ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

Dr. W. Jordan, Professor in Hannover. und C. Steppes, Steuer-Rath in München.

1898. Heft 11. Band XXVII.

1. Juni.

Zur Jordan'schen Theorie des Maximalfehlers.*)

Von Dr. Ad. Blümcke, kgl. Reallehrer in Nürnberg.

(Vergl. die früheren Mittheilungen Zeitschr. 1897, S. 51—54, 276—281, 561—562.)

Bei den bisherigen Betrachtungen über den Maximalfehler war vorausgesetzt, dass in dem Jordan'schen Ausdruck für die Fehlerfunction

$$\varphi(\varepsilon)_n = \frac{1}{2}\,\frac{3.\ 5.\ 7 \ldots\ldots\ldots\ldots (2n+1)\,(2n+3)}{2.\ 4.\ 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2n \qquad (2n+2)}\,\frac{1}{M}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^{n+1}$$

oder

$$y = \varphi(\varepsilon)^n = D\left(1-\frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^{n+1}$$

so dass $D = \dfrac{1}{2M}\,\dfrac{3.\ 5.\ 7 \ldots (2n+3)}{2.\ 4.\ 6 \ldots (2n+2)}$ und $\dfrac{m^2}{M^2} = \dfrac{1}{2n+5}$

die Zahl n eine ganze Zahl bedeutet.

Wenn man nun aus den von Jordan für zwei specielle Fälle (Handb. d. Verm. I. Band, 4. Aufl., 1895, S. 571—573) ermittelten Werthen für den Maximalfehler die Zahl n berechnet, so sieht man, dass n keine ganze Zahl wird. Man kann das nun durch die Unvollkommenheit des Beobachtungsmaterials erklären und für n die nächstgelegene ganze Zahl wählen, was ja wohl in den meisten praktischen Fällen ausreichen wird. Man kann aber auch auf den Gedanken kommen, zu untersuchen, ob die Jordan'sche Theorie mit Nothwendigkeit verlangt, dass n eine ganze Zahl sei und ob nicht etwa auch andere Werthe für n erhalten werden können.

*) Indem wir hiermit eine schon sehr lange eingesendete theoretische Abhandlung, welche nur von einem kleinen Theil unserer Leser eingehend studirt werden wird, zum Druck bringen, wollen wir doch nicht versäumen, darauf hinzuweisen, dass auch diese Theorie — mit Gammafunctionen — einen festen Anbindepunkt an die Praxis hat, indem das bei allen amtlichen Vermessungsanweisungen nöthige Verhältniss des Grenzfehlers zum mittleren Fehler dadurch zum ersten Mal der mathematischen Behandlung zugänglich gemacht wird.

Red. *J.*

Dazu ist es nöthig, auf die Ableitung jenes Ausdrucks Seite 51 dieser Zeitschrift 1897 zurückzugreifen. Es ergab sich für die Fehlerfunction der Ausdruck

$$y = D\left(1 - \frac{x^2}{M^2}\right)^{n+1}$$

wo n nicht nothwendig eine ganze Zahl zu sein braucht und für D ergab sich (1897, S. 54) der Werth:

$$D = \frac{1}{2\,M\int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\,du}$$

woraus sich das Jordan'sche Gesetz ergiebt, wenn n eine ganze Zahl ist.

Wenn die Jordan'sche Theorie nun nur für ganzzahlige n Giltigkeit hätte, so müsste das Integral $\int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\,du$ für alle anderen Werthe von n keinen Sinn haben. Das ist aber durchaus nicht der Fall, vielmehr lässt sich der Werth dieses Integrals noch angeben für eine ganze Reihe von Werthen; welche von diesen für unsere Zwecke noch brauchbar sind, werden wir später sehen.

Setzen wir $u^2 = v$ also $2u\,du = dv$ so wird

$$\int_0^1 \left(1-u^2\right)^{n+1} du = \frac{1}{2}\int_0^1 v^{-\frac{1}{2}}\left(1-v\right)^{n+1} dv$$

oder $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 v^{\frac{1}{2}-1}\left(1-v\right)^{(n+2)-1} dv$

Damit werden wir auf Gammafunctionen geführt, über welche das Wesentliche sich findet in Schlömilch Compendium der höheren Analysis 2. Band, 1866, S. 241—280. Weiteres findet man in Schlömilch „Analytische Studien“ 1. Band, enthaltend Theorie und Tafel der Gammafunctionen nebst deren wichtigsten Anwendungen, 1848, woraus im Nachfolgenden einige besondere Citate gegeben werden.

In der letzten Gleichung haben wir ein Euler'sches Integral der ersten Art vor uns,

dessen Werth $= \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+2+\frac{1}{2})}$ ist; sonach ist

$$D = \frac{\Gamma(n+\frac{5}{2})}{M\cdot\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+2)}$$

Nach einem Satze über Gammafunctionen (welcher in Schlömilch Analytische Studien S. 10 gefunden wird) ist:

$$\frac{2^{2n}}{2^{2\mu+1}}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\mu-n)}{\Gamma(\mu-\nu+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(\mu-n)^2}{\Gamma(2\mu-2n)}$$

Wir setzen hier statt μ den neuen Werth n und statt n den neuen Werth -2; dieses giebt:

$$\frac{2^{-4}\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+2)}{2^{2n+1}\,\Gamma(n+2+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2^2}\,\frac{\Gamma(n+2)^2}{\Gamma(2n+4)} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\Gamma(n+\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+2)} = \frac{\Gamma(2n+4)}{2^{2n+3}\,\Gamma(n+2)^2}$$

und wir können der Constanten D noch die Form geben

$$D = \frac{\Gamma_{(2n+4)}}{M\, 2^{2n+3} (\Gamma_{(n+2)})^2}$$

In der früheren Arbeit (1897 S. 280) wurde gezeigt, dass sich alle Potenzensummen der Fehler $[\varepsilon^4], [\varepsilon^6] \ldots$ durch $[\varepsilon^2]$ ausdrücken lassen. Es wurde nämlich gefunden 1897, S. 280—281:

$$\frac{[\varepsilon^4]}{M^4} = \frac{3}{2n+7} \frac{[\varepsilon^2]}{M^2}$$

$$\frac{[\varepsilon^6]}{M^6} = \frac{3 \cdot 5}{(2n+7)(2n+9)} \frac{[\varepsilon^2]}{M^2}$$

$$\frac{[\varepsilon^8]}{M^8} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{(2n+7)(2n+9)(2n+11)} \frac{[\varepsilon^2]}{M^2}$$

und auch der allgemeine Ausdruck für irgend welche Summe gerader Potenzen $[\varepsilon^{2\lambda}]$ ist in Zeitschrift 1897 S. 281 angegeben. Dabei gilt M jeweils für das betreffende n, welches als ganze Zahl angenommen wurde.

Man kann dieselben Formeln auch für beliebige Werthe n entwickeln, wozu wir die Fehlerfunction in dieser Form schreiben:

$$y = \varphi(\varepsilon) = D \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^{n+1}$$

indem D die Bedeutung von 1897 S. 54 hat. Damit ist:

$$m_n^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{p} = 2 \int_0^M \varphi(\varepsilon)\, \varepsilon^2\, d\,\varepsilon \text{ oder wenn } \frac{\varepsilon}{M} = u \text{ gesetzt wird}$$

$$m_n^2 = M_n^2 \int_0^1 \frac{u^2 (1-u^2)^{n+1}}{\int_0^1 (1-u^2)^{n+1} du} d\,u \, .$$

$$\text{also } \left(\frac{m_n}{M_n}\right)^2 = \frac{\int_0^1 u^2 (1-u^2)^{n+1} du}{\int_0^1 (1-u^2)^{n+1} du} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\, \Gamma_{(n+2)}}{\Gamma_{(n+\frac{7}{2})}} \cdot \frac{\Gamma_{(n+\frac{5}{2})}}{\Gamma(\frac{1}{2})\, \Gamma_{(n+2)}}$$

$$\text{oder da } \Gamma_{(\mu+1)} = \mu\, \Gamma_{(\mu)} \qquad = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{(n+\frac{5}{2}) \cdot \Gamma_{(n+\frac{5}{2})}} \frac{\Gamma_{(n+\frac{5}{2})}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$\left(\frac{m_n}{M^n}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{n+\frac{5}{2}} = \frac{2}{2n+5}$$

ferner ist

$$\nu_n^4 = \frac{[\varepsilon^4]}{p} = M_n^4 \int_0^1 \frac{u^4 (1-u^2)^{n+1}}{\int_0^1 (1-u^2)^{n+1} du} d\,u$$

$$\text{oder } \left(\frac{\nu_n^4}{M_n}\right) = \frac{\int_0^1 u^4 (1-u^2)^{n+1} d\,u}{\int_0^1 (1-u^2)^{n+1} d\,u} = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\, \Gamma_{(n+2)}}{\Gamma_{(n+\frac{9}{2})}} \cdot \frac{\Gamma_{(n+\frac{5}{2})}}{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma_{(n+2)}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{(n+\frac{7}{2})(n+\frac{5}{2})\, \Gamma_{(n+\frac{5}{2})}} \cdot \frac{\Gamma_{(n+\frac{5}{2})}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{(n+\frac{7}{2})(n+\frac{5}{2})}$$

$$= \frac{3 \cdot 1}{(2n+7)(2n+5)} = \frac{3}{2n+7} \left(\frac{m_n}{M_n}\right)^2$$

In gleicher Weise haben wir auch den allgemeinen Fall $[\varepsilon^{2\lambda}]$ behandelt, wovon wir der Kürze wegen nur die Schlussformel angeben:

$$\frac{1}{p} \frac{[\varepsilon^{2\lambda}]}{M_n^{2\lambda}} = \frac{(2\lambda-1)(2\lambda-3) \ldots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2n+2\lambda+3)(2n+2\lambda+1) \ldots (2n+7)} \left(\frac{m_n}{M_n}\right)^2$$

Unsere frühere Summe in Zeitschr. 1897, S. 280:

$$S = \frac{1}{p}\left[\frac{[\varepsilon^2]}{M_n^2} + \frac{[\varepsilon^4]}{2M_n^4} + \frac{[\varepsilon^6]}{3M_n^6} + \ldots\ldots\right]$$ wird nunmehr

$$S = \frac{1}{\int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\,du}\left\{\int_0^1 u^2 (1-u^2)^{n+1}\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 u^4 (1-u^2)^{n+1}\,du + \ldots\right\}$$

oder auch $= \dfrac{\int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\left(u^2 + \frac{u^4}{2} + \frac{u^6}{3} + \frac{u^8}{4} + \ldots\right)du}{\int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\,du}$

und weil $u^2 + \frac{u^4}{2} + \frac{u^6}{3} + \frac{u^8}{4} + \ldots\ldots\ldots = -\log\text{nat}\,(1-u^2)$

wird das Vorhergehende:

$$S = \frac{-\int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\log\text{nat}\,(1-u^2)^{n+1}\,du}{\int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\,du}$$

da nun

$$\frac{d}{dn}\int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\,du = \int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\log\text{nat}\,(1-u^2)\,du$$

$$= -\frac{d}{dn}\log\text{nat}\int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\,du,$$

so ist

$$S = -\frac{d}{dn}\log\text{nat}\,\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+\frac{5}{2})} =$$

$$-\frac{d}{dn}\left[\log\text{nat}\,\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) + \log\text{nat}\,\Gamma(n+2) - \log\text{nat}\,\Gamma(n+\tfrac{5}{2})\right]$$

$$= -\frac{d}{dn}\log\text{nat}\,\Gamma(n+2) + \frac{d}{dn}\log\text{nat}\,\Gamma(n+\tfrac{5}{2})$$

weil aber

$$\frac{d\log\text{nat}\,\Gamma(\mu)}{d\mu} = -C + \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\,dx,\quad [\text{wo } C = 0{,}5772156]\ \ldots$$

so wird der vorherige Ausdruck

$$= \int_0^1 \frac{1-x^{n+3/2}}{1-x}\,dx - \int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,dx$$

oder

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^{n+3/2}}{1-x}\,dx$$

und die früher in Zeitschr. 1897, S. 561 mit $J(n)$ bezeichnete Reihe erhält den Werth

$$J(n) = (2n+5).\int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^{n+3/2}}{1-x}\,dx$$

Dieser letzte Ausdruck gestattet, die Werthe $J(n)$ leichter und bequemer zu berechnen als mit Zuhilfenahme der unendlichen Reihe in Zeitschr. 1897, S. 561 namentlich für kleine n.

$n = -2$ giebt $J(n) = \infty$		$n = -\frac{15}{16}$ giebt $J(n) = 1{,}78313$
$n = -1$ „ „ $= 1{,}84112$		$n - \frac{3}{4}$ „ „ $= 1{,}66241$
$n = 0$ „ „ $= 1{,}40186$		$n - \frac{1}{2}$ „ „ $= 1{,}54518$
$n = +1$ „ „ $= 1{,}26260$		$n + \frac{1}{2}$ „ „ $= 1{,}31777$
$n = +2$ „ „ $= 1{,}19479$		$n + \frac{3}{4}$ „ „ $= 1{,}22370$
$n = +3$ „ „ $= 1{,}15471$		
$n = \infty$ „ „ $= 1.$		

Mit Rücksicht darauf, dass für $n = -2$ diese Reihe unendlich wird würden wir schon von vornherein alle Werthe für n kleiner als -2 ausschliessen müssen.

Ausserdem folgt aber noch aus den Betrachtungen Jordan's, dass der unterste noch brauchbare Werth von n gleich -1 ist. In diesem Falle besteht nämlich die der Fehlerfunction entsprechende Curve aus einer Geraden parallel zur Abscissenachse und zwei Geraden parallel zur Ordinatenachse; man kann für diesen Fall die Gleichung $y = D\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^{n+1}$ d. h. mit $n = -1$ oder $n + 1 = 0$ auffassen sowohl als $y = D$ als auch $1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2} = \left(\frac{y}{D}\right)^{\infty} = 0$, wenn y kleiner als D ist.

Für alle Werthe von n, welche kleiner als -1 sind, würde diese Function im Punkte $\varphi(\varepsilon) = 0$, $\varepsilon = 0$ kein Maximum mehr haben, sondern wie man sich leicht durch Differentiren überzeugen kann, ein Minimum; sie würde also den naturgemäss an eine Fehlerfunction zu stellenden Anforderungen nicht mehr genügen.

Unsere Ergebnisse zusammenfassend haben wir also die Fehlerfunction $\varphi(\varepsilon)$ aus der ursprünglichen Form von 1897, S. 51 und S. 54 durch das Vorstehende S. 314 auf die für beliebige Werthe von n gültige Form gebracht:

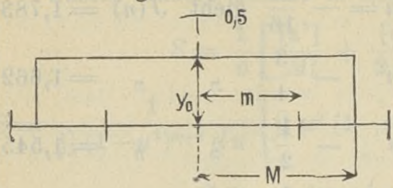
$$\varphi(\varepsilon) = \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right)}{M\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + 2\right)}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^{n+1}$$

Dieser Ausdruck stellt ein ganzes System stetig aufeinanderfolgender Curven dar, von denen alle, welche den Werthen von n zwischen -1 und $+\infty$ entsprechen, brauchbare Fehlerfunctionen liefern.

Eine Anzahl von Curven, welche den wichtigsten Fällen entsprechen, zeigt die nachfolgende Zusammenstellung, zu welcher nochmals an J. Handb. d. V. I. Band, 5. Aufl. 1895, S. 568 erinnert sei.

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{2n+5}, \quad \frac{\nu^4}{M^4} = \frac{3}{(2n+5)(2n+7)}, \quad \frac{\nu^4}{m^4} = \frac{3(2n+5)}{2n+7}$$

Fig. 1. $n = -1$

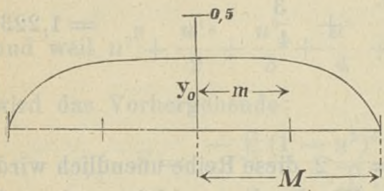


Parallele Gerade

$$M^2 = 3\,m^2 \qquad \frac{\nu^4}{M^4} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\nu^4}{m^4} = 3 \cdot \frac{3}{5}$$

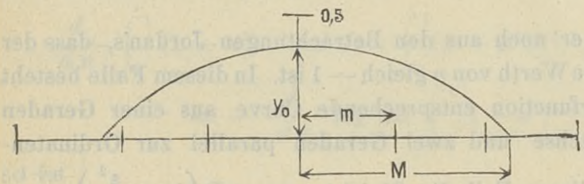
Fig. 2. $n = -\frac{1}{2}$



$$M^2 = 4\,m^2 \qquad \frac{\nu^4}{M} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\nu^4}{m^4} = 3 \cdot \frac{2}{3}$$

Fig. 3. $n = 0$

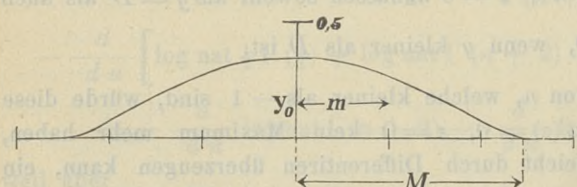


Parabel

$$M^2 = 5\,m^2, \quad \frac{\nu^4}{M^4} = \frac{3}{35},$$

$$\frac{\nu^4}{m^4} = 3 \cdot \frac{5}{7}$$

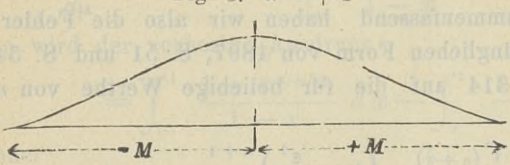
Fig. 4. $n = +\frac{1}{2}$



$$M^2 = 6\,m^2 \quad \frac{\nu^4}{M^4} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{\nu^4}{m^4} = 3 \cdot \frac{3}{4}$$

Fig. 5. $n = +1$



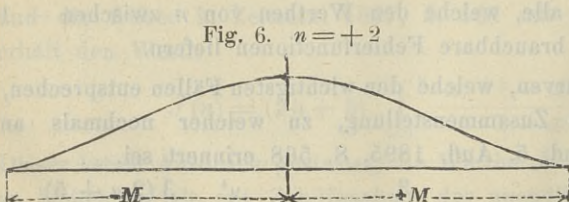
Berührung erster Ordnung

d. h. $\frac{d\,y}{d\,\varepsilon} = 0$ für $\varepsilon = M$

$$M^2 = 7\,m^2 \quad \frac{\nu^4}{M^4} = \frac{1}{21}$$

$$\frac{\nu^4}{m^4} = 3 \cdot \frac{7}{9}$$

Fig. 6. $n = +2$



Berührung zweiter Ordnung

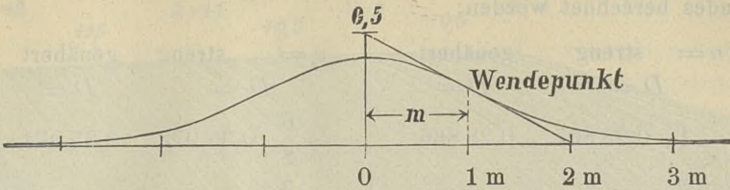
$$\frac{d\,y}{d\,\varepsilon} = 0 \text{ und } \frac{d^2\,y}{d\,\varepsilon^2} = 0$$

für $\varepsilon = M$

$$M^2 = 9\,m^2 \quad \frac{\nu^4}{M^4} = \frac{1}{33}$$

$$\frac{\nu^4}{m^4} = 3 \cdot \frac{9}{11}$$

Fig. 7. $n = \infty$



Asymptotischer Anschluss. (Gauss'sches Fehlergesetz)

$$M^2 = \infty \qquad \frac{\nu^4}{M^4} = \frac{1}{\infty}.$$

Aus diesen Figuren ist der Verlauf der Fehlerfunction für 7 verschiedene Werthe von n ersichtlich; dabei ist alles weggelassen, was für den vorliegenden Zweck überflüssig ist, d. h. es sind nur die Curvenstücke von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = \pm M$ angegeben. Für $n = -1, 0$ und 1 finden sich diese Curven bereits in Jordan's Handbuch der Vermessungskunde I. Band, 4. Aufl., 1895, Seite 459 u. s. f. für $n = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ wurden die Constanten D nach der obenstehenden Formel unter Benutzung der Tabelle in Schlömilch's analytischen Studien berechnet und eine hinreichende Anzahl von Punkten ermittelt, um die Curven zeichnen zu können. Die Werthe von D wachsen von $D = 0{,}28\,867$ für $n = -1$ bis $0{,}39\,894$ für $n = +\infty$.

Die Werthe von M wachsen von $M = \pm\sqrt{3}$ bis $M = \pm\infty$. Es ist für

$$n = -1 \quad D = 0{,}28\,867; \quad M = \pm 1{,}732\, m; \quad \nu^4 = \frac{9}{5} m^4 = 1{,}800\, m^4$$

$$n = -\frac{1}{2} \quad D = 0{,}31\,831; \quad M = \pm 2{,}000\, m; \quad \nu^4 = 2\, m^4 = 2{,}000\, m^4$$

$$n = 0 \quad D = 0{,}33\,541; \quad M = \pm 2{,}236\, m; \quad \nu^4 = \frac{15}{7} m^4 = 2{,}143\, m^4$$

$$n = +\frac{1}{2} \quad D = 0{,}34\,653; \quad M = \pm 2{,}450\, m; \quad \nu^4 = \frac{9}{4} m^4 = 2{,}250\, m^4$$

$$n = +1 \quad D = 0{,}35\,431; \quad M = \pm 2{,}646\, m; \quad \nu^4 = \frac{7}{3} m^4 = 2{,}333\, m^4$$

für eine grössere Zahl von Werthen n zwischen $n = -1$ und $n = +10$ sind die Werthe D berechnet worden. Die strenge Formel für D ist

$$D = \frac{1}{m\, 2\sqrt{2n+5}\int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\, du} \quad \text{für } m = 1$$

$$D = \frac{1}{2\sqrt{2n+5}\int_0^1 (1-u^2)^{n+1}\, du} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2)\cdot\sqrt{2n+5}}$$

Diese strenge Formel kann (bis zur 4. Decimale) ersetzt werden durch die bequemere Näherungsformel:

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{0{,}29\,799}{2n+5} - \frac{0{,}09855}{(2n+5)^2}$$

$$\text{oder} \quad D = 0{,}38\,984\left(1 - \frac{0{,}74\,695}{2n+5} - \frac{0{,}24703}{(2n+5)^2}\right)$$

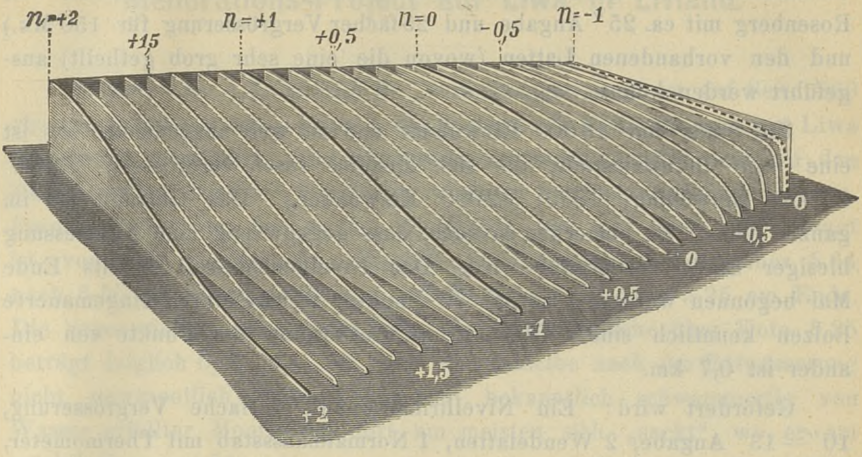
Nach der strengen Formel und nach der Näherungsformel ist Folgendes berechnet worden:

$n =$	streng $D =$	genähert $D =$	$n =$	streng $D =$	genähert $D =$
-1	0,28 867	0,28 866	$+\frac{6}{8}$	0,35 075	0,35 074
$-\frac{7}{8}$	0,29 796	0,29 792	$+\frac{7}{8}$	0,35 262	0,35 263
$-\frac{6}{8}$	0,30 578	0,30 578	$+1$	0,35 434	0,35 436
$-\frac{5}{8}$	0,31 250	0,31 247	$+\frac{9}{8}$	0,35 594	0,35 596
$-\frac{4}{8}$	0,31 831	0,31 828	$+\frac{10}{8}$	0,35 744	0,35 746
$-\frac{3}{8}$	0,32 340	0,32 337	$+\frac{11}{8}$	0,35 883	0,35 885
$-\frac{2}{8}$	0,32 788	0,32 784	$+\frac{12}{8}$	0,36 013	0,36 015
$-\frac{1}{8}$	0,33 185	0,33 184	$+\frac{13}{8}$	0,36 135	0,36 137
0	0,33 541	0,33 540	$+\frac{14}{8}$	0,36 249	0,36 252
$+\frac{1}{8}$	0,33 861	0,33 860	$+\frac{15}{8}$	0,36 357	0,36 260
$+\frac{2}{8}$	0,34 151	0,34 150	$+2$	0,36 460	0,36 461
$+\frac{3}{8}$	0,34 414	0,34 414	$+5$	0,37 860	0,37 864
$+\frac{4}{8}$	0,34 653	0,34 653	$+10$	0,38 683	0,38 686
$+\frac{5}{8}$	0,34 873	0,34 874	$+\infty$	0,39 894	0,39 894

Man kann sich ein anschauliches Bild von diesen Curven machen, wenn man diesen Ausdruck als die Gleichung einer Fläche betrachtet, in welcher φ (ε), ε und n als rechtwinklige Coordinaten angesehen werden; alle unsere Curven liegen dann in Ebenen parallel zur Ebene $n = -1$. Freilich kann man sich nur ein endliches Stück derselben herstellen. Für die Theorie des Maximalfehlers wird hauptsächlich der Theil zwischen $n = -1$ und $n = +2$ etwa von Interesse sein; die der Gauss'schen Fehlerfunction entsprechende Curve würde in der Ebene $n = +\infty$ liegen.

Wir haben nach diesem Gedanken ein Modell hergestellt, welches in nachstehender Fig. 8 abgebildet ist.

Fig. 8.



Hieraus ist der Verlauf der Curven für positive ε von $n = -1$ bis $n = +2$ in Abständen von je $\frac{1}{8}$ ersichtlich. Wegen des schroffen Uebergangs in der Nähe von $n = -1$ wurde zwischen den Curven für $n = -1$ und $n = -\frac{7}{8}$ noch eine punktirt gezeichnete Curve für $n = -\frac{15}{16}$ eingeschaltet. Für alle diese Curven ist der mittlere Fehler $m = 1$ gesetzt.

Nürnberg, August 1897. *Blümcke.*

Herr Blümcke hat inzwischen auch noch eine weitere höchst interessante Untersuchung zur Theorie des Maximalfehlers eingesandt, welche wir zunächst, um den Raum der Zeitschrift nicht zu sehr für theoretische Artikel in Anspruch zu nehmen, noch nicht veröffentlichen können.

Eine mehr der Praxis naheliegende Arbeit zur Maximalfehlerbestimmung ist von uns selbst begonnen worden, nämlich die Berechnung des Verhältnisses $M : m$ aus den 5000 Dreiecksschlussfehlern, welche auf Anregung des italienischen Generals Ferrero in der internationalen Erdmessung zusammengebracht worden sind. *J.*

Stadt - Nivellement.

Es soll in hiesiger Stadt ein Kanalnetz gelegt werden, wozu selbstverständlich ein Nivellement, das bisher noch nicht vorhanden ist, nöthig ist, welches gleichzeitig so ausgeführt werden soll, dass es auch zu anderen Zwecken brauchbar bleibt. Es ist natürlich, dass dem sehr ausgedehnten Strassen-Nivellement ein Nivellement erster Ordnung zu Grunde gelegt wird. Nun ist zwar der Stadtbaurath hiesiger Stadt damit ganz einverstanden, glaubt aber, dass dieses Nivellement mit dem bereits vorhandenen Instrument (ein norddeutsches Nivellir-Instrument von Rosenberg mit ca. 25″ Angabe und 25facher Vergrösserung für 150 Mk.) und den vorhandenen Latten (wovon die eine sehr grob getheilt) ausgeführt werden könnte.

Die Stadt hat 43000 Einwohner und ist weit ausgedehnt. Es ist eine rege Industriestadt, die sich ziemlich rasch vergrössert. (1890: 20000 Einwohner, 1895: 42000 Einwohner.) Das Gelände ist im ganzen eben. Zu bemerken ist noch, dass gegenwärtig eine Neumessung hiesiger Stadt vorbereitet wird. Das Nivellement soll bereits Ende Mai begonnen werden. Es hat 70 Punkte, welche durch eingemauerte Bolzen kenntlich sind. Die mittlere Entfernung der Punkte von einander ist 0,7 km.

Gefordert wird: Ein Nivellirinstrument, 30fache Vergrösserung, 10″—13″ Angabe, 2 Wendelatten, 1 Normalmaassstab mit Thermometer, Fehlgrenze II. Ordnung: 28 $\sqrt{l}$ Schlussfehler, Fehlgrenze I. Ordnung: 10 $\sqrt{l}$ Schlussfehler. Die Kosten für das Nivellement I. und II. Ordnung betragen 2000 Mk. incl. Gehalt. Die Bedingung, von der ich ausgehen muss, ist natürlich: „möglichst billig und gut“.

1) Ist im obigen Falle überhaupt ein besseres Nivellement nöthig, und welche Genauigkeit erfordert es?
2) Was für ein Instrument ist nöthig?
3) Beschaffenheit der Latten?
4) Ist tägliche Lattenvergleichung nöthig?

Auf diese verschiedenen Fragen kann ich aus eigener Erfahrung zunächst Eolgendes antworten:

Ein Instrument mit 25facher Vergrösserung ist ausreichend, doch wäre statt der Libelle von 25″ Angabe eine feinere Libelle von 10″ Angabe einzuziehen. Zwei gute Latten mit Centimetertheilung sind nöthig; ob gerade Wendelatten, ist unwesentlich. Die Latten müssen einmal auf der Theilmaschine scharf getheilt sein, höchstens alle Halbjahr controlirt werden; tägliche Lattenvergleichung ist nicht nöthig. Eine Genauigkeit von 3—5 mm auf 1 km lässt sich bei Geduld und gutem Willen auch mit den einfachsten Mitteln erzielen.

Das Nivelliren mit nicht einspielender, sondern abgelesener Blase ist ein vorzügliches Mittel, nicht nur für Genauigkeitssteigerung, sondern auch Zeitersparung, indessen, wer nicht auf längere Dauer, sondern nur auf ein kleineres Stadtnivellement sich einüben will, thut vielleicht besser daran, das allereinfachste Verfahren, die Libelle in jeder Sicht zum Einspielen zu drücken, beizubehalten.

Vielleicht möchte sich noch ein anderer Praktiker zu den vorgelegten Fragen äussern. *J.*

Meliorations-Project auf Liwa in Livland.

In Heft 8 der „Zeitschrift für Vermessungswesen“ ist auf Seite 239 eine entstellte Abbildung des Systems *P* (Meliorationsproject Liwa betreffend) vorgeführt. Die Saugdrains beginnen nämlich nicht an den Sammelgräben, sondern wie üblich in einem bestimmten Abstand davon. Ferner verläuft der Sauger No. 23 nicht, wie auf Seite 240 gesagt ist, von einer sogenannten „Mulde“ mit Terrainkote 5,18 über 5,64 nach 5,50 am Ende, sondern von 5,25 über 5,62 nach 5,25 am Ende. Die gegenwärtige grösste Erhöhung der Erdoberfläche über Kote 5,25 beträgt folglich 0,37 m; doch wird sich dieselbe nach der Entwässerung nicht unwesentlich vermindern, weil bekanntlich schwammartig von Wasser erfüllter Moorboden dort am meisten sich „sackt“, wo er am mächtigsten ansteht.

Ich bitte hier nur um gefällige Berichtigung thatsächlicher Irrthümer. Näheres wird ein Aufsatz „Schablonen-Drainagen“ in No. 9 der Zeitschrift „Bodenkultur und Wasserwirthschaft“, Giessen, enthalten.

Dr. Edm. Fraissinet.

Die Terrainkoten, Horizontalen und die Lage und Richtung des Drains 23 unserer entstellten Abbildung sowie die Richtung der übrigen Saugedrains und die Lage der Sammeldrains, auf welche es zur Beurtheilung der Unzweckmässigkeit des Entwurfes allein ankommt, sind aus der der besprochenen Schrift beigegebenen Karte (c. 1 : 4000) richtig entnommen. Daraus ist zn ersehen, dass der Drain innerhalb der Curve 5,25, also bei geringerer Tiefe als 5,25 beginnt, eine Erhöhung von etwa 5,64 durchschneidet und nahe der Höhenzahl 5,50 in den Sammler einmündet. Jedenfalls ist die Behauptung des Verfassers, der Drain gehe von 5,25 über 6,42 nach 5,25, unrichtig. Uebrigens ist es gleichgültig, ob die Erhöhung der Bodenfläche im Verlaufe des Drains über seinem Anfangspunkte 0,37 m nach Fraissinet oder 0,46 nach meiner Behauptung beträgt, und ob der Moorboden sich auf der Erhöhung mehr oder minder sackt, hier handelt es sich um die Ausführung, bei welcher sich der Boden noch nicht gesetzt hat und deshalb ausser durch die Steigung von 37 oder 46 cm auch noch durch das künstliche Gefälle dic Draintiefe unnütz vergrössert wird, hier handelt es sich darum, dass ohne genügenden Grund die Schwierigkeit und die Kosten der Ausführung vermehrt werden und die Dauer der Anlage gefährdet wird.

Seyfert.

Unterricht und Prüfungen.

Zum diesjährigen Frühjahrsprüfungstermin haben nachstehende Katasterlandmesser die Katasterprüfung bestanden:

I. Prüfungscommission in Posen.

Mitglieder der Prüfungscommission:
1) Steuerrath Bielfeld - Schleswig, 2) Steuerrath Leopold - Danzig, 3) Steuerrath Pichher - Merseburg.

1) Katasterlandmesser Altmann aus Gumbinnen,
2) „ Anders „ Posen,
3) „ Besta „ Oppeln,
4) „ Gerntholz „ Stettin,
5) „ Gesenger „ Bromberg,
6) „ Hermes „ Köslin,
7) „ Löbner „ Oppeln,
8) „ Neumann „ Liegnitz,
9) „ Raasch „ Stettin,
10) „ Rost „ Marienwerder,
11) „ Sowack „ Breslau,
12) „ Vieweger „ „
13) „ Zimmer „ Königsberg i. Pr.

II. Prüfungscommission in Hannover.

Mitglieder der Prüfungscommission:
1) Steuerrath Klein - Stettin, 2) Steuerrath Steffen-Liegnitz, 3) Steuerrath Riedel - Aurich.

1) Katasterlandmesser Boysen aus Minden,
2) „ Haken „ Schleswig,
3) „ Harten „ Hildesheim,
4) „ Oessenich „ „
5) „ Otto „ Hannover,
6) „ Schulz „ Schleswig,
7) „ Stammer „ Erfurt,
8) „ Strassburger „ Hildesheim.

III. Prüfungscommission in Köln.

Mitglieder der Prüfungscommission:
1) Steuerrath Sillerer - Cassel, 2) Steuerrath Haffner - Arnsberg, 3) Steuerrath Mathiae - Osnabrück.

1) Katasterlandmesser Badenhausen aus Münster,
2) „ Dörr „ Köln,
3) „ Endres „ Trier,
4) „ Gitzen „ Düsseldorf,
5) „ Gries „ „
6) „ Krug „ Cassel,
7) „ Kurzius „ Aachen,
8) „ Michel „ Köln,
9) „ Mürriger „ Düsseldorf,
10) „ Pack „ Köln,
11) „ Schneider „ Arnsberg,
12) „ Stuckmann „ „
13) „ Tag „ Cassel.

Vereinsangelegenheiten.

Einladung zur XXI. Hauptversammlung des Deutschen Geometer-Vereins.

Unter Bezugnahme auf die im Heft 6 dieser Zeitschrift für das laufende Jahr bereits erlassene Bekanntmachung der Vorstandschaft des Deutschen Geometer-Vereins beehren wir uns die Mitglieder und Freunde des Vereins mit ihren Damen zu der in der Zeit vom 31. Juli bis 3. August d. J. in Darmstadt stattfindenden XXI. Hauptversammlung des Deutschen Geometer-Vereins ergebenst einzuladen.

Der Ortsausschuss glaubt sich der angenehmen Hoffnung hingeben zu dürfen, dass in erster Linie das Interesse für die geschäftlichen und wissenschaftlichen Verhandlungen, dann aber auch die vortheilhafte geographische Lage des Versammlungsortes, der für Reiseunternehmungen günstige Zeitpunkt der Versammlung und der der Geselligkeit und dem Vergnügen gewidmete Theil des Programms recht vielen Fachgenossen und Freunden des Vermessungswesens eine recht ermunternde Anregung zum Besuche der Versammlung geben werden.

Darmstadt, die Haupt- und Residenzstadt des auf dem Gebiete des socialen Lebens, in Wissenschaft, Kunst und Industrie sehr entwickelten Hessenlandes, übt durch seine Sehenswürdigkeiten, seine freundlichen Strassenanlagen und Bauausführungen in Verbindung mit anmuthigen Alleen und aufmerksam gepflegten Park- und anderen Anlagen innerhalb der Stadt, durch seine für Spaziergänge in unmittelbarer Nähe der Stadt gelegenen und vortheilhaft angelegten Laub- und Nadelwälder, wie nicht minder durch seine für grössere Ausflüge wohl geeignete Lage am westlichen Abhang des Odenwaldes und am nördlichen Ausgang der Bergstrasse von Jahr zu Jahr einen immer grösseren Anziehungspunkt auf das erholungsbedürftige Publikum aus. Wenn nun auch der Ortsaussschuss nicht in der Lage ist, das Programm für die diesjährige Hauptversammlung so reichhaltig gestalten zu können, wie dies bei den letztvorhergehenden Versammlungen möglich war, so kann er den Theilnehmern an der heurigen Versammlung doch die Versicherung geben, dass er seinerseits alles aufbieten wird, um den Besuchern derselben und ihren Damen den Aufenthalt in unserer lieblichen Residenz und deren Umgebung so angenehm als möglich zu gestalten, dass er sich namentlich bemühen wird, den Festtheilnehmern Gelegenheit zu geben, dass sie während der an den Versammlungstagen zur Verfügung stehenden kurzen Zeit, sowohl der näheren, als auch der weiteren Umgebung Darmstadts, dem sagenumwobenen Odenwald und der romantischen Bergstrasse ihre schönsten Reize abgewinnen und dass auch für angemessene Unterhaltung der Damen während der Verhandlungen Sorge getragen wird, damit die getroffenen Anordnungen den Ruf unserer Residenz für ihr Geschick im Arrangement von Festlichkeiten bei den Fachgenossen und deren Angehörigen wenigstens in bescheidenem Maasse erkennen lassen.

Der Ortsausschuss hofft ferner, dass die verehrlichen Behörden Inhaber von mechanischen und lithographischen Werkstätten, Buch- und Kunsthandlungen, sowie die Vereinsmitglieder und sonstige Fachgenossen die mit der Hauptversammlung verbundene Ausstellung von geodätischen Instrumenten, Karten, Büchern etc. ebenso reichlich beschicken werden, wie in früheren Jahren. Namentlich bitten wir hierbei die auszustellenden Gegenstände, die beanspruchte Tisch-, Wand- und sonstige Fläche möglichst bald bei dem Herrn Kataster-Ingenieur Göbel, Darmstadt, Dilburger Strasse Nr. 68 anmelden zu wollen. Im Interesse der Aufstellung eines möglichst vollständigen und richtigen Verzeichnisses der Ausstellungsgegenstände erscheint es sehr wünschenswerth, dass der bis zum 30. Juni erbetenen Anmeldung ein, nöthigenfalls mit Erläuterungen versehenes Verzeichniss der Ausstellungsobjecte beigefügt wird.

Gleichzeitig erlauben wir uns anzufügen, dass die Theilnehmerkarten für die Hauptversammlung vom 18. Juli ab zur Ausgabe gelangen werden. Der Preis derselben ist für eine Herrenkarte auf 10 Mk. und für eine Damenkarte auf 6 Mark festgesetzt. Die bez. Beiträge sind, unter Angabe von Namen, Stand und Wohnort der einzelnen Theilnehmer zwecks Eintrags in die Präsenzliste, an den Kassirer des Ortsausschusses — Herrn Stadtgeometer Fleckenstein, Darmstadt, Steinackerstrasse Nr. 6 — postfrei einzusenden, woraufhin die Uebermittelung der Theilnehmerkarten etc. alsbald erfolgen wird.

Für Theilnehmerkarten, welche nicht benutzt werden können, wird der eingezahlte Betrag bei Rückgabe derselben bis zum 31. Juli, abzüglich der erwachsenen Portokosten, zurückvergütet.

Um allen Ansprüchen der Theilnehmer gerecht werden zu können, bittet der Ortsausschuss um gefällige rechtzeitige Anmeldung der Theilnahme und um Mittheilung etwaiger Wünsche in Bezug auf Vermittelung von Wohnungen in Gast- oder Privathäusern.

Endlich bemerken wir noch, dass für die Besucher der Hauptversammlung eine besondere Auskunftsstelle eingerichtet werden wird. Dieselbe wird sich am Sonntag den 31. Juli von Vormittags 7 bis Nachmittags 7 Uhr im „Hôtel Weber“, Bleichstrasse 48 in unmittelbarer Nähe der Bahnhöfe und von Nachmittags 7 Uhr ab im „Restaurant Kaisersaal“, Grafenstrasse Nr. 18, am Montag, den 1. August im Gebäude der Technischen Hochschule befinden.

Darmstadt, den 11. Mai 1898.

Der Ortsausschuss für die

XXI. Hauptversammlung des Deutschen Geometer-Vereins.

Der Ehren-Ausschuss:	Der Vorsitzende:	Der Schriftführer:
Professor Dr. Nell, Geheimer Hofrath.	Hiemenz, Revisionsgeometer.	Bergauer, Revisionsgeometer.
Dr. Lauer, Steuerrath,		
Dr. Klaas, Landesculturrath.		

In Elsass-Lothringen hat sich ein Verein Reichsländischer Feldmesser gebildet, welcher dem Deutschen Geometer-Verein als Zweigverein beigetreten ist.

Der Vorstand besteht aus den Herren:

Roeder,	Kataster-Feldmesser zu	Retonfey bei Metz	als I. Vorsitzendem,
Sitz,	„ „ „	Strassburg in Elsass	„ II. „
Müller II,	„ „ „	Lutterbach b. Mülh.	als I. Schriftführer,
Bischof,	„ „ „	Holzheim, Kr. Erstein	„ II. „
Schuster,	„ „ „	Strassburg in Elsass	„ Kassirer.

Die Zahl der Zweigvereine des Deutschen Geometer-Vereins ist damit auf 21 gestiegen.

Die Vorstandschaft des Deutschen Geometer-Vereins.
L. Winckel.

Die beiden bisher im rechtsrheinischen Bayern bestandenen Geometer-Vereine, der Bayerische Bezirksgeometer-Verein und der Bayerische Geometer-Verein, von denen ersterer bereits Zweigverein des Deutschen Geometer-Vereins war, haben sich zu einem neuen Verein unter dem Namen „Bayerischer GeometerVerein“ vereinigt. Dieser ist dem Deutschen Geometer-Verein als Zweigverein beigetreten. Er hat zur Zeit 250 Mitglieder und besitzt ein eigenes Organ, welches den Titel „Zeitschrift des Bayerischen Geometer-Vereins“ führt.

Der Vorstand besteht aus den Herren:

Vara,	Kgl. Conservator	in München	als I. Vorstand,
Düll,	„ Bezirksgeometer	„ „	„ II. „ ,
Amann,	„ „	„ Ebersberg	„ I. Schriftführer,
Steppes,	„ Steuerrath	„ München	„ II. „ ,
Müller,	„ Trigonometer	in München,	als I. Kassirer,
Groll,	„ Bezirksgeometer	in Landsberg,	als II. Kassirer.

Personalnachrichten.

Preussen.

A. Innerhalb der Katasterverwaltung:

I. Sterbefälle. Kataster-Controleur Steuer-Inspector Erfling in Landsberg a. d. W. (Frankfurt a. O.) 1. April d. J., Kataster-Controleur Hübotter in Gelnhausen (Cassel) am 6. Mai d. J.

II. Ernennungen. Kataster-Landmesser Rück-Coblenz zum Kataster-Controleur in Czarnikau (Bromberg) zum 1. Juni d. J.

III. Versetzungen. Kataster-Secretair Hoffmann von Aurich als Kataster-Controleur nach Königshütte (Oppeln) zum 1. August d. J.

IV. In dauernde Hülfsarbeiterstelle wurde berufen: Kataster-Landmesser Merforth bei der Königlichen Regierung in Lüneburg zum 1. August d. J.

B. Innerhalb der Generalcommissionen:

Der Königliche Landmesser Kohlhepp bei der Specialcommission in Lüneburg wurde zum Königlichen Ober-Landmesser ernannt. *Ml.*

Königreich Bayern. In den Ruhestand versetzt: Die Bezirksgeometer Staudinger in Töls, von Schweller in Oberdorf und Heinrich Müller in Krumbach.

Versetzt: Bezirksgeometer Landgraf in Volkach auf die Vorstandstelle der Kgl. Messungsbehörde Dillingen.

Ernannt: Obergeometer Hinsmeister des Kgl. Katasterbureaus zum Vorstand der Messungsbehörde Töls (unter Einreihung als Bezirksgeometer I. Klasse).

Befördert: Zu Bezirksgeometern I. Kl. die Bezirksgeometer II. Klasse Freiherr von Lützelburg im Ottobeuern und Pfleger in Landau; zum Obergeometer beim Katasterbureau der Katastergeometer Friedrich Meyer; zum Bezirksgeometer II. Klasse und Vorstand der Messungsbehörde Volkach der Messungsassistent Gattermann in Landshut, an des Letzteren Stelle der geprüfte Geometer Karl Aman in Landshut zum Katastergeometer beim Kgl. Katasterbureau der Messungsassistent Bamberger.

Abgetrennt wurde von der Messungsbehörde Tölz der Bezirk des Amtgerichts Miesbach, welcher dem Messungsassistenten Leiner zur selbständigen Verwaltung übertragen wurde.

Ernannt zum Messungsassistenten beim Katasterbureau der geprüfte Geometer Friedrich Tauber.

Württemberg. Seine Kgl. Majestät haben am 9. Mai d. J. allergnädigst geruht, den Bezirksgeometer Gossenberger in Tuttlingen auf die Bezirksgeometerstelle für die Oberamtsbezirke Heilbronn und Neckarsulm mit dem Wohnsitz in Heilbronn zu versetzen und die Bezirksgeometerstelle für die Oberamtsbezirke Tuttlingen und Spaichingen mit dem Wohnsitz in Tuttlingen dem prov. Bezirksgeometer Oberamtsgeometer Volz in Heilbronn zu übertragen. *St.*

Inhalt.

Verlag von Konrad Wittwer Stuttgart — Druck von Gebrüder Jäneke in Hannover.