EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES
MARS 1914

HERSTELLUNG EINER RESOLVENTE FÜR DIE KUGELWELLENGLEICHUNG

VON

A. HOBORSKI

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1914

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTÉ FONDÉE EN 1873 PAR
S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE:
S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE ESTE.

VICE-PROTECTEUR: *Vacat.*

PRÉSIDENT: S. E. M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. BOLESLAS ULANOWSKI.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le Protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:
- *a*) Classe de Philologie,
- *b*) Classe d'Histoire et de Philosophie,
- *c*) Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie le «Bulletin International» qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. Le Bulletin publié par les Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie réunies, est consacré aux travaux de ces Classes. Le Bulletin publié par la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles paraît en deux séries. La première est consacrée aux travaux sur les Mathématiques, l'Astronomie, la Physique, la Chimie, la Minéralogie, la Géologie etc. La seconde série contient les travaux qui se rapportent aux Sciences Biologiques.

Publié par l'Académie
sous la direction de M. **Casimir Żorawski,**
Membre délégué de la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.

15 kwietnia 1914.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1914. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Filipowskiego.

EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES
MARS 1914

HERSTELLUNG EINER RESOLVENTE FÜR DIE KUGELWELLENGLEICHUNG

VON

A. HOBORSKI

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1914

Wyznaczenie pewnej funkcyi rozwiązującej równanie fal kulistych. — Herstellung einer Resolvente für die Kugelwellengleichung.

Mémoire

de M. **A. HOBORSKI**,

présenté, dans la séance du 2 Mars 1914, par M. S. Zaremba m. c.

§ 1. Herr Zaremba hat unlängst in einer Arbeit[1]), in der er sich mit einer gemischten Randwertaufgabe der partiellen Differentialgleichung der Kugelwellen beschäftigt, für jedes ganzzahlige n, wo $n \geqslant 3$ ist, eine Funktion $\mathfrak{R}_n$ definiert und ihre Existenz bewiesen; die Funktion $\mathfrak{R}_n$ gestattet, die Lösung der erwähnten Randwertaufgabe, falls solche existiert, einfach auszudrücken.

Herr Zaremba hat mich in einem Privatgespräch darauf aufmerksam gemacht, daß man in einem Spezialfalle — um einen solchen handelte es sich mir eben — die von Herrn Volterra aufgestellte Spiegelungsmethode[2]) dahin verallgemeinern kann, um die Funktion $\mathfrak{R}_n$ resp. eine etwas einfachere Funktion, die wir mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen wollen, zu konstruieren; die letztere vermag in diesem Spezialfalle die Funktion $\mathfrak{R}_n$ zu ersetzen.

Diesem Spezialfalle und der Definition der Funktion $\mathfrak{R}$ sind folgende Zeilen gewidmet.

§ 2. Der Inhalt dieser Arbeit ist folgender: § 3 definiert den speziellen vierdimensionalen Raum, für welchen die erwähnte Funktion $\mathfrak{R}$ konstruiert wird; diesen Raum könnte man eine vierdimensionale,

[1]) S. Zaremba: Sur une classe de problèmes mixtes relatifs à l'équation des ondes sphériques. Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1913.

[2]) V. Volterra: Leçons sur l'intégration etc., professées à Stockholm, 1906, Seite 53.

rechteckige, parallelepipedische Röhre nennen. § 4 und § 5 befassen sich mit einer Spiegelungsmethode, § 6 bis § 8 enthalten geometrische Sätze über spezielle Raumkegel; §§ 9 und 10 sind der Konstruktion der Funktion $\mathfrak{R}$ und den Beweisen einiger ihrer Eigenschaften gewidmet; § 11 erörtert kurz die Konstruktion der Funktion $\mathfrak{R}_n$.

Ich behalte mir für eine demnächst erscheinende Arbeit die Anwendung der Funktion $\mathfrak{R}$ auf eine Randwertaufgabe vor.

§ 3. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit einem speziellen vierdimensionalen Raume, den wir jetzt definieren wollen.

Mit D^* bezeichnen wir folgenden endlichen dreidimensionalen Raum: die Koordinaten (x, y, z) der Punkte dieses Raumes sollen den Ungleichungen:

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \quad |z| \leqslant c \tag{1}$$

genügen, wo a, b, c drei positive Zahlen bedeuten. Mit jedem System (x, y, z), das den Bedingungen (1) genügt, verbinden wir alle reellen Werte für eine vierte Variable t; die Gesamtheit aller Punkte M (x, y, z, t) im vierdimensionalen Raume bestimmt ein Zylindroid (D_z); jeder Punkt dieses Zylindroids besitzt Koordinaten (x, y, z, t), für welche die Bedingungen:

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \quad |z| \leqslant c \tag{2}$$

bestehen und für welche t eine beliebige reelle Zahl bedeutet.

Folgende dreidimensionalen Räume:

$$(3) \qquad \left|\begin{array}{llll} (\Sigma_1) & x = -a, & |y| \leqslant b, & |z| \leqslant c, \\ (\Sigma_2) & x = a, & |y| \leqslant b, & |z| \leqslant c, \\ (\Sigma_3) & |x| \leqslant a, & y = -b, & |z| \leqslant c, \\ (\Sigma_4) & |x| \leqslant a, & y = b, & |z| \leqslant c, \\ (\Sigma_5) & |x| \leqslant a, & |y| \leqslant b, & z = -c, \\ (\Sigma_6) & |x| \leqslant a, & |y| \leqslant b, & z = c, \end{array}\right.$$

wobei t alle reellen Werte annehmen soll, bilden die Begrenzung des Zylindroids (D_z).

Zugleich führen wir einige Hilfsbegriffe ein.

Unter einem Raumkegel K mit dem Scheitel im Punkte M'

(x', y', z', t') verstehen wir alle Punkte (x, y, z, t), deren Koordinaten der Gleichung:

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-(t-t')^2=0$$

genügen; wir sagen auch: der Punkt (x, y, z, t) liegt auf dem Raumkegel K. Die Gesamtheit dieser Punkte des Raumkegels (K) für die

$$t \leqslant t' \quad \text{resp.} \quad t \geqslant t'$$

ist, nennen wir die untere resp. obere Schale des Raumkegels (K). Von den Punkten der unteren resp. der oberen Schale des Raumkegels (K) kommen natürlich hier nur solche in Betracht, die zugleich dem Zylindroid (D_z) angehören.

Es bedeute t'' eine beliebige reelle Zahl, wo t'' kleiner als t' ist; Σ soll eine der Begrenzungen (3) des Zylindroids (D_z) sein. Wir sagen: die untere Schale des Raumkegels (K) habe mit Σ in bezug auf den dreidimensionalen Raum $t=t''$ gemeinsame Punkte, wenn es Punkte der unteren Schale gibt, die zugleich Punkte des Raumes Σ sind, für die $t \geqslant t''$ ist.

Es sei $t''' > t'$; wir sagen: die obere Schale des Raumkegels (K) habe mit Σ in bezug auf den Raum $t=t'''$ gemeinsame Punkte, wenn es Punkte der oberen Schale gibt, die zugleich Punkte des Raumes Σ sind und für die $t \leqslant t'''$ ist. Folgender Satz ist evident: Hat die untere Schale des Raumkegels (K) mit Σ gemeinsame Punkte in bezug auf den Raum $t=t''$, wo $t''<t'$ ist, so hat seine obere Schale mit Σ gemeinsame Punkte in bezug auf den Raum $t=t'''$ und umgekehrt, wenn $t''+t'''=2t'$ ist.

Unter inneren Punkten des Raumkegels (K) verstehen wir alle Punkte des vierdimensionalen Raumes (x, y, z, t), deren Koordinaten der Ungleichung:

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-(t-t')^2<0.$$

genügen; wenn zugleich $t<t'$ ist, so sagen wir: der Punkt (x, y, z, t) liegt im Innern der unteren Schale des Raumkegels (K); ist aber $t>t'$, so sagen wir: der Punkt (x, y, z, t) liegt im Innern seiner oberen Schale.

Vom Punkte (x, y, z, t), für den die Ungleichung:

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-(t-t')^2>0$$

besteht, sagen wir, er liege außerhalb des Raumkegels (K). Wir beweisen jetzt folgenden Satz: Hat die untere Schale des Raumkegels K mit den Begrenzungen (3) keine gemeinsamen Punkte in bezug auf den Raum t'', wo $t''<t'$ ist, und besteht wenigstens eine der Ungleichungen:

$$|x'|>a, \quad |y'|>b, \quad |z'|>c,$$

so liegen alle Punkte (x, y, z, t) des Zylindroids (D_z), für welche

$$t''\leqq t\leqq t'''$$

ist, wo t''' der Gleichung:

$$t''+t'''=2t'$$

genügt, außerhalb des Raumkegels K.

Wir behaupten also, daß, wenn die Bedingungen des Satzes erfüllt sind, auch

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-(t-t')^2>0$$

ist für alle

$$|x|\leqq a, \quad |y|\leqq b, \quad |z|\leqq c, \quad t''\leqq t\leqq t'''$$

(daß $t'''>t''$ ist, ist leicht zu erkennen). Nehmen wir an, daß es einen Punkt (x_0, y_0, z_0, t_0') gibt, für den die Ungleichungen:

$$|x_0|\leqq a, \quad |y_0|\leqq b, \quad |z_0|\leqq c, \quad t''\leqq t_0'\leqq t''',$$

$$(\alpha) \qquad (x_0-x')^2+(y_0-y')^2+(z_0-z')^2-(t_0'-t')^2\leqq 0$$

bestehen; wir dürfen

$$t_0'<t'$$

annehmen. Wir finden jetzt die Zahl t_0 von folgender Eigenschaft:

$$(\beta) \qquad (x_0-x')^2+(y_0-y')^2+(z_0-z')^2-(t_0-t')^2=0,$$

$$t_0<t';$$

es ist also $t_0' \leqq t_0$, also auch

$$t'' \leqq t_0 < t'''.$$

Setzen wir jetzt

$$(\gamma) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x' + (x_0 - x')\,\tau, \\ y &= y' + (y_0 - y')\,\tau, \\ z &= z' + (z_0 - z')\,\tau, \\ t &= t' + (t_0 - t')\,\tau. \end{aligned} \right.$$

Die Punkte (x, y, z, t), deren Koordinaten den Gleichungen (γ) genügen, wo τ eine beliebige, reelle Zahl bedeutet, liegen alle auf dem Raumkegel K.

Der Punkt (x_0, y_0, z_0, t_0) liegt auf keiner der Begrenzungen (3), weil sonst eine der Voraussetzungen des Satzes nicht erfüllt wäre.

Wir erhalten:

$$x = x',\ y = y',\ z = z',\ t = t' \quad \text{für } \tau = 0 \text{ und}$$
$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ t = t_0 \quad \text{für } \tau = 1.$$

Es sei

$$\begin{aligned} &|x' + (x_0 - x')\,\tau| \leqq a \quad \text{für} \quad 0 \leqq \eta_1 \leqq \tau \leqq 1, \quad \eta_1 < 1, \\ &|y' + (y_0 - y')\,\tau| \leqq b \quad \text{für} \quad 0 \leqq \eta_2 \leqq \tau \leqq 1, \quad \eta_2 < 1, \\ &|z' + (z_0 - z')\,\tau| \leqq c \quad \text{für} \quad 0 \leqq \eta_3 \leqq \tau \leqq 1, \quad \eta_3 < 1. \end{aligned}$$

Alle drei Zahlen η_1, η_2, η_3 können nicht Null sein, denn wenigstens eine der Ungleichungen:

$$|x'| > a, \quad |y'| > b, \quad |z'| > c$$

soll erfüllt sein; es soll sein:

$$\begin{aligned} &|x' + (x_0 - x')\,\tau| > a \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau < \eta_1, \quad \text{falls} \quad 0 < \eta_1 \text{ ist,} \\ &|y' + (y_0 - y')\,\tau| > b \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau < \eta_2, \quad \text{falls} \quad 0 < \eta_2 \text{ ist,} \\ &|z' + (z_0 - z')\,\tau| > c \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau < \eta_3, \quad \text{falls} \quad 0 < \eta_3 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Von den drei Zahlen η_1, η_2, η_3 bestimmen wir die größte; es sei z. B. η_3 die größte; andere Fälle erledigen sich ähnlich.

Wir bestimmen jetzt τ_0 so, daß

$$|z' + (z_0 - z')\tau_0| = c$$

ist; es ist also

$$\eta_3 \leqslant \tau_0 < 1,$$

also auch $\eta_2 \leqslant \tau_0$, $\eta_1 \leqslant \tau_0$; infolgedessen ist

$$|x' + (x_0 - x')\tau_0| \leqslant a, \quad |y' + (y_0 - y')\tau_0| \leqslant b;$$

es liegt also der Punkt P:

$$x'+(x_0-x')\tau_0, \quad y'+(y_0-y')\tau_0, \quad z'+(z_0-z')\tau_0, \quad t'+(t_0-t')\tau_0,$$

des Raumkegels K auf einer der Begrenzungen (3); es ist aber

$$t'' \leqslant t_0 < t' + (t_0 - t')\tau_0 < t';$$

die Existenz des Punktes P widerspricht der Voraussetzung des Satzes. Der Satz ist also bewiesen.

§ 4. Jetzt wollen wir die angesagte Spiegelungsmethode definieren. Es bedeute M_0 (x_0, y_0, z_0, t_0) einen beliebigen Punkt des unbegrenzten vierdimensionalen Raumes.

Wenn ξ eine der Variablen x, y, z und α entsprechend eine der Zahlen $-a$, a, $-b$, b, $-c$, c bedeutet, so kann die Gleichung

$$\xi = \alpha \tag{4}$$

eine der Begrenzungen:

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6 \tag{5}$$

bestimmen; bezeichnen wir diese Begrenzung, die die Gleichung (4) besitzt, mit Σ. Den Punkt M mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1, t_0 nennen wir das Spiegelbild oder kurz das Bild des Punktes M_0 in bezug auf Σ, wenn das System (x_1, y_1, z_1) mit einem der folgenden Systeme:

1) $x_1 = 2\alpha - x_0, \quad y_1 = y_0, \quad z_1 = z_0$

2) $x_1 = x_0, \quad y_1 = 2\alpha - y_0, \quad z_1 = z_0$

3) $x_1 = x_0, \quad y_1 = y_0, \quad z_1 = 2\alpha - z_0$

zusammenfällt, je nachdem ξ die Variable x resp. y oder z bedeutet.

Folgender Satz ist klar:

Satz I. Es bezeichne Σ einen der Räume (3), M_0 und M_1 einen Punkt und sein Bild in bezug auf Σ; hat die untere Schale des Raumkegels vom Scheitel M_0 mit Σ gemeinsame Punkte in bezug auf den Raum $t = t'$, wo $t' < t_0$ ist, so sind diese Punkte zugleich die gemeinsamen Punkte des Raumes Σ und des Raumkegels vom Scheitel M_1 in bezug auf denselben Raum $t = t'$.

Wir können vom Beweise absehen.

§ 5. Es bedeute M_0 (x_0, y_0, z_0, t_0) einen Punkt, dessen drei erste Koordinaten folgende Bedingungen:

$$|x_0| < a, \quad |y_0| < b, \quad |z_0| < c \tag{6}$$

erfüllen; wir spiegeln ihn in bezug auf jede der Begrenzungen (3); auf diese Weise erhalten wir sechs Punkte, die wir Bilder erster Ordnung nennen wollen. Die Bilder der Bilder erster Ordnung in bezug auf jede der Begrenzungen (3), die mit dem Punkte M_0 nicht zusammenfallen, wollen wir Bilder zweiter Ordnung nennen. Überhaupt verstehen wir unter Bildern $(\varkappa + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung die Bilder der Bilder $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung in bezug auf jede der Begrenzungen (3), die mit den Bildern $(\varkappa - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht zusammenfallen; $\varkappa$ bedeutet eine ganze Zahl:

$$\varkappa \geqslant 2.$$

Bedeutet j eine beliebige ganze und positive Zahl, so beweist man auf Grund der vollständigen Induktion, daß alle Bilder j^{ter} Ordnung folgende Koordinaten besitzen:

$$2am + (-1)^m x_0, \quad 2bn + (-1)^n y_0, \quad 2cp + (-1)^p z_0, \quad t_0$$

wo m, n, p ganze Zahlen sind, deren absolute Beträge der Gleichung:

$$|m| + |n| + |p| = j \quad (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

genügen. Wenn die drei Zahlen m, n, p der Gleichung (7) genügen, so nennen wir sie ein Lösungssystem der Gleichung (7). Wir wollen jetzt die Anzahl der Lösungssysteme von (7) berechnen. Es sei (S) die Menge aller Lösungssysteme von (7) in absoluten Zahlen; ist (λ, μ, ν) ein Element von (S) [also $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$, und $\lambda + \mu + \nu = j$], so setzen wir zu (S) alle Systeme $(-\lambda, \mu, \nu)$, wenn $\lambda \neq 0$ ist; wir erhalten eine Menge (S'), die (S) als Untermenge besitzt[1]).

Die Menge (S) besteht aus $\frac{1}{2}(j+1)(j+2)$ Elementen und $(j+1)$ Elemente haben $\lambda = 0$; es enthält also (S') $2 \cdot \frac{1}{2}(j+1)(j+2) - (j+1) = (j+1)^2$ Elemente.

Ist jetzt (λ', μ', ν') ein Element von (S'), so setzen wir $(\lambda', -\mu', \nu')$ hinzu, wenn $\mu' \neq 0$ ist, und erhalten eine Menge (S''), die (S') als Untermenge besitzt. Die Menge (S) hat $(j+1)$ Elemente, die an zweiter Stelle Null besitzen. Von diesen Elementen wurde nur eines nicht dubliert, infolgedessen hat die Menge (S') nur $(2j+1)$ Elemente, die Null an zweiter Stelle besitzen; daraus folgt, daß (S'') aus

$$2(j+1)^2 - (2j+1) = 2j^2 + 2j + 1$$

Elementen besteht. Ist $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ ein Element von (S''), so setzen wir das Element $(\lambda'', \mu'', -\nu'')$ hinzu, wenn $\nu'' \neq 0$ ist, und auf diese Weise erhalten wir eine Menge (S'''), die (S'') als Untermenge enthält. Die Menge (S) hat $(j+1)$ Elemente, die eine Null an dritter Stelle haben; von diesen wurde nur eines [nämlich das Element $(0, j, 0)$] nicht dubliert, folglich gibt es $(2j+1)$ Elemente in (S'), die eine Null an dritter Stelle haben; da aber die Elemente $(j, 0, 0)$, $(-j, 0, 0)$ in (S') nicht dubliert wurden, so enthält (S'') nur $4j$ Elemente, die eine Null an dritter Stelle besitzen. Daraus folgt unmittelbar, daß (S'') aus

$$2(2j^2 + 2j + 1) - 4j = 4j^2 + 2$$

Elementen besteht. Da weiter jedes Lösungssystem von (7) zu (S''') gehört und einmal in (S''') gezählt wurde, so ist die Anzahl der Lösungssysteme von (7), also auch die Anzahl der Bilder j^{ter} Ordnung $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ gleich $4j^2 + 2$.

§ 6. Jetzt wählen wir den Punkt M_0 des vorigen § und seine Bilder

[1]) Wir sagen kurz: das System (λ, μ, ν) ist dubliert worden $(\lambda \neq 0)$.

zu Scheiteln von Raumkegeln. Wir werden beweisen, daß es nur eine endliche Anzahl von diesen Raumkegeln gibt, deren untere Schalen mit wenigstens einer der Begrenzungen (3) gemeinsame Punkte in bezug auf den Raum $t = t'$ besitzen, wo $t' < t_0$ ist. Daß dies wirklich eintritt, ist in einem Falle ersichtlich, nämlich wenn die untere Schale des Raumkegels $K^{(0)}$ vom Scheitel M_0 mit keiner der Begrenzungen (3) gemeinsame Punkte in bezug auf den Raum $t = t'$ hat. Für den allgemeinen Fall läßt sich folgender Satz beweisen:

Satz II. Wenn die reellen Zahlen (x_1, y_1, z_1, t_1) wenigstens eines der drei folgenden Bedingungssysteme:

$$1^0)\quad |x_1 + a| > t_1 - t_2, \quad |x_1 - a| > t_1 - t_2, \quad |x_1| > a$$

$$2^0)\quad |y_1 + b| > t_1 - t_2, \quad |y_1 - b| > t_1 - t_2, \quad |y_1| > b$$

$$3^0)\quad |z_1 + c| > t_1 - t_2, \quad |z_1 - c| > t_1 - t_2, \quad |z_1| > c$$

erfüllen, wo $t_2 < t_1$ ist, so hat die untere Schale des Raumkegels K_1 vom Scheitel (x_1, y_1, z_1, t_1) mit keinem der Räume (3) gemeinsame Punkte in bezug auf den Raum $t = t_2$.

Wir beweisen den Satz in dem Falle, in welchem wenigstens das Bedingungssystem 1^0) zutrifft; der Beweis für die übrigen Fälle gestaltet sich ganz ähnlich.

Zuerst zeigen wir, daß der Raumkegel K_1:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (t - t_1)^2$$

weder mit Σ_1 noch mit Σ_2 gemeinsame Punkte hat. Für die gemeinsamen Punkte von K_1 und Σ_1 resp. Σ_2 erhalten wir infolge von 1^0)

$$(t - t_1)^2 = (\pm a - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 > (t_1 - t_2)^2$$

und daraus:

$$(t - t_2)(t - 2t_1 + t_2) > 0;$$

da aber $t \leqq t_1$, also auch $t < 2t_1 - t_2$ ist, da ja $t_2 < t_1$ ist, so folgt:

$$t < t_2,$$

womit unsere letztere Behauptung bewiesen ist. Aber auch mit keinem der Räume Σ_3, Σ_4, Σ_5, Σ_6 hat der Raumkegel K_1 gemeinsame Punkte.

Wir beweisen dies für Σ_3 und Σ_4, der Beweis für Σ_5 und Σ_6 ist ganz ähnlich.

Wenn wenigstens einer der Räume Σ_3 und Σ_4 mit dem Raumkegel K_1 gemeinsame Punkte hat, so existiert wenigstens ein Zahlensystem (x, y, z, t), das den Bedingungen genügt:

$$(\alpha) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (t - t_1)^2,$$

$$(\beta) \qquad t_2 \leqslant t \leqslant t_1,$$

$$(\gamma) \qquad |x| \leqslant a, \quad |z| \leqslant c, \quad |y| = b.$$

Aus (β) erhält man:

$$(t - t_1)^2 \leqslant (t_1 - t_2)^2,$$

also ist

$$(x - x_1)^2 \leqslant (t - t_1)^2 \leqslant (t - t_2)^2 < (x_1 \pm a)^2.$$

Daraus folgt entweder

$$(\delta) \qquad -a < x < a + 2x_1$$

oder

$$(\varepsilon) \qquad a + 2x_1 < x < -a$$

und zugleich entweder

$$(\zeta) \qquad a < x < 2x_1 - a$$

oder

$$(\eta) \qquad 2x_1 - a < x < a.$$

Da die Ungleichungen (ε) und (ζ) mit der Ungleichung (γ) unvereinbar sind, so wird von den Fällen (δ, ζ), (δ, η), (ε, ζ), (ε, η) nur der zweite Fall zu untersuchen sein; dieser aber ergibt die Ungleichung:

$$|x_1| < a,$$

die dem vorausgesetzten Bedingungssystem 1°) widerspricht. Wir können also den Satz II als bewiesen betrachten.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir die am Anfang dieses § gestellte Frage beantworten.

Bezeichnen wir nun mit $\left[\frac{j}{3}\right]$ eine solche, nichtnegative, ganze Zahl, die der Ungleichung

$$\left[\frac{j}{3}\right] \leqslant \frac{j}{3} < \left[\frac{j}{3}\right] + 1$$

genügt, wo j dieselbe Bedeutung hat, wie im vorigen §.

Wenigstens eine der Zahlen

$$|m|, \quad |n|, \quad |p|$$

ist nicht kleiner, als die Zahl $\left[\frac{j}{3}\right]$, wenn

$$|m| + |n| + |p| = j$$

ist; wenn wir mit

$$x_{m,\,n,\,p}; \quad y_{m,\,n,\,p}; \quad z_{m,\,n,\,p}; \quad t_0$$

die Koordinaten der Bilder des Punktes M_0 bezeichnen, so ersieht man, daß wenigstens eine der Ungleichungen:

$$|x_{m,\,n,\,p}| > a, \quad |y_{m,\,n,\,p}| > b, \quad |z_{m,\,n,\,p}| > c$$

zutrifft und man zu gegebener positiver Zahl $t_0 - t'$ eine positive, ganze Zahl N so finden kann, daß für alle

$$j \geqslant N$$

entsprechend wenigstens eine der folgenden Doppelbedingungen:

1) $$|x_{m,\,n,\,p} \pm a| > t_0 - t'$$

2) $$|y_{m,\,n,\,p} \pm b| > t_0 - t'$$

3) $$|z_{m,\,n,\,p} \pm c| > t_0 - t'$$

zutrifft[1]); daher haben auf Grund des Satzes II die unteren Schalen der Raumkegel vom Scheitel

$$(x_{m,\,n,\,p};\quad y_{m,\,n,\,p};\quad z_{m,\,n,\,p};\quad t_0)$$

für

$$|m| + |n| + |p| \geqq N$$

mit keinem der Räume (3) gemeinsame Punkte in bezug auf den Raum $t = t'$, wo $t' < t_0$ ist und eine konstante Zahl bedeutet.

Die Menge dieser Raumkegel, deren untere Schale mit wenigstens einem der Räume (3) gemeinsame Punkte in bezug auf den Raum $t = t'$ hat, ist gewiß endlich, kann aber auch leer sein.

Bezeichnen wir diese Menge mit $(\mathfrak{M})$; sie hängt von t' ab.

§ 7. Wir wenden uns jetzt dem genaueren Studium der soeben definierten Menge $(\mathfrak{M})$ zu.

Mit $K^{(0)}$ bezeichnen wir den Raumkegel, dessen Scheitel im Punkte M_0 liegt. Es ist klar, daß die Menge $(\mathfrak{M})$ dann und nur dann leer ist, wenn die untere Schale des Raumkegels $K^{(0)}$ mit keiner der Begrenzungen (3) gemeinsame Punkte in bezug auf den Raum $t = t'$ hat. Nehmen wir an, daß die Menge $(\mathfrak{M})$ für ein gewisses t' nicht leer ist.

Jeder Raumkegel, dessen Scheitel ein Bild j^{ter} Ordnung ($j \geqq 1$) ist, wird als Raumkegel j^{ter} Ordnung bezeichnet. Da die Menge $(\mathfrak{M})$ endlich und nicht leer ist, so existiert eine ganze, positive Zahl k_0 von der Beschaffenheit, daß die Menge $(\mathfrak{M})$ wenigstens einen Raumkegel $k_0{}^{\text{ter}}$ Ordnung und keinen von höherer Ordnung als k_0 enthält. Da es nun ferner klar ist, daß die Menge $(\mathfrak{M})$ keinen Raumkegel j^{ter} Ordnung besitzt, wenn sie keinen Raumkegel i^{ter} Ordnung enthält, wo $j > i$ ist, so existiert in der nicht leeren Menge $(\mathfrak{M})$ wenigstens ein Raumkegel erster Ordnung und überhaupt jeder Ordnung i, wo

$$1 \leqq i \leqq k_0.$$

Wir führen noch eine bequeme Ausdrucksweise ein. Es sei $K^{(k)}$ ein Raumkegel k^{ter} Ordnung, der zur Menge $(\mathfrak{M})$ gehört; er besitze in bezug auf den Raum $t = t'$ mit wenigstens einer der Begrenzungen (3), — nennen wir sie Σ—, gemeinsame Punkte, die alle

[1]) so daß die Bedingungen des Satzes II erfüllt sind.

zugleich auf keinem Raumkegel niederer Ordnung liegen (es muß also $k < k_0$ sein); es sei $M^{(k)}$ der Scheitel dieses Raumkegels $K^{(k)}$ und $M^{(k+1)}$ das Bild des Punktes $M^{(k)}$ in bezug auf Σ; mit $K^{(k+1)}$ bezeichnen wir den Raumkegel, dessen Scheitel im Punkte $M^{(k+1}$ liegt. Es ist leicht einzusehen, daß der Raumkegel $K^{(k+1)}$ von $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist und auch zu $(\mathfrak{M})$ gehört.

Wir sagen kurz: der Raumkegel $K^{(k+1)}$ wird durch den Raumkegel $K^{(k)}$ bestimmt; ebenso sagen wir, daß jeder Raumkegel erster Ordnung durch den Raumkegel $K^{(0)}$ bestimmt wird.

Es ist weiter klar, daß jeder Raumkegel der Menge $(\mathfrak{M})$ durch wenigstens einen Raumkegel von um eine Einheit niederer Ordnung oder durch $K^{(0)}$ bestimmt wird.

§ 8. Wir beweisen noch drei Sätze, von denen wir später Gebrauch machen werden.

Mit Σ bezeichnen wir einen der Räume (3) und mit K einen Raumkegel der Menge $(\mathfrak{M})$, der mit Σ in bezug auf den Raum $t = t'$ gemeinsame Punkte hat; die Menge der gemeinsamen Punkte von K und Σ bezeichnen wir mit (H).

Eine leichte Rechnung zeigt, daß es nur zwei Raumkegel (nämlich K und noch einen) gibt, die mit Σ dieselbe Menge (H) von Punkten in bezug auf den Raum $t = t'$ gemeinsam haben.

Es ist auch sehr leicht, folgenden Satz zu beweisen:

Satz III. M bezeichne einen Punkt des Zylindroids (D_z), dessen Koordinaten (x, y, z, t) sind; er liege innerhalb der unteren Schale eines Raumkegels $K^{(k)}$ von k^{ter} Ordnung, der zu $(\mathfrak{M})$ gehört; es ist also $t < t_0$; dieser Raumkegel sei durch den Raumkegel $K^{(k-1)}$ bestimmt, der für $k > 1$ wieder zu $(\mathfrak{M})$ gehört; wir behaupten, daß M auch im Innern der unteren Schale von $K^{(k-1)}$ liegt.

Zum Beweise nehmen wir zuerst $k = 1$ an. Der Scheitel des Raumkegels $K^{(1)}$ befinde sich im Punkte M_1, der eines der Bilder erster Ordnung des Punktes M_0 ist. Um einen der möglichen Fälle zu fixieren, nehmen wir an, daß die Begrenzung, in bezug auf welche M_1 das Bild von M_0 ist, Σ_1 sei; der Punkt M_1 hat also die Koordinaten:

$$-2a - x_0, \quad y_0, \quad z_0, \quad t_0;$$

die übrigen Fälle werden ähnlich erledigt. Wir setzen also voraus, daß folgende Ungleichungen:

$$(\alpha) \qquad (x+2a+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<(t-t_0)^2$$

$$(\beta) \qquad |x|\leqslant a, \quad |y|\leqslant b, \quad |z|\leqslant c; \quad t'\leqslant t<t_0$$

bestehen, und behaupten, daß daraus

$$(\gamma) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<(t-t_0)^2$$

folgt. In der Tat setzen wir:

$$(\delta) \qquad (x+2a+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(t_1-t_0)^2,$$

$$(\varepsilon) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(t_2-t_0)^2,$$

$$(\zeta) \qquad t_1<t_0, \quad t_2\leqslant t_0.$$

Solche Zahlen t_1, t_2 existieren ganz gewiß.

Aus (α) und (δ) folgt

$$(\eta) \qquad (t_1-t_0)^2<(t-t_0)^2;$$

aus (δ) und (ε):

$$(t_1-t_0)^2-(t_2-t_0)^2=4(x+a)(x_0+a)\geqslant 0,$$

also ist

$$(\eta') \qquad (t_2-t_0)^2\leqslant(t_1-t_0)^2;$$

aus (ε), (η) und (η') folgt schließlich (γ), was zu beweisen war.

Der Fall $k>1$ ist nicht minder einfach.

Um den dritten Satz, den wir in diesem § aussprechen, kurz auszudrücken, bezeichnen wir mit $(\mathfrak{M}')$ die Menge, welche man dadurch erhält, daß man der Menge $(\mathfrak{M})$ den Raumkegel $K^{(0)}$ zuzählt.

Satz IV. Wenn der Punkt M, dessen Koordinaten (x, y, z, t) sind, wo $t'\leqslant t\leqslant t_0$ ist, auf einer der Begrenzungen (3) des Zylindroids (D_z) liegt, so gibt es immer in der Menge $(\mathfrak{M}')$ eine gerade Anzahl von Raumkegeln, innerhalb deren unteren Schalen der Punkt M liegt[1]).

In der Tat sind nur folgende Fälle möglich: der Punkt M, von dem im Satze IV die Rede ist,

[1]) Diese gerade Zahl kann Null sein.

1) kann entweder innerhalb keiner unteren Schale der Raumkegel von $(\mathfrak{M}')$, kann aber auf $K^{(0)}$ und auf einem Raumkegel erster Ordnung liegen, oder

2) er liegt auf einer ganz gewiß geraden Anzahl von Raumkegeln von $(\mathfrak{M}')$ und innerhalb n (wo $n \geqslant 1$) unterer Schalen von Raumkegeln von $(\mathfrak{M}')$, oder

3) er liegt auf keinem Raumkegel der Menge $(\mathfrak{M}')$ und zugleich innerhalb von n $(n \geqslant 1)$ unteren Schalen der Raumkegel von $(\mathfrak{M}')$.

Der erste Fall steht mit dem Satze IV im Einklang.

Im zweiten und dritten Falle ist die Zahl n gerade auf Grund des Satzes III: es lassen sich nämlich diese Raumkegel von $(\mathfrak{M}')$, innerhalb deren der Punkt M liegt, paarweise zusammenstellen und zwei nicht identische Paare haben kein Element gemeinsam.

Nachdem wir alle nötigen Hilfssätze aufgestellt haben, bemerken wir noch, daß wir zu jedem Hilfssatz noch einen Zusatz hinzufügen können, nämlich einen entsprechenden Satz über die oberen Schalen der Raumkegel; wir sehen hier davon ab, werden aber im folgenden von solchen Sätzen Gebrauch machen dürfen.

§ 9. Jetzt wenden wir uns der Konstruktion der Funktion $\mathfrak{R}$ zu, die wir im § 1 erwähnt haben. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{R}$ $(M_0$ $M_1)$, da sie von Koordinaten zweier Punkte:

$$M_0 \quad (x_0, y_0, z_0, t_0),$$
$$M_1 \quad (x_1, y_1, z_1, t_1),$$

die im Zylindroid (D_z) liegen, abhängen soll; explicite wird sie nur von sieben Variablen

$$x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, t_1 - t_0$$

abhängen. Es soll

$$(8) \qquad |x_0| < a, \quad |y_0| < b, \quad |z_0| < c$$

sein.

Für alle Punkte M_1 des Zylindroids, die nicht innerhalb von $K^{(0)}$ liegen, aber mit M_0 nicht zusammenfallen, setzen wir

$$(9) \qquad \mathfrak{R}(M_0, M_1) = 0.$$

Wenn M_1 innerhalb von $K^{(0)}$ liegt, so bestimmen wir die Menge $(\mathfrak{M})$ aller Raumkegel, deren obere resp. untere Schalen mit wenigstens einer der Begrenzungen (3) gemeinsame Punkte in bezug auf den Raum $t = t_1$ haben; die Menge $(\mathfrak{M})$ ist endlich, wie wir wissen, und nach einem früheren Satze liegt der Punkt M_1 außerhalb eines jeden Raumkegels, die wir im § 6 betrachten und die zu $(\mathfrak{M})$ nicht gehören. Liegt der Punkt M_1 auch außerhalb der Raumkegel von $(\mathfrak{M})$, so setzen wir:

$$\mathfrak{R}(M_0, M_1) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{t_1 - t_0 + r_0}{4\pi r_0} & \text{für } t_1 < t_0, \\ \dfrac{t_1 - t_0 - r_0}{4\pi r_0} & \text{für } t_1 > t_0, \end{array} \right.$$

wo

$$0 < r_0 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad \text{ist.}$$

Liegt aber der Punkt M_1 innerhalb von Raumkegeln:

$$K^{(1)}, \quad K^{(2)}, \ldots, K^{(n)},$$

die alle zu $(\mathfrak{M})$ gehören, so setzen wir:

$$\mathfrak{R}(M_0, M_1) = \sum_{k=0}^{k=n} \varepsilon_k h_k. \tag{10}$$

wo

$$h_k = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{t_1 - t_0 + r_k}{4\pi r_\varkappa} & \text{für } t_1 < t_0 \\ \dfrac{t_1 - t_0 - r_k}{4\pi r_k} & \text{für } t_1 > t_9 \end{array} \right. \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

$$0 < r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$0 < r_k = \sqrt{(x_1 - x^{(k)})^2 + (y_1 - y^{(k)})^2 + (z_1 - z^{(k)})^2}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist und $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}, t_0$ die Koordinaten des Scheitels des Raumkegels $K^{(k)}$ sind; es ist hier $\varepsilon_0 = 1$, ε_k bezeichnet die Zahl $+1$ oder -1, je nachdem der Raumkegel $K^{(k)}$ von gerader oder ungerader Ordnung ist.

Von nun an wollen wir M statt M_1 und (x, y, z, t) statt (x_1, y_1, z_1, t_1) schreiben.

Die auf diese Weise definierte Funktion $\mathfrak{R}(M_0, M)$ hat folgende Eigenschaften:

1) Die zur t Achse parallele Gerade

$$(11) \qquad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

ist für $\mathfrak{R}$ singulär, aber die Differenz

$$(12) \qquad \mathfrak{R}(M_0, M) - \frac{t - t_0}{4\pi r_0}$$

bleibt endlich und ist eine stetige Funktion des Punktes M.

2) Für alle Punkte M, die auf $K^{(0)}$ und auf den Raumkegeln von $(\mathfrak{M})$, nicht aber auf den Geraden (11) liegen, haben die ersten Ableitungen der Funktion $\mathfrak{R}$ nach x, y, z, t endliche Sprünge, sonst sind sie außer den Punkten von (11) stetig und besitzen stetige Ableitungen, die der Gleichung:

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial t^2}$$

genügen.

3) Für alle Punkte M der Räume (3) ist

$$\mathfrak{R}(M_0, M) = 0.$$

Der Beweis dieser Eigenschaften ist einfach.

Was die erste Eigenschaft anbetrifft, so braucht nur die Behauptung der Stetigkeit der Funktion $\mathfrak{R}$ für alle Punkte M, die nicht auf den Geraden (11) liegen, einen Beweis.

Zu diesem Zwecke definieren wir eine unendliche Folge stetiger Funktionen. Alle Raumkegel, die den Punkt M_0 und seine Bilder als Scheitel besitzen, bilden eine abzählbare Menge, deren Elemente wir mit:

$$K_0; \quad K_1, \quad K_2, \ldots, K_n, \ldots$$

bezeichnen wollen, wo K_0 statt $K^{(0)}$ geschrieben wurde. Mit $f_i(M)$

bezeichnen wir eine Funktion, die folgendermaßen definiert wird: Für alle Punkte M, die außerhalb von K_i liegen, soll

$$f_i(M) = 0$$

sein; für alle anderen Punkte $M(x, y, z, t)$ des Raumes soll:

$$(14) \qquad f_i(M) = \begin{cases} \dfrac{t - t_0 + r_i}{4\pi r_i} & \text{für } t < t_0 \\[2ex] \dfrac{t - t_0 - r_i}{4\pi r_i} & \text{für } t > t_0 \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots)$$

sein, wo

$$0 < r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

ist und (x_i, y_i, z_i, t_0) die Koordinaten des Scheitels von K_i sind. Wir sehen daraus, daß die Funktion $f_i(M)$ überall stetig ist, eine Ausnahme hievon bilden die Punkte der Geraden (L_i):

$$x = x_i, \quad y = y_i, \quad z = z_i.$$

Von diesen Geraden (L_i) liegt nur (L_0) im Zylindroid (D_z), folglich ist jede der Funktionen

$$f_1(M), \quad f_2(M), \ldots$$

im ganzen Zylindroid (D_z) stetig.

Da die Funktion $\mathfrak{R}(M_0, M)$ für alle x, y, z, t, die den Ungleichungen

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \quad |z| \leqslant c, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad (t_1 < t_2)$$

genügen, wo t_1, t_2 beliebige reelle Zahlen sind, eine homogene, lineare Kombination mit numerischen Koeffizienten $(+1, -1)$ von einer endlichen Anzahl der Funktionen $f_i(M)$ ist, so ist $\mathfrak{R}(M_0, M)$ eine stetige Funktion für alle Punkte M des Zylindroids (D_z) mit Ausnahme der Punkte der Geraden (L_0) [1]).

[1]) Diesen einfachen und eleganten Beweis verdanke ich dem freundlichen Entgegenkommen des Herrn Zaremba; der von mir gefundene war länger und nicht so einfach, und deshalb habe ich ihn hier unterdrückt.

Wenden wir uns jetzt dem Beweise der zweiten Eigenschaft von $\mathfrak{R}(M_0, M)$ zu. Eine leichte Rechnung überzeugt uns davon, daß die Funktion $f_i(M)$ unstetige Ableitungen nur längs K_i besitzt, daß diese Ableitungen längs K_i endliche Sprünge besitzen und daß sie sonst im Zylindroid (D_z) stetig sind, ausgenommen die Funktion $f_0(M)$, für welche noch die Punkte von (L_0) zu Unstetigkeitspunkten gehören. Außerdem bemerken wir, daß außerhalb der Unstetigkeitspunkte der ersten Ableitungen jede der Funktionen $f_i(M)$ der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügt.

Was die dritte Eigenschaft anbetrifft, so besitzt sie die Funktion $\mathfrak{R}(M_0, M)$ augenscheinlich infolge ihrer Definition für alle Punkte M der Begrenzung (3), die nicht innerhalb von $K^{(0)}$ liegen. Liegt der Punkt M auf einer der Begrenzungen (3), — nennen wir sie Σ—, und innerhalb von $K^{(0)}$, so bestimmen wir entsprechend die im § 5 definierte Menge $(\mathfrak{M}')$ und auf Grund des Satzes IV wissen wir, daß M innerhalb einer geraden Anzahl von Raumkegeln der Menge $(\mathfrak{M}')$ liegt; diese Raumkegel lassen sich in Paare von besonderer Eigenschaft zusammenstellen. Es seien K_1 und K_2 zwei Raumkegel eines dieser Paare; es muß einer, z. B. K_2, durch K_1 bestimmt sein (§ 5); wenn (x_1, y_1, z_1, t_0) resp. (x_2, y_2, z_2, t_0) die Koordinaten der Scheitel von K_1 resp. K_2 sind und

$$0 < r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

$$0 < r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2},$$

$$h_i \equiv \begin{cases} \dfrac{t - t_0 + r_i}{4\pi r_i} & \text{für } t < t_0 \\[2ex] \dfrac{t - t_0 - r_i}{4\pi r_i} & \text{für } t > t_0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

ist, so ist für alle Punkte $M(x, y, z, t)$ von Σ:

$$r_1 = r_2, \quad h_1 = h_2;$$

aber wir wissen auch, daß die Ordnung des Raumkegels K_2 um eine Einheit größer ist, als die des Raumkegels K_1, es ist also (Gleichung 10), wenn wir die vorherigen Bezeichnungen behalten:

$$\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 = 0$$

für alle Punkte M von Σ. Damit haben wir auch die dritte Eigenschaft bewiesen.

§ 10. Wir beweisen zuletzt eine für den zweiten Teil der Arbeit besonders wichtige Eigenschaft der Funktion $\mathfrak{R}(M_0, M)$. Wir wissen, daß ihre ersten Ableitungen längs der Raumkegel, von denen im § 6 die Rede ist, unstetig sind, aber wir werden jetzt zeigen, daß ihre konormale Ableitung längs eines Raumkegels in den Punkten, die weder auf anderen Raumkegeln noch auf (L_0) liegen, stetig ist.

Zu diesem Zwecke genügt es, die konormale Ableitung der im vorigen § definierten Funktion $f_i(M)$ zu untersuchen. Es ist evident, daß die konormale Ableitung der Funktion $f_i(M_0 M)$ im Zylindroid (D_z) längs des Raumkegels K_j, wo $j \neq i$ ist, stetig ist; für $i = 0$ müssen noch die gemeinsamen Punkte von (L_0) und K_j ausgeschlossen werden.

Untersuchen wir jetzt die konormale Ableitung von $f_i(M)$ längs des Raumkegels K_i in einem Punkte A von K_i [für $i = 0$ soll der betrachtete Punkt auf (L_0) nicht liegen]. Bedeutet n die irgendwie gerichtete Normale zu K_i im Punkte A und n_1, n_2, n_3, n_4 ihre Richtungskosinusse, so ist

$$n_1 = \lambda(x - x_i),\ n_2 = \lambda(y - y_i),\ n_3 = \lambda(z - z_i),\ n_4 = -\lambda(t - t_0);$$

um die konormale Ableitung von $f_i(M)$ zu berechnen, bestimmen wir die Grenze des Ausdruckes:

$$(15)\qquad \lambda\left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(x - x_i) + \frac{\partial f_i}{\partial y}(y - y_i) + \frac{\partial f_i}{\partial z}(z - z_i) + \frac{\partial f_i}{\partial t}(t - t_0)\right],$$

wenn der Punkt (x, y, z, t) sich dem Punkte A nähert längs der Normale n. Liegt der Punkt (x, y, z, t) außerhalb von K_i, so ist der Ausdruck (15), also auch seine Grenze gleich Null. Liegt der Punkt (x, y, z, t) im Innern von K_i, so müssen wir

$$f_i(M) = \begin{cases} \dfrac{t-t_0}{4\pi r_i} + 1 & \text{für } t < t_0 \\[2ex] \dfrac{t-t_0}{4\pi r_i} - 1 & \text{für } t > t_0 \end{cases}$$

setzen und eine leichte Rechnung beweist, daß der Ausdruck (15) und seine Grenze wieder gleich Null sind, da λ endlich bleibt. Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

§ 11. Es genügen jetzt nur einige Worte, um die Konstruktion der Funktionen $\mathfrak{R}_n$ des Herrn Zaremba, von denen im § 1 die Rede war, zu erläutern.

Es soll n eine ganze und positive Zahl, $M_0\,(x_0\, y_0\, z_0\, t_0)$ einen Punkt, wie im § 9, $M\,(x\, y\, z\, t)$ einen beliebigen Punkt des Zylindroids (D_z) bedeuten.

Liegt der Punkt M nicht innerhalb von $K^{(0)}$ [§ 9], so setzen wir

$$\mathfrak{R}_n(M_0, M) = 0;$$

liegt er innerhalb von $K^{(0)}$, so existiert, wie wir es wissen, eine endliche Anzahl von den im § 6 definierten Raumkegeln, innerhalb deren er liegt; es seien

$$K_0, K_1, K_2, \ldots, K_m$$

eben alle Raumkegel des § 6, innerhalb deren der Punkt M liegt; wir setzen

$$\mathfrak{R}_n(M_0, M) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i \cdot g_i$$

wo

$$g_i = \begin{cases} \dfrac{(t-t_0+r_i)^{2n-1}}{4\pi r_i} & \text{für } t < t_0 \\[2ex] \dfrac{(t-t_0-r_i)^{2n-1}}{4\pi r_i} & \text{für } t > t_0 \end{cases}$$

$$0 < r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

ist; es bedeutet ε_0 die Zahl 1, ε_i für $i = 1, 2, \ldots, m$ die Zahl $+1$ oder -1, je nachdem der Raumkegel K_i von gerader oder ungerader Ordnung ist; $(x_i\, y_i\, z_i\, t_0)$ sind die Koordinaten des Scheitels von K_i.

Es ist leicht einzusehen, daß die Funktionen $\mathfrak{R}_n$ folgende Eigenschaften besitzen, wenn nur $n \geqslant 2$ ist:

1) Die Funktion $\mathfrak{R}_n\,(M_0, M)$ ist für alle Punkte M des Zylindroids (D_z) erklärt, mit Ausnahme der Punkte der Geraden (L_0):

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0;$$

diese Gerade ist für $\mathfrak{R}_n$ singulär, aber so, daß die Differenz

$$\mathfrak{R}_n\,(M_0, M) - \frac{(t - t_0)^{2n-1}}{4\pi\, r_0}$$

eine stetige Funktion von M ist, deren Ableitungen zweiter Ordnung überall in (D_z) beschränkt bleiben.

2) Für jeden Punkt M des Zylindroids (D_z), der nicht auf L_0 liegt, besitzt $\mathfrak{R}_n$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung, die der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{R}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{R}_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{R}_n}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{R}_n}{\partial t^2}$$

genügen.

3) Für jeden Punkt M der Begrenzungen (3) ist

$$\mathfrak{R}_n\,(M_0, M) = 0.$$

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.
SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES.

DERNIERS MÉMOIRES PARUS.

(Les titres des Mémoires sont donnés en abrégé).

Avis.

Le «*Bulletin International*» de l'Académie des Sciences de Cracovie (Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles) paraît en deux séries: la première (*A*) est consacrée aux travaux sur les Mathématiques, l'Astronomie, la Physique, la Chimie, la Minéralogie, la Géologie etc. La seconde série (*B*) contient les travaux qui se rapportent aux Sciences Biologiques. Les abonnements sont annuels et partent de janvier. Prix pour un an (dix numéros): Série *A* . . . 8 K; Série *B* . . . 10 K.

Les livraisons du «*Bulletin International*» se vendent aussi séparément.

Adresser les demandes à la Librairie «Spółka Wydawnicza Polska» Rynek Gł., Cracovie (Autriche).