PODRĘCZNIK ALGEBRY

DLA UCZNIÓW KLAS WYŻSZYCH

GIMNAZYÓW I SZKÓŁ REALNYCH W GALICYI.

NAPISAŁ

Dr. MARYAN A. BARANIECKI,

PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO.

ZESZYT DRUGI.

KRAKÓW.

W DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

POD ZARZĄDEM A. M. KOSTERKIEWICZA.

1892.

SPIS RZECZY CZĘŚCI DRUGIEJ.

Rozdział I. Podnoszenie do potęgi.

Art.		Str.
1— 8.	Podnoszenie do potęgi wogóle	127
9— 12.	Kwadrat i sześcian wielomianu	129
13.	Ilorazy sumy lub różnicy jednakowych potęg przez sumę lub różnicę ich podstaw	134
14— 16.	Wykładniki ujemne	136

Rozdział II. Wyciąganie pierwiastka.

17— 33.	Wyciąganie pierwiastka wogóle	138
34— 39.	Wprowadzenie liczb niewymiernych pierwiastkowych	144
40— 43.	Wyrażenie algebraiczne niewymierne	148
44.	Równanie niewymierne, z którego dochodzimy do równania stopnia 1-go	151
45— 50.	Wyciąganie pierwiastka kwadratowego	152
51— 56.	Wyciąganie pierwiastka sześciennego	159
57— 61.	Wykładniki ułamkowe	164
62— 70.	Wprowadzenie liczb urojonych i liczb zespolonych	165
71.	O działaniach algebraicznych	168

Rozdział III. Logarytmy.

72— 73.	Wprowadzenie logarytmów	169
74— 77.	Własności ogólne logarytmów	170
78— 80.	Własności logarytmów zwyczajnych	172
81.	Wykonywanie działań na logarytmach	174
82— 83.	Użycie tablic logarytmów	175
84— 87.	Wykonywanie rachunków przy pomocy logarytmów. Równanie wykładnicze	178

Rozdział IV. Równanie stopnia 2-go z jedną niewiadomą.

88— 92.	Rozwiązanie równania stopnia 2-go	179
93.	Równanie ułamkowe, z którego dochodzimy do równania stopnia 2-go	183
94.	Równanie niewymierne, z którego dochodzimy do równania stopnia 2-go	184
95— 98.	Uwagi ogólne o równaniu stopnia 2-go	185
99—101.	Własności pierwiastków równania stopnia 2-go	187
102.	Przekształcenie szczególnego wyrażenia niewymiernego	188
103—104.	Zadania stopnia 2-go z jedną niewiadomą	189
105—107.	Trójmian stopnia 2-go	191
108—111.	Maximum i minimum	194
112.	Nierówność stopnia 2-go	196
113.	Trygonometryczny kształt pierwiastków równania stopnia 2-go	196

Rozdział V. Równania stopni wyższych, rozwiązalne zapomocą równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą.

114.	Przypadki najprostsze	197
115—119.	Równanie dwumienne	198
120—123.	Równanie trójmienne	199
124—126.	Równanie wzajemne	201
127.	Szczególne równanie wykładnicze, rozwiązalne przy pomocy równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą	203

Zadania.

	Zadania	204
	Odpowiedzi	220

A Bardrowski

CZĘŚĆ DRUGA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

PODNOSZENIE DO POTĘGI.

PODNOSZENIE DO POTĘGI WOGÓLE.

1. W części I (art. 47—49) wprowadziliśmy już działanie: podnoszenie do potęgi i określiliśmy, jakiego znaku jest potęga liczby dodatnej i liczby ujemnej. Widzieliśmy nadto, że (art. 68)

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \tag{1}$$

i że w przypadku $m > n$ (art. 80)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}. \tag{2}$$

Wprowadziliśmy tu na oznaczenie wzorów liczby ujęte w nawiasy (niekiedy w tymże celu używa się liter w nawiasach), co nam ułatwi powoływanie się później na te wzory.

2. Przy m całkowitem i dodatnem podnieśmy do potęgi m-tej liczbę, którą przedstawia iloczyn dwu lub więcej czynników, np. iloczyn $abcde$.

$$(abcde)^m = a.b.c.d.e\ .\ a.b.c.d.e\ .\ a.b.c.d.e\ ...\qquad (m \text{ razy}),$$

albo $(abcde)^m = a.a.a.\ ...\ b.b.b.\ ...\ c.c.c.\ ...\ d.d.d.\ ...\ e.e.e\ ...\ .$

Po prawej stronie zamiast iloczynu m czynników a pisząc a^m, i t. d., mamy

$$(abcde)^m = a^m b^m c^m d^m e^m.$$

Taksamo możemy okazać, że wogóle, gdy mamy podnieść do potęgi iloczyn n czynników, które nazwijmy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, to

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^m = a_1^m a_2^m a_3^m \ldots a_n^m, \tag{3}$$

t. j. *potęga iloczynu jest równa iloczynowi takich samych potęg oddzielnych czynników.*

3. Przypuśćmy, że w równości (3) wszystkie n liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ są tą samą liczbą i nazwijmy ją a, t. j. niech $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a$. Wtedy po lewej stronie powyższej równości mieć będziemy $(a^n)^m$, po prawej zaś $a^m a^m a^m \ldots a^m = a^{m+m+m+\ldots+m} = a^{m.n}$; przeto

$$(a^n)^m = a^{mn}, \tag{4}$$

t. j. *aby potęgę podnieść do pewnej potęgi, należy podstawę danej potęgi wziąć z wykładnikiem, równym iloczynowi obu wykładników.*

Ponieważ $(a^n)^m = a^{mn}$, $(a^m)^n = a^{nm}$, zaś $mn = nm$, przeto $(a^n)^m = (a^m)^n$, tak iż

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

Taksamo można okazać, że np.

$$a^{mnp} = (a^{mn})^p = [(a^m)^n]^p = (a^{mp})^n = \text{i t. d.}$$

Gdy mamy iloczyn $a^f b^g c^h$ podnieść do potęgi m-tej, to według wzorów (3) i (4) mamy

$$(a^f b^g c^h)^m = (a^f)^m \,.\, (b^g)^m \,.\, (c^h)^m = a^{fm} b^{gm} c^{hm},$$

t. j. *aby iloczyn dwu lub więcej potęg podnieść do pewnej potęgi, należy przez wykładnik tej potęgi pomnożyć wykładnik każdego z czynników iloczynu.*

4. Jeżeli mamy ułamek $\frac{a}{b}$ podnieść do potęgi m-tej, to

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots = \frac{a.a.a\ldots}{b.b.b\ldots} = \frac{a^m}{b^m},$$

a więc

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \tag{5}$$

t. j. *aby ułamek podnieść do potęgi, należy tak jego licznik, jak i mianownik podnieść do tejże potęgi.*

Wzory (1), (2), (3), (4) i (5) są wzorami zasadniczemi w nauce o podnoszeniu do potęgi.

5. Wiemy (I, art. 144, δ), iż możemy, mając m jakichkolwiek proporcyj

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2, \quad \alpha_1 : \beta_1 = \alpha_2 : \beta_2, \quad \ldots, \quad A_1 : B_1 = A_2 : B_2,$$

utworzyć proporcyą złożoną $(a_1 \alpha_1 \ldots A_1) : (b_1 \beta_1 \ldots B_1) = (a_2 \alpha_2 \ldots A_2) : (b_2 \beta_2 \ldots B_2)$. Tę własność zastosujmy do przypadku, kiedy wszystkie dane proporcye są tą samą proporcyą np. $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$; będziemy mieli

$$a_1^m : b_1^m = a_2^m : b_2^m.$$

Jeżeli $\frac{a_1}{b_1} = q$, to według wzoru (5)

$$q^m = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^m = \frac{a_1^m}{b_1^m},$$

a ta liczba jest wykładnikiem ostatniej proporcyi. Powiemy więc: *wszystkie wyrazy proporcyi można podnieść do jednakowej potęgi.* Wykładnik tak powstałej proporcyi jest takąż samą potęgą wykładnika danej proporcyi.

6. Wiemy, że kiedy $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2, \ldots, a_m > b_m$ i liczby $b_1, b_2, \ldots, b_m$ są dodatne, to (I, art. 170, β) jest $a_1 a_2 \ldots a_m > b_1 b_2 \ldots b_m$. Z tego wynika, że w przypadku, kiedy $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = a$, $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = b$,

$$\text{przy } a > b \text{ i } b > 0 \text{ jest } a^m > b^m;$$

a zatem, *jeżeli obie strony nierówności są dodatne, to możemy je podnieść do tej samej potęgi, nie zmieniając kierunku znaku nierówności.*

7. Widzieliśmy (I, art. 64, IV), iż możemy obie strony równości podnieść do tej samej potęgi.

Gdy jednak obie strony równania podnosimy do tej samej potęgi, to należy zachować pewną ostrożność. Np., jeżeli obie strony równania $2x = 6$ podniesiemy do kwadratu, to otrzymamy równanie $4x^2 = 36$. Równanie pierwotne ma jeden tylko pierwiastek $x=3$, równaniu zaś ostatniemu zadość czyni tak wartość $x=3$, jak i wartość $x=-3$. Widzimy zatem, że niewszystkie pierwiastki równania ostatniego są jednocześnie pierwiastkami równania pierwotnego, a więc te dwa równania nie są równoznaczne z sobą. Gdy zatem obie strony równania danego podnosimy do pewnej potęgi, to tak powstałe równanie może mieć pierwiastki, które nie są pierwiastkami równania danego.

8. Podnoszenie jednomianu do potęgi. Stosując wzory (3), (4) i (5) do podnoszenia jednomianu do potęgi, mamy np.

$$\left(\frac{3}{4}\,a^3 b^h\right)^m = \frac{3^m}{4^m} a^{3m} b^{hm},$$

$$\left(-\frac{3}{4}\,a^3 b^h\right)^{2p} = \frac{3^{2p}}{4^{2p}} a^{6p} b^{2hp}, \quad \left(-\frac{3}{4}\,a^3 b^h\right)^{2p+1} = -\frac{3^{2p+1}}{4^{2p+1}} a^{6p+3} b^{2hp+h},$$

t. j. *m-ta potęga jednomianu jest jednomianem, który ma znak — w przypadku, kiedy dany jednomian ma znak — a m jest liczbą nieparzystą, zaś znak + w innych przypadkach, i w którym spółczynnik jest m-tą potęgą spółczynnika danego jednomianu, a każda z podstaw danego jednomianu ma wykładnik pomnożony przez m.*

Gdy mamy wielomian podnieść do potęgi m-tej, to należy utworzyć iloczyn m wielomianów, równych danemu wielomianowi. To zadanie ogólne rozważymy później; tu zaś zajmiemy się tylko podnoszeniem wielomianu do kwadratu i do sześcianu.

KWADRAT I SZEŚCIAN WIELOMIANU.

9. Wiemy, że

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{1}$$

t. j. *kwadrat dwumianu jest sumą algebraiczną kwadratu wyrazu pierwszego, podwojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez drugi i kwadratu wyrazu drugiego.*

Podobnie, jak to prawidło, moglibyśmy prawidło na podnoszenie trójmianu do kwadratu wyprowadzić wprost, mnożąc dany trójmian przez siebie. Możemy jednak, mając $(a+b+c)^2$, nazwać $a+b=p$ i znaleźć $(p+c)^2$ według wzoru (1),

$$(p+c)^2 = p^2 + 2pc + c^2.$$

W tej równości zamiast p pisząc dwumian $a+b$ i następnie stosując wzór (1), mamy

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2,$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2. \tag{2}$$

A więc *kwadrat trójmianu jest sumą algebraiczną kwadratu wyrazu pierwszego, podwojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez drugi, kwadratu wyrazu drugiego, podwojonego iloczynu sumy dwu pierwszych wyrazów przez trzeci i kwadratu wyrazu trzeciego.* Gdybyśmy wykonali mnożenie, które jeszcze pozostało wskazanem po prawej stronie wzoru (2), mielibyśmy

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2,$$

co moglibyśmy tak przeczytać: kwadrat trójmianu jest sumą algebraiczną kwadratów każdego jego wyrazu i podwojonych iloczynów każdej pary jego wyrazów.

Podobnie znajdziemy

$$(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2,$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2, \quad (3)$$

któryto wzór łatwo można wypowiedzieć.

Przypuśćmy, żeśmy, podobnie dalej postępując, podnieśli już do kwadratu wielomian, mający k wyrazów, $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{k-1}+a_k$, i otrzymali

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2=a_1^2+2a_1a_2+a_2^2+\ldots+2(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})a_k+a_k^2. \quad (4)$$

Jeżeli zaś chcemy znaleźć kwadrat wielomianu, mającego $k+1$ wyrazów, $a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}$, to, oznaczywszy sumę pierwszych k wyrazów tego wielomianu przez w, sprowadzimy zadanie do szukania kwadratu dwumianu, $(w+a_{k+1})^2$, a w rozwinięciu według wzoru (1) wstawiając zamiast w wielomian, przez tę literę oznaczony, mieć będziemy

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1})^2=(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2+2(a_1+a_2+\ldots+a_k)a_{k+1}+a_{k+1}^2.$$

Gdybyśmy tu po stronie prawej zamiast $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2$ wprowadzili wyrażenie tego kwadratu według wzoru (4), to przekonalibyśmy się, że kwadrat wielomianu o $k+1$ wyrazach taksamo się tworzy, jak poprzedni kwadrat wielomianu o k wyrazach. Zatem, jeżeli ów sposób tworzenia kwadratu stosuje się do wielomianu o k wyrazach, to stosuje się on także do wielomianu o $k+1$ wyrazach. Widzieliśmy zaś wprost, że on stosuje się do tworzenia kwadratu dwumianu. Stosować się więc będzie do tworzenia kwadratu trójmianu (cośmy wprawdzie bezpośrednio wyprowadzili), a wskutek tego do tworzenia kwadratu czworomianu, i t. d., czyli do tworzenia kwadratu wielomianu o jakiejkolwiek ilości wyrazów. Przeto *kwadrat wielomianu jest sumą algebraiczną kwadratu wyrazu pierwszego, podwojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez drugi, kwadratu wyrazu drugiego, podwojonego iloczynu sumy dwu pierwszych wyrazów przez trzeci, i t. d., podwojonego iloczynu sumy wszystkich wyrazów, prócz ostatniego, przez ostatni i kwadratu wyrazu ostatniego.*

Taki sposób dowodzenia ogólnego, polegający na tem, iż z przypuszczenia, że pewne prawo odnosi się, jak tu, do k wyrazów, dochodzimy do tego, że odnosić się ono także będzie do $k+1$ wyrazów, oraz na sprawdzeniu, że ono się odnosi do oznaczonej ilości wyrazów (jak tu — do dwu), nazywa się »dowodzeniem zapomocą indukcyi«.

10. Wzory powyższe możemy zastosować do podnoszenia liczb do kwadratu.

Gdy mamy np. 377^2, to według wzoru (2) mamy

$$377^2=(300+70+7)^2=300^2+2.300.70+70^2+2.370.7+7^2.$$

Obliczając składniki, dostrzeżemy, że pierwszy będzie się kończył czterema zerami, drugi trzema, trzeci dwoma, czwarty zaś jednem zerem. Tych zer, jako zawsze zjawiających się, nie wypisujemy (podobnie, jak w mnożeniu i w dzieleniu) przy dodawaniu składników. Aby jednak oznaczyć miejsce, pod którem ma być postawiona pierwsza z prawej strony cyfra (nie licząc owych zer) następnego składnika, piszemy zamiast pierwszego z opuszczonych zer kropkę.

$$\begin{array}{r|l}
3^2 & 9\,. \\
2.3.7 & 42\,. \\
7^2 & 49\,. \\
2.37.7 & 518\,. \\
7^2 & 49 \\
\hline
& 142129.
\end{array}$$

Podobnie np. według wzoru (3) $4558^2 = (4000 + 500 + 50 + 8)^2$

$$\begin{array}{r|l}
4^2 & 16\,. \\
2.4.5 & 40\,. \\
5^2 & 25\,. \\
2.45.5 & 450\,. \\
5^2 & 25\,. \\
2.455.8 & 7280\,. \\
8^2 & 64 \\
\hline
& 20775364.
\end{array}$$

W drugim, czwartym i szóstym składniku wypisaliśmy po jednem zerze, gdyż owe zera były przypadkowe, mianowicie powstały tylko wskutek tego, że jeden z czynników po lewej stronie kreski pionowej był parzysty, inny zaś był wielokrotnością 5-u.

Gdyby w liczbie, podnoszonej do kwadratu, były zera, to każdej cyfrze 0 w danej liczbie odpowiadają w kwadracie tej liczby dwa składniki równe zeru, tak iż o dwa miejsca dalej należy pisać ostatnią cyfrę następnego składnika kwadratu, t. j. należy dalsze dwie kropki postawić. Np. 201002^2

$$\begin{array}{r|l}
2^2 & 4\,.\,.\,. \\
2.20.1 & 40\,. \\
1^2 & 1\,.\,.\,.\,.\,. \\
2.20100.2 & 80400\,. \\
2^2 & 4 \\
\hline
& 40401804004.
\end{array}$$

Zwykle, nabywszy wprawy, nie wypisujemy iloczynów, powyżej zaznaczonych z lewej strony kreski pionowej, a więc także nie prowadzimy owej kreski. —

Wiemy, że, mnożąc liczbę całkowitą m-cyfrową przez liczbę całkowitą n-cyfrową, otrzymujemy w iloczynie liczbę, mającą cyfr albo $m+n$, alboteż $m+n-1$. Z tego wprost wynika, *że kwadrat liczby m-cyfrowej ma cyfr albo $2m$, alboteż $2m-1$.* —

Gdy mamy $\left(\frac{377}{4558}\right)^2$, to, jak wiemy (art. 4),

$$\left(\frac{377}{4558}\right)^2 = \frac{377^2}{4558^2} = \frac{142129}{20775364}.$$

Gdy liczbę dziesiętną skończoną, t. j. o skończonej ilości cyfr dziesiętnych, mamy podnieść do kwadratu, to, ponieważ w iloczynie dwu liczb dziesiętnych oddzielamy na dziesiętne tyle cyfr, ile ich było w mnożnej i mnożniku, przeto *liczbę dziesiętną skończoną podnosi się do kwadratu tak, jak liczbę całkowitą, a w otrzymanej stąd liczbie oddziela się z prawej strony dwa razy tyle cyfr na dziesiętne, ile ich było w danej liczbie.* Np.

$$4{\cdot}558^2 = 20{\cdot}775364;\quad 0{\cdot}003^2 = 0{\cdot}000009;\quad 0{\cdot}00377^2 = 0{\cdot}0000142129.$$

Gdybyśmy nakoniec mieli podnieść do kwadratu liczbę dziesiętną, której ułamek jest peryodyczny, to należy tę liczbę wyrazić jako ułamek zwyczajny i podnieść go do kwadratu, a otrzymany wypadek można przedstawić znowu jako liczbę dziesiętną. Np.

$$4{\cdot}47\dot{2}^2 = \left(4\tfrac{17}{36}\right)^2 = \left(\tfrac{161}{36}\right)^2 = \tfrac{25921}{1296} = 20{\cdot}000\dot{7}71604938\dot{2}\,.$$

11. Gdy mamy $(a+b)^3$, to

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b),$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \tag{5}$$

t. j. *sześcian dwumianu jest sumą algebraiczną sześcianu wyrazu pierwszego, potrojonego iloczynu kwadratu wyrazu pierwszego przez drugi, potrojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez kwadrat drugiego i sześcianu wyrazu drugiego.* Tak np.

$$(\tfrac{2}{3}a^5b^2 - 5a^3b^4)^3 = \tfrac{8}{27}a^{15}b^6 - \tfrac{20}{3}a^{13}b^8 + 50a^{11}b^{10} - 125a^9b^{12}.$$

Gdy mamy $(a+b+c)^3$, to, kładąc $a+b=p$, mielibyśmy $(p+c)^3$; w rozwinięciu zaś według (5) wstawiając $a+b$ zamiast p i wykonywając $(a+b)^3$, otrzymamy

$$(a+b+c)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3. \tag{6}$$

W tym wzorze mamy jeszcze przy pomocy dwu nawiasów wskazane do wykonania działania; z temi jednak nawiasami formuła powyższa jest dogodniejsza tak dla spamiętania, jak i dla tworzenia części składowych sześcianu trójmianu. Utworzywszy już według powyższego wzoru części składowe sześcianu trójmianu, możemy następnie wykonać wskazane działania, t. j. znieść nawiasy.

Przypuśćmy, że w podobny sposób jest utworzony sześcian wielomianu o k wyrazach,

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k)^3 &= a_1^3+3a_1^2a_2+3a_1a_2^2+a_2^3+3(a_1+a_2)^2a_3+\ldots\\ &\quad+3(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})^2a_k+3(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})a_k^2+a_k^3,\end{aligned} \tag{7}$$

i że chcemy wielomian $a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}$, mający $k+1$ wyrazów, podnieść do sześcianu. Jeżeli w tym wielomianie sumę pierwszych k jego wyrazów nazwiemy w, to według (5)

$$(w+a_{k+1})^3 = w^3+3w^2a_{k+1}+3wa_{k+1}^2+a_{k+1}^3,$$

a pisząc tu zamiast w oznaczony przez tę literę wielomian o k wyrazach, mamy

$$(a_1+\ldots+a_k+a_{k+1})^3 = (a_1+\ldots+a_k)^3+3(a_1+\ldots+a_k)^2a_{k+1}+3(a_1+\ldots+a_k)a_{k+1}^2+a_{k+1}^3.$$

Wstawiając tu zamiast pierwszego składnika po stronie prawej jego wyrażenie (7), przekonamy się, że sześcian wielomianu o $k+1$ wyrazach taksamo się tworzy, jak poprzedni sześcian wielomianu o k wyrazach. Zatem, jeżeli taki sposób tworzenia sześcianu stosuje się do wielomianu o k wyrazach, to stosuje się on także do wielomianu o $k+1$ wyrazach. Widzieliśmy zaś wprost, że on stosuje się do tworzenia sześcianu dwumianu. Stosować się więc będzie do tworzenia sześcianu trójmianu, jakoteż wogóle do tworzenia sześcianu wielomianu o jakiejkolwiek ilości wyrazów. A zatem *sześcian wielomianu jest sumą algebraiczną sześcianu wyrazu pierwszego, potrojonego iloczynu kwadratu wyrazu pierwszego przez drugi, potrojonego iloczynu wyrazu pierwszego przez kwadrat drugiego, sześcianu wyrazu drugiego, potrojonego iloczynu kwadratu sumy dwu pierwszych wyrazów przez trzeci, i t. d., potrojonego iloczynu kwadratu sumy wszystkich wyrazów, prócz ostatniego, przez ostatni, potrojonego iloczynu sumy tychże wyrazów przez kwadrat ostatniego i sześcianu wyrazu ostatniego.*

12. Te wzory możemy zastosować do podnoszenia liczb do sześcianu. Tak np. według wzoru (6) jest

$$377^3=(300+70+7)^3=$$
$$=300^3+3.300^2.70+3.300.70^2+70^3+3.370^2.7+3.370.7^2+7^3.$$

Obliczając składniki, znajdziemy, że pierwszy kończyć się będzie na 6 zer, drugi na 5, trzeci na 4, i t. d. Tych zer, jako zawsze znajdujących się, nie wypisujemy przy dodawaniu tych składników, ale dla dogodności piszemy w składnikach zamiast pierwszego z opuszczonych zer kropkę. Mamy więc

$$\begin{array}{r|l}
3^3 & 27. \\
3.3^2.7 & 189. \\
3.3.7^2 & \;\;441. \\
7^3 & \;\;\;343. \\
3.37^2.7 & \;\;\;28749. \\
3.37.7^2 & \;\;\;\;\;\;5439. \\
7^3 & \;\;\;\;\;\;\;\underline{343} \\
 & 53582633.
\end{array}$$

Gdy w danej liczbie jest 0, to w sześcianie odpowiadają mu trzy składniki równe zeru, tak iż o trzy miejsca dalej należy pisać pierwszą cyfrę następnego składnika. Gdy np. mamy 25004^3, to

$$\begin{array}{r|l}
2^3 & 8. \\
3.2^2.5 & 60. \\
3.2.5^2 & 150. \\
5^3 & \;\;125...... \\
3.2500^2.4 & \;\;\;\;\;75000000. \\
3.2500.4^2 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;120000. \\
4^3 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{64} \\
 & 15632501200064.
\end{array}$$

Zwykle nie wypisujemy iloczynów, zaznaczonych powyżej z lewej strony kreski pionowej, aniteż owej kreski. —

Sześcian liczby m-cyfrowej ma cyfr albo $3m$, *albo* $3m-1$, *alboteż* $3m-2$.

Objaśniając podobnie, jak przy podnoszeniu do kwadratu, mieć będziemy

$$\left(\frac{8}{11}\right)^3 = \frac{8^3}{11^3} = \frac{512}{1331}; \qquad 3{\cdot}77^3 = 53{\cdot}582633;$$

$$0{\cdot}0377^3 = 0{\cdot}000053582633; \qquad 2{\cdot}\dot{6}^3 = \frac{512}{27} = 18{\cdot}\dot{9}6\dot{2}.$$

Sześcian liczby dziesiętnej skończonej ma cyfr dziesiętnych trzy razy więcej, niż ich było w liczbie podnoszonej do sześcianu.

ILORAZY SUMY LUB RÓŻNICY JEDNAKOWYCH POTĘG PRZEZ SUMĘ LUB RÓŻNICĘ ICH PODSTAW.

13. Zajmiemy się szczególnie ważnym przypadkiem dzielenia, mianowicie dzieleniem dwumianu $a^m + b^m$, lub dwumianu $a^m - b^m$ przez dwumian $a + b$, lub dwumian $a - b$.

α. Podzielmy $a^m - b^m$ przez $a - b$. To dzielenie tak się przedstawi:

$$\begin{array}{l|l} a^m - b^m & a-b \\ \hline \pm a^m \mp a^{m-1}b & a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots \\ \hline \quad a^{m-1}b - b^m & \\ \quad \ldots\ldots & \end{array}$$

W ilorazie otrzymujemy wielomian $(m-1)$-go stopnia, którego wyrazy mają znaki $+$, spółczynniki 1, wykładniki podstawy a coraz o 1 mniejsze, wykładniki zaś podstawy b coraz o 1 większe. Jeżeli dwumian dzielnej jest podzielny przez dwumian dzielnika, to ostatni wyraz wielomianu ilorazu będzie $+b^{m-1}$. Jakoż, wypisując wyrazy ilorazu według wypowiedzianego prawa, dojdziemy do wyrazu $+b^{m-1}$,

$$\begin{array}{l|l} a^m - b^m & a-b \\ \ldots\ldots & a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1} \\ \ldots\ldots & \\ \hline \quad + ab^{m-1} - b^m & \\ \quad \pm ab^{m-1} \mp b^m & \\ \hline \qquad 0, & \end{array}$$

tak iż $$\frac{a^m - b^m}{a-b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}.$$

A więc *różnica jednakowych potęg jest podzielna przez różnicę ich podstaw.* Np.

$$\frac{81a^{12}b^{20} - 16a^8b^4c^{16}}{3a^3b^5 - 2a^2bc^4} = \frac{(3a^3b^5)^4 - (2a^2bc^4)^4}{3a^3b^5 - 2a^2bc^4} =$$

$$= 27a^9b^{15} + 18a^8b^{11}c^4 + 12a^7b^7c^8 + 8a^6b^3c^{12}.$$

β. Podzielmy $a^m + b^m$ przez $a - b$,

$$\begin{array}{l|l} a^m + b^m & a-b \\ \ldots\ldots & a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1} \\ \ldots\ldots & \\ \hline \quad + ab^{m-1} + b^m & \\ \quad \pm ab^{m-1} \mp b^m & \\ \hline \qquad +2b^m & \end{array}$$

Ponieważ tu z pomnożenia wyrazu $+b^{m-1}$ w ilorazie przez wyraz $-b$ dzielnika otrzymujemy $-b^m$, a po zmianie znaku $+b^m$, wyraz taki sam, jak ostatni wyraz dzielnej, przeto nie zniesie się on z tym wyrazem dzielnej i mieć będziemy resztę $+2b^m$. Iloraz jest tu wyrażeniem ułamkowem,

$$\frac{a^m+b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}+\frac{2b^m}{a-b}.$$

Widzimy więc, że *suma jednakowych potęg jest niepodzielna przez różnicę ich podstaw.*

γ. Podzielmy a^m+b^m przez $a+b$,

$$\begin{array}{l|l} a^m+b^m & a+b \\ \cline{2-2} \ldots\ldots & a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b-\ldots \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

Wyrazy otrzymywane tu w ilorazie są podobne do otrzymywanych w przypadkach poprzednich, ale ich znaki następują po sobie naprzemian od znaku $+$ wyrazu pierwszego. Jakiego znaku będzie wyraz w ilorazie, zawierający b^{m-1}? Będzie on znaku $+$, jeżeli zajmuje w ilorazie miejsce nieparzyste, będzie zaś miał znak $-$, jeżeli w ilorazie zajmuje miejsce parzyste. Wyraz, zawierający b^{m-1}, zajmuje w ilorazie miejsce m-te od początku. A więc będzie ów wyraz znaku $+$, lub $-$, zależnie od tego, czy liczba m jest nieparzysta, czyteż parzysta. Jeżeli m jest liczbą nieparzystą, to możemy przyjąć $m=2p+1$; jeżeli zaś m jest liczbą parzystą, to możemy przyjąć $m=2p$. Będziemy więc mieli: przy m nieparzystem

$$\frac{a^{2p+1}+b^{2p+1}}{a+b}=a^{2p}-a^{2p-1}b+a^{2p-2}b^2-\ldots-ab^{2p-1}+b^{2p},$$

przy m zaś parzystem

$$\frac{a^{2p}+b^{2p}}{a+b}=a^{2p-1}-a^{2p-2}b+a^{2p-3}b^2-\ldots+ab^{2p-2}-b^{2p-1}+\frac{2b^{2p}}{a+b}.$$

Widzimy więc, że *suma jednakowych nieparzystych potęg jest podzielna przez sumę ich podstaw,* zaś *suma jednakowych parzystych potęg jest niepodzielna przez sumę ich podstaw.*

δ. Podzielmy nakoniec a^m-b^m przez $a+b$,

$$\begin{array}{l|l} a^m-b^m & a+b \\ \cline{2-2} \ldots\ldots & a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-\ldots \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

Wyraz ilorazu, zawierający b^{m-1}, znajduje się na miejscu m-tem, a więc będzie miał znak $+$ w razie $m=2p+1$, zaś znak $-$ w razie $m=2p$. W pierwszym razie, wykonywając ostatnie odejmowanie, zmienimy znak iloczynu $(+b^{m-1}).(+b)=+b^m$, a powstały wskutek tego wyraz $-b^m$ nie zniesie się z ostatnim wyrazem dzielnej $-b^m$, tak iż będzie

$$\frac{a^{2p+1}-b^{2p+1}}{a+b}=a^{2p}-a^{2p-1}b+a^{2p-2}b^2-\ldots-ab^{2p-1}+b^{2p}-\frac{2b^{2p+1}}{a+b}.$$

W drugim zaś razie, wykonywając ostatnie odejmowanie, zmienimy znak iloczynu $(-b^{m-1}).(+b)=-b^m$, a powstały wskutek tego wyraz $+b^m$ zniesie się z ostatnim wyrazem dzielnej $-b^m$; będzie zatem

$$\frac{a^{2p}-b^{2p}}{a+b}=a^{2p-1}-a^{2p-2}b+a^{2p-3}b^2-\ldots+ab^{2p-2}-b^{2p-1}.$$

Widzimy więc, że *różnica jednakowych nieparzystych potęg jest niepodzielna przez sumę ich podstaw, zaś różnica jednakowych parzystych potęg jest podzielna przez sumę ich podstaw.* —

Nie potrzeba szczegółowo pamiętać wszystkich tych własności ilorazu sumy lub różnicy jednakowych potęg przez sumę lub różnicę ich podstaw. Iloraz ów możemy wprost wypisywać, bacząc tylko na dwie rzeczy: popierwsze na to, że wszystkie wyrazy należy brać ze znakiem $+$, kiedy w dzielniku jest różnica podstaw, ze znakami zaś naprzemian $+$ i $-$, kiedy w dzielniku jest suma podstaw; powtóre na to, czy iloczyn tego wyrazu (już wypisanego) w ilorazie, który mógłby być wyrazem ostatnim, przez drugi wyraz dzielnika, ma ten sam znak, co drugi wyraz dzielnej (w takim razie dzielna jest podzielna przez dzielnik), czyteż ma znak przeciwny (wtedy dzielna jest niepodzielna przez dzielnik).

WYKŁADNIKI UJEMNE.

14. Gdybyśmy wzór (2) art. 1-go wprost odnieśli także do przypadku $m<n$, to liczba $m-n$ byłaby ujemna i moglibyśmy ją tak napisać: $m-n=$ $=-(n-m)$, gdzie już liczba w nawiasie jest dodatna. Wtedy

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{-(n-m)}.$$

Jeżeli różnicę dodatną $n-m$ nazwiemy r, $n-m=r$, to ten ostatni wzór możemy tak napisać:

$$\frac{a^m}{a^{m+r}}=a^{-r}. \tag{1}$$

Wiemy jednak (I, art. 81), że

$$\frac{a^m}{a^{m+r}}=\frac{1}{a^r}. \tag{2}$$

Co do tego, jak pojmować we wzorze (1) potęgę ujemną liczby a, to wprawdzie z określenia potęgi wynika, iż jej wykładnik jest liczbą całkowitą i dodatną, ale ze wzorów (1) i (2) wypada, iż

$$a^{-r}=\frac{1}{a^r}. \tag{3}$$

A więc *ujemna potęga liczby jest symbolem odwrotności takiejże dodatnej potęgi tejże liczby.* Tak np. $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$; rzeczywiście, jeżeli przyjmiemy, że liczba -3 jest różnicą np. liczb 5 i 8, to według wzorów (1) i (2)

$$\frac{a^5}{a^8}=a^{5-8}=a^{-3} \quad \text{i także} \quad \frac{a^5}{a^8}=\frac{1}{a^{8-5}}=\frac{1}{a^3}.$$

Ponieważ w razie, kiedy $m=n$, ze wzoru (2) art. 1-go mamy $a^0=1$ (por. I, art. 81), a teraz okazaliśmy, iż w owym wzorze może być $m<n$, przeto widzimy, że we wzorze (2) art. 1-go każda z liczb m i n może mieć jakąkolwiek wartość całkowitą.

15. Wprowadziwszy w ten sposób wykładniki ujemne całkowite, należy zbadać, czy wzory zasadnicze (art. 4), wyprowadzone dla wykładników dodatnych, stosować się będą także do wykładników ujemnych.

1). Gdy mamy $a^m . a^n$, to należy teraz rozważyć przypadki, kiedy jedna z liczb m i n, lub obie są ujemne.

α). Niech $m>0$, $n<0$ i $n=-\nu$. Wtedy

$$a^m . a^n = a^m . a^{-\nu} = a^m \cdot \frac{1}{a^\nu} = \frac{a^m}{a^\nu} = a^{m-\nu} = a^{m+(-\nu)} = a^{m+n}.$$

β). Niech $m<0$, $n>0$ i $m=-\mu$. Wtedy

$$a^m . a^n = a^{-\mu} . a^n = \frac{1}{a^\mu} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^\mu} = a^{n-\mu} = a^{n+(-\mu)} = a^{n+m}.$$

γ). Niech nakoniec $m<0$, $n<0$ i $m=-\mu$, $n=-\nu$. Wtedy

$$a^m . a^n = a^{-\mu} . a^{-\nu} = \frac{1}{a^\mu} \cdot \frac{1}{a^\nu} = \frac{1}{a^\mu . a^\nu} = \frac{1}{a^{\mu+\nu}} = a^{-(\mu+\nu)} = a^{-\mu-\nu} = a^{(-\mu)+(-\nu)} = a^{m+n}.$$

2). Gdy mamy $a^m : a^n$, to należy rozważyć podobne przypadki.

$$\alpha). \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{-\nu}} = a^m : \frac{1}{a^\nu} = a^m \cdot \frac{a^\nu}{1} = a^{m+\nu} = a^{m-(-\nu)} = a^{m-n}.$$

$$\beta). \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{-\mu}}{a^n} = \frac{1}{a^\mu} : a^n = \frac{1}{a^\mu} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{\mu+n}} = a^{-(\mu+n)} = a^{-\mu-n} = a^{m-n}.$$

$$\gamma). \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{-\mu}}{a^{-\nu}} = \frac{1}{a^\mu} : \frac{1}{a^\nu} = \frac{1}{a^\mu} \cdot \frac{a^\nu}{1} = \frac{a^\nu}{a^\mu} = a^{\nu-\mu} = a^{(-\mu)-(-\nu)} = a^{m-n}.$$

3). Gdy $m<0$ i $m=-\mu$, to

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^m = (a_1 a_2 \dots a_n)^{-\mu} = \frac{1}{(a_1 a_2 \dots a_n)^\mu} = \frac{1}{a_1^\mu a_2^\mu \dots a_n^\mu} = \frac{1}{a_1^\mu} \cdot \frac{1}{a_2^\mu} \dots \frac{1}{a_n^\mu} =$$
$$= a_1^{-\mu} a_2^{-\mu} \dots a_n^{-\mu} = a_1^m a_2^m \dots a_n^m.$$

4). Gdy mamy $(a^n)^m$, to należy rozważyć podobne, jak poprzednio pod 1) i 2), trzy przypadki.

$$\alpha). \quad (a^n)^m = (a^{-\nu})^m = \left(\frac{1}{a^\nu}\right)^m = \frac{1}{(a^\nu)^m} = \frac{1}{a^{\nu m}} = a^{-\nu m} = a^{(-\nu)m} = a^{nm}.$$

$$\beta). \quad (a^n)^m = (a^n)^{-\mu} = \frac{1}{(a^n)^\mu} = \frac{1}{a^{n\mu}} = a^{-n\mu} = a^{n(-\mu)} = a^{nm}.$$

$$\gamma). \quad (a^n)^m = (a^{-\nu})^{-\mu} = \left(\frac{1}{a^\nu}\right)^{-\mu} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^\nu}\right)^\mu} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\nu\mu}}} = a^{\nu\mu} = a^{(-\nu)(-\mu)} = a^{nm}.$$

5). Gdy mamy $\left(\frac{a}{b}\right)^m$, to, kiedy $m<0$ i $m=-\mu$, jest

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\mu} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^\mu} = \frac{1}{\frac{a^\mu}{b^\mu}} = \frac{b^\mu}{a^\mu} = \frac{1}{a^\mu} : \frac{1}{b^\mu} = \frac{a^{-\mu}}{b^{-\mu}} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Widzimy zatem, że wzory zasadnicze (1) i (2) art. 1-go, (3) i (4) art. 2-go i (5) art. 4-go stosują się także do przypadku wykładników ujemnych i całkowitych.

16. Wykładników ujemnych używamy przeważnie z tego względu, że przy ich pomocy możemy unikać ułamkowych kształtów formuł matematycznych, co, osobliwie w druku, często jest dogodne. Tak np. zamiast pisać

$\frac{a^2}{5b^3}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a^2+b^2}{(a^3-b^3)^m}$, możemy napisać odpowiednio $\frac{1}{5}a^2b^{-3}$, $a(b+c)^{-1}$, $(a^2+b^2)(a^3-b^3)^{-m}$.

Przy pomocy wykładników ujemnych i wykładnika 0 możemy określać stopień ułamków algebraicznych. Tak np. stopnie powyżej wypisanych ułamków są odpowiednio: $2-3=-1$, $1-1=0$, $2-3m$.

ROZDZIAŁ DRUGI.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKA.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKA WOGÓLE.

17. Niech

$$a^m=b; \tag{1}$$

przyjmijmy, że wykładnik m jest liczbą całkowitą i większą od 1. Gdyby dane były: wykładnik m i potęga b, a szukana była podstawa a, to wtedy mielibyśmy zadanie odwrotne względem podnoszenia do potęgi. Owa szukana liczba, jak tu a, nazywa się pierwiastkiem stopnia m-tego (Wurzel m-ten Grades) z liczby b; działanie zaś, prowadzące do znalezienia liczby, której m-ta potęga jest równa liczbie danej, nazywa się wyciąganiem pierwiastka stopnia m-tego (Radicieren, Wurzelausziehung) z liczby danej. A więc:

Pierwiastkiem stopnia m-tego z liczby danej jest liczba, której m-ta potęga jest równa liczbie danej. Tak np. pierwiastkiem stopnia 5-go z liczby -32 jest liczba -2, gdyż $(-2)^5=-32$.

Wyciągnąć pierwiastek m-tego stopnia z liczby dañej jestto znaleźć liczbę, której m-ta potęga jest równa liczbie danej.

Na oznaczenie pierwiastka używa się osobnego znaku, który powstał z litery r, początkowej wyrazu »radix«; po tym znaku pod przeciągniętą kreską pisze się liczbę, z której należy wyciągnąć pierwiastek, w rozwartości zaś owego znaku umieszcza się liczbę, wskazującą, jakiego stopnia pierwiastek ma być wyciągnięty; nazywamy tę liczbę wykładnikiem pierwiastka (Wurzelexponent, Wurzelindex). Tak np. według (1) jest

$$\sqrt[m]{b}=a.$$

W przypadku, kiedy wykładnik pierwiastka jest 2, opuszczamy go, tak iż zamiast pisać $\sqrt[2]{36}$ piszemy wprost $\sqrt{36}$.

$\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[4]{b}$, ..., $\sqrt[n]{b}$ czytać należy odpowiednio: pierwiastek kwadratowy (lub pierwiastek stopnia 2-go), pierwiastek sześcienny (lub pierwiastek stopnia 3-go), pierwiastek stopnia 4-go, ..., pierwiastek stopnia n-tego z liczby b.

18. Widzieliśmy, że, podnosząc liczbę do potęgi nieparzystej, otrzymujemy liczbę takiegoż, jak dana, znaku, np. $(+2)^5=32$, $(-2)^5=-32$; wskutek tego $\sqrt[5]{32}=2$, $\sqrt[5]{-32}=-2$, a więc $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}$. Zatem *pierwiastek* *nieparzystego stopnia z liczby ujemnej może być wyrażony przez wzięty ze znakiem — pierwiastek tegoż samego stopnia z liczby dodatnej o tej samej, co dana, wartości bezwzględnej.* Dlatego możemy naprzód ograniczyć się do rozważania pierwiastków nieparzystego stopnia tylko z liczb dodatnych..

Widzieliśmy także, że, podnosząc liczbę, czyto dodatną, czyteż ujemną, do potęgi parzystej, otrzymujemy liczbę dodatną, naprzykład $(+3)^4 = +81$, $(-3)^4 = +81$; wskutek tego $\sqrt[4]{81} = 3$ i także $\sqrt[4]{81} = -3$, t. j. *pierwiastek stopnia parzystego z liczby dodatnej jest nietylko liczbą dodatną, ale także liczbą ujemną o tej samej, co tamta, wartości bezwzględnej.* Z tego nadto wynika, że pierwiastka stopnia parzystego z liczby ujemnej brać na uwagę teraz jeszcze nie możemy, gdyż nie jest on ani liczbą ujemną, ani zerem, aniteż liczbą dodatną. —

Dodatne pierwiastki stopnia czyto parzystego, czyteż nieparzystego, z liczb dodatnych nazywają się pierwiastkami arytmetycznemi. Gdy więc rozważamy pierwiastki arytmetyczne, to $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt{36} = 6$ i t. d.

Jeżeli zaś np. wprowadzamy oba, dodatny i ujemny, pierwiastki kwadratowe z liczby dodatnej, to mówimy o nich, że są to pierwiastki algebraiczne kwadratowe z owej liczby; tak np. $+6$ i -6 są pierwiastkami algebraicznemi kwadratowemi z liczby 36.

W tym rozdziale, ilekroć wyraźnie nie wspomnimy o pierwiastkach algebraicznych, rozumieć będziemy, iż mamy na uwadze tylko pierwiastki arytmetyczne.

19. Uwzględniając same tylko pierwiastki arytmetyczne, możemy pewnik (I, art. 64, IV) »wskutek wykonania takiego samego działania na dwu równych wielkościach, otrzymujemy wielkości równe« odnieść także do przypadku, kiedy wykonywanem działaniem jest wyciąganie pierwiastka pewnego stopnia (całkowitego i dodatnego). Do tego więc, cośmy w art. 64-ym części I o tym pewniku powiedzieli, możemy dodać :

ε. *Z równych sobie wielkości wyciągając pierwiastki arytmetyczne jednakowego stopnia, otrzymujemy wielkości równe sobie.*

20. Jeżeli, przy m całkowitem i dodatnem, z liczby a^m mamy wyciągnąć pierwiastek m-tego stopnia, $\sqrt[m]{a^m}$, to mamy znaleźć liczbę, której m-ta potęga jest a^m. Oczywiście tą liczbą jest a, a więc

$$\sqrt[m]{a^m} = a. \tag{2}$$

Również, jeżeli mamy $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m$, to należy $\sqrt[m]{a}$, t. j. *owę liczbę,* której m-ta potęga jest a, właśnie do m-tej podnieść potęgi. Otrzymamy oczywiście liczbę a, t. j.

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a. \tag{3}$$

Z równości (2) i (3) wynika, że dwa działania: *podnoszenie do potęgi i wyciąganie pierwiastka tegoż samego stopnia, wykonane w dowolnym po sobie porządku, wzajemnie się znoszą.*

21. Niech z dwu liczb dodatnych a i b będzie $a > b$. Wówczas, przy m całkowitem i dodatnem, jest także

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}.$$

Gdyby bowiem było $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$, to, po podniesieniu obu stron tej równości do potęgi m-tej, mielibyśmy, według wzoru (3), $a = b$, co się sprzeciwia założeniu. Gdyby zaś być miało $\sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{b}$, to, po podniesieniu obu stron tej nierówności do potęgi m-tej, mielibyśmy (art. 6) $a < b$, co się sprzeciwia założeniu. Może zatem być tylko $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$. A więc, *jeżeli obie strony nierówności są dodatne, to możemy, nie zmieniając kierunku znaku nierówności, wyciągnąć z obu jej stron pierwiastek tego samego stopnia.*

22. Własności (3) art. 2-go odpowiada własność: *pierwiastek z iloczynu jest równy iloczynowi pierwiastków takiegoż stopnia z oddzielnych czynników,*

$$\sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt[m]{a_1} \cdot \sqrt[m]{a_2} \ldots \sqrt[m]{a_n}. \tag{4}$$

Aby dowieść, iż ta równość ma miejsce, t. j., iż prawa strona tej równości przedstawia istotnie pierwiastek m-tego stopnia z iloczynu $a_1 a_2 \ldots a_n$, należy okazać, iż jej m-ta potęga jest liczbą $a_1 a_2 \ldots a_n$. Jakoż, według wzoru (3) art. 2-go i według wzoru (3) art. 20-go, mamy

$$\left(\sqrt[m]{a_1} \cdot \sqrt[m]{a_2} \ldots \sqrt[m]{a_n}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a_1}\right)^m \cdot \left(\sqrt[m]{a_2}\right)^m \ldots \left(\sqrt[m]{a_n}\right)^m = a_1 a_2 \ldots a_n;$$

prawa więc strona równości (4) przedstawia istotnie $\sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Tak np.

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{8.8.27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2.2.3 = 12;$$

$$\sqrt[3]{3375 a^6 b^3} = \sqrt[3]{125.27.(a^2)^3.b^3} = 15 a^2 b.$$

23. Z ogólnego wzoru (4) wiele szczególnych własności wyprowadzić będziemy mogli.

Napisawszy równość (4) tak:

$$\sqrt[m]{a_1} \cdot \sqrt[m]{a_2} \ldots \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{5}$$

widzimy, że *iloczyn pierwiastków z jednakowemi wykładnikami jest równy pierwiastkowi z tymże wykładnikiem z iloczynu liczb, znajdujących się pod znakami pierwiastka w oddzielnych czynnikach.* Np.

$$\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{12.18} = \sqrt[3]{8.27} = 6;$$

$$\sqrt[5]{324 a^3 b} \cdot \sqrt[5]{24 a^7 b^4} = \sqrt[5]{32.243 (a^2)^5 b^5} = 6 a^2 b.$$

24. Jeżeli we wzorze (4) jest $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a^m$, to po lewej stronie mieć będziemy $\sqrt[m]{a^{mn}}$, po prawej zaś będzie n czynników $\sqrt[m]{a^m} = a$, a więc po prawej będzie a^n, tak iż mamy $\sqrt[m]{a^{mn}} = a^n = a^{\frac{mn}{m}}$, lub, nazwawszy $mn = p$,

$$\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}, \tag{6}$$

gdzie p jest wielokrotnością liczby m. A więc, *jeżeli wykładnik potęgi pod znakiem pierwiastka jest wielokrotnością wykładnika pierwiastka, to można* *wyciągnąć pierwiastek, dzieląc wykładnik owej potęgi przez wykładnik pierwiastka.* Np. $\sqrt[4]{a^{12}} = a^{\frac{12}{4}} = a^3$.

25. Według (4) i (6) mamy

$$\sqrt[m]{a^{mn+p}} = \sqrt[m]{a^{mn}\,a^p} = \sqrt[m]{a^{mn}}\,\sqrt[m]{a^p} = a^n\sqrt[m]{a^p}.$$

Taką liczbę, jak tu a^n, przez którą ma być pomnożony pierwiastek, nazywamy spółczynnikiem pierwiastka. Taksamo

$$\sqrt[m]{a^{mn+p}\,b^{mr+q}\,c^s} = \sqrt[m]{a^{mn}\,b^{mr}}\sqrt[m]{a^p\,b^q\,c^s} = a^n\,b^r\sqrt[m]{a^p\,b^q\,c^s}.$$

Można z czynnika pod pierwiastkiem, będącego potęgą, której wykładnik jest wielokrotnością wykładnika pierwiastka, wyciągnąć pierwiastek i wziąć go za spółczynnik pierwiastka z pozostałego czynnika.

Odwrotnie, według (2) i (5)

$$a^n\,b^r\sqrt[m]{a^p\,b^q\,c^s} = \sqrt[m]{(a^n\,b^r)^m}\,\sqrt[m]{a^p\,b^q\,c^s} = \sqrt[m]{a^{mn}\,b^{mr}}\,\sqrt[m]{a^p\,b^q\,c^s} = \sqrt[m]{a^{mn+p}\,b^{mr+q}\,c^s},$$

t. j. *można spółczynnik pierwiastka wnieść pod znak pierwiastka jako czynnik, po podniesieniu go do potęgi wskazanej przez wykładnik pierwiastka.*

26. Jeżeli z obu stron równości $a = \frac{a}{b}\cdot b$ wyciągniemy pierwiastek m-tego stopnia, to mieć będziemy według (4) $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}\cdot b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[m]{b}$, skąd

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \quad \text{i} \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \tag{7}$$

t. j. *iloraz pierwiastków jednakowego stopnia jest równy pierwiastkowi tegoż stopnia z ilorazu liczb, znajdujących się pod znakami pierwiastków,* oraz *pierwiastek z ułamka jest równy ilorazowi pierwiastków tegoż samego stopnia, wyciągniętych oddzielnie z licznika i mianownika.*

27. Jeżeli we wzorze (5) jest $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, to mamy

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}, \tag{8}$$

t. j. *aby pierwiastek podnieść do potęgi, należy liczbę pod znakiem pierwiastka podnieść do tejże potęgi.* Będzie więc także

$$\left(\sqrt[m]{a^q}\right)^n = \sqrt[m]{(a^q)^n} = \sqrt[m]{a^{nq}}. \tag{9}$$

28. Według wzorów (2) i (9) mamy $\sqrt[mn]{a^{mn}} = a$, $\left(\sqrt[mn]{a^m}\right)^n = \sqrt[mn]{a^{mn}}$; przeto także jest $a = \left(\sqrt[mn]{a^m}\right)^n$. Wyciągając zaś z obu stron tej równości pierwiastek stopnia n-tego, mamy $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$, czyli, po zastosowaniu wzoru (8), $\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[mn]{a}\right)^m$. Wyciągnąwszy z obu stron ostatniej równości pierwiastek stopnia m-tego, mamy

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \tag{10}$$

A zatem, *ażeby z pierwiastka z danej liczby wyciągnąć pierwiastek, można z danej* *liczby wyciągnąć pierwiastek, którego wykładnik jest równy iloczynowi wykładników obu pierwiastków.*

Taksamo $$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}.$$

Jest więc także $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Podobnie

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}}=\sqrt[p]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}=\sqrt[mnp]{a}=\sqrt[mn]{\sqrt[p]{a}}=\text{i t. d.}$$

29. Według wzorów (2), (9) i (10)

$$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[p]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p}=\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^{np}}}=\sqrt[mp]{a^{np}},$$

tak iż $$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mp]{a^{np}} \quad \text{i} \quad \sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}, \tag{11}$$

t. j. *wykładnik pierwiastka i wykładnik liczby pod znakiem pierwiastka można albo pomnożyć, albotеż podzielić przez tę samę liczbę.*

Własność tę możemy zastosować w przypadku, kiedy mamy iloczyn lub iloraz pierwiastków z różnemi wykładnikami. Np., gdy najmniejszą spólną wielokrotnością liczb m i p jest w, tak iż $w=mr=ps$, to

$$\sqrt[m]{a^n}\,.\,\sqrt[p]{b^q}=\sqrt[mr]{a^{nr}}\,\sqrt[ps]{b^{qs}}=\sqrt[w]{a^{nr}b^{qs}}; \qquad \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[p]{b^q}}=\frac{\sqrt[mr]{a^{nr}}}{\sqrt[ps]{b^{qs}}}=\sqrt[w]{\frac{a^{nr}}{b^{qs}}}.$$

30. Gdy mamy proporcyą $a_1:b_1=a_2:b_2$, a jej wykładnik jest q, to, wyciągając pierwiastek m-tego stopnia z obu stron równości $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$, mieć będziemy $\sqrt[m]{\frac{a_1}{b_1}}=\sqrt[m]{\frac{a_2}{b_2}}$, czyli według (7)

$$\sqrt[m]{a_1}:\sqrt[m]{b_1}=\sqrt[m]{a_2}:\sqrt[m]{b_2};$$

wykładnik tej proporcyi jest $\frac{\sqrt[m]{a_1}}{\sqrt[m]{b_1}}=\sqrt[m]{\frac{a_1}{b_1}}=\sqrt[m]{q}$. A więc *ze wszystkich wyrazów proporcyi można wyciągnąć pierwiastek jednakowego stopnia.* Wykładnik tak powstałej proporcyi jest pierwiastkiem tegoż samego stopnia z wykładnika danej proporcyi.

Robiąc użytek z tej własności, z własności art. 5-go, jakoteż z własności, dowiedzionej w części I w art. 143-im, mamy

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}; \quad \frac{a_1^m}{b_1^m}=\frac{a_2^m}{b_2^m}; \quad \frac{a_1^m+a_2^m}{b_1^m+b_2^m}=\frac{a_1^m}{b_1^m}=\frac{a_2^m}{b_2^m}; \quad \frac{\sqrt[m]{a_1^m+a_2^m}}{\sqrt[m]{b_1^m+b_2^m}}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}.$$

Taksamo, gdy mamy trzy lub więcej równych stosunków

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}, \quad \text{to} \quad \frac{\sqrt[m]{a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m}}{\sqrt[m]{b_1^m+b_2^m+\ldots+b_n^m}}=\frac{a_1}{b_1}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

31. Określiliśmy średnią geometryczną dwu liczb danych, jako liczbę, której kwadrat równa się iloczynowi liczb danych. Jeżeli średnia geometryczna liczb a i b jest liczbą c, to $c^2 = ab$, skąd $c = \sqrt{ab}$. A zatem *średnia geometryczna dwu liczb jest pierwiastkiem kwadratowym z ich iloczynu.*

Zważmy, że, przy $a \gtrless b$, jest $(a-b)^2 > 0$, albo, po dodaniu do obu stron tej nierówności po $4ab$, jest $(a+b)^2 > 4ab$. Wyciągnąwszy zaś z obu stron pierwiastek kwadratowy (art. 21), a następnie podzieliwszy je przez 2, otrzymamy

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab},$$

t. j. *średnia geometryczna dwu liczb jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej.*

32. Wyciąganie pierwiastka z jednomianu. Według wzorów (4), (6) i według art. 25-go, mamy np.

$$\sqrt[m]{2^{2m} a^{mn} b^m} = \sqrt[m]{2^{2m}}\,\sqrt[m]{a^{mn}}\,\sqrt[m]{b^m} = 4a^n b,$$

$$\sqrt[m]{(4^{2m+1}.5)\,a^{mn} b^{3m+p} c^r} = \sqrt[m]{4^{2m} a^{mn} b^{3m} . 20 b^p c^r} = 16\,a^n\,b^3 \sqrt[m]{20\,b^p\,c^r}\;.$$

A więc, jeżeli w jednomianie, z którego mamy wyciągnąć pierwiastek m-tego stopnia, spółczynnik jest m-tą potęgą liczby całkowitej lub ułamkowej, zaś wykładniki każdej litery są wielokrotnościami liczby m, to wyciągamy pierwiastek m-tego stopnia ze spółczynnika, każdy zaś z wykładników liter dzielimy przez m; ogólnie zaś, *aby z jednomianu wyciągnąć pierwiastek m-tego stopnia, należy oddzielić czynnik spółczynnika, będący m-tą potęgą liczby całkowitej lub ułamkowej, oraz potęgi podstaw o wykładnikach podzielnych przez m, i z tego iloczynu wyciągnąć pierwiastek m-tego stopnia, który należy wziąć za spółczynnik pierwiastka m-tego stopnia z iloczynu pozostałych czynników danego jednomianu.*

33. Redukcya pierwiastków podobnych. Nie mówiliśmy jeszcze ani o dodawaniu, aniteż o odejmowaniu pierwiastków. Zważmy, że, gdy mamy dwa pierwiastki, choćby jednakowego stopnia, z różnych liczb, np. $\sqrt[m]{a}$ i $\sqrt[m]{b}$, to ani suma ich $\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}$, aniteż ich różnica $\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}$ prościej wyrażona być nie może. Toż samo wypadłoby powiedzieć np. o sumie lub różnicy $\sqrt[m]{a}$ i $\sqrt[n]{b}$, jakoteż o sumie lub różnicy $\sqrt[m]{a}$ i $\sqrt[n]{a}$. A więc w takich razach dodawanie lub odejmowanie pierwiastków pozostanie tylko wskazanem zapomocą znaku $+$ lub $-$.

Może jednak zajść uproszczenie sumy lub różnicy pierwiastków w razie, kiedy jednocześnie wykładniki pierwiastków są równe i ta sama jest liczba pod znakiem pierwiastka; takie pierwiastki wraz z ich spółczynnikami, które mogą być jednakowe lub różne, są nazywane pierwiastkami podobnemi. Gdy bowiem mamy np.

$$a\sqrt[m]{d} + b\sqrt[m]{d} - c\sqrt[m]{d} + \sqrt[m]{d},$$

to, ponieważ $\sqrt[m]{d}$ jest jakąś liczbą — nazwijmy ją l — a liczby a, b, c, 1, są spółczynnikami liczby l, owo wyrażenie możemy przedstawić: $(a+b-c+1)l$, czyli

$$(a+b-c+1)\sqrt[m]{d}\,.$$

Mówimy wtedy, żeśmy wykonali redukcyą pierwiastków podobnych. Tak np.

$$4a^2\sqrt[3]{a^2b}-2\sqrt[3]{ab^2}-4ab\sqrt[3]{a^2b}+b^2\sqrt[3]{a^2b}-5\sqrt[3]{ab^2}=(2a-b)^2\sqrt[3]{a^2b}-7\sqrt[3]{ab^2}\,.$$

WPROWADZENIE LICZB NIEWYMIERNYCH PIERWIASTKOWYCH.

34. Gdy liczbę całkowitą podnosimy do potęgi całkowitej i dodatnej, otrzymujemy liczbę całkowitą. Wyciągając jednak z liczby całkowitej pierwiastek, niezawsze otrzymujemy liczbę całkowitą. Tak np. $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, ale $\sqrt{6}$ nie jest liczbą całkowitą.

Niech, przy dodatnych i całkowitych a i n, $\sqrt[n]{a}$ nie będzie liczbą całkowitą. Przypuśćmy, że on jest pewną liczbą ułamkową; możemy ją wziąć w postaci nieskracalnej, która niech będzie $\frac{l}{m}$. Jeżeli $\sqrt[n]{a}=\frac{l}{m}$, to, po podniesieniu obu stron tej równości do potęgi n-tej, otrzymalibyśmy $a=\frac{l^n}{m^n}$. Zważmy, że l^n rozkłada się na takie tylko czynniki pierwsze, na jakie się rozkłada liczba l, zaś m^n na takie tylko, na jakie się rozkłada liczba m; a gdy liczby l i m są pierwsze względem siebie, to liczby l^n i m^n są również pierwsze względem siebie. Licznik przeto ułamka $\frac{l^n}{m^n}$ nie jest przez mianownik podzielny, tak iż po prawej stronie ostatniej równości mamy liczbę ułamkową, t. j. albo ułamek właściwy, albo też całkowitą z ułamkiem, gdy tymczasem po lewej stronie mamy liczbę całkowitą. Nie może więc liczba a być równa liczbie $\frac{l^n}{m^n}$, a przeto także $\sqrt[n]{a}$ nie może być równy liczbie ułamkowej $\frac{l}{m}$. A zatem, *gdy pierwiastek pewnego stopnia z liczby całkowitej nie jest liczbą całkowitą, to nie jest on także liczbą ułamkową.*

Przypuśćmy, że mamy $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, gdzie liczby dodatne i całkowite a i b są już pierwsze względem siebie. Ten pierwiastek nie jest liczbą całkowitą (gdyż n-ta potęga liczby całkowitej liczbą $\frac{a}{b}$ być nie może). Jeżeli on jest liczbą ułamkową, której postać nieskracalną nazwijmy $\frac{l}{m}$, to z równości $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{l}{m}$ wynika równość $\frac{a}{b}=\frac{l^n}{m^n}$. Podobnie, jak poprzednio, wniesiemy, iż liczby l^n i m^n są pierwsze względem siebie. Ponieważ zaś dwa ułamki sobie równe mają tę samę postać nieskracalną, przeto powyższa równość może mieć miejsce w takim tylko razie, kiedy jednocześnie $a=l^n$ i $b=m^n$, t. j. kiedy obie liczby a i b są jednocześnie n-temi potęgami liczb całkowitych. W innych zaś razach $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ nie może być równy liczbie ułamkowej. A więc *pierwiastek n-tego stopnia z liczby ułamkowej, w razie, kiedy licznik* *i mianownik jej postaci nieskracalnej są potęgami n-temi liczb całkowitych, jest liczbą ułamkową,* zaś *pierwiastek n-tego stopnia z liczby ułamkowej, w razie, kiedy licznik i mianownik jej postaci nieskracalnej nie są jednocześnie n-temi potęgami liczb całkowitych, nie jest ani liczbą całkowitą, aniteż ułamkową.*

35. Każda liczba całkowita, jako jedność lub skupienie jedności, może być wymierzona jednością; każda zaś liczba ułamkowa, jako jedna, albo też skupienie większej ilości części, powstałych wskutek rozłożenia jedności na części równe, ma z jednością spólną miarę. Np. liczba $\frac{a}{b}$ ma z jednością spólną miarę: liczbę $\frac{1}{b}$. Dlatego każda liczba całkowita i każda liczba ułamkowa jest liczbą spółmierną z jednością. Zamiast mówić: liczba spółmierna z jednością, mówi się krócej: liczba wymierna (rationale Z.). Nawzajem, jeżeli pewna liczba ma z jednością spólną miarę, która w owej liczbie mieści się a razy, zaś w jedności b razy, to owa liczba jest skupieniem a b-tych części jedności, czyli jest liczbą $\frac{a}{b}$; kiedy a jest podzielne przez b, jest liczbą całkowitą, w przeciwnym razie jest liczbą ułamkową.

Ponieważ: α) $\sqrt[n]{a}$, przy a dodatnem i całkowitem, w razie, kiedy nie jest liczbą całkowitą, nie jest także liczbą ułamkową, β) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ w razie, kiedy, przy a i b dodatnych i całkowitych, ułamek $\frac{a}{b}$ jest w postaci nieskracalnej, zaś a i b nie są jednocześnie n-temi potęgami liczb całkowitych, nie jest ani liczbą całkowitą, aniteż ułamkową, — przeto wówczas $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ są liczbami niespółmiernemi z jednością, albo, jak mówimy krócej, są liczbami niewymiernemi (irrationale Z.).

Z liczbami niewymiernemi spotykamy się niejednokrotnie w geometryi. Tak np. stosunek przekątnej kwadratu do jego boku $(\sqrt{2})$ jest liczbą niewymierną; stosunek wysokości trójkąta równobocznego do jego boku $(\frac{1}{2}\sqrt{3})$ jest liczbą niewymierną; stosunek pól trójkąta równobocznego i kwadratu, wpisanych w koło, $(\frac{3}{8}\sqrt{3})$ jest liczbą niewymierną; stosunek promieni dwu kul, z których jedna ma objętość dwa razy większą niż druga, $(\sqrt[3]{2})$ jest liczbą niewymierną; i t. d.

Także stosunek okręgu koła do jego średnicy jest liczbą niewymierną[1]), ale ta liczba nie może być wyrażona zapomocą pierwiastków jakichkolwiek stopni z liczb całkowitych lub ułamkowych; jest to więc innego rodzaju liczba niewymierna, niż te, które tu rozważamy. Dlategoto liczby niewymierne, które można wyrazić przy pomocy pewnej ilości pierwiastków z liczb całkowitych lub ułamkowych, nazywamy liczbami niewymiernemi pierwiastkowemi. Liczby zaś niewymierne takie, jak np. stosunek okręgu koła

[1]) Wogóle liczba dziesiętna, której część mniejsza od 1 jest tak zwanym ułamkiem dziesiętnym nieskończonym nieperyodycznym, jest liczbą niewymierną.

do jego średnicy, których nie można wyrazić przy pomocy pewnej ilości pierwiastków z liczb całkowitych lub ułamkowych, nazywamy **liczbami transcendentalnemi** (transcendente Z.), albo **liczbami przestępnemi.**

36. Na prostej obierzmy dowolnie punkt 0, od którego np. w prawo będziemy oznaczali punkty, odpowiadające liczbom dodatnym, w przeciwnym zaś kierunku punkty, odpowiadające liczbom ujemnym. Przyjąwszy długość pewnego odcinka za jednostkę, oznaczmy punkty, odpowiadające liczbom całkowitym: $+1$, -1, $+2$, -2, $+3$, -3 i t. d. Oznaczmy następnie punkty, odpowiadające liczbom ułamkowym: $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $+1\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{2}$, $+2\frac{1}{2}$, $-2\frac{1}{2}, \ldots$, $+\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $+\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $+1\frac{1}{3}$, $-1\frac{1}{3}, \ldots$, $+\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $+\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{4}$, $+1\frac{1}{4}$, $-1\frac{1}{4}, \ldots$ i t. d. Wyobraźmy sobie, że na tej prostej mamy już oznaczone punkty, odpowiadające wszystkim liczbom całkowitym i ułamkowym. Te punkty będą na prostej przypadały bardzo blisko siebie; ale czy one tworzą ciąg nieprzerwany? Weźmy na uwagę np. odcinek między punktami $+3$ i $+4$. Ponieważ np. każda z liczb: $\sqrt{10}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{\frac{19}{2}}$ $\sqrt[3]{30}$ jest pośrednia między 3 i 4, a nie jest ani liczbą całkowitą, aniteż ułamkową, przeto na naszym odcinku nie były oznaczone punkty, odpowiadające tym liczbom niewymiernym. Możemy więc powiedzieć ogólnie, że punkty na prostej, odpowiadające wszystkim liczbom całkowitym i wszystkim liczbom ułamkowym, nie tworzą ciągu nieprzerwanego.

Wyobraźmy sobie, że na prostej mamy oznaczone punkty, nietylko odpowiadające wszystkim liczbom całkowitym i ułamkowym, ale także odpowiadające wszystkim liczbom niewymiernym pierwiastkowym. Czy one tworzą ciąg nieprzerwany? Znamy liczbę przestępną π, wyrażającą stosunek okręgu koła do jego średnicy. Punkt, odpowiadający tej liczbie, przypadnie na odcinku między punktami $+3$ i $+4$, albo, bliżej jego położenie oznaczając, między punktami $+3$ i $+3\frac{1}{7}$, lub jeszcze między punktami $+3{\cdot}141$ i $+3{\cdot}142$ i t. d.; nie przypadnie zaś on w żadnym punkcie, odpowiadającym czyto liczbie ułamkowej, czyteż liczbie niewymiernej pierwiastkowej. Podobnie rzecz się ma z liczbą np. $\frac{5}{4}\pi$. Możemy więc powiedzieć ogólnie, że punkty na prostej, odpowiadające wszystkim liczbom całkowitym, wszystkim liczbom ułamkowym i wszystkim liczbom niewymiernym pierwiastkowym, nie tworzą ciągu nieprzerwanego.

37. Niech przy całkowitem i dodatnem a będzie $\sqrt[n]{a}$ liczbą niewymierną. Weźmy jakąkolwiek liczbę całkowitą i dodatną q i utwórzmy iloczyn aq^n. Ten iloczyn, będący liczbą całkowitą, nie jest n-tą potęgą liczby całkowitej [1]). Nie jest więc równy żadnej z liczb

$$1,\ 2^n,\ 3^n,\ 4^n, \ldots, p^n,\ (p+1)^n, \ldots,$$

ale jest liczbą pośrednią między dwiema z tych liczb, np. między p^n i $(p+1)^n$, t. j. $p^n < aq^n < (p+1)^n$. Po podzieleniu stron tych nierówności przez liczbę dodatną q^n, mamy

$$\frac{p^n}{q^n} < a < \frac{(p+1)^n}{q^n},$$

wskutek czego (art. 21) także

$$\sqrt[n]{\frac{p^n}{q^n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{\frac{(p+1)^n}{q^n}}, \quad \text{czyli} \quad \frac{p}{q} < \sqrt[n]{a} < \frac{p+1}{q}.$$

Ponieważ liczby $\frac{p+1}{q}$ i $\frac{p}{q}$ różnią się od siebie o $\frac{1}{q}$, przeto każda z dwu różnic:

---

[1]) Gdyż jeżeliby było $aq^n = r^n$, przy r całkowitem, to mielibyśmy $a = \frac{r^n}{q^n}$ i byłby $\sqrt[n]{a} = \frac{r}{q}$, liczbie wymiernej.

$\sqrt[n]{a}-\frac{p}{q}$ i $\frac{p+1}{q}-\sqrt[n]{a}$ jest mniejsza od liczby $\frac{1}{q}$. Widzimy więc, że możemy zawsze znaleźć dwa ułamki o spólnym mianowniku, a o licznikach, różniących się o 1, między któremito ułamkami przypada $\sqrt[n]{a}$, tak iż wartość bezwzględna różnicy między $\sqrt[n]{a}$ a każdym z tych ułamków jest mniejsza od odwrotności ich mianownika. Ów spólny mianownik q jest liczbą dowolną, choćby bardzo wielką. Im większa jest liczba q, tem mniejsza jest liczba $\frac{1}{q}$. Przy dostatecznie wielkiem q, może być liczba $\frac{1}{q}$ dowolnie mała. Wskutek tego, przy odpowiedniem p, ułamki $\frac{p}{q}$ i $\frac{p+1}{q}$, będące przybliżeniami, pierwszy z niedomiarem, drugi z nadmiarem, liczby niewymiernej $\sqrt[n]{a}$, mogą być dowolnie bliskie tej liczby.

Niech, przy dodatnych i całkowitych a i b, pierwszych względem siebie, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ będzie liczbą niewymierną. Tę liczbę możemy inaczej przedstawić: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{a.b^{n-1}}{b.b^{n-1}}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$. Ponieważ ta liczba jest niewymierna, przeto w ostatniej jej postaci, której mianownik jest liczbą całkowitą, licznik, będący pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby całkowitej, jest także liczbą niewymierną. Chociaż więc wartość licznika $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$ dokładnie wyznaczona być nie może, to jednak możemy mieć dwie wartości przybliżone tej liczby, np. $\frac{p}{q}$ i $\frac{p+1}{q}$, pierwszą z niedomiarem, drugą z nadmiarem, od których wartość $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$ różni się mniej, niż o $\frac{1}{q}$. Jest więc $\frac{p}{q}<\sqrt[n]{ab^{n-1}}<\frac{p+1}{q}$, skąd, ponieważ b jest dodatne,

$$\frac{p}{bq}<\sqrt[n]{\frac{a}{b}}<\frac{p+1}{bq}$$

i wartość liczby niewymiernej $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ będzie się różniła od każdej z liczb $\frac{p}{bq}$ i $\frac{p+1}{bq}$ mniej, niż o $\frac{1}{bq}<\frac{1}{q}$, a ta liczba może być dowolnie mała przy odpowiednio wielkiem q.

A zatem, *chociaż wartość liczby niewymiernej dokładnie wyznaczona być nie może, to jednak możemy mieć wartość tej liczby przybliżoną, czyto z niedomiarem, czyteż z nadmiarem, dowolnie mało od owej liczby się różniącą.*

38. Ponieważ liczbę niewymierną możemy zastąpić przez liczbę ułamkową, dowolnie mało od niej się różniącą, przeto wykonanie jakiegoś działania na liczbach niewymiernych może być pojmowane, jako wykonanie takiegoż działania na odpowiednich ułamkach, dostatecznie mało różniących się od danych liczb niewymiernych.

Tak np. rozumieć będziemy, iż mnożeniu liczby niewymiernej przez liczbę niewymierną odpowiada mnożenie ułamka, bardzo bliskiego jednej z danych liczb niewymiernych, przez ułamek, bardzo bliski drugiej z tych liczb. Samo zaś wykonywanie tego mnożenia oprzeć możemy na dowiedzionych własnościach pierwiastków.

Np. $\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{27}\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{108}$; ten iloczyn jest liczbą niewymierną, która może być zastąpiona przez ułamek tak jej bliski, jak chcemy. Weźmy jednak taki przykład: $\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{12}\sqrt[6]{12}=\sqrt[6]{3^3.3^2.2^4.3.2^2}=6$; tu iloczyn jest liczbą wymierną, chociaż każdego z jego czynników można znaleźć tylko wartość przybliżoną.

Podobnie np. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$, zaś $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=3-2=1$.

39. W części I wprowadzając litery na oznaczenie liczb, mieliśmy na uwadze liczby całkowite i ułamkowe, tak dodatne jak i ujemne. W algebrze może litera oznaczać jakąkolwiek z liczb, z któremi w tej nauce mamy do czynienia. Ponieważ obecnie wprowadziliśmy liczby niewymierne, przeto odtąd przyjmować będziemy ogólnie, że litera może także oznaczać liczbę niewymierną czyto dodatną, czyteż ujemną. Tak np. gdy w pewnem wyrażeniu algebraicznem znajdzie się litera a, co do której nie robimy zastrzeżenia, iż może ona przyjmować tylko wartości wymierne, należy rozumieć, iż możemy jej nadawać także wartości niewymierne, np. $a=\sqrt[4]{12}$, $a=\sqrt[3]{5}$ i t. d.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE NIEWYMIERNE.

40. Chociaż litera może oznaczać liczbę niewymierną, to jednak wyrażenie algebraiczne, nie zawierające pierwiastka, pod którego znakiem byłaby litera, jest »względem liter« wyrażeniem czyto całkowitem, czyteż ułamkowem.

41. Rozumiejąc przez a jakąkolwiek możliwą wartość tej litery, należy $\sqrt[n]{a}$ uważać wogóle za liczbę niewymierną, która jednak przy pewnych szczególnych wartościach (np. 1, 2^n, ..., $\frac{1}{2^n}$, $\frac{2^n}{3^n}$, ...), nadawanych literze a, może stać się wymierną.

Gdy w wyrażeniu algebraicznem (po dokonaniu uproszczeń) pod znakiem pierwiastka znajduje się liczba przedstawiona przez literę, to nazywamy je wyrażeniem algebraicznem niewymiernem; takiemi są np. wyrażenia:

$$2a^2+3ab\sqrt[3]{ab^2},\qquad \frac{2a}{\sqrt{a+\sqrt{b}}},\qquad 4a^2b-\frac{\sqrt[4]{3ab^3}}{a+b}.$$

Powiemy więc: *jeżeli w wyrażeniu algebraicznem, w którem mogą być wskazane do wykonania na liczbach, wyrażonych przez litery, dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i podnoszenie do potęgi, jest wskazane wyciąganie pierwiastka, pod którego znakiem znajduje się liczba, przedstawiona przez literę, to wyrażenie takie nazywamy niewymiernem.*

W przeciwstawieniu temu wyrażenia algebraiczne całkowite i ułamkowe nazywają się wyrażeniami algebraicznemi wymiernemi. Tak np. wyrażenia

$$3a+2b\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad 4a+\frac{b}{\sqrt{2}}, \quad 4a^2b-\frac{\sqrt{3}}{2b}$$

są wyrażeniami algebraicznemi wymiernemi, pierwsze dwa całkowitemi, ostatnie ułamkowem.

Wyrażenia więc algebraiczne dzielą się na wymierne i niewymierne, a pierwsze z nich dzielą się na całkowite i ułamkowe. Uwidocznia to następujący schemat:

$$\text{wyrażenia algebraiczne}\begin{cases}\text{wymierne}\begin{cases}\text{całkowite}\\ \text{ułamkowe}\end{cases}\\ \text{niewymierne}\end{cases}$$

Wyrażenia liczebne mogą być również niewymierne pierwiastkowe, lub wymierne, a te ostatnie mogą być całkowite lub ułamkowe. Tak np. wyrażenia: $3\sqrt{2}-\sqrt{2}$, $2+\frac{3}{\sqrt{3}}$ są wyrażeniami liczebnemi niewymiernemi pierwiastkowemi. Liczebne zaś wyrażenia $5+2\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\pi\sqrt{3}$, gdzie π oznacza stosunek okręgu koła do jego średnicy, są także wyrażeniami liczebnemi niewymiernemi, ale niepierwiastkowemi, gdyż w każdem z nich znajduje się liczba przestępna π.

42. Chociaż wyrażenie niewymierne nie jest ani całkowite, aniteż ułamkowe, to jednak, jeżeli pierwiastek znajduje się w dzielniku, mówić się zwykło, że mamy »w mianowniku« pierwiastek, jakgdyby się szczególną uwagę zwracało na pozorny kształt ułamkowy takiego wyrażenia niewymiernego. Tak np. mówi się, że w mianowniku wyrażenia $\frac{a-\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$ znajduje się pierwiastek.

Jeżeli w wyrażeniu niewymiernem, mającem kształt ułamka, chcemy usunąć z mianownika pierwiastek, to mówimy, że chcemy znieść niewymierność w mianowniku (den Nenner rational machen). Np. mnożąc licznik i mianownik powyższego pozornego ułamka przez $\sqrt{c}$, mieć będziemy

$$\frac{a-\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{(a-\sqrt{b})\sqrt{c}}{(\sqrt{c})^2}=\frac{a\sqrt{c}-\sqrt{bc}}{c}.$$

Osobliwie, kiedy mamy liczebne wyrażenia, zniesienie niewymierności w mianowniku bywa pożądane. Np.

$$\frac{8}{\sqrt{27}}=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{27}\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

Z dwu postaci: $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ i $\frac{8}{\sqrt{27}}$ naszej liczby pierwsza jest dogodniejsza. Gdy bowiem mamy $\frac{8\sqrt{3}}{9}$, to wiemy, iż jedność została rozłożoną na 9 równych części i że ilość takich części ($8\sqrt{3}$ czyli $\sqrt{192}$) mamy wziąć z pewnem przybliżeniem. Wyznaczywszy np. ułamek, różniący się od $\sqrt{192}$ mniej, niż o $\frac{1}{10^3}$, będziemy mieli wartość naszej liczby, różniącą się od istotnej mniej niż o $\frac{1}{9.10^3}$, a więc także mniej niż o $\frac{1}{10^3}$. Gdy zaś mamy $\frac{8}{\sqrt{27}}$, to, naprzód, nie możemy powiedzieć, jakich mianowicie części jedności mamy tu wziąć 8, a powtóre, jeżeli wyznaczymy $\frac{1}{\sqrt{27}}$ z przybliżeniem np. na $\frac{1}{10^3}$, to, biorąc takich liczb 8, możemy mieć przybliżenie liczby $\frac{8}{\sqrt{27}}$, różniące się od niej mniej niż o $\frac{8}{10^3} > \frac{1}{10^3}$.

Dlatego staramy się, osobliwie w ostatecznym wypadku rachunku, znieść niewymierność w mianowniku. Np.

1). $\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{ac}}{bc}$.

2). $\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{cd^2}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{c^2d}}{b\sqrt[3]{c^3d^3}} = \frac{\sqrt[6]{a^3c^4d^2}}{bcd}$.

3). $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}$.

4). $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}][(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}]} =$

$$= \frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{[(a+b-c)+2\sqrt{ab}][(a+b-c)-2\sqrt{ab}]} =$$

$$= \frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}.$$

5). $\frac{2}{\sqrt{15}+\sqrt{5}+\sqrt{6}-2\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{15}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2} =$

$$= \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+2\sqrt{2})(1-3\sqrt{3})}{3(1+3\sqrt{3})(1-3\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{15}+8\sqrt{5}+7\sqrt{6}-11\sqrt{2}}{78}.$$

43. Jeżeli mamy równanie takie, iż w niem, po przeniesieniu wszystkich wyrazów, zawierających niewiadome, na jednę stronę i uskutecznieniu redukcyi, pozostaje wyraz, w którym pod znakiem pierwiastka znajduje się niewiadoma, to równanie takie nazywamy *równaniem niewymiernem*. W przeciwstawieniu temu równanie, w którem, po wykonaniu redukcyi, niema wyrazu, zawierającego niewiadomą pod znakiem pierwiastka, nazywamy *równaniem wymiernem*.

Równanie niewymierne staramy się doprowadzić do równania wymiernego, podnosząc obie strony do odpowiedniej jednakowej potęgi, przyczem co do pierwiastków początkowego równania niewymiernego pamiętać należy o tem, cośmy powiedzieli w art. 7-ym. Np. obie strony równania niewymiernego

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x}=2$$

podnosząc do kwadratu, dojdziemy do równania

$$4x - x^2 = 0,$$

które ma dwa pierwiastki $x = 0$ i $x = 4$. Pierwszy z nich sprawdza dane równanie niewymierne, a więc jest jego pierwiastkiem; podstawiając zaś w owo równanie wartość $x = 4$, otrzymalibyśmy $-2 = 2$, co być nie może. A więc, chociaż otrzymane równanie ma dwa pierwiastki, to jednak tylko jeden z nich jest pierwiastkiem danego równania niewymiernego.

RÓWNANIE NIEWYMIERNE, Z KTÓREGO DOCHODZIMY DO RÓWNANIA STOPNIA PIERWSZEGO.

44. 1). $$\sqrt{x+15} + \sqrt{x-24} - \sqrt{x-13} = \sqrt{x}. \qquad (\alpha)$$

Gdybyśmy obie strony podnieśli do kwadratu, otrzymalibyśmy po lewej, oprócz wyrazów wymiernych, także trzy pierwiastki; tymczasem, jeżeli przeniesiemy jeden z wyrazów na stronę prawą,

$$\sqrt{x+15} + \sqrt{x-24} = \sqrt{x} + \sqrt{x-13},$$

po podniesieniu obu stron do kwadratu mieć będziemy równanie, w którem będą tylko dwa pierwiastki,

$$2x - 9 + 2\sqrt{(x+15)(x-24)} = 2x - 13 + 2\sqrt{x(x-13)},$$

czyli $$\sqrt{(x+15)(x-24)} - \sqrt{x(x-13)} = -2.$$

Następnie: $$2x^2 - 22x - 360 - 2\sqrt{x(x-13)(x+15)(x-24)} = 4,$$

$$\sqrt{x(x-13)(x+15)(x-24)} = x^2 - 11x - 182,$$

$$x(x-13)(x+15)(x-24) = (x^2 - 11x - 182)^2,$$

$$676x = 33124, \qquad \text{skąd} \quad x = 49.$$

Ta wartość x jest istotnie pierwiastkiem równania (α), albowiem po podstawieniu jej otrzymujemy równość $8 + 5 - 6 = 7$.

2). $$\frac{a}{\sqrt{a+x}} - \sqrt{a+x} = \sqrt{2a+x}. \qquad (\beta)$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu, mieć będziemy

$$\frac{a^2}{a+x} - 3a = 0; \qquad (\gamma)$$

mnożąc obie strony tego równania przez $a + x$, dochodzimy do równania

$$3ax + 2a^2 = 0, \qquad \text{skąd} \quad x = -\tfrac{2}{3}a.$$

Ponieważ przy tej wartości x liczba $a + x$ jest od zera różna, przeto (I, art. 156) $x = -\frac{2}{3}a$ jest pierwiastkiem równania (γ). Ta wartość jest także pierwiastkiem równania (β), gdyż po jej podstawieniu mamy równość $3\sqrt{\frac{1}{3}a} - \sqrt{\frac{1}{3}a} = 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$.

3). Weźmy na uwagę dwa równania:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x+2}, \qquad \sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x+2}. \qquad (\delta)$$

Podnosząc strony tych równań do kwadratu, otrzymamy odpowiednio:

$$-\sqrt{(x+5)(x+3)} = x, \qquad \sqrt{(x+5)(x+3)} = x,$$

a następnie w obu razach

$$8x + 15 = 0, \qquad \text{skąd} \quad x = -1\tfrac{7}{8}.$$

Podstawiając tę wartość w równania (δ), otrzymamy odpowiednio:

$$\tfrac{5}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \qquad \tfrac{5}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

Widzimy więc, że pierwsze z równań (δ) ma pierwiastek $x = -1\tfrac{7}{8}$, drugie zaś z tych równań nie ma pierwiastka, a więc jest niemożliwe.

4). $$\sqrt{1-a}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{1+a}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = 2\sqrt[4]{1-a^2}, \qquad (\varepsilon)$$

$$(1-a)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 2\sqrt{1-a^2} + (1+a)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 4\sqrt{1-a^2},$$

$$(1-a)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + (1+a)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 2\sqrt{1-a^2},$$

$$(1-a)^2\frac{1+x}{1-x} + 2(1-a^2) + (1+a)^2\frac{1-x}{1+x} = 4(1-a^2). \qquad (\zeta)$$

Pomnóżmy obie strony równania (ζ) przez $1-x^2$; otrzymamy równanie

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0, \qquad \text{czyli} \quad (x-a)^2 = 0,$$

co jest możliwe tylko wtedy, kiedy

$$x - a = 0, \qquad \text{skąd} \quad x = a.$$

Ta wartość $x = a$ nie przywodzi liczby $1 - x^2$ do zera pod warunkiem, że nie jest ani $a = 1$, aniteż $a = -1$. Zawsze jednak liczba $x = a$ jest pierwiastkiem równania (ζ). Wstawiając ją w równanie (ε), otrzymamy równość $\sqrt[4]{1-a^2} + \sqrt[4]{1-a^2} = 2\sqrt[4]{1-a^2}$, która wskazuje, że wartość $x = a$ jest pierwiastkiem równania (ε).

WYCIĄGANIE PIERWIASTKA KWADRATOWEGO.

45. Z tego, cośmy mówili w art. 32-im, wynika, że, wyciągając pierwiastek kwadratowy z jednomianu, mieć możemy dwa przypadki: albo wykładniki wszystkich liter są parzyste, — wtedy otrzymujemy jednomian; alboteż w danym jednomianie jest wykładnik litery nieparzysty, — wtedy pierwiastek jest wyrażeniem niewymiernem. Np.

$$\sqrt{16a^4b^{2n+6}} = 4a^2b^{n+3}; \qquad \sqrt{8a^4b^{2n+6}} = 2\sqrt{2}\,a^2b^{n+3};$$

$$\sqrt{9a^{2m+1}b^{3n+5}c^4} = 3a^m b^{n+2}c^2\sqrt{ab^{n+1}};$$

w dwu pierwszych przykładach mamy pod znakiem pierwiastka kwadrat jednomianu, w ostatnim zaś wyrażenie, które nie jest kwadratem jednomianu.

Wiemy (art. 9), że

$$(a_1 + a_2 + \ldots)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3 + a_3^2 + \ldots \qquad (1)$$

Przypuśćmy, że wielomian $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest uporządkowany np. według malejących potęg litery głównej i że ona wchodzi do wyrazu a_1 z wykładnikiem m, do wyrazu a_2 z wykładnikiem $m-1$, i t. d. W kwadracie tego wielomianu największy wykładnik litery głównej będzie $2m$ i on się znajdzie tylko w wyrazie a_1^2; wykładnik $2m-1$ nad literą główną znaleźć się może tylko w wyrazie $2a_1a_2$; wykładnik $2m-2$ nad literą główną znaleźć się może w dwu wyrazach: a_2^2 i $2a_1a_3$, tak iż w kwadracie tego wielomianu mogła być uskuteczniona redukcya owych dwu wyrazów; podobnie mogła być uskuteczniona redukcya innych dwu lub więcej dalszych wyrazów po prawej stronie równości (1), ale ani przedostatni, aniteż ostatni wyraz tego wyrażenia redukcyi nie ulegną. Zauważmy jeszcze, że wielomian po prawej stronie równości (1) możemy tak napisać:

$$a_1^2 + (2a_1 + a_2)a_2 + (2a_1 + 2a_2 + a_3)a_3 + \ldots \qquad (2)$$

Zaznaczywszy to, przystąpmy do wyciągania pierwiastka kwadratowego z wielomianu. Np.

$$\sqrt{25a^6b^2 - 30a^5b^3 + 49a^4b^4 - 4a^3b^5 + 4a^2b^6 + 16ab^7 + 4b^8}\,.$$

Wielomian pod pierwiastkiem jest uporządkowany według malejących potęg litery a. Ponieważ

$$25a^6b^2 = a_1^2, \qquad \text{przeto} \quad a_1 = \sqrt{25a^6b^2} = 5a^3b,$$

t. j., *wyciągając z pierwszego wyrazu danego wielomianu pierwiastek kwadratowy, otrzymujemy pierwszy wyraz szukanego pierwiastka.* Odjąwszy jego kwadrat od danego wielomianu,

$$\begin{array}{r} 25a^6b^2 - 30a^5b^3 + 49a^4b^4 - 4a^3b^5 + 4a^2b^6 + 16ab^7 + 4b^8 \\ \pm 25a^6b^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline - 30a^5b^3 + 49a^4b^4 - 4a^3b^5 + 4a^2b^6 + 16ab^7 + 4b^8\,, \end{array}$$

otrzymamy resztę, której pierwszym wyrazem jest $-30a^5b^3$. Ponieważ

$$-30a^5b^3 = 2a_1a_2 = 10a^3b\,.\,a_2, \qquad \text{przeto} \quad a_2 = (-30a^5b^3):(10a^3b),$$

t. j. *aby znaleźć drugi wyraz pierwiastka, należy drugi wyraz wielomianu danego podzielić przez podwojony znaleziony już pierwszy wyraz pierwiastka.* Otrzymamy z tego dzielenia $a_2 = -3a^2b^2$. Mając już a_1 i a_2, utwórzmy drugą część wyrażenia (2),

$$(2a_1 + a_2)a_2 = -30a^5b^3 + 9a^4b^4.$$

Odejmując ten dwumian od powyższej reszty,

$$\begin{array}{r} -30a^5b^3 + 49a^4b^4 - 4a^3b^5 + 4a^2b^6 + 16ab^7 + 4b^8 \\ \mp 30a^5b^3 \pm 9a^4b^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline 40a^4b^4 - 4a^3b^5 + 4a^2b^6 + 16ab^7 + 4b^8, \end{array}$$

otrzymamy nową resztę, której pierwszy wyraz jest $40a^4b^4$. Reszta ta przedstawia wyrazy

$$2a_1a_3 + 2a_2a_3 + a_3^2 + 2a_1a_4 + \ldots;$$

w niej najwyższy wykładnik litery głównej a jest tylko w jednym wyrazie $2a_1a_3$. Ponieważ tedy

$$40a^4b^4 = 2a_1a_3, \qquad \text{przeto} \quad a_3 = (40a^4b^4):(10a^3b) = 4ab^3,$$

t. j. *dzieląc pierwszy wyraz drugiej reszty przez podwojony pierwszy wyraz pierwiastka, otrzymujemy trzeci wyraz pierwiastka.* Mając więc już wyrazy a_1, a_2 i a_3, utworzymy trzecią część wyrażenia (2), $(2a_1 + 2a_2 + a_3)a_3$, i odejmiemy ją od ostatniej reszty. I t. d.

Jeżeli w oddzielnych resztach nie będziemy wypisywali wszystkich wyrazów, lecz tylko te, do których podobne będziemy mieli w następnych odjemnikach, to całe nasze postępowanie tak przedstawić możemy:

$$\sqrt{25a^6b^2-30a^5b^3+49a^4b^4-4a^3b^5+4a^2b^6+16ab^7+4b^8} = 5a^3b-3a^2b^2+4ab^3+2b^4$$

$$\begin{array}{ll}
\pm 25a^6b^2 & \\
\hline
-30a^5b^3+49a^4b^4 & (10a^3b-3a^2b^2).(-3a^2b^2) \\
\mp 30a^5b^3 \pm 9a^4b^4 & \\
\hline
40a^4b^4-4a^3b^5+4a^2b^6 & (10a^3b-6a^2b^2+4ab^3).4ab^3 \\
\pm 40a^4b^4 \mp 24a^3b^5 \pm 16a^2b^6 & \\
\hline
20a^3b^5-12a^2b^6+16ab^7+4b^8 & (10a^3b-6a^2b^2+8ab^3+2b^4).2b^4 \\
\pm 20a^3b^5 \mp 12a^2b^6 \pm 16ab^7 \pm 4b^8 & \\
\hline
0. &
\end{array}$$

Reszta 0 wskazuje, iż otrzymany czworomian jest pierwiastkiem kwadratowym z danego wielomianu.

Taksamo postępowalibyśmy, gdybyśmy mieli wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wielomianu niejednorodnego, w którego wszystkich wyrazach, lub we wszystkich prócz w jednym, byłaby tażsama litera.

Ale, jeżeliby należało wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wielomianu, w którym w różnych wyrazach różne zachodzą litery, to o uporządkowaniu takiego wielomianu podług potęg jednej litery mowy być nie może. W takim razie należy jeden z tych wyrazów, które są kwadratami jednomianów, mianowicie ten, który zawiera najwyższą potęgę jednej z liter, obrać za pierwszy, jeżeli przez podwojony pierwiastek z tego wyrazu jest podzielnych dostatecznie wiele wyrazów danego wielomianu. W każdej zaś reszcie należy brać za pierwszy wyraz taki, który jest podzielny przez podwojony pierwszy wyraz pierwiastka, przyczem znów zważać należy na to, czy dość dogodny otrzymujemy wyraz następny pierwiastka; i t. d. Np.

$$\sqrt{4a^2b^2d^2+4a^2b^4+a^2d^4-8ab^3cd^2-16ab^5c-8ab^3c-4abcd^2+16b^6c^2+16b^4c^2+4b^2c^2}.$$

Tu kwadratami jednomianów są trzy pierwsze i trzy ostatnie wyrazy. Pierwszego wyrazu nie możemy przyjąć jako kwadrat pierwszego wyrazu pierwiastka, gdyż przez $2abd$ są z innych wyrazów danego wielomianu podzielne tylko dwa, a wielomian, jako mający 10 wyrazów, nie może być kwadratem trójmianu; zatem za pierwszy wyraz danego wielomianu możemy z wyrazów, do których wchodzi a, wziąć albo $4a^2b^4$, albo też a^2d^4. Gdy przyjmiemy jako wyraz pierwszy $4a^2b^4$, to

$$\sqrt{4a^2b^4+4a^2b^2d^2+a^2d^4-\ldots} = 2ab^2+ad^2-4b^3c-2bc$$

$$\begin{array}{l}
\pm 4a^2b^4 \\
\hline
4a^2b^2d^2+a^2d^4 \\
\pm 4a^2b^2d^2 \pm a^2d^4 \\
\hline
-16ab^5c-8ab^3cd^2+16b^6c^2 \\
\mp 16ab^5c \mp 8ab^3cd^2 \pm 16b^6c^2 \\
\hline
-8ab^3c-4abcd^2+16b^4c^2+4b^2c^2 \\
\mp 8ab^3c \mp 4abcd^2 \pm 16b^4c^2 \pm 4b^2c^2 \\
\hline
0.
\end{array}$$

(W drugiej reszcie nie można było za pierwszy wyraz przyjąć wyrazu $-8ab^3d^2$, gdyż w danym wielomianie niema wyrazu $(-2bd^2)^2$; dlatego za pierwszy wyraz tej reszty przyjąć wypadło wyraz $-16ab^5c$).

46. Wiemy, że kwadrat jednomianu jest jednomianem, kwadrat dwumianu jest trójmianem, w kwadracie zaś wielomianu, mającego trzy lub więcej wyrazów, tak pierwsze dwa wyrazy, jak i dwa ostatnie redukcyi nie ulegają. Niema więc przypadku, aby wyrażenie algebraiczne, podniesione do kwadratu, dawało dwumian. Innemi słowy, *pierwiastek kwadratowy z dwumianu jest wyrażeniem niewymiernem.*

Jeżeli wielomian, z którego mamy wyciągnąć pierwiastek, jest już uporządkowany i *jeżeli albo pierwszy wyraz nie jest kwadratem jednomianu, albo drugi wyraz nie jest podzielny przez podwojony pierwiastek z wyrazu pierwszego, albo ostatni wyraz nie jest kwadratem jednomianu, albo też przedostatni nie jest podzielny przez podwojony pierwiastek z wyrazu ostatniego, to pierwiastek kwadratowy z danego wielomianu jest wyrażeniem niewymiernem.*

W tylkoco wyliczonych przypadkach zgóry wnieść możemy, iż pierwiastek z danego wielomianu jest wyrażeniem niewymiernem. W wielu jednak przypadkach, dopiero uskuteczniając wyciąganie pierwiastka, przekonywamy się, że dany wielomian nie jest kwadratem wielomianu, czyli, że pierwiastek kwadratowy z niego jest wyrażeniem niewymiernem. Tak np.

$$\sqrt{a^2+2ab+2b^2+2ac+8bc+4c^2}, \quad a+b+c$$

. . . .

. . . .

$$b^2+6bc+3c^2;$$

widzimy tedy, że dany pierwiastek jest wyrażeniem algebraicznem niewymiernem. — Jeżeli wielomian dany nazwiemy n, sumę wyrazów otrzymanych przy wyciąganiu pierwiastka nazwiemy α, a resztę pozostałą nazwiemy r, to $n=\alpha^2+r$, tak iż $n-r=\alpha^2$, t. j. $\sqrt{n-r}$ jest wyrażeniem wymiernem.

47. Wiemy (art. 10), że, podnosząc do kwadratu liczbę całkowitą m-cyfrową, otrzymujemy liczbę, mającą cyfr albo $2m$, albo $2m-1$. Jeżeli więc pierwiastek kwadratowy z liczby całkowitej jest liczbą całkowitą i w liczbie pod znakiem pierwiastka jest cyfr $2m$, lub $2m-1$, to pierwiastek będzie liczbą m-cyfrową.

Gdy np. chcemy znaleźć $\sqrt{142129}$, to zauważymy naprzód, że pierwiastek z tej liczby całkowitej, jako 6-ocyfrowej, będzie miał część całkowitą 3-cyfrową, t. j. złożoną z setek, dziesiątków i jedności. Aby znaleźć setki pierwiastka, zważmy, że kwadrat setek ma na końcu 4 zera, a więc kwadrat cyfry setek jest zawarty w liczbie 14. Niewiększy od 14-u, a najbliższy 14-u kwadrat liczby jednocyfrowej jest 9, jego zaś pierwiastek jest 3; a więc w pierwiastku są 3 setki. Odjąwszy kwadrat setek od naszej liczby, otrzymamy resztę 52129, w której się mieszczą pozostałe składniki kwadratu. Podwojony iloczyn setek przez dziesiątki ma na końcu 3 zera, kwadrat zaś dziesiątków ma na końcu 2 zera. Uwzględniając te dwa składniki w celu odnalezienia dziesiątków pierwiastka, oddzielmy w naszej reszcie ostatnie dwie cyfry, którym w obu wspomnianych składnikach odpowiadają zera. Zamiast więc mówić: w 52129-u mieści się podwojony iloczyn 300-u przez dziesiątki i kwadrat dziesiątków, powiemy: w liczbie 521 mieści się podwojony iloczyn 30-u przez cyfrę dziesiątków i kwadrat cyfry dziesiątków. Dla wyznaczenia cyfry dziesiątków biorąc na uwagę pierwszy z wymienionych dwu składników, zamiast dzielić 521 przez 2.30, możemy dzielić tylko 52 przez 2.3, co zaznaczamy, oddzielając w naszej reszcie 521 cyfrę 1 znaczkiem, $52_{,}1$. W 52-u 6 mieści się 8 razy. Jeżeli 8 nie jest zbyt wiele, to od liczby 521 nie jest większa suma

$$2.30.8 + 8^2, \quad \text{czyli} \quad (2.30 + 8).8 = (60 + 8).8 = 68.8 = 544.$$

Ta liczba jednak jest większa od 521, a więc 8 dziesiątków jest zbyt wiele. Próbujmy zatem wziąć 7 dziesiątków;

$$2.30.7 + 7^2, \quad \text{czyli} \quad 67.7 = 469.$$

Ta liczba 469 już nie jest większa od liczby 521, a więc możemy przyjąć, iż w pierwiastku mamy 7 dziesiątków. Zwykle tak robimy, iż podwoiwszy pierwszą cyfrę 3, piszemy na boku owe 6 i, po znalezieniu drugiej cyfry pierwiastka, piszemy tę znalezioną cyfrę 7 w pierwiastku obok poprzedniej cyfry, oraz przypisujemy 7 do napisanej na boku liczby 6 i uskuteczniamy mnożenie tej liczby 67 przez cyfrę 7 pierwiastka. Odjąwszy 469 od 521, otrzymamy 52; do tej liczby dopisujemy następujące jeszcze dwie cyfry, poprzednio oddzielone. W reszcie tedy 5229 mieści się podwojony iloczyn setek i dziesiątków naszej liczby przez szukane jedności, oraz kwadrat jedności. Dla oznaczenia cyfry jedności biorąc na uwagę pierwszy z tych dwu składników, zamiast mówić: w liczbie 5229 mieści się podwojony iloczyn 370-u przez cyfrę jedności, możemy, oddzieliwszy znowu ostatnią cyfrę reszty, powiedzieć: w liczbie 522 mieści się podwojony iloczyn 37-u przez cyfrę jedności. W 522-u $2 \times 37 = 74$ mieści się 7 razy. Piszemy więc w pierwiastku na następnem miejscu 7 i do liczby 74 dopisujemy tę cyfrę 7, a następnie mnożymy tak powstałą liczbę 747 przez cyfrę 7 pierwiastka, gdyż

$$2.370.7 + 7^2 = (2.370 + 7).7 = 747.7.$$

Po odjęciu tej liczby 5229 od ostatniej reszty otrzymujemy 0, a więc pierwiastkiem kwadratowym z danej liczby jest liczba 377.

Nie wypisując w oddzielnych resztach tych cyfr, pod któremi zawsze wypadają zera, możemy całe to działanie tak przedstawić:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{14|21|29} = 377 & \\
9 & \\
\overline{52_{,}1} & 67 \\
469 & \\
\overline{\quad 522_{,}9} & 747 \\
\quad 5229 & \\
\overline{\qquad 0;} &
\end{array}
\qquad \text{podobnie} \qquad
\begin{array}{ll}
\sqrt{4|04|01|80|40|04} = 201002 & \\
4 & \\
\overline{\quad 4} & 4 \\
\quad 40_{,}1 & 401 \\
\quad 401 & \\
\overline{\qquad 8_{,}0} & 402 \\
\qquad 804_{,}0 & 4020 \\
\qquad 80400_{,}4 & 402002 \\
\qquad 804004 & \\
\overline{\qquad\qquad 0.} &
\end{array}$$

Wiemy, że podnosząc do kwadratu liczbę dziesiętną, otrzymujemy liczbę dziesiętną, mającą dwa razy więcej cyfr dziesiętnych (art. 10). Jeżeli więc pierwiastek kwadratowy z liczby dziesiętnej skończonej jest również liczbą dziesiętną skończoną, to ma ona dwa razy mniej cyfr dziesiętnych, niż liczba pod znakiem pierwiastka. Jakoż np.

$$\sqrt{404{\cdot}01804004} = \sqrt{40401804004 \times \frac{1}{10^8}} = 201002 \times \frac{1}{10^4} = 20{\cdot}1002.$$

Mogliśmy wprost w pierwiastku po tej cyfrze, która wypadła po uwzględnieniu ostatniej z dwucyfrowych grup całkowitej części liczby danej, postawić znak, oddzielający w nim cyfry dziesiętne.

48. Zauważmy, że kwadrat liczby całkowitej kończy się na taką cyfrę, na jaką się kończy kwadrat jedności tej liczby. Jeżeli zaś wypiszemy kwadraty liczb jednocyfrowych, to dostrzeżemy, że one się kończą na cyfry 1, 4, 5, 6, 9. Nadto: jeżeli liczba dana, mająca dwie lub więcej cyfr, kończy się na 5, to dwie ostatnie cyfry jej kwadratu przedstawiają liczbę 25; kwadrat liczby zakończonej na zera ma na końcu parzystą ilość zer, a przed niemi jednę z cyfr 1, 4, 5, 6, 9; kwadrat zaś liczby dziesiętnej skończonej ma parzystą ilość cyfr dziesiętnych. A więc, jeżeli liczba, z której mamy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, α) ma nieparzystą ilość cyfr dziesiętnych, β) kończy się na cyfry 2, 3, 7, 8, albo, kończąc się na 5, ma przedostatnią cyfrę inną niż 2, γ) kończy się na nieparzystą ilość zer, lub, kończąc się na parzystą ilość zer, ma przed zerami cyfrę 2, 3, 7, 8, alboteż cyfrę 5 z poprzedzającą cyfrą inną niż 2, to w tych razach zgóry wiemy, że pierwiastek kwadratowy z tej liczby jest liczbą niewymierną.

Niech pierwiastek kwadratowy z liczby całkowitej lub dziesiętnej nie będzie liczbą wymierną. Np. $\sqrt{185}$

$$\begin{array}{lll}
\sqrt{1|85} = 13{\cdot}601\ldots & & \\
\underline{1} & & \\
\ \ 8,5 & 23 & \\
\ \ \underline{69} & & \\
\ \ 16 & & \\
\ \ 160,0 & 266 & \\
\ \ \underline{1596} & & \\
\qquad 4 & & \\
\qquad 40,0 & 272 & \\
\qquad 4000,0 & & 27201 \\
\qquad \underline{27201} & & \\
\qquad 12799 & &
\end{array}$$

Ta liczba niewymierna jest większa od 13 a mniejsza od 14. Jeżeli idzie o wyznaczenie części dziesiątych pierwiastka, to, zważywszy, że 16 jedności jest toż samo, co 1600 setnych, możemy do 16-u dopisać dwa zera i działanie dalej prowadzić, postawiwszy w pierwiastku po 13 znak, oddzielający cyfry dziesiętne. Znajdziemy, że ta liczba jest większa od 13·6 a mniejsza od 13·7. Podobnie dalej moglibyśmy szukać np. części setnych i tysiącznych pierwiastka, kolejno przypisując do otrzymywanych reszt po dwa zera. Znajdziemy, że ta liczba niewymierna jest większa od 13·60 a mniejsza od 13·61, większa od 13·601 a mniejsza od 13·602. A zatem tej liczby niewymiernej wartościami przybliżonemi na 1, na 0·1, na 0·01, na 0·001 z niedomiarem są wartości 13, 13·6, 13·60, 13·601, z nadmiarem zaś 14, 13·7, 13·61, 13·602. Oczywiście, prowadząc takie postępowanie dalej, moglibyśmy oznaczyć przybliżenia na 0·0001, i t. d. (W pierwiastku, jako przedstawiającym liczbę niewymierną, ułamek dziesiętny jest nieskończony nieperyodyczny).

Podobnie, gdy mamy np. $\sqrt{0{\cdot}00144}$, to, ponieważ w liczbie danej mamy 5 cyfr dziesiętnych, dopiszemy na końcu 0, aby mieć parzystą ich ilość.

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{0{\cdot}00|14|40} = 0{\cdot}037\ldots & \\
\quad 9 & \\
\hline
\quad 54{,}0 & 67 \\
\quad 469 & \\
\hline
\quad\ \ 71 &
\end{array}$$

Pierwiastek zatem z naszej liczby jest zawarty między 0·037 a 0·038 i moglibyśmy, przypisując tak do ostatniej, jak i do dalszych reszt po dwa zera, wyznaczyć dalsze cyfry dziesiętne pierwiastka.

Jeżeli więc mamy z liczby całkowitej lub dziesiętnej wyciągnąć pierwiastek z przybliżeniem na 0·1, 0·01 i t. d., to, w danej liczbie uwzględniwszy dwa razy tyle cyfr dziesiętnych, ile ich jest w stopniu żądanego przybliżenia, możemy nie zważać na znak, oddzielający cyfry dziesiętne, i z niej, jak z liczby całkowitej, wyciągnąć pierwiastek z przybliżeniem na 1, a w otrzymanym pierwiastku oddzielić tyle cyfr na dziesiętne, ile ich jest w stopniu żądanego przybliżenia.

49. Gdy, mając liczbę całkowitą N, wyznaczamy $\sqrt{N}$ z przybliżeniem na 1, to, otrzymawszy zwykłym sposobem więcej niż połowę cyfr początkowych pierwiastka, możemy pozostałe otrzymać przy pomocy zwykłego dzielenia.

Jeżeli w pierwiastku mamy mieć $2n+1$ cyfr, to zwykłym sposobem dość jest wyznaczyć początkowych jego $n+1$ cyfr. Niech one, po dopisaniu do nich n zer, przedstawiają liczbę a i niech ξ będzie pozostałą częścią pierwiastka, tak iż $(a+\xi)^2 = N$. Jest więc $N - a^2 = 2a\xi + \xi^2$. Lecz $N - a^2$ przedstawia resztę, pozostałą po wyznaczeniu $(n+1)$-szej cyfry pierwiastka; tę resztę nazwijmy r. A zatem $r = 2a\xi + \xi^2$, skąd $\xi = \frac{r}{2a} - \frac{\xi^2}{2a}$. Ponieważ całkowita część liczby ξ ma n cyfr, przeto całkowita część liczby ξ^2 ma najwięcej $2n$ cyfr, zaś $2a$ ma najmniej $2n+1$ cyfr, zatem $\frac{\xi^2}{2a} < 1$ i ξ jest wartością ilorazu $\frac{r}{2a}$, przybliżoną na 1.

Jeżeli w pierwiastku mamy mieć $2n$ cyfr, to zwykłym sposobem dość jest wyznaczyć jego początkowych $n+1$ cyfr. Wprowadzając podobne oznaczenia i podobnie rozumując, przekonamy się, iż dalsze cyfry pierwiastka przedstawiają liczbę, która jest przybliżoną na 1 wartością ilorazu $\frac{r}{2a}$.

Np. $\sqrt{1|52|97|74|50} = 123\ldots;\qquad \frac{1687450}{2 \times 12300} = 68{\cdot}5\ldots$

$$\begin{array}{ll}
\ldots\ldots & \\
\hline
168 & 12300 + 68 = 12368.
\end{array}$$

50. Pierwiastek kwadratowy z ułamka zwyczajnego jest, jak wiemy (art. 35), wtedy tylko liczbą wymierną, kiedy jednocześnie licznik i mianownik jego postaci nieskracalnej są kwadratami liczb całkowitych; wówczas stosujemy drugi z wzorów (7) art. 26-go. Np.

$$\sqrt{\frac{40401804004}{142129}}=\frac{201002}{377}=533\tfrac{61}{377};\quad \sqrt{0{\cdot}07\dot{1}}=\sqrt{\tfrac{16}{225}}=\tfrac{4}{15}=0{\cdot}2\dot{6}.$$

Jeżeli pierwiastek z ułamka zwyczajnego jest liczbą niewymierną, to wartość przybliżoną pierwiastka wyrażamy albo w postaci liczby dziesiętnej, albotęż w postaci ułamka zwyczajnego. Jeżeli chcemy ją otrzymać jako liczbę dziesiętną, to należy dany ułamek wyrazić jako dziesiętny i z tak otrzymanej liczby dziesiętnej wyciągać pierwiastek kwadratowy w sposób objaśniony w art. 48-ym. Tak np., aby mieć $\sqrt{2\frac{2}{3}}$ z przybliżeniem na 0·001, weźmiemy $\sqrt{2{\cdot}66|66|66}$, a więc 1·632; ta wartość jest przybliżeniem z niedomiarem, zaś 1·633 z nadmiarem.

Jeżeli wogóle $\sqrt{a}$ jest liczbą niewymierną, a chcemy mieć jej wartość przybliżoną na $\dfrac{1}{q}$, gdzie q jest liczbą całkowitą, to, ponieważ $\sqrt{a}=\dfrac{\sqrt{aq^2}}{q}$, przeto, wyciągnąwszy w liczniku pierwiastek z przybliżeniem na 1, mieć będziemy wartość liczby $\sqrt{a}$ przybliżoną na $\dfrac{1}{q}$. Np. szukając wartości, przybliżonych na $\frac{1}{8}$, liczb $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\frac{3}{4}}$, $\sqrt{1\frac{5}{6}}$, będziemy mieli:

$$\sqrt{2}=\frac{\sqrt{128}}{8},\ \ \frac{11}{8};\quad \sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{176}}{8},\ \ \frac{13}{8};\quad \sqrt{\frac{11}{6}}=\frac{\sqrt{\frac{11}{3}\times 32}}{8}=\frac{\sqrt{117{\cdot}\dot{3}}}{8},\ \ \frac{10}{8};$$

a więc wartości tych liczb, przybliżone na $\frac{1}{8}$ z niedomiarem, są odpowiednio: $1\frac{3}{8}$, $1\frac{5}{8}$, $1\frac{1}{4}$, z nadmiarem zaś odpowiednio: $1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{3}{8}$.

WYCIĄGANIE PIERWIASTKA SZEŚCIENNEGO.

51. Jeżeli mamy wyciągnąć pierwiastek sześcienny z jednomianu, a w nim wszystkie wykładniki liter są podzielne przez 3, to, według art. 32-go, otrzymamy w pierwiastku także jednomian. Np.

$$\sqrt[3]{64a^6b^{3m}c^{3n+9}d^3}=4a^2b^mc^{n+3}d;\quad \sqrt[3]{16a^6b^{3m}c^{3n+9}d^3}=2\sqrt[3]{2}\,a^2b^mc^{n+3}d.$$

Jeżeli zaś nie wszystkie wykładniki liter w danym jednomianie są podzielne przez 3, to otrzymamy wyrażenie niewymierne. Np.

$$\sqrt[3]{27a^5b^{3m+1}c^{4n+8}d^{p+9}}=3ab^mc^{n+2}d^3\sqrt[3]{a^2bc^{n+2}d^p}.$$

Podobnie, jak przy wyciąganiu pierwiastka kwadratowego z wielomianu, możemy objaśnić, iż, aby wyciągnąć pierwiastek sześcienny z wielomianu, należy, po uporządkowaniu go np. według malejących potęg litery, wziętej za główną, oprzeć postępowanie na wzorze (7), który wyprowadziliśmy w art. 11-ym. Np.

$$\sqrt[3]{8a^6-36a^5b+66a^4b^2-63a^3b^3+33a^2b^4-9ab^5+b^6}.$$

Wyciągnąwszy pierwiastek sześcienny z wyrazu pierwszego, przyjmiemy go jako a_1, t. j. jako pierwszy wyraz pierwiastka, $a_1=2a^2$. Odjąwszy jego sześcian od wielomianu pod pierwiastkiem, zauważymy, że w reszcie

$$-36a^5b+66a^4b^2-63a^3b^3+33a^2b^4-9ab^5+b^6$$

pierwszy wyraz jest potrojonym iloczynem kwadratu pierwszego wyrazu pierwiastka przez niewiadomy drugi jego wyraz. Aby więc znaleźć ów drugi wyraz, wykonamy dzielenie $(-36a^5b):[3(2a^2)^2] = -3ab = a_2$. Utworzywszy następnie sumę $3a_1^2a_2 + 3a_1a_2^2 + a_2^3$, odejmiemy ją od otrzymanej poprzednio reszty:

$$\begin{array}{r} -36a^5b + 66a^4b^2 - 63a^3b^3 + 33a^2b^4 - 9ab^5 + b^6 \\ \mp 36a^5b \pm 54a^4b^2 \mp 27a^3b^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline 12a^4b^2 - 36a^3b^3 + 33a^2b^4 - 9ab^5 + b^6. \end{array}$$

Pierwszy wyraz tej reszty przedstawia wyraz $3a_1^2a^3$ wspomnianego wzoru; aby więc znaleźć wyraz a_3, uskutecznimy dzielenie $12a^4b^2 : 12a^4 = b^2$. Przy pomocy tego wyrazu utworzymy sumę t. j. $3(a_1 + a_2)^2a_3 + 3(a_1 + a_2)a_3^2 + a_3^3$

$$3(4a^4 - 12a^3b + 9a^2b^2)b^2 + 3(2a^2 - 3ab)b^4 + b^6,$$

i odejmiemy ją od poprzedniej reszty. Wszystkie wyrazy się znoszą, a więc dany wielomian jest sześcianem trójmianu $2a^2 - 3ab + b^2$.

Całe to postępowanie tak przedstawimy:

$$\sqrt[3]{8a^6 - 36a^5b + 66a^4b^2 - 63a^3b^3 + 33a^2b^4 - 9ab^5 + b^6} = 2a^2 - 3ab + b^2.$$

$$\begin{array}{ll} \pm 8a^6 & \\ \hline -36a^5b + 66a^4b^2 - 63a^3b^3 & [12a^4 + 3(2a^2)(-3ab) + 9a^2b^2](-3ab) \\ \mp 36a^5b \pm 54a^4b^2 \mp 27a^3b^3 & \\ \hline 12a^4b^2 - 36a^3b^3 + 33a^2b^4 - 9ab^5 + b^6 & [3(2a^2 - 3ab)^2 + 3(2a^2 - 3ab)b^2 + b^4]b^2 \\ \pm 12a^4b^2 \mp 36a^3b^3 \pm 33a^2b^4 \mp 9ab^5 \pm b^6 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

52. Ponieważ, podnosząc do sześcianu wielomian, nie otrzymujemy ani dwumianu, aniteż trójmianu, przeto *pierwiastek sześcienny tak z dwumianu, jak i z trójmianu jest wyrażeniem niewymiernem.*

Gdy wielomian pod znakiem pierwiastka sześciennego jest uporządkowany, to łatwo wnieść możemy, że, *kiedy czyto pierwszy, czyteż ostatni wyraz wielomianu nie jest sześcianem jednomianu, albo drugi jego wyraz nie jest podzielny przez potrojony kwadrat pierwiastka z pierwszego wyrazu, albo też przedostatni nie jest podzielny przez potrojony kwadrat pierwiastka z ostatniego wyrazu, to pierwiastek sześcienny z tego wielomianu jest wyrażeniem niewymiernem.*

W innych razach może się to okazać dopiero podczas uskuteczniania wyciągania pierwiastka.

53. Jeżeli pierwiastek sześcienny z liczby całkowitej jest liczbą całkowitą i pod znakiem pierwiastka jest cyfr $3m$, albo $3m-1$, albo też $3m-2$, to pierwiastek będzie liczbą m-cyfrową (art. 12).

Np. $\sqrt[3]{53582633}$, jako pierwiastek sześcienny z liczby 8-ocyfrowej, będzie liczbą 3-cyfrową t. j. złożoną z setek, dziesiątków i jedności. Ponieważ sześcian setek ma na końcu 6 zer, a więc sześcian cyfry setek jest zawarty w liczbie 53. Niewiększy od 53, a najbliższy 53 sześcian liczby jednocyfrowej jest 27, pierwiastek zaś z niego jest 3; a więc w pierwiastku są 3 setki. Odjąwszy sześcian setek od naszej liczby, otrzymamy resztę 26582633, w której mieszczą się pozostałe składniki sześcianu. Potrojony iloczyn kwadratu setek przez dziesiątki ma na końcu 5 zer, potrojony iloczyn setek przez kwadrat dziesiątków ma na końcu 4 zera, sześcian zaś dziesiątków ma na końcu 3 zera. Uwzględniając te 3 składniki w celu odnalezienia dziesiątków pierwiastka, oddzielmy w naszej reszcie ostatnie 3 cyfry, którym we wszystkich trzech wspomnianych składnikach odpowiadają zera. Zamiast więc mówić: w liczbie 26582633 mieści się potrojony iloczyn liczby 300^2 przez dziesiątki potrojony iloczyn 300-u przez kwadrat dziesiątków, oraz sześcian dziesiątków, powiemy: w 26582 mieści się potrojony iloczyn 30^2 przez cyfrę dziesiątków, potrojony iloczyn 30-u przez kwadrat cyfry dziesiątków, oraz sześcian cyfry dziesiątków. Dla wyznaczenia cyfry dziesiątków biorąc na uwagę pierwszy z wymienionych trzech składników, zamiast dzielić 26582 przez 3.30^2, możemy dzielić 265 przez 3.3^2, co zaznaczamy, oddzielając w naszej reszcie 26582 ostatnie dwie cyfry (82). W 265-u $3.3^2 = 27$ mieści się 9 razy; jeżeli ta cyfra nie jest zbyt wielka, to od 26582-u nie jest większe

$$3.30^2.9 + 3.30.9^2 + 9^3 = (2700 + 810 + 81).9 = 3591.9 = 32319.$$

Widzimy więc, że 9 dziesiątków jest zbyt wiele. Próbujmy wziąć 8 dziesiątków;

$$3.30^2.8 + 3.30.8^2 + 8^3 = (2700 + 720 + 64).8 = 3484.8 = 27872.$$

Ta liczba jest jeszcze zbyt wielka. Próbujmy więc wziąć 7 dziesiątków;

$$3.30^2.7 + 3.30.7^2 + 7^3 = (2700 + 630 + 49)7 = 3379.7 = 23653.$$

Ta liczba 23653 już nie jest większa od 26582, a więc w pierwiastku mamy 7 dziesiątków, które też w nim piszemy obok 3-ch setek. Po odjęciu 23653 od 26582 otrzymamy 2929, a ponieważ po liczbie 23653 następowały 3 zera, przeto do 2929 dopisujemy trzy cyfry, poprzednio oddzielone. W reszcie zatem 2929633 mieści się potrojony iloczyn kwadratu sumy setek i dziesiątków przez jedności, potrojony iloczyn sumy setek i dziesiątków przez kwadrat jedności, oraz sześcian jedności. Dla oznaczenia cyfry jedności biorąc na uwagę pierwszy z tych składników, zamiast mówić: w liczbie 2929633 mieści się iloczyn liczby 3.370^2 przez jedności, możemy, oddzieliwszy znowu dwie ostatnie cyfry reszty, powiedzieć: w liczbie 29296 mieści się iloczyn liczby 3.37^2 przez jedności. W 29296-u 4107 mieści się 7 razy. Piszemy więc w pierwiastku obok liczby 37 cyfrę 7. Utworzywszy sumę

$$3.370^2.7 + 3.370.7^2 + 7^3 = (410700 + 7770 + 49).7 = 418519.7 = 2929633$$

i odjąwszy ją od ostatniej reszty, otrzymujemy 0. A więc pierwiastkiem sześciennym z danej liczby jest liczba 377. Nie wypisując w resztach tych cyfr, pod któremi wypadają zera, tak to działanie przedstawimy:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt[3]{53|582|633} = 377 & \\
\;27 & \\
\hline
\;265,82 & (2700 + 630 + 49).7 = 3379.7 \\
\;23653 & \\
\hline
\quad 29296,33 & (410700 + 7770 + 49).7 = 418519.7 \\
\quad 2929633 & \\
\hline
\qquad 0. &
\end{array}$$

Jeżeli mamy np. $\sqrt[3]{0{\cdot}000001728}$, to w pierwiastku będziemy mieli 3 cyfry dziesiętne. Ponieważ $\sqrt[3]{1728}=12$, przeto $\sqrt[3]{0{\cdot}000001728}=0{\cdot}012$.

54. W sześcianie liczby zakończonej na zera ilość końcowych zer jest podzielna przez 3; sześcian liczby dziesiętnej ma trzy razy więcej cyfr dziesiętnych, niż ich było w liczbie danej (art. 12). A więc, jeżeli liczba, z której mamy wyciągnąć pierwiastek sześcienny, α) kończy się na zera, a ich ilość nie jest podzielna przez 3, β) jest liczbą dziesiętną skończoną, w której ilość cyfr dziesiętnych nie jest podzielna przez 3, to w tych razach zgóry wiemy, że ów pierwiastek jest liczbą niewymierną.

Niech pierwiastek sześcienny z liczby całkowitej lub dziesiętnej będzie liczbą niewymierną. Np. $\sqrt[3]{10}$ jest liczbą niewymierną większą od 2, a mniejszą od 3. Może nam iść o to, aby znaleźć wartość tej liczby przybliżoną np. na 0·01.

$$\begin{array}{ll}
\sqrt[3]{10} = 2{\cdot}15\ldots & \\
\underline{8} & \\
2 & \\
20{,}00 & (1200+60+1).1 \\
\underline{1261} & \\
739 & \\
7390{,}00 & (132300+3150+25).5 \\
\underline{677375} & \\
61625 &
\end{array}$$

Pozostałe jako pierwsza reszta 2 jedności wyrazimy jako 2000 tysiącznych i znajdziemy, że w pierwiastku jest 1 dziesiąta, a pozostałe w reszcie 739 tysięcznych wyrazimy w częściach milionowych i znajdziemy, że w pierwiastku jest 5 setnych. Liczby więc $\sqrt[3]{10}$ wartości przybliżone na 0·01 są: z niedomiarem 2·15, z nadmiarem 2·16.

Podobnie $\sqrt[3]{0{\cdot}08} = \sqrt[3]{0{\cdot}080}$ jest liczbą niewymierną, której przybliżeniami na 0·1 są: z niedomiarem 0·4, z nadmiarem 0·5. Do reszty 16 (tysiącznych) dopisawszy 3 zera, moglibyśmy wyznaczyć setne części, i t. d.

Widzimy więc, że, jeżeli mamy z liczby całkowitej lub dziesiętnej wyciągnąć pierwiastek sześcienny z przybliżeniem na 0·1, 0·01 i t. d., to w danej liczbie, uwzględniwszy trzy razy tyle cyfr dziesiętnych, ile ich jest w stopniu żądanego przybliżenia, możemy nie zważać na znak, oddzielający cyfry dziesiętne, i z niej, jak z liczby całkowitej, wyciągnąć pierwiastek z przybliżeniem na 1, a w otrzymanym pierwiastku oddzielić tyle cyfr, ile ich jest w stopniu żądanego przybliżenia.

55. Gdy, mając liczbę całkowitą N, wyznaczamy $\sqrt[3]{N}$ z przybliżeniem na 1, to, otrzymawszy zwykłym sposobem więcej niż połowę początkowych cyfr pierwiastka, możemy pozostałe otrzymać przy pomocy zwykłego dzielenia.

Jeżeli w pierwiastku mamy mieć $2n+1$ cyfr, to zwykłym sposobem dość jest wyznaczyć początkowych jego $n+1$ cyfr. Niech one po dopisaniu n zer przedstawiają liczbę a

i niech ξ będzie pozostałą częścią pierwiastka, tak iż $(a+\xi)^3 = \mathrm{N}$. Jest więc $\mathrm{N} - a^3 = 3a^2\xi + 3a\xi^2 + \xi^3$. Lecz $\mathrm{N} - a^3$ przedstawia resztę, pozostałą po wyznaczeniu $(n+1)$-szej cyfry pierwiastka; tę resztę nazwijmy r. A zatem mamy $r = 3a^2\xi + 3a\xi^2 + \xi^3$, skąd $\xi = \frac{r}{3a^2} - \left(\frac{\xi^2}{a} + \frac{\xi^3}{3a^2}\right) = \frac{r}{3a^2} - \frac{\xi^2 + (\xi^3 : 3a)}{a}$. W liczniku ostatniego ułamka całkowita część liczby ξ^2 ma najwięcej $2n$ cyfr, całkowita zaś część ilorazu $\xi^3 : 3a$ ma najwięcej $3n - (2n+1) = n - 1$ cyfr; a więc całkowita część całego licznika nie może być tu[1]) liczbą więcej niż $2n$-cyfrową. Mianownik zaś ma $2n+1$ cyfr. A więc rozważany ułamek jest mniejszy od 1 i ξ jest wartością ilorazu $\frac{r}{3a^2}$ przybliżoną na 1.

Jeżeli w pierwiastku mamy mieć $2n$ cyfr, to zwykłym sposobem dość jest wyznaczyć jego $n+1$ cyfr początkowych. Wprowadzając podobne oznaczenia i podobnie rozumując, przekonamy się, że dalsze cyfry pierwiastka przedstawiają liczbę, która jest przybliżoną na 1 wartością ilorazu $\frac{r}{3a^2}$.

Np. $\sqrt{1|891|901|100|056} = 123\ldots$; $\quad \frac{31034100056}{3 \times 12300^2} = 68{\cdot}3\ldots$

. . . . . .

3 1 0 3 4 $\qquad 12300 + 68 = 12368$.

56. Pierwiastek sześcienny z ułamka zwyczajnego jest wtedy tylko liczbą wymierną, kiedy jednocześnie licznik i mianownik jego postaci nieskracalnej są sześcianami liczb całkowitych, a wówczas stosujemy drugi z wzorów (7) art. 26-go. Np.

$$\sqrt[3]{5\frac{13}{343}} = \sqrt[3]{\frac{1728}{343}} = \frac{\sqrt[3]{1728}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}; \quad \sqrt[3]{0{\cdot}101\dot{6}2\dot{9}} = \sqrt[3]{\tfrac{343}{3375}} = \frac{7}{15} = 0{\cdot}4\dot{6}.$$

Jeżeli chcemy wartość przybliżoną niewymiernego pierwiastka sześciennego z ułamka zwyczajnego wyrazić jako liczbę dziesiętną, to należy dany ułamek wyrazić jako dziesiętny i z tak otrzymanej liczby wyciągnąć pierwiastek z żądanem przybliżeniem. Np., aby mieć $\sqrt[3]{2\frac{5}{6}}$ z przybliżeniem na $0{\cdot}01$, znajdziemy $\sqrt[3]{2{\cdot}833333}$, a więc $1{\cdot}41$; ta wartość jest przybliżeniem z niedomiarem, zaś $1{\cdot}42$ z nadmiarem.

Jeżeli wogóle $\sqrt[3]{a}$ jest liczbą niewymierną, a chcemy mieć jego wartość przybliżoną na $\frac{1}{q}$, gdzie q jest liczbą całkowitą, to, ponieważ $\sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt[3]{aq^3}}{q}$, przeto, wyciągnąwszy w liczniku pierwiastek z przybliżeniem na 1, mieć będziemy wartość liczby $\sqrt[3]{a}$ z przybliżeniem na $\frac{1}{q}$. Np. wartości przybliżone na $\frac{1}{12}$ liczb $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{\frac{11}{4}}$, $\sqrt[3]{\frac{17}{5}}$, znajdziemy:

$$\sqrt[3]{5} = \frac{\sqrt[3]{8640}}{12},\ \frac{20}{12}; \quad \sqrt[3]{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt[3]{4752}}{12},\ \frac{16}{12}; \quad \sqrt[3]{\frac{17}{5}} = \frac{\sqrt[3]{5875{\cdot}2}}{12},\ \frac{18}{12};$$

przybliżenia więc tych liczb na $\frac{1}{12}$ z niedomiarem są odpowiednio: $1\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{2}$, z nadmiarem zaś odpowiednio: $1\frac{3}{4}$, $1\frac{5}{12}$, $1\frac{7}{12}$.

---

[1]) Mogłaby w najniedogodniejszych warunkach suma dwu liczb, z których jedna ma $2n$, druga zaś $n-1$ cyfr, dać liczbę, mającą $2n+1$ cyfr. Lecz w takim razie wypaśćby mogła tylko liczba, której pierwsza cyfra jest 1, a następnych $n+1$ cyfr jest zerami. Ale i ten przypuszczalny najniekorzystniejszy przypadek mógłby mieć wpływ na dalsze rozumowanie jedynie wtedy, kiedyby liczba a miała pierwszą cyfrę 1, po którejby następowało $2n$ zer.

WYKŁADNIKI UŁAMKOWE.

57. Według wzoru (6) art. 24-go jest

$$a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p} \tag{1}$$

pod warunkiem, iż p jest podzielne przez m. Ten wzór będziemy mogli uogólnić dla jakichkolwiek całkowitych liczb m i p, jeżeli w razie p niepodzielnego przez m umówimy się, aby $a^{\frac{p}{m}}$ było symbolem liczby $\sqrt[m]{a^p}$.

Jeżeliby ułamek $\frac{p}{m}$ był liczbą ujemną, to, bezwzględne wartości jego licznika i mianownika nazwawszy odpowiednio π i μ, mamy $\frac{p}{m} = -\frac{\pi}{\mu}$. Stosując do tego także przypadku umowę, uczynioną w art. 14-ym, i zważając, że zawsze możemy przyjąć $-\frac{\pi}{\mu} = \frac{-\pi}{\mu}$, mieć będziemy

$$a^{\frac{p}{m}} = a^{-\frac{\pi}{\mu}} = \frac{1}{a^{\frac{\pi}{\mu}}} = \frac{1}{\sqrt[\mu]{a^\pi}} = \sqrt[\mu]{\frac{1}{a^\pi}} = \sqrt[\mu]{a^{-\pi}} = \sqrt[m]{a^p}.$$

Widzimy więc, że według wzoru (1), przy jakichkolwiek całkowitych m i p, *potęga ułamkowa liczby jest symbolem pierwiastka, którego wykładnik jest równy dodatnemu mianownikowi ułamka, z potęgi podstawy o wykładniku równym licznikowi tego ułamka.* W szczególnym przypadku jest np.

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^{-1}}.$$

58. Wprowadzając wykładniki ułamkowe, należy zbadać, czy wzory zasadnicze (1) i (2) art. 1-go, (3) i (4) art. 2-go i (5) art. 4-go stosować się będą także do wykładników ułamkowych.

$$1). \quad a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{np}} \cdot \sqrt[mn]{a^{mq}} = \sqrt[mn]{a^{np+mq}} = a^{\frac{np+mq}{mn}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}};$$

$$2). \quad \frac{a^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{q}{n}}} = \frac{\sqrt[m]{a^p}}{\sqrt[n]{a^q}} = \frac{\sqrt[mn]{a^{np}}}{\sqrt[mn]{a^{mq}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}}{a^{mq}}} = \sqrt[mn]{a^{np-mq}} = a^{\frac{np-mq}{mn}} = a^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}};$$

$$3). \quad (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{(a_1 a_2 \ldots a_n)^p} = \sqrt[m]{a_1^p a_2^p \ldots a_n^p} = \sqrt[m]{a_1^p} \ldots \sqrt[m]{a_n^p} = a_1^{\frac{p}{m}} a_2^{\frac{p}{m}} \ldots a_n^{\frac{p}{m}};$$

$$4). \quad \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^q} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^q} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{pq}}} = \sqrt[mn]{a^{pq}} = a^{\frac{pq}{mn}} = a^{\frac{p}{m} \cdot \frac{q}{m}};$$

$$5). \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[m]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[m]{a^p}}{\sqrt[m]{b^p}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}.$$

Kiedy w przypadkach 1-ym, 2-im lub 4-ym jeden tylko z dwu wykładników jest ułamkowy, to możemy wprost przyjąć w powyższych wyrażeniach ogólnych czyto $m = 1$, czyteż $n = 1$.

Widzimy więc, że we wspomnianych wzorach zasadniczych wykładniki mogą być tak dodatne jak i ujemne, tak całkowite jak i ułamkowe.

59. Pojęcie wykładnika, początkowo wprowadzone jako liczby dodatnej i całkowitej, uogólniliśmy tak, iż za wykładnik możemy już wziąć liczbę czyto całkowitą czyteż ułamkową, czyto dodatną czyteż ujemną — wogóle wymierną. Możemy jednak rozciągnąć jeszcze to pojęcie na przypadek wykładnika niewymiernego.

Jeżeli h jest liczbą niewymierną, to, tak w razie h dodatnego, jak i w razie h ujemnego, możemy, przy dowolnem dodatnem q, znaleźć dwa ułamki $\frac{p}{q}$ i $\frac{p+1}{q}$, między któremi przypada [1]) wartość h. Gdy tedy, przy $a > 0$, mamy a^h, to, wybrawszy takie dodatne i całkowite q, przy którem $\frac{1}{q}$ nie jest większe od stopnia żądanego przybliżenia liczby niewymiernej h, znajdujemy taką całkowitą liczbę p, iżby $\frac{p}{q} < h < \frac{p+1}{q}$ i zamiast potęgi a^h wprowadzamy do rachunku albo potęgę $a^{\frac{p}{q}}$, alboteż $a^{\frac{p+1}{q}}$.

60. Jeżeli podstawa a jest większa od 1, to, według art. 6-go i 21-go, z nierówności $a > 1$ wynika, że przy s dodatnem, czyto całkowitem czyteż ułamkowem, jest $a^s > 1$. Przy s zaś ujemnem, czyto całkowitem czyteż ułamkowem, gdy np. $s = -\sigma$, z nierówności $a > 1$ wynika $a^\sigma > 1$, a więc $1 > \frac{1}{a^\sigma}$, czyli $1 > a^{-\sigma}$, albo $a^s < 1$.

Podobnie, w razie, kiedy liczba dodatna a jest mniejsza od 1, mamy przy dodatnem s także $a^s < 1$, przy ujemnem zaś s jest $a^s > 1$.

Powiemy więc: *potęga dodatna, czyto całkowita, czyteż ułamkowa, podstawy dodatnej jest liczbą większą lub mniejszą od jedności, zależnie od tego, czy podstawa jest większa, czyteż mniejsza od* 1; *potęga ujemna, czyto całkowita czyteż ułamkowa, podstawy dodatnej jest liczbą mniejszą lub większą od jedności zależnie od tego, czy podstawa jest większa, czyteż mniejsza od* 1.

61. Niech będzie $s > t$ i $s = t + r$ (a więc $r > 0$). Przy $a > 0$, rozważmy równość $a^s = a^t . a^r$. Jeżeli $a > 1$, to $a^r > 1$ i $a^s > a^t$; jeżeli zaś $a < 1$, to $a^r < 1$ i $a^s < a^t$. A zatem: *kiedy wykładnik podstawy większej od jedności wzrasta, to potęga również wzrasta; kiedy wykładnik podstawy dodatnej mniejszej od jedności wzrasta, to potęga maleje.*

WPROWADZENIE LICZB UROJONYCH I LICZB ZESPOLONYCH.

62. Gdy bierzemy na uwagę oba, t. j. jeden ze znakiem $+$, drugi ze znakiem $-$, pierwiastki kwadratowe z liczby danej (art. 18), to mówimy, że mamy pierwiastki algebraiczne kwadratowe, i piszemy np. $\sqrt{81} = \pm 9$. Taksamo $\sqrt{+1} = \pm 1$, t. j. *pierwiastki algebraiczne kwadratowe z* $+1$ *są* $+1$ *i* -1. Podobnie napisalibyśmy $\sqrt{162} = \pm 9\sqrt{2}$. Z tego wynika, że znak $\sqrt{\ }$ dwojako bywa pojmowany: raz, jak np. po lewej stronie ostatniej równości, jako oznaczenie któregokolwiek pierwiastka algebraicznego; drugim razem, jak po

---

[1]) Np. $\frac{1732}{1000} < \sqrt{3} < \frac{1732+1}{1000}$, zaś $\frac{-1733}{1000} < -\sqrt{3} < \frac{-1733+1}{1000}$;
$\frac{3769}{1000} < \frac{6}{5}\pi < \frac{3769+1}{1000}$, zaś $\frac{-3770}{1000} < -\frac{6}{5}\pi < \frac{-3770+1}{1000}$.

stronie prawej tejże równości, jako oznaczenie jednego tylko pierwiastka. Podobnie mieć będziemy $\sqrt{a^2}=\pm a$, $\sqrt{a^5}=\pm a^2\sqrt{a}$, $\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\pm(a-b)$.

Z tego wprost widzimy, że z równości $a^2=b^2$ wynika jedna z dwu równości: albo $a=b$, albo też $a=-b$. Gdy podobnie mamy np. $(x-a)^2=b^2$, to z tego wynika albo $x-a=+b$, albo też $x-a=-b$.

63. Niekiedy wypada oznaczyć, iż pewna liczba może otrzymymać tylko wartości dodatne, lub tylko wartości ujemne, a może być niedogodne wprowadzenie zastrzeżenia odpowiednio $a>0$, lub $a<0$, gdyż w *samym* wzorze takich nierówności zaznaczać nie można. Dlatego często, aby oznaczyć pewną liczbę, która może otrzymywać jedynie wartości dodatne, nazywamy ją np. a^2. Należy jednak pamiętać, że w takim razie a^2 oznaczać ma liczbę dodatną, jakąkolwiek zresztą, t. j., iż a^2 nietylko może nie być ani kwadratem liczby całkowitej, aniteż kwadratem liczby ułamkowej, ale nawet może otrzymywać wartości niewymierne (art. 39). Odpowiednio, aby oznaczyć, iż pewna liczba może mieć tylko wartości ujemne, nazywamy ją np. $-a^2$.

64. Ponieważ, podnosząc liczbę, czyto dodatną czyteż ujemną, do kwadratu, otrzymujemy liczbę dodatną, przeto pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej nie jest liczbą ani dodatną, aniteż ujemną.

Gdy mamy $\sqrt{a-b}$, to, dopóki $b<a$, przedstawia $\sqrt{a-b}$ liczbę dodatną i ujemną, bądźto wymierną, bądźteż niewymierną. Przy $b=a$ jest $\sqrt{a-b}=0$. Jeżeli nie będziemy wprowadzali ograniczenia wartości b, to przy $b>a$ przedstawia $\sqrt{a-b}$ nowego rodzaju liczbę, ani dodatną, ani zero, aniteż ujemną, którą nazywamy l i c z b ą u r o j o n ą (imaginäre Z.). Jeżeli więc ujemną różnicę $a-b$ nazwiemy (art. 63) np. $-c^2$, to $\sqrt{-c^2}$ jest liczbą urojoną. W przeciwstawieniu temu liczby dodatne, zero i ujemne nazywamy l i c z b a m i r z e c z y w i s t e m i (reelle, reale Z.).

Liczby urojone wprowadzamy do rachunku z jedynem zastrzeżeniem, iż

$$(\sqrt{-c^2})^2=-c^2, \tag{1}$$

a pozatem wszystkie prawidła na wykonywanie działań na liczbach rzeczywistych stosujemy także do liczb urojonych. Aby zrozumieć znaczenie tego zastrzeżenia, zauważmy, że, zgodnie z niem mieć będziemy np.

$$\sqrt{-3}\times\sqrt{-12}=\sqrt{-3}\times\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=(\sqrt{-3})^2\times\sqrt{4}=-3\times2=-6;$$

nie jest zaś iloczyn $\sqrt{-3}\times\sqrt{-12}$, czyli $\sqrt{(-3)\times(-12)}$ równy $\sqrt{+36}=+6$.

Stosując tedy do liczby urojonej $\sqrt{-c^2}$ wzór (4) art. 22-go, mamy

$$\sqrt{-c^2}=\sqrt{c^2\times(-1)}=\sqrt{c^2}\times\sqrt{-1}; \tag{2}$$

tak np. $\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}\times\sqrt{-1}$. Widzimy więc, że *liczba urojona może być przedstawiona jako iloczyn czynnika rzeczywistego przez* $\sqrt{-1}$. Wskutek tego różne liczby urojone są iloczynami tejsamej liczby urojonej $\sqrt{-1}$ przez odpowiednie liczby rzeczywiste, tak iż, wprowadzając do nauki liczby urojone, właściwie *wprowadzamy jednę tylko nową liczbę* $\sqrt{-1}$.

Zastrzeżenie zatem (1), według (2), wychodzi na zastrzeżenie w prostszej formie, iż

$$(\sqrt{-1})^2=-1. \tag{3}$$

A więc np. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-12} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{12} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3 \times 12} \times (\sqrt{-1}) = -6$.

Ta liczba szczególna $\sqrt{-1}$, którą określa równość (3), jest całkiem odrębna od liczby $+1$, z której powstają dodatne lub ujemne liczby całkowite, ułamkowe i niewymierne, a więc jest liczbą całkiem odrębną od wszystkich liczb dodatnych i ujemnych. Toż samo możemy powiedzieć o każdej liczbie urojonej, jako określonej przez równość (1), sprowadzającą się do równości (3).

Uwzględniając oba pierwiastki (art. 62), mamy $\sqrt{c^2} = \pm c$, przeto, według (2), jest

$$\sqrt{-c^2} = \pm c\sqrt{-1}. \tag{4}$$

Gdy tedy mamy $+c\sqrt{-1}$, lub $-c\sqrt{-1}$, to liczby odpowiednio $+c$ i $-c$ nazywamy spółczynnikami liczby $\sqrt{-1}$. Podobnie np., gdy mamy $-\sqrt{-1}$, jest -1 spółczynnikiem liczby $\sqrt{-1}$, a przez skrócenie tylko mówimy: mniej $\sqrt{-1}$.

Liczbę $\sqrt{-1}$ często oznaczamy literą i, początkową wyrazu (numerus) imaginarius. A więc równości (4) i (3) możemy napisać odpowiednio $\sqrt{-c^2} = \pm ci$, oraz

$$i^2 = -1. \tag{5}$$

65. Ponieważ $(+i)^2 = -1$, oraz $(-i)^2 = (-i).(-i) = +i^2 = -1$, przeto $+i$ oraz $-i$ są liczbami, których kwadrat jest -1, t. j. *pierwiastki algebraiczne kwadratowe z -1 są $+i$ oraz $-i$.*

Dlatego równość (4) t. j. $\sqrt{-c^2} = \pm ci$ przedstawia pierwiastki algebraiczne kwadratowe z liczby $-c^2$; podobnie np. pierwiastki algebraiczne kwadratowe z liczby -3 są $i\sqrt{3}$ oraz $-i\sqrt{3}$. Również, gdy mamy np. $(x-a)^2 = -b^2$, to albo $x - a = bi$, alboteż $x - a = -bi$.

66. Rozważymy potęgi liczby $\sqrt{-1}$. Według (5) mieć będziemy

$$i^3 = i^2.i = (-1).i = -i, \qquad i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = +1,$$
$$i^5 = i^4.i = (+1).i = +i, \qquad i^6 = i^4.i^2 = (+1).(-1) = -1,$$
$$i^7 = i^4.i^3 = (+1).(-i) = -i, \qquad \text{i t. d.},$$

zaś $i^{-1} = (+1).i^{-1} = i^4.i^{-1} = i^3 = -i$, $\quad i^{-2} = i^4.i^{-2} = i^2 = -1$, i t. d.

Wogóle, przy jakiemkolwiek całkowitem p, lub $p = 0$, jest

$$i^{4p} = +1, \quad i^{4p+1} = +i, \quad i^{4p+2} = -1, \quad i^{4p+3} = -i.$$

67. Ponieważ liczba urojona nie jest ani dodatna, aniteż ujemna, pojęcie zaś większej z dwu liczb jest zależne od kierunku, w którym po sobie liczby rzeczywiste przypadają, przeto nie może być mowy, ani o tem, czy pewna liczba urojona jest większa lub mniejsza od jakiejś liczby rzeczywistej, aniteż o tem, która z dwu liczb urojonych jest większa. O dwu zaś liczbach urojonych $+c\sqrt{-1}$ i $-c\sqrt{-1}$, w których spółczynniki $+c$ i $-c$ liczby $\sqrt{-1}$ różnią się tylko znakiem, mówimy krótko, iż te liczby urojone »różnią się od siebie tylko znakiem«.

68. Weźmy dwie liczby, jednę rzeczywistą a, drugą urojoną bi. Tworząc iloczyn lub ilorazy tych liczb, mieć będziemy

$$a.bi = (ab)i, \qquad \frac{a}{bi} = a.(bi)^{-1} = (ab^{-1}).i^3 = -\frac{a}{b}i, \qquad \frac{bi}{a} = \frac{b}{a}i,$$

t. j. otrzymujemy każdym razem liczbę urojoną. Gdy jednak utworzymy sumę lub różnice owych liczb,

$$a+bi, \quad a-bi, \quad bi-a,$$

to otrzymujemy liczby, które nie są ani rzeczywiste, aniteż urojone, — nazywamy je liczbami zespolonemi (complexe Z.) z dwu części, mianowicie z części rzeczywistej (w pierwszych dwu $+a$, w trzeciej $-a$) i z części urojonej (w pierwszej i trzeciej $+bi$, w drugiej $-bi$). Zwykle piszemy naprzód część rzeczywistą liczby zespolonej, a po niej jej część urojoną; dlatego trzecią z powyższych liczb piszemy zazwyczaj tak: $-a+bi$. W części urojonej mamy, jak wiemy (art. 64), spółczynnik (liczby) i; w pierwszej i trzeciej z wypisanych liczb jest nim $+b$, w drugiej $-b$.

Oczywiście, że o porównywaniu wielkości liczb zespolonych czyto z sobą, czyto z liczbami rzeczywistemi, czyteż z liczbami urojonemi mowy być nie może. Część rzeczywista liczby zespolonej może być dodatna lub ujemna, spółczynnik i w liczbie zespolonej może być dodatny lub ujemny, ale liczba zespolona nie jest ani dodatna, aniteż ujemna.

Gdy mamy liczbę zespoloną $a+bi$, to bezwzględnie wzięta wartość $\sqrt{a^2+b^2}$ t. j. pierwiastka kwadratowego z sumy kwadratów części rzeczywistej i spółczynnika i, nazywa się modułem (Modul) tej liczby.

69. Jeżeli dwie liczby zespolone mają tę samę część rzeczywistą, zaś ich części urojone różnią się tylko znakiem (art. 67), to nazywamy je liczbami zespolonemi sprzężonemi z sobą (conjugirte c. Z.). Takiemi są więc liczby $a+bi$ i $a-bi$. Moduły tych liczb są $\sqrt{a^2+b^2}$ i $\sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$, t. j. liczby zespolone sprzężone mają ten sam moduł.

Gdy dwie liczby zespolone sprzężone $a+bi$ i $a-bi$ do siebie dodamy, to otrzymamy liczbę rzeczywistą $2a$, a więc *suma liczb zespolónych sprzężonych jest rzeczywista.*

Utwórzmy iloczyn dwu liczb zespolonych sprzężonych $(a+bi).(a-bi) = (a)^2-(bi)^2 = a^2+b^2$.

A więc *iloczyn liczb zespolonych sprzężonych jest liczbą rzeczywistą, równą kwadratowi modułu każdej z tych liczb.*

70. Liczbę urojoną lub zespoloną możemy oznaczać jedną literą. Tak np., gdy mamy, jak w art. 65-ym, $x-a=bi$, to $x=a+bi$.

Zwykle jednak, kiedy liczby wiadome, w rachunku oznaczane literami początkowemi alfabetu mogą otrzymywać wartości bądźto urojone, bądźteż zespolone, wyraźnie to zaznaczamy. Jeżeli owego zaznaczenia wyraźnie zrobionego niema, to przez owe litery rozumiemy zwykle tylko liczby rzeczywiste.

O DZIAŁANIACH ALGEBRAICZNYCH.

71. W tym rozdziale do pięciu znanych poprzednio działań przybyło nowe szóste: wyciąganie pierwiastka. Te sześć działań nazywamy działaniami algebraicznemi (alg. Operationen). Pierwsze cztery z tych działań, t. j. dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, w razie, kiedy są wykonywane na liczbach dodatnych, wymiernych, przy zastrzeżeniu nadto, iż w odejmowaniu odjemnik nie jest większy od odjemnej, nazywane są także działaniami arytmetycznemi.

Wszelkie działanie rachunkowe, wykonywane w matematyce, które nie jest działaniem algebraicznem, nazywa się działaniem transcendentalnem, czyli działaniem przestępnem (transcendente O.). —

Widzieliśmy, że odejmowanie jest działaniem odwrotnem dodawaniu, że dzielenie jest działaniem odwrotnem mnożeniu oraz, że wyciąganie pierwiastka jest działaniem odwrotnem podnoszeniu do potęgi. Dlatego z sześciu działań algebraicznych trzy, t. j. odejmowanie, dzielenie i wyciąganie pierwiastka, nazywają się ogólnie działaniami odwrotnemi. Odpowiedniej nazwie łacińskiej: »Operationes inversae« przeciwstawieniem jest nazwa: »Operationes directae«. Najlepiej ją oddamy, nazywając dodawanie, mnożenie i podnoszenie do potęgi ogólnie działaniami wprost (idącemi).

Każde z działań odwrotnych wprowadza, jak widzieliśmy, pojęcie nowych liczb: odejmowanie wprowadza liczby ujemne, dzielenie wprowadza liczby ułamkowe, wyciąganie pierwiastka wprowadza liczby niewymierne pierwiastkowe i liczby urojone.

Najprostsze działania, t. j. dodawanie i odwrotne mu odejmowanie, nazywamy działaniami pierwszego rzędu (O. der ersten Stufe), mnożenie i dzielenie nazywamy działaniami drugiego rzędu; nakoniec podnoszenie do potęgi i wyciąganie pierwiastka nazywamy działaniami trzeciego rzędu.

ROZDZIAŁ TRZECI.

LOGARYTMY.

WPROWADZENIE LOGARYTMÓW.

72. Gdy $a^m = b$, to nie tylko przy danych a i m można szukać b (podnoszenie do potęgi), lub przy danych b i m szukać a (wyciąganie pierwiastka), ale także przy danych a i b szukać m. Istnieje więc drugie działanie, odwrotne podnoszeniu do potęgi, działanie przestępne: oznaczenie wykładnika potęgi, do której podnieść należy daną podstawę, aby otrzymać daną liczbę. Tę szukaną liczbę, t. j. wykładnik danej podstawy, odpowiadający danej liczbie, nazywamy logarytmem (Logarithmus) liczby danej przy danej podstawie. Tak np. logarytmem liczby 8 przy podstawie 2 jest liczba 3, gdyż $2^3 = 8$; logarytmem liczby $\frac{1}{81}$ przy podstawie 3 jest liczba -4, gdyż $3^{-4} = \frac{1}{81}$; logarytmem liczby $\frac{1}{3}$ przy podstawie 9 jest liczba $-\frac{1}{2}$, gdyż $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Gdy $a^m = b$, to piszemy $m = \log_a b$. Równości

$$a^m = b \quad \text{i} \quad m = \log_a b \tag{1}$$

są tąż samą równością, w dwu odmiennych wypisaną kształtach.

Gdy liczba m jest niewiadoma, to równania

$$a^x = b \quad \text{i} \quad \log_a b = x$$

są tem samem równaniem, w dwu różnych przedstawionem kształtach. To równanie, dla którego rozwiązania należy wykonać działanie przestępne na liczbach wiadomych, należy do równań ogólnie nazywanych równaniami przestępnemi; nazywane zaś ono bywa równaniem wykładniczem (Exponentialgleichung).

73. Gdy do rachunku wprowadzamy logarytmy, to przyjmujemy, że je wszystkie bierzemy przy tej samej podstawie, tak iż w odpowiednich równościach (1) a ma tę samę wartość, zaś b otrzymuje różne wartości, którym odpowiadają wartości m. Zwykle w takim razie w drugim kształcie równości (1) opuszczamy wskaźnik a.

Według (1), gdy $b=a$, jest $m=1$, gdy zaś $b=1$, jest $m=0$, t. j. przy jakiejbądź podstawie *logarytm podstawy jest jednością*, zaś *logarytm jedności jest* 0.

Za podstawę a nie możemy przyjąć liczby ujemnej; gdyby bowiem było np. $a=-3$, to nie byłoby takiej liczby m, czyto dodatnej, czyteż ujemnej, przy którejby np. $(-3)^m=27$. Nadto, liczba a nie może być równa jedności, gdyż wszelka potęga jedności jest także jednością. Dlatego *przyjmujemy, że podstawa jest liczbą dodatną różną od* 1.

Przy a dodatnem, jakakolwiek jest liczba m, dodatna czy ujemna, wymierna czy niewymierna, zawsze w równości (1) liczba b jest dodatna. Z tego więc wynika, że *rozważamy tylko logarytmy liczb dodatnych.* Zwykle *przyjmujemy* $a>1$, wtedy *logarytmy liczb większych od* 1 *są dodatne,* zaś *logarytmy liczb mniejszych od* 1 *są ujemne* (art. 60) i *większemu logarytmowi odpowiada większa liczba* (art. 61), z czego wynika, że, nawzajem, *większej liczbie odpowiada większy logarytm.* Przy takiej podstawie logarytmem liczby 0 jest $-\infty$.

WŁASNOŚCI OGÓLNE LOGARYTMÓW.

74. Gdy mamy $a^m=b$, $a^\mu=\beta$, to $a^{m-\mu}=\frac{b}{\beta}$. Jeżeli $\mu=m$, a więc $m-\mu=0$, to $\frac{b}{\beta}=1$, czyli $\beta=b$; nawzajem, jeżeli $\beta=b$, to $a^{m-\mu}=1$, a więc $m-\mu=0$, czyli $\mu=m$. Możemy to, z uwagi że $m=\log b$, $\mu=\log\beta$, tak wypowiedzieć: *przy tej samej podstawie równym logarytmom odpowiadają liczby równe i liczbom równym odpowiadają logarytmy równe.*

75. Gdy mamy

$$a^{m_1}=b_1,\ \text{czyli}\ m_1=\log b_1;\quad a^{m_2}=b_2,\ \text{czyli}\ m_2=\log b_2, \tag{1}$$

to $b_1 b_2=a^{m_1+m_2}$, $\frac{b_1}{b_2}=a^{m_1-m_2}$, czyli $m_1+m_2=\log(b_1b_2)$, $m_1-m_2=\log\frac{b_1}{b_2}$, albo według (1)

$$\log(b_1b_2)=\log b_1+\log b_2,\qquad \log\frac{b_1}{b_2}=\log b_1-\log b_2.$$

Taksamo okażemy, że gdy $a^{m_1}=b_1$, $a^{m_2}=b_2,\ldots,a^{m_n}=b_n$, to

$$\log(b_1b_2\ldots b_n)=\log b_1+\log b_2+\ldots+\log b_n.$$

A więc *logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów czynników,* zaś *logarytm ilorazu równa się różnicy logarytmów dzielnej i dzielnika.*

Gdy mamy $a^m = b$, czyli $m = \log b$, to

$$b^k = a^{km}, \text{ czyli } \log(b^k) = km, \quad \sqrt[k]{b} = a^{\frac{m}{k}}, \text{ czyli } \log\sqrt[k]{b} = \frac{m}{k},$$

albo
$$\log(b^k) = k\log b, \quad \log\sqrt[k]{b} = \frac{\log b}{k},$$

t. j. *logarytm potęgi liczby równa się logarytmowi liczby, pomnożonemu przez wykładnik potęgi*, zaś *logarytm pierwiastka z liczby równa się logarytmowi tej liczby, podzielonemu przez wykładnik pierwiastka.*

Widzimy więc, że gdy na liczbach mamy wykonać: mnożenie, dzielenie, podnoszenie do potęgi, wyciąganie pierwiastka, to tym działaniom odpowiadają na logarytmach owych liczb działania odpowiednie niższego rzędu: dodawanie, odejmowanie, mnożenie dzielenie. Na tem polega korzyść z użycia logarytmów w rachunku.

76. Ogół logarytmów rozmaitych liczb dodatnych, wziętych przy tej samej podstawie a, nazywamy **układem logarytmów** (logarithmisches System) o podstawie a.

Gdy mamy dwa układy logarytmów, jeden o podstawie a, drugi zaś o podstawie α (jest zatem $\alpha \gtrless a$), to w nich logarytmy jakiejkolwiek tejsamej liczby dodatnej, którą nazwijmy b, są określone równościami

$$a^m = b, \quad \text{czyli} \quad m = \log_a b; \qquad \alpha^\mu = b, \quad \text{czyli} \quad \mu = \log_\alpha b.$$

Nie może być $\mu = m$, gdyż z pierwszych kształtów tych równości wynika $a = b^{\frac{1}{m}}$ $\alpha = b^{\frac{1}{\mu}}$; a więc byłoby $a = \alpha$; przeto liczby $\log_a b$ i $\log_\alpha b$ są od siebie różne.

Aby znaleźć związek, zachodzący między temi dwiema liczbami, weźmy logarytmy obu stron równości np. $\alpha^\mu = b$ przy podstawie a; będziemy mieli

$$\log_a(\alpha^\mu) = \log_a b, \quad \text{albo} \quad \mu\log_a\alpha = \log_a b, \quad \text{czyli} \quad \log_\alpha b \times \log_a\alpha = \log_a b,$$

skąd
$$\log_\alpha b = \log_a b \times \frac{1}{\log_a \alpha}.$$

Według tego wzoru, aby z logarytmu jakiejkolwiek liczby b przy podstawie a przejść do jej logarytmu przy podstawie α, należy pierwszy logarytm pomnożyć przez liczbę $\frac{1}{\log_a \alpha}$, niezależną od liczby b. Jeżeli podstawę a nazwiemy »dawną«, podstawę zaś α »nową«, to będziemy mogli powiedzieć: *logarytm liczby przy nowej podstawie jest równy logarytmowi tejże liczby przy podstawie dawnej, pomnożonemu przez odwrotność logarytmu nowej podstawy, wziętemu przy podstawie dawnej.* Ten czynnik $\frac{1}{\log_a \alpha}$ nazywa się **modułem układu logarytmów** nowego względem dawnego.

77. Za podstawę układu logarytmów w badaniach teoretycznych przyjmuje się szczególną liczbę przestępną; jest ona sumą nieskończenie wielu coraz zmniejszających się składników

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1).n} + \ldots,$$

które następują po sobie według prawa, iż w trzecim i w każdym następnym przybywa w mianowniku czynnik będący liczbą następującą w szeregu liczb naturalnych. Liczbę, którą ta suma przedstawia, oznacza się zwykle literą e; można ją wyliczyć tylko z przybliżeniem i np. jest z przybliżeniem na $\frac{1}{10^{10}}$ (z niedomiarem) $e = 2{\cdot}7182818284$.

Układ logarytmów o podstawie e nazywa się układem logarytmów[1]) naturalnych. (natürliches l. S.).

Przy wykonywaniu różnych rachunków zapomocą logarytmów, przyjmuje się za ich podstawę liczbę 10. Układ logarytmów o podstawie 10 nazywa się układem logarytmów[2]) zwyczajnych (gewöhnliches l. S.). O tych tylko logarytmach dalej tu mówić będziemy; przeto nie będziemy pisali wskaźnika 10, odpowiadającego podstawie.

Zestawienie liczb z ich logarytmami nazywamy tablicami logarytmów (Logarithmentafeln). Zwykle w tablicach logarytmów zwyczajnych są podane logarytmy szeregu naturalnego liczb od 1 do 10000, albo od 1 do 100000 lub do 108000, z przybliżeniem w pierwszym razie na $\frac{1}{10^4}$ lub $\frac{1}{10^5}$, w drugim zaś razie na $\frac{1}{10^6}$ lub na $\frac{1}{10^7}$, czyli odpowiednio z 4-ma lub 5-u, albo z 6-u lub 7-u cyframi dziesiętnemi. Nazywamy je odpowiednio tablicami 4-ocyfrowemi, . . ., 7-ocyfrowemi. Zasady rachunku przy pomocy logarytmów są niezależne od tego, ilocyfrowych tablic używamy. Będziemy tu używali tablic 5-ocyfrowych.

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW ZWYCZAJNYCH.

78. Logarytm zwyczajny liczby jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść 10, aby otrzymać owę liczbę.

Przypuśćmy, że logarytm liczby wymiernej b jest liczbą wymierną $\frac{l}{m}$, tak iż $10^{\frac{l}{m}} = b$. — Jeżeli ułamek $\frac{l}{m}$ jest liczbą dodatną, to możemy przyjąć, że l i m są liczbami dodatnemi i całkowitemi. Z wypisanej równości wynika $10^l = b^m$, czyli $2^l . 5^l = b^m$. Ponieważ liczba b^m jest iloczynem l czynników 2 i l czynników 5, i b jest liczbą wymierną, przeto sama liczba b może być tylko iloczynem $\frac{l}{m}$ czynników 2 i $\frac{l}{m}$ czynników 5, z czego wprost wynika, że $\frac{l}{m}$ może być tylko liczbą całkowitą, t. j. b jest w tym razie całkowitą

---

1) Napier (wym. neper), który pierwszy powziął pomysł rachunku przy pomocy logarytmów (on także utworzył termin „logarytm“, liczba stosunkowa), tej właśnie liczby e użył za podstawę układu logarytmów w swem dziele (wydanem w r. 1614).

2) Tę liczbę pierwszy przyjął za podstawę Briggs w swych tablicach (wydanych w r. 1624). Modułem układu logarytmów zwyczajnych, względem układu logarytmów naturalnych, oznaczanym zwykle przez M, jest z przybliżeniem na $\frac{1}{10^6}$ liczba $M = 0{\cdot}434294$, a więc modułem układu logarytmów naturalnych względem układu logarytmów zwyczajnych, z takiemże przybliżeniem jest liczba $\frac{1}{M}$. Tak np.

$$\log_e 100 = \log_{10} 100 \times \frac{1}{M} = 2 \times 2{\cdot}302585 = 4{\cdot}605170.$$

i dodatną potęgą liczby 10. — Jeżeliby zaś ułamek $\frac{l}{m}$ był liczbą ujemną i np. $\frac{l}{m} = -\frac{\lambda}{\mu}$, gdzie λ i μ są liczbami dodatnemi i całkowitemi, to z równości $10^{-\frac{\lambda}{\mu}} = b$ wynika $10^{-\lambda} = b^{\mu}$, czyli $\frac{1}{2^{\lambda} \cdot 5^{\lambda}} = b^{\mu}$. Ponieważ liczba b^{μ} jest iloczynem λ czynników $\frac{1}{2}$ i λ czynników $\frac{1}{5}$ i b jest liczbą wymierną, przeto liczba $\frac{\lambda}{\mu}$ może być tylko liczbą całkowitą, t. j. b jest w tym przypadku odwrotnością całkowitej dodatnej potęgi liczby 10.

Z liczb zatem wymiernych jedynie liczby, które są całkowitemi potęgami liczby 10, lub liczby $\frac{1}{10}$, mają logarytmy zwyczajne wymierne i mianowicie są niemi liczby całkowite. Wszystkie zaś logarytmy zwyczajne innych liczb całkowitych i ułamkowych są niewymierne.

79. Weźmy z tablic np. $\log 7708 = 3{\cdot}88694$. Całkowitą część logarytmu (jak tu 3) nazywamy c e c h ą l o g a r y t m u (Charakteristik, Kennziffer d. L.), jego zaś część ułamkową (jak tu 0·88694) nazywamy m a n t y s ą l o g a r y t m u. (Mantisse d. L.).

Ponieważ $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$ i t. d., przeto (według tego, cośmy mówili w art. 73): logarytmy liczb większych od 1, a mniejszych od 10-u, mają cechę 0; logarytmy liczb niemniejszych od 10, a mniejszych od 100-u, mają cechę 1; logarytmy liczb niemniejszych od 100-u, a mniejszych od 1000-a, mają cechę 2; i t. d. Innemi słowy, *cecha logarytmu liczby, niemniejszej od 1, ma o 1-ę mniej jedności, niż jest cyfr w całkowitej części tej liczby.* Dlatego w wielu tablicach nie podaje się cech, lecz tylko same mantysy.

Gdybyśmy wzięli liczbę 10 razy większą od 7708, to mielibyśmy

$$\log 77080 = \log(7708 \times 10) = \log 7708 + \log 10 = 3{\cdot}88694 + 1 = 4{\cdot}88694.$$

Podobnie

$$\log 770{\cdot}8 = \log \frac{7708}{10} = \log 7708 - \log 10 = 3{\cdot}88694 - 1 = 2{\cdot}88694.$$

Oczywiście, że, gdybyśmy wzięli liczbę 100 razy większą, lub 100 razy mniejszą, to mantysa równieżby się nie zmieniła, cecha zaś odpowiednio powiększyłaby się, lub zmniejszyła o 2, i t. d.

Powiemy więc ogólnie: *liczby, których cyfry od pierwszej znaczącej do ostatniej znaczącej przedstawiają tę samę liczbę, mają tę samę mantysę.*

80. Gdy $\log 7708 = 3{\cdot}88694$, to $\log 0{\cdot}7708 = 0{\cdot}88694 - 1$. Moglibyśmy to odejmowanie wykonać, odejmując oddzielne cyfry mantysy od 9, tylko ostatnią jej cyfrę znaczącą od 10, czyli, jak się mówi, biorąc jej »dopełnienie arytmetyczne« do 1. Otrzymalibyśmy $\log 0{\cdot}7708 = -0{\cdot}11306$, liczbę ujemną, jako logarytm liczby mniejszej od 1.

Zwykle unikamy wprowadzania do rachunku logarytmów, którychby mantysy były ujemne. Dlatego zamiast wykonywać powyższe odejmowanie, pozostawiamy $\log 0{\cdot}7708 = 0{\cdot}88694 - 1$, tylko krócej to wyrażenie piszemy. Mianowicie, znak —, stać mający przed 1, piszemy nad tą cyfrą i stawiamy ją wraz z tym znakiem przed mantysą dodatną, jako cechę ujemną. Jest więc $\log 0\cdot7708 = \overline{1}\cdot88694$.

Podobnie $\log 0\cdot0007708 = -3\cdot11306$ możemy napisać albo $0\cdot88694-4$, alboteż $\overline{4}\cdot88694$.

Powiemy więc ogólnie: *cecha ujemna logarytmu liczby dziesiętnej mniejszej od 1 ma tyle jedności, ile jest początkowych zer w danej liczbie, wraz z zerem na miejscu części całkowitej, jego zaś mantysa dodatna jest ta sama, co mantysa logarytmu liczby, powstałej wskutek opuszczenia znaku, oddzielającego cyfry dziesiętne.*

WYKONYWANIE DZIAŁAŃ NA LOGARYTMACH.

81. Przypuśćmy, że mamy znaleźć logarytmy takich liczb:

$$abc,\ abc^{-1},\ a^d,\ (abc^{-1})^d,\ \sqrt[d]{a},\ \sqrt[d]{abc^{-1}},$$

wiedząc, że np. $\log a = 0\cdot49929$, $\log b = 0\cdot00338$, $\log c = 2\cdot21340$, $d = 6$.

Aby znaleźć $\log(abc)$, pod $\log a$ podpiszemy wprost $\log b$ i $\log c$ i wykonamy dodawanie,

$$\begin{array}{r} 0\cdot49929 \\ 0\cdot00338 \\ 2\cdot21340 \\ \hline \log abc = 2\cdot71607. \end{array}$$

Aby znaleźć $\log \dfrac{ab}{c}$, należałoby do $\log a$ dodać $\log b$, a od tej sumy odjąć $\log c$. Chcąc jednak uniknąć tych dwu różnych działań, zamiast $-\log c = -2\cdot21340 = -2-0\cdot21340$, napiszemy $-\log c = -3+(1-0\cdot21340) = -\overline{3}+0\cdot78660 = \overline{3}\cdot78660$. A więc, napisawszy $\log a$ i $\log b$, następnie napiszemy $-\log c$ w taki sposób: do cechy $\log c$ dodamy 1 i weźmiemy $\overline{3}$, mając zaś przed oczyma w tablicach mantysę $\log c$, weźmiemy jej dopełnienie arytmetyczne do jedności. Wypadnie zatem mantysy wszystkie do siebie dodać, a za cechę wziąć sumę algebraiczną cech (w tym przypadku należy uwzględnić $+1$, otrzymaną z dodania dziesiętnych części mantys),

$$\begin{array}{r} 0.49929 \\ 0\cdot00338 \\ \overline{3}\cdot78660 \\ \hline \log \dfrac{ab}{c} = \overline{2}\cdot28927. \end{array}$$

Aby znaleźć $\log(a^6)$, należy przez 6 pomnożyć $\log a$. Patrząc się zatem na $\log a$ w tablicach, odrazu wypiszemy

$$\log a^6 = 2\cdot99574.$$

Podobnie, aby znaleźć $\log\left(\dfrac{ab}{c}\right)^6$, otrzymawszy naprzód, jak powyżej, $\log \dfrac{ab}{c}$, pomnożymy $\overline{2}\cdot28927$ przez 6. W tym razie mamy przez 6 pomnożyć $0\cdot28927-2$, a więc, kiedy z pomnożenia dziesiątych otrzymamy $+1$, to wraz z $-2\times6=-12$ mieć będziemy cechę -11

$$\log\left(\frac{ab}{c}\right)^6 = \overline{11}\cdot73562.$$

Aby znaleźć $\log\sqrt[6]{a}$, patrząc się na $\log a$ w tablicach, wypiszemy iloraz z podzielenia go przez 6.

$$\log\sqrt[6]{a} = 0\text{·}08322.$$

Podobnie, aby znaleźć $\log\sqrt[6]{\frac{ab}{c}}$, otrzymawszy naprzód $\log\frac{ab}{c}$, dzielimy go przez 6. Zamiast jednak przez 6 dzielić $-2+0\text{·}28927$, z uwagi, że cechę mamy otrzymać całkowitą, przez 6 dzielimy $-6+4\text{·}28927$; otrzymamy więc

$$\log\sqrt[6]{\frac{ab}{c}} = \overline{1}\text{·}71488.$$

Zauważmy jeszcze, że, gdybyśmy mieli znaleźć $\log\frac{ab}{c}$, np. w razie, kiedy $\log a = 0\text{·}49929$, $\log b = 1\text{·}0038$, $\log c = \overline{3}\text{·}21340$, to, pod $\log a$ podpisawszy $\log b$, należałoby następnie podpisać $-\log c = -(-3+0\text{·}21340) = +3-0\text{·}21340$. Zamiast tego, podpiszemy $+2+(1-0\text{·}21340) = 2\text{·}78660$, t. j., mając odejmować logarytm z cechą ujemną, a dodatną mantysą, dodajemy logarytm, którego mantysa jest dopełnieniem arytmetycznem poprzedniej do 1, cecha zaś jest dodatna i ma o 1 mniej jedności.

UŻYCIE TABLIC LOGARYTMÓW.

82. W dwu razach zachodzi potrzeba użycia tablic logarytmów, mianowicie: kiedy, mając daną liczbę, szukamy jej logarytmu; albo też kiedy mając dany logarytm, szukamy liczby, której on odpowiada.

α. Mając daną liczbę, umiemy odrazu napisać cechę jej logarytmu (art. 79, 80); szukamy więc w tablicach tylko jego mantysy. Możemy przeto przy poszukiwaniu mantysy daną liczbę uważać za całkowitą (art. 79), t. j. nie zważać na znak, oddzielający w niej cyfry dziesiętne.

Jeżeli liczba nie ma więcej, niż 4 cyfry, to mantysę jej logarytmu wprost znajdziemy w tablicach.

Jeżeli liczba ma więcej, niż 4 cyfry, np. gdy mamy 20·5694, to mantysa logarytmu tej liczby, czyli mantysa $\log 205694$, nie znajduje się w tablicach. Wiemy jednak, że ona jest większa, niż mantysa logarytmu liczby 2056, mniejsza zaś, niż mantysa logarytmu liczby 2057 (art. 73), które obie są w tablicach:

$$\log 2056 = 3\text{·}31302,$$
$$\log 2057 = 3\text{·}31323.$$

Różnica tych logarytmów wynosi 0·00021. Różnicę logarytmów dwu sąsiednich w tablicach liczb nazywamy *różnicą tablicową*, odpowiadającą mniejszej z tych liczb; wypowiadamy ją, jakby liczbę całkowitą, rozumiejąc, że mamy na myśli części, oznaczane na ostatniem miejscu, zachowywanem w mantysach, t. j. części stotysiączne. Tak więc zamiast w tym przypadku mówić, iż różnica tablicowa, odpowiadająca liczbie 2056, jest 0·00021, powiemy, iż jest ona 21.

Przypatrując się uważnie tej części naszych tablic, w której są podane logarytmy liczb 4-ocyfrowych, dostrzeżemy, że w początku [1]) różnica tablicowa wynosi 43, następnie zaś stale się zmniejsza, w końcu zaś tablic wynosi ona 5, a nawet 4. Zauważymy także, że każda z tych różnic od 43 do 4 powtarza się dość długo. Taksamo nasza różnica 21 odpowiada dłuższemu szeregowi liczb. Mając więc na uwadze 5-ocyfrowe mantysy, rozumujemy w taki sposób: jeżeli przy powiększaniu się liczb o 1, logarytmy w tym obszarze stale powiększają się o 21, to powiększanie się liczby jest proporcyonalne względem powiększania się logarytmu. Jeżeli więc oznaczymy różnicę $\log 2056{\cdot}94 - \log 2056 = \delta$, to

$$\delta : 21 = 0{\cdot}94 : 1, \quad \text{skąd} \quad \delta = 19{\cdot}74,$$

a więc przyjmiemy $\delta = 20$ i $\log 2056{\cdot}94 = 3{\cdot}31302 + 0{\cdot}00020 = 3{\cdot}31322$. A zatem szukany $\log 20{\cdot}5694 = 1{\cdot}31322$.

Moglibyśmy tu więc wyznaczyć mantysę 6-ocyfrowej liczby. Gdybyśmy mieli 7-ocyfrową liczbę np. 2056·947, to już nasze tablice nie dozwalałyby na uwzględnienie w mantysie ostatniej cyfry tej liczby, albowiem największa nawet różnica tablicowa 43 jest już taka, że choćby owa 7-a cyfra była 9, to z proporcyi $\delta : 43 = 0{\cdot}009 : 1$ wynika $\delta = 0{\cdot}387$, a więc $\delta < 0{\cdot}5$, t. j. nie ma wpływu na 5-tą cyfrę w mantysie. Gdybyśmy zaś mieli liczbę więcej niż 4-ocyfrową i jej logarytm wypadałoby wyznaczyć przy pomocy końcowej części naszych tablic, w której różnica tablicowa wynosi 4 lub 5, to nie moglibyśmy uwzględnić nawet 6-ej cyfry. Albowiem z proporcyi $\delta : 5 = 0{\cdot}09 : 1$ wynika $\delta = 0{\cdot}45 < 0{\cdot}5$. A zatem przy pomocy naszych tablic ponad 4 początkowe cyfry możemy, przy odszukiwaniu logarytmów, uwzględniać dalsze dwie cyfry, przy posiłkowaniu się jednak końcową częścią tablic tylko dalszą jednę cyfrę. Gdy więc w danej liczbie jest więcej cyfr, to, biorąc mantysę, należy na nie nie zważać, lecz, kiedy pierwsza z nich jest 5 lub większa, wypada poprzednią powiększyć o 1.

β. Mając dany logarytm liczby nieznanej, zważamy naprzód na jego mantysę, gdyż cecha jego wyznacza nam tylko miejsce znaku, oddzielającego część całkowitą liczby.

Zauważywszy początkowe dwie lub trzy cyfry mantysy, szukamy mantys, mających takie same owe cyfry. Następnie zaś, pośród owych mantys szukamy takiej, którejby dalsze cyfry także były takie same, jak w mantysie danego logarytmu. Jeżeli taką mantysę znajdziemy, to wprost bierzemy liczbę jej odpowiadającą, w której, zgodnie z cechą danego logarytmu, stawiamy znak, oddzielający część całkowitą.

Jeżeliby zaś nie było w tablicach mantysy, której wszystkie cyfry byłyby takie same, jak w mantysie danego logarytmu, to z dwu mantys w tablicach, między któremi przypada mantysa danego logarytmu, bierzemy mniejszą i zaznaczamy liczbę, której ona odpowiada. Np., gdy mamy dany logarytm $\overline{2}{\cdot}31321$, to mantysa 0·31321 przypada między mantysami 0·31302

[1]) Różnice $\log 1002 - \log 1001$ i $\log 1005 - \log 1004$, z których każda jest 44, powstały wskutek przybliżenia z nadmiarem $\log 1002$ i $\log 1005$ (por. tablice 7-ocyfrowe).

i 0·31323; bierzemy więc mantysę 0·31302, która jest logarytmem liczby 2·056. Ponieważ różnica tablicowa mantysy, odpowiadającej tej liczbie, wynosi 21, różnica zaś między wziętą mantysą a mantysą danego logarytmu wynosi 19, przeto, jeżeli różnicę między liczbą, której logarytm jest 0·31321, a liczbą 2·056 nazwiemy $\frac{d}{10^3}$, to, podobnie rozumując, jak poprzednio, dojdziemy do proporcyi

$$d:1 = 19:21, \quad \text{skąd} \quad d = 0·904\ldots.$$

Ponieważ jednak wiemy, iż na 5-ocyfrowe mantysy tylko najwięcej 6 początkowych cyfr liczby wpływ mieć może, przeto wniesiemy, iż 0·31321 jest logarytmem liczby 2·05690. Wskutek tego $\overline{2}·31321 = \log 0·0205690$. Pamiętać jednak należy, że, gdyby mantysa danego logarytmu przypadała w końcowej części naszych tablic, to moglibyśmy wyznaczyć tylko 5 początkowych cyfr liczby.

Wyznaczenie większej ilości cyfr, niż dozwala przybliżenie, z jakiem logarytmy są podane w tablicach, jest błędem rachunkowym.

83. Rozważymy jeszcze, jak przy pomocy tablic 7-ocyfrowych znaleźć logarytm liczby danej, lub znaleźć liczbę, odpowiadającą danemu logarytmowi.

α. Gdy mamy znaleźć log 20·569435, to, napisawszy cechę 1, szukamy w tablicach mantysy logarytmu liczby, utworzonej przez 5 pierwszych cyfr liczby danej, t. j. mantysy liczby 20569, i tę przypisujemy do cechy; będziemy więc mieli 1·3132132. Odpowiednia tablica różnicowa jest 211. Mamy w tablicach na tejże stronie na boku dodatkową tabliczkę, nad którą jest wypisana liczba 211. Tabliczka ta obejmuje obliczone już 0·1, 0·2, ..., 0·9 części tej liczby 211 (tak zwane: partes proportionales), wypisane jednak obok cyfr: 1, 2, ..., 9. Ponieważ w danej liczbie mamy na 6-em miejscu cyfrę 4, na 7-em cyfrę 3, na 8-em cyfrę 5, przeto przedstawiają te cyfry odpowiednio 0·4, 0·03, 0·005 tych części liczby danej, które są przedstawione przez 5-tą jej cyfrę. Wskutek tego odpowiadają im według owej tabliczki takie części tablicowej różnicy: 84·4 (tę wprost znajdujemy w tabliczce obok 4), 6·3 (tę otrzymujemy, zmniejszając 10 razy liczbę w tabliczce obok 3 i opuszczając setne), 1·1 (tę otrzymujemy, zmniejszając 100 razy liczbę w tabliczce obok 5 i opuszczając setne). Obliczając logarytm liczby danej na boku, zaznaczamy całe to postępowanie w ten sposób:

$$\begin{array}{rr} 20·569 & 1·3132132 \\ 4 & 84·4 \\ 3 & 6·3 \\ 5 & 1·1 \\ \hline & 1·3132224 \end{array};$$

a więc log 20·569435 = 1·3132224.

Gdyby w danej liczbie była jeszcze 9-ta cyfra, to tablice 7-ocyfrowe nie dozwoliłyby na uwzględnienie owej cyfry w mantysie. Gdyby zaś należało znaleźć logarytm liczby przy pomocy końcowej części tych tablic, to nawet nie możnaby uwzględnić w mantysie wpływu 8-ej cyfry liczby. A więc przy pomocy 7-ocyfrowych tablic można, prócz początkowych 5-u cyfr, uwzględnić dalszych 3, ale przy posiłkowaniu się końcową częścią tych tablic tylko 2.

β. Szukajmy liczby, której logarytm jest 1·3132224. Po znalezieniu w tablicach, iż mantysa tego logarytmu przypada między mantysami 0·3132132 i 0·3132343, oznaczamy zaraz, że 0·3132132 = log 2·0569, że odpowiadająca różnica tablicowa jest 211, oraz, że różnica między mantysą daną, a mantysą tylko co wypisaną jest 92. Przy pomocy tabliczki odnoszącej się do liczby 211, postępujemy w sposób, który łatwo można już wyrozumieć z następującego obliczenia (zwykle na boku wykonywanego):

$$\begin{array}{rr}
92 & \\
\underline{84{\cdot}4} & 4 \\
7{\cdot}6 & \\
\underline{6{\cdot}3} & 3 \\
1{\cdot}3 & \\
1{\cdot}3 & \underline{6} \\
 & 436
\end{array};$$

a więc $1{\cdot}3132224 = \log(20{\cdot}569 + 0{\cdot}000436) = \log 20{\cdot}569436$.

WYKONYWANIE RACHUNKÓW PRZY POMOCY LOGARYTMÓW.

84. Gdy chcemy obliczyć

$$x = \frac{\sqrt[7]{(372{\cdot}4073 - \pi)^3} \,.\, \sqrt[5]{2629}}{\sqrt[3]{(6258{\cdot}96)^2}},$$

to dla znalezienia $\log x$, należy do $\frac{3}{7}\log(372{\cdot}4073 - \pi) = \frac{3}{7}\log 369{\cdot}2657$ dodać $\frac{1}{5}\log 2629$ oraz $-\frac{2}{3}\log 6{\cdot}258{\cdot}96$. Z tych składników drugi możemy wprost wyznaczyć, dzieląc logarytm, który znajdziemy w tablicach, przez 5; składniki zaś pierwszy i trzeci należy uprzednio obliczyć.

$$\begin{array}{rll}
\log 369{\cdot}2 = & 2{\cdot}56726 & \delta : 12 = 0{\cdot}66 : 1 \\
 & \underline{\phantom{2{\cdot}5672}8} & \delta = 7{\cdot}92 \\
\log 369{\cdot}266 = & 2{\cdot}56734 & \\
3\log 369{\cdot}266 = & 7{\cdot}70202 & \\
\frac{3}{7}\log 369{\cdot}266 = & 1{\cdot}10029 & \\
\log 6258 = & 3{\cdot}79644 & \delta : 6 = 0{\cdot}96 : 1 \\
 & \underline{\phantom{3{\cdot}7964}6} & \delta = 5{\cdot}76 \\
\log 6258{\cdot}96 = & 3{\cdot}79650 & \\
2\log 6258{\cdot}96 = & 7{\cdot}59300 & \\
\frac{2}{3}\log 6258{\cdot}96 = & 2{\cdot}53100 & \\
\frac{3}{7}\log 369{\cdot}2657 = & 1{\cdot}10029 & \\
\frac{1}{5}\log 2629 = & 0{\cdot}68396 & \\
-\frac{2}{3}\log 6258{\cdot}96 = & \underline{\bar{3}{\cdot}46900} & \\
\log x = & \bar{1}{\cdot}25325 & \\
\log 0{\cdot}1791 = & \bar{1}{\cdot}25310 & d : 1 = 15 : 24 \\
x = & 0{\cdot}179163 & d = 0{\cdot}625.
\end{array}$$

85. Gdybyśmy mieli obliczyć np. $x = -\sqrt[3]{(6258{\cdot}962)^2}$, to znaleźlibyśmy naprzód $\log(-x) = 2{\cdot}53100$, z czego wnieślibyśmy, iż $-x = 339{\cdot}623$. A więc, $x = -339{\cdot}623$.

86. Wykonywając rachunek przy pomocy logarytmów, należy się starać o to, aby w nim jak najmniejszą ilość razy potrzeba było z otrzymanego logarytmu przechodzić do liczb.

Np. obliczając $\sqrt{a^2 - b^2}$, wypadałoby, po znalezieniu $\log a^2$, z tablic odszukać a^2, po znalezieniu $\log b^2$, odszukać z tablic b^2, następnie po odjęciu b^2 od a^2 po znalezieniu $\log \sqrt{a^2 - b^2}$, odszukać z tablic $\sqrt{a^2 - b^2}$; czyli trzebaby 3 razy ze znalezionego logarytmu odszukiwać w tablicach liczbę.

Jeżeli jednak dane wyrażenie przedstawimy tak: $\sqrt{(a+b)(a-b)}$, łatwo wyrachujemy liczby $a+b$ i $a-b$, a następnie po obliczeniu $[\log(a+b)+\log(a-b)]\frac{1}{2}$ raz tylko z tak znalezionego logarytmu odszukamy w tablicach liczbę.

Podobnie np., jeżelibyśmy objętość stożka ściętego chcieli przy pomocy logarytmów obliczyć wprost z formuły $\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$, to należałoby 4 razy ze znalezionego logarytmu odszukiwać w tablicach liczbę. Przekształciwszy jednak tę formułę w taki sposób: $\frac{\pi h}{3}\left[(R+r)^2-Rr\right]$, możemy uprzednio znaleźć $\sqrt{Rr}=a$ oraz liczby $R+r+a$ i $R+r-a$, a następnie obliczyć $\log\left[\frac{\pi h}{3}(R+r+\sqrt{Rr})(R+r-\sqrt{Rr})\right]$. W ten sposób tylko dwa razy ze znalezionego logarytmu wypadnie w tablicach odszukiwać liczby.

W rachunkach, wykonywanych przy pomocy logarytmów, pominięcie podobnego przekształcenia uważane bywa za błąd rachunkowy.

87. Równanie wykładnicze. Gdy weźmiemy logarytmy obu stron równań wykładniczych (art. 72)

$$a^x=b, \qquad \sqrt[x]{\alpha}=\beta,$$

t. j.

$$x\log a=\log b, \qquad \frac{1}{x}\log\alpha=\log\beta,$$

to znajdziemy

$$x=\frac{\log b}{\log a}, \qquad x=\frac{\log\alpha}{\log\beta}.$$

Możemy tu zastosować logarytmy do obliczenia wartości tych ułamków, t. j. po znalezieniu odpowiednio

$$\log x=\log(\log b)-\log(\log a), \quad \log x=\log(\log\alpha)-\log(\log\beta),$$

obliczyć odpowiednią wartość x.

Gdybyśmy mieli $a^{m^x}=b$, to $m^x\log a=\log b$, zaś

$$x\log m+\log(\log a)=\log(\log b), \quad \text{skąd } x=\frac{\log(\log b)-\log(\log a)}{\log m}.$$

Po znalezieniu tu liczby, którą przedstawia różnica w liczniku, możemy do obliczenia wartości tego ułamka zastosować logarytmy.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

RÓWNANIE STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

ROZWIĄZANIA RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO.

88. Gdy mamy równanie stopnia 2-go z jedną niewiadomą, którą nazwijmy x, to w niem mogą być tylko wyrazy zawierające x^2, wyrazy zawierające x^1 i wyrazy nie zawierające x. Jeżeli wszystkie wyrazy przeniesiemy na jednę np. lewą stronę równania i sumę algebraiczną czynników, przez które x^2 jest mnożone, nazwiemy a, sumę algebraiczną czynników, przez

które x^1 jest mnożone nazwiemy b, sumę zaś algebraiczną wyrazów, nie zawierających x, nazwiemy c, to każde równanie stopnia 2-go z jedną niewiadomą będzie kształtu

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (1)$$

Dopóki każda z liter a, b i c może przedstawiać liczbę dowolną, kształt ten nazywamy kształtem ogólnym równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą. Jeżeli zaś choćby jedna z nich nie może przedstawiać dowolnie obranej liczby, np. gdy mamy $ax^2+bx+(a-b)=0$, to wtedy o takich równaniach kształtu (1) mówimy, iż one są w kształcie zwyczajnym.

W równaniu (1) nazywamy a spółczynnikiem drugiej potęgi niewiadomej, b spółczynnikiem pierwszej potęgi niewiadomej, zaś c wyrazem wiadomym równania. Ponieważ równanie (1) możemy napisać $ax^2+bx^1+cx^0=0$, przeto a, b i c nazywamy ogólnie spółczynnikami równania.

W równaniu stopnia 2-go (1) każda z liczb b i c może być równa zeru, a zaś zerem być nie może, gdyż wówczas nie byłoby ono równaniem stopnia 2-go. Jeżeli tak b jak i c są różne od zera, to równanie (1) jest równaniem zupełnem; jeżeli zaś $c=0$, lub jeżeli $b=0$, lub nakoniec jeżeli $b=c=0$, to mamy równania niezupełne, odpowiednio:

$$ax^2+bx=0,\ ax^2+c=0,\ ax^2=0.$$

89. α. Gdy $ax^2+bx=0$, czyli $x(ax+b)=0$, to iloczyn po stronie lewej może być równy zeru tylko wtedy, kiedy albo $x=0$, albo też $ax+b=0$; w ostatnim razie jest $x=\frac{-b}{a}$. A więc równaniu $ax^2+bx=0$ czyni zadość tak wartość $x=0$, jak i wartość $x=\frac{-b}{a}$. Widzimy więc, że to równanie ma dwa rozwiązania; nazwijmy je x_1 i x_2. Zestawiając równanie i pierwiastki, mamy

$$ax^2+bx=0; \qquad x_1=0, \qquad x_2=\frac{-b}{a}. \qquad (2)$$

β. Gdy $ax^2+c=0$, czyli $x^2-\left(\frac{-c}{a}\right)=0$, to, uważając liczbę $\frac{-c}{a}$ jako kwadrat liczby $\sqrt{\frac{-c}{a}}$, mieć będziemy po lewej stronie różnicę kwadratów, tak iż równanie możemy napisać $\left(x-\sqrt{\frac{-c}{a}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{-c}{a}}\right)=0$.

A więc albo $x-\sqrt{\frac{-c}{a}}=0$, skąd $x=+\sqrt{\frac{-c}{a}}$, albo też $x+\sqrt{\frac{-c}{a}}=0$, skąd $x=-\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Równanie więc nasze ma dwa pierwiastki; nazwijmy je x_1 i x_2. Zestawiając równanie i pierwiastki, mamy

$$ax^2+c=0; \qquad x_1=+\sqrt{\frac{-c}{a}}, \qquad x_2=-\sqrt{\frac{-c}{a}}. \qquad (3)$$

Np. gdy mamy $4x^2-9=0$, to $x_1=+\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$; gdy mamy $4x^2+9=0$, to $x_1=+\frac{3}{2}i$, $x_2=-\frac{3}{2}i$.

Pierwiastki zatem równania $ax^2+c=0$ różnią się od siebie tylko znakiem. Są one rzeczywiste wtedy, kiedy liczby a i c nie są jednakowego znaku.

γ. Równanie niezupełne $ax^2=0$ jest szczególnym przypadkiem równania (2), jeżeli w niem $b=0$, alboteż szczególnym przypadkiem równania (3), jeżeli w niem $c=0$. W obu razach z wyrażeń odpowiednio (2) i (3) pierwiastków tych równań otrzymujemy $x_1=0$ i $x_2=0$. Chociaż więc równaniu $ax^2=0$ czyni jedynie zadość wartość $x=0$, to jednak mówimy, albo, że ono ma dwa pierwiastki równe sobie $x_1=x_2=0$, albpoteż, że ono ma pierwiastek podwójny, $x_1=x_2=0$. Jest więc

$$ax^2=0; \quad x_1=0, \quad x_2=0 \tag{4}$$

90. Mając równanie zupełne $ax^2+bx+c=0$, pomnóżmy obie jego strony przez $4a$; mieć będziemy $4a^2x^2+4abx+4ac=0$. Pierwsze dwa wyrazy po stronie lewej są dwoma wyrazami kwadratu dwumianu $2ax+b$, gdyż $(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2$. Zatem $4a^2x^2+4abx=(2ax+b)^2-b^2$; pisząc to w naszem równaniu, będziemy mieli

$$(2ax+b)^2-(b^2-4ac)=0. \tag{5}$$

Postępując podobnie jak w art. poprzednim pod β., możemy to równanie napisać

$$(2ax+b-\sqrt{b^2-4ac})(2ax+b+\sqrt{b^2-4ac})=0;$$

albo więc pierwszy czynnik równa się 0, a w takim razie $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, albo też drugi czynnik równa się 0, a w takim razie $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Ma więc nasze równanie dwa rozwiązania; nazwijmy je x_1 i x_2. Jest więc

$$ax^2+bx+c=; \quad x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{6}$$

Niekiedy te dwa pierwiastki piszemy łącznie w taki sposób:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{7}$$

rozumiejąc, że z dwu znaków przed pierwiastkiem kwadratowym jeden odpowiada jednemu, drugi zaś pozostałemu pierwiastkowi naszego równania. Ze wzorów (6) przy $c=0$ wprost wypadają wzory (2), przy $b=0$ wzory (3), zaś przy $b=0$ i $c=0$ wzory (4).

91. We wzorach (6), tak w x_1, jak i w x_2, mamy pod znakiem pierwiastka kwadratowego wyrażenie b^2-4ac. Ponieważ a, b i c mogą być jakiekolwiek, przeto albo $b^2-4ac>0$, albo $b^2-4ac=0$, albo też $b^2-4ac<0$.

Przy $b^2-4ac>0$ jest $\sqrt{b^2-4ac}$ liczbą rzeczywistą, wskutek czego tak x_1 jak i x_2 mają wartości rzeczywiste, różne od siebie. — Wówczas po stronie lewej równania (5) mamy w drugim nawiasie liczbę dodatną, którą mamy odjąć od $(2ax+b)^2$; przy x rzeczywistem ów kwadrat jest także liczbą dodatną.

Przy $b^2-4ac=0$ jest $\sqrt{b^2-4ac}=0$, wskutek czego $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$, t. j. równanie (1) ma podwójny pierwiastek rzeczywisty. — Wówczas według (5) równanie (1) może być sprowadzone do kształtu $(2ax+b)^2=0$, t. j. w tym razie lewą stronę równania (1) można przedstawić jako kwadrat dwumianu. Otrzymać to możemy wprost, kładąc w (1) $c = \frac{b^2}{4a}$.

Nakoniec przy $b^2 - 4ac < 0$ jest $\sqrt{b^2 - 4ac}$ liczbą urojoną, wskutek czego tak x_1 jak i x_2 są liczbami zespolonemi. — Wówczas po lewej stronie równania (5) mamy w drugim nawiasie liczbę ujemną, a więc $-(b^2 - 4ac)$ jest liczbą dodatną, którą mamy dodać do $(2ax + b)^2$. Przy x rzeczywistem ów kwadrat byłby także liczbą dodatną, a suma dwu liczb dodatnych nie może być równa zeru. Tylko więc dlatego, że w tym razie x nie jest liczbą rzeczywistą, ten kwadrat nie jest liczbą dodatną i równość (5) zachodzić może. — Tak w x_1 jak i w x_2 zamiast $\sqrt{b^2 - 4ac}$ pisząc $\sqrt{-(4ac - b^2)}$ czyli $i\sqrt{4ac - b^2}$, mamy

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i, \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i.$$

Widzimy więc, że te pierwiastki przedstawiają parę liczb zespolonych sprzężonych z sobą. W przypadku $b = 0$, oba pierwiastki są urojone i różnią się od siebie tylko znakiem.

Według wzoru ogólnego (7), o pierwiastkach równania (1) powiemy: *pierwiastek równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą jest równy sumie algebraicznej spółczynnika pierwszej potęgi niewiadomej, wziętego ze znakiem zmienionym, i poprzedzonego znakiem + lub — pierwiastka kwadratowego z różnicy między kwadratem tegoż spółczynnika, a poczwórnym iloczynem spółczynnika drugiej potęgi niewiadomej i wyrazu wiadomego, podzielonej przez podwojony spółczynnik drugiej potęgi niewiadomej.* Np.

$$3x^2 - 9x + \tfrac{14}{3} = 0, \; x = \tfrac{1}{2.3}\left(9 \pm \sqrt{81 - 4.3.\tfrac{14}{3}}\right) = \tfrac{1}{6}(9 \pm 5), x_1 = \tfrac{7}{3}, \; x_2 = \tfrac{2}{3};$$

$$3x^2 - 9x + 5 = 0, \; x_1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{6}\sqrt{21}, \; x_2 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{6}\sqrt{21};$$

$$3x^2 - 9x + 7 = 0, \; x_1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{6} i\sqrt{3}, \; x_2 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{6} i\sqrt{3}.$$

Jeżeli w równaniu (1) spółczynnik b jest podzielny przez 2, to w (7) kładąc $b = 2b'$, będziemy mieli $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{4b'^2 - 4ac} = 2\sqrt{b'^2 - ac}$, tak iż

$$ax^2 + 2b'x + c = 0, \quad x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Np. $9x^2 + 18x + 4 = 0, \quad x = \tfrac{1}{9}(-9 \pm \sqrt{81 - 36}) = -1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{5}$;

$$2x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0, \; x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 2.1}, \; x_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} \pm 1).$$

92. Ogólne równanie (1) często upraszczamy, dzieląc obie jego strony przez a, i dochodzimy do tego, iż spółczynnik drugiej potęgi niewiadomej jest jednością. W równaniu $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ kładąc $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$ będziemy mieli równanie w kształcie

$$x^2 + px + q = 0. \tag{8}$$

Pierwiastki jego moglibyśmy wprost wyprowadzić ze wzoru (7), albo dzieląc licznik i mianownik ułamka przez a i wprowadzając powyższe oznaczenia, alboteż, kładąc w nim $a = 1$ i pisząc p zamiast b, zaś q zamiast c. Wyprowadzimy tu jednak owe wyrażenia pierwiastków w sposób podobny do użytego w art. 90-ym.

Pierwsze dwa wyrazy po stronie lewej równania (8) są takie same, jak dwa wyrazy kwadratu dwumianu $x+\frac{p}{2}$, gdyż $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$. Zatem $x^2+px=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}$. Pisząc to w równaniu (8), będziemy mieli

$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0$, czyli $\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=0$,

tak iż
$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \tag{9}$$

t. j. *pierwiastek równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą, w którem spółczynnik drugiej potęgi niewiadomej jest jednością, jest równy połowie spółczynnika pierwszej potęgi niewiadomej, wziętego ze znakiem zmienionym i poprzedzonemu znakiem + lub — pierwiastkowi kwadratowemu z różnicy między kwadratem połowy tegoż spółczynnika a wyrazem wiadomym.*

Jeżeli $\frac{p^2}{4}-q>0$, oba pierwiastki są rzeczywiste i od siebie różne. Jeżeli $\frac{p^2}{4}-q=0$, pierwiastki są rzeczywiste i równe sobie, czyli równanie (8) ma pierwiastek rzeczywisty podwójny $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$. Jeżeli nakoniec $\frac{p^2}{4}-q<0$, to wówczas mamy $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\sqrt{-\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$,

$x_1=-\frac{p}{2}+i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, $x_2=-\frac{p}{2}-i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, t. j. pierwiastki równania są zespolone i z sobą sprzężone; w przypadku $p=0$ oba pierwiastki są urojone i różnią się od siebie tylko znakiem.

RÓWNANIE UŁAMKOWE, Z KTÓREGO DOCHODZIMY DO RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO.

93. 1). $\frac{4}{x-1}-\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-4}$.

Mnożąc obie strony przez liczbę $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, dochodzimy do równania
$$2x^2-15x+25=0;\quad x_1=5,\quad x_2=\tfrac{5}{2}.$$
Ponieważ ani wartość $x=5$, aniteż wartość $x=\frac{5}{2}$ nie przywodzi do zera liczby $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, przeto otrzymane równanie stopnia 2-go jest równoznaczne z równaniem danem. A zatem równanie dane ma pierwiastki $x_1=5$, $x_2=\frac{5}{2}$.

2). $\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x^2-4x+3}=0$.

Po pomnożeniu obu stron przez liczbę $(x^2-4x+3)=(x-1)(x-3)$, otrzymamy
$$x^2-3x+2=0;\quad x_1=2,\quad x_2=1.$$
Pierwszy pierwiastek, który nie przywodzi do zera liczby $(x-1)(x-3)$ zadość czyni równaniu danemu. Ponieważ zaś drugi pierwiastek przywodzi do

zera liczbę $(x-1)(x-3)$, przeto trzeba sprawdzić, czy on jest także pierwiastkiem równania danego. Sprawdzenie bezpośrednie jest niemożliwe, gdyż oba wyrazy stają się nieskończenie wielkiemi. Zważmy jednak, że

$$\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x^2-4x+3}=\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-3)}=\frac{x-2}{x-3}.$$

Równanie zaś $\frac{x-2}{x-3}=0$ ma jedyny pierwiastek $x=2$, a więc także równanie dane ma jedyny pierwiastek $x=2$ i nie jest równoznaczne z otrzymanem równaniem stopnia 2-go.

3). $\frac{a+2}{x-a}+\frac{a-2}{x-6}=\frac{3}{2}.$ (α)

Po pomnożeniu obu stron przez liczbę $2(x-a)(x-6)$ otrzymamy

$$3x^2-(7a+18)x+2a^2+26a+24=0; \quad x_1=2(a+1), \quad x_2=\tfrac{1}{3}a+4. \quad (\beta)$$

Otrzymane równanie stopnia 2-go jest równoznaczne z równaniem danem, jeżeli liczba $(x-a)(x-6)$ jest od zera różna, a więc pod warunkiem, iż nie jest ani $x-a=0$, aniteż $x-6=0$. Ponieważ zaś w wyrażeniach (β) pierwiastków znajduje się litera a, przeto ona nie może mieć takich wartości, przy którychby było

$$2(a+1)=a, \quad 2(a+1)=6, \quad \tfrac{1}{3}a+4=a, \quad \tfrac{1}{3}a+4=6,$$

t. j. nie może być ani $a=-2$, ani $a=+2$, aniteż $a=6$. Jakoż, przy tych wartościach równania (α) i (β) przechodzą odpowiednio na

$$-\frac{4}{x-6}=\frac{3}{2}, \ (x=\tfrac{10}{3}); \quad 3x^2-\ 4x-20=0, \ (x_1=-2, \ x_2=\tfrac{10}{3});$$

$$\frac{4}{x-2}=\frac{3}{2}, \ (x=\tfrac{14}{3}); \quad 3x^2-32x+84=0, \ (x_1=6, \quad x_2=\tfrac{14}{3});$$

$$\frac{4}{x-6}=\frac{1}{2}, \ (x=14); \quad x^2-20x+84=0, \ (x_1=14, \ x_2=6).$$

RÓWNANIE NIEWYMIERNE, Z KTÓREGO DOCHODZIMY DO RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO.

94. 1). $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x-5}.$

Po podniesieniu dwukrotnie do kwadratu otrzymamy

$$x^2-5x+6=0; \quad x_1=2, \quad x_2=3.$$

Obie wartości $x=2$ i $x=3$ są rozwiązaniami danego równania niewymiernego, które przeto jest równoznaczne z otrzymanem równaniem stopnia 2-go.

2). $\sqrt{x+5}+\sqrt{2(x+4)}=7.$

Po dwukrotnem podniesieniu do kwadratu otrzymamy

$$x^2-288x+1136=0; \quad x_1=284, \quad x_2=4.$$

Z tych dwu pierwiastków otrzymanego równania stopnia 1-go pierwszy nie czyni zadość równaniu danemu, gdyż po podstawieniu otrzymalibyśmy $41=7$. Jedynie więc wartość $x=4$ jest rozwiązaniem danego równania niewymiernego, które przeto nie jest równoznaczne z otrzymanem równaniem stopnia 2-go.

3). $-\sqrt{x+5}+\sqrt{2(x+4)}=7$; $x^2-288x+1136=0$; $x_1=284$, $x_2=4$. Równanie dane ma tylko pierwiastek $x=284$.

4). $\sqrt{x+5}-\sqrt{2(x+4)}=7$; $x^2-288x+1136=0$; $x_1=284$, $x_2=4$. Ani $x=284$, anitеż $x=4$ nie czyni zadość równaniu danemu, które przeto jest niemożliwe.

5). $\sqrt[3]{x+1}+\dfrac{24}{\sqrt[3]{x+1}}-11=0$, czyli $\sqrt[3]{(x+1)^2}-11\sqrt[3]{x+1}+24=0$,

gdyż $x=-1$ nie jest pierwiastkiem równania danego. Kładąc $\sqrt[3]{x+1}=y$, rozwiążemy równanie

$$y^2-11y+24=0;\quad y_1=3,\ y_2=8.$$

Jest więc albo $\sqrt[3]{x+1}=3$, czyli $x+1=27$, skąd $x_1=26$, albotеż $\sqrt[3]{x+1}=8$, czyli $x+1=512$, skąd $x_2=511$.

UWAGI OGÓLNE O RÓWNANIU STOPNIA DRUGIEGO.

95. *Równanie stopnia 2-go ma tylko dwa pierwiastki.* Niech x_1 będzie jednym pierwiastkiem równania $ax^2+bx+c=0$. Po podstawieniu go, otrzymujemy równość $ax_1^2+bx_1+c=0$, która po wykonaniu działań po stronie lewej stanie się tożsamością. Gdy od równania danego odejmiemy tę równość stronami odpowiedniemi, otrzymamy równanie

$$a(x^2-x_1^2)+b(x-x_1)=0,\qquad \text{czyli}\quad (x-x_1)(ax+ax_1+b)=0,$$

równoznaczne z równaniem danem. Albo więc $x-x_1=0$, skąd $x=x_1$, jednemu pierwiastkowi równania, albotеż $ax+ax_1+b=0$. To ostatnie równanie, jako stopnia 1-go, może mieć, jak wiemy, jeden tylko pierwiastek. A zatem równanie dane prócz x_1 ma tylko jeden pierwiastek, czyli razem ma ich tylko 2. W przypadku szczególnym, kiedy równanie $ax+ax_1+b=0$ ma pierwiastek $x=x_1$, równanie dane ma dwa pierwiastki równe sobie, czyli, jak mówimy, ma pierwiastek podwójny.

96. Niech dwa równania

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0,\quad a_2x^2+b_2x+c_2=0$$

będą równoznaczne z sobą. Wtedy pierwiastki jednego są też same, co pierwiastki drugiego. Pomnóżmy obie strony pierwszego przez a_2, obie zaś strony drugiego przez a_1; równania

$$a_1a_2x^2+a_2b_1x+a_2c_1=0,\quad a_1a_2x^2+a_1b_2x+a_1c_2=0$$

są równoznaczne z sobą. Gdy od drugiego równania odejmiemy pierwsze stronami odpowiedniemi, otrzymamy równanie

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+(a_1c_2-a_2c_1)=0$$

równoznaczne z każdem z poprzednich, a więc także z każdem z danych. Ma przeto to ostatnie równanie też same dwa pierwiastki, co każde z danych. Jest zaś ono równaniem stopnia 1-go, a więc tak spółczynnik x, jak i wyraz wiadomy są równe zeru, t. j.

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\quad a_1c_2-a_2c_1=0,\qquad \text{skąd}\quad a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2.$$

A zatem *dwa równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą równoznaczne z sobą mają odpowiednie spółczynniki proporcyonalne.*

97. Gdyby przy trzech wartościach x np. x_1, x_2, x_3, z których każde dwie są od siebie różne, było $ax^2+bx+c=0$, t. j.

$$ax_1^2+bx_1+c=0, \quad ax_2^2+bx_2+c=0, \quad ax_3^2+bx_3+c=0, \tag{1}$$

to, odjąwszy np. od pierwszej równości każdą z dwu pozostałych, otrzymamy

$$(x_1-x_2)(ax_1+ax_2+b)=0, \quad (x_1-x_3)(ax_1+ax_3+b)=0,$$

Ponieważ nie jest ani $x_1-x_2=0$, anitеż $x_1-x_3=0$, przeto

$$ax_1+ax_2+b=0, \quad ax_1+ax_3+b=0. \tag{2}$$

Odejmując zaś te równości od siebie stronami odpowiedniemi, mieć będziemy

$$a(x_2-x_3)=0.$$

Ponieważ nie jest $x_2-x_3=0$, przeto jest $a=0$. Wskutek tego z równości (2) wynika $b=0$, a w następstwie tego z równości (1) wynika $c=0$. A zatem: jeżeli jest $ax^2+bx+c=0$ przy więcej, niż dwu, wartościach x, to wtedy $a=0$, $b=0$ i $c=0$.

Przy wartościach $a=0$, $b=0$ i $c=0$ nie jest $ax^2+bx+c=0$ równaniem, gdyż x mogłoby tu otrzymać jakąkolwiek wartość, a to jest sprzeczne z określeniem równania; właściwie jest wtedy tożsamość $0=0$.

Jeżelibyśmy mieli $a_1x^2+b_1x+c_1=a_2x^2+b_2x+c_2$ przy więcej niż dwu wartościach x, to byłoby to możliwe tylko w takim razie, kiedyby jednocześnie $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$, gdyż poprzednią równość możemy napisać w postaci $(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+(c_1-c_2)=0$.

98. Ponieważ w równaniu $ax^2+bx+c=0$ może a oznaczać wszelką liczbę dodatną lub ujemną, choćby co do wartości bezwzględnej bardzo małą, przeto, jeżeli liczba a przechodzi np. od wartości ujemnych do dodatnych, to w tem przejściu może otrzymać wartość 0. Wówczas przestaje istnieć równanie stopnia 2-go i jeżeli b jest od zera różne, mamy równanie stopnia 1-go $bx+c=0$. Jednocześnie zaś wyrażenia pierwiastków (6) art. 90-go danego równania stają się: $x_1=\frac{0}{0}$, $x_2=\infty$. Zważmy jednak, że ogólnie

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},$$

po podzieleniu licznika i mianownika przez spólny czynnik $2a$. W tem dopiero wyrażeniu ogólnem pierwiastka x_1 przyjmując $a=0$, otrzymujemy $x_1=-\frac{c}{b}$, z czego widzimy, iż poprzednio otrzymana wartość nieoznaczona tego pierwiastka była pozorna. Jakoż, rzeczywiście, ponieważ równanie nasze przeszło na równanie $bx+c=0$, to wartość $x_1=-\frac{c}{b}$ zadość mu czyni.

Widzimy więc, że *kiedy w równaniu $ax^2+bx+c=0$ spółczynnik a przechodzi przez wartość 0, a spółczynnik b jest od zera różny, to jeden z dwu pierwiastków tego równania jest pierwiastkiem równania stopnia 1-go $bx+c=0$, na które dane równanie wówczas przechodzi, wyrażenie zaś drugiego pierwiastka otrzymuje wartość nieskończenie wielką.*

Jeżeli jednocześnie spółczynniki a i b stają się równemi zeru, c zaś jest od zera różne, to równanie $ax^2+bx+c=0$ *istnieć przestaje, wyrażenia zaś obu pierwiastków otrzymują wtedy wartości nieskończenie wielkie.*

WŁASNOŚCI PIERWIASTKÓW RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO.

99. Gdy równanie $ax^2+bx+c=0$ ma pierwiastki x_1 i x_2, to

$$ax_1^2+bx_1+c=0,\quad ax_2^2+bx_2+c=0. \tag{1}$$

α. Po odjęciu tych równości od siebie stronami odpowiedniemi mieć będziemy $a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=0$, czyli $(x_1-x_2)(ax_1+ax_2+b)=0$. Ta równość istnieje zawsze. Niezawsze zaś jest $x_1=x_2$. Przeto zawsze mamy $a(x_1+x_2)+b=0$, skąd

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\text{ albo } x_1+x_2=-p, \tag{2}$$

jeżeli uwzględnimy oznaczenia art. 92-go. A zatem *suma pierwiastków równania stopnia 2-go jest równa spółczynnikowi pierwszej potęgi niewiadomej, wziętemu ze zmienionym znakiem, podzielonemu przez spółczynnik drugiej potęgi niewiadomej.*

β. Wyrażenie $b=-a(x_1+x_2)$, wynikające z (2), podstawmy w którąkolwiek z równości (1); otrzymamy po redukcyi $-ax_1x_2+c=0$, skąd

$$x_1x_2=\frac{c}{a},\text{ albo } x_1x_2=q, \tag{3}$$

jeżeli uwzględnimy oznaczenia art. 92-go. A zatem *iloczyn pierwiastków równania stopnia 2-go jest równy wyrazowi wiadomemu, podzielonemu przez spółczynnik drugiej potęgi niewiadomej.*

Wyrażenia (2) i (3) moglibyśmy otrzymać wprost, czyto z wyrażeń (6) art. 90-go, czyteż z wyrażeń (9) art. 92-go pierwiastków równania, biorąc odpowiednio ich sumę lub iloczyn.

100. W równaniu $ax^2+bx+c=0$ przyjmijmy, iż spółczynnik $a>0$ (w przeciwnym bowiem razie zmienilibyśmy znaki wszystkich wyrazów). Przy $c<0$ oba pierwiastki są rzeczywiste; przy $c>0$ są rzeczywiste, jeżeli $b^2>4ac$ (art. 91). Chcąc tu rozważać *tylko pierwiastki rzeczywiste*, wyłączymy, w razie $c>0$, przypadek, kiedy jest $b^2<4ac$.

Z własności (3) wynika, że: kiedy $c>0$, oba pierwiastki są jednakowego znaku; kiedy $c<0$, pierwiastki są różnego znaku.

Zestawiając z sobą własności (2) i (3), łatwo wniesiemy, iż: kiedy przy $c>0$ jest $b<0$, oba pierwiastki są dodatne; kiedy przy $c>0$ jest $b>0$, oba pierwiastki są ujemne; kiedy przy $c<0$ jest $b<0$, pierwiastek dodatny ma większą wartość bezwzględną; kiedy nakoniec przy $c<0$ jest $b>0$, pierwiastek ujemny ma większą wartość bezwzględną.

101. Zadanie. Mając sumę dwu liczb i ich iloczyn, znaleźć te liczby.

Nieznane liczby nazwijmy x_1 i x_2, znane ich sumę i iloczyn nazwijmy odpowiednio s i t, t: j.

$$x_1+x_2=s,\quad x_1x_2=t.$$

Jeżeli szukane liczby x_1 i x_2 uważać będziemy za pierwiastki równania stopnia 2-go $x^2+px+q=0$, to $-p=x_1+x_2=s$, $q=x_1x_2=t$, tak iż owo równanie jest

$$x^2-sx+t=0, \text{ skąd } x_1=\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}s^2-t}, \quad x_2=\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}s^2-t}.$$

Np. $x_1+x_2=-4$, $x_1x_2=2$; $x^2+4x+2=0$; $x_1=-2+\sqrt{2}$, $x_2=-2-\sqrt{2}$.

Gdybyśmy wyrażenie $x_2=s_1-x_1$ podstawili w $x_1x_2=t$, to otrzymalibyśmy $x_1(s-x_1)=t$, czyli $x_1^2-sx_1+t=0$, t. j. powyżej rozwiązaną równanie, którego jednym pierwiastkiem jest x_1, drugim zaś x_2.

PRZEKSZTAŁCENIE SZCZEGÓLNEGO WYRAŻENIA NIEWYMIERNEGO.

102. Weźmiemy na uwagę szczególne wyrażenie niewymierne, mianowicie

$$\sqrt{c\pm\sqrt{d}}.$$

Przyjmiemy naprzód, że litery c i d oznaczają liczby wymierne, a $\sqrt{d}$ jest liczbą niewymierną. Rozważymy, kiedy takie wyrażenie może być przedstawione jako suma algebraiczna dwu liczb $\sqrt{x_1}$ i $\sqrt{x_2}$, gdzie x_1 i x_2 są liczbami wymiernemi.

Przyjmijmy, $\sqrt{c+\sqrt{d}}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$. Po podniesieniu obu stron równości do kwadratu, mieć będziemy

$$c-x_1-x_2+\sqrt{d}=2\sqrt{x_1x_2}; \tag{1}$$

podnosząc powtórnie do kwadratu, otrzymamy

$$(c-x_1-x_2)^2+2(c-x_1-x_2)\sqrt{d}+d=4x_1x_2.$$

W tej równości mamy po stronie prawej liczbę wymierną, a więc strona lewa także jest liczbą wymierną. Że zaś z założenia $\sqrt{d}$ jest liczbą niewymierną, przeto jest to możliwe tylko wtedy, kiedy $c-x_1-x_2=0$, skąd mamy

$$x_1+x_2=c. \tag{2}$$

Uwzględniając (2), otrzymujemy z (1) $\sqrt{d}=2\sqrt{x_1x_2}$, skąd

$$x_1x_2=\frac{1}{4}d. \tag{3}$$

Według (2) i (3) x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2-cx+\dfrac{d}{4}=0$, t. j.

$$x_1=\frac{1}{2}(c+\sqrt{c^2-d}), \quad x_2=\frac{1}{2}(c-\sqrt{c^2-d}). \tag{4}$$

Kładąc podobnie $\sqrt{c-\sqrt{d}}=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$, dojdziemy do wyrażeń (4).

Ogólnie zatem jest

$$\sqrt{c\pm\sqrt{d}}=\sqrt{\frac{1}{2}(c+\sqrt{c^2-d})}\pm\sqrt{\frac{1}{2}(c-\sqrt{c^2-d})}, \tag{5}$$

gdzie z podwójnych znaków górne odpowiadają sobie a dolne sobie.

Jeżeli we wzorze (5) liczby c i d są wymierne, oraz $\sqrt{c^2-d}$ jest liczbą wymierną, to po prawej stronie mamy pod każdym z dwu pierwiastków kwadratowych ogólniejszych liczbę wymierną i wtedy wzór (5) służy do przekształcenia pierwiastka kwadratowego z wyrażenia, złożonego z liczby wymiernej i niewymiernego pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej na sumę algebraiczną dwu pierwiastków kwadratowych z liczb wymiernych. Tak np. mamy:

$$x^2 - 2\sqrt{3}\,x + \sqrt{5} = 0; \quad x = \sqrt{3} \pm \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{3} \pm \left(\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right).$$

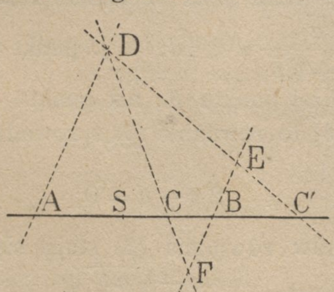
$$x^2 - 2\sqrt[4]{27}\,x + \sqrt{15} = 0; \quad x = \sqrt[4]{27} \pm \sqrt[4]{3}\sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt[4]{27} \pm \sqrt[4]{3}\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right).$$

Gdybyśmy ogólniej przyjęli tylko, iż liczby c, d i $c^2 - d$ są dodatne, to, podnosząc do kwadratu obie strony wzoru (5), które wówczas przedstawiają wyrażenia rzeczywiste, dojdziemy (po wykonaniu uproszczeń po stronie prawej) do tożsamości. Przeto także, na mocy tego, cośmy powiedzieli w art. 64-ym, wzór (5) stosować możemy również w przypadku, kiedy strony tej równości nie są wyrażeniami rzeczywistemi. A zatem wzór (5) jest ogólny, t. j przy wszelkich wartościach liczb c i d stosować go można.

ZADANIA STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

103. Jeżeli na zadanie można znaleźć odpowiedź, rozwiązując równanie stopnia 2-go z jedną niewiadomą, to zadanie nazywa się zadaniem stopnia 2-go z jedną niewiadomą. Rozwiążemy dla przykładu kilka takich zadań.

Zadanie. Na prostej znajdują się dwa ogniska w punktach A i B, których odległość jest d. Ilość światła, padającego na punkt, oddalony o jednostkę od ogniska, jest odpowiednio a i b. Znaleźć na owej prostej punkty jednakowo oświetlone przez oba ogniska.



Odległość od punktu A do punktu równo oświetlonego przez oba ogniska, dodatną np. w kierunku od A ku B, nazwijmy x. Przypuśćmy, że punkt C jest równo oświetlony przez oba ogniska; wtedy $AC = x$, zaś $BC = x - d$. Ponieważ ilość światła, padającego na punkt, jest odwrotnie proporcyonalna względem kwadratu jego odległości od źródła światła, przeto na punkt C, oddalony od A o x jednostek, pada z ogniska A światła $\frac{a}{x^2}$, z ogniska zaś B, od którego jest oddalony o $x - d$ jednostek, pada światła $\frac{b}{(x-d)^2}$. Że zaś punkt C jest jednakowo przez oba ogniska oświetlony, zatem

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(x-d)^2}, \qquad (\alpha)$$

czyli $(a-b)x^2 - 2adx + ad^2 = 0; \quad x_1 = \frac{a+\sqrt{ab}}{a-b}d, \; x_2 = \frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}d.$ (β)

Otrzymane dwie wartości rzeczywiste niewiadomej wskazują, iż na prostej AB istnieją dwa punkty jednakowo oświetlone.

Jeżeli $a > b$, to mianowniki wyrażeń x_1 i x_2 są dodatne. Ułamek $\frac{a+\sqrt{ab}}{a-b} > 1$, przeto $x_1 > d$ i jeden punkt jednakowo oświetlony znajduje się poza odcinkiem AB z prawej strony punktu B, np. w punkcie C′. Ułamek $\frac{a-\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ jest mniejszy od 1, a większy od $\frac{1}{2}$; przeto $\frac{1}{2}d < x_2 < d$, t. j. drugi punkt jednakowo oświetlony przypada wewnątrz odcinka AB bliżej punktu B niż punktu A, np. w punkcie C.

Zauważmy, iż według równania (α) jest

$$\frac{x}{(x-d)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Jeżeli z punktów A i B poprowadzimy proste, do siebie równoległe, i na nich od punktów A i B oddzielimy w tym samym kierunku odcinki AD i BE, których stosunek jest równy stosunkowi $\sqrt{a} : \sqrt{b}$, od punktu zaś B oddzielimy w kierunku przeciwnym odcinek BE = BF, to punkty przecięcia się prostych DE i DF z prostą AB będą szukanemi punktami C′ i C.

Jeżeli $a < b$, to mianowniki wyrażeń x_1 i x_2 są ujemne, ale tylko wartość x_1 jest ujemna, wartość zaś x_2 pozostaje dodatną. Ponieważ $x_1 < 0$, przeto w tym razie punkt C′ przypadnie poza odcinkiem AB z lewej jego strony. Zaś $x_2 = \frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}d = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}d < \frac{1}{2}d$, t. j. punkt C przypada w tym razie wewnątrz odcinka AB bliżej punktu A, niż punktu B.

Jeżeli nakoniec $a = b$, to równanie (β) sprowadza się do równania stopnia 1-go

$$2x - d = 0; \qquad (\gamma)$$

wyrażenia zaś pierwiastków równania (β) stają się: $x_1 = \frac{2ad}{0} = \infty$, $x_2 = \frac{0}{0}$ (por. art. 98). Jednak wogóle $x_2 = \frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}d = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}d$; w tem wyrażeniu przyjmując $a = b$, mieć będziemy $x_2 = \frac{1}{2}d$, t. j. punkt C znajdzie się w punkcie S, środku odcinka AB. Ten pierwiastek zadość czyni równaniu (γ). Wartość zaś $x_1 = \infty$ nie jest już pierwiastkiem równania (γ). Należy więc wprost z zadania wnieść, czy ona daje na nie odpowiedź. Gdy $a = b$, t. j. kiedy ogniska świecą z jednakową siłą, to na prostej zewnątrz odcinka AB niema punktu jednakowo oświetlonego. Ponieważ przy $a \gtrless b$ wartość x_2 odpowiadała punktowi C′, który w miarę, jak różnica liczb a i b się zmniejsza, coraz się oddala, przeto przy $a = b$ wartość $x_2 = \infty$ wskazuje, iż odległość punktu C′ od A będzie większa od jakkolwiek wielkiej. Jakoż, wtedy prosta DE jest równoległa do prostej AB.

104. Zadanie I. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest dłuższa od jednej z przyprostokątnych o $9m$, a od pozostałej o $2m$; znaleźć długości boków tego trójkąta.

Gdy długość przeciwprostokątnej jest x metrów, to

$$(x-9)^2+(x-2)^2=x^2;\quad x_1=17,\quad x_2=5.$$

Drugi pierwiastek nie prowadzi do odpowiedzi na zadanie, a więc długości boków szukanego trójkąta prostokątnego mogą być tylko $17m$, $8m$, $15m$.

Zadanie II. Jaka jest suma kwadratów dwu liczb, których suma jest 6, a iloczyn 10?

Jeżeli liczby, których sumy kwadratów szukamy, nazwiemy x_1 i x_2, to (art. 101) z warunków $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=10$, dochodzimy do równania

$$x^2-6x+10=0;\quad x_1=3+i,\quad x_2=3-i.$$

Ponieważ $x_1^2=8+6i$, $x_2^2=8-6i$, przeto $x_1^2+x_2^2=16$. Odpowiedź: 16.

Zadanie III. Jaka jest suma pól kwadratów, wystawionych na dwu bokach sąsiednich prostokąta, którego obwód jest 12 jednostek długości, pole zaś 10 odpowiednich jednostek kwadratowych?

Jeżeli długości dwu sąsiednich boków prostokąta nazwiemy x_1 i x_2, to dojdziemy do takiegoż równania, jak w zadaniu II, i znajdziemy $x_1=3+i$, $x_2=3-i$. Z tego już wnosimy, że prostokąt, któryby odpowiadał warunkom zadania, jest niemożliwy.

TRÓJMIAN STOPNIA DRUGIEGO.

105. Weźmy na uwagę trójmian

$$ax^2+bx+c. \tag{1}$$

Niech w nim liczby a, b i c mają pewne dowolnie obrane wartości. Co do x zaś nie robimy takiego zastrzeżenia, t. j. przypuszczamy, że x może przybierać różne wartości i dlatego uważamy w tym trójmianie x za liczbę zmienną (veränderliche Z.); ze zmianą wartości x zmieniać się będzie wartość trójmianu. W przeciwstawieniu liczbie zmiennej, liczbę, która w ciągu rachunku wartości swej nie zmienia, nazywamy liczbą stałą (Constante). Tak więc w trójmianie (1) liczby a, b i c są stałe. Względem zmiennej x trójmian (1) jest stopnia 2-go; dlatego krótko nazywamy go trójmianem stopnia 2-go.

Trójmian (1) możemy tak przekształcić:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right). \tag{2}$$

Po stronie prawej tej równości, liczby $\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$ możemy inaczej wyrazić. Wartości zmiennej x, przy których trójmian (1) jest równy zeru, t. j. pierwiastki równania $ax^2+bx+c=0$, nazwijmy x_1 i x_2; liczby x_1 i x_2, jako wyrażające się przez liczby stałe a, b i c, są także liczbami stałemi. Według wzorów (2) i (3) art. 99-go $\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$, $\frac{c}{a}=x_1\,x_2$. Podstawiając te wyrażenia liczb $\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$ w prawą stronę równości (2), mieć będziemy $ax^2+bx+c=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]$, albo

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \tag{3}$$

t. j. *trójmian stopnia 2-go można przedstawić jako iloczyn spółczynnika drugiej potęgi zmiennej przez iloczyn dwu czynników stopnia 1-go, z których każdy jest różnicą między zmienną a jednym z pierwiastków równania, powstałego z przyrównania danego trójmianu do zera.*

Zważmy, że wzór (3) można tak inaczej wyprowadzić. Jeżeli x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $ax^2+bx+c=0$, to dzieląc trójmian (1) przez różnicę $x-x_1$, otrzymamy

$$\frac{ax^2+bx+c}{x-x_1}=ax+ax_1+b+\frac{ax_1^2+bx_1+c}{x-x_1},$$

albo, z uwagi, że licznik ułamka po stronie prawej jest zerem i że według wzoru (2) art. 99-go $ax_1+b=-ax_2$,

$$\frac{ax^2+bx+c}{x-x_1}=a(x-x_2),$$

skąd wynika równość

$$(ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Np., gdy mamy trójmian $-x^2+2x+3$, to ponieważ rozwiązując równanie $x^2-2x-3=0$ otrzymamy $x_1=-1$, $x_2=+3$, jest według (3) przy każdej wartości x

$$-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3).$$

106. Przyjmijmy, że w równości (3) zmienna x otrzymuje różne, ale tylko rzeczywiste wartości.

Zważmy, że liczby stałe x_1 i x_2, jako wyrażające się przez dowolnie obrane liczby a, b i c, mogą być (art. 91) albo rzeczywiste, albo zespolone, alboteż urojone.

Jeżeli liczby x_1 i x_2 są rzeczywiste i różne od siebie i jeżeli np. $x_1<x_2$, to dla każdej wartości x mniejszej od x_1 obie różnice $x-x_1$ i $x-x_2$ są ujemne, ich iloczyn jest dodatny i trójmian ma wartość o takim znaku, jakiego znaku jest spółczynnik a. Podobnie, dla każdej wartości $x>x_2$ obie te różnice są dodatne i wartość trójmianu jest o takim znaku, jakiego znaku jest spółczynnik a. Dla wartości zaś x, pośrednich między x_1 i x_2, różnica $x-x_1$ jest dodatna, różnica $x-x_2$ jest ujemna, ich iloczyn jest ujemny i wartość trójmianu jest o znaku przeciwnym znakowi spółczynnika a. Np. trójmian $-x^2+2x+3$ dla wartości $x=-2<-1$ ma wartość takiego znaku jak spółczynnik -1, t. j. ujemną (-5), dla wartości $x=0$ pośredniej między -1 i $+3$ ma wartość dodatną $(+3)$, dla wartości $x=+4>+3$, ma wartość ujemną (-5).

Jeżeli liczby x_1 i x_2 są rzeczywiste i równe sobie, to $x-x_2=x-x_1$ i równość (3) możemy tak napisać

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$$

i tak przy wartości $x<x_1$, jak i przy wartości $x>x_1$, wartość trójmianu jest o takim znaku, jakiego znaku jest a. Np. $2x^2-2x+\frac{1}{2}=2(x-\frac{1}{2})^2$; ten trójmian tak przy wartościach $x<+\frac{1}{2}$, jak i przy wartościach $x>+\frac{1}{2}$, otrzymuje wartości dodatne.

Jeżeli liczby x_1 i x_2 nie są rzeczywiste $(b^2<4ac)$, to, gdy są one zespolone i z sobą sprzężone (art. 91), kładąc $x_1=\alpha+\beta i$, będziemy mieli $x_2=\alpha-\beta i$. Wówczas różnice $x-x_1=x-\alpha-\beta i$, $x_2=x-\alpha+\beta i$ są również zespolone i z sobą sprzężone, a ich iloczyn jest liczbą rzeczywistą dodatną (art. 69),

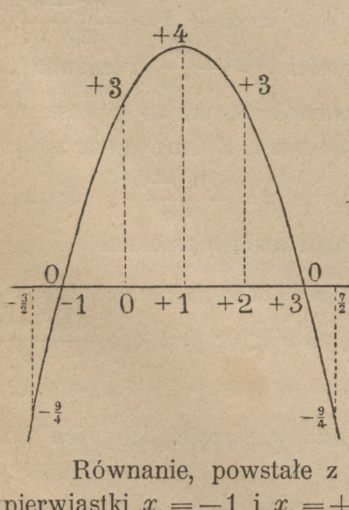
$$(x-x_1)(x-x_2)=(x-\alpha)^2+\beta^2=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2},$$

tak iż wartość trójmianu jest o takim znaku, jaki ma a. Np. wartości trójmianu $-\frac{1}{8}x^2+x-\frac{25}{8}=-\frac{1}{8}[x-4)^2+9]$ przy wszelkich wartościach x są dodatne. W przypadku $b=0$ i $ac>0$ liczby x_1 i x_2 będą liczbami urojonemi, różniącemi się od siebie tylko znakiem, różnice $x-x_1$ i $x-x_2$ będą zespolone sprzężone, a ich iloczyn $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+\frac{c}{a}$, liczbie dodatnej.

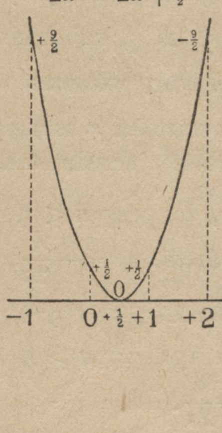
Powiemy więc: *trójmian stopnia 2-go przy rzeczywistej wartości zmiennej otrzymuje wartość o takim znaku, jaki ma spółczynnik drugiej potęgi zmiennej, prócz przypadku, kiedy pierwiastki równania, powstałego z przyrównania danego trójmianu do zera, są rzeczywiste i od siebie różne i kiedy wartość zmiennej jest pośrednia między temi pierwiastkami, a wtedy odpowiednia wartość trójmianu ma znak przeciwny temu, jaki ma spółczynnik drugiej potęgi zmiennej.*

107. Jeżeli na prostej, np. poziomej, oznaczymy wartości rzeczywiste zmiennej x, obrawszy pewien jej punkt za 0 i dowolną długość za jednostkę, a na prostopadłych, w różnych punktach wystawionych, oznaczać będziemy punkty, których odległości od owej prostej przedstawią odpowiednie wartości trójmianu (1), i jeżeli umówimy się, aby wartości dodatne trójmianu oznaczać nad prostą poziomą, ujemne zaś pod nią, to każdy trójmian stopnia 2-go będzie przedstawiony przez krzywą, rozciągającą się w obie strony do nieskończoności.

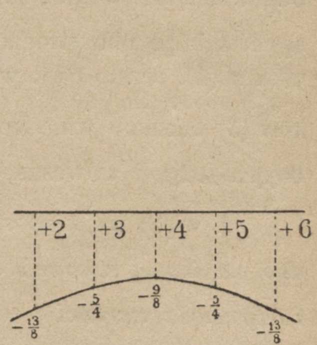
$-x^2+2x+3$



$2x^2-2x+\frac{1}{2}$



$-\frac{1}{8}x^2+x-\frac{25}{8}$



Równanie, powstałe z przyrównania pierwszego trójmianu do zera, ma pierwiastki $x_1=-1$ i $x_2=+3$, rzeczywiste i od siebie różne; w odpowiednich punktach krzywa przecina prostą, na której oznaczyliśmy wartości x. Równanie, powstałe z przyrównania drugiego trójmianu do zera, ma pierwiastek rzeczywisty podwójny $x=+\frac{1}{2}$; w odpowiednim punkcie owa prosta jest styczna do krzywej. Równanie, powstałe z przyrównania trzeciego trójmianu do zera, nie ma pierwiastków rzeczywistych i dlatego krzywa nie spotyka owej prostej.

MAXIMUM I MINIMUM.

108. Przypatrując się pierwszemu z rysunków w art. 107-ym, przedstawiającemu trójmian $-x^2+2x+3$, dostrzeżemy, że wartości $x=+1$ odpowiada wartość trójmianu $+4$, większa od sąsiednich po obu stronach jego wartości. Taką szczególną wartość, większą od sąsiednich po obu jej stronach, nazywamy maximum, albo największością. Przypatrując się zaś drugiemu rysunkowi, przedstawiającemu trójmian $2x^2-2x+\frac{1}{2}$, dostrzeżemy, że wartości $x=+\frac{1}{2}$ odpowiada wartość 0 trójmianu, mniejsza od sąsiednich po obu stronach jego wartości. Taką szczególną wartość, mniejszą od sąsiednich po obu jej stronach, nazywamy minimum, albo najmniejszością.

Weźmy ogólne wyrażenie trójmianu i wartości, które on otrzymuje odpowiednio do wartości nadawanych zmiennej x, nazwijmy t,

$$ax^2+bx+c=t. \tag{1}$$

Z równania (1) mamy

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{4at-4ac+b^2}}{2a}. \tag{2}$$

Rozważamy tylko wartości rzeczywiste x; przeto $4at \geqslant 4ac-b^2$. Stosownie więc do tego, czy $a>0$, czyteż $a<0$, jest odpowiednio

$$t\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a} \quad \text{lub} \quad t\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}. \tag{3}$$

Pierwszy ze związków (3) wskazuje, że, przy $a>0$, z wartości t, odpowiadających rzeczywistym wartościom x, najmniejsza jest wartość $t=\frac{4ac-b^2}{4a}$, odpowiadająca według (2) jedynej wówczas wartości $x=-\frac{b}{2a}$. Ponieważ dla sąsiednich po obu stronach wartości x istnieją wartości t, jak to wprost wynika z (1), przeto owa wartość t przedstawia minimum. Z drugiego ze związków (3) taksamo wniesiemy, że, przy $a<0$, wartość $t=\frac{4ac-b^2}{4a}$, odpowiadająca jedynej wówczas wartości $x=-\frac{b}{2a}$, przedstawia maximum.

A więc: *trójmian stopnia 2-go ax^2+bx+c ma jedno minimum, lub jedno maximum, stosownie do tego, czy $a>0$, czyteż $a<0$; jest ono $\frac{4ac-b^2}{4a}$ i odpowiada wartości $x=-\frac{b}{2a}$.*

109. Zadanie. Daną liczbę l podzielić tak na dwie części, iżby ich iloczyn był maximum lub minimum.

Jeżeli jednę część nazwiemy x, to druga będzie $l-x$, a ich iloczyn $x(l-x)$ będzie otrzymywał rozmaite wartości zależnie od wartości x. Ponieważ $x(l-x)=-x^2+lx$ i spółczynnik x^2 jest ujemny, przeto ten iloczyn może przedstawiać maximum, nie może zaś przedstawiać minimum. Owo maximum odpowiada wartości $x = \frac{l}{2}$ i jest równe $\frac{l^2}{4}$. Przeto *iloczyn czynników zmiennych, których suma jest stała, jest wtedy maximum, kiedy te czynniki są równe sobie.*

Do powyższego zadania sprowadza się wiele zadań, w których idzie o znalezienie maximum lub minimum. Np.

Zadanie. W dany kwadrat wpisać kwadrat o polu najmniejszem.

Niech dany kwadrat będzie ABCD. Na bokach AB, BC, CD i DA, lub ich przedłużeniach, oznaczmy punkty odpowiednio E, F, G i H, jednakowo położone względem punktów odpowiednio A, B, C i D. Łatwo okazać, że czworobok EFGH jest kwadratem i że trójkąty AEH, BFE, CGF i DHG są sobie równe. Gdyby pole któregokolwiek z tych trójkątów przedstawiało maximum, to pole kwadratu EFGH przedstawiałoby minimum, i nawzajem. Jeżeli bok danego kwadratu nazwiemy a, odcinek zaś AE nazwiemy x, to odcinek $AH = a - x$, a pole trójkąta AEH jest $\frac{1}{2}x(a-x)$. Byłoby ono maximum lub minimum, kiedyby iloczyn $x(a-x)$ przedstawiał odpowiednio maximum lub minimum. Z poprzedniego zadania wiemy, że ten iloczyn przedstawia maximum przy $x = \frac{1}{2}a$. A więc nie istnieje kwadrat EFGH, którego pole byłoby maximum. Pole zatem kwadratu EFGH jest minimum, kiedy jego wierzchołki przypadają w środkach boków kwadratu ABCD.

110. Zadanie. Daną liczbę dodatną l podzielić na n części dodatnych tak, iżby ich iloczyn był maximum.

Nazwawszy te części $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mamy pod warunkiem, iż

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = l, \tag{α}$$

tak wyznaczyć te części, aby iloczyn $x_1 x_2 \ldots x_n$ był maximum.

Ponieważ każda z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest mniejsza od l, przeto ich iloczyn jest mniejszy od l^n, t. j. iloczyn $x_1 x_2 \ldots x_n$ nie może rosnąć nieograniczenie; innemi słowy zadanie jest możliwe.

Przypuśćmy, że w tym iloczynie którekolwiek dwa czynniki nie są równe sobie, np. $x_1 \gtrless x_2$. W takim razie, wziąwszy ich sumę $x_1 + x_2$, możemy według pierwszego zadania art. 109-go utworzyć iloczyn

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \times \frac{x_1 + x_2}{2} > x_1 x_2.$$

Mnożąc obie strony tej nierówności przez tę samę liczbę $x_3 x_4 \ldots x_n$, otrzymamy

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \times \frac{x_1 \times x_2}{2} \times x_3 x_4 \ldots x_n > x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots x_n.$$

Łatwo więc wniesiemy, że iloczyn $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ jest maximum wtedy, kiedy wszystkie jego czynniki są równe sobie. A zatem, zgodnie z warunkiem (α)

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{l}{n}.$$

Przeto *iloczyn n dodatnych czynników zmiennych, których suma jest stała, jest wtedy maximum, kiedy te czynniki są równe sobie.*

111. Zadanie. Daną liczbę dodatną l podzielić na n części dodatnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, iżby, przy całkowitych i dodatnych liczbach $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, iloczyn $x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\nu$ był maximum.

Oczywiście, kiedy ten iloczyn jest maximum, jednocześnie także iloczyn

$$\frac{x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\nu}{\alpha^\alpha \beta^\beta \ldots \nu^\nu}, \text{ czyli } \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{x_2}{\beta}\right)^\beta \ldots \left(\frac{x_n}{\nu}\right)^\nu$$

jest maximum. Ponieważ suma czynników iloczynu ostatniego, t. j.

$$\alpha\frac{x_1}{\alpha}+\beta\frac{x_2}{\beta}+\ldots+\nu\frac{x_n}{\nu}=l$$

pozostaje stałą, zatem według art. 110-go ten iloczyn, a więc także iloczyn pierwotny jest maximum wtedy, kiedy

$$\frac{x_1}{\alpha}=\frac{x_2}{\beta}=\ldots=\frac{x_n}{\nu}=\frac{l}{\alpha+\beta+\ldots+\nu},\quad \text{czyli}\quad x_1:x_2:\ldots:x_n=\alpha:\beta:\ldots:\nu.$$

Przeto *iloczyn czynników dodatnych, których suma jest stałą, podniesionych do potęg całkowitych i dodatnych, wtedy jest maximum, kiedy te czynniki są proporcyonalne względem ich wykładników.*

NIERÓWNOŚĆ STOPNIA DRUGIEGO.

112. Ogólny kształt nierówności stopnia 2-go jest

$$ax^2+bx+c>0,\quad \text{lub}\quad ax^2+bx+c<0. \tag{1}$$

Przyjmiemy, że $a>0$. Gdyby bowiem było $a<0$ i np. $a'=-a$, to, mnożąc obie strony każdej z nierówności $a'x^2+b'x+c'<0$ i $a'x^2+b'x+c'>0$ przez -1 i nazywając $-b'=b$ i $-c'=c$, otrzymalibyśmy z nich odpowiednie nierówności (1).

Rozważamy w nierównościach (1) tylko rzeczywiste wartości x.

Jeżeli pierwiastki równania $ax^2+bx+c=0$ nie są rzeczywiste i od siebie różne, to z tego, cośmy mówili w art. 106-ym, wynika, że druga z nierówności (1) jest niemożliwa, a pierwsza ma wtedy miejsce dla każdej rzeczywistej wartości x, tak iż ta pierwsza nierówność jest wówczas równoznaczna z zastrzeżeniem: x ma wartość rzeczywistą. Tylko w razie, kiedy równanie $ax^2+bx+c=0$ ma pierwiastek podwójny, do tej jedynej wartości x nie stosuje się pierwsza z nierówności (1). Jeżeli zaś pierwiastki owego równania — nazwijmy je x_1 i x_2 — są rzeczywiste i od siebie różne, to, według tego, cośmy mówili w art. 106-ym, pierwsza nierówność ma miejsce dla wartości x mniejszych od mniejszej lub większych od większej z liczb x_1 i x_2, druga zaś dla wartości pośrednich między liczbami x_1 i x_2. Gdy więc np. $x_1<x_2$, to pierwsza z nierówności (1) jest równoznaczna z dwiema nierównościami: $x<x_1$ lub $x>x_2$; druga zaś jest wtedy równoznaczna z nierównościami: $x_1<x<x_2$.

Np. każda z nierówności $x^2+6x+11<0$, $x^2+6x+9<0$ jest niemożliwa; każda z nierówności $x^2+6x+11>0$, $x^2-6x+9>0$ jest równoznaczna z zastrzeżeniem rzeczywistego x, przyczem jednak nierówności $x^2+6x+9>0$ nie czyni zadość wartość $x=-3$; nierówność $x^2+6x+8>0$ ma miejsce przy $x<-4$ i przy $x>-2$; nierówność $x^2+6x+8<0$ ma miejsce przy wartościach x, które zadość czynią warunkowi $-4<x<-2$.

TRYGONOMETRYCZNY KSZTAŁT PIERWIASTKÓW RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO.

113. Weźmy równanie w kształcie

$$x^2+px+q=0.$$

α). $\frac{1}{4}p^2-q>0$. Przy $q>0$, kładąc $p=-2\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}$ (skąd mamy związek $\sin\varphi=-\frac{2\sqrt{q}}{p}$ dla określenia kąta φ), otrzymamy

$$x=\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}\pm\sqrt{q\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-1\right)}=\frac{\sqrt{q}\,(1\pm\cos\varphi)}{\sin\varphi};\ x_1=\sqrt{q}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi,\ x_2=\sqrt{q}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Przy $q<0$. kładąc $p=-2\frac{\sqrt{-q}}{\operatorname{tg}\varphi}$ $\left(\text{skąd}\operatorname{tg}\varphi=-\frac{2\sqrt{-q}}{p}\right)$, otrzymamy

$$x=\frac{\sqrt{-q}(\cos\varphi\pm 1)}{\sin\varphi};\ x_1=\sqrt{-q}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi,\ \ x_2=-\sqrt{-q}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

β). $\frac{1}{4}p^2-q<0$. Kładąc $p=-2\sqrt{q}\cos\varphi$ $\left(\text{skąd}\cos\varphi=\frac{-p}{2\sqrt{q}}\right)$, otrzymamy

$$x=\sqrt{q}\cos\varphi\pm\sqrt{q(\cos^2\varphi-1)};\ x_1=\sqrt{q}\,(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ x_2=\sqrt{q}\,(\cos\varphi-i\sin\varphi).$$

ROZDZIAŁ PIĄTY.

RÓWNANIA STOPNI WYŻSZYCH, ROZWIĄZALNE ZAPOMOCĄ RÓWNANIĄ STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

PRZYPADKI NAJPROSTSZE.

114. Podobnie, jak równaniu $ax^2+bx=0$ czyni zadość wartość $x=0$ i wartość będąca pierwiastkiem równania stopnia 1-go $ax+b=0$, tak równaniu $ax^3+bx^2+cx=0$, czyli $x(ax^2+bx+c)=0$, czynią zadość wartości: $x=0$ i dwa pierwiastki równania stopnia 2-go $ax^2+bx+c=0$, równaniu $ax^4+bx^3+cx^2=0$, czyli $x^2(ax^2+bx+c)=0$, czynią zadość wartości: $x=0$, która jest pierwiastkiem podwójnym, i dwa pierwiastki równania stopnia 2-go $ax^2+bx+c=0$, i t. d. —

Równanie $x^4+2ax^3+a^2x^2-b^2=0$ czyli $(x^2+ax+b)(x^2+ax-b)=0$ ma cztery pierwiastki, z których dwa są pierwiastkami równania $x^2+ax+b=0$, dwa zaś pierwiastkami równania $x^2+ax-b=0$.

Równanie $x^4+(2a-b^2)x^2+a^2=0$, które możemy tak przedstawić: $(x^2+a)^2-b^2x^2=0$, ma cztery pierwiastki, z których dwa są pierwiastkami równania $x^2+bx+a=0$, dwa zaś pierwiastkami równania $x^2-bx+a=0$.

Równanie $x^4+2ax^3+(a^2-b^2)x^2-2bcx-c^2$, które możemy tak przedstawić: $(x^2+ax)^2-(bx+c)^2=0$, ma cztery pierwiastki, z których dwa są pierwiastkami równania $x^2+(a+b)x+c=0$, dwa zaś pierwiastkami równania $x^2+(a-b)x-c=0$. —

Jeżeli, mając równanie

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \tag{1}$$

dostrzeżemy, iż czyni mu zadość wartość $x=\alpha$, tak iż

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0, \tag{2}$$

to równanie (1) możemy zastąpić przez równoznaczne z niem, powstałe wskutek odjęcia równości (2) od równania (1) stronami odpowiedniemi,

$$a(x^3-\alpha^3)+b(x^2-\alpha^2)+c(x-\alpha)=0,$$

czyli

$$(x-\alpha)[ax^2+(a\alpha+b)x+a\alpha^2+b\alpha+c]=0.$$

Albo więc $x-\alpha=0$, albo też $ax^2+(a\alpha+b)x+a\alpha^2+b\alpha+c=0$, tak iż pierwiastkami równania (1) są: wartość $x=\alpha$ i pierwiastki równania

$$ax^2+(a\alpha+b)x+a\alpha^2+b\alpha+c=0.$$

Np. zauważywszy, że równaniu $x^3-x^2-15x-9=0$ czyni zadość wartość $x=-3$, możemy je tak przedstawić: $(x+3)(x^2-4x-3)=0$; a więc

$$x_1=-3,\ x_2=2+\sqrt{7},\ x_3=2-\sqrt{7}.$$

RÓWNANIA DWUMIENNE.

115. Jeżeli równanie daje się sprowadzić do kształtu

$$ay^m=b,$$

gdzie m jest liczbą całkowitą i dodatną, to nazywamy je równaniem dwumiennem (binomische, reine G.).

Podzieliwszy obie strony tego równania przez a i kładąc $\frac{b}{a}=c$, sprowadzamy równanie dwumienne do kształtu

$$y^m=c. \tag{1}$$

Jeżeli wartość bezwzględną c nazwiemy γ, tak iż albo $c=+\gamma$, alboteż $c=-\gamma$, to równanie (1) jest jednem z dwu równań $y^m=\pm\gamma$, czyli jednem z dwu równań

$$y^m\mp\gamma=0. \tag{2}$$

Pierwiastek arytmetyczny m-tego stopnia z liczby γ nazwawszy d i kładąc w (2) $y=dx$, mieć będziemy, z uwagi, że $d^m=\gamma$,

$$x^m\mp 1=0. \tag{3}$$

Jeżeli znajdziemy pierwiastki równania (3), to, mnożąc je przez liczbę dodatną d, otrzymamy pierwiastki równania (2), czyli równania (1). Zadanie więc polega na znalezieniu pierwiastków równania (3).

Przy $m=2$ widzieliśmy już (art. 62, 65), iż:

$$x^2-1=0,\ x_1=+1,\ x_2=-1;\quad x^2+1=0,\ x_1=+i,\ x_2=-i.$$

116. Lewą stronę równania $x^3-1=0$, możemy uważać za różnicę sześcianów liczb x i $+1$; a więc (art. 13, α) mamy $(x-1)(x^2+x+1)=0$. Albo więc pierwszy, alboteż drugi czynnik jest równy zeru; nazwawszy w pierwszym razie pierwiastek x_1, pierwiastki zaś w drugim razie x_2 i x_3, mamy

$$x^3-1=0;\ x_1=+1,\ x_2=-\frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ x_3=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Są to pierwiastki sześcienne algebraiczne z $+1$. Łatwo sprawdzić, że $x_2^2=x_3$, $x_3^2=x_2$, a oczywiście $x_2^3=x_3^3=x_1^3=+1$.

Gdy w równaniu $x^3+1=0$ przyjmiemy $x=-\xi$, to dojdziemy do równania $\xi^3-1=0$; pierwiastki więc ostatniego równania, pomnożone przez -1, dadzą pierwiastki równania $x^3+1=0$. A zatem

$$x^3+1=0;\quad x_1=-1,\quad x_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\quad x_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Są to pierwiastki sześcienne algebraiczne z -1, i znowu $x_2^2=x_3$, $x_3^2=x_2$.

Np. algebraiczne $\sqrt[3]{64}$ są: $4,\ -2+2i\sqrt{3},\ -2-2i\sqrt{3}$; algebraiczne $\sqrt[3]{-64}$ są: $-4,\ 2-2i\sqrt{3},\ 2+2i\sqrt{3}$.

Zauważmy, że tu, wyciągając pierwiastki z liczb rzeczywistych, po raz pierwszy otrzymujemy liczby zespolone. To więc, cośmy powiedzieli o działaniach odwrotnych w art. 71-ym, możemy teraz uzupełnić, zaznaczając, iż wyciąganie pierwiastka wprowadza nie tylko liczby rzeczywiste niewymierne pierwiastkowe i liczby urojone, ale także liczby zespolone.

117. Lewą stronę równania $x^4-1=0$ możemy uważać za różnicę kwadratów, tak iż mamy $(x^2-1)(x^2+1)=0$. Z przyrównania oddzielnych czynników do zera, otrzymamy równania, których pierwiastki już wypisaliśmy w art. 115-ym. A więc

$$x^4-1=0; \quad x_1=+1, \quad x_2=-1, \quad x_3=+i, \quad x_4=-i.$$

Są to pierwiastki stopnia 4-go algebraiczne z $+1$.

Do lewej strony równania $x^4+1=0$ dodajmy $2x^2-2x^2$; będziemy mieli $(x^2+1)^2-2x^2=0$, czyli $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)=0$. Rozwiązawszy równania, powstałe z przyrównania czynników do zera, znajdziemy pierwiastki równania

$$x^4+1=0; \quad x_1=\frac{\sqrt{2}(-1+i)}{2}, \quad x_2=\frac{\sqrt{2}(-1-i)}{2}, \quad x_3=\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2},$$

albo $x^4+1=(x^2+i)(x^2-i)=0$

$$x_4=\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}.$$

$x=\pm\sqrt{+i}$

$x=\pm\sqrt{-i}$

Są to pierwiastki stopnia 4-go algebraiczne z -1.

118. Równanie $x^6-1=0$, czyli $(x^3-1)(x^3+1)=0$ ma pierwiastki, będące pierwiastkami równań $x^3-1=0$ i $x^3+1=0$ wypisanemi już powyżej w art. 116-ym, które więc razem uważane, przedstawiają pierwiastki stopnia 6-go algebraiczne z $+1$.

Gdy w równaniu $x^6+1=0$ przyjmiemy $x=\xi i$, to, ponieważ $i^6=i^2=-1$, równanie przejdzie na $\xi^6-1=0$, tak iż z pierwiastków równania $x^6-1=0$, mnożąc je przez i, otrzymamy pierwiastki stopnia 6-go algebraiczne z -1.

$$x^6+1=0, \quad x_1=i, \quad x_2=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}, \quad x_3=\frac{\sqrt{3}-i}{2}, \quad x_4=-i, \quad x_5=\frac{\sqrt{3}+i}{2},$$

$$x_6=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}.$$

119. Równanie $x^8-1=0$ możemy napisać w kszałcie $(x^4-1)(x^4+1)=0$. Przeto pierwiastkami stopnia 8-go algebraicznemi z $+1$ są wszystkie pierwiastki, wypisane w art. 117-ym.

Równanie $x^{12}-1=0$, możemy napisać w kształcie $(x^6-1)(x^6+1)=0$. Przeto pierwiastkami stopnia 12-go algebraicznemi z $+1$ są pierwiastki, wypisane w art. 116-ym i 118-ym.

RÓWNANIA TRÓJMIENNE.

120. Jeżeli równanie daje się sprowadzić do kształtu

$$ax^{2m}+bx^m+c=0, \tag{1}$$

gdzie m jest liczbą całkowitą i dodatną, to nazywamy je równaniem trójmiennem (trinomische G.).

Jeżeli nazwiemy $x^m=y$, to równanie (1) możemy tak napisać:

$$ay^2+by+c=0.$$

Gdy znajdziemy pierwiastki tego równania, nazwijmy te pierwiastki y_1 i y_2, dla znalezienia pierwiastków równania (1) wypadnie rozwiązać dwa równania dwumienne

$$x^m=y \text{ i } x^m=y_2.$$

Np. $$x^6-7x^3-8=0;$$

$$y^2-7y-8=0,\quad y_1=+8,\quad y_2=-1;$$

$$x^3=+8,\quad x_1=+2,\quad x_2=-1+i\sqrt{3},\quad x_3=-1-i\sqrt{3};$$

$$x^3=-1,\quad x_4=-1,\quad x_5=\tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{3}),\quad x_6=\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

121. W przypadku, kiedy $m=2$, równanie (1) staje się równaniem

$$ax^4+bx^2+c=0. \qquad (2)$$

W tem równaniu mamy kwadrat niewiadomej, oraz kwadrat kwadratu niewiadomej; dlatego równanie (2) nazywa się r ó w n a n i e m d w u k w a d r a t o w e m (biquadratische G.). Rozwiązując je względem x^2, znajdujemy

$$x^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \text{skąd}\quad x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Np. $x^4-12{\cdot}49x^2+23{\cdot}04=0$, $x=\pm\sqrt{6{\cdot}245\pm3{\cdot}995}$, $x_1=+3{\cdot}2$, $x_2=-3{\cdot}2$, $x_3=+1{\cdot}5$, $x_4=-1{\cdot}5$.

$$x^4-3x^2+4=0,\quad x=\pm\sqrt{3\pm\sqrt{5}}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right);\ \text{(por. art. 102).}$$

122. Przy pomocy równań trójmiennych można rozwiązać niektóre z równań dwumiennych.

Równanie $x^8+1=0$ możemy zastąpić przez równanie $(x^4+1)^2-2x^4=0$, czyli $(x^4+x^2\sqrt{2}+1)(x^4-x^2\sqrt{2}+1)=0$, skąd otrzymujemy pierwiastki stopnia 8-go algebraiczne z -1 (możnaby je przekształcić; por. art. 102)

$$\pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},\quad \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}}.$$

Podobnie równanie dwumienne $x^{12}+1=0$, możemy zastąpić przez równanie $(x^6+x^3\sqrt{2}+1)(x^6-x^3\sqrt{2}+1)=0$. Kładąc (art. 116) $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})=\alpha$ możemy pierwiastki stopnia 12-go algebraiczne z -1 tak przedstawić:

$$\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha^2\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}},\ \alpha^2\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}}.$$

Moglibyśmy tą drogą dojść do rozwiązań równań $x^{16}\pm1=0$, $x^{24}\pm1=0$, i t. d., wogóle równań (3) art. 115-go przy $m=2^q$, lub $m=3.2^q$.

123. Uogólniając równanie trójmienne, weźmy równanie

$$a(\alpha x^{2p}+\beta x^p+\gamma)^{2m}+b(\alpha x^{2p}+\beta x^p+\gamma)^m+c=0.$$

Przyjmijmy $(\alpha x^{2p}+\beta^p+\gamma)^m=y$. Po znalezieniu pierwiastków y_1 i y_2 równania $ay^2+by+c=0$, a następnie wszystkich algebraicznych $\sqrt[m]{y_1}$ i wszystkich algebraicznych $\sqrt[m]{y_2}$, wypadnie rozwiązać $2m$ równań trójmiennych

$$\alpha x^{2p}+\beta x^p+\gamma=\sqrt[m]{y_1}\quad \text{i}\quad \alpha x^{2p}+\beta x^p+\gamma=\sqrt[m]{y_2}.$$

Np. $(x^2-6x-5)^4-5(x^2-6x-5)^2+4=0;$

$$y^2-5y+4=0,\quad y_1=4,\quad y_2=1;$$

$$x^2-6x-5=2,\ x_1=7,\ x_2=-1;\ x^2-6x-5=-2,\ x_3=3+2\sqrt{3},\ x_4=3-2\sqrt{3};$$

$$x^2-6x-5=1,\ x_5=3+\sqrt{15},\ x_6=3-\sqrt{15};\ x^2-6x-5=-1,\ x_7=3+\sqrt{13},\ x_8=3-\sqrt{13}$$

RÓWNANIA WZAJEMNE.

124. Jeżeli wszystkie pierwiastki równania są takiemi liczbami, iż, wypisawszy ich odwrotności, otrzymujemy te same liczby, które tylko w innym po sobie porządku następować mogą, to równanie nazywamy *równaniem wzajemnem* (reciproke G.). Z tego określenia wynika, że, jeżeli pewna wartość niewiadomej czyni takiemu równaniu zadość, to czyni mu również zadość odwrotność owej wartości.

Aby wykryć kształty ogólne takich równań, weźmy równanie jakiegokolwiek stopnia — naprzód stopnia nieparzystego. Np.

$$x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0. \tag{1}$$

Jeżeli temu równaniu czyni zadość pewna wartość x, to według określenia czyni mu również zadość odpowiednia liczba $\frac{1}{x}$. A więc możemy w tem równaniu zamiast x napisać $\frac{1}{x}$. Czyniąc to i mnożąc następnie obie strony równania przez x^5 (jest x od zera różne, gdyż nie może być $x=\infty$), mieć będziemy

$$1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5=0.$$

Aby w tem równaniu spółczynnik najwyższej potęgi niewiadomej był $+1$, jak w równaniu (1), podzielmy obie strony przez a_5; pisząc nadto wyrazy w porządku odwrotnym, będziemy mieli

$$x^5+\frac{a_4}{a_5}x^4+\frac{a_3}{a_5}x^3+\frac{a_2}{a_5}x^2+\frac{a_1}{a_5}x+\frac{1}{a_5}=0. \tag{2}$$

Przypuszczając, że równanie (1) jest wzajemne, przekształciliśmy je na równanie (2); w tem więc przypuszczeniu równania (1) i (2) nie tylko są równoznaczne z sobą, ale są tem samem równaniem, gdyż spółczynniki najwyższych potęg niewiadomej są sobie równe. Są przeto równe sobie w tych równaniach spółczynniki każdej innej potęgi niewiadomej, t. j. mamy

$$\frac{a_4}{a_5}=a_1,\quad \frac{a_3}{a_5}=a_2,\quad \frac{a_2}{a_5}=a_3,\quad \frac{a_1}{a_5}=a_4,\quad \frac{1}{a_5}=a_5.$$

Z ostatniego związku wypada $a_5^2=1$, a więc albo $a_5=1$, alboteż $a_5=-1$. Jest więc w równaniu (1) albo $a_5=+1$, $a_4=a_1$, $a_3=a_2$, alboteż $a_5=-1$, $a_4=-a_1$, $a_3=-a_2$. Przyjmijmy $a_1=p$, $a_2=q$; wówczas równanie (1) jest wzajemne w przypadku, gdy jest ono jednego z dwu kształtów

$$x^5+px^4+qx^3+qx^2+px+1=0,\quad x^5+px^4+qx^3-qx^2-px-1=0. \tag{3}$$

Taksamo rozumując w przypadku równania stopnia parzystego, dojdziemy do podobnych wyników, lecz w razie, kiedy wyraz wiadomy jest -1, spółczynnik wyrazu środkowego jest równy zeru; tak więc równania wzajemne stopnia np. 6-go są kształtu

$$x^6+px^5+qx^4+rx^3+qx^2+px+1=0,\quad x^6+px^5+qx^4-qx^2-px-1=0. \tag{4}$$

Równania dwumienne (3) art. 115-go są szczególnym przypadkiem równań wzajemnych.

125. Równania wzajemne stopnia 2-go są

$$x^2+px+1=0;\ x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-1}=\frac{1}{x_2},\ x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-1}=\frac{1}{x_1};$$

$$x^2-1=0,\quad x_1=+1=\frac{1}{x_1},\ x_2=-1=\frac{1}{x_2}. \tag{5}$$

Równania wzajemne stopnia 3-go są

$$x^3+px^2+px+1=0,\quad x^3+px^2-px-1=0. \tag{6}$$

Pierwsze możemy napisać

$$x^3+1+px(x+1)=0, \text{ czyli (art. } 13\gamma)\ (x+1)[x^2+(p-1)x+1]=0;$$

albo więc $x+1=0$, skąd jeden pierwiastek jest -1, albo też $x^2+(p-1)x+1=0$. To zaś równanie jest kształtu pierwszego z równań (5). Drugie z równań (6) możemy napisać

$$(x-1)[x^2+(p+1)x+1]=0,$$

t. j. sprowadzić je do równania $x-1=0$ i równania $x^2+(p+1)x+1=0$ takiego kształtu, jak pierwsze z równań (5).

Równania wzajemne stopnia 4-go są

$$x^4+px^3+qx^2+px+1=0,\quad x^4+px^3-px-1=0. \tag{7}$$

Podzieliwszy obie strony pierwszego z tych równań przez x^2, możemy je napisać w kształcie $x^2+\frac{1}{x^2}+p\left(x+\frac{1}{x}\right)+q=0$. Kładąc $x+\frac{1}{x}=z$, wskutek czego $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$, zastąpimy poprzednie równanie przez równanie

$$z^2+pz+q-2=0,$$

którego pierwiastki nazwijmy z_1 i z_2. Następnie zaś w równaniu $x+\frac{1}{x}=z$, czyli w równaniu $x^2-zx+1=0$, kładąc zamiast z kolejno z_1 i z_2 i rozwiązując odpowiednie dwa równania wzajemne stopnia 2-go, kształtu pierwszego z równań (5), znajdziemy rozwiązania pierwszego z równań (7). — Drugie z równań (7) możemy przedstawić w kształcie

$$(x^2-1)[x^2+px+1]=0,$$

tak iż jego pierwiastkami są pierwiastki obu równań (5).

Z równań wzajemnych (3), stopnia 5-go, pierwsze możemy tak przedstawić

$$x^5+1+px(x^3+1)+qx^2(x+1)=0,$$

czyli $\quad (x+1)[x^4+(p-1)x^3+(q-p+1)x^2+(p-1)x+1]=0;$

sprowadza się więc ono do równania $x+1=0$ i do równania takiego kształtu, jak pierwsze z równań (7). — Drugie zaś z równań (3) możemy przedstawić w kształcie

$$x^5-1+px(x^3-1)+qx^2(x-1)=0,$$

czyli $\quad (x-1)[x^4+(p+1)x^3+(p-q+1)x^2+(p+1)x+1]=0;$

sprowadza się więc ono znowu do równania $x-1=0$ i równania takiego kształtu, jak pierwsze z równań (7).

Z równań wzajemnych (4) stopnia 6-go możemy tu rozwiązać drugie, przedstawiając je w kształcie

$$x^6-1+px(x^4-1)+qx^2(x^2-1)=0,$$

czyli $$(x^2-1)[x^4+px^3+(q+1)x^2+px+1]=0,$$

gdyż ono sprowadza się do równania $x^2-1=0$ i równania takiego kształtu, jak pierwsze z równań (7).

126. Równanie dwumienne $x^5-1=0$ sprowadza się do dwu równań, jednego $x-1=0$, skąd $x=1$, drugiego $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, takiego kształtu, jak pierwsze z równań (7), a którego pierwiastki są $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\pm i\frac{\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}$, gdzie przy każdym z dwu znaków przed ostatnim składnikiem należy w liczniku pod pierwiastkiem wziąć każdy z dwu znaków. Te więc 4 liczby i poprzednia $+1$ są pierwiastkami stopnia 5-go algebraicznemi z $+1$.

Teraz możemy rozwiązać równania:

$x^5+1=0$, $(x=-\xi)$; $x^{10}-1=0$, $x^{10}+1=0$, $(x=\xi i)$; $x^{20}-1=0$; $x^{20}+1=0$,

czyli $$(x^{10}+1)^2-2x^{10}=0;\ \text{i t. d.};$$

wogóle równania (3) art. 115-go przy $m=5.2^q$.

Równaniu $x^{15}-1=0$, czyli (art. 13α) równaniu $(x^5-1)(x^{10}+x^5+1)=0$ czynią zadość pierwiastki stopnia 5-go z $+1$, oraz ich iloczyny przez każdą z liczb $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$, czyli są niemi iloczyny pierwiastków stopnia 5-go z $+1$ przez pierwiastki stopnia 3-go z -1.

Możemy także rozwiązać równania

$$x^{15}+1=0,\ (x=-\xi);\ x^{30}-1=0;\ x^{30}+1=0,\ (x=\xi i);\ x^{60}+1=0,$$

czyli $$(x^{30}+1)^2-2x^{30}=0;\ \text{i t. d.};$$

wogóle równanie (3) art. 115-go przy $m=3.5.2^q$.

SZCZEGÓLNE RÓWNANIE WYKŁADNICZE, ROZWIĄZALNE PRZY POMOCY RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

127. Gdy mamy równanie wykładnicze kształtu

$$a^{2x}+pa^x+q=0,$$

to, kładąc $a^x=y$, po znalezieniu pierwiastków y_1 i y_2 równania $y^2+py+q=0$, wypadnie rozwiązać równania $a^x=y_1$ i $a^x=y_2$ (art. 87). Ponieważ w tych równaniach a jest liczbą dodatną, przeto istnieją rozwiązania rzeczywiste tylko w razie, kiedy y_1 i y_2 są liczbami dodatnemi.

Np. $$5^{2x}-2.5^x-8=0;$$

a więc albo $5^x=4$, skąd $x=\frac{\log 4}{\log 5}=0{\cdot}86135$, alboteż $5^x=-2$, a to równanie nie ma rozwiązania rzeczywistego.

Podobnie gdybyśmy mieli równanie

$$2\sqrt[2x]{5}-\sqrt[x]{5}+8=0,\qquad \text{czyli}\qquad 5^{\frac{1}{x}}-2.5^{\frac{1}{2x}}-8=0,$$

to znajdziemy $5^{\frac{1}{2x}}=4$, lub $5^{\frac{1}{2x}}=-2$. Z pierwszego równania mamy $x=\frac{\frac{1}{2}\log 5}{\log 4}=0{\cdot}58048.$

ZADANIA.

(Art. 9). **1.** $(x+2y-3z)^2$. **2.** $[a^{m+1}(3+4a^{m+2}+5a^{2m+4}+6a^{3m+6})]^2$.

3. $(a^3+a^2b-ab^2-b^3)^2-(a^3-a^2b+ab^2-b^3)^2$.

4. α) $(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2$; β) $4[(a^2-b^2)cd+(c^2-d^2)ab]^2+[(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd]^2$.

5. $$\frac{1}{1-\left\{\dfrac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x}\right\}^2}\times\frac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x]-(a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2}.$$

6. α) $(ap+bq+cr+ds)^2+(aq-bp+cs-dr)^2+(ar-cp+dq-bs)^2+(as-dp+br-cq)^2$;
β) $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$.

7. $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

8. Okazać, że, jeżeli $a+b+c+d=\mathrm{A}$, $a+b-c-d=\mathrm{B}$, $a-b+c-d=\mathrm{C}$, $a-b-c+d=\mathrm{D}$, to: α) $(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2)=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$; β) w razie, kiedy $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$, jest $\mathrm{AB}(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)=\mathrm{CD}(\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2)$.

9. Okazać, że, jeżeli $\mathrm{A}=br+cq+ap$, $\mathrm{B}=cr+aq+bp$, $\mathrm{C}=ar+bq+cp$, to $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2-\mathrm{AB}-\mathrm{AC}-\mathrm{BC}=(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(p^2+q^2+r^2-pq-pr-qs)$.

10. Jeżeli w trójmianie $ax^2+2bxy+cy^2$ przyjmiemy $x=\alpha\xi+\beta\eta$, $y=\gamma\xi+\delta\eta$ i w otrzymanem wyrażeniu spółczynniki ξ^2, $\xi\eta$, η^2 nazwiemy odpowiednio A, 2B, C, to jaki jest wykładnik stosunku $(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2):(ac-b^2)$?

11. $(a+b+3x)^2+(a-b+4x)^2-(b-a+5x)^2=5a^2+2b^2-2ab$.

12. $$\begin{cases}(x+y+2)^2-(2x+2y+1)^2+3(x+y)^2+2x+y-6=0\\(x+2y+1)^2+(2x+y+1)^2-5(x+y)^2+2(x+1)(y+2)-24=0\end{cases}$$

(Art. 10). **13.** 789^2. **14.** 1357^2. **15.** $12\,345^2$. **16.** $27\,943^2$. **17.** $20\,304^2$. **18.** $30\,009^2$. **19.** $58\,876^2$. **20.** 9^8. **21.** 11^8. **22.** 7^{16}. **23.** Wypisać odrazu kwadraty liczb: 11, 111,..., 111 111 111. **24.** $0{\cdot}0123^2$. **25.** $0{\cdot}0523^2$. **26.** $10{\cdot}01^2$. **27.** $1{\cdot}331^2$. **28.** $\left(\frac{24}{25}\right)^2$. **29.** $1-\left(\frac{2}{3}\right)^8$. **30.** $\left(\frac{34}{111}\right)^2$.

(Art. 11). **31.** $(7ab-3bc)^3$. **32.** $(\frac{2}{3}a^2b-\frac{3}{4}ab^2)^3$. **33.** $(7a^2b^3c-3ab^2c^3)^3$. **34.** $(2a^2-3ab+5b^2)^3$. **35.** $(5x^2-7xy-9y^2)^3$. **36.** $(a^3+3a^2b+3ab^2-2b^3)^3$. **37.** $(\frac{1}{5}x-\frac{1}{6}y+\frac{1}{7}z)^3$. **38.** Okazać, że, jeżeli $\mathrm{B}=b^2+bc+c^2$ i $\mathrm{C}=b^2c+bc^2$, to $4\mathrm{B}^3-27\mathrm{C}^2=(b-c)^2(2b^2+5bc+2c^2)^2$ i $4\mathrm{B}^3-27\mathrm{C}^2>0$. **39.** Przy założeniach tych samych, co w zad. 9-em, okazać, że $\mathrm{A}^3+\mathrm{B}^3+\mathrm{C}^3-3\mathrm{ABC}=(a^3+b^3+c^3-3abc)(p^3+q^3+r^3-3pqr)$.

(Art. 12). **40.** 24^3. **41.** 44^3. **42.** 96^3. **43.** 112^3. **44.** 308^3. **45.** 1357^3. **46.** 2061^3. **47.** $11\,111^3$. **48.** 3^{12}. **49.** 12^6. **50.** 2^{27}. **51.** 11^9. **52.** $2{\cdot}06^3$. **53.** $2{\cdot}007^3$. **54.** α) $\left(\frac{17}{27}\right)^3$; β) $\left(7\frac{124}{125}\right)^3$.

(Art. 13). **55.** α) $\dfrac{a^{14}-b^{14}}{a^2-b^2}$; β) $\dfrac{a^{14}+b^{14}}{a^2-b^2}$; γ) $\dfrac{a^{14}-b^{14}}{a^2+b^2}$; δ) $\dfrac{a^{14}+b^{14}}{a^2+b^2}$. **56.** α) $\dfrac{1-a^6}{1-a}$; β) $\dfrac{1+a^6}{1-a}$; γ) $\dfrac{1-a^6}{1+a}$; δ) $\dfrac{1+a^6}{1+a}$. **57.** α) $\dfrac{243a^{10}x^{15}-32b^5y^{20}}{3a^2x^3-2by^4}$; β) $\dfrac{243a^{10}x^{15}+32b^5y^{20}}{3a^2x^3-2by^4}$; γ) $\dfrac{243a^{10}x^{15}-32b^5y^{20}}{3a^2x^3+2by^4}$; δ) $\dfrac{243a^{10}x^{1}+32b^5y^{20}}{3a^2x^3+2by^4}$. **58.** α) $\dfrac{64a^{12}b^{24}-1}{2a^2b^4-1}$; β) $\dfrac{64a^{12}b^{24}+1}{2a^2b^4-1}$; γ) $\dfrac{64a^{12}b^{24}-1}{2a^2b^4+1}$; δ) $\dfrac{64a^{12}b^{24}+1}{2a^2b^4+1}$.

59. Licznik i mianownik wyrażenia $\frac{7x^8-8x^7+1}{x^2-2x+1}$ rozłożyć na czynniki i wypisać odrazu składowe części ilorazu.

(Art. 15 i 16). 60. $\left(\frac{2}{3}a^{-3}bx^{-3}y^2\right)^{-3}$. 61. $\left(\frac{a+b}{b-a}\right)^{-2}\frac{1}{(a+b)^{-3}}.(a-b)^{-3}$.

62. $(1+a)^{-7}.(1-a)^{-7}.\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{-6}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{-13}$. 63. $(a^2+2b)^{-2}$. 64. $(a^2-\frac{1}{2}a^{-2})^2$.

65. $(3a+\frac{1}{3}a^{-1})^3$. 66. $\frac{a^{-3p+2n}b^{5p}}{c^{-3q}}.\frac{a^{-2n}b^{-3p+n}}{c^{5q+3}}$.

(Art. 20). 67. $\sqrt{14400}=\sqrt{(2^3.3.5)^2}$. 68. $\sqrt{7.(1.2.3.4.5.6.7.8.9.10)}$.

69. $\sqrt{4a^6b^8c^{10}}=\sqrt{(2a^3b^4c^5)^2}$. 70. $\sqrt[3]{843908625}$. 71. $\sqrt[5]{248832}$. 72. $\sqrt[7]{128a^{14}b^{7p}c^{21}}$.

(Art. 22). 73. Inaczej rozwiązać zadania od 67-go do 72-go.

(Art. 23). 74. $\sqrt{8}.\sqrt{2}.\sqrt{12}.\sqrt{27}$. 75. $\sqrt{3ab^3c^5d^7}.\sqrt{12a^3bc^7d^3}$.

76. $\sqrt[5]{8a^3b^7c^{12}}.\sqrt[5]{16a^4b^3d^{11}}.\sqrt[5]{8a^3c^8d^4}$. 77. $\sqrt[3]{3(a^2+2ab+b^2)}.\sqrt[3]{4(a^2-2ab+b^2)}.\sqrt[3]{18(a^2-b^2)}$.

(Art. 24). 78. Inaczej rozwiązać zadania od 67-go do 72, od 73-go do 77-go.

79. $\sqrt[4]{256a^8b^{4m+4}c^{8m-12}}$. 80. $\sqrt[3]{a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6}$.

(Art. 25). 81. $\sqrt{12a^3b^2c^5}$. 82. $\sqrt[3]{32a^7b^{3p+1}c^{4q+2}}$. 83. $\sqrt[3]{59719680}$.

84. $\sqrt[4]{3a^5b-24a^4b^2+72a^3b^3-96a^2b^4+48ab^5}$. 85. $\sqrt[3]{85\cdot034928}$. 86. $\sqrt{0\cdot432}$.

(Art. 26). 87. $\frac{\sqrt{a^5b^2c^3d}}{\sqrt{ab^2c^9d^{11}}}$. 88. $\frac{\sqrt[3]{32a^3b^4c}}{\sqrt[3]{4a^6b^2}}$. 89. $\frac{\sqrt[3]{191102976}}{\sqrt[3]{37933056}}$.

(Art. 28 i 29). 90. $\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6c^{12}}}$. 91. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{16}b^{10}c^{30}}}$. 92. $\sqrt{\sqrt[3]{500094}}$.

93. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{15552000}}$. 94. $\sqrt[5]{\sqrt{53128406016}}$. 95. $\sqrt[4]{20736\sqrt[3]{4586471424}}$.

96. $\sqrt[5]{2\sqrt{3}}.\sqrt[5]{4\sqrt[4]{\frac{3}{2}}}.\sqrt[5]{4\sqrt[4]{6}}.\sqrt[5]{4}$. 97. $\frac{3a}{5b}\sqrt[5]{\frac{m^2}{a-x}}\frac{4b}{5a}\sqrt{\frac{a-x}{2m^3}}$.

98. $\sqrt[3]{\frac{a}{b.c}}.\sqrt{a^3b^5c}.\sqrt[6]{ab^{11}c^5}$. 99. $\sqrt{a^3b}.\sqrt[3]{b^2c}.\sqrt[4]{a^2b^5c^7}$.

100. $\sqrt{a^3b^5cd^7}.\sqrt[5]{abc^7d^2}.\sqrt[10]{a^{13}b^3cd^{11}}$. 101. $\frac{\sqrt{a^3b^9}}{\sqrt[3]{a^4b^{13}}}$. 102. $\frac{\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt[5]{a^4b}}$. 103. $\frac{\sqrt[5]{a^3b^{2p}}}{\sqrt[7]{a^4b^{3p}}}$.

104. $\frac{\sqrt{a^{7n}c^5}}{\sqrt[3]{a^{11n}c^7}}$. 105. $\frac{\sqrt[5]{b^3c^{2x}}}{\sqrt[3]{b^2c^x}}$. 106. $\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[7]{a^4b^3}}.\frac{\sqrt{a^7c^5}}{\sqrt[3]{a^{11}c^7}}.\frac{\sqrt[5]{b^3c^2}}{\sqrt[3]{b^2c}}.\sqrt[210]{\frac{c^{21}}{a^{41}b^{50}}}$.

107. $\sqrt[3]{972}.\sqrt{24}.\sqrt[6]{497664}$. 108. $\frac{\sqrt[9]{253125}}{\sqrt[11]{3796875}}$.

(Art. 30). 109. $\begin{cases}\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$ 110. $\begin{cases}\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\\ x^3+y^3+z^3=1.\end{cases}$ 111. $8:x^3=125:27$.

(Art. 31). 112. $3:x=x:9$. 113. $a^3:x=y:b^3$, gdy $y:x=b:a$. 114. Gdy średnie arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną liczb dodatnych a i b nazwiemy odpowiednio

s_a, s_g i s_h, to α) okazać, że $s_a : s_g = s_g : s_h$; β) okazać, że w razie, kiedy a różne od b, jest $s_a > s_g > s_h$, nie korzystając z podanego w art. 31-ym dowodzenia, iż $s_a > s_g$.

115. Jak wielki jest bok kwadratu równoważnego z prostokątem, którego podstawa jest 150 *m*, a wysokość 24 *m*?

116. Z punktu prowadzimy styczną i sieczną do koła. Odcinki siecznej od tego punktu liczone są: 12 *cm* i 27 *cm*. Jak wielki jest odcinek stycznej między owym punktem, a punktem styczności?

117. Znaleźć objętość stożka ściętego, którego wysokość jest 8 *m*, a promienie podstaw 1·5 *m* i $\frac{2}{3}$ *m*.

(Art. 37). **118.** Dla α) $\sqrt{5}$, β) $\sqrt[3]{2}$, γ) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ znaleźć od każdej mniejsze i większe liczby ułamkowe o mianownikach jednakowych, mianowicie: 6, 7, 10, a licznikach różniących się o jedność.

(Art. 38). **119.** $\sqrt{120}+\sqrt{270}+\sqrt{2430}$. **120.** $\sqrt{4a^2b^2c}+\sqrt{8a^2bc^2}+\sqrt{12ab^2c^2}$.

121. $3\sqrt{a^2-b^2}+2\sqrt{a^3-a^2b}+3a\sqrt{a-b}$. **122.** $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{320}-2\sqrt[3]{1372}$.

123. $\sqrt{4a^3b}+\sqrt{25ab^3}-(a-5b)\sqrt{ab}$. **124.** $\frac{a}{mc}\sqrt{m^3nc^2}-\frac{b}{np}\sqrt{4mn^3p^2}+\frac{c}{pq}\sqrt{9mnp^2q^2}$.

125. $3\sqrt{ab}-2\sqrt{ac}-5\sqrt{bc}-(4\sqrt{bc}-3\sqrt{ab}-6\sqrt{ac})-(4\sqrt{ac}-9\sqrt{bc}+\sqrt{ab})$.

126. $2{\cdot}8\sqrt[3]{10}+6\sqrt[3]{0{\cdot}01}+\sqrt[3]{2-\frac{48}{25}}+2\sqrt[3]{\frac{2}{25}}$. **127.** $6\sqrt[6]{27}-4\sqrt{6}+6\sqrt{75}-28\sqrt{3}$.

128. $3\sqrt{6-2x}-\left(\sqrt{24-8x-\sqrt{1-\frac{x}{3}}}\right)-\left(\sqrt{6-2x-8\sqrt{\frac{1}{6}-\frac{x}{18}}}\right)$. **129.** $(a+\sqrt{b})^2$.

130. $(a-\sqrt{b})^3$. **131.** $(3-\sqrt{5})^2$. **132.** $(3-\sqrt{5})^3$. **133.** $(a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-\sqrt{ab})^2$.

134. $(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{7})$. **135.** $(3-\sqrt{5}+\sqrt{7})^2$.

136. $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(1-2\sqrt{15})$. **137.** $(3-\sqrt{5}+\sqrt{7})^3$.

138. $(2\sqrt{30}-3\sqrt{5}+5\sqrt{3})(2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$. **139.** $(1+x^2+x\sqrt{2})(1+x^2-x\sqrt{2})$.

140. $(1+x^2)(1+x^2+x\sqrt{3})(1+x^2-x\sqrt{3})$. **141.** $\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

142. $a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\cdot\left[x-\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]\right.$.

143. $(p^2+q^2)(p+q)(\sqrt{p}+\sqrt{q})(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})(\sqrt[8]{p}+\sqrt[8]{q})(\sqrt[16]{p}+\sqrt[16]{q})(\sqrt[16]{p}-\sqrt[16]{q})$.

144. $\left[\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}\right)^2-\sqrt[6]{xy}\right]\cdot\left[\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}\right)^2+\sqrt[6]{xy}\right].\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)$.

145. $(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{3})$.

146. $(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})(c\sqrt{x}+d\sqrt{y})+(a\sqrt{x}-b\sqrt{y})(c\sqrt{x}-d\sqrt{y})$.

147. $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\,\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}+\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}\,\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}$. **148.** $\left(3\sqrt[3]{2}-4\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)\left(3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[6]{32}\right)$

149. $\sqrt[3]{a+b+2\sqrt{ab}}\,\sqrt[3]{a+b-2\sqrt{ab}}\,\sqrt[3]{a-b}$. **150.** $\left(2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}-4\sqrt[4]{2}+5\sqrt[6]{2}\right).6\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$.

151. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})$.

152. Sprawdzić, że, jeżeli $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=a$, to $a^3+3a-4=0$.

153. $(42-35\sqrt{3}-18\sqrt{5}+15\sqrt{15}):(6-5\sqrt{3})$. **154.** $(\sqrt{ax}+x\sqrt{a}-2\sqrt{3x}-2\sqrt{3}):(\sqrt{x}-2\sqrt{\frac{3}{a}})$.

155: $(a+b):\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$. **156.** $\left(a\sqrt[4]{a}-b\sqrt[4]{b}\right):\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)$.

157. $\left(\sqrt[6]{a^5}+\sqrt[6]{a^4}+\sqrt[6]{a^3}+\sqrt[6]{a^2}+\sqrt[6]{a}+1\right):\left(\sqrt[6]{a^2}+\sqrt[6]{a}+1\right)$.

158. $\left(8\sqrt[15]{a^2}-\frac{10}{\sqrt[6]{a^4b^5}}-12\sqrt[20]{a^{16}b^{15}}+\frac{15}{\sqrt[12]{b}}\right):\left(4\sqrt[5]{a^4}-\frac{5}{\sqrt[6]{b^5}}\right)$.

159. $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1+x}}$. 160. $\frac{x^2+1+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}+\frac{x^2+1-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}$.

161. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

162. $\frac{1}{a+\sqrt{a-\sqrt{a}}}+\frac{1}{a-\sqrt{a-\sqrt{a}}}+\frac{1}{a-\sqrt{a+\sqrt{a}}}+\frac{1}{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$.

163. $\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}-\sqrt{a+c}}+$
$+\frac{1}{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}-\sqrt{a+b}}$.

164. Znaleźć pole trójkąta, którego boki są $4\,m$, $5\,m$ i $6\,m$.

165. Znaleźć promień koła wpisanego w trójkąt, którego boki są a, b, c.

166. W kwadrat o boku a wpisanych jest 5 kół równych tak, iż z czterech kół, każde jest styczne do dwu boków kwadratu i do piątego koła środkowego. Jaki jest promień tych kół?

167. Mając trójkąt prostokątny, z punktów końcowych przeciwprostokątnej wystawiamy do niej prostopadłe aż do przecięcia się z przedłużeniami przeciwległych przyprostokątnych, których wymiary są $3\,cm$ i $4\,cm$, a te dwa punkty przecięcia łączymy z sobą linią prostą. Jaki jest obwód tak powstałego trapezu?

(Art. 42). 168. $\frac{2}{3\sqrt{7}}$. 169. $\frac{2}{3\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}$. 170. $\frac{3\sqrt{15}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}$.

171. $\frac{66\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$. 172. $\frac{4+2\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$. 173. $\frac{8+2\sqrt{42}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}-\sqrt{5}}$.

174. $\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{15}-3-\sqrt{3}}{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{3})}$. 175. $\frac{242}{3\sqrt[4]{3}+1}$. 176. $\frac{a-1}{a-\sqrt[4]{b}}$.

177. $\frac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt[3]{3b}}$. 178. $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$. 179. $\frac{c}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

180. $\frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2-\sqrt{6}}$. 181. $\frac{7\sqrt{2}-\sqrt{10}}{\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+1}$.

182. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. 183. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$.

(Art. 44). 184. $\sqrt{5+x}=5-\sqrt{x}$. 185. $7=\sqrt{x+4}$. 186. $3=\sqrt{x+5}$.

187. $x+\sqrt{x^2+3}=3$. 188. $\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}$. 189. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=b$.

190. $\sqrt{x+4ab}=2a+\sqrt{x}$. 191. $\sqrt{4x^2-7x-6}=9-2x$.

192. $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\frac{4}{\sqrt{x+2}}$. 193. $\frac{ax-b^2}{\sqrt{ax}+b}-\frac{\sqrt{ax}-b}{c}=c$.

194. $3x-5=\sqrt{9x^2-10x-55}$. 195. $\sqrt{7+x}=3-\sqrt{x}$. 196. $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4$.

197. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\frac{24}{\sqrt{x+3}}$. 198. $\sqrt[3]{a^3x^3+3a^2bx(x+1)+c^3}=ax+b$.

199. $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+6)=(3+\sqrt{x})^2$. 200. $(5\sqrt{x}+7)(12\sqrt{x}+9)=$
$=6(10\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}+2)$. 201. $3(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+25)=(5+3\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)$.

202. $\sqrt{2x+11}+\sqrt{2x-5}=8$. 203. $\sqrt{2+3\sqrt{x}}+\sqrt{2-3\sqrt{x}}=2$.

204. $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}$. 205. $\sqrt{4a+x}+\sqrt{x}=2\sqrt{b+x}$.

206. $\sqrt{4x-9}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x+6}$. 207. $\sqrt{5-\sqrt{x}}=-2\sqrt{3-\sqrt{x}}+\sqrt{7-\sqrt{x}}$.

208. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4+\sqrt{8x^2+10x+42}}$.

209. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{1+4\sqrt{x^2-3x-4}}$. 210. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=$
$=\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-5x+6}}$ 211. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+5+2\sqrt{x^2+16}}$.

212. $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x+9+2\sqrt{2x^2-6}}$. 213. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=$
$=\sqrt{5x+21+2\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x^2+8x}}$. 214. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=$
$=\sqrt{5x+8+2\sqrt{x^2+9x+14}+2\sqrt{x^2+6x-7}}$. 215. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$.

216. $\sqrt{7+x}-\sqrt{x}=3$. 217. $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=4$.

218. $\begin{cases}\sqrt{y}=\dfrac{5}{3}\sqrt{y-x},\\ \sqrt{y-x}=\dfrac{3}{2}\sqrt{20-x}.\end{cases}$ 219. $\begin{cases}2x-\sqrt{y}=5,\\ (4x-7)(x-3)=y.\end{cases}$ 220. $\begin{cases}5\sqrt{x}+3\sqrt{y}=8,\\ 3\sqrt{x}+4\sqrt{y}=7.\end{cases}$

221. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-3}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{2}{\sqrt{y-3}}=0.\end{cases}$ 222. $\begin{cases}x+y-\sqrt{x^2+2x\left(y+\dfrac{1}{2}\right)+y^2+y-3}=0,\\ x^2-y^2-\sqrt{x^4-2x^2y^2+y^4}+x-y-1=0.\end{cases}$

223. $\begin{cases}\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{x^2}=84,\\ \sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}=14.\end{cases}$ 224. $\begin{cases}x+y+\sqrt{x^2+y^2+2xy+6x-y}=5,\\ 2x-y+\sqrt{4x^2-4xy+y^2+5x+3y}=4.\end{cases}$

225. $\begin{cases}x+2y+2-\sqrt{72+x^2+4y^2+4xy}=0,\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=\sqrt{x+y+3+2\sqrt{15+xy}}.\end{cases}$

226. $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}-\sqrt{3x+\sqrt{x^2-y-1}}=0,\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x+5}-\sqrt{x+y+6+\sqrt{xy+x+5y+5}+\sqrt{xy+11}}=0.\end{cases}$

227. $\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{y-3}-\sqrt[4]{4xy-12x-8y+24}=0,\\ \sqrt{x+y-5}+\sqrt{x-y+1}-\sqrt{2x-4+2\sqrt{x^2-3x+4y-y^2-1}}=0.\end{cases}$

228. $\begin{cases}x+y+\sqrt{x^2+2xy+y^2+x+y-3}=0,\\ x^2-y^2-\sqrt{x^4-2x^2y^2+y^4+x-y-1}=0.\end{cases}$

(Art. 45). 229. $\sqrt{4a^6+12a^5b-11a^4b^2-22a^3b^3+37a^2b^4-20ab^5+4b^6}-$
$-\sqrt{9a^4b^2-12a^3b^3+34a^2b^4-20ab^5+25b^6}$.

230. $\sqrt{16a^6b^4-56a^5b^5+9a^4b^6+86a^3b^7-3a^2b^8-20ab^9+4b^{10}}$.

231. $\sqrt{\frac{9}{4}a^6b^4c^6-a^5b^5c^5+3\frac{1}{9}a^4b^6c^4-\frac{4}{3}a^3b^7c^3+a^2b^8c^2}$.

232. $\sqrt[4]{16a^4b^4-96a^3b^5+216a^2b^6-216ab^7+81b^8}$.

233. $\sqrt[4]{a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8}$.

234. Okazać, że $32a^2b^2(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^4+8ab(a^2+b^2)\sqrt{16a^2b^2(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^4}=(a+b)^8$.

(Art. 47). 235. $\sqrt{4761}$. 236. $\sqrt{55225}$. 237. $\sqrt{218089}$. 238. $\sqrt{1809025}$.

239. $\sqrt{20151121}$. 240. $\sqrt{53348416}$. 241. $\sqrt{694059025}$. 242. $\sqrt{3466383376}$.

243. $\sqrt{13233281296}$. 244. $\sqrt{35104993820913289}$. 245. $\sqrt{1{\cdot}5129}$. 246. $\sqrt{16{\cdot}4836}$.

247. $\sqrt{1{\cdot}700416}$. 248. $\sqrt{0{\cdot}42276004}$. 249. $\sqrt{0{\cdot}000010272025}$. 250. $\sqrt[4]{531441}$.

251. $\sqrt[4]{4304{\cdot}6721}$. 252. $\sqrt[8]{42{\cdot}94967296}$.

(Art. 48, 50). 253. $\sqrt{10}$ z przybliżeniem na 0·01. 254. $\sqrt{15}$ z prz. na 0·001.

255. $\sqrt{3{\cdot}6}$ z prz. na 0·0001. 256. $\sqrt{0{\cdot}9}$ z prz. na 0·0001. 257. $\sqrt{0{\cdot}95}$ z prz. na 0·00001.

258. $\sqrt{0{\cdot}63}$ z prz. na 0·00001. 259. $\sqrt{12{\cdot}4}$ z prz. na 0·00001. 260. $\sqrt{0{\cdot}0079}$ z prz.

na 0·000001. **261.** $\sqrt{15}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **262.** $\sqrt{3\frac{3}{4}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **263.** $\sqrt{124\frac{7}{15}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **264.** $\sqrt{201\frac{4}{5}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **265.** $\sqrt{47}$ z prz. na $\frac{1}{35}$. **266.** $\sqrt{7\frac{8}{15}}$ z prz. na $\frac{1}{35}$. **267.** $\sqrt{10\frac{10}{49}}$. z prz. na $\frac{1}{35}$. **268.** $\sqrt{102\frac{3}{4}}$ z prz. na $\frac{1}{35}$.

(Art. 51). **269.** $\sqrt[3]{27a^6b^9-54a^4b^6cd^4+36a^2b^3c^2d^8-8c^3d^{12}}$.

270. $\sqrt[3]{a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a+1}$.

271. $\sqrt[3]{8a^6-36a^5b+66a^4b^2-63a^3b^3+33a^2b^4-9ab^5+b^6}$.

272. $\sqrt[3]{8a^6+48a^5b+60a^4b^2-80a^3b^3-90a^2b^4+108ab^5-27b^6}$.

273. $\sqrt[3]{8a^6-36a^5b+112a^4b^2-171a^3b^3+204a^2b^4-144ab^5+64b^6}$.

274. $\sqrt[3]{a^9+9a^8b+36a^7b^2+75a^6b^3+72a^5b^4-9a^4b^5-69a^3b^6-18a^2b^7+36ab^8-8b^9}$.

275. $\sqrt[3]{(a^{15}-3a^{10}+3a^5-1):(a^3-3a^2+3a-1)}$.

(Art. 53). **276.** $\sqrt[3]{175616}$. **277.** $\sqrt[3]{274625}$. **278.** $\sqrt[3]{571787}$. **279.** $\sqrt[3]{1404928}$.

280. $\sqrt[3]{1030301}$. **281.** $\sqrt[3]{64481201}$. **282.** $\sqrt[3]{87528384}$. **283.** $\sqrt[3]{426957777}$. = 753

284. $\sqrt[3]{517781627}$. **285.** $\sqrt[3]{741217625}$. **286.** $\sqrt[3]{2498846293}$. **287.** $\sqrt[3]{8754552981}$.

288. $\sqrt[3]{27081081027}$. **289.** $\sqrt[3]{1371700960631}$. **290.** $\sqrt[3]{8123025301208}$. **291.** $\sqrt[3]{46{\cdot}656}$.

292. $\sqrt[3]{0{\cdot}884736}$. **293.** $\sqrt[3]{0{\cdot}340068392}$. **294.** $\sqrt[3]{6{\cdot}372783864}$. **295.** $\sqrt[3]{38{\cdot}443359375}$.

296. $\sqrt[3]{0000003814697265625}$. **297.** $\sqrt[3]{1119130{\cdot}473102767}$. **298.** $\sqrt[6]{735091890625}$.

299. $\sqrt[9]{8662995818654939}$. $\sqrt[3]{3} = 1{\cdot}442|2496$

(Art. 54, 56). **300.** $\sqrt[3]{3250}$ z prz. na **1**. **301.** $\sqrt[3]{2}$ zprz. na 0·01. **302.** $\sqrt[3]{17}$ z prz. na 0·01.

303. $\sqrt[3]{0{\cdot}029}$ z prz. na 0·001. **304.** $\sqrt[3]{0{\cdot}087}$ z prz. na 0·0001. **305.** $\sqrt[3]{37}$ z prz. na 0·0001.

306. $\sqrt[3]{0{\cdot}009}$ z prz. na 0·00001. **307.** $\sqrt[3]{93}$ z prz. na 0·000001. **308.** $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ z prz. na $\frac{1}{9}$.

309. $\sqrt[3]{9}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **310.** $\sqrt[3]{85\frac{3}{4}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **311.** $\sqrt[3]{20\frac{5}{6}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$.

312. $\sqrt[3]{9\frac{2}{7}}$ z prz. na $\frac{1}{12}$. **313.** $\sqrt[3]{73}$ z prz. na $\frac{1}{21}$. **314.** $\sqrt[3]{25\frac{1}{3}}$ z prz. na $\frac{1}{21}$.

315. $\sqrt[3]{12\frac{1}{7}}$ z prz. na $\frac{1}{21}$. **316.** $\sqrt[3]{2\frac{3}{5}}$ z prz. na $\frac{1}{21}$.

(Art. 58). **317.** $\left(a+b+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}.\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

318. $\left(2a^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+3b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2a^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+3b^{\frac{1}{2}}\right)$.

319. $\left(a^{\frac{3}{2}}-2ab^{-\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{2}}b^{-1}-b^{-\frac{3}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)$.

320. $\left(a+a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{5}{6}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{3}}++a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{6}}\right)$.

321. $\left(8a^{\frac{3}{2}}-12ab^{\frac{1}{2}}+18a^{\frac{1}{2}}b-27b^{\frac{3}{2}}\right):\left(2a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}\right)$. **322.** $\left(243a-1024b\right):\left(3a^{\frac{1}{5}}-4b^{\frac{1}{5}}\right)$.

323. $\left(a^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{3}{2}}b^{-1}+ab^{-\frac{3}{2}}-2a^{\frac{1}{2}}b^{-2}+b^{-\frac{5}{2}}\right):\left(a^{\frac{3}{2}}-ab^{-\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{-1}-b^{-\frac{3}{2}}\right)$.

324. $\left(2ab^{-1}-5a^{\frac{4}{5}}b^{-\frac{2}{3}}+7a^{\frac{3}{5}}b^{-\frac{1}{3}}-5a^{\frac{2}{5}}+2a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{3}}\right):\left(a^{\frac{3}{5}}b^{-1}-a^{\frac{2}{5}}b^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{5}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$.

325. $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{8}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}}}:\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}}+a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{4}}}$. **326.** $\left(a^{\frac{2}{3}}+4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}+6a_{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}+4b+12b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}+9c^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

327. $\left(a^{2\frac{1}{4}}-3a^{2\frac{1}{6}}+3a^{2\frac{1}{12}}-a^2\right)^{\frac{1}{3}}$.

328. $\left(a-3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{3}}b-b^{\frac{3}{2}}+3a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}-6a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}+3bc^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}c^{1\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{2}}c^{1\frac{1}{3}}+c^2\right)^{\frac{1}{3}}$.

(Art. 68, 69). **329.** Jeżeli $a=2+3i$, $b=1-i$, $c=2-3i$, $d=1+i$, to α) $a+b+c+d=?$ β) $a+b-c-d=?$ γ) $ac+bd=?$ $ad+bc=?$ δ) $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=?$ ε) $a^2+b^2+c^2+d^2=?$ ξ) $a^3+b^3+c^3+d^3=?$

330. Jeżeli $a'=x_1+y_1 i$, $a''=x_1-y_1 i$, $b'=x_2+y_2 i$, $b''=x_2-y_2 i$, to jaką liczbę przedstawia wyrażenie $a'a''+b'b''$?

331. Gdy $a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, znaleźć α) a^2, b^2, a^3, b^3 β) $a+b$, ab, γ) $a+a^2+a^3$, $b+b^2+b^3$.

332. Gdy $a=x+iy$, $b=\xi+i\eta$, znaleźć α) $a+b$, $a-b$, ab, $a:b$, β) a^2+b^2, a^2-b^2.

333. Gdy $a=2+3i$, $b=4+5i$ znaleźć $(a^4-b^4):(a-b)$.

334. Okazać przy pomocy liczb zespolonych sprzężonych, iż iloczyn dwu liczb, z których każda jest sumą dwu kwadratów, jest także sumą dwu kwadratów.

(Art. 82). **335.** Znaleźć α) $\log 5{\cdot}5854$, $\log 35346$, $\log 30{\cdot}678$, $\log 0{\cdot}578748$, $\log 0{\cdot}0354767$, $\log 0{\cdot}0076587$. β) $\log x=0{\cdot}68946$, $\log x=0{\cdot}30303$, $\log x=2{\cdot}09777$, $\log x=\overline{1}{\cdot}00453$, $\log x=\overline{3}{\cdot}46867$, $\log x=\overline{4}{\cdot}79946$.

(Art. 85, 86, 87). **336.** $\sqrt[5]{17}$. **337.** $\sqrt[6]{28}$. **338.** $x^{\frac{7}{6}}=334$, czyli $x=\sqrt[7]{324^6}$.

339. $\sqrt[12]{9{\cdot}02}$. **340.** $\sqrt[12]{14{\cdot}56}$. **341.** $\sqrt[12]{0{\cdot}002}$. **342.** $\frac{2{\cdot}3876^3}{3{\cdot}2874^2}$.

343. $\frac{1{\cdot}2875^2.\ 0{\cdot}98764^{13}}{0{\cdot}028746^5.\ 5{\cdot}2478^6}$. **344.** $\left(\frac{130}{153}\right)^7$. **345.** $\frac{0{\cdot}0073964}{0{\cdot}00005846}$. **346.** $\left(\frac{20}{21}\right)^{11}:\frac{9^{20}}{7^{25}}$.

347. $\frac{2{\cdot}75876.9{\cdot}9875}{98{\cdot}764}$. **348.** $\frac{2^{27}.\ 3^{25}}{7^{10}.\ 11^{10}}$. **349.** $\frac{3^{3^3}.\ 2^{2^{2^2}}}{7^{4^2}}$. **350.** $\frac{0{\cdot}6987.7854{\cdot}3}{46{\cdot}395.0{\cdot}08476}$.

351. $\frac{11^5.\ 13^7.\ 17^9}{23^6.\ 29^8}$. **352.** $\left(\frac{3390.4{\cdot}3401}{13814{\cdot}4}\right)^{11}$. **353.** $\frac{7754^2.\ 0{\cdot}29953^4}{432569.\ 0{\cdot}4578}$.

354. $\frac{49876.\ 0{\cdot}037542.\ 68{\cdot}7075}{7{\cdot}8165.\ 578{\cdot}93.\ 28{\cdot}4299}$. **355.** $12^3\sqrt[5]{37}$. **356.** $\sqrt[6]{\left(\frac{16}{17}\right)^5\left(\frac{1}{20}\right)^9}$.

357. $\left(\frac{1402}{3999}\right)^{-3\frac{4}{5}}$. **358.** $\frac{178460^3\sqrt[4]{238465}}{26436^4}$. **359.** $\frac{(0{\cdot}234)^4\sqrt[5]{0{\cdot}2}}{12^3.\sqrt[6]{0{\cdot}161}}$.

360. $\frac{654321^3\sqrt[12]{49365200}}{276{\cdot}54^7\sqrt[11]{67853}}$. **361.** $\sqrt[9]{\tfrac{8}{7}\sqrt[6]{54325}}$. **362.** $\frac{11{\cdot}11^{2{\cdot}2}.\ 3{\cdot}33^{-4{\cdot}4}}{\sqrt[55]{6666}}$.

363. $\frac{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{5\sqrt{5}}}$. **364.** $\sqrt[10]{2\sqrt[10]{2}:\sqrt{10}}$. **365.** $\sqrt[3]{10\sqrt[3]{10\sqrt[3]{10}}}$. **366.** $\sqrt[7]{2\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}$.

367. $\frac{\sqrt[5]{2\sqrt[5]{2}}}{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}}$. **368.** $\frac{\sqrt[7]{7\sqrt[7]{7\sqrt[7]{7}}}}{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$. **369.** $\sqrt[7]{\frac{297\sqrt[3]{0{\cdot}05}}{0{\cdot}68\sqrt[5]{0{\cdot}1}}}$.

370. $\sqrt[11]{\frac{63{\cdot}49\sqrt[3]{7\frac{3}{8}}}{6\frac{3}{4}\sqrt{0{\cdot}729}}}$. **371.** $\sqrt[10]{59052-\sqrt[11]{2049{\cdot}1}}$. **372.** $\sqrt[13]{2{\cdot}459^{6{\cdot}5}+8{\cdot}74^{2{\cdot}3}}$.

373. $19^{\sqrt{7}}$. **374.** $2{\cdot}71828^{4{\cdot}60517}$. **375.** $5^{\sqrt{3}}.3^{\sqrt{5}}$. **376.** $\sqrt[\sqrt{6}]{2^{\sqrt{3}}.3^{\sqrt{2}}}$.

377. $2^7.\sqrt[5]{0{\cdot}3256}-31x\sqrt[4]{5\sqrt{2}}=0$. **378.** $3^{11}.\sqrt[7]{2{\cdot}35\sqrt{0{\cdot}89^3}}+x\sqrt[7]{5^3\sqrt{7^{13}}}=0$.

379. $\log(x^3) + \log(y^2) = 4{\cdot}39947,$
$\log x - \log y = 0{\cdot}05799.$

380. Jaki jest promień kuli o powierzchni $1\,m^2$?

381. Jaki jest promień kuli o objętości $1\,m^3$?

382. Ile stopni, minut i sekund ma łuk koła równy promieniowi?

383. Objętość walca, którego wysokość równa się średnicy podstawy, jest $3\,m^3$; obliczyć powierzchnię tego walca.

384. Znaleźć ciężar kuli srebrnej o promieniu $0{\cdot}4832\,cm$, jeżeli ciężar właściwy srebra jest $10{\cdot}47$.

385. Ze wzoru $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, obliczyć długość l wahadła sekundowego ($t=1$) w miejscowości, w której przyspieszenie ciężkości $g = 9{\cdot}8088$.

386. Miary do ciał płynnych robią kształtu walcowego o wysokości dwa razy większej od średnicy dna, zaś do ciał sypkich kształtu walcowego o wysokości równej średnicy dna. Jaka jest wysokość litra i hektolitra α) do ciał płynnych, β) do ciał sypkich?

387. Wyrazić powierzchnię ziemi w myriametrach kwadratowych, objętość zaś jej w myriametrach sześciennych, przyjmując, że ziémia ma kształt kuli i że ćwierć południka ziemskiego ma $10^7\,m$.

388. W koło, którego pole jest $10\,m^2$, jest wpisany trójkąt równoboczny. Jak wielki jest jego bok?

389. Objętość czaszy kulistej o wysokości $0{\cdot}4\,m$ jest $0{\cdot}9\,m^3$. Jaki jest promień tej kuli?

390. $x = \sqrt[3]{(a^2 - b^2)^2}$, gdy $\log a = 2{\cdot}87655$, $\log b = 2{\cdot}79287$.

391. Promienie trzech kół są takie, iż można z nich utworzyć trójkąt prostokątny. Okrąg największego koła jest $7{\cdot}02346\,m$, okrąg innego jest $2{\cdot}34567\,m$. Jaki jest promień pozostałego koła?

392. Trzy boki trójkąta są $5{\cdot}68608\,m$, $4{\cdot}9243\,m$ i $2{\cdot}84304\,m$. Jakie jest pole tego trójkąta?

393. Objętość walca, którego wysokość równa się średnicy, jest $402{\cdot}123\,cm^3$. Jak wielką jest powierzchnia wpisanego ostrosłupa sześciokątnego foremnego?

394. Znaleźć objętość stożka ściętego, gdy liczby wyrażające w metrach jego wysokość i promienie podstaw są takie, iż ich logarytmy są odpowiednio $0{\cdot}87456$, $1{\cdot}75846$ i $1{\cdot}48763$.

395. Znaleźć objętość ściętego ostrosłupa foremnego kwadratowego, jeżeli jego wysokość jest $3\,m$, pola zaś kół opisanych na podstawach są $10\,m^2$ i $8\,m^2$.

(Art. 87). **396.** $a^{x+3} = a^7.$ **397.** $2^{3x+5} = 37.$ **398.** $\frac{2^{10-x} \cdot 3^{x+2}}{8^{x-4} \cdot 6^{7-x}} = \frac{1}{3}\, 9^{x-2}.$

399. $a^{x+b} = c \cdot b^{x+a}.$ **400.** $a^{x+b} + b^{x+a} = c \cdot b^x.$ **401.** $\frac{a^{x-3}+1}{a^{x-1}-1} = b.$ **402.** $2^{3^x} = 3{\cdot}322.$

403. $3^{5^x} = 7.$ **404.** $3125^{\frac{x+1}{x+2}} \cdot 15625 = 0{\cdot}2.$ **405.** $3^{1+4x} - 2^{3x-5} = 2^{3x-1} - 3^{4x}.$

406. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} + 4^{x+3}.$

407. $\sqrt[x]{14{\cdot}678} = 1{\cdot}4678.$ **408.** $3^{2x} + 1 - \sqrt{3^{4x} + 4{\cdot}4641} = 0.$

409. $\begin{cases} \sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[5]{3^y} = 36, \\ \sqrt{4^{-x}} : \sqrt[-10]{256^y} = 4. \end{cases}$ **410.** $\begin{cases} 2^{2x+1} \cdot 3^{3y+4} = 1889568, \\ 5^{x+2} \cdot 3^{y+4} = 455625. \end{cases}$

411. $\begin{cases} 2^x + 2^{x+1} = 3^y \cdot 0471404, \\ 5^x = 6^{x+y-\frac{1}{2}} \cdot 0{\cdot}062113. \end{cases}$ **412.** $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2, \\ (x+y)\,3^x = 279936. \end{cases}$ **413.** $\begin{cases} 2^x \cdot 3^{x+y} = 12, \\ 2^{x+y} \cdot 3^x = 18. \end{cases}$

414. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{m^{x-5}}}{\sqrt[5]{m^{y-3}}} = 1, \\ \sqrt[4]{m^{3x-1}} \cdot \sqrt[3]{m^{y-1}} = m^{16}. \end{cases}$ **415.** $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 18, \\ 4^x \cdot 5^z = 500, \\ 6^y \cdot 7^z = 12348. \end{cases}$

(Art. 89). **416.** $3x^2+11x=0$. **417.** $x^2-25=0$. **418.** $x^2+25=0$.
419. $4x^2+9=0$. **420.** $(x+a)^3+(x+b)^3+(a+b-x)^3-(x^3+a^3+b^3+(a+b)^3)=0$.
421. $(x^2+ax+b)^2-(x^2+ax-b)^2=0$. **422.** $(4x^2+x+1)^2-(2x+\frac{1}{4})^4-\frac{1}{8}(15x-\frac{1}{32})=0$.
423. $(x+2)^4+(x+1)^4+(x-2)^4+(x-1)^4-4(x^4+23\frac{1}{2})=0$. **424.** $(2x^2+1)^2-4(x^2+1)^2=0$.
425. $(x+2)^3+(x+1)^3-(x-2)^3-(x-1)^3=0$. **426.** $(ax+c)^2+(ax-c)^2-4c^2=0$.
427. $(ax+c)^2+(ax-c)^2=0$. **428.** $(ax+b)^2+(a-bx)^2=a^2+b^2+c^2$.
429. $2(ax+b)^2+(a-2bx)^2=0$. **430.** $(x^2+ax+b)^2-(x^2+ax-b)^2-4abx=0$.
431. $(ax+b)^2-(bx+a)^2+\dfrac{a^2-b^2}{2}\left((x+1)^2+(x-1)^2\right)=0$.

(Art. 90, 91, 92). **432.** $15x^2+8x+1=0$. **433.** $6x^2+29x+35=0$. $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{3}\right)$
434. $6x^2-19x+15=0$. **435.** $4x^2-11x+6=0$. **436.** $2x^2-5x-3=0$. $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$
437. $x^2-6x+5=0$. **438.** $x^2-11x+18=0$. **439.** $x^2+17x+30=0$.
440. $x^2+19x+60=0$. **441.** $x^2+13x-48=0$. **442.** $x^2-7x-78=0$.
443. $9x^2-9x+2=0$. **444.** $6x^2-5x+1=0$. **445.** $25x^2+25x+4=0$.
446. $24x^2+10x+1=0$. **447.** $16x^2+16x-5=0$. **448.** $56x^2-x-1=0$.
449. $x^2-2x+2=0$. **450.** $x^2-4x+13=0$. $\begin{matrix}2+3i\\2-3i\end{matrix}$ **451.** $x^2-4x+\frac{37}{9}=0$.
452. $4x^2+24x+37=0$. **453.** $16x^2-24x+7=0$. **454.** $3x^2+6x-5=0$.
455. $x^2-3x+1=0$. **456.** $x^2+6x+7=0$. **457.** $2x^2-3x+3=0$.
458. $3x^2+6x+10=0$. **459.** $x^2-4x+6=0$. **460.** $x^2+10x+27=0$.
461. $x^2-6\sqrt{5}+29=0$. **462.** $4x^2-4x\sqrt{3}-13=0$. **463.** $x^2-6x\sqrt{5}+61=0$.
464. $4x^2-4x\sqrt{3}+19=0$. **465.** $x^2-4x.\sqrt{3}+7=0$. **466.** $8x^2-8x\sqrt{3}+5=0$.
467. $x^2-4x\sqrt{3}+17=0$. **468.** $8x^2-8x\sqrt{3}+7=0$. **469.** $x^2\sqrt{3}+4x-2\sqrt{3}=0$.
470. $x^2\sqrt{3}-2x\sqrt{7}+\sqrt{3}=0$. **471.** $x^2\sqrt{2}-4x\sqrt{2}-3=0$. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{5}\sqrt{30}$
472. $2(x^2+2x+3)^2+2(x^2-2x+4)^2-(2x^2+3)^2-65=0$.
473. $(x^2-3x+2)^2+(x^2+3x-10)^2-2(x^2-4)^2+2(x^2-4)=0$.
474. $(x-1)^4+(x^2+2x+2)^2-(x+2)^4-(x-2)^4+57=0$.
475. $4x^2-12c^2x+9c^4-25b^2(a^2+c^2)=0$. **476.** $4x^2-20ax+61a^2+36b^2=0$.
477. $(ax^2+c)(\alpha x^2+\gamma)-(ax^2+\gamma)(\alpha x^2+c)-(2x-1)(\alpha-a)(c-\gamma)=0$.
478. $(x^2+ax+b)^2+(x^2-ax-b)^2-2x^4=0$. **479.** $(x^2+ax+b)^2+(x^2-ax-b)^2-$
$-2x^4-2c^2=0$. **480.** $(x^3+ax^2+bx+c)(x+d)-x^2\left(x+\dfrac{a+d}{2}\right)^2+x^2\left(\dfrac{a-d}{2}\right)^2=0$.
481. $(5a-2x)(2a+x)(b-x)=(a-x)(3b-x)(3b+2x)$.
482. $(a+7b-8x)(a+2b-3x)(a-6b+5x)=(a-7b+6x)(a+3b-4x)(a+4b-5x)$
483. $(a+13b-14x)(a+2b-3x)(a-9b+8x)=(a-13b+12x)(a+3b-4x)(a+6b-7x)$.

(Art. 93). **484.** $\dfrac{2}{x-10}+10-x=\dfrac{2}{10-x}$. **485.** $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2x}$.

486. $\dfrac{x}{100}-\dfrac{21}{25x}=\dfrac{1}{4}$. **487.** $\dfrac{15}{x}-\dfrac{72-6x}{2x^2}=2$. **488.** $\dfrac{61-3x}{35-x}=\dfrac{23+x}{13+x}$.

489. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$. **490.** $8x+11+\dfrac{7}{x}=\dfrac{21+65x}{7}$. **491.** $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{10}{3}$.

492. $\dfrac{3}{2(x^2-1)}-\dfrac{1}{4(x+1)}=\dfrac{1}{8}$. **493.** $\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{4-x}{2x}=2\frac{1}{3}$. **494.** $\dfrac{x}{4}+\dfrac{25}{x}=3$.

495. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}=1$. **496.** $\dfrac{3x-4}{3x-\dfrac{7}{3}}+\dfrac{(2x-3)(3x-4)}{\left(2x-5)(3x-\dfrac{7}{3}\right)}-\dfrac{2x-3}{x-2}=0$.

497. $\dfrac{27+4x}{39-2x}=\dfrac{73+6x}{101-8x}$. **498.** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{4(2x-3)-3(3x-1)}{6(x-1)}=\dfrac{3}{2}\,\dfrac{x^2+2}{3x-2}$.

$-\frac{2}{15}$ + **499.** $\dfrac{21x^3-16}{3x^2-4}-7x=5$. **500.** $\dfrac{24-x}{18+x}=\dfrac{69-7x}{58+x}\cdot\dfrac{6}{5}$. **501.** $\dfrac{x^2-5x}{x+3}=x-3+\dfrac{1}{x}$. + 1,

502. $\dfrac{x-6}{x-12}-\dfrac{x-12}{x-6}=\dfrac{5}{6}$. **503.** $\dfrac{13-x}{15-x}=\dfrac{3}{4}\,\dfrac{4+2x}{3+2x}$. **504.** $7-5x=\dfrac{(12-8x)^2}{21-13x}$.

505. $4-5x=\dfrac{(6-8x)^2}{9-13x}$. **506.** $9-5x=\dfrac{(14-8x)^2}{22-13x}$. **507.** $\dfrac{6-5x}{4-3x}=\dfrac{4-3x}{3-2x}$.

$\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

508. $\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2=2.$ **509.** $\left(\frac{4+3x}{5+3x}\right)^2=\frac{6+4x}{9+4x}.$ **510.** $\left(\frac{7+3x}{5+3x}\right)^2=\frac{13+4x}{7+4x}.$

511. $\left(\frac{5-3x}{4-3x}\right)^2=\frac{9-5x}{6-5x}.$ **512.** $\left(\frac{5-4x}{7-4x}\right)^2=\frac{11-10x}{19-10x}.$ **513.** $\frac{x-2}{x-4}=\frac{2x-1}{x+1}.$

514. $\frac{x+1}{x+2}=\frac{2(x-1)}{x+3}.$ **515.** $\frac{x+3}{x-3}=\frac{2x+5}{x+5}.$ **516.** $\frac{x-1}{x+1}=\frac{3x+1}{2x+5}.$

517. $\frac{4n+9-x}{5n+9-x}=\frac{4}{5}\cdot\frac{nx+5}{nx+4}.$ **518.** $\frac{5n+6-x}{6n+5-x}=\frac{5}{6}\cdot\frac{(n-1)x+6}{(n-1)x+5}.$

519. $\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}=\frac{3+x^2}{a^2-x^2}.$ **520.** $\frac{2a+5b+3x}{3a-5b+2x}=\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{3a-b+2x}{2a-b+3x}.$

521. $\frac{x+3a-b}{x-3b+a}=\frac{4a-3b}{4b-3a}\cdot\frac{2a-b+x}{2b-a-x}.$ **522.** $\frac{2a+7b-5x}{2b+7a+5x}=\frac{8}{7}\cdot\frac{a+4b-3x}{b+4a+3x}.$

523. $\frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=1.$ **524.** $\frac{2a+b-x}{3b+2a+x}=\frac{a}{b}\cdot\frac{4x+3b}{4x+4b+a}.$

525. $\frac{3a-x}{3a+x}=\frac{4a+3b}{4a-3b}\cdot\frac{3x-a}{3x+a}.$ **526.** $\frac{x(x-a+b)}{(x-2a)(x-a-b)}+\frac{(x-2a)(x-a-b)}{x(x-a+b)}=2.$ $\frac{1}{a}, a$

527. $\left(\frac{2x+a}{2x-a}\right)^2=\frac{5x-2b+4a}{5x-2b-4a}.$ **528.** $\frac{a}{ax+\frac{1}{ax}}=\frac{1}{a}.$

$b\pm\sqrt{a^2+b^2}$

529. $\frac{a-x}{3a+x}\cdot\frac{2x+2a-b}{2x+2a+b}=\frac{b-4x}{8a+b+4x}.$ **530.** $\frac{ax+b}{bx+a}=\frac{cx-d}{dx-c}.$

(Art. 94). **531.** $\sqrt{2x^2+7}=x+2.$ **532.** $1=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}.$

533. $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x-3}=1.$ **534.** $\sqrt{x-1}=x-1.$ **535.** $\sqrt{10-2x}+\sqrt{2x-6}=2.$ 3, 5

536. $\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+x}=\sqrt{2}.$ **537.** $\sqrt{10+3x}-\sqrt{10-3x}=\sqrt{x}.$

538. $\sqrt{5+4x}-\sqrt{5-4x}=2\sqrt{x}.$ **539.** $\sqrt{4x^2-4x+1}=\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}.$ $\frac{1}{2}, \frac{5}{9}$

540. $2x-\sqrt{x+3}+6=0.$ **541.** $4\sqrt{2-x}-3\sqrt{5-2x}=-\sqrt{5+2x}.$

542. $2\sqrt{6-4x}+\sqrt{3-2x}=\sqrt{11-6x}.$ **543.** $\sqrt{x+7}=x+1.$ **544.** $2x+\sqrt{x+3}+5=0.$

545. $4x-\sqrt{x+3}=x-5.$ **546.** $\sqrt{x+\sqrt{x+2}}=2.$ **547.** $\sqrt{x+1+\sqrt{5(x+2)}}=3.$

548. $2\sqrt{3x-2}-3\sqrt{x+2}+2=0.$ **549.** $\sqrt{2x+6}+\sqrt{x+4}=\sqrt{8x+9}.$

550. $\overline{3x+4}+\sqrt{5(x+1)}=9.$ **551.** $\sqrt{x+12}+\sqrt{x}=2\sqrt{2x+1}.$

552. $1=\sqrt{2-x}-\sqrt{7-3x}.$ **553.** $\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+2}.$

554. $\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}=5.$ **555.** $\sqrt{2x}-\sqrt{3x-2}=4.$ **556.** $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}.$

557. $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\frac{3}{2}\sqrt{2x}.$ **558.** $\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}=\sqrt{6x+1}.$ **559.** $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}=\sqrt{x+14}.$

560. $2\sqrt{4a+b-4x}-\sqrt{a+b-2x}=\sqrt{9a+b-6x}.$

561. $2\sqrt{4a+b-4x}-3\sqrt{a+b-2x}=\sqrt{a+b+2x}.$

562. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2a}.$ **563.** $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=2\sqrt[3]{a}.$

564. $\sqrt{b-4x}+2\sqrt{b-a-2x}=\sqrt{9b-8a-24x}.$ **565.** $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a+x}=\sqrt[3]{a+8x}.$

566. $\sqrt{a+b-2x}+\sqrt{9a+b-10x}=2\sqrt{a+4b-2x}.$

567. $\sqrt{a+9b-10x}+\sqrt{a+49b-50x}=2\sqrt{2a+b-3x}.$

568. $\sqrt{9a+b-6x}+\sqrt{9b+a+6x}=2\sqrt{4a+b+4x}.$

569. $\sqrt{\frac{a}{b}-x}-\sqrt{\frac{a}{b}+x}-2\sqrt{2x}+2\sqrt{\frac{a-4bx}{2b}}=0.$ **570.** $\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}-\frac{\sqrt{x-4}}{x-2}=0.$

571. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}=2.$ **572.** $\frac{ax-1}{ax+1}=\sqrt{\frac{ax+1}{ax-1}}.$

(Art. 99). Wypisać równania, których pierwiastki są: **573.** 8, 9. **574.** 15,16. **575.** 23, 30. **576.** 5, —12. **577.** —9, —13. **578.** —16, —25. **579.** $2+3i$, $2-3i$. **580.** $5+7i$, $5-7i$. **581.** $-8-4i$, $-8+4i$. **582.** $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$. **583.** $-3+\sqrt{7}$, $-3-\sqrt{7}$.

584. $4+i\sqrt{3}$, $4-i\sqrt{3}$. **585.** $\sqrt{2}+3$, $\sqrt{2}-3$. **586.** $-\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}-\sqrt{5}$.
587. $-\sqrt{2}+i\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{5}$. **588.** $-\sqrt{3}+i\sqrt{7}$, $-\sqrt{3}-i\sqrt{7}$.

589. Znaleźć α) sumę kwadratów, β) sumę sześcianów, γ) sumę czwartych potęg, δ) sumę odwrotności czwartych potęg pierwiastków równania $ax^2+bx+c=0$.

590. Mając dany spółczynnik p, równania $x^2+px+q=0$, i daną różnicę kwadratów pierwiastków d, znaleźć q.

(Art. 100). **591.** Nie rozwiązując równań: α) $x^2-9x+20=0$, β) $x^2-17x+66=0$, γ) $x^2-32x+225=0$, δ) $x^2-43x+390=0$, ε) $25x^2-25x+6=0$, ζ) $2x^2-3=0$, η) $x^2-5x-36=0$, ϑ) $x^2+8x-84=0$, ι) $x^2+9x-22=0$, $\varkappa$) $9x^2+18x-7=0$, λ) $x^2+14x+45=0$, μ) $x^2+15x+56=0$, ν) $x^2+19x+88=0$, o) $4x^2+24x+35=0$, π) $x^2-4x+13=0$, ρ) $x^2-6x+25=0$, σ) $9x^2-12x+5=0$, τ) $x^2+4x+7=0$, φ) $x^2-6x+14=0$, χ) $x^2+2x\sqrt{2}+5=0$, o każdem wnieść, czy ma pierwiastki rzeczywiste, czyteż zespolone. Jeżeli rzeczywiste, to jakiego są one znaku? W razie, kiedy są różnego znaku, który pierwiastek ma wartość bezwzględną większą?

(Art. 101). **592.** $x_1+x_2=15$, $x_1x_2=50$. **593.** $x_1+x_2=\frac{27}{7}$, $x_1x_2=\frac{180}{49}$.
594. $x_1+x_2=-35$, $x_1x_2=306$. **595.** $x_1-x_2=3$, $x_1x_2=4$. **596.** $x_1-x_2=13$, $x_1x_2=30$.
597. $x_1-x_2=2\sqrt{2}$, $x_1x_2=7$. **598.** $x_1+x_2=7$, $x_1^2+x_2^2=25$. **599.** $x_1+x_2=11$, $x_1^2+x_2^2=61$.
600. $x_1-x_2=4$, $x_1^2+x_2^2=34$. **601.** $x_1-x_2=5$, $x_1^2+x_2^2=73$. **602.** $x_1+x_2=7$, $x_1^3+x_2^3=91$.
603. $x_1+x_2=5$, $x_1^3+x_2^3=35$. **604.** $x_1-x_2=1$, $x_1^3-x_2^3=7$. **605.** $x_1-x_2=7$, $x_1^3-x_2^3=2738$.

(Art. 102). **606.** $\sqrt{31+\sqrt{600}}$. **607.** $\sqrt{11-3\sqrt{8}}$. **608** $\sqrt{100-2\sqrt{2499}}$.
609. $\sqrt{\frac{9}{8}-\sqrt{\frac{9}{8}}}$. **610.** $\sqrt{1+3\sqrt{-7}}+\sqrt{1-3\sqrt{-7}}$. **611.** $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.
612. $\sqrt{11+2\sqrt{10}}\pm\sqrt{11-2\sqrt{10}}$. **613.** $\sqrt{7+\sqrt{-15}}+\sqrt{7-\sqrt{-15}}$. **614.** $\sqrt{11+5\sqrt{-3}}\pm$ $\pm\sqrt{11-5\sqrt{-3}}$. **615.** Korzystając z tego, że $\sqrt[4]{m}=\sqrt{\sqrt{m}}$, przekształcić następujące wyrażenia: α) $\sqrt[4]{1+3i\sqrt{7}}+\sqrt[4]{1-3i\sqrt{7}}$; β) $\sqrt[4]{1+3i\sqrt{7}}-\sqrt[4]{1-3i\sqrt{7}}$;
γ) $\sqrt[8]{9232+6528\sqrt{2}}+\sqrt[8]{9232-6528\sqrt{2}}$; δ) $\sqrt[8]{9232+6528\sqrt{2}}-\sqrt[8]{9232-6528\sqrt{2}}$.
616. $x^2-(7+3\sqrt{3})x+16+12\sqrt{3}=0$. **617.** $x^2-(10+6\sqrt{2})x+40+32\sqrt{2}=0$.
618. $x^2-4x-27-10\sqrt{6}=0$. **619.** $x^2-6x+6\sqrt{2}-2=0$. **620.** $x^2-4x+\frac{23+6\sqrt{2}}{8}=0$.
621. $x^2-6x+14+2\sqrt{6}=0$.

622. Sprawdzić, że równanie $\sqrt{2a-\sqrt{x-3a^2}}=\sqrt{x-5a^2+2a+a\sqrt{2}}$ ma pierwiastek $x=5a^2-2a\sqrt{2}+1$.

(Art. 103, 104). **623.** Stosunek dwu liczb jest $11:13$, a ich iloczyn 7007. Jakie są te liczby?

624. Rozłożyć 60 na takie dwie części, iżby stosunek ich iloczynu do sumy ich kwadratów był równy $2:5$.

625. Rozłożyć liczbę 195 na trzy składniki, tworzące proporcyą ciągłą, której wyraz ostatni jest o 120 większy od pierwszego.

626. Raz do szukanej liczby dodawszy 3, drugim zaś razem od niej odjąwszy 3, otrzymujemy dwie takie liczby, iż suma wykładników dwu stosunków, które z owych dwu liczb utworzyć można, jest $\frac{10}{3}$. Jaka jest szukana liczba?

627. Cztery liczby tworzą proporcyą, w której suma wyrazów skrajnych jest a, suma wyrazów średnich b, suma zaś kwadratów wszystkich czterech wyrazów jest c^2. Jaki jest pierwszy wyraz tej proporcyi?

628. Iloczyn dwu liczb, z których jedna jest o 128 większa od drugiej, jest 3300. Jakie są te liczby?

629. Jako iloczyn dwu liczb, z których jedna jest o 75 większa od drugiej, otrzymano liczbę o 1000 za małą, tak iż z podzielenia tego błędnego iloczynu przez mniejszy z czynników wypada w ilorazie 227, a w reszcie 113. Znaleźć obie liczby i sprawdzić zadanie.

630. W dziele Indusa Bhaskara Akarja (z w. XII-go) jest zadanie: Powiedz, jaka to jest liczba, która pomnożona przez 3, a następnie o $\frac{3}{4}$ iloczynu powiększona, przez 7 podzielona, o $\frac{1}{3}$ ilorazu zmniejszona, przez siebie samę pomnożona, o 52 zmniejszona, wskutek wyciągnięcia pierwiastka kwadratowego, dodania 8-u i podzielona przez 10 daje 2?

631. Podzielić liczbę a na dwie części tak, iżby jedna była średnią geometryczną liczby a i części pozostałej.

632. Kupiono 25 *kg* dwojakiego towaru i zapłacono za każdy towar po 30 *zł.*, a 1 *kg* towaru drugiego kosztuje o 1 *zł.* więcej, niż 1 *kg* pierwszego. Ile kupiono *kg* pierwszego towaru?

633. Ktoś dwukrotnie kupił ten sam towar, każdym razem za 216 *zł.*, drugim jednak razem towar ów podrożał o 1 *zł.* na 30 *kg*, wskutek czego dostał o 90 *kg* mniej niż pierwszym razem. Ile kupił *kg* pierwszym razem?

634. 4 *kg* jednego z dwu kupionych towarów kosztują o 2 *zł.* mniej niż 4 *kg* drugiego. Gdyby zaś każdego z tych towarów kupiono za $8\frac{3}{4}$ *zł.*, to pierwszego towaru byłoby o 2 *kg* więcej niż drugiego. Ile kosztuje 1 *kg* każdego towaru?

635. Za 120 *zł.* kupiono kilka metrów sukna; gdyby *m* kosztował o 3 *zł.* mniej, to za te same pieniądze mianoby 2 *m* więcej. Ile kupiono metrów i po czemu?

636. Przekupka, stawiając koszyk z jajami, rozbiła 6 jaj. Stratę tę udało jej się pokryć, sprzedając każde 5 jaj o 1 ct. drożej, aniżeli pierwotnie zamierzała, a sprzedała wszystkich jaj za 2 *zł.* 88 ct. Ile początkowo miała jaj w koszu?

637. Ktoś kupił stado owiec za 320 *zł.* i, zatrzymawszy dwie u siebie, sprzedał resztę z zyskiem 25 *zł.*, zarabiając na każdej sztuce $1\frac{1}{4}$ *zł.* Ile zapłacił za jednę owcę?

638. Ktoś kupił 33 butelek wina w dwu gatunkach, jednego za 33 *zł.*, drugiego za 27 *zł.*; butelka jednego gatunku kosztowała o 70 ct. więcej niż drugiego. Ile kupił butelek każdego gatunku?

639. Kilku podróżnych najęło statek za 342 *zł.* Pod koniec drogi zabrakło trzem podróżnym pieniędzy, wskutek czego pozostali zapłacili po 19 *zł.* więcej. Ilu było podróżnych?

640. Kilka osób złożyło w równych udziałach 4160 *zł.*, a po pewnym przeciągu czasu każda dołożyła 40 razy tyle *zł.*, ile było osób. Zysk wyniósł tyle $^0/_0$, ile było osób. Przy podziale każda otrzymała 12 razy tyle *zł.*, ile było osób. Ileż było osób?

641. Kupiec ma dwa gatunki cukru różnej ceny. Stosunek ich ciężarów jest 4 : 3. *Kg.* pierwszego gatunku kosztuje tyle centów, ile jest *kg* tego gatunku. Drugi gatunek jest tańszy od pierwszego o 5 ct. na kilogramie. Wartość wszystkiego cukru wynosi 442 *zł.* Ile jest cukru każdego gatunku?

642. Każde z dwu towarzystw dobroczynnych rozdało 1200 *zł.* swoim ubogim; pierwsze wspomogło o 40-u ubogich więcej niż drugie, ale drugie dało o 5 *zł.* każdemu ubogiemu więcej niż pierwsze. Ilu było ubogich?

643. Członkowie pewnego stowarzyszenia w dwu półroczach złożyli się na zapłacenie czynszu za spólny lokal po 168 *zł.* za półrocze. W pierwszem półroczu było o 3 członków mniej niż w drugiem, wskutek czego zapłacił każdy w drugiem półroczu o 1 *zł.* mniej niż w pierwszem. Ilu było członków w pierwszem półroczu?

644. Dwie przekupki za sprzedane pomarańcze otrzymały tę samę kwotę pieniędzy, a sprzedały pomarańcz razem 260 sztuk. Gdyby pierwsza sprzedała tyle pomarańcz, co druga, to dostałaby za nie 3 *zł.* 60 ct.; gdyby druga sprzedała tyle pomarańcz, co pierwsza, to otrzymałaby 4 *zł.* 90 ct. Ile każda przekupka miała pomarańcz?

645. Dyament, którego wartość była 1000 *zł.*, pękł w taki sposób, że właściciel jego poniósł straty 375 *zł.* Jest to następstwem tego, iż wartość dyamentu jest proporcyonalna względem kwadratu jego ciężaru. Jaki jest stosunek ciężarów dwu kawałków powstałych wskutek pęknięcia?

646. Zbiornik może być napełniony przez pierwszy z dwu kurków o 2 godziny prędzej niż przez drugi, przez oba zaś razem w przeciągu $1\frac{7}{8}$ godziny. W ciągu jakiego czasu przez każdy kurek oddzielnie byłby zbiornik napełniony?

647. Z naczynia o 60 *l* objętości, napełnionego alkoholem, odlano raz pewną ilość alkoholu, a na to miejsce dolano wody; po zamieszaniu odlano o 7 *l* więcej niż poprzed-

nio i znowu naczynie wypełniono wodą, poczem w naczyniu stosunek ilości alkoholu i wody był 11 : 4. Ile pierwszym razem odlano alkoholu z tego naczynia?

648. Z beczki, mającej 20 *hl* objętości i napełnionej winem, odlano pewną ilość wina do pustej drugiej beczki tejże objętości, poczem dolano do niej wody do pełna. Po zamieszaniu przelano z niej do pierwszej beczki tyle, iż pierwsza stała się pełną. Gdyby jeszcze z pierwszej beczki po zamieszaniu odlać $6\frac{2}{3}$ *hl* do drugiej, toby ilość wina w obu beczkach była jednakowa. Ile początkowo odlano z pierwszej beczki?

649. A i B utworzyli spółkę z kapitałem 6800 *zł.*; udział A był w obrocie 12 miesięcy, udział zaś B 16 miesięcy. Po obliczeniu zysków otrzymali wraz ze swemi udziałami A 4140 *zł.*, B 3840 *zł.* Z jakiemi udziałami A i B przystąpili do spółki?

650. Kupiono za 264 *zł.* kawy i za tyleż *zł.* cukru o 90 *kg* więcej niż kawy. Gdyby sprzedano z zyskiem 20% kawy 30 *kg* i cukru 60 *kg*, to otrzymanoby 97·2 *zł.* Ile kupiono *kg* kawy i ile cukru?

651. Kupiec kupił 133 *kg* towaru i osiągnąwszy przy sprzedaży jego pewien procent zysku, za wszystkie pieniądze kupił znowu tenże towar, który sprzedał z takim samym, jak poprzednio, zyskiem; wtedy za otrzymane pieniądze kupił 168 *kg* towaru o 14% droższego niż poprzednio. Jaki osiągał procent zysku przy sprzedaży poprzedniego towaru?

652. Po śmierci ojca przypadł na dzieci do równego podziału kapitał 168000 *zł.* Przed podziałem umarło dwoje dzieci, wskutek czego każde z pozostałych przy życiu otrzymało o 7000 *zł.* więcej, niż wypadało z pierwotnego obliczenia. Ile było dzieci w chwili śmierci ojca?

653. Jedna część kapitału 12000 *zł.* przynosi rocznie 2800 *zł.*, pozostała zaś oddana na stopę procentu o 1 większą, przynosi rocznie 2500 *zł.* Jaka jest stopa procentu pierwszej sumy?

654. Pewna osoba kapitał 13000 *zł.* umieściła w dwu częściach na różne stopy procentu, z których pierwsza była o 1 większa od drugiej; z obu części miała dochód jednakowy. Gdyby umieściła część pierwszą na stopę procentu drugiej, toby miała dochodu od niej 360 *zł.*, podczas gdy druga umieszczona na stopę procentu pierwszej przynosiłaby 490 *zł.* Na jakie stopy procentu zostały obie części umieszczone?

655. Ktoś wniósł do kasy oszczędności 160000 *zł.* i po roku wyjął 2400 *zł.*, a po upływie drugiego roku wyjął z kasy pozostałą sumę, która wynosiła 171387 *zł.* Ile $\%$ płaciła kasa oszczędności?

656. Dyskonto teoretyczne dwu weksli, jednego na 2080 *zł.* z terminem 8-omiesięcznym, drugiego zaś na 3150 *zł.* z terminem 10-omiesięcznym, wynosi przy tej samej stopie procentu 230 *zł.* Po ile $\%$ dyskontowano te weksle?

657. Ma ktoś zapłacić 8800 *zł.* po 7-u miesiącach i 5940 *zł.* po roku. W jakim terminie pośrednim mógłby zapłacić całą sumę 14740 *zł.*, płacąc od pierwszej kwoty 5%, od drugiej zaś otrzymując rabatu 5 *zł.* od każdych 105 *zł.* (5 „auf Hundert“)?

658. Fabrykant sprzedał kupcowi dwa gatunki towaru, pierwszego za 7176 *zł.*, a drugiego za 3536 *zł.* Przy tej sprzedaży na pierwszym miał zysku tyleż $\%$, ile na drugim straty $\%$ („auf Hundert“ i „in Hundert“), a na całym tym obrocie miał zysku 312 *zł.* Po ile $\%$ fabrykant mógł liczyć sobie zysku i straty?

659. Ciało z pewnej wysokości spada z prędkością początkową c. Obliczyć, posiłkując się wzorem $s = ct \pm \frac{1}{2}gt^2$ (gdzie g jest przyspieszeniem ciężkości, t ilością sekund, z podwójnego zaś znaku górny odnosi się do ciał spadających, a dolny do ciał wznoszących się), w ilu sekundach to ciało zrobi drogę s.

660. Ciało wyrzucono pionowo w górę z prędkością początkową c; obliczyć, po ilu sekundach znajdzie się na wysokości s.

661. Kula armatnia wyrzucona została pionowo w górę z prędkością początkową 490·4 *m* w miejscu, w którem przyspieszenie prędkości jest 9·808 *m* i wzniosła się do wysokości 12260 *m.* Obliczyć, jak długo kula biegła w górę?

662. Przyjmując, że stosunek masy ziemi do masy księżyca jest 81 : 1, a odległość ziemi od księżyca wynosi 60 promieni ziemskich (zob. I, zad. 208), znaleźć na prostej, łączącej środki ziemi i księżyca, punkt przyciągany z tem samem natężeniem przez księżyc, co przez ziemię.

663. A i B zrobili tę samę drogę 110 *km*. A szedł dziennie o 1 *km* więcej niż B i wskutek tego był o 1 dzień mniej w drodze. Ile każdy robi dziennie *km*?

664. Wioślarz, robiąc jednostajnie wiosłami, popłynął w górę rzeki $3\frac{1}{2}$ *km* i powrócił w ciagu 1 godziny 40 minut. Bieg rzeki wynosi 2 *km* na 1 godzinę; ileby *km* przepłynął wioślarz w ciągu godziny, tak samo robiąc wiosłami, na wodzie stojącej?

665. Dwie osoby z tego samego miejsca jadą, jedna do miasta A, odległego o 324 *km*, a druga do miasta B, odległego o 198 *km*. Pierwsza, jadąc 3 *km* na godzinę więcej niż druga, znalazła się w A o 3 godzin później niż druga w B. Ile godzin jechała każda z nich?

666. Z dwu miejsc A i B, oddalonych od siebie o $2\frac{1}{2}$ mili, jednocześnie w kierunku od B ku A wyjechały dwie osoby. Po upływie 14 godzin spotkały się z sobą. Znaleźć odległość punktu spotkania się od A, wiedząc, że druga z tych osób potrzebuje o $\frac{1}{2}$ godziny mniej czasu niż pierwsza do przebycia każdych 5-u mil.

667. A i B jednocześnie wyszli naprzeciwko siebie z miejsc oddalonych o 80 *km*. A robi dziennie o 2 *km* więcej niż B, ilość zaś dni między ich wyruszeniem a chwilą spotkania się jest dwa razy większa od ilości *km*, które B szedł codziennie. Ile *km* robi każdy dziennie?

668. Z dwu punktów odległych od siebie o 910 *m* poruszają się ku sobie 2 ciała ruchem jednostajnym; gdyby pierwsze zaczęło swój ruch o 56 sekund później niż drugie, to punkt ich spotkania się przypadłby w środku całej drogi; gdyby zaś rozpoczęły ruch jednocześnie, to po upływie 20 sekund byłyby oddalone od siebie o 550 *m*. W ciągu ilu sekund każde z tych ciał przebiegłoby całą drogę?

669. Dwa ciała poruszają się na prostych, do siebie prostopadłych, oddalając się od punktu przecięcia się tych prostych z sobą. Pierwsze przebiega na jedną sekundę 49 *dm*, a drugie 28 *dm*; w pewnym momencie pierwsze ciało znajdowało się w odległości 175 *dm*, drugie zaś w odległości 20 *dm* od punktu przecięcia się ich dróg. Oznaczyć chwilę, w której odległość tych ciał od siebie jest 370 *dm*.

670. Zaczynając od punktów końcowych podstawy a trójkąta równobocznego, dwa ciała poruszają się po pozostałych bokach trójkąta, dążąc do wierzchołka z prędkościami m i n na sekundę. Po ilu sekundach odległość tych ciał będzie równa wysokości trójkąta?

671. Środki dwu kół, których promienie są 981 i 980 *cm*, poruszają się po dwu do siebie prostopadłych prostych, dążąc do punktu, w którym się owe proste przecinają, pierwszy z prędkością 7 *cm*, drugi 5 *cm* na sekundę. W pewnym momencie środek pierwszego koła był oddalony o 2442 *cm*, środek zaś drugiego o 1591 *cm* od punktu przecięcia się prostych. O ile sekund później te koła będą do siebie styczne zewnętrznie?

672. Środki dwu kół, jednego o promieniu 36 *cm*, drugiego o promieniu 16 *cm*, poruszają się po ramionach kąta prostego ku jego wierzchołkowi. Pierwszy porusza się z prędkością 2 *cm* na sekundę i początkowo jest 38 *cm* odległy od wierzchołka, drugi zaś, poruszający się z prędkością 18 *cm* na sekundę, jest wówczas odległy o 210 *cm* od wierzchołka. Kiedy te koła będą do siebie styczne zewnętrznie, a kiedy wewnętrznie?

673. Po równi pochyłej z punktu, o h metrów nad poziomem się znajdującego, spada ciało z prędkością początkową c metrów. Jaką ono drogę przebiega, jeżeli wiadomo, że czas spadku jest taki, w jakimby z tejże wysokości h ciało wolno puszczone spadło na poziom (zob. zadanie 659)?

674. Obliczyć głębokość studni, wiedząc, że od chwili, kiedy z poziomu kamień wolno puszczonym został, do chwili usłyszenia odgłosu plusku upłynęło t sekund, (t jest sumą czasu, podczas którego kamień spada, i czasu potrzebnego dla dojścia odgłosu plusku; jeżeli głos w θ sekund z prędkością v przebiega odległość s, to $s = v.\theta$).

675. Trzy koła spółśrodkowe, z których największe ma promień 32 *cm*, są takie, iż pola koła najmniejszego, pasa kołowego zewnętrznego i pasa kołowego pośredniego są proporcyonalne względem liczb 4, 7 i 5. Znaleźć promienie pozostałych kół.

676. Jakim trzem po sobie następującym liczbom odpowiadać mogą boki trójkąta prostokątnego?

677. Wiele ma boków wielokąt, jeżeli w nim można poprowadzić 275 przekątnych?

678. Na przedłużeniu danego odcinka $AB = a$ poza B znaleźć taki punkt C, iżby odcinek BC był średnią geometryczną odcinków AC i AB.

679. Mając obwód p trójkąta prostokątnego i przeciwprostokątną a, określić każdą z przyprostokątnych.

680. Cztery punkty A, A_1, B i B_1 następują po sobie na okręgu koła, a C jest punktem przecięcia się prostych AB i A_1B_1. Dane są długości $AB = \frac{15}{2}$ i $A_1B_1 = 12$ i odległość $CA = 2$. Obliczyć CA_1 i CB_1.

681. W kole o promieniu r dany jest kierunek średnicy i dana prostopadła do niej cięciwa, oddalona od środka koła o a. Znaleźć promień koła stycznego jednocześnie do danego koła, oraz do średnicy i do cięciwy, lub do ich przedłużeń.

682. Trzy krawędzi prostopadłościanu są proporcyonalne względem liczb 3, 6 i 8; jeżeli te krawędzi powiększymy odpowiednio o $3\,m$, $2\,m$ i $5\,m$, to objętość prostopadłościanu powiększy się o $1494\,m^3$. Jakie są wielkości tych krawędzi?

683. Przeciąć kulę płaszczyzną tak, aby pole koła przecięcia było równe różnicy powierzchni obu czasz powstałych z przecięcia.

684. Przeciąć kulę dwiema płaszczyznami prostopadłymi do danej średnicy i równo odległymi od środka kuli, w ten sposób, by suma powierzchni obu kół powstałych z przecięcia była równa pasowi kulistemu oddzielonemu przez te płaszczyzny.

685. Dana jest objętość v, wysokości h i bok a podstawy dolnej ostrosłupa sześciokątnego foremnego ściętego. Obliczyć bok górnej podstawy.

686. Na ścianie sześcianu wystawić ostrosłup ścięty tejże co sześcian wysokości tak, iżby stosunek objętości tych dwu brył był k.

(Art. 105, 106, 107). **687.** Oznaczyć, jakiego znaku mogą być wartości trójmianu przy rzeczywistych wartościach x, oraz wykreślić trójmian:
α) x^2-3x+2, β) $2x^2-3x+1$. γ) $-x^2+2x+3$, δ) $-3x^2-x+4$, ε) x^2-2x+1,
ζ) x^2-4x+4, η) $-x^2+3x-\frac{9}{4}$, θ) $-x^2-\frac{5}{2}x-\frac{25}{16}$, ι) x^2+2x+3, χ) $2x^2-2x+1$,
λ) $-x^2-3x-5$, μ) $-2x^2+3x-3$.

(Art. 109). **688.** Ze wszystkich prostokątów o tym samym obwodzie $2p$, który ma pole największe?

689. Który z trójkątów o tym samym obwodzie i o tej samej podstawie ma pole największe?

690. W dany trójkąt wpisać prostokąt o największem polu.

691. Na danej kuli opisać stożek o najmniejszej objętości.

692. Rozłożyć liczbę p^2 na dwa czynniki dodatne, których suma jest minimum.

(Art. 110). **693.** Który z trójkątów o tym samym obwodzie ma pole największe?

694. Który z prostopadłościanów o tej samej powierzchni ma objętość największą?

695. Który z prostopadłościanów o tej samej przekątnej ma objętość największą?

696. Okazać, że jeżeli nie wszystkie liczby dodatne $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ są równe sobie, to

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n},$$

t. j. „średnia geometryczna“ pewnej ilości liczb dodatnych jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej.

(Art. 111). **697.** Który z prostokątów o tym samym obwodzie utworzy wskutek obrotu około jednego z boków, jako osi, walec o objętości największej?

698. Który z walców wpisany w kulę ma objętość największą?

699. Który z trójkątów równoramiennych, wpisanych w koło, ma pole największe?

700. Który z walców, wpisanych w stożek, ma objętość największą?

(Art. 112). Dla jakich wartości x jest **701.** α) $x^2 < 1$; β) $x^2 > 1$. **702.** $x^2 > a$. **703.** $x^2 - 6x + 8 < 0$. **704.** α) $x^2 - 8x > 15$; β) $x^2 - 8x < 15$. **705.** α) $x^2 - 4x + 13 > 0$. β) $x^2 - 4x + 13 < 0$.

(Art. 114). **706.** $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$. **707.** $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$.
708. $x^4 - 6x^3 + x^2 + 24x - 20 = 0$. **709.** $x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 12 = 0$.
710. $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 16x - 4 = 0$. **711.** $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 36x - 117 = 0$.

712. $1 - x = \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}}$ **713.** $\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} = x$.

714. W jakiej odległości od środka kuli o promieniu r należy poprowadzić płaszczyznę, aby stosunek objętości powstałego mniejszego odcinka do objętości stożka mającego toż koło za podstawę a wierzchołek w środku kuli, był m.

715. Z beczki, zawierającej $81\,l$ wina, wylano pewną ilość l, a natomiast dolano beczkę wodą; z mieszaniny tej wylano następnie tyleż, co poprzednio, i znowu do beczki dolano wody. Gdy to powtórzono cztery razy, to w mieszaninie, znajdującej się w beczce, pozostało $16\,l$ czystego wina. Po ile wylewano każdym razem?

(Art. 116). **716.** $x^3 - 125 = 0$. **717.** $x^3 + 512 = 0$. **718.** $(x^2 - 5)(x + 25) = 5x(5x - 1)$.

719. $(x - 6)(x^2 + 4\sqrt{3}) = 2x\sqrt{3}(2 - x\sqrt{3})$. **720.** $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x^2 - 2} = \dfrac{1}{x}$.

721. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x}{x-2} + \dfrac{x}{x-3} + \dfrac{12x}{x^2 - 5x + 6} + \dfrac{x - 192}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = 0$.

(Art. 117). **722.** $x^4 - 4096 = 0$. **723.** $x^4 + 2401 = 0$. **724.** $\dfrac{1}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x^2 + 1} = \dfrac{8}{3x^2}$.

725. $x(x^3 + 17x^2 - 289x - 4913) = 17x^2(x - 17) - 17x\left(289 - \dfrac{4913}{x}\right)$.

726. $\dfrac{2x^2 + 5}{2x^2 - 5} + \dfrac{2x^2 - 5}{2x^2 + 5} = -\dfrac{58}{21}$. **727.** $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} + \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \dfrac{256}{x^8 - 10x^4 + 9} =$
$= \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 3} + \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$.

(Art. 118). **728.** $x^6 - 262144 = 0$. **729.** $x^6 + 2985984 = 0$.
(Art. 120). **730.** $x^6 + 27 = 28x^3$. **731.** $x^6 - 10x^3 = 459$. **732.** $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$.
733. $(x^4 - 3x^2 + 4)^2 + 6x^2(x^2 - 2)^2 = 160$. **734.** $(x^4 + 3)^2 + (x^2 + 3)^2 + (x^2 - 3)^2 = 411$.
(Art. 121). **735.** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. **736.** $x^4 + 7x^2 - 144 = 0$. **737.** $x^4 + 41x^2 + 400 = 0$.
738. $x^4 - 33x^2 + 270 = 0$. **739.** $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$. **740.** $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$.

741. $x^4 - 6x^2 - 1 = 0$. **742.** $2x\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} = 20$. **743.** $\dfrac{1 + x}{1 - x + x^2} + \dfrac{1 - x}{1 + x + x^2} = a$.

Znaleźć pierwiastki równań wymiernych, do których dochodzimy z czterech następujących równań:

744. $\dfrac{1}{x - \sqrt{2 - x^2}} - \dfrac{1}{x + \sqrt{2 - x^2}} = 1$. **745.** $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{17 - x} = 3$.

746. $\sqrt[4]{1 + x} + \sqrt[4]{1 - x} = \sqrt[4]{2}$ **747.** $\sqrt[4]{17 + 12x} + \sqrt[4]{17 - 12x} = 2$.

748. Oznaczyć p w równaniu $x^2 - px + 15 = 0$ w ten sposób, aby różnica kwadratów obu pierwiastków była równa 16.

749. Ostrosłup prosty, którego powierzchnia boczna jest $144\ cm^2$, a krawędź boczna $10\ cm$, ma za podstawę trójkąt równoboczny. Jaki jest bok tego trójkąta?

750. Ostrosłup prosty, którego powierzchnia boczna jest $2800\ cm^2$, a wysokość $48\ cm$, ma za podstawę kwadrat. Jaki jest bok tego kwadratu?

751. Pole trójkąta ma $84\ m^2$, a dwa jego boki $13\ m$ i $15\ m$. Znaleźć trzeci bok tego trójkąta.

752. Dany jest prostokąt, którego boki są a i b. Określić boki równoważnego prostokąta, którego przekątna jest 2 razy większa od przekątnej danego prostokąta?

753. Na prostopadłej, wystawionej z punktu końcowego średnicy równej $15\ cm$, znaleźć punkt taki, iżby odcinek zewnętrzny siecznej łączącej ten punkt z drugim punktem końcowym średnicy był $16\ cm$.

754. Mając koło o promieniu r, poprowadzić koło spółśrodkowe tak, iżby pole nakreślonego koła było średnią geometryczną pola danego koła i pola pasa kołowego.

755. W trójkącie dwusieczna kąta przy wierzchołku dzieli podstawę na odcinki a i b, a wysokość trójkąta jest h. Znaleźć pozostałe boki trójkąta?

756. Z punktu oddalonego od prostej danej o 8 *cm* poprowadzono pochyłą tak, iż prostokąt wystawiony na niej i na jej rzucie na prostą daną ma pole 255 cm^2. Jaka jest długość owej pochyłej?

757. Pole trójkąta jest s^2, a boki przy wierzchołku a i b. Określić długość prostej, łączącej wierzchołek trójkąta ze środkiem podstawy?

758. Trójkąt równoramienny jest równoważny z trójkątem równobocznym o boku a, suma zaś kwadratów jego podstawy i jednego z pozostałych boków jest $2a^2$. Jaka jest podstawa tego trójkąta równoramiennego?

759. Wysokość graniastosłupa jest 18·5 *cm*, objętość 865·8 cm^3, a podstawa jest trójkątem równoramiennym, w którym każdy z równych boków ma długości 9·7 *cm*. Znaleźć podstawę tego trójkąta?

(Art. 125). **760.** $x^3-3x^2-3x+1=0$. **761.** $x^3+\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{2}x+1=0$.
762. $5x^3+31x^2+31x+5=0$. **763.** $x^3+3x^2-3x-1=0$. **764.** $x^3-5x^2+5x-1=0$.
765. $x^3-\frac{21}{4}x^2+\frac{21}{4}x-1=0$. **766.** $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$.
767. $x^4+4x^3-10x^2+4x+1=0$. **768.** $x^4-x^3+x^2-x+1=0$. **769.** $x^4+2x^3-2x^2+2x+1=0$.
770. $x^4-4x^3-3x^2-4x+1=0$. **771.** $x^4+2x^3+2x+1=0$.
772. $x^4+x^3+x+1=0$. **773.** $x^4-\frac{17}{4}x^2+1=0$. **774.** $x^4+\frac{3}{2}x^3-8x^2+\frac{3}{2}x+1=0$.
775. $6x^4-7x^3+2x^2-7x+6=0$. **776.** $x^4-3x^3+3x-1=0$.
777. $x^4+4x^3-4x-1=0$. **778.** $x^4-\frac{6}{7}x^3+\frac{6}{7}x-1=0$. **779.** $x^4+\frac{9}{4}x^3-\frac{9}{4}x-1=0$.
780. $3x^4-7x^3+7x-3=0$. **781.** $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1=0$.
782. $x^5+10x^4-11x^3-11x^2+10x+1=0$. **783.** $x^5+3x^4-4x^3-4x^2+3x+1=0$.
784. $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$. **785.** $x^5-x^3-x^2+1=0$. **786.** $x^5+x^4+x+1=0$.
787. $x^5+3x^4+\frac{11}{4}x^3+\frac{11}{4}x^2+3x+1=0$. **788.** $x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-1=0$.
789. $x^5+x^4-x-1=0$. **790.** $x^5-3x^4+3x-1=0$.
791. $x^6-4x^5-4x^4+4x^2+4x-1=0$. **792.** $x^6-5x^5+7x^2-7x^2+5x-1=0$.
793. $x^6-x^2+x^2-1=0$. **794.** $x^6-\frac{35}{6}x^5+\frac{28}{3}x^4-\frac{28}{3}x^2+\frac{35}{6}x-1=0$.
795. $x^6-\frac{19}{3}x^5+11x^4-11x^2+\frac{19}{3}x-1=0$.

796. Rozwiązać równanie $x^4-2ax^3+(2a^2-b^2)x^2-2a^3x+a^4=0$, kładąc $x=az$.

797. Przez wierzchołek kwadratu, którego bok jest 3 *cm*, jest tak poprowadzona prosta, iż jej odcinek, między jednym z dwu boków nie schodzących się w owym wierzchołku, a przedłużeniem drugiego z nich, jest równy 4 *m*. Znaleźć stosunek długości tego odcinka, przez owę prostą na boku kwadratu oddzielonego, który nie jest przyległy do boku przedłużonego, do długości boku kwadratu.

(Art. 127). **798.** $x^{\log x}=10$. **799.** $4^{x^2-5x+14}=65536$. **800.** $3.2^x=4\sqrt[x]{9}$.
801. $x^{\log x-2}=0{\cdot}177828$. **802.** $x^{2+\log x}=15{\cdot}2015$. **803.** $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10$.
804. $3.4^{x+2}=4.3^{\frac{3x+1}{2x}}$. N **805.** $10000\,x^{\left[(\log x)^3-5\log x\right]}=1$. **806.** $(10000x)^{\left[(\log x)^3-5\log x\right]}=1$.
Nal **807.** $(2x+1)^{\log(2x+1)-3}=\frac{1}{100}$. **808.** $\sqrt{2.3^{4x}+3}-\sqrt{3^{4x}+1}=5$. **809.** $\sqrt{2^x+1}+\sqrt{2{\cdot}2^x-7}=6$.
810. $(\frac{5}{2})^{2x}-3(\frac{5}{2})^{x+1}=-\frac{25}{2}$. **811.** $\sqrt[x+1]{2}=3^{x+2}$. **812.** $e^x+e^{-x}=\frac{5}{2}$

ODPOWIEDZI.

3. $4ab(a^4-a^3b-ab^3+b^4)$. **4.** α) = β). **5.** $\frac{1}{1-x^2}$. **6.** α) = β). **7.** $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$.
10. $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$. **11.** $\frac{1}{12}(2a-b)$. **12.** $x=1$, $y=1$. **14.** 1841449. **15.** 152399025.
16. 780811249. **17.** 412252416. **18.** 900540081. **19.** 3466383376. **20.** 43046721.
21. 214358881. **22.** 33232930569601. **24.** 0·00015129. **25** 0·00273529. **26.** 100·2001.
29. $\frac{6305}{6561}$. **30.** $\frac{1156}{12321}$. **45.** 2498846293. **46.** 8754552981. **47.** 1371700960631. **48.** 531441.
49. 2985984. **50.** 134217728. **51.** ˈ2357947691. **52.** 8·741816. **53.** 8·084294343.

54. β). $510\frac{909219}{1953125}$. **59.** $7x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$. **60.** $\frac{27a^9x^9}{8b^3y^6}$. **61.** $\frac{a+b}{a-b}$.

62. $\frac{1}{(1-a)^{14}}$. **63.** $\frac{1}{a^4+4a^2b+4b^2}$. **64.** $a^4-1+\frac{1}{4a^4}$. **65.** $27a^3+a+\frac{1}{a}+\frac{1}{27a^3}$.

66. $\frac{b^{2p+n}}{a^{3p}c^{2q+3}}$. **68.** 1.2.3.4.5.6.7. **70.** $3^3.5.7$. **71.** $2^2.3$. **74.** 72. **75.** $6a^2b^2c^6d^5$.

76. $4a^2b^2c^4d^3$. **77.** $6(a^2-b^2)$. **81.** $2abc^2\sqrt{3ac}$. **82.** $2a^2b^pc^q\sqrt[3]{4abc^{q+2}}$.

83. $(a-2b)\sqrt[4]{3ab}$. **84.** $144\sqrt[3]{20}$. **85.** $2{\cdot}42\sqrt[3]{3}$. **86.** $1{\cdot}2\sqrt{0{\cdot}3}$. **87.** $\frac{a^2}{c^3d^5}$.

88. $\frac{2}{a}\sqrt[3]{b^2c}$. **89.** $\frac{12}{7}$. **90.** $bc^2\sqrt{a}$. **91.** $ac^2\sqrt[15]{a}\sqrt[3]{b^2}$. **92.** $3\sqrt{7}\cdot\sqrt[6]{2}$. **93.** $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[15]{2000}$.

94. $2\sqrt[5]{3.7^4}$. **95.** $24\sqrt[4]{72\sqrt[3]{3}}$. **96.** $2\sqrt[5]{12}$. **97.** $\frac{12}{25}\sqrt[10]{\frac{(a-x)^3}{32m^{11}}}$. **98.** a^2b^4c.

99. $a^2b^2c^2\sqrt[12]{b^5c}$. **100.** $a^3b^3c^2d^5$. **101.** $\sqrt[6]{ab}$. **102.** $\sqrt[20]{\frac{b}{a}}$. **103.** $\sqrt[35]{\frac{a}{b^p}}$. **104.** $\sqrt[6]{\frac{c}{a^n}}$.

105. $\sqrt[15]{\frac{c^x}{b}}$. **106.** $\sqrt[3]{\frac{c}{ab}}$. **107.** 432. **108.** $\sqrt[99]{\frac{5}{3}}$. **109.** $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, i t. d.

111. $x=1{\cdot}\dot{2}$. **112.** $x=3\sqrt{3}$. **113.** $x=a^2b$, $y=ab^2$. (Te liczby starożytni nazywali 2-ma średniemi proporcyonalnemi dwu sześcianów). **114.** β) Zob. w części I zadanie 302.

117. $9\frac{23}{27}\pi m^2$. **119** $14\sqrt{30}$. **120.** $2(ab\sqrt{c}+ac\sqrt{2b}+bc\sqrt{3a})$. **121.** $(5a+3\sqrt{a+b}).\sqrt{a-b}$

122. 0. **123.** $(a+10b)\sqrt{ab}$. **124.** $(a+2b+3c)\sqrt{mn}$. **125.** $5\sqrt{ab}$. **126.** $4\sqrt[3]{10}$.

127. $4(2\sqrt{3}-\sqrt{6})$. **128.** $\frac{1}{3}(4\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{3-x}$. **131.** $14-6\sqrt{5}$. **132.** $72-32\sqrt{5}$.

133. $ab(a+b+1)+2ab(\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b})$. **134.** $1-2\sqrt{15}$. **135.** $21-6\sqrt{5}+6\sqrt{7}--2\sqrt{35}$.

136. -59. **137.** $135-53\sqrt{5}+49\sqrt{7}-18\sqrt{35}$. **138.** 30. **139.** $1+x^4$. **140.** $1+x^6$.

141. $\frac{c}{a}$. **142.** ax^2+bx+c. **143.** p^4-q^4. **144.** $x-y$. **145.** $-(2\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3})$.

146. $2(acx+bdy)$. **147.** 3. **148.** $3(2\sqrt[6]{2}-\sqrt[3]{4})$. **149.** $a-b$.

150. $30+12\sqrt[8]{2}+18\sqrt[6]{2}-24\sqrt[12]{2}$. **151.** $4ab-(a+b-c)^2$. **153.** $7-3\sqrt{5}$. **154.** $\sqrt{a}+\sqrt{ax}$.

155. $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$. **156.** $a+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{a^2b^2}+\sqrt[4]{ab^3}+b$. **157.** $\sqrt{a}+1$. **158.** $\frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}-3\sqrt[4]{b^3}$.

159. $2\left(\sqrt{1+x}-\frac{1}{x}\right)$. **160.** $-2(x^2+1)(x-1)$. **161.** $\frac{1}{6}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30})$.

162. $\frac{4a(a-1)}{a(a-1)^2-1}$. **163.** $\frac{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}+\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}}{ab+ac+bc}$.

164. $\frac{15}{4}\sqrt{7}$. **165.** $\frac{2f}{a+b+c}$. **166.** (Przekątna kwadratu danego; cięciwa styczności koła stycznego do dwu boków kwadratu). $\frac{1}{2}a(\sqrt{2}-1)$. **167.** $\frac{5}{12}(17+\sqrt{193})$. **168.** $\frac{2}{21}\sqrt{7}$.

169. $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$. **170.** $\frac{3}{2}\sqrt{5}-\sqrt{3})$. **171.** $3(9+4\sqrt{3}+6\sqrt{5}-\sqrt{15})$.

172. $\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}$. **173.** $\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}$. **174.** $\frac{1}{5}\sqrt{15}$.

175. $27\sqrt[4]{3^3}-9\sqrt{3}+3\sqrt[4]{3}-1$.

176. $\frac{a^4+a^3\sqrt[4]{b}-a^3+a^2\sqrt[4]{b^2}-a^2\sqrt[4]{b}+a\sqrt[4]{b^3}-a\sqrt[4]{b^2}-\sqrt[4]{3}-1}{a^4-b}$.

177. $\frac{4a^2\sqrt[3]{2a}-4a^2\sqrt[6]{3b}+2a\sqrt{648a^3b^4}+6ab+36\sqrt[6]{72a^3b^2}+36\sqrt[3]{9b^2}}{8a^3-9b^2}$.

178. $\dfrac{a-\sqrt[4]{a^3b}+\sqrt[4]{a^2b^2}-\sqrt[4]{ab^3}}{a-b}$.

179. $\dfrac{c\left(\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[6]{a^4b}+\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{ab^4}-\sqrt[6]{b^5}\right)}{a-b}$. **180.** $1+\sqrt{2}$.

181. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-2\sqrt{6}+\sqrt{10})$. **182.** $\sqrt{15}-\sqrt{10}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$.

183. $\frac{1}{1319}(323\sqrt{5}-84\sqrt{30}+203\sqrt{2}-94\sqrt{15}+8\sqrt{10}-153\sqrt{6}+447-77\sqrt{3})$.

184. 4. **185.** 45. **186.** 4. **187.** 1. **188.** 64. **189.** $a.\left(\dfrac{b+1}{b-1}\right)^2$ **190.** $(b-a)^2$.

191. 3. **192.** $\frac{2}{3}$. **193.** $\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{c^2}{c-1}+b\right)$. **194.** 4. **195.** $\frac{1}{9}$. **196.** 3. **197.** $9\frac{1}{5}$.

198. $\dfrac{c^3-b^3}{3ab(b-a)}$. **199** 9. **200.** 1. **201.** 9. **202.** 7. **203.** $\frac{4}{9}$. **204.** $-\dfrac{ab}{a+b}$.

205. $\dfrac{(b-a)^2}{2a-b}$. Przy sprawdzeniu przyjmujemy $2a>b>a$. **206.** $\frac{55}{19}$. **207.** $\frac{1325}{144}$.

208. 3. **209.** 8. **210.** 2. **211.** 2. Podstawiwszy w dane równanie i po podniesieniu obu stron równości, mającej wyrazy tylko dodatne, do kwadratu dojdziemy do tożsamości). **212.** —2. **213.** 1. **214.** 2. **215, 216** i **217.** Równania niemożliwe.

218. $x=16, y=25$. **219.** $x=4, y=9$. **220.** $x=y=1$. **221.** $x=11, y=7$. **222.** $x=2, y=1$.

223. $x=-64$, $y=1000$. **224.** $x=1$, $y=1$. **225.** $x=3$, $y=7$. **226.** $x=y=1$.

227. $x=2$, $y=3$. **228.** Układ równań niemożliwy. **229.** $2a^3-3ab^2-3b^3$.

230. $4a^3b^2-7a^2b^3-6ab^4+2b^5$. **231.** $\frac{3}{2}a^3b^2c^3-\frac{1}{3}a^2b^3c^2-ab^4c$. **232.** $2ab-3b^2$.

233. $a^2+2ab+b^2$. **235.** 69. **236.** 235. **237.** 467. **238.** 1345. **239.** 4489.

240. 7304. **241.** 26345. **242.** 58876. **243.** 115036. **244.** 187363267. **245.** 1·23.

246. 4·06. **247.** 1·304. **248.** 0·6502. **249.** 0·003205. **250.** 27. **251.** 8·1.

252. 1·6. **253.** 3·16 i 3·17. **254.** 3·872 i 3·873. **255.** 1·8973 i 1·8974. **256.** 0·9486 i 0·9487.

257. 0·97467 i 0·97468. **258.** 0·79372 i 0·79373. **259.** 3·52136 i 3·52137.

260. 0·088881 i 0·088882. **261.** $3\frac{5}{6}$ i $3\frac{11}{12}$. **262.** $1\frac{11}{12}$ i 2. **263.** $11\frac{1}{12}$ i $11\frac{1}{6}$.

264. $14\frac{1}{6}$ i $14\frac{1}{4}$. **265.** $6\frac{29}{35}$ i $6\frac{30}{35}$ **266.** $2\frac{26}{35}$ i $2\frac{27}{35}$. **267.** $3\frac{6}{35}$ i $3\frac{1}{5}$. **268.** $10\frac{4}{35}$ i $10\frac{1}{7}$.

269. $3a^2b^3-2cd^4$. **270.** a^2-2a+1. **271.** $2a^2-3ab+b^2$. **272.** $2a^2+4ab-3b^2$.

273. $2a^2-3ab+4b^2$. **274.** $a^3+3a^2b+3ab^2-2b^3$. **275.** $a^4+a^3+a^2+1$. **276.** 56. **277.** 65.

278. 83. **279.** 112. **280.** 101. **281.** 401. **282.** 444. **283.** 753. **284.** 803.

285. 905. **286.** 1357. **287.** 2061. **288.** 3003. **289.** 11111. **290.** 20102. **291.** 3·6.

292. 0·96. **293.** 0·698. **294.** 1·854. **295.** 3·375. **296.** 0·015625. **297.** 103·823.

298. 95. **299.** 59. **300.** 14 i 15. **301.** 1·25 i 1·26. **302.** 2·57 i 2·58.

303. 0·307 i 0·308. **304.** 0·4431 i 0·4432. **305.** 3·3322 i 3·3323. **306.** 0·20800 i 0·20801.

307. 4·530654 i 4·530655. **308.** $\frac{7}{9}$ i $\frac{8}{9}$. **309.** 2 i $2\frac{1}{12}$. **310.** $4\frac{4}{12}$ i $4\frac{5}{12}$. **311.** $2\frac{3}{4}$ i $2\frac{5}{6}$.

312. $2\frac{1}{12}$ i $2\frac{1}{6}$. **313.** $4\frac{1}{7}$ i $4\frac{4}{21}$. **314.** $2\frac{19}{21}$ i $2\frac{20}{21}$. **315.** $2\frac{2}{7}$ i $2\frac{1}{3}$. **316.** $1\frac{1}{3}$ i $1\frac{8}{21}$.

317. $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$. **318.** $4a+6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+9b$. **319.** $a^2-3a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+4ab^{-1}-3a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}+b^{-2}$.

320. $a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{7}{6}}+a^{\frac{3}{2}}$. **321.** $4a+9b$. **322.** $81a^{\frac{4}{5}}+108a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}+144a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}+192a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}}+256b^{\frac{4}{5}}$.

323. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}-b^{-1}$. **324.** $2a^{\frac{2}{5}}-3a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{3}}+2b^{\frac{2}{3}}$. **325.** $a^{-\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})$. **326.** $a^{\frac{1}{3}}+2b^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}$.

327. $a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{1}{12}}-1)$. **328.** $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{2}{3}}$. **329.** α) 6; β) $4i$; γ) 15, —2; δ) $-\frac{1}{13}(5+i)$; ε) —10; ζ) —96. **330.** $x^2_1+x^2_2+y^2_1+y^2_2$. **331.** α) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$; β) $-1, 1$; γ) 0, 0. **332.** α) $x+\xi+i(y+\eta)$, $x-\xi+i(y-\eta)$, $x\xi-y\eta+i(\xi y+x\eta)$, $\dfrac{x\xi+y\eta+i(\xi y-x\eta)}{\xi^2+\eta^2}$; β) $x^2+\xi^2-y^2-\eta^2+2i(xy+\xi\eta)$, $x^2-\xi^2-y^2+\eta^2+2i(xy-\xi\eta)$. **333.** $-500+200$. **336.** 1·76233.

337. 1·74256. **338.** 141·873. **339** 1·20117. **340.** 1·25006. **341.** 0·595786.

342. 1·25944. **343.** 3440·17. **344.** 0·319707. **345.** 126·521. **346.** 64·501.

347. 0·27898. **348.** 15·5207. **349.** 15035·5. **350.** 1395·53. **351.** 16180·7.

352. 2·00018. **353.** 2·44389. **354.** 1. **355.** 3557·77. **356.** 0·0106295. **357.** 53·6738.

358. 0·257147. **359.** 0·00000170508. **360.** 3·60525. **361.** 1·24203. **362.** 0·85566.

363. $\log x = \frac{4}{9}\log 3 - \frac{3}{4}\log 5$, $x = 0{\cdot}487322$. **364.** 0·96186. **365.** 3·03027. **366.** 1·11739.
367. 0·695871. **368.** 0·75342. **369.** 2·207. **370.** 1·32139. **371.** 3·00000.
372. 1·61119. **373.** 2417·17. **374.** 100. **375.** 189·478. **376.** 2·07843. **377.** 2·0231.
378. 16076·7. **379.** $x=8$, $y=7$. **380.** 0·2821. **381.** 0·620357. **382.** 57°17′45″.
383. 11·5149 m^2. **384.** 4·948 g. **385.** $l = 0{\cdot}99383$. **386.** α) 1·72052 dm i 7·08583 dm; β) 1·08385 dm i 5·03087 dm^2. **387.** $5093{\cdot}10^3$, 1081.10^6. **388.** 3·09021. **389.** 1·92380.
390. 3201·23. **391.** 1·05363. **392.** 7 m^2. **393.** 146·183. **394.** $v = 47030$. **395.** 17·1535.
396. 4. **397.** 0·069815. **398.** 5. **399.** $\frac{\log c + a\log b - b\log a}{\log a - \log b}$. **400.** $\frac{\log(c - b^a) - b\log a}{\log a - \log b}$.
401. $3 + \frac{\log(b+1) - \log(a^2b - 1)}{\log a}$. **402.** $\frac{1}{2}$. **403.** 0·35521. **404.** $-1\frac{7}{12}$. **405.** $-0{\cdot}87204$.
406. 1·22756. **407.** 6·99983. **408.** $\frac{1}{4}$. **409.** $x=6$, $y=10$. **410.** $x=y=2$. **411.** $x=\frac{1}{2}$, $y=2$.
412. $x=7$, $y=121$. **413.** $x=2$, $y=-1$. **414.** $x=\frac{917}{127}$, $y=\frac{851}{127}$. **415.** $x=1$, $y=2$, $z=3$.
420. $\frac{ab}{a+b}$, 0. **421.** 0, $-a$. **422.** $\sqrt{-\frac{2}{15}}$, $-\sqrt{-\frac{2}{15}}$. **423.** 1, -1.
424. $\frac{i}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{i}{2}\sqrt{3}$. **425.** i, $-i$. **426.** $\frac{c}{a}$, $-\frac{c}{a}$. **427.** $\frac{c}{a}i$, $-\frac{c}{a}i$.
428. $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^8}}$. **429.** $\frac{i}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{i}{2}\sqrt{2}$. **430.** 0, 0. **431.** 0, 0.
432. $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$. **433.** $-\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{3}$. **434.** $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$. **435.** 2, $\frac{5}{4}$. **436.** 3, $-\frac{1}{2}$. **437.** 1, 5.
438. 2, 9. **439.** -15, -2. **440.** -15, -4. **441.** -16, 3. **442.** 13, -6.
443. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$. **444.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. **445.** $-\frac{1}{5}$, $-\frac{4}{5}$. **446.** $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{6}$. **447.** $\frac{1}{4}$, $-\frac{5}{4}$. **448.** $\frac{1}{7}$, $-\frac{1}{8}$.
449. $1+i$, $1-i$. **450.** $2+3i$, $2-3i$. **451.** $2+\frac{1}{3}i$, $2-\frac{1}{3}i$. **452.** $-3+\frac{1}{2}i$, $-3-\frac{1}{2}i$.
453. $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$. **454.** $-1+\sqrt{\frac{8}{3}}$, $-1-\sqrt{\frac{8}{3}}$. **455.** $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$.
456. $-3+\sqrt{2}$, $-3-\sqrt{2}$. **457.** $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i\sqrt{15}$, $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\sqrt{15}$. **458.** $-1+i\sqrt{\frac{7}{3}}$, $-1-i\sqrt{\frac{7}{3}}$.
459. $2+i\sqrt{2}$, $2-i\sqrt{2}$. **460.** $-5+i\sqrt{2}$, $-5-i\sqrt{2}$. **461.** $3\sqrt{5}+4$, $3\sqrt{5}-4$.
462. $\frac{1}{2}\sqrt{3}+2$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}-2$. **463.** $3\sqrt{5}+4i$, $3\sqrt{5}-4i$. **464.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}+2i$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}-2i$.
465. $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$. **466.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$.
467. $2\sqrt{3}+i\sqrt{5}$, $2\sqrt{3}-i\sqrt{5}$. **468.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{4}i\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{4}i\sqrt{2}$.
469. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{30}$, $-\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{30}$. **470.** $\frac{1}{3}\sqrt{21}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{21}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$.
471. $2+\frac{1}{2}\sqrt{16+6\sqrt{2}}$, $2-\frac{1}{2}\sqrt{16+6\sqrt{2}}$. **472.** 1, $-\frac{3}{4}$. **473.** 2, $1\frac{3}{5}$. **474.** 1, $-\frac{15}{17}$.
475. $\frac{3}{2}c^2+\frac{5}{2}b\sqrt{a^2+c^2}$, $\frac{3}{2}c^2-\frac{5}{2}b\sqrt{a^2+c^2}$. **476.** $\frac{5}{2}a+3i\sqrt{a^2+b^2}$, $\frac{5}{2}a+3i\sqrt{a^2+b^2}$.
477. 1, 1. **478.** $-\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{a}$. **479.** $-\frac{b+c}{a}$, $-\frac{b-c}{a}$. **480.** $-d$, $-\frac{c}{b}$.
481. $10a-9b$, $\frac{ab}{a+b}$. **482.** a, b. **483.** a, b. **484.** 8, 12. **485.** $\frac{1}{2}$, -1. **486.** 28, -3.
487. 6, 3. **488.** 3, 2. **489.** $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$. **490.** 7, $-\frac{7}{9}$. **491.** 8, -8. **492.** 3, -5.
493. 3, $-\frac{4}{5}$. **494.** $6+8i$, $6-8i$. **495.** $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$. **496.** 3, $\frac{29}{20}$.
497. 3, 2. **498.** $\frac{13}{3}$, 0. **499.** 2, $-\frac{2}{15}$. **500.** 2, $-6\frac{24}{37}$. **501.** 1, $\frac{3}{5}$. **502.** 24, $-8\frac{2}{3}$.
503. 3, 4. **504.** 3, 1. **505.** 1, 0. **506.** 2, 1. **507.** 2, 1. **508.** $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.
509. $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$. **510.** $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$. **511.** 2, 1. **512.** 2, 1. **513.** $4+\sqrt{10}$, $4-\sqrt{10}$.
514. $1+\sqrt{8}$, $1-\sqrt{8}$. **515.** $4\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{201}$, $4\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{201}$. **516.** $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{23}$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{23}$.
517. 4, 5. **518.** 5, 6. **519.** $1+i\sqrt{2}$, $1-i\sqrt{2}$. **520.** a, $-a$. **521.** $\sqrt{a^2+b^2}$, $-\sqrt{a^2+b^2}$.
522. b, $-2a-b$. **523.** $\sqrt{-\frac{abc}{a+b+c}}$, $-\sqrt{-\frac{abc}{a+b+c}}$
524. $-a+\sqrt{a^2-ab+b^2}$, $-a-\sqrt{a^2-ab+b^2}$. **525.** $-b+\sqrt{a^2+b^2}$, $-b-\sqrt{a^2+b^2}$. **526.** a, a.
527. $b+\sqrt{a^2+b^2}$, $b-\sqrt{a^2+b^2}$. **528.** $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2a}\sqrt{a^4-4}$, $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2a}\sqrt{a^4-4}$.
529. $-a+\sqrt{ab}$ $-a-\sqrt{ab}$. **530.** $\frac{ac-bd+\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-d^2)}}{ad-bc}$, $\frac{ac-bd-\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-d^2)}}{ad-bc}$.
531. 3, 1. **532.** 2, 1. **533.** 4, 3. **534.** 2, 1. **535.** 3, 5. **536.** 2, 2. **537.** 0, $1\frac{3}{37}$.

538. 0, 1. **539.** $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$. **540.** $-2\frac{3}{4}$, -3. **541.** 2, -2. **542** $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$. **543.** 2. **544.** $-2\frac{3}{4}$. **545.** $-1\frac{3}{9}$. **546.** 2. **547.** 3. **548.** 2. **549.** 5. **550.** 4. **551.** 4. **552—559.** Równania niemożliwe. **560.** $\sqrt{ab}$, $-\sqrt{ab}$. **561.** $\sqrt{ab}$, $-\sqrt{ab}$. **562.** a, $-a$.

563. Po podniesieniu obu stron do sześcianu wyłączyć z dwu wyrazów $\sqrt[3]{a^2-x^2}$ i uwzględnić równanie pierwotne; 0, 0. **564.** $-a+\sqrt{ab}$, $-a-\sqrt{ab}$. **565.** Postąpić podobnie, jak przy rozwiązywaniu zad. 563-go; 0. $-\frac{1}{9}a$. **566.** a. **567.** b. **568.** $\sqrt{ab}$.

569. $\frac{a}{9b}$. **570.** 5. **571.** a. **572.** $-\frac{1}{a}\sqrt{-\frac{1}{3}}$. **573—588.** Sprawdzić, rozwiązując otrzymane równania. **589.** α) $\frac{b^2-2ac}{a^2}$, β) $\frac{3abc-b^3}{a^3}$, γ) $\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$, δ) $\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{c^4}$. **590.** $\frac{p^4-d^2}{4p^2}$. **591.** Sprawdzić, rozwiązawszy równania.

592—605. Otrzymane liczby podstawić w zadania. **610.** $3\sqrt{2}$. **611.** $\sqrt{10}$. **612.** $2\sqrt{10}$, 2. **613.** $\sqrt{30}$. **614.** $5\sqrt{2}$ i $\sqrt{-6}$. **615.** α) $\sqrt[4]{7\sqrt{2}}$; β) $i\sqrt{2}$; γ) 4; δ) $2\sqrt{2}$.
616. $5+\sqrt{3}$, $2+2\sqrt{3}$. **617.** $6+2\sqrt{2}$, $4+4\sqrt{2}$. **618.** $7+\sqrt{6}$, $-3-\sqrt{6}$.
619. $6-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. **620.** $2\pm(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{6})$. **621.** $3\pm i(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.
623. 77 i 91; -77 i -91. **624.** 40 i 20. **625** 15, 45 i 135; 125, -175 i 245.
626. 6 lub -6. **627.** Suma kwadratów wyrazów średnich jest różnicą między kwadratem sumy tych wyrazów a podwojonym iloczynem wyrazów skrajnych; $\frac{1}{2}(a+\sqrt{c^2-b^2})$ lub $\frac{1}{2}(a-\sqrt{c^2-b^2})$. **628.** 22 i 150; -150 i -22. **629.** 159 i 234.
630. 28 lub -28. **631.** $-\frac{1}{2}a(1-\sqrt{5})$ lub $-\frac{1}{2}a(1+\sqrt{5})$. **632.** 15 *kg.* **633.** 810 *kg.* **634.** $1\frac{1}{2}$ zł., $1\frac{3}{4}$ zł. **635.** 8 *m* po 15 zł. **636.** 96. **637.** 10 zł. **638.** 15 i 18. Dlaczego inna odpowiedź ($103\frac{5}{7}$ i $106\frac{5}{7}$) jest bezwarunkowo niemożliwa? **639.** 9-u. **640.** Ilość osób jest od 0 różna; 26 lub 4. **641.** 160 *kg* i 120 *kg.* **642.** 200. **643.** 21. **644.** Pierwsza 140, druga 120. **645.** 3 : 5. **646** W ciągu 3 godz. i w ciągu 5 godz. **647.** 5 *l*
648. 10 *hl.* **649.** A z 3600 *zł.*, B z 3200 *zł.* **650.** 240 *kg.* kawy, 330 *kg.* cukru. **651.** 20%.
652. Ośmioro. **653.** 4%. **654.** 7% i 6%. **655.** $4\frac{1}{4}$%. **656.** 6%. **657.** Po dziewięciu miesiącach. **658.** Albo po 15%, albo po 20%. **659.** Po $\frac{\sqrt{c^2+2gs}-c}{g}$ sekundach.
660. Po $\frac{c-\sqrt{c^2-2gs}}{g}$ i po $\frac{c+\sqrt{c^2-2gs}}{g}$ sekundach. **661.** 50 sekund. **662.** Jeden w odległości 54, drugi w odległości 67·5 promieni ziemskich od środka ziemi.
663. A 11 *km*, B 10 *km.* **664.** 5 *km.* **665.** Idąca do A 36, albo 9 godz., do B 33, albo 6 godz. **666.** Odległość punktu spotkania się od A $17\frac{1}{2}$ mili. **667.** B 4 *km*, A 6 *km.*
668. W ciągu 182 *sek.* i w ciągu 70 *sek.* **669.** $3\frac{4}{7}$ *sek.* po owej chwili lub $9\frac{4}{13}$ przed nią.
670. Po $\frac{a(n+m+\sqrt{3mn})}{2(n^2-n\,.\,m+m^2)}$ *sek.* lub $\frac{a(n+m-\sqrt{3mn})}{2(n^2-n\,.\,m+m^2)}$ **671** Po 111 lub 566 *sek.*
672. Zewnętrznie po $9i$ $14\frac{21}{41}$ *sek.*, wewnętrznie po 11 i po $12\frac{21}{41}$ *sek.* od chwili wyjścia z początkowego położenia. **673.** $\sqrt{\frac{h}{2g}}(c+\sqrt{c^2+2hg})$. **674.** $\frac{v}{g}(tg+v-\sqrt{v^2+2vtg})$.
675. 16 *cm* i 24 *cm.* **676.** 3, 4 i 5. **677.** 25 boków. **678.** $\frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$.
679. $\frac{1}{2}(p-a+\sqrt{a^2+2ap-p^2})$ i $\frac{1}{2}(p-a-\sqrt{a^2+2ap-p^2})$. **680.** 1, 11. **681.** Szukane koła mogą przypadać po jednej, lub po drugiej stronie danej średnicy. Wielkości promieni kół wewnętrznych są: $-(r\mp a)+\sqrt{2r(\mp a)}$, kół zaś zewnętrznych: $r\pm a+\sqrt{2r(r\pm a)}$, gdzie jednocześnie należy brać albo znaki górne, albo też dolne.
682. 6, 12 i 16 *m.* **683.** Odległość płaszczyzny od środka kuli jest $r(\sqrt{2}-1)$.
684. Płaszczyzny są oddalone od środka kuli o $r(\sqrt{2}-1)$.
685. Gdy pole podstawy dolnej nazwiemy b (jest $b=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$), to wyrażenie szukanego

boku jest $\frac{a}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{3(4v-bh)}{bh}}\right)$. **686.** Gdy krawędź sześcianu a, to bok podstawy górnej $-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3(4-k)}{k}}$. **688.** Kwadrat o boku $\frac{1}{4}p$. **689.** Równoramienny. **690.** Prostokąt, którego pole jest połową pola trójkąta danego. **691.** Wysokość szukanego stożka jest równa dwu średnicom kuli. **692.** p i p. **693.** Równoboczny. **694.** Rozważając kwadrat objętości, znajdziemy, iż największą objętość ma sześcian. **695.** Rozważając kwadrat objętości, znajdziemy, iż największą objętość ma sześcian **696.** Ten którego bok, będący osią, jest dwa razy mniejszy od boku pozostałego. **697.** Rozważając kwadrat objętości, znajdziemy, że ten ma objętość największą, w którym stosunek średnicy podstawy do wysokości jest $\sqrt{2}$. **699.** Rozważając kwadrat pola trójkąta, znajdziemy, iż największe pole ma trójkąt równoboczny. **700.** Ten, którego wysokość jest trzecią częścią wysokości stożka. **701.** α) $-1<x<+1$; β) $x<-1$ lub $x>+1$; **702.** Przy $a=0$, przy $a<0$ nierówność niemożliwa; przy $a>0$, $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$.
703. $2<x<4$.. **704.** α) $x<4-\sqrt{31}$ lub $x>4+\sqrt{31}$ β) $4-\sqrt{31}<x<4+\sqrt{31}$.
705. α) x jekiekolwiek, β) nierówność niemożebna. **706.** 5, 2, -2. **707.** 3, 4, 1.
708. 5, 2, -2, 1. **709.** 4, 3, 1, -1. **710.** 2, -2, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ **711.** 3, -3, $2+3i$, $2-3i$. **712.** 0, 0. **713.** 0, 0. **714.** 0, 0, $\sqrt{\frac{5}{3}}$, $-\sqrt{\frac{5}{3}}$. **715.** $\frac{r}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{m+q}{m+1}}\right)$.
716. Po $27l$. **720.** $-\sqrt[3]{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(1\mp i\sqrt{3})$. **721.** 4, $2(-1\pm i\sqrt{3})$.
723. $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\mp 1\pm i)$ **724.** $\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{2}$. **725.** ± 17, $\pm 17i$. **726.** ± 1, $\pm i$.
727. $\pm\sqrt[4]{8}$, $\pm i\sqrt[4]{8}$. **730.** 3, 1, $\frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$. **731.** 3, $\frac{3}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, $-\sqrt[3]{17}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{17}(1\pm i\sqrt{3})$. **732.** ± 3, $\pm 3i$, ± 2, $\pm 2i$. **733.** ± 2, $\pm 2i$, $\frac{1}{2}\sqrt{6}(\pm 1\pm i)$.
734. ± 2, $+2i$, $\sqrt[4]{6}(\pm 1\pm i)$. **735.** ± 2, ± 3. **736.** $\pm 3\pm 4i$.
737. $\pm 4i\pm 5i$. **738.** $\pm\sqrt{15}$, $\pm 3\sqrt{2}$. **739.** $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. **740.** $\pm(\sqrt{2}\pm 1)$.
741. $\pm\sqrt{3\pm\sqrt{10}}$ **742.** Zamiast $\sqrt[3]{x}$ wstawić nową niewiadomą; ± 8, $\pm\frac{5}{4}i\sqrt{10}$.
743. $\pm\sqrt{\frac{2}{a}-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{3}{4}}}$ **744.** $\pm\sqrt{2\pm 2\sqrt{5}}$ **745.** 1, 16, $\frac{1}{4}(17\pm 69i\sqrt{55})$.
746. ± 1, $\pm i\sqrt{63}$ **747.** $\pm\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}i\sqrt{2}$. **748.** ± 8, $\pm 2i$ **749.** 12 *cm*, lub 16 *cm*.
750. 28 *cm*. **751.** $14m$ lub $4\sqrt{37}\,m$. **752.** $\sqrt{2(a^2+b^2)\pm\sqrt{4(a^2+b^2)^2-a^2b^2}}$.
753. 20 *cm*. **754.** $\frac{r}{2}\sqrt{2\sqrt{5}-2}$. **755.** Niech $a>b$; $\frac{a}{a-b}\sqrt{a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-h^2(a-b)^2}}$, $a+b$. **756.** 17 *cm*. **757.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-4s^2}}$ **758.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **759.** 14·4 *cm* lub 13 *cm*.
760. -1, $2\pm\sqrt{3}$. **761.** -1, -2, $-\frac{1}{2}$. **762.** -1, -5, $-\frac{1}{5}$. **763.** $-2\pm\sqrt{3}$.
764. 1, $2\pm\sqrt{3}$. **765.** 1, 4, $\frac{1}{4}$. **766.** -1, -1, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$. **767.** 1, 1, $-3\pm 2\sqrt{2}$.
768. $\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}\right)$, $\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-10+2\sqrt{5}}\right)$.
769. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\pm\sqrt{2-2\sqrt{5}}\right)$, $\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}}\right)$. **770.** $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{21})$, $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$. **771.** $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\pm\sqrt{-2\sqrt{3}}\right)$, $\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\pm\sqrt{2\sqrt{3}}\right)$.
772. -1, -1, $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3}$. **773.** 2, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. **774.** 2, $\frac{1}{2}$, $-2\pm\sqrt{3}$. **775.** 1, 1, $\frac{1}{12}(-5\pm i\sqrt{119})$. **776.** ± 1, $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$ **777.** ± 1, $-2\pm\sqrt{3}$. **778.** ± 1, $\frac{1}{7}(3\pm 2i\sqrt{10})$.
779. ± 1, $\frac{1}{8}(-9\pm\sqrt{17})$. **780.** ± 1, $\frac{1}{6}(7\pm\sqrt{13})$. **781.** -1, $\pm i$, $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$.
782. -1, 1, 1, $\frac{1}{2}(-11\pm 3\sqrt{13})$. **783.** -1, $-2\pm\sqrt{3}$ 1, 1. **784.** ± 1, 1, $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$.
785. $+1$, 1, $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$. **786.** -1, $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\pm 1\pm i)$. **787.** -1, -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}(1\pm i\sqrt{15})$.
788. 1, 1, 1, $\pm i$. **789.** ± 1, $-1\pm i$. **790.** 1, $\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}}\right)$,

$\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\pm\sqrt{2-2\sqrt{5}}\right)$. **791.** ± 1, $\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})$, $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$. **792.** 1, 1, ± 1, $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$. **793.** ± 1, $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(+1\pm i)$. **794.** ± 1, 2, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{3}$. **795.** 3, $\frac{1}{2}$, ± 1, $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$. **796.** $\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\pm\sqrt{b^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2+b^2}\pm\sqrt{b^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. **797.** $\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})$. **798.** 10, $\frac{1}{10}$. **799.** 3, 2. **800.** 2, $-1·58496$. **801.** 3·16228, 31·6228. **802.** 3, $\frac{1}{300}$. **803.** 100, $\frac{1}{100}$. **804.** -1, 0·396245. **805.** 100, $\frac{1}{100}$, 10, $\frac{1}{10}$. **806.** $\sqrt{2}$ 1, $\frac{7}{10000}$, $10^{\sqrt{5}}$, $10^{-\sqrt{5}}$. **807.** $\sqrt{5}$, 49·5, 4.5. **808.** 0·25. **809.** 3. **810.** 1, 1·75652. **811.** $-0·56142$, $-2·43858$. **812.** $\pm 0·69315$.