

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

Dr. W. Jordan,
Professor in Hannover

und

O. Steppes,
Steuer-Rath in München.

—*—

1896.

Heft 8.

Band XXV.

—> 15. April. <—

Zur photogrammetrischen Praxis;

von Professor Dr. S. Finsterwalder in München.

Um die praktische Anwendung der Photogrammetrie zu fördern, will ich im Folgenden Einiges über meine Erfahrungen auf diesem Gebiete veröffentlichen, meine Ansichten über die Genauigkeit und Bequemlichkeit der Methode aussprechen und daran Vorschläge über instrumentelle Verbesserungen knüpfen. Zuvor gebe ich noch einige flüchtige Notizen über die Vermessung, bei welcher ich hauptsächlich meine Erfahrungen sammelte und auf welche ich mich fortwährend beziehen werde.

In den Sommerferien 1888 und 1889 habe ich gemeinsam mit den Herren Dr. Adolf Blümcke und Dr. Hans Hess eine Aufnahme des Vernagtferners im Oetzthal in Tirol und dessen Vorterrains ausgeführt, um eine sichere Grundlage zum weiteren Studium dieses, durch seine verheerenden Schwankungen berüchtigten Gletschers zu gewinnen. *)

*) Vergl. Aus den Tagesbüchern eines Gletschervermessers. Ztschr. des D. u. Oe. A.-V. 1889 S. 259. Die Vermessung des Vernagtferners I u. II Mittheilungen des D. u. Oe. A.-V. 1888 S. 225 u. 1889 S. 243. Der Stich der Karte des Vernagtferners ist jetzt nahezu vollendet, dieselbe wird mit begleitendem Text demnächst im Verlag des Deutschen und Oesterreichischen Alpenvereins erscheinen. Ich füge eine Liste der theils von mir (*F*), theils von meinen Gefährten Blümcke (*B*), Hess (*H*), Kerschensteiner (*K*), Schunck (*S*) nach einheitlichem Plane ausgeführten Gletscheraufnahmen in den Ostalpen sammt Jahreszahl bei:

1) 1885 Gliederfernerzunge (*F*), 2) 1886 Gepatschfernerzunge (*F, S*), 3) 1886 Suldenfernerzunge (*F, H, S*), 4) 1887 Gepatschfernerzunge Ergänzung (*B, F, H*), 5) 1887 Gliederfernerzunge, 1. Nachmessung (*B, F*), 6) 1888 Vernagtfernerzunge* (*B, K, F*), 7) 1889 Vernagtfirm* (*B, F, H*), 8) 1890 Hochjochfernerzunge (*H, K*), 9) 1890 Suldenfernerzunge, 1. Nachmessung (*B, F*), 10) 1891 Gepatschfernerzunge, 1. Nachmessung (*K*), 11) 1891 Obersulzbachfernerzunge* (*F*), 12) 1892 Alpeinerfernerzunge* (*H*), 13) 1892 Obersulzbachfernerzunge Ergänzung* (*K*), 14) 1892 Gliederfernerzunge, 2. Nachmessung (*B, F*), 15) 1893 Hochjochfirm* (*B, H*), 16) 1893 Vernagtfernerzunge, 1. Nachmessung (*B, H*) 17) 1894 Hintereisfernerzunge und Firm* (*B, H*), 18) 1895 Ergänzung* hierzu (*B, H*), 19) 1895 Vernagtfernerzunge,* 2. Nachmessung (*B, H*), 20) 1895 Suldenfernerzunge,* 2. Nachmessung (*F*). Die mit * bezeichneten Aufnahmen geschahen grossentheils photogrammetrisch.

Es war ein Gebiet von 23 qkm, das zwischen 2100 m und 3700 m und zwar zur Hälfte über 3000 m Seehöhe liegt, im Maasstab 1:10 000 mit 10 m Höhengurven zur Darstellung zu bringen. Nahezu 17 qkm sind vereist — ein weites Firnfeld mit steiler Umrahmung — und von dem Rest — das verlassene Gletscherbett, ein 3 km langer, 500 m breiter und 200 m tiefer Graben — ist ein Drittel infolge Steilheit und Brüchigkeit des Terrains ungangbar, die übrigen zwei Drittel sind Schutt- und Felswüsten. Die nächste Unterkunft, das Hochjochospiz ist mindestens 3 Stunden vom Centrum des Gebietes entfernt. Zwei unpassirbare Bäche zerschneiden das Gebiet in drei Regionen, die nur auf Umwegen von mehreren Stunden, wobei bis zum Ursprung der Bäche an den Gletscherenden emporgestiegen werden muss, von einander erreicht werden können. Von trigonometrischen Punkten der Katastralvermessung findet sich im ganzen Messungsgebiet keiner; auf einer Fläche von 200 qkm sind überhaupt nur vier, welche von den leichter erreichbaren Theilen des Gebietes sichtbar sind, und diese sind Tagereisen von einander entfernt. Ich übergehe die Schwierigkeiten, die uns daraus erwachsen, dass einer von diesen Punkten um ca. 60 m falsch bestimmt war und erwähne nur, dass es uns schliesslich gelang, ein trigonometrisches Netz über das Gebiet zu spannen, das mit den pothenotisch bestimmten Punkten etwa 100 Positionen umfasst, deren Lage im Coordinatensystem des Katasters auf etwa 1 m gesichert ist. Die Höhenunterschiede der trigonometrischen Punkte sind auf Bruchtheile des Meters bestimmt. So hat, z. B. eine empirische Ausgleichung von 29 gemessenen Höhenunterschieden zwischen den 10 Hauptpunkten des Netzes einen m. F. eines einmal gemessenen Höhenunterschiedes von 0,4 m ergeben. Die Detailaufnahme erfolgte im ersten Sommer soviel wie möglich tachymetrisch. Doch war wegen der Steilheit des Geländes weder die erreichte Genauigkeit, noch die Raschheit der Arbeit befriedigend.

Die photogrammetrischen Aufnahmen geschahen mit einem neuconstruirten Apparat, den ich an einem anderen Orte ausführlicher beschrieben habe.*) Hier sei nur erwähnt, dass die Bildweite 162,5 mm, das Format der Platten 160 × 210 mm betrug und dass die übliche Kassetteneinrichtung für's Erste eine Unsicherheit der Bildweite von 0,5 mm zur Folge hatte. Eine eigentliche Winkelmessvorrichtung besass der Apparat nicht; es konnte jedoch die Camera um eine ablesbare Zahl ganzer Grade aus ihrer ursprünglichen Lage im horizontalen Sinn gedreht werden. Die Plattenebene blieb stets vertical. Die Unsicherheit der Bildweite war bei der ersten Campagne 1888 ohne besonderen Belang, da nur auf geringe Entfernungen, meist unter 500 m photographirt wurde. Für die zweite Campagne 1889 liess ich den Apparat mit einer

*) Die Terrainaufnahme mittelst Photogrammetrie. Bayr. Industrie- und Gewerbeblatt 1890.

Vorrichtung versehen, welche nach Oeffnung der Kassette die Platte gegen drei feste Stifte drückte, und erzielte damit eine Constanz der Bildweite innerhalb 0,3 mm (m. F. = 0,1 mm). Da im Firnfeld auf Distanzen bis zu 5000 m photographirt wurde, war dies ein grosser Vortheil. Durch Ausbalancirung war auch der Horizont auf 1—2 Zehntelmillimeter sicher geworden. Das Bildfeld des Apparats betrug in der Horizontalen 60° in der Verticalen $\pm 22 \frac{1}{2}^{\circ}$. Das benutzte Objectiv, ein Landschaftsplanat von Steinheil zeichnete nur bei engster Blende einigermaassen scharf bis zum Rande. Dagegen war die Richtigkeit der Zeichnung tadellos. Im Ganzen wurden von 44 Standpunkten aus etwa 110 Aufnahmen gemacht. Zumeist waren die Standpunkte, falls sie nicht dem trig. Netz angehörten, durch Rückwärtseinschneiden nach trig. Punkten bestimmt. Nur in 5 Fällen wurden auch tachymetrische und photogrammetrische Bestimmungsstücke zur Feststellung des Standpunktes beigezogen. Die photogrammetrische Construction geschah in 1:7500 auf einem Brett von 110×90 cm Grösse. Die Zahl der photogrammetrisch bestimmten Punkte beträgt etwas über 2000; es treffen also durchschnittlich ca. 87 pro qkm. Je nach Complicirtheit und Wichtigkeit des betreffenden Terrainabschnittes schwankt die Zahl zwischen 22 im ebenen Firnfeld und 212 in den zerschnittensten Theilen des Grabens. Die Bestimmung der Horizontalposition der Punkte geschah wömöglich durch den Schnitt von drei oder mehr Strahlen; für die Höhe wurden mindestens zwei, im Durchschnitt 2,8 Werthe in Rechnung gezogen.

I.

Was nun die Genauigkeit photogrammetrischer Bestimmungen betrifft, so giebt es in der Literatur bereits viele Angaben, aber sie beziehen sich zumeist auf die äusserste, unter gegebenen Umständen erreichbare Genauigkeit. Solche Angaben sind nämlich sehr leicht zu gewinnen. Man misst eine grössere Anzahl von Horizontal- und Verticalwinkeln, nach wohldefinierten Punkten photographirt vom gleichen Standpunkt aus mit einem beliebigen photographischen Apparat, dessen Bildebene auf Bruchtheile eines Grades vertical steht, die anvisirten Signale, bestimmt alsdann, sei es aus der gerade nöthigen Zahl von gemessenen Winkeln, sei es aus sämtlichen durch rationelle Ausgleichung die Grösse der Bildweite, sowie die Lage des Hauptpunktes und des Horizontes, und vergleicht schliesslich die überschüssigen gemessenen Winkel mit der photographirten.*) Hat man für die

*) Nach diesem Verfahren hat zuerst Jordan (diese Zeitschr. Bd. V, 1876, Ueber die Verwerthung der Photographie zu geom. Aufnahmen) die Constanten bestimmt und die Fehler ermittelt. Vergleiche die ausführlichen Anweisungen in Koppe's Photogrammetrie oder Bildmesskunst, Weimar 1898. — ?

Photographie günstige Zielpunkte gewählt, mit nicht zu unebenen Platten gearbeitet, kein ganz schlechtes Objectiv benutzt und die Messung auf dem photographischen Negativ sorgfältig, wenn schon ohne besondere Hilfsmittel ausgeführt, so wird man stets eine Genauigkeit erzielen, die bei einer Bildweite von 200—150 mm einem m. F. des photographirten Winkels von 1—2 Bogenminuten entspricht. Bei Anwendung von Spiegelglasplatten, bei Beschränkung auf ein Bildfeld von nur 30°, bei Auswahl besonders günstiger Zielmarken und Verwendung geeigneter Messvorrichtungen lässt sich die Genauigkeit noch um das Vierfache steigern. Allein für die photogrammetrische Praxis ist damit sehr wenig gewonnen. Die Voraussetzungen für die angestrebte Genauigkeit treffen nicht zu, vor allem nicht was die Schärfe der Zielpunkte betrifft. Man hat es da fast ausschliesslich mit signallosen Terrainpunkten zu thun, die überhaupt nur so genau bestimmt sind, als man sie auf mehreren Photographien identificiren kann. Ferner wird man nicht bei jeder Photographie eine Neubestimmung der Constanten vornehmen, sondern sich vielmehr auf die Unveränderlichkeit derselben verlassen müssen. Welche Genauigkeit aber in diesen Fällen erzielt wird, das lässt sich wohl nur durch Discussion der Resultate ausgedehnter, praktischer Aufnahmen mit möglichst vielen Controlmessungen entscheiden. Gerade in diesem Punkte ist indessen die sonst so reiche photogrammetrische Literatur arm an controlirbaren Daten. Die Genauigkeit graphisch ermittelter Horizontalpositionen ist überhaupt sehr schwer objectiv zu beurtheilen. Dagegen geben über die Genauigkeit der rechnerisch bestimmten Höhen die Widersprüche der verschiedenen Einzelbestimmungen sichere Auskunft, aus welcher man dann indirect auf die Verlässlichkeit der Horizontalpositionen schliessen kann. Ich habe über die ersten 2329 Höhenbestimmungen der Vernagtfernervermessung, die von 14 Stationen und 40 verschiedenen Negativen herrühren und sich auf 833 verschiedene Punkte des Firnfeldes beziehen, Buch geführt und die Widersprüche zwischen den schliesslich angenommenen Höhen und den Einzelbestimmungen aufgezeichnet. Als Höhe nahm ich dabei, falls die Einzelbestimmungen infolge verschiedener Entfernung oder Deutlichkeit der Bilder nicht gar zu ungleichwerthig waren, das arithmetische Mittel, im anderen Fall nach Gutdünken eine Zahl, welche ich den besseren Bestimmungen möglichst anpasste. Die sich ergebenden 2329 Widersprüche habe ich in folgender Tabelle mit zwei Eingängen geordnet, einerseits nach ihrer absoluten Grösse und andererseits nach der Entfernung, auf welche die Bestimmung erfolgte. In der letzten mit Summe überschriebenen Verticalreihe der Tabelle sind die Anzahlen aller Widersprüche zwischen 0,0 und 0,4 m u. s. f. zusammengestellt; in der vorletzten Horizontalreihe die Gesamtzahl der Bestimmungen auf Entfernungen zwischen 100 m und 500 m u. s. f.

Anzahl der Widersprüche zwischen bestimmten Grenzen bei Messungen auf bestimmte Entfernungen.

	100 m bis 500 m	600 m bis 1000 m	1100 m bis 1500 m	1600 m bis 2000 m	2100 m bis 2500 m	2600 m bis 3000 m	3100 m bis 3500 m	3600 m bis 4000 m	4100 m bis 4500 m	4600 m bis 5000 m	
	Mittel: 350 m	Mittel: 800 m	Mittel: 1300 m	Mittel: 1800 m	Mittel: 2300 m	Mittel: 2800 m	Mittel: 3300 m	Mittel: 3800 m	Mittel: 4300 m	Mittel: 4800 m	Summe
0,0—0,4 m	25	78	147	144	93	61	32	13	4	1	598
0,5—0,9 m	16	73	123	129	72	56	51	9	5	2	536
1,0—1,4 m	8	60	114	98	76	64	35	10	6	0	471
1,5—1,9 m	2	19	61	66	46	41	46	12	2	5	300
2,0—2,4 m	0	11	27	27	29	29	25	8	1	2	159
2,5—2,9 m	0	2	11	38	19	16	15	6	2	0	109
3,0—3,4 m	0	1	2	10	19	16	15	5	1	0	69
3,5—3,9 m	0	0	5	6	9	5	10	2	2	0	39
4,0—4,4 m	0	0	3	2	3	3	6	4	1	1	23
4,5—5,0 m	0	0	2	1	4	2	4	6	1	5	25
Summe	51	244	495	521	370	293	239	75	25	16	2329
m. F. f. 1000 m	2,54 m	1,64 m	1,23 m	0,98 m	0,90 m	0,75 m	0,75 m	0,78 m	0,62 m	0,78 m	

Zu dieser Zusammenstellung ist Folgendes zu bemerken. Die Berechnung der Höhenunterschiede geschah ausschliesslich mittels eines 250^m langen Rechenschiebers. Da Höhenunterschiede von mehreren Hundert Metern vorkamen, ist der Einfluss der Rechenunschärfe ganz erheblich, doch wäre eine logarithmische Rechnung viel zu zeitraubend gewesen. Auch dem Einfluss der Erdkrümmung und Refraction trug ich nur in unvollkommener Weise dadurch Rechnung, dass ich zur Rectification des Horizontes die Höhe des den zu construirenden Punkten am nächsten gelegenen trigonometrischen Punktes benützte, dessen Depression des Horizontes damit gleichmässig für die benachbarten photogrammetrischen Punkte angewendet wurde.

Um zu einem Mittelwerth des mittleren Fehlers einer Höhenbestimmung zu gelangen, kann man die Summe der Quadrate der Widersprüche: 5752 durch die Zahl der überschüssigen Messungen: 2329 — 833 = 1496 dividiren und die Quadratwurzel aus dem Quotienten ziehen. Man erhält dann 1,96 m. Diese Zahl lässt sich auch als mittlerer Fehler einer Höhenbestimmung auf eine „mittlere Entfernung“ deuten.

Das einfache arithmetische Mittel der Entfernungen ist 2027 m. Es mag für eine Ueberschlagsrechnung das arithmetische Mittel gleich jener „mittleren Entfernung“ gesetzt werden. Es ergibt sich dann, dass der mittlere Fehler einer Höhenbestimmung pro Kilometer ca. 1,0 m beträgt.

Da für 833 Punkte 2329 Bestimmungen vorliegen, so ist ein Punkt durchschnittlich 2,8 mal bestimmt und daher der mittlere Fehler der Höhe eines photogrammetrischen Punktes auf 1,96 m: $\sqrt{2,8} = 1,17$ m zu schätzen.

Eine zunächst auffallende Erscheinung lässt unsere Tabelle noch erkennen, nämlich eine Zunahme der relativen Genauigkeit einer Höhenbestimmung mit der Entfernung. Vertheilt man nämlich die 1496 überschüssigen Messungen proportional auf die für die verschiedenen Entfernungsintervalle überhaupt ausgeführten Messungen, so kann man für jedes Entfernungsintervall einen m. F. einer Höhenbestimmung und daraus einen relativen m. F. pro Kilometer Entfernung rechnen. Das Ergebniss dieser Rechnung steht in der letzten Horizontalreihe der Tabelle. Es ist demnach die relative Genauigkeit einer Höhenbestimmung auf eine Entfernung unter 500 m dreimal geringer als auf eine solche zwischen 2500 bis 5000 m. Die nächstliegende Erklärung wäre wohl die, dass man annimmt, die Höhenunterschiede der photographischen Stationen seien mit einem m. F. von etwa 0,6 m behaftet, der dann hauptsächlich bei den nahen Bestimmungen zur Geltung kommt. Allein dem widerspricht das Resultat der trigonometrischen Messungen, welche einen m. F. von nur 0,25 m zulassen. In der That ist der Grund der Erscheinung ganz subjectiv. Wenn man, wie im vorliegenden Falle, meist auf mehrere Kilometer Entfernung misst, wo schon die Meter anfangen, unsicher zu werden, pflegt man sich bei den vereinzelt nahen Punkten nicht mit den Decimetern zu quälen. Ferner kommen bei den nahen Punkten naturgemäss am häufigsten steile Visirlinien vor und damit Unsicherheit der Identificirung, vermehrter Einfluss des Fehlers der Horizontalposition u. dgl., lauter Umstände, welche nicht rechtfertigen würden, bei der Mittelbildung den nahen Bestimmungen dasjenige Uebergewicht über die fernern einzuräumen, das ihnen theoretisch zukäme.

Aus dem mittleren Fehler einer Höhenbestimmung gleich einem Tausendstel der Entfernung (in Winkelmaass 3') darf man auf eine unter günstigeren Umständen etwa gleich grosse Genauigkeit der Identificirung eines Punktes in horizontaler Richtung auf verschiedenen Photographien schliessen und hat hiernach die Sicherheit der Horizontalpositionen zu veranschlagen. Es geht daraus hervor, dass der mittlere Koordinatenfehler einer aus zwei Strahlen bestimmten Position, jedenfalls grösser als ein Tausendstel des längeren Strahles ist und auch bei drei und vier Strahlen kaum unter ein Tausendstel der mittleren Strahlenlänge sinkt. Damit stimmen die Beobachtungen über die „fehlerzeigenden Figuren“, die auf einen mittleren Koordinatenfehler von einigen Metern hindeuten.

II.

Von nicht minderem Einfluss als die Genauigkeit ist die Bequemlichkeit und Raschheit einer Aufnahmemethode, auf deren praktische Verwendbarkeit. Ueber diesen Punkt sind die Erfahrungen, bezüglich der Photogrammetrie noch spärlicher als über die Genauigkeit. Vor allem sind hier Feldarbeit und Hausarbeit streng zu trennen. Was zunächst die Feldarbeit betrifft, so wird der Vortheil der Photogrammetrie vor allen anderen Messmethoden stets und zwar mit Recht betont. Doch wird er von Solchen, die sich nicht praktisch mit der Messkunst beschäftigt haben, z. B. von Seiten der Geographen vielfach überschätzt. Aufnahmen, welche nicht nach ihrem innern Werth, d. h. nach der Richtigkeit, sondern nach äusseren Merkmalen, nach Reichhaltigkeit des Details, nach Schönheit und Naturtreue der Felszeichnung und nach der Eleganz der Reproduction beurtheilt werden — und in diese Kategorie fallen heutzutage noch alle Hochgebirgsaufnahmen — können von einem routinirten Topographen mit Leichtigkeit in derselben Zeit in 1:25 000 mit dem Messtisch aufgenommen werden, die nöthig ist, um nur die Photographien für eine photogrammetrische Aufnahme in 1:10 000 herzustellen und die Standpunkte einzumessen. Immerhin haben sich die Ansprüche des Publicums in Bezug auf Naturtreue der Felszeichnung schon so gesteigert, dass Topographen, welche auf der Höhe der Zeit stehen, bereits fleissig photographiren, um die Zeit der Feldarbeit abzukürzen. Sie verwenden aber die Photographien nur als Vorlage für die Felszeichnung und befriedigen damit die an sie gestellten Ansprüche vollauf.*)

Zu den Unbequemlichkeiten der Feldarbeit gehört zweifelsohne das grosse Gewicht des photogrammetrischen Apparates, das besonders im Hochgebirge fühlbar wird und sogar häufig zwingt, den Apparat in Theilen getrennt zu transportiren. Bei unserer Vermessung war das Gewicht infolge des grossen Plattenformats und der massiven Bauart besonders gross, nämlich 21,5 kg (leerer Apparat 7,5 kg, 6 gefüllte Doppelcassetten 4,5 kg, Kasten 5,2 kg, Stativ 4,6 kg). Dazu kam, dass der Apparat noch nicht ausreichte die Standpunkte einzumessen, sondern zu diesem Zwecke noch ein Theodolit mitgeführt werden musste, Welches Hinderniss eine solche Last beim Klettern, Stufenschlagen in Eis. Abseilen von Felswänden und Passiren von Firnbrücken bildet, kann nur der richtig ermessen, der sie, wie wir selbst (bei Erkrankung eines Trägers) unter solchen Umständen transportirt hat.

*) In dieser Art ist z. B. das Blatt IV der vom D. und Oe. A.-V. herausgegebenen neuen Oetzthalerkarte (1893) vom Ingenieur S. Simon in Interlaken bearbeitet worden. Im Gegensatz hierzu stehen die wirklichen photogrammetrischen Aufnahmen des K. bayr. topogr. Bureaus im Wettersteingebirge und in einigen Theilen der Allgäuer Alpen. Vergleiche das publicirte Blatt: Zugspitze in 1:10 000.

Unbequem ist ferner der Umstand, dass gewöhnliche Signale, die im Theodolitfernrohr noch auf mehrere Kilometer Entfernung bequem gesehen werden (z. B. Stangen von 2 m Höhe und 7 cm Dicke), auf Photographien höchstens bis 500 m erkennbar sind. Eine Signalisirung für photogrammetrische Zwecke, welche auch nur für 2 km ausreichen würde, liesse sich im Hochgebirge nur mit ganz unverhältnissmässigen Kosten durchführen. Man ist daher genöthigt, möglichst scharfe natürliche Orientirungspunkte einzumessen, deren Brauchbarkeit dann wieder so sehr vom Sonnenstand abhängig ist, dass ihre Bestimmung stets am besten unmittelbar vor oder nach der photographischen Aufnahme geschieht.

Nicht geringe Umstände macht das Entwickeln und Fixiren der Negative im Feldquartier. Ist man seiner Sache sicher, so kann man ja damit bis zum Campagneschluss warten, allein gerade im Hochgebirge wird man sich schwer dazu entschliessen, weil der Verlust einiger Platten bereits die empfindlichsten Lücken in der Construction zur Folge haben kann. Ja nicht einmal das Nachholen der Bilder in späterer Zeit wird hier vollen Ersatz schaffen können, da veränderte Schneebedeckung das Erkennen identischer Punkte sehr erschwert. Wir haben daher in unserem Quartier, einem in 2760 m Höhe errichteten Zelt entwickelt und zwar nach Einbruch der Dunkelheit. Bei der niedrigen Temperatur der Bäder dauerte das Entwickeln und Fixiren von einem Dutzend Platten bis gegen Mitternacht. Wie sehr die Vorsicht des Entwickelns im Felde am Platze ist, zeigte sich bei einer anderen Aufnahme, der ersten, bei der ich das Entwickeln für die Hausarbeit sparte: sämtliche Platten waren infolge eines Präparationsfehlers unbrauchbar. Hingegen habe ich die Erfahrung gemacht, dass trotz des grossen Formats und der unbequemen Ateliereinrichtung Verluste von Glas-Negativen durch Bruch äusserst selten sind. Auch das Gewicht der Platten kommt gegenüber dem Gewicht des Apparates solange nicht sehr in Frage, als es sich nur um einen Tagesbedarf handelt. Nur in dem Falle, wo man Plattenvorrath für längere Zeit zu transportiren hat, könnten die Ersatzmittel für Glas (Films, Glimmer, Celluloid) nennenswerthe Gewichtserleichterung bieten.

Die erwähnten Unbequemlichkeiten, so fühlbar sie manchmal sind, können die oft betonten Vorzüge der Photographie bei der Feldarbeit nicht wesentlich beeinträchtigen, ja sie lassen sich, wie wir später sehen werden, auf ein ganz bescheidenes Maass reduciren.

Weit weniger günstig stehen die Verhältnisse bei der Hausarbeit. Die Nachtheile der Photogrammetrie treten hierbei eigentlich erst hervor, in erster Linie der für die Constructionen nöthige Zeitaufwand. Nach meinen Erfahrungen stellt sich der letztere derart, dass die Bestimmung von 25 Punkten aus je drei Strahlen schon eine sehr schöne Tagesleistung ist. Dabei ist eine Hilfskraft vorausgesetzt, welche die dictirten Ablesungen am Negativ aufschreibt, die Correctionen besorgt, die Resultate der

Schieberrechnung registriert und bei der Addition und Mittelbildung mitrechnet. Die Orientirung der Bildebenen ist dabei nicht mit inbegriffen, auch sind glatte Verhältnisse, also vor allem klare Negative vorausgesetzt. Die Zahl der Fälle, in welchen dabei Missstimmigkeiten in den Proben eine Wiederholung der Messung und Rechnung nöthig machen, darf nicht unter 10 $\frac{0}{0}$ veranschlagt werden. Sind aber die Verhältnisse ungünstig, ist das Terrain unübersichtlich oder sind die Bilder bei schlechter Beleuchtung oder unter sehr verschiedenen Umständen aufgenommen, dann wird man mit der halben angegebenen Leistung immer noch zufrieden sein dürfen. Auf die Richtigkeit der ermittelten Punkte üben ungünstig aufgenommene Bilder sehr wenig Einfluss, viel weniger, als man erwarten sollte, ja nicht einmal die Reichhaltigkeit der Cotirung leidet wesentlich, nur der zum Zusammensuchen und Messen nöthige Zeitaufwand wird grösser.

Wenn der Anfänger an die Photogrammetrie herantritt, hält er gewöhnlich das Aufsuchen zusammengehöriger Punkte für schwierig und bedenklich. Die ersten Schwierigkeiten sind aber durch Uebung bald überwunden und wenn man nur fleissig die zahlreichen Proben benützt, dann schwindet nicht nur die Bedenklichkeit wegen möglicher Irrthümer, es bildet sich vielmehr allmählich eine Fertigkeit im Auffinden zusammengehöriger Punkte aus, die dem Uneingeweihten räthselhaft erscheint. Gerade in diesem Punkt haben sich meine Anschauungen im Laufe der Zeit sehr zu Gunsten der Photogrammetrie modificirt und wenn ich früher die Aufnahme flacher Firnfelder oder unübersichtlichen gewellten Terrains für unthunlich erklärt habe, so stehe ich jetzt nicht an, dieselbe unter günstigen Verhältnissen nicht nur für möglich, sondern sogar für praktisch zu halten.

Zweierlei früher nicht beachtete Punkte haben mich zu diesem Resultate geführt. Gewöhnlich sucht man bei Auswahl der Standpunkte die Mitte zwischen folgenden beiden Extremen zu halten; einerseits grosse Entfernung der Standpunkte, günstige Schnitte in der Construction, aber schwierige unsichere Identificirung auf den Bildern, andererseits kleine Entfernung der Standpunkte, spitze Schnitte, aber bequeme sichere Identificirung und reichliche Dotirung der Karte mit Punkten. In ungünstigem Terrain ist es nun am besten, beide Extreme zu combiniren und zwei weiter auseinanderliegende Paare von benachbarten Stationen zu wählen. Die Bilder eines Paares benachbarter Stationen gewähren die bessere Uebersicht der Terrainformen, die zweier auseinanderliegender Stationen die grössere Genauigkeit der Construction. Die Photogrammetrie verfügt ausserdem über ein Constructionselement, dass die gewöhnlichen Messmethoden zumeist unbenützt lassen, das sind die Conturen der Terrainformen auf den Bildern. Dasselbe ist besonders für flache Formen, z. B. Firnmulden von Bedeutung und hier muss man einige Standpunkte geradezu so wählen, dass diese Conturen möglichst

zahlreich und wohldefinirt auftreten. Auf den Bildern sind sie wegen der verminderten Helligkeit noch dazu weit besser zu erkennen, als in der Natur. Zur Construction der Horizontalcurven werden diese Conturen in folgender Weise verwendet. Jede Contur bestimmt mit dem perspectivischen Centrum des Bildes einen Tangentialkegel an die betreffende Terrainform, dessen Spitze im photographischen Standpunkt liegt. Dieser Kegel wird von der Ebene einer bestimmten Horizontalcurve A nach einer Curve B geschnitten, welche die Curve A in einem Punkte berührt. Hat man nun die Curve B auf dem Plane construirt, so weiss man, dass die Curve A so verläuft, dass sie die Curve B berührt. Die Construction der Curve B , von der man immer nur ein ganz kurzes Stück nöthig hat, geschieht in der Weise, dass man im Plane auf einigen Strahlen durch den Standpunkt Strecken von der Länge $h \operatorname{ctg} \beta$ aufträgt und ihre Endpunkte verbindet. Hierbei bedeutet h den Höhenunterschied des Standpunkts gegenüber der Horizontalcurve A , β den Verticalwinkel nach demjenigen Punkte der Contur, der in der Lothebene des betreffenden Strahles liegt. Da man nicht bloss eine Curve B , sondern gleich eine ganze Serie, zu Horizontalcurven A von verschiedener Höhe gehörig, zeichnen wird, ergeben sich noch einige naheliegende Constructionsvereinfachungen, die darin begründet sind, dass die Curven B als parallele, ebene Schnitte des Tangentialkegels alle ähnlich sind und in Bezug auf den Standpunkt ähnlich liegen. Bei der Vernagtfernervermessung habe ich von dem Hilfsmittel der Conturen in den flach gewellten Firnmulden häufig und mit gutem Erfolg Gebrauch gemacht.

Zur Bequemlichkeit der Hausarbeit (und auch schon der Feldarbeit) trägt die möglichste Verminderung der zur Construction nöthigen Zahl von Negativen bei. Jedes neue Negativ vermehrt die Last der Orintirung und die Möglichkeit der Verwechslung. Diesem Umstand ist bei den meisten photogrammetrischen Apparaten insofern wenig Rechnung getragen, als sie hochgestelltes Plattenformat und ein horizontales Bildfeld von nur 45° — 30° haben. Rücksichten auf constructive Vortheile und die Furcht vor Ungenauigkeiten der Messung infolge von Unschärfe der Bilder und dem vermehrten Einflusse der Unebenheiten der Platten am Rande mögen die Ursache sein. Wie wenig diese Furcht praktisch begründet ist, zeigte sich bei der Construction der Vernagtkarte, wo trotz einem Bildfelde von 60° beim Aneinanderschliessen mehrerer benachbarter Negative die Fehler unter $4'$ blieben.

Besonderer instrumenteller Hilfsmittel zum Ausmessen und Auftragen der Punkte ausser den allgemein üblichen (Stangenzirkel, Metalllineal und Winkel, Millimetermaassstab) habe ich mich nicht bedient, obwohl ich manche versucht habe. Das Ablesen der Maasse am Negativ unter Zuhilfenahme von Schätzmikroskop oder auch nur Lupe hat sich wegen der dazu nöthigen Beleuchtungsrichtungen unpraktisch erwiesen.

Da man stets mindestens 3, häufig aber 6 und noch mehr Negative abwechselnd beim Messen und Zusammensuchen der Punkte braucht, so hätte man eine grössere Anzahl solcher Messvorrichtungen gleichzeitig aufzustellen, was sehr viel Raum beansprucht, den Beobachter zu fortwährendem Hin- und Herlaufen zwingt und doch in den meisten Fällen keinen erheblichen Gewinn an Genauigkeit bringt. Arbeitet man gar bloss mit Papierpositiven, dann ist das Ablesen mit freiem Auge, namentlich wenn letzteres kurzsichtig ist, vollauf ausreichend. So wünschenswerth es wäre, die Rechenarbeit bei den Höhenbestimmungen zu vereinfachen, so glaube ich doch nicht, dass dies möglich ist. Bequemer als mit dem Rechenschieber lassen sich die vierten geometrischen Proportionalen, um die es sich dabei handelt, überhaupt nicht berechnen, weder mit Hilfe graphischer Tabellen, noch mit Instrumenten aus drehbaren und verschiebbaren Scalen nach Art der von Paganini construirten, die fast nur den einen Vortheil besitzen, dass ihr Gebrauch die Theorie der Logarithmen nicht voraussetzt. Ich habe es für sehr praktisch gefunden, für den Nenner in der vierten Proportionale, der bei constanter Bildweite nur von der Abscisse des Bildpunktes abhängig ist, eine Tabelle zu rechnen und ihn daraus zu entnehmen, statt ihn auf dem Plane abzumessen. Es ist dies genauer und weniger anstrengend.

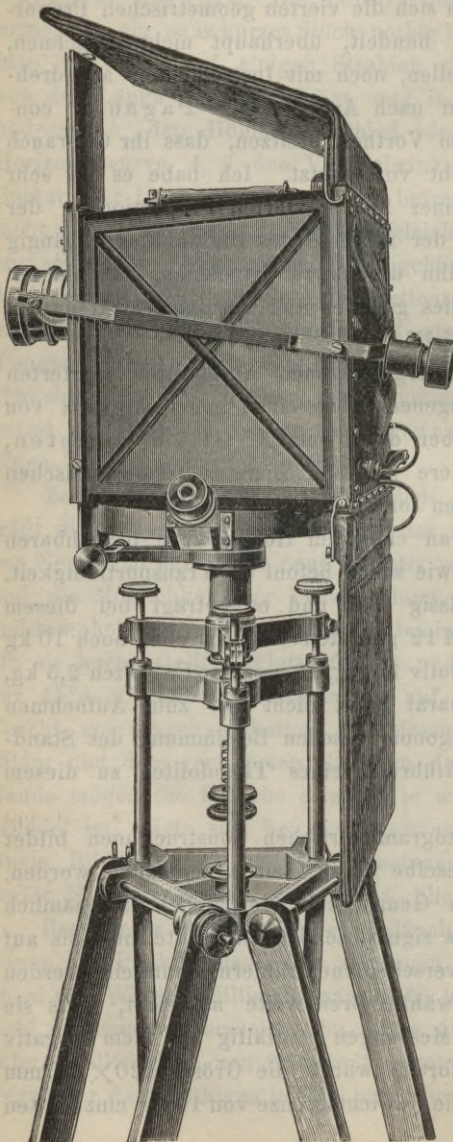
III.

Auf Grund der in den vorhergegangenen Abschnitten erörterten Erfahrungen habe ich im vergangenen Jahre einen neuen Apparat von Herrn Max Ott, nunmehr Inhaber der Firma A. Ott in Kempten, bauen lassen, der wie der frühere in erster Linie zu topographischen Aufnahmen im Hochgebirge dienen soll.

Eine Hauptbedingung, die an einen im Hochgebirge brauchbaren Apparat gestellt werden muss, ist wie schon betont die Transportfähigkeit. Sein Gewicht darf also nur mässig sein, und es beträgt bei diesem Apparat sammt Stativ, Kasten und 12 gefüllten Cassetten eben noch 10 kg (Apparat 2,7 kg, Kasten 2,4 kg, Stativ 1,7 kg, 12 gefüllte Cassetten 2,5 kg, Kasten dazu 0,7 kg). Der Apparat dient nicht nur zum Aufnehmen der Bilder, sondern auch zur trigonometrischen Bestimmung des Standpunktes und macht also die Mitführung eines Theodoliten zu diesem Zwecke entbehrlich.

Die Grundlage für die photogrammetrischen Constructionen bildet die Brennweite des Objectivs; dieselbe ist so klein angenommen worden, als es mit der zu erreichenden Genauigkeit verträglich ist, nämlich gleich 150 mm. Wir sahen, dass signallose Terrainpunkte nur bis auf einige Bogenminuten genau auf verschiedenen Bildern identificirt werden können, und dass dazu die gewählte Brennweite ausreicht, falls sie genügend constant ist, und die Messungen sorgfältig auf dem Negativ vorgenommen werden. Als Bildformat wurde die Grösse 120×160 mm bevorzugt, einmal, weil nur dann die Gewichtsgrenze von 10 kg einzuhalten

war, und weil damit immer noch ein nutzbares Gesichtsfeld in der Horizontalen von 53° , gleich dem siebenten Theil des Kreisumfangs, erzielt wird. Bei mittlerer Stellung des Objectivs beträgt das verticale Gesichtsfeld dann zwar nur $\pm 20^{\circ}$, was für Hochgebirgsaufnahmen zu wenig wäre, hingegen ist durch weitgehende Verschiebung des Objectivs in verticaler Richtung dafür gesorgt, dass beispielsweise bei 5° Höhenwinkel noch 33° Tiefenwinkel (und umgekehrt) zur photographischen Abbildung gelangen können. Sollte, was nur ausnahmsweise vorkommen dürfte, ein Object nach unten sowohl als nach oben 33° Ausdehnung haben, so wäre es immer noch auf 2 Platten, von denen die eine bei



tiefster, die andere bei höchster Stellung des Objectivs exponirt würde, abbildbar. Auf diese Weise vermeidet man nicht nur die Anwendung schiefer Bildebenen, sondern auch jeden Ueberfluss an Constructions- und Orientirungselementen, welcher bei dem sonst beliebten hochgestellten Bildformat in Folge des geringen horizontalen Gesichtsfeldes auftritt. Mittels des verstellbaren Horizontes erzielt man ferner eine viel bessere Ausnützung des Plattenformates und damit indirect wieder eine Verringerung des mitzuführenden Plattengewichtes.

Es zeigte sich, dass ein horizontales Gesichtsfeld von selbst über 60° keinerlei Unzuverlässigkeit bei der Construction bietet. Freilich muss das Objectiv von entsprechender Güte sein und bei 150 mm Brennweite eine Fläche von 160×200 mm scharf auszeichnen. Doppelanastigmaten von Görz und Anastigmaten von Zeiss leisten dies bei starker Ablendung wirklich.

Um bei der kleinen Brennweite von 150 mm die nöthige Genauigkeit zu erzielen, muss der Abstand von Objectiv und Platten-

ebene sehr constant sein. Dies wird in erster Linie erreicht durch eine starre Verbindung der Objectivschlittenführung mit dem Auflagerahmen der lichtempfindlichen Platte. Die weiteren Einrichtungen an photogrammetrischen Apparaten, um bei Benutzung gewöhnlicher Doppelcassetten die Constanz des Bildabstandes zu erreichen, entsprachen aus verschiedenen Gründen nicht, und so wurde zu dem Dr. Neuhauß'schen System der Ledersäcke gegriffen, bei welchem die Cassetten garnicht in den Apparat gelangen und die Platte stets an denselben festen Metallrahmen zu liegen kommt, der hier zur Festlegung des Horizontes und der Hauptverticalen eine Theilung trägt. Die Ledersäcke mussten, um ein erschütterungsfreies Laden des Apparates zu erreichen, mit Metalleinsätzen und genau auf den Einfallschlitz des Apparates passenden Schnauzen versehen werden. Damit die einfallende Platte beim Aufstossen keinen Schaden nimmt, wird sie vorher durch Federn gebremst. Erst wenn dieselben durch Ziehen an einem rückwärts stehenden Griff einen Moment gelüftet werden, kommt die Platte in die definitive Lage und wird dort durch die wieder andrückenden Federn festgehalten. Ein Ziehen an einem zweiten Griff entfernt nach der Exposition die Unterlage der Platte und letztere fällt in den darunter hängenden Ledersack. Die durch die Platte und die Ledersäcke bewirkte einseitige Belastung des in leerem Zustand ausbalanzirten Apparates ist sehr gering und hat keine an den Photographien merkbare Verschiebung des Horizontes (etwa $\frac{1}{2}'$) zur Folge.

Damit der Apparat auch zum Winkelmessen dienen kann, ist auf dessen Rückseite ein verschliessbares Ocular angebracht, welches mit dem photographischen Objectiv ein Fernrohr von 7- bis 8facher Vergrößerung bildet. *) Da das Objectiv vertical innerhalb weiter Grenzen (100 mm) verschiebbar ist, so kann man nicht nur Objecte in der Horizontalen anvisiren, sondern auch solche, die bis zu 17° unter oder über dem Horizont gelegen sind. Freilich würde bei feststehendem Ocular die Deutlichkeit der Bilder in grösseren Verticalwinkeln rasch abnehmen, sodass das Pointiren immer unsicherer würde; man kann diesen Uebelstand aber fast ganz vermeiden, wenn man das Ocular um eine horizontale Achse drehbar macht und stets gegen das Centrum des Objectives richtet. An dem Apparate geschieht dies mechanisch mit Hilfe eines Hebels, und die erzielten Bilder sind bei den möglichen Stellungen des Objectivs gleich gut. Kommt ein Görz'sches Objectiv zur Anwendung, so ist bei verschiedenen Elevationen, dank der ausgezeichneten Ebnung des Bildfeldes und dem Fehlen des Astigmatismus,

*) Die Verbindung von photographischem und Fernrohrobjectiv geht auf Paganini zurück, der sie 1889 zuerst ausführen liess; er musste aber die Camera neigen, um Punkte ausserhalb des Horizontes anzuvisiren. Vergl. *Nuovi Appunti di Fototopografia*. Rivista Marittima. Giugno e luglio 1889 e marzo 1894.

eine Verschiebung des Oculars in Richtung seiner Achse kaum erforderlich. Auch bei anderen guten Objectiven beträgt dieselbe nur 1 bis 2 mm. Der Verticalwinkel eines pointirten Objects kann zwar nicht direct abgelesen werden, wohl aber eine seiner trig. Tangente proportionale Grösse an der Verschiebung des Objectivschlittens. Die Verschiebung geschieht mittels Trieb und Zahnstange; sie kann an einem Nonius auf 0,05 mm bestimmt werden. Die erreichte Genauigkeit der Verticalwinkel, in Winkelmaass umgerechnet, hat sich aus vielen Versuchen zu 1 Bogenminute ergeben.

Zur Messung der Horizontalwinkel ist ein verdeckter Limbus von 120 mm Durchmesser mit zwei gegenüberstehenden Nonien, die eine Minute abzulesen gestatten, angeordnet. Vielfache Versuche beweisen indess die erheblich grössere Genauigkeit von 0,4' eines einmal gemessenen Winkels auch dann, wenn die pointirten Objecte in sehr verschiedener Höhe über dem Horizont liegen. Die Leistungen des Apparates als Theodolit sind also durchaus genügend, um die Instrumentenstände nach den trigonometrischen Fixpunkten, falls diese innerhalb der Tragweite des Fernrohres liegen, zu bestimmen.*)

Das Stativ zeigt eine in der Anwendung der Ledersäcke an Stelle der Cassetten begründete Eigenthümlichkeit. Es ist dies ein auf der unteren Stativplatte sich erhebender 100 mm hoher Aufsatz, auf den das Instrument gestellt wird, und welcher das freie Herabhängen des Ledersackes, der nach der Exposition die Platte aufnehmen soll, ermöglicht. Ausserdem sind die Stativbeine zum Verkürzen auf die halbe Länge eingerichtet. Versuche haben gezeigt, dass diese Anordnungen keinerlei schädlichen Einfluss auf die Winkelmessung ausüben.

Da bei dem Apparat eine Visirscheibe nicht leicht angebracht werden kann, ist ein Sucher beigegeben, welcher für verschiedene Stellungen des Objectivs das jeweils beherrschte Gesichtsfeld zu bemessen gestattet.

Die Verpackung des Apparates und der Ledersäcke ist mit besonderer Sorgfalt ausgeführt und der Sicherheit des Transportes wie der Schnelligkeit der Aufstellung möglichst Rechnung getragen worden. Sie hat sich bei einer in diesem Jahre ausgeführten Hochgebirgstour, bei welcher das Instrument im Verlaufe von 11 Tagen etwa 12 000 m im Aufstieg und ebensoviel im Abstieg auf dem Rücken eines Trägers zurücklegte, durchaus bewährt.

*) Die Prüfung und Rectification eines solchen photogrammetrischen Apparates ist ebenso interessant für den, der sie auszuführen hat, als langweilig für den, der sie nur auf dem Papiere verfolgt. Mit Berücksichtigung der Winke in Koppe's Lehrbuch der Bildmessenkunst wird sich Jeder im praktischen Falle zurecht finden. Im Felde hat nur die Rectification des Horizontes Bedeutung, die sich mit irdischen Zielpunkten und einem künstlichen Wasserhorizont bequem und genau genug ausführen lässt.

Wenn schon der Apparat zunächst für Gebirgsaufnahmen in grösserem Maassstabe (1:10 000 bis 1:2500) gebaut wurde, so ist er doch in Folge seines grossen Gesichtsfeldes und der Verstellbarkeit des Horizontes auch für Architekturaufnahmen so vorzüglich geeignet, als es ein Apparat mit einer Brennweite und einem Plattenformat nur sein kann. So ist man damit z. B. im Stande, noch aus 22 m Entfernung eine 15 m hohe Hausfront von der Strasse aus aufzunehmen und daraus alle Maasse auf einige Centimeter genau zu bestimmen. Es müsste hierbei allerdings dem Umstande Rechnung getragen werden, dass die photographische Aufnahme um etwa 8 cm excentrisch gegenüber der Instrumentachse erfolgt. Diese Grösse, welche bei topographischen Aufnahmen vernachlässigt wird, kann aber im Maassstabe einer Architekturaufnahme ohne Schwierigkeit Berücksichtigung finden.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass die Construction des Apparats, welche sich in dem gewählten Format durchaus bewährt hat, keineswegs ohne Weiteres in erheblich grösseren Dimensionen mit denselben Vortheilen ausgeführt werden kann. Wollte man z. B. um die Genauigkeit aufs Doppelte zu treiben, den Apparat in doppelten Dimensionen ausführen, so hätte man ausser der Verachtfachung des Gewichts auch noch den Nachtheil in Kauf zu nehmen, dass, wie aus der Elasticitätstheorie folgt, alle elastischen Deformationen und deren Nachwirkungen im vierfachen Verhältniss wachsen. Ist beispielsweise bei dem gegenwärtigen Apparat die Unsicherheit des Horizontes infolge der Nachwirkungen elastischer Deformationen beim Transport etc. 0,025 mm der bei 150 mm Bildweite 30'', so wäre sie beim doppelt so grossen Apparat bereits 0,1 mm oder trotz der doppelten Bildweite von 300 mm gleich 60''. Man müsste, um den Apparat von doppelter Bildweite in Bezug auf Unveränderlichkeit der Constanten in gleicher Güte herzustellen, wohl schon zu neuen Constructionsprincipien greifen. Als solche würden sich empfehlen: Horizontallage der lichtempfindlichen Platte und Vorsetzung eines totalreflectirenden Prismas vor das Objectiv. Auf diesem Wege erzielt man die weitgehendste Entlastung der Drehachsen, da man bei der Aufnahme verschiedener Bilder nur mehr das vorgesezte Prisma zu drehen braucht. Freilich wäre der Nachtheil verkehrter Bilder und die Unthunlichkeit der Verbindung von Fernrohr-objectiv und photographischem Objectiv damit verbunden. Meiner Meinung nach hat es aber noch gute Wege mit der Verwendung solch exacter Apparate in der Hochgebirgstopographie. Ihr Vortheil ein Aufnehmen auf grössere Entfernungen zu gestatten, kommt gegenüber den Nachtheilen schon deswegen nicht besonders in Betracht, weil das Aufnehmen eines Gebirges aus grösserer Entfernung wegen Mangel an Einblick in die Falten desselben überhaupt nicht möglich ist. Es wird eben nicht durch die Leistungsfähigkeit des Objectivs die Entfernung bestimmt, auf die man aufzunehmen hat, sondern durch die Grösse

der Hohlformen des Gebirgs, in die man sich hinein zu begeben hat, um sie zu übersehen. Nun hat aber die Vernagtfernervermessung den Beweis erbracht, dass ein Objectiv von 160 mm zu Aufnahme in 1:10000 eines der grössten Kahre (der Mulde des Vernagtferners) ausreicht. Für kleinere Formen, welche in der Regel vorkommen, ist dies umsomehr der Fall und es liegt daher kein zwingender Grund vor, zu topographischen Zwecken umfangreichere und schwerfälligere Apparate zu verwenden. Viel eher noch möchte sich die Mitnahme eines ganz kleinen Apparates von 50 mm Brennweite und 90° Bildfeld in Verbindung mit einer Bussole zur Aufnahme versteckter kleiner Terrainwinkel empfehlen.

Berechnung einer geodätischen Linie aus geographischen Coordinaten und conformen, ebenen Coordinaten;

von R. Vogeler, Kammer-Ingenieur.

Die im V. Theile der Mecklenburgischen Landesvermessung im Jahre 1895 veröffentlichten Theorien der conformen Kegelprojection sind durch die neusten von Professor Jordan ausgeführten Entwicklungen, die auf S. 129—143 dieser Zeitschrift mitgetheilt wurden, in Bezug auf die Reduction der Richtungen und Entfernungen wesentlich erweitert worden.

Als Mitherausgeber des oben erwähnten Werkes haben wir mit grossem Interesse die mit den einfachsten Hilfsmitteln der höheren Analysis durchgeführten Entwicklungen verfolgt. Es hat sich uns hierbei die Frage aufgedrängt, welchen Einfluss jene Glieder 4. Potenz wohl auf die Richtung und Entfernung einer längeren geodätischen Linie haben werden, und ob diese Glieder für ein Land von der Ausdehnung der beiden Grossherzogthümer Mecklenburg überhaupt eine praktische Bedeutung haben können. Um diese Fragen zu beantworten, haben wir eine Diagonale über das ganze Coordinatennetz von Mecklenburg von Südwesten nach Nordosten zunächst aus φ und λ und dann aus x und y gerechnet. Die Berechnungen haben wir mit dem „Thesaurus logarithmorum completus“ von Vega mit strengster Berücksichtigung der 2. Differenzen der 10stelligen Logarithmen durchgeführt, und um alle Rechenfehler und Irrthümer völlig auszuschliessen, hat mein College Mauck in Schwerin die ganze Berechnung unabhängig ausgeführt.

Wir theilen nun für die Leser die Resultate jener Berechnungen hier soweit mit, als nöthig ist, um sie stufenweise durch Nachrechnung prüfen zu können.

Wir haben im Norden des Mecklenburgischen Netzes $\varphi_1 = 54^\circ 30'$ (1)
im Süden $\varphi_2 = 53^\circ 0'$ (1)
 $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi = 53^\circ 45'$
2

Dieser Parallelkreis φ ist zugleich der Normalparallelkreis. Wir haben ferner eine Ausdehnung des Landes von $2^{\circ} 30'$ östlich und 1° westlich von Schwerin, hierüber etwas hinaus liegen nur einige preussische Anschlusspunkte. Wir haben also $\lambda_1 = -2^{\circ} 30'$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &= +1^{\circ} \\ l &= 3^{\circ} 30' = 12600'' \\ \text{und } \varphi_1 - \varphi_2 &= b = 1^{\circ} 30' = 5400'' \end{aligned} \right\} (2)$$

Wir rechnen, da die bequemen Mittelbreiten-Formeln von Jordan, § 79 des III. Bandes seiner Vermessungskunde vom Jahre 1890, wegen der Länge der geodätischen Linie nicht ausreichend sind, nach den Formeln des § 83 desselben Bandes. Wir sehen aus den auf S. 419 daselbst mitgetheilten Tafeln und an dem auf S. 420 durchgeführten Beispiel „Berlin-Königsberg“, dass für den vorliegenden Fall die Glieder 5. Ordnung überhaupt keine nennenswerthen Beträge mehr bringen können, daher können wir nach den Formeln (21) und (22) S. 417 rechnen. Wir erhalten:

$$\log V = 0.0005095577$$

$$\log(\lambda_1) = 6,17995 \text{ n} \quad \log(\lambda_2) = 5.66284 \text{ n}$$

Wir erhalten das Hauptglied $12614,79225''$ und die beiden Correctionsglieder -0.005567 $-0.01156''$
 -0.005993

$$\lambda = 12614,78069'' = 3^{\circ} 30' 14,78069'' (3)$$

Nun rechnen wir die reducirten Breiten zu (1) und erhalten

$$\psi_1 = 54^{\circ} 24' 33,31059'' \quad \text{und} \quad \psi_2 = 52^{\circ} 54' 27,89895'' (4)$$

Lösen wir das durch (3) und (4) bestimmte sphärische Dreieck auf, so erhalten wir:

$$\log \tan \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 0,1409580199, \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 54^{\circ} 8' 20,77402''$$

$$\text{„} \sin \frac{\sigma}{2} = 8.3493944043, \quad \frac{\sigma}{2} = 1^{\circ} 16' 51.64343''$$

$$\text{„} \tan \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = 8.3916624132, \quad \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = 1^{\circ} 24' 41,59056''$$

$$\text{„} \cos \frac{\sigma}{2} = 9.9998914446$$

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 54^{\circ} 8' 20,77402''$$

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = 1^{\circ} 24' 41,59056''$$

$$(1.2) = 52^{\circ} 43' 39,18346''$$

$$(2.1) = 55^{\circ} 33' 2,36458''$$

} (5)

Nehmen wir zu (5) die Meridianconvergenzen $\lambda' = \lambda \sin P$ für $+1^{\circ}$ und $-2^{\circ} 30'$ hinzu, so erhalten wir die Richtungswinkel

$$(1.2) = 52^{\circ} 43' 39,1835'' \quad (2.1) = 55^{\circ} 33' 2,3646''$$

$$\lambda' = +1^{\circ} = 0^{\circ} 48' 23,2006 \quad \lambda' = -2^{\circ} 30' = 2^{\circ} 0' 58,0014$$

$$= 53^{\circ} 32' 2,3841'' \quad (2.1) = 53^{\circ} 32' 4,3632''$$

Süd über West $+180^{\circ}$

$$(1.2) = 233^{\circ} 32' 2,3841'' \quad (2.1) = 53^{\circ} 32' 4,3632'' (6)$$

Für die Berechnung der Länge der geodätischen Linie haben wir oben

$$\frac{\sigma}{2} = 1^{\circ} 16' 51.64343, \text{ daher } \sigma = 9223,28686''.$$

Man erhält $\log U = 8.5102912 \cdot 272$

$$\text{und } (\sigma_1) = 5.27969 \text{ log } (\sigma_2) = 5.66292_n$$

Diese $\log (\sigma_1)$ und $\log (\sigma_2)$, sowie $\log (\lambda_1)$ und (λ_2) haben wir nicht aus den Tafeln Seite [44] und [45] des Anhangs von Jordan, Band III, entnommen, sondern berechnet. *)

Man erhält das Hauptglied $\log s = 5.4545944.890$

und die Correctionsglieder — 241

$$+ 2.063$$

$$+ 1.822$$

$$+ 1.822$$

$$\log s = 5.4545946.712$$

$$s = 284835,8642 \text{ Meter.}$$

} (7)

Nun führen wir die Berechnung nach den conformen, ebenen Coordinaten aus. Wir finden für die Endpunkte der geodätischen Linie auf Seite 20 und 21 der Mecklenb. Landes-Vermessung, V. Theil folgende Coordinaten:

$$y_1 = + 67129,7368$$

$$x_1 = + 82986,8632$$

$$y_2 = - 161922,5986$$

$$x_2 = - 86318,9409$$

$$\Delta y = + 229052,3354$$

$$\Delta x = + 169305,8041$$

$$\log \Delta y = 5.3599347 \cdot 242$$

$$\log \Delta x = 5.3599347 \cdot 242$$

$$n \Delta x = 5.2286718 \cdot 467$$

$$n \sin = 9.9053455 \cdot 181$$

$$n \text{ tang} = 0.1312628 \cdot 775$$

$$n s = 5.4545892 \cdot 061$$

$$(2.1) = 53^{\circ} 31' 47,11544''$$

$$\log \Delta x = 5.2286718 \cdot 467$$

$$(1.2) = 233^{\circ} 31' 47,11544''$$

$$n \cos = 9.7740826 \cdot 406$$

$$n s = 5.4545892 \cdot 061$$

$$284832,2799 \text{ Meter.}$$

} (8)

Wir führen nun die Reduction von der Ebene auf das Ellipsoid aus und zwar zunächst für die Richtungswinkel. Wir benutzen hierzu für die Glieder 2. und 3. Ordnung die Formel (28) Seite 133 dieser Zeitschrift, aber mit sphäroidischen Ergänzungen nach (6) Seite 34 des V. Theils der Mecklenb. Landesverm. Man findet beispielsweise für das 3. Glied, welches in Formel (28) lautet:

$$- \frac{t \rho}{12 r^3} (2x_1^2 + x_2^2) (y_2 - y_1)$$

$$\text{dann } - \frac{t \rho}{12 r^3 V} (1 - 4 \gamma^2) (2x_1^2 + x_2^2) (y_2 - y_1)$$

*) Auf Seite [44] im Band III von Jordan muss für $\log \sigma_1$ in der Haupttafel von $46^{\circ} - 55^{\circ}$ das „n“ (negativ) wegfallen und bei 54° muss der \log heißen 5,29206, was beides übrigens auf der unteren besonderen Tafel für $\log \sigma_1$ richtig steht.

Die numerische Ausrechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \log \rho &= 5.314\,425 \quad (1 - 4\tau_1^2) = 0.990\,603 \\ n \quad t &= 0.134\,760 \\ \text{cpl } \log 12 &= 8.920\,819 \\ n \quad n \quad r^3 &= 9.584\,818 \\ n \quad n \quad V &= 9.999\,490 \\ \log(1 - 4\tau_1^2) &= 9.995\,900 \\ \hline &[3.950\,212] \quad (2x_1^2 + x_2^2)(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise sind die übrigen Coefficientenlogarithmen berechnet. Man erhält:

$$\delta_1 = [0.9261525](2x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + [3.95431](2y_1^2 + y_2^2)(y_2 - y_1) - [3.95021](2x_1^2 + x_2^2)(y_2 - y_1) - [4.25534](2xy_1 + x_2y_2)(x_2 - x_1)$$

Für δ_2 hat man nur x_2 statt x_1 und y_2 statt y_1 zu setzen.

Die Ausrechnung ergibt für

$$\left. \begin{aligned} (1.2) \text{ in } (8) &= 15,39\,214'' - 0,72\,640'' + 0,43\,350'' + 0,76\,562'' \\ &= -14,91\,943'' \\ (2.1) \text{ in } (8) &= 17,32\,377'' + 1,17\,407'' - 0,44\,501'' - 1,02\,183'' \\ &= -17,61\,654'' \end{aligned} \right\} (9)$$

Nehmen wir (8) und (9) zusammen, so erhält man, da für die Reduction von der Ebene aufs Ellipsoid die Vorzeichen umzukehren sind

$$\left. \begin{aligned} (1.2) &= 23^\circ 31' 47,11\,544 & (2.1) &= 53^\circ 31' 47,11\,544'' \\ &+ 14,91\,943 & &+ 17,61\,654 \\ \hline &233^\circ 32' 2,03\,487 & &53^\circ 32' 4,73\,198 \\ \text{Aus } \varphi \text{ u. } \lambda &= 233 \quad 32 \quad 2,3\,841 & &53 \quad 32 \quad 4,3\,632 \\ \hline \text{Fehler:} &= -0,3\,492 & &+ 0,3\,688 \end{aligned} \right\} (10)$$

Man sieht, dass für die 284 km lange Seite durch die Reductionsformeln, wie sie die Mecklenb. Veröffentlichung giebt, nur Fehler von 0,35'' übrig bleiben.

Für die weitere Reduction rechnen wir nur noch sphärisch.

Zunächst haben wir das Glied 3. Ordnung

$$+ \frac{t}{24r^3} (y_2 - y_1) \left(-(y_2 - y_1)^2 + 3(x_2 - x_1)^2 \right)$$

aus (28) S. 133, welches in der Mecklenburgischen Veröffentlichung fehlt, noch zu berücksichtigen:

$$\text{Man erhält für } (1.2) = -0,34603'' \text{ und für } (2.1) = +0,34605'' \quad (11)$$

Nehmen wir (10) und (11) zusammen, so wird

$$\left. \begin{aligned} (1.2) &= 233^\circ 32' 2,03487'' & (2.1) &= 53^\circ 32' 4,73198'' \\ &+ 0,34603 & &- 0,34605 \\ \hline &233^\circ 32' 2,38090'' & &53^\circ 32' 4,38593'' \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\text{Soll sein} \quad \underline{2,3841} \quad \underline{4,3632}$$

$$\text{Fehler:} \quad -0,0032'' \quad + 0,0227''$$

Man sieht einerseits, dass die Glieder 3. Potenz eine völlig ausreichende Uebereinstimmung herbeigeführt haben, andererseits aber auch,

dass bei sehr langen geodätischen Linien das in der Mecklenburgischen Veröffentlichung vernachlässigte Glied berücksichtigt werden muss. Die Mecklenburgische Veröffentlichung soll aber nur den praktisch geodätischen Anforderungen genügen und dabei hat man nur geodätische Linien von der Länge einer Dreiecksseite I. Ordnung zu berücksichtigen und hierfür ist dieses vernachlässigte Glied völlig unerheblich. Wie in dieser Zeitschrift v. J. 1895, S. 422 bereits angeführt wurde, lässt sich das Glied auf die Form bringen

$$\frac{t \rho}{24 r^3} s^3 \sin 3 \beta.$$

Nehmen wir für $\sin 3 \beta$ geradezu das Maximum an und rechnen für eine Seite von 70 km den Einfluss jenes Gliedes aus, so erhält man

$$\log \frac{t \rho}{24 r^3} = 3.6538 - 20$$

$$n \quad s^3 = 14.5353$$

$$\frac{14.5353}{8.1891} = 0,01546''$$

Hiermit ist bewiesen, dass jenes Glied bei Dreiecksseiten I. Ordn. völlig vernachlässigt werden kann, und dass die im V. Theil der Mecklenburgischen Landesvermessung veröffentlichte Formel (7) des § 10 eine vorzügliche Gebrauchsformel ist.

Wir setzen nun nach diesen Zwischenbemerkungen die Reduction fort und rechnen nach (47) S. 136 die Glieder 4. Ordnung aus. Man erhält

$$(1.2) = - 0,00389'' - 0,00157 - 0,00025 +$$

$$0,00019 = - 0,00552''$$

$$(2.1) = - 0,00333 + 0,02971 - 0,00045$$

$$+ 0,00019 = + 0,02612''$$

$$\left. \begin{array}{l} (1.2) \\ (2.1) \end{array} \right\} (13)$$

Nun (12) und (13) wiederum zusammengenommen, giebt

$$(1.2) = 233^0 32' 2,38090'' \quad (2.1) = 53^0 32' 4,38593''$$

$$+ 0,00552'' \quad - 0,02612''$$

$$\frac{233^0 32' 2,38642''}{233^0 32' 2,3841} \quad \frac{53^0 32' 4,35981}{53^0 32' 4,3632} \quad (14)$$

$$\text{Soll sein} \quad 2,3841 \quad 4,3632$$

$$\text{Fehler:} \quad + 0,0023'' \quad - 0,0034''$$

Der Betrag von $0,003''$ bringt selbst bei der grossen Entfernung von 285 km nur 4 mm Querverschiebung eines Punktes.

Wir reduciren nun zweitens auch die aus den ebenen Coordinaten berechnete Entfernung auf das Ellipsoid. Hierzu benutzen wir die Formel (52) S. 138 und (64) S. 141 dieser Zeitschrift. Für die in (52) vorkommenden Glieder 2. und 3. Ordnung nehmen wir wiederum, wie bei der Reduction der Richtungswinkel, die sphäroidischen Ergänzungen hinzu nach S. 26 V. Theil der Mecklenburgischen Landesvermessung. Die Glieder 4. Ordnung in (52) könnte man leicht durch Weiterentwicklung mit sphäroidischen Ergänzungen versehen, indessen beschränken wir uns auf die sphärische Rechnung. Wir bilden so aus (52)

drei Werthe für m und zwar für den Anfangspunkt (m_1), den Endpunkt (m_2) und für die Mitte (m_0), der Linie und rechnen dann

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (14a)$$

Hieran hängen wir ferner aus (64) die Correctionsglieder an. Wir haben für den Anfangspunkt, den Endpunkt und für die Mitte folgende Coordinaten und Logarithmen

$y_1 = + 67129,74$	$\log y_1 = 4.8269149$
$y_2 = - 161922,60$	$n y_2 = 5.2093074$
$y_m = - 47396,43$	$n y_m = 4,6757457$
$x_1 = + 82986,86$	$n x_1 = 4,9190094$
$x_2 = - 86318,94$	$n x_2 = 4,9361061$
$x_m = - 1666,04$	$n x_m = 3,2216854$
$\log y_1^2 = 9,6538298$	
$n y_2^2 = 10,4186150$	
$n y_m^2 = 9,3514914$	
$n x_1^2 = 9,8380188$	$\log x_1^3 = 4,75703$
$n x_2^2 = 9,8722122$	$n x_2^3 = 4,80832$
$n x_m^2 = 6,4433708$	$n x_m^3 = 9,66506$

Hiermit und mit den Coefficientenlogarithmen aus (7) S. 27 der Mecklenburgischen Landesvermessung erhalten wir Folgendes:

2.7266330	5.57460	6.05582
$\log x_1^2 = 9.8380188$	$\log x_1^3 = 4.75703$	$\log x_1 = 4.91901$
2.5646518	0.33163	$n y_1^2 = 9.65383$
$= + 366.988$	$- 2.146$	0.62866
		$+ 4.253$
		$- 178.511 + 366.988$
		$- 2.146 + 4.253$
		$- 180.657 + 371.241$
		$- 180.567$

In Einheiten der 10. Logarithmenstelle geben die Glieder

2. und 3. Ordnung: $+ 190.584$

Nach (14) S. 7 des V. Theils der Meckl. Landesverm.

soll dies sein: $+ 190.504$

Fehler $+ 0.080$

Wir berücksichtigen nun noch die Glieder 4. Ordnung nach (52) Seite 138

$\log \mu = 9.63778$	$\log x_1^4 = 9.67604$	$\log y_1^4 = 9.30766$
$n t^2 = 0.26952$	$n \mu = 9.63778$	$n \mu = 9.63778$
$n x_1^2 = 9.83802$	$n \frac{1}{r^4} = 2.77976$	$n t^2 = 0.26952$
$n y_1^2 = 9.65383$	$n \frac{1}{24} = 8.61979$	$n \frac{1}{r^4} = 2.77976$
$n 3 = 0.47712$	$n \frac{1}{8} = 9.09691$	
9.87627	$\log(-2 + 3t^2) = 0.55388$	
$n 4r^4 = 7.82230$	1.26725	1.09163
2.05397	$+ 18,5$	$+ 12,3$
$- 113,2$		

Hiermit erhalten wir:	+ 190,584	}	(15)
	+ 18,5		
	+ 12,3		
	— 113,2		
	log $m_1 = + 190\ 502$		
	Soll sein: + 190·504		
	— 2		

Wir sehen, dass $\log m_1$ auf 2 Einheiten der 10. Logarithmenstelle stimmt.

In gleicher Weise findet man für $\log m_2$ folgende Werthe:

+ 397·050	— 178·511	}	(16)
+ 2·415	— 25·736		
+ 21,7	— 712,7		
+ 418,0	—		
+ 399·905	— 204·960		
	+ 399·905		
	log $m_2 = + 194·945$		

Ferner für $\log m_0$ ergibt sich:

+ 0·1479	— 0·0426	}	(17)
+ 0·0000	0·0000		
+ 31	0·0000		
+ 0·151	— 178·511		
	— 178·554		
	+ 0·151		
	log $m_0 = - 178·403$		

Der genaue Werth von (16) ist nach (14) Seite 7 der Mecklenb. Veröffentl. 194·965. Wir sehen, dass hier eine weniger gute Uebereinstimmung stattfindet, wie bei (15). Dies kommt daher, dass y_2 sehr gross ist und zwar 162 km, während y_1 nur 67 km beträgt. Es ist nämlich das Vergrößerungsverhältniss lediglich abhängig von der Breiten-differenz p und nicht von λ , während y und x Functionen von p und λ sind; daher erhält man m als Function von p genauer, wie man m erhält als Function von x und y , wenn man in beiden Fällen in den Reihen gleiche Potenzgrößen berücksichtigt. Im § 5 des V. Theils der Meckl. Landesvermessung hat sich ergeben, dass man m auf 2 Einheiten der 10. Logarithmenstelle genau erhält mit der Reihe, die nach Potenzen von p bis zur 4. Ordnung fortschreitet. Mit der Reihe nach x und y erhalten wir aber nur bei Berücksichtigung der Glieder 4. Ordnung eine Genauigkeit von 2 Einheiten der neunten Logarithmenstelle. Wir können diese Unsicherheit direct durch ein Zahlenbeispiel beweisen. Für den Parallelkreis $53^\circ 0'$ soll $\log m = 0.0000190\ 504$ sein; wir fanden mit dem y , welches 1° westlich von Schwerin entspricht, bereits

in (15) $\log m = 0.000\ 0190\cdot502$, also nur um 2 Einheiten der 10. Logarithmenstelle unsicher. Wir berechnen jetzt $\log m$ mit $y = +167795,25$ und $x = +80506,82$, welches $2^{\circ} 30'$ östlich von Schwerin entspricht. Vergl. V. Theil (8 a) S. 20 der Meckl. Landesverm. Man findet mit diesen Werthen $\log m = 0,000\ 0190\cdot520$, also auch um rund 2 Einheiten der neunten Logarithmenstelle unsicher.

Wir rechnen nun mit den Werthen (15), (16) und (17) nach der Formel (14 a) und finden (mit Zeichenumkehrung) $+54.694$

$$\text{hierzu aus (8) } \log s = 5.45\ 45892\cdot061$$

$$\underline{5.45\ 45846\cdot755} = 284835,8670\ \text{m (18)}$$

$$\text{Soll sein nach (7) } = 5.45\ 45946\cdot712$$

$$\text{Fehler } + 0\cdot043$$

Man sieht, es findet bereits eine vorzügliche Uebereinstimmung statt.

Wir berücksichtigen nun noch die Glieder aus (64) S. 141 und finden hierfür der Reihe nach

$$-0\cdot000180\ \text{m} - 0\cdot002999\ \text{m} + 0\cdot000028\ \text{m} + 0\cdot000915\ \text{m (19)}$$

Dieses giebt zusammengezogen: $--0,0022\ \text{m}$

$$\text{Hierzu (18) } = 284835,8670$$

$$\underline{284835,8648\ \text{m}}$$

$$\text{Soll sein nach (7) } = 284835,8642$$

$$\text{Fehler } + 0,0006$$

Wir vergleichen noch die Logarithmen:

$$\log (20) = 5.4545946\cdot721$$

$$" (7) = \underline{5.4545946\cdot712}$$

$$\text{Fehler } + 9$$

Die Uebereinstimmung ist vorzüglich und zwar auf rund 1 mm und 1 Einheit der neunten Logarithmenstelle genau.

Wir möchten nun für den grossen Kreis derjenigen Leser dieser Zeitschrift, die weniger Gelegenheit haben, sich eingehender mit den Theorien der einzelnen Projectionsmethoden zu beschäftigen, sowie für diejenigen, die thatsächlich auf dem Standpunkte stehen sollten, die conformen Coordinaten seien nur für die Theorie und die Soldner'schen Coordinaten für die Praxis brauchbar, hier einige Bemerkungen anknüpfen. Formeln für rechtwinklige Coordinaten nehmen stets bei grösseren Abständen von der Abscissenachse eine complicirte Form an. Dies gilt sowohl für conforme Coordinaten, als auch für unverzerrte. Die rechtwinkligen Coordinaten werden um grössere Verzerrungen zu vermeiden, auf schmale Zonen, von etwa einem Grad Ausdehnung, zwischen Meridianen, Quernormalbögen oder Parallelkreisen im Allgemeinen beschränkt werden müssen. Innerhalb dieser schmalen Zonen wird es stets genügen, die Annahme zu machen, als erfolgten die Messungen auf der Kugel. Unter dieser Annahme aber gestalten

sich die Reductionsformeln für die conformen Coordinaten ausserordentlich einfach. Wir kommen dann für die Correction der Richtungswinkel auf die kurze Form

$$\delta = \frac{x dy}{r^2} \quad (21)$$

Für die Reduction von (1.2) in (8) erhalten wir

$$\delta_1 = \frac{\rho (2x_1 + x_2) (y_2 - y_1)}{6r^2} \quad (22)$$

Dies ausgerechnet giebt:	+ 15,3 921''	}
hierzu aus (8) (1.2) =	233° 31' 47,1 154''	
	233° 32' 2,5 075	
Soll sein nach (6)	233° 32' 2,3 841	
	Fehler = + 0,1 234''	
Ebenso findet man für (2.1)	53° 32' 4,4 392''	
Soll sein nach (6)	53° 32' 4,3 632	
	Fehler = — 0.0 760''	

Wir sehen die Richtungswinkel stimmen, ohne dass die Glieder 3. und 4. Ordnung berücksichtigt werden, für die lange Diagonale auf 0,1''.

Nun, hieraus geht wohl klar hervor, dass man für Triangulirung II. und III. Ordnung nur nöthig hat, die sphärischen Glieder zu berücksichtigen. Die im V. Theil der Mecklenb. Landesvermessung im § 10 mitgetheilten Gebrauchsformeln mit Gliedern 3. Potenz haben überhaupt nur den Sinn, für die Dreiecksseiten I. Ordnung eine Reduction der Richtungswinkel auf 0,01'' und der log. der Seiten auf 0.000 0001 genau ausführen zu können, um eine durchgreifende Controle für die Berechnung und Ausgleichung des Netzes I. Ordnung zu erlangen.

Für das Vergrößerungsverhältniss erhält man bei Vernachlässigung aller Glieder 3. und 4. Potenz die einfache Formel

$$m = 1 + \frac{x^2}{2r^2} \quad (24)$$

Führt man hiermit nach Gl. (14 a) die Reduction der Seite aus, so erhält man:

$$\log s \text{ nach (8)} = 5.4548892 \quad = 284832,28 \text{ Meter} \quad (25)$$

$$\log \Delta s = \quad + \quad 51$$

$$5.4545943 \quad = 284835,62 \quad "$$

$$\text{Soll sein} = 5.4545947 \quad = 284835,86 \quad " \quad (26)$$

$$\text{Fehler} - 4 \quad \text{Fehler} - 0,24$$

Wir sehen die Reduction der Seite ist auf 4 Einheiten der 7ten Logarithmenstelle genau, d. h. auf rund 1:1100 000.

Der mittlere Verzerrungsfehler.

In den Darlegungen des vorigen Heftes über congruente und conforme Coordinaten ist noch manches unerledigt geblieben, was nachgeholt werden muss, namentlich wurde auf S. 202 die nähere theoretische Untersuchung des Falles einer constanten Maassstabsänderung vorbehalten.

Die Integrationen Ω und ω , vom Jahre 1875 welche auf S. 196 als „klar und überzeugend“ bezeichnet wurden, verdienen dieses Lob nicht, und sind nicht ohne Grund von ihrem Urheber selbst seit 1878 nicht mehr benutzt worden. Jene Integralsummen Ω und ω stellen Quadratsummen von linearen Verzerrungsfehlern vor, welche nur dann unmittelbar vergleichbar sind, wenn sie zu gleich grossen Gebieten gehören; andernfalls müssen sie durch Division mit den Nennern Y und y (in dem Sinne von S. 196) auf gleichartige Werthe gebracht werden, welche den Charakter mittlerer Fehlerquadratur haben, und in diesem Sinne werden wir im Nachfolgenden μ_1^2 und μ_2^2 berechnen.

Die Vergrößerungsverhältnisse in linearem Sinne sind für die beiden Fälle der congruenten Soldner'schen und der conformen Gauss'schen Coordinaten folgende:

$$\text{congruent} \quad m_1 = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \cos^2 t \quad (1)$$

$$\text{conform} \quad m_2 = 1 + \frac{y}{2r^2} \quad (2)$$

Dabei ist im ersten Falle t der Richtungswinkel der betrachteten kleinen Strecke.

Wir wollen in einem Punkte, mit gegebener Ordinate y einen Mittelwerth der $m - 1$ bilden im Sinne der M. d. kl. Q., d. h. für n Einzelwerthe soll sein:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{[(m_1 - 1)^2]}{n}} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{[(m_2 - 1)^2]}{n}} \quad (3)$$

und zwar sieht man sofort im zweiten Falle, wo m_2 nach allen Richtungen constant ist, dass

$$\text{conform} \quad \mu_2 = m_2 - 1 = \frac{y^2}{2r^2} \quad (4)$$

Dagegen für congruente Coordinaten ist m_1 mit t veränderlich, weshalb wir mit Integralsummirung haben:

$$\mu_1^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (m_1 - 1)^2 dt = \frac{y^4}{4r^4} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt$$

$$\text{Da } \cos^4 t = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{8} \cos^4 t$$

$$\text{so wird} \quad \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = \frac{3}{8} 2\pi$$

also als Mittelwerth um einen Punkt herum:

$$\text{conform } \mu_1^2 = \frac{y^4}{4r^4} \frac{3}{8} \text{ oder } \mu_1 = \frac{y^2}{2r^2} \sqrt{\frac{3}{8}} \quad (5)$$

Aus (4) und (5) ergibt sich, dass μ_2 grösser ist als μ_1 , dass also die conforme Projection in Hinsicht auf den betrachteten Werth im Nachtheil gegen die congruente Projection ist.

Wenn man weiter längs den Ordinaten y selbst integrirt, und die dabei auftretenden Mittelwerthe wieder mit μ_1^2 und μ_2^2 bezeichnet, so hat man:

$$\mu_1^2 = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{3}{8} \frac{y^4}{4r^4} dy = \frac{3}{40} \frac{b^4}{4r^4}$$

$$\mu_2^2 = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{y^4}{4r^4} dy = \frac{1}{5} \frac{b^4}{4r^4}$$

oder die μ_1 und μ_2 selbst:

$$\text{congruent } \mu_1 = \sqrt{\frac{3}{40}} \frac{b^2}{2r^2} = 0,2739 \frac{b^2}{2r^2} \quad (6)$$

$$\text{conform } \mu_2 = \sqrt{\frac{1}{5}} \frac{b^2}{2r^2} = 0,4472 \frac{b^2}{2r^2} \quad (7)$$

Will man umgekehrt die Grenzwerte b so bemessen, dass μ_1 und μ_2 gleich werden und bezeichnet man die entsprechenden b mit b_1 und b_2 , so wird:

$$\frac{3}{40} b_1^4 = \frac{1}{5} b_2^4, \quad \frac{b_1}{b_2} = \sqrt[4]{\frac{8}{3}} = 1,278$$

also

$$b_2 : b_1 = 0,7826 \text{ oder} \quad (8)$$

Hiernach kann man sagen, dass die congruente Projection mit 22⁰/₁₀ der zugänglichen Fläche im Vortheil sei, und das entspricht der früheren Untersuchung von Zeitschrift 1875 Seite 27—34, welche in dem vorigen Hefte Seite 196 citirt war.

Es war dort angegeben $Y:y = 0,82$ während nun $b_2 : b_1 = 0,78$ nach neuer verbesserter Auffassung sich einstellt.

Wenn man nun die μ_1 und μ_2 als mittlern lineare Verzerrungsfehler als Kriterium der Projection im Ganzen gelten lassen will, so ist die congruente Projection im Vortheile in der Praxis nimmt man aber meist den Maximalfehler $\frac{b^2}{2r^2}$, welcher in beiden Fällen derselbe ist und darauf haben sich die Auseinandersetzungen von S. 197 und S. 201 bezogen.

Wir wollen nun aber den ebenfalls schon früher auf S. 202 kurz berührten Fall betrachten, dass man der Projection als Ganzes noch eine constante Verzerrung zutheilt, indem man, wie z. B. in Württemberg geschehen, den Messungshorizont über das Meer erhebt, oder indem man, ohne solche geometrische Begründung, wie in Mecklenburg geschehen,

dem Ganzen eine Vergrößerung m_0 zuteilt, so dass in den einzelnen Fällen nur noch die Differenzen $\pm (m_1 - m_0)$ bzw. $(\pm m_2 - m_0)$ als lineare Verzerrung auftreten. Es ist dabei naheliegend, m_0 gleich der Hälfte des Maximalwerthes von m zu nehmen, damit die neuen Maximalwerthe nach der positiven und nach der negativen Seite hin nur noch die Hälften des früheren Maximalwerthes werden.

Indessen wollen wir die Sache zunächst allgemeiner betrachten, und einen Mittelwerth einführen:

$$m_0 = 1 + \frac{c^2}{2r^2} \quad (9)$$

Damit muss man für μ_1 (congruent) zuerst wieder um den Punkt herum integrieren:

$$\mu_1^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{y^2}{2r^2} \cos^2 t - \frac{c^2}{2r^2} \right) dt$$

Da $\int_0^{2\pi} (\cos^4 t) dt = \frac{3}{8} 2\pi$ und $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} 2\pi$, hat man:

$$\mu_1^2 = \frac{3}{8} \frac{y^4}{4r^4} - \frac{y^2 c^2}{4r^2} + \frac{c^4}{4r^4}$$

und wenn man auch längs der Ordinate y bis zum Grenzwerte b integriert, so wird:

$$\mu_1^2 = \frac{3}{40} \frac{b^4}{4r^4} - \frac{b^2 c^2}{12r^4} + \frac{c^4}{4r^4} = \frac{b^4}{4r^4} \left(\frac{3}{40} - \frac{1}{3} \frac{c^2}{b^2} + \frac{c^4}{b^4} \right) \quad (10)$$

Nun kann man zuerst aus dem schon angegebenen Grunde $c^2 : b^2 = 1 : 2$ setzen, und dann wird ein Werth erhalten, den wir mit ν_1^2 bezeichnen wollen, nämlich:

$$\text{congruent } \nu_1^2 = \frac{b^2}{4r^4} \frac{19}{120} = 0,1583 \frac{b^4}{4r^2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \nu_1 = 0,398 \frac{b^2}{2r^2} \end{array} \right\} (11)$$

Andererseits ist es naheliegend, das Verhältniss $c^2 : b^2$ so zu bestimmen, dass die Function (10) ein Minimum wird, und das tritt ein, mit $c^2 : b^2 = 1 : 6$, und das Minimum selbst wird:

$$\text{congruent Min } (\mu_1^2) = \frac{b^4}{4r^4} \frac{17}{360} = 0,047 \frac{b^4}{4r^4} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{Min } (\mu_1) = 0,217 \frac{b^2}{2r^2} \end{array} \right\} (12)$$

Dasselbe müssen wir auch für die conforme Projection machen:

$$\mu_2^2 = \frac{1}{b} \int_0^b \left(\frac{y^2}{2r^2} - \frac{c^2}{2r^2} \right)^2 dy = \frac{b^4}{20r^4} - \frac{b^2 c^2}{6r^4} + \frac{c^4}{4r^4}$$

$$\mu_2^2 = \frac{b^4}{4r^4} \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} \frac{c^2}{b^2} + \frac{c^4}{b^4} \right) \quad (13)$$

Mit $c^2 : b^2 = 1 : 2$ bekommt man

$$\left. \begin{aligned} \text{conform } v_2^2 &= \frac{b^4}{4r^4} \frac{7}{60} = 0,1167 \frac{b^4}{4r^4} \\ \text{'' } v_2 &= 0,3416 \frac{b^2}{2r} \end{aligned} \right\} (14)$$

Das Minimum der Function (13) entsteht mit $c^2 : b^2 = 1 : 3$ und es wird:

$$\left. \begin{aligned} \text{conform } \text{Min } (\mu_2^2) &= \frac{b^4}{4r^4} \frac{4}{45} = 0,0889 \frac{b^4}{4r^4} \\ \text{'' } \text{Min } (\mu_2) &= 0,2981 \frac{b^2}{2r^2} \end{aligned} \right\} (15)$$

Aus allen diesen Formeln kann man verschiedene Vergleichen ziehen:

Wenn man den Zwischenwerth m_0 mit c nach (9) so legt, dass μ^2 ein Minimum wird, dann ist congruent im Vorthail mit (12) gegen (15) conform, aber dabei wird der Maximalfehler congruent viel zu ungunstig denn $c_1^2 : b^2 = 1 : 6$ congruent und $c_2^2 : b^2 = 1 : 3$ conform geben:

$$\text{congruent } \frac{b^2}{2r^2} - \frac{c_1^2}{2r^2} = \frac{b^2}{2r^2} - \frac{b^2}{12r^2} = \frac{b^2}{2r^2} \frac{5}{6} \quad (16)$$

$$\text{conform } \frac{b^2}{2r^2} - \frac{c_2^2}{2r^2} = \frac{b^2}{2r^2} - \frac{b^2}{6r^2} = \frac{b^2}{2r^2} \frac{2}{3} \quad (17)$$

Bei (16) congruent ist der übrigbleibende Maximalfehler noch $\frac{5}{6}$ des vor der Verschiebung gewesenen Fehlers, dagegen bei (17) conform nur $\frac{2}{3}$ desselben.

Auch die v_1 und v_2 nach (11) und (14) zeigen einen kleinen Vorthail zu Gunsten der conformen Projection.

Im Ganzen können wir sagen, dass der Kunstgriff einer Zwischenwerth-Einschaltung die Linearverzerrung zu Gunsten der conformen Projection lenkt.

Vorstehende rein mathematische Entwicklungen können zur Vergleichungen der beiden Projectionsarten in verschiedener Hinsicht benützt werden.

J.

Gesetze und Verordnungen.

Gesetz, betreffend die Errichtung einer Generalcommission für die Provinz Ostpreussen.

Vom 23. März 1896.

Wir Wilhelm, von Gottes Gnaden König von Preussen u. s. w. verordnen unter Zustimmung beider Häuser des Landtags Unserer Monarchie, was folgt:

§ 1. Für die Provinz Ostpreussen wird eine besondere Generalcommission in Königsberg errichtet.

§ 2. Durch königliche Verordnung können dem Geschäftsbezirk dieser Generalcommission Theile der Provinz Westpreussen zugelegt werden.

§ 3. Mit der Ausführung dieses Gesetzes wird der Minister für Landwirthschaft, Domainen und Forsten beauftragt.

Urkundlich unter Unserer Höchsteigenhändigen Unterschrift und beigedrucktem Königlichen Insiegel.

Gegeben Berlin im Schloss, den 23. März 1896.

(L. S.)

Wilhelm.

Fürst zu Hohenlohe, v. Boetticher, Frhr. v. Berlepsch.

Miquel, Thielen, Bosse, Bronsart v. Schellendorff.

Frhr. v. Marschall, Frhr. v. Hammerstein, Schönstedt.

Frhr. v. d. Recke.

Vereinsangelegenheiten.

Ordnung

der

20. Hauptversammlung des Deutschen Geometer-Vereins.

Die 20. Hauptversammlung des Deutschen Geometer-Vereins wird in der Zeit vom 2. bis 5. August 1896 zu

Dresden

nach folgender Ordnung abgehalten werden.

Sonntag, den 2. August.

Vorm. 12 Uhr: Sitzung der Vorstandschaft bei Kneist, Brüdergasse Nr. 2.

Nachm. 4 Uhr: Sitzung der Vorstandschaft und der Abgesandten der Zweigvereine daselbst.

Abends 7 Uhr: Versammlung und Begrüssung der eingetroffenen Theilnehmer in dem an der Elbe gelegenen Italienischen Dörfchen (Helbig), Theaterplatz.

Montag, den 3. August.

Vorm. 9 Uhr: Hauptversammlung und Berathung in der Technischen Hochschule in nachstehender Reihenfolge:

1) Bericht der Vorstandschaft.

- 2) Festrede des Herrn Professor Dr. Jordan-Hannover „Ueber die Entwicklung des deutschen Vermessungswesens in diesem Jahrhundert.“
- 3) Vortrag des Herrn Geheimen Regierungsrath Professor a. D. Nagel-Dresden „Ueber die nothwendige Beschaffenheit von Plänen, die als Beweismittel zur Entscheidung von Grenzstreitigkeiten dienen sollen“.
- 4) Berathung des Entwurfs zu einer neuen preussischen Landmesser-Ordnung. Berichterstatter: Herr Professor Koll-Bonn.
- 5) Bericht des Rechnungsprüfungs-Ausschusses und Beschlussfassung über Entlastung der Vorstandschafft.
- 6) Wahl eines Rechnungsprüfungs-Ausschusses für die Zeit bis zur nächsten Hauptversammlung.
- 7) Berathung des Vereinshaushalts für 1896 und 1897.
- 8) Neuwahl der Vorstandschafft.
- 9) Vorschläge für Ort und Zeit der nächsten Hauptversammlung.

Nach Schluss der Versammlung Besichtigung der Ausstellung in den Räumen der Technischen Hochschule.

- Nachm. 3 Uhr: Festessen im Concerthause des Zoologischen Gartens. Nach demselben Spaziergang durch den Grossen Garten.
- Abends 7 Uhr: Besuch der Ausstellung für das sächsische Handwerk und Kunstgewerbe. Concert.

Dienstag, den 4. August.

Vorm. 9 Uhr: Fortsetzung der Berathungen in der Technischen Hochschule in nachstehender Folge:

- 1) Mittheilungen über Vermessungen in Königreich Sachsen.
 - a. Herr Professor Uhlich-Freiberg „Ueber Gradmessung“.
 - b. Herr Vermessungs-Ingenieur Fuhrmann-Dresden „Ueber die an die Gradmessung anschliessende Triangulation“.
 - c. Herr Vermessungsdirector Gerke-Dresden „Ueber Stadtvermessungen“.
- 2) Besprechung der Lage der bei den deutschen Staatseisenbahnen beschäftigten Landmesser.

Nach Schluss der Versammlung Besichtigung der Ausstellung in der Technischen Hochschule.

Nachm. 3 Uhr: Besuch des Mathematischen Salons und daselbst Vortrag des Herrn Professor Pattenhausen-Dresden „Ueber die Geschichte mathematischer Instrumente“. Hiernach Zusammenkunft in dem an der Elbe gelegenen Italienischen Dörfchen (Helbig), Theaterplatz.

Nachm. 5 Uhr: Fahrt mit dem Dampfschiff nach Loschwitz und mit der Drahtseilbahn nach dem Louisenhof.

Abends 8 Uhr: Beisammensein in dem an der Elbe gelegenen Schillergarten in Blasewitz.

Mittwoch, den 5. August.

Ausflug in die Sächsische Schweiz.

Vorm. 8 $\frac{1}{2}$ Uhr: Abfahrt mit Dampfschiff nach Wehlen. Spaziergang durch den Wehlener und Uttewalder Grund nach der Bastei. Mittagessen daselbst. Wanderung durch die Schwedenlöcher und den Amselgrund nach Rathen. Rückfahrt mittelst Eisenbahn nach Dresden.

Ueber den Besuch der Königlichen Museen Dresdens wird später Mittheilung gemacht werden.

Während der Dauer der Versammlung wird in den Räumen der Technischen Hochschule eine Ausstellung geodätischer Instrumente, Karten und Bücher stattfinden, zu deren Beschickung ausser den Vereinsmitgliedern auch die mechanischen Werkstätten und Buchhandlungen eingeladen werden.

Wegen Auswahl genügender Räume bitten wir die Aussteller baldmöglichst — spätestens bis zum 1. Juni — unter Angabe des erforderlichen Platzes bei Herrn Professor Pattenhausen unter der Adresse — Technische Hochschule Dresden, Bismarckplatz — sich anmelden zu wollen.

An der Ausstellung werden sich die Technische Hochschule, sowie verschiedene staatliche und städtische Behörden betheiligen.

Die Vorstandschaft des Deutschen Geometer-Vereins.

L. Winckel.

Personalnachrichten.

Königreich Preussen. Ministerium für Landwirthschaft, D. und F. Die bisherigen Landmesser Heideleck zu Konitz und Ziegelasch zu Bromberg sind zu Königlichen Oberlandmessern ernannt worden.

Grossherzogthum Sachsen-Weimar. Seine Königliche Hoheit der Grossherzog haben die gnädigste Entschliessung gefasst, vom 1. Januar 1896 ab dem bisherigen zweiten Assistenten des Grossherzogl. Vermessungsdirectors Obergemeter Christian Herrmann zu Weimar die Stelle des ersten Assistenten des Grossherzogl. Vermessungsdirectors und dem Geometer Otto Brückner zu Eisenach die Stelle des zweiten Assistenten des Grossherzogl. Vermessungsdirectors unter Verleihung der Dienstbezeichnung „Obergemeter“ zu übertragen, sowie dem Geometer Guido Schnaubert zu Weimar die Dienstbezeichnung „Vermessungscommissar“ zu verleihen.

Druckfehler in Ulfers' Coordinatentafeln.

In der im Jahre 1870 erschienenen 4. Auflage der Coordinatentafel von D. W. Ulfers fand ich einen Druckfehler auf Seite 190 in der 3. Zeile von oben, in der Spalte 80 und zwar

bei Winkel Sinus $26^{\circ} 54'$ bezw.

„ „ Cosinus $73^{\circ} 46'$

Die falsche Zahl heisst dort 32,49, wofür zu setzen ist 32,39.

Karlsruhe im März 1896.

W. Meier,

Feldmesser bei Gr. Eisenbahnbauinspektion.

Berichtigung.

Die Abhandlung von Hammer „Ueber Winkelgrössen und ihre Bezeichnung und damit Zusammenhängendes“ auf S. 221—224 des vorigen Heftes d. Zeitschr. ist wegen Mangels an Raum gekürzt, aber ausserdem durch einen Irrthum in der Zusammenstellung des Heftes (Umbrechen des Satzes) entstellt worden. Da die darin behandelte Sache wohl schon durch die Abhandlungen in S. 175—182 und S. 189—191 in Verbindung mit dem letzten Theil S. 221—224 genügend klargestellt ist, mag die vorstehende Entschuldigung genügen und die Veröffentlichung des noch fehlenden Theiles unterbleiben. D. Red. J.

Inhalt.

Grössere Mittheilungen: Zur photogrammtrischen Praxis, von Finsterwalder. — Berechnung einer geodätischen Linie aus geographischen Coordinaten und conformen, ebenen Coordinaten, von Vogeler. — Der mittlere Verzerrungsfehler, von Jordan. — **Gesetze und Verordnungen.** — **Vereinsangelegenheiten.** — **Personalnachrichten.** — **Berichtigungen.**