ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

Dr. W. Jordan, Professor in Hannover und C. Steppes, Steuer-Rath in München.

1896. Heft 15. Band XXV.

1. August.

Ueber Schätzungsgenauigkeit an Nivellir- und Distanzscalen;

von Ingenieur **Carl Wagner** in Nastätten (vorm. Wiesbaden).

In den Heften 21 bis 24 von 1894 und Heft 1 von 1895 ds. Zeitschrift theilt Herr Dr. C. Reinhertz in Bonn umfangreiche eigene Messungen über die Schätzungsgenauigkeit an Nivellirscalen, nebst den Resultaten von verschiedenen anderen Beobachtern mit, und gelangt durch die mit grossem Fleisse und Sachkenntniss durchgeführten Sichtungen und Vergleichungen des gesammten Beobachtungsmaterials zu sehr interessanten und beachtenswerthen Folgerungen.

Es werden damit die Einflüsse sämmtlicher mechanischen Hülfsmittel auf die Schätzungsgenauigkeit durch Zahlenwerthe festgestellt, und dadurch Anhaltspunkte für die zweckmässigsten Einrichtungen und Verfahrungsweisen gegeben.

Obgleich diese Untersuchungen nur für genaue Nivellirungen und demgemäss nur für Zielweiten bis etwa rund 100 m Gültigkeit haben sollen, so liegt doch die Frage nahe, ob die daraus gewonnenen Folgerungen auch auf Faden-Distanzmessungen, also bis auf etwa 400 bis 500 m Zielweite ausgedehnt werden dürfen? Reinhertz hat dies für zulässig erachtet, und auf den ersten Blick scheint dies auch richtig zu sein, jedoch bei näheren Vergleichungen ergeben sich verschiedene Zweifel, deren Aufklärung sowohl in wissenschaftlicher als auch in praktischer Hinsicht sehr wünschenswerth wäre.

Daher bezwecken diese Zeilen hierauf — unter Bezugnahme auf die Unterschiede zwischen Nivellirungen und Faden-Distanzmessungen — aufmerksam zu machen, damit Herr Dr. Reinhertz, sowie auch andere, für dieses Gebiet sich interessirende Techniker Gelegenheit nehmen möchten, diese Zweifel — soweit sie berechtigt erscheinen — durch entsprechende anderweitige Beobachtungen aufzuklären.

Der Uebersichtlichkeit halber behalten wir die von Reinhertz angenommene Reihenfolge der Beziehungen anfänglich bei.

1) Die Beziehung der Grösse des Schätzungsfehlers zur Zielweite.

Auf Grund seiner Beobachtungen und Vergleichungen gelangt Reinhertz zu dem Schlusse, dass der Schätzungsfehler proportional der Quadratwurzel aus der Zielweite zunehme. Dieser Folgerung stehen jedoch die Beobachtungen von R. Wagner*) entgegen, welche ein Wachsen der Distanzfehler (Schätzungsfehler + Ziel- oder Einstellungsfehler) nahezu proportional der Zielweite ergeben. Diese Verschiedenheit glaubt Reinhertz damit erklären zu können, dass erstens vorzugsweise an kleinen Intervallen mit den Distanzfäden grössere Fehler als mit dem Mittelfaden begangen würden, und dass zweitens von den Distanzfehlern nicht ohne Weiteres auf die Schätzungsfehler geschlossen werden dürfe. Diese Einwände sind principiell wohl richtig, indessen fragt es sich, ob und in wie weit sie für die Wagner'schen Beobachtungen zutreffend sind.

Vergleicht man zu diesem Zwecke zunächst allgemein die von Reinhertz mitgetheilten Schätzungsfehler mit den Wagner'schen Distanzfehlern, so ergiebt sich, dass erstere durchweg mehr oder weniger grösser als letztere sind. Hieraus folgt sofort, dass es möglich ist, mit einem tadellosen Fernrohr, mit einem in nicht zu grossem Abstand von der Gesichtsfeldmitte abstehenden Faden, sicherlich eben so genau als mit dem Mittelfaden abzulesen. Kann aber letzteres nicht bezweifelt werden, so ist es von vornherein schon unwahrscheinlich, dass diese gleiche Genauigkeit sich nur auf grosse und nicht auch auf kleinere Intervalle erstrecken sollte, umsomehr als Unterschiede zwischen der Schärfe der am Mittelfaden und am Seitenfaden gesehenen Bilder von kleinen Intervallen nicht wahrnehmbar sind, und geringe Unterschiede ohnehin nicht in Betracht kommen würden.

Die von Reinhertz in Tabelle 31 und 32 (S. 647) mitgetheilten Einstellungsfehler**), die derselbe an scheinbaren Intervallen von 1,4 bis 22 mm beobachtete, können nicht als ein Beweis für die Richtigkeit seiner Ansicht gelten. Denn es ist weder zulässig, die an grossen Intervallen gewonnenen Beziehungen auf kleine Intervalle zu übertragen, noch darf von Einstellungsfehler ohne Weiteres auf Schätzungsfehler geschlossen werden. Wollte man Tabelle 31 als beweiskräftig betrachten, so würde man von den an grossen Intervallen ermittelten Einstellungsfehlern direct auf die an kleinen Intervallen zu erwartenden Schätzungsfehler schliessen, mithin u. E. einen doppelten Irrthum begehen.

Es ist zwar zuzugeben, dass an kleinen Intervallen verhältnissmässig grössere Fehler vorkommen können, weil die Schätzungen durch die scheinbare Fadenstärke belästigt werden, was an grossen Intervallen

---

*) Zeitschrift f. Vermessungswesen 1886, Seite 49 u. fl.

**) In Tabelle 31 sind dieselben irrthümlich als Schätzungsfehler bezeichnet, was aus der verhergehenden Erläuterung ersichtlich ist.

nicht fühlbar und bei Einstellungen überhaupt nicht der Fall ist. Jedoch ist eine solche Erscheinung nicht auf die Lage des Fadens — ob Mittel- oder Seitenfaden — sondern nur auf dessen Dicke und die dadurch entstehenden Verdeckungen verschiedener Intervallstellen zurückzuführen.

Wir werden in Kap. 6 und 8 hierauf noch zurückkommen.

Aus diesen Gründen ist der erste Einwand hinsichtlich des von Wagner benutzten Fernrohrs nicht zutreffend. Dasselbe darf nach den Erfahrungen des Verfassers von jedem Fernrohr mit tadellosem Objectiv und orthoskopischem Ocular behauptet werden, sofern die Seitenfäden nicht mehr als etwa je $^1/_4$ des Gesichtsfeld-Durchmessers von dem Mittelfaden abstehen. Ein kleiner theoretischer Unterschied mag immerhin bestehen, indessen verschwindet dieser in der Praxis gegenüber den unvermeidlichen Schwankungen der Beobachtungsfehler.

Hinsichtlich des zweiten Einwandes ist zu bemerken, dass die, aus den in Rede stehenden Distanzmessungen abgeleiteten Schätzungsfehler von ihrer wahren Grösse nur ganz unbedeutend abweichen können. Wagner hat nämlich durch seine Beobachtungen über Zielgenauigkeit (Seite 97) nachgewiesen, dass bei Benutzung eines stufenförmigen Nullpunktes der Ziel- oder Einstellungsfehler nur $^1/_5$ bis $^1/_3$ des Gesammtfehlers beträgt. Daher können nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetze die Schätzungsfehler nur unwesentlich — $2^0/_0$ bis $6^0/_0$ — kleiner als die Distanzfehler sein.

Sodann hat Wagner für jede Beobachtungsreihe auch die Breite der benutzten Nullpunktsstufe angegeben, und es lässt sich hiernach speciell für jede Reihe auch der begangene Einstellungsfehler ermitteln, und zwar mit grösserer Genauigkeit, als zur Bestimmung der Schätzungsfehler eigentlich nothwendig wäre. Die Grundlagen für letztere dürften mithin mehr als genügend sein.

Die kleinen Unterschiede zwischen den Distanz- und Schätzungsfehlern haben, nebenbei bemerkt, gar keinen praktischen und nur einen geringen theoretischen Werth, da sie bedeutend kleiner als die unvermeidlichen Schwankungen der Beobachtungsfehler sind. Wir möchten daher für zulässig erachten, dass die Wagner'schen Distanzfehler ohne Weiteres als Schätzungsfehler betrachtet werden, womit alsdann alle Zweifel über die Grösse der letzteren und die Zulässigkeit von Vergleichungen beseitigt sein würden. Auf die zu ziehenden Folgerungen würde diese Annahme keinen Einfluss haben.

Aus Nivellirungen lassen sich die Schätzungsfehler schon weniger zuverlässig ableiten, da einestheils dabei an weissen und rothen, anstatt nur an weissen Feldern abgelesen wird, und anderentheils die gegenüber dem Zielfehler ohnehin schon grösseren Libellenfehler infolge von Temperatureinflüssen während der Beobachtungen veränderlich sein können. Auch dürften Befürchtungen über „Kleben" der Libellen berechtigt erscheinen, sofern letztere nicht kurze Zeit vorher geprüft worden sind.

Theoretisch einwandsfreie Resultate lassen sich, — wie auch Reinhertz bemerkte — nur durch unmittelbare Beobachtung wahrer Schätzungsfehler erzielen. Wir müssen jedoch hinzufügen, dass zu diesem Zweck kein Fernrohrfaden zur Verwendung kommen dürfte, sondern statt dessen müsste an der Lattenscala ein verschiebbarer schwarzer Streifen, dessen scheinbare Breite der Fadenstärke entspricht, angebracht sein, und zur Ablesung nur die Fernrohrvergrösserung benutzt werden. Bei Verwendung eines Fadens würden Einstellungsfehler nicht umgangen werden können.

Jedoch lassen sich auch mit einem Faden vorzügliche Resultate gewinnen, wenn seitwärts an der Lattenscala ein verschiebbarer, zum Zielen zu benutzender weisser Streifen auf schwarzem Grunde angebracht würde, auf welchen der Beobachter den Mittelfaden jedesmal einstellt, und alsdann an dem Latteninterval abliest, während ein zweiter Beobachter die genaue Lage des Streifens zum Intervall mittelst Nonius ermittelt. Die scheinbare Breite dieses Zielstreifens wäre nach Prof. Förster*) gleich der scheinbaren Fadenstärke + 0,083 mm anzunehmen, da alsdann der mittlere Zielfehler für 25fache Fernrohrvergrösserung nur rund 0,20 Secunden oder $^1/_6$ des Gesammtfehlers betragen würde, mithin letzterer kaum 2 % grösser als der Schätzungsfehler sein könnte. Dieses Verfahren, — eine Nachahmung der gleichzeitigen Einstellungen und Ablesungen, wie bei Distanzmessungen — ist einwandsfreier als diese, da einestheils dabei nur der Mittelfaden zur Anwendung kommt, und anderntheils der Zielfehler auf ein thunliches Minimum gebracht wird.

Das zur unmittelbaren Beobachtung wahrer Schätzungsfehler von Reinhertz angewandte Verfahren erscheint nicht einwandsfrei, weil dabei vorausgesetzt werden muss, dass die Neigung des Fernrohrs während der Beobachtungen unverändert geblieben sei. Letzteres ist zwar nicht unmöglich, jedoch weder gewiss, noch erfahrungsgemäss wahrscheinlich. Berücksichtigt man, dass eine durch Temperatur- oder irgend welche andere Einflüsse verursachte Veränderung der Höhenlage einer Fussspitze des Stativs um beiläufig 0,007 mm, oder die Veränderung der Höhenlage einer unteren Stellschraube des Instruments um etwa 0,001 mm! u. s. w., schon Fehler von der ungefähren Grösse des Schätzungsfehlers erzeugen würden, so dürfte unser Bedenken nicht ungerechtfertigt erscheinen.

Ob und in wie weit die Reinhertz'schen Schätzungsfehler durch dieses Verfahren beeinflusst worden sind, muss dahingestellt bleiben.

---

*) „Procès-verbaux, 1880“. Eine Uebersetzung dieser Abhandlung ist in der Zeitschr. f. Verm., 1880, S. 117—124 und ein genügender Auszug in Dr. Jordan's Vermessungskunde, III. Aufl., 2. Band, S. 109—111, enthalten.

Auffallend ist jedoch, dass dieselben im Mittel $1\frac{1}{2}$ mal so gross, als die von Vogler aus den bayerischen Präzisions-Nivellements von 1870/71 abgeleiteten Schätzungsfehler, und doppelt so gross, als die von Wagner beobachteten Distanzfehler sind.

Wenn nun auch die Einflüsse der verschiedenen Fehlerquellen nicht mit Sicherheit nachgewiesen werden können, so wird dadurch doch nichts an der Thatsache geändert, dass die Reinhertz'schen Schätzungsfehler die grössten sind. Auf deren ungewöhnliche Grösse kann übrigens in folgender Weise summarisch geschlossen werden.

Reinhertz hat laut Seite 610 an einem scheinbaren Intervall von 1,0 mm einen mittleren relativen Fehler von 0,094 mm erhalten, der nach Maassgabe der übrigen Beobachtungen jedoch nur 0,080 mm betragen sollte. Da aber bekanntlich der mögliche zufällige oder unvermeidliche Maximalfehler zu mindestens der dreifachen Grösse des mittleren Fehlers anzunehmen ist, so müssten hiernach unvermeidliche Maximalfehler von $0{,}094 \times 3 = 0{,}28$ mm, bezw. $0{,}080 \times 3 = 0{,}24$ mm oder rund $\frac{1}{4}$ des Intervalls möglich sein können. Man kann jedoch sich leicht überzeugen, dass Fehler von dieser Grösse, und auch noch bedeutend kleinere, nicht vorkommen dürfen. Richtet man zu diesem Zweck einen Fernrohrfaden von etwa 0,10 mm scheinbarer Stärke auf ein scheinbares Intervall von 1,0 mm und zwar ungefähr auf eine für die Schätzung anerkannt ungünstigste Intervallstelle: 0,3 oder 0,7, und legt nach gemachter strenger Ablesung die Frage sich vor, ob es auch zulässig sei, entweder nach unten oder nach oben um $\frac{1}{4}$ des Intervalls anders abzulesen — also z. B.: 0,05, bezw. 0,55, anstatt 0,30 —, so wird diese Frage entschieden verneint werden müssen. Ein solcher Maximalfehler überschreitet daher bedeutend die äusserste Grenze der Schätzungsfehler, die doch für den Beobachter nicht erkennbar sein darf und vorkommendenfalls müssten solche ohne Weiteres als grobe Fehler ausgeschieden werden.

Von der Grösse der Schätzungsfehler ist aber deren Beziehung zur Zielweite — sowie auch zur Vergrösserung und zu der absoluten und der scheinbaren Intervallgrösse — hauptsächlich abhängig. Wir wollen jedoch die Möglichkeit, dass bei consequent durchgeführten Beobachtungen grosse Schätzungsfehler doch proportional der richtigen Beziehung auftreten könnten, zunächst nicht bestreiten, obgleich einer solchen Voraussetzung nur eine geringe Wahrscheinlichkeit zur Seite steht. Strenge directe Beweise für die Richtigkeit der verschiedenen Möglichkeiten und Beziehungen lassen sich, mangels genügendem Beobachtungsmaterials und mit Rücksicht auf die vorkommenden Schwankungen der Beobachtungsfehler, wohl nicht erbringen, vielmehr können die Urtheile dieserhalb nur auf grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit gestützt werden. Zur Begründung dieser Urtheile sind aber umfangreiche Voraussetzungen zu machen, daher wir — um nicht missverstanden zu werden — hierauf erst am Schluss des Kap. 7 zurückkommen, nachdem wir unsere Ansicht über die allgemeine Wahrscheinlichkeit der Fehlerbeziehungen, bezw. deren Exponenten, begründet haben. Auch Kap. 6 ist dabei zu berücksichtigen.

(2) Die Beziehung der Grösse des Schätzungsfehlers zur Vergrösserung des Fernrohrs.

Auf Seite 665 und 666 stellt Reinhertz in Tab. 33 seine eigenen, auf 20, 50 und 70 m Zielweite mit Fernröhren von 17- bis 37facher Vergrösserung gewonnenen Schätzungsresultate zusammen und gelangt damit zu dem Schlusse, dass die Schätzungsgenauigkeit proportional der Quadratwurzel aus der Vergrösserung und nicht — wie bisher nach Stampfer angenommen wurde — nahezu proportional der Vergrösserung wachse.

Sodann theilt Reinhertz in Tab. 34, S. 668, die von Stampfer beobachteten Zielfehler mit, und versucht damit den Beweis zu erbringen, dass dieser in seiner Schlussfolgerung sich geirrt habe. Diesen Beweis können wir jedoch aus nachstehenden Gründen nicht als zutreffend anerkennen.

Nachdem sowohl die Einstellungs- als auch die Schätzungsfehler von den scheinbaren Intervallgrössen abhängig sind, so lässt sich der Einfluss verschiedener Fernrohrvergrösserungen nur dann richtig beurtheilen, wenn die zur Beobachtung benutzten scheinbaren Intervallgrössen in geradem Verhältnisse zur Vergrösserung stehen. Hieraus folgt, dass für Beobachtungen auf constante Zielweite für alle Vergrösserungen auch ein und dasselbe Ziel verwendet werden muss.

Stampfer hat aber auf eine constante Zielweite von 24,0 m drei verschieden grosse Zielpunkte benutzt. Um nun eine genaue Vergleichung seiner Resultate zu ermöglichen, müssen entweder die Zielfehler auf eine absolute Zielpunktsgrösse reducirt oder statt dessen die Vergrösserungen entsprechend abgeändert werden.

Wir verfolgen hier das letztere Verfahren und setzen zu diesem Zweck den mittleren Zielpunkt, Nr. 5, als maassgebend voraus. Alsdann sind die nach den Zielpunkten Nr. 4 und 6 benutzten Vergrösserungen als „absolute“ anzusehen, und erstere im Verhältniss 0,178 : 0,295 oder 1 : 1,66 zu vergrössern, dagegen letztere im Verhältniss 0,078 : 0,142 oder 1 : 0,80 zu verkleinern, damit die berechneten „scheinbaren“ Vergrösserungen in geradem Verhältnisse zu den benutzten scheinbaren Intervallen stehen. Strenge genommen hätte hierbei auch Berücksichtigung finden sollen, dass, wie aus dem Schlusse des Kapitels 7 hervorgeht, bei scheinbaren Intervallen von 0,4 bis 2,3 mm die Fehlerfunction $m = \frac{a}{V}$ allmählich in die Function $m = \frac{a}{\sqrt{V}}$ übergeht, bezw. sich derselben nähert.

Es wurde jedoch hiervon abgesehen, da einestheils diese Fehlerbeziehungen noch nicht zuverlässig feststehen, und anderentheils eine Berücksichtigung derselben auf das Schlussergebniss keinen Einfluss üben würde. Nach diesen Grundsätzen ist die nachstehende Tab. I entworfen.

Tabelle I.

Beobachtungen von Stampfer über die Genauigkeit des Visirens.

Nummer der Beobachtungsreihe	Absolute			Scheinbare		Fehler in Secunden μ	μV	$\frac{8.0''}{V}$	v_1	$\mu\sqrt{V}$	$\frac{1.6''}{\sqrt{V}}$	v_2
	Vergrösserung	Zielpunkte		Intervallgrösse	Vergrösserung V							
		Nr.	Durchmesser									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			W. Zoll	mm		$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$
1	5 fach	4	0,295	0,4	$8^1/_3$ fach	0,72	5,8	0,96	+ 0,24	2,1	0,55	—0,17
2	12 „	4	0,295	1,0	20 fach	0,54	10,8	0,40	— 0,14	2,4	0,36	—0,18
8	13 „	4	0,295	1,1	22 „	0,45	9,9	0,37	— 0,08	2,1	0,34	—0,11
3	26 „	5	0,178*)	1,3	26 „	0,26	6,8	0,31	+ 0,05	1,3	0,31	+0,05
4	28 „	5	0,178	1,4	28 „	0,22	6,2	0,29	+ 0,07	1,2	0,30	+0,08
5 = 10	29 „	5	0,178	1,4	29 „	0,26	7,5	0,28	+ 0,02	1,4	0,30	+0,04
11	48 „	6	0,142	1,9	38 „	0,21	8,1	0,21	0,0	1,3	0,26	+0,05
12	60 „	6	0,142	2,3	48 „	0,29	13,9	0,17	— 0,12	2,0	0,23	— 0,06
						Mittel =	8,0		Mittel =	1,6		

Die Spalten Nr. 1 bis 5 und 7 sind gleichlautend mit der Reinhertzschen Tabelle 34.

Auffallend gross erscheint der Fehler von 0,29 Secunden in der Reihe Nr. 12. Derselbe ist mit Rücksicht auf die Vergrösserung der stärkste von allen Fehlern, und rund etwa doppelt so gross, als die in den Reihen Nr. 3, 4 und 5 begangenen Fehler. Stampfer hat daher die Reihe Nr. 12 ausser Betracht gelassen, was unsererseits gebilligt wird, obgleich wir dieselbe zur Erkennung der Unterschiede in unserer Tabelle aufgeführt haben.

Die Spalten 10 und 13 ergeben nun, dass die Differenzen v_1 und v_2 im Allgemeinen nur unerheblich von einander abweichen, indessen bei strenger Vergleichung die Wageschale entschieden zu Gunsten von v_1 sinkt, weil bei den Reihen Nr. 1 und 2 die Vorzeichen von v_2 nicht wechseln, was bei v_1 der Fall ist. Die Beobachtungen von Stampfer liefern somit keinen Grund, seine einfache Fehlerformel zu verlassen und durch die weniger einfache Formel von Reinhertz zu ersetzen. Die wahre Fehlerbeziehung für diese Beobachtungen fällt in die Mitte zwischen $\frac{a}{V}$ und $\frac{a}{\sqrt{V}}$ mit einer ge-

*) 0,178 Wiener Zoll = 4,7 mm. Die benutzte Zielweite betrug 76 W. Fuss = 24,0 m.

ringen Annäherung nach $\frac{a}{V}$, und wenn man aus praktischen Gründen nicht $\frac{a}{\sqrt[4]{V^3}}$ setzen will, so muss $\frac{a}{V}$ gewählt werden.

Ueberdies kann ein indirecter Beweis für die annähernde Richtigkeit der Stampfer'schen Folgerung aus den Beobachtungen von Wagner abgeleitet werden. Zu diesem Zweck ist nur vorauszusetzen:

„Dass die Helligkeit der Fernrohrbilder und die trennende Kraft des Fernrohrs innerhalb derjenigen Grenze, in der die Bilder der Scala genügend deutlich und damit für die Schätzung überhaupt erst brauchbar sind, auf die Grösse des Schätzungsfehlers keinen oder doch nur einen geringen Einfluss haben." Ist dieser von Reinhertz aufgestellte Grundsatz *) aber richtig — was einstweilen für die in Betracht kommenden Vergrösserungen nicht bezweifelt werden soll —, so ergiebt sich nach Wagner, dass der mittlere Schätzungsfehler nahezu umgekehrt proportional der Vergrösserung auftreten wird. Aus der von Reinhertz benutzten Formel: $J = \frac{0{,}25\, t\, V}{Z}$ **) folgt nämlich sofort, dass in Bezug auf das scheinbare Intervall *(J)* die Vergrösserung *(V)* und die Zielweite *(Z)* in geradem umgekehrten Verhältnisse zu einander stehen. Unter der in optischer Hinsicht gemachten Voraussetzung ist es aber für das Auge des Beobachters gleichgültig, ob das scheinbare Intervall durch Vergrösserung oder durch Zielweiten entstanden ist. Daher darf von der einen Beziehung ohne Weiteres auf die andere geschlossen werden, was auch Reinhertz durchgeführt hat. Wagner fand nun, dass der mittlere Schätzungsfehler nahezu proportional der Zielweite wächst, mithin muss ersterer auch nahezu umgekehrt proportional der Vergrösserung auftreten.

Ein gleicher indirecter Beweis kann aber auch aus den bayerischen Präcisions-Nivellements zu Gunsten der Reinhertz'schen Folgerung geliefert werden. Wir haben mithin zwar nachgewiesen, dass Stampfer und Wagner ziemlich übereinstimmen, und deren Ergebnisse volle Beachtung verdienen, indessen ist damit hinsichtlich der Streitfrage über die Fehlerbeziehung nur dargethan, dass die vorliegenden Gegensätze einstweilen bestehen bleiben.

Leider besitzen wir z. Z. nur verschiedene mehr oder weniger übereinstimmende, bezw. sich widersprechende Beobachtungen, deren Vergleichung zu einwandsfreien Schlüssen nicht führen kann. Denn erstens beruhen dieselben auf verschiedenen Verfahren, bezw. auf der

*) Heft 1, 1895, S. 12, Nr. 4.

**) J = scheinbare und t = absolute Intervallgrösse in Millimeter, Z = Zielweite in Meter, V = Vergrösserungszahl des Fernrohrs und 0,25 (Meter) deutliche Sehweite für normales unbewaffnetes Auge.

Benutzung verschiedener, theilweise unvollkommener mechanischer Hülfsmittel, und der Einfluss dieser Unterschiede ist bis jetzt noch nicht genügend ermittelt worden. Zweitens haben einige Beobachtungen eine geringe Ausdehnung, und die dazu benutzten scheinbaren Intervalle haben im Vergleiche zu denjenigen von anderen Beobachtungen eine allzu verschiedene Grösse, als dass die darauf gegründeten Resultate ohne Weiteres mit einander verglichen werden könnten. Drittens ist nicht erwiesen, ob die durch Einstellungen gewonnenen Ergebnisse ohne Weiteres auf Schätzungen ausgedehnt werden dürfen. Für kleine Intervalle ist dies geradezu zu verneinen, während es für grössere Intervalle fraglich sein kann. (Wir werden in Cap. 8 hierauf noch zurückkommen.) Wenn auch Wagner — wie wir eben nachgewiesen haben — annähernd dieselbe Fehlerbeziehung wie Stampfer fand, so kann hieraus doch kein endgültiger Schluss gezogen werden, da andere Beobachtungen diesem entgegenstehen. Viertens ist die Grösse der Unterschiede zwischen Beobachtungen mit freiem Auge und solchen mit Fernröhren nicht genügend festgestellt, und fünftens haben Beobachtungen mit allzu grossen Fehlerschwankungen keinen oder doch nur einen zweifelhaften Werth.

Solange nun nicht anderweitige exacte, mit den anerkannt besten mechanischen Hülfsmitteln durchgeführte Beobachtungen vorliegen, solange wird man hinsichtlich der Beurtheilung der Fehlerbeziehungen nur auf Wahrscheinlichkeiten (Kap. 7) angewiesen sein. Wir halten jedoch Beobachtungen, die mit weniger zweckmässigen Hülfsmitteln ausgeführt sind, auch für werthvoll, weil damit der Einfluss der letzteren auf die Genauigkeit u. s. w. nachgewiesen werden kann. Sobald es sich aber um die genaue Ermittlung der Fehlerbeziehung handelt, so dürfen zweifelhafte Verfahren und Hülfsmittel u. E. nicht angewendet werden.

Nach erfolgter Feststellung der richtigen Fehlerbeziehung würde die Leistungsfähigkeit der Fernrohre für Nivellirinstrumente und Theodolite unmittelbar zu beurtheilen sein. Für Tachymeter kann dies aber nur mittelbar geschehen, da für Distanzmessungen die Zielweitenfehler erst das praktische Endresultat ergeben, und die an der Latte begangenen Einstellungs- und Ablesefehler, die wir bisher zusammengefasst als „Distanzfehler" bezeichneten, bloss ein kleiner, mit einer bestimmten Constante zu multiplicirender Theil der ersteren sind.

Zur Unterscheidung werden wir hier die Zielweitenfehler als „wahre" und die an der Latte begangenen Fehler als „scheinbare" Distanzfehler bezeichnen. Die erwähnte „Multiplicationsconstante" (k) ist bekanntlich von dem von den beiden Seitenfäden eingeschlossenen „Distanzwinkel" und dieser der Grösse des Gesichtsfeldes, bezw. von der Fernrohrvergrösserung abhängig. Innerhalb einer von der Länge der benutzten Distanzlatte abhängigen Zielweite können aber, wegen der vorkommenden verschiedenen Grösse von k, auch ganz verschieden starke Vergrösserungen nicht allein gleiche Genauigkeit in Bezug auf den wahren Distanzfehler liefern, sondern es kann sogar die stärkere Vergrösserung im Nachtheil sein. Da diese Behauptung bezweifelt werden könnte, so wollen wir deren Richtigkeit näher begründen.

Bekanntlich steht die Grösse des Gesichtsfeldes (G) in geradem umgekehrten Verhältnisse zur Fernrohrvergrösserung (V), und für orthoscopische Oculare, die wir hier ausschliesslich im Auge behalten, darf G höchstens zu rund $\frac{2000}{V}$ Minuten angenommen werden. Sodann ist gebräuchlich und auch zweckmässig, die Distanzwinkel je nach der Fernrohrvergrösserung zu $1^0\ 8'\ 44{,}8''$ oder $34'\ 22{,}4''$ oder $17'\ 11{,}2''$ zu wählen, damit deren Cotangenten genau 50,0, oder 100,0 oder 200,0 entsprechen, welche Werthe wir, wie üblich, bereits als Multiplicationsconstanten (k) bezeichneten. Der Winkel $34'$... ($k = 100$) wäre mit Rücksicht auf die Berechnung der Zielweiten am zweckmässigsten, jedoch kann derselbe bei starken Vergrösserungen nicht angewendet werden, da die Seitenfäden dem Rande des Gesichtsfeldes zu nahe stehen würden, während bei geringen Vergrösserungen in Hinsicht auf die erreichbare Genauigkeit $k = 50$ vortheilhaft zu benutzen ist, umsomehr, als der von einem Seitenfaden und dem Mittelfaden eingeschlossene Winkel alsdann doch $k = 100$ entspricht.

Erfahrungsmässig sind sodann mit Rücksicht auf die Deutlichkeit der gesehenen Bilder u. s. w. die Seitenfäden nicht zu beanstanden, wenn diese nicht wesentlich mehr als $^1/_4$ des Gesichtsfelddurchmessers von dem Mittelfaden abstehen. Hiernach dürfen die Constanten ungefähr angenommen werden:

$k = 50$ für 15 bis 17 oder 18 fache Vergrösserung
$k = 100$ „ 18 bis 30 oder 35 „ „
$k = 200$ „ 35 bis 60 fache*) Vergrösserung.

Ferner ist durch Erfahrung festgestellt worden, dass die Distanzlatte wegen Behinderungen durch Wind u. s. w. nur 4 m bis höchstens $4^1/_2$ m Länge haben soll. Es wird daher mit $k = 50$ nur innerhalb rund 200 m und mit $k = 100$ nur innerhalb rund 400 m gemessen werden können, und für Zielweiten über 400 m $k = 200$ in Anwendung kommen müssen.

Auf Grund der obigen Voraussetzungen sind nun in Tab. II die verhältnissmässigen Leistungen verschiedener Vergrösserungen innerhalb 200 m Zielweite enthalten, wie solche nach Stampfer und Wagner $\left(m = \frac{a}{V}\right)$ sich ergeben würden. Der scheinbare Distanzfehler für 15 fache Vergrösserung ist $= 1{,}00$ angenommen, und sind hiernach die übrigen Fehler berechnet worden.

*) Wir geben hier die Vergrösserungen in runden Zahlen an, ohne damit die Grenzen genau bestimmen zu wollen.

Tabelle II.

Fernrohrvergrösserung V	15-	20-	30-	40-	50-	60fach
Scheinbarer Distanzfehler	1,00	0,75	0,50	0,375	0,30	0,25
Multiplicationsconstanten k	50	100	100	200	200	200
Wahre Distanzfehler.	50	75	50	75	60	50
Quotienten der letzteren	1,0	1,5	1,0	1,5	1,2	1,0

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass innerhalb 200 m Zielweite mit 15-, 30- und 60facher Vergrösserung gleiche wahre Distanzfehler erzielt würden, während die dazwischen liegenden Vergrösserungen mehr oder weniger grössere Fehler ergeben. Ferner ist aus Tabelle II zu folgern, dass innerhalb 200 bis 400 m Zielweite mit 30- und 60facher Vergrösserung gleiche, dagegen mit 15facher Vergrösserung doppelte wahre Distanzfehler begangen würden, indem für letztere alsdann $k = 100$ in Anwendung kommen müsste. Für Zielweiten über 400 m würden sodann die Fehler in umgekehrter Proportion zur Vergrösserung stehen. Eine 15fache Vergrösserung könnte alsdann, mangels einer Constanten von 200, überhaupt nicht benutzt werden.

Vergleichen wir nun aber auch nach Tabelle III die verhältnissmässig wahren Distanzfehler, die innerhalb 200 m Zielweite nach der Reinhertz'schen Formel $\left(m = \frac{a}{\sqrt{V}}\right)$ zu erwarten wären. Der scheinbare Distanzfehler für 15fache Vergrösserung ist — wie oben — auch zu 1,00 angenommen.

Tabelle III.

Fernrohrvergrösserung V	15-	20-	30-	40-	50-	60fach
$\sqrt{V}$	3,87	4,47	5,48	6,32	7,07	7,75
Scheinbare Distanzfehler..........	1,00	0,87	0,71	0,61	0,55	0,50
Multiplicationsconstanten k.......	50	100	100	200	200	200
Wahre Distanzfehler.............	50	87	71	122	110	100
Quotienten der letzteren	1,00	1,74	1,42	2,44	2,20	2,00

Wir entnehmen hieraus, dass innerhalb 200 m Zielweite eine 15fache Vergrösserung allen anderen Vergrösserungen gegenüber bedeutend im Vortheil wäre, und u. a. mit 60facher Vergrösserung d o p p e l t e und mit 40facher Vergrösserung sogar $2^1/_2$ m a l g r ö s s e r e wahre Distanzfehler als mit ersterer begangen würden!

Ferner lässt sich aus Tabelle III folgern, dass innerhalb 200 m bis 400 m mit 15facher und mit 60facher Vergrösserung gleiche Ergebnisse zu erzielen seien, und eine 30fache Vergrösserung den beiden ersteren nur um rund 30 % überlegen wäre u. s. w. Erst bei Zielweiten über 400 m würden die wahren Distanzfehler in umgekehrtem Verhältnisse, wie die Quadratwurzeln aus den Vergrösserungen, auftreten, indem alsdann durchweg nur $k = 200$ benutzt werden könnte.

Mit Rücksicht auf die erreichbare Genauigkeit und die Gebrauchsweite der Instrumente würde man für Tachymeter-Fernrohre nach Stampfer eine 30- bis 35fache Vergrösserung als die vortheilhafteste ansehen müssen, während nach Reinhertz dies nicht allein als zweifelhaft erscheint, sondern sogar 15- höchstens 20fache Vergrösserungen in Betracht kommen würden.

Die Tabellen II und III geben übrigens nur die Unterschiede an, wie solche bei strenger Durchführung der Exponenten 1, bezw. $^1/_2$, sich berechnen. Nach Kapitel 7 ist jedoch wahrscheinlich, dass die Exponentengrösse von den zur Beobachtung benutzten scheinbaren Intervallgrössen abhängig, also veränderlich ist. U. a. ist es für die scheinbaren Intervalle von 0,1 bis 1,5 bezw. bis 2,0 mm, welche dem wesentlichsten Umfange für Distanzmessungen entsprechen, wahrscheinlich, dass der Exponent allmählich auf $^3/_4$ herabsinkt, und alsdann der Durchschnitts-Exponent etwa $^7/_8$ betragen würde. Die bei Annahme des letzteren Exponenten im Vergleiche zu Tabelle II entstehenden Veränderungen ergeben sich zwar nicht gross, sind aber immerhin schon bemerkbar.

Bei der Construction der Tachymeter spielt zwar auch noch die Länge der Fernrohre eine beachtenswerthe Rolle, da allzu lange Fernrohre für die rasche Handhabung der Instrumente und deren Transport unvortheilhaft sind, jedoch würden Erörterungen dieserhalb zu weit ausserhalb der Grenzen unserer Betrachtungen liegen, daher wir hierauf nicht näher eingehen.

3) Beziehung zwischen der absoluten Grösse der Scaleneinheit und dem Schätzungsfehler.

Die Beziehung zwischen der absoluten Grösse der Scaleneinheit und dem Schätzungsfehler ergiebt sich von selbst, sobald die vorherigen Beziehungen festgestellt worden sind.

Hinsichtlich der zweckmässigsten Grösse der Scaleneinheit für Distanzlatten wäre jedoch zu erwähnen, dass erfahrungsmässig eine Centimetertheilung sich am besten bewährt hat. Dieselbe kann mit 25facher Vergrösserung unter günstigen äusseren Umständen bis etwa rund 300 m Zielweite benutzt werden.

Sodann sollte am Rande der Latte eine Decimetereintheilung, welche von 0,5 m zu 0,5 m von der einen auf die andere Seite wechselt, nicht fehlen, damit einentheils Entfernungen über 300 m*), bezw. auch kleinere bei etwaigem Versagen der Centimetertheilung, gemessen werden können, und anderntheils ein rasches Abzählen der Decimeter thunlich

*) Wagner erhielt mit Benutzung von Decimeterintervallen auf 400 und 500 Meter Entfernung noch sehr brauchbare Resultate. Vergl. die Beobachtungsreihen Nr. 13 und 14, Seite 84, seiner Mittheilungen.

ist, falls wegen zu grosser Zielweite oder wegen ungünstiger Beleuchtung u. s. w. die Bezifferung der Latte nicht erkennbar sein sollte.

Theilungen von $^1/_2$ cm, sowie Strichtheilungen sind ihrer beschränkten Verwendung halber für Distanzlatten nicht zu empfehlen. Die Strichtheilungen wurden zwar von Prof. Hammer, Stuttgart, vor einigen Jahren in dieser Zeitschrift empfohlen, indessen dürfte derselbe zugeben müssen, dass selbst die von ihm benutzten derben Striche, durch welche — nebenbei bemerkt — die Genauigkeit leidet, unter günstigen Umständen kaum bis 150 m Zielweite verwendet werden können.

4) Beziehung des Schätzungsfehlers zur scheinbaren Fadenstärke.

Für Tachymeterfernrohre können die Distanzfäden nicht so fein gewählt werden, als für die Schätzungen in den durchschnittlich vorkommenden kleinen Intervallen wünschenswerth wäre. Zu feine Fäden belästigen nämlich nicht allein das Auge des Beobachters, sondern behindern auch die Raschheit der Messungen. Den Sichtbarkeitsanforderungen wird aber erfahrungsmässig mit einer scheinbaren Fadenstärke von 0,07 bis 0,08 mm erst vollständig entsprochen. Schwächere Fäden sind nicht zu empfehlen, während unbedeutend stärkere noch zulässig erscheinen. Hiernach würde die zweckmässigste Fadenstärke für Tachymeter zu 0,07 bis etwa rund 0,10 mm anzunehmen sein.

Diese Ermittelung steht nicht im Widerspruch mit der von Reinhertz für Nivellirinstrumente empfohlenen Fadenstärke von 0,10 bis 0,15 mm, da bei Nivellirungen die Lattenintervalle, in Folge geringerer Zielweiten, durchschnittlich bedeutend grösser als bei Distanzmessungen erscheinen, und für grössere scheinbare Intervalle auch stärkere Fäden gewählt werden dürfen.

5) Beziehung der Grösse des Schätzungsfehlers zu dem Farbengrund der Theilungsfelder.

Reinhertz fand den Schätzungsfehler in rothen Feldern im Mittel 1,3 bis 1,4 mal grösser als in weissen, sowie dass dieser Unterschied an kleinen Feldern am grössten auftritt. (Bei Benutzung von schwarzen und weissen Feldern würde dieser Unterschied sich natürlich noch grösser ergeben haben.) Da nun zu Distanzmessungen hauptsächlich kleine Felder verwendet werden müssen, so wird die Genauigkeit der Messung durch Ablesungen in nur weissen Feldern, also durch Benutzung einer Doppel-Feldtheilung — sogen. Schachbrettheilung — bedeutend erhöht.

Sodann kann es für die Genauigkeit der Schätzung nur vortheilhaft sein, wenn die weissen Felder thunlichst scharf begrenzt sind, was durch schwarze Farbe besser als durch rothe erreicht wird. Daher lässt sich für Distanzmessungen nur die schwarz-weisse Doppel-Feldtheilung empfehlen, was in folgendem Kapitel noch durch andere Gründe unterstützt wird.

6) Beziehung der Grösse des Schätzungsfehlers zur Intervallstelle.

In Tabelle 39 erscheint auffällig, dass die Fehlerquotienten für die scheinbaren Intervalle 0,6 und 0,3 mm kleiner als für 0,9 mm angegeben sind, während es umgekehrt sein sollte. Diese Erscheinung ist durch die Schwankungen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wohl theilweise erklärlich, jedoch dürften bei den Ablesungen auch allzu starke Fehler vorgekommen sein, da bei Benutzung einer einfachen Feldtheilung an kleinen Intervallen überhaupt keine genauen Resultate, namentlich nicht in Bezug auf die Intervallstellen erwartet werden dürfen.

Um exacte Schätzungen zu erzielen, müssen nämlich auf beiden Seiten des Fadens Theile des Feldes deutlich sichtbar sein. Ist dies nur auf einer Seite des Fadens der Fall, so erübrigt nichts Anderes als das, an den vom Faden verdeckten Theil anstossende Feld als Vergleichsobject zu benutzen. In Folge der Irradiation erscheinen aber die weissen Felder grösser als die farbigen, daher, — je nachdem an weissem oder an farbigem Felde abgelesen werden soll — die Vergleichsfelder zu klein oder zu gross gesehen werden, und durch diese Augentäuschung der Schätzungsfehler ungemein, und zwar ganz unregelmässig, vergrössert wird.

Welche Intervallstellen von diesem Umstande betroffen werden, hängt hauptsächlich von dem Verhältnisse der scheinbaren Fadenstärke zur scheinbaren Grösse der Intervalle, jedoch auch von der Farbe und der Beleuchtung der letzteren ab. Mit 0,10 mm scheinbarer Fadenstärke — die wir zu allen unseren Vergleichungen voraussetzen werden — können z. B. an einem scheinbaren Intervall von 0,3 mm für die Intervallstellen 0,0 bis 0,2 und 0,8 bis 1,0 nur auf einer Seite des Fadens Feldtheile gesehen werden. Bei guter Beleuchtung sind für die Intervallstellen 0,25, bezw. 0,75, in weissem Felde schon zu beiden Seiten des Fadens Feldtheile für die Schätzung genügend sichtbar, während dies in farbigem Felde ungefähr erst für die Stellen 0,35 bis 0,40, bezw. 0,60 bis 0,65 der Fall ist u. s. w.

Der durch die Intervallverdeckungen, bezw. durch Irradiation, verursachte Fehler tritt beiläufig in umgekehrtem Verhältnisse zur Intervallgrösse auf. Derselbe kann z. B. an einem Intervall von 2,0 mm scheinbarer Grösse nur noch etwa die Intervallstellen 0,00 bis 0,05, bezw. 0,95 bis 1,00 berühren. Die Intervallstelle 0,00 wird aber immer mehr oder weniger belästigt, und ist in dieser Hinsicht die ungünstigste von Allen.

Bei Distanzmessungen können die erwähnten Fehler gleichzeitig zweimal, das eine Mal mit dem Nullfaden und das andere Mal mit dem Ablesefaden begangen werden, wodurch alsdann der Distanzfehler bedeutend vergrössert wird. Der erstgenannte Fehler wird dabei immer vorkommen, da eine mangelhafte Einstellung erst erkennbar ist, wenn die Feldergrenze den Faden sichtbar überragt. Dieser Fehler darf erfahrungsmässig im Mittel zu $^1/_4$ bis $^1/_3$ der Fadenstärke angenommen werden. Der zweite Fehler wird dagegen — wie schon bemerkt wurde, — nur begangen, wenn ein Vergleichsfeld zur Schätzung benutzt werden muss.

Der Doppelfehler tritt an kleinen Intervallen selbstredend häufiger als an grossen ein. Setzt man z. B. voraus, dass an den verschiedenen Intervallstellen gleich oft abgelesen wird, so würde unter 10 Messungen an einem Intervall von 2,0 mm scheinbarer Grösse der Doppelfehler nur rund einmal, an Intervallen von 0,3 mm je nach der Feldfarbe und Beleuchtung, schon p. p. 4 bis 7 mal, und an Intervallen von 0,2 mm sogar 7 bis 10 mal vorkommen können. An den Intervallen von 0,1 mm kann überhaupt keine Ablesung ohne Benutzung der Vergleichsfelder gemacht werden.

In dem Einflusse der Intervallverdeckungen und der Irradiation einerseits, sowie in dem Mangel eines stufenförmigen Nullpunktes anderseits, dürften die wesentlichsten Ursachen zu finden sein, warum verschiedene Techniker mit Benutzung von gewöhnlichen Nivellirlatten mit einfacher schwarz-weisser Centimetertheilung nicht allein eine sehr geringe Genauigkeit für Distanzmessungen erzielten, sondern auch die Fehler mehr als in geradem Verhältnisse zur Zielweite wachsend fanden.

Bei Verwendung einer Doppel-Feldtheilung wirkt die Irradiation auf die Schätzung nicht nachtheilig ein, da stets an gleichfarbigen, also gleich gross gesehenen Feldern, und zwar der Regel nach an weissen, abgelesen wird. Die zu benutzenden Vergleichsfelder stehen zwar seitwärts des Ablesungsfeldes, indessen schätzt man ohne Schwierigkeit in der Mitte ab, d. h. an der Stelle, an welcher die Felder sich berühren. Bei vorauszusetzender Uebung wird dieselbe Genauigkeit als an einem vollen rechteckigen Felde von derselben Grösse erreicht.

Intervallverdeckungen durch den Faden kommen an einer Doppelfeldtheilung wohl auch vor, indessen werden dadurch nur an ganz kleinen scheinbaren Intervallen (0,1 bis 0,2 mm) die Schätzungen mehr oder weniger behindert. Man kann u. A. — selbstverständlich unter günstigen äusseren Umständen und mit Benutzung nur weisser Felder und den beiden zugehörigen weissen Vergleichsfeldern — an einem Intervall von 0,1 mm zwar nicht mehr an allen Intervallstellen ablesen, jedoch immerhin noch auf etwa $^1/_4$ des Intervalls schätzen. An 0,2 mm grossem Intervall können die Schätzungen schon an allen Intervallstellen bewirkt werden und die in Folge der Fadenstärke an den Intervallen

0,2 bis etwa 1,0 oder 1,5 mm bemerkbaren Erschwerungen der Schätzungen — worauf wir in Kap. 8 zurückkommen — treten sehr gemildert auf.

Die Doppelfeldtheilung ist mithin der einfachen Feldtheilung wesentlich überlegen, und dieser Unterschied wird durch Zufügung eines stufenförmigen Nullpunkts für Distanzmessungen noch vergrössert. Letzterer soll hauptsächlich zur Erreichung der thunlichst grössten Genauigkeit für Zielweiten bis zu etwa 250 m bezw. 300 m dienen, da auf grössere Zielweiten, für welche die 15 bis 20 mm breite Nullpunktsstufe ohnehin in Anwendung kommen muss, eine Einstellung des Nullfadens auf eine beliebige Intervallgrenze auch zulässig ist, ohne eine Beeinträchtigung der Genauigkeit befürchten zu müssen. Daher ist es auch statthaft, den Nullpunkt 1,5 m (mittlere Instrumentshöhe) über dem Lattenfusspunkt anzubringen, wodurch verschiedene Vortheile, aber keine Nachtheile entstehen. Denn sollte die von dem Nullpunkt aufwärts zählende Scala von 2,5 bis 3,0 m Länge für die Ablesung der Zielweite mittelst des Oberfadens nicht ausreichen, so wird in der Regel am Mittelfaden abgelesen und diese Ablesung verdoppelt. Uebrigens steht auch der Mitbenutzung der von dem Nullpunkt abwärts bezifferten Scala nichts entgegen. Man hat in solchen Ausnahmefällen nur eine Addition, bezw. Multiplication mit 2, vorzunehmen. Reicht dagegen die obere Lattenscala für die Zielweite aus, so liest man nach erfolgter Einstellung des Nullfadens auf den Nullpunkt mit dem Ablesefaden unmittelbar das gewünschte Resultat ab, während ohne besonderen Nullpunkt für jede Distanzmessung eine Subtraction (Ablesung — Einstellung) erforderlich wird.

7) Betrachtungen über die Wahrscheinlichkeit der Exponenten in der Fehlerfunction $m = \frac{a}{J^n}$.*)

Die Grösse des Schätzungsfehlers ist von der scheinbaren Intervallgrösse, der scheinbaren Fadenstärke und dem persönlichen Schätzungsvermögen des Beobachters abhängig. Letzteres ist zwar im Allgemeinen von den beiden ersteren Factoren abhängig, jedoch kann dasselbe mit diesen in Folge der Unvollkommenheit unserer Augen und der zu Gebot stehenden mechanischen Hülfsmittel, nicht gleichmässigen Schritt halten. An ganz kleinen Intervallen wird man an eine Grenze gelangen, bei deren Ueberschreitung theils wegen allgemein ungenügender Sichtbarkeit der Intervalle, theils in Folge von Intervallverdeckungen durch den Faden, Schätzungen nur mangelhaft oder gar nicht mehr möglich sind.

Diese „Beobachtungsgrenze" ist zwar nicht streng bestimmbar, indessen dürfte dieselbe, bei Benutzung der weissen Felder einer Doppel-

*) m = mittlerer relativer Schätzungsfehler,
a = Beobachtungsconstante,
J = scheinbare Intervallgrösse und
n = Exponent von J.

feldtheilung und unter günstigen äusseren Umständen, bei etwa rund 0,10 mm scheinbarer Intervallgrösse*) anzunehmen sein, da an 0,15 mm grossem Intervall mit Zuhülfenahme der Vergleichsfelder noch ziemlich gut, dagegen an 0,05 mm Intervallen gar nicht mehr abgelesen werden kann.

An grossen Intervallen wird der Schätzungsfehler durch die Fadenstärke garnicht, oder doch nur ganz unerheblich beeinflusst. Indessen kommt ein anderer Umstand in Betracht, nämlich dass jeder Beobachter — auch der gewandteste — an einer Grenze ankommen wird, an welcher seine Kunst im Schätzen ihren Höhepunkt erreicht hat. Diese Grenze dürfte für den Gesammt-Schätzungsfehler vorhanden sein, sobald der Beobachter durchweg auf $^1/_{20}$ bis $^1/_{25}$ des absoluten Intervalls ablesen kann, bezw. derselbe einen mittleren relativen Schätzungsfehler von etwa 0,015 mm erhält.

In der Praxis sind Fehler von 0,020 mm bereits erreicht worden, wogegen solche von 0,010 mm unseres Wissens bis jetzt noch nicht erzielt wurden und vermuthlich auch schwerlich erreicht werden können. Die Möglichkeit ist aber nicht ausgeschlossen, daher wir z. Z. einen relativen Fehler von 0,015 mm nur annähernd als Minimal-Schätzungsfehler oder als „Genauigkeitsgrenze“ betrachten dürfen.

Sobald nun ein Beobachter an einem genügend grossen Intervall den Höhepunkt seines Schätzungsvermögens erreicht hat, so kann er an grösseren Intervallen nur dieselbe, jedoch keine grössere Genauigkeit erzielen. Letztere bleibt alsdann constant, indessen wäre es auch nicht unmöglich, dass endlich an bedeutend grösseren Intervallen die Genauigkeit sogar wieder abnimmt.

Wollte man das Eintreten eines Minimalfehlers in Abrede stellen, so würde man folgerichtig zugeben müssen, dass es möglich sei, an genügend grossen Intervallen durchweg auf $\frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}$ u. s. w. des absoluten Intervalls abzulesen, d. h. keinen grösseren Maximalfehler zu begehen, was aber noch keinem Beobachter gelungen ist und daher der Wahrscheinlichkeit widerspricht. Dagegen sind Zweifel über die Richtigkeit der vorausgesetzten durchschnittlichen Fehlergrösse nicht unberechtigt. Es ist u. A. nicht allein möglich, sondern sogar wahrscheinlich, dass ein gewandter Beobachter mit Benutzung der besten Hülfsmittel**) und unter günstigen äusseren Umständen einen kleineren relativen Minimalfehler als 0,015 mm begeht, während letzterer von einem weniger ge-

*) Für die gewöhnliche Praxis darf die Beobachtungsgrenze schon bei 0,2 mm angenommen werden. Da jedoch zur Erreichung speciellerer Zwecke auch 0,1 mm vorkommen kann, so soll dieses Intervall hier nicht ausgeschlossen werden.

**) Die mit unvollkommenen mechanischen Hülfsmitteln gewonnenen Resultate sind hier überhaupt auszuschliessen.

wandten Beobachter überhaupt nicht erreicht werden dürfte. Bei den nachstehenden Betrachtungen werden wir hierauf auch angemessene Rücksicht nehmen.

Die dem Maximalfehler entsprechende scheinbare Intervallgrösse wird für jede Beobachtung, bezw. jeden Beobachter, verschieden sein, und lässt sich letztere unmittelbar nur für umfangreiche Beobachtungen an grossen Intervallen und zwar nur innerhalb eines grösseren Spielraums feststellen. Eine Kenntniss dieser Intervallgrössen ist für unsere Zwecke auch nicht erforderlich. Es kann vielmehr besser nach Maassgabe der Beobachtungsconstanten und unserer Grenzwerthe die Wahrscheinlichkeit der Exponenten annähernd beurtheilt werden. Von guten Beobachtungen darf nämlich verlangt werden, dass die an den verschiedenen Intervallen gefundenen Fehler innerhalb geringer Schwankungen ($\pm v$) mit der Fehlerfunction übereinstimmen. In der Praxis wird dies zwar nicht immer der Fall sein, allein je mehr v bei abwechselnden Vorzeichen die erfahrungsmässig als unvermeidlich anzusehenden Fehlerschwankungen übersteigt, desto geringer wird die Genauigkeit der Beobachtung zu veranschlagen sein. Findet ferner kein rascher Wechsel der Vorzeichen von v statt, so dass in einem grösseren Theil einer Beobachtung v nur mit positiven und in dem anschliessenden Theil nur mit negativen Vorzeichen auftritt, so ist entweder die Fehlerbeziehung mangelhaft bestimmt worden, oder die Beobachtung gestattet für ihre ganze Ausdehnung überhaupt keine gleichmässige Beziehung ohne den einen oder den anderen Theil zu vergewaltigen.

Machen wir nun einen Versuch, auf Grund verschiedener Beobachtungsconstanten und unserer Grenzwerthe, die Möglichkeit oder Unmöglichkeit, bezw. die grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit der Exponenten 1 bezw. $^1/_2$, in der Fehlerfunction $m = \frac{a}{J^n}$ abzuschätzen. Zu diesem Zweck sind in Tab. IV für eine genügende Anzahl scheinbarer Intervallgrössen die relativen Schätzungsfehler für die Beziehungen $m_1 = \frac{0{,}030}{J}$ und $m_2 = \frac{0{,}030}{\sqrt{J}}$ nebeneinandergestellt, und in besonderen Spalten die wahrscheinlichen Grenzen der Exponenten durch Querstriche angegeben.

Die in der letzten Spalte aufgeführten Unterschiede $m_1 - m_2$ ergeben, dass dieselben — mit Ausnahme der beiden oberen, den Intervallen 0,1 und 0,5 mm zugehörigen — ungemein klein sind. Das Intervall 1,0 ist indifferent, da für dasselbe jeder Exponent passt.

Die Unterschiede wachsen zwar proportional den Beobachtungsconstanten, indessen bleiben sie — abgesehen von den beiden oberen — für die in Betracht kommenden grösseren Constanten immer noch klein und da Fehlerveränderungen von kaum der Hälfte dieser Unterschiede meistens schon genügen würden, die eine oder die andere Beziehung als die richtigere erscheinen zu lassen, so kann die Frage, ob der Exponent 1 oder $^1/_2$ anzunehmen sei, nur auf Grund exacter Beobachtungen mit ausreichender Sicherheit beantwortet werden.

Die mit unvollkommenen Hülfsmitteln erzielten Resultate und Beobachtungen mit allzu grossen Fehlerschwankungen gestatten nur zweifelhafte Schlüsse.

IV. Tabelle.

Scheinbare Intervallgrösse J	Relativer Schätzungsfehler $m_1 = \frac{0{,}030}{J}$	Wahrscheinliche Grenze für den Exponenten 1	Relativer Schätzungsfehler $m_2 = \frac{0{,}030}{\sqrt{J}}$	Wahrscheinliche Grenze für den Exponenten $^1/_2$	Unterschiede $m_1 - m_2$
mm	mm		mm		mm
0,10	0,300	wahrscheinlich	0,094	unwahrscheinlich	+ 0,206
0,50	0,060		0,042		+ 0,018
1,0	0,030		0,030	wahrscheinlich	0
1,5	0,020		0,024		— 0,004
2,0	0,015		0,021		— 0,006
3,0	0,010	unwahrscheinlich	0,017		— 0,007
4,0	0,008		0,015		— 0,007
6,0	0,005		0,012	unwahrscheinlich	— 0,007
9,0	0,003		0,010		— 0,007

In wie weit sodann Beobachtungen mit aussergewöhnlich grossen Constanten in dieser Hinsicht überhaupt noch brauchbar erscheinen, müssen wir unentschieden lassen. Bedenken dieserhalb können jedoch eintreten, da einestheils grosse Constanten auch grosse Beobachtungsfehler voraussetzen, von denen es zweifelhaft sein kann, ob sie bei anderem Verfahren u. s. w. nicht hätten vermindert werden können, und anderentheils alsdann auch grosse Fehlerschwankungen vorkommen werden.

Nachdem nun mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Schwankungen der Beobachtungsfehler eine Entscheidung zwischen den Exponenten 1 oder $^1/_2$ mitunter schon schwierig sein wird, so würde eine Inbetrachtnahme der dazwischenliegenden Werthe, z. B. $^3/_4$, noch bedeutend grössere Schwierigkeiten bereiten und zu wenig zuverlässigen Schlüssen führen. Einestheils aus diesem Grunde und anderentheils, um der Fehlerbeziehung eine thunlichst einfache Form zu geben, erscheint es daher zweckmässig, die Beobachtungen entweder dem Exponenten 1 oder $^1/_2$ anzuschliessen. Haben beide Exponenten gleiche Berechtigung, so würde der Exponent 1 als der einfachere zu wählen sein.

Demgemäss sind in Tab. IV auch keine anderen Exponenten als 1 bezw. $^1/_2$ aufgeführt, und werden wir uns hauptsächlich mit diesen beschäftigen.

Die Wahrscheinlichkeitsgrenzen der Exponenten sind zwar hauptsächlich mit Zuhülfenahme graphischer Darstellungen ermittelt worden, indessen lassen sich erstere auch in folgender Weise bestimmen.

Allgemein ist davon ausgegangen worden, dass kleine Fehler, die bisher noch von keinem Beobachter erzielt wurden, je nach ihrer Grösse als zweifelhaft oder unwahrscheinlich bezw. als unmöglich angesehen werden dürfen, während alle grösseren bereits erreichten Fehler als möglich bezw. wahrscheinlich zu betrachten sind. Speciell ist dazu Nachstehendes zu bemerken:

Zu Exponent 1. Auf Grund der bisherigen Erfahrungen erscheint es geradezu unmöglich, dass an 9 J*) bezw. 6 J relative mittlere Schätzungsfehler von nur 0,003 bezw. 0,005 mm, wie solche die Fehlerbeziehung für die Beobachtungsconstante 0,030 verlangt, erzielt werden können. Auch Fehler von 0,008 bezw. 0,010 mm begangen an 4 J, bezw. 3 J erscheinen — wie schon erwähnt worden — mindestens zweifelhaft. Setzt man aber auch die Möglichkeit voraus, so würde die Wahrscheinlichkeitsgrenze doch nur nach etwa 2,5 J gelegt werden können. Denn einerseits ist es unwahrscheinlich, dass ein Beobachter seine Genauigkeitsgrenze schon so bald und plötzlich erreicht; er wird vielmehr an 3 J noch einen grösseren Fehler begehen, und deshalb die Grenze ansehnlich weiter aufwärts zu suchen sein. Anderseits kommt dagegen in Erwägung, dass wir von dem Exponenten 1 unmittelbar auf den Exponenten $^1/_2$ übergehen, und da eine Veränderung der Fehlerbeziehung auch nicht plötzlich eintreten kann, so muss die Hälfte der fehlenden Abrundung jeder Beziehung zugesetzt werden, wodurch eine kleine Verschiebung der Grenze wieder nach abwärts bedingt wird.

Nimmt man sodann an, es könne ein kleinerer Fehler als 0,015 mm nicht erzielt werden, so würde die Grenze aus den gleichen bereits erwähnten Gründen etwa bei 1,5 J anzunehmen sein. Wir haben daher einen Spielraum von 1,5 J bis 2,5 J, und um beiden Möglichkeiten gerecht zu bleiben, legen wir die Wahrscheinlichkeitsgrenze nach rund 2 J. Wie sich später noch ergeben wird, kommt es überhaupt hierauf nicht genau an; nur müssen für beide Exponenten stets gleiche Voraussetzungen gemacht werden.

Von 2 J aufwärts bis 0,1 J steht der Wahrscheinlichkeit für den Exponenten 1 nichts entgegen.

Das Ergebniss dieser Betrachtungen ist mithin dahin zusammenzufassen, dass für die Beobachtungsconstante 0,030 der Exponent 1 nur für 0,1 J bis 2 J auf Wahrscheinlichkeit Anspruch machen darf, während für grössere Intervalle in mehr oder weniger rascher Folge die Exponenten $^1/_2$, $^1/_3 \cdots \frac{1}{\infty}$ wahrscheinlich sind.

*) Abkürzung für $J = 9{,}0$ mm u. s. w.

Zu Exponent $^1/_2$. Bei gleichen Voraussetzungen, wie oben, müssen wir die untere Wahrscheinlichkeitsgrenze für den Exponenten $^1/_2$ nach rund 4 J legen, woselbst der relative Schätzungsfehler 0,015 mm beträgt, wie dies für den Exponenten 1 an 2 J der Fall ist.

Für den Exponenten $^1/_2$ ist aber auch eine obere Grenze zu bestimmen. Es ist nämlich geradezu unmöglich, dass ein Beobachter an 0,1 J einen Fehler von nur 0,094 mm begehen sollte. Sodann erscheint ein Fehler von nur 0,042 mm, begangen an 0,5 J, noch sehr klein, da der bis jetzt an diesem Intervall beobachtete geringste Fehler rund 0,060 mm beträgt. Mit Rücksicht auf mangelnde Abrundung und da an kleinen Intervallen schon grössere Fehlerschwankungen vorkommen, darf jedoch 0,5 J als obere Wahrscheinlichkeitsgrenze betrachtet werden.

Der Exponent $^1/_2$ hat hiernach von 0,5 J bis 4 J Wahrscheinlichkeit, dagegen für Intervalle $<$ 0,5 und $>$ 4,0 mm keine bezw. eine verminderte.

Von 0,5 J bis 2 J haben die Exponenten 1 und $^1/_2$ gleiche Wahrscheinlichkeit.

Zu Constante 0,060. Setzt man sodann die Beobachtungsconstante 0,060 anstatt 0,030 voraus, so verdoppeln sich die in Tab. IV angegebenen relativen Fehler. Für diese Constante dürfte der Minimalfehler wohl nicht kleiner als 0,015 mm angesetzt werden. Alsdann bleibt, — bei im Uebrigen gleicher Beurtheilung, wie vorstehend — die obere Wahrscheinlichkeitsgrenze für die Beziehung $\frac{0,060}{J}$ unverändert, während deren untere Grenze nach rund 3 J herabrückt.

Für die Beziehung $\frac{0,060}{\sqrt{J}}$ fällt die obere Grenze etwas über 0,5 J etwa nach rund 0,3 J und die untere Grenze nach 9 J.

Beide Beziehungen haben daher von 0,3 J bis 3 J gleiche Wahrscheinlichkeit.

Zu Constante 0,090. Ferner ergiebt sich für die Constante 0,090, für welche die relativen Fehler dreimal grösser als die in Tab. IV angegebenen sind und ein Minimalfehler von etwa 0,020 mm angenommen werden darf, die untere Grenze der einen Beziehung bei rund 4 J und die der anderen Beziehung bei 16 J, sofern die Genauigkeitsgrenze nicht früher erreicht wird.

Die obere Grenze für $\frac{0,090}{J}$ ist beizubehalten, wogegen diejenige für $\frac{0,090}{\sqrt{J}}$ nach rund 0,2 J aufrückt. Nach 0,1 J darf letztere Grenze nicht gelegt werden, da die Annahme, dass ein Beobachter, der eine Constante von 0,090 erhält, an 0,1 J einen Fehler von nur $0,094 \times 3 = 0,282$ mm finden könnte, höchst unwahrscheinlich wäre.

Die gleiche Wahrscheinlichkeit wäre alsdann für 0,2 J bis 4 J vorhanden.

Sollten wir die Minimalfehler zu gross oder zu klein angenommen haben, so würden die dadurch bedingten Grenzverschiebungen für unsere weiteren Betrachtungen nur nominellen Werth haben.

Der Uebersicht halber sind in Tabelle V die nach unseren Voraussetzungen ermittelten Wahrscheinlichkeitsgrenzen zusammengestellt.

Tabelle V.

Beobachtungsconstante a	Scheinbare Intervallgrösse J	Wahrscheinliche Grenzen für die Exponenten $n = 1$	Wahrscheinliche Grenzen für die Exponenten $n = {}^1/_2$	Grenzen der gleichen Wahrscheinlichkeit
	mm			
0,030	0,1	wahrscheinlich	unwahrscheinlich	
"	0,5		wahrscheinlich	gleich wahrscheinlich
"	2,0	unwahrscheinlich		
"	4,0		unwahrscheinlich	
0,060	0,1	wahrscheinlich	unwahrscheinlich	
"	0,3		wahrscheinlich	gleich wahrscheinlich
"	3,0	unwahrscheinlich		
"	9,0		unwahrscheinlich	
0,090	0,1	wahrscheinlich	unwahrscheinlich	
"	0,2		wahrscheinlich	gleich wahrscheinlich
"	4,0	unwahrscheinlich		
"	16,0		unwahrscheinlich	

Obgleich nun unsere Wahrscheinlichkeitsgrenzen auf Hypothesen beruhen und sie durch veränderte Voraussetzungen mehr oder weniger verschoben werden können, so lassen sich dennoch hiernach folgende allgemeine Schlüsse ziehen.

A. Die Wahrscheinlichkeit der Exponenten in der Fehlerfunction $m = \frac{a}{J_n}$ ist von der Beobachtungsconstante (a) und der scheinbaren Intervallgrösse (J) abhängig. Für sehr kleine Intervalle hat nur der Exponent 1 und für entsprechend grössere Intervalle der Exponent ${}^1/_2$ u. s. w. Wahrscheinlichkeit. Innerhalb der in der letzten Spalte der Tab. V angegebenen Grenzen ist für beide Exponenten vorläufig gleiche Wahrscheinlichkeit in Anspruch zu nehmen.

Ob jedoch letztere allgemein aufrecht erhalten werden kann oder aber, ob und inwieweit beide Exponenten sich darin theilen, lässt sich nur auf Grund exacter Beobachtungen beurtheilen.

B. Es ist unzulässig, die an grossen Intervallen ermittelten Fehlerbeziehungen ohne Weiteres auf kleine Intervalle oder umgekehrt zu übertragen. Aus unseren Wahrscheinlichkeitsgrenzen für die Beobachtungsconstante 0,030 ist dies sofort ersichtlich. Für grössere Constanten könnte dies wohl zweifelhaft erscheinen, indessen darf dieserhalb nicht unbeachtet bleiben, dass je grösser die Constante ist oder was dasselbe besagt: je grösser die Beobachtungsfehler sind, desto weniger eignen sie sich überhaupt zur Ermittelung genauer Fehlerbeziehungen.

Auch liegt z. Z. noch keine Beobachtung von grösserem Umfange vor, aus welcher eine gleichmässige Fehlerbeziehung hätte abgeleitet werden können, ohne den einen oder anderen Theil der Beobachtung zu vergewaltigen.

C. Die allgemeine Tendenz der Exponentengrösse steht in einem zwar nicht feststellbaren, jedoch immerhin in einem gewissen umgekehrten Verhältnisse zur Intervallgrösse. Je grösser die Intervalle, desto kleiner die wahrscheinlichen Exponenten.

Eine etwa beobachtete umgekehrte Tendenz würde nicht den geringsten Anspruch auf Wahrscheinlichkeit haben.

D. Da die in der Praxis hauptsächlich zur Verwendung kommenden Intervalle — die für Distanzmessungen von 0,1 J bis etwa 2 J und für Nivellirungen etwa von 1 J bis 4 J angenommen werden dürfen —, innerhalb der Grenzen der gleichen Wahrscheinlichkeit liegen, so ist hiernach zu vermuthen, dass für solche Messungen der wahre Exponent zwischen 1 und $^1/_2$ fallen wird*), und zwar für Distanzmessungen (kleinere Intervalle) mit einer Annäherung nach 1 und für Nivellirungen (grössere Intervalle) mit Annäherung nach $^1/_2$. Die Zulässigkeit dieses Schlusses lässt sich schon aus einigen z. Z. vorliegenden Beobachtungen erkennen.

(Fortsetzung folgt.)

Auflösung des einfachen Rückwärtseinschnitts mittelst Rechenmaschine und numerisch-trigonometrischer Tafel;

von H. Sossna.

Der zum Schluss des Heftes Nr. 9 auf Seite 288 abgedruckte Nachtrag zur Lösung des einfachen Rückwärtseinschnitts mittelst Rechenmaschine hat in Folge Platzmangels nur theilweise zum Abdruck gelangen können. Der unberücksichtigt gebliebene Theil enthielt die zweite Art numerischer Behandlung des auf Seite 272 bereits vorgeführten Beispiels und wird dieses zur Gewährung besseren Einblicks in das Rechnungsverfahren noch nachträglich angefügt.

---

*) Börsch machte schon früher hierauf aufmerksam. Vergl. Reinhertz S. 21, 1895.

Zu bestimmender Neupunkt: **Hermannswerder,** Bolzenstein. IV. Ordn. 1895.

a. Coordinaten und Richtungen:

i		y_i		x_i	Ziel P_i:	Mittlere beobachtete Richtung: °	′	″	Richtung für nachfolgende Berechnung:	°	′	″
L	+	21200,734	—	2820,628	Ruinenberg, Aussichtsthurm.	9	31	28,6	α	328	00	33,7
R	+	22951,186	—	6068,080	Observatorium, Wasserthurm.	84	55	44,1	β	43	24	49,2
M	+	22234,057	—	4441,630	Garnisonkirche, Knopfmitte.	41	30	54,9	·	00	00	00,0
						135	58	07 6		371	25	22,9
P	+	20603,368	—	6263,238	Hermannswerder, Bolzenstein.	360			+	124	32	44,7

b. Berechnung der Hülfsgrössen A, B, C und D:

$\Delta\ y_L$	—	1033,323	$\Delta\ x_L$	+	1621,002
$\Delta\ x_L$ cotg α	—	2595,090	$-\ \Delta\ y_L$ cotg α	—	1654,264
A	—	3628,413	B	—	33,262
cotg α	—	1,600917			
cotg β	+	1,056965			

$\Delta\ y_R$	+	717,129	$\Delta\ x_R$	—	1626,450
$\Delta\ x_R$ cotg β	—	1719,101	$-\ \Delta\ y_R$ cotg β	—	757,980
C	—	1001,972	D	—	2384,430
$-\ A$	+	3628,413	$-\ B$	+	33,262
$(C-A)$	+	2626,441	$(D-B)$	—	2351,168

c. Berechnung der Coordinatenunterschiede $\Delta\ y_P$ und $\Delta\ x_P$:

$\frac{C-A}{D-B}$	—	1,117079	$\frac{C-A}{D-B} \cdot B$	+	37,156
$\frac{D-B}{C-A}$	—	0,895192	$-\ A$	+	3628,413
Summe:	—	2,102271	$\Delta\ x_P =$	+	36,65,569

$$\Delta\ x_P = -\ 1821,608$$

$$\Delta\ y_P = -\ \frac{D-B}{C-A} \cdot \Delta\ x_P = -\ 1630,689$$

d. Schlussprobe:

Azimut:		$\Delta\ y_i$		$\Delta\ x_i$		tang.	°	′	″	Richtung:	°	′	″
(PL)	+	597,366	+	3442,610	+	0,173521	9	50	38,4	α	328	00	33,8
(PR)	+	2347,818	+	195,158	+	1 : 0,083123	85	14	54,0	β	43	24	49,4
(PM)	+	1630,689	+	1821,608	+	0,895191	41	50	04,6	·	0	00	00,0
						soll: $-\ \frac{D-B}{C-A}$							

Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten. *)

In dem Artikel „Vergleichung der Mecklenburgischen Kegelprojection mit der congruenten Soldner'schen Projection“ vom 15. April d. Js. S. 257—263 d. Z. bin ich von dem Herrn Kammeringenier Vogeler in solchem Umfange persönlich berührt worden, dass ich es nicht bei meinem Artikel vom 4. April d. Js. S. 321—327 d. Z. bewenden lassen kann.

Wenn Vogeler sagt, dass er es für unmöglich gehalten habe, dass ich auf dem Standpunkte stehe, das conforme System wäre für Katasterzwecke weniger brauchbar, als das Soldner'sche und er um so weniger annehmen gekonnt habe, dass ich dieser Ansicht sei, weil er selbst schon vor 20 Jahren als Studirender der Aachener Hochschule von den grossen Vorzügen des conformen Systems durchdrungen war, so wird er aus meinen Ausführungen vom 4. April d. Js. und aus dem Nachfolgenden entnehmen können, dass man auch jetzt noch aus sachlichen Gründen sehr wohl dem Soldner'schen System an der richtigen Stelle vor dem Gauss'schen System den Vorrang einräumen kann.

Und wenn Vogeler die Helmert'sche Abhandlung „Näherungsformeln für die Gauss'sche Projection der Hannoverschen Landesvermessung“ in Zeitschr. f. Verm. 1876, S. 238—253 heranzieht und sagt, dass in dieser Abhandlung die Vorzüge der Gauss'schen Projection sowohl für die Haupttriangulirung, als auch für die Detailtriangulirung in so objectiver und überzeugender Weise zur Darstellung gebracht seien, dass er allen jüngeren Landmessern, die sich über die vorliegende Frage orientiren möchten, dringend empfehlen könne, jenen Artikel zu studiren, so wird es gut sein, das was Helmert an der bezeichneten Stelle über die vorliegende Frage sagt, hier gleich wörtlich folgen zu lassen, da nur Wenige in der Lage sein werden, die Abhandlung einzusehen. Helmert sagt am Ende dieses Artikels über die Gauss'sche Projection und über sphärische Coordinaten Folgendes (Zeitschr. f. Verm. 1876, S. 252):

„Man kann nämlich der Meinung sein, dass für Detailaufnahmen in der Nähe des Hauptmeridians bis $y = 64$ km die sphärischen ebenen sowohl wie auch die ebenen Coordinaten benutzt werden können, als sei die Erde wirklich eine Ebene. Dies ist nun völlig zulässig für die Gauss'sche Projection. Denn die Vergrösserungszahl ist innerhalb der genannten Beschränkung $\leqq 1 + \frac{1}{20\,000}$; sie kommt also mit Rücksicht auf die Ungenauigkeit direct gemessener Längen nicht in

*) Dieser Artikel erscheint, wie auf Wunsch des Herrn Professor Dr. Jordan erklärt wird, unter meiner Verantwortlichkeit für die Redaction. Ich halte es — ohne in der Sache selbst hier Stellung nehmen zu wollen — für Pflicht der Redaction, Herrn Professor Koll gegenüber dem Artikel vom 15. April d. J. (S. 257—263) nochmals das Wort zu geben.

17. Juli 1896. *Steppes.*

Betracht. Insoweit aber nur triangulirt wird, ist der Anschluss der Detailarbeit sogar als ganz correct zu betrachten, denn Formel 4 ergiebt $(a'—a)$ durchaus kleiner als 1 Secunde.

Anders ist es bei Anwendung sphärischer Coordinaten.*) Lässt man hier die Reduction der Abscissendifferenzen weg, so erzeugt dies Fehler in den Richtungswinkeln bis zum Betrage von 5 Secunden, kann also bei der Einschaltung triangulirter Punkte fühlbar werden.

Wenn ich hier zu einem etwas anderen Resultate als Herr Jordan Seite 30 und 31 des IV. Bandes (1875) der Zeitschrift komme, so hat dies seinen Grund darin, dass derselbe den Schaden nach der Abweichung der Vergrösserungszahl von 1 bemisst, während ich eine geringe Vergrösserung für unschädlich halte, wenn sie nach allen Richtungen hin constant ist. Dies letztere ist für Detailgebiete bei der Gauss'schen Projection der Fall, nicht aber bei Behandlung sphärischer Coordinaten als ebene Coordinaten.“

Was ich hierzu zu sagen habe, ist bereits von mir in meinen früheren Artikeln in anderem Zusammenhange gesagt worden, oder soll, soweit dies nicht geschehen ist, im Nachfolgenden gesagt werden. Vogeler geht dann auf das ein, was ich über Mecklenburg gesagt habe und glaubt auf meine Auslassungen eine Antwort schuldig zu sein jenem grossen Leserkreise dieser Zeitschrift, welcher sich bisher nicht eingehender mit conformen Projectionen beschäftigt hat und besonders seinen hohen Behörden, die voll Vertrauen auf das jetzt zu schaffende Werk, die Triangulirung II. und III. Ordnung blicken, an welchem er selber mitzuarbeiten habe.

Um klarzulegen, dass diese Antwort nicht nöthig war und es mir gar nicht in den Sinn gekommen ist, irgend etwas Nachtheiliges über das zu sagen, was in Mecklenburg geschaffen worden ist und noch geschaffen werden soll, muss ich die Entwickelung der Mecklenburger Frage hier vollständig darlegen.

Jordan eröffnete diese Frage auf S. 93 d. Z. mit folgendem Satz: „Was den von Prof. Koll ausgesprochenen Satz betrifft, dass bei conformer Projection, wenn nicht das Land in viel mehr Systeme zerschlagen werden solle, für jede Gemarkung besondere Reductionsmaassstäbe

---

*) Unter „sphärischen Coordinaten“ versteht hier Helmert die jetzt sogenannten Soldner'schen Coordinaten im Gegensatz zu den ebenen conformen Coordinaten, und der Sinn dieses Citates ist daher: Bei Triangulirung im conformen System kann man die Detailarbeit ganz correct, wie eben ausführen, anders (d. h. ungünstiger) ist es bei Anwendung Soldner'scher Coordinaten, weil hier Verzerrungen der Richtungswinkel bis 5″ (also Winkelfehler bis zu 10″) auftreten.

Was ferner das abweichende Resultat von Herrn Jordan 1875 betrifft, so bezieht sich das auf einen Irthum, den ich 1875 — also vor 21 Jahren — begangen, und inzwischen in dieser Zeitschrift schon 4 mal, nämlich 1895 S. 340, 1896 S. 198, 215, 249 selbst berichtigt habe. D. Red. *J.*

für Strecken und Flächenangaben erforderlich würden, so möchte es genügen zu dessen Widerlegung die Praktiker des einzigen Landes zu fragen, welches in Deutschland zur Zeit conforme Coordinaten hat, nämlich die Geodäten von Mecklenburg, ob dort jemals besondere Reductionen dieser Art von irgend Jemanden für nöthig gehalten wurden?"

Darauf habe ich S. 197 und 198 d. Z. die nächstliegende Erwiderung gegeben, indem ich sagte: „Wenn Herr Professor Jordan räth, nur die Praktiker in Mecklenburg zu fragen, ob dort jemals besondere Reductionen dieser Art von irgend Jemanden für nöthig gehalten wurden, so ist dazu zu bemerken, dass Mecklenburg 135 km breit und 220 km lang ist, es also etwas grösser*) sein müsste, um in dieser Frage ein maassgebendes Beispiel zu sein, und dass Mecklenburg es sich noch ruhig leisten kann, die grösseren Verzerrungsfehler der Gauss'schen Coordinaten in den Kauf zu nehmen."

Als Jordan mich dann nochmals mit Mecklenburg in Verbindung brachte (S. 199 d. Z.) habe ich S. 200 d. Z. gesagt: „Bezüglich Mecklenburgs habe ich nur auf seine manche der 40 preussischen Coordinatensysteme nicht übersteigende Grösse hingewiesen und behauptet, dass es in der vorliegenden Frage kein maassgebendes Beispiel sein könne, als welches es von Jordan hingestellt war."

Diese meine Auslassungen sind meines Erachtens ganz klar. Da sie aber offenbar missdeutet worden sind und ich es in erster Linie lebhaft bedauern würde, wenn durch meine Auslassungen nach irgend einer Richtung hin bei den Mecklenburger Behörden, die stets das grösste Wohlwollen bei allem Vorwärtsstreben auf dem Gebiete des Vermessungswesens gezeigt haben, eine ungünstige Meinung hervorgerufen würde, so will ich noch das Folgende zur Erläuterung sagen:

Dass Mecklenburg ein querachsiges Coordinatensystem hat, war bekannt. Demnach kann für die Beurtheilung der vorliegenden Frage nur die Breite von Mecklenburg in Betracht kommen, die von mir unter Nichtberücksichtigung der schmalen ausspringenden Spitzen mit 135 km angenommen wurde. Bei dieser Breite erreicht weder die durchschnittliche Längenverzerrung, noch die Flächenverzerrung eine solche Grösse, dass sie nicht noch vernachlässigt werden kann, wenn dagegen der Vortheil eines einzigen Coordinatensystems für das ganze Land und für alle Arbeiten eingetauscht werden kann, und nur in diesem Sinne habe ich gesagt, dass Mecklenburg kein maassgebendes Beispiel in der vorliegenden Frage sein kann.

Um nun aber vollends zur Klarheit über Mecklenburg zu gelangen, soll hier noch Einiges angeführt werden, was zu einem objectiven Urtheil führen kann.

---

*) Mecklenburg ist, wie von Vogeler auf S. 259 und 262 nachgewiesen wurde, in allen Beziehungen erheblich grösser als ein preussisches Katastersystem.
D. Red. *J.*

Die Mecklenburgische Projection ist (nach „Grossherzoglich Mecklenburgische Landes-Vermessung II. und V. Theil, Schwerin 1882 und 1895") die conforme Kegelprojection. Die Längenverzerrung ist bei der

Breite $\varphi = 54^0\ 30'$: 1 : 11630
„ $\varphi = 54^0\ 16'$: 1 : 24330
„ $\varphi = 53^0\ 45'$: Null
„ $\varphi = 53^0\ 14'$: 1 : 24330
„ $\varphi = 53^0\ 00'$: 1 : 11770

Durch einen von Vogeler S. 259 d. Zeitschr. nur genannten von Steiff S. 337 d. Zeitschr. ausführlich dargelegten Kunstgriff ist es nun erreicht, dass die Längenverzerrung verändert ist bei der Breite

$\varphi = 54^0 30'$ in + 1 : 22270
$\varphi = 54^0 16'$ „ : Null
$\varphi = 53^0 48'$ „ — 1 : 24330
$\varphi = 53^0 14'$ „ : Null
$\varphi = 53^0 00'$ „ + 1 : 22800

Der Kunstgriff besteht einfach darin, dass die Projectionsfläche verlegt ist, von der den Normalparallel $\varphi = 53^0 48'$ berührenden Kegelfläche auf die die Parallelen $\varphi = 54^0\ 16'\ 8''$ und $\varphi = 53^0\ 13'\ 44''$ schneidende Kegelfläche, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass sämmtliche Längen im ganzen Lande reduzirt sind und zwar um 178,5 Einheiten der siebenten Stelle ihrer Logarithmen. Der Normalparallel $53^0\ 45'$ wird also dementsprechend verkleinert dargestellt, während die Parallele $54^0\ 16'\ 8''$ und $53^0\ 13'\ 44''$ in ihrer richtigen Länge erscheinen und an der Grenze des Landes eine ungefähr der Verkleinerung des Normalparallels entsprechende Vergrösserung eintritt.

Ob dies Verfahren zweckmässig ist und ob es in einem grösseren Staate mit Coordinatensystemen der verschiedensten Grösse, wo die verschieden grossen Coordinatensysteme verschiedene Längenreductionen erhalten müssten, wenn nicht unnöthig grosse Reductionen eintreten sollten, anzuwenden ist, ist eine besonders zu erörternde Frage, die mit der Entscheidung, ob Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten vorzuziehen sind, ebensowenig etwas zu thun hat, wie die Frage der Höhenreduction. Denn ebensowohl wie bei der Gauss'schen Projection die Projectionsfläche verlegt werden kann, kann das auch bei der Soldner'schen Projection geschehen und wenn in einem gewöhnlichen Soldner'schen System nicht der Meridian des Nullpunktes, sondern die beiden Parallelen zu diesem Meridian, die ungefähr um ein Viertel der Breite des Systems vom Nullpunkt entfernt sind in ihrer richtigen Länge dargestellt werden, so wird ganz dasselbe erreicht, wie das, was in Mecklenburg erreicht worden ist. Deshalb ist es auch durchaus unberechtigt, wenn Vogeler (S. 259 d. Z.) der linearen Verzerrung von $\frac{1}{24\,328}$ bei 80 000 m Abstand von der Hauptachse in Mecklenburg die lineare Verzerrung von $\frac{1}{20\,000}$ bei 65 000 m in Preussen gegenüberstellt, ohne dabei zu sagen, dass letztere auf $\frac{1}{40\,000}$ herabgesetzt wird, wenn in Preussen ebenso reducirt würde, wie in Mecklenburg. Dasselbe gilt für Vogeler's Vergleichung der Flächenverzerrung S. 262.

Vogeler sagt nun weiter aus seiner Uebersicht (S. 261, worin für Triangulirung III.—IV. Ordnung im Abstande von 60 000 m von der Hauptachse eine Richtungsverzerrung von etwa 0,5″ bei Gauss'scher Projection und von etwa 5″ bei Soldner'scher Projection nachgewiesen ist) gehe hervor, dass eine ebene Kleintriangulirung mit einer Genauigkeit von $\pm$ 2″ bis $\pm$ 3″, welche den heutigen Instrumenten entspreche und durchaus wünschenswerth sei, bei der Soldner'schen Projection der 40 preussischen Systeme zur innern Unmöglichkeit werde. Die preussischen Katastersysteme müssten auf 20 bis 30 km Abstand von der Hauptachse beschränkt werden, wenn sie den conformen Coordinaten mit einem Geltungsbereich von 80 bis 100 km Abstand vom Meridian das Gleichgewicht halten sollten.

Das klingt höchst bedenklich und geradezu vernichtend für die Soldner'sche Projection, hat aber in Wirklichkeit wenig zu bedeuten, denn Vogeler stellt erstens einen äusserlichen Schönheitsfehler als einen wirklich bedenklichen Fehler hin und er begeht zweitens den Fehler, der in der Geodäsie in den letzten Jahrzehnten immer häufiger gemacht wird, indem er Anforderungen an die Genauigkeit stellt, die durch den Zweck der Arbeiten nicht gerechtfertigt sind.

Die Richtungsverzerrung würde nur dann als ein wirklich bedenklicher Fehler anzuerkennen sein, wenn durch dieselbe die Coordinaten der trigonometrischen Punkte in bedenklichem Maasse beeinflusst würden. Meines Erachtens ist das aber nicht der Fall und solange nicht an einem grösseren Dreiecksnetz IV. Ordnung der praktische Nachweis erbracht wird, dass in einem normalen Soldner'schen Coordinatensystem sich bei sphärischer Rechnung und ebener Rechnung bedenkliche Abweichungen in den bei den beiden Rechnungen erhaltenen Coordinaten zeigen, kann man die Richtungsverzerrungen wie bisher als Fehler ansehen, die wohl die trigonometrischen Rechnungen etwas weniger schön erscheinen lassen, die aber im übrigen von keiner praktischen Bedeutung sind.

Die übertriebenen Anforderungen an die Genauigkeit sind zuerst üblich geworden bei den Nivellements. Ohne Rücksicht darauf, ob der Zweck, dem die Arbeit dienen sollte, dies erforderte, musste jedes etwas grössere Nivellement als Präcisionsnivellement mit den feinsten Präcisionsinstrumenten durchgeführt werden und weder Zeit noch Geld wurde geschont, um nur ja die höchstmögliche Genauigkeit zu erreichen. Dasselbe Verfahren hat dann bei Stadtvermessungen Eingang gefunden und jetzt scheint der Versuch gemacht werden zu sollen, dies Verfahren auch auf alle übrigen Parzellarvermessungen auszudehnen. Demgegenüber muss darauf hingewiesen werden, dass jede unnöthige Steigerung der Genauigkeit unnöthigen Zeit- und Geldaufwand bedingt und dass es unserm Vermessungswesen nicht zum Vortheile gereichen kann, wenn wir mit der Entwicklung desselben in falsche Bahnen gerathen und nicht mehr beachten, dass die zu fordernde Genauigkeit mit dem Zweck, dem die Arbeiten dienen sollen, in Einklang stehen muss.

Nach der Kataster-Anweisung IX ist in Preussen im Dreiecksnetz IV. Ordnung für eine Richtung noch ein Fehler von 25″ zulässig. Hieran kann auch fernerhin ganz unbedenklich festgehalten werden und bei dieser Genauigkeit wird der aus der Richtungsverzerrung resultirende kleine Zuwachs zu den Messungsfehlern nirgends fühlbar. Und wenn dann wirklich bei der Vermessung einer Stadt, wo die hohen Bodenwerthe eine grössere Genauigkeit bedingen, die Richtungsverzerrung dadurch, dass die Stadt gerade an der Grenze eines Coordinatensystems liegt, so gross wird, dass die Folgen derselben bedenklich werden könnten, so giebt es so einfache Mittel und Wege, dem abzuhelfen, dass es deshalb noch durchaus nicht nothwendig wird, die Projection im ganzen Staate zu ändern.

Ganz dasselbe, was ich hier über die Verhältnisse im Dreiecksnetz IV. Ordnung gesagt habe, gilt auch für das Dreiecksnetz V. Ordnung und für das Polygonnetz und wenn man bei der Berechnung der Polygonzüge die Längenverzerrung berücksichtigen will, so kann man im Soldner'schen System die Logarithmen der Abscissenunterschiede gerade ebenso einfach reduziren, wie im Gaus'sschen System die Logarithmen der Seiten.

Bonn, den 24. Juni 1896. *Otto Koll.*

Da dieser vom 24. Juni datirte, jedoch erst am 18. Juli endgültig zum Druck eingesandte Artikel nach der Anmerkung auf S. 473 unter Redactionsverantwortung eines Redactionsmitgliedes noch in Heft 15 vor der Dresdener Versammlung zum Abdruck gebracht wird, so dass es dem Herrn Kammeringenieur Vogeler, gegen welchen sich der Artikel richtet, nicht mehr möglich ist, ebenfalls noch vor dieser Versammlung sich darüber öffentlich zu äussern, halte ich mich für verpflichtet, noch in Kürze das zuzufügen, was Herr Vogeler nach meiner Ansicht etwa dagegen zu sagen haben würde.

Zu der Hauptsache, ob die conforme oder die Soldner'sche Projection für Katastermessungen vorzuziehen sei, kann nach den zahlreichen Erörterungen, welche in den letzten Heften der Zeitschrift geführt worden sind, nur der Schluss gezogen werden, dass die conforme Projection die bessere ist; haben doch z. B. unter fünf berufsmässig mit der Sache vertrauten Geodäten, welche alle in diesem Sinn sich aussprachen, die zwei trigonometrischen Vertreter der süddeutschen Stammlande der

Soldner'schen Projection, Bayern und Württemberg (Seite 327 und 333), unumwunden erklärt, dass jene Projection nur deshalb in ihren Ländern beibehalten werde, weil sie nun eben seit nahezu 100 Jahren eingeführt ist und nicht ohne weiteres abgeschafft werden kann.

Ganz ähnlich verhält es sich in Preussen, wo wohl Niemand daran denkt „die Projection im ganzen Staate zu ändern“, obgleich die vor 17 Jahren mit den 40 Soldner'schen Katastersystemen getroffene Wahl nicht die beste war, wie ja auch Herr Koll selber zugiebt, indem er die dabei auftretenden Winkelverzerrungen bis zu 10″ euphemistisch einen „Schönheitsfehler“ nennt.

Solche „Schönheitsfehler“, oder praktisch gesprochen, sehr störende Verzerrungen, die z. B. bei Stadtvermessungen die mittleren Messungsfehler erheblich übertreffen, kommen in der conformen Projection nicht vor, und deswegen ist sie die bessere — sei es mit oder ohne den besonderen kleinen „Kunstgriff“.

Insbesondere die Mecklenburgische conforme Projection ist im Vergleich mit der Preussischen Katasterprojection ein Ideal; und deswegen ist die erneute gegen Mecklenburgische Geodäten erhobene Behauptung, Mecklenburg sei zu klein um maassgebend zu sein u. s. w. und die noch dazu gekommene Beschuldigung, dass die Mecklenburger Geodäten eine mit dem Zweck der Arbeiten nicht im Einklang stehende übertriebene geldverschwendende Genauigkeit erstreben, u. s. w. unrichtig, und gegenstandslos und bis auf weiteres hiermit zurückzuweisen.

Hannover, 20. Juli 1896. *Jordan.*

Personalnachrichten.

Königreich Preussen. Geheimer Regierungsrath Dr. Helmert, Director des Königl. Geodätischen Instituts in Potsdam, ist zum correspondirenden Mitglied der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen gewählt worden.

Seine Majestät der König haben Allergnädigst geruht: dem Landmesser Mendelssohn in Oels O.-S. den Charakter als Rechnungsrath zu verleihen.

Finanz-Ministerium. Der Kataster-Kontroleur, Steuer-Inspector Schaetzke aus Hirschberg ist zum Kataster-Inspector ernannt und demselben eine Kataster-Inspektorstelle bei der Königlichen Regierung in Magdeburg verliehen worden.

Die Kataster-Controleure Quandt zu Wächtersbach und Zumpft zu Minden sind in gleicher Diensteigenschaft nach Pr.-Eylau bezw. Wächtersbach, und die Kataster-Controleure Kukutsch in Mogilno und Geidt in Daun als Kataster-Secretaire nach Marienwerder bezw. Arnsberg versetzt worden.

Die Kataster-Landmesser Hillert aus Berlin und Propping in Minden sind zu Kataster-Controleuren befördert; denselben ist die dauernde Verwaltung der Kataster-Aemter Putzig bezw. Minden II übertragen. Die Kataster-Landmesser Albath in Marienwerder und Massing in Trier sind zu Kataster-Controleuren in Mogilno bezw. Daun bestellt worden.

Königreich Bayern. S. K. H. der Prinzregent geruhten, den Bezirksgeometer Max Steger in Nürnberg zum Vorstand der königl. Messungsbehörde Eichstätt und den Messungsassistenten Heinrich Schweikart zum Bezirksgeometer II. Klasse und Vorstand der königlichen Messungsbehörde Viechtach zu ernennen; ferner den Bezirksgeometer Spanl in Donauwörth auf die Vorstandsstelle der königlichen Messungsbehörde Hof zu versetzen, zum Vorstand der königlichen Messungsbehörde Donauwörth den Kreisgeometer Gabriel Greger in Augsburg zu ernennen und des Letzteren Stelle dem Messungsassistenten Klein in Speyer zu verleihen; den Obergeometer Kraus des königlichen Katasterbureau unter Anerkennung seiner langjährigen treuen und eifrigen Dienstleistung in den Ruhestand zu versetzen; zu Obergeometern beim Katasterbureau die Katastergeometer Fritz und Weber zu befördern und zu Katastergeometern den Messungsassistenten Heiss und den geprüften Geometer Seifferlein zu ernennen; endlich den Obergeometer Ed. Bayer der Flurbereinigungscommission zum Steuerrath bei dieser Commission zu befördern und zu Flurbereinigungsgeometern II. Klasse die geprüften Geometer Wasem und Zenetti zu ernennen.

Finanzministerium. Zu Messungsassistenten wurden ernannt die geprüften Geometer: Schauer bei der königlichen Regierung von Oberfranken, Hitschler bei der königlichen Regierung der Pfalz, dann Karl Schönmetzer, Josef Bamberger und Franz Holz beim königlichen Katasterbureau.

Königreich Sachsen. Angestellt als Geometer sind beim Centralbureau für Steuervermessung in Dresden die verpflichteten Feldmesser Alwin Oswald Hensel und Paul Kurt Lindner.

Grossherzogthum Baden. S. K. H. der Grossherzog hat die Bezirksgeometer Karl Protscher, Jakob Schumann, Julius Fuhrmann und Ulrich Baumann landesherrlich angestellt.

Inhalt.

Verlag von Konrad Wittwer Stuttgart. — Druck von Gebrüder Jänecke in Hannover.