EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES
OCTOBRE—NOVEMBRE—DÉCEMBRE 1917

EIN BEITRAG ZUR THEORIE DER RESOLVENTE DER FREDHOLM'SCHEN INTEGRALGLEICHUNGEN

VON

A. HOBORSKI

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITE
1917

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTÉ FONDÉE EN 1873 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE:

S. A. I. ET R. CHARLES ÉTIENNE, ARCHIDUC D'AUTRICHE.

VICE-PROTECTEUR:

Vacat.

PRÉSIDENT:

Vacat.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. BOLESLAS ULANOWSKI.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le Protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) Classe de Philologie,

b) Classe d'Histoire et de Philosophie,

c) Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie le «Bulletin International» qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. Le Bulletin publié par les Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie réunies, est consacré aux travaux de ces Classes. Le Bulletin publié par la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles paraît en deux séries. La première est consacrée aux travaux sur les Mathématiques, l'Astronomie, la Physique, la Chimie, la Minéralogie, la Géologie etc. La seconde série contient les travaux qui se rapportent aux Sciences Biologiques.

Publié par l'Académie
sous la direction de M. **Vladislas Kulczyński,**
Secrétaire de la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.

20 marca 1918.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1918. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Filipowskiego.

EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES
OCTOBRE—NOVEMBRE—DÉCEMBRE 1917

EIN BEITRAG ZUR THEORIE DER RESOLVENTE DER FREDHOLM'SCHEN INTEGRAL-GLEICHUNGEN

VON

A. HOBORSKI

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1917

Przyczynek do teoryi funkcyi rozwiązującej równania całkowe Fredholma. — Ein Beitrag zur Theorie der Resolvente der Fredholm'schen Integralgleichungen.

Mémoire

de M. ***A. HOBORSKI,***

présenté, dans la séance du 8 Octobre 1917, par M. S. Zaremba m. c.

§ 1. Es sei eine Fredholm'sche Integralgleichung:

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(xy) f(y)\, dy = g(x) \tag{1}$$

vorgelegt, wo $K(xy)$, $g(x)$ stetige Funktionen ihrer Argumente vorstellen. Mit $\mathfrak{K}(x, y, \lambda)$ bezeichnen wir die Resolvente von (1), die den Gleichungen:

$$\mathfrak{K}(xy\lambda) - K(xy) = \lambda \int_a^b K(xt)\, \mathfrak{K}(ty\lambda)\, dt = \lambda \int_a^b \mathfrak{K}(xt\lambda)\, K(ty)\, dt \tag{2}$$

$$\mathfrak{K}(xy\lambda) - \mathfrak{K}(xy\mu) = (\lambda - \mu) \int_a^b \mathfrak{K}(xt\lambda)\, \mathfrak{K}(ty\lambda)\, dt \tag{3}$$

genügt. Es sei λ_0 ein m-facher Pol der Resolvente und es sei:

$$\mathfrak{K}(xy\lambda) = \frac{\varphi_m(xy)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{\varphi_{m-1}(xy)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(xy)}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i\, \psi_i(xy), \tag{4}$$

wo die Reihe rechts in einem Kreise um λ_0 mit nicht verschwindendem Radius konvergiert.

Ich habe bewiesen (siehe: Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 25, Heft 2, Seite 200), daß $\varphi_1(xy)$ auch im Falle $m > 1$ nicht identisch verschwinden darf. Der Beweis dieses Satzes stützte sich auf eine Gleichung (Gl. 6, a. a. O.), über die ich die Vermutung aussprach, daß sie neu ist. Unlängst fand ich beim Durchlesen der Arbeit vom Plemelj: Zur Theorie der Fredholm'schen Funktionalgleichung (Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 15, 1904), daß jene Gleichung ein Spezialfall einer von Plemelj gefundenen (a. a. O., Seite 114, Gl. 46) ist[1]).

Der Beweis des Satzes, daß die Funktion $\varphi_1(xy)$ nicht identisch verschwindet, läßt sich auch so führen: Ist λ_0 eine m_0-fache Nullstelle der „Determinante" $D(\lambda)$, so ist, wie bekannt,

$$\int_a^b \varphi_1(xx)\,dx = -m_0\,; \tag{5}$$

da λ_0 ein Pol der Resolvente $\mathfrak{K}(xy\lambda)$ ist, so ist $m_0 \geqq 1$, also von Null verschieden, folglich muß nach (5) $\varphi_1(xy) \not\equiv 0$ sein. Wir erhalten aus (5) sogar mehr. Es ist:

$$\varphi_1(xx) \not\equiv 0 \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Im folgenden Paragraphen der vorliegenden Arbeit wird ein etwas allgemeinerer Satz bewiesen, nämlich, daß keine der Funktionen $\varphi_1(xy), \varphi_2(xy), \ldots, \varphi_m(xy)$ identisch verschwinden darf.

Ich beweise noch, daß auch keine der Funktionen $\psi_i(xy)$ identisch verschwinden kann, wenn die Resolvente $\mathfrak{K}(xy\lambda)$ wenigstens eine vom Pole λ_0 verschiedene singuläre Stelle im Endlichen besitzt.

In § 3 wird gezeigt, wie man eine singuläre Stelle λ_0 wegschaffen kann, falls das Residuum $\varphi_1(xy)$ von λ_0 bekannt ist.

In § 4 werden Ausdrücke für die Funktionen $\varphi_1(xy), \varphi_2(xy), \ldots, \varphi_m(xy)$ aufgestellt, falls der Hauptteil des Kernes $K(xy)$ für λ_0 bekannt ist. In diesen Ausdrücken kommen Funktionen $\beta_i^{(\varkappa)}(y)$ vor,

[1]) Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch folgendes erwähnen: Herr Platrier hat unter anderen zwei interessante Sätze (s. Journal von Liouville, 1913) bewiesen; seinen Beweis stützt er auf einen Grenzübergang zur unendlichen Determinante; diesen Beweis habe ich darauf (s. Archiv der Math. u. Physik, Bd. 23) einfacher geführt. Der erste der zwei Sätze von Platrier befindet sich schon in der oben zitierten Arbeit von Plemelj (a a. O., S. 105).

deren lineare Unabhängigkeit in § 5 bewiesen wird. In § 6 beweisen wir eine Relation zwischen jenen Funktionen, und in § 7 wird gezeigt, daß unendlich viele Bedingungen, denen die Funktionen $\psi_i(xy)$ genügen müssen, sich auf eine endliche Anzahl von Gleichungen zurückführen lassen. Zuletzt wird in § 8 der Fall besprochen, in welchem λ_0 einen einfachen Pol der Resolvente $\mathfrak{K}(xy\lambda)$ bildet.

§ 2. Setzen wir die Resolvente $\mathfrak{K}(xy\lambda)$ in der Form (4) in die Gleichung (3), so erhalten wir die bekannten Relationen:

$$(6)\qquad \varphi_{p+q-1}(xy) = -\int_a^b \varphi_p(xt)\,\varphi_q(ty)\,dt \quad \text{für } 2 \leqq p+q \leqq m+1\,;$$

$$(7)\qquad \int_a^b \varphi_i(xt)\,\varphi_k(ty)\,dt = 0 \quad \text{für} \quad m+2 \leqq i+k \leqq 2m\,;$$

$$\left.\begin{array}{ll} (8) & \displaystyle\int_a^b \psi_j(xt)\,\varphi_n(ty)\,dt = 0 \\[2ex] (9) & \displaystyle\int_a^b \varphi_n(xt)\,\psi_j(ty)\,dt = 0 \end{array}\right| \quad \text{für} \quad \left|\begin{array}{l} j = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots m. \end{array}\right.$$

$$(10)\qquad \psi_{p+q+1}(xy) = \int_a^b \psi_p(xt)\,\psi_q(ty)\,dt \quad \text{für} \quad p, q = 0, 1, 2, \ldots$$

Setzen wir in der Gleichung (6) $p = m - k$, wo k eine der Zahlen $0, 1, \ldots\ m-1$ bedeutet und $q = k+1$, so erhalten wir

$$\varphi_m(xy) = -\int_a^b \varphi_{m-k}(xt)\,\varphi_{\varkappa+1}(ty)\,dt\,;$$

da aber $\varphi_m(xy)$ nicht identisch Null ist, so folgt daraus, daß $\varphi_{\varkappa+1}(ty)$ auch nicht identisch verschwinden kann.

Wir erhalten also folgenden Satz:

Satz I. Keine der Funktionen $\varphi_1(xy), \varphi_2(xy), \ldots \varphi_m(xy)$ verschwindet identisch.

Nehmen wir an, daß eine positive, ganze Zahl q_0 existiert, für welche $\psi_{q_0}(xy)$ identisch verschwindet; setzen wir hierauf in der Gleichung (10) $q = q_0$ und $p = 0, 1, 2, \ldots$, so erhalten wir, daß auch $\psi_i(xy)$ für $i \geqq q_0$ identisch verschwindet; infolgedessen ist in der Gleichung (4) die Summe:

$$\mathfrak{P}(x, y, \lambda - \lambda_0) = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i \, \psi_i(xy) \tag{11}$$

ein Polynom in λ, woraus folgt, daß die Resolvente $\mathfrak{K}(xy\lambda)$ im Endlichen einen einzigen Pol λ_0 besitzt.

Wir erhalten somit folgenden

Satz II. Besitzt die Resolvente $\mathfrak{K}(xy\lambda)$ im Endlichen wenigstens einen Pol, der vom Pole λ_0 verschieden ist, so ist keine der Funktionen $\psi_i(xy)$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ identisch Null.

§ 3. Wir beweisen jetzt folgenden

Satz III. Die Resolvente $\mathfrak{K}'(xy\lambda)$ der Fredholm'schen Integralgleichung mit dem Kerne $K'(xy) = K(xy) + \frac{\varphi_1(xy)}{\lambda_0}$ ist für $\lambda = \lambda_0$ regulär und es ist

$$\mathfrak{K}'(xy\lambda) = \mathfrak{P}(xy, \lambda - \lambda_0) + \sum_{i=2}^{m} (-1)^i \frac{\varphi_i(xy)}{\lambda_0^i} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{i-2}. \tag{12}$$

Um den Satz zu beweisen, setzen wir in der Gleichung (2) für $\mathfrak{K}(xy\lambda)$ den Wert (4) und erhalten leicht folgende Relationen:

$$\varphi_m(xy) = \lambda_0 \int_a^b K(xt)\, \varphi_m(ty)\, dt = \lambda_0 \int_a^b \varphi_m(xt)\, K(ty)\, dt \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &(14) \quad \varphi_\varkappa(xy) = \lambda_0 \int_a^b K(xt)\, \varphi_\varkappa(ty)\, dt + \int_a^b K(xt)\, \varphi_{\varkappa+1}(ty)\, dt \\ &(15) \quad \varphi_\varkappa(xy) = \lambda_0 \int_a^b \varphi_\varkappa(xt)\, K(ty)\, dt + \int_a^b \varphi_{\varkappa+1}(xt)\, K(ty)\, dt \end{aligned}\right\} \varkappa = 1, 2, \ldots, m-1.$$

$$\mathfrak{P}(x, y, \lambda - \lambda_0) - K(xy) = \lambda \int_a^b K(xt)\, \mathfrak{P}(ty, \lambda - \lambda_0)\, dt + \tag{16}$$

$$+ \int_a^b K(xt)\, \varphi_1(ty)\, dt = \lambda \int_a^b \mathfrak{P}(xt, \lambda - \lambda_0)\, K(ty)\, dt + \int_a^b \varphi_1(xt)\, K(ty)\, dt.$$

Der Beweis des Satzes III wird augenscheinlich geliefert sein, falls wir die Gleichung:

$$\mathfrak{K}'(xy\lambda) - K'(xy) = \lambda \int_a^b K'(xt)\, \mathfrak{K}'(ty\lambda)\, dt \tag{17}$$

verifizieren, was eine leichte Rechnung erfordert, wenn wir die Gleichungen (2), (4) und die aus den Relationen (13) und (14) folgende

$$(18)\qquad \int_a^b K(xt)\,\varphi_i(ty)\,dt = \frac{\varphi_i(xy)}{\lambda_0} - \frac{\varphi_{i+1}(xy)}{\lambda_0^2} + \cdots + (-1)^{m-i}\frac{\varphi_m(xy)}{\lambda_0^{m-i+1}}$$

$$(i = 1, 2, \ldots m)$$

berücksichtigen.

Auf Grund des Satzes III sind wir imstande, einen Kern zu finden, dessen Resolvente außer λ_0 dieselben im Endlichen gelegenen singulären Stellen besitzt, wie die des Kernes $K(x, y)$.

§ 4. Nun werden wir einfache Ausdrücke für

$$\varphi_1(xy), \varphi_2(xy), \ldots, \varphi_m(xy)$$

bestimmen.

Bezeichnen wir mit $k(xy)$ den Hauptteil des Kernes $K(xy)$ für den singulären Wert λ_0. Es ist bekannt, daß $k(xy)$ folgende Form besitzt:

$$(19)\qquad k(xy) = \sum_{i=1}^{m_0} \pi_i(x)\,\sigma_i(y),$$

wo die Funktionen $\pi_1(x), \pi_2(x), \ldots, \pi_{m_0}(x)$ linear voneinander unabhängig sind; dasselbe gilt für die Funktionen $\sigma_1(y), \sigma_2(y), \ldots, \sigma_{m_0}(y)$; die Zahl m_0 hat dieselbe Bedeutung, wie in § 1. Es ist weiter bekannt, daß der Hauptkern $k(xy)$ in eine Summe von p kanonischen Kernen $k_1(xy), k_2(xy), \ldots, k_p(xy)$ zerlegt werden kann:

$$(20)\qquad k(xy) = \sum_{i=1}^{p} k_i(xy),$$

wo p der Ungleichung

$$(21)\qquad 1 \leqq p \leqq m_0$$

genügt und der Anzahl linear voneinander unabhängiger Fundamentalfunktionen $\varphi(x)$, d. h. Funktionen von der Eigenschaft:

$$(22)\qquad \varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(xy)\,\varphi(y)\,dy = 0$$

gleich ist. Setzen wir:

$$
(23)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\beta_1(y) = -\lambda_0 \sum_{i=1}^{q_1} (-1)^{i+1} \sigma_i(y)\\
&\beta_2(y) = -\lambda_0 \sum_{i=2}^{q_1} (-1)^{i+2} \sigma_i(y)\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\beta_{q_1}(y) = -\lambda_0\, \sigma_{q_1}(y)\\
&\beta_{q_1+1}(y) = -\lambda_0 \sum_{i=1}^{q_2-q_1} (-1)^{i+1} \sigma_{q_1+i}(y)\\
&\beta_{q_1+2}(y) = -\lambda_0 \sum_{i=2}^{q_2-q_1} (-1)^{i+2} \sigma_{q_1+i}(y)\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\beta_{q_2}(y) = -\lambda_0\, \sigma_{q_2}(y)\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\beta_{q_{p-1}+1}(y) = -\lambda_0 \sum_{i=1}^{q_p-q_{p-1}} (-1)^{i+1} \sigma_{q_{p-1}+i}(y)\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\beta_{q_p}(y) = -\lambda_0\, \sigma_{q_p}(y),
\end{aligned}
\right.
$$

wo die Zahlen q_i den kanonischen Kernen entsprechen und auch

$$
(24)\qquad 1 \leqq q_1 < q_2 < \cdots < q_{p-1} < q_p = m_0
$$

ist. Wie bekannt, kann man die Funktionen $\pi_i(x)$, $\sigma_i(y)$ so wählen, daß folgende Gleichungen zutreffen:

$$
(25)\qquad \int_a^b \pi_i(x)\, \beta_k(y)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ -1 & \text{für } i = k \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m_0).
$$

Für $\varphi_1(xy)$ erhält man folgende Form:

$$
(26)\qquad \varphi_1(xy) = \sum_{i=1}^{m_0} \pi_i(x)\, \beta_i(y).
$$

Um für die Funktion $\varphi_2(xy)$ einen analogen Ausdruck zu erhalten, setzen wir in der Gleichung (6):

$$p = 2, \qquad q = 1$$

und erhalten die Relation:

$$\varphi_2(xy) = -\int_a^b \varphi_2(xt)\,\varphi_1(ty)\,dt\,, \tag{27}$$

die auf Grund der Gleichung (26) auch so geschrieben werden kann:

$$\varphi_2(xy) = -\sum_{i=1}^{m_0}{}' \beta_i(y)\,.\int_a^b \varphi_2(xt)\,\pi_i(t)\,dt\,. \tag{28}$$

Um die Integrale rechterhand zu bestimmen, setzen wir

$$\mathfrak{K}(xy\lambda) = G(x,y,\lambda-\lambda_0) + \mathfrak{P}(x,y,\lambda-\lambda_0)$$

und daraus erhält man

$$\int_a^b \varphi_\varkappa(xt)\,\mathfrak{K}(ty\lambda)\,dt = \int_a^b \varphi_\varkappa(xt)\,G(ty,\lambda-\lambda_0)\,dt\,, \tag{29}$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots m)$$

da nach (9) und (11):

$$\int_a^b \varphi_\varkappa(xt)\,\mathfrak{P}(ty,\lambda-\lambda_0)\,dt = 0\,.$$

Wenn wir in (29) $\lambda = 0$ setzen, so erhalten wir:

$$\int_a^b \varphi_\varkappa(xt)\,K(ty)\,dt = \int_a^b \varphi_\varkappa(xt)\,k(ty)\,dt\,. \tag{30}$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots m)$$

Aus (14) für $\varkappa = 1$ erhält man dann:

$$\varphi_1(xy) - \lambda_0 \int_a^b \varphi_1(xt)\,K(ty)\,dt = \int_a^b \varphi_2(xt)\,K(ty)\,dt\,;$$

hieraus und aus (30) folgt:

$$\varphi_1(xy) - \lambda_0 \int_a^b \varphi_1(xt)\, k(ty)\, dt = \int_a^b \varphi_2(xt)\, k(ty)\, dt\,,$$

wenn wir in dieser Gleichung die Ausdrücke (19) und (26) einsetzen und die Relationen (25) berücksichtigen, so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{m_0} \pi_i(x)\,[\beta_i(y) + \lambda_0\, \sigma_i(y)] = \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i(y) \int_a^b \varphi_2(xt)\, \pi_i(t)\, dt\,;$$

da die Funktionen $\sigma_i(y)$ voneinander linear unabhängig sind, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} \int_a^b \varphi_2(xt)\, \pi_1(t)\, dt = 0\,, \quad \int_a^b \varphi_2(xt)\, \pi_2(t)\, dt = \lambda_0\, \pi_1(x)\,, \\ \int_a^b \varphi_2(xt)\, \pi_3(t)\, dt = -\lambda_0\, \pi_1(x) + \lambda_0\, \pi_2(x) \ldots\ldots \\ \int_a^b \varphi_2(xt)\, \pi_{q_1}(t)\, dt = (-1)^{q_1} \lambda_0 \sum_{i=1}^{q_1-1} (-1)^{i-1} \pi_i(x) \\ \int_a^b \varphi_2(xt)\, \pi_{q_1+1}(t)\, dt = 0 \\ \int_a^b \varphi_2(xt)\, \pi_{q_1+2}(t)\, dt = \lambda_0\, \pi_{q_1+1}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int_a^b \varphi_2(xt)\, \pi_{m_0}(t)\, dt = (-1)^{m_0-q_{p-1}} \lambda_0 \sum_{i=1}^{m_0-q_{p-1}-1} (-1)^{i-1} \pi_{q_{p-1}+i}(x)\,. \end{array}\right.$$

Wenn wir jetzt die Gleichungen (31) in (28) einsetzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} -\varphi_2(xy) &= \beta_2(y)\, \lambda_0\, \pi_1(x) + \beta_3(y)\,[-\lambda_0\, \pi_1(x) + \lambda_0\, \pi_2(x)] + \ldots + \\ &+ \beta_{q_1}(y)\,(-1)^{q_1}[\lambda_0\, \pi_1(x) - \lambda_0\, \pi_2(x) + \ldots + (-1)^{q_1-2} \lambda_0\, \pi_{q_1-1}(x)] + \\ &+ \beta_{q_1+2}(y)\,.\,\lambda_0\, \pi_{q_1+1}(x) + \ldots + \beta_{m_0}(y)\,(-1)^{m_0-q_{p-1}}[\lambda_0\, \pi_{p q-1+1}(x) - \\ &\qquad - \lambda_0\, \pi_{q_{p-1}+2}(x) + \ldots + (-1)^{m_0-q_{p-1}-2} \pi_{m_0-1}(x)]\,. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$
(32)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\beta_i^{(1)}(y) = \beta_i(y)\,; \qquad i = 1, 2, \ldots, m_0 \\
\beta_1^{(2)}(y) = 0 \\
\beta_2^{(2)}(y) = -\lambda_0\,[\beta_2^{(1)}(y) - \beta_3^{(1)}(y) + \ldots + (-1)^{q_1}\,\beta_{q_1}^{(1)}(y)] \\
\beta_3^{(2)}(y) = -\lambda_0\,[\beta_3^{(1)}(y) - \beta_4^{(1)}(y) + \ldots + (-1)^{q_1+1}\,\beta_{q_1}^{(1)}(y)] \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\beta_{q_1}^{(2)}(y) = -\lambda_0\,\beta_{q_1}^{(1)}(y) \\
\beta_{q_1+1}^{(2)}(y) = 0 \\
\beta_{q_1+2}^{(2)}(y) = -\lambda_0\,[\beta_{q_1+2}^{(1)}(y) - \beta_{q_1+3}^{(1)}(y) + \ldots + (-1)^{q_2-q_1}\,\beta_{q_2}^{(1)}(y)] \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\beta_{q_2}^{(2)}(y) = -\lambda_0\,\beta_{q_2}^{(1)}(y) \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\beta_{q_{p-1}+1}^{(2)}(y) = 0 \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\beta_{m_0}^{(2)}(y) = -\lambda_0\,\beta_{m_0}^{(1)}(y)\,.
\end{array}
\right.
$$

Infolgedessen können wir schreiben:

$$
(33)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\varphi_1(xy) = \sum\limits_{i=1}^{m_0} \pi_i(x)\,\beta_i^{(1)}(y) \\[2ex]
\varphi_2(xy) = \sum\limits_{i=1}^{m_0\ 1} \pi_i(x)\,\beta_{i+1}^{(2)}(y)\,.
\end{array}
\right.
$$

Wir setzen weiter:

$$
(34)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\beta_1^{(i+1)}(y) = \beta_2^{(i+1)}(y) = \ldots = \beta_i^{(i+1)}(y) = 0 \\
\beta_{i+1}^{(i+1)}(y) = -\lambda_0\,[\beta_{i+1}^{(i)}(y) - \beta_{i+2}^{(i)}(y) + \ldots + (-1)^{q_1-i-1}\,\beta_{q_1}^{(i)}(y)] \\
\beta_{i+2}^{(i+1)}(y) = -\lambda_0\,[\beta_{i+2}^{(i)}(y) - \beta_{i+3}^{(i)}(y) + \ldots + (-1)^{q_1-i}\,\beta_{q_1}^{(i)}(y)] \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\beta_{q_1}^{(i+1)}(y) = -\lambda_0\,\beta_{q_1}^{(i)}(y) \\
\beta_{q_1+1}^{(i+1)}(y) = \beta_{q_1+1}^{(i+1)}(y) = \ldots = \beta_{q_1+i}^{(i+1)}y) = 0 \\
\beta_{q_1+i+1}^{(i+1)}(y) = -\lambda_0\,[\beta_{q_1+i+1}^{(i)}(y) - \beta_{q_1+i+2}^{(i)}(y) + \ldots + \\
\qquad\qquad + \ldots + (-1)^{q_2-q_1-i-1}\,\beta_{q_2}^{(i)}(y)] \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\beta_{m_0}^{(i+1)}(y) = -\lambda_0\,\beta_{m_0}^{(i)}(y)
\end{array}
\right.
$$

und behaupten, daß

$$(35) \qquad \varphi_\varkappa(xy) = \sum_{i=1}^{m_0-\varkappa+1} \pi_i(x)\, \beta_{i+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots m)$$

ist.

Für $\varkappa = 1$, und $\varkappa = 2$ ist die Formel (35) bewiesen, da sie in diesen Fällen mit den schon bewiesenen Formeln (33) zusammenfällt. Um den Beweis mittels voller Induktion führen zu können, berechnen wir die Integrale:

$$\int_a^b \beta_i^{(2)}(t)\, \pi_j(t)\, dt \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots m_0 \\ \varkappa = 1, 2, \ldots m_0 \end{cases}.$$

Zu diesem Zwecke setzen wir in (6) $p = 2$, $q = 1$ und erhalten

$$\varphi_2(xy) + \int_a^b \varphi_2(xt)\, \varphi_1(ty)\, dt = 0$$

oder

$$\sum_{i=1}^{m_0-1} \pi_i(x)\, \beta_{i+1}^{(2)}(y) + \sum_{i=1}^{m_0-1} \sum_{\varkappa=1}^{m_0} \pi_i(x)\, \beta_\varkappa^{(1)}(y) \int_a^b \beta_{i+1}^{(2)}(t)\, \pi_\varkappa(t)\, dt = 0,$$

woraus, da die Funktionen $\pi_1(x) \ldots \pi_{m_0}(x)$ linear unabhängig sind, folgt:

$$(35\,\text{bis}) \qquad \beta_{i+1}^{(2)}(y) + \sum_{\varkappa=1}^{m_0} \beta_\varkappa^{(1)}(y) \int_a^b \beta_{i+1}^{(2)}(t)\, \pi_\varkappa(t)\, dt = 0.$$
$$(i = 1, 2, \ldots m_0 - 1)$$

Nehmen wir an, daß die Zahl $i + 1$ der Ungleichung:

$$(36) \qquad q_{h-1} + 1 < i + 1 \leqq q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots p;\ q_0 = 0)$$

genügt. Hieraus können wir statt (35 bis) folgendes schreiben:

$$-\lambda_0 \sum_{l=1}^{q_h - i} (-1)^{l-1}\, \beta_{i+l}^{(1)}(y) + \sum_{\varkappa-1}^{m_0} \beta_\varkappa^{(1)}(y) \int_a^b \beta_{i+1}^{(2)}(t)\, \pi_\varkappa(t)\, dt = 0;$$

da auf Grund der Formeln (25) leicht zu beweisen ist, daß die Funktionen $\beta_1^{(1)}(y), \ldots, \beta_{m_0}^{(1)}(y)$ linear voneinander unabhängig sind, so folgt aus der letzten Gleichung, daß:

$$(37) \qquad \int_a^b \beta_{i+1}^{(2)}(t)\, \pi_\varkappa(t)\, dt = \begin{cases} 0 \text{ für } \varkappa = 1, 2, \ldots i \\ = (-1)^{\varkappa-i-1} \lambda_0 \text{ für } \varkappa = i+1,\ i+2, \ldots, q_h \\ = 0 \text{ für } \varkappa > q_h, \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, \ldots m_0 - 1)$$

wenn die Zahl i der Ungleichung (36) genügt. Außerdem ist

$$(38) \qquad \int_a^b \beta_i^{(2)}(t)\, \pi_\varkappa(t)\, dt = 0$$

für $i = 1, q_1 + 1, q_2 + 1, \ldots, q_{p-1} + 1$; $\varkappa = 1, 2, \ldots, m_0$.

Nehmen wir jetzt an, daß die Gleichung (35) für einen speziellen Wert der Zahl $\varkappa (\varkappa = 1, 2, \ldots, m-1)$ richtig ist. Hieraus und aus (6) folgt:

$$\varphi_{\varkappa+1}(xy) = -\int_a^b \varphi_2(xt)\, \varphi_\varkappa(ty)\, dt =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m_0-1} \sum_{j=1}^{m_0-\varkappa+1} \pi_i(x)\, \beta_{j+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) \int_a^b \beta_{i+1}^{(2)}(t)\, \pi_j(t)\, dt.$$

Mit Rücksicht auf (37) und (38) kann dies auch so geschrieben werden:

$$\varphi_{\varkappa+1}(xy) = -\sum_{i=1}^{q_1-1} \pi_i(x) \sum_{j=1}^{m_0-\varkappa+1} \beta_{j+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) \int_a^b \beta_{i+1}^{(2)}(t)\, \pi_j(t)\, dt -$$

$$- \pi_{q_1}(x) \sum_{j=1}^{m_0-\varkappa+1} \beta_{j+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) \int_a^b \beta_{q_1+1}^{(2)}(t)\, \pi_j(t)\, dt -$$

$$- \sum_{i=q_1+1}^{q_2-1} \pi_i(x) \sum_{j=1}^{m_0-\varkappa+1} \beta_{j+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) \int_a^b \beta_{i+1}^{(2)}(t)\, \pi_j(t)\, dt -$$

$$- \pi_{q_2}(x) \sum_{j=1}^{m_0-\varkappa+1} \beta_{j+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) \int_a^b \beta_{q_2+1}^{(2)}(t)\, \pi_j(t)\, dt - \ldots -$$

$$- \ldots - \sum_{i=q_{p-1}+1}^{m_0-1} \pi_i(x) \sum_{j=1}^{m_0-\varkappa+1} \beta_{j+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) \int_a^b \beta_{i+1}^{(2)}(t)\, \pi_j(t)\, dt$$

$$= -\sum_{i=1}^{q_1-\varkappa} \pi_i(x) \sum_{j=i+1}^{q_1} \beta_{j+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) \cdot (-1)^{j-i-1} \cdot \lambda_0 -$$

$$- \sum_{i=q_1+1}^{q_2-\varkappa} \pi_i(x) \sum_{j=i+1}^{q_2} \beta_{j+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) \cdot (-1)^{j-i-1}\, \lambda_0 - \ldots =$$

$$= -\sum_{i=1}^{q_1-\varkappa} \pi_i(x) \cdot \lambda_0 \sum_{j=i+1}^{q_1-\varkappa+1} \beta_{j+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) \cdot (-1)^{j-i-1} - \ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{q_1-\varkappa} \pi_i(x)\, \beta_{i+\varkappa}^{(\varkappa+1)}(y) + \ldots = \sum_{i=1}^{m_0-\varkappa} \pi_i(x)\, \beta_{i+\varkappa}^{(\varkappa+1)}(y)$$

und somit ist die Formel als richtig bewiesen.

Es ist also folgender Satz als wahr anzusehen:

Satz IV. Sind die Funktionen $\beta_i^{(\varkappa)}(y)$ durch die Gleichungen (32) und (34) erklärt, so trifft die Relation (35) zu.

§ 5. Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

Satz V. Die Funktionen:

$$(39) \qquad \beta_\varkappa^{(\varkappa)}(y), \beta_{\varkappa+1}^{(\varkappa)}(y), \ldots, \beta_{q_1}^{(\varkappa)}(y), \beta_{q_1+\varkappa}^{(\varkappa)}(y), \ldots, \beta_{q_2}^{(\varkappa)}(y), \beta_{q_2+\varkappa}^{(\varkappa)}(y), \ldots, \beta_{q_{h-1}+\varkappa}^{(\varkappa)}, \ldots, \beta_{m_0}^{(\varkappa)}(y)$$

sind für jeden konstanten Wert von $\varkappa$, wo $\varkappa$ eine der Zahlen

$$1, 2, \ldots, m$$

bedeutet, linear voneinander unabhängig.

Ist in der Reihe (39) die Zahl $\varkappa$ größer als die Differenz $q_h - q_{h-1}$, so fehlen in ihr die Glieder [1]):

$$\beta_{q_{h-1}+\varkappa}^{(\varkappa)}(y), \beta_{q_{h-1}+\varkappa+1}^{(\varkappa)}(y), \ldots, \beta_{q_h}^{(\varkappa)}(y).$$

Wie bekannt, genügt die Zahl m der Bedingung:

$$m = \text{Maximum}(q_1, q_2 - q_1, \ldots, q_h - q_{h-1}, \ldots, m_0 - q_{p-1}).$$

Für den Beweis des Satzes V berechnet man zuerst die Integrale:

$$\int_a^b \beta_i^{(\varkappa)}(t)\, \pi_j(t)\, dt \qquad \text{für} \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m_0 \\ \varkappa = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, m_0 \end{array} \right.$$

Eine übrigens elementare Rechnung und die volle Induktion liefern uns folgenden Satz:

Satz VI. Es ist:

$$\int_a^b \beta_i^{(1)}(t)\, \pi_j(t)\, dt = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{für } i = j = 1, 2, \ldots, m_0 \\ \;\;0 & \text{für } i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m_0 \end{array} \right.$$

[1]) Dies gilt auch für den Beweis des Satzes IV.

Ist $\varkappa \geqq 2$ und zugleich

$$q_{h-1} + \varkappa \leqq i \leqq q_h, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p; q_0 = 0)$$

so ist

$$\int_a^b \beta_i^{(\varkappa)}(t)\, \pi_j(t)\, dt = \begin{cases} 0 \text{ für } j = 1, 2, \ldots, i-1. \\ (-1)^{j-i+\varkappa} \cdot \lambda_0^{\varkappa-1} \binom{j-i+\varkappa-2}{\varkappa-2} \text{ für } i \leqq j \leqq q_h \\ 0 \text{ für } q_h < j \leqq m_0 \end{cases}$$

Ist $\varkappa \geqq 2$ und zugleich

$$q_{h-1} < i < q_{h-1} + \varkappa, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

so ist

$$\int_a^b \beta_i^{(\varkappa)}(t)\, \pi_j(t)\, dt = 0 \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, m_0.$$

Jetzt beweisen wir den Satz V. Für $\varkappa = 1$ ist uns der Satz schon bekannt; nehmen wir also $\varkappa \geqq 2$ an; es sei also

$$(40) \qquad \sum_{h=1}^{p} \sum_{i=q_{h-1}+\varkappa}^{q_h} c_i\, \beta_i^{(\varkappa)}(y) = 0,$$

wo c_i Konstante bedeuten. Die Identität (40) multiplizieren wir mit $\pi_{q_{l-1}+\varkappa}(y)$, wo l eine der Zahlen $1, 2, \ldots, p$ bedeutet, und integrieren in den Grenzen a, b. Aus dem Satze VI erhalten wir sogleich:

$$c_{q_{l-1}+\varkappa} = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, p)$$

da λ_0 von Null verschieden ist; dadurch kann die Identität (40) etwas vereinfacht werden:

$$(40 \text{ bis}) \qquad \sum_{h=1}^{p} \sum_{i=q_{h-1}+\varkappa+1}^{q_h} c_i\, \beta_i^{(\varkappa)}(y) = 0.$$

Wir multiplizieren dies mit $\pi_{q_{l-1}+\varkappa+1}(y)$ und integrieren und erhalten wieder

$$c_{q_{l-1}+\varkappa+1} = 0$$

u. s. w. Man erhält, daß alle Zahlen c_i der Identität (40) gleich Null sind, womit der Satz V bewiesen erscheint.

§ 6. Wir beweisen noch einen Satz, der für das folgende nötig sein wird.

Wir wollen nämlich die Funktionen $\beta_i^{(\varkappa)}(y)$ für $\varkappa = 2, \ldots, m$ durch die Funktionen $\beta_j^{(1)}(y)$ $(j = 1, 2, \ldots m_0)$ ausdrücken. Es kann dies jetzt auf folgende Weise geschehen. Aus (6) erhält man, daß:

$$\varphi_\varkappa(xy) = -\int_a^b \varphi_\varkappa(xt)\, \varphi_1(ty)\, dt$$

ist, und setzt man hierin die Ausdrücke (33) und (35), so folgt:

$$\sum_{i=1}^{m_0-\varkappa+1} \pi_i(x)\, \beta_{i+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) = -\sum_{h=1}^{p} \sum_{i=q_{h-1}+1}^{q_h-\varkappa+1} \pi_i(x) \sum_{j=i+\varkappa-1}^{q_h} \beta_j^{(1)}(y) \int_a^b \beta_{i+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(t)\, \pi_j(t)\, dt =$$

$$= \sum_{h=1}^{p} \sum_{j=q_{h-1}+1}^{q_h-\varkappa+1} \pi_i(x) \sum_{j=i+\varkappa-1}^{q_h} (-1)^{j-i} \lambda_0^{\varkappa-1} \binom{j-i-1}{\varkappa-2} \beta_j^{(1)}(y),$$

wenn man, wie wir es eben getan haben, noch den Satz VI anwendet. Da die Funktionen $\pi_1(x), \ldots, \pi_{m_0}(x)$ voneinander linear unabhängig sind, so erhalten wir folgenden Satz:

Satz VII. Genügt der Index i der Ungleichung:

$$q_{h-1} + 1 \leqq i \leqq q_h - \varkappa + 1, \tag{41}$$

so ist

$$\beta_{i+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(y) = \sum_{j=i+\varkappa-1}^{q_h} (-1)^{j-i} \lambda_0^{\varkappa-1} \binom{j-i-1}{\varkappa-2} \beta_j^{(1)}(y); \tag{42}$$

zugleich soll auch die Ungleichung:

$$2 \leqq \varkappa \leqq q_h - q_{h-1} \tag{43}$$

erfüllt sein.

§ 7. Wir wenden uns zur Untersuchung der Gleichungen (8) und (9). Wenn wir in (8) zuerst $j = 0$, $n = 1$ setzen und die Formel (33) berücksichtigen, so erhalten wir zuerst, daß

$$\sum_{i=1}^{m_0} \beta_i^{(1)}(y) \int_a^b \psi_0(xt)\, \pi_i(t)\, dt = 0$$

ist; da aber die Funktionen $\beta_i^{(1)}(y)$ $(i = 1, 2, \ldots m_0)$ (Satz V) voneinander linear unabhängig sind, so folgt, daß:

$$(44) \qquad \int_a^b \psi_0(xt)\,\pi_i(t)\,dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0)$$

ist. Aber aus (44) und (35) folgt, daß auch

$$(45) \qquad \int_a^b \psi_0(xt)\,\varphi_\varkappa(ty)\,dt = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, m)$$

ist. Wenn wir in (9) $j = 0$, $n = 1$ setzen und wieder die Formel (33) berücksichtigen, so erhalten wir, da die Funktionen $\pi_1(x), \ldots, \pi_{m_0}(x)$ voneinander linear unabhängig sind, folgende Gleichungen:

$$(46) \qquad \int_a^b \beta_i^{(1)}(t)\,\psi_0(ty)\,dt = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0)$$

Wenn wir jetzt die Formeln (23) und (32) heranziehen, so erhalten wir zuerst, daß

$$(47) \qquad \int_a^b \sigma_i(t)\,\psi_0(ty)\,dt = 0$$

für $i = q_1, q_2, \ldots q_p$ ist, nachher, daß die Gleichung (47) auch für $i = q_1 - 1,\ q_2 - 1, \ldots, q_p - 1$ richtig ist, und auf dem Wege voller Induktion, daß (47) für $i = 1, 2, \ldots m_0$ besteht.

Aus (8) und (9) folgen also die Gleichungen (44) und (47), aber auch umgekehrt, wenn wir die Relationen (10) und (35) noch heranziehen. Aus (10) und (44) folgt nämlich:

$$\int_a^b \psi_{p+1}(xy)\,\pi_i(y)\,dy = \int_a^b\!\int_a^b \psi_p(xt)\,\psi_0(ty)\,\pi_i(y)\,dy\,dt =$$

$$= \int_a^b \psi_p(xt)\,dt \left(\int_a^b \psi_0(ty)\,\pi_i(y)\,dy\right) = 0\,, \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots)$$

und daraus folgt schon (8) infolge von (35).

Aus (47) folgt (46) und daraus infolge von (42) auch:

$$\int_a^b \beta_{i+\varkappa-1}^{(\varkappa)}(t)\,\psi_0(ty)\,dt = 0$$

und aus (35) auch

$$(48) \qquad \int_a^b \varphi_\varkappa(xt)\,\psi_0(ty)\,dt = 0\,.$$

Aus (10) und (48) erhält man weiter

$$\int_a^b \varphi_\varkappa(xt)\,\psi_{p+1}(ty)\,dt = \int_a^b\int_a^b \varphi_\varkappa(xt)\,\psi_0(t\tau)\,\psi_p(\tau y)\,dt\,d\tau =$$

$$= \int_a^b \psi_p(\tau y)\,d\tau\left(\int_a^b \varphi_\varkappa(xt)\,\psi_0(t\tau)\,dt\right) = 0\,, \quad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

und somit haben wir die Relationen (9) erhalten und folgendes bewiesen:

Satz VIII. Die Gleichungen (8) und (9) sind folgenden Relationen von endlicher Anzahl äquivalent:

$$\int_a^b \psi_0(xt)\,\pi_i(t)\,dt = 0\,, \quad \int_a^b \sigma_i(t)\,\psi_0(ty)\,dt = 0\,.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m_0)$$

§ 8. Nehmen wir an, daß λ_0 ein einfacher Pol der Resolvente ist; es muß also $\varphi_2(xy)$ identisch Null sein; aus (33) und aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\pi_1(x), \ldots, \pi_{m_0}(x)$ folgt, daß die Koeffizienten

$$\beta_i^{(2)}(y) \equiv 0 \qquad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots m_0$$

sind; es ist also:

$$\beta_2^{(1)}(y) \equiv 0,\ \beta_3^{(1)}(y) \equiv 0, \ldots, \beta_{q_1}^{(1)}(y) \equiv 0,\ \beta_{q_1+2}^{(1)}(y) \equiv 0, \ldots, \beta_{q_2}^{(1)}(y) \equiv 0, \ldots$$
$$\ldots \beta_{q_{p-1}}^{(1)}(y) \equiv 0,\ \beta_{q_{p-1}+2}^{(1)}(y) \equiv 0, \ldots, \beta_{m_0}^{(1)}(y) \equiv 0\,,$$

was wieder:

$$\sigma_2(y) \equiv 0,\ \sigma_3(y) \equiv 0, \ldots, \sigma_{q_1}(y) \equiv 0,\ \sigma_{q_1+2}(y) \equiv 0, \ldots, \sigma_{q_2}(y) \equiv 0, \ldots$$
$$\ldots, \sigma_{q_{p-1}}(y) \equiv 0,\ \sigma_{q_{p-1}+2}(y) \equiv 0, \ldots, \sigma_{m_0}(y) \equiv 0$$

ergibt; es besteht also jeder kanonische Kern aus einem Produkt $\pi(x)\,\sigma(y)$ und zugleich ist $p = m_0$. Umgekehrt, ist $p = m_0$ für die singuläre Stelle λ_0, so ist λ_0 ein einfacher Pol der Resolvente $\mathfrak{K}(xy\lambda)$; denn im Falle $p = m_0$ ist der Hauptteil $k(xy)$ des Kernes $K(xy)$ in eine Summe von p kanonischen Kernen zerlegbar, von denen jeder aus einem Produkte der Form $\pi(x)\,\sigma(y)$ besteht; die Resolvente eines kanonischen Kernes von dieser Form ist gleich der Funktion:

$$\frac{\pi(x)\,\sigma(y)}{1-\frac{\lambda}{\lambda_0}}$$

und auf Grund eines bekannten Satzes über orthogonale Kerne folgt sogleich, daß auch $\mathfrak{K}(xy\lambda)$ die Stelle λ_0 zum einfachen Pol hat.

Krakau, im September 1917.

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.
SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES.
DERNIERS MÉMOIRES PARUS.

(Les titres des Mémoires sont donnés en abrégé).

A. Rosenblatt. Sur la représentation conforme du cercle de convergence d'une série de puissances	Nov.—Déc. 1916
J. Smoleński. Über die Entstehung der heutigen Tiefen des Philippinen-Grabens	Nov.—Déc. 1916
W. Goetel. Über eine hochtatrische Scholle in der subtatrischen Zone des Tatragebirges	Nov.—Déc. 1916
L. Birkenmajer. Über eine bequeme Methode der Zeitbestimmung an transportablen Pendelstationen	Nov.—Déc. 1916
W. Goetel. Die rhätische Stufe und der unterste Lias der subtatrischen Zone in der Tatra	Nov.—Déc. 1916
K. Żorawski. Die Einteilung der Bewegungen	Janv.—Mars 1917
A. Hoborski. Die Grundlagen der projektiven Geometrie . .	Janv.—Mars 1917
J. Nowak. Cephalopoden der mittleren Kreide Podoliens . .	Janv.—Mars 1917
J. Nowak. Aus den Untersuchungen über die polnischen Westkarpaten	Janv.—Mars 1917
J. Zawidzki. Über den molekular-kinetischen Mechanismus katalytischer Reaktionen	Avril—Juin 1917
E. Lewicka. Über Derivate der Salicylosalicylsäure . . .	Avril—Juin 1917
K. Zakrzewski. Über die spezifische Wärme der Flüssigkeiten bei konstantem Volumen. II.	Avril—Juin 1917
S. Glixelli. Über die Abhängigkeit der Elektrosmose . . .	Avril—Juin 1917
J. Nowak. Die Verbreitung der Cephalopoden im poln. Senon	Avril—Juin 1917
W. Lampe. Synthese von Curcumin	Juillet 1917
W. Lampe und **M. Godlewska.** Synthese von pp-Dioxy- und p-Oxy-dicinnamoylmethan	Juillet 1917
L. T. Bratz und **S. Niementowski.** Oxydativer Abbau des Phlorchinyls. I. Pyrchinacridin und seine Carbonsäuren	Juillet 1917
A. Korczyński und **S. Piasecki.** Reduktion nietrierter Benzolderivate	Juillet 1917
A. Rosenblatt. Représentation conforme de domaines limités sur le cercle de rayon un	Juillet 1917
S. Fabiani. Dispersion und Extinktion einiger Metalle . . .	Juillet 1917
R. Negrusz. Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von Metalldrähten von ihrem Querschnitt u. a.	Juillet 1917

Avis.

Le «*Bulletin International*» de l'Académie des Sciences de Cracovie (Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles) paraît en deux séries: la première (*A*) est consacrée aux travaux sur les Mathématiques, l'Astronomie la Physique, la Chimie, la Minéralogie, la Géologie etc. La seconde série (*B*) contient les travaux qui se rapportent aux Sciences Biologiques. Les abonnements sont annuels et partent de janvier. Prix pour un an (dix numéros): Série *A* ... 8 K; Série *B* ... 10 K.

Les livraisons du «*Bulletin International*» se vendent aussi séparément.

Adresser les demandes à la Librairie «G. Gebethner & Cie»
Rynek Gł., Cracovie (Autriche).