W. SIERPIŃSKI

O PEWNYM SZEREGU WIELOMIANÓW, KTÓREGO SUMA PRZEDSTAWIAĆ MOŻE, PRZY ODPOWIEDNIEM UPORZĄDKOWANIU SKŁADNIKÓW, DOWOLNĄ FUNKCYĘ CIĄGŁĄ

KRAKÓW
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ
1912.

W. SIERPIŃSKI

O PEWNYM SZEREGU WIELOMIANÓW, KTÓREGO SUMA PRZEDSTAWIAĆ MOŻE, PRZY ODPOWIEDNIEM UPORZĄDKOWANIU SKŁADNIKÓW, DOWOLNĄ FUNKCYĘ CIĄGŁĄ

KRAKÓW
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ
1912.

Osobne odbicie z T. LII. Ser. A. Rozpraw Wydziału mat.-przyr.
Akademii Umiejętności w Krakowie.

Kraków 1912. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem J. Filipowskiego.

O pewnym szeregu wielomianów, którego suma przedstawiać może, przy odpowiedniem uporządkowaniu składników, dowolną funkcyę ciągłą

przez

W. Sierpińskiego.

Rzecz przedstawiona przez czł. S. Zarembę na posiedz. Wydz. mat.-przyr. w dniu 5-ym Lutego 1912 r.

W pracy niniejszej pragnę dowieść, że można zbudować szereg nieskończony wielomianów całkowitych

$$P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + \ldots,$$

posiadający następującą własność:

Mając dowolną, daną funkcyę $f(x)$, ciągłą w przedziale $(0, 1)$, można wskazać taką zmianę samego tylko porządku składników wypisanego szeregu, przez którą wynikałby z niego szereg, mający w całym przedziale $(0, 1)$ jako sumę funkcyę $f(x)$.

Umówimy się co do następującego znakowania. Jeżeli $u_n^{(m)}$ jest danym ciągiem podwójnym, to oznaczać będziemy przez symbol

$$(1) \ldots \qquad \sum_{(D)} u_n^{(m)}$$

szereg:

$$u_1' + u_1'' + u_2' + u_1''' + u_2'' + u_3' + u_1'''' + u_2''' + \ldots,$$

otrzymany z ciągu $u_n^{(m)}$ zapomocą tak zw. metody przekątnych. Należy go odróżniać od szeregu

$$u_1' + (u_1'' + u_2') + (u_1''' + u_2'' + u_3') + \ldots$$

Lemmat I. Niech $u_n^{(m)}$ oznacza ciąg podwójny taki, iż każdy z szeregów

$$(2) \ldots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(m)} = s^{(m)}$$

jest zbieżny. Połóżmy dla $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$(3) \qquad u_1^{(m)} + u_2^{(m)} + \ldots + u_n^{(m)} = s_n^{(m)}$$

i załóżmy, że przy wszelkiem m zachodzi nierówność

$$(4) \ldots \qquad |s_n^{(m)}| \leqslant g_m, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

przyczem szereg

$$(5) \ldots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} g_m$$

jest zbieżny. Powiadam, że szereg

$$\sum_{(D)} u_n^{(m)}$$

jest zbieżny oraz że

$$(6) \ldots \qquad \sum_{(D)} u_n^{(m)} = \sum_{m=1}^{\infty} s^{(m)}.$$

Dowód. Wobec zakładanej zbieżności szeregu (5) możemy dla danej liczby dodatniej ε wyznaczyć taki wskaźnik p, iżby było

$$(7) \ldots \qquad g_{p+1} + g_{p+2} + g_{p+3} + \cdots < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Obrawszy p, możemy dalej, dla każdego wskaźnika m, wobec zbieżności szeregu (2), wyznaczyć taką liczbę naturalną $\nu^{(m)}$ (zależną od ε, p oraz m), iżby dla

$$(8) \ldots \qquad n \geqslant \nu^{(m)}, \quad \text{było:} \quad |s_n^{(m)} - s^{(m)}| < \frac{\varepsilon}{3p}.$$

Oznaczmy przez $v_\varkappa$ $\varkappa$-ty składnik szeregu (1) i połóżmy

$$(9) \ldots \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_\varkappa = \sigma_\varkappa.$$

Ponieważ każdy wyraz ciągu podwójnego $u_n^{(m)}$ jest pewnym składnikiem szeregu

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} v_\varkappa,$$

więc możemy wyznaczyć taki wskaźnik q, iżby w sumie

$$\sigma_q$$

zawarte były wszystkie składniki każdej z sum:

$$s'_{\nu'}, \quad s''_{\nu''}, \ldots s^{(p)}_{\nu^{(p)}}.$$

Wszystkie te składniki będą zawarte tembardziej w sumie

$$\sigma_\varkappa \text{ przy wszelkiem } \varkappa > q.$$

Z definicyi szeregu (1) wynika natychmiast, że możemy położyć przy wszelkiem $\varkappa$:

$$(10) \ldots \qquad \sigma_\varkappa = s'_{n'} + s''_{n''} + \ldots + s^{(r)}_{n^{(r)}},$$

gdzie r jest pewną liczbą naturalną (zależną od $\varkappa$), zaś

$$n', n'', \ldots n^{(r)}$$

pewnymi (zależnymi od $\varkappa$) wskaźnikami.

Dla $\varkappa > q$ będzie, jak łatwo widzieć:

$$r \geqslant p \quad \text{oraz} \quad n' \geqslant \nu', \quad n'' \geqslant \nu'', \ldots n^{(p)} \geqslant \nu^{(p)},$$

zatem, w myśl (8):

$$\left| s^{(m)}_{n^{(m)}} - s^{(m)} \right| < \frac{\varepsilon}{3p}, \quad \text{dla } m = 1, 2, \ldots p.$$

Ztąd, kładąc

$$s' + s'' + \ldots + s^{(m)} = S_m,$$

otrzymujemy:

$$(11) \ldots \qquad \left| \sum_{m=1}^{p} s^{(m)}_{n^{(m)}} - S_p \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wobec (2), (3) i (4) znajdujemy natychmiast:

$$\left| s^{(m)} \right| \leqslant g_m,$$

zkąd wnosimy o zbieżności szeregu

$$s' + s'' + s''' + \ldots = S$$

i o nierówności

$$(12) \ldots \quad |S_p - S| \leqslant g_{p+1} + g_{p+2} + \cdots < \frac{\varepsilon}{3},$$

w myśl (7).

Wobec (4) mamy też

$$(13) \quad |s_{n\,(p+1)}^{(p+1)} + s_{n\,(p+2)}^{(p+2)} + \cdots + s_{n\,(r)}^{(r)}| \leqslant g_{p+1} + g_{p+2} + \cdots + g_r < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nierówności (11), (12) i (13) dają, wobec (10), natychmiast

$$|\sigma_\varkappa - S| < \varepsilon, \quad \text{dla } \varkappa > q,$$

zkąd, wobec (9), otrzymujemy w jednej chwili

$$\sum_{(D)} u_n^{(m)} = S.$$

Dowiedliśmy więc prawdziwości naszego lemmatu.

Lemmat II. Każdą funkcyę $f(x)$, ciągłą w przedziale $(0,1)$, można w tym przedziale rozwinąć na bezwzględnie zbieżny szereg samych różnych wielomianów całkowitych o wymiernych współczynnikach.

Dowód. Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią, p — dowolny dany wskaźnik.

W myśl twierdzenia Weierstrass'a [1]), dla danej funkcyi $f(x)$, ciągłej w przedziale $(0, 1)$, możemy wyznaczyć wielomian całkowity

$$(14) \ldots \quad P(x) = A_0 x^\varkappa + A_1 x^{\varkappa-1} + \ldots A_{\varkappa-1} x + A_\varkappa,$$

spełniający nierówność:

$$(15) \ldots \quad |f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

---

[1]) Dowód elementarny tego twierdzenia ogłosiłem w XXII-gim tomie *Prac matematyczno-fizycznych*.

Dla każdej z liczb rzeczywistych

$$A_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots \varkappa)$$

wyznaczmy odpowiednią liczbę wymierną a_i, taką iżby było

$$(16) \ldots \quad |A_i - a_i| < \frac{\varepsilon}{2\varkappa + 4}, \quad (i = 1, 2, \ldots \varkappa).$$

Wyznaczmy dalej wskaźnik n większy jednocześnie od p i od $\varkappa$, oraz liczbę naturalną $m > \frac{2\varkappa + 4}{\varepsilon}$. Będziemy dla $0 \leqslant x \leqslant 1$ mieli

$$(17) \ldots \quad \left|\frac{x^n}{m}\right| < \frac{\varepsilon}{2\varkappa + 4},$$

oraz, wobec (14) i (16):

$$(18) \quad |a_0 x^{\varkappa} + a_1 x^{\varkappa - 1} + \ldots + a_{\varkappa - 1} x + a_{\varkappa} - P(x)| < \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa + 4}\varepsilon.$$

Kładąc

$$Q(x) = \frac{x^n}{m} + a_0 x^{\varkappa} + a_1 x^{\varkappa - 1} + \ldots + a_{\varkappa}$$

będziemy, wobec (17) i (18), mieli:

$$|P(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{2\varkappa + 4} + \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa + 4}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2},$$

zkąd, wobec (15):

$$(19) \ldots \quad |f(x) - Q(x)| < \varepsilon,$$

w całym przedziale (0, 1).

Można więc do danej liczby dodatniej ε i danego wskaźnika p zawsze dobrać wielomian $Q(x)$ o wymiernych współczynnikach, stopnia $n > p$, spełniający w całym przedziale (0, 1) nierówność (19).

Przyjmijmy $\varepsilon = 1$ i wyznaczmy, jak wyżej, wielomian $Q_1(x)$ stopnia $n_1 > 1$. Przyjmijmy dalej $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ i wyznaczmy wielomian $Q_2(x)$ stopnia $n_2 > n_1$. Położmy dalej $\varepsilon = \frac{1}{3^2}$ i wyznaczmy wielomian $Q_3(x)$ stopnia $n_3 > n_2$ i t. d.

$Q_\varkappa(x)$ będzie oczywiście przy wszelkiem $\varkappa$ wielomianem stopnia $n_\varkappa$ o wymiernych współczynnikach, spełniającym nierówność

$$(20)\ \ldots \quad |f(x) - Q_\varkappa(x)| < \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

zaś liczby naturalne $n_\varkappa$ będą tworzyły ciąg stale rosnący.

Połóżmy

$$(21)\quad \varphi_1(x) = Q_1(x) \quad \text{oraz} \quad \varphi_\varkappa(x) = Q_\varkappa(x) - Q_{\varkappa-1}(x) \quad \text{dla } \varkappa > 1.$$

$\varphi_\varkappa(x)$ będzie oczywiście przy wszelkiem $\varkappa$ wielomianem stopnia $n_\varkappa$ o wymiernych współczynnikach, a że

$$\varphi_\varkappa(x) = [Q_\varkappa(x) - f(x)] + [f(x) - Q_{\varkappa-1}(x)],$$

więc, w myśl (20), będzie w całym przedziale $(0, 1)$, dla $\varkappa > 1$:

$$|\varphi_\varkappa(x)| < \frac{1}{\varkappa^2} + \frac{1}{(\varkappa-1)^2} < \frac{2}{(\varkappa-1)^2}.$$

Dowodzi to bezwzględnej zbieżności szeregu

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots,$$

którego sumą w całym przedziale $(0, 1)$ jest, w myśl (21) i (20), funkcya $f(x)$, zaś składnikami są wielomiany całkowite o wymiernych współczynnikach i stale rosnących stopniach. Udowodniliśmy więc nasz lemmat.

Przechodzimy obecnie do dowodu samego twierdzenia, będącego przedmiotem niniejszej pracy.

Wszystkie wielomiany całkowite o wymiernych współczynnikach tworzą, jak wiadomo, zbiór przeliczalny. Można je więc ustawić w pewien ciąg nieskończony $\Pi_m(x)$.

Przy danem m, zbiór wszystkich wartości, jakie przybiera w przedziale $(0, 1)$ wielomian $\Pi_m(x)$, jest oczywiście ograniczony zdołu i zgóry. Możemy więc do każdego danego wskaźnika m dobrać liczbę wymierną γ_m, spełniającą nierówności:

$$(22)\ \ldots \quad \gamma_m > 1 \quad \text{oraz} \quad |\Pi_m(x)| < \gamma_m, \quad \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Połóżmy:

$$(23)\ \ldots \qquad Q_{m,n}(x) = \frac{(-1)^n}{n} \frac{\Pi_m(x)}{2^m \cdot \gamma_m};$$

będzie to oczywiście wielomian całkowity o wymiernych współczynnikach.

Oznaczmy przez $P_\varkappa(x)$ $\varkappa$-ty składnik szeregu

$$(24)\ \ldots \qquad \sum_{(B)} Q_{m,n}(x).$$

Powiadam, że szereg nieskończony wielomianów całkowitych o wymiernych współczynnikach

$$(25)\ \ldots \qquad P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + \ldots$$

spełniać będzie żądane warunki.

Dowód. Niech $f(x)$ oznacza dowolną daną funkcyę, ciągłą w przedziale (0, 1). Rozwińmy ją w tym przedziale, w myśl lemmatu II-go, na bezwzględnie zbieżny szereg samych różnych wielomianów całkowitych o wymiernych współczynnikach

$$(26)\ \ldots \qquad f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots$$

Ponieważ w ciągu $\Pi_m(x)$ są zawarte, jak zakładamy, wszystkie wielomiany całkowite o wymiernych współczynnikach, więc każdy ze składników $\varphi_\varkappa(x)$ znajdzie się w tym ciągu. Oznaczmy przez $m_\varkappa$ numer wielomianu $\varphi_\varkappa(x)$ w ciągu $\Pi_m(x)$. Będzie

$$\Pi_{m_\varkappa}(x) = \varphi_\varkappa(x),$$

przyczem ciąg $m_\varkappa$ będzie zawierał same różne wyrazy, gdyż szereg (26) składa się z samych różnych składników. Będziemy też mieli:

$$(27)\ \ldots \qquad f(x) = \Pi_{m_1}(x) + \Pi_{m_2}(x) + \Pi_{m_3}(x) + \ldots,$$

Oznaczmy przez (K) zbiór wszystkich liczb

$$m_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots).$$

Z dowodu znanego twierdzenia Riemanna wynika natychmiast że, jeżeli A oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą, to można tak zmienić porządek składników szeregu

$$(28)\ \ldots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

iżby sumą powstałego przez to szeregu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

była liczba A i żeby przytem wszystkie sumy cząstkowe tego ostatniego szeregu nie przenosiły bezwzględnie liczby $|A|+1$.

Opierając się na powyższej uwadze, budować będziemy pewien ciąg nieskończony szeregów

$$(29) \ldots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)},$$

rozróżniając dwa przypadki:

1) m oznacza jednę z liczb zbioru (K).

W tym przypadku wyznaczymy szereg (29), różniący się conajwyżej porządkiem składników od szeregu (28) i taki, iżby było

$$(30) \ldots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} = 2^m \gamma_m \quad \text{oraz} \quad \left| \sum_{n=1}^{\nu} a_n^{(m)} \right| \leqslant 2^m \gamma_m + 1,$$

przy wszelkim wskaźniku ν.

2) m oznacza wskaźnik, nie należący do zbioru (K).

W tym przypadku wyznaczymy szereg (29), różniący się conajwyżej porządkiem składników od szeregu (28) i taki, iżby było

$$(31) \ldots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} = 0 \quad \text{oraz} \quad \left| \sum_{n=1}^{\nu} a_n^{(m)} \right| \leqslant 1,$$

przy wszelkim wskaźniku ν.

Wyznaczywszy w ten sposób ciąg podwójny $a_n^{(m)}$, połóżmy

$$(32) \ldots \qquad U_{m,n}(x) = a_n^{(m)} \frac{\Pi_m(x)}{2^m \gamma_m}.$$

Przy wszelkiem danem m szereg (29) różni się conajwyżej porządkiem składników od szeregu (28), zatem szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_{m,n}(x)$$

różnić się będzie przy wszelkiem danem m conajwyżej porządkiem składników od szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{m,n}(x).$$

Ztąd łatwy wniosek, że szereg

$$(33)\ \dots \qquad \sum_{(D)} U_{m,n}(x)$$

różnić się będzie conajwyżej porządkiem składników od szeregu (24), czyli od szeregu (25).

Obliczymy teraz sumę szeregu (33).

Połóżmy przy danem x, należącem do przedziału $(0, 1)$:

$$U_{m,n}(x) = u_n^{(m)}.$$

Rozróżnimy znowu dwa przypadki:

1) m jest jedną z liczb zbioru (K).

W myśl (32), (30) i (22) będziemy tu mieli przy wszelkiem ν:

$$\left|\sum u_n^{(m)}\right| = \left|\frac{\Pi_m(x)}{2^m \gamma_m}\right| \cdot \left|\sum_{n=1}^{\nu} a_n^{(m)}\right| \leqslant \left|\frac{\Pi_m(x)}{2^m \gamma_m}\right| . (2^m \gamma_m + 1) < |\Pi_m(x)| + \frac{1}{2^m},$$

zatem przy wszelkiem $\varkappa$:

$$(34)\ \dots \qquad \left|\sum_{n=1}^{\nu} u_n^{(m_\varkappa)}\right| < \left|\Pi_{m_\varkappa}(x)\right| + \frac{1}{2^{m_\varkappa}},$$

dla $\nu = 1, 2, 3, \dots$

2) m oznacza wskaźnik, nie należący do zbioru (K).

W myśl (32), (31) i (22) będziemy tu mieli:

$$(35) \qquad \left|\sum_{n=1}^{\nu} u_n^{(m)}\right| = \left|\frac{\Pi_m(x)}{2^m \gamma_m}\right| \cdot \left|\sum_{n=1}^{\nu} a_n^{(m)}\right| \leqslant \left|\frac{\Pi_m(x)}{2^m \gamma_m}\right| < \frac{1}{2^m}.$$

Połóżmy (przy danem x):

$$g_{m_\varkappa} = |\Pi_{m_\varkappa}(x)| + \frac{1}{2^{m_\varkappa}}, \quad \text{dla } \varkappa = 1, 2, 3, \dots,$$

oraz

$$g_m = \frac{1}{2^m},$$

jeżeli m oznacza wskaźnik, nie należący do zbioru (K). Będzie w myśl (34) i (35) w obu przypadkach:

$$\left|\sum_{n=1}^{\nu} u_n^{(m)}\right| < \vartheta$$

dla $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

Szereg

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_m$$

jest, jak łatwo widzieć, zbieżny, gdyż zbieżny jest każdy z szeregów

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \quad \text{oraz} \quad \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |\Pi_{m_\varkappa}(x)|$$

ostatni — wobec zbieżności bezwzględnej szeregu (26).

Szeregi

$$s_n^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(m)}$$

są wszystkie zbieżne: mamy bowiem dla m należących do zbioru (K), w myśl (32) i (30):

$$s^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} \frac{\Pi_m(x)}{2^m \gamma_m} = \Pi_m(x),$$

czyli

$$s^{(m_\varkappa)} = \Pi_{m_\varkappa}(x) \quad \text{dla } \varkappa = 1, 2, 3, \ldots$$

oraz, dla wskaźników m, nie należących do zbioru (K), w myśl (32) i (31):

$$s^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} \frac{\Pi_m(x)}{2^m \gamma_m} = 0.$$

Jesteśmy więc w warunkach lemmatu I-go. Stosując go, otrzymamy w jednej chwili, wobec zbieżności bezwzględnej szeregu (27):

$$\sum_{(D)} u_n^{(m)} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \Pi_{m_\varkappa}(x) = f(x).$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkiem x, należącem do przedziału $(0, 1)$, mamy:

$$\sum_{(D)} U_{m,n}(x) = f(x),$$

przyczem szereg, stojący po lewej stronie, conajwyżej porządkiem składników różni się od szeregu (25).

Twierdzenie nasze udowodniliśmy więc w zupełności.

Rozprawy Wydziału matematyczno
Serya III. Tom 10. Dział A.

W. Sierpiński: O wartości as
J. Salpeter: O pewnej metodzie wyz
wych Ra-A (str. 11—17). — W. Arnol
(str. 19—25). — W. Arnold: Peptydy
O powstaniu północnej krawędzi podols
chów Podola (str. 31—67). — St. O
(str. 69—73). — J. Buraczewski i T
strychnin bromowanych (Część pierwsza
O przewodnictwie cieplnem ciał sproszkowanych (str. 83—95). — T. Koźniewski: Przyczynek do znajomości alkaloidów korzenia rośliny Sanguinaria Canadensis (str. 97—107). — M. Limanowski: Wielkie przemieszczenia mas skalnych w Dynarydach koło Postojny (z tabl. I) (str. 109—171). — K. Jabłczyński i St. Jabłoński: Reakcye w układach niejednolitych. Wpływ alkoholu (str. 173—176). — W. Czernecki: Badania ilościowe nad kwasami oksyproteinowymi w cieczach surowiczych jam ciała oraz we krwi ludzi zdrowych i chorych (str. 177—207). — M. Smoluchowski: Przyczynek do kinetycznej teoryi transpiracyi, dyfuzyi i przewodnictwa cieplnego w gazach rozrzedzonych (str. 209—214). — T. Estreicher i A. Schnerr: Oznaczenie ciepła parowania niektórych gazów skroplonych (str. 215—237). — T. Estreicher i M. Staniewski: Badania kalorymetryczne nad chlorem w nizkich temperaturach (str. 239—247). — J. Hetper: Wpływ kameleonu na ciała organiczne (str. 249—273). — S. Niementowski: Studya w dziedzinie oxanhydrozwiązków (str 275—300). — Z. Jakubowski: O 5-kwasie chinoliny I (str. 301—310). — J. Salibill: Działanie światła na bromowanie orto- i para-butylotoluoli trzeciorzędnych oraz na chlorowanie trzeciorzędnego butylobenzolu i orto-butylotoluolu (str. 311—316). — A. Rosenblatt: Badania nad kształtami krzywych algebraicznych stopnia szóstego (z tabl. II—XXIII) (317—370). — St. Pawłowski: Temperatura wód płynących w Galicyi (str. 371—400).

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności.
Serya III. Tom 11. Dział A. (Ogólnego zbioru tom 51 A).

Maryan Smoluchowski: O oddziaływaniu wzajemnem kul poruszających się w ośrodku lepkim (str. 1—3). — W. Rybczyński: O ruchu postępowym kuli ciekłej w ośrodku lepkim (str. 5—7). — W. Rogala: Górno-kredowe utwory na Podolu galicyjskiem (z tabl. I). Część I. Turon. Biała kreda z krzemieniami (str. 9—39). — Mieczysław Limanowski: Geologiczne przekroje przez Wielki fałd Czerwonych Wierchów między doliną Suchej Wody a Chochołowską w Tatrach (z tabl. II) (str. 41—80). — Leon Lichtenstein: Przyczynek do teoryi równań różniczkowych liniowych o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu typu eliptycznego. Całki okresowe i podwójnie okresowe (str. 81—112). — Alfred Rosenblatt: Przyczynek do klasyfikacyi powierzchni rozwijalnych algebraicznych (str. 113—151). — J. Buraczewski, L. Krauze i A. Krzemecki: O diastazie (str. 153—157). — Z. Klemensiewicz: O powstawaniu dodatnich jonów na ogrzanych metalach (str. 159—177). — L. Krauze: Studya nad jodopochodnemi strychniny, brucyny i niektórych innych alkaloidów (str. 179—199). — Józef Puzyna: O systemach krzywych z grupą pseudoliniowych podstawień (str. 201—324). — Zygmunt Mysłakowski: O. Waleryan Magni i kontrowersya w sprawie odkrycia próżni (1638—1648) (str. 325—377). — Ludwik Antoni Birkenmajer: Aforyzmy z teoryi podstawień (str. 379—464). — Tadeusz Kuczyński: Metody analizowania wysokoprocentowych aliaży wolframowych (str. 465—474). — W. Jakób i St. Tołłoczko: Analiza toryanitu Ceylońskiego (str. 475—483).

Skład główny; na Galicyę: — Księgarnia Spółki wydawniczej w Krakowie,
na Królestwo Polskie: Księgarnia Gebethnera i Wolffa w Warszawie.