

WŁADYSŁAW NATANSON.

O WPŁYWIE RUCHU

NA ZMIANY

STANU SKUPIENIA.



W KRAKOWIE.

NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ.

1898.

NOWSZE WYDAWNICTWA
AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
WYDZIAŁU MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZEGO.

- Pamiętnik Akademii Umiejętności. Wydział matematyczno-przyrodniczy. Tom XVIII. 4^o, str. 243, z 27. tablicami i licznymi rycinami w tekście. Cena 5 zlr.
- Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział matematyczno-przyrodniczy. Serya II. tom X, ogólnego zbioru tom XXX, 1896, w 8^o dużej, str. 403, z 12 tablicami i 22 rycinami w tekście. Cena 6 zlr.
- E. Bandrowski: O utlenieniu parafenilenodwuaminy, lex. 8^o str. 13. Cena 20 ct.
— O świeceniu podczas krystalizacji, lex. 8-o, str. 8. Cena 10 ct.
- A. Beck: O zmianach ciśnienia krwi w żyłach. lex. 8^o, str. 40, z 20 rycinami w tekście. Cena 70 ct.
— Pomiaru pobudliwości różnych miejsc nerwu za pomocą rozbrojeń kondensatora. lex. 8-o, str. 13. Cena 20 ct.
- A. Beck i N. Cybulski: Dalsze badania zjawisk elektrycznych w korze mózgowej, lex. 8-o, str. 84, z tablicą i 17 rycinami w tekście. Cena 1 zlr.
- L. Birkenmajer: Marcin Bylica z Olkusza oraz narzędzia astronomiczne, które zapisał Uniwersytetowi Jagiellońskiemu w roku 1493, z 12 rycinami w tekście lex. 8^o str. 163. Cena 1 fl. 50 ct.
— Wyznaczenie długości wahadła sekundowego w Krakowie, oraz dwóch innych miejscowościach W. Księstwa Krakowskiego, lex. 8-o, str. 68. Cena 80 ct
— O wpływie temperatury na ruch zegarów, a zwłaszcza chronometrów, lex 8-o, str. 36. Cena 50 ct.
- Cybulski i Zanietowski: Dalsze doświadczenia z kondensatorami: Zależność pobudzenia nerwów od energii rozbrojenia. lex. 8^o str. 5. Cena 10 ct.
- B. Dębski: O budowie i mechanizmie ruchów liści u marantowatych. lex. 8-o, str. 109, z dwiema tablicami. Cena 1 zlr. 25 ct.
- S. Dickstein: O rozwiązaniu kongruencji $z^n - ay^n \equiv 0 \pmod{M}$ lex. 8^o str. 5. Cena 10 ct.
— Hoene Wroński, jego życie i dzieła, lex. 8-o, str. 368. Z portretem Wrońskiego i podobizną jego pisma. Cena 4 zlr.
— Wiadomość o korespondencji Kochańskiego z Leibnicem, lex 8-o, str. 9. Cena 10 ct.
- B. Eichler i M. Raciborski: Nowe gatunki zielenic. 8^o str. 11 z tablicą. Cena 20 ct.
- B. Eichler i R. Gutwiński: De nonnullis speciebus algarum novarum. lex. 8^o str. 17, z 2 tablicami. Cena 40 ct.
- T. Estreicher: Zachowanie się chlorowcowodorów w niskich temperaturach, lex. 8-o, str. 6. Cena 10 ct.
— O ciśnieniach nasycenia tlenu, lex. 8-o, str. 18. Cena 25 ct.
- E. Godlewski: O nityfikacji amoniaku i źródłach węgla podczas żywienia się fermentów nityfikacyjnych, lex. 8-o, str. 53, z dwiema rycinami w tekście. Cena 60 ct.
- W. Gosiewski: O przekształceniu najprawdopodobniejszym ciała materialnego. lex. 8^o, str. 13. Cena 20 ct.
- J. Grzybowski: Otwornice czerwonych ilów z Wadowic, lex. 8-o, str. 48, z czterema tablicami. Cena 80 ct.
- J. Talko-Hryncewicz: Zarzysy lecznictwa ludowego na Rusi południowej, lex. 8^o str. 461. Cena 3 zlr.
- E. Janczewski: Cladosporium herbarum i jego najpospolitsze na zbożu towarzysze, lex. 8^o, str. 45 z 4 tablicami. Cena 1 zlr.
— Zawilce. Część III. lex. 8^o, str. 20, z tablicą. Cena 40 ct. — Część IV. z dwiema tablicami, str. 26. Cena 50 ct.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000339616

WŁADYSŁAW NATANSON.

O WPLYWIE RUCHU

NA ZMIANY

STANU SKUPIENIA.



W KRAKOWIE.

NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ.

1898.

WŁADYSŁAW NATANSON

O WPŁYWIE RUCHU

NA ZMIANY

STANU SKUPIENIA

Osobne odbicie z Tomu XXXV. Rozpraw Wydziału matematyczno-przyrodniczego
Akademii Umiejętności w Krakowie.



O wpływie ruchu na zmiany stanu skupienia.

Przez

Władysława Natansona.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniach Wydziału matematyczno-przyrodniczego
z dnia 8 marca i 25 kwietnia 1898 roku.

Uważajmy układ „doskonale niejednorodny“; będziemy tak nazywali układ, złożony z pewnej liczby ciał, np. (jak przypuszczać będziemy) z dwóch ciał, które, same przez się będąc jednolite i nie mieszając się nigdy ze sobą, mogą swobodnie przeobrażać się w siebie: pierwsze na drugie i nawzajem drugie na pierwsze. Będziemy przypuszczali, że układ znajduje się w ruchu; ażeby ruch ten określić ogólnie, założymy, że każdemu nieskończenie małemu elementowi w obu ciałach przysługują składowe prędkości, które są skończonymi i ciągłymi, zresztą zaś dowolnymi funkcjami współrzędnych i czasu. Będziemy się posługiwali niekiedy hipotezami, które tylko w przypadku ciał płynnych mogą być ściśle spełnione; będziemy wówczas nazywali „płynami“ ciała uważanego układu.

Widzimy przedewszystkiem, że badanie zjawisk ruchu w tak określonym układzie nie stanowi już, właściwie mówiąc, przedmiotu Nauki Mechaniki (gdzie przez Mechanikę rozumiemy również np. Hydrodynamikę); nie mamy podstawy do stanowczego a priori twierdzenia, że prawa ruchu zwyczajne (np. równania hydrodynamiczne) stosują się bez zmiany do niniejszego przypadku. Widzimy powtórnie, że zadanie znale-

zienia praw, według których w tym razie odbywa się „reakcja“ między ciałami (t. j. zmiana stanu skupienia lub wogóle zamiana jednego ciała na drugie), wykracza znowu zupełnie poza ramy Nauki Termodynamiki klasycznej.

Wydaje nam się, że zasada t. zw. „termokinetyczna“, której poświęciliśmy dwie dawniejsze rozprawy¹⁾, zastosowana do wyłożonego tu zagadnienia, pozwala odpowiedzieć na obadwa pytania, które ono, jak widzieliśmy, pociąga za sobą. Temu zastosowaniu poświęcamy uwagi niniejsze. Zauważmy już tutaj na wstępie, że p. Gibbs²⁾, a zwłaszcza p. Duhem³⁾, zajmowali się niejednokrotnie zagadnieniami, które znajdują się w mniej lub bardziej blizkim związku z naszym zadaniem. Za obowiązek poczytujemy sobie zaznaczyć, jak znakomite prace tych uczonych ułatwiły nam istotnie rozwiązanie naszego zadania.

§ 1. Oznaczmy przez T całkowitą kinetyczną energię układu; przez F oznaczmy całkowitą swobodną energię układu, jeśli taka wielkość będzie wogóle istniała. Będziemy przypuszczali, że temperatura jest jednakowa we wszystkich punktach układu; o czem później będziemy mieli sposobność więcej powiedzieć. Udzielamy zmian nieskończenie małych wirtualnych zmiennym niezależnym, wyznaczającym stan układu; przypuścimy, że zachodzą wówczas zmiany δT i δF w wartościach energii poprzednio wspomnianych. Przypuścimy powtórę, że wszystkie siły zewnętrzne, jakie działają na układ, wykonywają wówczas pracę δW ; przypuścimy nareszcie, że układ przytem pochłania ilość ciepła, wynoszącą $\delta' Q$, w sposób nieodwracalny. Uważajmy pewien okres czasu, od $t=t_0$ do $t=t_1$. Niechaj wolno będzie uważać, w tych granicach, ilości nieskończenie małe δT , δF , δW i $\delta' Q$ za funkcje czasu, mogące ulegać różniczkowaniu. Powiadamy, że dla każdej przemiany wirtualnej, jaką można osiągnąć w układzie przez udzielanie zmian zmiennym niezależnym, zachodzi równanie

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \{ \delta T - \delta F + \delta W + \delta' Q \} = 0. \quad (I)$$

§ 2. Niechaj będzie V objętość, zajmowana przez pierwsze ciało układu; niechaj będzie V' objętość, zajmowana przez drugie. Oznaczmy

¹⁾ Rozprawy Wydziału mat.-przyr. Akademii Umiejętności, tom XXX, str. 309; tom XXXIV, str. 67.

²⁾ Transactions of the Connecticut Academy of Sc. and Arts, Vol. III, p. 203, (1874—78).

³⁾ Annales Scient. de l'Ecole Normale Sup. (3), Vol. X, p. 193 (1893). Travaux et Mémoires des Facultés de Lille, I, Nr. 5, p. 2 (1891); III, Nr. 11, p. 20 (1893).

przez S powierzchnię, która odgranicza objętość V od zewnętrznego świata, przez S' podobnież powierzchnię, która V' odgranicza od wewnątrz, przez Σ nareszcie oznaczmy powierzchnię, wzdłuż której stykają się V i V' . Rozcinamy masy obu ciał na elementy nieskończenie małe, z którymi obchodzimy się tak, jak gdybyśmy mogli każdy rozpoznać indywidualnie; uważamy np. objętość $dx dy dz$ elementu za zmienną, natomiast jego masę, $dx dy dz \rho$, za stałą. Przypuśćmy, że u, v, w są składowe prędkości elementu $dx dy dz \rho$ w pierwszym ciele, u', v', w' i w' składowe prędkości elementu $dx' dy' dz' \rho'$ w drugim; suma

$$\frac{1}{2} \iiint_V dx dy dz \rho (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} \iiint_{V'} dx' dy' dz' \rho' (u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

wyraża przeto całkowitą energię kinetyczną układu.

Przypuśćmy, że podczas uważanej wirtualnej przemiany w układzie składowe prędkości u, v, w oraz u', v', w' zmieniają się o:

$$\delta u, \delta v, \delta w; \quad \delta u', \delta v', \delta w'.$$

Elementy obu ciał doznają jednocześnie pewnych przesunięć. Oznaczmy przez

$$\delta x, \delta y, \delta z; \quad \delta x', \delta y', \delta z'$$

składowe przesunięć, jakich elementy doznają pod wpływem czynników natury „mechanicznej“, jakoto: ciśnienia i inne siły zewnętrzne, własna elementów bezwładność i t. d. Przez

$$Dx, Dy, Dz; \quad Dx', Dy', Dz'$$

oznaczmy natomiast składowe przesunięć, wynikających z przyczyny „reakcyjnej“, t. j. z przyczyny zmiany stanu skupienia, lub, mówiąc ogólniej: zamiany jednego ciała w układzie na drugie. Obliczmy zmianę energii kinetycznej, jaka nastąpi skutkiem łącznego działania wszystkich tych zmian. Zadanie to rozwiążemy w przypuszczeniu, że zarówno w jednym ciele jak w drugim istnieje potencjał prędkości. Kładziemy zatem

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$u' = -\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}; \quad v' = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}; \quad w' = -\frac{\partial \varphi'}{\partial z'},$$

gdzie zresztą funkcje φ i φ' mogą zawierać czas w sposób wyraźny.

Przypuśćmy na chwilę, że jedynie tylko „mechaniczne“ czynniki działają w układzie. Nie zmienia się wówczas liczba elementów, masy

ich również nie ulegają zmianie. A zatem energia kinetyczna pierwszego ciała doznaje wówczas zmiany

$$\iiint_V dx dy dz \rho (u\delta u + v\delta v + w\delta w), \quad (1)$$

co możemy napisać, rozumiejąc przez d/dt operator

$$\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z},$$

jak następuje:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_V dx dy dz \rho (u\delta x + v\delta y + w\delta z) \\ & - \iiint_V dx dy dz \rho \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Lecz, kładąc

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2), \quad (3)$$

mamy oczywiście

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial E}{\partial y}; \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial E}{\partial z},$$

możemy zatem wyrazić wielkość (2) w sposób następujący:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ - \iiint_V dx dy dz \varphi \delta\rho + \iiint_V dx dy dz \varphi \left(\frac{\partial\rho}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\rho}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\rho}{\partial z} \delta z \right) \right. \\ & \quad \left. + \iint_S dS \rho \varphi (l\delta x + m\delta y + n\delta z) + \iint_\Sigma d\Sigma \rho \varphi (l\delta x + m\delta y + n\delta z) \right\} \\ & - \iiint_V dx dy dz E \delta\rho + \iiint_V dx dy dz E \left(\frac{\partial\rho}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\rho}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\rho}{\partial z} \delta z \right) \\ & \quad + \iint_S dS \rho E (l\delta x + m\delta y + n\delta z) + \iint_\Sigma d\Sigma \rho E (l\delta x + m\delta y + n\delta z), \end{aligned} \quad (4)$$

jeżeli oznaczymy przez l, m, n dostawy kierunkowe normalnej zewnętrznej wyprowadzonej do powierzchni S , lub Σ , w miejscu elementu dS , lub $d\Sigma$.

Powyższy wyraz (4) stanowi pierwszą dopiero część całkowitej zmiany energii kinetycznej pierwszego ciała w układzie. Ażeby zmianę tę całkowicie obliczyć, musimy dołączyć do wyrazu (4) część drugą, wynikającą z możliwej w układzie „reakcji“. Przez ową „reakcję“ nie zmienia się oczywiście energia kinetyczna elementów, które w niej nie biorą udziału; ma ona jedynie ten skutek, że pewna liczba elementów zostaje zabrana jednemu ciału i dołączona do drugiego. Zjawisko zatem, które nazywamy „reakcją“, musi pociągać za sobą następującą zmianę w energii kinetycznej ciała pierwszego:

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \iint_S dS \rho \varphi (lDx + mDy + nDz) + \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho \varphi (lDx + mDy + nDz) \right\} \\ + \iint_S dS \rho E (lDx + mDy + nDz) + \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho E (lDx + mDy + nDz).$$

Zmianę energii kinetycznej płynu drugiego obliczamy w sposób podobny.

§ 3. Zajmiemy się teraz obliczeniem nieskończenie małej wielkości δF . Uczyńmy z początku założenie, że ciała naszego układu są płynami doskonałymi (swobodnymi od tarcia); będziemy starali się następnie uogólnić rozumowania, ażeby i układy, rozpraszające energię, zostały przez nie objęte. Założmy, że energia swobodna F istnieje i że wynosi

$$(1) \quad F = \iiint_V dx dy dz \rho f + \iiint_V dx' dy' dz' \rho' f',$$

gdzie energie swobodne jednostkowe f i f' mają być funkcjami gęstości ρ , względnie ρ' , w danym punkcie płynu, oraz temperatury. Założenie podobne równa się oczywiście pewnej hipotezie, która jednak wydaje się usprawiedliwioną w obecnym przypadku ¹⁾.

Na mocy uczynionych założeń udowodniamy łatwo, wzorem rozumowania, którem posłużyliśmy się w § 2-im, że zmiana wirtualna całkowita energii swobodnej wynosi, w ciele pierwszym, co następuje:

¹⁾ Por. P. Duhem, Ann. Se. de l'Ecole Norm. Sup. (3), X, 183 (1893); Tra-vaux et Mémoires des Facultés de Lille, III, mém. Nr. 11, p 15 (1893).

$$\iiint_V dx dy dz \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \delta \rho - \iint_S dS \rho f (lDx + mDy + nDz) - \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho f (lDx + mDy + nDz). \quad (2)$$

Do drugiego ciała stosuje się wyraz podobny.

§ 4. Znajdźmy pracę zewnętrzną, wykonywaną w układzie w przemianie wirtualnej. Niechaj p_x, p_y, p_z oznaczają składowe ciśnienia zewnętrznego całkowitego, jakie jest wywierane na element dS ; p'_x, p'_y, p'_z niechaj oznaczają podobnie składowe ciśnienia zewnętrznego całkowitego, które do dS' jest przyłożone. Wirtualna praca ciśnień zewnętrznych wynosi:

$$\iint_S dS \left\{ p_x (\delta x + Dx) + p_y (\delta y + Dy) + p_z (\delta z + Dz) \right\} + \iint_{S'} dS' \left\{ p'_x (\delta x' + Dx') + p'_y (\delta y' + Dy') + p'_z (\delta z' + Dz') \right\}. \quad (1)$$

Oprócz ciśnień, mogą być czynne w układzie siły innego typu, zdolne do wykonywania pracy. Przypuśćmy, że każdy element $dx dy dz \rho$ ulega działaniu siły, której składowe wynoszą

$$dx dy dz \rho X, \quad dx dy dz \rho Y, \quad dx dy dz \rho Z$$

i że siła ta ma potencjał Ψ . O elementach płynu drugiego uczynimy założenie podobne. A zatem piszemy:

$$X = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z};$$

$$X' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x'}; \quad Y' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial y'}; \quad Z' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial z'};$$

w tych równaniach Ψ i Ψ' mają być funkcjami identycznymi co do natury, więc Ψ' jest, krótko mówiąc, równoważne ilości $\Psi(x', y', z')$. Gdyby jedyną przemianą wirtualną w układzie była ta, jaka wyraża się przez waryacje $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \delta z'$, tedy siły typu X, Y, Z miałyby w niej do wykonania pracę

$$\begin{aligned}
 & - \iiint_V dx dy dz \Psi \delta\rho + \iiint_V dx dy dz \Psi \left(\frac{\partial\rho}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\rho}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\rho}{\partial z} \delta z \right) \\
 (2) \quad & + \iint_S dS \rho \Psi (l\delta x + m\delta y + n\delta z) + \iint_\Sigma d\Sigma \rho \Psi (l\delta x + m\delta y + n\delta z).
 \end{aligned}$$

Ze względu na możliwą w układzie reakcyę należy tu dodać

$$(3) \quad \iint_S dS \rho \Psi (lDx + mDy + nDz) + \iint_\Sigma d\Sigma \rho \Psi (lDx + mDy + nDz),$$

jak to widzimy łatwo na zasadzie rozumowania, podobnego do odpowiednich rozumowań poprzednich. Wszystko, co tu powiedzieliśmy, możemy z drobnymi zmianami powtórzyć o ciele drugim.

§ 5. Przyjęliśmy wyżej, tymczasowo, założenie, według którego płyny układu mają być swobodne od tarcia wewnętrznego. Uczyńmy teraz dalszą hipotezę, że mianowicie płyny wzdłuż powierzchni zetknięcia (Σ) przylegają do siebie tak, iż ślizganie się jednego po drugim jest wyłączone. Hipoteza ta jest nam potrzebna do zupełnego rozwiązania zadania. Przyjąwszy ją, uwalniamy się od konieczności rozważania tarcia wzajemnego pomiędzy płynami, czynnego w powierzchni zetknięcia.

§ 6. Składowe przesunięć δx , δy , δz , $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ nie są całkiem dowolne; są one poddane następującym warunkom: 1) nie mogą zmienić całkowitej masy pierwszego płynu; 2) nie mogą zmienić podobnie masy drugiego; 3) nie mogą pociągać za sobą ślizgania się wzdłuż powierzchni zetknięcia Σ . Oznaczmy przez B pewną z góry nieoznaczoną funkcję współrzędnych i czasu, która pozostaje skończona i ciągła w objętości V oraz na powierzchniach S i Σ ; możemy uwolnić się wówczas od pierwszego warunku, jeśli wprowadzimy wyraz następujący do równania zasadniczego (I) w § 1-ym:

$$\begin{aligned}
 & \iiint_V dx dy dz B \delta\rho - \iiint_V dx dy dz \left(\frac{\partial\rho}{\partial x} B \delta x + \frac{\partial\rho}{\partial y} B \delta y + \frac{\partial\rho}{\partial z} B \delta z \right) \\
 (1) \quad & - \iint_S dS \rho B (l\delta x + m\delta y + n\delta z) - \iint_\Sigma d\Sigma \rho B (l\delta x + m\delta y + n\delta z).
 \end{aligned}$$

Warunek drugi uwzględnimy w sposób podobny. Nareszcie, ażeby wyrazić warunek trzeci, włączymy do równania (I) wyrażenie kształtu

$$\iint_{\Sigma} d\Sigma \{ \alpha (\delta x - \delta x') + \beta (\delta y - \delta y') + \gamma (\delta z - \delta z') \}, \quad (2)$$

w którym α , β , γ oznaczają trzy funkcyje, tymczasowo nieoznaczone, spółrzędnych i czasu, które pozostają skończone i ciągłe na rozległości powierzchni zetknięcia Σ .

Składowe Dx , Dy , Dz , Dx' , Dy' , Dz' podlegają również pewnemu ograniczeniu, a mianowicie z mocy następujących warunków: 1) przesunięcia, którym odpowiadają te składowe, nie mogą zmienić całkowitej (łącznej) masy układu, jakkolwiek zmieniają oczywiście masę każdego składnika z osobna; 2) na powierzchni Σ nie powinny wywoływać ślizgania się. Tworzymy więc wyraz

$$\iint_S dS \rho C (lDx + mDy + nDz) + \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho C (lDx + mDy + nDz) + \iint_{S'} dS' \rho' C (l'Dx' + m'Dy' + n'Dz') + \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho' C (l'Dx' + m'Dy' + n'Dz'), \quad (3)$$

w którym oznaczamy przez C dowolną (byle skończoną i ciągłą) funkcyję wyraźną czasu, od spółrzędnych zaś niezależną, czyli ze względu na spółrzędne stałą; i dołączamy ten wyraz do poprzednich, znajdujących się w równaniu zasadniczem (I), § 1. Tym sposobem uwalniamy się od pierwszego warunku. Ażeby od drugiego uwolnić się również, wprowadzamy do tegoż równania wyraz

$$\iint_{\Sigma} d\Sigma \{ \varepsilon (Dx - Dx') + \varkappa (Dy - Dy') + \lambda (Dz - Dz') \}, \quad (4)$$

gdzie oznaczamy przez ε , \varkappa , λ funkcyje nieoznaczone spółrzędnych i czasu, które pozostają skończone i ciągłe we wszystkich punktach powierzchni Σ . Uwzględniwszy tym sposobem wszystkie wspomniane warunki w równaniu zasadniczem, możemy uważać znajdujące się w niem warzyacye za zupełnie niezależne i dowolne.

§ 7. Przytaczamy tu równanie zasadnicze, w postaci, jaką przybiera według rozumowań powyższych; opuszczamy tylko wyrazy, które znikają, jako pochodne zupełne względem czasu, w rezultacie ostatecznym.

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ - \iiint_V dx dy dz E \delta \rho + \iiint_V dx dy dz E \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z \right) \right. \\
& \quad + \iint_S dS \rho E (l \delta x + m \delta y + n \delta z) + \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho E (l \delta x + m \delta y + n \delta z) \\
& \quad + \iint_S dS \rho E (l Dx + m Dy + n Dz) + \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho E (l Dx + m Dy + n Dz) \\
& \quad - \iiint_{V'} dx' dy' dz' E' \delta \rho' + \iiint_{V'} dx' dy' dz' E' \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial \rho'}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial \rho'}{\partial z'} \delta z' \right) \\
& \quad + \iint_{S'} dS' \rho' E' (l' \delta x' + m' \delta y' + n' \delta z') + \iint_{\Sigma'} d\Sigma' \rho' E' (l' \delta x' + m' \delta y' + n' \delta z') \\
& \quad + \iint_{S'} dS' \rho' E' (l' Dx' + m' Dy' + n' Dz') + \iint_{\Sigma'} d\Sigma' \rho' E' (l' Dx' + m' Dy' + n' Dz') \\
& \quad \quad \quad - \iiint_V dx dy dz \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \delta \rho \\
& \quad + \iint_S dS \rho f (l Dx + m Dy + n Dz) + \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho f (l Dx + m Dy + n Dz) \\
& \quad \quad \quad - \iiint_{V'} dx' dy' dz' \rho' \frac{\partial f'}{\partial \rho'} \delta \rho' \\
& \quad + \iint_{S'} dS' \rho' f' (l' Dx' + m' Dy' + n' Dz') + \iint_{\Sigma'} d\Sigma' \rho' f' (l' Dx' + m' Dy' + n' Dz') \\
& \quad \quad + \iint_S dS \{ p_x (\delta x + Dx) + p_y (\delta y + Dy) + p_z (\delta z + Dz) \} \\
& \quad + \iint_{S'} dS' \{ p'_x (\delta x' + Dx') + p'_y (\delta y' + Dy') + p'_z (\delta z' + Dz') \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \iiint_V dx dy dz \Psi \delta \rho + \iiint_V dx dy dz \Psi \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z \right) \\
& + \iint_S dS \rho \Psi (l \delta x + m \delta y + n \delta z) + \iint_\Sigma d\Sigma \rho \Psi (l \delta x + m \delta y + n \delta z) \\
& + \iint_S dS \rho \Psi (l D x + m D y + n D z) + \iint_\Sigma d\Sigma \rho \Psi (l D x + m D y + n D z) \\
& - \iiint_{V'} dx' dy' dz' \Psi' \delta \rho' + \iiint_{V'} dx' dy' dz' \Psi' \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial \rho'}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial \rho'}{\partial z'} \delta z' \right) \\
& + \iint_{S'} dS' \rho' \Psi' (l' \delta x' + m' \delta y' + n' \delta z') + \iint_{\Sigma'} d\Sigma' \rho' \Psi' (l' \delta x' + m' \delta y' + n' \delta z') \\
& + \iint_{S'} dS' \rho' \Psi' (l' D x' + m' D y' + n' D z') + \iint_{\Sigma'} d\Sigma' \rho' \Psi' (l' D x' + m' D y' + n' D z') \\
& + \iiint_V dx dy dz B \delta \rho - \iiint_V dx dy dz \left(\frac{\partial \rho B}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \rho B}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \rho B}{\partial z} \delta z \right) \\
& - \iint_S dS \rho B (l \delta x + m \delta y + n \delta z) - \iint_\Sigma d\Sigma \rho B (l \delta x + m \delta y + n \delta z) \\
& + \iiint_{V'} dx' dy' dz' B' \delta \rho' - \iiint_{V'} dx' dy' dz' \left(\frac{\partial \rho' B'}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial \rho' B'}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial \rho' B'}{\partial z'} \delta z' \right) \\
& - \iint_{S'} dS' \rho' B' (l' \delta x' + m' \delta y' + n' \delta z') - \iint_{\Sigma'} d\Sigma' \rho' B' (l' \delta x' + m' \delta y' + n' \delta z') \\
& + \iint_\Sigma d\Sigma \{ \alpha (\delta x - \delta x') + \beta (\delta y - \delta y') + \gamma (\delta z - \delta z') \} \\
& + \iint_S dS \rho C (l D x + m D y + n D z) + \iint_\Sigma d\Sigma \rho C (l D x + m D y + n D z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \iint_{S'} dS' \rho' C (l' Dx' + m' Dy' + n' Dz') + \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho' C (l Dx' + m Dy' + n Dz') \\
 & + \iint_{\Sigma} d\Sigma \{ \varepsilon (Dx - Dx') + \kappa (Dy - Dy') + \lambda (Dz - Dz') \} = 0.
 \end{aligned}$$

§ 8. Wnioski, jakie stąd wynikają, są następujące. W każdym miejscu objętości V muszą być spełnione równania: po pierwsze

$$(1) \quad -E - \Psi - \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + B = 0$$

powtórnie trzy równania, z pomiędzy których pierwsze brzmi:

$$(2a) \quad (E + \Psi) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} B = 0.$$

W każdym miejscu powierzchni S zachodzą związki:

$$(3a) \quad \rho (E + \Psi - B) l + p_x = 0 \quad \text{i t. d.}$$

$$(4a) \quad \rho (E + \Psi + f + C) l + p_x = 0 \quad \text{i t. d.}$$

Do każdego miejsca w objętości V' stosują się równania:

$$(5) \quad -E' - \Psi' - \rho' \frac{\partial f'}{\partial \rho'} + B' = 0$$

oraz trzy równania kształtu:

$$(6a) \quad (E' + \Psi') \frac{\partial \rho'}{\partial x'} - \frac{\partial \rho'}{\partial x'} B' = 0 \quad \text{i t. d.}$$

W każdym miejscu powierzchni S mamy

$$(7a) \quad \rho' (E' + \Psi' - B') l' + p'_x = 0 \quad \text{i t. d.}$$

$$(8a) \quad \rho' (E' + \Psi' + f + C) l' + p'_x = 0 \quad \text{i t. d.}$$

Wszędzie wreszcie wzdłuż powierzchni Σ obowiązują równania:

$$(9a) \quad \rho (E + \Psi - B) l + \alpha = 0 \quad \text{i t. d.}$$

$$(10a) \quad \rho (E + \Psi + f + C) l + \varepsilon = 0 \quad \text{i t. d.}$$

$$(11a) \quad \rho' (E' + \Psi' - B') l' - \alpha = 0 \quad \text{i t. d.}$$

$$(12a) \quad \rho' (E' + \Psi' + f + C) l' - \varepsilon = 0 \quad \text{i t. d.}$$

Równania (3), albo równania (4), wyznaczają ciśnienie zewnętrzne, które jest czynne na powierzchni S . Widzimy z nich, że ciśnienie to ma być wywierane normalnie do elementu, na który działa, i że, co do wartości, powinno wynosić

$$p = -\rho(E + \Psi - B) \quad (13)$$

albo też

$$p = -\rho(E + \Psi + f + C). \quad (14)$$

Będziemy przypuszczali, że podobne równania zachodzą w każdym miejscu wewnątrz objętości V , a nawet na powierzchni Σ wzajemnego zetknięcia; wolno nam uczynić takie założenie, które określa pojęcie „wewnętrznego“ w pierwszym płynie ciśnienia. Otrzymujemy wówczas ¹⁾ z (1) i z (13)

$$p = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho}. \quad (15)$$

Z równań (2a) i (13) wyprowadzamy

$$\rho \frac{\partial E}{\partial x} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{i t. d.} \quad (16a)$$

to zaś są widocznie zwykle równania ruchu Hydrodynamiki odwracalnej, albowiem mamy

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{du}{dt} \quad \text{i t. d.} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -X \quad \text{i t. d.}$$

Z równań (5), (6) i (7) otrzymujemy podobnie związek, analogiczny do powyższego (13); za jego pomocą określamy ciśnienie „wewnętrzne“ w płynie drugim i na jego granicach; znajdujemy wówczas równania ruchu płynu drugiego, które są zupełnie podobne do równań (16).

W równaniu (14) poznajemy bez trudności twierdzenie, znane dobrze z Hydrodynamiki, które udowadnia się natychmiast, całkując, gdy można, równania ruchu. Mamy mianowicie, według (15),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

¹⁾ Por. P. Duhem, Travaux et Mémoires des Facultés de Lille, III, mém. Nr. 11 p. 27 (1893).

stąd zaś wynika, jeśli założymy

$$(17) \quad G = \int \frac{dp}{\rho},$$

związek następujący:

$$(18a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(f + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x} \quad \text{i t. d.}$$

Jeśli wprowadzimy zatem wielkość G do równania (14), zastępując przez nią wyrażenie $f + p/\rho$, otrzymamy twierdzenie ¹⁾, o którym wspominaliśmy wyżej. Możemy wykonać zupełnie podobny rachunek na zasadzie równań (8), z których wynika związek, analogiczny do (14). Lecz zważmy w takim razie, że w równaniach (4) i (8), albo też w (14) i w równaniu, analogicznem do (14), występuje stała C ta sama; że tak być powinno, nie moglibyśmy okazać bezpośrednio, na zasadzie powołanego hydrodynamicznego twierdzenia; niebawem zaś zobaczymy, że okoliczność ta ma, dla wnioskowania naszego, znaczenie istotne.

Powracając do równań (9) i (11), zauważmy najpierw, że dają one

$$(19) \quad \alpha : \beta : \gamma = l : m : n$$

w każdym punkcie powierzchni Σ . Następnie, porównawszy je z (3) i z (7), widzimy, że mamy

$$(20a) \quad -p_x + \alpha = 0; \quad -p'_x - \alpha = 0; \quad (21a)$$

$$(20b) \quad -p_y + \beta = 0; \quad -p'_y - \beta = 0; \quad (21b)$$

$$(20c) \quad -p_z + \gamma = 0; \quad -p'_z - \gamma = 0. \quad (21c)$$

Z równań (10) i (12) wynika podobnie

$$(22) \quad \varepsilon : \alpha : \lambda = l : m : n$$

oraz dalej, przez porównanie z (4) i (8),

$$(23a) \quad -p_x + \varepsilon = 0; \quad -p'_x - \varepsilon = 0; \quad (24a)$$

$$(23b) \quad -p_y + \alpha = 0; \quad -p'_y - \alpha = 0; \quad (24b)$$

$$(23c) \quad -p_z + \lambda = 0; \quad -p'_z - \lambda = 0. \quad (24c)$$

Uważajmy dowolny punkt na powierzchni Σ ; zastosujmy do niego jednocześnie równania (20) i (21). Ponieważ α , β , γ są funkcjami współrzędnych (i czasu), przeto będą miały, w (20) i (21), wartości jedna-

¹⁾ Por. H. Lamb, Hydrodynamics, 1895, p. 21.

kowe. Stosując podobnie równania (23) i (24) do obranego punktu, będziemy w nim mieli dla ε , x i λ wartości, w (23) i (24) jednakowe. Otrzymamy zatem

$$p'_x = -p_x; \quad p'_y = -p_y; \quad p'_z = -p_z;$$

z równań zaś (19) i (22) wynika, że te ciśnienia są wywierane normalnie.

Z równania (14) i z analogicznego równania, dotyczącego się ciała drugiego, wynika:

$$E - E' + \Psi - \Psi' + f - f' + \frac{p}{\rho} - \frac{p'}{\rho'} = 0. \quad (25)$$

Wielkości E , Ψ , f , p oraz ρ w tem równaniu tyczą się dowolnego punktu na powierzchni S , natomiast wielkości E' , Ψ' , f' , p' i ρ' tyczą się dowolnego punktu na powierzchni S' . Możemy uważać równanie (25) za uogólnienie klasycznego warunku równowagi termodynamicznej w układzie, który znajduje się w spoczynku. Istotnie, jeśli założymy $E=0$, $E'=0$ i zastosujemy równanie (25) do dowolnego punktu powierzchni Σ (udowodnimy zaś łatwo, że to wolno uczynić), tedy będzie

$$\Psi'' = \Psi', \quad p' = p$$

i otrzymamy

$$f - f' + p \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right) = 0, \quad (26)$$

co jest właśnie owym termodynamicznym warunkiem równowagi w układzie „doskonale niejednolitym“.

§ 9. Spróbujmy uogólnić teraz metodę rozumowania w taki sposób, ażeby wciągnąć w jego obręb tarcie i inne okoliczności, związane z tarcie. Podstawą rachunków pozostaje równanie (I), w § 1-ym. Zachowując bez zmiany wszystkie założenia i wszystkie oznaczenia, przyjęte w § 2-im, powiadamy, że możemy wyrazić w sposób następujący zmianę wirtualną energii kinetycznej, w płynie pierwszym, wynikającą z działania czynników „mechanicznych“:

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{dt} \iiint_V dx dy dz \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z \right) \\ & - \iiint_V dx dy dz \rho \left(\frac{\partial E}{\partial x} \delta x + \frac{\partial E}{\partial y} \delta y + \frac{\partial E}{\partial z} \delta z \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Zmianę tej energii, wynikającą ze zjawiska „reakcyi“ w układzie, utworzymy według wzoru (5) w § 2-gim i dodamy do wyrażenia powyższego. Podobnie postąpimy względem płynu drugiego. Co się więc tyczy zmian energii kinetycznej układu, nie wymaga w obecnym rachunku przekształceń istotnych.

Inaczej mają się rzeczy ze zmianą energii swobodnej; musimy zastąpić tu założenia § 3-go przez znacznie ogólniejsze. Zrzekamy się obecnie twierdzenia, jakoby istniała funkcyja f , zależna od gęstości ρ i od temperatury, która wyrażałaby jednostkową energię swobodną; jakoby istniała analogiczna funkcyja f' ; nie przypuszczamy nawet, że istnieje skończona energia swobodna F całkowitego układu. Poprzestajemy na założeniu, że część nieskończenie małej wielkości δF , jaka odpowiada działaniu czynników „mechanicznych“, ma postać następującą:

$$(2) \quad \iiint_V dx dy dz \rho \left\{ I \frac{\partial \delta x}{\partial x} + J \frac{\partial \delta y}{\partial y} + K \frac{\partial \delta z}{\partial z} + L \left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial z} \right) + M \left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial x} \right) + N \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial y} \right) \right\}$$

w pierwszym ciele układu. Oznaczamy tu przez I, J, K, L, M, N pewne funkcyje spółrzędnych i czasu, których wyznaczeniem zajmijemy się później. Z teoryi ciał ciągłych znane są dobrze zasady, z których wynika, że kształt, tu przez nas przyjęty, jest dostatecznie ogólny; moglibyśmy go zastosować nietylko do ciał płynnych lepkich, lecz również np. do stałych sprężystych. Napiżmy, zamiast (2), co następuje:

$$(3) \quad - \iiint_V dx dy dz \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} I + \frac{\partial \rho}{\partial y} N + \frac{\partial \rho}{\partial z} M \right) \delta x + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} N + \frac{\partial \rho}{\partial y} J + \frac{\partial \rho}{\partial z} L \right) \delta y + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} M + \frac{\partial \rho}{\partial y} L + \frac{\partial \rho}{\partial z} K \right) \delta z \right\} \\ - \iint_S dS \rho \{ (LI+mN+nM) \delta x + (LN+mJ+nL) \delta y + (LM+mL+nK) \delta z \} \\ - \iint_\Sigma d\Sigma \rho \{ (LI+mN+nM) \delta x + (LN+mJ+nL) \delta y + (LM+mL+nK) \delta z \}.$$

Lecz wiemy skądinąd ¹⁾, że w płynie lepkiem ta sama wielkość wynosi:

$$- \iiint_V dx dy dz p \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) \quad (4)$$

lub jeszcze

$$\begin{aligned} &+ \iiint_V dx dy dz \left(\frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z \right) \\ &+ \iint_S dS p (\ell \delta x + m \delta y + n \delta z) + \iint_\Sigma d\Sigma p (\ell \delta x + m \delta y + n \delta z). \end{aligned} \quad (5)$$

Jeśli więc wyrażenia (3) i (5) mają być też same, tedy powinniśmy mieć związki następujące: w objętości V

$$- \left(\frac{\partial \rho I}{\partial x} + \frac{\partial \rho N}{\partial y} + \frac{\partial \rho M}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial G}{\partial x}; \quad (6a)$$

$$- \left(\frac{\partial \rho N}{\partial x} + \frac{\partial \rho J}{\partial y} + \frac{\partial \rho L}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial G}{\partial y}; \quad (6b)$$

$$- \left(\frac{\partial \rho M}{\partial x} + \frac{\partial \rho L}{\partial y} + \frac{\partial \rho K}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial G}{\partial z}, \quad (6c)$$

na powierzchni zaś S i Σ :

$$- \rho (\ell I + m N + n M) = p \ell; \quad (7a)$$

$$- \rho (\ell N + m J + n L) = p m; \quad (7b)$$

$$- \rho (\ell M + m L + n K) = p n; \quad (7c)$$

równania (7) są zresztą następstwem równań poprzedzających (6). Litera G w równaniach (6) ma znaczenie, ustalone wyżej, w § 8-ym.

Przechodzimy do obliczenia drugiej części ilości δF (wciąż w pierwszym płynie), mianowicie tej, która zależy od „reakcyi“, możliwej w układzie. Zauważmy przedewszystkiem, że całkę objętościową, znajdującą się w powyższem wyrażeniu (3), można napisać, według równań (6), w sposób następujący:

¹⁾ Por. Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akad. Umiej., tom XXX, str. 318.

$$\begin{aligned}
 & \iiint_V dx dy dz G \delta \rho - \iiint_V dx dy dz G \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z \right) \\
 (8) \quad & - \iint_S dS \rho G (l\delta x + m\delta y + n\delta z) - \iint_\Sigma d\Sigma \rho G (l\delta x + m\delta y + n\delta z).
 \end{aligned}$$

Kierując się kształtem tego wyrazu, jakoteż postacią pozostałych wyrazów we wzorze (3), znajdujemy, jako wartość wspomnianej drugiej części waryacji, co następuje:

$$\begin{aligned}
 & - \iint_S dS \rho G (lDx + mDy + nDz) - \iint_\Sigma d\Sigma \rho G (lDx + mDy + nDz) \\
 & - \iint_S dS \rho \{ (lI + mN + nM) Dx + (lN + mJ + nL) Dy + (lM + mL + nK) Dz \} \\
 (9) \quad & - \iint_\Sigma d\Sigma \rho \{ (lI + mN + nM) Dx + (lN + mJ + nL) Dy + (lM + mL + nK) Dz \}.
 \end{aligned}$$

Pozostałe wyrazy w nieskończenie małej δF , tyjące się płynu drugiego, obliczamy w sposób analogiczny.

Praca wirtualna, którą wykonywają nad pierwszym płynem bądź ciśnienia zewnętrzne, bądź też siły zewnętrzne, działające z odległości, wynosi, według hipotez i oznaczeń, przyjętych w § 4-ym,

$$\begin{aligned}
 & \iint_S dS \{ p_x (\delta x + Dx) + p_y (\delta y + Dy) + p_z (\delta z + Dz) \} \\
 & - \iiint_V dx dy dz \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \delta z \right) \\
 (10) \quad & + \iint_S dS \rho \Psi (lDx + mDy + nDz) + \iint_\Sigma d\Sigma \rho \Psi (lDx + mDy + nDz).
 \end{aligned}$$

Wyrażenie podobne stosuje się do płynu drugiego.

Rozważmy teraz postać nieodwracalnego wyrazu $\delta' Q$. W płynach lepkich skutkiem ruchu wytwarza się ciepło. Dzięki przewodnictwu, ciepło to będzie przenikało do elementów, biorących udział w „reakcji“ i będzie się tam zużywało na potrzeby tej reakcji. Zamiast tych rze-

czywistych stosunków, wyobraźmy sobie następujące fikcyjne. Przypuśćmy, że odbieramy każdemu elementowi, za pomocą stosownych zbiorników, takie wciąż ilości ciepła, jakie wytwarzają się w nim działaniem tarcia; przypuśćmy, że zapobiegamy tym sposobem wszelkim zmianom temperatury¹⁾. Jednocześnie doprowadzamy elementom, biorącym udział w „reakcyi“, ilości ciepła, równe poprzednim, czerpiąc je z tych samych fikcyjnych zbiorników.

Wyobraźmy sobie, że poznaliśmy w każdym punkcie pierwszego płynu (x, y, z) panujące tam „średnie“ ciśnienie; oznaczmy je przez p . Oznaczmy dalej przez

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} = p_{zy}, p_{zx} = p_{xz}, p_{xy} = p_{yx}$$

zwykle tak oznaczane składowe ciśnienia. Przypuszczamy, że dla skompensowania ilości ciepła, powstającej w pierwszym płynie skutkiem przesunięć $\delta x, \delta y, \delta z$, potrzeba jest pochłonięcia (rozumianego algebraicznie) ilości ciepła:

$$\begin{aligned} & - \iiint_V dx dy dz \left\{ (p - p_{xx}) \frac{\partial \delta x}{\partial x} + (p - p_{yy}) \frac{\partial \delta y}{\partial y} + (p - p_{zz}) \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right. \\ & \left. - p_{yz} \left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial z} \right) - p_{zx} \left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial x} \right) - p_{xy} \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial y} \right) \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Wyrażenie (11) otrzymujemy przez naturalne uogólnienie wielkości, wyliczonej przez Sir G. G. Stokesa i spokrewnionej blisko z „funkcją dysypacyjną“ Lorda Rayleigh. Możemy przekształcić je w sposób następujący:

$$\begin{aligned} & \iiint_V dx dy dz \left\{ \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) \right] \delta x + \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \right) \right] \delta y + \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) \right] \delta z \right\} \end{aligned}$$

¹⁾ Jest to założenie, które czynimy zawsze w teorii ruchu płynów lepkich; por. Rozprawy Wydz. mat.-przyr. Akad. Umiej., tom XXX, str. 316.

$$(12) \quad - \iint_S dS \{ (p_x - pl) \delta x + (p_y - pm) \delta y + (p_z - pn) \delta z \} \\ - \iint_{\Sigma} d\Sigma \{ (p_x - pl) \delta x + (p_y - pm) \delta y + (p_z - pn) \delta z \}.$$

Wprowadzamy teraz wielkość Γ , którą określamy za pomocą równań:

$$(13a) \quad \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial \Gamma}{\partial x};$$

$$(13b) \quad \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial \Gamma}{\partial y};$$

$$(13c) \quad \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial \Gamma}{\partial z},$$

mających się stosować do każdego punktu objętości V . Czynimy tym sposobem pewne założenie, które jednak, jak się okaże, łączy się jak najściślej z hipotezą istnienia potencjału prędkości (§ 2). Całka objętościowa, znajdująca się w powyższym wzorze (12), przybiera wówczas postać

$$(14) \quad \iiint_V dx dy dz \rho \left\{ \frac{\partial (G - \Gamma)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial (G - \Gamma)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial (G - \Gamma)}{\partial z} \delta z \right\};$$

stąd zaś, zarówno jak z kształtu pozostałych wyrazów wzoru (12), wnosimy, że część nieodwracalnego wyrazu $\delta' Q$, jaka (w pierwszym płynie) odpowiada wirtualnej reakcyi, jest równa

$$(15) \quad - \iint_S dS \rho (G - \Gamma) (LDx + mDy + nDz) - \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho (G - \Gamma) (LDx + mDy + nDz) \\ - \iint_S dS \{ (p_x - pl) Dx + (p_y - pm) Dy + (p_z - pn) Dz \} \\ - \iint_{\Sigma} d\Sigma \{ (p_x - pl) Dx + (p_y - pm) Dy + (p_z - pn) Dz \}.$$

Pozostałe w $\delta' Q$ wyrazy, tyjące się drugiego płynu, obliczamy w sposób, do przytoczonego podobny.

W powyższym rachunku unikaliśmy z umysłu wprowadzania zmiennych ρ i ρ' jako niezależnych; zatem widzimy, że z pomiędzy warunków, wyliczonych wyżej w § 6-ym, możemy obecnie opuścić dwa pierwsze i poddać przesunięcia δx , δy , δz jedynie trzeciemu, co uczynimy w sposób, objaśniony w powołanym paragrafie. Warunki zaś, obowiązujące przesunięcia Dx , Dy , Dz , przeniesiemy bez zmiany z § 6-go na obecne zadanie, do którego stosują się podobnie, jak stosowały się do poprzedniego prostszego.

§ 10. Zbierając wyniki § 9-go, otrzymujemy równanie następujące:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ - \iiint_V dx dy dz \rho \left(\frac{\partial E}{\partial x} \delta x + \frac{\partial E}{\partial y} \delta y + \frac{\partial E}{\partial z} \delta z \right) \right. \\
 & + \iint_S dS \rho E (lDx + mDy + nDz) + \iint_\Sigma d\Sigma \rho E (lDx + mDy + nDz) \\
 & \quad \left. - \iiint_{V'} dx' dy' dz' \rho' \left(\frac{\partial E'}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial E'}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial E'}{\partial z'} \delta z' \right) \right. \\
 & + \iint_{S'} dS' \rho' E' (l'Dx' + m'Dy' + n'Dz') + \iint_{\Sigma'} d\Sigma' \rho' E' (l'Dx' + m'Dy' + n'Dz') \\
 & \quad \left. - \iiint_{V'} dx dy dz \rho \left(\frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \delta y + \frac{\partial G}{\partial z} \delta z \right) \right. \\
 & + \iint_S dS \rho \{ (lI + mN + nM) \delta x + (lN + mJ + nL) \delta y + (lM + mL + nK) \delta z \} \\
 & + \iint_\Sigma d\Sigma \rho \{ (lI + mN + nM) \delta x + (lN + mJ + nL) \delta y + (lM + mL + nK) \delta z \} \\
 & \left. + \iint_S dS \rho G (lDx + mDy + nDz) + \iint_\Sigma d\Sigma \rho G (lDx + mDy + nDz) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_S dS \rho \{ (lI + mN + nM) Dx + (lN + mJ + nL) Dy + (lM + mL + nK) Dz \} \\
& + \iint_\Sigma d\Sigma \rho \{ (lI + mN + nM) Dx + (lN + mJ + nL) Dy + (lM + mL + nK) Dz \} \\
& \quad - \iiint_V dx' dy' dz' \rho' \left(\frac{\partial G'}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial G'}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial G'}{\partial z'} \delta z' \right) \\
& + \iint_{S'} dS' \rho' \{ (l'I + m'N' + n'M') \delta x' + (l'N' + m'J' + n'L') \delta y' + (l'M' + m'L' + n'K') \delta z' \} \\
& + \iint_{\Sigma'} d\Sigma' \rho' \{ (l'I + m'N' + n'M') \delta x' + (l'N' + m'J' + n'L') \delta y' + (l'M' + m'L' + n'K') \delta z' \} \\
& + \iint_{S'} dS' \rho' G' (l'Dx' + m'Dy' + n'Dz') + \iint_\Sigma d\Sigma' \rho' G' (l'Dx' + m'Dy' + n'Dz') \\
& + \iint_{S'} dS' \rho' \{ (l'I + m'N' + n'M') Dx' + (l'N' + m'J' + n'L') Dy' + (l'M' + m'L' + n'K') Dz' \} \\
& + \iint_\Sigma d\Sigma' \rho' \{ (l'I + m'N' + n'M') Dx' + (l'N' + m'J' + n'L') Dy' + (l'M' + m'L' + n'K') Dz' \} \\
& \quad + \iint_S dS \{ p_x (\delta x + Dx) + p_y (\delta y + Dy) + p_z (\delta z + Dz) \} \\
& \quad - \iiint_V dx dy dz \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \delta z \right) \\
& + \iint_S dS \rho \Psi (lDx + mDy + nDz) + \iint_\Sigma d\Sigma \rho \Psi (lDx + mDy + nDz) \\
& \quad + \iint_{S'} dS' \{ p'_x (\delta x' + Dx') + p'_y (\delta y' + Dy') + p'_z (\delta z' + Dz') \} \\
& \quad - \iiint_{V'} dx' dy' dz' \rho' \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial \Psi'}{\partial z'} \delta z' \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{S'} dS' \rho' \Psi' (l' Dx' + m' Dy' + n' Dz') + \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho' \Psi' (l' Dx' + m' Dy' + n' Dz') \\
& + \iiint_V dx dy dz \rho \left\{ \frac{\partial (G - \Gamma)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial (G - \Gamma)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial (G - \Gamma)}{\partial z} \delta z \right\} \\
& - \iint_S dS \{ (p_x - pl) \delta x + (p_y - pm) \delta y + (p_z - pn) \delta z \} \\
& - \iint_{\Sigma} d\Sigma \{ (p_x - pl) \delta x + (p_y - pm) \delta y + (p_z - pn) \delta z \} \\
& - \iint_S dS \rho (G - \Gamma) (lDx + mDy + nDz) - \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho (G - \Gamma) (lDx + mDy + nDz) \\
& - \iint_S dS \{ (p_x - pl) Dx + (p_y - pm) Dy + (p_z - pn) Dz \} \\
& - \iint_{\Sigma} d\Sigma \{ (p_x - pl) Dx + (p_y - pm) Dy + (p_z - pn) Dz \} \\
& + \iiint_{V'} dx' dy' dz' \rho' \left\{ \frac{\partial (G' - \Gamma')}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial (G' - \Gamma')}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial (G' - \Gamma')}{\partial z'} \delta z' \right\} \\
& - \iint_{S'} dS' \{ (p'_x - p'l') \delta x' + (p'_y - p'm') \delta y' + (p'_z - p'n') \delta z' \} \\
& - \iint_{\Sigma} d\Sigma \{ (p'_x - p'l') \delta x' + (p'_y - p'm') \delta y' + (p'_z - p'n') \delta z' \} \\
& - \iint_{S'} dS' \rho' (G' - \Gamma') (l' Dx' + m' Dy' + n' Dz') - \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho' (G' - \Gamma') (l' Dx' + m' Dy' + n' Dz') \\
& - \iint_{S'} dS' \{ (p'_x - p'l') Dx' + (p'_y - p'm') Dy' + (p'_z - p'n') Dz' \} \\
& - \iint_{\Sigma} d\Sigma \{ (p'_x - p'l') Dx' + (p'_y - p'm') Dy' + (p'_z - p'n') Dz' \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\Sigma} d\Sigma \{ \alpha (\delta x - \delta x') + \beta (\delta y - \delta y') + \gamma (\delta z - \delta z') \} \\
& + \iint_S dS \rho C (lDx + mDy + nDz) + \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho C (lDx + mDy + nDz) \\
& + \iint_{S'} dS' \rho' C (l'Dx' + m'Dy' + n'Dz') + \iint_{\Sigma} d\Sigma \rho' C (l'Dx' + m'Dy' + n'Dz') \\
(1) \quad & + \iint_{\Sigma} d\Sigma \{ \varepsilon (Dx - Dx') + \kappa (Dy - Dy') + \lambda (Dz - Dz') \} \Big\} = 0.
\end{aligned}$$

Wynikają stąd następujące wnioski. Wszędzie w objętości V muszą być spełnione równania

$$(2a) \quad \rho \frac{\partial E}{\partial x} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \rho \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0 \text{ i t. d.,}$$

które możemy przepisać w postaci dobrze znanej

$$(3a) \quad \rho \frac{du}{dt} - \rho X + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = 0 \text{ i t. d.,}$$

podobnie jak to uczyniliśmy z równaniami (16) w § 8-ym. Wszędzie w objętości V muszą być spełnione równania analogiczne. Na powierzchni S zachodzą w każdym punkcie związki:

$$(4a) \quad \rho (lI + mN + nM) + pl = 0;$$

$$(4b) \quad \rho (lN + mJ + nL) + pm = 0;$$

$$(4c) \quad \rho (lM + mL + nK) + pn = 0;$$

są to równania (7) z § 9-go. Otrzymujemy z nich łatwo

$$(5) \quad \rho (l^2I + m^2J + n^2K + 2mnL + 2nlM + 2lmN) + p = 0.$$

W każdym punkcie powierzchni S mamy dalej

$$(6a) \quad \rho (E + \Psi + \Gamma + C) l + \rho (lI + mN + nM) + pl = 0;$$

$$(6b) \quad \rho (E + \Psi + \Gamma + C) m + \rho (lN + mJ + nL) + pm = 0;$$

$$(6c) \quad \rho (E + \Psi + \Gamma + C) n + \rho (lM + mL + nK) + pn = 0;$$

to znaczy, wobec równań (4), iż mamy (całkę równań ruchu):

$$E + \Psi + \Gamma + C = 0. \quad (7)$$

Na powierzchni S' otrzymujemy równania ze wszech miar podobne; pomiędzy innymi otrzymujemy związek

$$E' + \Psi' + \Gamma' + C = 0, \quad (8)$$

zawierający stałą C tę samą, jaka w równaniu (7) się znajduje. Z równań (7) i (8) wynika tedy zależność

$$E - E' + \Psi - \Psi' + \Gamma - \Gamma' = 0. \quad (9)$$

Równanie (9) stanowi postać najogólniejszą, jaką może przybrać twierdzenie, sprowadzające się, w zwykłym przypadku spoczynku, do klasycznego warunku [(26), § 8] równowagi termodynamicznej.

Jeśli przypuścimy, że tarcie w płynach znika, otrzymamy wartość

$$- \rho \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

na wielkości I, J oraz K ; wielkości L, M, N stają się równe zero. A zatem równanie (5) sprowadza się do dawniejszego związku

$$p = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

(por. § 8), tak iż wolno podstawiać wielkość $f + p/\rho$ za wielkość G , jak udowodniliśmy w paragrafie powołanym. Z drugiej strony, widzimy bezpośrednio, że wielkość Γ sprowadza się wówczas do G . Tym sposobem równanie obecne (9) sprowadza się wówczas do równania (25), § 8; obecne rozumowania zawierają w sobie rozumowanie dawniejsze, jako przypadek szczególny. Podnosimy jeszcze okoliczność, iż wielkość $f + p/\rho$ jest oczywiście t. zw. „potencjałem termodynamicznym zupełnym“ (pod ciśnieniem stałym), obliczonym na jednostkę masy płynu uważanego.

Z równania (1) wynikają jeszcze następujące równania, stosujące się do dowolnego miejsca powierzchni Σ :

$$(10a) \quad \rho (lI + mN + nM) - p_x + pl + \alpha = 0$$

$$(10b) \quad \rho (lN + mJ + nL) - p_y + pm + \beta = 0$$

$$(10c) \quad \rho (lM + mL + nK) - p_z + pn + \gamma = 0$$

$$(11a) \quad \rho' (l'I + m'N' + n'M') - p'_x + p'l' - \alpha = 0$$

$$(11b) \quad \rho' (l'N' + m'J' + n'L') - p'_y + p'm' - \beta = 0$$

$$(11c) \quad \rho' (l'M' + m'L' + n'K') - p'_z + p'n' - \gamma = 0$$

$$(12a) \quad \rho (E + \Psi + \Gamma + C) l + \rho (lI + mN + nM) - p_x + pl + \varepsilon = 0$$

$$(12b) \quad \rho (E + \Psi + \Gamma + C) m + \rho (lN + mJ + nL) - p_y + pm + \varkappa = 0$$

$$(12c) \quad \rho (E + \Psi + \Gamma + C) n + \rho (lM + mL + nK) - p_z + pn + \lambda = 0$$

$$(13a) \quad \rho' (E' + \Psi' + \Gamma' + C) l' + \rho' (l'I + m'N' + n'M') - p'_x + p'l' - \varepsilon = 0$$

$$(13b) \quad \rho' (E' + \Psi' + \Gamma' + C) m' + \rho' (l'N' + m'J' + n'L') - p'_y + p'm' - \varkappa = 0$$

$$(13c) \quad \rho' (E' + \Psi' + \Gamma' + C) n' + \rho' (l'M' + m'L' + n'K') - p'_z + p'n' - \lambda = 0.$$

Porównajmy te równania z równaniami: (4), (6) oraz z równaniami analogicznymi, napisanymi dla drugiego płynu; otrzymamy:

$$(14a) \quad -p_x + \alpha = 0; \quad -p'_x - \alpha = 0; \quad (15a)$$

$$(14b) \quad -p_y + \beta = 0; \quad -p'_y - \beta = 0; \quad (15b)$$

$$(14c) \quad -p_z + \gamma = 0; \quad -p'_z - \gamma = 0; \quad (15c)$$

$$(16a) \quad -p_x + \varepsilon = 0; \quad -p'_x - \varepsilon = 0; \quad (17a)$$

$$(16b) \quad -p_y + \varkappa = 0; \quad -p'_y - \varkappa = 0; \quad (17b)$$

$$(16c) \quad -p_z + \lambda = 0; \quad -p'_z - \lambda = 0. \quad (17c)$$

A zatem mamy w każdym punkcie powierzchni Σ :

$$(18) \quad p'_x = -p_x; \quad p'_y = -p_y; \quad p'_z = -p_z$$

podobnie jak dawniej; lecz obecnie ciśnienia te nie są już (wogóle mówiąc) skierowane normalnie do elementu, na który działają. Ciśnienia, działające na elementy dS i dS' nie są również, wogóle mówiąc, skierowane do nich normalnie w obecnym przypadku.

§ 11. Zakończymy niniejszą pracę przykładem, który posłuży za ilustrację poprzedniej ogólnej teorii. Wyobraźmy sobie na otwartym powietrzu płynący strumień wody; przypuśćmy, iż opływa on kawałek

lodu, który nurza się w nim częścią swą powierzchnią. Lód ma być w spoczynku, ruch wody ma być, przypuścimy, ruchem „trwałym“, zatem potencjał prędkości nie może zawierać czasu wyraźnie. Zwracamy uwagę na dwa punkty, M i M' , które wybieramy w sposób następujący. Pierwszy punkt, M , wybieramy na swobodnej powierzchni wody, w odległości od lodu, która, biorąc bezwzględnie, nie jest znaczna, jednak zarazem dostatecznie jest wielka, ażeby wolno było zaniedbać zupełnie, w punkcie M , wpływ sił adhezyjnych, czynnych na granicy zetknięcia pomiędzy lodem a wodą. Punkt drugi, M' , obieramy na powierzchni swobodnej lodu, również niezbyt daleko od granicy zetknięcia z wodą. Ponieważ tedy punkty M i M' leżą we wzajemnem bezpośrednim sąsiedztwie, przeto możemy zaniedbać różnicę wartości potencjałów (Ψ i Ψ') siły ciężkości, utworzonych w tych miejscach. Oznaczając przez q prędkość płynięcia wody w punkcie M , mamy dalej

$$\text{w } M: E = \frac{1}{2} q^2; \quad \text{w } M': E' = 0. \quad (1)$$

A zatem równanie (25) z § 8-go daje nam tutaj, jeśli p_0 oznacza ciśnienie normalne (atmosferyczne):

$$f - f' + p_0 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right) + \frac{1}{2} q^2 = 0. \quad (2)$$

Obliczmy temperaturę, przypuścimy ϑ , jaka wypada z równania (2). Oznaczmy przez h i h' potencjał termodynamiczny zupełny wody i lodu, branych zawsze w jednostce masy, pod ciśnieniem stałym; a więc

$$h = f + \frac{p}{\rho}; \quad h' = f' + \frac{p'}{\rho'}. \quad (3)$$

Niechaj będzie ϑ_0 temperatura bezwzględna, odpowiadająca temperaturze zera Celsjusza; w razie $q = 0$ mielibyśmy widocznie

$$h(\vartheta_0, p_0) - h'(\vartheta_0, p_0) = 0, \quad (4)$$

podczas gdy w obecnym przypadku jest, jak wskazuje (2),

$$h(\vartheta, p_0) - h'(\vartheta, p_0) + \frac{1}{2} q^2 = 0. \quad (5)$$

Owóż, jeśli σ i σ' oznaczają wartości entropii jednostki masy wody i lodu, obliczone na 0° C. i ciśnienie atmosferyczne normalne, tedy mamy:

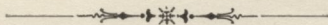
$$(6) \quad h(\vartheta, p_0) - h(\vartheta_0, p_0) = -(\vartheta - \vartheta_0) \sigma;$$

$$(7) \quad h'(\vartheta, p_0) - h'(\vartheta_0, p_0) = -(\vartheta - \vartheta_0) \sigma'.$$

Z równań (6), (7), (4) i (5) otrzymujemy:

$$(8) \quad \vartheta - \vartheta_0 = \frac{\vartheta_0 q^2}{2L},$$

gdzie L jest ciepłem topliwości lodu w 0°C . i pod ciśnieniem normalnem. Stąd się okazuje, że, jeśli np. q wynosi 1 metr na sekundę, tedy $\vartheta - \vartheta_0$ wynosi około $\frac{1}{2000}^\circ \text{C}$., zatem ϑ wynosi około $\frac{1}{2000}^\circ \text{C}$. nad 0°C . Gdyby przewodnictwo wody było nadwyzwyczajnie znaczne, gdyby zatem ciepło, jakie wytwarza się skutkiem tarcia, dostarczane natychmiast topiącym się elementom lodu, było obracane na potrzeby tej reakcyi, tedy w przypadku, jaki wyobraziliśmy sobie, sama przez się musiałaby zapanowywać temperatura około $\frac{1}{2000}^\circ \text{C}$. nad zerem w częściach wody i lodu, sąsiadujących z powierzchnią graniczną. Ponieważ, dzięki tarcu, ciepło ustawicznie się wytwarza, przeto proces topienia się nie mógłby ustawać; temperatura około $\frac{1}{2000}^\circ \text{C}$. nad zerem nie jest więc bynajmniej właściwą temperaturą równowagi. Jest to tylko temperatura równowagi części c i o w e j; mianowicie jedna część składowa reakcyi, część o d w r a c a l n a, dochodzi tam do równowagi.



- S. Jentys: Studya nad rozkładem i przyswajalnością związków azotowych w odchodach zwierzęcych, lex. 8^o, str. 113, z 9 rycinami. Cena 1 złr. 25 ct.
 — O wpływie tlenu na rozkład związków azotowych w odchodach zwierzęcych, lex. 8-o, str. 30. Cena 40 ct.
- H. Kadyi: Przyczynki do anatomii porównawczej zwierząt domowych (z tablicą jedną i 2 rycinami) lex. 8^o str. 22. Cena 50 ct.
- S. Kępiński: O funkcjach Fuchsa dwu zmiennych zespolonych, lex. 8-o, str. 11. Cena 20 ct.
- K. Klecki: Badania doświadczalne nad sprawą wydzielania w jelicie cienkiem, lex. 8^o. str. 55. Cena 60 ct.
- K. Kostanecki: Badania nad zapłodnionemi jajkami jeżowców, lex. 8-o, str. 44. Z tablicą. Cena 60 ct.
- M. Kowalewski: Studya helmintologiczne, lex. 8-o, Część I, z jedną tablicą, str. 19. Cena 30 ct. — Część II. Przyczynek do histologicznej budowy skóry niektórych przywr, z jedną tablicą i jedną ryciną w tekście, str. 19. Cena 25 ct. — Część III. Bilharzia polonica sp. nov., z jedną tablicą, str. 30. Cena 40 ct. — Część IV. Bilharzia polonica sp. nov. Sprostowania i uzupełnienia. Z jedną tablicą, str. 12. Cena 20 ct.
- J. Kowalski: O prawie zgodności termodynamicznej w zastosowaniu do roztworów potrójnych, lex. 8^o, str. 5. Cena 10 ct.
- W. Kretkowski: O pewnej tożsamości, lex. 8^o str. 4. Cena 10 ct.
- F. Kreutz: O przyczynie błękitnego zabarwienia soli kuchennej, lex. 8^o str. 13. Cena 25 ct.
- L. Marchlewski: Synteza cukru trzcinowego, lex. 8-o, str. 6. Cena 10 ct.
- A. Mars: O złośliwym gruczolaku macicy (Adenoma destruens uteri) (z jedną tablicą) lex. 8^o str. 15. Cena 50 ct.
- A. Mars i J. Nowak: O budowie i rozwoju łożyska ludzkiego, lex. 8-o, str. 49. Z trzema tablicami. Cena 80 ct.
- F. Mertens: Przyczynek do rachunku całkowego, lex. 8^o, str. 14. Cena 20 ct.
 — O zadaniu Malfattego, lex. 8^o, str. 26. Cena 35 ct.
- W. Natanson: Studya nad teorią roztworów, lex. 8^o str. 38. Cena 50 ct.
 — O znaczeniu kinetycznem funkcji dysypacyjnej, lex. 8^o, str. 10. Cena 20 ct.
 — O prawach zjawisk nieodwracalnych, lex. 8-o, str. 28. Cena 50 ct.
- J. Niedźwiecki: Przyczynek do geologii pobraża karpackiego w Galicyi zachodniej, lex. 8^o, str. 13. Cena 20 ct.
- S. Niemętowski: Syntezy związków chinazolinowych, lex. 8^o, str. 15. Cena 25 ct.
 — O utlenianiu związków chinazolinowych, lex. 8-o, str. 15. Cena 20 ct.
- J. Nowak: Badania doświadczalne nad etiologią skrobiawicy, lex. 8-o, str. 35. Cena 50 ct.
 — Dalsze badania nad budową i rozwojem łożyska ludzkiego, lex. 8-o, str. 32. Z dwiema tablicami. Cena 50 ct.
- J. Nusbaum: Przyczynek do kwestyi powstawania śródbłonek i ciałek krwi, lex. 8^o, str. 56, z 3 tablicami. Cena 1 złr.
 — Lyssa i szczątki podjęzka zwierząt mięsożernych, lex. 8-o, str. 21, z jedną tablicą podwójną. Cena 35 ct.
- K. Olearski: Nowy sposób całkowania pewnych równań różniczkowych pierwszego rzędu o dwu zmiennych, lex. 8^o str. 11. Cena 20 ct.
- K. Olszewski: Próba skroplenia helu (helium), lex. 8-o, str. 8. Cena 10 ct.
- K. Olszewski i A. Witkowski: O własnościach optycznych ciekłego tlenu. Z 2 rycinami, lex. 8^o str. 4. Cena 10 ct.
- B. Pawlewski: Z teorii roztworów (z dwiema figurami w tekście), lex. 8^o str. 20. Cena 30 ct.
- G. Piotrowski: O wahanii wstecznem przy pobudzaniu różnych miejsc tego samego nerwu. lex. 8^o str. 31. Cena 25 ct.
- F. E. Polzeniusz: O działaniu chlorku benzoilowego na kwasy i bezwodniki kwasowe, lex. 8-o, str. 6. Cena 10 ct.
- J. Prus: O ciałkach Russella, lex. 8-o, str. 18, z tablicą. Cena 40 ct.
- J. Puzyna: O wartościach funkcji analitycznej na okręgach spółśrodkowych z kołem zbieżności jej elementu, lex. 8^o str. 51. Cena 65 ct.



33602

L. inw.

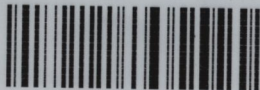
Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000

Cracoviana

- M. Raciborski: Chromatofilia jąder wo
 — Przyczynk do morfologii jądra k
 tablicą), lex. 8^o str. 11. Cena 20 c
 — Cycadeoidea Niedzwiedzkiej. Nov. 9
 Cena 25 ct.
 — Elaioplasty liliowatych, lex. 8^o, s
 — Flora kopalna glinek ogniotrwał
 z 22 tablicami. Cena 3 złr.
 — Pseudogardneria, nowy rodzaj z rodziny Logan
 rysunkami w tekście. Cena 20 ct.
- K. Radziewanowski: Przyczynki do znajomości
 lex. 8^o, str. 11. Cena 20 ct.
 — O zastosowaniu glinu metalicznego do syntez
 lex. 8-o, str. 9. Cena 20 ct.
- M. P. Rudzki: Przyczynk do teoryi fal wodnych niewirowych, lex. 8-o, str. 11.
 Cena 15 ct.
- J. Schramm: O połączeniach styrolu z kwasem solnym i bromowodorowym, lex.
 8^o str. 6. Cena 10 ct.
- M. Siedlecki: O budowie leukocytów oraz o podziale ich jąder u jaszczurów, lex.
 8-o, str. 30. Z tablicą. Cena 50 ct.
- L. Silberstein: Porównanie pola elektromagnetycznego z ośrodkiem sprężystym,
 lex. 8^o, str. 9. Cena 15 ct.
- J. A. Stodólkiewicz: Kilka uwag o czynniku całkującym równań różniczkow
 ych, lex. 8^o, str. 7. Cena 15 ct.
- W. Syniewski: O metyloweglanach wielowartościowych fenolów, lex. 8 o, str. 5.
 Cena 10 ct.
- J. Szyszylowicz: Diagnoses plantarum novarum; pars I. lex. 8^o, str. 25. Cena
 30 ct.
- L. Teichmann: Naczynia limfatyczne w słoniowacinie (Elephantiasis Arabum)
 5 tablic w 4^o w teczce, oraz tekst imp. 8^o str. 51. Cena 3 złr.
- L. Wachholz: O oznaczaniu wieku ze zwłok na podstawie kostnienia główki
 kości ramieniowej. lex. 8^o, str. 44, z tablicą. Cena 65 ct.
- D. Wierzbicki: Spostrzeżenia magnetyczne wykonane w zachodniej części W. X.
 Krakowskiego w roku 1891, lex. 8^o str. 20. Cena 30 ct.
- A. Wierzejski: Rotatoria (Wrotki) Galicyi. Z 3 tablicami i 3 rycinami w tekście.
 lex. 8^o str. 106. Cena 1 złr. 25 ct.
- A. W. Witkowski: O własnościach termodynamicznych powietrza, lex. 8-o, str.
 46. Z dwiema tablicami i 6 rysunkami. Cena 60 ct.
- Wl. Zajączkowski: O inwolucyi punktów na liniach tworzących powierzchnię
 prostokątnej skośnej, lex 8-o, str. 23, z figurą w tekście. Cena 30 ct.
- I. Zakrzewski: O zależności ciepła właściwego ciał stałych od temperatury, lex.
 8^o str. 16. Cena 30 ct.
- R. Załoziecki: O terpenowych węglowodorach w nafcie, lex. 8^o, str. 13. Cena
 20 ct.
- „ Zaniętowski: Poszukiwania nad zmianami elektrotonicznymi w pobudliwości
 nerwów, lex. 8-o, str. 47. Z dwiema tablicami. Cena 70 ct.
- K. Zorawski: O linii wskazującej krzywiznę powierzchni, lex. 8^o, str. 16. Cena
 25 ct.
 — Iteracye i szeregi odwracające, lex. 8^o, str. 10. Cena 20 ct.
- Sprawozdania Komisji fizyograficznej obejmujące pogląd na czynności do-
 konane w ciągu roku 1891 oraz materyały do fizyografii krajowej. Tom
 XXXI, 8-o, str. XXXIX, 60, 255 i 258, z 2-ma tablicami. Cena 4 złr.

Skład główny wydawnictw Akademii znajduje się w Księgarni
 Spółki wydawniczej Polskiej w Krakowie.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000339616