

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

Dr. W. Jordan,
Professor in Hannover

und

O. Steppes,
Steuer-Rath in München.

1896.

Heft 5.

Band XXV.

—→: 1. März. ←—

Conforme Kegelprojection.

Ueber die conforme Kegelprojection und deren Anwendung auf die Mecklenburgische Triangulirung und Landesvermessung ist schon mehrfach in dieser Zeitschrift berichtet worden, insbesondere 1892, S. 563—566, und 1895 S. 421—424, und es ist in letzterer Mittheilung S. 423 die Genauigkeit der Richtungsreductionen, wie sie in dem amtlichen Mecklenburgischen Werke angewendet wurden, auf rund 0,01" nachgewiesen worden, was den dabei beabsichtigten Anwendungen und der Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen vollständig entspricht.

Wenn trotzdem hier noch eine weitergehende Entwicklung, nämlich bis zur vierten Ordnung (mit Gliedern $\frac{1}{r^4}$..) gegeben wird, so kann das zunächst den Sinn haben, dass die Zulässigkeit der früheren Näherungen noch schärfer untersucht wird, doch wären zu solcher Untersuchung nicht die Entwicklung aller Glieder $\frac{1}{r^4}$.. nöthig gewesen.

Die hier nachfolgende Gesamtentwicklung wurde zunächst aus theoretischem Interesse gemacht und wird wohl bei dem weiten Anwendungsfelde der fraglichen Projectionsart und für kartographische Zwecke bei weiter Ausdehnung nützlich sein können. Es fällt aber auch ein werthvolles geodätisches Ergebniss nebenbei damit ab; denn wenn man die Normalbreite P der Kegelprojection gleich Null setzt, so geht die Projection in die Merkatorprojection über und sphärisch betrachtet geht sie damit über in die Projection der preussischen Landesaufnahme mit cylindrischem Meridiananschluss, so dass wir in den Schlussformeln nur $\tan P = 0$ zu setzen und x und y gegenseitig zu vertauschen brauchen, um die Formeln der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme mit allen Gliedern $\frac{1}{r^4}$.. zu erhalten.

Ueber die Geschichte der conformen Kegelprojection im Allgemeinen ist zu berichten, dass der Grundgedanke zuerst ausgesprochen wurde

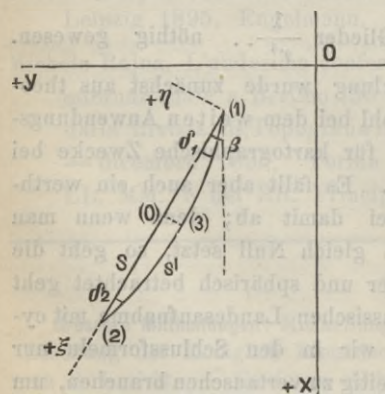
von Lambert in „Beiträge zum Gebrauch der Mathematik, III. Theil,“ Berlin 1772, S. 135 u. ff. Wittstein behandelt die Projection in Astr. Nachrichten, 71. Band, 1868, S. 369, und berichtet dabei, dass dieselbe schon von Gauss zur Papen'schen Karte von Hannover nutzbar gemacht worden sei.

Eine im engeren Sinne geodätisch zu nennende Anwendung dieser Kegelprojection haben wir von Schreiber in dem Werke „Die Königlich preussische Landstriangulation, Hauptdreiecke, III. Theil 1876“, S. 103 u. ff., doch sind die im Vorworte daselbst Seite VI angekündigten weiteren Ausführungen nicht mehr erschienen.

In Mecklenburg wurde bereits im Jahre 1853 jene Projection durch Paschen auf die Landesvermessung praktisch angewendet, jedoch erst im I. Theil des amtlichen Werkes über die Mecklenburgische Landesvermessung 1882 veröffentlicht. Die Arbeiten von Paschen, Wittstein und Schreiber weisen alle auf den Meister Gauss zurück.

Nach diesen Vorbemerkungen zu unserer eigenen Aufgabe übergehend, beschränken wir alles auf sphärische Formeln, indem beabsichtigt ist, unsere Ergebnisse vierter Ordnung den früheren sphäroidischen bis zur dritten Ordnung gehenden Entwicklungen als letzte Glieder anzuhängen, was im Sinne der Reihen-Convergenz ohne die Zusätze mit $(1 + \eta^2 \dots)$ am Platze ist.

Um Wiederholung zu vermeiden, wollen wir auch an die frühere kleinere Entwicklung von Zeitschr. 1895, Seite 421—424 geradezu anknüpfen mit den Gleichungsnummern, die dort mit (19) endigten, nun mit (20) fortfahrend. Das Mecklenburgische Werk, dessen Titel in Zeitschr. 1895, S. 288 ausführlich steht, werde kurz mit *MS* ... citirt.



In nebenstehender Figur ist das Mecklenburgische Coordinatensystem mit $+x$ nach Süden $+y$ nach Westen angenommen, ein Punkt (1) habe die ebenen Projectionscoordinaten $x_1 y_1$ und Punkt (2) habe entsprechend $x_2 y_2$.

Die flache Curve (1) (3) (2) ist das conforme Abbild eines Grosskreisbogens auf der Urbildkugel (bezw. das Abbild einer geodätischen Linie auf dem Urbild-Ellipsoid). Die Gerade (1) (2) hat in dem System xy den Richtungswinkel β und die Länge s .

Die Curve (1) (3) (2) denken wir uns dargestellt durch eine Function $\tau_1 = f(\xi)$, wobei ein zweites Coordinatensystem ξ, η angenommen ist mit (1) (2) als Achse der ξ und rechtwinklig dazu mit einer Achse der η .

Es wird sich handeln um Ermittlung der zwei kleinen Winkel δ_1 und δ_2 zwischen der Curve (1) (3) (2) und ihrer Sehne (1) (2) und um die Beziehung zwischen der Entfernung S auf der Kugel (bezw. dem Ellipsoid) und der geraden Strecke s im ebenen Abbild.

Die Normalbreite des Kegelsystems ist mit P bezeichnet und zur Abkürzung ist überall im Folgenden $\tan P = t$ geschrieben.

Das Nächste auf das wir ausgehen müssen, ist das Krümmungsdifferential der Curve (1) (3) (2) und dazu haben wir von *M S.* 22 Gleichung (6) mit Beschränkung auf sphärische Glieder:

$$\lambda = \frac{1}{\cos P} \left(\frac{y}{r} - \frac{t}{r^2} xy + \frac{t^2}{r^3} x^2 y - \frac{t^2}{3r^3} y^3 \right) \quad (20)$$

Dieses differenziert gibt:

$$d\lambda = \frac{1}{r \cos P} \left(dy - \frac{t}{r} x dy - \frac{t}{r} y dx + \frac{t^2}{r^2} x^2 dy + \frac{2t^2}{r^2} xy dx - \frac{t^2}{r^2} y^2 dy \right) \quad (21)$$

Hierzu nach *M S.* 33:

$$\delta = d\lambda (\sin P - \sin \varphi) \quad (22)$$

$$\varphi = P - p; \quad \sin \varphi = \sin P - p \cos P - \frac{p^2}{2} \sin P + \frac{p^3}{6} \cos P$$

$$\sin P - \sin \varphi = \cos P \left(p + \frac{p^2}{2} t - \frac{p^3}{6} \right)$$

Dieses in (22) eingesetzt gibt mit (21):

$$\delta = \frac{1}{r} \left(dy - \frac{t}{r} x dy - \frac{t}{r} y dx + \frac{t^2}{r^2} x^2 dy + \frac{2t^2}{r^2} xy dx - \frac{t^2}{r^2} y^2 dy \right) \left(p + \frac{p^2}{2} t - \frac{p^3}{6} \right) \quad (23)$$

Hier muss auch p in x und y ausgedrückt werden, nämlich nach *M S.* 23—24, mit Beschränkung auf die sphärischen Glieder:

$$p = \frac{x}{r} + \frac{t}{2r^2} y^2 - \frac{t^2}{2r^3} x y^2 - \frac{x^3}{6r^3}$$

$$p^2 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{t}{r^3} x y^2 + \dots \quad p^3 = \frac{x^3}{r^3}$$

Damit wird die zweite Klammer von (23):

$$p + \frac{p^2}{2} t - \frac{p^3}{6} = \frac{1}{r} \left(x + \frac{t}{2r} x^2 + \frac{t}{2r} y^2 - \frac{x^3}{3r^2} \right) \quad (24)$$

Wenn man dieses in (23) einsetzt und bis zur dritten Potenz multipliziert, so erhält man:

$$\delta = \frac{1}{r^2} \left\{ \begin{aligned} & x dy - \frac{t}{2r} x^2 dy + \frac{t}{2r} y^2 dx - \frac{t}{r} xy dx \\ & + \frac{t^2}{2r^2} x^3 dy + \frac{3}{2} \frac{t^2}{r^2} x^2 y dx - \frac{3}{2} \frac{t^2}{r^2} xy^2 dy \\ & - \frac{t^2}{2r^2} y^3 dx - \frac{x^3}{3r^2} dy \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Nun wird wieder wie in *M* S. 31 Gleichung (15) gesetzt:

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{\delta}{d\xi} \quad (26)$$

Dieses ist auch hier noch zulässig mit (25) bis x^3 und y^3 , wie sich zeigt, wenn man genauer setzt:

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{\delta}{d\sigma}, \quad d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = d\xi \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}$$

$$\text{also genauer} \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{\delta}{d\xi} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right)$$

Nach dem früheren (7) bis (8) 1895 S. 422 ist aber

$$\eta' = C_1 \xi + \frac{A \xi^2}{2} + \dots = -\delta_1 \xi + \frac{x_1}{2r^2} \xi^2 \sin \beta + \dots$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\delta_1 + x_1 \xi \dots = \frac{1}{r^2} \dots \text{ (zweite Ordnung)}$$

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 = 1 - \frac{1}{r^4} \dots$$

Dieses ist ein Factor, welcher in (26) und (25) nicht mehr in Betracht kommt; wir bilden daher aus (25) und (26):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} &= \frac{x}{r^2} \frac{dy}{d\xi} + \frac{t}{2r^3} \left(-x^2 \frac{dy}{d\xi} + y^2 \frac{dx}{d\xi} - 2xy \frac{dx}{d\xi} \right) \\ &+ \frac{t^2}{2r^4} \left(x^3 \frac{dy}{d\xi} - 3xy^2 \frac{dy}{d\xi} - y^3 \frac{dx}{d\xi} + 3x^2y \frac{dx}{d\xi} \right) \\ &\quad - \frac{x^3}{3} \frac{dy}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Das erste Glied und die Glieder mit $\frac{t}{r^3}$ hier sind dieselben wie früher in (1) 1895, S. 422 und es sind also noch 4 Glieder mit $\frac{t^2}{r^4}$ und ein Glied mit $\frac{1}{r^4}$ hinzugekommen.

Die weitere Entwicklung wird ähnlich wie früher bei (1) — (9) so zu machen sein, dass alles in der einzigen unabhängigen Veränderlichen ξ ausgedrückt wird, so dass eine Reihe nach Potenzen von ξ entsteht, ähnlich wie früher (4) aber nun bis ξ^4 fortschreitend.

Ehe wir dieses durchführen, wollen wir aber aus der Gleichung (27) eine Näherung in dem Sinne herleiten, dass ξ als verhältnissmässig klein gegen x und y betrachtet, oder die Coordinaten xy selbst erheblich grösser angenommen werden als die Dreiecksseiten. Dann kann man in den Gliedern 3 ter Ordnung in (27) die x^3 , y^3 u. s. w. als constant betrachten und dabei auch wie früher in (3), 1895 S. 422

$$\frac{dx}{d\xi} = \cos \beta = \frac{x_2 - x_1}{s} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{d\xi} = \sin \beta = \frac{y_2 - y_1}{s} \quad \text{setzen.}$$

Auf diese Weise geben die höheren Glieder von (27) lediglich einen constanten Zuschlag zu dem früheren Coefficienten A in (4) und (5) 1895, S. 422, welcher um die höheren Glieder von (27) vermehrt wird und da nach (8), $\delta_1 = \frac{As}{2} + \dots$ ist, wird δ_1 welches in dem früheren (9) — (10) enthalten war, nun so vermehrt, dass die ganze Formel für δ_1 wird:

$$\delta_1 = \frac{(2x_1 + x_2)(y_2 - y_1)}{6r^2} + \frac{t}{12r^3} \left((2y_1^2 + y_2^2)(y_2 - y_1) - (2x_1^2 + x_2^2)(y_2 - y_1) - 2(2x_1y_1 + x_2y_2)(x_2 - x_1) \right) + \frac{t}{24r^3} (y_2 - y_1) \left(-(y_2 - y_1)^2 + 3(x_2 - x_1)^2 \right) + \frac{t^2}{4r^4} \left((y_2 - y_1)(x_1^3 - 3x_1y_1^2) - (x_2 - x_1)(y_1^3 - 3x_1^2y_1) \right) - \frac{x_1^3}{6r^4} (y_2 - y_1) \quad (28)$$

Dabei sind in den Gliedern vierter Ordnung die dritten Potenzen $x_1^3, y_1^3, x_1y_1^2, x_1^2y_1$ schlechthin mit den Anfangswerthen x_1, y_1 gebildet, während vielleicht Mittelwerthe $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}$ oder dergleichen mehr am Platze wären, weil diese x und y über die ganze Ausdehnung von x_1 bis x_2 und von y_1 bis y_2 gelten sollen, indessen der angenommenen Näherung, dass die x und y erheblich grösser als die Dreiecksseiten seien, wird es auch so genügen.

Nun wollen wir aber zu der wirklichen Ausführung von (27) mit allen Gliedern übergehen und müssen dazu alles in der einen Veränderlichen ξ ausdrücken, welche nach der Figur S. 130 den geradlinigen Abstand eines Punktes von x_1, y_1 gegen x_2, y_2 bedeutet. Zu diesem ξ als Abscisse von x_1, y_1 gegen x_2, y_2 hin gezählt, gehört die Ordinate η für die flache Curve, welche als Abbild der geodätischen Linie die Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 verbindet, wobei irgend ein Punkt dieser Curve die Coordinaten x, y in dem allgemeinen System hat. Indem wir den Richtungswinkel der Geraden von x_1, y_1 nach x_2, y_2 mit β bezeichnen und die geradlinige Entfernung mit s , werden wir haben:

$$y_2 - y_1 = s \sin \beta \quad \text{und} \quad x_2 - x_1 = s \cos \beta \quad (29)$$

und die Beziehungen zwischen x, y und ξ, η sind:

$$x = x_1 + \xi \cos \beta - \eta \sin \beta \quad (30)$$

$$y = y_1 + \xi \sin \beta + \eta \cos \beta \quad (31)$$

Hier sind aber die η selbst wieder Functionen von ξ , nämlich nach (4) — (8) 1895, S. 422:

$$\eta = C_1 \xi + \frac{A \xi^2}{2} + \frac{B \xi^3}{6} + \frac{C \xi^5}{12}, \quad C_1 = -\delta_1$$

$$-C_1 = \delta_1 = \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{6} + \frac{Cs^3}{12}$$

$$A = \frac{x_1}{r^2} \sin \beta + x^2 \dots \quad B = \frac{\sin \beta \cos \beta}{r^2} + \dots$$

$$\eta = \frac{A\xi}{2} (\xi - s) + \frac{B\xi}{6} (\xi^2 - s^2) + \frac{C\xi}{12} (\xi^3 - s^3) + \dots$$

Mit $\xi = 0$ und mit $\xi = s$ wird $\eta = 0$, wie es sein muss. Setzt man die Bedeutungen von A und B ein, so hat man:

$$\eta = \frac{x_1 \xi}{2 r^2} \sin \beta (\xi - s) + \frac{\sin \beta \cos \beta}{6 r^2} \xi (\xi^2 - s^2) + \dots \quad (32)$$

$$\text{oder } \eta = -\frac{\xi s \sin \beta}{6 r^2} (3x_1 + s \cos \beta) + \xi^2 \frac{x_1}{2 r^2} \sin \beta + \xi^3 \frac{\sin \beta \cos \beta}{6 r^2} \quad (33)$$

Mit diesem (33) nebst (29) gehen die (30) und (31) über in:

$$x = \left. \begin{aligned} x_1 + \xi \cos \beta + \xi \frac{s \sin^2 \beta}{6 r^2} (2x_1 + x_2) - \frac{x_1}{2 r^2} \xi^2 \sin^2 \beta \\ - \xi^3 \frac{\sin^2 \beta \cos \beta}{6 r^2} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$y = \left. \begin{aligned} y_1 + \xi \sin \beta - \xi \frac{s \sin \beta \cos \beta}{6 r^2} (2x_1 + x_2) + \frac{x_1}{2 r^2} \xi^2 \sin \beta \cos \beta \\ + \xi^3 \frac{\sin \beta \cos^2 \beta}{6 r^2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

und dazu die Differentialquotienten:

$$\frac{dx}{d\xi} = \cos \beta + \frac{s \sin^2 \beta}{6 r^2} (2x_1 + x_2) - \xi \frac{x_1}{r^2} \sin^2 \beta - \xi^2 \frac{\sin^2 \beta \cos \beta}{2 r^2} \quad (36)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \sin \beta - \frac{s \sin \beta \cos \beta}{6 r^2} (2x_1 + x_2) + \xi \frac{x_1}{r^2} \sin \beta \cos \beta + \xi^2 \frac{\sin \beta \cos^2 \beta}{2 r^2} \quad (37)$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es möglich, die Gleichung (27) so auszuführen, dass sie auf die Form gebracht wird:

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 \quad (38)$$

und zwar wird man nach den etwas umständlichen Multiplicirungen bis zur dritten Ordnung folgende Bedeutungen der A, B, C, D erhalten:

$$A = \left. \begin{aligned} \frac{1}{r^2} x_1 \sin \beta - \frac{2x_1 + x_2}{6 r^4} x_1 s \sin \beta \cos \beta - \frac{x_1^2}{3 r^4} \sin \beta \\ + \frac{t}{2 r^3} (-x_1^2 \sin \beta + y_1^2 \sin \beta - 2x_1 y_1 \cos \beta) \\ + \frac{t}{2 r^4} (x_1^3 \sin \beta + 3x_1^2 y_1 \cos \beta - 3x_1 y_1^2 \sin \beta - y_1^3 \cos \beta) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$B = \left. \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \sin \beta \cos \beta + \frac{1}{6 r^4} (2x_1 + x_2) s \sin \beta (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) \\ - \frac{2x_1^2}{r^4} \sin \beta \cos \beta \\ + \frac{t}{r^3} (-2x_1 \sin \beta \cos \beta + y_1 \sin^2 \beta - y_1 \cos^2 \beta) \\ + \frac{t^2}{2 r^4} (6x_1^2 \sin \beta \cos \beta - 6y_1^2 \sin \beta \cos \beta - 6x_1 y_1 \sin^2 \beta \\ + 6x_1 y_1 \cos^2 \beta) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$C = \left. \begin{aligned} & \frac{x_1}{2r^4} (-\sin^3 \beta + 3 \sin \beta \cos^2 \beta) \\ & + \frac{t}{2r^3} (\sin^3 \beta - 4 \sin \beta \cos^2 \beta) \\ & + \frac{t^2}{2r_1} (-3x_1 \sin^3 \beta + 9x_1 \sin \beta \cos^2 \beta + 3y_1 \cos^3 \beta \\ & \qquad \qquad \qquad - 9y_1 \sin^2 \beta \cos \beta) \end{aligned} \right\} (41)$$

$$D = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{6r^4} (-\sin^3 \beta \cos \beta + 3 \sin \beta \cos^3 \beta) \\ & + \frac{t^2}{2r^4} (4 \sin \beta \cos^3 \beta - 4 \sin^3 \beta \cos \beta) \end{aligned} \right\} (42)$$

Nachdem so die Coefficienten von (38) ausgerechnet sind, ist die weitere Ausführung leicht, man wird nämlich die Gleichung (38) zweimal integrieren:

$$\frac{d\tau_1}{d\xi} = C_1 + A\xi + \frac{B\xi^2}{2} + \frac{C\xi^3}{3} + \frac{D\xi^4}{4} \quad (43)$$

$$\tau_1 = C_2 + C_1\xi + \frac{A\xi^2}{2} + \frac{B\xi^3}{6} + \frac{C\xi^4}{12} + \frac{D\xi^5}{20} \quad (44)$$

Die Integrationsconstanten C_1 und C_2 bestimmen sich dadurch, dass $\xi = 0$ geben muss $\tau_1 = 0$ und $\frac{d\tau_1}{d\xi} = -\delta_1$; und $\xi = s$ muss geben $\xi = 0$ und $\frac{d\tau_1}{d\xi} = +\delta_2$. Daraus folgt sofort $C_2 = 0$ und $C_1 = -\delta_1$, also auch:

$$\delta_2 = -\delta_1 + As + \frac{Bs^2}{2} + \frac{Cs^3}{3} + \frac{Ds^4}{4}$$

$$0 = -\delta_1 s + \frac{As^2}{2} + \frac{Bs^3}{6} + \frac{Cs^4}{12} + \frac{Ds^5}{20}$$

Hieraus δ_1 und δ_2 selbst:

$$\delta_1 = \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{6} + \frac{Cs^3}{12} + \frac{Ds^4}{20} \quad (45)$$

$$\delta_2 = \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{3} + \frac{Cs^3}{4} + \frac{Ds^4}{5} \quad (46)$$

Nun braucht man nur noch die Bedeutungen von A, B, C, D aus (39) — (42) in (45) und (46) einzusetzen, um δ_1 und δ_2 zu erhalten, und indem wir dabei auch wieder $s \sin \beta = y_2 - y_1$ und $s \cos \beta = x_2 - x_1$ schreiben, erhalten wir auf diesem Wege:

$$\delta_1 = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{6r^2} (2x_1 + x_2)(y_2 - y_1) \\ & + \frac{t}{12r^3} \left((2y_1^2 + y_2^2)(y_2 - y_1) - (2x_1^2 + x_2^2)(y_2 - y_1) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - 2(2x_1y_1 + x_2y_2)(x_2 - x_1) \right) \\ & + \frac{t}{24r^3} (y_2 - y_1) \left(-(y_2 - y_1)^2 + 3(x_2 - x_1)^2 \right) \end{aligned} \right\}$$

mit Fortsetzung 4. Ordnung auf folgender Seite.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{t}{40 r^4} (y_2 - y_1) \left\{ \begin{aligned} & + 10 x_1^3 - 30 x_1 y_1^2 \\ & + 20 x_1^2 (x_2 - x_1) - 20 x_1 y_1 (y_2 - y_1) \\ & \quad - 20 y_1^2 (x_2 - x_1) + 15 x_1 (x_2 - x_1)^2 \\ & - 5 x_1 (y_2 - y_1)^2 - 15 y_1 (y_2 - y_1) (x_2 - x_1) \\ & \quad + 4 (x_2 - x_1)^3 - 4 (y_2 - y_1)^2 (x_2 - x_1) \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{t^2}{8 r^4} (x_2 - x_1) y_1 \left(6 x_1^2 - 2 y_1^2 + 4 x_1 (x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)^2 \right) \\
 & + \frac{(y_2 - y_1)^3}{360 r^4} (8 x_1 + 7 x_2) - \frac{y_2 - y_1}{360 r^4} (8 x_1^3 + 21 x_1^2 x_2 \\
 & \quad + 24 x_1 x_2^2 + 7 x_2^3)
 \end{aligned} \quad (47)$$

Wenn man in den Gliedern vierter Ordnung alles weglässt, was mehr als einen Factor $(y_2 - y_1)$ oder $(x_2 - x_1)$ enthält, d. h. wenn man hier die Differenzen der Coordinaten als verhältnissmässig klein gegen die Coordinaten selbst behandelt, so bleibt nur:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{t^2}{40 r^4} (y_2 - y_1) (10 x_1^3 - 30 x_1 y_1^2) + \frac{t^2}{8 r^4} (x_2 - x_1) (6 x_1^2 y_1 - 2 y_1^3) \\
 & \quad - \frac{y_2 - y_1}{360 r^4} (60 x_1^3)
 \end{aligned}$$

Dieses stimmt mit den entsprechenden Gliedern des Früheren (28), wie es sein muss.

Man kann die Formel (47) verschiedenartig umformen, z. B. alle Producte auflösen, wodurch die Glieder mit t^2 folgende Form annehmen:

$$\delta_1 = \dots + \frac{t^2}{40 r^4} \left\{ \begin{aligned} & - 16 x_1^3 y_1 + x_1^3 y_2 + 3 x_1^2 x_2 y_1 \\ & \quad + 2 x_1^2 x_2 y_2 + 2 x_1 x_2^2 y_1 \\ & + 3 x_1 x_2^2 y_2 + x_2^3 y_1 + 4 x_2^3 y_2 \\ & \quad - 3 x_1 y_1^2 y_2 - 2 x_1 y_1 y_2^2 \\ & - 2 x_2 y_1^2 y_2 - 3 x_2 y_1 y_2^2 - x_2 y_1^3 \\ & \quad - 4 x_2 y_2^3 - x_1 y_2^3 + 16 x_1 y_1^3 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Was die Formel für δ_2 betrifft, so bekommt man dieselbe ohne neue Rechnung aus δ_1 dadurch, dass überall x_1 mit x_2 und y_1 mit y_2 vertauscht wird. Es ist aber eine gute Probe, die Formel für δ_2 auch unmittelbar aus (46) abzuleiten, was wir vollständig durchgeführt haben und es sind dabei die aufgelösten Glieder mit t^2 so erhalten worden:

$$\delta_2 = \dots - \frac{t^2}{40 r^4} \left\{ \begin{aligned} & + 16 x_2^3 y_2 - x_1^3 y_1 - 3 x_2^2 x_1 y_2 - 2 x_2^2 x_1 y_1 \\ & \quad - 2 x_2 x_1^2 y_2 \\ & - 3 x_2 x_1^2 y_1 - x_1^3 y_2 - 4 x_1^3 y_1 + 3 x_2 y_2^2 y_1 \\ & \quad + 2 x_2 y_2 y_1^2 \\ & + 3 x_1 y_2^2 y_1 + 3 x_1 y_2 y_1^2 + x_1 y_2^3 + 4 x_1 y_1^3 \\ & \quad + x_2 y_1^3 - 16 x_2 y_2^3 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Dieses geht durch die angegebene Vertauschung wieder in (48) zurück und da wir (48) und (49) unabhängig beide entwickelt haben, ist darin eine Probe der Entwicklung enthalten, welche wir auch auf die übrigen Glieder von (47) ausgedehnt haben, ohne sie hier herzusetzen. —

Eine Probe für die Formel (47) bekommt man durch Betrachtung des besonderen Falles, dass die betrachtete Linie im Meridian liegt, denn es muss dann werden:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{arc tang} (\lambda \sin P)$$

und nach *M*, S. 22, Gleichung (6) ist sphärisch abgekürzt:

$$\lambda \sin P = \frac{y}{r} t - \frac{y x}{r^2} t^2$$

Andererseits ist $\text{arc tang} (\lambda \sin P) = \lambda \sin P - \frac{1}{3} (\lambda \sin P)^3$, also hinreichend:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{t}{r} y - \frac{t^2}{r^2} y x + \frac{1}{r^2} \dots$$

Für *y* und *x* kann man *y*₁ und *x*₁ setzen, also:

$$y_2 - y_1 = \frac{t}{r} y_1 (x_2 - x_1) - \frac{t^2}{r^2} y_1 x_1 (x_2 - x_1) \quad (50)$$

Wenn man dieses in (47) einsetzt, so gehen alle Glieder, welche *y*₂ - *y*₁) enthalten, um eine Ordnung von *r* höher, und da die Glieder mit *r*⁵ überhaupt vernachlässigt sind, hat man:

$$\begin{aligned} \delta_1^0 &= \frac{t}{6 r^3} (2 x_1 + x_2) y_1 (x_2 - x_1) - \frac{t^2}{6 r^4} (2 x_1 + x_2) (x_2 - x_1) y_1 x_1 \\ &+ \frac{t^2}{12 r^4} (2 y_1^2 + y_2^2) y_1 (x_2 - x_1) - \frac{t^2}{12 r^4} (2 x_1^2 + x_2^2) y_1 (x_2 - x_1) \\ &- \frac{t}{6 r^3} \left(2 x_1 y_1 + x_2 (y_1 + \frac{t}{r} y_1 (x_2 - x_1)) \right) (x_2 - x_1) \\ &+ \frac{t^2}{8 r^4} y_1 (x_2 - x_1)^3 \\ &+ \frac{t^2}{8 r^4} (x_2 - x_1) y_1 (3 x_1^2 - 2 y_1^2 + 2 x_1 x_2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Wenn man hier noch $2 y_1^2 + y_2^2 = 3 y_1^2$ setzt, was man wegen (50) mit dem Nenner *r*⁴ thun darf, und wenn man alle Glieder ausführt und ordnet, so geht das Ganze δ_1^0 auf Null zusammen, womit die erwähnte Probe erfüllt ist.

Integration für die Länge *S* der geodätischen Linie.

In differentialem Sinne gilt die Gleichung:

$$m = \frac{d s'}{d S} \text{ oder } d S = \frac{1}{m} d s'$$

also auch
$$S = \int \frac{1}{m} d s' \quad (51)$$

wobei *s'* die krumme Linie ist, in welcher sich die geodätische Linie *S* des Ellipsoids in der ebenen Projection abbildet. Dabei ist zunächst *m* als Function von *p* nach *M*, S. 16, Gleichung (8) mit Beschränkung auf sphärische Glieder:

$$m = 1 + \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{6} t + \frac{p^4}{24} (5 + 3 t^2)$$

Zur Umwandlung in x und y hat man noch M S. 23:

$$p = \frac{x}{r} + \frac{y^2}{2r^2}t - \frac{xy^2}{2r^3}t^2 - \frac{x^3}{6r^3}$$

und damit wird:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2r^2} + \frac{xy^2t}{2r^3} - \frac{x^3}{6r^3}t - \frac{3}{4} \frac{x^2y^2t^2}{r^4} + \frac{x^4}{24r^4}(1+3t^2) + \frac{y^4t^2}{8r^4} \quad (52)$$

Dieses ist um einen Grad höher als das frühere (4) von M S. 26 Die Umkehrung davon giebt:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2t}{2r^3} + \frac{x^3}{6r^3}t + \frac{3}{4} \frac{x^2y^2t^2}{r^4} + \frac{x^4}{24r^4}(5-3t^2) - \frac{y^4t^2}{8r^4} \quad (52a)$$

Für das praktische Rechnen wird man auch $\log m$ nehmen:

$$\begin{aligned} \log m &= \frac{\mu}{2r^2}x^2 + \frac{\mu t}{2r^3}xy^2 - \frac{\mu t}{6r^3}x^3 - \frac{3}{4} \frac{\mu t^2}{r^4}x^2y^2 \\ &\quad + \frac{\mu}{24r^4}(-2+3t^2) + \frac{\mu t^2}{8r^4}y^4 \\ \text{oder } \log \frac{1}{m} &= -\frac{\mu}{2r^2}x^2 - \frac{\mu t}{2r^3}xy^2 + \frac{\mu t}{6r^3}x^3 + \frac{3}{4} \frac{\mu t^2}{r^4}x^2y^2 \\ &\quad + \frac{\mu}{24r^4}(+2-3t^2) + \frac{\mu t^2}{8r^4}y^4 \end{aligned}$$

Für die weitere Behandlung müssen wir unterscheiden zwischen ds' in (51), welches sich auf die krumme Linie bezieht, deren Gleichung zwischen η und ξ in (33) enthalten ist, und andererseits $d\xi$, welches auf der Geraden zwischen den Punkten x_1y_1 und x_2y_2 liegt. Dabei ist:

$$ds' = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = d\xi \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} = d\xi \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right) \quad (53)$$

Es ist also nun nach (51) und (53):

$$S = \int_0^s \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right) d\xi \quad (54)$$

Ueber $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2$ wissen wir von (33), dass dieses von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ wird, und da auch (52) schon mit $\frac{1}{r^2}$ beginnt, so sieht man sofort ein, dass bei der Beschränkung auf $\frac{1}{r^4}$ das Integral (54) in zwei Theile zerfällt, nämlich:

$$S = \int_0^s \frac{1}{m} d\xi + \int_0^s \frac{1}{2m} \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 d\xi = I + II \quad (55)$$

Blieben wir zuerst bei dem ersten Integral stehen, so müssen wir die Reihe (52) nun in eine Reihe nach Potenzen von ξ umformen, etwa so:

$$\frac{1}{m} = 1 + A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + E\xi^4 \quad (56)$$

Hierzu haben wir schon bei (34) und (35) die x und y als Function von ξ ausgedrückt, und man kann daraus, ohne alle Glieder von (52) auszurechnen, leicht überblicken, dass folgende Glieder mit ξ^4 entstehen werden:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{2r^2} &= 1 - \dots + \frac{\xi^4}{6r^4} \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\ \frac{3}{4} \frac{x^2 y^2 t^2}{r^4} &= \dots + \frac{3}{4} \frac{\beta^4}{r^4} t^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\ \frac{x^4 (5 - 3t^2)}{24r^4} &= \dots + \frac{5 - 3t^2}{24r^4} \xi^4 \cos^4 \beta \\ - \frac{y^4 t^2}{8r^4} &= \dots - \frac{t^2}{8r^4} \xi^4 \sin^4 \beta \end{aligned}$$

Es ist also der Coefficient E in (56):

$$E = \frac{1}{24r^4} \left\{ (4 + 18t^2) \sin^2 \beta \cos^2 \beta + (5 - 3t^2) \cos^4 \beta - 3t^2 \sin^4 \beta \right\} \quad (57)$$

Die übrigen Coefficienten von (56) brauchen wir nicht zu kennen, denn das Integral von (56) ist:

$$I = \int_0^s \frac{1}{m} d\xi = (1 + A)s + \frac{Bs^2}{2} + \frac{Cs^3}{3} + \frac{Ds^4}{4} + \frac{Es^5}{5} \quad (58)$$

und wenn man für den Anfang, die Mitte und das Ende der krummen Linie s' drei Werthe von (56) ausrechnet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1} &= 1 + A \\ \frac{1}{m_3} &= (1 + A) + \frac{Bs}{2} + \frac{Cs^2}{4} + \frac{Ds^3}{8} + \frac{Es^4}{16} \\ \frac{1}{m_2} &= (1 + A) + Bs + Cs^2 + Ds^3 + Es^4 \end{aligned}$$

so findet man den Mittelwerth:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{6} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_3} + \frac{1}{m_2} \right) &= \frac{1}{m''} = (1 + A) + \frac{Bs}{2} + \frac{Cs^2}{3} \\ &+ \frac{Ds^3}{4} + \frac{5}{24} Es^4 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Dieses mit (58) verglichen giebt:

$$I = \frac{s}{m''} - \frac{Es^5}{120}$$

und wegen (57):

$$I = \frac{s}{m''} - \frac{s^5}{2880r^4} \left\{ (4 + 18t^2) \sin^2 \beta \cos^2 \beta + (5 - 3t^2) \cos^4 \beta - 3t^2 \sin^4 \beta \right\} \quad (60)$$

Hier ist aber ein Mittelwerth m'' benutzt, welcher einen Werth m_3 für die Mitte (3) vergl. die Figur S. 130 der krummen Linie s' enthält, und da man diesen Werth m_3 ohne besondere Hülfe nicht ausrechnen kann, wollen wir ihn auf m_0 für die Mitte der geraden Linie s reduciren. Dazu

brauchen wir die Curvenordinaten η , deren Gleichung allgemein nach (33) ist:

$$\eta = -\frac{x_1 \xi}{2 r^2} \sin \beta (s - \xi) - \frac{\sin \beta \cos \beta}{6 r^2} \xi (s^2 - \xi^2)$$

Setzt man hier $\xi = \frac{s}{2}$ und $s \cos \beta = x_2 - x_1$ so wird

$$\eta_0 = -\frac{s^2}{16 r^2} \sin \beta (x_1 + x_2)$$

Dabei ist

$$x_3 = x_0 - \eta \sin \beta = x_0 + \frac{s^2}{16 r^2} \sin \beta (x_1 + x_2)$$

$$x_3^2 = x_0^2 + \frac{s^2 x_0}{8 r^2} \sin \beta (x_1 + x_2) + \frac{s^2 \sin \beta (x_1 + x_2)^2}{16 r^2}$$

Weiter ist:

$$\frac{1}{m_0} = 1 - \frac{x_0^2}{2 r^2} + \dots \quad \frac{1}{m_3} = 1 - \frac{x_3^2}{2 r^2} + \dots$$

$$\frac{1}{m_3} = \frac{1}{m_0} - \frac{s^2 \sin \beta (x_1 + x_2)^2}{32 r^2}$$

Wenn man daher nun statt m'' in (59) einen neuen Werth rechnet:

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{m'} \quad \left. \right\} (61)$$

so kommen von der vorhergehenden Differenz $\frac{4}{6}$ oder $\frac{2}{3}$ in Abzug, und man wird haben:

$$\frac{1}{m''} = \frac{1}{m'} - \frac{s^2 \sin^2 \beta (x_1 + x_2)^2}{48 r^4}$$

Wenn man dieses zu (60) nimmt, so wird:

$$I = \frac{s}{m'} - \frac{s^5}{2880 r^4} \left((4 + 18 t^2) \sin^2 \beta \cos^2 \beta + (5 - 3 t^2) \cos^4 \beta - 3 t^2 \sin^4 \beta \right) - \frac{s^2 \sin^2 \beta (x_1 + x_2)^2}{48 r^4} \quad \left. \right\} (62)$$

Dieses ist der erste Theil von (55), und um auch den zweiten Theil zu erlangen, brauchen wir von (33):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d \eta}{d \xi} \right)^2 = \frac{\sin^2 \beta}{72 r^4} \left\{ s^2 (2 x_1 + x_2)^2 - 12 s x_1 (2 x_1 + x_2) \xi - 6 s (2 x_1 + x_2) \cos \beta \xi^2 + 36 x_1^2 \xi^2 + 36 x_1 \cos \beta \xi^3 + 9 \cos^2 \beta \xi^4 \right\}$$

Dieses integirt, nach (55), giebt:

$$II = + \frac{s^3 \sin^2 \beta}{72 r^4} \left\{ (2 x_1 + x_2)^2 - 6 x_1 (2 x_1 + x_2) - 2 (2 x_1 + x_2) s \cos \beta \right\} + 12 x_1^2 + 9 x_1 s \cos \beta + \frac{9}{5} s^2 \cos^2 \beta \quad \left. \right\}$$

Wenn man hier $s \sin \beta = y_2 - y_1$ und $s \cos \beta = x_2 - x_1$ setzt und alles ausführt und ordnet, so bekommt man:

$$II = + \frac{s (y_2 - y_1)^2}{360 r^4} \left\{ + 4 x_1^2 + 7 x_1 x_2 + 4 x_2^2 \right\} \quad (63)$$

Wenn man endlich (62) und (63) zusammennimmt und überall $s \sin \beta = y_2 - y_1$ und $x_2 - x_1 = s \cos \beta$ setzt, so wird:

$$I + II = \frac{S}{s} = \frac{1}{m'} - \frac{4x_1^2 + 7x_1x_2 + 4x_2^2}{360r^4} (y_2 - y_1)^2 - \frac{t^2}{160r^4} (y_2 - y_1)^2 (x_2 - x_1)^2 - \frac{5 - 3t^2}{2880r^4} (x_2 - x_1)^4 + \frac{t^2}{960r^4} (y_2 - y_1)^4 \quad (64)$$

dabei ist m' der nach (61) zu bildende Mittelwerth der m , welche selbst entweder nach (52) oder (52 a) oder nach (52 b) auszurechnen sind für den Anfang, die Mitte und das Ende der geraden Linie s d. h.

für x_1, y_1 dann $\frac{x_1 + y_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$ und x_2, y_2 .

Für dasjenige Glied im (64), welches $(y_2 - y_1)$ nicht enthält, kann man noch eine Probeentwicklung machen, setzt man nämlich $(y_2 - y_1) = 0$, d. h. legt man die Linie nahezu in den Meridian, so wird (64):

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{m'} + \frac{(x_2 - x_1)^4}{2880r^4} (-5 + 3t^2)$$

Dieses kann man durch unmittelbare Entwicklung controliren, denn es ist in aller Strenge, sphärisch:

$$S = (p_1 - p_2)r \quad (65)$$

und dabei ist der Breitenunterschied p zwischen einem Punkte mit der Abscisse x und der Normalbreite P , nach *M. S.* 23:

$$p = \frac{x}{r} - \frac{x^3}{6r^3} + \frac{x^4}{24r^4}t + \frac{x^5}{120r^5}(5 - 3t^2) \quad (66)$$

Andererseits ist für die Abscisse x , mit $y = 0$, nach (52a)

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{x^2}{2r^2} + \frac{x^3}{6r^3}t + \frac{x^4}{24r^4}(5 - 3t^2)$$

Wenn man dazu m_1, m_0, m_2 und m' bildet, ebenso wie bei (60) und wenn man auch die Ausrechnung nach (65) und (66) vornimmt, so

wird man finden, dass $\frac{S}{x_1 - x_2}$ oder $\frac{S}{s}$ sich von $\frac{1}{m'}$ nur um Glieder vierter Ordnung unterscheidet, deren Differenz alsbald auf (64) führt, womit also das Glied mit $(x_2 - x_1)^4$ in (63) controlirt ist.

Die Gleichung (64) ist nur eine von den verschiedenen Formen, in welche die Entfernungsreduction $S:s$ gebracht werden kann, für die meisten Rechenzwecke will man auch nicht $S:s$ selbst, sondern $\log S - \log s$ haben. Auch wäre nun die schon im Eingang bemerkte Specialisirung der Formen für $t = 0$ durchzuführen, womit man unter Anderem auch Formeln findet, entsprechend denjenigen, welche Herr Oberstlieutenant v. Schmidt, Chef der Trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahmen in *Zeitschr.* 1894 S. 399—400 gegeben hat, doch möge alles dieses, auch die Ausrechnung eines grossen Zahlenbeispiels

aus der Mecklenburgischen Triangulirung bis auf Weiteres zurückgestellt werden (zum Theil an anderem Orte zu behandeln).

Dagegen haben wir hier noch die Pflicht, der mancherlei Mittheilungen zu gedenken, welche wir Herrn Professor Schols an der polytechnischen Schule in Delft verdanken. Die werthvollen Schriften über Theorie der Kartenprojection von Schols haben wir bereits in Zeitschr. 1895 S. 551 namhaft gemacht und es ist noch zuzufügen, dass die „Annales de l'école polytechnique de Delft“ sich in der Bibliothek des Deutschen Geometervereins befinden.

Auch die geometrische Herleitung eines allgemeinen Satzes über das Krümmungsdifferential haben wir in dieser Zeitschr. S. 102 von Schols berichtet und ein hierzu gehöriges Citat sei ebenfalls mitgetheilt: Journal de mathématiques pures et appliquées, par Liouville, tome 17, 1852, Seite 301—340, sur la théorie mathématique des cartes géographiques par Ossian Bonnet, insbesondere Seite 314, wo das Krümmungsdifferential für irgend welche conform abgebildete Curve angegeben ist, dessen besonderer Fall für die geodätische Linie in dem Satze von Schols enthalten ist.

Die frühere kleine Entwicklung in Zeitschr. 1895, S. 421—424 ist insofern auf Veranlassung von Herrn Schols entstanden, als die dort von uns nachgetragenen Glieder dritter Ordnung, welche nur Factoren $(x_2 - x_1)$ und $(y_2 - y_1)$, also nicht y^2 , x^2 oder xy selbst enthalten, von demselben in dem Mecklenburgischen Werke V. Band vermisst worden waren, obgleich dieselben den dort S. 38 und S. 43 ausgesprochenen Genauigkeitsgrad von $0,01''$ bis $0,02''$ nicht mehr beeinflussen.

Dabei sei aber berichtet, dass auf 1895 S. 423—424 das Verhältniss $S:s$ zwar richtig entwickelt, aber am Schluss S. 424 falsch geschrieben ist. Es kann dies zwar an sich sofort eingesehen und berichtigt werden, aber es sei hier unter Verweisung auf die richtige Form (59) im Vorstehenden S. 139 mitgetheilt.

Zu unseren neuen Entwicklungen bis $\frac{1}{r^4} \dots$ sind manche briefliche dankenswerthe Zwischenbemerkungen von Schols gegeben und auch am Schlusse die Mittheilung gemacht worden, dass auf anderem Wege (s. unten) Herr Schols dieselben Formeln innerhalb dieser Grössenordnung gefunden hat.

Alle unsere vorstehenden Entwicklungen S. 131 bis 141 sind lediglich eine Weiterentwicklung des elementaren Weges, der in § 9 und § 10 des Mecklenburgischen Werkes mit geometrischer Betrachtung des Krümmungsdifferentials betreten war, und dieser Weg hat auch bis zu den Gliedern $\frac{1}{r^4} \dots$ zum Ziele geführt, und wird für diesen Zweck kaum durch einen wesentlich kürzeren Weg ersetzt werden können, indem

das Hauptgeschäft die rein algebraische Zusammenordnung der auftretenden Elemente nicht erspart werden kann.

Dagegen müssen wir hier berichten, dass Herr Schols, der auf diesem Gebiete der geodätischen Projectionslehre erste Autorität ist (wenigstens in Deutschland sind ähnliche feine Untersuchungen von Niemand bekannt), durch feinere mathematische Hülfsmittel, durch hyperbolische trigonometrische Functionen, Bernouilli'sche Zahlen usw. Reihen aufgestellt hat, welche für die Merkatorprojection die Richtungs- und Entfernungsreductionen nicht bloss bis zur vierten, sondern bis zur fünften und sechsten Ordnung zu finden ermöglichen.

Der Mathematiker und der genügend mathematisch geschulte Geodät werden jene Schols'schen Untersuchungen, denen auch in Deutschland weitere Verbreitung zu wünschen ist,*) mit grossem Interesse folgen, sie enthalten in mancher Hinsicht Weiterführung dessen, was in dem Gauss-Wittstein-Schreiber'schen Werke über die „Theorie der Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung“ Hannover 1866 als mathematisch geodätisches Kleinod niedergelegt wurde — das allerdings in Deutschland selbst von den Praktikern nicht genügend gewürdigt worden ist. —

Bei alledem möge dem Schreiber dieses, der in erster Linie die praktisch geodätischen Anwendungen solcher Theorien im Auge hat, gestattet sein, die Wichtigkeit anschaulicher geometrischer Entwicklungen in solchen Fällen zu betonen, nach dem Satze *Geometrica geometricè* und noch mehr *Geodaetica geometricè!*

Es ist wohl möglich, dass die Ignorirung jener klassischen Gauss-Wittstein-Schreiber'schen Theorie von Seiten der deutschen Kataster-Vermessungs-Praktiker mit darin ihren Grund hat, dass die abstracten Theorien mit unbestimmten Functionen p und q , namentlich aber die aller Anschaulichkeit entbehrende Einführung des Krümmungsdifferentials auf dem Wege der Variationsrechnung, den Praktikern nicht genügend verständlich war, weshalb eine mehr geometrisch anschauliche Interpretation jener abstracten Theorien (welche wir für anderen Ort gemacht haben) ein Bedürfniss zu sein scheint und in diesem Sinne glauben wir uns mit Herrn Schols in dem Satze in *Zeitschr.* S. 101—102 zusammenzufinden. J.

*) Möchte vielleicht Herr Schols sich entschliessen, eine zusammenfassende deutsche Bearbeitung und Neuherausgabe der in den zerstreuten Abhandlungen (*Zeitschr.* 1895 S. 551) enthaltenen Theorien zu veranstalten?

Der Sanguet'sche Tachymeter.

Der französische Ingenieur Sanguet hat einen Tachymetertheodolit nach dem Princip des Gordian'schen Gefällmessers construiert, der seiner Handlichkeit wegen Beachtung verdient. Fig. 1 giebt eine perspectivische Ansicht davon, während Fig. 2 nur die wesentlichen Theile schematisch darstellt. Er besteht, wie die erste Figur zeigt, aus einem mittels in einer Dreifussbüchse drehbaren Zapfens um die verticale Achse

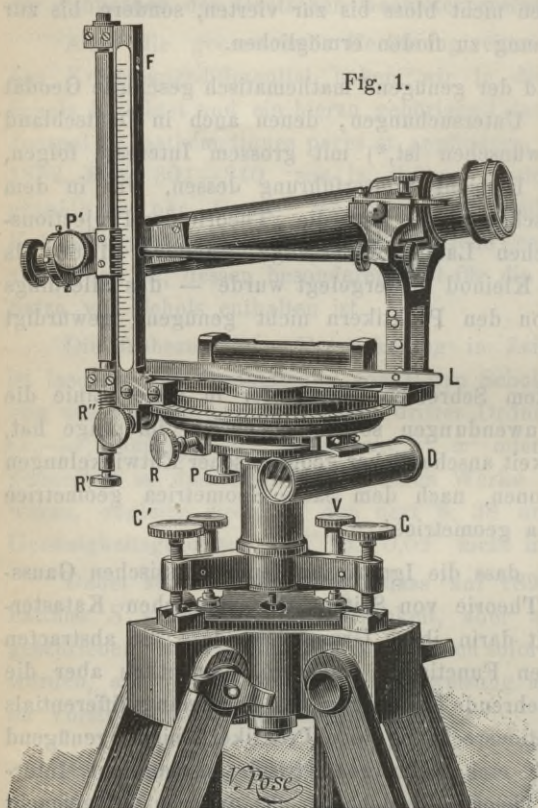


Fig. 1.

beweglichen Horizontalkreis, der mit der Schraube *P* geklemmt und mit der Schraube *R* fein eingestellt werden kann. In dem hohlen Verticalzapfen sitzt, wie bei einem Repetitionstheodolit, die die Alhidade aufnehmende Achse. Zur Feststellung der mit zwei Nonien versehenen Alhidade dient eine in der Zeichnung nicht sichtbare Klemmschraube, während die Feineinstellung durch die Mikrometerschraube *R''* bewirkt wird. Unter dem Horizontalkreise ist zur Orientirung ein Röhrencompass *D* angebracht. Mit der Alhidade ist eine horizontale Platte fest verbunden, die, in der Zeichnung rechts, eine Gabel mit den Lagern

für die horizontale, nahe dem Objectiv liegende Fernrohrdrehachse trägt. Das linke Ende der Platte nimmt einen verticalen Maassstab *F* auf, und in ihrer Mitte sitzt die zur Horizontalstellung nöthige Libelle. Die Enden des Maassstabes *F* haben horizontale, mit Oeffnungen versehene Ansätze. In diesen Oeffnungen kann ein Führungsstab, der unten auf der Spitze einer Mikrometerschraube *R'* ruht, auf- und abbewegt werden. Den Führungsstab umfasst eine längs desselben bewegliche und mit der Schraube *P'* feststellbare Klemmplatte. Die Klemmplatte enthält einen Nonius und ist an der hinteren Seite mit einer das Ocularende des Fernrohres tragenden Stahlschneide versehen.

Das Fernrohr, ein gewöhnliches Theodolitfernrohr von 0,275 m Länge, einfachem Fadenkreuz und 30 bis 35facher Vergrößerung, kann infolge jener Einrichtung, sobald die Schraube P' gelöst ist, um die horizontale Achse gedreht und auf irgend einen Punkt eingestellt werden, wobei die Feineinstellung, nachdem P' wieder angezogen ist, mit der Schraube R' vorgenommen wird. Der Nonius der Klemmplatte zeigt dann an der Theilung des Maassstabes F die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels des Fernrohres an.

Die Mutter der Schraube R' ist mittels einer Hängestange mit dem kurzen Arme eines Hebels L verbunden, dessen horizontale Drehachse auf der Hinterseite in dem unteren Theile des Maassstabes F sitzt. Der lange Hebelarm legt sich bei L beständig an die eine Seite der als Fernrohrträger dienenden Gabel. In dieser Seite befinden sich vier Anschlagstifte, die in Fig. 1 durch kleine Kreise, hingegen in Fig. 2 durch

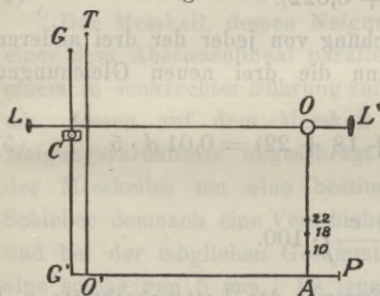
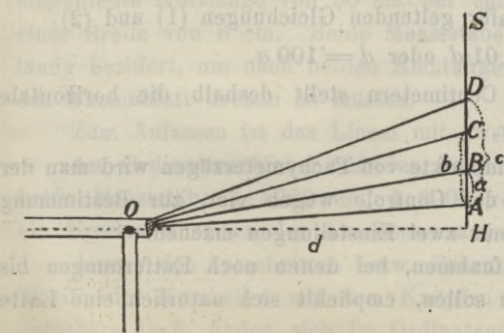


Fig. 2.

A , 10, 18 und 22 bezeichnet sind. Durch das Gewicht des Fernrohres und der Führungsstange ist diese bestrebt, den kurzen Hebelarm herabzudrücken, was jedoch wieder dadurch, dass der lange Hebelarm sich gegen irgend einen der vier Stifte legt, verhindert wird. Liegt z. B. der lange Hebelarm an dem untersten Stifte A (Fig. 2), und wird er durch

einen leichten Seitendruck davon entfernt, so legt er sich von selbst infolge des auf den kurzen Arm wirkenden Gewichts gegen den nächsten Stift 10; dabei hat gleichzeitig das Fernrohr eine Bewegung um seine horizontale Drehachse derart gemacht, dass die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Fernrohrvisirlinie um 0,010 grösser geworden ist. Legt man weiter den Hebel gegen die in Fig. 2 mit 18 und 22 bezeichneten Stifte, so nimmt die Tangente des Neigungswinkels der Visirlinie bezüglich um 0,018 und 0,022 zu.

Fig. 3.



Zur Erläuterung der Theorie und des Gebrauchs des Instrumentes setzen wir in der horizontalen Entfernung d von diesem eine senkrecht aufgestellte Nivellirlatte HS (Fig. 3) voraus. Wir richten das Fernrohr des horizontal gestellten Tachymeters auf irgend einen Punkt der Latte HS , ziehen die Klemmschraube C in Fig. 2 (P' in

Fig. 1) an, bringen den Hebel gegen den Stift A und lesen an dem verticalen Tangentenmaassstabe F (Fig. 1) sowohl als auf der Latte ab. Darauf bringen wir den Hebel der Reihe nach gegen die Stifte 10, 18 und 22 und machen in jeder Fernrohrstellung die Ablesung sowohl am Tangentenmaassstabe als auf der Latte. In Fig. 3 sind die angezielten Punkte der Latte mit A, B, C und D bezeichnet, während OH die durch die Fernrohrdrehachse O gehende Horizontale darstellt. Ist x der Werth der trigonometrischen Tangente des Winkels AOH und sind a, b und c bezüglich die Werthe der Lattenabschnitte AB, AC und AD , so hat man der oben angegebenen Lage der Stifte gemäss die vier Gleichungen

$$AH = d \cdot x \quad (1)$$

$$BH = d \cdot (x + 0,010) \quad (2)$$

$$CH = d \cdot (x + 0,018) \quad (3)$$

$$DH = d \cdot (x + 0,022). \quad (4)$$

Daraus folgt, wenn die erste Gleichung von jeder der drei anderen Gleichungen abgezogen wird und dann die drei neuen Gleichungen addirt werden:

$$a + b + c = 0,001 d \cdot (10 + 18 + 22) = 0,01 d \cdot 5 \quad (5)$$

und hieraus ergibt sich

$$d = \left(\frac{a + b + c}{5} \right) \cdot 100.$$

Das heisst der fünfte Theil der Summe der Lattenabschnitte a, b und c in Centimetern ist gleich der horizontalen Entfernung d in Metern. Der Höhenunterschied zwischen dem anvisirten Lattenpunkte und der horizontalen Fernrohrdrehachse ist dann für jede Fernrohrstellung das Product aus dieser Entfernung d und der am Maassstabe F (Fig. 1) abgelesenen Tangente des Neigungswinkels.

Es ist nun in der Tachymetrie nicht nöthig, für jeden Bodenpunkt die angegebenen vier Einstellungen zu machen; es genügen deren zwei zur Ermittlung der horizontalen Entfernung und des Höhenunterschiedes. Denn hat man z. B. bei den Hebelstellungen A und 10 (Fig. 2) abgelesen, so folgt aus den dafür geltenden Gleichungen (1) und (2)

$$a = 0,01 d \text{ oder } d = 100 a.$$

Der Lattenabschnitt a in Centimetern stellt deshalb die horizontale Entfernung d in Metern dar.

Zur Festlegung der Standpunkte von Tachymeterzügen wird man der grösseren Genauigkeit und der Controle wegen vier, zur Bestimmung der Detailpunkte hingegen nur zwei Einstellungen machen.

Für topographische Aufnahmen, bei denen noch Entfernungen bis zu 800 m gemessen werden sollen, empfiehlt sich natürlich eine Latte mit gröberer Theilung.

Als mittleren Fehler der Bestimmung einer Entfernung von 100 m giebt Sanguet ± 6 cm an.

Das Instrument ist patentirt und wird nur von der Papeterie Cabasson in Paris, rue Joubert 29, geliefert; es kann in einem Kasten von $0,27\text{ m} \times 0,35\text{ m} \times 0,18\text{ m}$ Aussenmaassen getragen werden und wiegt sammt Kasten ca. 8 kg.

Hannover, Februar 1896.

M. Petzold.

Auftrageapparat nach Seyfert.

D. R. G. M. 42114.

1. Princip.

Das Wesentliche des neuen Instrumentes ist die Anwendung eines Messkeiles $a-a$ zum genauen Absetzen der Ordinaten.

Der Messkeil, dessen Neigungsverhältniss 1:10 beträgt, gleitet an einer dem Abscissenlineal parallelen Führung und theilt seine Bewegung einem in senkrechter Führung zum Abscissenlineal gehenden Schieber $b-b$ mit, dessen auf dem Messkeil ruhende schmale Kante in gleichem Neigungsverhältniss abgeschragt ist. Bei einer bestimmten Bewegung des Messkeiles um eine bestimmte Länge, erleidet der senkrechte Schieber demnach eine Verschiebung um den zehnten Theil dieser Länge und bei der möglichen Gesamtverschiebung von 5 cm des Messkeiles eine solche von 5 mm. Es leuchtet nun ein, dass der Schieber nur in gleichmässigen Abständen von 5 mm durchlocht zu sein braucht, um sämtliche zwischen der ersten und letzten Bohrung liegenden Maasse durch eine genau zur Bohrung passende Nadel vermittelt der möglichen Verschiebung von 5 mm absetzen zu können.

2. Theile des Instrumentes.

Das Instrument besteht:

- 1) aus dem Abscissenlineal,
- 2) dem Ordinatenschieber.

Das Abscissenlineal hat eine in den Maassstäben 1:1000 und 1:2000 eingetheilte Nutzlänge von 50 cm bei einer Stärke von 4—5 mm und einer Breite von 6 cm. Beide Maassstäbe sind rechtsläufig und linksläufig beziffert, um nach beiden Richtungen kartiren zu können, ohne das Kartenblatt drehen zu müssen.

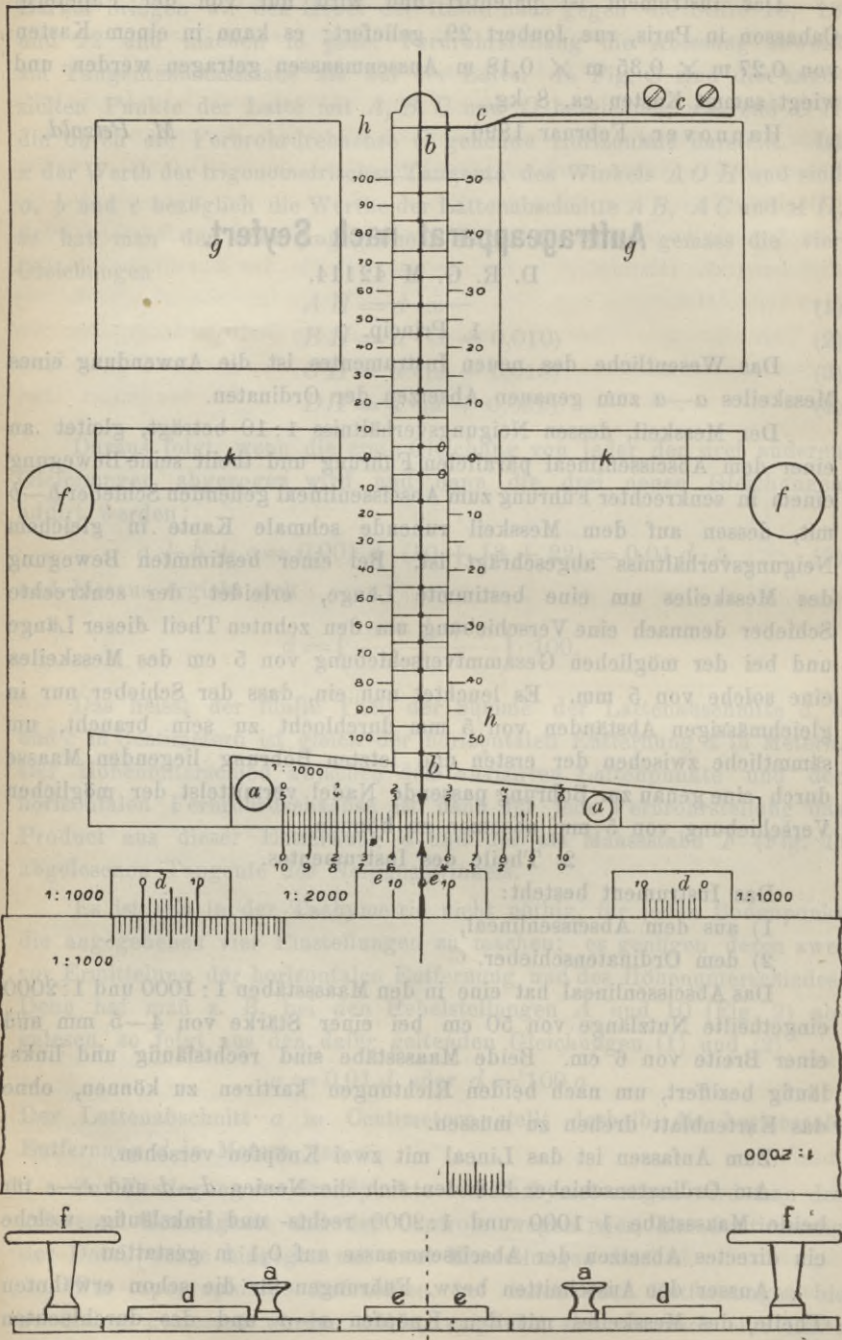
Zum Anfassen ist das Lineal mit zwei Knöpfen versehen.

Am Ordinatenschieber befinden sich die Nonien $d-d$ und $e-e$ für beide Maassstäbe 1:1000 und 1:2000 rechts- und linksläufig, welche ein directes Absetzen der Abscissenmaasse auf 0,1 m gestatten.

Ausser den Ausschnitten bezw. Führungen für die schon erwähnten Theile, des Messkeiles mit den Knöpfen $a-a$ und des durchlochten Schiebers $b-b$, finden sich im Ordinatenschieber noch die Ausschnitte

Auftrageapparat nach Seyfert.

D. R. G. M. 42114.



$g-g$ und $k-k$. Während die Ausschnitte $g-g$ nur das Gewicht des Schiebers vermindern sollen, sind in den Ausschnitten $k-k$ Glasfadenkreuze angebracht, welche die Auflage und Einstellung des Instruments ermöglichen. Die Schnittpunkte der Fadenkreuze sind genau 5 cm von der Mittellinie des durchlochten Schiebers entfernt, die eine Linie des Fadenkreuzes liegt zur Mittellinie dieses Schiebers parallel, die andere normal zu derselben. Letztere ist gleichzeitig die Verbindungslinie beider Schnittpunkte der Fadenkreuze und halbirt die Nutzlänge des Schiebers.

Die Feder $c-c$ drückt den Schieber $b-b$ gegen den Messkeil $a-a$ und bewirkt, dass der Schieber auch einer rückgängigen Bewegung des Messkeils folgt.

An den $h-h$ bezeichneten Stellen liegen 2 Druckfedern, welche den Schieber niederhalten und ein Auspringen desselben verhindern. Dieselben sind der Einfachheit wegen auf der Zeichnung nicht dargestellt.

$f-f$ sind zwei Knöpfe zum Anfassen des Schiebers.

3. Gebrauch.

Die Verbindungslinie der Kreuzungspunkte des Fadenkreuzes wird so auf die Messlinie gelegt, dass bei der Richtung der Messlinie von links nach rechts der Kreuzungspunkt des linken, bei umgekehrter Richtung der des rechten Fadenkreuzes in den Anfangspunkt der Messlinie fällt. Dann wird das Abcissenlineal an den festgehaltenen Ordinaten-schieber gelegt und so verschoben, dass der der Messungsrichtung entsprechende Nonius des Ordinaten-schiebers das Maass 100 im Maassstab 1:2000 resp. 50 im Maassstab 1:1000 anzeigt. Damit ist die Einstellung des Instrumentes beendet.

Nun werden die gemessenen Abcissenmaasse eingestellt, mit dem Messkeil die Meter und Meterbruchtheile abgesteckt, und der Punkt durch das Zehner- oder Fünferloch des Schiebers mit der Nadel gestochen. Als Marke für die Verschiebung des Messkeiles dienen der als Pfeil gezeichnete Fünferstrich der Theilung 1:2000 auf dem Ordinaten-schieber für die Kartirung im Maassstabe 1:1000 und umgekehrt der Pfeilstrich der Keiltheilung für die Kartirung im Maassstab 1:2000. Für Ordinaten oberhalb der Messlinie gilt die von links nach rechts bezifferte Theilung, für Ordinaten unterhalb die von rechts nach links bezifferte Theilung.

Da das Instrument die Kartirung von je 5 cm langen Ordinaten nach oben wie nach unten gestattet, so eignet es sich nicht nur zur gewöhnlichen Kleinkartirung, sondern auch zum Kartiren der Dreiecks-Polygon- und Kleinpunkte nach Coordinaten, indem man entweder von der Quadratseite alle Punkte bis 100 m Abstand nach beiden Seiten kartirt, oder sich die Halbirungslinie der Quadrate zieht und dieselbe als Messungslinie benutzt.

Ebenso ist das Instrument zum Zeichnen von Längen- und Querprofilen (Längenmaassstab 1:2000, Höhenmaassstab 1:100) sowie zum Entwerfen von Bauzeichnungen sehr geeignet.

4. Vortheile der Construction.

Vortheile der Construction sind:

- 1) grössere Schnelligkeit, da die Arbeit mit Blei und das Abschieben der Dreiecke und sonstige Handgriffe gänzlich vermieden werden,
- 2) grösste Genauigkeit durch die genaue Keileinstellung und die sichere Nadelführung in den Bohrungen,
- 3) Schonung der Augen durch die Einstellung der Ordinatenmaasse auf dem zehnfachen Maassstabe des Messkeiles,
- 4) Beibehaltung der gleichen Körperhaltung beim Kartiren, da durch den Messkeil der verticale Maassstab in die Richtung des Abscissenmaassstabes projicirt ist.

5. Preis des Instrumentes.

Das Instrument wird in dem mathematisch-mechanischen Institut von A. Ott in Kempten (Bayern) gefertigt und ist von dort einschliesslich des Holzkastens zum Preise von 75 Mark pro Stück zu beziehen.

Seyfert.

Bücherschau.

Handbuch der Vermessungskunde von Dr. W. Jordan, Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover. Erster Band. Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Vierte erweiterte Auflage. Stuttgart. J. B. Metzler'scher Verlag 1895.

Als Jubiläumsausgabe zur Entdeckung der Methode der kleinsten Quadrate durch Gauss erschien im genannten Verlage die vollständig neu bearbeitete 4. Auflage des ersten Bandes des Handbuchs der Vermessungskunde von Prof. Dr. Jordan, die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate enthaltend. Ein Werk, welches wie das vorliegende, auf den an Zahl beschränkten Leserkreis der Fachgenossen angewiesen, trotzdem schon nach kurzer Zeit in vierter Auflage erscheint, hat dadurch einen solchen schlagenden Beweis seines Werthes gebracht, dass es überflüssig erscheint, dasselbe noch nach Form oder Inhalt zu empfehlen. Wenn wir in Rücksicht auf die erfolgte Umarbeitung der Auflage, welche fast einer vollständigen Neubearbeitung gleichkommt, es dennoch unternehmen, das Werk einer Besprechung zu unterziehen, so wollen wir aus dem vorgenannten Grunde auch hier uns jedes Lobes enthalten und nur kurz erwähnen, dass der die Ausgleichsrechnung fast erschöpfende Inhalt ebenso wie die licht-

volle Beweisführung und übersichtliche Anordnung des Stoffes das Buch gleich geeignet zur Erlernung der Elemente der Ausgleichsrechnung, wie zum tieferen wissenschaftlichen Studium der höheren Theorien machen.

Für den Anfänger giebt der Verfasser im Vorwort den nöthigen Hinweis für die Einrichtung des Studienganges.

Das Werk ist in fünf Kapitel gegliedert, von denen das erste die allgemeine Theorie der kleinsten Fehlerquadratsummen, das zweite die Triangulirungsnetze, das dritte die Punktbestimmung durch Coordinatenausgleichung, das vierte die Theorie der Fehlerwahrscheinlichkeit, das fünfte die Genauigkeit der verschiedensten Triangulirungen behandelt. Angefügt sind dann noch einzelne Nachträge, welche nach Beginn der Drucklegung entstanden, den entsprechenden Kapiteln nicht mehr organisch angegliedert werden konnten. Den Schluss des Buches bildet ein Anhang verschiedener Tabellen.

Das erste Kapitel, welches am wenigsten von der Bearbeitung der früheren Auflagen abweicht, bringt zunächst die allgemeinen Begriffe und allgemeinen Entwicklungen der Ausgleichsrechnung. Hervorzuheben ist, dass ausser der willkürlichen Feststellung des Begriffes des mittleren Fehlers weitere willkürliche Annahmen vermieden sind, denn das Ausgleichsprincip der kleinsten Quadratsumme ist identisch mit dem Princip den mittleren Fehler möglichst klein zu machen, und wenn einmal der mittlere Fehler als Genauigkeitsmaass der Bestimmung einer Grösse angenommen ist, dann ist es eine vollständig logische Schlussfolgerung, den Werth einer Grösse so zu bestimmen, dass sein mittlerer Fehler möglichst klein wird, und diesen Werth, der auf Grund des angenommenen Genauigkeitsmaassstabes am besten mit den Beobachtungen übereinstimmt, als den wahrscheinlichsten zu bezeichnen. Ferner ist das arithmetische Mittel, wenn es auch zuerst als selbstverständlich hingestellt ist, im späteren Paragraphen als aus dem angenommenen Ausgleichsprincip hervorgehend bewiesen.

Nach der Entwicklung des Begriffes des mittleren Fehlers und des Fehlerfortpflanzungsgesetzes und der Behandlung des arithmetischen Mittels und seines mittleren Fehlers kommt der Verfasser bereits im § 12 zur Aufstellung des allgemeinen Ausgleichsprincipes, welches für vermittelnde Beobachtungen zunächst für 2 Unbekannte durchgeführt wird, dann auf nicht lineare Functionen und beliebig viele Unbekannte ausgedehnt wird. Von den erläuternden Beispielen sind besonders die Ausgleichung von Barometerständen und die Interpolationsausgleichung einer periodischen Erscheinung hervorzuheben.

An die bisher behandelte Ausgleichung directer und vermittelnder Beobachtungen schliesst sich nun die Behandlung der bedingten und der vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen. Beide Aufgaben sind zunächst nach der Eliminationsmethode auf die Aufgabe

der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen des leichteren Verständnisses wegen zurückgeführt, dann aber nach der rechnerisch bequemerem und deshalb praktisch wichtigeren Correlatenmethode gelöst.

Nach der allgemeinen theoretischen Lösung dieser Aufgabe kommt der Verfasser im zweiten Kapitel zur praktischen Anwendung auf geodätische Aufgaben, und zwar zur Ausgleichung von Triangulirungsnetzen. Nach den Lehren von der Aufstellung der Bedingungsgleichungen wird die Art der Ausgleichung praktisch an mehreren treffenden Beispielen gezeigt und sowohl für Richtungssätze wie für Winkelbeobachtungen durchgeführt, die Unterscheidung von Winkelmessung und Richtungsbeobachtung, wie die Zurückführung der einen auf die andere ausführlich behandelt und endlich die Dreiecksnetzausgleichung nach Bessel's Methode, die Triangulirung nach Schreiber's Methode und die Netzausgleichung nach Helmert's Theorie erläutert. Den Schluss des Kapitels bildet die Theorie der günstigsten Wahl der Seitengleichung im Viereck.

Das dritte Kapitel ist das für den praktischen Landmesser wichtigste, da es die Punktbestimmung durch Coordinatenausgleichung enthält. Nach den allgemeinen Erklärungen und Entwicklungen werden die einzelnen Aufgaben des Vorwärtseinschneidens, des Rückwärtseinschneidens, des combinirten Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens und der Doppelpunktausgleichung an demselben Beispiele der zur Triangulation von Hannover gehörigen Punkte Hochschule und Dreifaltigkeit durchgeführt, wodurch das Verständniss für die einzelnen Arten der Coordinatenausgleichung ungemein gefördert wird. Den Schluss des Kapitels bildet die Ausdehnung des Verfahrens der Doppelpunktausgleichung auf die Einschaltung eines ganzen Netzes in einen gegebenen Rahmen. Als Beispiel dient eine Netzeinschaltung mit Coordinatenausgleichung von 10 Punkten des Schlesisch-Posenschen Dreiecknetzes.

Das vierte Kapitel enthält die Theorie der Fehlerwahrscheinlichkeit. Aus den kurz begründeten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Fehlerwahrscheinlichkeitsfunction entwickelt und aus derselben die Beziehungen zwischen den mittleren, wahrscheinlichen und durchschnittlichen Fehlern gebildet. Nach weiteren Untersuchungen über verschiedene Fehlerpotenzsummen etc. wird eine Vergleichung des Fehlergesetzes mit Beobachtungsreihen gegeben und werden Fehlercurven mit endlicher Erstreckung gebildet. Hervorzuheben ist der vom Verfasser gelieferte neue Beweis, dass eine Fehlercurve mit Berührung n ter Ordnung für $n = \infty$ in die Fehlerfunction übergeht. An diese Untersuchungen schliesst sich dann noch eine Theorie des Maximalfehlers, ein bis jetzt unbeackertes Feld, auf dem gleichwohl die Weiterentwicklung der Ausgleichungsrechnung liegen dürfte.

Im Kapitel V, welches vollständig neu der Ausgleichungsrechnung angegliedert ist, behandelt der Verfasser den geschichtlichen Theil der

Triangulirungen, soweit noch actenmässige Unterlagen vorhanden sind, welche einen Schluss auf die erreichte Genauigkeit zulassen. Als Maassstab dient die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler.

Von älteren Messungen sind die Triangulirungen der Niederlande von Snellius 1610 und von Württemberg durch Schickhart 1620 beschrieben. An diese schliesst sich die Besprechung der französischen Gradmessungen des vorigen Jahrhunderts und weiter die Landesvermessungen und Gradmessungen von England, Russland und Dänemark. In den folgenden Paragraphen werden die Arbeiten von Gauss, Bessel und Baeyer besprochen und schliesslich alle die neueren Arbeiten der preussischen Landestriangulation, des geodätischen Institutes, der deutschen Staaten Bayern, Württemberg, Baden, Hessen-Nassau, Oldenburg, Mecklenburg und Sachsen ausführlich behandelt. Fast sämtliche Triangulationen sind durch Netzdarstellungen und Beschreibung der Messungsverfahren erläutert. Am Schlusse des Kapitels sind alle diese Arbeiten mit ihren mittleren Winkelfehlern zusammengestellt, welche von 2 bis 4 Minuten im 17. Jahrhundert, im 18. Jahrhundert schnell auf 3,6 und 1,1 Secunden heruntergehen. Für das 19. Jahrhundert ist der mittlere Winkelfehler in weiterer asymptotischer Annäherung auf 1 Secunde herabgegangen. „Welches“, schliesst der Verfasser dieses wichtige und interessante Kapitel, „wird die Genauigkeitssteigerung im 20. Jahrhundert werden?“

Aus den Nachträgen ist endlich noch die Theorie der günstigsten Winkelgleichung im Viereck und Ergänzungen zur Theorie des Maximalfehlers hervorzuheben. Den Schluss des vortrefflichen Werkes bilden eine Reihe von wichtigen Hilfstafeln, welche bei den verschiedenen Arten der Ausgleichsrechnungen gebraucht werden.

Im Anschluss an diese kurze Inhaltsangabe sei es nun noch erlaubt, einige Bemerkungen hinzuzufügen.

Zunächst wird es vielen Collegen aus der Seele gesprochen sein, dass es zu bedauern ist, dass die in den früheren Ausgaben vorhandenen Abhandlungen über Genauigkeitscurven und Fehlerellipsen, sowie das im zweiten Bande (1893) versprochene Kapitel über Polygonzüge aus Rücksichten auf Umfang und Preis des Werkes in die neue Ausgabe nicht mit aufgenommen werden konnten. Hoffentlich schiebt der Verfasser die Bearbeitung dieser Stoffe zu einem Ergänzungsbande seiner Vermessungskunde, in welchem vielleicht auch die Ausgleichungen mit graphischer Darstellung der Visirstrahlen noch berücksichtigt werden könnten, nicht zu lange hinaus.

Ferner ist hervorzuheben, dass durch das ganze Buch das Bestreben hervortritt, durch möglichst scharfe Rechenformeln und Anwendung einfacher Hilfsmittel und praktische Anordnung der Formulare die

Rechnung des Praktikers so einfach als möglich zu gestalten. So ist z. B. auf Seite 105 die Auflösung der Normalgleichungen von sechs Unbekannten durchgeführt, welche in Bezug auf Anordnung der Rechnung mustergültig, und deren Auflösung nur mit Hilfe des Rechenschiebers erfolgt ist und wirklich bewirkt werden kann, wovon wir uns durch Nachrechnung überzeugt haben. Allerdings gehört dazu eine günstige Gestaltung der Normalgleichungen, welche der Verfasser durch proportionale Abänderung der Coefficienten der Bedingungsgleichungen und durch Abänderung der Fehlereinheit für die Fehlergleichungen mit Recht zu erreichen strebt. Dagegen ist schwer einzusehen, warum z. B. Seite 343 m , my und mx logarithmisch und nicht auch mit dem Rechenschieber, bezw. im Kopfe berechnet werden sollen.

Es ist

$$m^2 = \frac{1,2}{2} = 0,6 \quad m = 0,8$$

$$my^2 = \frac{m^2}{[bb_1]} = \frac{0,6}{147} = 0,0041 \quad my = 0,6 \text{ dm}$$

$$mx^2 = \frac{m^2}{[aa_1]} = \frac{0,6}{82} = 0,0073 \quad mx = 0,086 \text{ dm}$$

oder Seite 351

$$m^2 = \frac{[vv]}{n-3} = \frac{32}{2} = 16 \quad m = 4$$

$$my^2 = \frac{m^2}{[bb_1]} = \frac{16}{183} = 0,087 \quad my = 0,3 \text{ dm}$$

$$mx^2 = \frac{m^2}{[aa_1]} = \frac{16}{90} = 0,178 \quad mx = 0,42 \text{ dm.}$$

Zu Gunsten des Rechenschiebers spricht noch, dass die Brüche $\frac{0,6}{147}$ etc. nur eingestellt und garnicht geschrieben zu werden brauchen, und dass sofort die Resultate von $my = 0,06$ etc. ohne das Zwischenglied 0,0041 u. s. f. abgelesen werden können. Es bedarf dabei nur einer kleinen Kopfrechnung, wie viel Nullen der Decimalbruch nach dem Komma hat.

Andererseits muss den Bemerkungen des Verfassers auf Seite 398 über die sogenannte „Sigmaprobe“ beigestimmt werden, dass es zweckmässiger wäre $[vv] = [\lambda\lambda] - \Sigma$ zu bilden, bezw. nach Anw. IX, wo Σ stets negativ ist, $[vv] = [ff.] + \Sigma$. Hervorzuheben ist ferner, dass es der Verfasser verstanden hat, die Theorie der Wahl der günstigsten Gleichungen im Viereck noch weiter zu vervollkommen und durch Combination der achtgliedrigen (günstigsten) Seitengleichung mit den 3 achtgliedrigen (günstigsten) Winkelgleichungen den Normalgleichungen für Ausgleichung des Vierecks bei grösster Rechenschärfe die möglichst einfache Form zu geben (§ 84 und § 145), so dass wohl jetzt kaum

noch von irgend einer Seite Einwendungen gegen die Richtigkeit und praktische Nützlichkeit des Principis erhoben werden dürften.

Haben wir uns bis jetzt überall in voller Uebereinstimmung gefunden, so ist das in folgenden Punkten nicht ganz der Fall.

Zunächst ist es unserer Ansicht nach zu bedauern, dass der Verfasser in die neue Auflage den Beweis nicht aufgenommen hat, dass das zufällige Zusammentreffen einer bestimmten Anzahl von Beobachtungsergebnissen für den Werth der beobachteten Grösse die grösste Wahrscheinlichkeit hat, für welchen die Quadratsumme der vorhandenen Widersprüche ein Minimum wird. Bei der nur durch die Zweckmässigkeit begründeten Annahme des Principis der kleinsten Quadratsumme ist dieser Theilbeweis für die Richtigkeit der Methode nur schwer zu entbehren.

Dann ist in § 12 Gleichung (4) die Fehlerwahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $+a$ und $-a$ liegt mit $W\left(\begin{smallmatrix} a \\ o \end{smallmatrix}\right)$ bezeichnet. Vorzuziehen wäre eine Bezeichnung Wa oder $W\left(\begin{smallmatrix} +a \\ -a \end{smallmatrix}\right)$, da $W\left(\begin{smallmatrix} a \\ o \end{smallmatrix}\right)$ streng doch nur die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein Fehler zwischen a und o liegt und die Gleichung stattfindet:

$$W\left(\begin{smallmatrix} a \\ o \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\pi} \int_o^{ah} e^{-r^2} dt$$

Weiter müsste in den §§ 117 und 118 unserer Meinung nach der Nenner der Formeln (13) (14) (15) u. s. f. genauer $n-2$ bzw. $n-3$ heissen, so dass die Formeln

$$m = \sqrt{\frac{[e^2]}{n-2}} \left(1 \pm \frac{0,70710}{\sqrt{n}}\right) \text{ bzw.}$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-3}} \left(1 \pm \frac{0,70710}{\sqrt{n-1}}\right)$$

lauten würden. Es sind das die Werthe, welche bei genauerer Rechnung sich ergeben, während $m = \sqrt{\frac{[e^2]}{n}} \left(1 \pm \frac{0,7071}{\sqrt{n-1}}\right)$ u. s. w. nur Näherungswerthe sind. Diese Näherungswerthe, welche bereits von Gauss angegeben sind, haben allerdings den Vorzug, dass sie im ersten Gliede den mittleren Fehler, im zweiten seine Unsicherheit angeben, sie leiden aber auch an dem Umstande, dass bei einer einzigen Beobachtung der mittlere Fehler des mittleren Fehlers reell bleibt, während doch erst bei mindestens 3 Beobachtungen und 3 wirklichen Fehlern bestimmende Grössen für denselben vorhanden sind. Jedenfalls ist

Herr Professor Jordan der Mann, welcher in seiner nächsten Auflage bei gleicher Anschaulichkeit der Formeln den Widerspruch, welcher in dem Nenner n bezw. $n - 1$ liegt, zu beseitigen verstehen wird.

Verschiedene Druckfehler, welche beim Durchgehen des Werkes gefunden wurden, haben wir dem Verfasser mitgetheilt.

Wenn wir nun zum Schluss über das besprochene Werk ein Gesamturtheil abgeben sollen, so können wir dasselbe auf die Abänderungen und Vermehrungen der vierten Auflage beschränken, denn über das aus der dritten Auflage Uebernommene hat der Deutsche Geometerstand schon sein Urtheil voll von höchster Anerkennung ausgesprochen. Und vollste Anerkennung gebührt dem Verfasser auch für die Neubearbeitung und Vermehrung. Das Werk steht in seiner Fülle des Stoffes, der Eintheilung und Behandlung desselben, in seiner lichtvollen und klaren Darstellung fast einzig in der Fachliteratur da. Würdig ist auch die Ausstattung des Werkes, so dass dasselbe allen Collegen und Studirenden der Geodäsie auf das Wärmste empfohlen werden kann.

Breslau, Januar 1896.

Seyfert, Oberlandmesser.

Die Anfangsgründe der Theodolitmessung und der Polygonometrie. Mit einem Anhang: Von den Fehlern der Messungen. Von G. Kraft, Königlicher Oberforstmeister a. D. Dritte Auflage, bearbeitet von Schering, Königlicher Professor und Forstmeister zu Altenplathow. Mit 91 Figuren. Hannover 1895, Helwing.

Das Buch ist hauptsächlich für die Bedürfnisse der Forstleute und für solche Techniker bestimmt, die mit Kleinmessungen zu thun haben, ohne die Geodäsie in ihrem ganzen Umfange auszuüben.

Nach einer Einleitung mit den Grundbegriffen wird im zweiten Abschnitt die Coordinatenrechnung und ihre Anwendung auf die Polygonometrie behandelt. Der dritte Abschnitt enthält die Winkelmessung: Fernrohr, Theodolit nebst Prüfung und Berichtigung, Messung der Horizontalwinkel, Winkelcentrirung, sowie die Messung der Höhenwinkel. Hierauf folgen die polygonometrischen Messungen, wobei noch das geschlossene Polygon in den Vordergrund gestellt ist, und im fünften Abschnitt die Aufnahme und elementare Ausgleichung von Dreiecksnetzen. Im sechsten Abschnitt sind die für Preussen giltigen Bestimmungen über den Anschluss der Specialvermessungen an die trigonometrische Landesvermessung, das Verzeichniss der allgemeinen Coordinatensysteme für die Bestimmung der Lage der trigonometrischen und polygonometrischen Punkte der Specialvermessungen und schliesslich noch die Umwandlung der geographischen Coordinaten in rechtwinklige sphärische Coordinaten gegeben. Dann wird das Vorwärts-, Seitwärts- und Rückwärtseinschneiden besprochen und die Berechnung einer Kleintriangulirung im Anschluss an

zwei Punkte der Landesaufnahme an einem Zahlenbeispiel gezeigt. Den letzte Abschnitt bildet die trigonometrische Höhenmessung und die Aufnahme von Horizontalcurvenplänen.

In einem Anhang sind noch die Messungsfehler und die Ausgleichung directer Beobachtungen, gleicher und ungleicher Genauigkeit nebst dem mittleren Fehler besprochen. P.

Lehrbuch der Experimentalphysik von A. Wüllner. Fünfte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Zweiter Band. Die Lehre von der Wärme. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. Leipzig 1896, B. G. Teubner.

Der zweite, in der neuen Auflage die Wärmelehre enthaltende Band von Wüllner's Physik, deren erster auf S. 62 d. Zeitschr. besprochen wurde, hat wesentliche Bereicherungen erfahren. Es ist neu aufgenommen: die Anwendung der Thermolemente zur Thermometrie, insbesondere zur Messung sehr hoher und sehr tiefer Temperaturen; die Messungen von Amagat über die Compression der Flüssigkeiten und Gase und die daraus hervorgehende genauere Kenntniss der Zustandsgleichung für die Gase; Weber's Untersuchungen über die Wärmeleitung von Flüssigkeiten; das Joly-Bunsen'sche Dampfcalorimeter und die Pfaundler'sche Methode der Bestimmung der specifischen Wärme durch den galvanischen Strom; die Theorie der Lösungen auf Grund der van t'Hoff'schen Sätze u. a.

Der Band zerfällt in sechs Abschnitte, von denen der erste die Thermometrie und die Ausdehnung der Körper durch die Wärme behandelt. Das zweite Capitel bringt die Fortpflanzung der Wärme und das dritte die mechanische Wärmetheorie. Hierauf folgt die specifische Wärme, dann die Veränderung des Aggregatzustandes durch die Wärme und schliesslich die Wärmeentwicklung durch chemische Prozesse. P.

Gesetze und Verordnungen.

Nachtrag vom 29. Januar 1896 zur Landmesser-Prüfungsordnung.

Die Bestimmungen im § 13 der Vorschriften vom 4. September 1882 über die Prüfung der öffentlich anzustellenden Landmesser werden vom 1. Januar 1897 ab aufgehoben. An ihre Stelle treten die nachfolgenden Bestimmungen:

Prüfungstermin.

§ 13.

1) Die Landmesser-Prüfungen finden regelmässig im Frühjahr am Schluss eines Studienjahres statt.

2) Ausser diesem Haupttermin ist nach Bedarf im Herbst noch ein Nebetermin anzuberaumen, wozu in der Regel nur zuzulassen sind:

a. die Candidaten, die durch Krankheit oder sonstige unverschuldete Umstände an der Ablegung der Prüfung im Haupttermin verhindert gewesen sind, insoweit die Hinderungsgründe durch Beschluss der Prüfungscommission (§ 3) als genügend anerkannt werden,

b. die Candidaten, die im Haupttermin die Prüfung ungenügend abgelegt haben, insoweit von der Ober-Prüfungscommission entschieden ist (§ 25 Nr. 1), dass sie die Prüfung schon nach einem halben Jahre wiederholen können.

Der
Finanzminister.

Miquel.

Der

Minister der geistlichen etc.
Angelegenheiten.

I. A.: de la Croix.

Der Minister
der öffentlichen Arbeiten.

Thielen.

Der

Minister für Landwirthschaft,
Domainen u. Forsten

I. A.: Sterneberg.

(D. R.-A.)

Personalm Nachrichten.

Königreich Preussen. Landmesser Plähn in Schneidemühl ist zum Vermessungsrevisor ernannt worden.

Finanzministerium. Der Katasterinspector, Steuerrath Probst zu Magdeburg ist nach Köln versetzt.

Die Katasterlandmesser Sieh in Arnsberg und Klüppel in Trier sind zu Katastercontroleuren in Toftlund bezw. in Grumbach bestellt worden.

Ministerium für Landwirthschaft, Domainen und Forsten.

Der bisherige Landmesser Wilhelm August Baldus zu Limburg a. L. ist zum Königlichen Oberlandmesser ernannt worden.

Königreich Bayern. S. Kgl. Hoheit der Prinzregent geruhen zu verfügen, dass von der Messungsbehörde Erding (Oberbayern) der Bezirk des Amtsgerichts Haag abgetrennt und der Messungsbehörde Mühlendorf zugetheilt werde, ferner die Stelle eines Vorstandes der techn. Messungsbehörde Erding dem Kreisgeometer Christoph Rupp unter Einreihung desselben zu den Bezirksgeometern II. Klasse zu verleihen und zum Kreisgeometer bei der kgl. Regierungsfinanzkammer von Niederbayern den Messungsassistenten Friedrich Linn in Bayreuth zu ernennen.

Ministerium des Aeusseren. Die geprüften Geometer Georg Hulemer, Paul Vogel, Anton Stiegler, Franz Seraph Zölch, und Eugen Burger sind in den statusmässigen Dienst der Königlichen Staatseisenbahnverwaltung als Geometer eingereiht worden.

Vereinsangelegenheiten.

Aus dem Jahresbericht des Rhein.-Westf. Landmesser-Vereins für 1895 entnehmen wir Folgendes:

Am Schlusse des Jahres 1894 zählte der Verein 284 Mitglieder, von denen im Laufe des Jahres 5 durch den Tod und 5 aus anderen Gründen ausschieden. Dem Verein traten 43 neue Mitglieder bei, so dass derselbe bei Anfang des Jahres 1896 eine Mitgliederzahl von 317 aufweist, von denen nur 92 dem Deutschen Geometer-Verein angehören.

Auf der am 13. October 1895 in Düsseldorf abgehaltenen Hauptversammlung wurden in den Vorstand gewählt die Herren:

Stadtgeometer Walraff in Düsseldorf als Vorsitzender,
 Oberlandmesser Hürten in Münster als stellvertr. Vorsitzender,
 Kataster-Controleur Hütten in Solingen als Schriftführer,
 Technischer Eisenb.-Secretair Tuschick in Cassel als Schatzmeister,
 Landmesser Emelius in Cassel als Redacteur der Zeitschrift.

Die Einziehung der Mitgliederbeiträge für das Jahr 1896 erfolgt in der Zeit vom 1. Januar bis einschliesslich 10. März. Die Herren Mitglieder, welche den Beitrag durch die Post einsenden wollen, werden ersucht, dieses in der oben angegebenen Zeit zu thun. Nach dem 10. März erfolgt die Einziehung durch Postnachnahme. — Es wird gebeten bei Einsendung des Beitrages den jetzigen Wohnort, Amtstitel etc. deutlich anzugeben, da beabsichtigt wird für das Jahr 1896 ein neues Mitgliederverzeichniss herauszugeben. Auch ist die Angabe der Mitgliedsnummern sehr erwünscht.

Cassel, Murhardtstrasse 19b, den 1. Januar 1896.

Die Kassenverwaltung des Deutschen Geometer-Vereins.

Hüser, Oberlandmesser.

Neue Schriften über Vermessungswesen.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. (In 3 Bänden.)

Band III: Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1759. (3 Abtheilungen.)

Abtheil. 2: Die Zeit von 1700 bis 1726. Leipzig 1896. gr. 8. pg. 253—472 mit 30 Holzschnitten. 6,00 Mk.

Band III. Abtheil. 1: Die Zeit von 1668 bis 1699, 1894 mit 45 Holzschnitten. 6,00 Mk. — Band I u. II: Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1668 (Band I in 2. Auflage). 1892—1894, 812 u. 873 pg. mit 1 Tafel u. Holzschnitten. 46,00 Mk.

Veröffentlichungen des Kgl. Preussischen Meteorologischen Instituts, herausgegeben durch W. v. Bezold. Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen im Jahre 1893. Berlin 1895. gr. 4. 52 u. 201 pg. mit 1 Karte. 10,00 Mk.

Ball, R. S., Great Astronomers. (Lives of Ptolemy, Galileo, Kepler, Herschel, Laplace, Brinkley, Airy and others.) London 1895. 8. 384 pg. with numerous illustrations. cloth. 7,80 Mk.

— Treatise on spherical Astronomy. Cambridge 1896. 8. — In the press.
Abhandlungen, Wissenschaftliche, der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Band II. Berlin 1895. gr. 4. 5 u. 541 pg. m. 48 Holzschnitten. 30,00 Mk.

Inhalt: Thiesen, M., Thermometrische Arbeiten, betreffend die Vergleichen von Quecksilberthermometern unter einander. Untersuchungen über die thermische Ausdehnung von festen und tropfbarflüssigen Körpern. — Scheel, K., u. Diesselhorst, H., Bestimmungen der Aenderung der Schwere mit der Höhe auf dem Grundstück der Physik.-Techn. Reichsanstalt. — Gumlich, E., Optisches Drehungsvermögen des Quarzes für Natriumlicht. — Dorn, E., Ueber den wahrscheinlichen Werth des Ohm nach den bisherigen Messungen. — Leman, A., Zur Bestimmung der Caliber-correction für elektrische Widerstandsrohre. — Jäger, W., Die Quecksilber-Normale der Physik.-Techn. Reichsanstalt für das Ohm. — Feussner, K., u. Lindeck, S., Die elektrischen Normal-Drahtwiderstände der Physik.-Techn. Reichsanstalt.

Band I. 1894. 576 pg. m. 16 Holzschnitten. 30,00 Mk.

Wolf, R., Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 6. Auflage, vollendet durch A. Wolfer. Zürich 1895. 12. mit Holzschnitten. — Lieferung 4 u. 5: pg. 9—24 u. 241—388. Jede Liefg. 1,20 Mk. Das jetzt vollständige Werk, 412 pg. 6,00 Mk.

Kalender, Astronomischer, für 1896. Nach dem Muster des C. v. Littrow'schen Kalenders herausgegeben von der K. K. Sternwarte zu Wien. Jahrgang 58 (Neue Folge. Jahrg. 15). Wien 1895. 8. 176 pg. mit 1 colorirten Tafel. cart. 2,00 Mk.

Aide-mémoire de l'Ingénieur. 3. édition Française du Manuel de la Société „Hütte“, par P. Huguenin. Paris 1895. 8. 1200 pg. avec 500 figures. relié en maroquin. 12,50 Mk.

Inhalt.

Grössere Mittheilungen: Conforme Kegelprojection, von Jordan. — Der Sanguet'sche Tachymeter, von Petzold. — Auftrageapparat nach Seyfert, von Seyfert. — Bücherschau. — Gesetze und Verordnungen. — Personalnachrichten. — Vereinsangelegenheiten. — Neue Schriften über Vermessungswesen.