ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

Dr. W. Jordan, und C. Steppes,

Professor in Hannover Steuer-Rath in München.

1895. Heft 22. Band XXIV.

15. November.

Ueber die Aufgaben der einfachen trigonometrischen Punkteinschaltung;

von E. Hammer.

Es verlohnt sich wohl einmal, die Aufgaben der einfachen trigonometrischen Punkteinschaltung im Netz der Triangulirungspunkte (Einschaltung ohne überschüssige Bestimmungsstücke, also ohne dass eine Ausgleichungsaufgabe vorliegen würde) von allgemeinen geometrischen Gesichtspunkten aus zu betrachten in der Absicht, diese Aufgaben systematisch zu gruppiren. Zu einzelnen dieser Aufgaben sollen ferner im Folgenden geometrische Bemerkungen gemacht werden, während andere Aufgaben mehr als geometrische Anschauungs- und trigonometrische Uebungsaufgaben aufgefasst werden mögen.

Um Punkte der Vermessungsebene gegen einander festzulegen, insbesondere Neupunkte in ein Netz von Punkten bekannter Lage einzuschalten, hat man die zwei Mittel der Horizontalmessung auf dem Feld überhaupt: Längenmessung und Winkelmessung. Bei der im e. S. sogenannten trigonometrischen Punkteinschaltung (1. Fall) kommt die Längenmessung, von Centrirungen abgesehen, nicht in Betracht; die polygonometrische Punktbestimmung durch Zugmessung stellt eine Combination von Längen- und Winkelmessung vor (2. Fall) und ebenso gehört die ganze Tachymetrie zu diesem 2. Fall; und auf der andern Seite kommt, wenn auch selten, Punkteinschaltung durch Längenmessung allein vor in dem sogenannten Bogenschnitt (3. Fall).

§ 1. Im Folgenden soll nur vom ersten Fall reiner trigonometrischer Punktbestimmung die Rede, also unmittelbare Längenmessung (im Allgemeinen) ganz ausgeschlossen sein. Ferner sei nochmals festgesetzt, dass es sich nur um einfache Punktbestimmung ohne Ausgleichung handle; so dass eben so viele gegebene und gemessene Stücke vorhanden sind, als die Aufgabe geometrisch verlangt und dass die Art der Winkelmessung, Satzmessung oder Repetitionsmessung gleichgiltig ist. Ein „gegebener“ Punkt ist selbstverständlich stets durch seine rechtwinkligen Coordinaten in einem gewissen ebenen System gegeben, von einem „gesuchten“ Punkt sind die Coordinaten zu bestimmen.

Je nachdem die Winkelmessung zur Bestimmung der Neupunkte auf den gegebenen Punkten als Standpunkten gemacht wird, so dass für jeden gemessenen Winkel die Richtung nach dem zu bestimmenden Punkt der eine Schenkel ist, oder aber auf dem zu bestimmenden Punkt gemacht wird, so dass die Winkelschenkel alle von dem zu bestimmenden Punkt ausgehen, spricht man von Vorwärts- oder Rückwärtseinschneiden; dort liefert die Winkelmessung als Bestimmungslinien für den Neupunkt Gerade, die von den gegebenen Punkten ausgehen, hier Kreise, die über den Verbindungslinien gegebener Punkte als Sehnen beschrieben werden. Es ist nicht ohne Interesse zu sehen, wie die beiden einfachsten Aufgaben, die aus diesen zwei Möglichkeiten entstehen, auf's Engste unter sich zusammenhängen. Betrachtet man die Winkelmessung stets nur als Mittel zur Entfernungsbestimmung, so kann man beim einfachen Vorwärtseinschneiden des Punktes C von den zwei gegenseitig sichtbaren Punkten A und B aus, deren Entfernung c aus ihren Coordinaten folgt, durch die gemessenen Winkel α in A und β in B im Dreieck ABC, sich den Punkt C bestimmt denken durch „Bogenschnitt“ von A und B aus mit den Entfernungen $AC = c\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ und $BC = c\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Beim Rückwärtseinschneiden dagegen ist daran zu erinnern, dass bereits durch Einen auf dem zu bestimmenden Punkt gemessenen Winkel ein gewisser Punkt vollständig festgelegt ist, nämlich der Mittelpunkt des Kreises über der Strecke zwischen den zwei entsprechenden gegebenen Punkten als Sehne. Beim einfachen Rückwärtseinschneiden des Neupunktes D über die drei gegebenen Punkte A, C, B (C der „mittlere“ Punkt), für die $CA = a$, $CB = b$ und der Winkel zwischen a und b aus den Coordinaten zu berechnen sind, sei zwischen A und C der Winkel α, zwischen C und B der Winkel β gemessen; mit α ist gegeben der Mittelpunkt M_1 des Kreises über AC als Sehne und mit α als Peripheriewinkel, mit β der Mittelpunkt M_2 des Kreises über BC als Sehne und mit β als Peripheriewinkel; die Halbmesser dieser zwei Kreise sind $R_1 = \frac{1}{2}\,\frac{a}{\sin\alpha}$, $R_2 = \frac{1}{2}\,\frac{b}{\sin\beta}$. Die Aufgabe des einfachen Rückwärtseinschneidens kann man zurückgeführt denken auf dreimaligen „Bogenschnitt“: Punkt M_1 mit den zwei gleichen Strecken R_1 von A und C aus, M_2 mit R_2 von B und C aus, D mit den Strecken R_1 von M_1 und R_2 von M_2 aus. Einfachstes Vorwärts- und einfachstes Rückwärtseinschneiden können also gemeinschaftlich aufgefasst werden als mittelbare Anwendungen einer und derselben Aufgabe, des 3. Falls der Einleitung, der in geometrischem (nicht trigonometrischem) Sinn als einfachste Punktbestimmung gelten kann.

§ 2. Ein (einziger) Neupunkt kann einfach und rein trigonometrisch bestimmt werden, a. durch zwei Vorwärtsschnitte (Bestimmungslinien zwei Gerade), b. durch zwei Rückwärtsschnitte (zwei Kreise), c. durch einen Vorwärts- und einen Rückwärtsschnitt (Gerade und Kreis).

Fig. 1.

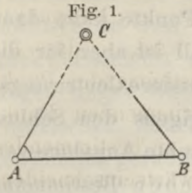


Fig. 2.

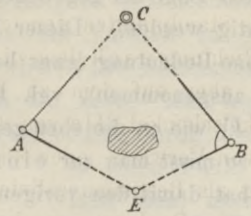


Fig. 3.

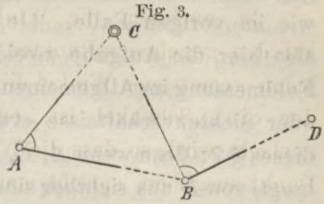
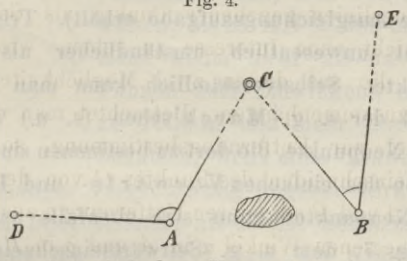


Fig. 4.



a. Die Aufgabe des einfachen V o r w ä r t s einschneidens Eines Neupunktes kann ferner in Anspruch nehmen: z w e i gegebene Punkte, d r e i gegebene Punkte oder v i e r gegebene Punkte, den Fig. 1, 2 oder 3, und 4 entsprechend.*) Dabei ist — und diese Bemerkung gilt selbstverständlich auch für die folgenden Aufgaben — bei allen gemessenen Winkeln an durchaus unabhängige W i n k e l - messung zu denken; in Fig. 3 ist also nicht Satzmessung in B zwischen A, C, D gemacht, sondern die Sicht AB ist möglich, $B\,A$ aber nicht (z. B. B Kirchthurm, dessen Spitze von A aus sichtbar ist, von dessen Fuss aber nicht nach A gesehen werden kann). Fig. 2 und 4 entsprechen dem „Vorwärtseinschneiden ohne Visur in der Grundlinie“; 4 fällt mit 2 zusammen, wenn D und E zusammenfallen. Die Rechnung für alle 4 Fälle unterscheidet sich bekanntlich nicht w e s e n t l i c h.

Fig. 5.

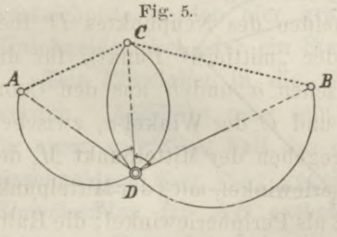
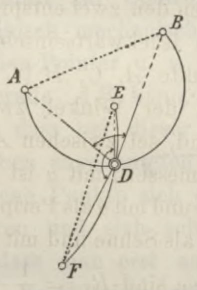


Fig. 6.



b. Die Aufgabe des einfachen R ü c k w ä r t s einschneidens Eines Neupunktes nimmt drei gegebene Punkte in Anspruch, Fig. 5. Auch Benutzung von vier gegebenen Punkten ist rein geometrisch möglich, Fig. 6, Messung der Winkel ADB und FDE, so dass die 2 Kreise,

*) In den Figuren sind durchaus die g e g e b e n e n Punkte mit e i n f a c h e n , die g e s u c h t e n mit d o p p e l t e n Ringen bezeichnet. Im Uebrigen sind (absichtlich) die Bezeichnungen $A, B \ldots, P_1\, P_2 \ldots$ der Punkte nicht ganz consequent.

als deren Schnitt sich der Neupunkt ergiebt, nicht mehr einen der gegebenen Punkte als zweiten Schnittpunkt gemeinschaftlich haben, wie im vorigen Falle. (Je nach Lage der gegebenen Punkte kann dann also hier die Aufgabe zweideutig werden.) Dieser Fall ist aber für die Feldmessung im Allgemeinen ohne Bedeutung (ganz besondere Centrirungs- oder Sichtenverhältnisse etwa ausgenommen), vgl. übrigens den Schluss dieses § 2; denn wenn A, E, B, F, wie es die eben gemachte Annahme verlangt, von D aus sichtbar sind, so misst man zur einfachen Bestimmung z. B. ADE und EDB und hat damit den vorigen Fall (in Wirklichkeit natürlich Sätze zwischen allen 4 Punkten, womit man aber eine hier nicht in Betracht kommende Ausgleichungsaufgabe erhält). Trigonometrisch wäre die Aufgabe nicht unwesentlich umständlicher als der Fall dreier gegebener Zielpunkte. Selbstverständlich kann man die Aufgabe auch als besondern Fall der s. g. Marek'schen (s. u.) auffassen, nämlich den, dass die zwei Neupunkte, die dort zu bestimmen sind, zusammenfallen.

c. Die Aufgabe des einfachen Vorwärts- und Rückwärts-Einschneidens Eines Neupunktes kann sich ebenfalls auf zwei gegebene Punkte stützen, Fig. 7, dem s. g. Seitwärtseinschneiden entsprechend, oder auf drei Punkte, Fig. 8 und Fig. 9, oder auf vier Punkte, Fig. 10. Im Fall der Fig. 9, der voraussetzt, dass die Sicht BC, nicht aber CB möglich sei und Fig. 10, wo AC, nicht aber CA möglich sein müsste kann die Aufgabe je nach Lage der gegebenen Punkte zweideutig werden.

Die Aufgabe c. in den Fällen der Fig. 8, 9, 10 ist bekanntlich

Fig. 7.

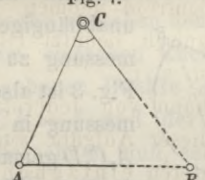


Fig. 8.

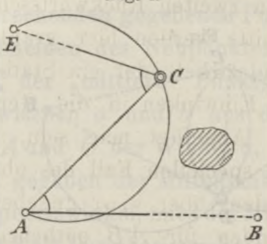


Fig. 9.

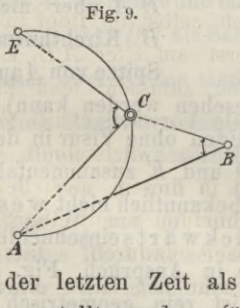
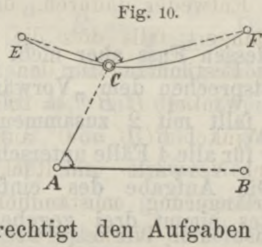


Fig. 10.

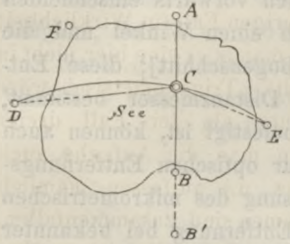


erst in der letzten Zeit als gleichberechtigt den Aufgaben a. und b. zur Seite gestellt worden; für sie reicht die Betrachtung über „Bogenschnitt" am Schluss von § 1 nur im ersten einfachsten Fall der Fig. 7 aus, die sich von dem Fall Fig. 1 der Aufgabe a. für die Rechnung nicht unterscheidet. Jordan nennt*) die zuerst genannten Fälle der Aufgabe c. „Gegenschnitt", und fügt die Bemerkung bei, dass er durch prak-

*) Handbuch der Verm. II. Band, 4. Aufl. S. 317.

tische Bedürfnisse auf die trigonometrische Rechnung dieser Aufgabe geführt worden sei. So mag es nicht unnöthig sein, hier auf einen Fall hinzuweisen, in dem die Aufgabe c. Combination eines Vorwärts- mit einem Rückwärtsschnitt sehr mit Vortheil zu gebrauchen ist und graphisch längst angewendet wird: Die Bestimmung eines Schiffsorts bei hydrographischen Arbeiten auf Seen. Man legt hier, bei Lothungen u. s. f. gewöhnlich geradlinige Profile durch den See. Um das Boot (Fig. 11)

Fig. 11.



in einen Punkt des Profils AB zu bringen, lässt man, nachdem die Punkte A und B bezeichnet sind, sich von A oder B aus einweisen; bis zu $AB = 500$ m braucht man dabei meist kaum mehr als das blosse Auge (und Fahnen zum Einwinken), man kann aber bis zu 1000 m und mehr diesen Vorwärtsschnitt benutzen, wenn dem Einwinkenden ein Feldstecher von 3—4 maliger Vergrösserung gegeben wird und man dasselbe Hilfsmittel auf dem Boot benutzt; als zweite Bestimmungslinie für einen bestimmten Schiffsort der Linie AB dient der Kreis (Rückwärtsschnitt), den man durch Messung des Winkels DCE mit dem Sextanten oder Spiegelprismenkreis, bei kleinern Abmessungen mit dem Dosensextanten auf 1—2′, erhält. Dieses Verfahren ist meist kürzer als die Messung zweier Winkel für Rückwärtsschnitte, z. B. DCE und DCF, die den Vorwärtseinschnitt entbehrlich machen würden, nur gelegentlich wird man einen zweiten Rückwärtsschnitt zur Controle nehmen. Die Rückwärtsschnitte werden hier graphisch-mechanisch benutzt (Bauernfeind's Einschneidezirkel oder ein Station-Pointer u. s. f.)

Das Einwinken in die Gerade AB kann von Jedermann besorgt werden. Angefügt mag sein, dass bei dieser Aufgabe auch ein Feld für einen speciellen Fall des oben angedeuteten einfachen Rückwärtseinschneidens über vier gegebene Punkte sich eröffnet: man kann den Einweisenden für AB entbehren und sich selbst im Boot in AB einrichten. Entweder dadurch, dass man erst am Ufer AB, z. B. nach BB', verlängert, falls dies die Verhältnisse zulassen, man kann dann diese eine Bestimmung für den Punkt C als Vorwärtsschnitt von B aus mit dem Winkel $B'BC = 180^0$ oder als Rückwärtsschnitt über BB' mit dem Winkel $BCB' = 0^0$ auffassen und in diesem speciellen Fall berühren sich Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden unmittelbar; oder, da diese Verlängerung umständlich ist, besser dadurch, dass man im Boot selbst den Winkel $ACB = 180^0$ macht mit Hilfe eines Spiegel- oder Prismen-Instruments, also zwei Rückwärtsschnitte anwendet, den einen mit dem eben angegebenen speciellen Winkel, den andern mit dem gemessenen, mit C veränderlichen Winkel DCE; und dies ist der schon oben erwähnte specielle Fall der Fig. 6. Man kann sich dazu, wenn es sich um Entfernungen AC und BC bis zu einigen hundert Metern handelt, ein Spiegel- oder Prismenkreuz mit einem kleinen Fernröhrchen von etwa 4facher Vergrösserung versehen: wenn das Instrument scharf justirt ist, so reicht es bei der erforderlichen, nicht sehr grossen Genauigkeit selbst für beträchtliche Entfernungen aus. Verfasser hat dieses Verfahren vor Jahren bei einem kleinen Schwarzwaldsee benutzt; der Einweisende am Ufer wird ganz entbehrlich und das Auftragen ist einfacher als mit zwei beliebigen Rückwärtsschnitten. Selbstverständlich kann man den Punkt C bei dieser Aufgabe auch vorwärts einschneiden durch zwei Winkel vom Ufer aus (oder durch einen Winkel und die Entfernung oder durch zwei Entfernungen [Bogenschnitt]; diese Entfernungen, vom Uferstandpunkt aus mit dem Distanzmesser bestimmt, wobei die Lattenscala am Mast des Fahrzeugs befestigt ist, können auch als Controlen dienen. Die Seeleute nehmen zur optischen Entfernungsmessung gern das „Mikrometerfernrohr" (Messung des mikrometrischen Winkels oder vielmehr sogleich Ablesung der Entfernung bei bekannter Lattenlänge, nämlich Masthöhe). Jedenfalls muss man aber dabei am Ufer einen oder zwei Beobachter haben, die mit Ablesungen an Kreisen und mit irgend einem distanzmessenden Fernrohr umgehen können.*)

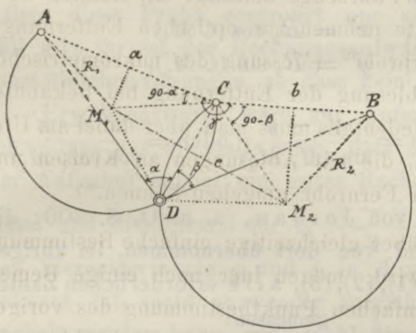
§ 3. Ehe zu den Aufgaben über gleichzeitige einfache Bestimmung mehrerer Punkte übergegangen wird, mögen hier noch einige Bemerkungen über die Aufgaben der einfachen Punktbestimmung des vorigen Paragraphen stehen. Ueber die Aufgaben des Vorwärtseinschneidens, die sich unmittelbar auf dieselbe Grundaufgabe zurückführen lassen, ist nichts mehr zu sagen; das einfache Rückwärtseinschneiden ist aber sehr verschiedener Behandlung fähig. Die trigonometrischen Auflösungen von Gauss, Bessel, Gerling u. A. sind bekannt; seit Einführung des „Hilfswinkels" (durch Burckhardt 1801; fast gleichzeitig (1802)

*) Vergl. zu dem Vorstehenden z. B. Haid, Zeitschr. für Verm. 1889 S. 292 und die ganze in den letzten 10 Jahren ungeheuer angeschwollene Literatur über Seemessung in Deutschland, Frankreich und besonders den Alpenländern. Den ganzen Excurs halte ich, von der Annahme ausgehend, dass auch diese Aufgaben der praktischen Geometrie hier Berücksichtigung verdienen, auch vom praktischen Standpunkt aus nicht für überflüssig; da es nur von Vortheil sein kann, den Uebereinstimmungen und den Verschiedenheiten in allen einzelnen Zweigen des Vermessungswesens nachzugehen, so ist auch im Folgenden manche nautische Aufgabe gestreift, die an sich den Lesern d. Z. im Allgemeinen ferner liegen mag. — Es ist in diesem Zusammenhang wohl auch noch daran zu erinnern, dass beim Gebrauch der in der Nautik neben den Reflexions-Instrumenten wichtigsten Winkelmesswerkzeuge, der Bussolen, die nun allerdings seit Jahrzehnten für genauere feldmesserische Arbeiten nicht mehr verwendet werden, überhaupt kein Unterschied zwischen einer Visur von einem bekannten Punkt nach dem gesuchten oder von dem gesuchten nach einem gegebenen Punkt ist; die Ablesung einer Richtung an der Bussole liefert eben eine „absolute" Richtung, die mit einem bestimmten Coordinatensystem (Meridian, mittelbar also auch mit dem System rechtwinkliger Coordinaten) in Beziehung steht. So ist z. B. die sog. Kreuzpeilung in der Nautik, d. h. die Bestimmung eines Schiffsorts durch Anpeilen zweier in der Karte gegebener Punkte am Land, dem Wortlaut der feldmesserischen Definition nach ein Rückwärtseinschneiden, weil die Winkelablesung auf dem zu bestimmenden Punkt gemacht wird, die Construction des Punktes ist aber die des Vorwärtseinschneidens.

auch durch Bohnenberger in Pfleiderer's Trigonometrie, vgl. § 84, § 108 [s. g. Hansen'sche Aufgabe], § 119, Aufgabe des Rückwärtseinschneidens, Nr. 18 und S. 296)*) sind ihre Unterschiede mehr oder weniger Sache der Uebung und Gewohnheit. Eine sehr ansprechende arithmetische Auflösung der Aufgabe mit Anwendung der Rechenmaschine hat in d. Z. Herr Professor Runge vor kurzem gegeben (1894, S. 204). Man kann auch auf trigonometrischem Weg versuchen, die ihrer Zeit sehr mühsamen Wege des Schöpfers der trigonometrischen Auflösung der Aufgabe, Snellius (1617), abzukürzen.

Nach der Andeutung am Schluss von § 1 sind mit Messung der Winkel α und β in D zwischen A und C, C und B die Coordinaten der Mittelpunkte M_1 und M_2 der zwei Kreise, als deren Schnitt geometrisch sich D ergiebt, sowie die Halbmesser R_1 und R_2 dieser Kreise unmittelbar und sehr einfach bestimmt. Denkt man sich jene Coordinaten von M_1 und M_2 (sie seien x_1, y_1, und x_2, y_2) ausgerechnet, so kann man also die Gleichungen der zwei Kreise anschreiben und hieraus leicht die Coordinaten ihres zweiten Schnittpunktes D finden (die Differenz der zwei Kreisgleichungen gibt die einer Geraden, die nichts anderes ist als die Potenzlinie CD der beiden Kreise). Man kann aber, da eben der eine Schnittpunkt C bereits bekannt ist, auch so rechnen: es handelt sich nur darum, den Punkt zu suchen, der zu C (x_c, y_c) in Beziehung auf M_1 M_2 $(x_1 y_1; x_2, y_2)$ symmetrisch liegt. Man erhält nun sehr einfach, dass die Coordinaten dieses gesuchten Punktes D sind:

Fig. 12.



$$\left.\begin{aligned} x_d &= x_c + \mu\,(y_1 - y_2) = x_c - \mu\,(y_2 - y_1) \\ y_d &= y_c + \mu\,(x_2 - x_1), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wenn gesetzt wird:

$$\mu = 2\,\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_c & y_c & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{e^2}; \qquad (2)$$

hier bedeutet e^2 das Quadrat der Entfernung von M_1 und M_2, das Zeichen — bei x, + bei y hat man von der Coordinaten-Transformation

*) Auch Delambre ist bekanntlich hier bei der symmetrischen Auflösung der Aufgabe, zwei Winkel aus ihrer Summe und ihrem Sinus-Verhältniss zu bestimmen, zu nennen (vgl. z. B. die französische Uebersetzung von Cagnoli's Trigonometrie durch Chompré (1808), S. 212 (und Vorwort S. VIII); ob nicht vielleicht schon Cagnoli selbst (1786) kann ich nicht entscheiden, da mir die 1. Aufl. seiner Trigonometrie, die in dem genannten Jahre erschien, immer noch nicht zugänglich gewesen ist.

her im Kopf. Die Determinante im Zähler von μ (mit eindeutigem Vorzeichen!) ist nichts anderes als die doppelte Fläche $2\,J$ des Dreiecks $M_1\,C\,M_2$ und diese ist hier sehr einfach zu rechnen, da die zwei Seiten $C\,M_1 = R_1 = \frac{1}{2}\,\frac{a}{\sin\alpha}$, $C\,M_2 = R_2 = \frac{1}{2}\,\frac{b}{\sin\beta}$ und der zwischenliegende Winkel $\varepsilon = (C\,M_1) - (C\,M_2)$ bekannt sind; es ist $2\,J = R_1\,R_2 \sin\varepsilon$ und also auch

$$\mu = \frac{2\,R_1\,R_2 \sin\varepsilon}{e^2}. \tag{2'}$$

Die Coordinaten von M_1 und M_2 braucht man nicht ganz auszurechnen; denn da man für e und ebenso für x_d und y_d nur $(y_2 - y_1)$ und $(x_2 - x_1)$ braucht, nicht x_2 und x_1, y_2 und y_1 selbst, so kann man sich begnügen mit der Rechnung von

$$\left.\begin{array}{rl|rl} x' &= R_1 \cos(C\,M_1) & x'' &= R_2 \cos(C\,M_2) \\ y' &= R_1 \sin(C\,M_1) & y'' &= R_2 \sin(C\,M_2), \end{array}\right. \tag{3}$$

womit sich wie immer zunächst

$$\operatorname{tg}(M_1\,M_2) = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}, \text{ dann } e = \frac{y'' - y'}{\sin(M_1\,M_2)} \text{ oder} = \frac{x'' - x'}{\cos(M_1\,M_2)}$$

ergiebt.

Als Zahlenbeispiel diene das von Jordan, a. a. O. S. 300; die Werthe von a, b, $(C\,A)$, $(C\,B)$ sind von dort übernommen, im übrigen enthält die folgende Rechnung nach (1), (2), (3), alle erforderlichen Zahlen

	x	y
A = Aegidius	+ 93575,89	− 13879,79
C = Waterloo	+ 93254,39	− 14657,52
B = Wasserthurm	+ 92808,28	− 16145,76

gemessen:

$\alpha = 24^0\ 58'\ 47''$	$90^\cdot - \alpha = 65^0\ \ 1'\ 13'$
$\beta = 41\ \ \ 2\ 58$	$90^\cdot - \beta = 48\ 57\ \ 2$

a	2.92 5086	b	3.19 1357
$E \sin\alpha$	0.37 4382	$E \sin\beta$	0.18 2626
$E\,2$	9.69 8970	$E\,2$	9.69 8970
R_1	2.99 8438	R_2	3.07 2953
$\sin(C\,M_1)$	8.64 315	$\sin(CM_2)$	9.92 7163n
$\cos(CM_1)$	9.99 9580	$\cos(CM_2)$	9.72 7397
y'	1.64 159	y''	3.00 0116n
x'	2.99 8018	x''	2.80 0350.

$(C\,A) = 67^0\ 32'\ 26''$	$(CB) = 253^0\ 18'\ 49$
$-\ 65\ \ \ 1\ 13$	$+\ 48\ 57\ \ 2$
$(CM_1) =\ \ 2\ 31\ 13$	$(CM_2) = 302\ 15\ 51$

$$\varepsilon = 60^0\ 15'\ 22''$$

$x'' = +\ 631{,}46$	$y'' = -\ 1000{,}27$
$x' = +\ 995{,}45$	$y' = +\ \ 43{,}81$
$x'' - x' = -\ 363{,}99$	$y'' - y' = -\ 1044{,}08$

R_1	2.99 8438	μ	0.22 3784
R_2	3.07 2953	$y'' - y'$	3.01 8734n
$\sin\varepsilon$	9.93 8645	$E\,{\sin \atop \cos}$	0.02 4907
2	0.30 1030	$x'' - x'$	2.56 1089n
$4\,J$	6.31 1066	$\operatorname{tg}(M_1 M_2)$	0.45 7645
e^2	6.08 7282	e	3.04 3641
μ	0,22 3784	$\mu\,(y'' - y')$	3.24 2518n
		$\mu\,(x'' - x')$	2.78 4873n

$x_c = +\ 93254{,}39$	$y_c = -\ 14657{,}52$
$-\ \mu\,(y'' - y') = +\ 1747{,}91$	$+\ \mu\,(x'' - x') = -\ 609{,}36$
$x_d = +\ 95002{,}30$	$y_d = -\ 15266{,}88$

(Die kleinen Abweichungen gegen die Jordan'schen Zahlen rühren her von der etwas starken Abrundung in x'' und besonders in y'.)

Wenn man die Anzahl der Tafeleingänge nachzählt, die diese Auflösung erfordert, so findet man mindestens keinen Nachtheil gegen die sonst üblichen Rechnungen; vorzuwerfen sind ihr aber zwei Dinge:

1) erhält man keine Rechenprobe, die man doch ungern vermissen wird, und 2) erhält man nicht unmittelbar den Richtungswinkel einer der von D ausgehenden Strecken, den man doch fast immer braucht, sei es, dass in That nur ein einfaches Rückwärtseinschneiden von D vorliegt oder dass, was fast ausnahmslos der Fall ist, die Rechnung nur einen Näherungspunkt für die folgende Ausgleichung liefert. Man kann sich nun allerdings eine Rechenprobe dadurch verschaffen, dass man oben $(M_1\,M_2)$ aufschlägt und aus den gefundenen Coordinaten von D und den gegebenen von $C\,(C\,D)$ und $C\,D$ rechnet; $(C\,D)$ muss sich $= (M_1\,M_2) \pm 90^0$ ergeben, [und mit (CD) hat man ja auch $(D\,A)$ und $(D\,B)$] und für $C\,D$ besteht die Gleichung $C\,D = 2\,h = \frac{J}{e}$ oder $4\,.\,CD = e \cdot \mu$. Allein diese Probe controlirt nur einen kleinen Theil der Rechnung und mit ihr ist der Rechnungsaufwand nicht mehr kleiner als bei den sonst üblichen Lösungen, so dass kein Grund vorliegt, diese zu verlassen.

Erwähnenswerth wäre zur Aufgabe des einfachen Rückwärtseinschneidens nur allenfalls noch, dass man, falls (bei seltener Anwendung der Aufgabe) einmal ein gutes Rechenschema augenblicklich nicht zur Hand und die Formel für $\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2}$ mit den üblichen Unbekannten, den Viereckswinkeln φ und ψ in A und B, deren Summe unmittelbar bekannt ist, nicht auswendig vorräthig ist und nicht rasch genug entwickelt werden kann, ganz wohl die Gleichung

$$D\,C = \frac{a}{\sin\alpha} \sin\varphi = \frac{b}{\sin\beta} \sin\psi$$

durch Probiren (Regula falsi) auflösen kann, sobald man auf irgend einem Weg (besonders durch Bussolenablesung auf wenige Minuten bei den Zielungen DA, DC, DB gelegentlich der Winkelmessung [Anbringung der Declination, Bussolencollimation und Meridianconvergenz]) einen brauchbaren Näherungswerth des Richtungswinkels (DA) hat. Es sei z. B. im obenstehenden Jordan'schen Beispiel gefunden $(D\,A) \approx 135^0\;45'$ oder $(A\,D) \approx 315^0 45'$; mit den bekannten Werthen: $\log \frac{a}{\sin\alpha} = 3.29\,9468$, $\log \frac{b}{\sin\beta} = 3.37\,3983$, $(A\,C) = 247^0 32' 26''$ $(B\,C) = 73^0 18' 49''$, also $(\varphi + \psi)$ fest $= 119^0 44' 38''$ erhält man, nachdem ein Blick auf die Tafel zeigt, dass an den Stellen für φ und ψ die Diff. log sin z. B. für $10'$ genügend constant ist (und die Differenzen für $10''$ mit einem Blick auf die log sin $68^0 13'$ oder $68^0 23'$, sowie log sin $51^0 31'$ und $51^0 21'$ herausgeschrieben werden):

	φ Annahme	ψ	$\log\sin\varphi$	$\log\sin\psi$	$\log\frac{a}{\sin\alpha}\sin\varphi$	$\log\frac{b}{\sin\beta}\sin\psi$	Diff.
	$68^0 13'$	$51^0 31' 38''$	9.96 7826	9.89 3709	3.26 7294	3.26 7692	398
Diff. für $10'$	+ 503	− 1007					

mit dem Rechenschieber ist nur zu rechnen:

$$\Delta \log s = 398 \cdot \frac{503}{1510} = 133, \text{ d. h. } \log s = 3.26\,7427 \text{ und}$$

$$\Delta \varphi = + \frac{133}{503} \cdot 600'' = + 158'' = + 2'\,38'', \text{ also}$$

$$\varphi = 68^0 15' 38''; \; \psi = 51^0 29' 0''.$$

Diese Rechnung lässt, unter Voraussetzung eines genügenden Näherungswerths an Kürze nichts zu wünschen übrig, sogar im Vergleich mit der Rechnung in gewöhnlicher Weise nach $\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \operatorname{ctg}\,(45^0 + \lambda)$.

§ 4. Nunmehr sollen die Fälle ins Auge gefasst werden, in denen es sich um gleichzeitige (aber einfache) Einschaltung zweier Neupunkte handelt. Hier ist gleichzeitiges reines Vorwärtseinschneiden der zwei Punkte derart, dass der eine vom andern abhängig wäre, nicht von Bedeutung, es handelt sich vielmehr nur um „gegenseitiges“ gleichzeitiges Rückwärtseinschneiden zweier Punkte. Auch hier sind nun die Fälle möglich, dass sich diese gleichzeitige Bestimmung zweier Punkte P_1 und P_2 auf zwei, auf drei, oder auf vier gegebene Punkte zu stützen hat, vgl. die Fig. 13, Fig. 14, Fig. 15;

Fig. 13.

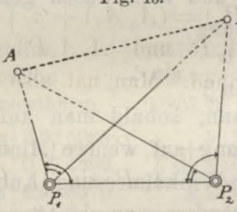


Fig. 14.

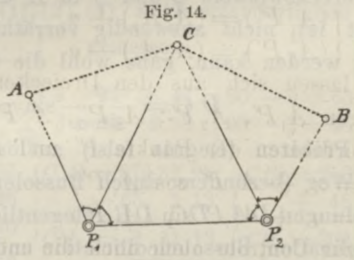
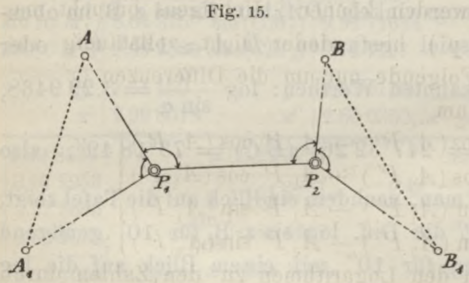


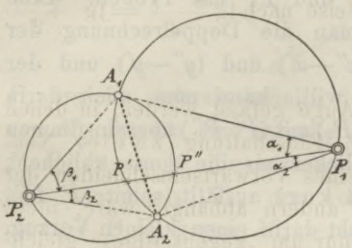
Fig. 15.



der erste Fall ist die s. g. Hansen'sche Aufgabe oder die Aufgabe der zwei unzugänglichen Punkte oder der zwei Punktepaare (der Name Hansen'sche Aufgabe ist fast ebenso unzweckmässig, wie der Name Pothenot'sche Aufgabe für die am Schluss des letzten Paragraphen erwähnte Aufgabe), der zweite ist die oft sogenannte „einfach erweiterte Pothenot'sche“ Aufgabe, der dritte die s. g. Marek'sche Aufgabe. Planimetrisch gesprochen handelt es sich im ersten Fall um eine Vierecks-, im zweiten um eine Fünfecks-, im dritten um eine Sechsecksaufgabe. Alle diese drei Aufgaben sind noch ganz unzweifelhaft von praktischem Nutzen, wenn sie auch nicht häufig vorkommen werden; zu allen dreien mögen hier einige Bemerkungen gemacht werden.

1. Bei der s. g. Hansen'schen Aufgabe ist neben den üblichen trigonometrischen Lösungen (vgl. z. B. Jordan, a. a. O. S. 308—312; auch für diese Aufgabe hat Bohnenberger bereits 1802 den „Hilfswinkel“ eingeführt, s. oben im vorigen Paragraphen), daran zu erinnern, dass man auch hier, wenn man will, ganz mit (mittelbarem) Vorwärtseinschneiden auskommen kann, nämlich unter Benutzung der s. g. Collins'schen Hilfspunkte*):

Fig. 16.



Es seien A_1, A_2 die zwei gegebenen, P_1 und P_2 die zwei gesuchten Punkte; durch die Winkelmessung in P_1 ist der Kreis durch $A_1 A_2 P_1$ vollständig festgelegt, ebenso durch die Winkelmessung in P_2 der Kreis $A_1 A_2 P_2$. Es sei ferner P' der Schnittpunkt des ersten, P'' der des zweiten Kreises mit der Verbindungslinie $P_1 P_2$ der beiden gesuchten Punkte; die Coordinaten von P' und P'' lassen sich sofort berechnen. Es ist nämlich mit den Bezeichnungen der Figur, wie man unmittelbar aus den Kreisvierecken abliest, nachdem $(A_1 A_2)$ und $A_1 A_2$ aus den gegebenen Coordinaten berechnet sind,

$$\left\{\begin{array}{l|l} (A_1 P') = (A_1 A_2) + \alpha_2 & (A_1 P'') = (A_1 A_2) - \beta_2 \\ (A_2 P') = (A_2 A_1) - \alpha_1 & (A_2 P'') = (A_2 A_1) + \beta_1 \end{array}\right\} \tag{1}$$

ferner lassen sich aus den Dreiecken $A_1 A_2 P'$ und $A_1 A_2 P''$ die Entfernungen $A_1 P'$, $A_2 P'$; $A_1 P''$, $A_2 P''$ rechnen. Man hat also nun für die Coordinaten der Punkte P' und P'':

$$\left\{\begin{array}{l|l} x' = x_1 + A_1 P' \cos (A_1 P') & x'' = x_1 + A_1 P'' \cos (A_1 P'') \\ y' = y_1 + A_1 P' \sin (A_1 P') & y'' = y_1 + A_1 P'' \sin (A_1 P'') \end{array}\right\} \tag{2}$$

wobei zur Controle auch noch die entsprechenden, von A_2 (x_2, y_2) ausgehenden Gleichungen benutzt werden können. Uebrigens braucht man die Coordinaten $(x', y',)$ (x'', y'') hier wieder nicht vollständig auszurechnen, da es sich für das Folgende nur um die Differenzen $(x''—x')$ und $(y''-y')$ handelt, nämlich um

$$\left\{\begin{aligned} x'' - x' &= A_1 P'' \cos (A_1 P'') - A_1 P' \cos (A_1 P') \\ &= A_2 P'' \cos (A_2 P'') - A_2 P' \cos (A_2 P') \\ y'' - y' &= A_1 P'' \sin (A_1 P'') - A_1 P' \sin (A_1 P') \\ &= A_2 P'' \sin (A_2 P'') - A_2 P' \sin (A_2 P') \end{aligned}\right\}; \tag{3}$$

man kann den Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen durch

*) Vgl. Phil. Transact. von 1671, S. 2093 und dazu die inhaltreiche Abhandlung von Weyer, Annalen der Hydrogr. etc., 1882, Heft IX, S. 537, ferner F. G. Gauss, die trig. und polyg. Rechnungen etc. 2. Aufl. 1893, S. 94, Jordan a. a. O. S. 307, die Abhandlung von Decher, Zeitschrift für Verm. 1888, S. 140 u. s. f.; dass auch so einfache Dinge wie diese Collins'schen Hilfspunkte immer wieder vergessen und wieder neu erfunden werden, zeigt z. B. die „neue“ constructive Auflösung dieser Aufgabe von Clausen, Astr. Nachr. Nr. 430 (1841, Bd. 18, S. 367), die ich in der neuern Literatur nirgends citirt finde.

Benutzung der Additions- und Subtractionslogarithmen vermeiden, was hier keine unbeträchtliche Abkürzung vorstellt. Jedenfalls ist bekannt

$$\operatorname{tg}(P' P'') = \operatorname{tg}(P_1 P_2) = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}; \tag{4}$$

mit $(P_1\ P_2)$ sind dann überhaupt alle Richtungswinkel bekannt, nämlich

$$\left.\begin{array}{l|l} (P_1 A_1) = (P_1 P_2) + \alpha_1 & (P_2 A_1) = (P_2 P_1) - \beta_1 \\ (P_1 A_2) = (P_1 P_2) - \alpha_2 & (P_2 A_2) = (P_2 P_1) + \beta_2 \end{array}\right\} \tag{5}$$

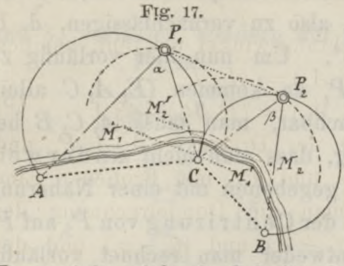
und somit nach Berechnung der Seiten der Dreiecke $A_1 A_2 P_1$ und $A_1 A_2 P_2$ auch die Coordinaten von P_1 und P_2 mit Proben. Eine genügend durchgreifende Probe, wenn man die Doppelrechnung der Coordinaten von P' und P'' oder von $(x''-x')$ und $(y''-y')$ und der Coordinaten von P_1 und P_2 vermeiden will, kann man auch darin finden, dass das unabhängig berechnete $(P_1\ P_2)$ mit $(P'\ P'')$ übereinstimmen muss. Die Auflösung ist nicht umständlicher als die sonst üblichen; eingewendet kann werden, dass $P'\ P''$ oft kurz ausfällt, somit $(P'\ P'')$ unsicher wird. Die Auflösung hat vielleicht darin einen kleinen Vorzug, dass man, wenn auch mehrfach geometrische Anschauung zu Hilfe genommen wird, doch durchaus mit Formeln rechnet, die vom Vorwärtseinschneiden her geläufig sind; bei seltener Anwendung einer Aufgabe ist dieser Umstand keineswegs gleichgiltig. Da sie sich übrigens nicht wesentlich von den auch sonst gegebenen Lösungen (z. B. bei Gauss a. a. O.) unterscheidet, so mag die Ausführung eines Zahlenbeispiels unterbleiben; zu dem Gauss'schen (a. a. O. S. 95/96) ist zu bemerken, dass ein Theil der Abweichungen zwischen der 1. und 2. Lösung jedenfalls davon herrührt, dass hier bei Coordinatendifferenzen bis zu mehreren tausend Metern und Rechnung mit 5-stelligen Logarithmen Uebereinstimmung auf 1 cm oder auch nur 5 cm schon in Folge der Rechnungs-Genauigkeit nicht zu erwarten ist.

2. Zu der oft sog. „einfach erweiterten Pothenot'schen"*) Aufgabe, die seit Lambert so oft (und seit den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts im wesentlichen übereinstimmend) behandelt worden ist (so auch hier kürzlich von Jordan, 1894, S. 449) mag zunächst bemerkt sein, dass ähnliche Aufgaben in der Nautik bei Messungen an Küsten nicht selten vorkommen: die Schiffsorte P_1 und P_2 sind gegen die an der Küste gegebenen (in der Karte eingetragenen) Punkte A, C, B festzulegen; man hat in P_1 mit dem Sextanten den Winkel $\alpha = A P_1 C$ gemessen, sieht aber von P_1 aus B noch nicht; nach bestimmter Fahrtstrecke $P_1 P_2$, deren (absolute) Richtung durch den Compass und

*) Es ist vielleicht nicht allgemein bekannt, dass der unzweckmässige Name „Pothenot'sche Aufgabe", mit dem das einfache Rückwärtseinschneiden bei uns bis über die Mitte des Jahrh. hinaus ganz allgemein bezeichnet worden ist, insbesondere auf Rechnung der praktischen Geometrie des jüngern Tobias Mayer kommt (man hat diesem Werke, dass seinen Stoff doch mehr extensiv als intensiv behandelt, überhaupt zu viel Werth beigelegt).

deren Länge durch Loggen und Zeit bekannt ist, sieht man in P_2 den Punkt B und misst $\beta = CP_2B$. Um die Punkte P_1, P_2 in die Karte einzutragen, ist graphisch selbstverständlich so zu verfahren: mit den Punkten A, C

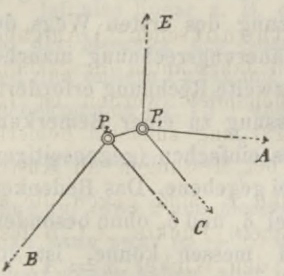
Fig. 17.



und dem Winkel α liegt der Kreis M_1 fest, mit C, B, β der Kreis M_2; Richtung (in der Karte) und Länge von P_1P_2 sind bestimmt, nur der Ort nicht (diese beiden Stücke treten an die Stelle des gemessenen weitern Winkels je in P_1 und P_2 beim „gegenseitigen" Rückwärtseinschneiden über die drei Punkte A, C, B); P_1 ergiebt sich als Schnitt des Kreises M_1 und des Kreises M'_2, der von M_2 aus um eine Strecke gleich und in der bekannten Richtung P_1P_2 gegen M_1 hin verschoben ist, oder P_2 als Schnitt von Kreis M_2 und von Kreis M'_1, der von M_1 aus um eine Strecke gleich und parallel P_1P_2 gegen M_2 verschoben wird.

Die vorstehende nautische Aufgabe ist nun hier allerdings, unserem Programme gemäss, auszuschliessen, da sie eine Längenmessung enthält, nicht nur eine Punktbestimmung durch reine Winkelmessung ist. Man darf aber doch an sie erinnern zum Vergleich mit der Aufgabe, dass beim (einfachen, d. h. einpunktigen) Rückwärtseinschneiden die gemessenen Winkel nicht (alle) auf dem zu bestimmenden Punkt, sondern auf verschiedenen benachbarten Standpunkten, die durch Länge und Centrirungswinkel gegen einander festgelegt sind, genommen wurden (vergl. zu einer Ausgleichungs-Aufgabe dieser Art die einfache Methode von Jordan, Zeitschr. f. Verm. 1895, S. 273); ein Fall einfacher Bestimmung dieser Art ist der folgende: Auf dem Punkt P_1 (auf der

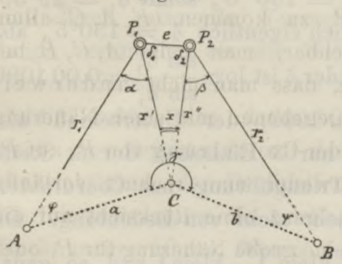
Fig. 18.



Brüstung einer Plattform auf einem Gebäude; die Winkel sind deshalb auch einzeln mit Repetition gemessen, Satzmessung wäre gar nicht ausführbar gewesen) sind die drei Punkte E, A, C sichtbar; ein vierter Punkt B war von P_1 aus nicht sichtbar, wohl aber waren von P_2 (in sehr geringer Entfernung von P_1) die Punkte C und B sichtbar. Der Kreis durch die drei Punkte E, A, C geht so nahe durch P_1, dass aus den drei genannten Punkten nicht einmal die Rechnung einer Näherung für P_1 möglich war (und also die Bestimmung des Punkts ohne die 4. Visur P_2B, die man ja aus andern Gründen ohnehin nicht würde vermissen wollen, ganz werthlos gewesen wäre). Der Standpunkt P_2 war so nahe bei P_1 möglich, dass man mit dem Theodolitfernrohr (ohne Diopter) in P_1P_2 nicht zielen konnte: $P_1P_2 = 0{,}746$ m; es ist deshalb der magnetische Richtungswinkel von P_1P_2 mit einer zufällig zur Hand befindlichen Diopterbussole gemessen und zwar ist das abgelesene Streichen $\{P_2 P_1\} = 63{,}7^0$. Die Declination der Magnetnadel + Collimation der benutzten Bussole ist $= 13{,}2^0$, also der wahre Winkel von $P_2\ P_1$ gegen den Meridian im Standpunkt $= 50{,}5^0$; die Meridianconvergenz war nicht ganz $0{,}1^0$, also zu vernachlässigen, d. h. der Richtungswinkel $(P_2\ P_1)$ ist $= 50{,}5^0$. Um nun hier vorläufig zu brauchbaren Näherungscoordinaten für P_1 zu kommen (E, A, C allein sind dazu, wie oben angegeben, unbrauchbar, man muss A, C, B benutzen) hat man (unter der Voraussetzung, dass man nicht anderweit die Entfernungen der Punkte P von den gegebenen mit einer Näherung sich verschaffen könne, die zur Ausführung der Centrirung von P_2 auf P_1 oder umgekehrt genügt) zwei Wege: entweder man rechnet vorläufig mit den unmittelbar gemessenen Winkeln, ganz ohne Rücksicht auf die Centrirung von P_2 auf P_1, erhält dadurch eine grobe Näherung für P_1 oder P_2, jedenfalls aber für die Centrirung genügende Entfernungen und kann also diese wie gewöhnlich ausführen, um dann mit dem in P_1 gemessenen Winkel $A\ P_1\ C$ und dem in P_2 gemessenen, aber auf P_1 reducirten Winkel durch eine zweite Rechnung gute Näherungscoordinaten für P_1 festzustellen; oder aber — und hier zeigt sich wieder eine nicht unzweckmässige Anwendung der Rechnungsweise für einfaches Rückwärtseinschneiden nach der Methode von § 3 (mit Hilfe des Vorwärtseinschneidens) und mit Rücksicht auf die eben angeführte nautische Aufgabe — man rechnet den Punkt M_1, den Mittelpunkt des Kreises $A\ P_1\ C$, und den Punkt M_2, Mittelpunkt von $B\ P_2\ C$ (mit der oben angeführten kleinen Ersparniss $x', y'; x''\ y''$ statt $x_1, y_1;\ x_2\ y_2$) und verschiebt nun M_2 nach M_2' durch Zuschlag von $0{,}746 \cos 50{,}5^0$ und $0{,}746 \sin 50{,}5^0$ zu x'' und y''. Mit Hilfe von M_1 und M_2' erhält man dann ohne Doppelrechnung die (Näherungs-)Coordinaten von P_1 und kann die Ausgleichung nach dem oben citirten Jordan'schen Verfahren ausführen. (Es ist übrigens noch daran zu erinnern, dass man bei Benutzung des ersten Wegs, der doppelte Auflösung verlangt, bei der ersten Näherungsrechnung manches sogleich mit der Schärfe rechnen kann, die die zweite Rechnung erfordert.)

Dieses Beispiel giebt auch noch Veranlassung zu einer Bemerkung über einen besondern Fall dieser Aufgabe des einfachen (gegenseitigen) Rückwärtseinschneidens zweier Punkte über drei gegebene. Das Bedenken, dass man bei kurzer Strecke $P_1\ P_2$ die Winkel δ_1 und δ_2 ohne besondere Centrirungshilfsmittel u. s. f. nicht genügend messen könne, ist von Jordan hervorgehoben (a. a. O. S. 451 u.) und es ist daselbst bereits angegeben, dass man durch directe Messung der Strecke $P_1\ P_2$ sich eine willkommene Probe verschaffen könne. Es soll nun hier noch an den Fall erinnert werden, dass $P_1\ P_2$ im Vergleich zu $P_1\ C = r'$ oder $P_2\ C = r''$ so klein ist, wie bei den sonst vorkommenden „Centrirungen". In diesem Fall ist geometrisch klar, dass die Bestimmung von P_1 und P_2 ebenso gut wird, wie die eines Punktes P in ihrer Nähe, wenn man nur den Winkel α auf den Winkel β oder umgekehrt mit derselben Genauigkeit reduciren kann, mit der α und β gemessen sind. Es verlangt dies, dass jedenfalls e scharf und daneben δ_1 oder δ_2 so genau gemessen wird, als es $\frac{e}{r}$ erfordert; mit andern Worten, man wird sich hier nicht auf δ_1 und δ_2 verlassen, sondern auf x aus

Fig. 19.



$$\sin x = \frac{e}{r''} \sin \delta_1 \overset{\text{oder}}{=} \frac{e}{r'} \sin \delta_2, \quad (1)$$

oder wenn $\frac{e}{r} < 0{,}01$ oder selbst nur $< 0{,}02$,

$$x = \frac{e}{r''} \sin \delta_1 \cdot \rho'' \overset{\text{oder}}{=} \frac{e}{r'} \sin \delta_2 \cdot \rho'' \quad (1')$$

In der ersten Gleichung zur Bestimmung von φ und ψ, nämlich in

$$\varphi + \psi = 540^0 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta_1 + \delta_2) \quad (2)$$

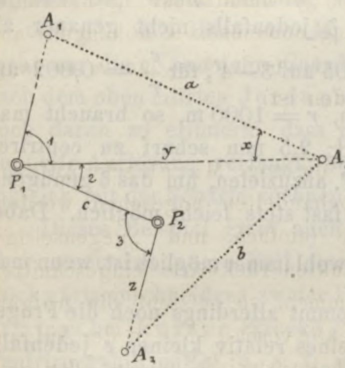
kommt nun die Summe $(\delta_1 + \delta_2)$ vor und diese ist $= 180^0 - x$. Wenn man also x so genau bestimmen kann, wie α und β gemessen sind, so ist auch $\varphi + \psi = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma - x)$ mit derselben Genauigkeit bestimmt, wenn auch δ_1 oder δ_2 an sich weit weniger genau sind. Je kleiner $\frac{e}{r}$ ist, desto kleiner ist bekanntlich im Allgemeinen die Genauigkeit, mit der man eines der δ braucht; für ein bestimmtes $\frac{e}{r}$ ist die Rechnung von x nur von δ abhängig; die extremen Werthe im letzten Fall sind 0 (für $\delta = 0$) und $\frac{e}{r}\rho''$ (für $\delta = 90^0$). Ist z. B. $\frac{e}{r} = 0{,}01$ und soll $dx < 1''$ bleiben, so braucht eines der δ jedenfalls nicht genauer als auf 1—2′ bekannt zu sein, für $\frac{e}{r} = 0{,}005$ auf 3—4′, für $\frac{e}{r} = 0{,}002$ auf 8′. Ist also linear z. B. e selbst $= 10$ m, $r = 1000$ m, so braucht man bei der Messung des einen δ nur auf $\pm$ 2,5 mm scharf zu centriren und den andern Punkt mit demselben m. F. anzuzielen, um das δ genügend zu bekommen ($\pm$ 73″) und dies ist wohl fast stets leicht möglich. Dabei ist angenommen, dass $\frac{e}{r}$ fehlerfrei sei, was wohl immer möglich ist, wenn man nur e auf etwa 2 mm messen kann. Nun kommt allerdings noch die Frage: man kann zwar $(\varphi + \psi)$ in diesem Fall eines relativ kleinen e jedenfalls scharf genug haben, aber in der zweiten Gleichung, die zur Bestimmung von $(\varphi + \psi)$ dient, nämlich in dem Sinus-Verhältniss beider Winkel:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \alpha / a \ \sin \delta_2}{\sin \beta / b \ \sin \delta_1} \quad (3)$$

kommen doch die Winkel δ_1 und δ_2 einzeln vor und diese sind nur ungenau bekannt; erhält man trotzdem φ und ψ genügend? Antwort: ja, denn es besteht hier die Nebenbestimmung, dass $(\delta_1 + \delta_2)$ nur wenig, nämlich eben nur um das scharf bestimmte x, kleiner ist als 180^0, und es ist nun auch analytisch leicht zu sehen, dass damit für $\frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}$ und damit für $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$ keine Gefahr droht, so lange nur x genügend klein und genügend scharf bestimmt ist. Ein **Beispiel** erhellt die Sache vielleicht noch mehr: es sei $x = 5'0''$; $\delta_2 = 150^0\,0'$, somit $\delta_1 = 29^0 55'$, beide seien aber um volle $5'$ falsch, nämlich eigentlich $\delta_2 = 150^0 5'$, also $\delta_1 = 29^0 50'$. Für die gemessenen Werthe der δ ist $\log \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = 0.00\,1096$, für die angegeben richtigen aber 0.00 1099, der Unterschied also trotz des Winkelfehlers von $5'$ in den δ nur 3 Einheiten der 6. Stelle, d. h. für alle Aufgaben der Klein-Triangulirung mit Coordinatendifferenzen bis zu 2000 m oder auch mehr nicht von Bedeutung. Die Bestimmung wird also, wenn wie gesagt x klein $\left(\frac{e}{r} \text{ klein}\right)$ und so genau bestimmbar ist, als α und β gemessen sind, in der That so gut, wie der Eine Punkt P mit den Winkeln α und β trotz der möglicherweise sehr bedeutenden Fehler in δ_1 und δ_2.

Wenn wir, einen Augenblick von unserer Voraussetzung: keine directe Seitenmessung, abweichen, so kann hier auch folgende Aufgabe eingeschaltet werden: Von einem Punkt P_1 sind die zwei Punkte A_1 und A_2 sichtbar, ein dritter, der einfaches Rückwärtseinschneiden gestatten würde, fehlt aber, dagegen kann man $P_1 P_2 = c$, z. B. $= 200$ m, bequem und genügend genau direct messen und in P_2 sind zwar A_1 und A_2 nicht sichtbar, es bietet sich aber (neben P_1) ein dritter gegebener Zielpunkt A_3. In dem Fünfeck sind also bekannt zwei zusammenstossende Seiten (a, b), der Winkel zwischen beiden, die nicht an eine der vorigen anstossende Seite c, endlich in deren einem Endpunkt der Fünfeckswinkel (Implement von 3) im andern Endpunkte zwei weitere unabhängige Winkel (1 und 2); zusammen wie nothwendig 7 Stücke. Eine directe Auflösung ist nicht schwierig; ebenso bequem ist aber allmähliche Annäherung.

Fig. 20.



Wenn einer der Richtungswinkel der von P_1 oder P_2 ausgehenden Seiten bekannt ist, so ist die Aufgabe gelöst. Denkt man sich z. B. den Winkel $A_1 A_2 P_1 = x$ bestimmt, so sind die Richtungswinkel $(A_2 P_1) = (A_2 A_1) - x$, $(P_1 P_2) = (P_1 A_2) + 2$ u. s. f. bekannt. Für y erhält man

$$(1)\ y = \frac{a}{\sin 1} \sin (1 + x);$$

ferner ergeben sich durch Projection des Zugs $A_2 P_1 P_2 A_3 A_2$ auf die zwei Achsenrichtungen die zwei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} y\cos(A_2P_1)+c\cos(P_1P_2)+z\cos(P_2A_3)+b\cos(A_3A_2)=0 \\ y\sin(A_2P_1)+c\sin(P_1P_2)+z\sin(P_2A_3)+b\sin(A_3A_2)=0, \end{array}\right\}(2)$$

in denen, nach Annahme von x, alles bis auf z und y bekannt ist; durch Elimination von z erhält man also leicht eine Gleichung (3), die y in bekannten Grössen und dem angenommenen x ausdrückt. Man wird nun durch rationelle Versuche (Regula falsi), die Annahme für x so lange verändern, bis die Werthe von y aus (1) und (3) mit einander übereinstimmen. Eine erste Annahme für x, oft auf wenige Minuten richtig, erhält man dadurch, dass man bei der Winkelmessung in P_1 auch eine Reitbussole auf dem Theodolit abliest, woraus sich nach Berücksichtigung der Declination, der Collimation der Bussole und der Meridianconvergenz die genäherten Richtungswinkel ergeben; bei gutem Rechnungsverfahren führen 2—3 Versuche auf diesem Wege zum Ziel. Noch etwas einfacher als durch Vermittelung der Gleichungen (2), aus denen z zu eliminiren ist, lässt sich übrigens die Aufgabe lösen, wenn man sich erinnert, dass wenn in einem Viereck zwei nicht zusammenstossende (also „gegenüberliegende“) Seiten und die Winkel gegeben sind, z. B. $a, c, \alpha, \beta, \gamma, (\delta)$ (die Seiten a, b, c, d und die Winkel im oder gegen den Uhrzeigersinn um das Viereck, α, β sind die an a anliegenden Winkel) die zwei andern Seiten sich unmittelbar einfach ausdrücken lassen, nämlich $b=\dfrac{a\sin\alpha-c\sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $d=\dfrac{a\sin\beta-c\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$; in dem Viereck $A_2P_1P_2A_3$ sind die gegenüberliegenden Seiten $A_2A_3=b$, $P_2P_1=c$ bekannt, ferner, nach Annahme von x, alle Winkel, man kann also nach den eben angegebenen Gleichungen y unmittelbar in bekannten Grössen (wobei die Winkel von dem angenommenen x abhängen) ausdrücken (4) und dieses Ergebniss (4) mit (1) vergleichen, um x so lange zu ändern, bis Uebereinstimmung vorhanden ist.

3. Die dritte Aufgabe dieser Gruppe, die sog. Marek'sche Aufgabe, kann als eine Erweiterung der in 2. behandelten angesehen werden: bei jener werden die zwei Neupunkte (einfach und „gegenseitig“) mit Benutzung von vier gegebenen Punkten rückwärts eingeschnitten, fallen zwei von diesen 4 Punkten zusammen, so entsteht die Aufgabe in 2. oder auch: Die „Marek'sche“ Aufgabe verhält sich zu der Aufgabe des gleichzeitigen (und gegenseitigen) Rückwärtseinschneidens der zwei Neupunkte über drei gegebene ebenso wie die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens Eines Neupunktes (mit zwei ganz unabhängigen Kreisen) über vier gegebene Punkte zu der des gewöhnlichen Rückwärtseinschneidens Eines Punktes über drei gegebene Punkte, vergl. die Fig. 6 und 5. Jordan hat (a. a. O. S. 312—313) eine trigonometrische Auflösung dieser Marek'schen Aufgabe gegeben, die Collins'sche Hilfspunkte benutzt. Eine andere Auflösung, wie sie die folgenden Zeilen liefern, ist zwar nicht ganz symmetrisch, aber etwas kürzer. Es seien (vergl.

Fig. 21.

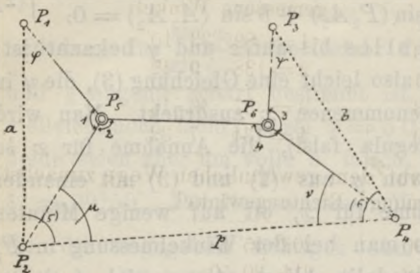


Fig. 21) P_1, P_2; P_3, P_4 die gegebenen, P_5, P_6 die gesuchten Punkte, also gemessen: $P_1 P_5 P_2 = 1$, $P_2 P_5 P_6 = 2$, $P_3 P_6 P_4 = 3$, $P_4 P_6 P_5 = 4$. Als Hilfslinie kann man verwenden die Gerade $P_2 P_4$ (und hierin liegt die Unsymmetrie, da $P_1 P_3$ gleichberechtigt wäre). Die Winkel $P_1 P_2 P_4 = 5$ und $P_2 P_4 P_3 = 6$ sind aus den Coordinaten bekannt, als Unbekannte werden eingeführt die Winkel φ und ψ in P_1 und P_3. Nun ist zunächst:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 360^0 - \tfrac{1}{2}\,[(1 + 2 + 5) + (3 + 4 + 6)] = \alpha; \tag{1}$$

man setzt ferner

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = x, \text{ also} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \alpha + x \\ \psi &= \alpha - x \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Für den Winkel $\varkappa$, den die Richtungen $P_2 P_4$ und $P_5 P_6$ mit einander bilden, erhält man zunächst:

$$\varkappa = \pm \tfrac{1}{2}\,[(2 + \mu) - (4 + \nu)] \text{ oder, da}$$

$$2 + \mu = 540^0 - [3 + 4 + 6 + (\alpha - x)] \text{ ist und}$$

$$4 + \nu = 540^0 - [1 + 2 + 5 + (\alpha + x)]:$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{absol. } \varkappa = x + \tfrac{1}{2}\,[(1 + 2 + 5) - (3 + 4 + 6)] \\ &\varkappa = \beta + x, \quad \text{wo } \beta = \tfrac{1}{2}[(1 + 2 + 5) - (3 + 4 + 6)] \text{ ist.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Durch Projection des Zuges $P_5 P_2 P_4 P_6$ auf die zu $P_5 P_6$ senkrechte Richtung zeigt sich nun, mit Rücksicht auf (3), dass x zu bestimmen ist aus der Gleichung:

$$\frac{a}{\sin 1} \sin(\alpha + x) \sin 2 - \frac{b}{\sin 3} \sin(\alpha - x) \sin 4 = \pm\, p \sin(\beta + x), \text{ wo}$$

a, b, p die bekannten Entfernungen $P_1 P_2$, $P_3 P_4$, $P_2 P_4$ bedeuten und über das Vorzeichen rechts leicht zu entscheiden ist. Setzt man also:

(5) $\quad \dfrac{a}{\sin 1} \sin 2 = m$; $\quad \dfrac{b}{\sin 3} \sin 4 = n$, so erhält man x aus

$$m \sin(\alpha + x) - n \sin(\alpha - x) = \pm\, p \sin(\beta + x),$$

oder es ist, nach Entwicklung und Division mit $\cos x$ unmittelbar zu rechnen nach

$$\operatorname{tg} x = \frac{(n - m) \sin \alpha \pm p \sin \beta}{(n + m) \cos \alpha \mp p \cos \beta}, \tag{6}$$

wobei, wie bemerkt, die Vorzeichen der rechten Seite leicht zu entscheiden sind; x ergiebt sich als positiver oder negativer spitzer Winkel und mit seiner Bestimmung ist die Aufgabe gelöst.

Man könnte die Gleichung (6) durch Einführung eines Hilfswinkels noch umformen, sie ist aber auch so nicht unbequem. — (Bei dem engen Zusammenhang aller der hier behandelten Aufgaben braucht kaum gesagt zu werden, dass man auch für **1** und **2** dieses Paragraphen ähnliche Lösungen aufstellen kann.)

Als Beispiel diene das Jordan'sche (a. a. O. S. 313):

	x	y	gemessene Winkel:
P_1	$+6782,72$	$-1902,43$	$1 = 89^0\ 33'\ 10''$
P_2	$+4362,81$	$-2917,44$	$2 = 138\ \ 9\ \ 42$
P_3	$+6428,78$	$+2814,33$	$3 = 87\ \ 43\ \ 16$
P_4	$+4702,81$	$+1627,49$	$4 = 134\ \ 7\ \ 32.$

Man erhält aus diesen Zahlen auf dem gewöhnlichen Wege zunächst:

	log Entfernung	Richtungswinkel
$a = P_1 P_2$	3.41 8990	$202^0\ 45'\ 19''$
$b = P_3 P_4$	3.32 1112	214 30 50
$p = P_2 P_4$	3.65 8739	85 43 18

Damit wird ferner:

$5 = 62^0\ 57'\ 59''$	$6 = 128^0\ 47'\ 32''$
$1 + 2 + 5 = 290\ \ 40\ \ 51$	$3 + 4 + 6 = 350\ \ 38\ \ 20$

und demnach:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \ \ 39^0\ 20'\ 24{,}5'' \\ \beta &= -29\ \ 58\ \ 44{,}5 \end{aligned}\right\} \text{ nach den Gl. (1) und (4).}$$

Die weitere Rechnung (mit allen Zahlen) ist dann diese:

a	3.41 8990
$E \sin 1$	0.00 0013
$\sin 2$	9.82 4146
m	3.24 3149
b	3.32 1112
$E \sin 3$	0.00 0343
$\sin 4$	9.85 6013
n	3.17 7468
$n - m$	2.39 0380n
$\sin \alpha$	9.80 2037
$n + m$	3.51 2579
$\cos \alpha$	9.88 8402
$(n-m) \sin \alpha$	2.19 2417
$(n+m) \cos \alpha$	3.40 0981
p	3.65 8739
$\sin \beta$	9.69 8695n
$\cos \beta$	9.93 7623
$p \sin \beta$	3.35 7434n
$p \cos \beta$	3.59 6362
Z	3.32 6670
N	3.81 0586
$\operatorname{tg} x$	9.51 6084

$m =$	1750,448
$n =$	1504,762
$n - m =$	$-$ 245,686
$n + m =$	3255,210
$(n-m) \sin \alpha =$	$-$ 155,746
$-p \sin \beta =$	$+$ 2277,374
$Z =$	$+$ 2121,628
$(n+m) \cos \alpha =$	2517,567
$+p \cos \beta =$	$+$ 3947,684
$N =$	$+$ 6465,251
$\alpha =$	$39^0\ 20'\ 24{,}5''$
$x =$	$+\ 18\ \ 10\ \ \ 4$
$\alpha + x = \varphi =$	57 30 28
$\alpha - x = \psi =$	21 10 21
$1 + \varphi =$	147 3 38
$3 + \psi =$	108 53 37
$(P_2 P_5) =$	55 41 41
$(P_4 P_6) =$	323 24 27

$\dfrac{a}{\sin 1}$	3.41 9003
$\sin \varphi$	9.92 6066
$P_2 P_5$	3.34 5069
$\sin (P_2 P_5)$	9.91 7004
$\cos (P_2 P_5)$	9.75 0973
$\dfrac{b}{\sin 3}$	3.32 1455
$\sin \psi$	9.55 7720
$P_4 P_6$	2.87 9175
$\sin (P_4 P_6)$	9.77 5333n
$\cos (P_4 P_6)$	9.90 4659
$P_2 P_5 \sin (P_2 P_5)$	3.26 2073
$P_2 P_5 \cos (P_2 P_5)$	3.09 6042
$P_4 P_6 \sin (P_4 P_6)$	2.65 4508n
$P_4 P_6 \cos (P_4 P_6)$	2.78 3834

Schlussrechnung:

$y_2 = -2917{,}44$	$x_2 = +4362{,}81$
$+1828{,}41$	$+1247{,}50$
$y_5 = -1089{,}03$	$x_5 = +5610{,}31$
$y_4 = +1627{,}49$	$x_4 = +4702{,}81$
$-\ 451{,}34$	$+\ 607{,}90$
$y_6 = +1176{,}15$	$x_6 = +5310{,}71$

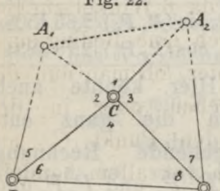
Hier könnte auch noch die ganz entsprechende Rechnung für $P_1 P_5$ und $P_3 P_6$ und ihre Projectionen auf die zwei Achsen stehen; man würde dadurch, dass man P_5 nicht nur von P_2, sondern auch von P_1 aus und ebenso P_6 nicht nur von P_4, sondern auch noch von P_3 aus rechnet, eine ziemlich durchgreifende Rechnungscontrole erhalten. Man kann zum Schluss auch noch den Richtungswinkel $(P_5 P_6)$ aufschlagen und mit seiner Hilfe die Winkel 1, 2, 3, 4, die mit den gemessenen stimmen müssen. Mit den Resultaten $(x_5 y_5)$, $(x_6 y_6)$ sind die Jordan'schen Zahlen zu vergleichen. — Eine Lösung ähnlich der Jordan'schen ist für eine Aufgabe von der Art der hier behandelten der vorstehenden Auflösung deshalb im Allgemeinen vorzuziehen, weil man bei einer solchen, jedenfalls selten vorkommenden Aufgabe besser nach Analogie und Formeln einfacherer Aufgaben rechnet, die anderweit geläufig sind (vgl. die Schlussbemerkung bei **1**); immerhin hat die vorstehende Auflösung vielleicht wegen des geringern Zahlenaufwands einiges Interesse.

§ **5**. Abermals einen Schritt vorwärts zu thun, nämlich die Fälle ins Auge zu fassen, in denen es sich um gleichzeitige (einfache) Bestimmung von drei Punkten handelt, kann als für die feldmesserische Praxis werthlos erscheinen; diese Aufgaben sind aber trotzdem nicht ganz ohne Interesse.

Auch hier kann sich selbstverständlich die Bestimmung der drei gesuchten Punkte auf 2, 3, 4, 5 ... gegebene Punkte stützen, so dass planimetrisch gesprochen, eine Fünfecks-, Sechsecks-, Siebenecks-, Achtecks-Aufgabe entsteht. Die möglichen Fälle werden aber hier bereits so mannigfaltig, dass von einer systematischen Aufzählung abgesehen, vielmehr nur Einzelnes herausgegriffen wird.

1. Eine der geometrisch einfachsten Fünfecks-Aufgaben dieser Art ist die folgende (einfache Erweiterung der 1. Aufgabe des § 4)*: gegeben sind zwei Punkte A_1, A_2; die drei Punkte C, D, E sind gleichzeitig durch Winkelmessung festzulegen (Fig. 22): man kann nämlich von C nach A_1 und A_2, ferner nach D und E sehen, sodann von D nach A_1 (nicht aber A_2), C und E und ebenso von E nach A_2 (nicht aber A_1), C und D; es liegen z. B. D, C, E an einem Plateaurand, die gegebenen Punkte A_1 und A_2 in der Tiefe. Man misst also die Winkel 1, 2, 3, (4) in C, 5, 6 in D, 7, 8 in E; diese Winkel sind allerdings nicht unabhängig von einander (es sind vielmehr die zwei Bedingungen $1 + 2 + 3 + 4 = 360^0$ und $4 + 6 + 8 = 180^0$ vorhanden) und die Aufgabe gehört also eigentlich nicht in unser Programm (unabhängige Winkel sind nur 6 vorhanden, die nothwendig sind und genügen, um die Form des Fünfecks vollständig zu bestimmen, dazu die gegebene Seite $A_1 A_2$ giebt die erforderlichen 7 unabhängigen Stücke). Denkt man sich die im vorliegenden Fall einfache Winkelausgleichung ge-

Fig. 22.

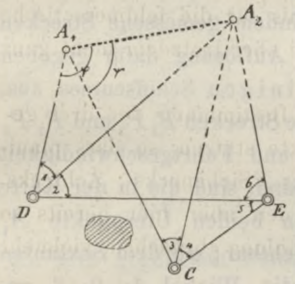


*) Vergl. Marek, Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters. Budapest 1875; auch für einige der folgenden Aufgaben ist auf dieses Werk zu verweisen.

macht, so ist die Aufgabe ganz in derselben Art eine Erweiterung der Aufgabe § 4. 1, wie die sog. „einfach erweiterte Pothenot'sche Aufgabe" eine Verallgemeinerung der Aufgabe des einfachen Rückwärtseinschneidens vorstellt; und dasselbe gilt für die Auflösungen (Hilfspunkte ganz ähnlich wie bei der frühern Aufgabe; statt einer Strecke, d. h. statt zweier Punkte, ist hier nur in das Netz ein Dreieck einzuschalten, von dem a priori die Form, aber nicht die Grösse bekannt ist; in beiden Fällen ist als Unbekannte eine Richtung, dort die der Strecke, hier die einer Dreiecksseite anzusehen; man macht aber die Lösung symmetrisch indem man zwei symmetrische Winkel als Unbekannte einführt).*)

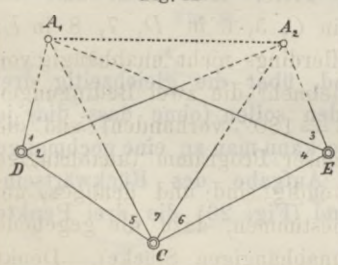
Eine andere, an sich vollständig unserem Programm entsprechende, hierhergehörige Aufgabe, die aber doch ziemlich künstliche Voraussetzungen macht, behandelt z. B. Láska**): Gegeben sind (Fig. 23) A_1 und A_2 wie oben, von D aus kann man A_1, A_2 und E sehen, von C aus A_1, A_2 und E, von E aus C, D und A_2 (d. h. man kann zwischen D und C nicht zusammen sehen, und von E aus A_1 nicht sehen). Das Fünfeck ist durch die angeschriebenen 6 unabhängigen Winkel der Form nach vollständig einfach bestimmt, dazu die Seite A_1A_2 giebt vollständige Bestimmung. Auflösung durch Bestimmung der unbekannten Winkel φ und ψ durch Differenz und Sinus-Verhältniss wie immer.

Fig. 23.



Es ist, wie schon angedeutet, keineswegs meine Absicht, den zahlreichen Modificationen dieser Fünfecksaufgabe und ähnlicher Aufgaben nachzugehen; erörtert kann im Anschluss an das Vorige etwa noch werden der Fall, dass von E aus auch A_1 gesehen werden kann, dass aber D und E gegenseitig nicht sichtbar sind, wohl aber D und C (Fig. 24). Die 7 gemessenen Winkel 1 bis 7 sind, da 6 Winkel zur Bestimmung der Form des Fünfecks ausreichen, durch eine Bedingungsgleichung verknüpft. Die Aufgabe zerfällt aber hier, ob man nun die Winkel erst ausgleichen oder in der Doppelrechnung für den Punkt C, um welchen Punkt es sich vor allem handeln mag — so dass D und E Hilfspunkte sind —, die Controle erblicken will, in die doppelte Anwendung der Aufgabe § 4. 1: D und C sind durch 1, 2, 5, 7 über A_1 und A_2 gegenseitig rückwärts eingeschnitten, E und C ebenso durch die

Fig. 24.



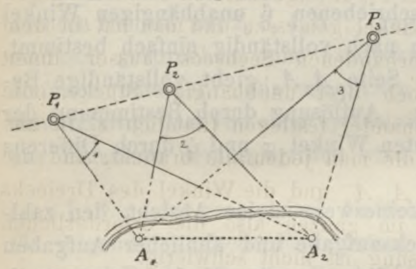
*) In Oesterreich heisst diese Aufgabe wohl auch die „zusammengesetzte Aufgabe der unzugänglichen Distanz", vgl. z. B. Hartner-Wastler, Handbuch der niederen Geodäsie, 6. Aufl. S. 334.

**) Lehrbuch der Vermessungskunde, 1894, II. Theil, S. 27.

Winkel 3, 4, 6, 7. — Wollte man (einen Augenblick wieder von unserem Programm abweichend) in diesem Beispiel auch Entfernungen als direct messbar annehmen, so könnte man nach Messung von CD und CE die Winkel CDE und CED berechnen und die Aufgabe so unmittelbar auf einmalige Anwendung von § 4. 1 zurückführen. Es würde dies, wie noch ausdrücklich bemerkt sein mag, auch noch für den Fall gelten, dass man über das Verhältniss des Meters der bei der Messung von CD und CE angewandten Werkzeuge zu der Längeneinheit der für A_1, A_2 angegebenen Coordinaten ganz im Unklaren oder doch nicht so scharf unterrichtet wäre, dass man beiderlei Maasse unmittelbar vermischen wollte; denn es würde dabei zunächst nur auf das Verhältniss $CD:CE$ ankommen.

Eine Fünfecksaufgabe, ebenfalls mit zwei gegebenen und drei gesuchten Punkten aus der Nautik mag ebenfalls erwähnt sein (obschon sie gleichfalls unsern Rahmen überschreitet, indem gemessene Strecken darin vorkommen), weil C. F. Gauss eine Auflösung dafür gegeben hat*): von 3 Punkten P_1, P_2, P_3 eines geradlinigen Schiffscurses aus, in dem die Strecken $P_1 P_2$ und $P_2 P_3$ aus Zeit und Fahrtgeschwindigkeit bekannt sind, sind die in der Karte gegebenen beiden Uferpunkte A_1 und A_2 sichtbar; mit dem Sextanten wurden die Winkel 1, 2, 3 gemessen, gesucht wird die Lage von P_1, P_2, P_3 gegen A_1, A_2. (Die Richtung des Curses ist nicht oder doch nur als Controle gemessen angenommen, d. h. der Winkel zwischen den Richtungen von $P_1 P_2 P_3$ und $A_1 A_2$ ist nicht oder nur als Controle bekannt, so dass in dem Fünfeck 3 Seiten und 4 unabhängige Winkel [der in P_2 zwischen P_1 und $P_3 = 180^0$] wie erforderlich bekannt sind). Wie ändert sich die Gauss'sche Auflösung, wenn in P_2 ein beliebiger Winkel statt des Winkels 180^0 (Cursunterschied am Compass abgelesen) vorhanden ist?

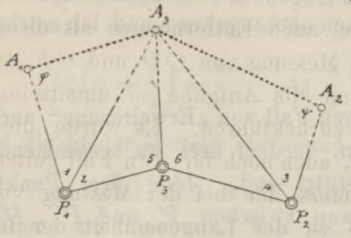
Fig. 25.



2. Wenn drei Punkte gegeben sind, über die gleichzeitig drei Neupunkte rückwärts eingeschnitten werden sollen (ohne dass dies je einfach, Punkt für Punkt, möglich wäre) so kann man an eine nochmalige Erweiterung der „einfach erweiterten“ Aufgabe des Rückwärtseinschneidens (§ 4. 2) denken: Gegeben sind (Fig. 26) die drei Punkte

*) Werke, Band IV, S. 407 „Auflösung einer geometrischen Aufgabe“ (im Handbuch der Schifffahrtskunde von C. Rümker, 1850, S. 76 zuerst veröffentlicht). Wie ist die Aufgabe constructiv zu lösen?

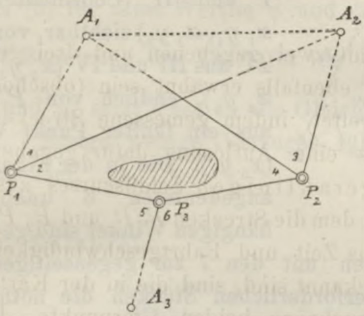
Fig. 26.



A_1, A_2, A_3, gesucht P_1, P_2, P_3, wobei der eine der gegebenen Punkte A_3 von allen drei gesuchten aus sichtbar ist. Die Auflösung dieser ebenfalls schon oft behandelten Sechsecksaufgabe bleibt ganz analog der der einfacheren Fälle: die Winkel φ und ψ sind zu bestimmen aus Summe und Sinus-Verhältniss.

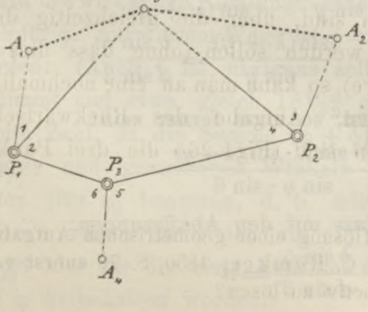
Oder die Aufgabe kann auch so liegen (Erweiterung der s. g. Aufgabe der unzugänglichen Distanz): Von P_1 und P_2 aus (Fig. 27) sind je zwei gegebene Punkte A_1 und A_2 sichtbar, man kann aber zwischen P_1 und P_2 nicht zusammen sehen; dagegen ist von ihnen aus ein dritter Punkt P_3 sichtbar, von dem aus ferner ein dritter gegebener Punkt A_3 angezielt werden kann. Es sind also die in der Figur angedeuteten 6 unabhängigen Winkel gemessen und man hat in dem vorhandenen Sechseck ausser ihnen noch drei unabhängige Stücke, die die drei gegebenen Punkte gegeneinander festlegen (nämlich z. B. aus den Coordinaten die Seite $A_1 A_2$, die man jedenfalls braucht, und die Entfernungen $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$, oder $A_1 A_2$ und die Winkel des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ in A_1 und A_2 u. s. f.), im ganzen also die erforderlichen 9 unabhängigen Stücke. Die Auflösung ist nicht schwierig.

Fig. 27.



3. Vier gegebene Punkte können von drei einfach zu bestimmenden Neupunkten z. B. in dem Fall in Anspruch genommen werden, dass (im ersten Fall des vorigen Absatzes) von P_3 aus (Fig. 28) der Punkt A_3 nicht sichtbar ist, wohl aber ein weiter gegebener Punkt A_4. In dem vorhandenen Siebeneck sind hier zunächst bekannt 5 unabhängige Stücke, die die vier gegebenen Punkte gegeneinander festlegen (z. B. die Seiten $A_2 A_1$, $A_2 A_3$, der Winkel zwischen beiden in A_2 und dazu entweder zwei Entfernungen oder 2 Winkel nach A_4, alles aus den gegebenen Coordinaten zu berechnen), ferner gemessen 6 unabhängige Winkel, im ganzen also bekannt die erforderlichen 11 Stücke. Auch diese Aufgabe ist noch ziemlich einfach zu lösen.

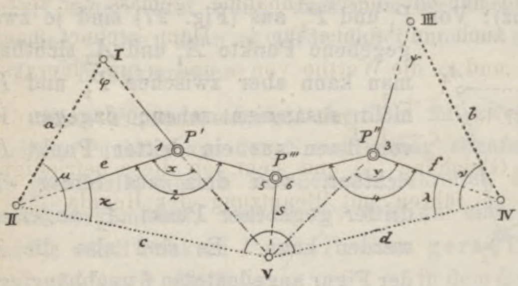
Fig. 28.



Doch verlohnt es sich, wie schon oben angedeutet, kaum, allen diesen mannigfaltigen Aufgaben im einzelnen nachzugehen; und ich möchte nur noch

4. beispiels- und andeutungsweise einen Fall von „Erweiterung“ auch der s. g. Marek'schen Aufgabe angeben, in dem drei zu bestimmende Punkte auf fünf gegebene Punkte gestützt sind. Jene drei Punkte seien P', P''', P'' (Fig. 29) und es kann zwischen P' und P''', P''' und P'', nicht aber zwischen P' und P'' zusammengesehen werden; von P' aus sind ferner die zwei gegebenen Punkte I und II (Coordinaten $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$) sichtbar, von P'' aus III und IV ($x_3\,y_3$, $x_4\,y_4$), endlich von P''' aus ein fünfter Punkt V ($x_5\,y_5$). Die in der Figur angedeuteten 6 unabhängigen Winkel sind gemessen (also für das Achteck zusammen mit den 7 zur gegenseitigen Festlegung der gegebenen 5 Punkte erforderlichen Stücken die nothwendigen 13 unabhängigen Stücke vorhanden) und es sollen die Coordinaten $x'\,y'$, $x''\,y''$, $x'''\,y'''$ von P', P'', P''' ermittelt werden. Mit den Bezeichnungen der Figur ist

Fig. 29.



$$\varphi + \psi = 1080^0 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \gamma + \mu + \nu) \qquad (1)$$

wo die Winkel γ, μ, ν aus den gegebenen Coordinaten bekannt sind, übrigens auch $(\gamma + \mu + \nu)$ zusammen als Unterschied der Richtungswinkel (IV III) und (II I) zu bestimmen ist.

Von φ und ψ hat man also die Summe; wären sie einzeln bekannt, so hätte man auch die Winkel

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \mu - (180^0 - 1 - \varphi) \\ \lambda &= \nu - (180^0 - 3 - \psi) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Mit Einführung der zwei Winkel x und y in P' und P'' wird ferner:

$$\frac{c}{\sin x} = \frac{e}{\sin(\varkappa + x)} \quad \Bigg| \quad \frac{d}{\sin y} = \frac{f}{\sin(\lambda + y)} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\sin(\varkappa + x)}{\sin x} = \frac{a \sin \varphi}{c \sin 1} \quad \Bigg| \quad \frac{\sin(\lambda + y)}{\sin y} = \frac{b \sin \psi}{d \sin 3}. \qquad (3)$$

Denkt man sich auch x und y bestimmt, so muss ferner sein:

$$\frac{c \cdot \sin \varkappa \cdot \sin(2 - x)}{\sin x \cdot \sin 5} = \frac{d \cdot \sin \lambda \cdot \sin(4 - y)}{\sin y \cdot \sin 6} \qquad (4)$$

Aus den Gleichungen (3) sieht man, dass mit den Abkürzungen:

$$\frac{a \sin \varphi}{c \sin 1} = m \quad \Bigg| \quad \frac{b \sin \psi}{d \sin 3} = n \qquad (5)$$

bei bekanntem φ und ψ (von denen aber in Wirklichkeit zunächst nur die Summe bekannt ist) x und y zu bestimmen wären durch

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\varkappa}{2}\right)=\frac{m+1}{m-1}\operatorname{tg}\frac{\varkappa}{2} \qquad \Bigg| \qquad \operatorname{tg}\left(y+\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{n+1}{n-1}\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} \tag{6}$$

und die beiden Werthe von x und y müssten die Gleichung (4) befriedigen.

Hier wird nun wohl rationelles Probiren (vgl. auch § 4, 2 Schluss) am raschesten zum Ziel führen: man nimmt φ an (unter Umständen z. B. mit Hilfe einer Bussolenablesung in I schon ziemlich genähert, vgl. das Zahlenbeispiel) und hat mit dieser Annahme, gemäss der festzuhaltenden Gleichung (1), auch eine solche für ψ. Dann rechnet man aus (5) für diese Werthe φ und ψ die Werthe von m und n und hieraus mit Benutzung der Tafel für $\log \dfrac{z+1}{z-1}$ (mit $\log z$ als Argument) aus (6) x und y, setzt diese in die Gleichung (4) und sieht, ob diese befriedigt ist. Einige wenige Versuche führen mit Benutzung der Regula falsi zum Ziel.

Beispiel:

Gegebene Punkte	x	y	Gemessene Winkel
I	+ 24532,67	+ 8630,77	1 = 88° 4′ 10″
II	+ 23981,40	+ 8685,01	2 = 115 28 0
III	+ 24172,30	+ 9877,64	3 = 118 17 50
IV	+ 23869,09	+ 9461,86	4 = 78 46 20
V	+ 23421,11	+ 9213,49	5 = 103 51 30
			6 = 99 34 0

Die Rechnung ist, was bei den hier vorhandenen kleinen Coordinatendifferenzen genügt, nur 5-stellig geführt. Der unbekannte Winkel φ ist mit grober Näherung (vielleicht nur auf $\frac{1}{2}^0$) dadurch bekannt, dass man bei der Winkelmessung in P' den magnetischen Richtungswinkel $\{P'\ \mathrm{I}\}$ an einer kleinen, am Theodolit angebrachten Bussole abgelesen hat. Mit Berücksichtigung der Declination ergiebt sich dadurch ein ungefährer Werth des wirklichen Richtungswinkels $(P'\ \mathrm{I})$ und also, zusammen mit (I II), auch für φ. Auf diesem Wege ist $\varphi \approx 37\frac{2}{3}^0$ als rohe Annahme gefunden worden. (Auch ψ ist übrigens selbstverständlich auf dieselbe Art roh bestimmt und etwa gleich $18\frac{1}{2}^0$ gefunden worden, man könnte diese zweite Zahl, da die Summe $(\varphi+\psi)$ a priori aus den gegebenen Coordinaten und gemessenen Winkeln nach (1) feststeht, zur Controle der ersten [für φ] benutzen, d. h. mitteln, hat aber jedenfalls nach Annahme von φ für ψ den aus (1) sich ergebenden Werth anzunehmen. Es ist hier für die erste Annahme der angegebene rohe Näherungswerth von φ beibehalten worden.)

Zunächst erhält man:

Seite	log	Richtungswinkel
$a =$ II-I	2.74 347	$354^0\ 22'\ 51''$
$b =$ IV-III	2.71 146	53 53 53
$c =$ II-V	2.88 660	136 40 26
$d =$ IV-V	2.70 946	209 0 18

und damit:

$$\mu = 142^0\ 17'\ 35''$$
$$\nu = 204\ \ 53\ \ 35$$
$$\gamma = \ \ 72\ \ 19\ \ 52 \quad \text{und somit (definitiv)}$$
$$\varphi + \psi = \ \ 56^0\ 27'\ \ 8''$$

1. (Rohe) Annahme (vergl. darüber die obige Bemerkung)

$$\varphi \approx 37^0\ 40' \mid \psi \approx 18^0\ 47'\ 8''\ (\varphi + \psi = 56^0\ 27'\ 8'')$$

Man erhält successive m und n aus (5), $\varkappa$ und λ aus (2), dann mit Benutzung der Tafel für $\log \dfrac{1+z}{1-z}$ aus (6) x und y; durch Einsetzung in (4) sieht man, ob φ (und ψ) richtig ist. Es wird hier, wenn mit $\log s_l$ der Logarithmus der linken, mit $\log s_r$ der Logarithmus der rechten Seite der Gleichung (4) bezeichnet wird:

$$x = 67^0\ 55'\ 21'' \mid y = 13^0\ 12'\ 31'' \ \text{und}$$
$$\log\ s_l = 2{\cdot}80\,018 \mid \log s_r = 2{\cdot}80\,645.$$

Man sieht zugleich, dass φ bedeutend grösser werden muss.

2. Versuch. $\varphi \approx 37^0\ 55'\ 52''$ | $\psi \approx 18^0\ 31'\ 16''\ (\varphi+\psi = 56^0\ 27'\ 8'')$
$x = 67\ \ 34\ \ 14$ | $y = 13\ \ 27\ \ \ 8$
$\log s_l = 2.80\,377$ | $\log s_r = 2.80\,393$; φ immer noch zu vergrössern.

3. Versuch. $\varphi \approx 37^0\ 56'\ \ 8''$ | $\psi \approx 18^0\ 31'\ \ 0''\ (\varphi+\psi = 56^0\ 27'\ 8'')$
$x = 67\ \ 33\ \ 54$ | $y = 13\ \ 27\ \ 23$
$\log s_l = 2.80\,382$ | $\log s_r = 2.80\,389$

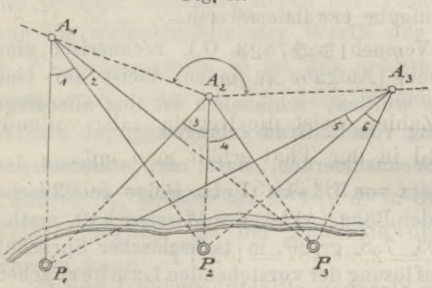
4. Versuch. Nach den letzten Zahlen weist die Regula falsi vollends auf $\varphi = 37^0\ 56'\ 17''$ oder $18''$; und in der That erhält man mit:

$$\varphi = 37^0\ 56'\ 17'' \mid \psi = 18^0\ 30'\ 51''\ (\varphi + \psi = 56^0\ 27'\ 8'')$$
$$x = 67\ \ 33\ \ 39 \mid y = 13\ \ 27\ \ 31 \ \text{und}$$
$$\log s_l = 2.80\ \ 387 = \log s_r = 2.80\ \ 387 = \log VP''.$$

Damit kann die Rechnung der Strecken, Richtungswinkel und Coordinaten wie gewöhnlich vollends zu Ende geführt werden. Die 5 stellige Rechnung reicht hier wegen der kleinen Coordinaten-Differenzen aus: auch aus der allmäligen Annäherung erkennt man, dass man φ damit ganz wohl auf etwa $2''$ bestimmen kann, was hier jedenfalls genügt. Ich brauche wohl nicht hinzuzufügen, dass auf die Durchführung dieser trigonometrischen Aufgabe praktisch kein Werth zu legen ist. Es sollte nur an einem Beispiel gezeigt werden, dass man bei einiger Complication solcher Aufgaben die directe Rechnung, die hier nicht einfach wäre, mit Vortheil durch allmälige Annäherung ersetzen kann. In Wirklichkeit geht man Aufgaben, wie den zuletzt behandelten, selbst wenn man bei der letzten Aufgabe etwa die Bestimmung von P', P'', P''' durch directe Messung der Entfernungen $P' P'''$ und $P'' P'''$ auf dem Plateau, dem die drei Punkte angehören, oder dadurch, dass von P''' vielleicht noch ein weiterer gegebener Punkt sichtbar ist, controliren oder verschärfen kann, (in beiden Fällen wird aber unser Programm verlassen) besser aus dem Weg und sucht die Neupunkte auf möglichst einfache und möglichst gut versicherte Art, durch ein- oder höchstens zweipunktiges Einschneiden mit überschüssigen Winkeln, ins Netz einzuschalten. In manchen Fällen ist es aber doch auch von Nutzen, gleichzeitig Näherungswerthe für mehr als zwei Neupunkte zusammen zu erhalten und dazu mögen die vorstehenden Aufgaben über drei Neupunkte Beispiele bieten.

§ 6. Weiter auf diesem Wege zu noch complicirtern Aufgaben, Achtecks-, Zehnecks- u. s. f. Aufgaben durch abermalige Erweiterung der ursprünglichen Aufgaben des einfachen Rückwärtseinschneidens, der s. g. Hansen'schen und Marek'schen Aufgaben vorzuschreiten ist aber jedenfalls werthlos. Es mag zum Schluss nur noch folgende (nautische) Sechsecksaufgabe gestellt sein (im Sinn der Anmerkung S. 598, denn für den Landmesser kommt sie nicht in Betracht, wohl aber noch für den geographischen Forschungsreisenden; sie ist aber schon deshalb von Interesse, weil sie eine der wenigen Aufgaben des gleichzeitigen Vorwärtseinschneidens mehrerer Punkte ist). Die Aufgabe (bei Küstenvermessungen vom Schiff aus angewandt und in der Nautik als die „Aufgabe der 6 Punkte" bezeichnet) ist diese:*) (Fig. 30) Um drei Hauptpunkte P_1, P_2, P_3 der Küste festzulegen, wählt man drei voraussichtlich lange Zeit während der Fahrt sichtbar bleibende Punkte aus und misst nun von den 3 Punkten A_1, A_2, A_3 des Schiffswegs aus, deren gegenseitige Lage durch Curs (Compassablesung) und Fahrt (Zeit und Geschwindigkeit) bekannt ist, die 6 in der Figur eingetragenen Winkel; man soll daraus die Lage der drei Punkte P_1, P_2, P_3 gegen die drei Standpunkte A_1, A_2, A_3 festlegen. Auch auf Landreisen kann, wie bemerkt, die Aufgabe da und dort in Betracht

Fig. 30.



*) Auch diese Aufgabe geht bekanntlich auf Lambert zurück, vgl. seine „Beyträge zum Gebrauche der Mathematik etc." I. Band Berlin 1765, S. 186 u. ff. und Fig. 45, wo diese Aufgabe zunächst als Achtecksaufgabe (vier gegebene und vier gesuchte Punkte) aufgestellt ist und ihr neben dem nautischen Gebrauch bei Küstenaufnahmen überhaupt Nutzen „bey Grundlegung ganzer Provinzen" zugeschrieben wird.

kommen (gleichzeitige Bestimmung dreier Berge von drei Punkten des Wegs aus, als Controle der Compasspeilungen u. s. f.). Für den Landmesser, für den aber, wie schon erwähnt, die Aufgabe nicht in Betracht kommt, würde sie lauten: Gegeben sind die Coordinaten dreier Punkte A_1, A_2, A_3, zwischen denen man nicht zusammensehen kann; von jedem dieser Punkte aus sind die drei Punkte P_1, P_2, P_3 sichtbar und man misst die vorhandenen 6 unabhängigen Winkel; gesucht sind die Coordinaten der drei Zielpunkte. Dass die Aufgabe einfach bestimmt ist, ist klar: in dem Sechseck hat man zwei zusammenstossende Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ und den zwischenliegenden Winkel, ferner die 6 gemessenen unabhängigen Winkel zwischen Diagonalen, zusammen die erforderlichen 9 unabhängigen Stücke. Eine (indirecte) graphische Auflösung der Aufgabe liegt nahe.*) Wie wäre aber bei dieser Aufgabe rechnerisch zu verfahren? Die directe Auflösung ist dabei nicht ganz einfach.**)

Auch hier wären noch Erweiterungen möglich, auf die einzugehen sich aber nicht verlohnen kann.

---

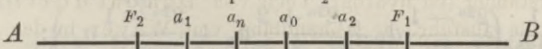
*) Vgl. Handbuch der Naut. Instrumente (Hydrogr. Amt der Marine), 2. Aufl. Berlin 1890, S. 436. Es ist dort auch der französische Marine-Ingenieur Vincendon-Dumoulin citirt, von dem die im Text erwähnte graphische Auflösung herstammt (im hydrogr. Theil von Dumont d'Urville's „Voyage etc."), ferner die ausführliche Abhandlung von Weyer in den „Annalen der Hydrographie" 1882, Octoberheft (vgl. auch oben S. 603). Es mag beigefügt sein, dass Ploix und Halphen allgemein gezeigt haben, dass die Aufgabe im Allgemeinen bestimmt und eindeutig ist, ausgenommen den Fall, dass der 6. Punkt der Figur ebenfalls dem Kegelschnitt angehört, der durch die 5 übrigen Punkte bestimmt ist. Die schöne Analogie mit dem „gefährlichen Kreis" beim einfachen Rückwärtseinschneiden springt in die Augen und macht allein schon die Aufgabe erwähnenswerth.

**) Lambert ist bei seinem Versuch (vgl. a. a. O.), rechnerisch eine „schickliche Auflösung" seiner (Achtecks-) Aufgabe zu finden, meist auf eine Gleichung 8. oder 16. Grads geführt worden; schliesslich ist ihm allerdings eine Lösung auf Grund einer Gleichung vom 2. Grad gelungen.

Ich habe hier zum Schluss noch anzumerken, dass mir, während des Satzes vorliegenden Artikels, ein Aufsatz von Láska (Ueber einige geodätische Aufgaben; S. A. aus den „Věstnik" der Böhm. Akad. der Wissenschaft, math.-nat. Abth. Jahrgang 1893, Prag 1893, 7 S. gr. 8°, in tschechischer Sprache) bekannt geworden ist, der u. a. eine Auflösung der vorstehenden Lambert'schen (Sechsecks-) Aufgabe durch allmälige Annäherung giebt (2. Abtheilung und Fig. 2 des genannten Aufsatzes); auch zum „Hansen'schen und Pothenot'schen Problem" enthält der Aufsatz (3. Abtheilung) Bemerkungen, übrigens in anderm Sinne, als es im vorstehenden Text versucht wurde.

Das arithmetische Mittel.

Das arithmetische Mittel wird allgemein als etwas so Selbstverständliches angesehen, dass es eines Beweises für die Richtigkeit desselben nicht zu bedürfen scheint. Streng genommen darf jedoch von vornherein nur das arithmetische Mittel aus zwei Beobachtungen als richtig und mit den Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung übereinstimmend angenommen werden. In diesem Falle würde bei gleichem Gewicht der beobachteten Grössen kein Grund vorhanden sein, warum man den wahrscheinlichsten Werth näher der einen als der andern Beobachtung annehmen sollte. Wird als wahrscheinlichster Werth hier also das arithmetische Mittel angenommen, so wird zugleich das Princip der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewahrt, dass das Vorkommen gleich grosser positiver und negativer Beobachtungsfehler gleich wahrscheinlich ist, und dass die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens der gebildeten Fehler ein Maximum wird. Endlich ist der grösste Fehler, der bei Annahme des arithmetischen Mittels als wahrscheinlichsten Werth im ungünstigsten Falle gemacht werden kann, immer kleiner als der grösste Fehler, welcher bei irgendwelcher anderen Annahme gemacht werden kann. Seien z. B. auf der Linie AB die Punkte a_1 und a_2 als Werthe für den gesuchten



Punkt a gefunden, sei ferner f_m der Maximalfehler, welcher bei der fraglichen Messung nicht überschritten werden kann, und ist die Grösse f_m von a_1 aus über a_2 und von a_2 aus über a_1 auf der Linie abgetragen, so dass $a_1\, F_1 = a_2\, F_2 = f_m$ ist, so bilden die Punkte F_1 und F_2 die Grenze, innerhalb deren der gesuchte Punkt a liegen muss. Wird nun als wahrscheinlichster Werth der Halbirungspunkt von $a_1\, a_2$ bezw. $F_2 F_1$ angenommen, so ist der grösste Fehler, welcher gemacht werden kann $a_0 F_1$ oder $a_0 F_2$, wenn Punkt a in F_1 oder F_2 liegen sollte. Würde dagegen irgend ein anderer Punkt a_n als wahrscheinlichster Werth angenommen, so ist $a_n\; F_1$ oder aber $a_n\; F_2$, je nach der Lage des Punktes a_n, grösser als $a_0\, F_1$, d. h. es ist in diesem Falle ein grösserer Fehler möglich, als bei Annahme des arithmetischen Mittels gemacht werden kann.

Betrachten wir nun den Fall, dass zur Bestimmung einer Grösse nicht 2, sondern 3 Messungen vorliegen. Sind die ermittelten Werthe, denen gleiches Gewicht zukommen soll, $a_1\; a_2$ und a_3, so lassen sich aus je 2 derselben die Mittel

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \quad \frac{a_1 + a_3}{2} \text{ und } \frac{a_2 + a_3}{2} \text{ bilden.} \tag{1}$$

Werden diese drei Mittel, denen ebenfalls gleiches Gewicht zukommt, in gleicher Weise weiter behandelt, so folgen der Reihe nach die weiteren Mittel:

$$\tfrac{1}{4}\,(2a_1+a_2+a_3) \quad \tfrac{1}{4}\,(a_1+2a_2+a_3) \quad \tfrac{1}{4}\,(a_1+a_2+2a_3) \qquad (2)$$
$$\tfrac{1}{8}\,(3a_1+3a_2+2a_3) \quad \tfrac{1}{8}\,(3a_1+2a_2+3a_3) \quad \tfrac{1}{8}\,(2a_1+3a_2+3a_3) \qquad (3)$$
$$\tfrac{1}{16}\,(6a_1+5a_2+5a_3) \quad \tfrac{1}{16}\,(5a_1+6a_2+5a_3) \quad \tfrac{1}{16}\,(5a_1+5a_2+6a_3) \qquad (4)$$
$$\tfrac{1}{32}\,(11a_1+11a_2+10a_3) \quad \tfrac{1}{32}\,(11a_1+10a_2+11a_3) \quad \tfrac{1}{32}\,(10a_1+11a_2+11a_3) \qquad (5)$$
$$\tfrac{1}{64}\,(22a_1+21a_2+21a_3) \quad \tfrac{1}{64}\,(21a_1+22a_2+21a_3) \quad \tfrac{1}{64}\,(21a_1+21a_2+22a_3) \qquad (6)$$
$$\tfrac{1}{128}\,(43a_1+43a_2+42a_3) \quad \tfrac{1}{128}\,(43a_1+42a_2+43a_3) \quad \tfrac{1}{128}\,(42a_1+43a_2+43a_3) \qquad (7)$$
$$\tfrac{1}{256}\,(86a_1+85a_2+85a_3) \quad \tfrac{1}{256}\,(85a_1+86a_2+85a_3) \quad \tfrac{1}{256}\,(85a_1+85a_2+86a_3) \qquad (8)$$

Die Coefficienten von a_1 sind für die ersten Mittel der geraden Reihen

0	2	4	6	8	
1	2	6	22	86	....die erste Differenzenreihe ist:
	1	4	16	64	....oder:
	2^0	2^2	2^4	2^4....	

Es ist demnach der Coefficient von a_1 im ersten Mittel der $2n$ten Reihe

$$1 + 2^0 + 2^2 + 2^4 \ldots\ldots + {}^{2n-2} = \frac{2^{2n}+2}{3},$$

der Coefficient von a_2 und a_3 im ersten Mittel $= \dfrac{2^{2n}-1}{3}$.

Die drei Mittel der $2n$ten Reihe sind danach

$$\frac{1}{2^{2n}}\left(\frac{2^{2n}+2}{3}a_1 + \frac{2^{2n}-1}{3}a_2 + \frac{2^{2n}-1}{3}a_3\right);$$
$$\frac{1}{2^{2n}}\left(\frac{2^{2n}-1}{3}a_1 + \frac{2^{2n}+2}{3}a_2 + \frac{2^{2n}-1}{3}a_3\right); \qquad (2n)$$
$$\frac{1}{2^{2n}}\left(\frac{2^{2n}-1}{3}a_1 + \frac{2^{2n}-1}{3}a_2 + \frac{2^{2n}+2}{3}a_3\right)$$ oder nach Division mit $\frac{1}{2^{2n}}$

$$\left(\frac{a}{3}\left(1+\frac{2}{2^{2n}}\right) + \frac{a_2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right) + \frac{a_3}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\right);$$
$$\left(\frac{a_1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right) + \frac{a_2}{3}\left(1+\frac{2}{2^{2n}}\right) + \frac{a_3}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\right);$$
$$\left(\frac{a_1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right) + \frac{a_2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right) + \frac{a_3}{3}\left(1+\frac{2}{2^{2n}}\right)\right).$$

Für $2n = \infty$ kommen nun in den Schlussmitteln die Ausdrücke $\frac{2}{2^{2n}}$ und $\frac{1}{2^{2n}}$ zum Verschwinden, so dass als Schlusswerth, nach welchem alle 3 Mittel convergiren, das arithmetische Mittel entsteht $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$.

Dieser Werth, welcher aus fortgesetzter Anwendung der Bildung wahrscheinlichster Werthe aus je 2 Grössen bestimmt wurde, ist demnach als der wahrscheinlichste Werth von 3 gleichgewichtigen Beobachtungsgrössen anzusehen.

Nun lässt sich in gleicher Weise der Beweis liefern, dass für m Beobachtungsgrössen das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Werth ist, sobald für $m-1$ Beobachtungsgrössen das arithmetische Mittel als wahrscheinlichster Werth anzusehen ist. Denn sind die Grössen $a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_m$ beobachtet, so lassen sich aus je m—1 der beobachteten Grössen m verschiedene Mittel bilden, welche in gleicher Weise immer wieder zu neuen Mitteln vereinigt werden können. Bezeichnen wir mit $[a]$ die Summe der beobachteten Werthe und führen denselben in die zu bildenden Mittel ein, so erhalten wir, schematisch geordnet, folgende Reihen

Nr. der Reihe	Mittelwerthe
0	$1a_1 \qquad 1a_2 \ldots \qquad 1a_m$
1	$\frac{1}{m-1}\left([a]-a_m\right);\ \frac{1}{m-1}\left([a]-a_{m-1}\right);\ \ldots\ \frac{1}{m-1}\left([a]-a_1\right);$
2	$\frac{1}{(m-1)^2}\left((m-1)\,a_1+(m-2)\,([a]-a^1)\right)\frac{1}{(m-1)^2}\left((m-1)a_2+(m-2)\,([a]-a_2)\right);\ldots$
3	$\frac{1}{(m-1)^3}\left(((m-2)^2+m-1)\,([a]-a_m)+(m-2)\,(m-1)\,a_m\right);$ $\frac{1}{(m-1)^3}\left(((m-2)^2+m-1)\,([a]-a_{m-1})+(m-2)\,(m-1)\,a_{m-1}\right);$
4	$\frac{1}{(m-1)^4}\left[\left((m-2)\,(m-1)^2+(m-1)\right)a_1+\left((m-1)^2(m-2)+m-2\right)\left([a]-a_1\right)\right]\ldots$
5	$\frac{1}{(m-1)^5}\left[\left((m-1)^3\,(m-2)+(m-2)\,(m-1)+1\right)\left([a]-a_m\right)\right.$ $\left.+\left((m-1)^3\,(m-2)+(m-2)\,(m-1)\right)a_m\right]\ldots$
6	$\frac{1}{(m-1)^6}\left(\left((m-1)^4\,(m-2)+(m-1)^2\,(m-2)+m-1\right)a_1\right.$ $\left.+\left((m-1)^4\,(m-2)+(m-1)^2\,(m-2)+(m-2)\right)\left([a]-a_1\right)\right)\ldots$
7	$\frac{1}{(m-1)^7}\left(\left((m-1)^5\,(m-2)+(m-1)^3\,(m-2)+(m-1)(m-2)+1\right)\left([a]-a_m\right)\right.$ $\left.+\left((m-1)^5\,(m-2)+(m-1)^3\,(m-2)+(m-1)\,(m-2)\,a_m\right)\right)\ldots$
8	$\frac{1}{(m-1)^8}\left(\left((m-1)^6\,(m-2)+(m-1)^4\,(m-2)+(m-1)^2\,(m-2)+m-1\right)a_1\right.$ $\left.+(m-1)^6\,(m-2)+(m-1)^4\,m-2+(m-1)^2\,(m-2)+m-1\right)\left([a]-a_1\right)\Big)$

Die Coefficienten der a_1 der geraden Reihe sind:

Reihe 0	1	Differenzen
2	$m-1$	$(m-1)^0\,(m-2)$
4	$(m-1)^2\,(m-2)+m-1$	$(m-1)^2\,(m-2)$
6	$(m-1)^4\,(m-2)+(m-1)^2\,(m-2)+m-1$	$(m-1)^4\,(m-2)$
8	$(m-1)^6\,(m-2)+(m-1)^4\,(m-2)+(m-1)^2\,(m-2)+m-1$	$(m-1)^6\,(m-2)$
	.	.
	.	.

Die Summe von n Gliedern der geometrischen Reihe:

$(m-1)^0; (m-1)^2; (m-1)^4; (m-1)^6$; ist gleich $\frac{(m-1)^{2n}-1}{(m-1)^2-1}$, demnach die von n Gliedern der gefundenen Differenzenreihe

$$\frac{(m-1)^{2n}-1}{(m-1)^2-1}\,(m-2)=\frac{(m-1)^{2n}-1}{m},\ \text{da}\ (m-1)^2-1=m\,(m-2)\ \text{ist.}$$

Der Coefficient von a_1 des $2n$ten Mittels ist nun gleich der Summe der geometrischen Reihe $+ 1$, dem Coefficienten der 0^{ten} Reihe, der Coefficient von $[a] - a_1 =$ der Summe selbst. Es lautet daher der Ausdruck für die Mittel der $2n$ten Reihe:

$$\frac{1}{(m-1)^{2n}}\left(\frac{(m-1)^{2n}+m-1}{m}\,a_1+\frac{(m-1)^{2n}-1}{m}\,([a]-a_1)\right);$$

$$\frac{1}{(m-1)^{2n}}\left(\frac{(m-1)^{2n}+m-1}{m}\,a_2+\frac{(m-1)^{2n}-1}{m}\,([a]-a_2)\right) \text{ etc.}$$

Nach Ausführung der Division mit $(m-1)^{2n}$ resultirt, da $\frac{(m-1)^{2n}}{(m-1)^{2n} \cdot m} = \frac{1}{m}$ und $\frac{m-1}{(m-1)^{2n} \cdot m}$ wie auch $\frac{1}{(m-1)^{2n} \cdot m}$ für $2n = \infty$ gleich Null werden, als wahrscheinlichster Mittelwerth für jedes der Mittel der $2n$ten Reihe der Ausdruck $\frac{[a]}{m}$, d. i. das arithmetische Mittel.

Da nun bei 3 Beobachtungen als wahrscheinlichster Werth das arithmetische Mittel gefunden wurde, so muss nach vorstehendem Beweise auch bei 4 Beobachtungen und folglich auch bei 5, 6 u. m. Beobachtungen das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Werth der beobachteten Grösse sein, vorausgesetzt, dass den Beobachtungen und den gebildeten Mitteln gleiche Wahrscheinlichkeit und gleiches Gewicht zukommt.

Seyfert.

Neue Schriften über Vermessungswesen.

Fuhrmann, Dr. A., Prof. Die Nivellirinstrumente, ihre Benutzung, Prüfung und Berichtigung. Eine Anleitung für Architekten, Bautechniker, Landmesser u. s. w. Leipzig 1895. Seemann.

Cerri, A., Ing. Sugli Squadri a Riflessione. Estratto dei Rendiconti del r. Ist. Lomb. di sc. e lett., Serie II, Vol. XXVIII, 1895.

Wüllner, Dr. A., Prof. Lehrbuch der Experimentalphysik. 1. Band. Allgemeine Physik und Akustik. 5. vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 321 in den Text gedr. Abb. und Fig. Leipzig 1895. Teubner.

Loewe, F., Prof. Strassenbaukunde. Mit 124 Abbildungen im Texte. Wiesbaden 1895. Kreidel.

Inhalt.

Verlag von Konrad Wittwer Stuttgart. — Druck von Gebrüder Jänecke in Hannover.