ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

Dr. W. Jordan, Professor in Hannover und C. Steppes, Steuer-Rath in München.

1895. Heft 12. Band XXIV.

15. Juni.

Das Stangenplanimeter.

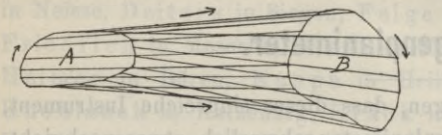
Es muss Verwunderung erregen, dass dieses sinnreiche Instrument, das an Genauigkeit Amsler's Polarplanimeter schwerlich etwas nachgiebt, an Wohlfeilheit und Haltbarkeit ihm aber überlegen ist, erst im vorigen Jahre eine allgemeine Beachtung gefunden hat, obwohl es schon 1886 erfunden und damals in der „tekniske Forenings Tidsskrift“ bekannt gemacht und theoretisch erläutert worden ist. In deutschen Zeitschriften ist, so viel ich weiss, die Theorie des Instrumentes noch nicht erörtert worden. Ich gebe sie hier im Wesentlichen nach jener ersten Veröffentlichung und nach einem Aufsatz des Erfinders Herrn H. Prytz in der Tidsskrift for Opmaalings- og Matrikulvaesen, Januar 1895.

Wenn die Endpunkte einer geraden Linie von der Länge p zwei geschlossene Curven beschreiben, so überstreicht dabei die Linie eine gewisse Fläche, die mit den Flächen der geschlossenen Curven in Beziehung steht. Wir wollen auf der geraden Linie eine Richtung festsetzen und demgemäss Anfangspunkt und Endpunkt unterscheiden. Wir wollen ferner bei der Bewegung der geraden Linie unterscheiden, ob sie sich nach rechts oder nach links bewegt von der in ihr festgesetzten Richtung aus gerechnet. Und zwar ist auch nicht ausgeschlossen, dass sie sich zum Theil nach rechts und zum Theil nach links bewegt. Nun soll jedes Flächentheilchen, das die Gerade überstreicht, positiv oder negativ in Rechnung gebracht werden, positiv wenn die Gerade oder ihr Theil sich dabei nach rechts bewegt, negativ wenn nach links. Wird ein Flächentheilchen mehrmals überstrichen, so wird es ebenso oft in Rechnung gebracht und zwar jedes Mal mit dem eben bestimmten Vorzeichen. Es sei F die so erhaltene Summe. Die Flächen, die von dem Anfangspunkte und dem Endpunkte der Geraden umschrieben werden, wollen wir positiv rechnen, wenn sie auf der rechten Seite der Bewegungsrichtung des Punktes liegen, negativ auf der linken. Und es kann, wenn die Bahnen sich selbst schneiden, vorkommen, dass ein Flächentheil positiv, ein anderer negativ gerechnet werden muss; auch kann es vorkommen, dass ein Flächentheil mehrmals auf verschiedenen

Bahnen umlaufen und demnach mehrmals gerechnet werden muss. Jeder kann sich complicirte Fälle bilden, wenn er seine Feder auf dem Papier kreuz und quer herumfahren und wieder zum Anfangspunkt zurückkehren lässt. Wie complicirt aber auch die Bahnen sein mögen, wenn A die Fläche ist, die der Anfangspunkt umschreibt, B die Fläche, die der Endpunkt beschreibt und F die Fläche, die die Gerade überstreicht, so ist

$$F = B - A.$$

Es möge genügen einen einfachen Fall zu zeichnen, bei dem die Richtigkeit des Satzes in die Augen springt. Der Leser wird sich dann auch die verwickelteren Fälle klar machen können.



A und B sind hier beide positiv. Von der Geraden wird B nach rechts hin überstrichen, A nach links und der zwischen A und B liegende Theil wird doppelt überstrichen, ein Mal nach rechts und ein Mal nach links. Die Figur kann als das Bild einer Röhre aufgefasst werden, deren Oeffnungen A und B sind. Die nach rechts überstrichene Fläche können wir als Darstellung der uns zugekehrten Wand der Röhre auffassen, die nach links überstrichene als die von uns abgekehrte Wand. B gehört der vorderen Wand, A der hinteren Wand an und $B - A$ stellt die Differenz der Projectionen beider Wände dar.

Einen allgemeinen für alle Fälle bindenden Beweis kann man auf analytischem Wege liefern. Seien $\xi\,\eta$ die Coordinaten des Anfangspunktes P und $x\,y$ die Coordinaten des Endpunktes Q. Bei einer unendlich kleinen Bewegung der Geraden möge P in P', Q in Q' übergehen, und die entsprechenden Aenderungen der Coordinaten seien $d\,\xi$, $d\,\eta$; $d\,x, dy$. Die unendlich kleine von der Geraden dabei überstrichene Fläche, die wir mit $d\,f$ bezeichnen wollen, ist gleich $P\,Q\,P' + P'\,Q\,Q'$, wobei $P\,Q\,P'$ positiv zu rechnen ist, wenn die Richtung $(P\,P')$ rechts von $(P\,Q)$ liegt, und $P'\,Q\,Q'$ ebenso positiv, wenn die Richtung $(Q\,Q')$ rechts von $(P'\,Q)$ liegt, andernfalls negativ.

Nun ist

$$P\,Q\,P' = \frac{1}{2}\Big((x-\xi)\,d\,\eta - (y-\eta)\,d\,\xi\Big)$$

und bis auf Grössen zweiter Ordnung

$$P'\,Q\,Q' = \frac{1}{2}\Big((x-\xi)\,d\,y - (y-\eta)\,d\,x\Big),$$

wenn die positive Richtung der y-Achse rechts von der positiven Richtung der x-Achse angenommen wird.

Mithin ist

$$d\,f = \frac{1}{2}\Big((x-\xi)\,d\,\eta - (y-\eta)\,d\,\xi\Big) + \frac{1}{2}\Big((x-\xi)\,d\,y - (y-\eta)\,d\,x\Big).$$

Die rechte Seite lässt sich in der folgenden Weise umformen:

$$df = -\frac{1}{2}(\xi\, d\eta - \eta\, d\xi) + \frac{1}{2}(x\, dy - y\, dx) + \frac{1}{2}(x\, d\eta + \eta\, dx)$$
$$-\frac{1}{2}(y\, d\xi + \xi\, dy)$$

oder

$$df = \frac{1}{2}(x\, dy - y\, dx) - \frac{1}{2}(\xi\, d\eta - \eta\, d\xi) + \frac{1}{2}\, d\,(x\eta - y\xi).$$

Auch diese Gleichung hätte man direct auf geometrischem Wege ableiten können. Ist O der Anfangspunkt der Coordinaten, so ist

$$\frac{1}{2}(x\, dy - y\, dx) = O\,Q\,Q'$$
$$\frac{1}{2}(\xi\, d\eta - \eta\, d\xi) = O\,P\,P'$$
$$\frac{1}{2}\, d\,(x\eta - y\xi) = O\,Q'\,P' - O\,Q\,P,$$

wo man sich rechts die Zeichen der Dreiecke positiv denken muss, wenn man in der Reihenfolge der Buchstaben laufend das Innere zur Rechten hat, andernfalls negativ. Dann überzeugt man sich leicht, dass die rechte Seite gleich $P\,Q\,Q'\,P'$ wird.

Die Integration giebt nun:

$$F = \frac{1}{2}\int(x\, dy - y\, dx) - \frac{1}{2}\int(\xi\, d\eta - \eta\, d\xi) + \frac{1}{2}\Big[x\eta - y\xi\Big].$$

Die eckige Klammer verschwindet, wenn die Gerade in ihre Anfangslage zurückkehrt, und wie man unmittelbar erkennt sind die beiden Integrale nichts anders als die Flächen B und A.

Auf der Gleichung

$$F = B - A$$

beruht sowohl die Theorie des Stangenplanimeters wie die des Amslerschen Polarplanimeters. Man kann die unendlich kleine Fläche df sich auch zusammengesetzt denken aus einem Parallelogramm und einem Sector, indem man sich die Verschiebung der Geraden aus einer Parallelverschiebung und einer Drehung um den Anfangspunkt zusammengesetzt denkt. Bezeichnet φ den Richtungswinkel der Geraden von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse, also rechts herum wachsend gezählt, und bezeichnet dh den senkrechten Abstand des Anfangspunktes der zweiten Lage von der ersten Lage der Geraden auf der rechten Seite der ersten Lage positiv gerechnet, auf der linken negativ, so ist

$$df = p\, dh + \frac{1}{2}p^2\, d\varphi.$$

Man könnte diese Gleichung auch aus dem oben erhaltenen Ausdruck für df ableiten, denn es ist

$$df = \frac{1}{2}\Big((x-\xi)\, d\eta - (y-\eta)\, d\xi\Big) + \frac{1}{2}\Big((x-\xi)\, dy - (y-\eta)\, dx\Big)$$
$$= (x-\xi)\, d\eta - (y-\eta)\, d\xi + \frac{1}{2}\Big((x-\xi)\, d\,(y-\eta) - (y-\eta)\, d\,(x-\xi)\Big),$$

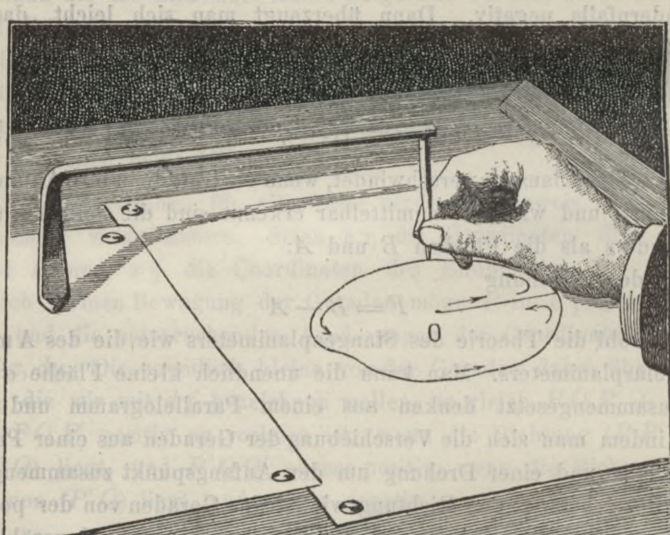
wo nun der erste Theil der rechten Seite gleich $p\,d\,h$, der zweite gleich $\frac{1}{2}p^2\,d\,\varphi$ ist.

Kehrt nun die Gerade wieder in ihre Anfangslage zurück, ohne sich dabei um sich selbst gedreht zu haben, so nimmt φ wieder denselben Werth an wie zu Anfang. $\int d\,\varphi$ ist Null und mithin

$$F = p\int d\,h.$$

Bei dem Amsler'schen Polarplanimeter dreht sich die Rolle bei jeder unendlich kleinen Verschiebung proportional $d\,h$ und die gesammte Drehung der Rolle wird mithin proportional $\int d\,h$ und somit proportional F. Zugleich wird der Anfangspunkt der Geraden gezwungen, auf der Peripherie eines Kreises zu bleiben und wenn er den Mittelpunkt nicht umschlingt, so muss $A = 0$ und mithin $F = B$ sein gleich dem Inhalt der vom Endpunkt der Geraden umfahrenen Fläche.

Bei dem Stangenplanimeter wird F auf andere Weise gewonnen. Das Instrument besteht aus einer Stange, die an beiden Enden rechtwinklig



umgebogen ist. Das eine Ende ist zugespitzt, das andere trägt eine kleine stark gekrümmte Schneide, deren Ebene durch die Spitze läuft. Man hält die Spitze mit zwei Fingern und führt sie in senkrechter Lage um die geschlossene Curve herum, dabei das Messerchen nachziehend. Kehrt man mit der Spitze wieder zum Ausgangspunkt zurück, so ist das Messerchen im Allgemeinen nicht zugleich in seinen Ausgangspunkt gelangt. Wir wollen uns aber denken, dass jetzt die Spitze festgehalten und das Messerchen aufgehoben und in einem Kreisbogen in seine Anfangslage zurückgeführt werde. Auf diese Bewegungen wollen wir die vorhergehenden Erörterungen anwenden, wobei der Berührungspunkt der Schneide der Anfangspunkt und die Spitze der Endpunkt der Geraden sein soll.

In dem ersten Theil der Bewegung ist $\int dh = 0$, weil die Schneide den Anfangspunkt zwingt, sich beständig in einer durch die Spitze laufenden Geraden zu bewegen. In dem zweiten Theil der Bewegung, wenn die Spitze festgehalten und das Messer senkrecht zu seiner Schneide in seine Anfangslage zurückgebracht wird, ist beständig $dh = -p\,d\varphi$ und mithin

$$\int dh = -\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} p\,d\varphi = p\,(\varphi_2 - \varphi_1),$$

wo φ_1 der Richtungswinkel der Geraden in der Anfangslage und φ_2 der Richtungswinkel am Ende des ersten Theiles der Bewegung ist. Für die ganze Bewegung muss $\int d\varphi = 0$ sein, vorausgesetzt, dass die Gerade sich nicht um sich selbst gedreht hat. Folglich ist

$$F = p^2\ (\varphi_2 - \varphi_1)$$

d. i., wenn wir vom Zeichen absehen, gleich der Länge der Geraden multiplicirt mit der Bogenlänge, die das Messerchen in dem zweiten Theil der Bewegung beschreibt. Ist der Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$ nicht zu gross, so kann man statt der Bogenlänge die Sehne nehmen.

Es ist uns nun aber nicht an der Fläche F, sondern an der Fläche B gelegen, die sich von F um A unterscheidet. Obwohl nun zwar keine Vorschrift bekannt ist, nach der man $A = 0$ machen könnte, so ist es, wie sogleich gezeigt werden soll, doch möglich den Werth von A klein zu machen, wo dann eine rohe Schätzung hinreicht, um den Werth von B aus F ausreichend genau zu erhalten.

Bezeichnen r und ϑ die Polarcoordinaten der Spitze und ist O der Anfangspunkt des Coordinatensystems, so hat man

$$x = r\cos\vartheta \qquad x - \xi = p\cos\varphi$$
$$y = r\sin\vartheta \qquad y - \eta = p\sin\varphi.$$

Wird nun die Spitze bewegt, so muss das Messer in der Richtung φ oder der entgegengesetzten folgen. Es ist also immer

$$\sin\varphi\,d\xi - \cos\varphi\,d\eta = 0.$$

Nun ist aber

$$dx - d\xi = -p\sin\varphi\,d\varphi$$
$$dy - d\eta = p\cos\varphi\,d\varphi$$

mithin, wenn man die erste Gleichung mit $-\sin\varphi$, die zweite mit $\cos\varphi$ multiplicirt und addirt

$$\cos\varphi\,dy - \sin\varphi\,dx = p\,d\varphi$$

Statt x und y führen wir hier r und ϑ ein.

Es ist
$$dx = \cos\vartheta\,dr - \sin\vartheta\,r\,d\vartheta$$
$$dy = \sin\vartheta\,dr + \cos\vartheta\,r\,d\vartheta$$

und daher

(1) $$\sin(\vartheta-\varphi)\,dr+\cos(\vartheta-\varphi)\,r\,d\vartheta=p\,d\varphi.$$

Bewegt sich die Spitze längs eines Radiusvector, so ist ϑ constant und mithin

$$\sin(\vartheta-\varphi)\,dr=p\,d\varphi.$$

Folglich ist längs eines Radiusvector die Function

$$\frac{r}{p}-\int\frac{d\varphi}{\sin(\vartheta-\varphi)}$$

constant. Statt dessen kann man auch sagen, dass die Function

$$e^{\frac{r}{p}}\tan\frac{\varphi-\vartheta}{2}$$

längs eines Radiusvector ihren Werth behält, deren Logarithmus jene Function ist. Dieser Werth werde mit V bezeichnet

$$V=e^{\frac{r}{p}}\tan\frac{\varphi-\vartheta}{2}.$$

Es ist demnach V nur von ϑ und nicht von r abhängig. D. h. es muss, wenn man in dem Ausdruck von dV durch (1) $d\varphi$ eliminirt, auch dr fortfallen.

In der That ist

$$dV=\frac{1}{p}e^{\frac{r}{p}}\tan\frac{\varphi-\vartheta}{2}\,dr+e^{\frac{r}{p}}\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi-\vartheta}{2}}\left(\frac{d\varphi}{2}-\frac{d\vartheta}{2}\right).$$

Da aber

$$d\varphi=-\frac{\sin(\varphi-\vartheta)}{p}\,dr+\frac{\cos(\varphi-\vartheta)}{p}\,r\,d\vartheta,$$

so wird

$$dV=e^{\frac{r}{p}}\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi-\vartheta}{2}}\left(\frac{\cos(\varphi-\vartheta)\,r}{p}-1\right)\frac{d\vartheta}{2}$$

$$=e^{\frac{r}{p}}\left(\frac{2r}{p}-\left(\frac{r}{p}+1\right)\left(1+\tan^2\frac{\varphi-\vartheta}{2}\right)\right)\frac{d\vartheta}{2}$$

$$=\left(\frac{r}{p}-1\right)e^{\frac{r}{p}}\frac{d\vartheta}{2}-\left(\frac{r}{p}+1\right)e^{-\frac{r}{p}}V^2\frac{d\vartheta}{2}$$

oder wenn man für $e^{\frac{r}{p}}$ und $e^{-\frac{r}{p}}$ die Reihenentwicklungen einsetzt

$$dV=-\frac{d\vartheta}{2}\left(1-\frac{1}{2!}\frac{r^2}{p^2}-\frac{2}{3!}\frac{r^3}{p^3}-\frac{3}{4!}\frac{r^4}{p^4}-\dots\right)$$
$$-\frac{d\vartheta}{2}V^2\left(1-\frac{1}{2!}\frac{r^2}{p^2}+\frac{2}{3!}\frac{r^3}{p^3}-\frac{3}{4!}\frac{r^4}{p^4}+\dots\right)$$

oder

$$dV = -\frac{d\vartheta}{2}(1+V^2)\left(1-\frac{1}{2!}\frac{r^2}{p^2}-\frac{3}{4!}\frac{r^4}{p^4}-\ldots\right)$$
$$+\frac{d\vartheta}{2}(1-V^2)\left(\frac{2}{3!}\frac{r^3}{p^3}+\frac{4}{5!}\frac{r^5}{p^5}+\ldots\right)$$

oder

$$\frac{2\,dV}{1+V^2} = -d\vartheta\left(1-\frac{1}{2!}\frac{r^2}{p^2}-\frac{3}{4!}\frac{r^4}{p^4}-\ldots\right)$$
$$+d\vartheta\,\frac{1-V^2}{1+V^2}\left(\frac{2}{3!}\frac{r^3}{p^3}+\frac{4}{5!}\frac{r^5}{p^5}+\ldots\right).$$

Versteht man unter ψ den Richtungswinkel, den die Richtung vom Messer zur Spitze annimmt, wenn man die Spitze auf demselben Radiusvector bis zum Nullpunkt führt, so ist

$$V = \tan\frac{\psi-\vartheta}{2},$$

denn V behält dabei ja seinen Werth und r wird gleich Null. Nun ist aber

$$\frac{2\,dV}{1+V^2} = d(\psi-\vartheta) \text{ und } \frac{1-V^2}{1+V^2} = \cos(\psi-\vartheta).$$

Mithin

$$\left.\begin{aligned} d\psi &= \frac{1}{2!}\frac{r^2}{p^2}d\vartheta+\frac{3}{4!}\frac{r^4}{p^4}d\vartheta+\ldots \\ &\frac{2}{3!}\cos(\psi-\vartheta)\frac{r^3}{p^3}d\vartheta+\frac{4}{5!}\cos(\psi-\vartheta)\frac{r^5}{p^5}d\vartheta+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Wir wollen nun festsetzen, dass in der Anfangslage die Spitze im Nullpunkt O sei, dass sie zunächst auf einem beliebigen Radiusvector ϑ_1 bis an den Rand der Figur geführt werde, den Rand umkreise, und auf demselben Radiusvector wieder zu O zurückkehre. Die Fläche, die der Radiusvector von ϑ_1 bis zu einem variabeln Werthe ϑ überstreicht, möge mit b bezeichnet werden. Dann ist

$$db = \frac{r^2\,d\vartheta}{2} \text{ und } b = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta}\frac{r^2\,d\vartheta}{2}.$$

Dann kann man die Gleichung (2) in der Form schreiben

$$\left.\begin{aligned} d\psi &= \frac{db}{p^2}+\frac{1}{4}\frac{r^2}{p^4}db+\frac{1}{72}\frac{r^4}{p^6}db+\ldots \\ &+\frac{2}{3}\cos(\psi-\vartheta)\frac{r}{p^3}db+\frac{1}{15}\cos(\psi-\vartheta)\frac{r^3}{p^5}db+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Nun werde die Figur noch auf eine zweite Weise umfahren. Es soll die Anfangslage des Instruments wieder dieselbe sein. Auch soll die Spitze auf der Figur denselben Weg beschreiben; aber die Figur soll um 180^0 um den Punkt O gedreht sein. An Stelle von ψ und ϑ treten jetzt ψ' und ϑ' und es ist $\vartheta' = \pi + \vartheta$ und daher

$$d\psi' = \frac{1}{2!}\frac{r^2\,d\vartheta}{p^2} + \frac{3}{4!}\frac{r^4}{p^4}d\vartheta + \frac{5}{6!}\frac{r^6}{p^6}d\vartheta + \ldots$$
$$-\frac{2}{3!}\cos(\psi' - \vartheta)\frac{r^3\,d\vartheta}{p^3} - \frac{4}{5!}\cos(\psi' - \vartheta)\frac{r^5\,d\vartheta}{p^5} - \ldots$$

oder wenn wieder b eingeführt wird

$$\left.\begin{aligned} d\psi' &= \frac{db}{p^2} + \frac{1}{4}\frac{r^2}{p^4}db + \frac{1}{72}\frac{r^4}{p^6}db + \ldots \\ &- \frac{2}{3}\cos(\psi' - \vartheta)\frac{r}{p^3}db - \frac{1}{15}\cos(\psi' - \vartheta)\frac{r^3\,db}{p^5} - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Aus (3) und (4) erhält man durch Addition und Subtraction:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d(\psi + \psi') &= \frac{db}{p^2} + \frac{1}{4}\frac{r^2}{p^4}db + \frac{1}{72}\frac{r^4}{p^6}db + \ldots \\ &- \frac{2}{3}\sin\frac{\psi - \psi'}{2}\sin\left(\frac{\psi + \psi'}{2} - \vartheta\right)\frac{r\,db}{p^3} \\ &- \frac{1}{15}\sin\frac{\psi - \psi'}{2}\sin\left(\frac{\psi + \psi'}{2} - \vartheta\right)\frac{r^3\,db}{p^5} - \ldots \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}d(\psi - \psi') &= \frac{2}{3}\cos\frac{\psi - \psi'}{2}\cos\left(\frac{\psi + \psi'}{2} - \vartheta\right)\frac{r\,db}{p^3} \\ &+ \frac{1}{15}\cos\frac{\psi - \psi'}{2}\cos\left(\frac{\psi + \psi'}{2} - \vartheta\right)\frac{r^3\,db}{p^5} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Wir wollen annehmen, dass in der Anfangslage der Richtungswinkel des Instruments Null sei. Da hier $r = 0$ ist, so ist der Richtungswinkel hier mit ψ identisch, mithin in der Anfangslage, d. i. für $b = 0$, auch $\psi = 0$. Für grosse Werthe von p erhält man daher aus (3) und (4) in erster Annäherung

$$\psi = \frac{b}{p^2} \text{ und } \psi' = \frac{b}{p^2}$$

aus (6) bis auf Glieder, die gegen $\frac{1}{p}$ von 5. Ordnung sind

$$\frac{\psi - \psi'}{2} = \frac{1}{p^3}\frac{2}{3}\int \cos\vartheta\, r\, db. \quad (7)$$

Daraus geht hervor, dass $\sin\frac{\psi - \psi'}{2}$ von 3. Ordnung gegen $\frac{1}{p}$ ist und dass mithin bis auf Glieder 6. Ordnung:

$$d\frac{\psi + \psi'}{2} = \frac{db}{p^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^4}r^2\,db$$

und wenn man von ϑ_1 bis $\vartheta_1 + 2\pi$ integrirt:

$$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = \frac{B}{p^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{p^4}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_1 + 2\pi} r^2\,db. \quad (8)$$

wo unter φ und φ' die Endwerthe verstanden sind, die der Richtungswinkel des Instruments in den beiden Fällen annimmt, wenn die Spitze wieder in O anlangt. Denn in O ist ja nach der Definition ψ mit dem Richtungswinkel identisch.

Auf die Formel (8) gründet sich die Anwendung des Stangenplanimeters. Man umfährt die Fläche zwei Mal, wie es oben beschrieben worden ist. Aus einem sogleich zu erörternden Grunde ist es gut, den Punkt O in einem mittleren Punkt der Fläche anzunehmen. In der Anfangs- und Endlage drückt man das Messerchen in's Papier, und misst den Abstand der beiden Eindrücke mit einem Maassstab. Dies giebt uns zwar nicht $p\varphi$ und $p\varphi'$ selbst, sondern die zu diesen Bogen gehörigen Sehnen c, c'. Wenn es auf den Unterschied noch ankommt, so wird es genügen von der Reihenentwicklung $p\varphi = 2p \arcsin \frac{c}{2p}$ die ersten beiden Glieder zu nehmen und demnach zu setzen

$$p\varphi = c\left(1 + \frac{1}{24}\frac{c^2}{p^2}\right)$$

$$p\varphi' = c'\left(1 + \frac{1}{24}\frac{c'^2}{p^2}\right).$$

Im Allgemeinen werden aber, wie wir gleich sehen werden $p\varphi$ und $p\varphi'$ gleich c und c' gesetzt werden können.

Dann ist nahezu $\qquad B = p\dfrac{(p\varphi + p\varphi')}{2}.$

Dieser Werth für B ist ein wenig zu gross. Man kann ihn corrigiren, indem man den Werth von

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_1+2\pi} r^2\, db$$

schätzt. Es ist

$$\int r^2\, db = R^2 \cdot B,$$

wo R zwischen dem kleinsten und grössten Werthe von r liegt, wir wollen festsetzen, dass der grösste Werth von r nicht grösser sei als $\frac{1}{4}p$. Um ausgedehntere Flächen zu messen, möge man sie theilen. Dann ist $\frac{1}{4}\frac{R^2}{p^2} < \frac{1}{64}$. Wenn es also auf diesen Bruchtheil nicht ankommt, so braucht man $p\cdot\frac{p\varphi + p\varphi'}{2}$ nicht weiter zu corrigiren. Anderenfalls ist der Bruchtheil $\frac{1}{4}\frac{R^2}{p^2}$ des Betrages zu schätzen und davon abzuziehen. Denn da

$$p\,\frac{p\varphi + p\varphi'}{2} = \left(1 + \frac{1}{4}\frac{R^2}{p^2}\right)B,$$

so ist

$$p\,\frac{p\varphi + p\varphi'}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{R^2}{p^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{16}\frac{R^4}{p^4}\right)B,$$

wo $\frac{1}{16}\frac{R^4}{p^4} < \frac{1}{4000}$ und daher zu vernachlässigen ist. Um zu überschlagen, welcher Fehler dadurch entsteht, dass wir in der Gleichung (8) uns auf die ersten beiden Glieder der Entwicklung beschränkt haben, sollen noch die Glieder der folgenden Ordnung berechnet werden. Bis auf Glieder 6. Ordnung folgt aus (5)

$$p\frac{p\varphi + p\varphi'}{2} = B + \frac{1}{4}\frac{1}{p^2}\int r^2\,db + \frac{1}{72}\frac{1}{p^4}\int r^4\,db + \frac{2}{3}\frac{1}{p}\int \sin\frac{\psi - \psi'}{2}\sin\vartheta\, r\,db.$$

Sei r_1 der grösste vorkommende Werth von r, dann ist

$$\frac{1}{72}\frac{1}{p^4}\int r^4\,db < \frac{1}{72}\frac{r_1{}^4}{p_4}B.$$

Nach (7) ist bis auf Glieder 5. Ordnung

$$p^3\frac{\psi - \psi'}{2} = \frac{2}{3}\int_0^b \cos\,\vartheta\, r\,db.$$

Die rechte Seite ist nichts anderes als das statische Moment der Fläche b in Bezug auf die y-Achse oder gleich ab, wenn wir mit a die Abscisse des Schwerpunktes der Fläche b bezeichnen. Mithin ist bis auf Glieder 6. Ordnung

$$\frac{2}{3}\frac{1}{p}\int \sin\frac{\psi - \psi'}{2}\sin\,\vartheta\, r\,db = \frac{2}{3}\frac{1}{p^4}\int a\,b\sin\vartheta\, r\,db$$

Das statische Moment ab ist nun seinem absoluten Betrage nach kleiner als das statische Moment eines Halbkreises vom Radius r_1 in Bezug auf seinen Durchmesser. Folglich ist dem absoluten Betrage nach

$$\frac{2}{3}\frac{1}{p}\int \sin\frac{\psi - \psi'}{2}\sin\,\vartheta\, r\,db$$

kleiner als

$$\frac{2}{3}\frac{1}{p^4}\int \frac{2}{3}r_1^3\sin\,\vartheta\, r\,db$$

also kleiner als

$$\frac{4}{9}\frac{r_1^4}{p^4}\cdot B$$

der gesammte Fehler ist also kleiner als

$$\left(\frac{1}{72} + \frac{4}{9}\right)\frac{r_1^4}{p^4}\cdot B.$$

Im Allgemeinen wird er erheblich kleiner sein, weil $\sin\frac{\psi - \psi'}{2}\sin\vartheta\, r\,db$ theils positive, theils negative Werthe hat, die sich gegenseitig compensiren. Ist, wie oben angenommen wurde, r_1 kleiner als $^1/_4\, p_1$, so ist der Fehler kleiner als

$$0.0018\, B.$$

Man sieht jetzt ein, warum es vortheilhaft ist für O einen mittleren Punkt zu wählen. Denn rückt O an den Rand, so wird der grösste Werth von r zunehmen und damit die Fehlergrenze.

Ersetzt man bei der Messung von $p\varphi$ und $p\varphi'$ die Sehne durch den Bogen, so kommt noch ein Fehler hinzu. Sind c und c' die entsprechenden Sehnen, so ist

$$p\varphi = 2p \arcsin \frac{c}{2p} = c\left(1 + \frac{1}{24}\frac{c^2}{p^2} + \dots\right)$$
$$p\varphi' = 2p \arcsin \frac{c'}{2p} = c'\left(1 + \frac{1}{24}\frac{c'^2}{p^2} + \dots\right)$$

Da $\frac{c}{p}$ nahezu gleich $\frac{B}{p^2}$, so entsteht also ein Fehler

$$\frac{1}{24}\frac{B^2}{p^4}\cdot B < \frac{\pi^2 r_1^4}{24\, p^4}\cdot B < 0.0017\, B.$$

Die Gleichung (7) giebt, wenn die Integration von ϑ_1 bis $\vartheta_1 + 2\pi$ erstreckt wird

$$\frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{1}{p^3}\, aB,$$

wo a die Abscisse des Schwerpunktes der Fläche B ist. Angenähert ist also

$$p\varphi - p\varphi' = a\frac{p\varphi + p\varphi'}{p}$$

oder

$$\frac{c - c'}{c + c'}\cdot p = a.$$

Man findet also zugleich mit der Fläche B die Abscisse des Schwerpunktes. Dreht man die Anfangslage des Instruments um 90^0, so findet man auf dieselbe Weise auch die Ordinate des Schwerpunktes.

Techn. Hochschule Hannover, April 1895. *C. Runge.*

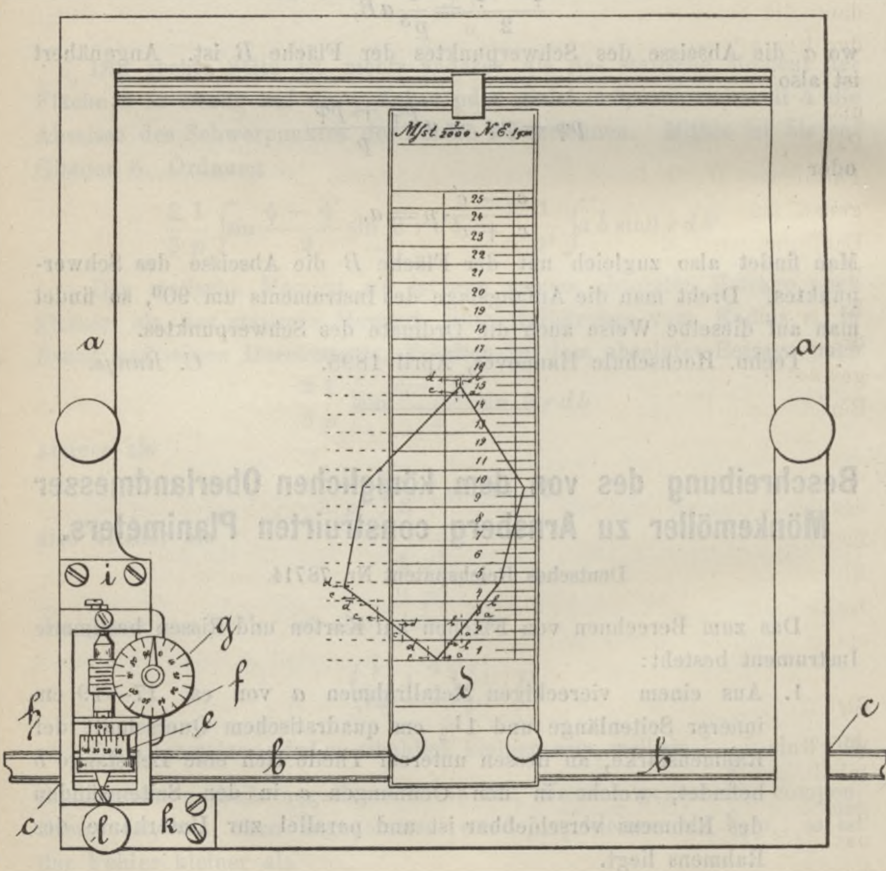
Beschreibung des von dem königlichen Oberlandmesser Mönkemöller zu Arnsberg construirten Planimeters.

Deutsches Reichspatent Nr. 78714.

Das zum Berechnen von Flächen auf Karten und Rissen bestimmte Instrument besteht:

1. Aus einem viereckigen Metallrahmen *a* von ca. 17—19 cm innerer Seitenlänge und $1^1/_2$ cm quadratischem Querschnitt der Rahmenstärke, an dessen unterem Theile sich eine Leitstange *b* befindet, welche in den Oeffnungen *c* in den Seitenwänden des Rahmens verschiebbar ist und parallel zur Unterkante des Rahmens liegt.
2. Aus einer an die Leitstange *b* angeschraubten auswechselbaren Scala *d* auf einer Glasplatte mit Linien an der Unterseite in gleichen numerirten Abständen, parallel zur Leitstange, durchschnitten von einer oder mehreren Linien, senkrecht zu denselben.

3. Aus einer eingetheilten Laufrolle e mit Nonius f und mit Indicator g der zurückgelegten Umdrehungen der Laufrolle in einem besonderen Rahmen h, befestigt an dem unteren Theile des Rahmens bei i mit einer federnden Platte. Die Laufrolle wird durch eine kleine von unten sanft andrückende Feder vor balancirenden Bewegungen geschützt. Der Zeiger auf dem Indicator ist verstellbar.
4. Aus einem federnden Stahlplättchen k am unteren Theile des Rahmens mit Knopf l zum Heben und Senken der Laufrolle e bezw. des kleinen Rahmens h. Die Leitstange am oberen Theile des Rahmens dient nur zum Tragen der Scala beim Aufheben des ganzen Instrumentes.



Auf der vorstehenden Zeichnung sind die Abstände der Parallelen auf der Glasplatte $d = 10$ Meter im Maassstabe 1:2000 der Wirklichkeit, der Umfang der Laufrolle $e = 100$ Meter desselben Maassstabsverhältnisses, die Eintheilung der Rolle in 100 gleiche Theile, durch Nonius *f* ablesbar auf Zehntel der Theile. Der Indicator *g* zeigt bis 100 Umdrehungen der Laufrolle an.

Die Achse der Laufrolle muss rechtwinkelig zur Leitstange stehen. Entspricht der Umfang der Laufrolle nicht dem angegebenen Maasse, so können 2 Fälle eintreten: Entweder ist die Laufrolle etwas zu gross, dann zeigt das Instrument einen constanten Fehler, der nur vom Mechaniker zu beseitigen ist, oder er ist zu klein, dann ist es möglich, den Fehler durch Correctur zu beheben. Zu diesem Zwecke wird der Achse der Laufrolle eine nur wenig geneigte Stellung zur Leitstange gegeben. Diese Berichtigung der Wirkung der Umdrehung der Laufrolle wird dadurch erreicht, dass die Schrauben bei *i*, mit denen der kleine Rahmen am grossen befestigt ist, etwas gelöst werden, alsdann der kleine Rahmen bei *l* ein klein wenig nach links gedreht wird und dann die Schrauben bei *i* wieder angezogen werden. Um die Wirkung der Umdrehung der Laufrolle zu prüfen, wird eine Länge von 100 mm = 200 m im Maassstabe 1:2000 mittelst des Zirkels auf Papier markirt und zu der Verbindungslinie der beiden Endpunkte nahe derselben eine Parallele gezogen. Auf diese Linie wird das Instrument mit einer der Parallelen der Scala gelegt. Die senkrechte Linie der Scala wird genau auf den einen Endpunkt der abgemessenen Linie geschoben, die Laufrolle wird mit der Leitstange durch Druck auf den Knopf *l* in Verbindung gebracht und die senkrechte Linie der Scala auf den andern Endpunkt der Linie geschoben; die Laufrolle muss dann genau 2 Umdrehungen zurücklegen. Der Versuch muss wiederholt werden bis die gewünschte Wirkung der Rollen-Umdrehung erreicht ist. Eine fernere Berichtigung ist nur selten erforderlich.

Beim Gebrauche wird das auf Null gestellte Instrument so auf die zu berechnende Figur gelegt, dass die unterste der parallelen Linien der Scala die untere Spitze der Figur schneidet, wie auf vorstehender Zeichnung, oder auf einer Grenzlinie liegt, je nach der zu berechnenden Figur und zwar so, dass die senkrechte Linie der Scala die Grenzlinien rechts oder links an der zu berechnenden Figur beim Auflegen unter einem möglichst spitzen Winkel schneidet.

Es erscheint nun die zu berechnende Figur in eine Anzahl paralleler Streifen von gleicher Breite (in diesem Falle von je 10 Meter) zerlegt, deren mittlere Länge mit der Breite multiplicirt, den jedesmaligen Inhalt ergibt. Mittels des Instrumentes sollen nun die mittleren Längen gemessen und zugleich addirt werden. Zu diesem Zwecke wird nun, nachdem das Instrument in der oben beschriebenen Weise auf die zu berechnende Figur gelegt ist, die Scala *d* so verschoben, dass die senkrechte Linie der Haupttheilung der Scala in dem Parallelstreifen 1 die Grenze rechts der Figur so schneidet, dass die entstehenden Dreieckchen 1 *a* und 1 *b* in ihrem Flächeninhalt gleich gross erscheinen; alsdann drückt man mit einem Finger der linken Hand auf den Knopf *l*, wodurch der Rahmen *h* sich senkt und die Laufrolle *e* mit der Leitstange *b* in Berührung kommt, hiernach verschiebt man die Scala *d*, welche an der Leitstange festsitzt und somit auch die Laufrolle bewegt, soweit nach links, dass dieselbe senkrechte Linie im Parallelstreifen 1 die Grenzlinie links der Figur, wie durch eine kurze Linie angedeutet, so schneidet, dass die entstehenden Dreieckchen 1 *c* und 1 *d* in ihrer Fläche gleich gross erscheinen. Nun hebt man den Finger der linken Hand vom Kopf *l*, wodurch sich auch der Rahmen *h* hebt und die Laufrolle *e* ausser Berührung mit der Leitstange tritt. Die Ablesung auf Indicator, Laufrolle und Nonius würde nun die mittlere Länge des ersten Parallelstreifens geben und mit der Breite desselben multiplicirt, den Flächeninhalt des Parallelstreifens, etwa:

Indicator 0, Laufrolle 9, Nonius 6 $= 9{,}6 \times 10 = 96$ qm. Zur Berechnung der ganzen Figur ist es aber nicht erforderlich, den Inhalt der einzelnen Streifen zu kennen. Es werden daher die mittleren Längen der einzelnen Parallelstreifen durch das Instrument addirt. Zu dem Zwecke bleibt deshalb die Laufrolle in ihrer jetzigen Lage und es wird zur Ermittelung der mittleren Länge des Parallelstreifens 2 geschritten, indem man die Scala *d* mit der Leitstange *b* soweit zurückzieht, dass dieselbe senkrechte Linie wie vorhin die Grenze rechts der Figur im Parallelstreifen 2 so schneidet, dass, wie in der Figur durch eine kurze ausgezogene Linie angedeutet, die Dreieckchen 2 *a* und 2 *b* gleich gross erscheinen. Man drückt nun wieder auf den Knopf *l*, um die Laufrolle mit der Leitstange in Berührung zu bringen und schiebt die Scala *d* wieder soweit nach links, bis die senkrechte Linie die Grenze links im Parallelstreifen 2 so schneidet, dass die Dreieckchen 2 *c* und 2 *d* gleich gross erscheinen, und hebt den Finger vom Knopf, um die Berührung mit der Leitstange aufzuheben. Die Laufrolle hat nun auch die Strecke der mittleren Länge des Parallelstreifens 2 zurückgelegt. Die Ablesung auf dem Indicator etc. giebt nun, da die Ablesung der ersten Strecke in der Stellung der Laufrolle nicht verändert war, die Summe der mittleren Längen der Parallelstreifen 1 und 2.

Es wird nun die Scala wieder soweit zurückgezogen, dass im Streifen 3 beim Schneiden der Senkrechten und der Grenzlinie rechts sich die Dreieckchen 3 *a* und *b* ausgleichen, die Laufrolle durch Druck auf den Knopf gesenkt und die Scala nach links geschoben, bis beim Schneiden der Senkrechten und der Grenzlinie links die Dreieckchen 3*c* und *d* sich gleich scheinen. Leitstange und Laufrolle werden wieder ausser Berührung gebracht.

Es wird nun in den folgenden Streifen 4—14 nach einander in derselben Weise fortgefahren, dass zuerst die Ausgleichung der Figürchen *a* und *b* rechts bewirkt, dann die Laufrolle gesenkt und die Scala nach links verschoben, bis die Figürchen c und d gleich gross erscheinen und dann die Laufrolle gehoben wird.

Im Streifen 15 trifft die obere Spitze der Figur nicht mit einer Parallelen zusammen. Um nun doch ein genaues Ausgleichen der Figürchen zu ermöglichen, wird die Grenzlinie links im genannten Parallelstreifen auf dem Papier etwas verlängert bis zu der nächsten parallelen Linie; alsdann wird der senkrechten Linie der Scala die Lage gegeben, dass die Figürchen 15 a und b sich ausgleichen, die Rolle wird gesenkt, die Scala nach links geschoben, bis die Dreiecke 15 c und d sich ausgleichen.

Die Laufrolle hat nun die sämmtlichen mittleren Längen der Parallelstreifen 1—15 nach einander durchlaufen. Die Ablesung auf Indicator, Laufrolle und Nonius ergibt nun mit der Breite der Streifen multiplicirt den Flächeninhalt der Figur.

Die an der rechten Seite der Scala angebrachte kleinere Eintheilung dient zur Berechnung von Flächen mit sehr unregelmässigen Grenzen, um innerhalb der schmaleren Parallelstreifen die Ausgleichung der Figürchen genauer vornehmen zu können. Die parallelen Linien haben in der vorliegenden Zeichnung einen Abstand von 5 m im Maassstabe 1:2000 der Wirklichkeit. Die gemessenen mittleren Längen sind demgemäss mit 5 zu multipliciren.

Steht das Instrument nicht auf Null oder will man es nicht auf Null stellen, so hat, bevor mit demselben gearbeitet wird, eine Ablesung zu erfolgen, welche von der zweiten bezw. End-Ablesung abzuziehen ist. Um eine zweimalige Ablesung und damit eine Fehlerquelle zu vermeiden, ist der Zeiger am Indicator drehbar hergestellt, um das Instrument leicht auf Null stellen zu können. Die Laufrolle wird zuerst auf Null gestellt und dann der Zeiger am Indicator.

Sind grössere Flächen zu berechnen, welche den Umfang des Instrumentes überschreiten, so sind dieselben zuvor in Figuren von entsprechender Grösse zu zerlegen.

Die mit dem Instrumente angestellten Berechnungen haben ein sehr günstiges Resultat ergeben, welches qualitativ denen der besten Planimeter gleichsteht, quantitativ aber nach einiger Uebung bedeutend übertrifft.

Der mit dem Instrumente erreichbare hohe Grad der Uebereinstimmung der Resultate hat zum Theil darin seinen Grund, dass das menschliche Auge befähigt ist, kleine nahe bei einander gelegene Figuren mit grosser Schärfe auf ihre Gleichheit zu schätzen.

Die Glasplatte mit Scala am Instrument ist abnehmbar hergestellt, um durch bequemes Anschrauben einer anderen Platte in anderen Maassstabsverhältnissen mit einfacher Noniuseinheit rechnen zu können.

Die eine zum Instrumente gehörige Platte ist für das Verhältniss 1:2000 und die verwandten 1:4000, 1:1000 eingerichtet mit den

Noniuseinheiten 1, 4, $\frac{1}{4}$ bezw. $\frac{1}{2}$ 2, $\frac{1}{8}$; die zweite Platte dient für das Verhältniss 1:2500 und die verwandten 1:5000, 1:1250 mit den Noniuseinheiten 2, 8, $\frac{1}{2}$ bezw. 1, 4, $\frac{1}{4}$. Die Breite der Parallelstreifen ist der Laufrolle, welche nicht ausgewechselt wird, entsprechend angepasst.

Für Maassstabsverhältnisse, welche den oben genannten nicht verwandt, sind besondere Platten erforderlich, welche zu jeder Zeit geliefert werden können.

Das Instrument kostet einschliesslich eines verschliessbaren Etuis 65 Mk. und kann durch den Unterzeichneten bezogen werden.

Arnsberg in Westfalen im Februar 1895.

Mönkemöller,
Oberlandmesser.

Neue Schriften über Vermessungswesen.

Rohrbach, Dr. C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt. (32 S.) Preis 60 Pf.

Rathgeber für Anfänger im Photographiren von Ludwig David. 3. Auflage. Halle 1895, Druck und Verlag von Wilhelm Knapp. 1 Mk. 50 Pf.

Estratto dei Rendiconti del R. istituto lombardo di scienze e lettere. Serie II. Vol. XXVIII 1895. Sull' escursione diurna della declinazione magnetica a Milano in relazione col periodo delle macchie solari. Nota del socio correspondente Dr. Michele Rajna.

Maurer, H., Graphische Tafeln für meteorologische und physikalische Zwecke. Theorie und Anwendung. Strassburg 1894. 4. 24 pg. m. 6 Tafeln und 5 Holzschnitten. 1,80 Mk.

Die Königlich Preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. VII. Theil. Gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme. Mit 3 Uebersichtsblättern und 8 Skizzen. Berlin 1895. Im Selbstverlage, zu beziehen durch die Königliche Hofbuchhandlung von E. S. Mittler und Sohn, Kochstrasse 68/70.

Wislicenus, W. F., Astronomische Chronologie. Ein Hilfsbuch für Historiker, Archäologen u. Astronomen. Leipzig 1895. gr. 8. 10 u. 163 pg. Leinenband. 5,00 Mk.

Petersen, C. T., Logarithme-Tabeller med fem Decimaler til praktisk brug (uden Interpolation). 5. oplag. Christiania 1894. gr. 8. 109 pg. cart. 1,20 Mk.

Inhalt.

Verlag von Konrad Wittwer Stuttgart. — Druck von Gebrüder Jänecke in Hannover.