O WYZNACZENIU
KULI PRZECINAJĄCEJ POD TYM SAMYM KĄTEM
ILEKOLWIEK KUL DANYCH
I
O ZAGADNIENIACH PODOBNYCH

NAPISAŁ

Władysław Kretkowski.

Osobne odbicie z XIII. Tomu Pamiętnika Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności.

KRAKÓW.
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
pod zarządem Anatola Maryjana Kosterkiewicza.
1887.

O wyznaczeniu kuli

przecinającej pod tym samym kątem ilekolwiek kul danych

i o zagadnieniach podobnych

NAPISAŁ

WŁADYSŁAW KRETKOWSKI.

W jednem z najpoważniejszych pism czasowych matematycznych angielskich, mianowicie w niedawno wydanym tomie piątym pisma: *American Journal of Mathematics. Edited by* J. J. Sylvester. *Published under the Auspices of the* Johns Hopkins *University* ..... *Volume V. Baltimore* ..... *1882.* Ćwiartka wielka, stronic 6 i 384, tablic 4 i 1; spotkałem na stronicach 25 do 44 włącznie, pracę pod tytułem następującym: *The Intersection of Circles and the Intersection of Spheres. By* Benjamin Alvord, *Brig. Gen. U. S. A.* W tej pracy, na stronicy 25, w wierszach 18 do 21 włącznie, autor wyraża się w następujący sposób: „*But I think it has not been known that there are 96 solutions to the question to draw a circle cutting four given circles at the same angle, or that there are 640 solutions to the problem to draw a sphere to cut five given spheres at equal angles.*“ W przekładzie polskim brzmi to: Zdaje mi się jednakże, że nie wiedziano dotąd, że jest 96 rozwiązań zadania nakreślenia koła przecinającego cztery koła dane pod tym samym kątem, i że jest 640 rozwiązań zagadnienia nakreślenia kuli, któraby przecinała pięć kul danych pod kątami równemi. Autor podaje w tej pracy rozwiązanie zagadnienia będącego przedmiotem niniejszego pisma i innych podobnych, stara się uzasadnić liczbę rozwiązań geometrycznie i wymienia wielu znakomitych matematyków, którzy się tem zagadnieniem zajmowali.

Zaciekawiony wielką liczbą rozwiązań zagadnienia i spodziewając się napotkać znaczne trudności przy jego rozwiązaniu algebrycznem, szukałem takowego a znalazłszy przekonałem się, że jest stosunkowo łatwem i prostem, oraz że liczba rozwiązań zamiast być 640 lub 96, nie przekracza odpowiednio 16 lub 8. Z tych powodów ośmielam się przedstawić moją drobną pracę.

Przypomnę przedewszystkiem, że przez kąt przecięcia dwóch powierzchni w danym punkcie im wspólnym rozumie się kąt zawarty pomiędzy płaszczyznami do nich stycznemi w tymże punkcie. W razie, gdy powierzchnie są kulistemi, kąt przecięcia jest ten sam we wszystkich punktach wspólnych, a jego dostawa przybierać może tylko jedno z dwóch znaczeń, różniących się tylko znakami, stósownie do wyboru. Podobnież przez kąt przecięcia dwóch linij w danym punkcie im wspólnym, rozumie się kąt zawarty pomiędzy linijami prostemi do nich stycznemi w tymże punkcie.

Dla większej symetryi rachunków, co zresztą nie wpłynie bardzo na ich przedłużenie, używać będę współrzędnych ukośnokątnych. Nadto, aby prowadzić rachunki jednocześnie dla kul i kół, użyję wzorów geometryi m wymiarowej i rozumieć będę $m=3$ dla kul, zaś $m=2$ dla kół.

Oznaczać będę współrzędne punktu w ogólności przez

$$z_\mu; \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m;$$

dostawę kąta pomiędzy kierunkami z_μ i z_ν przez

$$a_{\mu,\nu}; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots, m;$$

co pociąga za sobą widocznie

$$a_{\nu,\mu} = a_{\mu,\nu}; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots, m;$$

oraz

$$1 = a_{\mu,\mu}; \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m;$$

a nadto w razie współrzędnych prostokątnych gdy ν różne od μ

$$0 = a_{\mu,\nu}; \quad \nu | \mu; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Oznaczę następnie promień i współrzędne środka n^{tej} kuli z pomiędzy l kul danych, lub n^{go} koła z pomiędzy l danych przez

$$p_n; \; z_{\mu,n}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, l; \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m;$$

oraz odpowiednio przez

$$p; \; z_\mu; \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m; \; a;$$

promień i współrzędne środka kuli szukanej lub koła szukanego oraz dostawę kąta, pod jakim kula szukana lub koło szukane przecina odpowiednio kule dane lub koła dane.

Kwadrat odległości dwóch środków kul szukanej i n^{tej} danej lub koła szukanego i n^{go} danego wyrazić można przez współrzędne tychże środków wzorem:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu} \, (z_\mu - z_{\mu,n}) \, (z_\nu - z_{\nu,n}); \quad n = 1, 2, 3, \ldots, l;$$

lub też przez promienie tychże kul lub kół i dostawę kąta ich przecięcia za pomocą wyrażenia następującego:

$$p^2 + p_n^2 + 2app_n; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, l.$$

Przez porównanie dwóch dopiero otrzymanych wyrażeń znajdujemy układ l równań

$$0 = p^2 + p_n^2 + 2app_n - \sum_{n=1}^{n=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{n,\nu} (z_n - z_{n,n})(z_\nu - z_{\nu,n})\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, l\,;$$

o $2 + m$ ilościach niewiadomych

$$p\,;\ a\,;\ z_\mu\,;\quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m\,;$$

od rozwiązania którego zależy rozwiązanie naszego zagadnienia. Układ ten jest pierwszego stopnia względem a, drugiego zaś stopnia względem pozostałych $1 + m$ ilości niewiadomych, pomimo to jednakże daje się bardzo łatwo rozwiązać.

W tym celu, oznaczę dla zwięzłości i większej prostoty rachunku

$$\frac{1}{2}\left\{ - p_n^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu}\, z_{\mu,n}\, z_{\nu,n} \right\} = b_n\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, l\,;$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu}\, z_{\nu,n} = b_{\mu,n}\,; \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, l\,;$$

$$-\frac{1}{2}\left\{ - p^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu}\, z_\mu\, z_\nu \right\} = b\,.$$

Wtedy układowi równań nadać można kształt następujący:

$$b_n = b + p_n\, pa + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} b_{\mu,n}\, z_\mu\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, l\,;$$

który jako pierwszego stopnia względem $2 + m$ ilości niewiadomych

$$b\,;\ pa\,;\ z_\mu\,;\quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m\,;$$

jeżeli jest rozwiązalnym, łatwo można rozwiązać znanym sposobem za pomocą wyznaczników.

Roróżniamy trzy przypadki, podług tego jak liczba $2 - l + m$ jest dodatnią, zero lub ujemną. W pierwszym razie liczba rozwiązań jest nieskończenie wielką i można nałożyć rozwiązaniu nowe zastrzeżenia, naprzykład żądać można, aby kula miała dany promień, lub przecinała pod kątem danym kule dane lub też aby miała środek na danej linii prostej lub płaszczyźnie i t. p. Tym przypadkiem nie będę się zajmował. W drugim razie liczba rozwiązań jest oznaczoną. W trzecim razie układ równań jest rozwiązalnym tylko wtedy, gdy jest

$$0 = \begin{vmatrix} 1, & p_1, & b_{1,1}, & b_{2,1}, & \ldots, & b_{m,1}, & b_1 \\ 1, & p_2, & b_{1,2}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{m,2}, & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & p_l, & b_{1,l}, & b_{2,l}, & \ldots, & b_{m,l}, & b_l \end{vmatrix}\,;$$

to jest, gdy są zerami $-2+l-m$ wyznaczników stopnia $3+m$, utworzonych naprzykład z $2+m$ pierwszych wierszy poziomych wypisanego układu i każdego z $-2+l-m$ wierszy poziomych pozostałych, co daje $-(2-l+m)$ zastrzeżeń i różnych między sobą, które jeżeli są wypełnione, przypadek trzeci sprowadzają do drugiego, można bowiem ograniczyć się wtedy do $2+m$ równań którychkolwiek układu, naprzykład do $2+m$ pierwszych odpowiadających $n=1, 2, 3, \ldots, 2+m$.

Oznaczmy wtedy dla zwięzłości wyznacznik stopnia $2+m$

$$\begin{vmatrix} 1, & p_1, & b_{1,1}, & b_{2,1}, & \ldots, & b_{m,1} \\ 1, & p_2, & b_{1,2}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{m,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & p_{2+m}, & b_{1,2+m}, & b_{2,2+m}, & \ldots, & b_{m,2+m} \end{vmatrix} = A;$$

oraz oznaczmy przez A_n wyznacznik otrzymany z wyznacznika A przez zastąpienie w nim n^{go} wiersza pionowego, przez wiersz pionowy następujący:

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2+m}, \end{matrix}$$

otrzymamy, jak wiadomo, wtedy w drugim i trzecim przypadku, jeżeli $-(2-l+m)$ zastrzeżeń są wypełnione

$$b = A^{-1} A_1;$$

$$pa = A^{-1} A_2;$$

$$z_\mu = A^{-1} A_{2+\mu}; \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Ostatnie m wzorów dają nam współrzędne środka kuli lub koła szukanych, wyrażając te ostatnie przez $1+m$ wyznaczników A; $A_{2+\mu}$; $\mu=1, 2, 3, \ldots, m$; w których $2+m$ promieni p_n; $n=1, 2, 3, \ldots, 2+m$ mają znaki dowolne. Każdy więc wyznacznik przybierać może 2^{2+m} znaczeń, i jeżeli zmieniamy znaki wszystkich $2+m$ promieni, wszystkie wyznaczniki w liczbie $1+m$ zmieniają także znaki na przeciwne. Ztąd wynika, że współrzędne środka szukanego będące ilorazami tychże wyznaczników nie zmieniają się, jeżeli promienie wszystkie zmieniają znaki. To okazuje, że środków szukanych zamiast 2^{2+m} jest o połowę mniej to jest 2^{1+m}, a więc $2^4 = 16$ w razie kul lub $2^3=8$ dla kół. Godnem tu jest uwagi, że środki szukane są zawsze rzeczywistemi, jeżeli kule lub koła dane są rzeczywistemi.

Widzimy nadto, że gdy $A=0$ a przytem przynajmniej jeden z m wyznaczników $A_{2+\mu}$; $\mu=1, 2, 3, \ldots, m$; jest różnym od zera, wtedy środek szukany znajduje się w nieskończoności.

Wyrażenie promienia szukanego p znajdujemy następnie

$$p = \left\{ 2b + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu}\, z_\mu\, z_\nu \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= A^{-1} \left\{ 2AA_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu}\, A_{2+\mu}\, A_{2+\nu} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wyrażenie to ma wprawdzie 2^{2+m} znaczeń, gdyż A_1 zmienia znak razem z wyznacznikami A i $A_{2+\mu}$; $\mu = 1, 2, 3, \ldots, m$; lecz połowa tych znaczeń różni się od pozostałych tylko znakami przeciwnemi, tak, że w rzeczywistości ma tylko 2^{1+m} znaczeń różnych. Godnem tu jest uwagi, że kula lub koło szukane, pomimo rzeczywistości odpowiedniej kul lub kół danych, będą rzeczywistemi tylko wtedy, gdy wyrażenie

$$2AA_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu} \, A_{2+\mu} \, A_{2+\nu}$$

nie będzie odjemnem. Widzimy tu zarazem, że gdy $A = 0$ i przynajmniej jeden z wyznaczników $A_{2+\mu}$; $\mu = 1, 2, 3, \ldots, m$; jest różnym od zera, to wyrażenie ostatnie decydujące o rzeczywistości promieni kuli lub koła szukanych jest różnem od zera, a przeto promień p jest nieskończenie wielkim, kula więc szukana jest wtedy płaszczyzną a koło szukane liniją prostą. Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące.

Oznaczywszy objętość czworościanu, mającego swe wierzchołki w czterech środkach kul danych k^{tej}, l^{tej}, m^{tej}, n^{tej} przez

$$(k, l, m, n)\,; \quad k, l, m, n = 1, 2, 3, \ldots, l\,;$$

oraz powierzchnię trójboku mającego swe wierzchołki w środkach kół danych l^{ego}, m^{go}, n^{go} przez

$$(l, m, n)\,; \quad l, m, n = 1, 2, 3, \ldots, l\,;$$

aby dane l kul mogły być przecięte płaszczyzną pod tym samym kątem, potrzeba i wystarcza, aby oprócz zastrzeżeń 1) gdy $2 - l + m = 5 - l$ jest ujemnem, był zawsze przynajmniej jeden z wyznaczników $A_{2+\mu}$; $\mu = 1, 2, 3$ różnym od zera, i pięć kul którychkolwiek z pomiędzy l danych, naprzykład pierwszych odpowiadających $n = 1, 2, 3, 4, 5$ zadość czyniły zastrzeżeniu

$$0 = p_1\,(2, 3, 4, 5) - p_2\,(1, 3, 4, 5) + p_3\,(1, 2, 4, 5) - p_4\,(1, 2, 3, 5) + p_5\,(1, 2, 3, 4).$$

Podobnież aby dane l kół na płaszczyźnie, mogły być przecięte liniją prostą pod tym samym kątem, potrzeba i dostatecznem jest, aby oprócz zastrzeżeń 1) gdy $2 - l + m = 4 - l$ jest ujemnem, był zawsze przynajmniej jeden z wyznaczników $A_{2+\mu}$; $\mu = 1, 2$ różnym od zera, i cztery koła którekolwiek z pomiędzy danych naprzykład cztery pierwsze, zadość czyniły zastrzeżeniu

$$0 = p_1\,(2, 3, 4) - p_2\,(1, 3, 4) + p_3\,(1, 2, 4) - p_4\,(1, 2, 3).$$

Wyrażenie dostawy kąta, pod którym kula lub koło szukane przecinają odpowiednio kule lub koła dane, jest:

$$a = A^{-1}\, A_2\, p^{-1} =$$

$$= A_2 \left\{ 2AA_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} A_{\mu,\nu} \, A_{2+\mu} \, A_{2+\nu} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Wyrażenie to, ma podobnież 2^{1+m} znaczeń różnych rzeczywiście, gdyż drugie tyle różni się od poprzednich znakami tylko. Pokazuje ono, że kąt szukany, a więc i rozwiązanie zagadnienia, będzie pomimo rzeczywistości kul lub kół danych, rzeczywistem tylko wtedy, gdy wyrażenie

$$A_2^2 \left\{ 2AA_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu} A_{2+\mu} A_{2+\nu} \right\}^{-1};$$

nie przekracza kresów *0* i *1*.

Aby więc w razie rzeczywistości l kul lub kół danych istniała odpowiednio kula przecinająca dane kule pod tym samym kątem, lub koło przecinające dane koła na płaszczyźnie pod tym samym kątem, potrzeba i dostatecznem jest, aby było

$$0 \leq A_2^2 \left\{ 2AA_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu} A_{2+\mu} A_{2+\nu} \right\}^{-1} \leqq 1;$$

lub prościej

$$A_2^2 \leqq 2AA_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu} A_{2+\mu} A_{2+\nu}.$$

Takie jest jedyne zastrzeżenie rzeczywistości rozwiązania, w razie gdy dane kule lub koła są rzeczywistemi.

Widzimy przytem, że ażeby kule lub koła dane przecięte były pod kątem prostym odpowiednio przez kulę lub koło szukane, potrzeba i wystarcza, aby było $a = 0$. Podobnież aby kula lub koło szukane były stycznemi odpowiednio do kul lub kół danych, potrzeba i wystarcza, aby było $a = \pm 1$. Otrzymujemy więc odpowiednio zastrzeżenia konieczne i dostateczne przecięcia prostopadłego lub styczności

$$\left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} = A_2^2 \left\{ 2AA_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} A_{\mu,\nu} A_{2+\mu} A_{2+\nu} \right\}^{-1},$$

lub prościej: Zastrzeżenie prostopadłości przecięcia

$$0 = A_2,$$

a zastrzeżenie styczności

$$A_2^2 = 2AA + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu} A_{2+\mu} A_{2+\nu}.$$

W razie współrzędnych prostokątnych, wzory stają się cokolwiek prostszemi. Mamy wtedy

$$b_n = \frac{1}{2} \left\{ -p_n^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} z_{\mu,n}^2 \right\}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 2+m;$$

$$b_{\mu,n} = z_{\mu,n}; \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 2+m;$$

w razie zaś, gdy $0 < -2 + l - m$ zastrzeżenia możebności są:

$$0 = \begin{vmatrix} 1, & p_1, & z_{1,1}, & z_{2,1}, & \dots, & z_{m,1}, & b_1 \\ 1, & p_2, & z_{1,2}, & z_{2,2}, & \dots, & z_{m,2}, & b_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1, & p_l, & z_{1,l} & z_{2,l}, & \dots, & z_{m,l}, & b_l \end{vmatrix};$$

wyznacznik A jest wtedy

$$\begin{vmatrix} 1, & p_1 &, z_{1,1} & z_{2,1} &, \dots, & z_{m,1} \\ 1, & p_2 &, z_{1,2} &, z_{2,2} &, \dots, & z_{m,2} \\ . & . & . & . & . & . \\ 1, & p_{2+m}, & z_{1,2+m}, & z_{2,2+m}, & \dots, & z_{m,2+m} \end{vmatrix}.$$

Wyrażenia współrzędnych środka kuli szukanej lub koła szukanego są:

$$z_\mu = A^{-1} A_{2+\mu}; \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, m;$$

promień zaś kuli szukanej lub koła szukanego jest:

$$p = A^{-1} \left\{ 2AA_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} A^2_{2+\mu} \right\}^{\frac{1}{2}};$$

dostawa kąta, pod którym kula szukana przecina l kul danych, lub koło szukane l kół danych na płaszczyźnie

$$a = A_2 \left\{ 2AA_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} A^2_{2+\mu} \right\}^{-\frac{1}{2}};$$

i nakoniec zastrzeżenie rzeczywistości rozwiązania jest wtedy:

$$0 \leqq A_2^2 \left\{ 2AA_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} A^2_{2+\mu} \right\}^{-1}.$$

Rozumiejąc przez Z_μ; $\mu = 1, 2, 3, \dots : m$; współrzędne dowolnego punktu powierzchni kuli szukanej lub okręgu koła szukanego, równanie kuli szukanej lub koła szukanego jest

$$0 = 2AA_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} a_{\mu,\nu} \left\{ A_{2+\mu} A_{2+\nu} - (AZ_\mu - A_{2+\mu})(AZ_\nu - A_{2+\nu}) \right\};$$

a w razie współrzędnych prostokątnych

$$0 = 2A_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (2A_{2+\mu} - AZ_\mu) Z_\mu.$$

Jakkolwiek zagadnienie jest rozwiązanem, można żądać, aby rozwiązanie nie zależało od współrzędnych, które nie są danemi naturalnemi, lecz ażeby tak promień, jakoteż i dostawa kąta przecięcia wyrażone były przez dane naturalne, któremi są promienie i odległości środków l kul lub kół danych. Takie rozwiązanie znajdzie czytelnik poniżej.

Dowiodę naprzód w tym celu dwóch twierdzeń pomocniczych. Oznaczę przez $d_{i,k}$; $i, k = 1, 2, 3, \ldots, l$; długość linii prostej łączącej środki dane i^{ty} i k^{ty}, kul lub kół danych na płaszczyźnie, i założę dla zwięzłości

$$d_{i,k}^2 - p_i^2 - p_k^2 = c_{i,k}; \quad i, k = 1, 2, 3, \ldots, l;$$

przyczem zauważyć należy, że

$$c_{i,k} = c_{k,i}; \quad i; k = 1, 2, 3, \ldots, l.$$

Wtedy dwa twierdzenia pomocnicze wyrażają się przez dwa równania następujące:

$$0 = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & \ldots, & c_{1,l} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, & \ldots, & c_{2,l} \\ . & . & . & . \\ c_{l,1}, & c_{l,2}, & \ldots, & c_{l,l} \end{vmatrix}; \quad l = 3+m,\ 4+m,\ 5+m, \ldots;$$

$$0 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & d_{1,1}^2, & d_{1,2}^2, & \ldots, & d_{1,l}^2 \\ 1, & d_{2,1}^2, & d_{2,2}^2, & \ldots, & d_{2,l}^2 \\ . & . & . & . & . \\ 1, & d_{l,1}^2, & d_{l,2}^2, & \ldots, & d_{l,l}^2 \end{vmatrix}; \quad l = 2+m,\ 3+m,\ 4+m, \ldots;$$

w których drugie strony są wyznacznikami odpowiednio stopni l i $1+l$. Drugiego z tych twierdzeń dowiodłem jeszcze w roku 1871 w tomie pierwszym Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu w pracy: O nakreśleniu do trzech kół danych, leżących na powierzchni jednej kuli, czwartego koła stycznego leżącego na tejże powierzchni.

Dowody tych dwóch twierdzeń są bardzo proste. Dowód pierwszego polega na pomnożeniu przez siebie dwóch wyznaczników stopnia l, pierwszego:

$$\begin{vmatrix} 0, \ldots, & 0, & 1, & 2b_1, & z_{1,1}, & z_{2,1}, & \ldots, & z_{m,1} \\ 0, \ldots, & 0, & 1, & 2b_2, & z_{1,2}, & z_{2,2}, & \ldots, & z_{m,2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0, \ldots, & 0, & 1, & 2b_l, & z_{1,l}, & z_{2,l}, & \ldots, & z_{m,l} \end{vmatrix};$$

i drugiego

$$\begin{vmatrix} 0, \ldots, & 0, & 2b_1, & 1, & -2b_{1,1}, & -2b_{2,1}, & \ldots, & -2b_{m,1} \\ 0, \ldots, & 0, & 2b_2, & 1, & -2b_{1,2}, & -2b_{2,2}, & \ldots, & -2b_{m,2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0, \ldots, & 0, & 2b_l, & 1, & -2b_{1,l}, & -2b_{2,l}, & \ldots & -2b_{m,l} \end{vmatrix}$$

będących zerami, jako mających po $-\,2+l-m$ wierszy pionowych a więc przynajmniej po jednym złożonym z samych zer, i wykonywając mnożenie wierszami poziomemi. Dowód drugiego twierdzenia polega na pomnożeniu podobnież dwóch wyznaczników stopnia $1+l$ pierwszego

$$\begin{vmatrix} 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & 1, & e_1, & z_{1,1}, & z_{2,1}, & \ldots, & z_{m,1} \\ 0, & \ldots, & 0, & 1, & e_2, & z_{1,2}, & z_{2,2}, & \ldots, & z_{m,2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0, & \ldots, & 0, & 1, & e_l, & z_{1,l}, & z_{2,l}, & \ldots, & z_{m,l} \end{vmatrix};$$

i drugiego

$$\begin{vmatrix} 0, & \ldots, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & e_1, & 1, & -2b_{1,1}, & -2b_{2,1}, & \ldots, & -2b_{m,1} \\ 0, & \ldots, & 0, & e_2, & 1, & -2b_{1,2}, & -2b_{2,2}, & \ldots, & -2b_{m,2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0, & \ldots, & 0, & e_l, & 1, & -2b_{1,l}, & -2b_{2,l}, & \ldots, & -2b_{m,l} \end{vmatrix}$$

będących zerami z powodu $-1+l-m$ wierszy pionowych, złożonych z samych zer, i rozumiejąc, że

$$e_n = 2b_n - p_n^2; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, l.$$

W pierwszem z tych dwóch twierdzeń podstawmy

$$l = 3 + m$$

$$c_{n,n} = -2p_n^2; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 2+m;$$

$$c_{n,3+m} = c_{3+m,n} = 2p_n ap; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 2+m;$$

$$c_{3+m,3+m} = -2p^2;$$

i wykonajmy na wierszach poziomych i pionowych podstawienia kołowe tak, aby ostatnie wiersze stały się pierwszemi. Otrzymamy wtedy, jeżeli ap różnem jest od zera, po wyłączeniu czynnika $2ap$ z obu wierszy pierwszych poziomego i pionowego

$$0 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}a^{-2}, & p_1, & p_2, & p_3, & \ldots, & p_{1+m}, & p_{2+m} \\ p_1, & -2p_1^2, & c_{1,2}, & c_{1,3}, & \ldots, & c_{1,1+m}, & c_{1,2+m} \\ p_2, & c_{1,2}, & -2p_2^2, & c_{2,3}, & \ldots, & c_{2,1+m}, & c_{2,2+m} \\ p_3, & c_{1,3}, & c_{2,3}, & -2p_3^2, & \ldots, & c_{3,1+m}, & c_{3,2+m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ p_{1+m}, & c_{1,1+m}, & c_{2,1+m}, & c_{3,1+m}, & \ldots, & -2p_{1+m}^2, & c_{1+m,2+m} \\ p_{2+m}, & c_{1,2+m}, & c_{2,2+m}, & c_{3,2+m}, & \ldots, & c_{1+m,2+m}, & -2p_{2+m}^2 \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik stanowiący drugą stronę równania jest sumą dwóch innych różniących się od niego pierwszemi wierszami pionowemi następującemi:

$$\begin{array}{cc} -\frac{1}{2}a^{-2} & 0 \\ 0 & p_1 \\ 0 & p_2 \\ 0 & p_3 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & p_{1+m} \\ 0 & p_{2+m} \end{array}$$

oznaczywszy więc dla zwięzłości dwa wyznaczniki stopnia $2+m$ i $3+m$ otrzymane odpowiednio z ostatnio wypisanego, przez opuszczenie pierwszych wierszy poziomego i pionowego, lub przez zastąpienie pierwszego składnika zerem przez B_1 i B_2, to jest zakładając

$$\begin{vmatrix} -2p_1^2, & c_{1,2}, & c_{1,3}, & \ldots, & c_{1,1+m}, & c_{1,2+m} \\ c_{1,2}, & -2p_2^2, & c_{2,3}, & \ldots, & c_{2,1+m}, & c_{2,2+m} \\ c_{1,3}, & c_{2,3}, & -2p_3^2, & \ldots, & c_{3,1+m}, & c_{3,2+m} \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{1,1+m}, & c_{2,1+m}, & c_{3,1+m}, & \ldots, & -2p_{1+m}^2, & c_{1+m,2+m} \\ c_{1,2+m}, & c_{2,2+m}, & c_{3,2+m}, & \ldots, & c_{1+m,2+m} & -2p_{2+m}^2 \end{vmatrix} = B_1 ;$$

oraz

$$\begin{vmatrix} 0, & p_1, & p_2, & p_3 & \ldots, & p_{1+m}, & p_{2+m} \\ p_1, & -2p_1^2, & c_{1,2}, & c_{1,3}, & \ldots, & c_{1,1+m}, & c_{1,2+m} \\ p_2, & c_{1,2}, & -2p_2^2, & c_{2,3}, & \ldots, & c_{2,1+m}, & c_{2,2+m} \\ p_3, & c_{1,3}, & c_{2,3}, & -2p_3^2, & \ldots, & c_{3,1+m}, & c_{3,2+m} \\ \vdots & . & . & . & . & . & . \\ p_{1+m}, & c_{1,1+m}, & c_{2,1+m}, & c_{3,1+m}, & \ldots, & -2p_{1+m}^2, & c_{1+m,2+m} \\ p_{2+m}, & c_{1,2+m}, & c_{2,2+m}, & c_{3,2+m}, & \ldots & c_{1+m,2+m}, & -2p_{2+m}^2 \end{vmatrix} = B_2 ;$$

ostatnie równanie zamieni się na następujące:

$$0 = -\frac{1}{2}a^{-2} B_1 + B_2 ;$$

zkąd otrzymujemy

$$a = \left(\frac{1}{2} B_1 B_2^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Aby więc w razie, gdy kule lub koła dane są rzeczywistemi i przecięcie było rzeczywistem także, widzimy że potrzeba i wystarcza, aby było

$$0 \leqq B_1 \; B_2^{-1} \gtreqless 2 \, ;$$

aby zaś przecięcie było prostokątnem, potrzeba w przypuszczeniu że promienie dane są skończonemi, żeby

$$0 = B_1$$

gdyż B_2 nie może być wtedy nieskończonem.

Aby kula lub koło szukane były odpowiednio stycznemi do kul lub kół danych zastrzeżeniem koniecznem i dostatecznem jest $a^2 = 1$, czyli

$$0 = \left| \begin{array}{cccccccc} -\frac{1}{2}, & p_1 \, . & p_2, & p_3, & \cdots\cdots & p_{1+m}, & p_{2+m} \\ p_1, & -2p_1^2, & c_{1,2}, & c_{1,3}, & \cdots\cdots, & c_{1,1+m}, & c_{1,2+m} \\ p_2, & c_{1,2}, & -2p_2^2, & c_{2,3}, & \cdots\cdots, & c_{2,1+m}, & c_{2,2+m} \\ p_3, & c_{1,3}, & c_{2,3}, & -2p_3^2, & \cdots\cdots, & c_{3,1+m}, & c_{3,2+m} \\ \cdot, & \cdot & \cdot, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1+m}, & c_{1,1+m}, & c_{2,1+m}, & c_{3,1+m}, & \cdots\cdots, & -2p_{1+m}^2, & c_{1+m,2+m} \\ p_{2+m}, & c_{1,2+m}, & c_{2,2+m}, & c_{3,2+m}, & \cdots\cdots, & c_{1+m,2+m}, & -2p_{2+m}^2 \end{array} \right| .$$

Podobnie jak pierwsze twierdzenie pomocnicze dało nam dostawę kąta przecięcia, drugie da nam promień szukany, zakładając w niem

$$l = 3 + m \, ;$$

$$d_{n,n} = 0 \, ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 3 + m \, ;$$

$$d_{n,3+m}^2 = d_{3+m,n}^2 = p_n^2 + 2p_n ap + p^2 \, ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 2 + m \, ;$$

a przytem, odejmijmy pierwsze wiersze poziomy i pionowy pomnożone przez p^2 od odpowiednich wierszy ostatnich i następnie, pozostawiając pierwsze wiersze nieruchomemi, wykonajmy na pozostałych podstawienie kołowe, tak, aby wiersze ostatnie stały się drugiemi. Równanie wtedy będzie:

$$0 = \left| \begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1, & 1 \\ 1, & -2p^2, & p_1^2 + 2p_1 ap, & p_2^2 + 2p_2 ap, & p_3^2 + 2p_3 ap, & \ldots, & p_{1+m}^2 + 2p_{1+m} ap, & p_{+m}^2 + 2p_{2+m} ap \\ 1, & p_1^2 + 2p_1 ap, & 0, & d_{1,2}^2, & d_{1,3}^2, & \ldots, & d_{1,1+m}^2, & d_{1,2+m}^2 \\ 1, & p_2^2 + 2p_2 ap, & d_{2,1}^2, & 0, & d_{2,3}^2, & \ldots, & d_{2,1+m}^2, & d_{2,2+m}^2 \\ 1, & p_3^2 + 2p_3 ap, & d_{3,1}^2, & d_{3,2}^2, & 0, & \ldots, & d_{3,1+m}^2, & d_{3,2+m}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & p_{1+m}^2 + 2p_{1+m} ap, & d_{1+m,1}^2, & d_{1+m,2}^2, & d_{1+m,3}^2, & \ldots, & 0, & d_{1+m,2+m}^2 \\ 1, & p_{2+m}^2 + 2p_{2+m} ap, & d_{2+m,1}^2, & d_{2+m,2}^2, & d_{2+m,3}^2, & \ldots, & d_{2+m,1+m}^2, & 0 \end{array} \right| .$$

Wyznacznik stanowiący drugą stronę równania rozłożymy na sumę dwóch innych różniących się od niego drugiemi wierszami pionowemi, mianowicie

$$\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & -2p^2 \\
p_1^2 & 2p_1 ap \\
p_2^2 & 2p_2 ap \\
p_3^2 & 2p_3 ap \\
\vdots & \vdots \\
p_{1+m}^2 & 2p_{1+m} ap \\
p_{2+m}^2 & 2p_{2+m} ap \,.
\end{array}$$

Dalej pierwszy z tak otrzymanych wyznaczników jest sumą dwóch innych różniących się od niego drugiemi wierszami poziomemi, mianowicie jeden:

$$1\,,\quad 0\,,\quad p_1^2\,,\quad p_2^2\,,\quad p_3^2\,,\quad \ldots\,,\quad p_{1+m}^2\,,\quad p_{2+m}^2\;;$$

i drugi

$$0\,,\quad 0\,,\quad 2p_1 ap\,,\quad 2p_2 ap\,,\quad 2p_3 ap\,,\quad \ldots\,,\quad 2p_{1+m} ap\,,\quad 2p_{2+m} ap\,.$$

Drugi z poprzednio otrzymanych wyznaczników jest podobnież sumą dwóch innych różniących się drugiemi wierszami poziomemi, mianowicie pierwszy:

$$1\,,\quad 0\,,\quad p_1^2\,,\quad p_2^2\,,\quad p_3^2\,,\quad \ldots\,,\quad p_{1+m}^2\,,\quad p_{2+m}^2\;;$$

i drugi:

$$0\,,\quad -2p^2\,,\quad 2p_1 ap\,,\quad 2p_2 ap\,,\quad 2p_3 ap\,,\quad \ldots\,,\quad 2p_{1+m} ap\,,\quad 2p_{2+m} ap\,.$$

Tak więc druga strona równania jest teraz sumą trzech wyznaczników stopnia $4+m$ i pomiędzy niemi trzeci nie różni się od drugiego, gdyż wiersze poziome jednego są pionowemi drugiego. W skutek tego wypisuję kolejno tylko pierwszy, drugi i czwarty, mianowicie:

pierwszy:

$$\begin{vmatrix}
0, & 1 & , 1 & , 1 & , 1 & , \ldots, & 1 & , 1 \\
1, & 0 & , p_1^2 & , p_2^2 & , p_3^2 & , \ldots, & p_{1+m}^2 & , p_{2+m}^2 \\
1, & p_1^2 & , 0 & , d_{1,2}^2 & , d_{1,3}^2 & , \ldots, & d_{1,1+m}^2 & , d_{1,2+m}^2 \\
1, & p_2^2 & , d_{2,1}^2 & , 0 & , d_{2,3}^2 & , \ldots, & d_{2,1+m}^2 & , d_{2,2+m}^2 \\
1, & p_3^2 & , d_{3,1}^2 & , d_{3,2}^2 & , 0 & , \ldots, & d_{3,1+m}^2 & , d_{3,2+m}^2 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
1, & p_{1+m}^2, & d_{1+m,1}^2, & d_{1+m,2}^2, & d_{1+m,3}^2, & \ldots, & 0 & , d_{1+m,2+m}^2 \\
1, & p_{2+m}^2, & d_{2+m,1}^2, & d_{2+m,2}^2, & d_{2+m,3}^2, & \ldots, & d_{2+m,1+m}^2, & 0
\end{vmatrix};$$

drugi

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 2p_1 ap, & 2p_2 ap, & 2p_3 ap, & \ldots, & 2p_{1+m} ap, & 2p_{2+m} ap \\ 1, & p_1^2, & 0, & d^2_{1,2}, & d^2_{1,3}, & \ldots, & d^2_{1,1+m}, & d^2_{1,2+m} \\ 1, & p_2^2, & d^2_{2,1}, & 0, & d^2_{2,3}, & \ldots, & d^2_{2,1+m}, & d^2_{2,2+m} \\ 1, & p_3^2, & d^2_{3,1}, & d^2_{3,2}, & 0, & \ldots, & d^2_{3,1+m}, & d^2_{3,2+m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1, & p^2_{1+m}, & d^2_{1+m,1}, & d^2_{1+m,2}, & d^2_{1+m,3}, & \ldots, & 0, & d^2_{1+m,2+m} \\ 1, & p^2_{2+m}, & d^2_{2+m,1}, & d^2_{2+m,2}, & d^2_{2+m,3}, & \ldots, & d^2_{2+m,1+m}, & 0 \end{vmatrix};$$

czwarty

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1, & 1 \\ 0, & -2p^2, & 2p_1 ap, & 2p_2 ap, & 2p_3 ap, & \ldots, & 2p_{1+m} ap, & 2p_{2+m} ap \\ 1, & 2p_1 ap, & 0, & d^2_{1,2}, & d^2_{1,3}, & \ldots, & d^2_{1,1+m}, & d^2_{1,2+m} \\ 1, & 2p_2 ap, & d^2_{2,1}, & 0, & d^2_{2,3}, & \ldots, & d^2_{2,1+m}, & d^3_{2,2+m} \\ 1, & 2p_3 ap, & d^2_{3,1}, & d^2_{3,2}, & 0, & \ldots, & d^2_{3,1+m}, & d^2_{3,2+m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1, & 2p_{1+m} ap, & d^2_{2+m,1}, & d^2_{1+m,2}, & d^2_{1+m,3}, & \ldots, & 0, & d^2_{1+m,2+m} \\ 1, & 2p_{2+m} ap, & d^2_{2+m,1}, & d^2_{2+m,2}, & d^2_{2+m,3}, & \ldots, & d^2_{2+m,1+m} & 0 \end{vmatrix}.$$

Pierwszy z tych wyznaczników zamienić można na inny stopnia $2+m$, a więc o dwie jedności niższego. Odejmując bowiem drugie wiersze poziomy i pionowy od następnych wierszy odpowiednich i następnie rozwijając podług pierwszych wierszy poziomego i pionowego, które z wyjątkiem drugich składników równych 1 są złożone z samych zer, przekonamy się, że jest równym $-B_1$.

Drugi wyznacznik po wyłączeniu z drugiego wiersza poziomego czynnika $2ap$, po założeniu dla zwięzłości

$$d^2_{k,n} - p_k^2 = e_{k,n}; \quad k,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2+m;$$

odjęciu drugiego wiersza pionowego od każdego z wierszy następujących i rozwinięciu według pierwszego wiersza poziomego zniży się do stopnia $3+m$ i będzie oznaczywszy go przez $-C$:

$$\begin{vmatrix} 0, & p_1, & p_2, & p_3, & \ldots, & p_{1+m}, & p_{2+m} \\ 1, & -p_1^2, & e_{1,2}, & e_{1,3}, & \ldots, & e_{1,1+m}, & e_{1,2+m} \\ 1, & e_{2,1}, & -p_2^2, & e_{2,3}, & \ldots, & e_{2,1+m}, & e_{2,2+m} \\ 1, & e_{3,1}, & e_{3,2}, & -p_3^2, & \ldots, & e_{3,1+m}, & e_{3,2+m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1, & e_{1+m,1}, & e_{1+m,2}, & e_{1+m,3}, & \ldots, & -p^2_{1+m}, & e_{1+m,2+m} \\ 1, & e_{2+m,1}, & e_{2+m,2}, & e_{2+m,3}, & \ldots, & e_{2+m,1+m}, & -p^2_{2+m} \end{vmatrix} = -C,$$

przyczem należy pamiętać, że $e_{n,k}$ jest różnem od $e_{k,n}$ w ogólności.

Czwarty nakoniec wyznacznik, po wyłączeniu z jego drugich wierszy poziomego i pionowego czynnika $2ap$, rozłożymy na sumę dwóch innych różniących się od niego tylko drugiemi wierszami pionowemi, mianowicie:

$$\begin{array}{cc}
0 & 0 \\
-\frac{1}{2}a^{-2} & 0 \\
0 & p_1 \\
0 & p_2 \\
0 & p_3 \\
\vdots & \vdots \\
0 & p_{1+m} \\
0 & p_{2+m}\,.
\end{array}$$

Teraz łatwo spostrzedz, że oznaczywszy dla zwięzłości dwa wyznaczniki odpowiednio stopni $3+m$ i $4+m$ jeden:

$$\begin{vmatrix}
0, & 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1, & 1 \\
1, & 0, & d^2_{1,2}, & d^2_{1,3}, & \ldots, & d^2_{1,1+m}, & d^2_{1,2+m} \\
1, & d^2_{1,2}, & 0, & d^2_{2,3}, & \ldots, & d^2_{2,1+m}, & d^2_{2,2+m} \\
1, & d^2_{1,3}, & d^2_{2,3}, & 0, & \ldots, & d^2_{3,1+m}, & d^2_{3,2+m} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
1, & d^2_{1,1+m}, & d^2_{2,1+m}, & d^2_{3,1+m}, & \ldots, & 0, & d^2_{1+m,2+m} \\
1, & d^2_{1,2+m}, & d^2_{2,2+m}, & d^2_{3,2+m}, & \ldots, & d^2_{1+m,2+m}, & 0
\end{vmatrix} = C_1\,;$$

i drugi

$$\begin{vmatrix}
0, & 0, & 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1, & 1 \\
0, & 0, & p_1, & p_2, & p_3, & \ldots, & p_{1+m}, & p_{2+m} \\
1, & p_1, & 0, & d^2_{1,2}, & d^2_{1,3}, & \ldots, & d^2_{1,1+m}, & d^2_{1,2+m} \\
1, & p_2, & d^2_{1,2}, & 0, & d^2_{2,3}, & \ldots, & d^2_{2,1+m}, & d^2_{2,2+m} \\
1, & p_3, & d^2_{1,3}, & d^2_{2,3}, & 0, & \ldots, & d^2_{3,1+m}, & d^2_{3,2+m} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
1, & p_{1+m}, & d^2_{1,1+m}, & d^2_{2,1+m}, & d^2_{3,1+m}, & \ldots, & 0, & d^2_{1+m,2+m} \\
1, & p_{2+m}, & d^2_{1,2+m}, & d^2_{2,2+m}, & d^2_{3,2+m}, & \ldots, & d^2_{1+m,2+m}, & 0
\end{vmatrix} = C_2\,;$$

to czwarty wyznacznik jest równy:

$$-\frac{1}{2}a^{-2}C_1 + C_2\,.$$

Równanie więc wyznaczające promień szukany, jest:

$$0 = -B_1 - 2C(2ap) + \left(-\frac{1}{2}a^{-2}C_1 + C_2\right)(2ap)^2;$$

a ponieważ znaleźliśmy poprzednio

$$-\frac{1}{2}a^{-2} = -B_1^{-1}B_2;$$

można więc równaniu nadać kształt prostszy

$$0 = -B_1^2 - 2B_1 C(2ap) + \begin{vmatrix} B_1, & B_2 \\ C_1, & C_2 \end{vmatrix} (2ap)^2 .$$

Z tego ostatniego wynika

$$2ap = B_1 \begin{vmatrix} B_1, & B_2 \\ C_1, & C_2 \end{vmatrix}^{-1} \left(C + \left\{ C^2 + \begin{vmatrix} B_1, & B_2 \\ C_1, & C_2 \end{vmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}} \right);$$

a że jest

$$\frac{1}{2}a^{-1} = \left(\frac{1}{2}B_1^{-1}B_2\right)^{\frac{1}{2}};$$

więc ostatecznie otrzymujemy wyrażenie promienia kuli szukanej lub koła szukanego

$$p = \left(\frac{1}{2}B_1\ B_2\right)^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} B_1, & B_2 \\ C_1, & C_2 \end{vmatrix}^{-1} \left(C + \left\{ C^2 + \begin{vmatrix} B_1, & B_2 \\ C_1, & C_2 \end{vmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}} \right).$$

Widzimy z tego, że aby promień szukany był rzeczywistym w razie rzeczywistości kul lub kół danych, ponieważ ze znalezionego poprzednio zastrzeżenia

$$0 \leqq B_1\ B_2^{-1} \gtrless 2;$$

wynika, że B_1 i B_2 są jednego znaku, potrzeba przeto jeszcze aby było

$$0 \leqq C^2 + \begin{vmatrix} B_1, & B_2 \\ C_1, & C_2 \end{vmatrix} .$$

Tak więc otrzymujemy dwa zastrzeżenia rzeczywistości rozwiązania.

Kula szukana będzie płaszczyzną, lub koło szukane liniją prostą, jeżeli jest

$$0 = \begin{vmatrix} B_1, & B_2 \\ C_1, & C_2 \end{vmatrix},$$

wtedy bowiem promień p jest nieskończenie wielkim.

Chcąc przeto wykreślić kulę szukaną lub koło szukane, ponieważ teraz a i p są znanemi, obliczymy naprzód $d_{n,\,3+m}$ ze wzoru

$$d_{n,\,3+m} = \left\{ p_n^2 + 2p_n a p + p^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 2+m;$$

i ze środka n_{go} danej kuli lub danego koła zakreślimy odpowiednio powierzchnię kuli lub okrąg koła dopieroco obliczonym promieniem. Tak wykreślone trzy kule lub dwa koła przetną się w środku szukanym, z którego zakreślona kula lub koło promieniem p jest szukaną kulą lub szukanem kołem.

Rachunki powyższe rozwiązują także zagadnienie podobne geometryi wielowymiarowej, gdy $m > 3$.

Pozostaje tylko pokazać zastrzeżenia możebności rozwiązania w razie, gdy $-2+l-m$ jest większem od zera, gdyż jak poprzednio widzieliśmy zagadnienie nie zawsze wtedy jest możebnem do rozwiązania. W tym celu zwrócę uwagę czytelnika, że pierwsze twierdzenie pomocnicze, ponieważ mamy $1+l$ kul lub kół razem danych i szukanych zastosować możemy do $3+m, 4+m, \ldots, 1+l$ kul lub kół, a przeto równanie z niego otrzymane

$$0 = -\frac{1}{2} a^{-2} B_1 + B_2;$$

stosuje się do $2+m, 3+m, \ldots, l$ danych kul lub kół. Ponieważ zaś B_1 jako będące właśnie wyznacznikiem, który podług tegoż twierdzenia dla $3+m, 4+m, \ldots, l$ danych kul lub kół jest zerem na mocy ostatniego równania pokazuje, że jest także $-2+l-m$ równań

$$0 = B_2;$$

czyli inaczej że szukane $-2+l-m$ zastrzeżeń są:

$$0 = \begin{vmatrix} 0, & p_1, & p_2, & p_3, & \ldots, & p_n \\ p_1, & c_{1,1}, & c_{1,2}, & c_{1,3}, & \ldots, & c_{1,n} \\ p_2, & c_{2,1}, & c_{2,2}, & c_{2,3}, & \ldots, & c_{2,n} \\ p_3, & c_{3,1}, & c_{3,2}, & c_{3,3}, & \ldots, & c_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_n, & c_{n,1}, & c_{n,2}, & c_{n,3}, & \ldots, & c_{n,n} \end{vmatrix}; \quad n = 3+m, 4+m, \ldots, l.$$