ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

Dr. W. Jordan, Professor in Hannover und **C. Steppes,** Steuer-Rath in München.

1896. Heft 7. Band XXV.

1. April.

Congruente oder conforme Coordinaten.

Die Erörterung auf Seite 92 — 94 des Heftes 3 vom 1. Februar 1896 dieser Zeitschrift hat drei Einsendungen hervorgerufen, welche im Nachfolgenden alle wörtlich abgedruckt werden, obgleich manche Kürzung und Modificirung sich empfehlen würde. Aber da ein Mitglied der Redaction als Verfasser der Auseinandersetzung von S. 92 — 94 in der daran geknüpften Discussion mit betheiligt ist, schien es am besten, zur Wahrung der Objectivität, nichts zu unterdrücken, was in dieser Sache eingegangen ist.

Die Frage, ob congruente oder conforme Coordinaten für Katastervermessungen die geeigneteren sind, und die dadurch angeregte Frage, aus welchen Motiven die Preussische Katasterverwaltung 1879 ihre heutigen sog. Soldner'schen Coordinaten eingeführt hat, ist von ganz ausserordentlicher Wichtigkeit für die ganze Entwickelung des deutschen Vermessungswesens. Das kleine Gebiet von 120 km und 56 km Ausdehnung, über welches auf Seite 66 und Seite 92 berichtet ist, würde an sich so hohes Interesse kaum beanspruchen, aber da auf diesem kleinen Gebiete zum ersten Mal in Deutschland die berührte Frage zur geodätischen Discussion gestellt wurde, ist es allerdings von weitergehendem Interesse, die Principienfrage bei dieser Gelegenheit zu beantworten, und dazu sind die nachfolgenden Darlegungen dreier Vereinsmitglieder trotz der theilweise polemischen Form sehr geeignet.

Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten;

von Professor Koll in Bonn.

Auf Seite 93 und 94 dieser Zeitschrift ist Herr Professor Dr. Jordan nochmals auf die Verhandlungen der Hauptversammlung des Deutschen Geometer-Vereins zurückgegangen und sagt im Anschluss an meine Ausführungen auf dieser Versammlung:

„Dieses und die in Zeitschr. 1895, S. 509 mitgetheilte Darlegung scheint, mit den Ausführungen von Herrn Schulze auf S. 83 im Vorstehenden, der allerdings weit verbreiteten Ansicht zu huldigen, dass die unverzerrten Soldner'schen Coordinaten die „praktischen" und die conformen Coordinaten die „theoretischen" seien, welche letztere nur etwa zur Freude Solcher dienen, welche gerne mit $\frac{dy}{dx}$ rechnen, aber die „Praxis" nicht zu beurtheilen verständen. Nun ist aber gerade das Gegentheil der Fall.*)

.... Wenn die Furcht vor solchen besonderen Reductionen in Hannover nach 1866 der Grund war zu der unzweckmässigen Zerschneidung des alten classischen Coordinatensystems in 31 conforme Partialsysteme und später zu der gänzlichen Abschaffung der conformen Coordinaten, so wäre das nicht eine Folge von praktischen Erwägungen, sondern eine Folge irriger mathematischer Auffassung der Sache gewesen, deren Wiederholung jetzt, da die Frage in mehr als einem Lande wieder praktisches Interesse gewonnen hat, vermieden werden muss."

Wenn das, was hier angeführt ist, richtig ist, so müsste sich Herr Professor Dr. Jordan mit seinen klaren sonstigen Ausführungen über diesen Gegenstand im zweiten Bande seines Handbuches der Vermessungskunde, 2. Auflage 1878 bedeutend geirrt haben. Da ich aber noch der Ansicht bin, dass Herr Professor Dr. Jordan sich hier nicht geirrt hat und seine damaligen Ausführungen die Verhältnisse in ausgezeichneter Weise klarlegen, so gestatte ich mir im folgenden Jordan streng zu folgen:

Auf Seite 276, 277 und 278 des Jordan'schen Handbuches wird die Verzerrung behandelt, die das Bild der sphärischen Oberfläche erleidet, wenn man die rechtwinkligen sphärischen Soldner'schen Coordinaten als rechtwinklige ebene Coordinaten auf eine Zeichnungsebene aufträgt. Der allgemeine Ausdruck für die Vergrösserung einer kurzen Linie im Punkte mit der Ordinate y in der Richtung α ist

$$v = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \cdot \cos^2 \alpha.$$

Die Vergrösserung ist hiernach nicht abhängig von der Abscisse x, sondern nur von der Ordinate y und von der Richtung α. In Bezug auf α erreicht v seine extremen Werthe mit $\alpha = 0$ oder 180^0 und $\alpha = 90^0$ oder 270^0 nämlich:

$$\alpha = 0 \quad V_{\max} = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \quad \text{(Meridian, } x\text{-Achse)}$$

$$\alpha = 90^0 \quad V_{\min} = 1 \quad \text{(West-Ost, } y\text{-Achse)}$$

In einer Tabelle werden Zahlenwerthe für $\frac{y^2}{2\,r^2}$ gegeben und dann wird fortgefahren: Mit $y = 100\,000$ m bekommt man also nur eine

*) Dazu ist auf S. 93 gesagt: „Die conformen Coordinaten verursachen neben ihren sonstigen Vorzügen, weniger Rechenarbeit, als die congruenten, Soldner'schen, d. h. da, wo überhaupt von Erdkrümmung die Rede ist, und im ebenen Rechnen sind überhaupt beide Systeme identisch.

Maximal-Verzerrung von 0,01 % der Länge, was bei allen Detailmessungen und Kartenzeichnungen unschädlich ist. Damit ist bewiesen, dass man die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten bei den Dreiecken dritten und vierten Ranges, bei den Polygonzügen und Detailvermessungen, sowie bei allen kartographischen Darstellungen hinreichend genau als rechtwinklige ebene Coordinaten behandeln darf, wenn das Vermessungsgebiet sich nicht weiter als 100 km zu beiden Seiten der Abscissenachse ausdehnt, während dieses Gebiet in der Richtung der Abscissenachse selbst nicht begrenzt ist.

Auf Seite 295 und 296 werden dann die Soldner'schen und die conformen Gauss'schen Coordinaten verglichen, im Anschluss an eine Formelentwickelung, die hier nicht wiedergegeben zu werden braucht: Damit ist nachgewiesen, dass die Soldner'schen Coordinaten $x\,y$ und die Gauss'schen Coordinaten $x\,\eta$ sich nur dadurch unterscheiden, dass die Ordinaten η des Gauss'schen Systemes zu den Ordinaten y des Soldner'schen Systemes in Beziehung stehen:

$$\eta = y\left(1 + \frac{y^2}{6\,r^2}\right)$$

worin für die Mittelbreite 50°

$$\log \frac{1}{6\,r^2} = 5{,}61\,206 - 20.$$

Zur Veranschaulichung der Verhältnisse zwischen y und η dienen folgende Zahlenwerthe:

y	η	y	η
10 000 m	10 000,004 m	60 000 m	60 000,884 m
20 000	20 000,033	70 000	70 001,404
30 000	30 000,111	80 000	80 002,096
40 000	40 000,262	90 000	90 002,984
50 000	50 000,512	100 000	100 004,189

Zur Vergleichung der Vorzüge und Nachtheile der betrachteten zwei Projectionsmethoden dient folgendes:

Die Gauss'sche Projection ist „conform“, d. h. sie giebt ein Bild, welches in seinen kleinsten Theilen dem Urbild ähnlich ist. Dieses ist ein theoretischer Vorzug, welcher aber nur bei bedeutenden Maasstabsänderungen auf einem und demselben Kartenblatt von Werth ist; wenn dagegen die Maassstabsungleichheiten überhaupt vernachlässigt werden sollen, wie dieses bei der Anwendung der Soldner'schen oder Gauss'schen Coordinaten für Kleinvermessungspunkte beabsichtigt ist, so hat die Conformität kein besonderes Interesse.

Die Vorzüge einer Kartenprojection wie die Soldner'sche und die Gauss'sche, welche unmittelbar die einzelnen Punkte nach rechtwinkligen Coordinaten in der Ebene aufzutragen gestattet, treten nämlich dann am deutlichsten hervor, wenn man in der Lage ist, alle aus den rechtwinkligen Coordinaten abgeleiteten Grössen ohne weitere

Correctionen zu benutzen, wie es in der Kleinvermessung und schon in der Triangulation vierter und dritter Ordnung geschieht. Hier erzeugen die vernachlässigten Correctionen denselben Schaden wie kleine Messungsfehler, und es ist danach zu trachten, die vernachlässigten Grössen möglichst klein zu machen, nicht aber nach allen Richtungen hin möglichst gleich, weil letzteres nur erreicht werden kann durch Einführung von Verzerrungen an solchen Stellen, wo sie nicht unumgänglich nöthig sind.

Wenn man in jedem Punkte des Vermessungsgebietes nach allen Richtungen kleine Linien gezogen und dadurch die ganze Aufnahme bewirkt denkt, so bildet die Quadratsumme aller Vergrösserungen welche diese Linien durch die Kartenprojection erleiden, das Maass des Schadens, welcher bei denjenigen Operationen entsteht, bei welchem man die Correctionen vernachlässigt. Bezeichnet man diesen Schaden für die Gauss'sche Projection, mit Ω, für die Soldner'sche mit ω, so findet man

$$\Omega = \frac{1}{4\,r^4}\int_0^y y^4\,dy = \frac{1}{4\,r^4}\cdot\frac{y^5}{5}$$

$$\omega = \frac{1}{4\,r^4}\int_0^y\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^4\cdot\cos^4\alpha\cdot dy\cdot d\alpha\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4\,r^4}\cdot\frac{y^5}{5}\cdot\frac{3}{8}$$

Es ist also $\Omega:\omega = 8:3$.

Man kann noch fragen, welches Verhältniss die Maximalwerthe y in beiden Systemen haben müssen, wenn $\Omega = \omega$ werden soll. Nimmt man Y entsprechend Ω und y entsprechend ω, so wird $\Omega = \omega$, wenn

$$Y^5 = \frac{3}{8}\,y^5$$

$$\text{oder } Y = 0{,}82\,y$$

Hiernach dürfte die Gauss'sche Projection auf nur 82 % der Fläche ausgedehnt werden, welche der Soldner'schen Projection zugänglich ist.

Wenn man in Betracht zieht, dass die in Ω und ω behandelten Fehler sich mit den gewöhnlichen Messungsfehlern combiniren, und dass die letzteren überwiegen, so stellt sich das Verhältniss zwar anders, doch bleibt die Soldner'sche Projection im Vorzug.

Diese Darlegungen sind so klar und überzeugend, dass ich nur wenig hinzuzufügen brauche.

In Preussen ist bei der Anlage der jetzt bestehenden Coordinatensysteme davon ausgegangen, dass die Fehler, die durch die Benutzung der rechtwinkligen sphärischen Coordinaten als ebenen Coordinaten entstehen, nicht grösser als $\frac{1}{20000}$ sein sollen*). Demgemäss sind allgemein die Soldner'schen Coordinaten eingeführt und ist die Aus-

*) F. G. Gauss, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. 1. Auflage, 1876, Seite 299.

dehnung der Coordinatensysteme auf höchstens 60 km zu beiden Seiten der Abscissenachse begrenzt worden. Die bestehenden Systeme erreichen diese Maximalgrenze in vielen Fällen nicht und es bestehen mehr Systeme, als unbedingt nothwendig sind. Dies rührt ganz einfach daher, dass früher die Coordinatensysteme dem auftretenden Bedürfniss folgend unter Berücksichtigung der vorliegenden bei den Neumessungen zu benutzenden für sich bestehenden Dreiecksnetzen festgesetzt wurden. Das was in solcher Weise entstanden war, konnte bei der allgemeinen Festsetzung der Systeme im Jahre 1879 nicht einfach fallen gelassen werden, schon deshalb nicht, weil auch damals noch in Preussen kein einheitliches zusammenhängendes Dreiecksnetz vorhanden war und durch eine radicale Umformung aller Coordinatensysteme unter Umständen kostspielige Triangulationen nothwendig gemacht wurden. Nur in der Provinz Hannover ist eine Ausnahme gemacht und hier sind die alten Systeme ganz aufgegeben. In Hannover lagen die Gauss'schen conformen Coordinaten in dem, wie Jordan sagt, alten classischen Coordinatensystem vor. Dies Coordinatensystem hat als Abscissenachse den Meridian der Göttinger Sternwarte. Hannover erstreckt sich westlich 225 km und östlich 110 km von diesem Meridian und demnach betragen die Verzerrungen sowohl in den Ordinaten, wie in den Abscissen an der westlichen Grenze $\frac{6}{10000}$ an der östlichen $\frac{15}{100000}$. Dies konnte nicht zugelassen werden und deshalb ist das alte classische Coordinatensystem bei der Neumessung der Provinz Hannover in Partialsysteme zerschnitten. Welche Umstände auf die Bildung der Partialsysteme eingewirkt haben, weiss ich nicht und dass bei der Zerschneidung vielleicht etwas weiter gegangen ist, als unter den obwaltenden Umständen nöthig war, kann möglich sein. Als dann 1879 bei der allgemeinen Festsetzung der Coordinatensysteme auch die Frage zu lösen war, ob in Hannover die alten Systeme beizubehalten seien oder nicht, konnte die Entscheidung nur dahin fallen, dass dies nicht geschehen solle und dass in Hannover ebenso wie in den übrigen Provinzen grössere Systeme und Soldner'sche Coordinaten einzuführen seien, denn es war vorauszusehen, dass zu der Zeit, wo in Hannover wieder umfangreichere Neumessungen auszuführen sein würden, hier bereits die Landestriangulation ausgeführt sein werde und dann keine Veranlassung mehr vorliege, für Hannover noch Gauss'sche Coordinaten beizubehalten. Hierbei kam es auch zur Sprache, ob überhaupt zweckmässiger Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten zu nehmen seien, uud damals ist geltend gemacht worden, was ich auch auf der Hauptversammlung gesagt habe, dass, wenn bei Einführung conformer Coordinaten das Land nicht in viel mehr Systeme zerschlagen werden solle, man genöthigt sei, für alle weiter von der Coordinatenachse abliegende Gemarkungen besondere Reductionen der Strecken oder Flächenangaben einzuführen. Wenn Herr Professor Jordan räth (Seite 93

d. Zeitschrift) nur die Praktiker in Mecklenburg zu fragen, ob dort jemals besondere Reductionen dieser Art von irgend Jemanden für nöthig gehalten wurden, so ist dazu zu bemerken, dass Mecklenburg 135 km breit und 220 km lang ist, es also etwas grösser sein müsste, um in dieser Frage ein maassgebendes Beispiel zu sein, und dass Mecklenburg es sich noch ruhig leisten kann, die grösseren Verzerrungsfehler der Gauss'schen Coordinaten in den Kauf zu nehmen.*)

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass es praktisch auch gar keine Rolle spielt, ob die Rechenformeln für die einen oder die anderen Coordinaten etwas einfacher oder eleganter sind. Die rechtwinkligen Coordinaten sind aus den geographischen Coordinaten bei der weitgehenden Triangulation der preussischen Landesaufnahme in einem Gebiet von einer Quadratmeile durchweg für 10 Punkte abzuleiten. Dazu gebraucht man, wenn man nach dem trigonometrischen Formular 6 der Katasteranweisung IX rechnet, im Ganzen höchstens 3 Stunden. Wenn man nun wirklich für die Vermessung einer Quadratmeile durch Benutzung eines anderen Verfahrens $^1/_2$ Stunde sparte, so hat das wirklich wenig zu bedeuten.

Bonn, den 2. Februar 1896. *Otto Koll.*

Conforme Projection I.

Der ganze auf conforme Projection bezügliche Theil meines Bonner Vortrags (abgedruckt in Zeitschr. 1895, S. 338—340) hat die grössere lineare Gesammtverzerrung Ω des conformen Systems gegenüber der kleineren Soldner'schen Verzerrung ω als längst bekannt und bewiesen vorausgesetzt, und wenn daher mein eigener aus dem Jahrgang 1875 der Zeitschrift S. 27—34 stammender und im Handbuch d. V. 1878 abgedruckter Beweis für $\Omega > \omega$ von Herrn Collegen Koll im Vorstehenden nochmals abgedruckt und adoptirt, aber zugleich in unzutreffende Anwendung gebracht wird, so muss dazu auch das wiederholt werden, was in Zeitschr. 1895 S. 339—340 von mir gesagt wurde, nämlich dass jene Ω und ω ein einseitiges theoretisches Kriterium der Sache geben, welches in der Praxis nicht Stand hält, und dass seit ich die 1875 fehlende praktische Beschäftigung mit conformen Coordinaten später gefunden hatte, ich das frühere Urtheil dahin erweitern musste, dass trotzdem $\Omega > \omega$ ist, die conformen Coordinaten den Vorzug verdienen und grössere Geltungsbereiche erhalten dürfen als die Soldner'schen Coordinaten.

Jene schon im Jahre 1875 gemachte Integration $\Omega : \omega$ ist für mich eine Voruntersuchung geworden, auf Grund deren ich im Laufe von zwei Jahrzehnten zu einem Urtheil gelangt bin, das ich in dem Bonner Vortrage an dem populären Beispiele der Steuervertheilung dargelegt habe,

---

*) Hierauf werden die Mecklenburger wohl selbst antworten. Die Netzverzerrung in Mecklenburg ist nur halb so gross als in einem gleich grossen Preussischen Kataster-System. Die Red. *J.*

dessen mathematischer Beweis durch Vergleichung der Richtungsreductionen im Nachfolgenden S. 203—204 noch mit eingefügt wird.

Aber sogar wenn jenes Verhältniss $\Omega:\omega$ als maassgebend angenommen würde, so ist doch der citirte Koll'sche Satz von dem „Zerschlagen in viel mehr Systemen“ damit gar nicht bewiesen. Dieser Satz bleibt zwischen den verschiedenartigen Citaten und Darlegungen des Collegen Koll unerledigt, denn nach dem Citat F. G. Gauss, trig. u. polyg. Rechnungen etc. 1876 S. 299 gilt für die preussischen Kataster-Coordinatensysteme die lineare Fehlergrenze $\frac{y^2}{2\,r^2} = \frac{1}{20\,000}$ und diese ist für beide Arten von Coordinaten dieselbe.

Noch weniger zutreffend ist die vom Collegen Koll gemachte Anwendung seines Satzes auf Hannover und Mecklenburg. In Hannover hätte es genügt, den westlichen Theil der ursprünglich gar nicht dazu gehört hat (Zeitschr. 1885 S. 116) wieder abzutrennen; es wurde aber ein Zerschlagen in 31 Systemen vorgenommen mit 31 neuen Achsen, von denen 11 gar nicht entfernt von der alten Göttinger Achse sondern auf einem schmalen Streifen nahe dem Göttinger Meridian selbst liegen; und nach dieser Methode würde Mecklenburg, das heute noch sein einheitliches conformes System hat, wenn es nach 1866 ebenso wie Hannover behandelt worden wäre, einer Zerstückelung seines Systems in 13 willkürliche Theile nicht entgangen sein. *J.*

Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten.

Von Professor Koll.

Durch die Ausführungen über das Integralverhältniss $\Omega:\omega$ in dem vorstehenden Artikel wird nichts gegen den Hauptinhalt der von Herrn Collegen Jordan in Zeitschrift 1875 und in der 2. Auflage seines Handbuches 1878 gemachten und von mir wiedergegebenen Ausführungen bewiesen. Der Satz: „Es ist danach zu trachten, die vernachlässigten Grössen möglichst klein zu machen, nicht aber nach allen Richtungen hin möglichst gleich, weil letzteres nur erreicht werden kann durch Einführung von Verzerrungen an solchen Stellen, wo sie nicht unumgänglich nöthig sind“, ist meines Erachtens auch heute noch allein richtig und deshalb habe ich auch Jordans frühere Ausführungen wieder in den Vordergrund gestellt mit der von Jordan selbst (nicht von mir) gemachten Anwendung auf die Ausdehnung der Coordinatensysteme bei Gauss'scher und Soldner'scher Projection. Und wenn College Jordan jetzt sagt, wenn man die vernachlässigten Grössen nur nach allen Richtungen gleich mache, so käme es auf die möglichste Kleinheit dieser vernachlässigten Grössen nicht mehr an und man könne dann noch grössere Coordinatensysteme nehmen, als bei den Soldner'schen

Coordinaten, wobei die vernachlässigten Grössen möglichst klein werden, so vermag ich ihm darin nicht zu folgen und seine ganze Beweisführung für diesen Satz ist meines Erachtens nicht zutreffend. Hiermit wird auch „der citirte Koll'sche Satz“ von dem Zerschlagen in viel mehr Systeme von dem Unerledigtsein zwischen verschiedenartigen Citaten und Darlegungen erlöst. Denn wenn man nicht will, dass die Vernachlässigung von Grössen über ein bestimmtes Maass hinausgeht und sie nun bei den Gauss'schen Coordinaten grösser ist als bei den Soldner'schen, so muss man bei Wahl der Gauss'schen Coordinaten entweder kleinere Systeme und somit in einem gegebenen ausgedehnteren Staate viel mehr Systeme nehmen oder man muss den Nachtheil der grösseren Systeme dadurch aufheben, dass man die sich ergebenden Längen und Flächen entsprechend reducirt. Und wenn man bei Soldner'schen Coordinaten noch eine lineare Fehlergrenze $\frac{y^2}{2r^2} = \frac{1}{20\,000}$ zulässt, so ist es durchaus gerechtfertigt, bei Gauss'schen Coordinaten diese Fehlergrenzen enger zu ziehen und sie nicht weiter zu machen, wie Jordan es jetzt will.

Auch die von mir gemachte Anwendung meines Satzes auf Hannover und Mecklenburg ist nicht „noch weniger zutreffend“. Das Gauss'sche einheitliche System konnte nicht beibehalten werden, und wenn jetzt für Hannover 4 Soldner'sche Systeme angeordnet sind, so hätten nach dem von Jordan 10 Jahre nach der im Jahre 1868 erfolgten Zerlegung des grossen Systems in kleinere Systeme veröffentlichten Ausführungen schon mehr als 4 Systeme angeordnet werden müssen, um das zu erreichen, was jetzt erreicht wird.

Dass Jordan jetzt nach nahezu 30 Jahren zu der Ueberzeugung gelangt ist, dass es schon genügt habe, nur den westlichen Theil von dem System Göttingen wieder abzutrennen, ändert an der Zweckmässigkeit dessen, was 1868 und 1879 gemacht ist, nichts. Bezüglich Mecklenburgs habe ich nur auf seine manche der 40 preussischen Coordinatensysteme nicht übersteigende Grösse hingewiesen und behauptet, dass es in der vorliegenden Frage kein maassgebendes Beispiel sein könne, als welches es von Jordan hingestellt war.

Bonn, den 13. Februar 1896. *Otto Koll.*

Conforme Coordinaten II.

Das Citat von F. G. Gauss trigonometrische und polygonometrische Rechnungen 1876 S. 298—299 bezieht sich gemäss der Tabellen S. 298 auf lineare Fehler, und wird von Koll (S. 196) ausdrücklich so citirt, „dass die Fehler die durch die Benützung der rechtwinkligen sphärischen Coordinaten als ebene Coordinaten entstehen, nicht grösser als $\frac{1}{20\,000}$ sein sollen"; diese Fehler werden nicht grösser als $\frac{1}{20\,000}$, mag man die Benützung in der Ebene nach Soldner oder nach Gauss conform machen, und deshalb ist die Behauptung, dass es durchaus gerechtfertigt sei (S. 197) bei Gauss'schen Coordinaten jene Fehlergrenzen enger zu ziehen, (ohne Angabe um wie viel enger) nicht einmal durch eine gezwungene Interpretation a posteriori mit der Preussischen Fehlergrenzfestsetzung $\frac{1}{20\,000}$ in Einklang zu bringen.

An derselben Stelle, trigonom. und polygonom. Rechnungen S. 299, wird gesagt, dass die linearen Kartirungsfehler nicht hindern würden, die y bis auf 90 km auszudehnen, und dass auch der aus der Projection entstehende Flächenfehler als unerheblich erachtet werden müsse, und in der That ist der Soldner'sche Flächenfehler von $\frac{1}{20\,000} = 0{,}005\,\%$ geradezu verschwindend neben der zulässigen Differenz 16 ar auf 100 ha oder $= 0{,}16\,\%$, welche die Preussische Anweisung VIII gestattet. Diese Messungsdifferenz ist das 30 fache des Verzerrungsfehlers, und entsprechend ist die lineare Messungsdifferenz 0,95 m auf 1000 m der Anweisung IX das 20 fache des Verzerrungsfehlers. Der Verzerrungsfehler $\frac{1}{20\,000} = 5$ cm auf 1 km oder 0,05 mm auf 1 m oder 0,25 mm auf eine Messlatte von 5 m Länge, ist nur ein Sechstel der metronomisch zulässigen Messlatten-Unsicherheit von 1,6 mm auf 5 m.

Damit wird die S. 199 von Koll gemachte praktische Anwendung der Theorie $\Omega : \omega$ (Zeitschrift 1875 S. 27—32) illusorisch, denn jene $\Omega : \omega$ setzen voraus, dass die Messungsfehler, welche in Wirklichkeit weit überwiegen, theoretisch gleich Null gesetzt werden, und wenn, wie soeben gezeigt, sogar an der Projectionsgrenze die Messungsfehler auch nur gleich dem 5—10 fachen der Verzerrungsfehler gesetzt werden, so lässt sich leicht überblicken, dass das 1875 S. 31 zu 82 % ermittelte Verhältniss in Praxi etwa auf 98—99 % steigen würde, so dass damit vielleicht eine Vermehrung der Preussischen 40 Systeme auf 41 sich begründen liesse, aber nicht das Zerschlagen in „viel mehr" Systeme. Immerhin würde das noch einen kleinen Vortheil des Soldner'schen Systems vorstellen, der aber auch illusorisch wird, wenn man, was in Preussen geschehen, und praktisch allein durchführbar ist, eine Fehlergrenze für $\frac{y^2}{2\,r^2}$ festsetzt, welche in beiden Fällen denselben Grenzwerth y giebt.

Aber all das trifft noch gar nicht das Wesen der Sache, welche auf ganz anderem Wege entschieden werden muss.

Wenn ausnahmsweise der Fall eintritt, dass man mit den Verzerrungsfehlern an die Messungsfehler herankommt, was bei feinen

Stadtvermessungen oder auch z. B. in Bayern wegen der grossen Ordinaten eintreten kann, dann bringt die Soldner'sche ungleiche Verzerrung ganz ungeheuerliche Widerwärtigkeiten, welche zu ersehen sind aus der „Instruction für neue Katastermessungen in Bayern," 1885 § 23 und noch deutlicher in technische Anleitung etc. Dr. J. H. Franke, München 1889 S. 121. Alles was dort im Interesse der Rechnungserleichterung etc. gesagt ist, wird mit einem Schlage überflüssig, wenn die Projection conform ist. In München hat man mit $h = 500$ m über dem Meere auch eine allgemeine Maassstabsvergrösserung im Betrage von $1 + \frac{h}{r}$, welche rund 8 cm auf 1 km ausmacht und gewöhnlich gar nicht besonders erwähnt, sondern mit Stillschweigen den Netzfehlern zugeschlagen wird. Ebenso kann man es auch mit der Projectionsverzerrung $1 + \frac{y^2}{2\,r^2}$ machen, aber nur, wenn die Projection conform ist, während bei Soldner'scher Projection die schon erwähnten schwerfälligen bayerischen Reductionen bei grossen Ordinaten y nöthig werden.

In dem kleinen Herzogthum Anhalt wird bei querachsigen Coordinaten die Verzerrung der Projection höchstens 1 cm auf 1 km betragen und die Höhenreduction in den tiefsten Landestheilen ebensoviel, aber in höheren Theilen im Harz noch viel mehr. Niemand kümmert sich um diese Höhenreduction (vergl. die Ausführungen von Herrn Schulze in Dessau S. 213 und S. 214) und mit Recht, denn sie ist im Wesentlichen nach allen Richtungen gleich und kann den Netzfehlern mit Stillschweigen zugeschlagen werden, ebenso wie die Verzerrungsfehler der conformen Projection, nicht aber können die Verzerrungsfehler der congruenten (z. B. Soldner'schen) Projection so bequem getilgt werden. —

Die Höhenreduction macht schon im Mittelgebirge mehr aus als die Projections-Verzerrung, und wenn die Preussische Katasterbestimmung, dass die trigonometrische Netzreduction nicht grösser als $\frac{1}{20\,000}$ oder 5 cm auf 1 km werden soll, nicht als dehnbar aufgefasst werden dürfte, so könnte man über 320 Meter Höhe nicht mehr nach Anweisung IX messen, denn von da an ist die Höhenreduction grösser als 5 cm für 1 km und steigt bei 640 m Höhe auf 10 cm für 1 km.

Die Höhenreduction wirkt der Netzverzerrung günstig entgegen, z. B. bei 400 m Höhe und Ordinaten $y = 70$ km ist die Gesammtreduction allgemein nahezu gleich Null, wenn die Projection conform ist, dagegen schwankend zwischen Null und 6 cm auf 1 km, wenn die Projection congruent (nach Soldner) ist. Dieses noch genauer theoretisch zu vergleichen mag vorbehalten bleiben.

Der Schwerpunkt liegt in der Triangulirung. Meine Ω-Theorie von 1875 ist insofern eine rein mathematische Speculation gewesen, deren Fähigkeit der Uebertragung in die Praxis erst nachgewiesen werden müsste, weil (Zeitschr. 1875 S. 31) gesagt ist: Wenn man in jedem Punkt nach allen Richtungen kleine Linien gezogen und dadurch die ganze Aufnahme bewirkt denkt.... d. h. es ist ein speculatives Messungsverfahren vorausgesetzt, welches es praktisch nicht giebt. Der Schwerpunkt unserer modernen Vermessungen liegt nicht in den linearen Messungen, sondern in den Winkelmessungen, und während für erstere der von Koll S. 196 aus Zeitschrift 1875 S. 30 adoptirte hervorgehobene Satz gilt: „Es ist darnach zu trachten die vernachlässigten Grössen möglichst klein zu machen, nicht aber nach allen Richtungen möglichst gleich —“, gilt für Triangulirungen gerade das Gegentheil, hier ist darnach zu trachten die Verzerrungen nach allen Richtungen möglichst gleich zu machen, damit die Dreiecke ähnlich bleiben. In der Triangulirung III. Ordnung gestattet die conforme Projection auf viel weitere Gebiete ohne alle sphärische Correctionen von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ auszudehnen, als die Soldner'sche, weil die schlimmsten Glieder der Soldner'schen Methode bei der conformen Projection einfach fortfallen.

Zur Vergleichung hat man (mit den Bezeichnungen der Landesaufnahme):

Soldner	Gauss conform
$\frac{s}{S} = 1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 r^2} \cos^2\alpha$	$\frac{s}{S} = 1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 r^2}$
$T - t = \frac{x_2 - x_1}{6 r^2} (2 y_1 + y_2) + \frac{x_2 - x_1}{6 r^2 s^2} (y_2^3 - y_1^3)$	$T - t = \frac{x_2 - x_1}{6 r^2} (2 y_1 + y_2)$

Das schlimmste Glied $\frac{x_2 - x_1}{6 r^2 s^2} (y_2^3 - y_1^3)$ von Soldner fällt bei Gauss rundweg fort. Wir wollen dieses Glied noch umformen:

$$\frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{6 r^2 s^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) = \frac{\sin t \cos t}{6 r^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

Bei einer Kleintriangulirung entfernt von der Hauptachse sind die $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ verhältnissmässig klein gegen die y selbst, sie gelten als von nächst kleinerer Ordnung, und damit haben wir sofort den wichtigen Satz:

> Die trigonometrischen Verzerrungsfehler der Gauss'schen Kleintriangulirung entfernt von der Achse sind nur von nächst kleinerer Ordnung als bei der schwerfälligen Soldner'schen Triangulirung.

Zu näherer Ausführung wollen wir die sämmtlichen $y_1\, y_2 \cdots$ kurz mit y und die $x_2 - x_1\; y_2 - y_1$ mit dx und dy bezeichnen, dann wird:

Soldner | Gauss

$$T - t = \frac{y}{2\,r^2}\,(dx + y \sin t \cos t) \qquad\qquad T - t = \frac{y\,dx}{2\,r^2}$$

Setzt man in runden Zahlen für Triangulirung III. Ordnung (Anweisung IX, II, § 16) $s = 30\,000$ bis $10\,000$ also dx rund $= 5000$ m dagegen y als sehr gross $= 100\,000$ m und $t = 45^0$ so wird:

Soldner | Gauss

$$T - t = 1{,}3'' + 12{,}7'' = 14{,}0'' \qquad\qquad T - t = 1{,}3''$$

Also bei Gauss rund 1″, was in III. Ordnung leicht zu verschmerzen ist, aber bei Soldner 14″.

Das ist die Richtungsverzerrung. Die lineare Verzerrung giebt bei Soldner in diesem Fall ein Schwanken im Logarithmus zwischen 0.00005 und 0.00000, d. h. Unmöglichkeit auch nur mit 5stelligen Logarithmen glatt eben zu rechnen, während bei Gauss das lineare Element als Mittelwerth bereits in den Anschluss-Coordinaten II. Ordnung steckt und dem Rechner in III. Ordnung gar nicht mehr zu Gesicht kommt.

Mit Zurückgreifen auf 1875 haben wir also nun zwei Sätze:

I. Satz 1875. Wenn man eine Landesvermessung lediglich durch unendlich viele kleine Streckenmessungen machen würde, und dabei auch noch alle Messungsfehler selbst = Null setzte, so würde die Soldner'sche Projection mit 18% der Fläche im Vortheil sein (Zeitschr. 1875 S. 31).

II. Satz 1896. Wenn man eine Landesvermessung nach moderner Art mit Trangulirung und Polygonzügen macht, so ist die conforme Projection unbedingt weit im Vortheil: man kann dann mit dem Messungsgebiet so weit gehen (ohne andere Rücksichten und alles in III. Ordnung als eben behandeln) als es die praktischen Erwägungen der linearen Fehler gestatten, d. h. wenn man in letzterer Hinsicht F. G. Gauss, trigonometrische und polygonometrische Rechnungen etc. 1876 S. 299 oder 1892 S. 571 folgen will, bis zu einer Ordinatenlänge $y =$ rund 100 km.

Wenn auch die Frage der mehr oder weniger nöthigen Rechenarbeit bei conformen oder Soldner'schen Coordinaten erörtert werden soll, so muss ich zu S. 198 betreffend Formular 6 der Anweisung IX antworten: Es handelt sich hier nicht um das Formular 6, sondern um das Formular 7 der Anweisung IX und um alles, was damit in Verbindung steht.

Die Berechnung von x, y aus φ, λ spielt hier keine Rolle, denn in dieser Hinsicht wäre eher die Soldner'sche Methode ein wenig im Vortheil. Der Schwerpunkt liegt in der Triangulirung, über welche ich bereits an anderem Orte (Handbuch d. Verm. I. Band, 4. Aufl. 1894 S. 202—203) das Nöthige gesagt habe.

Bei Gauss trennen sich die Reductionen $\frac{1}{r^2}$ . . . von selbst in Entfernungs- und Richtungsreductionen und sind deswegen viel übersichtlicher und der tabellarischen oder graphischen Behandlung viel leichter zugänglich als die vier schwerfälligen Soldner'schen Glieder, von denen ausserdem gerade die schlimmsten bei Gauss rundweg fortfallen (vergl. S. 203).

Aus diesen zwei Gründen ist der Satz richtig, den ich auf S. 93 geschrieben habe:

Die conformen Coordinaten verursachen, neben ihren sonstigen Vorzügen, weniger Rechenarbeit als die congruenten, Soldner'schen.

Sogar wenn man schliesslich Soldner'sche Coordinaten haben will, könnte man daran denken, die Triangulirung zuerst conform zu rechnen, und hinternach alle conformen Y in Soldner'sche $y = Y^3 - \frac{Y^3}{6\,r^2}$ mit Hülfe einer Tabelle umzurechnen. — Das wird wohl Niemand praktisch thun, schon wegen des Umrechnens der Abrisse, es dient aber zur Veranschaulichung des Princips.

Zum Schlusse müssen wir nochmals auf das mehrfach erwähnte halbamtliche Preussische Katasterwerk „Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst" 1876 Seite 299 und und 1893 Seite 571 zurückkommen mit dem Citat:

„Würde allein die Darstellbarkeit des Fehlers in der Kartirung ins Auge gefasst, so könnte man das Coordinatensystem zwar noch weiter, nämlich bis zu Ordinatenlängen von etwa $y = 90$ km ausdehnen, da man dann für die Längenausdehnung des Kartenblattes immer erst einen Fehler von 0,1 mm beginge, indess beeinflusste dieser Fehler $\frac{1}{10\,000}$ oder 10 cm auf 1 km die Kleintriangulation doch schon mehr als wünschenswerth wäre."

Daraus kann man schliessen, dass der Verfasser des halbamtlichen Werkes nur die Soldner'sche Projection im Auge gehabt und die conforme Projection von dem Bereiche seiner Erwägungen ausgeschlossen hat, denn andernfalls hätte er zusetzen müssen, dass die Verzerrung $\frac{1}{10\,000}$ allerdings bei Soldner's Projection Winkeländerungen von der Grössenordnung $\frac{1}{10\,000}\,\frac{\rho}{2} = 10''$ in der Kleintriangulirung erzeugt, dass aber diese schlimmen Beträge fortfallen, wenn die Projection conform ist.

Oder mit anderen Worten: Die Thatsache, dass das Preussische Kataster seit 1879 Soldner'sche Coordinaten in 40 Systemen eingeführt hat, kann für eine andere Katasterbehörde, welche jetzt vor die freie Wahl congruenter oder conformer Coordinaten gestellt ist, kein Argument weder gegen noch für conforme Triangulirungs-Coordinaten abgeben, weil in den (halbamtlich veröffentlichten) Motiven für jene 40 Systeme die Conformität nicht in den Bereich der Vergleichung gezogen worden ist.

J.

Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Professor Dr. Jordan über querachsige Coordinaten, Zeitschr. S. 83 ff.; von Landmesser Fr. Schulze.

Mehrere von Herrn Professor Jordan am Schlusse der vorgenannten Abhandlung in Bezug auf meine vorhergehenden Untersuchungen über das gleiche Thema gemachte Bemerkungen veranlassen mich, zur Beseitigung offenbar missverständlicher Auslegung meiner Ausführungen a. a. O. in dieser Sache nochmals das Wort zu nehmen.

Indem ich nebenher betreffs der Fussnote auf S. 65 vorausschicke, dass die fraglichen Formeln S. 73, 1894 mangels anderer s. Z. für praktische Rechnungen benutzt werden mussten und infolge dieses Umstandes meine Ausführungen S. 66 in vollem Umfange Geltung behalten, bemerke ich, dass die auf S. 92 aufgeworfene Frage, welche von den beiden Rechnungsmethoden besser sei, mir für die in Rede stehende Sache von geringer Bedeutung scheint. Denn der Zweck der von mir aufgestellten Formeln war nach S. 67 lediglich der, eine scharfe und durchgreifende Controle für die richtige Berechnung der rechtwinkligen aus den geographischen Coordinaten nach den Jordan'schen Formeln auf S. 73, 1894, zu gewinnen.

Dass diesem Zweck die rein sphärischen, auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{{n_0}^2}$ beschränkten Formeln für x und y genügen, zeigt ein Blick auf die von Herrn Professor Jordan (S. 73 unten) mit Hilfe seiner erweiterten Formeln erzielten Resultate. Ob aber der Weg, auf welchem Herr Professor Jordan, ausgehend von den Differentialgleichungen der geodätischen Hauptaufgabe für das Sphäroid, durch Entwicklung bis zur vierten Ordnung des Krümmungsradius zu seinen Schlussformeln gelangte, kürzer und einfacher als der von mir eingeschlagene ist, muss natürlich dem Urtheil des geodätischen Lesers überlassen bleiben.

Ferner trifft die Bemerkung auf S. 92, dass ich mich aus irriger Furcht vor grösserer Rechenarbeit für die Anwendung congruenter Coordinaten in der Ebene entschieden hätte, nicht zu. Denn nach S. 82 und den vorhergegangenen Entwicklungen kann es meines Erachtens keinem Zweifel unterliegen, dass ich wegen der für Kleintriangulirungen und Specialvermessungen im Gebiete des Vermessungsgebietes garnicht mehr zur Geltung kommenden minimalen linearen Vergrösserung von $\frac{1}{80\,000}$ in max. bei der Anwendung congruenter ebener Coordinaten mich für diese entschieden habe. Ich wüsste nicht, welche wesentlichen Vortheile demgegenüber ein locales conformes System bieten würde.

Hinsichtlich der mir zugeschriebenen Gegenüberstellung von congruenten und conformen Coordinaten in dem Zusammenhange wie auf S. 93 im ersten Absatz zu lesen ist, muss ich auf meine Einleitung verweisen, nach welcher querachsige den üblichen rechtwinkligen meridionalen Systemen gegenübergestellt sind. Denn dass conforme Coordinatensysteme schon längst, z. B. von C. F. Gauss in Hannover und in neuerer Zeit von der preuss. Landesaufnahme für das ganze Vermessungsgebiet derselben, praktisch zur Anwendung gebracht worden sind, ist auch in den Kreisen der Geodäten der Praxis allgemein bekannt. Wenn für die Zwecke, denen diese beiden conformen Systeme genügen sollten nach der Absicht ihrer Urheber, conforme rechtwinklige Coordinaten unbedingt vor congruenten den Vorzug verdienen, so ist damit noch nicht gesagt, dass dies auch für die Zwecke der Kleinmessungen der Fall sei. Da jedoch diese Frage, soweit sie für die Katasterverwaltung in Preussen eine Rolle gespielt hat, von berufener Seite einer Erörterung unterzogen werden dürfte, so begnüge ich mich damit, als weiteren Beitrag zur Klärung dieser Angelegenheit, welche mir von principieller Bedeutung scheint, nachstehend eine kurze zusammenhängende Entwicklung der hier den Ausschlag gebenden Verzerrungen infolge der ebenen Abbildung eines localen Vermessungsgebietes anzuschliessen.

Zur Berechnung der bei der Anwendung congruenter und conformer Coordinaten für die Abbildung der Punkte der Kugelfläche vom Radius n_0 auf die Ebene eintretenden Verzerrungen beziehen wir die erstere auf ein kartesisches Coordinatensystem $(a b c)$ mit dem Ursprung M, dessen Achsen folgende Lage und Richtung haben (siehe Figur auf S. 68):

Die $+a$-Achse sei identisch mit der Flächennormale MP_0, die $+b$-Achse schneide den Quernormalbogen im Abstand $n_0 \frac{\pi}{2}$ von P_0, die $+c$-Achse falle mit der nach Süden gerichteten Normale zur Ebene des Quernormalbogens zusammen. Dann finden zwischen den Coordinaten $a\,b\,c$, $x\,y$ folgende Beziehungen statt:

$$\left.\begin{aligned} a &= n_0 \cdot \cos\frac{y}{n_0} \cos\frac{x}{n_0} \\ b &= n_0 \cdot \cos\frac{y}{n_0} \cdot \sin\frac{x}{n_0} \\ c &= n_0 \cdot \sin\frac{y}{n_0} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

durch welche demnach $a\,b\,c$ als Functionen von x und y gegeben sind. Sind nun die Grössen $e\,f\,g$ definirt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} e &= \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2 \\ f &= \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial x} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \\ g &= \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

welche Grössen in der Flächentheorie als **Fundamentalgrössen erster Ordnung** bezeichnet zu werden pflegen*), so ist allgemein der Winkel je zweier einen Punkt auf der krummen Fläche bestimmenden Parameterlinien x und y gegeben durch die Gleichung

$$\cos\delta = \frac{f}{\sqrt{eg}}. \tag{3}$$

Die Bedingung, dass in jedem Punkte die Parameterlinien sich rechtwinklig schneiden, ist demnach

$$f = 0.$$

Sollen ferner diese Linien gleichzeitig geodätische sein, d. h. das Coordinatensystem (xy) ein orthogonal-geodätisches, so muss noch eine der beiden anderen Fundamentalgrössen der Einheit gleich sein. Im gegebenen Falle erhalten wir nach Gl. (1)

$$e = \cos^2\frac{y}{n_0} \qquad f = 0 \qquad g = 1.$$

Ein beliebiges, vom Punkte (xy) auf der krummen Fläche ausgehendes Linienelement dr ist gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} dr^2 &= da^2 + db^2 + dc^2 \\ &= e\,dx^2 + 2f\cdot dx\,dy + g\cdot dy^2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und das Flächenelement in diesem Punkte

$$d\Omega = \sqrt{eg - f^2}\cdot dx\,dy \tag{5}$$

und schliesslich das Azimut t des Linienelements durch die Gleichung

$$\cos t = \frac{e\cdot dx + f\cdot dy}{\sqrt{e}\cdot dr} \tag{6}$$

Bezeichnet $(x'y')$ ein System rechtwinkliger Coordinaten in der Ebene, so gelten die Gleichungen (2) bis (6) auch für diese, indem hier nur die dritte Coordinate den Werth Null hat. Es wird demnach das Linienelement dr' im Punkte $(x'y')$ gegeben sein durch die Gleichung

$$dr'^2 = e'\cdot dx'^2 + g'\cdot dy'^2 \tag{4*}$$

Da $f' = 0$ nach der Voraussetzung.

Das Flächenelement $d\Omega'$ hat die Form

$$d\Omega' = \sqrt{e'g'}\cdot dx'\,dy' \tag{5*}$$

und das Azimut t' wird gefunden aus der Gleichung

$$\cos t' = \frac{\sqrt{e'}\cdot dx}{dr'} \tag{6*}$$

Es wird demgemäss, wenn der durch die Werthe $x'y'$ bestimmte Punkt in der Ebene als **Bild** des Punktes (xy) auf der krummen Fläche angesehen wird, die lineare Vergrösserung in diesem Punkte gegeben sein durch den Quotienten

*) C. F. Gauss, disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827; Deutsch von A. Wangerin 1889. R. Hoppe, Principien der Flächentheorie, 1876. J. Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen 1888.

$$k^2 = \left(\frac{d\,r'}{d\,r}\right)^2 = \frac{e'\,d\,x'^2 + g'\,d\,y'^2}{e\,d\,x^2 + g\,d\,y^2} \tag{7}$$

und die Flächenvergrösserung durch den Quotienten

$$\varkappa = \frac{d\,\Omega'}{d\,\Omega} = \frac{\sqrt{e'\,g'} \cdot d\,x'\,d\,y'}{\sqrt{e\,g} \cdot d\,x\,d\,y} \tag{8}$$

Bezeichnen noch k_1 und k_2 die beiden extremen Werthe von k, das durch Gl. (7) als Function der Coordinaten bestimmt ist, so erfüllen dieselben die quadratische Gleichung

$$(e\,k^2 - e') \cdot (g\,k^2 - g') = (f\,k^2 - f')^2. \tag{9}$$

Es findet sich dann leicht

$$\frac{\operatorname{tg} t'}{\operatorname{tg} t} = \frac{k_1}{k_2} \tag{10}$$

und die Maximaländerung des Azimuts bei der Abbildung auf die Ebene aus

$$\max \operatorname{tg}(t - t') = \frac{k_2 - k_1}{2\sqrt{k_1\,k_2}} \tag{11}$$

Hinsichtlich der Ableitung vorstehender Formeln müssen wir, um den Raum zu schonen, auf die genannten Schriften verweisen. Doch wollen wir nun die Anwendung machen auf den gegebenen concreten Fall.

I. Abbildung der Punkte der Kugelfläche vom Radius n_0 auf die Ebene mittels congruenter Coordinaten $x'\ y'$.

Wir haben zunächst nach Gl. (1)

$$e = \cos^2 \frac{y}{n_0} \quad , f = 0 \quad , g = 1$$

$$d\,r^2 = \cos^2 \frac{y}{n_0} \cdot d\,x^2 + d\,y^2 = \left(1 - \frac{y^2}{2\,n_0^2} + \frac{y^4}{24\,n_0^4} \dots\right)^2 . \, d\,x^2 + d\,y^2$$

$$d\,\Omega = \cos \frac{y}{n_0} \cdot d\,x\,d\,y = \left(1 - \frac{y^2}{2\,n_0^2} + \frac{y^4}{24\,n_0^4} \dots\right) d\,x\,d\,y$$

Da die rechtwinkligen Coordinaten $x\,y$ in der Ebene unverändert aufgetragen werden, so ist

$$x' = x \qquad y' = y$$

d. h. $\quad e' = g' = 1 \quad , f' = 0$

und

$$d\,r'^2 = d\,x^2 + d\,y^2$$
$$d\Omega' = d\,x \cdot d\,y;$$

folglich das Vergrösserungsverhältniss

$$k^2 = \left(\frac{d\,r'}{d\,r}\right)^2 = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t'}{1 + \operatorname{tg}^2 t' - \frac{y^2}{n_0^2} + \frac{y^4}{3\,n_0^4} \dots} = 1 + \frac{y^2}{n_0^2} \cos^2 t' + R_4,$$

wo die Glieder vierter Ordnung im ungünstigsten Falle, d. h. für $t' = \frac{2\,n - 2}{2} \cdot \pi$ betragen

für $\quad y = \ \ 50$ km $\qquad R_4 = - \ \ 24{,}98 \,.\, 10^{-10}$

$\qquad y = 100$ „ $\qquad R_4 = - 399{,}71 \,.\, 10^{-10}$

so dass also in genügender Näherung

$$k^2 = 1 + \frac{y^2}{n_0^2} \cdot \cos^2 t'. \tag{12}$$

Die Flächenvergrösserung im Punkte $(x\,y)$ ergiebt sich in diesem Falle zu

$$\varkappa' = \frac{dx\,dy}{\cos\frac{y}{n_0}\,dx\,dy} = 1 + \frac{y^2}{2\,n_0^2} + \frac{5\,y^4}{24\,n_0^4} \cdots \tag{13}$$

Ferner berechnen sich noch das Maximum und das Minimum von k, da $k_1^2 = \frac{e'}{e}$, $k_2^2 = \frac{g'}{g}$ zu

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\cos\frac{y}{n_0}} = 1 + \frac{y^2}{2\,n_0^2} + \frac{5\,y^4}{24\,n_0^4} + \cdots \\ k_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

und die Maximaländerung des Azimuts aus

$$\max \operatorname{tg}(t - t') = -\frac{y^2}{4\,n_0^2} - \frac{y^4}{24\,n_0^4} \cdots \tag{15}$$

zu

$$\max(t - t') = -\frac{y^2\,\rho''}{4\,n_0^2} - \frac{n^4\,\rho''}{24\,n_0^4} + \frac{y^6}{192\,n_0^6\,\rho^2} \cdots \tag{15*}$$

$$\rho'' = 206\,265$$

II. Abbildung der Punkte der Kugelfläche auf die Ebene mittels conformer Coordinaten $x_1\,y_1$.

In diesem Falle ist $x_1 = x$, $y_1 = y + \frac{y^3}{6\,n_0^2}$ demnach

$$e_1 = 1 \quad ; \; f_1 = 0 \quad ; \; g_1 = \left(1 + \frac{y^2}{2\,n_0^2}\right)^2$$

und folglich

$$d r_1^2 = dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{2\,n_0^2}\right)^2 \cdot dy^2$$

$$d\,\Omega_1 = \left(1 + \frac{y^2}{2\,n_0^2}\right) dx \cdot dy$$

so dass das Quadrat des Vergrösserungsverhältnisses sich berechnet zu

$$k'^2 = \left(\frac{d r_1}{d r}\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{n_0^2} + \frac{y^4}{4\,n_0^4} + \frac{5\,y^4}{12\,n_0^4} \cos^2 t' \; \ldots$$

oder mit Beschränkung auf die Glieder bis zur zweiten Ordnung einschliesslich

$$k'^2 = 1 + \frac{y^2}{n_0^2} \tag{16}$$

In gleicher Weise ergiebt sich die Flächenvergrösserung

$$\varkappa_1 = \frac{1 + \frac{y^2}{2\,n_0^2}}{1 - \frac{y^2}{2\,n_0^2} + \frac{y^4}{24\,n_0^4}} = 1 + \frac{y^2}{n_0^2} + \frac{11\,y^4}{24\,n_0^4} \ldots \quad (17)$$

Das Maximum und Minimum von k ergiebt sich in derselben Weise wie zuvor

$$\left.\begin{aligned} k'_1 &= k_1 = 1 + \frac{y^2}{2\,n_0^2} + \frac{5\,y^4}{24\,n_0^4} \ldots \\ k'_2 &= 1 + \frac{y^2}{2\,n_0^2} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

also bis auf die Glieder zweiter Ordnung einschliesslich

$$k'_1 = k'_2 = k' = k_1.$$

Schliesslich finden wir noch die Maximaländerung des Azimuts aus

$$\begin{aligned} \max \operatorname{tg}\,(t - t_1) &= -\frac{5\,y^4}{24\,n_0^4}\left(1 + \frac{y^2}{n_0^2} + \frac{11\,y^4}{24\,n_0^4} \ldots\right)^{-1/2} \quad (19) \\ &= -\frac{5\,y^4}{48\,n_0^4} + \frac{5\,y^6}{96\,n_0^6} \ldots \end{aligned}$$

$$\text{zu } \max\,(t - t_1) = -\frac{5\,y^4}{48\,n_0^4}\,\rho'' + \frac{5\,y^6}{95\,n_0^6}\,\rho'' \ldots \quad (19^*)$$

Der Anblick der Gleichungen (12) bis (19) lehrt folgendes: bei der Uebertragung der Punkte der Kugelfläche auf die Ebene mittels congruenter Coordinaten variirt das lineare Vergrösserungsverhältniss k im Punkte (xy) mit dem Azimut in den Grenzen

$$1 \leqq k \leqq 1 + \frac{y^2}{2\,n_0^2}$$

während dasselbe bei Anwendung conformer Coordinaten in der Ebene constant und gleich dem Maximalwerth für congruente Coordinaten ist, unter der Voraussetzung jedoch, dass nur Glieder bis zur zweiten Ordnung in Bezug auf die Reciproke des Kugelradius Berücksichtigung finden. Unter jeder Bedingung ist ferner das Flächenvergrösserungsverhältniss im Punkte (xy) bei der Anwendung conformer Coordinaten grösser als dasjenige für congruente Coordinaten und zwar

$$\varkappa' - \varkappa_1 = -\frac{y^2}{2\,n_0^2} - \frac{y^4}{4\,n_0^4} \ldots$$

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa_1} = 1 - \frac{y^2}{2\,n_0^2} - \frac{y^4}{4\,n_0^4} \ldots$$

Die Gesammtvergrösserung für ein von den Abscissen $x_a\,x_b$ und den Ordinaten $y_a\,y_b$ eingeschlossenes Vermessungsgebiet berechnet sich nach dem vorigen im ersten Falle zu

$$\begin{aligned} \Omega' - \Omega &= \int_{x_a}^{x_b}\int_{y_a}^{y_b} dx\,dy - \int_{x_a}^{x_b}\int_{y_a}^{y_b}\left(1 - \frac{y^2}{2\,n_0^2} + \frac{y^4}{24\,n_0^4} \ldots\right) dx\,dy \quad (20) \\ &= \frac{(x_b - x_a)\,(y_b - y_a)^3}{6\,n_0^2} - \frac{(x_b - x_a)\,(y_b - y_a)^5}{120\,n_0^4} \ldots \end{aligned}$$

und im zweiten Falle zu

$$\Omega_1 - \Omega = \int\limits_{x_a}^{x_b}\int\limits_{y_a}^{y_b}\left(1+\frac{y^2}{2\,n_0^2}\right)dx\,dy - \int\limits_{x_a}^{x_b}\int\limits_{y_a}^{y_b}\left(1-\frac{y^2}{2\,n_0^2}+\frac{y^4}{24\,n_0^4}\ldots\right)dx\,dy \quad (21)$$

$$= \frac{(x_b - x_a)\,(y_b - y_a)^3}{3\,n_0^2} - \frac{(x_b - x_a)\,(y_b - y_a)^5}{120\,n_0^4}$$

Aus vorstehenden beiden Gleichungen folgt noch

$$\Omega_1 - \Omega' = \frac{(x_b - x_a)\,(y_b - y_a)^3}{6\,n_0^2} = \Omega' \cdot \frac{\Delta\,y^2}{6\,n_0^2} \quad (22)$$

Von Wichtigkeit für die Beurtheilung einer Kartenprojection ist noch der Begriff der Gesammtänderung des zur Darstellung gelangenden begrenzten Theiles der Erdoberfläche. Nach dem grundlegenden „mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques par Tissot, Paris 1881“ ist die Gesammtänderung K analytisch gegeben durch die Gleichung

$$K = \int\int\left\{(k_1 - 1)^2 + (k_2 - 1)^2\right\}\sqrt{eg - f^2}\cdot dx\,dy,$$

wo die Integration über das ganze Gebiet zu erstrecken ist.

Im Falle der Abbildung mittels congruenter Coordinaten ergiebt sich demnach die Gesammtänderung

$$K' = \int\limits_{x_a}^{x_b}\int\limits_{y_a}^{y_b}\left(\frac{y^4}{4\,n_0^4}+\frac{5\,y^6}{24\,n_0^6}\cdots\right)dx\,dy$$

$$= (x_b - x_a)\cdot\left(\frac{(y_b - y_a)^5}{20\,n_0^4}+\frac{5\,(y_b - y_a)^7}{168\,n_0^6}\cdots\right) \quad (23)$$

und für conforme Coordinaten

$$K_1 = \int\limits_{x_a}^{x_b}\int\limits_{y_a}^{y_b}\left(\frac{y^4}{2\,n_0^4}+\frac{11\,y^6}{24\,n_0^6}\cdots\right)dx\,dy$$

$$= (x_b - x_a)\left(\frac{(y_b - y_a)^5}{10\,n_0^4}+\frac{11\,(y_b - y_a)^7}{168\,n_0^6}\cdots\right) \quad (24)$$

und aus Gl. (23) und (24) die Differenz

$$K_1 - K' = (x_b - x_a)\left(\frac{(y_b - y_a)^5}{20\,n_0^4}+\frac{(y_b - y_a)^7}{28\,n_0^6}\cdot\cdot\right)$$

und das Verhältniss

$$\frac{K_1}{K'} = 2 + \frac{5\,(y_b - y_b)^2}{42\,n_0^2} - \frac{125\,(y_b - y_a)^4}{1764\,n_0^4}\cdots$$

Die Gesammtverzerrung bei der Anwendung conformer Coordinaten in der Ebene ist demnach über das Doppelte derjenigen bei der Anwendung congruenter Coordinaten.

Um diese Verhältnisse an einem Beispiel zu illustriren, nehmen wir das auf Seite 66 angegebene Vermessungsgebiet, welches wir begrenzt denken von den Abscissen

$x^a = -52000$ m $\qquad\qquad x_b = +68000$ m und den Ordinaten

$$y_a = -32000 \text{ m} \qquad y_b = +24000 \text{ m}.$$

Bei der Abbildung auf die Ebene mittels congruenter Coordinaten erhalten wir den äussersten Werth der linearen Verzerrung für $y = 32000$ m

$$k_1 - 1 = 12{,}537 . 10^{-6} + 0{,}00013 . 10^{-6} \cong \frac{1}{79\,765}$$

$$k_2 - 1 = 0\,;$$

ferner den Maximalbetrag der Aenderung des Azimuts

$$\max(t - t') = -1{,}292\,953'' - 0{,}000\,005''$$

und den Maximalwerth der Flächenvergrösserung

$$\varkappa' - 1 = k_1 - 1 = \frac{1}{79765}.$$

Bei der Abbildung mittels conformer Coordinaten werden die bezüglichen Grössen

$$k'_1 - 1 = k_1 - 1 = \frac{1}{79765}$$

$$k'_2 - 1 = 12{,}537 . 10^{-6} = \frac{1}{79765}$$

$$\max(t - t_1) = -0{,}000\,013''$$

$$\varkappa_1 - 1 = 25{,}074 . 10^{-6} + 0{,}00029 . 10^{-6} = \frac{1}{39882}$$

Ferner berechnet sich nach Gl. (20) und (21) die Gesammtvergrösserung für das in Rede stehende Gebiet zu

$$\Omega' - \Omega = 86002{,}6 - 0{,}3 = 86002 \text{ qm}$$

$$\Omega_1 - \Omega = 172\,005 \text{ qm}$$

und schliesslich die Gesammtänderung nach Tissot

$$K' = 1{,}98119 + 0{,}00009 = 1{,}98128$$

$$K_1 = 3{,}96238 + 0{,}00020 = 3{,}96258$$

also

$$K_1 \cong 2 \cdot K'$$

Berechnet man noch für dieselbe Länge der Hauptachse von 120000 m diejenige Breite des Vermessungsgebietes, bei welcher die Gesammtänderung in Folge der ebenen Abbildung mittels conformer Coordinaten ebenso gross wird wie bei congruenter Abbildung des Gebietes von 56 km Breite, so findet sich

$$y_b - y_a = 48751 \text{ m}$$

und diejenige Breite, bei welcher — ebenfalls conforme Coordinaten in der Ebene vorausgesetzt — die Gesammtflächenvergrösserung gleich derjenigen bei congruenter Abbildung des Gebietes von 56 km ist,

$$y_b - y_a = 44\,447 \text{ m}.$$

d. h. die Anwendung der conformen Coordinaten dürfte sich nur auf

87 % bezw. 79 %

des Gebietes erstrecken, welches der Abbildung mittels congruenter Coordinaten bei gegebener oberer Grenze für die Verzerrungen zugänglich sein würde.

Hier liessen sich noch mehrere Fragen und Untersuchungen anschliessen, u. a. die Frage nach der functionalen Beziehung zwischen den sphärischen rechtwinkligen und den ebenen rechtwinkligen Coordinaten, bei welchen die Gesammtänderung des Vermessungsgebietes auf der Erdoberfläche ein Minimum ist. Jedoch gehen wir jetzt auf diese Fragen nicht näher ein, da uns zunächst nur die Verzerrungen bei der congruenten und der conformen ebenen Darstellung hier interessirten.

Dessau, 24. Februar 1896. *Fr. Schulze.*

Zu den vorstehenden Entwickelungen von Herrn Schulze möchte zuerst die Bemerkung gestattet sein, dass es eine verdienstvolle Arbeit gewesen ist, die vorliegende Frage auch unter das Licht der neueren Kartenprojectionstheorien zu stellen und wenn nun vermöge der nach Tissot 1881 berechneten „Gesammtverzerrung" die conformen Coordinaten mit 21 % der zugänglichen Fläche im Nachtheil erscheinen gegenüber den congruenten Coordinaten, so stimmt das mit meinem früheren Ergebniss von 1875, nämlich 18 % (s. oben S. 196) hinreichend überein.

Aber nun wollen wir auch die Richtungsverzerrungen betrachten, welche Herr Schulze ausgerechnet, aber nicht weiter berücksichtigt hat, nämlich S. 213: für $y = 32000$ m:

$$\text{congruent max } (t - t') = -1{,}292\,953'' - 0{,}000\,005''$$
$$\text{conform max } (t - t_1) = -0{,}000\,013''$$

Da die dabei benützten Tissot'schen Formeln nur in differentialem Sinne gelten, so dass nicht sofort zu ersehen ist, inwiefern sie zur Triangulirungsberechnung geeignet sind, haben wir Vorstehendes nach Triangulirungsformeln nachgerechnet und für $y = 32000$ m, $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = 5000$ m gefunden:

$$\text{congruent } T - t = 1{,}293'' + 0{,}404'' = 1{,}697''$$
$$\text{conform } T - t = 0{,}404''$$

Und damit haben wir endlich ein fassbares Kriterium für die Frage, ob conforme oder congruente Coordinaten in dem fraglichen Gebiete die zweckmässigeren sind. Dass die lineare Verzerrung in beiden Fällen den Maximalwerth 1 : 79 765 oder 12,5 mm auf 1 km hat, entscheidet nichts, dann dass nach Tissot das Verhältniss besteht (S. 212)

$$\frac{K_1}{K'} = 2 + \frac{5 \ldots}{42\, r^2} + \frac{1}{r^4} \cdots$$

und die Procente 87 % und 79 % (S. 213) können praktisch auch nichts Fassbares sagen.

Ob aber in den Abrissen irgend welcher Triangulirungsordnung Beträge von der Grössenordnung $1'' - 2''$ noch mitgenommen werden sollen oder nicht, das giebt eine Handhabe zum Fällen eines Urtheils, das insofern für die conforme und gegen die congruente Projection ausfällt.

In diesem Zusammenhange dürfen auch die zwei Werke des Altmeisters Gauss betrachtet werden, welche scheinbar im Gegensatz zu einander citirt worden sind, nämlich die „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ von 1825 und die conforme Projection der Hannoverschen Landesvermessung aus ungefähr gleicher Zeit. Dass Gauss ganz genau wusste, wie es mit der Flächenverzerrung und mit dem bestellt war, was nun nach Tissot 1881 „Gesammtverzerrung“ benannt wird, daran ist nicht zu zweifeln, und wenn er trotzdem die Conformität einführte, so hat er der geringeren Richtungsverzerrung den Vorzug gegeben, und um den Spuren des Meisters zu folgen, müssen wir es ebenso machen und die von ihm eingeführte Conformität hoch halten.

Endlich möchte ich noch einen Rückblick und einen Vorblick weisen: Im Jahre 1875 glaubte ich ebenso, wie Herr Schulze, dass auf dem Wege $\iint \ldots dx\,dy$ die vorliegende Frage zu entscheiden sei; und es scheint ein geodätisches Entwicklungsgesetz zu sein, dass jeder Geodät in seinen „Lehrjahren“ davon das Heil erwartet. Aber nach Decennien der „Wanderjahre“ klärt sich die Ansicht dahin ab, dass diese Sache an einem ganz anderen praktischen Ende angefasst werden muss.

Wenn abermals zwei Jahrzehnte verflossen sein werden, ums Jahr 1916—1920, wird die Gauss'sche conforme Projection für Katasteraufnahmen ebenso unbestritten als zweckmässigste gelten, wie heute die früher für „unausführbar“ erklärte Gauss'sche Ausgleichung der Katasterdreiecksmessungen. *J.*

Unterricht und Prüfungen.

Nachweisung derjenigen Landmesser, welche die Landmesserprüfung im Herbsttermine 1895 bestanden haben.

Laufende Nr.	Namen	Bezeichnung der Prüfungscommission.
1	Ahlert, Oskar	Poppelsdorf
2	Aldehoff, Anton	Berlin
3	Backe, Franz	Berlin
4	Balzer, Karl Josef Georg Theodor	Poppelsdorf
5	Barth Kurt Johannes Raimund	Poppelsdorf

Laufende Nr.	Namen	Bezeichnung der Prüfungscommission.
6	Baumkamp, Friedrich Wilhelm....	Poppelsdorf
7	Bentzen, Johannes Karl Adolf....	Poppelsdorf
8	Blume, Heinrich August Gerhard...	Poppelsdorf
9	de Boer, Johannes	Poppelsdorf
10	Busch, Karl Hermann Julius........	Berlin
11	Chrisanth, Hermann Josef Ernst....	Poppelsdorf
12	Degenhart, Georg Karl..........	Poppelsdorf
13	Dinges, Adolf....................	Berlin
14	Doinet, Wilhelm Heinrich Ludwig..	Berlin
15	Eisenhart, Max Theodor	Berlin
16	Finke, Anton	Poppelsdorf
17	Franz, Albert Eugen Arthur.......	Berlin
18	Grabert, Wilhelm................	Berlin
19	Haacker, Paul	Berlin
20	Hentschel, Franz Heinrich Augustin	Berlin
21	Hirsch, Bernhard	Berlin
22	Hollmann, Wilhelm Heinrich......	Berlin
23	Hollmann, Alfred Wilhelm Theodor.	Berlin
24	Hundert, Friedrich Wilhelm Richard	Poppelsdorf
25	Klamka, Emanuel..................	Poppelsdorf
26	Klinke, Josef Maximilian	Poppelsdorf
27	Knischewsky, Arthur	Berlin
28	Krause, Max......................	Berlin
29	Kretschmer, Otto Wilhelm Karl....	Poppelsdorf
30	Lange, Paul	Berlin
31	Laschinski, Paul.................	Berlin
32	Leinemann, Gustav Friedrich Wilhelm	Poppelsdorf
33	Liebe, Hugo Ludwig..............	Berlin
34	Linnenbrink, Joseph Friedrich.....	Berlin
35	Ludwig, Johann	Berlin
36	Lüdicke, Karl Georg..............	Berlin
37	Matthäs, Karl..	Berlin
38	Merénsky, Kurt Konrad Alexander Ferdinand......................	Poppelsdorf
39	Meyer, Karl Wilhelm..............	Berlin
40	Müller, Eugen Walter Hans.......	Berlin
41	Oberbeck, Franz Josef	Poppelsdorf
42	Radtke, Albert...................	Berlin
43	Reiter, Matthias Alfred...........	Poppelsdorf

Laufende Nr.	Namen	Bezeichnuug der Prüfungscommission.
44	Roth, Wilhelm	Berlin
45	Sarrie, Heinrich Clemens Theodor	Berlin
46	Schindling, Karl	Poppelsdorf
47	Schmersow, Paul Friedrich Karl	Berlin
48	Schnaase, Paul Conrad	Berlin
49	Schnick, Fritz Gottlieb Theodor	Berlin
50	Schulz, Karl Hugo	Berlin
51	Schuth, Walther	Berlin
52	Staehler, Cornelius Clemens Georg Wilhelm	Poppelsdorf
53	Stein, Anton Maximilian Gustav Heinrich	Berlin
54	Stolle, Georg Konrad Theodor	Poppelsdorf
55	Strauch, Franz	Berlin
56	Suhr, Alfred	Berlin
57	Techmer, Fritz Emil	Berlin
58	Thalheim, Georg	Berlin
59	Uphues, Hermann Josef	Poppelsdorf
60	Wiegmann, Paul	Berlin
61	Wooge, Franz Friedrich Wilhelm	Poppelsdorf

Personalnachrichten.

Geheimrath Professor Dr. Dünkelberg.

Der Geheime Regierungsrath Professor Dr. Dünkelberg, seit 25 Jahren Director der landwirthschaftlichen Akademie zu Poppelsdorf bei Bonn, Ehrenmitglied des Deutschen Geometer-Vereins ist am 1. April d. J. in den wohlverdienten Ruhestand getreten.

Ihm zu Ehren hatten sich am 8 März d. J. die Lehrer der Akademie, zahlreiche frühere Schüler und Freunde, der Rector d. Universität u. A. zu einem Abschiedsmahl in der Lesegesellschaft zu Bonn vereinigt. Die Reihe der Trinksprüche eröffnete der Senior des Lehrercollegiums, Departementsthierarzt Schell. Er gab eine kurze Geschichte der im Jahre 1847 gegründeten Akademie, zu deren Leitung im Jahre 1871 Herr Geheimrath Dünkelberg, der bis dahin als Lehrer an dem landwirthschaftlichen und culturtechnischen Institut zu Hofgeisberg gewirkt hatte, berufen wurde.

Der Redner schilderte den Aufschwung, welchen die Akademie, unter Leitung des Scheidenden, namentlich durch die Einführung der Kulturtechnik und Geodäsie in den Lehrplan genommen, hob die Verdienste hervor, welche sich Herr Geheimrath Dünkelberg nicht nur als Director, sondern auch als hervorragender Docent, sowie durch seine litterarische Thätigkeit erworben habe, und welche von höchster Stelle durch Verleihung hoher in- und ausländischer Orden anerkannt seien. Er schloss mit einem begeistert aufgenommenen dreimaligen Hoch auf den Gefeierten.

Nunmehr ergriff der Herr Professor Koll das Wort zu folgender Ansprache:

Der Deutsche Geometer-Verein, dessen Ehrenmitglied der Herr Geheimrath Dünkelberg seit einer Reihe von Jahren ist, hat diesen Tag nicht vorübergehen lassen wollen, ohne auch seinerseits den Herrn Geheimrath zu begrüssen. Da es keinem Mitgliede der Vorstandschaft möglich war, an der heutigen Feier theilzunehmen, so bin ich beauftragt worden, ihm eine Adresse zu überreichen, welche lautet:

Altenburg, 6. März 1896.

Hochverehrter Herr Geheimer Regierungsrath.

An dem Tage, an welchem Sie von den Lehrern und Schülern der von Ihnen so lange Jahre und mit so grossem Erfolge geleiteten Hochschule Abschied nehmen, ist es auch uns ein Herzensbedürfniss, Ihnen wiederum unsere aufrichtigste Verehrung und Dankbarkeit auszudrücken.

Die Verdienste, welche Sie sich um die Rheinische Landwirthschaftliche Hochschule erworben haben, werden von berufenerer Seite gewürdigt, Ihr Name wird mit der Geschichte derselben für alle Zeiten verknüpft bleiben.

Uns aber geziemt es, am heutigen Tage dessen zu gedenken, was sie für unsern Beruf gethan haben. Sie waren es, der vor 20 Jahren als der Erste den preussischen Landmessern die Pforten der Hochschule öffnete. Dem im Jahre 1876 eröffneten kulturtechnischen Cursus schloss sich im Jahre 1880 der geodätische an, dessen Besuch durch den Erlass vom 4. September 1882 für alle Landmesser obligatorisch gemacht wurde.

Mehr als 1000 preussische Landmesser, welche in den letztverflossenen zwei Dezennien zu Ihren Füssen gesessen, verdanken Ihnen die Grundlage ihrer fachwissenschaftlichen Ausbildung.

Aber auch über die Grenzen des engeren Vaterlandes hinaus, in anderen deutschen Staaten empfinden unsere Berufsgenossen die Wirkung der von ihnen geschaffenen Einrichtungen.

Unser Verein hat seit 6 Jahren die Ehre, Sie, hochverehrter Herr Geheimrath, zu seinen Ehrenmitgliedern zählen zu dürfen. Wir haben keine weiteren Ehrenbezeugungen zu vergeben. Was wären Ihnen auch äussere Ehren? Lassen Sie uns aber hoffen, dass es Ihnen zur Freude gereiche, wenn wir Ihnen hierdurch die Versicherung geben, dass sowohl unsere Vereinsmitglieder, wie unsere übrigen Berufsgenossen Ihnen stets die höchste Verehrung, die innigste Dankbarkeit entgegen bringen werden; gewähren Sie uns die Bitte, uns auch für die Zukunft Ihr Wohlwollen bewahren zu wollen, und lassen Sie uns die Hoffnung aussprechen, dass wir uns dessen noch recht viele Jahre lang erfreuen mögen.

Ew. Hochwohlgeboren dankbar ergebenste
Vorstandschaft des Deutschen Geometer-Vereins
L. Winckel.

An
den Director der Landwirthschaftlichen
Hochschule, Herrn Geheimen Regierungsrath
Professor Dr. Dünkelberg
zu
Poppelsdorf bei Bonn.

Nach Verlesung der Adresse fuhr Herr Professor Koll fort: Ich glaube im Sinne der Vorstandschaft des Deutschen Geometer-Vereins und seiner Mitglieder zu handeln, wenn ich Sie, meine Herren, bitte, mit mir anzuklingen auf das Wohl des Geometers, Herrn Geheimrath Dünkelberg, er lebe hoch! hoch! hoch!

Herr Geheimrath Dünkelberg dankte alsdann in bewegten Worten für die ihm erwiesenen Ehrungen, wies darauf hin, dass im ersten Semester seines Directoriats 30 Schüler zu den Füssen von 16 Lehrern gesessen, dass es langer Jahre und grosser Anstrengungen bedurft habe, die Lücken zu füllen. Die grosse Entwicklung der landwirthschaftlichen Akademie sei nicht möglich gewesen, ohne die Einführung der Kulturtechnik, für welche den damaligen Minister Dr. Friedenthal zu gewinnen ihm gelungen sei. Auch zur Einführung der Geodäsie habe es dann noch wiederholter Bemühungen bedurft. Er erwähnte dann die Beziehungen der landwirthschaftlichen Akademie zur Universität, erkannte dankbar an, dass die erstere bei der letzteren stets die vollste Unterstützung gefunden habe, und weihte sein Glas dem ferneren Zusammenwirken und dem Wohle der beiden wissenschaftlichen Körperschaften.

Der Rector der Universität, Geheimrath Ritter, ging darauf näher auf die engen Wechselbeziehungen zwischen der Akademie und der Universität ein, welchen zufolge die Verdienste der an der Akademie wirkenden Männer auch der Universität zur Ehre gereichten. Er betrachte indessen die Feier nicht als ein Abschiedsfest, hoffe vielmehr noch weitere erspriessliche Wirkungen für die Landwirthschaft von der Thätigkeit des Herrn Dünkelberg als Abgeordneter und schloss mit den besten Wünschen für das fernere Gedeihen der Akademie. Herr Professor Dr. Gieseler feierte dann das Vertrauen, welches der Scheidende den Mitgliedern des Lehrercollegiums stets entgegengebracht habe, hob seine Bemühungen für die Einführung der Maschinenkunde in die landwirthschaftliche Hochschule hervor und schloss mit dem Wunsche, dass er auch ferner mit seinen früheren Mitarbeitern in regem Verkehr bleiben möge, worauf Herr Geheimrath Dünkelberg versicherte, dass ihm dies stets zur Ehre und Genugthuung gereichen werde. Herr Oekonomierath Dr. Eisbein aus Neuwied bezeichnete es als wesentlich Dünkelbergs Verdienst, dass heute in Deutschland mehr als 300 Dampfpflüge in Thätigkeit und der Ertrag der Landwirthschaft in Folge dessen erheblich gesteigert sei.

Während des Mahls traf von den zur Hauptversammlung des Vereins der Landmesser der Kgl. Generalcommission zu Münster Anwesenden folgendes Telegramm ein:

„Die herzlichsten Wünsche für Ihren wohlverdienten Ruhestand senden Ihnen Ihre dankbaren, hier versammelten ehemaligen Schüler".

Folgen die Unterschriften von 26 Landmessern und Kulturtechnikern.

Unterm 12. März d. J. hat der Geheime Regierungsrath Dr. Dünkelberg an die Vorstandschaft das nachstehende Schreiben gerichtet:

Poppelsdorf, den 12. März 1896.

An die Vorstandschaft des Deutschen Geometervereins!

Die ehrende Anerkennung meiner bescheidenen Wirksamkeit für die Vertiefung kulturtechnischer und geodätischer Kenntnisse innerhalb Ihrer Berufsgenossen, welche Sie mir durch das liebenswürdige Schreiben Ihres Herrn Vorsitzenden vom 6. März l. Js. zu meinem Abschiedsessen am 8. d. Mts. zu widmen die Güte hatten, erfüllt mich persönlich mit der Freude und dem Stolze, dass es mir vom Schicksale beschieden gewesen ist, nicht nur dem Einzelnen unter meinen zahlreichen Schülern nützlich zu werden und damit seinen Lebenslauf ebnen zu helfen, sondern dass es mir auch vergönnt war, ehrenwerthen preussischen und ausserdeutschen Landmessern die akademische Carriere zu eröffnen und damit dem Berufsstand selbst die so wohl verdiente öffentliche Anerkennung auf Grund wissenschaftlich vertiefter Ausbildung mit Hilfe meiner Collegen zu sichern.

Möchte es der Akademie Poppelsdorf auch ferner vergönnt sein, die schwer errungene gute Tradition aufrecht zu erhalten zum Heil und Segen unseres preussischen und deutschen Vaterlandes.

Indessen besteht unentwegt in dankbarem Gedenken

der Vorstandschaft ergebenster

Dr. *Dünkelberg,*

Geheimer Regierungsrath.

An

den Vermessungsdirector und Präsidenten

des Deutschen Geometer-Vereins

Herrn L. Winckel

zu

Altenburg.

Wir schliessen diesen Bericht, indem wir Herrn Geheimrath Dünkelberg hiermit auch öffentlich den Dank unserer Berufsgenossen für die in unseren Interessen entwickelte erfolgreiche Thätigkeit aussprechen und den Wunsch hinzufügen, dass es ihm noch lange Jahre vergönnt sein möge, zum Wohle unseres Vaterlandes und auch unseres Standes zu wirken, wozu ihm seine Eigenschaft als Abgeordneter zum preussischen Landtage (für die Kreise Neuwied und Altenkirchen) reiche Gelegenheit bieten dürfte. *L. Winckel.*

Ueber Winkelgrössen und ihre Bezeichnung und damit Zusammenhängendes.

Von **E. Hammer.**

Fortsetzung und Schluss von S. 191.

Die Arithmetik, Algebra, Analysis hat es zunächst ausschliesslich mit „reinen" Zahlen zu thun; ihre „Grössen" sind „unbenannt" (auch von allgemeinen Zahlen spricht man) und 6 bezeichnet eben die „Grösse", die man erhält, wenn man zur Einheit noch 5 mal die Einheit addirt, oder die Grösse drei mit zwei multiplicirt u. s. f. Die allmälige Erweiterung der natürlichen Zahlenreihe durch Einführung der gebrochenen Zahlen (Division); der negativen Zahlen (Subtraction); die Erweiterung der vier Grundoperationen durch Umkehrung (z. B. Wurzelausziehung) wodurch die Irrationalzahlen hereinkommen; die Einführung des Begriffs der veränderlichen Grösse; die Ausbildung und Untersuchung der einzelnen Arten von „Functionen"; die mächtige Erweiterung des Zahlengebiets durch Einführung der complexen Zahl als allgemeiner Zahlform; all das ändert nichts an der Thatsache, dass es sich im ganzen Gebiet der Grössen der Arithmetik zunächst nur um reine Zahlen handelt. Und wenn auch alle Grössen der Arithmetik, wie schliesslich alles in der Welt, relative Zahlen sind, so besteht doch in jener Thatsache ein Gegensatz der „reinen" Mathematik gegen die angewandte Mathematik, ja selbst gegen die Geometrie.

Bei Anwendung der Arithmetik auf die Bedürfnisse des menschlichen Lebens ist mit „benannten" (oder „speciellen") Zahlen zu rechnen und bei der „Anwendung der Algebra auf die Geometrie" kommt das Bedürfniss der geometrischen Deutbarkeit der „Grössen" mit ihren Folgen für die „Dimensionalität" der Ausdrücke u. s. f. hinzu: für log (4 m) sind wir genöthigt ebenfalls 0.60206 zu setzen, obgleich das algebraisch ja gar keinen Sinn hat; und während arithmetisch das Quadrat der Zahl 7 eben die Zahl 49 ist, enthält geometrisch das Quadrat von oder hier „über" 7 Längeneinheiten 49 Quadrateinheiten. Wir wollen uns nicht dabei aufhalten, dass arithmetisch „2 hoch 4" die Zahl 16 giebt, dass aber das Product, das durch 4-malige Multiplication von 2 Längeneinheiten entstanden zu denken wäre, ebensowenig mehr geometrisch deutbar ist, wie z. B. a^{-3}, wenn a eine Anzahl Längeneinheiten vorstellt, und dass schon aus diesem Grund die reine Arithmetik im Vergleich mit der Geometrie als der allgemeinere, voraussetzungsfreiere Theil der Mathematik erscheint: in der That giebt es, nach Voraussetzungen, die aber nicht zu umgehen sind, nur Eine Arithmetik, während bekanntlich Geometrien in sich völlig widerspruchsfrei aufgebaut werden können (Gauss, Lobatschewsky, Riemann u. s. f.), die die s. g. Axiome der Euklidischen Geometrie nicht voraussetzen. Den s. g. Euklidischen Axiomen unserer Geometrie kommt eben kaum mehr Bedeutung zu als die der einfachsten Annahmen, es sind im Grunde Conventionen und die Frage nach der „Richtigkeit" der Euklidischen Geometrie ist schliesslich ebenso müssig wie die, ob ebene rechtwinklige Coordinaten oder andere Coordinaten in der Ebene richtiger seien. Ich will aber nicht zu weit abschweifen, lassen wir die vierte und höhere Dimensionen (die „Raumoide" nach dem unsterblichen Witz Lotze's) und die nichteuklidischen Geometrien; die Euklidischen „Axiome" sind doch für immer die allein für uns in Betracht kommenden.

Ich wollte bei Gelegenheit dieser Nebeneinanderstellung der beiden Theile der Mathematik, der Arithmetik und der Geometrie, vielmehr nur daran erinnern, dass die s. g. goniometrischen Functionen auch gefunden worden wären, wenn sich die ganze Mathematik vollständig im Sinne der Arithmetik, der Analysis und ohne jeden Zusammenhang mit der Geometrie entwickelt hätte oder hätte entwickeln können; jene Functionen hätten dann nur andere Namen erhalten. Mit Untersuchung der unendlichen Potenzreihen wäre man sehr bald auf die Wichtigkeit der für jede beliebige Zahl x convergirenden Reihen

$$S(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

aufmerksam geworden, hätte erkannt, dass sie mit den Exponentialfunctionen

$$S(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad C(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

übereinstimmen, hätte gefunden, dass es periodische Functionen sind, dass der Modulus der Periode gleich der Zahl 2π ist, sodass z. B. $S(x + 2\pi)$ und $S(x)$ identisch sind, wobei π selbst definirt ist durch die unendliche Reihe $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$ oder durch das unendliche Product

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

u. s. f. All das hätte wie gesagt, ganz ohne Rücksicht auf und Zusammenhang mit Geometrie gefunden werden können und müssen, und man hätte dieser merkwürdigen Gruppe von Functionen wohl auch einen besondern Namen gegeben. Allerdings wäre sie für die reine Analysis, auch wenn eine so einfache Integration wie die des rein algebraischen Differentials $\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}$ bereits auf die Umkehrung jener Functionen geführt hätte, definirt z. B. durch

$$A(z) = \frac{z}{1} + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5} + \cdots,$$

nie zu der ausserordentlichen Wichtigkeit gelangt, die sie in Wirklichkeit für die Mathematik, insbesondere für die angewandte Mathematik haben.

Da die geometrische Deutung, die „Darstellung“ gewisser Functionen u. s. f. auf den unmittelbaren Zusammenhang dieser Functionen mit der Kreisgeometrie führt, so spricht man auch in der Analysis von Bögen, von arc sin x, denkt sich unter sin x eigentlich sin arc x, und hat sich nur ein für allemal zu merken, dass hier die Winkel- oder Bogeneinheit eine reine Zahl ist, dass man, was geometrisch als α^0 bezeichnet wird, d. h. als Winkel, dessen Drehungsraum — denn anders als mechanisch lässt sich der „Winkel“ ja doch nicht definiren — zum Drehungsraum des rechten Winkels sich verhält wie α zu 90, in irgend einer wirklichen Gleichung im arithmetischen Sinn, einer Formel der Analysis, einzuführen hat als die Zahl $\frac{\alpha^0}{\rho^0}$, wo ρ^0 die bekannte geometrische Bedeutung hat: Centriwinkel, dessen Bogenlänge in einem beliebigen Kreis gleich der Länge des Halbmessers ist. (Das Zeichen ρ geht bekanntlich auf Gauss zurück, nur benannte er so unser jetziges $\frac{1}{\rho''}$. Legendre u. A. haben für unser jetziges ρ'' geradezu R, oder r (z. B. Hansen) den „Halbmesser in Secunden“: denkt man sich den Kreisquadranten in 90, 90·60, oder 90·60·60 gleiche Theile zerlegt, so ist der Halbmesser rund 57,3, 3438, 206 265 solcher Theile lang). Das Vorstehende wird einen zureichenden Grund dafür ausmachen, warum man aus den Gleichungen

$$\sin(0{,}52359\ldots) = \frac{1}{2} \text{ und } \sin 30^0 = \frac{1}{2} \text{ oder}$$
$$\operatorname{tg}(0{,}78539\ldots) = 1 \text{ und } \operatorname{tg} 45^0 = 1$$

nicht folgern kann $360^0 = 3{,}14159\ldots$, wenn auch diese Folgerung nicht ganz ebenso sinnlos wäre, wie z. B. die Behauptung 7 Kilogramm $= 3{,}14159\ldots$ Wenn Herr Rühs (a. a. O. S. 548), um anzudeuten, dass α, β, γ die Winkel eines ebenen Dreiecks sind, schreiben will $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, so ist das unbedingt zulässig, man hat sich nur die Winkel α, β, γ in dem zweiten der oben genannten Winkelmaasse, dem „analytischen“, „in Halbmessertheilen“ zu denken; und das ist für den Landmesser, d. h. in der Geometrie und Trigonometrie ungewöhnlich und deshalb unnöthig, es ist besser $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ oder 200^g zu schreiben, d. h. α, β, γ in Gradmaass zu denken, in dem man sie misst und mit dem man rechnet: selbst die Goniometrie des „Geometers" ist wesentlich geometrisch, die analytische Goniometrie kommt nur bei wenigen Entwicklungen vor. Von allen denkbaren Winkeltheilungen, auf Theilkreisen, in Zahlentafeln, hätte jetzt jedenfalls die die geringste Aussicht auf allgemeine Annahme, die nach arc eintheilen wollte. Wenn man in Fällen, wie den zuletzt erwähnten, die Doppelgleichung für alte und neue Kreistheilung umgehen will, ist es, statt $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ zu schreiben (was, um das zu wiederholen, nicht sinnlos ist), immer noch besser, z. B. $\alpha + \beta + \gamma = 2\,Q$ oder allenfalls $= 2\,R$ zu schreiben (wie es nach dem Vorgang der elementaren Planimetrie die württembergische Kataster-Vorschrift thut).

Neue Schriften über Vermessungswesen.

Die Fixpunkte des schweizerischen Präcisionsnivellements, herausgegeben durch das Eidgenössische topographische Bureau. 4. Lieferung. Sargans-Rheinegg-Lindau. Altstätten-Gäbris. 1895.

Das preussische Kataster und seine Verbindung mit dem Grundbuch. Ein Beitrag zum deutschen Vermessungs-, Kataster- und Grundbuchwesen von W. Harksen, herzogl. anhalt. Obergeometer und preussischer Landmesser. Mit elf in den Text gedruckten Abbildungen. Dessau 1896. Verlagsbuchhandlung von Paul Baumann, herzogl. anhalt. und sachsen-altenburg. Hofbuchhändler. Preis broschirt 4 Mk.

Sarrazin, O. und *Oberbeck, H.* Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen mit und ohne Uebergangscurven für Eisenbahnen, Strassen und Kanäle. 7. Auflage. Berlin 1896. 12. 10 und 198 pg. mit 19 Abbildungen. Leinenband. 3 Mk.

Karte, Hydrographische, von Nord-Deutschland, 1 : 1 250 000, bearbeitet im Bureau des Wasserausschusses. 2 Blätter in fol. Mit Anlage: Verzeichniss der Pegelstationen, der Regenstationen und des Flächeninhaltes der Stromgebiete. Berlin 1896. 6 Mk. mit auf Leinwand aufgezogener Karte 8 Mk.

Inhalt.

Verlag von Konrad Wittwer Stuttgart. — Druck von Gebrüder Jänecke in Hannover.