

# ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

Dr. W. Jordan,  
Professor in Hannover

und

O. Steppes,  
Steuer-Rath in München.

—\*—

1896.

Heft 3.

Band XXV.

—> 1. Februar. <—

## Querachsige rechtwinklige sphärische Coordinaten für die Zwecke der Kleintriangulirung und Specialvermessung.

Bei Gelegenheit der Berechnung einer Kleintriangulirung im Anschluss an das Netz der Landesaufnahme war dem Unterzeichneten die Aufgabe gestellt, aus den gegebenen geographischen Positionen der Anschlusspunkte II. bis IV. Ordnung rechtwinklige sphärische Coordinaten zu berechnen, bezogen auf ein System, dessen Hauptachse mit dem in der Breite  $51^{\circ} 50'$  den Magdeburger Meridian ( $29^{\circ} 18' 7''$ , 8178 östl. Ferro) senkrecht schneidenden Quernormalbogen zusammenfällt. Da nun hierdurch die Frage der Anwendung eines querachsigen Systems für Landesvermessungszwecke, welche bis dahin — wenn von dem conformen Mecklenburger Coordinatensystem als nicht streng querachsigen abgesehen wird — auf das Gebiet theoretischer Speculation beschränkt geblieben ist, auch ein praktisches Interesse gewonnen hat, so dürfte eine Darstellung der in diesem Falle angewandten Rechenmethoden an dieser Stelle gerechtfertigt erscheinen.

Zur Lösung der gestellten Aufgabe waren zunächst zwei Wege offen:

- 1) die Berechnung gewöhnlicher Soldner'scher Coordinaten in Bezug auf den Meridian  $29^{\circ} 18' 7''$ , 8178 als Hauptachse im trigonometrischen Formular 6 der Anweisung IX und Transformation dieser Coordinaten auf das querachsige System.
- 2) Die Anwendung der Seite 65 ff. des Jahrganges 1894 dieser Zeitschrift vom Professor Dr. Jordan gegebenen Formeln.\*)

\*) Die Formeln von Zeitschr. 1894, S. 65—74 sind auf S. 74 als noch nicht endgültig bezeichnet, indem Weiterentwicklung vorbehalten wurde. Die sphärischen Formeln bis  $\frac{1}{r^4}$  in Zeitschrift 1895, S. 647—653 sind ein Theil dieser Weiterentwicklung, welche sphäroidisch auch schon vorhanden und nur aus Raumrücksichten zurückgestellt war. Trotzdem bringen wir die Entwicklungen von Herrn Schulze ungeändert zum Abdruck, weil sie ganz unab-

Bei näherer Beschäftigung mit der Sache zeigte sich, dass keine der beiden Rechnungsmethoden strengen Anforderungen Genüge leistet, welche darin bestehen, dass unter allen Umständen die Rechnungsungenauigkeiten keinen Einfluss auf die zweite Decimalstelle der Coordinaten erlangen dürfen.

Mit Rücksicht auf die Ausdehnung des gesammten Vermessungsgebietes:

rund 32 km	nördlich	der Breite	51° 50'
" 24 "	"	südlich	derselben
" 68 "	"	östlich	vom Magdeburger Meridian
" 52 "	"	westlich	desselben

ist demnach zur Erreichung der gestellten Anforderung an die Genauigkeit der Rechnung die Anwendung achtstelliger Logarithmen geboten, welche im ungünstigsten Falle einen Fehler von  $\pm 1,6$  mm verursachen können.

Bei dem unter 1) angegebenen Rechnungsverfahren ist von vornherein die Erreichung des oben genannten Genauigkeitsgrades in Folge der auf siebenstellige Logarithmen beschränkten Formeln des Formulars 6 ausgeschlossen, ganz abgesehen davon, dass der Umweg über meridionale Soldner'sche Coordinaten nicht nothwendig ist.

Im zweiten Falle war zu bedenken, ob die nur bis zur dritten Ordnung reichenden Jordan'schen Formeln den gestellten Anforderungen an die Schärfe der Rechnung in allen Fällen genügen konnten. Eine nach dieser Richtung angestellte Untersuchung ergab, dass in der Ordinate durch die vernachlässigten Glieder vierter Ordnung von der Form  $\dots \Delta \varphi^2 \cdot \lambda^2$  und  $\dots \lambda^4$  für die grössten in Betracht kommenden Entfernungen vom Nullpunkt eine Ungenauigkeit von 11 mm und in der Abscisse eine solche von 17 mm in Folge der Vernachlässigung der Glieder  $\dots \Delta \varphi \cdot \lambda^3$  und  $\dots \Delta \varphi \cdot \lambda^3$  bewirkt wird, so dass bei achtstelliger Rechnung die Vernachlässigung der Glieder vierter Ordnung nicht statthaft ist. Ferner zeigte sich, dass das a. a. O. ebenfalls vernachlässigte Glied dritter Ordnung von der Form  $\dots \Delta \varphi^3$  in Folge der geringen Breitenerstreckung des Vermessungsgebietes ohne Einfluss ist, indem dasselbe im äussersten Falle erst den Betrag von 0,59 mm erreicht.

Bei Anwendung der auf die Glieder vierter Ordnung erweiterten Formeln für die Ordinate und Abscisse machte sich die hierdurch auf je 6 Glieder (unter Vernachlässigung des Gliedes  $\dots \Delta \varphi^3$ ) angewachsene Länge beider Ausdrücke als recht unbequem bemerkbar.

hängig entstanden sind und einen werthvollen Beitrag zur Entwicklungsgeschichte der querachsigen Coordinaten geben. Unsere eigenen sphäroidischen Formeln bis zur 4. Ordnung einschliesslich werden nachher auf S. 83—92 mitgetheilt. Dieselben geben das Zahlenbeispiel, welches in Zeitschr. 1894 S. 43 noch mit 0,04" und 0,03" Fehler abschliesst auf 0,001" in den Richtungen und auf 0.1 im Entfernungslogarithmus scharf.



In dem Bestreben, eine Controle für die Rechnung zu finden, welche mit möglichst geringem Zahlenaufwand sich bis auf die zweite Decimalstelle der Coordinaten erstreckt, gelangte der Unterzeichnete zu dem im Folgenden dargestellten Rechnungsmodus. Derselbe gründet sich auf den Umstand, dass innerhalb der Grenzen des Vermessungsgebietes die Abscisse eines Punktes nur wenig verschieden sein kann von der Länge des Quernormalbogens bis zum Schnitt mit dem Meridian desselben und die Ordinate nur um ein geringes kleiner sein kann als der Meridianbogen von diesem Schnittpunkt bis zum gegebenen Punkt, dessen rechtwinklige Coordinaten zu bestimmen sind. Werden demnach diese beiden Grössen als Variable betrachtet, so müssen für die Coordinaten  $(x\ y)$  sehr einfache Ausdrücke resultiren. Es kommt daher schliesslich nur darauf an, für diese Variablen einfache Formeln aufzustellen.

Ehe wir zur Entwicklung dieser Formeln schreiten, mögen noch einige Bemerkungen Platz finden. Was zunächst den Radius der dem Erdellipsoid zu substituierenden Kugelfläche anbetrifft, so wählen wir an Stelle des üblichen mittleren Krümmungshalbmessers im Nullpunkt als Kugelhalbmesser den Krümmungsradius des Quernormalschnitts im Anfangspunkt desselben (also für die Breite  $51^{\circ} 50'$ ). Die so bestimmte Kugelfläche berührt das Erdsphäroid längs des Parallelkreises  $51^{\circ} 50'$  und schmiegt sich infolge der geringen Breitenerstreckung des Vermessungsgebietes von max. 56 km dem letzteren enger an als jede andere, wodurch die Winkeländerungen beim Uebergang vom Ellipsoid auf die Kugel möglichst klein werden.

Ferner wählen wir abweichend von der Bezeichnung der Achsen durch Herrn Prof. Dr. Jordan a. a. O. d. Ztsch. f. Verm. 1894 folgende: Die Hauptachse (Abscissenachse) wird zur  $x$ -Achse gewählt, und zwar sollen die Abscissen östlich vom Magdeburger Meridian positiv, westlich von demselben negativ gezählt werden. Die Ordinaten  $y$  sollen sein positiv für Punkte südlich, negativ für Punkte nördlich vom Quernormalbogen. Die Zählung der Azimute beginnt von der  $+$  Richtung der Hauptachse in rechtläufigem Sinne. Bei dieser Art der Festsetzung erscheint demnach das querachsige System als ein um  $90^{\circ}$  rechtläufig gedrehtes Soldner'sches gewöhnlicher Art, so dass in der weiteren Anwendung des ersteren weder neue Begriffe noch neue Bezeichnungen eingeführt erscheinen abweichend von den herkömmlichen.

Der Uebergang von dem einen zu dem anderen System wird vermittelt durch die bekannten Relationen

$$y = -\xi + \frac{\xi \cdot \eta^2}{2n_0^2}, \quad x = \eta + \frac{\eta \cdot \xi^2}{2n_0^2}$$

worin  $\xi\ \eta$  die Soldner'schen meridionalen Coordinaten für denselben Anfangspunkt und  $n_0$  den Kugelradius bezeichnen.





meridian durch  $P$  vom Schnittpunkt  $Q''$  mit dem Quernormalbogen  $K$  bis zum Parallelkreis  $P_0 Q$ . Der Punkt  $P$  des Erdsphäroids werde so auf die Kugel übertragen, dass die Meridianbogenlänge  $\widehat{QP}$  gleich der elliptischen Bogenlänge  $\widehat{QP}$  ist.

Es sei dann  $S$  der grösste Kugelkreis zwischen den Punkten  $P_0 P'$ ,  $B$  die Breite des letzteren auf der Kugel,  $T_0$  und  $T$  die Winkel von  $S$  mit dem Meridian von  $P_0$  beziehungsweise  $P'$ , gezählt von der Nordrichtung in rechtläufigem Drehungssinn. Die  $S T_0 T$  entsprechenden Grössen auf dem Ellipsoid seien beziehungsweise  $s, \alpha_0, \alpha$ , wo demnach  $s$  die Länge der geodätischen Linie zwischen den Punkten  $P_0 P$  bezeichnet. Der Winkel des Quernormalbogens  $K$  im Endpunkte  $Q''$  mit dem Meridian von  $Q$  sei  $90 + \vartheta''$  auf der Kugel und der analoge auf dem Ellipsoid  $90 + \theta''$ . Schliesslich sei noch  $U$  die Länge des Meridianbogens  $\widehat{Q'P'}$ , wo  $U$  mit  $\varphi_0 - \varphi$  gleiches Vorzeichen haben soll.

Bezeichnen  $a, e$  die halbe grosse Achse und die Excentricität der Meridianellipse, so ist für das Bessel'sche Erdellipsoid

$$\left. \begin{aligned} \log a &= 6.804\ 643\ 4636 \\ \log e^2 &= 7.824\ 410\ 4237 - 10 \end{aligned} \right\} \text{ nach F. G. Gauss}$$

und für die Breite  $\varphi_0 = 51^\circ 50'$

$$\left. \begin{aligned} \log m_0 &= 6.804\ 428\ 2989 \\ \log n_0 &= 6.805\ 541\ 1943 \\ \log r_0 &= 6.804\ 984\ 7466 \\ \log p_0 &= 6.596\ 495\ 30 \end{aligned} \right\} \text{ nach Jordan}$$

Meridianquadrant = 10000 855,764 m.

### I. Berechnung der Hilfsvariablen $K$ und $U$ .

Der Quernormalbogen  $K$  auf der Kugel ist ersichtlich nur Function vom Längenunterschied  $\lambda$ , welcher positiv nach Osten sein soll, und erhalten wir demnach mittels des Maclaurin'schen Lehrsatzes

$$K = \left( \frac{\partial K}{\partial \lambda} \right)_0 \lambda + \left( \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} \right)_0 \frac{\lambda^2}{2} + \left( \frac{\partial^3 K}{\partial \lambda^3} \right)_0 \frac{\lambda^3}{6} + \dots$$

Die Coefficienten dieser Reihe ergeben sich durch Differentiation aus der streng richtigen Gleichung

$$\operatorname{tg} K = \cos \varphi_0 \cdot \operatorname{tg} \lambda$$

in bekannter Weise. Für  $\lambda = 0$  giebt die Ausführung der Differentiationen nach einigen Vereinfachungen bis zur fünften Ordnung in Bogensekunden

$$\left. \begin{aligned} K &= \cos \varphi_0 \cdot \lambda + (\cos \varphi_0 - \cos 3\varphi_0) \frac{\lambda^3}{12} + \\ &\quad + (2 \cos \varphi_0 - 5 \cos 3\varphi_0 + 3 \cos 5\varphi_0) \frac{\lambda^5}{240} + \dots \end{aligned} \right\} (1)$$

Führen wir hierin mittels der bekannten Relation

$$v_0 = n_0 \cos \varphi_0 \cdot \lambda$$

die Parallelkreisbogenlänge  $v_0$  als Variable ein, so folgt

$$K = v_0 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \cdot \frac{v_0^3}{3n_0^2} + (2 \operatorname{tg}^4 \varphi_0 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0) \frac{v_0^5}{15n_0^4} + \dots \left\} (1^*)$$

und durch Einführung der Zahlenwerthe für  $\varphi_0 = 51^\circ 50'$

$$K = v_0 + [6.12097 - 20] v_0^3 + [2.1607 - 30] v_0^5 \quad (2)$$

wo  $v_0 = [1.282\ 070\ 169] \lambda'' \quad (3)$

die in den [ ] stehenden Zahlen bezeichnen in üblicher Schreibweise die Logarithmen der Coefficienten.

Was das Glied fünfter Ordnung in Gleichung (2) anbetrißt, so erreicht dasselbe den Betrag von 1 Millimeter erst bei einem Längenunterschied von  $4851'' = 1^\circ 20' 51''$ , welchem ein Parallelbogen von 92 876 m entspricht. Dasselbe fällt daher fort sowohl mit Rücksicht auf die Ausdehnung des Vermessungsgebietes als auch auf die Genauigkeit 8 stelliger Logarithmen. Zur Berechnung des Gliedes dritter Ordnung reichen 4 stellige Logarithmen aus.

Die zweite Variable  $U$  denken wir uns zerlegt in den Bogen  $\widehat{QP} = \widehat{QP'}$  und den Bogen  $\widehat{QQ'} = W$ . Den elliptischen Bogen  $\widehat{QP}$  entnehmen wir ohne weitere Rechnung der Tafel I in dem bereits angeführten Werke von F. G. Gauss.

Da auch  $W$  Function von  $\lambda$  allein ist, so können wir ebenfalls den Maclaurin'schen Satz anwenden und erhalten aus

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 - W) = \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \cos \lambda$$

durch Bildung der Ableitungen von  $W$  nach  $\lambda$  bis zur vierten Ordnung in Secunden

$$W'' = \sin 2\varphi_0 \cdot \frac{\lambda^2}{4\rho''} - (\sin 2\varphi_0 - 6 \sin 2\varphi_0 \cdot \sin^2 \varphi_0) \frac{\lambda^4}{48\rho^3} + \dots \quad (4)$$

wo  $\rho'' = 206264,806$

und aus (4) die lineare Länge

$$W = \frac{n_0}{\rho} W'' \quad (5)$$

Werden in vorstehenden beiden Gleichungen für die Normalbreite  $\varphi_0 = 51^\circ 50'$  die numerischen Werthe der Coefficienten eingeführt, so erhalten wir

$$W = [5.562\ 1573 - 10] \lambda^2 + [4.2869 - 20] \lambda^4 + \dots \quad (5)^*$$

worin  $\lambda$  in Secunden zu nehmen ist.

Zur Beurtheilung des Einflusses des zweiten Gliedes dient folgende kleine Tabelle

$\lambda''$	$\dots \lambda^4$
1480	0,9 Millimeter
1800	2,0 „
2400	6,4 „
3000	15,7 „
3600	32,5 „
3800	40,4 „

Es reicht demnach für das Glied vierter Ordnung eine Tafel von geringem Umfange bezw. ein Diagramm vollkommen aus.



Bezeichnet  $B_0$ ,  $B_\varphi$  die Meridianbogenlänge vom Aequator bis zur Breite  $\varphi_0$  bezw.  $\varphi$ , deren Werthe der schon mehrfach genannten Tafel I entnommen werden, so ist

$$U = B_0 - B_\varphi - W,$$

wo  $U$  mit der Breitendifferenz  $\varphi_0 - \varphi$  gleiches Vorzeichen haben soll.

Den Winkel  $90 + \vartheta''$  des Quernormalbogens  $K$  mit dem Meridian durch  $P'$  können wir in analoger Weise in Form einer Reihe mit steigenden Potenzen von  $\lambda$  darstellen. Wir finden durch Ausführung der einfachen Zwischenrechnungen bis zur dritten Ordnung

$$\vartheta'' = \sin \varphi_0 \cdot \lambda'' - (\sin \varphi_0 + \sin 3\varphi_0) \frac{\lambda^3}{24 \rho^2} + \dots \quad \left. \vphantom{\vartheta''} \right\} (6)$$

und numerisch

$$\vartheta'' = [9.895\ 54\ 22 - 10] \cdot \lambda - [8.070\ 45 - 20] \lambda^3 + \dots$$

## II. Berechnung der rechtwinkligen Coordinaten ( $x, y$ ) als Functionen von $U$ und $\lambda$ .

Bei gegebenem Längenunterschied  $\lambda$  sind  $x$  und  $y$  nur noch Functionen von  $U$  und können beide Coordinaten mit dem Maclaurin'schen Satz in Form einer Reihe nach steigenden Potenzen von  $U$  entwickelt werden:

$$y = \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)_0 \cdot U + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right)_0 \cdot U^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 y}{\partial u^3} \right)_0 \cdot U^3 + \dots$$

$$x = K + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)_0 \cdot U + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right)_0 \cdot U^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 x}{\partial u^3} \right)_0 \cdot U^3 + \dots$$

wo die Ableitungen von  $y$  und  $x$  nach  $U$  zu bilden sind aus den Gleichungen

$$\sin y = \cos \vartheta \cdot \sin U$$

$$- \operatorname{tg}(K - x) = \sin \vartheta \cdot \operatorname{tg} U.$$

Durch Ausrechnung erhalten wir nach Nullsetzung von  $U$  in bekannter Weise

$$y = \cos \vartheta \cdot U - (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta) \cdot \frac{U^3}{24 n_0^2} - \dots U^5 \quad (7)$$

$$x = K + \sin \vartheta \cdot U + (\sin \vartheta + \sin 3\vartheta) \cdot \frac{U^3}{12 n_0^2} + \dots U^5 \quad (8)$$

Die Glieder fünfter und höherer Ordnung in vorstehenden beiden Gleichungen kommen für die praktische Anwendung gänzlich ausser Betracht. Da ferner in (7) das zweite Glied für  $\lambda = 2^\circ$  und  $U = 65\ 555$  m erst den Betrag von 1 Millimeter erreicht, so fällt auch dieses für die praktische Rechnung fort.

Ueber den Einfluss des Gliedes dritter Ordnung in (8) giebt nachstehende kleine Tabelle Aufschluss:

$\lambda'' =$	4500''	3600''	1800''	600''	300''
$U =$	50 km	50 km	50 km	50 km	50 km
$\dots U^3 =$	17 mm	14 mm	7 mm	2 mm	1 mm
$U =$	30 km	30 km	30 km	30 km	
$\dots U^3 =$	4 mm	3 mm	1 mm	0,5 mm	
$U =$	20 km	20 km			
$\dots U^3 =$	1 mm	1 mm			

Für das Glied dritter Ordnung reicht daher eine Tafel von sehr geringem Umfange bezw. ein Diagramm für alle Fälle vollkommen aus.

Entwickeln wir nun  $\cos \vartheta$  und  $\sin \vartheta$  in die bekannten nach Potenzen des Arguments fortschreitenden Reihen, wobei nur die ersten beiden Glieder zu berücksichtigen sind, und ersetzen  $\vartheta$  durch  $\lambda$  mit Hilfe von Gl. (6), so erhalten wir

$$y = U - [8.86120 - 20] \lambda^2 \cdot U + \dots \quad (7)^*$$

$$x = K + [4.5811171 - 10] \lambda \cdot U - [3.17411 - 20] \lambda^3 U + (1) \quad (8)^*$$

wenn zur Abkürzung  $(1) = (\sin \vartheta + \sin 3 \vartheta) \frac{U^3}{12 n_0^2}$  gesetzt wird.

Für die praktische Rechnung kommen demnach folgende Formeln zur Anwendung:

$$\begin{aligned} v_s &= [1.28207017] \cdot \lambda'' \\ K &= v_0 + [6.12097 - 20] v_0^3 \\ W &= [5.5621573 - 10] \lambda^2 + [4.2869 - 20] \lambda^4 \\ U &= B_0 - B_\varphi - W \\ \vartheta'' &= [9.8955422 - 10] \lambda'' - [8.07045 - 20] \lambda^3 \\ y &= U - [8.86120 - 20] \lambda^2 U \\ x &= K + [4.5811171 - 10] \lambda \cdot U - [3.17411 - 20] \lambda^3 U + (1) \\ & \quad (1) = (\sin \vartheta + \sin 3 \vartheta) \frac{U^3}{12 n_0^2} \end{aligned}$$

wo die fünfte bei Anwendung einer Tabelle für das Correctionsglied dritter Ordnung (1) nicht unmittelbar erforderlich ist.

Zum Zwecke des Vergleichs der nach den vorstehend genannten drei Rechnungsmethoden zu erzielenden Resultate wollen wir die rechtwinkligen Coordinaten berechnen für die beiden Punkte

$$1. \lambda = 0^{\circ}30' = 1800'' \quad \Delta \varphi = -0^{\circ}30' = -1800''$$

$$2. \lambda = 1^{\circ}0' = 3600'' \quad \Delta \varphi = -0^{\circ}30' = -1800''$$

Nach dem dritten Verfahren erhalten wir folgende Rechnung:

$\log \lambda = 3.25527251$	$\varphi = \varphi_0 - 1800'' = 51^{\circ}20'$
$\log \lambda^2 = 6.5105450$	$B_0 = 5744208,502 \text{ m}$
$\log \lambda^3 = 9.76582$	$B_\varphi = 5688585,153 \text{ m}$
$\log \lambda^4 = 13.02109$	$B_0 - B_\varphi = +55623,349 \text{ m}$
$1.28207017 \quad 6.1210-20$	$5.5621573-10 \quad 4.2869-20$
$3.25527251 \quad 13.6120$	$6.5105450 \quad 13.0211$
$4.53734268 \quad 9.7330-10$	$2.0727023 \quad 7.3080-10$
$v_0 = +34462,175 \quad +0,541$	$+118,223 \quad +0,002$
$K = +34462,716 \text{ m}$	$W = +118,225 \text{ m}$
$U = +55505,124 \text{ m}$	
$\log U = 4.7443331$	$\log U = 4.74433$
$\log \lambda^2 = 6.5105450$	$\log \lambda = 3.2552725$
$8.86120_n-20$	$4.5811171-10$
$0.11608_n$	$7.68426_n-10$
$-1,3064$	$+380,8226$
$\left\{ \begin{aligned} y' &= +55503,818 \text{ m} \\ x' &= +34843,543 \text{ m} \end{aligned} \right.$	$(1) = +380,8178$
	$+0,0096$
	$+380,827$



Für Punkt 2 finden wir in derselben Weise

$$\begin{cases} y'' = + 55\,145,232\text{ m} \\ x'' = + 69\,685,433\text{ m} \end{cases}$$

Zweite Berechnung von  $y$  und  $x$  mittels der Formeln vom Professor Dr. Jordan, Zeitschr. f. Verm. S. 73, 1894\*).

Unter Berücksichtigung der festgesetzten Lage und Richtung der Achsen, des Kugelhalbmessers  $n_0$  anstatt  $r_0$  und nach Vervollständigung der Formel (35) durch Hinzufügung des Gliedes  $\dots \Delta\varphi^3$ , der Formel (36) durch Hinzufügung des Gliedes  $\dots \lambda \Delta\varphi^2$  und Beseitigung des Druckfehlers im Coefficienten des Gliedes  $\dots \lambda^3$  lauten die Gleichungen für  $x$  und  $y$ :

$$\begin{aligned} y &= -[1.49000317] \Delta\varphi - [5.5621572 - 10] \lambda^2 - [3.86437 - 10] \Delta\varphi^2 \\ &\quad + [0.350\,52 - 10] \Delta\varphi \lambda^2 + [7.74495 - 20] \Delta\varphi^3 \\ x &= [1.282\,07017] \lambda - [6.071\,1202 - 10] \Delta\varphi \lambda - [8.52682 - 20] \Delta\varphi^2 \lambda \\ &\quad - [9.66615 - 20] \lambda^3 \end{aligned} \quad (9)$$

Die Ausrechnung, welche wir nicht im einzelnen hersetzen wollen, giebt die Werthe

Punkt 1

$$y'_j = + 55\,503,821$$

$$x'_j = + 34\,843,535$$

Punkt 2

$$y''_j = + 55\,145,230$$

$$x''_j = + 69\,685,447$$

Gegen die erste Rechnung haben wir demnach die Unterschiede,

$$y' - y'_j = - 0,003\text{ m}$$

$$x' - x'_j = + 0,008\text{ m}$$

$$y'' - y''_j = + 0,002\text{ m}$$

$$x'' - x''_j = - 0,014\text{ m}$$

Dritte Berechnung der Coordinaten  $yx$  auf dem Umwege über meridionale Soldner'sche Coordinaten.

Die im trigonometrischen Formular 6 der Anweisung IX siebenstellig geführte Rechnung giebt zunächst die meridionalen Coordinaten

Punkt 1

$$\eta' = + 34\,842,218$$

$$\xi' = - 55\,504,648$$

Punkt 2

$$\eta'' = + 69\,682,823$$

$$\xi'' = - 55\,148,540$$

Durch Transformation (Drehung um  $90^\circ$ ) erhalten wir hieraus die querachsigen Coordinaten

$$y'_p = + 55\,503,823$$

$$x'_p = + 34\,843,532$$

$$y''_p = + 55\,145,261$$

$$x''_p = + 69\,685,418$$

Dass hierin die dritten Decimalstellen als reine Rechengrößen zu betrachten sind, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

\*) Die Rechnung nach den weiter entwickelten Formeln, welche in der Anmerkung auf S. 66 erwähnt wurden, giebt

Punkt 1

$$y = 55\,503,8176\text{ m}$$

$$x = 34\,843,5423$$

Punkt 2

$$y = 55\,145,2319\text{ m}$$

$$x = 69\,685,4332$$

Gegen die erste und zweite Berechnung ergeben sich folglich die Unterschiede

$$\begin{aligned} y' - y_p' &= -0,005 \text{ m} & y'' - y_p'' &= -0,029 \text{ m} \\ x' - x_p' &= +0,011 \text{ m} & x'' - x_p'' &= +0,015 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_j' - y_p' &= -0,002 \text{ m} & y_j'' - y_p'' &= -0,031 \text{ m} \\ x_j' - x_p' &= +0,003 \text{ m} & x_j'' - x_p'' &= +0,029 \text{ m} \end{aligned}$$

Um zu einem Urtheil über die relative Genauigkeit der drei Rechnungsmethoden zu gelangen, wollen wir die aus den rechtwinkligen Coordinaten  $(x, y)$  abgeleiteten geodätischen Polarcoordinaten des Punktes  $P'$   $(x, y)$ , bezogen auf den Coordinatenursprung  $P_0$  und den Meridian durch denselben, vergleichen mit den Polarcoordinaten des Punktes  $P$  auf dem Sphäroid.

Wir berechnen zunächst den geodätischen Radius vector  $S$  und das Azimut  $T_0$  im Anfangspunkt desselben. Aus der Relation

$$\cos S = \cos x \cdot \cos y$$

folgt durch Reihenentwicklung und Auflösung nach  $S^2$  bis zur vierten Ordnung

$$S^2 = S_0^2 - \frac{y^2 x^2}{3 n_0^2} \left( 1 + \frac{S_0^2}{15 n_0^2} \right) \dots$$

und hieraus mit derselben Genauigkeit

$$S = S_0 - \frac{y^2 x^2}{6 n_0^2 S_0} - \frac{y^2 x^2 \cdot S_0}{90 n_0^4} \quad (10)$$

wo

$$S_0^2 = y^2 + x^2.$$

Für unsere beiden Normalbeispiele finden wir nach der

	III.	II.	I. Methode
Punkt 1) $S_0$	= 65 534,3134	... 4,3109	... 4,3117 m
Punkt 2) $S_0$	= 88 865,3823	... 5,3921	... 5,3887 m
Punkt 1) $S$	= 65 534,0816	... 4,0791	... 4,0799 m
Punkt 2) $S$	= 88 864,7041	... 4,7139	... 4,7105 m

Es sei nun der Winkel  $t_0$  defnirt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} t_0 = \frac{y}{x},$$

durch welche demnach  $t_0$  als Azimut in der Ebene gegeben ist. Der entsprechende Winkel auf der Kugel sei  $t_0 + dt$ . Dann gilt die streng richtige Gleichung

$$\operatorname{tg} (t_0 + dt) = \frac{\operatorname{tg} y}{\sin x},$$

wo  $y$  und  $x$  in Theilen des Radius zu nehmen sind. Durch Reihenentwicklung erhalten wir aus der letzten Gleichung bis zur Ordnung

$\frac{1}{n_0^4}$  einschliesslich

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (t_0 + dt) &= \left( y + \frac{y^3}{3 n_0^2} + \frac{2y^5}{15 n_0^4} \dots \right) : \left( x - \frac{x^3}{6 n_0^2} + \frac{x^5}{120 n_0^4} - \dots \right) \\ &= \frac{y + dy}{x + dx} \end{aligned}$$



Nun giebt die Bestimmungsgleichung für  $t_0$

$$dt = \frac{x dy - y dx}{S_0^2},$$

worin zur Abkürzung  $S_0^2 = x^2 + y^2$ .

Führen wir in diese Gleichung für  $dt$  die aus der vorhergehenden Gleichung folgenden Werthe für  $dx$  und  $dy$  ein, so erhalten wir nach einigen Reductionen

$$\frac{dt}{\rho''} = \frac{xy(x^2 + 2y^2)}{6n_0^2 S_0^2} + \frac{2xy^5}{15n_0^4 S_0^2} - \frac{yx^5}{120n_0^4 S_0^2} + \dots \quad (11)$$

und hiernach für das Azimut  $T_0$

$$T_0 = 90^\circ + (t_0 + dt) \quad (12)$$

Wenden wir diese beiden Formeln auf unsere beiden Normalbeispiele an, so ergeben sich nachstehende Werthe:

Punkt 1:

nach dem	III.	II.	I. Verfahren
$dt =$	$+ 2'', 795\ 739$	$2'', 795\ 740$	$2'', 795\ 737$
$t_0 =$	$57^\circ 52' 50'', 507\ 725$	$50'', 534\ 071$	$50'', 545\ 415$
$T_0 =$	$147^\circ 52' 53'', 303\ 464$	$53'', 329\ 811$	$53'', 341\ 152$
$S =$	$65\ 534, 0816\ \text{m}$	$\dots, 0791$	$\dots, 0799$

Punkt 2:

$dt =$	$+ 4'', 480\ 455$	$4'', 480\ 457$	$4'', 480\ 457$
$t_0 =$	$38^\circ 21' 22'', 178\ 442$	$22'', 154\ 637$	$22'', 252\ 831$
$T_0 =$	$128^\circ 21' 26'', 658\ 897$	$26'', 635\ 094$	$26'', 733\ 288$
$S =$	$88\ 864, 7041\ \text{m}$	$\dots, 7139$	$\dots, 7105$

Zur Berechnung der geodätischen Polarcoordinaten ( $s, \alpha_0$ ) des Punktes  $P$  auf dem Bessel'schen Ellipsoid schlagen wir folgenden Weg ein:

Bezeichnet zunächst  $s$  ein beliebiges Stück der geodätischen Linie  $P_0P$  und  $\alpha$  das Azimut im Endpunkt, ferner  $du$  das Bogenelement der Meridianellipse, und  $dv$  das Bogenelement des Parallelkreises für die Breite  $\varphi$ , so bestehen aus bekannten Gründen die Relationen

$$\left. \begin{aligned} du &= -m d\varphi = -\cos \alpha \cdot ds \\ dv &= p \cdot d\lambda = \sin \alpha \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

aus welchen für das Bogenelement  $ds$  sich folgende Ausdrücke ergeben

$$\begin{aligned} ds &= (du^2 + dv^2)^{1/2} \\ ds &= -\cos \alpha \cdot du + \sin \alpha \cdot dv. \end{aligned}$$

Ferner gilt, weil  $s$  eine geodätische Linie ist, der Clairaut'sche Satz

$$p \sin \alpha = \text{Const.} \quad (14)$$

Unter Beachtung der Relation

$$dp = du \cdot \sin \varphi$$

erhalten wir aus (13) und (14) folgende Differentialgleichungen

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \sin \varphi \quad (15)$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{m}{n} \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{(1-e^2) \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \quad (16)$$

und aus den beiden letzteren

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{n \cdot \cos \varphi}{m \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi}{(1 - e^2) \operatorname{tg} \alpha} \quad (17)$$

Aus der zweiten Gleichung (13)

$$\frac{ds}{d\lambda} = \frac{p}{\sin \alpha}$$

erhalten wir durch Differentiation nach  $\lambda$

$$\frac{d^2 s}{d\lambda^2} = - \frac{2p \cdot \cos \alpha \sin \varphi}{\sin^2 \alpha}$$

$$\frac{d^3 s}{d\lambda^3} = \frac{6p \cdot \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi}{\sin^3 \alpha} + \frac{2p \cdot \sin^2 \varphi}{\sin \alpha} - \frac{2p^2 \cos^2 \alpha \cdot \cos \varphi}{m \cdot \sin^3 \alpha} \text{ etc.}$$

Entwickeln wir mittelst des Taylor'schen Satzes  $s$  nach steigenden Potenzen von  $\lambda$ , so erhalten wir für die Bogenlänge  $s$  einen Ausdruck

$$A \lambda + B \frac{\lambda^2}{2} + C \cdot \frac{\lambda^3}{6} + \dots$$

worin die Coefficienten die für  $\lambda = 0$  resultirenden Werthe der Differentialquotienten von  $s$  nach  $\lambda$  bezeichnen.

Nehmen wir  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  für  $\lambda = 0$ , so erhalten wir die dem Quernormal-

bogen  $K$  entsprechende geodätische Linie senkrecht zum Meridian durch  $P_0$ :

$$k = p_0 \lambda + p_0 \sin^2 \varphi_0 \cdot \frac{\lambda^3}{3} + \left( 2 p_0 \sin^4 \varphi_0 - \frac{p_0^2}{m_0} \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0 \right) \frac{\lambda^5}{15} + \dots$$

Durch Einführung der Parallelkreisbogenlänge  $v_0$  geht diese Gleichung über in

$$k = v_0 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \frac{v_0^3}{3 n_0^2} + \left( 2 \operatorname{tg}^4 \varphi_0 - \frac{n_0}{m_0} \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \right) \frac{v_0^5}{15 n_0^4} \dots \quad (18)$$

Hieraus erhalten wir weiter durch Vergleich mit Gl. (1\*) folgende

$$k = K - \frac{e^2 \sin^2 \varphi_0}{1 - e^2} \cdot \frac{v_0^5}{15 n_0^4} \dots \quad (19)$$

oder nach Einsetzung der Zahlenwerthe für die Constanten

$$k = K - [9.2201471 - 40] \cdot v_0^5$$

Der Unterschied  $K - k$  beträgt 1 Millimeter erst bei  $v_0 = 359\,725$  m, so dass für die praktische Rechnung derselbe überhaupt nicht in Betracht kommt.

Beiläufig wollen wir noch an dieser Stelle die Abweichung berechnen, welche in der Länge des Quernormalbogens durch die Annahme eines Kugelhalbmessers  $r_0 = \sqrt{m_0 n_0}$  für  $n_0$  bewirkt würde. Bezeichnen wir mit  $K'$  den dieser Annahme entsprechenden Werth von  $K$ , so findet sich leicht mit Beachtung der Relation

$$\frac{n_0}{m_0} = \frac{W_0^2}{1 - e^2} \quad \text{wo } W_0^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi_0$$

die Differenz

$$K' - K = \frac{e^2 \sin^2 \varphi_0}{3 n_0^2 (1 - e^2)} \cdot v_0^3$$

und in Zahlen

$$K' - K = [3.530\,1995 - 20] \cdot v_0^3$$



Hieraus ergibt sich, dass der Unterschied  $K' - K$  beträgt  
für  $v_0 = 30\ 898$  Meter . . . . 1 Millimeter  
" 64 000 " . . . . 8,9 " "  
" 100 000 " . . . . 33,9 " etc.

wenn bei der Uebertragung der Punkte des Erdellipsoids auf die Kugel-  
fläche die Parallelkreisbogenlänge für  $\varphi_0$  nicht geändert wird. Die  
Wahl des grössten Krümmungsradius  $n_0$  zum Kugelhalbmesser ist in  
diesem Falle durch vorstehende Daten genügend motivirt.

Zur Berechnung der geodätischen Polarcoordinaten  $(s, \alpha_0)$  des  
Punktes  $P$  haben wir nach (13) und (15) die Differentialgleichungen

$$\frac{du}{ds} = -\cos \alpha, \quad \frac{p d\lambda}{ds} = \sin \alpha, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{p}.$$

Indem wir  $u$  und  $\lambda$  als Functionen von  $s$  und  $\alpha$  betrachten, erhalten  
wir in bekannter Weise

$$\frac{du}{ds} = -\cos \alpha$$

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = \frac{\sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi}{n}$$

$$\frac{d^3 u}{ds^3} = \frac{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi}{n^2} + \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{m n}$$

$$\frac{d^4 u}{ds^4} = \frac{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi}{n^3} (2 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi) - \frac{\sin^4 \alpha \operatorname{tg} \varphi}{n^3} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi)$$

Im Differentialquotienten vierter Ordnung sind die Glieder mit dem  
Factor  $e^2$  vernachlässigt, was hier unbeschadet der Genauigkeit ge-  
schehen darf.

In gleicher Weise berechnen wir

$$p \cdot \frac{d\lambda}{ds} = \sin \alpha$$

$$p^2 \frac{d^2 \lambda}{ds^2} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi$$

$$p^3 \frac{d^3 \lambda}{ds^3} = 6 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi - 2 \sin^3 \alpha \sin^2 \varphi + \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi \cdot n}{m}$$

$$p^4 \frac{d^4 \lambda}{ds^4} = 8 \sin \alpha \cos^3 \alpha \sin \varphi \cos^3 \varphi \cdot n (2 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi) - 8 \sin^3 \alpha \cos \alpha \sin \varphi \cos^3 \varphi \cdot n (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi)$$

Mit Hilfe des Taylor'schen Satzes erhalten wir für  $\alpha = \alpha_0$  und  $s = 0$   
für  $\lambda = 0$  bis zur vierten Ordnung einschliesslich

$$\begin{aligned} u &= -s \cos \alpha_0 + A_0 \\ v &= s \sin \alpha_0 + B_0 \end{aligned} \quad (20)$$

worin die Grössen

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\sin^2 \alpha_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{2 n_0} s^2 + \left( \frac{\sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{2 n_0^2} + \frac{\sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0}{6 m_0 n_0} \right) s^3 \\ &+ \left( \frac{\sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{6 n_0^3} (2 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_0) - \frac{\sin^4 \alpha_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{24 n_0^3} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_0) \right) s^4 + \dots, \end{aligned}$$

$$B_0 = \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{n_0} s^2 + \left( \frac{\sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{n_0^2} - \frac{\sin^3 \alpha_0 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{3 n_0^2} \right. \\ \left. + \frac{\sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0}{3 m_0 n_0} \right) s^3 + \left( \frac{\sin \alpha_0 \cos^3 \alpha_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{3 n_0^3} (2 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_0) \right. \\ \left. - \frac{\sin^3 \alpha_0 \cos \alpha_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{3 n_0^3} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_0) \right) s^4 + \dots$$

bekannt sind, indem für  $\alpha_0$  und  $s$  in denselben mit ausreichender Genauigkeit die durch ebene, bezw. sphärische Rechnung ermittelten Werthe für das Azimut und den Radius vector gesetzt werden können.

Aus Gl. (20) erhalten wir nun ohne weiteres

$$s^2 = (-u + A_0)^2 + (v - B_0)^2 \quad (21)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{v - B_0}{-u + A_0} \quad (22)$$

Um die vorstehenden beiden Formeln für die numerische Rechnung geeigneter zu machen, denken wir uns rechter Hand für die beiden Binome in Gl. (21) gesetzt  $(y + \eta)^2$  bzw.  $(x + \xi)^2$ , wo  $xy$  die nach dem dritten Verfahren ermittelten rechtwinkligen Coordinaten des Punktes  $P$  bezeichnen. Durch Entwicklung des Binoms erhalten wir dann unmittelbar den Unterschied

$$s - S_0 = \frac{y + \eta}{S_0} \eta + \frac{x + \xi}{S_0} \xi \quad (23)$$

wo  $S_0$  seine frühere Bedeutung hat.

Bezeichnen wir zur Abkürzung das Complement von  $180 - \alpha_0$  mit  $\beta_0$ , so erhalten wir aus

$$\beta_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y + \eta}{x + \xi}$$

in bekannter Weise bis zur zweiten Ordnung einschliesslich

$$\frac{\beta_0 - t_0}{\rho''} = \frac{x}{S_0^2} \eta - \frac{y}{S_0^2} \xi - \frac{x y}{S_0^4} \eta^2 + \frac{x y}{S_0^4} \xi^2 + \frac{(y - x)(y + x) \eta \xi}{S_0^4 \cdot 2} + \dots \quad (24)$$

wo  $t_0$  ebenfalls seine Bedeutung hat, und schliesslich

$$\alpha_0 = 90^\circ + \beta_0 \quad (25)$$

Wenden wir nun die Formeln (20) bis (24) auf unsere beiden Beispiele an:

1) für Punkt 1 hatten wir

$y =$	+ 55 503,818	$\log$	4.744 32285.6
$x =$	+ 34 843,543		4.542 12230.5
$S_0 =$	65 534,3134		4.816 46875.4
$t_0 =$	57° 52' 50'', 507725		

Die Rechnung ergibt folgende Resultate:

$A_0 =$	+ 120,8475	$B_0 =$	- 385,0199
	- 1,3354		+ 4,2546
	- 0,2757		- 0,5589
	+ 0,0208		+ 0,8784
	- 0,0017		- 0,0441
	+ 119,2555		- 380,4899



demnach

$$-s \cdot \cos \alpha_0 = 55\,623,349 - 119,2555 = 55\,504,0935$$

$$s \cdot \sin \alpha_0 = 34\,462,175 + 380,4899 = 34\,842,6649$$

$$\eta = +0,2755 \quad \xi = -0,8781$$

$$s - S_0 = +0,2333 - 0,4669 = -0,2336 \text{ m}$$

und folglich

$$s = 65\,534,0798 \text{ m}$$

$$\beta - t_0 = +0',461\,0324$$

$$+ 2,340\,7465$$

$$- 0,000\,0016 \quad \alpha_0 = 147^\circ 52' 53'', 309\,516$$

$$+ 0,000\,0167$$

$$- 0,000\,0025$$

$$\hline = + 2,801\,7915$$

2) für Punkt 2 hatten wir gefunden

$$y = + 55\,145,232 \quad 4.741\,50796.8$$

$$x = + 69\,685,433 \quad 4.843\,14209.2$$

$$S_0 = 88\,865,3823 \quad 4.948\,73261.5$$

$$t_0 = 38^\circ 21' 22'', 178\,442$$

$$A_0 = + 483,3697 \quad B_0 = - 765,0588$$

$$- 5,3069 \quad + 8,3996$$

$$- 1,0957 \quad - 4,4706$$

$$+ 0,0823 \quad + 1,7341$$

$$+ 0,0280 \quad + 0,0474$$

$$\hline + 477,0214 \quad \hline - 759,3483$$

$$-s \cdot \cos \alpha_0 = 55\,623,349 - 477,0214 = 55\,146,3276$$

$$s \cdot \sin \alpha_0 = 68\,924,349 + 759,3483 = 69\,683,6973$$

$$\eta = +1,0956 \quad \xi = -1,7357$$

$$s - S_0 = 0,6799 - 1,3611 = -0,6812 \text{ m}$$

und

$$s = 88\,864,7011 \text{ m}$$

$$\beta_0 - t_0 = + 1'',9941326$$

$$+ 2'',5000149$$

$$- 0'',0000077$$

$$+ 0'',0000193$$

$$+ 0'',0000057$$

$$\hline + 4'',494\,1648$$

$$\alpha_0 = 128^\circ 21' 26'', 672\,607$$

Zur besseren Uebersicht stellen wir die Ergebnisse für strenge und sphärische Rechnung zusammen.

Für Punkt 1 ist  $s - S$  in Millimetern:

nach dem III. II. I. Rechnungsverfahren

$$- 1,8 \quad + 0,7 \quad - 0,1$$

und  $\alpha_0 - T_0$  in Secunden:

$$+ 0,006052 \quad - 0,020295 \quad - 0,031636$$

Für Punkt 2:

$$s - S = - 3,0 \quad - 12,8 \quad - 9,4 \quad \text{mm}$$

$$\alpha_0 - T_0 = + 0',013710 \quad + 0',037513 \quad - 0',060681$$

und

$$\frac{s - S}{s} \approx - \frac{1}{36\,408\,000} ; + \frac{1}{93\,620\,000} ; - \frac{1}{65\,534\,000}$$

beziehungsweise

$$- \frac{1}{29\,622\,000} ; - \frac{1}{69\,426\,000} ; - \frac{1}{94\,537\,000}$$

Aus vorstehenden Resultaten ergibt sich, dass die relative Punktänderung beim Uebergang vom Ellipsoid auf die Kugel bei Anwendung der Abbildung mittelst gleicher Längen des Normalparallelkreises ( $\varphi_0 = 51^\circ 50'$ ) und des Meridianbogens (von der Breite  $\varphi$  bis zur Breite  $\varphi_0$ ) so gering ist, dass die durch die hierauf basirte sphärische Rechnung begangenen Vernachlässigungen höherer Glieder als von der zweiten Ordnung des Kugelradius selbst im ungünstigsten Falle nur 1 Einheit der 8. Stelle des Logarithmus der Entfernung ausmachen. Jedenfalls sind die erzielten Resultate der Rechnung nach den einfachen sphärischen Formeln mit  $\lambda$  und  $U$  als Variablen schärfer als diejenigen der ersten und zweiten Rechnungsmethode, und, wegen des geringeren Zahlenaufwandes, auch in kürzerer Zeit zu erlangen.

Zum Schluss wollen wir noch kurz eine Frage streifen, welche im vorliegenden Falle zur Erörterung gekommen ist, nämlich ob bei der Projection auf die Ebene — bei den Triangulirungen niederster Ordnung und der Specialvermessung — es zweckmässiger sei, die sphärischen (bezw. sphäroidischen) rechtwinkligen Coordinaten der Dreieckspunkte in der üblichen Weise als rechtwinklige ebene zu betrachten und anzuwenden, oder ob es vortheilhafter wäre, für die Ebene conforme Coordinaten zu wählen. Zur Beleuchtung dieser Frage wollen wir berechnen die Maximallängenänderung der Strecke eins beim Uebergang von der Kugel (Radius =  $n_0$ ) auf die Ebene für rechtwinklige congruente Coordinaten mit dem Meridian durch  $P_0$  als Hauptachse, zweitens mit dem Quernormalbogen durch  $P_0$  als Hauptachse und schliesslich bei Anwendung conformer Coordinaten im querachsigen System.

Für den an der äussersten Grenze des Vermessungsgebietes liegenden Punkt ( $y_{\max} = - 32$  km,  $x_{\max} = + 68$  km) erhalten wir zunächst eine Entfernung  $S_0$  in der ebenen Abbildung von

$$75\,153,1769 \text{ m}$$

und hieraus nach Gl. (10) die Länge des Grosskreisbogens  $P^0 P'$

$$S = 75\,152,9198 \text{ m}$$

und nach Gl. (11) den Unterschied zwischen dem sphärischen und ebenen Azimut

$$T_0 - (90 + t_0) = - 2',1637$$

$$T_0 = 64^\circ 47' 53'', 802$$



Im erstgenannten Systeme mit dem Meridian durch  $P_0$  als Hauptachse und dem Ursprung  $P_0$  erleidet die sphärische Entfernung  $r$  zwischen den Punkten  $(xy)$  und  $(x'y')$  beim Uebergang auf die Ebene eine Vergrößerung

$$\Delta r = r_0 - r = \frac{(x' - x)^2}{6n_0^2 r_0} (y^2 + yy' + y'^2).$$

Das Maximum dieser Vergrößerung findet statt für  $y' = y$ , d. h.

$$\max \Delta r = \frac{(x' - x)^2}{2n_0^2 r_0^2} y^2 = \frac{(x' - x)^2}{2n_0^2 r_0^2} y^2 = \frac{y^2}{2n_0^2}.$$

Für die beiden Punkte  $y = 68$  km,  $x = 32$  km

$$y' = 68 \quad x' = 33 \quad "$$

haben wir  $r_0 = 1000$  m;  $r = 999,9433884$  m

und für die Längeneinheit

$$\max \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{17664} = 56,611.10^{-6}.$$

Im querachsigen System haben wir für  $y_{\max} = 32$  km  $x_{\max} = 68$  km eine Vergrößerung für die Längeneinheit

$$\max \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{79765} = 12,537.10^{-6}.$$

Bezeichnen wir mit  $(x, \tau)$  die Coordinaten des Punktes  $(xy)$  in der conformen ebenen Darstellung, wo  $(xy)$  die sphärischen querachsigen Coordinaten des Punktes  $P$  bezeichnen, ferner mit  $\Sigma_0$  die (ebene) Länge des Radius vector  $P_0 P$ , d. h.

$$\Sigma_0^2 = x^2 + \tau^2$$

und mit  $\tau_0$  den durch die Gleichung

$$\tau_0 = \text{arc tg } \frac{\tau}{x}$$

definierten Winkel, so findet sich leicht unter Vernachlässigung aller Glieder von höherer als der zweiten Ordnung in Bezug auf den Kugelradius  $n_0$

$$\Sigma_0 - S_0 = \frac{y^4}{6n_0^2 S_0}$$

und

$$\tau_0 - t_0 = \rho'' \frac{xy^3}{6n^2 S_0^2}.$$

Für den Punkt  $x = 68$  km,  $y = -32$  km berechnet sich hiernach  $\tau_0 = -32000,1337$  m

$$\Sigma_0 - S_0 = +0,05694 \text{ m}$$

$$\tau_0 - t_0 = -0'',33209$$

so dass die Unterschiede gegen die sphärischen Grössen  $S$  und  $T_0$  betragen

$$S_0 - S = 0,2571 \text{ m}$$

$$\Sigma_0 - S = 0,3140 \quad "$$

und

$$T_0 - (90^\circ + t_0) = -2'',1637$$

$$T_0 - (90^\circ + \tau_0) = +1'',8316.$$

Bezeichnen  $(x' y')$  bzw.  $(x' \eta')$  die ebenen congruenten bzw. conformen rechtwinkligen Coordinaten eines zweiten Punktes,  $r_0$  bzw.  $\rho_0$  die ebenen Entfernungen dieser beiden Punkte vom Punkt  $(x y)$  bzw.  $(x \eta)$ , so gelten die bekannten Relationen für das Vergrößerungsverhältniss\*)

$$r = r_0 \left( 1 - \cos^2 t_0 \frac{y^2 + y y' + y'^2}{6 n_0^2} \right)$$

$$r = \rho_0 \left( 1 - \frac{\eta^2 + \eta \eta' + \eta'^2}{6 n_0^2} \right)$$

wo  $r$  die sphärische Entfernung zwischen den beiden Punkten  $(x y)$  und  $(x' y')$  bezeichnet.

Aus vorstehenden beiden Relationen ergibt sich unter Vernachlässigung aller Glieder von höherer als der zweiten Ordnung in Bezug auf den Kugelhalbmesser

$$\frac{\rho_0 - r_0}{r_0} = \sin^2 t_0 \cdot \frac{y^2 + y y' + y'^2}{6 n_0^2}$$

Das Maximum der Abweichung beider Entfernungen in der ebenen Darstellung tritt ein

für 
$$t_0 = \frac{2n-1}{2} \cdot \pi$$

d. h. für  $x' = x$ ,

wie auch ohne weiteres aus geometrischer Betrachtung erhellt.

Das Maximum selbst berechnet sich zu

$$\max \frac{\rho_0 - r_0}{r_0} = \frac{\rho_0 - r}{r} = \frac{r^2}{6 n_0^2} + \frac{y^2 + y r}{2 n_0^2}$$

und im gegebenen Falle für  $r = 1000$  m

zu 
$$\frac{1}{77324} = 12,9327 \cdot 10^{-6}$$

wenn der Punkt  $(x' y')$  nördlich vom Punkt  $(x y)$  liegt, und

zu 
$$\frac{1}{82310} = 12,1491 \cdot 10^{-6}$$

wenn der erstere südlich vom Punkt  $(x y)$  liegt.

Wenn man nun erwägt, dass bei der Anwendung congruenter ebener Coordinaten für die Kleintriangulirung und Specialvermessung die grösste zu fürchtende Verschiebung der Lage zweier 1000 m von einander entfernten Punkte im querachsigen System nur 12,5 mm beträgt, die mittlere Genauigkeit in der trigonometrischen Bestimmung der Entfernung zweier Punkte II. Ordnung eben so gross und für Punkte III. Ordnung fast zweieinhalbmal so gering ist, so kann von einer Ueberlegenheit der conformen Abbildungsmethode im Falle eines schmalen westöstlichen Vermessungsgebietes gegenüber der congruenten kaum noch die Rede sein. Denn ganz abgesehen davon, dass eine Vergrößerung des mittleren Punktfehlers bei der Einschaltung in das

\*) Vergl. Jordan, Bd. III, S. 273 und 283.



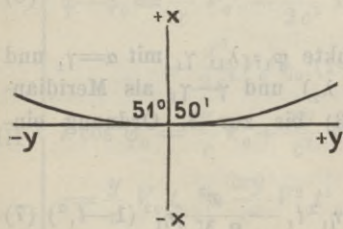
Netz II. und III. Ordnung von rund 2 cm bei einer Entfernung von 3 km für die praktische Anwendung der Resultate belanglos ist, hat man auch bei congruenter Darstellung in der Ebene weniger Rechenarbeit, weil die sphärischen Coordinaten der durch Breite und Länge gegebenen Punkte der Landstriangulirung I. bis IV. Ordnung ohne weiteres als ebene gelten, bei conformer Darstellung die Ordinaten  $\eta$  besonders berechnet werden müssen. Auch die einfacheren Formeln letzterer Projectionsmethode für die Reduction der ebenen Azimute auf sphärische und für die Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses können als ausschlaggebende Vorzüge in diesem besonderen Falle nicht gelten, weil bei der Punkteinschaltung IV. und V. Ordnung die Rechenarbeit mit der Ermittlung der rechtwinkligen Coordinaten der Neunpunkte im ebenen System abgeschlossen ist. Meines Erachtens ist unter derartigen Umständen das Prinzip der Congruenz dem der Conformität vorzuziehen.

Dessau, 25. December 1895.

Fr. W. Schulze, Landmesser.

## Querachsige Coordinaten.

Die im Vorhergehenden, S. 65 — 83 veröffentlichte Abhandlung von Herrn Schulze giebt Veranlassung, unsere, schon in der Anmerkung auf S. 66 und S. 73 erwähnten Weiterentwicklungen der sphäroidischen Formeln alsbald hier zu bringen. Es werden dadurch in Beziehung auf die Potenzordnung  $\frac{1}{r}$  alle die Glieder wieder auftreten, welche bereits in den sphärischen Formeln von 1895, S. 647—658 enthalten sind, aber nun mit Zufügung der von der Excentricität herührenden Theile  $(1 + \eta^2 \dots)$ .



berührt.

Die Lage des Coordinatensystems haben wir wie auch in Zeitschrift 1894 S. 70 und 1895 S. 647 so angenommen, wie in nebenstehender Fig. angedeutet ist, dass nämlich  $+x$  nach Norden,  $+y$  nach Osten geht. Die Hauptachse oder eigentliche Achse ist die  $y$ -Achse, welche den mittleren Parallelkreis mit  $\varphi^0 = 51^\circ 50'$

Nachdem in Zeitschr. f. Verm. 1894 S. 70—72 die Formeln für querachsige Coordinaten für das Ellipsoid bis zur dritten Ordnung entwickelt sind, aber nur mit Beifügung der sphäroidischen Theile ( $\eta^2$  u. s. w.)

bei den Gliedern 2. Ordnung, wollen wir nun jene Entwicklung insofern weiter führen, als auch bei den Gliedern 3. Ordnung noch die  $\gamma^2$  u. s. w. mitgenommen werden.

Vor allem wollen wir die Grundformeln von 1894 S. 70, (14)–(16) genauer geben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi' - \varphi}{V^2} &= \frac{s}{N} \cos \alpha - \frac{1}{2} \frac{s^2 \sin^2 \alpha t}{N^2} - \frac{3}{2} \frac{s^2 \cos^2 \alpha}{N^2} \gamma^2 t \\ &- \frac{s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{6 N^3} (1 + 3t^2 + \gamma^2 - 9\gamma^2 t^2 - \frac{s^2 \cos^3 \alpha \gamma^2}{2 N^2} (1 - t^2)) \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \cos \varphi &= \frac{s}{N} \sin \alpha + \frac{s^2}{N^2} \sin \alpha \cos \alpha t - \frac{s^3}{3 N^3} \sin^3 \alpha t^2 \\ &+ \frac{s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{3 N^3} (1 + 3t^2 + \gamma^2) \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \frac{s}{N} \sin \alpha t + \frac{s^2}{2 N^2} \sin \alpha \cos \alpha (1 + 2t^2 + \gamma^2) - \frac{s^3 \sin^3 \alpha t}{6 N^3} (1 + 2t^2 + \gamma^2) \\ &+ \frac{s^3}{6 N^3} \sin \alpha \cos^2 \alpha t (5 + 6t^2 + \gamma^2) \end{aligned} \right\} (3)$$

Diese 3 Formeln gelten für den Uebergang von einem Punkte mit der Breite  $\varphi$ , Länge Null, mit der geodätischen Linie  $s$ , die unter dem Azimut  $\alpha$  ausgeht zu einem Punkte mit der Breite  $\varphi'$  Länge  $\lambda$  und Endazimut  $\alpha'$ , also Meridianconvergenz  $\alpha' - \alpha$ .

Indem wir nun stets auf die frühere Entwicklung, Zeitschr. f. Verm. 1894, S. 65–74, Bezug nehmen, wissen wir, dass die Formeln (1) (2) (3) zweifach anzuwenden sind, erstens auf den Uebergang von  $\varphi_0$ ,  $\lambda=0$ ,  $s=x$ ,  $\alpha=90^\circ$  auf  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$ , d. h. wir haben aus (1):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi - \varphi_0}{V_0^2} &= -\frac{y^2}{2 N_0^2} t_0 \end{aligned} \right. (4)$$

$$\text{I} \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 \cos \varphi_0 &= \frac{y}{N_0} - \frac{y^3}{3 N_0^3} t_0^2 \end{aligned} \right. (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{y}{N_0} t_0 - \frac{y^3}{6 N_0^3} t_0 (1 + 2t_0^2 + \gamma_0^2) \end{aligned} \right. (6)$$

Die zweite Anwendung geht vom Punkte  $\varphi_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\gamma_1$  mit  $\alpha=\gamma_1$  und  $s=x$  nach dem Punkte  $\varphi$ ,  $\lambda_2$  gegen  $(\varphi_1, \lambda_2)$  und  $\gamma - \gamma_1$  als Meridianconvergenz. Dieses giebt aus (1) (2) (3) bis zur 3. Ordnung einschliesslich:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi - \varphi_1}{V_1^2} &= \frac{x}{N_1} \left( 1 - \frac{y^2}{2 N_0^2} t_0^2 \right) - \frac{3}{2} \frac{x^2}{N_1^2} \gamma_1^2 t_1 - \frac{x^3}{2 N_1^3} \gamma_1^2 (1 - t_1^2) \end{aligned} \right. (7)$$

$$\text{II} \left\{ \begin{aligned} \lambda_2 \cos \varphi_1 &= \frac{x}{N_1} \frac{y}{N_0} t_0 + \frac{x^2}{N_1^2} \frac{y}{N_0} t_0 t_1 \end{aligned} \right. (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma - \gamma_1 &= \frac{x}{N_1} \frac{y}{N_0} t_0 t_1 + \frac{x}{2 N_1^2} \frac{y}{N_0} t_0 (1 + 2t_1^2 + \gamma_1^2) \end{aligned} \right. (9)$$



Ehe wir diese beiden Gruppen von Gleichungen addiren, müssen wir die  $N_1$  auf  $N_0$ ,  $t_1$  auf  $t_0$  u. s. w. reduciren, auch wollen wir überall die  $N$  durch  $V$  ausdrücken, denn es ist

$$\text{Querkrümmungshalbmesser } N = \frac{c}{V} \quad (10)$$

$$\text{wobei } V^2 = 1 + \eta_1^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi \quad (11)$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) \\ \cos \varphi_1 &= \cos \varphi_0 - (\varphi_1 - \varphi_0) \sin \varphi_0 \\ \cos^2 \varphi_1 &= \cos^2 \varphi_0 - 2 (\varphi_1 - \varphi_0) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \end{aligned}$$

Da ausserdem nach (4)  $\varphi_1 - \varphi_0 = -\frac{y^2}{2c^3} V_0^4 t_0$ , so wird

$$\frac{V_1^2}{V_0^2} = 1 + e'^2 (\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_0) = 1 + 2 e'^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \frac{V_0^4 y^2}{2 c^2} t_0$$

$$\frac{V_1^2}{V_0^2} = 1 + \eta_0^2 V_0^4 \frac{y^2}{c^2} t_0^2$$

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi_0 + \frac{y^2}{2c^2} V_0^4 t_0 \sin \varphi_0$$

$$t_0 = \tan \varphi_0 \quad t_1 = \tan \varphi_1 = \tan \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) (1 + t_0^2)$$

$$t_1 = t_0 - \frac{y^2}{2c^2} V_0^4 t_0 (1 + t_0^2)$$

Damit giebt die Gruppe II mit Beschränkung überall auf 3. Ordnung Folgendes:

$$\text{IIa} \left\{ \begin{aligned} \varphi - \varphi_1 &= \frac{x}{c} V_0^3 \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{y^2}{c^2} V_0^4 \eta_0^2 t_0^2 \right) \left( 1 - \frac{y^2}{2c^2} V_0^2 t_0^2 \right) \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{x^2}{c^2} V_0^4 \eta_0^2 t_0 - \frac{x^3}{2c^3} V_0^5 \eta_0^2 (1 - t_0^2) \\ \lambda_2 \left( \cos \varphi_0 + \frac{y^2}{2c^2} \dots \right) &= \frac{xy}{c^2} V_0^2 t_0 + \frac{x^2 y}{c^3} V_0^3 t_0^2 \\ \gamma - \gamma_1 &= \frac{xy}{c^2} V_0^2 t_0^2 + \frac{x^2 y}{2c^3} V_0^3 t_0 (1 + 2t_0^2 + \eta_0^2) \end{aligned} \right.$$

Wenn man dieses IIa mit dem ursprünglichen I zusammennimmt, auch überall (10) und (11) berücksichtigt, so erhält man:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \frac{x}{c} V_0^3 - \frac{y^2}{2c^2} V_0^4 t_0 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{c^2} V_0^4 \eta_0^2 t_0 \\ &\quad - \frac{x^3}{2c^3} V_0^5 \eta_0^2 (1 - t_0^2) - \frac{xy^2}{2c^3} V_0^5 t_0^2 (1 - 3\eta_0^2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\text{III} \left\{ \begin{aligned} \lambda \cos \varphi_0 &= \frac{y}{c} V_0 + \frac{xy}{c^2} V_0^2 t_0 + \frac{x^2 y}{c^3} V_0^3 t_0^2 - \frac{y^3}{3c^3} V_0^3 t_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma &= \frac{y}{c} V_0 t_0 + \frac{xy}{c^2} V_0^2 t_0^2 + \frac{x^2 y}{2c^3} V_0^3 t_0 (1 + 2t_0^2 + \eta_0^2) \\ &\quad - \frac{y^3}{6c^3} V_0^3 t_0 (1 + 2t_0^2 + \eta_0^2) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Diese Gleichungen entsprechen den früheren (28) (29) (30) in Zeitschr. 1894, S. 72 und sphärisch 1895, (5) (11) S. 648 und (12) S. 652 oder (14) S. 653 innerhalb der 3. Ordnung.

Es handelt sich nun darum, die Gleichungen (12) und (13) nach  $x$  und  $y$  aufzulösen, was durch fortgesetzte Näherung geschehen muss. Jedenfalls in erster Näherung ist

$$\frac{x}{c} = \frac{\varphi - \varphi_0}{V_0^3} = \frac{\Delta \varphi}{V_0^3} \quad \frac{y}{c} = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{V_0} \quad (15)$$

$$\frac{x^2}{c^2} = \frac{\Delta \varphi^2}{V_0^6} \quad \frac{y^2}{c^2} = \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi_0}{V_0^2} \quad \frac{xy}{c^2} = \frac{\Delta \varphi \lambda \cos \varphi_0}{V_0^4}$$

Diese Näherungen in (12) und (13) eingesetzt geben bis zur 2. Ordnung:

$$\frac{x}{c} = \frac{\Delta \varphi}{V_0^3} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi_0}{2 V_0} t_0 + \frac{3 \Delta \varphi^2}{2 V_0^5} \eta_0^2 t_0 \quad (16)$$

$$\frac{y}{c} = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{V_0} - \frac{\Delta \varphi \lambda \cos \varphi_0}{V_0^3} t_0 \quad (17)$$

Nun nochmals, bis zur 3. Ordnung:

$$\frac{x^2}{c^2} = \frac{\Delta \varphi^2}{V_0^6} + \frac{\Delta \varphi \lambda^3 \cos^2 \varphi_0}{V_0^4} t_0 + 3 \frac{\Delta \varphi^3}{V_0^8} \eta_0^2 t_0 \quad (18)$$

$$\frac{y^2}{c^2} = \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi_0}{V_0^2} - \frac{2 \Delta \varphi \lambda^2 \cos^2 \varphi_0}{V_0^4} t_0 \quad (19)$$

$$\frac{xy}{c^2} = \frac{\Delta \varphi \lambda \cos \varphi_0}{V_0^4} + \frac{\lambda^3}{2 V_0^2} \cos^3 \varphi_0 t_0 - \frac{\Delta \varphi^2 \lambda \cos \varphi_0 t_0}{2 V_0^6} (2 - 3 \eta_0^2) \quad (20)$$

Setzt man diese 3 Ausdrücke in (12) und (13) ein, und nimmt man dabei für die Glieder 3. Ordnung kurz die Näherungen (15), so bekommt man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{c} = \frac{\Delta \varphi}{V_0^3} + \frac{\lambda^2}{2 V_0} \cos^2 \varphi_0 t_0 - \frac{\Delta \varphi \lambda^2}{2 V_0^2} \cos^2 \varphi_0 t_0^2 + \frac{3 \Delta \varphi^2}{2 V_0^5} \eta_0^2 t_0 \\ - \frac{\Delta \varphi^3}{2 V_0^7} \eta_0^2 (-1 + t^2 - 9 \eta_0^2 t_0^2) \end{aligned} \right\} (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{c} = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{V_0} - \frac{\Delta \varphi \lambda \cos \varphi_0 t_0}{V_0^3} - \frac{\lambda^3}{6 V_0} \cos^3 \varphi_0 t_0^2 \\ - \frac{3 \Delta \varphi^2 \lambda}{2 V_0^5} \cos \varphi_0 t_0^2 \eta_0^2 \end{aligned} \right\} (22)$$

Endlich kann man auch noch die Meridianconvergenz in (14) durch (16)—(22) als Function von  $\varphi$  und  $\lambda$  darstellen:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi_0 - \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 V_0^2 + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda \sin \varphi_0}{2 V_0^2} \quad (23)$$

Zur Probe kann man auch wieder dieses (23) mit Hilfe von (12) und (13) in (14) zurückverwandeln, was stimmen wird.

Nun haben wir in (12)—(14) und in (21)—(23) alle nöthigen Formeln bis zur 3. Ordnung.

Endlich wollen wir noch die rein sphärisch entwickelten Glieder 4. Ordnung zusetzen, welche in Zeitschr. 1895, S. 647—653 unter den Nummern (5), (7), (8), (10), (12), (13) enthalten sind. Wenn wir ausserdem auch überall die nöthigen  $\rho$  zusetzen, so bekommen wir



folgende 6 Gleichungen, wobei wir aber zur Bequemlichkeit nur  $V$  und  $t$  statt der früheren  $V_0$  und  $t_0$  schreiben:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{x}{c} V^3 \rho - \frac{y^2}{2c^2} V^4 t \rho - \frac{3}{2} \frac{x^2}{c^2} V^4 \eta^2 t \rho + \frac{x^3}{2c^3} V^5 \eta^2 (t^2 - 1) \rho - \frac{xy^2}{2c^3} V^5 t^2 (1 - 3\eta^2) \rho - \frac{x^2 y^2}{2c^4} t^3 \rho + \frac{y^4}{24c^4} t (1 + 3t^2) \rho \quad (24)$$

$$\lambda \cos \varphi_0 = \frac{y}{c} V \rho + \frac{xy}{c^2} V^2 t \rho + \frac{x^2 y}{c^3} V^3 t^2 \rho - \frac{y^3}{3c^3} V^3 t^2 \rho + \frac{x^3 y}{3c^4} t (1 + 3t^2) \rho - \frac{xy^3}{6c^4} t (1 + 6t^2) \rho \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{y}{c} V t \rho + \frac{xy}{c^2} V^2 t^2 \rho + \frac{x^2 y}{2c^3} V^3 t (1 + 2t^2 + \eta^2) \rho - \frac{y^3}{6c^3} V^3 t (1 + 2t^2 + \eta^2) \rho - \frac{xy^3}{3c^4} t^2 (2 + 3t^2) \rho + \frac{x^3 y}{6c^4} t^2 (5 + 6t^2) \rho \quad (26)$$

$$x = \frac{\Delta \varphi}{\rho} \frac{c}{V^3} + \frac{\lambda^2}{2\rho^2} \frac{c}{V} \cos^2 \varphi t - \frac{\Delta \varphi \lambda^2}{2\rho^3} \frac{c}{V^3} \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} \frac{\Delta \varphi^2}{\rho^2} \frac{c}{V^5} \eta^2 t - \frac{\Delta \varphi^3}{2\rho^3} \frac{c}{V^7} \eta^2 (-1 + t^2 - 9\eta^2 t^2) - \frac{\lambda^4 c}{24\rho^4} \cos^2 \varphi t \quad (27)$$

$$y = \frac{\lambda \cos \varphi}{\rho} \frac{c}{V} - \frac{\Delta \varphi \lambda \cos \varphi}{\rho^2} \frac{c}{V^3} t - \frac{\lambda^3}{6\rho^3} \frac{c}{V} \cos^3 \varphi t^2 - \frac{3}{2} \frac{\Delta \varphi^2 \lambda}{\rho^3} \frac{c}{V^5} \cos \varphi t^2 \eta^2 - \frac{\Delta \varphi^3 \lambda c \sin \varphi}{3\rho^4} + \frac{\Delta \varphi \lambda^3 c \sin \varphi}{6\rho^4} \quad (28)$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi - \frac{\lambda^3}{6\rho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi V^2 + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda \sin \varphi}{2\rho^2 V^2} + \frac{\Delta \varphi \lambda^3}{2\rho^3} \sin^2 \cos \varphi \quad (29)$$

Man kann die Coefficienten dieser Formeln theilweise auch in mehr anschaulicher Form schreiben, denn es ist

$$\frac{V^3}{c} = \frac{1}{M} \quad \frac{V}{c} = \frac{1}{N} \quad \frac{V^4}{c^2} = \frac{1}{r^2}$$

wobei  $M$  und  $N$  die Hauptkrümmungshalbmesser und  $r$  der mittlere Krümmungshalbmesser sind.

Bei den Gliedern 4. Ordnung, welche nur sphärisch entwickelt sind, haben wir schlechthin  $c$  als Halbmesser gesetzt; wir haben diese Glieder auch noch besonders sphäroidisch entwickelt und gefunden für  $\varphi - \varphi_0$ :

$$- \frac{x^2 y^2}{2c^4} V^6 t^3 (1 + \eta^2 \dots) + \frac{y^4 V^6 t}{24c^4} (1 + 3t^2 + \eta^2 \dots)$$

man könnte also wohl den Factor  $V^6$  in den 2 letzten Gliedern von (24) zusetzen, aber da die vernachlässigten Glieder mit  $\eta^2 \dots$  das alles nochmals ändern können, indem  $V^2 = 1 + \eta^2$  ist, haben wir kurzer Hand  $c^4$  in allen Gliedern 4. Ordnung stehen gelassen, obgleich  $N^4$  statt  $c^4$  sich vielleicht mehr empfehlen würde. Es kommt uns bei jenen Gliedern 4. Ordnung nur auf die wenigen ersten Stellen an.

Zur Anwendung dieser Formeln auf die Normalbreite  $51^{\circ} 50'$  hat man folgende Constanten:

$$\log \cos \varphi = 9.790\ 9541 \cdot 080 \qquad \log \sin \varphi = 9.895\ 5421 \cdot 736$$

$$\log \cos^2 \varphi = 9.581\ 9082 \cdot 160 \qquad \log \sin^2 \varphi = 9.791\ 0843 \cdot 472$$

$$\log e'^2 = 7.827\ 3187 \cdot 833$$

$$\log e'^2 \cos^2 \varphi = 7.409\ 2269 \cdot 993 = \log \tau^2, \quad \tau^2 = 0,002\ 5658\ 24805$$

$$V^2 = 1 + \tau^2 = 1,002\ 5658\ 24805$$

$$\log V^2 = 0.001\ 1128 \cdot 964 \qquad \log V = 0.000\ 5564 \cdot 482$$

$$\log V^4 = 0.002\ 2257 \cdot 928 \qquad \log V^3 = 0.001\ 6693 \cdot 446$$

$$\text{tang } \varphi = t$$

$$\log t = 0.104\ 5880 \cdot 656$$

$$t^2 = 1,618\ 7363\ 954$$

$$\log t^2 = 0.209\ 1761 \cdot 312$$

$$\log \rho = 5.314\ 4251 \cdot 332 \qquad \log \frac{1}{\rho} = 4.685\ 5748 \cdot 668$$

$$\log c = 6.806\ 0976 \cdot 435 \qquad \log c^2 = 3.612\ 1952 \cdot 870$$

Wenn man diese Constanten in die vorhergehenden Formeln einführt, so erhält man:

für congruente  $x, y$

$$\Delta \varphi = [8.509\ 9968 \cdot 343] x - [1.508\ 0137 \cdot 1] y^2 - [9.394\ 3620] x^2 + [1.798\ 6171] x^3 - [4.803\ 7047] xy^2 - [8.10277] x^2 y^2 + [7.58202] y^4 \quad \left. \vphantom{\Delta \varphi} \right\} (24a)$$

$$\lambda = [8.717\ 9298 \cdot 299] y + [2.016\ 9767] xy + 5.316\ 0226] x^2 y - [4.838\ 9023] y^3 + [8.69416] x^3 y - [8.65540] xy^3 \quad \left. \vphantom{\lambda} \right\} (25a)$$

$$\gamma = [8.613\ 4720 \cdot 035] y + [1.912\ 5188 \cdot 8] xy + [5.328\ 6062] x^2 y - [4.851\ 4850] y^3 - [8.6582] xy^3 + [8.688\ 74] x^3 y \quad \left. \vphantom{\gamma} \right\} (26a)$$

$$x = [1.490\ 0031 \cdot 657] \Delta \varphi + [5.562\ 1572 \cdot 1] \lambda^2 - [0.351\ 2073] \Delta \varphi \lambda^2 + [3.864\ 3715] \Delta \varphi^2 - [7.731\ 57] \Delta \varphi^3 - [3.854\ 68] \lambda^4 \quad \left. \vphantom{x} \right\} (27a)$$

$$y = [1.282\ 0701 \cdot 701] \lambda - [6.071\ 1200 \cdot 1] \Delta \varphi \lambda - [9.666\ 1530] \lambda^3 - [8.445\ 4885] \Delta \varphi^2 \lambda - [4.96682] \Delta \varphi^3 \lambda + [4.66579] \Delta \varphi \lambda^3 \quad \left. \vphantom{y} \right\} (28a)$$

$$\gamma = [9.895\ 5421 \cdot 736] \lambda - [8.071\ 5618] \lambda^3 + [8.964\ 5490] \Delta \varphi^2 \lambda + [3.33773] \Delta \varphi \lambda^3 \quad \left. \vphantom{\gamma} \right\} (29a)$$

Zu einer ersten Anwendung dieser Formeln wollen wir in runden Zahlen nehmen:

$$x = 50\ 000\ m \qquad y = 50\ 000\ m \quad (30)$$

daraus erhält man:

$$\Delta \varphi = + 1617, 956491 - 8,052926 - 0,061987 + 0,000079 - 0,079544 - 0,000793 + 0,000239$$

$$\Delta \varphi = 1609, 761559'' = 26' 49,761559'' \quad (30\varphi)$$

$$\lambda = 2611, 558954 + 25,996610 + 0,258781 - 0,086261 + 0,003090 - 0,002826$$

$$\lambda = 2637, 728348'' = 43' 57,728348'' \quad (30\lambda)$$

$$\gamma = 2053, 250834 + 20,438967 + 0,266388 - 0,088796 - 0,002722 + 0,003052$$

$$\gamma = 2073, 867723'' = 34' 33,867723'' \quad (30\gamma)$$



und die Rückverwandlung:

$$x = 49746,75053 + 253,87345 - 2,514368 + 1,896246 - 0,002248 - 0,003460$$

$$x = 50000,00015 \text{ m} \quad (30x)$$

$$y = 50501,03105 - 500,16308 - 0,85083 - 0,01906 - 0,01019 + 0,01369$$

$$y = 50000,00063 \text{ m} \quad (30y)$$

$$\gamma = 2073,825643 - 0,021640 + 0,062994 + 0,000643$$

$$\gamma = 2073,867640'' = 34' 33,867640'' \quad (30\gamma)$$

Die Proben stimmen in  $x$  auf 0,15 mm, in  $y$  auf 0,63 mm und in  $\gamma$  auf 0,000083'', also überall befriedigend.

Es soll noch das Beispiel durchgerechnet werden, welches wir früher in Zeitschr. f. Verm. 1894 S. 67 und S. 73 nur bis zur 3. Ordnung behandelt haben.

Die Coordinaten zweier Punkte sind:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= + 10\ 000 \text{ m} & x_1 &= + 9\ 999,996 \text{ m} \\ y_2 &= + 30\ 000 \text{ m} & x_2 &= + 39\ 999,738 \text{ m} \end{aligned} \right\} (31)$$

und zwar sind dieses die natürlichen, unverzerrten  $x$ , während im conformen Coordinatensystem ist:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= + 10\ 000 & x_1 &= + 10\ 000 \\ y_2 &= + 30\ 000 & x_2 &= + 40\ 000 \end{aligned} \right\} \text{ conform } \left. \right\} (32)$$

Nach den Formeln von 1894 S. 67 wurde berechnet:

$$t_1 = 33^\circ 41' 24,2431'' \quad t_2 = 213^\circ 41' 24,2431''$$

$$- 1,0127 \quad + 1,5190$$

$$T_1 = 33^\circ 41' 23,2304'' \quad T_2 = 213^\circ 41' 25,7521'' \quad (33)$$

$$\log s = 4.5569716 \cdot 8$$

$$- 37 \cdot 3 \quad (34)$$

$$\log S = 4.5569679 \cdot 5$$

Nun werden aus (32) die geographischen Coordinaten nach den Formeln (24) — (29) berechnet:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 8' 43,353035'' & \varphi_1 &= 51^\circ 55' 23,265925 & \gamma_1 &= 6' 51,469147'' \\ \lambda_2 &= 26' 19,494863'' & \varphi_2 &= 52^\circ 11' 31,394840 & \gamma_2 &= 20' 41,84472'' \end{aligned} \right\} (35)$$

Aus diesen  $\lambda$  und  $\varphi$  nach den Mittelbreiten-Formeln unseres Handb. d. Verm. III. Band 1890, III. Aufl. S. 398 wurde berechnet

$$\log S = 4.556\ 9679 \cdot 5 \quad (35)$$

was vollständig mit (34) stimmt und ferner die Azimute:

$$\alpha_1 = 33^\circ 48' 14,6988'' \quad \alpha_2 = 214^\circ 2' 7,6060'' \quad (36)$$

das giebt mit (23) und (35) die Probe: [entsprechend der früheren weniger genaueren Rechnung Zeitschr. f. Verm. 1894 S. 73, (11)]:

$$\text{von (33)} \quad T_1 = 33^\circ 41' 23,2304'' \quad T_2 = 213^\circ 41' 25,7621''$$

$$\text{von (35)} \quad \gamma_1 = 6' 51,4691'' \quad \gamma_2 = 20' 41,8447''$$

$$T_2 + \gamma_1 = 33^\circ 48' 14,6995'' \quad T_2 + \gamma_2 = 214^\circ 2' 7,6068''$$

$$\text{soll (36)} \quad \alpha_2 = 33^\circ 48' 14,6988'' \quad \alpha_2 = 214^\circ 2' 7,6060''$$

$$\text{Abweichungen} \quad 0,0007'' \quad 0,0008'' (37)$$

Die Proben stimmen also innerhalb 0,001'', und da auch die Entfernung  $S$  im Logarithmus zwischen (34) und (36) auf 0,0 stimmt, so ist das ganze Zahlenbeispiel so scharf berechnet als man unter den gegebenen Umständen überhaupt erwarten kann. Dabei ist zu beachten, dass schon die Abrundung auf 1 mm bei den Reductionen zwischen (31) und (32) der Richtungsgenauigkeit eine gewisse Grenze setzt, denn bei  $S = 36000$  m bringt 1 mm bereits 0,005'', oder die unvermeidlichen Bruchtheile von 1 mm werden 0,001'' bereits erheblich beeinflussen.

Uebergang zu conformen Coordinaten  $x, y$ .

In den bisherigen Formeln ist angenommen die Coordinaten  $x, y$  seien natürliche, unverzerrte, wie in dem Beispiele (31); wir wollen nun aber annehmen, das Coordinatensystem sei ein conformes wie in Zeitschr. 1894 S. 66—67 angegeben ist. Dann geht jedes  $x$  über in  $x + \frac{x^3}{6r^2}$  während die  $y$  ungeändert bleiben, oder wir wollen nun, indem wir die conformen  $x$  mit  $X$  bezeichnen, setzen:

$$x = X - \frac{X^3}{6r^2} = X - \frac{X^3}{6c^2} V^4 \quad (38)$$

wobei  $\log \frac{1}{6r^2} = 5.611879$  und  $\log \frac{\mu}{6r^2} = 2.249664$ .

Dieses kann in (24) nur im ersten Gliede eine Aenderung erzeugen innerhalb der 4. Ordnung, welche überhaupt als letzte auftritt, und es giebt:

$$\frac{x}{c} V^3 = \frac{X}{c} V^3 - \frac{X^3}{6c^3} V^7$$

hierzu das Glied mit  $x^3$  in (24), welches nun auch mit  $X^3$  geschrieben werden kann:

$$+ \frac{X^3}{2c^3} V^5 \eta^2 (t^2 - 1)$$

Die Glieder mit  $X^3$  zusammen geben:

$$\begin{aligned} \frac{X^3}{6c^3} V^5 (-V^2 + 3\eta^2 t^2 - 3\eta^2) &= \frac{X^3}{6c^3} V^5 (-1 - \eta^2 + 3\eta^2 t^2 - 3\eta^2) \\ &= -\frac{X^3}{6c^3} V^5 (1 + 4\eta^2 - 3\eta^2 t^2) \rho \end{aligned}$$

Die ganze Gleichung (24) wird daher werden:

$$\Delta \varphi = \frac{X}{c} V^3 \rho - \frac{y^2}{2c^2} V^4 t \rho - \frac{3X^2}{2c^2} V^4 \eta^2 t \rho - \frac{X^3}{6c^3} V^5 (1 + 4\eta^2 - 3\eta^2 t^2) \rho \left. \begin{aligned} &- \frac{Xy^2}{2c^3} V^5 t (1 - 3\eta^2) \rho - \frac{X^2 y^2}{2c^4} t^3 \rho + \frac{y^4}{24c^4} t (1 + 3t^2) \rho \end{aligned} \right\} (24^*)$$

In (25) bringt das zweite Glied eine Aenderung zusammen mit dem ohnehin vorhandenen Gliede  $x^3 y$ , wo wir aber, weil es nur 4. Ordnung ist, die  $V^2$  weglassen, d. h. = 1 setzen:

$$\begin{aligned} &- \left( \frac{X^3}{6c^2} \right) \frac{y}{c^2} t + \frac{X^3 y}{3c^4} t (1 + 3t^2) \\ &= \frac{X^3}{6c^4} y t (-1 + 2 + 6t^2) = \frac{X^3 y}{6c^4} t (1 + 6t^2) \end{aligned}$$



also die ganze Gleichung (25):

$$\lambda \cos \varphi_0 = \frac{y}{c} V \rho + \frac{Xy}{c^2} V^2 t \rho + \frac{X^2 y}{c^3} V^3 t^2 \rho - \frac{y^3}{3c^3} V^3 t^2 \rho \left. \begin{array}{l} \\ + \frac{X^3}{6c^4} y t (1 + 6t^2) \rho - \frac{Xy^3}{6c^4} t (1 + 6t^2) \rho \end{array} \right\} (25^*)$$

In gleicher Weise behandelt giebt (26)

$$\gamma = \frac{y}{c} V t \rho + \frac{Xy}{c^2} V^2 t \rho + \frac{X^2 y}{2c^3} V^3 t (1 + 2t^2 + \eta^2) \rho \left. \begin{array}{l} \\ - \frac{y^3}{6c^3} V^3 t (1 + 2t^2 + \eta^2) \rho - \frac{Xy^3}{3c^4} t^2 (2 + 3t^2) \rho \\ + \frac{X^3 y}{3c^4} t^2 (2 + 3t^2) \rho \end{array} \right\} (26^*)$$

In der Umkehrungsformel für  $x$  erhält man im Falle conformer Coordinaten

$$X - \frac{X^3}{6c^2} V^4 = \frac{\Delta \varphi}{V^3} c + \frac{\lambda^2}{2} c \cos^2 \varphi t + \dots$$

also wenn man das Glied mit  $X^3$  auf die rechte Seite bringt

$$\begin{aligned} X &= \left( \frac{\Delta \varphi}{V^3} c + \frac{\lambda^2}{2} c \cos^2 \varphi t \right)^3 \frac{V^4}{6c^2} + \dots + \frac{\Delta \varphi^3}{2} \frac{c}{V^7} \eta^2 (1 - t^2 + 9\eta^2 t^2) \\ &= \left( \frac{\Delta \varphi^3}{V^9} c^3 + \frac{3 \Delta \varphi^2 \lambda^2 c^3 \cos^2 \varphi t}{2 V^6} \right) \frac{V^4}{6c^2} + \dots \\ &= \frac{\Delta \varphi^3}{V^7} \frac{V^2}{6} c + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda^2}{4 V^2} c \cos^2 \varphi t + \dots + \frac{\Delta \varphi^2}{2} \frac{c}{V^7} \eta^2 (2 - t^2 + 9\eta^2 t^2) \end{aligned}$$

Das erste und das dritte Glied lassen sich zusammennehmen (mit  $V^2 = 1 + \eta^2$ ) und dadurch wird:

$$X = \frac{\Delta \varphi^3}{6} \frac{c}{V^7} (1 + 4\eta^2 - 3\eta^2 t^2 + 27\eta^4 t) + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda^2}{4 V^2} c \cos^2 \varphi t + \dots$$

das sind nur die Glieder, welche sich in (27) ändern; im Ganzen hat man:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\Delta \varphi}{\rho} \frac{c}{V^3} + \frac{\lambda^2}{2\rho^2} \frac{c}{V} \cos^2 \varphi t - \frac{\Delta \varphi \lambda^2}{2\rho^3} \frac{c}{V^3} \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} \frac{\Delta \varphi^2}{\rho^2} \frac{c}{V^5} \eta^2 t \\ &+ \frac{\Delta \varphi^3}{6\rho^3} \frac{c}{V^7} (1 + 4\eta^2 - 3\eta^2 t^2 + 27\eta^4 t^2) + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda^2}{4\rho^4} c \cos^2 \varphi t - \frac{\lambda^4 c}{24\rho^4} \cos^2 \varphi t \end{aligned}$$

Mit ausgerechneten Coefficientenlogarithmen bekommt man folgende Formeln:

für conforme Coordinaten  $X, y$

$$\Delta \varphi = [8.509\ 9968\ 343] X - [1.508\ 0137\ 1] y^2 - [9.394\ 3620] x^2 \left. \begin{array}{l} \\ - [4.119\ 8080] X^3 - [4.803\ 7047] Xy^2 - [8.10\ 277] X^2 y^2 \\ + [7.58\ 202] y^4 \end{array} \right\} (24b)$$

$$\lambda = [8.717\ 9298\ 299] y + [2.016\ 9767] Xy + [5.316\ 0226] X^2 y \left. \begin{array}{l} \\ - [4.838\ 9023] y^3 + [8.65\ 540] X^3 y - [8.65\ 540] Xy^3 \end{array} \right\} (25b)$$

$$\gamma = [8.613\ 4720\ 035] y + [1.912\ 5188\ 8] Xy + [5.328\ 6062] X^2 y \left. \begin{array}{l} \\ - [4.851\ 4850] y^3 - [8.6582] Xy^3 + [8.6582] X^3 y \end{array} \right\} (26b)$$

$$X = [1.490\ 0031\ 657] \Delta \varphi + [5.562\ 1572\ 1] \lambda^2 - [0.351\ 2073] \varphi \Delta \lambda^2 \left. \begin{array}{l} \\ + [3.864\ 3715] \Delta \varphi^2 + [0.079\ 9520] \Delta \varphi^3 + [4.63\ 283] \Delta \varphi^2 \lambda^2 \\ - [3.85\ 468] \lambda^4 \end{array} \right\} (27b)$$

$$y = [1.282\ 0701\cdot701] \lambda - [6.071\ 1200\cdot1] \Delta\varphi \lambda - [9.666\ 1530] \lambda^3 - [8.445\ 4885] \Delta\varphi^2 \lambda - [4.96682] \Delta\varphi^3 \lambda + [4.66579] \Delta\varphi \lambda^3 \quad \left. \vphantom{y} \right\} (28b)$$

$$\gamma = [9.895\ 5421\cdot736] \lambda - [8.071\ 5618] \lambda^3 + [8.964\ 5490] \Delta\varphi^2 \lambda + [3.33\ 773] \Delta\varphi \lambda^3 \quad \left. \vphantom{\gamma} \right\} (29b)$$

Wenn man hiernach das grosse Beispiel (30) rechnen will, so muss man zuerst  $x = 50\ 000$  m umwandeln in  $X = x + \frac{x^3}{6 r^2} = 50\ 000,51143$ , und damit erhält man aus (24b):

$$\Delta\varphi = 1617,973\ 041 - 8,052\ 926 - 0,061\ 987 - 0,016\ 473 - 0,079\ 544 - 0,000\ 793 + 0,000\ 239$$

$\Delta\varphi = 1609,761\ 558$  ebenso wie bei (30  $\varphi$ ) aus (25b):

$$\lambda = + 2611,558\ 954 + 25,996\ 874 + 0,258\ 786 - 0,086\ 261 + 0,002\ 827 - 0,002\ 827$$

$$\lambda = 2637,728\ 353$$

und aus (26b):

$$\gamma = + 2053,250\ 834 + 20,439\ 173 + 0,266\ 394 - 0,088\ 796 - 0,002\ 844 + 0,002\ 844 = 2073,867\ 605$$

Die Gleichung (27b) giebt ausgerechnet:

$$X = 49746,75053 + 253,87345 - 2,51437 - 1,89625 + 0,50146 + 0,50371 - 0,00346$$

$$X = 50000,51100.$$

Die Formeln (28b) und (29b) für  $y$  und  $\gamma$  sind dieselben wie früher (28a) und (29a).

Damit ist alles erledigt, was zur Anwendung querachsiger rechtwinkliger Coordinaten in dem 120 km langen und 56 km breiten Gebiete mit der Mittelbreite  $51^0\ 50'$  (vergl. S. 66) nöthig ist, und wir halten unsere Entwicklungen und Formeln von S. 83—92 für besser als die vorhergehenden auf S. 65—83 von Herrn Schulze in Dessau, obgleich natürlich das Urtheil über diese beiden gleichzeitig veröffentlichten Arbeiten dem Leser oder demjenigen überlassen bleibt, welcher davon praktischen Gebrauch machen will. Unter allen Umständen sind die unabhängig von zwei Seiten gegebenen Lösungen einer gestellten Aufgabe, wie schon die Anmerkung auf S. 65—66 bemerkt, erwünscht und schon in der Controle der gleichlautenden Zahlenbeispiele werthvoll.

Aber eine zweite hieran angeschlossene Frage müssen wir noch behandeln, nämlich ob diese querachsigen rechtwinkligen Coordinaten in der ebenen Kartendarstellung congruent oder conform gewählt werden sollen? Herr Schulze kommt auf Seite 83 zu dem Schlusse, dass das Princip der Congruenz dem der Conformität vorzuziehen sei, weil die congruente Darstellung weniger Rechenarbeit erfordere.

Dass das nicht der Fall ist, mag kurz durch den Hinweis auf unsere Formeln (24a)—(29a) auf S. 88 und (24b)—(29b) auf S. 91—92 erledigt werden, denn dass einmal bei  $X$  ein Glied 4. Ordnung mehr auftritt als bei  $x$ , das ist kein Unterschied, zumal man doch in praktischer Anwendung alle Glieder 4. Ordnung in Hülfsstäfelchen oder



Diagrammen zusammenfassen wird, wie schon bei ähnlicher Gelegenheit in Zeitschr. 1894, S. 151—152 dargelegt wurde. Auch kann man für die Hauptglieder 1. Ordnung leicht Hülftafeln anlegen, wodurch die 8stelligen Logarithmen (S. 66) für das übrige erspart, überhaupt das Ganze viel glatter und übersichtlicher zum praktischen Gebrauch eingerichtet werden kann als das auf S. 65 und S. 73 erwähnte Formular 6 der preussischen Kataster-Anweisung; auch sei damit die auf S. 66 als „recht unbequem“ bezeichnete Rechnung mit 6gliedrigen Reihen erläutert.

Zu der Vergleichung congruenter und conformer Coordinaten zurückkehrend, welche nun, nach S. 65, von dem „Gebiete theoretischer Speculation“ in das „praktische Interesse“ übergegangen ist, müssen wir auch auf den Vortrag der Bonner Versammlung 1895 (Zeitschr. 1895, S. 337—345) und auf die dort geführte Debatte zurückkommen, aber mit der Bemerkung, dass leider aus jetzt nicht mehr aufzuklärenden Gründen der Bericht in der Zeitschr. 1895, S. 509, in dem was diese Frage betrifft, unrichtig ausgefallen ist; während der Württembergische Bericht von Weitbrecht in den Mittheilungen des Württembergischen Geometer-Vereins Nr. 2, Juli 1895, S. 55 so lautet: „Professor Koll vertheidigt die Anwendung der Soldner'schen Coordinaten bei den 40 preussischen Systemen und betont, dass wenn bei Einführung conformer Coordinaten das Land nicht in viel mehr Systeme zerschlagen werden wolle, man sich genöthigt sehen würde, für jede Markung besondere Reductionsmaassstäbe für Strecken- und Flächenangaben einzuführen.“

Dieses und die in Zeitschr. 1895, S. 509 mitgetheilte Darlegung scheint, mit den Ausführungen von Herrn Schulze auf S. 83 im Vorstehenden, der allerdings weitverbreiteten Ansicht zu huldigen, dass die unverzerrten, Soldner'schen Coordinaten die „praktischen“ und die conformen Coordinaten die „theoretischen“ seien, welche letztere nur etwa zur Freude Solcher dienen, welche gerne mit  $\frac{dy}{dx}$  rechnen, aber die „Praxis“ nicht zu beurtheilen verständen. Nun ist aber gerade das Gegentheil der Fall. Die conformen Coordinaten verursachen neben ihren sonstigen Vorzügen, weniger Rechenarbeit als die congruente, Soldner'schen, d. h. da, wo überhaupt von Erdkrümmung die Rede ist, und im ebenen Rechnen sind überhaupt beide Systeme identisch.

Was den von Prof. Koll (nach dem Württembergischen Bericht S. 55) ausgesprochenen Satz betrifft, dass bei conformer Projection, wenn nicht das Land in viel mehr Systeme zerschlagen werden wolle, für jede Gemarkung besondere Reductionsmaassstäbe für Strecken- und Flächenangaben erforderlich würden, so möchte es genügen, zu dessen Widerlegung die Praktiker des einzigen Landes zu fragen, welches in Deutschland zur Zeit conforme Coordinaten hat, nämlich die Geodäten von Mecklenburg, ob dort jemals besondere Reductionen dieser Art von irgend Jemandem für nöthig gehalten wurden?

Wenn, wie gesagt wurde, die Furcht vor solchen besonderen Reductionen in Hannover nach 1866 der Grund war zu der unzweckmässigen Zerschneidung des alten classischen Coordinatensystems in 31 conforme Partialssysteme und später 1881 zu der gänzlichen Abschaffung der conformen Coordinaten, so wäre das nicht eine Folge von praktischen Erwägungen, sondern eine Folge irriger mathematischer Auffassung der Sache gewesen, deren Wiederholung jetzt, da die Frage in mehr als einem Lande wieder praktisches Interesse gewonnen hat, vermieden werden muss.

J.

## Vereinsangelegenheiten.

**Die Einziehung der Mitgliederbeiträge für das Jahr 1896 erfolgt in der Zeit vom 1. Januar bis einschliesslich 10. März. Die Herren Mitglieder, welche den Beitrag durch die Post einsenden wollen, werden ersucht, dieses in der oben angegebenen Zeit zu thun. Nach dem 10. März erfolgt die Einziehung durch Postnachnahme. — Es wird gebeten bei Einsendung des Beitrages den jetzigen Wohnort, Amtstitel etc. deutlich anzugeben, da beabsichtigt wird für das Jahr 1896 ein neues Mitgliederverzeichniss herauszugeben. Auch ist die Angabe der Mitgliedsnummern sehr erwünscht.**

Cassel, Murhardtstrasse 19b, den 1. Januar 1896.

Die Kassenverwaltung des Deutschen Geometer-Vereins.

Hüser, Oberlandmesser.

## Kassenbericht für das Jahr 1895.

Der Deutsche Geometer-Verein besteht am Schlusse des Jahres 1895 nach dem Kassenbuche aus 7 Ehrenmitgliedern, 18 Zweigvereinen und 1267 ordentlichen Mitgliedern.

Zum 1. Januar 1896 haben ihren Austritt angezeigt 25 Mitglieder dagegen sind für 1896 neu eingetreten 11 Mitglieder, mithin beträgt der Abgang am 1. Januar 1896 14 Mitglieder, sodass die Zahl der ordentlichen Mitglieder 1253 beträgt. Am 1. Januar 1895 betrug dieselbe 1229. Es ist also ein Zuwachs von 24 ordentlichen Mitgliedern für das Jahr 1895 zu verzeichnen, wogegen die Zahl der Ehrenmitglieder und Zweigvereine unverändert geblieben ist.

Folgende Mitglieder sind im Jahre 1895 gestorben:

- |   |           |
|---|-----------|
| 1. Strasburg, Steuerinspector zu Oberlahnstein, Mitgliedkarte Nr. 227,        |           |
| 2. Peltz, Kammercommissar zu Schwaan i. Meckl.                                | „ „ 284,  |
| 3. Stendel, Vermessungsinspector zu Gross-Salza,                              | „ „ 1091, |
| 4. Wenig, Kgl. Landmesser zu Eitorf,  | „ „ 1281, |
| 5. Dr. Fischer, Professor am Kgl. Preuss. geod. Institut zu Gr. Lichtenfelde, | „ „ 1632, |
| 6. Klönne, Kgl. Landmesser zu Dortmund,                                       | „ „ 2089, |
| 7. Jahn, verpfl. Geometer zu Zittau,  | „ „ 2155, |
| 8. Trede, Katastercontroleur zu Hettstedt,                                    | „ „ 2222, |
| 9. Braun, August, Gr. Geometer I. Klasse zu Worms,                            | „ „ 2503, |



10. Heineck, Heinrich, Gr. Geometer I. Klasse zu Hungen bei Giessen,	Mitgliedkarte Nr. 2617
11. Wannack, Kgl. Landmesser zu Charlottenburg,	„ „ 2655,
12. Hofmann, Stadtgeometer zu Breslau,	„ „ 2804,
13. Maier, Kgl. Katastergeometer zu München,	„ „ 2842,

Die *Einnahmen* betragen für das Jahr 1895:

I. An Mitgliedsbeiträgen:	
von 80 Mitgliedern zu 9 <i>M</i> .....	720,00 <i>M</i>
von 1184 Mitgliedern zu 6 <i>M</i> .....	7104,00 „
Nachgezahlte Beiträge pro 1894.....	24,00 „
	Summe 7848,00 <i>M</i>
II. An Zinsen.....	186,66 „
	Summe der Einnahme 8034,66 <i>M</i>
Hierzu der Kassenbestand am 1. Januar 1895.....	1141,18 „
Anleihe beim Preuss. Beamtenverein zur Deckung der lfd. Ausgaben.....	300,00 „
	Zusammen 9475,84 <i>M</i>

Die *Ausgaben* betragen:

I. Für die Zeitschrift.....	5966,25 <i>M</i>
II. Für die Hauptversammlung zu Bonn.....	1568,30 „
III. Verwaltungskosten.....	741,07 „
IV. Unterstützungen.....	130,00 „
V. Für den Ankauf von 1000 <i>M</i> 3 <sup>0</sup> / <sub>10</sub> Preuss. Consols.....	996,40 „
	Summe 9402,02 <i>M</i>
	Verglichen mit der Einnahme 9475,84 „
	Kassenbestand am 1. Januar 1896 73,82 <i>M</i>

Aus den Ueberschüssen des Jahres 1894 wurde, wie unter den Ausgaben nachgewiesen, ein Werthpapier von 1000 Mk. angekauft.

Das Vereinsvermögen besteht daher am 1. Januar 1896

- 1) aus Werthpapieren im Betrage von 4000 *M* §
- 2) aus dem Kassenbestande am  
1. Januar 1896..... 73 „ 82 „

Summe 4073 *M* 82 §

Davon geht ab die Anleihe von 300 „ — „

Verbleibt Vermögen 3773 *M* 82 §

Ausserdem sind 3 Mitglieder mit den Beiträgen im Rückstande geblieben, welche voraussichtlich im ersten Vierteljahre 1896 nachzahlen werden. Auch können die Zinsen von 2000 Mk. für einige Monate erst im nächsten Rechnungsjahre in Rechnung gestellt werden, weil die Zuschreibung derselben erst im Laufe des Monats Januar erfolgt.

Cassel, am 1. Januar 1896.

## Die Kassenverwaltung des Deutschen Geometer-Vereins.

*Hüser.*

### Entwurf zum Vereinshaushalt für 1896.

#### A. Einnahmen.

I. Mitgliederbeiträge	a. von 1230 Mitgliedern zu 6 <i>M</i> ....	7380 <i>M</i>
	b. von 70 Mitgliedern zu 9 <i>M</i> .....	630 „
		Summe I. 8010 <i>M</i>
II. An Zinsen.....		220 „
		Summe der Einnahmen 8230 <i>M</i>

## B. Ausgaben.

I. Für die Zeitschrift:	
a. für Herstellung u. Versand der Zeitschrift durch die Buchhandlung von K. Wittwer zu Stuttgart .....	3400 M
b. Honorar der Redacteurs .....	900 "
c. Honorar der Mitarbeiter .....	1050 "
d. für Abfassung des Litteraturberichtes .....	150 "
e. für Correcturlesen .....	100 "
f. für Verwaltungskosten .....	100 "
	Summe I. 5700 M
II. Für die Hauptversammlung .....	1500 "
III. Verwaltungskosten .....	750 "
IV. Unterstützungen .....	100 "
V. Rückzahlung von Darlehen .....	150 "
VI. Verschiedene Ausgaben und zur Abrundung .....	30 "
	Summe der Ausgaben 8230 M
<i>Abschluss.</i>	
	Summe der Einnahmen 8230 M
	" " Ausgaben 8230 "

### Die Kassenverwaltung des Deutschen Geometer-Vereins.

*Hüser.*

In der am 2. und 3. November v. J. abgehaltenen Generalversammlung des Baierischen Bezirks-Geometer-Vereins wurde die aus den nachstehend aufgeführten Herren bestehende Vorstandschaft gewählt:

Düll, Wilhelm, Bezirksgeometer in München, Vorsitzender,  
 Gegenfurtner, Anton, Bezirksgeometer in Freising, Ersatzmann,  
 Amann, Joseph, Bezirksgeometer in Ebersburg, Schriftführer  
 und Redacteur,  
 Strebel, Andreas, Bezirksgeometer in Regensburg, Ersatzmann,  
 Dihm, Adalbert, Obergemeter in München, Kassirer,  
 Groll, Franz, Bezirksgeometer in Landsberg, Ersatzmann.

### Personalm Nachrichten.

**Sachsen.** 1) Wiederangestellt als Vermessungsassistent Ernst Wilhelm Mosig. 2) Angestellt als Geometer Oskar Richard Liebsch und Johann Georg Bruhm. 3) Befördert: Geometer Schreiber zum Vermessungsassistent und Vermessungsassistent Krause zum Vermessungs-Ingenieur-Assistent unter gleichzeitiger Versetzung in das Domainen-Vermessungsbureau.

### Inhalt.

**Größere Mittheilungen:** Querachsige rechtwinklige sphärische Coordinaten für die Zwecke der Kleintriangulirung und Specialvermessung, von Schulze. — Querachsige Coordinaten, von Jordan. — **Vereinsangelegenheiten.** — **Personalm Nachrichten.**