

2). Liczbę dodatną podzielić przez ujemną; $a = +\alpha$, $b = -\beta$. Ponieważ dzielna jest dodatna, więc dzielnik i iloraz są jednakowego znaku; że zaś dzielnik jest ujemny, przeto iloraz jest również ujemny. Bezwzględna zaś wartość ilorazu jest $\frac{\alpha}{\beta}$. Mamy zatem

$$(+\alpha):(-\beta) = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

3). Liczbę ujemną podzielić przez dodatną; $a = -\alpha$, $b = +\beta$. Ponieważ dzielna jest ujemna, przeto (art. 30) dzielnik i iloraz są przeciwnego znaku; że zaś dzielnik jest dodatny, zatem iloraz jest liczbą ujemną. Mamy przeto

$$(-\alpha):(+\beta) = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

4). Liczbę ujemną podzielić przez ujemną; $a = -\alpha$, $b = -\beta$. Dzielna jest ujemna, a więc iloraz jest przeciwnego znaku niż dzielnik; że zaś dzielnik jest ujemny, zatem iloraz jest dodatny. Mamy przeto

$$(-\alpha):(-\beta) = +\frac{\alpha}{\beta}.$$

Zestawiając z sobą powyższe cztery wyrażenia ilorazu dwu liczb, widzimy, że *iloraz dwu liczb ma wartość bezwzględną, równą ilorazowi wartości bezwzględnych dzielnej i dzielnika, i jest dodatny, kiedy one są jednakowego znaku, zaś ujemny, kiedy one są różnego znaku.*

36. Przypuśćmy, że z podzielenia jednej liczby przez inną, z których każda mogła być czyto dodatna czyteż ujemna, otrzymaliśmy iloraz. Jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy przez tę samę liczbę dodatną, to tak znak dzielnej jak i znak dzielnika (art. 30), a wskutek tego i znak ilorazu, pozostaną niezmienione; bezwzględne zaś wartości dzielnej i dzielnika zostaną pomnożone przez tę samę liczbę, a więc także bezwzględna wartość ilorazu nie ulegnie zmianie. Jeżeli zaś dzielną i dzielnik pomnożymy przez tę samę liczbę ujemną, to tak znak dzielnej jak i dzielnika zmienią się na przeciwne, a więc iloraz znaku swego nie zmieni, a jego wartość bezwzględna także nie ulegnie zmianie. Taksamo możnaby objaśnić, że iloraz się nie zmienia, tak co do znaku, jak i co do wartości bezwzględnej, jeżeli dzielną i dzielnik podzielimy jednocześnie przez tę samę liczbę, czyto dodatną, czyteż ujemną. Powiemy więc ogólnie: *gdy dzielną i dzielnik albo jednocześnie pomnożymy alboteż jednocześnie podzielimy przez tę samę liczbę, to iloraz pozostanie bez zmiany.*

37. Utrzymując znane z arytmetyki pojęcie odwrotności liczby, powiemy, iż dwie liczby są wtedy odwrotnościami, każda pozostałej, kiedy ich iloczyn jest równy $+1$; tak np. odwrotnością liczby $-\frac{2}{5}$ jest $-2\frac{1}{2}$ i nawzajem odwrotnością liczby $-2\frac{1}{2}$ jest $-\frac{2}{5}$. Wogóle odwrotnością liczby a jest liczba $\frac{1}{a}$.

Prawidło na dzielenie jednej liczby przez drugą moglibyśmy krótko tak wysłowić (art. 35, 30): *chcąc jednę liczbę podzielić przez drugą, można pierwszą pomnożyć przez odwrotność drugiej.*

38. Należy jeszcze rozważyć przypadek, kiedy albo dzielna, albo dzielnik, albo też obie te liczby jednocześnie, są zerami.

Jeżeli mamy liczbę zero podzielić przez liczbę od zera różną, to, zważywszy, że dzielna jest iloczynem dzielnika i ilorazu, możemy powiedzieć, iż mamy iloczyn dwu czynników równy 0. Wtedy pośród tych czynników jest czynnik równy 0 (art. 33). Że zaś dzielnik jest od zera różny, przeto 0 jest ilorazem. A więc *iloraz z podzielenia zera przez liczbę różną od zera, jest równy zeru.*

Jeżeli mamy liczbę zero podzielić przez liczbę zero, to wtedy dzielna, iloczyn dzielnika i ilorazu, jest zerem, a jeden z jej czynników, dzielnik, jest także równy zeru. Jakikolwiekby więc był drugi czynnik, iloraz, zawsze iloczyn jego i dzielnika 0 wyda dzielną 0 (art. 33). A więc w tym razie iloraz może być jakąkolwiek liczbą, czyli liczba będąca tu ilorazem nie może być oznaczona, co zwykle tak wypowiadamy: iloraz jest l i c z b ą n i e o z n a c z o n ą (unbestimmte Z.). Zatem *iloraz z podzielenia liczby zero przez liczbę zero jest liczbą nieoznaczoną.*

Nakoniec, jeżeli mamy liczbę różną od zera podzielić przez liczbę zero, to mamy wówczas różny od zera iloczyn dwu czynników, z których jeden jest liczbą 0. Jakąkolwiek wzięlibyśmy liczbę jako drugi czynnik iloczynu, to zawsze po pomnożeniu jej przez 0 wypadłaby liczba 0, a tymczasem ma wypaść liczba różna od zera. Aby ten przypadek zrozumieć, weźmy przykład na dzielenie, np. $8:0{\cdot}2=40$. Jeżeli dzielnik weźmiemy 10 razy mniejszy, to iloraz wypadnie 10 razy większy, $8:0{\cdot}02=400$; podobnie $8:0{\cdot}002=4000$, i t. d Widzimy więc, że, wmiarę jak dzielnik staje się mniejszym (przy tej samej wciąż dzielnej), iloraz odpowiednio coraz się zwiększa. Jeżeli dzielnik stanie się bardzo małą liczbą, to iloraz będzie liczbą bardzo wielką. Gdy tak dzielnik coraz pewną ilość razy zmniejszamy, to wprawdzie zbliżamy się do zera, ale doń nie dochodzimy, otrzymując jednocześnie w ilorazie coraz większe liczby. Owóż powiadamy, że iloraz z podzielenia liczby różnej od zera przez zero wypadnie większy od jakkolwiek wielkiej liczby. Ponieważ iloraz uważać zawsze chcemy za liczbę, przeto się mówi w tym razie, że iloraz będzie liczbą większą od jakkolwiek wielkiej liczby. Powiemy więc: *Iloraz z podzielenia liczby różnej od zera przez zero jest liczbą większą od jakkolwiek wielkiej liczby.* Zamiast mówić: liczba większa od jakkolwiek wielkiej liczby, mówić się zwykło przez skrócenie: l i c z b a n i e s k o ń c z e n i e w i e l k a (unendlich grosse Z.), a oznacza się ją znakiem: ∞.

Mając np. $8:(-0{\cdot}2)=-40$, zmniejszmy 10 razy wartość bezwzględną dzielnika; wówczas iloraz ujemny będzie miał wartość bezwzględną 10 razy większą, $8:(-0{\cdot}02)=-400$; podobnie $8:(-0{\cdot}002)=-4000$ i t. d. W tym przykładzie, wmiarę jak (przy tej samej wciąż dzielnej) wartość bezwzględna dzielnika, wciąż malejąc, staje się równą zeru, wartość bezwzględna ujemnego ilorazu, wciąż wzrastając, staje się większą od jakkolwiek wielkiej liczby. Mówimy wtedy, że iloraz staje się liczbą nieskończenie wielką ujemną; oznaczamy ją: $-\infty$. W przeciwstawieniu temu liczbę nieskończenie wielką, o której mówiliśmy w poprzednim przykładzie, nazywamy liczbą nieskończenie wielką dodatną, co wyraźnie zaznaczamy, pisząc: $+\infty$.

Liczba, która nie jest nieskończenie wielka, nazywa się liczbą skończoną (endliche Z.).

39. Utrzymując znane z arytmetyki pojęcie średniej arytmetycznej liczb danych, powiemy, iż średnia arytmetyczna (arithmetisches Mittel) jestto liczba, którą biorąc zamiast każdej z liczb danych, otrzymalibyśmy tę samę sumę, co z dodania liczb danych. Tak np. średnią arytmetyczną liczb: $5, -9, -2, 0, +2, +1$ jest liczba $-\frac{1}{2}$, gdyż suma sześciu składników $-\frac{1}{2}$ jest równa sumie $5-9-2+0+2+1$; średnia arytmetyczna liczb $+2, -3, +1$ jest 0; w pierwszym przykładzie $\frac{+5-9-2+0+2+1}{6} = -\frac{1}{2}$, w drugim $\frac{+2-3+1}{3} = \frac{0}{3} = 0$. Zatem *średnia arytmetyczna liczb danych jest równa sumie liczb danych, podzielonej przez ich ilość.*

40. Gdy mamy liczby różne od zera, np. $-2, \frac{3}{2}, -5$, to średnia arytmetyczna ich odwrotności, t. j. średnia arytmetyczna liczb $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{5}$ jest $-\frac{1}{90}$; odwrotność zaś tej liczby, t. j. liczba -90, nazywa się średnią harmoniczną (harmonisches Mittel) liczb danych $-2, \frac{3}{2}, -5$. Powiemy więc: *średnia harmoniczna liczb danych jestto liczba, której odwrotność jest średnią arytmetyczną odwrotności liczb danych.*

ZNAKI + LUB – PRZED LITERAMI, OZNACZAJĄCEMI LICZBY.

41. Przed literą np. a, oznaczającą liczbę, może stać znak $+$, lub znak $-$, t. j. możemy mieć $+a$ lub $-a$.

Wartość bezwzględną liczby a nazwijmy α; może być albo $a = +\alpha$, albo też $a = -\alpha$. A więc $+a$ oznacza albo $+(+\alpha)$, albo $+(-\alpha)$, zaś $-a$ oznacza albo $-(+\alpha)$, albo $-(-\alpha)$.

Gdy mamy $+a$, to możemy liczbę a uważać za drugi składnik sumy, której pierwszym składnikiem jest liczba 0. Mamy więc (art. 19):

$$\text{albo} \quad +a = 0 + (+\alpha) = 0 + \alpha = +\alpha = a,$$
$$\text{albo} \quad +a = 0 + (-\alpha) = 0 - \alpha = -\alpha = a.$$

Gdy mamy $-a$, to możemy liczbę a uważać za odjemnik w różnicy, której odjemną jest liczba 0. Mamy więc (art. 27):

$$\text{albo} \quad -a = 0 - (+\alpha) = 0 - \alpha = -\alpha, \text{ gdy tymczasem } a = +\alpha,$$
$$\text{albo} \quad -a = 0 - (-\alpha) = 0 - \alpha = +\alpha, \text{ gdy tymczasem } a = -\alpha.$$

A zatem: $+a$ *jest toż samo, co* a, zaś $-a$ *oznacza liczbę przeciwnego znaku, niż* a. Jest więc $-a$ przy a dodatnem liczbą ujemną, zaś przy a ujemnem liczbą dodatną.

Dlatego o różnicy $a-b$ liczb a i b mówić możemy (art. 27, 19), iż ona jest sumą liczb a i $-b$.

42. Jakakolwiek jest liczba a, dodatna czy ujemna, po pomnożeniu jej przez -1, otrzymujemy liczbę różniącą się tylko znakiem (art. 30); a więc

$$a\,.\,(-1)=(-1)\,.\,a=-a,$$

t. j. *mnożąc liczbę przez* -1 *zmieniamy jej znak*. Nawzajem liczbę $-a$ możemy uważać za iloczyn $(-1)\,.\,a$ lub $a\,.\,(-1)$.

43. Wiemy, że, aby wykonać dodawanie dwu liczb, należy do pierwszego składnika przypisać drugi z jego znakiem (art. 19), aby zaś wykonać odejmowanie dwu liczb należy do odjemnej przypisać odjemnik ze zmienionym znakiem (art. 27). Te prawidła odnoszą się wprost do liczb przedstawionych ogólnie przez litery ze znakami. Kiedy zatem jedna z tych liczb jest $+a$ albo $-a$, a druga $+b$ albo $-b$, to:

$$(+a)+(+b)=+a+b,$$
$$(+a)+(-b)=+a-b,$$
$$(-a)+(+b)=-a+b,$$
$$(-a)+(-b)=-a-b,$$

jakoteż:

$$(+a)-(+b)=+a-b,$$
$$(+a)-(-b)=+a+b,$$
$$(-a)-(+b)=-a-b,$$
$$(-a)-(-b)=-a+b.$$

Ale prawideł, wyprowadzonych na mnożenie i dzielenie (art. 30, 35), nie możemy wprost odnieść do liczb: jednej $+a$ lub $-a$, a drugiej $+b$ lub $-b$, gdyż nie wiemy, jaka jest każda z tych liczb, dodatna czy ujemna.

Zważmy, że, podobnie jak $+a=a$ (art. 41), jest $ab=+ab$ i, podobnie jak $-a=(-1)\,.\,a$ (art. 42), jest $(-1)\,.\,ab=-ab$. Będzie zatem (art. 32):

$$(+a)\,.\,(+b)=a\,.\,b=+ab,$$
$$(+a)\,.\,(-b)=a\,.\,(-1)\,.\,b=(-1)\,.\,ab=-ab,$$
$$(-a)\,.\,(+b)=(-1)\,.\,a\,.\,b=(-1)\,.\,ab=-ab,$$
$$(-a)\,.\,(-b)=(-1)\,.\,a\,.\,(-1)\,.\,b=(-1)\,.\,(-1)\,.\,a.b=(+1)\,.\,(+ab)=+ab.$$

A więc, *aby mieć iloczyn dwu liczb przedstawionych przez litery ze znakami* $+$ *lub* $-$, *przed iloczynem liczb, przedstawionych przez same litery, stawiamy znak* $+$ *lub* $-$ *stosownie do tego, czy znaki przed literami są jednakowe, czy też różne.*

Korzystając z tych samych własności, co powyżej, oraz z tego, że, aby jednę liczbę podzielić przez drugą, można pierwszą pomnożyć przez odwrotność drugiej (art. 37), mamy:

$$(+a):(+b)=\frac{a}{b}=+\frac{a}{b},$$

$$(+a):(-b)=a\,.\left(-\frac{1}{b}\right)=a\,.\,(-1)\,.\,\frac{1}{b}=(-1)\,.\left(a\times\frac{1}{b}\right)=(-1)\,.\,(a:b)=$$
$$=(-1)\,.\,\frac{a}{b}=-\frac{a}{b},$$

$$(-a):(+b)=(-1).a\times\frac{1}{b}=(-1).\left(a\times\frac{1}{b}\right)=(-1).(a:b)=(-1).\frac{a}{b}=-\frac{a}{b},$$

$$(-a):(-b)=(-1).a.\left(-\frac{1}{b}\right)=(-1).a.(-1).\frac{1}{b}=(-1).(-1).\left(a\times\frac{1}{b}\right)=$$

$$=(+1).(a:b)=(+1).\left(+\frac{a}{b}\right)=+\frac{a}{b}.$$

A więc, *aby mieć iloraz dwu liczb przedstawionych przez litery ze znakami + lub —, przed ilorazem liczb przedstawionych przez same litery stawiamy znak + lub — stosownie do tego, czy znaki przed literami są jednakowe czyteż różne.*

44. Gdy mamy iloczyn trzech lub więcej czynników (por. art. 31) przedstawionych przez litery ze znakami + lub —, to stosując stopniowo tylkoco udowodnione prawidła na tworzenie iloczynu dwu takich czynników, łatwo okażemy, iż, *aby utworzyć iloczyn czynników, przedstawionych przez litery ze znakami + lub —, należy przed iloczynem czynników, przedstawionych przez same litery, postawić znak —, jeżeli ilość znaków — w oddzielnych czynnikach była nieparzysta, w przeciwnym zaś razie znak +.* Np.

$$(+a).(-b).c.(-d).e.(-f)=-abcdef.$$

Nadal nie będziemy uwzględniali znaków + lub — przed literami w oddzielnych czynnikach iloczynu, lecz będziemy rozważali tylko iloczyn liczb, przedstawionych przez same litery, poprzedzony znakiem + lub —.

SPÓŁCZYNNIK.

45. Jeżeli w iloczynie kilku czynników np. $+abcdef$ przez e rozumieć chcemy pewną liczbę, np. 3, albo $\frac{4}{5}$, to w takim razie ten czynnik piszemy przed iloczynem pozostałych czynników (art. 32) i nazywamy go **spółczynnikiem** (Coefficient) iloczynu $+abcdf$; będziemy więc w pierwszym razie mieli $+3abcdf$, w drugim zaś $+\frac{4}{5}abcdf$. Gdybyśmy w tymże iloczynie $abcdef$ liczbie e nadali wartość -6 mielibyśmy $-6abcdf$; tu liczba dodatna 6 jest spółczynnikiem iloczynu $-abcdf$.

Takie iloczyny np. $+\frac{4}{5}abcdf$ lub $-6abcdf$ możemy uważać za iloczyny dwu czynników:

$$+\tfrac{4}{5}abcdf=+abcdf.\tfrac{4}{5},\qquad -6abcdf=-abcdf.6.$$

Możemy przeto powiedzieć: *spółczynnik jest dodatnym mnożnikiem tej litery lub tego iloczynu liter przedstawiających liczby, przy którym on się znajduje,* a w szczególnym przypadku (art. 29) *spółczynnik całkowity wskazuje, ile razy to, przy czem on stoi, ma być wzięte jako składnik.* Gdy nie ma wypisanego spółczynnika, to za spółczynnik możemy uważać 1, np. $-abc=$ $=-1.abc$.

Ponieważ np. $\dfrac{4abc}{5}=(abc.4)\times\frac{1}{5}=abc.4\times\frac{1}{5}=abc.\frac{4}{5}$, (art. 32), przeto zamiast $\dfrac{4abc}{5}$ możemy pisać $\frac{4}{5}abc$. Podobnie $-\dfrac{abc}{7}=-\frac{1}{7}abc$.

46. Niekiedy w iloczynie kilku liter niektóre mogą mieć szczególne znaczenie, inne niż liter pozostałych. W takim razie owe szczególne czynniki pisze się zwykle na końcu iloczynu i wówczas iloczyn pozostałych czynników, choćby między niemi były litery, nazywamy spółczynnikiem. Tak np., jeżeli w iloczynie auv literom u i v przypiszemy szczególne znaczenie, odmienne od znaczenia, jakie ma litera a, to powiemy, że tu a jest spółczynnikiem iloczynu uv, choćby nawet a otrzymać miało wartość ujemną. Jeżeli podobnie pojmujemy te litery w iloczynie $2auv$, to tu $2a$ nazywamy spółczynnikiem iloczynu uv.

WYKŁADNIK. PODNOSZENIE DO POTĘGI.

47. Gdy mamy iloczyn jednakowych czynników, np. iloczyn czterech czynników a, $aaaa$, to nazywamy go 4-tą potęgą (Potenz) liczby a. Wogóle 2-gą, 3-cią, 4-tą, . . ., m-tą potęgą liczby nazywamy iloczyn odpowiednio dwu, trzech, czterech, . . ., m czynników, równych tej liczbie. Zamiast mówić druga i trzecia potęga liczby, mówi się często kwadrat (Quadrat) i sześcian (Cubus) liczby.

Zamiast pisać np. $aaaa$, piszemy powtarzający się czynnik a raz jeden, dopisując z prawej strony u góry liczbę, wskazującą, ile razy liczba a wzięta jest jako czynnik; zatem $aaaa = a^4$. Taką liczbę, jak tu 4, nazywamy wykładnikiem potęgi (Exponent), sam zaś czynnik, przy którym się znajduje wykładnik, nazywamy podstawą potęgi (Basis). A więc *wykładnik oznacza, ile razy liczba, przy której on stoi, ma być wzięta jako czynnik.*

Oczywiście, że $a^1 = a$, a więc pierwszą potęgą liczby jest taż liczba. Przy każdej przeto liczbie, nie mającej wykładnika, możemy sobie wystawić domyślny wykładnik 1.

Iloczyn $-5aaaabcc$ możemy napisać $-5a^4bc^2$.

48. Jeżeli wartość bezwzględną liczby a nazwiemy α, zaś m jest liczbą całkowitą i dodatną, to (art. 31) jest $(+\alpha)^m = +\alpha^m$, liczbie dodatnej.

Gdy przez p rozumieć będziemy liczbę całkowitą i dodatną, to, w razie m parzystego, możemy napisać $m = 2p$, i jest $(-\alpha)^{2p} = +\alpha^{2p}$, liczbie dodatnej.

Gdy przez p rozumieć będziemy liczbę całkowitą i dodatną, lub 0, to, w razie m nieparzystego, możemy przyjąć $m = 2p+1$, i jest $(-\alpha)^{2p+1} = -\alpha^{2p+1}$, liczbie ujemnej.

A więc: *potęga liczby dodatnej i parzysta potęga liczby ujemnej są liczbami dodatnemi*, zaś *nieparzysta potęga liczby ujemnej jest liczbą ujemną.*

49. Otrzymywanie m-tej potęgi liczby a nazywamy podnoszeniem a do potęgi m-tej (Potenziren, zur m-ten Potenz erheben). Powstaje więc nowe działanie: podnoszenie liczb do potęgi.

Mamy już przeto pięć działań: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i podnoszenie do potęgi.

Czytając a^m, zamiast mówić: a podniesione do potęgi m-tej, mówimy krótko: a do m-tej. Podobnie a^4bc^2 przeczytamy: a do 4-tej, b, c do kwadratu.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE.

50. Wszelkie połączenie pewnej ilości liczb, z których przynajmniej jedna jest wyrażona przez literę, zapomocą znaków, oznaczających działania, wykonywane w algebrze, nazywamy wyrażeniem algebraicznem (algebraischer Ausdruck). Tak np.

$$+\tfrac{3}{4}a^3b^2c,\quad -\tfrac{3}{4}a^2bc^3-4a^6+7+\frac{b^5c}{4},\quad -\frac{5a^2bc^3+7b^6}{2a^2b}-4a^5c+\frac{7a^2b^5}{9c}$$

są wyrażeniami algebraicznemi.

Pierwsze i drugie z wypisanych wyrażeń nazywamy wyrażeniami algebraicznemi całkowitemi, trzecie zaś, w którem w dzielniku znajduje się liczba, wyrażona przez literę, nazywamy wyrażeniem algebraicznem ułamkowem.

Wyrażenie algebraiczne jest całkowite wtedy, kiedy na liczbach, wyrażonych przez litery, mogą być wskazane do wykonania tylko dodawanie, odejmowanie, mnożenie i podnoszenie do potęgi.

Jeżeli w wyrażeniu algebraicznem, w którem mogą być wskazane do wykonania na liczbach, wyrażonych przez litery, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i podnoszenie do potęgi, jest wskazane dzielenie, a w dzielniku znajduje się liczba, wyrażona przez literę, to nazywamy je ułamkowem.

Przez wyrażenie liczebne rozumieć należy połączenie liczb, pośród których niema liczby, wyrażonej przez literę, zapomocą znaków, wskazujących działania, mające się uskutecznić na tych liczbach.

JEDNOMIANY I WIELOMIANY.

51. Wyrażenie algebraiczne całkowite, w którem tylko na początku znajdować się może znak + lub —, nazywamy jednomianem (Monom); a więc *jednomian jest iloczynem, wziętym ze znakiem + lub —, spółczynnika i jednej lub więcej liczb, wyrażonych przez litery z wykładnikami.* Zwykle litery, znajdujące się w jednomianie, wypisujemy (wraz z ich wykładnikami) w takim porządku, w jakim one w alfabecie po sobie następują.

52. Wyrażenie algebraiczne całkowite, utworzone z dwu lub więcej jednomianów, nazywa się wielomianem (Polynom), a wtedy każdy z tych jednomianów nazywamy także wyrazem wielomianu (Glied d. P.); tak np. drugie z wyrażeń art. 50-go jest wielomianem. W tym wielomianie prócz jednomianów jest część $+7$, do której nie wchodzi litera; uważamy ją także za wyraz wielomianu; ów zatem wielomian ma cztery wyrazy.

Jeżeli wielomian ma dwa wyrazy, to nazywamy go dwumianem (Binom), jeżeli trzy trójmianem (Trinom), i t. d.; wspomniany więc wielomian jest czworomianem.

Jeżeli pierwszy wyraz wielomianu ma znak +, to często ten znak opuszczamy. Wyraz wielomianu, mający lub mogący mieć znak +, nazywać będziemy wyrazem o znaku więcej, wyraz zaś, mający znak —, wyrazem o znaku mniej.

53. Jeżeli mamy jednomian $-5a^2b^3c$, to mamy tu przez litery a, b i c oznaczone liczby. Nadając literom a, b, c wartości np. $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{3}{5}$, $c=\frac{5}{3}$, mieć będziemy $-5a^2b^3c=\frac{4}{5}$. Widzimy więc, że *jednomian przedstawia liczbę;* ta liczba zależy od tego, jakie wartości nadawać będziemy literom, wchodzącym w skład jednomianu.

Dwa jednomiany, różniące się tylko znakiem, przedstawiają liczby o tej samej wartości bezwzględnej, lecz przeciwnego znaku; suma zaś ich algebraiczna jest równa zeru i mówimy wtedy, że one »znoszą się« (art. 20).

54. Ponieważ wielomian składa się z jednomianów, a każdy jednomian przedstawia liczbę, przeto również *wielomian jest liczbą*.

Tę liczbę, którą przedstawia wyrażenie algebraiczne, kiedy literom nadaliśmy pewne wartości, nazywamy wartością liczebną wyrażenia algebraicznego (numerischer W. d. alg. A.), odpowiadającą wartościom, które nadaliśmy literom.

55. Ponieważ tak jednomian jak i wielomian jest liczbą, przeto możemy na nich wykonywać działania, wskazując je odpowiedniemi znakami.

Jeżeli mamy wykonać działania na wielomianach, to ujmujemy je w nawiasy; dzielenie jednak dwu wyrażeń, gdy jedno z nich lub oba są wielomianami, możemy także przedstawić w postaci ułamka.

56. Może się zdarzyć, że w wielomianie są wyrazy, w których litery z ich wykładnikami są wszystkie też same; np. w wielomianie

$$-4\,a^2b^3+2\,ab^4-5\,a^2b^3-4\,a^2b^3+7\,b^5+10\,a^2b^3$$

w wyrazach pierwszym, trzecim, czwartym i ostatnim znajdują się a^2 i b^3, a innej litery już niema. Takie wyrazy nazywamy wyrazami podobnemi (gleichartige G., gleichnamige G.).

Wyrazy podobne mają też same litery z ich wykładnikami; różnić się one mogą tylko spółczynnikami i znakami.

Jeżeli mamy np. wielomian

$$4a^3b^5-a^2b^6+\tfrac{3}{5}\,a^2b^6-a^5b^3+8a^2b^6-\tfrac{4}{3}\,a^2b^6+7ab^6$$

czyli $$-a^2b^6+\tfrac{3}{5}\,a^2b^6+8\,a^2b^6-\tfrac{4}{3}\,a^2b^6+4\,a^3b^5-a^5b^3+7ab^6$$

(art. 23), to w wyrazach, które są podobne, mamy liczbę a^2b^6, pomnożoną: w pierwszym przez liczbę -1, w drugim przez $+\frac{3}{5}$, w trzecim przez $+8$, w czwartym przez $-\frac{4}{3}$, czyli mamy liczbę a^2b^6, pomnożoną przez liczbę

$$-1+\tfrac{3}{5}+8-1\tfrac{1}{3}=+6\tfrac{4}{15}.$$

Jest więc $-a^2b^6+\frac{3}{5}\,a^2b^6+8\,a^2b^6-\frac{4}{3}\,a^2b^6=+6\frac{4}{15}\,a^2b^6$, tak iż dany wielomian możemy zastąpić przez czworomian

$$6\tfrac{4}{15}\,a^2b^6+4\,a^3b^5-a^5b^3+7ab^6.$$

Zamiast kilku wyrazów podobnych, znajdujących się w wielomianie pierwotnym, napisaliśmy tylko jeden wyraz. Takie postępowanie nazywamy redukcyą wyrazów podobnych (Reduction d. gl. G.) wielomianu. *Redukcya wyrazów podobnych jestto zastąpienie w wielomianie wyrazów podobnych do siebie przez jeden wyraz.*

Widzieliśmy, że, *aby wykonać redukcyą wyrazów podobnych, należy przed czynnikiem, utworzonym przez litery z wykładnikami, znajdującym się w każdym z tych wyrazów, napisać liczbę, którą przedstawia suma algebraiczna spółczynników, wziętych ze znakami wyrazów.*

57. Sumę wykładników nad literami jednomianu nazywamy stopniem jednomianu (Grad); tak np. w jednomianie $6a^3bc^2d$ suma wykładników jest $3+1+2+1=7$, ten jednomian jest więc 7-go stopnia.

Największy ze stopni oddzielnych wyrazów wielomianu jest stopniem wielomianu. Tak np. ostatni wielomian art. poprzedniego jest 8-go stopnia.

Niekiedy mówi się tylko o stopniu wielomianu względem pewnej jednej, albo niektórych, z jego liter. Tak np. wielomian wzmiankowany jest względem litery a stopnia 5-go.

Jeżeli wszystkie wyrazy wielomianu są jednakowego stopnia, to mówimy, że mamy wielomian jednorodny (homogenes P.); tak np. wielomian

$$4a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2 - 5ab^3 + 7b^4$$

jest wielomianem jednorodnym stopnia 4-go.

58. Jeżeli w wielomianie, w którym znajduje się jedna tylko litera, jest już wykonana redukcya wyrazów podobnych, to wykładniki nad tą literą w oddzielnych wyrazach są różne, np.

$$6a^6 - 5a^2 + 7a^5 - \tfrac{3}{4}a^7 + 8a + a^4 = -\tfrac{3}{4}a^7 + 6a^6 + 7a^5 + a^4 - 5a^2 + 8a.$$

Taki wielomian można (art. 23) uporządkować według liczb, będących wykładnikami litery, t. j. pisać wyrazy po sobie w takiej kolei, iżby owe wykładniki były albo coraz mniejsze (jak w naszym przykładzie), alboteż coraz większe. W pierwszym razie mówimy, iż porządkujemy wielomian podług malejących potęg (nach fallenden P.) litery, w drugim zaś podług rosnących potęg (nach steigenden P.) litery.

Jeżeli mamy w wielomianie dwie litery, to możemy wyrazy uporządkować według rosnących, alboteż według malejących potęg jednej z tych liter, którą nazwiemy literą główną (Ordnungsbuchstabe). Ogólnie mówiąc, mogą tu być dwa, alboteż więcej wyrazów, zawierających jednakowe potęgi litery głównej. Takie wyrazy piszemy zwykle po sobie, porządkując je w taki sam sposób według potęg drugiej litery.

Podobnie postępować możemy, kiedy do wyrazu wielomianu wchodzi więcej liter.

RÓWNOŚĆ. TOŻSAMOŚĆ. RÓWNANIE. NIERÓWNOŚĆ.

59. Gdy np. w wyrażeniach

$$(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2), \quad 8a^3 - b^3$$

nadamy jakąkolwiek, byle w obu tę samę, wartość literze a i również jakąkolwiek, byle w obu tę samę, wartość literze b, to każdym razem okaże się, iż te dwa wyrażenia mają tę samę wartość liczebną, czyli są one równe sobie przy wszelkich wartościach liczb, oznaczonych przez litery. Zaznaczamy to, pisząc

$$(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2) = 8a^3 - b^3.$$

To zaznaczenie takiej własności tych dwu wyrażeń stanowi równość (Gleichheit).

Ogólnie powiemy: *zaznaczenie za pomocą znaku =, iż dwa wyrażenia, połączone tym znakiem, są sobie równe przy wszelkich wartościach liter, w ich skład wchodzących, stanowi równość.*

Gdy mamy np. równość

$$7 - a^2b^3 = 5 + 4a^2b^3 + 1:0{\cdot}5 - 5a^2b^3$$

Dwa wyrażenia różnej formy nazywamy równymi, jeżeli wyrażenia te przybierają tę samą wartość liczbową, gdy za litery podstawimy w obu ...

i po znaku = wykonamy redukcyą wyrazów podobnych, jakoteż wskazane działania na liczbach, to będziemy mieli

$$7 - a^2 b^3 = 7 - a^2 b^3.$$

Taki szczególny przypadek równości nazywa się tożsamością, albo identycznością (Identität). *Gdy po obu stronach znaku = mamy jednakowe wyrażenia, to taką równość nazywamy tożsamością.*

60. Gdybyśmy mieli dwa wyrażenia, np. jedno $2a^2 + 6$, a drugie $a^2 + 5a$, i połączyli je znakiem =,

$$2a^2 + 6 = a^2 + 5a,$$

to litera a mogłaby tu mieć wartości tylko $a = 2$ i $a = 3$.

Podobnie np., jeżeli wyrażenia $2b + 3c$ i $4 - 2c$ połączymy znakiem =,

$$2b + 3c = 4 - 2c,$$

to: przy $b = 1$, może być jedynie $c = \frac{2}{5}$; przy $c = -2$, może być jedynie $b = 7$; i t. d.

Mogą więc niekiedy dwa wyrażenia algebraiczne być połączone znakiem = przy warunku, iż nie wszystkim literom, w tych wyrażeniach znajdującym się, możemy nadawać dowolne wartości. Zaznaczenie tego zapomocą znaku = stanowi równanie (Gleichung).

Tak równości, jak i równania, wówczas, kiedy im przypisujemy szczególną doniosłość, nazywamy ogólnie wzorami, albo formułami (Formeln).

61. Jeżeli chcemy zaznaczyć, iż np. 7 jest większe od 5, to piszemy albo $7 > 5$, alboteż $5 < 7$.

Podobnie, jeżeli chcemy zaznaczyć, iż z dwu wyrażeń, np. $a^2 + b^2$ i ab, pierwsze jest, przy wszelkich wartościach liter a i b, większe niż drugie, napiszemy albo $a^2 + b^2 > ab$, alboteż $ab < a^2 + b^2$.

Takie zaznaczenie, iż z liczebnych wartości dwu wyrażeń jedna jest większa niż druga, stanowi nierówność (Ungleichung).

Niekiedy zapomocą nierówności ograniczamy wartości, jakie nadawać możemy literom. Tak np. nierówność $a > 5$ oznacza, iż literze a możemy nadawać tylko wartości większe niż liczba 5. Jeżeli zaś chcemy zaznaczyć, że może być tylko albo $a > 5$, albo $a = 5$, to niekiedy piszemy to krótko $a \geqslant 5$. Jeżeli mamy równocześnie dwie nierówności $a < 7$ i $a > -1$, to temsamem mamy tak ograniczone wartości a, iż tej literze możemy nadawać tylko wartości, przypadające między -1 i $+7$, co możemy także tak pisać: $-1 < a < 7$. Niekiedy dla oznaczenia, iż a może otrzymywać tylko wartości różne od liczby b, .|. dla oznaczenia, iż może być albo $a < b$, alboteż $a > b$, piszemy krótko $a \gtrless b$.

62. W równości, w równaniu i w nierówności wyrażenie, znajdujące się przed znakiem =, albo >, albo <, nazywamy stroną lewą (erster, linker Theil), pozostałe zaś wyrażenie nazywamy stroną prawą (zweiter, rechter Th.). Oddzielne zaś składniki tak na stronie lewej, jak i na stronie prawej, nazywamy wyrazami tych stron, alboteż wyrazami odpowiednio równości, równania, lub nierówności.

WIELKOŚĆ. PEWNIKI.

63. Wszystko to, co pod jakimkolwiek względem mogłoby być mierzone, nazywa się wielkością (Grösse). Tak pojęte wielkości są przedmiotem badań w matematyce i jej zastosowaniach.

Ponieważ wielkość może być mierzona, przeto albo każda wielkość składa się z części, alboteż możemy sobie wyobrazić, iż ona jest z części złożona. Możemy także powiedzieć, iż wielkością jest każdy przedmiot, który może stawać się mniejszym, lub większym.

Oddzielny stan pewnej wielkości, oile go przez mierzenie oznaczyć można, nazywamy jej wartością. Wielkość zatem może, wogóle mówiąc, mieć różne wartości.

Każde wyrażenie algebraiczne, jako mogące otrzymywać różne wartości liczebne, zależne od wartości, jakie nadajemy literom, jest wielkością, a także każda oddzielna litera, w niem się znajdująca, jest wielkością.

Jakiekolwiek dane wyrażenie algebraiczne możemy oznaczyć jedną literą. Gdy tedy pewne wyrażenie algebraiczne nazwiemy np. a, to możemy powiedzieć: albo, że mamy liczbę a; albo, że mamy wyrażenie algebraiczne a; alboteż, że mamy wielkość a.

64. W matematyce opieramy się na pewnych prawdach zasadniczych, które uważamy za oczywiste, nie podlegające wątpliwości, i których słuszność uznajemy bez ich uzasadniania. Prawdy te zasadnicze nazywamy pewnikami, albo zgrecka aksiomatami. Takiemi pewnikami w algebrze są:

I. *Każda wielkość jest równa samej sobie;* np. $a = a$.

II. *Całość jest równa skupieniu wszystkich jej części;* np. gdy częściami pewnej całości są liczby: a, $-b$, $+7$, $-3c$, to ową całością jest wyrażenie algebraiczne $a - b + 7 - 3c$.

III. *Dwie wielkości, z których każda jest równa tej samej trzeciej, są sobie równe;* tak np. gdy $a = c$ i $b = c$, to $a = b$.

IV. *Wskutek wykonania takiego samego działania na dwu równych wielkościach, otrzymujemy wielkości równe.* Tak więc:

α. *Gdy do równych sobie wielkości dodamy wielkości sobie równe, otrzymamy sumy równe sobie;* np. gdy $a = b$, zaś $c = d$, to $a + c = b + d$.

β. *Gdy od równych sobie wielkości odejmiemy wielkości sobie równe, otrzymamy reszty równe sobie;* np. gdy $a = b$, zaś $c = d$, to $a - c = b - d$.

γ. *Gdy równe sobie wielkości pomnożymy przez wielkości sobie równe, otrzymamy iloczyny równe sobie;* np. gdy $a = b$, zaś $c = d$, to $ac = bd$.

δ. *Gdy równe sobie wielkości podzielimy przez wielkości sobie równe, otrzymamy ilorazy równe sobie;* np. gdy $a = b$, zaś $c = d$, to $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Zauważmy, że według γ., gdy wielkości sobie równe $a = b$ pomnożymy odpowiednio przez też wielkości $a = b$, to otrzymamy $a^2 = b^2$, a mnożąc te wielkości odpowiednio przez równe sobie wielkości $a = b$, otrzymamy $a^3 = b^3$, i t.d., tak iż, *podnosząc wielkości równe sobie do jednakowych potęg, otrzymujemy wielkości równe sobie.*

Dla czego, jeżeli $a=b$, to także $-a=-b$, jak również $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$?

V. *Jeżeli dwie wielkości są sobie równe, a jedna z nich jest większa albo mniejsza od trzeciej, to i druga z tych wielkości jest odpowiednio większa albo mniejsza od owej trzeciej;* np. $a=b$, $b>c$, to i $a>c$; jeżeliby zaś było $b<c$, to również byłoby $a<c$.

VI. *Jeżeli jedna wielkość jest większa od drugiej, zaś ta druga jest większa od trzeciej wielkości, to temwięcej pierwsza jest większa od trzeciej; i odwrotnie;* np. gdy $a>b$, zaś $b>c$, to temwięcej $a>c$; jeżeli zaś $a<b$, $b<c$, to temwięcej $a<c$.

W algebrze, podobnie jak w arytmetyce, korzystając w rozumowaniu z jakiegoś pewnika, zwykle tego nie zaznaczamy, uważając odpowiedni ustęp rozumowania za bezpośrednio przekonywający.

W różnych miejscach poprzedniego wykładu w rozumowaniach robiliśmy użytek z tego lub owego pewnika. Ale wypowiedzenie pewników podaliśmy dopiero teraz, kiedy już do wyrażeń algebraicznych można było odnieść pojęcie wielkości i pojęcie równości.

DODAWANIE I ODEJMOWANIE JEDNOMIANÓW I WIELOMIANÓW.

65. Gdy czyto do jednomianu, czyteż do wielomianu mamy dodać jednomiany, to zauważywszy, że jednomian jest liczbą (art. 53), możemy zastosować wprost znane prawidło dodawania (art. 19, 43). Np.

$$(+4a^6b-\tfrac{5}{7}a^5bc)+(+7a^4bc^2)+(-9a^2b^2c^3)=+4a^6b-\tfrac{5}{7}a^5bc+7a^4bc^2-9a^2b^2c^3.$$

Jeżeli czyto do jednomianu, czyteż do wielomianu, mamy dodać wielomian, to moglibyśmy powiedzieć, że mamy dodać kolejno (art. 54; 64, II; 22) wszystkie wyrazy owego wielomianu, będącego drugim składnikiem; a więc należy je dopisać do pierwszego składnika, nie zmieniając ich znaków. Np.

$$(2a-3b+c)+(4d-5e-6f+2g)=2a-3b+c+4d-5e-6f+2g.$$

Gdybyśmy mieli wykonać dodawanie kilku wielomianów lub jednomianów, to (art. 22), do pierwszego składnika dodawszy drugi, do otrzymanej stąd sumy dodalibyśmy w taki sam sposób trzeci składnik, i t. d.

A więc ogólnie, *aby wykonać dodawanie jednomianów i wielomianów, należy do pierwszego składnika dopisać wszystkie wyrazy następnych składników, zachowując znaki tych wyrazów.* Wielomian tak powstały niekiedy zawiera wyrazy podobne; w takim razie wykonywamy redukcyą wyrazów podobnych (art. 56).

66. Gdy mamy od jednomianu np. $5a^3b^2c$ odjąć jednomian $-2a^2bc^3$, to również (art. 53) mamy tu wykonać odejmowanie dwu liczb; a więc (art. 27, 43) jest

$$5a^3b^2c-(-2a^2bc^3)=5a^3b^2c+2a^2bc^3.$$

Weźmy na uwagę dwa wielomiany, których wyrazy różnią się tylko znakami, np.

$$4a^3b^2-2a^2b^3+5ab^4-7,\quad -4a^3b^2+2a^2b^3-5ab^4+7.$$

Każdy z tych wielomianów przedstawia liczbę (art. 54), odpowiednią wartościom liter a i b. Jeżeli te dwa wielomiany do siebie dodamy, to w tak powstałej sumie algebraicznej każde dwa wyrazy odpowiednie się znoszą (art. 53), tak iż wartością liczebną tej sumy algebraicznej jest 0. Wskutek tego drugi wielomian przedstawia zawsze liczbę o tej samej wartości bezwzględnej, co pierwszy, lecz przeciwnego znaku. A więc *liczba, którą przedstawia wielomian, zmienia swój znak, jeżeli zmienimy znak każdego wyrazu tego wielomianu.*

Gdy przeto mamy odjąć od wielomianu

$a^5 - 4a^4b + 6a^3b^2 - 2a^2b^3$ wielomian $4a^3b^2 - 2a^2b^3 + 5ab^4 - 7a$,

to należy do liczby, którą przedstawia odjemna, dopisać liczbę, różniącą się tylko znakiem od tej, którą przedstawia odjemnik, a więc dopisać wielomian odjemnika po zmienieniu znaku każdego jego wyrazu; wskutek tego mieć będziemy:

$$a^5 - 4a^4b + 6a^3b^2 - 2a^2b^3 - 4a^3b^2 + 2a^2b^3 - 5ab^4 + 7a,$$

albo, po wykonaniu redukcyi wyrazów podobnych,

$$a^5 - 4a^4b + 2a^3b^2 - 5ab^4 + 7a.$$

Zatem ogólnie, *aby od jednomianu lub wielomianu odjąć jednomian lub wielomian, należy do odjemnej przypisać wyrazy odjemnika ze zmienionemi znakami.*

67. Tak przy dodawaniu, jak i przy odejmowaniu jednomianów, lub wielomianów, po postąpieniu według prawidła, w otrzymanem wyrażeniu wykonywamy, jeżeli można, redukcyą wyrazów podobnych. Atoli wykonywanie jej nie jest ani dodawaniem, aniteż odejmowaniem, lecz tylko prostszem przedstawieniem otrzymanego wielomianu, wskutek zastąpienia każdej grupy jego wyrazów podobnych przez jeden wyraz.

Jeżeli czyto w danych do dodania składnikach, czyteż w odjemnej i w odjemniku, dostrzegamy wyrazy podobne, to chcąc najprościej otrzymać wypadek, w którymby nie było wyrazów podobnych, tak piszemy (art. 23) w dodawaniu składniki w oddzielnych wierszach, a w odejmowaniu odjemnik pod odjemną, iżby wyrazy do siebie podobne znalazły się jedne pod drugiemi. Wówczas w dodawaniu pod składnikami, wykonawszy redukcyą wyrazów znajdujących się w tych samych pionowych rzędach, wprost wypisujemy wyrazy sumy żądanej. W odejmowaniu zaś pod znakami wyrazów odjemnika stawiamy znaki przeciwne i, z uwzględnieniem ich wykonawszy redukcyą, wprost wypisujemy wyrazy różnicy żądanej. Np.

1). Dodać do siebie wielomiany:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 5a^4b^2 & -\,3a^3b^3 & +\,\tfrac{1}{4}a^2b^4 & -\,2ab^5 & \\
 & & -\,4a^3b^3 & +\,7a^2b^4 & -\,4ab^5 & +\,8b^6 \\
7a^5b & -\,4a^4b^2 & +\,3a^3b^3 & -\,9a^2b^4 & +\,6ab^5 & \\
\hline
7a^5b & +\,a^4b^2 & -\,4a^3b^3 & -\,1\tfrac{3}{4}a^2b^4 & & +\,8b^6.
\end{array}$$

2). $(4a^5b^3 - 2a^4b^4 + 6a^3b^5 - 7a^2b^6) - (-2a^5b^3 + 6a^3b^5 - 5a^2b^6 - 6ab^7)$; będzie więc:

$$\begin{array}{rrrrr}
4a^5b^3 & -\,2a^4b^4 & +\,6a^3b^5 & -\,7a^2b^6 & \\
\mp\,2a^5b^3 & & \pm\,6a^3b^5 & \mp\,5a^2b^6 & \mp\,6ab^7 \\
\hline
6a^5b^3 & -\,2a^4b^4 & & -\,2a^2b^6 & +\,6ab^7.
\end{array}$$

MNOŻENIE JEDNOMIANÓW.

68. Gdy przy dodatnych i całkowitych m i n mamy znaleźć iloczyn $a^m \times a^n$, to z pomnożenia iloczynu m czynników a przez iloczyn n czynników a otrzymamy iloczyn $m+n$ czynników a, t. j. a^{m+n}. Jest więc

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Podobnie, przy dodatnych i całkowitych liczbach m, n, p, q, jest

$$a^m \times a^n \times a^p \times a^q = a^{m+n+p+q}.$$

Zatem *iloczyn potęg tej samej podstawy jest potęgą tejże podstawy o wykładniku, równym sumie jej wykładników w oddzielnych czynnikach.*

69. Gdy mamy pomnożyć jednomian przez jednomian, np. $+\frac{3}{5}a^4b^3cd^5e$ przez $-2\frac{1}{7}a^3bef^3$, to (art. 32, 68):

$$(+\tfrac{3}{5}a^4b^3cd^5e)\times(-\tfrac{15}{7}a^3bef^3) = -\tfrac{3}{5}\times\tfrac{15}{7}\times a^4.a^3.b^3.b.c.d^5.e.e.f^3 =$$
$$= -\tfrac{9}{7}a^{4+3}b^{3+1}cd^5e^{1+1}f^3.$$

Podobnie otrzymalibyśmy iloczyn trzech lub więcej jednomianów.

Iloczyn dwu lub więcej jednomianów jest jednomianem, który ma znak —, jeżeli ilość danych jednomianów o znaku — jest nieparzysta, w innych zaś przypadkach ma znak +; w nim spółczynnik jest iloczynem spółczynników danych jednomianów, a każda z podstaw ma wykładnik, równy sumie wykładników tejże podstawy w danych jednomianach.

70. W szczególnym przypadku, kiedy mamy jednomian pomnożyć przez siebie, np. $(-3a^4b^nc).(-3a^4b^nc)$, czyli (art. 47) $(-3a^4b^nc)^2$, jest według art. 69-go:

$$(-3a^4b^nc)^2 = +3.3.a^{4+4}.b^{n+n}.c^{1+1} = +3^2a^{4.2}b^{n.2}c^{1.2},$$

t. j. *kwadrat jednomianu jest jednomianem o znaku +, w którym spółczynnik jest kwadratem spółczynnika danego jednomianu, a każda z podstaw danego jednomianu ma wykładnik pomnożony przez 2.*

MNOŻENIE WIELOMIANÓW.

71. Weźmy na uwagę mnożenie wielomianu przez jednomian. Dla uproszczenia rozumowania każdy wyraz wielomianu, jako wyrażający liczbę, oznaczmy przez literę. Ogólnie zatem wielomian mnożnej tak przedstawimy:

$$m+n+\ldots+s,$$

gdzie zapomocą kropek wskazujemy, iż wielomian może mieć jakąkolwiek ilość wyrazów. Jednomian zaś mnożnika oznaczmy przez literę a. Mamy przeto

$$(m+n+\ldots+s)\times a.$$

Przypuśćmy naprzód, że mnożnik a jest liczbą całkowitą. Jeżeli jego wartość bezwzględną nazwiemy α, to może być albo $a=+\alpha$, albo też $a=-\alpha$.

Niech $a=+\alpha$. Mamy więc

$$(m+n+\ldots+s)\times(+\alpha).$$

Według art. 29-go jest

$$\text{iloczyn} = m+n+\ldots+s+m+n+\ldots+s+\ldots+m+n+\ldots+s$$

(gdzie po stronie prawej wielomian mnożnej wzięliśmy α razy jako składnik), albo (art. 23)

$$\text{iloczyn} = m + m + \ldots + m + n + n + \ldots + n + \ldots + s + s + \ldots + s.$$

Tu sumę pierwszych α składników m możemy przedstawić zapomocą iloczynu $m.(+\alpha)$; czyniąc to samo z sumą następujących α składników n, i t. d., mieć będziemy

$$(m + n + \ldots + s) \times (+\alpha) = m.(+\alpha) + n.(+\alpha) + \ldots + s.(+\alpha),$$

czyli $$(m + n + \ldots + s) \times a = m.a + n.a + \ldots + s.a.$$

Niech $a = -\alpha$. Mamy więc

$$(m + n + \ldots + s) \times (-\alpha).$$

Aby z mnożnej utworzyć iloczyn podobnie jak mnożnik powstał z $+1$, należy zmienić znak mnożnej, i liczbę (art. 66) $-m-n-\ldots-s$ wziąć α razy jako składnik. Rozumując zaś dalej taksamo, jak w poprzednim przypadku, mamy

$$\begin{aligned} \text{iloczyn} &= -m-n-\ldots-s-m-n-\ldots-s-\ldots-m-n-\ldots-s \\ &= -m-m-\ldots-m-n-n-\ldots-n-\ldots-s-s-\ldots-s \\ &= -m\alpha-n\alpha-\ldots-s\alpha \\ &= m.(-\alpha)+n.(-\alpha)+\ldots+s.(-\alpha), \end{aligned}$$

czyli $$(m + n + \ldots + s) \times a = m.a + n.a + \ldots + s.a.$$

Dowiedliśmy tego, że, kiedy mnożnik jest liczbą całkowitą, należy każdy wyraz wielomianu pomnożyć przez mnożnik.

Oczywiście, że odwrotnie

$$m.a + n.a + \ldots + s.a = (m + n + \ldots + s).a,$$

t. j., gdy w każdym wyrazie wielomianu znajduje się ten sam czynnik całkowity (jak tu a), możemy go w oddzielnych wyrazach opuścić, a tak powstały wielomian przez ów czynnik pomnożyć.

Weźmy teraz na uwagę mnożnik ułamkowy. Jeżeli bezwzględna jego wartość jest $\frac{\lambda}{\mu}$, gdzie λ i μ są liczbami całkowitemi, to może być albo $a = +\frac{\lambda}{\mu}$, alboteż $a = -\frac{\lambda}{\mu}$ (art. 17).

Niech będzie $a = +\frac{\lambda}{\mu}$. Mamy więc

$$(m + n + \ldots + s) \times \left(+\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Wiemy już, że $(m + n + \ldots + s) \times (+\lambda) = m\lambda + n\lambda + \ldots + s\lambda$. Nie zmienimy czynnika λ, znajdującego się po obu stronach poprzedniej równości, jeżeli wszędzie zamiast niego weźmiemy iloczyn $\frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu$; możemy więc napisać

$$(m + n + \ldots + s)\frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu = m\frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu + n\frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu + \ldots + s\frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu.$$

W każdym wyrazie wielomianu po prawej stronie tej równości mamy ten sam czynnik całkowity μ; a więc według tego, cośmy powyżej powiedzieli, jest

$$(m+n+\ldots+s)\frac{\lambda}{\mu}.\mu=\left(m\frac{\lambda}{\mu}+n\frac{\lambda}{\mu}+\ldots+s\frac{\lambda}{\mu}\right).\mu.$$

Jeżeli te równe sobie iloczyny podzielimy przez tę samę liczbę μ, to otrzymamy równe sobie ilorazy (art. 64, IV, δ); jest więc

$$(m+n+\ldots+s).\left(+\frac{\lambda}{\mu}\right)=m.\left(+\frac{\lambda}{\mu}\right)+n.\left(+\frac{\lambda}{\mu}\right)+\ldots+s.\left(+\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

czyli $$(m+n+\ldots+s)\times a=m.a+n.a+\ldots+s.a.$$

Niech będzie $a=-\frac{\lambda}{\mu}$. Mamy więc

$$(m+n+\ldots+s)\times\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Możemy przyjąć, iż $a=-\frac{\lambda}{\mu}=\frac{-\lambda}{\mu}$ (art. 35). Wiemy, że

$$(m+n+\ldots+s)(-\lambda)=m(-\lambda)+n(-\lambda)+\ldots+s(-\lambda),$$

czyli $$(m+n+\ldots+s)\frac{-\lambda}{\mu}.\mu=m\frac{-\lambda}{\mu}.\mu+n\frac{-\lambda}{\mu}.\mu+\ldots+s\frac{-\lambda}{\mu}.\mu;$$

przeto $$(m+n+\ldots+s)\frac{-\lambda}{\mu}.\mu=\left(m\frac{-\lambda}{\mu}+n\frac{-\lambda}{\mu}+\ldots+s\frac{-\lambda}{\mu}\right).\mu,$$

a więc $$(m+n+\ldots+s)\cdot\frac{-\lambda}{\mu}=m\cdot\frac{-\lambda}{\mu}+n\cdot\frac{-\lambda}{\mu}+\ldots+s\cdot\frac{-\lambda}{\mu},$$

czyli $$(m+n+\ldots+s)\times a=m.a+n.a+\ldots+s.a.$$

Widzimy zatem, że we wszystkich możliwych przypadkach otrzymujemy ten sam wynik. Tak np.

$$(-3a^4b^2+\tfrac{2}{5}a^3b^3-7a^2b^4).(-5a^2b^2)=(-3a^4b^2)(-5a^2b^2)+(+\tfrac{2}{5}a^3b^3)(-5a^2b^2)+$$
$$+(-7a^2b^4)(-5a^2b^2)=15a^6b^4-2a^5b^5+35a^4b^6.$$

Gdybyśmy mieli jednomian pomnożyć przez wielomian, to, zważywszy, że tak jednomian mnożnej, jak i wielomian mnożnika, są liczbami, możemy (art. 32) to zadanie sprowadzić do poprzedniego; jest więc

$$a\times(m+n+\ldots+s)=(m+n+\ldots+s)\times a=m.a+n.a+\ldots+s.a$$
$$=a.m+a.n+\ldots+a.s.$$

A zatem *iloczyn jednomianu i wielomianu otrzymujemy, biorąc sumę algebraiczną iloczynów każdego wyrazu wielomianu przez jednomian.*

72. Udowodniliśmy, że ogólnie $a(m+n+\ldots+s)=am+an+\ldots+as$. Z tego wynika, że, odwrotnie, mamy ogólnie

$$am+an+\ldots+as=a(m+n+\ldots+s),$$

t. j. *jeżeli w każdym wyrazie wielomianu znajduje się ten sam czynnik, to możemy go w oddzielnych wyrazach opuścić, a tak powstały wielomian pomnożyć przez ów czynnik.* Tak np.

$$-\tfrac{3}{5}a^5b^3c-\tfrac{1}{25}a^3b^2c^5+4\tfrac{1}{5}a^4b^4c^2=+\tfrac{1}{5}a^3b^2c.(-3a^2b-\tfrac{1}{5}c^4+21ab^2c).$$

Takie postępowanie nazywa się wyłączaniem albo wynoszeniem poza nawias czynnika spólnego wyrazów wielomianu. Oczywiście jest wszystko jedno, czy ten spólny czynnik napiszemy przed nawiasem, czy po nim, czyteż niektóre jego czynniki przed nawiasem, a inne po nawiasie.

Jeżeli w powyższym trójmianie wyłączymy poza nawias tylko czynnik a^2b, to będziemy mieli

$$-\tfrac{3}{5}a^5b^3c-\tfrac{1}{25}a^3b^2c^5+4\tfrac{1}{5}a^4b^4c^2=a^2b.(-\tfrac{3}{5}a^3b^2c-\tfrac{1}{25}abc^5+4\tfrac{1}{5}a^2b^3c^2).$$

Możemy w każdym wielomianie wyłączyć poza nawias liczbę -1 (która oczywiście jest czynnikiem jakiegokolwiek wyrazu); tak np. (art. 42)

$$-\tfrac{3}{5}a^5b^3c-\tfrac{1}{25}a^3b^2c^5+4\tfrac{1}{5}a^4b^4c^2=(-1).(\tfrac{3}{5}a^5b^3c+\tfrac{1}{25}a^3b^2c^5-4\tfrac{1}{5}a^4b^4c^2)=$$
$$=-(\tfrac{3}{5}a^5b^3c+\tfrac{1}{25}a^3b^2c^5-4\tfrac{1}{5}a^4b^4c^2).$$

A zatem *możemy wielomian dany zastąpić przez wielomian, powstały z danego wskutek zmienienia znaku każdego jego wyrazu, ujmując ten wielomian w nawias i pisząc przed nawiasem znak* —. Nazywamy to wyłączaniem znaku — przed nawias.

73. Jeżeli mamy pomnożyć wielomian przez wielomian, to, oznaczając każdy wyraz w każdym z tych wielomianów przez literę, zadanie nasze ogólnie tak przedstawimy:

$$(a+b+\ldots+k).(m+n+\ldots+s).$$

Jeżeli liczbę, którą przedstawia jeden z tych wielomianów, np. wielomian mnożnej, nazwiemy jedną literą np. w, tak iż $a+b+\ldots+k=w$, to będziemy mieli (art. 71)

$$w(m+n+\ldots+s)=wm+wn+\ldots+ws.$$

W ostatniem wyrażeniu, zamiast w pisząc $a+b+\ldots+k$, mamy

$$(a+b+\ldots+k).m+(a+b+\ldots+k).n+\ldots+(a+b+\ldots+k).s.$$

Mamy tu sumę iloczynów wielomianu przez jednomian; a więc ostatecznie

$$\begin{aligned}(a+b+\ldots+k).(m+n+\ldots+s)=\ & am+bm+\ldots+km+\\ & +an+bn+\ldots+kn+\\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ & +as+bs+\ldots+ks.\end{aligned}$$

Widzimy z tego, że, *aby wielomian pomnożyć przez wielomian, należy wziąć sumę algebraiczną iloczynów każdego wyrazu mnożnej przez każdy wyraz mnożnika.* Np.

$$\begin{aligned}(2a^3bc^2+a^3c^3-a^2b^2c^2-3a^2bc^3).(-a^2-2ab+3b^2)= & -2a^5bc^2-a^5c^3+a^4b^2c^2+3a^4bc^3\\ & -4a^4b^2c^2-2a^4bc^3+2a^3b^3c^2+6a^3b^2c^3+\\ & +6a^3b^3c^2+3a^3b^2c^3-3a^2b^4c^2-9a^2b^3c^3.\end{aligned}$$

74. Zdarzyć się może, jak w przykładzie poprzedzającym, że w iloczynie otrzymujemy wyrazy podobne. Wówczas, chcąc redukcyą tych wyrazów najdogodniej uskutecznić, należy mnożną i mnożnik w razie, jeżeli one uporządkowane nie są, uporządkować według potęg, czyto rosnących, czyteż malejących, tej samej litery, lub tych samych liter (art. 58), a następnie wypisywać w oddzielnych poziomych wierszach częściowe iloczyny mnożnej przez oddzielne wyrazy mnożnika tak, iżby wyrazy do siebie podobne znalazły się w tym samym pionowym rzędzie. Pod tą zaś sumą algebraiczną iloczynów częściowych piszemy, wykonawszy redukcyą wyrazów

podobnych, żądany iloczyn. W ten sposób postępując w zadaniu poprzedniem, mieć będziemy

$$
\begin{array}{l}
\quad 2a^3bc^2 + a^3c^3 - a^2b^2c^2 - 3a^2bc^3 \\
\qquad\quad - a^2 - 2ab + 3b^2 \\
\hline
-2a^5bc^2 - a^5c^3 + a^4b^2c^2 + 3a^4bc^3 \\
\qquad -4a^4b^2c^2 - 2a^4bc^3 + 2a^3b^3c^2 + 6a^3b^2c^3 \\
\qquad\qquad\qquad + 6a^3b^3c^2 + 3a^3b^2c^3 - 3a^2b^4c^2 - 9a^2b^3c^3 \\
\hline
-2a^5bc^2 - a^5c^3 - 3a^4b^2c^2 + a^4bc^3 + 8a^3b^3c^2 + 9a^3b^2c^3 - 3a^2b^4c^2 - 9a^2b^3c^3.
\end{array}
$$

Gdybyśmy mieli znaleźć iloczyn trzech lub więcej wielomianów, to, po otrzymaniu iloczynu dwu wielomianów, pomnożylibyśmy go przez trzeci, tak otrzymany iloczyn trzech wielomianów pomnożylibyśmy przez czwarty i t. d.

75. Jeżeli mnożymy wielomian o p wyrazach przez wielomian o q wyrazach i jeżeli nie otrzymujemy wyrazów podobnych, to wielomian iloczynu ma pq wyrazów.

Jeżeli wielomiany mnożnej i mnożnika są oba uporządkowane według potęg, czyto rosnących, czyteż malejących, tej samej litery, lub tych samych liter, to w częściowych iloczynach mnożnej przez oddzielne wyrazy mnożnika nie otrzymamy wyrazu podobnego ani do wyrazu, powstałego z pomnożenia pierwszego wyrazu mnożnej przez pierwszy wyraz mnożnika, aniteż do wyrazu, powstałego z pomnożenia ostatniego wyrazu mnożnej przez ostatni wyraz mnożnika (por. np. zadanie art. 74-go). Owe więc dwa wyrazy się nie zniosą.

Możemy przeto powiedzieć: *iloczyn wielomianu przez wielomian jest wielomianem, który ma wyrazów conajmniej dwa, a conajwięcej taką ilość, jaka wypadnie, gdy ilość wyrazów wielomianu mnożnej pomnożymy przez ilość wyrazów wielomianu mnożnika.*

76. Zgodnie z określeniem stopnia wielomianu (art. 37) możemy powiedzieć: *stopień iloczynu jest równy sumie stopni czynników.*

Jeżeli pomnożymy wielomian jednorodny przez jednomian, alboteż przez wielomian jednorodny, to wszystkie wyrazy iloczynu będą jednakowego stopnia, a więc *iloczyn wielomianu jednorodnego przez jednomian, albo przez wielomian jednorodny, jest także wielomianem jednorodnym.*

77. Czasem zdarzyć się może, iż, kiedy, wyłączywszy z kilku wyrazów danego wielomianu spólny czynnik poza nawias (art. 72), to samo robimy z kilku innemi wyrazami tego wielomianu, otrzymujemy znów to samo wyrażenie w nawiasie; w takim razie ów wielomian w nawiasie możemy znów uważać za spólny czynnik i taksamo wyłączyć go poza nawias. Np.

$$
\begin{aligned}
7a^6b^2 + 2a^5b^3 + 6a^4b^4 - 6a^3b^5 - 18a^2b^6 + 4ab^7 + 12b^8 &= \\
= 7a^6b^2 + a^4(2ab^3 + 6b^4) - 3a^2b^2(2ab^3 + 6b^4) + 2b^4(2ab^3 + 6b^4) &= \\
= 7a^6b^2 + (2ab^3 + 6b^4)(a^4 - 3a^2b^2 + 2b^4). &
\end{aligned}
$$

78. Uskuteczniwszy mnożenie $(a + b)(a - b)$, otrzymamy, po wykonaniu redukcyi wyrazów podobnych,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

t. j. *iloczyn sumy dwu wyrazów przez ich różnicę jest równy różnicy kwadratów tychże wyrazów*. Tak np. (art. 70)

$$(-3a^4b^5c+4a^3b^2c^5)(-3a^4b^5c-4a^3b^2c^5)=9a^8b^{10}c^2-16a^6b^4c^{10}.$$

79. Według art. 47-go $(a+b)(a+b)=(a+b)^2$. Iloczyn $(a+b)(a+b)$ jest $a^2+2ab+b^2$; przeto

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

t. j. *kwadrat dwumianu jest sumą algebraiczną kwadratu wyrazu pierwszego, podwojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez drugi i kwadratu wyrazu drugiego*. Np.

$$(-3a^3b^2+4a^2b^3)^2=9a^6b^4-24a^5b^5+16a^4b^6.$$

DZIELENIE JEDNOMIANÓW.

80. Przy dodatnych i całkowitych m i n, oraz przy warunku $m>n$, podzielmy a^m przez a^n. Ponieważ dzielna a^m jest iloczynem (art. 34) dzielnika a^n i ilorazu, a z uwagi, że $n+(m-n)=m$, jest $a^n\times a^{m-n}=a^m$, czyli dzielna a^m jest iloczynem dzielnika a^n i liczby a^{m-n}, przeto ilorazem jest tu a^{m-n}. Jest zatem

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

A więc *iloraz potęg tej samej podstawy, kiedy jej wykładnik w dzielnej jest większy od wykładnika w dzielniku, jest potęgą tejże podstawy o wykładniku, równym różnicy między jej wykładnikami w dzielnej i w dzielniku.*

81. Zastrzegliśmy powyżej, że wykładnik podstawy a w dzielnej jest większy od jej wykładnika w dzielniku, $m>n$. Zdarzyć się jednak może, że mamy a^m podzielić przez tę samę, lub wyższą potęgę podstawy a.

Jeżeli $m=n$, to, od wykładnika w dzielnej odejmując wykładnik w dzielniku, otrzymujemy w ilorazie, jako wykładnik litery a, liczbę $m-m=0$, tak iż wtedy mieć będziemy

$$\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0.$$

Lecz tu dzielna równa się dzielnikowi, a więc iloraz przedstawia liczbę $+1$; jest więc $a^0=1$, t. j. *potęga zero jakiejkolwiek liczby przedstawia liczbę* 1. Tak np. $a^3:a^3=a^0=1$.

Jeżeli $m<n$, to, dzieląc dzielną i dzielnik przez tę samę liczbę a^m, z uwagi, że $a^m:a^m=1$, zaś $a^n:a^m=a^{n-m}$, mamy (art. 36)

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}},$$

t. j. *iloraz z podzielenia pewnej potęgi podstawy przez wyższą jej potęgę jest ułamkiem, którego licznikiem jest* 1, *a mianownikiem potęga tej litery o wykładniku, równym różnicy między wykładnikiem tej litery w dzielniku a jej wykładnikiem w dzielnej*. Tak np. $a^3:a^7=\frac{1}{a^{7-3}}=\frac{1}{a^4}$.

Potęga 0 może być wprowadzona w wyrażenia algebraiczne jako przedstawienie (czyli symbol) czynnika 1. Tak np. możemy powiedzieć, że w każdym wyrazie wielomianu jednorodnego $4a^3 - 3a^2b + 4a^2c - 2ab^2 + 7abc$ znajdują się wszystkie trzy litery a, b, c, gdyż możemy go tak napisać:

$$4a^3b^0c^0 - 3a^2bc^0 + 4a^2b^0c - 2ab^2c^0 + 7abc.$$

82. Gdy mamy jednomian podzielić przez jednomian, to (art. 34) iloraz może być jednomianem (art. 69).

Gdy mamy np. $(\frac{8}{15}a^5b^{3m+2}c^4d) : (-\frac{2}{3}a^2b^{m+}c^4)$, to w ilorazie wypadnie (art. 34) wziąć znak — (art. 43); za spółczynnik taką liczbę, któraby pomnożona przez $\frac{2}{3}$ dała $\frac{8}{15}$, a więc liczbę $\frac{8}{15}:\frac{2}{3} = \frac{4}{5}$; potęga podstawy a ma być w ilorazie taka, iżby jej iloczyn przez a^2 był równy a^5, a więc (art. 80) a^{5-2}; podobnież będzie w ilorazie $b^{3m+2-(m+1)}$ i $c^4 : c^4 = c^0 = 1$; ponieważ w dzielniku niema wypisanej potęgi podstawy d, więc przyjmiemy, że w dzielniku jest czynnik $d^0 = 1$, tak iż w ilorazie będzie $d^{1-0} = d$. Jest więc

$$\frac{\frac{8}{15}a^5b^{3m+2}c^4d}{-\frac{2}{3}a^2b^{m+1}c^4} = -\frac{4}{5}a^{5-2}b^{3m+2-(m+1)}c^{4-4}d^{1-0} = -\frac{4}{5}a^3b^{2m+1}d.$$

A zatem, *gdy mamy podzielić jednomian przez jednomian, to w razie, kiedy wykładniki podstaw w dzielniku nie są większe od wykładników tychże podstaw w dzielnej, otrzymujemy jako iloraz jednomian. Ma on znak +, jeżeli dane jednomiany są jednakowego znaku, zaś znak —, jeżeli one są różnego znaku; spółczynnik jego jest ilorazem z podzielenia spółczynnika dzielnej przez spółczynnik dzielnika, a każda z podstaw ma w nim wykładnik, równy różnicy między jej wykładnikami w dzielnej i w dzielniku.* —

Weźmy teraz na uwagę dzielenie jednomianów w przypadku, kiedy w dzielniku jest potęga podstawy wyższa niż w dzielnej. Gdy mamy np. $(4a^5b^4ce^mf^2) : (-5a^2bc^4d^3e^{3m+r})$, to, dzieląc tak dzielną jak i dzielnik przez tę samę liczbę (art. 36), mianowicie przez iloczyn niższych potęg liter, bez względu na to, czy one są w dzielniku, czyteż w dzielnej, t. j. przez a^2bce^m, mieć będziemy:

$$\frac{4a^5b^4ce^mf^2}{-5a^2bc^4d^3e^{3m+r}} = \frac{4a^5b^4cd^0e^mf^2}{-5a^2bc^4d^3e^{3m+r}f^0} = -\frac{4a^{5-2}b^{4-1}f^{2-0}}{5c^{4-1}d^{3-0}e^{(3m+r)-m}} =$$
$$= -\frac{4a^3b^3f^2}{5c^3d^3e^{2m+r}}.$$

W tem ostatniem wyrażeniu są w dzielniku litery, których niema w dzielnej, a więc otrzymany iloraz nie jest jednomianem (art. 51), lecz jest wyrażeniem ułamkowem (art. 50).

A zatem, *gdy w jednomianie dzielnika znajduje się wykładnik podstawy większy, niż jej wykładnik w jednomianie dzielnej, to iloraz jest ułamkiem o znaku + lub —, stosownie do tego, czy dane jednomiany są jednakowego, czyteż różnego znaku; w liczniku jego są te podstawy, których potęgi w dzielnej były większe, w mianowniku zaś te, których potęgi w dzielniku były większe, a wykładnik każdej z tych podstaw otrzymujemy, od większego odejmując mniejszy.* —

Kiedy, dzieląc jednomian przez jednomian, nie otrzymujemy w ilorazie jednomianu, to mówimy, że jednomian dzielnej jest niepodzielny przez jednomian dzielnika. —

Jeżeli z podzielenia jednomianu przez jednomian otrzymujemy jednomian, to stopień jednomianu ilorazu jest różnicą między stopniami jednomianów dzielnej i dzielnika.

DZIELENIE WIELOMIANÓW.

83. Gdy mamy wielomian podzielić przez jednomian, to wyrażenie, które otrzymamy w ilorazie, może być wielomianem (art. 71). W takim razie iloczyny wyrazów owego wielomianu przez dzielnik są wyrazami dzielnej. Aby więc w ilorazie wypadł wielomian, potrzeba, iżby każdy wyraz wielomianu dzielnej był podzielny przez jednomian dzielnika. Tak np.

$$\frac{6a^4b^3c^2-10a^4b^2c^3+12a^3b^5c}{-8a^2b^2}=-\frac{6a^4b^3c^2}{8a^2b^2}+\frac{10a^4b^2c^3}{8a^2b^2}-\frac{12a^3b^5c}{8a^2b^2}=$$
$$=-\tfrac{3}{4}a^2bc^2+1\tfrac{1}{4}a^2c^3-1\tfrac{1}{2}ab^3c.$$

Gdy dzielimy wielomian przez jednomian, to w przypadku, kiedy w dzielniku niema potęgi podstawy wyższej od jej potęg w wyrazach wielomianu dzielnej, otrzymujemy w ilorazie wielomian o tyluż wyrazach, co wielomian dzielnej, a jego wyrazy powstają z podzielenia każdego wyrazu dzielnej przez jednomian dzielnika. Stopień wielomianu ilorazu jest różnicą między stopniem wielomianu dzielnej a stopniem jednomianu dzielnika. —

Jeżeli w jednomianie dzielnika znajduje się potęga podstawy wyższa, niż potęga tejże podstawy w którymkolwiek wyrazie wielomianu dzielnej, to z dzielenia tego wyrazu dzielnej przez dzielnik, otrzymamy ułamek (art. 82), a temsamem iloraz będzie wyrażeniem ułamkowem (art. 50); np.

$$\frac{-10a^4b^5c^7+6a^4b^3c^2+12a^3b^5c+16a^3b^4c^2}{-8a^2b^5c^5}=1\tfrac{1}{4}a^2c^2-\frac{3a^2}{4b^2c^3}-\frac{3a}{2c^4}-\frac{2a}{bc^3}.$$

W tym przykładzie możemy iloraz prościej przedstawić, nie uskuteczniając oddzielnych dzieleń każdego z trzech ostatnich wyrazów dzielnej przez jednomian dzielnika, lecz ograniczając się do podzielenia sumy owych wyrazów i jednomianu dzielnika przez spólny czynnik $2a^2b^3c$,

$$\frac{-10a^4b^5c^7+6a^4b^3c^2+12a^3b^5c+16a^3b^4c^2}{-8a^2b^5c^5}=1\tfrac{1}{4}a^2c^2-\frac{3a^2c+6ab^2+8abc}{4b^2c^4}.$$

Gdy dzielimy wielomian przez jednomian, a w tym jednomianie jest potęga podstawy wyższa od jej potęgi w którymkolwiek z wyrazów wielomianu dzielnej, to iloraz jest wyrażeniem ułamkowem i wielomian dzielnej jest niepodzielny przez jednomian dzielnika.

84. Gdy mamy jednomian podzielić przez wielomian, to iloraz nie może być jednomianem, gdyż po pomnożeniu jednomianu ilorazu przez wielomian dzielnika otrzymalibyśmy wielomian (art. 71); nie może on także być wielomianem, gdyż mnożąc go przez wielomian dzielnika, otrzymalibyśmy wielomian, który nie mógłby mieć mniej niż dwa wyrazy (art. 75). Jest więc wyrażeniem ułamkowem.

Z tego wynika, że *jednomian jest niepodzielny przez wielomian.*

85. Podzielmy wielomian $4\frac{1}{2}a^5b^{15}-5a^4b^{13}-5a^3b^{12}-22a^2b^{11}+30ab^{10}$ przez wielomian $9a^3b^9-6a^2b^8+12ab^7-30b^6$. Oba te wielomiany są uporządkowane według malejących potęg litery a.

Przypuśćmy, iż w ilorazie otrzymamy wielomian i że on będzie także uporządkowany według malejących potęg litery a. Z pomnożenia pierwszego wyrazu ilorazu przez pierwszy wyraz dzielnika otrzymamy pierwszy wyraz dzielnej, do którego niema wyrazu podobnego pośród innych wyrazów, otrzymanych z pomnożenia ilorazu przez dzielnik (art. 75). Z tej własności możemy skorzystać dla wyznaczenia pierwszego wyrazu ilorazu. Dzieląc mianowicie pierwszy wyraz dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika, otrzymamy jednomian, o którym napewno wiemy, iż będzie on pierwszym wyrazem ilorazu, uporządkowanego według malejących potęg litery a. Dzieląc więc $+\frac{9}{2}a^6b^{15}$ przez $+9a^3b^9$, otrzymamy $+\frac{1}{2}a^3b^6$, pierwszy wyraz ilorazu.

Chcąc wyraz drugi ilorazu otrzymać w sposób również prosty, zważmy, że dzielna jest sumą algebraiczną iloczynów wszystkich wyrazów dzielnika przez wszystkie wyrazy ilorazu, którego pierwszy wyraz jest już wiadomy. Jeżeli przez ten wyraz pomnożymy dzielnik i ten iloczyn odejmiemy od dzielnej,

$$\begin{array}{r}
\frac{9}{2}a^6b^{15} \qquad\qquad -5a^4b^{13}-5a^3b^{12}-22a^2b^{11}+30ab^{10}\\
\pm\frac{9}{2}a^6b^{15}\mp3a^5b^{14}\pm6a^4b^{13}\mp15a^3b^{12} \qquad\qquad\qquad\qquad\\
\hline
+3a^5b^{14}-11a^4b^{13}+10a^3b^{12}-22a^2b^{11}+30ab^{10},
\end{array}$$

to otrzymany w reszcie wielomian jest iloczynem dzielnika przez drugi i dalsze wyrazy ilorazu. Ta reszta jest uporządkowana również według malejących potęg litery a; pierwszy więc jej wyraz jest iloczynem pierwszego wyrazu dzielnika przez pierwszy z pozostałych (a więc właściwie przez drugi) wyraz ilorazu. Znajdziemy zatem ów drugi wyraz ilorazu, dzieląc pierwszy wyraz tej reszty przez pierwszy wyraz dzielnika; $(+3a^5b^{14}):(9a^3b^9)=+\frac{1}{3}a^2b^5$, drugiemu wyrazowi uporządkowanego ilorazu.

Aby w sposób podobnie prosty wyznaczyć trzeci wyraz ilorazu, pomnożymy dzielnik przez znaleziony drugi wyraz ilorazu i t. d. Otrzymawszy nakoniec jako resztę 0, wnosimy, iż dzielna jest iloczynem dzielnika przez trójmian $\frac{1}{2}a^3b^6+\frac{1}{3}a^2b^5-ab^4$; jest więc ten trójmian szukanym ilorazem.

Wykonywając takie dzielenie wielomianów, najczęściej wypisujemy je w ten sposób:

$$\begin{array}{l|l}
\frac{9}{2}a^6b^{15} \qquad\qquad -5a^4b^{13}-5a^3b^{12}-22a^2b^{11}+30ab^{10} & 9a^3b^9-6a^2b^8+12ab^7-30b^6\\
\cline{2-2}
\pm\frac{9}{2}a^6b^{15}\mp3a^5b^{14}\pm6a^4b^{13}\mp15a^3b^{12} & \frac{1}{2}a^3b^6+\frac{1}{3}a^2b^5-ab^4\\
\cline{1-1}
\qquad 3a^5b^{14}-11a^4b^{13}+10a^3b^{12}-22a^2b^{11} & \\
\qquad \pm3a^5b^{14}\mp2a^4b^{13}\pm4a^3b^{12}\mp10a^2b^{11} & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad -9a^4b^{13}+6a^3b^{12}-12a^2b^{11}+30ab^{10} & \\
\qquad\qquad \mp9a^4b^{13}\pm6a^3b^{12}\mp12a^2b^{11}\pm30ab^{10} & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0. &
\end{array}$$

Zwykle w każdej reszcie wypisujemy, jak powyżej, z wyrazów dzielnej tylko podobne do wyrazów wielomianu, który od tej reszty odjąć wypada.

Mieliśmy tu dzielną i dzielnik uporządkowane według malejących potęg litery a; mogliśmy jednak mieć je uporządkowane według rosnących potęg litery a, a wtedy iloraz wypadłby uporządkowany również według rosnących potęg a.

Powiemy więc ogólnie o przypadku, kiedy ilorazem z podzielenia wielomianu przez wielomian jest wyrażenie całkowite, iż, *aby wielomian podzielić* *przez wielomian, należy, uporządkowawszy je oba według tej samej zasady, podzielić pierwszy wyraz dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika; przez tak otrzymany jednomian, który jest pierwszym wyrazem ilorazu, pomnożyć wielomian dzielnika, a otrzymany iloczyn odjąć od dzielnej; resztę z tego odejmowania uporządkować według zasady tej samej, co dane wielomiany, i pierwszy jej wyraz podzielić przez pierwszy wyraz dzielnika; tak otrzymany jednomian będzie drugim wyrazem ilorazu; przezeń trzeba pomnożyć wielomian dzielnika, a iloczyn odjąć od poprzedniej reszty, i t. d.*

Stopień wielomianu ilorazu jest równy różnicy między stopniem wielomianów dzielnej i dzielnika (art. 76). Jeżeli wielomian dzielnej i wielomian dzielnika są jednorodne, to iloraz jest także wielomianem jednorodnym (art. 76).

Zauważmy, iż w powyższym przykładzie dzielenie uskutecznić mogliśmy tylko dzięki temu, że wielomiany dzielnej i dzielnika uporządkowaliśmy według tej samej zasady, jakoteż, że po każdem odejmowaniu porządkowaliśmy otrzymaną resztę według tej samej zasady, co tamte wielomiany. Gdybyśmy zaś chcieli wykonać dzielenie na nieuporządkowanych wielomianach, to naprzód nie wiedzielibyśmy, z pomnożenia którego wyrazu dzielnika przez który wyraz ilorazu mógł powstać pewien wyraz dzielnej; powtóre, nie wiedzielibyśmy, czy ów wyraz dzielnej przedstawia iloczyn jednego tylko wyrazu dzielnika przez jeden ilorazu, czyteż powstał z redukcyi kilku takich częściowych iloczynów, i t. d.

Jeżeli iloraz dwu wielomianów jest, ogólnie mówiąc, wyrażeniem całkowitem, to mówimy, iż dzielenie może być wykonane bez reszty, albo że dzielna jest podzielna przez dzielnik.

W przeciwnym razie mówimy, że wielomian dzielnej jest niepodzielny przez wielomian dzielnika.

86. Gdy w dzielnej jest potęga podstawy niższa, niż w dzielniku, np.

$$(4a^4b^3 - 6a^2b^2 + 8b^5) : (2a^3b^3 + a^2b^4 - b^5),$$

to w iloczynie wyrażenia całkowitego przez ten dzielnik nie byłoby wyrazu, zawierającego b^2; jest zaś taki wyraz w dzielnej. A więc, jeżeli w wielomianie dzielnej jest potęga podstawy niższa, niż w wielomianie dzielnika, to pierwszy wielomian jest niepodzielny przez drugi, a iloraz jest wyrażeniem ułamkowem.

87. Jeżeli, po uporządkowaniu wielomianów dzielnej i dzielnika według tej samej zasady, okaże się, że czyto pierwszy wyraz dzielnej jest niepodzielny przez pierwszy wyraz dzielnika, czyteż ostatni wyraz dzielnej jest niepodzielny przez ostatni wyraz dzielnika, to wielomian dzielnej jest niepodzielny przez wielomian dzielnika, co wynika wprost z art. 85-go, i iloraz jest wyrażeniem ułamkowem. Np. wielomian $4a^3b^2 - 6a^2b^3 - 8ab^4 + 9b^5$ nie jest podzielny ani przez dwumian $2ab^3 + 3b^4$, ani przez dwumian $2a^2b - 3ab^2$.

88. Przypuśćmy, że mamy wykonać dzielenie dwu wielomianów

$$(4a^7b - 12a^5b^2 + 19a^5b^3 - 16a^4b^4) : (2a^6 - 3a^5b + 4a^4b^2),$$

uporządkowanych według malejących potęg litery a. W dzielniku nie zachodzi potęga podstawy wyższa od jej potęgi w dzielnej; pierwszy wyraz dzielnej jest podzielny przez pierwszy wyraz dzielnika, a ostatni dzielnej przez ostatni dzielnika. Gdyby tu iloraz był wielomianem, to jego ostatni wyraz zawierałby $a^{4-4}\,b^{4-2} = b^2$. Po otrzymaniu w ilorazie wyrazu, zawierającego b^2, i po odjęciu iloczynu tego wyrazu przez dzielnik,

$$\begin{array}{l|l} 4a^7b-12a^6b^2+19a^5b^3-16a^4b^4 & 2a^6-3a^5b+4a^4b^2 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots & 2ab-3b^2 \\ \hline 2a^5b^3-4a^4b^4, & \end{array}$$

mamy jeszcze resztę różną od zera. Jest więc pierwszy z danych wielomianów niepodzielny przez drugi, a iloraz jest wyrażeniem ułamkowem

$$2ab-3b^2+\frac{2a^5b^3-4a^4b^4}{2a^6-3a^5b+4a^4b^2}.$$

89. Wykonajmy dzielenie

$$\begin{array}{l|l} 8a^5b-24a^4b^2+38a^3b^3-32a^2b^4 & 2a^2-3ab+4b^2 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots & 4a^3b-6a^2b^2 \\ \hline 4a^3b^3-8a^2b^4. & \end{array}$$

Widzimy, że wielomian dzielnej jest niepodzielny przez wielomian dzielnika, a iloraz jest wyrażeniem ułamkowem

$$4a^3b-6a^2b^2+\frac{4a^3b^3-8a^2b^4}{2a^2-3ab+4b^2}.$$

Możemy tu jednak dzielenie dalej prowadzić, gdyż pierwszy wyraz reszty jest podzielny przez pierwszy wyraz dzielnika,

$$\begin{array}{l|l} 4a^3b^3-8a^2b^4 & 2a^2-3ab+4b^2 \\ \hline \ldots\ldots & 2ab^3-b^4 \\ \hline -11ab^5+4b^6. & \end{array}$$

Dalej już dzielenia prowadzić nie można, gdyż pierwszy wyraz ostatniej reszty jest niepodzielny przez pierwszy wyraz dzielnika. Iloraz więc możemy także tak przedstawić:

$$4a^3b-6a^2b^2+2ab^3-b^4-\frac{11ab^5-4b^6}{2a^2-3ab+4b^2}.$$

Podobnie, jeżeli mamy podzielić jednomian przez wielomian (art. 84), możemy niekiedy wykonywać dzielenie; np.

$$\frac{a^5}{a^2+a+1}=a^3-a^2+1-\frac{a+1}{a^2+a+1}.$$

ROZDZIAŁ DRUGI.

NAJWIĘKSZY SPÓLNY DZIELNIK I NAJMNIEJSZA SPÓLNA WIELOKROTNOŚĆ.

NAJWIĘKSZY SPÓLNY DZIELNIK I NAJMNIEJSZA SPÓLNA WIELOKROTNOŚĆ LICZB.

90. Będziemy rozważali niektóre własności liczb całkowitych i dodatnych; takie tylko liczby będziemy rozumieli przez wprowadzane tu litery.

Gdy $a=bm$, to mówimy, że liczba a jest wielokrotnością liczby b (Multiplum, Vielfaches), albo że liczba b jest dzielnikiem liczby a (Theiler, Divisor, Mass), alboteż że liczba a jest podzielna przez liczbę b.

Jeżeli liczba a jest taka, iż ją w jedyny tylko sposób można przedstawić jako iloczyn dwu liczb (całkowitych), mianowicie $a=a.1$, to nazywamy ją liczbą pierwszą (Primzahl). A więc liczba pierwsza jestto liczba podzielna tylko przez 1 i przez samę siebie. Liczbę zaś a taką, iż $a=bm$, gdzie b i m mogą być jednocześnie liczbami większemi od 1, nazywamy liczbą złożoną (zusammengesetzte Zahl). A więc liczba złożona jestto liczba podzielna przez liczbę większą od jedności a mniejszą od niej samej.

91. *Jeżeli liczba a jest wielokrotnością liczby b, zaś liczba b jest wielokrotnością liczby c, to także liczba a jest wielokrotnością liczby c;* albowiem, jeżeli $a = bm$, zaś $b = cn$, to $a = (c.n).m = c.(n.m)$, gdzie iloczyn $n.m$ jest liczbą całkowitą. Tę własność moglibyśmy tak wypowiedzieć: *dzielnik pewnej liczby jest także dzielnikiem wielokrotności tej liczby.*

92. Liczba, przez którą jest podzielna każda z liczb danych, nazywa się spólnym dzielnikiem liczb danych.

Największą ze wszystkich liczb, przez które jest podzielna jednocześnie każda z liczb danych, nazywamy największym spólnym dzielnikiem liczb danych (der grösste gemeinschaftliche Th.). Dla krótkości pisać będziemy: nsd.

Jeżeli dwie liczby mają tylko spólny dzielnik jedność, to nazywamy je dwiema liczbami pierwszemi względem siebie (zwei relative Primzahlen). Gdy mamy więcej niż dwie liczby, to może się zdarzyć, iż każde dwie z nich są pierwsze względem siebie, ale nie może być mowy o trzech lub więcej liczbach pierwszych względem siebie.

93. Przedstawienie liczby złożonej zapomocą iloczynu samych tylko liczb pierwszych nazywamy rozkładem liczby na czynniki pierwsze (Zerlegung in Primfactoren). Jeżeli np. w rozkładzie liczby a na czynniki pierwsze mamy p czynników równych liczbie f, q równych liczbie g i r równych liczbie h, to $a = f^p g^q h^r$.

Jeżeli

$$3150 = 2.3^2.5^2.7, \quad 18000 = 2^4.3^2.5^3, \quad 4950 = 2.3^2.5^2.11,$$

to, zważywszy, że spólne dzielniki liczb są albo oddzielnemi czynnikami, znajdującemi się jednocześnie we wszystkich ich rozkładach, alboteż iloczynami takich czynników, widzimy, że nsd-em liczb danych jest $2.3^2.5^2 = 450$. Podobnie nsd-em liczb

$$a = f^3 g^4 h^2 k, \quad b = f^4 g^5 h^2 i^3 k^2, \quad c = f^4 g^7 h^3 i^2 k^3,$$

gdzie f, g, h, i, k są liczbami pierwszemi, jest $f^3.g^4.h^2.k$. A zatem, *aby znaleźć największy spólny dzielnik kilku liczb, można, rozłożywszy je na czynniki pierwsze, wziąć iloczyn oddzielnych czynników, spólnych wszystkim rozkładom, biorąc każdy z wykładnikiem najmniejszym z tych, które on ma w tych rozkładach.*

Zauważmy, że *największy spólny dzielnik kilku liczb jest wielokrotnością każdego spólnego dzielnika tych liczb.*

94. Jeżeli dwie liczby a i b mają nsd. δ i jest $a = \delta m$, $b = \delta n$, to, gdyby liczby m i n nie były pierwsze względem siebie, miałyby spólny dzielnik większy od jedności, np. f, tak iż byłoby $m = fp$, $n = fq$, zaś $a = \delta fp$, $b = \delta fq$. Liczby więc a i b miałyby spólny dzielnik δf, większy od ich nsd-a δ, co być nie może. Przeto *ilorazy z podzielenia każdej z dwu liczb przez ich największy spólny dzielnik są liczbami pierwszemi względem siebie.*

Nawzajem, *jeżeli ilorazy z podzielenia każdej z dwu liczb przez ich spólny dzielnik są liczbami pierwszemi względem siebie, to ten dzielnik jest najwięk-*

szym spólnym dzielnikiem owych dwu liczb. Inaczej bowiem te ilorazy niebyłyby liczbami pierwszemi względem siebie.

95. Jeżeli liczba a jest pierwsza względem każdej z liczb b i c, to pośród czynników pierwszych, na które się rozkłada iloczyn bc, niema czynnika rozkładu liczby a, tak iż liczba a jest pierwsza względem iloczynu bc. Podobnie można dowieść, że liczba a, pierwsza względem każdej z liczb b, c, d, jest pierwsza względem iloczynu bcd, i t. d. A zatem *liczba pierwsza względem każdej z kilku liczb danych jest także pierwsza względem iloczynu tychże liczb.*

96. Spólną wielokrotnością liczb danych nazywamy liczbę podzielną przez każdą z liczb danych. Każda więc z liczb danych jest dzielnikiem ich spólnej wielokrotności.

Najmniejszą spólną wielokrotnością liczb danych nazywamy najmniejszą z liczb, podzielnych jednocześnie przez każdą z liczb danych. Dla krótkości będziemy pisali nsw.

Jeżeli

$$7056 = 2^4.3^2.7^2,\quad 1620 = 2^2.3^4.5,\quad 119070 = 2.3^5.5.7^2,$$

to, ponieważ każda z liczb danych ma być dzielnikiem szukanej nsw-i, wszystkie czynniki pierwsze każdej z liczb danych znajdować się będą w rozkładzie liczby szukanej na czynniki pierwsze. W nim przeto czynników 2 będzie cztery, pięć czynników 3, czynnik 5 i dwa czynniki 7. Z czynników tak powstałego iloczynu $2^4.3^5.5.7^2 = 952560$ można utworzyć każdą z liczb danych, a więc on przedstawia spólną wielokrotność liczb danych. Przedstawia on mianowicie nsw. liczb danych, gdyż opuszczenie w nim choćby jednego któregokolwiek czynnika nie dozwoliłoby na utworzenie z pozostałych czynników jednej lub więcej z liczb danych. Podobnie nsw-ą liczb

$$a = f^3 g^4 h^2 k,\quad b = f^4 g^5 h^2 i^3,\quad c = f^4 g^7 h^3 i^2 k^3,$$

gdzie f, g, h, i, k są liczbami pierwszemi, jest liczba $f^4 g^7 h^3 i^3 k^3$. A więc, *aby znaleźć najmniejszą spólną wielokrotność kilku liczb, można, rozłożywszy je na czynniki pierwsze, wziąć iloczyn oddzielnych czynników, wchodzących do owych rozkładów, biorąc każdy z nich z wykładnikiem największym z tych, które ów czynnik ma w tych rozkładach.*

Najmniejsza spólna wielokrotność dwu liczb pierwszych względem siebie jest iloczynem tych liczb.

Najmniejsza spólna wielokrotność trzech lub więcej liczb, z których każde dwie są liczbami pierwszemi względem siebie, jest iloczynem tychże liczb.

97. Niech dwie liczby a i b mają spólny dzielnik d, t. j. niech $a = d.m$, $b = d.n$, i przypuśćmy, że $a > b$. Ponieważ

$$a + b = dm + dn = d(m + n),\qquad a - b = dm - dn = d(m - n)$$

(gdzie liczby $m + n$ i $m - n$ są całkowite), przeto *spólny dzielnik dwu liczb jest dzielnikiem tak ich sumy, jak ich różnicy.*

98. Przy poszukiwaniu nsd-a dwu liczb a i b — niech np. $a > b$ — mogą zdarzyć się dwa przypadki: albo a jest podzielne przez b, alboteż a jest niepodzielne przez b.

W pierwszym przypadku $a = bm$. Wówczas liczba b, będąca dzielnikiem liczby a, jest zarazem największym dzielnikiem tejże liczby b, a więc nsd-em liczb a i b. Przeto *największym spólnym dzielnikiem dwu liczb w przypadku, kiedy większa z nich jest podzielna przez mniejszą, jest taż mniejsza liczba.*

W przypadku, kiedy a jest niepodzielne przez b, dzielmy a przez b; niech b w a mieści się f razy i niech pozostaje reszta r (mniejsza od b), tak iż

$$a = bf + r, \quad \text{skąd} \quad a - bf = r.$$

Każdy dzielnik liczby b jest dzielnikiem jej wielokrotności bf (art. 91), wskutek czego każdy spólny dzielnik liczb a i b jest jednocześnie spólnym dzielnikiem liczb a i bf. Każdy zaś spólny dzielnik liczb a i b, jako spólny dzielnik liczb a i bf, jest dzielnikiem liczby $a - bf = r$ (art. 97), a więc, jako dzielnik tak liczby b, jak i liczby r, jest spólnym dzielnikiem liczb b i r. — Nawzajem, każdy spólny dzielnik liczb b i r, jako spólny dzielnik liczb bf i r, jest dzielnikiem liczby $bf + r = a$ (art. 97), a więc, jako dzielnik tak liczby a, jak i liczby b, jest spólnym dzielnikiem liczb a i b. — Skoro każdy spólny dzielnik liczb a i b jest spólnym dzielnikiem liczb b i r i, nawzajem, każdy spólny dzielnik liczb b i r jest spólnym dzielnikiem liczb a i b, to wszystkie spólne dzielniki liczb a i b są teżsame, co liczb b i r, wskutek czego nsd. liczb a i b jest jednocześnie nsd-em liczb b i r i, nawzajem, nsd. liczb b i r jest jednocześnie nsd-em liczb a i b. A więc *największy spólny dzielnik dwu liczb jest jednocześnie największym spólnym dzielnikiem mniejszej z nich i reszty z podzielenia większej z nich przez mniejszą; jakoteż nawzajem.*

99. W przypadku zatem, kiedy a jest niepodzielne przez b, poszukiwanie nsd-a liczb a i b, który nazwijmy δ, sprowadza się do poszukiwania nsd-a liczb b i r. A ponieważ jest $r < b < a$, przeto pierwotne zadanie zastępuje się przez zadanie prostsze (gdyż odnoszące się do liczb mniejszych).

Może się zdarzyć, że liczba b jest podzielna przez r; w takim razie liczba r byłaby nsd-em liczb b i r, a temsamem nsd-em liczb a i b, czyli byłoby $\delta = r$.

Jeżeli b nie jest podzielne przez r, to niech $b = rg + s$, gdzie $s < r$. I znowu poszukiwanie nsd-a liczb b i r zastąpić można przez poszukiwanie nsd-a liczb r i s. I t. d.

Takie kolejne sprowadzanie poszukiwania nsd-a dwu liczb do poszukiwania nsd-a dwu liczb mniejszych może mieć miejsce tylko ograniczoną ilość razy, gdyż liczby całkowite $a, b, r, s, \ldots$ są coraz mniejsze, a więc w tym ciągu liczb będzie liczba ostatnia. Niech tą ostatnią liczbą będzie w, przedostatnią v, a poprzedzającą u, tak iż niech $u = vk + w$. Ponieważ zaś, dzieląc v przez w, nie otrzymujemy już reszty, więc v jest podzielne przez w i niech $v = wl$. Zestawmy razem wszystkie te dzielenia:

$$\begin{aligned} a &= b\,.f + r, \\ b &= r\,.g + s, \\ r &= s\,.h + t, \\ &\ldots\ldots, \\ u &= v\,.k + w, \\ v &= w\,.l. \end{aligned}$$

Np.

$$\begin{array}{r|l} 630 & 135 \\ \hline 540 & 4 \\ 135 & 90 \\ \hline 90 & 1 \\ 90 & 45 \text{ nsd.} \\ \hline 90 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 630 &= 135\,.\,4 + 90, \\ 135 &= 90\,.\,1 + 45, \\ 90 &= 45\,.\,2. \end{aligned}$$

Ponieważ w jest dzielnikiem liczby v, przeto w jest nsd-em liczb v i w. Jako zaś nsd. liczb v i w jest w, jak to wynika z przedostatniej równości, nsd-em liczb u i v. Taksamo rozumując kolejno przy pomocy każdej z poprzedzających równości, dochodzimy do tego, że liczba w jest nsd-em liczb a i b, tak iż $\delta = w$.

Jeżeli $w = 1$, to liczby a i b są pierwsze względem siebie.

Taki sposób poszukiwania nsd-a dwu liczb często nazywają sposobem poszukiwania nsd-a dwu liczb zapomocą kolejnego dzielenia.

Prawidło poszukiwania nsd-a dwu liczb zapomocą kolejnego dzielenia możemy tak wypowiedzieć: *aby znaleźć największy spólny dzielnik dwu liczb danych, dzielimy liczbę większą przez mniejszą; jeżeli z tego dzielenia zostaje resztą, dzielimy liczbę mniejszą przez tę resztę; jeżeliby znowu została reszta, podobnie przez nią dzielić będziemy resztę z poprzedniego dzielenia; i dalej tak postępujemy wciąż, dopóki nie dojdziemy do dzielenia, z którego już nie otrzymamy reszty; liczba, która jest dzielnikiem w ostatniem dzieleniu, jest największym spólnym dzielnikiem liczb danych.*

100. Gdy mamy znaleźć nsd. trzech liczb: a, b, c — nazwijmy go δ— to znajdźmy naprzód zapomocą kolejnego dzielenia nsd. dwu liczb np. a i b, i nazwijmy go β. Nsd. liczb a, b i c, jako spólny dzielnik liczb a i b, może być albo liczbą β, albotéż dzielnikiem liczby β (art. 93). A więc nsd. liczb a, b i c jest jednocześnie nsd-em liczb β i c. Możemy znowu zapomocą kolejnego dzielenia znaleźć nsd. liczb β i c, który będzie szukaną liczbą δ.

Podobnie moglibyśmy postępować przy poszukiwaniu nsd-a czterech lub więcej liczb.

101. Możemy także ze sposobu odnajdywania nsd-a dwu liczb zapomocą kolejnego dzielenia skorzystać w celu znalezienia nsw-i dwu lub więcej liczb.

Jeżeli mamy dwie liczby dane a i b, a ich nsd. jest δ, tak iż $a = \delta m$, $b = \delta n$, to, jak wiemy (art. 94), liczby m i n są pierwsze względem siebie. Ponieważ liczby a i b są dzielnikami szukanej nsw-i, przeto ona jest iloczynem $\delta . m . n$, gdyż ten iloczyn jest najmniejszą liczbą, podzielną jednocześnie przez $a = \delta m$ i $b = \delta n$. A więc *najmniejsza spólna wielokrotność dwu liczb jest iloczynem ich największego spólnego dzielnika przez ilorazy, otrzymane z podzielenia każdej z tych dwu liczb przez tenże dzielnik.*

W podobny sposób możemy znaleźć nsw. trzech liczb a, b i c. Gdy nsd. liczb a i b jest β i $a = \beta m$, $b = \beta n$, to $\beta mn = v$ jest nsw-ą liczb a i b. Podobnie, gdy nsd. liczb v i c jest γ i gdy $v = \gamma p$, $c = \gamma q$, jest $\gamma pq = w$ nsw-ą liczb v i c, która jednocześnie jest nsw-ą liczb a, b i c. — I t. d.

102. Nsd. dwu liczb a i b nazwijmy δ i niech $a = \delta m$, $b = \delta n$, gdzie (art. 94) m i n są liczbami pierwszemi względem siebie.

α. Weźmy iloczyny ap i bp. Jest $ap = \delta pm$, $bp = \delta pn$, a więc δp jest nsd-em liczb ap i bp. T. j. *gdy dwie liczby dane pomnożymy przez tę samę liczbę, to ich największy spólny dzielnik zostanie przez tęż liczbę pomnożony.*

β. Gdy p jest spólnym dzielnikiem liczb a i b, to przynajmniej jedna z dwu liczb m i n jest niepodzielna przez p (anitéż przez żaden z jej dzielników); przeto p jest dzielnikiem δ. A więc, *gdy dwie dane liczby podzielimy przez ich spólny dzielnik, to ich największy spólny dzielnik zostanie przez tęż samę liczbę podzielony.*

γ. Weźmy ap i b, gdy p jest liczbą pierwszą względem b. Jest $ap = \delta mp$ i liczba p, jako pierwsza względem $b = \delta n$, jest pierwsza względem jej dzielnika n, przeto (art. 95) iloczyn mp jest liczbą pierwszą względem n i (art. 94) nsd-em liczb ap i b jest δ. A więc, *jeżeli jednę z dwu liczb danych pomnożymy przez liczbę pierwszą względem pozostałej z nich, to największy spólny dzielnik iloczynu i pozostałej liczby będzie ten sam, co liczb danych.*

δ. Gdy p, dzielnik liczby a, jest liczbą pierwszą względem $b = \delta n$, to w iloczynie $\delta m = a$ nie może być δ podzielne przez p, tak iż $\frac{a}{p} = \delta \cdot \frac{m}{p}$. A więc, *jeżeli jednę z dwu liczb danych podzielimy przez liczbę pierwszą względem pozostałej z nich, to największy spólny dzielnik ilorazu i pozostałej liczby będzie ten sam, co liczb danych.*

NAJWIĘKSZY SPÓLNY DZIELNIK JEDNOMIANÓW I WIELOMIANÓW.

103. Weźmiemy na uwagę wyrażenia algebraiczne całkowite ze spółczynnikami całkowitemi, gdyż z takiemi tylko mamy do czynienia w zadaniach, w których potrzeba wyszukać największego spólnego dzielnika wyrażeń algebraicznych.

Spólnym dzielnikiem wyrażeń algebraicznych całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi nazywamy takie wyrażenie algebraiczne całkowite ze spółczynnikami całkowitemi, przez które dzieląc każde z danych wyrażeń, otrzymujemy, jako ilorazy, wyrażenia całkowite ze spółczynnikami całkowitemi; w szczególnym przypadku może ów spólny dzielnik być liczbą całkowitą. Np. wielomiany

$$6a^5 + 6a^4b - 6a^3b^2 - 6a^2b^3, \quad 9a^4 - 9a^3b - 9a^2b^2 + 9ab^3$$

mają prócz 1 spólne dzielniki: 3, a, $3a$, $a+b$, $3a+3b$, a^2+ab, $3a^2+3ab$, $a-b$, $3a-3b$, a^2-ab, $3a^2-3ab$, a^2-b^2, $3a^2-3b^2$, a^3-ab^2, $3a^3-3ab^2$.

Największym spólnym dzielnikiem wyrażeń algebraicznych całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi nazywamy taki ich spólny dzielnik, przez który dzieląc dane wyrażenia, otrzymujemy, jako ilorazy, wyrażenia, nie mające spólnego dzielnika prócz jedności. Tak np. poprzednie dwa wielomiany mają nsd. $3a^3 - 3ab^2$, gdyż ilorazy z podzielenia danych wielomianów przez ten dzielnik, $2a^2 + 2ab$ i $3a - 3b$, nie mają spólnego dzielnika prócz jedności.

Dwa wyrażenia algebraiczne całkowite ze spółczynnikami całkowitemi, nie mające spólnego dzielnika prócz jedności, nazywamy dwoma wyrażeniami algebraicznemi pierwszemi względem siebie.

104. Gdy mamy kilka jednomianów, np. $36a^5b^3c^7d^4e^2$, $-48a^6b^2c^5d^6e$, $-72a^8b^2d^5e^3$, to wprost zauważymy, że mają one następujące spólne czynniki: 12, a^5, b^2, d^4 i e, a więc nsd-em tych jednomianów jest jednomian $12a^5b^2d^4e$. Przeto *największy spólny dzielnik jednomianów jest iloczynem naj-*

większego spólnego dzielnika ich spółczynników przez każdą z podstaw, znajdujących się we wszystkich jednomianach, wziętą z wykładnikiem najmniejszym z tych, jakie ona ma w tych jednomianach. (Por. art. 93, a także art. 72).

Oczywiście, że *największy spólny dzielnik jednomianów i wielomianów jest największym spólnym dzielnikiem wszystkich jednomianów i oddzielnych wyrazów wszystkich wielomianów.*

105. Gdy mamy znaleźć nsd. dwu wielomianów, to z uwagi, że wogóle trudno jest oznaczyć, jakich prostszych wielomianów iloczynem może być każdy z danych wielomianów, a temsamem trudno wprost oznaczyć spólne ich czynniki, będące wielomianami, możemy tylko rzadko korzystać z rozkładu wielomianów na czynniki (art. 72, 77).

Tak np., gdy dostrzeżemy, że

$$12a^5+30a^4b+24a^3b^2+6a^2b^3=6a^2(a+b)(2a^2+3ab+b^2),$$
$$16a^4+8a^3b-16a^2b^2-8ab^3=8a(a-b)(2a^2+3ab+b^2),$$

to widocznie nsd-em tych wielomianów jest

$$2a(2a^2+3ab+b^2)=4a^3+6a^2b+2ab^2;$$

jakoż, ilorazy z podzielenia przezeń danych wielomianów, $3a^2+3ab$ i $4a-4b$, są pierwsze względem siebie.

Z tego jednak sposobu ogólnie przy wielomianach korzystać nie można. Dlatego zastosujemy do wielomianów sposób, wyłożony na liczbach w art. 99-ym.

Łatwo sprawdzić, wziąwszy jakiekolwiek dwa wielomiany, iż to, czegośmy dla liczb dowiedli w art. 94, 97 i 102-im, odnosi się także do wielomianów. Co się zaś tyczy samego postępowania, wyłożonego na liczbach w art. 98 i 99-ym, to niekiedy, jak to zaraz zobaczymy, przy stosowaniu go do wielomianów ulega ono niejakim zmianom.

106. Szukajmy nsd-a dwu wielomianów: a^2-4a+3, $4a^3-9a^2-15a+18$. Dzieląc drugi z nich przez pierwszy, otrzymamy w ilorazie $4a+7$ i resztę $a-3$; dzieląc zaś następnie a^2-4a+3 przez tę resztę $a-3$, otrzymamy w ilorazie $a-1$, a reszty nie będzie. Mamy tu więc:

$$4a^3-9a^2-15a+18=(a^2-4a+3)(4a+7)+a-3,$$
$$a^2-4a+3=(a-3)(a-1).$$

Jest zatem $a-3$ nsd-em danych wielomianów.

Tu w reszcie pierwszego dzielenia i w obu ilorazach otrzymywaliśmy wyrazy o spółczynnikach całkowitych, tak iż kolejne dzielenie mogło być wprost uskutecznione w ten sposób, jak w art. 99-ym.

107. α. 1). $\quad 9a^2-3ab-2b^2$ i $120a-80b$.

Te wielomiany, czyli $(3a-2b)(3a+b)$ i $40(3a-2b)$, mają nsd. $3a-2b$. Gdybyśmy podzielili pierwszy przez drugi, to otrzymalibyśmy w ilorazie $\frac{3}{40}a+\frac{1}{40}b$; ułamkowe spółczynniki wskazują, iż nie można tu wprost dzielić jednego z wielomianów przez drugi. Według jednak art. 102 δ, możemy drugi z nich podzielić przez liczbę 40, spólny dzielnik jego wyrazów, która jest pierwsza względem pierwszego z tych wielomianów. Innemi słowy, ponieważ nsd. wielomianów danych jest ten sam, co nsd. wielomianów

$$9a^2-3ab-2b^2,\quad 3a-2b,$$

możemy dzielenie danych wielomianów zastąpić przez dzielenie wielomianów ostatnich. A skoro z tego dzielenia nie otrzymujemy reszty, przeto $3a-2b$ jest nsd-em danych wielomianów.

2). $$9a^2-3ab-2b^2 \quad \text{i} \quad 6a^3b-4a^2b^2.$$

Dzieląc czyto pierwszy z tych wielomianów przez drugi, czyteż drugi przez pierwszy, otrzymalibyśmy w ilorazie wyrażenie ułamkowe. Wyrazy jednak drugiego wielomianu mają czynnik spólny $2a^2b$, pierwszy względem pierwszego wielomianu. Podzieliwszy więc przezeń drugi wielomian (art. 102 δ), sprowadzimy zadanie do dzielenia wielomianów

$$9a^2-3ab-2b^2 \quad \text{i} \quad 3a-2b.$$

β. Gdyby wyrazy wielomianu dzielnej miały czynnik spólny, pierwszy względem dzielnika, to moglibyśmy wprawdzie wykonać wskazane dzielenie; uprości się jednak robota, kiedy przez ów czynnik dzielną podzielimy (art. 102 δ), co nie zmieni nsd-a tych wielomianów.

γ. Jeżeliby wszystkie wyrazy obu wielomianów miały spólny czynnik, to, gdybyśmy przezeń oba podzielili, ich nsd. zostałby również przez ten czynnik podzielony (art. 102, β). Zwykle, dla uproszczenia rachunku, przez czynnik, będący nsd-em wszystkich wyrazów obu wielomianów, dzielimy oba wielomiany, a po znalezieniu nsd-a tak uproszczonych wielomianów, mnożymy go przez ów czynnik; ten iloczyn będzie nsd-em wielomianów danych.

108. Przy szukaniu nsd-a wielomianów na inną jeszcze natrafiamy trudność pozorną. Gdy np. dane są wielomiany

$$45a^4-12a^3-24a^2+17a-6,\quad 9a^2-3a-2,$$

to, po podzieleniu pierwszego przez drugi, otrzymamy iloraz $5a^2+\frac{1}{3}a-\frac{13}{9}$ i resztę $\frac{40}{3}a-\frac{80}{9}$. Nie może więc być mowy o dzieleniu następnem dzielnika przez taką resztę. A więc należy dane wielomiany zastąpić przez inne, mające ten sam nsd. Zauważyć łatwo, że, mnożąc dzielną przez 9, a ten iloczyn dzieląc przez dzielnik, otrzymamy, tak w reszcie, jak w ilorazie, spółczynniki całkowite. Ta liczba 9 jest pierwsza względem dzielnika, a więc możemy przez nią pomnożyć dzielną (art. 102, γ). Atoli, ponieważ idzie nam o to, jakie otrzymujemy reszty, co do ilorazów zaś wystarcza nam pewność, że one są wyrażeniami ze spółczynnikami całkowitemi, przeto postępujemy nieco inaczej. Np. w powyższem zadaniu, z dzielenia pierwszego wyrazu dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika otrzymawszy wyraz $5a^2$, którego spółczynnik jest całkowity, wypisujemy go w ilorazie. Po odjęciu iloczynu tego wyrazu przez dzielnik otrzymujemy resztę częściową, której pierwszym wyrazem jest $3a^3$. Aby z podzielenia go przez pierwszy wyraz dzielnika, $9a^2$, wypadł wyraz o spółczynniku całkowitym, pomnóżmy owę pierwszą resztę częściową przez 3 (co odpowiadałoby pomnożeniu całej dzielnej i pierwszego wyrazu ilorazu przez 3). Pierwszy wyraz owej reszty tak pomnożonej, t. j. $9a^3$, podzieliwszy przez pierwszy wyraz dzielnika, otrzymamy odpowiedni wyraz w ilorazie $+a$, który piszemy po napisanym już pierwszym wyrazie ilorazu, oddzieliwszy go odeń przecinkiem (gdyż on właściwie powinien być dopisany nie do $5a^2$, lecz do $15a^2$). Aby podobnież następny wyraz w ilorazie wypadł o spółczynniku całkowitym, trzebaby całą dzielną jeszcze pomnożyć przez 3, zamiast czego mnożymy tylko drugą resztę częściową przez 3; pierwszy wyraz tak pomnożonej reszty, t. j. $-117a^2$, dzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika, a otrzymawszy jako odpowiedni wyraz ilorazu -13, piszemy go po napisanym już drugim wyrazie ilorazu, oddzieliwszy go odeń przecinkiem. Po odjęciu iloczynu tego ostatniego już wyrazu ilorazu przez dzielnik, pozostaje z dzielenia reszta $120a-80$. A więc nsd. danych wielomianów jest nsd-em wielomianu dzielnika i wielomianu tej reszty. Całe to postępowanie tak się przedstawi:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
45a^4 - & 12a^3 - & 24a^2 + & 17a - & 6 & 9a^2-3a-2 \\ \cline{6-6}
\pm 45a^4 \mp & 15a^3 \mp & 10a^2 & & & 5a^2, +a, -13 \\ \cline{1-5}
 & 3a^3 - & 14a^2 + & 17a - & 6 & \\
 & 9a^3 - & 42a^2 + & 51a - & 18 & \\
 & \pm 9a^3 \mp & 3a^2 \mp & 2a & & \\ \cline{2-4}
 & - & 39a^2 + & 53a - & 18 & \\
 & - & 117a^2 + & 159a - & 54 & \\
 & \mp & 117a^2 \pm & 39a \pm & 26 & \\ \cline{2-5}
 & & & 120a - & 80 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
9a^2-3a-2 : 120a-80 \\
\begin{array}{rrr|l}
9a^2 - & 3a - & 2 & 3a-2 \\ \cline{4-4}
\pm 9a^2 \mp & 6a & & 3a+1 \\ \cline{1-3}
 & 3a - & 2 & \\
 & \pm 3a \mp & 2 & \\ \cline{2-3}
 & & 0. &
\end{array}
\end{array}$$

A więc tu

$$9(45a^4-12a^3-24a^2+17a-6)=(9a^2-3a-2)(5a^2\times 9+a\times 3-13)+120a-80,$$

$$9a^2-3a-2=[\tfrac{1}{40}(120a-80)](3a+1),$$

i nsd-em danych wielomianów jest

$$\tfrac{1}{40}(120a-80)=3a-2.$$

109. Widzimy więc, że, *przy szukaniu największego spólnego dzielnika dwu wielomianów zapomocą kolejnego dzielenia, należy podzielić oba dane wielomiany przez największy spólny dzielnik wszystkich wyrazów obu tych wielomianów; będzie on czynnikiem szukanego największego spólnego dzielnika wielomianów danych; szukając następnie największego spólnego dzielnika tak uproszczonych wielomianów, w każdem dzieleniu należy ten wielomian, który bierzemy za dzielnik, podzielić przez czynnik spólny jego wyrazów, pierwszy względem wielomianu pozostałego, jakoteż, w razie potrzeby, wielomian dzielnej lub częściowej reszty pomnożyć przez liczbę, pierwszą względem wielomianu dzielnika, taką, aby odpowiedni wyraz ilorazu wypadł ze spółczynnikiem całkowitym; nakoniec tak znaleziony największy spólny dzielnik należy pomnożyć przez wyłączony poprzednio spólny dzielnik wyrazów wielomianów danych.*

Jeżeli, stosując to postępowanie, dochodzimy do takiej reszty, która jest widocznie pierwsza względem odpowiadającego jej dzielnika, to dane dwa wielomiany są także pierwsze względem siebie.

110. Gdybyśmy mieli znaleźć nsd. trzech lub więcej wielomianów, to wypadłoby postąpić podobnie, jak w art. 100-ym.

NAJMNIEJSZA SPÓLNA WIELOKROTNOŚĆ JEDNOMIANÓW I WIELOMIANÓW.

111. Weźmiemy na uwagę wyrażenia algebraiczne całkowite ze spółczynnikami całkowitemi, gdyż z takiemi tylko mamy do czynienia w zadaniach, w których potrzeba wyszukać najmniejszej spólnej wielokrotności wyrażeń algebraicznych.

Spólną wielokrotnością wyrażeń algebraicznych całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi nazywamy takie wyrażenie algebraiczne całkowite ze spółczynnikami całkowitemi, które dzieląc przez każde z danych wyrażeń, otrzymujemy, jako ilorazy, wyrażenia całkowite ze spółczynnikami całkowitemi.

Najmniejszą spólną wielokrotnością wyrażeń algebraicznych całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi nazywamy taką ich spólną wielokrotność, którą dzieląc przez dane wyrażenia, otrzymujemy, jako ilorazy, wyrażenia, nie mające spólnego dzielnika prócz jedności. Tak np. nsw-ą trzech wielomianów

$$6a^2b-6ab^2, \quad 8a^2-8b^2, \quad 4a^2b+8ab^2+4b^3=4b(a+b)(a+b),$$

jest $\quad 24ab(a-b)(a+b)(a+b)=24a^4b+24a^3b^2-24a^2b^3-24ab^4,$

gdyż ilorazy z podzielenia tego wyrażenia przez każde z danych, $4a^2+8ab+4b^2$, $3a^2b+3ab^2$, $6a^2-6ab$, nie mają prócz jedności spólnego dzielnika.

Ilorazy z podzielenia nsw-i dwu wyrażeń całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi przez te wyrażenia są pierwsze względem siebie.

112. Gdy mamy danych dwa lub więcej jednomianów np. $36a^5b^3c^7d^4e^2$, $-48a^6b^2c^5d^6e$, $-72a^8b^2d^5e^3$, to możemy wprost zauważyć, że nsw. tych jednomianów jest jednomianem, którego spółczynnik jest nsw-ą spółczynników danych jednomianów i w którym potęga podstawy a jest najwyższa z jej potęg w tych jednomianach, a więc a^8, i podobnież b^3, c^7, d^6, e^3, tak iż szukaną nsw-ą jest jednomian $144a^8b^3c^7d^6e^3$. Przeto *najmniejszą spólną wielokrotnością jednomianów jest iloczyn najmniejszej spólnej wielokrotności ich spółczynników przez każdą podstawę, znajdującą się w którymkolwiek z danych jednomianów, wziętą z największym z wykładników, jakie ona ma w tych jednomianach* (por. art. 96).

113. Gdy mamy znaleźć nsw. kilku wyrażeń w razie, kiedy dwa lub więcej z nich są wielomianami, to możemy tylko czasem korzystać z rozkładu danych wielomianów na czynniki. Tak np., gdy mamy

$$12a^5b^3+30a^4b^4+24a^3b^5+6a^2b^6=6a^2b^3(a+b)(2a^2+3ab+b^2),$$
$$32a^5+16a^4b-32a^3b^2-16a^2b^3=16a^2(a-b)(2a^2+3ab+b^2),$$

to nsw-ą tych wielomianów jest $48a^2b^3(a+b)(a-b)(2a^2+3ab+b^2)$ czyli

$$96a^6b^3+144a^5b^4-48a^4b^5-144a^3b^6-48a^2b^7.$$

Ten sposób możemy zawsze stosować w tym przypadku, kiedy jedno tylko z danych wyrażeń jest wielomianem; gdy np. mamy

$$32a^5b^3-32a^3b^5-16a^2b^6, \quad 24a^2b^7, \quad -12a^3b^4, \quad 8a^5,$$

to, po wyłączeniu z wyrazów wielomianu ich nsd-a $16a^2b^3$, znajdziemy, iż nsw-ą tych wyrażeń jest

$$48a^5b^7(2a^3-2ab^2-b^3)=96a^8b^7-96a^6b^9-48a^5b^{10}.$$

114. Ogólnie, gdy mamy znaleźć nsw. dwu lub więcej wyrażeń algebraicznych całkowitych ze spółczynnikami całkowitemi, to wypadnie zastosować postępowanie, wskazane w art. 101-ym. Tak np.

1). Nsd. $36a^5b^3c^7d^4e^2$ i $-48a^6b^2c^5d^6e$ jest $12a^5b^2c^5d^4e$, przeto nsw. tych jednomianów jest $12a^5b^2c^5d^4e\times 3bc^2e\times 4ad^2=144a^6b^3c^7d^6e^2$.

2). Nsw. $32a^5b^3-32a^3b^5-16a^2b^6$ i $24a^2b^7$ jest

$$8a^2b^3\times 3b^4\times(4a^3-4ab^2-2b^3)=96a^5b^7-96a^3b^9-48a^2b^{10}.$$

3). Nsw. $a^3+2a^2b-ab^2-2b^3$, $a^3-2a^2b-ab^2+2b^3$ jest $a^4-5a^2b^2+4b^4$.

4). Nsw. $a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6$, $a^8+a^7b+ab^7+b^8$, a^3-b^3, $a^7+a^6b-ab^6-b^7$ i a^3+b^3 jest $a^{13}-a^7b^6+a^6b^7-b^{13}$.

ROZDZIAŁ TRZECI.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE UŁAMKOWE.

WYRAŻENIE ALGEBRAICZNE UŁAMKOWE.

115. Wyrażenie algebraiczne ułamkowe (art. 50) otrzymaliśmy z dzielenia dwu wyrażeń algebraicznych całkowitych w przypadku, kiedy dzielna była niepodzielna przez dzielnik (art. 81—84, 86—89).

Wyrażenie ułamkowe może być albo ułamkiem (art. 81, 82, 84), alboteż złożone z jednomianów i ułamków (art. 83, 88, 89). W ostatnim razie część wyrażenia ułamkowego, będącą sumą jednomianów, nazywamy jego częścią całkowitą. Wogóle zaś każdy składnik wyrażenia ułamkowego nazywa się jego wyrazem.

116. Jeżeli w wyrażeniu ułamkowem nadajemy pewnym literom szczególne znaczenie, a owe litery nie znajdują się w dzielnikach, to mówimy, że ono jest względem tych liter całkowite; tak np. o wyrażeniu $\frac{ax^2}{b}+\frac{2bxy}{ac}-\frac{cy^2}{3a}$ mówimy, że ono jest całkowite względem x i y.

117. Mając jakikolwiek ułamek, licznik jego nazwijmy l, mianownik m, liczbę zaś, którą przedstawia ułamek, nazwijmy q; jest tedy $\frac{l}{m}=q$.

Ponieważ z podzielenia liczby l przez liczbę m otrzymujemy liczbę q, przeto $l=q.m$, co możemy tak wypowiedzieć: *licznik ułamka jest iloczynem liczby, którą ten ułamek przedstawia, przez mianownik ułamka.*

MNOŻENIE LUB DZIELENIE LICZNIKA I MIANOWNIKA PRZEZ TĘ SAMĘ LICZBĘ.

118. Jeżeli mamy $\frac{l}{m}=q$, skąd $l=q.m$, to mnożąc obie strony tej ostatniej równości przez liczbę s, różną od zera, będziemy mieli (art. 64, IV, γ)

$$ls=q.ms, \text{ skąd } \frac{ls}{ms}=q.$$

Ponieważ zaś $q = \frac{l}{m}$, przeto

$$\frac{l}{m} = \frac{ls}{ms},$$

t. j. *ułamek nie zmieni swej wartości, jeżeli tak licznik jak i mianownik jego pomnożymy przez tę samę liczbę.* Np.

$$\frac{a-6}{a^2+6b} = \frac{(a-6)(a+6)}{(a^2+6b)(a+6)} = \frac{a^2-36}{a^3+6a^2+6ab+36b}.$$

Ta liczba $a+6$ ma być różna od zera, a więc nie może być $a = -6$. Jakoż, przy $a = -6$ dany ułamek $\frac{a-6}{a^2+6b} = -\frac{12}{36+6b}$, gdy tymczasem przy $a = -6$ $\frac{a^2-36}{a^3+6a^2+6ab+36b} = \frac{0}{0}$, co wskazywałoby, iż tego ułamka wartość jest nieoznaczona (art. 38).

Również, jeżeli, mając wyrażenie całkowite, które nazwijmy p, pomnożymy je, a otrzymany iloczyn podzielimy przez tę samę liczbę s, różną od zera, to nie zmienimy jego wartości, gdyż $p = \frac{p}{1} = \frac{ps}{s}$. Np. mieć będziemy $a - b = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b}$, pod warunkiem, iż b jest różne od $-a$.

119. Gdy mamy ułamek $\frac{l}{m}$ i tak licznik jego jak i mianownik podzielimy przez tę samę liczbę s, różną od zera, to będziemy mieli ułamek $\frac{l:s}{m:s}$, którego wartość nazwijmy q, tak iż $q = \frac{l:s}{m:s}$. Jeżeli licznik i mianownik tego ułamka pomnożymy przez liczbę s, to (art. 118) $q = \frac{(l:s).s}{(m:s).s} = \frac{l}{m}$. Widzimy więc, że

$$\frac{l}{m} = \frac{l:s}{m:s},$$

t. j. *ułamek nie zmieni swej wartości, jeżeli licznik i mianownik jego jednocześnie podzielimy przez tę samę liczbę.*

120. Gdy licznik i mianownik ułamka podzielimy przez ich spólny dzielnik, to dany ułamek zastąpimy przez prostszy. Jeżeli licznik i mianownik są pierwsze względem siebie (art. 103), to taki ułamek już przez prostszy zastąpiony być nie może i mówimy, że wówczas ułamek jest w najprostszej postaci, albo, że jest w postaci nieskracalnej. *Aby dany ułamek przedstawić w postaci nieskracalnej, trzeba jego licznik i mianownik podzielić przez ich największy spólny dzielnik.*

Zwykle tak ułamki dane, jak i ułamki, wynikające z rachunku, przedstawiamy w postaci nieskracalnej.

121. Zdarza się niekiedy, iż, nadając literom, znajdującym się w ułamku, pewne wartości, otrzymujemy $\frac{0}{0}$ nawet w tym razie, kiedy ów ułamek nie może przedstawiać dowolnej liczby, lecz ma wartość zupełnie oznaczoną. Wynikać to może z tego, iż jego licznik i mianownik mają czynnik spólny, który właśnie przy owych wartościach staje się równym zeru. Tak np. w ułamku

$\frac{a^2-36}{a^3+6a^2+6ab+36b}$ przyjmując $a=-6$, otrzymamy $\frac{0}{0}$ dlatego tylko, że licznik i mianownik tego ułamka mają spólny czynnik $a+6$ (art. 118), który przy tej wartości $a=-6$ staje się zerem. Ponieważ jednak dany tu ułamek jest zawsze równy ułamkowi $\frac{a-6}{a^2+6b}$, który przy $a=-6$ ma wartość $-\frac{12}{36+6b}=$ $=-\frac{2}{6+b}$, przeto także »istotną« wartością ułamka $\frac{a^2-36}{a^3+6a^2+6ab+36b}$ przy $a=-6$ jest $-\frac{2}{6+b}$. Widzimy więc, że, *jeżeli otrzymujemy* $\frac{0}{0}$ *jako wartość ułamka, to należy sprawdzić, czy ta wartość nieoznaczona nie jest tylko »pozorna«, t. j. czy licznik i mianownik ułamka nie mają spólnego czynnika, który stał się zerem.*

122. Gdy mamy kilka ułamków, np. $\frac{g}{h}, \frac{k}{l}, \frac{m}{n}$, to możemy licznik i mianownik każdego ułamka pomnożyć przez taką liczbę, aby mianowniki wszystkich ułamków stały się jednakowe. Ów spólny mianownik będzie spólną wielokrotnością mianowników h, l, n; najprościej jest wziąć ich najmniejszą spólną wielokrotność. Nazwijmy ją w i niech $w=h.r=l.s=n.t$; w takim razie

$$\frac{g}{h}=\frac{g.r}{h.r}=\frac{gr}{w},\quad \frac{k}{l}=\frac{k.s}{l.s}=\frac{ks}{w},\quad \frac{m}{n}=\frac{m.t}{n.t}=\frac{mt}{w}.$$

Sprowadziliśmy więc dane ułamki do postaci o tym samym mianowniku. *Aby dane ułamki sprowadzić do spólnego mianownika należy znaleźć najmniejszą spólną wielokrotność ich mianowników i przyjąć ją jako mianownik spólny wszystkich ułamków, za licznik zaś każdego oddzielnego ułamka wziąć iloczyn pierwotnego jego licznika i ilorazu z podzielenia spólnego mianownika przez mianownik pierwotny tego ułamka.*

CZTERY DZIAŁANIA NA UŁAMKACH.

123. Gdy mamy znaleźć sumę dwu lub więcej ułamków o jednakowych mianownikach, np. $\frac{f}{n}=p$, $\frac{g}{n}=q$, $\frac{h}{n}=r$, to idzie nam o znalezienie sumy $p+q+r$, wyrażonej przy pomocy liczników i mianownika danych ułamków. Ponieważ (art. 117) $f=pn$, $g=qn$, $h=rn$, przeto

$$f+g+h=pn+qn+rn, \text{ czyli } f+g+h=(p+q+r)\,n,$$

skąd $p+q+r=\frac{f+g+h}{n}$, czyli

$$\frac{f}{n}+\frac{g}{n}+\frac{h}{n}=\frac{f+g+h}{n}.$$

Gdybyśmy zaś mieli znaleźć sumę ułamków, nie mających spólnego mianownika, to, sprowadziwszy je do spólnego mianownika, wykonalibyśmy następnie dodawanie, jak powyżej.

A więc ogólnie, *aby dodać do siebie ułamki, należy, po sprowadzeniu ich do spólnego mianownika, sumę algebraiczną liczników wziąć za licznik ich sumy, a mianownik spólny za mianownik sumy.*

124. Gdy mamy wykonać odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach, np. od $\frac{f}{n}=p$ odjąć $\frac{g}{n}=q$, to idzie nam o wyrażenie różnicy $p-q$ przy pomocy liczników i mianownika danych ułamków. Ponieważ $f=pn$, $g=qn$, przeto

$$f-g=pn-qn, \text{ czyli } f-g=(p-q)\,n,$$

skąd $p-q=\frac{f-g}{n}$, czyli

$$\frac{f}{n}-\frac{g}{n}=\frac{f-g}{n}.$$

Jeżeliby zaś dane ułamki nie miały spólnego mianownika, to, sprowadziwszy je do spólnego mianownika, mielibyśmy także samo, jak powyżej, zadanie do wykonania.

A więc ogólnie, *aby wykonać odejmowanie ułamków, należy, po sprowadzeniu ich do spólnego mianownika, różnicę liczników wziąć za licznik ich różnicy, a mianownik spólny za mianownik różnicy.*

125. Wyrażenie ułamkowe, złożone z części całkowitej i ułamka, możemy przedstawić w kształcie ułamka; np. $p+\frac{l}{m}=\frac{pm}{m}+\frac{l}{m}=\frac{mp+l}{m}$.

126. Jeżeli mamy wykonać mnożenie ułamków, np. $\frac{g}{h}=p$, $\frac{k}{l}=q$, $\frac{m}{n}=r$, to idzie nam o wyrażenie iloczynu $p.q.r$ przy pomocy liczników i mianowników danych ułamków. Ponieważ $g=ph$, $k=ql$, $m=rn$, przeto, mnożąc przez siebie te równości stronami odpowiedniemi, będziemy mieli

$$gkm=ph\,.\,ql\,.\,rn, \text{ czyli } gkm=pqr\,.\,hln,$$

skąd $p.q.r=\frac{gkm}{hln}$, czyli

$$\frac{g}{h}\cdot\frac{k}{l}\cdot\frac{m}{n}=\frac{gkm}{hln},$$

t. j. *aby wykonać mnożenie ułamków, należy iloczyn ich liczników wziąć za licznik iloczynu, a za jego mianownik iloczyn mianowników danych ułamków.*

Jeżeli mamy wykonać mnożenie takich ułamków, iż licznik jednego i mianownik innego mają spólny czynnik, to zwykle odrazu dzielimy je przez ów spólny czynnik, zamiast dzielić przezeń licznik i mianownik iloczynu (art. 120).

Jeżeli mamy znaleźć iloczyn wyrażenia całkowitego i ułamka, np. $a\cdot\frac{l}{m}$, to, zamiast a pisząc $\frac{a}{1}$, będziemy mieli $\frac{a}{1}\cdot\frac{l}{m}=\frac{al}{m}$, t. j. *iloczyn wyrażenia całkowitego i ułamka otrzymujemy, biorąc iloczyn wyrażenia całkowitego przez licznik ułamka za licznik iloczynu, a za jego mianownik biorąc mianownik ułamka.*

Gdyby jeden lub więcej z danych czynników były wyrażeniami, złożonemi z części całkowitej i ułamka, to, przedstawiwszy je (art. 125) w kształcie ułamka, sprowadzimy rzecz do mnożenia ułamków. Jednak możemy także postąpić inaczej; np.

$$\left(a+\frac{g}{h}\right)\left(b+\frac{k}{l}\right)=\frac{ah+g}{h}\cdot\frac{bl+k}{l}=\frac{abhl+bgl+ahk+gk}{hl}=ab+\frac{bg}{h}+\frac{ak}{l}+\frac{gk}{hl},$$

czyli $$\left(a+\frac{g}{h}\right)\left(b+\frac{k}{l}\right)=a.b+\frac{g}{h}\cdot b+a\cdot\frac{k}{l}+\frac{g}{h}\cdot\frac{k}{l},$$
co łatwo wypowiedzieć.

127. Gdy mamy np. ułamek $\frac{g}{h}=p$ podzielić przez ułamek $\frac{k}{l}=q$, to idzie nam o wyrażenie ilorazu $p:q$ przy pomocy liczników i mianowników danych ułamków. Ponieważ $g=ph$, $k=ql$, przeto, napisawszy te równości tak:

$$ph=g, \quad k=ql,$$

mnożąc je przez siebie stronami odpowiedniemi, będziemy mieli $phk=gql$, skąd, dzieląc obie strony tej równości przez tę samę liczbę hkq, otrzymamy $\frac{p}{q}=\frac{gl}{hk}$. Tu po stronie lewej $p:q=\frac{g}{h}:\frac{k}{l}$, zaś po prawej ułamek $\frac{gl}{hk}$ jest iloczynem $\frac{g}{h}\cdot\frac{l}{k}$. Mamy zatem

$$\frac{g}{h}:\frac{k}{l}=\frac{g}{h}\cdot\frac{l}{k},$$

t. j. *iloraz otrzymujemy, mnożąc dzielną przez odwrotność dzielnika.*

Gdyby jedno z danych wyrażeń było całkowite, to mielibyśmy:

$$a:\frac{l}{m}=\frac{a}{1}:\frac{l}{m}=\frac{a}{1}\cdot\frac{m}{l}=a\cdot\frac{m}{l}, \qquad \text{zaś} \quad \frac{l}{m}:a=\frac{l}{m}\cdot\frac{1}{a}.$$

Widzimy z tego, że także do tych przypadków odnosi się prawidło, powyżej ogólnie wypowiedziane.

Jeżeli czyto dzielna, czyto dzielnik, czyteż dzielna i dzielnik jednocześnie są wyrażeniami, złożonemi z części całkowitej i ułamka, to należy je przedstawić w postaci ułamka (art. 125), przez co rzecz sprowadzimy do jednego z powyższych przypadków.

128. Jeżeli dzielenie wyrażeń ułamkowych wskażemy, pisząc dzielną nad, a dzielnik pod kreską poziomą, to powstanie ułamek, który albo w liczniku, albo w mianowniku, alboteż jednocześnie w liczniku i w mianowniku ma ułamki. Takie wyrażenie ułamkowe możemy zawsze, mnożąc tak wyrażenie nad »główną« poziomą kreską, jak i wyrażenie pod nią, przez tę samę liczbę, doprowadzić do postaci, w której licznik i mianownik będą już wyrażeniami całkowitemi. Np.

$$\frac{a+\frac{g}{h}}{b+\frac{k}{l}}=\frac{ahl+gl}{bhl+hk}.$$

WARTOŚCI OSOBLIWE UŁAMKA.

129. Niech $\frac{l}{m}=q$. Wówczas, jak wiemy (art. 38), przy m różnem od zera, zaś $l=0$, jest także $q=0$. Przy l różnem od zera, zaś $m=0$, jest $q=\infty$, liczbie nieskończenie wielkiej. Gdy zaś jednocześnie $l=0$ i $m=0$, to $q=\frac{0}{0}$ w razie, jeżeli liczby l i m stały się równemi zeru nie wskutek tego tylko, iż miały czynnik spólny, który otrzymał wartość zero (art. 121).

Z równości

$$\frac{l}{m}=q, \qquad l=q.m, \qquad \frac{l}{q}=m,$$

przy l różnem od zera, zaś $m=0$, mamy

$$\frac{l}{0}=\infty, \qquad l=\infty\times 0, \qquad \frac{l}{\infty}=0.$$

Ostatnią równość tak wypowiadamy: *iloraz z podzielenia jakiejkolwiek liczby skończonej przez liczbę nieskończenie wielką jest zerem.*

Przedostatnia zaś równość wskazuje, iż, kiedy w iloczynie dwu czynników jednocześnie jeden czynnik staje się liczbą nieskończenie wielką, a pozostały staje się zerem, iloczyn może przedstawiać liczbę różną od zera. Ponieważ l może być dowolną liczbą, przeto ów iloczyn $\infty\times 0$ może przedstawiać jakąkolwiek liczbę, czyli ma toż samo znaczenie, co $\frac{0}{0}$ (art. 38). Wynika to także z równości $q.m=\dfrac{m}{\frac{1}{q}}$, z której wtedy, kiedy jednocześnie m staje się zerem, zaś q staje się liczbą nieskończenie wielką, a więc $\frac{1}{q}$ zerem, mamy $\infty\times 0=\frac{0}{0}$.

130. Kiedy w ułamkach

$$\frac{2a^2-5}{3a^3+5a}=\frac{2-\frac{5}{a^2}}{3a+\frac{5}{a}}, \qquad \frac{2a^2-5}{3a^2+5}=\frac{2-\frac{5}{a^2}}{3+\frac{5}{a^2}}, \qquad \frac{2a^3-5a}{3a^2+5}=\frac{2a-\frac{5}{a}}{3+\frac{5}{a^2}}$$

staje się a liczbą nieskończenie wielką, każdy z tych ułamków w pierwotnej postaci przedstawi się jako $\frac{\infty}{\infty}$, gdy tymczasem, jak to widać z drugich ich postaci, wartości tych ułamków stają się wówczas: pierwszego 0, drugiego $\frac{2}{3}$, trzeciego ∞.

O RÓŻNYCH SYSTEMATACH PISANIA LICZB.

131. Liczbę dziesiętną np. 2456·8907 możemy tak napisać:

$$2.10^3+4.10^2+5.10+6.10^0+8\cdot\frac{1}{10}+9\cdot\frac{1}{10^2}+0\cdot\frac{1}{10^3}+7\cdot\frac{1}{10^4}\cdot$$

To wyrażenie jest szczególnym przypadkiem wyrażenia ułamkowego

$$a.n^l+b.n^{l-1}+\ldots+e.n^2+f.n+g.n^0+p\cdot\frac{1}{n}+q\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+u\cdot\frac{1}{n^{k-1}}+w\cdot\frac{1}{n^k},$$

w którem każda z liter oznacza liczbę dodatną i całkowitą. Gdy bowiem w tem ostatniem wyrażeniu przy $n=10$, $l=3$, $k=4$, t. j. w wyrażeniu

$$a.10^3+b.10^2+c.10+d.10^0+p\cdot\frac{1}{10}+q\cdot\frac{1}{10^2}+r\cdot\frac{1}{10^3}+s\cdot\frac{1}{10^4},$$

przyjmiemy jeszcze $a=2$, $b=4$, $c=5$, $d=6$, $p=8$, $q=9$, $r=0$, $s=7$, to otrzymamy naszę liczbę.

W powyższem ogólnem wyrażeniu ułamkowem mamy w każdym wyrazie potęgę liczby n; tę liczbę nazwiemy p o d s t a w ą (Grundzahl). Zauważmy, że, nadawszy podstawie n wartość 10, moglibyśmy każdej z liter $a, b, \ldots, f, g, p, q, \ldots, u, w$ nadawać którąkolwiek z wartości $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$. A więc każda z tych liter może przedstawiać 0, alboteż liczbę mniejszą od podstawy.

Przy takiem zastrzeżeniu co do wartości, jakie otrzymywać mogą litery $a, b, \ldots, g, p, \ldots, w$, moglibyśmy podstawie n nadać wartość inną niż 10.

Jeżeli np. $n = 4$, to każda z liter $a, b, \ldots, g, p, \ldots, w$ może otrzymywać tylko wartości 0, 1, 2, 3. Wtedy szczególnym przypadkiem naszego ogólnego wyrażenia ułamkowego będzie np. liczba

$$2.4^5 + 0.4^4 + 1.4^3 + 2.4^2 + 1.4 + 3.4^0 + 2\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4^2} + 0\cdot\frac{1}{4^3} + 3\cdot\frac{1}{4^4}\cdot$$

Gdybyśmy tę liczbę chcieli napisać według zasady podobnej do tej, którą stosujemy w systemacie dziesiątkowym, to wypadłoby na »pierwszem« miejscu (przed kropką) postawić cyfrę 3, która w tem wyrażeniu jest mnożona przez $n^0 = 4^0$, na »drugiem« cyfrę 1, która jest mnożona przez podstawę 4, na »trzeciem« cyfrę 2, która jest mnożona przez kwadrat podstawy 4, i t. d.; po kropce zaś należałoby postawić naprzód cyfrę 2, która jest mnożona przez odwrotność podstawy 4, obok niej cyfrę 1, mnożoną przez odwrotność kwadratu podstawy 4, i t. d. — Aby zaznaczyć, że nie należy tak wypisanej liczby uważać za napisaną w systemacie dziesiątkowym, ujmiemy ją np. w nawias i dodamy po nawiasie u dołu liczbę 4, oznaczającą podstawę,

$$[201213\cdot2103]_4\,.$$

O liczbie samej, znajdującej się w tym nawiasie, powiemy, iż jest napisana w systemacie czwórkowym.

Jeżeli np. $n = 12$, to każda z liter $a, b, \ldots, g, p, \ldots, w$ w naszem ogólnem wyrażeniu ułamkowem otrzymywać może wartości $0, 1, 2, \ldots, 11$. Szczególnym wtedy przypadkiem naszego wyrażenia będzie np.

$$8.12^3 + 11.12^2 + 10.12 + 7.12^0 + 5\cdot\frac{1}{12} + 11\cdot\frac{1}{12^2} + 0\cdot\frac{1}{12^3} + 6\cdot\frac{1}{12^4}\cdot$$

Gdybyśmy i tę liczbę chcieli napisać podobnie, jak liczbę w poprzednim przykładzie, to musielibyśmy obmyślić osobne znaki (cyfry) dla 10 i 11. Oznaczywszy np. 10 przez β, zaś 11 przez δ, będziemy mogli tę liczbę tak napisać: $[8\delta\beta7\cdot5\delta06]_{12}$. Mówimy, że ta ostatnia liczba jest napisana w systemacie dwunastkowym.

Nadając inne wartości podstawie n, moglibyśmy mieć systemat np. piątkowy, dwudziestkowy i t. d. pisania liczb. Gdybyśmy wzięli $n = 2$, mielibyśmy systemat dwójkowy, zwany diadycznym; liczba, w tym systemacie napisana, miałaby tylko cyfry 0 i 1. Tak np. $[1011\cdot1101]_2 = 2^3 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4}\cdot$

132. Rozważymy, jak, mając liczbę napisaną w pewnym systemacie, przedstawić ją w systemacie dziesiątkowym. Np. gdy mamy $[4523\cdot1513]_6$, to, z uwagi, że

$$[(4.6+5).6+2].6+3=1059, \quad \tfrac{1}{6}\left\{1+\tfrac{1}{6}\left[5+\tfrac{1}{6}\left(1+\tfrac{1}{6}\cdot3\right)\right]\right\}=\tfrac{5}{16}=0\cdot3125,$$

jest

$$[4523\cdot1513]_6=1059\cdot3125.$$

133. Rozważymy teraz zadanie odwrotne: jak liczbę, napisaną w systemacie dziesiątkowym, przedstawić w innym systemacie? Np. liczbę $1059\cdot3125$ przedstawmy w systemacie szóstkowym. Z liczby 1059 będzie w systemacie szóstkowym tyle jedności do zaznaczenia na miejscu »pierwszem«, ile ich zostanie po odjęciu wielokrotności podstawy 6; ponieważ $1059 = 176 \times 6 + 3$, więc na »pierwszem« miejscu będzie cyfra 3. Mamy tu 176 razy 6; to, co zostanie z tej ilości 176 szóstek po odjęciu od liczby 176 wielokrotności podstawy 6 (czyli od liczby 176.6 wielokrotności liczby 6^2), wypadnie postawić na miejscu »drugiem«; ponieważ $176 = 29.6 + 2$, przeto $176.6 = 29.6^2 + 2.6$ i na miejscu »drugiem« postawimy 2. Podobnież z tego, że $29 = 4.6 + 5$, wynika, że na »trzeciem« miejscu postawimy 5, zaś na »czwartem« 4. Mamy więc

$$1059 = [(4.6+5).6+2].6+3 = [4523]_6 .$$

Co się zaś tyczy ułamka 0·3125, to wypadnie tak postąpić: $0{\cdot}3125 = \frac{5}{16}$; po kropce ma stać cyfra, oznaczająca, ile w tym ułamku jest części $\frac{1}{6}$; wykonawszy dzielenie $\frac{5}{16} : \frac{1}{6}$, otrzymamy

$$\tfrac{5}{16} : \tfrac{1}{6} = \tfrac{15}{8} = 1 + \tfrac{7}{8}, \quad \text{a więc} \quad \tfrac{5}{16} = \tfrac{1}{6}\left(1 + \tfrac{7}{8}\right).$$

Postępując podobnie dalej, mamy

$$\tfrac{7}{8} : \tfrac{1}{6} = \tfrac{21}{4} = 5 + \tfrac{1}{4}, \quad \text{a więc} \quad \tfrac{7}{8} = \tfrac{1}{6}\left(5 + \tfrac{1}{4}\right);$$

$$\tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{2} = 1 + \tfrac{1}{2}, \quad \text{a więc} \quad \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{6}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right);$$

$$\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{6} = 3, \quad \text{a więc} \quad \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{6} \cdot 3.$$

Jest zatem

$$0{\cdot}3125 = \tfrac{5}{16} = \tfrac{1}{6}\left\{1 + \tfrac{1}{6}\left[5 + \tfrac{1}{6}\left(1 + \tfrac{1}{6} \cdot 3\right)\right]\right\} = [0{\cdot}1513]_6 .$$

Przeto

$$1059{\cdot}3125 = [4523{\cdot}1513]_6 .$$

134. Wykonywanie czterech działań na liczbach, napisanych w systemacie niedziesiątkowym, odbywa się analogicznie do wykonywania ich na liczbach, napisanych w systemacie dziesiątkowym. Wykonajmy cztery działania na liczbach, napisanych w systemacie np. czwórkowym, czego już nie będziemy tu wskazywali zapomocą nawiasów z oznaczeniem podstawy. Samo wykonywanie można wyrozumieć, przyglądając się następnym przykładom i wciąż pamiętając, że podstawą jest liczba 4.

```
 203·1231            302·12
  30·321           − 113·20132
 233·3             -----------
   1·2013            122·31202.
---------
1201·2120.

   321·23 × 2·301        2133·20223 : 2·301
   --------------        2133202·23 | 2301
   321 23                20103      |------
  223 101                --------   | 321·23
 1303 12                  12230
 -----------              11202
 2133·202 23.             -----
                           10222
                            2301
                           -----
                           13212
                           11202
                           -----
                            20103
                            20103
                            -----
                               0.
```

Gdyby po uwzględnieniu wszystkich cyfr dzielnej zostawała reszta, a chcielibyśmy wyznaczyć dalsze cyfry ilorazu, to do owej reszty dopisalibyśmy 0 i t. d.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

STOSUNKI. PROPORCYE.

STOSUNKI.

135. Jeżeli iloraz otrzymany z podzielenia a przez b jest q, to wyrażenie tej liczby q przez liczby a i b nazywamy stosunkiem (Verhältnis) a do b. Powiemy więc: *stosunkiem dwu liczb nazywamy wyrażenie przez nie tej liczby, którą otrzymalibyśmy, dzieląc pierwszą z liczb danych przez drugą.*

Ponieważ ta liczba, którą stosunek wyraża, odpowiada ilorazowi, przeto zaznaczamy stosunek dwu liczb a i b, pisząc albo $a:b$, alboteż $\frac{a}{b}$, a czytając w obu razach: »stosunek a do b«.

Liczby a i b nazywają się wyrazami stosunku, pierwsza poprzednikiem (Vorderglied), druga następnikiem (Hinterglied), liczba zaś q, którą ten stosunek wyraża, nazywa się wykładnikiem (Quotient) stosunku. Ponieważ poprzednik odpowiada dzielnej, następnik dzielnikowi, wykładnik zaś stosunku ilorazowi, przeto:

poprzednik = następnikowi $\times$ wykładnik,
następnik = poprzednikowi : wykładnik,
wykładnik = poprzednikowi : następnik,

a nadto: jeżeli poprzednik pomnożymy lub podzielimy przez pewną liczbę, to wskutek tego wykładnik zostanie przez też liczbę odpowiednio pomnożony lub podzielony; jeżeli następnik pomnożymy lub podzielimy przez pewną liczbę, to wskutek tego wykładnik zostanie odpowiednio podzielony lub pomnożony przez też liczbę; jeżeli oba wyrazy stosunku albo jednocześnie pomnożymy, albo też jednocześnie podzielimy przez tę samę liczbę, to wykładnik stosunku się nie zmieni.

Korzystając z tej ostatniej własności, możemy: w razie, kiedy jeden lub oba wyrazy stosunku są ułamkowe, zastąpić je przez całkowite; jeżeli wyrazy stosunku mają spólny dzielnik, przezeń je podzielić; zmienić znaki obu wyrazów stosunku.

136. Gdy mamy dwie liczby a i b, to, zależnie od tego, którą z nich przyjmujemy jako poprzednik, istnieć mogą dwa stosunki tych liczb: albo $a:b$, albo też $b:a$. Jeżeli wykładnik pierwszego stosunku nazwiemy q, $a:b=q$, to $b:a=\frac{1}{q}$, t. j. z dwu stosunków $a:b$ i $b:a$ każdy wyraża liczbę, która jest odwrotnością liczby, wyrażonej przez stosunek pozostały. Dlatego mówimy, że stosunek $b:a$ jest stosunkiem odwrotnym (reciprokes V.) względem stosunku $a:b$.

137. Weźmy kilka stosunków. Poprzedniki ich oznaczmy przez tę samę literę np. a, dając tej literze z prawej strony u dołu wskaźniki (Indices): 1, 2, 3, . . ., n, tak iż np.[1]) a_3 oznaczać będzie poprzednik 3-go stosunku,

[1]) Zamiast czytać: a ze wskaźnikiem trzy, czytamy krótko: a trzy; podobnie a_1 czytamy: a jeden i t. d.; zaś a', a'', a''', a^{IV}, a^{V}, . . . czytać będziemy: a pierwsze, a drugie, a trzecie, a czwarte i t. d.

zaś a_n oznaczać będzie poprzednik n-go stosunku; podobnie następniki tych stosunków oznaczmy przez literę b z odpowiedniemi wskaźnikami. Będziemy więc mieli stosunki:

$$a_1 : b_1, \quad a_2 : b_2, \quad a_3 : b_3, \quad \ldots, \quad a_n : b_n.$$

Przypuśćmy, że wykładniki tych stosunków są tąż samą liczbą; nazwijmy ją q. Ponieważ stosunek jest wyrażeniem wykładnika, przeto stosunki, mające ten sam wykładnik, są równoznaczne, tak iż każdy z tych stosunków może być wzięty zamiast innego. Dlatego stosunki, mające ten sam wykładnik, nazywamy stosunkami równemi i możemy napisać

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \ldots = a_n : b_n = q.$$

Ponieważ z tych równych stosunków mamy

$$a_1 = q.b_1, \quad a_2 = q.b_2, \quad a_3 = q.b_3, \quad \ldots, \quad a_n = q.b_n,$$

przeto $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = q.(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n),$$

skąd $$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = q.$$

Jest więc $$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \text{ i t. d.},$$

t. j. *stosunek sumy poprzedników ilukolwiek równych stosunków do sumy ich następników jest równy każdemu z danych stosunków.*

Gdy $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = q$, to od pierwszej z równości:

$$a_1 = q.b_1, \quad a_2 = q.b_2$$

odjąwszy drugą stronami odpowiedniemi, mieć będziemy $a_1 - a_2 = q\,(b_1 - b_2)$,

skąd $$\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = q, \quad \text{a więc} \quad \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

t. j. *stosunek różnicy poprzedników dwu równych stosunków do różnicy ich następników jest równy każdemu z danych stosunków.*

PROPORCYE.

138. Gdy wyraźnie zaznaczymy, że pewne dwa stosunki są równe, to mówimy, że mamy proporcyą (Proportion), a więc *proporcya jestto zaznaczona równość dwu stosunków.*

Gdy tedy mamy np. proporcyą

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2, \quad \text{czyli} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

to czytamy ją: »stosunek a_1 do b_1 jest równy stosunkowi a_2 do b_2«, albo-też niekiedy krócej: »a_1 do b_1 równa się a_2 do b_2«. Proporcya ma cztery wyrazy: dwa poprzedniki a_1 i a_2 i dwa następniki b_1 i b_2. Wyrazy pierwszy i ostatni, a_1 i b_2, nazywają się wyrazami skrajnemi (äussere G.), zaś drugi i trzeci, b_1 i a_2, nazywają się wyrazami średniemi (mittlere G.). Wykładnik stosunków proporcyi można nazywać wykładnikiem proporcyi.

Wszystkie cztery liczby, stanowiące wyrazy proporcyi, nazywamy ogólnie czterema liczbami proporcyonalnemi. Gdy o pewnych czterech liczbach mówimy, że one są proporcyonalne, to rozumiemy przez to, iż stosunek dwu pierwszych z nich jest równy stosunkowi dwu pozostałych.

139. Gdy weźmiemy proporcyą

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2$$

i wykładnik jej nazwiemy q, to $a_1 = q . b_1$, $a_2 = q . b_2$. Mnożąc obie strony pierwszej równości przez b_2, obie zaś strony drugiej przez b_1, mieć będziemy $a_1 b_2 = q b_1 b_2$, $b_1 a_2 = q b_1 b_2$, skąd

$$a_1 b_2 = b_1 a_2,$$

t. j. *iloczyn wyrazów skrajnych proporcyi jest równy iloczynowi jej wyrazów średnich.* Ta własność nazywa się główną własnością proporcyi.

Z ostatniej równości wynika

$$a_1 = \frac{b_1 a_2}{b_2}, \quad b_2 = \frac{b_1 a_2}{a_1}, \quad b_1 = \frac{a_1 b_2}{a_2}, \quad a_2 = \frac{a_1 b_2}{b_1},$$

t. j. *wyraz skrajny proporcyi równa się iloczynowi średnich, podzielonemu przez pozostały skrajny,* zaś *wyraz średni proporcyi równa się iloczynowi skrajnych, podzielonemu przez pozostały średni.*

Na mocy tego możemy w przypadku, kiedy którykolwiek z wyrazów proporcyi jest niewiadomy, obliczyć go. Tak np. gdy mamy $x : 5 = 3 : (-2)$, to $x = \frac{5 . 3}{-2} = -7 \cdot 5$. Z tego wynika, że wogóle trzy wyrazy proporcyi, zajmujące oznaczone w niej miejsca, wyznaczają czwarty jej wyraz, czyli, że *do trzech liczb, zajmujących w proporcyi oznaczone miejsca, można znaleźć czwartą proporcyonalną.*

140. Widzieliśmy, że proporcya prowadzi do równości dwu iloczynów dwuczynnikowych. Nawzajem, gdy mamy dwa równe iloczyny dwuczynnikowe, np.

$$a\alpha = b\beta,$$

to, dzieląc obie strony tej równości przez iloczyn jednego czynnika pierwszego iloczynu i jednego czynnika drugiego iloczynu, np. przez αb, będziemy mieli

$$a : b = \beta : \alpha,$$

t. j. *z dwu równych iloczynów dwuczynnikowych można utworzyć proporcyą, biorąc czynniki jednego iloczynu za wyrazy skrajne, a czynniki pozostałego za wyrazy średnie.*

Kiedy $a = bc$, to np. $a : b = c : 1$; kiedy $abc = df$, to np. $ab : d = f : c$.

141. Z proporcyi $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ mamy $a_1 b_2 = b_1 a_2$. Z tych dwu równych iloczynów można utworzyć proporcyą, biorąc czynniki pierwszego iloczynu jużto za wyrazy skrajne, jużteż za wyrazy średnie, a wtedy czynniki drugiego iloczynu będą odpowiednio albo wyrazami średniemi, alboteż skrajnemi. W każdym z tych dwu przypadków możemy z czynników iloczynu $a_1 b_2$ napisać naprzód albo czynnik a_1, alboteż czynnik b_2, a przytem w każdym z tych czterech już przypadków możemy z czynników drugiego iloczynu $b_1 a_2$ napisać naprzód albo czynnik b_1, alboteż czynnik a_2. Będziemy więc mieli:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2, \quad a_1 : a_2 = b_1 : b_2; \quad b_2 : b_1 = a_2 : a_1, \quad b_2 : a_2 = b_1 : a_1;$$
$$b_1 : a_1 = b_2 : a_2, \quad a_2 : a_1 = b_2 : b_1; \quad b_1 : b_2 = a_1 : a_2, \quad a_2 : b_2 = a_1 : b_1.$$

Porównywając np. pierwszą z tych proporcyj z pozostałemi, widzimy, że jej wyrazy mogą być ośmiu sposobami ustawione w proporcyą. Można te proporcye otrzymać z jednej z nich, naprzemian to przestawiając wyrazy średnie, to zastępując oba stosunki przez odwrotne (art. 136).

142. Gdy mamy $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, to (art. 135)

$$a_1 m : b_1 m = a_2 : b_2, \quad \frac{a_1}{m} : \frac{b_1}{m} = a_2 : b_2, \quad a_1 : b_1 = a_2 m : b_2 m, \quad a_1 : b_1 = \frac{a_2}{m} : \frac{b_2}{m}.$$

Jeżelibyśmy w danej proporcyi przestawili wyrazy średnie (art. 141), a w otrzymanej proporcyi $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ pomnożyli np. oba wyrazy pierwszego stosunku przez m, a w tak powstałej proporcyi $a_1 m : a_2 m = b_1 : b_2$ znów przestawili wyrazy średnie, to otrzymalibyśmy $a_1 m : b_1 = a_2 m : b_2$. Takim sposobem możemy okazać, że jest

$$a_1 m : b_1 = a_2 m : b_2, \quad \frac{a_1}{m} : b_1 = \frac{a_2}{m} : b_2, \quad a_1 : b_1 m = a_2 : b_2 m, \quad a_1 : \frac{b_1}{m} = a_2 : \frac{b_2}{m}.$$

A więc *w proporcyi możemy którykolwiek wyraz skrajny i którykolwiek wyraz średni albo jednocześnie pomnożyć, alboteż jednocześnie podzielić przez tę samę liczbę.*

Z tego wynika, że *wszystkie wyrazy proporcyi możemy jednocześnie albo pomnożyć, alboteż podzielić przez tę samę liczbę.*

Gdy mamy $15:(-20)=(-9):12$, to $(-15):(-20)=9:12$ i $15:20=9:12$. Wogóle proporcyą, w której zachodzą wyrazy ujemne, można zastąpić przez proporcyą o samych tylko wyrazach dodatnych.

143. Przekształcenia proporcyi. Gdy mamy proporcyą $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, której wykładnik jest q, to (art. 137)

$$(a_1 + a_2) : (b_1 + b_2) = a_1 : b_1 = a_2 : b_2, \quad (a_1 - a_2) : (b_1 - b_2) = a_1 : b_1 = a_2 : b_2,$$

co łącznie tak piszemy:

$$(a_1 \pm a_2) : (b_1 \pm b_2) = a_1 : b_1 = a_2 : b_2,$$

rozumiejąc, że z podwójnych znaków bierzemy jednocześnie albo znaki górne, alboteż dolne. Własność tę tak wypowiemy: *stosunek sumy lub różnicy poprzedników proporcyi do odpowiednio sumy lub różnicy jej następników jest równy stosunkowi któregokolwiek z jej poprzedników do odpowiedniego następnika.*

Zestawiając z sobą poprzednio wypisane równości stosunków, widzimy, że $(a_1 + a_2) : (b_1 + b_2) = (a_1 - a_2) : (b_1 - b_2)$, czyli, po przestawieniu wyrazów średnich,

$$(a_1 + a_2) : (a_1 - a_2) = (b_1 + b_2) : (b_1 - b_2),$$

t. j. *stosunek sumy poprzedników proporcyi do ich różnicy jest równy stosunkowi sumy jej następników do ich różnicy.*

Jeżeli w danej proporcyi $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ przestawimy wyrazy średnie i do tak otrzymanej proporcyi $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ zastosujemy wypowiedziane powyżej własności, to będziemy mieli

$$(a_1 \pm b_1) : (a_2 \pm b_2) = a_1 : a_2 = b_1 : b_2, \quad (a_1 + b_1) : (a_1 - b_1) = (a_2 + b_2) : (a_2 - b_2).$$

Porównywając to z daną proporcyą, widzimy, że *stosunek sumy lub różnicy wyrazów pierwszego stosunku proporcyi do odpowiednio sumy lub różnicy wy-*

razów drugiego jej stosunku jest równy stosunkowi pierwszego poprzednika do drugiego, jakoteż stosunkowi pierwszego następnika do drugiego, a nadto *stosunek sumy wyrazów pierwszego stosunku proporcyi do ich różnicy jest równy stosunkowi sumy wyrazów drugiego jej stosunku do ich różnicy.*

Utworzenie z danej proporcyi którejkolwiek z proporcyj, tu wyprowadzonych, nazywa się przekształceniem proporcyi (Umformung d. P.).

144. Proporcye złożone. Jeżeli z dwu lub więcej proporcyj danych dochodzimy do nowej proporcyi, to tę ostatnią, ze względu na dane, nazywamy proporcyą złożoną (zusammengesetzte P.).

α. Gdy w dwu proporcyach jeden ze stosunków jest ten sam, np. $a_1:b_1=a_2:b_2$ i $a_3:b_3=a_1:b_1$, to stosunki pozostałe, t. j. $a_2:b_2$ i $a_3:b_3$, jako mające ten sam wykładnik, są sobie równe, $a_2:b_2=a_3:b_3$. A więc, *gdy dwie proporcye mają jeden stosunek spólny, to z pozostałych ich stosunków można utworzyć proporcyą.*

β. Gdy mamy $a_1:b_1=a_2:b_2$ i $a_1:\beta_1=a_2:\beta_2$, to, przestawiwszy wyrazy średnie, następnie zaś zastosowawszy własność α., mieć będziemy $b_1:b_2=\beta_1:\beta_2$, t. j. *kiedy dwie proporcye mają odpowiednie poprzedniki jednakowe, to z ich następników można utworzyć proporcyą.* Podobnie okazać możemy, że, *kiedy dwie proporcye mają odpowiednie następniki jednakowe, to z ich poprzedników można utworzyć proporcyą.*

Jeżeli mamy kilka proporcyj z temiż samemi odpowiedniemi czyto poprzednikami, czyteż następnikami, np.

$$a_1:b_1=a_2:b_2,\quad a_1:c_1=a_2:c_2,\quad a_1:d_1=a_2:d_2,\quad a_1:e_1=a_2:e_2,$$

to:

$$\begin{aligned} b_1:c_1&=b_2:c_2, & b_1:d_1&=b_2:d_2, & b_1:e_1&=b_2:e_2,\\ & & c_1:d_1&=c_2:d_2, & c_1:e_1&=c_2:e_2,\\ & & & & d_1:e_1&=d_2:e_2.\end{aligned}$$

Zwykle te proporcye łącznie przedstawiamy w taki sposób:

$$a_1:b_1:c_1:d_1:e_1=a_2:b_2:c_2:d_2:e_2,$$

rozumiejąc, że każde dwie liczby przed znakiem = oraz dwie liczby na odpowiednich miejscach po znaku = są czterema liczbami proporcyonalnemi (art. 138), co zwykle wyrażamy, mówiąc, że liczby a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 są proporcyonalne względem odpowiednich liczb a_2, b_2, c_2, d_2, e_2.

γ. Jeżeli mamy kilka proporcyj o tym samym wykładniku, który nazwijmy q, np.

$$a_1:b_1=a_2:b_2,\quad \alpha_1:\beta_1=\alpha_2:\beta_2,\quad \ldots,\quad A_1:B_1=A_2:B_2,$$

to:

$$\begin{aligned} a_1&=qb_1, & a_2&=qb_2,\\ \alpha_1&=q\beta_1, & \alpha_2&=q\beta_2,\\ &\ldots\ldots, & &\ldots\ldots,\\ A_1&=qB_1, & A_2&=qB_2;\end{aligned}$$

dodając do siebie stronami odpowiedniemi równości każdej z tych kolumn, otrzymamy

$$a_1+\alpha_1+\ldots+A_1=q(b_1+\beta_1+\ldots+B_1),\qquad a_2+\alpha_2+\ldots+A_2=q(b_2+\beta_2+\ldots+B_2),$$

skąd $(a_1+\alpha_1+\ldots+A_1):(b_1+\beta_1+\ldots+B_1)=q,\quad (a_2+\alpha_2+\ldots+A_2):(b_2+\beta_2+\ldots+B_2)=q,$

a więc $(a_1+\alpha_1+\ldots+A_1):(b_1+\beta_1+\ldots+B_1)=(a_2+\alpha_2+\ldots+A_2):(b_2+\beta_2+\ldots+B_2),$

t. j. *dwie lub więcej proporcyj, mających ten sam wykładnik, można dodać do siebie wyrazami odpowiedniemi.* Wykładnik tak otrzymanej proporcyi jest ten sam, co każdej z danych proporcyj.

Gdy dwie proporcye $a_1:b_1=a_2:b_2$, $\alpha_1:\beta_1=\alpha_2:\beta_2$ mają ten sam wykładnik, to, rozumując podobnie, jak poprzednio, dojść możemy do proporcyi

$$(a_1-\alpha_1):(b_1-\beta_1)=(a_2-\alpha_2):(b_2-\beta_2),$$

t. j. *od jednej z dwu proporcyj, mających ten sam wykładnik, można pozostałą odjąć wyrazami odpowiedniemi.* Wykładnik tak otrzymanej proporcyi jest ten sam, co proporcyj danych.

δ. Gdy dane są proporcye (z jakiemikolwiek wykładnikami),

$$a_1:b_1=a_2:b_2,\quad \alpha_1:\beta_1=\alpha_2:\beta_2,\ \ldots,\ A_1:B_1=A_2:B_2,$$

pierwsza z wykładnikiem q, druga ρ, ..., ostatnia Q, to:

$$\begin{array}{ll} a_1=qb_1, & a_2=qb_2, \\ \alpha_1=\rho\beta_1, & \alpha_2=\rho\beta_2, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ A_1=QB_1, & A_2=QB_2; \end{array}$$

mnożąc równości każdej kolumny przez siebie stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$a_1\alpha_1\ldots A_1=q\rho\ldots Q.b_1\beta_1\ldots B_1,\quad a_2\alpha_2\ldots A_2=q\rho\ldots Q.b_2\beta_2\ldots B_2,$$

skąd $(a_1\alpha_1\ldots A_1):(b_1\beta_1\ldots B_1)=q\rho\ldots Q,\quad (a_2\alpha_2\ldots A_2):(b_2\beta_2\ldots B_2)=q\rho\ldots Q,$

a więc $(a_1\alpha_1\ldots A_1):(b_1\beta_1\ldots B_1)=(a_2\alpha_2\ldots A_2):(b_2\beta_2\ldots B_2),$

t. j. *można dane proporcye pomnożyć przez siebie wyrazami odpowiedniemi.* Wykładnik tak otrzymanej proporcyi jest iloczynem wykładników danych proporcyj.

Jeżelibyśmy nakoniec, mając dwie proporcye $a_1:b_1=a_2:b_2$, $\alpha_1:\beta_1=\alpha_2:\beta_2$, pierwszą o wykładniku q, drugą o wykładniku ρ, utworzyli równości

$$\begin{array}{ll} a_1=qb_1, & a_2=qb_2, \\ \alpha_1=\rho\beta_1, & \alpha_2=\rho\beta_2 \end{array}$$

i pierwsze z nich podzielili przez drugie stronami odpowiedniemi, to otrzymalibyśmy

$$\frac{a_1}{\alpha_1}=\frac{qb_1}{\rho\beta_1},\qquad \frac{a_2}{\alpha_2}=\frac{qb_2}{\rho\beta_2},$$

czyli $$\frac{a_1}{\alpha_1}=\frac{q}{\rho}.\frac{b_1}{\beta_1},\qquad \frac{a_2}{\alpha_2}=\frac{q}{\rho}.\frac{b_2}{\beta_2},$$

skąd $$\frac{a_1}{\alpha_1}:\frac{b_1}{\beta_1}=\frac{q}{\rho},\qquad \frac{a_2}{\alpha_2}:\frac{b_2}{\beta_2}=\frac{q}{\rho},$$

a więc $$\frac{a_1}{\alpha_1}:\frac{b_1}{\beta_1}=\frac{a_2}{\alpha_2}:\frac{b_2}{\beta_2},$$

t. j. *mając dwie proporcye, można jednę z nich podzielić przez pozostałą wyrazami odpowiedniemi.* Wykładnik tak otrzymanej proporcyi jest ilorazem wykładników proporcyj danych.

145. Średnia geometryczna dwu liczb. Jeżeli w proporcyi albo oba wyrazy średnie, albo też oba wyrazy skrajne są tąż samą liczbą,

$$a:c=c:b,\quad \text{lub}\quad c:a=b:c,$$

to w obu razach na mocy głównej własności proporcyi jest

$$c^2=ab.$$

Tak przy c dodatnem jak i przy c ujemnem jest c^2 liczbą dodatną; więc iloczyn ab jest także liczbą dodatną, t. j. liczby a i b mogą być albo obie dodatne, albo też obie ujemne. Gdyby obie były ujemne, to na mocy własności art. 142-go możemy je zastąpić przez dodatne o tej samej wartości bezwzględnej.

Dlatego zwykle rozważamy tylko przypadek, kiedy liczby a i b są obie dodatne.

Przy danych dwu liczbach a i b, liczbę c taką, iż $c^2 = ab$, nazywamy **średnią geometryczną dwu liczb** (geometrisches Mittel) a i b. A więc *średnia geometryczna dwu liczb jestto liczba, której kwadrat jest równy iloczynowi tych liczb.*

Gdy $c^2 = ab$ i gdy wartość bezwzględną liczby c nazwiemy γ, to tak $c = +\gamma$, jak i $c = -\gamma$ jest średnią geometryczną liczb a i b; np. $8:20 = 20:50$, jak również $8 : -20 = -20 : 50$. Jednak z dwu wartości średniej geometrycznej zwykle rozważamy tylko jej wartość dodatną. Tak więc zwykle przez średnią geometryczną liczb np. $a = 8$, $b = 50$ rozumiemy tylko liczbę $c = +20$.

Proporcyą $a : c = c : b$, w której wyrazy średnie są sobie równe, nazywamy **proporcyą ciągłą** (stetige P.). Liczbę c nazywają także **średnią proporcyonalną dwu liczb** (mittlere Proportionale) a i b.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

WIELKOŚCI PROPORCYONALNE.

WARTOŚCI Z SOBĄ SPÓŁMIERNE I NIESPÓŁMIERNE.

146. Jak wiemy (art. 63), wielkość może mieć różne wartości. Wielkość pewną nazwijmy A, jakiekolwiek zaś dwie jej wartości A_1 i A_2. Np. jeżeli A jest wogóle długością odcinka linii prostej, to pewne oznaczone dwie wartości A_1 i A_2 tej wielkości będą określonemi odcinkami linii prostej.

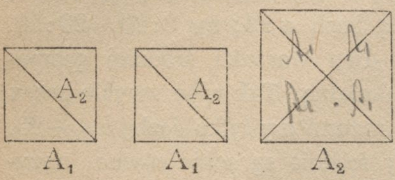
Gdy mamy dwie wartości tej samej wielkości, to możemy rozważać ich stosunek. Aby mieć pojęcie o ich stosunku, trzeba jednę z tych wartości wymierzyć wartością pozostałą, alboteż jej częścią (otrzymaną z rozłożenia tej wartości na części równe).

Jeżeli np. odcinek A_1 mieści się dokładnie p razy (przy p całkowitem) w odcinku A_2, to $A_2 = A_1 . p$ i możemy powiedzieć, że odcinek A_1 jest **miarą** (Mass) odcinka A_2. Wtedy stosunek $A_2 : A_1$ jest równy stosunkowi $p : 1$, tak iż, jeżeli ogólnie wykładnik stosunku tych dwu odcinków $A_2 : A_1$ nazwiemy w, to ich stosunek będzie w tym razie wyrażał liczbę całkowitą $w = p$.

Jeżeli odcinek A_1 nie mieści się dokładnie w odcinku A_2, ale q-ta część (przy q całkowitem) odcinka A_1, t. j. odcinek $\frac{A_1}{q}$, mieści się dokładnie np. p razy w odcinku A_2, to wtedy $A_2 = \frac{A_1}{q} \cdot p$ i odcinek $\frac{A_1}{q}$, mieszczący się q razy w odcinku A_1, zaś p razy w odcinku A_2, jest **spólną miarą** odcinków A_1 i A_2. Wtedy stosunek $A_2 : A_1$ jest równy stosunkowi $p : q$, tak iż wyraża liczbę ułamkową $w = \frac{p}{q}$.

Wogóle, jeżeli dwie wartości A_1 i A_2 tej samej wielkości mają jakąkolwiek spólną miarę μ, t. j. gdy μ w każdej z nich mieści się całkowitą ilość razy, tak iż np. $A_1 = \mu . q$, $A_2 = \mu . p$, to wówczas stosunek $A_2 : A_1$, jako równy stosunkowi $p : q$, wyraża liczbę $w = \frac{p}{q}$, która jest całkowita lub ułamkowa, stosownie do tego, czy p jest podzielne, czyteż niepodzielne przez q.

147. Weźmy na uwagę dwa szczególne odcinki A_1 i A_2, mianowicie: niech A_1 będzie bokiem, zaś A_2 przekątną kwadratu. Wykładnik stosunku $A_2 : A_1$ tych odcinków nazwijmy w; będzie więc $A_2 = A_1 w$, t. j. odcinek A_2 jest w razy większy od odcinka A_1. Gdy narysujemy dwa takie kwadraty i wystawimy sobie, że je wzdłuż przekątnych przetniemy na połowy, to z tak otrzymanych czterech trójkątów możemy utworzyć kwadrat, którego bokiem będzie odcinek A_2. Skoro odcinek A_2 jest większy w razy od odcinka A_1, to kwadrat, wystawiony na odcinku A_2, ma pole w^2 razy większe od pola kwadratu, wystawionego na odcinku A_1, a więc stosunek pola kwadratu na A_2 do pola kwadratu na A_1 jest równy w^2. Z rysunku zaś jest rzeczą widoczną, że kwadrat o boku A_2 ma pole dwa razy większe, niż kwadrat o boku A_1. Zatem



$$w^2 = 2,$$

t. j. w jest liczbą, której kwadrat jest 2. Ta liczba w jest większa od 1, a mniejsza od 2 (gdyż $1^2 = 1 < 2$, zaś $2^2 = 4 > 2$), nie jest więc całkowita.

Przypuśćmy, że w jest liczbą ułamkową, $w = \frac{l}{m}$, gdzie przyjmujemy, że l i m są liczbami pierwszemi względem siebie. W takim razie byłoby $w^2 = \frac{l}{m} \cdot \frac{l}{m} = \frac{l.l}{m.m}$, czyli $2 = \frac{l.l}{m.m}$. Licznik tego ułamka rozkłada się tylko na takie czynniki pierwsze, na jakie rozkłada się liczba l, mianownik zaś rozkłada się tylko na takie czynniki pierwsze, na jakie rozkłada się liczba m, pierwsza względem l; a więc tu licznik i mianownik nie mają żadnego spólnego dzielnika, są liczbami pierwszemi względem siebie, wskutek czego licznik nie jest podzielny przez mianownik, czyli nie może być $\frac{l.l}{m.m} = 2$. A więc nie może być $w = \frac{l}{m}$, liczbie ułamkowej.

Ponieważ liczba w nie jest w tym przypadku ani liczbą całkowitą, aniteż ułamkową, przeto, według tego, cośmy na końcu art. poprzedniego powiedzieli, odcinki A_1 i A_2 *nie mają spólnej miary.*

Jeżeli dwie wartości pewnej wielkości nie mają spólnej miary, to nazywamy je niespółmiernemi (incommensurabel) z sobą; w przeciwstawieniu zaś, wartości, mające spólną miarę, nazywamy spółmiernemi (commensurabel) z sobą.

Podobnie i dwie liczby mogą być z sobą spółmierne lub niespółmierne. Tak np. liczby całkowite i ułamkowe są z sobą spółmierne (np. liczby 5, $\frac{3}{14}$, $\frac{12}{35}$ mają spólną miarę $\frac{1}{70}$, albo $\frac{1}{140}$, albo $\frac{1}{210}$ i t. d.; największą ich spólną miarą jest $\frac{1}{70}$). Liczba zaś w, której kwadrat jest 2, nie będąca ani liczbą całkowitą, aniteż ułamkową, jest niespółmierna z jednością.

148. Gdy mamy dwie wartości A_1 i A_2 niespółmierne, np. powyżej rozważane A_1, bok kwadratu, i A_2, jego przekątną, to o dokładnem wymierzeniu np. odcinka A_2 odcinkiem A_1, albotęż jego jakąś q-tą częścią, t. j. odcinkiem $\frac{A_1}{q}$, mowy być nie może. Jeżeli jednak okaże się, że taka część $\frac{A_1}{q}$ mieści się w odcinku A_2 np. p razy, ale już $p+1$ razy się nie mieści, to widocznie odcinek A_2 jest większy niż $\frac{A_1}{q} \times p$, czyli $A_1 \times \frac{p}{q}$, a mniejszy niż $\frac{A_1}{q} \times (p+1)$, czyli $A_1 \times \frac{p+1}{q}$. Wiemy zaś, że $A_2 = A_1 \times w$. Ponieważ tedy

$$A_2 > A_1 \times \frac{p}{q}, \quad A_2 = A_1 \times w, \quad A_2 < A_1 \times \frac{p+1}{q},$$

przeto
$$\frac{p}{q} < w < \frac{p+1}{q}.$$

A ponieważ różnica między $\frac{p+1}{q}$ i $\frac{p}{q}$ wynosi $\frac{1}{q}$, przeto każda z dwu różnic: $w - \frac{p}{q}$, $\frac{p+1}{q} - w$ jest mniejsza od liczby $\frac{1}{q}$. A więc, mając liczbę w, niespółmierną z jednością, możemy przy dowolnie obranej liczbie q (całkowitej) znaleźć takie dwa ułamki $\frac{p}{q}$ i $\frac{p+1}{q}$, iż każdy z nich różni się od tej liczby w mniej niż o $\frac{1}{q}$. Biorąc coraz większe q (i odpowiednie dobierając p), będziemy pewni, iż każdy z owych dwu ułamków jest coraz bliższy liczby w, a przyjmując q dostatecznie wielkie, możemy otrzymać dwa takie ułamki, tak bliskie liczby w, jak chcemy. Tak np., gdy w jest liczbą, której kwadrat jest 2, to liczba w jest zawarta między $\frac{2}{2}$ i $\frac{2+1}{2}$ (gdyż $1^2 < 2$, $(\frac{3}{2})^2 > 2$), między $\frac{4}{3}$ i $\frac{4+1}{3}$, między $\frac{5}{4}$ i $\frac{5+1}{4}$, między $\frac{7}{5}$ i $\frac{7+1}{5}$, i t. d., między $\frac{98}{70}$ i $\frac{98+1}{70}$, i t. d.

Chociaż więc przekątnej A_2 nie można dokładnie wymierzyć bokiem A_1, ani jego jakąkolwiek q-tą częścią, to jednak, wziąwszy tak wielkie q, aby odcinek $\frac{A_1}{q}$ był już dostatecznie mały, i oznaczywszy, że on się mieści w odcinku A_2 więcej niż p, a mniej niż $p+1$ razy, za wymiar odcinka A_2 przyjmujemy albo $A_1 \times \frac{p}{q}$, albotęż $A_1 \times \frac{p+1}{q}$, co nam daje pojęcie o wielkości odcinka A_2 takie, iż niedokładność jest mniejsza od $\frac{A_1}{q}$. Tak rozumiemy wymierzanie jednej z dwu wartości z sobą niespółmiernych zapomocą drugiej z tych wartości.

WIELKOŚCI PROPORCYONALNE.

149. Jeżeli dwie wielkości zmieniają się jednocześnie w ten sposób, iż stosunek dwu jakichkolwiek wartości jednej z tych wielkości jest równy stosunkowi odpowiadających wartości wielkości pozostałej, to mówimy, że mamy dwie wielkości proporcyonalne względem siebie, albo, że one się zmieniają w tym samym stosunku. Tak np. droga, przebieżona przez ciało, poruszające się ze stałą prędkością, jest proporcyonalna względem czasu, w którym ten ruch się odbywa.

Weźmy na uwagę dwie wielkości, które nazwijmy ogólnie A i B; niech A_1 i A_2 będą dwiema jakiemikolwiek wartościami wielkości A, zaś B_1 i B_2 niech będą odpowiadającemi wartościami wielkości B. Wielkości A i B są proporcyonalne względem siebie, kiedy $A_2 : A_1 = B_2 : B_1$.

Jeżeli wykładnik tych stosunków nazwiemy w, to mamy jednocześnie

$$A_2 = A_1 . w, \qquad B_2 = B_1 . w,$$

t. j. *kiedy dwie wielkości są proporcyonalne względem siebie, to, mnożąc którekolwiek odpowiadające sobie wartości tych wielkości przez tę samę liczbę, otrzymujemy inne ich wartości, również odpowiadające sobie.*

Gdy wartości A_1 i A_2 wymierzymy jednostką, jednorodną z wielkością A, tak iż $A_1 = a_1$ takich jednostek, zaś $A_2 = a_2$ tychże jednostek, i wartości B_1 i B_2 wymierzymy jednostką, jednorodną z wielkością B, tak iż $B_1 = b_1$ takich jednostek, zaś $B_2 = b_2$ tychże jednostek, to stosunek $A_2 : A_1$ możemy zastąpić stosunkiem liczb oderwanych $a_2 : a_1$, a stosunek $B_2 : B_1$ stosunkiem liczb oderwanych $b_2 : b_1$ i będziemy mieli $a_2 : a_1 = b_2 : b_1$. Przestawiając w tej proporcyi wyrazy średnie, mamy $a_2 : b_2 = a_1 : b_1$. Gdyby podobnie A_3 i B_3 były odpowiadającemi sobie wartościami wielkości A i B i w wartości A_3 było a_3 jednostek takich samych, jak poprzednio a_1 w A_1, zaś w wartości B_3 było b_3 jednostek takich samych, jak poprzednio b_1 w B_1, to mielibyśmy $a_3 : b_3 = a_2 : b_2 = a_1 : b_1$. I t. d.

A więc, *gdy dwie wielkości są proporcyonalne względem siebie, to stosunek liczb oderwanych, przez które wyrażają się ich wartości sobie odpowiadające, jest stały.* Tak np. niech ciało biegnie z prędkością stałą i niech w 2 sekundy przebiega 60 metrów, to wartościom: 2 sekundy, 5 sekund, 7 sekund wielkości: czasu przebiegu odpowiadają wartości: 60 m, 150 m, 210 m wielkości: drogi przebieżonej — i $2 : 60 = 5 : 150 = 7 : 210$ [1]).

Jeżeli, umówiwszy się, jaką jednostką wymierzamy wartości A_1, A_2, A_3 i t. d., czyli wogóle wielkość A, i jaką jednostką wymierzamy wartości B_1, B_2, B_3 i t. d., czyli wogóle wielkość B, wykładnik stosunku $a_1 : b_1$ nazwiemy m, to będziemy mieli $a_1 = mb_1$, $a_2 = mb_2$, i t. d. Ogólnie piszemy zwykle

$$a = mb, \qquad \text{albo} \qquad \frac{a}{b} = m,$$

rozumiejąc przez a i b liczby oderwane, przez które wyrażają się, przy pomocy odpowiednich jednostek, którekolwiek dwie odpowiadające sobie wartości wielkości A i B.

Czem tu jest liczba m? Jeżeli w równości $a = mb$ przyjmiemy $b = 1$, t. j. jeżeli bierzemy wartość wielkości B równą jednostce, którą tę wielkość mierzymy, to wtedy $a = m$. Widzimy zatem, że m jest liczbą oderwaną, przez którą wyraża się wartość wielkości A, odpowiadająca wartości, równej jednostce, wielkości B.

---

[1]) Gdybyśmy te same drogi wyrazili w łokciach, przyjmując 1 łokieć $= 0{\cdot}6\,m$, to byłoby $2 : 100 = 5 : 250 = 7 : 350$. Widzimy więc, że ten stały stosunek zależy od tego, jakie wybieramy jednostki; pierwsze stosunki mają wykładnik $\frac{1}{30}$, drugie zaś stosunki, związane z temiż samemi wartościami rozważanych wielkości, mają wykładnik $\frac{1}{50}$.

150. Jeżeli dwie wielkości zmieniają się jednocześnie w ten sposób, iż stosunek dwu jakichkolwiek wartości jednej wielkości jest równy stosunkowi odwrotnemu (art. 136) dwu odpowiadających wartości wielkości pozostałej, to mówimy, że są takie dwie wielkości odwrotnie proporcyonalne względem siebie (verkehrt proportionirte G.), albo, że one zmieniają się w stosunku odwrotnym. Tak np. przeciąg czasu, w którym ciało, poruszające się ruchem jednostajnym, przebiega pewną drogę, jest odwrotnie proporcyonalny względem prędkości tego ruchu.

Gdy w zadaniu obok wielkości odwrotnie proporcyonalnych występują wielkości, któreśmy w art. poprzednim nazwali proporcyonalnemi, to zwykle te ostatnie nazywamy wtedy wprost proporcyonalnemi względem siebie (gerade p.) w przeciwstawieniu wielkościom odwrotnie proporcyonalnym.

Weźmy na uwagę dwie wielkości, jednę A, drugą B; niech A_1 i A_2 będą dwiema jakiemikolwiek wartościami wielkości A, zaś B_1 i B_2 dwiema odpowiadającemi wartościami wielkości B. Wielkości A i B są odwrotnie proporcyonalne względem siebie, kiedy $A_2 : A_1 = B_1 : B_2$.

Jeżeli wykładnik tych stosunków nazwiemy w, to mamy jednocześnie

$$A_2 = A_1 w, \qquad B_2 = \frac{B_1}{w},$$

t. j. *kiedy dwie wielkości są odwrotnie proporcyonalne względem siebie, to, mnożąc jakąkolwiek wartość jednej z tych wielkości przez pewną liczbę, odpowiadającą zaś wartość drugiej wielkości dzieląc przez tę samę liczbę, otrzymujemy inne ich wartości, również odpowiadające sobie.*

Jeżeli wartości A_1 i A_2 wymierzymy jednostką, jednorodną z wielkością A, tak iż $A_1 = a_1$ takich jednostek, zaś $A_2 = a_2$ tychże jednostek, wartości zaś B_1 i B_2 wymierzymy jednostką, jednorodną z wielkością B, tak iż $B_1 = b_1$ takich jednostek, zaś $B_2 = b_2$ tychże jednostek, to stosunki $A_2 : A_1$ i $B_1 : B_2$ możemy zastąpić stosunkami liczb oderwanych i będziemy mieli proporcyą $a_2 : a_1 = b_1 : b_2$, skąd na mocy głównej własności proporcyi mamy $a_2 b_2 = a_1 b_1$. Gdyby podobnie A_3 i B_3 były odpowiadającemi sobie wartościami wielkości A i B i w wartości A_3 było a_3 jednostek takich samych, jak poprzednio a_1 w A_1, zaś w wartości B_3 było b_3 jednostek takich samych, jak poprzednio b_1 w B_1, to byłoby $a_3 : a_2 = b_2 : b_3$, tak iż $a_3 b_3 = a_2 b_2 = a_1 b_1$. I t. d.

A więc, *gdy dwie wielkości są odwrotnie proporcyonalne względem siebie, to iloczyn liczb oderwanych, przez które wyrażają się ich wartości sobie odpowiadające, jest stały.*

Jeżeli tę liczbę stałą, którą przedstawia iloczyn liczb oderwanych, wyrażających wartości sobie odpowiadające rozważanych wielkości, nazwiemy m, to będziemy mieli $a_1 b_1 = m$, $a_2 b_2 = m$, $a_3 b_3 = m$ i t. d. Ogólnie piszemy zwykle

$$ab = m, \qquad \text{czyli} \quad a = \frac{m}{b},$$

rozumiejąc przez a i b liczby oderwane, przez które wyrażają się, przy pomocy odpowiednich jednostek, którekolwiek dwie odpowiadające sobie wartości wielkości A i B.

Czem tu jest liczba m? Jeżeli w równości $ab = m$ przyjmiemy, że $b = 1$, t. j. jeżeli bierzemy wartość wielkości B równą jednostce, którą tę wielkość mierzymy, to wtedy $a = m$. Widzimy zatem, że m jest liczbą oderwaną, przez którą się wyraża wartość wielkości A, odpowiadająca wartości, równej jednostce, wielkości B.

151. Niekiedy rozważamy wielkość A, zmieniającą się jednocześnie z dwiema wielkościami B i C w taki sposób, iż, kiedy wielkość C jest stała, to wielkość A jest wprost proporcyonalna względem wielkości B, kiedy zaś wielkość B się nie zmienia, to wielkości A i C są odwrotnie proporcyonalne względem siebie. Mówimy wtedy, że wielkość A jest wprost proporcyonalna względem wielkości B i odwrotnie proporcyonalna względem wielkości C. Niech

wartościom wielkości	B	C	odpowiada wartość wielkości	A
wyrażonym przez liczby	b	c	wyrażona przez liczbę	a
„ „ „	1	c	„ „ „	α
„ „ „	1	1	„ „ „	m.

Mamy: $a:\alpha = b:1$, $\alpha:m = 1:c$, skąd (art. 144, δ)

$$a:m = b:c,$$

a więc $$\frac{ac}{b} = m, \quad \text{czyli} \quad a = m\cdot\frac{b}{c}.$$

Podobnie, gdyby wielkość A była wprost proporcyonalna względem każdej z wielkości B, C i D, a odwrotnie względem każdej z wielkości E i F, i gdybyśmy literom a, b, c, d, e, f, m nadali znaczenia, które według powyższego łatwo wyrozumieć można, to byłoby

$$\frac{aef}{bcd} = m, \quad \text{czyli} \quad a = m\cdot\frac{bcd}{ef}.$$

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

RÓWNANIE STOPNIA PIERWSZEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

O RÓWNANIU WOGÓLE.

152. Zwykle w równaniu (art. 60) używamy końcowych liter alfabetu x, y, ... do oznaczenia, iż one otrzymać mogą szczególne tylko wartości. Tak np. równania, któreśmy przytoczyli w art. 60-ym, pisze się zwykle tak: $2x^2 + 6 = x^2 + 5x$, $2x + 3y = 4 - 2y$. Podobnie, jeżeli np. napiszemy: $a^2x^2 - abx = acx - bc$, to rozumiemy, iż litery a, b i c przedstawiają tu pewne, ale dowolnie wybrane liczby, gdy tymczasem x może mieć tylko dwie wartości: albo $\frac{b}{a}$, albo też $\frac{c}{a}$.

W tych równaniach liczby x i y, których szczególne wartości wyznaczyć należy, nazywamy liczbami niewiadomemi, albo krócej **niewiadomemi** (Unbekannten). W pierwszych dwu równaniach pozostałe liczby są wymienione, a więc są wiadome; w ostatniem równaniu również litery a, b i c, które mogą mieć pewne dowolnie obrane wartości, nazywamy liczbami wiadomemi (bekannte Z.).

Równanie tak ogólnie określić możemy: *równaniem nazywamy zaznaczenie zapomocą znaku $=$, iż dwa wyrażenia algebraiczne są równe sobie przy pewnych tylko wartościach jednej albotеż więcej liter, w nie wchodzących.*

Samo się przez się rozumie, że mogą dwa wyrażenia, połączone znakiem $=$ i zawierające litery $x, y, \ldots$, nie tworzyć równania. Tak np.

$$(x-7)^2+14x=x^2+49, \quad (5x-y-4)(5x+y-4)+40x=25x^2-y^2+16$$

nie są równaniami, lecz równościami (art. 59), albowiem w pierwszej x może oznaczać jakąkolwiek liczbę, w drugiej zaś przy x, oznaczającem jakąkolwiek liczbę, może również y oznaczać liczbę jakąkolwiek.

153. Te wartości niewiadomych, przy których wyrażenia po obu stronach równania stają się sobie równemi, nazywamy pierwiastkami równania (Wurzeln d. G.).

Jeżeli w równaniu podstawimy jego pierwiastki, to otrzymujemy równość, która, po uskutecznieniu wskazanych działań, staje się tożsamością (art. 59). Tak np. podstawiwszy w równaniu

$$\frac{4}{x-1}+\frac{1}{x-4}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}$$

z dwu jego pierwiastków, $x=5$ i $x=\frac{5}{2}$, np. drugi, otrzymamy

$$\frac{4}{\frac{5}{2}-1}+\frac{1}{\frac{5}{2}-4}=\frac{3}{\frac{5}{2}-2}+\frac{2}{\frac{5}{2}-3}, \quad \text{czyli } 2\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{3}=6-4, \quad \text{czyli } 2=2.$$

Możemy więc powiedzieć, że *pierwiastkami równania nazywamy wartości niewiadomych, które, podstawione w równanie, zamieniają je na równość, przechodzącą po uskutecznieniu wskazanych działań na tożsamość.*

Postępowanie, prowadzące do wyznaczenia pierwiastków równania, nazywamy rozwiązywaniem równania (Auflösung d. G.). A więc *rozwiązać równanie jestto znaleźć jego pierwiastki.*

Często zamiast mówić: pierwiastek równania, lub: pierwiastki równania, mówi się: rozwiązanie równania (Lösung d. G.).

O liczbach, będących pierwiastkami równania, mówimy, że one »czynią zadość« (genügen) równaniu, albo, że one »sprawdzają« równanie. *Sprawdzić równanie jestto okazać, iż, po podstawieniu w nie otrzymanych pierwiastków, dochodzimy z niego do tożsamości.* (Sprawdzenie równania — Verification d. G.).

154. Jeżeli wszystkie pierwiastki jednego z dwu równań są jednocześnie pierwiastkami drugiego z nich i jeżeli, nawzajem, wszystkie pierwiastki drugiego są jednocześnie pierwiastkami pierwszego, to takie dwa równania nazywamy równaniami równoznacznemi z sobą (abhängige, äquivalente G.). Tak np. równania

$$5x+2=29-4x \quad \text{i} \quad 7x=24-x$$

są równoznaczne z sobą, gdyż każde z nich ma tylko pierwiastek $x=3$; podobnież równania

$$21x+9=9y+18 \quad \text{i} \quad 4x-y=2y-3x+3$$

są równoznaczne z sobą, gdyż każda para liczb, będąca rozwiązaniem jednego z tych równań, jest jednocześnie rozwiązaniem pozostałego równania.

155. Weźmy jakiekolwiek równanie, np.

$$5x+2=29-4x.$$

Gdy do obu stron dodamy tę samę liczbę, którą ogólnie nazwijmy M, to wyrażenia $5x+2+M$ i $29-4x+M$ przy tej samej, co poprzednio, wartości x również przedstawiają jednakową liczbę (art. 64, IV, α); a więc przy tejże wartości x jest

$$5x+2+M=29-4x+M,$$

t. j. pierwiastek równania danego jest także pierwiastkiem równania ostatniego. — Nawzajem, gdy od obu stron ostatniego równania odejmiemy tę samę liczbę M, to (art. 64, IV, β) wyrażenia $5x+2$ i $29-4x$ przedstawiają przy tejże samej, co poprzednio, wartości x jednakową liczbę; pierwiastek więc równania $5x+2+M=29-4x+M$ jest ten sam, co pierwiastek równania $5x+2=29-4x$. — Dwa więc te równania są równoznaczne z sobą (art. 154). Tegoż samego moglibyśmy dowieść, wziąwszy jakiekolwiek inne równanie. Powiemy więc ogólnie: *dodając algebraicznie do obu stron równania tę samę liczbę, otrzymujemy równanie równoznaczne z danem.*

Tak np. dodawszy do obu stron równania

$$5x+2=29-4x$$

po $-2+4x$, otrzymamy

$$5x+4x=29-2,$$

równanie równoznaczne z danem. Zestawiając to równanie z poprzedniem, widzimy, że *możemy wyrazy równania przenosić z którejkolwiek jego strony na pozostałą, zmieniając ich znaki.*

Gdybyśmy do obu stron równania $5x+2=29-4x$ dodali po $-29+4x$, to otrzymalibyśmy równanie, równoznaczne z danem,

$$5x+2-29+4x=0.$$

Widzimy więc, że *możemy wszystkie wyrazy równania sprowadzić na jednę jego stronę.* W takim razie na stronie pozostałej równania mamy liczbę 0.

156. Weźmy jakiekolwiek równanie, np.

$$15x+6=87-12x.$$

Gdy obie strony pomnożymy przez tę samę liczbę, różną od zera, którą ogólnie nazwijmy M, to wyrażenia $(15x+6)M$ i $(87-12x)M$ przy tejże samej, co poprzednio, wartości x przedstawiają jednakową liczbę (art. 64, IV, γ); a więc przy tejże wartości x jest

$$(15x+6)M=(87-12x)M,$$

t. j. pierwiastek równania danego jest także pierwiastkiem równania ostatniego. — Nawzajem, gdy obie strony ostatniego równania podzielimy przez tę samę liczbę M, to (art. 64, IV, δ) wyrażenia $15x+6$ i $87-12x$ przedstawiają przy tejże wartości x jednakową liczbę; pierwiastek więc równania $(15x+6)M=(87-12x)M$ jest ten sam, co równania $15x+6=87-12x$. — Dwa więc te równania są równoznaczne z sobą (art. 154). Tego samego moglibyśmy dowieść, wziąwszy jakiekolwiek inne równanie. Powiemy więc ogólnie: *mnożąc obie strony równania przez tę samę liczbę, różną od zera, otrzymujemy równanie równoznaczne z danem.*

Tak np. mnożąc obie strony równania

$$\frac{x}{8}-\frac{2-x}{6}=2x-\frac{3x-1}{2}$$

przez 24, najmniejszą spólną wielokrotność mianowników, otrzymujemy równanie

$3x-(2-x).4=48x-(3x-1).12$, czyli $3x-8+4x=48x-36x+12$,

równoznaczne z danem. Przenosząc zaś wyrazy z niewiadomą na lewą stronę, a pozostałe na prawą, i wykonywając redukcyą, otrzymamy równanie $-5x=20$, równoznaczne z danem (art. 155). Mnożąc nakoniec obie strony ostatniego równania przez $-\frac{1}{5}$ (czyli dzieląc je przez -5), dochodzimy do równania $x=-4$, które, będąc równoznaczne z danem, przedstawia zarazem rozwiązanie równania danego.

Gdy obie strony równania pomnożymy przez -1, to w otrzymanem równaniu, równoznacznem z danem, każdy wyraz będzie przeciwnego znaku, a więc *w równaniu możemy zmienić znaki wszystkich jego wyrazów.*

157. W obu art. poprzednich rozumieliśmy przez M liczbę skończoną (art. 38).

Dzieląc obie strony równania $4x-8=3x-6$ przez $x-2$, czyli mnożąc je przez $\frac{1}{x-2}$, otrzymalibyśmy $4=3$. Pochodzi to stąd, że w równaniu danem liczba x ma wartość 2, a więc mnożąc jego strony przez liczbę $\frac{1}{x-2}$, mnożylibyśmy je przez liczbę nieskończenie wielką.

Taksamo obu stron równania $2x^2-3x=0$, które ma dwa pierwiastki: $x=0$ i $x=\frac{3}{2}$, nie możemy podzielić przez x, czyli pomnożyć przez $\frac{1}{x}$, gdyż otrzymalibyśmy równanie $2x-3=0$, które ma jeden tylko pierwiastek $x=\frac{3}{2}$, a więc nie jest równoznaczne z poprzedniem. Albowiem liczba $\frac{1}{x}$, przez którą mnożyliśmy obie strony równania danego, może w tym razie stawać się nieskończenie wielką.

158. Gdy mamy równanie, którego obie strony są wyrażeniami całkowitemi względem niewiadomych (art. 116), to, po przeniesieniu albo wszystkich wyrazów na jednę stronę, alboteż wyrazów zawierających niewiadome na jednę, pozostałych zaś na drugą stronę, wykonywamy redukcyą wyrazów podobnych. Jeżeli po uskutecznieniu tej redukcyi w równaniu zostaje tylko jedna niewiadoma, mówimy, iż mamy równanie z jedną niewiadomą, jeżeli dwie — równanie z dwiema niewiadomemi, jeżeli trzy — równanie z trzema niewiadomemi, i t. d., wogóle, jeżeli zostaje n niewiadomych, mówimy, że mamy równanie z n niewiadomemi.

Gdy mamy równanie, którego obie strony są wyrażeniami całkowitemi względem niewiadomych, i gdy niema już w niem wyrazów z niewiadomemi takich, któreby się z sobą znosić mogły, to największą z sum wykładników nad niewiadomemi w oddzielnych wyrazach (art. 57) nazywamy stopniem równania (Grad d. G.). Tak np. równanie $4x^3-5x=7$ jest równaniem stopnia 3-go, równanie $ax^4+bx^3y^3+cx^2y+d=0$ jest równaniem stopnia 6-go. Równania stopnia 1-go nazywają się także równaniami liniowemi (lineare G.). Równanie, w którem wszystkie wyrazy są tego samego stopnia względem niewiadomych, nazywa się równaniem jednorodnem (homogene G.); np. równanie $x^2-5xy+6y^2=0$ jest równaniem jednorodnem stopnia 2-go.

Jeżeli w równaniu znajduje się ułamek, w którego mianowniku jest niewiadoma, jak np. w równaniu, przytoczonem w art. 153-im, to nazywamy je równaniem ułamkowem (gebrochene G.).

ROZWIĄZANIE RÓWNANIA STOPNIA PIERWSZEGO.

159. Gdy mamy równanie stopnia 1-go z jedną niewiadomą, którą nazwijmy x, to w niem mogą być tylko wyrazy, zawierające x, i wyrazy, nie zawierające x. Jeżeli wszystkie wyrazy równania przeniesiemy na jednę, np. lewą, jego stronę i sumę algebraiczną czynników, przez które x jest mnożone, nazwiemy a, zaś sumę algebraiczną wyrazów, nie zawierających x, nazwiemy b, to każde równanie stopnia 1-go z jedną niewiadomą będzie kształtu

$$ax+b=0.$$

Dopóki każda z liter a i b może przedstawiać liczbę dowolną, kształt $ax+b=0$ nazywamy kształtem ogólnym (allgemeine Form) równania stopnia 1-go z jedną niewiadomą. Jeżeli zaś jedna lub obie litery a i b nie mogą przedstawiać dowolnie obranych liczb, np. gdy mamy $2x-5=0$, albo $(c+1)x+(c^2+5)=0$, to wtedy o takich równaniach kształtu $ax+b=0$ mówimy, iż one są w kształcie zwyczajnym (gewöhnliche F.).

W równaniu $ax+b=0$ nazywamy a spółczynnikiem niewiadomej (art. 46), zaś b wyrazem wiadomym (bekanntes G.) równania. Równanie $ax+b=0$ możemy, jak wiemy (art. 81), napisać tak: $ax^1+bx^0=0$; dlatego a i b nazywamy ogólnie spółczynnikami potęg niewiadomej w równaniu, albo krócej spółczynnikami równania. Tak np. w równaniu $-2x+5=0$ liczba -2 jest spółczynnikiem niewiadomej, liczba $+5$ jest wyrazem wiadomym, obie zaś liczby -2 i $+5$ są spółczynnikami tego równania.

W szczególnym przypadku może być b liczbą 0, zaś a zerem być nie może, gdyż wówczas znikłby jedyny tu wyraz zawierający niewiadomą i nie byłoby równania. Jeżeli b jest różne od zera, to równanie $ax+b=0$ nazywa się zupełnem (vollständige G.). W razie, kiedy $b=0$, mielibyśmy równanie $ax=0$, które nazywa się niezupełnem.

160. Równanie niezupełne

$$ax=0$$

widocznie (art. 33) ma tylko pierwiastek

$$x=0.$$

161. Mając równanie zupełne

$$ax+b=0,$$

dodajmy do obu jego stron po $-b$ (art. 155); będziemy mieli $ax=-b$; dzieląc następnie obie strony przez a (art. 156), otrzymamy

$$x=\frac{-b}{a}\cdot$$

Powiemy zatem: *pierwiastek równania stopnia 1-go równa się wyrazowi wiadomemu, wziętemu z takim znakiem, jaki on ma na stronie prawej, podzielonemu przez spółczynnik niewiadomej.* Np. pierwiastek równania $3x+5=0$ jest $x=-\frac{5}{3}$.

Rozwiązanie powyższe obejmuje w sobie, jako przypadek szczególny, rozwiązanie równania niezupełnego $ax=0$, albowiem wówczas jest $b=0$, wskutek czego (art. 38) $x=\frac{0}{a}=0$.

RÓWNANIE UŁAMKOWE, Z KTÓREGO DOCHODZIMY DO RÓWNANIA STOPNIA PIERWSZEGO.

162. 1). Mnożąc obie strony równania ułamkowego

$$\frac{4}{x-4}-\frac{4}{x-3}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-1}$$

przez liczbę $(x-4)(x-3)(x-5)(x-1)$, dochodzimy do równania stopnia 1-go

$$4x-28=0, \quad \text{skąd} \quad x=7.$$

Ponieważ przy wartości $x=7$ liczba $(x-4)(x-3)(x-5)(x-1)$ pozostaje różną od zera, przeto (art. 156) otrzymane równanie stopnia 1-go jest równoznaczne z danem równaniem ułamkowem, t. j. równanie dane ma także tylko pierwiastek $x=7$.

2). Znosząc mianownik w równaniu

$$5+\frac{3x-4}{x-4}=\frac{6x-16}{x-4},$$

doszlibyśmy do równania stopnia 1-go

$$2x-8=0, \quad \text{skąd} \quad x=4.$$

Ten jedyny pierwiastek otrzymanego równania stopnia 1-go przywodzi do zera liczbę $x-4$, przez którą pomnożyliśmy dane równanie ułamkowe; po podstawieniu zaś go w owo równanie, otrzymujemy niektóre wyrazy nieskończenie wielkie, co wskazuje, iż przy tej wartości równość nie istnieje. — Zauważmy, że dane równanie możemy tak przedstawić:

$$5+\frac{12-3x}{x-4}=0, \quad \text{czyli} \quad \frac{2x-8}{x-4}=0,$$

czyli $2=0$; dane zatem równanie ułamkowe jest niemożliwe.

UWAGI O RÓWNANIU STOPNIA PIERWSZEGO.

163. *Równanie stopnia 1-go ma tylko jeden pierwiastek.* Jakoż, przypuśćmy, że równanie $ax+b=0$, którego pierwiastek np. $x=\alpha$ już znaleźliśmy, ma jeszcze drugi pierwiastek $x=\beta$. W takim razie mielibyśmy równości:

$$a\alpha+b=0, \qquad a\beta+b=0.$$

Odejmując np. od drugiej pierwszą stronami odpowiedniemi, otrzymujemy $a(\beta-\alpha)=0$. Ponieważ a jest od zera różne (art. 159), przeto (art. 33) $\beta-\alpha=0$, czyli $\beta=\alpha$, t. j. ów drugi pierwiastek nie może być liczbą różną od pierwszego, który przeto jest jedynym pierwiastkiem naszego równania.

164. Dwa równania

$$a_1 x+b_1=0, \qquad a_2 x+b_2=0$$

są równoznaczne z sobą (art. 154), jeżeli jedyny pierwiastek pierwszego z tych równań jest tą samą liczbą, co jedyny pierwiastek równania drugiego, t. j. jeżeli $-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}$, czyli (art. 141) $a_1:a_2=b_1:b_2$. A więc, *równania stopnia 1-go, mające odpowiednie spółczynniki proporcyonalne względem siebie, są równoznaczne z sobą.*

165. Gdyby przy dwu różnych od siebie wartościach x np. $x=\alpha$ i $x=\beta$ było $ax+b=0$, t. j. gdyby było jednocześnie

$$a\alpha+b=0 \quad \text{i} \quad a\beta+b=0,$$

to, odjąwszy te równości stronami odpowiedniemi, otrzymalibyśmy $a(\alpha-\beta)=0$. Ponieważ tu przyjęliśmy, iż α jest od β różne, przeto $\alpha-\beta$ jest liczbą różną od zera; a więc z ostatniej równości wypada (art. 33), iż $a=0$. Wskutek tego z $ax+b=0$ otrzymujemy $b=0$. Wówczas nietylko przy tych dwu wartościach $x=\alpha$ i $x=\beta$, ale także przy jakichkolwiek innych wartościach x będzie $ax+b=0$, gdyż wskutek $a=0$ i $b=0$ zawsze będziemy mieli tożsamość $0=0$.

Przy wartościach $a=0$ i $b=0$ nie jest $ax+b=0$ równaniem, gdyż x może tu otrzymać jakąkolwiek wartość, a to jest sprzeczne z określeniem równania (art. 152); widzimy zatem, że właściwie w tym przypadku mamy tylko *tożsamość* $0=0$.

Jeżeli $a_1x+b_1=a_2x+b_2$ przy więcej niż jednej wartości x, to wówczas jest $(a_1-a_2)x+b_1-b_2=0$ przy więcej niż jednej wartości x, a więc jest $a_1-a_2=0$ i $b_1-b_2=0$, czyli $a_1=a_2$ i $b_1=b_2$.

166. Z równania $ax+b=0$ mamy $x=-\frac{b}{a}$. Przy b różnem od zera, może a oznaczać wszelką liczbę dodatną lub ujemną, choćby co do wartości bezwzględnej bardzo małą. Oczywiście, że przy stałem b, wmiarę nadawania na a wartości, mających wartość bezwzględną coraz mniejszą, otrzymywać będziemy, jako odpowiadające wartości pierwiastka $x=-\frac{b}{a}$, liczby, których wartość bezwzględna będzie coraz większa (por. art. 38, 129). Jeżeli liczba a przechodzi np. od wartości ujemnych do dodatnych, to w tem przejściu może ona otrzymać wartość zero, której będzie odpowiadała nieskończenie wielka wartość pierwiastka równania.

Wówczas pierwszy wyraz równania staje się $0\times\infty$. Ponieważ $0\times\infty$ jest (art. 129) toż samo, co $\frac{0}{0}$ (a tu niema powodu, dlaczegoby ten pierwszy wyraz równania miał być mianowicie liczbą $-b$, nie zaś jakąkolwiek inną), przeto powiemy, że, kiedy, przy b różnem od zera, a staje się równem zeru, pierwiastek równania $ax+b=0$ staje się nieskończenie wielkim, chociaż właściwie wówczas już samo równanie *nie istnieje.*

Tak np., gdy mamy równanie $(3-c)x-7=0$, skąd $x=\frac{7}{3-c}$, to przy każdej wartości c, różnej od 3, wypada nam odpowiednia wartość pierwiastka tego równania, który staje się nieskończenie wielkim w razie, kiedy c otrzymuje wartość 3, choć wtedy samo równanie już istnieć przestaje.

NIERÓWNOŚCI. NIERÓWNOŚĆ STOPNIA PIERWSZEGO.

167. Gdy mamy nierówność (art. 61) $A>B$, to w razie, kiedy A jest liczbą dodatną, może być B albo liczbą dodatną o wartości bezwzględnej mniejszej od bezwzględnej wartości liczby A, albo liczbą zero, alboteż liczbą ujemną. W razie, kiedy A jest liczbą zero, jest B liczbą ujemną. W razie nakoniec, kiedy A jest liczbą ujemną, B jest liczbą ujemną o wartości bezwzględnej większej od bezwzględnej wartości liczby A. We wszystkich więc przypadkach jest $A-B>0$. — Nawzajem, kiedy $A-B>0$, to, jakiekolwiek możliwe tu wartości mają liczby A i B, jest $A>B$. — Nierówności więc

$$A>B \quad \text{i} \quad A-B>0$$

są równoznaczne z sobą.

168. Gdy mamy $A>B$, czyli $A-B>0$, to zważmy, że jakąkolwiek jest liczba M, jest zawsze

$$A-B=A-B+M-M=A+M-B-M=(A+M)-(B+M).$$

Kiedy więc $A-B>0$, to także $(A+M)-(B+M)>0$, czyli $A+M>B+M$. Zatem *wskutek dodania tej samej liczby do obu stron nierówności, nie zmienia się kierunek znaku nierówności.*

Gdybyśmy mieli np. nierówność $6a-3>2a+7$, to, dodawszy do obu stron po $3-2a$, otrzymamy $6a-2a>3+7$, czyli $4a>10$. Widzimy więc, że *w nierówności możemy oddzielne wyrazy przenosić z jednej strony na drugą, zmieniając ich znaki.*

169. Mając $A>B$, czyli $A-B>0$, pomnóżmy tę liczbę dodatną $A-B$ przez M różne od zera. W razie M dodatnego mieć będziemy iloczyn dodatny, $(A-B)M>0$, a więc $AM-BM>0$, czyli $AM>BM$; w razie zaś M ujemnego będziemy mieli iloczyn ujemny, $(A-B)M<0$, a więc $AM-BM<0$, czyli $AM<BM$. Przeto: *wskutek pomnożenia obu stron nierówności przez tę samę liczbę dodatną nie zmienia się kierunek znaku nierówności*, zaś *wskutek pomnożenia obu stron nierówności przez tę samę liczbę ujemną zmienia się kierunek znaku nierówności.*

Gdy mamy np. nierówność $-a+b<-c+d$, to, po pomnożeniu obu jej stron przez -1, będzie $a-b>c-d$, t. j. *możemy zmienić znaki wszystkich wyrazów nierówności, zmieniając jednocześnie kierunek znaku nierówności.*

Kiedy przy $a>b$ jest $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$, a kiedy jest $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$?

170. α. Weźmy dwie nierówności, $A>B$ i $C>D$. Według pierwszej nierówności $A-B>0$, według drugiej $C-D>0$; a że suma dwu liczb dodatnych jest również liczbą dodatną, zatem jest $A-B+C-D>0$, albo

$(A+C)-(B+D)>0$, czyli $A+C>B+D$. — Podobnie okazać możemy, że, gdy mamy wogóle m nierówności $A_1>B_1$, $A_2>B_2$, ..., $A_m>B_m$, to $A_1+A_2+\ldots+A_m>B_1+B_2+\ldots+B_m$, t. j. *gdy mamy dwie lub więcej nierówności, to suma liczb większych jest większa od sumy liczb mniejszych.*

β. Niech przy dodatnych liczbach B_1 i B_2 będzie $A_1>B_1$ i $A_2>B_2$. Mnożąc obie strony pierwszej nierówności przez A_2, drugiej przez B_1, otrzymamy $A_1A_2>B_1A_2$, $B_1A_2>B_1B_2$, a więc (art. 64, VI) jest $A_1A_2>B_1B_2$. Podobnie okazalibyśmy, że, gdy $A_1>B_1$, $A_2>B_2$,..., $A_m>B_m$ i liczby B_1, B_2,..., B_m są dodatne, to także $A_1A_2\ldots A_m>B_1B_2\ldots B_m$; a więc *gdy obie strony każdej z dwu lub więcej nierówności są dodatne, to iloczyn liczb większych jest większy od iloczynu liczb mniejszych.*

171. Gdy wyrażenie, w którem litera oznacza liczbę, ma być czyto większe, czyteż mniejsze od pewnej liczby danej, alboteż od innego wyrażenia, do którego taż litera wchodzi, to może nam iść o to, aby bliżej oznaczyć, przy jakich wartościach owej litery, uważanej za »niewiadomą«, ta nierówność istnieć może. W tem znaczeniu mówimy niekiedy: »rozwiązać« nierówność.

Jeżeli te wyrażenia są całkowite względem niewiadomej i jeżeli niewiadoma znajduje się w nich tylko w stopniu 1-ym, to mówimy, że mamy n i e r ó w n o ś ć s t o p n i a 1-g o. Ogólnie wtedy być może $a_1x+b_1>a_2x+b_2$, czyli (art. 168) $(a_1-a_2)x+b_1-b_2>0$, alboteż, jeżeli wprowadzimy oznaczenia: $a_1-a_2=a$, zaś $b_1-b_2=b$,

$$ax+b>0.$$

Do tego kształtu każdą nierówność stopnia 1-go sprowadzić można. Z tej nierówności wynika (art. 168, 169), że, stosownie do tego, czy $a>0$, czyteż $a<0$, jest

$$\text{albo} \quad x>-\frac{b}{a}, \qquad \text{albo} \quad x<-\frac{b}{a}.$$

Przy takich wartościach x istnieje nierówność $ax+b>0$. Zauważmy, że liczba $-\frac{b}{a}$, od której w pierwszym razie ma być x większe, w drugim zaś razie mniejsze, jest pierwiastkiem równania $ax+b=0$. Np. nierówności $4x-6>9x$, czyli $-5x-6>0$, czynią zadość wartości $x<-1\frac{1}{5}$.

ROZDZIAŁ SIÓDMY.

RÓWNANIA STOPNIA PIERWSZEGO Z WIELU NIEWIADOMEMI.

O RÓWNANIACH Z WIELU NIEWIADOMEMI WOGÓLE.

172. Równanie np. $3x+7y=2$ może mieć *ilekolwiek* rozwiązań, ale one nie są *jakiekolwiek*, gdyż, po nadaniu pewnej wartości jednej z niewiadomych, pozostała może mieć tylko jedyną wartość (art. 163).

Podobnie, mając równanie $2x-3y+5z=5$, sprawdzić możemy, że, przy pewnych wartościach, nadanych dowolnie na dwie z niewiadomych, dla pozostałej niewiadomej jest możliwa jedyna tylko wartość. I t. d.

Widzimy więc, że równanie z wielu niewiadomemi ustala związek między wartościami, które niewiadomym nadawać można.

Z powodu dowolności w nadawaniu wartości wszystkim, prócz jednej, niewiadomym, równanie z wielu niewiadomemi nazywamy także równaniem nieoznaczonem (unbestimmte G.).

Gdy równanie zawiera niewiadome x, y, ..., u i gdy, po przeniesieniu wszystkich wyrazów, je zawierających, na jednę, np. na lewą, stronę, pozostałych zaś wyrazów na prawą stronę równania, sumy algebraiczne czynników, przez które są mnożone x, y, ..., u, nazwiemy odpowiednio a, b, ..., f, zaś sumę algebraiczną wyrazów, nie zawierających niewiadomych, nazwiemy g, to będziemy mieli

$$ax+by+\ldots+fu=g.$$

Ten kształt równania w razie, kiedy każda z liter a, b, ..., f, g może oznaczać dowolną liczbę, nazywamy kształtem ogólnym równania stopnia 1-go z wielu niewiadomemi, w przeciwnym zaś razie kształtem zwyczajnym takiego równania. Liczby a, b, ..., f nazywają się spółczynnikami niewiadomych, liczba g wyrazem wiadomym równania, ogólnie zaś wszystkie te liczby a, b, ..., f, g nazywają się spółczynnikami równania.

W przypadku, kiedy wyraz wiadomy jest zerem, t. j. kiedy $g=0$, mamy równanie

$$ax+by+\ldots+fu=0.$$

Jest to odpowiednio kształt ogólny, lub zwyczajny równania jednorodnego (art. 158) stopnia 1-go z wielu niewiadomemi.

173. Gdy mamy np. dwa równania z trzema niewiadomemi,

$$3x+7y-3z=11, \quad 5x-2y-9z=3,$$

to może nam iść o te wartości niewiadomych x, y, z, które czynią zadość jednocześnie obu tym równaniom. Taką jest np. trójka wartości: $x=-4$, $y=2$, $z=-3$, albo trójka: $x=2\frac{30}{41}$, $y=\frac{34}{41}$, $z=1$, albo trójka: $x=1$, $y=1\frac{3}{23}$, $z=-\frac{2}{69}$, i t. d.

Gdy, mając dwa lub więcej równań, bierzemy na uwagę wyłącznie te wartości niewiadomych, które jednocześnie wszystkim tym równaniom czynią zadość, to mówimy krótko, iż rozważamy równania jednoczesne (simultane G.). A więc *dwa lub więcej równań nazywamy równaniami jednoczesnemi, kiedy ta sama niewiadoma ma otrzymywać we wszystkich tych równaniach jednakową wartość.*

Zamiast mówić: dwa równania jednoczesne, trzy równania jednoczesne i t. d. mówimy odpowiednio: układ dwu równań, układ trzech równań i t. d. (System d. G.).

Równania układu mają spólne pierwiastki, czyli spólne rozwiązanie, które nazywamy pierwiastkami układu, lub rozwiązaniem układu.

Aby, mając wypisane równania, zaznaczyć, iż je rozważamy jednocześnie, t. j. iż one tworzą układ, zwykle wypisujemy je jedno pod drugiem i z jednej strony zakreślamy je klamrą; np.

$$\begin{cases} 3x+7y-3z=11, \\ 5x-2y-9z=\ 3. \end{cases}$$

174. α. Gdy mamy dwa równania z temiż samemi niewiadomemi, to może się zdarzyć, iż te równania są równoznaczne z sobą (art. 154), a więc jedno którekolwiek z nich ustala ów związek między niewiadomemi, wyrażony przez te dwa równania, tak iż zamiast tych dwu równań dość jest uwzględnić jedno, którekolwiek z nich; pozostałe przeto równanie jest zbyteczne.

β. Gdy mamy np. dwa równania

$$9x-12y+15z=24, \qquad -15x+20y-25z=26,$$

to, mnożąc lewą stronę pierwszego z nich przez $-\frac{5}{3}$, otrzymamy lewą stronę drugiego; a więc, jeżeli przy pewnych wartościach niewiadomych x, y, z lewa strona równania pierwszego przedstawia liczbę 24, to przy tychże samych wartościach owych niewiadomych lewa strona równania drugiego przedstawiałaby liczbę $24.(-\frac{5}{3})=-40$. Lecz wartości niewiadomych x, y, z, czyniące zadość równaniu drugiemu, są takie, iż lewa jego strona przedstawia liczbę 26. Przeto nie mogą one czynić zadość równaniu pierwszemu, a zatem te dwa równania nie mają spólnego rozwiązania, czyli nie są jednoczesne. Takie dwa równania nazywamy sprzecznemi z sobą (widersprechende G.).

175. α. Gdy mamy np. równania

$$\begin{cases} 2x+5y-7z=\ 11, \\ 3x+4y-5z=-\ 4, \\ 4x+3y-3z=-19, \end{cases}$$

to, kiedy np. od stron równania drugiego, pomnożonych przez 2, odejmiemy strony odpowiednie równania pierwszego, otrzymamy trzecie z danych równań; Jest więc jedno, którekolwiek, z tych równań prostem następstwem dwu pozostałych, tak iż jedno z tych trzech równań jest zbyteczne.

β. Z dwoma np. równaniami jednoczesnemi

$$\begin{cases} 2x+5y-7z=\ 11, \\ 3x+4y-5z=-\ 4 \end{cases}$$

równanie $\qquad 4x+3y-3z=12$

jest sprzeczne. Albowiem, gdy od stron drugiego z tych równań, pomnożonych przez 2, odejmiemy strony odpowiednie równania pierwszego, to otrzymamy $4x+3y-3z=-19$. Nie może więc, przy tychże wartościach niewiadomych, być według równania trzeciego $4x+3y-3z=12$.

176. Gdyby pośród równań danych było równanie sprzeczne czyto z jednem, czyteż z kilkoma z pozostałych równań, to nie mogłoby być mowy o wartościach niewiadomych, czyniących jednocześnie zadość wszystkim równaniom danym, tak iż wtedy układ równań danych jest niemożebny. Tak np. niemożebny jest układ trzech równań, wypisanych w art. 175-ym pod β.

Gdy w układzie równań jest równanie albo równoznaczne z którемkolwiek z pozostałych, alboteż będące następstwem kilku z pozostałych równań t. j. wogóle równanie zbyteczne, to je opuszczamy. Tak np. zamiast układu trzech równań w art. 175-ym pod α. rozważać należy układ tylko dwu którychkolwiek z tych równań.

Wskutek tego zwykle równania układu są tak dobrane, iż między niemi niema równania ani zbytecznego, aniteż sprzecznego.

Wogóle może być układ n równań z m niewiadomemi, przyczem może być albo $n<m$, albo $n=m$, albotеż $n>m$.

Przypadek $n=m$ naprzód rozważać będziemy, i to w tym razie, kiedy nie wszystkie równania układu są jednorodne (art. 172), t. j. kiedy przynajmniej w jednem z nich wyraz wiadomy jest od zera różny.

Układ równań w razie, kiedy wszystkie równania są jednorodne, nazywamy układem równań jednorodnych; w innym zaś razie układem równań niejednorodnych.

Rozważymy więc naprzód układ równań niejednorodnych z tylu niewiadomemi, ile jest równań.

UKŁAD n RÓWNAŃ NIEJEDNORODNYCH Z n NIEWIADOMEMI.

177. Weźmy układ dwu równań z dwiema niewiadomemi, np.

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-\ \ 7y=-30. \end{cases}$$

Każde z tych równań jest równoznaczne (art. 155, 156) z odpowiedniem równaniem układu

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{14}(16+11x), \\ y=\frac{1}{7}(30+4x). \end{cases}$$

Kiedy przy pewnej wartości x, tej samej w obu równaniach, mamy (art. 173) z nich otrzymać tę samę wartość y, to, przy owej wartości x, wyrażenia po prawych stronach równań ostatnich są sobie równe. A więc x jest pierwiastkiem równania, otrzymanego ze zrównania owych wyrażeń, t. j. równania

$$-\frac{1}{14}(16+11x)=\frac{1}{7}(30+4x).$$

Gdy do tego równania dołączymy jedno którekolwiek z danych, np. pierwsze, to układowi

$$\begin{cases} 19x+76\ =\ \ \ 0, \\ 11x+14y=-16 \end{cases}$$

czynią zadość też same wartości x i y, co danemu układowi równań. Dlatego mówimy, że jest on układem równoznacznym z układem danym. Z pierwszego równania z jedną tylko niewiadomą mamy wartość $x=-4$. Po podstawieniu jej w drugie równanie, mieć będziemy $14y-28=0$, skąd $y=2$. A więc dwa równania dane istnieją jednocześnie przy wartościach $x=-4$, $y=2$; są więc liczby: $x=-4$ i $y=2$ pierwiastkami układu danego, czyli para liczb: $x=-4$, $y=2$ jest jego rozwiązaniem.

Podobnie z układem trzech równań z trzema niewiadomemi np.

$$\begin{cases} 8x+\ \ 9y+11z=-25, \\ 3x+\ \ 5y-11z=\ \ \ \ 9, \\ 4x+16y+11z=\ \ \ \ 5 \end{cases} \quad \text{układ} \quad \begin{cases} z=\frac{1}{11}(-25-8x-9y), \\ z=\frac{1}{11}(-9+3x+5y), \\ z=\frac{1}{11}(5-4x-16y) \end{cases}$$

jest równoznaczny. Ponieważ przy pewnych wartościach x i y, tych samych we wszystkich trzech równaniach, mamy otrzymać tę samę wartość z, przeto przy owych szczególnych wartościach x i y wyrażenia po prawych stronach równań ostatnich są sobie równe. A więc owe wartości x i y są także pierwiastkami układu dwu równań, powstających ze zrównania jednego z tych wyrażeń z każdem z dwu pozostałych, np.

$$\begin{cases} \frac{1}{11}(-25-8x-9y)=\frac{1}{11}(-9+3x+5y), \\ \frac{1}{11}(-25-8x-9y)=\frac{1}{11}(5-4x-16y). \end{cases}$$

Gdy do tych równań jednoczesnych dołączymy jedno z poprzednich, np. pierwsze, to otrzymamy układ

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-7y=-30, \\ 8x+9y+11z=-25, \end{cases}$$

równoznaczny z poprzednim. Pierwsze dwa z tych trzech równań tworzą układ dwu równań z dwiema niewiadomemi, który rozwiązując, otrzymamy $x=-4$, $y=2$. Przy tych wartościach x i y, z trzeciego równania, t. j. z równania $11z+11=0$, otrzymujemy $z=-1$. A zatem rozwiązaniem danego układu trzech równań jest trójka liczb: $x=-4$, $y=2$, $z=-1$.

Taksamo, mając układ czterech równań z czterema niewiadomemi, np.

$$\begin{cases} 3x+7y+12z+3u=-9, \\ 15x+6y-3z-9u=-48, \\ 2x+4y+\frac{1}{3}z+u=0, \\ x+9y-z-3u=14, \end{cases}$$

znajdziemy z każdego wyrażenie tej samej niewiadomej, np. u, a zrównawszy jedno z tych wyrażeń (np. pierwsze) z każdem z pozostałych, otrzymamy trzy równania z niewiadomemi x, y, z. Do tych równań dołączając jedno z danych (np. pierwsze), otrzymamy układ

$$\begin{cases} 8x+9y+11z=-25, \\ 3x+5y-11z=9, \\ 4x+16y+11z=5, \\ 3x+7y+12z+3u=-9, \end{cases}$$

równoznaczny z danym. Oddzielnie rozwiążemy układ pierwszych trzech równań z trzema niewiadomemi; po podstawieniu zaś znalezionych wartości $x=-4$, $y=2$, $z=-1$ w pozostałe równanie, otrzymamy równanie $3u-1=0$, skąd $u=\frac{1}{3}$. A więc czwórka liczb: $x=-4$, $y=2$, $z=-1$, $u=\frac{1}{3}$ jest rozwiązaniem danego układu.

W takiż sposób moglibyśmy znaleźć rozwiązanie układu pięciu równań z pięciu niewiadomemi i t. d.

Rozwiązanie powyższego układu czterech równań z czterema niewiadomemi otrzymaliśmy z czterech równań, mających po jednej niewiadomej:

$$19x+76=0, \quad 14y-28=0, \quad 11z+11=0, \quad 3u-1=0.$$

Z tego wynika (art. 163), że *układ tylu równań niejednorodnych stopnia 1-go, ile jest niewiadomych, ma jedno tylko rozwiązanie.*

Powyżej wyłożone postępowanie polegało na zrównywaniu z sobą wyrażeń tej samej niewiadomej, otrzymanych z równań rozwiązywanego układu. Dlatego taką metodę rozwiązywania układu nazywamy rozwiązywaniem układu zapomocą zrównywania wyrażeń niewiadomej (Comparations-Methode).

W powyższem postępowaniu otrzymywaliśmy z pewnego układu równań inny układ, mający o jedno równanie mniej i o jednę niewiadomą mniej, niż układ poprzedni, co nazywa się rugowaniem (Elimination) owej niewiadomej.

178. Mając układ

$$\begin{cases} 6x+25y=26, \\ 4x-15y=-46 \end{cases}$$

i chcąc wyrugować np. niewiadomą x, której spółczynniki są $+6$ i $+4$ (najmniejszą spólną wielokrotnością liczb 6 i 4 jest liczba 12), możemy pomnożyć obie strony pierwszego równania przez 2, drugiego zaś przez 3,

$$\begin{cases} 12x+50y=52, \\ 12x-45y=-138, \end{cases}$$

a następnie te dwa równania odjąć od siebie stronami odpowiedniemi, co doprowadzi nas do równania $95y-190=0$ z jedną tylko niewiadomą y. W danym układzie spółczynniki niewiadomej, którą rugowaliśmy, były jednakowego znaku; dlatego po wyrównaniu tych spółczynników trzeba było równania od siebie *odjąć* stronami odpowiedniemi.

Gdybyśmy mieli np. układ

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-7y=-30 \end{cases}$$

i chcieli wyrugować niewiadomą y, której spółczynniki $+14$ i -7 są różnego znaku, to, wyrównawszy je co do wartości bezwzględnej przez pomnożenie obu stron drugiego równania przez 2, równania układu

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 8x-14y=-60 \end{cases}$$

do siebie *dodamy* stronami odpowiedniemi, wskutek czego otrzymamy równanie $19x+76=0$ z jedną tylko niewiadomą x. Dołączywszy do tego równania którekolwiek z danych równań, np. pierwsze, będziemy mieli układ

$$\begin{cases} 19x+76=0, \\ 11x+14y=-16, \end{cases}$$

równoznaczny z danym. Z pierwszego równania ostatniego układu otrzymamy $x=-4$, co podstawiając w drugie z tych równań, znajdziemy $y=2$.

Mając np. układ

$$\begin{cases} 8x+9y+11z=-25, \\ 3x+5y-11z=9, \\ 4x+16y+11z=5, \end{cases}$$

wyrugujmy powyższym sposobem np. niewiadomą z, raz z równań pierwszego i drugiego, drugim zaś razem z pierwszego i trzeciego. W tym przykładzie potrzeba tylko stronami odpowiedniemi pierwsze dwa równania dodać do siebie, zaś od pierwszego odjąć trzecie. Otrzymamy stąd: $11x+14y=-16$ i $4x-7y=-30$. Przeto dany układ równań możemy zastąpić przez układ np.

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-\ 7y=-30, \\ 8x+\ 9y+11z=-25, \end{cases}$$

równoznaczny z danym. Pierwotne zatem zadanie sprowadziliśmy do rozwiązania układu dwu równań z dwiema niewiadomemi, z którego otrzymujemy $x=-4$, $y=2$, i do rozwiązania następnie jednego równania z jedną niewiadomą, z którego $z=-1$.

Gdy mamy układ czterech równań z czterema niewiadomemi, to podobnie możemy go rozwiązać. W tym celu weźmiemy jedno równanie z każdem z trzech pozostałych równań; z każdego zaś z tych trzech układów po dwa równania wyrugujemy powyższym sposobem tę samę niewiadomą. Otrzymamy z każdej takiej pary równań jedno równanie z trzema pozostałemi niewiadomemi. A więc w ten sposób dojdziemy do układu trzech równań z trzema niewiadomemi, z którego wyznaczymy wartości owych trzech niewiadomych. Po podstawieniu ich w którekolwiek z pierwotnych równań, będziemy jeszcze mieli do rozwiązania jedno równanie z jedną niewiadomą.

Taką metodę rozwiazywania układu nazywamy rozwiązywaniem układu zapomocą wyrównywania spółczynników (M. der gleichen Coefficienten) albo też zapomocą dodawania lub odejmowania równań.

179. Mając układ

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-\ 7y=-30, \end{cases}$$

możemy, otrzymawszy np. wyrażenie y z pierwszego z powyższych równań, $y=\frac{1}{14}(-16-11x)$, podstawić to wyrażenie niewiadomej y przez niewiadomą x w pozostałe z danych równań; wskutek tego podstawienia otrzymamy równanie $4x-7\cdot\frac{1}{14}(-16-11x)=-30$, czyli $19x+76=0$, z jedną tylko niewiadomą x Dołączywszy do niego którekolwiek z danych równań, np. pierwsze, czyli powyższe wyrażenie y, mieć będziemy układ

$$\begin{cases} 19x+76=0, \\ y=\frac{1}{14}(-16-11x), \end{cases}$$

równoznaczny z układem danym. Z pierwszego z tych równań mamy $x=-4$, co podstawiwszy w drugie, otrzymamy $y=2$.

Mając układ

$$\begin{cases} 8x+\ 9y+11z=-25, \\ 3x+\ 5y-11z=\ \ 9, \\ 4x+16y+11z=\ \ 5, \end{cases}$$

podstawmy otrzymane np. z pierwszego z tych trzech równań wyrażenie $z=-\frac{1}{11}(25+8x+9y)$ w pozostałe równania; otrzymamy dwa równania z dwiema niewiadomemi x i y. Układ

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-\ 7y=-30, \\ z=-\frac{1}{11}(25+8x+9y) \end{cases}$$

jest równoznaczny z układem danym. Z układu pierwszych dwu z tych równań mamy $x=-4$, $y=2$, wskutek czego z pozostałego równania wypada $z=-1$.

Podobnie, gdy mamy układ czterech równań z czterema niewiadomemi np. x, y, z, u, to, wyraziwszy z jednego z tych równań jednę niewiadomą np. u przez pozostałe niewiadome x, y, z i podstawiwszy to wyrażenie zamiast u w trzech pozostałych równaniach, otrzymamy z nich układ trzech równań z trzema niewiadomemi x, y, z. Te trzy równania wraz z któremkolwiek z danych równań, lub z poprzednio otrzymanem wyrażeniem u, przedstawiają układ równoznaczny z układem danym. Z trzech pierwszych równań wyznaczymy wartości x, y i z, a następnie z czwartego wartość u.

Taką metodę rozwiązywania układu nazywamy rozwiązywaniem układu zapomocą podstawiania wyrażenia niewiadomej (Substitutions-Methode).

180. Mając układ

$$\begin{cases} 11x+14y=-16, \\ 4x-\ 7y=-30, \end{cases}$$

pomnóżmy obie strony np. pierwszego równania przez liczbę różną od zera, którą później oznaczymy; nazwijmy ją p. Do tak powstałego równania dodajmy równanie pozostałe stronami odpowiedniemi; będziemy mieli równanie

$$(11p+4)\,x+7\,(2p-1)\,y=-2\,(8p+15).$$

Dołączywszy do niego którekolwiek z danych równań, mielibyśmy układ równoznaczny z danym. W wypisanem równaniu liczba p może być jakakolwiek, byle różna od zera. Niech ona będzie taka, iżby spółczynnik jednej z niewiadomych, np. y, był równy zeru, t. j. niech

$$2p-1=0, \quad \text{a więc} \quad p=\tfrac{1}{2}.$$

Przy tej wartości liczby p równanie powyżej utworzone staje się równaniem $\frac{19}{2}x=-38$, skąd $x=-4$. Dla znalezienia wartości y możemy otrzymaną wartość x podstawić w którekolwiek z danych równań, alboteż możemy w poprzedniem równaniu nadać liczbie p taką wartość, iżby

$$11p+4=0, \quad \text{a więc} \quad p=-\tfrac{4}{11};$$

wtedy z owego równania otrzymujemy równanie $-\frac{133}{11}y=-\frac{266}{11}$, skąd $y=2$.

W podobny sposób, gdy mamy układ

$$\begin{cases} 8x+\ 9y+11z=-25, \\ 3x+\ 5y-11z=\ \ \ 9, \\ 4x+16y+11z=\ \ \ 5 \end{cases}$$

i pomnożymy pierwsze równanie przez p, drugie przez p_1, a tak powstałe równania i równanie trzecie dodamy do siebie stronami odpowiedniemi, to dojdziemy do równania

$$(8p+3p_1+4)\,x+(9p+5p_1+16)\,y+11\,(p-p_1+1)\,z=-25p+9p_1+5,$$

które wraz z dwoma któremikolwiek z danych równań utworzyłoby układ równoznaczny z danym. W wypisanem równaniu liczby p i p_1 mogą mieć jakiekolwiek wartości różne od zera; dobierzmy je tak, iżby spółczynniki np. niewiadomych y i z stały się jednocześnie równemi zeru,

$$\begin{cases} 9p+5p_1+16=0, \\ p-p_1+\ 1=0, \end{cases} \quad \text{a więc} \quad p=-\tfrac{3}{2},\ p_1=-\tfrac{1}{2}.$$

Wtedy równanie poprzednie sprowadza się do równania $-\frac{19}{2}x=38$, skąd $x=-4$. Dla znalezienia wartości pozostałych niewiadomych moglibyśmy znalezioną wartość x podstawić w którekolwiek dwa z trzech równań danych. Możemy jednak postąpić inaczej. Mianowicie, tak dobrać pary wartości liczb p i p_1, iżby było

$$\begin{cases} 8p+3p_1+4=0, \\ p-p_1+1=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 8p+3p_1+\ 4=0, \\ 9p+5p_1+16=0, \end{cases}$$

$$p=-\tfrac{7}{11},\quad p_1=\tfrac{4}{11}, \qquad p=\tfrac{28}{13},\quad p_1=\tfrac{-92}{13},$$

$$\tfrac{133}{11}y=\tfrac{266}{11}, \qquad \tfrac{1463}{13}z=-\tfrac{1463}{13},$$

$$y=2; \qquad z=-1.$$

Wprowadziliśmy tu czynniki p i p_1, których wartości liczebne dopiero później oznaczaliśmy, tak iż w chwili, kiedyśmy mnożyli obie strony odpowiednich równań, czynniki owe były nieoznaczone.

Podobnie rozwiązalibyśmy układ czterech równań z czterema niewiadomemi i t. d.

Taką metodę rozwiązywania układu nazywamy rozwiązywaniem układu zapomocą czynników nieoznaczonych (M. der unbestimmten Factoren). Tę metodę podał[1]) Bézout (wym. be-zù); dlatego nazywają ją także metodą Bézout.

Uwaga. Niekiedy zamiast którejkolwiek z powyższych czterech metod ogólnych stosujemy do szczególnego układu równań postępowanie, prędzej do rozwiązania owego układu prowadzące. (Zob. Zadania.)

181. α. Stosując którąkolwiek z wyłożonych powyżej metod, znajdziemy, iż rozwiązaniem układu dwu równań w kształcie ogólnym z dwiema niewiadomemi

$$\begin{cases} a_1 x+b_1 y=c_1, \\ a_2 x+b_2 y=c_2 \end{cases}$$

są wartości:

$$x=\frac{c_1 b_2-c_2 b_1}{a_1 b_2-a_2 b_1} \quad \text{i} \quad y=\frac{a_1 c_2-a_2 c_1}{a_1 b_2-a_2 b_1}.$$

Mają one nietylko spólny mianownik, ale nadto licznik wartości x utworzyć możemy z tego mianownika, pisząc w nim wyrazy wiadome c_1 i c_2 zamiast odpowiednich spółczynników a_1 i a_2 tej niewiadomej; licznik zaś wartości y możemy podobnie utworzyć z mianownika, pisząc w nim wyrazy wiadome c_1 i c_2 zamiast odpowiednich spółczynników b_1 i b_2 tej niewiadomej.

β. Podobnie znajdziemy, iż rozwiązaniem układu trzech równań w kształcie ogólnym z trzema niewiadomemi

$$\begin{cases} a_1 x+b_1 y+c_1 z=d_1, \\ a_2 x+b_2 y+c_2 z=d_2, \\ a_3 x+b_3 y+c_3 z=d_3 \end{cases}$$

1) W r. 1779.

są wartości:

$$x=\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)-d_2(b_1c_3-b_3c_1)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)},$$

$$y=\frac{-d_1(a_2c_3-a_3c_2)+d_2(a_1c_3-a_3c_1)-d_3(a_1c_2-a_2c_1)}{-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+b_2(a_1c_3-a_3c_1)-b_3(a_1c_2-a_2c_1)},$$

$$z=\frac{d_1(a_2b_3-a_3b_2)-d_2(a_1b_3-a_3b_1)+d_3(a_1b_2-a_2b_1)}{c_1(a_2b_3-a_3b_2)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)}.$$

Mają one ten sam mianownik

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1,$$

liczniki zaś ich powstają z tego mianownika wskutek zastąpienia spółczynników tej niewiadomej, której wartości szukamy, przez odpowiednie wyrazy wiadome równań danych.

UKŁAD n RÓWNAŃ Z m NIEWIADOMEMI.

182. Weźmy na uwagę n równań z m niewiadomemi w przypadku $n<m$, przyjmując, że między temi równaniami niema ani sprzecznych, aniteż zbytecznych.

Mamy niewiadomych o $m-n$ więcej niż równań. Zostawmy po jednej, np. po lewej, stronie równań wyrazy zawierające n niewiadomych którychkolwiek, ale tych samych we wszystkich równaniach; wyrazy zaś wiadome i wyrazy, zawierające $m-n$ pozostałych niewiadomych, przenieśmy na stronę prawą. Tak np., gdy mamy

$$\begin{cases}2x+3y-4z-3u=6,\\ x-2y+3z-2u=2,\end{cases}\quad\text{to np.}\quad\begin{cases}2x+3y=6+4z+3u,\\ x-2y=2-3z+2u,\end{cases}$$

skąd $\qquad x=\frac{1}{7}(18-z+12u),\quad y=\frac{1}{7}(2+10z-u),$

i przy $z=1$, $u=2$ jest $x=5\frac{6}{7}$, $y=1\frac{3}{7}$, przy $z=-3$, $u=0$ jest $x=3$, $y=-4$ i t. d.

Wogóle w układzie n równań z m niewiadomemi, przy $n<m$, możemy $m-n$ niewiadomym nadawać dowolne wartości, a wówczas pozostałe niewiadome otrzymują po jednej tylko wartości (art. 177). Dlatego taki układ nazywamy układem $(m-n)$-krotnie nieoznaczonym [$(m-n)$-fach unbestimmt]. Np. powyżej wypisany układ jest dwukrotnie nieoznaczony. Jedno równanie z m niewiadomemi (art. 172) jest równaniem $(m-1)$-krotnie nieoznaczonem.

183. Przypadek $n=m$ rozważaliśmy już szczegółowo (art. 177—181), wyłączywszy jednak (art. 176) rozważanie układu n równań jednorodnych z n niewiadomemi, czem się teraz zajmiemy.

α. Niech

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=0,\\ a_2x+b_2y=0.\end{cases}$$

Z pierwszego np. równania $x=-\frac{b_1}{a_1}y$, co podstawiając w drugie, otrzymamy

$$\left(\frac{-a_2b_1}{a_1}+b_2\right)y=0,\qquad\text{czyli}\quad(a_1b_2-a_2b_1)y=0.$$

Jeżeli w tym iloczynie dwu czynników, równym zeru, czynnik $a_1 b_2 - a_2 b_1$ jest od zera różny, to jest $y=0$ (art. 160), a w takim razie z wyrażenia $x = \frac{-b_1}{a_1} y$ wynika, że także $x=0$. Dany układ ma wtedy rozwiązanie jedyne

$$x=0, \quad y=0.$$

Jeżeli zaś jest $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, to wtedy y może otrzymywać jakąkolwiek wartość, a wartość x, odpowiadająca wartości dowolnie na y nadanej, będzie wyznaczona z wyrażenia $x = -\frac{b_1}{a_1} y$. Możemy wprawdzie w tem wyrażeniu nadać na y wartość 0, a wtedy będzie także $x=0$; to jednak rozwiązanie nie będzie teraz jedyne, gdyż również rozwiązaniem, według tegoż wyrażenia, będzie każda para wartości x i y takich, iż

$$x : y = -b_1 : a_1.$$

Widzimy więc, że, jeżeli wartości niewiadomych mogą być różne od zera, to z jednego z dwu równań danych otrzymamy wyrażenie jednej niewiadomej przez drugą niewiadomą. Pozostałe zaś równanie niczego nam już nie dodaje do tego, co wynika z tamtego równania, czyli jest ono zbyteczne. Np.

1). $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ 5x+7y=0; \end{cases}$ 2). $\begin{cases} 4x-6y=0, \\ 10x-15y=0; \end{cases}$

$2\times7-5\times3=-1;\ x=0,\ y=0.$ $4\times(-15)-10\times(-6)=0;\ x:y=3:2.$

β. Niech

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0. \end{cases}$$

Z dwu którychkolwiek, np. z dwu pierwszych równań

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = -c_1 z, \\ a_2 x + b_2 y = -c_2 z, \end{cases}$$

jest $$x = -\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} z, \quad y = -\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} z$$

(art. 181), co podstawiając w pozostałe z danych równań, otrzymamy

$$[a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) - b_3(a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)]\, z = 0.$$

Gdyby tu spółczynnik niewiadomej z był różny od zera, to byłoby $z=0$, a wtedy z poprzednich wyrażeń na x i y wynikałoby, że także $x=0$ i $y=0$, tak iż dany układ miałby jedyne rozwiązanie

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

Jeżeli zaś ten spółczynnik niewiadomej z jest równy zeru, to wtedy z może otrzymywać jakąkolwiek wartość. Jeżeli więc wszystkie trzy niewiadome nie mają jednocześnie otrzymywać jedynie wartości równych zeru, to, wyraziwszy z dwu równań dwie niewiadome przez trzecią niewiadomą, nie otrzymujemy z pozostałego równania wartości określonej dla tej trzeciej niewiadomej, tak iż ona pozostaje liczbą dowolną. Owo zatem pozostałe równanie niczego nam nie dodaje do tego, cośmy otrzymali z tamtych dwu równań, czyli jest ono zbyteczne. Jest tedy (art. 144, β)

$$x : y : z = (b_1 c_2 - b_2 c_1) : -(a_1 c_2 - a_2 c_1) : (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Np. 1). $\begin{cases} 2x+3y-3z=0, \\ 4x+5y+z=0, \\ 9x-y-3z=0, \end{cases}$ 2). $\begin{cases} 2x+3y+8z=0, \\ 5x-6y-34z=0, \\ x-3y-14z=0, \end{cases}$

$x=0,\quad y=0,\quad z=0.$ $\qquad x:y:z=2:-4:1.$

184. Zastanowimy się nad przypadkiem, kiedy $n>m$, t. j. kiedy mamy układ, w którym jest więcej równań niż niewiadomych.

Gdy mamy układ dwu równań z jedną niewiadomą

$$\begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \end{cases}$$

to np. z pierwszego mamy $x=-\frac{b_1}{a_1}$, co podstawiwszy w równanie pozostałe, mieć będziemy $-\frac{a_2b_1}{a_1}+b_2=0$, czyli

$$a_1b_2-a_2b_1=0.$$

Ta równość wynika także z warunku $a_1:a_2=b_1:b_2$, pod którym jedno z tych równań jest równoznaczne z pozostałem (art. 164); innemi słowy, wyraża ona, iż jedno z danych równań jest zbyteczne.

Gdybyśmy mieli układ trzech równań z jedną niewiadomą

$$\begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \\ a_3x+b_3=0, \end{cases}$$

to, aby one mogły istnieć jednocześnie, potrzeba, iżby np.

$$a_1b_2-a_2b_1=0 \quad \text{i} \quad a_1b_3-a_3b_1=0.$$

Gdy idzie o wyznaczenie rozwiązania tych równań, to jedno którekolwiek z nich wystarcza.

Gdybyśmy mieli układ trzech równań z dwiema niewiadomemi

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \\ a_3x+b_3y=c_3, \end{cases}$$

to np. z dwu pierwszych z tych równań mamy

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

co podstawiwszy w pozostałe równanie, otrzymamy

$$-a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(a_1c_2-a_2c_1)-c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0.$$

Jest to oczywiście warunek, aby te równania jednocześnie istnieć mogły. Gdy ten warunek jest spełniony, jedno z danych równań jest zbyteczne. — I t. d.

185. Zdarzyć się może, iż pośród n równań niejednorodnych z n niewiadomemi, które rozwiązujemy jako równania jednoczesne, istnieje równanie zbyteczne lub sprzeczne. Np.

α. 1). $\begin{cases} 91x+63y=217, \\ 65x+45y=155; \end{cases}$

rozwiązując ten układ np. metodą Bézout, dochodzimy do równania

$$(91p+65)\,x+(63p+45)\,y=217p+155.$$

Kładąc $91p+65=0$, mamy $p=-\frac{5}{7}$, co podstawiwszy w równanie poprzednie, dojdziemy do tożsamości $0=0$. Wskazuje nam ona, iż drugie z danych równań powstaje z pierwszego wskutek pomnożenia obu jego stron przez liczbę $\frac{5}{7}$. Jedno więc z danych równań jest zbyteczne (art. 174, α). Z któregokolwiek z tych równań wynika tylko wyrażenie jednej z niewiadomych przez pozostałą, np. $x=\frac{1}{13}(31-9y)$.

2).
$$\begin{cases} 2x-3y+4z=7, \\ 3x-2y+z=8, \\ 11x-9y+7z=31; \end{cases}$$
wyrugujmy np. z, odejmując równanie pierwsze stronami odpowiedniemi od każdego z dwu pozostałych równań; otrzymamy równania
$$\begin{cases} 10x-5y=25, \\ 30x-15y=75, \end{cases}$$
które widocznie są równoznaczne z sobą, co nam wskazuje, że pośród równań danych jest równanie zbyteczne. Jakoż, gdy do równania pierwszego dodamy stronami odpowiedniemi drugie po pomnożeniu obu jego stron przez 3, otrzymamy równanie trzecie (art. 175, α). Z tego więc układu równań otrzymać możemy tylko wyrażenia dwu niewiadomych przez niewiadomą pozostałą, np. $y=2x-5$, $z=x-2$.

β. $2x-3y+4z=7$, $3x-2y+z=8$, $11x-9y+7z=30$.

Postępując np. podobnie, jak w poprzednim przykładzie, dojdziemy do równań
$$10x-5y=25, \quad 30x-15y=71,$$
z których wynikałoby, że $4=0$. A więc z dwu tych równań jedno jest sprzeczne z pozostałem; zatem także pośród równań danych jest równanie sprzeczne z pozostałemi (art. 175, β) i niema takich wartości x, y, z, przy którychby układ równań danych był możliwy.

ROZDZIAŁ ÓSMY.

ZADANIA STOPNIA PIERWSZEGO. ROZTRZĄSANIE RÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO.

ZADANIA Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

186. Jeżeli dane zadanie jest tego rodzaju, iż można odpowiedź na nie znaleźć przy pomocy rozwiązania odpowiednio dobranego równania, albo też odpowiednio dobranych równań stopnia 1-go, to nazywamy je *zadaniem stopnia 1-go* albo *zagadnieniem stopnia 1-go*.

Rozważać będziemy naprzód zadania, które rozwiązać można przy pomocy jednego równania stopnia 1-go z jedną niewiadomą.

Zadanie. Ojciec ma lat 40, a syn 10; po ilu latach ojciec będzie miał trzy razy tyle lat, co syn?

Szukaną ilość lat, po których upływie ojciec będzie miał 3 razy tyle lat, co syn, nazwijmy x. Po x latach ojciec będzie miał lat $40+x$, syn zaś będzie miał lat $10+x$; a że wówczas ilość lat ojca będzie 3 razy większa od ilości lat syna, przeto możemy ją także tak wyrazić $(10+x).3$. Mamy tedy dwa wyrażenia tejże samej ilości lat ojca; a więc

$$40+x=(10+x).3, \qquad \text{skąd} \quad x=5.$$

Rzeczywiście po 5-u latach ojciec będzie miał 45 lat, a syn 15 lat i $45=15\times3$.

Naprzód ilość lat, o których wyznaczenie idzie, nazwaliśmy x. Następnie zauważyliśmy, że, jeżeli x jest liczbą, której szukamy, to, raz dodawszy ją do 40, a drugim razem, po dodaniu jej do 10, powstałą stąd sumę pomnożywszy przez 3, otrzymamy każdym razem tę samę liczbę. Połączywszy te dwa wyrażenia tejże samej liczby znakiem $=$, doszliśmy do równania, odpowiadającego zadaniu, czyli, innemi słowy, »ułożyliśmy zadanie w równanie«. Rozwiązawszy to równanie, sprawdziliśmy, że znaleziona wartość niewiadomej prowadzi do odpowiedzi na postawione zadanie.

W takiż sposób postępować należy przy innych zadaniach. A mianowicie:

Po wniknięciu uważnem w treść zadania, określamy, jakiej liczby szukamy, i tę oznaczamy przez jednę z końcowych liter alfabetu. Następnie zaś zgodnie z warunkami zadania wskazujemy, jakie działania należy na tej liczbie i na liczbach danych wykonać, przyczem postępujemy tak, jak postępowalibyśmy przy sprawdzaniu, że owa liczba, jeszcze nieznana, istotnie czyni zadość warunkom zadania, t. j. że pewne wyrażenie, do którego ta liczba wchodzi, przedstawia liczbę tę samę, co inne wyrażenie. Z połączenia tych dwu wyrażeń jednej liczby znakiem $=$ otrzymujemy równanie. Ułożywszy w ten sposób zadanie w równanie, rozwiązujemy to równanie, a następnie na samem zadaniu sprawdzamy, czy z otrzymanego rozwiązania równania wynika istotnie odpowiedź na postawione pytanie.

Nie można podać zgóry szczegółowszych wskazówek, jak postępować należy przy układaniu zadania w równanie; zależy to bowiem od bardzo rozmaitych warunków, jakie się w różnych zadaniach zdarzyć mogą. —

Dla przykładu jedno zadanie trudniejsze ułożymy w równanie.

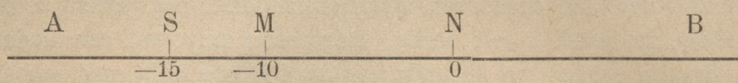
Zadanie. Zbiornik napełniony wodą ma dwa kurki, A i B, różnej wielkości. Otwarto kurek A, przez który wypłynęła 4-ta część wody, zawartej w zbiorniku. Następnie otwarto jeszcze kurek B i reszta wody wypłynęła przez te oba kurki w ciągu czasu o 5 kwadransów dłuższego, niż potrzeba było, aby przez kurek A wypłynęła 4-ta część wody ze zbiornika. Gdyby zaś od początku były otwarte oba kurki, to zbiornik byłby opróżniony o kwadrans prędzej. W ciągu ilu godzin opróżniłby się zbiornik, gdyby był otwarty tylko kurek A?

Ilość godzin, o którą się pytamy, nazwijmy x. Przez sam tylko kurek A wypływa $\frac{1}{4}$ wody w ciągu godzin $\frac{1}{4}x$. Reszta, t. j. pozostałe $\frac{3}{4}$ zawartości zbiornika, wypływa przez oba kurki w ciągu godzin $\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}(x+5)$; cała więc zawartość zbiornika wypłynęłaby przez oba kurki w ciągu godzin $\frac{1}{4}(x+5)\times\frac{4}{3}$, czyli $\frac{1}{3}(x+5)$. Ta zaś ilość godzin jest o $\frac{1}{4}$ godziny mniejsza od czasu, użytego na opróżnienie zbiornika sposobem poprzednim, t. j. od godzin $\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}(x+5)$, czyli od godzin $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$. Mamy więc równanie

$$\tfrac{1}{3}(x+5)+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{5}{4}, \qquad \text{skąd} \quad x=4.$$

A więc kurek A może opróżnić zbiornik w ciągu 4 godzin. Jakoż, po opróżnieniu $\frac{1}{4}$ zbiornika przez kurek A w ciągu jednej godziny, reszta wypłynęła przez oba kurki podczas godzin $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$ godziny, tak iż cały zbiornik przez oba kurki, otwarte jednocześnie, opróżniłby się w godzin $\frac{9}{4}\times\frac{4}{3}$. t. j. w 3 godziny. Ten zaś przeciąg czasu jest od sumy 1 g. $+\frac{9}{4}$ g. $=3\frac{1}{4}$ g. istotnie krótszy o $\frac{1}{4}$ godziny.

187. Zadanie. Dwa ciała poruszają się z jednostajną prędkością po linii w kierunku od A ku B i w pewnej chwili jedno znajduje się w punkcie M, drugie zaś w punkcie N, położonym względem M w kierunku ku B o $10\,m$; pierwsze z nich przebiega $1\,m$, drugie zaś $3\,m$ na sekundę. Oznaczyć miejsce spotkania się tych dwu ciał.



Gdy odległość od punktu N do punktu spotkania się ciał, dodatną np. w kierunku od N ku B, nazwiemy x, to dojdziemy do równania

$$10+x=\tfrac{1}{3}x, \qquad \text{skąd} \quad x=-15.$$

Otrzymana tu wartość ujemna liczby x wskazuje, iż odległość należy wziąć w kierunku wprost przeciwnym kierunkowi od N ku B. Znalezionej więc liczbie $x=-15$ odpowiada odległość liczona od punktu N w kierunku ujemnym, a więc ku A, tak iż miejscem spotkania się ciał jest punkt S. Jakoż, pierwsze ciało przebiegło od S do M drogę $5\,m$ w 5-u sekundach; drugie zaś ciało o 5 sekund wcześniej, niż znalazło się w punkcie N, było przed tym punktem o $3\,m\times5=15\,m$, t. j. było w tymże punkcie S.

188. Z każdego z powyższych zadań dochodziliśmy do równania, którego pierwiastek dawał szukaną odpowiedź na zadanie. Nie zawsze jednak tak bywa.

Zadanie. Znaleźć taką liczbę dwucyfrową, aby ilość dziesiątków była o 6 większa od ilości jedności, zaś 3 razy wzięta ilość dziesiątków była o 1 większa od 4 razy wziętej ilości jedności.

Jeżeli ilość dziesiątków nazwiemy x, to

$$3x=4(x-6)+1, \qquad \text{skąd} \quad x=23.$$

Według tego rozwiązania liczba dwucyfrowa miałaby dziesiątków 23, co być nie może. Chociaż więc nasze równanie, rozważane niezależnie od zadania, ma rozwiązanie $x=23$, to jednak to rozwiązanie wskazuje, iż zadanie jest niemożliwe. —

Objaśnić, dlaczego następujące zadania są niemożliwe:

1). Dziesięć osób zrobiło składkę; każdy mężczyzna dał 6 zł., a każda kobieta 3 zł.; zebrano 46 zł. Ilu mężczyzn wzięło udział w tej składce?

2). Bilet wstępu do muzeum kosztuje 30 ct. Za biletami płatnemi było w niem w piątek o 27 osób więcej niż we czwartek, w sobotę było tyle, co we czwartek i w piątek razem, a w niedzielę było 9 razy tyle osób, co we czwartek, w piątek i w sobotę razem. Przez te dni cztery zebrano razem za bilety wstępu 138 zł. Ile było osób za biletami we czwartek?

3). Kupiono gruszek o 19 więcej niż jabłek; za gruszkę płacono po 5 ct., a za jabłko po 2 ct.; razem zapłacono 88 ct. Ile kupiono gruszek?

4). Jan ma teraz 49 lat, Józef zaś 40 lat. Kiedy oni będą w takim wieku, iż, do ilości lat, którą każdy z nich będzie miał w owym czasie, dodawszy ilość lat, którą każdy z nich ma teraz, otrzymamy sumy, których stosunek jest $3:2$?

189. Zadanie. Jan ma teraz a lat, Józef zaś b lat. Kiedy oni będą w takim wieku, iż, do ilości lat, którą każdy z nich będzie miał w owym czasie, dodawszy ilość lat, którą każdy z nich ma teraz, otrzymamy sumy, których stosunek jest $3:2$?

Jeżeli to nastąpi po upływie x lat, to wówczas Jan będzie miał lat $a+x$, Józef zaś $b+x$, tak iż $(2a+x):(2b+x)=3:2$, czyli

$$2(2a+x)=3(2b+x), \qquad \text{skąd} \quad x=4a-6b.$$

Z zadania jest widoczne, że liczby a i b mogą mieć tylko wartości dodatne. I wtedy jednak zadanie niezawsze jest możliwe, (jak np. zad. ostatnie w art. 188-ym, w którem $a=49$, $b=40$). Należy więc zbadać, przy jakich wartościach a i b zadanie jest możliwe.

Gdyby Jan był młodszy od Józefa, t. j. gdyby było $a<b$, to wtedy byłoby (art. 169) $4a<4b$, a więc (art. 168) $4a-6b<-2b$, t. j. $x<-2b$. A zatem, w tym razie stosunek, podany w zadaniu, przypadałby na więcej niż b lat przed urodzeniem się Józefa, co jest niemożliwe.

Gdyby Jan był rówieśnikiem Józefa, t. j. gdyby było $a=b$, to byłoby $6a=6b$, czyli $4a-6b=-2a$, t. j. $x=-2a$. A więc stosunek, wskazany w zadaniu, przypadałby na a lat przed urodzeniem się Jana i Józefa, co być nie może.

Gdyby nakoniec Jan był starszy od Józefa, t. j. gdyby było $a>b$, to mielibyśmy $4a>4b$, albo $4a-6b>-2b$, t. j. $x>-2b$. Ponieważ jednak $x>-2b$ tak wtedy, kiedy $-2b<x<-b$, lub $x=-b$, jak i wtedy, kiedy $x>-b$, przeto z nierówności $x>-2b$ stanowczego wniosku co do możliwości zadania wyciągnąć nie można. — Aby zadanie było możliwe, potrzeba, iżby było $x>-b$, czyli, iżby było $4a-6b>-b$.

Rozwiązując tę nierówność (art. 171) np. względem a, znajdziemy $a>\frac{5}{4}b$. A więc to zadanie jest możliwe w razie, jeżeli Jan jest starszy od Józefa więcej niż o $\frac{1}{4}$ tej ilości lat, jaką Józef ma teraz.

Zauważmy tu jeszcze, że w razie, kiedy $a>\frac{3}{2}b$, będzie $4a-6b>0$, t. j. $x>0$; a zatem stosunek, wskazany w zadaniu, mieć będzie miejsce w przyszłości. W razie zaś, kiedy $\frac{5}{4}b<a<\frac{3}{2}b$, jest $-b<x<0$; a zatem stosunek, wskazany w zadaniu, miał miejsce dawniej, t. j. przed chwilą obecną. Nakoniec, jeżeli $a=\frac{3}{2}b$, jest $x=0$; a zatem stosunek ów ma miejsce teraz. W tym ostatnim przypadku równanie nasze staje się równaniem $2(3b+x)=3(2b+x)$, czyli $2x=3x$, któremu czyni zadość wartość $x=0$.

190. We wszystkich rozważanych zadaniach widzieliśmy, że równanie, w które ułożyliśmy dane zadanie, ma zawsze rozwiązanie. Ale niezawsze, otrzymawszy rozwiązanie równania, dochodzimy z tego rozwiązania do odpowiedzi na dane zadanie. Niekiedy bowiem z natury zadania wynikają pewne warunki dla szukanej odpowiedzi, które nie zostały uwzględnione w równaniu, wskutek ogólnego oznaczenia niewiadomej przez literę.

Dlatego zawsze, po otrzymaniu rozwiązania, należy zbadać, czy z niego wynika odpowiedź na zadanie, a jeżeli odpowiedź nie wynika, należy wyjaśnić, dlaczego zadanie jest niemożliwe.

Jeżeli liczby dane w zadaniu są wyrażone przy pomocy liter, to wartość niewiadomej jest wyrażeniem algebraicznem. Ponieważ zaś zdarzyć się może, że zadanie jest tylko wtedy możliwe, kiedy litery owe zadość czynią pewnym warunkom, przeto w takim razie należy zbadać, jak trzeba ograniczyć wartości owych liter, aby zadanie było możliwe.

Prócz tego, jeżeli się zdarzy, że rozwiązanie równania, gdy do niego wchodzą litery, przy pewnych wartościach liter otrzymuje wartości osobliwe, jak ∞ lub $\frac{0}{0}$, to należy w każdym z takich przypadków rozważyć szczegółowo, jakiem staje się samo zadanie i jaką będzie miało odpowiedź.

Badanie, dlaczego niekiedy rozwiązanie równania nie przedstawia odpowiedzi na zadanie, oznaczenie, jakim warunkom zadość czynić mają wartości liter, znajdujących się w rozwiązaniu równania, aby zadanie było możliwe, oraz zwrócenie uwagi na osobliwe wartości tego rozwiązania — wszystko to stanowi roztrząsanie *rozwiązania* równania, lub, jak mówimy krócej, roztrząsanie równania (Discussion d. G.).

191. Zastanowimy się nad warunkami, pod jakiemi rozwiązanie równania stopnia 1-go z jedną niewiadomą przedstawiać może pewne wartości. Równanie to weźmiemy w najdogodniejszej do takiego rozważania postaci, mianowicie

$$ax+b=cx+d, \qquad \text{skąd} \quad x=\frac{d-b}{a-c}.$$

A). Rozważymy naprzód rozwiązanie w razie, kiedy mianownik jest od zera różny, t. j. kiedy $a \gtrless c$.

I). Jeżeli licznik nie jest równy zeru, $b \gtrless d$, to może być albo $x>0$, albo też $x<0$.

Mianowicie:

1). tak w przypadku $a>c$, $b<d$, jak i w przypadku $a<c$, $b>d$, jest $x>0$.

2). tak w przypadku $a>c$, $b>d$, jak i w przypadku $a<c$, $b<d$, jest $x<0$.

II). Jeżeli licznik jest równy zeru, $b=d$, to $x=0$ i równanie dane przechodzi na równanie $ax+b=cx+b$, czyli $(a-c)x=0$, które (art. 160) może mieć tylko pierwiastek $x=0$.

B). Rozważymy teraz rozwiązanie w razie, kiedy mianownik jest równy zeru, t. j. kiedy $a=c$.

I). Jeżeli licznik jest także równy zeru, $b=d$, to $x=\frac{0}{0}$, co jest wskazówką, iż x mogłoby być jakąkolwiek liczbą. Równanie dane stawałoby się wówczas tożsamością $ax+b=ax+b$, jakąkolwiekby x było liczbą. I w tym więc przypadku nie może być mowy (por. art. 165) o równaniu, a więc temsamem i o jego pierwiastku, lecz tylko o tem, czem się staje wyrażenie, będące wogóle pierwiastkiem równania danego, wtedy, kiedy w tem wyrażeniu przyjmiemy jednocześnie $a=c$ i $b=d$.

II). Jeżeli licznik nie jest równy zeru, $b \gtrless d$, to $x=\infty$, t. j. x staje się liczbą większą od jakkolwiek wielkiej. Wówczas równanie dane przechodzi na $ax+b=ax+d$; lecz, oczywiście, w razie $b \gtrless d$ nie może być $ax+b=ax+d$ przy żadnej wartości x. W rozważanym więc przypadku przestaje istnieć dane równanie (por. art. 166). Przeto $x=\infty$ nie jest już pierwiastkiem równania danego i oznacza tu tylko, że wyrażenie, będące wogóle pierwiastkiem równania danego, staje się liczbą większą od jakkolwiek wielkiej, gdy w owem wyrażeniu przyjmiemy $a=c$ przy $b \gtrless d$.

192. Zastanawiając się nad tem, czem się staje wyrażenie $x=\frac{d-b}{a-c}$ w razie, kiedy $a=c$ i $b=d$, rozróżnić należy dwa przypadki: albo wartości d i b nie zależą od wartości nadawanych na a i c, albo też od nich zależą. — W pierwszym przypadku rzeczywiście owo wyrażenie staje się $\frac{0}{0}$, t. j. może przedstawiać jakąkolwiek liczbę. — W drugim przypadku $\frac{0}{0}$ tylko pozornie może oznaczać liczbę nieoznaczoną. Np. gdy $d=am$ i $b=cm$, to, jeżeli w wyrażeniu $x=\frac{d-b}{a-c}$, czyli $x=\frac{am-cm}{a-c}$, przyjmiemy $a=c$, stanie się ono $\frac{0}{0}$. Lecz przy wszelkich wartościach a i c jest ono równe liczbie m, tak iż w tym przypadku istotną wartością rozważanego wyrażenia x jest $x=m$ (art. 129, 121).

193. Zadanie. Po pewnej linii w kierunku od A ku B jadą dwaj gońcy, pierwszy z prędkością v_1, drugi zaś z prędkością v_2 kilometrów na godzinę; w pewnej chwili pierwszy przejechał przez punkt M, a o h godzin później drugi przejechał przez punkt N, położony poza punktem M w kierunku ku B, a odległy od M o d kilometrów. Oznaczyć punkt spotkania się tych gońców.

A M N S B

0

Odległość punktu spotkania się od N, dodatną np. w kierunku od N ku B, nazwijmy x. Przypuśćmy, że gońcy spotkali się w punkcie S.

Pierwszy goniec jedzie v_1 kilometrów na godzinę, a więc od chwili, kiedy był w punkcie M, do chwili spotkania się jego w S z drugim gońcem, przejedzie on $d+x$ kilometrów w ciągu $\frac{d+x}{v_1}$ godziny. Ponieważ on przejeżdżał przez punkt M o h godzin wcześniej, niż drugi goniec przez punkt N, przeto powyższa ilość godzin jest o h godzin większa od ilości godzin, podczas których goniec drugi jedzie od N do S. Że zaś ten drugi goniec jedzie na godzinę v_2 kilometrów, więc drogę od N do S, t. j. x kilometrów, przejedzie w ciągu $\frac{x}{v_2}$ godziny. Jest więc

$$\frac{d+x}{v_1}=h+\frac{x}{v_2}, \qquad \text{skąd} \quad x=\frac{v_2(hv_1-d)}{v_2-v_1}.$$

O tyle więc kilometrów od punktu N, liczonych w kierunku ku B, znajduje się punkt spotkania się tych dwu gońców.

Tu według zadania litery v_1 i v_2 mogą oznaczać tylko liczby dodatne litery zaś h i d nie mogą oznaczać liczb ujemnych.

α. Rozważymy naprzód przypadek, kiedy jednocześnie obie liczby h i d, są od zera różne.[1]).

A). Mianownik od zera różny, $v_2 \gtrless v_1$.

I). Kiedy $hv_1 \gtrless d$, to może być albo $x>0$, alboteż $x<0$.

Mianowicie:

1). Gdy albo jednocześnie $v_2>v_1$ i $hv_1>d$, alboteż jednocześnie $v_2<v_1$ i $hv_1<d$, to $x>0$. — W pierwszym razie $hv_1>d$; przeto w chwili, kiedy drugi goniec przejeżdża przez punkt M, pierwszy jest już za N, t. j. pierwszy goniec jest przed drugim. Że zaś $v_2>v_1$, pierwszy goniec jedzie wolniej niż drugi, przeto pierwszego gońca dogoni drugi w jakimś punkcie za N. — Jak podobnie w drugim razie objaśnić odpowiedź dodatną?

2). Gdy albo jednocześnie $v_2>v_1$ i $hv_1<d$, alboteż jednocześnie $v_2<v_1$ i $hv_1>d$, to $x<0$. — Jakoż w pierwszym razie, ponieważ $hv_1<d$, przeto w chwili,

[1]) W liczniku wyrażenia x mamy różnicę hv_1-d. W niej odjemną jest iloczyn hv_1, liczba oderwana, która tu, z uwagi, że odjemnik d odpowiada kilometrom, również kilometrom odpowiada, mianowicie $v_1.h$ kilometrom, t. j. tej ilości kilometrów, którą pierwszy goniec przejechał w h godzin.

kiedy drugi goniec jest w N, pierwszy jest przed tym punktem. A że $v_2 > v_1$, pierwszy goniec jedzie wolniej niż drugi, zatem już dalej oddalenie gońców od siebie będzie się wciąż powiększało. Ale przed tą chwilą, kiedy drugi przejeżdżał przez N, oddalenie ich od siebie bywało mniejsze, tak iż punkt ich spotkania się mógł przypaść przed tym punktem N. — Jak podobnie w drugim razie objaśnić odpowiedź ujemną?

II). Kiedy $hv_1 = d$, to $x=0$. Wówczas równanie pierwotne staje się równaniem $h + \frac{x}{v_1} = h + \frac{x}{v_2}$, czyli $(v_2 - v_1)x = 0$, które ma tylko pierwiastek $x=0$. — Ponieważ $hv_1 = d$, więc w chwili, kiedy drugi goniec znajduje się w punkcie N, pierwszy dojechał do tegoż punktu. Że zaś $v_2 \gtrless v_1$, t. j. gońcy jadą z różną prędkością, więc w tym tylko punkcie N znajdują się jednocześnie. Jest więc punkt N punktem spotkania się gońców.

B). Mianownik równy zeru, $v_2 = v_1$.

I). Kiedy wówczas $hv_1 = d$, to $x = \frac{0}{0}$. Równanie pierwotne przechodzi wtedy na tożsamość $h + \frac{x}{v_1} = h + \frac{x}{v_1}$, a więc równanie istnieć przestaje. — Rozważając w tym razie samo zadanie, widzimy, że, ponieważ $hv_1 = d$, przeto w chwili, kiedy drugi goniec jest w punkcie N, pierwszy znajduje się w tymże punkcie. Że zaś $v_2 = v_1$, t. j. gońcy jadą z jednakową prędkością, zatem wciąż będą razem jechali, tak iż każdy punkt będzie punktem ich spotkania się, t. j. x może być jakąkolwiek liczbą.

II). Kiedy wówczas $hv_1 \gtrless d$, to $x=\infty$. Równanie pierwotne przechodzi wtedy na $\frac{d}{v_1} + \frac{x}{v_1} = h + \frac{x}{v_1}$, co przy $hv_1 \gtrless d$ istnieć nie może. — Rozważając w tym razie wprost samo zadanie, widzimy, że, ponieważ $hv_1 \gtrless d$, przeto w chwili, kiedy drugi goniec jest w N, pierwszy znajduje się przed N, alboteż za N. Że zaś $v_2 = v_1$, t. j. gońcy jadą z tą samą prędkością, zatem ich oddalenie od siebie wciąż pozostaje toż samo i, jakkolwiek daleko jechać będą, nie spotkają się z sobą. A więc jakkolwiek wielka wartość x nie odpowie punktowi spotkania się gońców z sobą. Innemi słowy, wartość x, odpowiadająca punktowi spotkania się gońców, jest większa od jakkolwiek wielkiej.

β. Jeżeli $h=0$, to w chwili, kiedy drugi goniec przejeżdża przez punkt N, pierwszy przejeżdża przez punkt M. Wówczas równanie pierwotne staje się równaniem

$$\frac{d+x}{v_1} = \frac{x}{v_2}, \qquad \text{skąd } x = \frac{dv_2}{v_1 - v_2}.$$

Przy $d \gtrless 0$, odpowiednio do tego, czy $v_1 > v_2$, czy $v_1 < v_2$, czyteż $v_1 = v_2$, jest $x > 0$, $x < 0$, $x=\infty$. Przy $d=0$ w razie, kiedy $v_1 \gtrless v_2$, jest $x=0$. Nakoniec, kiedy jednocześnie $d=0$ i $v_1 = v_2$, jest $x = \frac{0}{0}$.

γ. Jeżeli $d=0$, to punkt M przypada w punkcie N, t. j. pierwszy goniec o h godzin później przejeżdża przez punkt N niż drugi. Wówczas równanie pierwotne staje się równaniem

$$\frac{x}{v_1} = h + \frac{x}{v_2}, \qquad \text{skąd } x = \frac{h v_1 v_2}{v_2 - v_1}.$$

Przy $h > 0$, odpowiednio do tego, czy $v_2 > v_1$, czy $v_2 < v_1$, czyteż $v_2 = v_1$, jest $x > 0$, $x < 0$,

$x=\infty$. Przy $h=0$, w razie $v_2 \gtrless v_1$, jest $x=0$. Przypadek, kiedy jednocześnie $h=0$ i $v_2=v_1$ rozważaliśmy już pod β.

194. Jeżeli w przypadku α. powyższego zadania o gońcach przyjmiemy np. $d=hv_2$, to rozwiązanie rozważanego równania przejdzie na $x=\frac{hv_2(v_1-v_2)}{v_2-v_1}=-hv_2$. Zdawałoby się (art. 192), że także w przypadku $v_2=v_1$ wartość ta $x=-hv_2=-hv_1$ będzie prowadziła wprost do odpowiedzi na zadanie, t. j. iż wówczas spotkanie się gońców przypadnie jedynie w punkcie M. Ponieważ równanie $\frac{hv_2+x}{v_1}=h+\frac{x}{v_2}$ sprowadza się wtedy do tożsamości $h+\frac{x}{v_1}=h+\frac{x}{v_1}$, t. j. równanie nie istnieje, przeto trzeba wprost z zadania wnieść, czy w tym przypadku szczególnym z wartości $x=-hv_2$ wynika odpowiedź. O h godzin przedtem, nim drugi goniec przejechał przez punkt N, był on w punkcie przed N, odległym od N o $hv_2=hv_1$ kilometrów, t. j. w punkcie M, przez który wówczas przejeżdżał pierwszy goniec. Byli więc w tym punkcie razem. Że zaś jadą z jednakową prędkością, przeto każdy punkt ich drogi jest ich punktem spotkania się. A więc w przypadku rozważanym z istotnej wartości wyrażenia x, równej $-hv_2$, nie wynika odpowiedź na zadanie.

ZADANIA OZNACZONE Z WIELU NIEWIADOMEMI.

195. Widzieliśmy w art. 182-im, że, gdy mamy w układzie mniej równań niż niewiadomych, to pewna ilość niewiadomych może otrzymywać wartości dowolne; układ taki nazwaliśmy nieoznaczonym. Jeżeli zaś układ równań, między któremi niema równania zbytecznego, aniteż sprzecznego, ma tyle niewiadomych, ile jest równań, to jest on oznaczony i, rozwiązawszy go, otrzymujemy jedyną wartość każdej niewiadomej (art. 177).

Jeżeli zadanie jest tego rodzaju, iż można znaleźć na nie odpowiedź przy pomocy rozwiązania takiego właśnie układu równań stopnia 1-go, to nazywamy je *zadaniem oznaczonem stopnia 1-go z wielu niewiadomemi*.

Niektóre z zadań, rozwiązywanych przy pomocy jednego równania z jedną niewiadomą, mogą być także rozwiązane jako zadania z wielu niewiadomemi. Tak np., rozwiązując zadanie, podane na początku art. 188-go, moglibyśmy oznaczyć jeszcze ilość jedności przez y, a wtedy zadanie owo moglibyśmy ułożyć w dwa równania:

$$\begin{cases} x-\ \ y=6, \\ 3x-4y=1, \end{cases} \quad \text{skąd} \quad x=23, \quad y=17.$$

196. Zadanie I. Po pewnej linii w kierunku od A ku B jadą dwaj gońcy, pierwszy z prędkością 14 *km*, drugi z prędkością 11 *km* na godzinę; w pewnej chwili pierwszy przejechał przez punkt M, a o 4 godziny później drugi przejechał przez punkt N, położony poza punktem M w kierunku ku B, a odległy od M o 50 *km*. Oznaczyć punkt i chwilę spotkania się tych gońców.

Jeżeli odległość punktu spotkania się gońców od punktu N, dodatną np. w kierunku od N ku B, nazwiemy x, ilość zaś godzin, które upłynęły od chwili, kiedy pierwszy goniec przejechał przez punkt M, do chwili spotkania się jego z drugim gońcem, nazwiemy y, to w y godzin pierwszy goniec przejedzie $14y$ kilometrów, drugi zaś w ciągu $y-4$ godzin przejedzie $11(y-4)$ kilometrów. Z zadania wynika, że pierwszy w y godzin przejechał od punktu M $50+x$ kilometrów, a drugi w godzin $y-4$ przejechał od punktu N x kilometrów. Mamy więc

$$\begin{cases} 14y=50+x, \\ 11(y-4)=x, \end{cases} \text{czyli} \begin{cases} x-14y=-50, \\ x-11y=-44, \end{cases} \text{skąd} \quad x=-22,\ y=2.$$

Gońcy zatem spotkali się z sobą o dwie godziny później, niż pierwszy przejechał przez punkt M, w punkcie, znajdującym się przed punktem N o 22 *km*.

Zadanie II. W zadaniu I zamiast: »o 4 godziny później«, niech będzie: »o 7 godzin później«.

Rozumując podobnie, jak poprzednio, dojdziemy do równań

$$\begin{cases} x-14y=-50, \\ x-11y=-77, \end{cases} \quad \text{skąd} \quad x=-176,\ y=-9,$$

co wskazuje, że gońcy spotkali się przed punktem N, wcześniej, niż pierwszy przejechał przez punkt M, a więc jeszcze przed punktem M.

Zadanie III. Ktoś kupuje 3 gatunki towaru w paczkach jednakowej wagi; raz kupił po paczce każdego gatunku i zapłacił 4 zł., drugim razem kupił 3 paczki pierwszego gatunku, 2 drugiego i 1 trzeciego i zapłacił 12 zł., trzecim razem kupił 2 paczki pierwszego gatunku, 3 drugiego i 4 trzeciego i zapłacił 13 zł. Ile kosztuje paczka każdego gatunku?

Nazwawszy cenę paczki pierwszego gatunku x zł., drugiego y zł., trzeciego z zł., dochodzimy do równań

$$\begin{aligned} x+y+z&=4, \\ 3x+2y+z&=12, \\ 2x+3y+4z&=13. \end{aligned}$$

Rugując z tych równań niewiadomą z, dochodzimy do równań

$$\begin{aligned} 2x+y&=8, \\ 2x+y&=3, \end{aligned}$$

z których wynika, że także poprzednie trzy równania są sprzeczne z sobą (art. 185). Zadanie więc jest niemożliwe.

Zadanie IV. W zadaniu III zamiast: »zapłacił 4 zł.«, niech będzie: »zapłacił 5 zł.«

Podobnie, jak w poprzedniem zadaniu, dojdziemy do równań

$$\begin{cases} x+y+z=5, \\ 3x+2y+z=12, \\ 2x+3y+4z=13. \end{cases}$$

Rugując z tych równań niewiadomą z, otrzymujemy równania

$$\begin{cases} 2x+y=7, \\ 2x+y=7, \end{cases}$$

a więc właściwie jedno tylko równanie z dwiema niewiadomemi. Jedna zatem niewiadoma pozostaje nieoznaczoną (art. 185). Zadanie więc jest nieoznaczone.

Z dwu którychkolwiek z równań danych, np. z dwu pierwszych, wyraziwszy (por. art. 182) np. niewiadome x i y przez pozostałą z, mieć będziemy $x=2+z$, $y=3-2z$, tak iż przy dowolnie branych wartościach z, otrzymywać będziemy odpowiadające wartości x i y. Każda taka trójka wartości będzie jednem z możliwych nieskończenie wielu rozwiązań układu równań, w które ułożyliśmy nasze zadanie, lecz tylko wtedy będzie prowadziła do odpowiedzi na zadanie, kiedy wszystkie trzy wartości niewiadomych są liczbami dodatnemi. —

Zastanawianie się nad związkiem (por. art. 190) rozwiązania układu równań z odpowiedzią na zadanie, które do owego układu doprowadziło, stanowi roztrząsanie rozwiązania układu równań, albo, jak mówimy krócej, roztrząsanie równań.

197. Zastanowimy się nad warunkami, pod jakiemi rozwiązanie układu dwu równań z dwiema niewiadomemi przedstawiać może pewne wartości. Jak wiemy (art. 181), rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

jest
$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

A). Mianownik od zera różny, $a_1 b_2 \gtrless a_2 b_1$.

I). Jeżeli żaden z liczników nie jest równy zeru, to wartości x i y mogą być:

1). albo obie dodatne,

2). albo x ujemne przy y dodatnem,

3). albo x dodatne przy y ujemnem,

4). alboteż obie ujemne.

Łatwo postawić warunki dla każdego z tych przypadków. Tak np. ostatni przypadek mieć będzie miejsce w razie, kiedy albo jednocześnie

$$a_1 b_2 > a_2 b_1, \quad c_1 b_2 < c_2 b_1 \quad \text{i} \quad a_1 c_2 < a_2 c_1,$$

alboteż jednocześnie

$$a_1 b_2 < a_2 b_1, \quad c_1 b_2 > c_2 b_1 \quad \text{i} \quad a_1 c_2 > a_2 c_1.$$

II). Jeżeli oba liczniki nie są jednocześnie od zera różne, to:

1). Gdy jeden z liczników jest równy zeru, może być:

a). Albo $c_1 b_2 = c_2 b_1$ i $a_1 c_2 \gtrless a_2 c_1$. Wtedy z uwagi, że tu $\frac{c_2}{c_1} = \frac{b_2}{b_1}$, jest

$$\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{c_1\left(a_1 \frac{c_2}{c_1} - a_2\right)}{b_1\left(a_1 \frac{b_2}{b_1} - a_2\right)} = \frac{c_1}{b_1};$$

a więc

$$x = 0, \quad y = \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}.$$

b). Alboteż $c_1 b_2 \gtrless c_2 b_1$ i $a_1 c_2 = a_2 c_1$. Wtedy

$$x = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}, \quad y = 0.$$

2). Gdy oba liczniki są równe zeru, $c_1 b_2 = c_2 b_1$ i $a_1 c_2 = a_2 c_1$, to możnaby rozróżnić dwa przypadki:

a). Kiedy iloczyny, stanowiące strony tych równości, są od zera różne, to $c_1 : c_2 = b_1 : b_2$, $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$, skąd wynika $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, czyli $a_1 b_2 = a_2 b_1$, co się sprzeciwia nierówności $a_1 b_2 \gtrless a_2 b_1$. Ten więc przypadek jest niemożliwy.

b). Kiedy iloczyny, stanowiące strony jednej z powyższych równości, są równe zeru, to w tym przypadku, ze względu na nierówność $a_1 b_2 \gtrless a_2 b_1$, jest jednocześnie $c_1 = 0$ i $c_2 = 0$, a więc także strony równości pozostałej są równe zeru. Jest więc wtedy $x = 0$ i $y = 0$, a równania dane przechodzą na równania jednorodne (por. art. 183, α)

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0, \\ a_2 x + b_2 y = 0. \end{cases}$$

B). Mianownik równy zeru, $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

I). Jeżeli $c_1 b_2 = c_2 b_1$, to z tej równości mamy $c_1 : c_2 = b_1 : b_2$; z poprzedniej zaś mamy $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$; a więc jest także $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$, czyli $a_1 c_2 = a_2 c_1$. Wówczas jest $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$. Z tego, że tu $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$, wprost wynika, że w tym przypadku równania dane są równoznaczne z sobą, t. j. mamy tu właściwie jedno tylko równanie. Otrzymanych wyrażeń $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$ nie należy zatem rozumieć tak, iżby przy każdej dowolnie wziętej wartości x mogło również y oznaczać jakąkolwiek liczbę. Wyrażają one tylko, iż jednej (którejkolwiek) z niewiadomych możemy nadać wartość dowolną. Wtedy każdym razem odpowiadającą wartość pozostałej niewiadomej, jedyną (art. 172, 163), otrzymamy z któregokolwiek z równań danych.

II). Jeżeli $c_1 b_2 \gtrless c_2 b_1$, to nie może być $a_1 c_2 = a_2 c_1$, gdyż z tego wynikałoby (podobnie jak poprzednio), iż $c_1 b_2 = c_2 b_1$. A więc jest także $a_1 c_2 \gtrless a_2 c_1$. Jest zatem $x = \infty$, $y = \infty$, a więc niema w tym przypadku takich wartości x i y, któreby jednocześnie dwu danym równaniom czyniły zadość, czyli dany układ równań nie istnieje. Jakoż, równania dane przechodzą wtedy na równania

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \qquad a_1 x + b_1 y = \frac{b_1}{b_2} c_2,$$

które w tym razie są widocznie sprzeczne z sobą.

198. Zadanie. W zadaniu art. 193-go zamiast: »oznaczyć punkt spotkania się tych gońców«, niech będzie: »oznaczyć punkt i chwilę spotkania się tych gońców«.

Wprowadzając oznaczenia, jak w zadaniu I art. 196-go, i podobnie rozumując, dojdziemy do układu równań

$$\begin{cases} x - v_1 y = -d, \\ x - v_2 y = -h v_2, \end{cases}$$

skąd

$$x = \frac{v_2 (h v_1 - d)}{v_2 - v_1}, \qquad y = \frac{h v_2 - d}{v_2 - v_1}.$$

A). Mianownik od zera różny, $v_2 \gtrless v_1$.

I). 1). Kiedy albo jednocześnie

$$v_2 > v_1, \quad h v_1 > d \quad \text{i} \quad h v_2 > d,$$

alboteż jednocześnie

$$v_2 < v_1, \quad h v_1 < d \quad \text{i} \quad h v_2 < d,$$

to $x > 0$, $y > 0$. Gońcy spotykają się z sobą po chwili, w której pierwszy przejechał przez M $(y > 0)$, i za N $(x > 0)$.

2). Kiedy albo jednocześnie

$$v_2 > v_1, \quad hv_1 < d \quad \text{i} \quad hv_2 > d,$$

albo też jednocześnie

$$v_2 < v_1, \quad hv_1 > d \quad \text{i} \quad hv_2 < d,$$

to $x < 0$, $y > 0$. Gońcy spotykają się po chwili, w której pierwszy wyjechał z M, ale przed N, t. j. między M i N.

3). Nie może być ani jednocześnie

$$v_2 > v_1, \quad hv_1 > d \quad \text{i} \quad hv_2 < d,$$

ani też jednocześnie

$$v_2 < v_1, \quad hv_1 < d \quad \text{i} \quad hv_2 > d,$$

gdyż każdym razem trzecia nierówność jest sprzeczna z dwiema pierwszemi. Nie może więc być $x > 0$ przy $y < 0$. Rzeczywiście, nie mogą gońcy spotkać się za punktem N, a przed chwilą, w której pierwszy przejechał przez punkt M.

4). Kiedy albo jednocześnie

$$v_2 > v_1, \quad hv_1 < d \quad \text{i} \quad hv_2 < d,$$

albo też jednocześnie

$$v_2 < v_1, \quad hv_1 > d \quad \text{i} \quad hv_2 > d,$$

to $x < 0$, $y < 0$. Gońcy spotykają się z sobą przed N i przed chwilą, w której pierwszy przejechał przez punkt M, t. j. przed M.

II). 1). *a*). Kiedy $hv_1 = d$, to $y = \dfrac{h(v_2 - v_1)}{v_2 - v_1} = h$; w tym więc razie jest $x = 0$, $y = h$. Gońcy spotykają się w N o h godzin później, niż pierwszy przejechał przez M.

b). Kiedy $hv_2 = d$, to $x = -hv_2$, $y = 0$. Gońcy spotykają się przed N w chwili, kiedy pierwszy przejeżdża przez M, t. j. w M.

2). Jednocześnie może być $hv_1 = d$ i $hv_2 = d$ tylko wtedy, kiedy $d = 0$ i $h = 0$. Wówczas jest $x = 0$, $y = 0$, pierwotny zaś układ równań przechodzi w tym przypadku na

$$\begin{cases} x - v_1 y = 0, \\ x - v_2 y = 0. \end{cases}$$

Pierwszy goniec przejeżdża przez M w chwili, w której $(h = 0)$ drugi goniec jest także $(d = 0)$ w M, a ponieważ jadą z różną prędkością, przeto M jest jedynym punktem ich spotkania się z sobą.

B). Mianownik równy zeru, $v_2 = v_1$.

I). Kiedy $hv_1 = d$, to także $hv_2 = d$, i nawzajem. W tym więc razie jest $x = \dfrac{0}{0}$, $y = \dfrac{0}{0}$, dwa zaś równania układu pierwotnego stają się jednem równaniem. Pierwszy goniec w h godzin po przejechaniu przez M znajdzie się w N, gdzie w owej chwili znajduje się także drugi goniec; a że obaj jadą z jednakową prędkością, więc wciąż będą jechali z sobą razem. I możemy powiedzieć, że spotykają się z sobą albo w każdym punkcie w chwili, odpowiadającej temu punktowi, albo też w każdej chwili w punkcie, jej odpowiadającym. Tak np. przy $x = 3d$ może być tylko $y = 4h$.

II). Kiedy $hv_1 \gtrless d$, to także odpowiednio $hv_2 \gtrless d$, i $x = \infty$, $y = \infty$, równania zaś układu pierwotnego przechodzą na równania

$$x - v_1 y = -d, \qquad x - v_1 y = -hv_1,$$

sprzeczne z sobą. Gońcy nie spotkają się z sobą i zadanie jest niemożliwe. Do tego samego doszlibyśmy, rozważając w tym razie wprost samo zadanie.

ROZDZIAŁ DZIEWIĄTY.

WYZNACZNIKI.

WPROWADZENIE WYZNACZNIKÓW.

199. Rozwiązanie układu równań (art. 181, α)

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

jest
$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Spólny mianownik tych pierwiastków, $a_1 b_2 - a_2 b_1$, utworzony z liczb

$$\begin{matrix} a_1, b_1, \\ a_2, b_2, \end{matrix}$$

napiszmy:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix},$$

tak iż

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}.$$

Wyrażenie po prawej stronie tej tożsamości, które często przez D oznaczać będziemy, nazywamy wyznacznikiem (Determinante) stopnia 2-go czterech elementów a_1, b_1, a_2, b_2. Elementy w »symbolu« wyznacznika są ustawione w dwa pionowe rzędy, które kolumnami (Verticalreihen) nazywać będziemy, i w dwa poziome rzędy, które nazywać będziemy wierszami (Horizontalreihen). Wyznacznik ten ma dwa wyrazy, jeden $a_1 b_2$, drugi $-a_2 b_1$, które są stopnia 2-go względem elementów (art. 57). Do każdego wyrazu wchodzi po jednym elemencie z każdego wiersza i z każdej kolumny; jeden z tych wyrazów jest o znaku $+$, drugi o znaku $-$.

Aby zaraz mieć zastosowanie, zważmy, że taksamo mamy

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1, & b_1 \\ c_2, & b_2 \end{vmatrix}, \qquad a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix}.$$

Możemy więc napisać:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1, & b_1 \\ c_2, & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Wyznacznik, będący tu spólnym mianownikiem, nazwaliśmy D. Jeżeli wyznacznik, powstający z D wskutek zastąpienia elementów pierwszej kolumny przez odpowiednie wyrazy wiadome równań, nazwiemy D_1, a wyznacznik, powstający z D wskutek zastąpienia w nim elementów drugiej kolumny przez odpowiednie wyrazy wiadome równań, nazwiemy D_2, to możemy napisać

$$x = \frac{D_1}{D}, \qquad y = \frac{D_2}{D}.$$

Np. gdy mamy

$$\begin{cases} 11x + 14y = -16, \\ 4x - 7y = -30, \end{cases}$$

to
$$x=\frac{\begin{vmatrix}-16, & 14\\ -30, & -7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}11, & 14\\ 4, & -7\end{vmatrix}}=\frac{(-16).(-7)-(-30).14}{11.(-7)-4.14}=\frac{532}{-133}=-4,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}11, & -16\\ 4, & -30\end{vmatrix}}{-133}=\frac{-266}{-133}=2.$$

200. Spólny mianownik pierwiastków układu równań (art. 181, β)
$$\begin{cases} a_1 x+b_1 y+c_1 z=d_1,\\ a_2 x+b_2 y+c_2 z=d_2,\\ a_3 x+b_3 y+c_3 z=d_3\end{cases}$$
jest $\quad a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1,$

czyli $\quad a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1),$

albo $\quad a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2\\ b_3, & c_3\end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1, & c_1\\ b_3, & c_3\end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1, & c_1\\ b_2, & c_2\end{vmatrix}.$

Umówmy się, aby przez symbol
$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1\\ a_2, & b_2, & c_2\\ a_3, & b_3, & c_3\end{vmatrix}$$
rozumieć sumę algebraiczną trzech iloczynów, które otrzymujemy, mnożąc kolejno każdy z elementów pierwszej kolumny przez wyznacznik stopnia 2-go, powstały wskutek opuszczenia w powyższym symbolu tej kolumny i tego wiersza, do którego ów element należy, przyczem jednak przed pierwszym z tych iloczynów stawiamy znak $+$, przed drugim znak $-$, przed trzecim zaś znak $+$. W takim razie mamy
$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1\\ a_2, & b_2, & c_2\\ a_3, & b_3, & c_3\end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2\\ b_3, & c_3\end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1, & c_1\\ b_3, & c_3\end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1, & c_1\\ b_2, & c_2\end{vmatrix}.$$
Lewą stronę tej tożsamości nazywamy w y z n a c z n i k i e m s t o p n i a 3 - g o dziewięciu elementów, wypisanych w jego symbolu. Wyznacznik ten ma sześć wyrazów stopnia 3-go względem jego elementów; do każdego wyrazu wchodzi po jednym elemencie z każdego wiersza i z każdej kolumny; trzy z tych wyrazów są o znaku $+$, trzy zaś o znaku $-$. Wyznacznik ten oznaczać zwykle będziemy przez literę Δ.

Podobnie może być wyznacznik stopnia 4-go, stopnia 5-go i t. d.

WŁASNOŚCI I OBLICZANIE WYZNACZNIKA.

201. Powyżej rozważany sześciomian
$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$
moglibyśmy tak przedstawić:
$$-b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + b_2 (a_1 c_3 - a_3 c_1) - b_3 (a_1 c_2 - a_2 c_1) =$$
$$= -b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2\\ a_3, & c_3\end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1, & c_1\\ a_3, & c_3\end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1, & c_1\\ a_2, & c_2\end{vmatrix},$$
albo:
$$c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) - c_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$
$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2\\ a_3, & b_3\end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1, & b_1\\ a_3, & b_3\end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1, & b_1\\ a_2, & b_2\end{vmatrix}.$$

Ponieważ ów sześciomian jest przedstawiony przez wyznacznik, poprzednio nazwany Δ, przeto prawe strony powyższych tożsamości są również wyrażeniami tego wyznacznika Δ. Tak każde z tych dwu wyrażeń, jak i wyrażenie, wyprowadzone w art. poprzedzającym, nazywamy **rozkładem wyznacznika według elementów kolumny.** Ostatnie np. wyrażenie jest rozkładem według elementów trzeciej kolumny.

W każdym z tych rozkładów każdy składnik jest iloczynem elementu przez wyznacznik stopnia 2-go, powstający z danego wyznacznika wskutek opuszczenia w nim wiersza i kolumny, do których ów element należy, przyczem jednak przed niektóremi z tych iloczynów mamy znak $+$, przed innemi $-$. Co do tego, z jakim znakiem brać należy ów iloczyn, łatwo zauważyć, że składnik, w którym czynnikiem jest element a_1, ma znak $+$, a gdy od tego elementu przechodzimy, czyto w kierunku poziomym, czyteż w pionowym, do innych, to znaki odpowiednich składników idą po sobie naprzemian. Tak np., aby oznaczyć, z jakim znakiem należy wziąć składnik odpowiadający elementowi b_3, zauważymy, iż odpowiednie znaki będą się tak zmieniały:

$$a_1\ +;\quad b_1\ -;\quad b_2\ +;\quad b_3\ -.$$

Zwykle dla krótkości wyznacznik stopnia 2-go, przez który w takich rozkładach mamy mnożyć odpowiedni element danego wyznacznika, wraz z właściwym temu składnikowi znakiem, oznaczamy jedną literą. W ten sposób nazwiemy

$$+\begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} = A_1, \quad -\begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} = B_1, \ldots, \quad -\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix} = B_3, \quad +\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = C_3,$$

tak iż np.

$$a_1\begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1 A_1, \quad -b_1\begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} = b_1 B_1, \quad \text{i t. d.}$$

Powyższe więc rozkłady wyznacznika Δ według elementów jego kolumn możemy odpowiednio tak napisać:

$$\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3, \quad \Delta = b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3, \quad \Delta = c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3.$$

Każdą taką liczbę $A_1, B_1, C_1, A_2, \ldots$, (t. j. odpowiedni wyznacznik stopnia 2-go wraz z właściwym znakiem) nazywać będziemy **liczbą dołączoną do elementu** (Coefficient des Elementes, Adjuncte d. E., adjungirte Determinante) odpowiednio a_1, b_1, c_1, a_2,... wyznacznika Δ.

Powyżej w naszym sześciomianie braliśmy poza nawiasy elementy kolumny albo pierwszej, albo drugiej, alboteż trzeciej. Również jednak moglibyśmy brać w nim poza nawiasy elementy któregokolwiek wiersza, tak iż ów sześciomian, czyli nasz wyznacznik Δ, moglibyśmy także tak rozłożyć:

$$a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix},$$

i t. p., t. j.

$$\Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1, \quad \Delta = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2, \quad \Delta = a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3.$$

Są to rozkłady naszego wyznacznika według elementów odpowiednio pierwszego, drugiego, trzeciego wiersza.

Jeżeli podobnie przez liczby, dołączone do elementów wyznacznika stopnia 2-go

$$D = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix},$$

rozumieć będziemy czynniki, przez które odpowiednie elementy w tym wyznaczniku są mnożone, i jeżeli nazwiemy je odpowiednio A_1, B_1, A_2, B_2, to

$$A_1 = b_2, \quad B_1 = -a_2, \quad A_2 = -b_1, \quad B_2 = a_1,$$

tak iż $D = a_1 A_1 + a_2 A_2 = b_1 B_1 + b_2 B_2 = a_1 A_1 + b_1 B_1 = a_2 A_2 + b_2 B_2$.

202. Weźmy dwa wyznaczniki stopnia 2-go, tem się od siebie różniące, iż wiersze jednego są odpowiedniemi kolumnami drugiego,

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}.$$

Oba te wyznaczniki przedstawiają ten sam dwumian $a_1 b_2 - a_2 b_1$, a więc są sobie równe.

Weźmy podobnie dwa takie wyznaczniki stopnia 3-go:

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \\ c_1, c_2, c_3 \end{vmatrix}.$$

Zauważmy, że liczby, dołączone do tego samego elementu w tych dwu wyznacznikach, np. do elementu a_2,

$$-\begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} b_1, b_3 \\ c_1, c_3 \end{vmatrix},$$

różnią się tem tylko, iż wiersze jednego z tych dwu wyznaczników stopnia 2-go są kolumnami w pozostałym; są zatem tą samą liczbą — mianowicie są tu liczbą A_2. Jeżeli więc pierwszy z powyższych dwu wyznaczników stopnia 3-go rozłożymy według elementów np. pierwszej kolumny, drugi zaś według elementów pierwszego wiersza, to w obu razach będziemy mieli tę samę liczbę $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$; a więc dwa owe wyznaczniki są sobie równe.

A zatem *wyznacznik nie zmienia się, jeżeli jego wiersze przyjmiemy za odpowiednie kolumny, lub nawzajem.*

Dlatego, jeżeli dowiedziemy jakiej własności wyznacznika, odnoszącej się np. do jego wierszy, to możemy tę własność wprost odnieść do jego kolumn; i nawzajem. Z tego powodu używa się często wyrażenia ogólnego: rzędy równoległe (parallele Reihen) wyznacznika.

203. Mając wyznacznik D stopnia 2-go, przestawmy w nim kolumny i ten nowy wyznacznik nazwijmy D′, np.

$$D = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1, \qquad D' = \begin{vmatrix} b_1, a_1 \\ b_2, a_2 \end{vmatrix} = a_2 b_1 - a_1 b_2.$$

Jest więc $$D' = -D,$$

t. j. wskutek tego przestawienia wyznacznik zmienił znak.

Jeżeli podobnie w wyznaczniku Δ stopnia 3-go przestawimy z sobą np. pierwszy i trzeci wiersz i powstały tak wyznacznik Δ', jak również dany, rozłożymy według elementów nieporuszonego — a więc drugiego — wiersza, to

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1, c_1 \\ a_3, c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_3, b_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_3, b_3, c_3 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_1, b_1, c_1 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_3, c_3 \\ b_1, c_1 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_3, c_3 \\ a_1, c_1 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_3, b_3 \\ a_1, b_1 \end{vmatrix}.$$

W tych dwu rozkładach liczby, dołączone do tego samego elementu, różnią się tylko znakiem, tak iż

$$\Delta' = -\Delta.$$

A więc *wyznacznik zmienia znak, jeżeli w nim dwa rzędy równoległe z sobą przestawimy.* —

Gdy mamy wyznacznik, w którym odpowiednie elementy dwu rzędów równoległych są sobie równe, np.

$$\begin{vmatrix} \alpha, \beta, \beta \\ \gamma, \delta, \delta \\ \varepsilon, \zeta, \zeta \end{vmatrix} = W,$$

to według poprzedniego, gdybyśmy przestawili drugą kolumnę z trzecią i tak powstały wyznacznik nazwali W', byłoby $W = -W'$. Że zaś wskutek tego przestawienia żadna zmiana nie zaszła, przeto jednocześnie jest $W = W'$. Dodając te dwie równości: $W = -W'$, $W = W'$ stronami odpowiedniemi, otrzymamy $W = 0$, a więc, *jeżeli w wyznaczniku dwa rzędy równoległe są jednakowe, to wyznacznik jest równy zeru.*

204. W art. 201-ym widzieliśmy, że suma iloczynów elementów jakiegokolwiek rzędu przez liczby dołączone do tychże elementów przedstawia dany wyznacznik. Utwórzmy sumę iloczynów elementów któregokolwiek rzędu przez liczby dołączone do odpowiednich elementów rzędu równoległego, np. sumę iloczynów elementów drugiej kolumny wyznacznika Δ przez liczby, dołączone do odpowiednich elementów trzeciej jego kolumny,

$$b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3.$$

Ta suma tem się różni od sumy $c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 = \Delta$, iż w wyznaczniku Δ zamiast elementów c_1, c_2, c_3, są wzięte odpowiednio elementy b_1, b_2, b_3, a więc owa suma przedstawia wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, b_1 \\ a_2, b_2, b_2 \\ a_3, b_3, b_3 \end{vmatrix},$$

który, według drugiej części art. poprzedzającego, jest równy zeru.

Zatem między dziewięciu elementami wyznacznika Δ i dziewięciu liczbami, do nich dołączonemi, istnieją związki:

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0, \quad b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0, \quad c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0,$$
$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 = 0, \quad b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 = 0, \quad c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 = 0,$$

oraz (art. 201):

$$a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0,\quad a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=0,\quad a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1=0,$$
$$a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3=0,\quad a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3=0,\quad a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2=0.$$

Podobnie między czterema elementami wyznacznika D i czterema liczbami, do nich dołączonemi (art. 201), istnieją związki:

$$a_1B_1+a_2B_2=0,\quad b_1A_1+b_2A_2=0,$$

oraz:

$$a_1A_2+b_1B_2=0,\quad a_2A_1+b_2B_1=0.$$

Widzimy więc, że *suma iloczynów elementów pewnego rzędu wyznacznika przez liczby, dołączone do odpowiednich elementów rzędu równoległego, jest równa zeru.*

205. Weźmy wyznacznik np. stopnia 3-go i wszystkie elementy np. drugiego wiersza pomnóżmy przez tę samę liczbę np. ρ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2\rho, & b_2\rho, & c_2\rho \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}=\Delta''.$$

Rozkładając oba te wyznaczniki według elementów drugiego wiersza, będziemy mieli $\Delta=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2$, $\Delta''=\rho\,(a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2)$, a więc $\Delta''=\rho\Delta$, t. j. *mnożąc wszystkie elementy jednego rzędu wyznacznika przez tę samę liczbę, mnożymy temsamem wyznacznik przez tęż liczbę.* —

Z własności tej możemy korzystać, aby uprościć wyznacznik, jużto znosząc mianowniki w oddzielnych elementach, jużteż wyłączając spólny czynnik elementu rzędu poza symbol.

Np.
$$\begin{vmatrix} \frac{3}{5}, & -1\frac{1}{20}, & -\frac{3}{20} \\ 1\frac{1}{6}, & -\frac{7}{12}, & \frac{1}{2} \\ -1, & 28, & 9 \end{vmatrix}=\frac{1}{20}\begin{vmatrix} 12, & -21, & -3 \\ 1\frac{1}{6}, & -\frac{7}{12}, & \frac{1}{2} \\ -1, & 28, & 9 \end{vmatrix}=\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{12}\cdot\begin{vmatrix} 12, & -21, & -3 \\ 14, & -7, & 6 \\ -1, & 28, & 9 \end{vmatrix}=$$
$$=\frac{1}{240}\cdot 3.7.\begin{vmatrix} 4, & -1, & -1 \\ 14, & -1, & 6 \\ -1, & 4, & 9 \end{vmatrix}=\frac{7}{80}(-1)\begin{vmatrix} 4, & 1, & -1 \\ 14, & 1, & 6 \\ -1, & -4, & 9 \end{vmatrix}.$$

Podobnie w końcowym ustępie art. 199-go przed obliczeniem wyznaczników stopnia 2-go można było wyłączyć przed symbol wyznacznika: w mianowniku z elementów drugiej kolumny czynnik 7; w pierwszym liczniku z elementów pierwszej kolumny czynnik —2, z elementów drugiej czynnik 7, a nadto z elementów pierwszego wiersza czynnik 2; nakoniec w drugim liczniku z elementów drugiej kolumny czynnik —2.

206. Weźmy wyznacznik, w którym elementy jednego rzędu są wszystkie proporcyonalne względem odpowiednich elementów rzędu równoległego, np.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix},\quad \text{gdzie } c_1:a_1=c_2:a_2=c_3:a_3.$$

Spólny wykładnik tych stosunków nazwawszy q, będziemy mieli

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & a_1q \\ a_2, & b_2, & a_2q \\ a_3, & b_3, & a_3q \end{vmatrix}=q\cdot\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & a_1 \\ a_2, & b_2, & a_2 \\ a_3, & b_3, & a_3 \end{vmatrix}=q\,.\,0=0$$

(art. 203), t. j. *wyznacznik, w którym elementy pewnego rzędu są proporcyonalne względem odpowiednich elementów rzędu równoległego, jest równy zeru.*

Np.
$$\begin{vmatrix} 10, & -8 \\ 15, & -12 \end{vmatrix}=0.$$

207. Mając wyznacznik, dodajmy do elementów któregokolwiek jego rzędu elementy rzędu równoległego, pomnożone przez jakąkolwiek tę samę liczbę; np. do elementów trzeciej kolumny wyznacznika Δ dodajmy elementy drugiej jego kolumny, pomnożone przez ρ. Będziemy mieli (art. 204)

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1+b_1\rho \\ a_2, & b_2, & c_2+b_2\rho \\ a_3, & b_3, & c_3+b_3\rho \end{vmatrix} = (c_1+b_1\rho)C_1+(c_2+b_2\rho)C_2+(c_3+b_3\rho)C_3 =$$

$$= c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3+\rho(b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3) = \Delta+\rho.0=\Delta.$$

A więc *wyznacznik nie zmienia się, jeżeli do wszystkich elementów pewnego rzędu dodajemy odpowiednie elementy rzędu równoległego, pomnożone przez tę samę liczbę.*

208. Z własności tej korzystać możemy przy obliczaniu wyznacznika, dążąc do tego, aby wszystkie, prócz jednego, elementy pewnego rzędu stały się równemi zeru (art. 201).

Tak np., obliczając wyznacznik otrzymany w art. 205-ym, możemy do elementów pierwszej kolumny dodać odpowiednie elementy drugiej, pomnożone przez —4, do elementów zaś trzeciej dodać odpowiednie elementy drugiej:

$$\begin{vmatrix} 4, & 1, & -1 \\ 14, & 1, & 6 \\ -1, & -4, & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 10, & 1, & 7 \\ 15, & -4, & 5 \end{vmatrix} = -1.\begin{vmatrix} 10, & 7 \\ 15, & 5 \end{vmatrix} = -5.\begin{vmatrix} 2, & 7 \\ 3, & 5 \end{vmatrix} = (-5).(-11) = 55.$$

Gdybyśmy, mając wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 4, & 8, & 7 \\ 6, & 2, & 5 \\ -10, & 11, & 8 \end{vmatrix},$$

chcieli go tak przekształcić, iżby elementy drugi i trzeci pierwszej kolumny były zerami, to moglibyśmy tak np. postąpić: elementy wiersza drugiego i wiersza trzeciego pomnożyć przez 2 (wskutek czego przed wyznacznikiem postawilibyśmy czynnik $\frac{1}{4}$); następnie od elementów drugiego wiersza odjąć odpowiednie elementy pierwszego, pomnożone przez 3; nakoniec do elementów trzeciego wiersza dodać odpowiednie elementy pierwszego, pomnożone przez 5.

ZASTOSOWANIA DO UKŁADU RÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO.

209. Opierając się na udowodnionych powyżej własnościach wyznacznika, możemy wprost z układu równań stopnia 1-go dojść do wyrażeń jego pierwiastków.

Weźmy układ trzech równań niejednorodnych z trzema niewiadomemi, oraz wyznacznik, którego elementami są spółczynniki niewiadomych w tych równaniach;

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Pomnóżmy przez y elementy drugiej kolumny wyznacznika Δ i do tych iloczynów dodajmy odpowiednie elementy pierwszej kolumny, pomnożone przez x, oraz trzeciej, pomnożone przez z. Będziemy mieli (art. 205, 207):

$$\Delta.y = \begin{vmatrix} a_1, & b_1y+a_1x+c_1z, & c_1 \\ a_2, & b_2y+a_2x+c_2z, & c_2 \\ a_3, & b_3y+a_3x+c_3z, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Tu zamiast elementów drugiej kolumny możemy na mocy równań danych napisać odpowiednio d_1, d_2, d_3, tak iż

$$\Delta . y = \begin{vmatrix} a_1, d_1, c_1 \\ a_2, d_2, c_2 \\ a_3, d_3, c_3 \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik po stronie prawej nazwawszy Δ_2, mamy $\Delta . y = \Delta_2$. Taksamo, nazwawszy

$$\begin{vmatrix} d_1, b_1, c_1 \\ d_2, b_2, c_2 \\ d_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = \Delta_1, \qquad \begin{vmatrix} a_1, b_1, d_1 \\ a_2, b_2, d_2 \\ a_3, b_3, d_3 \end{vmatrix} = \Delta_3,$$

znajdziemy $\Delta . x = \Delta_1$, $\Delta . z = \Delta_3$. Mamy więc

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Stosując takie postępowanie do układu

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases} \qquad \mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix},$$

dojdziemy do podobnych wyrażeń niewiadomych x i y (por. art. 199).

Tę metodę dochodzenia do wyrażeń niewiadomych podał[1]) Baltzer.

Widzimy, że, *jeżeli mamy układ równań niejednorodnych z tylu niewiadomemi, ile jest równań, to wartością każdej niewiadomej jest ułamek, którego mianownikiem jest wyznacznik, utworzony ze spółczynników niewiadomych, licznikiem zaś wyznacznik, powstający z mianownika wskutek zastąpienia spółczynników tej niewiadomej przez odpowiednie wyrazy wiadome równań.*

Takie wyrażenia pierwiastków układu równań pierwszy podał[2]) Cramer.

Np. $\begin{cases} 8x + 9y + 11z = -25, \\ 3x + 5y - 11z = 9, \\ 4x + 16y + 11z = 5, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 8, & 9, & 11 \\ 3, & 5, & -11 \\ 4, & 16, & 11 \end{vmatrix} = 11.7.19,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -25, & 9, & 11 \\ 9, & 5, & -11 \\ 5, & 16, & 11 \end{vmatrix} = 11.7.2^2.(-19), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 8, & -25, & 11 \\ 3, & 9, & -11 \\ 4, & 5, & 11 \end{vmatrix} = 11.2.133, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 8, & 9, & -25 \\ 3, & 5, & 9 \\ 4, & 16, & 5 \end{vmatrix} = -7.209.$$

$$x = \frac{-11.7.2^2.19}{11.7.19} = -4, \quad y = \frac{11.2.133}{11.7.19} = 2, \quad z = \frac{-7.209}{11.7.19} = -1.$$

210. Możemy inaczej wyprowadzić pierwiastki układu równań, otrzymane w art. poprzedzającym. Aby, mając ów układ trzech równań, znaleźć wartość x, pomnóżmy obie strony pierwszego równania przez A_1, drugiego przez A_2, trzeciego przez A_3, i tak pomnożone równania dodajmy do siebie stronami odpowiedniemi. Otrzymamy

$$(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3)x + (b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3)y + (c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3)z = \\ = d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3$$

Tu spółczynniki niewiadomych y i z są równe zeru (art. 204), spółczynnik zaś x jest Δ (art. 201); jest więc

$$x = \frac{d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3}{\Delta}.$$

Podobnie, mnożąc równania dane odpowiednio, raz przez B_1, B_2, B_3, drugim zaś razem przez C_1, C_2, C_3, znajdziemy

---

1) W r. 1857. 2) W r. 1750.

$$y = \frac{d_1 B_1 + d_2 B_2 + d_3 B_3}{\Delta}, \qquad z = \frac{d_1 C_1 + d_2 C_2 + d_3 C_3}{\Delta}.$$

Liczniki są widocznie wyrażeniami wyznaczników odpowiednio Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Tę metodę dochodzenia do wyrażeń niewiadomych podał[1]) Cauchy (wym. koszì).

211. Biorąc ten sam układ równań, co na początku art. 209-go, mamy

$$\Delta . x = \Delta_1, \qquad \Delta . y = \Delta_2, \qquad \Delta . z = \Delta_3.$$

Jeżeliby w tych równaniach wszystkie wyrazy wiadome były równe zeru: $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 0$, t. j. jeżelibyśmy mieli układ trzech równań jednorodnych z trzema niewiadomemi

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0, \end{cases}$$

to wtedy byłoby $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ i

$$\Delta . x = 0, \qquad \Delta . y = 0, \qquad \Delta . z = 0.$$

W przypadku, kiedy wyznacznik Δ jest od zera różny, wynikałoby z tych równości, iż jednocześnie

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

t. j. temu układowi równań czyniłyby zadość jedynie wartości zero wszystkich niewiadomych (por. art. 183).

Weźmy teraz na uwagę przypadek, kiedy wyznacznik Δ jest równy zeru. Gdyby wtedy równości $\Delta . x = 0$, $\Delta . y = 0$, $\Delta . z = 0$ można było rozważać niezależnie od danego układu równań, to każdej z nich mogłaby czynić zadość jakakolwiek wartość odpowiedniej niewiadomej. Te jednak równości nie mogą być w taki sposób rozważane, gdyż wynikają z danego układu równań. Z dwu zaś którychkolwiek równań tego układu, np. z równań pierwszego i trzeciego, po podzieleniu obu stron każdego z nich przez tę samę niewiadomą np. z, t. j. z równań

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{x}{z} + b_1 \dfrac{y}{z} = -c_1, \\[2ex] a_3 \dfrac{x}{z} + b_3 \dfrac{y}{z} = -c_3 \end{cases}$$

wynika

$$\frac{x}{z} = \frac{\begin{vmatrix} -c_1, & b_1 \\ -c_3, & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{A_2}{C_2}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\begin{vmatrix} a_1, & -c_1 \\ a_3, & -c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{B_2}{C_2}.$$

Przeto (art. 144, β)

$$x : y : z = A_2 : B_2 : C_2.$$

Gdybyśmy podobnie wzięli inne dwa z danych równań, t. j. raz drugie i trzecie, drugim razem pierwsze i drugie, znaleźlibyśmy

$$x : y : z = A_1 : B_1 : C_1 \quad \text{i} \quad x : y : z = A_3 : B_3 : C_3.$$

Wskazuje nam to, że w tym przypadku jednej tylko (którejkolwiek) z niewiadomych x, y, z nadać możemy wartość dowolną (por. art. 183).

---

[1]) W r. 1812.

Widzimy więc, że *układowi tylu równań jednorodnych, ile jest niewiadomych, w razie, jeżeli wyznacznik, utworzony ze spółczynników niewiadomych, jest od zera różny, czynią zadość jedynie wartości zero wszystkich niewiadomych; jeżeli zaś ów wyznacznik jest równy zeru, to wartości niewiadomych są proporcyonalne względem liczb dołączonych w tym wyznaczniku do elementów, będących spółczynnikami tychże niewiadomych w któremkolwiek z równań danych.*

Np. 1). $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ 4x+5y=0, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 4, & 5 \end{vmatrix} = -2, \quad x=0, \quad y=0.$

2). $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ 4x+6y=0, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 4, & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad x:y = 6:-4 = -3:2.$

3). $\begin{cases} 4x+\ \ y-\ \ z=0, \\ 14x+\ \ y+6z=0, \\ -x-4y+9z=0, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 4, & 1, & -1 \\ 14, & 1, & 6 \\ -1, & -4, & 9 \end{vmatrix} = 55, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

4). $\begin{cases} 2x+\ \ 4y-3z=0, \\ 3x+17y+\ \ z=0, \\ x+\ \ y-2z=0, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2, & 4, & -3 \\ 3, & 17, & 1 \\ 1, & 1, & -2 \end{vmatrix} = 0,$

$$x:y:z = \begin{vmatrix} 4, & -3 \\ 1, & -2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 2, & -3 \\ 1, & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2, & 4 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = -5:1:-2.$$

212. Przy pomocy własności wyznaczników możemy to, cośmy wyprowadzili w art. 184-ym, inaczej udowodnić.

Gdy mamy

$$\begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = \mathrm{D},$$

to, dodając do elementów kolumny drugiej odpowiednie elementy kolumny pierwszej pomnożone przez x (art. 207), mieć będziemy na mocy równań danych

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_1, & a_1x+b_1 \\ a_2, & a_2x+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & 0 \\ a_2, & 0 \end{vmatrix}, \qquad \text{t. j.} \quad \mathrm{D}=0,$$

a ta równość jest warunkiem jednoczesności dwu równań danych.

Taksamo znajdziemy, iż warunkami jednoczesności równań

$$\begin{cases} a_1x+b_1=0, \\ a_2x+b_2=0, \\ a_3x+b_3=0 \end{cases} \qquad \text{są równości np.} \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Podobnie, gdy mamy

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \\ a_3x+b_3y=c_3, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & -c_1 \\ a_2, & b_2, & -c_2 \\ a_3, & b_3, & -c_3 \end{vmatrix} = \Delta,$$

to, w wyznaczniku Δ dodając do elementów kolumny trzeciej odpowiednie elementy kolumny pierwszej, pomnożone przez x, i drugiej, pomnożone przez y, otrzymamy na mocy równań danych w trzeciej kolumnie elementy 0, tak iż jest $\Delta=0$. A więc warunkiem jednoczesności tych trzech równań jest równość zeru wyznacznika Δ.

ZADANIA.

(Art. 2 i 3). **1.** Jan i Piotr wsiedli w Rzeszowie na pociąg kolei żelaznej i, przejechawszy nim 87 *km*, wysiedli w Przemyślu; stąd Jan pojechał do Jarosławia, odległego o 35 *km*, Piotr zaś do Tarnowa, odległego o 167 *km*. Oznaczyć położenie Jarosławia i Tarnowa względem Rzeszowa.

2. Od roku [1]) urodzenia się Jana Brożka, profesora Akademii krakowskiej, znakomitego na ów czas matematyka, upłynęło lat 171 do urodzenia się Jana Śniadeckiego, słynnego profesora matematyki i astronoma tejże Akademii, 16 zaś lat przed Śniadeckim urodził się Jędrzej Gawroński, biskup krakowski, wielce zasłużony twórca języka matematycznego polskiego, a 283 lat przed Śniadeckim urodził się Mikołaj Kopernik. Odnieść lata urodzenia się Gawrońskiego i Kopernika do roku urodzenia się Brożka, jako epoki.

3. Na skali termometrycznej Celsius'a 0^0 odpowiada $+32^0$ na skali Fahrenheit'a, a każde 5^0 skali Celsius'a odpowiada 9^0 skali Fahrenheit'a. Obliczyć: α) ile stopni wskazuje termometr Fahrenheit'a, kiedy na termometrze Celsius'a jest: $+10^0$, -5^0, -15^0, -25^0; β) ile stopni wskazuje termometr Celsius'a, kiedy na termometrze Fahrenheit'a jest: $+41^0$, $+14^0$, -22^0.

(Art. 19, 27, 30 i 35). **4.** Powtórzyć rozumowanie na liczbach, których wartości bezwzględne są: raz $\alpha=3$, $\beta=4$; drugim zaś razem $\alpha=7\frac{1}{2}$, $\beta=1\frac{1}{3}$.

(Art. 39). **5.** W ciągu tygodnia obserwowano termometr o godzinie 8-ej rano, o 1-ej po południu i o 6-ej wieczorem i w kolejnych dniach zanotowano stopni: $-7{\cdot}6$, $+2{\cdot}7$, $-3{\cdot}5$; $-10{\cdot}4$, $-3{\cdot}7$, -9; $-17{\cdot}3$, $-10{\cdot}6$, -12; $-0{\cdot}2$, $+2{\cdot}6$, $-2{\cdot}4$; $+4{\cdot}6$, $+10{\cdot}4$, $+8{\cdot}1$; $+1{\cdot}1$, $+2{\cdot}5$, $-7{\cdot}8$; $-16{\cdot}7$, $-3{\cdot}6$, $-11{\cdot}2$. Jaka z tych obserwacyj wynika średnia temperatura tygodnia i jakiemi trzema sposobami można ją obliczyć?

(Art. 40). **6.** Znaleźć średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną liczb: α) 2 i 8; β) $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{8}$; γ) -2 i 8; δ) $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{8}$; ε) 2 i -8; ζ) $\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{8}$; η) -2 i -8; ϑ) $-\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{8}$. **7.** Znaleźć średnią harmoniczną liczb: α) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ i 5; β) $\frac{5}{6}$, $-\frac{7}{4}$ i $\frac{2}{5}$; γ) -4, $-\frac{3}{2}$ i 1; δ) 3, 1, $\frac{2}{3}$, -1 i $\frac{5}{9}$. **8.** Znaleźć różnicę między średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną liczb: α) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ i 2; β) $\frac{1}{2}$, -2 i $-\frac{3}{4}$; γ) 16, -6, -5 i -3.

(Art. 45). **9.** Napisać bez spółczynników: α) $-5a$; β) $4abc$; γ) $-5a^2bc$; δ) $3ab^2-2a^2b$; ε) $-3a^2b^2+4ab^3-2b^4$.

(Art. 47). **10.** Napisać bez wykładników: α) a^3b^2; β) $-2a^2bc^3$; γ) $-8a^3b^2cd^4$. **11.** Napisać bez spółczynników i wykładników: α) $-5a^2bc^5$; β) $3a^4b^5$; γ) $(-1)^{2p+1}.4a^3b^5cd^2$; δ) $4ab^3-3b^4$; ε) $-ab^5+(-1)^{2p}a^3b^3$.

(Art. 54). **12.** $3ab+5ac-5bc$ przy: α) $a=8$, $b=-5$, $c=-3$; β) $a=7$, $b=-5$, $c=2$; γ) $a=-3\frac{1}{2}$, $b=-5$, $c=-3$. **13.** $5a^2-3ab+2c^2+4cd$ przy $a=10$, $b=1$, $c=2$, $d=3$. **14.** $10x+7y-2{\cdot}75$ przy $x=0{\cdot}15$, $y=0{\cdot}6$. **15.** $2a^3b^2c+0{\cdot}9d-4e$ przy $a=0{\cdot}01$, $b=5$, $c=1800$, $d=8{\cdot}9$, $e=1{\cdot}7165$. **16.** $a^{n+2}+ma^{n+1}b+mab^{n+1}+b^{n+2}$ przy: α) $m=3$, $a=0{\cdot}7$, $b=0{\cdot}3$, $n=1$; β) $m=3$, $a=11$, $b=-7$, $n=3$; γ) $m=3$, $a=17$, $b=-7$, $n=1$. **17.** $(-1)^{n+2}.m.a^{n+2}+(-1)^{n+1}.m.a^{n+1}-(-1)^{n+1}.a^{n+1}$ przy: α) $a=2$, $m=3$, $n=1$; β) $a=3$, $m=2$, $n=2$. **18.** $3x^{3m}-2x^2y^m-3x^my^2$ przy: α) $m=2$, $x=2$, $y=3$; β) $m=3$, $x=0{\cdot}1$, $y=0{\cdot}2$. **19.** $0{\cdot}7a^4+1{\cdot}9a^3b-11{\cdot}3ab^3+13{\cdot}3a^2b^2$ przy: α) $a=2$, $b=3$; β) $a=1{\cdot}1$, $b=2{\cdot}3$. **20.** $100x^my^n+3x^{m+2}y^{n+2}-x^{m+n}y^{2n}+153y^n$ przy α) $m=2$, $n=3$, $x=3$, $y=2$; β) $m=1$, $n=2$, $x=4$, $y=1$.

---

[1]) 1585.

(Art. 55). Wskazać działania: **21.** Od b odjąć c, a tę różnicę odjąć od a. **22.** Od t odjąć x i przez tę różnicę podzielić sumę liczb r i s. **23.** α) Od z odjąć u i przez tę różnicę pomnożyć sumę liczb x i y; β) od z odjąć u, tę różnicę pomnożyć przez y, a otrzymany iloczyn dodać do x; γ) y pomnożyć przez z, iloczyn ten dodać do x, a od otrzymanej sumy odjąć u; δ) do x dodać y, sumę tę pomnożyć przez z, a od otrzymanego iloczynu odjąć u. **24.** Podzielić b przez c; iloraz ten pomnożyć przez sumę, której pierwszym składnikiem jest iloczyn liczb c i a, drugim d; to wyrażenie odjąć od różnicy, którą otrzymamy, odejmując a od b. **25.** Pomnożyć a przez c, zaś b przez d; pierwszy z tych iloczynów odjąć od drugiego; tę różnicę pomnożyć przez iloraz, który otrzymamy, dzieląc 1 przez c; całe tak otrzymane wyrażenie odjąć od a; tę różnicę pomnożyć przez iloraz z podzielenia b przez d; otrzymany iloczyn odjąć od ilorazu z podzielenia przez b iloczynu liczb a i c.

Wypowiedzieć, jakie działania we właściwej kolei mają być wykonane w następujących wyrażeniach: **26.** $a-x.(y+a)$. **27.** $(x+y).(z-u)+x+y(z-u)+(x+y)z-u$. **28.** $x[a-y.(b+z)]$. **29.** $\{50-[35-(10-x):x]x\}x$. **30.** $\frac{ac}{b}-\frac{b}{d}\left[a-\frac{1}{c}(bd-ac)\right]$.

(Art. 56). **31.** $5a^2b^2c-2a^3b^2-3a^3b^2-4a^2b^2c+6a^3b^2$. **32.** $11a^7b^2c^3+13{\cdot}46\,ab^5c^2d^3-6{\cdot}41\,bcd^5-1{\cdot}91\,a^7b^2c^3+3{\cdot}41\,bcd^5-2{\cdot}26\,ab^5c^2d^3+0{\cdot}83\,a^7b^2c^3-1{\cdot}2\,ab^5c^2d^3-0{\cdot}02\,a^7b^2c^3$. **33.** $\frac{4}{5}a^2b+2\frac{2}{3}ab^2-\frac{a^2b^2}{7}+5ab^2+\frac{a^2b}{5}-7\frac{2}{3}ab^2+2\frac{1}{7}a^2b^2$. **34.** Uważając litery m, n, p, r, s, za spółczynniki (art. 46), wykonać redukcyą wyrazów podobnych w wielomianie: $mx^2+pxy-nx^2+ry^2-sxy-nx^2-ny^2+sxy-ry^2+rxy-my^2+x^2-xy-y^2$.

(Art. 58). **35.** $az^5+cz^3+ez+bz^4+dz^2+f$ uporządkować według malejących potęg z. **36.** $x^4-xy^3-x^3y+x^2y^2+y^4$ według rosnących potęg x. **37.** $a^2b+2ab^2+a^2b^2+2ab^3+b^3+b^4+a^2+b^2+2ab$ według malejących potęg litery głównej a i malejących potęg b. **38.** $x^2y^3z+xy^4z^2-x^3y^2z+x^4yz$ α) według malejących potęg x; β) według malejących potęg y. **39.** $7a^3b+12a^2b^2+10ab^3+4a^4+8a^3b^2+15a^2b+b$ według malejących potęg litery głównej a i malejących potęg b. **40.** $9x^3y^3z^2-4xy^4z^3+8x^2y^2z^4-5x^4yz^3+4y^4z^4+7xyz^6+4x^4y^3z-x^2y^6z$ według malejących potęg litery głównej x i malejących potęg y.

(Art. 67). **41.** $(5a+2b+17c)+(9a-7b-8c)+(-13a+5b-8c)$.
42. $(9a-7b-8c)-(-13a+5b-8c)$. **43.** $(5a+2b+17c)+(9a-7b-8c)-(-13a+5b-8c)$.
44. $(5a^4b+3a^2b^2c-7ab)+(-6a^4b+2a^2b^2c+17ab)+(-9a^4b+8a^2b^2c+10ab)$.
45. $(5a^4b+3a^2b^2c-7ab)+(-6a^4b+2a^2b^2c+17ab)-(-9a^4b+8a^2b^2c+10ab)$.
46. $(\frac{1}{2}a^2b+\frac{2}{3}ab^2+1\frac{1}{5}ab)+(\frac{1}{4}a^2b-1\frac{1}{6}ab^2-\frac{8}{15}ab)-(\frac{3}{4}a^2b-\frac{1}{2}ab^2+\frac{2}{3}ab)$.
47. $(\frac{1}{2}a^2b+\frac{2}{3}ab^2+1\frac{1}{5}ab)-(\frac{1}{4}a^2b-1\frac{1}{6}ab^2-\frac{8}{15}ab)-(\frac{3}{4}a^2b-\frac{1}{2}ab^2+\frac{2}{3}ab)$.
48. $a-(b-c-d)-(e+f)+a-[b-(c-d-e+f)]-\{a-[b-(c-d-e)+f]\}$.
49. $a-\{b-[c-(d-e)+f]\}-\left(a-\{b-[c-(d-e)]+f\}\right)+a-\left(b-\{c-[d-(e+f)]\}\right)$.
50. $4a^5b^2c^3-\{3a^5b^5-12a^5b^2c^3-[-2a^3b^2c^5-(7a^5b^5+15a^5b^2c^3-17a^3b^2c^5)]-(3a^5b^2c^3+2a^3b^2c^5)\}-(7a^3b^2c^5-6a^5b^2c^3-11a^5b^5)$.
51. $6a+\{4a-[8b-(2a+4b)-22b]-7b\}-\{7b+[9a-(3b+4a)+8b]+6a\}$.
52. $a+(b+c+d)-[c-(b+d)]-[b-(c-d)]-[b-(d-c)]-[-(b-c)+d]$.
53. Co trzeba dodać do $5a-[7b+3a-(2a+b)]$, aby otrzymać $4a-[14b+(2a-7b)-3a]$?
54. Jeżeli $a=3x-2y+5z$, $b=7x-8y+5z$, $c=9x-5y+3z$, $d=11x-3y-4z$, to:
α) $a+b-(c-a+d)=?$; β) $a+b-c-(c+d)-c=?$; γ) $b-\{c-[a-(b+d)]\}$?
55. Czemu się równa $a-(b-c)$, jeżeli $b=7a-(8d+3e)$, $c=2a-(8d-3e)$?

(Art. 68). **56.** W wielomianie $2a^5-3a^4b+7a^3b^2-ab^4+3b^5$ przyjąć $b=a$ i wykonać redukcyą. **57.** W wielomianie $3a^2b^3cd^2e^5-2a^2b^3cd^3e^4+4a^3bcd^4e^4+2d^5e^8-5a^3b^2c^3d^4e$ przyjąć $c=a$, $d=b$, $e=a$.

(Art. 69). **58.** $(-bc^4de).(0{\cdot}02\,ab^3cd^7)$. **59.** $(-a^5bc^4).(7abc)$.
60. $(-5a^mb^pcd).(-8a^nb^pc^md)$. **61.** $(-a^2b^mc^3d).(4a^mbc^{2m}d^{m+1})$. **62.** $(-1)^ma^2b^3c^5.(-1)^ma^4b^5c$.

63. $(-1)^m a^n c^{2p} d^2 . (-1)^{m+1} a^{3p} c^2 d^{4n}$. **64.** $(-1)^m a^p b^3 c^{2r} . (-a^{2r} b^{3n} c^{2r})$. **65.** $(-3 a^m b^2 c^{2p}) \times$ $\times (-1)^p a^7 b^{2p} c^4$. **66.** $(-4 a^5 b^3 c f^2) . (\frac{5}{12} a^2 c^5 d e^4) . (-9 a b c e^3 f^2) . (0{\cdot}3 a^4 b c^3 d^5) . (16 a^7 b c^4) . (a^3 b c^4 d e)$.
67. $(-a^5 b^m c^n d) \times (a^m b^{m+2} c^{2n+3} d^3 e) \times [(-1)^{m+1} a^{2m} b^{3m} c^{m+n+1} d^{r+5}] \times (-4 a b^{2m} c^5 d^{3r+1}) \times$ $\times [(-1)^{m+3} a^{2m} b^3 c^3 d^{3r}]$.

(Art. 70). **68.** $(-\frac{3}{5} a^m b^{3n} c^{5p})^2$. **69.** $(0{\cdot}2 a^{m+1} b^{2n+p} c^{mn+3p+2})^2$. **70.** W czworomianie $3a^2 b^4 c^2 d^2 - a^2 b^{10} c^2 d + 5 a b^{16} c d^2 - 2a^2 b^2 d$ przyjąć: α) $a = 2b^2 e^3 f$, $c = -3 b^2 e^2 f^2$, $d = b e f^4$; β) $a = -5p^3 q^3$, $c = 2pq^5$, $d = -p^4 q^2$.

(Art. 71). **71.** $(15a^2 b^5 - 2{\cdot}1 a^3 b^4 - 4{\cdot}5 a^4 b^3 + 0{\cdot}04 a^6 b) . (-7{\cdot}5 a^3 b^2)$.
72. $(15 a^m b^5 - 12 a^{m+1} b^4 + 3 a^{m+2} b^3 + 24 a^{m+3} b^2 - 6 a^{m+4} b + 9 a^{m+5}) . (-\frac{2}{3} a^5 b^{n+1})$.
73. $(17 a^{p+6} b^{q+3} - 23 a^{p+4} b^{q+5} - 8 a^{p+3} b^{q+6} + 2 a^p b^{q+9}) . (4 a^{p+1} b^{p+3})$.
74. $(-\frac{2}{3} a^{2p+1} b^{p+q+3} + \frac{3}{4} a^{2p+2} b^{p+q+2} - \frac{1}{6} a^{p+3} b^{p+q}) . (-12 a^{p+q+3} b^{3p+2})$.
75. $(-\frac{3}{4} a^{2p+1} b^{p+3q}) . (16 a^{3p+2q} b^{q+1} - 8 a^{2p+2q} b^{p+q+1} + 20 a^{p+3q} b^{2p+1})$.

(Art. 72). **76.** W zadaniu 40-em, po uporządkowaniu wielomianu, z wyrazów, zawierających jednakowe potęgi x, wyłączyć je poza nawiasy. **77.** Uporządkować wielomian $3ab^2c + 3b^4 - 2ab^3 - 3abc^2 + 2a^2 bc + 4a^2 c^2$ według malejących potęg litery głównej c i według malejących potęg litery a, a z wyrazów, zawierających tę samę potęgę c, wyłączyć ją poza nawias. **78.** Mając wielomian $12a^5b^5 - 18a^4b^5 + 12a^4b^4 - 12a^3b^6 + 8a^3b^5 + 6a^2b^7 - 4a^2b^6$, tak wyłączyć poza nawias z niektórych jego wyrazów $4a^2 b^3$, z pozostałych zaś $-6a^2b^4$, iżby wielomiany w nawiasach były 3-go stopnia.

(Art. 74). **79.** $(3a^2 + 5ab - 7b^2) . (a^2 - 2ab + 3b^2)$.
80. $(16a^4 b^8 + 24a^6 b^6 c + 36a^8 b^4 c^2 + 54a^{10} b^2 c^3 + 81a^{12} c^4) . (2ab^2 - 3a^3 c)$.
81. $(a^3 - 2a^2 b + ab^2 - 4b^3) . (4a^3 + 3a^2 b - 2ab^2 + b^3)$.
82. $(4a^2 b^4 c^3 - a b^2 c^6 - \frac{3}{4} c^9 + 8a^3 b^6) . (-2ab^2 c^3 + 4a^2 b^4 + 1\frac{1}{2} c^6)$.
83. $(\frac{3}{2} a^n c^n + 4a^{2n} + 2c^{2n}) . (6a^{2n} + 3c^{2n} - 2\frac{1}{4} a^n c^n)$.
84. $(a^4 x^{3n+12} - 0{\cdot}2 a^2 x^{2n+7} + 10 x^{n+2}) . (0{\cdot}15 a^2 x^{2n+5} + 7{\cdot}5 x^n)$.
85. $(x^4 y^{n+2} + 2 x^2 y^{2n+9} + 4 y^{3n+16}) . (x^7 y^n - 4x^3 y^{3n+14} + 8 x y^{4n+21})$.
86. $(\frac{1}{2} x^{4n+3} - 2 x^{3n+2} + 4 x^{2n+1} - 4 x^n) . (\frac{1}{4} x^{4n+3} + x^{3n+2} + 2 x^n)$.
87. $(x^{6p+12} + x^{5p+10} y^{2q+3} - x^{3p+6} y^{6q+9} + x^{p+2} y^{10q+15} + y^{12q+18}) . (y^{4q+6} + x^{2p+4} - x^{p+2} y^{2q+3})$.
88. $(x+a) . (x+b) . (x+c) . (x+d)$. **89.** $(x-a) . (x-b) . (x-c) . (x-d)$.
90. $(a^3 + b^3 - c^3 + 3abc) . (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) . (a + b + c)$.
91. $(a^{2n} - a^2 z^2) . [2a^{n+1} z - (a^n + az) . (a^n + az)]$.
92. $(x^2 + 0{\cdot}5 y^6) . (x^2 + xy^3 + 0{\cdot}5 y^6) . (x^2 - 0{\cdot}5 y^6) . (x^2 - xy^3 + 0{\cdot}5 y^6)$.
93. $(x^4 - 2x^2 y^2 - 4y^4) . (x^3 - 2xy^2 + 2y^3) . (x^2 + 2xy + 2y^2)$.
94. $(81 a^4 - 5{\cdot}4 a^3 b + 0{\cdot}36 a^2 b^2 - 0{\cdot}024 a b^3 + 0{\cdot}0016 b^4) \times (3a - 0{\cdot}2 b) \times (3a + 0{\cdot}2 b) \times$ $\times (81 a^4 + 5{\cdot}4 a^3 b + 0{\cdot}36 a^2 b^2 + 0{\cdot}024 a b^3 + 0{\cdot}0016 b^4)$.
95. $(ab + ac + bc) . (ab + ac - bc) . (ab - ac + bc) . (-ab + ac + bc)$.
96. $[(2a + b) x^3 + (a^2 - ab) x^2 - a^3 x] . [(2a + b) x^2 - (a^2 - ab) x - a^3]$.
97. $(x^2 + 1) . (x^4 + 1) . (x^4 - x^2 + 1) . (x^8 - x^4 + 1) - (x^6 + 1) . (x^{12} + 1)$.
98. $(a^{12p+18} - a^{6p+9} b^{3q+12} + b^{6q+24}) \times (a^{8p+12} + a^{6p+9} b^{q+4} + a^{2p+3} b^{3q+12} + b^{4q+16}) \times$ $\times (a^{4p+6} - a^{2p+3} b^{q+4} + b^{2q+8})$.

(Art. 79). **99.** $m = (a+b)^2$, $n = (a-b)^2$; utworzyć wyrażenia: α) $m + n$; β) $m - n$; γ) mn; δ) na podstawie art. 78-go, $m^2 - n^2$. **100.** $(2a - 3b)^2 . (3a - 2b)^2 - 36 . (a - b)^2 . [(a + b)^2 - 4ab]$.
101. $(2a^2 b - cd^2) . (2a^2 b + cd^2) . (4a^4 b^2 + c^2 d^4) . (16a^8 b^4 + c^4 d^8) . (256a^{16} b^8 + c^8 d^{16}) - (256a^{16} b^8 - c^8 d^{16})^2$.
102. $(2a^2 b - 3cd^2)^2 . (2ab^2 + 3c^2 d)^2 - (2a^2 b + 3cd^2)^2 . (2ab^2 - 3c^2 d)^2$.

(Art. 82). **103.** α) $\frac{7{\cdot}2a^7 b^3 c^2}{-0{\cdot}9a^4 bc^2}$; β) $\frac{10a^8 b^4 c^5 d^2 e}{49 a^5 b^4 c^2 de}$; γ) $\frac{(-1)^{2m+1} a^{5n} b^{4n+5} c^r}{(-1)^{2p} a^{2n} b^{n+3} c^r}$.
104. α) $\frac{9a^5 b^{m+2} c^{2m+4}}{36a^7 b^{m+1} c^{m+3}}$; β) $\frac{-5ab^m c^{3n}}{-7a^4 b^{2m+3} c^{5n+4}}$; γ) $\frac{13a^{2m+3} b^{3n+4} c^{5p+r} d^{p+2r}}{-17a^{3m+4} b^{4n+5} c^{6p+2q} d^{2p+r}}$.

(Art. 83). **105.** $\frac{\frac{3}{5} a^3 x^6 - 6a^2 x^4 + a^2 b^2 x^2}{\frac{3}{4} a^2 x^2}$. **106.** $\frac{6a^5 x^3 - 20a^4 x^4 + a^3 x^5}{-8a^2 x^3}$.
107. $\frac{6x^{p+1} y^{p+3} + 3x^p y^{p+2} - 15x^p y^p}{3x^p y^{p+2}}$.

(Art. 85). **108.** $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc):(5a + 2b)$.
109. $(45a^4c + 90a^4d - 32b^2c^2 - 128b^2cd - 128b^2d^2):(6c + 12d)$.
110. $(30a^2c^3 - 15b^3c^3 - 42a^2d^2 + 21b^3d^2):(5c^3 - 7d^2)$.
111. $(a^{4m} - b^{8p}):(a^m - b^{2p})$. **112.** $(a^{14} + 1):(a^2 + 1)$.
113. $(12x^2 - 51xy - 24xz + 54y^2 + 48yz):(4x - 9y - 8z)$.
114. $(-5x^2 + 3xy + 8xz + 2y^2 - yz - 3z^2):(5x + 2y - 3z)$.
115. $(20x^4 - 51x^3 - 12x^2 + 32x):(4x^2 - 7x - 8)$. **116.** $(21y^4 - 78y^3 - 17y^2 + 58y + 16):(7y^2 - 5y - 2)$.
117. $(0{\cdot}49a^6 + 2{\cdot}1a^6x^5 + 1{\cdot}5a^5bx^7 + 0{\cdot}25a^4b^2x^4):(0{\cdot}7a^3 + 3a^3x^5 - 0{\cdot}5a^2bx^2)$.
118. $(x^{11}y^6 + 2x^9y^{15} + 32xy^{51}):(x^4y^4 + 2x^2y^{13} + 4y^{22})$.
119. $(24a^{4n} + 27\frac{3}{8}a^{2n}c^{2n} + 6c^{4n}):(6a^{2n} - 2\frac{1}{4}a^nc^n + 3c^{2n})$.
120. $(a^6 + a^5b - a^4b^2 + a^2b^4 - ab^5 - b^6):(a^4 + a^3b + ab^3 + b^4)$.
121. $(\frac{5}{2}z^5 + \frac{11}{3}z^4 + \frac{49}{12}z^3 + 3z^2 + \frac{31}{20}z + \frac{3}{5}):(\frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{5})$. **122.** $(x^6 - y^6):(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)$.
123. $(32a^5b^{10} + 5a^2b^4c^9 - \frac{9}{8}c^{15}):(8a^3b^6 + 4a^2b^4c^3 - ab^2c^6 - \frac{3}{4}c^9)$.
124. $(x^{8p+16} + x^{4p+8}y^{8q+12} + y^{16q+24}):(x^{6p+12} + x^{5p+10}y^{2q+3} - x^{3p+6}y^{6q+9} + x^{p+2}y^{10q+15} + y^{12q+18})$.
125. $\{[(x^{18} - 1):(x^6 - x^3 + 1)]:(x^6 + 1)\}:(x^3 - 1)$.
126. $\{[(x^{20} - 1):(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)]:(x^{10} + 1)\}:(x^5 - 1)$.
127. $[(x^3 + 1)(x^3 - 2)^2 + 3(x^3 - 1)(x^3 + 1)]:(x^6 - x^3 + 1)$.

(Art. 88). **128.** $(a^8 + b^8):(a^2 + b^2)$. **129.** $(20x^4 - 51x^3 - 9x^2 + 32x):(4x^2 - 7x - 8)$.
130. $[(a + b)x^5 + (a^2 + b^2)x^4 + (a^3 + b^3)x^3 + (a^4 - b^4)x^2 + (a^5 + b^5)x]:(a + b)$.

(Art. 89). **131.** $16a^4:(2a - b)$. **132.** $4a^8:(a^5 + 2a^4 + 4)$.

(Art. 104). **133.** $24a^5b^{n+4}c^2d^3$, $-18a^3b^{n+7}c^{n+2}d^2$, $-36a^6b^{n+8}d^4$, $30a^{13}b^{n+7}cd$.
134. $21a^{2m+5}b^{3p}c^{5n+7}d^{p+7} - 12a^{m+6}c^{2n+9}d^{2p+8} - 3a^{3m+9}b^7c^{n+6}d^{3p+9}$, $9a^{m+5}c^{n+8}d^{7p+7}$,
$-15a^{4m+6}b^{3n}c^{3n+6}d^{p+7}$, $-18a^{2m+7}c^{n+6}d^{p+7}$.

$(a-b)(3a+4b)$

(Art. 105). **135.** $a^2 - b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $3a^2 + ab - 4b^2$, $a^3 - b^3$.
136. $4a^3 - 3ab^2 - b^3$, $12a^4 + 12a^3b + 3a^2b^2 - 6ab^3$, $(4a^2 - b^2)^2$.
137. $27a^6 + 8b^9$, $243a^{10} + 32b^{15}$, $9a^4 - 4b^6$, $3a^4 + 2a^2b^3 + 3a^2b + 2b^4$.
138. $6a^3 + 5a^2b - 16ab^2 - 15b^3$, $30a^4 - 65a^3b - 20a^2b^2 + 75ab^3$, $4a^2b(3a - 5b)(a + b)$.
139. $(2ab + 3ac + 2b^2 + 3bc)(c - d)$, $(a^2 - b^2)(c - d)^2$, $2a^2c^2 + 4abc^2 - 2a^2d^2 - 4abd^2 + 2b^2c^2 - 2b^2d^2$.
140. $(4a^{n+2}b^3 + 2a^4b^{n+2} + 2a^{n+2}b^4 + b^{n+3}a^3)(a^4 - 4b^4)$, $5ab^2.(6a^5 - 24a^3b^2 + 24ab^4).(4a^{2n}b^2 - a^2b^{2n})$.

(Art. 109). **141.** $2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + x - 4$, $3x^4 - 11x^3 - 2x^2 - 4x - 16$. $(x^2 - 7x - 4)$
142. $3ax^4 + 3a^2x^3 - 6a^3x^2 - 3a^4x - 6a^5$, $4ax^3 + 2a^2x^2 - 8a^3x + 8a^4$.
143. $a^3x^3 - a^2bx^2y + ab^2xy^2 - b^3y^3$, $2a^2bx^2y - ab^2xy^2 - b^3y^3$.
144. $x^3 - (4a + b)x^2 + (3a^2 + 4ab)x - 3a^2b$, $x^3 - (a + b)x^2 - (30a^2 - ab)x + 30a^2b$.
145. $x^7 - 9x^6 + 31x^5 - 51x^4 + 40x^3 - 12x^2$, $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 35x^2 + 64x - 28$.
146. $6a^3 - 30a^2 + 9a + 60$, $3a^2 - 8a - 16$. **147.** $30a^3 - 20a^2 + 15a - 10$, $15a^2 - 7a - 2$.
148. $3ab^4 + 3a^2b^3 - 6a^3b^2 - 3a^4b - 6a^5$, $4ab^3 + 2a^2b^2 - 8a^3b + 8a^4$.
149. $18a^4b^5c^6 - 84a^5b^7c^5 + 102a^6b^9c^4 - 36a^7b^{11}c^3$,
$24a^2b^2c^5 - 76a^3b^4c^4 - 32a^4b^6c^3 + 192a^5b^8c^2 - 96a^6b^{10}c$.
150. $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 + ab + a + b$. **151.** $4x^3 - 9x^2 - 17x + 18$, $x^2 - 4x + 3$.
152. $3x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x + 8$, $x^2 + 2x + 3$.
153. $2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7$, $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. nie mają

(Art. 110). **154.** $30a^2x^4 - 5a^3x^3 + 5a^5x$, $9ax^3 - a^3x + 2a^4$, $3ax^3 - 5a^2x^2 + 3a^3x - a^4$.
155. $x^3 - x^2 - x + 1$, $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$, $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.
156. $x^2 + 5x + 4$, $x^2 + 2x - 8$, $x^2 + 7x + 12$.
157. $(y^2 + y)x^4 - 2(y^2 + y)x^3 + 2x^2y + 2(y^2 - y)x - y^2 + y$, $x^3 - x^2 - x + 1$, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

(Art. 112). **158.** $3a^{n+1}b^{5m}c^4$, $9a^{2n}b^{m+4}c^3$, $-5a^6b^{2m+1}c^{4p}$, $a^{p+3}b^{n+2}c^{3p}$.

(Art. 113). **159.** $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$, $a^2 + 2ab + b^2$, $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$.
160. $x^2 + 3x + 2$, $x^2 + 2x + 1$, $x^2 - x - 2$, $x^2 + x - 2$, $a^2x^2 - a^2$.
161. $a^3 + a^2b + 4ab^2 + 4b^3$, $a^3 - a^2b + 4ab^2 - 4b^3$, $a^3 - a^2b - 4ab^2 + 4b^3$, $a^4 - 16b^4$.
162. $27a^3 + 18a^2b - 12ab^2 - 8b^3$, $27a^3 - 18a^2b - 12ab^2 + 8b^3$, $1215a^4 - 1080a^2b^2 + 240b^4$, $90a^2 - 40b^2$.

(Art. 114). **163.** $4a^3 - 24a^2 + 44a - 24$, $a^2 - 4a + 3$, $a^2 + a - 2$. **164.** Znaleźć nsw. wielomianów w zadaniu: α) 150-em, β) 146-em, γ) 147-em, δ) 156-em, ε) 155-em.

(Art. 120). **165.** $\dfrac{a^2-b^2}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$. **166.** $\dfrac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}$. **167.** $\dfrac{32a^{10}b^5+243c^{15}}{8a^6b^3+27c^9}$.

168. $\dfrac{8a^3b^6c^3+27a^3b^3c^6}{32a^5b^{10}c^5+72a^5b^8c^7+108a^5b^7c^8+243a^5b^5c^{10}}$. **169.** $\dfrac{2x^4-4x^3y+4x^2y^2-2xy^3}{x^6-y^6}$.

170. Za licznik wziąć pierwszy, a za mianownik drugi z wielomianów w zadaniu: α) 150-em, β) 146-em, γ) 147-em, δ) 145-em.

(Art. 121). **171.** $\dfrac{a^3+b^3}{a^5+b^5}$ przy $b=-a$ i przy $b=a$.

$= (a-2b)(a^2+2ab+b^2)$ n. s. p. $5-2a$

sp $(a-2b)$ **172.** $\dfrac{a^3-3ab^2-2b^3}{3a^3-8a^2b+\frac{13}{3}ab^2-\frac{2}{3}b^3}$ przy $a=2b$. **173.** $\dfrac{2a^4+a^3-9a^2-13a-5}{2a^4+7a^3-6a^2-44a-40}$ przy $a=\frac{5}{2}$.

$(a-2b)(3a^2-2ab+\frac{1}{3}b^2)$

174. $\dfrac{4a^2-20a+25}{2a^4+7a^3-6a^2-44a-40}$ przy $a=\frac{5}{2}$. **175.** $\dfrac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^3-2a^2b+2ab^2-b^3}$ przy $a=b$.

176. $\dfrac{18x^3+21x^2+8x+1}{12x^3+16x^2+7x+1}$ przy: α) $x=-\frac{1}{3}$; β) $x=-\frac{1}{2}$. **177.** $\dfrac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$ przy $a=1$.

178. $\dfrac{a^4-3a^3b^2-2a^2b^4+12ab^6-8b^8}{a^4+a^3b^2-6a^2b^4-4ab^6+8b^8}$ przy: α) $a=b^2$; β) $a=2b^2$; γ) $a=-2b^2$.

(Art. 123 — 125). **179.** $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

180. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)(x+b)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}$.

181. $\dfrac{x^2z^2}{b^2c^2}+\dfrac{(x^2-b^2)(b^2-z^2)y^2}{(y^2-b^2)b^2(c^2-b^2)}+\dfrac{(x^2-c^2)(c^2-z^2)y^2}{(c^2-y^2)c^2(c^2-b^2)}$. **182.** $\dfrac{x(x+1)(x+2)}{3}-\dfrac{x(x+1)(2x+1)}{6}$.

183. $\dfrac{x^2y^2z^2}{b^2c^2}-\dfrac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(c^2-b^2)}+\dfrac{(x^2-c^2)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$.

184. $\dfrac{y^2z^2}{b^2c^2}+\dfrac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\dfrac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$.

185. $\dfrac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}-\dfrac{b^4}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}+\dfrac{c^4}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$.

186. W zadaniu 179-em przyjąć $c=b$.

(Art. 126). **187.** $\dfrac{1}{(p+q)^2}\left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}\right)+\dfrac{2}{(p+q)^3}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\right)$.

188. $\dfrac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\dfrac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\dfrac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2)$.

189. $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)^2+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)^2-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)$.

190. $\dfrac{x^4-16x^2}{15x^2-15}\times\dfrac{12x-12}{x^4\left[x+\dfrac{3(x+2)}{x}\right]}$. **191.** $\dfrac{3ax}{4by}\times\dfrac{a^2-x^2}{c^2-x^2}\times\dfrac{bc+bx}{a^2+ax}\times\dfrac{c-x}{a-x}$.

192. $\dfrac{1-y^2}{x+x^2}\times\dfrac{ax^2+a^2x+a^3}{a^2}\times\dfrac{1-x^2}{1+y}\times\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{x}{a}+1\right)\left(1+\dfrac{x}{1-x}\right)$.

193. Gdy $m=\dfrac{x-y}{x+y}$, $p=\dfrac{y-z}{y+z}$, $q=\dfrac{z-u}{z+u}$, $r=\dfrac{u-v}{u+v}$, $s=\dfrac{v-w}{v+w}$, $t=\dfrac{w-x}{w+x}$, to:
α) $(1+m)(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)(1+t)=?$; β) $(1-m)(1-p)(1-q)(1-r)(1-s)(1-t)=?$

(Art. 127 i 128). **194.** $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}\right):\left(\dfrac{ad}{c^2}-\dfrac{b}{c}+\dfrac{d}{e}-\dfrac{bc}{ae}+\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{d}\right)$.

195. $\left[\left(\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{c}{a+2b}\right):\left(\dfrac{c}{a+2b}-\dfrac{c}{a+3b}\right)\right]\times\dfrac{c}{a+3b}$.

196. $\left(\dfrac{a^2+ab}{a^2+b^2}:\dfrac{a^3b+ab^3+2a^2b^2}{a^4-b^4}\right)\left(\dfrac{a^4-a-3a^3+3a^2}{a^3b-b^4}:\dfrac{a^4+a^2-2a^3}{a^2b^2+ab^3+b^4}\right)$.

197. W jednem naczyniu jest a litrów wody, w drugiem zaś b litrów wina. Z obu naczyń odlano po c litrów; odlane wino wlano do pierwszego naczynia, wodę zaś do drugiego. Po zamieszaniu, z każdego naczynia odlano znowu po c litrów mieszaniny. Odlaną z pierwszego naczynia wlano do drugiego, odlaną zaś z drugiego naczynia wlano do pierwszego. Jaki otrzymamy iloraz, dzieląc ilość litrów samego wina w mieszaninie w pierwszem naczyniu przez ich ilość w naczyniu drugiem?

198. $\dfrac{a+\dfrac{b-a}{1+ab}}{1-\dfrac{ab-a^2}{1+ab}}$. 199. $\dfrac{x-\dfrac{xz(1-y)}{z+x^2y}}{1+\dfrac{x^2(1-y)}{z+x^2y}}$. 200. $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{b}-a}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$.

201. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)\cdot\left(\dfrac{a-b}{a+b}-1\right)}{\left(\dfrac{a-b}{a+b}+1\right)\cdot\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)}$. 202. $\dfrac{\dfrac{a+2b}{ab^4}-\dfrac{2a+b}{a^4b}}{\dfrac{b^2+c^2}{b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)-\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\dfrac{a^2+c^2}{a^2c^2}}$.

203. $\dfrac{\dfrac{2a+b}{a+b}+\dfrac{2b-a}{a-b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}:\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b(a-b)^2}{a^4-b^4}\right)$. 204. $6+\dfrac{1-\dfrac{x+2+\dfrac{x+3}{x+4}}{x+3}}{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}}$.

205. $\dfrac{\left[\dfrac{(a+x)^2}{ax}-4\right]\cdot\left[\dfrac{(a-x)^2}{ax}+4\right]\cdot(a^6-x^6)}{(a^3x-ax^3)^2\cdot[(a+x)^2-ax]\cdot[(a-x)^2+ax]}\times\dfrac{a-\dfrac{ax}{a+x}}{a+\dfrac{ax}{a-x}}$.

(Art. 146, 149 i 150). **206.** Dwa ciała biegną ruchem jednostajnym; jedno przebiega m_1 metrów w ciągu s_1 sekund, drugie zaś m_2 metrów w ciągu s_2 sekund. Jaki jest stosunek prędkości ruchu tych ciał?

207. Siła odśrodkowa jest odwrotnie proporcyonalna względem kwadratu czasu obrotu. Jeżeli natężenie siły ciężkości na równiku nazwiemy g, to natężenie siły odśrodkowej na równiku jest $\frac{1}{289}g$. Jakim byłby stosunek natężeń siły ciężkości i siły odśrodkowej na równiku, gdyby ziemia obracała się 17 razy prędzej?

208. Przyjmując, że stosunek odległości słońca i księżyca od ziemi jest $a:1$, że stosunek masy słońca do masy ziemi jest $s:1$ i że stosunek masy ziemi do masy księżyca jest $1:k$, oraz wiedząc, że przyciąganie jest wprost proporcyonalne względem masy, zaś odwrotnie proporcyonalne względem kwadratu odległości, wyrazić stosunek przyciągania księżyca przez słońce do przyciągania księżyca przez ziemię α) podczas zaćmienia księżyca, β) podczas zaćmienia słońca.

209. Dlaczego o więcej lub mniej rozwiniętej linii brzegów jakiegoś lądu nie można dawać pojęcia przy pomocy stosunku długości linii brzegów tego lądu do jego powierzchni? Wyjaśnić, biorąc za przykład wyspę Madagaskar, której długość brzegów wynosi 4000 *km*, zaś powierzchnia blisko 600 000 *km*², przyczem przyjąć za jednostkę zamiast *km* raz *m*, drugim zaś razem myriametr.

210. Jeżeli przy tej samej temperaturze ilość stopni na termometrach Celsius'a i Fahrenheit'a (zad. 3) nazwiemy odpowiednio C i F, to wielkości C i F nie są proporcyonalne względem siebie. Jak utworzyć z F wielkość proporcyonalną względem C?

211. Jeżeli w miejscu, w którem natężenie siły ciężkości jest g, długość wahadła, wyrażoną w odpowiednich jednostkach, nazwiemy l, zaś czas jego wahnięcia, wyrażony w sekundach, nazwiemy t, to $t^2=\pi^2\cdot\dfrac{l}{g}$. W dwu miejscach, w których natężenia siły ciężkości są g_1 i g_2, długości wahadeł sekundowych są odpowiednio l_1 i l_2. Jaki zachodzi związek między liczbami g_1, g_2, l_1 i l_2?

212. Dwa kapitały k i k_1, przy tej samej stopie procentu, po upływie lat odpowiednio t i t_1 stały się wskutek dołączenia odsetek kapitałami odpowiednio K i K_1. Z tych danych utworzyć dwie pary odpowiadających sobie wartości wielkości proporcyonalnych.

213. Objętości gazu pod tem samem ciśnieniem są proporcyonalne względem temperatur, liczonych od —273° C. Pod tem samem ciśnieniem gaz ma objętość v przy t^0 C., zaś objętość v_1 przy $t_1{}^0$ C. Z tych danych utworzyć proporcyą.

214. Dwa ogniska znajdują się od siebie w odległości d, a stosunek mocy ich światła jest $a:b$. Na prostej, je łączącej, w odległości c od pierwszego ogniska znajduje się punkt jednakowo przez te ogniska oświetlony. Natężenie światła w jakimś punkcie jest wprost proporcyonalne względem mocy źródła światła, zaś odwrotnie proporcyonalne względem kwadratu jego odległości. Z tych danych utworzyć proporcyą.

215. Jakiemu warunkowi czynić mają zadość w zadaniu 212-em liczby k, k_1, K i K_1, ażeby było $t:t_1=k_1:k$?

216. Z dwu gatunków towaru, po cenie a_1 i a_2 (za jednostkę), utworzono mieszaninę po cenie a (pośredniej między a_1 i a_2), biorąc b_1 jednostek pierwszego gatunku i b_2 drugiego. Z tych liczb utworzyć dwie pary odpowiadających sobie wartości wielkości odwrotnie proporcyonalnych.

(Art. 151). **217.** Przednie i tylne koła wozu mają obwody odpowiednio k_1 i k_2 dm. Tylne koło obróciło się r razy; ile obrotów na tejże drodze zrobiło przednie koło?

218. Koło zębate, mające z_1 zębów, w ciągu m_1 minut obraca się r razy i wprowadza w ruch drugie koło zębate, mające z_2 zębów. Ile razy obróci się to drugie koło w ciągu m_2 minut?

219. Objętość gazu przy stałej temperaturze jest odwrotnie proporcyonalna względem ciśnienia. Pod ciśnieniem 1-ej atmosfery $1g$ powietrza przy 0^0 C. zajmuje $773{\cdot}3$ cm^3. Ile waży $1{\cdot}1\,l$ powietrza, pozostającego przy 0^0 C. pod ciśnieniem $70{\cdot}3$ atmosfery?

220. Mamy 3 cm^3 powietrza przy 0^0 C.; jaką one będą miały objętość pod tem samem ciśnieniem (zad. 213) przy 182^0 C.?

(Art. 160 i 161). **221.** $3(5x+2)+4(5x+2)=28$. **222.** $2x-(9+8x)=7+(3x-5)$.
223. $2(x+7)+3(x+7)-4(x+7)=15$. **224.** $5(2x-11)-17x=3(3-9x)+16$.
225. $x+(x+5)+(x+10)+(x+15)+(x+20)=550$. **226.** $12x+11(10-2x)=9x+8(7-x)+54$.
227. $2(x-1)+3(x-2)-4(x-3)-5(x-4)=0$. **228.** $2x+3(x+4)+4(x+5)+5(x+6)=160$.
229. $(2x+3)^2-(2x-3)^2=0$. **230.** $(3x+2)^2+(3x-4)^2+16(x-3)=2(9x^2-16)+4$.
231. $(6x-1)^2+(8x-3)^2=(10x-7)^2$. **232.** $(2x+1)^2-3x=(2x-1)^2+10$.
233. $(4x+1)^2+(3x+2)^2-(5x+4)^2=-11$. **234.** $(2x+7)^2-(x+5)(2x+3)+1=(x+3)(2x+5)$.
235. $(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2=(x-1)(x+3)+x(x+4)+(x+1)(x+5)$.
236. $(2x+3)^2(2x+5)-(x+\frac{22}{9})(3x+5)^2+(x+2)(x+3)^2+\frac{1}{9}=0$.
237. $(2x+3)^2(3x+4)+(3x+2)^2(4x+3)+(x+1)^2(x+5)-(7x+9)^2(x+1)+10(2x+5)^2+x^2-91=0$.
238. $(x+2)^2(3x+4)^2-(2x+3)^2(2x+5)(x+1)-x^2(x+4)^2+17(x-1)^2-27x^2-30=0$.
239. $(12x^2+5)^2-4x^2(6x+1)^2+6x(2x+3)^2-8(x+2)^2(x+3)-(2x+5)^2(2x+23)+8(5x^3+\frac{29}{4})=0$.
240. $(2ax+3b)^2-(3cx+2b)^2=5b^2+(4a^2-9c^2)x^2$.
241. $c^2(ax+d)^2+d^2(bx+c)^2=a^2(cx+b)^2+b^2(dx+a)^2$.
242. $(ax+b)^2+(2bx+d)(ax-1)=(a+b)^2x^2-(b^2x^2-1)$.
243. $[(a^2-b^2)x-1]^2+(2abx-1)^2=[(a^2+b^2)x+1]^2$.
244. $(0{\cdot}8x-2{\cdot}8)(0{\cdot}3x+4{\cdot}4)=(0{\cdot}04x+0{\cdot}21)(6x-22)$. **245.** $\frac{3x+5}{5}+\frac{9-4x}{9}=\frac{5x+6}{3}$.

246. $7x-\frac{2x-3}{14}=9-\frac{5x+7}{21}$. **247.** $\frac{2+3x}{4}-\frac{5-6x}{7}=\frac{15+24x}{28}$.

248. $3x-\frac{2x-7}{3}=\frac{6x+8}{19}-\frac{3x-87}{6}$. **249.** $\frac{7x+9}{8}-\frac{9x-13}{4}=\frac{3x+1}{7}-\frac{249-9x}{14}$.

250. $\frac{6x+7}{9}-\frac{3x-5}{4}=\frac{9x+5}{14}+\frac{10x+7}{18}$. **251.** $6x-\frac{3x+4}{9}-\frac{4-8x}{3}=\frac{x-2}{3}+\frac{6x+1}{9}$.

252. $\frac{11x-13}{25}+\frac{19x+3}{7}-\frac{5x-25\frac{1}{3}}{4}=28\frac{1}{7}-\frac{17x+4}{21}$.

253. $13\frac{1}{2}-\frac{5+4x}{6}+\frac{5x+29}{8}=256-\frac{7x-43}{12}-\frac{3x-12}{9}-12x$.

254. $\frac{31+4x}{3}-\frac{3x+47}{8}-\frac{3x-19}{16}=47\frac{3}{4}-\frac{10x-16}{11}-\frac{5x+20}{7}$.

255. $4x+\frac{1}{10}-\frac{3x-13}{16}-\frac{7x+12}{9}=-(33-7x)-\frac{5x+9}{10}-\frac{11x-17}{8}$.

256. $\frac{2x-3}{15}-\frac{4x-9}{20}=\frac{8x-27}{30}-\frac{16x-81}{24}-\frac{9}{40}$. **257.** $\frac{\frac{3x}{2}-4}{6}-\frac{4x-7}{9}+x=\frac{8-\frac{x+3\frac{2}{3}}{2}}{3}$.

258. $\dfrac{x-1\frac{25}{26}}{2}+\dfrac{11+6x}{13}-1=x-\dfrac{5x-\dfrac{10-3x}{4}}{39}$. 259. $\dfrac{a^2x}{b-c}-dc=bx-ac$.

260. $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{a}{3}\right)-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{a}{4}\right)+\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{a}{5}\right)=0$. 261. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b-a}=\dfrac{a}{a+b}$.

262. $\dfrac{2x+7b}{2a+b}-1=\dfrac{x+a}{2a-b}$. 263. $\dfrac{3abc}{a+b}+\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\dfrac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\dfrac{bx}{a}$.

264. $\dfrac{3bx}{2a^2}-\dfrac{x-b}{a+b}=\dfrac{bx-a^2}{a^2-b^2}-\dfrac{x}{4a}$. 265. $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{c}+\dfrac{x-c}{a}=\dfrac{x-(a+b+c)}{abc}$.

266. $\dfrac{a(1-bx)}{c}+\dfrac{b(1+ax)}{c}+\dfrac{c(1-bx)}{a}+\dfrac{c(1+ax)}{b}=\dfrac{(a+b)c}{ab}$.

267. $\dfrac{x(a+1)}{b}+\dfrac{x(b+1)}{a}+\dfrac{a^2+b^2}{ab}-\dfrac{a(x-1)}{b}-\dfrac{b(x-1)}{a}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}$.

268. $1-\dfrac{a(x-b)}{c}-\dfrac{c(x-a)}{b}+\dfrac{b(c-x)}{a}=-\dfrac{c(x-b)}{a}+\dfrac{b(a-x)}{c}-\dfrac{a(x-c)}{b}$.

269. $\dfrac{a-bx^p}{c}+\dfrac{bx^p-c}{a}+\dfrac{bx^p+a}{c}=\dfrac{bx^p+c}{a}-\dfrac{ax-b}{c}$.

270. α) Znaleźć średnią harmoniczną liczb a i b. β) Rozwiązać proporcyą $a:\dfrac{a+b}{2}=x:b$, a po wstawieniu wartości x wypowiedzieć tę proporcyą. (Grecy nazywali ją doskonałą.)

271. Znaleźć średnią harmoniczną liczb a, b i c.

(Art. 162). 272. $\dfrac{1}{x-6}-\dfrac{2}{11-x}=\dfrac{3}{x-1}$. 273. $\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{2}{7-x}=\dfrac{8}{x-1}$.

274. $1-\dfrac{2}{3x}+4-\dfrac{5}{6x}=7-\dfrac{8}{9x}+10-\dfrac{11}{12x}$. 275. $\dfrac{4}{x-4}-\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-5}$.

276. $\dfrac{4}{1+x}-\dfrac{3}{3+x}=\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{4}{2-x}$. 277. $\dfrac{4}{x+4}-\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{1}{x+2}$.

278. $\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{9}{x-2}+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{1}{x-4}$. 279. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{9}{x-3}+\dfrac{6}{x-5}=\dfrac{1}{x-7}$.

280. $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{4}{7(x-3)}-\dfrac{11}{7(x+4)}$. 281. $\dfrac{5x}{x-3}+\dfrac{7+4x}{4x-7}=1-\dfrac{6-5x}{x-3}$.

282. $\dfrac{x-9}{x-5}-\dfrac{x-7}{x-2}-\dfrac{x-9}{x-4}=\dfrac{x-8}{x-5}-\dfrac{x-7}{x-4}-\dfrac{x-8}{x-2}$.

283. $\dfrac{6-5x}{15}-\dfrac{7-2x^2}{14(x-1)}=\dfrac{3x+1}{21}-\dfrac{10x-11}{30}+\dfrac{1}{105}$.

284. $\dfrac{3+2x}{1+2x}-\dfrac{5+2x}{7+2x}=1-\dfrac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$.

285. $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{x-4}{x+4}-\dfrac{4x}{(x+1)(x+4)}-\dfrac{5}{(x+2)(x+3)(x+4)}=0$.

286. $\dfrac{5}{\dfrac{3}{4x}-\dfrac{7}{6x}}+\dfrac{31}{\dfrac{4}{3x}+\dfrac{5}{4x}}+x=6$. 287. $\dfrac{2}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{3x}}+\dfrac{3}{\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2x}}=\dfrac{8}{21}-x$.

288. $\dfrac{a}{b}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)+\dfrac{b}{a}\left(1-\dfrac{b}{x}\right)=1$. 289. $\dfrac{ax}{x+c}+\dfrac{b^2x}{a(x+c)}=b$.

290. $\dfrac{m-q}{x-n}+\dfrac{n-p}{x-q}=\dfrac{m-q}{x-p}+\dfrac{n-p}{x-m}$.

291. $\dfrac{a}{x-m}+\dfrac{b}{x-n}+\dfrac{c}{x-p}=\dfrac{a}{x-n}+\dfrac{b}{x-p}+\dfrac{c}{x-m}$.

292. $\dfrac{n}{a^2+ax}-\dfrac{1}{ax+nx}=\dfrac{n-1}{nx+a(a+n+x)}$.

293. $\dfrac{a}{nx-2n^2}+\dfrac{n}{ax+2an-a^2n}=\dfrac{4a+n^2}{x^2-anx+2an^2-4n^2}$.

294. $\dfrac{a^2+c^2+2x^2}{ac-ax-cx+x^2}+\dfrac{2(a+x)}{a-x}+\dfrac{2(c+x)}{c-x}+\dfrac{a-x}{c-x}+\dfrac{c-x}{a-x}=0$.

$x^2(x^2-ax+x^2)=x^2\frac{(x^3+a^3)}{x+a}$

295. $\frac{3x+7a}{a^2x^2+a^3(2x+a)}+\frac{4x+5a}{a^3x+x^4}=\frac{a^2-2ax+3x^2}{a^4x-a^3x^2+a^2x^3}+\frac{16\,ax}{(a+x)^2(a^3+x^3)}$.

296. $\frac{x+1}{a^3-x^3}-\frac{1}{ax^2-x^3}+\frac{a}{x^4+ax^3+a^2x^2}=-\frac{1}{x^2}$.

297. $\frac{an}{a-x}+\frac{(a+n)(anx+nx^2+x^3)}{x^3+nx^2-a^2x-a^2n}=\frac{ax}{n+x}+\frac{nx^2}{x^2-a^2}$.

(Art. 165). 298. $\frac{x+10}{2}+\frac{2(x+20)}{3}+\frac{5(x-34)}{6}=2(x-5)$.

(Art. 166). 299. $\frac{x-10}{3}+\frac{5(x-84)}{12}=\frac{3(x+1)}{4}-32\tfrac{1}{2}$.

(Art. 168, 169 i 170). **300.** Okazać, że przy a różnem od b jest: α) $a^2+b^2>2ab$; β) $(a+b)^2>4ab$. **301.** Okazać, że, jeżeli wartość bezwzględna liczby a jest różna od 1, jest albo $a+\frac{1}{a}>2$, alboteż $a+\frac{1}{a}<-2$. **302.** Zbadać, kiedy średnia harmoniczna dwu liczb a i b jest większa od ich średniej arytmetycznej, a kiedy od niej mniejsza. **303.** Okazać, że przy a różnem od 1 jest $3(1+a^2+a^4)>1+2(a+a^2)+(a+a^2)^2$. **304.** Okazać, że przy x różnem od y jest $x^4+y^4-xy^3-x^3y>0$. **305.** Okazać, że przy dodatnych x i y, różnych od siebie, jest $x^5+y^5-xy^4-x^4y>0$. **306.** Okazać, że, jeżeli $l^2+m^2+n^2=1$, oraz $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$, to $l\lambda+m\mu+n\nu<1$. **307.** Okazać, że w ogóle, jeżeli liczby a, b i c nie są wszystkie równe sobie, jest $a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$. **308.** Okazać, że przy $s_1=a+b$, $s_2=b+c$, $s_3=c+a$ jest $(s_1-c)^2+(s_2-a)^2+(s_3-b)^2>ab+ac+bc$.

(Art. 171). **309.** $x+9>\frac{x+15}{2}$. **310.** $\frac{3x}{4}+\frac{x+2}{7}>-5$.

311. $\frac{2-x}{3}+\frac{7-x}{4}>3$. **312.** $\frac{2-x}{5}-\frac{1+3x}{4}<7$. **313.** $\frac{3x+5}{5}+\frac{9-4x}{9}>\frac{5x+6}{3}$.

314. $\frac{2x-3}{15}-\frac{4x-9}{20}>\frac{8x-27}{20}-\frac{16x-81}{24}-\frac{9}{40}$. **315.** $\frac{x}{a}<\frac{x-b}{c}$.

(Art. 177, 178, 179 i 180). **316.** $\begin{cases}x+2y=5,\\5x+4y=13.\end{cases}$ **317.** $\begin{cases}3x+10y=12,\\12x-5y=3.\end{cases}$

318. $\begin{cases}6x+y=6,\\4x+3y=11.\end{cases}$ **319.** $\begin{cases}12x+15y=8,\\16x+9y=7.\end{cases}$ **320.** $\begin{cases}2{\cdot}475=1{\cdot}5x+0{\cdot}75y,\\4x-2{\cdot}5y=3.\end{cases}$

321. $\begin{cases}(x-3)(x-5)-x^2=15+y,\\(2x+3)(x-3)+3y=2x^2+18.\end{cases}$ **322.** $\begin{cases}(x+1)(y+1)=xy+\frac{7}{2},\\x-y=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

323. $\begin{cases}(x-2y)^2+(2x-y)^2-4(x-y)^2-(x+2y)(x+1)-(y-2x)(y+1)+2=0,\\(2x-3y)(3x-2y)-6(x-y)^2+(x+1)(y+1)=3.\end{cases}$

324. $\begin{cases}(10y+12x-14)(y+\frac{3}{2}x+2)-(2y-3x+4)(5y-6x+7)=54xy+12,\\(15y-4x)^2-(6x-10y)^2-(1+11y)^2+(4x-3)^2=(3-2y)^2-4x^2+4x-67.\end{cases}$

325. $\begin{cases}\frac{7x-5y+13}{4}+x=2y-\frac{3x+2y-16}{3},\\\frac{5x+8y}{6}-\frac{8x+3y-12}{5}=\frac{4y-2x-3}{3}.\end{cases}$ **326.** $\begin{cases}\frac{7+8y}{10}-\frac{3y-6x}{2y-8}=4-\frac{9-4y}{5},\\\frac{6x+9}{4}=3\tfrac{1}{4}+\frac{3x+4}{2}-\frac{3x+5y}{4x-6}.\end{cases}$

327. $\begin{cases}\frac{4x^2+2xy+288-6y^2}{2x+13-2y}=2x+3y-131,\\5x-4y=22.\end{cases}$ **328.** $\begin{cases}(3y+2)(4x+1)=(6x-1)(2y+3),\\\frac{30y}{10y+1}-3=\frac{10y-35x+1}{50y^2-65y-7}.\end{cases}$

329. $\begin{cases}\frac{48+11x}{4y+2}=\frac{16y^2+12xy-8y+5x+28}{4y-2}-(4y+3x),\\2y+4=\frac{8y^2-18x^2+108}{4y+6x+3}+3x.\end{cases}$ **330.** $\begin{cases}x+ay=b,\\ax-by=c.\end{cases}$

331. $\begin{cases}(a^2-l^2)(5x+3y)=2ab(4a-b),\\a^2y-\frac{ab^2c}{a+b}+(a+b+c)bx=b^2y+ab(a+2b).\end{cases}$ **332.** $\begin{cases}\frac{x+y-1}{x-y+1}=a,\\\frac{y-x+1}{x-y+1}=ab.\end{cases}$

333. $\begin{cases} 3x+2y+4z=19, \\ 2x+5y+3z=21, \\ 3x-\ y+\ z=\ 4. \end{cases}$ **334.** $\begin{cases} x+2y+\ z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-\ z=8. \end{cases}$ **335.** $\begin{cases} 4x-\ 6y+\ 3z=2, \\ 5x-12y+\ 9z=2, \\ 6x-18y+30z=7. \end{cases}$

336. $\begin{cases} 3{\cdot}4x-1{\cdot}2\,y=-8{\cdot}16, \\ 5{\cdot}6\,x+1{\cdot}2\,z+13{\cdot}44=0, \\ 5{\cdot}6\,y=38{\cdot}08+3{\cdot}4\,z. \end{cases}$ **337.** $\begin{cases} \frac{1}{5}x+\frac{1}{7}y+\frac{1}{9}z=143, \\ \frac{1}{7}x+\frac{1}{9}y+\frac{1}{5}z=143, \\ \frac{1}{9}x+\frac{1}{5}y+\frac{1}{7}z=143. \end{cases}$

338. $\begin{cases} \dfrac{3x+5y-8z}{2}+\dfrac{7z-2x-3y}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3z-5y+1}{4}-\dfrac{1-y}{3}, \\ \dfrac{3x+y-2z}{3}-\dfrac{4y+5z+6}{5}-\dfrac{8x+7y+9}{8}=\dfrac{11x+10z+2}{13}-\dfrac{146}{13}, \\ \dfrac{10y-9z}{4}-\dfrac{8z-7x}{5}=\dfrac{6x-5y}{13}+\dfrac{y+z-x}{3}-2. \end{cases}$

339. $\begin{cases} \dfrac{x+2y-4}{12}+\dfrac{3z-6x+1}{13}=\dfrac{5y-1}{39}, \\ \dfrac{3y-2z+5}{5}-\dfrac{7x+4y-5z}{7}-\dfrac{3z-9x+6}{6}=\dfrac{12}{35}, \\ 3x+\dfrac{y}{9}-z-\dfrac{7}{3}=0. \end{cases}$

340. $\begin{cases} \dfrac{2x+y-z}{2}-\dfrac{x+3y-z}{7}+\dfrac{2x+5y-2z+3}{6}=0, \\ \dfrac{3(x+2y-z+3)}{5}-\dfrac{4x+y-2z+3}{6}-\dfrac{9+x-z}{7}=0, \\ \dfrac{2x+3y-3z+24}{13}-\dfrac{9+4z-6x-11y}{11}+\dfrac{x+y-z+6}{9}=0. \end{cases}$

341. $\begin{cases} 3y(3x+2z)-(2x+3)(6x+y+4)-(y+5)(2x-9y+6z+2)=52+5xy-12x^2+9y^2, \\ (x+y)(x+z)+(y+z)(y+1)-(x+z)(y+x+3)-(x+y+z)y=1-xy, \\ (x+2y)^2-(x-2y)^2-8x(y+5)+z=-41. \end{cases}$

342. $\begin{cases} a^3+a^2x+ay+z=0, \\ b^3+b^2x+by+z=0, \\ c^3+c^2x+cy+z=0. \end{cases}$

343. $\begin{cases} x-y+z=0, \\ (a+b)x-(a+c)y+(b+c)z=0, \\ abx-acy+bcz=1. \end{cases}$ **344.** $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{b-c}+\dfrac{z}{c+a}=2c, \\ \dfrac{x}{a-b}-\dfrac{y}{b-c}+\dfrac{z}{c-a}=2a, \\ \dfrac{x}{a-b}-\dfrac{y}{b-c}-\dfrac{z}{c+a}=2a-2c. \end{cases}$

345. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{xy}-\dfrac{x+2}{xz}-\dfrac{z-y+4}{yz}=0, \\ \dfrac{y+4}{x}-\dfrac{y+3}{z}+\dfrac{y(x-z)+2x-7}{xz}=0, \\ (x+y)^2+(z+1)^2-(x+z)^2-(y-1)^2+x(z-y+1)+2(2-3z)=0. \end{cases}$

346. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{y+1}-\dfrac{x+3}{y+2}=\dfrac{2x+y+z-7}{y^2+3y+2}, \\ \dfrac{z+1}{x+y-2}-\dfrac{z+2}{x+y+1}=\dfrac{7}{(x+y-2)(x+y+1)}, \\ (x+y)^2+(z+2)^2-(x+y+z+3)(x+y+z+1)+6x+5y+z(2x+2y+1)=9. \end{cases}$

347. $\begin{cases} \dfrac{ax+b}{by+a}-\dfrac{bx+a}{ay+b}=\dfrac{(a^2-b^2)xy+z+b^2}{aby^2+(a^2+b^2)y+ab}, \\ \dfrac{p(x+q)}{z}-\dfrac{p(x+q)}{z+p}=\dfrac{x+y+z}{z^2+pz}, \\ x+y+z=b^2. \end{cases}$ **348.** $\alpha)$ $\begin{cases} x-2y-4u=-19, \\ 6y-7z+8u=23, \\ 9x-10y-8z+10u=5, \\ -13x+10y+15z-10u=12; \end{cases}$

348. $\beta)$ $\begin{cases} 2x-\ 3y+\ 4z-\ 5u=-12, \\ -\ 7x+\ 8y-\ 9z+10u=\ 22, \\ 12x-13y-14z+15u=\ 4, \\ -17x+18y+19z-20u=-\ 4. \end{cases}$ **349.** $\begin{cases} x+y+z+t=2(a+b+c), \\ 2x+2y-3z-t=2(a+3b-2c), \\ x+2y+3z+4t=2(a+2b+3c), \\ x-y+z+t=4c. \end{cases}$

350. $\begin{cases} 10x-2y-2z-4t=6, \\ (x+y)^2-(x+t)^2-(y+z)^2+(z+t)^2-2(x-z)(y-t)-2(x+2y-z-2t)=-2, \\ (x-y)(z-t+2)+(x-t)(y-z)-(x-z)(y-t)-x+3y+z+t=8, \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2-(x+y)^2-(z+t)^2+t(2z+t)+2xy=44. \end{cases}$

(Uwaga w art. 180-ym). **351.** $\begin{cases} y+2x=4, \\ z+3y=9, \\ u+4z=16, \\ v+5u=25, \\ x+y+z+u+v=15. \end{cases}$ **352.** $\begin{cases} x+y+z=a, \\ y+z+u=b, \\ z+u+x=c, \\ u+x+y=d. \end{cases}$

353. $\begin{cases} (1-x)(2-y)=z, \\ (3-x)(3-y)=z, \\ (2-x)(1-y)=z. \end{cases}$ **354.** $\begin{cases} x^2-y^2-2x+2y=4, \\ x+y=3. \end{cases}$ **355.** α) $\begin{cases} \frac{8}{x}+\frac{6}{2y}=5, \\ \frac{8}{x}-\frac{6}{2y}=3; \end{cases}$

355. β) $\begin{cases} \frac{8}{x-7}+\frac{9}{y-5}=7, \\ \frac{5}{x-7}+\frac{3}{2y-10}=3. \end{cases}$ **356.** $\begin{cases} \frac{10}{2x+3y-29}+\frac{9}{7x-8y+24}=8, \\ \frac{2x+3y-29}{2}=\frac{7x-2y}{3}-2y+8. \end{cases}$

357. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=b, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=c. \end{cases}$ **358.** $\begin{cases} \frac{12}{2y+3x}-\frac{15}{2(3y+4z)}=1, \\ \frac{30}{3y+4z}+\frac{37}{5x+9z}=3, \\ \frac{222}{5x+9z}-\frac{8}{2y+3x}=5. \end{cases}$ **359.** $\begin{cases} 3x-\frac{4}{5}y+\frac{1}{z}=7\frac{3}{5}, \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+\frac{2}{z}=10\frac{1}{6}, \\ \frac{4}{5}x+\frac{1}{2}y+\frac{4}{z}=19\frac{1}{10}. \end{cases}$

360. $\begin{cases} 3xy+4yz+5xz=50xyz, \\ 4xy+5yz+6xz=62xyz, \\ \frac{5}{2}xy+3yz+\frac{9}{2}xz=42xyz. \end{cases}$ **361.** $\begin{cases} ax-by=ac-bd, \\ ey-az=de-af, \\ gx+hy+kz=l+cg+dh+fk. \end{cases}$

(Art. 183). **362.** $\begin{cases} x+2y=0, \\ 3x+4y=0. \end{cases}$ **363.** $\begin{cases} 0{\cdot}08x-0{\cdot}1y=0, \\ 0{\cdot}24x-0{\cdot}3y=0. \end{cases}$

364. $\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ 4x+5y+6z=0, \\ 7x+8y+9z=0. \end{cases}$ **365.** $\begin{cases} 2x+3y+z=0, \\ y+3z=0, \\ 7x+10y+2z=0. \end{cases}$ **366.** $\begin{cases} x+y+2z=0, \\ x+2y+2z=0, \\ x-y+2z=0. \end{cases}$

367. $\begin{cases} x+3y+2z+3v=0, \\ 4x+5z+6v=0, \\ 7x+y+8z+9v=0, \\ 4x+y+5z+6v=0. \end{cases}$ **368.** $\begin{cases} ax+(a-d)y+(a+d)z=0, \\ bx+(b-e)y+(b+e)z=0, \\ cx+(c-f)y+(c+f)z=0. \end{cases}$

(Art. 184). **369.** $\begin{cases} x+y=2a, \\ x-y=3-a, \\ 8x-6y=21-5a. \end{cases}$ **370.** $\begin{cases} x+y=2a, \\ x-y=2b, \\ 4x-3y=5b+3. \end{cases}$ **371.** $\begin{cases} x+y=2a, \\ x-y=2b, \\ 4x-3y=5b+3, \\ 3x+2y=2a-1. \end{cases}$

(Art. 186, 187 i 188). **372.** Co należy odjąć od każdej z liczb 13, 4, 6, 18, aby otrzymane różnice tworzyły proporcyą?

373. Podzielić liczbę 10 na dwie części takie, iżby pięciokrotnie wzięta część pierwsza była o 2 większa od trzykrotnie wziętej pozostałej.

374. Jaką liczbę trzeba dodać tak do licznika, jak i do mianownika ułamka $\frac{l}{m}$, aby otrzymać ułamek $\frac{l_1}{m_1}$?

375. Stosunek dwu liczb dwucyfrowych, napisanych przy pomocy pewnych dwu tylko cyfr, jest 2:9, a suma tych liczb jest 99. Jakie są te liczby?

376. Jaka liczba sześciocyfrowa, w której cyfra jedności jest 2, ma tę własność, iż po przesunięciu owej cyfry na ostatnie miejsce (w lewo) otrzymujemy liczbę 3 razy mniejszą?

377. Jaką liczbę trzeba dodać do każdej z liczb a, b, c, d, aby powstałe sumy przedstawiały cztery liczby proporcyonalne?

378. Dziecko mówi: mój ojciec jest o 39 lat starszy ode mnie, a o 11 lat od matki; razem zaś wszyscy troje mamy 100 lat. Ile lat ma dziecko, matka i ojciec?

379. α) Greczynka błagała Jowisza, by podwoił ilość jej pieniędzy. Stało się zadość jej prośbie, za co wdzięczna Greczynka złożyła w ofierze Jowiszowi 1 drachmę. Zaniosła do niego powtórnie też prośbę i znowu Jowiszowi za podwojenie jej pieniędzy złożyła 1 drachmę. Obliczywszy pozostałe jej pieniądze, znalazła, iż miała 3 razy więcej, niż przed zanoszeniem próśb do Jowisza. Ile pieniędzy miała początkowo? β) Innym razem taż Greczynka przyrzekła Jowiszowi składać naprzód po 8 drachm z prośbą, by podwajał pozostałe jej pieniądze. Kiedy czwartym razem złożyła taką ofiarę, nic jej już nie zostało pieniędzy. Ile pieniędzy miała początkowo?

380. Przy budowie domu jest zajętych 30 murarzy i pomocników murarskich. Pierwsi biorą dziennie po 1·60 *zł.*, drudzy zaś po 1 *zł.* Gdyby murarze brali dziennie o 10 ct. mniej, to kwota, należna wówczas murarzom, byłaby równa tej, którą otrzymują ich pomocnicy. Ilu jest murarzy, a ilu pomocników?

381. Dwie rodziny kupiły spólnie 200 *kg* cukru, z których na pierwszą przypadło 113 *kg*. Ta rodzina zużywa 3·5 *kg*, druga zaś 2·2 *kg* tygodniowo. Po ilu tygodniach te rodziny będą miały równe zapasy cukru?

382. W dwu składach było razem 260 m^3 drzewa. Z pierwszego składu wzięto piątą część drzewa, z drugiego zaś połowę; pozostała w obu składach jednakowa ilość drzewa. Ile go było pierwotnie w każdym z tych dwu składów?

383. Mamy 32 *kg* wody morskiej, zawierającej 1·6 *kg* soli. Ile należy dolać wody słodkiej, aby 32 *kg* mieszaniny zawierało 200 *g* soli?

384. Stary Indus przed śmiercią rozporządził, aby trzej jego synowie rozdzielili między siebie stado koni: najstarszy weźmie połowę, średni trzecią część, a najmłodszy dziewiątą część stada. Synowie po śmierci ojca nie mogli dokładnie wykonać jego woli, gdyż ilość koni w stadzie nie dawała się we wskazany sposób na części podzielić. Przyjaciel zmarłego wytłomaczył synom, że ich ojciec, wydając to rozporządzenie, musiał mieć na myśli dawny, już zapomniany, zwyczaj, iż na stosie wraz ze zmarłym płonął koń jego, widocznie zaś nie wiedział, iż podczas jego choroby jeden koń zdechł w stadzie. Ile było koni w stadzie w chwili śmierci nieboszczyka?

385. Hieron, tyran Syrakuz, kazał złotnikowi z 20 funtów złota zrobić dla posągu koronę. Otrzymawszy ją, powziął podejrzenie, iż złotnik część złota zastąpił przez srebro. Zażądał przeto od uczonego Archimedesa, aby to sprawdził, nie psując pięknego dzieła sztuki złotniczej. Archimedes, zauważywszy w kąpieli, że ciało zanurzone w wodzie staje się lżejszem, rozwiązał to zadanie, stwierdziwszy, że w wodzie złoto traci $\frac{1}{19{\cdot}75}$, srebro zaś $\frac{1}{10{\cdot}5}$ swego ciężaru, a korona owa zanurzona w wodę ważyła $18\frac{3}{4}$ funta. Ile srebra dał złotnik zamiast złota?

386. Z dwu wodotrysków woda spada do tego samego zbiornika. Gdyby był puszczony pierwszy tylko wodotrysk, napełniłby zbiornik w h_1 godzinach; gdyby zaś był puszczony sam drugi wodotrysk, napełniłby ten zbiornik w h_2 godzinach. W ilu godzinach napełni się zbiornik, jeżeli oba wodotryski będą puszczone jednocześnie?

387. Dwa naczynia mają objętości v i v_1; pierwsze jest napełnione mieszaniną wody i wina w stosunku $m:n$, drugie zaś w stosunku $m_1:n_1$. Jaką (tę samę) ilość jednostek objętości trzeba odlać z każdego naczynia, iżby po wlaniu w naczynie pierwsze tego, co zostało odlane z drugiego, i nawzajem, były w naczyniach jednakowe mieszaniny wody i wina?

388. Ojciec rozdzielił majątek między dzieci na równe części. Dział każdego dziecka jest taki, iż można go przedstawić albo jako sumę a *zł.* i szóstej części tego, co zostanie, gdy od całego majątku odejmiemy a *zł.*, albo też jako sumę $2a$ *zł.* i szóstej części tego, co zostanie, gdy od całego majątku odejmiemy jeden dział i $2a$ *zł.* Jaki był cały majątek?

389. W bractwie wnosi A corocznie wkładkę, ustanowioną dla członków, od lat 50-u, B wnosi ją od lat 27-u, C od 24-ch, D od 19-u, a E od 16-u lat. Jeżeli te osoby wnosić będą takież wkładki jeszcze przez pewną ilość lat, to α) kiedy suma wkładek, złożonych przez A, wyniesie połowę tego, co włożą B, C, D i E razem? β) kiedy to, co wniósł A, było równe temu, co wnieśli B, C, D i E razem?

390. Na jak długo należy oddać kapitał na $p\,\%$, aby odsetki wyniosły n-tą część kapitału?

391. Odsetki od pewnego kapitału, oddanego na $3\,\%$, w ciągu 10-u lat wynoszą 2 razy tyle, co odsetki od 6000 *zł.*, oddanych na $4\,\%$, w ciągu lat 3-ch. Jaki jest ów kapitał?

392. Kapitał 6000 *zł.* oddano na $3\,\%$, kapitał zaś 5500 *zł.* na $4\,\%$. Po ilu latach te kapitały wraz z odsetkami utworzą sumy równe?

393. Dyskonto wekslu, obliczone sposobem teoretycznym, za 5 miesięcy po $6\,\%$ wynosi 400 *zł.* Na jaką sumę jest wystawiony ten weksel?

394. Dłużnik ma zapłacić wierzycielowi dziś 1000 *zł.*, po $2\frac{1}{2}$ mies. 700 *zł.*, po 3-ch mies. 800 *zł.*, po $3\frac{1}{2}$ mies. 400 *zł.*, po $5\frac{1}{3}$ mies. 600 *zł.* Jaki jest „średni termin“ tych wypłat?

395. Ktoś umieścił swój kapitał na $4\,\%$, a po roku dodał do tego kapitału tyle, ileby wyniosły procenty od niego za lat 12, i wskutek tego miał w następnym roku dochodu o 768 *zł.* więcej, niż w poprzednim. Jaki był kapitał pierwotny?

396. Ktoś, mając 36000 *zł.*, kupił willę i trzecią część pozostałych pieniędzy umieścił na $4\,\%$, a resztę na $5\,\%$. Pieniądze te przynoszą mu rocznie 1176 *zł.* Ile kosztuje willa?

397. Ile trzeba dolać wody słodkiej do 40 *kg* morskiej wody, zawierającej $3\frac{1}{2}\,\%$ soli, aby mieszanina miała tylko $1\frac{1}{2}\,\%$ soli?

398. Kiedy wskazówki zegara, godzinna i minutowa, zejdą się z sobą po raz pierwszy po godzinie dwunastej?

399. W zegarze pewnym wskazówka sekundowa obraca się (jednostajnie) około tej samej osi, co godzinna i minutowa. Kiedy po raz pierwszy po godzinie 12-ej wskazówka sekundowa zajmie położenie dwusiecznej kąta między wskazówkami godzinną i minutową?

400. Dwie stacye drogi żelaznej A i B są od siebie oddalone o 137 *km.* Centnar metryczny pewnego towaru w A kosztuje 4·25 *zł.*, w B zaś 4·75 *zł.* Koszt dostawy wynosi 0·09 *zł.* od tonny i kilometra. W jakiem miejscu drogi między A i B możnaby ów towar równie dobrze sprowadzać z A, jak z B?

401. Lis, ścigany przez charta, jest przed nim o 60 swoich skoków. Robi ich 3 w tym czasie, w którym chart robi 2 skoki, ale chart w 3-ch skokach przebiega tę drogę, co lis w 7-u. Ile skoków chart potrzebuje uczynić, aby dosięgnąć lisa?

402. A i B, oddaleni o 154 *km*, jadą naprzeciwko siebie; A przejeżdża 7 *km* w tym czasie, w którym B 4 *km.* Znaleźć odległość punktu ich spotkania się od miejsca, z którego wyjechał A.

403. Z A o 9-ej godzinie rano wyjeżdża pociąg ku B, jadący 20 *km* na godzinę; o 5-ej godz. po południu wyjeżdża pociąg z B ku A i jedzie 30 *km* na godzinę. Od A do B jest 350 *km.* Gdzie się te pociągi spotkają?

404. A, jadąc pocztą z prędkością 10 *km* na godzinę, przejeżdżał w południe przez pewną stacyą. O 2-ej po południu z tejże stacyi wyjechał B pocztowemi końmi, goniąc A, i jedzie po 40 *km* w ciągu 3-ch godzin. W jakiej odległości od tej stacyi dogoni on A?

405. Ktoś, idąc z A do B, przechodzi a *km* na godzinę, a wracając z B do A b *km* na godzinę. Szedł tam i napowrót c godzin. Jaka jest odległość od A do B?

406. Wioślarz utrzymuje, że, taksamo robiąc wiosłami, 3 razy wolniej płynie w górę pewnej rzeki, niż w dół, a na stawie przepływa kilometr w 6-u minutach. Jak szybki jest bieg wody w tej rzece?

407. Pociąg A, jadący z prędkością v, ruszył później, niż pociąg B, jadący z prędkością v_1, o tyle, iżby pociągi te jednocześnie przybyły do oznaczonego miejsca. Pociąg jednak B, po przebyciu $\frac{2}{3}$ zamierzonej drogi, zwolnił swój bieg, jadąc dalej z 2 razy mniejszą prędkością, wskutek czego pociągi te spotkały się z sobą o a *km* bliżej. Znaleźć długość drogi, którą te pociągi miały przebyć.

408. Na torze wyścigowym jeźdźcy A i B jechali 6 minut. A jechał wciąż z tą samą prędkością, B zaś w 6-ej minucie przejechał o 60 stóp więcej, niż w każdej z poprzednich. W końcu 4-ej minuty A wyprzedzał B o $\frac{1}{40}$ długości toru; jednak B stanął pierwszy u mety, pozostawiając A za sobą o 6 stóp. Jaka była długość toru wyścigowego?

409. Trzy ciała poruszają się po linii prostej w tym samym kierunku z prędkościami odpowiednio v_1, v_2 i v_3 na minutę. W pewnym momencie są one poza punktem O w odległościach od tego punktu odpowiednio d_1, d_2 i d_3, przy $d_1 < d_2 < d_3$. Po ilu minutach odległość ciała pierwszego od O wyniesie $\frac{3}{5}$ spółczesnej odległości dwu pozostałych ciał od siebie?

410. Na okręgu koła znajdują się dwa punkty A i B, a mniejszy łuk między niemi ma $2\,m$. W pewnym momencie przechodzi przez A ciało w kierunku ku B, poruszające się po okręgu koła z prędkością v_1 m na sekundę. O 2 sekundy α) wcześniej, β) później przechodzi przez punkt B w tym samym kierunku ciało, poruszające się po tymże okręgu koła z prędkością v_2 m na sekundę. W ile sekund po przejściu przez punkt A pierwsze ciało spotka się z drugiem?

411. Średnica dzieli dany kąt wpisany w koło w stosunku 3:7, a odpowiedni łuk na dwie części, których różnica stanowi $\frac{1}{24}$ okręgu koła. Ile stopni ma dany kąt?

412. Trójkąt o bokach a, b i c jest opisany na kole. Znaleźć odcinki boku a między punktem jego styczności do koła, a punktami końcowemi tego boku?

413. Przedłużenia nierównoległych boków b i d trapezu, którego podstawy są a i c, z podstawą c tworzą trójkąt. Jakie są pozostałe boki tego trójkąta?

414. W trójkącie, którego boki są a, b i c, poprowadzona jest równoległa do c taka, iż odcinek jej między bokami a i b jest równy odcinkowi boku a, zawartemu między punktami przecięcia się z nim tej prostej i boku c. Jak wielki jest ów odcinek?

415. Dane są trzy odcinki linii prostej a, b i c, z których $a > b$. Jaka jest wysokość trójkąta, mającego podstawę a, w którym na równoległej do podstawy, oddalonej od niej o c, pozostałe boki trójkąta oddzielają odcinek równy b?

416. W trójkącie, którego podstawą jest a, jeden zaś z pozostałych boków b, odcinek prostej, równoległej do podstawy, ograniczony bokami pozostałemi, jest l. Znaleźć odcinki boku b: α) między a i l; β) między l i wierzchołkiem trójkąta. Zestawić z sobą wyrażenia tych dwu odcinków w przypadkach: $l < a$, $l = a$ i $l > a$.

417. Jaki jest bok kwadratu, równoważnego z prostokątem, którego podstawa jest o $2a$ większa, wysokość zaś o a mniejsza od boku owego kwadratu?

418. Dane jest koło o promieniu r i punkt M na płaszczyźnie tego koła, leżący wewnątrz koła, lub zewnątrz niego, oddalony od jego środka o a. Z punktu M poprowadzona jest sieczna, a jej odcinek między M a bliższym na niej punktem koła jest b. Znaleźć długość odcinka tej siecznej, będącego cięciwą koła.

419. Boki prostokąta są $25{\cdot}73\,m$ i $12{\cdot}81\,m$. Większy jest podzielony na dwa odcinki tak, iż różnica kwadratów, wystawionych na tych odcinkach, jest równoważna z danym prostokątem. Jakie są te odcinki?

420. Mając trójkąt różnoboczny ABC, poprowadźmy dwusieczną kąta C i dwusieczną kąta doń przyległego. Te dwusieczne przecinają podstawę $AB = c$ w punktach odpowiednio D i E. Pozostałe boki trójkąta są $BC = a$ i $AC = b$. Znaleźć wielkość odcinka DE.

421. Na linii prostej następują po sobie punkty A, B, C i D i jest $AB = a$, $BC = b$ i $CD = c$. Znaleźć między punktami B i C taki punkt X, iżby $AX.BX = XC.XD$.

422. Dwa koła na płaszczyźnie, przecinające się z sobą, mają promienie R i r, a odległość środków tych kół jest d. Oznaczyć: α) punkt przecięcia się z sobą dwu spólnych stycznych do tych kół; β) odległość spólnej cięciwy od środka koła większego.

423. Mając dany prostopadłościan, którego krawędzi są a, b i c, znaleźć krawędź sześcianu takiego, iżby stosunek powierzchni tych dwu brył był równy stosunkowi ich objętości.

424. Mamy stożek kołowy prosty, którego wysokość jest h, tworząca zaś t. Na tworzącej tak oznaczyć punkt przecięcia się jej z tworzącą walca kołowego prostego, którego oś jest wysokością stożka, iżby powierzchnie boczne stożka i walca były sobie równe.

425. Znaleźć liczbę taką, iż, dodawszy do niej 10 i wziąwszy połowę tej sumy, a do tak otrzymanej liczby dodawszy $\frac{2}{3}$ tejże liczby powiększonej o 20, a prócz tego $\frac{5}{6}$ tejże liczby zmniejszonej o 34, otrzymamy liczbę, która jest dwa razy większa od nadmiaru liczby szukanej ponad 5.

426. Znaleźć liczbę taką, iżby $\frac{1}{3}$ tej liczby, powiększona o 75, oraz $\frac{5}{12}$ tej liczby, zmniejszone o 35, dały sumę równą $\frac{3}{4}$ tej liczby, powiększonym o 49.

427. Robotnik pracował w lecie przez dni 13; za szkody, które poczynił, potrącono mu 21 *zł.* z należnej za pracę jego zapłaty. Tenże sam robotnik za 18 dni pracy w zimie, zarabiając o $\frac{1}{2}$ *zł.* mniej za dzień pracy, niż w lecie, i za gorliwość pobrawszy naddatku 10 *zł.*, otrzymał tę samę kwotę, co za pracę w lecie. Po ile otrzymywał za dzień pracy w lecie?

428. Kolej żelazna bierze 0·10 *zł.* za przewóz pewnego towaru od tonny i kilometra, a prócz tego należy się opłata wagonowa 3·75 *zł.* od 2 tonn. O jaką odległość można przewieźć 50 tonn tego towaru za 92 *zł.*

(Art. 192). **429.** Dwa prostokąty, z których jeden ma podstawę a, drugi zaś b, mają jednakowy obwód i są z sobą równoważne. Jakie są wysokości tych prostokątów? Rozważyć odpowiedź w przypadku $b=a$.

430. Mając trójkąt prostokątny, znaleźć na przeciwprostokątnej c taki punkt, iżby suma prostopadłych, spuszczonych z owego punktu na przyprostokątne a i b, była równa liczbie danej k. Rozważyć odpowiedź w przypadku, kiedy dany trójkąt jest równoramienny.

(Art. 193). **431.** Nadać liczbom v_1, v_2, d i h układy wartości, odpowiadające różnym przypadkom, rozważanym w art. 193-im.

(Art. 195 i 196). **432.** Ułożyć zadania 375-e, 378-e, 380-e, 382-e, 385-e, 396-e, 400-e, 401-e, 403-e, 411-e, 419-e, 424-e, 429-e i 430-e w równania o wielu niewiadomych.

433. Suma dwu liczb jest s, różnica ich r; jakie są te liczby? Wysłowić wypadki.

434. Stosunek dwu liczb jest q, a ich α) suma, β) różnica jest p. Jakie są te liczby?

435. Liczba składa się z trzech cyfr, których suma jest 13, a cyfra jedności jest 3 razy większa, niż cyfra setek; dodawszy do tej liczby 396, otrzymamy odwrotnie napisaną liczbę szukaną. Jaka to jest liczba?

436. Suma cyfr roku, w którym Guttenberg druk wynalazł, jest 14; cyfra jedności jest dwa razy większa od cyfry dziesiątków; dodając do cyfry tysięcy cyfrę dziesiątków, otrzymalibyśmy cyfrę setek; odejmując nakoniec cyfrę jedności od sumy pozostałych cyfr, otrzymalibyśmy 2. W którym roku Guttenberg druk wynalazł?

437. Mając alfabet łaciński, nazwijmy jego litery kolejno 1, 2, 3 i t. d. Z pięciu liter składa się wyraz taki, iż liczby, odpowiadające jego literom, posiadają następujące własności: suma wszystkich jest równa 21; suma liczb na miejscach parzystych jest większa od sumy liczb na miejscach nieparzystych o 5; suma trzeciej i czwartej jest równa drugiej; suma czwartej i piątej jest równa trzeciej; nakoniec różnica czwartej i pierwszej jest równa podwojonej piątej. Jaki to jest wyraz?

438. Znaleźć dwie liczby, których suma, różnica i iloczyn są proporcyonalne względem s, d i p.

439. Mamy cztery wyrażenia: $a+b$, $ap+bq$, ap^2+bq^2 i ap^3+bq^3 takie, iż trzecie lub czwarte powstaje z dwu wyrażeń bezpośrednio poprzedzających wskutek pomnożenia pierwszego z nich przez x, a drugiego przez y, i dodania tych dwu iloczynów. Jakie są te liczby x i y?

440. Mamy sześć wyrażeń: $a+b+c$, $ap+bq+cr$, $ap^2+bq^2+cr^2$, $ap^3+bq^3+cr^3$, $ap^4+bq^4+cr^4$ i $ap^5+bq^5+cr^5$. Mnożąc trzy kolejne z nich, pierwsze przez x, drugie przez y, a trzecie przez z, i dodając iloczyny, otrzymujemy następne z tych wyrażeń. Jakie są te liczby x, y i z?

441. 17 kosiarzy i 10 zgrabiających pokosy zarobili pewnego dnia razem 10 *zł.* 50 *ct.* Drugiego dnia było 10 kosiarzy i 17 zgrabiających pokosy i otrzymali razem 8 *zł.* 40 *ct.* Ile płacono dziennie kosiarzowi a ile zgrabiającemu?

442. Dwie osoby mają solidarnie zapłacić 870 *zł.*, a żadna nie ma tyle pieniędzy, by całą tę kwotę zapłacić. Pierwsza mówi do drugiej: jeżeli mi dodasz $\frac{3}{5}$ twoich pieniędzy, zapłacę całą kwotę. Druga odpowiada: ja zapłacę całą kwotę, ale mi dodaj $\frac{3}{4}$ twoich pieniędzy. Ile pieniędzy ma każda z tych osób?

443. Ojciec życzy sobie w testamencie, aby jego trzej synowie podzielili majątek między siebie w następujący sposób: najstarszy ma otrzymać o 3000 zł. mniej, niż połowa całego majątku; średni o 2400 zł. mniej, niż trzecia część majątku; najmłodszy zaś o 1800 zł. mniej, niż czwarta część majątku. Jaki jest całkowity majątek i ile każdy z synów ma otrzymać?

444. Testament wuja orzeka, że każdy siostrzeniec otrzyma 12000 *zł*., każda zaś siostrzenica 9000 *zł*. W taki sposób została rozdzielona cała suma 120000 *zł*. Jeżeliby przeciwnie każda siostrzenica otrzymała 12000 *zł*., każdy zaś siostrzeniec 9000 *zł*., to pozostałoby jeszcze 9000 *zł*. Ilu było siostrzeńców, a ile siostrzenic?

445. Woźnica zgodził się przewieźć wazony porcelanowe różnej wielkości, umówiwszy się, iż za każdy wazon, który stłucze, zapłaci tyle, ile byłby dostał za dostawienie go w całości. Dano mu naprzód 2 małe wazony, 4 średnie i 9 wielkich; stłukł średnie a inne oddał w dobrym stanie, za co otrzymał 28 *zł*. Dano mu następnie 7 małych, 3 średnie i 5 wielkich wazonów; tym razem oddaje małe wazony i średnie w dobrym stanie, ale tłucze wielkie i otrzymuje tylko 3 *zł*. Nakoniec dano mu 9 małych, 10 średnich i 11 wielkich wazonów; dostawił wszystkie w całości i otrzymał 92 *zł*. Za ile się zgodził dostawić jeden wazon każdej wielkości?

446. Trzy gromady robotników sypią pośpiesznie oddzielnie wały. Prócz należnej im zapłaty, mają dostać za pośpiech w robocie jako naddatek 901 *zł*., i mianowicie: wszyscy robotnicy, należący do tej gromady, która najpierw swój wał usypie, otrzymają po 1 *zł*., a pozostała kwota zostanie równo rozdzielona między robotników dwu innych gromad. Gdyby pierwsza gromada naprzód ukończyła swą robotę, to każdy z robotników, nie należących do tej gromady, otrzymałby po $\frac{1}{2}$ *zł*. Gdyby naprzód ukończyła robotę druga gromada, to na każdego z pozostałych robotników wypadałoby po $\frac{1}{3}$ *zł*. Gdyby zaś trzecia gromada wyprzedziła inne, to robotnicy owych dwu innych gromad dostaliby po $\frac{1}{4}$ *zł*. Ilu było robotników w każdej gromadzie?

447. Trzej gracze A, B i C położyli przed sobą pieniądze i umówili się, że po każdej partyi przegrywający zapłaci każdemu z pozostałych graczy tyle, ile przed tym graczem jest pieniędzy. Grali trzy partye i pierwszą przegrał A, drugą B, trzecią zaś C. Kiedy grę skończyli, okazało się, iż przed każdym jest 16 *zł*. Ile każdy wystawił pieniędzy, rozpoczynając grę?

448. 5040 hektarów lasów ma być rozdzielone między trzy gminy A, B i C według ilości mieszkańców, ale z uwzględnieniem tego, iż gmina A ma nadto wyjątkowe prawo do $\frac{1}{20}$ tego, co dostaną gminy B i C. Stosunek ilości mieszkańców gmin A i B jest 7 : 1, zaś gmin B i C jest 5 : 8. Ile lasu każda gmina dostanie?

449. Gdyby z trzech robotników A, B i C pracowali dwaj A i B, to wykończyliby robotę w a dni; gdyby pracowali A i C, ukończyliby ją w b dni; robotnicy zaś B i C ukończyliby ją w c dni. Obliczyć, ile dni potrzebowałby każdy z tych robotników, aby sam ukończył pracę, oraz, ile dni potrzebowaliby w tym celu pracować wszyscy razem.

450. Zbiornik o objętości v w ciągu czasu t napełnia się przez n kurków jednakowych, oraz wskutek deszczu, jednostajnie padającego na obszarze s otworu zbiornika. Inny zbiornik o objętości v' w ciągu czasu t' napełnia się przez n' kurków takich samych, jak w pierwszym zbiorniku, oraz wskutek takiegoż deszczu, padającego na obszarze s' otworu tego zbiornika. Oznaczyć, ile w ciągu jednostki czasu wlewa się wody przez każdy kurek i ile w ciągu jednostki czasu spada deszczu na każdą jednostkę powierzchni.

451. Mamy dwojakie złoto, jedno próby 0·820, drugie 0·950. Utworzyć z nich **117** g złota próby 0·870.

452. Znając ciężary gatunkowe d_1 i d_2 dwu ciał i ciężar gatunkowy D ich mieszaniny, znaleźć, ile *kg* każdego ciała trzeba wziąć, aby utworzyć P *kg* owej mieszaniny.

453. Złotnik ma dwa stopy złota z miedzią. W jednym na a_1 *kg* złota przypada b_1 *kg* miedzi, w drugim zaś na a_2 *kg* złota b_2 *kg* miedzi. Ile *kg* trzeba wziąć z każdego stopu, aby otrzymać stop zawierający α *kg* złota i β *kg* miedzi?

454. Kapitalista posiada obligi bankowe 5%-owe, listy zastawne 4%-owe i losy państwowe 3%-owe; od tych papierów ma dochodu rocznie 6800 zł. Gdyby tak z obligów bankowych jak i z losów państwowych pobierał 4%, dochód jego byłby mniejszy o 400 zł. Z obligów bankowych ma rocznie o 2400 zł. więcej dochodu, niż z losów państwowych. Na jaką sumę ma obligów bankowych, na jaką listów zastawnych i na jaką losów państwowych?

455. Ktoś ma trojakie papiery procentowe, które nazwijmy A, B i C. Papierów B jest na sumę o 1000 zł. większą, niż papierów A, a papierów C na sumę o 1500 zł. większą, niż papierów A. Lecz papiery B, przynosząc o 1% więcej, niż papiery A, dają odsetek o 80 zł. więcej; papiery zaś C, przynosząc o 2% więcej, niż A, dają odsetek o 150 zł. więcej. Jakie są kapitały i stopy procentu?

456. Kapitał wraz z odsetkami za 8 miesięcy przedstawia kwotę 5952 zł. Tenże kapitał wraz z odsetkami za 17 miesięcy przedstawia kwotę 6168 zł. Oznaczyć kapitał i stopę procentu.

457. Dwaj chłopcy A i B stanęli do wyścigu pieszego na torze, mającym 1475 *m* długości. Pierwszym razem B zaczynał bieg, stanąwszy o 25 *m* przed A; jednak A dobiegł do mety o 42 sekundy wcześniej, niż B. Drugim razem B ruszył o 1 minutę 15 sekund wcześniej niż A, i dobiegł do mety, wyprzedziwszy A o 25 *m*. Przyjmując, iż w obu razach biegli jednakowo prędko, znaleźć, ile czasu potrzebuje każdy z nich na przebieżenie całego toru.

458. Dwaj podróżni A i B z pewnego miasta udali się do innego miasta, odległego o 1029 *km*, A pieszo, B końmi. B jest w drodze o 28 dni krócej, niż A; na to, aby A przeszedł 126 *km* i aby następnie B przejechał 392 *km*, potrzeba 14 dni. Ile *km* dziennie szedł A, a ile B jechał?

459. Pociąg kolei żelaznej w godzinę po wyruszeniu ze stacyi doznał uszkodzenia, wskutek czego zatrzymał się przez godzinę, a dalej jechał z prędkością, która stanowiła $\frac{3}{5}$ prędkości poprzedniej. Spóźnił się na następną stacyą o 3 godziny. Gdyby owo uszkodzenie nastąpiło o 50 *km* dalej, to spóźniłby się tylko o 1 g. 40 min. Oznaczyć odległość stacyj i prędkość początkową.

460. Dwa ciała biegną po kole z punktów, między któremi krótszy łuk ma 150 *cm*. Gdy biegną po mniejszym łuku, to spotykają się po 10-u sekundach; gdy zaś biegną po większym łuku, to spotykają się po 14-u sekundach. Pierwsze ciało obiegłoby całe koło w tym czasie, w którym drugie przebiega 90 *cm*. Znaleźć długość okręgu koła i prędkość ruchu tych dwu ciał.

461. Obwód jednego z dwu trójkątów podobnych stanowi $1\frac{1}{2}$ obwodu drugiego, a boki jego są odpowiednio o 3 *cm*, 4 *cm* i 5 *cm* dłuższe od boków drugiego. Jakie są boki pierwszego trójkąta?

462. W kole dwie cięciwy o długości 26 *cm* i 30 *cm* przecinają się tak, iż suma mniejszych ich odcinków jest 14 *cm*. Jakie są te mniejsze ich odcinki?

463. Z punktu zewnątrz koła są poprowadzone dwie sieczne; stosunek ich zewnętrznych odcinków jest $1:1\frac{1}{3}$; odpowiednie zaś ich odcinki będące cięciwami są 24 *cm* i 8 *cm*. Jakie są sumy obu odcinków każdej z owych siecznych?

464. Jedna przekątna trapezu dzieli drugą w stosunku $4:5$, a odcinek, łączący środki boków nierównoległych, ma 10 *cm*. Jakie są podstawy tego trapezu?

465. Dany jest trójkąt o bokach a, b i c. Z każdego z wierzchołków, jako środka, zakreślone są koła tak, iż każde z tych kół jest styczne do dwu kół pozostałych. Znaleźć promienie tych kół.

466. Różnica promieni dwu kół spółśrodkowych jest 5 *cm*; cięciwa zaś większego koła, styczna do koła mniejszego, ma długości 25 *cm*. Jakie są promienie tych kół?

467. Jeżeli przedłużę jeden bok prostokąta o 7 *cm*, drugi zaś skrócę o 3 *cm*, to jego pole powiększy się o 49 cm^2. Jeżeli, przeciwnie, pierwszy skrócę o 11 *cm*, a drugi przedłużę o 2 *cm*, to pole zmniejszy się o 189 cm^2. Jakie są te boki?

468. Mamy czworokąt, opisany na kole; do jednego z boków dodając kolejno każdy z pozostałych, otrzymujemy odpowiednio 34 *cm*, 37 *cm* i 33 *cm*. Jakie są boki tego czworokąta?

469. Dwa trójkąty prostokątne nakładamy na siebie tak, iż krótsza przyprostokątna jednego przypada na dłuższej drugiego i nawzajem, a te przyprostokątne w jednym trójkącie są a i b, w drugim zaś b' i a'. Z punktu przecięcia się przeciwprostokątnych z sobą spuszczamy prostopadłe na przyprostokątne. Znaleźć długości tych prostopadłych.

470. Znaleźć dwie liczby takie, iżby trzecia część pierwszej liczby była o 5 mniejsza od połowy liczby drugiej, potrojona zaś połowa drugiej liczby była o 5 większa od liczby pierwszej.

ODPOWIEDZI.

5. -4^0. **6.** α) $5, \frac{16}{5}$; β) $\frac{5}{16}, \frac{1}{5}$; γ) $3, -\frac{16}{3}$; δ) $-\frac{3}{16}, \frac{1}{3}$; ε) $-3, \frac{16}{3}$; ζ) $\frac{3}{16}, -\frac{1}{3}$; η) $-5, -\frac{16}{5}$; ϑ) $-\frac{5}{16}, -\frac{1}{5}$. **7.** α) $\frac{30}{31}$; β) $\frac{70}{73}$; γ) 36; δ) $1\frac{41}{109}$. **8.** α) $\frac{213}{560}$; β) $-18\frac{3}{4}$; γ) $6\frac{79}{102}$. **12.** α) -315; β) 15; γ) 30. **13.** 502. **14.** 2·95. **15.** 1·234. **16.** α) 1; β) -83984; γ) 1000. **17.** α) -16; β) 135. **18.** α) 12; β) $-0·000\,279\,997$. **19.** α) $-74·6$; β) $-59·2625$. **20.** α) 648; β) 681. **41.** $a+c$. **42.** $22a-12b$. **43.** $27a-10b+17c$. **44.** $-10a^4b+13a^2b^2c+20ab$. **45.** $8a^4b-3a^2b^2c$. **46.** 0. **47.** $\frac{1}{2}a^2b-2\frac{1}{3}ab^2+1\frac{1}{15}ab$. **48.** $a-b+c+d-e-f$. **49.** $a-b+c-d+e+3f$. **50.** $a^5b^5+10a^5b^2c^3+10a^3b^2c^5$. **51.** $a-b$. **52.** $a+b-c+d$. **53.** $a-b$. **54.** α) $-7x-4y+16z$; β) $-28x+8y+5z$; γ) $-17x+6y+6z$. **55.** $-4a+6e$. **56.** $8a^5$. **57.** $9a^8b^5-7a^7b^6$. **66.** $72a^{22}b^7c^{18}d^7e^8f^4$. **67.** $4a^{5m+6}b^{7m+5}c^{m+4n+12}d^{7r+10}$. **70.** α) $108b^{14}e^{12}f^{14}-36b^{19}e^{11}f^{10}-30b^{22}e^7f^{11}-8b^7e^7f^6$; β) $300b^4p^{16}q^{20}+100b^{10}p^{12}q^{18}-$ $-50b^{16}p^{12}q^{12}+50b^2p^{10}q^8$. **79.** $3a^4-a^3b-8a^2b^2+29ab^3-21b^4$. **80.** $32a^5b^{10}-243a^{15}c^5$. **81.** $4a^6-5a^5b-4a^4b^2-8a^3b^3-16a^2b^4+9ab^5-4b^6$. **82.** $32a^5b^{10}+5a^2b^4c^9-\frac{9}{8}c^{15}$. **83.** $24a^{4n}+20\frac{5}{8}a^{2n}c^{2n}+6c^{4n}$. **84.** $0·15a^6x^{5n+17}+6·47a^4x^{4n+12}+75x^{2n+2}$. **85.** $x^{11}y^{2n+2}+2x^9y^{3n+9}+32xy^{7n+37}$. **86.** $\frac{1}{8}x^{8n+6}-x^{6n+4}+4x^{5n+3}-8x^{4n+2}+8x^{3n+1}-8x^{2n}$. **87.** $x^{8p+16}+x^{4p+8}y^{8q+12}+y^{16q+24}$. **88 i 89.** Z wyrazów, zawierających jednakowe potęgi x, wyłączyć je poza nawias. **90.** $a^6+b^6-c^6+6abc^4+2a^3b^3-9a^2b^2c^2$. **91.** $a^4z^4-a^{4n}$. **92.** $x^8-0·0625y^{24}$. **93.** $x^9+2x^8y-2x^7y^2-6x^6y^3-4x^5y^4-16y^9$. **94.** (Pierwszy czynnik przez trzeci, drugi przez czwarty.) $59049a^{10}-0·000\,000\,1024b^{10}$. **95.** $2a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)-a^4b^4-a^4c^4-b^4c^4$. **96.** $(4a^2+4ab+b^2)x^5-(5a^2+b^3)a^2x^3+a^6x$. **97.** 0. **98.** $a^{24p+36}+a^{18p+27}b^{3q+12}+a^{6p+9}b^{9q+36}+b^{12q+48}$. **100.** $-ab(12a^2-25ab+12b^2)$. **101.** $512a^{16}b^8c^8d^{16}-2c^{16}d^{32}$. **102.** $96a^5b^4c^2d-96a^4b^5cd^2-216a^2bc^5d^4+216ab^2c^4d^5$. **104.** α) $\frac{bc^{m+1}}{4a^2}$. **108.** $7a+2b-3c$. **109.** $\frac{15}{2}a^4-\frac{16}{3}b^2c-\frac{32}{3}b^2d$. **110.** $6a^2-3b^3$. **111.** $a^{3m}+a^{2m}b^{2p}+a^mb^{4p}+b^{6p}$. **112.** $a^{12}-a^{10}+a^8-a^6+a^4-a^2+1$. **113.** $3x-6y$. **114.** $-x+y+z$. **115.** $5x^2-4x$. **116.** $3y^2-9y-8$. **117.** $0·7a^3+0·5a^2bx^2$. **118.** $x^7y^2-4x^3y^{20}+8xy^{29}$. **119.** $4a^{2n}+\frac{3}{2}a^nc^n+2c^{2n}$. **120.** a^2-b^2. **121.** $5z^2+4z+3$. **122.** $x^3-2x^2y+2xy^2-y^3$. **123.** $4a^2b^4-2ab^2c^3+1\frac{1}{2}c^6$. **124.** $x^{2p+4}-x^{p+2}y^{2q+3}+y^{4q+6}$. **125.** x^6+x^3+1. **126.** $x+1$. **127.** x^3+1. **128.** $a^6-a^4b^2+a^2b^4-b^6+\frac{2b^8}{a^2+b^2}$. **129.** $5x^2-4x+\frac{3x^2}{4x^2-7x-8}$. **130.** $x^5+(a-b)x^4+(a^2-ab+b^2)x^3+(a^3-a^2b+ab^2-b^3)x^2+$ $+(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)x+\frac{2b^2x^4}{a+b}$. **131.** $8a^3+4a^2b+2ab^2+b^3+\frac{b^4}{2a-b}$. **132.** $4a^3-8a^2+16a-32+\frac{64a^4-16a^3+32a^2-64a+128}{a^5+2a^4+4}$. **141.** x^2-3x-4. **142.** $a(x+2a)$. **143.** $ax-by$. **144.** $x-b$. **145.** x^2-3x+2. **146.** $a-4$. **147.** $3a-2$. **148.** $a(b+2a)$. **149.** $2a^2b^2(3c-2ab^2)$. **150.** $a+b$. **151.** Pierwsze względem siebie $[(x+3):24]$. **152.** Pierwsze względem siebie $[(17x+28):699]$. **153.** Pierwsze względem siebie $[(10x+7):2537]$. **154.** $3ax^2-2a^2x+a^3$. **155.** x^2-2x+1. **156.** $x+4$. **157.** x^2-2x+1. **163.** $4a^4-16a^3+4a^2+64a-48$. **164.** α) $a^3+2a^2b+a^2+ab^2+2ab+b^2$, β) $18a^4-$ $-66a^3-93a^2+216a+240$, γ) $150a^4-70a^3+55a^2-35a-10$, δ) $x^4+6x^3+3x^2-26x-24$, ε) $x^6-2x^5+x^4-x^2+2x-1$. **167.** $4a^4b^2-\frac{27c^3(2a^2b-3c^3)}{4a^4b^2-6a^2bc^3+9c^6}$. **168.** $\frac{1}{a^2b^2c^2(4b^2+9c^2)}$.

169. $\frac{2x}{x^3+2x^2y+2xy^2+y^3}$. **170.** β) $2a-\frac{14}{3}+\frac{11}{9a+12}$; γ) $2+\frac{3}{5a+1}$; δ) x^2-12x+ $+80-\frac{348x^2+1048x-1120}{x^3-6x^2+11x-14}$. **171.** $\frac{1}{a^2}$. **172.** $\frac{27}{25}$. **173.** $\frac{343}{729}$. **174.** 0. **175.** 0.

176. α) 0; β) ∞. **177.** $\frac{1}{1-x^2}$. **178.** α) $-\frac{1}{3}$; β) 0; γ) ∞. **179.** 0.

180. $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$. **181.** $\frac{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}{(y^2-b^2)(y^2-c^2)}$. **182.** $\frac{1}{2}x(x+1)$. **183.** x^2+y^2+ $+z^2-a^2-b^2$. **184.** 1. **185.** 1. **186.** $a+2b$. **187.** $\frac{1}{p^2q^2}$. **188.** $2(a+b+c)$.

189. 4. **190.** $\frac{4(x^2-16)}{5(x^4+4x^3+9x^2+6x)}$. **191.** $\frac{3x}{4y}$. **192.** $\frac{x^4-x^4y+a^2x^2-a^2x^2y+a^4-a^4y}{a^3x}$.

193. α) i β) $\frac{64xyzuvw}{(x+y)(y+z)(z+u)(u+v)(v+w)(w+x)}$. **194.** $\frac{ac^2e}{b(ade+ace-c^2d)}$.

195. $\frac{c}{a+b}$. **196.** $1-\frac{1}{a}$. **197.** $\frac{c(2ab-ac-bc)}{ab^2-c(2ab-ac-bc)}$. **198.** b. **199.** xy. **200.** a.

201. $\frac{1}{a^2}$. **202.** $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$. **203.** $\frac{(a+b)b^2}{a^2+b^2}$. **204.** 7. **205.** $\frac{(a-x)^2}{a^4x^4}$. **221.** $\frac{2}{5}$.

222. $-\frac{11}{9}$. **223.** 8. **224.** -4. **225.** 100. **226.** 0. **227.** 6. **228.** 7. **229.** 0.

230. 0. **231.** $\frac{39}{80}$. **232.** 2. **233.** 0. **234.** -5. **235.** $\frac{1}{2}$. **236.** -3. **237.** -1.

238. -2. **239.** -1. **240.** 0. **241.** $-\frac{ab+cd}{ac+bd}$. **242.** $\frac{d+1-b^2}{2ab+ad-2b}$. **243.** $\frac{1}{4a(a+b)}$.

244. $\frac{77}{23}$. **245.** 0. **246.** $\frac{355}{298}$. **247.** $1\frac{33}{35}$. **248.** 5. **249.** 9. **250.** 1.

251. $\frac{1}{6}$. **252.** 8. **253.** 19. **254.** 17. **255.** 1·5. **256.** 6. **257.** 2. **258.** 11.

259. $\frac{c(d-a)(b-c)}{a^2-b^2+bc}$. **260.** $\frac{8a}{25}$. **261.** $\frac{a^2(b-a)}{b(a+b)}$. **262.** $3a-2b$. **263.** $\frac{ab}{a+b}$.

264. $\frac{4a^2(a^2+ab-b^2)}{3a^3-6a^2b+ab^2+6b^3}$. **265.** $\frac{a^2c+ab^2+bc^2-a-b-c}{ac+bc+ab-1}$. **266.** $\frac{ab}{c^2(b-a)}$. **267.** $-\frac{(a-b)^2}{a+b}$.

268. $\frac{abc}{(a-b)(a-c)(b-c)}$. **269.** $\frac{2c^2+ab}{a^2}-2$. **271.** $\frac{3abc}{ab+ac+bc}$. **272.** 7. **273.** 5.

274. $\frac{11}{432}$. **275.** 7. **276.** $\frac{1}{3}$. **277.** 0. **278.** 5. **279.** 9. **280.** 7. **281.** $2\frac{4}{19}$.

282. 8. **283.** 4. **284.** $\frac{7}{8}$. **285.** -5. **286.** 6. **287.** $\frac{1}{6}$. **288.** $a+b$.

289. $\frac{abc}{a^2-ab+b^2}$. **290.** $\frac{np-mq}{n+p-m-q}$. **291.** $\frac{mp(a-b)+mn(b-c)+np(c-a)}{n(b-a)+p(c-b)+m(a-c)}$.

292. $\frac{a^2}{n^2}$. **293.** $(a+2)n$. **294.** $a+c$. **295.** $-\frac{1}{5}$. **296.** $\frac{1}{2}a^2$. **297.** $\frac{n^2}{a}$.

302. Zależy to od znaku sumy $a+b$. **307.** Por. zad. 300. **309.** $x>-3$.

310. $x>-5\frac{23}{25}$. **311.** $x<-1$. **312.** $x>-5\frac{13}{19}$. **313.** $x<0$. **314.** $x>6$.

315. Jeżeli a i c są jednakowego znaku, to przy $a>c$ jest $x>\frac{ab}{a-c}$, zaś przy $a<c$ jest $x<\frac{ab}{a-c}$; jeżeli a i c różnego znaku, to odwrotnie. **316.** $x=1$, $y=2$. **317.** $x=\frac{2}{3}$, $y=1$. **318.** $x=\frac{1}{2}$, $y=3$. **319.** $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{3}$. **320.** $x=1{\cdot}25$, $y=0{\cdot}8$. **321.** $x=-1$, $y=8$.

322. $x=\frac{1}{2}$, $y=2$. **323.** $x=1$, $y=1$. **324.** $x=2$, $y=1$. **325.** $x=4$, $y=5$.

326. $x=7$, $y=9$. **327.** $x=26$, $y=27$. **328.** $x=3$, $y=5$. **329.** $x=2$, $y=3$.

330. $x=\frac{b^2+ac}{a^2+b}$, $y=\frac{ab-c}{a^2+b}$. **331.** $x=\frac{ab}{a+b}$, $y=\frac{ab}{a-b}$. **332.** $x=\frac{a+1}{ab+1}$, $y=\frac{a(b+1)}{ab+1}$.

333. $x=1$, $y=2$, $z=3$. **334.** $x=y=z=1$. **335.** $x=1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{3}$. **336.** $x=-1{\cdot}2$, $y=3{\cdot}4$, $z=-5{\cdot}6$. **337.** $x=y=z=315$. **338.** $x=3$, $y=1$, $z=2$. **339.** $x=2$, $y=3$, $z=4$.

340. $x=6$, $y=3$, $z=15$. **341.** $x=1$, $y=2$, $z=-1$. **342.** $x=-(a+b+c)$, $y=ab+ac+bc$, $z=-abc$. **343.** $x=\frac{1}{(a-c)(b-c)}$, $y=\frac{1}{(a-b)(b-c)}$, $z=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$. **344.** $x=a^2-b^2$, $y=b^2-c^2$, $z=c^2-a^2$. **345.** $x=1$, $y=1$, $z=2$. **346.** $x=2$, $y=2$, $z=2$.

347. $x=\frac{b^2}{p^2}-q$, $y=a^2+b^2+q-\frac{b^2}{p^2}$, $z=-a^2$. **348.** α) $x=1$, $y=2$, $z=3$, $u=4$; β) $x=1$, $y=2$, $z=3$, $u=4$. **349.** $x=a+b+c$, $y=a+b-c$, $z=a-b+c$, $t=-a+b+c$. **350.** $x=2$, $y=2$, $z=3$, $t=1$. **351.** $x=1$, $y=2$, $z=3$, $u=4$, $v=5$. **352.** Dodawszy równania stronami odpowiedniemi, od równania otrzymanego odejmiemy każde z danych po pomnożeniu jego stron przez 3; $x=\frac{a+c+d-2b}{3}$ i t. d. **353.** $x=\frac{7}{3}$, $y=\frac{7}{3}$, $z=\frac{4}{9}$. **354.** $x=\frac{7}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$. **355.** α) Nie możemy znieść mianowników, gdyż $2xy$ staje się zerem dla wartości $x=y=0$, będących pierwiastkami równań otrzymanych. Przyjmując $\frac{1}{x}=\xi$, $\frac{1}{y}=\eta$, znajdziemy $x=2$, $y=3$. β) $x=9$, $y=8$. **356.** $x=5$, $y=7$. **357.** $x=\frac{2}{a-b+c}$ i t. d. **358.** $x=2$, $y=1$, $z=3$. **359.** $x=2$, $y=3$, $z=\frac{1}{4}$. **360.** Szukając pierwiastków, różnych od zera, znajdziemy $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{5}$, $z=\frac{1}{3}$. **361.** $x=c+\frac{bl}{bg+ah+ek}$ i t. d. **362.** $x=0$, $y=0$. **363.** $x:y=5:4$. **364.** $x:y:z=1:(-2):1$. **365.** $x:y:z=4:(-3):1$. **366.** $x:y:z=2:0:(-1)$. **367.** $x:y:z:v=1:0:(-2):1$. **368.** $x:y:z=2:(-1):(-1)$. **369.** Jedno równanie zbyteczne; $x=\frac{a+3}{2}$, $y=\frac{3(a-1)}{2}$. **370.** Pod warunkiem, iż $b=\frac{3-a}{2}$; $x=\frac{a+3}{2}$, $y=\frac{3(a-1)}{2}$. **371.** Pod warunkiem, iż $\begin{cases} a+2b=3, \\ 3a+b=-1; \end{cases}$ $x=1$, $y=-3$. **372.** 10. **373.** 4, 6. **374.** $\frac{l_1 m-lm_1}{m_1-l_1}$. **375.** 18, 81. **376.** 857142. **377.** $\frac{bc-ad}{a+d-b-c}$. **378.** 11, 39, 50. **379.** α) 3 drachmy; β) 15 drachm. **380.** 12, 18. **381.** Po 20-u. **382.** 100 m^3 i 160 m^3. **383.** 224 *kg*. **384.** 17. **385.** $5\frac{95}{296}$ funta. **386.** $\frac{h_1 h_2}{h_1+h_2}$. **387.** $\frac{vv_1}{v+v_2}$. **388.** $25a$ zł. **389.** α) Po 7-u latach; β) przed 12-u laty. **390.** $\frac{100}{p.n}$. **391.** 4800 zł. **392.** Po latach $12\frac{1}{2}$. **393.** Na 16400 zł. **394.** $2\frac{1}{2}$ mies. **395.** 40000 zł. **396.** 10800 zł. **397.** $53\frac{1}{3}$ *kg*. **398.** O $5\frac{5}{11}$ minuty na drugą. **399.** O 1 min. i $\frac{780}{1427}$ sek. na pierwszą. **400.** O $96\frac{5}{18}$ *km* od A. **401.** 72. **402.** 98 *km*. **403.** O 236 *km* od A. **404.** O 80 *km*. **405.** $\frac{abc}{a+b}$. **406.** 5 *km* na godzinę. **407.** $6a-\frac{3av_1}{v}$. **408.** 15840 stóp. **409.** Po $\frac{5d_1-3d_3+3d_2}{3v_3-3v_2-5v_1}$ min., lub po $\frac{5d_1+3d_3-3d_2}{-3v_3+3v_2-5v_1}$ min. **410.** α) $\frac{2(1+v_2)}{v_1-v_2}$; β) $\frac{2(1-v_2)}{v_1-v_2}$. **411.** $18^0 45'$. **412.** $\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{1}{2}(a+c-b)$. **413.** $\frac{cd}{a-c}$, $\frac{bc}{a-c}$. **414.** $\frac{ac}{a+c}$. **415.** $\frac{ac}{a-b}$. **416.** α) $b-\frac{bl}{a}$, β) $\frac{bl}{a}$. **417.** $2a$. **418.** Gdy punkt M wewnątrz koła, to $\frac{r^2+b^2-a^2}{b}$; gdy zaś zewnątrz, to $\frac{a^2-r^2-b^2}{b}$. **419.** Jeden 19·27 *m*, drugi 6·46 *m*. **420.** $\frac{2abc}{a^2-b^2}$ przy $a>b$, zaś $\frac{2abc}{b^2-a^2}$ przy $a<b$. **421.** Jest od A oddalony o $\frac{(a+b)(a+b+c)}{a+2b+c}$. **422.** α) Odległość tego punktu od środka koła mniejszego jest $\frac{dr}{R-r}$; β) $\frac{d^2+R^2-r^2}{2d}$. **423.** $\frac{3abc}{ab+ac+bc}$. **424.** Odległość tego punktu od wierzchołka stożka jest $\frac{t^2}{2h}$. **425.** Każda liczba. **426.** Takiej liczby niema. **427.** Zadanie niemożliwe. **428.** Zadanie niemożliwe. **429.** Za niewiadomą wziąć połowę obwodu. **430.** W odległości $\frac{c(k-a)}{b-a}$ od wierzchołka, w którym przecinają się boki c i a. Gdy $b=a$, a $k \gtrless a$, zadanie niemożliwe; gdy $k=b=a$, to każdy punkt prostej c. **433.** Odjemna jest równa i t. d. **434.** α) $\frac{pq}{q+1}$, $\frac{p}{q+1}$; β) $\frac{pq}{q-1}$, $\frac{p}{q-1}$. **435.** 256. **436.** 1436. **437.** Bieda. **438.** $\frac{2p}{s-d}$, $\frac{2p}{s+d}$.

439. $x = -pq$, $y = p + q$. **440.** $x = pqr$, $y = -pq - pr - qr$, $z = p + q + r$. **441.** 50 ct., 20 ct. **442.** Pierwsza 580 zł., druga 435 zł. **443.** 86400 zł.; 40200 zł., 26400 zł., 19800 zł. **444.** 7 siostrzeńców, 4 siostrzenice. **445.** 2 zł. za mały, 3 zł. za średni, 4 zł. za wielki. **446.** 265, 583, 689. **447.** A wystawił 26 zł., B 14 zł., C 8 zł. **448.** $(x - \frac{1}{20}y - \frac{1}{20}z) : \frac{21}{20}y : \frac{21}{20}z = 35 : 5 : 8$; A dostanie 3740 *ha*, B 500 *ha*, C 800 *ha*. **449.** A $\frac{2abc}{ac + bc - ab}$, B $\frac{2abc}{ab + bc - ac}$, C $\frac{2abc}{ab + ac - bc}$; wszyscy razem $\frac{2abc}{ab + ac + bc}$. **450.** $\frac{s't'v - stv'}{tt'(ns' - n's)}$, $\frac{ntv' - n't'v}{tt'(ns' - n's)}$. **451.** Z pierwszego złota 72*g*, z drugiego zaś 45*g*. **452.** $\frac{P(d_2 - D)}{d_2 - d_1}$ *kg*, $\frac{P(D - d_1)}{d_2 - d_1}$ *kg*. **453.** $\frac{(a_1 + b_1)(\alpha b_2 - a_2 \beta)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ *kg*, $\frac{(a_2 + b_2)(a_1 \beta - b_1 \alpha)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ *kg*. **454.** Na 60000 zł., 80000 zł. i 20000 zł. **455.** A 3000 zł. po 4%. **456.** 5760 zł., 5%. **457.** A 15 min. 44 sek., B 16 min. 43 sek. **458.** 21 *km*, 49 *km*. **459.** Odległość 100 *km*, prędkość 25 *km* na godzinę. **460.** 360 *cm*; 12 *cm* i 3 *cm* na sekundę. **461.** 9 *cm*, 12 *cm* i 15 *cm*. **462.** 8 *cm* i 6 *cm*. **463.** 30 *cm* i 18 *cm*. **464.** $8\frac{8}{9}$ *cm* i $11\frac{1}{9}$ *cm*. **465.** $\frac{1}{2}(a + b - c)$, $\frac{1}{2}(a + c - b)$, $\frac{1}{2}(b + c - a)$. **466.** $18\frac{1}{8}$ *cm*, $13\frac{1}{8}$ *cm*. **467.** 21 *cm*, 19 *cm*. **468.** 15 *cm*, 19 *cm*, 22 *cm*, 18 *cm*. **469.** $\frac{a(a'b' - bb')}{aa' - bb'}$, $\frac{b(a'b' - aa')}{bb' - aa'}$. **470.** Takich liczb niema.