EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES
DÉCEMBRE 1913

ÜBER DIE MULTIPLIKATION DER UNENDLICHEN REIHEN

VON

A. ROSENBLATT

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1913

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTÉ FONDÉE EN 1873 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE:

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR: *Vacat.*

PRÉSIDENT: S. E. M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. BOLESLAS ULANOWSKI.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le Protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) Classe de Philologie,

b) Classe d'Histoire et de Philosophie,

c) Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie le «Bulletin International» qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. Le Bulletin publié par les Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie réunies, est consacré aux travaux de ces Classes. Le Bulletin publié par la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles paraît en deux séries. La première est consacrée aux travaux sur les Mathématiques, l'Astronomie, la Physique, la Chimie, la Minéralogie, la Géologie etc. La seconde série contient les travaux qui se rapportent aux Sciences Biologiques

Publié par l'Académie
sous la direction de M. **Ladislas Natanson,**
Secrétaire de la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.

24 grudnia 1913.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1913. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Filipowskiego.

EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES
DÉCEMBRE 1913

ÜBER DIE MULTIPLIKATION DER UNENDLICHEN REIHEN

VON

A. ROSENBLATT

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1913

O mnożeniu szeregów nieskończonych. — Über die Multiplikation der unendlichen Reihen.

Mémoire

de M. ***ALFRED ROSENBLATT,***

présenté, dans la séance du 1 Décembre 1913, par M. S. Zaremba m. c.

1. Es seien zwei unendliche Reihen gegeben

$$R_1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i, \quad R_2 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i, \tag{1}$$

deren Glieder wir als reell voraussetzen wollen. Unter der Cauchy'schen Produktreihe dieser beiden Reihen versteht man die folgende unendliche Reihe

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \ldots + a_i b_0) = \sum_{0}^{\infty} c_i. \tag{2}$$

Cauchy[1]) bewies, daß, wenn die beiden Reihen (1) absolut konvergieren, auch die Produktreihe (2) absolut konvergiert und daß ihre Summe C dem Produkte der Summen A und B der beiden Reihen (1) gleich ist, d. h. man hat die Gleichheit

$$C = A . B. \tag{3}$$

Es wurde dann von Herrn Mertens[2]) der wichtige Satz bewiesen, daß es zur Konvergenz der Produktreihe ausreicht, wenn

[1]) Analyse algébrique.

[2]) Crelle's Journal, Bd. **79** (1875).

nur eine der beiden als konvergent vorausgesetzten Reihen (1) auch absolut konvergiert und daß alsdann wieder die Gleichheit (3) gilt. Daß die Konvergenz aller drei Reihen (1) und (2) die Gleichheit (3) nach sich zieht, ist schon von Abel in seiner berühmten Abhandlung[1]) gezeigt worden.

Wenn keine der beiden als konvergent vorausgesetzten Reihen (1) absolut konvergiert, dann können in bezug auf die Produktreihe (2) verschiedene Fälle eintreten. Dieselbe kann absolut konvergieren, bedingt konvergieren, oder divergieren. Diesbezügliche Untersuchungen wurden von Pringsheim[2]), Voss[3]) und Cajori[4]) angestellt, und man kam dabei zu dem interessanten Ergebnis, daß die Produktreihe konvergieren kann, wenn eine und sogar wenn beide Reihen (1) divergieren: ja die Produktreihe kann dann sogar absolut konvergieren.

2. Als dann die Theorie der Summabilität von divergenten Reihen in den letzten Jahren des verflossenen Jahrhunderts begründet wurde, wurde natürlich die Frage aufgeworfen, was aus der vorausgesetzten Summabilität der Reihen (1) in bezug auf die Summabilität der Produktreihe (2) gefolgert werden kann. Je nachdem die eine oder die andere Methode der Summierung divergenter Reihen angewendet wird, erhält man verschiedene Resultate. Wir wollen im folgenden ausschließlich diejenige Summierungsmethode betrachten, die von Cesàro[5]) in die Wissenschaft eingeführt worden ist. Cesàro definiert auf rekurrente Weise die Partialsummen 0^{ter}, $1^{\text{ter}}, \ldots r^{\text{ter}}$ Ordnung der Reihe

[1]) Untersuchungen über die Reihe etc. Crelle's Journal Bd. **1** (1826).

[2]) Die Multiplikation bedingt konvergenter Reihen. Mathematische Annalen Bd. **21** (1883). Über die Anwendung der Cauchy'schen Multiplikationsregel auf bedingt konvergente oder divergente Reihen. Transactions of the American Mathematical Society. Bd. **2** (1901).

[3]) Über die Multiplikation bedingt konvergenter Reihen. Mathematische Annalen. Bd. **24** (1884).

[4]) Multiplication of semi-convergent series. American Journal of Mathematics. Bd. **15** (1893). Divergent and conditionally convergent series whose product is absolutely convergent. Transactions of the American Mathematical Society. Bd. **2** (1901). The application of the fundamental laws of algebra to the multiplication of infinite series. Bulletin of the American Mathematical Society Ser. 2. Bd. **8** (1902).

[5]) Sur la multiplication des séries. Bulletin des Sciences Mathématiques, Sér. **2**, T. **14** (1890).

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

folgenderweise:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad S_n^{(1)} = \sum_{i=0}^{n} S_i, \ldots, \quad S_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{n} S_i^{(r-1)}, \tag{4}$$

und nennt dann die Reihe summabel, wenn für einen gewissen Wert der ganzen positiven Zahl r der Grenzwert des Ausdrucks

$$\lim_{n=\infty} \frac{r!\, S_n^{(r)}}{(n+1)\ldots(n+r)} = \lim_{n=\infty} \frac{r!\, S_n^{(r)}}{n^r} \tag{5}$$

vorhanden ist. Man hat offenbar

$$S_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+r-k}{r} a_k, \tag{6}$$

oder $S_n^{(r)}$ ist der Koeffizient von x^n in der Entwicklung des Produktes

$$(1-x)^{-1-r} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

nach positiven steigenden Potenzen von x; andererseits ist

$$\binom{n+r}{r}$$

gleich dem Koeffizienten von x^n in der Entwicklung von

$$(1-x)^{-1-r}$$

nach steigenden Potenzen von x. Eine ähnliche Definition der Summe einer divergenten Reihe ist schon vor Cesàro von Hölder[1]) angegeben worden.

[1]) Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze. Mathematische Annalen Bd. 20.

gegeben worden, und es hat sich gezeigt, daß die Hölder'schen Grenzwerte mit den Cesàro'schen identisch sind.

Cesàro bewies nun den wichtigen Satz, daß, wenn die beiden Reihen (1) von der r^{ten}, respektive von der s^{ten} Ordnung summabel sind, die Produktreihe (2) in diesem Fall von der $r+s+1^{\text{ten}}$ Ordnung summabel ist. In der Tat hat man zunächst, wenn mit $A^{(r)}$, $B^{(r)}$, $C^{(r)}$ die n^{ten} Partialsummen der drei Reihen (1) und (2) bezeichnet werden

$$C_n^{(s)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{s+n-i}{s} c_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{s+n-i}{s} (a_0 b_i + \ldots + a\, b_0) =$$

$$= a_0 \sum_{i=0}^{n} \binom{s+n-i}{s} b_i + \ldots + a_n b_0 ,$$

somit

$$(7) \qquad C_n^{(s)} = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}^{(s)} .$$

Weiter erhält man, wenn man die n^{te} Partialsumme r^{ter} Ordnung der Reihe $\sum C_k^{(s)}$ bildet,

$$(8) \qquad C_n^{(r+s+1)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{r+n-i}{r} (a_0 B_i^{(s)} + \ldots + a_i B_0^{(s)}) =$$

$$= B_0^{(s)} \sum_{i=0}^{n} \binom{r+n-i}{r} a_i + \ldots + B_n^{(s)} \cdot a_0 =$$

$$= A_n^{(r)} B_0^{(s)} + A_{n-1}^{(r)} B_1^{(s)} + \ldots A_0^{(r)} B_n^{(s)} .$$

Wir setzen jetzt voraus, daß die Reihen (1) von r^{ter} respektive s^{ter} Ordnung summabel sind, und teilen zunächst die Summe (8) in drei Teile:

$$(9) \qquad C_n^{(r+s+1)} = \sum_{i=0}^{m} A_{n-i}^{(r)} B_i^{(s)} + \sum_{i=m+1}^{n-m} A_{n-i}^{(r)} B_i^{(s)} + \sum_{i=n-m+1}^{n} A_{n-i}^{(r)} B_i^{(s)},$$

wobei die ganze positive, von n unabhängige Zahl m dadurch bestimmt wird, daß die Ausdrücke

$$\frac{A_{n-i}^{(r)}}{(n-i)^r} \quad \text{und} \quad \frac{B_i^{(s)}}{i^s}$$

für $i = m+1, m+2, \ldots n-m$ von den Ausdrücken

$$\frac{A^{(r)}}{r!} \quad \text{und} \quad \frac{B^{(s)}}{s!},$$

in denen $A^{(r)}$, $B^{(s)}$ die Cesàro'schen Summen der Reihen (1) bedeuten, um weniger als ε verschieden sein sollen. Dann kann man die mittlere der in (9) rechts auftretenden Summen in der Gestalt schreiben.

$$(10) \qquad \sum_{i=m+1}^{n-m} A_{n-i}^{(r)} B_i^{(s)} = n^{r+s} \sum_{i=m+1}^{n-m} \frac{i^s (n-i)^r}{n^{r+s}} \left[\frac{A^{(r)} B^{(s)}}{r!\, s!} + \varepsilon_i \right],$$

wobei die Größen ε_i mit $\frac{1}{i}$ verschwinden und sämtlich absolut kleiner sind, als die beliebig vorgegebene Zahl ε. Nun ist aber offenbar

$$(11) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{n-m} \left(\frac{n-i}{n}\right)^r \left(\frac{i}{n}\right)^s = \int_0^1 x^s (1-x)^r \, dx.$$

Das Integral rechts ist das Euler'sche Beta-Integral

$$B(r+1, s+1),$$

und sein Wert in Gammafunktionen ausgedrückt ist:

$$(12) \quad B(r+1, s+1) = \frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} = \frac{r!\, s!}{(r+s+1)!}.$$

Da das Verhältnis $\frac{m}{n}$ mit wachsendem n gegen Null strebt, so hat man

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_n^{(r+s+1)}}{n^{r+s+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_{i=m+1}^{n-m} A_{n-i}^{(r)} B_i^{(s)} = \frac{A^{(r)} B^{(s)}}{(r+s+1)!},$$

und somit erhält man in der Tat

$$C^{(r+s+1)} = A^{(r)} B^{(s)}, \tag{13}$$

wenn $C^{(r+s+1)}$ die $(r+s+1)^{\text{te}}$ Cesàro'sche Summe der Reihe (2) bedeutet.

3. Wir wollen nun im folgenden zeigen, daß, wenn die beiden Reihen (1) summabel von der $r+1^{\text{ten}}$ respektive von der $s+1^{\text{ten}}$ Ordnung sind, dann unter gewissen Voraussetzungen über die Koeffizienten dieser Reihen die Produktreihe schon von der $r+s+2^{\text{ten}}$ Ordnung summabel ist, nicht erst von der $r+s+3^{\text{ten}}$.

Wir setzen voraus, daß die n^{ten} Teilsummen r^{ter} respektive s^{ter} Ordnung der Reihen (1) von der Ordnung von n^r, resp. von der Ordnung von n^s sind, oder in gebräuchlicher Schreibweise

$$A_n^{(r)} = O(n^r), \quad B_n^{(s)} = O(n^s), \tag{14}$$

d. h. daß die Quotienten

$$\frac{A_n^{(r)}}{n^r}, \quad \frac{B_n^{(s)}}{n^s}$$

absolut kleiner als eine endliche Größe für alle n sind. Für $r = -1$, $s = -1$ folgt als Spezialfall der Satz von Hardy[1]), daß zwei Reihen (1), die konvergieren und deren Koeffizienten die Bedingungen erfüllen

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{15}$$

eine konvergente Produktreihe besitzen, und daß auch die Gleich-

[1]) The multiplication of conditionally convergent series. Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. 2, Vol. 6, 1908. On the multiplication of conditionally convergent series. Ebenda Ser. 2, Vol. 10, 1912. Siehe ferner die neue Arbeit von Hardy und Littlewood: Contributions to the arithmetic theory of series. Ebda. Ser. 2, Vol. 11, 1913.

heit (3) gilt, während zwei konvergente Reihen, deren keine absolut konvergiert, im allgemeinen eine von der ersten Ordnung summable Produktreihe besitzen.

Hardy's Satz läßt sich leicht folgendermaßen beweisen:

Wir betrachten die n^{te} Teilsumme der Reihe (2):

$$C = \sum_{i=0}^{n} c_i = \sum_{i=0}^{n} (a_0 b_i + \ldots + a_i b_0)$$

und schreiben dieselbe in folgender Gestalt:

$$\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} a_i \cdot \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} b_i + a_{\frac{1}{2}n+1}(b_0 + \ldots + b_{\frac{1}{2}n-1}) + \ldots + a_n b_0 + \tag{16}$$

$$+ b_{\frac{1}{2}n+1}(a_0 + \ldots + a_{\frac{1}{2}n-1}) + \ldots + b_n a_0 .$$

Dabei setzen wir n als gerade voraus und können dies sicher tun, denn der Unterschied

$$\sum_{i=0}^{2n+1} c_i - \sum_{i=0}^{2n} c_i = c_{2n+1}$$

strebt mit wachsendem n wegen der Voraussetzungen (15) sicher gegen Null, da man hat

$$|c_{2n+1}| < K\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{1.2n} + \frac{1}{2.(2n-1)} + \ldots + \frac{1}{2n.1} + \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= K\left[\frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n-1}\right) + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2n} + 1\right)\right] = \frac{K}{2n+1}\left[2 + 2\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i}\right] <$$

$$< \frac{2K}{2n+1}\Big(2 + \log(2n)\Big),$$

und der rechte Ausdruck mit $\frac{1}{n}$ gegen Null strebt.

Wir haben jetzt die beiden Teilsummen zu betrachten:

$$S_1 = a_{\frac{1}{2}n+1}(b_0 + \dots + b_{\frac{1}{2}n-1}) + \dots + a_n b_0 \tag{17}$$

und

$$S_2 = b_{\frac{1}{2}n+1}(a_0 + \dots + a_{\frac{1}{2}n-1}) + \dots + b_n a_0 . \tag{18}$$

Die erste Summe und ebenso die zweite teilen wir in zwei Teile, indem wir eine ganze Zahl m zwischen $\frac{1}{2}n$ und n einschalten, die mit n ins Unendliche wächst, deren Verhältnis zu n gegen Null strebt und die wir noch weiter unten näher präzisieren. Wir haben also

$$\left\{\begin{aligned} S_1 &= S_1' + S_2', \\ S_1' &= a_{\frac{1}{2}n+1}(b_0 + \dots + b_{\frac{1}{2}n-1}) + \dots + a_{n-m}(b_0 + \dots + b_m), \\ S_2' &= a_{n-m+1}(b_0 + \dots + b_{m-1}) + \dots + a_n b_0 . \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Ebenso schreiben wir

$$\left\{\begin{aligned} S_2 &= S_3' + S_4', \\ S_3' &= b_{\frac{1}{2}n+1}(a_0 + \dots + a_{\frac{1}{2}n-1}) + \dots + b_{n-m}(a_0 + \dots + a_m), \\ S_4' &= b_{n-m+1}(a_0 + \dots + a_{m-1}) + \dots + b_n a_0 . \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Ist n genügend groß, dann hat man für alle $k \geqq m$

$$\left| \sum_{i=0}^{k} a_i - A \right| < \varepsilon, \quad \left| \sum_{i=0}^{k} b_i - B \right| < \varepsilon, \tag{21}$$

somit läßt sich S_1' in der Form schreiben:

$$S_1' = \sum_{i=\frac{1}{2}n+1}^{n-m} a_i \cdot B + \sum_{i=\frac{1}{2}n+1}^{n-m} a_i \cdot \varepsilon_i .$$

Dabei streben die Größen ε_i mit wachsendem n gegen Null, indem sie sämtlich absolut kleiner als ε sind. Ebenso hat man

$$S_3' = \sum_{i=\frac{1}{2}n+1}^{n-m} b_i \cdot A + \sum_{i=\frac{1}{2}n+1}^{n-m} b_i \cdot \varepsilon_i .$$

Somit hat man offenbar die Ungleichungen

$$|S_1'| < B\varepsilon_1 + K\int_{\frac{1}{2}n}^{n-m}\frac{dx}{x} \cdot \varepsilon_2 = B\varepsilon_1 + K\left[\log(n-m) - \log\left(\tfrac{1}{2}n\right)\right]\varepsilon_2 .$$

$$|S_3'| < A\varepsilon_1 + K\int_{\frac{1}{2}n}^{n-m}\frac{dx}{x} \cdot \varepsilon_2 = A\varepsilon_1 + K\left[\log(n-m) - \log\left(\tfrac{1}{2}n\right)\right]\varepsilon_2 .$$

Dabei streben ε_1 und ε_2 gegen Null, daher streben auch S_1' und S_3' gegen Null.

Jetzt haben wir noch die beiden Teilsummen S_2' und S_4' zu betrachten.

Nun hat man offenbar

$$(21) \quad \begin{cases} |S_2'| < \displaystyle\sum_{i=n-m+1}^{n} |a_i| \cdot \sum_{i=0}^{m-1} |b_i| , \\ |S_4'| < \displaystyle\sum_{i=n-m+1}^{n} |b_i| \cdot \sum_{i=0}^{m-1} |a_i| , \end{cases}$$

und wegen der Voraussetzungen (15) hat man

$$|S_2'| < K\int_{n-m}^{n}\frac{dx}{x} \cdot \int_{1}^{m}\frac{dx}{x} = K\left[\log n - \log(n-m)\right] \log m ,$$

$$|S_4'| < K\int_{n-m}^{n}\frac{dx}{x} \cdot \int_{1}^{m}\frac{dx}{x} = K\left[\log n - \log(n-m)\right] \log m .$$

Wegen der Gleichheit

$$\log(n-m) = \log n + \log\left(1-\frac{m}{n}\right) = \log n - \frac{m}{n}\Big(1+\varepsilon(n)\Big),$$

wobei $\varepsilon(n)$ mit $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert, streben die Ausdrücke S_2' und S_4' wieder mit $\frac{1}{n}$ gegen Null, wenn nur

$$\lim_{n=\infty} \frac{m \log m}{n} = 0 \tag{22}$$

ist, was z. B. für $m = \log n$, oder $m = \sqrt{n}$ zutrifft.

Somit hat man

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n} c_i = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} a_i \,.\, \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} b_i, \tag{23}$$

daher gilt wieder die Gleichheit (3) und der Satz von Hardy ist bewiesen.

4. Wir beweisen nunmehr unsere Verallgemeinerung des Satzes von Hardy. Wir betrachten die Summe (8) und bilden die Summe

$$C_n^{(r+s+2)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^{(r+s+1)} = \sum_{k=0}^{n} \left(A_0^{(r)} B_k^{(s)} + \ldots + A_k^{(r)} B_0^{(s)}\right). \tag{24}$$

Wir schreiben diese Summe in folgender Gestalt

$$C_n^{(r+s+2)} = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} A_i^{(r)} . \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} B_i^{(s)} + \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n} A_{\frac{1}{2}n+i}^{(r)} \left(B_0^{(s)} + \ldots + B_{\frac{1}{2}n-i}^{(s)}\right) + \tag{25}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n} B_{\frac{1}{2}n+i}^{(s)} \left(A_0^{(r)} + \ldots + A_{\frac{1}{2}n-i}^{(r)}\right).$$

Dabei wird wieder n als gerade vorausgesetzt und wir können dies wieder tun, denn wegen unserer Voraussetzungen (14) sind die Größen $C_n^{(r+s+1)}$ von der Ordnung

$$K.\sum_{i=1}^{n-1} i^r.(n-i)^s,$$

dies strebt aber mit wachsendem n gegen

$$K n^{r+s+1}\int_0^1 x^r(1-x)^s\,dx = K n^{r+s+1}.\frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)},$$

daher strebt der Quotient

$$\frac{C_n^{(r+s+1)}}{n^{r+s+2}}$$

gegen Null.

Zunächst hat man offenbar wegen unserer Voraussetzungen

$$(26)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{1}{n^{r+s+2}}\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} A_i^{(r)}.\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} B_i^{(s)} = \frac{A^{(r+1)}.B^{(s+1)}}{(r+1)!\,(s+1)!}.\frac{1}{2^{r+s+2}}.$$

Wir betrachten sodann die Teilsumme

$$(27)\qquad S_1 = \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n} A_{\frac{1}{2}n+i}^{(r)}\left(B_0^{(s)}+\ldots+B_{\frac{1}{2}n-i}^{(s)}\right),$$

und teilen dieselbe in zwei Summanden

$$(28)\qquad S_1' = \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n-m} A_{\frac{1}{2}n+i}^{(r)}\left(B_0^{(s)}+\ldots+B_{\frac{1}{2}n-i}^{(s)}\right)$$

und

$$(29)\qquad S_2' = \sum_{i=1}^{m} A_{n-m+i}^{(r)}\left(B_0^{(s)}+\ldots+B_{m-i}^{(s)}\right).$$

Die Summe S_1' behandeln wir folgendermaßen. Wir führen die Bezeichnungen ein

$$u_k = A_{n-k}^{(r)} \cdot \sum_{i=0}^{k} B_i^{(s)} \cdot \frac{1}{k^{s+1}}, \tag{30}$$

$$v_k = \left(\frac{k}{n}\right)^{s+1}. \tag{31}$$

Dann hat man

$$\frac{1}{n^{r+s+2}} S_1' = \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=m}^{\frac{1}{2}n-1} u_k v_k .$$

Setzt man nun

$$s_l = \sum_{k=m}^{l} u_k, \quad s_{m-1} = 0, \tag{32}$$

dann erhält man

$$\frac{1}{n^{r+s+2}} S_1' = \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=m}^{\frac{1}{2}n-1} (s_k - s_{k-1})\, v_k =$$

$$= \frac{1}{n^{r+1}} \left[\sum_{k=m}^{\frac{1}{2}n-2} s_k\,(v_k - v_{k+1}) + s_{\frac{1}{2}n-1} v_{\frac{1}{2}n-1} \right].$$

Nun ist, wenn m genügend groß ist, für alle $k \geqq m$

$$u_k = \frac{B^{(s+1)}}{(s+1)!} \cdot A_{n-k}^{(r)} (1 + \varepsilon_k),$$

somit hat man

$$s_l = \frac{B^{(s+1)}}{(s+1)!} \left[\sum_{k=m}^{l} A_{n-k}^{(r)} + \sum_{k=m}^{l} \varepsilon_k\, A_{n-k}^{(r)} \right]. \tag{33}$$

Die Größen ε_k sind alle absolut kleiner als eine beliebig vorgegebene Größe ε, sobald n genügend groß ist. Weiter hat man

$$\sum_{k=m}^{l} A^{(r)}_{n-k} = \sum_{i=0}^{n-m} A^{(r)}_i - \sum_{i=0}^{n-l-1} A^{(r)}_i,$$

somit kann man schreiben

$$\frac{1}{n^{r+s+2}} S_1' = \frac{B^{(s+1)}}{(s+1)!\, n^{r+1}} \Bigg[\sum_{i=0}^{n-m} A^{(r)}_i \cdot v_m - \Bigg\{ \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} A^{(r)}_i \cdot v_{\frac{1}{2}n-1} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n+1} A^{(r)}_i \left(v_{\frac{1}{2}n-2} - v_{\frac{1}{2}n-1}\right) + \ldots + \sum_{i=0}^{n-m-1} A^{(r)}_i \left(v_m - v_{m+1}\right) \Bigg\} +$$

$$+ \sum_{k=m}^{\frac{1}{2}n-2} \left(\sum_{i=m}^{k} \varepsilon_i\, A^{(r)}_{n-i} \right) \cdot (v_k - v_{k+1}) + \sum_{k=m}^{\frac{1}{2}n-1} \varepsilon_k\, A^{(r)}_{n-k} \cdot v_{\frac{1}{2}n-1} \Bigg].$$

Die Doppelsumme in der Klammer

$$\sum_{k=m}^{\frac{1}{2}n-2} \left(\sum_{i=m}^{k} \varepsilon_i\, A^{(r)}_{n-i} \right) (v_k - v_{k+1})$$

zusammen mit der einfachen Summe

$$\sum_{k=m}^{\frac{1}{2}n-1} \varepsilon_k\, A^{(r)}_{n-k} \cdot v_{\frac{1}{2}n-1}$$

sind offenbar absolut kleiner als

$$\varepsilon\, v_{\frac{1}{2}n-1} \sum_{k=m}^{\frac{1}{2}n-1} \left| A^{(r)}_{n-k} \right|,$$

also kleiner als

$$K\varepsilon \cdot \frac{1}{2^{s+1}} \int_{\frac{1}{2}n}^{n-m} x^r\, dr = K\varepsilon \cdot \frac{1}{2^{s+1}} \left[(n-m)^{r+1} - \left(\frac{n}{2}\right)^{r+1} \right] \frac{1}{r+1}.$$

Der Quotient dieses Ausdruckes und der Größe n^{r+1} verschwindet also mit $\frac{1}{n}$. Andererseits ist offenbar

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n} A_i^{(r)}}{n^{r+1}} \cdot v_{\frac{1}{2}n-1} = \frac{1}{2^{r+s+2}} \cdot \frac{A^{(r+1)}}{(r+1)!}, \tag{34}$$

und

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-m} A_i^{(r)}}{n^{r+1}} \cdot v_m = 0. \tag{35}$$

Weiter können wir offenbar schreiben

$$v_{\frac{1}{2}n-k-1} - v_{\frac{1}{2}n-k} = \left(\frac{\frac{1}{2}n-k-1}{n}\right)^{s+1} - \left(\frac{\frac{1}{2}n-k}{n}\right)^{s+1} =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}n-k}{n^{s+1}}\right)^{s+1} \left[-1 + \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}n-k}\right)^{s+1}\right],$$

und da k die Werte $1, 2, \ldots \frac{1}{2}n - m - 1$ annimmt, so hat man für genügend großes n

$$v_{\frac{1}{2}n-k-1} - v_{\frac{1}{2}n-k} = -\frac{(\frac{1}{2}n-k)^{s+1}}{n^{s+1}} \cdot \frac{s+1}{\frac{1}{2}n-k}(1+\varepsilon_k). \tag{36}$$

Somit kann man schreiben

$$\frac{1}{n^{r+1}} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n+k} A_i^{(r)} \cdot (v_{\frac{1}{2}n-k-1} - v_{\frac{1}{2}n-k}) =$$

$$= -\frac{A^{(r+1)}}{(r+1)!} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}n+k}{n}\right)^{r+1} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}n-k}{n^{s+1}}\right)^{s} \cdot (s+1) \cdot (1+\varepsilon_k),$$

wo ε_k absolut kleiner als eine beliebig kleine vorgegebene positive Größe ε ist.

Nun hat man aber offenbar

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}n-m-1}\frac{(\frac{1}{2}n+k)^{r+1}(\frac{1}{2}n-k)^{s}.(s+1)}{n^{r+s+2}}=\frac{s+1}{2^{r+s+1}}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}(1+2x)^{r+1}(1-2x)^{s}dx.$$
(37)

Setzt man noch $x'=2x$, dann erhält man das Integral

$$\int\limits_{0}^{1}(1+x)^{r+1}(1-x)^{s}\,dx, \tag{38}$$

und es ergibt sich somit der Grenzübergang

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n^{r+s+2}}S_1'= \tag{39}$$
$$=\frac{A^{(r+1)}.B^{(s+1)}}{(r+1)!\,(s+1)!}\left\{-\frac{1}{2^{r+s+2}}+\frac{s+1}{2^{r+s+2}}\int\limits_{0}^{1}(1-x)^{r+1}(1-x)^{s}\,dx\right\}.$$

Ganz analog erhält man natürlich, wenn man die Summe S_2 betrachtet

$$S_2=\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n}B^{(s)}_{\frac{1}{2}n-i}\,(A_0^{(r)}+\ldots+A^{(r)}_{\frac{1}{2}n-i}), \tag{40}$$

und dieselbe in die beiden Teilsummen S_3', S_4' zerlegt

$$S_2=S_3'+S_4',$$

$$S_3'=\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n-m}B^{(s)}_{\frac{1}{2}n+i}\,(A_0^{(r)}+\ldots+A^{(r)}_{\frac{1}{2}n-i}) \tag{41}$$

und

$$S_4'=\sum_{i=1}^{m}B^{(s)}_{n-m+i}\,(A_0^{(r)}+\ldots+A^{(r)}_{m-i}), \tag{42}$$

den Grenzübergang

$$\text{(43)}\quad \lim \frac{1}{n^{r+s+2}} S_3' =$$
$$= \frac{A^{(r+1)} B^{(s+1)}}{(r+1)!\,(s+1)!} \left\{ -\frac{1}{2^{r+s+2}} + \frac{r+1}{2^{r+s+1}} \int_0^1 (1+x)^{s+1} (1-x)^r \, dx \right\}.$$

5. Wir transformieren nun das Integral (38), indem wir die unabhängige Variable y einführen

$$y = \frac{1-x}{1+x}, \quad x = \frac{1-y}{1+y},$$

und erhalten dann

$$\int_0^1 (1+x)^{r+1} (1-x)^s \, dx = 2^{r+s+2} \int_0^1 \frac{y^s \, dy}{(1+y)^{r+s+3}}$$

und ebenso

$$\int_0^1 (1+x)^{s+1} (1-x)^r \, dx = 2^{r+t+2} \int_0^1 \frac{y^r \, dy}{(1+y)^{r+s+3}}.$$

Nun hat man weiter

$$(s+1) \int_0^1 \frac{y^s \, dy}{(1+y)^{r+s+3}} = \left. \frac{y^{s+1}}{(1+y)^{r+s+3}} \right|_0^1 + (r+s+3) \int_0^1 \frac{y^{s+1} \, dy}{(1+y)^{r+s+4}},$$

und ebenso ist auch

$$(r+1) \int_0^1 \frac{y^r \, dy}{(1+y)^{r+s+3}} = \left. \frac{y^{r+1}}{(1+y)^{r+s+3}} \right|_0^1 + (r+s+3) \int_0^1 \frac{y^{r+1} \, dy}{(1+y)^{r+s+4}}.$$

Es gilt aber die Euler'sche [1]) Formel

[1]) Siehe z. B. Nielsen: Handbuch der Theorie der Gammafunktion. 1906.

$$(44) \qquad \int_0^1 \frac{y^{r+1}+y^{s+1}}{(1+y)^{r+s+4}}\,dy = \frac{\Gamma(r+2)\,\Gamma(s+2)}{\Gamma(r+s+4)}.$$

Daher erhält man schließlich

$$(44) \quad \lim \frac{S_1'+S_3'}{n^{r+s+2}} =$$

$$= \frac{A^{(r+1)}\,B^{s+1}}{(r+1)!\,(s+1)!}\left\{-\frac{1}{2^{r+s+1}}+\frac{1}{2^{r+s+2}}+\frac{(r+1)!\,(s+1)!}{(r+s+2)!}\right\}.$$

Es ist jetzt zu beweisen, daß die beiden Ausdrücke

$$(45) \qquad \frac{S_2'}{n^{r+s+2}} \quad \text{und} \quad \frac{S_4'}{n^{r+s+2}}$$

mit wachsendem n gegen Null konvergieren. Diese beiden Ausdrücke sind absolut kleiner als

$$\frac{1}{n^{r+s+2}} \sum_{i=n-m+1}^{n} \left| A_i^{(r)} \right| . \sum_{i=0}^{m} \left| B_i^{(s)} \right|$$

respektive als

$$\frac{1}{n^{r+s+2}} \sum_{i=n-m+1}^{n} \left| B_i^{(s)} \right| . \sum_{i=0}^{m} \left| A_i^{(s)} \right| .$$

Nun sind diese beiden Ausdrücke wegen der Bedingungen (14) absolut kleiner als

$$(46) \qquad \frac{K}{n^{r+s+2}} \int_{n-m}^{n} x^r\,dx \int_0^m x^s\,dx \quad \text{und} \quad \frac{K}{n^{r+s+2}} \int_{n-m}^{n} x^s\,dx \int_0^m x^r\,dx.$$

Diese Ausdrücke genügen den Ungleichungen

$$\leqq \frac{K_1}{n^{r+s+2}}\left[n^{r+1}-(n-m)^{r+1}\right].\,m^{s+1} \leqq \frac{K_2}{n^{s+1}}\,\frac{m}{n}\,.\,m^{s+1} = K_2\left(\frac{m}{n}\right)^{s+2},$$

und

$$\leqq \frac{K_1}{n^{r+s+2}}\,[n^{s+1} - (n-m)^{s+1}]\,.\,m^{r+1} \leqq K_2 \left(\frac{m}{n}\right)^{r+1}.$$

Daher verschwinden die Ausdrücke (45) mit $\frac{1}{n}$, sobald nur $\frac{m}{n}$ verschwindet, und man hat den Grenzübergang:

$$(47) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{C_n^{(r+s+2)}}{n^{r+r+2}} = \frac{A^{(r+1)}\,B^{(s+1)}}{(r+s+2)!},$$

d. h. die Gleichheit

$$(48) \qquad C^{(r+s+2)} = A^{(r+1)}\,.\,B^{(s+1)},$$

oder in Worten den Satz:

Sind die beiden Reihen (1) summierbar von den Ordnungen $r+1$ und $s+1$, dann ist die Produktreihe (3) mit $r+s+2^{\text{tem}}$ Cesàro'schem Mittelwertverfahren summierbar, sobald die beiden Ungleichungen (14) erfüllt sind.

6. Der soeben bewiesene Satz läßt sich unschwer auch auf summierbare Reihen von beliebiger, nicht nur ganzzahliger Ordnung ausdehnen, wie sie von Knopp[1]) und Chapman[2]) betrachtet wurden. Ohne uns dabei aufzuhalten, wollen wir den Satz von Hardy in anderer Weise verallgemeinern. Hardy selbst hat in der ersten der angeführten Arbeiten den folgenden Satz bewiesen:

Bedeutet $\Psi(n)$ irgend eine Funktion von der Gestalt

$$(49) \qquad (\log n)^{\alpha}\,(\log\log n)^{\beta}\,(\log\log\log n)^{\gamma}\ldots$$

und erfüllen die Koeffizienten a_n und b_n die beiden Bedingungen

$$(50) \qquad \lim_{n=\infty} n\Psi(n)\,a_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{n\,b_n}{\Psi(n)} = 0,$$

[1]) Grenzwerte von Reihen bei Annäherung an die Konvergenzgrenze. Dissertation, Berlin 1907.

[2]) On non-integral orders of summability of series and integrals. Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. 2, Vol. 8.

dann zieht die Konvergenz der beiden Reihen (1) die Konvergenz der Produktreihe nach sich.

Diesen Satz wollen wir dahin verallgemeinern, daß wir zeigen: Die Produktreihe konvergiert, wenn die beiden Bedingungen erfüllt sind

$$(51) \qquad n\Psi(n)\,a_n = O(1), \quad \frac{n}{\Psi(n)}\,b_n = O(1).$$

Die Schreibweise $O(1)$ bedeutet bekanntlich, daß die links stehenden Ausdrücke, absolut genommen, endlich sind.

Die Idee des Beweises ist die folgende. Im § 3 haben wir den Satz von Hardy in der Weise bewiesen, daß wir das Dreieck, welches in der bekannten Tabelle, deren Zeilen den a_i und deren Kolonnen den b_j entsprechen, aus den Produkten $a_i b_j$ mit $i + j \leqq n$ gebildet wird, in fünf Teile geteilt haben, nämlich in

1⁰ das Quadrat

$$i \leqq \frac{n}{2}, \quad j \leqq \frac{n}{2},$$

2⁰ die beiden Teile

$$\frac{n}{2} < i \leqq n - m, \ j \leqq n - i \ \text{ und } \ \frac{n}{2} < j \leqq n - m, \ i \leqq n - j,$$

3⁰ die beiden Teile (Dreiecke)

$$n - m < i \leqq n, \ j \leqq n - i \ \text{ und } \ n - m < j \leqq n, \ i \leqq n - j.$$

Jetzt wollen wir das Dreieck ebenfalls in fünf Teile teilen, und zwar in

1⁰ das Rechteck

$$i \leqq \left[\frac{n}{\Psi(n)}\right], \quad j \leqq n - \left[\frac{n}{\Psi(n)}\right],$$

wobei $[a]$ die größte ganze in a enthaltene Zahl bedeutet,

2^0 die zwei Teile

$$\left[\frac{n}{\Psi(n)}\right] < i \leqq n - m, \quad j \leqq n - i \quad \text{und}$$

$$n - \left[\frac{n}{\Psi(n)}\right] < j \leqq n - m, \quad i \leqq n - j$$

3^0 die zwei Teile

$$n - m < i \leqq n, \quad j \leqq n - i \quad \text{und} \quad n - m < j \leqq n, \quad i \leqq n - j.$$

Wir haben jetzt

$$\begin{aligned}(52)\qquad \sum_{i=0}^{n} c_i = \sum_{i=0}^{l} a_i \cdot \sum_{i=0}^{n-l} b_i + \sum_{i=1}^{n-m-l} a_{l+i}(b_0 + \ldots + b_{n-l-i}) + \\ + \sum_{i=1}^{m} a_{n-m+i}(b_0 + \ldots + b_{m-i}) + \sum_{i=1}^{l-m} b_{n-l+i}(a_0 + \ldots + a_{l-i}) + \\ + \sum_{i=1}^{m} b_{n-m+i}(a_0 + \ldots + a_{m-i}).\end{aligned}$$

Dabei ist gesetzt worden

$$l = \left[\frac{n}{\Psi(n)}\right].$$

Zunächst hat man offenbar

$$(53)\qquad \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{l} a_i \cdot \sum_{i=0}^{n-l} b_i = A . B .$$

Man hat hierauf der Reihe nach vier Summen zu betrachten, und zwar hat man zunächst die erste Summe

$$(54)\qquad S_1 = \sum_{i=1}^{n-m-l} a_{l+i}(b_0 + \ldots + b_{n-l-i}).$$

Wir wählen n so groß, daß für $k \geqq m$ die beiden Ungleichungen gelten

$$\left|\sum_{i=0}^{k} a_i - A\right| < \varepsilon, \quad \sum_{i=0}^{k} \left| b_i - B \right| < \varepsilon,$$

dann hat man

$$S_1 = B \,.\, \sum_{i=1}^{n-m-l} a_{l+i} + \sum_{i=1}^{n-m-l} \varepsilon_i \, a_{l+i},$$

wobei die ε_i absolut kleiner als ε sind.

Nun ist

$$\sum_{i=l}^{n-m-l} \left| a_{l+i} \right| < K \int_{l}^{n-m} \frac{dx}{x \Psi(x)}.$$

Die Funktion $\Psi(x)$ möge die Gestalt haben

$$\Psi(x) = \log^{\alpha_1} x \,.\, \log_2^{\alpha_2} x \ldots \log_k^{\alpha_k} x. \tag{55}$$

Die nicht negativen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ sind sämtlich nicht größer als 1, da sonst die erste der Reihen (1) absolut konvergieren würde.

Setzt man zunächst $\alpha_1 \neq 1$ voraus, und bezeichnet dann noch mit $\chi(x)$ den Ausdruck

$$\chi(x) = \log_2^{\alpha_2} x \ldots \log_k^{\alpha_k} x, \tag{56}$$

dann hat man

$$\begin{aligned} \int_{l}^{n-m} \frac{dx}{x \log^{\alpha_1} x \,.\, \chi(x)} &= \\ &= \frac{1}{1-\alpha_1} \left. \frac{\log^{1-\alpha_1} x}{\chi(x)} \right|_{l}^{n-m} + \frac{1}{1-\alpha_1} \int_{l}^{n-m} \frac{\log^{1-\alpha_1} x}{\chi^2(x)} \,.\, \frac{d\chi(x)}{dx} \, dx. \end{aligned} \tag{57}$$

Nun ist

$$\frac{d\chi(x)}{dx} = \chi(x) \frac{d \log \chi(x)}{dx}, \qquad \log \chi(x) = \alpha_2 \log_3 x + \ldots + \alpha_k \log_{k+1} x,$$

also

$$\frac{d\chi(x)}{dx}=\chi(x)\left[\frac{\alpha_2}{x\log x\log_2 x}+\ldots+\frac{\alpha_k}{x\log x\ldots\log_k x}\right].$$

Somit erhalten wir

$$(58)\qquad \int\frac{\log^{1-\alpha_1}x}{\chi^2(x)}\frac{d\chi(x)}{dx}\,dx=\alpha_2\int\frac{dx}{x\,\Psi(x)\log_2 x}\,[1+\varepsilon(x)],$$

wobei $\varepsilon(x)$ mit $\frac{1}{x}$ verschwindet. Wir sehen also, daß der zweite Summand in (57) unendlich klein ist im Verhältnis zum ersten Summanden. Der erste Summand gibt aber

$$(59)\qquad \frac{1}{1-\alpha_1}\left[\frac{\log(n-m)}{\Psi(n-m)}-\frac{\log l}{\Psi(l)}\right].$$

Man hat nun

$$\log(n-m)=\log n+\log\left(1-\frac{m}{n}\right)=\log n-\frac{m}{n}(1+\varepsilon(n)),$$

$$\Psi(n-m)=\log^{\alpha_1}(n-m)\ldots\log^{\alpha_k}(n-m)=\log^{\alpha_1}n\left[1-\frac{m}{n\log n}(1+\varepsilon_1(n)\right]^{\alpha_1}.$$

$$.\log_2^{\alpha_2}n\left[1-\frac{m}{n\log n\log_2 n}(1+\varepsilon_2(n))\right]^{\alpha_2}\ldots$$

$$\ldots\log_k^{\alpha_k}n\left[1-\frac{m}{n\log n\ldots\log_k n}(1+\varepsilon_k(n))\right]^{\alpha_k}=$$

$$=\Psi(n)\left[1-\frac{m}{n\log n}(\alpha_1+\varepsilon(n))\right].$$

Somit hat man

$$\frac{\log(n-m)}{\Psi(n-m)}=\frac{\log n}{\Psi(n)}\,\frac{1-\frac{m}{n\log n}(1+\varepsilon(n))}{1-\frac{m}{n\log n}(\alpha_1+\varepsilon'(n))}=$$

$$=\frac{\log n}{\Psi(n)}\left[1-\frac{m}{n\log n}(1-\alpha_1+\varepsilon(n))\right]$$

Ebenso hat man aber

$$\log l = \log n - \log \Psi(n) = \log n \left[1 - \frac{\log \Psi(n)}{\log n}\right],$$

$$\Psi(l) = \Psi\left(\frac{n}{\Psi(n)}\right) = \log^{\alpha_1}\left(\frac{n}{\Psi(n)}\right) \dots \log_k^{\alpha_k}\left(\frac{n}{\Psi(n)}\right) =$$

$$= \log^{\alpha_1} n \left[1 - \frac{\log \Psi(n)}{\log n}\right]^{\alpha_1} . \log_2^{\alpha_2} n \left[1 - \frac{\log \Psi(n)}{\log n \log_2 n}(1 + \varepsilon_1(n))\right]^{\alpha_2} \dots$$

$$\dots \log_k^{\alpha_k} n \left[1 - \frac{\log \Psi(n)}{\log n \dots \log_k n}(1 + \varepsilon_{k-1}(n))\right]^{\alpha_k} =$$

$$= \Psi(n)\left[1 - \alpha_1 \frac{\log \Psi(n)}{\log n}(1 + \varepsilon(n))\right].$$

Somit hat man

$$\frac{\log l}{\Psi(l)} = \frac{\log n}{\Psi(n)}\left[1 - \frac{\log \Psi(n)}{\log n}(1 - \alpha_1 + \varepsilon(n))\right]$$

und

$$\text{(60)} \qquad \frac{\log(n-m)}{\Psi(n-m)} - \frac{\log l}{\Psi(l)} =$$

$$= \frac{\log n}{\Psi(n)}\left[-\frac{m}{n \log n}(1 - \alpha_1 + \varepsilon(n)) + \frac{\log \Psi(n)}{\log n}(1 - \alpha_1 + \varepsilon'(n))\right].$$

Die Summe S_1 verschwindet also mit $\frac{1}{n}$, sobald das Verhältnis

$$\frac{m}{n\,\Psi(n)}$$

mit $\frac{1}{n}$ gegen Null strebt.

Ist $\alpha_1 = 1$, dann betrachtet man aber das Integral

$$\int \frac{dx}{x \log x (\log_2{}^{\alpha_2} x)\, \chi(x)}, \quad \chi(x) = \log_3^{\alpha_3} x \dots \log_k^{\alpha_k} x,$$

und erhält

$$\frac{1}{1-\alpha_2}\frac{\log_2^{1-\alpha_2} x}{\chi(x)}\Bigg|_l^{n-m} + \frac{1}{1-\alpha_2}\int_l^{n-m}\frac{\log_2^{1-\alpha_2} x}{\chi^2(x)}\frac{d\chi(x)}{dx}\,dx.$$

Diese Integration gilt, solange α_2 von Eins verschieden ist. Man zeigt jetzt genau so, wie vorher, daß S_1 mit $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert. Analog verfährt man, wenn zwar $\alpha_2 = 1$ ist, wenn aber eines der $\alpha_i\,(i > 2)$ von Eins verschieden ist.

Sind sämtliche α gleich Eins, dann ist das Integral

$$\int\frac{dx}{x\,\Psi(x)}$$

sofort integrierbar, und gleich

$$\log_{k+1}(x),$$

worauf man wieder leicht beweist, daß S_1 gegen Null konvergiert, indem jetzt

$$\log_{k+1}(n-m) - \log_{k+1} l = \log_{k+1} n\,.\left[1 - \frac{m}{n\log n\ldots\log_{k+1} n}(1+\varepsilon(n))\right] -$$

$$-\log_{k+1} n\left[1 - \frac{\log\Psi(n)}{\log n\ldots\log_{k+1} n}(1+\varepsilon'(n))\right] =$$

$$= \log_{k+1} n\left[-\frac{m}{n\log n\ldots\log_{k+1} n} + \frac{\log\Psi(n)}{\log n\ldots\log_{k+1} n}\right](1+\varepsilon(n))$$

ist.

7. Wir betrachten jetzt die Summe S_2

$$S_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{n-m+i}(b_0 + \ldots + b_{m-i}). \tag{61}$$

Diese Summe ist absolut kleiner als

$$\sum_{i=1}^{m}\left|a_{n-m+i}\right|\cdot\sum_{i=0}^{m-1}\left|b_i\right|,$$

somit absolut kleiner als

$$K \cdot \int_{n-m}^{n} \frac{dx}{x\,\Psi(x)} \cdot \int_{1}^{m} \frac{\Psi(x)}{x}\,dx.$$

Jetzt hat man zunächst wieder

$$\int_{n-m}^{n} \frac{dx}{x\,\Psi(x)} = \frac{1}{1-\alpha_1} \left.\frac{\log^{1-\alpha_1} x}{\chi(x)}\right|_{n-m}^{n} + R(n),$$

wo wieder das Integral $R(n)$ gegen den ersten Ausdruck rechts zu vernachlässigen ist. Es ist jetzt

$$\left.\frac{\log x}{\Psi(x)}\right|_{n-m}^{n} = \frac{\log n}{\Psi(n)} - \frac{\log(n-m)}{\Psi(n-m)} = \frac{m \log n}{n\,\Psi(n) \log n}(1-\alpha_1+\varepsilon(n)).$$

Anderseits hat man aber jetzt

$$(62) \qquad \left|\int_{1}^{m} \frac{\Psi(x)\,dx}{x}\right| < \Psi(m) \log m.$$

Somit verschwindet sicher S_2 mit $\frac{1}{n}$, sobald $\frac{m}{n}$ genügend schnell gegen Null konvergiert, wenn nämlich

$$\lim_{n=\infty} \frac{m \log m\; \Psi(m)}{n\;\Psi(n)} = 0$$

ist. Wenn aber $\alpha_1 = 1$ ist, dann verfährt man, wie oben, und erhält wiederum dasselbe Resultat.

Was nun die Summe S_3 anbelangt, so hat man offenbar

$$(63) \qquad S_3 = \sum_{i=1}^{l-m} b_{n-l+i}(a_0 + \ldots a_{l-i}) = A \sum_{i=1}^{l-m} b_{n-l+i} + \sum_{i=1}^{l-m} \varepsilon_i\, b_{n-l+i}.$$

Der erste Summand verschwindet offenbar mit $\frac{1}{n}$. Was den zweiten Summanden anbelangt, so hat man

$$\sum_{i=1}^{l-m} |b_{n-l+i}| < K \int_{n-l}^{n-m} \frac{\Psi(x)\,dx}{x}. \tag{64}$$

Nun ist aber

$$\int \frac{\Psi(x)\,dx}{x} = \int \log^{\alpha_1} x \,.\, \chi(x) \,.\, \frac{dx}{x},$$

$$\chi(x) = \log_2^{\alpha_2} x \ldots \log_k^{\alpha_k} x,$$

somit

$$\int_{n-l}^{n-m} \frac{\Psi(x)\,dx}{x} = \frac{1}{1+\alpha_1} \log^{\alpha_1+1} x \,.\, \chi(x) \Big|_{n-l}^{n-m} - \int_{n-l}^{n-m} \frac{\log^{\alpha_1+1} x}{1+\alpha_1} \frac{d\chi(x)}{dx}\,dx, \tag{65}$$

$$\frac{d\chi(x)}{dx} = \chi(x) \left[\frac{\alpha_2}{x \log x \log_2 x} + \cdots + \frac{\alpha_k}{x \log x \ldots \log_k x} \right],$$

daher hat man

$$\int_{n-l}^{n-m} \log^{\alpha_1+1} x \,.\, \frac{d\chi(x)}{dx}\,dx = \int_{n-l}^{n-m} \frac{\alpha_2\, \Psi(x)}{x \log_2 x} (1 + \varepsilon(x))\,dx.$$

Somit ist der zweite Summand der rechten Seite in (65) unendlich klein im Vergleich mit dem ersten Summanden, daher hat man

$$\int_{n-l}^{n-m} \frac{\Psi(x)\,dx}{x} = \frac{\log x\, \Psi(x)}{1+\alpha_1} \Big|_{n-l}^{n-m} . (1 + \varepsilon(n)).$$

Wir betrachten also die Differenz

$$\text{og}\,(n-m)\, \Psi(n-m) - \log\,(n-l)\, \Psi(n-l). \tag{66}$$

Dieselbe ist gleich

$$\log n\, \Psi(n) \left[1 - \frac{m}{n \log n}(1 + \varepsilon_1(n))\right]\left[1 - \frac{m}{n \log n}(\alpha_1 + \varepsilon_2(n))\right] -$$

$$- \log n\, \Psi(n) \left[1 - \frac{l}{n \log n}(1 + \varepsilon_3(n))\right]\left[1 - \frac{l}{n \log n}(\alpha_1 + \varepsilon_4(n))\right] =$$

$$= -(1 + \alpha_1)\frac{m\,\Psi(n)}{n}(1 + \varepsilon(n)) + (1 + \alpha_1)\frac{l\,\Psi(n)}{n}(1 + \varepsilon'(n)).$$

Diese Differenz (66) ist also sicher beschränkt für alle n; daraus folgt, daß lim S_3 gleich Null ist.

8. Endlich betrachten wir noch die letzte Teilsumme S_4

$$S_4 = \sum_{i=1}^{m} b_{n-m+i}(a_0 + \cdots + a_{m-i}); \tag{67}$$

dieselbe ist absolut kleiner als

$$\sum_{i=1}^{m} |b_{n-m+i}| \cdot \sum_{i=0}^{m} |a_i|,$$

also kleiner als

$$K \int_{n-m}^{n} \frac{\Psi(x)}{x}\, dx \,.\, \int_{1}^{m} \frac{dx}{x\,\Psi(x)}.$$

Dies ist absolut kleiner als

$$K_1\,[\log n\, \Psi(n) - \log(n-m)\, \Psi(n-m)] \,.\, \log m,$$

wobei K_1 eine positive, genügend große Zahl ist. Nun ist

$$\log n \,.\, \Psi(n) - \log(n-m)\, \Psi(n-m) = \log n\, \Psi(n) -$$

$$- \log n\, \Psi(n)\left[1 - \frac{m}{n \log n}(1 + \alpha_1 + \varepsilon(n))\right] =$$

$$= \frac{m\,\Psi(n)\,(1 + \alpha_1)}{n}(1 + \varepsilon(n)).$$

Wenn also, wie vorausgesetzt worden ist,

$$\frac{m\,\Psi(n)}{n} \text{ mit } \frac{1}{n}$$

gegen Null strebt, dann verschwindet auch diese letzte Summe S_4 mit $\frac{1}{n}$. Dasselbe ist offenbar nach dem vorher Gesagten auch der Fall, wenn $\alpha_1 = 1$ ist. Übrigens ist noch zu bemerken, daß die Integrale, deren untere Grenze 1 war, sinnlos sein können, daß dann aber natürlich diese untere Grenze durch eine beliebig große feste positive Zahl ersetzt werden kann.

Somit haben wir den folgenden Satz:

Die Produktreihe (2) ist sicher dann konvergent und gleich dem Produkte der beiden Reihen (1), wenn deren Koeffizienten die Bedingungen (51) erfüllen.

9. Der soeben bewiesene Satz läßt sich genau so auf summierbare Reihen verallgemeinern, wie es mit dem Satze von Hardy der Fall war. Andererseits lassen sich die bewiesenen Sätze auch noch in mannigfaltiger Weise verallgemeinern. Verallgemeinerungen seiner Sätze hat Herr Hardy publiziert[1]), indem er statt der Multiplikation nach Cauchy's Regel die allgemeinere Dirichlet'sche Multiplikation betrachtet. Eine andere Art der Verallgemeinerung der Sätze über die Multiplikation der Reihen hat Herr Fékete[2]) betrachtet, der den Begriff der absolut summierbaren Reihen einführt und die Sätze von Cauchy und Mertens verallgemeinert, indem er statt absolut konvergenter, absolut summierbare Reihen betrachtet.

Interessanter als diese Verallgemeinerungen ist die Frage, ob sich der Satz von Hardy dahin erweitern läßt, daß man statt der Bedingungen (15) allgemeinere Bedingungen einführt, und ob es sich ebenso auch mit den Bedingungen (51) verhält. Hardy hat die Frage betrachtet, ob es genügt vorauszusetzen, daß die Koeffizienten a_n, b_n die Bedingungen erfüllen

$$(68) \qquad \lim_{n=\infty} n^{\alpha} a_n = 0\,, \qquad \lim_{n=\infty} n^{\beta} b_n = 0\,,$$

[1]) In den beiden letzten der drei zitierten Abhandlungen.

[2]) A széttartó végtelen sorok elméletéhez (ungarisch), Mathematikai ès természettudományi értesitö. Budapest. 1911.

wenn zwar beide Zahlen α, β kleiner als 1 sind, wenn aber dieselben der Einheit genügend nahe sind. Diese Frage ist verneinend zu beantworten, da zu jedem Zahlenpaare α, β, das die Ungleichungen $\alpha < 1$, $\beta < 1$ erfüllt, zwei konvergente Reihen gefunden werden können, deren Produktreihe divergiert.

Dagegen bleibt die Frage offen, ob es nicht genügt vorauszusetzen, daß die Koeffizienten a_n, b_n von der Größenordnung

$$\frac{\Psi(n)}{n} \tag{69}$$

beide sein können, wobei $\Psi(n)$ die vorher erklärte Funktion ist und andererseits, ob es nicht genügt vorauszusetzen, daß nur eine der Zahlen α, β gleich Eins ist, während die andere kleiner als Eins sein kann. Noch allgemeiner ist es a priori möglich, daß zugleich die Koeffizienten a_n von der Größenordnung $\frac{1}{n^\alpha}$ sind, wo $\alpha < 1$ ist, und die Koeffizienten b_n die Größenordnung (69) besitzen, während die Produktreihe konvergiert.

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.
SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES.

DERNIERS MÉMOIRES PARUS.

(Les titres des Mémoires sont donnés en abrégé).

Avis.

Le «*Bulletin International*» de l'Académie des Sciences de Cracovie (Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles) paraît en deux séries: la première (*A*) est consacrée aux travaux sur les Mathématiques, l'Astronomie, la Physique, la Chimie, la Minéralogie, la Géologie etc. La seconde série (*B*) contient les travaux qui se rapportent aux Sciences Biologiques. Les abonnements sont annuels et partent de janvier. Prix pour un an (dix numéros): Série *A*... 8 K; Série *B*... 10 K.

Les livraisons du «*Bulletin International*» se vendent aussi séparément.

Adresser les demandes à la Librairie «Spółka Wydawnicza Polska» Rynek Gł., Cracovie (Autriche).