

**PAWEŁ SZEPTYŃSKI**

**ANALITYCZNE  
MODELOWANIE  
CIENKICH SKLEIN  
ŚCINANYCH  
QUASI-STATYCZNIE**

Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Tomasz Kapecki

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTW NAUKOWYCH

Jacek Pietraszek

REDAKTOR DYSCYPLINY  
inżynieria lądowa, geodezja i transport  
Andrzej Winnicki

REDAKTOR PROWADZĄCY

Marek Piekarczyk

RECENZENCI

Hartmut Pasternak  
Tomasz Wróblewski

SEKRETARZ SEKCJI

Marta Wlazło

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Michał Stachowski

SKŁAD I ŁAMANIE

Anna Pawlik

PROJEKT OKŁADKI

Karolina Szafran

 <http://orcid.org/0000-0002-1369-3825>

© Copyright by Politechnika Krakowska

ISBN 978-83-67188-50-0

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków; tel. 12 628 37 25, fax 12 628 37 60  
e-mail: [wydawnictwo@pk.edu.pl](mailto:wydawnictwo@pk.edu.pl)  [www.wydawnictwo.pk.edu.pl](http://www.wydawnictwo.pk.edu.pl)  
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

---

Druk i oprawę wykonano w Dziale Poligrafii Politechniki Krakowskiej.  
Ark. wyd. 16,00.

Zam. 118/2023

Nakład 60 egz.

Cena zł 105,00 z VAT

Składam podziękowania tym wszystkim osobom, które w różny sposób przyczyniły się do powstania tej publikacji. Na pierwszym miejscu chciałbym wymienić moją małżonkę Monikę, za jej nieustające i różnorodne wsparcie, za cierpliwość, wyrozumiałość, przede wszystkim jednak za jej obecność. Praca ta nie powstałaby bez inicjatywy i pomocy prof. dr. hab. inż. Arkadiusza Kwietnia oraz dr. hab. inż. Bogusława Zająca, którzy służyli mi swoim doświadczeniem, wprowadzili mnie w tematykę złączy klejowych oraz udostępni mi zbiory uzyskanych przez nich wyników eksperymentalnych, przeprowadzonych na belkach drewnianych w ramach Projektu Nr POIR.01.01.01-00-0828/16, realizowanego wraz z PalettenWerk Kozik Sp. J. Chcę również wyrazić wdzięczność tym osobom, które swoimi poradami nadawały kierunek mojej działalności badawczej, przede wszystkim dr. hab. inż. Dorocie Jasińskiej, prof. dr. hab. inż. Leszkowi Mikulskiemu oraz prof. dr. hab. inż. Tadeuszowi Tatarze.

Podrozdział 7.11, do napisania którego opracowano skrypty wyznaczające rozwiązania ogólne dla rozpatrywanych modeli analitycznych na drodze obliczeń symbolicznych oraz wyznaczające numeryczne wartości stałych całkowania w otrzymanych rozwiązaniach ogólnych, przygotowano w ramach pakietu zadań WP7 – Communication and Dissemination grantu europejskiego Horyzont 2020 MEZEROE (Measuring Envelope products and systems contributing to next generation of healthy nearly Zero Energy Buildings), identyfikator umowy o grant: 953157. Opracowane w pracy podejście teoretyczne i jego wyniki zostaną wykorzystane w procedurach oceny pracy połączeń adhezyjnych, badanych w ramach linii testowej PM&VL7 w WP3 – Testing/modelling nZEB Enabler Envelope Solutions.

Subsection 7.11, for which scripts were developed in order to determine general solutions for considered analytical models via symbolic computation as well as determining numerical values of constants of integration in the obtained general solutions, was elaborated within the Work Package WP7 – Communication and Dissemination of a European Horizon 2020 grant MEZEROE (Measuring Envelope products and systems contributing to next generation of healthy nearly Zero Energy Buildings), grant agreement ID: 953157. The theoretical approach developed in this work and its results will be used in the procedures for assessing the performance of adhesive joints, tested as part of the PM&VL7 test line in WP3 – Testing/modelling nZEB Enabler Envelope Solutions.



MEZEROE





## Spis treści

Spis oznaczeń.....	7
1. Wprowadzenie .....	10
2. Przedmiot i zakres opracowania .....	13
3. Charakterystyka połączeń klejowych .....	30
4. Zastosowania połączeń klejowych.....	35
5. Kinematyka prostego ścinania .....	38
6. Modelowanie konstytutywne skleiny w stanie prostego ścinania .....	46
6.1. Nieliniowe materiały hipersprężyste.....	48
6.2. Stan prostego ścinania w wybranych modelach nieliniowej sprężystości.....	54
6.2.1. Materiał Kirchhoffa–de Saint-Venanta .....	55
6.2.2. Materiał Mooneya–Rivlina.....	63
6.2.3. Materiał Yeoh.....	64
6.2.4. Materiał Genta .....	65
6.2.5. Materiał Beatty’ego .....	66
6.2.6. Materiał Warnera .....	67
6.2.7. Materiał Arrudy–Boyce .....	68
6.2.8. Materiał Ogdena .....	70
7. Analityczne modele ścinanych złączy klejowych.....	73
7.1. Prętowy model złącza dwuzakładkowego .....	76
7.2. Belkowy model złącza jednozakładkowego .....	89
7.2.1. Sformułowanie naprężeniowe – złącze symetryczne .....	90
7.2.2. Sformułowanie naprężeniowe – złącze niesymetryczne .....	106
7.2.3. Sformułowanie przemieszczeniowe .....	117
7.3. Modele dwuwymiarowe.....	130
7.3.1. Dwuwymiarowy model lokalny .....	131
7.3.2. Zastosowanie twierdzeń wariacyjnych w sformułowaniu globalnym.....	132
7.4. Deformacja postaciowa elementów łączonych.....	161
7.4.1. Złącze dwuzakładkowe – model prętowy .....	162
7.4.2. Złącze jednozakładkowe – model belkowy.....	166
7.5. Niejednorodność rozkładu naprężenia stycznego w przekroju poprzecznym skleiny .....	171
7.6. Deformacja podłużna skleiny .....	178
7.7. Wpływ grubości skleiny.....	185

7.8. Wpływ nieliniowości charakterystyki mechanicznej skleiny .....	195
7.9. Wpływ nieliniowości charakterystyki mechanicznej elementów łączonych .....	211
7.10. Uwzględnienie zjawisk termolepkosprężystych .....	216
7.11. Porównanie wybranych modeli analitycznych.....	223
8. Liniowo-sprężyste modele wielowarstwowych belek kompozytowych.....	239
8.1. Propozycja liniowego modelu belki wielowarstwowej .....	240
8.1.1. Analityczne rozwiązanie zagadnienia zginania belki kompozytowej.....	249
8.1.2. Przykładowe rozwiązania analityczne zagadnienia zginania belek kompozytowych.....	251
8.2. Walidacja doświadczalna i porównanie modeli liniowych .....	262
8.2.1. Globalna sztywność belek kompozytowych.....	266
8.2.2. Naprężenie normalne i naprężenie styczne w skleinie .....	269
8.2.3. Wnioski.....	272
Podsumowanie .....	274
Literatura.....	277
Streszczenie.....	287
Abstract .....	288

## Spis oznaczeń

- $a, b, c, \dots$  – skalary  
 $A, B, C, \dots$  – skalary  
 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  – skalary  
 $A, B, \Gamma, \dots$  – skalary  
 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$  – wektory, tensory  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$  – wektory, tensory  
 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  – wektory, tensory  
 $A, B, \Gamma, \dots$  – wektory, tensory
- $d, d_i$  – zakres strefy deformacji sprężysto-plastycznej (w  $i$ -tym elemencie)  
 $h, h_i$  – grubość elementu łączonego ( $i$ -tego)  
 $k_b$  – bezwymiarowy stosunek sztywności giętej i osiowej elementu  
 $p$  – naprężenie odrywające  
 $p_{i,B}$  – naprężenie odrywające na dolnej powierzchni  $i$ -tego elementu  
 $p_{i,T}$  – naprężenie odrywające na górnej powierzchni  $i$ -tego elementu  
 $t$  – grubość skleiny  
 $u$  – przemieszczenie osiowe  
 $u_{i,B}$  – przemieszczenie osiowe na dolnej powierzchni  $i$ -tego elementu  
 $u_{i,T}$  – przemieszczenie osiowe na górnej powierzchni  $i$ -tego elementu  
 $w$  – przemieszczenie poprzeczne (ugięcie)  
 $x$  – współrzędna na kierunku osi złącza  
 $y$  – współrzędna na kierunku prostopadłym do płaszczyzny zagadnienia  
 $z, z_i$  – współrzędna na kierunku prostopadłym do osi złącza w płaszczyźnie zagadnienia (w  $i$ -tym elemencie)  
 $A, A_i$  – sztywność podłużna (w  $i$ -tym elemencie)  
 $D, D_i$  – sztywność gięta (w  $i$ -tym elemencie)  
 $E, E_i$  – moduł Younga (w  $i$ -tym elemencie)  
 $E_a$  – moduł Younga skleiny  
 $E_{a,\text{eff}}$  – efektywny moduł Younga skleiny  
 $G, G_i$  – moduł Kirchhoffa (w  $i$ -tym elemencie)  
 $G_a$  – moduł Kirchhoffa skleiny  
 $G_{a,\text{eff}}$  – efektywny moduł Kirchhoffa skleiny  
 $I_i$  –  $i$ -ty niezmiennik tensora

$\hat{I}_1, \bar{I}_i$	– $i$ -ty zmodyfikowany niezmiennik tensora
$J$	– wyznacznik materialnego gradientu deformacji
$L, L_i$	– długość złącza, długość $i$ -tego odcinka złącza
$M, M_i$	– moment zginający (w $i$ -tym elemencie)
$M_{\text{end}}, \tilde{M}_i$	– brzegowy moment zginający (w $i$ -tym elemencie)
$N, N_i$	– siła osiowa (w $i$ -tym elemencie)
$P$	– moc sił zewnętrznych
$Q, Q_i$	– siła poprzeczna (w $i$ -tym elemencie)
$Q_a$	– siła poprzeczna w skleinie
$T$	– temperatura w °C
$T_g$	– temperatura zeszklenia
$\bar{W}$	– potencjał sprężysty
$\alpha, \alpha_i$	– współczynnik rozszerzalności termicznej (w $i$ -tym elemencie)
$\beta$	– współczynnik charakteryzujący pracę złącza
$\beta_e$	– współczynnik charakteryzujący pracę złącza w zakresie deformacji sprężystej
$\beta_p$	– współczynnik charakteryzujący pracę złącza w zakresie deformacji sprężystej
$\gamma$	– inżynierskie odkształcenie postaciowe
$\gamma_a$	– inżynierskie odkształcenie postaciowe w skleinie
$\varepsilon$	– odkształcenie liniowe
$\varepsilon_{ij}$	– składowa tensora małych odkształceń
$\zeta, \zeta_i$	– bezwymiarowa współrzędna na kierunku prostopadłym do osi złącza w płaszczyźnie zagadnienia (w $i$ -tym elemencie)
$\theta$	– temperatura w K
$\kappa$	– energetyczny współczynnik ścinania
$\lambda_i$	– rozciągnięcie główne
$\nu, \nu_{ij}$	– współczynnik Poissona (na kierunku $j$ -tym przy rozciąganiu w kierunku $i$ -tym)
$\pi, \pi_i$	– liczby podobieństwa
$\sigma, \sigma_i$	– naprężenie normalne (w $i$ -tym elemencie), $i$ -te naprężenie główne
$\sigma_{\text{max}}$	– maksymalne naprężenie rozciągające w panelu zginanym
$\sigma_{\text{min}}$	– maksymalne co do wartości bezwzględnej naprężenie ściskające w panelu zginanym
$\tau, \tau_i$	– naprężenie styczne (w $i$ -tym elemencie, na interfejsie $i$ -tego elementu)
$\tau_a$	– naprężenie styczne w skleinie
$\tau_{\text{avg}}$	– średnie naprężenie styczne w skleinie
$\tau_{\text{max}}$	– maksymalne naprężenie styczne w skleinie
$\Delta T$	– przyrost temperatury



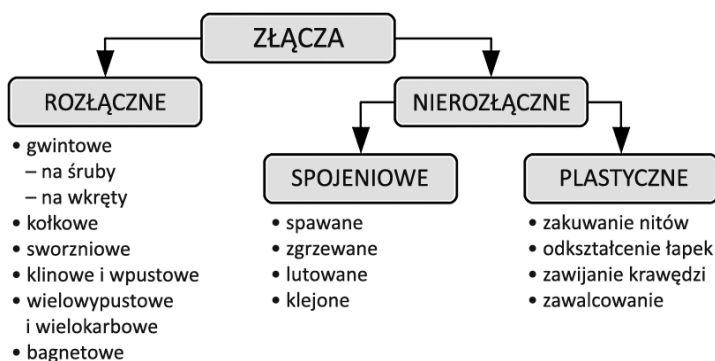
$\phi$	– kąt obrotu przekroju, kąt nachylenia siły, orientacja kierunku maksymalnego rozciągnięcia głównego
$\Lambda$	– pierwszy parametr Lamégo
$\Psi$	– całkowita energia uzupełniająca (komplementarna)
$\Phi$	– energia wewnętrzna odkształcenia sprężystego
$\Phi_i$	– $i$ -ta funkcja naprężenia
$\mathbf{B}$	– lewy tensor deformacji Cauchy’ego–Greena
$\mathbf{C}$	– prawy tensor deformacji Cauchy’ego–Greena
$\mathbf{D}$	– tensor prędkości rozciągnięcia
$\mathbf{E}$	– tensor odkształcenia Greena–de Saint-Venanta
$\mathbf{E}_B$	– tensor odkształcenia Biota
$\mathbf{E}^{(\alpha, \beta)}$	– tensor odkształcenia Darijani–Naghdabadi
$\mathbf{F}$	– materialny gradient deformacji
$\mathbf{R}$	– tensor obrotu
$\mathbf{S}$	– tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa 2. rodzaju
$\mathbf{T}$	– tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa 1. rodzaju
$\mathbf{T}_j$	– tensor naprężenia Jaumanna
$\mathbf{U}$	– prawy tensor rozciągnięcia
$\mathbf{V}$	– lewy tensor rozciągnięcia
$\eta$	– symetryczna część przestrzennego gradientu przemieszczenia
$\sigma$	– tensor naprężenia Cauchy’ego
$\tau$	– tensor naprężenia Kirchhoffa

# 1. Wprowadzenie

Projektowanie nowych i opisywanie zachowania istniejących układów mechanicznych jest zagadnieniem wieloaspektowym i tylko w najprostszych przypadkach lub na drodze istotnych uproszeń daje się sprowadzić do analizy pojedynczego modelu obliczeniowego. W zdecydowanej większości przypadków spotykanych w praktyce inżynierskiej i badawczej analiza złożonych układów mechanicznych wymaga zastosowania różnych modeli opisujących poszczególne elementy tych układów, jak również sprecyzowania warunków i mechanizmów interakcji przyjętych modeli. Zarówno z punktu widzenia analizy wytrzymałościowej, jak i stateczności oraz użyteczności układu **kluczowe jest poprawne modelowanie interakcji między elementami nośnymi** – te zaś współpracują ze sobą przez **zapewnienie ciągłości rozkładu sił wewnętrznych oraz deformacji za pomocą różnego rodzaju łączników**. W świetle powyższego wymiarowanie złączy jest najważniejszym – obok wymiarowania elementów nośnych – aspektem projektowania złożonych układów mechanicznych.

Złączem nazywać będziemy **układ złożony z przynajmniej dwóch elementów łączonych oraz łącznika** zapewniającego interakcję mechaniczną między elementami łączonymi. Złącza **klasyfikować** można m.in. ze względu na **możliwość rozłączenia i ponownego połączenia łączonych elementów bez uszkodzenia któregośkolwiek z elementów złącza** (por. rys. 1). Wyróżnia się:

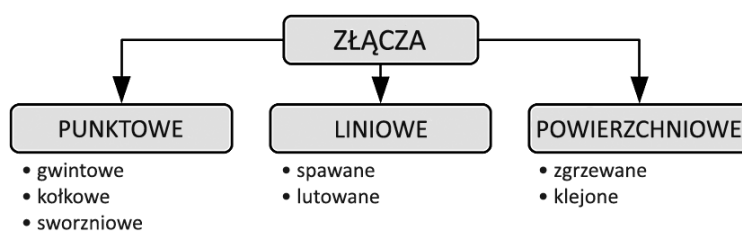
- **złącza rozłączne**, które można wielokrotnie łączyć i rozłączać,
- **złącza nierozłączne**, w przypadku których rozłączenie jest możliwe jedynie wskutek zniszczenia łącznika (spojenia) lub trwałej deformacji elementów łączonych.



Rys. 1. Klasyfikacja złączy z uwagi na rozłączność

Kolejnym kryterium klasyfikacji złączy jest **geometria łącznika** (por. rys. 2). Wyróżnia się:

- **złącza punktowe**, w których łączniki stanowią zbiór skończonej liczby elementów, których wymiary są z reguły istotnie mniejsze od wymiarów elementów łączonych,
- **złącza liniowe**, w których interakcję zapewniają spojenia, których wymiar poprzeczny jest istotnie mniejszy od wymiaru podłużnego,
- **złącza powierzchniowe**, w których interakcję zapewniają spojenia na całej lub na części powierzchni kontaktu elementów łączonych.



Rys. 2. Klasyfikacja złączy z uwagi na geometrię

Niniejsza monografia poświęcona jest **złączom klejowym**, które w świetle powyższych klasyfikacji określić należy jako **złącza nierozłączne, powierzchniowe**. Choć technologie klejenia znane i stosowane są od wieków, obecnie wykorzystywane są powszechnie tylko w niektórych gałęziach przemysłu, w pozostałych zaś stosowane są sporadycznie. Należy jednak zauważyć, że zainteresowanie połączeniami klejowymi nieustannie rośnie, a postępujący rozwój technologii wytwarzania klejów i wykonywania połączeń klejowych oraz precyzja ich modelowania sprawia, iż rozwiązanie to zyskuje coraz większe uznanie również wśród przedstawicieli tych dziedzin techniki, które do tej pory w niewielkim tylko stopniu czerpały z korzyści, jakie daje zastosowanie złączy klejowych.

Wśród powodów, dla których złącza klejowe znalazły szerokie zastosowanie w przemyśle, a które stanowią przewagę złączy tego typu nad alternatywnymi rozwiązaniami, można wymienić m.in.:

- korzystny stosunek ciężaru objętościowego i wytrzymałości materiału,
- odporność na korozję i niektóre czynniki chemicznie agresywne,
- redukcję koncentracji naprężenia oraz łatwiejszą kompensację odkształceń wymuszonych termicznie z uwagi na większą podatność skleiny względem rozwiązań alternatywnych,
- brak konieczności wykonywania otworów na łączniki, które obniżają nośność całego złącza z uwagi na obniżenie nośności elementów łączonych,
- brak konieczności wykonania obróbki mechanicznej (złącza plastyczne) lub termicznej (złącza zgrzewane), które mogłyby trwale i niekorzystnie wpłynąć

na własności fizykomechaniczne elementów złącza, a co za tym idzie, również na jego nośność lub sztywność,

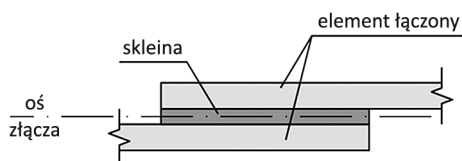
- możliwość zastosowania złączy klejowych do łączenia elementów o niewielkich grubościach – inaczej niż w przypadku złączy spawanych, w przypadku których grubość spoiny (a zatem i nośność złącza) warunkowana jest grubością najcieńszego z łączonych elementów,
- możliwość łączenia materiałów o odmiennym składzie chemicznym,
- uszczelnienie skleiną elementów złącza, zabezpieczające elementy łączone przed korozją chemiczną i biologiczną,
- odizolowanie elementów łączonych warstwą skleiny, zabezpieczającą je przed korozją elektrochemiczną.

Z drugiej strony złącza klejowe charakteryzują się też cechami, które należy uznać za wady, z uwagi na fakt, że nie dotyczą one wielu rozwiązań alternatywnych. Są to przede wszystkim:

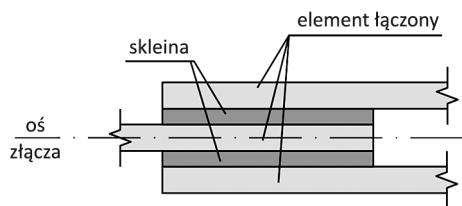
- wysokie wymagania dotyczące przygotowania powierzchni klejonych,
- ograniczony zakres temperatur i/lub wilgotności, w których złącze zachowuje swoje własności,
- podatność na agresję chemiczną ze strony określonych rozpuszczalników,
- podatność na promieniowanie ultrafioletowe,
- stosunkowo długi czas dojrzewania,
- niewielkie możliwości naprawy złącza,
- ograniczone możliwości wizualnej kontroli jakości złącza,
- względnie niska nośność na odrywanie,
- istotnie większa podatność złącza względem rozwiązań alternatywnych, co przekłada się na większe przemieszczenia względne elementów łączonych – ma to znaczenie przede wszystkim przy taśmach sprężających, w przypadku których poślizg na złączu skutkuje spadkiem siły sprężającej,
- duże wymiary złącza – z uwagi na stosunkowo niewielkie dopuszczalne wartości naprężenia siła obciążająca złącze musi zostać rozłożona na większą powierzchnię, co skutkuje znaczną długością zakotwienia, wielokrotnie przewyższającą wymiary złącz wykonanych w alternatywnych technologiach.

## 2. Przedmiot i zakres opracowania

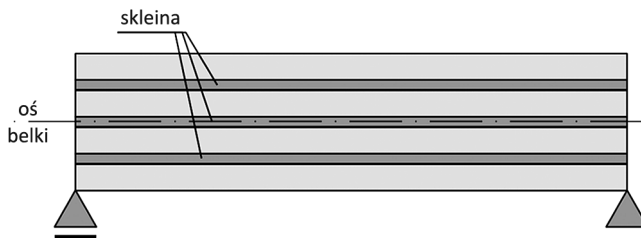
Przedmiotem niniejszej monografii są **cienne warstwy klejowe**, stanowiące element łączący **złącza klejowe**. Przez skleiny „cienkie” rozumiemy takie skleiny, których grubość jest wielokrotnie mniejsza od długości złącza, tak że dominującym stanem odkształcenia w skleinie jest stan prostego ścinania. Ponieważ stan odkształcenia w warstwie adhezyjnej zależy nie tylko od jej geometrii, ale również od jej własności mechanicznych, nie da się podać ogólnego kryterium, określającego, czy daną skleinę można uznać za cienką we wspomnianym wyżej sensie. W dużym uproszczeniu można przyjąć, że dla sklein cienkich stosunek  $L/t$  powinien przyjmować wartości większe od około 10. Warstwa skleiny stanowić może łącznik samodzielnego złącza klejowego, jak również element składowy złożonego układu kompozytowego. Zajmować się będziemy płaskimi **złączami zakładkowymi** (por. rys. 3 i 4) oraz **klejonymi belkami kompozytowymi** (rys. 5).



Rys. 3. Schemat złącza jednozakładkowego



Rys. 4. Schemat złącza dwuzakładkowego



Rys. 5. Schemat klejonej belki kompozytowej

Niniejsza praca poświęcona jest zagadnieniu **modelowania** sklein ścinanych, to znaczy **tworzenia matematycznych modeli, służących opisowi zjawiska fizycznego**, jakim jest proces ścinania skleiny w złączach i laminatach, oraz **analizowania tych modeli**, przez co rozumieć będziemy wyznaczanie zależności funkcyjnych między parametrami i zmiennymi w modelu oraz badanie charakterystyki owych zależności. W tym miejscu warto ujednoznaczyć stosowany w dalszej części opracowania termin „model”. Zgodnie z jedną z definicji przytaczanych w *Słowniku Języka Polskiego*, słowo „model” oznacza „konstrukcję, schemat lub opis, ukazujący działanie, budowę, cechy, zależności jakiegoś zjawiska lub obiektu”. Tym samym przez „model matematyczny” rozumieć będziemy układ równań oraz jego rozwiązania, za pomocą których opisujemy układ fizyczny. „Model analityczny” oznaczać będzie model matematyczny, którego forma jest odpowiednia do przeprowadzenia na nim operacji z zakresu analizy matematycznej, wykorzystujących aparat rachunku różniczkowo-całkowego w celu zbadania struktury matematycznej wyprowadzonych zależności funkcyjnych. Za alternatywę dla modelu analitycznego uważać będziemy model numeryczny, którego przewidywania są z zasady przybliżone, a rezultaty mają postać nie tyle zależności funkcyjnych, ile dyskretnych zbiorów danych. Powyższe wyjaśnienia mogą okazać się konieczne wobec faktu, że w literaturze anglojęzycznej na określenie niektórych z modeli analitycznych wykorzystuje się słowo *theory* (‘teoria’). Tymczasem według *Słownika Języka Polskiego* pod terminem „teoria” rozumie się „całościową koncepcję, zawierającą opis i wyjaśnienie określonych zjawisk i zagadnień”. W opinii autora kluczowym elementem tej definicji jest „całościowość” koncepcji oraz fakt, że nie tylko „opisuje” ona zjawisko, ale również je „wyjaśnia”. Należy zauważyć, że opisy zjawisk ścinania sklein, jakie znaleźć można w literaturze, każdorazowo posługują się szeregiem założeń upraszczających (np. zasada płaskich przekrojów Bernoulliego, założenie prostego ścinania w skleinie itp.), których przyjęcie nie jest ani wyjaśnione, ani nawet uzasadnione inaczej niż zgodnością przewidywań z praktyką. Oznacza to, że w omawianych opisach matematycznych posługiwać się będziemy zależnościami funkcyjnymi, które są istotnie obserwowane, ale których istotna przyczyna nie jest opisana sama w sobie. Z tych względów, pomimo rozpowszechnionego w literaturze posługiwania się wyrażeniami typu „Bernoulli–Euler theory” lub „Volkersen’s Shear Lag Theory”, konsekwentnie używać będziemy terminu „model”.

Zarówno w przypadku złączy, jak i belek klejonych warstwowo modelowanie warstwy klejowej może być podobne (lub nawet identyczne), o ile tylko spełnione zostaną określone warunki pracy warstwy tego typu. Znacząca część klasycznych modeli analitycznych sklein ścinanych nakłada następujące ograniczenia na warunki pracy złącza:

- Rozważamy jedynie układy symetryczne, z płaszczyzną symetrii prostopadłą do płaszczyzny warstw klejowych i zawierającą oś złącza.

- Geometria oraz własności mechaniczne elementów złącza, jak również obciążenie są tego typu, że **dominującym stanem mechanicznym w skleinie jest stan prostego ścinania**.
- Stan mechaniczny zdeformowanej skleiny będzie tym bliższy stanowi prostego ścinania, im stosunek sztywności skleiny do sztywności elementów łączonych będzie mniejszy. W związku z tym wymaga się, aby **grubość i sztywność skleiny były istotnie mniejsze od grubości i sztywności elementów łączonych**, przy czym w tym miejscu przez sztywność rozumie się sztywność mechaniczną, określaną przez związki konstytutywne materiału danego elementu złącza.
- Odnosnie do geometrii złącza wymagać będziemy, aby gwarantowała w **przybliżeniu jednorodny rozkład stanu naprężenia i stanu odkształcenia na kierunku prostopadłym** do wspomnianej na początku **płaszczyzny symetrii zagadnienia**. Jeśli warunek ten spełniony jest w każdym przekroju poprzecznym każdego z elementów złącza, możliwe jest przyjęcie założenia o płaskim stanie naprężenia (PSN) bądź o **płaskim stanie odkształcenia (PSO)**.

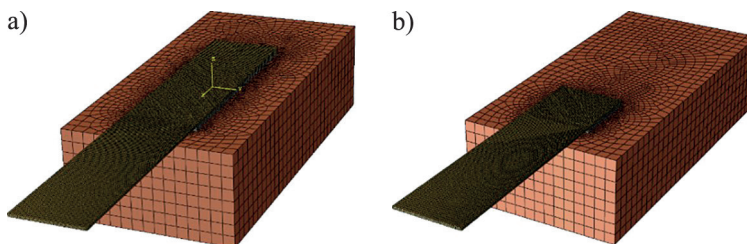
Kwestia założenia o PSN lub PSO wymaga komentarza. **Ściśle rzecz biorąc, żadne z założeń o stanie płaskim nie jest prawdziwe w ogólnym przypadku**. Płaski stan naprężenia jest właściwy zagadnieniom o wymiarach skończonych na kierunku prostopadłym do płaszczyzny zagadnienia (tożsamą z płaszczyzną symetrii) i nieobciążonych siłami o takim kierunku – na płaszczyznach ograniczających konfigurację układu w tym kierunku określone są jednorodne statyczne warunki brzegowe (brzeg swobodny). Takie są często warunki obciążenia złączy zakładkowych. Trzeba jednak zwrócić uwagę na fakt, że wspomniane warunki nie są warunkami wystarczającymi, a jedynie koniecznymi. Nawet w przypadku ograniczenia rozważań do układów obciążonych jedynie w płaszczyźnie zagadnienia, deformacja w płaszczyźnie zagadnienia pociąga za sobą deformację w kierunku do niej prostopadłym – miarą tej deformacji jest oczywiście współczynnik Poissona. W przypadku materiału jednorodnego deformacja ta nie pociąga za sobą występowania składowych stanu naprężenia, innych niż określone przez stan płaski. Jeśli jednak mamy do czynienia z układem kompozytowym (złożonym z oddziałujących na siebie elementów wykonanych z materiałów o różnych własnościach mechanicznych), to o ile współczynnik ten nie jest zerowy lub identyczny dla wszystkich materiałów, o tyle owa niezgodność odkształceń poprzecznych skutkować będzie zawsze występowaniem naprężeń na kierunku prostopadłym do płaszczyzny zagadnienia. Z drugiej strony założenie PSO wymaga, aby elementy złącza w ogóle nie podlegały deformacji w kierunku prostopadłym do płaszczyzny zagadnienia, co wobec skończonych wymiarów tych elementów oraz występowania wspomnianego brzegu swobodnego nigdy nie wystąpi. Stan mechaniczny, w jakim znajdują się elementy złącza, może być bliski PSN (np. dla złączy smukłych, gdy ich długość znacznie przewyższa szerokość) lub PSO (np. dla złączy elementów szerokich lub ustrojów powierzchniowych), nigdy jednak

nie będzie to stan płaski w sensie ścisłym, a składowe tensora naprężenia i odkształcenia związane z kierunkiem normalnym do płaszczyzny zagadnienia podlegać będą największej zmienności przy brzegach elementów, co widać na rysunkach 7–10. Ta niejednoznaczność w interpretacji stanu mechanicznego znajduje swój wyraz w propozycjach dotyczących modelowania złączy klejowych – choć zdecydowana większość autorów przyjmuje założenie PSO (np. Goland i Reissner 1944; Hart-Smith 1973a; Allman 1977; Cooper i Sawyer 1979; Delale i in. 1980), to niektórzy dopuszczają obydwie możliwości (Ojalvo i Eidinoff 1978).

Założenia dotyczące poszczególnych modeli oraz określające zakres ich stosowności zostaną przedstawione w bardziej szczegółowy sposób w podrozdziałach poświęconych omówieniu modeli analitycznych.

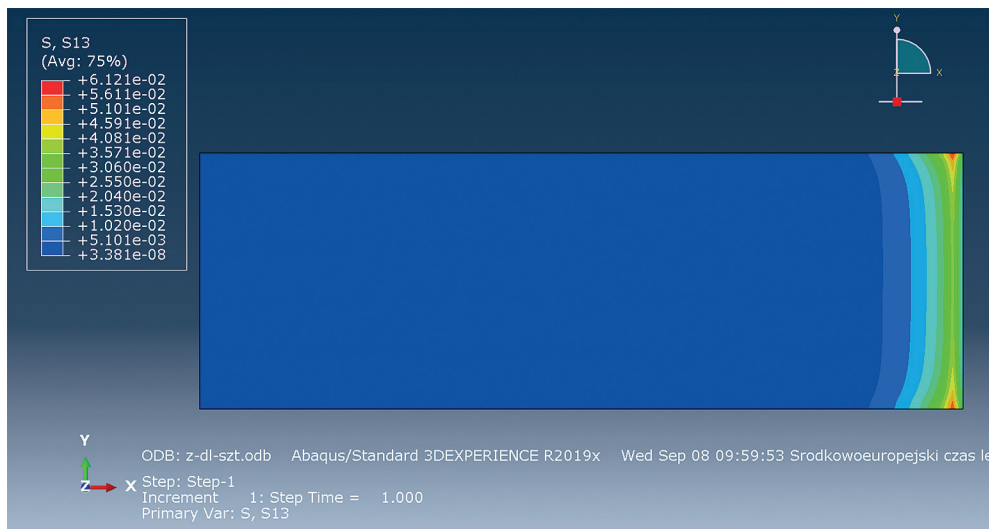
Wspólną cechą omawianych modeli analitycznych **jest redukcja zagadnienia przestrzennego do zagadnienia płaskiego**, dwuwymiarowego, to znaczy przyjęcie, że rozkład przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w przekroju podłużnym złącza, zawierającym jego płaszczyznę symetrii, opisuje z wystarczającą dokładnością deformację i rozkład sił wewnętrznych w całym złączu. Takie podejście skutkuje istotnymi uproszczeniami, które umożliwiają znalezienie analitycznych rozwiązań. Uzyskany z modelu płaskiego rozkład pola przemieszczenia i stanu naprężenia ma stanowić oszacowanie wielkości tych pól w każdym pionowym przekroju podłużnym skleiny. Należy jednak podkreślić, że rzeczywisty rozkład tych pól wzdłuż szerokości skleiny nie jest równomierny i zależy od jej geometrii (stosunku grubości i szerokości skleiny do jej długości) oraz własności mechanicznych (sztywności skleiny i elementów łączonych). Na rysunkach 7–10 zilustrowano rozkład naprężenia stycznego w płaszczyźnie środkowej skleiny w złączach sztywnych i podatnych o dużej i małej długości zakotwienia (rys. 6a i 6b) w stosunku do szerokości złącza. Naprężenie (w MPa) odpowiada zadanemu na końcu taśmy jednostkowemu (1 mm) przemieszczeniu. Wartości liczbowe na rysunkach mają drugorzędne znaczenie – rozwiązanie w ramach teorii liniowej określa rozkład naprężenia (z dokładnością do współczynnika proporcjonalności) dla dowolnej wartości zadanego wymuszenia.

W przypadku cienkich warstw klejowych podlegających ścinaniu materiał skleiny w każdym przekroju poprzecznym znajduje się w stanie, który w mniejszym

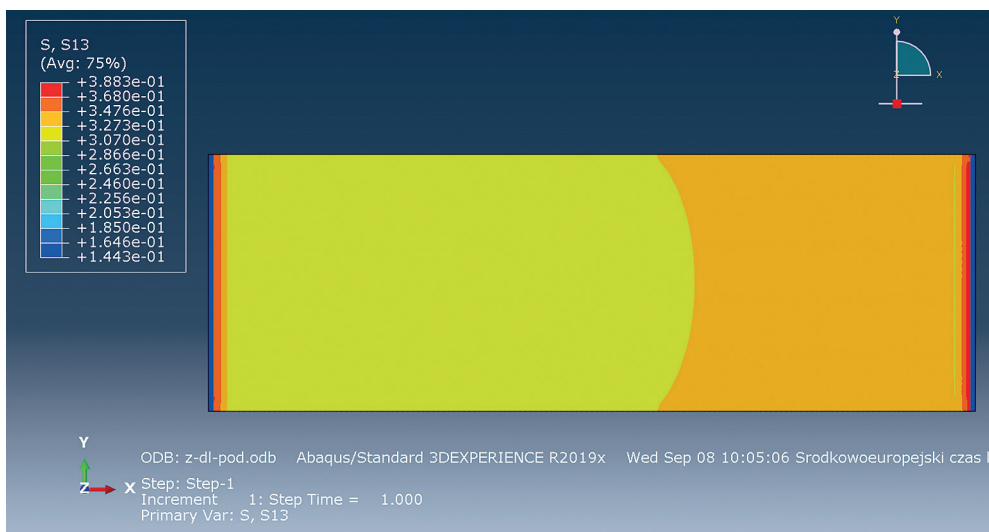


Rys. 6. Model MES złącza o dużej (a) i małej (b) długości zakotwienia





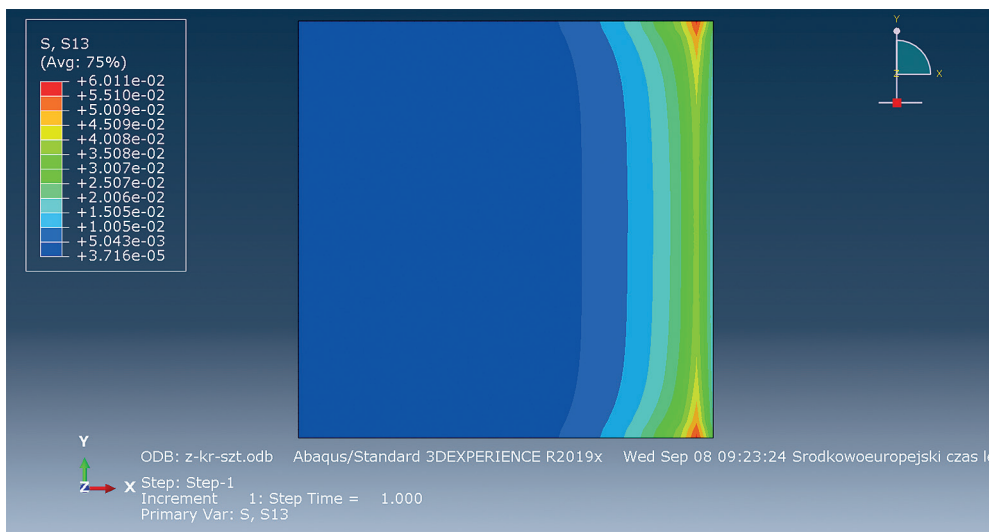
Rys. 7. Rozkład naprężenia stycznego po szerokości – złącze sztywne, duża długość zakotwienia



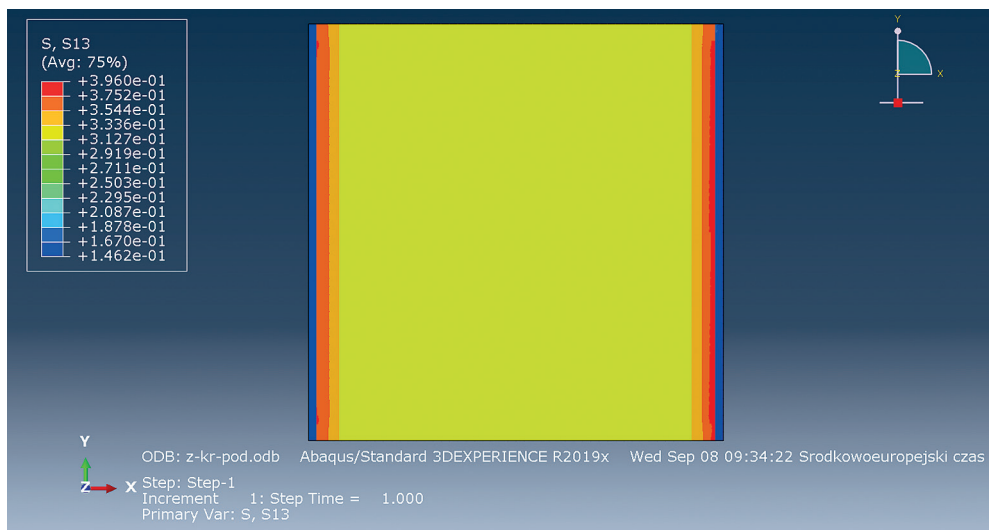
Rys. 8. Rozkład naprężenia stycznego po szerokości – złącze podatne, duża długość zakotwienia

lub większym stopniu zbliżony jest do stanu **prostego ścinania**. Stan ten będzie przedmiotem szczegółowego omówienia w rozdziałach 5 i 6. Należy przy tym zauważyć, że stan mechaniczny skleiny można przybliżyć stanem prostego ścinania jedynie przy spełnieniu pewnych warunków. Wśród warunków tych wymienić należy przede wszystkim następujące:

- Grubość skleiny musi być mała w stosunku do globalnych wymiarów złącza, a sztywność poprzeczna materiału skleiny powinna być istotnie mniejsza od sztywności podłużnej elementów łączonych. W przypadku gdy warunki te nie są spełnione, możliwa jest silna zmienność wielkości naprężenia stycznego



Rys. 9. Rozkład naprężenia stycznego po szerokości – złącze sztywne, mała długość zakotwienia



Rys. 10. Rozkład naprężenia stycznego po szerokości – złącze podatne, mała długość zakotwienia

nego wzdłuż kierunku prostopadłego do płaszczyzny skleiny, to zaś – zgodnie z równaniami równowagi:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

pociąga za sobą obecność gradientu osiowego naprężenia normalnego (orientacja osi jak na rys. 7–10). Jeśli gradient ten jest wystarczająco duży, skleina ścinana podlega dodatkowo nierównomiernemu osiowemu rozciąganiu, przez co stan naprężenia i odkształcenia w materiale skleiny jest stanem złożonym i niejednorodnym;

- Gradient naprężenia stycznego powinien być odpowiednio mały – silna zmienność wielkości naprężenia stycznego (występująca przede wszystkim w sąsiedztwie swobodnego brzegu skleiny) skutkuje znaczącym przyrostem odrywającego naprężenia normalnego, zgodnie z równaniem równowagi:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}$$

To z kolei pociąga za sobą obecność niemożliwego do pominięcia odkształcenia liniowego (wydłużenia na kierunku prostopadłym do płaszczyzny skleiny).

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku **sklein wykonanych z silnie odkształcalnych materiałów polimerowych, które wykazują cechy zbliżone do cech materiałów nieściśliwych**, deformacja objętościowa sklein jest silnie ograniczona. Oznacza to, że deformacja skleiny będzie w przybliżeniu **izochoryczna** (równoobjętościowa), co w przypadku deformacji płaskiej umożliwi interpretację stanu odkształcenia jako **stanu zbliżonego do stanu czystego ścinania**. Faktycznie, wiele stosowanych współcześnie materiałów polimerowych wykorzystywanych jako kleje wykazuje istotną nieściśliwość. Zarówno w przypadku sklein w złączach zakładkowych, jak i belkach kompozytowych udział deformacji objętościowej może być wymuszany silną deformacją osiową elementów łączonych – w takich przypadkach skleina podlegałyby rozciąganiu lub ścisnaniu, jednakże w przypadku materiałów o bardzo dużej sztywności objętościowej istotne odkształcenia liniowe na kierunku osi złącza musiałyby pociągnąć za sobą podobnej wielkości odkształcenia liniowe o przeciwnym znaku na kierunku prostopadłym do płaszczyzny skleiny – to z kolei wymagałoby obecności odpowiedniego naprężenia normalnego, którego rząd wielkości powinien być zbliżony do rzędu wielkości naprężenia osiowego, co z kolei ograniczone jest warunkami równowagi sił wewnętrznych na interfejsie skleiny oraz określonymi dla elementów łączonych statycznymi warunkami brzegowymi. W efekcie skleina nie może podlegać istotnej deformacji objętościowej, stąd **założenie stanu prostego ścinania dla sklein wykonanych z podatnych materiałów polimerowych jest tym bardziej uzasadnione**.

Nawet w sytuacji gdy spełnione są warunki, o których mowa powyżej, stan mechaniczny skleiny zawsze różnić się będzie od stanu prostego ścinania w otoczeniu swobodnego brzegu skleiny. Na wielkość obszaru oddziaływania jednorodnych warunków brzegowych na brzegu swobodnym wpływają:

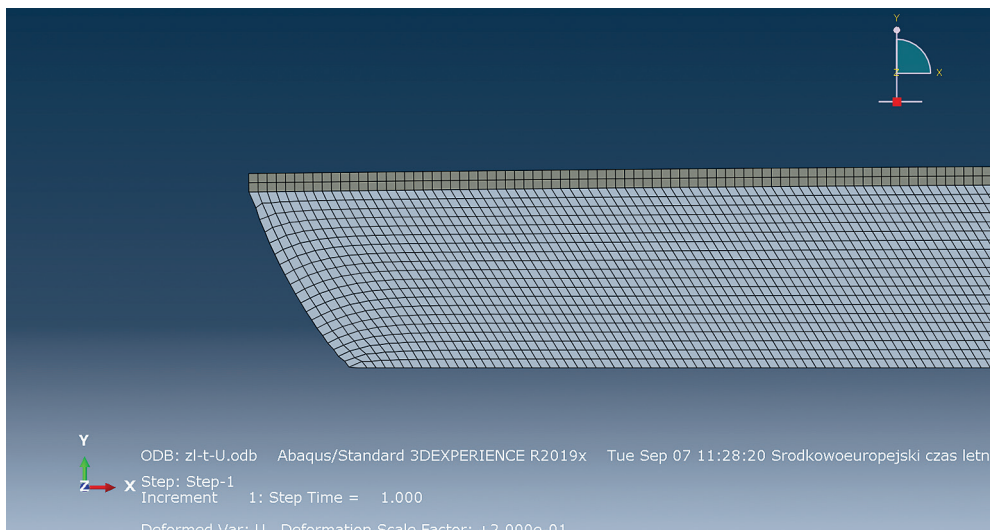
- **geometria próbki** – m.in. stosunek grubości skleiny do jej długości,
- **charakterystyka mechaniczna złącza** – stosunek sztywności skleiny do sztywności elementów łączonych, ale również zdolność skleiny i elementu łączonego do deformacji prostopadłej do płaszczyzny złącza. Jeśli chodzi o tę drugą cechę, to w przypadku skleiny decydować tu będzie sztywność podłużna (rozciąganie wskutek odrywania), a w przypadku elementu łączonego – sztywność giętą.

Uproszczoną ilustrację omawianych zjawisk stanowić mogą szkice konfiguracji aktualnej oraz mapy naprężenia stycznego w warstwie skleiny przedstawiono na rysunkach 11–18. We wszystkich przypadkach założono, że skleina związana jest z nieodkształcalnym (wielokrotnie sztywniejszym niż skleina) podłożem (krawędź dolna). Rozkład naprężenia stycznego zilustrowany jest w konfiguracji odniesienia. Jednostkowa wartość naprężenia dotyczy wielkości naprężenia w obszarze czystego ścinania – wyjątek stanowi rysunek 14, na którym jednostkową wartość naprężenia nadano naprężeniu normalnemu obciążającemu element łączony. Wyniki analizy dotyczą modeli liniowo-sprężystych – z uwagi na liniowość teorii uzyskane wyniki ilustrują rozwiązania (z dokładnością do czynnika skalującego) w całym zakresie obowiązywania tej teorii. Teoria liniowa obowiązuje w przybliżeniu w przypadku deformacji na tyle małych, aby możliwe były do pominięcia zjawiska geometrycznie nieliniowe oraz aby związki konstytutywne były w przybliżeniu liniowe.

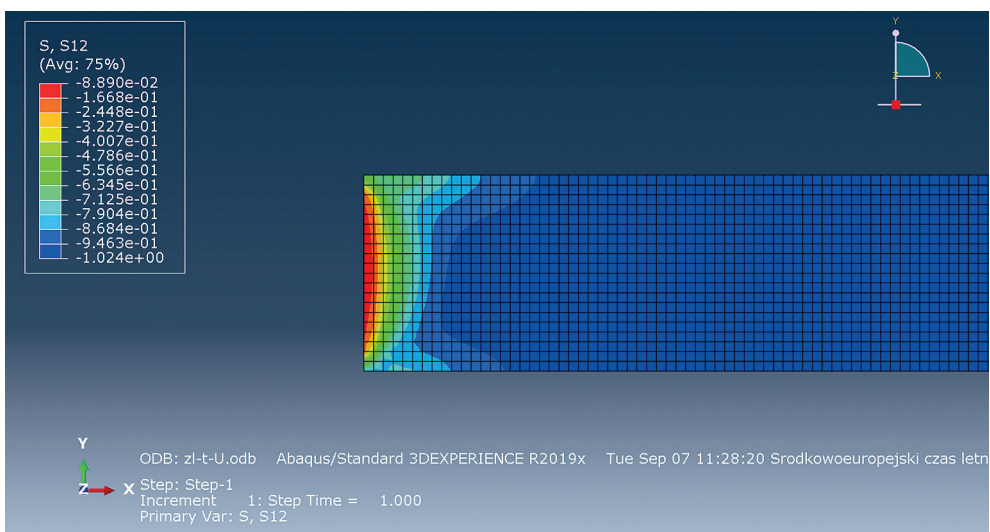
Rysunki 11 i 12 dotyczą przypadku skleiny o sztywności znacznie mniejszej niż sztywność elementu łączonego. Efekty brzegowe sięgają w przybliżeniu na odległość równą grubości skleiny.

Rysunki 13 i 14 dotyczą przypadku skleiny o sztywności porównywalnej ze sztywnością elementu łączonego. W takiej sytuacji nie można już wyodrębnić skleiny i elementu jako odrębnych części o swoistym charakterze pracy – skleina w równej mierze jest rozciągana, co ścinana, a efekty brzegowe sięgają daleko w głąb układu. Zjawisko to jest jeszcze silniejsze, jeśli długość złącza ma wymiar zbliżony do grubości skleiny.

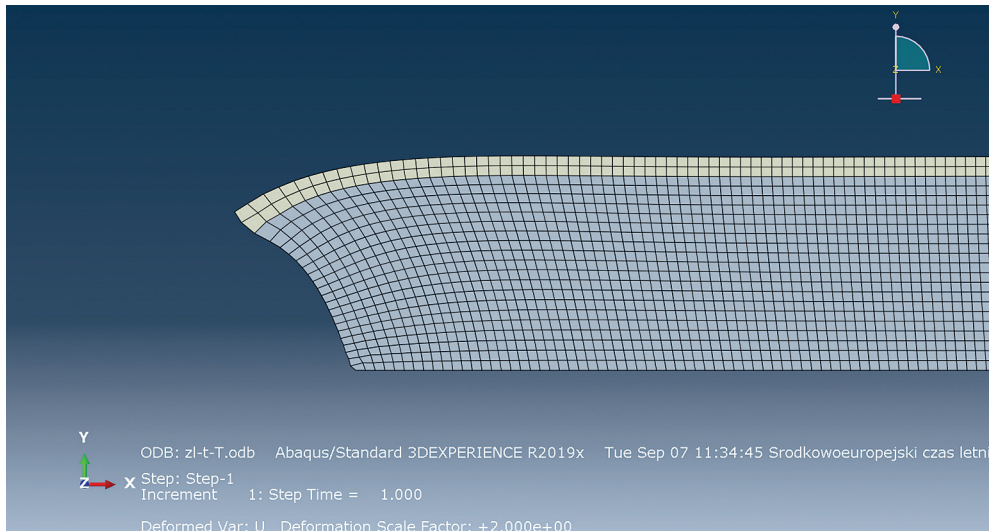
Rysunki 15 i 16 dotyczą przypadku samej tylko skleiny z ograniczoną możliwością deformacji prostopadłej do płaszczyzny złącza (elementy łączone o dużej sztywności), co modelowane jest przyjęciem kinematycznego warunku brzegowego na krawędzi górnej (równomierne przemieszczenie poziome, brak przemieszczenia pionowego). Podobnie jak w pierwszym z omawianych przypadków zasięg oddziaływania brzegu swobodnego jest w przybliżeniu równy grubości skleiny.



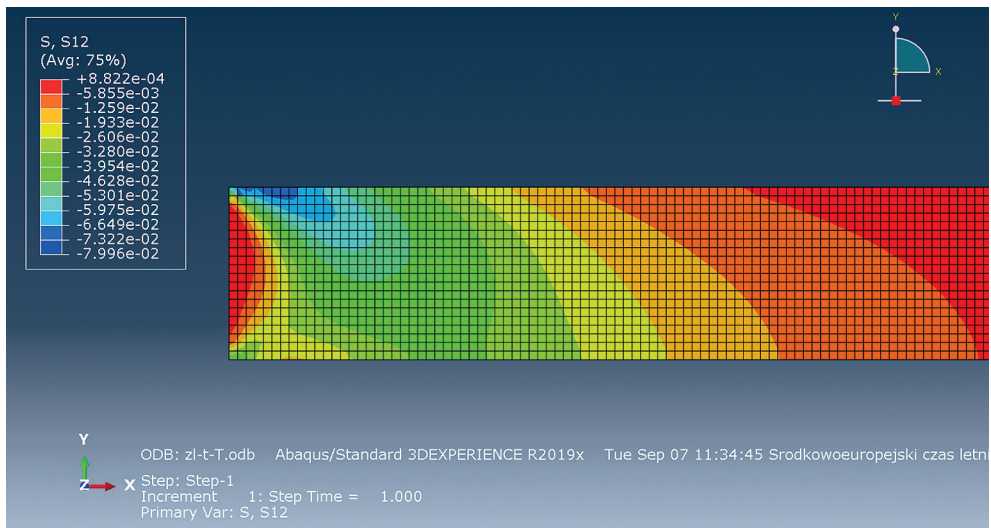
Rys. 11. Deformacja otoczenia brzegu swobodnego – skleina (szara) o małej sztywności, element łączony (brązowy) o dużej sztywności. Utwierdzenie na powierzchni dolnej, normalne obciążenie rozciągające przyłożone do czoła elementu łączonego



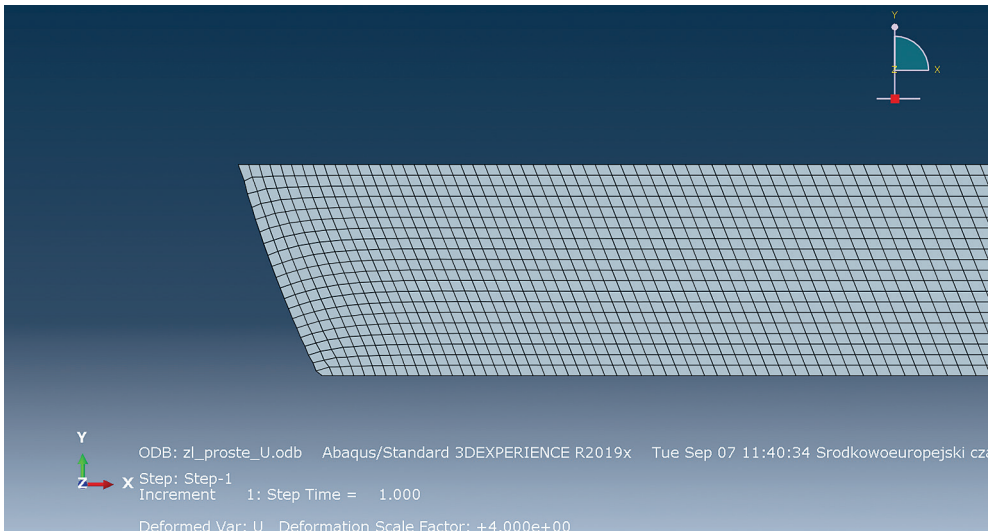
Rys. 12. Rozkład naprężenia stycznego w otoczeniu brzegu swobodnego – warunki zadania identyczne jak dla rys. 11



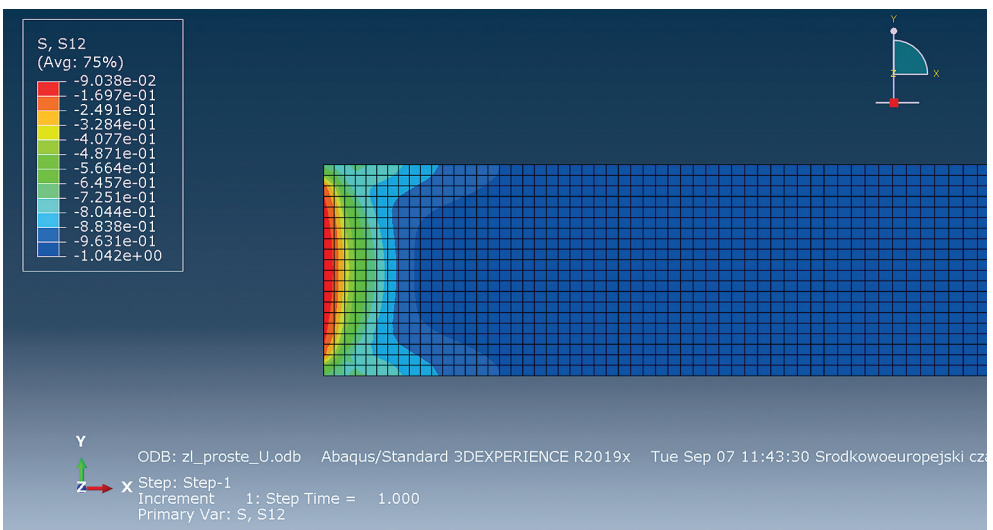
Rys. 13. Deformacja otoczenia brzegu swobodnego –skleina (szara) i element łączony (beżowy) o porównywalnych sztywnościach. Utwierdzenie na powierzchni dolnej, normalne obciążenie rozciągające przyłożone do czoła elementu łączonego



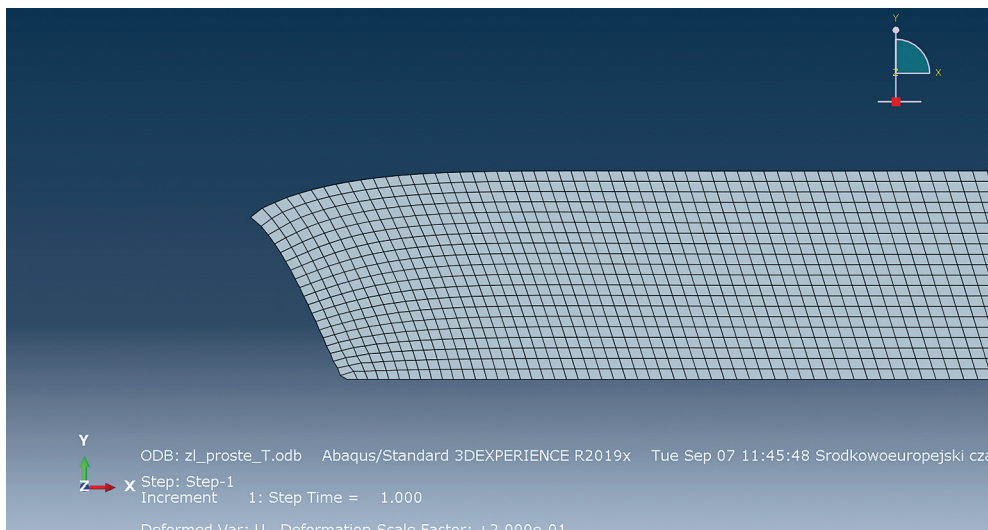
Rys. 14. Rozkład naprężenia stycznego w otoczeniu brzegu swobodnego – warunki zadania identyczne jak dla rys. 13



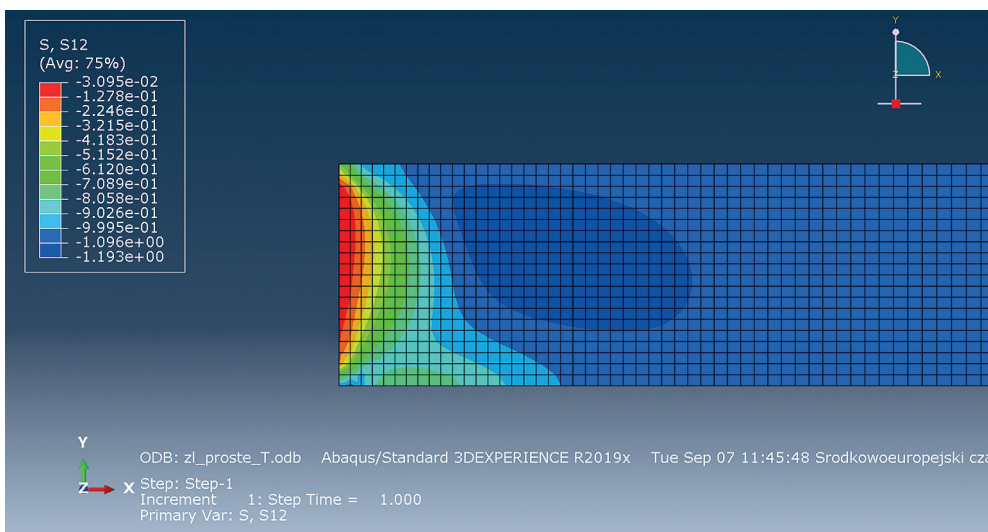
Rys. 15. Deformacja otoczenia brzegu swobodnego – ograniczona deformacja prostopadła: utwierdzenie na powierzchni dolnej, wymuszone przemieszczenie poziome i zerowe przemieszczenie pionowe na powierzchni górnej



Rys. 16. Rozkład naprężenia stycznego w otoczeniu brzegu swobodnego – warunki zadania identyczne jak dla rys. 15



Rys. 17. Deformacja otoczenia brzegu swobodnego – swobodna deformacja prostopadła: utwierdzenie na powierzchni dolnej, zadane naprężenie styczne i zerowe naprężenie normalne na powierzchni górnej



Rys. 18. Rozkład naprężenia stycznego w otoczeniu brzegu swobodnego – warunki zadania identyczne jak dla rys. 17

Rysunki 17 i 18 dotyczą swobodnej deformacji prostopadłej do płaszczyzny łącza (elementy łączone o małej sztywności giętej), co modelowane jest przyjęciem statycznego warunku brzegowego na krawędzi górnej (równomierne naprężenie styczne, brak naprężenia normalnego). Obszar występowania efektów



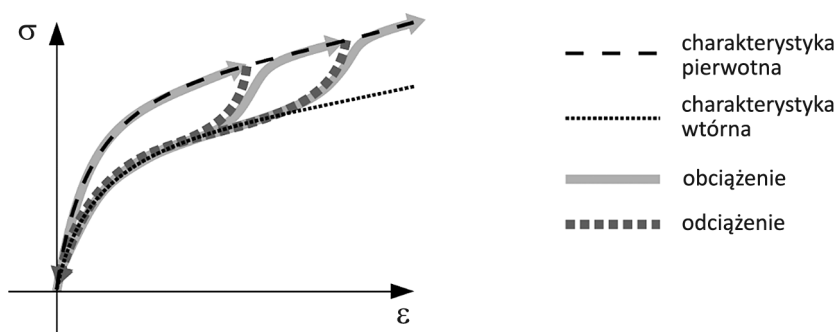
brzegowych jest większy niż w przypadku skleiny z ograniczoną deformacją prostopadłą, nadal jednak zbliżony wymiarem do grubości skleiny.

Należy zaznaczyć, że prawie wszystkie omawiane modele tworzone są w ramach **liniowej teorii sprężystości, nieliniowej teorii sprężystości lub teorii plastyczności** i nie uwzględniają wielu zjawisk fizycznych, które mogą istotnie wpływać na pracę złącza klejowego. Wśród najważniejszych świadomie pominiętych czynników należy wymienić przede wszystkim własności lepkie materiału skleiny oraz wpływ temperatury.

Jeśli chodzi o **własności lepkie materiału**, należy podkreślić, że materiały, z których wykonywane są skleiny, nawet w zakresie małych odkształceń są w istocie materiałami lepkosprężystymi, czyli ich odpowiedź na zadane wymuszenie zależy nie tylko od wielkości danego naprężenia lub odkształcenia, ale również od prędkości przyrostu tych wielkości. Oznacza to, że wszystkie omawiane w niniejszej pracy modele złączy klejowych, wyprowadzone w ramach teorii sprężystości i plastyczności z pominięciem zjawisk lepkich, zwłaszcza zaś liczbowe wartości parametrów tych modeli, mogą być stosowane jedynie dla ustalonej prędkości deformacji. Zmiana ustalonej wartości prędkości deformacji wymaga stosowania odmiennych parametrów modelu. Zmienność prędkości deformacji w toku procesu obciążenia sprawia, że modele te nie mogą być stosowane bez odpowiednich modyfikacji. Antycypując wyprowadzane w dalszej części opracowania wyniki, już teraz należy zwrócić uwagę, że nawet **jednostajny proces ścinania skleiny** (w sensie stałego przyrostu przemieszczenia w jednostce czasu) **skutkuje w ogólności niejednostajną** (zmienną w czasie) **prędkością rozciągnięć głównych** (por. równanie (6.1)). W przypadku lepkosprężystych materiałów skleiny modelowanie konstytutywne w ramach teorii sprężystości (z pominięciem własności lepkich) jest w sensie ścisłym niepoprawne właśnie z uwagi na wspomnianą niejednostajność. Dopuszczalność stosowania sprężystych lub sprężysto-plastycznych związków konstytutywnych może być tutaj uzasadniona jedynie niewielkim wpływem własności lepkich – wielkość tego wpływu powinna być jednak każdorazowo sprawdzana doświadczalnie. W praktyce wygląda to tak, że **w modelach obliczeniowych wyprowadzonych z teorii sprężystości i plastyczności wartości parametrów tych modeli** (zwłaszcza stałych sprężystych) **zależą od prędkości odkształcenia**. Należy bardzo wyraźnie podkreślić, że podejście takie jest jedynie niedoskonałym przybliżeniem o ograniczonym zakresie stosowalności i **w żadnej mierze nie może być interpretowane w kategoriach formułowania lepkosprężystego związku konstytutywnego**. Związki fizyczne muszą bowiem spełniać postulaty determinizmu, lokalności oraz obiektywności materiałowej (Szeptyński 2020a), natomiast związki posługujące się prędkościami odkształcenia i prędkościami naprężenia niekoniecznie spełniają ostatni z owych postulatów. Aby tak było, wykorzystywane miary prędkości naprężenia i odkształcenia muszą być obiektywne, czyli niezależne od wyboru układu odniesienia. Wybrane miary tego rodzaju omówiono w pracy (Prager 1961). Należy ponadto zwrócić

uwagę, że w przypadku wielu klejów należy spodziewać się, że ich charakterystyka lepkosprężysta dana będzie nieliniowym związkiem konstytutywnym, o czym świadczy np. nieliniowa zależność krzywej pełzania od poziomu obciążenia kleju (Piekarczyk 2023).

Specyficznym zjawiskiem związanym z własnościami lepkimi materiału skleiny jest tzw. **efekt Mullinsa** – zjawisko zmiany charakterystyki fizycznej materiału przy ponownym obciążeniu względem jego charakterystyki pierwotnej (por. rys. 19). Wtórna charakterystyka materiału zależy od maksymalnej wartości naprężenia, osiągniętej we wcześniejszych procesach obciążenia, przy czym, jeśli kolejne procesy nie przekraczają tej wielkości, to własności mechaniczne materiału w tych procesach są w przybliżeniu takie same. Oznacza to, że charakterystyka złącza klejowego jest zawsze inna przy pierwszym dociążeniu niż przy wszystkich późniejszych procesach obciążenia, nawet jeśli maksymalna wielkość obciążenia jest wciąż taka sama.



Rys. 19. Efekt Mullinsa

Z tego względu omawiane modele nie mogą być stosowane bez odpowiednich modyfikacji do opisu zagadnień **obciążenia niemonotonicznego** lub **obciążenia cyklicznego**. W naszych rozważaniach pominięte zostaną zatem wielokrotne procesy obciążenia i odciążenia (zwłaszcza obciążenia cykliczne), skutkujące zmianą charakterystyki mechanicznej materiału skleiny oraz powstawaniem i rozwojem pęknięć i zmęczeniową degradacją własności mechanicznych materiału.

Rezygnacja ze stosowania ścisłych związków konstytutywnych lepkosprężystości sprawia, że konieczne jest również wyłączenie z zakresu naszych rozważań obciążeń o charakterze dynamicznym, czyli procesów obciążenia zachodzących na tyle szybko, że konieczne staje się uwzględnienie zjawisk inercyjnych (obciążenia z wysokimi prędkościami odkształcenia, drgania, obciążenia udarowe).

Kolejnym świadomie pomijanym w większości opracowań czynnikiem, istotnie wpływającym na odpowiedź mechaniczną sklein polimerowych, jest **podatność charakterystyki mechanicznej na wpływ temperatury**. Własności mechaniczne sklein w złączach klejowych wykazują znaczną wrażliwość na wysokość tempera-

tury otoczenia (Zajac 2018). Ogólnie można stwierdzić, że wraz z wzrostem temperatury sztywność i wytrzymałość polimerów spadają. Złącza pracujące w podwyższonych temperaturach wykazują cechy właściwe złączom o bardziej podatnych skleinach – bardziej równomiernym rozkładem odkształcenia i naprężenia wzdłuż długości zakładu. W omawianych modelach złączy klejowych pominięty zostanie wpływ temperatury na własności mechaniczne sklein. Oznacza to, że – podobnie jak w przypadku zjawisk lepkich – modele te stosowane być mogą jedynie w warunkach ustalonej temperatury oraz pod obciążeniem, które nie doprowadzi do istotnego zaburzenia jednorodnego pola temperatury w objętości skleiny (przede wszystkich chodzi tu o obciążenia udarowe lub obciążenia cykliczne o wysokiej częstotliwości). Tym samym liczbowe wartości parametrów takich modeli mogą być wykorzystywane jedynie dla temperatury, przy której zostały one wyznaczone – zmiana warunków termicznych pociąga za sobą konieczność doboru odmiennych parametrów modelu. Również i w tym miejscu należy podkreślić, że podejście takie nie ma nic wspólnego z modelowaniem konstytutywnym właściwym dla termosprężystości (Nowacki 1972) lub termolepkosprężystości (Christensen 1982).

Mając na uwadze powyższe spostrzeżenia, możemy stwierdzić, że właściwym przedmiotem niniejszej monografii są ścinane **warstwy klejowe, pracujące w warunkach ustalonej temperatury, obciążone monotonicznie na sposób quasi-statyczny, przy czym geometria złącza i charakter obciążenia są tego rodzaju, że dominującym stanem mechanicznym w skleinie jest stan prostego ścinania.**

Opracowanie obejmuje swoim zakresem:

1. **wprowadzenie** uwzględniające **charakterystykę złączy klejowych** oraz **matematyczny opis stanu prostego ścinania** wraz z **modelowaniem konstytutywnym** dla owego stanu w ramach nieliniowej teorii sprężystości,
2. **szczególony opis założeń wybranych analitycznych modeli złączy zakładkowych** wraz z wyprowadzeniem równań rządzących zagadnieniem ścinania złączy tego typu oraz sformułowaniem stosownych warunków brzegowych,
3. **przeprowadzenie symulacji numerycznych porównujących przewidywania wybranych analitycznych modeli złączy zakładkowych,**
4. **przedstawienie autorskiego modelu wielowarstwowej belki kompozytovej** oraz jego rozwiązań analitycznych,
5. **walidację numeryczną i eksperymentalną zaproponowanego modelu.**

W opracowaniu tym przedstawione zostaną wybrane analityczne modele ścinanych złączy klejowych oraz modelowanie klejonych belek kompozytowych. Szczegółowy opis tych modeli poprzedzony został omówieniem matematycznego modelowania zjawiska ścinania warstwy adhezyjnej, czyli kinematyki stanu prostego ścinania oraz modelowania konstytutywnego materiałów, z których wykonuje się skleiny.

W dobie stosunkowo łatwego dostępu do zaawansowanego oprogramowania, wykorzystującego nowoczesne metody obliczeniowe (przede wszystkim metodę

elementów skończonych, MES), oraz komputerów o bardzo dużych mocach obliczeniowych pojawia się uzasadnione pytanie o potrzebę i zasadność opracowywania, badania i rozwijania opisów teoretycznych i wynikających z nich modeli analitycznych. Choć stosowalność uproszczonych modeli analitycznych ograniczona jest przez konieczność spełnienia określonych warunków (np. takich, jak omówione w powyższych akapitach), stanowią one praktyczne narzędzie służące projektowaniu i analizie złączy klejowych. Trzeba przy tym zauważyć, że znacząca część złączy, będących przedmiotem analiz w szeroko rozumianej praktyce inżynierskiej, rzeczywiście spełnia założenia, przy których stosowanie uproszczonych modeli jest uzasadnione.

O użyteczności tych modeli stanowi ich prostota, dzięki której możliwe jest wyznaczenie **zamkniętych wzorów opisujących deformację i rozkład sił wewnętrznych w elementach złącza**. Wzory te stanowią narzędzia projektowe i analityczne, które z kolei mogą służyć formułowaniu zaleceń lub wymagań określanych przez normy branżowe. Problem formułowania zasad projektowania dla konstrukcji wykorzystujących złącza adhezyjne jest niezwykle złożony – jedną z kluczowych trudności okazuje się silna zmienność wyników badań doświadczalnych, spowodowana samą tylko różnicą rozmiarów próbki (efekt skali), jak również wpływem pozornie nieistotnych różnic w sposobie przekazywania obciążenia (warunki brzegowe). Owe różnice skutkują całkowicie odmiennym stanem naprężenia w próbkach (Pasternak i Ciupack 2014). Problem ten można częściowo rozwiązać przez wprowadzenie współczynników konwersji, które pozwalają uwzględnić wpływ omawianych czynników na nośność elementu (van Straalen 2000).

Znajomość analitycznej struktury rozwiązania pozwala również „spojrzeć w głąb zagadnienia”, czyli w sposób ścisły i jednoznaczny określić związki przyczynowo-skutkowe (zależności między zmiennymi niezależnymi a zależnymi) oraz wewnętrzne związki między różnymi aspektami pracy rzeczywistego układu fizycznego. Analizy wpływu tych czynników dokonuje się za pomocą klasycznych metod rachunku różniczkowo-całkowego w ramach analizy parametrycznej zamkniętego rozwiązania analitycznego. W przypadku rozwiązań numerycznych analiza taka jest z samej natury owych metod ograniczona zarówno w swoim zakresie, jak i rozdzielczości (dyskretny zbiór wyników symulacji numerycznych). Jeśli chodzi o modele analityczne, to w przypadkach gdy uzyskanie zamkniętego rozwiązania nie jest możliwe, modele te w stosunkowo prosty sposób dostarczyć mogą przybliżonych rozwiązań numerycznych, uzyskiwanych przez zastosowanie najbardziej podstawowych metod obliczeniowych, takich jak np. metoda różnic skończonych (MRS) (Bigwood i Crocombe 1990), czy iterowana metoda Rungego–Kutty (Szeptyński i Nowak 2021), które realizować można na komputerach osobistych i które nie wymagają specjalistycznego oprogramowania – z powodzeniem stosować tu można darmowe i otwarte oprogramowanie typu Scilab, Octave itp.

W niniejszej pracy zaimplementowano wybrane modele analityczne w programie do obliczeń symbolicznych wxMaxima, przy czym przy wyznaczaniu numerycznych wartości stałych całkowania oraz wartości i wektorów własnych macierzy współczynników układu równań różniczkowych posłużono się programem Octave.

Symulacje numeryczne metodą elementów skończonych (MES), przedstawione w niniejszej monografii, przeprowadzone zostały z wykorzystaniem programu Abaqus. Złącza ze skleina o silnie nieliniowej charakterystyce modelowano z wykorzystaniem subrutyn VUMAT, przy założeniu możliwości wystąpienia dużych odkształceń. W pozostałych przypadkach posługiwano się liniową teorią sprężystości (małe odkształcenia, liniowe związki konstytutywne). Stosowano sześciennie elementy skończone, których maksymalny wymiar powiązany był z minimalnym wymiarem określającym geometrię złącza, czyli z grubością skleiny.

### 3. Charakterystyka połączeń klejowych

Wartościowe zestawienie kluczowych cech charakterystycznych złączy klejowych oraz ich wykonania można znaleźć w pracy (Mirski i Piwowarczyk 2008). Mechanizm pracy złącza klejowego zasadza się na zjawiskach **adhezji** (powierzchniowego związania skleiny z elementem łączonym) oraz **kohezji** (wewnętrznej spójności skleiny). Mechanizmy adhezji mają złożoną naturę fizyko mechaniczną i wyjaśniane są na gruncie teorii oddziaływań międzycząsteczkowych. W większej skali o własnościach połączenia adhezyjnego decyduje stopień penetracji nierówności lub otwartych porów powierzchni elementu łączonego przez materiał skleiny. Zasadniczo mniejsza lepkość (m.in. w warunkach podwyższonej temperatury), większe ciśnienie oraz dłuższy czas wnikania materiału skleiny zwiększają siłę adhezji. O sile adhezji stanowi również zwilżalność powierzchni elementu łączonego przez materiał skleiny, na co wpływ mają własności fizykochemiczne obydwu materiałów, a także chropowatość i niejednorodność powierzchni.

O własnościach mechanicznych złącza klejowego w największej mierze (lecz nie wyłącznie) decyduje dobór materiału skleiny, która zagwarantować ma spełnienie wymagań stawianych złączu w zakresie jego nośności, sztywności i trwałości w zadanych warunkach pracy. Wśród stosowanych materiałów wymienić można:

- **kleje na bazie żywic epoksydowych** – kleje występują w postaci jednoskładnikowej lub dwuskładnikowej (żywica i utwardzacz). W zależności od powierzchni klejenia wiązanie następuje po upływie od kilku minut do kilku godzin – pełną wytrzymałość złącze osiąga niekiedy dopiero po kilku dniach. Czas ten można skrócić przez dogrzewanie złącza w temperaturze z zakresu  $60\div 80^{\circ}\text{C}$ , co sprzyja również polepszeniu własności mechanicznych złącza. Złącza na bazie żywic epoksydowych charakteryzują się względnie większą sztywnością w porównaniu do np. złączy na bazie poliuretanu. Utwardzanie złącza w temperaturze powyżej  $180^{\circ}\text{C}$  zwiększa wytrzymałość kleju, jednakże dzieje się to kosztem sprężystości (podatności) złącza i jego udarność. Wytrzymałość na ścinanie klejów na bazie epoksydu sięga około 25 MPa. Zakres temperatur dopuszczalnych dla stosowania złączy na bazie klejów epoksydowych to nawet przedział  $-250\div 175^{\circ}\text{C}$ , jakkolwiek w praktyce nie stosuje się żywic epoksydowych w temperaturach powyżej  $120^{\circ}\text{C}$  (Broughton 2012);
- **kleje poliuretanowe** – kleje występują w postaci jednoskładnikowej lub dwuskładnikowej, z rozpuszczalnikiem lub bez rozpuszczalnika. Klej jednoskładnikowy bez rozpuszczalnika utwardza się wskutek pobierania wody z powietrza lub w wyniku natryskiwania. W przypadku kleju jednoskładni-

kowego z rozpuszczalnikiem konieczne jest całkowite lub prawie całkowite odparowanie rozpuszczalnika. Klej dwuskładnikowy zaczyna twardnieć po zmieszaniu składników w temperaturze pokojowej, jakkolwiek zwiększenie temperatury przyspiesza proces twardnienia. Kleje poliuretanowe charakteryzują się mniejszą wytrzymałością i większą podatnością od klejów na bazie żywic epoksydowych (Kwiecień 2012). Wytrzymałość klejów poliuretanowych na ścinanie zawiera się najczęściej w zakresie od 0,5 MPa do około 15 MPa. Deklarowany przez producentów (np. Gallagher) zakres temperatur dopuszczalnych dla stosowania złączy na bazie klejów poliuretanowych to w przybliżeniu  $-60\div 100^{\circ}\text{C}$ . Odpowiedni dobór składników pozwala zwiększyć maksymalną dopuszczalną temperaturę nawet do  $150^{\circ}\text{C}$ ;

- **kleje metakrylowe** – kleje dwuskładnikowe, w których utwardzacz może być dodany w postaci proszku, pasty lub lakieru. Charakteryzują się wysoką wytrzymałością na ścinanie (do 40 MPa). Zakres temperatur dopuszczalnych dla stosowania złączy na bazie klejów metakrylowych to około  $-40\div 130^{\circ}\text{C}$  (Mirski i Piwowarczyk 2008);
- **cyjanoakryl** – kleje bez rozpuszczalnika o bardzo krótkim czasie wiązania, rzędu od kilku do kilkunastu sekund. Twardnieją pod wpływem wody pobieranej z powietrza. Wytrzymałość na ścinanie zawiera się najczęściej w zakresie  $2\div 7$  MPa. Zakres temperatur dopuszczalnych dla stosowania złączy na bazie klejów cyjanoakrylowych ogólnego zastosowania to około  $-54\div 82^{\circ}\text{C}$  (Troughton 2009).

O jakości złącza – z punktu widzenia wytrzymałości, sztywności oraz trwałości – w dużej mierze decyduje sposób wykonania złącza, czyli:

- **przygotowanie powierzchni** – usunięcie zanieczyszczeń: osadów, pyłów, tlenków (rdzy), tłuszczu, olejów, smarów, warstw reakcyjnych, przypowierzchniowo związanej wody. Stosuje się również aktywne przygotowanie pożądanej powierzchni przez zwiększenie jej powierzchni właściwej drogą obróbki mechanicznej (szlifowanie, chropowacenie itp.), chemicznej (m.in. trawienie, utlenianie) lub innymi metodami. Jakość złącza można zwiększyć przez zastosowanie podkładów, które poprawiają adhezję, zwiększają trwałość wiązania, a ponadto dodatkowo zabezpieczają powierzchnię przed zawilgoceniem i korozją. Przygotowanie powierzchni wpływa w istotny sposób na nośność złącza, nie ma jednak wpływu na jego sztywność (Amorim i in. 2018);
- **wykonanie mieszanek** – konieczne jest zachowanie odpowiednich proporcji składników w klejach wieloskładnikowych, właściwe ich zmieszanie, eliminacja pęcherzy powietrza;
- **nakładanie kleju** – powinno być wykonane w czasie nie dłuższym niż określony przez producenta dla danego materiału;
- **utwardzanie** – może być efektem procesu fizycznego lub chemicznego, oddziaływania podwyższonej temperatury lub promieniowania UV. W czasie

utwardzania elementy złącza powinny pozostawać w niezmiennym położeniu. Czas utwardzenia kleju można zmniejszyć przez użycie aktywatorów. W niektórych przypadkach ich stosowanie jest wręcz konieczne.

Wśród czynników wpływających na trwałość połączeń klejowych wymienić należy przede wszystkim następujące:

- **temperatura** – czynnikiem, który w najwyraźniej zauważalny sposób wpływa na nośność i sztywność połączeń klejowych, jest temperatura, która w sposób bezpośredni oddziałuje na strukturę wewnętrzną polimerowych materiałów skleln. Niekiedy przyjmuje się, że maksymalną temperaturą bezpiecznej pracy złącza klejowego jest 100°C (Piekarczyk 2023), w rzeczywistości jednak dopuszczalny zakres temperatury dla stosowalności kleju zależy silnie od jego składu. Wielkością odniesienia dla wszelkich rozważań z tego zakresu jest temperatura zeszklenia  $T_g$ , czyli temperatura, przy której chłodzony polimer w stanie wysokoelastycznym lub lepko-płynnym przechodzi w stan szklisty, co pociąga za sobą silny przyrost lepkości. W rzeczywistości jest to wielkość do pewnego stopnia umowna, ponieważ proces zeszklenia zachodzi w pewnym zakresie temperatur. Właśnie w tym zakresie zmienność własności mechanicznych materiału wskutek zmian temperatury jest największa. Zarówno wytrzymałość skleln, jak i ich sztywność maleją wraz z wzrostem temperatury. Rozkład naprężenia stycznego w złączach w wyższych temperaturach charakteryzuje się większą równomiernością (Zajac 2018) – obszary koncentracji naprężenia przy brzegach skleiny ulegają zmniejszeniu kosztem podwyższenia wielkości naprężenia stycznego w środkowej części złącza, gdzie i tak jest ona mniejsza od wartości maksymalnej, która występuje przy brzegach. W ten sposób nośność materiału skleiny jest w większym stopniu wykorzystana na większym obszarze złącza. Przypadkiem granicznym jest tutaj skleina doskonale podatna (płynna, plastyczna), dla której rozkład naprężenia jest stały. Owo zwiększenie równomierności rozkładu naprężenia stycznego odbywa się jednak kosztem sztywności złącza. Z drugiej strony kleje wystawione na działanie niskich temperatur mogą stawać się bardziej kruche;
- **wilgotność** – zjawisko absorpcji wody przez materiał skleiny wpływa niekorzystnie na jej własności mechaniczne. Woda pochłaniana jest przede wszystkim w obszarze zachodzenia przemiany szklistej (witryfikacji), w mniejszym zaś stopniu w obszarach, w których skleina jest w stanie plastycznym lub szklistym. Przyjmuje się, że skutki absorpcji wilgoci z otoczenia są przynajmniej częściowo nieodwracalne z uwagi na spowodowane absorpcją mikropęknięcia i tworzenie mikropustek oraz zachodzące w obecności wody reakcje chemiczne. Obserwuje się również spadek temperatury zeszklenia polimerów, spowodowany absorpcją wody z otoczenia (Jurf i Vinson 1985; Fevery i in. 2021);



- **obecność promieniowania UV** – poza tym, że światło UV stosuje się w celu utwardzenia materiału skleiny, wpływ promieniowania ultrafioletowego na pracę połączenia klejowego jest wieloraki i zależy zarówno od materiału skleiny, jak i od czasu ekspozycji oraz pozostałych warunków pracy złącza. Przykładowo, dla klejów na bazie żywic epoksydowych obserwuje się spadek wytrzymałości na ścinanie w temperaturze pokojowej przy długotrwałym oddziaływaniu promieniowania UV, przy czym zmianie ulega również charakter zniszczenia (większy udział kruchego pęknięcia) (Khaleel i in. 2019), a sztywność materiału wzrasta (Nguyen i in. 2012). Z drugiej strony długotrwałe naświetlanie może prowadzić do wzrostu wytrzymałości złącza w podwyższonych temperaturach (Amorim i in. 2018). Przy badaniu wpływu promieniowania UV konieczne trzeba zwrócić uwagę na fakt, że zarówno w przypadku próbek badanych w laboratorium, jak i rzeczywistych złączy wpływu promieniowania ultrafioletowego nie da się odseparować od jednoczesnego wpływu podwyższonej temperatury;
- **agresywność chemiczna środowiska** – trwałość, nośność i sztywność złączy, z uwagi na agresywne oddziaływanie substancji chemicznych obecnych w środowisku, zależy oczywiście od tego, w jakim stopniu materiał skleiny jest podatny na szkodliwe oddziaływanie konkretnego czynnika agresywnego. Wśród substancji potencjalnie szkodliwych dla połączenia wymienić należy wodę (zwłaszcza wrzątek), oleje, alkalia, benzyny, alkohole, ketony, estry, acetony, związki aromatyczne, a także kwasy (np. solny, siarkowy, azotowy) i zasady (np. wodorotlenek sodu, wodorotlenek potasu) (zob. np. Weggemans 1967). O możliwości zastosowania zadanego materiału do wykonania złącza klejowego w określonym środowisku chemicznym decyduje nie tylko rodzaj czynnika agresywnego, ale również jego stężenie;
- **cykliczna zmienność warunków pracy** – kluczowym aspektem zagadnienia trwałości połączeń klejowych jest zmienność warunków pracy, która – podobnie jak w przypadku szerzej znanych zjawisk zmęczenia i mechaniki pęknięcia metali i stopów – skutkuje obniżeniem wytrzymałości skleiny. W przeciwieństwie do metali, w przypadku których obserwuje się występowanie trwałej (nieograniczonej) wytrzymałości zmęczeniowej, w niektórych materiałach sklein polimerowych taka graniczna wartość może nie istnieć – w takiej sytuacji wytrzymałość zmęczeniową określa się dla z góry ustalonej liczby cykli obciążenia (ISO 9664:1993). Wytrzymałość zmęczeniowa zależy istotnie od charakterystyki obciążenia. Obserwuje się, że amplituda obciążenia złącza ścinanego w większym stopniu wpływa na wielkość wytrzymałości zmęczeniowej niż liczba cykli obciążenia (Houjou i in. 2021). Podobnie jak wytrzymałość doraźna również i wytrzymałość zmęczeniowa spada wraz z wzrostem temperatury i wilgotności. Należy przy tym zwrócić uwagę, że na obniżenie wytrzymałości zmęczeniowej względem doraźnej ma wpływ nie

tylko zmienność wartości obciążenia mechanicznego, lecz również cykliczne zmiany warunków pracy złącza, m.in. temperatury i wilgotności. Zmienne warunki pracy mogą doprowadzić do zniszczenia złącza (odspojenia) nawet przy braku obciążenia mechanicznego (Korta i in. 2015). Na zmęczeniową wytrzymałość złącza klejowego ma również wpływ geometria złącza, zwłaszcza zaś obecność karbu. Koncentracja naprężenia stycznego oraz odrywającego naprężenia normalnego pojawia się nie tylko w karbie, ale również przy brzegach złącza (Broughton i in. 1999), co w największym stopniu dotyczy złączy o sztywnych skleinach.

## 4. Zastosowania połączeń klejowych

Złącza klejowe, podobnie jak inne złącza powierzchniowe oraz liniowe, charakteryzują się większą jednorodnością rozkładu stanu naprężenia we wszystkich elementach złącza niż w przypadku złączy punktowych, w których obecność punktowego łącznika niejednokrotnie wiąże się z występowaniem koncentracji naprężeń, a tym samym z uzależnieniem globalnej nośności złącza od lokalnej silnej zwyczajki wielkości naprężenia w strefie kontaktu. Powodem, dla którego złącza klejowe zyskały ogromną popularność oraz nieustannie znajdują zastosowanie w wielu obszarach przemysłu, jest fakt, że umożliwiają one łączenie elementów konstrukcyjnych wykonanych z różnych materiałów. Złącza zgrzewane, lutowane czy spawane mogą być stosowane jedynie do łączenia elementów wykonanych z takich materiałów, dla których wykonanie takiego złącza jest w ogóle technologicznie możliwe. W przypadku złączy klejowych ograniczenie to właściwie nie istnieje – umożliwiają one łączenie wszystkich kluczowych materiałów konstrukcyjnych, takich jak metale i stopy (stal, aluminium), materiały mineralne (beton, ceramika, kamień), materiały drewnopochodne (tarcica, drewno klejone) czy wreszcie tworzywa sztuczne – w każdej konfiguracji. Pozwala to na tworzenie układów wielomateriałowych, w których wykorzystuje się specyficzne własności każdego z materiałów w możliwie najefektywniejszy sposób. Umożliwia to osiągnięcie wymaganej wytrzymałości, sztywności i stateczności układu przy jednoczesnym zmniejszeniu zużycia materiału oraz całkowitej jego masy, co dodatkowo zwiększa nośność graniczną układu oraz ma istotne znaczenie w przemyśle lotniczym i motoryzacyjnym.

Pierwsze prace naukowe z zakresu modelowania złączy klejowych Volkersena (Volkersen 1938) oraz de Bruyne'a (de Bruyne 1944) pojawiły się w kontekście zastosowania złączy tego typu w przemyśle lotniczym. Elementy metalowe łączone były za pomocą kleju fenoloformaldehydowego już w 1942 roku, zaś w 1946 roku wykorzystano po raz pierwszy żywice epoksydowe (Piekarczyk 2023). W późniejszych latach wiele kluczowych opracowań dotyczących złączy klejowych zlecanych było przez państwowe instytucje związane z przemysłem lotniczym (Hart-Smith 1973b; a; Renton i Vinson 1973; Cooper i Sawyer 1979; Delale i in. 1980). Obecnie złącza klejowe stosuje się m.in. do: spajania drugorzędnych elementów konstrukcyjnych, łączenia poszycia z konstrukcją nośną kadłuba, a niekiedy również łączenia elementów składowych samej konstrukcji nośnej (da Silva i in. 2011).

Zastosowanie złączy klejowych w przemyśle motoryzacyjnym jest ograniczone z uwagi na długość czasu wiązania i dojrzewania kleiny, która jest niekompatybilna z koncepcją seryjnej produkcji samochodów na linii montażowej. Stosuje się

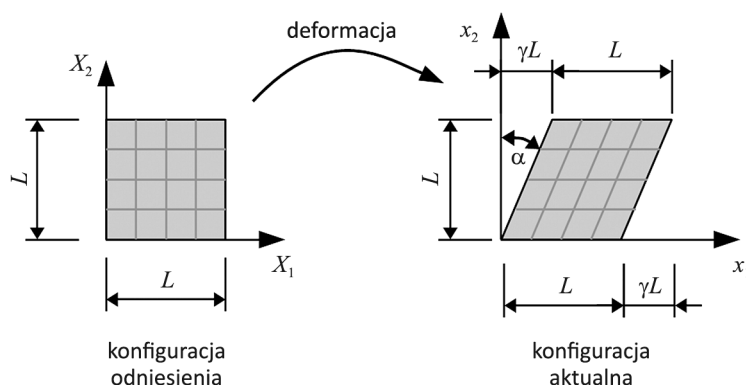
jednak połączenia klejowe np. w przypadku klejenia okien (da Silva i in. 2011), ob-lachowania oraz elementów wykończenia wnętrza. W przemyśle motoryzacyjnym obserwuje się wzmożone zainteresowanie wykorzystaniem rozwiązań wielomateria-łowych (stali, stopów aluminium i stopów magnezu o wysokich wytrzymałościach, kompozytów) z uwagi na możliwość obniżenia masy samochodu przy jednocze-snym zachowaniu nośności i sztywności konstrukcji, co z kolei pozwala na większą oszczędność paliwa i w konsekwencji na ograniczenie emisji szkodliwych dla śro-dowiska czynników. W przypadku układów wielomateriałowych nie jest możliwe zastosowanie złączy spawanych, a wykorzystanie łączników punktowych (nitów, śrub) wymaga osłabienia otworami przekroju łączonych elementów nośnych. Łą-czenie różnych materiałów stanowi obecnie szerokie pole dla zastosowań złączy klejowych (Goede i in. 2009; Korta i Uhl 2013). Zarówno w przypadku przemysłu lotniczego, jak i przemysłu motoryzacyjnego stosowane złącza klejowe nie mają z reguły charakteru omawianych w niniejszej pracy złączy ścinanych – kluczowym aspektem stosowania złączy klejowych w tych gałęziach przemysłu jest nośność złącza na odrywanie.

Technologie łączenia za pomocą sklein wykorzystywane są powszechnie w bu-downictwie. W istocie, zastosowanie w łączeniu jakiegokolwiek zaprawy – mineralnej czy mineralno-polimerowej – ma charakter złącza klejowego (adhezyjnego). W tym sensie wszystkie tradycyjne technologie wznoszenia konstrukcji z elementów ma-łowymiarowych (cegły, bloczki, pustaki) czy prace wykończeniowe (glazurnictwo, posadzkarstwo) wykorzystują technologie łączenia właściwe złączom klejowym. Charakter pracy połączeń tego typu – podobnie jak w przypadku np. sklein polime-rowych wykorzystywanych w kotwach chemicznych lub przy tworzeniu dźwigar-ów z drewna klejonego – jest oczywiście odmienny od omawianego w niniejszym opracowaniu. Złącza klejowe w budownictwie pełnią niejednokrotnie dodatkową funkcję uszczelnienia. Złącza klejowe w postaci cienkich ścinanych warstw adhe-zyjnych znajdują w budownictwie zastosowanie np. przy kształtowaniu kompozy-towych elementów konstrukcyjnych takich jak drewno klejone krzyżowo (CLT) lub jako zamocowanie elementów wzmacniających konstrukcję w postaci taśm z włók-na węglowego (CFRP), włókna szklanego (GFRP) lub innych taśm kompozytowych (Kowal 2016). Zastosowanie połączeń klejowych w konstrukcjach metalowych oraz różnorodne aspekty zastosowań złączy tego typu omówiono w pracach (Piekarczyk 2012, 2013). Technologie klejenia wykorzystywane są m.in. w mostownictwie – już w latach 50. XX wieku stosowano klejenie w konstrukcji mostów stalowych (Piekarczyk 2023). Technologia ta znajduje zastosowanie w mostownictwie zarów-no w węzłach konstrukcji kratowych, jak i połączeniach kompozytowych płyt po-mostów z elementami wsporczymi czy dźwigarami, czy wreszcie przy wzmacnianiu mostów doklejanymi elementami (Łagoda 2005). Złącza klejowe z powodzeniem wykorzystywane są w łączeniach elementów metalowej szkieletowej podkonstruk-cji dla fasad. Klejenie jest również efektywną metodą wzmacniania i usztywniania

zarówno niewielkich profili zimnogiętych i cienkościennych, jak i podatnych na lokalną utratę stateczności środników blachownic (Piekarczyk 2018). Technika ta ma tę zaletę, że nie prowadzi do uszkodzenia powłoki galwanicznej czy powstania spowodowanych wysoką temperaturą naprężeń resztkowych, jak dzieje się to w przypadku spawania. Innym przykładem zastosowania klejenia jest konstrukcja ażurowych płyt stalowych klejonych z cienkościennymi profilami. W przypadku zastosowania złącza klejowego przy kotwieniu taśm sprężających należy zwrócić uwagę na możliwe dwojakie znaczenie terminu „złącze klejowe”. Z jednej strony elementami łączonymi bezpośrednio są taśma i podłoże, z drugiej zaś to taśma wraz z klejem może mieć charakter łącznika, który za pomocą warstwy adhezyjnej tworzy złącze dwóch elementów konstrukcyjnych. Taki charakter ma zastosowanie taśm sprężających w celu wzmocnienia lub zabezpieczenia uszkodzonych bądź narażonych na uszkodzenie elementów konstrukcyjnych. Szczególnie szerokie zastosowanie wzmocnień tego typu dotyczy zarysowanych konstrukcji żelbetowych (Hollaway 2003) oraz zabezpieczenia zabytkowych ścian murowanych, narażonych na oddziaływania sejsmiczne lub parasejsmiczne (Shrive 2006). Zastosowanie podatnych sklein pozwala również na naprawę złącza klejowego, które wskutek obciążenia uległo zniszczeniu (Kwiecień i in. 2016). W pracy (Sahellie i Pasternak 2015a) porównano nośność zginanych trójpunktowo ceowników, których półki wzmocnione zostały blachami przyklejonym za pomocą żywicy epoksydowej lub akrylowej – obydwa kleje charakteryzują się podobnymi własnościami wytrzymałościowymi, przy czym żywica epoksydowa wykazuje w temperaturze pokojowej nieco większą wytrzymałość i znacznie większą sztywność. Wyniki przeprowadzonych badań doświadczalnych wskazują, że większa odkształcalność żywicy akrylowej zadecydowała o tym, że nośność ceownika była praktycznie identyczna jak w przypadku belek wmacnianych epoksydem, mimo że żywica akrylowa charakteryzuje się mniejszą wytrzymałością. Zastosowanie złączy klejowych w kształtowaniu konstrukcji nośnych nie jest powszechne z uwagi na istotne ograniczenia wynikające ze względnie niższej trwałości złączy tego typu, a spowodowane znaczną podatnością sklein na zmienne warunki atmosferyczne, wahania temperatur czy oddziaływanie promieniowania UV.

## 5. Kinematyka prostego ścinania

**Prostym ścinaniem** nazywamy stan mechaniczny ciała odkształcalnego, w którym **proste włókna materialne** – zbiory punktów odkształcalnego ośrodka ciągłego tworzące odcinek prosty – w wyniku deformacji pozostają proste, lecz nachylnie względem siebie odmiennie niż w konfiguracji odniesienia (rys. 20). Włókna pierwotnie prostopadłe po deformacji nachylone są pod pewnym kątem  $\alpha$ , który nazywać będziemy **kątem ścięcia**.



Rys. 20. Proste ścinanie

W praktyce najczęściej wykorzystywaną miarą wielkości ścięcia jest parametr

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha \quad (5.1)$$

nazywanym **odkształceniem kątowym** lub **odkształceniem postaciowym**. W przypadku małych deformacji wielkości te są w przybliżeniu równe, czyli  $\gamma \approx \alpha$ . W poniższej analizie przyjmować będziemy  $\gamma > 0$ .

Deformacja ciała odkształcalnego może mieć charakter prostego ścinania jedynie lokalnie (w nieskończenie małym otoczeniu wybranego punktu) lub globalnie – dla obszaru o skończonych wymiarach. Dla przejrzystości poniższych rozważań oraz w celu czytelniejszego ich zilustrowania analizować będziemy fragment ośrodka ciągłego o skończonych wymiarach. Zakładać będziemy ponadto, że wewnątrz rozważanego obszaru **deformacja ma charakter jednorodny**, co pociągnie za sobą stałość tensorowego pola gradientu deformacji oraz innych tensorowych miar, służących opisowi deformacji i stanu mechanicznego ciała. Wyniki i wnioski dotyczące poniższej analizy można stosować również w przypadku deformacji niejednorodnej,

przyjmując je za obowiązujące w wystarczająco małym otoczeniu dowolnego punktu continuum, w którym gradient deformacji przyjmuje postać charakterystyczną dla stanu prostego ścinania. Deformacja w stanie prostego ścinania może być opisana równaniami:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \gamma X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (5.2)$$

gdzie:  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) to współrzędne przestrzenne określające aktualne położenie w przestrzeni punktów materialnych, których położenie w konfiguracji odniesienia określają współrzędne materialne  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Jest to deformacja **plaska**. Zakładamy więc, że ciało nie doznaje odkształcenia na kierunku prostopadłym do płaszczyzny zagadnienia, zatem formalnie należy stan ten nazwać **plaskim stanem odkształcenia**. Odpowiadający powyższemu równaniu **materialny gradient deformacji** jest równy:

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Wyznacznik gradientu deformacji (jakobian) w stanie prostego ścinania jest równy:

$$J = \det(\mathbf{F}) = 1 \quad (5.4)$$

Jest to zatem **deformacja izochoryczna** (równoobjętościowa). Ponieważ jakobian odwzorowania współrzędnych materialnych we współrzędne przestrzenne jest niezerowy, odwzorowanie to jest odwracalne. **Przestrzenny gradient deformacji** jest równy:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Wyznamy teraz kolejne miary deformacji. **Materialny gradient przemieszczenia**:

$$\mathbf{H} = \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{F} - \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

**Przestrzenny gradient przemieszczenia:**

$$\mathbf{h} = \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{1} - \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Symetryczna część materialnego gradientu przemieszczenia – **tensor małych odkształceń Cauchy’ego**:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

**Symetryczna część przestrzennego gradientu przemieszczenia:**

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Prawy **tensor deformacji Cauchy’ego–Greena**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ & \gamma^2 + 1 & 0 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Lewy **tensor deformacji Cauchy’ego–Greena**:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \gamma^2 + 1 & \gamma & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

**Materialny tensor odkształcenia Greena–de Saint-Venanta:**

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ & \frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) & 0 \\ & \frac{1}{2} \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right)^2 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$



oraz jego część liniowa, czyli symetryczna część materialnego gradientu przemieszczenia – **tensor małych odkształceń Cauchy’ego**:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na fakt, że nieliniowa miara odkształcenia postaciowego  $E_{12}$  (w ramach teorii dużych odkształceń) oraz miara liniowa  $\varepsilon_{ij}$  (teoria małych odkształceń) są w przypadku prostego ścinania identyczne.

Prawy **tensor rozciągnięcia** w wyjściowym układzie współrzędnych reprezentuje macierz:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{4+\gamma^2}} & \frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}} & 0 \\ & \frac{2+\gamma^2}{\sqrt{4+\gamma^2}} & 0 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\lambda_1^2} \begin{bmatrix} 2\lambda_1 & \lambda_1^2-1 & 0 \\ & \frac{\lambda_1^4+1}{\lambda_1} & 0 \\ \text{sym} & & 1+\lambda_1^2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

gdzie:  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) są **rozciągnięciami głównymi**, czyli wartościami własnymi tensora rozciągnięcia:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{1 + \frac{\gamma}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})} = \frac{1}{\lambda_2} \in [1; +\infty) \\ \lambda_2 &= \sqrt{1 + \frac{\gamma}{2}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4})} = \frac{1}{\lambda_1} \in (0; 1] \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Odształcenie postaciowe można wyznaczyć jako funkcję rozciągnięć głównych:

$$|\gamma| = \sqrt{\lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} - 2} = \sqrt{\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} - 2} \quad (5.16)$$

Tensor obrotu w wyjściowym układzie współrzędnych reprezentuje macierz:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

gdzie:  $\phi$  oznacza kąt zawarty między kierunkiem ścinania (oś  $X_1$ ) a kierunkiem włókna podlegającego największemu rozciągnięciu (oś własna tensora rozciągnięcia, odpowiadająca maksymalnej wartości własnej):

$$\operatorname{tg} \phi = \lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{\gamma^2 + 4} - \gamma}, \quad \phi \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.18)$$

Łatwo pokazać, że:

$$|\gamma| = \operatorname{tg} \phi - \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} - \lambda_2 \quad (5.19)$$

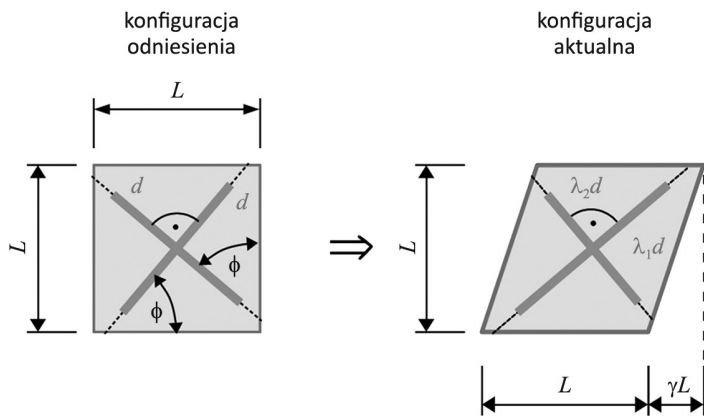
$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\gamma^2 + 4} + \gamma \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\gamma^2 + 4} - \gamma \right) \quad (5.20)$$

Należy przy tym pamiętać o definicji i zakresie wartości rozciągnięć głównych, zgodnie z równaniami (5.15). Powyższe zależności można zilustrować geometrycznie (zob. rys. 21 i 22). Warto zwrócić uwagę na fakt, że orientacja włókien podlegających ekstremalnym rozciągnięciom nie pokrywa się z przekątnymi ścinanego elementu, ale różni się w zależności od wielkości odkształcenia kąтового.

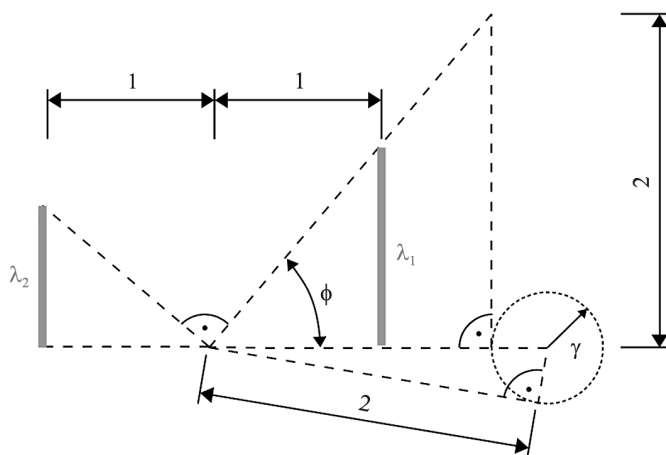
Z uwagi na przejrzystość i jednoznaczność prowadzonych rozważań należy wskazać różnicę pomiędzy ścinaniem „prostym” a ścinaniem „czystym”. **Czystym ścinaniem** nazywamy **płaską deformację izochoryczną**, w której **włókna na jednym kierunku doznają skrócenia, zaś na kierunku prostopadłym – wydłużenia**, przy czym **nie zachodzi sztywny obrót włókien**.

Zatem w przypadku czystego ścinania – inaczej niż w przypadku prostego ścinania – w rozkładzie biegunowym gradientu deformacji **tensor obrotu jest tensorem jednostkowym**, zaś **tensor małych obrotów jest tensorem zerowym**. Zachodzi zatem:

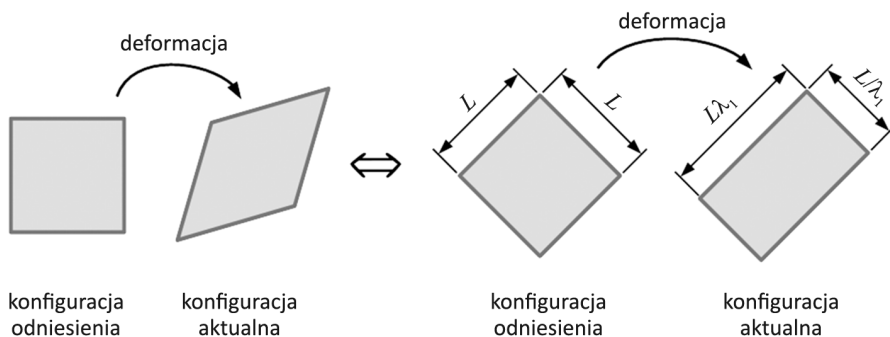
$$\mathbf{R} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{U} = \mathbf{V} \quad (5.21)$$



Rys. 21. Proste ścinanie – geometryczna interpretacja parametrów zagadnienia;  $d$  – długość początkowa włókien podlegających ekstremalnym rozciągnięciom



Rys. 22. Proste ścinanie – geometryczna ilustracja związków (5.20)



Rys. 23. Ilustracja graficzna czystego ścinania w dowolnym układzie odniesienia (po lewej) oraz w układzie, którego osie pokrywają się z kierunkami rozciągnięć głównych

Gradient deformacji musi być więc tensorem symetrycznym. W przypadku czystego ścinania wartości własne  $\mathbf{F}$  są równe rozciągnięciom głównym, a jego wektory własne są tożsame z wektorami własnymi prawego i lewego tensora rozciągnięcia i pokrywają się z kierunkami rozciągnięć głównych. W przypadku prostego ścinania, któremu odpowiada niesymetryczny gradient deformacji, tensor  $\mathbf{F}$  ma potrójną wartość własną równą 1 i tylko dwa liniowo niezależne wektory własne.

Można pokazać, że stan czystego ścinania reprezentuje gradient deformacji o ogólnej postaci:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \sin^2 \psi + \frac{1}{\lambda_1} \cos^2 \psi & \left( \frac{1}{\lambda_1} - \lambda_1 \right) \cos \psi \sin \psi & 0 \\ & \lambda_1 \cos^2 \psi + \frac{1}{\lambda_1} \sin^2 \psi & 0 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

gdzie:  $\psi$  jest kątem uwzględniającym orientację kierunków rozciągnięć głównych, jak również orientacją przyjętego układu współrzędnych. Dla symetrycznego gradientu deformacji pozostałe miary deformacji również dane są tensorami symetrycznymi – w szczególności symetryczny jest gradient przemieszczenia, a zatem jego część antysymetryczna – tensor małych obrotów – jest tensorem zerowym.

W kontekście rozdziału 6, w którym omawiany będzie stan naprężenia związany ze stanem prostego ścinania, ważne jest poczynienie pewnej uwagi terminologicznej. W większości opracowań dydaktycznych stanami prostego i czystego ścinania nazywa się określony typ deformacji. Z drugiej strony stanem „czystego ścinania” nazywa się również szczególny rodzaj stanu naprężenia lub stanu odkształcenia  $\boldsymbol{\omega}$  (przede wszystkim w ramach liniowej teorii sprężystości) – są to stany dewiatorowe (bezsładowe) o zerowym wyznaczniku (Rychlewski i Blinowski 1998):

$$\text{tr}(\boldsymbol{\omega}) = 0, \quad \det(\boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (5.23)$$

czyli tensory, które w układzie swoich osi własnych mają postać:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega & 0 & 0 \\ & -\omega & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

zaś w układzie osi obróconych względem osi własnych o kąt  $45^\circ$  wokół osi odpowiadającej zerowej wartości własnej reprezentowane są przez macierz:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

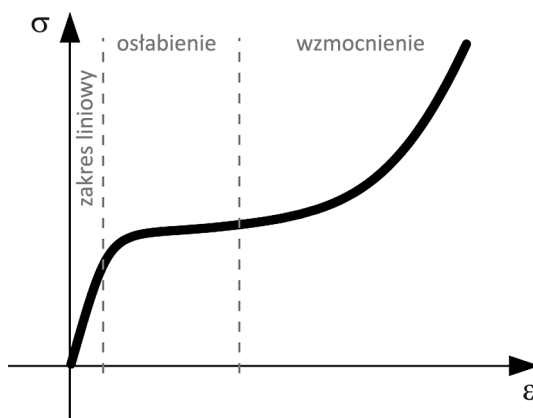
Posługując się terminem „czyste ścinanie”, konieczne może okazać się doprecyzowanie, w jakim znaczeniu jest on użyty. Można stwierdzić, że tensor małych odkształceń, odpowiadający deformacji prostego ścinania, jest stanem odkształcenia czystego ścinania. Przy założeniu liniowego związku konstytutywnego uogólnionego prawa Hooke’a w ramach liniowej teorii sprężystości również stan naprężenia, odpowiadający deformacji prostego ścinania, będzie stanem czystego ścinania.

Szczegółowe omówienie różnic i zależności między stanami czystego i prostego ścinania można znaleźć w pracy (Thiel i in. 2019).

## 6. Modelowanie konstytutywne skleiny w stanie prostego ścinania

Materiałami, które wykorzystywane są w wykonawstwie złączy klejowych, są – jak wspomniano – głównie polimery. Z mechanicznego punktu widzenia polimery wykazują własności, które wymagają odpowiedniego modelowania. Są to przede wszystkim:

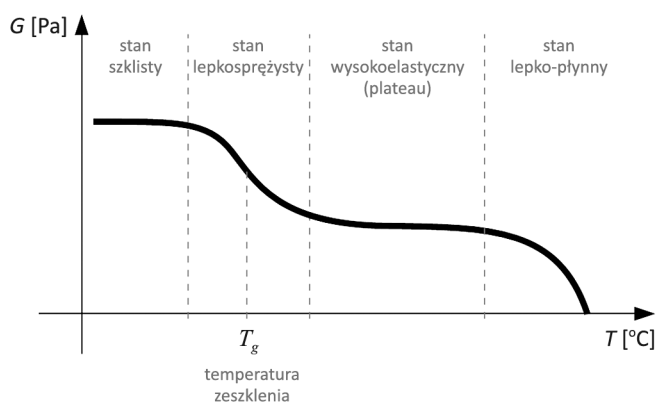
- **nieliniowość związków fizycznych** – typowa krzywa naprężenie – odkształcenie, charakterystyczna dla polimerów, po bardzo niewielkim zakresie liniowym już dla stosunkowo małych deformacji wykazuje **spadek stycznego modułu sztywności** wraz z postępującym odkształceniem (osłabienie). W przypadku niektórych polimerów przy odpowiednio dużej deformacji może dojść do **krystalizacji indukowanej odkształceniem** – nieuporządkowana struktura wewnętrzna zwiniętych łańcuchów polimerowych pod wpływem silnego wydłużenia zaczyna nabierać cech struktury uporządkowanej, charakteryzującej się większą sztywnością i wytrzymałością (wzmocnienie) (por. rys. 24);



Rys. 24. Typowa nieliniowa charakterystyka mechaniczna polimerów

- **termolepkosprężystość** – odpowiedź mechaniczna polimerów na zadane wymuszenie statyczne lub kinematyczne zależy od czynników **czasu** i **temperatury**. Polimery wykazują znaczne **pełzanie** pod stałym obciążeniem i **relaksację** przy zadanym odkształceniu, **zależność sztywności materiału od prędkości obciążenia**, a także znaczące **tlumienie** ruchu oscylacyjnego.

Własności mechaniczne polimerów podlegają **dużej zmienności w zależności od temperatury** – przede wszystkim dla temperatur bliskich temperaturze zeszklenia  $T_g$ . W przypadku temperatur istotnie mniejszych od  $T_g$  materiał znajduje się w stanie szklanym, wykazując stosunkowo największą sztywność oraz cechy właściwe materiałom sprężystym. Dla temperatur bliskich  $T_g$  materiał wykazuje cechy przejściowe między stanem szklanym a wysokoelastycznym, a sztywność materiału istotnie spada przy wzroście temperatury. Dalszy wzrost temperatury skutkuje ustabilizowaniem się niewielkiej sztywności materiału aż do niemal zupełnego przejścia w stan ciekły (por. rys. 25).



Rys. 25. Typowa zależność modułu sztywności poprzecznej polimerów od temperatury

Cechy te są oczywiście powiązane, przez co zjawiska termiczne i własności lepkie materiału mogą same z siebie skutkować globalnie (na poziomie próbki lub elementu) nieliniową charakterystyką mechaniczną układu. Niemniej nawet w ustalonych warunkach temperatury, przy quasi-statycznym obciążeniu ze stałą prędkością odkształcenia oraz w krótkich przedziałach czasowych, w których nie obserwuje się zjawisk reologicznych, lokalne (w punkcie) związki konstytutywne dla polimerów odbiegają od liniowego związku uogólnionego prawa Hooke’a.

W dalszej części opracowania zajmować się będziemy niemal wyłącznie modelami **sprężystymi** (w ogólności nieliniowymi), a tylko w pojedynczych przypadkach pojawią się odniesienia do plastyczności i lepko-sprężystości. Pewne metody uwzględniania termolepko-sprężystego charakteru rzeczywistych związków konstytutywnych wskazane zostały w podrozdziale 7.10. Podejście polegające na opisywaniu sklein polimerowych za pomocą modeli sprężystych jest rozpowszechnione z uwagi na fakt, że analityczne modelowanie sklein ścinanych dotyczy w ogromnej większości projektowania złączy **w ustalonych warunkach temperatury oraz pod obciążeniem quasi-statycznym**. Przy spełnieniu tych warunków modelowanie konstytutywne może odbywać się w ramach **nieliniowej teorii sprężystości**.

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na to, że sam charakter deformacji w stanie prostego ścinania sprawia, że modelowanie z pominięciem zjawisk lepkich jest jedynie przybliżeniem. Nawet bowiem, jeśli obciążenie jest realizowane ze stałą prędkością deformacji, w tym sensie, że odkształcenie kątowe  $\gamma$  zmienia się w czasie ze stałą prędkością  $\dot{\gamma}(t) = \text{const}$ , to prędkość zmiany rozciągnięć głównych w czasie nie jest stała, ale zależna od aktualnej wielkości odkształcenia kąowego  $\gamma$ . Z przekształcenia zależności (5.16) mamy:

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 4}} \right) \dot{\gamma} \quad (6.1)$$

Nawet w zakresie dużych deformacji, odpowiadających  $\gamma \in (0; 1)$ , prędkość rozciągnięcia zawiera się w przedziale  $(0,500\dot{\gamma}; 0,724\dot{\gamma})$  a względny przyrost prędkości rozciągnięcia w tym zakresie wynosi około 45%. Dla niektórych materiałów polimerowych ich własności mechaniczne w tak wąskim zakresie zmienności prędkości odkształcenia zmieniają się jedynie w nieznacznym stopniu. Wyniki doświadczalne badań polimerów Sika® PS oraz Sika® PST w próbie jednoosiowego rozciągania z prędkościami 10%/min, 100%/min oraz 1000%/min (10- i 100-krotna zmiana prędkości odkształcenia) wskazują, że charakteryzujące ten materiał stałe materiałowe zmieniają się w zakresie zaledwie kilkunastu procent. Do takich samych wniosków prowadzą wyniki doświadczeń przeprowadzonych w ramach przygotowania pracy (Kisiel 2018) na poliuretanie Sika® PM w próbie jednoosiowego rozciągania.

Jeśli ograniczymy nasze rozważania do sklein ścinanych quasi-statycznie, to bezwzględna zmiana wartości prędkości odkształcenia w obciążeniach tego typu nie pociąga za sobą istotnej zmiany wartości parametrów opisujących materiał skleiny w ramach teorii sprężystości. Podsumowując, można stwierdzić, że **w klasie rozważanych w tym opracowaniu materiałów oraz typów połączeń modelowanie takich układów w ramach nieliniowej teorii sprężystości (z pominięciem cech lepkich materiału) jest przybliżeniem uzasadnionym** i nie prowadzi do istotnych błędów.

## 6.1. Nieliniowe materiały hipersprężyste

Znaczną część materiałów sprężystych, do której należą również polimery, można z powodzeniem modelować w ramach **teorii pierwszego gradientu**. Szczególnym przypadkiem modelowania tego rodzaju jest **model materiału hipersprężystego** (sprężystego w sensie Greena), takiego że:

6. materiał jest **sprężysty w sensie Cauchy'ego**:

- **aktualny stan naprężenia** w cząstce zależy jedynie od wyboru cząstki oraz **aktualnego stanu odkształcenia** w cząstce, **ale nie od historii** deformacji:



$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = f(\mathbf{X}, \mathbf{E}(\mathbf{X}, t)) \quad (6.2)$$

- deformacja jest **odwracalna** – **związek konstytutywny jest wzajemnie jednoznaczny**:

$$\exists_{f^{-1}}: \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) = f^{-1}(\mathbf{X}, \mathbf{S}(\mathbf{X}, t)) \quad (6.3)$$

7. istnieje skalarna funkcja argumentu tensorowego  $W(\mathbf{E})$ , nazywana **potencjałem sprężystym**, taka że:

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6.4)$$

W powyższej definicji jako tensorową miarę naprężenia wskazano **tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa 2. rodzaju  $\mathbf{S}$** , zaś za miarę odkształcenia przyjęto **materialny tensor odkształcenia Greena–de Saint-Venanta  $\mathbf{E}$** . Wybór ten podyktowany jest chęcią wykorzystania wyjątkowej cechy tej pary miar naprężenia i odkształcenia, a mianowicie ich energetycznego sprzężenia. **Energetycznie sprzężonymi miarami naprężenia i odkształcenia** nazywamy tensory, dla których **iloczyn skalarny miary naprężenia oraz pochodnej względem czasu miary odkształcenia jest równy gęstości mocy odkształcenia sprężystego**. Całkowitą moc związaną z ruchem ciała odkształcalnego definiujemy jako całkowitą moc sił zewnętrznych objętościowych i powierzchniowych na prędkościach punktów odpowiednio wewnątrz i na powierzchni ciała:

$$P = \iiint_V (b_i \dot{u}_i) dV + \iint_S (q_i \dot{u}_i) dS \quad (6.5)$$

Wykorzystując równania ruchu, warunki równowagi czworościanu oraz symetrię tensora naprężenia Cauchy’ego, można pokazać (Szeptyński 2020a), że:

$$P = \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V \left( \frac{\rho}{2} \dot{u}_i \dot{u}_i \right) dV}_{E_k} + \underbrace{\iiint_V (\sigma_{ij} D_{ij}) dV}_{P_e} \quad (6.6)$$

gdzie:  $E_k$  jest **energią kinetyczną** ciała;  $P_e$  oznacza **moc odkształcenia sprężystego**; a  $\sigma_{ij}$  to składowe **tensora naprężenia Cauchy’ego**;  $D_{ij}$  to składowe **tensora prędkości rozciągnięcia**. Funkcje podcałkowe w powyższych wyrażeniach nazywać będziemy odpowiednio gęstością energii kinetycznej i gęstością mocy odkształcenia sprężystego.

Tensor prędkości rozciągnięcia jest równy pochodnej względem czasu symetrycznej części przestrzennego gradientu przemieszczenia:

$$\mathbf{D} = \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u})}_{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (6.7)$$

Zgodnie z przytoczoną definicją tensor naprężenia Cauchy’ego oraz symetryczna część przestrzennego gradientu przemieszczenia są miarami energetycznie sprzężonymi. Miarami tego rodzaju są m.in. energetycznie sprzężone miary naprężenia i odkształcenia (Szeptyński 2020a).

Tabela 1

Energetycznie sprzężone miary naprężenia i odkształcenia

Miary energetycznie sprzężone	
Miara naprężenia	Miara odkształcenia
Tensor naprężenia Cauchy’ego $\boldsymbol{\sigma}$	Symetryczna część przestrzennego gradientu przemieszczenia $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u})$
Tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa 1. rodzaju $\mathbf{T} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$	Materiałny gradient deformacji $\mathbf{F} = \mathbf{x} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}$
Tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa 2. rodzaju $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$	Materiałny tensor odkształcenia $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$
Tensor naprężenia Kirchhoffa $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$	Symetryczna część przestrzennego gradientu przemieszczenia $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u})$
Tensor naprężenia Jaumanna $\mathbf{T}_J = \frac{1}{2}(\mathbf{S}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{S})$	Tensor odkształcenia Biota $\mathbf{E}_B = \mathbf{U} - \mathbf{1}$

Całą dwuparametrową rodzinę energetycznie sprzężonych miar naprężenia i odkształcenia tworzą również tensory Darijani–Naghdabadi (Darijani i Naghdabadi 2010). Miary te zostaną bardziej szczegółowo omówione w podrozdziale 6.2.1.1.

Z makroskopowego punktu widzenia polimery są materiałami **jednorodnymi** i **izotropowymi**. W przypadku materiałów **izotropowych potencjał sprężysty musi być funkcją izotropową**, a zatem da się go wyrazić jako **funkcję niezmienników swojego argumentu tensorowego**:

$$W(E_{ij}) = W(I_1(\mathbf{E}), I_2(\mathbf{E}), I_3(\mathbf{E})) \quad (6.8)$$

Przy takim sformułowaniu związek konstytutywny (6.4) można zapisać w następującej postaci:

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial E_{ij}} \quad (6.9)$$

Wykorzystując związek między tensorem odkształcenia a prawym tensorem deformacji, powyższe równanie można przepisać w postaci:

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial C_{kl}} \frac{\partial C_{kl}}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} = 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} \frac{\partial \hat{I}_1}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} \frac{\partial \hat{I}_2}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_3} \frac{\partial \hat{I}_3}{\partial C_{ij}} \right] \quad (6.10)$$

gdzie:  $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$  są niezmiennikami tensora  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ \hat{I}_2 &= \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \\ \hat{I}_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Po wykorzystaniu zasad różniczkowania niezmienników symetrycznych tensorów drugiego rzędu związek konstytutywny przyjmuje postać:

$$\mathbf{S} = 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} \mathbf{1} + \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} (\hat{I}_1 \mathbf{1} - \mathbf{C}) + \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_3} (\hat{I}_3 \mathbf{C}^{-1}) \right] \quad (6.12)$$

Wykorzystując następnie związki między tensorami deformacji  $\mathbf{C}$  oraz  $\mathbf{B}$  a gradientem deformacji  $\mathbf{F}$  oraz związek między tensorem naprężenia  $\mathbf{S}$  oraz tensorem naprężenia Cauchy'ego  $\boldsymbol{\sigma}$ , po wielu przekształceniach otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{\hat{I}_3}} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} + \hat{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} \right) \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} \mathbf{B}^2 \right] + 2 \sqrt{\hat{I}_3} \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_3} \mathbf{1} \quad (6.13)$$

Szczegóły powyższego wyprowadzenia można znaleźć w pracy (Szeptyński 2020a). Warto przy tym wspomnieć, że prawy i lewy tensor deformacji mają te same wartości własne (odpowiadające jednak odmiennym wektorom własnym), zatem ich niezmienniki są takie same. Duża część popularnych modeli materiałów nieliniowych scharakteryzowana jest potencjałem sprężystym, będącym funkcją jedynie pierwszego niezmiennika tensorów deformacji, czyli  $W = W(\hat{I}_1)$ . Jeśli ponadto założy się **nieściśliwość materiału**, wtedy  $\hat{I}_3 = \det(\mathbf{B}) = 1$ , a wzór (6.13) upraszcza się do postaci:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \underbrace{\frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1}}_{\beta} \mathbf{B} = \beta \mathbf{B} \quad (6.14)$$

Wielkość  $\beta$  nazywa się niekiedy **funkcją odpowiedzi naprężenia**. Należy podkreślić, że powyższy związek obowiązuje jedynie dla materiałów nieściśliwych, które charakteryzują się tym, że – z uwagi na nieskończoną sztywność objętościową – stan ich naprężenia może być zawsze powiększony o dowolnie dużą składową hydrostatyczną, ponieważ nie wpływa to na stan odkształcenia i pole przemieszczenia. **Dla materiałów nieściśliwych sam związek konstytutywny na podstawie zadanej deformacji wyznacza zatem stan naprężenia niejednoznacznie, z dokładnością do składowej hydrostatycznej. Składowa ta musi być wyznaczona na podstawie warunków brzegowych.**

W teorii nieliniowych związków konstytutywnych często wykorzystuje się odmienny jeszcze zestaw niezmienników, a mianowicie:

$$\bar{I}_1 = J^{-\frac{2}{3}} \hat{I}_1, \quad \bar{I}_2 = J^{-\frac{4}{3}} \hat{I}_2, \quad J = \sqrt{\hat{I}_3} \quad (6.15)$$

W kategoriach zdefiniowanych wyżej niezmienników **związek konstytutywny dla nieliniowego materiału hipersprężystego przyjmuje ogólną postać:**

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \left[ \frac{1}{J^{\frac{2}{3}}} \left( \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \right) \mathbf{B} - \frac{1}{J^{\frac{4}{3}}} \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \mathbf{B}^2 \right] + \left[ \frac{\partial W}{\partial J} - \frac{2}{3} \frac{1}{J} \left( \bar{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \right) \right] \mathbf{1} \quad (6.16)$$

W dalszych rozważaniach użyteczna okaże się również kolejna forma związku konstytutywnego, umożliwiającego wyznaczenie tensora naprężenia Cauchy'ego, a mianowicie postać równań fizycznych, w której potencjał sprężysty wyrażony jest jako funkcja rozciągnięć głównych  $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Rozciągnięcia główne jako wartości własne tensorów rozciągnięcia również są niezmiennikami, zatem gwarantują izotropowy charakter potencjału sprężystego. Uwzględniając związki (6.11) oraz zasady różniczkowania funkcji złożonych, możemy napisać dla  $k = 1, 2, 3$ :

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_k} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_j} \frac{\partial \hat{I}_j}{\partial \lambda_k} = (2\lambda_k) \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} + 2\lambda_k (\hat{I}_1 - \lambda_k^2) \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} + \left( 2 \frac{\hat{I}_3}{\lambda_k} \right) \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_3}, \quad (6.17)$$

albo inaczej:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_k} = 2\lambda_k \left[ \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} + (\hat{I}_1 - \lambda_k^2) \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} + \frac{\hat{I}_3}{\lambda_k^2} \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_3} \right], \quad k = 1, 2, 3 \quad (6.18)$$

Zapiszmy teraz związek (6.13) w bazie  $\{\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}\}$  **unormowanych wektorów własnych tensora deformacji  $\mathbf{B}$** . W bazie tej tensor  $\mathbf{B}$  ma postać diagonalną. Tensor jednostkowy jest tensorem izotropowym, który ma postać diagonalną w dowolnym układzie współrzędnych, zatem tensor po prawej stronie związku (6.13) ma w bazie  $\{\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}\}$  postać diagonalną. Stąd płynie wniosek, że w tej bazie tensor naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$  musi być w postaci diagonalnej, a zatem tensory  $\boldsymbol{\sigma}$  oraz  $\mathbf{B}$  są **współosiowe**. Możemy zatem napisać:

$$\sigma_k = \frac{2}{\sqrt{\hat{I}_3}} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} + \hat{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} \right) \lambda_k^2 - \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} \lambda_k^4 \right] + 2 \sqrt{\hat{I}_3} \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_3} \quad (6.19)$$

Po przekształceniach:

$$\sigma_k = \frac{\lambda_k}{\sqrt{\hat{I}_3}} \left[ \underbrace{2\lambda_k \left( \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} + \left( \hat{I}_1 - \lambda_k^2 \right) \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} + \frac{\hat{I}_3}{\lambda_k^2} \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_3} \right)}_{\frac{\partial W}{\partial \lambda_k}} \right] \quad (6.20)$$

co z kolei pozwala nam napisać:

$$\sigma_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial W}{\partial \lambda_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (6.21)$$

Powyższe równanie, a także równania (6.13) i (6.16) będą tymi postaciami związku konstytutywnego, które będą wykorzystywane w dalszej części opracowania. Tensor naprężenia Cauchy'ego możemy zapisać w notacji absolutnej w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 (\mathbf{b}^{(1)} \otimes \mathbf{b}^{(1)}) + \sigma_2 (\mathbf{b}^{(2)} \otimes \mathbf{b}^{(2)}) + \sigma_3 (\mathbf{b}^{(3)} \otimes \mathbf{b}^{(3)}) \quad (6.22)$$

Jeśli oznaczymy składowe  $i$ -tego wektora własnego  $\mathbf{B}$  w wyjściowym układzie współrzędnych przez  $b_j^{(i)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ), wtedy składowe tensora naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$  w tym układzie będą równe:

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 b_i^{(1)} b_j^{(1)} + \sigma_2 b_i^{(2)} b_j^{(2)} + \sigma_3 b_i^{(3)} b_j^{(3)} \quad (6.23)$$

## 6.2. Stan prostego ścinania w wybranych modelach nieliniowej sprężystości

W następujących podrozdziałach omówiony zostanie stan naprężenia w przypadku stanu prostego ścinania, odpowiadający wybranym postaciom funkcyjnym potencjału sprężystego, jakie zostały zaproponowane do opisu materiałów nieliniowo sprężystych. Rezultaty poniższych analiz mają dwojakie zastosowanie:

1. Modele konstytutywne nieliniowej sprężystości formułowane w sposób ogólny dla dowolnych zagadnień trójwymiarowych mogą stanowić podstawę formułowania związku konstytutywnego między naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym w konstrukcji uproszczonych nieliniowych modeli obliczeniowych (Szeptyński i Nowak 2021). Związki wyprowadzone w poniższych podrozdziałach mogą być wykorzystane w analitycznych modelach omawianych w rozdziale 7, dostarczając tym samym równań rządzących zagadnieniami ścinania sklejin nieliniowo sprężystych.
2. Wyprowadzone z przyjętych modeli zależności między naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym w określonych okolicznościach mogą nie tylko lokalnie (w punkcie) modelować stan materiału skleiny, ale mogą też stanowić przybliżony opis zachowania całego złącza klejowego (Szeptyński i in. 2021). Wymaga się przy tym, aby rozkład naprężenia stycznego na długości złącza był możliwie jednorodny i bliski prostemu ścinaniu. Sytuacja taka występuje np. w przypadku złączy podatnych o względnie dużej grubości skleiny, nie tak dużej jednak, aby stan naprężenia odbiegał znacząco od stanu prostego ścinania.

Posługiwać się będziemy wzorami (6.13), (6.16) i (6.21), w których przyjmować będziemy dla stanu prostego ścinania:

- **rozciągnięcia główne:**

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_3 = 1 \quad (6.24)$$

- **niezmienniki tensorów deformacji C i B:**

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= 1 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = \gamma^2 + 3 \\ \hat{I}_2 &= 1 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = \gamma^2 + 3 \\ \hat{I}_3 &= 1 \end{aligned} \quad (6.25)$$

- unormowane wektory własne tensora deformacji **B**:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 4 + \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}}} \left[ \sqrt{2}, -\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4}}{\sqrt{2}}, 0 \right] = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} [1, -\lambda, 0] \\ \mathbf{b}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 4 - \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}}} \left[ \sqrt{2}, -\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4}}{\sqrt{2}}, 0 \right] = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} [\lambda, 1, 0] \quad (6.26) \\ \mathbf{b}^{(3)} &= [0, 0, 1]\end{aligned}$$

Z uwagi na jednostkową wartość  $\hat{I}_3$  w stanie prostego ścinania znikają różnice między niezmiennikami  $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$  oraz  $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ :

$$\bar{I}_1 = J^{-\frac{2}{3}} \hat{I}_1 = \hat{I}_1, \quad \bar{I}_2 = J^{-\frac{4}{3}} \hat{I}_2 = \hat{I}_2, \quad J = \sqrt{\hat{I}_3} = \hat{I}_3 = 1 \quad (6.27)$$

### 6.2.1. Materiał Kirchhoffa–de Saint-Venanta

Najprostszą postacią potencjału sprężystego, która wykorzystywana jest do formułowania związków konstytutywnych w ramach teorii liniowej, jest potencjał w postaci **jednorodnej funkcji kwadratowej** (występują w niej wyłącznie wyrazy drugiego stopnia), nazywany **potencjałem Kirchhoffa–de Saint-Venanta**.

W posługiwaniu się tym potencjałem kluczowe jest sprecyzowanie, jaka para – miary naprężenia i odkształcenia – związana jest za pomocą tej funkcji. Formalnie nic nie stoi na przeszkodzie, aby związek konstytutywny odpowiadający temu potencjałowi wiązał ze sobą jakiegokolwiek dowolnie wybrane miary naprężenia i odkształcenia. Wyrażenie składowych tensora naprężenia jako pochodnych kwadratowego potencjału Kirchhoffa–de Saint-Venanta daje w rezultacie **liniowy związek konstytutywny między przyjętymi miarami naprężenia i odkształcenia**. W świetle tych spostrzeżeń należy zwrócić uwagę na to, że termin „materiał liniowo sprężysty” w ramach nieliniowej teorii sprężystości jest niejednoznaczny. W ramach teorii liniowej posługujemy się najczęściej tylko jedną miarą naprężenia i tylko jedną miarą odkształcenia – wszystkie miary naprężenia przyjmujemy za bliskie tensorowi naprężenia Cauchy’ego, miary odkształcenia zaś – za bliskie tensorowi małych odkształceń Cauchy’ego. W takiej sytuacji wspomniana niejednoznaczność nie istnieje – **związek konstytutywny, odpowiadający potencjałowi Kirchhoffa–de Saint-Venanta, w przypadku teorii liniowej to liniowe uogólnione prawo Hooke’a**:

$$W = \frac{1}{2} S_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \Rightarrow \sigma_{ij} = S_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6.28)$$

W przypadku izotropii:

$$W = [G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \Lambda\delta_{ij}\delta_{kl}]\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \Rightarrow \sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{kl} + \Lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (6.29)$$

gdzie:  $\Lambda$  i  $G$  to parametry Lamégo. Wracając do zagadnień nieliniowych, należy zwrócić uwagę, że inaczej niż w pozostałych omawianych tutaj propozycjach – dla których potencjał definiuje się w kategoriach niezmienników (6.11) lub (6.15) – potencjał Kirchhoffa–de Saint-Venanta najłatwiej określić przez wybór pewnej pary miar naprężenia i odkształcenia, a sam potencjał zdefiniować przez analogię do wzoru (6.29). Ograniczymy wybór takiej pary do par energetycznie sprzężonych.

Zajmijmy się parą tensora naprężenia Cauchy’ego oraz symetrycznej części przestrzennego gradientu przemieszczenia:

$$W = [\tilde{G}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \tilde{\Lambda}\delta_{ij}\delta_{kl}]\eta_{ij}\eta_{kl} \Rightarrow \sigma_{ij} = 2\tilde{G}\eta_{kl} + \tilde{\Lambda}\delta_{ij}\eta_{kk} \quad (6.30)$$

W przypadku prostego ścinania:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{F}^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Wtedy wszystkie składowe tensora naprężenia Cauchy’ego poza naprężeniem stycznym  $\sigma_{12}$  są zerowe, naprężenie styczne zaś jest równe:

$$\sigma_{12} = \tilde{G}\gamma = \tilde{G}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \quad (6.32)$$

Otrzymuje się zatem liniowy związek między naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym. Jednakże w kategoriach rozciągnięć głównych jest to związek nieliniowy.

Oczywiście odmienny wybór miar naprężenia i odkształcenia skutkować będzie innymi związkami konstytutywnymi. Jeśli – w nawiązaniu do wzoru (6.2) – byłby to tensor naprężenia nominalnego  $\mathbf{S}$  oraz materialny tensor odkształcenia  $\mathbf{E}$ , wtedy:

$$S_{ij} = 2\tilde{G}E_{kl} + \tilde{\Lambda}\delta_{ij}E_{kk} \quad (6.33)$$

W przypadku prostego ścinania:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ & \gamma^2/2 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$



Składowe tensora naprężenia:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \check{\Lambda} E_{22} & S_{23} &= 0 \\ S_{22} &= (\check{G} + \check{\Lambda}) E_{22} & S_{31} &= 0 \\ S_{33} &= \check{\Lambda} E_{22} & S_{12} &= \check{G} E_{12} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Powyższe związki są oczywiście związkami liniowymi – w szczególności związek między materialnym naprężeniem stycznym a odpowiadającym mu odkształceniem postaciowym jest ścisłą proporcjonalnością. W tym miejscu warto zwrócić uwagę na obecność normalnych składowych stanu naprężenia  $S_{11}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{33}$  – jest ona związana z warunkami kinematycznymi narzuconymi na deformację. Możemy zauważyć, że **wielkość owych składowych normalnych zależy od wielkości odkształcenia liniowego  $E_{22}$ , które w przypadku prostego ścinania oraz przy założeniu dostatecznie małej deformacji ( $\gamma \ll 1$ ) jest istotnie mniejsze od odkształcenia postaciowego  $E_{12}$ .** W dalszych rozważaniach dotyczących stanu naprężenia w stanie prostego ścinania skupimy się przede wszystkim na naprężeniu stycznym, przyjmując, że składowe normalne mają drugorzędne znaczenie.

Jeśli wyznaczmy teraz tensor naprężenia rzeczywistego zgodnie z zależnością:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F}^T \mathbf{S} \mathbf{F} \quad (6.36)$$

to w przypadku prostego ścinania zależność między rzeczywistym naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym lub rozciągnięciami głównymi będzie następująca:

$$\sigma_{12} = \frac{\check{G}}{2} \gamma + \frac{\check{G} + \check{\Lambda}}{2} \gamma^3 = \frac{\check{G}}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{\check{G} + \check{\Lambda}}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^3 \quad (6.37)$$

Otrzymany związek jest związkiem nieliniowym. Powyższe obliczenia ilustrują fakt, że w ramach nieliniowej teorii sprężystości nie da się w sposób pozbawiony jakichkolwiek subiektywnych wyborów określić, czym jest „materiał liniowy”. W tym kontekście pojawia się koncepcja **modelowania za pomocą liniowego związku konstytutywnego** (wynikającego z przyjęcia potencjału Kirchhoffa–de Saint-Venanta) **materiałów, których charakterystyka w kategoriach pewnych miar naprężenia i odkształcenia** (np. naprężenie nominalne, odkształcenie inżynierskie) **jest nieliniowa** – kluczowym elementem takiego podejścia jest **odpowiedni wybór miary naprężenia i odkształcenia**.

Wyjątkowo użyteczne w takim podejściu mogą okazać się parametryczne rodziny miar odkształcenia Setha–Hilla (Seth 1961; Hill 1968) lub Darijani–Naghdbadi (Darijani i Naghdbadi 2010). W tej ostatniej pracy zaproponowano dwuparametrową rodzinę nieliniowych miar deformacji. Tensor odkształcenia DN definiowany

jest w bazie wektorów własnych  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) prawego tensora rozciągnięcia  $\mathbf{U}$  następująco:

$$\mathbf{E}^f(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^3 f(\lambda_i) \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i \quad (6.38)$$

Zakładamy, że funkcja  $f$ , zależna od rozciągnięć głównych, jest ściśle rosnąca oraz spełnia poniższe warunki:

$$f(\lambda = 1) = 0, \quad \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = +\infty \quad (6.39)$$

Autorzy zaproponowali zależną od dwóch parametrów funkcję o postaci:

$$f(\lambda) = \frac{1}{\alpha + \beta} (\lambda^\alpha - \lambda^{-\beta}), \quad \text{gdzie: } \alpha\beta > 0 \begin{cases} \alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0 \end{cases} \quad (6.40)$$

Tensory odkształcenia, zdefiniowane z wykorzystaniem powyższej miary odkształcenia, oznaczają będziemy symbolem  $\mathbf{E}^{(\alpha, \beta)}$  i nazywać będziemy tensorami odkształcenia Darijani–Naghdadadi (DN). Tak zdefiniowana rodzina miar odkształcenia jest rozszerzeniem jednoparametrowej rodziny tensorów odkształcenia Seta–Hilla, która odpowiada przyjęciu  $\beta = 0$  lub  $\alpha = 0$ . Do rodziny tej przynależą klasyczne miary odkształcenia nieliniowej teorii sprężystości.

Tabela 2

Tensory odkształcenia z rodziny tensorów Darijani–Naghdadadi

<b>Tensor odkształcenia</b> Greena–de Saint-Venanta ( $\alpha = 2, \beta = 0$ ) lub ( $\alpha = 0, \beta = -2$ )	$\mathbf{E}^{(2,0)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{1})$
<b>Tensor odkształcenia Biota</b> ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ) lub ( $\alpha = 0, \beta = -1$ )	$\mathbf{E}^{(1,0)} = (\mathbf{U} - \mathbf{1})$
<b>Tensor odkształcenia Hencky'ego</b> ( $\alpha = 0, \beta \rightarrow 0$ ) lub ( $\alpha \rightarrow 0, \beta = 0$ )	$\mathbf{E}^{(0,0)} = \ln(\mathbf{U}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\mathbf{U} - \mathbf{1})^n$
<b>Tensor odkształcenia Almansiiego</b> ( $\alpha = -2, \beta = 0$ ) lub ( $\alpha = 0, \beta = 2$ )	$\mathbf{E}^{(0,2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{U}^{-2})$

W tym miejscu warto zwrócić uwagę, że tensory rodziny Seta–Hilla nie spełniają warunków na wartości parametrów  $\alpha, \beta$  określonych w definicji (6.40). W praktycznych obliczeniach użyteczne okazuje się rozszerzenie dopuszczalnych wartości

parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$  również o wartości niespełniające omawianych warunków – w takim jednak przypadku istnieje tylko pewien skończony zakres wartości rozciągnięć głównych, dla których miary odkształcenia DN są wzajemnie jednoznaczłą funkcją rozciągnięć głównych (Kwiecień 2015; Szeptyński i in. 2021).

Tensor naprężenia  $\mathbf{T}^{(\alpha,\beta)}$ , który jest energetycznie sprzężony z tensorem odkształcenia  $\mathbf{E}^{(\alpha,\beta)}$ , definiujemy jako tensor, dla którego zachodzi:

$$\iiint_V (T_{ij}^{(\alpha,\beta)} E_{ij}^{(\alpha,\beta)}) dV = P_e \quad (6.41)$$

i który będziemy nazywać tensorem naprężenia Darijani–Naghdabadi (DN).

Zastosowanie nieliniowych miar odkształcenia i naprężenia, pozbawionych jasnej interpretacji fizycznej (z uwagi na dowolność wyboru parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$ ), sprawia, że aby móc odnieść te miary do pomiarów doświadczalnych, konieczna jest znajomość związku między tymi miarami a wielkościami mierzonymi w ramach eksperymentu. W sposób szczególny dotyczy to miary naprężenia DN. W odniesieniu do pojęcia energetycznego sprzężenia, wykorzystując metody osi głównych Hilla, w pracach (Farahani i Naghdabadi 2003; Darijani i Naghdabadi 2010) pokazano, że w bazie wektorów własnych tensora  $\mathbf{U}$  związek między dwoma tensorami naprężenia DN  $T_{ij}^{(\alpha,\beta)}$  oraz  $T_{ij}^{(\vartheta,\psi)}$  jest następujący:

$$\begin{cases} T_{ij}^{(\alpha,\beta)} = \frac{(\alpha + \beta)}{(\vartheta + \psi)} \frac{\vartheta \lambda_i^{\vartheta-1} + \psi \lambda_i^{-\psi-1}}{\alpha \lambda_i^{\alpha-1} + \beta \lambda_i^{-\beta-1}} T_{ij}^{(\vartheta,\psi)} & \text{dla } (i = j) \text{ lub } (\lambda_i = \lambda_j) \\ T_{ij}^{(\alpha,\beta)} = \frac{(\alpha + \beta)}{(\vartheta + \psi)} \frac{(\lambda_i^{\vartheta} - \lambda_i^{-\psi}) - (\lambda_j^{\vartheta} - \lambda_j^{-\psi})}{(\lambda_i^{\alpha} - \lambda_i^{-\beta}) - (\lambda_j^{\alpha} - \lambda_j^{-\beta})} T_{ij}^{(\vartheta,\psi)} & \text{dla } (i \neq j) \text{ oraz } (\lambda_i \neq \lambda_j) \end{cases} \quad (6.42)$$

zaś w przypadku  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$ :

$$\begin{cases} T_{ij}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\lambda_i (\vartheta \lambda_i^{\vartheta-1} + \psi \lambda_i^{-\psi-1})}{(\vartheta + \delta)} T_{ij}^{(\vartheta,\psi)} & \text{dla } (i = j) \text{ lub } (\lambda_i = \lambda_j) \\ T_{ij}^{(\alpha,\beta)} = \frac{(\lambda_i^{\vartheta} - \lambda_i^{-\psi}) - (\lambda_j^{\vartheta} - \lambda_j^{-\psi})}{(\vartheta + \psi) [\ln \lambda_i - \ln \lambda_j]} T_{ij}^{(\vartheta,\psi)} & \text{dla } (i \neq j) \text{ oraz } (\lambda_i \neq \lambda_j) \end{cases} \quad (6.43)$$

Zważywszy na fakt, że tensor  $\mathbf{T}^{(2,0)}$  jest energetycznie sprzężony z tensorem  $\mathbf{E}^{(2,0)}$ , który jest po prostu materialnym tensorem odkształcenia Greena–de Saint-Venanta,  $\mathbf{E}^{(2,0)} = \mathbf{E}$ , zauważamy, że  $\mathbf{T}^{(2,0)}$  jest tensorem Pioli–Kirchhoffa 2. rodzaju,  $\mathbf{T}^{(2,0)} = \mathbf{S}$ , który wyrazić można w kategoriach tensora naprężenia nominalnego  $\mathbf{T}$  lub tensora naprężenia rzeczywistego  $\boldsymbol{\sigma}$  za pomocą znanych związków:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (6.44)$$

W pracach (Darijani i Naghdabadi 2010; Kwiecień i in. 2017; Szeptyński i in. 2021) zastosowano miary Darijani–Naghdabadi (DN) do modelowania rozciągania oraz ścinania. Dla prostego ścinania tensor odkształcenia DN w swoich osiach własnych (tożsamych z osiami własnymi  $\mathbf{U}$ ) ma postać:

$$\mathbf{E}^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} (\lambda^\alpha - \lambda^{-\beta}) & 0 & 0 \\ & (\lambda^{-\alpha} - \lambda^\beta) & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Fundamentalnym założeniem modelowania zagadnień ścinania z wykorzystaniem miar DN oraz potencjału sprężystego Kirchhoffa–de Saint-Venanta jest przyjęcie, że **tensor  $\mathbf{E}^{(\alpha,\beta)}$  jest współosiowy z tensorem  $\mathbf{T}^{(2,0)} = \mathbf{S}$** , a zatem że w bazie wektorów własnych  $\mathbf{U}$ , tensor naprężenia materialnego ma postać:

$$\mathbf{S} = \left[ \frac{P(\lambda)}{A_0} \right] \begin{bmatrix} \tilde{S}_1 & 0 & 0 \\ & \tilde{S}_2 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

gdzie:  $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$  są pewnymi nieznanymi wartościami własnymi tensora naprężenia materialnego. Założenie to narzuca już pewne cechy konstytutywne materiału. W wyrażeniu (6.46) stały czynnik  $P/A_0$ , będący miarą nominalnego naprężenia stycznego, wyłączony jest przed macierz reprezentacji tensora po to, aby ostatecznie zapisać związek między naprężeniem nominalnym (mierzonym w czasie doświadczenia) a rozciągnięciem głównym. Korzystając ze związku (6.44) oraz ze znajomości orientacji osi własnych tensora rozciągnięcia (5.18), można pokazać, że w pierwotnej bazie tensor  $\mathbf{T}$  ma postać:

$$\mathbf{T} = \left[ \frac{P(\lambda)}{A_0} \right] \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2 \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2}{1 + \lambda^2} & \frac{\lambda^4 \tilde{S}_1 - \tilde{S}_2}{\lambda(1 + \lambda^2)} & 0 \\ (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2) \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} & \frac{\lambda^2 \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2}{1 + \lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

Składowa  $T_{12}$  interpretowana jest jako miara nominalnego powierzchniowego obciążenia zewnętrznego na kierunku osi  $x_1$  (kierunek ścięcia), przyłożonego do płaszczyzny prostopadłej do kierunku osi  $X_2$  (por. rys. 20). Skoro wyłączyliśmy czynnik  $P/A_0$ , musi być zatem:

$$\frac{\lambda^4 \tilde{S}_1 - \tilde{S}_2}{\lambda(1 + \lambda^2)} = 1 \Rightarrow \tilde{S}_2 = \lambda^4 \tilde{S}_1 - \lambda(1 + \lambda^2) \quad (6.48)$$

W ten sposób wyrugowaliśmy niewiadomą  $\tilde{S}_2$ . Wzór (6.42) pozwala nam wyrazić składowe tensora  $\mathbf{T}^{(\alpha,\beta)}$  w kategoriach składowych tensora  $\mathbf{T}^{(2,0)} = \mathbf{S}$ . Jedynymi niezerowymi składowymi są:

$$T_{11}^{(\alpha,\beta)} = \left[ \frac{P(\lambda)}{A_0} \right] \lambda \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha \lambda^{\alpha-1} + \beta \lambda^{-\beta-1}} \tilde{S}_1 \quad (6.49)$$

$$T_{22}^{(\alpha,\beta)} = \left[ \frac{P(\lambda)}{A_0} \right] \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha \lambda^{1-\alpha} + \beta \lambda^{1+\beta}} [\lambda^3 \tilde{S}_1 - (1 + \lambda^2)] \quad (6.50)$$

Zakładając związek między tensorami  $\mathbf{E}^{(\alpha,\beta)}$  oraz  $\mathbf{T}^{(\alpha,\beta)}$ , dany potencjałem Kirchhoffa–de Saint-Venanta, równania fizyczne przyjmują postać:

$$T_{ij}^{(\alpha,\beta)} = 2G_0 E_{ij}^{(\alpha,\beta)} + \Lambda_0 \delta_{ij} E_{kk}^{(\alpha,\beta)}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6.51)$$

gdzie:  $G_0, \Lambda_0$  są stałymi charakteryzującymi materiał. W przypadku prostego ścinania  $E_{33}^{(\alpha,\beta)} = 0$ , zatem można pokazać, że równanie (6.51) dla wskaźników  $(i, j) = (3, 3)$  będzie spełnione tylko wtedy, gdy:

$$[(\alpha = \beta) \wedge (\tilde{S}_3 = 0)] \vee [\tilde{S}_3 \neq 0] \quad (6.52)$$

Zazwyczaj z góry przyjmuje się, że naprężenie normalne, prostopadłe do płaszczyzny zagadnienia jest zerowe. Z drugiej strony, jeśli ścinanie ma charakter deformacji w płaskim stanie odkształcenia (PSO), to wtedy tensor naprężenia musi być tensorem antypłaskim, dla którego składowa  $\tilde{S}_3 \neq 0$ . Dalsze przekształcenia mają na celu wyrugowanie niewiadomej  $\tilde{S}_1$ . Podstawienie (6.49) do równania (6.51), zapisanego dla  $(i, j) = (1, 1)$ , i kolejne podstawienie uzyskanego wyniku do równania (6.50) pozwala wyrugować  $\tilde{S}_2$  z wyrażenia na  $T_{22}^{(\alpha,\beta)}$ , które można zapisać jedynie jako funkcję naprężenia nominalnego i rozciągnięć głównych, zależną od parametrów  $\alpha, \beta$ . Podstawienie (6.50) do (6.51) dla  $(i, j) = (2, 2)$  pozwala ostatecznie napisać:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{P(\lambda)}{A_0} \right] &= \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda^2)} \frac{\alpha \lambda^{\alpha-1} + \beta \lambda^{-\beta-1}}{(\alpha + \beta)^2} \{2G_0(\lambda^\alpha - \lambda^{-\beta}) + \Lambda_0[(\lambda^\alpha - \lambda^{-\beta}) + (\lambda^{-\alpha} - \lambda^\beta)]\} \\ &\quad - \frac{1}{(1 + \lambda^2)} \frac{\alpha \lambda^{1-\alpha} + \beta \lambda^{1+\beta}}{(\alpha + \beta)^2} \{2G_0(\lambda^{-\alpha} - \lambda^\beta) + \Lambda_0[(\lambda^\alpha - \lambda^{-\beta}) + (\lambda^{-\alpha} - \lambda^\beta)]\} \end{aligned} \quad (6.53)$$

Jeśli przyjmie się  $\alpha = \beta$ , wtedy:

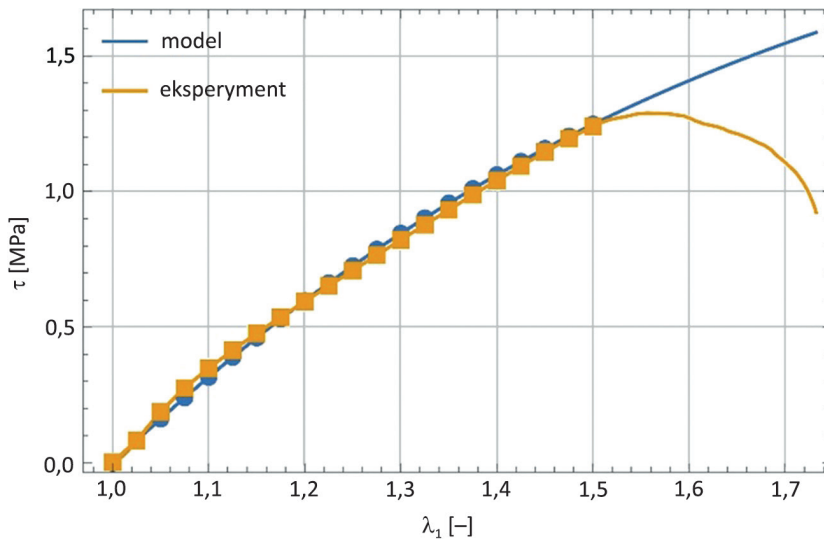
$$\left[ \frac{P(\lambda)}{A_0} \right] = G_0 \frac{\lambda^{2\alpha+1} - \lambda^{1-2\alpha}}{\alpha(1+\lambda^2)} \quad (6.54)$$

Korzystając ze związku (5.20), można sprawdzić, że:

$$\left. \frac{d}{d\gamma} \left[ \frac{P(\lambda)}{A_0} \right] \right|_{\gamma=0} = \left( \frac{d\lambda}{d\gamma} \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{P(\lambda)}{A_0} \right] \right) \Big|_{\lambda=1} = G_0 \quad (6.55)$$

zatem stała  $G_0$  może być interpretowana jako **początkowy styczny moduł sztywności poprzecznej Kirchhoffa**.

W pracy (Szeptyński i in. 2021) dokonano doświadczalnej walidacji użyteczność wzoru (6.53) w modelowaniu pracy złącza klejowego z wykorzystaniem podatnego polimeru Sika® PM. Początkowy styczny moduł Kirchhoffa przyjęto na podstawie badania materiału skleiny w stanie jednoosiowym, przy założeniu nieściśliwości materiału, przyjmując mianowicie, że początkowy współczynnik Poissona jest równy 0,5. Parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  dobrano następnie tak, aby zminimalizować różnicę między krzywą przewidywaną równaniem (6.53) a krzywą będącą średnim przebiegiem naprężenia nominalnego względem rozciągnięcia dla trzech próbek. Obciążeniu poddano układ trzech betonowych bloków, łączonych na powierzchni  $100 \times 100$  mm skleina o grubości 10 mm. Optymalizacji doboru parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$  dokonano z użyciem programu Mathematica. Wynik dopasowania ilustruje rysunek 26.



Rys. 26. Zestawienie pomiaru doświadczalnego oraz krzywej przewidywanej równaniem (6.53), dla  $\alpha = 1,665 \cdot 10^{-5}$ ,  $\beta = 1,735 \cdot 10^{-5}$  (Szeptyński i in. 2021)

Podsumowując ten podrozdział, należy podkreślić, że zaprezentowane podejście – choć posiada potencjalnie duże możliwości praktycznego zastosowania – ma raczej charakter modelowania do celów projektowych, nie zaś ścisłego modelu konstytutywnego. Dla badanego materiału wykazano niezgodność przewidywań w zakresie rozciągania modelu, którego parametry dobierane były na podstawie danych z prób ścinania. Wyjątkowo mocno należy zaznaczyć, że parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  nie są w żadnym razie „stałymi charakteryzującymi materiał” – w najlepszym przypadku można określić je mianem parametrów modelu obliczeniowego, wyznaczających związki konstytutywne i określających miarę odkształcenia w tym modelu.

### 6.2.2. Materiał Mooneya–Rivlina

Jednym z najpowszechniej stosowanych modeli konstytutywnych nieliniowych materiałów sprężystych jest model Mooneya–Rivlina (Mooney 1940; Rivlin 1948). Można go uważać za szczególny przypadek tzw. **uogólnionego wielomianowego potencjału sprężystego** (Rivlin i Saunders 1997):

$$W = \sum_{i,j=0}^N C_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=0}^M D_k (J - 1)^{2k} \quad (6.56)$$

W przypadku materiałów nieściśliwych (o nieskończonej sztywności objętościowej) pomija się drugą z sum, czyli przyjmuje się  $D_k = 0$  ( $k = 1, \dots, M$ ). **Ścisłym materiałem Mooneya–Rivlina** nazywa się materiał hipersprężysty, dla którego potencjał sprężysty przyjmuje się w postaci:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + D_1(J - 1)^2 \quad (6.57)$$

co odpowiada przyjęciu  $N = 1$ ,  $M = 1$ ,  $C_{00} = 0$ ,  $C_{11} = 0$  w wyrażeniu (6.56). Dla zgodności z uogólnionym prawem Hooke’a w granicy małych odkształceń oznaczyć można  $2(C_{10} + C_{01}) = G_0$ ,  $2D_1 = K_0$ , gdzie:  $G_0$  oraz  $K_0$  są początkowymi stycznymi modułami sztywności, odpowiednio poprzecznej i objętościowej. Dla **nieściśliwego materiału Mooneya–Rivlina** przyjmujemy  $D_1 = 0$ , a potencjał sprężysty przyjmuje postać:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) \quad (6.58)$$

Szczególnym przypadkiem materiału Mooneya–Rivlina jest tzw. **materiał neo-hooke’owski** (ang. *neohookean solid*) – odpowiednio ściśliwy lub nieściśliwy – który odpowiada sytuacji, gdy  $C_{01} = 0$  (Rivlin 1948). Dla materiału Mooneya–Rivlina (w ogólności ściśliwego) mamy:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} = C_{10}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} = C_{01}, \quad \frac{\partial W}{\partial J} = D_1 \quad (6.59)$$

Po podstawieniu do wzoru (6.16) i przyjęciu wartości niezmienników właściwych dla stanu prostego ścinania, zgodnie z (6.24) i (6.27), otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(2C_{10} + C_{01})\gamma^2 & 2(C_{10} + C_{01})\gamma & 0 \\ & -\frac{2}{3}(C_{10} + 2C_{01})\gamma^2 & 0 \\ \text{sym} & & -\frac{2}{3}(C_{10} - C_{01})\gamma^2 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Podobnie jak poprzednio możemy zauważyć, że stan naprężenia, odpowiadający deformacji prostego ścinania, nie jest czystym ścinaniem – obecne są naprężenia normalne, których wielkość jest jednak istotnie mniejsza od wielkości naprężenia stycznego, o ile tylko deformacja jest dostatecznie mała ( $\gamma \ll 1$ ). Otrzymany **wynik jest niezależny od wyboru między modelem materiału ściśliwego i nieściśliwego, co jest związane z izochorycznym charakterem stanu prostego ścinania**. Jednakże w przypadku materiału nieściśliwego do stanu naprężenia danego wzorem (6.60) można dodać stan naprężenia hydrostatycznego o dowolnej wielkości – z uwagi na nieściśliwość materiału (nieskończoną sztywność objętościową) naprężenie takie nie będzie miało wpływu na postać deformacji. Wielkość tej dodatkowej składowej hydrostatycznej dla materiałów nieściśliwych wyznacza się ze statycznych warunków brzegowych (kinematyczne warunki brzegowe zadane są przez założone dla deformacji prostego ścinania pole przemieszczenia).

Warto też zwrócić na uwagę na to, że pomimo nieliniowości ogólnej postaci związku konstytutywnego dla materiału Mooneya–Rivlina, **związek między naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym przy prostym ścinaniu jest liniowy** – nie dotyczy to jednak związku konstytutywnego wyrażonego za pomocą rozciągnięć głównych:

$$\sigma_{12} = 2(C_{10} + C_{01})\gamma = 2(C_{10} + C_{01})E_{12} = 2(C_{10} + C_{01})\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \quad (6.61)$$

### 6.2.3. Materiał Yeoh

Potencjał sprężysty Yeoh można zapisać w następującej postaci (Yeoh 1993):

$$W = \sum_{i=1}^3 C_i (\hat{I}_1 - 3)^i \quad (6.62)$$

Jest to kolejna propozycja potencjału w formie wielomianu zależnego od niezmienników tensorów deformacji. Stosuje się również modele bardziej ogólne, dla



których potencjał sprężysty ma postać analogiczną do (6.62), przy czym sumowanie odbywa się dla większej wartości indeksu ( $n > 3$ ). Model Yeoh opisuje materiały **nieściśliwe**. Dla materiału Yeoh mamy:

$$\frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} = C_1 + 2C_2(\hat{I}_1 - 3) + 3C_3(\hat{I}_1 - 3)^2, \quad \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial J} = 0 \quad (6.63)$$

W przypadku prostego ścinania materiału Yeoh tensor naprężenia Cauchy'ego jest równy:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2(C_1 + 2C_2\gamma^2 + 3C_3\gamma^4) \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix} + p\mathbf{1} \quad (6.64)$$

Tak jak w przypadku wszystkich modeli materiałów nieściśliwych stan naprężenia wyznaczany jest niejednoznacznie, z dokładnością do superponowanego stanu naprężenia hydrostatycznego o pewnej nieznannej z góry wielkości  $p$ . Nieliniowy związek między naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym jest następujący:

$$\sigma_{12} = 2\gamma(C_1 + 2C_2\gamma^2 + 3C_3\gamma^4) \quad (6.65)$$

Dla zgodności z przypadkiem małych odkształceń przyjmuje się  $2C_1 = G_0$ .

#### 6.2.4. Materiał Genta

Potencjał sprężysty Genta, wyprowadzony z koncepcji ograniczenia wydłużalności łańcuchów polimerowych, można zapisać w następującej postaci (Gent 1996):

$$W = -\frac{G_0}{2}(\hat{I}_m - 3) \ln \left( 1 - \frac{\hat{I}_1 - 3}{\hat{I}_m - 3} \right) \quad (6.66)$$

gdzie:  $\hat{I}_m$  jest stałą charakteryzującą materiał. Potencjał opisuje materiał **nieściśliwy**. Uogólnienie na przypadek materiału ściśliwego omówione jest w pracy (Horgan i Saccomandi 2004). Potencjał ten ma osobliwość, gdy pierwszy niezmiennik tensorów deformacji  $\hat{I}_1 = \hat{I}_m$ . Parametr  $\hat{I}_m$  jest zatem pewną wartością graniczną, do której dąży wartość niezmiennika  $\hat{I}_1$ , w miarę jak wielkość składowych stanu naprężenia w materiale dąży do nieskończoności. Model Genta jest jedną z wielu propozycji należących do klasy modeli ograniczonego rozciągnięcia (ang. *limited-stretch models*) – szczegółowe omówienie modeli tego typu można znaleźć w pracy (Rickaby i Scott 2015). Dla materiału Genta mamy:

$$\frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} = G_0 \left( 1 - \frac{\hat{I}_1 - 3}{\hat{I}_m - 3} \right)^{-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_3} = 0 \quad (6.67)$$

Po podstawieniu do (6.13) oraz wykorzystaniu związków (6.24) i (6.25) otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\sigma} = G_0 \frac{J_m}{J_m - \gamma^2} \begin{bmatrix} \gamma^2 + 1 & \gamma & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix} + p\mathbf{1}, \quad \text{gdzie: } J_m = \hat{I}_m - 3 \quad (6.68)$$

Nieliniowy związek między naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym jest następujący:

$$\sigma_{12} = G_0 \frac{J_m \gamma}{J_m - \gamma^2} \quad (6.69)$$

Warto zwrócić uwagę na sytuację, gdy pierwszy niezmiennik tensorów deformacji może przyjmować dowolnie dużą wielkość (łańcuchy polimeru mogą dowolnie się wydłużać) – zachodzi wtedy:

$$\lim_{\hat{I}_m \rightarrow \infty} W = \frac{G_0}{2} (\hat{I}_1 - 3) \quad (6.70)$$

co odpowiada potencjałowi materiału neo-hooke'owskiego.

### 6.2.5. Materiał Beatty'ego

Kolejną propozycją modelu ograniczonego rozciągnięcia włókien polimerowych jest model Beatty'ego materiału **nieściśliwego**, dla którego potencjał sprężysty przyjmuje postać (Beatty 2008):

$$W = -\frac{G_0}{2} \frac{\hat{I}_m (\hat{I}_m - 3)}{(2\hat{I}_m - 3)} \ln \left( \frac{1 - \frac{\hat{I}_1 - 3}{\hat{I}_m - 3}}{1 + \frac{\hat{I}_1 - 3}{\hat{I}_m}} \right) \quad (6.71)$$

Dla materiału Beatty'ego mamy:

$$\frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} = \frac{G_0}{2} \frac{\hat{I}_m(\hat{I}_m - 3)}{(\hat{I}_m - \hat{I}_1)(\hat{I}_m + \hat{I}_1 - 3)}, \quad \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_3} = 0 \quad (6.72)$$

Po podstawieniu do (6.13) otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\sigma} = G_0 \frac{\hat{I}_m(\hat{I}_m - 3)}{(\hat{I}_m - \gamma^2 - 3)(\hat{I}_m + \gamma^2)} \begin{bmatrix} \gamma^2 + 1 & \gamma & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix} + p\mathbf{1} \quad (6.73)$$

Nieliniowy związek między naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym jest następujący:

$$\sigma_{12} = G_0 \frac{\hat{I}_m(\hat{I}_m - 3)\gamma}{(\hat{I}_m - \gamma^2 - 3)(\hat{I}_m + \gamma^2)} \quad (6.74)$$

### 6.2.6. Materiał Warnera

Kolejną propozycją modelu ograniczonego rozciągnięcia włókien polimerowych jest model Warnera materiału **nieściśliwego**, dla którego potencjał sprężysty przyjmuje postać (Warner 1972):

$$W = -\frac{G_0}{2} \hat{I}_m \ln \left( 1 - \frac{\hat{I}_1 - 3}{\hat{I}_m - 3} \right) \quad (6.75)$$

Dla materiału Warnera mamy:

$$\frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} = \frac{G_0}{2} \frac{\hat{I}_m}{\hat{I}_m - \hat{I}_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_3} = 0 \quad (6.76)$$

Po podstawieniu do (6.13) otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\sigma} = G_0 \frac{\hat{I}_m}{\hat{I}_m - \gamma^2 - 3} \begin{bmatrix} \gamma^2 + 1 & \gamma & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix} + p\mathbf{1} \quad (6.77)$$

Nieliniowy związek między naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym jest następujący:

$$\sigma_{12} = G_0 \frac{\hat{I}_m \gamma}{\hat{I}_m - \gamma^2 - 3} \quad (6.78)$$

### 6.2.7. Materiał Arrudy–Boyce

Wyprowadzenie potencjału sprężystego Arrudy–Boyce zasadza się na metodach mechaniki statystycznej, zastosowanych do reprezentatywnego elementu objętościowego o kształcie sześcianu, w którym istnieje osiem odkształcalnych łańcuchów na kierunkach przekątnych tego sześcianu (Arruda i Boyce 1993). Model ten dotyczy materiałów **nieściśliwych**. Propozycjami podobnego typu są modele pojedynczego łańcucha polimerowego (Kuhn i Grün 1942), trzech wzajemnie prostopadłych łańcuchów polimerowych (James i Guth 1943) oraz czterech łańcuchów łączących środek czworościanu foremnego z jego wierzchołkami (Wang i Guth 1952), przy czym ten ostatni model jest tożsamy z modelem Arrudy–Boyce (Eliás-Zúñiga i Beatty 2002).

Ogólną postać potencjału Arrudy–Boyce można przedstawić następująco:

$$W = G_0 \frac{\hat{I}_m}{3} \left[ \xi L^{-1}(\xi) - \ln \left( \frac{\sinh(L^{-1}(\xi))}{L^{-1}(\xi)} \right) \right] \quad (6.79)$$

gdzie:  $\xi = \sqrt{\hat{I}_1 / \hat{I}_m}$ , a  $L^{-1}(\xi)$  oznacza odwrotną funkcję Langevina. Parametr  $\hat{I}_m$ , podobnie jak w uprzednio omówionych propozycjach, oznacza maksymalną dopuszczalną wartość pierwszego niezmiennika tensorów deformacji. Funkcja Langevina dana jest wzorem:

$$L(\xi) = \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{e^\xi - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} = \text{ctgh}(\xi) - \frac{1}{\xi} \quad (6.80)$$

Funkcja do niej odwrotna nie daje się wyrazić w postaci zamkniętego wzoru, dlatego stosuje się różnego rodzaju przybliżenia (Jedynak 2017). W równaniu (6.79) funkcję odwrotną do funkcji Langevina możemy rozwinąć w szereg McLaurina względem zmiennej  $\xi$ :

$$L^{-1}(\xi) = 3\xi + \frac{9\xi^3}{5} + \frac{297\xi^5}{175} + \frac{1539\xi^7}{875} + \frac{126117\xi^9}{67375} + \dots \quad (6.81)$$

a następnie podstawić  $\xi = \sqrt{\hat{I}_1 / \hat{I}_m}$  i rozwinąć całe wyrażenie (6.79) w szereg McLaurina względem zmiennej  $\hat{I}_1$ . Zachowując pięć pierwszych wyrazów rozwinięcia, w rezultacie otrzymujemy:

$$W \approx G_0 \hat{I}_m \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_m} \right) + \frac{3}{20} \left( \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_m} \right)^2 + \frac{33}{350} \left( \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_m} \right)^3 + \frac{513}{7000} \left( \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_m} \right)^4 + \frac{42039}{673750} \left( \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_m} \right)^5 \right] \quad (6.82)$$

co można zapisać w ogólnej postaci:

$$W \approx G_0 \hat{I}_m \sum_{k=1}^5 \alpha_k \left( \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_m} \right)^k \quad (6.83)$$

gdzie:  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_2 = \frac{3}{20}$ ,  $\alpha_3 = \frac{33}{350}$ ,  $\alpha_4 = \frac{513}{7000}$ ,  $\alpha_5 = \frac{42039}{673750}$ .

Związek (6.82) z reguły zapisuje się w nieco odmienny sposób, oznaczając  $\hat{I}_m = 3N$ , oraz dodając do wartości potencjału stałą, co zawsze można zrobić dla dowolnej funkcji pełniącej rolę potencjału. Cechowanie takie można wykonać w taki sposób, aby potencjał przyjął ostatecznie postać:

$$W \approx G_0 \left[ \frac{1}{2} (\hat{I}_1 - 3) + \frac{1}{20N} (\hat{I}_1^2 - 9) + \frac{11}{1050N^2} (\hat{I}_1^3 - 27) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{19}{7000N^3} (\hat{I}_1^4 - 81) + \frac{519}{673750N^4} (\hat{I}_1^5 - 243) \right] \quad (6.84)$$

Przy takiej formie potencjału, w stanie niezdeformowanym, czyli dla  $\hat{I}_1 = 3$  wartość potencjału jest zerowa.

Dla materiału Arrudy–Boyce mamy wtedy:

$$\frac{\partial W}{\partial \hat{I}_1} = G_0 \sum_{k=1}^5 k \alpha_k \left( \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_m} \right)^{k-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_2} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \hat{I}_3} = 0 \quad (6.85)$$

Po podstawieniu do (6.13):

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G_0 \sum_{k=1}^5 k \alpha_k \left( \frac{\gamma^2 + 3}{\hat{I}_m} \right)^{k-1} \begin{bmatrix} \gamma^2 + 1 & \gamma & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix} + p \mathbf{1} \quad (6.86)$$

Nieliniowy związek między naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym można zapisać następująco:

$$\sigma_{12} = 2G_0 \gamma \sum_{k=1}^5 k \alpha_k \left( \frac{\gamma^2 + 3}{\hat{I}_m} \right)^{k-1} \quad (6.87)$$

Należy zaznaczyć, że aproksymacja (6.81) stanowi dobre przybliżenie jedynie dla małych wartości  $\xi$ . W miarę jak niezmiennik  $\hat{I}_1$  przybliża swoją wartość do maksymalnej wartości dopuszczalnej  $\hat{I}_m$ , błąd względny rośnie do nieskończoności. Mimo oczywistej niedokładności przybliżenie to z powodzeniem stosowane jest w praktycznych obliczeniach numerycznych (np. w programie Abaqus). W sytuacji gdy deformacja jest tego rodzaju, że maksymalne wartości  $\hat{I}_1$  są znacząco mniejsze od wartości granicznej  $\hat{I}_m$ , błąd tego przybliżenia nie ma istotnego znaczenia.

### 6.2.8. Materiał Ogdena

Potencjał sprężysty Ogdena można zapisać w następującej postaci (Ogden 1972):

$$W = \sum_{s=1}^N \frac{G_s}{\alpha_s} (\lambda_1^{\alpha_s} + \lambda_2^{\alpha_s} + \lambda_3^{\alpha_s} - 3) \quad (6.88)$$

gdzie:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  są rozciągnięciami głównymi (wartościami własnymi tensorów rozciągnięcia); a  $N, G_s, \alpha_s, D_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) są stałymi charakteryzującymi własności mechaniczne materiału. Potencjał w postaci (6.88) dotyczy materiałów **nieściśliwych**. Inaczej niż w przypadku pozostałych omawianych modeli potencjał Ogdena nie jest wyrażony jako funkcja niezmienników tensorów deformacji, ale jako funkcja rozciągnięć głównych. Skorzystamy zatem z postaci (6.21) związku konstytutywnego. Dla prostego ścinania mamy:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} \sum_{s=1}^N G_s \lambda_1^{\alpha_s - 1} + p \\ \sigma_2 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{\lambda_3 \lambda_1} \sum_{s=1}^N G_s \lambda_2^{\alpha_s - 1} + p \end{aligned} \quad (6.89)$$

$$\sigma_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{s=1}^N G_s \lambda_3^{\alpha_s - 1} + p$$

Tak jak w przypadku pozostałych modeli materiałów nieściśliwych do stanu naprężenia można dodać składową hydrostatyczną. Po uwzględnieniu związków (6.24) możemy napisać:

$$\sigma_1 = \sum_{s=1}^N G_s \lambda^{\alpha_s} + p, \quad \sigma_2 = \sum_{s=1}^N G_s \lambda^{-\alpha_s} + p, \quad \sigma_3 = \sum_{s=1}^N G_s + p \quad (6.90)$$

Po podstawieniu związków (6.90) i (6.26) w (6.23) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left( \sum_{s=1}^N G_s \lambda^{\alpha_s} \right) \frac{2}{\gamma^2 + 4 + \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}} + \left( \sum_{s=1}^N G_s \lambda^{-\alpha_s} \right) \frac{2}{\gamma^2 + 4 - \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}} + p \\ \sigma_{22} &= \left( \sum_{s=1}^N G_s \lambda^{\alpha_s} \right) \frac{(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})^2}{2(\gamma^2 + 4 + \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4})} + \left( \sum_{s=1}^N G_s \lambda^{-\alpha_s} \right) \frac{(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4})^2}{2(\gamma^2 + 4 - \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4})} + p \\ \sigma_{12} &= \left( \sum_{s=1}^N G_s \lambda^{\alpha_s} \right) \frac{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})}{\gamma^2 + 4 + \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}} + \left( \sum_{s=1}^N G_s \lambda^{-\alpha_s} \right) \frac{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4})}{\gamma^2 + 4 - \gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}} \\ \sigma_{33} &= \sum_{s=1}^N G_s + p \end{aligned} \quad (6.91)$$

Powyższy związek staje się bardziej czytelny, jeśli wyrazimy go wyłącznie za pomocą maksymalnego rozciągnięcia głównego:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{\lambda^2 + 1} \left[ \sum_{s=1}^N G_s (\lambda^{\alpha_s} + \lambda^{2-\alpha_s}) \right] + p \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{\lambda^2 + 1} \left[ \sum_{s=1}^N G_s (\lambda^{2+\alpha_s} + \lambda^{-\alpha_s}) \right] + p \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{\lambda^2 + 1} \left[ \sum_{s=1}^N G_s (\lambda^{1-\alpha_s} - \lambda^{1+\alpha_s}) \right] \\ \sigma_{33} &= \sum_{s=1}^N G_s + p \end{aligned} \quad (6.92)$$

W przypadku materiału Ogdena, wyraźniej niż w przypadku pozostałych omawianych tutaj modeli, zauważalna jest konieczność wyznaczenia nieznannej składowej hydrostatycznej. W powyższym rozwiązaniu naprężenie normalne  $\sigma_{33}$  jest stałe i niezerowe nawet przy braku deformacji ( $\gamma = 0$ ), co wymaga wskazania przyczyn takiego stanu, np. wymuszonego zerowego odkształcenia, prostopadłego do płaszczyzny prostego ścinania. Innym rozwiązaniem może być np. założenie, że na brzegu swobodnym, prostopadłym do trzeciej osi przyjętego układu współrzędnych, naprężenie normalne ma być zerowe – wtedy musi zachodzić  $p = -\sum_{s=1}^N G_s$ .



## 7. Analityczne modele ścinanych złączy klejowych

W niemieckim czasopiśmie *Luftfahrtforschung* (Badania Lotnicze), nr 15 z 1938 roku, ukazał się artykuł niespełna trzydziestoletniego Olafa Volkersena, poświęcony dystrybucji sił pomiędzy łącznikami w złączu nitowanym (Volkersen 1938). Praca ta stała się punktem odniesienia dla późniejszych analiz dotyczących rozkładu naprężenia stycznego w złączach klejowych. Od tamtego czasu zagadnienie to podejmowała ogromna liczba badaczy, a szczegółowe omówienie wszystkich opublikowanych wyników wymyka się ramom niniejszej monografii. Zadanie to podejmuje w pewnym zakresie opracowanie (da Silva i in. 2009b) – z tej publikacji pochodzi tabela 3, która w pewnej mierze oddaje liczbę i różnorodność podejść w modelowaniu złączy ścinanych.

W niniejszej książce omówione zostaną tylko niektóre z propozycji wymienionych w tabeli 3. Na początku szczegółowo scharakteryzowane zostaną najwcześniejsze propozycje, które stanowią swego rodzaju punkt odniesienia dla modeli opracowywanych później. Tymi fundamentalnymi modelami są: **modele prętowe** Volkersena i de Bruyne'a oraz **model belkowy** zaproponowany przez Golanda i Reissnera, przy czym obydwie modele doczekały się twórczego uogólnienia, którego autorem był Hart-Smith. Choć modele wspomnianych autorów traktowane są z reguły jako odrębne propozycje, wydaje się uzasadnione, aby omówić je szczegółowo, również z uwzględnieniem późniejszych modyfikacji Hart-Smitha.

Modele, które zostaną omówione w dalszej kolejności, ukazują stopniowy rozwój badań nad złączami ścinanymi, który dokonywał się przez rezygnację z kolejnych założeń upraszczających, świadome uogólnianie modeli wcześniejszych o aspekty w nich pominięte lub zastosowanie nowych narzędzi analitycznych. Z uwagi na wybór matematycznego sformułowania zagadnienia mechaniki ośrodków ciągłych modele te można podzielić na dwie klasy:

1. modele wyprowadzone ze **sformułowania lokalnego**, czyli z warunku spełnienia określonego układu równań różniczkowych, czyli równań równowagi, związków kinematycznych i związków fizycznych;
2. modele wyprowadzone ze **sformułowania globalnego**, czyli z warunku spełnienia przyjętych zasad wariacyjnych teorii sprężystości, przy czym z uwagi na statyczny charakter warunków brzegowych, określanych dla rozważanych zagadnień, każdorazowo wykorzystywane jest tu **twierdzenie Castigliano o minimum energii uzupełniającej** (komplementarnej).

Porównanie cech modeli złączy ścinanych

MODEL	MATERIAL				ELEMENTY ŁĄCZONE				NAPRĘŻENIE W SKLEINIE			ROZWIĄZANIE		
	SKLEINA		ELEMENT		IZOTROPOWE	ANIZOTROPOWE	IDENTYCZNE	RÓŻNE		ROZCIĄGAJĄCE	ODRYWAJĄCE	STYCZNE	ANALITYCZNE	NUMERYCZNE
	LINIOWY	NIELINIOWY	LINIOWY	NIELINIOWY				GRUBOŚĆ	MATERIAL					
(Volkersen 1938)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
(Goland i Reissner 1944)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>			<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
(Wah 1973)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
(Hart-Smith 1973a) (Hart-Smith 1973b)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
(Pirvics 1974)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
(Grimes i Greimann 1975)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
(Srinivas 1975)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
(Renton i Vinson 1977)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			
(Allman 1977)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
(Ojalvo i Eidinoff 1978)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
(Delale i in. 1980)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
(Bigwood i Crocombe 1989)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
(Bigwood i Crocombe 1990)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		
(Cheng i in. 1991)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
(Bigwood i Crocombe 1992)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>			<input type="checkbox"/>	
(Adams i Mallick 1992)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
(Tong 1996)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>			<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
(Yang i Pang 1996)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
(Adams i in. 1997)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>					<input type="checkbox"/>		
(Forstig i in. 1999)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
(Liu i in. 2000)	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
(Mortensen i Thomsen 2002)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			<input type="checkbox"/>			
(Wang i in. 2003)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
(Smeltzer i Klang 2003)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	

Jeśli chodzi o modele wyprowadzone z lokalnego sformułowania zagadnienia brzegowego, jako kolejne kryterium klasyfikacyjne dla analitycznych modeli złączy ścinanych można przyjąć założenia przyjmowane w tych modelach i dotyczące deformacji elementów łączonych. Można wskazać tu trzy główne klasy modeli:

1. **model prętowy** – elementy łączone podlegają tylko deformacji osiowej. Znajomość przemieszczeń osiowych przekrojów poprzecznych elementów łączonych jest wystarczająca do opisu deformacji i rozkładu sił przekrojowych w tych elementach. Z uwagi na przyjęte założenia, dotyczące kinematyki elementów złącza, zagadnienie brzegowe redukuje się w istocie do problemu jednowymiarowego. Jest to model wykorzystany w historycznie pierwszych modelach złączy zakładkowych (Volkersen 1938; de Bruyne 1944; Hart-Smith 1973b);
2. **model belkowy** – elementy łączone podlegają zarówno deformacji osiowej, jak i deformacji poprzecznej. Podobnie jak w przypadku modelu prętowego przyjęte założenia, dotyczące charakteru deformacji elementów złącza, pozwalają na zredukowanie zagadnienia do problemu jednowymiarowego. Wśród stosowanych modeli belkowych można wyróżnić:
  - 2.1. **model Bernoulliego–Eulera** – elementy łączone podlegają deformacji osiowej oraz zginaniu przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów Bernoulliego: przekroje poprzeczne, które są płaskie i prostopadłe do osi elementu przed deformacją, po deformacji pozostają płaskie i są prostopadłe do zdeformowanej osi elementu. Jest to standardowe podejście wykorzystane w większości najpowszechniej stosowanych modeli (np. Goland i Reissner 1944; Hart-Smith 1973a; Ojalvo i Eidinoff 1978; Cooper i Sawyer 1979; Bigwood i Crocombe 1989);
  - 2.2. **model Timoshenki–Ehrenfesta** (Timoshenko i Gere 1984; Elishakoff 2020) – stanowi uogólnienie modelu Bernoulliego–Eulera, w którym odstępuje się od wymogu, aby przekrój po deformacji był prostopadły do zdeformowanej osi elementu. Kąt obrotu przekroju stanowi dodatkową zmienną zależną. Podejście to wykorzystano np. w pracy (Delale i in. 1980). Założenia dotyczące deformacji przekroju poprzecznego elementów łączonych, analogiczne do propozycji Timoshenki, wykorzystano również w pracy (Yang i Pang 1996);
  - 2.3. **model belki laminowanej** – w tym podejściu elementy łączone traktuje się jako elementy kompozytowe, laminaty zbudowane z licznych cienkich warstw. Tego typu podejście zastosowano np. w pracach (Renton i Vinson 1973, 1977; Yang i Pang 1996);
3. **modele dwuwymiarowe** – rozważa się w nich ogólne płaskie (dzwuwymiarowe) zagadnienie brzegowe mechaniki ośrodków ciągłych. Założenia dotyczące np. rozkładu składowych tensora naprężenia w przekroju poprzecznym elementu pozwalają również i w modelach dwuwymiarowych zredukować

wymiar zagadnienia do jednego, jednakże istotny jest fakt, że wymaga się od rozwiązania spełnienia równań rządzących zagadnieniem płaskim. Podejście tego rodzaju omówiono np. w pracach (Renton i Vinson 1973, 1977).

Trzeba przyznać, że spośród modeli belkowych najczęściej wykorzystywany jest model Bernoulliego–Eulera. Wśród modeli alternatywnych, poza modelem Timoshenki–Ehrenfesta, można również wymienić **udoskonalone modele deformacji ścinającej** (ang. *Reined Shear Deformation Theories*) – stanowią uogólnienie modelu Timoshenki–Ehrenfesta, w którym odstępuje się od założenia, że po deformacji przekrój pozostaje płaski. Spaczenie (deplanacja) przekroju opisywane jest za pomocą pewnej funkcji zmiennej wzdłuż wysokości przekroju – różne propozycje funkcji deplanacji można znaleźć w pracach (Murthy 1981; Reddy 1984; Touratier 1991; Zenkour 2006; Atmane i in. 2010). Zastosowanie modeli tego rodzaju jest jednak uzasadnione wyłącznie w przypadku, gdy deformacja postaciowa elementów łączonych ma istotne znaczenie, a zatem, gdy elementy te są krępe. W typowych zastosowaniach złączy klejowych stosunek grubości elementu do długości złącza z reguły przekracza wartość  $\frac{h}{L} = 10$ , którą często uznaje się za wartość graniczną, powyżej której nie obserwuje się znaczących różnic między najprostszym modelem Bernoulliego–Eulera a modelami bardziej zaawansowanymi. Modele te są jednak powszechnie wykorzystywane w opisie belek kompozytowych (Vo i Thai 2012).

W kolejnych podrozdziałach omówione zostaną wybrane prace dotyczące modelowania analitycznego złączy klejowych. Modele te zostaną również krótko scharakteryzowane, zgodnie z wyżej wymienionymi kryteriami klasyfikacji.

## 7.1. Prętowy model złącza dwuzakładkowego

Najprostszym modelem analitycznym dla złączy klejonych jest model opublikowany pierwotnie przez Olafa Volkersena (Volkersen 1938), a następnie przez Normana A. de Bruyne’a (de Bruyne 1944). Kluczowe założenia tego modelu są następujące:

- **elementy łączone podlegają wyłącznie rozciąganiu (model prętowy),**
- **skleina podlega wyłącznie prostemu ścinaniu,**
- **materiały mają liniową charakterystykę sprężystą,**
- **odkształcenia i przemieszczenia są małe.**

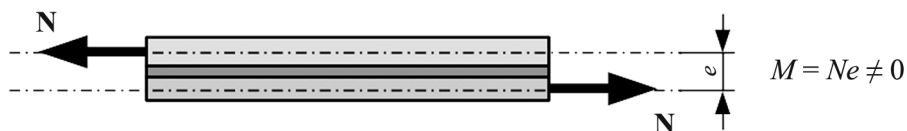
Jest to zatem model **prętowy** i zarazem model **lokalny**, którego równanie rządzące wyprowadza się z lokalnych równań równowagi (w punkcie). Pierwotne propozycje Volkersena oraz de Bruyne’a zostały istotnie rozwinięte przez Leonarda J. Hart-Smitha, który w swojej analizie przygotowanej dla NASA uwzględnił takie cechy złącza jak:

- odkształcalność termiczną,
- asymetrię charakterystyk mechanicznych elementów złącza,
- obecność naprężenia odrywającego,
- nieliniową (biliniową) charakterystykę materiałową skleiny.

Wpływ nieliniowości charakterystyki materiałowej skleiny omówiony jest w odrębnym podrozdziale 7.8.

Rozważamy złącze dwuzakładkowe (zob. rys. 28) o stałej szerokości  $b$ , symetryczne względem płaszczyzny środkowej środkowego elementu złącza. Przyjmujemy jednak, że dwa elementy zewnętrzne mogą mieć w ogólności odmienną charakterystykę mechaniczną (sztywność podłużną) od elementu wewnętrznego.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że model Volkersena–de Bruyne’a nie nadaje się do opisu złączy jednozakładkowych. Założenie, że elementy łączone przenoszą jedynie siły osiowe, pociąga za sobą brak globalnej równowagi złącza – mimośród prostych działania sił osiowych w elementach złącza sprawia, że układ obciążony jest momentem, który mógłby być zrównoważony jedynie przez obecność sił poprzecznych lub momentów zginających (por. rys. 27).

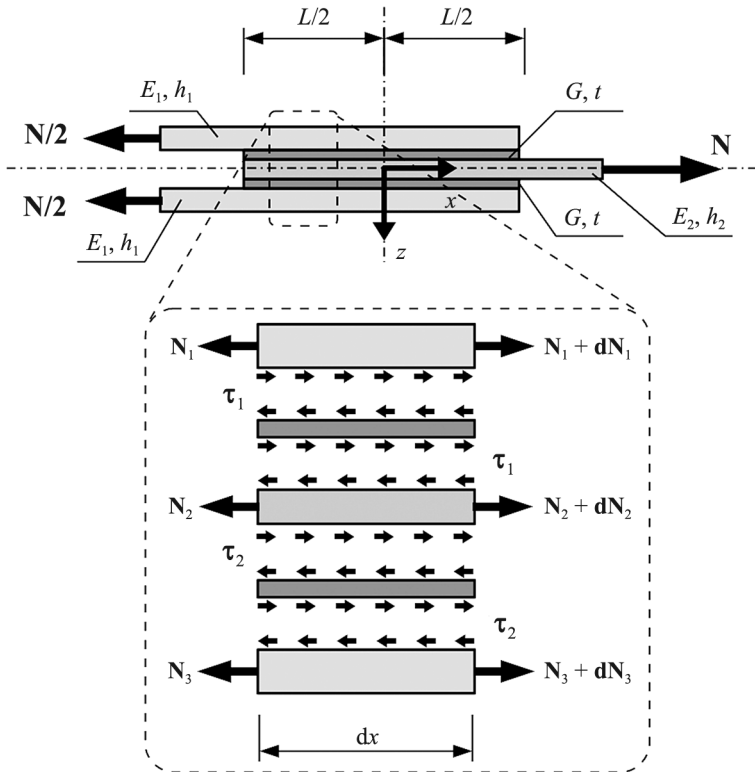


Rys. 27. Brak równowagi globalnej w prętowych modelach złączy jednozakładkowych

Z podobnych względów model ten nie jest odpowiedni do opisu niesymetrycznych złączy dwuzakładkowych – brak symetrii układu prostych działania sił osiowych sprawia, że taki równoległy układ sił redukuje się do pary. Dopiero propozycja Golanda–Reissnera, w której elementy łączone modelowane są jako belki zginane, pozwala na opis złączy jednozakładkowych. Należy jednak zwrócić uwagę, że analiza równowagi sił wewnętrznych – analogiczna do poniższej – może być przeprowadzona również dla złączy jednozakładkowych. Rezultaty takiej analizy są jakościowo identyczne z tymi przedstawionymi poniżej i – choć formalnie nie są spełnione globalne warunki równowagi sił zewnętrznych – z powodzeniem wykorzystywane są jako pierwsze przybliżenie rozkładu sił wewnętrznych w złączach jednozakładkowych.

Zapiszmy równania równowagi dla wyodrębnionych elementów nieskończenie małego wycinka złącza (por. rys. 28):

$$\begin{cases} -N_1 + (N_1 + dN_1) + \tau_1 dx = 0 \\ -N_2 + (N_2 + dN_2) - \tau_1 dx + \tau_2 dx = 0 \\ -N_3 + (N_3 + dN_3) - \tau_2 dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dN_1}{dx} + \tau_1 = 0 \\ \frac{dN_2}{dx} - \tau_1 + \tau_2 = 0 \\ \frac{dN_3}{dx} - \tau_2 = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$



Rys. 28. Model prętowy symetrycznego złącza dwuzakładkowego – równowaga sił wewnętrznych

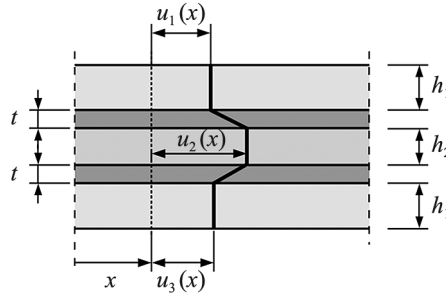
Siły osiowe  $N_1, N_2$  o wymiarze N/m są wynikiem całkowania odpowiednich naprężeń normalnych po wysokości przekroju elementów łączonych – są to siły osiowe w elementach łączonych, podzielone przez szerokość złącza  $b$ .

Zgodnie z założeniami skleina podlega wyłącznie prostemu ścinaniu, zatem rozkład przemieszczenia na kierunku prostopadłym do skleiny jest liniowy (rys. 29).

Wykorzystując dla każdego z materiałów liniowe związki geometryczne oraz liniowe związki konstytutywne, możemy wyznaczyć naprężenia styczne w skleinie:

$$\tau_1 = G\gamma_1 = G \frac{u_2 - u_1}{t} \quad (7.2)$$

$$\tau_2 = G\gamma_2 = G \frac{u_3 - u_2}{t} \quad (7.3)$$



Rys. 29. Kinematyka prętowego modelu symetrycznego złącza dwuzakładkowego

oraz siły w elementach łączonych. Odształcenia liniowe w elementach łączonych, uwzględniające zjawiska rozszerzalności cieplnej, można zapisać następująco:

$$\frac{du_1}{dx} = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta T = \frac{N_1}{E_1 h_1} + \alpha_1 \Delta T \quad (7.4)$$

$$\frac{du_2}{dx} = \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} + \alpha_2 \Delta T = \frac{N_2}{E_2 h_2} + \alpha_2 \Delta T \quad (7.5)$$

$$\frac{du_3}{dx} = \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3} + \alpha_3 \Delta T = \frac{N_3}{E_3 h_3} + \alpha_3 \Delta T \quad (7.6)$$

gdzie:  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) są współczynnikami rozszerzalności cieplnej materiałów, z których wykonane są kolejne elementy łączone;  $\Delta T$  jest różnicą temperatury roboczej i temperatury montażu; a  $u_{p,T}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) są przemieszczeniami elementów spowodowanymi odształcalnością termiczną. Z uwagi na jednorodność materiału oraz rozkładu temperatury odształcenia termiczne są stałe, niezależne od zmiennej  $x$ , zatem po zróżniczkowaniu powyższych związków otrzymamy:

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{d^2 u_1}{dx^2} E_1 h_1, \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{d^2 u_2}{dx^2} E_2 h_2, \quad \frac{dN_3}{dx} = \frac{d^2 u_3}{dx^2} E_3 h_3 \quad (7.7)$$

Podstawienie powyższych związków do równań równowagi po prostych przekształceniach daje nam:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{1}{E_1 h_1} \tau_1 = 0 \\ \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \frac{1}{E_2 h_2} \tau_1 + \frac{1}{E_2 h_2} \tau_2 = 0 \\ \frac{d^2 u_3}{dx^2} - \frac{1}{E_1 h_1} \tau_2 = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

Pomnóżmy drugie równanie równowagi przez 2, a następnie odejmijmy od niego równanie pierwsze i równanie trzecie:

$$\left( \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \frac{d^2 u_1}{dx^2} \right) + \left( \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \frac{d^2 u_3}{dx^2} \right) + \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right) (\tau_2 - \tau_1) = 0 \quad (7.9)$$

Zróżniczkujmy dwukrotnie wyrażenia (7.2) i (7.3) względem zmiennej  $x$ :

$$\frac{d^2 \tau_1}{dx^2} = \frac{G}{t} \left( \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \frac{d^2 u_1}{dx^2} \right) \quad (7.10)$$

$$\frac{d^2 \tau_2}{dx^2} = \frac{G}{t} \left( \frac{d^2 u_3}{dx^2} - \frac{d^2 u_2}{dx^2} \right) \quad (7.11)$$

Powyższe równania możemy wykorzystać w równaniu (7.9) po uprzednim przemnożeniu go przez czynnik  $G/t$ :

$$\frac{d^2 \tau_1}{dx^2} - \frac{d^2 \tau_2}{dx^2} + \frac{G}{t} \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right) (\tau_2 - \tau_1) = 0 \quad (7.12)$$

Z uwagi na symetrię złącza musi zachodzić:

$$u_3 = u_1, \quad N_3 = N_1, \quad \tau_2 = -\tau_1 \quad (7.13)$$

co pozwala zapisać powyższe równanie w postaci:

$$2 \frac{d^2 \tau_1}{dx^2} - \frac{2G}{t} \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right) \tau_1 = 0 \quad (7.14)$$

lub, po podzieleniu przez 2 i przyjęciu oznaczenia  $\tau_1 = \tau$ , w postaci:

$$\frac{d^2 \tau}{dx^2} - \beta^2 \tau = 0, \quad \text{gdzie: } \beta = \sqrt{\frac{G}{t} \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right)} > 0 \quad (7.15)$$



Powyższe równanie jest jednorodnym liniowym równaniem różniczkowym zwy-  
czajnym drugiego rzędu o stałych współczynnikach, w którym niewiadomą jest  
rozkład naprężenia stycznego w skleinie na długości złącza. Rozwiązanie ogólne  
tego równania jest następujące:

$$\tau(x) = C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) \quad (7.16)$$

Stałe całkowania  $C_1$ ,  $C_2$  wyznaczmy z warunków równowagi sił wewnętrznych  
oraz warunków zgodności przemieszczeń. Jeśli przyjmiemy początek układu współ-  
rzędnych w środkowym przekroju złącza, wtedy równowaga sił wewnętrznych i sił  
zewnętrznych, przy myślowym rozcięciu układu przez płaszczyzny styku sklein  
i elementów łączonych, wymaga, aby suma naprężeń stycznych na powierzchniach  
sklein równoważyła obciążenie zewnętrzne:

$$2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tau(x) dx = N \quad (7.17)$$

Podstawiając do powyższego równania ogólną postać rozwiązania (7.16), otrzy-  
mamy:

$$\frac{4C_1}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) = N \quad (7.18)$$

co daje:

$$C_1 = \frac{\tau_{\text{avg}} \beta L}{2 \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right)}, \quad \text{gdzie: } \tau_{\text{avg}} = \frac{N}{2L} \quad (7.19)$$

Drugie równanie konieczne do wyznaczenia stałych całkowania wyznaczamy  
z równania, które, podobnie jak równanie (7.15), wyprowadza się z jednokrotnie zróž-  
niczkowanych równań (7.2)–(7.3) po podstawieniu związków (7.4)–(7.6). Tak zapi-  
sane równania, po kolejnym zróžniczkowaniu i uwzględnieniu równań równowagi  
(7.1), dają w rezultacie równanie rządzące zagadnieniem (7.15). Poszukiwane przez  
nas równanie można interpretować jako warunek zgodności przemieszczeń. Nale-  
ży zwrócić uwagę na fakt, że w sformułowaniu zagadnienia nie podano żadnych  
warunków brzegowych typu kinematycznego, zatem **przemieszczenia elementów  
złącza wyznaczone są z dokładnością do ruchu bryły sztywnej**. W kontekście  
przemieszczeń możemy zatem mówić nie tyle o przemieszczeniach w jakimś ustalonym  
układzie współrzędnych, co o przemieszczeniach względnych. I tak przemiesz-  
czenie dolnej i górnej krawędzi skleiny można wyznaczyć następująco:

$$u_1(x) = \int \varepsilon_1 dx + u_{1,0}, \quad u_2(x) = \int \varepsilon_2 dx + u_{2,0} \quad (7.20)$$

gdzie:  $u_{1,0}$ ,  $u_{2,0}$  są stałe i nie będą podlegały wyznaczeniu. Uwzględniając związki (7.4)–(7.6), przemieszczenie punktu na dolnej krawędzi skleiny względem punktu na krawędzi górnej można zapisać następująco:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = \int \left( \frac{N_2}{E_2 h_2} + \alpha_2 \Delta T \right) dx - \int \left( \frac{N_1}{E_1 h_1} + \alpha_1 \Delta T \right) dx + (u_{2,0} - u_{1,0}) \quad (7.21)$$

Z drugiej strony, obliczone powyżej przemieszczenie względne krawędzi górnej i dolnej wyznaczyć można jako całkę odkształceń postaciowych w skleinie:

$$\Delta u = \gamma t = \frac{t}{G} \tau \quad (7.22)$$

Możemy więc napisać:

$$\frac{t}{G} \tau = \int \left( \frac{N_2}{E_2 h_2} - \frac{N_1}{E_1 h_1} + (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T \right) dx + (u_{2,0} - u_{1,0}) \quad (7.23)$$

Trzeba przy tym podkreślić, że **nie uwzględniamy rozszerzalności termicznej materiału skleiny**. Po obustronnym zróżniczkowaniu powyższej zależności otrzymamy:

$$\frac{d\tau}{dx} \frac{t}{G} = \frac{N_2}{E_2 h_2} - \frac{N_1}{E_1 h_1} + (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T \quad (7.24)$$

W ten sposób otrzymujemy warunek na pochodną rozkładu naprężenia stycznego, będący pierwszym równaniem, z którego wyznaczymy stałe całkowania  $C_1$  i  $C_2$ :

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{G}{t} \left[ \frac{N_2}{E_2 h_2} - \frac{N_1}{E_1 h_1} + (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T \right] \quad (7.25)$$

Przy zastosowanym podejściu powyższe równanie jest kluczowe dla rozwiązania zagadnienia. Do równania (7.25) podstawiamy rozwiązanie ogólne równań równowagi, dane wzorem (7.16). Jest to równanie, za pomocą którego wyznaczymy stałą całkowania  $C_2$ . Równanie (7.25) musi być spełnione dla dowolnego  $x$ , póki jednak nie wiemy, w jaki sposób wyrażają się siły osiowe  $N_1$  i  $N_2$ , warunek ten możemy zapisać tylko w jednym z dwóch ustalonych punktów, w którym wielkości te są znane, czyli dla  $x = \pm \frac{L}{2}$ . Wartości sił osiowych przyjmujemy wtedy w równaniu (7.25) zgodnie ze statycznymi warunkami brzegowymi:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{N}{2}, & N_2 = 0 & \text{dla } x = -\frac{L}{2} \\ N_1 = 0, & N_2 = N & \text{dla } x = \frac{L}{2} \end{cases} \quad (7.26)$$

zaś parametr  $\beta$  wyrażamy w równaniu tym zgodnie z zależnością (7.15). Niezależnie od tego, czy wykorzystamy warunki brzegowe dla  $x = -\frac{L}{2}$  czy dla  $x = \frac{L}{2}$ , wynik otrzymamy taki sam, a mianowicie:

$$C_2 = \frac{\tau_{\text{avg}} \frac{\beta L}{2} \left[ 1 - \frac{E_2 h_2}{2E_1 h_1} \right]}{\cosh\left(\frac{\beta L}{2}\right) \left[ 1 + \frac{E_2 h_2}{2E_1 h_1} \right]} + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\beta \Delta T}{\left[ \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right] \cosh\left(\frac{\beta L}{2}\right)} \quad (7.27)$$

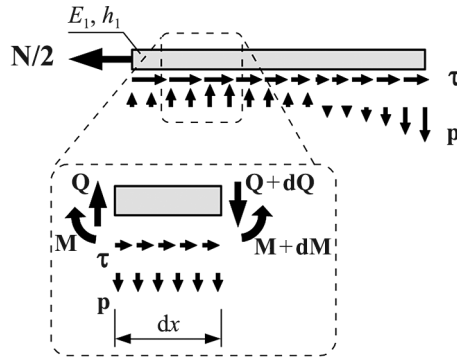
Stałe całkowania, określone wzorami (7.19) i (7.27), pozwalają na wyznaczenie rozkładu naprężenia stycznego zgodnie z wzorem (7.16). Znajomość tego rozkładu pozwala z kolei na wyznaczenie rozkładu **siły osiowej w każdym z elementów łączonych**:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{N}{2} - \int_{-\frac{L}{2}}^x \tau(x) dx = \\ &= \frac{N}{2} - \left[ \left( \frac{C_1}{\beta} \sinh(\beta x) + \frac{C_2}{\beta} \cosh(\beta x) \right) - \left( \frac{C_1}{\beta} \sinh\left(-\frac{\beta L}{2}\right) + \frac{C_2}{\beta} \cosh\left(-\frac{\beta L}{2}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} N_2(x) &= 2 \int_{\frac{L}{2}}^x \tau(x) dx = \\ &= 2 \left[ \left( \frac{C_1}{\beta} \sinh(\beta x) + \frac{C_2}{\beta} \cosh(\beta x) \right) - \left( \frac{C_1}{\beta} \sinh\left(-\frac{\beta L}{2}\right) + \frac{C_2}{\beta} \cosh\left(-\frac{\beta L}{2}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (7.29)$$

W powyższej analizie uwzględniono jedynie naprężenia normalne w elementach łączonych oraz naprężenie styczne. Wielkości te są odpowiedzialne za dwa z trzech podstawowych mechanizmów zniszczenia złącza – są to odpowiednio: zerwanie elementu wskutek rozciągania oraz zniszczenie skleiny wskutek ścinania. Trzecim mechanizmem, który dla określonych rozwiązań materiałowych niejednokrotnie okazuje się być kluczowy przy określaniu nośności złącza, jest zerwanie przyczepności między skleiną a elementami łączonymi, za co odpowiedzialne są **naprężenia odrywające na powierzchni pomiędzy skleiną a elementami łączonymi**. W celu

oszacowania wielkości tych naprężeń Hart-Smith zaproponował model analityczny przedstawiony na rysunku 30. Rozważa się równowagę sił poprzecznych przyłożonych do zewnętrznego elementu łączonego. Należy zauważyć, że propozycja ta jest w sprzeczności z założeniami analizowanego uprzednio pierwotnego modelu, w którym przyjęto, że elementy łączone podlegają wyłącznie deformacji osiowej (obecność wyłącznie siły osiowej) – w rozszerzeniu tego modelu, uwzględniającym obecność naprężeń odrywających, zakłada się obecność siły poprzecznej i momentu zginającego. **Element łączony jest opisywany za pomocą modelu belkowego.** Wyniki poniższej analizy można superponować na wyniki uzyskane uprzednio, mając jednak w świadomości fakt niespójności założeń obydwu podejść.



Rys. 30. Równowaga sił poprzecznych przyłożonych do elementu zewnętrznego

Zapisanie równań równowagi sił poprzecznych oraz momentów prostokątnych do płaszczyzny zagadnienia względem środka elementu daje nam następujący układ:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dx} + p = 0 \\ \frac{dM}{dx} - Q + \tau \frac{h_1}{2} = 0 \end{cases} \quad (7.30)$$

Związek konstytutywny dla elementu zewnętrznego, traktowanego obecnie jako belka Bernoulliego–Eulera, jest następujący:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (7.31)$$

gdzie:  $EI$  oznacza sztywność giętną elementu zewnętrznego, zaś związek konstytutywny dla sklejiny rozciąganej poprzecznie Hart-Smith zaproponował w następującej postaci:

$$p = E_{a,\text{eff}} \varepsilon_{a\perp} = -E_{a,\text{eff}} \frac{w}{t} \quad (7.32)$$

gdzie:  $E_{a,\text{eff}}$  jest efektywnym modułem Younga materiału skleiny przy rozciąganiu, uwzględniającym ograniczenia w deformacji poprzecznej do osi rozciągania zarówno w płaszczyźnie zagadnienia, jak i w kierunku do niej prostopadłym. Znak „-” w równaniu (7.32) wynika z konwencji znakowania ugięcia w przyjętym układzie współrzędnych (rys. 28). Podstawiając równanie równowagi sił poprzecznych do równania równowagi momentów oraz wykorzystując wprowadzone związki konstytutywne, można napisać:

$$-EI \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} w + \frac{d\tau}{dx} \frac{h_1}{2} = 0 \quad (7.33)$$

W powyższym równaniu przyjmuje się, że gradient naprężenia stycznego jest zerowy. Uzasadnia się to faktem, że ekstremalne naprężenia odrywające pojawiają się w obszarach, w których (przy odpowiednio dużym obciążeniu) dochodzi do uplastycznienia w skleinie wskutek ścinania – w przypadku materiałów niewykazujących wzmocnienia w takich obszarach rozkład naprężenia stycznego jest stały, co pozwala zapisać równanie rządzące dla zagadnienia wyznaczania naprężeń odrywających w następującej postaci:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\vartheta^4 w = 0, \quad \text{gdzie: } \vartheta = \sqrt[4]{\frac{E_{a,\text{eff}}}{4EI}} > 0 \quad (7.34)$$

Pierwiastki równania charakterystycznego są równe  $\pm\vartheta(1 \pm i)$ . Całka ogólna powyższego równania różniczkowego może być zapisana w następującej postaci:

$$w(x) = D_1 \cosh(\vartheta x) \cos(\vartheta x) + D_2 \cosh(\vartheta x) \sin(\vartheta x) + D_3 \sinh(\vartheta x) \cos(\vartheta x) + D_4 \sinh(\vartheta x) \sin(\vartheta x) \quad (7.35)$$

Warunki brzegowe, pozwalające wyznaczyć stałe całkowania, po wykorzystaniu równań równowagi oraz związków konstytutywnych można zapisać w następującej postaci:

- **równowaga sił poprzecznych:**

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p dx = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} w dx = 0 \Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} w dx = 0 \quad (7.36)$$

- statyczne warunki brzegowe:

$$M\Big|_{\pm\frac{L}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2}\Big|_{\pm\frac{L}{2}} = 0 \quad (7.37)$$

$$Q\Big|_{\frac{L}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{d^3 w}{dx^3}\Big|_{\frac{L}{2}} = \tau \frac{h_1}{2EI}\Big|_{\frac{L}{2}} \quad (7.38)$$

Tak zapisane statyczne warunki brzegowe oznaczają, że elementy łączone na końcu obciążonym są w ogólności obciążone siłą osiową (pierwotna analiza) oraz siłą poprzeczną, nie są jednak obciążone momentem zginającym. Jeśli przyjmiemy  $D_1 = D_4 = 0$ , wtedy warunek (7.36) będzie spełniony tożsamościowo, natomiast warunek (7.37) zapisany dla obydwu końców da nam dwa równoważne sobie równania, które spełnione będą wtedy, gdy:

$$D_3 \cosh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) = D_2 \sinh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \quad (7.39)$$

W przypadku złączy o dostatecznie dużej długości zakładu można przyjąć, że:

$$\cosh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \approx \sinh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \approx \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \quad (7.40)$$

co po uwzględnieniu w (7.39) daje nam warunek:

$$D_3 \sin\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) = D_2 \cos\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \quad (7.41)$$

Z kolei warunek (7.38) po uwzględnieniu, że  $D_1 = D_4 = 0$ , przyjmuje postać:

$$2\vartheta^3 \left[ (D_2 - D_3) \cos\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \cosh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) - (D_2 + D_3) \sin\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \sinh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \right] = \tau \frac{h_1}{2EI} \quad (7.42)$$

Po wykorzystaniu uproszczenia (7.40) warunek ten można zapisać w postaci:

$$(D_2 - D_3) \cos\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) - (D_2 + D_3) \sin\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) = \tau e^{-\frac{\vartheta L}{2}} \frac{h_1}{2\vartheta^3 EI} \quad (7.43)$$

Równania (7.41) i (7.43) stanowią układ, którego rozwiązaniem jest:

$$D_2 = -\sin\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) = \tau e^{-\frac{\vartheta L}{2}} \frac{h_1}{2\vartheta^3 EI}, \quad D_3 = -\cos\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) = \tau e^{-\frac{\vartheta L}{2}} \frac{h_1}{2\vartheta^3 EI} \quad (7.44)$$

Znajomość stałych całkowania pozwala nam wyznaczyć – ponownie przy wykorzystaniu (7.40) – maksymalne rozciągnięcie skleiny na końcu złącza (równe wygięciu elementu):

$$w_{\max} = w\Big|_{\frac{L}{2}} = -\tau \frac{h_1}{4\vartheta^3 EI} \quad (7.45)$$

ta zaś wartość, po wykorzystaniu związku konstytutywnego (7.32), określa wartość maksymalnego naprężenia odrywającego:

$$p_{\max} = -E_{a,\text{eff}} \frac{w_{\max}}{t} = \frac{\tau}{4\vartheta^3} \frac{h_1}{t} \frac{E_{a,\text{eff}}}{EI} = \tau^4 \sqrt{\frac{E_{a,\text{eff}} h_1^4}{4EI t}} \quad (7.46)$$

Jeśli sztywność giętą elementu zewnętrznego obliczymy jako sztywność giętą płyty, co odpowiada założeniu, że elementy łączone znajdują się w płaskim stanie odkształcenia, wtedy sztywność giętą może być zapisana następująco:

$$EI = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7.47)$$

a wzór (7.45) przyjmie postać:

$$p_{\max} = \tau^4 \sqrt{\frac{3E_{a,\text{eff}}(1-\nu^2)h_1}{E_1 t}} \quad (7.48)$$

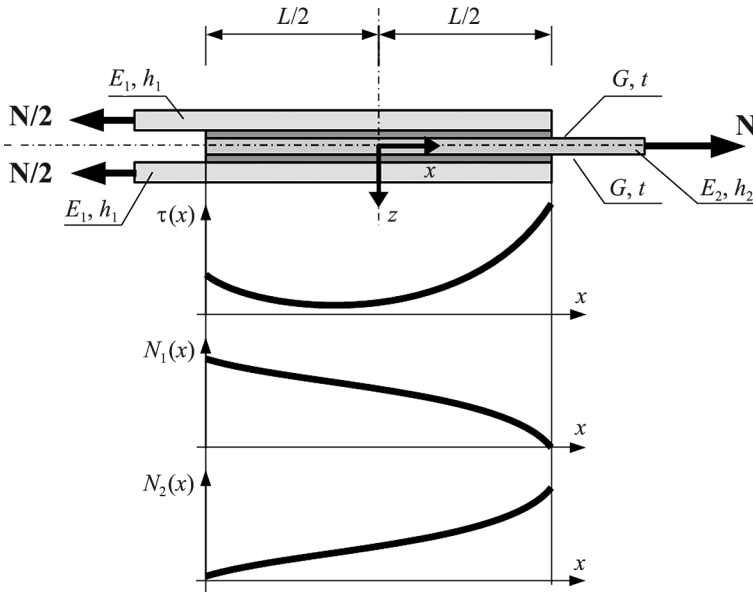
Praktycznym wnioskiem, płynącym z uzyskanego rezultatu, jest spostrzeżenie, że dla złączy, w których łączone są elementy smukłe, naprężenie odrywające nie stanowi istotnego problemu – niewielka sztywność elementu skutkuje tym, że jego deformacja poprzeczna nie powoduje wystąpienia istotnych naprężeń odrywających.

Podsumowaniem powyższej analizy niech będą rysunki 31 i 32, ilustrujące w poglądowy sposób rozkład naprężenia stycznego oraz sił osiowych na długości złącza, a także rozkład naprężeń w przekroju poprzecznym złącza.

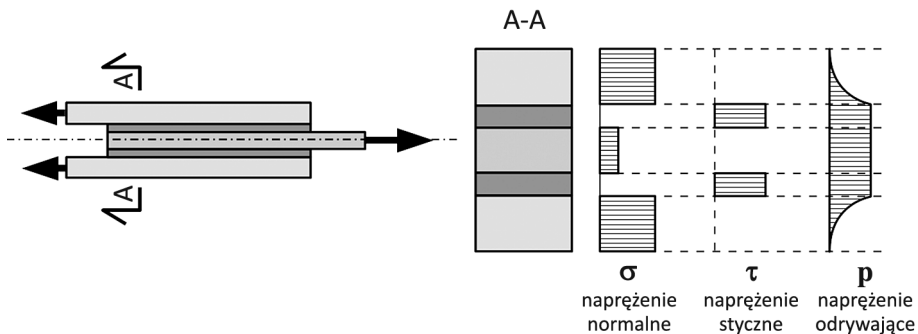
Warto podkreślić kilka faktów:

- W rozważanym modelu **pomija się obecność naprężenia stycznego w elementach łączonych**. Prowadzi to nieuchronnie do **braku równowagi sił wewnętrznych na płaszczyźnie styku elementu i skleiny**. Obecność naprężenia stycznego, liniowo zmiennego na wysokości przekroju elementu łą-

czonego i gwarantującego spełnienie statycznych warunków brzegowych na powierzchni zewnętrznej elementu, uwzględniono w pracy (Tsai i in. 1998).



Rys. 31. Rozkład naprężenia stycznego oraz sił osiowych na długości złącza



Rys. 32. Rozkład naprężeń w przekroju poprzecznym złącza

- Podobnie **pomija się obecność naprężenia normalnego w skleinie**. Zakłada się zatem, że wskutek rozciągania elementów łączonych sama skleina nie będzie podlegać rozciąganiu, a jedynie ścinaniu. Takie założenie jest uzasadnione przede wszystkim w przypadku sklein cienkich o znacznie mniejszej sztywności poprzecznej niż sztywność podłużna elementów łączonych. Wydłużenie sklein uwzględnia się np. w pracy (Delale i in. 1980).
- **Rozkład naprężenia stycznego charakteryzuje się koncentracjami zlokalizowanymi na końcach złącza** oraz względnie niewielkim wy tężeniem



materiału skleiny w obszarze środkowym. Maksymalne naprężenia styczne na końcach złącza są równe:

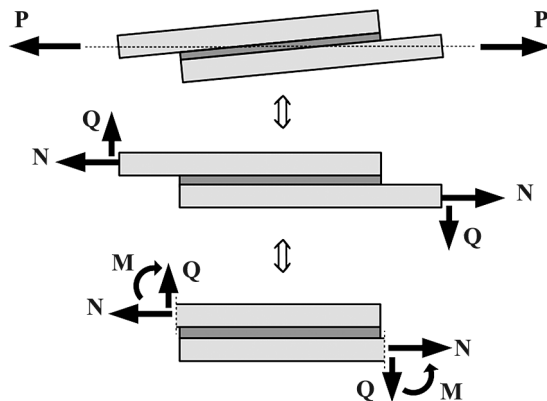
$$\tau\Big|_{\frac{L}{2}} = \tau_{\text{avg}} \frac{\beta L}{\sinh(\beta L)} \left[ 1 + \frac{2 \sinh^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{1 + \frac{2E_1 h_1}{E_2 h_2}} \right] + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T \frac{\beta \operatorname{tgh}\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2}} \quad (7.49)$$

$$\tau\Big|_{\frac{L}{2}} = \tau_{\text{avg}} \frac{\beta L}{\sinh(\beta L)} \left[ 1 + \frac{2 \sinh^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{1 + \frac{E_2 h_2}{2E_1 h_1}} \right] - (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T \frac{\beta \operatorname{tgh}\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2}} \quad (7.50)$$

- Przyrost wielkości naprężenia na końcu złącza względem średniego naprężenia stycznego jest tym większy, im większa jest sztywność poprzeczna skleiny względem sztywności podłużnej elementów łączonych.
- **W przypadku łączenia elementów o różnej sztywności ( $2E_1 h_1 \neq E_2 h_2$ ) rozkład naprężenia stycznego jest niesymetryczny**, przy czym mniejszą wartość naprężenia stycznego obserwuje się po tej stronie, po której element bardziej podatny ma koniec swobodny, a element sztywniejszy ma koniec obciążony. Wynika to z faktu, że zarówno element podatny obciążony niewielką siłą osiową (blisko końca swobodnego), jak i element sztywny podlegają mniejszym odkształceniom, co pociąga za sobą mniejszą deformację skleiny i mniejszą wielkość naprężenia stycznego.

## 7.2. Belkowy model złącza jednozakładkowego

Jak już zostało wspomniane w poprzednim podrozdziale, model prętowy formalnie nie ma możliwości spełnienia warunków globalnej równowagi sił zewnętrznych w przypadku złącza jednozakładkowego. Mimośród działania przeciwnych sił osiowych w elementach takiego złącza domaga się uwzględnienia efektów zginania elementów złącza (rys. 33).



Rys. 33. Równowaga brzegowego obciążenia zewnętrznego w złączu jednozakładkowym

### 7.2.1. Sformułowanie naprężeniowe – złącze symetryczne

Pierwszym modelem analitycznym, podejmującym próbę właściwego opisu złączy jednozakładkowych, był model zaproponowany w pracy (Goland i Reissner 1944). Podstawowe założenia tego modelu są następujące:

- **elementy łączone podlegają rozciąganiu i zginaniu**, zgodnie z modelem **belki Bernoulliego–Eulera (model belkowy)**,
- **skleina** podlega wyłącznie **prostemu ścinaniu**,
- materiały mają **liniową charakterystykę sprężystą**,
- **odkształcenia i przemieszczenia są małe**.

Jest to zatem lokalny model **belkowy**. Propozycja ta została następnie rozwinięta w raportach Hahna, przygotowywanych dla Douglas Aircraft Co., przede wszystkim jednak w raportach NASA (Hart-Smith 1973a; Cooper i Sawyer 1979). Pierwotna propozycja M. Golnada i E. Reissnera dotyczyła łączenia elementów identycznych (złącze symetryczne). Uwzględnienie asymetrii charakterystyk mechanicznych elementów łączonych znacząco komplikuje oryginalne podejście analityczne i w raporcie Leonarda J. Hart-Smitha przytoczone jest jedynie przybliżone rozwiązanie odpowiedniego problemu. Kluczową modyfikacją, wprowadzoną przez Hart-Smitha względem oryginalnej propozycji Golanda–Reissnera, było poprawne wyznaczenie momentu zginającego elementy łączone w przekroju końcowym, na granicy obszaru klejenia. W pierwotnym rozwiązaniu nie był spełniony warunek zerowania się momentu zginającego na swobodnym końcu jednego z elementów, co prowadziło do istotnego niedoszacowania wielkości momentu w drugim – obciążonym – elemencie. Kolejnym uogólnieniem wprowadzonym przez Hart-Smitha było uwzględnienie idealnie sprężystej – idealnie plastycznej charakterystyki materiału skleiny.

Na rysunku 34 zilustrowano geometrię układu, przedstawiono stosowane układy współrzędnych oraz wyjaśniono stosowane oznaczenia dotyczące współrzędnych oraz sił wewnętrznych.

Obciążenie zewnętrzne możemy rozłożyć na składową podłużną i poprzeczną:

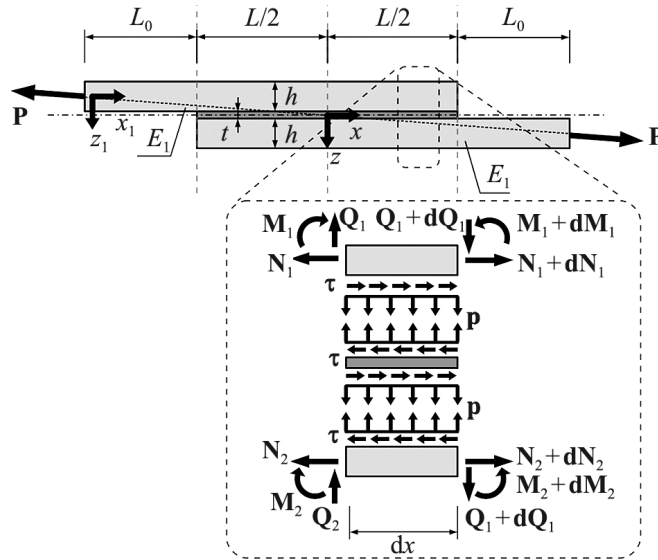
$$N = P \cos \varphi, \quad Q = P \sin \varphi$$

gdzie:

$$\varphi = \arctg \frac{h+t}{2L_0+L}$$

W rozważanym modelu rozważane są dwa obszary:

- obszar 1 – poza strefą klejenia:  $x_1 \in (0; L_0)$ ,
- obszar 2 – strefa klejenia:  $x \in \left(-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right)$ .



Rys. 34. Model belkowy złącza jednozakładkowego – równowaga sił wewnętrznych

**Uwzględnienie deformacji elementów łączonych poza strefą klejenia jest konieczne**, ponieważ wpływa w bezpośredni sposób na pracę złącza i **umożliwia wyznaczenie sił przekrojowych na brzegu obszaru klejenia**. Należy zauważyć, że zagadnienie to jest bardzo często pomijane w alternatywnych modelach, których autorzy przyjmują, że siły te są z góry znane.

W każdym z powyższych obszarów przyjmujemy osobny układ współrzędnych. Z uwagi na cechy symetrii złącza nie ma konieczności wyznaczania deformacji dolnego elementu poza strefą klejenia – przemieszczenia będą antysymetryczne względem przemieszczeń elementu górnego.

Przemieszczenia podłużne górnego elementu w obszarze 1 oznaczymy przez  $u_0$ , przemieszczenia poprzeczne zaś (ugięcia) przez  $w_0$ . Symbolami  $u_1$ ,  $w_1$  oraz  $u_2$ ,  $w_2$  oznaczymy przemieszczenia podłużne i ugięcia, odpowiednio w górnym i dolnym elemencie łączonym.

Zapiszmy **równania równowagi**:

- równowaga sił osiowych:

$$\frac{dN_1}{dx} + \tau = 0 \quad (7.51)$$

$$\frac{dN_2}{dx} - \tau = 0 \quad (7.52)$$

- równowaga sił poprzecznych:

$$\frac{dQ_1}{dx} + p = 0 \quad (7.53)$$

$$\frac{dQ_2}{dx} - p = 0 \quad (7.54)$$

- równowaga momentów:

$$\frac{dM_1}{dx} - Q_1 + \tau \frac{h+t}{2} = 0 \quad (7.55)$$

$$\frac{dM_2}{dx} - Q_2 + \tau \frac{h+t}{2} = 0 \quad (7.56)$$

Występujące w powyższych równaniach miary sił wewnętrznych to siły osiowe i siły poprzeczne oraz momenty zginające, odniesione do szerokości przekroju poprzecznego elementów. Ich wymiary fizyczne to odpowiednio N/m dla sił oraz Nm/m dla momentów. W równaniach równowagi momentów przyjęto, że prosta działania sumy naprężeń stycznych w skleinie leży w geometrycznym środku skleiny.

Zapiszmy teraz **związki konstytutywne** dla elementów złącza. Sztywność podłużną elementów łączonych oznaczmy przez  $A$ , przy czym wyrażać się ona będzie w odmienny sposób, zależnie od założonego stanu pracy elementu:

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{N_i}{A}, \quad i=1, 2, \quad A = \begin{cases} Eh & \Leftrightarrow \text{PSN} \\ \frac{Eh}{(1-\nu^2)} & \Leftrightarrow \text{PSO} \end{cases} \quad (7.57)$$

Powyższy związek obowiązuje jedynie dla przemieszczeń punktów osi obojętnej (wyznaczonej dla stanu prostego zginania) lub przy obciążeniu wyłącznie siłami osiowymi – w przypadku złożenia stanu rozciągania/ściskania ze stanem zginania odkształcenia liniowe (pochodne przemieszczeń) uwzględniać muszą również liniowo zmienną składową rozkładu odkształcenia na wysokości przekroju, zgodnie z hipotezą Bernoulliego. **Elementy łączone traktujemy bądź jak płyty zginane walcowo** (płaski stan odkształcenia), bądź jak **belki zginane** (płaski stan naprężenia). Przy tych założeniach mamy:

$$\frac{d^2 w_i}{dx^2} = -\frac{M_i}{D}, \quad i=1, 2, \quad D = \begin{cases} k_b \frac{Eh^3}{12} & \Leftrightarrow \text{PSN} \\ k_b \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \Leftrightarrow \text{PSO} \end{cases} \quad (7.58)$$

Obecność współczynnika  $k_b$  tłumaczy się chęcią uwzględnienia potencjalnej niezależności sztywności giętej i sztywności podłużnej, które tylko w przypadku materiałów izotropowych można łatwo powiązać ze sobą za pomocą parametrów określających geometrię przekroju i własności mechaniczne materiału. Rozważamy zatem sytuację bardziej ogólną, która dotyczyć może w szczególności złączy wykorzystujących materiały anizotropowe (np. kompozyty). Dla zadanych sztywności  $A$  oraz  $D$  współczynnik  $k_b$  może być zdefiniowany następująco:

$$k_b = \frac{12D}{h^2 A} \quad (7.59)$$

Związki konstytutywne, analogiczne do (7.58), obowiązują oczywiście również w obszarze 1 dla przemieszczeń  $u_0, w_0$ , będących funkcjami zmiennej  $x_1$ .

**Liniove związki konstytutywne dla materiału skleiny** określamy zarówno dla stanu prostego ścinania skleiny, jak i dla stanu rozciągania skleiny w kierunku prostopadłym do płaszczyzny klejenia wskutek oddziaływania naprężeń odrywających:

- ścinanie skleiny:

$$\tau = G\gamma = \frac{G}{t}(u_{2,T} - u_{1,B}) \quad (7.60)$$

- rozciąganie poprzeczne skleiny:

$$p = \frac{E_{a,\text{eff}}}{t}(w_2 - w_1) \quad (7.61)$$

gdzie:  $u_{1,B}$  i  $u_{2,T}$  oznaczają przemieszczenia podłużne, odpowiednio dolnej powierzchni górnego elementu i górnej powierzchni dolnego elementu; a  $E_{a,\text{eff}}$  oznacza efektywny moduł Younga, uwzględniający ograniczenia swobody deformacji skleiny w kierunku prostopadłym do kierunku działania naprężeń odrywających, podobnie jak to zostało omówione w poprzednim podrozdziale.

**Odkształcenie liniowe** w elementach zginanych, spowodowane obciążeniem osiowym i zginaniem, wyraża się w układzie współrzędnych  $(x, z)$  wzorem:

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{N_1}{A} + \frac{M_1}{D} \left( z + \frac{h+t}{2} \right) \quad (7.62)$$

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{N_2}{A} - \frac{M_2}{D} \left( z - \frac{h+t}{2} \right) \quad (7.63)$$

Wyznamy wielkości odkształceń elementów łączonych w płaszczyźnie styku ze skleiną:

$$\frac{du_{1,B}}{dx} = \frac{du_1}{dx} \Big|_{z=-\frac{t}{2}} = \frac{N_1}{A} + \frac{M_1}{D} \frac{h}{2} \quad (7.64)$$

$$\frac{du_{2,T}}{dx} = \frac{du_2}{dx} \Big|_{z=\frac{t}{2}} = \frac{N_2}{A} - \frac{M_2}{D} \frac{h}{2} \quad (7.65)$$

W pracach poświęconych analizie omawianego modelu zaproponowano technikę przybliżonego rozwiązania uzyskanego układu równań różniczkowych, polegającą na rozprzęgnięciu równań układu, wykorzystując fakt, że dla małych przemieszczeń i odkształceń ich różnica jest bardzo mała i może być pominięta. Aby osiągnąć ten cel, funkcję  $w_1$  wyrazić należy w nieco odmienny sposób:

$$w_1 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2) + \frac{1}{2}(w_1 - w_2) \quad (7.66)$$

Zgodnie ze związkami konstytutywnymi (7.58) możemy napisać:

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{d^2 w_2}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(w_1 + w_2) = -\frac{M_1 + M_2}{D} \quad (7.67)$$

Po zróżniczkowaniu powyższej zależności i wykorzystaniu w uzyskanym wyniku równań równowagi (7.55) i (7.56) otrzymamy:

$$\frac{d^3}{dx^3}(w_1 + w_2) = -\frac{1}{D}[Q_1 + Q_2 - \tau(h+t)] \quad (7.68)$$

Ponownie wykonując różniczkowanie i wykorzystując równania równowagi (7.53) i (7.54), uzyskamy następujący rezultat:

$$\frac{d^4}{dx^4}(w_1 + w_2) = \frac{h+t}{D} \frac{d\tau}{dx} \quad (7.69)$$

Postępując w analogiczny sposób, możemy pokazać, że:

$$\frac{d^4}{dx^4}(w_1 - w_2) = \frac{2}{D} p \quad (7.70)$$

Tak jak wspomniano, dla **małych przemieszczeń** ( $w_1, w_2 \ll 1$ ) możemy przyjąć, że ich różnica jest pomijalnie mała,  $(w_1 - w_2) \approx 0$ , wtedy:

$$w_1 \approx \frac{1}{2}(w_1 + w_2) \quad (7.71)$$

Podobnie dla **małych odkształceń** ( $dw_1/dx, dw_2/dx \ll 1$ ) możemy przyjąć, że ich różnica jest pomijalnie mała, wtedy:

$$\frac{dw_1}{dx} \approx \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (w_1 + w_2) \quad (7.72)$$

Nie możemy jednak przyjąć podobnego założenia odnośnie do wyższych pochodnych. W równaniu (7.69) poza poszukiwanymi przemieszczeniami poprzecznymi występuje również naprężenie styczne. Wykorzystajmy zatem związki konstytutywne (7.60) i zróżniczkujmy je jednokrotnie:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{G}{t} \left( \frac{du_{2,T}}{dx} - \frac{du_{1,B}}{dx} \right) \quad (7.73)$$

a następnie podstawmy w uzyskanym rezultacie związki (7.64) i (7.65):

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{G}{t} \left[ \frac{N_2 - N_1}{A} - \frac{M_2 + M_1}{D} \frac{h}{2} \right] \quad (7.74)$$

Po kolejnym różniczkowaniu i wykorzystaniu równań równowagi (7.51) i (7.52) oraz (7.55) i (7.56) otrzymamy:

$$\frac{d^2\tau}{dx^2} = \frac{G}{t} \left[ \tau \left( \frac{2}{A} + \frac{(h+t)h}{2D} \right) - \frac{Q_1 + Q_2}{D} \frac{h}{2} \right] \quad (7.75)$$

Kolejne różniczkowanie, po wykorzystaniu równań równowagi (7.53) i (7.54), daje nam **równanie rządzące rozkładem naprężenia stycznego** w skleinie:

$$\frac{d^3\tau}{dx^3} - \beta^2 \frac{d\tau}{dx} = 0, \quad \text{gdzie: } \beta = \sqrt{\frac{G}{t} \left( \frac{2}{A} + \frac{(h+t)h}{2D} \right)} > 0 \quad (7.76)$$

Współczynnik  $\beta$  można również wyrazić inaczej, wykorzystując związki (7.59):

$$\beta = \begin{cases} \sqrt{\frac{2G}{Eht} \left( 1 + \frac{3}{k_b} \left( 1 + \frac{t}{h} \right) \right)} & \Leftrightarrow \text{PSN} \\ \sqrt{\frac{2G(1-\nu^2)}{Eht} \left( 1 + \frac{3}{k_b} \left( 1 + \frac{t}{h} \right) \right)} & \Leftrightarrow \text{PSO} \end{cases} \quad (7.77)$$

W zależności od opracowania współczynnik  $\beta$  wyraża się w rozmaity sposób przez parametry zadania. W raporcie (Cooper i Sawyer 1979) zakłada się konsekwentnie, że elementy pracują w płaskim stanie odkształcenia i w rezultacie w związkach

konstrytuwnych (7.57) i (7.58) uwzględnia się czynnik  $(1 - \nu_2)$ . Z kolei w raporcie (Hart-Smith 1973a) sztywność podłużną wyraża się zgodnie z założeniem PSN, podczas gdy sztywność giętną przy założeniu PSO. Ponadto, bez słowa komentarza, przyjmuje się w obliczeniach, że:

$$\frac{h+t}{h} \approx 1 \Leftrightarrow \frac{t}{h} \approx 0$$

Uproszczenie takie może być uzasadnione powszechną przed dekadami praktyką wykonywania sklein o możliwie najmniejszej grubości. Z drugiej strony w zaproponowanym oszacowaniu momentu zginającego na początku strefy klejenia Hart-Smith nie stosuje powyższego przybliżenia wobec identycznego członu i to pomimo faktu, że oszacowanie to również wynika z poczynienia kolejnych upraszczających przybliżeń. Wobec braku komentarza ze strony autora, trudno stwierdzić, czy było to działanie celowe, brak konsekwencji czy pomyłka. Wyrażenie  $(h + t)$  pojawia się w rozwiązaniu z uwagi na przyjęcie w równaniach równowagi (7.55) i (7.56), że moment od naprężenia stycznego w skleinie wyznaczany jest przy redukcji naprężeń stycznych w płaszczyźnie środkowej skleiny. Jeśli jednak zredukować układ naprężeń na płaszczyźnie interfejsu, wtedy ramię działania wypadkowej byłoby równe rzeczywiście  $h$ . Tak przyjęto np. w pracach (Renton i Vinson 1977; Ojalvo i Eidinoff 1978; Tsai i in. 1998).

Rozwiązanie ogólne równania (7.76) ma postać:

$$\tau(x) = C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) + C_3 \quad (7.78)$$

**Z uwagi na antysymetrię zagadnienia** ścinania symetrycznego złącza jednozakładkowego **rozkład naprężenia stycznego w skleinie musi być symetryczny**, co oznacza, że stała całkowania  $C_2 = 0$ . Z drugiej strony suma naprężeń stycznych w skleinie musi równoważyć składową poziomą obciążenia zewnętrznego:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \tau dx = N = \tau_{\text{avg}} L, \quad \text{gdzie: } \tau_{\text{avg}} = \frac{N}{L} \quad (7.79)$$

co daje nam:

$$\frac{2C_1}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) + C_3 L = \tau_{\text{avg}} L \quad (7.80)$$

Podstawmy teraz ogólną postać rozwiązania (7.78) do równania (7.69):

$$\frac{d^4}{dx^4} (w_1 + w_2) = \frac{h+t}{D} C_1 \beta \sinh(\beta x) \quad (7.81)$$



Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego będzie sumą całki ogólnej równania jednorodnego oraz dowolnej całki szczególnej równania niejednorodnego. Całka ogólna równania jednorodnego jest równa:

$$(w_1 + w_2)_{og} = C_4 x^3 + C_5 x^2 + C_6 x + C_7 \quad (7.82)$$

Całkę szczególną równania niejednorodnego przewidujemy w postaci funkcji:

$$(w_1 + w_2)_{sz} = C_8 \sinh(\beta x) \quad (7.83)$$

Po podstawieniu do (7.81) wyznaczamy stałą całkowania  $C_8$ :

$$C_8 = \frac{h+t}{D} \frac{C_1}{\beta^3}$$

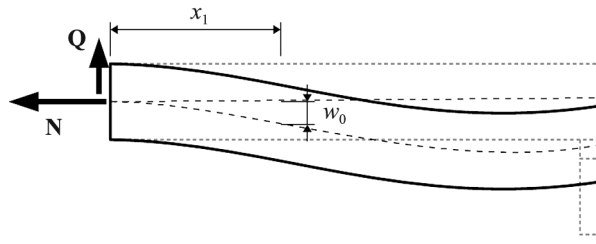
Rozwiązanie ogólne równania (7.81) ma zatem postać:

$$w_1 + w_2 = \frac{h+t}{D} \frac{C_1}{\beta^3} \sinh(\beta x) + C_4 x^3 + C_5 x^2 + C_6 x + C_7 \quad (7.84)$$

Ponownie, z uwagi na antysymetrię zagadnienia musimy zapewnić antysymetryczny rozkład sumy ugięć (ponieważ każde ze składowych ugięć również musi być antysymetryczne), co możliwe jest jedynie wtedy, gdy  $C_5 = C_7 = 0$ .

Pozostałe stałe całkowania wyznaczymy ze stosownego układu warunków brzegowych, przy czym – tak jak zostało to zasygnalizowane na początku tego podrozdziału – do zapisania tych warunków w sposób poprawny konieczne jest uwzględnienie deformacji elementów złącza poza obszarem klejenia. Element łączony traktowany jest jak belka (płyta) zginana. W równaniu belki Bernoulliego–Eulera (równanie drugiego rzędu, wykorzystujące rozkład momentu zginającego) **uwzględnimy efekty drugiego rzędu** typu  $P - \delta$  (rys. 35). Równanie to można zapisać w następującej postaci:

$$\frac{d^2 w_0}{dx_1^2} = -\frac{M_0}{D}, \quad \text{gdzie: } M_0 = [Qx_1 - Nw_0(x_1)] \quad (7.85)$$



Rys. 35. Deformacja elementu łączonego poza obszarem klejenia

lub inaczej:

$$\frac{d^2 w_0}{dx_1^2} - k_N^2 w_0 = -\frac{Q}{D} x_1, \quad \text{gdzie: } k_N = \sqrt{\frac{N}{D}} > 0 \quad (7.86)$$

Warto zwrócić uwagę, że w powyższej analizie nie uwzględnia się wpływu przemieszczenia sił węzłowych, tzw. efektu  $P - \Delta$ . Jest to uzasadnione podejście, zważywszy na fakt, że dla zagadnienia nie są określone żadne specyficzne warunki brzegowe typu kinematycznego, przez co pole przemieszczeń wyznaczone może być z dokładnością do ruchu bryły sztywnej. Translację i obrót układu traktowanego jak bryła sztywna można dobrać w taki sposób, aby przemieszczenie węzła obciążonego było zerowe.

Rozwiązanie ogólne równania (7.86) wyznaczamy jako sumę całki ogólnej równania jednorodnego (będącą kombinacją funkcji hiperbolicznych) oraz dowolnej całki szczególnej równania niejednorodnego (przewidujemy ją w postaci funkcji wielomianowej stopnia pierwszego). Po odpowiednim doborze współczynników całki szczególnej otrzymujemy następujące rozwiązanie ogólne:

$$w_0(x_1) = D_1 \cosh(k_N x_1) + D_2 \sinh(k_N x_1) + \text{tg } \varphi x_1 \quad (7.87)$$

przy czym skorzystaliśmy tu z następujących zależności:

$$\frac{Q}{k_N^2 D} = \frac{Q}{N} = \text{tg } \varphi = \frac{h + t}{2L_0 + L}$$

Zgodnie z założeniami dotyczącymi obciążenia zewnętrznego, na obciążonym końcu elementu poza obszarem klejenia ( $x_1 = 0$ ) moment zginający musi być zerowy, co pociąga za sobą:

$$M_0(0) = -D \left. \frac{d^2 w_0}{dx_1^2} \right|_{x_1=0} = -D k_N^2 D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = 0 \quad (7.88)$$

Obecnie możemy zapisać już komplet warunków brzegowych, koniecznych do wyznaczenia stałych całkowania  $C_1, C_3, C_4, C_6, D_2$ :

- **ciągłość przemieszczeń na granicy obszarów 1 i 2:**

$$w_0(x_1 = L_0) = w_1 \left( x = -\frac{L}{2} \right) \quad (7.89)$$

- **ciągłość kąta obrotu na granicy obszarów 1 i 2:**

$$\left. \frac{dw_0}{dx_1} \right|_{x_1=L_0} = \left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=-\frac{L}{2}} \quad (7.90)$$

- równowaga sił wewnętrznych na granicy obszarów 1 i 2:

$$N_1 \left( x = -\frac{L}{2} \right) = N_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{N_{\text{end}}}{A} \quad (7.91)$$

$$\frac{d^2 w_0}{dx_1^2} \Big|_{x_1=L_0} = \frac{d^2 w_1}{dx^2} \Big|_{x=-\frac{L}{2}} = -\frac{d^2 w_2}{dx^2} \Big|_{x=\frac{L}{2}} = -\frac{M_{\text{end}}}{D} \quad (7.92)$$

$$\frac{d^3 w_0}{dx_1^3} \Big|_{x_1=L_0} = \frac{d^3 w_1}{dx^3} \Big|_{x=-\frac{L}{2}} = \frac{d^3 w_2}{dx^3} \Big|_{x=\frac{L}{2}} = -\frac{Q_{\text{end}}}{D} \quad (7.93)$$

- statyczne warunki brzegowe na swobodnych końcach elementów łączonych:

$$N_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = N_2 \left( x = -\frac{L}{2} \right) = 0 \quad (7.94)$$

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} \Big|_{x=\frac{L}{2}} = 0, \quad \frac{d^2 w_2}{dx^2} \Big|_{x=-\frac{L}{2}} = 0 \quad (7.95)$$

$$\frac{d^3 w_1}{dx^3} \Big|_{x=\frac{L}{2}} = 0, \quad \frac{d^3 w_2}{dx^3} \Big|_{x=-\frac{L}{2}} = 0 \quad (7.96)$$

Do tego dochodzi jeszcze warunek (7.80). W związkach (7.91) i (7.93) zachodzi  $N_{\text{end}} = N$  oraz  $Q_{\text{end}} = Q$ , podczas gdy wartość  $M_{\text{end}}$  nie jest z góry znana i musi być wyznaczona.

Należy ponadto pamiętać, że funkcję  $w_1$  i jej pochodną przybliżać będziemy zgodnie z wzorami (7.71) i (7.72), natomiast w przypadku warunków brzegowych na drugą i trzecią pochodną konieczne jest wyrażenie ich zgodnie z (7.66). Oznaczmy teraz wielkości sił przekrojowych na granicy obszarów 1 i 2 następująco:

$$\frac{d^2 w_0}{dx_1^2} \Big|_{x_1=L_0} = D_2 k_N^2 \sinh(k_N L_0) = -\frac{M_{\text{end}}}{D} \quad (7.97)$$

$$\frac{d^3 w_0}{dx_1^3} \Big|_{x_1=L_0} = D_2 k_N^3 \cosh(k_N L_0) = -\frac{Q_{\text{end}}}{D} \quad (7.98)$$

Warunek (7.89) przyjmuje następującą postać:

$$D_2 \sinh(k_N L_0) + \operatorname{tg} \varphi L_0 = -\frac{h+t}{2D} \frac{C_1}{\beta^3} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) - \frac{C_4}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{C_6}{2} \frac{L}{2} \quad (7.99)$$

Warunek (7.90) przyjmuje postać:

$$D_2 k_N \cosh(k_N L_0) + \operatorname{tg} \varphi = \frac{h+t}{2D} \frac{C_1}{\beta^2} \cosh\left(\frac{\beta L}{2}\right) + \frac{3}{2} C_4 \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{C_6}{2} \quad (7.100)$$

Warunek (7.91) zapisujemy w następujący sposób:

$$\left. \frac{d^2 w_0}{dx_1^2} \right|_{x=L_0} = \left. \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right|_{x=-\frac{L}{2}} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} (w_1 + w_2) + \frac{d^2}{dx^2} (w_1 - w_2) \right) \right] \Big|_{x=-\frac{L}{2}} \quad (7.101)$$

Wykorzystując rozwiązanie (7.84), możemy napisać:

$$D_2 k_N^2 \sinh(k_N L_0) = -\frac{h+t}{2D} \frac{C_1}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) - 3C_4 \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right|_{x=-\frac{L}{2}} - \left. \frac{d^2 w_2}{dx^2} \right|_{x=-\frac{L}{2}} \right] \quad (7.102)$$

Po uwzględnieniu warunków (7.92) i (7.95) dla  $x = -L/2$  oraz oznaczeń (7.97) otrzymamy:

$$D_2 k_N^2 \sinh(k_N L_0) = -\frac{h+t}{2D} \frac{C_1}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) - 3C_4 \frac{L}{2} - \frac{M_{\text{end}}}{2D} \quad (7.103)$$

co, po skorzystaniu z (7.95), możemy zapisać następująco:

$$\frac{1}{2} D_2 k_N^2 \sinh(k_N L_0) + \frac{h+t}{2D} \frac{C_1}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) + 3C_4 \frac{L}{2} = 0 \quad (7.104)$$

Kolejny warunek, który będzie wykorzystany do wyznaczenia stałych całkowania, zapiszemy, wykorzystując równanie (7.74), wynikające ze związków konstytutywnych dla materiału skleiny oraz uwzględniające równania równowagi sił osiowych i momentów. W równaniu tym podstawimy rozwiązanie (7.78) oraz warunki brzegowe na wartości sił osiowych (7.91) i (7.94) oraz wartości momentów zginających dla (7.92) i (7.95)  $x = -L/2$ :

$$C_1 \beta \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) = \frac{G}{t} \left[ \frac{N_{\text{end}}}{A} + \frac{M_{\text{end}}}{D} \frac{h}{2} \right] \quad (7.105)$$

co, po skorzystaniu z (7.97), możemy zapisać następująco:

$$C_1 \beta \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) + D_2 \frac{G k_N^2 h}{2t} \sinh(k_N L_0) = \frac{G}{t} \frac{N}{A} \quad (7.106)$$

W powyższym równaniu przemnożmy obie strony równania przez  $\beta$ , a następnie wykorzystajmy definicję parametru  $\beta$  z (7.76) i parametru  $k_N$  z (7.86):

$$\frac{C_1}{\beta} \left( \frac{2}{A} + \frac{(h+t)h}{2D} \right) \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) + D_2 \frac{Nh}{2D} \sinh(k_N L_0) = \frac{N}{A} \quad (7.107)$$

Piątym, ostatnim brakującym warunkiem brzegowym będzie warunek (7.80). Równania (7.99), (7.100), (7.104), (7.107) i (7.80) stanowią układ pięciu liniowych równań algebraicznych na pięciu niewiadomych:  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_6$ ,  $D_2$ , który można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{cases} D_2 \sinh(k_N L_0) + C_1 \frac{h+t}{2\beta^3 D} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) + \frac{L^3}{16} C_4 + \frac{L}{4} C_6 = -\text{tg } \varphi L_0 \\ D_2 k_N \cosh(k_N L_0) - C_1 \frac{h+t}{2\beta^2 D} \cosh\left(\frac{\beta L}{2}\right) - \frac{3}{8} L^2 C_4 - \frac{1}{2} C_6 = -\text{tg } \varphi \\ \frac{1}{2} D_2 k_N^2 \sinh(k_N L_0) + C_1 \frac{h+t}{2\beta D} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) + \frac{3}{2} L C_4 = 0 \\ D_2 \frac{Nh}{2D} \sinh(k_N L_0) + \frac{C_1}{\beta} \left( \frac{2}{A} + \frac{(h+t)h}{2D} \right) \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) = \frac{N}{A} \\ \frac{2C_1}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) + L C_3 = N \end{cases} \quad (7.108)$$

Układ ten uprości się, jeśli wprowadzimy nowe niewiadome:

$$F_1 = \frac{C_1}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right), \quad F_2 = D_2 \sinh(k_N L_0) \quad (7.109)$$

Wtedy:

$$\begin{cases} F_2 + F_1 \frac{h+t}{2\beta^2 D} + \frac{L^3}{16} C_4 + \frac{L}{4} C_6 = -\operatorname{tg} \varphi L_0 \\ F_2 k_N \operatorname{ctgh}(k_N L_0) - F_1 \frac{h+t}{2\beta D} \operatorname{ctgh}\left(\frac{\beta L}{2}\right) - \frac{3}{8} L^2 C_4 - \frac{1}{2} C_6 = -\operatorname{tg} \varphi \\ \frac{F_2 k_N^2}{2} + F_1 \frac{h+t}{2D} + \frac{3}{2} L C_4 = 0 \\ \frac{F_2 N h}{2D} + E_1 \left( \frac{2}{A} + \frac{(h+t)h}{2D} \right) = \frac{N}{A} \\ 2F_1 + L C_3 = N \end{cases} \quad (7.110)$$

Rozwiązanie powyższego układu można wyznaczyć symbolicznie, niemniej ma ono dość złożoną postać. Kluczowe dla projektowania złączy jednozakładkowych są w zasadzie dwie wielkości – maksymalne naprężenia styczne w skleinie  $\tau_{\max}$  oraz moment obciążający elementy łączone na granicy obszaru klejenia  $M_{\text{end}}$ . Ekstremalne naprężenie styczne w skleinie obecne jest na końcu obszaru klejenia i jest równe:

$$\tau_{\max} = \tau\left(\pm \frac{L}{2}\right) = C_1 \cosh\left(\frac{\beta L}{2}\right) + C_3 = F_1 \beta \operatorname{ctgh}\left(\frac{\beta L}{2}\right) + C_3 \quad (7.111)$$

Z zależności (7.86), (7.97) i (7.109) mamy natomiast:

$$M_{\text{end}} = -F_2 N \quad (7.112)$$

Wielkość  $F_2$  można zatem interpretować jako mimośród działania siły rozciągającej złącze względem osi elementu przed deformacją na granicy obszarów 1 i 2, czyli po prostu przemieszczenie poprzeczne (ugięcie) przekroju granicznego. Poszukiwane wartości są następujące:

- **ekstremalne naprężenie styczne w skleinie:**

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{avg}}} = 1 + \Delta \frac{\pi_2 + 12\pi_4}{\pi_2\pi_3 - \pi_1\pi_4} \quad (7.113)$$

- **moment zginający w obciążonym przekroju końcowym:**

$$M_{\text{end}} = N(h+t) \frac{\pi_1 + 12\pi_3}{\pi_2\pi_3 - \pi_1\pi_4} \quad (7.114)$$

gdzie bezwymiarowe współczynniki  $\Delta$ ,  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$ ,  $\pi_4$  zdefiniowane są następująco:

$$\Delta = \frac{\beta^2 D}{N} \left[ \beta L \coth\left(\frac{\beta L}{2}\right) - 2 \right]$$

$$\pi_1 = 12 - 6\beta L \coth\left(\frac{\beta L}{2}\right) + \beta^2 L^2, \quad \pi_2 = 24 + 12k_N L \coth(k_N L_0) + L^2 k_N^2$$

$$\pi_3 = \frac{ADt\beta^4}{GN}, \quad \pi_4 = \frac{A}{2D} h(h+t)$$

Należy zauważyć, że rozwiązania uzyskane przez Hart-Smitha różnią się od powyższych, co wynika po pierwsze z odmiennie przyjętej definicji parametru  $\beta$ , po drugie zaś – z uwagi na zastosowane przez niego uproszczenie:

$$\sinh(k_N L_0) \approx \cosh(k_N L_0) \approx \frac{1}{2} \exp(k_N L_0)$$

Rozwiązania zapisane w pracy (Hart-Smith 1973a) są następujące:

- **ekstremalne naprężenie styczne w skleinie:**

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{avg}}} = 1 + \frac{\lambda^2}{4(\lambda')^2} \left[ 1 + \frac{3k(1-v^2)}{k_b} \left( 1 + \frac{t}{h} \right) \right] [\lambda' L \text{ctgh}(\lambda' L) - 1] \quad (7.115)$$

- **moment zginający w obciążonym przekroju końcowym:**

$$M_{\text{end}} = N \frac{(h+t)}{2} \frac{1 + \frac{k_N^2 \lambda^2}{32(\lambda')^4} \left( 1 + \frac{\lambda' L}{3} - \lambda' L \text{ctgh}(\lambda' L) \right)}{\frac{1}{k} - \frac{h+t}{2h} \left( \frac{3k_N^2 \lambda^2}{32k_b (\lambda')^4} \right) \left( 1 + \frac{\lambda' L}{3} - \lambda' L \text{ctgh}(\lambda' L) \right)} \quad (7.116)$$

gdzie:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2G}{Eht}}, \quad \lambda' = \left[ \frac{1}{4} + \frac{3(1-v^2)}{4k_b} \right] \lambda^2, \quad k = \left[ 1 + \frac{k_N L}{2} + \frac{k_N^2 L^2}{24} \right]^{-1}$$

Ostatnim elementem analizy złącza jednozakładkowego jest wyznaczenie naprężeń odrywających. Rozważmy zatem związek konstytutywny (7.61) dla skleiny przy rozciąganiu w kierunku poprzecznym do płaszczyzny klejenia i zróżniczkujmy go dwukrotnie:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \left( \frac{d^2 w_2}{dx^2} - \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right) \quad (7.117)$$

Wykorzystajmy teraz związki konstytutywne (7.58):

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{E_{a,\text{eff}}}{Dt} (M_1 - M_2) \quad (7.118)$$

Zróżniczkujmy powyższe równanie po raz kolejny i wykorzystajmy równania równowagi momentów (7.55) i (7.56):

$$\frac{d^3 p}{dx^3} = \frac{E_{a,\text{eff}}}{Dt} (Q_1 - Q_2) \quad (7.119)$$

Ponownie zróżniczkujmy uzyskany wynik, a pochodne sił poprzecznych wyrażmy zgodnie ze związkami (7.53) i (7.54). Uzyskamy w ten sposób **równanie rządzące rozkładem naprężeń odrywających**:

$$\frac{d^4 p}{dx^4} - \mathfrak{G}^4 p = 0, \quad \text{gdzie: } \mathfrak{G} = \sqrt[4]{\frac{2E_{a,\text{eff}}}{Dt}} \quad (7.120)$$

Jest to zasadniczo to samo równanie, które zostało wyprowadzone przy analizie złączy dwuzakładowych. Jego rozwiązanie ogólne dane jest wzorem (7.35), przy czym w przypadku zagadnienia antysymetrycznego, jakim jest ścinanie złącza jednozakładowego o identycznych (symetrycznych) elementach łączonych, rozkład naprężenia odrywającego musi być koniecznie symetryczny, co pozwala pominąć te składniki rozwiązania, które są antysymetryczne:

$$p(x) = H_1 \cosh(\mathfrak{G}x) \cos(\mathfrak{G}x) + H_2 \sinh(\mathfrak{G}x) \sin(\mathfrak{G}x) \quad (7.121)$$

Stałe całkowania  $H_1$ ,  $H_2$  wyznaczmy z warunku równowagi sił poprzecznych, przyłożonych do myślowo odciętego jednego z elementów łączonych, oraz warunków brzegowych na moment zginający w elementach łączonych. Suma naprężeń odrywających musi równoważyć poprzeczną składową siły obciążającej złącze:

$$\int_{-L/2}^{L/2} p(x) dx = Q_0 \quad (7.122)$$

co daje nam:

$$\frac{H_1 + H_2}{\mathfrak{G}} \sin\left(\frac{\mathfrak{G}L}{2}\right) \cosh\left(\frac{\mathfrak{G}L}{2}\right) + \frac{H_1 - H_2}{\mathfrak{G}} \cos\left(\frac{\mathfrak{G}L}{2}\right) \sinh\left(\frac{\mathfrak{G}L}{2}\right) = Q_0 \quad (7.123)$$



Wróćmy do równania (7.117) i zapiszmy je dla  $x = L/2$ , wykorzystując warunki brzegowe (7.92) i (7.95):

$$\left. \frac{d^2 p}{dx^2} \right|_{x=L/2} = \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \frac{M_{\text{end}}}{D} \quad (7.124)$$

co daje nam:

$$2\vartheta^2 \left[ H_2 \cosh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) - H_1 \sinh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \right] = \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \frac{M_{\text{end}}}{D} \quad (7.125)$$

Równania (7.123) i (7.125) stanowią liniowy układ dwóch równań algebraicznych na stałe całkowania  $H_1, H_2$ . Jego rozwiązanie jest następujące:

$$H_1 = \frac{\frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \frac{M_{\text{end}}}{D} \left[ \cos\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \sinh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) - \sin\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \cosh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \right] + 2\vartheta^3 Q_0 \cos\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \cosh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right)}{\vartheta^2 [\sinh(\vartheta L) + \sin(\vartheta L)]}$$

$$H_2 = \frac{\frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \frac{M_{\text{end}}}{D} \left[ \cos\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \sinh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) + \sin\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \cosh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \right] + 2\vartheta^3 Q_0 \sin\left(\frac{\vartheta L}{2}\right) \sinh\left(\frac{\vartheta L}{2}\right)}{\vartheta^2 [\sinh(\vartheta L) + \sin(\vartheta L)]}$$

**Maksymalne naprężenie odrywające** występuje na końcu obszaru klejenia, czyli dla  $x = \pm L/2$ :

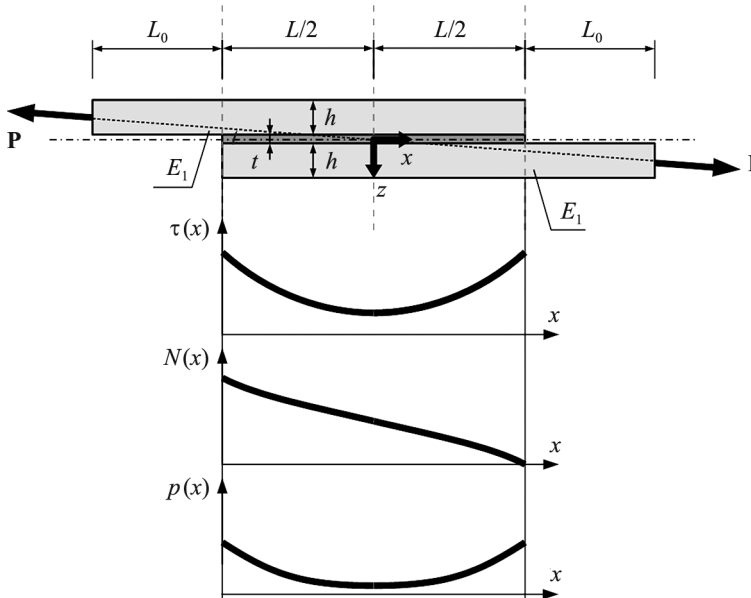
$$p_{\text{max}} = \frac{\frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \frac{M_{\text{end}}}{D} [\sinh(\vartheta L) - \sin(\vartheta L)] + 2\vartheta^3 Q_0 [\cosh(\vartheta L) + \cos(\vartheta L)]}{2\vartheta^2 [\sinh(\vartheta L) + \sin(\vartheta L)]} \quad (7.126)$$

Inne rozwiązanie można znaleźć w raporcie (Hart-Smith 1973a), w którym autor posłużył się uproszczeniem (7.40), a ponadto założył, że suma naprężeń odrywających ma być równa 0. O ile założenie takie jest jak najbardziej uzasadnione w przypadku złącza dwuzakładkowego, o tyle w przypadku złącza jednozakładkowego może ono być zaledwie przybliżeniem. W całej swojej pracy Hart-Smith przyjmował, że składowa pozioma (równoległa do osi złącza) obciążenia jest równa wielkości obciążenia, zaś składową poprzeczną, która konieczna była do uwzględnienia w równaniu (7.85), skutecznie wyrugował w sposób analogiczny, jak zostało to zrobione w równaniu (7.87). Odmienne rzecz się ma w raporcie (Cooper i Sawyer 1979), w którym obydwie składowe uwzględniane są w taki sam sposób, jak zostało to pokazane w tym podrozdziale. Zgodnie z rozwiązaniem Hart-Smitha maksymalne naprężenie odrywające jest równe:

$$p_{\max} \approx \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \frac{M_{\text{end}}}{2D\vartheta^2} \quad (7.127)$$

co łatwo można uzyskać z równania (7.126) po przyjęciu  $Q_0 = 0$  w przejściu granicznym ( $\vartheta L \rightarrow \infty$ ).

Podsumowaniem powyższej analizy niech będzie rysunek 36, ilustrujący w poglądowy sposób rozkład naprężenia stycznego, siły osiowej oraz naprężenia odrywającego na długości złącza.



Rys. 36. Rozkład naprężenia stycznego, siły osiowej oraz naprężenia odrywającego na długości złącza

### 7.2.2. Sformułowanie naprężeniowe – złącze niesymetryczne

Omówione powyżej rozwiązanie Hart-Smitha, ściśle związane z pierwotnym pomysłem Golanda i Reissnera, jest tylko jednym z wielu możliwych sposobów zastosowania założeń modelu belkowego. Odmienne ich wykorzystanie zaprezentowane jest np. w pracy (Bigwood i Crocombe 1989). Rozpatrywano w niej złącze niesymetryczne. Komplet równań rządzących zagadnieniem ma postać analogiczną do równań (7.51)–(7.61):

- **równania równowagi:**

$$\frac{dN_1}{dx} + \tau = 0, \quad \frac{dN_2}{dx} - \tau = 0 \quad (7.128)$$

$$\frac{dQ_1}{dx} + p = 0, \quad \frac{dQ_2}{dx} - p = 0 \quad (7.129)$$

$$\frac{dM_1}{dx} - Q_1 + \tau \frac{h_1}{2} = 0, \quad \frac{dM_2}{dx} - Q_2 + \tau \frac{h_2}{2} = 0 \quad (7.130)$$

- **związki konstytutywne:**

- deformacja osiowa elementów łączonych:

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{N_i}{A}, \quad i = 1, 2, \quad A_i = \begin{cases} E_i h_i & \Leftrightarrow \text{PSN} \\ \frac{E_i h_i}{(1 - \nu_i^2)} & \Leftrightarrow \text{PSO} \end{cases} \quad (7.131)$$

- deformacja poprzeczna elementów łączonych:

$$\frac{d^2 w_i}{dx^2} = -\frac{M_i}{D_i}, \quad i = 1, 2, \quad D = \begin{cases} k_b \frac{E_i h_i^3}{12} & \Leftrightarrow \text{PSN} \\ k_b \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)} & \Leftrightarrow \text{PSO} \end{cases} \quad (7.132)$$

- deformacja postaciowa skleiny:

$$\tau = G\gamma \quad (7.133)$$

- rozciąganie poprzeczne skleiny:

$$p = E_{a,\text{eff}} \varepsilon_a \quad (7.134)$$

- **związki kinematyczne:**

- kinematyka belkowego modelu elementów łączonych:

$$\frac{du_{1,B}}{dx} = \frac{N_1}{A_1} + \frac{M_1}{D_1} \frac{h_1}{2} \quad (7.135)$$

$$\frac{du_{2,T}}{dx} = \frac{N_2}{A_2} - \frac{M_2}{D_2} \frac{h_2}{2} \quad (7.136)$$

- deformacja postaciowa skleiny – proste ścinanie:

$$\gamma = \frac{u_{2,T} - u_{1,B}}{t} \quad (7.137)$$

- rozciąganie poprzeczne skleiny:

$$\varepsilon_a = \frac{w_2 - w_1}{t} \quad (7.138)$$

Równanie (7.137) podstawia się do (7.133). Uzyskany związek należy następnie zróżniczkować, a następnie podstawić w nim równania (7.135) i (7.136). Otrzymujemy:

$$\frac{d\tau}{dx} - \frac{G}{t} \left[ \left( \frac{N_2}{A_2} - \frac{M_2}{D_2} \frac{h_2}{2} \right) - \left( \frac{N_1}{A_1} + \frac{M_1}{D_1} \frac{h_1}{2} \right) \right] = 0 \quad (7.139)$$

Powyższe równanie różniczkujemy kolejno dwa razy, wykorzystując równania równowagi (7.128)–(7.130):

$$\frac{d^2\tau}{dx^2} + \frac{G}{t} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{h_1^2}{4D_1} + \frac{h_2^2}{4D_2} \right) \tau + \frac{G}{t} \left( \frac{Q_1 h_1}{2D_1} + \frac{Q_2 h_2}{2D_2} \right) = 0 \quad (7.140)$$

$$\frac{d^3\tau}{dx^3} - \frac{G}{t} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{h_1^2}{4D_1} + \frac{h_2^2}{4D_2} \right) \frac{d\tau}{dx} = \frac{G}{t} \left( \frac{h_1}{2D_1} - \frac{h_2}{2D_2} \right) p \quad (7.141)$$

Ostatnie równanie można zapisać w postaci:

$$\frac{d^3\tau}{dx^3} - K_1 \frac{d\tau}{dx} = K_2 p \quad (7.142)$$

gdzie:

$$K_1 = \frac{G}{t} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{h_1^2}{4D_1} + \frac{h_2^2}{4D_2} \right) > 0, \quad K_2 = \frac{G}{2t} \left( \frac{h_1}{D_1} - \frac{h_2}{D_2} \right)$$

Następnie równanie (7.138) podstawia się do (7.134). Uzyskany związek należy następnie dwukrotnie zróżniczkować, a następnie podstawić w nim równania (7.132). Otrzymujemy:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \left[ \frac{M_1}{D_1} - \frac{M_2}{D_2} \right] \quad (7.143)$$

Powyższe równanie różniczkujemy kolejno dwa razy, wykorzystując równania równowagi (7.128)–(7.130):

$$\frac{d^3 p}{dx^3} - \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \left[ \frac{Q_1}{D_1} - \frac{Q_2}{D_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{h_2}{D_2} - \frac{h_1}{D_1} \right) \tau \right] = 0 \quad (7.144)$$

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) p = \frac{E_{a,\text{eff}}}{2t} \left( \frac{h_2}{D_2} - \frac{h_1}{D_1} \right) \frac{d\tau}{dx} \quad (7.145)$$

Ostatnie równanie można zapisać w postaci:

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + K_3 p = K_4 \frac{d\tau}{dx} \quad (7.146)$$

gdzie:

$$K_3 = \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) > 0, \quad K_4 = \frac{E_{a,\text{eff}}}{2t} \left( \frac{h_2}{D_2} - \frac{h_1}{D_1} \right)$$

Równania (7.142) i (7.146) stanowią liniowy układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych. Rozprzęgnięcia tych równań można dokonać, różniczkując pierwsze z nich czterokrotnie, drugie zaś dwukrotnie:

$$\begin{cases} \frac{d^7 \tau}{dx^7} - K_1 \frac{d^5 \tau}{dx^5} = K_2 \frac{d^4 p}{dx^4} \\ \frac{d^6 p}{dx^6} + K_3 \frac{d^2 p}{dx^2} = K_4 \frac{d^3 \tau}{dx^3} \end{cases} \quad (7.147)$$

Czwartą pochodną  $p$  w pierwszym równaniu możemy wyrazić za pomocą równania (7.146) przez  $p$  i pierwszą pochodną  $\tau$ . Z kolei  $p$  można za pomocą równania (7.142) wyrazić przez pochodne  $\tau$ . Otrzymujemy wtedy:

$$\frac{d^7 \tau}{dx^7} - K_1 \frac{d^5 \tau}{dx^5} + K_3 \frac{d^3 \tau}{dx^3} - (K_1 K_3 + K_2 K_4) \frac{d\tau}{dx} = 0 \quad (7.148)$$

Z drugiej strony trzecią pochodną  $\tau$  w drugim równaniu możemy wyrazić za pomocą równania (7.142) przez  $p$  i pierwszą pochodną  $\tau$ , a następnie pochodną  $\tau$  można za pomocą równania (7.146) wyrazić przez pochodne  $p$ , co daje nam:

$$\frac{d^6 p}{dx^6} - K_1 \frac{d^4 p}{dx^4} + K_3 \frac{d^2 p}{dx^2} - (K_1 K_3 + K_2 K_4) p = 0 \quad (7.149)$$

Równania (7.148) i (7.149) stanowią dwa niezależne równania rządzące zagadnieniem. Są to jednorodne liniowe równania różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach – ich rozwiązania będą odpowiednimi kombinacjami liniowymi funkcji wykładniczych:

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^7 C_i e^{\beta_i x} \quad (7.150)$$

gdzie:  $\beta_i$  są pierwiastkami równania charakterystycznego:

$$\beta^7 - K_1\beta^5 + K_3\beta^3 - K_5\beta = 0 \quad (7.151)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} K_5 &= K_1K_3 + K_2K_4 = \\ &= \frac{GE_{a,\text{eff}}}{t^2} \left[ \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{h_1^2}{4D_1} + \frac{h_2^2}{4D_2} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{h_1}{D_1} + \frac{h_2}{D_2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Rozpisując wyrażenie w nawiasie kwadratowym, można przekonać się, że  $K_5 > 0$ . Od razu można spostrzec, że jednym z pierwiastków jest zero,  $\beta_1 = 0$ . Rozkład naprężeń odrywających określa funkcja:

$$p(x) = \sum_{j=1}^6 D_j e^{\vartheta_j x} \quad (7.152)$$

gdzie:  $\vartheta_j$  są pierwiastkami równania charakterystycznego równania (7.152). Ma ono niemal identyczną postać jak równanie (7.151), z tą jedynie różnicą, że wykładniki potęg przy niewiadomej są każdorazowo o jeden mniejsze. To oznacza, że pierwiastki  $\vartheta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) to po prostu niezerowe spośród pierwiastków  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ). Po podzieleniu równania (7.151) przez  $\beta$  otrzymuje się równanie szóstego stopnia, w którym występują jedynie parzyste potęgi niewiadomej – można je określić mianem równania „dwusześciennego”. Wprowadzenie nowej niewiadomej  $\alpha$ , takiej że  $\alpha^2 = \beta$ , pozwala zapisać równanie sześciennie:

$$\alpha^3 - K_1\alpha^2 + K_3\alpha - K_5 = 0 \quad (7.153)$$

którego pierwiastki można znaleźć w następujący sposób:

1. Wyznaczamy wielkości:

$$R = -\frac{K_1^2}{3} + K_3, \quad S = -\frac{2K_1^3}{27} + \frac{K_1K_3}{3} - K_5$$

2. Obliczamy wyróżnik równania (7.152):

$$\Delta = \left( \frac{R}{3} \right)^3 + \left( \frac{S}{2} \right)^2$$

Jeśli  $\Delta > 0$ , równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa sprzężone pierwiastki zespolone:

$$\alpha_1 = u + v + \frac{K_1}{3}, \quad \alpha_2 = \epsilon u + \epsilon^2 v + \frac{K_1}{3}, \quad \alpha_3 = \epsilon^2 u + \epsilon v + \frac{K_1}{3}$$

gdzie:

$$u = \Re \left( \sqrt[3]{-\frac{S}{2} - \sqrt{\Delta}} \right), \quad v = \Re \left( \sqrt[3]{-\frac{S}{2} + \sqrt{\Delta}} \right)$$

$$\epsilon = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \epsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Jeśli  $\Delta = 0$ , równanie ma jeden podwójny i jeden pojedynczy pierwiastek rzeczywisty:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt[3]{\frac{S}{2} + \frac{K_1}{3}}, \quad \alpha_3 = -2\sqrt[3]{\frac{S}{2} + \frac{K_1}{3}}$$

Jeśli  $\Delta < 0$ , równanie ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste:

$$\alpha_k = \frac{K_1}{3} + 2\sqrt{-\frac{R}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \left( \arccos \frac{3S}{2R\sqrt{-\frac{R}{3}}} + 2(k-1)\pi \right) \right], \quad k = 1, 2, 3$$

Znając pierwiastki  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , można z kolei wyznaczyć  $\beta_i$  ( $i = 2, \dots, 7$ ). W pracy (Bigwood i Crocombe 1989) zamieszczono jeszcze inne wzory pozwalające wyznaczyć rozwiązanie ogólne równań (7.148) i (7.149). Rozwiązania szczególne wyznacza się przez taki dobór stałych całkowania  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) i  $D_j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ), aby spełnione zostały stosowne warunki brzegowe. Konieczne jest zatem sformułowanie siedmiu warunków brzegowych dla równania (7.149), wyznaczenie funkcji  $\tau(x)$  pozwala bowiem na znalezienie  $p(x)$  za pomocą równania (7.142). Poszukiwane warunki brzegowe wynikać będą m.in. ze statycznych warunków brzegowych na krańcach obszaru klejenia:

$$\begin{cases} M_1 = \tilde{M}_1, Q_1 = Q, N_1 = N \\ M_2 = 0, Q_2 = 0, N_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{L}{2}$$

$$\begin{cases} M_1 = 0, Q_1 = 0, N_1 = N \\ M_2 = -\tilde{M}_2, Q_2 = Q, N_2 = N \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{L}{2}$$

(7.154)

Powyższe warunki można uwzględnić w następujący sposób:

- Zapisujemy równanie (7.139) dla  $x = -\frac{L}{2}$  oraz dla  $x = \frac{L}{2}$ , uwzględniając warunki brzegowe (7.154):

$$\left. \frac{d\tau}{dx} \right|_{x=-\frac{L}{2}} = -\frac{G}{t} \left( \frac{N}{A_1} + \frac{\tilde{M}_1}{D_1} \frac{h_1}{2} \right) \quad (7.155)$$

$$\left. \frac{d\tau}{dx} \right|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{G}{t} \left( \frac{N}{A_2} + \frac{\tilde{M}_2}{D_2} \frac{h_2}{2} \right) \quad (7.156)$$

- Różniczkujemy dwukrotnie równanie (7.142), a drugą pochodną rozkładu naprężenia odrywającego wyrażamy za pomocą związku (7.143) z uwzględnieniem warunków brzegowych (7.154):

$$\left. \frac{d^5\tau}{dx^5} \right|_{x=-\frac{L}{2}} - K_1 \left. \frac{d^3\tau}{dx^3} \right|_{x=-\frac{L}{2}} = K_2 \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \frac{\tilde{M}_1}{D_1} \quad (7.157)$$

$$\left. \frac{d^5\tau}{dx^5} \right|_{x=\frac{L}{2}} - K_1 \left. \frac{d^3\tau}{dx^3} \right|_{x=\frac{L}{2}} = K_2 \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \frac{\tilde{M}_2}{D_2} \quad (7.158)$$

- Różniczkujemy trzykrotnie równanie (7.142), a trzecią pochodną rozkładu naprężenia odrywającego wyrażamy za pomocą zróżniczkowanego związku (7.143) z uwzględnieniem warunków brzegowych (7.154) oraz równań równowagi (7.130):

$$\left. \frac{d^6\tau}{dx^6} \right|_{x=-\frac{L}{2}} - K_1 \left. \frac{d^4\tau}{dx^4} \right|_{x=-\frac{L}{2}} - K_2 K_4 \tau \Big|_{x=-\frac{L}{2}} = K_2 \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \frac{Q}{D_1} \quad (7.159)$$

$$\left. \frac{d^6\tau}{dx^6} \right|_{x=\frac{L}{2}} - K_1 \left. \frac{d^4\tau}{dx^4} \right|_{x=\frac{L}{2}} - K_2 K_4 \tau \Big|_{x=\frac{L}{2}} = -K_2 \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \frac{Q}{D_2} \quad (7.160)$$

Siódmym brakującym warunkiem będzie warunek równowagi sił:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tau(x) dx = N \quad (7.161)$$



Równania (7.155)–(7.161) stanowią układ siedmiu równań, w którym niewiadomymi są stałe całkowania  $C_1, \dots, C_7$ . Z uwagi na liniowość zagadnienia jest to układ liniowych równań algebraicznych. Rozwiązanie tego układu można wyznaczyć standardowymi metodami, przy czym jego postać zależy oczywiście od charakteru rozwiązania (7.150), to znaczy od liczby rzeczywistych i zespolonych pierwiastków równania charakterystycznego (7.151).

Kluczowe różnice między podejściem Bigwooda i Crocombe'a a ujęciem problemu przez Hart-Smitha są następujące:

- W rozwiązaniu Hart-Smitha rozpatruje się deformację elementu łączonego poza obszarem skleiny, zakładając przy tym, że elementy poddane są działaniu wyłącznie sił, nie zaś momentu zginającego. Moment zginający na granicy obszaru skleiny wynika właśnie z deformacji elementów poza tym obszarem. Bigwood i Crocombe przyjmują natomiast wartości sił przekrojowych (w tym również momentu zginającego) na granicy obszaru skleiny jako dane warunki brzegowe i ignorują deformację elementów poza tym obszarem.
- W analizie Hart-Smitha rozkład naprężenia stycznego w skleinie określany jest za pomocą układu równań różniczkowych zwyczajnych (7.69), (7.76) i (7.86), który jednocześnie określa rozkład ugięcia elementów łączonych. W podejściu Bigwooda i Crocombe'a rozkład naprężenia stycznego wyznacza się z pojedynczego równania różniczkowego siódmego rzędu.

Jeśli chodzi o warunki brzegowe (7.154), to trzeba zaznaczyć, że o ile składowe  $N$  oraz  $Q$  siły zewnętrznej obciążającej złącze są co do zasady znane, o tyle wartość brzegowego momentu zginającego nie wynika w sposób bezpośredni z samego tylko obciążenia zewnętrznego przyjętego w modelu – jego wartość zależy, jak się o tym przekonaliśmy, analizując rozwiązanie Hart-Smitha, od geometrii złącza i charakterystyki fizycznej jego elementów. W tym sensie można rozumieć zagadnienie ścinania złącza jako zadanie statycznie niewyznaczalne – same równania równowagi globalnej nie wystarczają do wyznaczenia brzegowych wartości sił przekrojowych w elementach łączonych i konieczne jest uwzględnienie ich deformacji.

W świetle tego spostrzeżenia należy zauważyć, że wszystkie modele, które formułują warunki brzegowe w sposób analogiczny do (7.154) – a stanowią one zdecydowaną większość wśród propozycji obecnych w literaturze – nie są rozwiązaniami kompletnymi, ponieważ nie specyfikują sposobu określania brzegowych wartości momentu zginającego, na które się powołują. Możliwe są tutaj dwa rozwiązania. Pierwsze z nich jest jedynym poprawnym ze ściśle analitycznego punktu widzenia – należy bowiem przeprowadzić analizę analogiczną do tej zaprezentowanej w rozwiązaniu Hart-Smitha, to znaczy przeanalizować deformację tych części elementów łączonych, które znajdują się poza obszarem zakładu, a następnie sformułować warunki zszycia na granicy obszaru klejenia i swobodnych części elementów łączonych. Warunki te obejmują warunki lokalnej równowagi sił przekrojowych oraz warunki zgodności przemieszczeń analogiczne do (7.89)–(7.93). Równania te, wraz

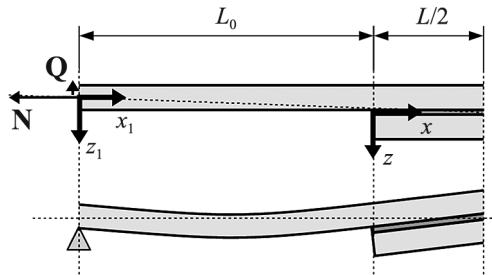
ze statycznymi warunkami brzegowymi na obciążonych końcach elementów łączonych, dają układ równań, z których można wyznaczyć właściwe wartości stałych całkowania w rozwiązaniu ogólnym. Wpływ deformacji elementów łączonych poza obszarem klejenia uwzględniono w pracach (Goland i Reissner 1944; Hart-Smith 1973a; Cooper i Sawyer 1979). Alternatywnym rozwiązaniem jest wykorzystanie wzoru na  $M_{\text{end}}$ , wyprowadzonego przez Golanda i Reissnera (np. Renton i Vinson 1977; Allman 1977), lub wzór (7.116) Hart-Smitha (np. Ojalvo i Eidinoff 1978).

W tym drugim podejściu należy wyraźnie zaznaczyć, że wzór Golanda–Reissnera, mimo że często przywoływany jest w literaturze, a jego wykorzystanie jest szeroko rozpowszechnione, jest wzorem obarczonym błędem, co wykazano w pracy (Hart-Smith 1973a). W tym miejscu warto wyjaśnić nieścisłość związaną z tym wzorem. Równania zapisane w pracy (Goland i Reissner 1944) można zapisać w następującej postaci (por. rys. 37):

$$\begin{cases} \frac{d^2 w_0}{dx_1^2} = -\frac{M_0}{D}, & \text{gdzie: } M_0(x_1) = [Qx_1 - Nw_0(x_1)] \\ \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\frac{M_1}{D}, & \text{gdzie: } M_1(x) = \left[ Q(L_0 + x) - N \left( w_1(x) + \frac{t+h}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (7.162)$$

przy czym:

$$\frac{Q}{N} = \frac{h+t}{2L_0+L} = \text{tg } \phi \quad (7.163)$$



Rys. 37. Konfiguracja odniesienia i konfiguracja aktualna symetrycznego złącza jednozakładkowego

Rozwiązania ogólne powyższych równań można z łatwością wyznaczyć:

$$w_0(x) = C_1 \cosh(k_N x_1) + C_2 \sinh(k_N x_1) + \text{tg } \phi x \quad (7.164)$$

$$w_1(x) = C_3 \cosh(k_N x) + C_4 \sinh(k_N x) + \text{tg } \phi (x + L_0) - \frac{h+t}{2} \quad (7.165)$$

gdzie:  $k_N$  zdefiniowane jest tak jak w (7.86). W pracy (Goland i Reissner 1944) stałe całkowania  $C_1, \dots, C_4$  wyznaczono z następujących warunków:

- kinematyczne warunki brzegowe:

$$w_0(x_1 = 0) = 0 \quad (7.166)$$

$$w_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 \quad (7.167)$$

- warunki zgodności przemieszczeń:

$$w_0(x_1 = L_0) = w_1(x = 0) \quad (7.168)$$

$$\left. \frac{dw_0}{dx} \right|_{x_1=L_0} = \left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=\frac{L}{2}} \quad (7.169)$$

Układ równań (7.166)–(7.169) pozwala wyznaczyć stałe całkowania:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{\frac{h+t}{2} \left[ \cosh\left(k_N \frac{L}{2}\right) - 1 \right] + \left(L_0 + \frac{L}{2}\right) \operatorname{tg} \phi}{\cosh\left(k_N \frac{L}{2}\right) \sinh(k_N L_0) + \sinh\left(k_N \frac{L}{2}\right) \cosh(k_N L_0)}$$

$$C_3 = \frac{\frac{h+t}{2} \left[ \cosh(k_N L_0) \sinh\left(k_N \frac{L}{2}\right) + \sinh(k_N L_0) \right] - \left(L_0 + \frac{L}{2}\right) \sinh(k_N L_0) \operatorname{tg} \phi}{\cosh\left(k_N \frac{L}{2}\right) \sinh(k_N L_0) + \sinh\left(k_N \frac{L}{2}\right) \cosh(k_N L_0)}$$

$$C_4 = \frac{\frac{h+t}{2} \cosh(k_N L_0) \left[ \cosh\left(k_N \frac{L}{2}\right) - 1 \right] + \left(L_0 + \frac{L}{2}\right) \cosh(k_N L_0) \operatorname{tg} \phi}{\cosh\left(k_N \frac{L}{2}\right) \sinh(k_N L_0) + \sinh\left(k_N \frac{L}{2}\right) \cosh(k_N L_0)}$$

Brzegowe wartości sił przekrojowych są równe:

$$M_{\text{end}} = -D \left. \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right|_{x_1=L_0} = -DC_2 k_N^2 \sinh(k_N L_0) =$$

$$= Dk_N^2 \sinh(k_N L_0) \frac{\frac{h+t}{2} \left[ \cosh\left(k_N \frac{L}{2}\right) - 1 \right] + \left(L_0 + \frac{L}{2}\right) \operatorname{tg} \phi}{\cosh\left(k_N \frac{L}{2}\right) \sinh(k_N L_0) + \sinh\left(k_N \frac{L}{2}\right) \cosh(k_N L_0)} \quad (7.170)$$

$$\begin{aligned}
Q_{\text{end}} &= -D \frac{d^3 w_0}{dx^3} \Big|_{x_1=L_0} = -DC_2 k_N^3 \cosh(k_N L_0) = \\
&= Dk_N^3 \cosh(k_N L_0) \frac{\frac{h+t}{2} \left[ \cosh\left(k_N \frac{L}{2}\right) - 1 \right] + \left(L_0 + \frac{L}{2}\right) \text{tg } \phi}{\cosh\left(k_N \frac{L}{2}\right) \sinh(k_N L_0) + \sinh\left(k_N \frac{L}{2}\right) \cosh(k_N L_0)} \quad (7.171)
\end{aligned}$$

Zgodnie z tym, co zostało napisane wcześniej, **wzory (7.170) i (7.171) są niepoprawne**, choć często przytaczane i wykorzystywane w publikacjach poświęconych złączom ścinanym. Błąd pojawia się w drugim z równań (7.162), ponieważ **wzór na wielkość momentu zginającego w elemencie nie uwzględnia momentu pochodzącego od naprężeń stycznych w skleinie, a zatem ignoruje wszelką interakcję z drugim z łączonych elementów**. Ponieważ rozkład naprężeń stycznych jest niejednorodny na długości złącza i zależy od deformacji elementów łączonych, zatem niemożliwe jest wyznaczenie brzegowej wartości momentu zginającego (a pewnej klasie zagadnień również siły poprzecznej) bez jednoczesnego wyznaczenia rozkładu naprężenia stycznego w skleinie, czyli znalezienia kompletnego rozwiązania postawionego zagadnienia.

Uzyskane rozwiązanie jest również niepoprawne pod innym względem. Moment przewidywany na swobodnym końcu elementu łączonego jest równy:

$$\begin{aligned}
M_{\text{end2}} &= -D \frac{d^2 w_1}{dx^2} \Big|_{x=L} = \\
&= -Dk_N^2 \text{csch}\left(\frac{(2L_0 + L)k_N}{2}\right) \left[ \frac{1}{4} \left( \sinh\left(\frac{(2L_0 + 3L)k_N}{2}\right) - \sinh\left(\frac{(2L_0 - 3L)k_N}{2}\right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2 \sinh((L_0 - L)k_N) \right] (t + h) - \left(L_0 + \frac{L}{2}\right) \sinh((L_0 - L)k_N) \text{tg } \phi \quad (7.172)
\end{aligned}$$

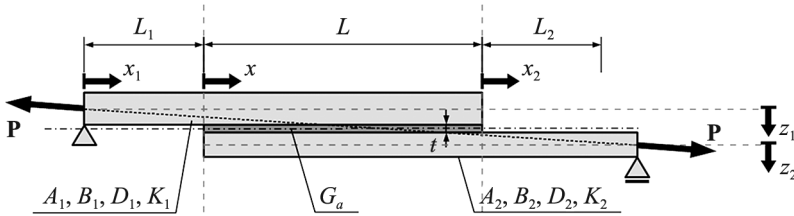
i jest różny od zera, co jest **sprzeczne ze statycznym warunkiem brzegowym na moment zginający, zapisanym dla brzegu swobodnego**.

W pracy (Hart-Smith 1973a) wykazano ponadto, że dla wystarczająco długich złączy **wzór Golnada–Reissnera szacuje brzegowy moment zginający z niedomiarem**. Z tych wszystkich względów **stosowanie wzorów (7.170) i (7.171) jest niedopuszczalne**. Zalecane jest stosowanie przybliżonych wzorów (7.115) i (7.116) dla złączy długich lub wzorów dokładnych (7.113) i (7.114).

### 7.2.3. Sformułowanie przemieszczeniowe

W modelach złącza, zaprezentowanych w poprzednich dwóch podrozdziałach, równania rządzące zagadnieniem ścinania są wyrażone za pomocą wielkości o wymiarze fizycznym naprężenia. Są to: naprężenie styczne i naprężenie odrywające w sklecinie. Jest to cecha wspólna większości modeli analitycznych. Można zauważyć, że w ogóle większość ścisłych rozwiązań płaskich zagadnień liniowej teorii sprężystości formułowana jest właśnie w kategoriach naprężeń, począwszy od rozwiązania Alfreda A. Flamanta (Flamant 1892), na rozwiązaniach zagadnienia szczytliny skończywszy (Westergaard 1939). Przyczyn tego rodzaju podejścia do zagadnień płaskich można wymienić kilka – niegdyś kluczowe znaczenie mogły mieć zarówno możliwość wykorzystania funkcji naprężeń Airy’ego, jak i możliwość walidacji eksperymentalnej za pomocą badań elastooptycznych. Obecnie, w dobie powszechnie stosowanych obliczeń numerycznych o niemal dowolnie dużej dokładności i niewielkim koszcie obliczeniowym, aspekty te mają drugorzędne znaczenie. Wciąż jednak najistotniejszymi elementami poszukiwanych rozwiązań analitycznych są przede wszystkim funkcje określające rozkład naprężenia w elementach złącza – z uwagi na wymagania w zakresie nośności (wytrzymałości materiału) to one pozwalają projektować. Sformułowania, w których możliwe jest wyznaczenie tych funkcji bez odnoszenia się do składowych pola przemieszczenia i związanych z nimi kinematycznych warunków brzegowych – co nieuchronnie skutkowałoby zwiększeniem złożoności rozwiązania, są w dalszym ciągu uznawane za prostsze i mające większe znaczenie praktyczne. W wielu przypadkach rozwiązania zagadnień w sformułowaniu naprężeniowym umożliwiają wyznaczenie przemieszczeń na drodze całkowania odkształceń z dokładnością do ruchu bryły sztywnej – nie zawsze jest to jednak możliwe, co wynika np. z niespełnienia warunków nierozdzielności odkształceń (modele dwuwymiarowe w sformułowaniu globalnym). O ile w większości zagadnień praktycznych sformułowanie naprężeniowe jest rzeczywiście uzasadnione, o tyle trzeba zwrócić uwagę, że coraz powszechniejsze stosowanie złączy klejowych w odpowiedzialnych konstrukcjach inżynierskich, również jako elementu nośnego, domaga się konieczności zarówno wyznaczenia przemieszczeń elementów złącza (np. w celu oszacowania strat w sile sprężającej w taśmie kotwionej na kleju), jak również uwzględnienia kinematycznych warunków brzegowych (odkształcenia wymuszone termicznie, sejsmicznie lub przez osiadanie itp.). W takim przypadku może się okazać, że sformułowanie przemieszczeniowe jest lepszym rozwiązaniem, choćby nawet z matematycznego punktu widzenia było bardziej złożone. Należy bowiem zauważyć, że modele złączy, formułowane w ramach liniowej teorii sprężystości dla układów jednorodnych (w których parametry zadania nie zależą od położenia punktu), prowadzą nas do równań rządzących w postaci liniowego układu równań różniczkowych o stałych współczynnikach – układy takie zaś stanowią najprostszą klasę, dla której znane są skuteczne algorytmy wyznaczania rozwiązań. Dotyczy

to oczywiście zarówno sformułowania przemieszczeniowego, jak i naprężeniowego. Propozycję przemieszczeniowego sformułowania zagadnienia ścinania złącza jednozakładkowego można znaleźć np. w pracy (Yang i Pang 1996). Konfiguracja rozpatrywanego złącza przedstawiona jest na rysunku 38.



Rys. 38. Konfiguracja złącza jednozakładkowego z kinematycznymi warunkami brzegowymi

Przedstawiana propozycja dotyczy dość ogólnego przypadku dwóch ortotropowych laminatów. Zakłada się, że ich deformacje można opisać za pomocą trzech funkcji określających przemieszczenia w każdym z przekrojów poprzecznych tych elementów – przemieszczenia podłużnego  $u_i$ , ugięcia  $w_i$  oraz kąta obrotu przekroju poprzecznego  $\phi_i$ , gdzie wielkości oznaczone  $i = 1$  ( $i = 2$ ) dotyczą elementu górnego (dolnego). Zakłada się, że przemieszczenia podłużne i poprzeczne punktów przekroju dla każdego z elementów wyrażają się w omawianym modelu w następujący sposób:

$$u_{x,i}(x, z) = u_i(x) - z_i \cdot \phi_i(x) \quad (7.173)$$

$$u_{z,i}(x, z) = w_i(x) \quad (7.174)$$

Można zauważyć, że powyższe założenie jest tożsame z założeniami modelu belki Timoshenki–Ehrenfesta albo szerzej – **teorii ścinania pierwszego rzędu**, w której zakłada się, że przekrój po deformacji pozostaje płaski, choć niekoniecznie prostopadły do zdeformowanej osi belki. Związki konstytutywne dla elementów łączonych, traktowanych jako anizotropowe płyty laminowane, przyjęto za (Whitney 1987) w postaci następujących równań:

$$N_i = A_i \frac{du_i}{dx} - B_i \frac{d\phi_i}{dx} \quad (7.175)$$

$$Q_i = K_i \left( \frac{dw_i}{dx} - \phi_i \right) \quad (7.176)$$

$$M_i = B_i \frac{du_i}{dx} - D_i \frac{d\phi_i}{dx} \quad (7.177)$$

gdzie:

$$A_i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} [E^*(z_i)] dz_i, \quad B_i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} [z_i E^*(z_i)] dz_i, \quad D_i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} [z_i^2 E^*(z_i)] dz_i,$$

$$K_i = \kappa_i \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} [G^*(z_i)] dz_i$$

W zdefiniowanych powyżej wielkościach  $E^*$  oznacza pierwszą składową macierzy sztywności dla płaskiego stanu odkształcenia, określającą związek konstytutywny między naprężeniem normalnym i odkształceniem liniowym na kierunku rozciągania. Symbol  $G^*$  oznacza współczynnik proporcjonalności między naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym przy ścinaniu elementu w płaszczyźnie zagadnienia, zaś  $\kappa_i$  oznacza energetyczny współczynnik ścinania. W ogólnym przypadku elementu laminowanego wartości  $E^*$  oraz  $G^*$  zależą od materiału poszczególnych warstw i tym samym są funkcją współrzędnej  $z_i$ . W przypadku elementu jednorodnego  $A_i$  sprowadza się do sztywności podłużnej,  $D_i$  jest sztywnością giętą,  $B_i = 0$ , zaś związki konstytutywne (7.175)–(7.177) są identyczne jak dla belki Timoshenki–Ehrenfesta. Zerowa wartość  $B_i$  skutkuje znacznym uproszczeniem sformułowania zagadnienia i może występować również w przypadku elementów laminowanych, pod warunkiem że układ warstw w laminacie jest symetryczny względem płaszczyzny środkowej elementu.

Układ przedstawiony na rysunku 38 jest układem statycznie wyznaczalnym, a obciążenie zewnętrzne jest w równowadze, zatem reakcje podporowe będą zerowe. Możemy więc wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w elementach łączonych poza obszarem klejenia – przemieszczenia i siły przekrojowe w  $i$ -tym elemencie poza obszarem klejenia oznaczane będą indeksem dolnym ( $i, 0$ ). Zapiszemy zatem:

$$x_1 \in (0, L_1) : \begin{cases} N_{1,0}(x_1) = P \cos \varphi \\ Q_{1,0}(x_1) = \frac{dM_{1,0}}{dx_1} = P \left[ \sin \varphi - \frac{dw_{1,0}}{dx_{1,0}} \cos \varphi \right] \\ M_{1,0}(x_1) = P[x_1 \sin \varphi - w_{1,0}(x_1) \cos \varphi] \end{cases} \quad (7.178)$$

$$x_2 \in (0, L_2) : \begin{cases} N_{2,0}(x_2) = P \cos \varphi \\ Q_{2,0}(x_2) = \frac{dM_{2,0}}{dx_2} = P \left[ \sin \varphi - \frac{dw_{2,0}}{dx} \cos \varphi \right] \\ M_{2,0}(x_2) = -P[(L_2 - x_2) \sin \varphi + w_{2,0}(x_2) \cos \varphi] \end{cases} \quad (7.179)$$

gdzie:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h_1 + h_2 + 2t}{2(L_1 + L_2 + L)}$$

Po podstawieniu powyższych zależności do związków konstytutywnych (7.175)–(7.177) otrzymujemy równania rządzące zagadnieniem w obszarach poza sklepną:

$$\begin{cases} A_1 \frac{du_{1,0}}{dx} - B_1 \frac{d\phi_{1,0}}{dx} = P \cos \varphi \\ (K_1 + P \cos \varphi) \frac{dw_{1,0}}{dx} - K_1 \phi_{1,0} = P \sin \varphi \\ B_1 \frac{du_{1,0}}{dx} - D_1 \frac{d\phi_{1,0}}{dx} + P \cos \varphi w_{1,0} = Px_1 \sin \varphi \end{cases} \quad (7.180)$$

$$\begin{cases} A_2 \frac{du_{2,0}}{dx} - B_2 \frac{d\phi_{2,0}}{dx} = P \cos \varphi \\ (K_2 + P \cos \varphi) \frac{dw_{2,0}}{dx} - K_2 \phi_{2,0} = P \sin \varphi \\ B_2 \frac{du_{2,0}}{dx} - D_2 \frac{d\phi_{2,0}}{dx} + P \cos \varphi w_{2,0} = P(x_2 - L_2) \sin \varphi \end{cases} \quad (7.181)$$

Są to dwa niezależne od siebie niejednorodne układy liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach. Rozwiązania tych układów będą sumą rozwiązań układów jednorodnych (COUJ) i niejednorodnych (CSUN) Układy jednorodne można z łatwością sprowadzić do postaci, w której po lewej stronie mamy pierwsze pochodne niewiadomych funkcji. W obydwu przypadkach otrzymujemy układ jednorodny o następującej ogólnej postaci:



$$\begin{bmatrix} \frac{du_{i,0}}{dx} \\ \frac{d\phi_{i,0}}{dx} \\ \frac{dw_{i,0}}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{B_i P \cos \varphi}{A_i D_i - B_i^2} \\ 0 & 0 & \frac{A_i P \cos \varphi}{A_i D_i - B_i^2} \\ 0 & \frac{K_i}{P \cos \varphi + K_i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,0} \\ \phi_{i,0} \\ w_{i,0} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (7.182)$$

Rozwiązanie układu jednorodnego wyznaczamy jako stosowną kombinację liniową funkcji wykładniczych, których wykładniki są proporcjonalne do zmiennej niezależnej oraz wartości własnych macierzy współczynników w powyższym układzie. Wartości te to:

$$\beta_{i,1} = 0, \quad \beta_{i,2} = -\beta_{i,3} = \sqrt{\frac{A_i K_i P \cos \varphi}{(A_i D_i - B_i^2)(P \cos \varphi + K_i)}} \quad (7.183)$$

Wprowadźmy oznaczenie  $\beta_i = \beta_{i,2}$ . Wtedy wektory własne odpowiadające powyższym wartościom własnym są równe:

$$\mathbf{y}_{i,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{i,2} = \begin{bmatrix} B_i \cos \varphi \\ A_i \cos \varphi \\ \frac{\beta_i}{P} (A_i D_i - B_i^2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{i,3} = \begin{bmatrix} B_i \cos \varphi \\ A_i \cos \varphi \\ -\frac{\beta_i}{P} (A_i D_i - B_i^2) \end{bmatrix} \quad (7.184)$$

Ponieważ wartości własne są pojedynczymi pierwiastkami równania wiekowego, stąd COUJ jest kombinacją liniową o następującej postaci:

$$\mathbf{y}_{i,og} = \sum_{k=1}^3 C_{i,k} e^{\beta_{i,k} x} \mathbf{y}_{i,k} = C_{i,1} \mathbf{y}_{i,1} + C_{i,2} e^{\beta_i x} \mathbf{y}_{i,2} + C_{i,3} e^{-\beta_i x} \mathbf{y}_{i,3} \quad (7.185)$$

Rozwiązania szczególne układu niejednorodnego możemy z łatwością przewidzieć w postaci funkcji wielomianowych:

$$\mathbf{y}_{1,sc} = \begin{bmatrix} \frac{P \cos \varphi}{A_1} x_1 \\ \text{tg } \varphi \\ x_1 \text{tg } \varphi - \frac{B_1}{A_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{2,sc} = \begin{bmatrix} \frac{P \cos \varphi}{A_2} x_2 \\ \text{tg } \varphi \\ (x_2 - L_2) \text{tg } \varphi - \frac{B_2}{A_2} \end{bmatrix} \quad (7.186)$$

Możemy zatem ostatecznie napisać:

$$\begin{aligned} u_{1,0}(x_1) &= c_1 + B_1 \cos \varphi [c_2 e^{\beta_1 x_1} + c_3 e^{-\beta_1 x_1}] + \frac{P \cos \varphi}{A_1} x_1 \\ \phi_{1,0}(x_1) &= A_1 \cos \varphi [c_2 e^{\beta_1 x_1} + c_3 e^{-\beta_1 x_1}] + \operatorname{tg} \varphi \\ w_{1,0}(x_1) &= \frac{\beta_1}{P} (A_1 D_1 - B_1^2) [c_2 e^{\beta_1 x_1} - c_3 e^{-\beta_1 x_1}] + x_1 \operatorname{tg} \varphi - \frac{B_1}{A_1} \end{aligned} \quad (7.187)$$

$$\begin{aligned} u_{2,0}(x_2) &= c_4 + B_2 \cos \varphi [c_5 e^{\beta_2 x_2} + c_6 e^{-\beta_2 x_2}] + \frac{P \cos \varphi}{A_2} x_2 \\ \phi_{2,0}(x_2) &= A_2 \cos \varphi [c_5 e^{\beta_2 x_2} + c_6 e^{-\beta_2 x_2}] + \operatorname{tg} \varphi \\ w_{2,0}(x_2) &= \frac{\beta_2}{P} (A_2 D_2 - B_2^2) [c_5 e^{\beta_2 x_2} - c_6 e^{-\beta_2 x_2}] + (x_2 - L_2) \operatorname{tg} \varphi - \frac{B_2}{A_2} \end{aligned} \quad (7.188)$$

Stałe całkowania  $c_1, \dots, c_6$  wyznacza się wraz ze stałymi całkowania rozwiązań ogólnych dla przedziału środkowego na podstawie statycznych i kinematycznych warunków brzegowych oraz warunków zszycia na krańcach przedziałów.

Zapiszemy teraz równania rządzące deformacją elementów złącza w obszarze klejenia. Równania równowagi sił przekrojowych muszą w tym przypadku uwzględniać obecność naprężenia stycznego na interfejsie ze skleiną. Mają one taką samą postać jak w pozostałych modelach belkowych (przy założeniu, że naprężenia styczne redukuje się na interfejsie, nie zaś w środku wysokości skleiny):

$$\frac{dN_1}{dx} + \tau = 0, \quad \frac{dN_2}{dx} - \tau = 0 \quad (7.189)$$

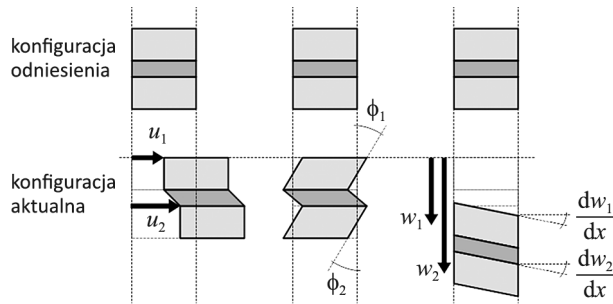
$$\frac{dQ_1}{dx} + p = 0, \quad \frac{dQ_2}{dx} - p = 0 \quad (7.190)$$

$$\frac{dM_1}{dx} - Q_1 + \tau \frac{h_1}{2} = 0, \quad \frac{dM_2}{dx} - Q_2 + \tau \frac{h_2}{2} = 0 \quad (7.191)$$

Jeśli chodzi o naprężenie styczne w skleinie, to zakładając liniowy związek konstytutywny oraz kinematykę prostego ścinania (tak jak w większości omawianych modeli), możemy napisać:

$$\begin{aligned} \tau &= G_a \gamma = \frac{G_a}{t} (u_{2,T} - u_{1,B}) = \\ &= \frac{G_a}{t} \left[ (u_2 - u_1) + \left( \phi_2 \frac{h_2}{2} + \phi_1 \frac{h_1}{2} \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dx} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.192)$$

gdzie:  $u_{1,B}$  oznacza przemieszczenie osiowe dolnej powierzchni górnego elementu; a  $u_{2,T}$  to przemieszczenie osiowe górnej powierzchni środkowego elementu. Powyższy związek różni się od analogicznych związków w alternatywnych modelach tym, że wyznaczając przemieszczenie względne górnej i dolnej powierzchni sklejiny, uwzględnia nie tylko przemieszczenia podłużne  $u_i$  i kąty obrotu  $\phi_i$  przekrojów poprzecznych elementów łączonych, ale również przesunięcie względne tych powierzchni, wynikające z przyrostu ugięcia elementów, który w przypadku belki Timoshenki–Ehrenfesta może być różny od obrotu ich przekrojów poprzecznych. W pracy (Yang i Pang 1996) założono, że przyrost ugięcia sklejiny jest średnią arytmetyczną przyrostów ugięcia przylegających do niej elementów, zaś rozkład przemieszczeń wynikających z tego obrotu jest liniowy w obrębie sklejiny. Wynika z tego, że przemieszczenie względne jest proporcjonalne do grubości sklejiny (rys. 39). Warto zwrócić uwagę, że efekt ten nie zawsze jest uwzględniany w modelach posługujących się modelem Timoshenki–Ehrenfesta (por. Delale i in. 1980).



Rys. 39. Wpływ przemieszczeń osiowych, obrotów i ugięć na deformację postaciową sklejiny

Związek konstytutywny dla poprzecznego naprężenia normalnego w sklejnie (naprężenia odrywającego) również formułujemy analogicznie jak w alternatywnych propozycjach:

$$p = \frac{E_a}{t} (w_2 - w_1) \quad (7.193)$$

Podstawiając związki konstytutywne (7.192), (7.193) i (7.175)–(7.177) do równań równowagi (7.189)–(7.191), otrzymujemy układ równań rządzących zagadnieniem:

$$A_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} - B_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \frac{G_a}{t} \left[ (u_2 - u_1) + \left( \phi_2 \frac{h_2}{2} + \phi_1 \frac{h_1}{2} \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dx} \right) \right] = 0 \quad (7.194)$$

$$A_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} - B_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} - \frac{G_a}{t} \left[ (u_2 - u_1) + \left( \phi_2 \frac{h_2}{2} + \phi_1 \frac{h_1}{2} \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dx} \right) \right] = 0 \quad (7.195)$$

$$K_1 \left( \frac{d^2 w_1}{dx^2} - \frac{d\phi_1}{dx} \right) + \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} (w_2 - w_1) = 0 \quad (7.196)$$

$$K_2 \left( \frac{d^2 w_2}{dx^2} - \frac{d\phi_2}{dx} \right) - \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} (w_2 - w_1) = 0 \quad (7.197)$$

$$B_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} - D_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} - K_1 \left( \frac{dw_1}{dx} - \phi_1 \right) + \frac{G_a}{2} \frac{h_1}{t} \left[ (u_2 - u_1) + \left( \phi_2 \frac{h_2}{2} + \phi_1 \frac{h_1}{2} \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dx} \right) \right] = 0 \quad (7.198)$$

$$B_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} - D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} - K_2 \left( \frac{dw_2}{dx} - \phi_2 \right) + \frac{G_a}{2} \frac{h_2}{t} \left[ (u_2 - u_1) + \left( \phi_2 \frac{h_2}{2} + \phi_1 \frac{h_1}{2} \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dx} \right) \right] = 0 \quad (7.199)$$

Rozwiązanie układu powyższych równań wraz z rozwiązaniami (7.187) i (7.188) musi ponadto spełniać warunki brzegowe i warunki zszycia, na podstawie których wyznaczone są stałe całkowania. Warunki te są następujące:

- **kinematyczne warunki brzegowe:**

$$\begin{cases} w_{1,0}(x_1 = 0) = 0 \\ u_{1,0}(x_1 = 0) = 0 \\ w_{2,0}(x_2 = L_2) = 0 \end{cases} \quad (7.200)$$

- **statyczne warunki brzegowe:**

$$\begin{cases} N_1(x = L) = 0 \\ Q_1(x = L) = 0, \\ M_1(x = L) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N_2(x = 0) = 0 \\ Q_2(x = 0) = 0 \\ M_2(x = 0) = 0 \end{cases} \quad (7.201)$$

- **warunki zszycia:**

- **warunki zgodności przemieszczeń:**

$$\begin{cases} u_{1,0}(x_1 = L_1) = u_1(x = 0) \\ \phi_{1,0}(x_1 = L_1) = \phi_1(x = 0), \\ w_{1,0}(x_1 = L_1) = w_1(x = 0) \end{cases} \quad \begin{cases} u_{2,0}(x_2 = 0) = u_2(x = L) \\ \phi_{2,0}(x_2 = 0) = \phi_2(x = L) \\ w_{2,0}(x_2 = 0) = w_2(x = L) \end{cases} \quad (7.202)$$

○ równowaga sił przekrojowych:

$$\begin{cases} N_{1,0}(x_1 = L_1) = N_1(x = 0) = P \cos \varphi \\ Q_{1,0}(x_1 = L_1) = Q_1(x = 0) = P \left[ \sin \varphi - \frac{dw_{1,0}}{dx_1} \Big|_{L_1} \cos \varphi \right] \\ M_{1,0}(x_1 = L_1) = M_1(x = 0) = P[L_1 \sin \varphi - w_{1,0}(L_1) \cos \varphi] \end{cases} \quad (7.203)$$

$$\begin{cases} N_{2,0}(x_2 = 0) = N_2(x = L) = P \cos \varphi \\ Q_{2,0}(x_2 = 0) = Q_2(x = L) = P \left[ \sin \varphi - \frac{dw_{2,0}}{dx} \Big|_0 \cos \varphi \right] \\ M_{2,0}(x_2 = 0) = M_2(x = L) = -P[L_2 \sin \varphi + w_{2,0}(0) \cos \varphi] \end{cases} \quad (7.204)$$

Rozwiązania obowiązujące poza obszarem klejenia wyznaczone są z dokładnością do sześciu stałych całkowania, zaś rozwiązanie obowiązujące w obszarze klejenia zależec będzie od 12 stałych całkowania (sześć niewiadomych funkcji, układ drugiego rzędu). Wymaga się zatem, aby wyznaczyć 18 stałych całkowania na podstawie 21 warunków (7.198)–(7.201), z których jednak część jest liniowo zależna od pozostałych. Z równań (7.187) wynika, że pochodne rozkładów sił osiowych w elementach łączonych różnią się jedynie znakami. Jeśli zatem rozkład siły w jednym elemencie jest wyznaczony jednoznacznie, to rozkład w elemencie drugim wyznaczony jest z dokładnością do stałej, co wymaga tylko jednego warunku brzegowego, a nie dwóch. To samo dotyczy związanych równaniami (7.188) rozkładów sił poprzecznych.

Sformułowanie dane równaniami (7.194)–(7.199) różni się nieco od przedstawionego w pracy (Yang i Pang 1996). Autorzy omawianej propozycji w zaprezentowanym układzie równań nie wykorzystali bowiem związku konstytutywnego (7.193), pozostawiając w równaniach naprężenie odrywające  $p$  jako część niejednorodną układu, a następnie poszukując przybliżonego rozwiązania układu niejednorodnego przez rozwinięcie  $p(x)$  w szereg cosinusów. Dokładność tak uzyskanego rozwiązania zależy od liczby uwzględnionych wyrazów szeregu. Pominięcie dalszych wyrazów wymaga ponadto specyficznych zabiegów w celu zapewnienia równowagi sił wewnętrznych.

Wydaje się jednak, że słuszniejsze jest tutaj poszukiwanie ścisłego rozwiązania, tym bardziej że znane są metody jego wyznaczenia. Jedną z tych metod jest metoda uogólnionych wektorów własnych, która jest omówiona szczegółowo w podrozdziale 8.1, poświęconym autorskiemu modelowi belki kompozytowej. W przypadku ogólnym (laminaty niesymetryczne, złącze niesymetryczne) konieczne jest numeryczne wyznaczenie wartości własnych macierzy współczynników w jednorodnym układzie liniowym pierwszego rzędu oraz uogólnionych wektorów własnych,

niemniej samą postać funkcyjną rozkładów przemieszczeń można zapisać wtedy analitycznie.

Ścisłe rozwiązanie analityczne przedstawimy dla przypadku **elementów jednorodnych** ( $B_1 = B_2 = 0$ ) w **złączu symetrycznym**, czyli gdy:

$$A_1 = A_2 = A, \quad D_1 = D_2 = D, \quad K_1 = K_2 = K$$

$$h_1 = h_2 = h, \quad L_1 = L_2 = L_0$$

Układ równań (7.194)–(7.199) można w takim przypadku sprowadzić do układu liniowego pierwszego rzędu o następującej postaci:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (7.205)$$

gdzie:

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}]^T$$

$$\mathbf{y}' = [y'_1, y'_2, y'_3, y'_4, y'_5, y'_6, y'_7, y'_8, y'_9, y'_{10}, y'_{11}, y'_{12}]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{G_a}{At} & 0 & -\frac{G_a h}{2At} & 0 & 0 & -\frac{G_a}{2A} & -\frac{G_a}{At} & 0 & -\frac{G_a h}{2At} & 0 & 0 & -\frac{G_a}{2A} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{G_a h}{2Dt} & 0 & \frac{4Kt + G_a h^2}{4Dt} & 0 & 0 & \frac{G_a h - 4K}{4D} & \frac{G_a h}{2Dt} & 0 & \frac{G_a h^2}{4Dt} & 0 & 0 & \frac{G_a h}{4D} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{E_a}{Kt} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_a}{Kt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{G_a}{At} & 0 & \frac{G_a h}{2At} & 0 & 0 & \frac{G_a}{2A} & \frac{G_a}{At} & 0 & \frac{G_a h}{2At} & 0 & 0 & \frac{G_a}{2A} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{G_a h}{2Dt} & 0 & \frac{G_a h^2}{4Dt} & 0 & 0 & \frac{G_a h}{4D} & \frac{G_a h}{2Dt} & 0 & \frac{4Kt + G_a h^2}{4Dt} & 0 & 0 & \frac{G_a h - 4K}{4D} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_a}{Kt} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{E_a}{Kt} & 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = u_1, \quad y_2 = \frac{du_1}{dx}, \quad y_3 = \phi_1, \quad y_4 = \frac{d\phi_1}{dx}, \quad y_5 = w_1, \quad y_6 = \frac{dw_1}{dx},$$

$$y_7 = u_2, \quad y_8 = \frac{du_2}{dx}, \quad y_9 = \phi_2, \quad y_{10} = \frac{d\phi_2}{dx}, \quad y_{11} = w_2, \quad y_{12} = \frac{dw_2}{dx}$$

Równanie wiekowe dla macierzy współczynników jest następujące:

$$X^6 \left[ X^2 - \left( \frac{G_a h(h+t)}{2Dt} + \frac{2G_a}{At} \right) \right] \left[ X^4 - \frac{2E_a}{Kt} X^2 + \frac{2E_a}{Dt} \right] = 0 \quad (7.206)$$

Wśród wartości własnych macierzy współczynników mamy sześciokrotną zerową wartość własną:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0 \quad (7.207)$$

Z uwagi na dodatniość parametrów zadania kolejne dwie jednokrotne wartości własne mogą być wyznaczone następująco:

$$\lambda_7 = -\lambda_8 = \sqrt{\frac{G_a h^2}{2Dt} + \frac{2G_a}{At}} > 0 \quad (7.208)$$

Ostatnie cztery wartości własne są pierwiastkami równania dwukwadratowego. Z uwagi na dodatniość parametrów zadania mogą tu zajść w praktyce tylko dwie sytuacje:

- Przypadek 1:  $\frac{2K^2 t}{DE_a} < 1$

Otrzymujemy cztery różne rzeczywiste wartości własne:

$$\lambda_9 = -\lambda_{10} = \sqrt{\frac{E_a}{Kt} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2K^2 t}{DE_a}} \right]} > 0 \quad (7.209)$$

$$\lambda_{11} = -\lambda_{12} = \sqrt{\frac{E_a}{Kt} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{2K^2 t}{DE_a}} \right]} > 0$$

- Przypadek 2:  $\frac{2K^2 t}{DE_a} > 1$

Otrzymujemy dwie pary sprzężonych pierwiastków:

$$\lambda_9 = \bar{\lambda}_{10} = -\lambda_{11} = -\bar{\lambda}_{12} = \sqrt[4]{\frac{E_a}{2Dt} \left[ \sqrt{1 + \sqrt{\frac{DE_a}{2K^2 t}}} + i \sqrt{1 - \sqrt{\frac{DE_a}{2K^2 t}}} \right]} \quad (7.210)$$

Przypadek, w którym  $2K^2 t = DE_a$ , świadomie pomijamy z uwagi na skończoną dokładność wyznaczania liczbowych wartości parametrów zadania. Dla rzeczywistych wartości parametrów zadania, odpowiadających sytuacji, gdy sztywność

skleiny na ścinanie jest istotnie mniejsza od sztywności elementów łączonych na zginanie, zachodzi drugi z wyżej wymienionych przypadków.

Pojedynczym wartościom własnym odpowiadają wektory własne, określone z dokładnością do skalarą. Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\alpha_1 = \frac{h A}{2 D}, \quad \alpha_2 = \frac{t D}{2 E_a}, \quad \alpha_3 = \frac{t+h}{2},$$

$$\alpha_4 = \frac{Ah(h+t)+4D}{4K}, \quad \alpha_5 = t \left[ \frac{Ah(h+t)+4D}{4K} - \frac{A(h+t)}{2G_a} \right] \quad (7.211)$$

Wektory własne odpowiadające pojedynczym wartościom własnym można przedstawić w następujący sposób:

$$\mathbf{v}_7 = [\lambda_7, \lambda_7^2, -\alpha_1 \lambda_7, -\alpha_1 \lambda_7^2, -\alpha_1, -\alpha_1 \lambda_7, -\lambda_7, -\lambda_7^2, -\alpha_1 \lambda_7, -\alpha_1 \lambda_7^2, -\alpha_1, -\alpha_1 \lambda_7]$$

$$\mathbf{v}_8 = [\lambda_8, \lambda_8^2, -\alpha_1 \lambda_8, -\alpha_1 \lambda_8^2, -\alpha_1, -\alpha_1 \lambda_8, -\lambda_8, -\lambda_8^2, -\alpha_1 \lambda_8, -\alpha_1 \lambda_8^2, -\alpha_1, -\alpha_1 \lambda_8]$$

$$\mathbf{v}_9 = [0, 0, 1, \lambda_9, -\alpha_2 \lambda_9^3, -\alpha_2 \lambda_9^4, 0, 0, -1, -\lambda_9, \alpha_2 \lambda_9^3, \alpha_2 \lambda_9^4]$$

$$\mathbf{v}_{10} = [0, 0, 1, \lambda_{10}, -\alpha_2 \lambda_{10}^3, -\alpha_2 \lambda_{10}^4, 0, 0, -1, -\lambda_{10}, \alpha_2 \lambda_{10}^3, \alpha_2 \lambda_{10}^4]$$

$$\mathbf{v}_{11} = [0, 0, 1, \lambda_{11}, -\alpha_2 \lambda_{11}^3, -\alpha_2 \lambda_{11}^4, 0, 0, -1, -\lambda_{11}, \alpha_2 \lambda_{11}^3, \alpha_2 \lambda_{11}^4]$$

$$\mathbf{v}_{12} = [0, 0, 1, \lambda_{12}, -\alpha_2 \lambda_{12}^3, -\alpha_2 \lambda_{12}^4, 0, 0, -1, -\lambda_{12}, \alpha_2 \lambda_{12}^3, \alpha_2 \lambda_{12}^4] \quad (7.212)$$

Podprzestrzeń własna odpowiadająca zerowej wartości własnej o krotności  $k = 6$  ma wymiar  $m = 2$ . Sześć uogólnionych wektorów własnych odpowiadających tej wartości własnej tworzy kolekcję złożoną z dwóch łańcuchów tych wektorów:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{1,1,1} = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] \\ \mathbf{v}_{1,1,2} = [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] \end{array} \right\} \quad (7.213)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{1,2,1} = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0] \\ \mathbf{v}_{1,2,2} = [\alpha_3, 0, 1, 0, 0, 1, -\alpha_3, 0, 1, 0, 0, 1] \\ \mathbf{v}_{1,2,3} = [0, \alpha_3, 0, 1, -\alpha_4, 0, 0, -\alpha_3, 0, 1, -\alpha_4, 0] \\ \mathbf{v}_{1,2,4} = [-\alpha_5, 0, 0, 0, 0, -\alpha_4, 0, 0, 0, 0, 0, -\alpha_4] \end{array} \right\} \quad (7.214)$$

Funkcje będące rozwiązaniami jednorodnego układu równań (7.205) i odpowiadające zerowym wartościom własnym są równe:

$$\mathbf{y}_{1,1}(x) = [c_7 \mathbf{v}_{1,1,1} + c_8 (x \mathbf{v}_{1,1,1} + \mathbf{v}_{1,1,2})] e^{\lambda_1 x}$$



$$\mathbf{y}_{1,2}(x) = \left[ c_9 \mathbf{v}_{1,2,1} + c_{10} (x \mathbf{v}_{1,2,1} + \mathbf{v}_{1,2,2}) + c_{11} \left( \frac{x^2}{2} \mathbf{v}_{1,2,1} + x \mathbf{v}_{1,2,2} + \mathbf{v}_{1,2,3} \right) + c_{12} \left( \frac{x^3}{6} \mathbf{v}_{1,2,1} + \frac{x^2}{2} \mathbf{v}_{1,2,2} + x \mathbf{v}_{1,2,3} + \mathbf{v}_{1,2,4} \right) \right] e^{\lambda_1 x} \quad (7.215)$$

Funkcje spełniające układ równań (7.205) i odpowiadające wartościom własnym  $\lambda_7$  i  $\lambda_8$  są następujące:

$$\mathbf{y}_7(x) = c_{13} e^{\lambda_7 x} \mathbf{v}_7, \quad \mathbf{y}_8(x) = c_{14} e^{\lambda_8 x} \mathbf{v}_8 \quad (7.216)$$

Postać funkcji będących rozwiązaniami układu równań (7.205), które odpowiadają pozostałym pojedynczym wartościom własnym, zależy od tego, czy wartości te są wartościami rzeczywistymi czy też zespolonymi. W przypadku rzeczywistych wartości własnych mamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_9(x) &= c_{15} e^{\lambda_9 x} \mathbf{v}_9, & \mathbf{y}_{10}(x) &= c_{16} e^{\lambda_{10} x} \mathbf{v}_{10} \\ \mathbf{y}_{11}(x) &= c_{17} e^{\lambda_{11} x} \mathbf{v}_{11}, & \mathbf{y}_{12}(x) &= c_{18} e^{\lambda_{12} x} \mathbf{v}_{12} \end{aligned} \quad (7.217)$$

W przypadku zespolonych wartości własnych zachodzi  $\mathbf{v}_9 = \bar{\mathbf{v}}_{10}$  oraz  $\mathbf{v}_{11} = \bar{\mathbf{v}}_{12}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_9(x) &= c_{15} e^{\Re(\lambda_9)x} [\cos(\Im(\lambda_9)x) \Re(\mathbf{v}_9) - \sin(\Im(\lambda_9)x) \Im(\mathbf{v}_9)] \\ \mathbf{y}_{10}(x) &= c_{16} e^{\Re(\lambda_9)x} [\cos(\Im(\lambda_9)x) \Im(\mathbf{v}_9) + \sin(\Im(\lambda_9)x) \Re(\mathbf{v}_9)] \\ \mathbf{y}_{11}(x) &= c_{17} e^{\Re(\lambda_{11})x} [\cos(\Im(\lambda_{11})x) \Re(\mathbf{v}_{11}) - \sin(\Im(\lambda_{11})x) \Im(\mathbf{v}_{11})] \\ \mathbf{y}_{12}(x) &= c_{18} e^{\Re(\lambda_{11})x} [\cos(\Im(\lambda_{11})x) \Im(\mathbf{v}_{11}) + \sin(\Im(\lambda_{11})x) \Re(\mathbf{v}_{11})] \end{aligned} \quad (7.218)$$

Całka ogólna układu równań jednorodnych jest zatem równa:

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_{1,1}(x) + \mathbf{y}_{1,2}(x) + \sum_{j=7}^{12} \mathbf{y}_j(x) \quad (7.219)$$

W celu zapisania warunków (7.200)–(7.204) trzeba wyrazić siły przekrojowe za pomocą składowych rozwiązania (7.219):

$$\begin{aligned} N_1 &= Ay_2, & Q_1 &= K(y_6 - y_3), & M_1 &= -Dy_4 \\ N_2 &= Ay_8, & Q_2 &= K(y_{12} - y_9), & M_2 &= -Dy_{10} \end{aligned} \quad (7.220)$$

Stałe całkowania  $c_1, \dots, c_{18}$  wyznacza się jako rozwiązanie odpowiedniego układu równań algebraicznych. Z uwagi na rozmiar układu oraz znaczną liczbę parametrów zadania, od których zależą współczynniki przy niewiadomych w tym układzie, wyrażenie stałych całkowania za pomocą zamkniętych wzorów jest niezwykle trudne i niepraktyczne.

### 7.3. Modele dwuwymiarowe

W podejściach omawianych w poprzednich podrozdziałach kluczowym ich aspektem było założenie dotyczące kinematyki elementów łączonych oraz związków konstytutywnych odpowiadających przyjętym miarom deformacji. W przypadku modelu prętowego przyjęto, że wystarczająca do opisu deformacji złącza jest znajomość samych tylko przemieszczeń osiowych, które wiązały się z siłami osiowymi za pomocą liniowego związku konstytutywnego uogólnionego prawa Hooke'a dla stanu jednoosiowego. W przypadku modelu belkowego założenie hipotezy płaskich przekrojów Bernoulliego pozwoliło na opis deformacji w kategoriach przemieszczeń podłużnych i ugięć oraz na sformułowanie liniowego związku między krzywizną ugięcia i momentem zginającym. W obydwu modelach założono, że skleina podlega prostemu ścinaniu. W każdym z nich sformułowanie matematyczne problemu fizycznego sprowadza się do zagadnienia jednowymiarowego, danego równaniem różniczkowym zwyczajnym, którego rozwiązanie określa rozkład poszukiwanych wielkości wzdłuż osi złącza – zmienność tych wielkości na kierunkach prostopadłych do osi złącza określona jest przez założoną z góry kinematykę deformacji.

Możliwe jest jednak podejście odmienne, w którym rozważa się **ogólny przypadek deformacji dwuwymiarowej** (płaski stan naprężenia lub płaski stan odkształcenia). Równaniami wyznaczającymi charakter rozkładu przestrzennego składowych tensora naprężenia w poszczególnych elementach złącza są **równania lokalnej równowagi naprężeń w płaszczyźnie przekroju podłużnego złącza**. Są to zatem **równania różniczkowe cząstkowe**, które wraz ze stosownymi związkami konstytutywnymi oraz warunkami brzegowymi określają **dwuwymiarowy rozkład składowych tensora naprężenia i tensora odkształcenia**. Za pomocą stosunkowo ogólnych założeń dotyczących stanu naprężenia równania te można scałkować względem współrzędnych na kierunku poprzecznym do osi złącza. W rezultacie wyprowadza się równania różniczkowe zwyczajne, pozwalające wyznaczyć rozkład wszystkich poszukiwanych naprężeń i odkształceń w płaszczyźnie zagadnienia. Sformułowanie matematyczne problemu okazuje się w takim przypadku znacznie bardziej złożone niż w modelach prętowych i belkowych – umożliwia jednak opis zjawisk, których uwzględnienie w modelach prostszych jest niemożliwe. Wśród nich należy wymienić przede wszystkim:

- **jednorodne warunki brzegowe na swobodnym brzegu skleiny** prostopadłym do osi złącza – w rozwiązaniach wyprowadzonych z obydwu omawianych uprzednio modeli można zauważyć, że brzegowe wartości naprężenia stycznego są różne od zera. Rząd równań różniczkowych (7.15) i (7.76) uniemożliwia uwzględnienie dodatkowych jednorodnych warunków brzegowych na brzegu swobodnym. Ścianka warstwy skleiny prostopadła do osi złącza jest przecież brzegiem nieobciążonym, co wymusza zerowanie się naprężeń

normalnych i stycznych do brzegu – w tym przypadku naprężeń ścinających skleinę;

- **deformację postaciową elementów łączonych** – prostota matematycznego sformułowania zagadnienia we wcześniej omawianych modelach wynikała z założenia specyficznego charakteru deformacji elementów łączonych, skutkującego obecnością jedynie odkształceń liniowych – świadomie pomijano udział odkształceń postaciowych. Bardziej ogólne modele nie mają tego ograniczenia;
- **odkształcenia liniowe prostopadłe do płaszczyzny skleiny w elementach łączonych** – w modelach uproszczonych obecność poprzecznych naprężeń normalnych rozpatrywana była jedynie w kontekście naprężeń odrywających na interfejsie skleiny i elementów łączonych. Analiza płaskiego stanu naprężenia pozwala dodatkowo na wyznaczenie dwuwymiarowego pola poprzecznego naprężenia normalnego również w elementach łączonych;
- **anizotropię własności mechanicznych elementów łączonych** – zagadnienie ścinania złącza w modelach prostszych sformułowane jest w kategoriach sił przekrojowych w elementach łączonych i naprężeń w skleinie. Przy takim podejściu (lokalnym – w przekroju) nie jest możliwe uwzględnienie anizotropii lokalnych (w punkcie) związków konstytutywnych. Zamiast tego dopuszczano możliwość niezależnego określania sztywności podłużnej i sztywności giętnej, co miało odwzorowywać wpływ anizotropii materiału. W przypadku gdy zagadnienie sformułowane jest lokalnie w kategoriach naprężeń i odkształceń (w punkcie), anizotropia materiału może być uwzględniona w sposób ścisły.

### 7.3.1. Dwuwymiarowy model lokalny

W literaturze można znaleźć dwojakié podejście do dwuwymiarowej analizy stanu naprężenia i odkształcenia w złączach klejowych. Jednym z nich jest **podejście lokalne**, w którym równań rządzących zagadnieniem dostarcza **układ równań dwuwymiarowego zagadnienia teorii sprężystości** – wspomniane równania lokalnej równowagi naprężeń, związki kinematyczne i związki konstytutywne. Rozwiązań poszukuje się zatem w określonej klasie rozwiązań zagadnienia płaskiego.

Na uwagę zasługują prace W. Jamesa Rentona i Jacka R. Vinsona – raport (Renton i Vinson 1973) przygotowany dla Air Force Office of Scientific Research, którego treść została następnie opublikowana w artykule (Renton i Vinson 1977). Autorzy rozważali bardzo ogólny przypadek złącza, w którym elementy rozpatrywane były jako laminaty złożone z ortotropowych warstw, leżących w płaszczyznach, które w ogólności były nachylone względem płaszczyzny skleiny. Jedynymi ograniczeniami było to, aby układ warstw w laminacie był symetryczny względem płaszczyzny środkowej oraz aby zagadnienie było symetryczne względem płaszczyzny

prostopadłej do płaszczyzny skleiny i zawierającej oś złącza. Poza obciążeniami mechanicznymi autorzy uwzględnili również deformację termiczną. Wadą przedstawionego przez autorów rozwiązania jest jego bardzo duża złożoność – względnie zwarty zapis samych tylko równań rządzących zagadnieniem wymaga użycia około 60 współczynników, z których duża część wyraża się jako rozbudowane sumy całek oznaczonych. W propozycji modelu Rentona i Vinsona otrzymuje się równanie różniczkowe ósmego rzędu na rozkład naprężenia stycznego w skleinie – samo równanie zaś wyprowadza się, wykorzystując równania rządzące dwuwymiarowym zagadnieniem liniowej teorii sprężystości, a także z definicji sił przekrojowych, warunków równowagi tych sił oraz stosownych warunków brzegowych na naprężenia i siły przekrojowe.

### 7.3.2. Zastosowanie twierdzeń wariacyjnych w sformułowaniu globalnym

Alternatywnym podejściem do rozwiązania lokalnych równań rządzących dwuwymiarowym zagadnieniem teorii sprężystości jest wykorzystanie **sformułowania globalnego i zastosowanie twierdzeń wariacyjnych**, konkretnie zaś **twierdzenia Castigliano o minimum energii komplementarnej** (uzupełniającej). Tak wyznaczone rozwiązanie jest zatem **rozwiązaniem słabym**, które nie musi spełniać wszystkich równań lokalnego sformułowania dwuwymiarowego zagadnienia teorii sprężystości. Chodzi tu przede wszystkim o związki kinematyczne oraz kinematyczne warunki brzegowe, bowiem zastosowanie twierdzenia Castigliano wymaga wyznaczenia jedynie **statycznie dopuszczalnego pola naprężenia**, czyli takiego, które **spełnia równania równowagi i statyczne warunki brzegowe**. Zakłada się, że związki konstytutywne są spełnione, co umożliwi wyznaczenie pola odkształcenia odpowiadającego statycznie dopuszczalnemu polu naprężenia, jednakże tak wyznaczony stan odkształcenia w ogólności nie będzie odpowiadał jakimkolwiek rzeczywistemu polu przemieszczenia. Nie wymaga się bowiem, aby zostały spełnione warunki całkowalności związków kinematycznych – czyli warunki nierozdzielności odkształceń – przez co w przypadku ogólnym nie jest możliwe wyznaczenie w sposób jednoznaczny przemieszczeń, które dla wyznaczonego pola odkształceń spełniać będą związki kinematyczne.

Ogólny schemat analizy w takim przypadku zaczyna się od przyjęcia pewnych wstępnych założeń, dotyczących rozkładu stanu naprężenia na grubości elementów złącza, i wprowadzenia jednej lub kilka nieznanymi funkcji, które podlegać będą wyznaczeniu, a które wyznaczają ów stan. Składowe tensora naprężenia w każdym z elementów wyraża się za pomocą wprowadzonych funkcji na podstawie przyjętych założeń, lokalnych równań równowagi dla płaskiego stanu naprężenia oraz statycznych warunków brzegowych. Znajomość składowych tensora naprężenia pozwala wyznaczyć na podstawie przyjętych związków konstytutywnych składowe tensora odkształcenia, co z kolei umożliwia zapisanie wyrażenia na energię

komplementarną w postaci funkcjonału zależnego od niewiadomych funkcji i ich pochodnych. Funkcjonał ten ma postać całki objętościowej po całej konfiguracji złącza. Założenie z góry ogólnej postaci rozkładu naprężeń i odkształceń na grubości elementów pozwala w wyniku wspomnianego całkowania zredukować problem do zagadnienia jednowymiarowego. Poszukuje się następnie minimum odpowiedniego funkcjonału zgodnie z twierdzeniami wariacyjnymi – należy przy tym pamiętać, że **twierdzenia o minimum energii obowiązują jedynie dla układów liniowych**, co oznacza, że niedopuszczalne jest stosowanie ich w przypadku występowania dużych odkształceń lub w sytuacji, gdy któryś z materiałów wykazuje nieliniową charakterystykę mechaniczną. Ponieważ rozważa się **energię ciała odpowiadającą statycznie dopuszczalnemu polu naprężenia**, zatem odpowiednim twierdzeniem do zastosowania jest właśnie **twierdzenie Castigliano**. Standardowym podejściem w poszukiwaniu ekstremal funkcjonału tu zastosowanie podstawowych równań rachunku wariacyjnego, a mianowicie **równań Lagrange’a–Eulera**.

Tego typu podejście stosowało wielu autorów. W pracy (Allman 1977) rozwiązanie zagadnienia zostało uzależnione od dwóch funkcji naprężeń, do wyznaczenia których wykorzystano równania wyprowadzone z zastosowania twierdzenia Castigliano – uzyskano w rezultacie układ dwóch niejednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych czwartego rzędu na dwie nieznanne funkcje naprężeń. W pracach (Chen i Cheng 1983; Cheng i in. 1991) rozkład naprężenia zapisano, wykorzystując cztery pomocnicze funkcje – dwie z nich określają symetryczną (jednorodną) składową naprężenia normalnego w przekroju elementów łączonych, a dwie pozostałe – rozkład składowej antysymetrycznej (liniowo zmiennej). Rozkład naprężenia normalnego w przekroju jednego z elementów łączonych daje się przy tym wyrazić przez funkcje określające rozkład w drugim elemencie. Te dwie niezależne funkcje wyznacza się jako rozwiązanie układu dwóch niejednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych czwartego rzędu. We wcześniejszej pracy analizowano przypadek złącza symetrycznego, w pracy późniejszej zaś – złącza niesymetrycznego. Twierdzenie Castigliano zastosowano również w pracach Zhao, Z.-H. Lu oraz Y.-N. Lu. W artykule (Zhao i in. 2011) wyprowadzono układ dwóch jednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych piątego rzędu na funkcje określające rozkład naprężenia stycznego i poprzecznego naprężenia normalnego w skleinie. Tymczasem w pracy (Zhao i in. 2014) wyprowadzono układ czterech niejednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych czwartego rzędu na cztery funkcje, z których dwie są liniowo niezależnymi kombinacjami funkcji rozkładu momentu zginającego w elementach łączonych, dwie pozostałe zaś – analogicznymi kombinacjami funkcji rozkładu sił osiowych.

We wszystkich wspomnianych wyżej propozycjach otrzymany układ równań jest układem liniowym o stałych współczynnikach – rozwiązania tego typu układów można znaleźć za pomocą metody uogólnionych wektorów własnych, która zostanie bardziej szczegółowo omówiona w podrozdziale 8.1.1, poświęconym

wyznaczaniu analitycznego rozwiązania dla równań rządzących zagadnieniem zginania wielowarstwowej belki kompozytowej.

Zastosowanie analizy dwuwymiarowego rozkładu stanu naprężenia wraz z wykorzystaniem twierdzeń wariacyjnych omówione zostanie szczegółowo na przykładzie propozycji Allmana. Punktem wyjścia będą dla nas **równania równowagi w dwuwymiarowym zagadnieniu liniowej teorii sprężystości**:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(K)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(K)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}^{(K)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(K)}}{\partial z} = 0 \quad (7.221)$$

gdzie: indeks  $K = 1, 2$  określa element łączony, w którym dana funkcja określa rozkład naprężenia. Podstawowe **założenia dotyczące rozkładu naprężeń na wysokości przekroju** są następujące:

1. **osiowe naprężenie normalne** w elementach łączonych ma rozkład **liniowy**,
2. **naprężenie styczne w elementach łączonych** ma rozkład **kwadratowy**,
3. **poprzeczne naprężenie normalne w elementach łączonych** ma rozkład **sześcienne**,
4. **naprężenie styczne w skleinie** ma rozkład **stały**,
5. **poprzeczne naprężenie normalne w skleinie** ma rozkład **liniowy**.

Założenia 2 i 3 wynikają wprost z założenia 1 oraz z równań równowagi (7.221). Jeśli bowiem przyjmiemy:

$$\sigma_{xx}^{(K)}(x, z) = z \cdot A_K(x) + B_K(x) \quad (7.222)$$

wtedy z pierwszego z równań równowagi otrzymamy:

$$\tau_{xz}^{(K)}(x, z) = -\int \frac{\partial \sigma_{xx}^{(K)}}{\partial x} dz = -\frac{z^2}{2} \cdot \frac{dA_K}{dx} - z \cdot \frac{dB_K}{dx} - C_K(x) \quad (7.223)$$

natomiast z drugiego:

$$\sigma_{zz}^{(K)}(x, z) = -\int \frac{\partial \tau_{xz}^{(K)}}{\partial x} dz = -\frac{z^3}{6} \cdot \frac{d^2 A_K}{dx^2} + \frac{z^2}{2} \cdot \frac{d^2 B_K}{dx^2} + z \cdot \frac{dC_K}{dx} + D_K(x) \quad (7.224)$$

Funkcje  $A_K(x), \dots, D_K(x)$  można wyrazić przez funkcje rozkładu sił przekrojowych, wykorzystując definicje sił przekrojowych oraz statyczne warunki brzegowe. Wprowadźmy teraz **definicje sił przekrojowych**:

- **siła osiowa** w  $K$ -tym elemencie łączonym:

$$N_K(x) = \int_{-h_{K/2}}^{h_{K/2}} \sigma_{xx}^{(K)}(x, z_K) dz_K \quad (7.225)$$

- **siła poprzeczna** w  $K$ -tym elemencie łączonym:

$$Q_K(x) = \int_{-h_K/2}^{h_K/2} \tau_{xz}^{(K)}(x, z_K) dz_K \quad (7.226)$$

- **moment zginający** w  $K$ -tym elemencie łączonym:

$$M_K(x) = \int_{-h_K/2}^{h_K/2} z_K \cdot \sigma_{xx}^{(K)}(x, z_K) dz_K \quad (7.227)$$

Podstawiając wyrażenie (7.222) do definicji (7.225) i (7.227), otrzymamy:

$$\int_{-h_K/2}^{h_K/2} \sigma_{xx}^{(K)}(x, z_K) dz_K = \int_{-h_K/2}^{h_K/2} [z_K \cdot A_K + B_K] dz_K = h_K B_K = N_K$$

$$\int_{-h_K/2}^{h_K/2} z_K \cdot \sigma_{xx}^{(K)}(x, z_K) dz_K = \int_{z=-h_K/2}^{h_K/2} [z_K^2 \cdot A_K + z_K \cdot B_K] dz_K = \frac{h_K^3}{12} A_K = M_K$$

stąd:

$$\sigma_{xx}^{(K)} = 6 \frac{M_K(x)}{h_K^2} \zeta_K + \frac{N_K(x)}{h_K}, \quad \text{gdzie: } \zeta_K = \frac{2z_K}{h_K} \quad (7.228)$$

Jeśli chodzi o rozkład naprężenia stycznego i poprzecznego naprężenia normalnego, konieczne jest uwzględnienie statycznych warunków brzegowych na powierzchniach zewnętrznych elementów łączonych:

- **warunki brzegowe na naprężenie styczne:**

- element górny:

$$\tau_{xz}^{(1)}\left(x, z = -\frac{h_1}{2}\right) = 0, \quad \tau_{xz}^{(1)}\left(x, z = +\frac{h_1}{2}\right) = \tau_a(x) \quad (7.229)$$

- element dolny:

$$\tau_{xz}^{(2)}\left(x, z = -\frac{h_2}{2}\right) = \tau_a(x), \quad \tau_{xz}^{(2)}\left(x, z = +\frac{h_2}{2}\right) = 0 \quad (7.230)$$

- **warunki brzegowe na poprzeczne naprężenie normalne:**

- element górny:

$$\sigma_{zz}^{(1)}\left(x, z = -\frac{h_1}{2}\right) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(1)}\left(x, z = +\frac{h_1}{2}\right) = p_1(x) \quad (7.231)$$

- element dolny:

$$\sigma_{zz}^{(2)}\left(x, z = -\frac{h_2}{2}\right) = p_2(x), \quad \sigma_{zz}^{(2)}\left(x, z = +\frac{h_2}{2}\right) = 0 \quad (7.232)$$

Wykorzystując wyrażenie (7.228) w związkach (7.223) i (7.224), otrzymamy w wyniku pochodne rozkładu siły osiowej i momentu zginającego. Pochodne te można oczywiście wyrazić za pomocą pozostałych sił przekrojowych, wykorzystując lokalne równania równowagi sił przekrojowych. Dla sił przekrojowych określonych wzorami (7.225)–(7.227) mają one postać analogiczną do związków (7.51)–(7.56), jedynie z zastrzeżeniem dotyczącym ramienia momentu wypadkowej naprężeń stycznych, tak samo jak zostało to powiedziane przy omawianiu modelu Bigwooda i Crocombe'a:

- **równowaga sił osiowych:**

$$\frac{dN_1}{dx} + \tau_a = 0 \quad (7.233)$$

$$\frac{dN_2}{dx} - \tau_a = 0 \quad (7.234)$$

- **równowaga sił poprzecznych:**

$$\frac{dQ_1}{dx} + p_1 = 0 \quad (7.235)$$

$$\frac{dQ_2}{dx} - p_2 = 0 \quad (7.236)$$

- **równowaga momentów:**

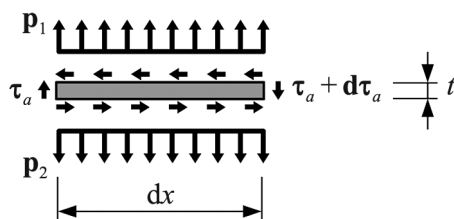
$$\frac{dM_1}{dx} - Q_1 + \tau_a \frac{h_1}{2} = 0 \quad (7.237)$$

$$\frac{dM_2}{dx} - Q_2 + \tau_a \frac{h_2}{2} = 0 \quad (7.238)$$



Również dla skleiny możemy zapisać warunek równowagi sił poprzecznych (rys. 40):

$$\frac{d\tau_a}{dx}t + (p_2 - p_1) = 0 \quad (7.239)$$



Rys. 40. Równowaga sił poprzecznych w skleinie

Wykorzystanie równań równowagi (7.237) i (7.238) w wyrażeniu (7.223) daje nam:

$$\tau_{xz}^{(1)}(x, z) = -\frac{6Q_1}{h_1^3}z_1^2 + \tau_a \left[ 3\left(\frac{z_1}{h_1}\right)^2 + \frac{z_1}{h_1} \right] - C_1 \quad (7.240)$$

$$\tau_{xz}^{(2)}(x, z) = -\frac{6Q_2}{h_2^3}z_2^2 + \tau_a \left[ 3\left(\frac{z_2}{h_2}\right)^2 - \frac{z_2}{h_2} \right] - C_2 \quad (7.241)$$

Warunki (7.229) i (7.230) będą spełnione wtedy, gdy:

$$C_K(x) = \frac{\tau_a}{4} - \frac{3Q_K}{2h_K}, \quad K = 1, 2 \quad (7.242)$$

co można ostatecznie zapisać w postaci:

$$\tau_{xz}^{(1)}(x, z) = \frac{3Q_1}{2h_1}[1 - \zeta_1^2] - \frac{\tau_a}{4}[1 - 2\zeta_1 - 3\zeta_1^2] \quad (7.243)$$

$$\tau_{xz}^{(2)}(x, z) = \frac{3Q_2}{2h_2}[1 - \zeta_2^2] - \frac{\tau_a}{4}[1 + 2\zeta_2 - 3\zeta_2^2] \quad (7.244)$$

Wykorzystajmy teraz powyższe zależności w równaniu (7.224). Uwzględnienie równań równowagi (7.235), (7.236) i (7.239) pozwala nam napisać:

$$\sigma_{zz}^{(1)}(x, z) = \left[ \frac{3}{2} - 2 \left( \frac{z_1}{h_1} \right)^3 \right] p_1 + \left[ -\frac{z_1}{4t} + \frac{z_1^2}{2h_1 t} + \frac{z_1^3}{h_1^2 t} \right] (p_2 - p_1) + D_1 \quad (7.245)$$

$$\sigma_{zz}^{(2)}(x, z) = \left[ 2 \left( \frac{z_1}{h_1} \right)^3 - \frac{3}{2} \right] p_2 + \left[ -\frac{z_1}{4t} - \frac{z_1^2}{2h_1 t} + \frac{z_1^3}{h_1^2 t} \right] (p_2 - p_1) + D_2 \quad (7.246)$$

Warunki (7.231) i (7.232) będą spełnione wtedy, gdy:

$$D_1 = \frac{p_1}{2} - \frac{h_1}{8t} (p_2 - p_1), \quad D_2 = \frac{p_2}{2} + \frac{h_1}{8t} (p_2 - p_1) \quad (7.247)$$

co daje nam ostatecznie:

$$\sigma_{zz}^{(1)}(x, z) = \left[ 1 + \frac{3}{2} \zeta_1 - \frac{1}{2} \zeta_1^3 \right] \frac{p_1}{2} - \frac{h_1}{8t} [1 + \zeta_1 - \zeta_1^2 - \zeta_1^3] (p_2 - p_1) \quad (7.248)$$

$$\sigma_{zz}^{(2)}(x, z) = \left[ 1 - \frac{3}{2} \zeta_1 + \frac{1}{2} \zeta_1^3 \right] \frac{p_2}{2} + \frac{h_2}{8t} [1 - \zeta_1 - \zeta_1^2 + \zeta_1^3] (p_2 - p_1) \quad (7.249)$$

Allman wprowadził **funkcje naprężeń**  $\Phi_1(x)$ ,  $\Phi_2(x)$ , których drugie pochodne wyznaczają odpowiednio symetryczną (jednorodną) i antysymetryczną (liniowo zmienną) składową rozkładu naprężenia poprzecznego w skleinie:

$$\frac{1}{2} (p_2 - p_1) = \frac{t}{h_1 + h_2} \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} \quad (7.250)$$

$$\frac{1}{2} (p_1 + p_2) = \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} \quad (7.251)$$

Powyższe związki wraz z równaniami równowagi (7.233)–(7.239) pozwalają wyrazić siły przekrojowe i naprężenia w skleinie za pomocą wprowadzonych funkcji naprężeń. Z założenia o liniowym rozkładzie poprzecznego naprężenia normalnego w skleinie możemy napisać:

$$p(x) = \frac{(p_1 + p_2)}{2} + \frac{(p_2 - p_1)}{2} \zeta_a, \quad \text{gdzie: } \zeta_a = \frac{2z}{t} \quad (7.252)$$

co po uwzględnieniu definicji (7.250) i (7.251) daje nam:

$$p(x) = \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} + \frac{t}{h_1 + h_2} \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} \zeta_a \quad (7.253)$$

Równanie równowagi (7.239) i definicja (7.250) pozwalają nam napisać:

$$\frac{d\tau_a}{dx} = -\frac{(p_2 - p_1)}{t} = -\frac{2}{h_1 + h_2} \frac{d^2\Phi_1}{dx^2} \quad (7.254)$$

co po scałkowaniu daje nam:

$$\tau_a = -\frac{2}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + c_1 \quad (7.255)$$

Korzystając z równań równowagi (7.233) i (7.234), możemy z kolei napisać:

$$N_1 = \frac{2}{h_1 + h_2} \Phi_1 - c_1 x + c_2 \quad (7.256)$$

$$N_2 = -\frac{2}{h_1 + h_2} \Phi_1 + c_1 x + c_3 \quad (7.257)$$

Przekształcając równania równowagi (7.235) i (7.236) oraz wykorzystując definicje (7.250) i (7.251), możemy otrzymać:

$$\frac{d}{dx}(Q_1 + Q_2) = p_2 - p_1 = \frac{2t}{h_1 + h_2} \frac{d^2\Phi_1}{dx^2} \quad (7.258)$$

$$\frac{d}{dx}(Q_1 - Q_2) = -(p_1 + p_2) = -2 \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \quad (7.259)$$

Po obustronnym scałkowaniu powyższych równań otrzymujemy:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{2t}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + d_1 \quad (7.260)$$

$$Q_1 - Q_2 = -2 \frac{d\Phi_2}{dx} + d_2 \quad (7.261)$$

co z kolei pozwala nam napisać:

$$Q_1 = \frac{t}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} - \frac{d\Phi_2}{dx} + c_4 \quad (7.262)$$

$$Q_2 = \frac{t}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{d\Phi_2}{dx} + c_5 \quad (7.263)$$

Wykorzystajmy wreszcie równania równowagi (7.237) i (7.238) oraz związki (7.255), (7.262) i (7.263):

$$\frac{dM_1}{dx} = Q_1 - \tau_a \frac{h_1}{2} = \frac{t}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} - \frac{d\Phi_2}{dx} + c_4 - \frac{h_1}{2} \left[ -\frac{2}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + c_1 \right] \quad (7.264)$$

$$\frac{dM_2}{dx} = Q_2 - \tau_a \frac{h_2}{2} = \frac{t}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{d\Phi_2}{dx} + c_5 - \frac{h_2}{2} \left[ -\frac{2}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + c_1 \right] \quad (7.265)$$

Po obustronnym scałkowaniu powyższych równań otrzymamy:

$$M_1 = \frac{t + h_1}{h_1 + h_2} \Phi_1 - \Phi_2 + \left[ c_4 - \frac{c_1 h_1}{2} \right] x + c_6 \quad (7.266)$$

$$M_2 = \frac{t + h_2}{h_1 + h_2} \Phi_1 + \Phi_2 + \left[ c_5 - \frac{c_1 h_2}{2} \right] x + c_7 \quad (7.267)$$

Wszystkie niewiadome zostały zatem wyrażone przez dwie funkcje naprężeń oraz ich pierwsze pochodne. W otrzymanych związkach występuje siedem stałych całkowania, które wyznaczyć należy ze stosownych **warunków brzegowych**:

- warunki brzegowe w  $x = -\frac{L}{2}$ :

$$\begin{cases} N_1 = N, & Q_1 = Q, & M_1 = \tilde{M}_1 \\ N_2 = 0, & Q_2 = 0, & M_2 = 0 \\ \tau_a = 0 \end{cases} \quad (7.268)$$

- warunki brzegowe w  $x = \frac{L}{2}$ :

$$\begin{cases} N_1 = 0, & Q_1 = 0, & M_1 = 0 \\ N_2 = N, & Q_2 = Q, & M_2 = -\tilde{M}_2 \\ \tau_a = 0 \end{cases} \quad (7.269)$$

Spełniony musi być ponadto **warunek równowagi sił wewnętrznych i sił zewnętrznych**:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \tau_a(x) dx = N \quad (7.270)$$

Dodatkowo spełnione musi być równanie **globalnej równowagi sił zewnętrznych**. Z warunku zerowania się momentu sił zewnętrznych względem środka skleiny możemy napisać zależność wiążącą ze sobą obciążenia brzegowe:

$$Q = \frac{h_1 + h_2 + 2t}{2L} N - \frac{\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2}{L} \quad (7.271)$$

Powyższy warunek nie jest dodatkowym warunkiem brzegowym, lecz jedynie wewnętrzną zależnością między wartościami sił zewnętrznych określających warunki brzegowe. Warunki (7.268)–(7.270) to łącznie 15 równań, które pozwalają wyznaczyć siedem stałych całkowania  $c_1, \dots, c_7$  oraz osiem nieznanymi wartościami brzegowymi dla dwóch funkcji naprężeń oraz ich pierwszych pochodnych. Otrzymujemy zatem liniowy układ 15 równań algebraicznych na 15 niewiadomych:

$$\tau_a \left( -\frac{L}{2} \right) = -\frac{2}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{-\frac{L}{2}} + c_1 = 0$$

$$\tau_a \left( \frac{L}{2} \right) = -\frac{2}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{\frac{L}{2}} + c_1 = 0$$

$$N_1 \left( -\frac{L}{2} \right) = \frac{2}{h_1 + h_2} \Phi_1 \left( -\frac{L}{2} \right) + \frac{c_1 L}{2} + c_2 = N$$

$$N_1 \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{2}{h_1 + h_2} \Phi_1 \left( \frac{L}{2} \right) - \frac{c_1 L}{2} + c_2 = 0$$

$$N_2 \left( -\frac{L}{2} \right) = -\frac{2}{h_1 + h_2} \Phi_1 \left( -\frac{L}{2} \right) - \frac{c_1 L}{2} + c_3 = 0$$

$$N_2 \left( \frac{L}{2} \right) = -\frac{2}{h_1 + h_2} \Phi_1 \left( \frac{L}{2} \right) + \frac{c_1 L}{2} + c_3 = N$$

$$Q_1 \left( -\frac{L}{2} \right) = \frac{t}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{-\frac{L}{2}} - \frac{d\Phi_2}{dx} \Big|_{-\frac{L}{2}} + c_4 = \frac{h_1 + h_2 + 2t}{2L} N - \frac{\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2}{L}$$

$$Q_1 \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{t}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{\frac{L}{2}} - \frac{d\Phi_2}{dx} \Big|_{\frac{L}{2}} + c_4 = 0$$

$$\begin{aligned}
Q_2\left(-\frac{L}{2}\right) &= \frac{t}{h_1+h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{-\frac{L}{2}} + \frac{d\Phi_2}{dx} \Big|_{-\frac{L}{2}} + c_5 = 0 \\
Q_2\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{t}{h_1+h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{\frac{L}{2}} + \frac{d\Phi_2}{dx} \Big|_{\frac{L}{2}} + c_5 = \frac{h_1+h_2+2t}{2L} N - \frac{\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2}{L} \\
M_1\left(-\frac{L}{2}\right) &= \frac{t+h_1}{h_1+h_2} \Phi_1\left(-\frac{L}{2}\right) - \Phi_2\left(-\frac{L}{2}\right) - \left[c_4 - \frac{c_1 h_1}{2}\right] \frac{L}{2} + c_6 = \tilde{M}_1 \\
M_1\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{t+h_1}{h_1+h_2} \Phi_1\left(\frac{L}{2}\right) - \Phi_2\left(\frac{L}{2}\right) + \left[c_4 - \frac{c_1 h_1}{2}\right] \frac{L}{2} + c_6 = 0 \\
M_2\left(-\frac{L}{2}\right) &= \frac{t+h_2}{h_1+h_2} \Phi_1\left(-\frac{L}{2}\right) + \Phi_2\left(-\frac{L}{2}\right) - \left[c_5 - \frac{c_1 h_2}{2}\right] \frac{L}{2} + c_7 = 0 \\
M_2\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{t+h_2}{h_1+h_2} \Phi_1\left(\frac{L}{2}\right) + \Phi_2\left(\frac{L}{2}\right) + \left[c_5 - \frac{c_1 h_2}{2}\right] \frac{L}{2} + c_7 = -\tilde{M}_2 \\
\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tau_a(x) dx &= -\frac{2}{h_1+h_2} \left[ \Phi_1\left(\frac{L}{2}\right) - \Phi_1\left(-\frac{L}{2}\right) \right] + c_1 L = N
\end{aligned}$$

Jest to układ nieoznaczony – rząd macierzy współczynników i rząd macierzy uzupełnionej są równe 12, zatem rozwiązanie zależności będzie od trzech parametrów, których wartość można wybrać dowolnie. Jedynymi niewiadomymi, które powyższy układ określa w sposób jednoznaczny, są stała całkowania  $c_1$  oraz brzegowe wartości pochodnej funkcji naprężenia  $\Phi_1$ . Można tak dobrać wartości parametrów w trzyparametrowej rodzinie rozwiązań powyższego układu, aby:

$$\Phi_1\left(-\frac{L}{2}\right) = \Phi_1\left(\frac{L}{2}\right) = \Phi_2\left(-\frac{L}{2}\right) = \Phi_2\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (7.272)$$

Wtedy rozwiązanie tego układu dane jest następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{N}{L}, & C_2 &= C_3 = \frac{N}{2} \\
C_4 &= \frac{N h_1}{2L} - \frac{\tilde{M}_1}{L}, & C_5 &= \frac{N h_2}{2L} - \frac{\tilde{M}_2}{L}, & C_6 &= \frac{\tilde{M}_1}{2}, & C_7 &= -\frac{\tilde{M}_2}{2}
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{d\Phi_1}{dx} \right|_{-\frac{L}{2}} = \left. \frac{d\Phi_1}{dx} \right|_{\frac{L}{2}} = \frac{N}{2L}(h_1 + h_2)$$

$$\left. \frac{d\Phi_2}{dx} \right|_{-\frac{L}{2}} = \frac{\tilde{M}_2}{L} - \frac{N}{2L}(h_2 + t), \quad \left. \frac{d\Phi_2}{dx} \right|_{\frac{L}{2}} = \frac{N}{2L}(h_1 + t) - \frac{\tilde{M}_1}{L}$$

Można zatem napisać:

$$\tau_a = -\frac{2}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{N}{L} \quad (7.273)$$

$$N_1 = \frac{2}{h_1 + h_2} \Phi_1 + N \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) \quad (7.274)$$

$$N_2 = -\frac{2}{h_1 + h_2} \Phi_1 + N \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) \quad (7.275)$$

$$Q_1 = \frac{t}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} - \frac{d\Phi_2}{dx} + \frac{1}{L} \left( \frac{Nh_1}{2} - \tilde{M}_1 \right) \quad (7.276)$$

$$Q_2 = \frac{t}{h_1 + h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{d\Phi_2}{dx} + \frac{1}{L} \left( \frac{Nh_2}{2} - \tilde{M}_2 \right) \quad (7.277)$$

$$M_1 = \frac{t + h_1}{h_1 + h_2} \Phi_1 - \Phi_2 + \tilde{M}_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) \quad (7.278)$$

$$M_2 = \frac{t + h_2}{h_1 + h_2} \Phi_1 + \Phi_2 - \tilde{M}_2 \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) \quad (7.279)$$

Wykorzystanie wzorów (7.273)–(7.279) w związkach (7.228), (7.243), (7.244), (7.248) i (7.249) umożliwia wyrażenie naprężeń we wszystkich elementach złącza za pomocą funkcji naprężeń  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  oraz ich pochodnych:

- **naprężenia w elemencie górnym:**

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \frac{6\zeta_1}{h_1^2} \left[ \frac{t + h_1}{h_1 + h_2} \Phi_1 - \Phi_2 + \tilde{M}_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) \right] + \frac{1}{h_1} \left[ \frac{2}{h_1 + h_2} \Phi_1 + N \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) \right] \quad (7.280)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{(1)}(x, z) &= \frac{3(1-\zeta_1^2)}{2} \frac{1}{h_1} \left[ \frac{t}{h_1+h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} - \frac{d\Phi_2}{dx} + \frac{1}{L} \left( \frac{Nh_1}{2} - \tilde{M}_1 \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4} (1-2\zeta_1 - 3\zeta_1^2) \left[ -\frac{2}{h_1+h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{N}{L} \right]\end{aligned}\quad (7.281)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(1)}(x, z) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{2}\zeta_1 - \frac{1}{2}\zeta_1^3 \right) \left[ \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} - \frac{t}{h_1+h_2} \frac{d^2\Phi_1}{dx^2} \right] - \\ &\quad - \frac{h_1}{4(h_1+h_2)} [1 + \zeta_1 - \zeta_1^2 - \zeta_1^3] \frac{d^2\Phi_1}{dx^2}\end{aligned}\quad (7.282)$$

• **naprężenia w elemencie dolnym:**

$$\sigma_{xx}^{(2)} = \frac{6\zeta_2}{h_2^2} \left[ \frac{t+h_2}{h_1+h_2} \Phi_1 + \Phi_2 - \tilde{M}_2 \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) \right] + \frac{1}{h_2} \left[ -\frac{2}{h_1+h_2} \Phi_1 + N \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) \right] \quad (7.283)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{(2)}(x, z) &= \frac{3(1-\zeta_2^2)}{2} \frac{1}{h_2} \left[ \frac{t}{h_1+h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{d\Phi_2}{dx} + \frac{1}{L} \left( \frac{Nh_2}{2} - \tilde{M}_2 \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4} (1+2\zeta_2 - 3\zeta_2^2) \left[ -\frac{2}{h_1+h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{N}{L} \right]\end{aligned}\quad (7.284)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(2)}(x, z) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2}\zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_1^3 \right) \left[ \frac{t}{h_1+h_2} \frac{d^2\Phi_1}{dx^2} + \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \right] + \\ &\quad + \frac{h_2}{4(h_1+h_2)} [1 - \zeta_1 - \zeta_1^2 + \zeta_1^3] \frac{d^2\Phi_1}{dx^2}\end{aligned}\quad (7.285)$$

• **naprężenia w sklepinie:**

$$\tau_a = -\frac{2}{h_1+h_2} \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{N}{L} \quad (7.286)$$

$$p = \frac{t}{h_1+h_2} \frac{d^2\Phi_1}{dx^2} \zeta_a + \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \quad (7.287)$$

Warto zauważyć, że zmienność naprężeń na wysokości przekroju poprzecznego w każdym elemencie złącza opisana jest za pomocą zmiennej bezwymiarowej  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, a$ ), która w każdym przypadku przyjmuje wartości z przedziału  $\langle -1; 1 \rangle$ . W kolejnym kroku poszukiwania rozwiązania, gdy wyznaczać będziemy energię



komplementarną, całkowanie po konfiguracji ciała można zrealizować właśnie z wykorzystaniem pojedynczej zmiennej bezwymiarowej  $\zeta \in \langle -1; 1 \rangle$  dla każdego z elementów – odpowiednie całki należy jedynie przemnożyć przez odpowiednią pochodną  $\frac{dz_i}{d\zeta_i}$  ( $i = 1, 2, a$ ). Wzory (7.280)–(7.287) można przedstawić w nieco innej postaci:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(K)}(\zeta) = \mathbf{A}^{(K)}(\zeta)\boldsymbol{\chi} + \mathbf{b}^{(K)}(\zeta) \quad (7.288)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = [\sigma_{xx}^{(1)}, \sigma_{zz}^{(1)}, \tau_{xz}^{(1)}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = [\sigma_{xx}^{(2)}, \sigma_{zz}^{(2)}, \tau_{xz}^{(2)}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(3)} = [p, \tau_a]^T \quad (7.289)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \left[ \Phi_1, \frac{d\Phi_1}{dx}, \frac{d^2\Phi_1}{dx^2}, \Phi_2, \frac{d\Phi_2}{dx}, \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \right]^T \quad (7.290)$$

Jedynymi niezerowymi elementami macierzy  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{A}^{(2)}$ ,  $\mathbf{A}^{(3)}$  są:

$$A_{11}^{(1)} = \frac{2[3\zeta(h_1 + t) + h_1]}{h_1^2(h_2 + h_1)}, \quad A_{14}^{(1)} = -\frac{6\zeta}{h_1^2}, \quad A_{35}^{(1)} = \frac{3(\zeta^2 - 1)}{2h_1}$$

$$A_{23}^{(1)} = \frac{(\zeta + 1)^2[\zeta(t + h_1) - 2t - h_1]}{4(h_2 + h_1)}, \quad A_{32}^{(1)} = -\frac{(\zeta + 1)[3\zeta(t + h_1) - 3t - h_1]}{2h_1(h_2 + h_1)}$$

$$A_{11}^{(2)} = \frac{2[3\zeta(t + h_2) - h_2]}{h_2^2(h_2 + h_1)}, \quad A_{14}^{(2)} = \frac{6\zeta}{h_2^2}, \quad A_{35}^{(2)} = \frac{3(1 - \zeta^2)}{2h_2}$$

$$A_{23}^{(2)} = \frac{(\zeta - 1)^2[\zeta(t + h_2) + 2t + h_2]}{4(h_2 + h_1)}, \quad A_{32}^{(2)} = -\frac{(\zeta - 1)[3\zeta(t + h_2) + 3t + h_2]}{2h_2(h_2 + h_1)}$$

$$A_{13}^{(3)} = \frac{t}{h_2 + h_1}\zeta, \quad A_{16}^{(3)} = 1, \quad A_{22}^{(3)} = -\frac{2}{h_2 + h_1}$$

Wektory  $\mathbf{b}^{(1)}$ ,  $\mathbf{b}^{(2)}$ ,  $\mathbf{b}^{(3)}$  są równe:

$$\mathbf{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) \left( N + \frac{6\tilde{M}_1}{h_1} \zeta \right) \\ 0 \\ \frac{1}{2L} \left[ N(1 + \zeta) + \frac{3\tilde{M}_1}{h_1} (\zeta^2 - 1) \right] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_2} \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) \left( N - \frac{6\tilde{M}_2}{h_1} \zeta \right) \\ 0 \\ \frac{1}{2L} \left[ N(1-\zeta) + \frac{3\tilde{M}_2}{h_2} (\zeta^2 - 1) \right] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ N/L \end{bmatrix}$$

Możemy teraz przystąpić do wyznaczenia składowych tensora odkształcenia w każdym z elementów złącza. W pracy Allmana założono, że elementy łączone charakteryzują się izotropią transwersalną, a wyróżniona oś symetrii materiału jest równoległa do osi złącza. O materiale skleiny założono, że jest izotropowy. W prosty sposób można uogólnić ten model na przypadek ortotropowych elementów łączonych, przyjmując związki konstytutywne w następującej postaci:

- **związki konstytutywne dla elementów łączonych ( $K = 1, 2$ ):**

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(K)} \\ \varepsilon_{yy}^{(K)} \\ \varepsilon_{zz}^{(K)} \\ \varepsilon_{yz}^{(K)} \\ \varepsilon_{xz}^{(K)} \\ \varepsilon_{xy}^{(K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x^{(K)}} & -\frac{\nu_{yx}^{(K)}}{E_y^{(K)}} & -\frac{\nu_{zx}^{(K)}}{E_z^{(K)}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}^{(K)}}{E_x^{(K)}} & \frac{1}{E_y^{(K)}} & -\frac{\nu_{zy}^{(K)}}{E_z^{(K)}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}^{(K)}}{E_x^{(K)}} & -\frac{\nu_{yz}^{(K)}}{E_y^{(K)}} & \frac{1}{E_z^{(K)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{yz}^{(K)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xz}^{(K)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xy}^{(K)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(K)} \\ \sigma_{yy}^{(K)} \\ \sigma_{zz}^{(K)} \\ \tau_{yz}^{(K)} \\ \tau_{xz}^{(K)} \\ \tau_{xy}^{(K)} \end{bmatrix} \quad (7.291)$$

przy czym:

$$\frac{\nu_{yz}^{(K)}}{E_y^{(K)}} = \frac{\nu_{zy}^{(K)}}{E_z^{(K)}}, \quad \frac{\nu_{zx}^{(K)}}{E_z^{(K)}} = \frac{\nu_{xz}^{(K)}}{E_x^{(K)}}, \quad \frac{\nu_{xy}^{(K)}}{E_x^{(K)}} = \frac{\nu_{yx}^{(K)}}{E_y^{(K)}}$$

- **związki konstytutywne dla skleiny:**

$$\varepsilon_{xx}^{(3)} = \frac{P}{E_{a,\text{eff}}}, \quad \varepsilon_{xz}^{(3)} = \frac{\tau_a}{2G_a} \quad (7.292)$$

Zakłada się przy tym, oczywiście, że jedna z płaszczyzn symetrii każdego z materiałów ortotropowych pokrywa się z płaszczyzną symetrii złącza, druga zaś jest prostopadła do osi złącza.

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na dwa zagadnienia. Już we wstępnej części tego podrozdziału wspomniano, że **zastosowanie twierdzenia Castigliano ograniczone jest jedynie do układów liniowych**, a zatem takich, dla których słuszne jest założenie o małych odkształceniach oraz dla których obowiązują liniowe związki konstytutywne uogólnionego prawa Hooke'a. Oznacza to, że podejście omawiane w tym podrozdziale nie ma bezpośredniego zastosowania do zagadnień nieliniowych, a zatem uwzględniających bądź duże odkształcenia, bądź nieliniową charakterystykę mechaniczną materiałów.

Po drugie, związek (7.291) daje się w bezpośredni sposób wykorzystać do opisu płaskiego stanu naprężenia (PSN). Dla zagadnień płaskiego stanu odkształcenia (PSO) ogólna postać związku konstytutywnego jest analogiczna, jednak – jak wiadomo – same elementy macierzy sztywności wyrażają się przez stałe sprężyste w odmienny sposób.

Pozostaje jeszcze kwestia naprężeń normalnych (w PSO) i odkształceń liniowych (w PSN) prostopadłych do płaszczyzny zagadnienia – są one liniowo zależne od składowych tensorów naprężenia i odkształcenia w płaszczyźnie, jednak ich obecność nie wpływa na dalszy tok rozumowania, ponieważ składowe te nie mają swojego przyczynku w wyrażeniu na energię wewnętrzną. W przypadku PSN (PSO) składowa odkształcenia (naprężenia) prostopadła do płaszczyzny w stanie antypłaskim nie wykonuje żadnej pracy, ponieważ odpowiadająca mu składowa naprężenia (odkształcenia) w stanie płaskim jest zerowa.

Przy oznaczeniach jak w (7.289) gęstość wewnętrznej energii odkształcenia sprężystego dla poszczególnych elementów złącza można zapisać w następującej postaci:

$$\phi^{(K)} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^{(K)})^T \mathbf{C}^{(K)} \boldsymbol{\sigma}^{(K)} \quad (7.293)$$

gdzie macierze podatności dla poszczególnych elementów złącza zapiszemy w następującej postaci ogólnej:

$$\mathbf{C}^{(K)} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(K)} & C_{12}^{(K)} & 0 \\ C_{21}^{(K)} & C_{22}^{(K)} & 0 \\ 0 & 0 & 4C_{33}^{(K)} \end{bmatrix} \quad (K=1, 2), \quad \mathbf{C}^{(3)} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(3)} & 0 \\ 0 & 4C_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (7.294)$$

gdzie składowe macierzy podatności dla elementów łączonych ( $K = 1, 2$ ) wyznacza się w następujący sposób:

- **płaski stan naprężenia:**

$$C_{11}^{(K)} = \frac{1}{E_x^{(K)}}, \quad C_{22}^{(K)} = \frac{1}{E_z^{(K)}}, \quad C_{33}^{(K)} = \frac{1}{4G^{(K)}} \\ C_{12}^{(K)} = C_{21}^{(K)} = -\frac{\nu_{xz}^{(K)}}{E_x^{(K)}} = -\frac{\nu_{zx}^{(K)}}{E_z^{(K)}}$$

- **płaski stan odkształcenia:**

$$C_{11}^{(K)} = \frac{1 - \nu_{xy}^{(K)}\nu_{yx}^{(K)}}{E_x^{(K)}}, \quad C_{22}^{(K)} = \frac{1 - \nu_{zy}^{(K)}\nu_{yz}^{(K)}}{E_z^{(K)}}, \quad C_{33}^{(K)} = \frac{1}{4G^{(K)}} \\ C_{12}^{(K)} = C_{21}^{(K)} = -\frac{\nu_{xy}^{(K)}\nu_{yz}^{(K)} + \nu_{xz}^{(K)}}{E_x^{(K)}} = -\frac{\nu_{zy}^{(K)}\nu_{yx}^{(K)} + \nu_{zx}^{(K)}}{E_z^{(K)}}$$

Jeśli chodzi o stałe sprężyste charakteryzujące skleinę, to przyjmujemy, że  $E_{a,\text{eff}} = [C_{11}^{(3)}]^{-1}$  jest efektywnym modułem Younga skleiny przy rozrywaniu wyznaczanym odpowiednio do założonego stanu (PSN lub PSO), zaś moduł Kirchhoffa  $4G_a = \frac{1}{4}[C_{22}^{(3)}]^{-1}$ .

Różnica w związkach (7.294) w stosunku do związków (7.291) i (7.292) dotyczy jedynie współczynnika równego 2 przy module sztywności poprzecznej, co wynika z symetrii tensora naprężenia i konieczności dwukrotnego uwzględnienia udziału naprężenia stycznego w mierze gęstości energii odkształcenia.

Przyjęcie związków konstytutywnych umożliwia nam zapisanie wyrażenia na energię komplementarną. Zgodnie z definicją **energii komplementarnej**, wyrażona wzorem:

$$\Psi = \Phi - L_q = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \iint_{S_u} q_i u_i dS \quad (7.295)$$

osiąga minimum dla rzeczywistego stanu naprężenia. Należy przy tym zauważyć, że praca  $L_q$  zewnętrznych sił powierzchniowych wyznaczana jest jedynie dla części

brzegu  $S_u$ , a zatem dla tej jego części, dla której określone zostały kinematyczne warunki brzegowe. W sformułowanym przez nas zagadnieniu nie rozważa się żadnych kinematycznych warunków brzegowych, a jedynie warunki statyczne na brzegowe wartości wewnętrznych sił powierzchniowych. Pociąga to za sobą dwie ważne konsekwencje. Po pierwsze, uzyskane przez nas rozwiązanie określi w sposób jednoznaczny jedynie pole naprężenia i odkształcenia w złączu, ale nie dostarczy nam żadnej informacji o przemieszczeniach elementów złącza. **Pole przemieszczeń wyznaczone może być jedynie z dokładnością do całki ogólnej jednorodnych związków kinematycznych, czyli z dokładnością do ruchu bryły sztywnej**, zatem do rozwiązania tego można dodać dowolną translację i dowolny mały obrót. W dalszej części tego podrozdziału pokazane zostanie, że pole przemieszczenia w ogóle nie może zostać określone w sposób jednoznaczny dla pola odkształcenia, wyznaczonego z założonego stanu naprężenia zgodnie z wzorami (7.291) i (7.292). Drugą konsekwencją jest to, że w wyrażeniu (7.295) całka powierzchniowa jest zerowa, a zatem **energia komplementarna jest równa wewnętrznej energii odkształcenia sprężystego**:

$$\Psi = \Phi = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (7.296)$$

Uwzględniając (7.288)–(7.290), (7.293) i (7.294), powyższe wyrażenie można zapisać w następującej postaci:

$$\Psi = \frac{1}{2} \int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \sum_{K=1}^3 \frac{h_K}{2} \int_{\zeta=-1}^1 (\mathbf{A}^{(K)} \boldsymbol{\chi} + \mathbf{b}^{(K)})^T \mathbf{C}^{(K)} (\mathbf{A}^{(K)} \boldsymbol{\chi} + \mathbf{b}^{(K)}) d\zeta \right] dx \quad (7.297)$$

gdzie należy przyjąć  $h_3 = t$ . Całkowanie względem zmiennej  $y$  zostało pominięte z uwagi na symetrię zagadnienia i założenie stanu płaskiego. Wyrażenie to można przepisać w uproszczonej postaci:

$$\Psi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [\boldsymbol{\chi}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{b} + c] dx \quad (7.298)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \sum_{K=1}^3 \left[ \frac{h_K}{2} \int_{-1}^1 [(\mathbf{A}^{(K)}(\zeta))^T \mathbf{C}^{(K)} \mathbf{A}^{(K)}(\zeta)] d\zeta \right] \quad (7.299)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{K=1}^3 \left[ h_K \int_{-1}^1 [(\mathbf{A}^{(K)})^T \mathbf{C}^{(K)} \mathbf{b}^{(K)}(\zeta)] d\zeta \right] \quad (7.300)$$

Składnik  $c$  jest niezależny od funkcji naprężeń i ich pochodnych, zatem nie ma znaczenia w zagadnieniu minimalizacji funkcjonału Castigliano względem tych funkcji i w dalszych obliczeniach będzie pomijany. Elementy symetrycznej macierzy  $\mathbf{A}$  ( $A_{ij} = A_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, 6$ ) i macierzy  $\mathbf{b}$  są następujące:

$$A_{12} = A_{15} = A_{23} = A_{24} = A_{26} = A_{35} = A_{45} = A_{56} = 0$$

$$A_{11} = \frac{4}{(h_1 + h_2)^2} \left[ \frac{C_{11}^{(1)}}{h_1} \left[ 3 \left( \frac{t}{h_1} + 1 \right)^2 + 1 \right] + \frac{C_{11}^{(2)}}{h_2} \left[ 3 \left( \frac{t}{h_2} + 1 \right)^2 + 1 \right] \right]$$

$$A_{22} = \frac{32 \left[ C_{33}^{(1)} h_1 \left( 1 + \frac{3t}{4h_1} + \frac{9}{4} \left( \frac{t}{h_1} \right)^2 \right) + C_{33}^{(2)} h_2 \left( 1 + \frac{3t}{4h_2} + \frac{9}{4} \left( \frac{t}{h_2} \right)^2 \right) \right]}{15(h_1 + h_2)^2} + \frac{16C_{22}^{(3)} t}{(h_1 + h_2)^2}$$

$$A_{33} = \frac{4 \left[ C_{22}^{(1)} h_1^3 \left( 1 + \frac{11t}{2h_1} + \frac{39}{4} \left( \frac{t}{h_1} \right)^2 \right) + C_{22}^{(2)} h_2^3 \left( 1 + \frac{11t}{2h_2} + \frac{39}{4} \left( \frac{t}{h_2} \right)^2 \right) \right]}{105(h_1 + h_2)^2} + \frac{C_{22}^{(3)} t^3}{3(h_1 + h_2)^2}$$

$$A_{44} = 12 \left( \frac{C_{11}^{(1)}}{h_1^3} + \frac{C_{11}^{(2)}}{h_2^3} \right)$$

$$A_{55} = \frac{24}{5} \left( \frac{C_{33}^{(1)}}{h_1} + \frac{C_{33}^{(2)}}{h_2} \right)$$

$$A_{66} = \frac{13}{35} (C_{22}^{(1)} h_1 + C_{22}^{(2)} h_2) + C_{11}^{(3)} t$$

$$A_{13} = -\frac{2}{3(h_1 + h_2)^2} \left[ C_{12}^{(1)} h_1 \left[ \frac{9}{5} \left( \frac{t}{h_1} + 1 \right)^2 - 1 \right] + C_{12}^{(2)} h_2 \left[ \frac{9}{5} \left( \frac{t}{h_2} + 1 \right)^2 - 1 \right] \right]$$

$$A_{14} = \frac{12}{h_1 + h_2} \left[ \frac{C_{11}^{(2)}}{h_2^2} \left( \frac{t}{h_2} + 1 \right) - \frac{C_{11}^{(1)}}{h_1^2} \left( \frac{t}{h_1} + 1 \right) \right]$$

$$A_{16} = \frac{1}{5(h_1 + h_2)} \left[ C_{12}^{(1)} \left( 6 \frac{t}{h_1} + 11 \right) - C_{12}^{(2)} \left( 6 \frac{t}{h_2} + 11 \right) \right]$$

$$A_{25} = \frac{4}{5(h_1 + h_2)} \left[ C_{33}^{(2)} \left( 6 \frac{t}{h_2} + 1 \right) - C_{33}^{(1)} \left( 6 \frac{t}{h_1} + 1 \right) \right]$$

$$A_{34} = \frac{1}{5(h_1 + h_2)} \left[ C_{12}^{(1)} \left( 6 \frac{t}{h_1} + 1 \right) - C_{12}^{(2)} \left( 6 \frac{t}{h_2} + 1 \right) \right]$$

$$A_{36} = \frac{1}{105(h_1 + h_2)} \left[ C_{22}^{(2)} \left( 39 \frac{t}{h_2} + 11 \right) - C_{22}^{(1)} \left( 39 \frac{t}{h_1} + 11 \right) \right]$$

$$A_{46} = -\frac{6}{5} \left[ \frac{C_{12}^{(1)}}{h_1} + \frac{C_{12}^{(2)}}{h_2} \right]$$

$$b_1 = \frac{4}{(h_1 + h_2)} \left[ \frac{C_{11}^{(1)}}{h_1} \left[ N + \frac{6\tilde{M}_1}{h_1} \left( \frac{t}{h_1} + 1 \right) \right] \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) - \frac{C_{11}^{(2)}}{h_2} \left[ N + \frac{6\tilde{M}_2}{h_2} \left( \frac{t}{h_2} + 1 \right) \right] \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) \right]$$

$$b_2 = \frac{4C_{33}^{(1)} \left[ 5Nh_1 \left( 1 - 3 \frac{t}{h_1} \right) + 6\tilde{M}_1 \left( 6 \frac{t}{h_1} + 1 \right) \right]}{15L(h_1 + h_2)} +$$

$$+ \frac{4C_{33}^{(2)} \left[ 5Nh_2 \left( 1 - 3 \frac{t}{h_2} \right) + 6\tilde{M}_2 \left( 6 \frac{t}{h_2} + 1 \right) \right]}{15L(h_1 + h_2)} - \frac{16C_{22}^{(3)} N t}{L(h_1 + h_2)}$$

$$b_3 = \frac{C_{12}^{(1)} \left[ 5Nh_1 \left( 1 + 3 \frac{t}{h_1} \right) + 6\tilde{M}_1 \left( 6 \frac{t}{h_1} + 1 \right) \right]}{15(h_1 + h_2)} \left( \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) +$$

$$+ \frac{C_{12}^{(2)} \left[ 5Nh_2 \left( 1 + 3 \frac{t}{h_2} \right) + 6\tilde{M}_2 \left( 6 \frac{t}{h_2} + 1 \right) \right]}{15(h_1 + h_2)} \left( \frac{x}{L} + \frac{1}{2} \right)$$

$$b_4 = 24 \left[ C_{11}^{(1)} \frac{\tilde{M}_1}{h_1^3} \left( \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) - C_{11}^{(2)} \frac{\tilde{M}_2}{h_2^3} \left( \frac{x}{L} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$b_5 = \frac{4}{5L} \left[ C_{33}^{(1)} \left( 12 \frac{\tilde{M}_1}{h_1} - 5N \right) - C_{33}^{(2)} \left( 12 \frac{\tilde{M}_2}{h_2} - 5N \right) \right]$$

$$b_6 = \frac{1}{5} \left[ C_{12}^{(1)} \left( 12 \frac{\tilde{M}_1}{h_1} + 5N \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) + C_{12}^{(2)} \left( 12 \frac{\tilde{M}_2}{h_2} + 5N \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) \right]$$

**Zagadnienie minimalizacji energii komplementarnej** przedstawia się zatem następująco:

$$J[x, \Phi_1, \Phi_1', \Phi_1'', \Phi_2, \Phi_2', \Phi_2''] = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} F[x, \Phi_1, \Phi_1', \Phi_1'', \Phi_2, \Phi_2', \Phi_2''] dx \rightarrow \min \quad (7.301)$$

Funkcja podcałkowa ma postać:

$$F = \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{b} \quad (7.302)$$

Dla tak postawionego zagadnienia **równania Eulera–Lagrange’a** są następujące:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{\partial F}{\partial \Phi_1''} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial \Phi_1'} \right] + \frac{\partial F}{\partial \Phi_1} = 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{\partial F}{\partial \Phi_2''} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial \Phi_2'} \right] + \frac{\partial F}{\partial \Phi_2} = 0 \end{cases} \quad (7.303)$$

Po wykonaniu stosownego różniczkowania otrzymujemy następujący **niejednorodny liniowy układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych czwartego rzędu o stałych współczynnikach**:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \Phi_1 + \alpha_{12} \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} + \alpha_{13} \frac{d^4 \Phi_1}{dx^4} + \alpha_{14} \Phi_2 + \alpha_{15} \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} + \alpha_{16} \frac{d^4 \Phi_2}{dx^4} = \beta_1 \\ \alpha_{21} \Phi_1 + \alpha_{22} \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} + \alpha_{23} \frac{d^4 \Phi_1}{dx^4} + \alpha_{24} \Phi_2 + \alpha_{25} \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} + \alpha_{26} \frac{d^4 \Phi_2}{dx^4} = \beta_2 \end{cases} \quad (7.304)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 2A_{11}, & \alpha_{12} &= 4A_{13} - 2A_{22}, & \alpha_{13} &= 2A_{33} \\ \alpha_{14} = \alpha_{21} &= 2A_{14}, & \alpha_{15} = \alpha_{22} &= 2A_{34} - 2A_{25} + 2A_{16}, & \alpha_{16} = \alpha_{23} &= 2A_{36} \\ \alpha_{24} &= 2A_{44}, & \alpha_{25} &= 4A_{46} - 2A_{55}, & \alpha_{26} &= 2A_{66} \end{aligned}$$



$$\beta_1 = -b_1, \quad \beta_2 = -b_4$$

Jednoznaczne rozwiązanie powyższego układu równań uzyskuje się po uwzględnieniu **warunków brzegowych** na funkcje  $\Phi_1(x)$  oraz  $\Phi_2(x)$  i ich pochodne:

$$\Phi_1\left(-\frac{L}{2}\right) = \Phi_1\left(\frac{L}{2}\right) = \Phi_2\left(-\frac{L}{2}\right) = \Phi_2\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$\left.\frac{d\Phi_1}{dx}\right|_{-\frac{L}{2}} = \left.\frac{d\Phi_1}{dx}\right|_{\frac{L}{2}} = \frac{N}{2L}(h_1 + h_2)$$

$$\left.\frac{d\Phi_2}{dx}\right|_{-\frac{L}{2}} = \frac{\tilde{M}_2}{L} - \frac{N}{2L}(h_2 + t), \quad \left.\frac{d\Phi_2}{dx}\right|_{\frac{L}{2}} = \frac{N}{2L}(h_1 + t) - \frac{\tilde{M}_1}{L}$$

W pracy (Allman 1977) rozwiązano układ (7.304) w przypadku złącza symetrycznego, wykorzystując spostrzeżenia dotyczące parzystości i nieparzystości funkcji naprężeń. W przypadku złącza niesymetrycznego w celu wyznaczania rozwiązania analitycznego układ równań (7.304) można przekształcić w układ równań pierwszego rzędu, stosując podstawienia:

$$\begin{aligned} v_1 &= \Phi_1, & v_2 &= \frac{d\Phi_1}{dx}, & v_3 &= \frac{d^2\Phi_1}{dx^2}, & v_4 &= \frac{d^3\Phi_1}{dx^3} \\ v_5 &= \Phi_2, & v_6 &= \frac{d\Phi_2}{dx}, & v_7 &= \frac{d^2\Phi_2}{dx^2}, & v_8 &= \frac{d^3\Phi_2}{dx^3} \end{aligned} \quad (7.305)$$

Następnie należy rozwiązać układ równań (7.304) z uwagi na czwarte pochodne funkcji naprężeń, co pozwala zapisać równania różniczkowe pierwszego rzędu, w których po lewej stronie jest  $v'_4$  lub  $v'_8$ , po prawej zaś pozostałe funkcje  $v_i$ . Układ równań pierwszego rzędu przyjmuje wtedy postać:

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \\ v'_4 \\ v'_5 \\ v'_6 \\ v'_7 \\ v'_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & P_2 & 0 & P_3 & 0 & P_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ P_5 & 0 & P_6 & 0 & P_7 & 0 & P_8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad (7.306)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{\alpha_{14}\alpha_{16} - \alpha_{11}\alpha_{26}}{\alpha_{13}\alpha_{26} - \alpha_{16}^2}, & P_2 &= \frac{\alpha_{15}\alpha_{16} - \alpha_{12}\alpha_{26}}{\alpha_{13}\alpha_{26} - \alpha_{16}^2} \\
 P_3 &= \frac{\alpha_{16}\alpha_{24} - \alpha_{14}\alpha_{26}}{\alpha_{13}\alpha_{26} - \alpha_{16}^2}, & P_4 &= \frac{\alpha_{16}\alpha_{25} - \alpha_{15}\alpha_{26}}{\alpha_{13}\alpha_{26} - \alpha_{16}^2} \\
 P_5 &= \frac{\alpha_{11}\alpha_{16} - \alpha_{13}\alpha_{14}}{\alpha_{13}\alpha_{26} - \alpha_{16}^2}, & P_6 &= \frac{\alpha_{12}\alpha_{16} - \alpha_{13}\alpha_{15}}{\alpha_{13}\alpha_{26} - \alpha_{16}^2} \\
 P_7 &= \frac{\alpha_{14}\alpha_{16} - \alpha_{13}\alpha_{24}}{\alpha_{13}\alpha_{26} - \alpha_{16}^2}, & P_8 &= \frac{\alpha_{15}\alpha_{16} - \alpha_{13}\alpha_{25}}{\alpha_{13}\alpha_{26} - \alpha_{16}^2} \\
 R_1 &= \frac{\beta_1\alpha_{26} - \beta_4\alpha_{16}}{\alpha_{13}\alpha_{26} - \alpha_{16}^2}, & R_2 &= \frac{\beta_4\alpha_{13} - \beta_1\alpha_{16}}{\alpha_{13}\alpha_{26} - \alpha_{16}^2}
 \end{aligned}$$

Standardowym podejściem w wyznaczaniu rozwiązania ogólnego liniowego układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach jest wyznaczenie wartości własnych i wektorów własnych macierzy współczynników przy funkcjach niewiadomych. W ogólnym przypadku złącza niesymetrycznego otrzymuje się wtedy równanie wiekowe ósmego stopnia z ośmioma niezależnymi parametrami – zgodnie z twierdzeniem Abela–Ruffiniego w przypadku ogólnym nie da się wyrazić pierwiastków takiego równania za pomocą pierwiastków tych parametrów.

Ograniczymy zatem nasze rozważania do **złączy symetrycznych**, czyli takich, dla których zachodzi:

$$h_1 = h_2 = h, \quad \tilde{M}_1 = \tilde{M}_2 = \tilde{M}, \quad C_{ij}^{(1)} = C_{ij}^{(2)} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Allman zwrócił uwagę, że w przypadku złącza symetrycznego rozkład naprężenia stycznego jest symetryczny. Zgodnie z wzorem (7.254) rozkład ten określony jest za pomocą pochodnej funkcji naprężeń  $\Phi_1(x)$ , zatem sama **funkcja  $\Phi_1(x)$  musi być funkcją nieparzystą**. Z drugiej strony, odejmując stronami równania (7.266) i (7.267), łatwo przekonać się, że funkcja  $\Phi_2(x)$  jest równa różnicy rozkładu momentów powiększonej o pewną stałą. W przypadku złącza symetrycznego rozkład momentu zginającego jest symetryczny – kombinacja liniowa funkcji parzystych jest funkcją parzystą, a zatem i **funkcja  $\Phi_2(x)$  musi być parzysta**.

Łatwo sprawdzić, że w przypadku złączy symetrycznych zachodzi dodatkowo:

$$A_{14} = A_{16} = A_{25} = A_{34} = A_{36} = 0, \quad b_5 = 0$$

co pociąga za sobą:

$$\alpha_{14} = \alpha_{15} = \alpha_{16} = 0, \quad P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 0$$

W rezultacie układ równań (7.304) przekształca się w dwa niezależne równania:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \Phi_1}{dx^4} - \tilde{\alpha}_{11} \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} + \tilde{\alpha}_{12} \Phi_1 &= \tilde{\beta}_1 \\ \frac{d^4 \Phi_2}{dx^4} - \tilde{\alpha}_{21} \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} + \tilde{\alpha}_{22} \Phi_2 &= \tilde{\beta}_2 \end{aligned} \quad (7.307)$$

gdzie:

$$\tilde{\alpha}_{11} = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{13}} = \frac{28 \left[ (C_{12} + 2C_{33}) \left( 1 + \left( \frac{3t}{2h} \right)^2 \right) + \left( \frac{3t}{2h} \right) (C_{33} + 3C_{12} + 5C_{22}^{(3)}) \right]}{h^2 \left[ \frac{35}{8} C_{11}^{(3)} \left( \frac{t}{h} \right)^3 + C_{22} \left[ 1 + \frac{11t}{2h} + \frac{39}{4} \left( \frac{t}{h} \right)^2 \right] \right]}$$

$$\tilde{\alpha}_{12} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}} = \frac{420C_{11} \left[ 1 + \frac{3t}{2h} + \frac{3}{4} \left( \frac{t}{h} \right)^2 \right]}{h^4 \left[ \frac{35}{8} C_{11}^{(3)} \left( \frac{t}{h} \right)^3 + C_{22} \left[ 1 + \frac{11t}{2h} + \frac{39}{4} \left( \frac{t}{h} \right)^2 \right] \right]}$$

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_{13}} = \frac{105C_{11} \left[ Nh + 6\tilde{M} \left( 1 + \frac{t}{h} \right) \right]}{h^4 \left[ \frac{35}{8} C_{11}^{(3)} \left( \frac{t}{h} \right)^3 + C_{22} \left[ 1 + \frac{11t}{2h} + \frac{39}{4} \left( \frac{t}{h} \right)^2 \right] \right]} \frac{x}{L}$$

$$\tilde{\alpha}_{21} = -\frac{\alpha_{25}}{\alpha_{26}} = \frac{24(2C_{33} + C_{12})}{5h^2 \left( C_{11}^{(3)} \frac{t}{h} + \frac{26}{35} C_{22} \right)}$$

$$\tilde{\alpha}_{22} = \frac{\alpha_{24}}{\alpha_{26}} = \frac{24C_{11}}{h^4 \left( C_{11}^{(3)} \frac{t}{h} + \frac{26}{35} C_{22} \right)}$$

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_{26}} = \frac{12C_{11}\tilde{M}}{h^4 \left( C_{11}^{(3)} \frac{t}{h} + \frac{26}{35} C_{22} \right)}$$

Obydwa równania są równaniami liniowymi, zatem rozwiązania ogólnego poszukiwać będziemy jako sumy całki ogólnej równania jednorodnego (CORJ) i całki szczególnej równania niejednorodnego (CSRN). CSRN można z łatwością wyznaczyć metodą przewidywania:

$$\Phi_{1,S}(x) = \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\alpha}_{12}} = \frac{Nh + 6\tilde{M} \left( 1 + \frac{t}{h} \right)}{\left[ 4 + 6 \frac{t}{h} + 3 \left( \frac{t}{h} \right)^2 \right] L} x = \tilde{N}x \quad (7.308)$$

$$\Phi_{2,S}(x) = \frac{\tilde{\beta}_2}{\tilde{\alpha}_{22}} = \frac{\tilde{M}}{2} \quad (7.309)$$

CORJ przewidujemy jako kombinację liniową funkcji wykładniczych. Równanie charakterystyczne, odpowiadające równaniom (7.307), jest w obydwu przypadkach równaniem dwukwadratowym. Charakter rozwiązania zależy od wartości wyróżnika równania dwukwadratowego oraz znaku pierwiastków związanego z nim równania kwadratowego. Zauważmy, że wszystkie współczynniki  $\tilde{\alpha}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) są dodatnie. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{4\tilde{\alpha}_{12}}{\tilde{\alpha}_{11}^2} = \frac{15C_{11} \left( 3 \left( \frac{t}{h} \right)^2 + 6 \frac{t}{h} + 4 \right) \left[ 35C_{11}^{(3)} \left( \frac{t}{h} \right)^3 + C_{22} \left( 8 + 44 \frac{t}{h} + 78 \left( \frac{t}{h} \right)^2 \right) \right]}{14 \left[ C_{33} \left( 8 + 6 \frac{t}{h} + 18 \left( \frac{t}{h} \right)^2 \right) + C_{12} \left( 4 + 18 \frac{t}{h} + 9 \left( \frac{t}{h} \right)^2 \right) + 30C_{22}^{(3)} \frac{t}{h} \right]^2} \quad (7.310)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{4\tilde{\alpha}_{22}}{\tilde{\alpha}_{21}^2} = \frac{5C_{11} \left[ 35C_{11}^{(3)} \frac{t}{h} + 26C_{22} \right]}{42(2C_{33} + C_{12})^2} \quad (7.311)$$

Z uwagi na dodatnią określoność tensorów sprężystości również  $\tilde{\alpha}_1$  i  $\tilde{\alpha}_2$  są zawsze dodatnie, co łatwo sprawdzić, korzystając z wzorów (3.310) i (3.311). W związku z tym mogą wystąpić następujące przypadki:

- $\tilde{\alpha}_K \in (0; 1)$  – cztery pierwiastki rzeczywiste równania charakterystycznego:

$$\lambda_{K,1} = \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tilde{\alpha}_{K1}(1 - \sqrt{1 - \tilde{\alpha}_K})}, \quad \lambda_{K,2} = -\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tilde{\alpha}_{K1}(1 - \sqrt{1 - \tilde{\alpha}_K})}$$

$$\lambda_{K,3} = \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tilde{\alpha}_{K1}(1 + \sqrt{1 - \tilde{\alpha}_K})}, \quad \lambda_{K,4} = -\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tilde{\alpha}_{K1}(1 + \sqrt{1 - \tilde{\alpha}_K})}$$

**Całka ogólna równania jednorodnego:**

$$\Phi_{K,O}(x) = C_{K,1} \cosh(\lambda_1 x) + C_{K,2} \sinh(\lambda_1 x) + C_{K,3} \cosh(\lambda_2 x) + C_{K,4} \sinh(\lambda_2 x) \quad (7.312)$$

- $\tilde{\alpha}_K > 1$  – dwie pary sprzężonych pierwiastków zespolonych równania charakterystycznego:

$$\lambda_{K,1} = \lambda = \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}_{K1}}{2}} \sqrt{\tilde{\alpha}_K} \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_K}} \right)} + i \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_K}} \right)} \right]$$

$$\lambda_{K,2} = -\lambda = -\sqrt{\frac{\tilde{\alpha}_{K1}}{2}} \sqrt{\tilde{\alpha}_K} \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_K}} \right)} + i \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_K}} \right)} \right]$$

$$\lambda_{K,3} = \bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}_{K1}}{2}} \sqrt{\tilde{\alpha}_K} \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_K}} \right)} - i \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_K}} \right)} \right]$$

$$\lambda_{K,4} = -\bar{\lambda} = -\sqrt{\frac{\tilde{\alpha}_{K1}}{2}} \sqrt{\tilde{\alpha}_K} \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_K}} \right)} - i \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_K}} \right)} \right]$$

**Całka ogólna równania jednorodnego:**

$$\Phi_{K,O}(x) = C_{K,1} \cosh(\Re[\lambda]x) \cos(\Im[\lambda]x) + C_{K,2} \cosh(\Re[\lambda]x) \sin(\Im[\lambda]x) + \\ + C_{K,3} \sinh(\Re[\lambda]x) \cos(\Im[\lambda]x) + C_{K,4} \sinh(\Re[\lambda]x) \sin(\Im[\lambda]x) \quad (7.313)$$

gdzie:

$$\Re[\lambda] = \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{\alpha}_{K1}(\sqrt{\tilde{\alpha}_K} + 1)} = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{\tilde{\alpha}_{K2}} + \tilde{\alpha}_{K1}}$$

$$\Im[\lambda] = \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{\alpha}_{K1}(\sqrt{\tilde{\alpha}_K} - 1)} = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{\tilde{\alpha}_{K2}} - \tilde{\alpha}_{K1}}$$

Osiem stałych całkowania  $C_{1,1}, \dots, C_{1,4}, C_{2,1}, \dots, C_{2,4}$  należy wyznaczyć ze wspomnianych już wcześniej warunków brzegowych, zapisanych dla całki ogólnej równania niejednorodnego:

$$\Phi_K(x) = \Phi_{K,O}(x) + \Phi_{K,S}(x), \quad K = 1, 2 \quad (7.314)$$

**Warunki brzegowe:**

- na brzegu  $x = -\frac{L}{2}$ :

$$\Phi_1 = 0, \quad \frac{d\Phi_1}{dx} = \delta_1 = N \frac{h}{L}, \quad \Phi_2 = 0, \quad \frac{d\Phi_2}{dx} = \delta_2 = -\frac{1}{L} \left[ N \frac{h+t}{2} - \tilde{M} \right] \quad (7.315)$$

- na brzegu  $x = \frac{L}{2}$ :

$$\Phi_1 = 0, \quad \frac{d\Phi_1}{dx} = \delta_1 = N \frac{h}{L}, \quad \Phi_2 = 0, \quad \frac{d\Phi_2}{dx} = -\delta_2 = \frac{1}{L} \left[ N \frac{h+t}{2} - \tilde{M} \right] \quad (7.316)$$

W praktyce najczęściej zachodzi  $\tilde{\alpha}_1 \in (0; 1)$  oraz  $\tilde{\alpha}_2 > 1$ , stąd funkcja  $\Phi_1(x)$  określona jest z reguły wzorem (7.312), funkcja  $\Phi_2(x)$  zaś wzorem (7.313). Tak jak wspomniano wcześniej, w przypadku złącza symetrycznego funkcja  $\Phi_1$  musi być funkcją nieparzystą, stąd:

$$C_{1,1} = C_{1,3} = 0 \quad (7.317)$$

funkcja  $\Phi_2$  z kolei musi być funkcją parzystą, co wymaga:

$$C_{2,2} = C_{2,3} = 0 \quad (7.318)$$

Pozostałe stałe całkowania dla przypadku  $\tilde{\alpha}_1 \in (0; 1)$ ,  $\tilde{\alpha}_2 > 1$  określają wzory:

$$C_{1,2} = \frac{\delta_1 \sinh \omega_2 - \tilde{N} [\sinh \omega_2 - \omega_2 \cosh \omega_2]}{\lambda_1 \cosh \omega_1 \sinh \omega_2 - \lambda_2 \sinh \omega_1 \cosh \omega_2} \quad (7.319)$$

$$C_{1,4} = \frac{\delta_1 \sinh \omega_1 - \tilde{N} [\sinh \omega_1 - \omega_1 \cosh \omega_1]}{\lambda_1 \cosh \omega_1 \sinh \omega_2 - \lambda_2 \sinh \omega_1 \cosh \omega_2} \quad (7.320)$$

$$C_{2,1} = \frac{\delta_2 L \sin \zeta_2 \sinh \zeta_1 - \tilde{M} [\zeta_2 \cos \zeta_2 \sinh \zeta_1 + \zeta_1 \sin \zeta_2 \cosh \zeta_1]}{2[\zeta_2 \cosh \zeta_1 \sinh \zeta_1 + \zeta_1 \cos \zeta_2 \sin \zeta_2]} \quad (7.321)$$

$$C_{2,4} = -\frac{\delta_2 L \cos \zeta_2 \cosh \zeta_1 - \tilde{M} [\zeta_1 \cos \zeta_2 \sinh \zeta_1 - \zeta_2 \sin \zeta_2 \cosh \zeta_1]}{2[\zeta_2 \cosh \zeta_1 \sinh \zeta_1 + \zeta_1 \cos \zeta_2 \sin \zeta_2]} \quad (7.322)$$

gdzie:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tilde{\alpha}_{11}(1 - \sqrt{1 - \tilde{\alpha}_1})}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tilde{\alpha}_{11}(1 + \sqrt{1 - \tilde{\alpha}_1})}$$

$$\Re[\lambda] = \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{\alpha}_{21}(\sqrt{\tilde{\alpha}_2} + 1)}, \quad \Im[\lambda] = \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{\alpha}_{21}(\sqrt{\tilde{\alpha}_2} - 1)}$$

$$\omega_1 = \frac{L}{2} \lambda_1, \quad \omega_2 = \frac{L}{2} \lambda_2, \quad \varsigma_1 = \frac{L}{2} \Re[\lambda], \quad \varsigma_2 = \frac{L}{2} \Im[\lambda]$$

Dla pozostałych przypadków stałe całkowania można wyznaczyć w stosunkowo prosty sposób, rozwiązując liniowy układ czterech równań algebraicznych po uprzednim przyjęciu zerowych wartości przy odpowiednich parzystych lub nieparzystych składnikach rozwiązań ogólnych.

Opisana w tym podrozdziale procedura wyznaczania rozwiązania analitycznego na podstawie modelu Allmana jest z pewnością złożona, ostatecznie jednak pozwala na uwzględnienie wielu zjawisk, o których wspomniano na początku podrozdziału: przede wszystkim chodzi tutaj o jednorodny warunek brzegowy na brzegu swobodnym skleiny, ale również o uwzględnienie pełnego płaskiego stanu naprężenia (wraz z poprzecznymi naprężeniami normalnymi oraz naprężeniami stycznymi) w elementach łączonych, odrywanie skleiny czy wreszcie anizotropię związków konstytutywnych. W podobny sposób wyznacza się rozwiązania przy założeniu odmiennych funkcji niewiadomych wyznaczających rozkład naprężeń w elementach złącza, tak jak zaproponowano w pracach (Chen i Cheng 1983; Cheng i in. 1991; Zhao i in. 2011, 2014).

Na koniec warto wspomnieć o pewnej nieścisłości, jaką obarczone jest całkowanie lokalnych równań równowagi naprężeń. W podejściu wykorzystującym twierdzenie Castigliano nie określa się żadnych kinematycznych warunków brzegowych, tym samym w ogólnym przypadku nie ma gwarancji, że założone pole naprężenia odpowiada takim polom odkształcenia i przemieszczenia, które spełniają warunki zszycia na granicach obszarów, w których są określone. Podobnie, również związki kinematyczne (geometryczne) nie są wykorzystywane w sformułowaniu zagadnienia, a ich spełnienie nie jest weryfikowane ani nawet wymagane. Ogólna postać pola naprężenia zakładana jest z góry, a składowe tensora naprężenia wyznaczane są wyłącznie na podstawie równań równowagi i statycznych warunków brzegowych. Odkształcenia, które wykorzystywane są przy wyznaczaniu energii wewnętrznej, obliczane są jedynie na podstawie związków konstytutywnych, co oznacza, że w przypadku ogólnym nie ma gwarancji, że spełnione są związki kinematyczne lub – równoważnie – równania nierozdzielności odkształceń. Łatwo sprawdzić, że te ostatnie istotnie nie są spełnione dla założonego stanu naprężenia. Załóżmy dla uproszczenia płaski stan naprężenia w górnym elemencie, określony

wzoramii (7.228), (7.243) i (7.248), dla przypadku symetrycznego złącza i elementów łączonych wykonanych z materiału izotropowego:

$$\sigma_{xx}(x, z) = 6 \frac{M(x)}{h^2} \left( \frac{2z}{h} \right) + \frac{N(x)}{h}$$

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{3}{2} \frac{Q(x)}{h} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] - \frac{\tau_a(x)}{4} \left[ 1 - 2 \left( \frac{2z}{h} \right) - 3 \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_{zz}(x, z) =$$

$$= \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{2z}{h} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{2z}{h} \right)^3 \right] \frac{p_1(x)}{2} - \frac{h}{8t} \left[ 1 + \left( \frac{2z}{h} \right) - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 - \left( \frac{2z}{h} \right)^3 \right] (p_2(x) - p_1(x))$$

Siły przekrojowe i naprężenia powiązane są równaniami równowagi (7.233)–(7.239). Składowe pola odkształcenia, odpowiadające tak określönemu polu naprężenia, są następujące:

$$\varepsilon_{xx}(x, z) = \frac{1}{E} [\sigma_{xx}(x, z) - \nu \sigma_{zz}(x, z)], \quad \varepsilon_{zz}(x, z) = \frac{1}{E} [\sigma_{zz}(x, z) - \nu \sigma_{xx}(x, z)]$$

$$\varepsilon_{yy}(x, z) = -\frac{\nu}{E} [\sigma_{xx}(x, z) + \sigma_{zz}(x, z)], \quad \varepsilon_{xz}(x, z) = \frac{1}{2G} \tau_{xz}(x, z)$$

Powyższe wielkości muszą spełniać **równanie nierozdzielności odkształceń**, które dla zagadnień płaskich przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = 0 \quad (7.323)$$

Po podstawieniu wyrażeń na składowe tensora odkształcenia oraz wykorzystaniu równań równowagi lewa strona powyższego warunku może zostać zapisana w następującej postaci:

$$\frac{1}{Eht} \left\{ \left[ 2(1+\nu)(p_1(x) - p_2(x)) + \frac{h^2}{8} \frac{d^2}{dx^2} \left( \left( 1 + 4 \frac{t}{h} \right) p_1(x) - p_2(x) \right) \right] + \right.$$

$$+ \frac{z}{h} \left[ 12(1+\nu)(p_1(x) - p_2(x)) + 24\nu \frac{t}{h} p_1(x) + \frac{h^2}{4} \frac{d^2}{dx^2} \left( \left( 1 + 6 \frac{t}{h} \right) p_1(x) - p_2(x) \right) \right] +$$

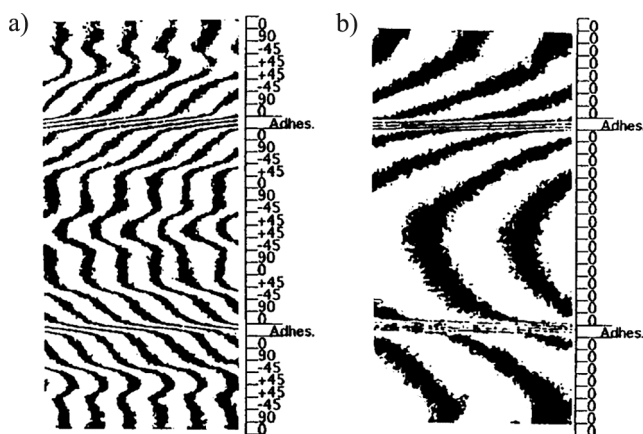
$$\left. + \left( \frac{z}{h} \right)^2 \frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} (p_2(x) - p_1(x)) + \left( \frac{z}{h} \right)^3 h^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( p_2(x) - \left( 1 + 2 \frac{t}{h} \right) p_1(x) \right) \right\}$$



Aby spełniony był warunek nierozdzielności odkształceń, powyższe wyrażenie musiałyby być równe 0 dla dowolnych wartości współrzędnych  $x$  oraz  $z$ . Już samo zerowanie się współczynnika przy  $z^2$  wymagałoby, aby druga pochodna różnicy naprężeń odrywających była równa 0, co – na podstawie równania (7.250) – wymagałoby, aby czwarta pochodna funkcji naprężeń  $\Phi_1$  była zerowa dla dowolnego  $x$ , co stoi w oczywistej sprzeczności z równaniami (7.307). Widać zatem, że **warunek ten nie jest spełniony, co oznacza, że nie są spełnione warunki całkowalności związków kinematycznych i dla tak określonego pola odkształcenia nie istnieje jednoznacznie określone pole przemieszczenia**. Jest to w zasadzie ten sam problem, który w kontekście modelowania belek zginanych poprzecznie z wykorzystaniem wzoru Żurawskiego sygnalizował Love już na początku minionego stulecia (Love 1906).

## 7.4. Deformacja postaciowa elementów łączonych

Zakłada się, że w obydwu podstawowych modelach liniowych – prętowym i belkowym – które omawiane były na początku tego rozdziału, elementy łączone znajdują się wyłącznie w jednoosiowym stanie naprężenia – czystym rozciąganiu w przypadku złącza dwuzakładkowego lub mimośrodowym rozciąganiu w przypadku złącza jednozakładkowego. Pomija się obecność i wpływ naprężeń stycznych w elementach łączonych. Badania przeprowadzone przez Tsai, Oplingera i Mortona, wskazujące na faktyczny **wpływ naprężeń stycznych w elementach łączonych na zachowanie złącza** (por. rys. 41), stały się motywacją do opracowania bardziej ogólnego liniowego modelu, który uwzględniałby ich obecność (Tsai i in. 1998).



Rys. 41. Rozkład przemieszczeń wyznaczony metodą prążków mory w złączach dwuzakładkowych elementów kompozytowych (włókna grafitowe w matrycy epoksydowej): a) elementy izotropowe; b) elementy jednokierunkowo zbrojone (Tsai i in. 1998)

Opracowany przez autorów model to w dalszym ciągu **liniowy model lokalny – w przypadku złączy dwuzakładkowych jest to model prętowy, w przypadku złączy jednozakładkowych – belkowy**. W obydwu przypadkach analiza modelu przebiega w sposób analogiczny jak w przypadku podstawowych modeli liniowych, omówionych w poprzednich podrozdziałach. Kluczowa różnica dotyczy sposobu wyznaczenia przemieszczeń osiowych na interfejsie skleiny oraz elementów łączonych. O ile w przypadku modeli Volkersena–de Bruyne’a oraz Golanda–Reissnera przemieszczenie to wynikało wyłącznie z obecności naprężeń normalnych i odkształceń liniowych w przekroju elementów łączonych (wskutek obciążenia osiowego dla modelu prętowego, dla modelu belkowego zaś dodatkowo wskutek zginania), o tyle w nowej propozycji uwzględniono dodatkowo wpływ naprężenia stycznego i odkształcenia postaciowego w elementach łączonych.

Podstawowym założeniem modelu Tsai, Oplingera i Mortona (TOM) jest przyjęcie, że **rozkład naprężenia stycznego w przekroju elementu łączonego jest liniowy i zmienia się od wartości 0 na brzegu swobodnym (zewnątrzna powierzchnia elementu) do wartości równej naprężeniu stycznemu w skleinie na interfejsie**.

Jak zobaczyliśmy w poprzednim podrozdziale, modele dwuwymiarowe uwzględniają deformację postaciową elementów łączonych – dopuszczają przy tym bardziej ogólne (np. kwadratowe) funkcje rozkładu odkształceń postaciowych. Są jednak przy tym bardzo złożone, tymczasem – jak się niebawem okaże – w modelu Tsai, Oplingera i Mortona uwzględnienie deformacji postaciowej wymaga jedynie drobnej modyfikacji pojedynczego parametru w stosunku do podstawowych rozwiązań dla prętowego modelu Volkersena–de Bruyne’a lub belkowego modelu Golanda–Reissnera.

#### 7.4.1. Złącze dwuzakładkowe – model prętowy

Na początku rozważmy przypadek **złącza dwuzakładkowego, symetrycznego względem płaszczyzny środkowej środkowego elementu** ( $E_1 h_1 = E_3 h_3$ ). Zakłada się, że skleina podlega prostemu ścinaniu. Wówczas jej kinematykę opisuje się zależnością analogiczną do związków (7.2), (7.3) i (7.60), co po założeniu liniowego związku konstytutywnego dla materiału skleiny pozwala napisać:

$$\tau_a = \frac{G_a}{t} (u_{2,T} - u_{1,B}) \quad (7.324)$$

gdzie:  $\tau_a$  oznacza naprężenie styczne w skleinie;  $G_a$  to moduł Kirchhoffa materiału skleiny;  $t$  to grubość skleiny;  $u_{1,B}$  oznacza przemieszczenie osiowe dolnej powierzchni górnego elementu; a  $u_{2,T}$  to przemieszczenie osiowe górnej powierzchni środkowego elementu. Przemieszczenia te wyznacza się zgodnie z założeniem o **liniowym rozkładzie odkształceń postaciowych  $\gamma_1, \gamma_2$  w elementach łączonych**.

Również o materiałach elementów łączonych, zakładając, że charakteryzują się liniowymi związkami konstytutywnymi, możemy napisać:

$$\tau_1 = A_1 z_1 + B_1 \quad (7.325)$$

$$\tau_2 = A_2 z_2 + B_2 \quad (7.326)$$

gdzie:  $\tau_i$ ,  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ) oznaczają odpowiednio naprężenia styczne i moduł Kirchhoffa dla zewnętrznego ( $i = 1$ ) i wewnętrznego ( $i = 2$ ) elementu. Powyższe rozkłady naprężeń stycznych muszą spełniać poniższe warunki brzegowe:

$$\begin{cases} \tau_1 \left( z_1 = -\frac{h_1}{2} \right) = 0, & \tau_1 \left( z_1 = \frac{h_1}{2} \right) = \tau_a \\ \tau_2 \left( z_2 = -\frac{h_2}{2} \right) = \tau_a, & \tau_2 \left( z_2 = \frac{h_2}{2} \right) = -\tau_a \end{cases} \quad (7.327)$$

Na podstawie powyższych równań wyznaczamy stałe  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ . Rozkład naprężeń stycznych i odpowiadających im odkształceń postaciowych określony jest następująco:

$$\tau_1 = \frac{\tau_a}{h_1} \left[ z_1 + \frac{h_1}{2} \right], \quad \gamma_1 = \frac{\tau_a}{G_1 h_1} \left[ z_1 + \frac{h_1}{2} \right] \quad (7.328)$$

$$\tau_2 = -\frac{2\tau_a}{h_2} z_2, \quad \gamma_2 = -\frac{2\tau_a}{G_2 h_2} z_2 \quad (7.329)$$

Przystępujemy teraz do wyznaczenia przemieszczeń  $u_{1,B}$  oraz  $u_{2,T}$ . Przemieszczenia punktów na płaszczyźnie styku będą całką odkształceń liniowych i odkształceń postaciowych. Przemieszczenie wynikające z odkształceń liniowych, spowodowane działaniem sił osiowych w elementach łączonych, jest stałe dla całego przekroju – jest to przemieszczenie tych punktów, w których odkształcenie postaciowe jest zerowe. W przypadku zewnętrznego elementu łączonego punkty te znajdują się na powierzchni zewnętrznej elementu – przemieszczenie tych punktów oznaczymy przez  $u_{1,T}$ . W przypadku elementu środkowego, z uwagi na symetrię zagadnienia, są to punkty w środku przekroju – przemieszczenie tych punktów oznaczymy przez  $u_{2,0}$ . Możemy zatem napisać:

$$u_1(x, z_1) = u_{1,T}(x) + \int_{-\frac{h_1}{2}}^{z_1} \gamma_1(x, \zeta_1) d\zeta_1 = u_{1,T}(x) + \frac{\tau_a(x) h_1}{8G_1} \left[ 1 + \frac{z_1}{h_1} + \left( \frac{z_1}{h_1} \right)^2 \right] \quad (7.330)$$

$$u_2(x, z_2) = u_{2,0}(x) + \int_0^{z_2} \gamma_2(x, \zeta_2) d\zeta_2 = u_{2,0}(x) - \frac{\tau_a(x) h_2}{G_2} \left( \frac{z_2}{h_2} \right)^2 \quad (7.331)$$

Możemy wtedy napisać:

$$u_{1,B} = u_1 \left( \frac{h_1}{2} \right) = u_{1,T} + \frac{\tau_a h_1}{2G_1} \quad (7.332)$$

$$u_{2,T} = u_2 \left( -\frac{h_2}{2} \right) = u_{2,0} - \frac{\tau_a h_2}{4G_2} \quad (7.333)$$

co pozwala nam przepisać wyrażenia (7.330) i (7.331) w postaci:

$$u_1(x, z_1) = u_{1,B}(x) + \frac{\tau_a(x) h_1}{8G_1} \left[ 4 \left( \frac{z_1}{h_1} \right)^2 + 4 \frac{z_1}{h_1} - 3 \right] \quad (7.334)$$

$$u_2(x, z_1) = u_{2,T}(x) + \frac{\tau_a(x) h_2}{4G_2} \left[ 4 \left( \frac{z_2}{h_2} \right)^2 + 1 \right] \quad (7.335)$$

Znajomość rozkładu przemieszczenia osiowego w przekroju elementów łączonych pozwala nam wyznaczyć siły osiowe w tych elementach:

$$N_1 = \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} E_1 \frac{du_1}{dx} dz_1 = E_1 h_1 \left[ \frac{du_{1,B}}{dx} - \frac{h_1}{3G_1} \frac{d\tau_a}{dx} \right] \quad (7.336)$$

$$N_2 = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} E_2 \frac{du_2}{dx} dz_2 = E_2 h_2 \left[ \frac{du_{2,T}}{dx} + \frac{h_2}{6G_2} \frac{d\tau_a}{dx} \right] \quad (7.337)$$

Z powyższych związków można wyznaczyć pochodne przemieszczeń  $u_{1,B}$  i  $u_{2,T}$  a otrzymane zależności podstawić do zróżniczkowanego obustronnie równania (7.324):

$$\frac{d\tau_a}{dx} = \frac{G_a}{t} \left( \frac{du_{2,T}}{dx} - \frac{du_{1,B}}{dx} \right) = \frac{G}{t} \left[ \left( \frac{N_2}{E_2 h_2} - \frac{h_2}{6G_2} \frac{d\tau_a}{dx} \right) - \left( \frac{N_1}{E_1 h_1} + \frac{h_1}{3G_1} \frac{d\tau_a}{dx} \right) \right] \quad (7.338)$$

Powyższe równanie po raz kolejny różniczkujemy obustronnie:

$$\frac{d^2 \tau_a}{dx^2} = \frac{G_a}{t} \left[ \frac{1}{E_2 h_2} \frac{dN_2}{dx} - \frac{1}{E_1 h_1} \frac{dN_1}{dx} - \left( \frac{h_2}{6G_2} + \frac{h_1}{3G_1} \right) \frac{d^2 \tau_a}{dx^2} \right] \quad (7.339)$$

a następnie wykorzystujemy równania równowagi, które dla złącza dwuzakładkowego symetrycznego względem płaszczyzny środkowej przyjmują postać:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dx} - \tau_a = 0 \\ \frac{dN_2}{dx} + 2\tau_a = 0 \end{cases} \quad (7.340)$$

Otrzymujemy:

$$\frac{d^2\tau_a}{dx^2} + \frac{G_a}{t} \left[ \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right) \tau_a + \left( \frac{h_2}{6G_2} + \frac{h_1}{3G_1} \right) \frac{d^2\tau_a}{dx^2} \right] = 0 \quad (7.341)$$

Po przekształceniach równanie (7.339) można zapisać w postaci analogicznej do (7.15):

$$\frac{d^2\tau_a}{dx^2} - \beta_s^2 \tau_a = 0, \quad \text{gdzie: } \beta_s = \sqrt{\frac{\frac{G_a}{t} \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right)}{1 + \frac{G_a}{t} \left( \frac{h_1}{3G_1} + \frac{h_2}{6G_2} \right)}} > 0 \quad (7.342)$$

Rozwiązaniem ogólnym powyższego równania jest, oczywiście, kombinacja liniowa funkcji hiperbolicznych, analogiczna do rozwiązania (7.16):

$$\tau_a(x) = C_1 \cosh(\beta_s x) + C_2 \sinh(\beta_s x) \quad (7.343)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z równania równowagi globalnej:

$$2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tau_a(x) dx = N \quad (7.344)$$

oraz z równania (7.338), którego rola w rozwiązaniu jest analogiczna do równania (7.25) dla modelu Volkersena–de Bruyne'a. Równanie (7.336) należy zapisać w jednym z dwóch punktów, dla których określone są warunki brzegowe:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{N}{2} = \tau_{\text{avg}} L, \quad N_2 = 0 \quad \text{dla } x = -\frac{L}{2} \\ N_1 = 0, \quad N_2 = N = 2\tau_{\text{avg}} L \quad \text{dla } x = \frac{L}{2} \end{cases} \quad (7.345)$$

Z rozwiązania stosownego układu równań liniowych otrzymamy:

$$C_1 = \frac{\tau_{\text{avg}} \beta_s L}{2 \sinh\left(\frac{\beta_s L}{2}\right)}, \quad C_2 = \frac{\tau_{\text{avg}} \beta_s L}{2 \cosh\left(\frac{\beta_s L}{2}\right)} \left[ \frac{1 - \frac{E_2 h_2}{2E_1 h_1}}{1 + \frac{E_2 h_2}{2E_1 h_1}} \right] \quad (7.346)$$

Podsumowując rezultaty powyższej analizy, należy stwierdzić, że z matematycznego punktu widzenia uogólnienie zaprezentowane w pracy (Tsai i in. 1998) sprowadza się do zastąpienia współczynnika  $\beta$  z równania (7.15) wielkością  $\beta_s$  z równania (7.342), przy czym należy zwrócić uwagę, że zawsze  $\beta_s < \beta$ . Ponieważ wartości  $\beta$  maleją wraz z wzrostem sztywności elementów łączonych oraz z wzrostem podatności skleiny, można w uproszczeniu stwierdzić, że uwzględnienie naprężeń stycznych w elementach łączonych w złączu dwuzakładkowym jest do pewnego stopnia równoważne rozpatrywaniu złącza o powiększonej wartości stosunku sztywności podłużnej elementów do sztywności poprzecznej skleiny.

#### 7.4.2. Złącze jednozakładkowe – model belkowy

W analogiczny sposób autorzy (Tsai i in. 1998) **opracowali belkowy model symetrycznego złącza jednozakładkowego**. Przyjmować będziemy  $E_1 = E_2 = E$ ,  $G_1 = G_2 = G$ ,  $h_1 = h_2 = h$ . Równania równowagi zakłada się w takiej samej postaci jak (7.51)–(7.56), a związki konstytutywne identyczne z (7.57) i (7.58). Tak samo jak w przypadku analizy złącza dwuzakładkowego **zakłada się liniowy rozkład naprężeń stycznych i odkształceń postaciowych w elementach łączonych** (7.325) i (7.326). Odmienne są jednak warunki brzegowe:

$$\begin{cases} \tau_1\left(z_1 = -\frac{h}{2}\right) = 0, & \tau_1\left(z_1 = \frac{h}{2}\right) = \tau_a \\ \tau_2\left(z_2 = -\frac{h}{2}\right) = \tau_a, & \tau_2\left(z_2 = \frac{h}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (7.347)$$

przez co musimy teraz przyjąć:

$$\tau_1 = \frac{\tau_a}{h} \left[ z_1 + \frac{h}{2} \right], \quad \gamma_1 = \frac{\tau_a}{Gh} \left[ z_1 + \frac{h}{2} \right] \quad (7.348)$$

$$\tau_2 = \frac{\tau_a}{h} \left[ \frac{h}{2} - z_2 \right], \quad \gamma_2 = \frac{\tau_a}{Gh} \left[ \frac{h}{2} - z_2 \right] \quad (7.349)$$

Kinematyka skleiny opisana jest związkiem o ogólnej postaci równania (7.324). Inne natomiast będą wyrażenia na przemieszczenia  $u_{2,T}$  i  $u_{1,B}$ . W pracy (Tsai i in. 1998) **przemieszczenia te rozłożono na składowe pochodzące od rozciągania i ścinania  $u_{2,T}^N$  i  $u_{1,B}^N$  oraz te pochodzące od zginania  $u_{2,T}^M$  i  $u_{1,B}^M$** :

$$u_{2,T} = u_{2,T}^N + u_{2,T}^M, \quad u_{1,B} = u_{1,B}^N + u_{1,B}^M \quad (7.350)$$

Przemieszczenia od rozciągania i ścinania wyrażają się wzorami podobnymi do (7.330) i (7.331). Po zastosowaniu przekształceń analogicznych jak w analizie złącza dwuzakładowego można napisać:

$$u_1^N = u_{1,T}^N + \int_{-\frac{h}{2}}^{z_1} \gamma_1 d\zeta_1 = u_{1,B}^N + \frac{\tau_a h}{8G} \left[ -3 + 4 \frac{z_1}{h_1} + 4 \left( \frac{z_1}{h_1} \right)^2 \right] \quad (7.351)$$

$$u_2^N = u_{2,B}^N + \int_{\frac{h}{2}}^{z_2} \gamma_2 d\zeta_2 = u_{2,T}^N + \frac{\tau_a h}{8G} \left[ 3 + 4 \frac{z_1}{h_1} - 4 \left( \frac{z_1}{h_1} \right)^2 \right] \quad (7.352)$$

Siły osiowe można wtedy wyrazić następującymi wzorami:

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E \frac{du_1^N}{dx} dz_1 = Eh \left[ \frac{du_{1,B}^N}{dx} - \frac{h}{3G} \frac{d\tau_a}{dx} \right] \quad (7.353)$$

$$N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E \frac{du_2^N}{dx} dz_2 = Eh \left[ \frac{du_{2,T}^N}{dx} + \frac{h}{3G} \frac{d\tau_a}{dx} \right] \quad (7.354)$$

Odształcenia liniowe skrajnych włókien, spowodowane działaniem momentu zginającego, wyznacza się ze zwykłych wzorów dla belki Bernoulliego–Eulera:

$$\varepsilon_1^M = \frac{du_1^M}{dx} = \frac{M_1}{EI} z_1 \Rightarrow \frac{du_{1,B}^M}{dx} = \frac{M_1}{EI} \frac{h}{2} = \frac{6M_1}{Eh^2} \quad (7.355)$$

$$\varepsilon_2^M = \frac{du_2^M}{dx} = \frac{M_2}{EI} z_2 \Rightarrow \frac{du_{2,T}^M}{dx} = -\frac{M_2}{EI} \frac{h}{2} = -\frac{6M_2}{Eh^2} \quad (7.356)$$

Można teraz zapisać obustronnie zróżniczkowane równanie (7.324), uwzględniające rozkład (7.349), związki (7.353) i (7.354) oraz zróżniczkowane związki (7.355) i (7.356). Po przekształceniach otrzymamy:

$$\frac{d\tau_a}{dx} + \frac{G_a}{t} \left[ \frac{N_1 - N_2}{Eh} + \frac{6(M_1 + M_2)}{Eh^2} + \frac{2h}{3G} \frac{d\tau_a}{dx} \right] = 0 \quad (7.357)$$

Ponowne zróżniczkowanie daje nam w rezultacie:

$$\left( 1 + \frac{2G_a h}{3Gt} \right) \frac{d^2 \tau_a}{dx^2} + \frac{G_a}{t} \left[ \frac{1}{Eh} \left( \frac{dN_1}{dx} - \frac{dN_2}{dx} \right) + \frac{6}{Eh^2} \left( \frac{dM_1}{dx} + \frac{dM_2}{dx} \right) \right] = 0 \quad (7.358)$$

W powyższym równaniu uwzględnić należy równania równowagi (7.51) i (7.52) oraz (7.55) i (7.56). Otrzymujemy w efekcie następujące równanie:

$$\left( 1 + \frac{2G_a h}{3Gt} \right) \frac{d^2 \tau_a}{dx^2} + \frac{G_a}{t} \left[ -\frac{2}{Eh} \tau_a + \frac{6}{Eh^2} (Q_1 + Q_2 - \tau_a (h + t)) \right] = 0 \quad (7.359)$$

Kolejne różniczkowanie pozwala nam wykorzystać równania równowagi (7.53) i (7.54), co prowadzi do poniższego rezultatu:

$$\left( 1 + \frac{2G_a h}{3Gt} \right) \frac{d^3 \tau_a}{dx^3} - \frac{G_a}{t} \left[ \frac{2}{Eh} + \frac{6(h + t)}{Eh^2} \right] \frac{d\tau_a}{dx} = 0 \quad (7.360)$$

W pracy (Tsai i in. 1998) przy wyznaczaniu momentu naprężenia stycznego w skleinie, działającego na elementy łączone, założono, że naprężenie styczne działa w płaszczyźnie interfejsu inaczej niż w modelu Hart-Smitha, w którym przyjęto, że działa ono w płaszczyźnie środkowej skleiny. Stosując podejście autorów omawianego modelu, należy w powyższym równaniu zastąpić wyrażenie  $(h + t)$  w drugim składniku w drugim nawiasie samą tylko wielkością  $h$ . Wtedy rozwiązanie upraszcza się i równanie rządzące zagadnieniem można zapisać w postaci:

$$\frac{d^3 \tau_a}{dx^3} - \beta_s^2 \frac{d\tau_a}{dx} = 0, \quad \text{gdzie: } \beta_s^2 = \frac{8}{Eh \left( \frac{t}{G_a} + \frac{2h}{3G} \right)} \quad (7.361)$$

Rozwiązanie ogólne równania (7.361) ma postać:

$$\tau_a(x) = C_1 \cosh(\beta_s x) + C_2 \sinh(\beta_s x) + C_3 \quad (7.362)$$

Rozkład naprężenia stycznego w symetrycznym złączu jednozakładkowym jest symetryczny, zatem stała  $C_2$ , odpowiadająca antysymetrycznej składowej rozkładu,



musi być zerowa. Pozostałe stałe całkowania wyznaczono w cytowanej pracy, korzystając z następujących warunków:

• **warunki brzegowe:**

$$\begin{cases} M_1 = M, & Q_1 = Q, & N_1 = N \\ M_2 = 0, & Q_2 = 0, & N_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{L}{2} \quad (7.363)$$

$$\begin{cases} M_1 = 0, & Q_1 = 0, & N_1 = 0 \\ M_2 = -M, & Q_2 = Q, & N_2 = N \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{L}{2}$$

• **warunek równowagi globalnej:**

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tau_a(x) dx = N = \tau_{\text{avg}} L \quad (7.364)$$

Warunki (7.363) uwzględniane są przez zapisanie warunku (7.357) dla  $x = \pm \frac{L}{2}$ , z przyjęciem odpowiednich wartości brzegowych sił przekrojowych. W obydwu przypadkach otrzymujemy to samo równanie, z którego można wyznaczyć stałą  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\beta_s L}{2}\right)} \frac{G_a}{\beta_s t} \left[ \frac{N}{Eh} + \frac{6M}{Eh^2} \right] \left( 1 + \frac{2G_a h}{3Gt} \right) \quad (7.365)$$

Po wykorzystaniu definicji współczynnika  $\beta_s$  (7.361) oraz wprowadzeniu oznaczenia:

$$k = \frac{2M}{Nh} \quad (7.366)$$

powyższe wyrażenie można zapisać w postaci:

$$C_1 = \frac{\tau_{\text{avg}} \beta_s L}{8} \frac{1 + 3k}{\sinh\left(\frac{\beta_s L}{2}\right)} \quad (7.367)$$

Warunek (7.364) pozwala wyznaczyć stałą  $C_3$ :

$$C_3 = \frac{N}{L} - \frac{2C_1}{\beta_s L} \sinh\left(\frac{\beta_s L}{2}\right) = \frac{3}{4} \tau_{\text{avg}} (1 - k) \quad (7.368)$$

Ostatecznie, rozkład naprężenia stycznego można przedstawić za pomocą funkcji:

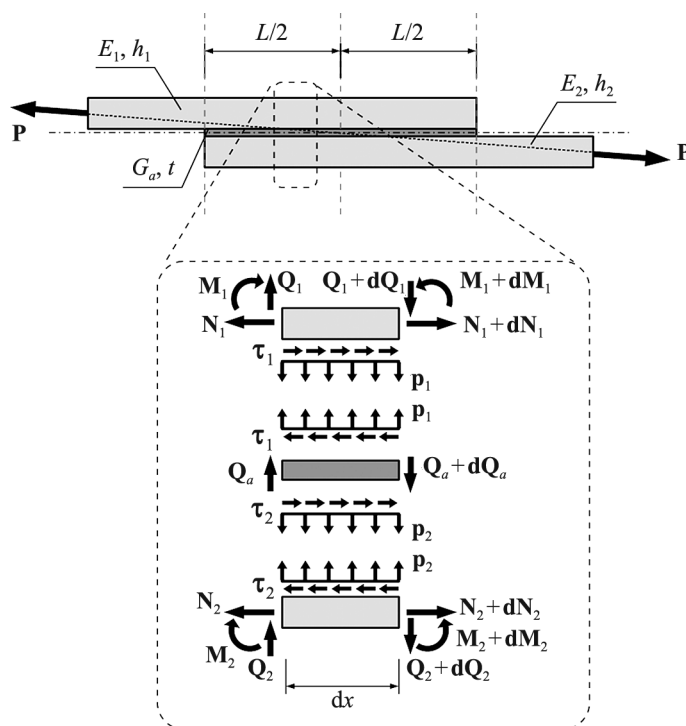
$$\tau_a(x) = \frac{\tau_{\text{avg}}}{4} \left[ \frac{\beta_s L}{2} (1 + 3k) \frac{\cosh(\beta_s x)}{\sinh\left(\frac{\beta_s L}{2}\right)} + 3(1 - k) \right] \quad (7.369)$$

Podobnie jak w przypadku analizy złącza dwuzakładkowego można stwierdzić, że uwzględnienie deformacji postaciowej elementów ścinanych z matematycznego punktu widzenia sprowadza się do zastąpienia w równaniu rządzącym (7.76) współczynnika  $\beta$  współczynnikiem  $\beta_s$  z (7.361). Zawsze zachodzi przy tym  $\beta > \beta_s$ . Oznacza to, że uwzględnienie odkształceń postaciowych w elementach łączonych może mieć ten sam jakościowy i ilościowy skutek, co rozważenie złącza, w którym elementy łączone wykazują większą sztywność lub też skleina wykazuje większą podatność.

Rozwiązanie dane równaniem (7.369) potrzebuje komentarza. **Wyznaczenie tego rozwiązania wymaga znajomości wszystkich sił przekrojowych w brzegowych przekrojach elementów łączonych.** W tym sensie rozwiązanie to może okazać się niewystarczające do opisu rzeczywistych złączy, dla których siły te mogą być nieznane. Złącza jednozakładkowe są z reguły projektowane jako złącza wyłącznie rozciągane – albo inaczej – **często jedynym znanym obciążeniem zewnętrznym, uwzględnianym w projekcie, jest siła osiowa, siła poprzeczna zaś oraz moment zginający na brzegach złącza nie są zadane z góry jako obciążenie zewnętrzne, ale są siłami wynikającymi z deformacji poprzecznej** (zginania) elementów łączonych. Zjawisko to jest całkowicie pominięte w pracy (Tsai i in. 1998). Najprostszym sposobem uwzględnienia deformacji giętej elementów łączonych poza obszarem klejenia jest zastąpienie współczynnika  $\beta$  współczynnikiem  $\beta_s$  w równaniu (7.76) i powtórzenie analizy przedstawionej w podrozdziale 7.2. W podejściu tym jest jednak pewna doza braku konsekwencji – model Tsai, Oplingera i Mortona uwzględnia bowiem obecność odkształceń postaciowych  $\gamma_{xz}$  oraz ich wpływ na przemieszczenia punktów przekroju elementów łączonych na kierunku osi złącza. Z drugiej strony, te same odkształcenia  $\gamma_{xz}$  skutkują przecież przyrostem przemieszczeń poprzecznych do osi złącza na jego długości. Konsekwentne uwzględnienie deformacji postaciowej wymagałoby zatem zastosowania do opisu deformacji giętej elementów łączonych nie modelu Bernoulliego–Eulera, lecz modelu Timoshenki–Ehrenfesta. Analiza takiego modelu byłaby jednak odmienna od podejścia zaproponowanego przez Hart-Smitha z uwagi na odmienną strukturę równań rządzących zagadnieniem zginania belki Timoshenki–Ehrenfesta. W rezultacie okazałaby się bardzo skomplikowana, co – wobec faktu, iż deformacja postaciowa w typowych dla złączy zakładkowych elementach smukłych ma pomijalnie mały udział w deformacji globalnej – byłoby rozwiązaniem niepraktycznym.

## 7.5. Niejednorodność rozkładu naprężenia stycznego w przekroju poprzecznym skleiny

Propozycja Irvinga Ojalvo i Harveya Eidinoffa z marca 1978 roku (Ojalvo i Eidinoff 1978) dostarcza pierwszego modelu, w którym zakłada się **zmienność wielkości naprężenia stycznego w skleinie na kierunku prostopadłym do płaszczyzny złącza**. Autorzy powołują się na prace Golanda i Reissnera, a także raporty Hart-Smitha. Być może w czasie swojej pracy badawczej nie byli świadomi istnienia modelu Allmana, który opublikowany został w ostatnim kwartale 1977 roku. Model zaproponowany przez Ojalvo i Eidinoffa to **lokalny model belkowy**, w którym elementy łączone modelowane są zgodnie z modelem **belki zginanej Bernoulliego–Eulera**. Autorzy przyjęli, że osiowe **naprężenie normalne, związane z rozciąganiem lub ściskaniem skleiny, jest istotnie mniejsze od pozostałych składowych stanu naprężenia** i tym samym jest pomijane w analizie. Zgodnie z trzecim założeniem poczynionym przez autorów, **rozkład składowych pola przemieszczenia w skleinie jest liniowy**. W pracy (Ojalvo i Eidinoff 1978) rozważano złącze symetryczne. Propozycja Ojalvo i Eidinoffa zostanie omówiona dla bardziej ogólnego przypadku złącza



Rys. 42. Równowaga sił wewnętrznych w złączu jednozakładkowym

niesymetrycznego w celu zapewnienia spójności wyników prezentowanych w pozostałych podrozdziałach. Podobnie jak w przypadku pozostałych modeli lokalnych punktem wyjścia analizy są **równania równowagi sił wewnętrznych** (por. rys. 42):

- **równania równowagi sił przekrojowych dla elementów złącza:**

$$\frac{dN_1}{dx} + \tau_1 = 0, \quad \frac{dQ_1}{dx} + p_1 = 0, \quad \frac{dM_1}{dx} - Q_1 + \tau_1 \frac{h_1}{2} = 0 \quad (7.370)$$

$$\frac{dN_2}{dx} - \tau_2 = 0, \quad \frac{dQ_2}{dx} - p_2 = 0, \quad \frac{dM_2}{dx} - Q_2 + \tau_2 \frac{h_2}{2} = 0 \quad (7.371)$$

- **równania równowagi sił poprzecznych i momentów w skleinie:**

$$\frac{dQ_a}{dx} + (p_2 - p_1) = 0 \quad (7.372)$$

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} t + \frac{dx}{2} (p_2 - p_1) - Q_a = 0 \quad (7.373)$$

- **równania równowagi sił poprzecznych i momentów w złączu:**

$$\frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dx} + \frac{dQ_a}{dx} = 0 \quad (7.374)$$

$$\left( \frac{dM_1}{dx} + \frac{dM_2}{dx} \right) - (Q_1 + Q_2 + Q_3) - N_1 \frac{h_1 + t}{2} + N_2 \frac{h_2 + t}{2} = 0 \quad (7.375)$$

W tym miejscu konieczny jest komentarz dotyczący równań równowagi (7.372) i (7.373). Zgodnie z trzecim założeniem rozkład przemieszczenia pionowego w skleinie jest liniowy, co oznacza, że poprzeczne odkształcenie liniowe przyjmuje wartość stałą. Wobec pominięcia odkształcalności wzdłużnej skleiny także poprzeczne naprężenie normalne (naprężenie odrywające) musi mieć stałą wartość, to znaczy:

$$p_1(x) = p_2(x) = p(x) \quad (7.376)$$

co pociąga za sobą:

$$\frac{dQ_a}{dx} = 0 \quad (7.377)$$

$$Q_a = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} t \quad (7.378)$$

Oznaczałoby to, że wypadkowa siła poprzeczna w skleinie, równa scałkowanemu po przekroju poprzecznym średniemu naprężeniu stycznemu, musiałyby być stała na długości złącza, co stoi w oczywistej sprzeczności z intuicją i obserwa-

cjami doświadczalnymi. **Dlatego też w dalszej analizie przyjmować będziemy, że równania (7.376) i (7.378) są spełnione, podczas gdy równanie (7.377) nie będzie spełnione.** Nieścisłość ta została zauważona i skomentowana w pracy (Ojalvo i Eidinoff 1978).

Wyznamy teraz przemieszczenia poziome na interfejsach skleiny, przyjmując dla elementów łączonych **kinematykę belki Bernoulliego–Eulera**:

$$u_{1,B} = u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{dw_1}{dx}, \quad u_{2,T} = u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{dw_2}{dx} \quad (7.379)$$

Przemieszczenia pionowe na górnym i dolnym interfejsie skleiny oznaczymy odpowiednio przez  $w_1$  oraz  $w_2$ . Wobec założenia o liniowym rozkładzie przemieszczeń w skleinie możemy zatem napisać:

$$u_a(x, z) = \frac{u_{1,B}(x) + u_{2,T}(x)}{2} - \frac{z}{t} (u_{1,B}(x) - u_{2,T}(x)) \quad (7.380)$$

$$w_a(x, z) = \frac{w_1(x) + w_2(x)}{2} - \frac{z}{t} (w_1(x) - w_2(x)) \quad (7.381)$$

Możemy teraz wyznaczyć odkształcenie postaciowe w skleinie:

$$\gamma_a(x, z) = \frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial w_a}{\partial x} = \frac{1}{t} (u_{2,T} - u_{1,B}) + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dx} \right) - \frac{z}{t} \left( \frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dx} \right) \quad (7.382)$$

Odpowiadające mu naprężenie styczne jest równe:

$$\tau_a(x, z) = G_a \left[ \frac{1}{t} (u_{2,T} - u_{1,B}) + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dx} \right) - \frac{z}{t} \left( \frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dx} \right) \right] \quad (7.383)$$

Podstawiając  $z = \pm \frac{t}{2}$ , otrzymamy wyrażenia na rozkład brzegowych wartości naprężenia stycznego w skleinie:

$$\tau_1 = \tau_a \left( -\frac{t}{2} \right) = \frac{G_a}{t} \left[ u_2 - u_1 + \frac{2t + h_1}{2} \frac{dw_1}{dx} + \frac{h_2}{2} \frac{dw_2}{dx} \right] \quad (7.384)$$

$$\tau_2 = \tau_a \left( \frac{t}{2} \right) = \frac{G_a}{t} \left[ u_2 - u_1 + \frac{h_1}{2} \frac{dw_1}{dx} + \frac{2t + h_2}{2} \frac{dw_2}{dx} \right] \quad (7.385)$$

**Średnie naprężenie styczne** w skleinie jest równe:

$$\tau_0 = \tau_a(z=0) = \frac{Q_a}{t} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \frac{G_a}{t} \left[ u_2 - u_1 + \frac{h_1 + t}{2} \frac{dw_1}{dx} + \frac{h_2 + t}{2} \frac{dw_2}{dx} \right] \quad (7.386)$$

Powyższe wyrażenie należy teraz zróźniczkować i podstawić w nim **związki konstytutywne belki Bernoulliego–Eulera**:

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{N_1}{A_1}, \quad \frac{d^2w_1}{dx^2} = -\frac{M_1}{D_1} \quad (7.387)$$

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{N_2}{A_2}, \quad \frac{d^2w_2}{dx^2} = -\frac{M_2}{D_2} \quad (7.388)$$

W rezultacie otrzymamy:

$$\frac{d\tau_0}{dx} = \frac{G_a}{t} \left[ \frac{N_2}{A_2} - \frac{N_1}{A_1} - \left( M_1 \frac{h_1+t}{2D_1} + M_2 \frac{h_2+t}{2D_2} \right) \right] \quad (7.389)$$

Powyższe wyrażenie należy następnie dwukrotnie zróźniczkować, każdorazowo uwzględniając po różniczkowaniu równania równowagi (7.370) i (7.371):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tau_0}{dx^2} = \frac{G_a}{t} \left[ \tau_1 \left( \frac{1}{A_1} + \frac{h_1(h_1+t)}{4D_1} \right) + \right. \\ \left. + \tau_2 \left( \frac{1}{A_2} + \frac{h_2(h_2+t)}{4D_2} \right) - \frac{1}{2} \left( Q_1 \frac{t+h_1}{D_1} + Q_2 \frac{t+h_2}{D_2} \right) \right] \quad (7.390) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\tau_0}{dx^3} = \frac{G_a}{t} \left[ \frac{d\tau_1}{dx} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{h_1(h_1+t)}{4D_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{d\tau_2}{dx} \left( \frac{1}{A_2} + \frac{h_2(h_2+t)}{4D_2} \right) + \frac{p}{2} \left( \frac{t+h_1}{D_1} - \frac{t+h_2}{D_2} \right) \right] \quad (7.391) \end{aligned}$$

Powyższe równanie jest pierwszym z równań rządzących zagadnieniem ścinania złącza jednozakładkowego w modelu Ojalvo–Eidinoffa. Możemy je przekształcić, wprowadzając oznaczenia:

$$\tau_0 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \quad \frac{d\tau_0}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\tau_1}{dx} + \frac{d\tau_2}{dx} \right) \quad (7.392)$$

$$\Delta\tau = \frac{\tau_1 - \tau_2}{2}, \quad \frac{d(\Delta\tau)}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\tau_1}{dx} - \frac{d\tau_2}{dx} \right) \quad (7.393)$$

skąd:

$$\tau_1 = \tau_0 + \Delta\tau, \quad \tau_2 = \tau_0 - \Delta\tau \quad (7.394)$$

Wtedy równanie (7.391) można zapisać w następującej postaci:

$$\frac{d^3 \tau_0}{dx^3} = \frac{G_a}{t} \left[ B_1 \frac{d\tau_0}{dx} + B_2 \frac{d(\Delta\tau)}{dx} + \frac{p}{2} \left( \frac{t+h_1}{D_1} - \frac{t+h_2}{D_2} \right) \right] \quad (7.395)$$

gdzie:

$$B_1 = \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{h_1(h_1+t)}{D_1} + \frac{h_2(h_2+t)}{D_2} \right)$$

$$B_2 = \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{h_1(h_1+t)}{D_1} - \frac{h_2(h_2+t)}{D_2} \right)$$

Drugie z równań uzyskamy, analizując rozkład naprężenia odrywającego. Zgodnie z wzorem (7.381) poprzeczne odkształcenie liniowe w skleinie przyjmuje stały rozkład w przekroju poprzecznym, dany związkami:

$$\varepsilon_{zz}^{(a)} = \frac{dw_a}{dz} = \frac{w_2 - w_1}{t} \quad (7.396)$$

zaś odpowiadające mu poprzeczne naprężenie normalne jest równe:

$$p = E_{a,\text{eff}} \varepsilon_{zz}^{(a)} = \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} (w_2 - w_1) \quad (7.397)$$

Powyższe równanie po dwukrotnym zróżniczkowaniu i uwzględnieniu związków konstytutywnych (7.387) i (7.388) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \left( \frac{M_1}{D_1} - \frac{M_2}{D_2} \right) \quad (7.398)$$

Powyższe równanie należy zróżniczkować po raz kolejny i wykorzystać równania równowagi (7.370) i (7.371), co daje nam:

$$\frac{d^3 p}{dx^3} = \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \left[ \left( \frac{Q_1}{D_1} - \frac{Q_2}{D_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{h_2}{D_2} \tau_2 - \frac{h_1}{D_1} \tau_1 \right) \right] \quad (7.399)$$

Po kolejnym różniczkowaniu i uwzględnieniu równowagi sił poprzecznych w elementach łączonych możemy wreszcie zapisać drugie z równań rządzących modelem Ojalvo–Eidinoffa:

$$\frac{d^4 p}{dx^4} = \frac{E_{a,\text{eff}}}{2t} \left[ \frac{h_2}{D_2} \frac{d\tau_2}{dx} - \frac{h_1}{D_1} \frac{d\tau_1}{dx} - \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) p \right] \quad (7.400)$$

Wykorzystując definicje (7.392) i (7.393), powyższe równanie możemy zapisać w postaci:

$$\frac{d^4 p}{dx^4} = \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h_2}{D_2} - \frac{h_1}{D_1} \right) \frac{d\tau_0}{dx} - \frac{1}{2} \left( \frac{h_1}{D_1} + \frac{h_2}{D_2} \right) \frac{d(\Delta\tau)}{dx} - \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) p \right] \quad (7.401)$$

Wykorzystajmy teraz związki (7.384) i (7.385) i obliczmy  $\Delta\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2)$ :

$$\Delta\tau = \frac{G_a}{2} \left[ \frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dx} \right] \quad (7.402)$$

Z drugiej strony, równanie (7.392) zróżniczkowane jednokrotnie pozwala nam napisać:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \left( \frac{dw_2}{dx} - \frac{dw_1}{dx} \right) \quad (7.403)$$

Zachodzi zatem:

$$\Delta\tau = -\frac{t}{2} \frac{E_{a,\text{eff}}}{G_a} \frac{dp}{dx} \quad (7.404)$$

oraz:

$$\frac{d(\Delta\tau)}{dx} = -\frac{t}{2} \frac{E_{a,\text{eff}}}{G_a} \frac{d^2 p}{dx^2} \quad (7.405)$$

Powyższe równanie jest trzecim wymaganiem do wyznaczenia trzech niewiadomych – rozkładu naprężenia odrywającego  $p$ , średniego naprężenia stycznego w skleinie  $\tau_0$  oraz odchyłki  $\Delta\tau$  naprężenia stycznego na interfejsie skleiny względem naprężenia średniego  $\tau_0$ . Z pomocą tego równania można wyrugować z równań (7.395) i (7.401) pierwszą pochodną  $\Delta\tau$ . Układ równań rządzących zagadnieniem ścinania niesymetrycznego złącza jednozakładkowego w ramach modelu Ojalvo–Eidinoffa jest następujący:

$$\begin{cases} \frac{d^3 \tau_0}{dx^3} = K_1 \frac{d\tau_0}{dx} + K_2 \frac{d^2 p}{dx^2} + K_3 p \\ \frac{d^4 p}{dx^4} = K_4 \frac{d\tau_0}{dx} + K_5 \frac{d^2 p}{dx^2} + K_6 p \end{cases} \quad (7.406)$$



gdzie:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{G_a}{t} \left[ \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{h_1(h_1+t)}{D_1} + \frac{h_2(h_2+t)}{D_2} \right) \right] \\
 K_2 &= \frac{G_a^2}{2E_{a,\text{eff}}} \left[ \left( \frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{h_2(h_2+t)}{D_2} - \frac{h_1(h_1+t)}{D_1} \right) \right] \\
 K_3 &= \frac{G_a}{2t} \left( \frac{t+h_1}{D_1} - \frac{t+h_2}{D_2} \right), \quad K_4 = \frac{E_{a,\text{eff}}}{2t} \left( \frac{h_2}{D_2} - \frac{h_1}{D_1} \right) \\
 K_5 &= \frac{G_a}{4} \left( \frac{h_1}{D_1} + \frac{h_2}{D_2} \right), \quad K_6 = -\frac{E_{a,\text{eff}}}{t} \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right)
 \end{aligned}$$

Jest to jednorodny liniowy układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach na dwie nieznanne funkcje  $p(x)$ ,  $\tau_0(x)$ . Rozwiązanie ogólne tego układu musi spełniać układ poniższych warunków, który pozwala wyznaczyć stałe całkowania:

- **warunki brzegowe:**

$$\begin{cases} M_1 = M, & Q_1 = Q, & N_1 = N \\ M_2 = 0, & Q_2 = 0, & N_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{L}{2} \quad (7.407)$$

$$\begin{cases} M_1 = 0, & Q_1 = 0, & N_1 = 0 \\ M_2 = -M, & Q_2 = Q, & N_2 = N \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{L}{2}$$

- **warunek równowagi globalnej:**

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tau_0(x) dx = N = \tau_{\text{avg}} L \quad (7.408)$$

Układ równań (7.405) znacząco upraszcza się w przypadku złącza symetrycznego, czyli gdy:

$$h_1 = h_2 = h, \quad A_1 = A_2 = A, \quad D_1 = D_2 = D$$

wtedy:

$$K_1 = \frac{G_a}{t} \left[ \frac{1}{A} + \frac{h(h+t)}{4D} \right], \quad K_2 = K_3 = K_4 = 0, \quad K_5 = \frac{G_a h}{2D}, \quad K_6 = \frac{2E_{a,\text{eff}}}{D}$$

Układ równań (7.406) sprowadza się wtedy do dwóch niezależnych równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned}\frac{d^3\tau_0}{dx^3} &= K_1 \frac{d\tau_0}{dx} \\ \frac{d^4P}{dx^4} &= -K_5 \frac{d^2P}{dx^2} + K_6P\end{aligned}\quad (7.409)$$

Po wyznaczeniu rozwiązań powyższych równań rozkład  $\Delta\tau(x)$  można wyznaczyć na podstawie związku (7.404), natomiast rozkład naprężenia stycznego w przekroju poprzecznym skleiny, wykorzystując równania (7.394).

## 7.6. Deformacja podłużna skleiny

Propozycja zawarta w jednym z licznych raportów NASA poświęconych modelowaniu złączy klejowych, przygotowana w 1980 roku przez turecki zespół z Uniwersytetu Lehigh (USA), złożony z Feriduna Delale, Ferdi Erdogana oraz Mehmeta N. Aydınoğlu (Delale i in. 1980), wyróżnia się na tle alternatywnych modeli **uwzględnieniem deformacji osiowej skleiny**. Jak zostanie to pokazane w podrozdziale 7.11, aspekt ten ma kluczowe znaczenie w poprawnym wyznaczeniu wielkości naprężenia odrywającego, zwłaszcza w przypadku sklein wykonanych z materiałów nieściśliwych lub prawie nieściśliwych ( $\nu \approx 0,5$ ). Najpowszechniejszym podejściem do modelowania sklein w złączach klejowych jest założenie, iż podlegają one prostemu ścinaniu, na który superponowany jest stan rozciągania poprzecznego do płaszczyzny skleiny (odrywania), ujęty jednak w uproszczony sposób, czyli bez uwzględnienia wszystkich składowych płaskiego (lub antypłaskiego) stanu naprężenia w materiale skleiny. W propozycji Delale, Erdogana i Aydınoğlu założono **ogólną postać płaskiego stanu odkształcenia w skleinie**, przyjmując jednak, że **składowe tensora odkształcenia mają jednorodny rozkład w przekroju poprzecznym skleiny**.

Model Delale–Erdogana–Aydınoğlu jest **lokalnym modelem belkowym**, w którym elementy belkowe modelowane są za pomocą **modelu belki Timoshenki–Ehrenfesta**. Autorzy rozważali ogólny przypadek **złącza niesymetrycznego w płaskim stanie odkształcenia**.

**Równania równowagi sił przekrojowych** przyjmują postać analogiczną do tej wykorzystanej m.in. przez Hart-Smitha czy Coopera i Sawyera:

$$\frac{dN_1}{dx} + \tau_a = 0, \quad \frac{dQ_1}{dx} + p = 0, \quad \frac{dM_1}{dx} - Q_1 + \tau_a \frac{h_1 + t}{2} = 0 \quad (7.410)$$

$$\frac{dN_2}{dx} - \tau_a = 0, \quad \frac{dQ_2}{dx} - p = 0, \quad \frac{dM_2}{dx} - Q_2 + \tau_a \frac{h_2 + t}{2} = 0 \quad (7.411)$$

**Związki konstytutywne dla belki Timoshenki–Ehrenfesta w przypadku płaskiego stanu odkształcenia dla materiału ortotropowego są następujące:**

$$\frac{du_K}{dx} = \frac{N_K}{A_K}, \quad A_K = \frac{E_x^{(K)} h_K}{1 - \nu_{xy}^{(K)} \nu_{yx}^{(K)}} \quad (7.412)$$

$$\frac{dw_K}{dx} - \phi_K = \frac{Q_K}{B_K}, \quad B_K = \kappa G_{xz}^{(K)} h_K \quad (7.413)$$

$$\frac{d\phi_K}{dx} = -\frac{M_K}{D_K}, \quad D_K = \frac{E_x^{(K)} h_K^3}{12(1 - \nu_{xy}^{(K)} \nu_{yx}^{(K)})} \quad (7.414)$$

gdzie: indeks  $K$  określa, którego elementu łączonego powyższe wielkości dotyczą ( $K = 1$  – element górny;  $K = 2$  – element dolny);  $u_K$ ,  $w_K$ ,  $\phi_K$  to odpowiednio przemieszczenie podłużne, przemieszczenie poprzeczne (ugięcie) oraz kąt obrotu  $K$ -tego elementu;  $h_K$  to grubość elementu;  $E_x^{(K)}$ ,  $\nu_{xy}^{(K)}$ ,  $\nu_{yx}^{(K)}$ ,  $G_{xz}^{(K)}$  to stałe sprężyste charakteryzujące ortotropowy materiał liniowo sprężysty, z którego wykonany jest  $K$ -ty element; a  $\kappa$  to energetyczny współczynnik ścinania, który w pracy (Delale i in. 1980) przyjęto jako równy  $5/6$  (tak jak dla przekroju prostokątnego). Warto jednak zwrócić uwagę na fakt, że proponuje się również przyjmowanie dla przekroju prostokątnego wartości  $\kappa$  zależnej od współczynnika Poissona (Olsson 1935; Cowper 1966; Kaneko 1975).

**Związki konstytutywne dla izotropowej skleiny w płaskim stanie odkształcenia są następujące:**

$$p = \frac{\hat{E}_a}{1 - \hat{\nu}_a^2} (\varepsilon_{zz}^a + \hat{\nu}_a \varepsilon_{xx}^a) = \frac{E_a}{(1 + \nu_a)(1 - 2\nu_a)} [(1 - \nu_a) \varepsilon_{zz}^a + \nu_a \varepsilon_{xx}^a] \quad (7.415)$$

$$\tau_a = G_a \gamma_{xz}^a \quad (7.416)$$

gdzie stałe sprężyste oznaczone daszkami są zmodyfikowanymi stałymi sprężystymi dla płaskiego stanu odkształcenia. Równanie (7.415) można przekształcić do postaci:

$$\varepsilon_{zz}^a = \frac{(1 + \nu_a)(1 - 2\nu_a)}{E_a(1 - \nu_a)} p - \frac{\nu_a}{1 - \nu_a} \varepsilon_{xx}^a \quad (7.417)$$

Związki kinematyczne wyprowadza się przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów, uwzględniając przy tym właściwy modelowi Timoshenki–Ehrenfesta fakt, że obrocony przekrój nie musi pozostawać prostopadły do zdeformowanej osi elementu. Przemieszczenia osiowe na interfejsach skleiny są równe:

$$u_{1,B} = u_{1,0} - \phi_1 \frac{h_1}{2} \quad (7.418)$$

$$u_{2,T} = u_{2,0} + \phi_2 \frac{h_2}{2} \quad (7.419)$$

gdzie:  $u_{1,0}$  oraz  $u_{2,0}$  oznaczają przemieszczenia osiowe w środku ciężkości przekroju poprzecznego elementów łączonych, spowodowane działaniem samego tylko obciążenia osiowego. Odkształcenie postaciowe w skleinie wyznaczone jest przy założeniu liniowego rozkładu przemieszczenia na grubości skleiny, czyli jednorodnego stanu odkształcenia w przekroju (por. równanie (7.60)):

$$\gamma_{xz}^a = \frac{u_{2,T} - u_{1,B}}{t} = \frac{1}{t} \left[ u_{2,0} + \phi_2 \frac{h_2}{2} - u_{1,0} + \phi_1 \frac{h_1}{2} \right] \quad (7.420)$$

W analogiczny sposób wyznacza się poprzeczne odkształcenie liniowe (por. równanie (7.61)):

$$\varepsilon_{zz}^a = \frac{w_2 - w_1}{t} \quad (7.421)$$

Podłużne odkształcenie liniowe wyznaczone jest jako odkształcenie uśrednione na grubości skleiny. Wykorzystując związki (7.412) i (7.414), możemy napisać:

$$\varepsilon_{xx}^a = \frac{1}{2} \left[ \frac{du_{2,T}}{dx} + \frac{du_{1,B}}{dx} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{N_1}{A_1} + \frac{M_1}{D_1} \frac{h_1}{2} + \frac{N_2}{A_2} - \frac{M_2}{D_2} \frac{h_2}{2} \right] \quad (7.422)$$

Dalej postępowanie jest podobne do tego zaprezentowanego w pracy (Bigwood i Crocombe 1989). Związek kinematyczny (7.420) podstawiany jest do związku konstytutywnego (7.416), a następnie trzykrotnie różniczkowany względem zmiennej  $x$ . Po pierwszym różniczkowaniu pochodne przemieszczeń i kątów obrotu wyraża się zgodnie ze związkami konstytutywnymi (7.412)–(7.414), zaś każdorazowo po wykonanym różniczkowaniu wykorzystuje się równania równowagi (7.410) i (7.411). W rezultacie otrzymuje się równanie:

$$\frac{d^3 \tau_a}{dx^3} - K_1 \frac{d\tau_a}{dx} = K_2 p \quad (7.423)$$

gdzie:

$$K_1 = \frac{G_a}{t} \left[ \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{h_1(h_1+t)}{D_1} + \frac{h_2(h_2+t)}{D_2} \right) \right], \quad K_2 = \frac{G_a}{2t} \left( \frac{h_1}{D_1} - \frac{h_2}{D_2} \right)$$

Jest to w zasadzie takie samo równanie jak (7.141), a jedyna różnica dotyczy liczników w składnikach pochodzących od wpływu zginania we współczynniku  $K_1$  i wynika z przyjętego ramienia działania naprężeń stycznych względem środków ciężkości elementów zginanych. W częstych w praktyce inżynierskiej zagadnieniach, dla których  $h \gg t$ , pominięcie grubości  $t$  we wzorze na  $K_1$  nie ma istotnego wpływu na wartość tego współczynnika.

Drugie z równań rządzących zagadnieniem wyprowadza się przez podstawienie związków kinematycznych (7.421) i (7.422) do związku konstytutywnego (7.417). Tak jak poprzednio, po pierwszym różniczkowaniu pochodne przemieszczeń i kątów obrotu wyraża się zgodnie ze związkami konstytutywnymi (7.412)–(7.414), a ponadto po każdym wykonanym różniczkowaniu wykorzystuje się równania równowagi (7.410) i (7.411). W rezultacie otrzymuje się równanie:

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + K_3 \frac{d^2 p}{dx^2} + K_4 p + K_5 \frac{d^3 \tau_a}{dx^3} + K_6 \frac{d\tau_a}{dx} = 0 \quad (7.424)$$

gdzie:

$$K_3 = \frac{E_a(1-\nu_a)}{(1+\nu_a)(1-2\nu_a)} \left[ \frac{\nu_a}{4(1-\nu_a)} \left( \frac{h_1}{D_1} + \frac{h_2}{D_2} \right) - \frac{1}{t} \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) \right]$$

$$K_4 = \frac{E_a(1-\nu_a)}{t(1+\nu_a)(1-2\nu_a)} \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right)$$

$$K_5 = \frac{E_a \nu_a}{2(1+\nu_a)(1-2\nu_a)} \left[ \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{h_1(h_1+t)}{D_1} - \frac{h_2(h_2+t)}{D_2} \right) \right]$$

$$K_6 = \frac{E_a(1-\nu_a)}{2t(1+\nu_a)(1-2\nu_a)} \left( \frac{h_1+t}{D_1} - \frac{h_2+t}{D_2} \right)$$

Powyższe równanie można interpretować jako uogólnienie równania (7.145) z modelu Bigwooda–Crocombe'a, z tym zastrzeżeniem, że – podobnie jak przy równaniu (7.423) – we wzorach na  $K_5$  oraz  $K_6$  dla zgodności należałoby przyjąć  $t = 0$ . Równania (7.423) i (7.424) stanowią układ równań różniczkowych zwyczajnych na rozkład naprężenia stycznego oraz naprężenia odrywającego.

Układ ten można przekształcić do jednego równania różniczkowego zwyczajnego siódmego rzędu na funkcję  $\tau_a(x)$ . W tym celu należy czterokrotnie zróżniczkować równanie (7.423), a następnie czwartą pochodną naprężenia odrywającego wyrazić przez równanie (7.424). Pierwszą i drugą pochodną naprężenia odrywającego, które pojawiają się w tym wyrażeniu, należy wyrazić za pomocą równania (7.423), zróżniczkowanego odpowiednio jednokrotnie i dwukrotnie. W rezultacie otrzymujemy równanie:

$$\frac{d^7 \tau_a}{dx^7} + a_1 \frac{d^5 \tau_a}{dx^5} + a_2 \frac{d^3 \tau_a}{dx^3} + a_3 \frac{d \tau_a}{dx} = 0 \quad (7.425)$$

gdzie:

$$a_1 = K_3 - K_1, \quad a_2 = -K_1 K_3 + K_4 + K_2 K_5, \quad a_3 = K_2 K_6 - K_1 K_4$$

Rozwiązanie ogólne powyższego jednorodnego liniowego równania ze stałymi współczynnikami wyznaczamy w standardowy sposób, zakładając wykładniczą postać rozwiązania i rozwiązując uzyskane w ten sposób rozwiązanie charakterystyczne. Uzyskane rozwiązanie zależeć będzie w liniowy sposób od siedmiu stałych całkowania:

$$\tau_a(x) = \sum_{i=1}^7 C_i e^{\beta_i x} \quad (7.426)$$

gdzie:  $\beta_i$  są pierwiastkami równania charakterystycznego równania (7.425); a  $C_i$  są stałymi całkowania. Wyznaczywszy ogólną postać funkcji  $\tau_a(x)$ , funkcję  $p(x)$  można z łatwością wyznaczyć, wykorzystując związek (7.423).

Równanie (7.425) wymaga zatem siedmiu warunków brzegowych, na podstawie których wyznaczyć można stałe całkowania, a które określa się za pomocą warunków statycznych na brzegowe wartości sił przekrojowych oraz z warunku równowagi sił wewnętrznych i zewnętrznych:

$$\begin{cases} M_1 = M, & Q_1 = Q, & N_1 = N \\ M_2 = 0, & Q_2 = 0, & N_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{L}{2} \quad (7.427)$$

$$\begin{cases} M_1 = 0, & Q_1 = 0, & N_1 = 0 \\ M_2 = -M, & Q_2 = Q, & N_2 = N \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{L}{2}$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tau_a(x) dx = N \quad (7.428)$$

Warunki (7.426) uwzględnia się w podobny sposób, jak zostało to przedstawione w podrozdziale 7.2 przy omawianiu modelu Bigwooda–Crocombe’a. W tym celu należy zapisać równanie (7.416), wykorzystując związek (7.420). Równanie to należy następnie zróżniczkować, a później wykorzystać w nim związki konstytutywne (7.412) i (7.414):

$$\frac{1}{t} \left[ u_{2,0} + \phi_2 \frac{h_2}{2} - u_{1,0} + \phi_1 \frac{h_1}{2} \right]$$

$$\frac{d\tau_a}{dx} = \frac{G_a}{t} \left[ \frac{N_2}{A_2} - \frac{M_2}{D_2} \frac{h_2}{2} - \frac{N_1}{A_1} - \frac{M_1}{D_1} \frac{h_1}{2} \right] \quad (7.429)$$

Równanie to można zapisać następnie w punktach  $x = -\frac{L}{2}$  oraz  $x = \frac{L}{2}$ :

$$\left. \frac{d\tau_a}{dx} \right|_{x=-\frac{L}{2}} = -\frac{G_a}{t} \left[ \frac{N}{A_1} + \frac{M}{D_1} \frac{h_1}{2} \right], \quad \left. \frac{d\tau_a}{dx} \right|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{G_a}{t} \left[ \frac{N}{A_2} + \frac{M}{D_2} \frac{h_2}{2} \right]$$

Kolejne dwa równania na stałe całkowania uzyskamy, różniczkując po raz kolejny równanie (7.428):

$$\frac{d^2\tau_a}{dx^2} = \frac{G_a}{t} \left[ \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{4} \left( \frac{h_1(h_1+t)}{D_1} + \frac{h_2(h_2+t)}{D_2} \right) \right) \tau_a - \frac{1}{2} \left( \frac{h_1}{D_1} Q_1 + \frac{h_2}{D_2} Q_2 \right) \right] \quad (7.430)$$

Równanie to zapisujemy w punktach  $x = -\frac{L}{2}$  oraz  $x = \frac{L}{2}$ :

$$K_1 \tau_a \left( -\frac{L}{2} \right) - \left. \frac{d^2\tau_a}{dx^2} \right|_{x=-\frac{L}{2}} = \frac{G_a}{t} \frac{Q}{2} \frac{h_1}{D_1}, \quad K_1 \tau_a \left( \frac{L}{2} \right) - \left. \frac{d^2\tau_a}{dx^2} \right|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{G_a}{t} \frac{Q}{2} \frac{h_2}{D_2}$$

Kolejne warunki brzegowe uzyskamy z przekształcenia równania (7.417), w którym uwzględnione zostaną związki (7.421) i (7.422):

$$\frac{w_2 - w_1}{t} = \frac{1 - \nu_a - 2\nu_a^2}{E_a(1 - \nu_a)} p - \frac{\nu_a}{2(1 - \nu_a)} \left[ \frac{N_1}{A_1} + \frac{M_1}{D_1} \frac{h_1}{2} + \frac{N_2}{A_2} - \frac{M_2}{D_2} \frac{h_2}{2} \right] \quad (7.431)$$

Powyższe równanie należy zróżniczkować dwukrotnie, wykorzystując przy tym równania równowagi (7.410) i (7.411):

$$\begin{aligned}
& \frac{1-v_a-2v_a^2}{E_a(1-v_a)} \frac{d^2 p}{dx^2} + \left[ \frac{v_a}{4(1-v_a)} \left( \frac{h_1}{D_1} + \frac{h_2}{D_2} \right) - \frac{1}{t} \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) \right] p + \\
& + \frac{v_a}{2(1-v_a)} \left[ \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{h_1(h_1+t)}{D_1} - \frac{h_2(h_2+t)}{D_2} \right) \right] \frac{d\tau_a}{dx} = \\
& = \frac{1}{t} \left( \frac{M_1}{D_1} - \frac{M_2}{D_2} \right) \tag{7.432}
\end{aligned}$$

Ponownie, równanie to możemy zapisać w punktach  $x = -\frac{L}{2}$  oraz  $x = \frac{L}{2}$ , podstawiając odpowiednie wartości brzegowe momentów  $M_1$  i  $M_2$  oraz wyrażając funkcje  $\tau_a(x)$  oraz  $p(x)$  w ich ogólnej postaci:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 p}{dx^2} \Big|_{-\frac{L}{2}} + K_3 p \left( -\frac{L}{2} \right) + K_5 \frac{d\tau_a}{dx} \Big|_{-\frac{L}{2}} &= \frac{E_a(1-v_a)}{(1+v_a)(1-2v_a)} \frac{M}{tD_1} \\
\frac{d^2 p}{dx^2} \Big|_{\frac{L}{2}} + K_3 p \left( \frac{L}{2} \right) + K_5 \frac{d\tau_a}{dx} \Big|_{\frac{L}{2}} &= \frac{E_a(1-v_a)}{(1+v_a)(1-2v_a)} \frac{M}{tD_2}
\end{aligned}$$

Ostatnie dwa warunki brzegowe uzyskuje się przez obliczenie trzeciej pochodnej równania (7.431) i wykorzystanie równań równowagi (7.410) i (7.411):

$$\begin{aligned}
& \frac{1-v_a-2v_a^2}{E_a(1-v_a)} \frac{d^3 p}{dx^3} + \left[ \frac{v_a}{4(1-v_a)} \left( \frac{h_1}{D_1} + \frac{h_2}{D_2} \right) - \frac{1}{t} \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) \right] \frac{dp}{dx} + \\
& + \frac{v_a}{2(1-v_a)} \left[ \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{h_1(h_1+t)}{D_1} - \frac{h_2(h_2+t)}{D_2} \right) \right] \frac{d^2 \tau_a}{dx^2} + \\
& + \frac{1}{2t} \left( \frac{h_1+t}{D_1} - \frac{h_2+t}{D_2} \right) \tau_a = \frac{1}{t} \left( \frac{Q_1}{D_1} - \frac{Q_2}{D_2} \right) \tag{7.433}
\end{aligned}$$

Wreszcie równanie to można zapisać w punktach  $x = -\frac{L}{2}$  oraz  $x = \frac{L}{2}$ , podstawiając odpowiednie wartości brzegowe momentów  $Q_1$  i  $Q_2$  oraz wyrażając funkcje  $\tau_a(x)$  oraz  $p(x)$  w ich ogólnej postaci:

$$\frac{d^3 p}{dx^3} \Big|_{-\frac{L}{2}} + K_3 \frac{dp}{dx} \Big|_{-\frac{L}{2}} + K_5 \frac{d^2 \tau_a}{dx^2} \Big|_{-\frac{L}{2}} + K_6 \tau_a \left( -\frac{L}{2} \right) = \frac{E_a(1-v_a)}{(1+v_a)(1-2v_a)} \frac{Q}{tD_1}$$



$$\left. \frac{d^3 p}{dx^3} \right|_{\frac{L}{2}} + K_3 \left. \frac{dp}{dx} \right|_{\frac{L}{2}} + K_5 \left. \frac{d^2 \tau_a}{dx^2} \right|_{\frac{L}{2}} + K_6 \tau_a \left( \frac{L}{2} \right) = - \frac{E_a (1 - \nu_a)}{(1 + \nu_a)(1 - 2\nu_a)} \frac{Q}{tD_2}$$

Ponadto **układ sił wewnętrznych musi znajdować się w globalnej równowadze z siłami zewnętrznymi**, dlatego spełnione muszą być równania:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tau_a(x) dx = N \quad (7.434)$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p(x) dx = Q \quad (7.435)$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [p(x) \cdot x] dx = N \frac{h_1 + t}{2} - M - \frac{QL}{2} \quad (7.436)$$

## 7.7. Wpływ grubości skleiny

W świadomości projektantów przez długi czas żywe było przekonanie, że skleina optymalna to skleina o najmniejszej możliwej grubości, zgodnie z żargonowym powiedzeniem: „Najlepsza skleina to taka, której nie ma”. Okazuje się jednak, że zastosowanie w złączach klejowych sklein o większej podatności – co można osiągnąć przez zastosowanie bardziej odkształcalnego materiału skleiny lub właśnie przyjęcie większej grubości warstwy skleiny – skutkuje bardziej równomiernym rozkładem naprężenia stycznego i tym samym może prowadzić do bardziej efektywnego wykorzystania własności mechanicznych skleiny i zwiększenia nośności złącza.

Przy okazji omawiania wpływu grubości skleiny na rozkład naprężenia stycznego warto poświęcić nieco uwagi bardzo prostemu i zaskakująco skutecznemu narzędziu analitycznemu, jakim jest pojęcie podobieństwa modelowego. Na przykładzie omówienia tego specyficznego aspektu, jakim jest odpowiedni dobór grubości skleiny, zilustrowane zostaną zalety wykorzystania w analizie parametrycznej wielkości określających kryteria podobieństwa. Choć słuszne byłoby posługiwanie się liczbami podobieństwa w całej monografii, z uwagi na chęć zachowania spójności z oryginalnymi metodami analitycznymi, stosowanymi w przytaczanych artykułach, zdecydowano się na wprowadzenie tego narzędzia dopiero w tym miejscu. W ostatnim

rozdziale, poświęconym belkom kompozytowym, właśnie sformułowanie zagadnienia brzegowego w kategoriach liczb podobieństwa będzie punktem wyjścia poszukiwania zamkniętych rozwiązań analitycznych.

**Teoria podobieństwa**, której formalizm matematyczny wywodzi się z **analizy wymiarowej**, jest niezwykle użytecznym narzędziem analitycznym, które z powodzeniem stosowane jest przy badaniu wpływu różnorodnych czynników na odpowiedź wybranego układu fizycznego – szczegółowe omówienie tych zagadnień można znaleźć w pracy (Rychlewski 1991). Ujmując rzecz w skrócie, możliwe jest takie przekształcenie matematycznego sformułowania zagadnienia opisującego dane zjawisko, że da się je scharakteryzować za pomocą **wielkości bezwymiarowych** (o jednostkowym wymiarze fizycznym) – wielkości te nazywamy **liczbami podobieństwa** lub inaczej **liczbami kryterialnymi**. Ich znaczenie praktyczne jest trudne do przecenienia, ponieważ **rozwiązanie zagadnienia matematycznego, sformułowanego w kategoriach liczb podobieństwa**, ma znaczenie **uniwersalne**, czyli **stosuje się do wszystkich układów fizycznych, które opisywane są tymi samymi liczbami podobieństwa** (czyli spełniają związane z nimi tzw. kryteria podobieństwa).

Teoria podobieństwa znalazła szerokie zastosowanie przede wszystkim w **mechanice płynów** (hydrodynamice, aerodynamice, reologii), **termodynamice**, **kinetyce chemicznej** czy w zagadnieniach **dyfuzji**. Przykładowo, fundamentalną charakterystyką przepływu płynu lepkiego jest liczba Reynoldsa, zdefiniowana następująco:

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu}$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość płynu [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ];  $u$  – prędkość przepływu [ $\text{m}/\text{s}$ ];  $L$  – wymiar charakterystyczny zagadnienia (np. średnica przewodu) [ $\text{m}$ ];  $\mu$  – lepkość dynamiczna płynu [ $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ ]. Łatwo zauważyć, że  $Re = 1$ . Wielkość liczby Reynoldsa pozwala określić charakter przepływu – można spotkać się z praktycznym oszacowaniem, zgodnie z którym w przypadku przepływu przewodem o przekroju kołowym dla  $Re < 2300$  mamy do czynienia z przepływem laminarnym, a dla  $Re > 2900$  – z przepływem turbulentnym (Holman 2002; Schlichting i Gersten 2016). W mechanice płynów powszechnie korzysta się również z innych liczb podobieństwa, takich jak choćby liczba Eulera, Stokesa, Macha czy Strouhala.

Poza ogólną charakterystyką rozwiązania zagadnienia, liczba podobieństwa informuje nas o tym, że każde inne zagadnienie (odpowiadające innemu zestawowi liczbowych wartości jego parametrów fizycznych), które opisywane jest taką samą wartością liczby podobieństwa, w kategoriach wielkości bezwymiarowych opisywane jest dokładnie tym samym rozwiązaniem. Liczby podobieństwa są zatem naturalnymi **kryteriami podobieństwa modelowego**. Ich wykorzystanie umożliwia badanie zjawisk fizycznych w różnych skalach przez wykorzystanie modelu spełniającego kryteria podobieństwa.

Ze względów, które trudno określić w sposób obiektywny i jednoznaczny, liczby podobieństwa nie są powszechnie wykorzystywane w mechanice ciał stałych czy w naukach technicznych ani też przy opisie praktycznych zagadnień inżynierskich, a nawet jeśli tak jest, to jest to robione raczej nieświadomie. Jest bowiem jasne, że bezwymiarowe wielkości, takie jak stosunek wymiarów, np.  $h : L$  (belki zginane),  $B : L$  (fundamenty), lub współrzędne bezwymiarowe, np.  $\xi = \frac{x}{L_x}$ , okazują się niejednokrotnie tymi, dzięki którym opis zagadnienia staje się najprostszy i jednocześnie najbardziej uniwersalny. Ciekawy przykład zastosowania takiego „ubezwymiarowania” (ang. *non-dimensionalization*) można znaleźć w omawianej już pracy (Ojalvo i Eidinoff 1978).

Najczęściej przytaczanym rezultatem teorii podobieństwa jest tzw. **twierdzenie  $\pi$** , przypisywane Edgarowi Buckinghamowi, chociaż było ono stosowane i dowodzone już na przestrzeni kilku dekad poprzedzających jego publikację. Rozważmy układ fizyczny, który daje się opisać za pomocą  $n$  **wielkości wymiarowych** (funkcji stanu i parametrów modelu), których wymiary fizyczne daje się zapisać jako iloczyn całkowitych potęg  $m$  **podstawowych wymiarów fizycznych**. Zgodnie z twierdzeniem  $\pi$  **układ taki można opisać za pomocą  $(n - m)$  wielkości bezwymiarowych**. Dla specyficznej struktury wewnętrznej analitycznego modelu, opisującego dany układ fizyczny, maksymalna liczba wymaganych wielkości bezwymiarowych może być w istocie mniejsza.

W kontekście zagadnień ścinania warstw adhezyjnych zastosowanie powyższego rezultatu można zilustrować na przykładzie prętowego modelu symetrycznego złącza dwuzakładkowego według Tsai, Oplingera i Mortona ((Tsai i in. 1998). Do pełnego opisu zjawiska fizycznego potrzebne są:

- jedna wielkość  $x$  o wymiarze fizycznym długości (zmienna niezależna), określająca położenie rozważanego przekroju poprzecznego skleiny,
- jedna wielkość  $\tau(x)$  o wymiarze fizycznym naprężenia (zmienna zależna), określająca rozkład naprężenia stycznego w skleinie,
- dziesięć wielkości charakteryzujących geometrię układu i własności mechaniczne materiałów tworzących złącze (parametry):
  - cztery parametry o wymiarze fizycznym długości, opisujące geometrię układu:  $h_1, h_2, t, L$ ,
  - pięć parametrów o wymiarze fizycznym naprężenia, opisujących własności mechaniczne materiałów:  $E_1, G_1, E_2, G_2, G_a$ ,
  - jeden parametr o wymiarze fizycznym siły, opisujący wielkość obciążenia zewnętrznego  $N_0$ .

Mamy zatem  $n = 12$  wielkości wymiarowych opisujących zagadnienie. Wymiary fizyczne wszystkich wymienionych powyżej wielkości dają się wyrazić za pomocą tylko dwóch podstawowych wymiarów fizycznych – długości  $[\mathcal{L}] = \text{m}$  oraz siły  $[\mathcal{F}] = \text{N}$ :

- $[x] = [h_1] = [h_2] = [t] = [L] = [\mathcal{L}]^1 [\mathcal{F}]^0$
- $[\tau] = [E_1] = [G_1] = [E_2] = [G_2] = [G_a] = [\mathcal{L}]^{-2} [\mathcal{F}]^1$
- $[N_0] = [\mathcal{L}]^0 [\mathcal{F}]^1$

Przyjmujemy w związku z tym  $m = 2$ . Możliwe jest zatem opisanie rozważanego układu mechanicznego za pomocą  $(n - m) = 10$  wielkości bezwymiarowych. Z łatwością można wskazać takie wielkości, przyjmując choćby dwie niezależne wymiarowo wielkości odniesienia, np.  $L$ ,  $G_a$  – wtedy zdefiniować możemy następujące wielkości bezwymiarowe, za pomocą których możliwe jest opisanie układu:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \alpha_1 = \frac{h_1}{L}, \quad \alpha_2 = \frac{h_2}{L}, \quad \alpha_3 = \frac{t}{L}$$

$$\theta = \frac{\tau}{G_a}, \quad \beta_1 = \frac{E_1}{G_a}, \quad \beta_2 = \frac{E_2}{G_a}, \quad \beta_3 = \frac{G_1}{G_a}, \quad \beta_4 = \frac{G_2}{G_a}, \quad \Theta_N = \frac{N_0}{bLG_a}$$

Wszystkie powyższe wielkości są dodatnie. Omówione rozważania dotyczą układu fizycznego bez odniesienia do jakiegoś konkretnego modelu analitycznego, służącego opisowi tego układu. W modelu Tsai–Oplinger–Mortona cały układ daje się opisać za pomocą jednego równania rządzącego:

$$\frac{d^2 \tau}{dx^2} - \beta_s^2 \tau = 0, \quad \beta_s^2 = \frac{\frac{G_a \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right)}{t}}{1 + \frac{G_a \left( \frac{h_1}{3G_1} + \frac{h_2}{6G_2} \right)}{t}} > 0 \quad (7.437)$$

Po wprowadzeniu bezwymiarowej współrzędnej:

$$\xi = \frac{x}{L} \Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2}{d\xi^2}$$

oraz bezwymiarowej miary naprężenia:

$$\theta = \frac{\tau}{G_a}$$

powyższe równanie daje się zapisać w postaci:

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} - \pi_1 \theta = 0, \quad \pi_1 = \frac{\frac{1}{\alpha_3 \left( \frac{1}{\alpha_1 \beta_1} + \frac{2}{\alpha_2 \beta_2} \right)}}{1 + \frac{1}{\alpha_3 \left( \frac{\alpha_1}{3\beta_3} + \frac{\alpha_2}{6\beta_4} \right)}} > 0 \quad (7.438)$$

gdzie występują jedynie trzy wielkości bezwymiarowe. Równanie zależy od jednego tylko parametru, który jest właśnie liczbą podobieństwa. Oznacza to, że dowolny inny układ fizyczny, który opisuje liczba  $\pi_1$ , o takiej samej wartości liczbowej, w ramach modelu Tsai–Oplinger–Mortona opisywany jest identycznym równaniem rządzącym. Oczywiście, rozwiązanie zależności będzie również od warunków brzegowych, które w tym przypadku określa wielkość siły ścinającej złącze:

$$\begin{cases} \Theta(\xi = 0) = \pi_2 \\ \Theta(\xi = 1) = 0 \end{cases}, \quad \Theta(\xi) = \int \theta d\xi, \quad \pi_2 = \Theta_N \quad (7.439)$$

Jeśli oprócz liczby  $\pi_1$  również liczba podobieństwa  $\pi_2$  będzie taka sama w dwóch modelach, to rozwiązania opisujące odpowiedź mechaniczną obydwu układów (wyrażone w kategoriach wielkości bezwymiarowych) będą takie same. W przypadku modeli liniowych, w których rozwiązanie zależy liniowo od powyższego niejednorodnego warunku brzegowego, liczba podobieństwa  $\pi_2$  ma drugorzędne znaczenie – o podobieństwie układów fizycznych czy też o podobieństwie modelu do układu rzeczywistego stanowić będzie wartość liczby podobieństwa  $\pi_1$ .

Powyższy przykład miał na celu zilustrowanie zastosowania teorii podobieństwa oraz korzyści płynących z takiego podejścia. W zagadnieniach omawianych w kolejnych podrozdziałach będziemy się posługiwać liczbami podobieństwa w celu przeprowadzenia możliwie ogólnej analizy wpływu wybranych czynników na rozwiązania zagadnień ścinania warstw adhezyjnych w ramach przyjętych modeli analitycznych.

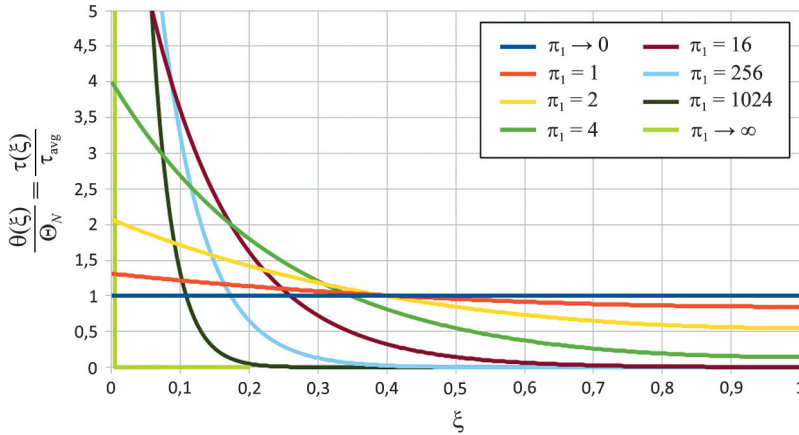
Wspomniano już o tym, że zastosowanie w złączach klejowych sklein o większej podatności skutkuje bardziej równomiernym rozkładem naprężenia stycznego. Spostrzeżenie to staje się oczywiste, jeśli zwrócimy uwagę na dwa przypadki skrajne. **Dla cienkich i sztywnych sklein** w obciążonym przekroju brzegowym **występuje lokalizacja naprężenia**, tymczasem **dla skleiny doskonale podatnej** (płynięcie plastyczne) **rozkład naprężenia jest jednorodny** (Hart-Smith 1973a). Rzeczywiste złącza wpisują się w ciągłe spektrum zawarte między tymi dwoma skrajnymi przypadkami.

Przejrzystej ilustracji tego zjawiska może dostarczyć nam omówiony uprzednio belkowy model Tsai–Oplinger–Mortona, który pozwoli również sformułować proste, a jednocześnie ogólne wnioski. Należy przy tym przyznać, że model obliczeniowy, na podstawie którego zostaną one wyprowadzone, jest pod wieloma względami bardzo uproszczony. Na rysunku 43 przedstawiony jest rozkład bezwymiarowego naprężenia względnego w funkcji współrzędnej bezwymiarowej (podziałka pozioma) i liczby podobieństwa  $\pi_1$  (kolejne wykresy).

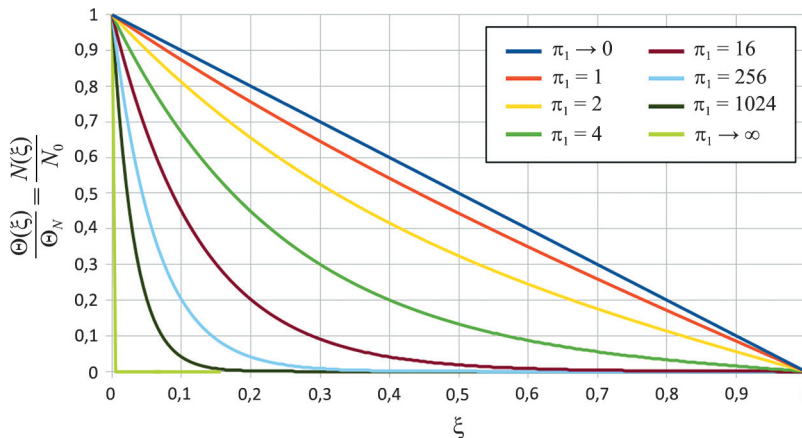
Łatwo dostrzec, że wraz z wzrostem wartości  $\pi_1$ , dla ustalonego  $\pi_2 = \Theta_N$ , maksymalna wartość naprężenia stycznego w przekroju obciążonym również wzrasta, zgodnie z wzorem:

$$\theta_{\max} = \theta(\xi = 0) = \pi_2 \sqrt{\pi_1} \operatorname{ctgh}(\sqrt{\pi_1}) \quad (7.440)$$

podczas gdy dla  $\pi_1 \rightarrow 0$  rozkład naprężenia dąży do rozkładu stałego (optymalne wykorzystanie wytrzymałości skleiny). Warto pokazać również odpowiadające powyższym sytuacjom rozkłady bezwymiarowej siły rozciągającej złącze, przedstawione na rysunku 44.



Rys. 43. Rozkład naprężenia stycznego na długości skleiny



Rys. 44. Rozkład siły rozciągającej na długości skleiny

Wykresy te są o tyle istotne, że w przypadku sklein cienkich, dla których nie możliwe jest zastosowanie metod DIC, eksperymentalnego pomiaru wielkości naprężenia stycznego w skleinie dokonuje się jedynie pośrednio przez pomiar (np. tensometryczny) odkształcenia liniowego elementów łączonych. Odkształcenia te (przy znanej charakterystyce materiałowej tych elementów) pozwalają oszacować

naprężenia normalne w złączu i rozkład siły rozciągającej złącze. Im bardziej jednorodny jest rozkład naprężenia stycznego po długości złącza, tym bardziej rozkład siły zbliża się do rozkładu liniowego („trójkątnego”).

Fakt, że charakter powyższych wykresów zależy od pojedynczego parametru, jakim jest liczba podobieństwa  $\pi_1$ , znacząco ułatwia analizę parametryczną zagadnienia – wystarczy bowiem zbadać analityczną zależność  $\pi_1$  od parametrów zadania. Wobec faktu, że wszystkie parametry bezwymiarowe  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) oraz  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) są dodatnie, łatwo pokazać, że:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \alpha_3} < 0$$

co oznacza, że **wraz z wzrostem grubości skleiny** liczba podobieństwa  $\pi_1$  maleje, a zatem **rozkład naprężenia stycznego staje się bardziej jednorodny**. Podobnie można pokazać, że bardziej jednorodnemu rozkładowi naprężenia stycznego sprzyja:

- **wzrost sztywności podłużnej** (wzrost grubości lub modułu Younga) każdego z **elementów łączonych**,
- **spadek sztywności poprzecznej** (spadek modułu Kirchhoffa lub wzrost grubości) każdego z **elementów łączonych**,
- **spadek sztywności poprzecznej** (spadek modułu Kirchhoffa lub wzrost grubości) **skleiny**.

W naturalny sposób wyłania się pytanie o optymalną grubość skleiny. Jest bowiem oczywiste, że o nośności złącza (z uwagi na ścinanie) stanowi maksymalna wartość naprężenia stycznego – w przypadku występowania koncentracji, przy zadanym obciążeniu zewnętrznym odpowiadające mu naprężenie maksymalne jest wielokrotnie wyższe niż w przypadku bardziej równomiernego rozkładu naprężenia. Stąd dla ustalonego materiału skleiny (jego wytrzymałości na ścinanie) nośność na ścinanie złączy podatnych (o grubszych skleinach) jest wyższa niż złączy sztywnych (o cienkich skleinach). Należy przy tym pamiętać, że nośność na ścinanie stanowi tylko jedną ze składowych warunkujących nośność złącza. Wśród pozostałych czynników można wymienić:

- nośność złącza na odrywanie,
- nośność elementów łączonych,
- aspekty technologiczne,
- zagadnienia trwałości układu.

Zmiana grubości skleiny w odmienny sposób wpływa na wyżej wymienione aspekty pracy złącza, przez co najczęściej okazuje się, że zwiększenie grubości skleiny skutkuje spadkiem nośności. Ponadto, jeśli grubość skleiny jest zbyt duża, stan mechaniczny, w którym się znajduje, znacznie odbiega od stanu prostego ścinania i zbliża się do ogólnego problemu dwuwymiarowego stanu naprężenia. Ponadto,

nadmierna podatność złącza może również zdyskwalifikować je z uwagi na niespełnienie warunków użyteczności złącza.

Znacznie bardziej rozbudowaną analizę wpływu grubości na rozkład naprężenia stycznego i normalnego naprężenia odrywającego można znaleźć w pracy (Ojalvo i Eidinoff 1978). Na podstawie opracowanego w cytowanej pracy analitycznego modelu złącza, w którym założono liniowy rozkład naprężenia stycznego na grubości skleiny, autorzy sformułowali następujące wnioski:

- Pominięcie wpływu niejednorodności rozkładu naprężenia stycznego po grubości skleiny skutkuje **niedoszacowaniem maksymalnego naprężenia stycznego oraz przeszacowaniem maksymalnego naprężenia odrywającego**.
- Powyższe efekty dotyczą w największym stopniu **skrajnych obszarów na długości złącza**, gdzie najczęściej dochodzi do znaczącego wzrostu wielkości naprężenia zarówno stycznego, jak i odrywającego.
- Bezwymiarowymi wielkościami wpływającymi na wielkość maksymalnego naprężenia stycznego są parametry:

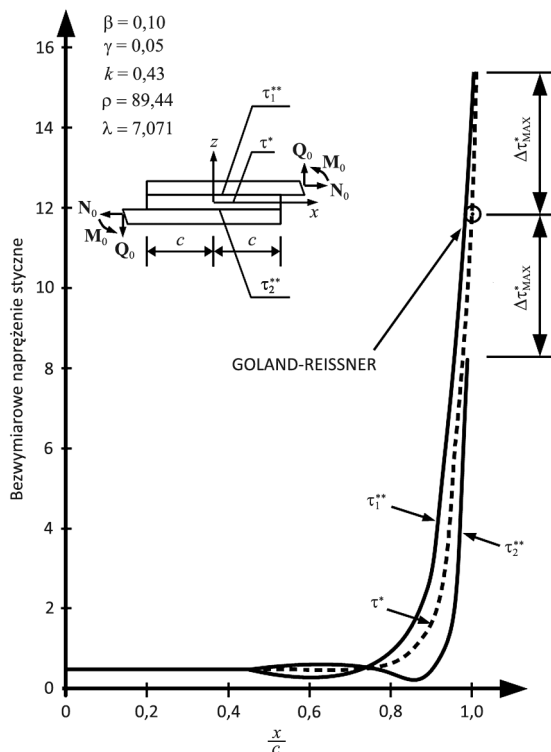
$$\pi_t = \frac{t}{h}, \quad \pi_G = \frac{G_a L^2}{Eht}, \quad \pi_E = \frac{E_a L^4}{Eh^3 t}$$

**Zwiększenie stosunku grubości skleiny do grubości elementów łączonych  $\pi_t$  dla ustalonego  $\pi_G$  skutkuje zwiększeniem wielkości naprężenia stycznego w płaszczyźnie środkowej skleiny. Wzrost  $\pi_G$  (wzrost sztywności poprzecznej skleiny względem sztywności podłużnej elementu rozciąganego) dla ustalonego  $\pi_t$  skutkuje zwiększeniem przyrostu naprężenia stycznego po grubości skleiny. Należy zauważyć, że obydwa wspomniane czynniki są ze sobą sprzężone przez zależność od  $t$ . Wzrost wielkości parametru  $\pi_E$  skutkuje spadkiem wielkości maksymalnego naprężenia stycznego oraz zwiększeniem wielkości maksymalnego naprężenia odrywającego.**

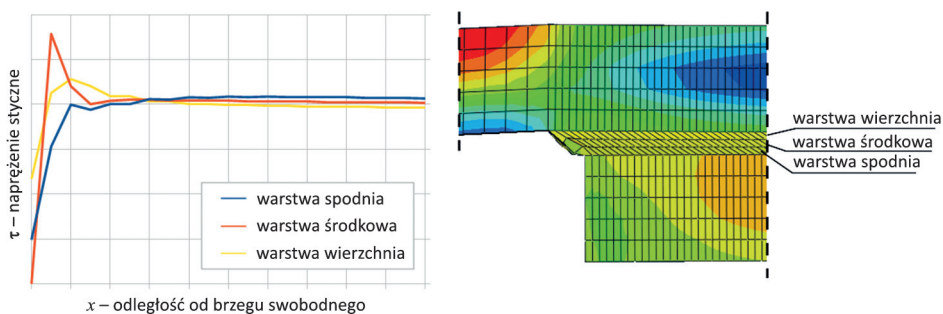
- Nierównomierność rozkładu naprężenia stycznego na krawędzi złącza jest tego rodzaju, że **naprężenie przy powierzchni styku z elementem obciążonym przy rozpatrywanej krawędzi złącza jest większe niż naprężenie w środkowej warstwie skleiny**. Analogicznie, **naprężenie przy powierzchni styku z elementem o brzegu swobodnym przy rozpatrywanej krawędzi złącza jest mniejsze** (rys. 45).

Wynik ten potwierdzają wyniki symulacji numerycznych, które w schematyczny sposób ilustruje rysunek 46 – należy przy tym zwrócić uwagę, że model Ojalvo i Eidinoffa nie uwzględnia jednorodnego warunku brzegowego na brzegu swobodnym skleiny, co ostatecznie prowadzi do jakościowo odmiennego rozkładu naprężenia stycznego tuż przy brzegu. W przypadku przedstawionych wyników numerycznych naprężenie styczne wyznaczane jest w środku elementu skończonego i dlatego również przy brzegu nie osiąga wartości równej ściśle 0.





Rys. 45. Wpływ grubości skleiny na rozkład naprężenia stycznego (Ojalvo i Eidinoff 1978)



Rys. 46. Rozkład naprężenia stycznego na grubości skleiny – wyniki symulacji MES

Szerokie omówienie zagadnienia wpływu grubości warstwy adhezyjnej na nośność statyczną złączy klejowych można znaleźć w pracy (Rośkowitz i in. 2021). Podsumowując przytoczone w cytowanej pracy spostrzeżenia i wyprowadzone wnioski, można stwierdzić, że większość doświadczeń przeczy przewidywaniom części wczesnych analitycznych modeli złączy klejowych, zgodnie z którymi nośność złącza wzrasta wraz z wzrostem grubości skleiny. Najczęściej **zwiększenie grubości warstwy adhezyjnej skutkuje spadkiem nośności złącza** (Grant

i in. 2009; da Silva i in. 2009a; Arenas i in. 2010). Przyczyn takiego stanu rzeczy można upatrywać m.in. w zjawiskach związanych z efektami skali – grubsza skleina zawiera proporcjonalnie więcej pustek czy mikropęknięć, które mogą stać się ogniskiem inicjującym zniszczenie złącza. Dość powszechnie przyjmuje się pogląd, zgodnie z którym dla złącza o ustalonej charakterystyce istnieje pewna **optymalna grubość skleiny**, dla której **złącze wykazuje największą nośność**. Badania z zakresu poszukiwań takiej optymalnej wartości można znaleźć w pracach (Bezemer i in. 1998; Arenas i in. 2010). W pracy (Rośkowicz i in. 2021) otrzymano oszacowanie optymalnej grubości skleiny na nośność złącza zakładkowego przez założenie, że grubość skleiny wpływa na graniczną (niszczącą) wartość naprężenia średniego w próbie rozciągania klejowego złącza doczołowego. Podejście takie jest uzasadnione tylko przy założeniu, że naprężenie średnie jest miarodajnym oszacowaniem własności wytrzymałościowych materiału skleiny, a jego zależność od grubości skleiny nie jest efektem niejednorodności rozkładu naprężenia, spowodowanego nieliniową charakterystyką materiału, lecz wynika np. z efektów skali.

Nośność złącza klejowego zależy od grubości skleiny, przede wszystkim z uwagi na odmienność mechanizmów zniszczenia, odpowiadających różnym grubościom warstwy adhezyjnej. Dla sklein **cińkich** obserwuje się częściej **zniszczenie adhezyjne** (zerwanie przyczepności między skleiną a elementami łączonymi). W przypadku sklein **grubszych** częściej obserwowanym mechanizmem zniszczenia jest natomiast **zniszczenie kohezyjne** (utrata spójności wewnętrznej materiału skleiny) (Arenas i in. 2010). Ogólnie należy stwierdzić, że wpływ grubości złącza na charakterystykę mechaniczną złącza jest bardzo złożony i nie daje się opisać prostymi, kategorycznymi wnioskami. Część danych eksperymentalnych wskazuje na niezależność nośności złącza na ścinanie od grubości skleiny (Naito i in. 2012). Zgodnie z innymi badaniami w określonych warunkach nośność złącza na ścinanie może wzrastać wraz z wzrostem grubości skleiny – zjawisko takie zaobserwowano w przypadku twardych sklein pod obciążeniem udarowym (Bezemer i in. 1998). Obserwuje się również, że w złączach o grubszych skleinach całkowita energia pęknięcia w postaci I (rozrywanie) i II (ścinięcie w płaszczyźnie) może być większa, przy czym wyniki doświadczenia charakteryzują się dużym rozrzutem (Marzi i in. 2011). Spostrzeżenie to nie pozwala wnioskować od razu o pozytywnym wpływie wzrostu grubości skleiny na nośność złącza, ponieważ pęknięcie jest tylko jednym z kilku możliwych mechanizmów zniszczenia złącza.

Podsumowując powyższe rozważania, można stwierdzić, że choć **zwiększenie grubości skleiny może skutkować obniżeniem występującego w niej naprężenia stycznego**, to jednak niekoniecznie pociąga to za sobą zwiększenie nośności złącza. W rzeczywistości często obserwuje się **spadek nośności złącza, z uwagi na zmianę charakteru jego pracy** (większy udział sił wewnętrznych pochodzących ze stanu zginania), **zmianę decydującego mechanizmu zniszczenia** (adhezyjne/kohezyjne) czy wreszcie z uwagi na **efekty skali**.

Powyższe spostrzeżenie, dotyczące spadku wielkości naprężenia stycznego w grubszej spoinie, w swoim ogólnym sformułowaniu dotyczy nie tylko złączy klejowych, ale również innych zjawisk, które – z mechanicznego punktu widzenia – mają podobny charakter. W pracy (Szeptyński 2020b) oszacowano wielkość naprężenia stycznego w skleinie w belkach kompozytowych. Wyniki obliczeń wskazują na występowanie względnie **mniejszego naprężenia stycznego w skleinach o większej grubości** lub wykonanych z **bardziej podatnego materiału**. Porównano cztery rodzaje belek kompozytowych, składających się z trzech warstw wykonanych z materiału drewnopochodnego, łączonych podatnym klejem poliuretanowym. Belki poddano czteropunktowemu zginaniu. Dwa typy belek, różniące się jedynie długością, wykorzystywały sklejkę oraz klej Sika®PST. Dla pozostałych dwóch typów były to belki klejone krzyżowo (*cross laminated timber*, CLT), łączone klejami Sika®PS oraz Sika®PST. W tabeli 4 przedstawiono procentowy spadek wielkości maksymalnego naprężenia stycznego w odniesieniu do największej oszacowanej wielkości (odpowiadającej skleinie o najmniejszej grubości) dla belek kompozytowych w stanie czteropunktowego zginania.

Tabela 4

Porównanie oszacowań maksymalnego naprężenia stycznego w skleinach belek kompozytowych w zależności od grubości i materiału skleiny

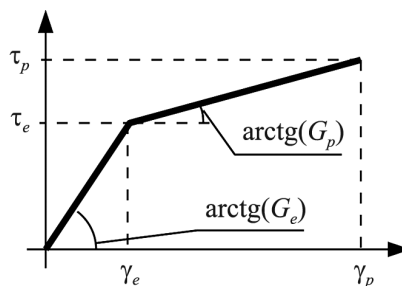
materiał belki + materiał skleiny	$L$ [cm]	$t$ [mm]	$G_a$ [MPa]	oszacowanie $\tau/\tau_{ref}$		
				model prosty (BE/TE)	model belki wielowarstwowej	MES
sklejka + PST	120	1	4,054	100%	100%	100%
sklejka + PST	72	1	4,054	100%	98,1%	98,2%
sklejka + PST	120	2	4,054	95,7%	94,6%	95,7%
sklejka + PST	72	2	4,054	95,7%	89,5%	91,6%
CLT + PS	120	3	7,0678	71,2%	70,8%	69,6%
CLT + PST	120	3	4,054	71,2%	69,4%	67,8%

## 7.8. Wpływ nieliniowości charakterystyki mechanicznej skleiny

Zastosowanie w złączach klejów polimerowych, które tylko w niewielkim zakresie odkształceń charakteryzują się w przybliżeniu liniowymi związkami konstytutywnymi, stawia projektantów przed koniecznością analizy nieliniowej. Nieliniowość modelu analitycznego jest w tym przypadku związana z charakterystyką mechaniczną skleiny, może jednak też wynikać z innych czynników – dużych odkształceń lub nieliniowej charakterystyki mechanicznej elementów łączonych (np. w przypadku uwzględnienia uplastycznienia materiału). Jeśli chodzi o typowe

złącza klejowe, dużym odkształceniom podlega przede wszystkim skleina. Dla sklein cienkich, wykonanych z materiałów w przybliżeniu nieściśliwych, dominującą postacią deformacji jest proste ścinanie. Dla deformacji tego typu liniowa i nieliniowa miara odkształcenia są takie same (por. składowe  $\varepsilon_{12}$  oraz  $E_{12}$  we wzorach (5.12) i (5.13)). Z tego względu w dalszej części opracowania zajmować się będziemy jedynie nieliniowością fizyczną, nie zaś geometryczną.

Najprostszą schematyzacją materiału nieliniowego jest **wyróżnienie w nim dwóch zakresów pracy**, które interpretować można jako zakres sprężysty i zakres sprężysto-plastyczny, przy czym dla uproszczenia można przyjąć, że **w każdym z tych zakresów związek konstytutywny dany jest funkcją liniową**. Taką charakterystykę mechaniczną nazywamy **charakterystyką biliniową**. Kluczową trudnością w jednoczesnym uwzględnieniu możliwości zmiany charakterystyki mechanicznej zarówno skleiny, jak i elementów łączonych jest konieczność wyznaczenia zakresu deformacji plastycznej dla każdego z tych elementów. W przypadku złączy niesymetrycznych na długości złącza należałoby wyznaczyć aż siedem przedziałów charakterystycznych – obszar pracy sprężystej w środku złącza oraz maksymalnie po trzy obszary przy każdym z końców złącza, w których jeden, dwa lub trzy materiały podlegają deformacji plastycznej. Zagadnienie to jest niezwykle trudne z dwóch powodów. Po pierwsze, jak przekonamy się później, parametry, które określają zakres uplastycznienia w każdym z elementów, występują jako niewiadome w nieliniowych równaniach, otrzymanych z warunków brzegowych i warunków zszycia – nieliniowość równań wymaga zastosowania metod numerycznych, a znaczna liczba niewiadomych uniemożliwia stosowanie prostych wykresów lub nomogramów. Drugim powodem jest fakt, że liczba siedmiu podobszarów jest liczbą maksymalną – rzeczywista liczba koniecznych do wyodrębnienia podobszarów zależy od warunków zadania i nie jest z góry znana. Z tych względów analityczny opis wpływu nieliniowości charakterystyki mechanicznej wykonuje się odrębnie dla materiału skleiny i dla materiałów, z których wykonane są elementy łączone. Duża część analitycznych modeli złączy klejowych zakłada liniową charakterystykę materiału skleiny. Pierwszym ważnym uogólnieniem tych modeli, w którym uwzględniono nieliniowy związek konstytutywny między naprężeniem i odkształ-



Rys. 47. Biliniowa charakterystyka fizyczna

ceniem, były propozycje Leonarda Johna Hart-Smitha (Hart-Smith 1973a, 1973b). Rozważał on biliniowy związek konstytutywny, w którym wyróżnia się dwa przedziały odkształceń (rys. 47) – w każdym z nich charakterystyka mechaniczna materiału jest liniowa, jednak odpowiedni moduł sztywności w każdym z tych zakresów może być w ogólności inny.

Modelowanie takie można interpretować na przynajmniej dwa sposoby:

- 1) biliniowy związek konstytutywny jest **jedynie aproksymacją rzeczywistego związku nieliniowego** (krzywoliniowego),
- 2) biliniowy związek konstytutywny opisuje **zachowanie materiału idealnie sprężysto-plastycznego**.

W zakresie pierwszym materiał ma charakterystykę liniowo-sprężystą, w drugim zaś idealnie plastyczną (bez wzmocnienia – schematyzacja Prandtla) bądź sprężysto-plastyczną z liniowym wzmocnieniem.

W przypadku tej drugiej interpretacji należy poczynić zastrzeżenie właściwe wszystkim tzw. **deformacyjnym modelom plastyczności** (np. Nádaia–Hencky’ego–Iliuszyna), że modele te opisują jedynie zjawiska obciążenia **proporcjonalnego** (kierunki własne tensora naprężenia i stosunki składowych dewiatora naprężenia są stałe w czasie procesu obciążenia) i **monotonicznego** (nie występują procesy odciążenia i ponownego obciążenia). Poniżej zaprezentujemy analizę wpływu nieliniowości, będącą uogólnieniem podejścia zastosowanego w pracy (Hart-Smith 1973b). Oznaczenia przyjmujemy identycznie jak w podrozdziale 7.1. Kluczowa zmiana w stosunku do analizy tam przedstawionej dotyczy konieczności wyznaczenia tych obszarów na długości złącza, w obrębie których związek konstytutywny materiału skleiny ma ustaloną postać liniową. Rozwiązanie zagadnienia liniowego wskazuje, że przy końcach złącza występuje znaczący wzrost wielkości naprężenia stycznego – zatem to odcinki końcowe złącza będą tymi, w których nastąpi zmiana postaci związku konstytutywnego. W celu uproszczenia nazewnictwa mówić będziemy, że w obszarze środkowym skleina pracuje w zakresie sprężystym, w obszarach końcowych zaś – w zakresie plastycznym, przyjmując drugą z przytoczonych interpretacji związku biliniowego (schematyzacja Prandtla ze wzmocnieniem).

Wprowadzamy zatem trzy obszary:

- **obszar I** – obszar deformacji **plastycznej**,  $x \in \left(-\frac{L}{2}, -d_I\right)$
- **obszar II** – obszar deformacji **sprężystej**,  $x \in (-d_I, d_{II})$
- **obszar III** – obszar deformacji **plastycznej**,  $x \in \left(d_{II}, \frac{L}{2}\right)$

W tym miejscu trzeba zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku złączy, w których sztywności elementów po obydwu stronach złącza nie są sobie równe ( $2E_1h_1 \neq E_2h_2$ ), rozkład naprężenia stycznego jest niesymetryczny na długości złącza, zatem wielkość obszaru deformacji plastycznej na jednym końcu będzie w ogólności różna od analogicznego obszaru na drugim końcu. Możliwa jest również sytuacja, w której

uplastycznienie występuje tylko na jednym końcu, podczas gdy na drugim wielkość naprężenia stycznego nie przekracza wartości  $\tau_e$ :

- **związek konstytutywny w zakresie sprężystym:**

$$\tau = G_e \gamma = G_e \frac{u_2 - u_1}{t} \quad (7.441)$$

- **związek konstytutywny w zakresie plastycznym:**

$$\tau = \tau_e + G_p (\gamma - \gamma_e) = \tau_e + G_p \left( \frac{u_2 - u_1}{t} - \gamma_e \right) \quad (7.442)$$

gdzie, zgodnie z rysunkiem 47,  $\tau_e = G_e \gamma_e$ .

Analiza w zakresie sprężystym jest identyczna, jak to przedstawiono w podrozdziale 7.1. Równaniem rządzącym zagadnieniem jest równanie (7.15), a jego rozwiązanie ogólne dane jest wzorem (7.16). Tę samą postać matematyczną będzie miała również funkcja rozkładu odkształcenia postaciowego w zakresie sprężystym:

$$\gamma_{II}(x) = C_1 \cosh(\beta_e x) + C_2 \sinh(\beta_e x), \quad \text{gdzie: } \beta_e = \sqrt{\frac{G_e}{t} \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right)} \quad (7.443)$$

Jeśli chodzi o analizę w zakresie plastycznym, to w równaniu (7.9) należy podstawić dwukrotnie zróżniczkowany związek kinematyczny:

$$\gamma = \frac{u_2 - u_1}{t} \quad (7.444)$$

a następnie wykorzystać związek konstytutywny (7.442), co ostatecznie daje nam równanie w następującej postaci:

$$\frac{d^2 \gamma_I}{dx^2} - \beta_p^2 \gamma_I = \beta_e^2 \left( 1 - \frac{G_p}{G_e} \right) \gamma_e, \quad \text{gdzie: } \beta_p = \sqrt{\frac{G_p}{t} \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right)} \quad (7.445)$$

Wyrażenie po prawej stronie jest stałą niezależną od zmiennej  $x$ . Uzyskane równanie jest liniowym równaniem niejednorodnym – jego rozwiązanie jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego (CORJ) analogicznego do (7.15) oraz całki szczególnej równania niejednorodnego (CSRN). CORJ ma postać analogiczną do (7.443). Na podstawie danej postaci członu niejednorodnego CSRN przewidujemy w postaci funkcji równej tożsamościowo stałej. Ostatecznie, po wykorzystaniu definicji parametrów  $\beta_e$  oraz  $\beta_p$ , całka ogólna równania niejednorodnego w zakresie plastycznym przyjmie postać:

$$\gamma_1(x) = C_3 \cosh(\beta_p x) + C_4 \sinh(\beta_p x) - \left( \frac{\beta_e^2}{\beta_p^2} - 1 \right) \gamma_e \quad (7.446)$$

Analogicznie:

$$\gamma_{III}(x) = C_5 \cosh(\beta_p x) + C_6 \sinh(\beta_p x) - \left( \frac{\beta_e^2}{\beta_p^2} - 1 \right) \gamma_e \quad (7.447)$$

Musimy teraz zapewnić ciągłość rozkładu odkształceń i przemieszczeń, zapisując stosowne warunki, które posłużą wyznaczeniu stałych całkowania  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). W tym celu wprowadzimy nowe zmienne niezależne. **Warunki zszycia** są następujące:

- **warunki zgodności odkształceń:**

$$\gamma_1(-d_1) = \gamma_{II}(-d_1) = \gamma_e \quad (7.448)$$

$$\gamma_{II}(d_2) = \gamma_{III}(d_2) = \gamma_e \quad (7.449)$$

- **warunki zgodności odkształceń**, analogiczne do (7.25):

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{t} \left[ \frac{N_2}{E_2 h_2} - \frac{N_1}{E_1 h_1} \right] \quad (7.450)$$

Warunek nierozdzielności odkształceń zapiszemy dla  $\gamma_1$  w punkcie  $x = -L/2$  oraz dla  $\gamma_{III}$  w punkcie  $x = L/2$  – w punktach tych wykorzystamy **statyczne warunki brzegowe**:

$$N_1 \left( -\frac{L}{2} \right) = \frac{N}{2}, \quad N_2 \left( -\frac{L}{2} \right) = 0 \quad (7.451)$$

$$N_1 \left( \frac{L}{2} \right) = 0, \quad N_2 \left( \frac{L}{2} \right) = N \quad (7.452)$$

Powyższe równania dają nam następujący liniowy układ równań algebraicznych na stałe całkowania  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_3 \cosh(\beta_p d_1) - C_4 \sinh(\beta_p d_1) = \frac{\beta_e}{\beta_p} \gamma_e \\ C_1 \cosh(\beta_e d_1) - C_2 \sinh(\beta_e d_1) = \gamma_e \\ C_1 \cosh(\beta_e d_2) + C_2 \sinh(\beta_e d_2) = \gamma_e \\ C_5 \cosh(\beta_p d_2) + C_6 \sinh(\beta_p d_2) = \frac{\beta_e}{\beta_p} \gamma_e \\ C_4 \cosh\left(\frac{\beta_p L}{2}\right) - C_3 \sinh\left(\frac{\beta_p L}{2}\right) = -\frac{N}{2\beta_p E_1 h_1 t} \\ C_6 \cosh\left(\frac{\beta_p L}{2}\right) + C_5 \sinh\left(\frac{\beta_p L}{2}\right) = \frac{N}{\beta_p E_1 h_1 t} \end{array} \right. \quad (7.453)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań jest następujące:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\sinh(\beta_e d_1) + \sinh(\beta_e d_2)}{\sinh[\beta_e(d_1 + d_2)]} \gamma_e, & C_2 &= \frac{\cosh(\beta_e d_1) - \cosh(\beta_e d_2)}{\sinh[\beta_e(d_1 + d_2)]} \gamma_e & (7.454) \\ C_3 &= \frac{\gamma_e \frac{\beta_e}{\beta_p} \cosh\left(\frac{\beta_p L}{2}\right) - \frac{N \sinh(\beta_p d_1)}{2E_1 h_1 t \beta_p}}{\cosh\left[\frac{\beta_p}{2}(2d_1 - L)\right]}, & C_4 &= \frac{\gamma_e \frac{\beta_e}{\beta_p} \sinh\left(\frac{\beta_p L}{2}\right) - \frac{N \cosh(\beta_p d_1)}{2E_1 h_1 t \beta_p}}{\cosh\left[\frac{\beta_p}{2}(2d_1 - L)\right]} \\ C_5 &= \frac{\gamma_e \frac{\beta_e}{\beta_p} \cosh\left(\frac{\beta_p L}{2}\right) - \frac{N \sinh(\beta_p d_2)}{E_2 h_2 t \beta_p}}{\cosh\left[\frac{\beta_p}{2}(2d_2 - L)\right]}, & C_6 &= \frac{-\gamma_e \frac{\beta_e}{\beta_p} \sinh\left(\frac{\beta_p L}{2}\right) + \frac{N \cosh(\beta_p d_2)}{E_2 h_2 t \beta_p}}{\cosh\left[\frac{\beta_p}{2}(2d_2 - L)\right]} \end{aligned}$$

Powyższe wzory obowiązują dla dowolnych wartości  $d_1$  oraz  $d_2$ , one same jednak muszą zostać wyznaczone jako rozwiązanie nieliniowego układu równań. W celu wyznaczenia stosownych równań zapiszmy warunek ciągłości pochodnych odkształceń na granicy obszarów I i II oraz II i III. Warunek ten można wyprowadzić z warunku (7.450). **Warunki lokalnej równowagi sił osiowych wobec braku skupionego obciążenia osiowego na elementach łączonych wymagają ciągłości rozkładu sił osiowych  $N_1, N_2$  na całej długości złącza.** Oznacza to, że prawa strona warunku nierozdzielności odkształceń musi być ciągła, a ponieważ warunek ten obowiązuje w analogicznej postaci w każdym z obszarów I, II i III, pociąga to za sobą konieczność ciągłości lewej strony warunku, czyli **ciągłość rozkładu pochodnej odkształcenia postaciowego skleiny** – przede wszystkim zaś wymaga się równości



lewostronnych i prawostronnych wartości tych pochodnych na granicy obszarów I i II oraz II i III. Możemy zatem napisać:

$$\begin{cases} \left. \frac{d\gamma_I}{dx} \right|_{-d_1} = \left. \frac{d\gamma_{II}}{dx} \right|_{-d_1} \\ \left. \frac{d\gamma_{II}}{dx} \right|_{d_2} = \left. \frac{d\gamma_{III}}{dx} \right|_{d_2} \end{cases} \quad (7.455)$$

Po podstawieniu rozwiązań (7.443), (7.446) i (7.447) otrzymamy:

$$\begin{cases} \beta_e [C_2 \cosh(\beta_e d_1) - C_1 \sinh(\beta_e d_1)] = \beta_p [C_4 \cosh(\beta_p d_1) - C_3 \sinh(\beta_p d_1)] \\ \beta_e [C_2 \cosh(\beta_e d_2) + C_1 \sinh(\beta_e d_2)] = \beta_p [C_6 \cosh(\beta_p d_2) + C_5 \sinh(\beta_p d_2)] \end{cases} \quad (7.456)$$

Należy przy tym pamiętać, że stałe całkowania  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) należy w powyższym układzie wyrazić zgodnie z (7.454) przez niewiadome  $d_1, d_2$ . Uzyskany wynik można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctgh}[\beta_e L(\xi_1 + \xi_2)] - \operatorname{csch}[\beta_e L(\xi_1 + \xi_2)] &= \\ &= \frac{N}{\gamma_e \beta_e E_2 h_2 t} \operatorname{sech} \left[ \beta_p L \left( \xi_1 - \frac{1}{2} \right) \right] + \operatorname{tgh} \left[ \beta_p L \left( \xi_1 - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \operatorname{ctgh}[\beta_e L(\xi_1 + \xi_2)] - \operatorname{csch}[\beta_e L(\xi_1 + \xi_2)] &= \\ &= \frac{N}{\gamma_e \beta_e E_2 h_2 t} \operatorname{sech} \left[ \beta_p L \left( \xi_2 - \frac{1}{2} \right) \right] + \operatorname{tgh} \left[ \beta_p L \left( \xi_2 - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.457)$$

gdzie: niewiadome  $\xi_1, \xi_2$  spełniają zależności  $d_1 = \xi_1 L, d_2 = \xi_2 L$ . Wyznaczenie rozwiązania powyższego układu równań wymaga podejścia numerycznego.

Zagadnienie uprości się, jeśli ograniczymy nasze rozważania do złącza symetrycznego, dla którego  $2E_1 h_1 = E_2 h_2$ . W takim przypadku rozkład naprężeń stycznych musi być symetryczny. Wtedy  $d_1 = d_2 = d$ , co pociąga za sobą  $C_2 = 0$ , a ponadto do opisu rozkładu naprężenia w obszarze deformacji plastycznej wystarczy posłużyć się jedną tylko funkcją,  $\gamma_I(x)$  lub  $\gamma_{III}(x)$ . Dla przypadku symetrycznego układ równań (7.457) redukuje się do jednego tylko nieliniowego równania na  $\xi = d/L$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{ctgh}(2\beta_e \xi L) - \operatorname{csch}(2\beta_e \xi L) &= \\ &= \frac{N}{2\gamma_e \beta_e E_1 h_1 t} \operatorname{sech} \left[ \beta_p L \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \right] + \operatorname{tgh} \left[ \beta_p L \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.458)$$

W pracy (Hart-Smith 1973b) analizowany był jedynie przypadek symetryczny – za pomocą stosownych przekształceń znaleziono przybliżoną wielkość strefy

deformacji plastycznej. Przybliżenie to obowiązuje jedynie dla złączy symetrycznych o odpowiednio dużej długości. Założenie o symetrii pozwala napisać:

$$\gamma_I(x) = \gamma_{III}(x) \quad (7.459)$$

i w konsekwencji  $C_3 = C_5$  oraz  $C_4 = C_6$ . Jeśli początek układu współrzędnych przyjęty zostanie w środku złącza, warunek symetrii rozkładu naprężenia stycznego w części środkowej pozwala wyeliminować antysymetryczny składnik w (7.443) i przyjąć  $C_2 = 0$ . Pozostałe stałe całkowania  $C_1, C_3, C_4$  oraz nieznaną zasięg strefy deformacji plastycznej  $d = d_1 = d_2$  wyznacza się z układu równań, jaki tworzą:

- **warunki brzegowe:**

$$\begin{cases} \gamma_I\left(x = \frac{L}{2}\right) = \gamma_p \\ N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 \\ N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = N = 2L\tau_{\text{avg}} \end{cases} \quad (7.460)$$

- **warunki zszycia:**

$$\begin{cases} \gamma_I(x=d) = \gamma_{II}(x=d) = \gamma_e \\ \left. \frac{d\gamma_I}{dx} \right|_{x=d} = \left. \frac{d\gamma_{II}}{dx} \right|_{x=d} \end{cases} \quad (7.461)$$

- **warunek nierozdzielności odkształceń:**

$$\frac{d\gamma_I}{dx} = \frac{1}{t} \left[ \frac{N_2}{2E_1 h_1} - \frac{N_1}{E_1 h_1} \right] \quad (7.462)$$

Z pierwszego z warunków (7.461) wyznaczamy stałą  $C_1$ , co pozwala zapisać:

$$\gamma_{II}(x) = \gamma_e \frac{\cosh(\beta_e x)}{\cosh(\beta_e d)} \quad (7.463)$$

W raporcie Hart-Smitha, w celu uproszczenia obliczeń w opisie rozkładu odkształcenia w strefie deformacji plastycznej, zamiast zmiennej niezależnej  $x$  wprowadzono zmienną  $\xi = x - d$ . Po podstawieniu  $\xi$  zamiast  $x$  wzór (7.446) nadal opisuje rozwiązanie równania (7.445). Przy takiej zamianie zmiennych drugi z warunków (7.461) można zapisać w następujący sposób:

$$\left. \frac{d\gamma_{II}}{dx} \right|_{x=d} = \beta_e \gamma_e \operatorname{tgh}(\beta_e d) = C_4 \beta_p = \left. \frac{d\gamma_I}{dx} \right|_{\xi=0}$$

co daje nam:

$$C_4 = \frac{\beta_e}{\beta_p} \gamma_e \operatorname{tgh}(\beta_e d) \quad (7.464)$$

Zapisując pierwszy z warunków (7.461), tym razem dla  $\gamma_I$ , wyznaczamy stałą całkowania  $C_3$ , co pozwala ostatecznie napisać:

$$\gamma_I(\xi) = \gamma_e \left[ \frac{\beta_e^2}{\beta_p^2} \cosh(\beta_p \xi) + \frac{\beta_e}{\beta_p} \operatorname{tgh}(\beta_e d) \sinh(\beta_p \xi) - \left( \frac{\beta_e^2}{\beta_p^2} - 1 \right) \right] \quad (7.465)$$

Można teraz zapisać pierwszy warunek brzegowy (7.460) oraz warunek nierozdzielności odkształceń, zapisany dla  $x = \frac{L}{2}$  z wykorzystaniem statycznych warunków brzegowych (7.460):

$$\gamma_e \left[ \frac{\beta_e^2}{\beta_p^2} \cosh\left(\beta_p \left(\frac{L}{2} - d\right)\right) + \frac{\beta_e}{\beta_p} \operatorname{tgh}(\beta_e d) \sinh\left(\beta_p \left(\frac{L}{2} - d\right)\right) - \left(\frac{\beta_e^2}{\beta_p^2} - 1\right) \right] = \gamma_p \quad (7.466)$$

$$\gamma_e \beta_p \left[ \frac{\beta_e^2}{\beta_p^2} \sinh\left(\beta_p \left(\frac{L}{2} - d\right)\right) + \frac{\beta_e}{\beta_p} \operatorname{tgh}(\beta_e d) \cosh\left(\beta_p \left(\frac{L}{2} - d\right)\right) \right] = \frac{L\tau_{\text{avg}}}{E_1 h_1 t}$$

Powyższy układ równań można przepisać w następującej postaci:

$$\begin{cases} C = A \cosh \delta + B \sinh \delta \\ D = B \cosh \delta + A \sinh \delta \end{cases} \quad (7.467)$$

gdzie:

$$\delta = \beta_p \left(\frac{L}{2} - d\right), \quad A = \frac{\beta_e^2}{\beta_p^2}, \quad B = \frac{\beta_e}{\beta_p} \operatorname{tgh}(\beta_e d)$$

$$C = \frac{\gamma_p}{\gamma_e} + \frac{\beta_e^2}{\beta_p^2} - 1, \quad D = \frac{L\tau_{\text{avg}}}{\gamma_e \beta_p E_1 h_1 t}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia  $\Delta\gamma_p = \gamma_p - \gamma_e$  oraz wykorzystaniu definicji współczynników  $\beta_e$  i  $\beta_p$  dwie ostatnie stałe można zapisać w odmienniej postaci:

$$C = \frac{\Delta\gamma_p}{\gamma_e} + \frac{\beta_e^2}{\beta_p^2}, \quad D = \left( \frac{\tau_{\text{avg}}}{\tau_e} \right) \left( \frac{\beta_e L}{2} \right) \left( \frac{\beta_e}{\beta_p} \right)$$

Rozwiązanie liniowego układu równań (7.467) jest następujące:

$$\cosh \delta = \frac{AC - BD}{A^2 - B^2}, \quad \sinh \delta = \frac{AD - BC}{A^2 - B^2} \quad (7.468)$$

Funkcje hiperboliczne nie są jednak niezależne od siebie – są związane wzorem na tzw. jedynekę hiperboliczną:

$$\cosh^2 \delta - \sinh^2 \delta = 1$$

co pozwala napisać:

$$(AC - BD)^2 - (AD - BC)^2 = -(A^2 - B^2)(B^2 - A^2)$$

Na drodze przekształceń algebraicznych powyższy związek można przekształcić do następującej postaci:

$$D^2 - C^2 = B^2 - A^2$$

Po podstawieniu wyrażań na stałe  $A, B, C, D$  otrzymamy:

$$\left( \frac{\tau_{\text{avg}}}{\tau_e} \right)^2 \left( \frac{\beta_e L}{2} \right)^2 \left( \frac{\beta_e}{\beta_p} \right)^2 - \left( \frac{\Delta\gamma_p}{\gamma_e} + \frac{\beta_e^2}{\beta_p^2} \right)^2 = \left[ \frac{\beta_e}{\beta_p} \operatorname{tgh}(\beta_e d) \right]^2 - \left( \frac{\beta_e^2}{\beta_p^2} \right)^2 \quad (7.469)$$

Po przekształceniach otrzymamy:

$$\left( \frac{\tau_{\text{avg}}}{\tau_e} \right)^2 \left( \frac{\beta_e L}{2} \right)^2 = \operatorname{tgh}^2(\beta_e d) + \left( \frac{\beta_p}{\beta_e} \frac{\Delta\gamma_p}{\gamma_e} \right)^2 + 2 \frac{\Delta\gamma_p}{\gamma_e} \quad (7.470)$$

Jeśli tylko długość złącza jest wystarczająco duża, wtedy dla  $L \rightarrow \infty$ , również i  $d \rightarrow \infty$ , a w takim przypadku:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \operatorname{tgh}^2(\beta_e d) = 1$$

Jeśli wykorzystamy ponadto definicje współczynników  $\beta_e$  i  $\beta_p$ , wtedy równanie (7.470) można przepisać w postaci:

$$N = \sqrt{16E_1 h_1 t \left[ \frac{G_e}{2} \gamma_e^2 + \frac{G_p}{2} (\Delta\gamma_p)^2 + G_e \gamma_e \Delta\gamma_p \right]} \quad (7.471)$$

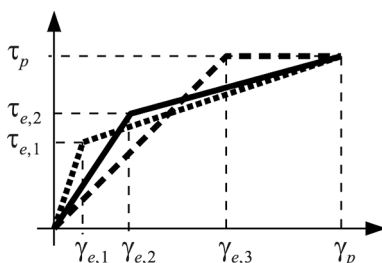
Kluczowe dla uzyskanego rezultatu jest spostrzeżenie, że całkowita praca naprężenia stycznego na odkształceniu postaciowym dla skleiny, której charakterystyka mechaniczna opisana jest krzywą przedstawioną na rysunku 47, jest równa:

$$\Phi = \int_0^{\gamma_p} \tau(\gamma) d\gamma = \left[ \frac{G_e}{2} \gamma_e^2 + \frac{G_p}{2} (\Delta\gamma_p)^2 + G_e \gamma_e \Delta\gamma_p \right] \quad (7.472)$$

Możemy zauważyć, że **maksymalna siła, jaką można obciążyć złącze, tak aby na krańcach złącza występowało maksymalne dopuszczalne odkształcenie  $\gamma_p$  i odpowiadające mu naprężenie  $\tau_p$ , jest równa:**

$$N = \sqrt{16E_1 h_1 t \Phi} \quad (7.473)$$

Można zatem sformułować wniosek, że **dla odpowiednio długich złączy o zadanej geometrii elementów łączonych i zadanej grubości skleiny ich nośność nie zależy od długości złącza, a określona jest wyłącznie przez charakterystykę mechaniczną skleiny** – co więcej, szczegółowy charakter biliniowego związku konstytutywnego nie ma tutaj znaczenia, bowiem **wystarczającą charakterystyką materiału jest samo tylko pole pod wykresem  $\tau - \gamma$ , czyli całkowita praca naprężenia stycznego na odpowiadającym mu odkształceniu postaciowym** (por. rys. 48).



Rys. 48. Biliniowe charakterystyki materiałowe równoważne z punktu widzenia nośności złącza

Wartościowym spostrzeżeniem płynącym z powyższego wniosku jest to, że **analiza złącza przy założeniu odpowiednio zdefiniowanej idealnie sprężystej – idealnie plastycznej charakterystyki materiałowej (schematyzacja Prandtla) może być uważana za równoważną** (z punktu widzenia nośności skleiny na ścinanie) **z analizą dowolnej zadanej charakterystyki biliniowej**, np. wyznaczonej jako aproksymacja charakterystyki nieliniowej. Praktyczne znaczenie tego spostrzeżenia wynika z faktu, że analiza z wykorzystaniem schematyzacji Prandtla jest znacznie łatwiejsza.

Podobną do powyższej analizę wpływu biliniowej charakterystyki mechanicznej materiału skleiny na pracę symetrycznego złącza jednozakładkowego modelowa-

nego elementami prętowymi (czyli z pominięciem zginania elementów łączonych) przeprowadzono w pracy (Godzimirski 1988). Z uwagi na nieliniowość zagadnienia również i w tej pracy precyzyjne wyznaczenie zakresu strefy plastycznej wymagało obliczeń numerycznych.

Analizę wpływu nieliniowości przeprowadzono odmiennie w pracy (Bigwood i Crocombe 1990). Autorzy rozpatrywali belkowy model złącza, w którym deformacja skleiny opisana została w ramach deformacyjnej teorii plastyczności. Takie podejście narzuca w konsekwencji na analizę wszystkie ograniczenia charakterystyczne dla deformacyjnych teorii plastyczności, czyli przede wszystkim wymóg, aby proces obciążenia był procesem proporcjonalnym i monotonicznym. Uzyskano w ten sposób nieliniowy układ złożony z sześciu równań różniczkowych zwyczajnych oraz jednego równania algebraicznego, określającego warunek plastyczności. W równaniach tych styczny moduł Younga materiału skleiny wyznaczany był z wykorzystaniem założonego warunku plastyczności. Rozpatrywano warunki Misesa oraz Raghavy–Cadella z uwzględnieniem zarówno ścinania, jak i rozrywania skleiny. Z uwagi na te założenia uzyskany układ równań charakteryzuje się nieliniowością. Z tego względu uzyskanie dla niego rozwiązania możliwe jest tylko na drodze analizy numerycznej. Ponieważ jednak jest to układ równań różniczkowych zwyczajnych, możliwe jest zastosowanie standardowych metod aproksymacji pochodnych ilorazami różnicowymi oraz całkowania równań typu *explicit* (*marching method*) lub *implicit* (*direct method*).

Alternatywą dla biliniowej schematyzacji charakterystyki mechanicznej skleiny jest oczywiście wykorzystanie bardziej ogólnego związku nieliniowego. Pomocne w tym zakresie mogą się okazać rezultaty zaprezentowane w rozdziale 6, w którym wyprowadzono związki konstytutywne między naprężeniem stycznym a odkształceniem postaciowym w stanie prostego ścinania dla szeregu wybranych modeli materiałów hipersprężystych. Związki te mogą być wykorzystane w wyprowadzeniach równań rządzących zagadnieniem ścinania złącza w ramach któregośkolwiek z modeli analitycznych przedstawionych w rozdziale 7. Przykładowo, zastosowanie związku konstytutywnego Yeoh w modelu Volkersena–de Bruyne’a wymaga zastąpienia równań (7.2) i (7.3) związkiem (6.62). W rezultacie otrzymuje się nieliniowe równanie różniczkowe na odkształcenie postaciowe:

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{2}{t} \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right) \gamma (C_1 + 2C_2 \gamma^2 + 3C_3 \gamma^4) = 0 \quad (7.474)$$

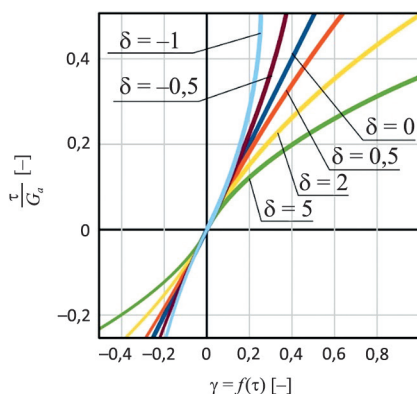
Rozwiązanie tego równania dane jest w postaci uwikłanej w następujący sposób (Polyanin i Zaitsev 2003):

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{t} \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{2}{E_2 h_2} \right)}} \int \frac{d\gamma}{\sqrt{c_1 + \frac{1}{2} (C_1 \gamma^2 + C_2 \gamma^4 + C_3 \gamma^6)}} = c_2 \pm x \quad (7.475)$$

gdzie:  $c_1, c_2$  są stałymi całkowania. Całka nieoznaczona w powyższym równaniu jest całką eliptyczną z uwagi na zmienną  $\gamma^2$ . Ponieważ stałe materiałowe  $C_1, C_2, C_3$  mogą przyjmować różne wielkości, a ponadto stała całkowania  $c_1$ , występująca w funkcji podcałkowej, nie jest z góry znana, znalezienie analitycznego rozwiązania równania (7.474) w postaci zamkniętego wzoru nie jest w ogólności możliwe z uwagi na nieelementarny charakter funkcji danych całkami eliptycznymi. Łatwo spostrzec, że nawet dla najprostszego modelu analitycznego Volkersena, wykorzystującego najprostszy (wielomianowy) nieliniowy związek konstytutywny, znalezienie zamkniętego rozwiązania jest w ogólnym przypadku niemożliwe. Z tego względu konieczne jest zastosowanie metod numerycznych.

W sposób podobny do zaprezentowanego powyżej wpływ nieliniowości związku konstytutywnego materiału skleiny przeanalizowany został w pracy (Szeptyński i Nowak 2021). Zamiast charakterystyki biliniowej rozważano kwadratowy związek konstytutywny o ogólnej postaci (por. rys. 49):

$$\gamma = f(\tau) = \frac{\tau}{G_a} + \delta \operatorname{sgn}(\tau) \left( \frac{\tau}{G_a} \right)^2 \quad (7.476)$$



Rys. 49. Krzywe napężenie-odkształcenie dla kwadratowego związku konstytutywnego (Szeptyński i Nowak 2021)

Rozważano zatem materiały, które **wraz z postępującym odkształceniem wykazują efekt „osłabienia”**, rozumiany jako **spadek stycznego modułu sztywności** (dla  $\delta > 0$ ), lub **efekt „wzmocnienia”**, rozumiany jako **wzrost stycznego modułu sztywności** (dla  $\delta < 0$ ). Związek (7.476) może być uważany za aproksymację

drugiego stopnia dowolnego przebiegu naprężenie – odkształcenie. Współczynniki tej aproksymacji można wyznaczyć na podstawie pomiaru doświadczalnego:

- styczny początkowy moduł Kirchhoffa:

$$G_a = \frac{\left[ \sum_{i=1}^N (\tau^i)^2 \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N (\tau^i)^4 \right] - \left[ \sum_{i=1}^N (\tau^i)^3 \right]^2}{\left[ \sum_{i=1}^N \gamma^i \tau^i \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N (\tau^i)^4 \right] - \left[ \sum_{i=1}^N \gamma^i (\tau^i)^2 \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N (\tau^i)^3 \right]} \quad (7.477)$$

- bezwymiarowy parametr nieliniowości:

$$\delta = G_a^2 \frac{\left[ \sum_{i=1}^N \gamma^i (\tau^i)^2 \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N (\tau^i)^2 \right] - \left[ \sum_{i=1}^N \gamma^i \tau^i \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N (\tau^i)^3 \right]}{\left[ \sum_{i=1}^N (\tau^i)^2 \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^N (\tau^i)^4 \right] - \left[ \sum_{i=1}^N (\tau^i)^3 \right]^2} \quad (7.478)$$

Przyjmując za punkt wyjścia model zaproponowany w pracy (Tsai i in. 1998) i wykorzystując zaproponowany nieliniowy związek konstytutywny dla materiału skleiny, wyprowadzono następujące równanie rządzące zagadnieniem ścinania złącza zakładkowego:

$$\frac{d^2 \tau}{dx^2} + [\tau_0 + \tau]^{-1} \left( \frac{d\tau}{dx} \right)^2 - \left[ \frac{\alpha}{\tau} + \beta \right]^{-1} = 0 \quad (7.479)$$

gdzie:

$$\tau_0 = \frac{G_a}{2 \operatorname{sgn}(\tau) \delta} \left( \frac{1}{3} \frac{G_a}{G} \frac{t}{h} + 1 \right), \quad \alpha = \frac{1}{3} \frac{E}{G} t^2 + \frac{E}{G_a} ht, \quad \beta = 2 \operatorname{sgn}(\tau) \delta \frac{E}{G_a^2} ht$$

Rozwiązanie powyższego **nieliniowego, niejednorodnego równania różniczkowego** można zapisać w postaci **niejawnej** (uwikłanej) jako funkcję  $\tau(x)$ , spełniającą poniższą zależność:

$$\int \frac{A + B\tau}{\sqrt{D_1 + C(3A\tau^2 + 2B\tau^3)}} dt = \pm x + D_2 \quad (7.480)$$

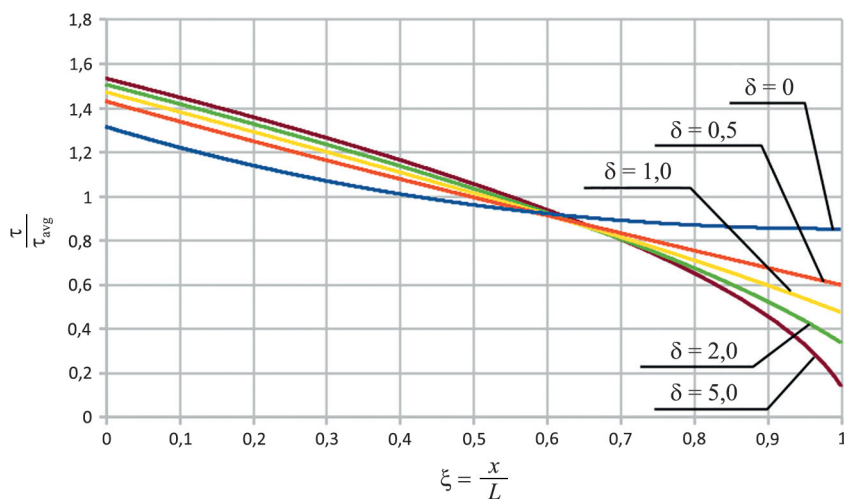
gdzie:

$$A = \frac{t}{3G} + \frac{h}{G_a}, \quad B = \frac{2h \operatorname{sgn}(\tau) \delta}{G_a^2}, \quad C = \frac{1}{3tE}$$

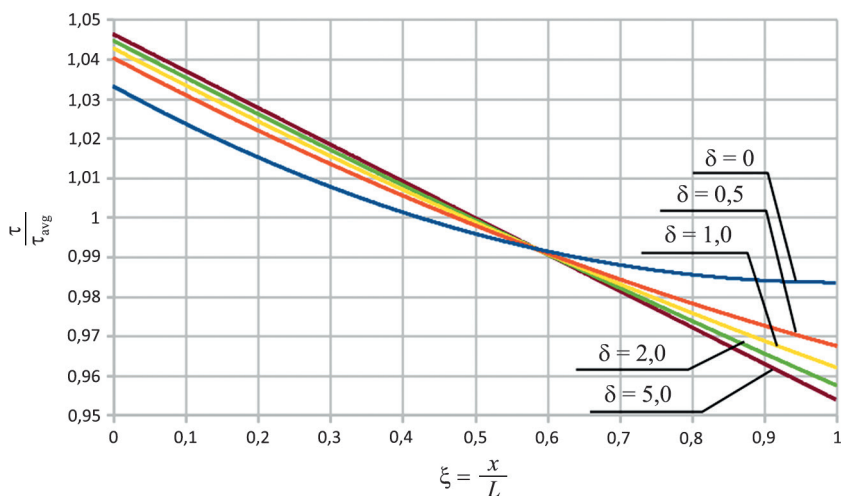
zaś  $D_1$ ,  $D_2$  są stałymi całkowania. W pracy (Szeptyński i Nowak 2021) pokazano, że całkę po lewej stronie równania (7.480) można zapisać jako kombinację liniową



całki eliptycznej pierwszego rodzaju i całki eliptycznej drugiego rodzaju w postaci Weierstraßa. Należy się zatem spodziewać, że nawet dla prostej, wielomianowej postaci nieliniowego związku konstytutywnego nie jest możliwe wyrażenie funkcji  $\tau(x)$  w postaci skończonej liczby funkcji elementarnych. Przeprowadzono więc analizę numeryczną, rozwiązując równanie (7.479) za pomocą metody strzałów, w której zagadnienie początkowe rozwiązywane było algorytmem Rungego–Kutty czwartego rzędu, sam zaś proces strzałów sterowany był gradientową metodą najszybszego



Rys. 50. Rozkład naprężenia względnego na długości złącza – cienka warstwa podatnej skleiny, duże obciążenie (Szeptyński i Nowak 2021)

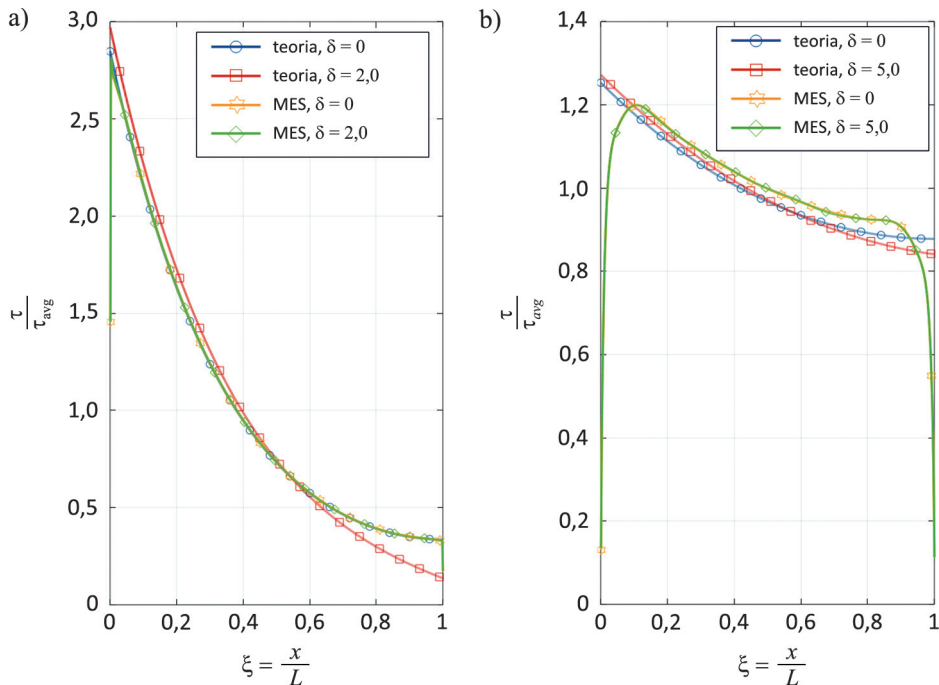


Rys. 51. Rozkład naprężenia względnego na długości złącza – gruba warstwa podatnej skleiny, duże obciążenie (Szeptyński i Nowak 2021)

spadku, w której zmiennymi decyzyjnymi były wartości początkowe funkcji niewiadomej i jej pochodnej, gradient zaś aproksymowany był centralnym schematem różnic skończonych. Rozwiązań numerycznych poszukiwano dla sześciu klas przypadków, zależnych od sztywności materiału skleiny, grubości warstwy adhezyjnej oraz wielkości obciążenia. Ten ostatni czynnik konieczny był do uwzględnienia właśnie z uwagi na nieliniowość zagadnienia, wobec którego niedopuszczalne jest stosowanie zasady superpozycji i skalowanie rozwiązań odpowiednio do wielkości parametru obciążenia. Wyniki analizy numerycznej zilustrowano na wykresach rozkładu względnego naprężenia stycznego, będącego funkcją współrzędnej bezwymiarowej  $\xi = x/L$  (rys. 50–51).

Uzyskane wyniki sugerują, że w materiałach wykazujących „osłabienie” (w sensie wskazanym uprzednio) rozkład naprężenia stycznego byłby bardziej nierównomierny niż w materiałach liniowych, przy czym zjawisko to byłoby wyraźniej zauważalne dla sklein cienkich. W tym miejscu należy jednak zaznaczyć, że powyższe wnioski należy traktować z dużą ostrożnością, bowiem skonfrontowane z rezultatami dokładniejszych analiz mogą okazać się niepoprawne z uwagi na prostotę rozważanego modelu analitycznego.

Analizę numeryczną równania (7.479) uzupełniono o symulacje MES, w których analizowano dwuwymiarowy model złącza zakładkowego w programie Abaqus/



Rys. 52. Rozkład naprężenia względnego na długości złącza: a) cienka warstwa podatnej skleiny; b) gruba warstwa podatnej skleiny (Szeptyński i Nowak 2021)

Explicit. Związek konstytutywny (7.476) został uogólniony na przypadek zagadnienia trójwymiarowego przy założeniu nieściśliwości materiału, a następnie zaimplementowany za pomocą subrutyny VUMAT. Wyniki symulacji MES przedstawiono na rysunku 52.

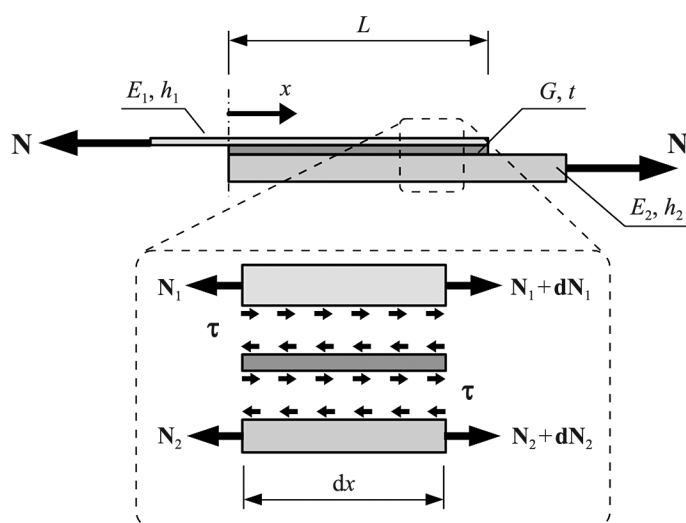
Wnioski płynące z przeprowadzonej analizy są następujące:

- Należy stwierdzić, że **wpływ nieliniowości charakterystyki materiałowej skleiny na rozkład naprężenia stycznego w złączu jest stosunkowo niewielki**. Analiza numeryczna równania (7.479) wskazuje, że zmiana wielkości maksymalnego naprężenia stycznego, spowodowana uwzględnieniem nieliniowości charakterystyki mechanicznej, nie przekracza kilkunastu procent dla sklein cienkich i materiałów o silnej nieliniowości. Dla sklein grubych i materiałów, których charakterystyka niewiele odbiega od liniowej, różnice nie przekraczają kilku procent. Również w pracy (Godzimirski 1988) analiza biliniowego związku konstytutywnego wskazywała na **przyrost wartości naprężenia maksymalnego o nie więcej niż kilkanaście procent**. Są to oszacowania teoretyczne. Szczegółowa analiza numeryczna MES wskazuje jednak, iż **rzeczywisty wpływ nieliniowości związku konstytutywnego może być znacznie mniejszy i może być całkowicie zdominowany przez efekty brzegowe**. Dotyczy to przede wszystkim sklein grubych, w przypadku których efekty brzegowe mają większy zasięg.
- **Dla materiałów wykazujących silniejsze osłabienie** (czyli cechujących się większymi dodatnimi wartościami bezwymiarowego parametru nieliniowości) **rozkład naprężenia stycznego na długości złącza był bardziej nierównomierny** niż w przypadku materiałów liniowych. Nieliniowość związku konstytutywnego ma zatem podobny wpływ na rozkład naprężenia jak zwiększenie sztywności lub pocienienie skleiny.
- **Wpływ nieliniowości charakterystyki materiałowej skleiny jest wyraźniej widoczny dla złączy pod dużym obciążeniem** – jest to oczywiste wobec faktu, że w zakresie dostatecznie małych odkształceń nieliniowa część związku konstytutywnego jest pomijalnie mała w stosunku do części liniowej.
- Wpływ nieliniowości charakterystyki materiałowej skleiny **daje się wyraźniej zaobserwować dla sklein cienkich**.

## 7.9. Wpływ nieliniowości charakterystyki mechanicznej elementów łączonych

Zagadnieniem jakościowo pokrewnym do problemu omówionego w poprzednim podrozdziale jest zbadanie wpływu nieliniowości charakterystyki mechanicznej materiałów, z których wykonane są elementy łączone – chodzi tu przede wszystkim o zagadnienie uplastycznienia elementu przy jego obciążeniu osiowym, niemniej

wyniki poniższych analiz mogą być wykorzystane do przybliżonego opisu wszystkich materiałów, które można charakteryzować za pomocą biliniowego związku konstytutywnego. W dalszej części tego podrozdziału posługiwać się będziemy terminologią dotyczącą procesów deformacji sprężysto-plastycznej. W artykule (Godzimirski 1988) analizowano wpływ biliniowej charakterystyki mechanicznej zarówno skleiny, jak i elementów łączonych, przy czym czynniki te analizowane były oddzielnie. Autor rozważał niesymetryczne złącze jednozakładkowe, stosując belkowy model elementów łączonych, czyli świadomie pomijając ich zginanie. Wśród dwóch elementów łączonych wyróżniono element bardziej podatny o grubości  $h_1 < h_2$ . Ten właśnie element podlegać będzie uplastycznieniu.



Rys. 53. Belkowy model niesymetrycznego złącza jednozakładkowego – równowaga sił wewnętrznych

**Równania równowagi sił wewnętrznych** przyjmują postać (por. rys. 53):

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dx} + \tau = 0 \\ \frac{dN_2}{dx} - \tau = 0 \end{cases} \quad (7.481)$$

Tak jak w pozostałych częściach tego opracowania wielkości  $N_1$ ,  $N_2$  o wymiarze N/m oznaczają gęstości sił osiowych na jednostkę szerokości przekroju poprzecznego elementów łączonych. Zakłada się, że **skleina znajduje się w stanie prostego ścinania**, zatem:

$$\gamma = \frac{u_2 - u_1}{t} \quad (7.482)$$

Po zróżniczkowaniu powyższego wyrażenia możemy wykorzystać **związki kinematyczne dla elementów łączonych** – zakładamy, że znajdują się one w **stanie jednoosiowym**. Mamy zatem:

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{t} \left[ \frac{du_2}{dx} - \frac{du_1}{dx} \right] = \frac{1}{t} [\varepsilon_2 - \varepsilon_1] \quad (7.483)$$

Zapiszmy teraz **związki konstytutywne**:

- **materiał słabszego elementu łączonego** (por. rys. 54):

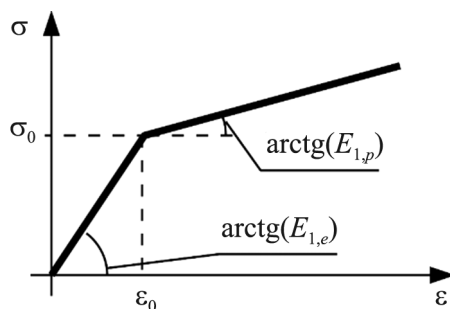
$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \frac{\sigma_1}{E_{1,e}} = \frac{N_1}{E_{1,e} h_1} & \Leftrightarrow \varepsilon_1 \leq \frac{\sigma_0}{E_{1,e}} = \frac{N_0}{E_{1,e} h_1} \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{E_{1,p}} + \frac{\sigma_0}{E_{1,e}} = \frac{N_1 - N_0}{E_{1,p} h_1} + \frac{N_0}{E_{1,e} h_1} & \Leftrightarrow \varepsilon_1 > \frac{\sigma_0}{E_{1,e}} = \frac{N_0}{E_{1,e} h_1} \end{cases} \quad (7.484)$$

- **materiał mocniejszego elementu łączonego**:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{N_2}{E_2 h_2} \quad (7.485)$$

- **materiał skleiny**:

$$\tau = G\gamma \quad (7.486)$$



Rys. 54. Biliniowa charakterystyka materiału słabszego elementu

Podstawienie powyższych związków do równania (7.483) pozwala nam zapisać równania rządzące zagadnieniem w dwóch podobszarach:

- w obszarze deformacji sprężystej:

$$\frac{d\tau_e}{dx} = \frac{G}{t} \left[ \frac{N_{2,e}}{E_2 h_2} - \frac{N_{1,e}}{E_{1,e} h_1} \right] \quad (7.487)$$

- w obszarze deformacji plastycznej elementu słabszego:

$$\frac{d\tau_p}{dx} = \frac{G}{t} \left[ \frac{N_{2,p}}{E_2 h_2} - \frac{N_{1,p} - N_0}{E_{1,p} h_1} - \frac{N_0}{E_{1,e} h_1} \right] \quad (7.488)$$

gdzie:  $N_{1,e}(x)$  oraz  $N_{2,e}(x)$  są funkcjami określającymi rozkład sił wewnętrznych w obszarze deformacji sprężystej; a  $N_{1,p}(x)$  oraz  $N_{2,p}(x)$  odnoszą się do obszaru deformacji sprężysto-plastycznej elementu słabszego. Warunek równowagi sił wewnętrznych i zewnętrznych:

$$N_1(x) + N_2(x) = N \quad (7.489)$$

obowiązujący w analogicznej postaci w każdym z wyróżnionych podobszarów, umożliwia wyrugowanie z równań (7.487) i (7.488) niewiadomej  $N_2$ :

$$\frac{d\tau_e}{dx} = \frac{G}{t} \left[ \frac{N - N_{1,e}}{E_2 h_2} - \frac{N_{1,e}}{E_{1,e} h_1} \right] \quad (7.490)$$

$$\frac{d\tau_p}{dx} = \frac{G}{t} \left[ \frac{N - N_{1,p}}{E_2 h_2} - \frac{N_{1,p} - N_0}{E_{1,p} h_1} - \frac{N_0}{E_{1,e} h_1} \right] \quad (7.491)$$

Zróżniczkowanie pierwszego z równań równowagi (7.481) pozwala wyrazić lewą stronę powyższych równań za pomocą pochodnej poszukiwanej siły osiowej  $N_1$ :

$$\frac{d^2 N_{1,e}}{dx^2} = -\frac{G}{t} \left[ \frac{N - N_{1,e}}{E_2 h_2} - \frac{N_{1,e}}{E_{1,e} h_1} \right] \quad (7.492)$$

$$\frac{d^2 N_{1,p}}{dx^2} = -\frac{G}{t} \left[ \frac{N - N_{1,p}}{E_2 h_2} - \frac{N_{1,p} - N_0}{E_{1,p} h_1} - \frac{N_0}{E_{1,e} h_1} \right] \quad (7.493)$$

Powyższe równania można przepisać w następujący sposób:

$$\frac{d^2 N_{1,e}}{dx^2} - \beta_e^2 N_{1,e} = -f_e \quad (7.494)$$

$$\frac{d^2 N_{1,p}}{dx^2} - \beta_p^2 N_{1,p} = -f_p \quad (7.495)$$

gdzie:

$$\beta_e = \sqrt{\frac{G}{t} \left( \frac{1}{E_{1,e} h_1} + \frac{1}{E_2 h_2} \right)}, \quad \beta_p = \sqrt{\frac{G}{t} \left( \frac{1}{E_{1,p} h_1} + \frac{1}{E_2 h_2} \right)}$$

$$f_e = \frac{G}{t} \left[ \frac{N}{E_2 h_2} \right], \quad f_p = \frac{G}{t} \left[ \frac{N}{E_2 h_2} + \frac{N_0}{h_1} \left( \frac{1}{E_{1,p}} - \frac{1}{E_{1,e}} \right) \right]$$

Równania (7.494) i (7.495) to niejednorodne liniowe równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Ich rozwiązania ogólne mają postać:

$$N_{1,e}(x) = A_1 \cosh(\beta_e x) + A_2 \sinh(\beta_e x) + A_3 \quad (7.496)$$

$$N_{1,p}(x) = B_1 \cosh(\beta_p x) + B_2 \sinh(\beta_p x) + B_3 \quad (7.497)$$

Stałe  $A_3$ ,  $B_3$ , stanowiące CSRN, wyznaczamy z konieczności spełnienia równań (7.496) i (7.497). Stałe całkowania  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  wyznacza się z poniższych warunków:

- **warunki brzegowe:**

$$\begin{cases} N_{1,p}(0) = N \\ N_{1,e}(L) = 0 \end{cases} \quad (7.498)$$

- **warunek zszycia:**

$$N_{1,p}(d) = N_{1,e}(d) = N_0 \quad (7.499)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$A_1 = \frac{N_0 \beta_e^2 \sinh(\beta_e L) - f_e [\sinh(\beta_e L) - \sinh(\beta_e d)]}{\beta_e^2 \sinh[\beta_e (L - d)]}$$

$$A_2 = -\frac{N_0 \beta_e^2 \cosh(\beta_e L) - f_e [\cosh(\beta_e L) - \cosh(\beta_e d)]}{\beta_e^2 \sinh[\beta_e (L - d)]}, \quad A_3 = \frac{f_e}{\beta_e^2}$$

$$B_1 = N - \frac{f_p}{\beta_p^2}, \quad B_2 = \frac{\beta_p^2 [N_0 - N \cosh(\beta_p d)] - f_p [1 - \cosh(\beta_p d)]}{\beta_p^2 \sinh[\beta_p d]}$$

$$B_3 = \frac{f_p}{\beta_p^2}$$

Ostatnią niewiadomą, którą należy wyznaczyć, jest  $d$  – zasięg strefy deformacji plastycznej. Oblicza się go z warunku zszycia dla rozkładu naprężenia stycznego w skleinie, który wyznacza się z wykorzystaniem powyższych rozwiązań zgodnie z równaniami równowagi (7.481):

$$\tau(d^-) = \tau(d^+) \Rightarrow \left. \frac{dN_{1,p}}{dx} \right|_{x=d} = \left. \frac{dN_{1,e}}{dx} \right|_{x=d} \quad (7.500)$$

Powyższe równanie można zapisać w następującej postaci:

$$\beta_e [A_1 \sinh(\beta_e d) + A_2 \cosh(\beta_e d)] = \beta_p [B_1 \sinh(\beta_p d) + B_2 \cosh(\beta_p d)] \quad (7.501)$$

Podobnie jak w przypadku analizy wpływu nieliniowości charakterystyki mechanicznej materiału skleiny również w tym przypadku uzyskanie zamkniętego rozwiązania analitycznego wymaga rozwiązania nieliniowego równania algebraicznego – w przypadku ogólnym konieczne okazuje się zastosowanie metod numerycznych.

## 7.10. Uwzględnienie zjawisk termolepkosprężystych

We wstępnych rozdziałach niniejszej monografii wielokrotnie podkreślano ograniczenia płynące z posługiwania się modelami sprężystymi. Wskazano, że większość zagadnień praktyki projektowej dotyczy złączy klejowych pracujących w warunkach temperatury, podlegających jedynie nieznacznym wahaniom i obciążonych w sposób quasi-statyczny, co uzasadnia stosowanie modeli sprężystych. Istnieją jednak ważne zjawiska, wobec których podejście takie byłoby zbyt daleko idącym uproszczeniem – można wymienić tu choćby złącza w układach:

- podlegających **wysokoczęstotliwościowym drganiom** – elementy maszyn, konstrukcje podlegające wymuszeniom sejsmicznym lub parasejsmicznym,
- obciążonych **udarowo** – projektowanie pojazdów na wypadek zderzenia, przemyśl zbrojeniowy,
- podlegających **zjawiskom reologicznym** wskutek długotrwałego użytkowania,
- użytkowanych w silnie **zmiennych warunkach termicznych** – dobowe i roczne wahania temperatury powietrza w przypadku niez izolowanych złączy pracujących w środowisku zewnętrznym, warunki pożarowe.

We wszystkich tych przypadkach konieczne staje się uwzględnienie specyfiki termolepkosprężystych związków konstytutywnych. W przypadku ogólnym uwzględnienie termolepkosprężystości w sposób ścisły wymaga odpowiedniego matematycznego sformułowania zagadnienia, jednakże struktura związków konstytutywnych termolepkosprężystości, będących złożonymi związkami różniczkowo-całkowymi, sprawia, że uzyskanie rozwiązań analitycznych jest niemożliwe bądź



możliwe jedynie dla zagadnień niezwykle uproszczonych, co pociąga za sobą znikomą wartość użytkową tak uzyskanych rozwiązań.

Matematyczna struktura zagadnienia **liniowej termolepkosprężystości** dla materiału **jednorodnego i izotropowego** jest następująca (Christensen 1982):

- **równania ruchu:**

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (7.502)$$

- **związki kinematyczne:**

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7.503)$$

- **związki konstytutywne:**

$$s_{ij} = \int_{-\infty}^t G(t-\tau, 0) \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau \quad (7.504)$$

$$\sigma_{kk} = \int_{-\infty}^t K(t-\tau, 0) \dot{\theta}(\tau) d\tau - 3 \int_{-\infty}^t \phi(0, t-\tau) \dot{\theta}(\tau) d\tau \quad (7.505)$$

- **równanie przepływu ciepła:**

$$W + k\theta_{,ii} - T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{-\infty}^t \phi(t-\tau, 0) \dot{\theta}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t m(t-\tau, 0) \dot{\theta}(\tau) d\tau \right] = 0 \quad (7.506)$$

- **warunki początkowe:**

$$\begin{cases} u_i(\mathbf{x}, t_0) = u_i^{(0)}(\mathbf{x}) & \text{– położenie początkowe} \\ \dot{u}_i(\mathbf{x}, t_0) = v_i^{(0)}(\mathbf{x}) & \text{– prędkość początkowa} \\ \theta(\mathbf{x}, t_0) = T_0(\mathbf{x}) & \text{– temperatura początkowa} \end{cases} \quad (7.507)$$

- **kinematyczne warunki brzegowe:**

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \hat{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{dla} \quad x \in S_u \quad \text{– ustalone przemieszczenia} \quad (7.508)$$

- **statyczne warunki brzegowe:**

$$q_i(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \cdot n_j(\mathbf{x}) \quad \text{dla} \quad x \in S_q \quad \text{– obciążenie brzegowe} \quad (7.509)$$

• **termiczne warunki brzegowe:**

$$\begin{aligned}
 \theta(\mathbf{x}, t) &= \hat{\theta}(\mathbf{x}, t) && - \text{ustalona temperatura} \\
 k(\theta, {}_i n_i) &= \hat{\Phi}(\mathbf{x}, t) && - \text{ustalony strumień ciepła} \\
 k(\theta, {}_i n_i) + h\theta &= \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) && - \text{konwekcyjny warunek brzegowy}
 \end{aligned}
 \tag{7.510}$$

gdzie:

- $u_i$  – składowe wektora przemieszczenia,
- $\varepsilon_{ij}$  – składowe tensora odkształcenia,
- $e_{ij}$  – składowe dewiatora tensora odkształcenia,
- $\sigma_{ij}$  – składowe tensora naprężenia,
- $s_{ij}$  – składowe dewiatora tensora naprężenia,
- $\vartheta = \varepsilon_{kk}$  – odkształcenie objętościowe,
- $\theta$  – temperatura,
- $T_0$  – temperatura początkowa,
- $u_i^{(0)}$  – składowe wektora przemieszczenia początkowego,
- $v_i^{(0)}$  – składowe wektora prędkości początkowej,
- $q_i$  – składowe wektora zewnętrznych sił powierzchniowych,
- $b_i$  – składowe wektora zewnętrznych sił objętościowych,
- $\rho$  – gęstość,
- $G$  – funkcja relaksacji związana z deformacją postaciową,
- $K$  – funkcja relaksacji związana z deformacją objętościową,
- $\phi$  – funkcja relaksacji związana z rozszerzalnością termiczną,
- $m$  – funkcja relaksacji związana z ciepłem właściwym,
- $k$  – współczynnik przewodzenia ciepła,
- $h$  – współczynnik przenikania ciepła,
- $W$  – prędkość gęstości objętościowej źródła ciepła.

Nietrudno przekonać się, że poszukiwanie analitycznych rozwiązań dla rzeczywistych zagadnień inżynierskich w ramach przedstawionego powyżej modelu obliczeniowego jest zadaniem niemalże z góry skazanym na porażkę. Należy przy tym zwrócić uwagę na dwie cechy powyższego sformułowania. Po pierwsze, jest to układ **liniowy**. Uwzględnienie nieliniowej charakterystyki materiałowej, co w przypadku dużych odkształceń sklein polimerowych wydaje się być koniecznością, istotnie komplikuje matematyczne sformułowanie problemu. Jedynym uniwersalnym podejściem, umożliwiającym w praktyce znalezienie rozwiązań nieliniowych zagadnień termolepkosprężystości, jest podejście przyrostowe, wykorzystywane w numerycznym rozwiązywaniu zagadnień nieliniowych (zarówno geometrycznie, jak i fizycznie) mechaniki ośrodka ciągłego.

Kolejną cechą powyższego sformułowania, która czyni je do pewnego stopnia bezużytecznym, jest fakt, że równania rządzące powyższym zagadnieniem zostały wyprowadzone przy założeniu, że **stałe materiałowe**, opisujące gęstość, sztywność,

rozszerzalność termiczną, ciepło właściwe i przewodzenie ciepła, są **niezależne od temperatury**.

Jeszcze jedną trudność, jaka wiąże się z wykorzystaniem przedstawionego powyżej modelu obliczeniowego, przedstawia określenie **interakcji między elementami składowymi układu złożonego** (kompozytu). Powyższe sformułowanie dotyczy bowiem jednego tylko, jednorodnego i izotropowego komponentu. Warunki zgodności przemieszczeń, równowagi sił wewnętrznych, ciągłości rozkładu temperatury i równości strumieni ciepła na interfejsie pomiędzy komponentami kompozytu stają się wzajemnie sprzężonymi warunkami brzegowymi dla każdej z jednorodnych poddziedzin zagadnienia.

Tak postawione zagadnienie daje się z reguły rozwiązać niemal wyłącznie metodami numerycznymi. Warto zauważyć, że w modelach numerycznych możliwe jest również uwzględnienie zarówno zależności stałych materiałowych od temperatury, jak również np. efektu Mullinsa (Ogden i Roxburgh 1999).

Jeśli ograniczymy nasze rozważania do zagadnień samej tylko lepkosprężystości, pomijając efekty termiczne (np. przez założenie, że deformacja przebiega w warunkach ustalonej temperatury), możemy skorzystać z jednej z najskuteczniejszych metod wyznaczania rozwiązań zagadnień lepkosprężystych, jakim jest twierdzenie o **analogii sprężysto-lepkosprężystej**. Szczegółowe wyprowadzenie tego twierdzenia można znaleźć np. w pracy (Bodnar i in. 2006). Można spotkać dwa brzmienia tego twierdzenia, z których jedno dotyczy szczególnego przypadku, przewidzianego również w bardziej ogólnej wersji twierdzenia.

Bardziej ogólne twierdzenie brzmi następująco:

*W ciele liniowo-lepkosprężystym, w którym reologiczny współczynnik Poissona nie zależy od wieku materiału, rozkład naprężenia jest stały w czasie, zaś rozkład przemieszczenia wyznacza się analogicznie jak dla ciała liniowo-sprężystego, przy czym siły masowe oraz warunki brzegowe określone dla zagadnienia sprężystego są stosownymi transformacjami odpowiednich wielkości z zagadnienia lepkosprężystego.*

Wariant bardziej szczegółowy, częściej przytaczany w literaturze, ma brzmienie:

*Dla niestarzejącego się ciała liniowo-lepkosprężystego rozwiązanie zagadnienia liniowej teorii lepkosprężystości wymaga rozwiązania analogicznego zagadnienia liniowej teorii sprężystości, w którym niewiadomymi są transformaty Laplace'a niewiadomych z zagadnienia lepkosprężystego, a także znalezienia retransformat.*

Zastosowanie analogii sprężysto-lepkosprężystej w przypadku materiałów niejednorodnych i kompozytów omówione zostało np. w pracach (Hashin 1965; Schapery 1967). Zasadniczo można stwierdzić, że zależne od czasu operatory całkowe występują w sformułowaniu zagadnienia brzegowego dla kompozytu wyłącznie w związkach konstytutywnych teorii dziedziczenia – nie występują natomiast w warunkach zszycia na interfejsie między fazami kompozytu, a zatem w jedynych równaniach, których problem deformacji kompozytu różni się od problemu postawio-

nego dla materiału jednorodnego. Oznacza to, że analogię sprężysto-lepkosprężystą można stosować dla układów wielofazowych bez żadnych modyfikacji, jednakże pod warunkiem, że **strefa kontaktu między elementami składowymi kompozytu jest stała w czasie**. W przypadku, w którym kształt lub rozmiar interfejsu są zmienne w czasie (jak np. w przypadku zagadnień indentacji), transformacja Laplace'a warunków zszycia musi uwzględniać tę zależność od czasu i tym samym analogiczne zagadnienie sprężyste ma całkiem odmienne sformułowanie w stosunku do wyjściowego zagadnienia lepkosprężystego.

Zagadnienie upraszcza się, jeżeli istnieje możliwość zastąpienia warunków interakcji na styku komponentów kompozytu niezależnymi od deformacji i czasu warunkami brzegowymi. Podejście takie jest dopuszczalne jako rozwiązanie przybliżone, np. w przypadku gdy sztywność i czasy relaksacji materiałów składowych kompozytu są istotnie różne. Taka sytuacja może zajść właśnie dla podatnych sklein polimerowych, łączących tradycyjne materiały konstrukcyjne, takie jak beton czy stal, a nawet drewno. Podatność skleiny sprawia, że reologiczne zmiany rozkładu naprężenia i odkształcenia w skleinie nie wpływają istotnie na warunki zszycia na interfejsie komponentów, zaś istotnie krótszy czas relaksacji skleiny pozwala na założenie, że warunki interakcji są w przybliżeniu niezależnymi od czasu warunkami brzegowymi dla materiału skleiny. Należy jednak mieć świadomość, że takie podejście jest zaledwie przybliżeniem rzeczywistej odpowiedzi układu kompozytowego na zadane wymuszenie, a oszacowanie popełnianego przy takim podejściu błędu jest trudne.

Istotnym ograniczeniem stosowalności analogii sprężysto-lepkosprężystej jest fakt, że **dotyczy ona wyłącznie ciał o liniowej charakterystyce fizycznej**. Jeśli zatem wielkość obciążenia lub deformacji wchodzi w zakres, w którym związki konstytutywne istotnie odbiegają od związków liniowych, stosowanie tej analogii nie jest uprawnione.

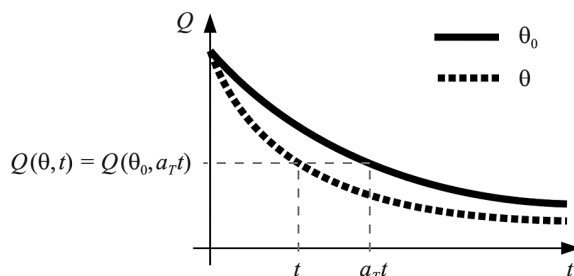
Jednym z często wykorzystywanych sposobów uwzględnienia wpływu temperatury na odpowiedź mechaniczną układu jest wykorzystanie tzw. **zasady superpozycji wpływu temperatury i czasu**, zgodnie z którą, jeśli znany jest przebieg zmienności pewnej wielkości fizycznej  $Q$  w czasie dla różnych temperatur (wśród których wyróżniamy jedną temperaturę odniesienia  $\theta_0$ ), wtedy wielkość tę dla pewnej temperatury  $\theta$  i pewnej chwili  $t$  można wyznaczyć jako równą wielkości odpowiadającej temperaturze odniesienia i innej, przesuniętej, chwili czasu (rys. 55):

$$Q(\theta, t) = Q(\theta_0, a_T t) \quad (7.511)$$

gdzie:  $a_T$  to współczynnik przesunięcia w czasie. Do wyznaczenia wartości tego współczynnika stosuje się najczęściej model Williama–Landela–Ferry'ego (WLF) (Williams i in. 1955), zgodnie z którym:

$$\log_{10}(a_T) = -\frac{C_1(\theta - \theta_0)}{C_2 + (\theta - \theta_0)} \quad (7.512)$$

gdzie:  $C_1$  i  $C_2$  są stałymi, co do których postuluje się, że są charakterystyczne dla danego materiału.



Rys. 55. Zasada superpozycji wpływu temperatury i czasu – model Williama–Landela–Ferry’ego

Z rozważań przedstawionych w niniejszym podrozdziale wyłania się stosunkowo prosty schemat postępowania w uproszczonej próbie uwzględnienia lepkosprężystej charakterystyki materiałowej sklein: na podstawie twierdzenia o analogii sprężysto-lepkosprężystej można przyjąć, że rozkład naprężenia w skleinie jest stały w czasie, rozkład przemieszczenia zaś zmienia się w czasie, odpowiednio do własności reologicznych materiału. Zmienność przemieszczenia w czasie uwzględnić można przez zastosowanie stosownej funkcji pełzania  $\phi$ , za pomocą której wyznaczyć można efektywną sztywność układu  $k_{\text{eff}}$  na podstawie jego sztywności doraźnej  $k_0$ , zgodnie z wzorem:

$$k_{\text{eff}}(t) = \frac{k_0}{1 + \phi(t)} \quad (7.513)$$

W najbardziej uproszczonym podejściu postać funkcji pełzania można założyć tak jak dla modelu standardowego:

$$\phi(t) = \left( \frac{k_0}{k_\infty} - 1 \right) \left( 1 - e^{-\frac{k_\infty t}{k_0 t_r}} \right) \quad (7.514)$$

gdzie:  $k_\infty$  jest sztywnością układu po całkowitej relaksacji; a  $t_r$  jest funkcją czasu relaksacji. Można również wykorzystać bardziej ogólne modele – w pracy (Sahellie i Pasternak 2015b) przedstawiono modelowanie pełzania w złączu dwuzakładkowym z wykorzystaniem reologicznego modelu Burgersa oraz uproszczonego wzoru Findleya. Należy przy tym pamiętać, że analogia sprężysto-lepkosprężysta obowiązuje jedynie dla układów liniowych.

Wpływ temperatury jest uwzględniany następnie za pomocą superpozycji wpływu czasu i temperatury, zgodnie z modelem WLF. Aby wyznaczyć przemieszczenie  $u(t, \theta(t))$  (lub równoważnie wartość funkcji pełzania) w pewnej chwili  $t$ , po procesie obciążenia w zmiennych warunkach temperatury  $\theta(t)$  należy wyznaczyć czas zastępczy  $t_d$ , dla którego wartość przemieszczenia po procesie obciążenia w warunkach stałej temperatury  $\theta_0$  odniesienia będzie identyczna z poszukiwaną wartością:

$$u(t, \theta(t)) = u(t_d, \theta_0) \quad (7.515)$$

Czas zastępczy wyznaczany jest jako suma obliczanych na podstawie modelu WLF czasów, w których temperatura była ustalona:

$$t_d = \sum_{i=1}^N \left[ \Delta t_i \cdot 10^{\frac{-C_1(\theta - \theta_0)}{C_2 + (\theta - \theta_0)}} \right] \quad (7.516)$$

W podejściu tym konieczna jest znajomość współczynników  $C_1$ ,  $C_2$  w modelu WLF.

Należy podkreślić, że na zakres stosowalności zaprezentowanego powyżej podejścia narzucone są pewne ograniczenia, z których najważniejsze wymieniono poniżej:

- Podejście to można stosować do **układów jednorodnych lub takich, w których udział jednego ze składników kompozytu jest pomijalnie mały**. Warto zauważyć, że podobne podejście stosowane jest w załączniku B normy PN-EN 1992-1-1, określającej zasady uwzględniania zjawisk reologicznych w konstrukcjach żelbetowych. W przypadku innych układów kompozytowych należy zapewnić warunki, w których **zmiany reologiczne w jednym składniku kompozytu nie wpływają istotnie na warunki interakcji między komponentami** (przemieszczenia na interfejsie, naprężenia kontaktowe). Sytuacja taka występuje np. w przypadku, gdy własności sprężyste (sztywność) i lepkosprężyste (czas relaksacji) połączonych składników istotnie się różnią.
- **Czynniki wymuszające – temperatura i obciążenie – muszą zmieniać się odpowiednio wolno, przy czym w trakcie zmiany jednego z nich drugi powinien być w przybliżeniu stały w czasie**. Oznacza to, że w trakcie procesu obciążenia mechanicznego temperatura powinna być stała, a sam proces powinien przebiegać quasi-statycznie, tak aby pominąć udział zjawisk dynamicznych i natychmiastową odpowiedź lepką materiału. W trakcie procesu wymuszenia termicznego (zmiany temperatury) obciążenie mechaniczne powinno być stałe, a sam proces powinien przebiegać na tyle wolno, aby w materiale nie doszło do zlokalizowanego przepływu ciepła i niejednorodnego rozkładu temperatury oraz aby deformacja wskutek oddziaływania termicznego miała charakter procesu quasi-statycznego.

- **Zakres zmienności wielkości naprężenia i odkształcenia powinien zawierać się w obszarze w przybliżeniu liniowej charakterystyki mechanicznej materiału.**

Przedstawiony powyżej schemat postępowania zakłada, że kompozyt (zwłaszcza zaś skleina) jest liniowo-lepkosprężysty. Tylko w takim przypadku możliwe jest stosowanie analogii sprężysto-lepkosprężystej. Należy jednak mieć na uwadze fakt, że wiele doświadczeń wskazuje, iż niektóre kleje mogą mieć nieliniową charakterystykę mechaniczną. Dla większych poziomów obciążenia pełzanie w skleinie może mieć charakter stały lub po pewnym czasie ustawać (Piekarczyk 2023).

## 7.11. Porównanie wybranych modeli analitycznych

Podsumowując treść poprzednich podrozdziałów, w których omawiane były przykładowe modele analityczne złączy ścinanych, można sformułować następujące spostrzeżenia i wnioski:

- W modelach **złączy dwuzakładkowych** z reguły rozważa się złącza symetryczne względem płaszczyzny środkowej środkowego elementu złącza. Z uwagi na tę cechę symetrii elementy łączone nie podlegają zginaniu i możliwe jest opisywanie układów tego rodzaju **modelami prętowymi** – są to modele zasadniczo prostsze od modeli belkowych i dwuwymiarowych. **Równanie rządzące rozkładem naprężeń stycznych w skleinie jest jednorodnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu, podczas gdy równanie na rozkład naprężenia odrywającego jest równaniem czwartego rzędu, niesprężonym** z równaniem na naprężenie styczne (Volkersen 1938; de Bruyne 1944; Hart-Smith 1973b; Tsai i in. 1998).
- Modele **złączy jednozakładkowych** muszą uwzględniać deformację giętą elementów, co wymaga zastosowania **modeli belkowych** lub modeli dwuwymiarowych. W zależności od założeń modelu uzyskane układy równań rządzących zagadnieniem różnią się między sobą, w wielu przypadkach jednak matematyczna struktura zagadnienia jest podobna – otrzymuje się **jednorodny układ dwóch sprzężonych równań różniczkowych. Jest to układ rzędu trzeciego z uwagi na rozkład naprężeń stycznych oraz rzędu czwartego lub szóstego z uwagi na rozkład naprężenia odrywającego. Założenie symetrii złącza skutkuje rozprężeniem układu** (Goland i Reissner 1944; Hart-Smith 1973a; Ojalvo i Eidinoff 1978; Delale i in. 1980; Bigwood i Crocombe 1989; Tsai i in. 1998). Układ równań, służący opisowi złączy jednozakładkowych za pomocą modeli belkowych, można przekształcić do jednego jednorodnego równania różniczkowego zwyczajnego rzędu siódmego (Delale i in. 1980; Bigwood i Crocombe 1989).

- Odmienne wykorzystanie modelu belkowego zaprezentowano w pracy (Yang i Pang 1996). Przyjęcie założeń dotyczących kinematyki elementów łączonych, analogicznych do modelu Timoshenki–Ehrenfesta, oraz wykorzystanie liniowych związków konstytutywnych i liniowych związków geometrycznych umożliwiło sformułowanie zagadnienia w postaci trzech układów równań, których rozwiązania sprzęgnięte są ze sobą za pomocą warunków zszycia. W obszarze klejenia równania rządzące zagadnieniem mają postać niejednorodnego układu sześciu równań różniczkowych drugiego rzędu, zaś poza obszarem klejenia otrzymuje się niejednorodny układ trzech równań pierwszego rzędu. Inaczej niż w pozostałych omawianych modelach analitycznych, w których niewiadomymi są funkcje rozkładu naprężenia stycznego i naprężenia odrywającego, w tej propozycji niewiadomymi są uogólnione przemieszczenia elementów złącza – przemieszczenia osiowe, przemieszczenia poprzeczne (ugięcia) i obroty.
- W **lokalnym dwuwymiarowym modelu złącza jednozakładkowego** Rentona i Vinsona sformułowanie zagadnienia można sprowadzić do **pojedynczego niejednorodnego równania różniczkowego zwyczajnego rzędu ósmego na rozkład naprężenia stycznego w skleinie**, przy czym człon niejednorodny związany jest z odkształceniami termicznymi (Renton i Vinson 1977).
- W przypadku modeli dwuwymiarowych, wykorzystujących sformułowanie globalne związane z twierdzeniem Castigliano, matematyczna struktura zagadnienia zależy w znacznym stopniu od przyjętych założeń i wprowadzonych funkcji niewiadomych. W większości propozycji otrzymuje się **układ dwóch sprzęgniętych ze sobą niejednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych czwartego rzędu na funkcje niewiadome**, którymi mogą być, przykładowo, funkcje naprężeń (Allman 1977), funkcje określające rozkład naprężenia normalnego (Chen i Cheng 1983; Cheng i in. 1991) lub funkcje rozkładu sił przekrojowych (Zhao i in. 2014). W propozycji zawartej w pracy (Zhao i in. 2011) uzyskano układ równań jednorodnych rzędu piątego z uwagi na rozkład naprężenia stycznego i rzędu czwartego z uwagi na rozkład naprężenia odrywającego – równania te można sprowadzić do pojedynczego równania rzędu dziewiątego. Założenie symetrii złącza może prowadzić do rozprzęgnięcia równań w układzie (Allman 1977; Zhao i in. 2011).
- **Wszystkie omawiane modele są modelami liniowymi**. Wynika to z wykorzystania założeń liniowej teorii sprężystości, czyli założenia o małych przemieszczeniach i małych odkształceniach oraz przyjęcia liniowych związków konstytutywnych uogólnionego prawa Hooke’a. W konsekwencji uzyskane równania rządzące zagadnieniem są równaniami liniowymi. Założenie o jednorodności własności fizykomechanicznych elementów złącza pozwala dodatkowo uprościć to sformułowanie, które w konsekwencji przyjmuje postać **układu liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współ-**



**czynnikach.** Znane są ogólne metody wyznaczania analitycznych rozwiązań takich układów w postaci zamkniętych wzorów.

- Pewną trudność w modelowaniu złączy **stanowi sformułowanie warunków brzegowych**, pozwalających wyznaczyć wartości stałych całkowania w rozwiązaniach ogólnych. W przypadku **zagadnień sformułowanych w kategoriach naprężeń lub sił przekrojowych muszą to być warunki typu statycznego na brzegowe wartości sił przekrojowych.** W przypadku gdy równania rządzące zagadnieniem wyrażają się przez naprężenia, konieczne jest wyznaczenie zależności między wartościami sił przekrojowych a funkcjami rozkładu naprężeń i ich pochodnymi, tak jak zostało to pokazane przy omawianiu modeli zaproponowanych w pracach (Delale i in. 1980; Bigwood i Crocombe 1989). Kolejną trudnością związaną z formułowaniem warunków brzegowych okazuje się również **wyznaczenie wartości momentu zginającego  $M_{\text{end}}$  i siły poprzecznej  $Q_{\text{end}}$  na krańcach obszaru klejenia** – w sposób ścisły jest to możliwe jedynie w przypadku obciążenia złącza bezpośrednio na krańcach obszaru klejenia (co ze względów technologicznych jest z reguły niemożliwe) lub za pomocą łącznej analizy deformacji zarówno w obszarze klejenia, jak i poza nim.
- **W przypadku zagadnień sformułowanych w kategoriach przemieszczeń** (Yang i Pang 1996) **oprócz statycznych warunków brzegowych konieczne jest również zapisanie warunków typu kinematycznego.**
- Choć w większości przypadków możliwe jest zapisanie rozwiązania ogólnego w postaci zamkniętego wzoru, to wyznaczenie analitycznej postaci rozwiązania szczególnego, które wymaga znajomości wartości stałych całkowania, jest możliwe jedynie w przypadku najprostszych modeli (Volkersen 1938; de Bruyne 1944; Goland i Reissner 1944) oraz ich modyfikacji (Hart-Smith 1973a, 1973b; Tsai i in. 1998). W przypadku bardziej zaawansowanych modeli wyrażenia na stałe całkowania są niezwykle trudne do wyprowadzenia lub też są całkowicie niezdatne do praktycznych zastosowań z uwagi na złożoność tych wyrażeń. W takich przypadkach konieczne jest numeryczne wyznaczenie stałych całkowania – choć wielkości te są wyznaczone numerycznie, podstawia się je do znanych analitycznych rozwiązań ogólnych. Należy jednak zwrócić uwagę, że w niektórych przypadkach wyznaczenie stałych całkowania wiąże się z koniecznością rozwiązania dużego układu równań (np. w modelu Yanga–Panga jest to układ 21 zależnych równań na 18 niewiadomych), którego struktura może sprawiać trudności nawet w przypadku numerycznego ich rozwiązywania. Warto zadbać wtedy o odpowiedni dobór jednostek fizycznych lub sformułowanie zagadnienia w kategoriach liczb podobieństwa w celu uniknięcia sytuacji, w której macierz współczynników układu jest z punktu widzenia precyzji obliczeń (epsilon maszynowy) macierzą osobliwą.

- **W przypadku uwzględnienia zjawisk nieliniowych wyznaczenie rozwiązania zagadnienia wymaga rozwiązania stosownego nieliniowego układu równań.** W przypadku nieliniowych związków konstytutywnych nieliniowe są równania różniczkowe rządzące zagadnieniem. W przypadku biliniowego związku konstytutywnego otrzymany układ równań jest układem liniowym, którego rozwiązania ogólne można wyznaczyć w standardowy sposób, niemniej do wyrażenia stałych całkowania przez parametry zadania konieczne jest rozwiązanie nieliniowego układu równań algebraicznych, danego warunkami brzegowymi i warunkami zszycia.

Na kolejnych stronach przedstawione zostaną w formie wykresów teoretyczne przewidywania wybranych modeli dla charakterystycznych przypadków złączy jednozakładkowych. Liczba czynników istotnie wpływających na charakter rozkładu naprężenia styczego w skleinie jest bardzo duża. Czynniki geometryczne obejmują wymiary elementów łączonych i skleiny, długość obszaru klejenia i długość swobodnych elementów łączonych. Czynniki fizyczne natomiast to przede wszystkim własności mechaniczne materiałów, z których wykonane są wszystkie elementy złącza, jak również wielkość i charakter obciążenia zewnętrznego. Trudno byłoby choćby tylko zilustrować wpływ każdego z tych czynników, zaś szczegółowa analiza parametryczna ścisłych rozwiązań nawet dla najprostszych modeli okazuje się być niezwykle skomplikowana. Na zakres porównywanych przypadków nałożono zatem następujące ograniczenia:

- złącze jest symetryczne – w przypadku złączy niesymetrycznych zmienność rozkładu naprężenia styczego stanowi szerokie spektrum, zależne od stosunków wymiarów i sztywności elementów łączonych;
- obciążenie zewnętrzne stanowi dwójka przeciwnych sił leżących na jednej prostej; pomijany jest wpływ brzegowego momentu zginającego;
- z uwagi na powyższe założenie pomija się również pracę złącza poza obszarem klejenia.

W świetle powyższych założeń wydaje się, że kluczowymi czynnikami wpływającymi na pracę złącza będą:

- **stosunek sztywności elementów łączonych do sztywności skleiny** – rozpatrywane są dwa przypadki skrajne: sztywne elementy (blacha stalowa,  $h = 10$  mm) łączone podatną skleiną (gruba skleina  $t = 2$  mm, podatny klej poliuretanowy  $E_a = 12$  MPa) oraz podatne elementy (płaskowniki aluminiowe,  $h = 4$  mm) łączone sztywną skleiną (cienka skleina  $t = 0,5$  mm, sztywny klej epoksydowy  $E_a = 4500$  MPa);
- **stosunek grubości elementów łączonych do długości zakładu** – ponownie rozpatrywane są dwa przypadki skrajne: złącza długiego ( $L : h = 20$ ) oraz złącza krótkiego ( $L : h = 8$ ).

W kontekście długości zakładu warto zwrócić uwagę na to, że o ile w pierwszym przypadku elementy łączone są wystarczająco smukłe, żeby móc je opisywać

za pomocą modelu belki Bernoulliego–Eulera, o tyle w drugim przypadku przyjmuje się powszechnie, że jego zastosowanie nie jest zalecane. W związku z tym porównane zostaną modele stosujące różne podejścia do opisu deformacji giętej elementów łączonych. W ramach analizy porównawczej zestawione zostaną zatem wykresy opisujące rozkład naprężenia stycznego i naprężenia odrywającego w skleinie dla czterech przypadków, do opisu których wykorzystano parametry zestawione w tabeli 5.

Tabela 5

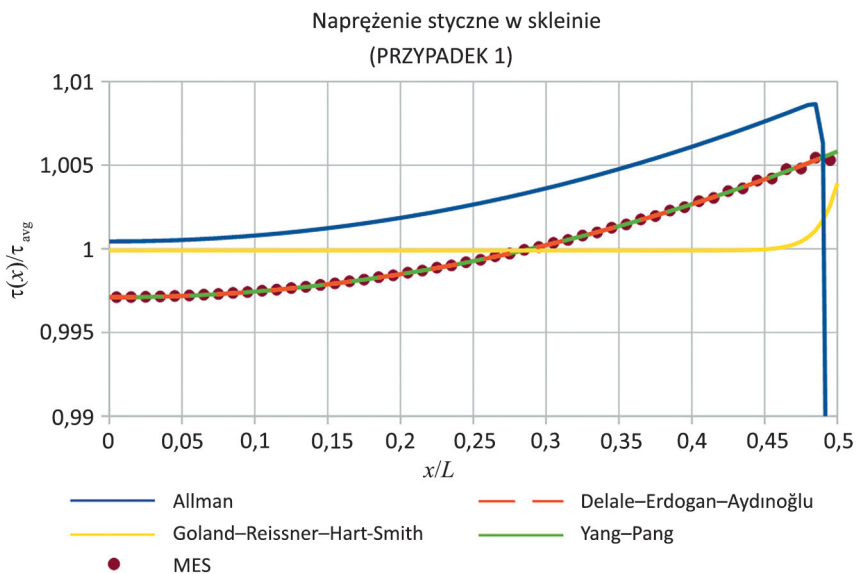
Charakterystyka porównywanych przypadków obliczeniowych

	<b>PRZYPADK 1</b> sztywne elementy podatna skleina długie złącze	<b>PRZYPADK 2</b> podatne elementy sztywna skleina długie złącze	<b>PRZYPADK 3</b> sztywne elementy podatna skleina krótkie złącze	<b>PRZYPADK 4</b> podatne elementy sztywna skleina krótkie złącze
$E$ [GPa]	210	70	210	70
$G$ [GPa]	80,8	26,3	80,8	26,3
$\nu$	0,30	0,33	0,30	0,33
$E_a$ [GPa]	0,012	4,5	0,012	4,5
$G_a$ [GPa]	0,004	6,76	0,004	6,76
$\nu_a$	0,48	0,48	0,48	0,48
$h$ [mm]	10	4	10	4
$t$ [mm]	2	0,5	2	0,5
$L$ [mm]	200	80	80	32

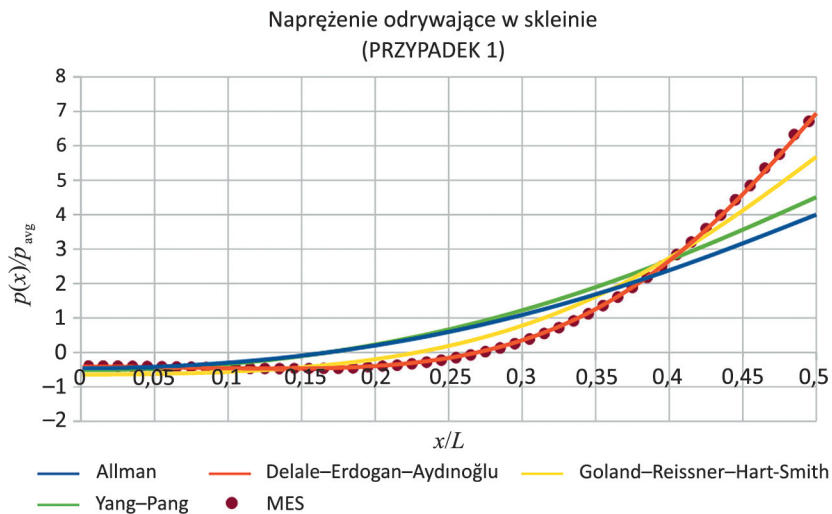
Celem tego podrozdziału nie jest porównanie wszystkich modeli, a jedynie wskazanie ewentualnych różnic między istotnie różniącymi się od siebie podejściami analitycznymi. Z tego względu zdecydowano się na porównanie jedynie propozycji wymienionych poniżej:

- **model Golanda–Reissnera–Hart-Smitha (GRHS)**: lokalne sformułowanie naprężeniowe, model belki Bernoulliego–Eulera,
- **model Delale–Erdogana–Aydinoğlu (DEA)**: lokalne sformułowanie naprężeniowe, model belki Timoshenki–Ehrenfesta, uwzględnienie podłużnej podatności skleiny,
- **model Yanga–Panga (YP)**: lokalne sformułowanie przemieszczeniowe, model belki Timoshenki–Ehrenfesta,
- **model Allmana (ALL)**: model dwuwymiarowy, sformułowanie globalne (wariacyjne).

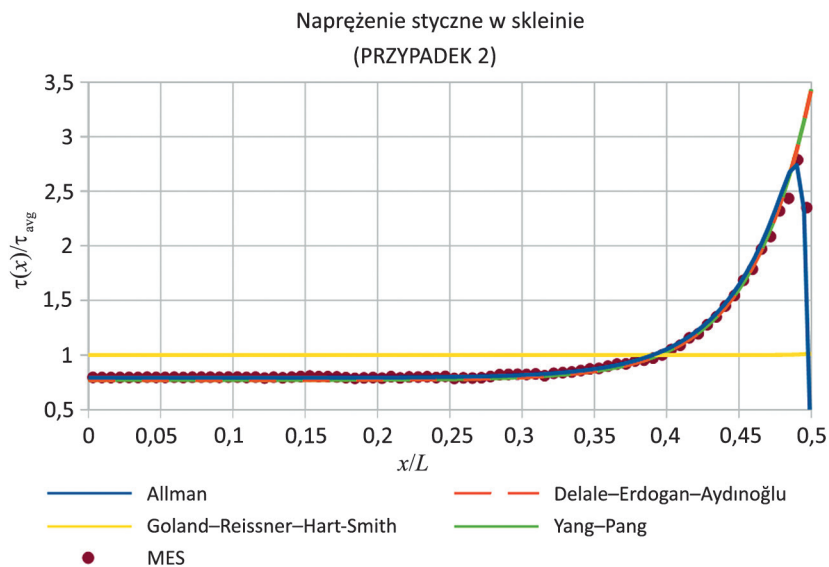
Przewidywania teoretyczne, uzyskane za pomocą wyżej wymienionych modeli, porównane są ponadto w rezultatach symulacji numerycznych przeprowadzonych z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych w programie Abaqus CAE. Założono przy tym – zarówno w modelach analitycznych, jak i w modelu numerycznym – że złącze pracuje w **płaskim stanie odkształcenia**.



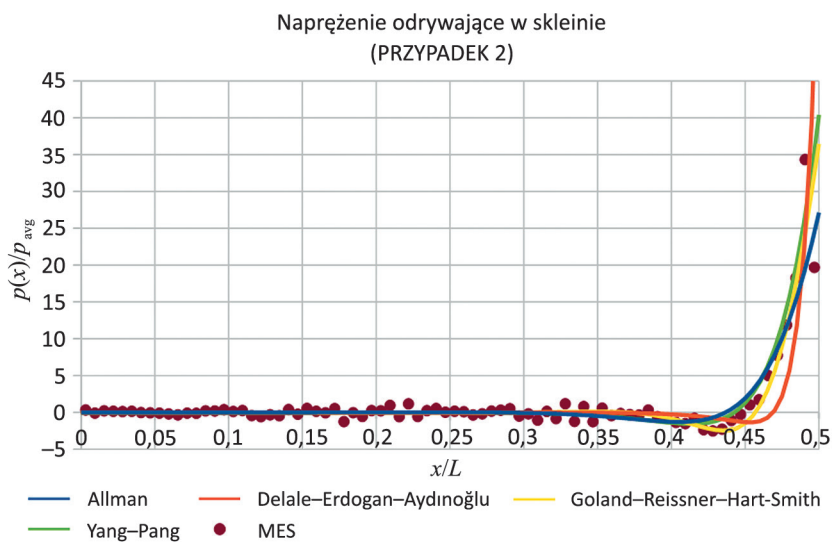
Rys. 56. Rozkład naprężenia stycznego w skleinie – PRZYPADEK 1: sztywne elementy, podatna skleina, długie złącze



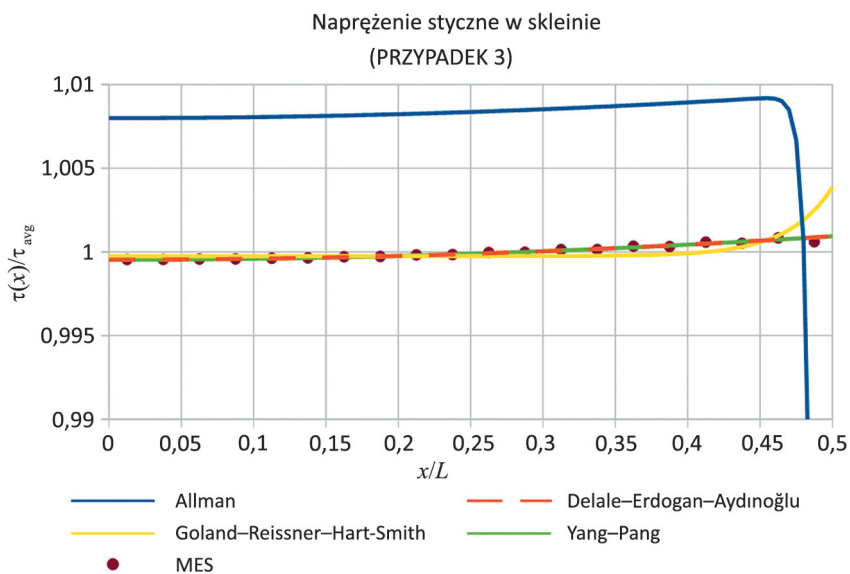
Rys. 57. Rozkład naprężenia odrywającego w skleinie – PRZYPADEK 1: sztywne elementy, podatna skleina, długie złącze



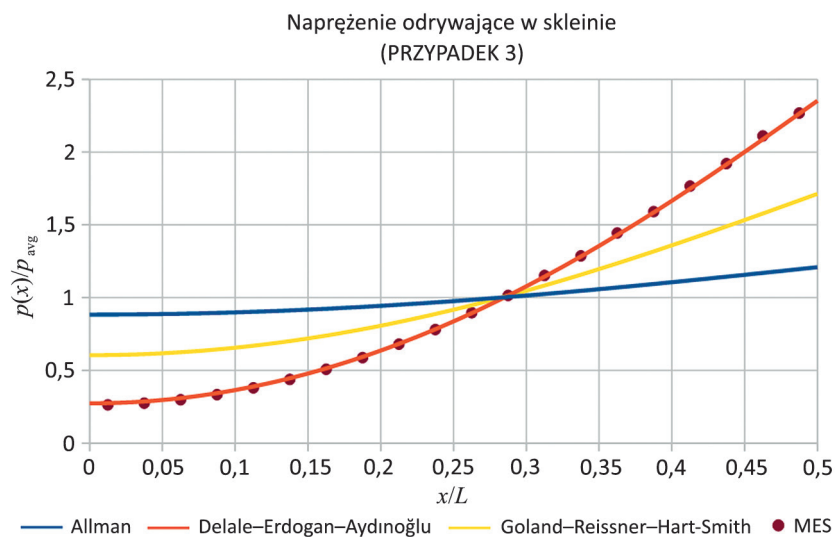
Rys. 58. Rozkład napężenia stycznego w skleinie – PRZYPADK 2: podatne elementy, sztywna skleina, długie złącze



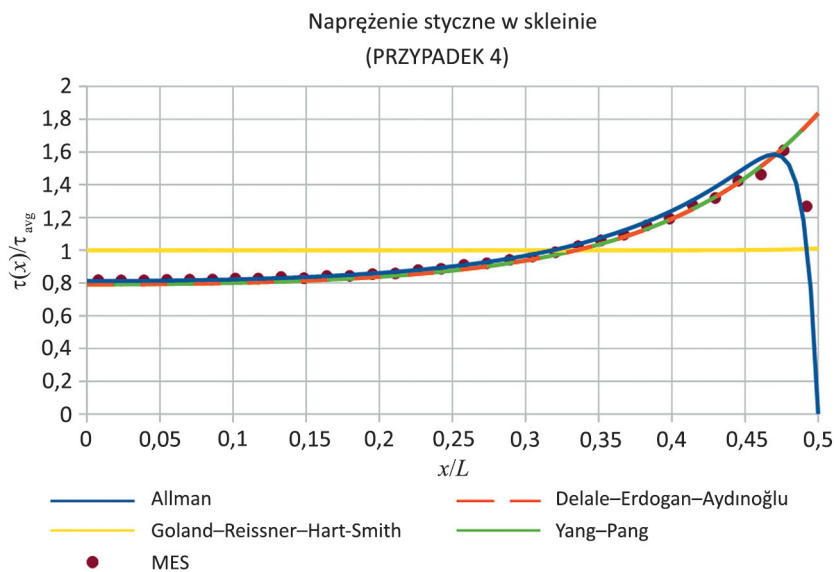
Rys. 59. Rozkład napężenia odrywającego w skleinie – PRZYPADK 2: podatne elementy, sztywna skleina, długie złącze



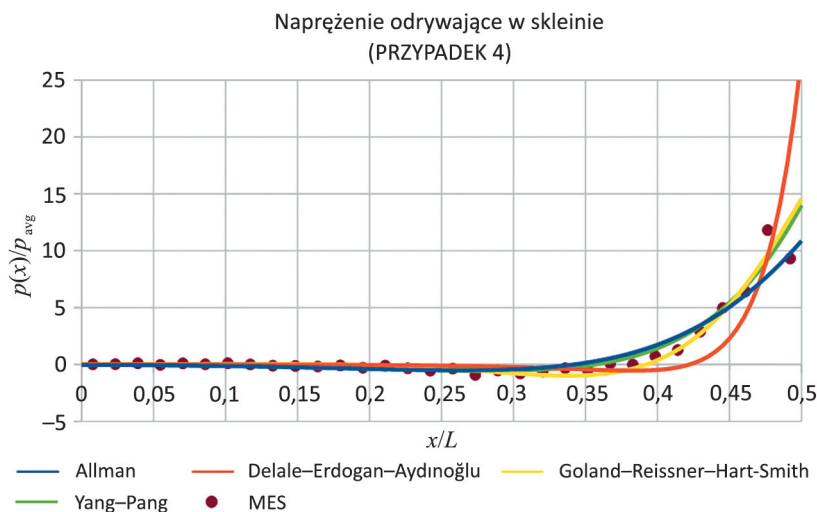
Rys. 60. Rozkład napężenia stycznego w skleinie – PRZYPADEK 3: sztywne elementy, podatna skleina, krótkie złącze



Rys. 61. Rozkład napężenia odrywającego w skleinie – PRZYPADEK 3: sztywne elementy, podatna skleina, krótkie złącze. Brak wykresu dla modelu Yanga-Panga wyjaśniony w tekście



Rys. 62. Rozkład napężenia stycznego w skleinie – PRZYPADEK 4: podatne elementy, sztywna skleina, krótkie złącze



Rys. 63. Rozkład napężenia odrywającego w skleinie – PRZYPADEK 4: podatne elementy, sztywna skleina, krótkie złącze

Przeanalizowano również niesymetryczny przypadek połączenia taśmy wzmacniającej zbrojonej włóknem węglowym z cegłą pełną za pomocą skleiny polimerowej. Przyjęto właściwości taśmy wzmacniającej Sika® CarboDur® typu S512 zgodnie z kartą producenta: moduł Younga wzdłuż włókien  $E_{1,x} = 165$  GPa, grubość  $h_1 = 1,2$  mm, szerokość  $b = 50$  mm. Taśma tego typu jest materiałem anizotropowym – pozostałe stałe sprężyste nie są podawane przez producenta. W pracy (Hara i in. 2010) badano własności laminatów polimerowych zbrojonych włóknem węglowym – choć jest to odmienny materiał od założonego, stosunki stałych sprężystych w analizowanym modelu przyjęto na podstawie przedstawionych tam wyników. Przyjęto  $E_{1,y} = 10$  GPa,  $G_1 = 4,5$  GPa,  $\nu = 0,3$ .

Rozpatruje się połączenie taśmy do cegły San Marco o wymiarach  $250 \times 120 \times 55$  mm. Własności mechaniczne przyjęto za (Zajac 2018):  $E_2 = 5,7$  GPa. Współczynnik Poissona dla cegły pełnej przyjęto za (Nichols i Totoev 1997) jako równy  $\nu_2 = 0,22$ .

Przeanalizowano dwa rodzaje materiału skleiny, która każdorazowo miała grubość  $t = 1$  mm. Założono przy tym, że skleina jest praktycznie nieściśliwa, skąd  $\nu_a = 0,48$ . W pierwszym przypadku skleina wykonana została z poliuretanu Sika® PS, dla którego moduł Younga  $E_a = 18$  MPa, a w drugim przypadku przyjęto skleinę na bazie żywicy epoksydowej Sikadur® 330 o module Younga  $E_a = 4500$  MPa.

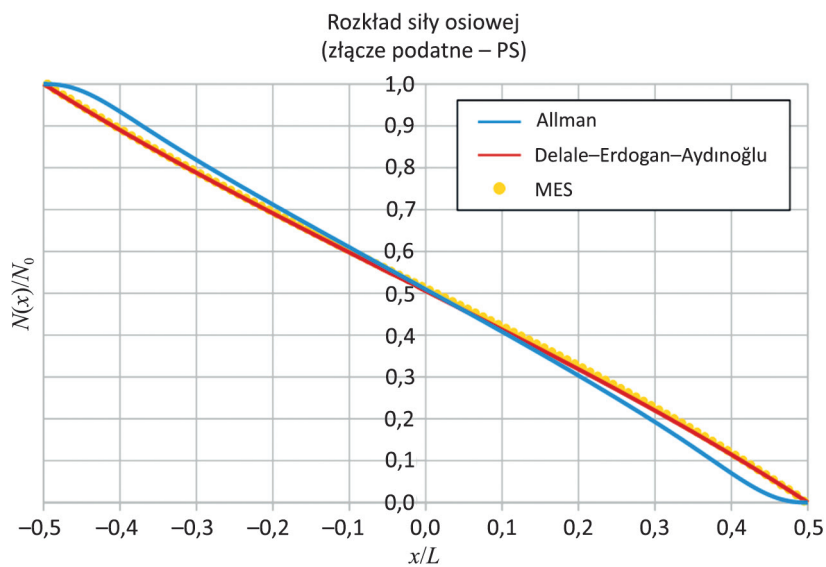
Długość zakładu wynosi  $L = 200$  mm. Założono, że cegła jest utwierdzona, zaś taśma obciążona jest wyłącznie siłą osiową.

Porównano ze sobą wyniki przewidywań teoretycznych dla płaskiego stanu odkształcenia dla dwóch różniących się istotnie modeli analitycznych:

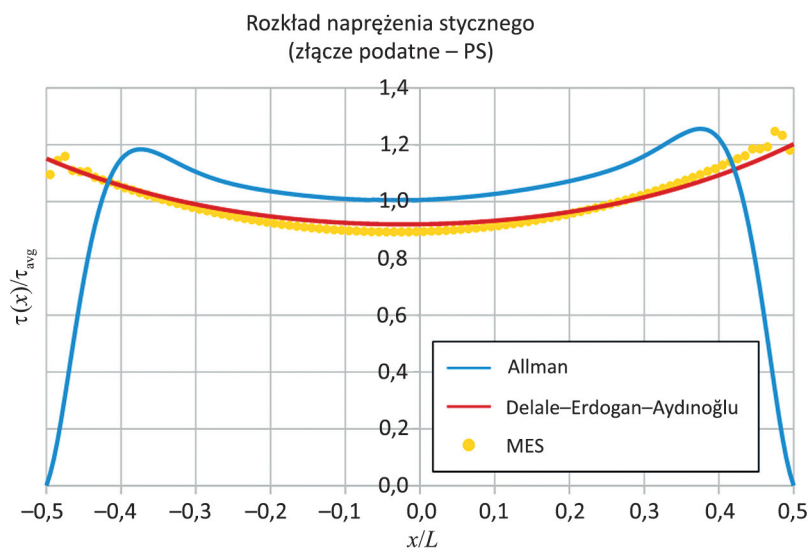
- **model Delale–Erdogana–Aydinoğlu**: lokalne sformułowanie naprężeniowe, model belki Timoshenki–Ehrenfesta, uwzględnienie podłużnej podatności skleiny;
- **model Allmana**: model dwuwymiarowy, sformułowanie globalne (wariacyjne).

Uzyskane rezultaty porównano z wynikami symulacji MES dla modelu trójwymiarowego. Na wykresach umieszczonych na rysunkach 64–69 zestawiono rozkłady siły osiowej w taśmie oraz naprężenia stycznego w skleinie. Niezerowe brzegowe wartości naprężenia stycznego dla wyników MES wynikają z faktu, że na wykresach zaprezentowano wartości naprężenia w środku ciężkości elementu skończonego, nie zaś wartości węzłowe. Wykresy rozkładów naprężenia odrywającego nie pokazują ekstremalnych wartości brzegowych w celu czytelniejszego porównania tych rozkładów.

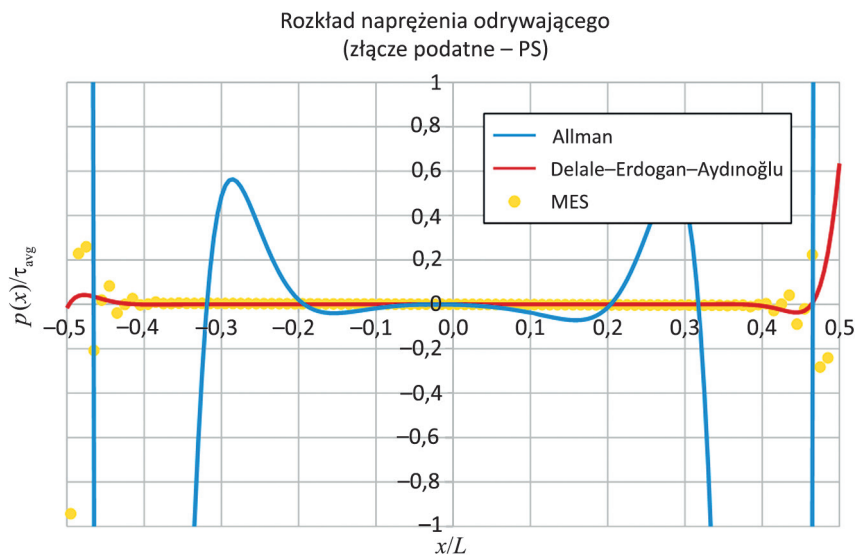




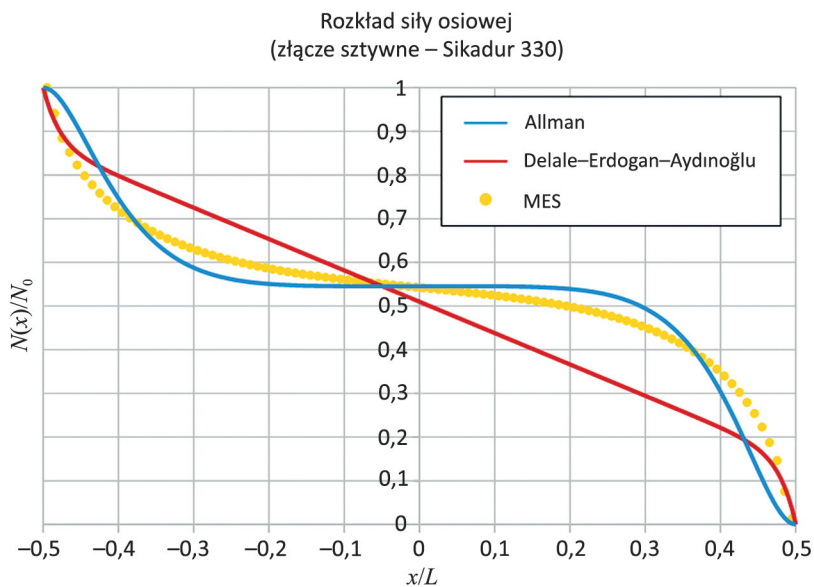
Rys. 64. Porównanie teoretycznych przewidywań rozkładu siły osiowej w taśmie dla przypadku złącza podatnego



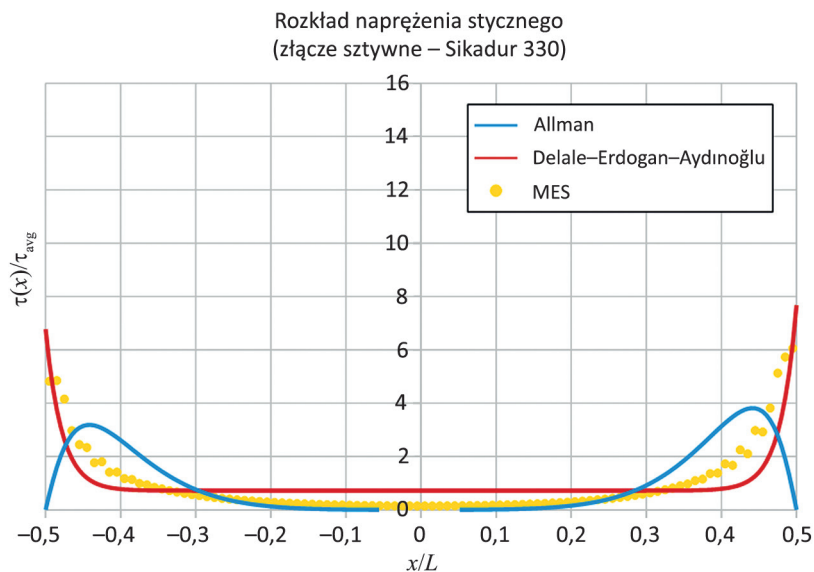
Rys. 65. Porównanie teoretycznych przewidywań rozkładu naprężenia stycznego w sklepie dla przypadku złącza podatnego



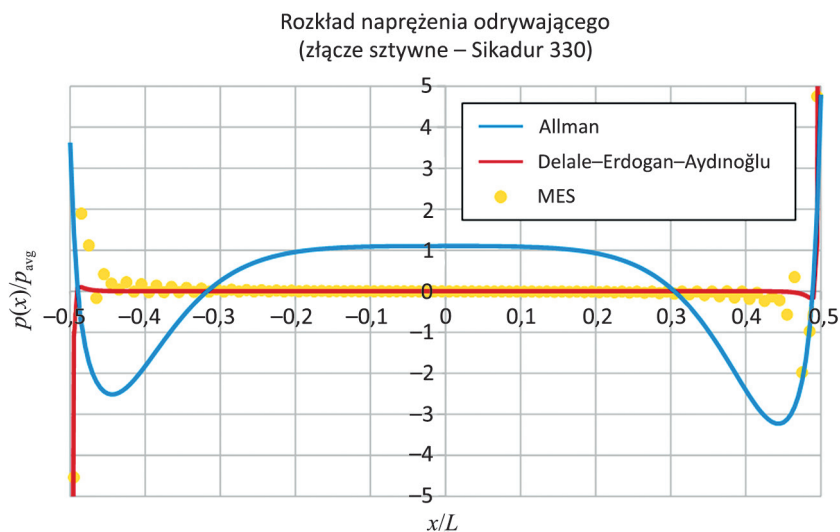
Rys. 66. Porównanie teoretycznych przewidywań rozkładu naprężenia odrywającego w skleinie dla przypadku złącza podatnego



Rys. 67. Porównanie teoretycznych przewidywań rozkładu siły osiowej w taśmie dla przypadku złącza sztywnego



Rys. 68. Porównanie teoretycznych przewidywań rozkładu naprężenia stycznego w sklepinie dla przypadku złącza sztywnego

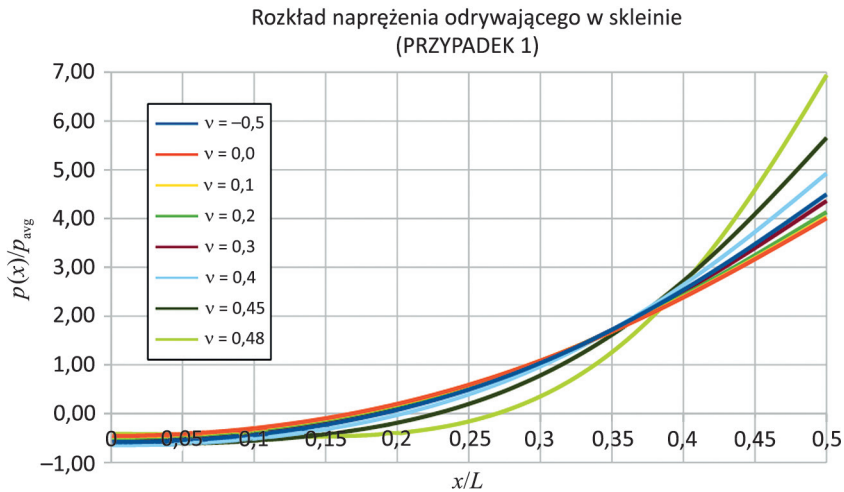


Rys. 69. Porównanie teoretycznych przewidywań rozkładu naprężenia odrywającego w sklepinie dla przypadku złącza sztywnego

Na podstawie uzyskanych rezultatów można sformułować następujące wnioski:

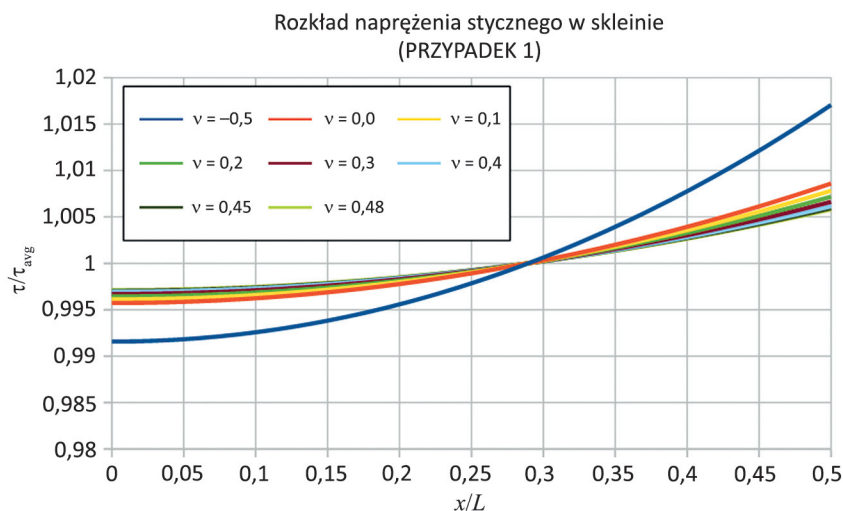
- W przypadku **złączy symetrycznych** rozkłady **naprężenia stycznego**, uzyskane za pomocą modeli DEA oraz YP, są w zasadzie identyczne i wykazują najlepszą zgodność z numerycznym rozwiązaniem MES.

- W przypadku **sklein podatnych w złączach symetrycznych** różnice w przewidywanych wielkościach naprężenia stycznego są niewielkie i nie przekraczają 1%. Najwyższe oszacowania daje tutaj model Allmana, co wynika z faktu, że uwzględnia on jednorodny warunek brzegowy na brzegu swobodnym skleiny – konieczność spełnienia globalnego warunku równowagi i spadek naprężenia do wartości zerowej, przy jednoczesnej ograniczonej wielkości gradientu naprężenia (związanej z matematyczną strukturą rozwiązania, wynikającą z założeń modelu), skutkuje zawyżeniem wielkości naprężenia w środkowej części złącza. W przypadku **sklein sztywnych** przewidywania modeli DEA oraz YP są zbliżone do rezultatów uzyskiwanych z wykorzystaniem modelu Allmana, przy czym ten ostatni wykazuje stosunkowo lepszą zgodność z wynikami numerycznej analizy MES, co wynika właśnie ze spełnienia warunku jednorodnego brzegowego na brzegu swobodnym. Modele DEA i YP, które ignorują ten warunek, przeszacowują wielkość naprężenia stycznego na końcu złącza.
- Jeśli chodzi o rozkłady **naprężenia odrywającego w złączach symetrycznych**, to najlepszą zgodność z wynikami MES wykazuje model DEA. Jest to spowodowane faktem, że model ten jako jedyny spośród porównywanych modeli uwzględnia odkształcalność podłużną skleiny, czyli – w konsekwencji – wpływ podłużnego odkształcenia liniowego na wielkość naprężenia odrywającego. Efekt ten ignorowany jest w pozostałych modelach, co skutkuje niedoszacowaniem wielkości naprężenia odrywającego, zwłaszcza w przypadku, gdy materiał skleiny wykazuje dużą sztywność objętościową.



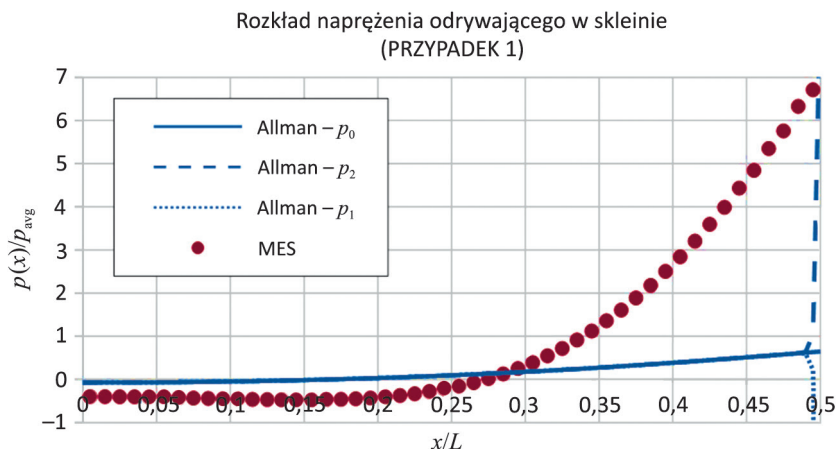
Rys. 70. Rozkład naprężenia odrywającego na długości skleiny wg modelu Delale–Erdogana–Aydinoğlu w zależności od wartości współczynnika Poissona materiału skleiny.  
PRZYPADEK 1: sztywne elementy, podatna skleina, długie złącze

W modelu DEA obserwuje się duży wpływ wartości współczynnika Poissona na oszacowanie rozkładu naprężenia odrywającego jedynie dla wartości  $\nu$  bliskich 0,5 (por. rys. 70). Zasadniczo, wraz z wzrostem wartości  $\nu$  maksymalne naprężenie odrywające zwiększa swoją wartość. Zależność ta nie obowiązuje jednak dla materiałów auksetycznych (o ujemnym współczynniku Poissona), co wynika z ich dużej sztywności postaciowej, skutkującej zwiększeniem naprężeń stycznych, które z kolei (z uwagi na równania równowagi) pociąga za sobą przyrost naprężeń odrywających (por. rys. 71).



Rys. 71. Rozkład naprężenia stycznego na długości skleiny wg modelu Delale–Erdogana–Aydmoglu w zależności od wartości współczynnika Poissona materiału skleiny.  
PRZYPADEK 1: sztywne elementy, podatna skleina, długie złącze

Modele GRHS oraz YP dostarczają podobnych oszacowań. Rozkład naprężenia odrywającego dla modelu YP w przypadku 3 nie został przedstawiony, ponieważ wynik obciążony był trudnym do zidentyfikowania i wyeliminowania błędem, być może natury numerycznej. Model Allmana zaś w każdym przypadku oszacowuje wielkość naprężenia odrywającego na końcu złącza z niedomiarem – trzeba jednak zwrócić uwagę, że na wykresach dla modelu Allmana przedstawiony jest rozkład naprężenia  $p_0$ , czyli średniego (w przekroju poprzecznym) naprężenia odrywającego w skleinie. O ile w środkowej części złącza rozkład naprężenia na grubości skleiny jest w przybliżeniu jednorodny, o tyle przy brzegach naprężenia  $p_1$  i  $p_2$  istotnie różnią się od naprężenia średniego (por. rys. 72).



Rys. 72. Rozkład naprężenia odrywającego na długości skleiny i na jej grubości wg modelu Allmana – porównanie z wynikami analizy MES. PRZYPADK 1: sztywne elementy, podatna skleina, długie złącze

- W przypadku **złączy niesymetrycznych** ponownie daje się zauważyć dość dobrą zgodność przewidywań modelu DEA oraz wyników symulacji MES, zwłaszcza w przypadku skleiny podatnej. W przypadku skleiny sztywnej model analityczny niezbyt poprawnie odtwarza rozkład siły osiowej oraz przeszacowuje wartości naprężenia stycznego zarówno przy brzegu, jak i w środkowej części złącza. Podobnie jak w przypadku złączy symetrycznych model Allmana oszacowuje brzegowe wartości naprężenia stycznego z niedomiarem, wykazuje jednak znacznie lepszą zgodność rozkładu siły osiowej w przypadku skleiny sztywnej niż model DEA.

## 8. Liniowo-sprężyste modele wielowarstwowych belek kompozytowych

W ciągu minionych dekad bardzo intensywnie rozwijano zagadnienia wytwarzania, modelowania i zastosowania różnorodnych materiałów kompozytowych. Wykorzystanie odmiennych cech mechanicznych różnych materiałów w jednym elemencie stwarza ogromne możliwości optymalnego kształtowania kompozytów.

Przedmiotem rozważań niniejszego rozdziału są wielowarstwowe belki kompozytowe. Jeśli chodzi o modelowanie analityczne elementów tego typu, wyróżnia się dwie główne grupy modeli:

- **modele pojedynczej warstwy równoważnej** (*Equivalent Single Layer, ESL*), w ramach których wszystkim warstwom kompozytu przypisuje się wspólne przemieszczenie (Abrate i Di Sciuva 2017),
- **dyskretne modele warstwowe** (*Discrete Layerwise, DLW*) – każda z warstw opisywana jest odrębnym zestawem parametrów określających jej deformację, przy czym osobno określana jest interakcja pomiędzy sąsiednimi warstwami (Abrate i Di Sciuva 2018; Li 2021),
- szczególną klasę modeli dyskretnych stanowią tzw. **modele zygzakowe**, w których liczba zmiennych stanu jest zmniejszona przez wprowadzenie wspólnej dla całego przekroju funkcji określającej rozkład przemieszczeń (Tessler i in. 2010).

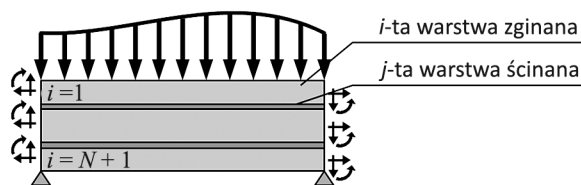
W naszych rozważaniach pomijamy zatem wszelkie tworzywa gradientowe, jak również laminaty rozumiane jako kompozyty, w których układana warstwami faza rozproszona (zbrojenie) zanurzona jest w matrycy. W niniejszym rozdziale szczegółowo omówione zostaną **wielowarstwowe belki kompozytowe, w których sąsiednie warstwy łączone są warstwą skleiny**. W przypadku kompozytów wielowarstwowych łączenie ma z reguły postać warstwy o grubości znacznie mniejszej niż grubości sąsiednich łączonych warstw. W uproszczeniu belki takie można uważać za **układ naprzemiennie następujących po sobie warstw zginanych (panele) i ścinanych** (skleiny). Uproszczenie to można stosować jedynie przy pewnych założeniach, podobnych do tych, które omówione zostały w rozdziale 2. Zakładamy, że sztywność postaciowa skleiny jest istotnie mniejsza od sztywności podłużnej. Grubość skleiny musi być wystarczająco mała, aby stan naprężenia w skleinie był zbliżony do stanu prostego ścinania oraz aby możliwa do pominięcia była niejednorodność rozkładu naprężenia stycznego w kierunku poprzecznym do płaszczyzny skleiny. Zakłada się, że warstwy zginane spełniają założenia modeli (wymienionych w rozdziale 7), którymi będą opisywane, przede wszystkim w zakresie smukłości.

Szczególną klasę modeli analitycznych stanowią **modele liniowe** – w przypadku takich modeli dopuszczalne jest stosowanie zasady **superpozycji**. Ma to wyjątkowe znaczenie w przypadku wykorzystania standardowych procedur projektowania z uwagi na określone normami kombinacje obciążeń – zastosowanie modeli liniowych pozwala na niezależną analizę przypadków prostych, natomiast rozwiązania odpowiadające ich kombinacjom, zgodnie z zasadą superpozycji, wyznacza się jako odpowiednie kombinacje rozwiązań uzyskanych dla przypadków prostych. Modele liniowe charakteryzują się jednocześnie prostotą, która w określonych sytuacjach **umożliwia znalezienie analitycznego rozwiązania** zagadnienia teorii sprężystości w postaci zamkniętego wzoru.

Prezentowany model belki wielowarstwowej jest modelem liniowym, dla którego możliwe jest znalezienie zamkniętych analitycznych wzorów, określających ekstremalne wartości naprężenia stycznego, naprężenia normalnego czy ugięcia – wzory tego rodzaju mogą dostarczać użytecznych oszacowań zarówno na potrzeby projektowania, jak i analizy pracy konstrukcji, zwłaszcza zaś mogą służyć za podstawę formułowania zaleceń normowych.

## 8.1. Propozycja liniowego modelu belki wielowarstwowej

W pracy (Szeptyński 2020b) zaproponowano i omówiono liniowy model belki wielowarstwowej, złożonej z **ułożonych naprzemiennie  $N$  warstw ścinanych oraz  $N + 1$  warstw zginanych**. Zakłada się, że warstwy ścinane spełniają warunki, wobec których **dominującym stanem mechanicznym w warstwie ścinanej jest proste ścinanie**. Warstwy zginane modelowane są liniowym modelem belki Bernoulliego–Eulera. Schemat układu warstw przedstawiony jest na rysunku 73. Jest to model zbliżony do wczesniej propozycji z zakresu modelowania konstrukcji wykonanych z drewna klejonego krzyżowo, przedstawionej m.in. w pracy (Schickhofer 2013). W świetle przytoczonych powyżej klasyfikacji model ten jest swego rodzaju rozwiązaniem pośrednim między modelami ESL a DLW – **każda z warstw może bowiem podlegać odmiennym przemieszczeniom podłużnym, zakłada się jednak, że wszystkie warstwy w danym przekroju poprzecznym podlegają takiemu samemu przemieszczeniu poprzecznemu (ugięciu)**.

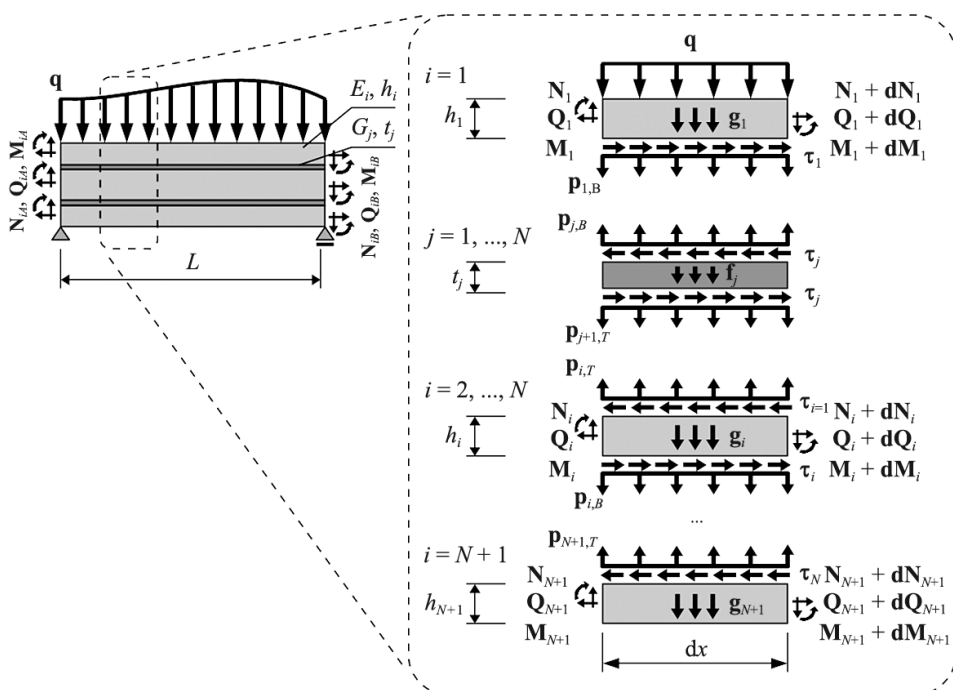


Rys. 73. Schemat wielowarstwowej belki kompozytowej



W ogólności każda z warstw może mieć odmienną geometrię oraz odmiennie własności mechaniczne. Na potrzeby poniższego wyprowadzenia zakłada się, że wszystkie warstwy mają tę samą szerokość  $b$ . W przypadku belek, których kolejne warstwy różnią się szerokością, konieczne jest uwzględnienie tego faktu przy zapisywaniu lokalnych równań równowagi przez przemnożenie sił wewnętrznych przez odpowiadającą im szerokość warstwy. Należy przy tym pamiętać, że omawiany model może służyć jedynie do przybliżonego opisu belek z warstwami o różnych szerokościach, ponieważ niezgodność szerokości warstw sąsiednich skutkować będzie niejednorodnością rozkładu naprężeń, która nie jest uwzględniana w modelu. Ponadto, rozpatrywanie warstw o zmiennej szerokości formalnie wymagałoby uwzględnienia obecności niejednorodnego pola naprężeń normalnych i odkształceń liniowych prostopadłych do płaszczyzny zagadnienia.

Zapiszmy równania równowagi dla rozpatrywanego modelu. Równowaga sił wewnętrznych przyłożonych do poszczególnych warstw zilustrowana jest na rysunku 74.



Rys. 74. Równowaga sił wewnętrznych w poszczególnych warstwach belki wielowarstwowej

- równowaga sił podłużnych w warstwie zginanej:

$$\frac{dN_1}{dx} + b\tau_1 = 0$$

$$\frac{dN_i}{dx} - b\tau_{(i-1)} + b\tau_i = 0, \quad i = 2, \dots, N$$

$$\frac{dN_{(N+1)}}{dx} - b\tau_{N,T} = 0$$

- równowaga sił poprzecznych w warstwie zginanej:

$$\frac{dQ_1}{dx} + qb + bp_{1,B} + bh_1g_1 = 0$$

$$\frac{dQ_i}{dx} - bp_{i,T} + bp_{i,B} + bh_ig_i = 0, \quad i = 2, \dots, N$$

$$\frac{dQ_{(N+1)}}{dx} - bp_{(N+1),T} + bh_{(N+1)}g_{(N+1)} = 0$$

- równowaga momentów w warstwie zginanej:

$$\frac{dM_1}{dx} - Q_1 + \tau_1 \frac{bh_1}{2} = 0$$

$$\frac{dM_i}{dx} - Q_i + (\tau_{(i-1)} + \tau_i) \frac{bh_i}{2} = 0, \quad i = 2, \dots, N$$

$$\frac{dM_{(N+1)}}{dx} - Q_{(N+1)} + \tau_N \frac{bh_{(N+1)}}{2} = 0$$

- równowaga sił poprzecznych w warstwie ścinanej:

$$b(p_{i,B} - p_{(i+1),T}) = bt_i \frac{d\tau_i}{dx} + bt_i f_i$$

gdzie:

- $b$  – szerokość belki [m],
- $h_i$  – grubość  $i$ -tej warstwy zginanej [m],
- $t_j$  – grubość  $j$ -tej warstwy ścinanej [m],
- $N_i$  – siła podłużna w  $i$ -tej warstwie zginanej [N],
- $Q_i$  – siła poprzeczna w  $i$ -tej warstwie zginanej [N],
- $M_i$  – moment zginający w  $i$ -tej warstwie zginanej [Nm],
- $\tau_j$  – naprężenie styczne w  $j$ -tej warstwie ścinanej [N/m<sup>2</sup>],
- $g_i$  – siły masowe w  $i$ -tej warstwie zginanej [N/m<sup>3</sup>],
- $f_j$  – siły masowe w  $j$ -tej warstwie ścinanej [N/m<sup>3</sup>],

$q$  – poprzeczne obciążenie powierzchniowe przyłożone do wierzchniej warstwy zginanej  $[\text{N}/\text{m}^2]$ .

Związki między siłami wewnętrznymi a przemieszczeniami w warstwach zginanych wyznaczamy na podstawie liniowych związków kinematycznych oraz liniowych związków konstytutywnych dla belki Bernoulliego–Eulera:

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{N_i}{E_i A_i}, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_i}{E_i I_i} \quad (8.1)$$

gdzie:

- $A_i = bh_i$  – pole przekroju poprzecznego  $i$ -tej warstwy zginanej  $[\text{m}^2]$ ,
- $I_i = \frac{1}{12}bh_i^3$  – moment bezwładności przekroju  $i$ -tej warstwy zginanej  $[\text{m}^4]$ ,
- $E_i$  – moduł Younga  $i$ -tej warstwy zginanej  $[\text{N}/\text{m}^2]$ ,
- $u_i(x)$  – przemieszczenie podłużne osi  $i$ -tej warstwy zginanej  $[\text{m}]$ ,
- $w(x)$  – wspólne ugięcie wszystkich warstw zginanych  $[\text{m}]$ .

Po podstawieniu powyższych związków do równań równowagi sił podłużnych otrzymamy:

$$E_1 A_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + b\tau_1 = 0 \quad (8.2)$$

$$E_i A_i \frac{d^2 u_i}{dx^2} - b\tau_{(i-1)} + b\tau_i = 0, \quad i = 2, \dots, N \quad (8.3)$$

$$E_{(N+1)} A_{(N+1)} \frac{d^2 u_{(N+1)}}{dx^2} - b\tau_N = 0 \quad (8.4)$$

Równania równowagi momentów należy zróżniczkować, a występujące w otrzymanym wyniku pochodne sił poprzecznych należy wyrazić za pomocą równań równowagi sił poprzecznych. Tak przekształcone równania należy następnie dodać do siebie stronami. Po uwzględnieniu w otrzymanym wyniku związków konstytutywnych (8.1) otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{N+1} [E_k I_k] \frac{d^4 w}{dx^4} = qb + b \sum_{k=1}^{N+1} [h_k g_k] + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^N \left[ (h_i + h_{(i+1)}) \frac{d\tau_i}{dx} \right] + b \sum_{i=1}^N [p_{i,B} - p_{(i+1),T}] \quad (8.5)$$

Naprężenia odrywające można wyeliminować z powyższego równania, wykorzystując równanie równowagi sił poprzecznych w warstwie ścinanej:

$$\sum_{k=1}^{N+1} [E_k I_k] \frac{d^4 w}{dx^4} = qb + b \sum_{k=1}^{N+1} [h_k g_k] + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^N \left[ (h_i + h_{(i+1)}) \frac{d\tau_i}{dx} \right] + b \sum_{i=1}^N \left[ t_i \frac{d\tau_i}{dx} + t_i f_i \right] \quad (8.6)$$

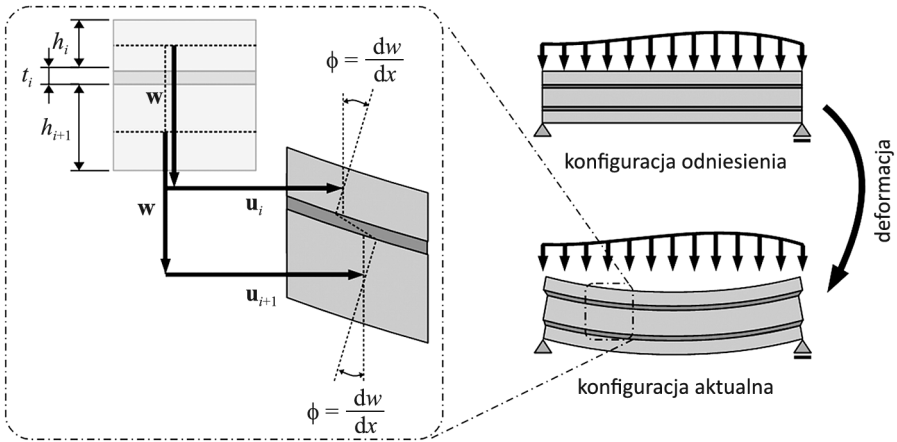
Korzystając z założenia, że warstwa ścinana znajduje się w stanie prostego ścinania, naprężenie styczne w takiej warstwie można wyznaczyć z liniowego związku konstytutywnego:

$$\tau_i = G_i \gamma_i = G_i \frac{\Delta u_i}{t_i} = \frac{G_i}{t_i} (u_{(i+1),T} - u_{i,B}) \quad (8.7)$$

gdzie:  $G_j$  to moduł Kirchhoffa  $j$ -tej warstwy ścinanej, zaś przemieszczenie górnych włókien dolnej warstwy zginanej  $u_{(i+1),T}$  oraz przemieszczenie dolnych włókien górnej warstwy zginanej  $u_{i,B}$  wyznaczamy ze związków kinematycznych modelu Bernoulliego–Eulera (por. rys. 75):

$$u_{i,B} = u_i - \frac{h_i}{2} \frac{dw}{dx} \quad (8.8)$$

$$u_{(i+1),T} = u_{(i+1)} + \frac{h_{(i+1)}}{2} \frac{dw}{dx} \quad (8.9)$$



Rys. 75. Kinematyka warstwy ścinanej

Po podstawieniu powyższych zależności do równań (9.2)–(9.4) i (9.6) oraz po zastosowaniu odpowiednich przekształceń upraszczających otrzymujemy **równania rządzące zagadnieniem deformacji belki wielowarstwowej**:

$$E_1 A_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{b}{t_1} G_1 \left[ (u_2 - u_1) + \left( \frac{h_2}{2} + \frac{h_1}{2} \right) \frac{dw}{dx} \right] = 0 \quad (8.10)$$

$$E_i A_i \frac{d^2 u_i}{dx^2} - \frac{b}{t_{i-1}} G_{i-1} \left[ (u_i - u_{i-1}) + \left( \frac{h_i}{2} + \frac{h_{i-1}}{2} \right) \frac{dw}{dx} \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{b}{t_i} G_i \left[ (u_{i+1} - u_i) + \left( \frac{h_{i+1}}{2} + \frac{h_i}{2} \right) \frac{dw}{dx} \right] = 0, \quad i = 2, \dots, N \quad (8.11)$$

$$E_{(N+1)} A_{(N+1)} \frac{d^2 u_{(N+1)}}{dx^2} - \frac{b}{t_N} G_N \left[ (u_{N+1} - u_N) + \left( \frac{h_{N+1}}{2} + \frac{h_N}{2} \right) \frac{dw}{dx} \right] = 0 \quad (8.12)$$

$$\sum_{k=1}^{N+1} [E_k I_k] \frac{d^4 w}{dx^4} = qb + b \sum_{k=1}^{N+1} [h_k g_k] + b \sum_{i=1}^N [t_i f_i] + \dots$$

$$\dots + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \left( h_i + h_{(i+1)} + 2t_i \right) \frac{G_i}{t_i} \left[ \left( \frac{du_{(i+1)}}{dx} - \frac{du_i}{dx} \right) + \left( \frac{h_i}{2} + \frac{h_{(i+1)}}{2} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \right] \quad (8.13)$$

Są to równania wyprowadzone z równań równowagi poszczególnych warstw i wyrażone za pomocą przemieszczeń – można je zatem uważać za związki analogiczne do równań przemieszczeniowych Lamégo, obowiązujących w ogólnych sformułowaniach liniowej teorii sprężystości.

Znajomość przemieszczeń poszczególnych warstw w belce pozwala na wyznaczenie naprężeń w tych warstwach. **Naprężenie normalne w  $i$ -tej warstwie zginanej**, zgodnie z przyjętym modelem Bernoulliego–Eulera, wyznaczać będziemy jako:

$$\sigma_i(z_i) = E_i \left( \frac{du_i}{dx} - \frac{d^2 w}{dx^2} z_i \right) \quad (8.14)$$

gdzie:  $z_i$  oznacza odległość od środka ciężkości przekroju poprzecznego  $i$ -tej warstwy zginanej. **Naprężenie styczne w  $j$ -tej warstwie ścinanej**, zgodnie z zależnościami (8.7)–(8.9), wyraża się następująco:

$$\tau_j = \frac{G_j}{t_j} \left[ (u_{(j+1)} - u_j) + \left( \frac{h_j}{2} + \frac{h_{(j+1)}}{2} \right) \frac{dw}{dx} \right] \quad (8.15)$$

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na istotną cechę proponowanego modelu, zakładającą, że skleina ma skończoną grubość. Wyklucza się zatem stosowność tego modelu do opisu belek o bardzo małej grubości skleina. Sztywność na ścinanie skleiny, a w konsekwencji również wielkość naprężenia stycznego (dla zadanej deformacji), jest odwrotnie proporcjonalna do grubości skleiny, co oznacza, że w przypadku grubości skleiny dążącej do 0 wielkości te będą rozbieżne do nieskończoności, co pociągnie za sobą brak poprawności sformułowania zagadnienia teorii sprężystości. Dla belek, w których skleiny są „nieskończenie cienkie”, należy

pominąć odkształcalność spoiny i w ogóle obecność warstwy ścinanej w modelu oraz przyjmując odpowiednie warunki zgodności przemieszczenia i naprężenia na granicy między panelami zginanymi.

**Naprężenie odrywające przyłożone do  $i$ -tej warstwy zginanej** określają poniższe związki rekurencyjne:

$$p_{1,B} = \frac{1}{b} \left[ E_1 I_1 \frac{d^4 w}{dx^4} - qb - bh_1 g_1 - \frac{d\tau_1}{dx} \frac{bh_1}{2} \right] \quad (8.16)$$

$$p_{(i+1),T} = p_{i,B} - t_i \frac{d\tau_i}{dx} + t_i f_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (8.17)$$

$$p_{i,B} = \frac{1}{b} \left[ E_i I_i \frac{d^4 w}{dx^4} + bp_{i,T} - bh_i g_i - \left( \frac{d\tau_{(i-1)}}{dx} + \frac{d\tau_i}{dx} \right) \frac{bh_i}{2} \right], \quad i = 2, \dots, N \quad (8.18)$$

Formalnie można wyznaczać **naprężenia styczne w warstwach zginanych**, stosując uproszczone podejście Żurawskiego (Żurawski 1856), a mianowicie:

$$\tau_b(x, z) = \int_0^z \frac{\partial \sigma(x, z)}{\partial x} dz \quad (8.19)$$

gdzie współrzędna  $z$  wyznaczana jest od wierzchu najwyższej warstwy, zaś naprężenia normalne  $\sigma(x, z)$  w kolejnych warstwach zginanych obliczane są zgodnie z zależnością (8.14). Warto zauważyć, że tak obliczone naprężenie styczne na krawędzi warstwy zginanej będzie miało tę samą wartość, co naprężenie styczne w sąsiadującej warstwie zginanej, co zagwarantuje równowagę sił stycznych na powierzchni styku skleiny i elementu. Istotnie, jeśli zamienimy kolejność różniczkowania i całkowania we wzorze (8.19), a następnie scałkujemy naprężenia normalne aż do brzegu  $j$ -tej warstwy ścinanej, wtedy wartości całek oznaczonych będą – zgodnie z definicją – równe siłom osiowym w poszczególnych warstwach zginanych, odniesionym do szerokości przekroju:

$$\int_0^z \frac{\partial \sigma(x, z)}{\partial x} dz = \frac{d}{dx} \left[ \sum_{i=1}^{j \leq N} \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma(x, z_i) dz_i \right] = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{j \leq N} \frac{dN_i}{dx} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{j \leq N} E_i A_i \frac{d^2 u_i}{dx^2}$$

przy czym w ostatniej równości wykorzystaliśmy związek konstytutywny (8.1). Jeśli z kolei w tak otrzymanej sumie wykorzystamy równania (8.2)–(8.4), wtedy z łatwością przekonamy się, że rzeczywiście zachodzi:

$$\int_0^z \frac{\partial \sigma(x, z)}{\partial x} dz = -\tau_1 + \sum_{i=2}^{j \leq N} (\tau_{(i-1)} - \tau_i) = \tau_j$$

Należy pamiętać, że podejście Żurawskiego nie jest w sensie ścisłym rozwiązaniem zagadnienia zginania poprzecznego – odkształcenia wyznaczone przy założeniu hipotezy Bernoulliego oraz te obliczone z wykorzystaniem wzoru Żurawskiego nie spełniają bowiem warunków nierozdzielności (Love 1906; Piechnik 2007). Porównanie wyników uzyskanych za pomocą wzoru (8.19) z rezultatami analizy MES wskazuje jednak, że wzór ten stanowi wystarczająco dobre oszacowanie wielkości naprężeń stycznych w warstwach zginanych.

**Sily przekrojowe** wyznacza się według przedstawionych poniżej wzorów:

- **siła osiowa:**

$$N(x) = \sum_{i=1}^{N+1} N_i = \sum_{i=1}^{N+1} E_i A_i \frac{du_i}{dx} \quad (8.20)$$

- **siła poprzeczna:**

$$Q(x) = - \sum_{k=1}^{N+1} [E_k I_k] \frac{d^3 w}{dx^3} + b \sum_{i=1}^N \left[ G_i \left( \frac{h_i + h_{i+1}}{2t_i} + 1 \right) \left[ (u_{i+1} - u_i) + \left( \frac{h_{i+1}}{2} + \frac{h_i}{2} \right) \frac{dw}{dx} \right] \right] \quad (8.21)$$

- **moment zginający:**

$$M_P(x) = \sum_{i=1}^{N+1} \left[ E_i A_i (Z_{O_i} - Z_P) \frac{du_i}{dx} - E_i I_i \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \quad (8.22)$$

gdzie:  $Z_{O_i}$  oznacza współrzędną środka ciężkości  $i$ -tej warstwy zginanej w globalnym układzie współrzędnych; a  $Z_P$  oznacza współrzędną dowolnie wybranego bieguna  $P$ . Po wprowadzeniu bezwymiarowych zmiennych zależnych oraz bezwymiarowej zmiennej niezależnej  $\xi$ , zgodnie z zależnościami:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tilde{u}_i(\xi) = \frac{u_i(\xi)}{L}, \quad \tilde{w}(\xi) = \frac{w(\xi)}{L}, \quad i = 1, 2, \dots, N+1$$

gdzie  $L$  jest wymiarem charakterystycznym zadania (długość belki, rozpiętość przęsła itp.), układ równań rządzących można zapisać w następującej postaci (nie sumować względem powtarzających się indeksów):

$$\frac{d^2 \tilde{u}_1}{d\xi^2} + \pi_{u,11} \left[ (\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1) + \pi_{h,1} \frac{d\tilde{w}}{d\xi} \right] = 0 \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}_i}{dx^2} - \pi_{u,(i-1)i} \left[ (\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}) + \pi_{h,i-1} \frac{d\tilde{w}}{dx} \right] + \\ + \pi_{u,ii} \left[ (\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i) + \pi_{h,i} \frac{d\tilde{w}}{dx} \right] = 0, \quad i = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\frac{d^2 \tilde{u}_{(N+1)}}{dx^2} - \pi_{u,N(N+1)} \left[ (\tilde{u}_{N+1} - \tilde{u}_N) + \pi_{h,N} \frac{d\tilde{w}}{dx} \right] = 0 \quad (8.25)$$

$$\frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} = \pi_q + \sum_{i=1}^N \left[ \pi_{w,i} \left[ \left( \frac{d\tilde{u}_{(i+1)}}{dx} - \frac{d\tilde{u}_i}{dx} \right) + \pi_{h,i} \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} \right] \right] \quad (8.26)$$

Liczby podobieństwa zdefiniowane są następująco (nie sumować względem powtarzających się indeksów):

$$\pi_{h,i} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2L}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\pi_{u,ii} = \frac{G_i L^2}{E_i h_i t_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\pi_{u,ij} = \frac{G_i L^2}{E_j h_j t_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = i+1$$

$$\pi_{w,i} = \frac{6G_i L^3 (h_i + h_{(i+1)} + 2t_i)}{t_i \sum_{k=1}^{N+1} [E_k h_k^3]}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\pi_q = \frac{12L^3 \left[ q + \sum_{i=1}^{N+1} [h_i g_i] + \sum_{j=1}^N [t_j f_j] \right]}{\sum_{k=1}^{N+1} [E_k h_k^3]}$$

W rezultacie otrzymuje się układ  $(N + 2)$  równań różniczkowych zwyczajnych na  $(N + 1)$  nieznanych przemieszczeniach podłużnych  $u_i$  i jedno przemieszczenie poprzeczne  $w$ . Z uwagi na ugięcie  $w$  jest to układ czwartego rzędu, a jeśli chodzi o pozostałe niewiadome, to w układzie występują pochodne rzędu maksymalnie drugiego. Aby znaleźć jednoznaczne rozwiązanie tego układu, konieczne jest sformułowanie  $(2N + 6)$  **warunków brzegowych**, które zależą od przemieszczeń podłużnych lub ich pochodnych oraz od rozkładu ugięcia lub jego pochodnych. Warunki brzegowe mogą również być sformułowane w kategoriach sił przekrojowych, zgodnie z wzorami (8.20)–(8.22). Z uwagi na liniowość modelu również układ równań odpowiadający warunkom brzegowym będzie algebraicznym układem liniowym



– poprawność postawienia zagadnienia (sformułowania warunków brzegowych), a zwłaszcza istnienie i jednoznaczność rozwiązania, może być weryfikowana z wykorzystaniem twierdzenia Kroneckera–Capellego na drodze analizy otrzymanego układu równań, wynikającego z warunków brzegowych. Układ ten zależy od  $(4N + 1)$  liczb podobieństwa. Standardowa procedura pozwala zamienić go na układ  $(2N + 6)$  równań pierwszego rzędu. Jest to w ogólności **niejednorodny układ liniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu ze stałymi współczynnikami**.

### 8.1.1. Analityczne rozwiązanie zagadnienia zginania belki kompozytowej

Znane są ogólne metody rozwiązywania układów tego rodzaju, co omawiany układ rządzący zagadnieniem zginania belki kompozytowej. Układ ten można zapisać w ogólnej postaci:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x) \quad (8.27)$$

W przypadku gdy macierz współczynników  $\mathbf{A}$  liniowego układu  $n$  równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu posiada wyłącznie jednokrotne wartości własne, rozwiązanie ogólne układu jednorodnego jest kombinacją liniową funkcji wykładniczych o postaci:

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{j=1}^n C_j e^{\lambda_j x} \mathbf{y}_j(x)$$

gdzie:  $\lambda_j$  są wartościami własnymi  $\mathbf{A}$ ;  $\mathbf{y}_j(x)$  są odpowiadającymi im wektorami własnymi; a  $C_j$  są stałymi całkowania.

W przypadku występowania wielokrotnych wartości własnych – a taka sytuacja zachodzi w rozważanym układzie równań rządzących – rozwiązanie ogólne można wyznaczyć za pomocą **metody uogólnionych wektorów własnych**. Algorytm wyznaczania rozwiązania tą metodą omówiony został w opracowaniu (University of Oslo 2011) oraz w pracy (Szeptyński 2022). Schemat algorytmu można przedstawić następująco:

1. Wyznaczyć **wartości własne** macierzy  $\mathbf{A}$ .
2. Wyznaczyć **liniowo niezależne wektory własne** macierzy  $\mathbf{A}$ .
3. Dla każdej wielokrotnej wartości własnej  $\lambda_j$  oznaczamy liczbę liniowo niezależnych wektorów własnych.
4. Dla każdej wartości własnej tworzymy **kolekcję  $\mathcal{E}$  łańcuchów uogólnionych wektorów własnych**.

UWAGA: Dla jednokrotnych wartości własnych kolekcja składa się z jednego łańcucha, który zawiera jeden tylko element, którym jest odpowiadający danej wartości własnej wektor własny. W przypadku wielokrotnych wartości własnych na początku kolekcji składa się z  $m$  jednoelementowych łańcuchów,

z których każdy zawiera po jednym ze zbioru wszystkich  $m$  znalezionych liniowo niezależnych wektorów własnych (różnym od tych znajdujących się w pozostałych łańcuchach).

5. Rozważmy kolekcję  $\mathcal{E}$ , odpowiadającą  $k$ -krotnej wartości własnej  $\lambda_j$ . Oznaczamy przez  $m$  liczbę liniowo niezależnych wektorów własnych. Niech  $n$  oznacza całkowitą liczbę wektorów zawartych w kolekcji  $\mathcal{E}$ . Dopóki  $n < k$  należy:
- 5.1. Wyznaczyć wektor  $\mathbf{v}$  spełniający równanie:

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{1})^{k-m+1} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

i będący liniowo niezależny od wektorów zawartych w kolekcji  $\mathcal{E}$ .

- 5.2. Począwszy od  $s = 1$ , obliczyć:

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{1})^s \mathbf{v}, \quad s := s + 1$$

aż do znalezienia takiego  $s = r$ , dla którego:

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{1})^{r-1} \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \wedge (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{1})^r \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Wyznaczony wektor  $\mathbf{v}$  jest **uogólnionym wektorem własnym** rzędu  $r$ .

- 5.3. Utworzyć łańcuch  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ , w którym:

$$\mathbf{v}_s = (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{1})^{r-s} \mathbf{v}$$

- 5.4. Jeśli w kolekcji  $\mathcal{E}$  znajduje się podzbiór łańcuchów, których elementy są liniowo zależne od wektorów należących do nowo utworzonego łańcucha, to ze zbioru tego należy usunąć łańcuch najkrótszy.
- 5.5. Dodać do kolekcji nowo utworzony łańcuch.
6. Krok 5 powtarza się dla wszystkich wielokrotnych wartości własnych.
7. Rozwiązanie szczególne układu jednorodnego odpowiadające:
- jednokrotnej wartości własnej jest równe:

$$\mathbf{y}_j(x) = \mathbf{v}_j e^{\lambda_j x}$$

- łańcuchowi  $\{\mathbf{v}_{j,p,1}, \mathbf{v}_{j,p,2}, \dots, \mathbf{v}_{j,p,r}\}$  z kolekcji  $\mathcal{E}$ , odpowiadającej  $k$ -krotnej wartości własnej, jest równe:

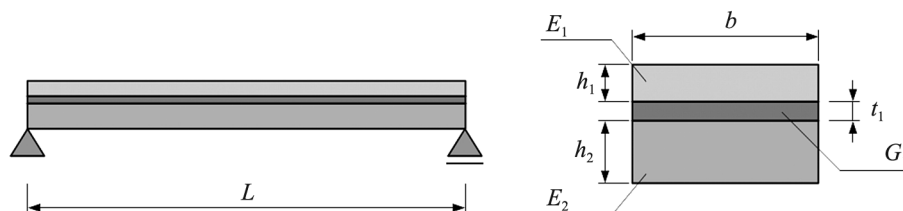
$$\mathbf{y}_{j,p,(r-s+1)} = \left( \sum_{q=s}^r \frac{x^{r-q}}{(r-q)!} \mathbf{v}_{j,p,(q-s+1)} \right) e^{\lambda_j x}, \quad s = 1, 2, \dots, r$$

8. **Całka ogólna układu jednorodnego (COUJ)** jest kombinacją liniową wszystkich rozwiązań szczególnych, odpowiadających wszystkim wyznaczonym w kroku siedmiu łańcuchom. Współczynniki tej kombinacji są stałymi całkowania, które wyznacza się z liniowego układu równań algebraicznych, wynikającego ze spełnienia warunków brzegowych i ewentualnych warunków zszycia.
9. **Całka szczególna układu niejednorodnego (CSUN)** może być wyznaczana metodą przewidywania.
10. **Całka ogólna układu niejednorodnego** jest sumą wyznaczonych COUJ i CSUN.

W zagadnieniach praktycznych człon niejednorodny w układzie równań dany jest z reguły funkcją stałą lub da się go opisać prostymi funkcjami wielomianowymi, dla których przewidzenie całki szczególnej układu niejednorodnego nie przedstawia większych trudności.

### 8.1.2. Przykładowe rozwiązania analityczne zagadnienia zginania belek kompozytowych

Powyższy algorytm niech zilustruje przykładowa jego realizacja dla przypadku belki trójwarstwowej, złożonej z dwóch paneli zginanych oraz warstwy skleiny pomiędzy nimi. Schemat przekroju poprzecznego przedstawiono na rysunku 76.



Rys. 76. Schemat trójwarstwowej belki kompozytowej

Układ równań rządzących zagadnieniem zginania omawianej belki jest następujący (dla uproszczenia zapisu pominięto tyldę nad symbolami bezwymiarowych przemieszczeń względnych):

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \pi_2 \left[ (u_2 - u_1) + \pi_1 \frac{dw}{dx} \right] = 0 \quad (8.28)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} - \pi_3 \left[ (u_2 - u_1) + \pi_1 \frac{dw}{dx} \right] = 0 \quad (8.29)$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \pi_q + \pi_4 \left[ \left( \frac{du_2}{dx} - \frac{du_1}{dx} \right) + \pi_1 \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \quad (8.30)$$

gdzie:

$$\pi_1 = \left( \frac{h_1 + h_2}{2L} \right), \quad \pi_2 = \frac{G_1 L^2}{E_1 h_1 t_1}, \quad \pi_3 = \frac{G_1 L^2}{E_2 h_2 t_1}$$

$$\pi_4 = \frac{6G_1 L^3 (h_1 + h_2 + 2t_1)}{t_1 (E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3)}, \quad \pi_5 = \frac{12L^3 [q + (h_1 g_1 + h_2 g_2) + (t_1 f_1)]}{E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3}$$

Układ ten można sprowadzić do następującego układu równań pierwszego rzędu:

$$\mathbf{y}'(\xi) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(\xi) + \mathbf{b}(\xi) \quad (8.31)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_2 & 0 & -\pi_2 & 0 & 0 & -\pi_1 \pi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\pi_3 & 0 & \pi_3 & 0 & 0 & \pi_1 \pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\pi_4 & 0 & \pi_4 & 0 & 0 & \pi_1 \pi_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \pi_5 \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

zaś składowe wektora funkcji niewiadomych wyrażają się za pomocą wyjściowych niewiadomych, czyli przemieszczeń bezwymiarowych, w następujący sposób:

$$y_1 = u_1, \quad y_2 = \frac{du_1}{d\xi}, \quad y_3 = u_2, \quad y_4 = \frac{du_2}{d\xi}$$

$$y_5 = w, \quad y_6 = \frac{dw}{dx}, \quad y_7 = \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad y_8 = \frac{d^3 w}{dx^3}$$

Wartości własne macierzy współczynników:

$$\lambda_1 = -\sqrt{\pi_1 \pi_4 + \pi_2 + \pi_3}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\pi_1 \pi_4 + \pi_2 + \pi_3}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0$$

Wektor własny odpowiadający wartości własnej  $\lambda_1$ :

$$\mathbf{v}_{1,1,1} = [-\pi_2\lambda_1, -\pi_2\lambda_1^2, \pi_3\lambda_1, \pi_3\lambda_1^2, \pi_4, \pi_4\lambda_1, \pi_4\lambda_1^2, \pi_4\lambda_1^3]$$

Wektor własny odpowiadający wartości własnej  $\lambda_2$ :

$$\mathbf{v}_{2,1,1} = [-\pi_2\lambda_2, -\pi_2\lambda_2^2, \pi_3\lambda_2, \pi_3\lambda_2^2, \pi_4, \pi_4\lambda_2, \pi_4\lambda_2^2, \pi_4\lambda_2^3]$$

Liniowo niezależne wektory własne, odpowiadające wielokrotnej zerowej wartości własnej:

$$\mathbf{v}_{3,1,1} = [1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$\mathbf{v}_{3,2,1} = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$$

Tworzymy kolekcję łańcuchów uogólnionych wektorów własnych. Na początku kolekcję stanowią cztery łańcuchy jednoelementowe, z których każdy zawiera jeden z liniowo niezależnych wektorów własnych  $\mathbf{A}$ :

$$\mathcal{E} = \{\{\mathbf{v}_{1,1,1}\} \quad \{\mathbf{v}_{2,1,1}\} \quad \{\mathbf{v}_{3,1,1}\} \quad \{\mathbf{v}_{3,2,1}\}\}$$

Łańcuchy odpowiadające pojedynczym wartościom własnym nie ulegną już zmianie. Zajmijmy się wielokrotną wartością własną. Jej krotność wynosi  $k = 6$ . Znaleźliśmy  $m = 2$  liniowo niezależne wektory własne, odpowiadające tej wartości własnej. Poszukujemy rozwiązania układu równań:

$$(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^{k-m+1} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (8.33)$$

które jest liniowo niezależne od wektorów zawartych w  $\mathcal{E}$ . Mamy zatem układ równań, w którym macierz współczynników jest równa:

$$(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^{k-m+1} = \mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 0 & \pi_2\lambda_1^2 & 0 & -\pi_2\lambda_1^2 & 0 & 0 & -\pi_1\pi_2\lambda_1^2 & 0 \\ \pi_2(\pi_3 + \pi_2)\lambda_1^2 & 0 & -\pi_2(\pi_3 + \pi_2)\lambda_1^2 & 0 & 0 & -\pi_1\pi_2(\pi_3 + \pi_2)\lambda_1^2 & 0 & -\pi_1\pi_2\lambda_1^2 \\ 0 & -\pi_3\lambda_1^2 & 0 & \pi_3\lambda_1^2 & 0 & 0 & \pi_1\pi_3\lambda_1^2 & 0 \\ -\pi_3(\pi_3 + \pi_2)\lambda_1^2 & 0 & \pi_3(\pi_3 + \pi_2)\lambda_1^2 & 0 & 0 & \pi_1\pi_3(\pi_3 + \pi_2)\lambda_1^2 & 0 & \pi_1\pi_3\lambda_1^2 \\ -\pi_4(\pi_3 + \pi_2) & 0 & \pi_4(\pi_3 + \pi_2) & 0 & 0 & \pi_1\pi_4(\pi_3 + \pi_2) & 0 & \pi_1\pi_4 \\ 0 & -\pi_4\lambda_1^2 & 0 & \pi_4\lambda_1^2 & 0 & 0 & \pi_1\pi_4\lambda_1^2 & 0 \\ -\pi_4(\pi_3 + \pi_2)\lambda_1^2 & 0 & \pi_4(\pi_3 + \pi_2)\lambda_1^2 & 0 & 0 & \pi_1\pi_4(\pi_3 + \pi_2)\lambda_1^2 & 0 & \pi_1\pi_4\lambda_1^2 \\ 0 & -\pi_4\lambda_1^4 & 0 & \pi_4\lambda_1^4 & 0 & 0 & \pi_1\pi_4\lambda_1^4 & 0 \end{pmatrix}$$

Jest to układ równań jednorodnych. Rząd macierzy współczynników wynosi 2, zatem istnieje nieskończenie wiele rozwiązań tego układu, zależnych od  $8 - 2 = 6$  parametrów. Ogólne rozwiązanie tego układu można zapisać w postaci:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2\pi_1 + a_5 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & -\frac{(a_3\pi_1 + a_6 - a_1)\pi_3 + (a_3\pi_1 + a_6 - a_1)\pi_2}{\pi_1} \end{bmatrix}$$

gdzie:  $a_1, \dots, a_6$  są parametrami. Rozważmy rozwiązanie odpowiadające jednemu niezerowemu parametrowi  $a_5 = 1$ . Wtedy:

$$\mathbf{v} = [0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$$

Obliczamy:

$$(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^s \mathbf{v} = [1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], \quad s = 1$$

$$(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^s \mathbf{v} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \quad s = 2$$

Mamy zatem  $r = 2$ , czyli wyznaczone rozwiązanie jest uogólnionym wektorem własnym rzędu drugiego. Tworzymy łańcuch:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{3,1,1} = (\mathcal{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^{2-1} \mathbf{v} = [1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] \\ \mathbf{v}_{3,1,2} = (\mathcal{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^{2-2} \mathbf{v} = [0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0] \end{array} \right\}$$

W kolekcji  $\mathcal{E}$  znajduje się już łańcuch zawierający wektor liniowo zależny od wektorów tego nowego łańcucha (stąd zastosowano oznaczenie za pomocą identycznych indeksów), od którego jest krótszy. Usuwamy zatem z kolekcji poprzedni łańcuch, a następnie dodajemy ten nowo utworzony:

$$\mathcal{E} = \left\{ \left\{ \mathbf{v}_{1,1,1} \right\} \quad \left\{ \mathbf{v}_{2,1,1} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{3,1,1} \\ \mathbf{v}_{3,1,2} \end{array} \right\} \quad \left\{ \mathbf{v}_{3,2,1} \right\} \right\}$$

W kolekcji znajduje się teraz pięć uogólnionych wektorów własnych – wciąż potrzeba znaleźć jeszcze trzy. Weźmy teraz inne rozwiązanie układu równań (8.33). Niech odpowiada ono  $a_1 = \pi_1$ . Wtedy:

$$\mathbf{v} = [\pi_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (\pi_2 + \pi_3)]$$

Obliczamy:

$$(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^s \mathbf{v} = [0, \pi_1\pi_2, 0, -\pi_1\pi_3, 0, 0, (\pi_2 + \pi_3), 0], \quad s = 1$$

$$(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^s \mathbf{v} = [\pi_1\pi_2, 0, -\pi_1\pi_3, 0, 0, (\pi_2 + \pi_3), 0, 0], \quad s = 2$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^s \mathbf{v} = [0, 0, 0, 0, (\pi_2 + \pi_3), 0, 0, 0], \quad s = 3$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^s \mathbf{v} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \quad s = 4$$

Mamy zatem  $r = 4$ , czyli wyznaczone rozwiązanie jest uogólnionym wektorem własnym rzędu czwartego. Tworzymy łańcuch:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{3,2,1} = (\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^{4-1} \mathbf{v} = [0, 0, 0, 0, (\pi_2 + \pi_3), 0, 0, 0] \\ \mathbf{v}_{3,2,2} = (\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^{4-2} \mathbf{v} = [\pi_1 \pi_2, 0, -\pi_1 \pi_3, 0, 0, (\pi_2 + \pi_3), 0, 0] \\ \mathbf{v}_{3,2,3} = (\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^{4-3} \mathbf{v} = [0, \pi_1 \pi_2, 0, -\pi_1 \pi_3, 0, 0, (\pi_2 + \pi_3), 0] \\ \mathbf{v}_{3,2,4} = (\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{1})^{4-4} \mathbf{v} = [\pi_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (\pi_2 + \pi_3)] \end{array} \right\}$$

W kolekcji  $\mathcal{E}$  znajduje się już łańcuch zawierający wektor liniowo zależny od wektorów tego nowego łańcucha (również tu zastosowano oznaczenie za pomocą identycznych indeksów), od którego jest krótszy. Usuwamy zatem z kolekcji poprzedni łańcuch, a następnie dodajemy ten nowo utworzony:

$$\mathcal{E} = \left\{ \left\{ \mathbf{v}_{1,1,1} \right\} \quad \left\{ \mathbf{v}_{2,1,1} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{3,1,1} \\ \mathbf{v}_{3,1,2} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{3,2,1} \\ \mathbf{v}_{3,2,2} \\ \mathbf{v}_{3,2,3} \\ \mathbf{v}_{3,2,4} \end{array} \right\} \right\}$$

Kolekcja  $\mathcal{E}$  zawiera teraz dokładnie osiem wektorów. W tym miejscu należy zwrócić uwagę na to, że utworzenie kompletnej kolekcji uogólnionych wektorów własnych dokonało się w minimalnej koniecznej liczbie dwóch zaledwie kroków jedynie dzięki odpowiedniemu wyborowi rozwiązań układu (8.33).

Możemy teraz skonstruować rozwiązanie ogólne układu jednorodnego, odpowiadające:

- pierwszemu łańcuchowi:

$$\mathbf{y}_1(\xi) = C_1 \mathbf{v}_{1,1,1} e^{\lambda_1 \xi}$$

- drugiemu łańcuchowi:

$$\mathbf{y}_2(\xi) = C_2 \mathbf{v}_{2,1,1} e^{\lambda_2 \xi}$$

- trzeciemu łańcuchowi:

$$\mathbf{y}_3(\xi) = [C_3 \mathbf{v}_{3,1,1} + C_4 (\xi \mathbf{v}_{3,1,1} + \mathbf{v}_{3,1,2})] e^{\lambda_3 \xi}$$

- czwartemu łańcuchowi:

$$\mathbf{y}_4(\xi) = \left[ C_5 \mathbf{v}_{3,2,1} + C_6 (\xi \mathbf{v}_{3,2,1} + \mathbf{v}_{3,2,2}) + C_7 \left( \frac{\xi^2}{2} \mathbf{v}_{3,2,1} + \xi \mathbf{v}_{3,2,2} + \mathbf{v}_{3,2,3} \right) + C_8 \left( \frac{\xi^3}{6} \mathbf{v}_{3,2,1} + \frac{\xi^2}{2} \mathbf{v}_{3,2,2} + \xi \mathbf{v}_{3,2,3} + \mathbf{v}_{3,2,4} \right) \right] e^{\lambda_3 \xi}$$

Suma powyższych rozwiązań stanowi całkę ogólną jednorodnego układu równań:

$$\mathbf{y}_o(\xi) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_4 \quad (8.34)$$

Stałe całkowania  $C_1, \dots, C_8$  wyznacza się z warunków brzegowych. Warunków tych ma być dokładnie osiem. Aby rozwiązanie było jednoznaczne, warunki te muszą zależeć od funkcji niewiadomych, nie zaś jedynie od ich pochodnych. Warunki sformułować można w kategoriach przemieszczeń węzłowych lub sił przekrojowych na krańcach przedziałów charakterystycznych, analogicznie jak robi się to dla klasycznych jednorodnych belek.

Całkę szczególną układu niejednorodnego można wyznaczać metodą przewidywania. Jednym z najczęstszych przypadków w praktyce projektowej jest obciążenie jednorodne, odpowiadające funkcji  $q(\xi) = \text{const} = q$ . Funkcję tę interpretuje się jako funkcję quasi-wielomianową stopnia  $M = 0$ :

$$\mathbf{B} = e^{\gamma \xi} \left[ \sum_{m=0}^M \xi^m \mathbf{B}_m \right] \quad (8.35)$$

Przewidujemy więc rozwiązanie szczególne w postaci quasi-wielomianowej wektorowej funkcji jednej zmiennej:

$$\mathbf{y}_s(\xi) = e^{\gamma \xi} \left[ \sum_{m=0}^M \xi^m \mathbf{D}_m \right] \quad (8.36)$$

W większości przypadków w wyrażeniu (8.36) przyjmujemy stopień wielomianu  $M$  jako równy stopniowi wielomianu w wyrażeniu (8.35). Wyjątek stanowią sytuacje określane mianem „rezonansu”, w których wykładnik  $\gamma$  jest równy jednej z wartości własnych. Gdy zmienna niezależna nie jest zmienną czasową, termin „rezonans” nie może być oczywiście utożsamiany ze zjawiskiem rezonansu mechanicznego w układach drgających, choć jego nazwa istotnie jest z nim związana. W naszym przypadku mamy  $\gamma = \lambda_3 = 0$ , zatem jest to przypadek rezonansowy. W takiej sytuacji stopień wielomianu w wyrażeniu (8.35) należy powiększyć o liczbę



równą liczbie elementów najdłuższego łańcucha Jordana (łańcucha uogólnionych wektorów własnych). Mamy zatem  $M = 0 + 4 = 4$ . Napiszemy więc:

$$\mathbf{y}_s(\xi) = \mathbf{D}_0 + \xi \mathbf{D}_1 + \xi^2 \mathbf{D}_2 + \xi^3 \mathbf{D}_3 + \xi^4 \mathbf{D}_4 \quad (8.37)$$

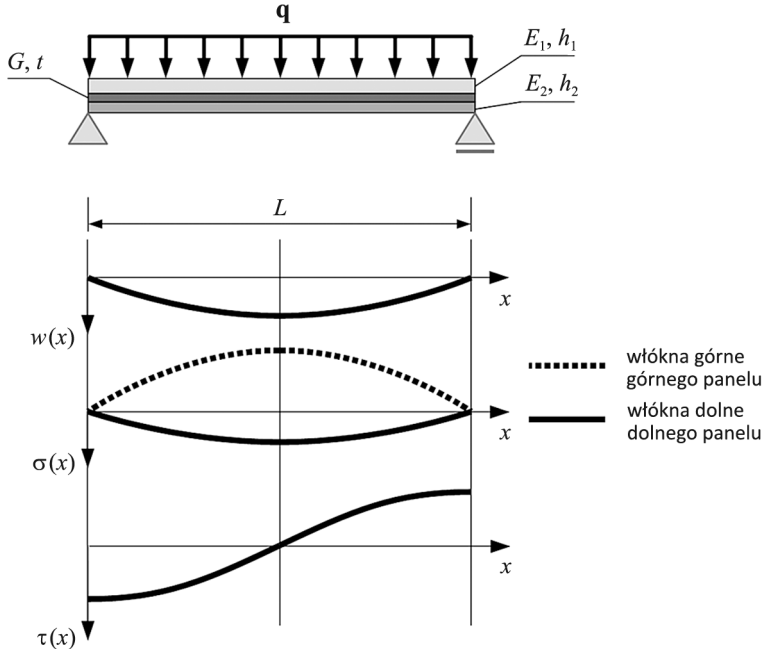
Po podstawieniu wyrażenia (8.37) do równania (8.31) należy przyrównać do siebie współczynniki przy wszystkich potęgach zmiennej niezależnej  $\xi$  w wyrażeniach po lewej i prawej stronie równania. Po prawej stronie znajduje się wektor zerowy, zatem wszystkie te współczynniki muszą być równe 0. Otrzymujemy układ 40 liniowych równań algebraicznych na 40 składowych wektorów  $\mathbf{D}_m$  ( $m = 0, 1, \dots, 4$ ). W rzeczywistości całą szczególną układ niejednorodnego można wyznaczyć w prostszy sposób z uwagi na fakt, że kolejne składowe rozwiązania  $\mathbf{y}_s(\xi)$  nie są niezależne – pięć spośród tych składowych to pochodne trzech pozostałych, będących bezwymiarowymi przemieszczeniami. Można zatem założyć jedynie funkcje  $y_1, y_3$  oraz  $y_5$  jako pewne wielomiany stopnia czwartego, pozostałe zaś składowe obliczyć jako odpowiednie pochodne. Przy takim podejściu otrzymuje się układ 15 równań na 15 niewiadomych współczynników. Rozwiązanie tego układu jest następujące (układ wektora został zmieniony tak, aby wynik był czytelniejszy):

$$\mathbf{y}_s(\xi) = \frac{\pi_5}{24\lambda_1^2} \begin{bmatrix} 4\pi_1\pi_2\xi^3 \\ 12\pi_1\pi_2\xi^2 \\ -4\pi_1\xi(6 + \pi_3\xi^2) \\ -12\pi_1\xi(2 + \pi_3\xi^2) \\ (\pi_2 + \pi_3)\xi^4 \\ 4(\pi_2 + \pi_3)\xi^3 \\ 12(\pi_2 + \pi_3)\xi^2 \\ 24(\pi_2 + \pi_3)\xi \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

Ścisłe rozwiązania dla innych warunków podparcia lub innego obciążenia wyznacza się w sposób analogiczny. Rozwiązania uzyskane w ten sposób mogą dostarczyć zamkniętych wzorów, określających wielkości kluczowe w procesie projektowania – maksymalne ugięcie belki, ekstremalne wielkości naprężenia normalnego w panelach zginanych lub ekstremalne naprężenie styczne w spoinie.

Na rysunkach 77–79 przedstawiono schematycznie przebieg zmienności linii ugięcia oraz wielkości naprężeń ekstremalnych dla wybranych rodzajów belek. W przypadku belki niesymetrycznej należy podkreślić, że zaprezentowane wykresy mają jedynie charakter poglądowy, a stosunek wielkości naprężenia normalnego w panelu górnym do wielkości naprężenia normalnego w panelu dolnym zależeć będzie zarówno od materiału, jak i geometrii przekroju poprzecznego obydwu paneli.

Niesymetryczna trójwarstwowa belka kompozytowa, podparta przegubowo, obciążona jest jednorodnym obciążeniem ciągłym.



Rys. 77. Schemat statyczny belki i wykresy linii ugięcia  $w(x)$ , ekstremalnego naprężenia normalnego w skrajnych włóknach paneli zewnętrznych  $\sigma(x)$  oraz naprężenia stycznego w sklecinie  $\tau(x)$

**Liczby podobieństwa** opisujące belkę:

$$\pi_1 = \left( \frac{h_1 + h_2}{2L} \right), \quad \pi_2 = \frac{GL^2}{E_1 h_1 t}, \quad \pi_3 = \frac{GL^2}{E_2 h_2 t}$$

$$\pi_4 = \frac{6GL^3(h_1 + h_2 + 2t)}{t(E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3)}, \quad \pi_5 = \frac{12qL^3}{E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3}, \quad \lambda = \sqrt{\pi_1 \pi_4 + \pi_2 + \pi_3}$$

- **maksymalne ugięcie** w środku przęsła:

$$w_{\max} =$$

$$= L\pi_5 \frac{768\pi_1\pi_4 e^{\frac{\lambda}{2}} + (e^\lambda + 1)[8\lambda^2[\pi_1\pi_4(\pi_2 + \pi_3 + 6) + (\pi_2 + \pi_3)^2] - 3\lambda^4(\pi_2 + \pi_3) - 384\pi_1\pi_4]}{384\lambda^6(e^\lambda + 1)} \quad (8.39)$$

- **ekstremalne naprężenie ściskające** w panelu górnym w przekroju przęsłowym:

$$\sigma_{\min} = E_1 \pi_5 \left[ \frac{\pi_1 \pi_2}{\lambda^4} \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{8} - \frac{2e^{\frac{\lambda}{2}}}{e^\lambda + 1} \right] + \frac{h_1}{2L} \frac{8\pi_1 \pi_4 (2e^{\frac{\lambda}{2}} - e^\lambda - 1) - \lambda^2 (\pi_2 + \pi_3)(e^\lambda + 1)}{8\lambda^4 (e^\lambda + 1)} \right] \quad (8.40)$$

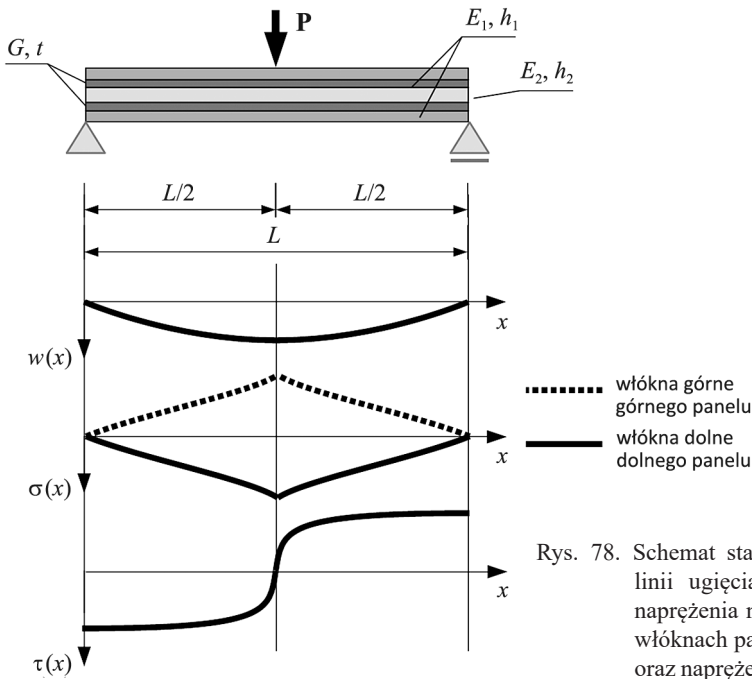
- ekstremalne naprężenie rozciągające w panelu dolnym w przekroju przęsłowym:

$$\sigma_{\max} = E_2 \pi_5 \left[ \frac{\pi_1 \pi_3}{\lambda^4} \left[ \frac{\lambda^2}{8} - 1 + \frac{2e^{\frac{\lambda}{2}}}{e^\lambda + 1} \right] - \frac{h_2}{2L} \frac{8\pi_1 \pi_4 (2e^{\frac{\lambda}{2}} - e^\lambda - 1) - \lambda^2 (\pi_2 + \pi_3)(e^\lambda + 1)}{8\lambda^4 (e^\lambda + 1)} \right] \quad (8.41)$$

- ekstremalne naprężenie styczne w sklecinie w przekroju podporowym:

$$\tau_{\max} = \frac{GL}{t} \frac{\pi_1 \pi_5 [\lambda(e^\lambda + 1) - 2(e^\lambda - 1)]}{2\lambda^3 (e^\lambda + 1)} \quad (8.42)$$

Symetryczna pięciowarstwowa belka kompozytowa, podparta przegubowo, obciążona jest siłą skupioną w środku przęsła.



Rys. 78. Schemat statyczny belki i wykresy linii ugięcia  $w(x)$ , ekstremalnego naprężenia normalnego w skrajnych włóknach paneli zewnętrznych  $\sigma(x)$  oraz naprężenia stycznego w sklecinie  $\tau(x)$

Liczby podobieństwa opisujące belkę:

$$\pi_1 = \left( \frac{h_1 + h_2}{2L} \right), \quad \pi_2 = \frac{GL^2}{E_1 h_1 t}, \quad \pi_3 = \frac{GL^2}{E_2 h_2 t}$$

$$\pi_4 = \frac{6GL^3(h_1 + h_2 + 2t)}{t(2E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3)}, \quad \lambda = \sqrt{2\pi_1 \pi_4 + \pi_2}$$

- **maksymalne ugięcie** w środku przęsła:

$$w_{\max} = \frac{PL^3}{48(2E_1 I_1 + E_2 I_2)} \frac{\pi_2 \lambda^3 (e^\lambda + 1) + 24\pi_1 \pi_4 [(\lambda - 2)e^\lambda + (\lambda + 2)]}{\lambda^5 (e^\lambda + 1)} \quad (8.43)$$

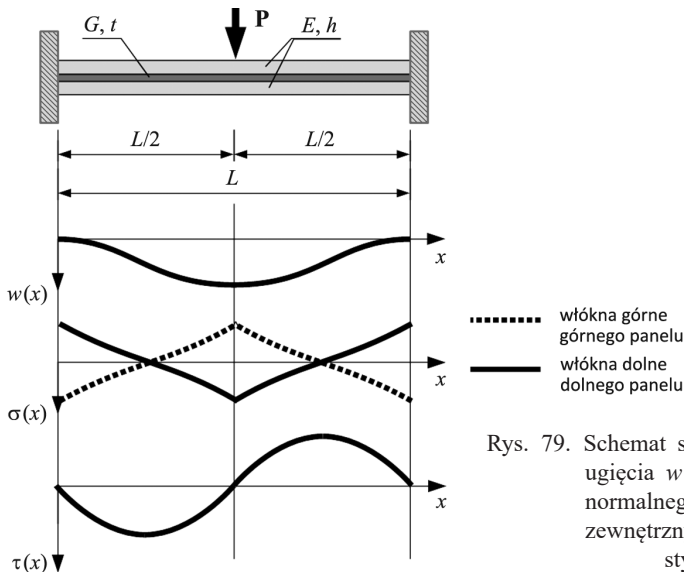
- **ekstremalne naprężenie normalne** we włóknach skrajnych w panelach zewnętrznych w przekroju przęsłowym:

$$\sigma_{\max} = \frac{PL}{4} \frac{E_1 [h_1 ((\pi_2 \lambda + 4\pi_1 \pi_4) e^\lambda + (\pi_2 \lambda - 4\pi_1 \pi_4)) + 2L\pi_1 \pi_2 ((\lambda - 2)e^\lambda + (\lambda + 2))]}{2\lambda^3 (e^\lambda + 1) (2E_1 I_1 + E_2 I_2)} \quad (8.44)$$

- **maksymalne naprężenie styczne** w skleinie w przekroju podporowym:

$$\tau_{\max} = \frac{P}{2} \frac{GL^3}{(2E_1 I_1 + E_2 I_2)t} \frac{\pi_1 [e^\lambda - 2\lambda e^{\frac{\lambda}{2}} + 1]}{\lambda^2 (e^\lambda + 1)} \quad (8.45)$$

Symetryczna trójwarstwowa belka kompozytowa, utwierdzona obustronnie, obciążona jest siłą skupioną w środku przęsła.



Rys. 79. Schemat statyczny belki i wykresy linii ugięcia  $w(x)$ , ekstremalnego naprężenia normalnego w skrajnych włóknach paneli zewnętrznych  $\sigma(x)$  oraz naprężenia stycznego w skleinie  $\tau(x)$

**Liczby podobieństwa** opisujące belkę:

$$\pi_1 = \frac{h}{L}, \quad \pi_2 = \frac{GL^2}{Eht}, \quad \pi_3 = \frac{6GL^3(h+t)}{Eh^3t}, \quad \lambda = \sqrt{\pi_1\pi_3 + 2\pi_2}$$

- **maksymalne ugięcie** w środku przęsła:

$$w_{\max} = \frac{PL^3}{192EI} \frac{[\pi_1\pi_3(96 + \lambda(\pi_2 + 24)) + 2\pi_2^2\lambda](1 - e^{\frac{\lambda}{2}}) + 2\lambda(\pi_2\lambda^2 + 24\pi_1\pi_3)e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda^5(e^2 + 1)} \quad (8.46)$$

- **ekstremalne naprężenie normalne** we włóknach skrajnych paneli zewnętrznych w przekroju przęsłowym i podporowym:

$$\sigma_{\max} = \frac{PL^2}{16EI} \frac{\pi_1[(2\pi_1\pi_3 + \pi_2\lambda)e^{\frac{\lambda}{2}} - (2\pi_1\pi_3 - \pi_2\lambda) + \pi_2[(\lambda - 4)e^2 + (\lambda + 4)]]}{\lambda^3(e^2 + 1)} \quad (8.47)$$

- **ekstremalne naprężenie styczne** w sklepinie (dla  $x = \frac{L}{4}$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{P}{64EIt} \frac{GL^3 \pi_1[(\pi_2\lambda^2 + 16\pi_1\pi_3)(e^{\frac{\lambda}{2}} + 1) - 32\pi_1\pi_3e^{\frac{\lambda}{4}} - \pi_2[(\lambda^2 - 32)(e^2 + 1) + 64e^4]]}{\lambda^4(e^2 + 1)} \quad (8.48)$$

Wzory tego rodzaju można wyprowadzić na podstawie ścisłych rozwiązań analitycznych dla wszelkich schematów podparcia i obciążenia. Należy jednak przyznać, że ich wyprowadzenie okazuje się być bardzo uciążliwym zadaniem nawet dla prostych schematów jednoprzęsłowych, również tych wykorzystujących oprogramowanie do obliczeń symbolicznych (przy wyprowadzaniu powyższych wzorów wykorzystano program Maxima 5.43.0).

Korzystając z powyższych wzorów, należy zwrócić uwagę na pewien szczególnie aspekt dotyczący **przewieszów belki poza oś podpory**. W przypadku belek jednorodnych, w typowym podejściu analitycznym, które jest właściwe dla klasycznych metod mechaniki budowli, przewieszenie traktowane jest jako „część statycznie wyznaczalna”, co oznacza, że w sytuacji braku obciążenia na przewieszeniu, na podstawie równowagi układu sił zewnętrznych i wewnętrznych, przyłożonych do myślowo rozsunętych części ciała odkształcalnego, przyjmuje się zerowe siły przekrojowe i zerowe składowe naprężenia w obszarze przewieszenia. W przypadku belek o odpowiednio wysokiej sztywności podejście takie jest uprawnione, jednakże w przy-

padku belek bardzo wiotkich oczywiste jest, że zakres oddziaływania reakcji podporowej obejmować może również istotną część przewieszenia. W sposób szczególnie dotyczy to belek kompozytowych z podatnymi skleinaми. Rzeczywiście, jednorodne statyczne warunki brzegowe na końcu przewieszenia wcale nie pociągają za sobą zerowania się wszystkich sił przekrojowych. Owszem, układ tych sił będzie statycznie równoważny układowi zerowemu, ale same siły nie będą zerowe. Dotyczyć to będzie przede wszystkim podatnej skleiny, która, np. w strefie podporowej, zarówno po stronie przęsłowej, jak i po stronie przewieszenia, deformowana jest w największym stopniu. Oznacza to, że do poprawnego oszacowania ekstremalnych wielkości naprężenia konieczne jest uwzględnienie długości przewieszenia, które w praktyce zawsze występuje. Stosowalność analitycznych modeli belek jednoprzęsłowych, pomijających obecność przewieszenia, uzasadnione jest wyłącznie w przypadku, gdy długość przewieszenia jest bardzo mała.

## 8.2. Walidacja doświadczalna i porównanie modeli liniowych

W pracy (Szeptyński 2020b) porównano przewidywania teoretyczne wybranych liniowych modeli belek kompozytowych z wynikami symulacji MES oraz wynikami doświadczalnymi. Wśród porównywanych modeli, oprócz propozycji przedstawionej w poprzednim podrozdziale, rozważano również model niejednorodnej belki Bernoulliego–Eulera, a także model niejednorodnej belki Timoshenki–Ehrenfesta.

### Niejednorodna belka Bernoulliego–Eulera

Podstawowym założeniem tego modelu jest **hipoteza płaskich przekrojów Bernoulliego**, zgodnie z którą dowolny płaski przekrój poprzeczny, prostopadły do osi belki przed obciążeniem, po obciążeniu pozostaje płaski i prostopadły do zdeformowanej osi belki. Założenie to pociąga za sobą z góry określony **liniowy rozkład odkształcenia** liniowego wzdłuż wysokości belki. W przypadku przekrojów niejednorodnych (kompozytowych) rozkład taki wyznacza jednoznacznie rozkład naprężenia normalnego, zgodnie z obowiązującymi dla materiałów składowych związkami konstytutywnymi. Belkę taką opisuje równanie różniczkowe na rozkład ugięcia  $w(x)$ , analogiczne do równania opisującego klasyczną jednorodną belkę Bernoulliego–Eulera:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( D_b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x) \quad (8.49)$$

gdzie sztywność giętna  $D_b$  wyraża się całką:

$$D_b = \iint_A z^2 \cdot E(z) dA \quad (8.50)$$

Jeśli przyjmuje się, że każdy z tych materiałów jest **liniowym materiałem sprężystym Hooke’a**, to wtedy **rozkład naprężenia jest odcinkowo liniowy**. Sztywność giętna jest wówczas średnią ważoną momentów bezwładności poszczególnych składowych przekroju poprzecznego, przy czym wagi są proporcjonalne do stosunku modułu Younga odpowiedniego materiału do modułu odniesienia (Piechnik 2007).

Naprężenia normalne w omawianym modelu wyznacza się zgodnie z wzorem:

$$\sigma(x, z) = -\frac{d^2 w}{dx^2} \frac{E(z)}{D_b} z \quad (8.51)$$

Średnie naprężenia styczne oszacować można zgodnie z podejściem zaproponowanym przez Żurawskiego (Żurawski 1856):

$$\bar{\tau}(x, z) = \int_z^{z_0} \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} dz = \frac{QS(z)}{bD_b} \quad (8.52)$$

### Niejednorodna belka Timoshenki–Ehrenfesta

W modelu Timoshenki–Ehrenfesta rezygnuje się z założenia o prostopadłości przekroju poprzecznego do zdeformowanej osi belki – **kąt obrotu przekroju poprzecznego  $\phi(x)$  jest dodatkową zmienną stanu** opisującą belkę. Równania opisujące niejednorodną belkę Timoshenki–Ehrenfesta mają postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dx^2} \left( D_b \frac{d\phi}{dx} \right) = q(x) \\ \frac{dw}{dx} = \phi - \frac{1}{\kappa D_s} \frac{d}{dx} \left( D_b \frac{d\phi}{dx} \right) \end{array} \right. \quad (8.53)$$

Sztywność poprzeczna na ścinanie  $D_s$  dla przekroju niejednorodnego (kompozytowego) wyznaczana jest według wzoru:

$$D_s = \iint_A G(z) dA \quad (8.54)$$

Sztywność giętna  $D_b$  wyznaczana jest tak samo jak w przypadku niejednorodnej belki Bernoulliego–Eulera. W pracy (Szeptyński 2020b) zaproponowano, aby wartość współczynnika korekcyjnego  $\kappa$  oszacować na podstawie przyrównania do siebie dwóch wyrażen na energię sprężystą ścinania – jedno z nich wyznacza

naprężenie styczne, zgodnie z założoną kinematyką belki Timoshenki–Ehrenfesta, drugie zaś czyni użytek ze wzoru Żurawskiego. W efekcie otrzymuje się wzór:

$$\kappa = \left( \frac{D_s}{D_b^2} \iint_A \frac{s^2(z)}{G(z)} dA \right)^{-1} \quad (8.55)$$

gdzie:  $s(z)$  to moment statyczny względem środka ciężkości przekroju od tej jego części, której punkty mają większe (lub mniejsze – zależnie od orientacji lokalnego układu współrzędnych) wartości współrzędnej  $z$ .

Porównaniu i walidacji doświadczalnej poddano teoretyczne oraz numeryczne oszacowania następujących wielkości fizycznych:

- **sztywność belki** – stosunek obciążenia zewnętrznego do ugięcia maksymalnego,
- **maksymalne naprężenie normalne,**
- **maksymalne naprężenie styczne.**

Walidacji poprawności oszacowań dokonano na podstawie wyników doświadczeń na dwóch typach belek kompozytowych – trójwarstwowych (dwa panele + skleina) belek aluminiowych (Zajac 2008) oraz pięciowarstwowych (trzy panele + dwie skleiny) belek drewnianych dwojakiego rodzaju: belek CLT oraz belek z klejonych sklejek. Oznaczenia i wymiary belek podlegających badaniu przedstawiono w tabelach 6 i 7. W oznaczeniu belek TYP1-TYP2-t-L pierwszy symbol oznacza typ warstwy zginanej (ALU – stop aluminium PA-38, B – drewno świerkowe, SK – sklejka), drugi symbol oznacza typ materiału skleiny (PS/PSM/PST), pierwsza z liczb oznacza grubość  $t$  skleiny w milimetrach (oznaczenie „DX” oznacza minimalną grubość gwarantującą połączenie adhezyjne), a ostatnia liczba oznacza wyrażoną w milimetrach rozpiętość  $L$  między podporami. Symbole  $h_T$ ,  $h_M$ ,  $h_B$  oznaczają grubość kolejno wierzchniej, środkowej i spodniej warstwy zginanej, a  $b$  oznacza szerokość belki.

Tabela 6

Charakterystyka belek drewnianych i wykonanych ze sklejki poddanych czteropunktowemu zginaniu

LP.	oznaczenie	liczba próbek	$b$	$h_T$	$h_M$	$h_B$	$t$	$L$
			[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
1	B-PS-3-1200	3	100	22	25	22	3	1200
2	B-PST-3-1200	3	100	22	25	22	3	1200
3	B-PST-DX-1200	1	100	22	25	22	0	1200
4	B-PS-DX-1200	2	100	22	25	22	0	1200
5	SK-PST-1-1200	7	100	17	17	17	1	1200
6	SK-PST-1-720	6	100	17	17	17	1	720
7	SK-PST-2-1200	7	100	17	17	17	2	1200
8	SK-PST-2-720	6	100	17	17	17	2	720

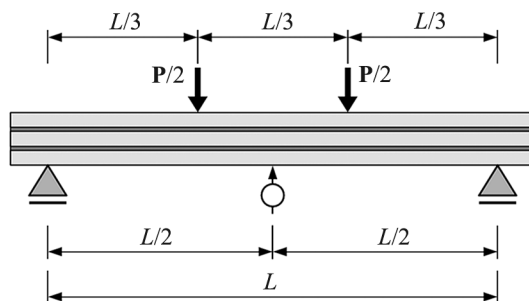


Tabela 7

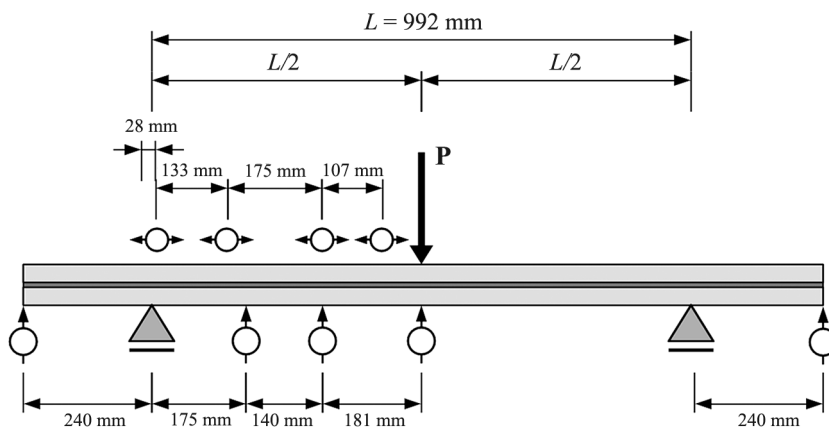
Charakterystyka belek aluminiowych poddanych czteropunktowemu zginaniu

LP.	oznaczenie	liczba próbek	$b$	$h_r$	$h_b$	$t$	$L$
			[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
1	ALU-PSM-5-992	1	29,25	9,656	9,656	5	992
2	ALU-PSM-3,1-992	1	29,25	9,656	9,656	3,1	992
3	ALU-PSM-1,75-992	1	29,25	9,656	9,656	1,75	992
4	ALU-PSM-1,2-992	1	29,25	9,656	9,656	1,2	992
5	ALU-PSM-0,5-992	1	29,25	9,656	9,656	0,5	992

Belki drewniane oraz te wykonane ze sklejki obciążane były w próbie czteropunktowego zginania (rys. 80), belki aluminiowe natomiast w próbie trójpunktowego zginania (rys. 81).



Rys. 80. Schemat statyczny i położenie czujników przemieszczenia w próbie zginania czteropunktowego pięciowarstwowych belek drewnianych



Rys. 81. Schemat statyczny i położenie czujników przemieszczenia w próbie zginania trójpunktowego trójwarstwowych belek aluminiowych

### 8.2.1. Globalna sztywność belek kompozytowych

Na rysunkach 82 i 83 porównano sztywność belek kompozytowych, szacowaną z użyciem różnych modeli teoretycznych, jak również oszacowanie numeryczne (dwuwymiarowy model MES) oraz pomiar doświadczalny. Oszacowania teoretyczne dane są poniższymi wzorami.

#### Sztywność belki kompozytowej w zginaniu trójpunktowym:

- model kompozytowej belki Bernoulliego–Eulera:

$$k = \left[ \frac{1}{48} \frac{L^3}{D_b} \right]^{-1} \quad (8.56)$$

- model kompozytowej belki Timoshenki–Ehrenfesta:

$$k = \left[ \frac{1}{48} \frac{L^3}{D_b} + \frac{L}{4\kappa D_s} \right]^{-1} \quad (8.57)$$

- model trójwarstwowej belki kompozytowej (Szeptyński 2022):

$$k = \left[ \frac{L^3}{Ebh^3} \frac{\lambda_7(2\pi_1\pi_2\pi_3 + 3\pi_1\pi_3 + 4\pi_2^2(1 + e^{2\lambda_7}) + 3\pi_1\pi_3(1 - e^{2\lambda_7}))}{\lambda_7^5(1 + e^{2\lambda_7})} \right]^{-1} \quad (8.58)$$

gdzie:

$$\pi_1 = \frac{h}{L}, \quad \pi_2 = \frac{GL^2}{Eht}, \quad \pi_3 = \frac{6(h+t)GL^3}{Eh^3t}, \quad \pi_4 = \frac{6qL^3}{Eh^3}, \quad \lambda_7 = \sqrt{\pi_1\pi_3 + 2\pi_2}$$

#### Sztywność belki kompozytowej w zginaniu czteropunktowym:

- model kompozytowej belki Bernoulliego–Eulera:

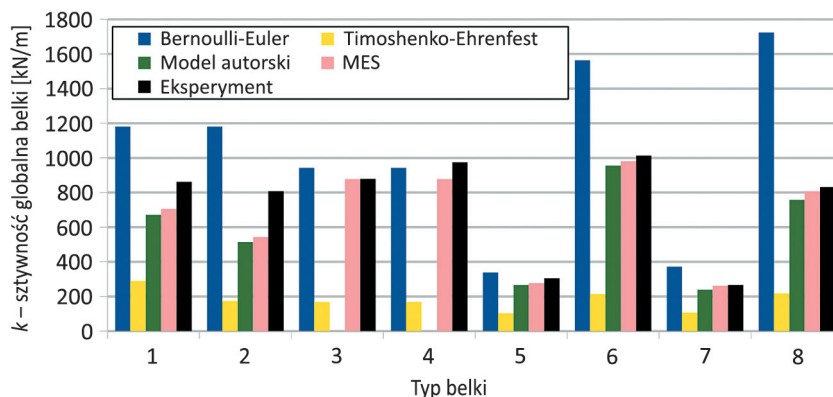
$$k = \left[ \frac{23}{1296} \frac{L^3}{D_b} \right]^{-1} \quad (8.59)$$

- model kompozytowej belki Timoshenki–Ehrenfesta:

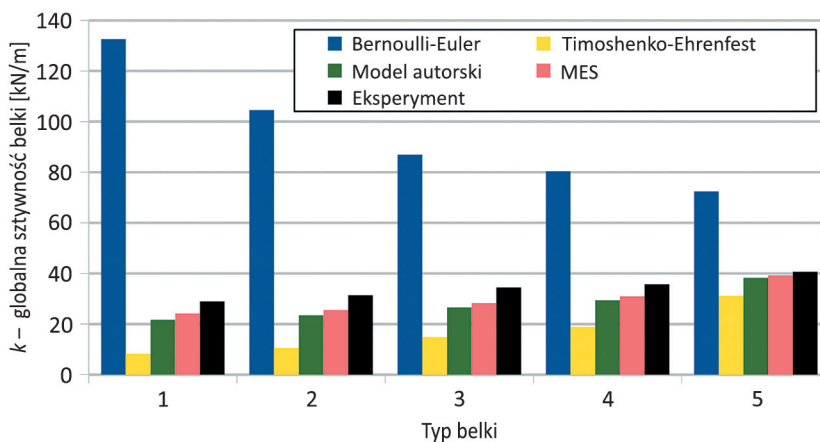
$$k = \left[ \frac{23}{1296} \frac{L^3}{D_b} + \frac{L}{6\kappa D_s} \right]^{-1} \quad (8.60)$$

Wzór analityczny na sztywność pięciowarstwowej belki kompozytowej w czteropunktowym zginaniu, wynikający z autorskiego modelu obliczeniowego, jest zbyt

złożony. W poniższych zestawieniach oszacowanie za pomocą zaproponowanego modelu analitycznego wyznaczono, rozwiązując zagadnienie brzegowe metodą różnic skończonych (MRS). Brak wyników dla modelu autorskiego dla belek typu 3 i 4 (o grubości skleiny „DX”) wynika z faktu, że dla grubości skleiny dążącej do 0 parametry modelu dążą do nieskończoności i sformułowanie zagadnienia staje się matematycznie niepoprawne. Uwaga ta dotyczy również oszacowań naprężeń.

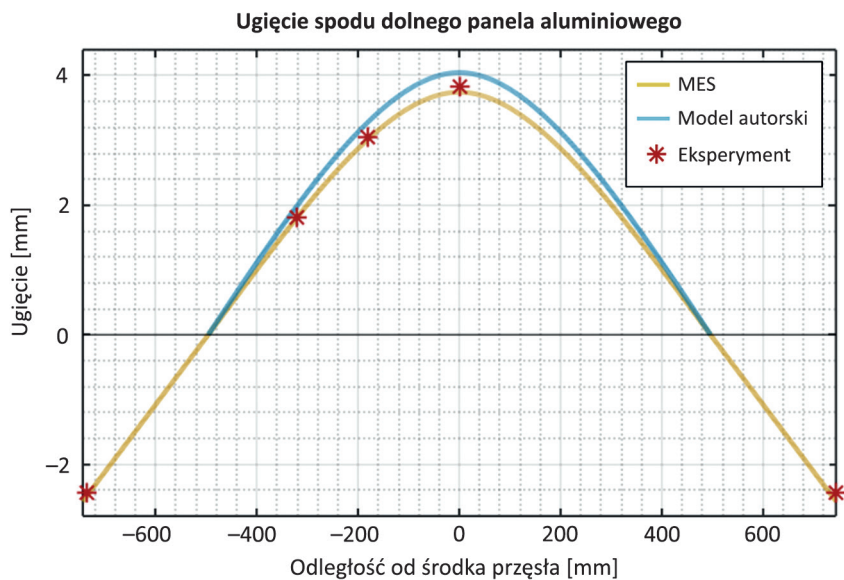


Rys. 82. Porównanie globalnej sztywności pięciowarstwowych belek wykonanych z drewna i sklejki (numeracja typów belek zgodnie z tabelą 6) (Szeptyński 2020b)

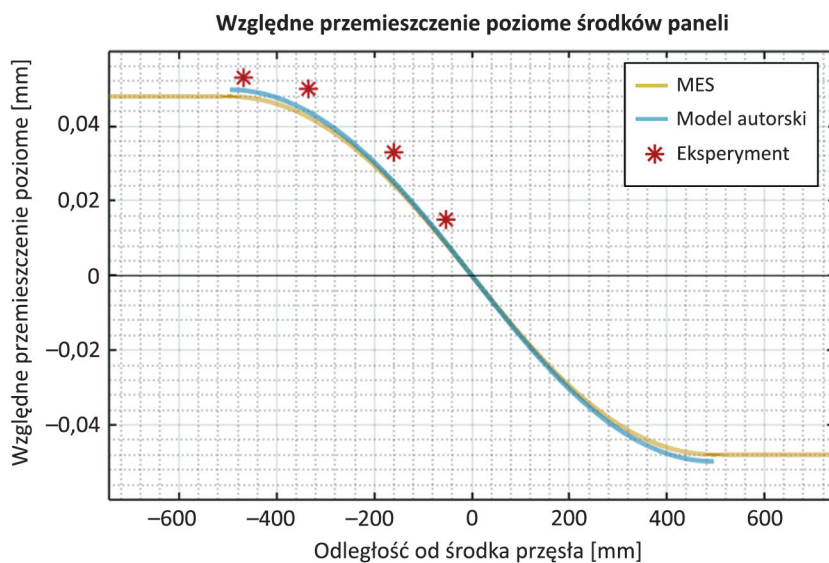


Rys. 83. Porównanie globalnej sztywności trójwarstwowych belek aluminiowych (numeracja typów belek zgodnie z tabelą 7) (Szeptyński 2020b)

Na rysunkach 84 i 85 przedstawiono porównanie przewidywań teoretycznych, symulacji numerycznych (trójwymiarowy model MES) i wyników doświadczalnych, dotyczących przemieszczeń pionowych i względnych przemieszczeń poziomych paneli aluminiowych w trójwarstwowej belce kompozytowej poddanej trójpunktowemu zginaniu.



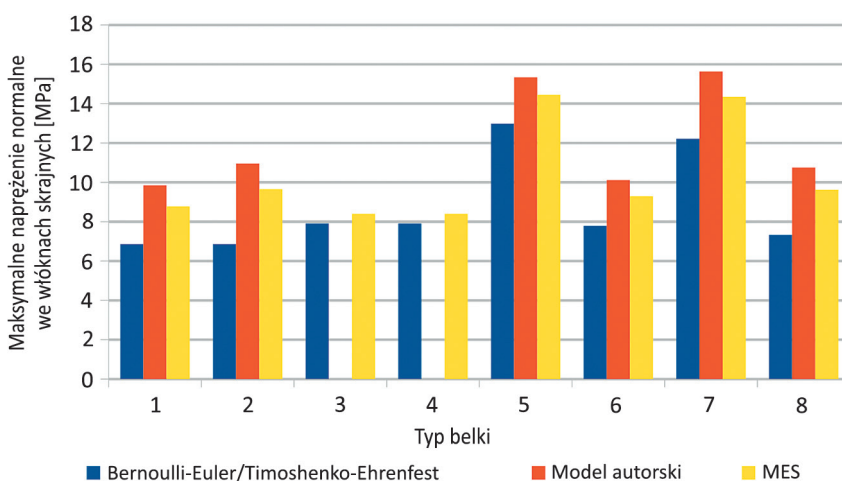
Rys. 84. Przesunięcia pionowe paneli aluminiowych w trójwarstwowej belce kompozytowej poddanej zginaniu trójpunktowemu (Szeptyński 2022)



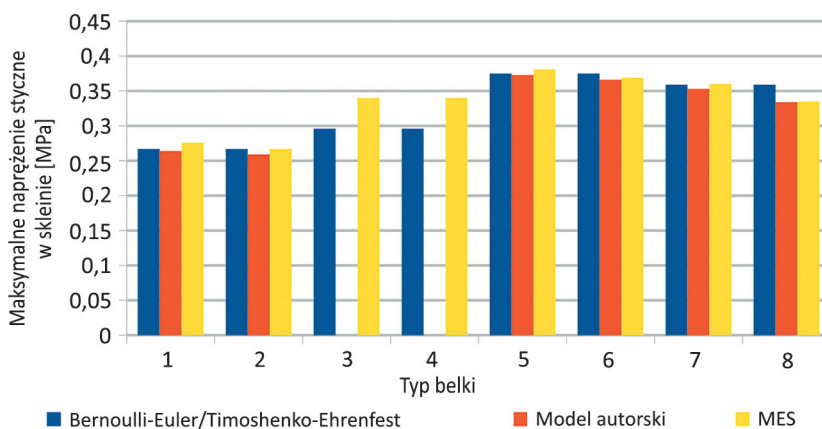
Rys. 85. Względne przemieszczenia poziome środków paneli aluminiowych w trójwarstwowej belce kompozytowej poddanej zginaniu trójpunktowemu (Szeptyński 2022)

### 8.2.2. Naprężenie normalne i naprężenie styczne w skleinie

Na rysunkach 86 i 87 przedstawiono porównanie oszacowań na podstawie zaproponowanego modelu analitycznego (wyniki MRS) oraz oszacowań numerycznych (dwuwymiarowy model MES) dla maksymalnej wartości naprężenia normalnego w panelach oraz naprężenia stycznego w skleinach pięciowarstwowej belki kompozytowej.



Rys. 86. Porównanie oszacowań maksymalnego naprężenia normalnego w panelach belek wykonanych z drewna i sklejki (numeracja typów belek zgodnie z tabelą 6) (Szeptyński 2020b)



Rys. 87. Porównanie oszacowań maksymalnego naprężenia stycznego w skleinach belek wykonanych z drewna i sklejki (numeracja typów belek zgodnie z tabelą 6) (Szeptyński 2020b)

Większe wartości maksymalnego naprężenia normalnego dla belek typu 5 i 7 należy zapewne tłumaczyć bardziej nierównomiernym rozkładem naprężenia na długości belek tego typu, związanym z odpowiadającymi im konfiguracjami parametrów mechanicznych i geometrycznych.

Na rysunkach 88 i 89 przedstawiono porównanie oszacowań teoretycznych (rozwiązanie analityczne) i numerycznych (trójwymiarowy model MES) rozkładów naprężenia normalnego i stycznego w przekrojach belek kompozytowych. Zlokalizowane na niewielkim obszarze obciążenie oraz podparcie skutkują oczywiście obecnością zaburzeń w rozkładzie naprężenia w przekroju poprzecznym belki – zjawiska te uwzględnione być mogą jedynie w modelu MES. Dlatego, w celu porównania przewidywań teoretycznych oraz wyników symulacji numerycznej, wykresy rozkładu naprężenia wykonano dla przekrojów znajdujących się w połowie odległości między przekrojami podpartymi i obciążonymi. Poniżej zestawiono rozkłady naprężenia dla belki trójwarstwowej (rys. 88).

W przypadku symetrycznej belki trójwarstwowej zaproponowany model analityczny umożliwi wyprowadzenie zamkniętych wzorów na oszacowanie naprężenia maksymalnego. W przypadku zginania trójpunktowego maksymalne naprężenie normalne we włóknach skrajnych przekroju przęsłowego wyraża się następującym wzorem:

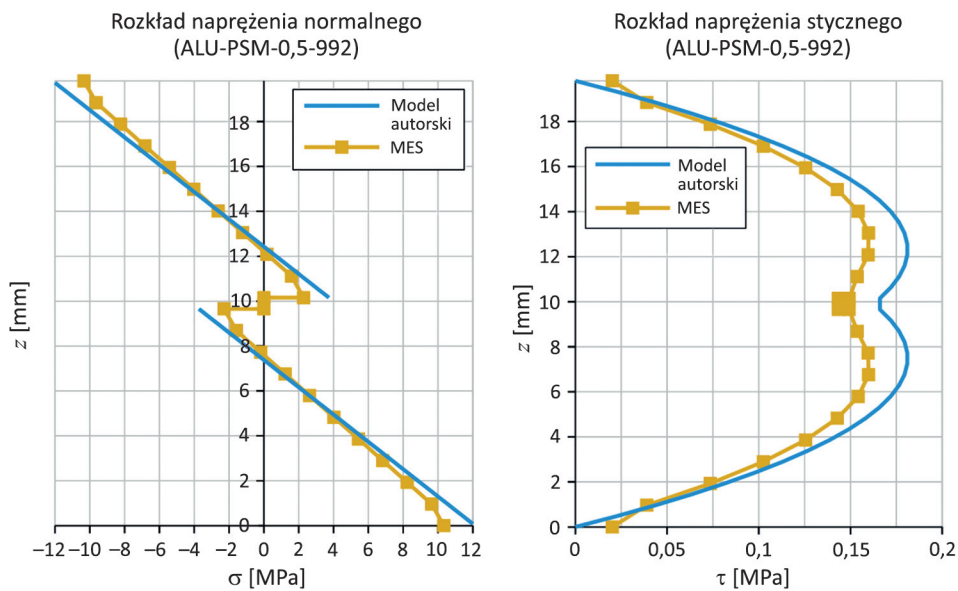
$$\sigma_{\max} = \frac{PL^2}{bh^3} \frac{12\pi_1\pi_2\lambda_7(1+e^{2\lambda_7}) + 3\pi_1(2\pi_2 - \pi_1\pi_3)(1-e^{2\lambda_7})}{2\lambda_7^3(1+e^{2\lambda_7})} \quad (8.61)$$

W przypadku zginania trójpunktowego maksymalne naprężenie styczne w sklejenie w przekroju przęsłowym wyraża się wzorem:

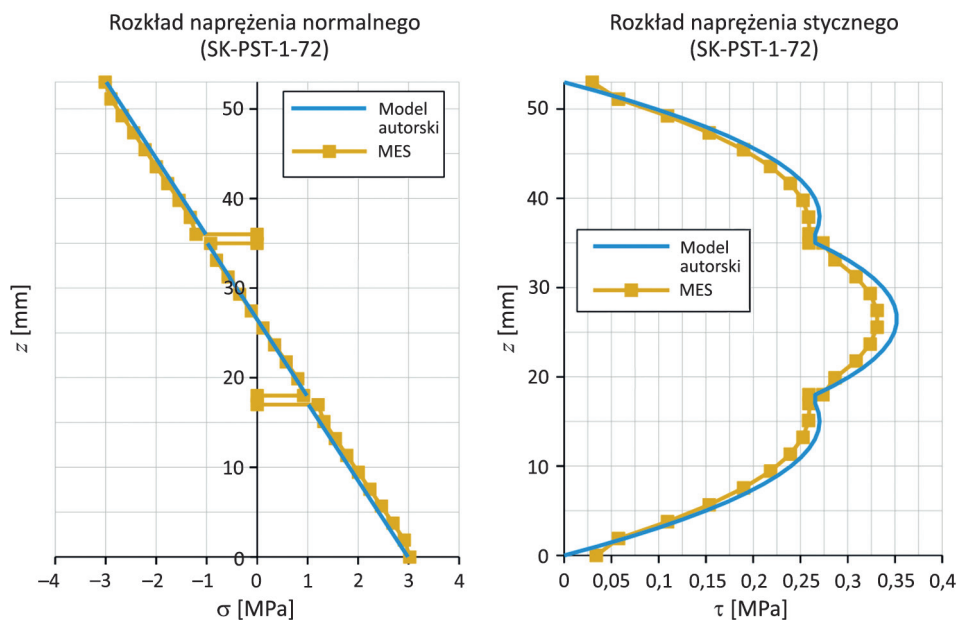
$$\tau_{\max} = \frac{P}{bt} \frac{G}{E} \frac{3(e^{\lambda_7} - 1)^2}{\pi_1^2\lambda_7^2(e^{2\lambda_7} + 1)} \quad (8.62)$$

Poniżej zestawiono rozkłady naprężenia dla belki pięciowarstwowej (rys. 89).

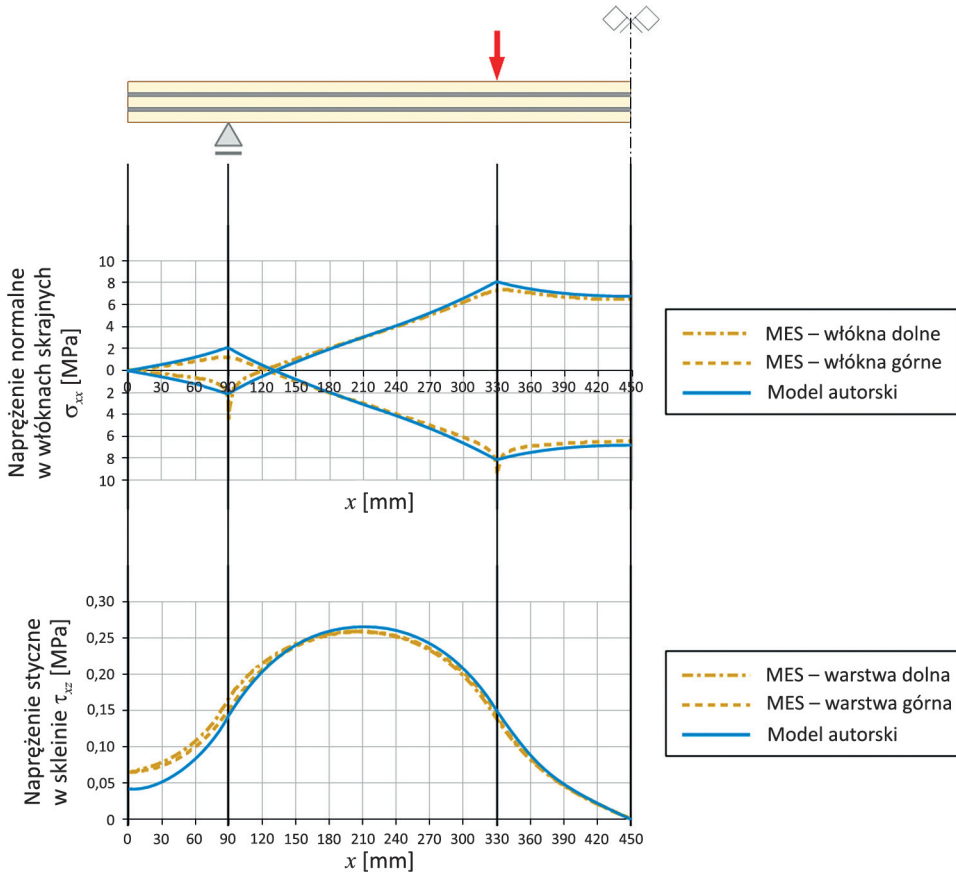
Na rysunku 90 przedstawiono porównanie rozkładów maksymalnego naprężenia normalnego w skrajnych włóknach górnych i dolnych oraz rozkładów naprężenia stycznego w górnej i dolnej sklejenie belki pięciowarstwowej poddanej czteropunktowemu zginaniu. Porównano przewidywania teoretyczne (rozwiązanie analityczne) oraz wyniki symulacji numerycznej (trójwymiarowy model MES).



Rys. 88. Rozkłady naprężenia w przekrojach belki trójwarstwowej (Szeptyński 2022)



Rys. 89. Rozkłady naprężenia w przekrojach belki pięciowarstwowej (Szeptyński 2022)



Rys. 90. Rozkłady naprężenia na długości belki pięciowarstwowej (Szeptyński 2022)

### 8.2.3. Wnioski

W świetle zaprezentowanych powyżej wyników analiz można stwierdzić, że:

- Zaproponowany analityczny model kompozytowej belki wielowarstwowej dostarcza dobrych oszacowań sztywności belki oraz wielkości naprężenia jedynie dla cienkich sklein, grubszych jednak od najcieńszej możliwej warstwy zapewniającej adhezję.
- Błąd względny oszacowania globalnej sztywności belek z cienkimi skleina-  
mi za pomocą autorskiego modelu w stosunku do danych doświadczalnych wynosi w przybliżeniu 10%, przy czym każdorazowo jest to oszacowanie z niedomiarem. Należy jednak zwrócić uwagę, że podobną dokładność niedoszacowania daje dwuwymiarowy model MES. Nasuwa się przypuszczenie, że przyjęte w obydwu modelach parametry obliczeniowe mogą odbiegać



od wartości rzeczywistych – dotyczy to przede wszystkim belek drewnianych i wykonanych ze sklejki, dla których doświadczalne oszacowania stałych sprężystych charakteryzują się dużą zmiennością. Innym powodem zaobserwowanych różnic może być wpływ nieliniowości zjawisk rzeczywistych (lokalnie duże odkształcenia skleiny w obszarach brzegowych, nieliniowa charakterystyka fizyczna materiału skleiny), które pominięte są zarówno w przyjętym liniowym modelu analitycznym, jak i w liniowych symulacjach MES.

- Model Bernoulliego–Eulera dostarcza oszacowań globalnej sztywności belki ze znacznym nadmiarem.
- Model Timoshenki–Ehrenfesta dostarcza oszacowań globalnej sztywności belki ze znacznym niedomiarem.
- Oszacowanie wielkości naprężenia stycznego jest podobne dla każdego z modeli analitycznych oraz dla symulacji numerycznych.
- Zaproponowany model analityczny przewiduje nieznacznie większe naprężenia normalne we włóknach skrajnych w stosunku do wyników symulacji numerycznych. Różnica względna wynosi około 10%.
- Daje się zaobserwować nieznaczne różnice w oszacowaniach zarówno globalnej sztywności belek kompozytowych, jak i wielkości naprężenia normalnego oraz stycznego za pomocą dwu- i trójwymiarowego modelu MES. Różnice te nie wpływają jednak istotnie na analizę porównawczą modeli obliczeniowych.

## Podsumowanie

Minione dekady pozwalają nam być świadkami gwałtownego wzrostu zainteresowania złączami klejowymi. Ich popularność wynika przede wszystkim z ogromnego potencjału użytkowego, związanego z faktem, że skleiny polimerowe są w stanie zapewnić połączenie praktycznie dowolnej pary materiałów. Pozwala to na tworzenie metamateriałów, elementów konstrukcyjnych i całych konstrukcji kompozytowych, które w bardzo efektywny sposób wykorzystują zalety mechaniczne materiałów składowych, kompensując przy tym ich ewentualne wady. Złącza tego rodzaju powszechnie wykorzystywane są w przemyśle lotniczym i motoryzacyjnym, a coraz częściej spotyka się również ich zastosowanie w inżynierii lądowej. Współczesne technologie wytwarzania klejów oraz wykonywania złączy zapewniają dobre i powtarzalne własności mechaniczne oraz trwałość takich połączeń. Rozbudowana teoria nieliniowych materiałów hipersprężystych oraz lepkosprężystych oraz jej implementacja w zaawansowanych programach metody elementów skończonych pozwala na wszechstronny i dokładny opis zachowania złączy klejowych w zagadnieniach statycznych, dynamicznych i reologicznych, zarówno w zakresie małych, jak i dużych odkształceń. Z uwagi na nieprzeciętny stopień skomplikowania owych teorii stosowane metody analityczne są z konieczności metodami numerycznymi, które tylko w ograniczonym stopniu pozwalają wejrzeć w wewnętrzną strukturę matematyczną uzyskiwanych rozwiązań.

Jako podejście alternatywne jawi się tutaj zastosowanie modeli analitycznych. Począwszy od lat trzydziestych minionego stulecia opracowano kilkadziesiąt modeli tego typu, stosując bardzo różnorodne podejścia – od formułowania problemu lokalnie przez założenie kinematyki elementu prętowego lub belkowego, przez uogólnione sformułowania lokalne, aż po wykorzystanie twierdzeń wariacyjnych teorii sprężystości i związanych z nimi sformułowań globalnych. Pierwotnie typowym podejściem było formułowanie modeli w kategoriach naprężeń. Wykorzystanie twierdzeń energetycznych upowszechniło wykorzystanie stosownych funkcji naprężeń. Stosunkowo rzadsze jest formułowanie zagadnienia w kategoriach przemieszczeń. O ile najwcześniejsze modele analityczne dotyczyły wyłącznie złączy o elementach jednorodnych i izotropowych, o tyle wraz z rozwojem teorii belek i płyt laminowanych możliwe stało się precyzyjne opisanie również takich złączy, w których elementy łączone są wykonane z anizotropowych wielowarstwowych kompozytów (laminatów). Kolejne pojawiające się propozycje pozwoliły na uwzględnienie wielu zjawisk, które pomijane były w propozycjach wcześniejszych – deformacji postaciowej elementów łączonych, deformacji podłużnej skleiny, niejednorodności

rozkładu naprężenia stycznego w przekroju skleiny czy jednorodnego warunku brzegowego na swobodnym krańcu skleiny. Te najbardziej zaawansowane modele analityczne wykazują niejednokrotnie bardzo dobrą zgodność z wynikami symulacji numerycznych i z wynikami doświadczalnymi.

We wszystkich omawianych propozycjach stosuje się podejścia, które ostatecznie mają prowadzić do sformułowania równań rządzących w postaci równania lub układu równań różniczkowych zwyczajnych, nawet jeśli punktem wyjścia były równania cząstkowe opisujące rozkłady dwuwymiarowe. Jest to oczywiście związane z faktem, że teoria i metody rozwiązywania układów równań zwyczajnych (zarówno analityczne, jak i numeryczne) umożliwiają uzyskanie ścisłych rozwiązań w postaci zamkniętego wzoru dla znacznie szerszej klasy równań, niż to się dzieje w przypadku równań cząstkowych. Powszechnie przyjmuje się również, że własności mechaniczne elementów złącza nie zmieniają się na długości złącza, co pozwala przyjąć stałe współczynniki w równaniach rządzących. Większość proponowanych modeli zakłada jednocześnie liniowe związki konstytutywne i geometryczne, co skutkuje uzyskaniem równań rządzących w postaci układu liniowego o stałych współczynnikach – najprostszej klasy równań różniczkowych zwyczajnych, dla których znane są algorytmy wyznaczania rozwiązań analitycznych. W większości są to równania jednorodne. W przypadku złączy symetrycznych możliwe jest rozprzęgnięcie równań na naprężenie styczne (równanie trzeciego rzędu) i odrywające (równanie czwartego rzędu) i wyznaczenie ich rozwiązań w postaci stosownej kombinacji funkcji wykładniczych. Z uwagi na strukturę równania najczęściej są to funkcje hiperboliczne i/lub trygonometryczne. W przypadku złączy niesymetrycznych konieczne jest rozwiązanie układu równań różniczkowych lub sprowadzenie go do równania wyższego rzędu (siódmego lub ósmego) na rozkład naprężenia stycznego. Analogiczne spostrzeżenia można poczynić w kontekście modeli wykorzystujących sformułowanie globalne przy użyciu stosownie dobranych funkcji naprężeń.

Faktem jest jednak, że te modele, które umożliwiają zapisanie rozwiązania w postaci zamkniętego wzoru, są z reguły modelami liniowymi, które nie są w stanie uwzględnić dwóch aspektów kluczowych w odpowiedzi mechanicznej wysoko odkształcalnych polimerów – dużych odkształceń (nieliniowości geometrycznej) oraz nieliniowego charakteru związku konstytutywnego (nieliniowości fizycznej). Niejednokrotnie podejmowano próby uwzględnienia w modelach analitycznych zjawisk nieliniowych – przede wszystkim nieliniowego związku konstytutywnego bądź to materiału elementu łączonego, bądź materiału skleiny. Te modele analityczne, które uwzględniają wspomniane zjawiska, rządzone są nieliniowymi równaniami różniczkowymi, dla których z reguły nie jest możliwe znalezienie rozwiązania w postaci zamkniętej. Podobnie jak zastosowanie teorii plastyczności istotnie powiększa zakres dopuszczalnych obciążeń dla konstrukcji stalowych, podobnie wykorzystanie nieliniowego zakresu pracy kleju może potencjalnie poszerzyć pole

zastosowań sklein polimerowych. Dostrzec można zatem potrzebę opracowania analitycznych oszacowań lub uproszczonych modeli, które wykazywałyby dobrą zgodność zarówno jakościową, jak i ilościową z obserwacjami doświadczalnymi, a które dane byłyby na tyle prostym sformułowaniem matematycznym, aby umożliwić ich praktyczne wykorzystanie nie tylko w jednostkach badawczych, lecz również w biurach projektowych lub przy formułowaniu zaleceń normowych z zakresu projektowania i analizy ustrojów kompozytowych.

Podobnie ma się rzecz z uwzględnieniem lepkiego (reologicznego) charakteru pracy polimerowych sklein oraz silnej zależności związków konstytutywnych od temperatury. Aspekty te odgrywają kluczową rolę w takich praktycznych zagadnieniach inżynierskich jak pełzanie, relaksacja i spowodowane nią straty siły sprężającej w elementach kotwionych klejem, odpowiedź na wymuszenie dynamiczne, tłumienie drgań, zjawiska zmęczeniowe, praca w podwyższonej temperaturze lub w warunkach pożarowych czy starzenie. Wykorzystanie standardowych technik analitycznych (analogia sprężysto-lepkosprężysta, superpozycja czasu i temperatury) napotyka pewne ograniczenia w zakresie dopuszczalnych zastosowań, związanych z nieliniowością charakterystyki materiałowej, sprzężeniem pól temperatury, odkształcenia i naprężenia, czy wreszcie zależnością charakterystyki mechanicznej materiału od temperatury. W przypadku wykorzystania metod numerycznych konieczne jest posługiwanie się nieraz trudnymi do wyznaczenia parametrami charakteryzującymi taki materiał. Również i w tej sytuacji opis tych specyficznych zjawisk jest, póki co, domeną przede wszystkim pracowników naukowych, nie zaś inżynierów projektantów.

Wobec coraz szerszego stosowania złączy klejowych w przemyśle należy spodziewać się, że w perspektywie najbliższych dekad powszechne może stać się wykorzystanie sklein polimerowych jako elementu nośnego. Nadanie tak odpowiedzialnej funkcji w ustroju mechanicznym może się jednak odbyć wyłącznie w sytuacji, gdy dostępne są wiarygodne narzędzia prognozujące odpowiedź takiego elementu na różnorodne sytuacje projektowe. Choć zatem zjawiska quasi-statycznego obciążenia sklein ścinanych dają się opisać z zadowalającą dokładnością przy użyciu różnorodnych modeli analitycznych, wydaje się, że wciąż istnieje potrzeba opracowania uogólnionych modeli, które umożliwiłyby formułowanie bezpiecznych zaleceń projektowych.

## Literatura

- Abrate S., Di Sciuva M. (2017), *Equivalent single layer theories for composite and sandwich structures: A review*, *Composite Structures*, 179, 482–494.
- Abrate S., Di Sciuva M. (2018), *Multilayer Models for Composite and Sandwich Structures*, [in:] P.W.R. Beaumont, C.H. Zweben (eds), *Comprehensive Composite Materials II*, Elsevier, 399–425.
- Adams R.D., Comyn J., Wake W.Ch. (1997), *Structural Adhesive Joints in Engineering*, Chapman and Hall, London.
- Adams R.D., Mallick V. (1992), *A Method for the Stress Analysis of Lap Joints*, *The Journal of Adhesion*, 38, 199–217.
- Allman D.J. (1977), *A Theory for Elastic Stresses in Adhesive Bonded Lap Joints*, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 30, 415–436.
- Amorim F.C., Reis J.M.L., Souza J.F.B., da Costa Mattos H.S. (2018), *Investigation of UV exposure in adhesively bonded single lap joints*, *Applied Adhesion Science*, 6, 2.
- Arenas J.M., Narbón J.J., Alía C. (2010), *Optimum adhesive thickness in structural adhesives joints using statistical techniques based on Weibull distribution*, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 30, 160–165.
- Arruda E.M., Boyce M.C. (1993), *A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41, 389–412.
- Atmane H.A., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.-A. (2010), *Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory*, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6, 113–121.
- Beatty M.F. (2008), *On Constitutive Models for Limited Elastic, Molecular Based Materials*, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 13, 375–387.
- Bezemer A.A., Guyt C.B., Vlot A. (1998), *New impact specimen for adhesives: Optimization of high-speed-loaded adhesive joints*, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 18, 255–260.
- Bigwood D.A., Crocombe A.D. (1989), *Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints*, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 9, 229–242.
- Bigwood D.A., Crocombe A.D. (1990), *Non-linear adhesive bonded joint design analyses*, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 10, 31–41.

- Bigwood D.A., Crocombe A.D. (1992), *Development of a full elasto-plastic adhesive joint design analysis*, Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 27, 211–218.
- Bodnar A., Chrzanowski M., Latus P. (2006), *Reologia konstrukcji prętowych*, Politechnika Krakowska, Kraków.
- Broughton W. (2012), *Assessing the moisture resistance of adhesives for marine environments*, Adhesives in Marine Engineering, 155–186.
- Broughton W.R., Mera R.D., Hinopoulos G. (1999), *Cyclic Fatigue Testing of Adhesive Joints Test Method Assessment*, NPL Report CMMT(A), 191, <https://eprintspublications.npl.co.uk/1239/1/CMMT191.pdf>.
- de Bruyne N.A. (1944), *The Strength of glued joints*, Aircraft Engineering, 16, 115–118.
- Chen D., Cheng S. (1983), *An Analysis of Adhesive-Bonded Single-Lap Joints*, Journal of Applied Mechanics, 50, 109–115.
- Cheng S., Chen D., Shi Y. (1991), *Analysis of Adhesive-Bonded Joints with Nonidentical Adherends*, Journal of Engineering Mechanics, 117, 605–623.
- Christensen R.M. (1982), *Theory of Viscoelasticity*, 2<sup>nd</sup> ed., Academic Press, Mineola, NY.
- Cooper P.A., Sawyer J.W. (1979), *Critical Examination of Stresses in an Elastic Single Lap Joint*, [in:] *NASA Technical Paper 1507*.
- Cowper G.R. (1966), *The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory*, ASME Journal of Applied Mechanics, 33, 335–340.
- Darijani H., Naghdabadi R. (2010), *Constitutive modeling of solids at finite deformation using a second-order stress-strain relation*, International Journal of Engineering Science, 48, 223–236.
- Delale F., Erdogan F., Aydınoğlu M.N. (1980), *Stresses in Adhesively Bonded Joints: a Closed-Form Solution*, [in:] *Contractor Report 165638*, <https://ntrs.nasa.gov/citations/19810002912>.
- Elías-Zúñiga A., Beatty M.F. (2002), *Constitutive equations for amended non-Gaussian network models of rubber elasticity*, International Journal of Engineering Science, 40, 2265–2294.
- Elishakoff I. (2020), *Who developed the so-called Timoshenko beam theory?*, Mathematics and Mechanics of Solids, 25, 97–116.
- Farahani K., Naghdabadi R. (2003), *Basis free relations for the conjugate stresses of the strains based on the right stretch tensor*, International Journal of Solids and Structures, 40, 5887–5900.
- Fevry S., Latré S.K., Vandepitte D., Debruyne S., Hallez H. (2021), *Combination and interaction of ageing parameters on single lap shear adhesive joints*, International Journal of Adhesion and Adhesives, 111, 102978.

- Flamant A.-A. (1892), *Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement*, Les Comptes Rendus de l'Académie des sciences, 114, 1465.
- Forstig Y., Thomsen O.T., Mortensen F. (1999), *Analysis of Adhesive-Bonded Joints, Square-End, and Spew-Fillet – High-Order Theory Approach*, Journal of Engineering Mechanics, 125, 1298–1307.
- Gent A.N. (1996), *A New Constitutive Relation for Rubber*, Rubber Chemistry and Technology, 69, 59–61.
- Godzimirski J. (1988), *Analiza rozkładu naprężeń w spoinie klejowej połączenia zakładkowego w zakresie odkształceń plastycznych*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 26, 445–455.
- Goede M., Stehlin M., Rafflenbeul L., Kopp G., Beeh E. (2009), *Super Light Car – lightweight construction thanks to a multi-material design and function integration*, European Transport Research Review, 1, 5–10.
- Goland M., Reissner E. (1944), *The stresses in cemented joints*, Journal of Applied Mechanics, 11, A17–A27.
- Grant L.D.R., Adams R.D., da Silva L.F.M. (2009), *Experimental and numerical analysis of single-lap joints for the automotive industry*, International Journal of Adhesion and Adhesives, 29, 405–413.
- Grimes G.C., Greimann L.F. (1975), *Analysis of Discontinuities, Edge Effects, and Joints*, [in:] C.C. Chamis (ed.), *Composite Materials, vol. 8, Part II: Structural Design and Analysis*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 135–230.
- Hara E., Yokozeki T., Hatta H., Iwahori Y., Ishikawa T. (2010), *CFRP laminate out-of-plane tensile modulus determined by direct loading*, Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 41, 1538–1544.
- Hart-Smith L.J. (1973a), *Adhesive bonded single-lap joints*, NASA Report: CR-112236.
- Hart-Smith L.J. (1973b), *Adhesive bonded double-lap joints*, NASA Report: CR-112235.
- Hashin Z. (1965), *Viscoelastic Behavior of Heterogeneous Media*, Journal of Applied Mechanics, 32, 630–636.
- Hill R. (1968), *On constitutive inequalities for simple materials*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 16, 229–242.
- Hollaway L.C. (2003), *The evolution of and the way forward for advanced polymer composites in the civil infrastructure*, [in:] *Construction and Building Materials*, Elsevier, 365–378.
- Holman J.P. (2002), *Heat Transfer (in SI units)*, 10<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill Education (India), Pvt Limited.

- Horgan C.O., Saccomandi G. (2004), *Constitutive models for compressible nonlinearly elastic materials with limiting chain extensibility*, Journal of Elasticity, 77, 123–138.
- Houjou K., Shimamoto K., Akiyama H., Sato C. (2021), *Dependence of fatigue limit on stress ratio and influence of cyclic stress on shear strength for an adhesive lap joint*, The Journal of Adhesion, 97, 1153–1165.
- ISO 9664:1993: *Adhesives – Test methods for fatigue properties of structural adhesives in tensile shear*, <https://www.iso.org/obp/ui/fr/#iso:std:iso:9664:ed-1:v1:en>.
- James H.M., Guth E. (1943), *Theory of the elastic properties of rubber*, The Journal of Chemical Physics, 11, 455–481.
- Jedynak R. (2017), *New facts concerning the approximation of the inverse Langevin function*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 249, 8–25.
- Jurf R.A., Vinson J.R. (1985), *Effect of moisture on the static and viscoelastic shear properties of epoxy adhesives*, Journal of Materials Science, 20, 2979–2989.
- Kaneko T. (1975), *On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams*, Journal of Physics D: Applied Physics, 8, 1927–1936.
- Khaleel S.M., Rolfe B., Al-Ameri R., Hiliditch T. (2019), *Influence of Different UV Exposure Time on the CFRP/Aluminum Single Lap Joints Strength and Fracture Modes*, International Journal of Automotive Technology, 20, 379–387.
- Kisiel P. (2018), *Model approach for Polymer Flexible Joints in precast elements joints of concrete pavements*, PhD Thesis, Cracow University of Technology, <https://repozytorium.biblos.pk.edu.pl/resources/26120>.
- Korta J., Mlyniec A., Uhl T. (2015), *Experimental and numerical study on the effect of humidity-temperature cycling on structural multi-material adhesive joints*, Composites Part B: Engineering, 79, 621–630.
- Korta J., Uhl T. (2013), *Multi-material design optimization of a bus body structure*, Journal of KONES Powertrain and Transport, 20, 139–146.
- Kowal M. (2016), *Wzmacnianie elementów konstrukcji stalowych węglowymi taśmami kompozytowymi*, Politechnika Lubelska, Lublin.
- Kuhn W., Grün F. (1942), *Beziehungen zwischen elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung hochelastischer Stoffe*, Kolloid-Zeitschrift, 101, 248–271.
- Kwiecień A. (2012), *Stiff and flexible adhesives bonding CFRP to masonry substrates- Investigated in pull-off test and Single-Lap test*, Archives of Civil and Mechanical Engineering, 12, 228–239.
- Kwiecień A. (2015), *Modelowanie równań konstytutywnych polimerów hiper-sprężystych w złączach podatnych (eng. Modelling of constitutive equations of hyperelastic polymers in flexible joints)*, [w:] *Współczesna mechanika konstrukcji w projektowaniu inżynierskim*, Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Warszawa, 151–178.



- Kwiecień A., de Felice G., Oliveira D.V., Zając B., Bellini A., De Santis S., Ghiassi B., Lignola G.P., Lourenço P.B., Mazzotti C., Prota A. (2016), *Repair of composite-to-masonry bond using flexible matrix*, *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, 49, 2563–2580.
- Kwiecień A., Gams M., Rousakis T., Viskovic A., Korelc J. (2017), *Validation of a New Hyperviscoelastic Model for Deformable Polymers Used for Joints between RC Frames and Masonry Infills*, *Engineering Transactions*, 65, 113–121.
- Li D. (2021), *Layerwise Theories of Laminated Composite Structures and Their Applications: A Review*, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 28, 577–600.
- Liu J., Sawa T., Toratani H. (2000), *A two-dimensional stress analysis of single-lap adhesive joints of dissimilar adherends subjected to tensile loads*, *Journal of Adhesion Science and Technology*, 14, 43–66.
- Love A.E.H. (1906), *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 2<sup>nd</sup> ed., Cambridge University Press, Cambridge.
- Łagoda M. (2005), *Wzmacnianie mostów przez doklejanie elementów*, Monografia nr 322, Politechnika Krakowska, Kraków.
- Marzi S., Biel A., Stigh U. (2011), *On experimental methods to investigate the effect of layer thickness on the fracture behavior of adhesively bonded joints*, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 31, 840–850.
- Mirski Z., Piwowarczyk T. (2008), *Podstawy klejenia, kleje i ich właściwości*, *Przeгляд Spawalnictwa*, 80, 12–21.
- Mooney M. (1940), *A theory of large elastic deformation*, *Journal of Applied Physics*, 11, 582–592.
- Mortensen F., Thomsen O.T. (2002), *Analysis of adhesive bonded joints: A unified approach*, *Composites Science and Technology*, 62, 1011–1031.
- Murthy M.V.V. (1981), *An Improved Transverse Shear Deformation Theory for Laminated Anisotropic Plates*, *NASA Technical Paper 1903*.
- Naito K., Onta M., Kogo Y. (2012), *The effect of adhesive thickness on tensile and shear strength of polyimide adhesive*, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 36, 77–85.
- Nguyen T.-C., Bai Y., Zhao X.-L., Al-Mahaidi R. (2012), *Effects of ultraviolet radiation and associated elevated temperature on mechanical performance of steel/CFRP double strap joints*, *Composite Structures*, 94, 3563–3573.
- Nichols J., Totoev Y.Z. (1997), *Experimental determination of the dynamic Modulus of Elasticity of masonry units*, [in:] *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Brick and Block Masonry Conference*, <https://www.researchgate.net/publication/282875765>.
- Nowacki W. (1972), *Termosprężystość*, Ossolineum, Warszawa.

- Ogden R.W. (1972), *Large Deformation Isotropic Elasticity – On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences, 326, 565–584.
- Ogden R.W., Roxburgh D.G. (1999), *A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences, 455, 2861–2877.
- Ojalvo I.U., Eidinoff H.L. (1978), *Bond Thickness Effects upon Stresses in Single-Lap Adhesive Joints*, AIAA Journal, 16, 204–211.
- Olsson R.G. (1935), *Zur Berechnung der Frequenz der Transversalschwingung des prismatischen Stabes*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 15, 245.
- Pasternak H., Ciupack Y. (2014), *Development of Eurocode-based design rules for adhesive bonded joints*, International Journal of Adhesion and Adhesives, 53, 97–106.
- Piechnik S. (2007), *Mechanika techniczna ciała stałego*, Politechnika Krakowska, Kraków.
- Piekarczyk M. (2012), *Zastosowanie połączeń klejonych w konstrukcjach metalowych*, Czasopismo Techniczne (Technical Transactions), 1-B, 99–137.
- Piekarczyk M. (2013), *Zastosowanie technologii klejenia w metalowych konstrukcjach budowlanych*, Politechnika Krakowska, Kraków.
- Piekarczyk M. (2018), *Selected design problems of thin-walled steel members and connections in building structures*, Politechnika Krakowska, Kraków.
- Piekarczyk M. (2023), *Czy klejenie ma przyszłość?*, Konstrukcje Stalowe, 2 (181), 34–37.
- Pirvics J. (1974), *Two Dimensional Displacement-Stress Distributions in Adhesive Bonded Composite Structures*, The Journal of Adhesion, 6, 207–228.
- Polyanin A.D., Zaitsev V.F. (2003), *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2<sup>nd</sup> ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Prager W. (1961), *An elementary discussion of definitions of stress rate*, Quarterly of Applied Mathematics, 18, 403–407.
- Reddy J.N. (1984), *A simple higher-order theory for laminated composite plates*, Journal of Applied Mechanics, 51, 745–752.
- Renton W.J., Vinson J.R. (1973), *Technical Report 73-0494. The analysis and design of composite material bonded joints under static and fatigue loadings*, <https://www.abbottaerospace.com/downloads/ad-766932-the-analysis-and-design-of-composite-material-bonded-joints-under-static-and-fatigue-loadings/>.
- Renton W.J., Vinson J.R. (1977), *Analysis of Adhesively Bonded Joints Between Panels of Composite Materials*, Journal of Applied Mechanics, 44, 101–106.
- Rickaby S.R., Scott N.H. (2015), *A comparison of limited-stretch models of rubber elasticity*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 68, 71–86.

- Rivlin R.S. (1948), *Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences, 241, 379–397.
- Rivlin R.S., Saunders D.W. (1997), *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials VII. Experiments on the deformation of rubber*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences, 243, 251–288.
- Rośkiewicz M., Godzimirski J., Komorek A., Jaształ M. (2021), *The effect of adhesive layer thickness on joint static strength*, Materials, 14, 1–14.
- Rychlewski J. (1991), *Wymiary i podobieństwo*, PWN, Warszawa.
- Rychlewski J., Blinowski A. (1998), *Pure Shears in the Mechanics of Materials*, Mathematics and Mechanics of Solids, 3, 471–503.
- Sahellie S., Pasternak H. (2015a), *Epoxy- and acrylic-bonded joints for strengthening lightweight steel girders*, Stahlbau, 84, 577–583.
- Sahellie S., Pasternak H. (2015b), *Expectancy of the lifetime of bonded steel joints due to long-term shear loading*, Archives of Civil and Mechanical Engineering, 15, 1061–1069.
- Schapery R.A. (1967), *Stress Analysis of Viscoelastic Composite Materials*, Journal of Composite Materials, 1, 228–267.
- Schickhofer G. (2013), Monographic Series TU Graz: Starrer und nachgiebiger Verbund bei geschichteten, flächenhaften Holzstrukturen, Verlag der Technischen Universität Graz, Graz.
- Schlichting H., Gersten K. (2016), *Boundary-Layer Theory*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Seth B.R. (1961), *Generalized strain measure with applications to physical problems*, MRC Technical Summary Report #248.
- Shrive N.G. (2006), *The use of fibre reinforced polymers to improve seismic resistance of masonry*, [in:] *Construction and Building Materials*, Elsevier, 269–277.
- da Silva L.F.M., Carbas R.J.C., Critchlow G.W., Figueiredo M.A.V., Brown K. (2009a), *Effect of material, geometry, surface treatment and environment on the shear strength of single lap joints*, International Journal of Adhesion and Adhesives, 29, 621–632.
- da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Spelt J.K. (2009b), *Analytical models of adhesively bonded joints – Part I: Literature survey*, International Journal of Adhesion and Adhesives, 29, 319–330.
- da Silva L.F.M., Öchsner A., Adams R.D. (eds) (2011), *Handbook of Adhesion Technology*, Springer, Cham.
- Smeltzer S.S., Klang E.C. (2003), *Analysis of elastic-plastic adhesively bonded joints with anisotropic adherends*, [in:] *Proceedings of the American Society for Composites*, 18<sup>th</sup> Annual Technical Conference. Gainesville, FL, USA, 104.

- Srinivas S. (1975), *Analysis of Bonded Joints*, [in:] *NASA Technical Note D-7855*, <https://ntrs.nasa.gov/citations/19750013601>.
- van Straalen I.J. (2000), *Development of Design Rules for Structural Adhesive Bonded Joints. A systematic Approach*, Delft.
- Szeptyński P. (2020a), *Szczegółowe omówienie podstawowych zagadnień teorii sprężystości*, Politechnika Krakowska, Kraków.
- Szeptyński P. (2020b), *Comparison and experimental verification of simplified one-dimensional linear elastic models of multilayer sandwich beams*, *Composite Structures*, 241, 112088.
- Szeptyński P. (2022), *Closed-form analytical solution to the problem of bending of a multilayer composite beam – derivation and verification*, *Composite Structures*, 291, 115611.
- Szeptyński P., Gams M., Kwiecień A. (2021), *Modelling of flexible adhesives in simple mechanical states with the use of the Darijani–Naghdbadi strain tensors and Kirchhoff–de Saint-Venant elastic potential*, *Polymers*, 13 (10), 1639.
- Szeptyński P., Nowak M. (2021), *Qualitative analysis of the influence of the non-linear material characteristics of flexible adhesive on the performance of lap joints*, *Composite Structures*, 260, 113539.
- Tessler A., Di Sciuva M., Gherlone M. (2010), *Refined Zigzag Theory for Homogeneous, Laminated Composite, and Sandwich Plates: A Homogeneous Limit Methodology for Zigzag Function Selection*, National Aeronautics and Space Administration.
- Thiel Ch., Voss J., Martin R.J., Neff P. (2019), *Shear, pure and simple*, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 112, 57–72.
- Timoshenko S.P., Gere J.M. (1984), *Mechanics of Materials*, 2<sup>nd</sup> ed., PWS-KENT Publishing Company, Boston.
- Tong L. (1996), *Bond strength for adhesive-bonded single-lap joints*, *Acta Mechanica*, 117, 101–113.
- Touratier M. (1991), *An efficient standard plate theory*, *International Journal of Engineering Science*, 29, 901–916.
- Troughton M.J. (ed.) (2009), *Adhesive Bonding*, [in:] *Handbook of Plastics Joining*, William Andrew Publishing, 145–173.
- Tsai M.Y., Oplinger D.W., Morton J. (1998), *Improved theoretical solutions for adhesive lap joints*, *International Journal of Solids and Structures*, 35, 1163–1185.
- University of Oslo (2011), *Lecture notes on generalized eigenvectors for systems with repeated eigenvalues*, [in:] *Course of Differential equations and optimal control theory*, 1–8, <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT2440/v11/undervisningsmateriale/genvektors.pdf>.
- Vo T.P., Thai H.T. (2012), *Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories*, *Composite Structures*, 94, 2513–2522.

- Volkersen O. (1938), *Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten*, Luftfahrtforschung, 15, 41–47.
- Wah T. (1973), *Stress Distribution in a Bonded Anisotropic Lap Joint*, Journal of Engineering Materials and Technology, 95, 174–181.
- Wang M.C., Guth E. (1952), *Statistical theory of networks of non-gaussian flexible chains*, The Journal of Chemical Physics, 20, 1144–1157.
- Wang R.X., Cui J., Sinclair A.N., Spelt J.K. (2003), *Strength of adhesive joints with adherend yielding: I. Analytical model*, The Journal of Adhesion, 97, 23–48.
- Warner H.R. (1972), *Kinetic Theory and Rheology of Dilute Suspensions of Finitely Extendible Dumbbells*, Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals, 11, 379–387.
- Weggemans D.M. (1967), *Adhesives Charts*, [in:] *Adhesion and Adhesives*, vol. 2, Elsevier, Amsterdam.
- Westergaard H.M. (1939), *Bearing Pressures and Cracks*, Journal of Applied Mechanics, 6, A49–53.
- Whitney J.M. (1987), *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic Publishing Company, Inc, Lancaster, PA.
- Williams M.L., Landel R.F., Ferry J.D. (1955), *The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids*, Journal of the American Chemical Society, 77, 3701–3707.
- Yang C., Pang S.S. (1996), *Stress-strain analysis of single-lap composite joints under tension*, Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME, 118, 247–255.
- Yeoh O.H. (1993), *Some forms of the strain energy function for rubber*, Rubber Chemistry and Technology, 66, 754–771.
- Zajac B. (2008), *Doświadczalno-analityczne określenie wyężenia polimerowej sklejiny w belkach zespolonych*, Politechnika Krakowska, <https://repozytorium.biblos.pk.edu.pl/resources/26539>.
- Zajac B. (2018), *Ścinane połączenia klejone sztywne i podatne pracujące w podwyższonej temperaturze*, Politechnika Krakowska, Kraków.
- Zenkour A.M. (2006), *Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates*, Applied Mathematical Modelling, 30, 67–84.
- Zhao B., Lu Z.-H., Lu Y.-N. (2011), *Closed-form solutions for elastic stress-strain analysis in unbalanced adhesive single-lap joints considering adherend deformations and bond thickness*, International Journal of Adhesion and Adhesives, 31, 434–445.
- Zhao B., Lu Z.-H., Lu Y.-N. (2014), *Two-dimensional analytical solution of elastic stresses for balanced single-lap joints – Variational method*, International Journal of Adhesion and Adhesives, 49, 115–126.

Żurawski D.I. (1856), *Sur la résistance d'un corps prismatique et d'une pièce composée en bois ou en tôle de fer à une force perpendiculaire à leur longueur*, Mémoires Ann Des Ponts Chaussées, 2, 328–351.

## Streszczenie

W pracy omówiono wiele aspektów modelowania analitycznego ścinanych połączeń klejowych, stosowanych zarówno w złączach zakładkowych, jak i wielowarstwowych belkach klejonych. Wśród omówionych zagadnień wymieniłem należy szczegółowy opis stanu prostego ścinania oraz przedstawienie różnorodnych nieliniowo sprężystych związków konstytutywnych dla tego stanu. Omówiono dziewięć odmiennych modeli analitycznych złączy zakładkowych, w tym model prętowy, modele belkowe oraz modele dwuwymiarowe wykorzystujące zasady wariacyjne teorii sprężystości. W ramach przeglądu pokazano, w jaki sposób w modelowaniu analitycznym można uwzględnić pewne specyficzne aspekty pracy złączy zakładkowych, a mianowicie: nieliniowość charakterystyki mechanicznej materiału skleiny lub elementów łączonych, niejednorodność rozkładu naprężenia stycznego w przekroju poprzecznym skleiny, wydłużenie skleiny, deformację postaciową elementów łączonych, anizotropię elementów łączonych oraz warunki brzegowe na swobodnym brzegu skleiny. Uogólniono wzory Hart-Smitha na maksymalne naprężenie styczne oraz brzegowy moment zginający, tak aby obowiązywały również dla złączy o ograniczonej długości. Wyprowadzono wzory na ogólną postać rozwiązania modelu Allmana oraz modelu Yanga–Panga. Uogólniono model Ojalvo i Eidinoffa na przypadek złącza niesymetrycznego. Wyprowadzono nieliniowy układ równań do wyznaczenia zakresu deformacji sprężysto-plastycznej dla niesymetrycznego złącza o biliniowej charakterystyce mechanicznej skleiny. Sporządzono skrypty obliczeniowe, za pomocą których porównano przewidywania wybranych modeli analitycznych. Zaprezentowano w szczególności autorski model wielowarstwowej belki kompozytowej – przedstawiono równania rządzące zginaniem belki, ogólny algorytm wyznaczania rozwiązania analitycznego oraz wyprowadzono zamknięte rozwiązania dla kilku wybranych przypadków. Teoretyczne oszacowania wielkości przemieszczeń i naprężeń, wynikające z zaproponowanego modelu, walidowano z wykorzystaniem zarówno symulacji numerycznych, jak i wyników doświadczalnych, uzyskując satysfakcjonującą zgodność między przywidywaniami modelu a rezultatami badań.

**Słowa kluczowe:** złącza klejowe, złącza ścinane, sprężystość, modelowanie, belki kompozytowe.

## **Analytical modelling of thin adhesive layers sheared in a quasi-static way**

### **A b s t r a c t**

A number of aspects of analytical modelling of adhesively bonded joints in shearing are discussed regarding both lap joints as well as laminated beams. These include detailed description of simple shear state and presentation of various nonlinear elastic constitutive relations applied to it. Nine distinct analytical models of lap joints are discussed including bar theories, beam theories and two-dimensional approaches making use of variational principles of elasticity. In this review it has been shown, how some specific aspects of performance of lap joints may be taken into account in analytical modelling, namely: nonlinearity of mechanical characteristics of adhesive and adherends, nonuniformity of the through-the-thickness distribution of shear stress in adhesive, elongation of adhesive layer, distortional deformation of adherends, anisotropy of adherends as well as load-free boundary conditions for adhesive layer. The formulae of Hart-Smith for maximum shear stress and end bending moment have been generalized for the cases of shorter lap lengths. The forms of general solutions for Allman's and Yang-Pang model have been derived. The model of Ojalvo and Eidinoff has been generalized for the case of different adherends. A nonlinear system of equations for has been derived, which enables determining the zone of elastic-plastic deformation in an asymmetric lap joint which bilinear mechanical characteristics of adhesive. Numerical scripts have been elaborated in order to perform comparison of estimates provided by chosen analytical models. Author's model of multilayer composite beam is presented in details – governing equations and general algorithm of finding analytical solution are presented, closed-form solutions for a number of chosen cases are derived. Theoretical predictions of displacements and stresses according to the proposed model have been verified with the use of both numerical simulations and experimental results and satisfactory agreement has been found between them.

**Keywords:** adhesive joints, shear lap joints, elasticity, modelling, composite beams.