Dar autora

PODRĘCZNIK ALGEBRY

DLA UCZNIÓW KLAS WYŻSZYCH

GIMNAZYÓW I SZKÓŁ REALNYCH W GALICYI.

NAPISAŁ

DR. MARYAN A. BARANIECKI,
PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO.

A. Wazdrowski

ZESZYT TRZECI.

KRAKÓW.
W DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM A. M. KOSTERKIEWICZA.
1892.

SPIS RZECZY CZĘŚCI TRZECIEJ.

PRZYPISKI.

[illegible]ki. Przedmowa. Spis rzeczy do całej książki.

CZĘŚĆ TRZECIA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO Z WIELU NIEWIADOMEMI.

RÓWNANIE Z WIELU NIEWIADOMEMI.

1. Gdy równanie z dwiema niewiadomemi (a więc nieoznaczone) jest stopnia 2-go, to, jeżeli owe niewiadome nazwiemy x i y, mogą w niem być tylko wyrazy zawierające x^2, x^1y^1, y^2, x^1, y^1, oraz wyrazy niezawierające niewiadomej. — Przeto kształt ogólny takiego równania zupełnego jest

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0. \tag{1}$$

Gdy w równaniu (1) jednej niewiadomej np. x nadamy wartość jakąkolwiek, np. $x=\alpha$, to ono przejdzie na równanie

$$cy^2+(b\alpha+e)y+a\alpha^2+d\alpha+f=0,$$

z którego, jako z równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą, otrzymujemy dwie wartości y, odpowiadające owej jednej wartości $x=\alpha$. Nawzajem, jeżeli w równaniu (1) nadamy dowolną wartość niewiadomej y, to otrzymamy z niego dwie odpowiadające wartości niewiadomej x.

Rozważymy kilka przypadków szczególnych równania (1).

Z równania

$$y^2=2px$$

wypada $x=\dfrac{y^2}{2p}$, $y=\pm\sqrt{2px}$. Jeżeli $p>0$, to: przy każdej rzeczywistej wartości y otrzymujemy dodatną jedyną wartość x; przy każdej dodatnej wartości x otrzymujemy dwie rzeczywiste wartości y, różniące się od siebie tylko znakiem; przy $x=0$ otrzymujemy wartość $y=0$; nakoniec przy $x<0$ otrzymujemy dwie wartości y, obie urojone, różniące się od siebie tylko znakiem. Łatwo podobnie objaśnić przypadek $p<0$.

Gdy weźmiemy równanie

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

to $x=\pm\dfrac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$, $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Przeto; przy wszelkich wartościach rzeczywistych y otrzymujemy dwie wartości rzeczywiste x różniące się od siebie tylko znakiem, ale nie otrzymujemy wartości rzeczywistych x, pośrednich między $-a$ i $+a$; przy $x=-a$, lub $x=+a$ mamy $y=0$; przy każdej zaś wartości rzeczywistej $x<-a$, lub $x>+a$, otrzymujemy dwie wartości y, różniące się tylko znakiem.

Ogólny kształt równania jednorodnego stopnia 2-go z dwiema niewiadomemi jest

$$ax^2+bxy+cy^2=0.$$

Temu równaniu czyni zadość para wartości

$$x=0,\quad y=0.$$

Nie biorąc tych wartości na uwagę, możemy obie strony powyższego równania podzielić przez kwadrat jednej niewiadomej np. przez y^2; powstałe równanie $a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\frac{x}{y}+c=0$ rozwiązując względem niewiadomej $\frac{x}{y}$, znajdziemy

albo $x:y=-(b-\sqrt{b^2-4ac}):2a$, albo też $x:y=-(b+\sqrt{b^2-4ac}):2a$.

2. Gdy mamy równanie stopnia 2-go z trzema niewiadomemi np.

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

to np. $z=\pm\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}$. Wartości zatem z będą rzeczywiste przy takich rzeczywistych wartościach x i y, przy których $x^2+y^2\leqslant r^2$. Największą bezwzględnie z możliwych wówczas wartości x można wziąć przy $y=0$, i nawzajem największą bezwzględnie wartość y można wziąć przy $x=0$. A więc według tej nierówności x może się zmieniać, od wartości $x=-r$ wzrastając do wartości $x=+r$, i y może się zmieniać, od wartości $y=-r$ wzrastając do wartości $y=+r$; ale każde dwie jednocześnie wzięte wartości niewiadomych x i y mają być takie, iżby suma ich kwadratów nie była większa od r^2. Do podobnych wyników dojdziemy rozwiązawszy dane równanie względem x, lub względem y.

Weźmy równanie

$$y^2+z^2=2px,$$

w którem niech $p>0$. Widocznie przy wszelkich rzeczywistych wartościach każdej z niewiadomych y i z otrzymujemy dodatną wartość x. Ponieważ z tego równania $z=\pm\sqrt{2px-y^2}$, przeto: przy tak dobranych wartościach rzeczywistych y (i dodatnych x), iż $2px>y^2$, otrzymujemy dwie rzeczywiste różniące się znakiem wartości z; przy $y^2=2px$, otrzymujemy $z=0$; nakoniec, przy wartościach ujemnych x, jakoteż przy wartościach dodatnych $x<\frac{y^2}{2p}$, obie wartości z są urojone.

UKŁAD DWU RÓWNAŃ Z DWIEMA NIEWIADOMEMI.

3. Weźmy układ dwu równań stopnia 2-go z dwiema niewiadomemi w kształcie ogólnym,

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

Moglibyśmy jedno z nich, np. drugie, rozwiązać względem jednej niewiadomej, np. y, przedstawiając je uprzednio w kształcie

$$c_2y^2+(b_2x+e_2)y+(a_2x^2+d_2x+f_2)=0,$$

a następnie otrzymane dwa wyrażenia y kolejno podstawić w pierwsze z tych równań. Unikniemy jednak pierwiastków kwadratowych, pod których znakiem jest niewiadoma x, postępując inaczej. Pomnóżmy mianowicie pierwsze z równań (1) przez c_2, drugie zaś przez $-c_1$, dodajmy je do siebie stronami odpowiedniemi, a tak otrzymane równanie rozwiążmy względem y,

$$y = -\frac{(a_1c_2 - a_2c_1)x^2 + (c_2d_1 - c_1d_2)x + (c_2f_1 - c_1f_2)}{(b_1c_2 - b_2c_1)x + (c_2e_1 - c_1e_2)}. \qquad (2)$$

To równanie i którekolwiek z równań układu danego tworzą układ równoznaczny z danym. Podstawiając otrzymane wyrażenie y w jedno z równań danych, np. w pierwsze otrzymamy, po zniesieniu mianowników, równanie

$$mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

w którem pierwszy spółczynnik jest

$$m = a_1(b_1c_2 - b_2c_1)^2 - b_1(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_2 - b_2c_1) + c_1(a_1c_2 - a_2c_1)^2, \qquad (3)$$

a następne są podobnemi wyrażeniami, również całkowitemi względem spółczynników równań (1), jak o tem przekonać się można. W razie więc, kiedy spółczynniki rownań (1) są liczbami wymiernemi, spółczynniki równania (3) są także liczbami wymiernemi.

Rozwiązaniem równania (3) zajmiemy się tylko w niektórych przypadkach szczególnych. Prócz przypadków: α) kiedy redukuje się ono do równania stopnia 1-go, lub kiedy daje się rozłożyć na równanie stopnia 1-go i na równanie, mające tylko pierwiastek $x = 0$ ($m = n = p = 0$; $m = n = r = 0$; $m = q = r = 0$; $p = q = r = 0$), β) kiedy redukuje się do równania stopnia 2-go lub równania, dającego się rozłożyć na równanie stopnia 2-go i na równanie, mające tylko pierwiastek $x = 0$ ($m = n = 0$; $m = r = 0$; $q = r = 0$), możemy sposobami poprzednio wyłożonemi rozwiązać równanie (3), kiedy γ) $n=q=0$, δ) $m=p=q=0$, lub $n=p=r=0$, ε) $n=p=q=0$, ζ) $m=0$, $n=r$, $p=q$, lub $m=q$, $n=p$, $r=0$, η) $m=0$, $n=-r$, $p=-q$, lub $m=-q$, $n=-p$, $r=0$, ϑ) $m=r$, $n=q$, ι) $m=-r$, $n=-q$, $p=0$. Np.

$$\begin{cases} 18x^2 - 3xy - y^2 + 9x - 18y - 65 = 0, \\ 99x^2 + 6xy - 70y^2 - 99x + 198y - 338 = 0. \end{cases}$$

Po wyrównaniu spółczynników y^2 i odjęciu od siebie tych równań stronami odpowiedniemi, dochodzimy do równania $-43x^2 + 8xy - 27x + 54y + 156 = 0$ z którego

$$y = \frac{43x^2 + 27x - 156}{8x + 54}.$$

Po podstawieniu tego wyrażenia y w którekolwiek z danych równań, otrzymamy równanie

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0,$$

odpowiadające przypadkowi γ. Po rozwiązaniu tego równania i znalezieniu odpowiadających jego pierwiastkom wartości y z poprzedniego wyrażenia tej niewiadomej przez niewiadomą x, otrzymamy 4 pary pierwiastków danego układu równań,

$$x_1 = 2,\ y_1 = 1;\quad x_2 = -2,\ y_2 = -1;\quad x_3 = 3,\ y_3 = 4;\quad x_4 = -3,\ y_4 = 5.$$

4. α). Jeżeli mamy układ dwu równań z dwiema niewiadomemi, z których jedno stopnia 2-go, pozostałe zaś stopnia 1-go, to, wyraziwszy z równania stopnia 1-go jedną niewiadomą i podstawiwszy to wyrażenie w pozostałe równanie, otrzymamy równanie stopnia 2-go z jedną niewiadomą, po którego rozwiązaniu znajdziemy z wyrażenia pierwszej niewiadomej odpowiednie jej wartości.

β) Jeżeli mamy układ

$$\begin{cases} b_1 xy + d_1 x + e_1 y + f_1 = 0, \\ b_2 xy + d_2 x + e_2 y + f_2 = 0. \end{cases}$$

to np. z drugiego równania mamy

$$y = -\frac{d_2 x + f_2}{b_2 x + e_2},$$

co podstawiając w pierwsze otrzymujemy

$$(b_1 d_2 - b_2 d_1)x^2 + (b_1 f_2 - b_2 f_1 + d_2 e_1 - d_1 e_2)x + (e_1 f_2 - e_2 f_1) = 0.$$

5. 1).
$$\begin{cases} x + y = s, \\ xy = t. \end{cases}$$

Ten układ odpowiada rozwiązanemu w części II (art. 101) zadaniu: mając sumę dwu liczb i ich iloczyn, znaleźć te liczby. Zamiast jednak, uważając niewiadome za pierwiastki równania stopnia 2-go z jedną niewiadomą, tworzyć owo równanie, możemy inaczej postąpić. Po podniesieniu obu stron równania pierwszego do kwadratu odejmiemy stronami odpowiedniemi równanie drugie, pomnożywszy je uprzednio przez 4; otrzymamy

$$(x-y)^2 = s^2 - 4t, \quad \text{skąd} \quad x - y = \pm\sqrt{s^2 - 4t}.$$

Biorąc w tem równaniu $+\sqrt{s^2-4t}$, otrzymamy z niego i z pierwszego z równań danych, jako z układu dwu równań stopnia 1-go, $x = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 4t})$, $y = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4t})$. Gdybyśmy zaś wzięli $-\sqrt{s^2 - 4t}$, to w ten sposób otrzymalibyśmy odwrotnie: $x = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4t})$, $y = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 4t})$. Dane bowiem dwa równania były takie, iż w nich można było przestawić z sobą niewiadome x i y, czyli, jak mówimy, były »symetryczne« względem tych niewiadomych.

2).
$$\begin{cases} x - y = a, \\ xy = b^2. \end{cases}$$

Kładąc $y = -\eta$ i mnożąc obie strony równania drugiego przez -1, sprowadzimy zadanie do zadania poprzedzającego.

3).
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = b. \end{cases}$$

Pomnożywszy obie strony równania drugiego przez 2 i dodawszy do stron odpowiednich pierwszego znajdziemy $x + y = \pm\sqrt{a^2 + 2b^2}$ i temsamem sprowadzimy zadanie do zadania pod 1). Otrzymamy tu cztery wartości x i cztery odpowiadające wartości y; z tych czterech par wartości z powodu symetryczności równań danych, dwie pary są przestawionemi wartościami pozostałych dwu par.

4).
$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x^2-y^2=b. \end{cases}$$

Szukajmy wartości x^2 i y^2; względem nich te równania są stopnia pierwszego; jest więc $x^2=\frac{1}{2}(a+b)$, $y^2=\frac{1}{2}(a-b)$, a zatem $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a+b)}$, $y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a-b)}$, a przy każdej z dwu wartości x można wziąć każdą z dwu wartości y, tak iż mamy tu cztery pary pierwiastków.

5).
$$\begin{cases} x^2+xy=ay, \\ y^2+xy=bx. \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy $x=\dfrac{y^2}{b-y}$, co podstawiając w pierwsze, otrzymujemy równanie
$$(a-b)y^3-2aby^2+ab^2y=0,$$
które ma pierwiastki $y_1=0$, $y_2=\dfrac{ab+b\sqrt{ab}}{a-b}$, $y_3=\dfrac{ab-b\sqrt{ab}}{a-b}$, co podstawiając kolejno w poprzednie wyrażenie x, otrzymamy
$$x_1=0,\quad x_2=\frac{-ab-a\sqrt{ab}}{a-b},\quad x_3=\frac{-ab+a\sqrt{ab}}{a-b}.$$

6. Niekiedy bywa dogodne wprowadzenie nowej niewiadomej, jako pomocniczej, co objaśnimy na przykładzie.
$$\begin{cases} 3x^2+5xy+2y^2=60, \\ 6x^2+4xy+3y^2=75. \end{cases}$$
Kładąc w tych równaniach $y=tx$, otrzymamy
$$\begin{cases} x^2(3+5t+2t^2)=60, \\ x^2(6+4t+3t^2)=75. \end{cases} \qquad (\alpha)$$
Pomnożywszy obie strony pierwszego z równań (α) przez 5, drugiego zaś przez 4, odejmiemy je od siebie stronami odpowiedniemi i dojdziemy do równania
$$x^2(2t^2-9t+9)=0. \qquad (\beta)$$
Gdyby było $x=0$, to ponieważ $y=tx$, byłoby także $y=0$; para zaś wartości $x=0$ i $y=0$ nie czyni zadość układowi równań danych; możemy więc obie strony równania (β) podzielić w tym razie przez x^2 i zastąpić je przez równanie $2t^2-9t+9=0$; $t_1=3$, $t_2=\frac{3}{2}$. Te wartosci t podstawiając w pierwsze z równań (α), otrzymamy

$x^2=\frac{5}{3}$, skąd $x_1=+\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x_2=-\sqrt{\frac{5}{3}}$, oraz $x^2=4$, skąd $x_3=+2$, $x_4=-2$.
Podstawiając zaś w równanie $y=tx$ raz $t=t_1$ i przytem $x=x_1$ i $x=x_2$, otrzymamy
$$y_1=3\sqrt{\tfrac{5}{3}},\quad y_2=-3\sqrt{\tfrac{5}{3}},$$
drugim razem $t=t_2$ i przytem $x=x_3$ i $x=x_4$, otrzymamy
$$y_3=3,\quad y_4=-3.$$
Mamy zatem cztery pary wartości x i y czyniących zadość danemu układowi równań.

7. Weźmy jeszcze na uwagę szczególne układy dwu równań z dwiema niewiadomemi, z których jedno jest stopnia 2-go, a pozostałe stopnia 1-go (art. 4, α).

1).
$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y\eta = p(x+\xi), \end{cases}$$

$$y = \eta \pm \sqrt{\eta^2 - 2p\xi}, \quad x = \frac{1}{p}(\eta^2 - p\xi \pm \eta\sqrt{\eta^2 - 2p\xi}),$$

gdzie z podwójnych znaków górne odpowiadają sobie, a dolne sobie, tak iż dane równania mają dwie pary pierwiastków. Jeżeli liczby p, ξ i η są takie, iż $\eta^2 < 2p\xi$, to układ danych równań nie ma rozwiązania rzeczywistego. Jeżeli $\eta^2 > 2p\xi$, układ dany ma dwa rozwiązania rzeczywiste. Jeżeli nakoniec $\eta^2 = 2p\xi$, jedna tylko para wartości $x = \xi$, $y = \eta$ równaniom danego układu czyni zadość.

2).
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\[2mm] \dfrac{\xi x}{a^2} + \dfrac{\eta y}{b^2} = 1, \end{cases}$$

$$x = \frac{a^2b^2\xi \pm a^2\eta\sqrt{a^2\eta^2 + b^2\xi^2 - a^2b^2}}{a^2\eta^2 + b^2\xi^2}, \quad y = \frac{a^2b^2\eta \mp b^2\xi\sqrt{a^2\eta^2 + b^2\xi^2 - a^2b^2}}{a^2\eta^2 + b^2\xi^2},$$

gdzie z podwójnych znaków należy brać albo jednocześnie górne, alboteż jednocześnie dolne, tak iż dany układ ma dwie pary pierwiastków. Jeżeli a, b, ξ i η, są takiemi liczbami, iż $\dfrac{\xi^2}{a^2} + \dfrac{\eta^2}{b^2} < 1$, tak obie wartości ξ, jak i obie wartości η są zespolone. Jeżeli zaś $\dfrac{\xi^2}{a^2} + \dfrac{\eta^2}{b^2} > 1$, obie pary pierwiastków są rzeczywiste. W razie nakoniec, kiedy $\dfrac{\xi^2}{a^2} + \dfrac{\eta^2}{b^2} = 1$, danemu układowi czynią zadość wartości $x = \xi$, $y = \eta$.

UKŁAD TRZECH RÓWNAŃ Z TRZEMA NIEWIADOMEMI I T. D.

8. Możemy łatwo rozwiązywać niektóre prostsze układy trzech równań stopnia 2-go z trzema niewiadomemi, czterech równań stopnia 2-go z czterema niewiadomemi i t. d.

1).
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 6, \\ x^2 - y^2 - z^2 = 4. \end{cases}$$

Z tych równań, które są stopnia 1-go względem x^2, y^2, z^2, znajdziemy

$$x = \pm 3, \quad y = \pm 1, \quad z = \pm 2.$$

Tu przy każdej z dwu wartości x należy wziąć każdą z dwu wartości y i każdą z dwu wartości z, a więc danym równaniom czyni zadość osiem trójek liczb.

2).
$$\begin{cases} xy + xz = a, \\ xy + yz = b, \\ xz + yz = c. \end{cases}$$

Od sumy dwu z tych równań odejmując pozostałe stronami odpowiedniemi, znajdziemy

$$\begin{cases} xy = \tfrac{1}{2}(a+b-c), \\ xz = \tfrac{1}{2}(a+c-b), \\ yz = \tfrac{1}{2}(b+c-a); \end{cases}$$

iloczyn każdych dwu z tych równań dzieląc przez równanie pozostałe, znajdziemy

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{2(b+c-a)}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{b^2-(c-a)^2}{2(a+c-b)}}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{c^2-(a-b)^2}{2(a+b-c)}},$$

gdzie z podwójnych znaków należy tu brać jednocześnie górne i jednocześnie dolne, tak iż równaniom danym czynią zadość dwie trójki liczb.

3). Mając rozwiązać równanie

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+5}=\sqrt{8x+15},$$

możemy wprowadzić oznaczenia

$$\sqrt{2x+3}=y, \quad \sqrt{2x+5}=z, \quad \sqrt{8x+15}=u$$

i znaleźć wartość jednej z tych niewiadomych pomocniczych.

$$\begin{cases} 2x+3=y^2, \\ 2x+5=z^2, \\ 8x+15=u^2, \\ y+z=u, \end{cases} \quad \begin{cases} z^2-y^2=2, \\ u^2-4y^2=3, \\ y+z=u, \end{cases} \quad \begin{cases} u^2-2uy=2, \\ u^2-4y^2=3, \end{cases} \quad u^2=4.$$

Jest zatem

$$8x+15=4, \quad \text{skąd } x=-\tfrac{11}{8},$$

a ta wartość x jest pierwiastkiem danego równania niewymiernego.

ROZDZIAŁ DRUGI.

UŁAMKI CIĄGŁE.

WPROWADZENIE UŁAMKÓW CIĄGŁYCH.

9. Gdy mamy liczbę Q dodatną niecałkowitą, t. j. albo wymierną ułamkową, alboteż niewymierną, to, największą liczbę całkowitą, zawartą w Q, nazwawszy q_1, będziemy mieli $Q=q_1+r_1$, gdzie $r_1<1$; albo też, odwrotność liczby r_1 nazwawszy ρ_1, będziemy mieli $Q=q_1+\dfrac{1}{\rho_1}$, gdzie $\rho_1>1$. Jeżeli ρ_1 nie jest liczbą całkowitą, to, największą liczbę całkowitą, zawartą w ρ_1 nazwawszy q_2, będziemy mieli $\rho_1=q_2+r_2$, gdzie $r_2<1$; albo $\rho_1=q_2+\dfrac{1}{\rho_2}$, gdzie $\rho_2>1$. Jeżeli ρ_2 nie jest liczbą całkowitą, to, największą liczbę całkowitą, zawartą w ρ_2, nazwawszy q_3, będziemy mieli $\rho_2=q_3+r_3$, gdzie $r_3<1$; albo $\rho_2=q_3+\dfrac{1}{\rho_3}$, gdzie $\rho_3>1$. I t. d.

Zdarzyć się mogą dwa przypadki, albo któraś z liczb $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots$, np. ρ_{m-1}, jest już liczbą całkowitą, a wtedy $\rho_{m-1}=q_m$, albo też żadna z owych liczb nie jest liczbą całkowitą, tak iż ciąg równości $\rho_{m-1}=q_m+\dfrac{1}{\rho_m}, \ldots$ jest nieograniczony.

Z równości

$$Q = q_1 + \frac{1}{\rho_1}, \quad \rho_1 = q_2 + \frac{1}{\rho_2}, \quad \rho_2 = q_3 + \frac{1}{\rho_3}, \ldots,$$

odpowiednio do tego, czy dochodzimy do liczby ρ_{m-1} całkowitej, czyteż nie, otrzymujemy wyrażenie skończone lub nieskończone liczby Q,

$$Q = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots + \cfrac{1}{q_{m-1} + \cfrac{1}{q_m}}}} \quad (1) \qquad Q = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots + \cfrac{1}{q_{m-1} + \cfrac{1}{q_m + \ldots}}}} \quad (2)$$

Takie, czyto skończone, czyteż nieskończone, wyrażenie liczby Q nazywamy ułamkiem ciągłym (Kettenbruch) i mówimy, że liczba Q jest »rozwinięta na ułamek ciągły«. W nim liczby $q_1, q_2, q_3, \ldots$, całkowite i dodatne, z których tylko liczba q_1 może być równa zeru, nazywają się ilorazami niezupełnemi $\left(\text{Nenner der Glieder } \frac{1}{q_2}, \frac{1}{q_3}, \ldots\right)$. Nawet w razie, kiedy $q_1 = 0$, nazywać będziemy q_2 drugim, q_3 trzecim,... ilorazem niezupełnym. *Ułamek ciągły jestto szczególne wyrażenie ułamkowe mające w mianowniku sumę liczby całkowitej i ułamka, którego mianownik jest znowu takąż sumą liczby całkowitej i ułamka i t. d.* Rozważać tu będziemy tylko przypadek, kiedy liczniki owych ułamków są równe 1.

Np. $\frac{137}{51} = 2 + \frac{35}{51}, \quad \frac{51}{35} = 1 + \frac{16}{35}, \quad \frac{35}{16} = 2 + \frac{3}{16}, \quad \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$; 3.

Jest więc

$$\frac{137}{51} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}} \quad (3)$$

Tu
$$\begin{aligned} 137 &= 51 \times 2 + 35, \\ 51 &= 35 \times 1 + 16, \\ 35 &= 16 \times 2 + 3, \\ 16 &= 3 \times 5 + 1, \\ 3 &= 1 \times 3; \end{aligned}$$

t. j. »ilorazy niezupełne« otrzymaliśmy stosując do licznika i mianownika danej liczby ułamkowej sposób poszukiwania największego ich spólnego dzielnika zapomocą kolejnego dzielenia, co usprawiedliwia ich nazwę.

Gdy mamy np. $\sqrt{18}$, który jest liczbą pośrednią między 4 a 5, to, kładąc $\sqrt{18} = 4 + \frac{1}{\rho_1}$, mieć będziemy $\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{18} - 4} = \frac{\sqrt{18} + 4}{2}$. Ta liczba jest pośrednia między 4 i 5, a więc możemy przyjąć $\frac{\sqrt{18} + 4}{2} = 4 + \frac{1}{\rho_2}$, skąd mamy $\rho_2 = \frac{2}{\sqrt{18} - 4} = \sqrt{18} + 4$. Ta znowu liczba jest pośrednia między 8 a 9; jest więc $\sqrt{18} + 4 = 8 + \frac{1}{\rho_3}$, skąd $\rho_3 = \frac{1}{\sqrt{18} - 4}$. Otrzymaliśmy $\rho_3 = \rho_1$; a więc, kładąc $\rho_3 = 4 + \frac{1}{\rho_4}$, mieć będziemy $\rho_4 = \rho_2$ i t. d. Otrzymujemy więc jako rozwinięcie liczby $\sqrt{18}$,

$$\sqrt{18}=4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\ldots}}}}, \tag{4}$$

ułamek ciągły nieskończony, w którym wciąż powtarzać się będą drugi i trzeci (q_2 i q_3) ilorazy niezupełne.

Zastosujmy to postępowanie do szukania np. logarytmu zwyczajnego liczby 6, t. j. znajdźmy $x=\log 6$. Ponieważ $10^x=6$, przeto x jest liczbą pośrednią między 0 i 1; kładąc $x=\frac{1}{\rho_2}$, mamy $10^{\frac{1}{\rho_2}}=6$, czyli $6^{\rho_2}=10$. Tu ρ_2 jest liczbą pośrednią między 1 i 2. Kładąc $\rho_2=1+\frac{1}{\rho_3}$, mamy $6^{1+\frac{1}{\rho_3}}=10$, $6^{\frac{1}{\rho_3}}=\frac{5}{3}$, czyli $\left(\frac{5}{3}\right)^{\rho_3}=6$. Tu ρ_3 jest liczbą pośrednią między 3 i 4. Kładąc $\rho_3=3+\frac{1}{\rho_4}$, mamy $\left(\frac{5}{3}\right)^{3+\frac{1}{\rho_4}}=6$, $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{\rho_4}}=\frac{162}{125}$, czyli $\left(\frac{162}{125}\right)^{\rho_4}=\frac{5}{3}$. Tu ρ_4 jest liczbą pośrednią między 1 i 2. Kładąc $\rho_4=1+\frac{1}{\rho_5}$, mieć będziemy $\left(\frac{162}{125}\right)^{1+\frac{1}{\rho_5}}=\frac{5}{3}$ $\left(\frac{162}{125}\right)^{\frac{1}{\rho_5}}=\frac{625}{486}$, czyli $\left(\frac{625}{486}\right)^{\rho_5}=\frac{162}{125}$. Tu ρ_5 jest liczbą pośrednią między 1 i 2. Kładąc $\rho_5=1+\frac{1}{\rho_6}$, mamy $\left(\frac{625}{486}\right)^{1+\frac{1}{\rho_6}}=\frac{162}{125}$, $\left(\frac{625}{486}\right)^{\frac{1}{\rho_6}}=\frac{78732}{78125}$, czyli $\left(\frac{78732}{78125}\right)^{\rho_6}=\frac{625}{486}$. Tu ρ_6 jest liczbą pośrednią między 32 i 33. Kładąc $\rho_6=32+\frac{1}{\rho_7}$ mieć będziemy, i t. d. Jest więc

$$\log 6=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{32+\ldots}}}}} \tag{5}$$

UŁAMKI ZBLIŻONE.

10. Mając ułamek ciągły, jak (1) lub (2) w art. 9-ym, możemy w nim zatrzymać się na którymkolwiek ilorazie niezupełnym, odrzuciwszy całą dalszą część ułamka. Nazwijmy odpowiednio:

$$\frac{L_1}{M_1}=q_1,\quad \frac{L_2}{M_2}=q_1+\frac{1}{q_2},\quad \frac{L_3}{M_3}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}}\ \ldots,\quad \frac{L_n}{M_n}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\ldots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}$$

Te ułamki $\frac{L_1}{M_1}, \frac{L_2}{M_2}, \frac{L_3}{M_3}$ nazywać będziemy ułamkami zbliżonemi (Näherungsbrüche) albo reduktami danego ułamka ciągłego.

Mamy tu:

$$\frac{L_1}{M_1}=\frac{q_1}{1},\quad \frac{L_2}{M_2}=\frac{q_1 q_2+1}{q_2},\quad \frac{L_3}{M_3}=\frac{(q_1 q_2+1)q_3+q_1}{q_2 \cdot q_3+1}=\frac{L_2 q_3+L_1}{M_2 q_3+M_1},$$

t. j. ułamek $\frac{L_3}{M_3}$ powstał z dwu poprzednich w ten sposób, iż jego wyrazy (licznik i mianownik) są sumami odpowiednich wyrazów ułamka $\frac{L_2}{M_2}$ pomnożonych przez iloraz niezupełny q_3 i odpowiednich wyrazów ułamka $\frac{L_1}{M_1}$.

Dowiedziemy zapomocą indukcyi, że takie prawo powstawania ułamka zbliżonego z dwu poprzedzających go ułamków zbliżonych jest ogólne. Dowiedziemy przeto, że jeżeli np. $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}=\frac{L_{n-2}\cdot q_{n-1}+L_{n-3}}{M_{n-2}\cdot q_{n-1}+M_{n-3}}$ to jest również $\frac{L_n}{M_n}=\frac{L_{n-1}\cdot q_n+L_{n-2}}{M_{n-1}\cdot q_n+M_{n-2}}$. Jakoż, ponieważ z ułamka zbliżonego $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$, biorąc w nim $q_{n-1}+\frac{1}{q_n}$ zamiast q_{n-1}, otrzymujemy $\frac{L_n}{M_n}$, jest

$$\frac{L_n}{M_n}=\frac{L_{n-2}\left(q_{n-1}+\frac{1}{q_n}\right)+L_{n-3}}{M_{n-2}\left(q_{n-1}+\frac{1}{q_n}\right)+M_{n-3}}=\frac{(L_{n-2}q_{n-1}+L_{n-3})q_n+L_{n-2}}{(M_{n-2}q_{n-1}+M_{n-3})q_n+M_{n-2}},$$

t. j.

$$\frac{L_n}{M_n}=\frac{L_{n-1}q_n+L_{n-2}}{M_{n-1}q_n+M_{n-2}}.$$

A zatem, jeżeli owo prawo jest prawdziwe dla ułamka $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$, to jest także prawdziwe dla ułamka $\frac{L_n}{M_n}$. Widzieliśmy zaś wprost, że według tego prawa powstaje ułamek $\frac{L_3}{M_3}$ z dwu poprzednich. W takiż więc sposób powstaje $\frac{L_n}{M_n}$ z dwu poprzednich.

Ogólnie więc *wyrazy ułamka zbliżonego są sumami odpowiednich wyrazów poprzedniego ułamka zbliżonego pomnożonych przez ostatni iloraz niezupełny i odpowiednich wyrazów ułamka zbliżonego, tamten poprzedzającego.*

Z tego prawa tworzenia wyrazów ułamków zbliżonych wynika, iż te wyrazy są liczbami całkowitemi i dodatnemi, a nadto, że $L_n > L_{n-1}$ i $M_n > M_{n-1}$.

Np. kolejne ułamki zbliżone ułamka ciągłego (3) art. 9-go są

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{3.2+2}{1.2+1}=\frac{8}{3},\ \frac{8.5+3}{3.5+1}=\frac{43}{16},\ \frac{43.3+8}{16.3+3}=\frac{137}{51}.$$

UŁAMEK CIĄGŁY SKOŃCZONY.

11. Jeżeli mamy ułamek ciągły skończony, w którym ostatni iloraz niezupełny jest q_m, to według powyższego prawa utworzony ułamek zbliżony $\frac{L_m}{M_m}$ przedstawia ten ułamek zwyczajny, który został rozwinięty na ów ułamek ciągły. W ten więc sposób można, mając dany ułamek ciągły skończony, zawsze dokładnie wyznaczyć liczbę, którą ów ułamek ciągły przedstawia.

Z tego wprost wynika, że *ułamek ciągły skończony przedstawia liczbę wymierną ułamkową.*

Nawzajem *ułamek ciągły przedstawiający liczbę wymierną ułamkową jest skończony,* co wynika wprost z tego, że rozwinięcie takiej liczby na ułamek ciągły dokonywa się przez stosowanie sposobu poszukiwania największego spólnego dzielnika zapomocą kolejnego dzielenia, a więc ilość dzieleń, a temsamem ilość otrzymanych ilorazów niezupełnych jest ograniczona.

WŁASNOŚCI UŁAMKÓW ZBLIŻONYCH.

12. Wziąwszy wyrażenie $L_n M_{n-1} - L_{n-1} M_n$ i podstawiwszy w niem $L_n = L_{n-1} q_n + L_{n-2}$, $M_n = M_{n-1} q_n + M_{n-2}$, mieć będziemy $L_n M_{n-1} - L_{n-1} M_n = (L_{n-1} q_n + L_{n-2}) M_{n-1} - L_{n-1}(M_{n-1} q_n + M_{n-2}) = -(L_{n-1} M_{n-2} - L_{n-2} M_{n-1})$. Wskutek tego $L_n M_{n-1} - L_{n-1} M_n = (-1)^2 (L_{n-2} M_{n-3} - L_{n-3} M_{n-2})$ i t. d. Nakoniec $L_n M_{n-1} - L_{n-1} M_n = (-1)^{n-2}(L_2 M_1 - L_1 M_2)$. Lecz

$L_2 M_1 - L_1 M_2 = (q_1 q_2 + 1) 1 - q_1 . q_2 = 1$, zaś $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, a więc

$$L_n M_{n-1} - L_{n-1} M_n = (-1)^n. \qquad (1)$$

Gdyby liczby L_n i M_n miały spólny dzielnik większy od 1, to miałyby go również wielokrotności tych liczb, $L_n M_{n-1}$ i $L_{n-1} M_n$, a więc także ich różnica byłaby przezeń podzielna, t. j. byłaby przezeń podzielna liczba $+1$ lub -1. Zatem otrzymany według prawa wypowiedzianego w art. 10-ym *ułamek zbliżony jest w postaci nieskracalnej.*

13. Ze wzoru (1) wynika

$$\frac{L_n}{M_n} - \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{M_n M_{n-1}}, \qquad (2)$$

t. j. *wartość bezwzględna różnicy między dwoma po sobie następującemi ułamkami zbliżonemi jest równa odwrotności iloczynu ich mianowników.*

14. Ponieważ $M_n > M_{n-1} > M_{n-2} > \ldots$ (art. 10), przeto *wartość bezwzględna różnicy między parą po sobie następujących ułamków zbliżonych, wmiarę jak je bierzemy coraz dalsze, coraz się zmniejsza.*

Ze wzoru (2) wynika, że przy n parzystem różnica po stronie lewej jest dodatna, zaś przy n nieparzystem ujemna, t. j. *ułamek zbliżony ze wskaźnikiem parzystym jest większy tak od poprzedzającego jak i od następującego ułamka zbliżonego,* zaś *ułamek zbliżony ze wskaźnikiem nieparzystym jest mniejszy tak od poprzedzającego jak i od następnego ułamka zbliżonego.*

Jeżeli w ułamku ciągłym (1) lub (2) art. 9-go całą jego część od pewnego ilorazu q_k do końca nazwiemy Q', t. j. $Q' = q_k + \cfrac{1}{q_{k+1} + \ldots}$, to w wyrażeniu k-tego ułamka zbliżonego $\frac{L_k}{M_k} = \frac{L_{k-1} q_k + L_{k-2}}{M_{k-1} q_k + M_{k-2}}$ zamiast q_k pisząc Q', otrzymamy oczywiście Q,

$$Q = \frac{L_{k-1} Q' + L_{k-2}}{M_{k-1} Q' + M_{k-2}}, \text{ skąd } Q' = \frac{L_{k-2} - M_{k-2} Q}{M_{k-1} Q - L_{k-1}}, \text{ albo } Q' \frac{M_{k-1}}{M_{k-2}} = \frac{\frac{L_{k-2}}{M_{k-2}} - Q}{Q - \frac{L_{k-1}}{M_{k-1}}}.$$

Po lewej stronie równości ostatniej mamy liczby dodatne (art. 10), a więc licznik i mianownik po prawej są jednakowego znaku, z czego wynika, iż

Q jest zawarte między $\frac{L_{k-2}}{M_{k-2}}$ i $\frac{L_{k-1}}{M_{k-1}}$, t. j. *wartość ułamka ciągłego jest zawarta między każdemi dwoma po sobie następującemi ułamkami zbliżonemi.* Uwzględniając zaś jeszcze to, cośmy powiedzieli powyżej, widzimy, że *ułamki zbliżone ze wskaźnikami parzystemi są większe od wartości ułamka ciągłego,* zaś *ułamki zbliżone ze wskaźnikami nieparzystemi są mniejsze od wartości ułamka ciągłego.*

Ponieważ nadto po lewej stronie równości ostatniej oba czynniki są większe od 1 (art. 10), przeto bezwzględna wartość różnicy $\frac{L_{k-2}}{M_{k-2}} - Q$, jest większa od bezwzględnej wartości różnicy $\frac{L_{k-1}}{M_{k-1}} - Q$, t. j. *z dwu po sobie następujących ułamków zbliżonych, drugi jest bliższy wartości ułamka ciągłego.*

Łącząc tę własność z poprzednią, wnosimy, iż *kolejne ułamki zbliżone ze wskaźnikami parzystemi, zmniejszając się, coraz się zbliżają do wartości ułamka ciągłego,* zaś *kolejne ułamki zbliżone ze wskaźnikami nieparzystemi, powiększając się, coraz zbliżają się do wartości ułamka ciągłego.*

15. Niech $\frac{a}{b}$ będzie ułamkiem nieskracalnym przedstawiającym wartość przybliżoną pewnego ułamka ciągłego. Jeżeli ten ułamek $\frac{a}{b}$ jest bliższy ułamka ciągłego, niż ułamek zbliżony $\frac{L_n}{M_n}$, to przypada on (art. 14) między ułamkami zbliżonemi $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$ i $\frac{L_n}{M_n}$, a temsamem jest także bliższy tegoż ułamka ciągłego, niż ułamek zbliżony $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$. Gdy weźmiemy różnice $\frac{a}{b} - \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$, $\frac{L_n}{M_n} - \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$, to one będą jednakowego znaku i wartość bezwzględna pierwszej z nich będzie mniejsza od wartości bezwzględnej drugiej. Po pomnożeniu obu tych różnic przez $(-1)^n$, z drugiej z nich otrzymamy według (2) liczbę dodatną, tak iż możemy napisać

$$(-1)^n\left(\frac{a}{b} - \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}\right) < \frac{1}{M_{n-1}M_n}, \quad \text{albo} \quad (-1)^n(aM_{n-1} - bL_{n-1}) < \frac{b}{M_n}.$$

Po lewej stronie ostatniej nierówności mamy liczbę całkowitą różną od zera $\left(\text{gdyż } \frac{a}{b} \text{ jest różne od } \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}\right)$, a więc jest $b > M_n$. — Gdybyśmy wzięli różnice $\frac{M_{n-1}}{L_{n-1}} - \frac{b}{a}$ i $\frac{M_{n-1}}{L_{n-1}} - \frac{M_n}{L_n}$, to byłyby one jednakowego znaku i mianowicie takiego, jak różnice poprzednio rozważane. Rozumując podobnie, jak powyżej, wniesiemy, iż $a > L_n$. — Z tego wynika, że ułamek zwyczajny wyrażający wartość przybliżoną danego ułamka ciągłego, jeżeli ma być bliższy ułamka ciągłego, niż przybliżenie $\frac{L_n}{M_n}$, ma wyrazy większe od odpowiednich wyrazów tego ułamka zbliżonego. Innemi słowy: *ułamek zbliżony jest bliższy liczby, rozwiniętej na ułamek ciągły, niż jakikolwiek ułamek zwyczajny o mniejszym, czyto mianowniku, czyteż liczniku.* Ta własność jest uzasadnieniem nazwy: »ułamek zbliżony«.

16. Jeżeli, jako przybliżenie wartości ułamka ciągłego Q, weźmiemy ułamek zbliżony $\frac{L_n}{M_n}$, to, ponieważ Q przypada między $\frac{L_n}{M_n}$ i $\frac{L_{n+1}}{M_{n+1}}$, wartość bezwzględna różnicy $Q - \frac{L_n}{M_n}$ jest mniejsza od wartości bezwzględnej różnicy $\frac{L_{n+1}}{M_{n+1}} - \frac{L_n}{M_n}$, czyli według (2) mniejsza od liczby $\frac{1}{M_n M_{n+1}}$.

Gdy tedy zamiast liczby Q, rozwiniętej na ułamek ciągły, bierzemy jej przybliżenie wyrażone przez ułamek zbliżony $\frac{L_n}{M_n}$, to popełniamy błąd, którego wartość bezwzględna jest mniejsza od liczby $\frac{1}{M_n M_{n+1}}$.

Gdy bierzemy owo przybliżenie $\frac{L_n}{M_n}$, to zwykle nie mamy znalezionego ilorazu niezupełnego q_{n+1}, który jest potrzebny dla utworzenia liczby M_{n+1} Dlatego zwykle inaczej wyrażamy błąd wziętego przybliżenia. Jest mianowicie (art. 10) $M_{n+1} > M_n$, a także $M_{n+1} > M_n + M_{n-1}$; przeto

$$\frac{1}{M_n M_{n+1}} < \frac{1}{M_n^2}, \quad \frac{1}{M_n M_{n+1}} < \frac{1}{M_n (M_n + M_{n-1})}.$$

Wartość więc bezwzględna błędu, jako mniejsza od liczby $\frac{1}{M_n M_{n+1}}$, jest również mniejsza tak od liczby $\frac{1}{M_n^2}$, jak i od liczby $\frac{1}{M_n(M_n + M_{n-1})}$. A zatem nie znając ilorazu niezupełnego q_{n+1}, możemy stopień przybliżenia wartości $\frac{L_n}{M_n}$ liczby Q oceniać przy pomocy albo liczby $\frac{1}{M_n^2}$, albo też przy pomocy liczby $\frac{1}{M_n(M_n + M_{n-1})}$. Ponieważ druga z tych liczb jest mniejsza od pierwszej, przeto lepiej brać ową drugą, jako określającą dokładniej błąd popełniony. Powiemy więc: *błąd, powstały z zastąpienia ułamka ciągłego przez ułamek zbliżony, jest co do bezwzględnej wartości mniejszy od odwrotności iloczynu dwu czynników, z których jeden jest mianownikiem owego ułamka zbliżonego, drugi zaś sumą tego mianownika i mianownika poprzedniego ułamka zbliżonego.* Zauważmy jeszcze, że według art. 14-go ułamek zbliżony ze wskaźnikiem nieparzystym przedstawiać będzie wartość przybliżoną z niedomiarem, ułamek zaś zbliżony ze wskaźnikiem parzystym wartość przybliżoną z nadmiarem. Np.

1). Początkowe ułamki zbliżone log 6 według wypisanej części ułamka ciągłego (5) w art. 9-ym są $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{228}{293}$. Pierwszy, trzeci i piąty z tych ułamków są wartościami przybliżonemi log 6 z niedomiarem, zaś drugi czwarty i szósty z nadmiarem. Ponieważ $\frac{1}{293.(293+9)} < \frac{1}{10^4}$, przeto wyrażając ułamek $\frac{228}{293}$ w postaci ułamka dziesiętnego (0·77815...), otrzymamy log 6 z dobremi pierwszemi czterema cyframi dziesiętnemi, a więc $\log 6 = 0{\cdot}7781$.

2). Wiedząc, że przybliżona na $\frac{1}{2.10^6}$ z nadmiarem wartość liczby π jest 3·141593, znajdźmy ułamek zwyczajny, wyrażający się przy pomocy mniejszych liczb, któryby z temże przybliżeniem przedstawiał liczbę π. W tym celu rozwińmy wypisaną wartość przybliżoną liczby π na ułamek ciągły.

$$3{\cdot}141593 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{983 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

i obliczmy początkowe ułamki zbliżone

$$\tfrac{3}{1},\quad \tfrac{22}{7},\quad \tfrac{355}{113},\ldots.$$

Trzeci ułamek zbliżony przedstawia przybliżenie z niedomiarem liczby rozwiniętej, a stopień tego przybliżenia określa liczba $\frac{1}{M_3 M_4} = \frac{1}{113.111086} < \frac{1}{2.10^6}$. Ponieważ każda z dwu różnic

$$3{\cdot}141593 - \pi, \quad 3{\cdot}141593 - \frac{355}{113}$$

jest liczbą dodatną i mniejszą od $\frac{1}{2.10^6}$, przeto także wartość bezwzględna różnicy $\left(3{\cdot}141593 - \frac{355}{113}\right) - (3{\cdot}141593 - \pi) = \pi - \frac{355}{113}$ jest mniejsza od $\frac{1}{2.10^6}$. Zatem ułamek $\frac{355}{113}$ przedstawia przybliżoną na $\frac{1}{2.10^6}$ wartość liczby π.

UŁAMEK CIĄGŁY PERYODYCZNY.

17. Jeżeli w ułamku ciągłym nieskończonym pewna grupa następujących po sobie ilorazów niezupełnych wciąż w tymże porządku się powtarza, to taki ułamek ciągły nazywamy **peryodycznym** (periodischer K.), a grupę owych powtarzających się ilorazów niezupełnych nazywamy **peryodem** (Periode). Jeżeli już pierwszy iloraz niezupełny należy do peryodu, ułamek ciągły jest **peryodyczny prosty** (rein p. K.), w przeciwnym zaś razie t. j. jeżeli, jak w ułamku (4) art. 9-go, pewna ilość początkowych ilorazów niezupełnych do peryodu nie należy, nazywamy go **peryodycznym mieszanym** (gemischter p. K.).

Weźmy ogólnie ułamek peryodyczny mieszany, w którym peryod zaczyna się od n-tego ilorazu niezupełnego i obejmuje p ilorazów niezupełnych. Nazwijmy ten ułamek ciągły x, całą zaś część jego zaczynającą się od pierwszego w peryodzie ilorazu niezupełnego nazwijmy y. Jest więc

$$x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{y}}}, \qquad x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n + \cdots + \cfrac{1}{q_{n+p-1} + \cfrac{1}{y}}}}}.$$

A zatem
$$x = \frac{L_{n-1}\,y + L_{n-2}}{M_{n-1}\,y + M_{n-2}}, \quad x = \frac{L_{n+p-1}\,y + L_{n+p-2}}{M_{n+p-1}\,y + M_{n+p-2}}$$

czyli
$$\begin{cases} M_{n-1}\,xy + M_{n-2}\,x - L_{n-1}\,y - L_{n-2} = 0, \\ M_{n+p-1}\,xy + M_{n+p-2}\,x - L_{n+p-1}\,y - L_{n+p-2} = 0. \end{cases}$$

Z tych dwu równań rugując y otrzymamy (art. 4, β) równanie stopnia 2-go z niewiadomą x (w którem spółczynniki są liczbami całkowitemi), a więc x jest pierwiastkiem owego równania. Nie może ten pierwiastek być liczbą wymierną, ani całkowitą, aniteż ułamkową (art. 11); jest więc liczbą niewymierną. A zatem *ułamek ciągły peryodyczny przedstawia liczbę niewymierną, która jest pierwiastkiem równania stopnia 2-go o spółczynnikach całkowitych.* Np.

$$1).\quad x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}\qquad \text{t. j. } x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}\qquad \text{czyli } x=\frac{3x+2}{x+1}.$$

Mamy tu jedno równanie $x^2-2x-2=0$. Z dwu pierwiastków tego równania, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$, drugi jest liczbą ujemną, a więc $x=1+\sqrt{3}$.

$$2).\quad x=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}},\qquad \text{gdzie } y=5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}}}.$$

Mamy tu dwa równania

$$\begin{cases} x=\dfrac{7y+3}{2y+1}, \\ x=\dfrac{173y+45}{50y+13}, \end{cases}$$

z których po wyrugowaniu y otrzymujemy $12x^2-71x+102=0$. Z dwu pierwiastków tego równania $\frac{71}{24}+\frac{1}{24}\sqrt{145}$, $\frac{71}{24}-\frac{1}{24}\sqrt{145}$ wartość drugiego jest mniejsza od $2\frac{1}{2}$, gdy tymczasem $\frac{3}{1}$ jest wartością przybliżoną z niedomiarem liczby x, a więc jest $x=\frac{71}{24}+\frac{1}{24}\sqrt{145}$.

ROZDZIAŁ TRZECI.

ROZWIĄZANIA CAŁKOWITE RÓWNAŃ NIEOZNACZONYCH.

ZADANIE DIOFANTA.

18. Zadanie: znaleźć rozwiązania całkowite równania nieoznaczonego stopnia 1-go (I, art. 172) ze spółczynnikami całkowitemi, lub też układu nieoznaczonego równań stopnia pierwszego (I, art. 182) ze spółczynnikami całkowitemi, znane jest w nauce pod nazwą zadania Diofanta (Diophantische Aufgabe).

Niech w równaniu

$$ax+by=c \tag{1}$$

spółczynniki a, b, c, będą liczbami całkowitemi. Jeżeliby one miały spólny dzielnik, to przezeń możemy podzielić obie strony równania (1). Przyjmiemy zatem, że w równaniu (1) *spółczynniki a, b, c nie mają spólnego dzielnika.*

Gdyby liczby a i b miały spólny dzielnik większy od jedności, to przy całkowitych wartościach x i y byłyby przezeń podzielne liczby ax i by, a więc także ich suma $ax+by$, czyli c, co być nie może. A więc *równaniu (1), jeżeli liczby a i b nie są pierwsze względem siebie, nie czyni zadość żadna para całkowitych wartości x i y.* Nadal więc przyjmiemy, że w równaniu (1) *liczby a i b są pierwsze względem siebie.*

Z równania (1), w którem możemy przyjąć, iż jeden ze spółczynników a i b, np. a, jest dodatny, mamy

$$x=\frac{c-by}{a}. \tag{2}$$

Podstawmy w (2) zamiast y dwie różne od siebie wartości całkowite i dodatne, y_1 i y_2, mniejsze od a. Dzieląc liczby $c-by_1$ oraz $c-by_2$ przez a, tak wyznaczmy w ilorazach liczby całkowite, odpowiednio k_1 i k_2, iżby reszty odpowiednie r_1 i r_2 były liczbami dodatnemi; jest więc $c-b_1=k_1a+r_1$, $c-by_2=k_2a+r_2$. Gdyby było $r_1=r_2$, to byłoby $\frac{b(y_2-y_1)}{a}=k_1-k_2$. Po stronie prawej mamy tu liczbę całkowitą, a po lewej czynnik b jest pierwszy względem a, czynnik zaś y_2-y_1, jako różnica liczb mniejszych od a, jest przez a niepodzielny. Ostatnia więc równość jest niemożliwa, czyli jest $r_1 \gtrless r_2$. Podstawiając przeto w (2) zamiast y kolejno liczby $0, 1, 2, \ldots, a-1$, z podzielenia $c-by$ przez a otrzymujemy a reszt dodatnych, różnych od siebie, a mniejszych od a. Jedna więc z nich jest 0, t. j. przy jednej wartości całkowitej y, którą nazwijmy y_0, mniejszej od a, otrzymujemy z (2) wartość całkowitą x, którą nazwijmy x_0. A więc, *kiedy a i b są pierwsze względem siebie, równanie (1) ma pierwiastki całkowite.* Gdy mamy np.

$$4x-7y=6, \quad \text{skąd } x=\frac{6+7y}{4},$$

to przy jednej z wartości 0, 1, 2, 3 niewiadomej y otrzymujemy całkowitą wartość x, mianowicie, jakto znajdziemy kolejno próbując, przy $y_0=2$, $x_0=5$.

Z tego wprost wynika wskazówka, iż, rozwiązawszy równanie (1) względem tej niewiadomej, której spółczynnik jest mniejszy, możemy, podstawiając zamiast pozostałej niewiadomej kolejno liczby $0, 1, 2, \ldots$, mniejsze od wartości bezwzględnej wspomnianego spółczynnika, znaleźć parę pierwiastków całkowitych równania (1). Ten sposób rozwiązania zadania jest jednak niedogodny w razie, kiedy oba spółczynniki są liczbami większemi.

19. Gdy liczby x_0 i y_0 przedstawiają jednę parę pierwiastków równania (1), to $ax_0+by_0=c$. Odejmując tę równość od równania (1) stronami odpowiedniemi, otrzymamy

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,$$

równanie równoznaczne z (1), a z tego równania

$$x-x_0=\frac{-b(y-y_0)}{a}.$$

Tu, ponieważ liczby a i b są pierwsze względem siebie, tylko przy każdej wartości całkowitej y takiej, iż $y-y_0$ jest podzielne przez a, a więc przy wartosci $y=y_0+at$, gdzie t jest jakąkolwiek liczbą całkowitą, otrzymujemy

$x=x_0-bt$, wartość również całkowitą. Widzimy więc, że *jeżeli liczby* x_0 i y_0 *są pierwiastkami równania* (1), *to temuż równaniu czynią także zadość wartości*

$$x=x_0-bt,\quad y=y_0+at, \tag{3}$$

gdzie w obu wyrażeniach t ma jednakową wartość, albo całkowitą dodatną, albo 0, alboteż całkowitą ujemną. Tak np. powyższemu równaniu $4x-7y=6$ nietylko czynią zadość wartości $x=5$, $y=2$, ale także: $x=12$, $y=6$; $x=19$, $y=10$; . . .; $x=-2$, $y=-2$, $x=-9$, $y=-6$; . . . .

20. W przypadku szczególnym, kiedy w równaniu (1) jest $c=0$, mamy równanie jednorodne $ax+by=0$, któremu czynią zadość wartości $x_0=0$, $y_0=0$, a więc według (3) pierwiastki tego równania są $x=-bt$, $y=at$.

21. Niech w równaniu (1) $c \gtrless 0$. Przyjmując, jak poprzednio (art. 18) iż $a>0$, wartości bezwzględne spółczynników a i b nazwijmy α i β i niech będzie np. $\alpha<\beta$. Możemy więc mieć jedno z dwu równań

$$\alpha x+\beta y=c,\quad \alpha x-\beta y=c. \tag{4}$$

Kładąc

$$x=c\xi,\quad y=c\eta, \tag{5}$$

zamiast równań (4) możemy rozważać równania

$$\alpha\xi+\beta\eta=1,\quad \alpha\xi-\beta\eta=1. \tag{6}$$

Rozwińmy ułamek $\frac{\beta}{\alpha}$ na ułamek ciągły. Niech w tym ułamku ciągłym będzie n ilorazów niezupełnych. Ostatnim ułamkiem zbliżonym jest (art. 11) ułamek $\frac{\beta}{\alpha}$, przedostatni nazwijmy $\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$. Według wzoru (1) art. 12-go mamy

$$\beta M_{n-1}-\alpha L_{n-1}=(-1)^n,\quad \text{a więc}\quad (-1)^{n-1}\alpha L_{n-1}-(-1)^{n-1}\beta M_{n-1}=1.$$

Odejmując tę równość od każdego z równań (6) stronami odpowiedniemi, otrzymujemy

$$\alpha[\xi-(-1)^{n-1}L_{n-1}]+\beta[\eta+(-1)^{n-1}M_{n-1}]=0,$$
$$\alpha[\xi-(-1)^{n-1}L_{n-1}]-\beta[\eta-(-1)^{n-1}M_{n-1}]=0.$$

Tym równaniom równoznacznym z odpowiedniemi równaniami (6) zadość czynią wartości $\xi=(-1)^{n-1}L_{n-1}$, $\eta=\mp(-1)^{n-1}M_{n-1}$, gdzie z podwójnego znaku górny odnosi się do pierwszego, dolny zaś do drugiego z równań (6). A więc według (5) liczby $x_0=(-1)^{n-1}cL_{n-1}$ i $y_0=\mp(-1)^{n-1}cM_{n-1}$ są pierwiastkami równań (4). Ogólnie zaś pierwiastki równania (1) możemy według (3) przedstawić

$$x=(-1)^{n-1}cL_{n-1}-bt,\quad y=\mp(-1)^{n-1}cM_{n-1}+at, \tag{7}$$

gdzie z podwójnego znaku należy brać górny lub dolny stosownie do tego, czy równanie (1) daje się sprowadzić do pierwszego, czyteż do drugiego z równań (4).

Np. $$51x-137y=-4.$$

Rozwijając $\frac{137}{51}$ na ułamek ciągły (art. 9), otrzymujemy w nim 5 ilorazów niezupełnych. Przedostatni ułamek zbliżony jest $\frac{43}{16}$. Pierwiastki zatem naszego równania według (7) są

$$x = (-1)^{5-1}(-4)43 + 137t = -172 + 137t,$$
$$y = (-1)^{5-1}(-4)16 + 51t = -64 + 51t.$$

22. Można także, nie rozwinąwszy ułamka $\frac{\beta}{\alpha}$ na ułamek ciągły, a temsamem nie obliczywszy wprost jego przedostatniego ułamka zbliżonego, stosując stopniowo do liczb α i β poszukiwanie największego spólnego dzielnika zapomocą kolejnego dzielenia, znaleźć pierwiastki równania (1). Np.

$51x - 137y = -4$, $x = \frac{-4+137y}{51}$; $137 = 2.51 + 35$; $x = 2y + \frac{-4+35y}{51}$;

przyjmijmy $\frac{-4+35y}{51} = t_1$;

$35y - 51t_1 = 4$, $y = \frac{4+51t_1}{35}$; $51 = 35.1 + 16$; $y = t_1 + \frac{4+16t_1}{35}$;

przyjmijmy $\frac{4+16t_1}{35} = t_2$;

$16t_1 - 35t_2 = -4$, $t_1 = \frac{-4+35t_2}{16}$; $35 = 16.2 + 3$; $t_1 = 2t_2 + \frac{-4+3t_2}{16}$;

przyjmijmy $\frac{-4+3t_2}{16} = t_3$;

$3t_2 - 16t_3 = 4$, $t_2 = \frac{4+16t_3}{3}$; $16 = 3.5 + 1$; $t_2 = 5t_3 + \frac{4+t_3}{3}$;

przyjmijmy $\frac{4+t_3}{3} = t$;

$t_3 = -4 + 3t$.

Mamy tu układ 5-u równań z 6-u niewiadomemi

$$\begin{cases} x = 2y + t_1, \\ y = t_1 + t_2, \\ t_1 = 2t_2 + t_3, \\ t_2 = 5t_3 + t, \\ t_3 = -4 + 3t. \end{cases}$$

Wyrażając przez t kolejno t_2, t_1, y, x, znajdziemy

$$x = -172 + 137t,\ y = -64 + 51t.$$

23. Ponieważ w wyrażeniach (7) litera t oznacza zero lub jakąkolwiek liczbę całkowitą, dodatną lub ujemną, przeto par odpowiadających sobie wartości (7) może być nieskończenie wiele.

W wyrażeniach (7) możemy zamiast t wziąć liczbę różniącą się od t o liczbę całkowitą. Tak np. w wyrażeniach pierwiastków ostatniego równania możemy zamiast t wziąć liczbę $t+2$, wtedy pierwiastki tego równania będą przedstawione w postaci

$$x = 102 + 137t,\ y = 38 + 51t.$$

Podobnie, gdy mamy

$$3x - 2y = 56, \text{ czyli } 2y - 3x = -56,$$

skąd
$$y = 56 + 3t,\quad x = 56 + 2t,$$

możemy, zamiast t biorąc $t - 28$, pierwiastki tego równania tak przedstawić:

$$y = -28 + 3t, \quad x = 2t.$$

24. Niekiedy zadanie, które ułożyć wypada w równanie nieoznaczone, jest tego rodzaju, iż do odpowiedzi na zadanie prowadzą jedynie pierwiastki owego równania nietylko całkowite, ale jednocześnie dodatne. Dlatego wyznaczymy pierwiastki całkowite i dodatne kilku takich równań.

1). $51x - 137y = -4$; $x = -172 + 137t$, $y = -64 + 51t$.

Aby pierwiastki były dodatne, możemy literze t w tych wyrażeniach nadać tylko takie wartości całkowite lub 0, przy których jest jednocześnie

$$-172 + 137t > 0, \quad -64 + 51t > 0.$$

Rozwiązując te nierówności względem t, znajdziemy $t > \frac{172}{137}$, $t > \frac{64}{51}$. Obu tym warunkom zadość czynią wartości $t = 2, 3, 4, \ldots$ To więc równanie ma nieskończenie wiele par pierwiastków całkowitych i dodatnych:

$$x = 102, \; y = 38; \quad x = 239, \; y = 89; \quad x = 376, \; y = 140; \ldots\ldots$$

2). $19x + 11y = 1000$; $x = 4 - 11t$, $y = 84 + 19t$;

$4 - 11t > 0$, $84 + 19t > 0$; $t < \frac{4}{11}$, $t > -4\frac{8}{19}$, a więc t może mieć jednę z wartości: 0, -1, -2, -3, -4.

Pierwiastki przeto dodatne i całkowite tego równania są:

$x = 4$, $y = 84$; $x = 15$, $y = 65$; $x = 26$, $y = 46$; $x = 37$, $y = 27$; $x = 48$, $y = 8$.

3). $5x + 7y = 23$; $x = 6 - 7t$, $y = -1 + 5t$;

$-1 + 5t > 0$, $6 - 7t > 0$; $t > \frac{1}{5}$, $t < \frac{6}{7}$. Ponieważ między $\frac{1}{5}$ a $\frac{6}{7}$ niema liczby całkowitej, przeto to równanie nie ma pierwiastków całkowitych i dodatnych.

4) $4x + 9y = -42$; $x = -6 - 9t$, $y = -2 + 4t$;

$-6 - 9t > 0$, $-2 + 4t > 0$; $t < -\frac{2}{3}$, $t > \frac{1}{2}$. Ponieważ te nierówności są z sobą sprzeczne, przeto dane równanie nie ma rozwiązań całkowitych i dodatnych.

25. Gdy mamy układ nieoznaczony dwu równań z trzema niewiadomemi, np.

$$\begin{cases} 2x + 14y - 7z = 341, \\ 10x + 4y + 9z = 473, \end{cases}$$

to rugując z nich niewiadomą x otrzymujemy równanie (art. 23)

$$3y - 2z = 56; \quad y = 2t, \; z = -28 + 3t.$$

Podstawiając te wyrażenia y i z np. w pierwsze z równań danych, otrzymujemy równanie

$$2x + 7t = 145,$$

z którego

$$x = 69 + 7\tau, \; t = 1 - 2\tau.$$

Podstawiając to wyrażenie t w poprzednio otrzymane wyrażenia y i z, będziemy mieli rozwiązania całkowite danego układu równań,

$$x = 69 + 7\tau, \; y = 2 - 4\tau, \; z = -25 - 6\tau,$$

przy jakiejkolwiek całkowitej lub 0 wartości τ. Aby znaleźć rozwiązanie całkowite i dodatne powyższego układu równań potrzeba nierówności

$$69 + 7\tau > 0, \; 2 - 4\tau > 0, \; -25 - 6\tau > 0$$

rozwiązać względem τ. Nierównościom

$$\tau > -9\tfrac{6}{7},\ \tau < \tfrac{1}{2},\ \tau < -4\tfrac{1}{6}$$

zadość czynią wartości τ całkowite -5, -6, -7, -8, -9. A więc dany układ posiada całkowite rozwiązania

$$x=34,\ y=22,\ z=5;\ldots;\ x=6,\ y=38,\ z=29.$$

26. Gdybyśmy chcieli, mając równanie z trzema niewiadomemi

$$10x+9y+7z=58,$$

znaleźć jego rozwiązania całkowite, to, zważywszy, że ze spółczynników najmniejszą wartość bezwzględną ma spółczynnik z, wyrazilibyśmy

$$z=\frac{58-9y-10x}{7}=8-y-x+\frac{2-2y-3x}{7}=8-y-x+t, \text{ gdzie } \frac{2-2y-3x}{7}=t;$$

$$\text{stąd } y=\frac{2-3x-7t}{2}=1-x-3t-\frac{x+t}{2}=1-x-3t-t', \text{ gdzie } \frac{x+t}{2}=t'.$$

Jest więc

$$x=-t+2t',\quad y=1-2t-3t',\quad z=7+4t+t',$$

gdzie każda z liczb t i t' może otrzymywać wartości całkowite ujemne, 0, całkowite dodatne.

27. Aby mieć rozwiązania całkowite układu równań

$$\begin{cases} 6x+\ 7y+3z+2u=100, \\ 24x+12y+7z+3u=200, \end{cases}$$

wyrugujemy z nich jednę niewiadomą np. u. Otrzymamy równanie

$$30x+3y+5z=100.$$

Ponieważ dwa spółczynniki tego równania, 30 i 100, są podzielne przez spółczynnik 5, przeto dogodniej wziąć tu wyrażenie z,

$$z=20-6x-\tfrac{3}{5}y;\quad y=5t,\ z=20-6x-3t.$$

Podstawiając te wartości w pierwsze z danych równań, otrzymujemy z niego $u=20+6x-13t$. Otrzymaliśmy tedy wyrażenia trzech niewiadomych y, z, u przez niewiadomą pozostałą x i przez liczbę pomocniczą t,

$$y=5t,\ z=20-6x-3t,\ u=20+6x-13t,$$

z których, nadając tak na x jak i na t jakiekolwiek wartości całkowite lub 0, otrzymujemy całkowite wartości y, z i u.

RÓWNANIE PITAGORASA.

28. Znane twierdzenie geometryczne Pitagorasa dało powód do szukania całkowitych i oczywiście dodatnych rozwiązań równania nieoznaczonego jednorodnego stopnia 2-go

$$x^2+y^2=z^2. \tag{1}$$

Dlatego to równanie, nazywają równaniem Pitagorasa (Pythagoräische Gleichung) trójkę zaś liczb całkowitych i dodatnych, które mogą być pierwiastkami tego równania, liczbami Pitagorasa.

Ponieważ liczba i jej kwadrat są jednocześnie liczbami parzystemi, albo też nieparzystemi, przeto, gdyby w równaniu (1) liczby x i y były obie nieparzyste np. $x=2\alpha+1$, $y=2\beta+1$, to liczba z byłaby parzysta np. $z=2\gamma$, i mielibyśmy $4(\alpha^2+\alpha+\beta^2+\beta)+2=4\gamma^2$, co być nie może. A więc z dwu liczb x i y przynajmniej jedna jest parzysta.

Zauważmy jeszcze, że, jeżeli w równaniu (1) liczby x i y mają spólny dzielnik, to przezeń liczba z jest podzielna. Z trójki zaś liczb x, y, z, w której x i y są liczbami pierwszemi względem siebie, mnożąc wszystkie 3 liczby przez jakąkolwiek liczbę dodatną i całkowitą, otrzymamy trójkę liczb, będących także pierwiastkami równania (1).

29. Niech $x=\xi$. Kładąc $z=y+t$ równanie (1) sprowadzimy do równania

$$\xi^2=2ty+t^2, \text{ skąd } y=\frac{\xi^2-t^2}{2t}. \text{ Że zaś } z=y+t, \text{ przeto } z=\frac{\xi^2+t^2}{2t}.$$

Trójka więc wartości liczb całkowitych i dodatnych

$$x=\xi, \quad y=\frac{\xi^2-t^2}{2t}, \quad z=\frac{\xi^2+t^2}{2t} \tag{2}$$

przedstawia pierwiastki równania (1).

Aby przy dowolnem całkowitem ξ wartości y i z były dodatne i całkowite, potrzeba na t nadawać takie wartości dodatne i całkowite, iżby: popierwsze, $t^2<\xi^2$, a więc $t<\xi$; powtóre tak ξ^2-t^2, jak i ξ^2+t^2 było podzielne przez $2t$, do czego potrzeba, aby liczby ξ i t były jednocześnie parzyste, lub jednocześnie nieparzyste, i aby liczba t była dzielnikiem liczby ξ^2. A więc liczby (2) żądanemi rozwiązaniami, jeżeli ξ jest jakąkolwiek liczbą całkowitą, jeżeli liczba t jest dzielnikiem liczby ξ^2, mniejszym od ξ, i jeżeli liczby ξ i t są albo jednocześnie parzyste, alboteż jednocześnie nieparzyste.

30. Z tego wynika, że w wyrażeniach (2) przy ξ nieparzystem można przyjąć $t=1$, zaś przy ξ parzystem najmniejsza możliwa wartość t jest $t=2$.

W pierwszym razie mamy

$$x=\xi, \quad y=\frac{\xi^2-1}{2}, \quad z=\frac{\xi^2+1}{2}, \tag{3}$$

i przyjmując $\xi=3, 5, 7, 9, \ldots$, otrzymujemy rozwiązania równania (1)

$$3, 4, 5; \quad 5, 12, 13; \quad 7, 24, 25; \quad 9, 40, 41; \ldots. \tag{4}$$

W drugim zaś razie mamy

$$x=\xi, \quad y=\frac{\xi^2}{4}-1, \quad z=\frac{\xi^2}{4}+1 \tag{5}$$

i przyjmując $\xi=4, 6, 8, 10, \ldots$, otrzymujemy rozwiązania równania (1)

$$4, 3, 5; \quad 6, 8, 10; \quad 8, 15, 17; \quad 10, 24, 26; \ldots. \tag{6}$$

Zauważmy, że w rozwiązaniach (3) różnica $z-y=t=1$, w rozwiązaniach zaś (5) $z-y=t=2$. Z tego wynika, że pośród rozwiązań (6) znajdą się wszystkie rozwiązania (4) po pomnożeniu tych ostatnich przez 2. Prócz nich jednak pośród rozwiązań (6) są takie, jak np. 3-cie z wypisanych, których w podobny sposób z rozwiązań (4) wyprowadzić nie można.

Pitagoras podał rozwiązania (4), Plato zaś podał rozwiązania (6).

31. Uwzględniliśmy dotąd najmniejsze możliwe wartości t w wyrażeniach (2). Co do innych wartości t, rozważmy naprzód przypadek, kiedy t jest dzielnikiem ξ. Niech $\xi = t\xi'$. Wówczas wyrażenia (2) możemy tak przedstawić

$$x = t\xi', \quad y = t\frac{\xi'^2 - 1}{2}, \quad z = t\frac{\xi'^2 + 1}{2} \tag{7}$$

Te wyrażenia są ogólne, jednak w razie parzystego t np. $t = 2t'$, kładąc w (2) $\xi = t'\xi''$ albo w (7) $2\xi' = \xi''$, otrzymamy

$$x = t'\xi'', \quad y = t'\left(\frac{\xi''^2}{4} - 1\right), \quad z = t'\left(\frac{\xi''^2}{4} + 1\right). \tag{8}$$

Z wyrażeń (7), gdy je odniesiemy do przypadku, kiedy ξ i t są liczbami nieparzystemi i z wyrażeń (8) odnoszących się do przypadku, kiedy ξ jest liczbą parzystą, widzimy, iż wogóle w razie, kiedy t jest dzielnikiem liczby ξ, otrzymać możemy tylko pierwiastki równania (2) będące wielokrotnościami pierwiastków (3) i (5).

32. Pozostał do rozważenia przypadek, kiedy t, zadość czyniąc warunkom, wypowiedzianym w art. 29-ym, nie jest dzielnikiem liczby ξ. Np. kiedy przy $\xi = 15$ jest $t = 9$, albo przy $\xi = 12$ jest $t = 8$. Największy spólny dzielnik liczb ξ i t nazwijmy τ, niech $\xi = \tau\sigma$, $t = \tau s$. Ponieważ $\frac{\xi^2}{t} = \frac{\tau\sigma^2}{s}$ jest liczbą całkowitą, przeto s jest dzielnikiem τ i niech $\tau = \vartheta s$. Wówczas według wzorów (2)

$$x = \vartheta\sigma s, \quad y = \vartheta\frac{\sigma^2 - s^2}{2}, \quad z = \vartheta\frac{\sigma^2 + s^2}{2}. \tag{9}$$

Tu różnica $z - y = t = \vartheta s^2$. Że zaś nie może być w tym przypadku $s = 1$, przeto rozwiązania (9) są różne od Pitagorejskich i Platońskich, choć mogą być między niemi wielokrotności tamtych (w tych razach oczywiście x i y nie są pierwsze względem siebie). Jakoż, np. przy $\xi = 75$, $t = 9$, oraz przy $\xi = 36$, $t = 8$, otrzymamy odpowiednio

$$x = 75,\ y = 308,\ z = 317; \quad x = 36,\ y = 77,\ z = 85;$$

w tych rozwiązaniach równania (1) wartości x i y są pierwsze względem siebie.

33. Gdybyśmy we wzorach (2) co do liczby dodatnej i całkowitej t uczynili jedyne zastrzeżenie, iż $t < \xi$, mogłyby z tych wzorów wypadać ułamkowe wartości liczb y i z. Zważmy jednak, że, mnożąc wszystkie liczby (2) przez $2t$, otrzymamy liczby

$$x = 2\xi t, \quad y = \xi^2 - t, \quad z = \xi^2 + t^2, \tag{10}$$

które czynią zadość równaniu (1) i są całkowite i dodatne. Z liczb (10) jest x zawsze liczbą parzystą, co odpowiada uwadze uczynionej w art. 29-ym, iż przynajmniej jedna z wartości x i y jest parzysta. Wyrażenia więc (10) przy jakichkolwiek całkowitych wartościach ξ i t i przy warunku $t < \xi$ przedstawiają nam również całkowite i dodatne rozwiązania równania (1). Z tych wyrażeń (10) rozwiązanie Pitagorasa określa warunek $z - x = 1$, t. j. wypadają one przy wartości $t=\xi-1$, rozwiązania zaś Platona określa warunek $z-y=2$, t. j. wypadają one przy wartości $t=1$.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

POSTĘPY. ODSETKI SKŁADANE.

POSTĘP ARYTMETYCZNY.

34. Liczby następujące po sobie w taki sposób, iż drugą i każdą dalszą otrzymać możemy z liczby ją poprzedzającej, dodając do niej tę samę liczbę, tworzą postęp arytmetyczny (arithmetische Progression), inaczej zwany różnicowym. Tak n. p. kolejne liczby nieparzyste tworzą postęp arytmetyczny.

Każdą z liczb tworzących ten postęp nazywamy jego wyrazem (Glied). Liczbę, która jest różnicą między drugim lub którymkolwiek z dalszych wyrazów postępu arytmetycznego a wyrazem poprzedzającym, nazywamy różnicą postępu arytmetycznego (Differenz d. a. P.). Jeżeli różnica jest dodatna, jak np. w postępie

$$-5,\ -1\tfrac{1}{2},\ 3,\ 7\tfrac{1}{2},\ 12,\ 16\tfrac{1}{2},\ 21, \qquad (\text{różnica } +4\tfrac{1}{2}),$$

to postęp nazywamy rosnącym (steigend); jeżeli zaś różnica jest ujemna, jak np. w postępie

$$16,\ 12,\ 8,\ 4,\ 0,\ -4,\ -8, \qquad (\text{różnica } -4),$$

to postęp nazywamy malejącym (fallend).

Jeżeli wszystkie wyrazy postępu oznaczymy przez tę samę liczbę ze wskaźnikiem odpowiadającym miejscu zajętemu w postępie przez odpowiedni wyraz, a różnicę postępu nazwiemy r, to postęp o n wyrazach możemy tak przedstawić:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n, \quad \text{gdzie } a_k - a_{k-1} = r, \tag{1}$$

przy k równem $2, 3, \ldots, n$.

35. Ponieważ $a_2=a_1+r$, zaś $a_3=a_2+r$, przeto $a_3=a_1+2r=a_1+(3-1)r$, podobnie jak $a_2=a_1+(2-1)r$. Przypuśćmy, że także $a_k=a_1+(k-1)r$. Ponieważ $a_{k+1}=a_k+r$, przeto $a_{k+1}=[a_1+(k-1)r]+r=a_1+kr$. Że zaś, jak widzieliśmy bezpośrednio, w taki sposób wyraża się wyraz a_2, zatem w podobny sposób wyraża się jakikolwiek dalszy wyraz.

W szczególności jest

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \tag{2}$$

t. j. *ostatni wyraz postępu arytmetycznego jest równy sumie algebraicznej wyrazu pierwszego i różnicy postępu, pomnożonej przez ilość wyrazów poprzedzających.*

Postęp (1), pisząc w nim $a_1+(k-1)r$ zamiast a_k, możemy tak przedstawić:

$$a_1,\ a_1+r,\ a_1+2r, \ldots,\ a_1+(n-2)r,\ a_1+(n-1)r. \tag{3}$$

36. W postępie (1) weźmy jakiekolwiek dwa wyrazy jednakowo oddalone od skrajnych, np. wyrazy a_k, a_{n-k+1}. Odrzuciwszy w postępie (1) raz $n-k$ końcowych wyrazów, drugim zaś razem $n-k$ początkowych wyrazów, będziemy mieli dwa postępy

$$a_1, a_2, \ldots, a_k; \quad a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \ldots, a_n.$$

W tych postępach według wzoru (2) jest

$$a_k = a_1 + (k-1)r, \quad a_n = a_{n-k+1} + (k-1)r.$$

Od pierwszej z tych równości odjąwszy drugą otrzymujemy $a_k - a_n = a_1 - a_{n-k+1}$, czyli

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n, \tag{4}$$

t. j. *suma wyrazów postępu arytmetycznego jednakowo oddalonych od skrajnych jest równa sumie wyrazów skrajnych.* Jeżeliby postęp miał nieparzystą ilość wyrazów, to przy

$$k = \frac{n+1}{2} \text{ jest } 2a_{\frac{n+1}{2}} = a_1 + a_n.$$

37. Sumę wyrazów postępu (1) nazwijmy S_n, t. j.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Wypisawszy składniki sumy w odwrotnym porządku mamy

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Z dodania do siebie tych dwu równości stronami odpowiedniemi otrzymujemy

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Ponieważ każda z n sum w nawiasach po stronie prawej, może być według (4) zastąpiona przez sumę $a_1 + a_n$, przeto mamy $2S_n = (a_1 + a_n)n$, skąd

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \tag{5}$$

t. j. *suma wyrazów postępu arytmetycznego równa się połowie iloczynu sumy wyrazów skrajnych przez ilość jego wyrazów.* Tak np.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2p-3) + (2p-1) = p^2.$$

38. Wzory (2) i (5) są 2-ma równaniami między 5-u liczbami a_1, a_n, r, n, S_n, z których każde jest względem oddzielnej z tych 5-u liczb doń wchodzącej stopnia 1-go. Gdy więc 3 z tych 5-u liczb mają znane wartości, to z owych dwu równań można dla dwu pozostałych liczb znaleźć odpowiednie wartości. Innemi słowy przez 3 z tych 5-u liczb postęp arytmetyczny jest oznaczony. Może być 10 różnych zadań na szukanie dwu z tych 5-u liczb t. j. mogą być szukane a_n i S_n, a_1 i S_n, r i S_n, n i S_n, r i n, a_n i r, a_1 i r, a_n i a_1, a_n i n, a_1 i n. W dwu ostatnich zadaniach wypada rozwiązać równanie stopnia 2-go.

39. Zadanie. Między dwie dane liczby a i b wstawić m takich liczb, iżby one wraz z danemi liczbami tworzyły postęp arytmetyczny.

Postęp żądany będzie miał wyrazów $m+2$. Pierwszym wyrazem będzie a, ostatnim zaś b. Należy więc we wzorze (2) przyjąć $a_n = b$, $a_1 = a$, $n = m+2$. Będzie więc

$$b = a + (m+1)r, \quad \text{skąd} \quad r = \frac{b-a}{m+1}.$$

Według (3) postęp żądany jest

$$a,\ a+\frac{b-a}{m+1},\ a+2\frac{b-a}{m+1}, \ldots,\ a+m\frac{b-a}{m+1},\ b. \tag{6}$$

Gdybyśmy w taki sposób między każde dwa wyrazy postędu (1) wstawili m wyrazów, któreby z owemi dwoma tworzyły postęp arytmetyczny, to z uwagi, że $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}$, wszystkie owe $n+(n-1)m$ liczb tworzyłyby postęp arytmetyczny.

POSTĘP ARYTMETYCZNY RZĘDU WYŻSZEGO.

40. Gdy liczby

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1} \tag{1}$$

są takie, iż kolejne różnice

$$b_2 - b_1 = a_1,\ b_3 - b_2 = a_2, \ldots,\ b_{n+1} - b_n = a_n$$

tworzą postęp arytmetyczny, to o liczbach (1) mówimy, iż one tworzą p o s t ę p a r y t m e t y c z n y r z ę d u 2-g o (zweiter Ordnung). Podobnie, jeżeli mamy takie liczby

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \tag{2}$$

iż kolejne różnice

$$c_2 - c_1 = b_1,\ c_3 - c_2 = b_2, \ldots,\ c_{n+2} - c_{n+1} = b_{n+1}$$

przedstawiają postęp arytmetyczny rzędu 2-go, to o liczbach (2) mówimy, iż one przedstawiają p o s t ę p a r y t m e t y c z n y r z ę d u 3-g o. i t. d. Zauważywszy, że gdy w podobny sposób, mając zwykły postęp arytmetyczny, weźmiemy różnice kolejne $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2, \ldots,$ $a_n - a_{n-1}$, to one są tą samą liczbą, możemy podać ogólne określenie postępu arytmetycznego rzędu wyższego. Mianowicie, jeżeli mamy takie liczby, iż po otrzymaniu kolejnych ich różnic, czyli tak zwanych »różnic pierwszych« weźmiemy kolejne tych różnic różnice, czyli tak zwane »różnice drugie« i t. d. to, kiedy »różnice m-te« są wszystkie sobie równe, dane liczby przedstawiają p o s t ę p a r y t m e t y c z n y r z ę d u m-t e g o. Tak np.

	1,	−3,	8,	84,	335,	955,	2246,	4642,	8733,	15289,	25284, (3)
(różnice pierwsze)		−4,	11,	76,	251,	620,	1291,	2396,	4091,	6556,	9995,
(różnice drugie)			15,	65,	175,	369,	671,	1105,	1695,	2465,	3439,
(różnice trzecie)				50,	110,	194,	302,	434,	590,	770,	974,
(różnice czwarte)					60,	84,	108,	132,	156,	180,	204,
(różnice piąte)						24,	24,	24,	24,	24,	24.

Liczby więc (3) tworzą postęp arytmetyczny rzędu 5-go.

POSTĘP GEOMETRYCZNY.

41. Liczby następujące po sobie w taki sposób, iż drugą i każdą dalszą otrzymać możemy z liczby ją poprzedzającej mnożąc ją przez tę samę liczbę, tworzą postęp geometryczny (geometrische P.), inaczej zwany ilorazowym. Tak np. kolejne ujemne i dodatne potęgi pewnej liczby tworzą postęp geometryczny.

Każdą z liczb tworzących ten postęp nazywamy także jego wyrazem. Liczbę, która jest ilorazem z podzielenia drugiego lub któregokolwiek z dalszych wyrazów postępu geometrycznego przez wyraz poprzedni, nazywamy wykładnikiem postępu geometrycznego (Quotient d. g. P.).

Jeżeli wykładnik jest dodatny, wszystkie wyrazy postępu są jednakowego znaku; jeżeli zaś wykładnik jest ujemny, wyrazy postępu mają znaki naprzemian $+$ i $-$.

Jeżeli wartość bezwzględna wykładnika jest większa od 1, postęp nazywamy rosnącym; jeżeli zaś ona jest mniejsza od 1, postęp nazywamy malejącym.

Oznaczając wszystkie wyrazy postępu przez tę samę literę ze wskaźnikiem odpowiadającym miejscu przez odpowiedni wyraz w postępie zajętemu, a wykładnik postępu nazwawszy q, możemy postęp geometryczny tak przedstawić:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n, \text{ gdzie } a_k : a_{k-1} = q, \tag{1}$$

przy $k=2, 3 \ldots, n$.

Zauważmy, iż postęp geometryczny o trzech wyrazach jest proporcyą ciągłą $a_1 : a_2 = a_2 : a_3$.

42. Ponieważ $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q$, przeto $a_3 = a_1 q^2 = a_1 q^{(3-1)}$, podobnie jak $a_2 = a_1 q^{(2-1)}$. Przypuśćmy, że także $a_k = a_1 q^{k-1}$. Ponieważ $a_{k+1} = a_k q$, przeto $a_{k+1} = (a_1 q^{k-1}) q = a_1 q^k$. Że zaś w takiż sposób wyraża się wyraz a_2, zatem w podobny sposób wyraża się jakikolwiek wyraz dalszy. W szczególności jest

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \tag{2}$$

t. j. *wyraz ostatni postępu geometrycznego jest równy iloczynowi wyrazu pierwszego przez potęgę wykładnika postępu, odpowiadającą ilości wyrazów poprzedzających.*

Postęp (1), pisząc w nim $a_1 q^{k-1}$ zamiast a_k, możemy tak przedstawić:

$$a_1,\ a_1 q,\ a_1 q^2, \ldots,\ a_1 q^{n-2},\ a_1 q^{n-1}. \tag{3}$$

43. Sumę wyrazów postępu (1) czyli (3) nazwijmy S_n t. j.

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Suma w nawiasie jest ilorazem z podzielenia dwumianu $1^n - q^n$ przez dwumian $1 - q$, a więc $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}$. Tu zamiast $a_1 q^n = (a_1 q^{n-1}) q$ możemy według (2) napisać $a_n q$. Mamy zatem

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, \tag{4}$$

t. j. *suma wyrazów postępu geometrycznego jest równa różnicy między wyrazem pierwszym a iloczynem ostatniego przez wykładnik postępu, podzielonej przez różnicę między jednością a tymże wykładnikiem.* Tak np.

$$\tfrac{3}{25}-\tfrac{3}{5}+3-15+75-375=\frac{\tfrac{3}{25}-375\times5}{1+5}=-312{\cdot}48.$$

44. Wzory (2) i (4) są równaniami między 5-u liczbami a_1, a_n, q, n, S_n Gdy więc 3 z tych 5-u liczb mają znane wartości, to z owych dwu równań (z których drugie jest stopnia 1-go względem oddzielnej z wchodzących doń liczb, a pierwsze stopnia 1-go względem a_n i a_1, stopnia $(n-1)$-go względem q, wykładnicze zaś względem n) możemy dla dwu pozostałych liczb znaleźć wartości odpowiednie. Innemi słowy przez 3 z tych 5-u liczb postęp geometryczny jest oznaczony.

Może być 10 różnych zadań na szukanie dwu z tych 5-u liczb.

45. Zadanie. Między dwie dane liczby a i b wstawić m takich liczb, iżby one wraz z danemi liczbami tworzyły postęp geometryczny.

Kładąc we wzorze (2) $a_1=a$, $a_n=b$, $n=m+2$, otrzymamy z niego $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$, tak iż według (3) żądany postęp jest

$$a,\ a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\ a\sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2},\ldots,\ a\sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^m},\ b. \tag{5}$$

Gdybyśmy w taki sposób między każde dwa wyrazy postępu (1) wstawili m wyrazów, któreby z owemi dwoma tworzyły postęp geometryczny, to z uwagi, że $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\ldots=\frac{a_n}{a_{n-1}}$, wszystkie owe $n+(n-1)m$ liczb utworzyłyby postęp geometryczny.

46. Opuściwszy w postępie (1) naprzód $n-k$ końcowych, a następnie $n-k$ początkowych wyrazów, będziemy mieli według (2)

$$a_k=a_1q^{k-1},\quad a_n=a^{n-k+1}q^{k-1},\quad \text{skąd}\quad a_k:a_n=a_1:a^{n-k+1},\quad \text{czyli}$$

$$a_k a^{n-k+1}=a_1a_n. \tag{6}$$

Jeżeliby postęp miał nieparzystą ilość wyrazów, to $a^2_{\frac{n+1}{2}}=a_1a_n$.

Iloczyn wszystkich wyrazów postępu (3) nazwijmy I_n. Mamy $I_n=a_1^nq^{1+2+\cdots+(n-1)}$. Suma w wykładniku przedstawia (art. 37) liczbę $\frac{n(n-1)}{2}$. Jest więc

$$I_n=a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}=(a_1.\,a_1q^{n-1})^{\frac{n}{2}}=(a_1a_n)^{\frac{n}{2}},\ \text{t. j.}$$

$$I_n=\sqrt{(a_1a_n)^n}. \tag{7}$$

Porównywając wzór (2) ze wzorem (2) art. 35-go, wzór (6) ze wzorem (4) art. 36-go, wzór (7) ze wzorem (5) art. 37-go, oraz wyrazy postępu (5) z wyrazami postępu (7) art. 39-go, widzimy, że mnożeniu, dzieleniu, podnoszeniu do potęgi i wyciąganiu pierwiastka w postępie geometrycznym odpowiada dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie w postępie arytmetycznym.

Gdy mamy postęp geometryczny o wyrazach dodatnych ($a_1 > 0$, $q > 0$)

$$a_1,\ a_1 q,\ a_1 q^2,\ a_1 q^3, \ldots,\ a_1 q^{n-1}, \tag{8}$$

to, wziąwszy jakąkolwiek liczbę dodatną a, różną od 1, możemy, jeżeli $a_1 = a^\alpha$, zaś $q = a^r$, postęp powyższy tak przedstawić:

$$a^\alpha,\ a^{\alpha+r},\ a^{\alpha+2r},\ a^{\alpha+3r}, \ldots,\ a^{\alpha+(n-1)}.$$

Widzimy, że wykładniki kolejne liczby a

$$\alpha,\ \alpha+r,\ \alpha+2r,\ \alpha+3r, \ldots,\ \alpha+(n-1)r, \tag{9}$$

które są logarytmami odpowiednich wyrazów postępu (8) przy podstawie a, przedstawiają postęp arytmetyczny (9). A więc *logarytmy liczb, tworzących postęp geometryczny, tworzą postęp arytmetyczny.*

47. Jeżeli w postępie geometrycznym wyrazy wciąż po sobie następują tak, iż ich jest nieskończenie wiele,

$$a_1,\ a_1 q,\ a_1 q^2, \ldots,\ a_1 q^{n-1}, \ldots, \tag{10}$$

to mówimy, że postęp jest nieskończony.

Przypuśćmy, iż ten postęp jest rosnący o wyrazach dodatnych; jest wtedy $q > 1$. Jeżeli w wyrazach postępu (3) zamiast q weźmiemy 1, to wszystkie, prócz pierwszego, zmniejszymy, tak iż będzie $S_n > a_1 n$,

$$\text{t. j. } \frac{a_1 - a_n q}{1-q} > a_1 n, \quad \text{skąd } a_n > \frac{a_1 n(q-1) + a_1}{q}.$$

Gdy obierzemy jakkolwiek wielką liczbę dodatną l, to $\frac{a_1 n(q-1)+a_1}{q} > l$, jeżeli weźmiemy $n > \frac{lq - a_1}{a_1(q-1)}$; a więc także będzie wówczas $a_n > l$, t. j. przy dostatecznie wielkiem n może być a_n większe od jakkolwiek wielkiej liczby l. Możemy zatem powiedzieć, że *w postępie geometrycznym rosnącym nieskończonym wartości bezwzględne wyrazów wzrastają nieskończenie.*

Niech postęp nieskończony (10) będzie malejący ($q^2 < 1$). Wtedy postęp

$$\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_1 q},\ \frac{1}{a_1 q^2}, \ldots, \frac{1}{a_1 q^{n-1}}, \ldots, \tag{11}$$

o wykładniku $\frac{1}{q}$, będzie postępem rosnącym. Przy dostatecznie wielkiem n wartość bezwzględna wyrazu $a_n = a_1 q^{n-1}$ postępu (10) może być mniejsza od jakkolwiek małej liczby dodatnej $\frac{1}{l}$, gdyż, jak dowiedliśmy, odwrotność bezwzględnej wartości tego wyrazu, t. j. wartość bezwzględna wyrazu n-go postępu (11), może być większa od liczby l. A więc *w postępie geometrycznym malejącym nieskończonym wartości bezwzględne wyrazów maleją nieograniczenie.*

Jeżeli przeto mamy postęp geometryczny malejący nieskończony (10), to w wyrażeniu (4) wartość bezwzględna składnika $a_n q$ w liczniku, z uwagi, że $n = \infty$, jest mniejsza od każdej jakkolwiek małej liczby, tak iż możemy przyjąć (piszemy S zamiast: S_n przy $n = \infty$)

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \tag{12}$$

t. j. *suma wyrazów postępu geometrycznego malejącego nieskończonego jest ilorazem z podzielenia wyrazu pierwszego przez różnicę między jednością a wykładnikiem.* Tak np.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\,;$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{(-1^n)}{2^n}+\ldots=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

48. Mając ułamek dziesiętny peryodyczny, wypiszmy jako oddzielne składniki jego części, odpowiadające peryodom. Np.

$$0{\cdot}\dot{5}\dot{7}=\frac{57}{10^2}+\frac{57}{10^4}+\frac{57}{10^6}+\ldots;\quad 0{\cdot}213\dot{5}\dot{7}=\frac{213}{10^3}+\frac{57}{10^5}+\frac{57}{10^7}+\frac{57}{10^9}+\ldots.$$

Składniki po stronie prawej pierwszej równości, jakoteż drugi i następne składniki po stronie prawej drugiej równości przedstawiają postęp geometryczny malejący nieskończony. Stosując tedy wzór (12), mamy

$$0{\cdot}\dot{5}\dot{7}=\frac{57\times 10^{-2}}{1-10^{-2}}=\frac{57}{99};$$

$$0{\cdot}213\dot{5}\dot{7}=\frac{1}{10^3}\left(213+\frac{57}{99}\right)=\frac{1}{10^3}\cdot\frac{213(100-1)+57}{99}=\frac{21357-213}{99000},$$

zgodnie ze znanemi z arytmetyki prawidłami.

ZASTOSOWANIA DO NIEKTÓRYCH SZEREGÓW.

49. Gdy mamy liczby po sobie następujące według pewnego prawa, to mówimy, iż te liczby tworzą szereg liczb, albo krócej s z e r e g (Reihe). Oddzielne z tych liczb nazywamy w y r a z a m i szeregu. Postępy są szczególnemi szeregami.

Gdy bierzemy na uwagę skończoną ilość wyrazów szeregu, po sobie następujących, to mówimy, że mamy s z e r e g s k o ń c z o n y, gdy zaś uwzględnimy nieskończenie wielką ilość wyrazów, to mówimy, że mamy s z e r e g n i e s k o ń c z o n y.

Kiedy mamy szereg, to zwykle idzie nam o sumę jego wyrazów; dlatego zazwyczaj przedstawiamy szereg, pisząc odrazu sumę algebraiczną jego wyrazów.

W każdym np. z szeregów

$$1+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+n^2+\ldots, \tag{1}$$

$$1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots+n(n+1)+\ldots, \tag{2}$$

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}+\ldots, \tag{3}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{4}$$

prawo następstwa wyrazów po sobie określa wypisany n-ty jego wyraz.

W szeregach (1) i (2) wyrazy w miarę powiększania się n widocznie rosną nieograniczenie, tak iż ich suma jest nieskończenie wielka; są one postępami arytmetycznemi rzędu drugiego (art. 40).

50. 1). Sumę n początkowych wyrazów szeregu (1) nazwijmy S_n. Zważmy, że

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Kładąc w tej równości zamiast n kolejno liczby $n-1$, $n-2, \ldots, 3, 2$, a tak powstałe równości dodając do siebie stronami odpowiedniemi otrzymamy po wykonaniu redukcyj

$$(n+1)^3 = 3[n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2] + 3[n + (n-1) + \ldots + 2 + 1] + n + 1;$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + 3.\frac{n(n+1)}{2} + n + 1, \quad \text{skąd } S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2). Sumę n początkowych wyrazów szeregu (2) nazwijmy S_n. Ponieważ $n(n+1) = n^2 + n$, przeto

$$S_n = (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + (1 + 2 + \ldots + n) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

3). Jeżeli S_k oznacza sumę k początkowych wyrazów postępu (3) art. 42-go, to według wzoru (4) art. 43-go suma n początkowych wyrazów szeregu skończonego

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = a_1 + \frac{a_1 - a_1 q^2}{1-q} + \ldots + \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} =$$

$$= \frac{a_1}{1-q}[(1-q) + (1-q^2) + \ldots + (1-q^n)],$$

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{a_1 n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\cdot\frac{q - q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_1 n}{1-q} - \frac{a_1 q(1-q^n)}{(1-q)^2}.$$

51. Przy pomocy wzoru (12) art. 47-go można znaleźć sumy wyrazów niektórych szeregów nieskończonych. Np.

1). $S = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \ldots + na^n + \ldots$, $\qquad (a^2 < 1)$,

$$\begin{aligned} S = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n + \ldots \\ + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n + \ldots \\ + a^3 + a^4 + \ldots + a^n + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$S = \frac{a}{1-a} + \frac{a^2}{1-a} + \frac{a^3}{1-a} + \ldots + \frac{a^n}{1-a} + \ldots = \frac{1}{1-a}\cdot\frac{a}{1-a} = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

2) $S = a + (a+ab).q + (a+ab+ab^2)q^2 + \ldots +$
$+ (a + ab + ab^2 + \ldots + ab^{n-1})q^n + \ldots \qquad [b^2 < 1,\ q^2 < 1]$

$$\begin{aligned} S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \\ + abq + abq^2 + abq^3 + \ldots + abq^{n-1} + \ldots \\ + ab^2q^2 + ab^2q^3 + \ldots + ab^2q^{n-1} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$S = \frac{a}{1-q} + \frac{abq}{1-q} + \frac{ab^2q^2}{1-q} + \frac{ab^3q^3}{1-q} + \ldots + \frac{ab^{n-1}q^{n-1}}{1-q} + \ldots =$$

$$= \frac{a}{1-q}\cdot\frac{1}{1-bq} = \frac{a}{(1-q)(1-bq)}.$$

52. Wyrazy 4-ty i następne szeregu (3) są mniejsze od odpowiednich wyrazów postępu $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}+\ldots=\frac{1}{2}$, a więc jest $e<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2}$, t. j. $e<3$.

Gdy wyrazy szeregu (4), zwanego harmonicznym, tak zgrupujemy:

$$1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\ldots+\tfrac{1}{16})+\ldots$$

to suma wyrazów w pierwszym nawiasie jest większa od $2\times\frac{1}{4}$, w drugim od $4\times\frac{1}{8}$, w trzecim od $8\times\frac{1}{16}$ i t. d., tak iż suma wyrazów szeregu (4) jest większa od sumy $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$. Ta ostatnia jest liczbą nieskończenie wielką, a więc także suma wyrazów szeregu harmonicznego jest nieskończenie wielka.

ZASTOSOWANIA DO ZADAŃ NA ODSETKI SKŁADANE.

53. Jeżeli odsetki od kapitału k oddanego na $p\%$ po upływie każdego roku dołączamy do kapitału, tak iż w następnym roku odsetki są liczone od kapitału, który w poprzednim roku przynosił odsetki, powiększonego o odsetki za ów rok, to po upływie n lat (n liczba całkowita) utworzy się w ten sposób pewien kapitał, który nazwijmy K. Mówimy wtedy, że kapitał k, oddany na »procent składany« (Zinseszinsen) po $p\%$ (albo: przy »kapitalizowaniu odsetek« po $p\%$), wzrósł do kapitału K.

Ponieważ jednostka kapitału po upływie roku przynosi odsetek $\frac{p}{100}$, przeto ta jednostka po upływie roku staje się kapitałem $1+\frac{p}{100}$, albo, jeżeli $\frac{p}{100}$ nazwiemy r, kapitałem $1+r$. Wskutek tego k jednostek kapitału po upływie pierwszego roku staje się kapitałem $k(1+r)$. Każda jednostka tego kapitału podczas drugiego roku przynosi odsetki i po upływie roku staje się kapitałem $1+r$, a więc $k(1+r)$ jednostek kapitału na początku drugiego roku staje się po upływie tego drugiego roku kapitałem $k(1+r)(1+r)=$ $=k(1+r)^2$. Podobnie ten kapitał po upływie 3-go roku stanie się kapitałem $k(1+r)^2(1+r)=k(1+r)^3$. I t. d. Widocznie te kapitały narosłe po upływie roku 1-go, 2-go, 3-go, ..., t. j. $k(1+r)$, $k(1+r)^2$, $k(1+r)^3, \ldots$, są wyrazami postępu geometrycznego o wykładniku $1+r$. A więc n-ty wyraz tego postępu t. j. kapitał K, narosły po upływie n lat, według wzoru (2) art. 42-go jest

$$K=k(1+r)^n. \tag{1}$$

Gdy weźmiemy logarytmy obu stron tej równości,

$$\log K=\log k+n\log(1+r),$$

to, mając dane 3 z 4-ech liczb k, n, p, K, możemy znaleźć pozostałą czwartą. Kiedy szukamy p, znajdujemy naprzód wartość $1+r$, z której łatwo wyznaczyć $100r=p$.

Obliczono tablice wartości liczby $(1+r)^n$ odpowiadających różnym wartościom n i p. Oto wyjątek z takiej tablicy:

n	p				
	3	3·5	4	4·5	5
1	1·030000	1·035000	1·040000	1·045000	1·050000
2	1·060900	1·071225	1·081600	1·092025	1·102500
3	1·092727	1·108718	1·124864	1·141166	1·157625
4	1·125509	1·147523	1·169859	1·192519	1·215506
.	....	....	....	....	....
14	1·512590	1·618695	1·731676	1·851945	1·979932
15	1·557967	1·675349	1·800944	1·935282	2·078928
.	....	....	....	....	....
32	2·575083	3·006708	3·508059	4·089981	4·764941
33	2·652335	3·111942	3·648381	4·274030	5·003189
.	....	....	....	....	....

Oczywiście, że wzór (1) odnosić się również może do zadań, w których nie mamy do czynienia z kapitałami. Np., w mieście, mającem 120000 ludności, zauważono, iż przyrost roczny ludności wynosi $\frac{1}{3}$ %; ile to miasto liczyć będzie mieszkańców po upływie 100 lat, jeżeli przyrost ludności się nie zmieni? Według wzoru (1) znajdziemy

$$120000\left(1+\frac{1}{300}\right)^{100} = 167381.$$

54. We wzorze (1) jest n liczbą całkowitą. Gdyby w odpowiedniem zadaniu zamiast n lat uwzględnić należało n lat i jakąś część roku, którą nazwijmy ν, to za owę część roku należałoby obliczyć odsetki zwykłe od kapitału K obliczonego ze wzoru (1), t. j. do kapitału K dodać odsetek $\frac{p\mathrm{K}\nu}{100} = r\,\mathrm{K}\,\nu$, tak iż wtedy kapitał z narosłemi procentami za lat $n+\nu$ wyniósłby

$$\mathrm{K}' = k(1+r)^n(1+r\nu), \text{ gdzie } \nu < 1. \tag{2}$$

Jeżeli dane są k, r i K a szukana z wzoru (1) wartość n wypada pośrednia między n_1 i n_1+1, to, obliczywszy $(1+r)^{n_1}$, następnie z wzoru (2) (kładąc w nim $n=n_1$) wyznaczamy ν.

Wiele papierów procentowych daje dochód w półrocznych odstępach czasu. Rozumując podobnie, jak przy wyprowadzeniu wzoru (1), znajdziemy, iż przy natychmiastowem kapitalizowaniu tych odsetek po p% nagromadzi się po upływie n' półroczy kapitał K,

$$\mathrm{K} = k\left(1+\frac{r}{2}\right)^{n'}.$$

Wzorowi zaś (2) odpowie wzór

$$\mathrm{K}' = k\left(1+\frac{r}{2}\right)^{n'}(1+\nu' r), \text{ gdzie } \nu' < \tfrac{1}{2}.$$

55. Jeżeli ktoś przez n lat na początku każdego roku wnosi tę samę kwotę a, »wkładkę« (Einlage), na procent składany po p%, to w końcu n-go roku nagromadzi się pewien kapitał K_1. Złożą się na niego częściowe kapitały, do których wzrasta każda z wkładek a, pierwsza w ciągu n lat, druga w ciągu $n-1$ lat, i t. d., przedostatnia w ciągu 2 lat, ostatnia w ciągu 1-go roku, a więc według (1) jest

$$K_1 = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + \ldots + a(1+r)^2 + a(1+r).$$

Mamy tu po stronie prawej sumę n wyrazów postępu geometrycznego, a zatem według wzoru (4) art. 43-go

$$K_1 = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}. \tag{3}$$

Tu wkładki były wnoszone na początku roku. Jeżeliby jednak np. ktoś miał zapewniony przez n lat coroczny dochód a, »rentę« (Rente), wypłacany w końcu każdego roku, a zamiast tej renty chciał otrzymać cały odpowiedni kapitał K_2 w końcu n-go roku, to byłoby

$$K_2 = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r) + a \quad \text{i} \quad K_2 = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}. \tag{4}$$

Kiedy jest niewiadoma jedna z liczb K_1 lub K_2, a, n, to łatwo, używając logarytmów, zadanie rozwiązać. Jeżeli jednak jest niewiadoma liczba p, czyli $100r$, to, wziąwszy logarytmy obu stron wzoru (3) lub (4), będziemy mieli w pierwszym razie trzy, w drugim razie dwa wyrazy, nie ulegające redukcyi, do których wchodzi r, tak, iż tą drogą zadania rozwiązać nie możemy. Dlatego rozwiązujemy je przez próbowanie, jaka wartość p odpowie pozostałym liczbom danym. Im p większe, tem K_1 lub K_2 jest także większe. Bierzemy zatem coraz bliższe siebie dwie wartości p takie, iżby między odpowiadającemi im wartościami, czyto liczby K_1, czy też liczby K_2, przypadała dana wartość tej liczby. Mając zaś już dwie dostatecznie bliskie siebie takie wartości p, bierzemy pośrednią między niemi.

56. Jaka jest dzisiejsza wartość (Barwert) k renty a wypłacanej przez n lat w końcu każdego roku, jeżeli za podstawę rachunku przyjmujemy $p\%$? We wzorze (4) K_2 przedstawia wartość tej renty w końcu n-tego roku. Tego zaś kapitału K_2 dzisiejszą wartość k, otrzymamy ze wzoru (1), jeżeli w nim przyjmiemy $K = K_2$. Mamy więc

$$k(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}, \text{ skąd } k = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n}.$$

Ktoś corocznie przez n lat wnosi kwotę a na procent składamy po $p\%$; jaki kapitał k potrzebowałby w chwili wniesienia pierwszej wkładki złożyć jednorazowo, aby po upływie n lat zebrała się taż sama suma, co z owych wkładek corocznych? Suma nagromadzona po n latach z corocznych wkładek jest określona wzorem (3); dzisiejszą jej wartość k znajdziemy ze wzoru (1), kładąc w nim $K = K_1$, a więc

$$k(1+r)^n = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}, \text{ skąd } k = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^{n-1}}. \tag{6}$$

Zauważymy, że w zadaniach, istotnie w praktyce zdarzających się, odpowiadających wzorom (5) i (6), przedewszystkiem bywa ustalana liczba $p\%$, tak iż mogą w takich zadaniach być niewiadome albo k, albo a, alboteż n.

W ostatnim przypadku, jeżeliby z rachunku wartość n wypadała ułamkowa, $m < n < m+1$, to w zadaniach istotnie w praktyce się zdarzających, wylicza się wartość k, odpowiadającą całkowitemu m, co do różnicy zaś między pierwotnie daną a tak wyliczoną wartością k, zawiera się dodatkową umowę.

Jeżeli we wzorze (5) kapitał k przedstawia dług, z którego się dłużnik uiszcza wierzycielowi, płacąc corocznie po a, to w odpowiedniem zadaniu mówimy, iż dług k »umarza się« (amortisiert, getilgt) corocznemi »ratami« (Raten) a.

Gdyby wzory (3), (4), (5) i (6) wypadało odnieść do liczb a przedstawiających, czyto półroczne wkładki, czyteż półroczną rentę, to należałoby w tych wzorach zamiast r wziąć $\frac{r}{2}$ i jednocześnie ilość lat n zastąpić przez ilość półroczy.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

ZESTAWIENIA. OBLICZANIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

ZESTAWIENIA ELEMENTÓW RÓŻNYCH.

57. Mając pewną ilość np. n znaków, liter, lub wogóle przedmiotów — nazywać je będziemy ogólnie elementami (Elemente) — możemy wziąć ich ν (przy $\nu \leqslant n$) i ustawić je w pewnem po sobie następstwie. Powiemy w takim razie, żeśmy utworzyli z n danych elementów zestawienie (Complexion) wziętych ν elementów. Np. mając 5 liter *w*, *i*, *s*, *ł*, *a*, możemy wziąwszy 4 ostatnie z nich utworzyć zestawienie *s*, *i*, *ł*, *a*; zwykle w zestawieniu nie oddzielamy od siebie elementów żadnemi znakami, tak, iż to zestawienie napiszemy *siła*, czytając jednak te litery oddzielnie i przez to zestawienie nie rozumiejąc iloczynu tych liter. Z tychże 5-u liter możemy, biorąc je po 4, utworzyć inne ich zestawienia: *wasi*, *wiła*, *siwa*, *łais*, i t. d.

Rozważymy naprzód przypadek, kiedy, jak w powyższym przykładzie, między danemi elementami niema jednakowych.

Oznaczać będziemy elementy przez tę samę literę ze wskaźnikami od 1 do n. Tak np., jeżeli w powyższym przykładzie nazwiemy $w=a_1$, $i=a_2$, $s=a_3$, $ł=a_4$, $a=a_5$, to powyżej wypisane zestawienia będą $a_3a_2a_4a_5$, $a_1a_5a_3a_2$, $a_1a_2a_4a_5$, $a_3a_2a_1a_5$, $a_4a_5a_2a_3$. Gdybyśmy zaś wypisali same tylko wskaźniki, uważając je jako elementy (nie zaś jako cyfry liczb), mielibyśmy zestawienia 3245, 1532, 1245, 3215, 4523.

58. Gdy utworzymy wszystkie możliwe zestawienia z n elementów po ν, to te zestawienia nazywamy od wyrazu »variatio« (zmiana) waryacyami (Variationen) z n elementów po ν.

Waryacyj z n elementów $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ po jednym może być oczywiście tylko n, gdyż każda będzie utworzona przez jeden z tych elementów. Aby mieć wszystkie waryacye z tychże n elementów po 2, należy do każdej z poprzednich waryacyj (po jednym elemencie) przystawić coraz inny z pozostałych $n-1$ elementów; będzie więc: $a_1a_2, a_1a_3, ..., a_1a_n$; $a_2a_1, a_2a_3, ..., a_2a_n$; $a_3a_1, a_3a_2, a_3a_4, ..., a_3a_n$; . . .; $a_na_1, a_na_2, ..., a_n\,a_{n-1}$. Ilość ich jest $n(n-1)$. Przypuśćmy, żeśmy już utworzyli wszystkie waryacye z tychże n elementów po λ, których ilość nazwijmy W_n^λ, rozumiejąc, iż w tym symbolu λ nie jest wykładnikiem, lecz wskaźnikiem. Jeżeli chcemy utworzyć wszystkie waryacye z tychże n elementów po $\lambda+1$, to należy do każdej z poprzednich waryacyj przystawić coraz inny z pozostałych $n-\lambda$ elementów, tak iż wszystkich waryacyj z n elementów po $\lambda+1$ będzie $(n-\lambda)\,W_n^\lambda$, t. j. $W_n^{\lambda+1}=(n-\lambda)\,W_n^\lambda$.

Jeżeli w tym wzorze ogólnym przyjmiemy kolejno $\lambda=\nu-1, \nu-2, ..., 2, 1$, to mieć będziemy

$$W_n^\nu=(n-(\nu-1))\,W_n^{\nu-1},\ W_n^{\nu-1}=(n-(\nu-2))\,W_n^{\nu-2}, ..., W_n^3=(n-2)\,W_n^2,\ W_n^2=(n-1)W_n^1.$$

Ponieważ, jak widzieliśmy, $W_n^1=n$, przeto z powyższych równości wynika

$$W_n^\nu=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-\nu+2)(n-\nu+1), \tag{1}$$

t. j. *ilość wszystkich waryacyj z n elementów po ν, jest iloczynem ν kolejnych liczb całkowitych, z których największa jest n.* Tak np. z 5-u elementów waryacyj po 1, po 2, po 3, po 4 i po 5 jest odpowiednio: 5, 5.4=20, 5.4.3=60, 5.4.3.2=120, 5.4.3.2.1=120. Z 4-ch elementów a_1, a_2, a_3, a_4 możemy waryacyj po 3 elementy utworzyć 4.3.2=24.

$a_1a_2a_3$	$a_2a_3a_1$	$a_3a_1a_2$	$a_1a_3a_2$	$a_2a_1a_3$	$a_3a_2a_1$
$a_1a_2a_4$	$a_2a_4a_1$	$a_4a_1a_2$	$a_1a_4a_2$	$a_2a_1a_4$	$a_4a_2a_1$
$a_1a_3a_4$	$a_3a_4a_1$	$a_4a_1a_3$	$a_1a_4a_3$	$a_3a_1a_4$	$a_4a_3a_1$
$a_2a_3a_4$	$a_3a_4a_2$	$a_4a_2a_3$	$a_2a_4a_3$	$a_3a_2a_4$	$a_4a_3a_2$.

Tu w pierwszym wierszu mamy wypisane wszystkie waryacye z 3-ech elementów a_1, a_2, a_3 po 3, w drugim z 3-ch elementów a_1, a_2, a_4 po 3, w trzecim z 3-ech elementów a_1, a_3, a_4 po 3, w czwartym z 3-ech elementów a_2, a_3, a_4 po 3.

59. Przypatrując się wypisanym tylkoco waryacyom, widzimy, że wszystkie znajdujące się w tym samym wierszu, odróżniają się od siebie jedynie porządkiem, w jakim elementy po sobie następują; znajdujące się zaś w różnych wierszach odróżniają się od siebie przynajmniej jednym elementem.

Gdy z pewnych ν elementów (jakby w powyższym przykładzie z 3-ech) tworzymy wszystkie zestawienia po ν, różniące się od siebie tylko porządkiem, to mówimy, że tworzymy z tych ν elementów wszystkie przemiany (Permutationen); one są oczywiście waryacyami z ν elementów po ν. Jeżeli więc ogólnie ilość przemian z n elementów nazwiemy P_n, to

$$P_n=W_n^n, \text{ czyli } P_n=1.2.3\ldots n, \tag{2}$$

t. j. *ilość wszystkich przemian z n elementów jest iloczynem kolejnych liczb całkowitych od* 1 *do n.* Tak np. z 3-ch elementów a_1, a_2, a_3 mamy wypisane przemiany w pierwszym wierszu ostatniego przykładu w art. poprzedzającym; jest ich 1.2.3=6.

Jeżeli mamy wszystkie W_n^ν waryacyj z n elementów po ν, to można je rozłożyć na grupy (w przykładzie ostatnim art. poprzedzającego wypisane w oddzielnych wierszach) tak, iżby w każdej grupie były te waryacye, które jednocześnie są przemianami pewnych ν elementów. W każdej zatem takiej grupie będzie P_ν waryacyj. Wskutek tego, jeżeli ilość grup nazwiemy K_n^ν, jest $P_\nu . K_n^\nu = W_n^\nu$, skąd

$$K_n^\nu = \frac{W_n^\nu}{P_\nu}, \text{ czyli } K_n^\nu = \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu}. \tag{3}$$

Jeżeli z każdej takiej grupy zatrzymamy jednę tylko waryacyą (którąkolwiek), a inne odrzucimy, to każde dwa z tych zatrzymanych zestawień z n elementów po ν będą się od siebie różniły przynajmniej jednym elementem. Takie zestawienia nazywamy k o m b i n a c y a m i (Combinationen) z n elementów po ν. Ilość ich wyznacza wzór (3). A więc *ilość kombinacyj z n elementów po ν jest równa iloczynowi ν kolejnych liczb całkowitych, z których największa jest n, podzielonemu przez iloczyn liczb całkowitych od* 1 *do* ν. Tak np. w wypisanym przykładzie ilość kombinacyj z 4-ch elementów po 3 jest $\frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$. Podobnie ilość kombinacyj z 5-u elementów po 2 jest $\frac{5.4}{1.2} = 10$ (porównaj art. 38 i 44).

Tak waryacye jak i kombinacye z n elementów po jednym nazywają się »pojedynczemi« (erster Classe), po dwa »podwójnemi« (zweiter C.), po trzy »potrójnemi« (dritter C.) i t. d.

60. Ponieważ ilość kombinacyj jest liczbą całkowitą, we wzorze (3) zaś n może być jakąkolwiek liczbą całkowitą niemniejszą od ν, przeto z tego wzoru wynika, iż iloczyn ν po sobie następujących liczb całkowitych jest podzielny przez iloczyn liczb od 1 do ν.

Według (3) jest

$$K_n^\nu = \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu}, \quad K_n^{n-\nu} = \frac{n(n-1)\ldots(\nu+1)}{1.2.3\ldots(n-\nu)}.$$

Jeżeli licznik i mianownik pierwszego wyrażenia pomnożymy przez iloczyn $1.2.3\ldots(n-\nu)$, drugiego zaś przez iloczyn $1.2.3\ldots\nu$, to będziemy mieli

$$K_n^\nu = K_n^{n-\nu} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\nu . 1.2.3\ldots(n-\nu)}, \tag{4}$$

t. j. *ilość kombinacyj z n elementów po ν jest równa ilości kombinacyj z n elementów po $n-\nu$.*

Iloczyn liczb od 1 do n oznacza się przez skrócenie $n!$, tak iż symbol $n! = 1.2.3\ldots n$ i można go czytać albo »n z wykrzyknikiem« alboteż »n wykrzyknik«. Wprowadzając to oznaczenie wzory (2) i (4) możemy napisać

$$P_n = n!, \quad K_n^\nu = K_n^{n-\nu} = \frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!}.$$

Z uwagi, że oznaczenie ilości kombinacyj często do rachunku wprowadzać należy, używane bywają na nie symbole, mianowicie prócz K_n^ν, jeszcze

albo $\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu} = \binom{n}{\nu}$, alboteż $\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu} = (n)_\nu$;

każdy z tych symbolów, jako przedstawiający »ilość kombinacyj z n po ν«, można przez skrócenie czytać albo »z n po ν« alboteż »n po ν«.

61. Pośród wszystkich kombinacyj z n elementów po ν są takie, do których wchodzi pewien dowolnie obrany jeden z tych n elementów (np. a_1), i takie, do których ów element nie wchodzi. Pierwszych kombinacyj jest oczywiście tyle, ile ich można utworzyć z $n-1$ pozostałych elementów po $\nu-1$, drugich zaś tyle, ile ich można utworzyć z $n-1$ pozostałych elementów po ν. A więc

$$\binom{n}{\nu}=\binom{n-1}{\nu-1}+\binom{n-1}{\nu}. \tag{5}$$

Mając elementy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$, zwróćmy uwagę np. na ostatnich $n-\nu+1$ z wypisanych elementów, t. j. na elementy $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{r+1}, a_\nu$. Pośród wszystkich kombinacyj z n elementów po ν, kombinacyj, do których wchodzi element a_n, jest tyle, ile jest kombinacyj z $n-1$ elementów po $\nu-1$. Oddzielmy te kombinacye; pozostałe są kombinacyami z $n-1$ elementów $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_{n-1}$ po ν. Pośród nich, kombinacyj, do których wchodzi element a_{n-1}, jest tyle, ile jest kombinacyj z $n-2$ elementów po $\nu-1$. Oddzielmy także i te kombinacye; pozostałe będą kombinacyami z $n-2$ elementów $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_{n-2}$ po ν. Z nich oddzielmy te kombinacye, do których wchodzi element a_{n-2}, i t. d. Dojdziemy w ten sposób do tego, iż pozostaną już kombinacye z $\nu+1$ elementów $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}$ po ν; do nich albo wchodzi element $a_{\nu+1}$ (ich jest tyle, ile jest kombinacyj z ν po $\nu-1$), alboteż nie wchodzi (jest ich tyle, ile jest kombinacyj z ν elementów po ν, t. j. jedna). Ta ostatnia kombinacya ma element a_ν i możemy powiedzieć (dla jednostajności), że takich kombinacyj jest tyle, ile jest kombinacyj z $\nu-1$ elementów po $\nu-1$ (t. j. także jedna). A zatem

$$\binom{n}{\nu}=\binom{n-1}{\nu-1}+\binom{n-2}{\nu-1}+\cdots+\binom{\nu}{\nu-1}+\binom{\nu-1}{\nu-1}. \tag{6}$$

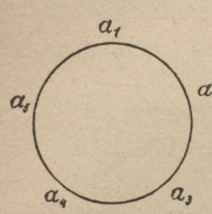
Wypisawszy liczby, wyrażające ilości kombinacyj z $n=1, 2, 3, \ldots, n$ elementów każdym razem po $\nu=1, 2, \ldots, n-1, n$,

$$\begin{array}{lll}
\binom{1}{1}, & \text{czyli} & 1, \\
\binom{2}{1},\binom{2}{2}, & & 2,\ 1, \\
\binom{3}{1},\binom{3}{2},\binom{3}{3}, & & 3,\ 3,\ 1, \\
\binom{4}{1},\binom{4}{2},\binom{4}{3},\binom{4}{4}, & & 4,\ 6,\ 4,\ 1, \\
\binom{5}{1},\binom{5}{2},\binom{5}{3},\binom{5}{4},\binom{5}{5}, & & 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & & \ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

utworzymy tak zwany »trójkąt Pascal'a« (Pascal'sches Dreieck). Według wzoru (5) którakolwiek liczba (drugiej lub dalszej kolumny) w tym trójkącie jest sumą dwu liczb poprzedniego wiersza: nad nią się znajdującej i poprzedniej. A według wzoru (6) suma początkowych n liczb którejkolwiek kolumny jest równa n-tej liczbie w kolumnie następującej. Z tego zaś wynika, że liczby ν-tej kolumny przedstawiają postęp arytmetyczny ν-tego rzędu (art. 40). Nadto, jeżeli jakąkolwiek z tych liczb np. liczbę λ uzmysłowimy zapomocą λ kul jednakowej wielkości, to jakakolwiek liczba drugiej kolumny, np. zajmująca w niej k-te miejsce, przedstawia ilość kul potrzebnych do utworzenia z nich trójkąta równobocznego, którego bok powstał z k kul, zaś k-ta liczba w trzeciej kolumnie przedstawia ilość kul potrzebnych do utworzenia czworościanu foremnego, którego krawędź powstała z k kul. Dlategoto liczby drugiej kolumny nazywają się »trójkątnemi« (Trigonalzahlen), trzeciej »czworościennemi« (Tetraedralzahlen) (albo »piramidalnemi«), a wogóle liczby trójkąta Pascal'a nazywają się liczbami »figurowemi« (figurirte Z.) [1]).

62. W jaki sposób można metodycznie wypisywać przemiany, kombinacye i waryacye?

Gdy np. z 5-u elementów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 mamy wypisać wszystkie przemiany, to najdogodniej postąpimy, gdy nakreślimy koło i na jego okręgu rozmieścimy np. w powyżej wypisanym porządku tych 5 elementów. Następnie wypisywać je będziemy po sobie tak, jak one na okręgu następują, poczynając kolejno od coraz innego z tych elementów, np. w kierunku ku stronie prawej. Otrzymamy w ten sposób 5 przemian:



$$a_1a_2a_3a_4a_5,\quad a_2a_3a_4a_5a_1,\quad a_3a_4a_5a_1a_2,\quad a_4a_5a_1a_2a_3,\quad a_5a_1a_2a_3a_4.$$

Aby utworzyć inne przemiany, w każdej z powyższych 5-u zatrzymamy jeden np. pierwszy element, a pozostałe 4 rozmieścimy na okręgu innego koła i 4 z nich przemiany, w podobny sposób otrzymane, dopiszemy kolejno do owego zatrzymanego elementu. Tak np. z pierwszej z wypisanych przemian, otrzymamy przemiany

$$a_1a_2a_3a_4a_5,\quad a_1a_3a_4a_5a_2,\quad a_1a_4a_5a_2a_3,\quad a_1a_5a_2a_3a_4.$$

W każdej z tak powstałych 5.4 t. j. 20-u przemian, zatrzymamy znowu dwa np. dwa pierwsze elementy, i t. d.

Gdy np. z 6-u elementów

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6 \tag{7}$$

mamy wypisać wszystkie kombinacye np. po 3 elementy, to tak najdogodniej postąpimy. Utworzymy z tych elementów wszystkie kombinacye pojedyncze

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6.$$

Aby z nich utworzyć kombinacye podwójne, opuśćmy kombinacyą a_6, a do każdej z pozostałych dopiszmy kolejno każdy z elementów (7), mający większy wskaźnik; otrzymamy:

$$\begin{array}{l} a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_1a_4,\ a_1a_5,\ a_1a_6;\\ a_2a_3,\ a_2a_4,\ a_2a_5,\ a_2a_6;\\ a_3a_4,\ a_3a_5,\ a_3a_6;\\ a_4a_5,\ a_4a_6;\\ a_5a_6. \end{array} \tag{8}$$

Aby utworzyć kombinacye potrójne, opuśćmy te z kombinacyj (8), w których

---

1) Wyrażenia liczb figurowych podali Fermat w r. 1636 i Pascal w r. 1650; utworzony zaś z tych liczb powyższy »trójkąt«, nazwany przez Pascal'a triangulus arithmeticus, podał był jeszcze Stifel w r. 1544.

ostatnim elementem jest a_6, a do każdej z pozostałych kombinacyj dopiszmy kolejno każdy z elementów (7), mający większy wskaźnik,

$a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$, $a_1a_2a_5$, $a_1a_2a_6$; $a_1a_3a_4$, $a_1a_3a_5$, $a_1a_3a_6$; $a_1a_4a_5$, $a_1a_4a_6$; $a_1a_5a_6$;
$a_2a_3a_4$, $a_2a_3a_5$, $a_2a_3a_6$; $a_2a_4a_5$, $a_2a_4a_6$; $a_2a_5a_6$;
$a_3a_4a_5$, $a_3a_4a_6$; $a_3a_5a_6$;
$a_4a_5a_6$.

Postępowanie to jest oparte na wzorze (6). Jeżeli jednak idzie o wypisanie kombinacyj z n elementów po ν, kiedy ν jest większe od połowy n, np. o wypisanie kombinacyj 6-u elementów (7) po 4, to praktyczniej, po wypisaniu kombinacyj podwójnych (8), odrazu, opierając się na wzorze (4), wypisać kombinacye tych elementów, które nie wchodzą do kombinacyj (8); wypisując je w porządku odwrotnym, będziemy mieli

$$a_1a_2a_3a_4,\ a_1a_2a_3a_5,\ a_1a_2a_3a_6,\ a_1a_2a_4a_5,\ \text{i t. d.}$$

Aby wypisać wszystkie waryacye z n elementów po ν, wypiszemy naprzód wszystkie kombinacye, a następnie w każdej kombinacyi wszystkie przemiany. (Por. przykład ostatni art. 58-go).

ZESTAWIENIA ELEMENTÓW, POŚRÓD KTÓRYCH SĄ JEDNAKOWE.

63. Jeżeli, mając n elementów różnych od siebie i utworzywszy wszystkie $n!$ ich przemian, przypuścimy następnie, że z nich np. $a_1, a_2, \ldots, a_k$, stały się sobie równymi i zastąpimy je jednym znakiem np. α_1, to okażą się zestawienia jednakowe. Jednakowemi z sobą mianowicie będą zestawienia powstałe z tych przemian pierwotnych, w których owe elementy $a_1, \ldots, a_k$, zajmowały pewnych k miejsc (np. k pierwszych). Takich zaś przemian mogło być tyle, ileby przemian z elementów na owych miejscach utworzyć można było, t. j. $k!$ A więc $k!$ pierwotnych przemian stały się jednakowemi zestawieniami. Toż samo można powiedzieć o każdej innej grupie $k!$ przemian pierwotnych, w których owe k elementów $a_1, a_2, \ldots, a_k$, zajmuje pewnych k miejsc. Pozostanie więc $\frac{n!}{k!}$ przemian różnych.

Jeżeli wogóle pośród n elementów jest elementów k równych α_1, elementów l równych $\alpha_2, \ldots$, elementów m równych α_r, tak iż $k+l+\ldots+m=n$, to ilość różnych przemian jest

$$\frac{n!}{k!\,l!\ldots m!}.$$

Tak np. różnych przemian z elementów $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, jest $\frac{7!}{3!\ 2!\ 1!\ 1!}=420$.

64. Waryacye i kombinacye z n elementów, pośród których są jednakowe, po ν rozważane bywają najczęściej w przypuszczeniu, iż jest $\frac{n}{\nu}=r$ różnych elementów od siebie, a każdy z nich zjawia się ν razy. Zwykle nadto mówi się w takim razie o waryacyach i kombinacyach z r elementów (mając na myśli różne) po ν, przyjmując, że w zestawieniu oddzielnem każdy z elementów różnych powtarzać się może. Gdyby więc szło o takie waryacye lub kombinacye z r elementów »po $\nu+1$«, to każdy z r elementów różnych zjawiaćby się mógł $\nu+1$ razy, i t. d.

Ilość waryacyj i kombinacyj z takich r różnych elementów, mogących się powtarzać, po ν oznaczać będziemy odpowiednio $(W)_r^\nu$, $(K)_r^\nu$, elementy zaś różne od siebie nazwiemy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Oczywiście jest $(W)_r^1 = W_r^1 = r$, $(K)_r^1 = K_r^1 = \binom{r}{1} = r$, $(W)_1^\nu = 1$, $(K)_1^\nu = 1$.

Przyjmijmy, żeśmy już utworzyli wszystkie $(W)_r^\lambda$ różnych waryacyj z r elementów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ po λ i że chcemy otrzymać wszystkie różne po $\lambda+1$. Do każdej z waryacyj po λ wypadnie przystawić każdy z r elementów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, a więc będziemy mieli r razy więcej waryacyj po $\lambda+1$, niż jest waryacyj po λ, tak iż $(W)_r^{\lambda+1} = r.(W)_r^\lambda$. Że zaś waryacyj pojedynczych jest oczywiście r, $(W)_r^1 = r$, przeto $(W)_r^2 = r^2$, i wogóle

$$(W)_r^\nu = r^\nu. \tag{1}$$

Np. z elementów α_1, α_2 różnych waryacyj po 3, mamy $(W)_2^3 = 2^3$,

$$\alpha_1\alpha_1\alpha_1,\ \alpha_1\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_1,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_2,\ \alpha_2\alpha_1\alpha_1,\ \alpha_2\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_2\alpha_2\alpha_1,\ \alpha_2\alpha_2\alpha_2.$$

Przyjmijmy, żeśmy już utworzyli wszystkie $(K)_r^\lambda$ różnych kombinacyj z r elementów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ po λ i że chcemy otrzymać wszystkie różne po $\lambda+1$. Możemy to uskutecznić w taki sposób: dopiszemy do elementu α_1 wszystkie $(K)_r^\lambda$ różnych kombinacyj z tychże r elementów; do elementu α_2 wszystkie $(K)_{r-1}^\lambda$ różnych kombinacyj z $r-1$ elementów $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r$; do elementu α_3 wszystkie $(K)_{r-2}^\lambda$ różnych kombinacyj z $r-2$ elementów $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_r$; i t. d.; do elementu α_{r-1} wszystkie $(K)_2^\lambda$ różnych kombinacyj z dwu elementów α_{r-1}, α_r; nakoniec do elementu α_r dopiszemy $(K)_1^\lambda$ t. j. jednę kombinacyą utworzoną przez same elementy α_r. Jest więc

$$(K)_r^{\lambda+1} = (K)_r^\lambda + (K)_{r-1}^\lambda + (K)_{r-2}^\lambda + \ldots + (K)_2^\lambda + (K)_1^\lambda. \tag{2}$$

Ze wzoru (2) przy $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu$ wynika na mocy wzoru (6) art. 61-go stopniowo

$$(K)_r^2 = \binom{r}{1} + \binom{r-1}{1} + \binom{r-2}{1} + \ldots + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} = \binom{r+1}{2},$$

$$(K)_r^3 = \binom{r+1}{2} + \binom{r}{2} + \binom{r-1}{2} + \ldots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = \binom{r+2}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(K)_r^\nu = \binom{r+\nu-2}{\nu-1} + \binom{r+\nu-3}{\nu-1} + \ldots + \binom{\nu-2}{\nu-1} + \binom{\nu-1}{\nu-1} = \binom{r+\nu-1}{\nu}.$$

A więc

$$(K)_r^\nu = \binom{r+\nu-1}{\nu}. \tag{3}$$

Np. z elementów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ różnych kombinacyj po 3 jest $(K)_3^3 = \binom{5}{3} = 10$,

$$\alpha_1\alpha_1\alpha_1,\ \alpha_1\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1\alpha_1\alpha_3,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_2,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3,\ \alpha_1\alpha_3\alpha_3,\ \alpha_2\alpha_2\alpha_2,\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3,\ \alpha_2\alpha_3\alpha_3,\ \alpha_3\alpha_3\alpha_3.$$

65. Z elementów $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (por. art. 63) różne kombinacye: po jednym elemencie są $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; po 2 są $\alpha_1\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_4$, $\alpha_3\alpha_4$; po 3 są $\alpha_1\alpha_1\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_1\alpha_4$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$, $\alpha_1\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_2\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, ...; po 7 jedna $\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2\alpha_3\alpha_4$.

Gdybyśmy z tych elementów chcieli utworzyć wszystkie różne waryacye, to utworzywszy z tych elementów różne kombinacye, wypadałoby z każdej kombinacyi utworzyć wszystkie przemiany (art. 63). Tak np. z kombinacyi $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$ otrzymamy $\frac{3!}{2!\ 1!} = 3$ przemiany: $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1$, $\alpha_2 \alpha_1 \alpha_1$.

ZASTOSOWANIA DO ZADAŃ NA OBLICZANIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

66. Niech w urnie znajduje się np. 10 gałek równej wielkości i ciężaru, oraz jednakich w dotknięciu, z których np. 5 jest białych a pozostałe czarne. Jeżeli wyciągniemy jednę gałkę z urny i napowrót ją do niej wrzucimy, znowu wyciągniemy jednę gałkę i ją wrzucimy i t. d., to powtarzając tę czynność niewielką ilość razy, np. 6 razy, możemy wyciągnąć 3 razy białą gałkę a 3 razy czarną, albo 4 razy czarną a 2 razy białą, lub przeciwnie, albo 5 razy gałkę czarną, a raz białą, lub przeciwnie, albo każdym razem gałkę białą, alboteż każdym razem gałkę czarną. Gdybyśmy jednak tę czynność powtarzali znacznie większą ilość razy np. 3000 razy, to albo tak ilość wyciągniętych gałek białych, jak i ilość wyciągniętych gałek czarnych, będzie $\frac{1}{2}$ ilości dokonanych wyciągnięć, alboteż owe dwie liczby będą się od siebie niewiele różniły, co, wogóle mówiąc, odpowie stosunkowi ilości gałek białych i czarnych w urnie.

Podobnie towarzystwo ubezpieczeń, przyjmując według swoich zasad, opartych na odpowiednich obliczeniach starannych, zabezpieczenie kapitału pośmiertnego od niewielu osób, może nie ponieść straty, ani nie osiągnąć zysku, ale także może stosunkowo znacznej doznać straty, alboteż znaczny mieć zysk. Gdy jednak w owem towarzystwie kapitały pośmiertne zabezpiecza bardzo wiele osób, to zyski i straty będą się równoważyły tak, iż cała taka operacya finansowa odpowie zasadom przyjętym przez to towarzystwo przy przyjmowaniu zabezpieczeń.

Biorąc na uwagę wydarzenia jednego rodzaju (np. powyższe wyciąganie gałek z urny lub zabezpieczenia kapitałów pośmiertnych) pytać się możemy o to, ile pośród nich może być wydarzeń czyniących zadość pewnemu zgóry postawionemu warunkowi. Stosunek ilości wydarzeń odpowiadających owemu warunkowi do ogółu wszystkich wydarzeń, pośród których je rozważamy, odpowiada pojęciu, które wiążemy z przewidywaną możliwością (szansą) pojawienia się takiego wydarzenia. Stosunek taki nazywamy prawdopodobieństwem (Wahrscheinlichkeit) owego wydarzenia.

Tak np. gdy w urnie jest 40 gałek jednakowych, z których 24 są białe, a pozostałe czarne, to moglibyśmy równie dobrze którąkolwiek z tych 40-u gałek wyciągnąć. Wyciągnięta może się okazać albo gałką białą, alboteż czarną. Możliwość jednak wydarzenia, iż gałka wyciągnięta będzie biała, jest większa niż możliwość, że wyciągnięta gałka będzie czarna. Z ogółu 40-u wszystkich przypadków możebnych wyciągnięcia którejkolwiek gałki przypadków pomyślnych dla wydarzenia, iż wyciągnięta gałka będzie biała, jest 24. Stosunek ilości możliwych przypadków, pomyślnych dla tego wydarzenia, do ilości wszystkich przypadków możebnych, t. j. prawdopodobieństwo wyciągnięcia z tej urny gałki białej, jest $p=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$. Prawdopodobieństwo zaś wyciągnięcia gałki czarnej jest $p=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$.

Im p jest bliższe 1, tem wydarzenie jest prawdopodobniejsze. Jeżeli $p=1$, prawdopodobieństwo jest »pewnością«; jeżeli $p=\frac{1}{2}$, wydarzenie jest »niepewne«; jeżeli $p<\frac{1}{2}$, wydarzenie jest »nieprawdopodobne«; jeżeli nakoniec jest $p=0$, wydarzenie jest »niemożliwe«.

67. 1). Jeżeli w urnie mamy n_1 gałek białych i n_2 czarnych, to jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia ν gałek białych? — Z urny wyciągnąć możemy którekolwiek ν ze znajdujących się w niej n_1+n_2 gałek. Jako więc przypadki możebne uważać należy różne kombinacye z n_1+n_2 gałek po ν. Z nich każda $\binom{n_1}{\nu}$ kombinacyj samych tylko gałek białych byłaby przypadkiem pomyślnym. Prawdopodobieństwo zatem tego wydarzenia jest

$$p=\binom{n_1}{\nu}:\binom{n_1+n_2}{\nu}=\frac{n\ldots(n_1-\nu+1)}{(n_1+n_2)\ldots(n_1+n_2-\nu+1)}.$$

2). Jeżeli w urnie mamy n_1 gałek białych i n_2 czarnych, to jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia z urny ν_1 gałek białych i ν_2 gałek czarnych? — Jakichkolwiek $\nu_1+\nu_2$ gałek może być z urny wyciągniętych $\binom{n_1+n_2}{\nu_1+\nu_2}$ różnemi sposobami, którato liczba przedstawia ilość przypadków możebnych. Przypadkami zaś pomyślnemi będą te, w których obok jakiejkolwiek z $\binom{n_1}{\nu_1}$ kombinacyj gałek białych zjawi się jakakolwiek z $\binom{n_2}{\nu_2}$ kombinacyj gałek czarnych. A więc prawdopodobieństwo wydarzenia jest

$$p=\left[\binom{n_1}{\nu_1}\binom{n_2}{\nu_2}\right]:\binom{n_1+n_2}{\nu_1+\nu_2}.$$

3). Jakie jest prawdopodobieństwo, iż z talii o 52-u kartach wyciągniemy 3 karty (któregokolwiek) z czterech »kolorów«? — Ilość wszystkich możebnych przypadków wyciągnięcia po 3 karty jest $\binom{52}{3}$. Ilość przypadków pomyślnych w oddzielnym z czterech kolorów jest $\binom{13}{3}$; a więc we wszystkich czterech kolorach jest $4.\binom{13}{3}$. Prawdopodobieństwo więc wydarzenia jest

$$p=\left[4\binom{13}{3}\right]:\binom{52}{3}=\frac{22}{425}.$$

68. Z koła loteryjnego, obejmującego 90 numerów, wyciąga się 5 numerów; jakie jest prawdopodobieństwo, iż pośród numerów wyciągniętych znajdzie się pewien z 90-u wszystkich numerów? — Jakichkolwiek 5 numerów może być wyciągniętych $\binom{90}{5}$ różnemi sposobami; ich ilość przedstawia przypadki możebne. Ilość zaś przypadków pomyślnych, t. j. iż pewien numer znajdzie się pośród wyciągniętych 5-u, przedstawiona będzie przez ilość możliwych kombinacyj z pozostałych numerów po 4, które obok owego numeru mogłyby się znaleźć; a więc ich ilość jest $\binom{89}{4}$. Prawdopodobieństwo przeto tego wydarzenia jest $p=\binom{89}{4}:\binom{90}{5}=\frac{1}{18}$.

Taksamo rozumując, znajdziemy, iż prawdopodobieństwo, że pośród wyciągniętych 5-u znajdą się: pewne 2 numery, jest $p=\binom{88}{3}:\binom{90}{5}=\frac{2}{801}$; pewne 3, jest $p=\binom{87}{2}:\binom{90}{5}=\frac{1}{11748}$; pewne 4, jest $p=\binom{86}{1}:\binom{90}{5}=\frac{1}{511038}$; nakoniec pewne 5, jest $p=1:\binom{90}{5}=\frac{1}{43949268}$.

69. 1). Rzucając raz kostkę możemy »wyrzucić« którąkolwiek z 6 u liczb, tak iż prawdopodobieństwo wyrzucenia jednej z tych liczb jest $p=\frac{1}{6}$.

2). W dwu rzutach kostki możemy wyrzucić $(W)_6^2=6^2$ różnych par liczb. Między tymi parami jest 6 par liczb jednakowych. Prawdopodobieństwo wyrzucenia pewnej pary jest $p=\frac{1}{36}$, prawdopodobieństwo zaś wyrzucenia którejkolwiek pary jest $p=\frac{1}{6}$.

3). Jakie jest prawdopodobieństwo, iż w 5-u rzutach kostki wyrzucimy 3 (nie więcej) jednakowe liczby? — Pięcioma rzutami możemy wyrzucić zestawienia 5-u liczb $(W)_6^5=6^5$ sposobami. Pewne 3 liczby pośród 5-u wyrzuconych mogą się zjawić $\binom{5}{3}.(W)_5^2$ razy, gdyż obok każdego z owych $\binom{5}{3}$ wyrzuceń 3-ch liczb jednakowych, w każdym z pozostałych dwu rzutów może być wyrzucona każda z pozostałych 5-u liczb. Ponieważ zaś nam nie idzie o pewne 3 liczby jednakowe, lecz o jakiekolwiek 3 liczby jednakowe, należy ostatnią liczbę pomnożyć przez 6. A więc dzieląc $\binom{5}{3}.5^2.6$ przez 6^5 znajdziemy prawdopodobieństwo wydarzenia $p=\frac{125}{648}$.

4). Jakie jest prawdopodobieństwo w dwu rzutach kostki wyrzucenia liczby 7? — W dwu rzutach możemy wyrzucić 6^2 różnych par liczb. Suma liczb jednej pary może być 7, kiedy, wyrzuciwszy pierwszym razem jednę z liczb $1, 2, \ldots, 6$, drugim razem trafi się rzucić odpowiednio $6, 5, \ldots, 1$ a więc pomyślnych podwójnych rzutów może być 6. Prawdopodobieństwo zatem wyrzucenia w dwu rzutach liczby 7 jest $p=\frac{1}{6}$.

5). Jakie jest prawdopodobieństwo w dwu rzutach kostki wyrzucenia liczby 9? — Tu pomyślnemi będą [1]) tylko rzuty 3 i 6, 4 i 5, 5 i 4, 6 i 3. A więc prawdopodobieństwo tego wydarzenia jest $p=\dfrac{4}{6^2}=\dfrac{1}{9}$.

70. Jeżeli na n przypadków możebnych wydarzenie A zachodzić może a razy tak, iż prawdopodobieństwo tego wydarzenia A jest $p=\dfrac{a}{n}$, to prawdopodobieństwo tego, iż owo wydarzenie A nie nastąpi jest $p'=\dfrac{n-a}{n}=1-p$. Tak np., w przykładzie art. 66-go prawdopodobieństwo, iż gałka biała nie będzie wyciągnięta, jest $p'=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$. Podobnie prawdopodobieństwo, iż w dwu rzutach kostki nie wyrzucimy liczby 7, jest (art. 69, zad. 4) $p'=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

71. Jeżeli na n przypadków możebnych wydarzenie A_1 zachodzić może a_1 razy, wydarzenie A_2 razy a_2, wydarzenie A_3 razy a_3, to prawdopodobieństwo p_1, iż nastąpi którekolwiek z tych wydarzeń, t. j. czyto A_1, czyto A_2, czyteż A_3, jest $p=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{n}=\dfrac{a_1}{n}+\dfrac{a_2}{n}+\dfrac{a_3}{n}=p_1+p_2+p_3$, jeżeli p_1, p_2, p_3 są prawdopodobieństwami każdego z wydarzeń A_1, A_2, A_3 oddzielnie.

1). Prawdopodobieństwo, iż w dwu rzutach kostki wyrzucimy czyto dwie liczby równe sobie (art. 69, zad. 2), czyteż liczbę 7 (art. 69, zad. 4), jest $p=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

---

[1]) Wogóle, jeżeli wykonamy $(a^1+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)^2$, to spółczynnik przy a^λ w otrzymanem wyrażeniu wskazuje ilość przypadków pomyślnych wyrzucenia w 2-u rzutach liczby λ.

2). Prawdopodobieństwo, iż w dwu rzutach kostki wyrzucimy, czyto liczbę 7, czyto 9, czyteż 8, jest $p=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36}=\frac{5}{12}$.

3). Jakie jest prawdopodobieństwo, iż pośród wyciągniętych 5-u numerów z koła loteryjnego, obejmującego 90 numerów, znajdą się czyto pewne 3 numery, czyto którekolwiek 2 z nich, czyteż którykolwiek 1 z nich? — Prawdopodobieństwo p, iż jedno z tych wydarzeń (art. 68) się trafi, jest $p=\frac{1}{11748}+\frac{2}{801}\cdot\binom{3}{2}+\frac{1}{18}\cdot\binom{3}{1}$.

72. Jeżeli pośród n przypadków możebnych jest a_1 pomyślnych dla wydarzenia A_1, zaś pośród n_2 przypadków możebnych jest a_2 pomyślnych dla wydarzenia A_2, niezależnego od wydarzenia A_1, to pośród $n_1 n_2$ przypadków, w których obok każdego z pierwszych n_1 przypadków może mieć miejsce każdy z n_2 przypadków drugich, jest przypadków $a_1 a_2$ pomyślnych jużto dla jednoczesności wydarzeń A_1 i A_2, jużteż dla nastąpienia jednego z tych wydarzeń po drugiem. Prawdopodobieństwo więc, iż wydarzenia A_1 i A_2 przypadną jednocześnie, alboteż, iż jedno z nich nastąpi po drugiem, jest $p=\dfrac{a_1 a_2}{n_1 n_2}=\dfrac{a_1}{n_1}\cdot\dfrac{a_2}{n_2}=p_1 p_2$, jeżeli przez p_1 i p_2 oznaczymy odpowiednio prawdopodobieństwa samego tylko wydarzenia A_1 i samego tylko wydarzenia A_2.

73. 1). W urnie U_1 jest 5 białych i 7 czarnych gałek, w urnie zaś U_2 jest 8 białych i 10 czarnych; jakie jest prawdopodobieństwo, iż, wyciągnąwszy jednocześnie z urny U_1 6 gałek a z urny U_2 9 gałek, wyciągniemy tylko pośród pierwszych 2 a pośród drugich 4 gałki białe? — Według zadania 2-go art. 67-go prawdopodobieństwo wyciągnięcia pośród 6-u gałek 2-u białych z urny U_1 jest $p_1=\left[\binom{5}{2}\binom{7}{4}\right]:\binom{12}{6}$; prawdopodobieństwo zaś wyciągnięcia z urny U_2 pośród 9-u gałek 4-ch białych jest $p_2=\left[\binom{8}{4}\binom{10}{5}\right]:\binom{18}{9}$. A więc szukane prawdopodobieństwo jest $p=p_1 p_2=\frac{3675}{26741}$.

2). W jednej z dwu urn jednakowych, którą nazwijmy U_1, jest gałek białych 5, a czarna 1, w drugiej zaś urnie, którą nazwijmy U_2, jest gałek białych 3, a czarnych 4; urny są pod zasłoną; jakie są prawdobieństwa wyciągnięcia: gałki białej z urny U_1, gałki białej z urny U_2, gałki białej z którejkolwiek z tych urn? — Prawdopodobieństwo trafienia na jednę z urn jest $\frac{1}{2}$; prawdopodobieństwo, iż, trafiwszy na urnę U_1, wyciągniemy z niej gałkę białą, jest $\frac{5}{6}$; prawdopodobieństwo zaś, iż, trafiwszy na urnę U_2, wyciągniemy z niej gałkę białą, jest $\frac{3}{7}$. A zatem szukane prawdopodobieństwa są odpowiednio: $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$ i (art. 71) $\frac{5}{12}+\frac{3}{14}=\frac{53}{84}$.

3). Prawdopodobieństwo wyciągnięcia z tych samych urn gałki czarnej możemy (na mocy art. 70-go) wyrazić odpowiednio $\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{5}{6})=\frac{1}{12}$, $\frac{1}{2}(1-\frac{3}{7})=\frac{2}{7}$, $\frac{1}{12}+\frac{2}{7}=\frac{31}{84}$, co istotnie jest równe liczbie $1-\frac{53}{84}$.

ZABEZPIECZENIA KAPITAŁÓW I RENT.

74. Na podstawie troskliwie zestawianych wykazów odpowiednich są układane »tablice śmiertelności« (Sterblichkeitstafeln), które podają, ile średnio osób z pewnej ilości jednocześnie urodzonych, np. z 10000 osób, przeżyło pewien rok życia. Podanej na str. 271-ej tablicy używa Towarzystwo ubezpieczeń wzajemnych w Krakowie. Pierwsze dwie jej rubryki stanowią tablicę

Tablica śmiertelności i jednostek renty
(używana przez Towarzystwo wzajemnych ubezpieczeń w Krakowie).

l	o_l	j_l
0	10000	13·0473
1	7450	17·2138
2	7088	17·8167
3	6823	18·2490
4	6618	18·5668
5	6468	18·7310
6	6345	18·8858
7	6243	18·9621
8	6154	19·0058
9	6073	19.0297
10	6004	19·0198
11	5946	18·9720
12	5897	18·8948
13	5854	18·7949
14	5815	18·6778
15	5778	18·5493
16	5740	18·4190
17	5699	18·2936
18	5655	18·1734
19	5608	18·0587
20	5558	17·9500
21	5506	17·8443
22	5453	17·7385
23	5399	17·6325
24	5344	17·5265
25	5288	17·4206
26	5231	17·3149
27	5173	17·2094
28	5116	17·0972
29	5060	16·9778
30	5005	16·8510
31	4951	16·7161
32	4897	16·5765
33	4844	16·4282
34	4792	16·2707
35	4740	16·1072
36	4688	15.9373
37	4637	15.7571
38	4587	15·5660
39	4538	15·3634
40	4490	15·1487
41	4441	14·9285
42	4392	14·6989
43	4342	14.4629
44	4291	14·2202
45	4239	13·9704
46	4186	13·7132
47	4132	13·4481
48	4077	13·1747
49	4021	12·8925
50	3964	12·6010
51	3905	12·3030
52	3843	12·0016
53	3777	11.6997
54	3707	11·3975
55	3631	11·1015
56	3550	10·8090
57	3465	10·5171
58	3377	10·2228
59	3286	9·9261
60	3191	9·6305
61	3092	9·3364
62	2990	9·0411
63	2885	8·7450
64	2778	8·4451
65	2669	8·1416
66	2559	7·8312
67	2448	7·5138
68	2336	7·1890
69	2223	6·8566
70	2109	6·5163
71	1993	6·1714
72	1874	5·8258
73	1749	5·4919
74	1617	5·1778
75	1479	4·8873
76	1337	4·6227
77	1198	4·3654
78	1064	4·1118
79	936	3·8610
80	812	3·6286
81	697	3·3964
82	590	3·1729
83	492	2·9571
84	404	2·7453
85	327	2·5274
86	261	2·2931
87	206	2·0216
88	159	1·7240
89	117	1·4365
90	80	1·1849
91	50	0·9717
92	28	0·8047
93	14	0·6737
94	6	0·6348
95	3	0·3205
96	1	

śmiertelności. Znajdująca się np. obok liczby $l=33$ liczba $o_{33}=4844$ wskazuje, iż na 10000 jednocześnie urodzonych osób przeżyło lat 33 osób 4844.

Jakie jest prawdopodobieństwo dla osoby, mającej 42 lata, iż żyć będzie 50 lat? — W tablicy obok $l=42$ i $l=50$ znajdujemy liczby $o_{42}=4392$ i $o_{50}=3964$. A więc na 4392 osoby mające 42 lata przeżyło 50 lat 3964 osoby, tak iż pierwsza z tych dwu liczb przedstawia ilość przypadków możebnych, druga zaś ilość przypadków pomyślnych, i szukane prawdopodobieństwo jest $p=\frac{o_{50}}{o_{42}}=\frac{3964}{4392}=0\cdot9025$.

75. Jak wielki kapitał k zł. wnieść powinna jednorazowo osoba, mająca 33 lata, iżby w razie, gdy dożyje 50-u lat, wypłacona jej została przy uwzględnieniu 4% suma 10000 zł.? — Gdyby każda z $o_{33}=4844$ osób, które mają po 33 lata, wniosła kapitał k, to tym o_{50} z nich, któreby dożyły wieku lat 50, należałoby wypłacić sumę $10000\text{ zł.}\times o_{50}=10000\text{ zł.}\times 3964$. Do tego więc kapitału ma wzrosnąć kapitał $k\text{ zł.}\times 4844$ w ciągu lat 17-u, licząc odsetki składane po 4%. Według więc wzoru (1) art. 53-go jest

$$k\times 4844\times 1\cdot04^{17}=10000\times 3964,\text{ skąd } k=\frac{3964}{4844}\times\frac{10000}{1\cdot04^{17}}=4201\cdot64.$$

76. Jaki kapitał powinna wnieść jednorazowo osoba, mająca l lat, iżby pobierała w końcu każdego roku, aż do śmierci, rentę 1 zł.? — Gdyby każda z o_l osób, które tylkoco skończyły l lat życia i które mają pobierać dożywotnie co roku po 1 zł. renty, wniosła kapitał j_l zł., to otrzymywałoby po 1 zł. renty: po 1-ym roku osób o_{l+1}, po 2-u latach o_{l+2} osób, po 3-ch latach o_{l+3} osób i t. d., a po $96-l$ latach pobrałoby tę rentę 1 zł. osób o_{96}. Według wzoru (1) art. 53-go wartość obecna każdej z tych kwot $1\text{ zł.}\times o_{l+1}$, $1\text{ zł.}\times o_{l+2}$, $1\text{ zł.}\times o_{l+3},\ldots$, $1\text{ zł.}\times o_{96}$, przy p% czyli $100r$%, jest

$$\frac{1\text{ zł.}\times o_{l+1}}{1+r},\quad \frac{1\text{ zł}\times o_{l+2}}{(1+r)^2},\quad \frac{1\text{ zł}\times o_{l+3}}{(1+r)^3},\ldots,\ \frac{1\text{ zł}\times o_{96}}{(1-r)^{96-l}}.$$

Ma więc być

$$j_l o_l=\frac{o_{l+1}}{1+r}+\frac{o_{l+2}}{(1+r)^2}+\ldots+\frac{o_{96}}{(1+r)^{96-l}},$$

skąd

$$j_l=\frac{1}{o_l}\left[\frac{o_{l+1}}{1+r}+\frac{o_{l+2}}{(1+r)^2}+\ldots+\frac{o_{96}}{(1+r)^{96-l}}\right].$$

Według tego wzoru oblicza się wielkość kapitału j_l zł., jaki ma wnieść osoba mająca l lat, iżby w końcu każdego roku otrzymywała dożywotnie 1 zł. renty; obliczona wielkość jest oczywiście zależna od umówionej stopy procentu. Obliczone wielkości są zestawione w odpowiednich tablicach. W tablicy podanej na str. 271-ej, rubryka trzecia przedstawia właśnie wartości j_l obliczone przy 4%.

Według więc tej tablicy osoba, mająca np. 33 lata, a pragnąca sobie zabezpieczyć dożywotną rentę 1 zł., powinna jednorazowo wnieść $j_{33}=16\cdot4282$ zł. czyli 16·43 zł.

Jaki kapitał powinna jednorazowo wnieść osoba mająca 33 lata, iżby, uwzględniając 4% rocznie, pobierała dożywotnie w końcu każdego roku po 1000 zł.? — Szukany kapitał k zł. $= j_{33}$ zł. $\times 1000 = 16428{\cdot}2$ zł.

77. Jaki kapitał k powinna wnieść osoba, mająca l lat, aby po jej śmierci wypłacono spadkobiercom kapitał K? — Gdyby każda z o_l osób, które mają po l lat, wniosła kapitał k, to należałoby wypłacić kapitały K po pierwszym roku spadkobiercom $o_l - o_{l+1}$ osób, po dwu latach spadkobiercom $o_{l+1} - o_{l+2}$ osób, i t. d. Wartość obecna tych kapitałów, licząc po $p\% = 100 r\%$, jest

$$\frac{K(o_l - o_{l+1})}{1+r},\ \frac{K(o_{l+1} - o_{l+2})}{(1+r)^2},\ldots,\ \frac{K(o_{95} - o_{96})}{(1+r)^{96-l}},\ \frac{K o_{96}}{(1+r)^{97-l}}.$$

Ma więc być

$$k o_l = K\left[\frac{o_l - o_{l+1}}{1+r} + \frac{o_{l+1} - o_{l+2}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{o_{95} - o_{96}}{(1+r)^{96-l}} + \frac{o_{96}}{(1+r)^{97-l}}\right],$$

$$k o_l = \frac{K}{1+r}\left[o_l + \left(\frac{o_{l+1}}{1+r} + \frac{o_{l+2}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{o_{96}}{(1+r)^{96-l}}\right) - \right.$$
$$\left. - (1+r)\left(\frac{o_{l+1}}{1+r} + \frac{o_{l+2}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{o_{96}}{(1+r)^{96-l}}\right)\right],$$

$$k o_l = \frac{K}{1+r}[o_l + o_l j_l - (1+r)\, o_l j_l], \text{ a więc } k = \frac{K}{1+r}(1 - r j_l).$$

Jaki kapitał k ma wnieść osoba mająca 33 lata, iżby uwzględniając 4% rocznie, po jej śmierci wypłacono spadkobiercom 10000 zł.? — Stosując ostatni wzór, znajdziemy szukaną ilość zł.

$$k = \frac{10000}{1{\cdot}04}(1 - 0{\cdot}04 j_{33}) = 3296{\cdot}85.$$

78. Jaką wkładkę w na początku każdego roku powinna wnosić osoba mająca l lat, iżby po jej śmierci wypłacono spadkobiercom kapitał K? — Gdyby każda z o_l osób mających po l lat wnosiła takie wkładki, to oneby wyniosły na początku pierwszego roku $w \times o_l$, na początku drugiego roku $w \times o_{l+1}$, na początku trzeciego $w \times o_{l+2}$ i t. d. Wartość obecna tych kwot jest

$$w \,.\, o_l + \frac{w \,.\, o_{l+1}}{1+r} + \frac{w \,.\, o_{l+2}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{w \,.\, o_{96}}{(1+r)^{96-l}} =$$
$$= w \,.\, o_l\left[1 + \frac{1}{o_l}\left(\frac{o_{l+1}}{1+r} + \ldots + \frac{o_{96}}{(1+r)^{96-l}}\right)\right],$$

t. j. $w \,.\, o_l(1 + j_l)$. Spadkobiercom zaś zmarłych tych wszystkich o_l osób wypłaconoby kwoty, których wartość obecna według art. 77-go jest $\frac{K}{1+r}(1 - r j_l) \,.\, o_l$, tak iż

$$w(1 + j_l) = \frac{K}{1+r}(1 - r j_l), \quad \text{skąd } w = \frac{K}{1+r} \times \frac{1 - r j_l}{1 + r j_l}.$$

Jaką wkładkę na początku każdego roku powinna wnosić osoba mająca 33 lata, iżby, uwzględniając 4% rocznie, po jej śmierci wypłacono jej spadkobiercom 10000 zł? — Szukana ilość zł.

$$w = \frac{10000}{1{\cdot}04} \times \frac{1 - 0{\cdot}04 j_{33}}{1 + j_{33}} = 189{\cdot}17 \text{ zł.}$$

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

DWUMIAN NEWTON'A.

DWUMIAN NEWTON'A.

79. Uskuteczniając mnożenia dwumianów, mających ten sam wyraz pierwszy,

$$(a+b_1)(a+b_2)=a^2+(b_1+b_2)a+b_1b_2,$$

$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)=a^3+(b_1+b_2+b_3)a^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)a+b_1b_2b_3,$$

$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)(a+b_4)=a^4+(b_1+b_2+b_3+b_4)a^3+(b_1b_2+b_1b_3+b_1b_4+$$
$$+b_2b_3+b_2b_4+b_3b_4)a^2+(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+b_1b_3b_4+b_2b_3b_4)a+b_1b_2b_3b_4,$$

widzimy, że np. w ostatnim iloczynie spółczynnik najwyższej potęgi a^4 t. j. a^4 jest 1, spółczynnik a^3 jest sumą drugich wyrazów dwumianów wziętych oddzielnie, spółczynnik a^2 jest sumą wszystkich różnych iloczynów tychże wyrazów wziętych po 2, spółczynnik a^1 jest sumą wszystkich różnych iloczynów tychże wyrazów wziętych po 3, spółczynnik zaś a^0 jest iloczynem wszystkich owych czterech wyrazów. Możemy jeszcze zauważyć, że spółczynnik a^3 jest sumą $\binom{4}{1}$ składników, spółczynnik a^2 jest sumą $\binom{4}{2}$ składników, spółczynnik a^1 jest sumą $\binom{4}{3}$ składników, nakoniec spółczynnik a^0 jest jednym iloczynem, co odpowiada temu, iż $\binom{4}{4}=1$.

Przypuśćmy, iż podobnie utworzyliśmy iloczyn n dwumianów, mających ten sam wyraz piérwszy, $(a+b_1)(a+b_2)\ldots(a+b_n)$ i znaleźliśmy: że spółczynnik a^n jest 1; że spółczynnik a^{n-1} jest sumą $\binom{n}{1}$ składników będących drugiemi wyrazami dwumianów, tak iż, nazwawszy tę sumę $S_1^{(n)}$, mamy

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=S_1^{(n)}\,; \tag{1}$$

że spółczynnik a^{n-2} jest sumą $\binom{n}{2}$ składników, będących iloczynami drugich wyrazów dwumianów wziętych po 2 — nazwijmy ją $S_2^{(n)}$ —

$$b_1b_2+b_1b_3+\ldots+b_{n-1}b_n=S_2^{(n)}\,; \tag{2}$$

i t. d.; że spółczynnik $a^{n-\nu}$ jest suma $\binom{n}{\nu}$ składników będących iloczynami drugich wyrazów dwumianów wziętych po ν — nazwijmy ją $S_\nu^{(n)}$ —

$$b_1b_2\ldots b_{\nu-1}b_\nu+b_1b_2\ldots b_{\nu-1}b_{\nu+1}+\ldots+b_{n-\nu+1}b_{n-\nu+2}\ldots b_{n-1}b_n=S_\nu^{(n)}\,; \tag{3}$$

i t. d. Przypuszczamy tedy, że jest

$$(a+b_1)(a+b_2)\ldots(a+b_n)=a^n+S_1^{(n)}a^{n-1}+S_2^{(n)}a^{n-2}+\ldots+S_\nu^{(n)}a^{n-\nu}+\ldots+S_{n-1}^{(n)}a+S_n^{(n)}. \tag{4}$$

Mnożąc obie strony tej równości przez dwumian $a+b_{n+1}$, będziemy mieli

$$(a+b_1)(a+b_2)\ldots(a+b_n)(a+b_{n+1})=a^{n+1}+(S_1^{(n)}+b_{n+1})a^n+(S_2^{(n)}+S_1^{(n)}b_{n+1})a^{n-1}+$$
$$+\ldots+(S_\nu^{(n)}+S_{\nu-1}^{(n)}b_{n+1})a^{(n+1)-\nu}+\ldots+(S_n^{(n)}+S_{n-1}^{(n)}b_{n+1})a+S_n^{(n)}b_{n+1}.$$

Zważmy, że ogólnie spółczynnik $a^{(n+1)-\nu}$ jest $S_\nu^{(n)}+S_{\nu-1}^{(n)}b_{n+1}$. Wypisawszy drugie wyrazy dwumianów,

$$b_1,\ b_2,\ldots,\ b_n,\ b_{n+1},$$

widzimy, że $S_\nu^{(n)}$ jest sumą $\binom{n}{\nu}$ iloczynów, do których wchodzą początkowe n z wypisanych wyrazów wzięte po ν, zaś $S_{\nu-1}^{(n)}b_{n+1}$ jest sumą $\binom{n}{\nu-1}$ iloczynów ostatniego z tych wyrazów $(+b_{n+1})$ przez iloczyny początkowych n z tych wyrazów wziętych po $\nu-1$. A więc $S_\nu^{(n)}+S_{\nu-1}^{(n)}b_{n+1}$ jest sumą wszystkich iloczynów wypisanych $n+1$ wyrazów wziętych po ν, a tych iloczynów według wzoru (5) art. 61-go jest $\binom{n}{\nu}+\binom{n}{\nu-1}=\binom{n+1}{\nu}$.

Wskutek tego, kładąc kolejno $\nu=2,3,\ldots,n$, i zauważywszy wprost, że $S_1^{(n)}+b_{n+1}=S_1^{(n+1)}$, oraz, że $S_n^{(n)}b_{n+1}=b_1b_2\ldots b_nb_{n+1}=S_{n+1}^{(n+1)}$, możemy otrzymany iloczyn tak napisać:

$$(a+b_1)(a+b_2)\ldots(a+b_n)(a+b_{n+1})=a^{n+1}+S_1^{(n+1)}a^n+S_2^{(n+1)}a^{n-1}+\ldots+$$
$$+S_\nu^{(n+1)}a^{(n+1)-\nu}+\ldots+S_n^{(n+1)}a+S_{n+1}^{(n+1)}.$$

Okazaliśmy przeto, że jeżeli prawa strona wzoru (4) jest wyrażeniem iloczynu n dwumianów mających jednakowy pierwszy wyraz, to w taki sam sposób wyraża się iloczyn $n+1$ podobnych dwumianów. Że zaś, jak wprost widzieliśmy, w taki sposób wyrażały się iloczyny 2-u, 3-ch i 4-ch takich dwumianów, przeto w podobny sposób wyraża się iloczyn 5-u, a więc i 6-u i t. d., ilukolwiek takich dwumianów. Wzór zatem (4) jest ogólny, t. j. może w nim n oznaczać jakąkolwiek ilość dwumianów.

80. Jeżeli w ogólnym wzorze (4) przyjmiemy $b_1=b_2=\ldots=b_n=b$, to w tym razie według (1), (2), (3) będziemy mieli

$$S_1^{(n)}=\binom{n}{1}b,\ S_2^{(n)}=\binom{n}{2}b^2,\ldots,S_\nu^{(n)}=\binom{n}{\nu}b^\nu,\ldots,S_{n-1}^{(n)}=\binom{n}{n-1}b^{n-1},\ S_n^{(n)}=\binom{n}{n}b^n=b^n.$$

Wzór zatem (4) przejdzie na wzór

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{\nu}a^{n-\nu}b^\nu+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n, \quad (5)$$

czyli

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2\ldots\nu}a^{n-\nu}b^\nu+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2b^{n-2}+\frac{n}{1}ab^{n-1}+b^n.$$

Ten wzór podał[1]) Newton (wym. ńutn) i nazywamy go **dwumianem Newton'a** (Binomischer Lehrsatz, Newton'sches Theorem), alboteż rozwinięciem n-tej potęgi dwumianu.

We wzorze (5) kładąc $-b$ zamiast $+b$, otrzymamy

$$(a-b)^n=a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\ldots+(-1)^\nu\binom{n}{\nu}a^{n-\nu}b^\nu+\ldots+(-1)^nb^n. \quad (6)$$

Np. według ogólnego wzoru (5) lub według wzoru (6)

$$(3a^2b^3-2cd^2)^5=243a^{10}b^{15}-810a^8b^{12}cd^2+1080a^6b^9c^2d^4-720a^4b^6c^3d^6+$$
$$+240a^2b^3c^4d^8-32c^5d^{10}.$$

81. We wzorze (5) spółczynniki iloczynów potęg liter a i b, t. j. liczby

$$1,\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{\nu},\ldots,\binom{n}{n-1},\ \binom{n}{n} \quad (7)$$

nazywane bywają **spółczynnikami binomialnemi** (Binomialcoefficienten). Ponieważ drugi i dalsze z tych spółczynników przedstawiają ilości kombinacyj z n elementów po $1,2,\ldots,\nu,\ldots,n-1,n$, przeto one posiadają wszystkie własności, już udowodnione w art. 61-ym.

Jeżeli dla ogólności umówimy się przez symbol $\binom{n}{0}$ rozumieć 1, to wzory (4) art. 60-go oraz (5) i (6) art. 61-go odnosić się będą do wszystkich spółczyn-

[1]) W r. 1676.

ników (7). Nadto, jeżeli w każdym z wierszy wypisanego w art. 61-ym trójkąta Pascal'a dopiszemy na początku 1, to w n-tym wierszu będziemy mieli spółczynniki binomialne (7). Gdy zaś jeszcze nad ową kolumną, utworzoną przez dopisane liczby 1, napiszemy dodatkowo 1, przez co uzupełnimy trójkąt, to suma pierwszych n liczb w dopisanej kolumnie przedstawiać będzie n-tą liczbę kolumny następnej, tak iż wypowiedziane w art. 61-ym własności liczb, tworzących ten trójkąt, posiadać będzie również trójkąt uzupełniony owemi dopisanemi liczbami 1.

Prócz tego, jeżeli przyjmiemy we wzorach (5) i (6) $a=1$, i $b=1$, będziemy mieli

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n},\quad 0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n},$$

t. j. *suma wartości bezwzględnych wszystkich spółczynników rozwinięcia n-tej potęgi dwumianu jest równa liczbie* 2^n, zaś *suma bezwzględnych wartości spółczynników w wyrazach rozwinięcia potęgi dwumianu, znajdujących się na miejscach nieparzystych, jest równa sumie bezwzględnych wartości spółczynników w wyrazach, znajdujących się na miejscach parzystych.*

ZASTOSOWANIA DWUMIANU NEWTON'A.

82. Korzystając z rozwinięcia n-tej potęgi dwumianu, można wielomian o ilukolwiek wyrazach podnieść do potęgi n-tej.

Jeżeli mamy $(a_1+a_2+a_3)^n$, to, kładąc $a_2+a_3=b$, będziemy mogli według wzoru (5) art. 80-go znaleźć rozwinięcie $(a_1+b)^n$. W trzecim wyrazie tego rozwinięcia będziemy mieli $b^2=(a_2+a_3)^2$, w czwartym $b^3=(a_2+a_3)^3,\ldots$, w $(\nu+1)$-szym $b^\nu=(a_2+a_3)^\nu,\ldots$, w ostatnim $b^n=(a_2+a_3)^n$. Rozwinąwszy każdą z tych potęg dwumianu a_2+a_3 znowu według wzoru (5), wykonamy podstawienia w rozwinięciu $(a_1+b)^n$ i znajdziemy rozwinięcie n-tej potęgi trójmianu $a_1+a_2+a_3$.

W podobny sposób moglibyśmy znaleźć rozwinięcie n-tej potęgi czworomianu $a_1+a_2+a_3+a_4$. I t. d.

Możemy, nie wypisując całego rozwinięcia $(a_1+a_2+a_3)^n$, wypisać wyraz, do którego wchodzą potęgi a_1^k, a_2^l, a_3^m (oczywiście $k+l+m=n$). W rozwinięciu $(a_1+b)^n$ wyraz zawierający a_1^k według (5) art. 80-go jest $\binom{n}{n-k}a_1^k b^{n-k}$; podobnie w rozwinięciu $b^{n-k}=(a_2+a_3)^{n-k}$ wyraz, do którego wchodzi a_2^l, jest $\binom{n-k}{(n-k)-l}a_2^l a_3^{(n-k)-l}=\binom{n-k}{m}a_2^l a_3^m$. A zatem wyraz żądany rozwinięcia $(a_1+a_2+a_3)^n$ jest

$$\binom{n}{n-k}\binom{n-k}{m}a_1^k a_2^l a_3^m=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\times\frac{(n-k)!}{m!\,l!}a_1^k a_2^l a_3^m=\frac{n!}{k!\,l!\,m!}a_1^k a_2^l a_3^m.$$

Podobnie znajdziemy, iż w rozwinięciu $(a_1+a_2+a_3+a_4)^n$ wyraz, do którego wchodzą potęgi $a_1^k, a_2^l, a_3^m, a_4^p$ (przy $k+l+m+p=n$), jest

$$\frac{n!}{k!\,l!\,m!\,p!}a_1^k a_2^l a_3^m a_4^p. \text{ I t. d.}$$

83. Mając postęp arytmetyczny

$$a_1,\ a_2,\ldots,a_{m-1},\ a_m \tag{1}$$

o różnicy r, wypiszmy jego wyrazy tak:

$$a_m = a_{m-1} + r,\quad a_{m-1} = a_{m-2} + r, \ldots,\quad a_3 = a_2 + r,\quad a_2 = a_1 + r$$

i podnieśmy wypisane wyrazy do potęgi $(n+1)$-szej według wzoru (5) art. 80-go. Otrzymamy

$$\begin{aligned}
a_m^{n+1} - a_{m-1}^{n+1} &= \tbinom{n+1}{1} a_{m-1}^n r + \tbinom{n+1}{2} a_{m-1}^{n-1} r^2 + \ldots + \tbinom{n+1}{n} a_{m-1} r^n + \tbinom{n+1}{n+1} r^{n+1},\\
a_{m-1}^{n+1} - a_{m-2}^{n+1} &= \tbinom{n+1}{1} a_{m-2}^n r + \tbinom{n+1}{2} a_{m-2}^{n-1} r^2 + \ldots + \tbinom{n+1}{n} a_{m-2} r^n + \tbinom{n+1}{n+1} r^{n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_2^{n+1} - a_1^{n+1} &= \tbinom{n+1}{1} a_1^n r \quad + \tbinom{n+1}{2} a_1^{n-1} r^2 + \ldots + \tbinom{n+1}{n} a_1 r^n \quad + \tbinom{n+1}{n+1} r^{n+1}.
\end{aligned}$$

Dodając do siebie te równości stronami odpowiedniemi i sumę ν-tych potęg pierwszych $m-1$ wyrazów postępu (1) nazwawszy $\Sigma^{(\nu)}_{m\mid 1}$, otrzymamy

$$a_m^{n+1} - a_1^{n+1} = \tbinom{n+1}{1} r \Sigma^{(n)}_{m-1} + \tbinom{n+1}{2} r^2 \Sigma^{(n-1)}_{m-1} + \ldots + \tbinom{n+1}{n} r^n \Sigma^{(1)}_{m-1} + \tbinom{n+1}{n+1} r^{n+1} (m-1). \tag{2}$$

Przy pomocy wzoru (2), znając $\Sigma^{(1)}_{m-1}$, $\Sigma^{(2)}_{m-1}, \ldots, \Sigma^{(n-1)}_{m-1}$, możemy obliczyć $\Sigma^{(n)}_{m-1}$. Tak np., aby, mając postęp arytmetyczny $1, 2, 3, \ldots, k$, znaleźć sumę jednakowych potęg jego wyrazów, przyjmiemy we wzorze (2) $r=1$, $m-1=k$, $a_1=1$ (tak iż $a_m = k+1$), będziemy mieli

$$(k+1)^{n+1} - 1 = \tbinom{n+1}{1} \Sigma^{(n)}_k + \tbinom{n+1}{2} \Sigma^{(n-1)}_k + \ldots + \tbinom{n+1}{n} \Sigma^{(1)}_k + k. \tag{3}$$

Kładąc w tym wzorze (3) kolejno $n = 1, 2, 3, \ldots$, znajdziemy stopniowo

$$(k+1)^2 - 1 = \tbinom{2}{1} \Sigma^{(1)}_k + k, \qquad \Sigma^{(1)}_k = \frac{k(k+1)}{2};$$

$$(k+1)^3 - 1 = \tbinom{3}{1} \Sigma^{(2)}_k + \tbinom{3}{2} \frac{k(k+1)}{2} + k, \qquad \Sigma^{(2)}_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6};$$

$$(k+1)^4 - 1 = \tbinom{4}{1} \Sigma^{(3)}_k + \tbinom{4}{2} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \tbinom{4}{3} \frac{k(k+1)}{2} + k, \quad \Sigma^{(3)}_k = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2;$$

i t. d.

Wyrażenie $\Sigma^{(2)}_k$ znaleźliśmy już poprzednio w zadaniu 1-em art. 50-go.

84. Jeżeli z wielomianu $W = A + B + C + D + \ldots$, uporządkowanego np. według malejących potęg litery głównej, mamy wyciągnąć pierwiastek n-tego stopnia, to, aby wykryć prawidło postępowania, przypuśćmy, że wielomian W jest n-tą potęgą wielomianu $w = a + b + c + \ldots$, uporządkowanego również według malejących potęg tejże samej litery głównej. Pierwszy wyraz wielomianu W jest n-tą potęga pierwszego wyrazu wielomianu w, a więc $\sqrt[n]{A} = a$. Po odjęciu $a^n = A$ od wielomianu W, pozostanie reszta $B + C + D + \ldots$, której pierwszy wyraz B zawiera najwyższą potęgę litery głównej. Ponieważ mamy $W = (a+b+c+\ldots)^n = a^n + \tbinom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots$, przeto $W - A = na^{n-1}b + \ldots$ i wyraz $na^{n-1}b$ zawiera najwyższą potęgę litery głównej. Jest więc $B = na^{n-1}b$. A zatem $B:(na^{n-1}) = b$, drugiemu wyrazowi pierwiastka. Mając już dwa wyrazy pierwiastka, rozwińmy $(a+b)^n$ według wzoru (5) art. 80-go, utwórzmy następnie różnicę $W - (a+b)^n$ i uporządkujmy ją według malejących potęg tejże litery głównej. Pierwszy wyraz tej różnicy, t. j. różnicy $(a+b+c+\ldots)^n - (a+b)^n = \tbinom{n}{1} a^{n-1} c + \ldots$, dzieląc przez na^{n-1}, otrzymamy trzeci wyraz pierwiastka. Mając już 3 wyrazy pierwiastka, znajdziemy różnicę $W - (a+b+c)^n$ i uporządkujemy ją według malejących potęg tejże litery głównej. Dzieląc następnie pierw-

szy wyraz tej różnicy przez na^{n-1}, znajdziemy czwarty wyraz pierwiastka. I t. d.

Jeżeliby pierwszy wyraz którejkolwiek reszty nie był podzielny przez na^{n-1}, wskazywałoby to, iż $\sqrt[n]{W}$ jest wyrażeniem algebraicznem niewymiernem.

Zauważmy jeszcze, że, jeżeliby $\sqrt[n]{W}$ był wielomianem, to ostatni wyraz wielomianu W byłby n-tą potęgą ostatniego wyrazu pierwiastka. Gdyby się zatem zdarzyło, że, dzieląc pierwszy wyraz którejkolwiek reszty przez na^{n-1}, otrzymalibyśmy wyraz zawierający niższą potęgę litery głównej, niż ta, która zachodzi w pierwiastku n-tego stopnia z ostatniego wyrazu danego wielomianu, to wnieślibyśmy, iż $\sqrt[n]{W}$ jest wyrażeniem algebraicznem niewymiernem. —

Jest rzeczą widoczną, iż wyłożone poprzednio sposoby wyciągania pierwiastków kwadratowego i sześciennego z wielomianów są przypadkami szczególnemi powyższego postępowania ogólnego.

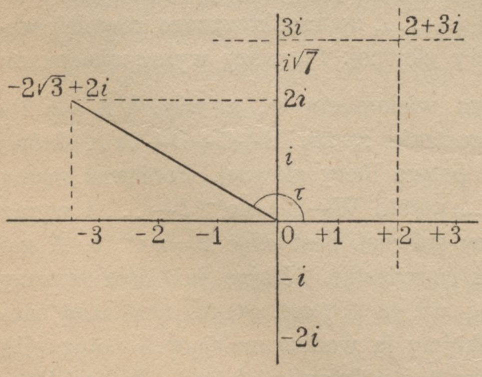
ROZDZIAŁ SIÓDMY.

LICZBY ZESPOLONE. — OKREŚLENIE ALGEBRY.

PRZEDSTAWIENIE GEOMETRYCZNE LICZB ZESPOLONYCH.

85. Gdy na linii prostej, np. poziomej, obierzemy pewien punkt jako mający przedstawiać liczbę 0 i, obrawszy pewną długość za jednostkę, w jednym kierunku od zera np. na prawo przez punkty tej prostej będziemy przedstawiali liczby dodatne, to w drugim kierunku, t. j. na lewo, przez punkty tej prostej możemy przedstawiać liczby ujemne. W taki sposób różne punkty[1]) tej prostej będą przedstawiały różne liczby rzeczywiste. Dlatego nazywać ją będziemy prostą liczb rzeczywistych (reele Zahlenlinie).

Chcąc najdogodniej zapomocą punktów przedstawić także liczby urojone i zespolone, przyjmiemy, iż punkty prostej, prostopadłej do prostej liczb rzeczywistych w punkcie 0, przedstawiać będą liczby urojone. Mianowicie umówmy się, aby liczbę $\sqrt{-1} = i$ przedstawiał punkt tej prostopadłej, znajdujący się nad prostą liczb rzeczywistych w odległości 1. Wskutek tego liczby np. $3i$ i $2i\sqrt{7}$ będą przedstawione przez punkty tej prostej nad prostą liczb rzeczywistych, w odległości od niej odpowiednio 3 i $2\sqrt{7}$. Podobnie liczby $-i$, $-2i$



[1]) Nie należy punktów na prostej, przedstawiających liczby, mieszać z długością odcinków między dwoma takiemi punktami. Długość odcinka uważa się za wielkość bezwzględną, ani za dodatną ani też za ujemną. Tak np. długość odcinka od punktu 0 do punktu —3, jest 3.

będą przedstawione przez punkty tej prostej pod prostą liczb rzeczywistych, w odległości od niej odpowiednio 1 i 2. Tę prostą, prostopadłą do prostej liczb rzeczywistych w punkcie 0 (której punkty przedstawiają liczby urojone), nazywać będziemy prostą liczb urojonych (imaginäre Zahlenlinie).

Umówiwszy się, jak przedstawiać liczby urojone, łatwo już możemy przedstawić liczbę zespoloną. Weźmy np. liczbę $2+3i$. Zważmy, że punkty, przedstawiające liczby $2+3i$, $2+4i$, $2-5i$ i t. d., mają tę samę część rzeczywistą $+2$, którą przedstawia punkt prostej liczb rzeczywistych; dlatego przyjmiemy, że te punkty znajdą się na prostej, prostopadłej do prostej liczb rzeczywistych w punkcie $+2$. Podobnie przyjmiemy, że punkty $2+3i$, $1+3i$, $-5+3i$, jako przedstawiające liczby o tej samej części urojonej $+3i$, znajdą się na tej prostej równoległej do prostej liczb rzeczywistych, która przechodzi przez punkt $+3i$. A zatem liczba $2+3i$ znajdzie się na przecięciu się tych dwu prostych.

Podobnie oznaczyć możemy położenie np. punktu $-2\sqrt{3}+2i$ i t. d.[1])

W ten sposób różne punkty na płaszczyźnie, określonej przez prostą liczb rzeczywistych i prostą liczb urojonych, przedstawiać nam będą wszelkie liczby, które poznaliśmy, i dlatego tę płaszczyznę nazwiemy płaszczyzną liczb (Zahlenebene).

86. Weźmy jakąkolwiek liczbę zespoloną $a+bi$, gdzie każda z liczb a i b może być dodatna lub ujemna. Moduł jej, jak wiemy, jest wartością bezwzględną liczby $\sqrt{a^2+b^2}$; nazwijmy go ρ. Naszę liczbę zespoloną możemy tak przedstawić:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,i\right),\quad \text{czyli}\quad \rho\left(\frac{a}{\rho}+\frac{b}{\rho}\,i\right).$$

Z trygonometryi zaś wiemy, iż styczna trygonometryczna kąta może, przy zmieniającym się kącie, otrzymywać wszelkie wartości ujemne i dodatne. Jakiemikolwiek więc są liczby a i b, zawsze znajdzie się taki kąt, iż $\operatorname{tg}\tau=\frac{b}{a}$, a wtedy, jak wiemy, $\cos\tau=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\rho}$, $\sin\tau=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\rho}$, gdzie, biorąc wartość bezwzględną $\sqrt{a^2+b^2}=\rho$, mamy $\cos\tau$ i $\sin\tau$ takiego znaku, jakiego są odpowiednio liczby a i b. Wskutek tego naszę liczbę możemy przedstawić

---

[1]) Wprawdzie liczba i jest taka, iż $i^2=(-1).(+1)$, t. j. liczba i jest średnią geometryczną liczb -1 i $+1$, lecz z tego nie wynika, aby odcinek między punktami 0 i i mógł służyć jako przedstawienie średniej geometrycznej dwu liczb, jednej dodatnej $+1$, drugiej zaś ujemnej -1. Twierdzenia bowiem geometryi elementarnej, jako wyprowadzone dla odcinków, pojmowanych bezwzględnie, mogą być tylko wtedy stosowane, kiedy nie rozważamy odcinków ujemnych, a temwięcej, kiedy nie mieszamy pojęcia długości odcinka z liczbą, którą końcowy jego punkt przedstawiać może. [Gdy około punktu 0, jako środka, promieniem 1 zakreślimy koło, to długość prostopadłej spuszczonej z któregokolwiek punktu okręgu na średnicę, jest średnią geometryczną długości odcinków średnicy. Dopuszczenie jednak, iż odcinek od punktu 0 do i przedstawia średnią geometryczną liczb -1 i $+1$, prowadziłoby za sobą także przyjęcie np., iż odcinek od punktu $+\frac{1}{2}$ do punktu $+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$ jest średnią geometryczną 2-u liczb, jednej, którą przedstawiałby odcinek od punktu $\frac{1}{2}$ do $+1$, i drugiej, którą przedstawiałby odcinek od punktu $+\frac{1}{2}$ do punktu -1, co być nie może].

w kształcie $\rho(\cos\tau+i\sin\tau)$. Każdą zatem liczbę zespoloną możemy rozważać w jednym z dwu kształtów:

$$a+bi,\quad \rho(\cos\tau+i\sin\tau), \tag{1}$$

gdzie
$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\quad \tau=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}, \tag{2}$$

zaś
$$a=\rho\cos\tau,\quad b=\rho\sin\tau. \tag{3}$$

Np. $-2\sqrt{3}+2i=4(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi)$. Ten punkt jest przedstawiony na figurze; długość odcinka, łączącego punkt 0 z tym punktem, przedstawia moduł $\rho=4$, a ten odcinek tworzy z dodatną częścią prostej liczb rzeczywistych kąt $\tau=\frac{5}{6}\pi$.

Liczbę zespoloną w drugim z kształtów (1) określa moduł ρ, długość odcinka między punktem 0 a punktem przedstawiającym tę liczbę, oraz wielkość τ, nazwana odchyleniem (Amplitude), która jest kątem dodatnym, jaki z dodatną częścią prostej liczb rzeczywistych tworzy prosta od punktu 0 do punktu przedstawiającego liczbę.

Drugi z kształtów (1) moglibyśmy symbolicznie tak napisać ρ_τ.

Oczywiście, że liczbę zespoloną możemy nazwać jedną literą. Tak np. gdy liczbę (1) nazwiemy u, to $u=a+bi$, albo $u=\rho(\cos\tau+i\sin\tau)$, czyli $u=\rho_\tau$.

Gdy mamy dwie liczby zespolone sprzężone: $u'=a+bi$, $u''=a-bi$, to, jeżeli $u'=\rho(\cos\tau+i\sin\tau)$, jest $u''=\rho(\cos\tau-i\sin\tau)=\rho[\cos(2\pi-\tau)+i\sin(2\pi-\tau)]$, tak iż liczby zespolone sprzężone mają ten sam moduł, suma zaś ich odchyleń jest 2π.

Zauważymy jeszcze, że liczby, mające ten sam modnł ρ, są przedstawione przez punkty znajdujące się na okręgu koła, zakreślonego z punktu 0, jako środka, promieniem ρ. Liczby zaś, mające toż samo odchylenie τ, są przedstawione przez punkty prostej, wyprowadzonej z punktu 0, a tworzącej kąt τ z dodatną częścią prostej liczb rzeczywistych.

87. Jeżeli w liczbie zespolonej spółczynnik i staje się równym zeru, to liczba staje się rzeczywistą; jest wtedy we wzorach (1), (2) i (3) $b=0$, $\tau=k\pi$, gdzie k ma wartość 0 lub liczby całkowitej dodatnej. Jeżeli zaś część rzeczywista staje się zerem, to liczba zespolona staje się urojoną i we wzorach (1) (2) i (3) jest $a=0$, $\tau=\frac{2k+1}{2}\pi$, gdzie k otrzymywać może też same, co poprzednio, wartości. Liczby więc rzeczywiste i urojone uważać możemy za szczególne przypadki liczb zespolonych.

Gdyby liczba zespolona miała się stawać liczbą 0, $a+bi=0$, to byłoby $a=-bi$, albo po podniesieniu obu stron do kwadratu $a^2=-b^2$, liczba dodatna równa ujemnej, co być nie może. Ta jednak równość $a^2=-b^2$ jest możliwa, kiedy tak $a=0$ jak i $b=0$. A więc *liczba zespolona wtedy otrzymuje wartość 0, kiedy jednocześnie jej część rzeczywista i spółczynnik »i« stają się równemi zeru.*

Gdybyśmy wyszli z drugiego kształtu liczby zespolonej (1), t. j. przyjęli, iż $\rho(\cos\tau+i\sin\tau)=0$, to zauważywszy, iż czynnik $\cos\tau+i\sin\tau$ jest od zera różny (gdyż niema takiego τ, przy któremby jednocześnie było $\cos\tau=0$ i $\sin\tau$ 0), wnieść należy, iż $\rho=0$, t. j. $\sqrt{a^2+b^2}=0$, co możliwe, kiedy jednocześnie $a=0$ i $b=0$.

Na mocy tego, jeżeli dwie liczby zespolone $a_1+b_1 i$, $a_2+b_2 i$ są sobie równe, $a_1+b_1 i=a_2+b_2 i$, a więc $(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i=0$, to $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. A zatem, *jeżeli dwie liczby zespolone są równe, to ich części rzeczywiste są równe, oraz ich spółczynniki »i« są równe.* Z tego wynika, że *pewien punkt płaszczyzny liczb przedstawiać może jednę liczbę*, i nawzajem *liczba może być przedstawiona tylko przez jeden punkt płaszczyzny.*

DZIAŁANIA NA LICZBACH ZESPOLONYCH.

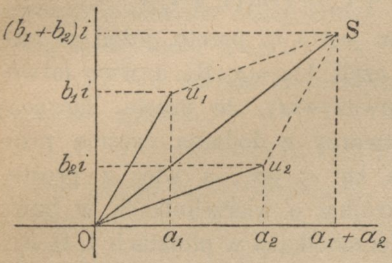
88. Weźmy dwie liczby

$$u_1=a_1+b_1 i=\rho_1(\cos\tau_1+i\sin\tau_1),\quad u_2=a_2+b_2 i=\rho_2(\cos\tau_2+i\sin\tau_2). \qquad (1)$$

α. Sumę liczb (1) nazwijmy s,

$$s=u_1+u_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i;$$

widzimy więc, *że suma dwu liczb zespolonych jest, wogóle mówiąc, liczbą zespoloną;* byłaby ona liczbą rzeczywistą, jeżeliby było $b_1=-b_2$, zaś liczbą urojoną, jeżeliby było $a_1=-a_2$. Gdy liczby (1) przedstawimy, jak obok na rysunku, zapomocą punktów u_1 i u_2, to, poprowadziwszy prostopadłą do prostej liczb rzeczywistych oddaloną od punktu 0 o a_1+a_2, oraz równoległą do tejże prostej, oddaloną od niej o b_1+b_2, otrzymamy na przecięciu się tych dwu prostych punkt, który przedstawiać będzie liczbę $u_1+u_2=s$. Przy pomocy rozważania odpowiednich trójkątów podobnych łatwo wniesiemy, że czworokąt $0u_1su_2$ jest równoległobokiem, tak iż *punkt, przedstawiający sumę dwu liczb, jest wierzchołkiem równoległoboku przeciwległym wierzchołkowi* 0, *gdy pozostałemi wierzchołkami są punkty przedstawiające składniki.*



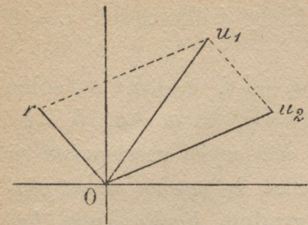
Moduł sumy liczb (1) jest

$$\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}=\sqrt{(\rho_1\cos\tau_1+\rho_2\cos\tau_2)^2+(\rho_1\sin\tau_1+\rho_2\sin\tau_2)^2}=$$
$$=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos(\tau_1-\tau_2)}.$$

Jeżeliby było $\tau_1=\tau_2$, to moduł sumy byłby $\rho_1+\rho_2$, w innych zaś przypadkach jest mniejszy od $\rho_1+\rho_2$, a w razie $\tau_1=\tau_2+\pi$ moduł sumy byłby równy bezwzględnej wartości różnicy $\rho_1-\rho_2$, a więc *moduł sumy dwu liczb nie jest większy od sumy ich modułów i nie jest mniejszy od bezwzględnej wartości różnicy ich modułów.*

Gdybyśmy mieli 3 lub więcej składników, to, po znalezieniu sumy dwu z nich, szukalibyśmy sumy tak otrzymanej liczby i trzeciego składnika, i t. d., a wszystkie własności, powyżej zaznaczone dla sumy dwu składników, odnieść łatwo będziemy mogli do sumy ilukolwiek składników.

β. Od pierwszej z liczb (1) odejmijmy drugą i nazwijmy różnicę $u_1-u_2=r$,



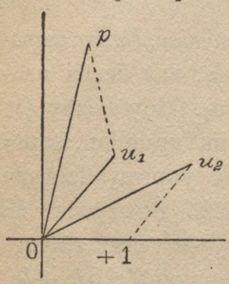
$$r=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i;$$

a więc *różnica dwu liczb zespolonych jest, wogóle mówiąc, liczbą zespoloną* i łatwo wyrozumieć, w jakich przypadkach jest ona liczbą rzeczywistą lub urojoną. Ponieważ $u_1=u_2+r$, przeto *punkt, przedstawiający różnicę dwu liczb, jest wierzchołkiem równoległoboku, którego wierzchołkami przeciwległemi są punkt* 0 *i punkt przedstawiający odjemną, a punkt przedstawiający odjemnik pozostałym wierzchołkiem.*

γ. Iloczyn liczb (1) nazwijmy p,

$$p=u_1u_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i;$$

a więc *iloczyn dwu liczb zespolonych jest, wogóle mówiąc, liczbą zespoloną,* która staje się rzeczywistą, jeżeli $a_1b_2=-a_2b_1$, urojoną zaś w razie, kiedy $a_1a_2=b_1b_2$. Iloczyn ten możemy inaczej wyrazić,



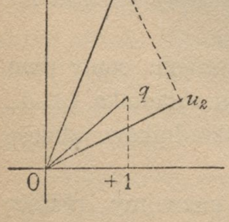
$$p=u_1u_2=\rho_1\rho_2(\cos\tau_1+i\sin\tau_1)(\cos\tau_2+i\sin\tau_2)=$$
$$=\rho_1\rho_2[\cos(\tau_1+\tau_2)+i\sin(\tau_1+\tau_2)].$$

Ponieważ moduł iloczynu jest $\rho_1\rho_2$, przeto, jeżeli go nazwiemy R, jest $R=\rho_1\rho_2$ czyli $1:\rho_1=\rho_2:R$, a więc łatwo znaleźć długość R. Zauważywszy, że prosta, łącząca punkt 0 z punktem p, tworzy z dodatną częścią prostej liczb rzeczywistych kąt $\tau_1+\tau_2$, a więc z prostą łączącą punkty 0 i u_1 kąt τ_2, wniesiemy, iż trójkąt o wierzchołkach w punktach u_1, 0, p jest podobny do trójkąta o wierzchołkach w punktach 1, 0, u_2; przeto *punkt, przedstawiający iloczyn dwu liczb, jest trzecim wierzchołkiem trójkąta, wystawionego na odcinku, łączącym punkt* 0 *z punktem przedstawiającym jeden czynnik, a podobnego do trójkąta, którego odpowiedniemi wierzchołkami są punkty przedstawiające: drugi czynnik,* 0, *oraz* +1.

Gdybyśmy wzięli iloczyn p ilukolwiek czynników $u_1, u_2, \ldots, u_n$, których moduły nazwijmy odpowiednio $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, odchylenia zaś odpowiednio $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, to nietrudno dowieść, iż ogólnie

$$p=u_1u_2\ldots u_n=\rho_1\rho_2\ldots\rho_n[\cos(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n)+i\sin(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n)]; \qquad (2)$$

a więc *moduł iloczynu jest iloczynem modułów czynników,* zaś *odchylenie iloczynu jest sumą odchyleń czynników.*



δ. Iloraz z podzielenia pierwszej z liczb (1) przez drugą nazwijmy q,

$$q=\frac{u_1}{u_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i;$$

a więc *iloraz dwu liczb zespolonych jest, wogóle mówiąc, liczbą zespoloną,* która w szczególnych przypadkach może się stawać liczbą rzeczywistą lub urojoną.

Korzystając z drugich kształtów liczb (1), mamy

$$q=\frac{u_1}{u_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\tau_1+i\sin\tau_1}{\cos\tau_2+i\sin\tau_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\tau_1+i\sin\tau_1)(\cos\tau_2-i\sin\tau_2)=$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\tau_1-\tau_2)+i\sin(\tau_1-\tau_2)],$$

t. j. *moduł ilorazu dwu liczb jest ilorazem ich modułów*, zaś *odchylenie ilorazu dwu liczb jest różnicą ich odchyleń*. Jeżeliby wypadło $\tau_1-\tau_2<0$, to odchyleniem ilorazu jest kąt $2\pi+(\tau_1-\tau_2)$.

Ponieważ $u_1=u_2q$, przeto *punkt przedstawiający iloraz dwu liczb jest wierzchołkiem trójkąta wystawionego na odcinku łączącym punkt* 0 *z punktem* $+1$, *a podobnego do trójkąta, którego odpowiedniemi wierzchołkami są punkty przedstawiające dzielną,* 0, *i dzielnik.*

W szczególnym przypadku, kiedy $u_1=1$, mamy (opuszczając wskaźnik 2)

$$\frac{1}{u}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a_2+b^2}i=\frac{1}{\rho}[\cos(-\tau)+i\sin(-\tau)]=\frac{1}{\rho}[\cos(2\pi-\tau)+i\sin(2\pi-\tau)],$$

t. j. *odwrotność liczby zespolonej jest liczbą zespoloną, której moduł jest odwrotnością modułu liczby danej, a odchylenie przedstawia wraz z odchyleniem liczby danej sumę* 2π.

89. We wzorze (2) przyjmując $u_1=u_2=\ldots=u_n=u=\rho(\cos\tau+i\sin\tau)$, będziemy mieli

$$[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^n=\rho^n[\cos(n\tau)+i\sin(n\tau)], \tag{3}$$

a więc *potęga liczby zespolonej, wogóle mówiąc, jest liczbą zespoloną*, która w szczególnych przypadkach stawać się może liczbą rzeczywistą ($n\tau=k\pi$), lub urojoną $\left(n\tau=\frac{2k+1}{2}\pi\right)$. Ze wzoru (3) widzimy, że, *aby liczbę zespoloną podnieść do potęgi n-tej, należy jej moduł podnieść do potęgi n-tej, jej zaś odchylenie pomnożyć przez n:*

Ze wzoru (3) wynika przy $\rho=1$ wzór

$$(\cos\tau+i\sin\tau)^n=\cos(n\tau)+i\sin(n\tau). \tag{4}$$

Wzór (4) nazywa się[1]) w z o r e m M o i v r e'a (wym. moawr'a; Moivre'sche Formel).

Jeżeli lewą stronę równości (4) rozwiniemy według dwumianu Newton'a, to otrzymamy wielomian o $n+1$ wyrazach, z których wyrazy zajmujące nieparzyste miejsca będą rzeczywiste, pozostałe zaś urojone. Z równości więc (4) według tego, cośmy mówili w art. 87-ym, wynikają równości

$$\cos(n\tau)=\cos^n\tau-\tbinom{n}{2}\cos^{n-2}\tau\sin^2\tau+\tbinom{n}{4}\cos^{n-4}\tau\sin^4\tau-\ldots,$$
$$\sin(n\tau)=\tbinom{n}{1}\cos^{n-1}\tau\sin\tau-\tbinom{n}{3}\cos^{n-3}\tau\sin^3\tau+\tbinom{n}{5}\cos^{n-5}\tau\sin^5\tau-\ldots$$

($n=2, 3, 4,\ldots$), t. j. wyrażenia wstawy i dostawy wielokrotności kąta przez potęgi wstawy i dostawy tego kąta. —

---

[1]) Właściwie Moivre otrzymał w r. 1730 wyrażenia $\cos(n\tau)=\frac{1}{2}[(\cos\tau+i\sin\tau)^n+(\cos\tau-i\sin\tau)^n]$, $\sin(n\tau)=-\frac{1}{2}i[(\cos\tau+i\sin\tau)^n-(\cos\tau-i\sin\tau)^n]$; wzór zaś (4) po raz pierwszy podał Euler w r. 1748.

Jeżeliby po lewej stronie wzoru (3) liczba n była ujemna całkowita, $n=-\nu$, to zgodnie z określeniem potęgi ujemnej mielibyśmy, stosując wzór (3) i ostatni art. 88-go,

$$[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^n=[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^{-\nu}=\frac{1}{[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^\nu}=\frac{1}{\rho^\nu[\cos(\nu\tau)+i\sin(\nu\tau)]}$$
$$=\rho^{-\nu}[\cos(-\nu\tau)+i\sin(-\nu\tau)]=\rho^n[\cos(n\tau)+i\sin(n\tau)],$$

t. j. wzór (3) odnosi się także do przypadku, kiedy n jest liczbą całkowitą ujemną. Wówczas odchylenie $n\tau$ zastępujemy przez odpowiednie odchylenie dodatne.

90. Kładąc we wzorze (3) przy n całkowitem i dodatnem $\rho^n=r$, $n\tau=t$, wskutek czego $\rho=r^{\frac{1}{n}}$, $\tau=\frac{t}{n}$, mieć będziemy

$$\left[r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t}{n}+i\sin\frac{t}{n}\right)\right]^n=r(\cos t+i\sin t).$$

Z tej równości, po wyciągnięciu z obu stron pierwiastka n-tego stopnia, mamy

$$\sqrt[n]{r(\cos t+i\sin t)}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t}{n}+i\sin\frac{t}{n}\right), \tag{5}$$

a więc *pierwiastek z liczby zespolonej jest liczbą zespoloną*. Ze wzoru (5) widzimy, że, *aby z liczby zespolonej wyciągnąć pierwiastek n-tego stopnia, należy z jej modułu wyciągnąć pierwiastek (arytmetyczny) n-tego stopnia, jej zaś odchylenie podzielić przez n.*

Zauważmy, że danej liczby $r(\cos t+i\sin t)$ nie zmienimy, jeżeli zamiast odchylenia t weźmiemy ogólniej odchylenie $t+2k\pi$, gdzie k ma wartość 0, lubteż jakiejkolwiek liczby całkowitej dodatnej. Możemy więc wzór (5) tak napisać:

$$\sqrt[n]{r(\cos t+i\sin t)}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n}+i\sin\frac{t+2k\pi}{n}\right). \tag{6}$$

Podstawiając w tym wzorze $k=0, 1, 2, \ldots n-1$, otrzymamy n wartości pierwiastka n-tego stopnia z liczby $r(\cos t+i\sin t)$,

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t}{n}+i\sin\frac{t}{n}\right),\ r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t+2\pi}{n}+i\sin\frac{t+2\pi}{n}\right),\ldots,\ r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{t+2(n-1)\pi}{n}\right). \tag{7}$$

Gdybyśmy liczbie k nadawali wartości n, $n+1$, ..., $2n-1$, $2n$, $2n+1$, ..., $3n-1$, ..., to otrzymywalibyśmy znowu też same wartości pierwiastka. Wartości (7) są wszystkie różne od siebie, gdyż, jeżeliby przy dwu liczbach l_1 i l_2 całkowitych i dodatnych miało być

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t+2l_1\pi}{n}+i\sin\frac{t+2l_1\pi}{n}\right)=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{t+2l_2\pi}{n}+i\sin\frac{t+2l_2\pi}{n}\right),$$

to byłoby jednocześnie

$\cos\frac{t+2l_1\pi}{n}=\cos\frac{t+2l_2\pi}{n}$, $\sin\frac{t+2l_1\pi}{n}=\sin\frac{t+2l_2\pi}{n}$, co z uwagi, iż wartość bezwzględna różnicy $\frac{t+2l_1\pi}{n}-\frac{t+2l_2\pi}{n}=\frac{l_1-l_2}{n}2\pi$ jest mniejsza od 2π (a więc nierówna wielokrotności 2π), być nie może. Gdyby nawet liczba $r(\cos t + i \sin t)$ była rzeczywista, t. j. gdyby nawet było czyto $t=0$, czyteż $t=\pi$, to także pierwiastki (7) z tej liczby byłyby od siebie różne. A więc *pierwiastek n-tego stopnia z jakiejkolwiek liczby ma n różnych wartości.* Np

$$\sqrt[n]{+1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \tag{8}$$

$$\cos 0 + i \sin 0, \ \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \ldots, \cos \frac{2(n-1)}{n}\pi + i \sin \frac{2(n-1)}{n}\pi; \tag{9}$$

$$\sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{2k+1}{n}\pi + i \sin \frac{2k+1}{n}\pi, \tag{10}$$

$$\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}, \ \cos \frac{3\pi}{n} + i \sin \frac{3\pi}{n}, \ldots, \cos \frac{2n-1}{n}\pi + i \sin \frac{2n-1}{n}\pi. \tag{11}$$

91. Ponieważ (art. 88 γ) jest

$$\left(\cos \frac{t}{n} + i \sin \frac{t}{n}\right)\left(\cos \frac{k}{n} 2\pi + i \sin \frac{k}{n} 2\pi\right) = \cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n},$$

przeto wzór (6) możemy tak napisać:

$$\sqrt[n]{r(\cos t + i \sin t)} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{t}{n} + i \sin \frac{t}{n}\right)\left(\cos \frac{k}{n} 2\pi + i \sin \frac{k}{n} 2\pi\right). \tag{12}$$

W ostatnim czynniku po stronie prawej liczba k oznaczać może (art. 90) którąkolwiek z liczb $0, 1, 2, \ldots, n-1$, a ten czynnik według (8) przedstawia pierwiastki n-tego stopnia z $+1$, t. j. liczby (9). Wskutek tego, według wzoru (12), *otrzymamy wszystkie pierwiastki n-tego stopnia z liczby danej, mnożąc jeden pierwiastek z tej liczby przez wszystkie n pierwiastków z* $+1$.

92. Z wyrażeń (9) wprost wypada, iż jednym pierwiastkiem n-tego stopnia z $+1$ jest liczba rzeczywista $+1$, która odpowiada wartości $k=0$. Aby pośród pierwiastków (9) był jeszcze inny rzeczywisty, potrzeba, żeby przy odpowiedniej wartości k, było $\frac{k}{n} 2\pi$ równe wielokrotności π. Ponieważ $k < n$, przeto zdarzyć się to może tylko w razie $k = \frac{n}{2}$, a więc kiedy n jest liczbą parzystą, i wówczas pierwiastek jest $\cos \pi + i \sin \pi = -1$. A więc *pośród pierwiastków stopnia n-tego z* $+1$ *w razie n parzystego są dwa pierwiastki rzeczywiste* $+1$ *oraz* -1, *w razie zaś n nieparzystego jest jeden tylko pierwiastek rzeczywisty* $+1$.

Aby pośród pierwiastków (11) z -1 był rzeczywisty, potrzeba, żeby w ogólnem wyrażeniu (10), przy odpowiedniej wartości k, było $\frac{2k+1}{n}\pi$ równe wielokrotności π. Ponieważ $k < n$, przeto zdarzyć się to może tylko w razie, kiedy $\frac{2k+1}{n}\pi = \pi$, t. j. kiedy $k = \frac{n-1}{2}$, a zatem tylko przy n nieparzystem. Widzimy więc, że pośród pierwiastków stopnia n-tego z -1 tylko w razie n nieparzystego jest jedyny pierwiastek rzeczywisty -1. —

Zauważmy jeszcze, że wogóle ze wzoru (10) wprost wynika, iż pierwiastek n-tego stopnia z liczby -1 wyraża się przez liczby rzeczywiste

$\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi, \sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)$ i przez liczbę urojoną $i=\sqrt{-1}$. Taż sama uwaga odnosi się do ogólnego wzoru (6). Dlatego w części II w art. 64-ym powiedzieliśmy, iż wprowadzając liczby urojone, a tem samem (II, art. 68) liczby zespolone, wprowadzamy właściwie jedyną nową liczbę $\sqrt{-1}$.

93. Aby w ogóle pierwiastek n-tego stopnia z liczby jakiejkolwiek był liczbą rzeczywistą, potrzeba, iżby w ogólnem jego wyrażeniu, które przedstawia strona prawa wzoru (6), spółczynnik i był równy zeru, t. j. aby było

$$\sin\frac{t+2k\pi}{n}=0. \tag{13}$$

Możemy przyjąć we wzorze (6), iż $t<2\pi$. Kładąc

$$t=\theta.2\pi, \tag{14}$$

gdzie $\theta<1$, warunek (13) tak przedstawimy:

$$\sin\frac{\theta+k}{n}2\pi=0.$$

Będzie on spełniony wtedy, kiedy albo $\frac{\theta+k}{n}2\pi=0$, alboteż $\frac{\theta+k}{n}2\pi=\pi$.

α. Jeżeli $\frac{\theta+k}{n}2\pi=0$, a więc $\theta+k=0$, to, z uwagi, że żadna z liczb θ i k nie może być ujemna, jest jednocześnie $\theta=0$ i $k=0$. Wówczas według (14) jest także $t=0$, zaś według (6) jest

$$\sqrt[n]{+r}=+r^{\frac{1}{n}},$$

t. j. otrzymujemy z liczby dodatnej pierwiastek dodatny.

β. Jeżeli $\frac{\theta+k}{n}2\pi=\pi$, a więc $\frac{2\theta+2k}{n}=1$, skąd $\theta=\frac{n-2k}{2}$, to, z uwagi, ~~iż~~ $\cancel{\theta}<1$, n zaś i k są liczbami dodatnemi i całkowitemi, może być tylko:

1). Albo $n-2k=0$, a więc $k=\frac{n}{2}$, co jest możliwe tylko przy n parzystem, a wtedy $\theta=0$; wówczas według (14) $t=0$, zaś według (6) jest, przy $n=2m$,

$$\sqrt[2m]{+r}=-r^{\frac{1}{2m}},$$

t. j. w przypadku n parzystego otrzymujemy z liczby dodatnej pierwiastek ujemny.

2). Alboteż $n-2k=1$, a więc $k=\frac{n-1}{2}$, co może być tylko przy n nieparzystem, a wtedy $\theta=\frac{1}{2}$; wówczas według (14) $t=\pi$, zaś według (6) jest, przy $n=2m+1$,

$$\sqrt[2m+1]{-r}=-r^{\frac{1}{2m+1}},$$

t. j. w przypadku n nieparzystego otrzymujemy z liczby ujemnej pierwiastek ujemny.

Poza temi przypadkami, wyciągając pierwiastek n-tego stopnia z liczby, nie otrzymujemy pierwiastków rzeczywistych. A więc *pierwiastek rzeczywisty* *możemy otrzymać tylko z liczby rzeczywistej.* A mianowicie: *z liczby dodatnej otrzymujemy jeden pierwiastek dodatny, oraz w przypadku parzystego wykładnika pierwiastka jeden pierwiastek ujemny; z liczby ujemnej jedynie w przypadku nieparzystego wykładnika pierwiastka otrzymujemy jeden pierwiastek ujemny.*

94. Po lewej stronie wzoru (3), w którym n może oznaczać liczbę całkowitą tak dodatną, jak i ujemną, przyjmijmy, iż n jest liczbą ułamkową, $n=\frac{p}{q}$ (p i q liczby całkowite), i niech w razie $n<0$ będzie $p<0$, tak iż zawsze jest $q>0$. Zgodnie z określeniem potęgi ułamkowej mamy, stosując wzór (12),

$$[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^p}=\sqrt[q]{\rho^p(\cos p\tau+i\sin p\tau)}=$$

$$=\rho^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p\tau}{q}+i\sin\frac{p\tau}{q}\right)\left(\cos\frac{k}{q}2\pi+i\sin\frac{k}{q}2\pi\right),$$

czyli $[\rho(\cos\tau+i\sin\tau)]^n=\rho^n(\cos n\tau+i\sin n\tau)(\cos\frac{k}{q}2\pi+i\sin\frac{k}{q}2\pi)$, to jest chcąc wzór (3) odnieść do przypadku, kiedy n jest liczbą ułamkową, należy w nim wyrażenie po stronie prawej pomnożyć przez wszystkie pierwiastki z $+1$ stopnia, określonego przez mianownik owej liczby ułamkowej.

OKREŚLENIE ALGEBRY.

95. Wyraz algebra pochodzi od tytułu dzieła »Algebr w Almukabala« (wym. aldżebr walmukabala), którego autorem był Muhammed ibn Musa Alchwarizmi[1]). Wyrazy w tym tytule (dżebr = restauratio = zestawienie, mukabala = oppositio = przeciwstawienie) oznaczają: pierwszy — ustawienie wyrazów równania w taki sposób, iżby po obu jego stronach znajdowały się wyrazy tylko dodatne; drugi zaś — przekształcenie równania w taki sposób, iżby, wskutek wykonania redukcyi wyrazów podobnych, pozostałe wyrazy (dodatne) po jednej stronie nie były podobne do pozostałych wyrazów (dodatnych) po drugiej.

Algebra jest nauką o równaniach, któremi niewiadome są z liczbami danemi związane w taki sposób, iż tak na niewiadomych, jak i na liczbach danych ma być uskuteczniona skończona ilość działań, a temi działaniami mogą być dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, podnoszenie do potęgi i wyciąganie pierwiastka.

Dlategoteż w algebrze bada się szczegółowo własności wyrażeń, które mogą być stronami równań, w tej nauce rozważanych (czyli równań algebraicznych), podaje się metody rozwiązywania tych równań algebraicznych,

---

[1]) T. j. Muhammed syn Mojżesza z Charizm (dzisiejszej Chiwy). Żył on w pierwszej ćwierci wieku IX.

Mylnie do niedawna wywodzono wyraz algebra od nazwiska arabskiego matematyka Geber (wym. dżabir), żyjącego w połowie wieku XI.

których pierwiastki mogą być wyrażeniami algebraicznemi utworzonemi ze spółczynników tych równań, roztrząsa się rozmaite własności pierwiastków równań algebraicznych, oraz uzasadnia się, iż pierwiastki pewnych równań algebraicznych nie mogą być wyrażeniami algebraicznemi, utworzonemi z liczb danych.

Wspomnieliśmy powyżej, iż w wyrażeniach algebraicznych ilość wskazanych do wykonania działań ma być skończona. Należy jednak zaznaczyć, że, jeżeli w wyrażeniu mamy wskazaną nieskończenie wielką ilość wymienionych powyżej działań do wykonania, a temu wyrażeniu może być nadana inna postać, w której już skończona ilość działań zachodzi, (jak to ma miejsce np. z sumą wyrazów postępu geometrycznego malejącego nieskończonego), to takie wyrażenie uważamy także za wchodzące w zakres badań algebry.

96. Algebrę dzielić się zwykło na algebrę początkową, czyli elementarną (elementare A.), i algebrę wyższą (Höhere A.). Nie można jednak przeciwstawiać algebrze początkowej algebry wyższej. Nie są to bowiem ani dwie gałęzi nauki, aniteż dwa działy jednej gałęzi matematycznych badań. Algebrę początkową stanowią te części algebry, których roztrząsanie w nauczanie średnie ogólne może być wprowadzone z korzyścią. Korzyść zaś owa jest dwojaka: rozwój ścisłego myślenia uczniów, oraz rozwiązywanie ważnych lub ciekawych zadań rozmaitych. Tym ostatnim względem usprawiedliwia się wprowadzenie do algebry początkowej wskazówek dokonywania rachunków przy pomocy logarytmów, chociaż tak teorya wyczerpująca logarytmów, jakoteż samo obliczanie logarytmów liczb nie należy do algebry.

Najczęściej za główną cechę, a właściwiej mówiąc, za kres problematów algebraicznych, stanowić mogących przedmiot nauczania średniego, czyli za kres algebry początkowej, uważa się stosowanie równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą do rozwiązywania grup równań stopni wyższych ponad drugi. Gdy do tego obszaru kwestyj doda się jeszcze wspomniane powyżej uwzględnienie logarytmów, dwumian Newton'a przy wykładniku dodatnym całkowitym, jakoteż wykład, przy pomocy wielkości trygonometrycznych, najprostszych własności liczb zespolonych, to będziemy mieli określony przedmiot algebry początkowej.

Te zaś działy algebry, które nie nadają się do uwzględnienia w nauczaniu średniem, obejmujemy ogólną nazwą algebry wyższej.

97. W algebrze korzystamy z różnych wyników osiągniętych w arytmetyce, tak iż nauka arytmetyki poprzedza naukę algebry. Nie jest jednak algebra dalszym ciągiem arytmetyki, gdyż wiele szczegółów, na które w arytmetyce wyraźnie nacisk kładziemy, pozostają w zupełności poza zakresem badań algebraicznych.

W arytmetyce — zgodnie z bezpośredniem określeniem liczby: liczba jestto wynik z wymierzenia pewnego przedmiotu innym, z nim jednorodnym, przyjętym za jednostkę — zajmujemy się tylko dodatnemi (ściślej mówiąc: bezwzględnemi) liczbami całkowitemi i ułamkowemi. Wychodząc z pojęcia takich właśnie liczb (oderwanych), w algebrze stopniowo uogólniamy pojęcie liczby przez wprowadzenie liczb ujemnych, niewymiernych pierwiastkowych, urojonych i zespolonych.

Nauka o wykonywaniu czterech działań na dodatnych liczbach całkowitych i ułamkowych, o niektórych tych liczb własnościach, pomocnych do zrozumienia lub do prostszego wykonywania tych działań, oraz o rozwiązywaniu szczegółowem tych różnych zadań z życia praktycznego, które albo bezpośrednio są zadaniami na regułę trzech, alboteż dadzą się sprowadzić do zadań na regułę trzech, — stanowi arytmetykę.

Z tego wynika, że chociaż z liczb, rozważanych w arytmetyce, liczby oderwane należą do zakresu liczb, z któremi mamy do czynienia w algebrze, to jednak tak sposób, w jaki wogóle liczby rozważamy w arytmetyce, jak i sposób rozważania zadań arytmetycznych, pod wielu względami jest całkiem obcy charakterowi roztrząsań algebraicznych.

ZADANIA.

(Art. 4 a). 1. $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x + 3y = 21. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x^2 - 61y^2 = 50, \\ x = 3y. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -7x^2 + 8xy = 1, \\ 5x + 2y = 7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} (x-4)^2 + (y+4)^2 = 100, \\ x + y = 14. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x^2 + x\ \ y = 3, \\ 7x + 3y = 10. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 5x^2 - 3xy + 8y^2 = 614, \\ 2y = 9x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + 4y^2 = 18, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 5xy + 4x + 2y^2 + 16 = 0, \\ 11x + 5y = 4. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 48, \\ x = 2y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + 4y^2 = 104, \\ 2x = 3y. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 40, \\ x + y = 5. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x^2 - 3xy + \frac{9}{4}y^2 = 16, \\ 2x + 3y = 12. \end{cases}$

13. $\begin{cases} xy = -2\sqrt{2}, \\ 2x = 3y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x^2 + 3xy - 10y^2 + 12 = 0, \\ 3x - 7y = 0. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 8x^2 - 12xy + 5y^2 + 15 = 0, \\ 2x - 3y + 5 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 15x^2 - 30xy - 11y^2 + 77 = 0, \\ 3x + y - 1 = 0. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{b^2}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - y^2} = 8, \\ x - y = 4. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = l. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x + y = 2a, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{4ab}{a^2\, b^2}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y - x = a + b, \\ \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{a^2 - b^2}{ab}. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a, \\ \dfrac{1}{xy} - \dfrac{1}{y^2} = b. \end{cases}$

24. Stosunek dwu liczb jest $11:13$, a suma kwadratów tych dwu liczb jest 14210. Znaleźć te liczby.

25. Suma dwu liczb jest 50, a suma ich kwadratów 1258; jakie są te liczby?

26. Zmieniwszy następstwo cyfr w liczbie dwucyfrowej, otrzymamy liczbę o 18 mniejszą od szukanej, biorąc zaś sumę kwadratów cyfr liczby szukanej, otrzymujemy liczbę o 62 większą od sumy jej cyfr. Jaka jest szukana liczba?

27. Znaleźć liczbę dwucyfrową, wiedząc, że, zmieniwszy porządek cyfr, otrzymamy liczbę o 9 mniejszą od szukanej, oraz, że, dzieląc ją przez $5\frac{1}{3}$, otrzymamy liczbę utworzoną przez iloczyn cyfr liczby szukanej.

28. Powiększając licznik szukanego ułamka o 3, a mianownik o 5, otrzymujemy $\frac{2}{3}$; powiększając zaś licznik szukanego ułamka o 9, a mianownik o 5, otrzymujemy odwrotność szukanego ułamka. Jaki jest ów ułamek?

29. O ile trzeba powiększyć podstawę i o ile zmniejszyć wysokość prostokąta, mającego podstawę 119 *cm*, a wysokość 29 cm, iżby pole się nie zmieniło, a obwód powiększył się o 24 *cm*?

30. Jakie są wymiary prostokąta o przekątnej d, wpisanego w trójkąt, którego podstawa jest b, a wysokość h?

31. Zmniejszywszy podstawę prostokąta o 8-mą jej część, zaś jego wysokość zmniejszywszy o 16-tą jej część, otrzymalibyśmy prostokąt, którego pole byłoby mniejsze o $3{\cdot}68\, m^2$, zaś obwód mniejszy o $3{\cdot}4\, m$. Jakie są wymiary prostokąta pierwotnego?

32. W koło o promieniu 5 *dm* jest wpisany trójkąt równoramienny, a suma jego podstawy i wysokości jest 15 *dm*. Znaleźć wysokość i podstawę tego trójkąta.

(Art. 4 β). 33. $\begin{cases} 5xy-3x-4y=6, \\ 3xy-7x+y=0. \end{cases}$ $y=\frac{7x}{1+3x}$ 34. $\begin{cases} 3xy+2x+y=11, \\ 4xy-3x+2y=4. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=4, \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13. \end{cases}$ 36. $\begin{cases} 3xy+3x+2y=-54, \\ -2xy+15x+10y=36. \end{cases}$ 37. $\begin{cases} 2xy+3x+4y=7, \\ 3xy+4x+5y=8. \end{cases}$

38. $\begin{cases} 2xy+x+3y=26, \\ 3xy+2x+5y=40. \end{cases}$ 39. $\begin{cases} 2xy-x-7y=-22, \\ xy-2x-2y=-8. \end{cases}$

Okazać, że gdy 40. $\begin{cases} ab-\frac{1}{2}(a+b)(x+y)+xy=0, \\ cd-\frac{1}{2}(c+d)(x+y)+xy=0, \end{cases}$ to $\frac{(x-y)^2}{4}=\frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}$.

41. Trapez o podstawach a i b i wysokości h odcinkiem równoległym do podstawy jest podzielony na dwa równoważne trapezy. Jaka jest długość tego odcinka?

42. Obwód trójkąta prostokątnego jest $2p$, a długość prostopadłej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną jest h; znaleźć przyprostokątne.

43. Po drodze 1732·5 *m* przednie koło robi o 265 obrotów więcej niż tylne. Gdyby obwód każdego koła był większy o 0·75 *m*, to przednie koło zrobiłoby o 112 obrotów więcej niż tylne. Jakie są obwody kół?

44. A i B idą naprzeciw siebie, A wyszedł o 3 dni wcześniej niż B, a B robi codziennie o 2 mile więcej niż A. W chwili ich spotkania się stosunek dróg przebytych był 13:15. Gdyby A był o 5 dni mniej w drodze i B robił codziennie o 2 mile więcej, to w chwili spotkania się ich z sobą stosunek dróg przebytych byłby 2:5. Ile A robi mil codziennie i ile dni był w drodze do chwili spotkania się z B?

45. Gdyby stopa procentu, na jaką umieszczony został kapitał 1800 zł., była o 1 większa, a przeciąg czasu o rok mniejszy, to kapitał przyniósłby odsetek również 360 zł., które przyniósł w rzeczywistości. Jaka była stopa procentu i jaki przeciąg czasu? $pt=20$ $(p+1)(t-1)$

46. Ktoś kupił dwa domy; dochód z pierwszego wynosi 600 zł., dochód zaś z drugiego domu, który kosztuje mniej o 2000 zł. niż pierwszy i przynosi od wyłożonego kapitału o 1% mniej niż pierwszy dom, wynosi 400 zł. Ile zapłacił za pierwszy dom i jaki z niego ma % od wyłożonego kapitału?

47. Do kapitału dołączywszy odsetki, które on przyniósł po 8% przez pewną ilość lat, otrzymalibyśmy 2574 *zł.*; gdybyśmy zaś do kapitału mniejszego o 975 zł. dołączyli odsetki przy tejże stopie % za ilość lat większą od poprzedniej o $2\frac{1}{2}$, to otrzymalibyśmy 910 zł. Jaki był pierwotny kapitał i przez ile lat był oddany na %?

(Art. 5). 48. $\begin{cases} x^2+xy+x=3, \\ xy+3x=4. \end{cases}$ 49. $\begin{cases} x^2-y^2+x+y=0{\cdot}375, \\ x^2-y^2-x+y=0{\cdot}125. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x^2+xy=9490, \\ y^2+xy=7410. \end{cases}$ 51. $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$ 52. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=61, \\ xy=20. \end{cases}$

53. $\begin{cases} x^2+y^2+x-y=32, \\ 3x^2+3y^2-5xy=27. \end{cases}$ 54. $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=33, \\ 3x^2+14xy+6y^2=291. \end{cases}$ 55. $\begin{cases} x^2-x-y=0, \\ x-3y+y^2=0. \end{cases}$

56. $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2}, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$ 57. $\begin{cases} 4(x+y)-3xy=0, \\ x+y+x^2+y^2=26. \end{cases}$ 58. $\begin{cases} 3xy-x^2+y^2=36, \\ xy=108. \end{cases}$

59. $\begin{cases} x^2+y^2-xy=61, \\ 19(x+y)-xy=211. \end{cases}$ 60. $\begin{cases} x^2-3xy+3y^2-2x=15, \\ y(y+4)-xy=20. \end{cases}$ 61. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=84, \\ x+y+\sqrt{xy}=14. \end{cases}$ $(x+y)=14$

62. $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ xy=ab. \end{cases}$ 63. $\begin{cases} x^2+xy=a, \\ x^2-y^2=b. \end{cases}$ $y=\frac{a-x^2}{x}$ 64. $\begin{cases} x^2=ax+by, \\ y^2=ay+bx. \end{cases}$

65. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=a, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}=b. \end{cases}$ 66. $\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x+1)(y+1)}=a-b, \\ \dfrac{x^2-y^2}{(x-1)(y-1)}=\dfrac{a-b}{ab}. \end{cases}$ 67. $\begin{cases} \dfrac{1+x}{1-y}+\dfrac{1+y}{1-x}=a, \\ \dfrac{1+x}{1+y}+\dfrac{1-y}{1-x}=b. \end{cases}$

68. $\begin{cases} x^2+xy=7, \\ y^2+xy=-7. \end{cases}$

69. Jeżeli licznik pewnego ułamka powiększę o 2, a jego mianownik zmniejszę o 2, to otrzymam odwrotność ułamka pierwotnego. Zmniejszając zaś licznik o 2, a mianownik powiększając o 2, otrzymam liczbę o $1\frac{1}{15}$ mniejszą od odwrotności ułamka pierwotnego. Jaki jest ułamek pierwotny?

70. Przez punkt M, wzięty na dwusiecznej kąta prostego i oddalony od jego wierzchołka o $4\sqrt{2}\,m$, poprowadzić taką prostą, iżby jej odcinek, zawarty między ramionami tego kąta, miał długości $11\frac{1}{3}\,m$. Jakie ta prosta oddziela odcinki na ramionach kąta danego?

71. Obwód trójkąta prostokątnego jest $12\,m$, stosunek zaś pola kwadratu wystawionego na przeciwprostokątnej do pola prostokąta wystawionego na przyprostokątnych jest $25:12$. Znaleźć przyprostokątne w tym trójkącie.

72. W kulę o promieniu $5\,m$, wpisać walec, którego powierzchnia jest $66\,\pi m^2$.

73. Obliczyć przyprostokątne trójkąta prostokątnego, mając jego przeciwprostokątną a i odpowiadającą jej wysokość h.

74. Dwa boki a i b trójkąta, którego pole jest p, są przecięte prostą równoległą do boku trzeciego. Jak wielkie są odcinki owych dwu boków przyległe wierzchołkowi, w którym się boki a i b przecinają z sobą, jeżeli α) pole trójkąta oddzielonego przez równoległą jest średnią geometryczną pola całego trójkąta i pola oddzielonego trapezu, β) pole oddzielonego trapezu jest średnią geometryczną pola całego trójkąta i pola trójkąta oddzielonego?

75. $\begin{cases} x^3+y^3=28, \\ x+y=4. \end{cases}$ 76. $\begin{cases} x^3-y^3=342, \\ x-y=6. \end{cases}$ 77. $\begin{cases} x^2y+xy^2=240, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\frac{5}{12}. \end{cases}$ 78. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12. \end{cases}$

79. $\begin{cases} x^2-x^2y^2+y^2=19, \\ x-xy+y=4. \end{cases}$ 80. $\begin{cases} x^3+xy^2=10, \\ x^2y+y^3=5. \end{cases}$ 81. $\begin{cases} xy+xy^3=30, \\ x+xy^2+xy^4=63. \end{cases}$

82. $\begin{cases} x(12-xy)-y(xy-3)=0, \\ xy(y+4x-xy)=12(x+y)-36. \end{cases}$ 83. $\begin{cases} x^3+y^3=24a^2b+2b^3, \\ x-y=2b. \end{cases}$ 84. $\begin{cases} x^3+y^3=bxy, \\ x+y=a. \end{cases}$

85. $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=a, \\ (x+y)(x^2-y^2)=b. \end{cases}$ 86. $\begin{cases} (x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x+y)=a, \\ (x^3-x^2y+xy^2-y^3)(x-y)=b. \end{cases}$ 87. $\begin{cases} x^3+y^3=-3a, \\ x^2y+xy^2=a. \end{cases}$

88. Suma sześcianów dwu liczb jest 407, a suma tych liczb jest 11. Jakie są te liczby?

89. Przeciąć kulę płaszczyzną tak, iżby stosunek objętości mniejszego jej odcinka do odpowiadającego mu wycinka kulistego był równy liczbie $a<1$.

90. W kulę o promieniu r tak wpisać walec, iżby jego objętość była równa sumie dwu odcinków kulistych, podpartych przez podstawy walca.

91. W trójkącie dany jest bok a i wysokości h_1 i h_2, odpowiadające pozostałym jego bokom. Obliczyć owe dwa pozostałe boki trójkąta.

92. W kulę o promieniu $5\,m$ wpisać stożek ścięty, którego wysokość jest $7\,m$, a objętość $\frac{259}{3}\,\pi m^3$. Obliczyć promienie podstaw tego stożka.

(Art. 6). **93—101**. Zadania 52, 54, 58, 63, 72, 73, 85, 86 i 87.

102. $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=11, \\ x^2+2xy-3y^2=-7. \end{cases}$ 103. $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=6, \\ 2x^2-xy+3y^2=4. \end{cases}$ 104. $\begin{cases} x^2+2xy+5y^2=113, \\ xy+y^2=28. \end{cases}$

105. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=49, \\ 2x^2-3xy+4y^2=41. \end{cases}$ 106. $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=336, \\ y^2+x\sqrt{xy}=112; \; (y=t^2x). \end{cases}$ 107. $\begin{cases} xy+2y^3=32, \\ y^3+3\dfrac{x^2}{y}=104; \; (x=ty^2). \end{cases}$

(Art. 8). 108. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=d^2, \\ bx=ay, \\ cx=az. \end{cases}$ 109. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1, \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1, \\ yz=bc. \end{cases}$ 110. $\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=m, \\ (x+z)(x+y+z)=n, \\ (x+y)(x+y+z)=p. \end{cases}$

111. $\begin{cases} x(y+z)=2p, \\ y(z+x)=2q, \\ z(x+y)=2r. \end{cases}$ 112. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=13, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{y^2}=5. \end{cases}$ 113. $\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=61, \\ 2yz=x(y+z). \end{cases}$

114. $\begin{cases} (x+y+z^2)=4y(y+x)+8(x+z)-4y, \\ x^2=y+z, \\ z^2=x^2+y^2. \end{cases}$ 115. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^2+xz+z^2=28, \\ y^2+yz+z^2=19. \end{cases}$

116. $\begin{cases} x+y-z=2, \\ x^2+y^2-z^2=6, \\ x^4+y^4-z^4=66. \end{cases}$ 117. $\begin{cases} x^2+y^2=3+z^2+u^2, \\ x+y=1+z+u, \\ y=uz, \\ xy-uz=3. \end{cases}$

118. Obwód trójkąta prostokątnego jest $2p$, a jego pole m^2; obliczyć boki tego trójkąta.

119. Znaleźć boki trójkąta prostokątnego, którego obwód jest $2p$ i w którym suma przeciwprostokątnej i odpowiadającej jej wysokości jest a.

120. Odcinki łączące wierzchołki trójkąta ze środkami przeciwległych boków są m_1, m_2, m_3; obliczyć boki tego trójkąta.

121. Powierzchnia prostopadłościanu jest 552 dm^2, przekątna 17 dm, wysokość zaś jest o 5 dm mniejsza od sumy szerokości i grubości. Jaka jest objętość tego prostopadłościanu?

122. Obliczyć wymiary prostopadłościanu, w którym przekątna jest d, powierzchnia s^2, a jeden z wymiarów jest średnią arytmetyczną dwu innych.

123. W trójkącie dwusieczna jednego kąta jest a, i dzieli bok przeciwległy na odcinki b i c, znaleźć wyrażenia boków tego trójkąta.

124. Pole trójkąta równoramiennego, w którym suma podstawy i wysokości jest równa sumie pozostałych boków, jest s. Obliczyć boki trójkąta i jego wysokość.

125. Znaleźć cztery liczby proporcyonalne względem liczb 2, 5, 9, 11, wiedząc, że suma kwadratów trzech pierwszych jest 2750.

126. Suma wyrazów średnich proporcyi jest 23, skrajnych 27, suma zaś kwadratów wszystkich wyrazów jest 754. Jaka jest ta proporcya?

127. Pociągiem spacerowym jechało drugą klasą o 64 osoby więcej, niż pierwszą, a o 166 mniej niż trzecią. Wszyskie zapłaciły za bilety 669 zł. 60 ct., a mianowicie za bilety drugiej klasy o 163 zł. 20 ct. więcej, niż za bilety pierwszej, a o 40 zł. 80 ct. mniej, niż za bilety trzeciej. Cena biletu pierwszej klasy była równa sumie cen biletów drugiej i trzeciej. Ile osób jechało w każdej klasie i ile kosztowały bilety do oddzielnych klas?

128. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x}=3$. 129. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=4$. 130. $\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x+11}=8$.

131. $\sqrt{2+3\sqrt{x}}+\sqrt{2-3\sqrt{x}}=2$. 132. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=2\sqrt{x+2}$.

133. $\sqrt{5+4x}-\sqrt{5-3x}=2\sqrt{x}$. 134. $\sqrt{10+3x}-\sqrt{10-3x}=\sqrt{x}$.

135. $\sqrt{3x+1}-3\sqrt{x+1}+4=0$. 136. $2\sqrt{3x+1}-3\sqrt{x+3}+2=0$.

137. $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}$.

(Art. 9). **138**. $\frac{826}{57}$. **139** $\frac{13}{30}$. **140**. $\frac{68}{157}$. **141**. $2\frac{29}{100}$. **142**. $\frac{1461}{59}$. **143**. $\frac{529}{231}$. **144**. $\frac{1597}{1292}$. **145** $\frac{637}{447}$. **146**. $\frac{89}{55}$. **147**. $\frac{10373}{7279}$. **148**. $\frac{69}{151}$. **149**. $\frac{123}{153}$. **150**. $\frac{421}{972}$. **151**. $\frac{405}{889}$. **152** $\sqrt{5}$ **153**. $\sqrt{7}$. **154**. $\sqrt{11}$. **155**. $\sqrt{17}$. **156** $\sqrt{35}$. **157**. $\sqrt{31}$. **158**. $\sqrt{41}$. **159**. $\sqrt{47}$. **160** $\sqrt{79}$. **161**. $\sqrt{210}$. **162**. $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. **163**. $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$. **164**. $\frac{1}{2}(\sqrt{13}-3)$. **165**. $\frac{1}{36}(\sqrt{3601}+55)$. **166**. $\frac{1}{16}(\sqrt{3601}-55)$. **167**. $\frac{1}{302}(\sqrt{2235029}-1265)$. **168** $\log 2$, (q_7). **169**. $\log 4$, (q_9). **170**. $\log 5$, (q_8). **171**. $\log 7$, (q_7). **172** $\log 8$, (q_7). **173**. $\log 13$ (q_7). **174**. $\log_2 6$, (q_5).

(Art. 10). Znaleźć pięć początkowych ułamków zbliżonych ułamka ciągłego, otrzymanego jako odpowiedź: **175**. na zad. 154. **176**. na zad. 162. **177**. na zad. 163. **178**. na zad. 173. **179**. na zad. 174.

(Art. 11). **180**. $? = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6}}}}}}$ **181**. $? = 14 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{28 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{28}}}}$

182. $? = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}}}}$ **183**. $? = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}}}}$

184. $? = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + 1 + \cfrac{1}{a + 2 + \cfrac{1}{a + 3}}}}$ **185**. $? = \cfrac{1}{n + 1 + \cfrac{1}{2n + 3 + \cfrac{1}{4n + 5 + \cfrac{1}{6n + 7}}}}$

(Art. 13). **186**. Znaleźć różnicę między ułamkami zbliżonemi 8-ym i 7-ym, między 9-ym i 8-ym, między 10-ym i 9-ym, między 11-ym i 10-ym ułamka ciągłego, otrzymanego jako odpowiedź na zad. 162.

(Art. 16). Obliczyć. **187**. $\sqrt{5}$ z przybliżeniem na 0·001, na 0·00001. **188**. $\sqrt{7}$ z prz. na 0·0001. **189**. $\sqrt{11}$ z prz. na 0·000001. **190**. $\sqrt{17}$ z prz. na 0·0001. **191**. $\frac{1}{36}(\sqrt{3601}+55)$ z prz. na 0·00001. **192**. $\log 2$ z prz. na 0·00001. **193**. $\log 4$ z prz. na 0·00001. **194**. $\log 5$ z prz. na 0·00001. **195**. Jaki jest stopień przybliżenia wartości

α). $\sqrt{47} = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12}}}}$ β). $\sqrt{21} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}$ γ). $\log 13 = 1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}$

(Art. 17). **196**. $x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}$ **197**. $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}}$

198. $x = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}$ **199**. $x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}}$ **200**. $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}}}$

201. $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}}$ 202. $x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}}}$ 203. $x=3+\frac{1}{y}$, $y=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}$

204. $x=1+\frac{1}{y}$ $y=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{y}}}$ 205. $x=2+\frac{1}{y}$ $y=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}}}$

206. $x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}$ $y=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}$ 207. $x=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}$ $y=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}}$

208. $x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}$ $y=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}}$ 209. $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}}$ $y=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}}$

210. $x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}$ $y=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}}$

(Art. 18). 211. $2x+3y=11$. 212. $2x+3y=25$. 213. $3x-y=5$.
214. $3x-5y=1$. 215. $3x+8y=43$. 216. $5x+4y=12$. 217. $6x-5y=37$.
218. $7x-11y=-1$. 219. $7x-6y=13$. 220. $5x+6y=49$. 221. $8x+7y=75$.
222. $9x+7y=103$.

(Art. 21—23). 223. $3x-5y=1$. 224. $11x-7y=1$. 225. $5x+6y=3$.
226. $5x-7y=3$. 227. $6x+7y=5$. 228. $5x+4y=12$. 229. $8x+11y=9$.
230. $10x-11y=2$. 231. $11x-13y=3$. 232. $14x-9y=5$. 233. $7x-17y=-4$.
234. $16x-13y=3$. 235. $13x+14y=27$. 236. $7x-19y=11$. 237. $19x+13y=-5$.
238. $21x-29y=-3$ 239. $20x+17y=4$. 240. $23x+33y=5$. 241. $31x-42y=-3$.
242. $25x+13y=43$. 243. $66x-7y=10$. 244. $37x-11y=15$. 245. $17x+23y=120$.
246. $41x+47y=100$. 247. $57x+13y=140$. 248. $29x+41y=320$.

249. Jakie są najmniejsze oba dodatne pierwiastki równania zad.: 223. 225, 230 i 231.

250. Jakie są rozwiązania zadań 225, 227, 228 i 229 o najmniejszej dodatnej wartości x?

(Art. 24). Znaleźć rozwiązania dodatne równań: 251. $7x-11y=-1$.
252. $7x-6y=13$. 253. $5x-7y=3$. 254. $16x-13y=3$. 255. $8x-5y=3$.
256. $17x-12y=27$. 257. $10x-11y=2$. 258. $11x-14y=10$. 259. $16x-7y=40$.
260. $66x-7y=10$. 261. $7x+15y=247$. 262. $15x+7y=382$. 263. $5x+13y=233$.
264. $4x+7y=123$. 265. $5x+4y=85$. 266. $3x+5y=103$. 267. $13x+24y=2373$.
268. $5x+7y=52$. 269. $6x+11y=157$. 270. $15x+13y=189$. 271. $23x+17y=400$.
272. $123x+567y=5028$. 273. $5x+6y=3$. 274. $6x+7y=15$. 275. $8x+11y=21$.
276. $5x+4y=12$. 277. $17x+15y=37$. 278. $31x+59y=80$.

279. Ile można kupić koni i wołów, płacąc za konia po 282 zł., a za wołu po 198 zł., jeżeli suma zapłacona za konie jest od sumy zapłaconej za woły większa o 32 zł.?

280. Jakie liczby α) podzielone przez 4 dają resztę 1, podzielone zaś przez 5 dają resztę 3; β) podzielone przez 37 dają resztę 11, podzielone zaś przez 10, dają resztę 0?

281. Znaleźć dwa ułamki dodatne z mianownikami 9 i 13, których suma jest $\frac{128}{117}$.

282. Znaleźć liczby trzycyfrowe, które są podzielne przez 9, a podzielone przez 13 dają resztę 4.

283. Rozłożyć 1000 na dwa składniki dodatne, z których jeden jest podzielny przez 12, a drugi przez 53.

284. Jednę z dwu liczb dodatnych pomnożywszy przez 25, drugą zaś przez 42, otrzymamy jako sumę iloczynów 1126. Jakie są owe liczby?

285. Znaleźć rozwiązania dodatne równania $7x-12y=52$ takie, w których tak wartość x jak i wartość y jest mniejsza od 30.

286. Zebrano ze składki 135 *zł.*; mężczyzna płacił po 8 *zł.*, a kobieta po 7 *zł.* Ilu mężczyzn i ile kobiet mogło wziąć udział w takiej składce?

287. Zegarmistrz dostarczył za 198·8 *zł.* dla służby kolejowej dwojakie zegarki, zegarki jednego rodzaju po 16·25 *zł.*, drugiego zaś rodzaju po 9·45 *zł.* Ile mógł dostarczyć wszystkich zegarków?

288. W worku jest więcej niż 60, a mniej niż 90 orzechów. Gdybyśmy z niego brali po 5 orzechów, to zostałyby 3 orzechy; gdybyśmy zaś brali po 4 orzechy, to zostałby 1. Ile w worku jest orzechów?

289. Dwojakiemi monetami, z których jedne mają średnicy 19 *mm*, drugie zaś 21 *mm*, chcemy wypełnić długość metra. Ile trzeba wziąć monet każdego z tych gatunków?

290. Ktoś kupił za 31·4 *zł.* wina w dwu gatunkach i płacił za butelkę jednego gatunku po 1·2 *zł*, za butelkę zaś drugiego po 2·6 *zł.* Ile kupił butelek wina?

291. Ktoś chce mieć 100 litrów cieczy w butlach o objętości 7 *l* lub 9 *l*. Ile może być tych butli?

292. Przekupka ma niewięcej niż 200 jaj. Gdyby je sprzedawała tuzinami, toby jej zostało 10 jaj, gdyby zaś sprzedawała mendlami, toby jej zostały 4 jaja. Ile ma jaj?

293. Ogrodnik ma mniej niż 1000 drzewek. Gdyby je sadził po 43 w każdym rzędzie, toby mu zostało 11, a gdyby je sadził po 37 w każdym rzędzie, toby mu zostało 8. Ile ma drzewek?

294. Ramiona AB i AC kąta prostego mają długości odpowiednio 120 *cm* i 75 *cm*. Dwa punkty, poruszające się jednostajnie z jednakową prędkością, wychodzą z punktu A i jeden odbywa wciąż drogę ABA, drugi zaś drogę ACA. Ile razy każdy odbędzie swoję drogę do chwili kiedy po raz pierwszy znowu się w punkcie A spotkają?

295. Dwa koła, jedno o promieniu 6 *m* drugie zaś o promieniu 5 *m*, są styczne do siebie w punkcie A; punkty przeciwległe średnic tych kół, przechodzących przez punkt A, są w pierwszym kole B, w drugiem C. Z punktu A wychodzą dwa ciała i poruszają się jednostajnie z jednakową prędkością jedno po jednem, drugie zaś po drugiem kole. Oznaczyć, po ilu obrotach każdego z tych ciał znajdą się one po raz pierwszy α) oba w punkcie A, β) pierwsze w punkcie A, drugie w punkcie C, γ) pierwsze w B, drugie w A, δ) pierwsze w B, drugie w C?

296. W najdawniejszej książce matematycznej polskiej: »Algoritmus« Tomasza Kłosa (z roku 1539) jest[1]) takie zadanie: Kupiono 32 łuty za 4 złote, 17 groszy i 16 pieniążków, a 23 łuty (tegoż samego towaru) za 3 złote, 10 groszy i $8\frac{3}{3}\frac{1}{2}$ pieniążka. Za ile groszy rachowano złoty, a za ile pieniążków rachowano grosz?

297. Kupiec nabył 3235 litrów i żąda aby mu je posłano w beczkach 45-olitrowych i 60-olitrowych. Ilu sposobami można ściśle wykonać żądanie kupca?

298. Gospodyni stargowała melony po 23 ct., a arbuzy po 13 ct. Ile może kupić jednych i drugich za 1 *zł.*?

(Art. 25). **299.** $\begin{cases} x-y-z=-19, \\ 3x-7y-8z=3. \end{cases}$ **300.** $\begin{cases} x+3y+5z=44, \\ 3x+5y+7z=68. \end{cases}$

301. $\begin{cases} x+2y+3z=50, \\ 4x-5y-6z=-66. \end{cases}$ **302.** $\begin{cases} 12x-16y+11z=57, \\ 3x+17y-20z=23. \end{cases}$ **303.** $\begin{cases} 17x+15y-28z=61, \\ 19x-25y+12z=31. \end{cases}$

304. $\begin{cases} x+y+2z=17, \\ x+3y+4z=28. \end{cases}$

305. Znaleźć rozwiązania całkowite i dodatne układu w zad. α) 300-em; β) 301-em; γ) 303-em.

---

[1]) Zob. wydanie Akademii umiejętności w Krakowie („Biblioteka pisarzów polskich“) z roku 1889, str. 50.

306. Znaleźć rozwiązania całkowite i dodatne dla każdej z niewiadomych mniejsze od 1000 układu w zad. α) 303-em; β) 302-em.

307. Znaleźć takie rozwiązania całkowite i dodatne, w którychby wartość z była pośrednia między liczbami 100 i 200, układu

$$\begin{cases} 11x-\ 3y-2z=157, \\ 5x-11y+8z=\ 87. \end{cases}$$

308. Znaleźć rozwiązania całkowite i dodatne, w którychby wartość x była większa od 10, układu

$$\begin{cases} 8x+3y-2z=8, \\ 7x+2y-\ z=8. \end{cases}$$

309. Rozłożyć $\frac{843}{1001}$ na sumę trzech ułamków, których mianowniki są 7, 11, 13, liczniki zaś przedstawiają sumę 9.

310. Ktoś otrzymał polecenie, aby kupił 120 cygar za 8 zł. po 5, $6\frac{1}{2}$ i 9 ct. sztuka. Ilu sposobami może to polecenie wykonać?

311. Rozłożyć liczbę 20 na trzy takie liczby całkowite i dodatne, aby po pomnożeniu pierwszej przez 7, drugiej przez 9, a trzeciej przez 3, otrzymać jako sumę liczbę 148.

(Art. 26). **312.** $5x+2y+3z=20$. **313.** $3x+4y-8z=0$. **314.** $3x+5y+7z=67$. **315.** $16x+21y+35z=223$.

316. Znaleźć rozwiązania całkowite i dodatne równania w zad. α) 312-em; β) 313-em, γ) 314-em; δ) 315-em.

317. Znaleźć dodatne całkowite a mniejsze od 100 pierwiastki równania

$$18x-24y+35z=165.$$

318. Rozłożyć ułamek $\frac{323}{105}$ na sumę trzech ułamków, których mianowniki są 3, 5 i 7.

319. Ktoś ma wypłacić 153 marki, a ma w zapasie 18 sztuk dwudziestomarkowych, 7 pięciomarkowych i 13 dwumarkowych. Ilu sposobami może uskutecznić wypłatę?

(Art. 27). **320.** $\begin{cases} x+y+2z+3u=14, \\ 3x+y+\ z+2u=14. \end{cases}$ **321.** $\begin{cases} 5x+3y+7z+4u=96, \\ 2x-7y+9z+5u=70. \end{cases}$

322. Mając srebro w czterech gatunkach: próby 900, 850, 650 i 550, tak utworzyć 17 *kg.* srebra próby 750, iżby z każdego gatunku wziąć całkowitą ilość kilogramów.

(Art. 35). **323.** Początkowe wyrazy postępu arytmetycznego są α) 5, 8, 11, . . ., jaki jest wyraz 30-y tego postępu, β) —3·5, —2·6, —1·7, . . ., jaki jest wyraz 10-y tego postępu, γ) 0·012, 0·124, 0·236, . . ., jaki jest wyraz 21-szy tego postępu, δ) 17, $22\frac{1}{2}$, 28, . . ., jaki jest wyraz 79-y tego postępu, ε) $29\frac{3}{4}$, 37, $44\frac{1}{4}$, . . ., jaki jest wyraz 711-y tego postępu, ζ) $28\frac{1}{2}$, $23\frac{1}{14}$, $17\frac{9}{14}$, . . ., jaki jest wyraz 47-y tego postępu, η) $-7\frac{3}{4}$, $-8\frac{1}{6}$, $-8\frac{7}{12}$, . . ., jaki jest wyraz 73-i tego postępu, θ) —63·3, —62·9, —62·5, . . ., jaki jest wyraz 125-y tego postępu?

324. Urzędnik oszczędził w jednym roku 400 zł., a w każdym następnym o 70 zł. więcej. Ile oszczędził w roku dziewiątym?

325. Studniarz zgodził się za wykopanie studni od metra głębokości, mianowicie za pierwszy 2 zł. 30 ct., a za każdy następny o 7 ct. więcej. Ile mu się należy za 15 metr?

326. W pewnej miejscowości ciało swobodnie spadające przebiega w pierwszej sekundzie 4·904 m. Jaką mieć ono będzie prędkość spadku w końcu 11-ej sekundy?

(Art. 37). **327.** Postępów zad. 323-go znaleźć sumę pierwszych α) 6-ciu wyrazów, β) 10-u wyrazów, γ) 24-ch wyrazów, δ) 79-u wyrazów, ε) 125-u wyrazów?

328. Znaleźć sumę szeregu liczb naturalnych α) od 1 —100, β) od 1—1000, γ) od 1 do 10000, δ) od 1 do liczby roku bieżącego, ε) od 500 do 5000, ζ) od 2000 do 10000.

329. Znaleźć sumę liczb nieparzystych dodatnych α) mniejszych od 100, β) mniejszych od 500, γ) od 501 do 999, δ) od 1 do $2p+1$, ε) od 1 do $4r+1$, ζ) od 1 do $8n+1$.

330. Znaleźć sumę liczb parzystych α) niewiększych od 100, β) niewiększych od 200, γ) niewiększych od 1000, δ) od 502 do 1500, ε) od 2 do $2p$, ζ) od 2 do $4p$, η) od 2 do $4p+2$, θ) od 2 do $8p$.

331. Mając postępy α) 10, 17, 24, . . .; β) 3·5, 4·6, 5·7, . . .; γ) 0·113, 0·126, 0·139,. . .; δ) —11, —23, —35, . . .; ε) 12·653, 11·987, 11·321, . .; ζ) —0·3, —0·25, —0·2, . . .; η) 10·8431, 9·4522, 8·0613, . . .; θ) $-2\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, . . .; ι) $-12\frac{2}{3}$, $-11\frac{1}{3}$, —10, . . ., znaleźć w każdym sumę początkowych 15-u wyrazów, początkowych 20-u wyrazów i początkowych 28-u wyrazów.

332. Z punktów A i B idą naprzeciwko siebie dwaj wędrowcy. Pierwszy przeszedł pierwszego dnia 15 *km*, a następnie codzień o $1\frac{1}{2}$ *km*. więcej; drugi zaś przeszedł pierwszego dnia 12 *km*, a każdego następnego dnia szedł więcej o 2 *km*.; po 11-tu dniach ci wędrowcy spotkali się z sobą. Jaka jest odległość od A do B.

333. Jaka jest ilość kul o jednakowym promieniu, jeżeli możemy z nich utworzyć trójkąt równoboczny, i jeżeli, wziąwszy dwa razy więcej takich kul, po utworzeniu z nich naj, większego możebnego kwadratu mielibyśmy zbytecznych 20 kul?

(Art. 38). **334**. Znaleźć a_n i S_n, mając α) $a_1 = 0·657$, $r = 0·046$, $n = 12$; β) $a_1 = -1·6987$, $r = -0·4352$, $n = 43$; γ) $a_1 = 2x+1$, $r = 2x-2$, $n = 7$; δ) $a_1 = 2x+8y$, $r = 3x-y$, $n = 9$.

335. Znaleźć a_1 i S_n, mając α) $a_n = 24$, $r = \frac{5}{7}$, $n = 22$; β) $a_n = 56\frac{1}{2}$, $r = 4$, $n = 15$, γ) $a_n = 11$, $r = -7$, $n = 290$; δ) $a_n = 726$, $r = 13$, $n = 53$.

336. Znaleźć r i S_n, mając α) $a_1 = 7$. $a_n = 55$, $n = 13$; β) $a_1 = 1·2$, $a_n = 3·2$, $n = 11$; γ) $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_n = 71\frac{2}{3}$, $n = 214$; δ) $a_1 = 106·9056$, $a_n = 5·8176$, $n = 33$.

337. Znaleźć n i S_n, mając α) $a_1 = 100$, $a_n = 94\frac{1}{2}$, $r = -\frac{1}{2}$; β) $a_1 = -13·452$, $a_n = 5·268$; $r = 1·56$; γ) $a_1 = \frac{9}{14}$, $a_n = 10\frac{37}{48}$, $r = \frac{5}{24}$, δ) $a_1 = 5$, $a_n = 107$, $r = 3$.

338. Znaleźć r i n, mając α) $a_1 = 5$, $a_n = 23$, $S_n = 392$; β) $a_1 = 13·76$, $a_n = 12·64$- $S_n = 198$; γ) $a_1 = -3·4128$, $a_n = -3·4709$, $S_n = -289·1154$; δ) $a_1 = 5·625$, $a_n = 84·475$, $S_n = 901$.

339. Znaleźć a_n i r, mając α) $a_1 = 8\frac{1}{4}$, $n = 147$, $S_n = 15967\frac{7}{8}$; β) $a_1 = 12$, $n = 45$, $S_n = 9450$, γ) $a_1 = -146$, $n = 21$, $S_n = 13·776$; δ) $a_1 = 0·55$, $n = 25$, $S_n = 243·75$.

340. Znaleźć a_1 i r, mając α) $a_n = 212$, $n = 42$, $S_n = = 4599$; β) $a_n = 28\frac{4}{5}$, $n = 55$, $S_n = 708\frac{3}{8}$; γ) $a_n = 140$, $n = 301$, $S_n = 19565$; δ) $a_n = 5142$, $n = 147$, $S_n = 3802·89$.

341. Znaleźć a_1 i a_n, mając α) $r = 2$, $n = 16$, $S_n = 272$; β) $r = -50$, $n = 644$, $S_n = 10352300$; γ) $r = -\frac{1}{13}$, $n = 14$, $S_n = 1631$; δ) $r = -17\frac{1}{2}$, $n = 30$, $S_n = 92377\frac{1}{2}$.

342. Znaleźć a_n i n, mając α) $a_1 = -6$, $r = \frac{3}{4}$, $S_n = 146\frac{1}{4}$; β) $a_1 = 5$, $r = 3$, $S_n = 61305$; γ) $a_1 = -\frac{3}{4}$, $r = -\frac{7}{8}$, $S_n = 281\frac{1}{4}$, δ) $a_1 = \frac{1}{6}$. $r = \frac{1}{2}$, $S_n = 70\frac{5}{6}$.

343. Znaleźć a_1 i n, mając α) $a_n = 49$, $r = 3$, $S_n = 420$; β) $a_n = 18·53$, $r = 0·27$, $S_n = 628·43$; γ) $a_n = -52·435$, $r = -2·435$, $S_n = -589·95$; δ) $a_n = \frac{40}{3}$, $r = \frac{1}{3}$, $S_n = \frac{1349}{3}$.

344. Suma liczb całkowitych po sobie następujących, z których pierwsza jest 5, jest 1530. Jaka jest ostatnia z owych liczb?

345. Suma 26-u wyrazów postępu arytmetycznego jest 728, a wyraz piąty jest 11. Jaki jest ostatni wyraz i jaka różnica tego postępu?

346. Jeżeli ciało wolno spadając przebiega w pierwszej sekundzie 4·904 *m*, to w ciągu ilu sekund spadnie z wysokości 397·224 *m*?

347. Jaki jest pierwszy wyraz postępu arytmetycznego i jaka jego różnica, jeżeli suma wyrazów 2-go, 4-go, 8-go i 10-go jest —72, suma zaś wyrazów 3-go, 5-go i 13-go jest od wyrazu 7-go mniejsza o 42?

348. Ktoś ma spłacić kwotę 1600 zł. w ratach miesięcznych, a mianowicie po pierwszym miesiącu 40 zł., a po każdym miesiącu o pewną tę samę ilość zł. więcej, tak, iżby ostatnia rata wyniosła 160 zł. W ciągu ilu miesięcy spłaconą zostanie cała kwota i ile wyniesie rata po drugim miesiącu?

349. Znaleźć 3 liczby tworzące postęp arytmetyczny, których suma jest 48. a iloczyn 3840.

350. Trzy liczby tworzą postęp arytmetyczny; stosunek sumy pierwszych dwu do sumy 2-ej i 3-ej jest 3:4, suma zaś wszystkich trzech liczb jest 21. Jakie to są liczby?

351. Na turnieju szachowym ze subwencyi otrzymanych i wkładek stawających były takie nagrody: 1080 zł., a każda następna o 135 zł. mniej, a wszystkie nagrody utworzyły razem sumę 4050 zł. Ile było nagród?

352. Gdyby z dwóch stacyi, oddalonych od siebie o 3520 *km*, jechały tak dwa pociągi naprzeciwko siebie, iżby pierwszy przejechał w pierwszym dniu 195 *km*, a każdego następnego dnia coraz mniej o 10 *km*, drugi zaś pierwszego dnia przejechał 120 *km*, a każdego następnego dnia o 23 *km* więcej, to po ilu dniach spotkałyby się z sobą?

353. Jedno ciało wyszło z punktu A i porusza się tak, iż w pierwszej sekundzie przebiegło 11 *m*, a w każdej następnej coraz o 1 *m* mniej. Drugie ciało o 3 sekundy później wyszło z punktu A w tymże kierunku i porusza się tak, iż w pierwszej sekundzie przebiegło 10 *m*, a w każdej następnej o 1 *m* więcej. Po ilu sekundach od chwili, kiedy pierwsze ciało wyszło z punktu A, i w jakiej od A odległości te ciała się z sobą spotkają?

354. Z tego samego punktu wyszły dwa ciała. Jedno przebiega w pierwszej sekundzie 1 *m*, a w każdej następnej o 2 *m* więcej. Drugie zaś ciało, które z początkowego punktu wyszło o 3 sekundy później, przebiega w pierwszej sekundzie 12 *m*, a w każdej następnej o 1 *m* więcej. Po ilu sekundach od chwili wyjścia drugiego ciała z punktu początkowego spotkają się one z sobą?

355. Suma wyrazów postępu arytmetycznego jest 1368, suma wyrazów 7-go i 12-go jest 204, suma zaś 2-go i 11-go jest 228. Ile jest wyrazów tego postępu i jakie są jego wyrazy pierwszy i ostatni?

356. Suma pierwszych n wyrazów postępu arytmetycznego o różnicy $\frac{1}{2}$ jest 81, suma zaś $n+4$ pierwszych wyrazów tegoż postępu jest 124. Znaleźć wyraz pierwszy i ilość wyrazów n tego postępu.

357. Trzy liczby tworzą postęp arytmetyczny; ich suma jest 72, suma zaś ich kwadratów jest 1928. Wypisać ten postęp.

358. Jaki jest wyraz pierwszy i jaka różnica postępu, jeżeli suma wyrazów 4-go i 6-go jest 56, iloczyn zaś wyrazów 3-go i 10-go jest 928?

359. Oddzielnie wzięte cyfry liczby trzycyfrowej tworzą postęp arytmetyczny, którego suma jest $\frac{1}{26}$ owej liczby. Wskutek dodania 396 do owej liczby otrzymamy liczbę, utworzoną z tychże samych, co tamta, cyfr, lecz one będą przedstawiały postęp malejący. Jaka jest owa pierwsza liczba?

360. Ile trzeba wziąć wyrazów postępu, w którym po dodaniu wyrazu 3-go do 7-go otrzymujemy liczbę 138, po podzieleniu zaś 2-go przez 6-y liczbę $\frac{3}{7}$, aby suma tych wyrazów była 4725?

361. Na prostej znajduje się n punktów $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$, w odległości każdy od poprzedzającego o d metrów. Znaleźć na tej prostej punkt taki, iżby suma odcinków między tym punktem a każdym z punktów $A_1, \ldots, A_n$ oraz powtórnie wziętych odcinków między tymże punktem a każdym z punktów $A_2, \ldots, A_{n-1}$ była 4 razy większa od sumy odcinków między punktem A_1, a każdym z punktów $A_2, \ldots, A_n$.

362. Dwie liczby są takie, iż po pomnożeniu pierwszej przez 31, drugiej zaś przez sumę 8-u wyrazów postępu arytmetycznego, z których pierwszy jest 1, a ósmy $4\frac{1}{4}$, otrzymujemy jako sumę tych dwu iloczynów liczbę 1770. Jakie są te liczby?

363. Znaleźć pierwiastki równania $x^2+px-q=0$, jeżeli p jest pierwszym, zaś q ósmym wyrazem postępu arytmetycznego o różnicy $29\frac{29}{36}$, w którym suma pierwszych 8-u wyrazów jest $951\frac{3}{9}$.

364. Dwa postępy mają ten sam pierwszy wyraz; w jednym wyraz ostatni jest 39, a suma wyrazów 207, w drugim zaś wyraz ostatni jest 124, a suma wyrazów 917. Jaki jest pierwszy wyraz i ile każdy z tych postępów ma wyrazów, oraz jaka jest różnica każdego z tych postępów?

365. Znaleźć cztery liczby tworzące postęp arytmetyczny, których suma jest 10, suma zaś odwrotności jest $\frac{25}{12}$.

366. Postęp arytmetyczny ma 5 wyrazów, których suma jest 20, iloczyn zaś 46080. Znaleźć wyrazy tego postępu.

(Art. 39). **367.** Między liczby 7 i 140 wstawić 18 liczb, tworzących z danemi dwiema postęp arytmetyczny. Jaka jest różnica tego postępu i suma pierwszych 10-u jego wyrazów?

368. Między liczby 7 i 13 wstawiono pewną ilość liczb, tworzących z tamtemi dwiema postęp arytmetyczny, którego suma jest 100. Ile wstawiono liczb i jaka jest różnica owego postępu?

369. Między liczby 2553 i 10656 wstawić tyle liczb, tworzących wraz z tamtemi dwiema postęp arytmetyczny, iżby stosunek pierwszej do ostatniej z wstawionych liczb był $\frac{24}{95}$. Ile trzeba wstawić liczb i jaka jest różnica powstałego postępu?

370. Między pierwszy i drugi wyraz postępu 2, 5, 8,... wstawiono takie liczby, tworzące wraz z owemi dwoma wyrazami postęp arytmetyczny, iż suma wstawionych liczb jest o 1 mniejsza od sumy pierwszych 20-u wyrazów postępu pierwotnego. Ile wstawiono owych liczb i jaka jest różnica przez nie utworzonego postępu?

371. Mając postęp arytmetyczny, w którym suma pierwszych 8-u wyrazów jest 164, a iloczyn wyrazów 1-go i 8-go jest 114, wstawić między jego wyrazy po pięć liczb tak, iżby powstał postęp arytmetyczny. Jaka będzie różnica tego nowego postępu?

372. Między dwie liczby, których suma kwadratów jest 197, wstawiono 12 liczb, tworzących wraz z tamtemi postęp arytmetyczny o sumie 105. Znaleźć owe dwie liczby i różnicę postępu.

373. Mając postęp arytmetyczny, w którym 6-y wyraz jest 6, iloczyn zaś wyrazów 4-go i 11-go jest $18\frac{1}{2}$, wstawiamy między każde dwa 9 wyrazów tak, iż powstaje wskutek tego postęp arytmetyczny. Jaki jest pierwszy wyraz i różnica pierwotnego postępu, i jaka jest suma pierwszych 53-ch wyrazów postępu utworzonego?

374. Między dwie liczby wstawiono 5 liczb, tworzących z tamtemi postęp arytmetyczny, którego suma jest 21, suma zaś czwartych potęg liczb wstawionych jest 979. Znaleźć pierwotne dwie liczby i różnicę postępu.

(Art. 42). **375.** Początkowe wyrazy postępu geometrycznego są α) 3, 9, 27, . . ., jaki jest wyraz 7-y tego postępu? β) 0·2, 0·4, 0·8, . . ., jaki jest wyraz 12-y tego postępu? γ) 1, 1·2, 1·44, . . ., jaki jest wyraz 7-y tego postępu? δ) —0·2, 0·08, —0·032, . . ., jaki jest wyraz 9-y tego postępu? ε) 5, —25, 125, . . ., jaki jest wyraz 8-y tego postępu? ζ) 1, $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{36}$, . . ., jaki jest wyraz 7-y tego postępu? η) 0·11, 1·21, 13·31, . . ., jaki jest wyraz 8-y tego postępu? θ) 1, —0·21, 0·0441, . . ., jaki jest wyraz 5-y tego postępu?

376. Gdyby ktoś wysiawszy w pierwszym roku hektolitr żyta, cały plon zebrany wysiał w roku drugim i mógł w następnych latach również cały plon wysiewać, a w każdym roku miał urodzaj 7 ziarn, to ileby zebrał w 10-ym roku?

377. Z naczynia, mającego a litrów objętości i napełnionego alkoholem, odlano b litrów i dolano do pełna wody. Gdyby tę czynność powtórzono 20 razy, to ileby w owem naczyniu pozostało alkoholu?

(Art. 43). **378.** Postępów zad. 275-go znaleźć sumę pierwszych α) 4-ch, β) 6-u, γ) 9-u, δ) 12-u wyrazów.

379. Znaleźć sumę pierwszych 11-u wyrazów postępu geometrycznego a^{10}, $a^9 b$, $a^8 b^2$,...

380. Znaleźć sumę n wyrazów postępu geometrycznego 1, a, a^2,...

381. Znaleźć sumę $2p+1$ wyrazów postępu geometrycznego 1, a, a^2, a^3,...

382. Znaleźć sumę $2p$ wyrazów postępu geometrycznego 1, $-a$, a^2, $-a^3$,...

383. Mając postęp geometryczny a, aq, aq^2, . . ., obliczyć sumę jego p wyrazów, poczynając od wyrazu znajdującego się na miejscu $(m+1)$-em.

384. Znaleźć sumę $2n+1$ wyrazów postępu geometrycznego a^{-n}, $-a^{-n-1}$, a^{-n-2}, $-a^{-n-3}$, . . .

385. W trójkącie prostokątnym z wierzchołka kąta prostego spuszczamy prostopadłą na przeciwprostokątną c, z jej spodka prostopadłą na przyprostokątną a, ze spodka tej prostopadłej prostopadłą na przeciwprostokątną, a z jej spodka znowu prostopadłą na tęż przyprostokątną a. Jaka jest suma drugiej przyprostokątnej danego trójkąta i poprowadzonych wewnątrz niego odcinków?

386. W kwadrat o boku a wpiszmy kwadrat, którego wierzchołki są środkami boków pierwszego kwadratu; w ten kwadrat podobnie wpiszmy inny kwadrat i t. d., $n-1$ razy. Znaleźć α) sumę obwodów, β) sumę pól tych n kwadratów.

387. W dziele Leonarda z Pizy (z w. XIII) znajdujemy zadanie: 7 bab idzie do Rzymu, z których każda ma mułów 7, a na każdym mule sakiew 7, a w każdej sakwie chlebów 7, a w każdym chlebie nożyków 7, a każdy nożyk ma ostrzy 7; szukana jest suma wszystkich tych rzeczy.

388. Powiadają, iż Indus, wynalazca szachów, zapytany przez króla, jakiej pragnie nagrody, miał powiedzieć, iż prosi o tyle pszenicy, aby na pierwsze pole szachownicy przypadało jedno ziarno, na drugie dwa, na trzecie 4, na czwarte 8 i t. d., na każde następujące coraz dwa razy więcej ziarn. Obliczyć, ile liczba, wyrażająca sumę ziarn, któreby przypadały na wszystkie 64 pola szachownicy, ma cyfr, i przy pomocy tablic logarytmów wyznaczyć pierwszych 6 cyfr owej liczby.

(Art. 44). 389. Znaleźć a_n i S_n, mając α) $a_1=7$, $q=3$, $n=11$; β) $a_1=5{\cdot}25$, $q=0{\cdot}25$, $n=4$; γ) $a_1=-7$, $q=-\frac{7}{2}$, $n=6$; δ) $a_1=4096$, $q=0{\cdot}375$, $n=6$.

390. Znaleźć a_1 i S_n, mając α) $a_n=413343$, $q=3$, $n=11$; β) $a_n=8.10^7$, $q=5$, $n=8$; γ) $a_n=-\frac{80}{243}$, $q=-\frac{2}{3}$, $n=6$; δ) $a_n=81062\frac{649}{2048}$, $q=2\frac{1}{2}$, $n=11$.

391. Znaleźć S_n i rzeczywiste q, mając α) $a_1=\frac{1}{8}$, $a_n=1024$, $n=14$; β) $a_1=5$, $a_n=6103515625$, $n=14$; γ) $a_1=2$, $a_n=32768$, $n=15$; δ) $a_1=3$, $a_n=129140163$, $n=17$.

392. Znaleźć n i S_n, mając α) $a_1=1$, $a_n=5\frac{1}{16}$, $q=\frac{3}{2}$; β) $a_1=7$, $a_n=354375$, $q=15$; γ) $a_1=1{\cdot}44$, $a_n=\frac{125}{216}$, $q=\frac{5}{6}$; δ) $a_1=\frac{a^2}{b}(1+x-x^2-x^3)$, $a_n=\frac{b^2(1-x)}{a^2(1+x)}$, $q=\frac{b}{a(1+x)}$.

393. Znaleźć q i n, mając α) $a_1=3$, $a_n=19683$, $S_n=29524$; β) $a_1=5$, $a_n=390625$, $S_n=488181$; γ) $a_1=2$, $a_n=33554432$, $S_n=67108863$; δ) $a_1=3$, $a_n=12288$, $S_n=9831$

394. Znaleźć a_n i rzeczywiste q, mając α) $a_1=20$, $n=3$, $S_n=95$; β) $a_1=2$, $n=7$, $S_n=2$; γ) $a_1=105$, $n=4$, $S_n=420$; δ) $a_1=1$, $n=7$, $S_n=\frac{x^7-y^7}{y^6(x-y)}$.

395. Znaleźć a_1 i rzeczywiste q, mając α) $a_n=600$, $n=3$, $S_n=834$; β) $a_n=10$, $n=6$, $S_n=0$; γ) $a_n=15$, $n=4$, $S_n=60$; δ) $a_n=\left(\frac{a}{b}\right)^6$, $n=7$, $S_n=\frac{a^7+b^7}{b^6(a+b)}$.

396. Znaleźć a_1 i a_n, mając α) $q=7$, $n=7$, $S_n=411711$; β) $q=\frac{3}{4}$, $n=6$, $S_n=19\frac{373}{512}$, γ) $q=\frac{1}{2}$, $n=9$, $S_n=191\frac{5}{8}$; δ) $q=\frac{7}{5}$, $n=25$, $S_n=33741{\cdot}5807$.

397. Znaleźć a_n i n, mając α) $a_1=5$, $q=5$, $S_n=97655$; β) $a_1=1{\cdot}03$, $q=1{\cdot}03$, $S_n=14{\cdot}61796$; γ) $a_1=1{\cdot}04$, $q=1{\cdot}04$, $S_n=22{\cdot}69748$; δ) $a_1=1{\cdot}025$, $q=1{\cdot}025$, $S_n=26{\cdot}18342$.

398. Znaleźć a_1 i n, mając α) $a_n=\frac{1}{128}$, $q=\frac{1}{2}$, $S=1\frac{127}{128}$; β) $a_n=1408576$, $q=4$; $S_n=187810$; γ) $a_n=32194$, $q=1{\cdot}05$, $S_n=69{\cdot}7608$; δ) $a_n=7{\cdot}25103$, $q=1{\cdot}06$, $S_n=109{\cdot}375$.

399. Iloczyn wyrazów 1-go i 3-go postępu geometrycznego jest 100, suma zaś jego wyrazów 2-go i 3-go jest 50. Jaki to jest postęp?

400. Cztery liczby tworzą postęp geometryczny; suma pierwszych 3-ch jest 63, stosunek różnicy między czwartą z nich a drugą do różnicy między drugą a pierwszą jest 6:1. Jakie są te liczby?

401. Cztery liczby tworzą postęp geometryczny. Stosunek sumy skrajnych do sumy średnich jest 3:2, a czwarta jest od 2-ej większa o 72. Jakie to są liczby?

402. Suma pierwszych 6-u wyrazów postępu geometrycznego o wyrazach dodatnych jest 189, suma zaś następnych 6-u jego wyrazów jest 12096. Jaki jest pierwszy wyraz i wykładnik postępu?

403. Wykładnik postępu geometrycznego jest jego wyrazem 5-ym, suma zaś wyrazów 2-go i 3-go jest $1\frac{1}{8}$. Jaki to jest postęp?

404. Suma trzech liczb tworzących postęp geometryczny jest 13, iloczyn zaś pierwszej i trzeciej jest 9. Znaleźć pierwszy wyraz i wykładnik tego postępu.

405. Trzy liczby dodatne, których suma jest 28, tworzą postęp geometryczny; iloczyn sumy skrajnych przez średnią jest 160. Jakie to są liczby?

406. Pięć liczb dodatnych tworzy postęp geometryczny. Suma skrajnych i środkowej jest 1092 i jest o 820 większa od sumy pozostałych. Jakie to są liczby?

407. Suma wyrazów postępu geometrycznego jest -4372; suma wyrazów pierwszego i ostatniego jest -2920, iloczyn zaś tych wyrazów jest 11664. Znaleźć ilość wyrazów, pierwszy wyraz i wykładnik postępu.

408. W postępie geometrycznym ośmiowyrazowym suma wyrazów na miejscach parzystych jest $\frac{85}{128}$, suma zaś wyrazów na miejscach nieparzystych jest $1\frac{21}{64}$. Jaki jest pierwszy wyraz i wykładnik tego postępu?

409. Trzy kolejne liczby całkowite są takie, iż suma ich kwadratów jest równa sumie 20-u wyrazów początkowych postępu arytmetycznego, którego pierwszy wyraz jest 2, dwudziesty zaś 17·4. Pomnożywszy x przez pierwszą z owych liczb, zaś y przez drugą z nich, po dodaniu do siebie tych dwu iloczynów otrzymujemy sumę postępu geometrycznego, o 5-ciu wyrazach i wykładniku 2, w którym pierwszy wyraz jest 4. Znaleźć x i y.

410. Odejmując 297 od liczby trzycyfrowej, otrzymujemy liczbę różniącą się porządkiem cyfr. Cyfry owej liczby tworzą postęp geometryczny i suma skrajnych jest równa pięciokrotnej średniej. Jaka to jest liczba?

411. W systemacie ośmiu kół zębatych o jednakowej ilości zębów, każde z pierwszych siedmiu kół wprawia w ruch tryb znajdujący się na osi następnego koła zębatego, a mający zębów 3 razy mniej niż koło. Wiedząc, że ostatnie koło robi na minutę 10935 obrotów, obliczyć ile obrotów na minutę robi pierwsze koło.

412. Ktoś corocznie do kasy robił wkładki w ten sposób, iż w pierwszym roku wniósł 15 zł., a w każdym następnym do należnych za rok ubiegły odsetek dopłacał tyle, iżby ta kwota wraz z owym procentem przedstawiała kwotę 3 razy większą niż w roku poprzednim. Po ilu latach zbierze się w kasie oszczędności kapitał, od którego roczny dochód po $4^0/_0$ wynosiłby 218 zł. 40 ct.?

413. Między trzema pierwiastkami x_1, x_2 i x_3 równania $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ zachodzą związki: $x_1+x_2+x_3=-\alpha$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\beta$, $x_1x_2x_3=-\gamma$. Wiedząc, że pierwiastki równania $x^3-9x^2+\beta x+216=0$ są rzeczywiste i tworzą postęp geometryczny, znaleźć te pierwiastki i spółczynnik β.

414. Sześć kół, z których każde jest styczne zewnętrznie do poprzedniego koła, mają spólne dwie proste styczne. Pole największego z tych kół jest 59049 razy większe od pola najmniejszego z nich. Wyrazić w promieniu najmniejszego z tych kół odległość jego środka od punktu przecięcia się z sobą dwu spólnych stycznych.

415. Trzy liczby tworzą postęp arytmetyczny. Gdy pierwszą z nich powiększymy o 8, mieć będziemy postęp geometryczny, którego suma jest 26. Jakie to są liczby?

416. Mamy dwie trójki liczb; liczby jednej tworzą postęp arytmetyczny, drugiej zaś postęp geometryczny. Suma pierwszych wyrazów tych dwu postępów jest 27, suma drugich 39, suma trzecich 87, suma zaś liczb pierwszej trójki jest 36. Jakie są liczby każdej trójki?

417. Znaleźć cztery liczby, z których trzy pierwsze tworzą postęp geometryczny, trzy zaś ostatnie arytmetyczny, gdy wiemy, że suma liczb skrajnych jest 14, a suma środkowych jest 12.

418. Dwa postępy, jeden arytmetyczny, drugi zaś geometryczny, są takie, iż, odejmując od każdego z pierwszych czterech wyrazów arytmetycznego wyraz odpowiedni geometrycznego, otrzymujemy liczby odpowiednio 1, 1, 0, -3. Jakie to są postępy?

419. Z dwu postępów jeden jest arytmetyczny, drugi geometryczny; pierwszy wyraz arytmetycznego jest wykładnikiem geometrycznego, pierwszy zaś wyraz geometrycznego jest różnicą arytmetycznego. Suma 10-u początkowych wyrazów postępu arytmetycznego jest 155, a suma początkowych dwu wyrazów geometrycznego jest 9. Jakie są te postępy?

420. Dwa postępy, jeden arytmetyczny o 8-u wyrazach, drugi zaś geometryczny o 4-ch wyrazach, których pierwsze wyrazy są 2, mają ostatnie wyrazy równe, suma zaś wyrazów postępu geometrycznego jest o 4 większa od ostatniego wyrazu postępu. Jakie to są postępy?

421. Dwa postępy o wyrazach dodatnich, z których jeden jest arytmetyczny, drugi zaś geometryczny, mają ten sam wyraz pierwszy, a suma ich wyrazów drugich jest 10. Prócz tego wiadomo, iż 3-ci wyraz postępu geometrycznego jest większy od 3-go wyrazu postępu arytmetycznego o 12, oraz iż czwarty wyraz postępu geometrycznego jest większy od czwartego wyrazu postępu arytmetycznego o 46. Jakie są te dwa postępy?

422. Pierwsze wyrazy trzech postępów geometrycznych przedstawiają postęp geometryczny o wykładniku 2, wykładniki zaś tych postępów przedstawiają postęp arytmetyczny o różnicy 1; suma drugich wyrazów tych postępów jest 24, suma zaś pierwszych 3-ch wyrazów trzeciego z tych postępów jest 84. Jakie są te postępy?

(Art. 45). **423**. Między liczby $\frac{1}{32}$ i 64 wstawić 10 liczb rzeczywistych, tworzących wraz z tamtemi postęp geometryczny. Jaki jest wykładnik tego postępu i jaka suma wszystkich jego wyrazów?

424. Między wyrazy 9-ty i 10-ty postępu 4, 12, 36,... wstawiamy 17 liczb rzeczywistych, tworzących wraz z owemi dwiema postęp geometryczny. Jaka jest pierwsza ze wstawionych liczb?

425. Między liczby $\frac{5}{32}$ i $\frac{5}{2}$ ile trzeba wstawić liczb, aby one wraz z tamtemi dwiema tworzyły postęp geometryczny, którego suma jest $2\frac{3}{16}$, i jakie są te liczby?

426. Między liczby 1 i 59049 wstawiono pewną ilość liczb, tworzących z tamtemi dwiema postęp geometryczny, którego suma jest 88572. Ile wstawiono liczb i jaki jest wykładnik tego postępu?

427. Między dwie liczby rzeczywiste, których suma jest $8\frac{1}{4}$, wstawiono cztery liczby rzeczywiste, tworzące z tamtemi postęp geometryczny taki, iż suma 2-ej i 3-ej ze wstawionych liczb jest 3. Jaka jest pierwsza z pierwotnych liczb i jaki wykładnik tego postępu?

428. Między dwie liczby rzeczywiste, których suma jest 51, wstawiono 3 liczby rzeczywiste, tworzące z tamtemi postęp geometryczny, których suma jest 42. Jaka jest pierwsza z pierwotnych liczb i wykładnik tego postępu?

429. Cztery liczby tworzą postęp geometryczny; suma skrajnych jest 4097, suma zaś średnich 272. Między każde dwie wstawmy takie 3 liczby dodatne, iżby tych 13 liczb tworzyło postęp geometryczny. Wypisać pierwsze trzy wyrazy tak powstałego postępu?

430. Rozłożyć liczbę 155 na trzy składniki, tworzące postęp geometryczny, tak, iżby pierwszy był od drugiego mniejszy o 120, i wstawić między nie po jednej liczbie tak, iżby otrzymać postęp geometryczny o 5-u wyrazach. Znaleźć pierwszy wyraz i wykładnik tego postępu.

(Art. 47). **431**. Znaleźć sumę postępu malejącego nieskończonego α) $3, 1, \frac{1}{3}, \ldots$; β) $4, \frac{8}{5}, \frac{16}{25}, \ldots$; γ) $\frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, \frac{1}{96}, -\frac{1}{384}, \ldots$; δ) $\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{2}, \ldots$,
ε) $\frac{a}{1-a}, \frac{a^2}{1-a^2}, \frac{a^3}{1+a-a^2-a^3}, \ldots$ przy $a > -\frac{1}{2}$; ζ) $\frac{a}{1-q}, \frac{abq}{(1-q)^2}, \frac{ab^2q^2}{(1-q)^2}, \ldots$ przy $b^2 < \frac{(1-q)^2}{q^2}$.

432. Znaleźć wyraz pierwszy postępu malejącego nieskończonego, którego α) $S=70$, $q=\frac{3}{7}$; β) $S=14\frac{1}{7}$, $q=\frac{2}{9}$; γ) $S=5$, $q=-\frac{3}{5}$.

433. Znaleźć wykładnik postępu malejącego nieskończonego, którego α) $a_1=b$, $S=18$; β) $a_1=5$, $S=\frac{25}{4}$; γ) $a_1=-3$, $S=-\frac{21}{8}$.

434. Ile wyrazów ma postęp geometryczny, którego wyraz pierwszy jest 3, wykładnik $\frac{3}{4}$, a suma 12?

435. W postępie geometrycznym o wyrazach rzeczywistych suma wziętych wyrazów jest $\frac{5}{2}$, suma trzech pierwszych z nich jest $\frac{76}{25}$, a suma następnych trzech jest $-\frac{20523}{3125}$. Jakie są wyraz pierwszy, wykładnik, i ilość wyrazów tego postępu?

436. Z wierzchołka kąta prostego trójkąta prostokątnego spuszczamy prostopadłą na przeciwprostokątną c, z jej spodka prostopadłą na przyprostokątną a, i t. d. do nieskończoności. Jaka jest suma drugiej przyprostokątnej i wszystkich odcinków, które w sposób powyższy możnaby w tym trójkącie poprowadzić?

437. W kwadrat o boku a wpisujemy kwadrat, którego wierzchołki są w środkach boków kwadratu poprzedniego; podobnie w ten drugi kwadrat wpisujemy kwadrat trzeci i t. d. do nieskończoności. Znaleźć α) sumę obwodów, β) sumę pól wszystkich tych kwadratów.

438. W kwadrat o boku a wpisujemy koło; w nie wpisujemy kwadrat, w niego koło itd. do nieskończoności. Znaleźć α) sumę obwodów, β) sumę pól wszystkich tych kwadratów i kół razem.

439. W trójkąt równoboczny A B C o boku a wpisujemy koło i prowadzimy styczne do koła, oddzielające przy wierzchołkach A, B, C trójkąty mniejsze równoboczne; w tych trójkątach po wpisaniu kół oddzielamy przy wierzchołkach A, B, C znowu trójkąty równoboczne i t. d. do nieskończoności. Znaleźć α) sumę promieni, β) sumę pól wszystkich tych kół.

(Art. 50). **440.** $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}$. **441.** $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$.

442. $1+2a+3a^2+\ldots+n.a^{n-1}$. **443.** $2+3a+4a^2+\ldots+(n+1)\,a^{n-1}$.

444. $3+4a+5a^2+\ldots+(n+2)\,a^{n-1}$. **445.** $2.1+3.2x+4.3x^2+\ldots+n\,(n-1)x^{n-2}$.

446. $a+(a+b)\,q+(a+2b)\,q^2+(a+3b)\,q^3+\ldots+(a+nb-b)\,q^{n-1}$.

447. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

448. Szalbierz zaproponował naiwnemu, który miał 1 zł., ciągłe podwajanie jego pieniędzy, zastrzegając sobie, iż przed pierwszem podwojeniem potrąci sobie 10 ct., a przed każdem dalszem kolejno kwotę dwa razy coraz większą. Po ilu takich „podwojeniach" szalbierz wyłudzi ów postawiony przez naiwnego złoty?

(Art. 51). **449.** $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}+\ldots$ **450.** $1-\frac{2}{2}+\frac{3}{4}-\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\ldots$

451. $2+3a+4a^2+5a^3+\ldots$ przy $a^2<1$.

452. $a+(a+ab)q+(a+ab+ab^2)q^2+(a+ab+ab^2+ab^3)q^3+\ldots$ przy $q^2<1$ i $b^2q^2<1$.

453. $2.1+3.2x+4.3x^2+\ldots$ przy $x^2<1$.

(Art. 53). Gwiazdka * przy numerze oznacza, że zadanie należy zrobić przy pomocy tabliczki, podanej na str. 258-ej.

454*. Jaki naróśnie kapitał, gdy na procent składany oddamy α) 4000 zł. po 5% na 15 lat; β) 5600 zł. po 3·5% na 32 lata?

455. Jaki naróśnie kapitał, gdy na procent składany oddamy α) 18706 zł. po $4\frac{1}{2}$% na 10 lat; β) 12388 zł. po $3\frac{1}{2}$% na 17 lat; γ) 2739 zł. po $3\frac{3}{4}$% na 9 lat; δ) 68076 zł. po $4\frac{3}{4}$% na 12 lat?

456*. Z jakiego kapitału, oddanego na procent składany α) na 4 lata po 4%, powstanie 350958 zł.; β) na 33 lata po 5%, powstanie 50031·89 zł.?

457. Z jakiego kapitału, oddanego na procent składany α) na 27 lat po $4\frac{3}{4}$%, powstanie 8401·75 zł.; β) na 80 lat po $2\frac{1}{4}$%, powstanie 80001 zł.; γ) na 36 lat po 4%, powstanie 4924·7 zł.; δ) na 25 lat po $4\frac{3}{4}$%, powstanie 5042·67 zł.?

458*. Po ile % na procent składany oddane α) na 15 lat 7000 zł. wzrosną do 13546·97 zł.; β) na 32 lata 2800 zł. wzrosną do 8418·78 zł.?

459. Po ile % na procent składany oddane α) na 8 lat 46071 zł. wzrosną do 125000 zł.; β) na 18 lat 40800 zł. wzrosną do 56816 zł.; γ) na 9 lat 2100 zł. wzrosną do 4059·88 zł.; δ) na 20 lat 8000 zł. wzrosną do 15166·7 zł.?

460*. W ciągu ilu lat oddany na procent składany α) 8000 zł. po 3% wzrosną do 12100·72 zł.; β) 2727·3 zł. po 4% wzrosną do 3190·53 zł.?

461. W ciągu ilu lat oddane na procent składany α) 54 zł. po $3\frac{1}{2}$% wzrosną do 123·29 zł.; β) 10000 zł. po $4\frac{1}{2}$% wzrosną do 19353 zł.; γ) 5000 zł. po 6% wzrosną do 24111·7 zł.; δ) 3000 zł., po $5\frac{1}{2}$% wzrosną do 18522·6 zł.?

462*. Jaki kapitał ma wnieść ojciec do kasy oszczędności na procent składany po $3\frac{1}{2}$% na imię pięcioletniego syna, iżby tenże mając lat 19 otrzymał 2070 zł.?

463. W mieście, które przed 24-ma laty miało ludności 65000 osób, przybyło do obecnej chwili 67132 osoby; obliczyć średni procent wzrostu ludności przez te lata.

464. Miasteczko ma ludności 6443 osoby, a przed 15-u laty miało jej 3185 osób; gdyby przypuścić, że przyrost ludności pozostawał jednakowym, to ile ono mieć mogło ludności 24 lata temu?

465. Po ilu latach kapitał 8443 zł., oddany na procent składany po 4%, wzrośnie do sumy, którą przedstawi kapitał 9000 zł., oddany na procent składany po 6%, po 9-u latach?

466. Na jaki procent składany należy oddać kapitał 32748·4 zł., aby po 3-ch latach przedstawiał sumę, do jakiej w tymże samym przeciągu czasu wzrośnie kapitał 31843·2 zł., oddany na procent składany po 7·5%?

467. Kasa oszczędności przyjęła kapitał 10000 zł. na procent składany po 3%, a umieściła go na 6% i taksamo kapitalizowała odsetki. Jaki będzie miała zysk po upływie 10 lat?

468. Na jaki procent składany kasa przyjęła 1500 zł., jeżeli, umieściwszy go na procent składany po 5%, osiągnęła w ciągu 10-u lat 427·47 zł. zysku?

469. Na jaki procent składany należałoby oddać kapitał, aby się podwoił w ciągu 10 lat?

470. Pewien kapitał był oddany na procent składany po 5%, z narastającego kapitału po upływie lat 10-u wzięto 7000 zł., a pozostała część wzrastała dalej po $4\frac{1}{2}$% przez 30 lat i wzrosła do 70000 zł. Jaki był pierwotny kapitał?

(Art. 54). **471***. Po jakim czasie kapitał, oddany na procent składany po 5%, α) podwaja się, β) powiększa się 5 razy?

472. Jaki urośnie kapitał, gdy na procent składany oddamy α) 2400 zł. po 5% na 10 lat i 5 miesięcy; β) 3250 zł. po 7% na 22 lata i $10\frac{1}{3}$ miesiąca?

473. W ciągu jakiego czasu oddane na procent składany α) 1200 zł. po 4% wzrosną do 5072·3 zł.; β) 40800 po 2% wzrosną do 57336·8 zł.?

474. Oddano 4800 zł. na procent składany po $4\frac{3}{4}$%; jaki przy półrocznej kapitalizacyi procentu powstanie kapitał po 27-u latach?

475. Ktoś posiada na 100000 zł. pięcioprocentowych papierów publicznych z kuponami półrocznemi. Przy natychmiastowem kapitalizowaniu półrocznem dochodów jaki powstałby kapitał po upływie 30-u lat?

476. Po ilu latach kapitał 5000 zł., oddany na procent składany po 6%, przy półrocznej kapitalizacyi odsetek narośnie do 9030·56 zł.?

(Art. 55). **477***. Jaki w rok po wniesieniu ostatniej wkładki zgromadzi się kapitał z wkładek corocznych oddawanych na procent składany α) po 270 zł. przez 14 lat po $4\frac{1}{2}$%; β) po 840 zł. przez 33 lata po $3\frac{1}{2}$%?

478. Jaki w rok po wniesieniu ostatniej wkładki zgromadzi się kapitał z wkładek corocznych, oddawanych na procent składany α) po 40 zł. przez 24 lata na 7%; β) po 200 zł. przez 16 lat na 5%; γ) po 770 zł. przez 12 lat na $3\frac{1}{2}$%; δ) po 1500 zł. przez 30 lat na 6%?

479*. Jaka ma być coroczna wkładka oddawana na procent składany, aby w rok po wniesieniu ostatniej wkładki utworzył się α) przy 5% w ciągu 4-ch lat kapitał 45256 zł.; β) przy 3% w ciągu 14-u lat kapitał 1573903 zł.?

480. Jaka ma być coroczna wkładka oddawana na procent składany, aby w rok po wniesieniu ostatniej wkładki utworzył się α) przy 4% w ciągu 20-u lat kapitał 629385 zł., β) przy 3% w ciągu 12-u lat kapitał 877068 zł.; γ) przy 3·5% w ciągu 22-u lat kapitał 175403 zł.; δ) przy 2·5% w ciągu 34-ch lat kapitał 269641 zł.?

481*. Ile trzeba wnieść na procent składany corocznych wkładek, aby w rok po wniesieniu ostatniej wkladki α) przy 5% i rocznej wkładce 625 zł. powstał kapitał 49414·85 zł., β) przy 4% i rocznej wkładce 420 zł. powstał kapitał 8846·31 zł.?

482. Ile trzeba wnieść na procent składany corocznych wkładek, aby w rok po wniesieniu ostatniej wkładki α) przy 6% i rocznej wkładce 600 zł. powstał kapitał 148035 zł.; β) przy 4·5% i rocznej wkładce 540 zł. powstał kapitał 89406 zł.; γ) przy 3% i rocznej wkładce 210 zł. powstał kapitał 165739 zł.; δ) przy 3·5% i rocznej wkładce 1050 zł. powstał kapitał 112674 zł.?

483*. Jaki kapitał w chwili ostatniej wypłaty przedstawiają corocznie dokonywane w końcu roku wypłaty po 3500 zł. przy $3\frac{1}{2}$% przez 15 lat?

484. Jaki kapitał w chwili ostatniej wypłaty przedstawiają corocznie dokonywane w końcu roku wypłaty α) po 300 zł. przy 6% przez 6 lat; β) po 400 zł. przy 4% przez 13 lat; γ) po 240 zł. przy 3% przez lat 21?

485*. Jaką ma być coroczna wypłata, aby spłacić należność 327403 zł. płatnych po po 33 latach przy 4·5%?

486. Jaką ma być coroczna wypłata, aby spłacić należność α) 354072 zł. płatnych po 10-u latach przy 5·5%; β) 184908 zł. płatnych po 25-u latach przy 4·5%; γ) 397495 zł. płatnych po 30-u latach przy 3·5%?

487. Ktoś wniósł do kasy oszczędności 500 zł., a następnie corocznie dokładał 12548 zł.; kasa oszczędności oblicza procent po 4·5%. Jaki nagromadził się kapitał w ciągu 10-go roku od chwili wniesienia pierwszej kwoty?

488. Jan pobierał od Piotra w dniu swych urodzin od chwili skończenia 38-go roku życia po 180 zł., za co Piotr nabył prawo otrzymania z chwilą śmierci Jana z pozostałego po nim majątku jednorazowo 6000 zł. Jan umarł w końcu 64-go roku życia. Przyjmując za podstawę rachunku 3·6%, obliczyć zysk czy też stratę Piotra w chwili śmierci Jana.

489. Kapitalista mający 600000 zł. umieszcza swój majątek na procent składany po 5%; po upływie jednak każdego roku czerpie z niego na swe utrzymanie 6000 zł. Jaki będzie posiadał majątek w końcu 12 roku?

490. Ktoś pożyczywszy 2578 zł. na 5% płacił przez 10 lat w końcu każdego roku po 100 zł. na rachunek odsetek. Jak wielki jest jego dług na początku 11-go roku?

491. Sprawdzić ,przyjmując w obrachunku stopę 5%, czy jest korzystne przedsiębiorstwo, w którem na początku trzeba włożyć kapitał 12480 zł., a przez 6 następujących lat corocznie na początku roku dokładać po 2400 zł., wobec pewności, iż od początku 8-go roku przynosić ono będzie 1500 zł. rocznie czystego zysku.

(Art. 56). **492*.** Jaka jest dzisiejsza wartość 5% renty 500 zł., wypłacanej w końcu roku przez 14 lat?

493. Jaka jest dzisiejsza wartość α) przy 5% renty 1036 zł., wypłacanej w końcu roku przez 14 lat; β) przy 4·5% renty 380 zł., wypłacanej w końcu roku przez 8 lat; γ) przy 3·5% renty 60674 zł., wypłacanej w końcu roku przez 25 lat?

494*. Jaką można mieć corocznie w końcu roku wypłacaną rentę przez 32 lata przy 4% za kapitał 714942 zł.?

495. Jaką można mieć corocznie w końcu roku wypłacaną rentę α) przez 15 lat przy 4·5% za kapitał 35780 zł.; β) przez 20 lat przy 5% za kapitał 10000 zł.; γ) przez 10 lat przy 5·5% za kapitał 16582·7 zł.?

496*. Przez ile lat można otrzymywać w końcu roku rentę 450 zł., oddając kapitał 7660·33 zł. przy 4·5%?

497. Przez ile lat można otrzymywać w końcu roku rentę α) 15375·5 zł., oddając kapitał 200000 zł. przy 4·5%; β) 388·51 zł., oddając kapitał 3000 zł. przy 5%; γ) 2373·93 zł., oddając kapitał 10000 zł. przy 6%?

498*. Jaki można wnieść jednorazowo kapitał w chwili pierwszej wkładki zamiast płacenia przez 15 lat po 3500 zł., przyjmując w rachunku 3·5%?

499. Jaki można wnieść jednorazowo kapitał w chwili pierwszej wkładki zamiast płacenia α) przez 18 lat po 1200 zł., przyjmując w rachunku 5%; β) przez 30 lat po po 7155·66 zł., przyjmując w rachunku 5%; γ) przez 20 lat po 10000 zł., przyjmując w rachunku 4%?

500*. Jakiej corocznej wkładce przez 33 lata odpowiada przy 4% kapitał 2521·71 zł.?

501. Jakiej corocznej wkładce α) przez 20 lat odpowiada przy 5% kapitał 84000 zł.; β) przez 13 lat odpowiada przy 3·5% kapitał 16527·6 zł.; γ) przez 6 lat odpowiada przy 5% kapitał 1522·71 zł.?

502*. Ilu corocznym wkładkom po 400 zł. odpowiada przy 4% kapitał 1510.04 zł.?

503. Ilu odpowiada corocznym wkładkom α) po 100 zł. przy 5% kapitał 1137·48 zł.; β) po 480 zł. przy 3% kapitał 14138·7 zł.; γ) po 2100 zł. przy 3·5% kapitał 23735·5 zł.?

504. Aby umorzyć dług 3253·3 zł. w ciągu 14-u lat, jaką corocznie trzeba płacić ratę, przyjmując przy obrachunku $6^0/_0$?

505. Miasto potrzebuje uzyskać z pożyczki 864000 zł. Bank udziela jej, płacąc 96 za 100, na spłatę 10-oletnią przy $5^0/_0$. Jak wielka ma być jednoroczna spłata?

506. Dzierżawca ma płacić z majątku po 5470 zł. rocznie. Właściciel majątku pragnie tenutę za 8 następnych lat otrzymać w dwu równych ratach, jednę teraz, drugą na początku 5-go roku. Jak wielkie mają być te raty, jeżeli przy obrachunku przyjęto $6^0/_0$?

507. Ile przez 12 lat należy do banku wnosić corocznie, aby zapewnić sobie przez następujących lat 20 rentę roczną po 2000 zł., gdy bank przyjmuje w obrachowaniu $3·5^0/_0$?

508. Ktoś umieścił w kasie oszczędności 300000 zł. po $5^0/_0$ na procent składany; corocznie jednak bierze z kasy 18000 zł. Po ilu latach wyczerpie ten kapitał?

(Art. 58). **509.** Znaleźć ilość waryacyj α) z 7-u elementów po 2, po 5, po 6; β) z 9-u elementów po 3, po 5, po 7; γ) z 12-u elementów po 3, po 5, po 6; δ) z 90-u elementów po 4, po 6; ε) ze 100-u elementów po 3, po 5.

510. Ile istnieje różnych liczb 4-ocyfrowych, nie mających cyfr jednakich?

511. Ile przy pomocy cyfr od 1 do 9 można utworzyć różnych liczb 7-ocyfrowych, mających tę samę cyfrę na pierwszem miejscu, a nie mających cyfr jednakowych?

(Art. 59). **512.** Ile jest przemian α) z 5-u elementów; β) z 8-u elementów; γ) z 10-u elementów?

513. Gdyby w ciągu minuty można było napisać średnio 6 przemian z 10-u elementów, to ile potrzebaby godzin na wypisanie wszystkich tych przemian?

514. Z 10-u cyfr ile można utworzyć różnych liczb 10-ocyfrowych, nie mających cyfr jednakowych?

515. Ile jest kombinacyj α) z 9-u elementów po 3, po 5, po 6; β) z 15-u elementów po 2, po 5, po 7, po 8, po 10, po 13; γ) z 50-u elementów po 4, po 6, po 44, po 46?

516. Ilu sposobami można 52 karty rozdzielić między 4-ch graczy?

517. 32 kule poznaczone rozmieścić w 3-ch naczyniach tak, iżby w dwu było ich po 12, a w trzeciem pozostałe. Ilu sposobami można tego dokonać?

518. Ilu sposobami można rozdać 32 karty między 3-ch graczów, dając każdemu po 10, a dwie odkładając jako kupne?

519. Na płaszczyźnie znajduje się n prostych, z których p jest do siebie równoległych, żadne dwie z pozostałych $n-p$ prostych nie są do siebie równoległe, a żadne 3 (ze wszystkich prostych) nie przecinają się z sobą w jednym punkcie. Ile jest w odległości skończonej punktów przecięcia się tych prostych?

520. Na płaszczyźnie leżą 2 pęki promieni, jeden o 8-u a drugi o 5-u promieniach, nie mające promienia spólnego. Ile jest wszystkicb punktów przecięcia się promieni?

521. Z ilu elementów kombinacyj po 4 jest 495?

522. Na płaszczyźnie znajduje się n prostych, pośród których niema równoległych do siebie i żadne 3 nie przechodzą przez ten sam punkt. Ile najwięcej można poprowadzić prostych, przechodzących przez 2 punkty przecięcia się z sobą tamtych prostych?

(Art. 61). **523.** Sprawdzić formuły 5 i 6, kładąc α) $n=6$, $\nu=3$; β) $n=9$, $\nu=4$.

(Art. 62). **524.** Wypisać metodycznie wszystkie przemiany z elementów α) a_1, a_2, a_3; β) a_1, a_2, a_3, a_4.

525. Wypisać wszystkie kombinacye po 3, po 4, po 5, po 6 α) z elementów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; β) z elementów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7.

526. Wypisać wszystkie waryacye z elementów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 α) po 2; β) po 3.

(Art. 63). **527.** Ustawić obok siebie 12 kul, z których 3 są białe, 4 czerwone, a 5 czarnych. Ilu sposobami można tego dokonać?

528. W kole loteryjnem są 24 bilety, z których 12 pustych, 6 wygrywających przedmioty jednakowe, a pozostałe wygrywają przedmioty różne. Ilu różnemi sposobami można dokonać ciągnienia wygranych?

529. Mając iloczyn α) $2n$ czynników, grupujemy je w pary; ile może być takich ugrupowań, mających niejednakowe pary; β) $3n$ czynników, grupujemy je w trójki; ile może być takich ugrupowań, mających niejednakowe trójki?

(Art. 64). **530.** Z dwu znaków telegraficznych: kropki i kreski ile można złożyć sygnałów, biorąc α) po 2 znaki; β) po 3 znaki; γ) po 4 znaki?

531. Na klawiaturze, mającej 7 oktaw, ilu sposobami można wziąć jednocześnie 3 tony: C, E i G?

532. Ile istnieje wszystkich liczb 4-ocyfrowych?

533. Ile różnych liczb 6-ocyfrowych można utworzyć przy pomocy cyfr 1, 5, 7, 8?

534. Ktoś ma 4 konie siwe, 4 gniade i 4 kare. Sprzęga czwórkę. Ilu sposobami może to uczynić, jeżeli jedna czwórka od innej ma się różnić α) przynajmniej jednym koniem innej maści; β) przynajmniej jednym koniem innej maści na jednem z czterech miejsc?

535. Z pełnej talii kart wziąwszy ich 13, zwracamy na to tylko uwagę, ile pośród wziętych znajduje się kart tego lub owego z czterech »kolorów«. Ilu różnemi z tego względu sposobami można wziąć tak z talii po 13 kart?

(Art. 66). **536.** W urnie znajduje się 10 gałek: 5 czarnych, 2 białe i 2 niebieskie. Jakie jest prawdopodobieństwo α) wyciągnięcia gałki czarnej; β) gałki białej; γ) gałki niebieskiej?

(Art. 67). **537.** W urnie jest 15 gałek białych i 10 czarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia α) 10-u gałek białych; β) 5-u gałek białych; γ) 5-u gałek czarnych?

538. W urnie jest 15 gałek białych i 10 czarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia α) 5-u białych i 5-u czarnych; β) 10-u białych i 5-u czarnych; γ) 4-ch gałek białych i 6-u czarnych?

539. Jakie jest prawdopodobieństwo z talii 32-u kart wyciągnięcia α) 4-ch kart pikowych; β) 4-ch kart jednego koloru?

540. Jakie jest prawdopodobieństwo z talii 52-u kart wyciągnięcia 3-ch kart: dwu tuzów i jednego niżnika?

(Art. 69). **541.** Jakie jest prawdopodobieństwo, iż w 6-u rzutach kostki wyrzucimy cztery razy, nie więcej, α) po dwójce, β) jednakowe liczby?

542. Jakie jest prawdopodobieństwo w dwu rzutach kostki wyrzucenia liczby α) 2; β) 3; γ) 4; δ) 5; ε) 6; ζ) 8; η) 10; θ) 11; ι) 12?

543. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia w 3-ch rzutach kostki liczby α) 5; β) 6; γ) 9; δ) 15?

544. Jakie jest prawdopodobieństwo dla osoby grającej w domino (28 »kamieni«), iż pośród wziętych przez nią 7-u kamieni niema podwójnej szóstki?

545. W urnie znajduje się 10 gałek: 5 czarnych, 3 białe i 2 niebieskie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie wyciągniemy gałki niebieskiej?

(Art. 71). **546.** W urnie znajduje się 10 gałek: 5 czarnych, 3 białe i 2 niebieskie. Jakie jest prawdopodobieństwo α) wyciągnięcia gałki bądź czarnej bądź niebieskiej; β) wyciągnięcia gałki bądź białej bądź niebieskiej?

(Art. 72). **547.** Mamy dwie urny, pierwsza zawiera 5 czarnych gałek i 3 białe, druga 7 czarnych i 7 zielonych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciągnąc raz z pierwszej urny i raz z drugiej, wyciągniemy w obu razach gałkę czarną?

548. W urnie są 2 gałki białe i dwie czarne; α) wyciągnąwszy jednę gałkę, wrzucamy ją do urny i wyciągamy powtórnie jednę gałkę; β) wyciągnąwszy jednę gałkę, nie wrzucamy jej do urny i wyciągamy powtórnie jednę gałkę (albo: wyciągamy z urny odrazu dwie gałki). O ile jest większe prawdopodobieństwo wyciągnięcia z urny dwu gałek białych sposobem α) niż sposobem β)?

549. Jakie przy rzucaniu kostki dwa razy jest prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby 1 w pierwszym, a jeżeli nie to w drugim rzucie?

550. Jakie jest prawdopodobieństwo dla osoby grającej w domino, iż pośród wziętych przez nią 7-u kamieni α) niema podwójnego kamienia; β) że wszystkie wzięte kamienie są podwójne; γ) że wszystkie kamienie mają mydło; δ) że wszystkie mają jednakową połowę?

551. Jakie jest prawdopodobieństwo przy trzech rzutach kostki, że liczba 1 α) w dwu pierwszych rzutach nie wyjdzie, a w 3-im wyjdzie; β) raz przynajmniej wyjdzie; γ) wyjdzie w 1-ym rzucie, a w 2-im i 3-im pojawi się raz jeden; δ) nie wyjdzie w 1-ym rzucie, a wyjdzie zarówno w 2-im jak i w 3-im; ε) dwa razy wyjdzie?

(Art. 74). **552.** Jakie jest prawdopodobieństwo, iż osoba, mająca α) lat 21, żyć będzie 50 lat; β) lat 25, żyć będzie 45 lat; γ) lat 25, żyć będzie 60 lat; δ) lat 30, żyć będzie 70 lat?

(Art. 75). **553.** Jaki kapitał ma wnieść (przy 4%) jednorazowo osoba, mająca α) lat 21, aby w razie, gdy dożyje 45-u lat, otrzymała 15000 zł.; β) lat 18, aby w razie, gdy dożyje 50-u lat, otrzymała 15000 zł.; γ) lat 35, aby w razie, gdy dożyje 52-u lat, otrzymała 25000 zł.; δ) lat 40, aby w razie, gdy dożyje 65-u lat, otrzymała 10000 zł.?

554. Jaki kapitał może (przy 4%) zabezpieczyć sobie osoba, mająca α) lat 21, gdy dożyje 50-u lat, wnosząc teraz 5000 zł.; β) lat 30, gdy dożyje 50-u lat, wnosząc teraz 12000 zł.; γ) lat 20, gdy dożyje 45-u lat, wnosząc teraz 3650 zł.; δ) lat 25, gdy dożyje 62-u lat, wnosząc teraz 4280 zł.?

(Art. 76). **555**. Jaki kapitał wnieść ma (przy 4%) osoba, mająca α) lat 21, aby pobierała dożywotnie rentę 800 zł.; β) lat 38, aby pobierała dożywotnie rentę 1300 zł.?

556. Jaką pobierać może (przy 4%) dożywotnią rentę osoba, mająca α) 25 lat, wnosząc 6000 zł.; β) lat 53, wnosząc 7500 zł.?

(Art. 77). **557.** Jaki kapitał wnieść (przy 4%) powinna osoba, mająca α) lat 21, aby jej spadkobiercy otrzymali 15000 zł.; β) lat 49, aby jej spadkobiercy otrzymali 10000 zł.; γ) lat 35, aby jej spadkobiercy otrzymali 12000 zł.; δ) lat 55, aby jej spadkobiercy otrzymali 8000 zł.?

558. Jaki kapitał może (przy 4%) zabezpieczyć swym spadkobiercom osoba, mająca α) lat 21, wnosząc 10000 zł.; β) 26 lat, wnosząc 17000 zł.; γ) 49 lat, wnosząc 20000 zł.; δ) 55 lat, wnosząc 10000 zł.?

(Art. 78). **559.** Jaką wkładkę na początku każdego roku wnieść (przy 4%) ma osoba, mająca α) lat 21, aby jej spadkobiercom wypłacono 15000 zł.; β) lat 30, aby jej spadkobiercom wypłacono 12000 zł.; γ) lat 45, aby jej spadkobiercom wypłacono 30000 zł.; δ) lat 54, aby jej spadkobiercom wypłacono 65000 zł.?

560. Jaki kapitał może (przy 4%) zabezpieczyć swym spadkobiercom osoba, mająca α) lat 21, wnosząc na początku każdego roku po 200 zł.; β) lat 34, wnosząc na początku każdego roku po 350 zł.; γ) lat 49, wnosząc na początku każdego roku po 200 zł.; δ) lat 40, wnosząc na początku każdego roku po 1000 zł.?

(Art. 80). **561.** $(3a-7b)^7$. **562.** $(2-i)^6$. **563.** $(a+\sqrt{a^2-1})^6+(a-\sqrt{a^2-1})^6$.

564. Wypisać spółczynnik x^1 w rozkładzie $\left(x^2+\frac{a^3}{x}\right)^5$.

565. Wypisać α) wyraz siódmy wyrażenia $(3a^{\frac{1}{2}}-4b^{\frac{3}{2}})^{10}$; β) wyraz 7-y i 15-y wyrażenia $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{20}$; γ) wyrazy środkowe wyrażenia $(5a-2b)^{19}$.

566. Jaki jest wyraz 6-y postępu geometrycznego, którego pierwszym wyrazem jest $\frac{\sqrt{b}}{ab}$, a wykładnikiem $a\sqrt{b}-b\sqrt{a}$?

567. W jakiej potędze dwumianu spółczynnik w wyrazie trzecim jest α) 528; β) 1596; γ) $2p^2-5p+3$?

568. W jakiej potędze dwumianu spółczynnik w wyrazie piątym jest 126?

569. W jakiej potędze dwumianu wyrazy trzeci i piąty mają ten sam spółczynnik?

570. Jaki jest spółczynnik wyrazu zawierającego $a^{n-p}b^p$ w wyrażeniu $(a-\frac{1}{2}b)^n$, jeżeli n jest wyrazem trzecim postępu geometrycznego o 6-u wyrazach, w którym suma wyrazów na miejscach parzystych jest 147, wyrazów zaś na miejscach nieparzystych jest $73\frac{1}{2}$, i jeżeli p przedstawia ilość wyrazów postępu arytmetycznego o pierwszym wyrazie 5, różnicy 3 i sumie 98?

(Art. 81). **571**. Przy dodatnem i całkowitem n jest
α) $1+2n+2n(n-1)+\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)+\ldots+2^n=?$ β) $1+3n+\frac{9}{2}n(n-1)+\frac{9}{2}n(n-1)(n-2)+\ldots+3^n=?$

(Art. 82). **572**. Znaleźć ilość wyrazów rozkładu $(a+b+c)^n$.

573. Znalezć wyraz wyrażenia $(a+b+c+d)^n$ zawierający d^{n-3}.

574. Jaki jest spółczynnik przy x^{12} w rozkładzie $(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)^5$.

(Art. 84). **575**. Wyciągnąć pierwiastek stopnia ósmego z wielomianu:

$$a+8\sqrt[8]{a^7b}+28\sqrt[4]{a^3b}+56\sqrt[8]{a^5b^3}+70\sqrt{ab}+56\sqrt[8]{a^3b^5}+28\sqrt[4]{ab^3}+8\sqrt[8]{ab^7}+b.$$

576. Wyciągnąć pierwiastek stopnia 5-go z wielomianu α) $32a^5-240a^4b+720a^3b-1080a^2b^3+810ab^4-243b^5$; β) $243x^{20}+405x^{19}-2565x^{18}-5715x^{17}+9465x^{16}+31441x^{15}-8165x^{14}-86055x^{13}-36185x^{12}+119495x^{11}+108073x^{10}-71145x^9-111845x^8+5435x^7+47025x^6+1955x^5-11390x^4+680x^3+1440x^2-400x+32$.

(Art. 86). **577**. Przedstawić w kształcie trygonometrycznym liczby:
α) $1+i\sqrt{3}$; β) $-2\sqrt{3}+2i$; γ) $-3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}$; δ) $-4\sqrt{2+\sqrt{2}}-4i\sqrt{2-\sqrt{2}}$,
ε) $-4\sqrt{2+\sqrt{2+2}}-4i\sqrt{2-\sqrt{2+2}}$; ζ) $5\sqrt{3}-5i$.

578. Przedstawić w kształcie trygonometrycznym liczby:
α) $6{\cdot}12829+5{\cdot}14233i$, β) $5{\cdot}40575-2{\cdot}60329i$.

(Art. 88). **579**. Przedstawić w dwu kształtach iloczyn liczb w zad. 577-em, a mianowicie: *a*) iloczyn pod α i β; *b*) iloczyn liczb pod α i γ; *c*) iloczyn liczb pod α, β i γ.

580. Z trygonometrycznego kształtu iloczynu dwu liczb w zadaniu 578-em wyrachować inny.

581. Przedstawić w dwu kształtach iloraz liczb w zad. 577-em, a mianowicie iloraz: *a*) z podzielenia liczby pod α przez liczbę pod β; *b*) z podzielenia liczby pod α przez liczbę pod γ, *c*) z podzielenia liczby pod γ przez liczbę pod δ.

582. Z trygonometrycznego kształtu ilorazu pierwszej z liczb przez drugą w zadaniu 578-em wyrachować inny.

(Art. 90—93). **583**. Wyrazić, w obu kształtach wszystkie pierwiastki sześcienne α) z $+1$; β) z -1; γ) z 8; δ) z -8.

584. Wyrazić w obu kształtach wszystkie pierwiastki stopnia 4-go α) z 64: β) z -64.

Wyrazić w obu kształtach wszystkie pierwiastki α) z $+1$, β) z -1 **585**. stopnia 8-go, **586**. stopnia 12-go, **587**. stopnia 16-go, **588**. stopnia 5-go, **589**. stopnia 10-go, **590**. stopnia 20-go.

Wyrazić w obu kształtach wszystkie pierwiastki α) z $+1$, β) z -1 **591**. stopnia 7-go, **592**. stopnia 9-go.

Wyrazić w obu kształtach wszystkie pierwiastki α) z $+i$, β) z $-i$. **593**. stopnia 3-go, **594**. stopnia 4-go, **595**. stopnia 6-go, **596**. stopnia 8-go, **597**. stopnia 12-go.

Wyrazić w obu kształtach wszystkie pierwiastki stopnia 9-go α) z $+i$, β) z $-i$.

ODPOWIEDZI.

1. $x_1=7{\cdot}5$, $y_1=2$; $x_2=3$, $y_2=5$. **2**. $x_1=15$, $y_1=5$; $x_2=-15$, $y=-5$. **3**. $x_1=y_1=1$; $x_2=\frac{1}{27}$, $y_2=3\frac{1}{27}$. **4**. $x_1=10$, $y_1=4$; $x_2=12$, $y_2=2$. **5**. $x_1=y_1=1$; $x_2=\frac{1}{3}$, $y_2=2\frac{5}{9}$. **6**. $x_1=2$, $y_1=9$; $x_2=-2$, $y_2=-9$. **7**. $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=1\frac{1}{16}$, $y_2=1\frac{5}{8}$. **8**. $x_1=4$, $y_1=-8$, $x_2=-3\frac{3}{11}$, $y_2=8$. **9**. $x_1=2\sqrt{3}$, $y_1=\sqrt{3}$; $x_2=-2\sqrt{3}$, $y_2=-\sqrt{3}$. **10**. $x_1=3\sqrt{2}$, $y_1=2\sqrt{2}$; $x_2=-3\sqrt{2}$, $y_2=-2\sqrt{2}$. **11**. $x_1=3-\sqrt{2}$, $y_1=2+\sqrt{2}$; $x_2=3+\sqrt{2}$, $y_2=2-\sqrt{2}$. **12**. $x_1=1$, $y_1=3\frac{1}{3}$; $x_2=5$, $y_2=\frac{2}{3}$. **13**. $x_1=i\sqrt[4]{18}$, $y_1=\frac{2}{3}i\sqrt[4]{18}$; $x_2=-i\sqrt[4]{18}$, $y_2=-\frac{2}{3}i\sqrt[4]{18}$.

14. $x_1 = 7i\sqrt{\tfrac{6}{11}}$, $y_1 = 3i\sqrt{\tfrac{6}{11}}$; $x_2 = -7i\sqrt{\tfrac{6}{11}}$, $y_2 = -3i\sqrt{\tfrac{6}{11}}$. **15.** $x_1 = 2+3i$, $y_1 = 3+2i$; $x_2 = 2-3i$, $y_2 = 3-2i$. **16.** $x_1 = -3+i\sqrt{2}$, $y_1 = 10-3i\sqrt{2}$; $x_2 = -3-i\sqrt{2}$, $y_2 = 10+3i\sqrt{2}$.

18. $x_1 = y_2 = \dfrac{ab\,(b-\sqrt{2a^2-b^2})}{b^2-a^2}$; $x_2 = y_1 = \dfrac{ab\,(b+\sqrt{2a^2-b^2}}{b^2-a^2}$. **19.** $x=4$, $y=0$.

20. $x_1 = y_2 = \tfrac{1}{2}(l+\sqrt{2a^2-l^2})$; $y_1 = x_2 = \tfrac{1}{2}(l-\sqrt{2a^2-l^2})$.

21. $x_1 = \tfrac{1}{2}a\,(2-ab-\sqrt{a^2b^2+4})$, $y_1 = \tfrac{1}{2}a\,(2+ab+\sqrt{a^2b^2+4})$; $x_2 = \tfrac{1}{2}a(2-ab+\sqrt{a^2b^2+4})$, $y_2 = \tfrac{1}{2}a\,(2+ab-\sqrt{a^2b^2+4})$.

22. $x_1 = \dfrac{b^2-a^2-2ab+\sqrt{(a^2+b^2)^2-8ab(b^2-a^2)}}{2\,(a-b)}$, $y_1 = \dfrac{a^2-b^2-2\,ab+\sqrt{(a^2+b^2)^2-8ab\,(b^2-a^2)}}{2\,(a-b)}$;

$x_2 = \dfrac{b^2-a^2-2ab-\sqrt{(a^2+b^2)^2-8ab(b^2-a^2)}}{2\,(a-b)}$, $y_2 = \dfrac{a^2-b^2-2ab-\sqrt{(a^2+b^2)^2-8\,ab\,(b^2-a^2)}}{2\,(a-b)}$.

23. $x_1 = \dfrac{3a+\sqrt{a^2-8b}}{2(a^2+b)}$, $y_1 = \dfrac{a-\sqrt{a^2-8b}}{2b}$; $x_2 = \dfrac{3a-\sqrt{a^2-8b}}{2(a^2+b)}$, $y_2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2-8b}}{2b}$.

24. 77 i 91, albo —77 i —91. **25.** 27 i 23. **26.** 75, albo —46. **27.** 32.

28. $\dfrac{3}{4}$, albo $\dfrac{-0{\cdot}6}{-1{\cdot}4}$. **29.** Podstawę należy powiększyć o $(-39+\sqrt{2949})$ *cm*, a wysokość zmniejszyć o $(-51+\sqrt{2949})$ *cm*. **30.** $\dfrac{h}{b^2+h^2}(b^2+\sqrt{d^2(b^2+h^2)-b^2h^2})$,

$\dfrac{b}{b^2+h^2}(h^2-\sqrt{d^2(b^2+h^2)-b^2h^2}$; $\dfrac{h}{b^2+h^2}(b^2-\sqrt{d^2(b^2+h^2)-b^2h^2}$, $\dfrac{b}{b^2+h^2}(h^2+\sqrt{d^2(b^2+h^2-b^2h^2})$.

31. Podstawa 12·8 *m* lub 0·8 *m*, wysokość odpowiednio 1·6 *m* lub 25·6 *m*.

32. Wysokość 9 *dm* lub 5 *dm*, podstawa odpowiednio 6 *dm* lub 10 *dm*.

33. $x_1 = y_1 = 2$; $x_2 = -\tfrac{3}{26}$, $y_2 = -1\tfrac{4}{17}$. **34.** $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -\tfrac{45}{91}$, $y_2 = -20\tfrac{1}{2}$.

35. Znosząc mianowniki, dochodzimy do układu dwu równań stopnia 2-go, który przy wartościach niewiadomych różnych od zera jest równoznaczny z układem danych dwu równań ułamkowych; $x = \tfrac{1}{2}$, $y = \tfrac{1}{2}$. **36.** $x_1 = -2\sqrt{3}$, $y_1 = 3\sqrt{3}$; $x_2 = 2\sqrt{3}$, $y_2 = -3\sqrt{3}$.

37. $x_1 = 3+2\sqrt{3}$, $y_1 = 1+\sqrt{3}$; $x_2 = 3-2\sqrt{3}$, $y_2 = 1-\sqrt{3}$.

38. $x_1 = \tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{39})$, $y_1 = \tfrac{1}{2}(3+i\sqrt{39})$; $x_2 = \tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{39})$, $y_2 = \tfrac{1}{2}(3-i\sqrt{39})$.

39. $x_1 = 1+i\sqrt{3}$, $y_1 = 3+i\sqrt{3}$; $x_2 = 1-i\sqrt{3}$, $y_2 = 3-i\sqrt{3}$. **41.** $\tfrac{1}{2}\sqrt{2\,(a^2+b^2)}$.

42. $\dfrac{p}{h+2p}(\sqrt{p^2-2ph-h^2}+p+h)$, $\dfrac{p}{h+2p}(\sqrt{p^2-2ph-h^2}-p-h)$. **43.** 3 *m*, 4·2 *m*.

44. 4 mile, 13 dni. **45.** 4%, 5 lat. **46.** 12000 zł. i 5% lub 10000 zł. i 6%.

47. 1430 zł., 10 lat. **49.** $x_1 = x_2 = \tfrac{1}{8}$, $y_1 = \tfrac{5}{8}$, $y_2 = -\tfrac{3}{8}$. **50.** $x_1 = 73$, $y_1 = 57$; $x_2 = -73$, $y_2 = -57$.

51. $x_1 = y_2 = 1$, $y_1 = x_2 = 3$. **52.** $x_1 = 5$, $y_1 = 4$; $x_2 = -5$, $y_2 = -4$.

53. $x_1 = 4{\cdot}8$, $y_1 = 2{\cdot}6$; $x_2 = -2{\cdot}6$, $y_2 = -4{\cdot}8$; $x_3 = -5$, $y_3 = -3$; $x_4 = 3$, $y_4 = 5$.

54. $x_1 = 3$, $y_1 = 4$; $x_2 = -3$, $y_2 = -4$; $x_3 = 6\tfrac{9}{11}$, $y_3 = 1\tfrac{5}{11}$; $x_4 = -6\tfrac{9}{11}$, $y_4 = -1\tfrac{5}{11}$.

55. $x_1 = 2$, $y_1 = 2-\sqrt{2}$; $x_2 = -2$, $y_2 = 2+\sqrt{2}$. **56.** $x_1 = 3\sqrt{2}$, $y_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$, $y_2 = -\sqrt{2}$.

57. $x_1 = y_2 = 2$, $y_1 = x_2 = 4$; $x_3 = y_4 = -\tfrac{1}{6}(13+\sqrt{377})$, $y_3 = x_4 = -\tfrac{1}{6}(13-\sqrt{377})$.

58. $x_1 = 18$, $y_1 = 6$; $x_2 = -18$, $y_2 = -6$; $x_3 = 6i$, $y_3 = -18i$; $x_4 = -6i$, $y_4 = 18i$.

59. $x_1 = y_2 = 9$, $y_1 = x_2 = 4$; $x_3 = y_4 = 22+i\sqrt{141}$, $y_3 = x_4 = 22-i\sqrt{141}$.

60. $x_1 = y_1 = 5$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$; $x_3 = 4+i\sqrt{71}$, $y_3 = \tfrac{1}{2}(-3+i\sqrt{71})$ $x_4 = 4-i\sqrt{71}$ $y_4 = -\tfrac{1}{2}(3+i\sqrt{71})$.

61. $x_1 = y_2 = 2$, $y_1 = x_2 = 8$. **62.** $x_1 = y_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\,(\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b})$ $y_1 = x_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\,(\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b})$

63. $x_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2a-b}}$ $y_1 = \dfrac{a-b}{\sqrt{2a-b}}$ $x_2 = -\dfrac{a}{\sqrt{2a-b}}$ $y_2 = -\dfrac{a-b}{\sqrt{2a-b}}$

64. $x_1 = y_2 = \tfrac{1}{2}(a-b+\sqrt{(a-b)(a+3b)})$, $y_1 = x_2 = \tfrac{1}{2}(a-b-\sqrt{(a-b)(a+3b)})$.

65. $x_1 = \dfrac{a-\sqrt{4b-3a^2}}{2\,(a^2-b)}$, $y_1 = -\dfrac{2\sqrt{4b-3a^2}}{4b-3a^2}$; $x_2 = \dfrac{a+\sqrt{4b-3a^2}}{2(a^2-b)}$, $y_2 = \dfrac{2\sqrt{4b-3a^2}}{4b-3a^2}$.

66. $x_1 = \dfrac{2a+ab+1}{1-ab}$, $y_1 = \dfrac{2b+ab+1}{1-ab}$; $x_2 = \dfrac{ab-2b+1}{1-ab}$, $y_2 = \dfrac{ab-2a+1}{1-ab}$.

67. $x_1=\frac{ab+\sqrt{4ab+(a+b-ab)^2}}{a+b}$, $y_1=\frac{a-b}{a+b}$, $x_2=\frac{ab-\sqrt{4ab+(a+b-ab)^2}}{a+b}$, $y_2=-\frac{a-b}{a+b}$.

68 Układ niemożliwy. **69.** $\frac{5}{7}$, albo $\frac{-1\cdot5}{0\cdot5}$. **70.** $7\,m$, $9\frac{1}{3}\,m$. **71.** $x=4\,m$, $y=3\,m$.

72. Promień walca $3\,m$, lub $\frac{11}{5}\sqrt{5}\,m$, wysokość odpowiednio $8\,m$ lub $\frac{4}{5}\sqrt{5}\,m$.

73. $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2ah}+\sqrt{a^2-ah})$, $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2ah}-\sqrt{a^2-2ah})$. **74.** α) $\frac{1}{2}a\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$, $\frac{1}{2}b\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$; β) $\frac{1}{2}a\sqrt{2(3-\sqrt{5})}$, $\frac{1}{2}b\sqrt{2(3-\sqrt{5})}$. **75.** $x_1=y_2=1$, $y_1=x_2=3$.

76. $x_1=7$, $y_1=1$; $x_2=-1$, $y_2=-7$. **77.** $x_1=y_2=4$, $y_1=x_2=6$. **78.** $x_1=y_2=8$, $y_1=x_2=4$.

79. $x_1=y_2=\frac{1}{4}(9+\sqrt{73})$, $y_1=x_2=\frac{1}{4}(9-\sqrt{73})$. **80.** $x^3=8$, $y^3=1$. **81.** $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=48$, $y_2=\frac{1}{2}$; $x_3=\frac{5}{59}(57+7i\sqrt{24})$, $y_3=\frac{1}{5}(-1+i\sqrt{24})$, $x_4=\frac{5}{59}(57-7i\sqrt{24}$, $y_4=\frac{1}{5}(-1-i\sqrt{24})$.

82. $x_1=\sqrt{3}$, $y_1=2\sqrt{3}$; $x_2=-\sqrt{3}$, $y_2=-2\sqrt{3}$; $x_3=y_4=i\sqrt{3}$, $y_3=x_4=-i\sqrt{3}$.

83. $x_1=y_2=b+\sqrt{a^2-2b^2}$, $y_1=x_2=b-\sqrt{a^2-2b^2}$. **84.** $x_1=y_2=\frac{1}{2}a\left(1+\sqrt{\frac{b-a}{3a+b}}\right)$, $y_1=x_2=\frac{1}{2}a\left(1-\sqrt{\frac{b-a}{3a+b}}\right)$. **85.** $x=\frac{\pm\sqrt{b}+\sqrt{2a-b}}{\sqrt[6]{2\sqrt{2a-b}}}\alpha\lambda$, $y=\frac{\pm\sqrt{b}-\sqrt{2a-b}}{\sqrt[6]{2\sqrt{2a-b}}}\alpha\lambda$,

gdzie z podwójnych znaków górne odpowiadają sobie a dolne sobie, a każdym razem może być $\lambda=1, 2, 3$, zaś $\alpha^3=1$. **86.** $x_1=y_2=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{8(a+b)}}$, $y_1=x_2=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{8(a+b)}}$. **87.** Przy a różnem od 0 układ niemożliwy; przy $a=0$ jest $y=-x$ (a więc w przypadku szczególnym $x=0$, $y=0$). **88.** 4, 7.

89. Gdy r jest promieniem kuli, to szukana płaszczyzna jest oddalona od środka kuli o $\frac{1}{2}r(\sqrt{9-8a}-1)$. **90.** Podstawy walca są oddalone od środka kuli o $\frac{1}{2}r(\sqrt{3}-1)$.

91. $\frac{h_2}{h_1^2-h_2^2}\left\{h_1\sqrt{a^2-h_2^2}-h_2\sqrt{a^2-h_1^2}\right\}$, $\frac{h_2}{h_1^2-h_2^2}\left\{h_1\sqrt{a^2-h_2^2}+h_2\sqrt{a^2-h_1^2}\right\}$. **92.** $3\,m$ i $4\,m$.

102. $x_1=1, y_1=2$; $x_2=-1, y_2=-2$; $x_3=-\frac{19}{8}\sqrt{2}$, $y_3=\frac{9}{8}\sqrt{2}$; $x_4=\frac{19}{8}\sqrt{2}$, $y_4=-\frac{9}{8}\sqrt{2}$.

103. $x_1=y_1=1$, $x_2=y_2=-1$; $x_3=\sqrt{\frac{50}{39}}$, $y_3=4\sqrt{\frac{2}{39}}$; $x_4=-\sqrt{\frac{50}{39}}$, $y_4=-4\sqrt{\frac{2}{39}}$.

104. $x_1=-3$, $y_1=-4$; $x_2=4\frac{1}{2}$, $y_2=3\frac{1}{2}$. **105.** $x_1=y_2=5$, $y_1=x_2=3$; $x_3=\frac{217}{\sqrt{209}}$, $y_3=\frac{133}{\sqrt{209}}$; $x_4=-\frac{217}{\sqrt{209}}$, $y_4=\frac{139}{\sqrt{209}}$. **106.** $x_1=18, y_1=2$; $x_2=-18$; $y_2=-2$. **107.** $x_1=8$, $y_1=2$; $x_2=-44\sqrt[3]{\frac{4}{507}}$, $y_2=\sqrt{\frac{6}{13}}$. **108.** $x=\pm\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $y=\pm\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $z=\pm\frac{cd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ gdzie znaki górne odpowiadają sobie a dolne sobie. **109.** $x_1=0, y_1=b, z_1=c$; $x_2=2a$, $y_2=-b$, $z_2=-c$. **110.** $x=\pm\frac{n-m+p}{\sqrt{2(n+m+p)}}$, $y=\pm\frac{m-n+p}{\sqrt{2(n+m+p)}}$, $z=\pm\frac{m+n-p}{\sqrt{2(n+m+p)}}$, gdzie znaki górne odpowiadają sobie a dolne sobie. **111.** $x=\pm\sqrt{\frac{(p+r-q)(p+q-r)}{q+r-p}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{(p+q-r)(q+r-p)}{p-q+r}}$, $z=\pm\sqrt{\frac{(p-q+r)(q+r-p)}{p+q-r}}$, gdzie znaki górne odpowiadają sobie a dolne sobie. **112.** $x_1=-\frac{1}{5}, y_1=\frac{1}{4}, z_1=\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{3}{5}$, $y_2=-1, z=-2$.

113. $x_1=4, y_1=6, z_1=3$; $x_2=9, y_2=2+i\sqrt{14}, z_2=2-i\sqrt{14}$. **114.** $x_1=7$, $y_1=24$, $z_1=25$; $x_2=-1$, $y_2=0$, $z_2=1$. **115.** $x_1=4$, $y_1=3$, $z_1=2$; $x_2=-4$, $y_2=-3$, $z_2=-2$.

116. $x_1=3$, $y_1=1$, $z_1=2$; $x_2=1+\sqrt{10}$, $y_2=2-\sqrt{10}$, $z_2=-4$. **117.** $x_1=x_2=2$, $y_1=y_2=3$, $z_1=u_2=1$, $u_1=z_2=3$; $x_3=x_4=4$, $y_3=y_4=1$, $z_3=u_4=2-\sqrt{3}$, $u_3=z_4=2+\sqrt{}$.

118. Przeciwprostokątna $\frac{p^2-m^2}{p}$, przyprostokątne: $\frac{p^2+m^2+\sqrt{p^4-6p^2m^2+m^4}}{2p}$, $\frac{p^2+m^2-\sqrt{p^4-6p^2m^2+m^4}}{2p}$. **119.** Gdy $\sqrt{a^2+4ap-4p^2}=\gamma$, to przeciwprostokątna $\frac{1}{4}(2p+a-\gamma)$,

przyprostokątne: $\frac{1}{4}(2p-a+\gamma\sqrt{2a(a+8p)-2(a+6p)\gamma})$, $\frac{1}{4}(2p-a+\gamma-\sqrt{2a(a+8p)-2(a+6p)\gamma})$.
120. $\frac{2}{3}\sqrt{2m_2^2+2m_3^2-m_1^2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{2m_1^2+2m_3^2-m_2^2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{2m_1^2+2m_2^2-m_3^2}$. **121.** $864\,dm^3$.
122. $\frac{1}{3}\sqrt{s^2+d^2}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{s^2+d^2}+\sqrt{\frac{2}{3}(2d^2-s^2)}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{s^2+d^2}-\sqrt{\frac{2}{3}(2d^2-s)}\right)$.
123. $\sqrt{\frac{b}{c}(a^2+bc)}$, $\sqrt{\frac{c}{b}(a^2+bc)}$, $b+c$. **124.** Podstawa $\sqrt{3s}$, wysokość $\frac{2}{3}\sqrt{3s}$, bok pozostały $\frac{5}{6}\sqrt{3s}$. **125.** $(\pm10):(\pm25):(\pm45):(\pm55)$, znaki górne odpowiadają sobie a dolne sobie. **126.** Albo $21:9=14:6$, albo też $6:14=9:21$. **127.** I. 24 osoby po 4·2 zł., II. 88 osób po 3 zł., III. 254 osób po 1·2 zł. **128.** $\frac{1}{9}$. **129.** 3. **130.** 7. **131.** $\frac{4}{9}$.
132. $-2\frac{1}{24}$. **133.** 0, $1\frac{23}{57}$. **134.** 0. $1\frac{3}{37}$. **135.** 8. **136.** 1. **137.** Równanie niemożliwe.

152*. $2+\cfrac{1}{4+\dots}$ **153.** $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\dots}}}$ **154.** $3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\dots}}$ **155.** $q_2=8$.

156. $q_2=1$, $q_3=10$. **157.** $q_2=1$, $q_9=10$. **158.** $q_2=2$, $q_4=12$. **159.** $q_2=1$, $q_5=12$.
160. $q_2=1$, $q_5=16$. **161.** $q_2=2$. $q_3=28$. **162.** $(q_1=0)$; $q_2=1$. **163.** $q_3=1$.
164. $q_2=3$. **165.** $q_2=5$, $q_4=3$. **166.** $q_2=3$, $q_4=7$. **167.** $q_2=1$. $q_6=9$.

168. $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\dots}}}}}}$ **169.** $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\dots}}}}}}}$ **170.** $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\dots}}}}}}}$

171. $q_6=6$, $q_7=1,\dots$ **172.** $q_6=9$, $q_7=1,\dots$ **173.** $q_6=9$, $q_7=1,\dots$ **174.** $q_5=2,\dots$
175. $\frac{L_5}{M_5}=\frac{1257}{379}$. **180.** $\frac{25077}{7561}$. **181—183.** Sprawdzić, rozwijając otrzymaną liczbę na ułamek ciągły. **184** $\frac{a^3+6a^2+13a+10}{a^4+6a^3+14a^2+15a+7}$. **185.** $\frac{48n^3+188n^2+252n+115}{48n^4+236n^3+464n^2+425n+151}$
186. $\frac{1}{1925}$, $-\frac{1}{4895}$, $\frac{1}{12816}$, $-\frac{1}{33552}$. **187.** $\frac{38}{17}$, $\frac{682}{305}$. **188.** $\frac{127}{48}$. **189.** $\frac{3970}{1197}$. **190.** $\frac{268}{65}$.
191. $\frac{1920}{601}$. **192.** $\frac{146}{485}$. **193.** $\frac{292}{485}$. **194.** $\frac{339}{485}$. **195.** α) $\frac{1}{8730}$, β) $\frac{1}{228}$, γ) $\frac{1}{9006}$.
196. $x=1+\sqrt{2}$. **197.** $x=\frac{1}{3}(2+\sqrt{10}$. **198.** $x=\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$. **199.** $x=\frac{1}{14}(15+\sqrt{365})$.
200. $x=\frac{1}{14}(9+\sqrt{221})$. **201.** $x=\frac{1}{10}(7+3\sqrt{11})$. **202.** $x=\frac{1}{56}(59+\sqrt{5777})$. **203.** $x=\frac{1}{2}(5+\sqrt{3})$.
204. $x=\frac{1}{14}(-13+\sqrt{1093})$. **205.** $x=\frac{1}{2}(3+\sqrt{6})$. **206.** $x=\frac{1}{5}(10+\sqrt{15})$.
207. $x=\frac{2}{7}(22+\sqrt{15})$. **208.** $x=\frac{1}{10}(19+\sqrt{21})$. **209.** $x=\frac{1}{3}(9-\sqrt{15})$. **210.** $x=\frac{1}{10}(-1+\sqrt{21})$.
211. $x=4, y=1$. **212.** $x=11, y=1$. **213.** $x=0, y=-5$. **214.** $x=2, y=1$. **223.** $x=2+5t$, $y=1+3t$. **224.** $x=2+7t, y=3+11t$. **225.** $x=-3-6t, y=3+5t$. **227.** $x=-5-7t, y=5+6t$.
228. $x=12-4t, y=-12+5t$. **229.** $x=-3-11t, y=3+8t$. **230.** $x=-2+11t$, $y=-2+10t$.
231. $x=5+13t, y=4+11t$. **248.** $x=28-41t, y=-12+29t$. **249.** $x=2, y=1$; niema; $x=9, y=8$; $x=5, y=4$. **250.** $x=3, y=-2$; $x=2, y=-1$; $x=4, y=-2$; $x=8$, $y=-5$.
251. $x=3, y=2$; $x=14, y=9$; i t. d. **252.** $x=7, y=6$; $x=13, y=13$; i t. d.
253. $x=2$, $y=1$; $x=16$, $y=11$; i t. d. **261.** $x=16, y=9$; $x=31, y=2$; $x=1, y=16$.
262. $x=4, y=46$; $x=11, y=31$; $x=18, y=16$; $x=25, y=1$. **263.** $x=5, y=16$; $x=18$, $y=11$; $x=31$, $y=6$; $x=44$, $y=1$. **264.** $x=29$, $y=1$; $x=22$, $y=5$: $x=15$, $y=9$; $x=8$, $y=13$, $x=1, y=17$. **272.** $x=4, y=8$. **273—278.** Niema. **279.** Albo koni 9, wołów 13, albo koni 42, wołów 60, i t. d. **280.** α) $13+20t$; β) $270+370t$. **281.** $\frac{5}{9}$ i $\frac{7}{13}$. **282.** 108,

*) Iloraz niezupełny, stanowiący peryod, albo też pierwszy i ostatni z ilorazów niezupełnych, tworzących peryod, są wydrukowane pochyłemi cyframi.

225, 342, 459, 576, 693, 810, 927. **283.** 576 i 424. **284.** 40 i 3. **285.** $x=16$, $y=5$; $x=28$, $y=12$. **286.** 2-u i 17, 9-u i 9, 16-u i 1—a. **287.** 16. **288.** 73 orzechy. **289.** 46 i 6, 25 i 25, 4 i 44. **290.** 24 i 1, 11 i 7. **291.** 13 i 1, 4 i 8. **292.** 34, albo 94, albotež 154. **293.** 785 drzewek. **294.** 5 razy i 8 razy. **295.** α) Po 5-u obrotach pierwszego koła a po 6-u drugiego. β) Niemożliwe. γ) Po $2\frac{1}{2}$ obrotu pierwszego a 3-ch drugiego. δ) Niemożliwe. **296.** 19 groszy na złoty, a 17 pieniążków na grosz. **297.** Żadnym. **298.** Nie może. **299.** $x=-34-t$, $y=-15-5t$, $z=4t$. **300.** $x=4-t$, $y=2t$, $z=8-t$. **301.** $x=7-3t$, $y=8-18t$, $z=9+3t$. **302.** $x=9+19t$, $y=8+39t$, $z=7+36t$. **303.** $x=5+260t$, $y=4+368t$, $z=3+355t$. **304.** Niema rozwiązań całkowitych. **305.** α) $x=1, y=6, z=5$; $x=2, y=4, z=6$; $x=3$, $y=2$, $z=7$. β) $x=7, y=8$, $z=9$. γ) Nieskończenie wiele: $x=5, y=4, z=3$; $x=265, y=372, z=358$; i t. d. **306.** α) $x=5$, $y=4, z=3$; $x=265, y=372, z=358$; $x=525, y=740, z=713$. β) Dwadzieścia pięć: $x=9, y=8, z=7$; . . .; $x=484, y=983, z=907$. **307.** $x=62, y=101, z=111$; $x=85, y=150, z=164$. **308.** Niema. **309.** $\frac{1}{7}+\frac{6}{11}+\frac{2}{13}$. **310.** Trzynastu: 5 sztuk po 5 ct., 104 po $6^1/_2$ ct., 11 po 9 ct.; . . .; 65 po 5 ct., 8 po $6^1/_2$ ct., 47 po 9 ct. **311.** Pięciu sposobami: 13, 6, 1;...; 1, 14, 5. **312.** $x=-z+2t$, $y=10+z-5t$. **313.** $x=4t, y=2z-3t$. **314.** $x=20+3y+7t, z=1-2y-3t$. **315.** $x=3-21y+35t$, $z=5+9y-16t$. **316.** α) $x=1$, $y=6$, $z=1$; $x=1$, $y=3$, $z=3$; $x=2, y=2, z=2$; $x=3, y=1, z=1$. β) Nieskończenie wiele: $x=4$, $y=1$, $z=2$; i t. d. β) Siedemnaście: $x=16$, $y=1, z=2$;...; $x=1$, $y=10, z=2$. δ) $x=3, y=5, z=2$. **317.** Dziewięć rozwiązań: $x=6$, $y=2$, $z=3$; . . .; $x=30, y=90, z=51$. **318.** $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{6}{7}$. **319.** Czterema. **320.** $y=14-5x-u, z=2x-u$. **321.** $x=32-43t-5z$, $y=17t-8+2z$, $u=41t-10+3z$. **322.** Dziewięciu sposobami: 8, 1, 3, 5;...; 2, 7, 6, 2. **323.** α) 92, β) 4·6, γ) 2·252, δ) 446, ε) $5177\frac{1}{4}$, ζ) $-221\frac{3}{14}$, η) $-37\frac{3}{4}$, θ) —13·7. **324.** 960 zł. **325.** 3·28 zł. **326.** 107·888. **327.** ε) 23875, 6537·5, 869·5, 44750, $59906\frac{1}{4}$, $45678\frac{4}{7}$, $-8395\frac{5}{6}$, —937·5. **328.** ε) 12375000, ζ) 348000000. **332.** 62 *km*. **333.** 210. **334.** α) $a_n = 1{\cdot}163$, $S_n = 10{\cdot}92$; β) $a_n = -19{\cdot}9771$, $S_n = -466{\cdot}0512$; γ) $a_n = 20x-11$, $S_n = 77x-35$; δ) $a_n = 26x$, $S_n = 126x+26y$. **335.** α) $a_1=9$, $S_n = 363$; β) $a_1=\frac{1}{2}$, $S_n = 42\frac{3}{4}$; γ) $a_1=2034$, $S_n = 306525$; δ) $a_1=50$, $S_n = 20564$. **336.** α) $r=4$, $S = 403$; β) $r=0.2$, $S_n = 24{\cdot}2$; γ) $r=\frac{1}{3}$, $S_n = 7739\frac{2}{3}$; δ) $r=3{\cdot}159$, $S_n = 1859{\cdot}9328$. **337.** α) $n=12$, $S_n = 1167$; β) $n=13$, $S_n = 54{\cdot}196$; γ) $n=50$, $S_n = 273\frac{23}{24}$; δ) $n=35$, $S_n = 1960$. **338.** α) $r=\frac{2}{3}$, $n=28$; β) $r=-8$, $n=15$; γ) $r=-0{\cdot}0007$, $u=84$; δ) $r=41{\cdot}5$, $n=20$. **339.** α) $a_n = 209$, $r=1\frac{3}{8}$; β) $a_n = 408$, $r=9$; γ) $a_n = 144{\cdot}688$, $r=14{\cdot}5344$; δ) $a_n = 168{\cdot}55$, $r=7$ **340.** α) $a_1=7$, $r=5$; β) $a_1=-10\frac{7}{20}$, $r=\frac{29}{40}$; γ) a_1-10, $r=0{\cdot}5$; δ) $a_1=0{\cdot}32$, $r=0{\cdot}35$. **341.** α) $a_1=2$, $a_n = 32$; β) $a_1=32150$, $a_n = 0$; γ) $a_1=117$, $a_n=116$; δ) $a_1=3331{\cdot}5$, $a_n = 2825{\cdot}5$. **342.** α) $a_n = 15\frac{3}{4}$, $n=30$; β) $a_n = 605$, $n=200$; γ) $a_n = -21\frac{3}{4}$, $n=25$; δ) $a_n = 8\frac{1}{6}$, $n=17$. **343.** α) $a_1=7$, $n=15$; β) $a_1=3{\cdot}14$, $n=58$; γ) $a_1=1{\cdot}135$, $n=23$; δ) Zadanie niemożliwe. **344.** 55. **345.** 53, 2. **346.** W ciągu 9-u sek. **347.** —3, —3. **348.** W ciągu 16-u mies., 48 zł. **349.** Albo 20, 16 i 12; albotež 12, 16 i 20. **350.** 5, 7, 9. **351.** 5. **352.** po 11-u dniach. **353.** Po 8-u sekundach, w odległości 60 *m*. **354.** Po 9-u sekundach. **355.** 12, 136, 92. **356.** Albo $-\frac{1}{2}$ i 27, albotež 4 i 12. **357.** Albo 14, 24, 34, albotež 34, 24, 14. **358.** Albo 4 i 6, albotež $18\frac{2}{3}$ i $2\frac{2}{5}$. **359.** 468. **360.** 25. **361.** $\dfrac{nd(3n-4)+d}{2(n-1)}$ m od A_1. **362.** Albo 9 i 71, albo 30 i 40, albo —12, 102,... **363.** $9\frac{1}{3}$, $-23\frac{11}{12}$. **364.** Pierwszy wyraz jest 7, jeden postęp ma wyrazów 9, drugi 14, a różnice tych postępów są 4 i 9. **365.** Albo 1, 2, 3, 4, albo 4, 3, 2, 1, albo $\frac{1}{2}(5-\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(7-\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(9-\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(11-\sqrt{145})$, albotež $\frac{1}{2}(5+\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(7+\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(9+\sqrt{145})$, $\frac{1}{2}(11+\sqrt{145})$. **366.** (Naprzód szukamy wyrazu a_3). Albo —12, —4, 4, 12, 20, albo 20, 12, 4, —4, —12, albo $4-4i\sqrt{11}$, $4-2i\sqrt{11}$, 4, $4+2i\sqrt{11}$, $4+4i\sqrt{11}$, albotež, $4+4i\sqrt{11}$, $4+2i\sqrt{11}$, 4, $4-2i\sqrt{11}$, $4-4i\sqrt{11}$. **367.** 7, 385. **368.** 8, $\frac{2}{3}$. **369.** 72, 111. **370.** 174, $\frac{13}{175}$. **371.** Albo $\frac{5}{6}$, albotež $-\frac{5}{6}$. **372.** Albo 14, 1, –1, albotež 1, 14, 1. **373.** Albo $-6\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, albotež $9\frac{1}{2}$, $-\frac{7}{10}$, —407·04. **374.** Znaleźć najpierw wyraz środkowy. Albo 0, 6, 1, albo 6, 0, —1, albo $3-3i\sqrt{\frac{287}{17}}$, $3+3i\sqrt{\frac{287}{17}}$, $i\sqrt{\frac{287}{17}}$, albotež $3+3i\sqrt{\frac{287}{17}}$, $3-3i\sqrt{\frac{287}{17}}$, $-i\sqrt{\frac{287}{17}}$. **376.** 40353607 *hl.*

377. $(a-b)\left(\frac{a-b}{a}\right)^{19}$. **385.** $\frac{c^5-a^5}{c^4(a-c)}\sqrt{(c^2-a^2)}$. **386.** α) $a(\sqrt{2^n}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{2^{5-n}}$, β) $a^2(2_n-1)2^{1-n}$.
387. 137256. **388.** 20, 184467. **389.** α) $a_n=413343$, $S_n=620011$; β) $a_n=0{\cdot}08203125$, $S_n=6{\cdot}97265625$; γ) $a_n=3676\frac{17}{32}$, $S_n=2857\frac{31}{32}$; δ) $a_n=81$, $S_n=6505$. **390.** α) $a_1=7$, $S_n=620011$; β) $a_1=1024$, $S_n=99999744$; γ) $a_1=2\frac{1}{2}$, $S_n=1\frac{307}{486}$; δ) $a_1=8\frac{1}{2}$, $S_n=135098\frac{399}{2048}$.
391. α) $q=2$, $S_n=2047\frac{7}{8}$; β) $q=5$, $S_n=7629394531$; γ) albo $q=2$, $S_n=65534$, alboteż $q=-2$, $S_n=43690$; δ) albo $q=3$, $S_n=193710244$, alboteż $q=-3$, $S_n=96855122$.
392. α) $n=5$, $S_n=13\frac{3}{16}$; β) $n=5$, $S_n=379687$; γ) $n=6$, $S_n=5\frac{4031}{5400}$; δ) $n=5$, $S_n=\frac{[b^5-a^5(1+x)^5](1-x)}{a^2b[b-a(1+x)](1+x)^2}$. **393.** α) $q=3$, $n=9$; β) $q=5$, $n=8$; γ) $q=2$, $n=25$; δ) $q=-4$, $n=7$. **394.** α) Albo $q=1\frac{1}{2}$, $a_n=45$, alboteż $q=-2\frac{1}{2}$, $a_n=125$; β) $q=-1$, $a_n=2$; γ) $q=1$, $a_n=105$; δ) $q=\frac{x}{y}$, $a_n=\left(\frac{x}{y}\right)^6$. **395.** α) Albo $a_1=54$, $q=3\frac{1}{3}$, albo też $a_1=1014$, $q=-\frac{10}{13}$; β) $a_1=-10$, $q=-1$; γ) $a_1=105$, $q=1$; δ) $a_1=1$, $q=-\left(\frac{a}{b}\right)$. **396.** α) $a_1=3$, $a_n=352947$; β) $a_1=6$, $a_n=1\frac{217}{512}$; γ) $a_1=96$, $a_n=\frac{3}{8}$; δ) $a_1=3$, $a_n=9642{\cdot}58$.
397. α) $a_n=78125$, $n=7$; β) $a_n=1{\cdot}42576$, $n=12$; γ) $a_n=1{\cdot}87298$, $n=16$; δ) $a_n=1{\cdot}63862$, $n=20$. **398.** α) $a_1=1$, $n=8$; β) $a_1=4$, $n=10$; γ) $a_1=1{\cdot}05$, $n=30$; δ) $a_1=1{\cdot}1236$, $n=33$.
399. Albo $2\frac{1}{2}$, 10, 40,..., albo też $1\frac{2}{3}$, —10, 60,... **400.** Albo 9, 18, 36, 72, albo też 9, —27, 81, —243. **401.** Albo 12, 24, 48, 96, albo też —192, —96, —48, —24. **402.** $a_1=3$, $q=2$.
403. Albo $\frac{8}{27}$, $-\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$,... albo też $-\frac{125}{27}$, $\frac{25}{9}$, $-\frac{5}{6}$,... **404.** Albo $a_1=1$, $q=3$, albo $a_1=9$, $q=\frac{1}{3}$, albo $a_1=8+\sqrt{55}$, $q=\frac{1}{3}(-8+\sqrt{55})$, albo też $a_1=8-\sqrt{55}$, $q=\frac{1}{3}(-8-\sqrt{55})$. **405.** Albo 16, 8, 4, albo też 4, 8, 16. **406.** Albo 4, 16, 64, 256, 1024, albo też 1024, 256, 64, 16, 4.
407. Albo $a_1=-4$, $q=3$, $n=7$, albo też $a_1=-2916$, $q=\frac{1}{3}$, $n=7$. **408.** $a_1=1$, $q=\frac{1}{2}$.
409. Albo $x=12+8t$, $y=5-7t$, albo też $x=-11-9t$, $y=-4-8t$. **410.** Albo 421, albo też —124. **411.** 5 obrotów. **412.** Po 6-u latach. **413.** Pierwiastki: 3, —6, 12, zaś $\beta=-54$.
414. Dwa promienie koła najmniejszego. **415.** Albo —6, 6, 18 albo też 10, 6, 2.
416. Albo 18, 12, 6 i 9, 27, 81, albo też —54, 12, 78 i 81, 27, 9. **417.** Albo 2, 4, 8, 12, albo też $12\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$. **418.** 2, 3, 4, 5, i 1, 2, 4, 8. **419.** Albo $12\frac{1}{2}$, $13\frac{1}{6}$, $13\frac{5}{6}$,... i $\frac{2}{3}$, $\frac{25}{3}$, $\frac{625}{6}$..., albo też 2, 5, 8,... i 3, 6, 12,.... **420.** Albo $r=18$, $q=4$, albo też $r=-36$, $q=-2$.
421. 2, 4, 6, 8,... i 2, 6, 18, 54,... **422.** Albo 1, 2, 4,... i 2, 6, 18,... i 4, 16, 44,... albo też $\frac{192}{31}$, $-\frac{168}{31}$. $\frac{147}{31}$,... i $\frac{384}{31}$, $\frac{48}{21}$, $\frac{6}{31}$,... i $\frac{768}{31}$, $\frac{864}{31}$, $\frac{972}{31}$,... **423.** $q=2$, $S_n=127\frac{127}{128}$.
424. $26.244\sqrt[18]{3}$. **425.** Trzy liczby $\frac{5}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{4}$. **426.** 9 liczb, $q=3$. **427.** Albo $\frac{1}{4}$ i 2, albo też 8 i $\frac{1}{2}$. **428.** Albo 3 i 2, albo też 48 i $\frac{1}{2}$. **429.** Albo 16, 8, 4, albo też 1, 2, 4.
430. Albo 5 i $\sqrt{5}$ albo 5 i $-\sqrt{5}$, albo $\frac{245}{3}$ i $i\sqrt{\frac{11}{7}}$, albo też $\frac{245}{3}$ i $-i\sqrt{\frac{11}{7}}$. **435.** $a_1=4$, $q=-\frac{3}{5}$, $n=\infty$. **436.** $\frac{c}{c-a}\cdot\sqrt{c^2-a^2}$. **437.** α) $4a(2+\sqrt{2})$, β) $2a^2$. **438.** α) $a(2+\sqrt{2})(4+\frac{1}{2}\pi)$, β) $a^2(2+\frac{1}{2}\pi)$. **439.** α) $\frac{5}{12}a\sqrt{3}$, β) $\frac{11}{96}a^2\pi$. **440.** $4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$. **441.** $6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.
442. $\frac{na^{n+1}-(n+1)a^n+1}{(a-1)^2}$. **443.** $\frac{a^{n+1}(n+1)-a^n(n+2)-a+2}{(a-1)^2}$.
444. $\frac{a^{n+1}(n+2)-a^n(n+3)-2a+3}{(a-1)^2}$. **445.** $2\{1+2x+\ldots+(n-1)x^{n-2}\}+$
$+2x\{1+2x+\ldots+(n-1)x^{n-3}\}+\ldots+2(n-1)x^{n-2}$; $\frac{n(n-1)x^{n-1}(x-1)^2-2(n-1)x^n+2nx^{n-1}-2}{(x-1)^3}$.
446. $\frac{a(q^n-1)+bq[(n-1)q^n-nq^{n-1}+1]}{(q-1)^2}$. **447.** $\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$; $\frac{n}{n+1}$. **448.** Po 9-u.
Wyrazy odpowiedniego szeregu są: $2(100-10)=a_1$, $2(a_1-10.2)=a_2$, $2(a_2-10.2^2)=a_3$,... **449.** 6.
450. $\frac{4}{9}$. **451.** $\frac{2-a}{(1-a)^2}$. **452.** $\frac{a}{(1-q)(1-bq)}$. **453.** $\frac{2}{(1-x)^3}$. **454.** α) 8315·71 zł., β) 16837·56 zł.
455. 29049·3 zł., β) 22232·1 zł., γ) 3815·08 zł., δ) 118812 zł., **456.** α) 3000000 zł., β) 10000 zł **457.** α) 2400 zł., β) 13490·6 zł., γ) 1200 zł., δ) 1580·50 zł. **458.** α) 4·5%, β) 3·5%. **459.** α) 12·289%, β) 1·8%, γ) 7·6%, δ) 3·75%, **460.** α) 14 lat, β) 4 lata.

461. α) 24 lata, β) 15 lat, γ) 27 lat, δ) 34 lata. **462.** 1278·80 zł. **463.** 3%. **464.** 2087 osób. **465.** Po 15-u latach. **466.** 9%. **467.** 4469·30 zł. **468.** 3%. **469.** 7·177%. **470.** 15771·7 zł. **471.** α) 14 lat i prawie $2^1/_2$ miesiąca, β) prawie 33 lata. **472.** α) 4005·36 zł., β) 17755·4 zł., **473.** α) 36 lat i 9 miesięcy, β) 17 lat i 2 miesiące. **474.** 17254·4 zł., **475.** 439740 zł. **476.** Po 10-u latach. **477.** α) 5341·69 zł., β) 26530·32 zł. **478.** α) 2490 zł., β) 4968·07 zł., γ) 11637 zł., δ) 107885 zł. **479.** α) 9337·25 zł. **481.** α) 32 wkładki, β) 15 wkładek. **482.** α) 15 wkładek, β) 49 wkładek, γ) 7 wkładek, δ) 9 wkładek. **484.** α) 2040·58 zł., β) 6650·74 zł., γ) 6884·33 zł. **486.** α) 27500 zł., β) 4147·78 zł. **487.** 136295 zł. **488.** 1812·33 zł. straty. **489.** 988023 zł. **490.** 2941·54 zł. **491.** Niekorzystne. **492.** 4950·88 zł. **493.** α) 10509 zł., β) 2508·12 zł. **495.** α) 3331·23 zł., β) 802·42 zł., γ) 2200 zł. **496.** Przez 33 lata. **497.** α) Przez 20 lat, β) przez 10 lat, γ) przez 5 lat. **499.** α) 14728·8 zł., β) 110330 zł. γ) 131706 zł. **501.** α) 6419·29 zł., β) 1550 zł., γ) 285·7 zł. **504.** 350 zł. **505.** 116553 zł. **506.** 18957·4 zł. **507.** 1946·64 zł. **508.** Po 37 latach, biorąc ostatnim razem już tylko 13146 zł. **510.** 4536. **511.** 20160. **514.** 32659220. **516.** Ilość sposobów jest $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$, mianowicie jest liczbą 29-o cyfrową z początkowemi cyframi 5, 3, 6, a 4-a zerami na końcu. **519.** $\frac{1}{2}(n-p)(n+p-1)$. **520.** $\binom{13}{2}-\binom{8}{2}-\binom{5}{2}+2$. **521.** Ilość elementów nazwawszy x wprowadzić nową niewiadomą $y=x-\frac{3}{2}$; $x=12$.

522. $\binom{\binom{n}{2}}{2}-(n-2)\binom{n}{2}=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$. **527.** 27720-u. **528.** 1799020903680-u sposobami. **529.** α) $\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{2n}$, β) $\dfrac{3n(3n-1)(3n-2)\ldots(n+1)}{6n}$.

531. Tu nie można np. tonów C w różnych oktawach uważać za ten sam powtarzający się element α_1, gdyż nie możnaby wziąć wtedy zestawienia $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1$. Ilość sposobów jest $(W)^3_7$. **532.** 9000. **533.** 4096. α) $(K)^4_3$; β) $(W)^4_3$. **535.** 560. **537.** α) $\frac{273}{297160}$, β) $\frac{13}{230}$, γ) $\frac{6}{1265}$. **538.** α) i β) $\frac{17199}{742900}$; γ) $\frac{28665}{3268760}$. **539.** α) $\frac{7}{3596}$, β) $\frac{7}{899}$. **540.** $\frac{6}{5525}$. **541.** α) $\frac{125}{15552}$, β) $\frac{125}{2592}$. **543.** $\frac{1}{36}$, β) $\frac{5}{108}$, γ) $\frac{25}{216}$, δ) $\frac{5}{108}$. **544.** $\frac{3}{4}$. **546.** α) $\frac{7}{10}$, β) $\frac{1}{2}$. **547.** $\frac{1}{3}$. **548.** O$\frac{1}{12}$. **549.** $\frac{11}{36}$. **550.** α) $\frac{323}{3289}$, β) $\frac{1}{1184040}$, γ) $\frac{7}{1184040}$. **551.** α) $\frac{25}{216}$, β) $\frac{91}{216}$, γ) $\frac{11}{216}$, δ) $\frac{5}{216}$, ε) $\frac{2}{27}$. **553.** α) 4506 zł., β) 2998 zł., γ) 10406·9 zł., δ) 2230·25 zł. **554.** α) 21654·5 zł., β) 33193·8 zł., γ) 12755·6 zł., δ) 32297·7 zł. **555.** α) 14275·4 zł., β) 20235·8 zł. **556.** α) 344·42 zł., β) 641·03 zł. **557.** α) 4128·29 zł., β) 4656·73 zł., γ) 4104·37 zł., δ) 4276·46 zł. **558.** α) 36334·5 zł., β) 57513·8 zł., γ) 42949 zł., δ) 18707 zł. **559.** α) 219·075 zł., β) 210·69 zł., γ) 850·12 zł., δ) 2743 zł. **560.** 13694·6 zł., β) 18004·2 zł., γ) 5966·63 zł., δ) 42617 zł. **567.** Albo w potędze $(2p-2)$-ej, przy $2p$ całkowitem i niemniejszem od 4-ch, alboteż w potędze $(3-2p)$-ej przy p równem $\frac{1}{2}$ lub 0, lubteż przy $2p$ całkowitem ujemnem. **568.** Zob. odpowiedź na zad. 521-e. **570.** $-\frac{429}{16}$. **576.** β) $3x^4+x^3-7x^2-5x+2$.

577. α) $2(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi)$; β) $4(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi)$; γ) $6(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi)$; δ) $8(\cos\frac{9}{8}\pi+i\sin\frac{9}{8}\pi)$; ε) $8(\cos\frac{17}{16}\pi+i\sin\frac{17}{16}\pi)$; ζ) $10(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi)$.

578. α) $8(\cos\frac{2}{9}\pi+i\sin\frac{2}{9}\pi)$; β) $6(\cos\frac{13}{7}\pi+i\frac{13}{7}\pi)$. **579.** *a*) $8(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi)=-4\sqrt{3}-4i$;

b) $12(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi)=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})-3i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$;

c) $48(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi)=12(\sqrt{6}-\sqrt{2})+12i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

580. $48(\cos\frac{5}{63}\pi+i\sin\frac{5}{63}\pi)=46{\cdot}5156+11{\cdot}8446\,i$. **581.** *a*) $\frac{1}{2}(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi)=-\frac{1}{2}i$;

b) $\frac{1}{3}(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi)=-\frac{1}{12}(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\frac{1}{12}i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$;

c) $\frac{3}{4}(\cos\frac{1}{8}\pi+i\sin\frac{1}{8}\pi)=\frac{3}{8}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{3}{8}i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

582. α) $\frac{4}{3}(\cos\frac{23}{63}\pi+i\sin\frac{23}{63}\pi)=0{\cdot}548375-1{\cdot}21534\,i$.

586. β) $\cos\frac{1}{16}\pi+i\sin\frac{1}{16}\pi=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$, $\cos\frac{3}{16}\pi+i\sin\frac{3}{16}\pi=$

$=\frac{1}{4}\Big[\sqrt{(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})}-\sqrt{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}+i\Big(\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})}+$

$+\sqrt{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}\Big)\Big]$,..., $\cos\frac{31}{16}\pi+i\sin\frac{31}{16}\pi=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}-i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$.

589. $\cos\frac{1}{10}\pi+i\sin\frac{1}{10}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\frac{1}{4}i(\sqrt{5}-1)$, $\cos\frac{1}{5}\pi+i\sin\frac{1}{5}\pi=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)+$ $+\frac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,..., $\cos\frac{19}{10}\pi+i\sin\frac{19}{10}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{1}{4}i(\sqrt{5}-1)$.

593. α) 1, $\cos\frac{2}{9}\pi+i\sin\frac{2}{9}\pi=0{\cdot}642786+0{\cdot}766033i$,..., $\cos\frac{16}{9}\pi+i\sin\frac{16}{9}\pi=0{\cdot}642785-0{\cdot}766033i$;
β) $\cos\frac{1}{9}+i\sin\frac{1}{9}=0{\cdot}93970+0{\cdot}342017i$,..., $\cos\frac{17}{9}\pi+i\sin\frac{17}{9}\pi=0{\cdot}93970-0{\cdot}342017i$.

597. α) $\cos\frac{1}{24}\pi+i\sin\frac{1}{24}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{2(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})}+\frac{1}{4}i\sqrt{2(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})}$, $\cos\frac{5}{24}\pi+i\sin\frac{5}{24}\pi=$ $=\frac{1}{4}\sqrt{2(4-\sqrt{2}+\sqrt{6})}+\frac{1}{4}i\sqrt{2(4+\sqrt{2}-\sqrt{6})}$,..., $\cos\frac{15}{8}\pi+i\sin\frac{15}{8}\pi=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$
β) $\cos\frac{1}{8}\pi+i\sin\frac{1}{8}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2}i\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos\frac{7}{24}\pi+i\sin\frac{7}{24}\pi=$ $=\frac{1}{4}\left(\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}-\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{4}i\left(\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{4}}\right)$, ...,
$\cos\frac{47}{24}\pi+i\sin\frac{47}{24}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{2(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})}-\frac{1}{4}i\sqrt{2(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})}$.

PRZYPISKI.

I. O WIELKOŚCIACH PROPORCYONALNYCH.

(Część I, art. 149).

1. Jeżeli wielkość A otrzymuje kolejno wartości coraz większe $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l$, to różnice $\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_1, \ldots, \alpha_l - \alpha_{l-1}$ nazywamy przyrostami wartości $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ wielkości A, alboteż kolejnemi przyrostami wielkości A (Incremente der G.).

Weźmy dwie wielkości A i B, jednocześnie wzrastające, i niech wartościom $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ wielkości A odpowiadają wartości $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ wielkości B. Wówczas przyrostom $\alpha_1 - \alpha_0, \ldots, \alpha_l - \alpha_{l-1}$ wielkości A odpowiadają przyrosty $\beta_1 - \beta_0, \ldots, \beta_l - \beta_{l-1}$ wielkości B.

2. Niech $\alpha_0 = 0$. Przyjmijmy, iż wartości wielkości B wyraziliśmy już w ten sposób[1]), że także $\beta_0 = 0$. Wtedy »pierwszemi« przyrostami są wartości odpowiednio α_1 i β_1.

Obierzmy przy dowolnie wziętej wartości α_1 takie wartości $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l$ wielkości A, iżby przyrosty $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_1, \ldots, \alpha_l - \alpha_{l-1}$ były wszystkie sobie równe. Odpowiadające im przyrosty $\beta_1, \beta_2 - \beta_1, \ldots, \beta_l - \beta_{l-1}$ wielkości B albo są wszystkie równe sobie, alboteż nie są wszystkie równe sobie. Rozważać będziemy tylko pierwszy z tych dwu przypadków.

Ponieważ $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_1$, $\beta_2 - \beta_1 = \beta_1$, przeto $\alpha_2 = \alpha_1 . 2$, $\beta_2 = \beta_1 . 2$, i podobnie $\alpha_3 = \alpha_1 . 3$, $\beta_3 = \beta_1 . 3, \ldots, \alpha_l = \alpha_1 . l$, $\beta_l = \beta_1 . l$.

3. Weźmy na uwagę dwie jakiekolwiek wartości A_1 i A_2 wielkości A i oznaczmy przez B_1 i B_2 odpowiadające im wartości wielkości B.

Wartość A_2 może być albo spółmierna, alboteż niespółmierna z wartością A_1.

a. A_1 i A_2 są wartościami spółmiernemi z sobą; spólną ich miarą niech będzie α_1 i niech $A_1 = \alpha_1 q$, $A_2 = \alpha_1 p$. Wówczas

$$A_2 : A_1 = p : q.$$

Ponieważ wartościom $\alpha_1 q$ i $\alpha_1 p$ wielkości A odpowiadają wartości $\beta_1 q$ i $\beta_1 p$ wielkości B, przeto jest $B_1 = \beta_1 q$, $B_2 = \beta_1 p$, tak iż

$$B_2 : B_1 = p : q.$$

A zatem
$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1.$$

b. A_1 i A_2 są wartościami z sobą niespółmiernemi. Wówczas, przy dowolnem całkowitem q, nazwawszy $\frac{A_1}{q} = \alpha_1$, możemy znaleźć taką liczbę p, iżby wartość $\frac{A_1}{q} . p = \alpha_1 p = \alpha_p$ była mniejsza od A_2, zaś wartość $\frac{A_1}{q}(p+1) = \alpha_1 (p+1) = \alpha_{p+1}$ była już większa od A_2. Ponieważ wartościom $\alpha_1, \alpha_p, \alpha_{p+1}$ wielkości A odpowiadają wartości $\beta_1, \beta_p, \beta_{p+1}$ wielkości B, wartości zaś $A_1 = \alpha_1 q$ wielkości A odpowiada wartość $\beta_1 q$ wielkości B, którą nazwaliśmy B_1, przeto: popierwsze jest $B_1 = \beta_1 q$, tak że $\beta_1 = \frac{B_1}{q}$; powtóre wartości A_2, pośredniej między α_p i α_{p+1}, odpowiadająca wartość B_2 jest również pośrednia między β_p i β_{p+1}, t. j. mamy jednocześnie

$$\alpha_p < A_2 < \alpha_{p+1} \quad \text{i} \quad \beta_p < B_2 < \beta_{p+1}.$$

---

[1]). Np. Jeżeli przez A oznaczymy ilość stopni na termometrze Celsius'a, przez F zaś ilość stopni na termometrze Fahrenheit'a, to wielkości: jedna A, druga $F - 32^0 = B$ będą już takie, iż wartości 0 wielkości A odpowiada wartość 0 wielkości B.

Tak wartość α_p, jak i wartość α_{p+1} jest spółmierna z wartością A_1. Według więc *a* jest jednocześnie

$$\alpha_p : A_1 = \beta_p : B_1,$$
$$\alpha_{p+1} : A_1 = \beta_{p+1} : B_1.$$

Jeżeli liczbę q będziemy brali coraz większą, to wartości α_p i α_{p+1}, jakoteż wartości β_p i β_{p+1} będą coraz bliższe siebie. Wskutek tego różnice między każdą z pierwszych a wartością A_2, jakoteż różnice między każdą z drugich a wartością B_2 mogą się stać tak małemi, jak chcemy. Ponieważ, jakkolwiek małe są owe różnice, zawsze powyższa równość stosunków dla wartości α_p i α_{p+1} zachodzi, przeto taż równość stosunków zachodzi dla wartości A_2, pośredniej między α_p i α_{p+1}, której odpowiada wartość B_2, pośrednia pomiędzy β_p i β_{p+1}, t. j. mamy

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1.$$

4. Jest przeto stosunek jakichkolwiek wartości A_1 i A_2 wielkości A równy stosunkowi wartości odpowiadających B_1 i B_2 wielkości B t. j. wielkości A i B są proporcyonalne względem siebie.

A zatem: *jeżeli dwie wielkości jednocześnie wzrastają tak, iż równym sobie przyrostom jednej odpowiadają przyrosty drugiej, także równe sobie, i jeżeli równe zeru wartości tych wielkości sobie odpowiadają, to te wielkości są proporcyonalne względem siebie.*

II. O ZNOSZENIU NIEWYMIERNOŚCI.

a. ZNOSZENIE NIEWYMIERNOŚCI W MIANOWNIKU.

(Część II, art. 42).

Metoda wskazana może niedoprowadzać do zniesienia niewymierności w mianowniku nawet w razie, kiedy w nim są tylko pierwiastki kwadratowe, mianowicie jeżeli jest pięć lub więcej składników, z których przynajmniej cztery są niewymierne. Pokażemy na przykładzie, jaką w takim razie drogą postępować należy. Mając np.

$$\frac{A}{B+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}},$$

oznaczmy $B+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ przez α i utwórzmy wyrażenia

$$\begin{array}{ll}
B+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}=\beta, & B+\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}=\gamma, \\
B+\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}=\delta, & B+\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=\varepsilon, \\
B+\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}=\zeta, & B+\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}=\eta, \\
B+\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}=\vartheta, & B-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=\iota, \\
B-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}=\varkappa, & B-\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}=\lambda, \\
B-\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}=\mu, & B-\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=\nu, \\
B-\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}=\xi, & B-\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}=o,
\end{array}$$
$$B-\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}=\pi.$$

Jest

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{A\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\iota\varkappa\lambda\mu\nu\xi o\pi}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\iota\varkappa\lambda\mu\nu\xi o\pi}.$$

Wykonawszy w mianowniku częściowe mnożenia: $\alpha\beta=\rho_1$, $\gamma\delta=\rho_2$, $\varepsilon\zeta=\rho_3$, $\eta\vartheta=\rho_4$, $\iota\varkappa=\rho_5$, $\lambda\mu=\rho_6$, $\nu\xi=\rho_7$, $o\pi=\rho_8$, w żadnem z wyrażeń $\rho_1,\ldots,\rho_8$ nie będziemy mieli $\sqrt{d}$. Otrzymawszy zaś

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{A\beta\,\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6\rho_7\rho_8}{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6\rho_7\rho_8},$$

wykonajmy częściowe mnożenia: $\rho_1\rho_2=\sigma_1$, $\rho_3\rho_4=\sigma_2$, $\rho_5\rho_6=\sigma_3$, $\rho_7\rho_8=\sigma_4$; w żadnem z wyrażeń σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 nie będziemy mieli $\sqrt{c}$. Otrzymawszy

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{A\beta\,\rho_2\sigma_2\sigma_3\sigma_4}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4},$$

wykonajmy częściowe mnożenia: $\sigma_1\sigma_2 = \tau_1$, $\sigma_3\sigma_4 = \tau_2$; w żadnem z wyrażeń τ_1, τ_2 nie będziemy mieli $\sqrt{b}$. Otrzymawszy nakoniec

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{A\beta\rho_2\sigma_2\tau_2}{\tau_1\tau_2},$$

po wykonaniu w mianowniku mnożenia nie będziemy mieli $\sqrt{a}$.

b. RÓWNANIE NIEWYMIERNE.

(Część II, art. 43, 44, 94).

Metoda wskazana może nie doprowadzać do równania wymiernego nawet w razie, kiedy w równaniu danem są tylko pierwiastki kwadratowe, mianowicie jeżeli w niem jest pięć lub więcej wyrazów, z których przynajmniej cztery są niewymierne względem niewiadomej.

Aby w takim razie dojść do równania wymiernego, mogącego mieć niektóre pierwiastki spólne z równaniem danem, możemy postępować drogą podobną do podanej pod *a*. Mianowicie utworzymy równania niewymierne, które wraz z równaniem danem przedstawią grupę równań odpowiednich wyrażeniom $\alpha, \beta, \ldots, \pi$. Mnożąc te równania stronami odpowiedniemi przy odpowiedniem wykonywaniu mnożeń częściowych, dojdziemy do równania wymiernego.

Inna metoda, polegająca na utworzeniu układu równań wymiernych z wielu niewiadomemi, jest wskazana na przykładzie w części III w art. 8-ym.

III. O DWU RÓWNANIACH STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ, MAJĄCYCH SPÓLNY PIERWIASTEK.

(Część II, art. 96).

Proporcyonalność spółczynników równań

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0, \quad a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \tag{1}$$

jest warunkiem, aby te równania miały oba pierwiastki spólne. Znajdziemy warunek, aby równania (1) miały przynajmniej jeden pierwiastek spólny.

Jeżeli obu równaniom (1) pewna wartość niewiadomej x jednocześnie czyni zadość, to, przy tejże wartości niewiadomej x, jest także

$$\begin{cases} a_1(a_2x^2 + b_2x + c_2) - a_2(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0, \\ (a_1x + b_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) - (a_2x + b_2)(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x + (a_1c_2 - a_2c_1) = 0, \\ (a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1) = 0. \end{cases}$$

Te zaś dwa równania istnieją jednocześnie, kiedy (I, art. 212)

$$\begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1, & a_1c_2 - a_2c_1 \\ a_1c_2 - a_2c_1, & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pod tym warunkiem równania (1) mają spólny pierwiastek.

IV. UWAGI OGÓLNE O DZIAŁANIACH.

(Część II, art. 71, 72).

1. Przypuśćmy, że, mając dwie liczby, jednę a, drugą b, wykonaliśmy na nich jedno z działań, o których w tej książce była mowa. Umówmy się, aby wynik owego właśnie działania wykonanego na liczbach a i b oznaczyć np. przez

$$\Theta(a, b),$$

tak iż symbol $\Theta(a, b)$ nietylko przedstawia liczbę otrzymaną wskutek wykonania działania, ale jednocześnie wskazuje, jakie mianowicie działanie na liczbach a i b było wykonane, lub ma być wykonane. Dlatego często mówić będziemy krótko: działanie Θ. Jeżeli owę liczbę, do której dochodzimy wskutek wykonania działania Θ na liczbach a i b, nazwiemy c, to oczywiście jest

$$\Theta(a, b) = c.$$

2. Jeżeli na liczbach a i b wykonaliśmy działanie Θ, a następnie na dwu liczbach, z których pierwszą jest $\Theta(a, b)$, drugą zaś jest, czyto liczba b, czyteż liczba a, wykonaliśmy działanie Θ' takie, iż jest odpowiednio

albo
$$\Theta'(\Theta(a, b), b) = a, \tag{1}$$
alboteż
$$\Theta'(\Theta(a, b), a) = b, \tag{2}$$

to mówimy, że działanie Θ' jest odwrotne działaniu Θ.

Działanie Θ w razie, kiedy jest któremkolwiek z trzech działań wprost, t. j. albo dodawaniem, albo mnożeniem, alboteż podnoszeniem do potęgi, oznaczać będziemy przez θ.

Umówmy się, aby działanie Θ' wtedy, kiedy jest związane z działaniem θ wzorem (1), oznaczać przez θ'_1, wtedy zaś, kiedy jest związane z działaniem θ zapomocą wzoru (2), oznaczać przez θ'_2. Wówczas

θ	θ'_1	θ'_2
$a + b = c$	$c - b = a$	$c - a = b$
$a . b = c$	$c : b = a$	$c : a = b$
$a^b = c$	$\sqrt[b]{c} = a$	$\log_a c = b$

3. Jeżeli
$$\Theta(a, b) = \Theta(b, a), \tag{3}$$
to mówimy, że do działania Θ stosuje się zasada przestawiania (Commutatives Princip).

Chcąc odnieść wzór ogólny (3) do działań θ, znajdziemy, że

$$a + b = b + a \quad \text{i} \quad a . b = b . a,$$

lecz a^b jest różne od b^a; do żadnego zaś z działań θ'_1 i θ'_2 wzoru (3) odnieść nie można.

Działanie θ w razie, kiedy jest albo dodawaniem, alboteż mnożeniem, oznaczać będziemy przez ϑ.

Właściwie więc wzór (3) redukuje się do wzoru

$$\vartheta(a, b) = \vartheta(b, a). \tag{3}$$

Na mocy wzoru (3') według wzorów (1) i (2) mamy

$$\vartheta'(\vartheta(a, b) b) = a, \quad \vartheta'(\vartheta(b, a) b) = a.$$

A więc istnieje jednego tylko rodzaju działanie ϑ' odwrotne działaniu ϑ. Innemi słowy, następstwem tego, że do dodawania i do mnożenia stosuje się zasada przestawiania, mamy jedyne działania odwrotne, odpowiednio odejmowanie i dzielenie.

Jako następstwo zaś tego, że do podnoszenia do potęgi nie stosuje się zasada przestawiania, mamy dwa różne od siebie działania odwrotne podnoszeniu do potęgi.

4. Szczególną liczbę m taką, iż
$$\Theta(m, a) = a, \tag{4}$$
nazywamy modułem działania Θ.

Ponieważ jest $m + a = a$ przy $m = 0$, przeto liczba 0 jest modułem dodawania. Ponieważ jest $m . a = a$ przy $m = +1$, przeto liczba $+1$ jest modułem mnożenia. Ponieważ jest $m^a = a$ przy $m = \sqrt[a]{a}$, a ta liczba może mieć różne wartości, przeto niema modułu podnoszenia do potęgi. Z tegoż powodu żadne z działań odwrotnych nie ma modułu, gdyż $m - a = a$ przy $m = 2a$, $m : a = a$ przy $m = a^2$, $\sqrt[a]{m} = a$ przy $m = a^a$, $\log_a m = a$ przy $m = a^a$. A więc te tylko działania mają moduł, do których stosuje się zasada przestawiania, tak iż właściwie wzór (4) redukuje się do wzoru

$$\vartheta(m, a) = a. \tag{4'}$$

5. Liczbę a' tak związaną z liczbą a, iż
$$\vartheta(a, a') = m,$$

nazwiemy liczbą wzajemną z liczbą a względem modułu m. Na mocy (3') każda z liczb a i a' jest wzajemna z pozostałą względem m.

Według tego określenia jest

$$a+a'=0, \quad \text{skąd} \quad a'=0-a=-a,$$

$$a.a'=1, \quad \text{skąd} \quad a'=1:a=\frac{1}{a}.$$

A więc liczby wzajemne z sobą względem modułu dodawania różnią się od siebie tylko znakiem, liczby zaś wzajemne względem modułu mnożenia są każda odwrotnością drugiej.

Zauważmy jeszcze, że

$$\vartheta'(a,m)=a, \quad \vartheta'(m,a)=a', \quad \vartheta'(a,b')=\vartheta(a,b).$$

6. Jeżeli, wziąwszy trzy liczby a, b i c, mamy

$$\Theta(\Theta(a,b),c)=\Theta(a,\Theta(b,c)), \tag{5}$$

to mówimy, że do działania Θ stosuje się zasada dołączania (associatives Princip).

Odnosząc wzór ogólny (5) do działania θ, znajdziemy, że

$$(a+b)+c=a+(b+c) \text{ i } (a.b).c=a.(b.c),$$

lecz $(a^b)^c$ jest różne od $a^{(b^c)}$, do żadnego zaś z działań θ'_1 i θ'_2 wzoru (5) nie można odnieść. A więc zasada dołączania stosuje się do tych działań, do których się stosuje zasada przestawiania, tak iż właściwie wzór (5) redukuje się do wzoru

$$\vartheta(\vartheta(a,b),c)=\vartheta(a,\vartheta(b,c)), \tag{5'}$$

7. Jeżeli, przy jakichkolwiek trzech liczbach a, b, c i przy różnych od siebie działaniach Θ_1 i Θ_2, jest

$$\Theta_2(\Theta_1(a,b),c)=\Theta_1(\Theta_2(a,c),\Theta_2(b,c)), \tag{6}$$

to mówimy, że do działania Θ_2 względem działania Θ_1 stosuje się zasada rozłączania (distributives Princip).

Gdy Θ_2 jest albo mnożeniem, alboteż dzieleniem, zaś Θ_1 jest albo dodawaniem alboteż odejmowaniem, to mamy

$$(a+b).c=(a.c)+(b.c), \quad (a-b).c=(a.c)-(b.c), \quad (a+b):c=(a:c)+(b:c), \quad (a-b):c=(a:c)-(b:c).$$

Gdy Θ_2 jest albo podnoszeniem do potęgi, alboteż wyciąganiem pierwiastka, zaś Θ_1 jest albo mnożeniem, alboteż dzieleniem, to mamy

$$(a.b)^c=(a^c).(b^c), \quad (a:b)^c=(a^c):(b^c), \quad \sqrt[c]{a.b}=\left(\sqrt[c]{a}\right).\left(\sqrt[c]{b}\right), \quad \sqrt[c]{a:b}=\left(\sqrt[c]{a}\right):\left(\sqrt[c]{b}\right).$$

Widzimy więc, że wzór (6) stosuje się do działań algebraicznych, a mianowicie do działań drugiego rzędu względem działań pierwszego rzędu i do działań trzeciego rzędu względem działań drugiego rzędu. Nie stosuje się zaś on do logarytmów, jako wskazanych przez działanie Θ_2, ani względem mnożenia, aniteż względem dzielenia, wskazanych przez Θ_1, gdyż tak wypadki działań $\log_c(a.b)$, $(\log_c a).(\log_c b)$, jak i wypadki działań $\log_c(a:b)$, $(\log_c a):(\log_c b)$ nie są równe sobie.

KONIEC.