ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

Dr. W. Jordan, Professor in Hannover und C. Steppes, Steuer-Rath in München.

1895. Heft 15. Band XXIV.

1. August.

Ueber die Bestimmung von Entfernungen aus einer kleinen Basis;

von Dr. L. Krüger in Potsdam.

Im XXI. Bande der Zeitschr. f. Vermessungswesen 1892, S. 525—528, hat Herr Prof. Jordan eine auch von der Königl. Landesaufnahme benutzte Formel*) mitgetheilt, die zur Ableitung von Entfernungen durch Rückwärtseinschneiden gegen Mitte und Endpunkte einer kleinen Basis dient. Ist $AE = s$ die zu bestimmende Entfernung, so legt man einen Maassstab $BC = 2a$ mit seiner Mitte in E nahezu senkrecht zu s und misst in A die Winkel α_2 und α_1. Wird $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha$ und $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \delta$ gesetzt, so lautet die von Prof. Jordan angegebene Formel:

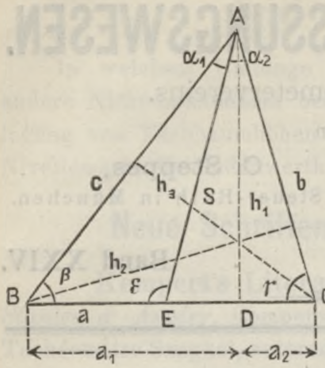
$$\log s = \log (a \operatorname{ctg} \alpha) - \frac{\text{Mod.}\, \delta''^2}{2\rho''^2} \frac{\cos 2\alpha}{\sin^4 \alpha}, \quad \left(\begin{array}{c}\text{Mod.} = \text{Modul d. Brigg. Log.} \\ \rho'' = 206\,265\end{array}\right)$$

Für Einheiten der 6. Decimalstelle ist: $\log \frac{\text{Mod.}}{2\rho''^2} \cdot 10^6 = 4{,}70790.$

Der Ausdruck für $\log s$ lässt sich auch in eine andere Form bringen, die dieselbe Genauigkeit hat, vielleicht aber für die Rechnung noch etwas bequemer ist.

---

*) Jene Entwicklung Z. f. V. 1892, S. 525—528 ist unabhängig gemacht worden, und erst nachher ist mir bekannt geworden, dass auch die trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme sich einer solchen Näherung bedient. Das Zusammentreffen zweier unabhängig von einander entstandenen Gedanken scheint für deren Richtigkeit zu bürgen. Uebrigens habe ich schon an jener Stelle S. 528 angedeutet, dass die „Trigonometer", welche alles vom Winkelmessen erwarten, und mit dem mechanischen Lattenlegen und Ablothen u. s. w. auf dem natürlichen Erdboden wenig Bescheid wissen, wohl manchmal ihre Zuflucht zur Distanzstab-Messung nehmen, in Fällen, in welchen der praktische Landmesser viel rascher und besser auf dem Erdboden mit seinen hölzernen Latten misst. Indessen wollen wir durch diese Bemerkung der hier vorgetragenen Fehlertheorie von Herrn Dr. Krüger, welche auf ihrem Gebiete ihre eigene Berechtigung hat, in keiner Weise vorgreifen. *J.*



Nach der Figur ist

$$\frac{s}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_2}. \tag{1}$$

mithin auch

$$\frac{s}{a} = \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2} = \frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}.$$

$$\frac{s}{a} = \operatorname{ctg}\alpha\,\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\delta}. \tag{2}$$

Aus (1) folgt ferner

$$\frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2} = \frac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma}$$

und hieraus

$$\operatorname{ctg}\alpha\tan\delta = \tan\alpha\tan\frac{\beta-\gamma}{2},\ \text{also}\ \tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \tan\delta\operatorname{ctg}^2\alpha \tag{3}$$

$$\text{und}\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\delta\operatorname{ctg}^4\alpha}}.$$

Dies in die Gl. (2) gesetzt, giebt

$$\frac{s}{a} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\sec\delta}{\sqrt{1+\tan^2\delta\operatorname{ctg}^4\alpha}} = \operatorname{ctg}\alpha\sec\delta\left(1 - \frac{1}{2}\tan^2\delta\operatorname{ctg}^4\alpha + \frac{3}{8}\tan^4\delta\operatorname{ctg}^8\alpha - ..\right) \tag{4}$$

Geht man zu Logarithmen über, so wird bis auf Glieder 4. Ordnung

$$\log s = \log(a\operatorname{ctg}\alpha\sec\delta) - \frac{\text{Mod.}\ \delta''^2}{2\rho''^2}\operatorname{ctg}^4\alpha. \tag{5}$$

Bei Anwendung 6-stelliger Logarithmen ist aber für Werthe von $\alpha_1 - \alpha_2$ bis $10'$ $\log\sec\delta = 0$.

Die Gleichungen (3) und (2) können zusammen zur strengen Auflösung dienen.

Schreibt man für $\log\sec\delta = \dfrac{\text{Mod.}\ \delta''^2}{2\rho''^2} + ..$, so wird das Zusatzglied

$$\frac{\text{Mod.}}{2\rho''^2}(\delta''^2 - \delta''^2\operatorname{ctg}^4\alpha) = \frac{\text{Mod.}\ \delta''^2}{2\rho''^2}(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1-\operatorname{ctg}^2\alpha) =$$

$$-\frac{\text{Mod.}\ \delta''^2}{2\rho''^2}\,\frac{\cos 2\alpha}{\sin^4\alpha},$$

übereinstimmend mit der ersten Formel.

Für den Winkel ε, den s mit $2a$ bildet, findet man aus (1),

$$\text{da}\ \beta = 180^0 - (\varepsilon + \alpha_1)\ \text{und}\ \gamma = \varepsilon - \alpha_2\ \text{ist}, \tag{6}$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\varepsilon+\alpha_1)}{\sin(\varepsilon-\alpha_2)} = \frac{\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\operatorname{ctg}\varepsilon}{\cos\alpha_2 - \sin\alpha_2\operatorname{ctg}\varepsilon},\ \text{also}$$

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{2\sin\alpha_1\sin\alpha_2} = \frac{\delta''}{\rho''}\,\frac{1}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}. \tag{7}$$

Man kann ε auch aus (3) berechnen; nach (6) ist $\frac{\beta-\gamma}{2} = 90^0 - (\varepsilon + \delta)$, daher

$$\operatorname{ctg}(\varepsilon + \delta) = \tan\delta \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{\delta''}{\rho''} \operatorname{ctg}^2\alpha. \tag{7*}$$

Lässt sich die Mitte der Basis nicht einstellen, so kann man auf sie die Messung doch reduciren. Sind a'_1 und a'_2 die beobachteten Abschnitte der Basis und α'_1 und α'_2 die zugehörigen gemessenen Winkel, so ist

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{a_2' \sin\alpha_1'}{a_1' \sin\alpha_2'} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin(\alpha-\delta)}.$$

Hieraus folgt, wenn

$$\tan\psi = \frac{a_2' \sin\alpha_1'}{a_1' \sin\alpha_2'}$$

gesetzt wird,

$$\tan\delta = \frac{\delta''}{\rho''} = \tan\alpha \tan(\psi - 45^0).$$

Um den Einfluss einer Aenderung von α_1 und α_2 auf s und ε zu erhalten, könnte man die Gleichungen (4) und (7) differentiiren; es is jedoch übersichtlicher, wieder von (1) auszugehen. Die logarithmische Differentiation von (1) giebt mit Berücksichtigung von (6)

$$\rho''\left(\frac{ds}{s} - \frac{da}{a}\right) = -\operatorname{ctg}\beta(d\varepsilon + d\alpha_1) - \operatorname{ctg}\alpha_1 d\alpha_1 = \operatorname{ctg}\gamma(d\varepsilon - d\alpha_2) - \operatorname{ctg}\alpha_2 d\alpha_2$$

und wenn man von dem Fehler des Maassstabes absieht,

$$\rho'' \frac{ds}{s} = -\operatorname{ctg}\beta d\varepsilon - \frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta\sin\alpha_1} d\alpha_1 = \operatorname{ctg}\gamma\, d\varepsilon - \frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma\sin\alpha_2} d\alpha_2,$$

$d\varepsilon$, $d\alpha_1$ und $d\alpha_2$ sind hierbei in Secunden ausgedrückt.

Werden die Höhen des Dreiecks auf $2a$, b, c mit h_1, h_2, h_3; ferner die auf $2a$ durch h_1 hergestellten Abschnitte mit a_1 und a_2 bezeichnet, so ist

$$\rho'' \frac{ds}{s} = -\frac{a_1}{h_1} d\varepsilon - \frac{2c}{h_3} d\alpha_1 = +\frac{a_2}{h_1} d\varepsilon - \frac{2b}{h_2} d\alpha_2. \tag{8}$$

Hieraus folgt zunächst

$$\frac{a}{h_1} d\varepsilon = -\frac{c}{h_3} d\alpha_1 + \frac{b}{h_2} d\alpha_2 \tag{8*}$$

und da

$$2a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3} \text{ ist,}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} 2a^2\, d\varepsilon &= -c^2\, d\alpha_1 + b^2\, d\alpha_2 \\ \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\, d\varepsilon &= -\sin^2\gamma\, d\alpha_1 + \sin^2\beta\, d\alpha_2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Setzt man den Werth für $d\varepsilon$ aus (8*) in einen der Ausdrücke für $\rho'' \frac{ds}{s}$, so wird

$$\rho'' \frac{ds}{s} = -\frac{1}{a}\left(\frac{c\,a_2}{h_3}\,d\alpha_1 + \frac{b a_1}{h_2}\,d\alpha_2\right) = -2h_1\left(\frac{a_2}{h_3^2}\,d\alpha_1 + \frac{a_1}{h_2^2}\,d\alpha_2\right)$$
$$= -4\left(\frac{F_2}{h_3^2}\,d\alpha_1 + \frac{F_1}{h_2^2}\,d\alpha_2\right),$$

wenn F_1 den Inhalt des Dreiecks BAD und F_2 den des Dreiecks DAC bezeichnet. Da $F_1 = \frac{c^2}{4}\sin 2\beta = \frac{h_2^2 \sin 2\beta}{4\sin^2 2\alpha}$ und $F_2 = \frac{b^2}{4}\sin 2\gamma = \frac{h_3^2 \sin 2\gamma}{4 \sin^2 2\alpha}$ ist, so hat man

$$ds = -\frac{s}{\rho'' \sin^2 2\alpha}(\sin 2\gamma\, d\alpha_1 + \sin 2\beta\, d\alpha_2). \tag{10}$$

Werden nun die mittleren Werthe der Quadrate der Winkelfehler, $d\alpha_1$ und $d\alpha_2$, beide $= m^2$ angenommen, so ist nach (9) der mittlere Fehler von ε

$$m_\varepsilon = \frac{2m}{\sin^2 2\alpha}\sqrt{\sin^4\beta + \sin^4\gamma} = m\frac{\sqrt{b^4 + c^4}}{2a^2}, \tag{11}$$

und nach (10) der mittlere Fehler von s

$$m_s = \frac{sm}{\rho'' \sin^2 2\alpha}\sqrt{\sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma}\,. \tag{12}$$

β und γ findet man aus (6) und (7).

Wenn in (9) und (10) an Stelle der Winkelfehler $d\alpha_1$ und $d\alpha_2$ die Fehler v_1, v_2, v_3 der Richtungen auf A nach C, E und B eingeführt werden, also $d\alpha_2 = -v_1 + v_2$, $d\alpha_1 = -v_2 + v_3$, so wird

$$d\varepsilon = \frac{2}{\sin^2 2\alpha}\left\{-v_1\sin^2\beta + v_2(\sin^2\beta + \sin^2\gamma) - v_3\sin^2\gamma\right\}$$

$$ds = -\frac{s}{\rho''\sin^2 2\alpha}\left\{-v_1\sin 2\beta + v_2(\sin 2\beta - \sin 2\gamma) + v_3 \sin 2\gamma\right\}.$$

Nun lässt sich bekanntlich bei 3 Strahlen das Stationsergebniss stets als ein Satz unabhängiger Richtungsbeobachtungen mit ungleichen Gewichten darstellen. Sind daher q_1, q_2, q_3 die reciproken Gewichte der Richtungen AC, AE, AB, und ist μ^2 das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit, so sind die mittleren Werthe von v_1^2, v_2^2, v_3^2 bezw. $q_1\mu^2, q_2\mu^2, q_3\mu^2$ und damit die mittleren Fehlerquadrate von ε und s:

$$m_\varepsilon^2 = \frac{4\mu^2}{\sin^4 2\alpha}\left\{(q_1 + q_2)\sin^4\beta + (q_2 + q_3)\sin^4\gamma + 2\,q_2\sin^2\beta\sin^2\gamma\right\} \tag{13}$$

$$m_s^2 = \frac{s^2\mu^2}{\rho''^2\sin^4 2\alpha}\left\{(q_1+q_2)\sin^2 2\beta + (q_2+q_3)\sin^2 2\gamma - 2\,q_2\sin 2\beta\sin 2\gamma\right\}. \tag{14}$$

Für den mittleren Totalfehler M in der Bestimmung der Lage des Punktes A ergiebt sich hiernach

$$M^2 = m_s^2 + s^2 \frac{m_\varepsilon^2}{\rho''^2}$$
$$= \frac{4\, s^2\, \mu^2}{\rho''^2 \sin^4 2\alpha} \Big\{ (q_1 + q_2) \sin^2\beta + (q_2 + q_3) \sin^2\gamma + 2\, q_2 \sin\beta \sin\gamma \cos 2\alpha \Big\}. \tag{15}$$

Wenn auf A in vollen Sätzen gemessen ist, oder wenn die 3 Winkel zwischen den 3 Strahlen symmetrisch beobachtet sind, so ist

$$q_1 = q_2 = q_3 = 1$$

und daher

$$m_\varepsilon^2 = \frac{8\,\mu^2}{\sin^4 2\,\alpha} \Big\{ \sin^4\beta + \sin^4\gamma + \sin^2\beta \sin^2\gamma \Big\} = \frac{\mu^2}{2\,a^4} \Big\{ b^4 + c^4 + b^2 c^2 \Big\} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} m_s^2 &= \frac{2\, s^2\, \mu^2}{\rho''^2 \sin^4 2\,\alpha} \Big\{ \sin^2 2\,\beta + \sin^2 2\,\gamma - \sin 2\,\beta \sin 2\,\gamma \Big\} \\ &= \frac{\mu^2}{2\,\rho''^2} \frac{s^2}{h_1^2} \frac{b^2\, c^2}{a^4} \Big\{ \frac{b^2}{c^2} a_1^2 + \frac{c^2}{b^2} a_2^2 - a_1\, a_2 \Big\} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{8\, s^2\, \mu^2}{\rho''^2 \sin^4 2\,\alpha} \Big\{ \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos 2\,\alpha \Big\} \\ &= \frac{\mu^2}{4\,\rho''^2} \frac{s^2}{h_1^2} \frac{b^2\, c^2}{a^4} \Big\{ 3\,(b^2 + c^2) - 4\,a^2 \Big\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Die Gleichung (16) zeigt, dass Fehler der Winkelmessung die Richtung von s stark beeinflussen. Die grosse Veränderlichkeit von ε mit δ ist auch weiterhin aus der Tabelle I zu ersehen. Damit wird aber auch die Lage von A, Gl. (18), bei einem einigermaassen beträchtlichen s im Vergleich zu a sehr ungenau. Es rührt dies daher, dass alsdann der durch A, B und C gehende Kreis auch nahe an E rückt. Die Gl. (18) erhält man auch aus der Formel (3) auf S. 339 des Handbuches der Vermessungskunde von Prof. Dr. W. Jordan. Erster Band. Ausgleichungsrechnung etc. Dritte verbesserte und erweiterte Auflage. Stuttgart 1888.

Liegt beispielsweise A senkrecht über E, so ist

$$m_\varepsilon = \frac{\mu \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sin^2\alpha} = \mu \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1 \right) \tag{19}$$

$$m_s = \frac{\mu\, s \sqrt{2}}{\rho'' \sin 2\,\alpha} = \frac{\mu\, a \sqrt{\frac{1}{2}}}{\rho''} \left(\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1 \right) \tag{20}$$

$$M = \frac{\mu s \sqrt{\frac{1}{2}}}{\rho''} \frac{\sqrt{1 + 2 \cos^2\alpha}}{\sin^2\alpha \cos\alpha} = \frac{\mu\, s \sqrt{\frac{1}{2}}}{\rho''} \left(\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1 \right) \sqrt{3 + \left(\frac{a}{s}\right)^2} \tag{21}$$

Mit $\mu = \pm 1''$, $\frac{s}{a} = 20$ und $a = 1$ Meter giebt das für

$$m_\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 401 = \pm 491'',$$

für $m_s = \pm 1{,}37$ Millimeter und für $M = \pm 47{,}6$ Millimeter.

Für 2 Strecken s_1 und s_2, die in E senkrecht zu $2a$ stehen, verhalten sich also angenähert die zugehörigen mittleren Fehler m_ε und m_s wie $s_1^2 : s_2^2$, und die zugehörigen M wie $s_1^3 : s_2^3$, vorausgesetzt, dass s gross gegen a ist.

Will man nun z. B. in dem Ausdruck für m_s^2, Gl. (17), β und γ durch α und δ ausdrücken, so ist zu setzen

$$2\beta = (\beta + \gamma) + (\beta - \gamma) = 180^\circ - (2\alpha - (\beta - \gamma))$$
$$2\gamma = (\beta + \gamma) - (\beta - \gamma) = 180^\circ - (2\alpha + (\beta - \gamma)).$$

Alsdann ist zunächst

$$m_s^2 = \frac{2\mu^2 s^2}{\rho''^2 \sin^4 2\alpha} (\sin^2 2\alpha \cos^2 (\beta - \gamma) + 3 \cos^2 2\alpha \sin^2 (\beta - \gamma))$$
$$= \frac{2\mu^2 s^2}{\rho''^2 \sin^2 2\alpha} (1 + \sin^2 (\beta - \gamma) (3 \operatorname{cosec}^2 2\alpha - 4)).$$

Aus (3) folgt aber

$$\sin (\beta - \gamma) = \frac{2 \tan \delta \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \tan^2 \delta \operatorname{ctg}^4 \alpha},$$

mithin

$$m_s^2 = \frac{2\mu^2 s^2}{\rho''^2 \sin^2 2\alpha} \left\{ 1 + \left(\frac{2 \tan \delta \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \tan^2 \delta \operatorname{ctg}^4 \alpha} \right)^2 (3 \operatorname{cosec}^2 2\alpha - 4) \right\}. \quad (22)$$

Um eine Uebersicht über die Zunahme von m_s mit δ bei constanten Werthen von $\frac{s}{a}$, d. h. wenn A sich auf einem Kreise um E bewegt, zu haben, ist die nachstehende Tabelle berechnet worden.

Zur Berechnung von α für angenommene Werthe von $\frac{s}{a}$ und δ dienten die Gleichungen:

$$\sin \vartheta = \left(\frac{s}{a} \right)^2 \sin 2\delta, \quad \tan \alpha = \frac{a}{s} \cos \frac{\vartheta}{2} \sec \delta,$$

welche man leicht aus (4) erhält. Die Abweichung der Richtung s gegen BC von einem Rechten, $\varepsilon' = \pm (\varepsilon - 90^\circ)$, findet man aus (7*) oder (7). $\frac{m_s}{a\mu}$ ist aus (17) erhalten, jedoch ist die rechte Seite mit 1000 multiplicirt, so dass, wenn a in Meter gegeben ist, man m_s in Millimeter erhält, also

$$\frac{m_s}{a\mu} = \frac{1000 \sqrt{2} \left(\frac{s}{a} \right)}{\rho'' \sin^2 2\alpha} \sqrt{\sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma - \sin 2\beta \sin 2\gamma}.$$

Endlich ist hieraus noch $\frac{m_s}{s\mu}$ berechnet worden.

Tabelle I.

$\frac{s}{2a}$		$\delta = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$								
		0	2,5″	5″	10″	15″	20″	30″	60″	120″
5	α	5° 43′	5° 43′	5° 43′	5° 43′	5° 43′	5° 43′	5° 43′	5° 42′	5° 42′
	ε'	0 0	0 4	0 8	0 17	0 25	0 34	0 51	1 41	3 22
	$\frac{m_s}{a\,\mu}$	± 0,35	± 0,35	± 0,35	± 0,35	± 0,35	± 0,35	± 0,36	± 0,39	± 0,49
	$\frac{m_s}{s\,\mu}$	$\pm\frac{1}{28571}$	$\pm\frac{1}{28571}$	$\pm\frac{1}{28571}$	$\pm\frac{1}{28571}$	$\pm\frac{1}{28571}$	$\pm\frac{1}{28571}$	$\pm\frac{1}{27778}$	$\pm\frac{1}{25641}$	$\pm\frac{1}{20408}$
10	α	2° 52′	2° 52′	2° 52′	2° 52′	2° 52′	2° 52′	2° 51′	2° 51′	2° 47′
	ε'	0 0	0 17	0 33	1 7	1 40	2 14	3 21	6 45	13 54
	$\frac{m_s}{a\,\mu}$	± 1,37	± 1,39	± 1,45	± 1,65	± 1,95	± 2,30	± 3,09	± 5,76	± 11,80
	$\frac{m_s}{s\,\mu}$	$\pm\frac{1}{14599}$	$\pm\frac{1}{14389}$	$\pm\frac{1}{13793}$	$\pm\frac{1}{12121}$	$\pm\frac{1}{10257}$	$\pm\frac{1}{8696}$	$\pm\frac{1}{6472}$	$\pm\frac{1}{3472}$	$\pm\frac{1}{1695}$
20	α	1° 26′	1° 26′	1° 26′	1° 26′	1° 25′	1° 25′	1° 23′		
	ε'	0 0	1 7	2 14	4 28	6 44	9 3	13 53		
	$\frac{m_s}{a\,\mu}$	± 5,5	± 9,2	± 15,7	± 30,2	± 45,1	± 60,7	± 94,0		
	$\frac{m_s}{s\,\mu}$	$\pm\frac{1}{7273}$	$\pm\frac{1}{4348}$	$\pm\frac{1}{2548}$	$\pm\frac{1}{1324}$	$\pm\frac{1}{887}$	$\pm\frac{1}{659}$	$\pm\frac{1}{426}$		
30	α	0° 57′	0° 57′	0° 57′	0° 56′	0° 55′				
	ε'	0 0	2 30	5 2	10 13	15 47				
	$\frac{m_s}{a\,\mu}$	± 12	± 57	± 113	± 231	± 363				
	$\frac{m_s}{s\,\mu}$	$\pm\frac{1}{5000}$	$\pm\frac{1}{1053}$	$\pm\frac{1}{531}$	$\pm\frac{1}{260}$	$\pm\frac{1}{165}$				
50	α	0° 34′	0° 34′	0° 33′						
	ε'	0 0	7 1	14 30						
	$\frac{m_s}{a\,\mu}$	± 34	± 731	± 1536						
	$\frac{m_s}{s\,\mu}$	$\pm\frac{1}{2941}$	$\pm\frac{1}{137}$	$\pm\frac{1}{65}$						

Diese Tabelle zeigt, namentlich für grössere Werthe von $\frac{s}{2a}$, das schnelle Wachsen des mittleren Fehlers der abgeleiteten Entfernung mit δ. Mit einem m. F. der Richtung $\mu = \pm 1''$ ist beispielsweise der m. F. einer aus einer Grundlinie von 2 Meter abgeleiteten und zu dieser senkrecht stehenden Entfernung von 40 Meter $= \pm$ 5,5 Millimeter $= \frac{1}{7273}$ der Länge, während der m. F. bei der gleichen unter dem

Winkel $6^0 44'$ (entsprechend $\delta = 15''$) gegen die Grundlinie geneigten Strecke bereits $= \pm 45{,}1$ Millimeter $= \frac{1}{887}$ der Länge beträgt. Entspricht die zu erreichende Genauigkeit der Messung einem m. F. der Richtung $\mu = \pm 1''$, und will man für die abzuleitende Entfernung einen m. F., dessen absoluter Werth $= \frac{1}{5000}$ der Länge ist, erzielen, so kann man die angegebene Methode gerade noch für Strecken von der 30-fachen Grösse der Basis anwenden, wenn man letztere senkrecht zu ihnen legen kann; bei einer 10-fachen Uebertragung der Grundlinie dürfte die halbe Differenz der zu messenden Winkel höchstens $40''$, bei einer 20-fachen Uebertragung nur etwa $2''$ betragen.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass Mitte und Endpunkte des als Basis dienenden Maassstabes sich scharf fixiren lassen und dass dieser selbst fehlerlos ist. Fehler in der Fixirung der Mitte und der Endpunkte können aber z. B. entstehen, wenn diese durch aufgesteckte Nadeln für die Pointirung geeignet gemacht werden. Liegen die Pointirungsstellen der Nadeln nicht genau centrisch über C, E, B, so werden dadurch constante Fehler in den Bestimmungen der Richtungen AC, AE, AB hervorgerufen, die um so grösser sind, je näher A an die Punkte C, E, B rückt. Wenn die mittlere Unsicherheit e in der Auffassung dieser Punkte nach allen Richtungen gleich plausibel ist, so ist der hieraus folgende mittlere Werth der Zielunsicherheit $\pm \sqrt{\frac{1}{2}}\, \rho'' \frac{e}{s}$. Denn denkt man sich etwa um E einen Kreis mit dem Radius e geschlagen, so weicht die nach einem Punkte E' auf der Peripherie desselben gehende Richtung AE' von der Richtung AE um $\omega = \rho'' \frac{e}{s} \sin \varphi$ ab, wo φ den Winkel AEE' bezeichnet. Der mittlere Werth von ω^2 ist daher $(\omega^2) = \rho''^2 \frac{e^2}{s^2} (\sin^2 \varphi)$, unter $(\sin^2 \varphi)$ den mittleren Werth verstanden, also $(\sin^2 \varphi) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi} = \frac{1}{2}$. Der m. F. μ einer Richtung setzt sich demnach zusammen aus dem Beobachtungsfehler μ' und diesem constanten Richtungsfehler, mithin $\mu^2 = \mu'^2 + \frac{1}{2} \rho''^2 \frac{e^2}{s^2}$.

Für $e = \pm 0{,}05$ Millimeter und $s = 20$ Meter ist die Zielunsicherheit allein $\pm \frac{206\,265 \cdot 0{,}05}{20\,000} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm 0{,}4''$.

Der Einfluss des Fehlers da von a auf die zu bestimmende Entfernung s ist nach (1) $= \frac{s}{a} da$. Bezeichnet man den mittleren Werth des Quadrats von da mit m_a^2, so ist also der mittlere Gesammtfehler von $s = \sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^2 m_a^2 + m_s^2}$.

Mit $m_a = \pm \frac{1}{20\,000} a$ und $\frac{s}{2a} = 30$, ist $\frac{s}{a} m_a = \pm\ 0{,}003\ a$, also $= \pm\ 3$ Millimeter für $a = 1$ Meter.

Für die Argumente α und δ der Tabelle I, S. 399, sind nach (4) noch die einzelnen Glieder des Ausdrucks

$$\frac{k}{a} = \frac{x}{2} - \frac{3}{8} x^2 \tan \alpha + \frac{5}{16} x^3 \tan^2 \alpha - \frac{35}{128} x^4 \tan^3 \alpha + \ldots,$$

$x = \tan^2 \delta \operatorname{ctg}^5 \alpha$, berechnet worden. Da in dem Bereich der Tabelle $sec\, \delta = 1$ gesetzt werden kann, so stellt k die negative Correction der abzuleitenden Entfernung wegen der schiefen Lage der Basis dar. Zugleich ist aus der folgenden Zusammenstellung zu erkennen, wie weit die Formel (5) anzuwenden ist.

Tabelle II.

$\frac{s}{2a}$		$\lvert\delta\rvert = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$							
		2,5″	5″	10″	15″	20″	30″	60″	120″
5	$\frac{k}{a} =$	+ 0,01	+ 0,03	+ 0,12	+ 0,26	+ 0,47	+ 1,06	+ 4,24	+ 17,07 − 0,04
10	$\frac{k}{a} =$	+ 0,24	+ 0,94	+ 3,76	+ 8,48 − 0,01	+ 15,10 − 0,02	+ 34.14 − 0,09	+ 140,14 − 1,46 + 0,02	+ 627,88 − 28,71 + 1,46 − 0,08
20	$\frac{k}{a} =$	+ 7,5	+ 30,2	+ 122,2 − 0,5	+ 280,3 − 2,9	+ 512,4 − 9,7 + 0,2	+ 1255,7 − 57,4 + 2,9 − 0,2		
30	$\frac{k}{a} =$	+ 57	+ 233 − 1	+ 990 − 24	+ 2492 − 149 + 10				
50	$\frac{k}{a} =$	+ 763 − 9	+ 3454 − 173 + 10 − 1						

Aus den Tafelwerthen erhält man k in Millimeter, wenn a in Meter gegeben ist. Die Formel (5) giebt also z. B· mit einer Basis von 2 Meter und wenn $\lvert\alpha_1 - \alpha_2\rvert = 5''$ ist, eine Strecke von 100 Meter rechnerisch auf etwa 1 cm genau.

Ein Vergleich der in der Tab. I angegebenen mittleren Fehler mit den zugehörigen Werthen der Correction wegen der Schiefe der Basis, Tab. II, zeigt, dass gerade für Werthe von δ, die die Anwendung der Formel (5) gestatten, der aus der Winkelmessung folgende mittlere Fehler, wenn diese nicht sehr scharf ist, ebenso gross oder gar grösser als die Correction selbst wird.

Wie man aus der Tabelle I ersieht, ist es für Entfernungen bis zur etwa 10-fachen Grösse der Basis ziemlich belanglos, wenn die letztere auch 1^0 bis 2^0 von der senkrechten Lage abweicht, da die mittleren Fehler nicht viel von dem für diese geltenden verschieden sind. Hier ist alsdann die Anwendung der Formel (5) am Platze. Will man aber das angegebene Verfahren zur Bestimmung grösserer Entfernungen noch anwenden, so ist es am vortheilhaftesten, wenn die Basis senkrecht zu ihnen gelegt wird (vielleicht mit der Kreuzscheibe), so dass Differenzen in den auf A erhaltenen Winkeln als Messungsfehler angesehen werden können. In diesem Falle wird man also einfach die Formel

$$s = a \operatorname{ctg} \alpha \tag{23}$$

benutzen.

Da diese aber eigentlich stillschweigend voraussetzt, dass auf E der Winkel $\varepsilon = 90^0$ gemessen ist, so soll jetzt noch der Einfluss, den eine Aenderung von ε und 2α auf s hat, berechnet werden. Zu diesem Zwecke sind in der Gl. (8) $d\alpha_1$ und $d\alpha_2$ durch $d\varepsilon$ und $d(2\alpha)$ auszudrücken. Aus (9):

$$-c^2\, d\alpha_1 + b^2 d\alpha_2 = 2a^2\, d\,\varepsilon$$

und aus der Gleichung:

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 = d\,(2\alpha)$$

ergiebt sich aber

$$d\alpha_1 = -\frac{2a^2}{b^2+c^2}\, d\varepsilon + \frac{b^2}{b^2+c^2}\, d\,(2\alpha)$$

$$d\alpha_2 = +\frac{2\,a^2}{b^2+c^2}\, d\varepsilon + \frac{c^2}{b^2+c^2}\, d(2\alpha).$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (8), welche man zuvor in die Form

$$\rho''\frac{h_1}{s}\, ds = -a_1\, d\varepsilon - \frac{c^2}{a}\, d\alpha_1 = +a_2^2\, d\varepsilon - \frac{b^2}{a}\, d\alpha_2$$

gebracht hat, so folgt

$$\rho''\,\frac{h_1}{s}\, ds = \frac{-a_1\, b^2 + a_2\, c^2}{b^2+c^2}\, d\,\varepsilon - \frac{b^2\, c^2}{a\,(b^2+c^2)}\, d\,(2\alpha)$$

oder

$$\rho''\,\frac{ds}{s} = \frac{\cos 2\alpha \sin(\beta-\gamma)}{\sin^2\beta + \sin^2\gamma}\, d\varepsilon - \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\sin 2\,\alpha\,(\sin^2\beta + \sin^2\gamma)}\, d(2\,\alpha)$$

oder, da $\quad -\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = 2\operatorname{ctg}\varepsilon\quad$ ist,

$$\rho''\,\frac{d\,s}{s} = \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\beta + \sin^2\gamma}\left\{\cos 2\,\alpha \operatorname{ctg}\varepsilon\, d\,\varepsilon - \frac{d\,(2\,\alpha)}{\sin 2\,\alpha}\right\}. \tag{24}$$

[Man erhält $\frac{ds}{s}$ auch sofort in 2α und ε und deren Aenderungen ausgedrückt, wenn man zuerst für s den Ausdruck

$$\frac{s}{a} = \operatorname{ctg} 2\alpha \sin\varepsilon + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 2\alpha \sin^2\varepsilon + 1}$$

ableitet und diesen logarithmisch differentiirt; dies giebt

$$\rho'' \frac{ds}{s} = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha \sin\varepsilon}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 2\alpha \sin^2\varepsilon + 1}} \left\{ \operatorname{ctg}\varepsilon\, d\varepsilon - \frac{2\, d(2\alpha)}{\sin 4\alpha} \right\}.\Big]$$

Der mittlere Fehler m_s^* in der Bestimmung von s, wenn ε und 2α gemessen sind, ergiebt sich mithin aus

$$m^{*2}_s = \frac{4 s^2}{\rho''^2} \frac{\sin^2\beta \sin^2\gamma \cos^2 2\alpha}{(\sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2} \left\{ \operatorname{ctg}^2\varepsilon \cdot m_\varepsilon^2 + 4 \operatorname{cosec}^2 4\alpha \cdot m_{2\alpha}^2 \right\} \tag{25}$$

Ist $\frac{s}{a}$ gross, so wird man 1 für $\frac{4 \sin^2\beta \sin^2\gamma \cos^2 2\alpha}{(\sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2} = \left(1 - \frac{4a^2}{b^2 + c^2}\right)^2$ setzen können; man hat demnach für grosse Werthe von $\frac{s}{a}$:

$$m^{*2}_s = \frac{s^2}{\rho''^2} \left\{ \operatorname{ctg}^2\varepsilon \cdot m_\varepsilon^2 + 4 \operatorname{cosec}^2 4\alpha \cdot m_{2\alpha}^2 \right\}. \tag{25*}$$

Weicht ε nur wenig von 90⁰ ab, so muss der m. F. m_ε schon sehr gross sein, wenn sein Einfluss auf m_s^* bemerkbar werden soll. Ist $\varepsilon - 90^\circ = \pm \varepsilon_1$, wo ε_1 sehr klein ist, so kann man für (25*) auch schreiben

$$\frac{m_s^*}{s} = \frac{1}{\rho''} \sqrt{\frac{\varepsilon_1''^2}{\rho''^2} m_\varepsilon^2 + 4 \operatorname{cosec}^2 4\alpha \cdot m_{2\alpha}^2}.$$

Es sei z. B. die Abweichung ε_1 von 90^0 so gross wie der m. F. m_ε selbst $= 600''$, während $m_{2\alpha}^2 = 2\mu^2 = 2$ und $2\alpha = 3^\circ 49'$ ist; der letztere Werth entspricht etwa einem s von der 15-fachen Grösse der Basis. Alsdann wird

$$\frac{m_s^*}{s} = \frac{1}{\rho''} \sqrt{\frac{m_\varepsilon^2}{118180} + 226{,}7\, m_{2\alpha}^2} = \frac{1}{\rho''} \sqrt{3 + 453} = \pm \frac{1}{9659}.$$

Das erste Glied $\varepsilon_1^2 m_\varepsilon^2$ ist hier so gut wie einflusslos. Wenn $\varepsilon = 90^0$ ist, so folgt aus (25)

$$m_s^* = \frac{m_{2\alpha} \cdot s}{\rho'' \sin 2\alpha} = \frac{\mu s \sqrt{2}}{\rho'' \sin 2\alpha}, \tag{26}$$

also übereinstimmend mit dem Werthe von m_s, Gl. (20), welcher bei der senkrechten Lage durch Rückwärtseinschneiden erhalten wird, vorausgesetzt, dass in beiden Fällen der m. F. μ einer Richtung derselbe ist.

Wie wenig genau die Bestimmung einer grösseren Entfernung s aus einer verhältnissmässig kleinen Grundlinie wird, wenn die Winkelmessung auf A nicht sehr scharf ist, möge das folgende Beispiel zeigen.

Es ist gemessen worden

auf A

Richtung	$C =$	0^0	$0'$	$0{,}0''$
„	$E =$	1	0	22,0
„	$B =$	2	0	37,0,

ferner auf E der Winkel $BEA = 90^0\,59'\,23''$.

Die Grundlinie ist $2a = 6$ Meter.

Die Entfernung AE soll bestimmt werden

1) wenn nur die Messung auf A benutzt wird.

$$\alpha = 1^0\,0'\,18{,}5'' \quad \delta = -3{,}5''$$

$$\begin{array}{rlrlcrl}
\log a = & 0{,}477\,121 & \log\frac{\text{Mod.}}{2\rho''^2} = & 4{,}707\,90 & & \log\frac{\text{Mod.}}{2\rho''_2} = & 4{,}707\,90 \\
\log \operatorname{ctg} \alpha = & 1{,}755\,852 & \log \delta^2 = & 1{,}088\,14 & & \log \delta^2 = & 1{,}088\,14 \\
k = & -660 & \log \cos 2\alpha = & 9{,}999\,73 & \text{oder} & \log \operatorname{ctg}^4 \alpha = & 7{,}023\,41 \\
\log s = & 2{,}232\,313 & C.\log \sin^4 \alpha = & 7{,}023\,68 & & \log k = & 2{,}819\,45 \\
 & & \log k = & 2{,}819\,45 & & & \\
 & & s = & 170{,}731\,\text{Mtr.} & & &
\end{array}$$

Die Berechnung der Neigung $\varepsilon = BEA$ erfolgt am bequemsten nach (7*)

$$\begin{aligned}
\log \delta &= 0{,}544\,068_n \\
C\cdot\log \rho'' &= 4{,}685\,575 \\
\log \operatorname{ctg}^2 \alpha &= 3{,}511\,704 \\
\log \operatorname{ctg}(\varepsilon + \delta) &= 8{,}741\,347_n
\end{aligned}$$

$\varepsilon = 93^0\ 9'\ 22,\ 3''$, während die Messung $90^0\,59'\,23''$ ergeben hat.

2) wenn auch der auf E gemessene Winkel hinzugezogen wird.

Da $BE = EC$ ist, so muss $\frac{\sin(\varepsilon + \alpha_1)}{\sin(\varepsilon - \alpha_2)}\,\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = 1$ sein. Hiernach sind zunächst die Beobachtungen zu corrigiren.

$$\begin{array}{rl|rl}
(\varepsilon + \alpha_1) = & 91^0\,59'\,38'' + \delta\varepsilon + \delta\alpha_1 & \varepsilon - \alpha_2 = & 89^0\,59'\,1'' + \delta\varepsilon - \delta\alpha_2 \\
\alpha_2 = & 1\quad 0\ 22\ + \delta\alpha_2 & \alpha_1 = & 1\quad 0\ 15\ + \delta\alpha_1 \\
\log\sin(\varepsilon + \alpha_1) = & 9{,}999\,737 - 0{,}1\,(\delta\varepsilon + \delta\alpha_1) & \log\sin(\varepsilon - \alpha_2) = & 0{,}000000 - 0{,}0\,(\delta\varepsilon - \delta\alpha_2) \\
\log \sin \alpha_2 = & 8{,}244\,501 + 120{,}0\,\delta\alpha_2 & \log \sin \alpha_1 = & 8{,}243661 + 120{,}0\,\delta\alpha_1 \\
 & 8{,}244238 & & 8{,}243661
\end{array}$$

$$+\,577 = 120\,\delta\alpha_1 - 120\,\delta\alpha_2.$$

Der Winkel ε kann viel weniger genau gemessen sein als die Winkel auf A, bevor er eine merkbare Correction erhält.

Wird für $\delta\alpha_2 = -v_1 + v_2$ und für $\delta\alpha_1 = -v_2 + v_3$ geschrieben, so folgt

$$+\frac{577}{120} = v_1 - 2\,v_2 + v_3.$$

Hieraus ergiebt sich, gleiche Gewichte für die v vorausgesetzt, für die Richtungsverbesserungen

$$v_1 = v_3 = +\frac{577}{720} = +\,0{,}80'',\ v_2 = -\frac{577}{360} = -1{,}60''.$$

Der mittlere Fehler einer Richtung ist also $\pm\frac{577}{720}\sqrt{6} = \pm 1{,}96''$.

Die corrigirten Werthe der Winkel sind

$$\alpha_1 = 1^0\ 0'\ 17{,}40'' \quad \alpha = 1^0 0'\ 18'',\ \delta = -1{,}10''.$$
$$\alpha_2 = 1\ \ 0\ \ 19{,}60$$
$$\varepsilon = 90\ \ 59\ \ 23{,}00.$$

Damit findet man für s

$$\log a = 0{,}477\ 121$$
$$\log \sin(\varepsilon - \alpha_2) = 0{,}000\ 000$$
$$C \cdot \log \sin \alpha_2 = 1{,}755\ 787$$
$$\log s = 2{,}232\ 908 \quad s = 170{,}\ 965 \text{ Meter},$$

oder wenn nach (5) gerechnet wird,

$$\log a = 0{,}477121 \qquad \log \frac{\text{Mod.}}{2\rho''^2} = 4{,}7079$$
$$\log \operatorname{ctg} \alpha = 1{,}755852 \qquad \log \delta^2 = 0{,}0828$$
$$k = \quad -\ \ 65 \qquad \log \operatorname{ctg}^4 \alpha = 7{,}0234$$
$$\log s = 2{,}232908 \qquad \log k = 1{,}8141$$

Um die Genauigkeit dieses Werthes für s zu erhalten, ist zu bilden

$$\delta \log s = M\frac{\delta s}{s} = 0(\delta\varepsilon - \delta\alpha_2) - 120\delta\alpha_2 = -120(-v_1 + v_2) \text{ i. Einh. d. 6. Stelle,}$$

also $\frac{M}{120} \cdot \frac{10^6}{s}\,\delta s = v_1 - v_2. \quad (M = 0{,}434\,.\,.)$

Dieser Ausdruck ist unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung

$$.\ .\ . = v_1 - 2\,v_2 + v_3$$

mit letzterer zusammen in die Correlaten umzusetzen. Das giebt, wenn k die Correlate der Bedingungsgleichung und u die des Ausdrucks $v_1 - v_2$ bezeichnet, die beiden Gleichungen

$$.\ .\ . = 6\,k + 3\,u$$
$$.\ .\ . = 3\,k + 2\,u$$

Das reciproke Gewicht von $v_1 - v_2$ ist mithin: $2 - \frac{9}{6} = \frac{1}{2}$,

und demnach das reciproke Gewicht von s:

$$\frac{1}{p_s} = \frac{1}{2}\left(\frac{120 \cdot s}{10^6\ M}\right)^2$$

Mit $\pm\ 1{,}96''$ als mittlerem Fehler einer Richtung, erhält man daher als mittleren Fehler von s:

$$\pm \frac{1{,}96}{\sqrt{2}}\ \frac{120 \cdot s}{10^6 M} = \pm\ 65 \text{ Millimeter.}$$

Für den mittleren Fehler des aus der ersten Berechnung folgenden Werthes von s ergiebt sich mit den dort gefundenen Werthen von s und ε und mit $\pm\ 1{,}96''$ als mittlerem Richtungsfehler

$$m_s = \frac{\mu\, s \sqrt{2}}{\rho''\ \sin^2 2\alpha} \sqrt{\sin^2 2\,(\varepsilon + \alpha_1) + \sin^2 2\,(\varepsilon - \alpha_2) + \sin 2\,(\varepsilon + \alpha_1)\sin 2\,(\varepsilon - \alpha_2)}$$
$$= \pm\ 361 \text{ Millimeter.}$$

Wird noch der m. F. der Basis zu $\pm\ 0{,}5$ Millimeter angenommen, so ist der aus der Uebertragung der Basis auf s folgende Fehler

$$\frac{s}{a}\, m_a = \pm\ \frac{171}{3} \cdot 0{,}5 = \pm\ 28{,}5 \text{ Millimeter.}$$

Der mittlere Gesammtfehler der aus der 1. Annahme sich ergebenden Entfernung s ist mithin:

$\sqrt{361^2 + 28{,}5^2} = \pm\ 362$ Millimeter $= \pm\ \frac{1}{472}$ der Länge und der mittlere Gesammtfehler der aus der 2. Annahme erhaltenen Entfernung:

$\sqrt{65^2 + 28{,}5^2} = \pm\ 71$ Millimeter $= \pm\ \frac{1}{2408}$ der Länge.

Der unter 2) gefundene Werth von s ist also ungefähr 5 mal so genau wie der unter 1). Man würde eine viel bessere Uebereinstimmung des letztern mit dem erstern, die beide jetzt um 0,234 Meter von einander abweichen, erzielt haben, wenn man bei der Annahme 1) die Correction wegen der Schiefe der Basis ganz weggelassen hätte. Alsdann würde $s = 170{,}991$ Meter, also nur um 0,026 Meter grösser als nach Annahme 2) geworden sein. In diesem Falle wäre vorausgesetzt, dass die Entfernung s zur Basis senkrecht gestanden hätte, dass also die beobachtete Differenz von $7''$ der Winkel auf A nur von Messungsfehlern herrührten. Der $\measuredangle\, CAE$ würde um $3{,}5''$ zu gross, der $\measuredangle\, EAB$ um $3{,}5''$ zu klein beobachtet sein. Demnach hätten die Richtungen nach $C, E, B,$ jetzt bezw. die Verbesserungen $+\ 1{,}17''$, $-\ 2{,}33''$, $+\ 1{,}17''$ zu erhalten. Diesen entspricht aber, da zwischen den 4 Unbekannten: den 3 Richtungsverbesserungen und ihrer Orientirungsgrösse, die beiden Bedingungen bestehen, dass die Summe der Richtungsverbesserungen Null und dass der $\measuredangle\, CAE = \measuredangle\, EAB$ sein soll, als mittlerer Fehler einer Richtung

$$\mu = \sqrt{\frac{8{,}17}{3 - (4 - 2)}} = \pm\ 2{,}86''.$$

Für die Annahme einer senkrechten Lage von s zur Basis ist daher der Fehlereinfluss der Winkelmessung

$$m_s = \frac{\sqrt{2}\,\mu\, s}{\rho''\,\sin 2\alpha} = \pm\ 96 \text{ Millimeter.}$$

Mit $\frac{s}{a} m_a = \pm\ 28{,}5$ Millimeter wird mithin der Gesammtfehler der Bestimmung $s = 170{,}991$ Meter:

$\sqrt{96^2 + 28{,}5^2} = \pm\ 100$ Millimeter $= \pm\ \frac{1}{1710}$ der Länge.

Diese 3. Annahme liefert also einen Werth von s, der gegen $3\frac{1}{2}$ mal so genau ist, wie der nach Annahme 1) erhaltene. In diesem Falle giebt also die Formel $s = a \operatorname{ctg} \alpha$ ein besseres Resultat, als wenn die Formel (5) angewendet wird.

Rectification von Kreisbögen;

von Ingenieur **Puller** in Saarbrücken.

Im dritten Hefte Seite 81 bis 88 des laufenden Jahrganges dieser Zeitschrift ist eine Berechnung von Kreisbogenlängen bei gegebenen Sehnen, Tangenten u. s. w. durchgeführt worden; im Gegensatz hierzu sollen nachstehend diese Längen unter Zuhülfenahme der Halbmesser und Mittelpunktswinkel bestimmt werden und zwar sowohl durch Berechnung, als auch in bequemer Weise auf zeichnerischem Wege.

Nehmen wir wieder die unendlichen Reihen für $\sin z$ und $\cos z$ vor:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \ldots \text{ und}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - + \ldots,$$

so findet man hieraus unter Berücksichtigung der beiden ersten Glieder die Näherungsformel:

$$3 \sin z - z \cos z = 2z \text{ oder } z = \frac{3 \sin z}{2 + \cos z} \qquad (1)$$

welcher für kleine Winkel z eine nicht unbedeutende Genauigkeit innewohnt (vergl die Tabelle); auch lässt dieselbe nach Fig. 1 eine höchst einfache zeichnerische Bestimmung von z zu.

Fig. 1.

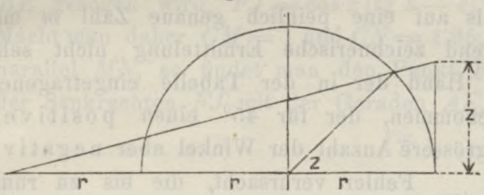


Tabelle.

z^0	z	$\frac{3 \sin z}{2 + \cos z}$	f	$\frac{2{,}95 \sin z}{1{,}95 + \cos z}$	f	$\frac{2{,}9 \sin z}{1{,}9 + \cos z}$	f
10°	0,17453	0,17453	0	0,17455	− 0,2	0,17456	− 0,3
20°	0,34907	0,34904	+ 0,3	0,34916	− 0,9	0,34928	− 2,1
30°	0,52360	0,52337	+ 2,3	0,52379	− 1,9	0,52422	− 6,2
40°	0,69813	0,69716	+ 9,7	0,69816	− 0,3	0,69920	− 10,7
45°	0,78540	0,78361	+ 17,9	0,78505	+ 3,5	0,78653	− 11,3

Wie aus dieser Tabelle hervorgeht, in welcher z den genauen Werth und f den Fehler in Einheiten der 4. Decimalen darstellt, liefert Formel (1) durchweg zu kleine Werthe, oder mit anderen Worten, der Fehler $f = z - \frac{3 \sin z}{2 + \cos z}$ ist stets positiv; derselbe beträgt für den Winkel 30° nur 0,00023 oder 0,44 $^0/_{00}$, nimmt aber für grössere z rasch zu, so dass er für $z = 90^0$ 0,0708 oder rund 5 $^0/_0$ des richtigen Werthes ausmacht.

Hieraus folgt zunächst, dass die Gleichung (1) für $\leqq 30^0$ benutzt werden darf, zumal die Ungenauigkeit der Zeichnung weit grösser als der Fehler f ist. In praktischen Beispielen kommen Mittelpunktswinkel häufig bis 45° vor; hierfür ergiebt die Tabelle den Fehler zu 0,00179 oder 2,3‰, welcher bei grösseren Bögen schon bemerkbar wird.

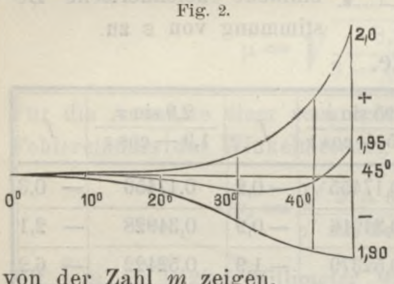
Soll die Genauigkeit innerhalb der Grenzen 0° und 45° eine grössere werden, so kann man dieses durch folgende Ueberlegung erreichen:

Formel (1) liefert positive Fehler f; da es nun gleichgültig ist, welches Vorzeichen f besitzt, es vielmehr nur auf dessen absolute Grösse ankommt, so erscheint es zweckmässig, m in der Formel $f = z - \frac{(m+1)\sin z}{m + \cos z}$ nach den Lehren der Ausgleichungsrechnung so zu bestimmen, dass die Summe der Fehlerquadrate innerhalb eines bestimmt abgegrenzten Gebietes zu einem Minimum wird. Diese Bedingung verlangt, dass

$$\frac{d \int_0^z \left\{ z - \frac{(m+1)\sin z}{m + \cos z} \right\}^2 dz}{dm} = 0 \text{ sein muss.} \tag{2}$$

Hieraus lässt sich in aller Schärfe der Werth m für die gegebenen Grenzen 0 und z bestimmen. Da diese Berechnung nun einestheils recht mühsam ist, es anderentheils auf eine peinlich genaue Zahl m mit Rücksicht auf die vorwiegend zeichnerische Ermittelung nicht sehr ankommt, so würde an der Hand der in der Tabelle eingetragenen Werthe m gleich 1,95 angenommen, der für 45° einen positiven Fehler von 0,44‰, für die grössere Anzahl der Winkel aber negative Fehler verursacht, die bis zu rund 0,0002 anwachsen können. Werden in Fig. (2) die Fehler f nach der Tabelle für die Abscissen z^0 als Ordinaten für $m = 1,9$, 1,95 und 2,0 aufgetragen, so erhält man die drei Curven, welche in übersichtlichster Weise die Abhängigkeit des Fehlers f von der Zahl m zeigen.

Fig. 2.



Die Formel für z lautet nunmehr:

$$z = \frac{2,95 \sin z}{1,95 + \cos z}, \tag{3}$$

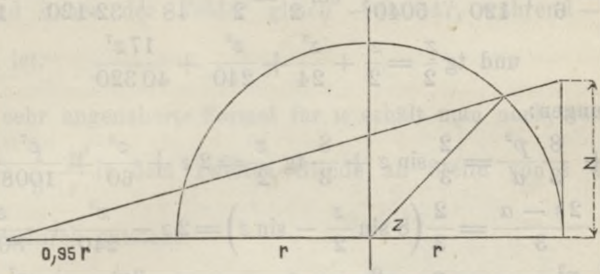
nach welcher z in derselben Weise wie bei Gleichung (1) durch Zeichnung gefunden wird. (Fig. 3 siehe Seite 409.)

Eine praktische Anwendung der Formel (3) zeigt die Fig. 4. Es liegt ein Kreisbogen vor mit dem Mittelpunktswinkel z, der durch die Tangenten AC und BC bestimmt ist. Fällt man nun das Loth BD auf AC, zieht BE senkrecht auf BC, beschreibt um B einen Halbkreis mit beliebig grossem Halbmesser r, welcher die Linie BE im Punkte G trifft, $BH = 1,95\, r$, zieht GH und endlich BF parallel mit GH, so ist AF die gesuchte Bogenlänge.

Eine andere Construction gründet sich auf folgende Umformung der Formel (3):

$$\text{Es ist} \quad 1{,}95\, z + z \cos z = 2{,}95 \sin z, \quad \text{also:}$$
$$1{,}95\, z - 1{,}95 \sin z = \sin z - z \cos z.$$

Fig. 3.

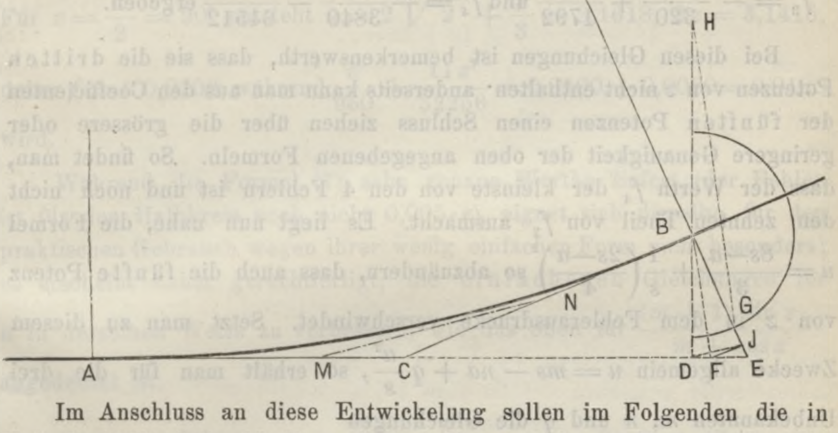


Durch Division mit cos z entsteht daraus:

$$1{,}95 \frac{z - \sin z}{\cos z} = \operatorname{tg} z - z \text{ oder } 1{,}95\,(z - \sin z) = \cos z\,(\operatorname{tg} z - z). \qquad (4)$$

Nun ist $z - \sin z = DF$, $\operatorname{tg} z - z = EF$, folglich, wenn FJ senkrecht auf BE gezogen wird, $FJ = \cos z\,(\operatorname{tg} z - z)$ und nach (4) $1{,}95 \cdot DF = FJ$. Macht man daher $CM = 1$ und $CN = 1{,}95$, zieht die Linie MN und DJ parallel MN, so findet man den Punkt F in dem Durchschnittspunkte der Senkrechten FJ mit der Geraden AE.

Fig. 4.



Im Anschluss an diese Entwickelung sollen im Folgenden die in Heft 3, 1895, Seite 85 dieser Zeitschrift angegebenen Formeln für die angenäherte Bestimmung von Kreisbogenlängen des Weiteren behandelt werden.

Es wurden die Formeln gefunden:

$$u = a + \frac{8}{3}\frac{p^2}{a}; \quad u = 2s + \frac{2s - a}{3}; \quad u = 2s + \frac{1}{3}\frac{p^2}{s} \text{ und}$$
$$u = 2s + \frac{2s - a}{3} + \frac{1}{s}\left(\frac{2s - a}{4}\right)^2.$$

Nun ist für den Halbmesser „1" $u = 2z$; $a = 2\sin z$; $p = 1 - \cos z = 2\sin^2\frac{z}{2}$ und $s = 2\sin\frac{z}{2}$; daraus folgen, unter Berücksichtigung der Reihen:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040}; \quad \sin\frac{z}{2} = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{48} + \frac{z^5}{32 \cdot 120} - \frac{z^7}{128 \cdot 5040}$$

$$\text{und } \operatorname{tg}\frac{z}{2} = \frac{z}{2} + \frac{z^3}{24} + \frac{z^5}{240} + \frac{17z^7}{40320}$$

die Gleichungen:

$$a + \frac{8}{3}\frac{p^2}{a} = \frac{2}{3}\sin z + \frac{8}{3}\operatorname{tg}\frac{z}{2} = 2z + \frac{z^5}{60} + \frac{z^7}{1008},$$

$$2s + \frac{2s - a}{3} = \frac{2}{3}\left(8\sin\frac{z}{2} - \sin z\right) = 2z - \frac{z^5}{240} + \frac{z^7}{8064},$$

$$2s + \frac{1}{3}\frac{p^2}{s} = 4\sin\frac{z}{2} + \frac{2}{3}\sin^3\frac{z}{2} = 2z - \frac{3z^5}{320} + \frac{z^7}{1792} \text{ und}$$

$$\frac{8s - a}{3} + \frac{1}{s}\left(\frac{2s - a}{4}\right)^2 = \frac{19}{3}\sin\frac{z}{2} - \frac{7}{6}\sin z - \frac{1}{2}\sin^3\frac{z}{2}$$

$$= 2z - \frac{z^5}{3840} - \frac{13z^7}{64512},$$

so dass sich die Fehler f annähernd zu:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = \dfrac{z^5}{60} + \dfrac{z^7}{1008}; \; f_2 = -\dfrac{z^5}{240} + \dfrac{z^7}{8064}; \\ f_3 = -\dfrac{3z^5}{320} + \dfrac{z^7}{1792} \text{ und } f_4 = -\dfrac{z^5}{3840} - \dfrac{13z^7}{64512} \text{ ergeben.} \end{array}\right\} \quad (5)$$

Bei diesen Gleichungen ist bemerkenswerth, dass sie die dritten Potenzen von z nicht enthalten· anderseits kann man aus den Coefficienten der fünften Potenzen einen Schluss ziehen über die grössere oder geringere Genauigkeit der oben angegebenen Formeln. So findet man, dass der Werth f_4 der kleinste von den 4 Fehlern ist und noch nicht den zehnten Theil von f_2 ausmacht. Es liegt nun nahe, die Formel $u = \frac{8s-a}{3} + \frac{1}{s}\left(\frac{2s-a}{4}\right)^2$ so abzuändern, dass auch die fünfte Potenz von z in dem Fehlerausdrucke verschwindet. Setzt man zu diesem Zwecke allgemein $u = ms - na + q\frac{a^2}{s}$, so erhält man für die drei Unbekannten m, n und q die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} m - 2n + 4q = 2 \\ -m + 8n - 28q = 0 \\ m - 32n + 244q = 0, \text{ aus welchen folgt:} \end{array}\right. \quad (6)$$

$m = \frac{44}{15}$; $n = \frac{3}{5}$ und $q = \frac{1}{15}$; dadurch entsteht die Formel

$$u = \frac{44}{15}s - \frac{3}{5}a + \frac{1}{15}\frac{a^2}{s} = \frac{8s-a}{3} + \frac{(2s-a)^2}{15s}, \quad (7)$$

welche annähernd gleich $2z - \frac{z^7}{4480}$ gesetzt werden kann. Nimmt man z. B. $z = \frac{\pi}{2} = 90^0$, so wird $u = \frac{46\sqrt{2} - 18}{15} = 3{,}1369$ und $2z = 3{,}1416$ und daher der Fehler gleich $-0{,}0047$, während $-\frac{z^7}{4480} = -0{,}0053$ ist.

Eine sehr angenäherte Formel für u erhält man noch, wenn man in $u = 2s + \frac{1}{3}\frac{p^2}{s}$ in dem zweiten Gliede an Stelle von s die Grösse $\frac{a}{2}$ setzt; dadurch entsteht

$$u = 2s + \frac{2}{3}\frac{p^2}{a}, \tag{8}$$

die allerdings drei Grössen a, p und s enthält, welche nicht unabhängig, vielmehr an die Beziehung $s^2 = p^2 + \frac{a^2}{4}$ gebunden sind.

Man findet noch:

$$u = 2s + \frac{2}{3}\frac{p^2}{a} = 4\sin\frac{z}{2} + \frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{z}{2} - \frac{1}{3}\sin z = 2z + \frac{z^5}{960} + \frac{11z^7}{32256}$$

Für $z = \frac{\pi}{2} = 90^0$ entsteht $u = 2\sqrt{2} + \frac{1}{3} = 3{,}1618$, $2z = 3{,}1416$, daher $f = +0{,}0202$, während $\frac{z^5}{960} + \frac{11z^7}{32256} = 0{,}0100 + 0{,}0080 = 0{,}0180$ wird.

Während die Formel (7) sehr genaue Werthe liefert (der Fehler ist für den Halbkreis noch nicht $0{,}005 \cdot r$), eignet sich dieselbe für den praktischen Gebrauch wegen ihrer wenig einfachen Form nicht besonders; es erscheint daher gerechtfertigt, die einfacheren Gleichungen für u in derselben Weise zu verbessern, wie das oben für $\frac{(m+1)\sin z}{m + \cos z}$ angedeutet ist.

Setzt man daher $u_1 = a + 2m_1\frac{p^2}{a}$; $u_2 = 2s + m_2(2s - a)$; $u_3 = 2s + m_3\frac{p^2}{s}$ und $u_4 = 2s + 2m_4\frac{p^2}{a}$, so hat man die Grössen m so zu bestimmen, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Dieses tritt ein, wenn

$$\frac{\partial \int_0^1 f^2\, dz}{\partial m} = 0 \text{ oder auch } J = \int_0^{z_1} f\frac{\partial f}{\partial m}\, dz = 0 \text{ ist.}$$

Nun ist: $f_1 = 2 \sin z + 2m \left(\mathrm{tg}\frac{z}{2} - \frac{1}{2}\sin z\right) - 2z,$

$$f_2 = 4 \sin \frac{z}{2} + m \left(4 \sin \frac{z}{2} - 2 \sin z\right) - 2z,$$

$$f_3 = 4 \sin \frac{z}{2} + 2m \sin^3 \frac{z}{2} - 2z \text{ und}$$

$$f_4 = 4 \sin \frac{z}{2} + 2m \left(\mathrm{tg} \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \sin z\right) - 2z; \text{ folglich}$$

$$J_1 = \int_0^{z_1} \left\{ \sin z + m \left(\mathrm{tg}\frac{z}{2} - \frac{1}{2}\sin z\right) - z \right\} \left(\mathrm{tg}\frac{z}{2} - \frac{1}{2} \sin z\right) dz = 0$$

$$J_2 = \int_0^{z_1} \left\{ 2 \sin\frac{z}{2} + m \left(2 \sin \frac{z}{2} - \sin z\right) - z \right\} \left(2 \sin \frac{z}{2} - \sin z\right) dz = 0$$

$$J_3 = \int_0^{z_1} \left\{ 2 \sin\frac{z}{2} + m \sin^3 \frac{z}{2} - z \right\} \sin^3 \frac{z}{2}\, dz = 0 \text{ und}$$

$$J_4 = \int_0^{z_1} \left\{ 2 \sin\frac{z}{2} + m \left(\mathrm{tg}\frac{z}{2} - \frac{1}{2} \sin z\right) - z \right\} \left(\mathrm{tg}\frac{z}{2} - \frac{1}{2} \sin z\right) dz = 0.$$

Die Auswerthung dieser Integrale unter Berücksichtigung der Grenzen 0 und $z_1 = \frac{\pi}{2}$ liefert die Formeln

$$m_1 = \frac{0{,}50 - \frac{3}{8}\pi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} z\, \mathrm{tg}\frac{z}{2} z\, d\, 2}{3 - \frac{15}{16}\pi}; \quad m_2 = \frac{1 + \frac{14}{3}\sqrt{2} - \pi(1 + \sqrt{2})}{\frac{5\pi}{4} - 2 - \frac{(4\sqrt{2})}{3}}$$

$$m_3 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{13}{18}\sqrt{2} - \frac{\pi}{48}(9 + 10\sqrt{2})}{\frac{15\pi - 44}{192}} \text{ und}$$

$$m_4 = \frac{0{,}50 - 7\frac{\sqrt{2}}{3} + 4 \lg(\sqrt{2} + 1) - \int_0^{\pi} z\, \mathrm{tg}\frac{z\, d}{2}}{3 - \frac{15}{16}\pi}$$

Nun ist $lg\,(\sqrt{2} + 1) = 0{,}88137$; das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\, \mathrm{tg}\frac{z}{2} dz$ wurde durch Reihenentwickelung zu 0,7431 bestimmt. Durch Einsetzen dieser Zahlenwerthe entstehen die Grössen $m_1 = 1{,}186$; $m_2 = 0{,}366$; $m_3 = 0{,}414$ und $m_4 = 0{,}318$ und daher

$$u_1 = a + 2{,}372\, \frac{p^2}{a}; \quad u_2 = 2s + 0{,}366\, (2s - a)$$

$$u_3 = 2s + 0{,}414 \frac{p^2}{s} \text{ und } u_4 = 2s + 0{,}636 \frac{p^2}{a}.$$

In derselben Weise könnte auch die Formel (7) eine entsprechende Verbesserung erfahren und zwar durch Bestimmung der Grösse m in der Gleichung:

$u = \frac{8s - a}{3} + m \frac{(2s - a)^2}{s}$, so dass wiederum die Summe der Fehlerquadrate am kleinsten wird.

Die nach den Formeln (9) bestimmten Fehler f werden nun, wie leicht einzusehen ist, theils positiv, theils negativ ausfallen, so dass ausser für $z = 0^0$ für einen gewissen Winkel z^0 die Fehler gleich Null werden. Daraus folgt, dass f innerhalb dieser Grenzen für z ein **Maximum** besitzen muss, während ein zweiter grösster Werth für $z = \frac{\pi}{2} = 90^0$ besteht. Zur Ermittelung ersteren Werthes hat man die Functionen f nach z zu differentiiren und findet

$$\frac{df_1}{dz} = \cos z - 1 + m\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}} - \frac{\cos z}{2}\right) = 0;\ \cos z = \frac{2m-2}{2-m};$$

$$\frac{df_2}{dz}\ \cos\frac{z}{2} - 1 + m\left(\cos\frac{z}{2} - \cos z\right) = 0;\ \cos\frac{z}{2} = \frac{1-m}{2m};$$

$$\frac{df_3}{dz} = \cos\frac{z}{2} - 1 + \frac{3m}{2}\sin^2\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2} = 0;\ \cos\frac{z}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{8}{3m}} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{df_4}{dz} = \cos\frac{z}{2} - 1 + m\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}} - \frac{\cos z}{2}\right) = 0.$$

Letztere Formel führt auf die Gleichung dritten Grades

$$m\left(1 + \cos\frac{z}{2} + 2\cos^2\frac{z}{2} + \cos^3\frac{z}{2}\right) = 2\cos^2\frac{z}{2}.$$

Durch Einsetzen obiger Werthe für m_1, m_2, m_3 und m_4 findet man

$$\cos z_1 = 0{,}457;\ z_1 = 62^0 50'$$

$$\cos\frac{z_2}{2} = 0{,}866;\ z_2 = 60^0 00'$$

$$\cos\frac{z_3}{2} = 0{,}864;\ z_3 = 60^0 40' \text{ und}$$

$$\cos\frac{z_4}{2} = 0{,}840;\ z_4 = 65^0 40'.$$

Dadurch erhält man die Fehler $f_1 = -0{,}0196$; $f_2 = +0{,}004$; $f_3 = +0{,}0078$ und $f_4 = -0{,}0028$, während die entsprechenden Fehler für $z = 90^0$ zu $f_1 = +0{,}044$; $f_2 = -0{,}0100$; $f_3 = -0{,}0209$; $f_4 = +0{,}0040$ werden.

Die Vergleichung dieser Fehler mit den auf Seite 87 mitgetheilten lässt erkennen, dass die Formeln (9) eine nicht unbedeutende Verbesserung der auf Seite 85 angegebenen darstellen und daher die vorstehenden, allerdings nicht ganz mühelosen Berechnungen von praktischem Nutzen begleitet sind.

Es mag hier noch nachgetragen werden, dass die Formel für den Umfang einer Ellipse (Seite 86)

$$U = 4a\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{(a-b)(a-h)}{bh}\right\}$$

für $b=h$ zu $U = \frac{36\sqrt{2} - 32}{3}h = 6{,}304\,h$ wird; der genaue Werth beträgt $U = 2\pi h = 6{,}283\,h$ für den Umfang eines Kreises mit dem Halbmesser h, so dass der Fehler $+0{,}021\,h$ wird.

Zur Kreisbogenabsteckung.

Der Artikel in Heft 9 dieser Zeitschr. 1895 (S. 243) scheint anzudeuten, dass auch die nachstehende Kleinigkeit hier mitgetheilt werden darf.

Als „Hauptpunkte" eines Kreisbogens genügen bekanntlich für kleinere Bögen oft die beiden Berührungspunkte auf den sich anschliessenden Geraden; nämlich dann, wenn die s. g. Bogenmitte M nicht weiter als etwa 10 oder 15 m von der Haupttangente entfernt fällt. Ueber dieses Maass wird man bei feineren Bogenabsteckungen für Gleise und dgl. mit der Ordinatenlänge auch in der Ebene jedenfalls nicht hinausgehen, nicht allein mit Rücksicht auf die erforderliche Genauigkeit der Absteckung der Zwischenpunkte, sondern auch im Interesse rascherer Arbeit. Man schaltet vielmehr „Zwischentangenten" nach Bedarf ein, vor allem wird, wenn kein zwingender Grund zur Unsymmetrie vorliegt, auch die Bogenmitte M als Hauptpunkt bestimmt und die Tangente daselbst als erste und meist ausreichende Zwischentangente. Auf die Bestimmung von M bezieht sich nun die folgende Notiz.

Wenn der Tangentenschnittpunkt S zugänglich ist und brauchbar ist, — oft genug ist er ja ohne Nutzen zugänglich —, so berechnet man bekanntlich neben den Strecken $ST = ST_1$ für die Berührungspunkte auch die Strecken $SC = SC_1$ für die Punkte, in denen die Tangente in M die Haupttangenten schneidet und hat dann den Punkt M aufzusuchen als Halbirungspunkt der Strecke CC_1, für die die Probe $CC_1 = 2\,TC = 2\,T_1C_1$ besteht. Daneben verschafft man sich gern und zweckmässig eine weitere Probe für M dadurch, dass man mit dem Theodolit in S den Winkel TST_1 halbirt und auf der so gewonnenen Richtung die Strecke $SM = \frac{R}{\sin \varepsilon} - R = \frac{R}{\cos \delta} - R$ abmisst, wenn $2\,\varepsilon$ den ganzen Winkel in S, $2\,\delta$ den ganzen Centriwinkel im Mittelpunkt O des Bogens bezeichnet.

Dieser Fall zugänglichen und nutzbaren Tangentenschnittpunkts S ist aber im Allgemeinen selten vorhanden. Man muss vielmehr oft zwei beliebige Hilfspunkte A, A_1 auf den gegebenen Tangenten benutzen, die eine genügend lange und gut messbare Grundlinie $AA_1 = a$ liefern und den Winkel $2\,\varepsilon$ in S mittelbar durch die 2 Winkel α und α_1, in A und A_1 messen. Hieraus berechnet man die Seiten SA und SA_1 und damit die Strecken AT, A_1T_1, AC, A_1C_1; der Punkt M ergiebt sich wieder als Halbirungspunkt der Strecke CC_1, deren Länge $= 2\,TC = 2T_1C_1$ sein muss. In keinem Lehrbuch oder Tracirungshilfsbuch findet sich nun angedeutet, dass man in diesem Falle, wie oben angedeutet, eine weitere Probe für M, die hier noch viel mehr willkommen ist als dort, sich ebenfalls ohne irgend erhebliche Mehrarbeit (eine Neuaufstellung des Theodolits, Abmessen zweier Strecken, von denen die eine kurz ist) verschaffen kann.

Ist nämlich Q der Schnittpunkt der Halbirungslinie SO des Winkels in S mit AA_1, so hat man zunächst mit

$$2\,\varepsilon = \alpha + \alpha_1 - 180^0 \tag{1}$$

und nach Berechnung von SA und SA_1 nach dem Sinussatz für SQ die zwei Gleichungen:

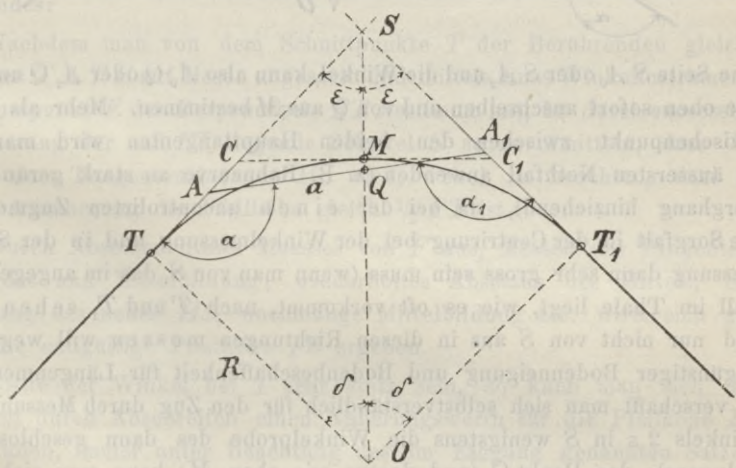
$$SQ = \frac{SA \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha - \varepsilon)} = \frac{SA_1 \cdot \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \varepsilon)}, \tag{2}$$

was zugleich eine Controle der Logarithmen von SA und SA_1 bildet. Für AQ und A_1Q erhält man:

$$\left.\begin{aligned} AQ &= SA\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\alpha-\varepsilon)},\\ A_1Q &= SA_1\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\alpha_1-\varepsilon)} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(dabei sind in (2) und (3) die beiden vorkommenden Nenner gleich, da $(\alpha - \varepsilon)$ und $(\alpha_1 - \varepsilon)$ Nebenwinkel sind). Wenn man gleich auch noch die aufgeschlagenen Numeri für SA und SA_1 controliren will, so kann man, da sich

Fig. 1.



$$AQ : A_1Q = SA : SA_1$$

verhält, auch noch rechnen nach

$$\left.\begin{aligned} AQ &= a \cdot \frac{SA}{SA + SA_1}\\ A_1Q &= a \cdot \frac{SA_1}{SA + SA_1} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

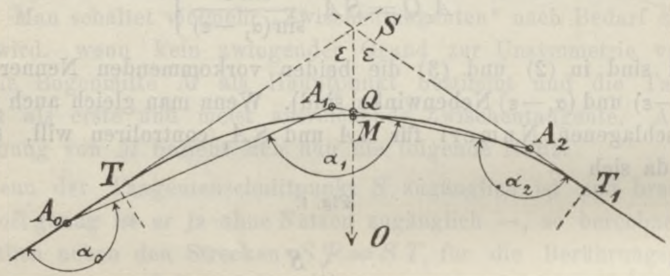
Damit ist der Punkt Q auf a von A und A_1 aus einzumessen. Legt man daselbst mit dem Theodolit den Winkel $AQM = 180^0 - (\alpha - \varepsilon)$

oder $A_1 Q M = 180^0 - (\alpha_1 - \varepsilon)$ an, so hat man die Richtung nach M und erhält diesen Punkt durch Abmessen von

$$Q M = S M - S Q = \frac{R}{\cos \delta} - S Q.$$

Es kann bekanntlich auch vorkommen, dass man mit den zwei Punkten A, A_1 nicht ausreicht, sondern den Zug $A_0\, A_1\, A_2$ zur Verbindung der zwei Tangenten braucht. Auch hier kann man sich, nachdem aus dem Viereck $S\, A_0\, A_1\, A_2$ (gemessen die Seiten bis auf 2 und die Winkel bis auf den in S, der sich also sofort ergiebt) $S\, A_0$ und $S\, A_2$ berechnet sind und nachdem erkannt ist (was meist unmittelbar möglich ist), ob Q auf $A_0\, A_1$ oder $A_1\, A_2$ fällt, diesen Punkt Q ebenso leicht verschaffen. Im Dreieck $S\, A_0\, Q$ oder $S\, A_2\, Q$ im einen oder andern Fall hat man dann

Fig. 2.

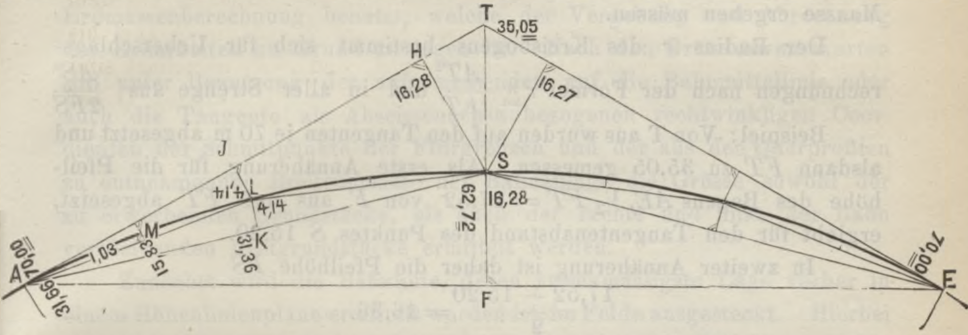


eine Seite $S\, A_0$ oder $S\, A_2$ und die Winkel, kann also $A_0\, Q$ oder $A_2\, Q$ und $S\, Q$ wie oben sofort anschreiben und von Q aus M bestimmen. Mehr als Einen Zwischenpunkt zwischen den beiden Haupttangenten wird man nur im äussersten Nothfall anwenden (z. B. Bahncurve an stark gerundetem Berghang hinziehend), da bei der einen uncontrolirten Zugmessung die Sorgfalt in der Centrirung bei der Winkelmessung und in der Seitenmessung dann sehr gross sein muss (wenn man von S, das im angegebenen Fall im Thale liegt, wie es oft vorkommt, nach T und T_1 sehen kann und nur nicht von S aus in diesen Richtungen messen will wegen zu ungünstiger Bodenneigung und Bodenbeschaffenheit für Längenmessung, so verschafft man sich selbstverständlich für den Zug durch Messung des Winkels $2\,\varepsilon$ in S wenigstens die Winkelprobe des dann geschlossenen Polygons); den Punkt Q (und daraus wie oben M) kann man sich aber auch hier noch mit leichter Mühe berechnen aus einem Polygon, z. B. Viereck, in dem die Seiten bis auf zwei zusammenstossende und die Winkel bis auf einen, sich also sofort ergebenden, gemessen sind. Ein solcher direct, als „Hauptpunkt", bestimmter Punkt zwischen T und T_1 ist auch in den beiden zuletzt angegebenen Fällen sehr willkommen, wie man auch immer die Zwischenpunkte absetzen mag.

Hammer.

Kreisabsteckung durch Streckenmessung.

Im Anschluss an den Aufsatz des Herrn Prof. Vogler, im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift S. 561—568 „Zur Kreisabsteckung ohne Theodolit", soll hier eine Curvenabsteckung behandelt werden, die zu ihrer Ausführung keinerlei Formeln bedarf.



Sich auf den Satz stützend: „Bei einem Kreisbogen ist die Pfeilhöhe gleich dem Abstande des Scheitels von den im Anfangs- und Endpunkt des Bogens gelegten Tangenten" ergiebt sich für die Curvenabsteckung Folgendes:

Nachdem man von dem Schnittpunkte T der Berührenden gleiche Strecken TA TE auf diesen abgesetzt und mittels eines Winkelinstruments den Fusspunkt F des Perpendikels FT bestimmt hat, ist durch successive Annäherung der auf FT liegende Scheitel S so zu ermitteln, dass FS gleich dem Tangentenabstande HS wird, wobei zu beachten, dass in erster Annäherung die Pfeilhöhe gleich $^1/_2\, FT$ ist.

Durch Absetzen dieses Maasses von F aus, Messen des Tangentenabstandes und Mittelbildung, wiederholtes Absetzen des Mittels, Bestimmung des neuen HS, nochmalige Mittelbildung etc. wird sich gar bald die endgültige Pfeilhöhe FS ergeben.

Sollte der Winkel bei T sehr spitz sein, so kann man sich mit Vortheil durch Abschreiten einen Näherungswerth für die Pfeilhöhe FS verschaffen, immer unter Beachtung des im Eingang genannten Satzes.

Für den Bogen AS ist die Lage des Scheitels L durch successive Annäherung wiederum so zu bestimmen, dass KL gleich JL wird. Hierbei ist nach der Viertelsmethode KL genähert gleich $^1/_4\, FS$. In den meisten Fällen wird die Mittelbildung aus $KL = {}^1/_4\, FS_4$ und dem entsprechenden Tangentenabstand bereits das richtige Resultat ergeben.

Für die weitere Absteckung ist AL zu messen, zu halbiren und M so abzusetzen, dass sein Abstand von der Mitte der Sehne AL und der Tangente AT gleich werde; hierbei zeigt sich, dass in den meisten Fällen die Viertelsmethode schon strenge Werthe liefert, d. h. $^1/_4\, KL$ ist gleich der endgültigen Pfeilhöhe.

Die so gewonnenen Resultate sind nun auf die andern Punkte der Curve zu übertragen, womit die Absteckung erledigt ist.

Die Schlusscontrole wird durch Messen der Kleinsehnen, die sämmtlich gleich sein müssen, sowie durch Anwendung der Secantenprobe bewirkt. Diese besteht darin, dass der Abstand jeder Kleinsehne von dem nächsten Curvenpunkt ermittelt wird, wobei sich gleiche Maasse ergeben müssen.

Der Radius r des Kreisbogens bestimmt sich für Ueberschlagsrechnungen nach der Formel $r \cong \frac{AT^2}{FT}$ und in aller Strenge aus $\frac{AS^2}{2FS}$

Beispiel: Von T aus wurden auf den Tangenten je 70 m abgesetzt und alsdann FT zu 35,05 gemessen. Als erste Annäherung für die Pfeilhöhe des Bogens AE, $\frac{1}{2}\,FT = 17{,}52$ von F aus auf FT abgesetzt, ergiebt für den Tangentenabstand des Punktes S 15,20.

In zweiter Annäherung ist daher die Pfeilhöhe FS

$$\frac{17{,}52 + 15{,}20}{2} = 16{,}36.$$

Diesem Maasse entsprechend fand sich für HS 16,21, woraus als endgültige Pfeilhöhe $\frac{16.36 + 16{,}21}{2} = 16{,}28$ resultirt.

Durch Messen des Abstandes von der Tangente $TE = 16{,}27$ wurde die Richtigkeit der Absteckung des Punktes S bestätigt.

Darauf wurde $AS = 62{,}72$ gemessen, halbirt und für die Pfeilhöhe KL vorläufig $\frac{16{,}28}{4} = 4{,}07$ abgesetzt; da der entsprechende Tangentenabstand 4,21 m war, ist der endgültige Werth von KL

$$\frac{4{,}07 + 4{,}21}{2} = 4{,}14.$$

Für die Absteckung des Punktes M genügt jetzt die Viertelsmethode, sowohl die Pfeilhöhe wie der Tangentenabstand ergaben $\frac{4{,}14}{4} = 1{,}03$.

Nachdem mit den so gewonnenen Absteckungsresultaten sämmtliche Punkte der Curve bestimmt waren, zeigte die Schlusscontrole zufriedenstellende Uebereinstimmung. *Hegemann.*

Einiges über Vermessungen bei ausführlichen Eisenbahn-Vorarbeiten.

Die bei den ausführlichen Vorarbeiten für eine Eisenbahn-Neubaustrecke auszuführenden Vermessungen bieten einige in der Natur der Sache begründete Besonderheiten, auf welche hier hingewiesen werden soll.

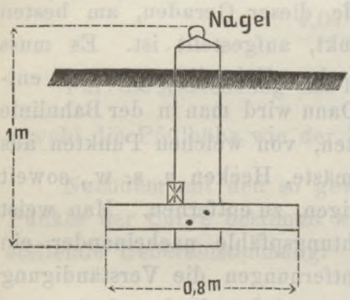
Durch diese Vermessungen sollen die Unterlagen zur Aufstellung des ausführlichen Entwurfes für die neue Bahnlinie und zur nachfolgenden

Bauausführung gewonnen werden. Zu diesem Zweck werden erforderlich: Höhen- und Lagepläne im Maassstabe 1:1000 oder 1:2500, Querprofile meist in 1:100, und Grunderwerbskarten in 1:1000 oder 1:2000.

Mit Hülfe der Höhen- und Lagepläne und der Querprofile soll die Höhenlage der Bahnkrone und die Gestalt des Bahnkörpers bestimmt werden können. Ferner werden die Querprofile zur Aufstellung der Erdmassenberechnung benutzt, welche der Vergebung und Abrechnung der Erdarbeiten zu Grund zu legen ist. Nach den Grunderwerbskarten soll unter Benutzung der aufzumessenden auf die Bahnmittellinie oder auch die Tangente als Abscissenachse bezogenen rechtwinkligen Coordinaten der Schnittpunkte der Flurgrenzen und der aus den Querprofilen zu entnehmenden Breitenmaasse der Bahnanlage die Grösse sowohl der zu erwerbenden Grundstücke, als auch der rechts und links der Bahn verbleibenden Restgrundstücke ermittelt werden.

Zunächst wird die Bahnlinie, deren zweckmässigste Lage vorher in einem Höhenlinienplane ermittelt worden ist, im Felde ausgesteckt. Hierbei werden am besten etwa in Entfernungen von je 150 m Richtungspfähle (12 cm Durchmesser, 50 cm lang) in der Geraden und den anschliessenden Tangenten geschlagen. In die Richtungspfähle lässt man Löcher so einbohren, dass bei der nachfolgenden Längenmessung und Abpfählung Baken in die Richtungspfähle gesteckt werden können, nach welchen in den Zwischenräumen eine genügende Anzahl solcher Baken nach dem Augenmaass einzuweisen ist. Das Ausrichten der Geraden (Schlagen der Richtungspfähle) geht am schnellsten vor sich, wenn man den Theodolit am Anfang der Geraden, z. B. auf dem Winkelpunkt, aufstellen und nach einem Signal visiren kann, das am Ende dieser Geraden, am besten hinter dem nächsten künftigen Winkelpunkt, aufgestellt ist. Es muss also zunächst dieses Signal nach den aus dem Höhenlinienplan zu entnehmenden Maassen aufgestellt werden. Dann wird man in der Bahnlinie zurückgehen und sich darüber unterrichten, von welchen Punkten aus das Signal zu sehen ist. Hierbei sind Baumäste, Hecken u. s. w., soweit sie die Sichtbarkeit des Signals beeinträchtigen, zu entfernen. Man weist alsdann mit dem Theodolit 3 bis 4 Richtungspfähle nacheinander ein und geht schliesslich, da auf weitere Entfernungen die Verständigung mit den vorgeschickten Arbeitern zu schwer wird, mit dem Instrument vor, wenn möglich auf den zuletzt bestimmten Punkt, falls von dort aus das Signal zu sehen ist. In der neuen Aufstellung wiederholt sich der beschriebene Vorgang. Dieses Verfahren dürfte nur in Folge von Hindernissen in der Linie zu verlassen sein, die auch dann nicht übersehen werden können, wenn am Ende der Geraden ein recht hohes Signal aufgestellt wird, z. B. eine lange, am oberen Ende mit weissem Shirting umwickelte Stange. Im Uebrigen kann man die Uebersichtlichkeit der Linie im Allgemeinen schon vor der Begehung nach dem Höhenlinienplan beurtheilen. Die Bestimmung des neuen Winkelpunktes wird erleichtert, wenn vor und hinter demselben ein Richtungspfahl geschlagen wird. In Verbindung mit der Längenmessung, die wohl immer mit Messlatten auszuführen ist, wird die Linie abgepfählt. Die einzumessenden Punkte werden durch einen bis zur Bodenhöhe einzuschlagenden Grundpfahl etwa 4 $\times$ 4 cm stark, 25 cm lang, bezeichnet. An einem daneben geschlagenen Nummerpfahl, etwa 6$\times$2$^1/_2$ cm stark und 35 cm lang, wird das Längenmaass für den betr. Punkt angeschrieben. In Entfernungen von je 50 m sind solche Pfähle zu schlagen und dazwischen nach Bedarf an den Rändern von Wegen und Wasserläufen und an den Punkten, an welchen zum Zweck einer richtigen Massenberechnung ein Querprofil nöthig wird. In Bogen mit weniger als 1000 m Halbmesser wird man von der Tangente oder Hülfstangente aus in Entfernungen von 10 zu 10 m Bogenpunkte absetzen. Bei grösseren Halbmessern dürften Entfernungen von 20 m genügen.

Es empfiehlt sich, zur Festlegung von Hülfswinkelpunkten und Bogenmitten, und zum Ausrichten längerer Hülfstangenten den Theodolit zu benutzen. Für das Feldbuch, welches bei der Längenmessung zu führen ist, findet sich eine Beschreibung im Handbuch der Ingenieurwissenschaften Bd. 1, Vorarbeiten. Bei dem Nivellement ist zu beachten, dass für die Bauausführung etwa 2 Festpunkte für das km Bahnlinie erforderlich sind. Meistens werden besondere Festpfähle seitlich der Bahn so einzugraben sein, dass sie beim Bau erhalten bleiben. Diese Pfähle wird man möglichst in der Nähe grösserer Bauwerke anbringen, wo sie oft zu benutzen sind. Sie müssen mindestens 5 Jahre erhalten bleiben und werden deshalb meist aus Eichenholz mit unteren Querhölzern



nach nebenstehender Skizze hergestellt. Im Allgemeinen ist zu beachten, dass Pfähle von Wegerändern und im Walde am längsten erhalten bleiben. Bei den Querprofilaufnahmen mittelst des Nivellirinstrumentes werden die Messungsergebnisse in ein Nivellementsbuch eingetragen. Skizzen sind nur ausnahmsweise nöthig. Das Profil wird mit der Maasszahl des Pfahles in der Bahnlinie und mit „rechts" bezw. „links der Bahn" bezeichnet. Darunter werden die im Profil gemessenen Längen und neben diese Zahlen die Lattenablesungen gesetzt. Neben der Lattenablesung wird demnächst im Hause die Ordinate eingetragen.

Bei der Vermessung der in Betracht kommenden Grundstücke darf nicht versäumt werden, alle Schnittpunkte der Bahnlinie, bezw. der Tangente, mit Flurgrenzen in der Richtung der letzteren gegen die Grenzsteine einzumessen.

Sollen diese Feldarbeiten sämmtlich mit gleichmässigem Arbeitsfortschritt neben einander ausgeführt werden, so sind in den meisten Fällen

5 Messabtheilungen zu bilden. Eine Abtheilung richtet die Linie aus und misst die Winkel; die zweite besorgt die Längenmessung und Abpfählung; die dritte nivellirt; die vierte nimmt Querprofile auf, und die fünfte misst die durchschnittenen Grundstücke ein. Dabei bleiben noch ein Controlnivellement, Bodenuntersuchungen für die Bauwerke, Aufnahmen von Wegen und Wasserläufen, Ermittlung von Hoch- und Niedrigwasserständen und Aufmessung der Durchflussprofile vorhandener Bauwerke den genannten Abtheilungen nach Bedarf zu übertragen. Auf Grund der Aufnahmen der Wege und Wasserläufe sollen die Bauwerke und Wegübergänge entworfen werden. Am besten werden diese Aufnahmen mittelst des Tachymeters im Anschluss an die abgepfählte Bahnlinie gemacht. Häufig wird eine Standlinie längs des Weges oder Wasserlaufes abgesteckt und der letztere durch Querprofile gegen diese Linie festgelegt. Der Winkel der Standlinie mit der Bahnlinie wird dabei durch Längenmessung bestimmt. Letzteres Verfahren empfiehlt sich namentlich dann, wenn ein Wegübergang durch Abtragung des vorhandenen Weges herzustellen ist, weil dann nach den Profilen die Massenberechnung aufgestellt werden kann. Alle diese Vorbereitungen zur Bauausführung sollen so genau und vollständig sein, dass ein nachträgliches Versetzen der schon vor Beginn des Baues zu setzenden Grenzsteine für die anzukaufenden Flächen vermieden wird.

Berlin, im Juli 1895. *Schepp.*

Reduction der Richtungswinkel und der Entfernung in der conformen Kegelprojection.

In dem vor Kurzem ausgegebenen Werke: „Grossherzogl. Mecklenburgische Landesvermessung, V. Theil, die conforme Kegelprojection und ihre Anwendung auf das trigonometrische Netz I. Ordnung, Schwerin 1895“ ist in § 10 eine Reduction der Richtungswinkel mit Gliedern 3. Ordnung gegeben, welche alle Glieder von der Ordnung $\frac{x^2 s}{r^3}$ oder $\frac{y^2 s}{r^3}$ enthält, aber die nächstfolgenden Glieder von der Ordnung $\frac{s^3}{r^3}$ nicht mehr giebt. Durch Zahlenrechnungen, von denen ein Theil in § 12 mitgetheilt ist, war zweifellos nachgewiesen, dass jene Rechnungsart auf 0,01″ genau war, und mehr war in der ganzen Behandlung nicht angestrebt, zumal die Millimeterschärfe in den Coordinaten, welche ja an sich schon nur formellen Sinn hat, die Richtungsgenauigkeit mit 0,01″ abzuschliessen zwingt, wie am Schlusse von § 11 bemerkt worden ist.

Trotzdem möchte es jedenfalls in mathematischem Sinne erwünscht sein, jene Entwicklungen noch um eine Stufe weiter zu führen, um deutlich vor Augen zu haben, was bei jenem Verfahren vernachlässigt ist.

Anknüpfend an die Gleichung (6) S. 34 des fraglichen Werkes haben wir im Wesentlichen:

$$\frac{\delta}{d\xi}=\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=\frac{1}{r^2}\left\{x\frac{dy}{d\xi}-\frac{t}{2r}x^2\frac{dy}{d\xi}+\frac{t}{2r}y^2\frac{dy}{d\xi}-\frac{t}{r}xy\frac{dx}{d\xi}\right\} \quad (1)$$

dabei hat man $x=x_1+\xi\cos\beta \qquad y=y_1+\xi\sin\beta$ (2)

$$\frac{dx}{d\xi}=\cos\beta \qquad \frac{dy}{d\xi}=\sin\beta \quad (3)$$

Wenn man diese (2) und (3) in (1) einsetzt und nach Potenzen von ξ ordnet, so bekommt man:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=A+B\xi+C\xi^2 \quad (4)$$

$$\text{wo } A=\frac{x_1}{r^2}\sin\beta+\frac{t}{2r^3}(-x_1{}^2\sin\beta+y_1{}^2\sin\beta-2x_1y_1\cos\beta) \quad (5)$$

$$B=\frac{\sin\beta\cos\beta}{r^2}+\frac{t}{r^3}(-2x_1\sin\beta\cos\beta+y_1\sin^2\beta-y_1\cos^2\beta) \quad (6)$$

$$C=\frac{t}{2r^3}\sin\beta(-3\cos^2\beta+\sin^2\beta) \quad (7)$$

Die Gleichung (4) giebt zweimal integrirt:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=A\xi+\frac{B\xi^2}{2}+\frac{C\xi^3}{3}+C_1$$

$$\eta=\frac{A\xi^2}{2}+\frac{B\xi^3}{6}+\frac{C\xi^4}{12}+C_1\xi+C_2$$

Die Integrations-Constanten C_1 und C_2 werden ebenso bestimmt wie bei (16) und (17) S. 31 des Meckl. Werkes, nämlich $C_1=-\delta_1$ und $C_2=0$ und dann giebt sich:

$$\delta_1=\frac{As}{2}+\frac{Bs^2}{6}+\frac{Cs^3}{12} \quad (8)$$

$$\delta_2=\frac{As}{2}+\frac{Bs^2}{3}+\frac{Cs^3}{4} \quad (9)$$

Wenn man hier die Werthe von A, B, C aus (5), (6), (7) einsetzt und auch (2) berücksichtigt, so erhält man zunächst etwas unregelmässig geformte Ausdrücke, die sich aber verschiedentlich umformen lassen. So kann man δ_1 auf folgende Form bringen:

$$\delta_1=\frac{(2x_1+x_2)(y_2-y_1)}{6r^2}+\frac{t}{12r^3}\Big\{(2y_1{}^2+y_2{}^2)(y_2-y_1)-(2x_1{}^2+x_2{}^2)(y_2-y_1)$$
$$-2(2x_1y_1+x_2y_2)(x_2-x_1)\Big\}$$
$$+\frac{t}{24r^3}\Big\{-(y_2-y_1)^3+3(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)\Big\}$$

Da $y_2-y_1=s\sin\beta$ und $x_2-x_1=s\cos\beta$ ist, kann man die Klammer des letzten Gliedes auf die Form bringen $-s^3\sin^3\beta+3s^3\cos^2\beta\sin\beta$ $=-s^3\sin 3\beta$. Und die zwei ersten Glieder des Ausdruckes für δ_1 bedeuten dasselbe, was auf S. 35 und S. 37 des Mecklenburgischen Werkes durch Δ_1 und Δ_2 ausgedrückt ist. Man hat daher:

$$\delta_1=\frac{2\Delta_1-\Delta_2}{3}+\frac{t}{24r^3}s^3\sin 3\beta \quad (10)$$

$$\text{und } \delta_2=\frac{2\Delta_2-\Delta_1}{3}+\frac{t}{24r^3}s^3\sin 3(\beta\pm 180^0) \quad (11)$$

Die Correctionsglieder erreichen den grössten Werth mit $\sin 3\beta = 1$, nämlich (mit Zusetzung von ρ):

$$\frac{t\rho}{24 r^3} s^3 \tag{12}$$

Die zwei Dreiecksseiten der Mecklenburgischen Triangulirung, bei welchen nach Grösse und Richtung das zweite Glied in (10) oder (11) den Betrag von 0,01″ erreicht, sind Stralsund-Hardberg und Helpterberg-Greifswald, beide geben rund 0,010″.

Da wir in de Mecklenburgischen Kegelprojection die Schlussglieder von (10) und (11) nicht berücksichtigt haben, sind also Vernachlässigungen von höchstens 0,01″ gemacht worden, und da die ganze Rechnung überhaupt nur mit 0,01″ als letzter Rechenstelle geführt worden, also in 0,01″ überhaupt nicht mehr scharf ist, ist die Vernachlässigung der Schlussglieder von (10) und (11) gerechtfertigt.

Die Zulässigkeit jener Vernachlässigungen war s. Z. bei dem Mecklenburgischen Werke durch eine Anzahl von numerischen Rechnungen, deren ein Theil in § 12 mitgetheilt ist, gesichert worden, durch vorstehende Neuentwickelung, welche als Ergänzung jenes Werkes dienen kann, ist nun die Zulässigkeit der Vernachlässigung auch analytisch zweifellos nachgewiesen.

In gleicher Weise wie hier mit den Richtungsverbesserungen δ_1 und δ_2 geschehen ist, kann man auch die Entfernungs-Reduction genauer angeben, als in § 10 des Mecklenburgischen Werkes geschehen ist. Da hierzu alles in § 8 schon vorbereitet ist, haben wir aus (4) S. 26 im wesentlichen:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{x^3 t}{6r^3} + \frac{xy^2 t}{2r^3}$$

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{x^2}{2r^2} + \frac{t}{6r^3}(x^3 - 3xy^2) \tag{13}$$

Wegen (2) kann man dieses auf die Form bringen:

$$\frac{1}{m} = A' + B'\xi + C'\xi^2 + D'\xi^3 \tag{14}$$

wo

$$A' = 1 - \frac{x_1^{\,2}}{2r^2} + \frac{t}{6r^3}(x_1^{\,3} - 3x_1 y_1^{\,2})$$

$$B' = \quad -\frac{2x_1}{2r^2}\cos\beta + \frac{t}{6r^3}(3x_1^{\,2}\cos\beta - 6x_1 y_1 \sin\beta - 3y_1^{\,2}\cos\beta)$$

$$C' = \quad -\frac{1}{2r^2}\cos^2\beta + \frac{t}{6r^3}(3x_1\cos^2\beta - 2x_1\sin^2\beta - 6y_1\sin\beta\cos\beta)$$

$$D' = \quad \frac{t}{6r^3}(\cos^3\beta - 3\cos\beta\sin^2\beta)$$

Nun giebt (14) unmittelbar:

$$S = \int_0^s \frac{1}{m}\, d\xi = A's + \frac{B's^2}{2} + \frac{C's^3}{3} + \frac{D's^4}{4} \tag{15}$$

Wenn man andererseits drei Werthe m_1, m_0, m_2 einführt, für den Anfang, die Mitte und das Ende der Linie, so wird nach (14):

$$\frac{1}{m_1} = A'$$

$$\frac{4}{m_0} = 4\,A' + 2\,B's + C's^2 + \frac{D's^3}{2}$$

$$\frac{1}{m_2} = A' + B's + C's^2 + D's^3$$

Diese drei Ausdrücke mit (15) verglichen geben:

$$S = \frac{s}{6}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2}\right) \tag{16}$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$\frac{s}{S} = \frac{m_1 + 4\,m_0 + m_2}{6} \tag{17}$$

Damit ist gezeigt, dass die Rechnung (13) S. 37 nicht bloss hinreichend genähert (wie auf S. 33 angegeben ist) gilt, sondern streng innerhalb der dritten Ordnung.

Hierbei mögen auch zwei andere Kleinigkeiten in jenem Mecklenburgischen Werke berichtigt werden, die erste ein Schreibfehler, die zweite ein reiner Druckfehler.

Auf S. 30 steht:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{m_1 + 4m_0 + m_2}{6} \tag{18}$$

Das muss aber heissen:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{(m_1 - 1) + 4(m_0 - 1) + (m_2 - 1)}{6} = \frac{m_1 + 4m_0 + m_2}{6} \tag{19}$$

Dem Sinne nach ist stets nach der richtigen Formel (19) gerechnet.

Auf S. 35 und 37 steht:

$$\delta_2 = -\frac{\Delta_1 + 2\,\Delta_2}{3}$$

Statt dessen soll stehen:

$$\delta_2 = \frac{-\Delta_1 + 2\Delta_2}{3}$$

17. Juli 1895. *J.*

Berichtigung.

In der Abhandlung „Zur Geschichte der Steinlinien in Baden“ von Dr. M. Doll, Heft 14, Seite 372 ist zu lesen:

Zeile 8 v. o. statt Wohrle Wehrle

„ 30 v. o. „ Tage Jahre.

Inhalt.

Verlag von Konrad Wittwer Stuttgart. — Druck von Gebrüder Jänecke in Hannover.