

Zeitschrift für Vermessungswesen

Herausgegeben vom Arbeitskreis Deutscher Verein für Vermessungswesen (DVW.) E. V.
in der Fachgruppe Bauwesen E. V. des Nationalsozialistischen Bundes Deutscher Technik
über die Kriegsdauer vereinigt mit

Allgemeine Vermessungsnachrichten

Bildmessung und Luftbildwesen

Zeitschrift der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie E. V.

Photogrammetria

Offizielles Organ der Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie

Hauptschriftleiter i. N.: Professor Dr. Dr.-Ing. E. h. **O. Eggert**, Berlin-Dahlem, Ehrenbergstr. 21
Stellv. Hauptschriftleiter i. N.: Off. best. Verm.-Ing. **Kurd Slawik**, Berlin W. 50, Spichernstr. 2

Mitarbeiter: Oberstleutnant **Geßner**, Berlin SW. 29, Flughafenneubau
und Professor Dr.-Ing. habil. **W. Großmann**, Hannover, Techn. Hochschule

Heft 10

15. Oktober 1943

72. Jahrgang

Der Abdruck von Originalartikeln ohne vorher eingeholte Erlaubnis der Schriftleitung ist untersagt

Die Nadirdistanz und ihre Komponenten.

Von Rudolf Förstner, Berlin.

Vorbemerkung.

In der Photogrammetrie haben wir vielfach die Aufgabe, die Nadirdistanz ν aus 2 Komponenten φ und ω zu berechnen, bzw. umgekehrt die Nadirdistanz ν bei einer bestimmten Kantung \varkappa in 2 Komponenten zu zerlegen. Dabei wird oft übersehen, daß die photogrammetrischen Auswertegeräte teilweise für die Längs- und Querkomponenten φ und ω keine unabhängigen Drehachsen besitzen; so erfolgt die Längsneigung φ beim Stereoplanigraphen primär um eine Parallele zur y -Achse, und die Querneigung ω sekundär um eine in Nullstellung Parallele zur x -Achse (welche aber an der Längsneigung φ teilnimmt).

Bisweilen tritt nun die Aufgabe in der Form auf, daß zu 2 gegebenen Neigungskomponenten und einer damit gegebenen Kantung \varkappa ein weiteres Komponentenpaar gesucht wird, wobei je nachdem die Änderung von \varkappa , φ oder ω gegeben ist.

Aufgabenstellung.

Entsprechend den erwähnten Möglichkeiten unterscheiden wir folgende Aufgabenstellungen:

a) Feste Lage des Bildes.

Aufgabe 1. Gegeben: φ und ω

Gesucht: ν und \varkappa

Aufgabe 2. Gegeben: ν und \varkappa

Gesucht: φ und ω

b) Veränderliche Lage des Bildes.

Aufgabe 3. Gegeben: φ_1 , ω_1 und \varkappa_2

Gesucht: (ν, \varkappa_1) φ_2 und ω_2

Aufgabe 4. Gegeben: φ_1 ω_1 und φ_2

Gesucht: (ν, \varkappa_1) ω_2 und \varkappa_2

Aufgabe 5. Gegeben: φ_1 ω_1 und ω_2

Gesucht: (ν, \varkappa_1) φ_2 und \varkappa_2

Formelableitung.

Die Drehbewegungen, welche wir beim Stereoplanigraphen vorfinden, sind in Abb. 1 dargestellt. Wegen des Drehsinns von ω und \varkappa ist es zweckmäßig, ν als negative Größe in die Rechnung einzuführen.

Aufgabe 1. Gegeben: φ und ω

Gesucht: ν und \varkappa

Dem sphärischen Dreieck ZAH' Abb. 2 entnehmen wir sofort:

$$\cos \nu = \cos \varphi \cos \omega \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \omega} \quad (2)$$

Sind φ und ω kleine Werte, so wird durch Reihenentwicklung aus Gl. (1):

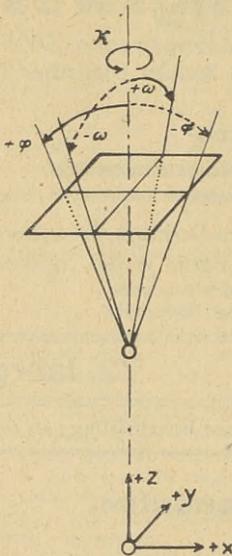


Abb. 1.

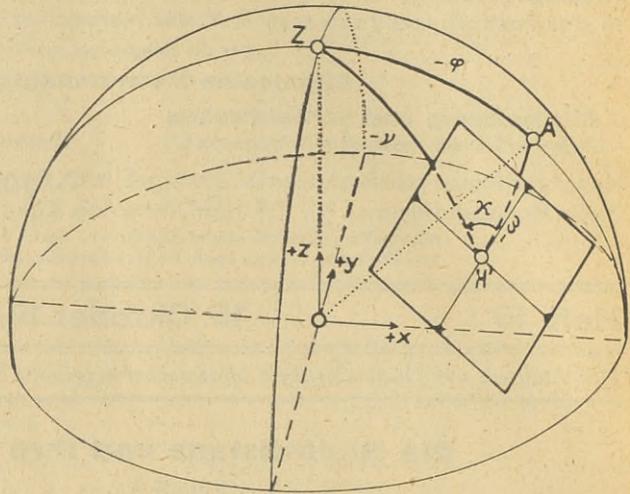


Abb. 2.

$$\left(1 - \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu^4}{24}\right) = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{24}\right)$$

Die Weiterentwicklung ergibt:

$$\nu^2 = \varphi^2 + \omega^2 - \frac{\varphi^2 \omega^2}{3} \quad (3)$$

oder

$$\nu = \sqrt{\varphi^2 + \omega^2 - \frac{\varphi^2 \omega^2}{6\nu}} \quad (4)$$

Die seither übliche Formel, die aber nur für unabhängige Achsensysteme gilt, lautet:

$$\operatorname{tg}^2 \nu = \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \omega \quad (5)$$

Die Reihenentwicklung ergibt in diesem Fall:

$$\left(\nu + \frac{\nu^3}{3}\right)^2 = \left(\varphi + \frac{\varphi^3}{3}\right)^2 + \left(\omega + \frac{\omega^3}{3}\right)^2$$

Daraus folgt:

$$\nu^2 = \varphi^2 + \omega^2 - \frac{4\varphi^2 \omega^2}{3} \quad (6)$$

Der Wert für ν^2 nach der „Näherungsformel“

$$\nu^2 = \varphi^2 + \omega^2 \quad (7)$$

hat also einen viermal kleineren Fehler als der Wert nach Gl. (5). Das Korrektionsglied der Gl. (4) beträgt allerdings für $\varphi = \omega = 10g$ erst etwa 3c oder rund 0,2%.

In Gl. (2) ist nur für φ und ω eine Reihenentwicklung möglich, da $\operatorname{tg} \alpha$ jeden Wert annehmen kann. Wir finden:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varphi}{\omega} \left(1 + \frac{2\varphi^2 + \omega^2}{6}\right) \quad (8)$$

Der Einfluß des Korrektionsgliedes der Gl. (8) beträgt für $\varphi = \omega = 10g$ ungefähr 40c oder rund 0,8%. Die seitherige Formel, welche für unabhängige Achsensysteme gilt, lautet:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega} \quad (9)$$

Die Reihenentwicklung ergibt in diesem Fall:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varphi}{\omega} \left(1 + \frac{\varphi^2 - \omega^2}{3}\right) \quad (10)$$

Das Verhältnis beider Tangentenwerte ist nach Gl. (2) und Gl. (9) gleich $\cos \omega$, während sich der maximale Winkelunterschied für $\kappa \approx 50 \text{ g}$, also $\varphi = \omega$, ergibt und dort etwa gleich $\frac{\omega^2}{4}$ gesetzt werden kann.

Aufgabe 2. Gegeben: ν und κ

Gesucht: φ und ω

Dem sphärischen Dreieck ZAH' Abb. 2 entnehmen wir:

$$\sin \varphi = \sin \nu \sin \kappa \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \nu \cos \kappa \quad (12)$$

Durch Reihenentwicklung wird daraus:

$$\varphi = \nu \sin \kappa \left(1 - \frac{\nu^2}{6} \cos^2 \kappa \right) \quad (13)$$

$$\omega = \nu \cos \kappa \left(1 + \frac{\nu^2}{3} \sin^2 \kappa \right) \quad (14)$$

Die sphärischen Korrektionsglieder haben ihr Maximum bei $\kappa \approx 40 \text{ g}$ bzw. $\kappa \approx 60 \text{ g}$ und betragen für $\nu = 15 \text{ g}$ etwa 5° bzw. 11° . Sie können also normalerweise vernachlässigt werden.

Die Aufgaben 3–5 lassen sich indirekt mit den Gl. (1), (2), (11) und (12) lösen, indem aus φ_1 und ω_1 zuerst ν berechnet wird. (κ_1 kann u. U. am Stereoplanigraphen direkt abgelesen werden.) Vielfach interessieren aber bei kleinen Änderungen nur die Differenzen $\varphi_2 - \varphi_1$; $\omega_2 - \omega_1$ bzw. $\kappa_2 - \kappa_1$. Wir wollen deshalb außerdem die Differentialformeln angeben, sowie entsprechende Formeln für die jeweiligen Mittelwerte.

Aufgabe 3. Gegeben: φ_1 , ω_1 und κ_2

Gesucht: (ν , κ_1) φ_2 und ω_2

Nach Gl. (1) bzw. (7) berechnet sich ν :

$$\cos \nu = \cos \varphi_1 \cos \omega_1 \quad (15)$$

bzw.

$$\nu^2 = \varphi_1^2 + \omega_1^2$$

Nach Gl. (11) und (12) wird damit:

$$\sin \varphi_2 = \sin \nu \sin \kappa_2 \quad (16)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \nu \cos \kappa_2 \quad (17)$$

Wird κ in mäßigen Grenzen geändert, so finden wir aus Gl. (11) durch Differentiation:

$$\cos \varphi \, d\varphi = \sin \nu \cos \kappa \, d\kappa$$

In Verbindung mit den Gl. (11) und (2) wird daraus:

$$d\varphi = + \sin \omega \, d\kappa \quad (18)$$

oder

$$d\varphi = + \frac{\omega}{\varrho} \, d\kappa \quad (19)$$

Aus Gl. (12) folgt durch Differentiation:

$$\frac{1}{\cos^2 \omega} \, d\omega = - \operatorname{tg} \nu \sin \kappa \, d\kappa$$

In Verbindung mit den Gl. (12) und (2) wird daraus:

$$d\omega = - \cos \omega \operatorname{tg} \varphi \, d\kappa \quad (20)$$

oder

$$d\omega = - \frac{\varphi}{\varrho} \, d\kappa \quad (21)$$

Genauere Formeln finden wir auf folgendem Weg:

Es ist:

$$\sin \varphi_1 = \sin \nu \sin \kappa_1$$

$$\sin \varphi_2 = \sin \nu \sin \kappa_2$$

also

$$\begin{aligned} \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 &= \sin \nu (\sin \kappa_2 - \sin \kappa_1) \\ 2 \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} &= 2 \sin \nu \cos \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{2} \sin \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2} \\ \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} &= \frac{\cos \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{2}}{\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} \sin \nu \sin \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2} \end{aligned}$$

Wir setzen nun:

$$\kappa_1 = \kappa_m - \frac{d \kappa}{2} \quad \kappa_2 = \kappa_m + \frac{d \kappa}{2} \quad (22)$$

$$\varphi_1 = \varphi_m - \frac{d \varphi}{2} \quad \varphi_2 = \varphi_m + \frac{d \varphi}{2} \quad (23)$$

$$\omega_1 = \omega_m - \frac{d \omega}{2} \quad \omega_2 = \omega_m + \frac{d \omega}{2} \quad (24)$$

Damit wird:

$$\sin \frac{d \varphi}{2} = \frac{\cos \kappa_m}{\cos \varphi_m} \sin \nu \sin \frac{d \kappa}{2}$$

Nun ist nach den Gl. (1) und (12)

$$\frac{\cos \kappa_m}{\cos \varphi_m} \sin \nu \approx \sin \omega_m \quad (25)$$

Also erhalten wir endlich:

$$\sin \frac{d \varphi}{2} = \sin \omega_m \sin \frac{d \kappa}{2} \quad (26)$$

oder

$$d \varphi = + \frac{\omega_m}{\rho} d \kappa \quad (27)$$

Entsprechend finden wir aus:

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \operatorname{tg} \nu \cos \kappa_1$$

und

$$\operatorname{tg} \omega_2 = \operatorname{tg} \nu \cos \kappa_2$$

$$\operatorname{tg} \omega_2 - \operatorname{tg} \omega_1 = \operatorname{tg} \nu (\cos \kappa_2 - \cos \kappa_1)$$

$$\sin (\omega_2 - \omega_1) = -2 \operatorname{tg} \nu \cos \omega_1 \cos \omega_2 \sin \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{2} \sin \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2}$$

Mit den Gl. (22), (23) und (24) wird daraus:

$$\sin d \omega = -2 \cos \omega_m \operatorname{tg} \varphi_m \sin \frac{d \kappa}{2} \quad (28)$$

oder

$$d \omega = - \frac{\varphi_m}{\rho} d \kappa \quad (29)$$

Die Formeln (27) und (29) sind für alle praktischen Fälle vollkommen ausreichend, da der Einfluß der Glieder höherer Ordnung verschwindend klein ist. Die Mittelwerte φ_m und ω_m werden nötigenfalls durch Iteration gewonnen.

Aufgabe 4. Gegeben: φ_1 , ω_1 und φ_2

Gesucht: (ν , κ_1) ω_2 und κ_2

Ist ν aus Gl. (15) bekannt, so wird:

$$\cos \omega_2 = \frac{\cos \nu}{\cos \varphi_2} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \cos \omega_1 \quad (30)$$

und

$$\sin \kappa_2 = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \nu} \quad (31)$$

Die Differentiation von Gl. (15) ergibt:

$$\operatorname{tg} \varphi \, d\varphi + \operatorname{tg} \omega \, d\omega = 0 \quad (32)$$

oder

$$d\omega = -\frac{\varphi}{\omega} d\varphi \quad (33)$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\cos \omega_2}{\cos \omega_1} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}$$

folgt durch korrespondierende Subtraktion und Addition:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

und in Verbindung mit den Gl. (23) und (24):

$$\operatorname{tg} \omega_m \operatorname{tg} \frac{d\omega}{2} = -\operatorname{tg} \varphi_m \operatorname{tg} \frac{d\varphi}{2}$$

oder

$$d\omega = -\frac{\varphi_m}{\omega_m} d\varphi \quad (34)$$

Hier ist φ_m bekannt, während für ω_m der Wert ω_1 als 1. Näherung dient.

Die Umkehrung der Gl. (27) ergibt:

$$d\kappa = +\frac{\varrho}{\omega_m} d\varphi \quad (35)$$

Aufgabe 5. Gegeben: φ_1, ω_1 und ω_2

Gesucht: (ν, κ_1) φ_2 und κ_2

Aus Gl. (30) folgt sofort:

$$\cos \varphi_2 = \cos \varphi_1 \frac{\cos \omega_1}{\cos \omega_2} \quad (36)$$

und mit ν nach Gl. (15) wird:

$$\cos \kappa_2 = \frac{\operatorname{tg} \omega_2}{\operatorname{tg} \nu} \quad (37)$$

Die Differentialformeln erhalten wir sofort durch Umkehrung der Gleichungen (34) u. (29). Es wird:

$$d\varphi = -\frac{\omega_m}{\varphi_m} d\omega \quad (38)$$

$$d\kappa = -\frac{\varrho}{\varphi_m} d\omega \quad (39)$$

Zusammenstellung

der genauen Formeln sowie der Gebrauchsformeln.

Aufgabe 1. Gegeben: φ, ω

$\cos \nu = \cos \varphi \cos \omega$	$\nu = \sqrt{\varphi^2 + \omega^2}$	(1) u. (7)
$\operatorname{tg} \kappa = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \omega}$	$\operatorname{tg} \kappa = \frac{\varphi}{\omega}$	(2) u. (8)

Aufgabe 2. Gegeben: ν, κ

$\sin \varphi = \sin \nu \sin \kappa$	$\varphi = \nu \sin \kappa$	(11) u. (13)
$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \nu \cos \kappa$	$\omega = \nu \cos \kappa$	(12) u. (14)

Aufgabe 3.—5. Für die Praxis genügen folgende Differentialformeln:

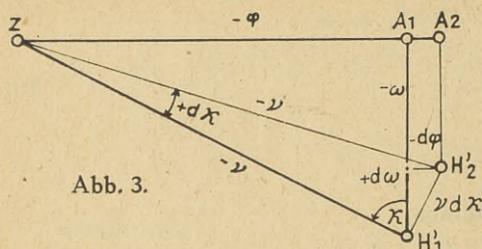


Abb. 3.

$$d\varphi = + \frac{\omega_m}{\rho} d\kappa \quad (27)$$

$$d\omega = - \frac{\varphi_m}{\rho} d\kappa \quad (29)$$

$$\varphi_m d\omega + \omega_m d\varphi = 0 \quad (34)$$

Da φ und ω kleine Werte sind, wird $d\varphi$ und $d\omega$ nach Gl. (27) und Gl. (29) verhältnismäßig genau, während umgekehrt der Fehler von $d\kappa$ aus den Gl. (35) u. (39) größer sein kann.

Sämtliche Näherungsformeln sowie die Differentialformeln können aus der ebenen Abb. 3 sofort abgelesen werden.

Zahlenbeispiele.

Aufgabe 1.

Gegeben:	$\varphi_1 = 3,00 \text{ g}$	$\omega_1 = 4,00 \text{ g}$
Nach Gl. (7) wird:	$\nu = 5,00 \text{ g}$	
Nach Gl. (8) wird:	$\kappa_1 = 0,750$	(ohne Korrektionsglied)
	$\kappa_1 = 40,97 \text{ g}$	

Aufgabe 3.

Gegeben:	$d\kappa = + 10,00 \text{ g}$	$(\kappa_2 = 50,97 \text{ g})$
Nach den Gl. (18) und (21) wird in 1. Näherung:	$d\varphi' = + 0,628 \text{ g}$	$\varphi_2' = 3,628 \text{ g}$
	$d\omega' = - 0,472 \text{ g}$	$\omega_2' = 3,528 \text{ g}$
Damit nach den Gl. (27) und (29) in 2. Näherung:	$d\varphi'' = + 0,592 \text{ g}$	$\varphi_2'' = 3,592 \text{ g}$
	$d\omega'' = - 0,520 \text{ g}$	$\omega_2'' = 3,480 \text{ g}$

Die genauen Werte sind:

$\nu = 4,999 \text{ g}$	$\varphi_2 = 3,589 \text{ g}$
$\kappa_1 = 41,009 \text{ g}$	$\omega_2 = 3,482 \text{ g}$

Aufgabe 2.

Gegeben:	$\nu = 20,00 \text{ g}$	$\kappa_1 = 41,656 \text{ g}$
Nach den Gl. (13) und (14) wird:	$\varphi_1 = 12,17 \text{ g}$	
	$\omega_1 = 15,87 \text{ g}$	

Aufgabe 4.

Gegeben:	$\varphi_2 = 15,379 \text{ g}$	
Nach Gl. (34) wird in 1. Näherung mit $d\varphi = + 3,21 \text{ g}$:	$d\omega' = - 2,78 \text{ g}$	$\omega_2' = 13,09 \text{ g}$
Damit in 2. Näherung:	$d\omega'' = - 3,04 \text{ g}$	$\omega_2'' = 12,83 \text{ g}$
Nach Gl. (35) wird:	$d\kappa = + 14,25 \text{ g}$	$\kappa_2 = 55,91 \text{ g}$

Die genauen Werte sind:

$\varphi_1 = 12,045 \text{ g}$	$\omega_2 = 12,913 \text{ g}$
$\omega_1 = 16,063 \text{ g}$	$\kappa_2 = 56,366 \text{ g}$

Wir sehen, daß bei den kleinen Werten ν die Abweichungen rund 0,1% und bei den großen Werten etwa 1% des Sollwertes betragen. Es genügt daher für sämtliche Rechnungen die Genauigkeit des Rechenschiebers.

Aus der Entzerrungspraxis des Ungarischen Kartographischen Instituts in Budapest.

Von A. Csiszár, Oberstleutnant,
Abteilungsleiter im Kgl. Ung. Kartographischen Institut.

Die Neuaufnahme der Ebenen und des niedrigen Hügellandes sowie die Erneuerung der veralteten Karten wird vom Kgl. Ungarischen Kartographischen Institut — auf Grund von genäherten Nadiraufnahmen — mit Einbildphotogrammetrie, hauptsächlich jedoch mit Entzerrung, durchgeführt. Die Entzerrung hat gegenüber der lineare Zeichnung erfordernden Kartierung mehrere Vor- und Nachteile. Die von ebenen Gebieten mittels Entzerrung gewonnene Photokarte bietet das neueste und vollständigste Bild des Geländes dar. Man kann zwar aus den Photokarten nicht auf die Höhenunterschiede der Geländeunebenheiten schließen, doch ist die Entzerrung rasch und einfach durchführbar, die Arbeitsleistung kann sogar bei Verwendung von Weitwinkelaufnahmen ziemlich gesteigert werden. Bei Vermessung solcher Gebiete, bei denen die Geländehöhen unbedeutend sind, bietet die Entzerrung für verschiedene Zwecke eine so gute Grundlage, daß sie durch ein anderes Verfahren kaum ersetzbar ist.

Die Luftaufnahmen erfolgen mit der Weitwinkelkammer 20/30×30 cm der Zeiß-Aerograph GmbH. Für Entzerrungsarbeiten steht ein Entzerrungsgerät SEG I derselben Firma sowie ein Gerät der Firma Wild zur Verfügung. Für Ausbildungszwecke dient ein Aschenbrenner'sches Gerät.

Die Wirtschaftlichkeit der mit Weitwinkelkammer, Bildformat 30×30 cm durchgeführten, also ein ziemlich großes Gebiet enthaltenden, Aufnahmen zeigt sich auch bei den Konstruierungs-, Vermessungs- und Entzerrungsarbeiten. Die Entzerrungsarbeiten für topographische Karten 1:50.000 werden im Maßstab 1:25.000, für hydrographische Pläne in 1:10.000 und für besondere Zwecke auch im Maßstab 1:5.000 durchgeführt. Der Maßstab der Luftbilder bzw. die Flughöhe wird von den an die Photokarten gestellten Genauigkeitsanforderungen bestimmt. Der Bildflug erfolgt so, daß die Überdeckung je nach Gelände in der Bildreihe 50—60%ig und zwischen den einzelnen Bildreihen 30—60%ig ist.

Als Grundlage für die Entzerrung dient bei der Kartenergänzung im allgemeinen das Gerippe der zu erneuernden Karte oder dessen entsprechende, auf photographischem Wege erfolgte Vergrößerung. Zur Aneinanderreihung der Bilder verwenden wir — entsprechend der erwünschten Genauigkeit — trigonometrische Fixpunkte oder identifizierbare Punkte der Katasteraufnahmen. Es hat sich als sehr praktisch erwiesen, für die Entzerrungsgrundlage direkt die Verkleinerungen der Katasterpläne zu verwenden. Für die Konstruierung der Grundblätter benutzen wir beiderseits mit Papier überzogene Metallplatten. Auf diese Grundblätter werden das Kilometer- und Katastralkartennetz konstruiert und zugleich die Paßpunkte aufgetragen bzw. vor dem Auftragen der Punkte die verkleinerten Kopien der Katasterpläne aufgeklebt. Letzteres erwies sich auch deshalb schon als sehr praktisch, weil die langwierige Identifizierung der Bild- und Kartenpunkte entfällt und zugleich auch die Orientierung der Bilder auf Grund von leichter identifizierbaren Linien bedeutend schneller erfolgen kann als mit Hilfe von einzelnen Paßpunkten.

Die ins Entzerrungsgerät eingelegte Originalaufnahme stellt man mit Hilfe der auf das Grundblatt aufgetragenen und bereits identifizierten Paßpunkte (Linien) ein. Nach der Orientierung des Bildes legt man ein mit dem Grundblatt identisches Quadratnetz, das auf einer Glasplatte aufgetragen ist, auf das lichtempfindliche Papier, wonach die Belichtung erfolgt. Auf diese Weise bildet sich auch das Netz der Glasplatte auf dem lichtempfindlichen Papier ab.

Die Fehlerquellen der mittels Entzerrung zusammengestellten Photokarten liegen in den Unebenheiten des Geländes, in den Maßveränderungen der verwendeten Materialien sowie im Gerät.

Die individuellen Fehler beginnen schon beim Auftragen der identifizierten Paßpunkte auf das Grundblatt. Man kann die Ausschaltung dieser Fehlerquelle durch präzises Auftragen der Punkte und des Netzes mit dem Koordinatographen erreichen.

Bei der Orientierung des ins Entzerrungsgerät eingelegten Bildes bringt man die durch die Bildpunkte gehenden Lichtstrahlen mit den aufgetragenen Punkten genau zum Schnitt. Um dies zu erleichtern, bezeichnet man die identifizierten Punkte auf dem Negativbild mit einer farbigen Marke oder durch einen Nadelstich. Die Genauigkeit dieses Vorganges steigert man dadurch,

daß man das nachfolgende Bild heranzieht und die Identifizierung unter dem Stereoskop durchführt.

Bei Verwendung verkleinerter Katasterblätter bedeutet die Maßveränderung der Katastergrundblätter, d. h. des Papiers, die unangenehmste Fehlerquelle. Der Grundriß der staatlichen Vermessung verzerrt sich — da er auf Zeichenpapier gefertigt ist — im Laufe der Zeit beträchtlich und meistens unregelmäßig. Bei den auf photographischem Wege gewonnenen Verkleinerungen kann der durch die Verzerrung des Papiers entstandene Fehler leider nicht ganz ausgeschaltet werden, vielmehr unterliegen die verkleinerten Kopien infolge der nassen photographischen Behandlung weiteren Maßveränderungen. In Fällen, wo die Bildentzerrung nach verkleinerten Katasterplänen erfolgt, trägt man nach dem Aufkleben der verkleinerten Kopien der Katasterblätter auch die geodätisch eingemessenen Punkte auf das Grundblatt auf, um mit deren Hilfe die Richtung und Größe der Verschiebung der Katastral kartierung festzustellen. Wenn man die Richtung und das Maß der Verschiebung ermittelt hat, so kann diesen bei der Orientierung der Bilder Rechnung getragen werden. Durch diese Kontrolle entsteht daher aus der Papierverzerrung kein bedeutender Fehler.

Wie bereits erwähnt, verwenden wir für Grundblätter ausschließlich Metallplatten. Die beiderseits mit Zeichenpapier überzogene Metallplatte behält ihre Maße. Die Netzmaße der vor Jahrzehnten hergestellten und an trockenem Orte aufbewahrten Photokarten erlitten bis heute keine wahrnehmbaren Maßveränderungen.

Die Verzeichnungsfehler der Linsensysteme können zumeist als Maßunterschiede teilweise ausgeschaltet werden. Dennoch sollen die Entzerrungsgeräte möglichst mit verzeichnungsfreien Objektiven versehen werden.

Die empfindlichste Fehlerquelle bei der Entzerrung entsteht durch das nasse Verfahren. Sogar in horizontaler Lage der Kopien durchgeführte Trocknung sichert keine gleichmäßige Maßveränderung. Das feuchte Klebematerial bewirkt beim raschen Kleben eine Dehnung der Kopien, wogegen das langsame Kleben ihre Zusammenschumpfung ermöglicht. Der Vorteil des auf den Papierkopien abgebildeten Quadratnetzes zeigt sich daher erst bei dem Zusammenstellen der Photokarte, weil das 2 cm-Quadratnetz die richtige Lage des Bildes besser sichert als die 10—20 cm oder noch weiter von einander gelegenen Paßpunkte.

Die auf das Grundblatt aufzuklebende Bildfläche ist oft 40×40 cm oder sogar noch größer. Eine so große, beim Trocknen verschrumpfte Bildfläche mit feuchtem Klebstoff auf einmal genau aufzukleben, ist unmöglich. Daher müssen die Bildflächen bei der Entzerrung mit entsprechender Überdeckung in mehrere Teile geteilt werden. Die mit Überdeckung geteilten 4—6 Bildflächen könnten jedoch auf Grund von 4—5 Paßpunkten ohne Netz nicht zusammengepaßt werden. Durch genaues Indeckungbringen des auf den Kopien abgebildeten Quadratnetzes mit dem auf dem Grundblatt befindlichen wird daher der durch Papierschumpfung entstandene Fehler wesentlich vermindert.

Zur Ausschaltung der durch das nasse photographische Verfahren und vom feuchten Klebstoff verursachten Fehler hat sich auch die Verwendung von lichtempfindlichen Correctostatpapieren als sehr zweckmäßig erwiesen. Dieses kostspielige Material verwenden wir jedoch nur dann, wenn wir auf Grund eines Luftbildes ein ganzes Photokartenblatt herstellen können. Im Ungarischen Kartographischen Institut werden derzeit die 16 km^2 enthaltenden (40×40 cm) hydrographischen Photokarten $1:10.000$ auf Correctostatpapier entzerrt. Die Aufnahmehöhen betragen ca. 4.000 m, d. h. von der beiläufig 40 km^2 betragenden Fläche einer Luftaufnahme bildet nur der mittlere 16 km^2 Teil je ein Blatt des Luftbildplanes. Es ist wichtig, daß die Paßpunkte außerhalb der für die Photokarte verwendeten Bildflächen fallen, damit keine Extrapolationsfehler entstehen.

Kurze Geländeabschnitte, in denen keine auf terrestrischem Wege bestimmten Punkte vorhanden sind, überbrückt man mittels Bildanschluß. Den Bildanschluß führen wir zumeist graphisch, d. h. mit einfacher Konstruierung, oder in manchen Fällen mit dem Entzerrungsgerät selbst durch. Den Schlußfehler verteilen wir je nach der Entfernung der zum Bildanschluß verwendeten Punkte.

Der Vorteil der bei der Entzerrung verwendeten und mit 2 cm-Quadratnetz versehenen Glasplatte zeigt sich — wie bereits erwähnt — bei der Aneinanderreihung der Bilder. Ein weiterer Vorteil des Glasnetzes ist, daß das oft wellige, lichtempfindliche Papier von der im Metallrahmen befindlichen Glasplatte infolge ihres Gewichtes plattgedrückt wird. Nachteilig ist jedoch, daß das Glas die Lichtstrahlen je nach seiner Dicke von der ursprünglichen

Richtung ablenkt. Die Ablenkung erfolgt, wie bekannt, nach dem Sinusgesetz und wächst gegen den Plattenrand, besonders bei größerer Neigung der Bilder. Zwecks Verminderung dieser Ablenkungswerte der Lichtstrahlen wird der Maßstab der orientierten Bilder solange geändert, bis die am Rande der Bilder befindlichen Paßpunkte ihre Soll-Lage einnehmen. Da die Veränderung des Maßstabes dem Tangentenwert des Einfallswinkels der Lichtstrahlen proportional ist, sind die Sinus- und Tangentenwerte nur bei kleinen Einfallswinkeln durch einander ersetzbar. Mit Rücksicht darauf, daß man für Photokarten nur die mittleren Bildteile und nur Lotaufnahmen verwendet, ist diese Fehlerquelle aber unbedeutend. Der Restfehler, welcher bei senkrechten Lichtstrahlen gleich Null ist, kann um so mehr vernachlässigt werden, als er bedeutend kleiner ist als die durch das nasse Verfahren entstehende Verzerrung. Dabei bietet wiederum ein Netz bei der Aneinanderreihung der Bilder genaueren Anhalt als die weit von einander gelegenen Paßpunkte.

Zur Vermeidung der durch die Glasplatte hervorgerufenen Verschiebung der Bildpunkte verwenden wir derzeit eine Metallplatte. Auf der Metallplatte sind die Eckpunkte des Quadratnetzes durchbohrt. Der Durchmesser dieser Öffnungen beträgt ca. 0,5 mm. Nach der Orientierung des Bildes und des Grundblattes legt man die Metallplatte mit Hilfe des Quadratnetzes auf das Grundblatt und danach das lichtempfindliche Papier unter die Metallplatte. Nun erfolgt zuerst mittels einer Handlampe die Belichtung der Öffnungen der Metallplatte und nach der Entfernung der Metallplatte die normale Durchleuchtung des Negativs. Im ersten Falle bilden sich die Öffnungen der Metallplatte scharf ab, d. h. man erhält die Eckpunkte des Netzes ohne Verschiebung. Nach der Entwicklung erscheinen die Netzpunkte als schwarze Punkte auf den entzerrten Kopien, die bei der Aneinanderreihung der Bilder nützliche Anhaltspunkte bieten.

Bekanntlich verursachen die Unebenheiten des Geländes ebenfalls Fälschungen der Bildpunktlage. Die durch die relativen Höhenunterschiede des Geländes stammenden, im zentralperspektiven Luftbild erzeugten Verschiebungen wachsen mit ihrem Abstand vom Bildmittelpunkt. Zur Ausschaltung bzw. Minderung dieses Fehlers verwendet man nur die mittleren Teile der Nadiraufnahmen. In solchen Fällen wird beim Bildflug in jeder Richtung eine 60%ige Überdeckung eingehalten.

Die Größe der hier besprochenen Fehler kann noch dadurch vermindert werden, daß man einen größeren Bildmaßstab wählt und die Photokarten im größeren Maßstab als erforderlich anfertigt. Die nachher photographisch durchgeführte Verkleinerung setzt in entsprechendem Maße den mittleren Fehlerwert der Photokarte herab.

Die Untersuchungen haben erwiesen, daß bei sehr sorgfältiger Arbeit der mittlere Fehler der Photokarte bei Verwendung von geodätisch eingemessenen Paßpunkten $\pm 0,35$, bei Verwendung von Katastralkarten $\pm 0,55$ mm beträgt.

Die unrichtige Behandlung des Originalnegativs, insbesondere durch dessen künstliche Trocknung mit Alkohol, verursacht oft unausschaltbare Filmverzerrungen. Die hieraus entstehenden Fehler können als Maßstabsunterschiede nur teilweise ausgeschaltet werden.

Für praktische Zwecke ist eine gut leserliche Photokarte erwünscht. Eine gut lesbare Photokarte kann nur auf Grund von richtig belichteten Negativbildern erzeugt werden. Es ist daher wichtig, daß die Luftaufnahmen im starken Sonnenschein durchgeführt werden. Durch sorgfältige Entwicklung, Trocknung und Behandlung des Films können viele Fehler vermieden werden. Scharfe Abbildung und verlässliche Paßpunkte, genaue Konstruktion des Grundblattes, vollkommene Orientierung des Negativs im Entzerrungsgerät und sorgfältiges Aneinanderreihen der Kopien sind bei den Photokarten zur Erfüllung der gestellten Genauigkeitsanforderungen erforderlich.

Durch Einhaltung des vorgeschriebenen Arbeitsvorganges bei der Einbild-Photogrammetrie wird die Fehlerhäufung vermieden. Die Photokarte hat sich für Kartierungs- und sonstige taktische und technische Zwecke infolge des raschen Herstellungsganges und der genügenden Genauigkeit für sehr geeignet erwiesen.

Die Erfahrungen zeigten, daß an die Entzerrungsgeräte noch einige praktische Anforderungen zu stellen wären, und zwar daß es nötig wäre, den Projektionstisch von zwei (vorderen und rückwärtigen) Seiten zugänglich zu machen, um den Schnitt der Lichtstrahlen mit der Projektionsebene besser betrachten zu können. Die Verkleinerungsmöglichkeit sollte wenigstens bis $\frac{1}{4}$ des Originalbildes reichen. Für die Orientierung ist eine große Bildhelligkeit erwünscht. Die praktische Arbeit mit dem Gerät vor Augen haltend, wäre noch erwünscht, daß bei schiefer

Aufnahmerichtung nur die Linsen- und Plattenebene ihre Lage dem Tische gegenüber ändern würde. Beim Projektionstisch wäre daher nur eine horizontale Bewegungsmöglichkeit, d. h. keine Kippbarkeit, erwünscht.

Da für die normale Photoplanherstellung nur Nadiraufnahmen in Betracht kommen, könnte dieser Forderung so Genüge getan werden, daß der Neigungsbereich auf 15° beschränkt wird. Eine horizontale Tischlage würde ferner die Arbeit mit einer in jeder Richtung verschiebbaren und um eine Achse umklappbaren Netzpunktplatte aus Metall erleichtern.

Die reichen Erfahrungen des jetzigen Krieges, wo die Einbildphotogrammetrie für verschiedene Zwecke Anwendung findet, werden jedenfalls zur technischen Weiterentwicklung des Entzerrungsgerätes beitragen und auch zur Vervollkommnung des Arbeitsvorganges führen.

Die Verteilung der Belichtung und Schwärzung in Luftbildern.

Von Dr. Percy Th a m, Stockholm.

In einem interessanten Artikel¹⁾ über die Lichtverteilung in Luftbildern hat Dr. Aschenbrenner in dieser Zeitschrift eine eingehende Analyse der Lichtverteilung als auch der Schwärzung im Luftbild durchgeführt.

Das Problem findet deshalb großes Interesse, weil es für die praktische Photogrammetrie, besonders für die Verhältnisse in Schweden, sehr bedeutungsvoll ist. Bei diesem Breitengrad genügt nämlich die Lichtmenge zu bestimmten Jahreszeiten nicht, um mit weniger lichtstarken Kammern, etwa der Weitwinkelkammer RMK 20/30 30, auf einem Film von der bisher üblichen Empfindlichkeit 17/10⁰ DIN über die ganze Fläche eine gleichmäßig gute Schwärzung zu erhalten. Diese Verhältnisse entsprechen also dem unterbelichteten Fall in Abb. 15 im oben-erwähnten Artikel. Trotzdem die Belichtungszeit bei voller Öffnung 1:6,3 des Topogonobjektives zu 1/50 s gewählt wird, sind die Bilder am Rande sehr dünn.

Das Problem bietet nun viel mehr des Interessanten für die in Schweden vorherrschenden Lichtverhältnisse. Die Ergebnisse zeigen nämlich, daß die Aschenbrenner'sche Grundannahme, welche „gleichmäßig helles Gelände“ voraussetzt, hier in der Praxis nicht gültig ist. Die Schwärzung der Bildfläche zeigt, daß das Maximum der Schwärzung nicht in der Mitte des Bildes liegt, sondern daß es in nördlicher Richtung verschoben ist. Die Verschiebung geht näher aus Abb. 1 hervor, wobei aber die Kontrastwirkung durch reichliche Belichtung stark übertrieben ist. Dieser Unstand hat vor allem für die Herstellung von Bildplänen hinsichtlich der photographischen Qualität eine große Bedeutung. Im folgenden wird zunächst eine Erklärung über diese unerwartete Exzentrizität der Schwärzung gegeben und dann ihre praktische Bedeutung näher erörtert.

Die Verteilung der Schwärzungsintensität im Bilde.

Wenn auch die Geländefläche an und für sich einer Parallelbestrahlung ausgesetzt ist, so wird doch die das Objektiv treffende Ausstrahlung nicht über die Bildfläche gleichmäßig verteilt. Denn durch die Sonnenhöhe erhält jeder Gegenstand im Gelände eine beleuchtete und eine beschattete Seite; und da das ins Objektiv eintretende Strahlenbündel zentralperspektivischen Charakter hat, müssen offenbar Gegenstände im südlichen Teil des Geländes ihre Schattenseite und im nördlichen Teil ihre Sonnenseite gegen das Objektiv wenden, wie in Abb. 2 schematisch dargestellt. Im ganzen wird also das Gelände den Eindruck erwecken, im südlichen Teil beschattet und im nördlichen Teil bestrahlt zu sein, mit einem dazwischen gleichmäßig verlaufenden Übergang. Die Beleuchtung der photographischen Schicht wird deswegen von einer „Schattenbeleuchtung“ zu einer „Sonnenbeleuchtung“ wechseln. Die Aschenbrenner'sche Annahme gilt folglich nur unter der Voraussetzung, daß die Geländefläche von der Sonne im Zenit bestrahlt wird. Bei anderen Sonnenständen — und besonders bei den niedrigen in Schweden — treten große Abweichungen von dieser idealen Annahme auf, und die photographische Schicht wird zwangsläufig ungleichmäßig beleuchtet.

Eine nähere Untersuchung über das tatsächliche Aussehen der Schwärzungskuppe zufolge der angegebenen Gesichtspunkte erfordert umfassende Betrachtungen über die Variation der Beleuchtungsintensität über die Bildfläche. Mathematisch gilt das Lambert'sche Gesetz nicht mehr, weil die Beleuchtungsintensität des ankommenden Tageslichts jetzt eine veränderliche

1) „Die Lichtverteilung in Luftbildern“, Bildmessung und Luftbildwesen, 1941, Heft 1, S. 5/19.



Abb. 1.

Die Verteilung der Schwärzung im Bilde.

Durch Überbelichtung ist die Kontrastwirkung stark übertrieben.

Größe ist. Man muß also die Größe $E = E_0$ durch eine Funktion $E = f(x, y)$ ersetzen, welche durch optische Messungen zu ermitteln ist. Hieraus wäre es dann möglich, die entsprechende Schichtbeleuchtungsintensität zu berechnen. Ich habe hier aber nicht die Absicht, eine Deduktion zu machen, sondern nur eine Erklärung des Problems zu geben, wie folgt:

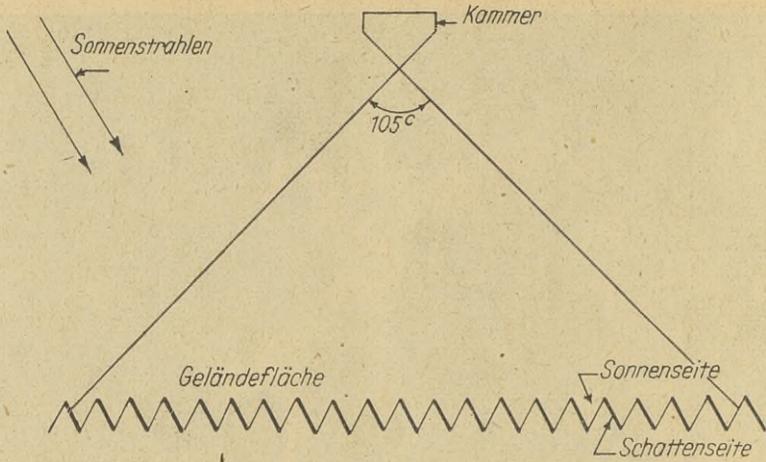


Abb. 2.

Schematische Darstellung der Sonnen- und Schattenseite des Geländes.

Die Funktion $E = f(x, y)$ kann in zwei Glieder zerlegt werden (Abb. 3). Das erste, konstante Glied entspricht dem „idealen Fall“, auf den das Lambert'sche Gesetz angewandt werden kann, das zweite einem veränderlichen Glied, das „die Störung“ des idealen Falles darstellt und für welche dieses Gesetz nicht gültig ist. Die Einwirkung dieses veränderlichen

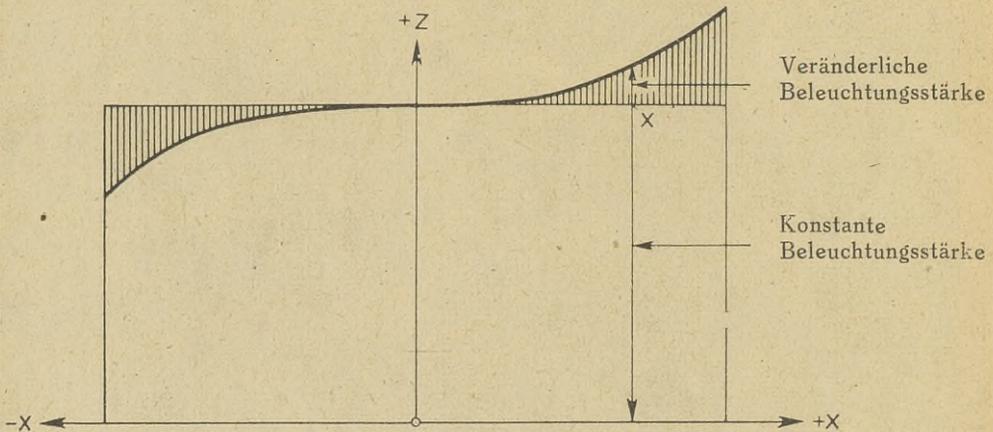


Abb. 3.

Die Zerlegung der Beleuchtungsstärke ist ein konstantes und ein veränderliches Glied.

Gliedes überlagert also, mathematisch betrachtet, die Beleuchtungskuppe und deformiert sie so, daß der Höchstpunkt der Kuppe gegen die nördliche Kante des Bildes gedrückt wird, wie Abb. 4 schematisch darstellt.

In derselben Weise kann der Schwärzungsverlauf analysiert werden. Die Intensität der Schwärzung zerfällt also in analoger Weise in ein konstantes, dem „idealen Falle“ entsprechendes Glied und in ein veränderliches, welches als „Störung“ wirkt, und dessen Größe von der Sonnenhöhe abhängt. Hierbei kann die Überlagerung so stark sein, daß die Schattentöne am südlichen Rande des Bildes nicht mehr abgebildet werden, wie es Abb. 1 zeigt.

Die Schwärzungsverhältnisse dieses Beispiels lassen sich in einigen speziellen Einzelheiten näher erörtern. Wie ersichtlich, hat die kreisförmige Schwärzungsfläche in ihrem südlichen

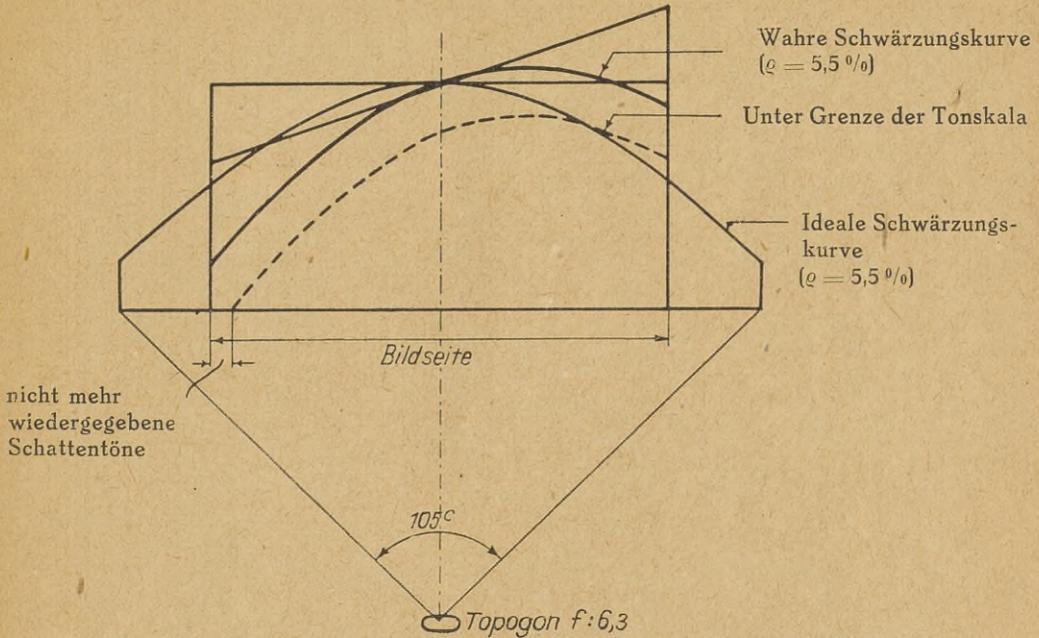


Abb. 4.

Die Schnittkurve der durch Überlagerung deformierten Schwärzungskuppe mit der xz -Ebene.

Teil einen hellen Ausläufer, und ferner bildet sich dort sehr scharf die Oberfläche eines Wasserlaufes ab. Beides läßt sich gut erklären. Der Ausläufer besteht nämlich zum größten Teil aus Äckern, die keine ausgeprägten Schattenseiten haben, wodurch sie eine wesentlich größere ausstrahlende Beleuchtungsintensität zeigen. Ferner haben die Äcker an und für sich eine ziemlich hohe Reflexionszahl. Aus demselben Grunde sieht man die Wege — mit ihren verhältnismäßig hohen Reflexionszahlen — noch weiter südlich hervorschimern. Für das Gewässer schließlich gilt dasselbe, es kommt dazu, daß hier infolge der Lage des Gewässers im Bilde die Sonnenstrahlen direkt in die Kammer reflektiert werden.

Um zu zeigen, wie der Gedankengang sich in mathematischer Form prinzipiell ausdrücken läßt, wird angenommen, daß die überlagernde Störung eine möglichst einfache Funktion hat, d. h. daß sie linear ist. Weil ferner die Schwärzungskuppe des Topogons annähernd einem Paraboloid entspricht, das in der Form

$$z_1 = f(x^2, y^2)$$

ausgedrückt werden kann, gibt die lineare Überlagerung

$$z_2 = f(x)$$

eine Fläche zweiten Grades

$$z = z_1 + z_2 = f(x^2, x, y^2).$$

Wird diese Fläche durch eine Ebene $z = \text{Konst.}$ geschnitten, so ergeben sich Kreise:

$$f(x^2, x, y^2) = \text{Konst.}$$

Wie aus dem Beispiel in Abb. 1 hervorgeht — wo aber, wie schon erwähnt, die Schwärzung stark übertrieben ist — stimmt dies auch mit der Praxis gut überein.

Die Auswirkung der unregelmäßigen Schwärzung auf den Bildplan.

Gemäß der durchgeführten Überlegung sind in Abb. 5 die normal geschwärzten Flächen der Bilder als Kreise wiedergegeben. Die Streifen sind in west-östlicher Richtung aufgenommen mit einer Längsüberdeckung von 60% und einer Querüberdeckung von etwa 40% (Abb. 6). Die Schwärzungskreise werden aber wegen des Bildrandes im nördlichen Teil ab-

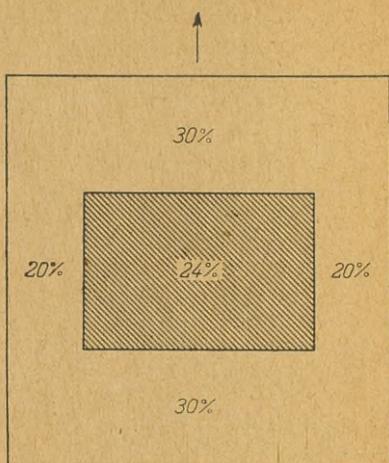
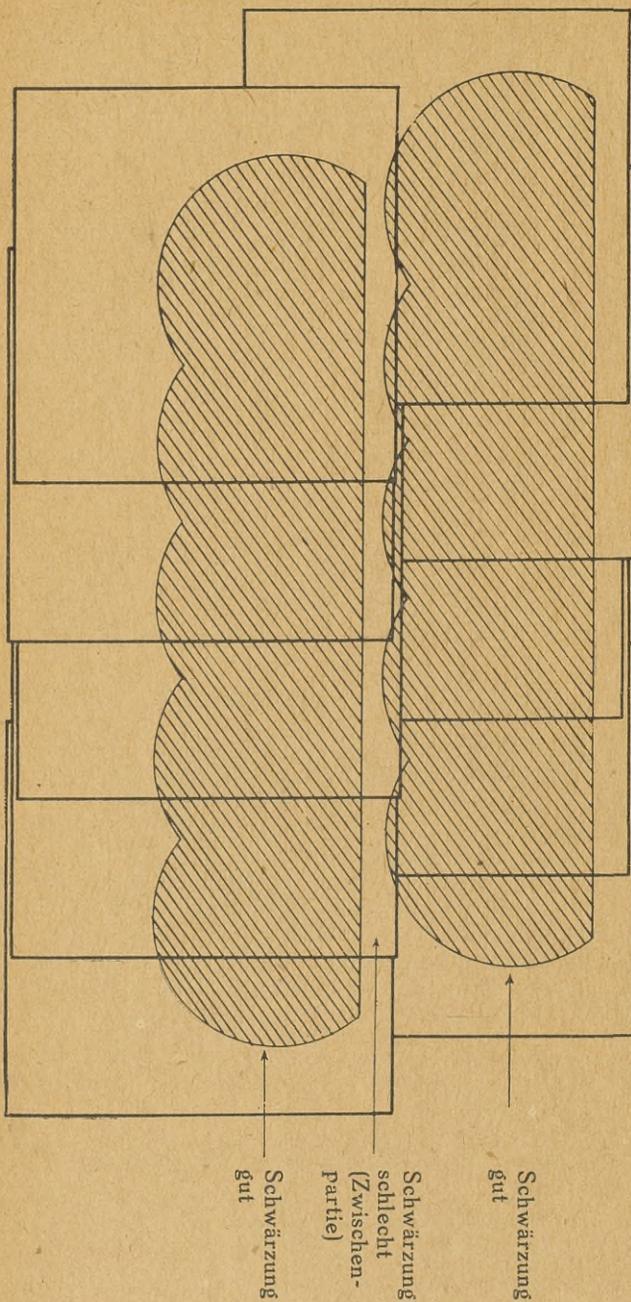


Abb. 6.

Die Längs- und Querüberdeckung des Bildes.

Links:

Abb. 5.

Schematische Darstellung der Schwärzungsverhältnisse eines Bildplanes bei Aufnahme von west-östlichen Streifen.

geschnitten. Beim Zusammenkleben der Bilder erhält deswegen die normal geschwärzte Fläche des Bildplanes den Charakter, wie er aus Abb. 5 hervorgeht, also mit längsgehenden photographisch schwächeren Anschlußpartien zwischen den Streifen. Dieser photographische Mangel des hergestellten Photoplans ist hier und da so stark hervorgetreten, daß es sich zuletzt notwendig erwies, einen Weg zu suchen, um ihn zu vermeiden, möglichst ohne die Überdeckung zwischen den Streifen zu erhöhen.

Schon im Sommer 1940 wurden vom Reichsamt einige Versuche angestellt, die Streifen in nord-südliche Richtung zu verlegen. Bezüglich der Überdeckungsverhältnisse wird man nämlich:

in solcher Weise bessere Ergebnisse erwarten können, weil hierdurch die Nachteile der Verschiebung der Schwärzungsfläche hinsichtlich des Zusammenlebens des Photoplans vermieden werden. Allerdings würde der photographische Mangel im Streifen selbst auftreten, und man könnte deswegen vermuten, daß sie die Stereoauswertung ungünstig beeinflusst, weil das Stereobildpaar in dieser Weise aus zwei photographisch ziemlich verschiedenen Teilen der beiden Bilder bestehen würde. Die Praxis hat aber gezeigt, daß dies geringe Bedeutung hat, weil sich die photographischen Gegensätze zwischen dem nördlichen und dem südlichen

Teil des Bildes bei der Herstellung der für die Auswertung stets erforderlichen Diapositive ausgleichen lassen. Und ferner werden im allgemeinen für die Orientierung der Bildpaare solche Geländepunkte gewählt, die an sich ziemlich hoch auf der Tonskala liegen. Für das Zusammenkleben des Photoplans dagegen wird eine gute Zeichnung über den ganzen zu verwendenden Teil des Bildes verlangt. Abb. 7 zeigt schematisch, wie sich die photographischen Verhältnisse nach der Umlegung der Aufnahme zu nord-südlichen Streifen gestalten.

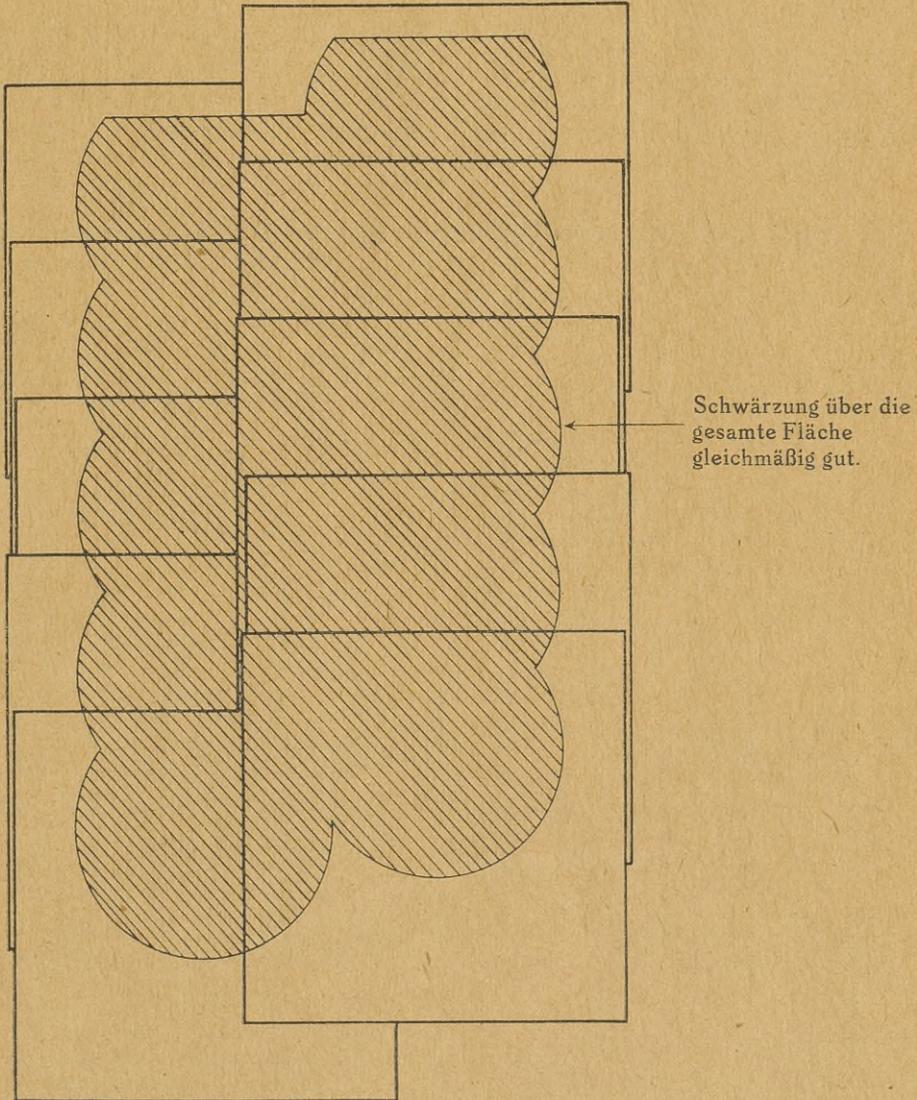


Abb. 7.

Schematische Darstellung der Schwärzungsverhältnisse eines Bildplanes bei Aufnahme in nord-südlichen Streifen.

Die Ergebnisse aus der Praxis haben die Erwartungen noch übertroffen. Es hat sich auch gezeigt, daß das Fliegen in nord-südlicher Richtung in bezug auf die Lage der Sonne den Piloten keine Schwierigkeiten bereitet. Daher werden nunmehr die Streifen immer in nord-südlicher Richtung aufgenommen.

Zusammenfassung.

Die hier angegebenen Gesichtspunkte dieses photographischen Problems der Photogrammetrie zeigen, daß die Verschiebung der Schwärzungsintensität innerhalb der Bildfläche infolge der Lage der Sonne für die praktische Arbeit von solcher Bedeutung ist, daß sie unbedingt beachtet werden muß. Freilich werden die Nachteile für lichtempfindlicheres Negativmaterial geringer — beispielsweise für den nunmehr lieferbaren Agfa Aerorapidfilm — die Verhältnisse bleiben aber doch dieselben.

Als Zusammenfassung kann folgendes gesagt werden:

1. Bei der Aufnahme eines einzelnen Bildes wird für schwedische Verhältnisse das Maximum der Schwärzungsintensität in nördlicher Richtung verschoben, in solchem Maße, daß es etwa auf einem Drittel der Bildseite, von der nördlichen Seite gerechnet, liegt.
2. Bei der Aufnahme zusammenhängender Flächen empfiehlt es sich, wenn es sich um Herstellung von Bildplänen handelt, die Streifen in die nord-südliche Richtung zu verlegen.

Die vollständige Lösung des Rückwärtseinschnittes.

Die genaue Bestimmung der Flughöhe über Grund.

Von Dr. Percy Tham, Stockholm.

Schon im Jahre 1841 veröffentlichte der deutsche Wissenschaftler Grunert seine Ergebnisse bezüglich des „Pothénot“'schen Problems, auch Pyramidenproblem genannt. Dieses Hauptproblem der Einbildphotogrammetrie, das hiernach verschiedene Forscher zu erneuerten Anstrengungen verlockte, um eine für praktische Zwecke verwendbare Lösung zu finden, kann nunmehr klassisch genannt werden. Auf Grunert folgte im Jahre 1860 Plath mit einigen Untersuchungen, und späterhin am Ende des Jahrhunderts Finsterwalder und Laussedat. Nach diesen ersten Namen folgten eine große Menge von Forschern.

Die analytische Behandlung, die die bisherigen Lösungen kennzeichnet, führt aber zu einer Gleichung 4. Grades, und die umständliche Auflösung wird allzu zeitraubend, um überhaupt praktische Bedeutung erhalten zu können. Deswegen war es notwendig, Näherungsverfahren zu benutzen. Es ist bezeichnend, was Müller im Jahre 1925 in der Einleitung einer dasselbe Problem behandelnden Arbeit über die Versuche der verschiedenen Forscher schreibt: „Alle diese, ausnahmslich des alten Grunert und Plath, verschmähen eine direkte Lösung und geben mehr oder minder genaue Annäherungsmethoden.“ Werkmeister z. B. sagt: „Die unmittelbare Auflösung dieser Gleichungen ist umständlich.“ Und ferner Klingatsch: „Daß die strenge Lösung bei dieser Punktbestimmung im allgemeinen nicht befriedigt, beweist die neuerliche elegante Behandlung dieses Falles durch Finsterwalder.“ Hugershoff und Crantz führen an: „Methoden zur unmittelbaren Bestimmung der Kantenzahlen ohne Verwendung von Näherungswerten, also allgemeine Verfahren, sind mehrfach angegeben worden, zumeist mit eingehender Diskussion der auftretenden Gleichung 4. Grades. Für die Praxis der Standortsbestimmung sind diese analytischen Lösungen der Aufgabe von geringerer Bedeutung.“ Müller selbst aber meint, daß die Näherungslösungen von Werkmeister und Hugershoff an mechanischer Rechenarbeit ebensoviel erfordern wie bei der direkten Auflösung der schließlich entstehenden Gleichung 4. Grades.

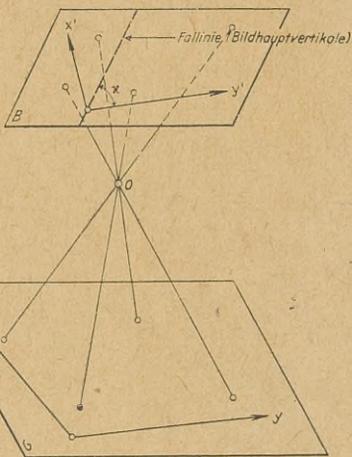


Abb. 1.

Schematische Darstellung des Strahlenbündels im Schnitt mit Bild- und Geländeebene.

Erst als v. Gruber in der letzten Zeit neue Wege versuchte, kann man von einer für die Praxis verwendbaren Methode sprechen. Im Jahre 1930 veröffentlichte er eine Arbeit¹⁾, wo er an Stelle der bisher benutzten analytischen Betrachtungsweise zu den perspektivischen Eigen-

¹⁾ „Ferienkurs in Photogrammetrie“, 510 S., Stuttgart 1930.

schaften des Strahlenbündels übergegangen ist. Er leitete hierbei die Ausdrücke der unbekanntenen Koeffizienten, sowie gewisse geometrische Daten ab, von denen der Kantungswinkel \varkappa von größter Bedeutung war. Die geometrische Lösung wurde aber von v. Gruber nicht weiter geführt. Die Bestimmung der für die äußere Orientierung des Bildes noch erforderlichen Daten und vor allem der Neigung ν blieb noch übrig.

In meiner Dissertation²⁾ im Jahre 1939 wurde dem von v. Gruber angegebenen Weg gefolgt, und die endgültige Lösung des Problems wurde deswegen wieder aktuell. Es gelang mir auch, für die Neigung des Bildes aus den acht Koeffizienten einen Ausdruck zu finden, und damit waren sämtliche geometrischen Daten des Bildes bestimmt.

Später habe ich das Problem noch weiter entwickelt, und zwar durch eine für die Praxis geeignete Methode, die Flughöhe zu bestimmen.

Die allgemeine Lösung des Problems und die Bestimmung der Paßpunkte.

Der Zusammenhang zwischen beliebig ausgewählten Paßpunkten in der Bildebene und den entsprechenden Punkten in der Geländeebene läßt sich durch zwei linear gebrochene Funktionen ausdrücken, für welche es charakteristisch ist, daß sie denselben Nenner haben. Diese beiden Ausdrücke entsprechen der allgemeinen Transformation für die Umwandlung von Geraden in Geraden. Wenn also ein beliebig gewähltes Koordinatensystem $(x' y')$ in der Bildebene und das entsprechende Koordinatensystem $(x y)$ in der Kartenebene gemäß Abb. 1 eingetragen ist, besteht die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{k_1 \cdot x' + n_1 \cdot y' + q_1}{k_0 \cdot x' + n_0 \cdot y' + 1} \\ y &= \frac{k_2 \cdot x' + n_2 \cdot y' + q_2}{k_0 \cdot x' + n_0 \cdot y' + 1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Aus den Ausdrücken geht hervor, daß die beiden Koordinatenachsen $x = 0$ und $y = 0$ als die beiden Geraden

$$\begin{aligned} k_1 \cdot x' + n_1 \cdot y' + q_1 &= 0 \\ k_2 \cdot x' + n_2 \cdot y' + q_2 &= 0 \end{aligned}$$

abgebildet werden.

Ferner sieht man, daß $x = \infty$ und $y = \infty$ der Gleichung

$$k_0 \cdot x' + n_0 \cdot y' + 1 = 0$$

entspricht, welche Gleichung folglich den Bildhorizont darstellt.

Wie aus der Gl. (1) hervorgeht, enthalten die beiden Ausdrücke für x und y acht Koeffizienten als unbekanntene Größen, und folglich sind vier Punktpaare für eine eindeutige Bestimmung des Strahlenbündels erforderlich.

Nachdem diese Koeffizienten berechnet sind — eventuell durch Ausgleichung einer überschüssigen Anzahl von Punktpaaren — lassen sich für jeden Geländepunkt im Bilde die Koordinaten des entsprechenden Punktes in der Kartenebene bestimmen.

Die Kantung \varkappa und die Neigung ν .

Der Kantungswinkel \varkappa des Bildes wird hier als Winkel zwischen der Bildhauptvertikalen und der Ordinatenachse definiert. Da ferner die Bildhauptvertikale senkrecht zum Bildhorizont steht, wird

$$\operatorname{tg} \varkappa = + \frac{k_0}{n_0} \quad (2)$$

Die Neigung ν wird als Winkel zwischen der optischen Achse und der Senkrechten definiert. Für die Herleitung des Ausdruckes für ν wird vom sogenannten Hauptvertikalfall ausgegangen, der ein Sonderfall des allgemeinen Falles ist. Nach Abb. 2 wird für ihn

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cdot \frac{h_g \cdot \sec \nu}{f_a \cdot \cos \nu + x' \cdot \sin \nu} \\ y &= y' \cdot \frac{h_g}{f_a \cdot \cos \nu + x' \cdot \sin \nu} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

²⁾ „Photogrammetrische Auswertung ebenen Geländes unter spezieller Berücksichtigung des Schären-Geländes“. 44 Abb., 118 S., Nachtrag, 6 S., Stockholm 1939.

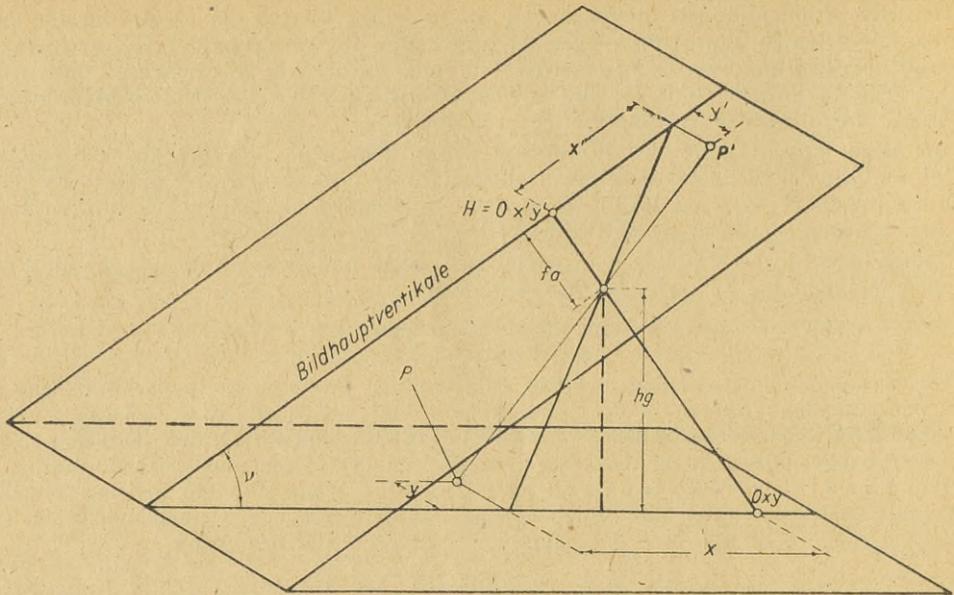


Abb. 2.

Schematische Darstellung des Hauptvertikalschnittes der Bild- und Geländeebene.

In meiner Dissertation wird gezeigt, wie sich die Neigung mittels der Ausdrücke (1) und (3) ableiten läßt. Wird nämlich die Gleichung des Bildhorizonts als Normalform geschrieben, und werden danach die Koordinaten des Bildhauptpunktes in den erhaltenen Ausdruck eingesetzt, so gibt dieser die Länge des Lotes vom Bildhauptpunkt auf den Bildhorizont an. Das Lot läßt sich aber auch als $\frac{\text{tg } \nu}{f_a}$ ausdrücken, und man erhält somit

$$\text{tg } \nu = f_a \cdot \frac{\sqrt{k_0^2 + n_0^2}}{\Theta_H} \quad (4)$$

wo $\Theta_H = k_0 \cdot x'_H + n_0 \cdot y'_H + 1$

Durch die Kantung α und die Neigung ν , die sich aus den Nomogrammen in Abb. 3 u. 4 ermitteln lassen, ist die geometrische Beziehung zwischen den beiden Ebenen eindeutig bestimmt, und danach lassen sich alle anderen geometrischen Daten leicht ableiten.

Die Berechnung der Flughöhe über Grund.

Für verschiedene Zwecke habe ich einen für die Praxis geeigneten Weg für die Berechnung der Flughöhe aus den jetzt ermittelten geometrischen Daten gesucht. Weil es sich im allgemeinen um Senkrechtaufnahmen handelt, soll aber die Herleitung sehr kleinen Werten der Neigung ν angepaßt sein. Als Vergleich werden zunächst zwei in der Literatur vorkommende Ableitungen hier kurz angedeutet.

1. Durch die Strecke HN und die Neigung ν .

Nach dieser Ableitung wird zunächst die Lage des Bildnadirs N' im Bilde berechnet und dann die Lagen des Bildhauptpunktes H und des Kartennadirs N .

Hieraus erhält man somit

$$h_g = HN \cdot \text{cotg } \nu$$

Wie ersichtlich, setzt das Verfahren voraus, daß sich die Lage von H' sehr genau bestimmen läßt. Da — wie schon erwähnt — die Berechnungen meistens Senkrechtaufnahmen voraussetzen, nähert sich die Strecke HN offenbar dem Wert 0, zu gleicher Zeit, als $\text{cotg } \nu$ nach ∞ wächst. Der Ausdruck für die Flughöhe h_g wird deswegen in Limes folgendermaßen aussehen:

$$h_g = \underbrace{HN}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\text{cotg } \nu}_{\rightarrow \infty}$$

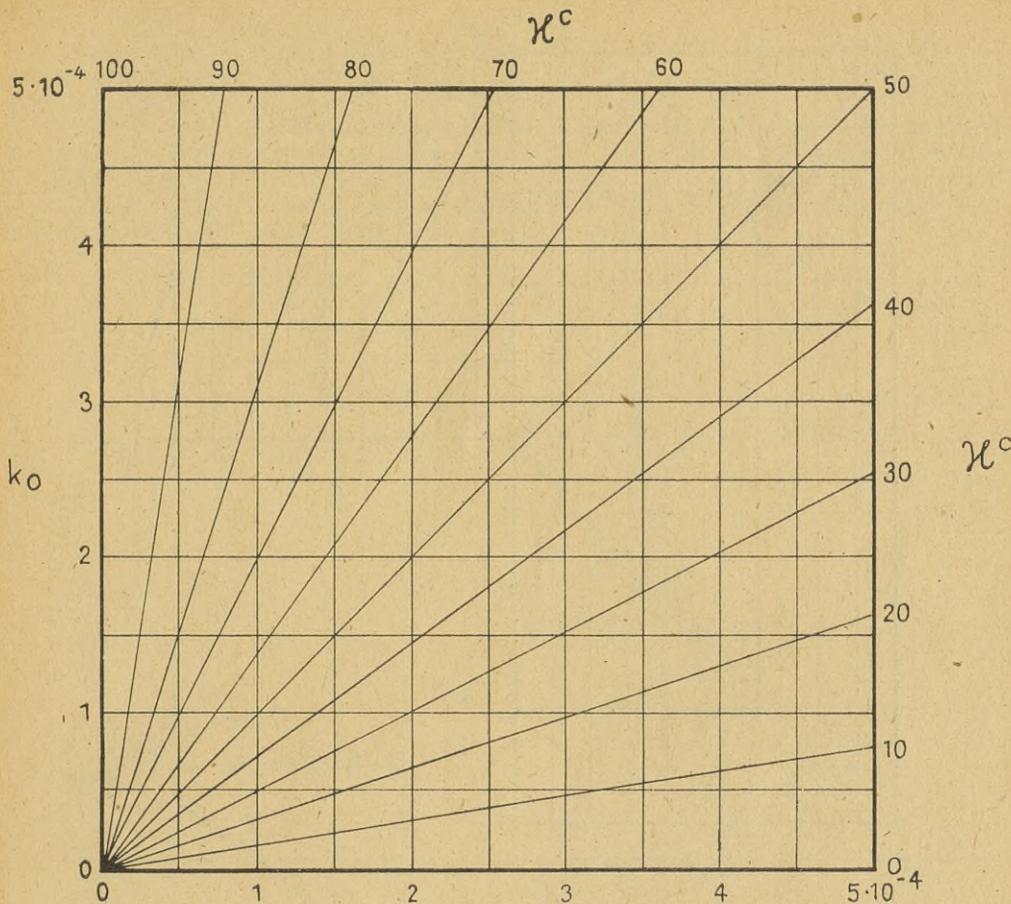


Abb. 3.

Die Beziehung $\text{tg } \kappa = + \frac{k_0}{n_0}$

2. Durch die von v. Gruber abgeleitete Strecke h' und die Neigung ν .

In seiner obenerwähnten Arbeit hat v. Gruber u. a. die Strecke h' , die aus Abb. 5 näher hervorgeht, abgeleitet. Offenbar kann man, wenn die Neigung ν bekannt ist, die Flughöhe auch aus der Strecke h' berechnen, und zwar

$$h_g = h' \cdot \sin \nu$$

Die Strecke h' wird von v. Gruber aus den Ausdrücken

$$\begin{aligned} \text{tg } (\kappa + \kappa') &= \\ &= \frac{k_0 (n_0 \cdot k_1 - k_0 \cdot n_1) - n_0 (k_0 \cdot n_2 - n_0 \cdot k_2)}{n_0 (n_0 \cdot k_1 - k_0 \cdot n_1) + k_0 (k_0 \cdot n_2 - n_0 \cdot k_2)} \\ h' &= \frac{k_0 (n_0 \cdot k_1 - k_0 \cdot n_1) - n_0 (k_0 \cdot n_2 - n_0 \cdot k_2)}{\sin (\kappa + \kappa')} \cdot \frac{1}{(\sqrt{k_0^2 + n_0^2})^3} \end{aligned} \quad (6)$$

bestimmt, wo κ und κ' die Kantungswinkel in der Bildebene bzw. der Kartenebene bedeuten.

Auch in diesem Falle erhält aber der Ausdruck für die Flughöhe h_g in Limes ein mit dem Obenerwähnten ähnliches Aussehen, nämlich

$$h_g = \underbrace{h'}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\sin \nu}_{\rightarrow 0}$$

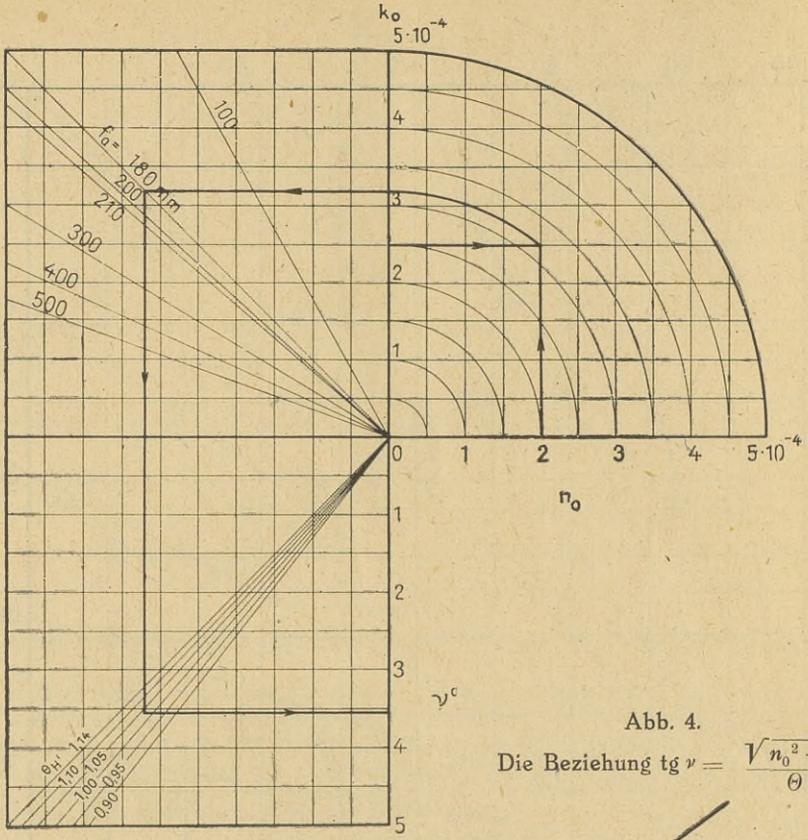


Abb. 4.
Die Beziehung $\text{tg } \nu = \frac{\sqrt{n_0^2 + k_0^2}}{\Theta H'}$

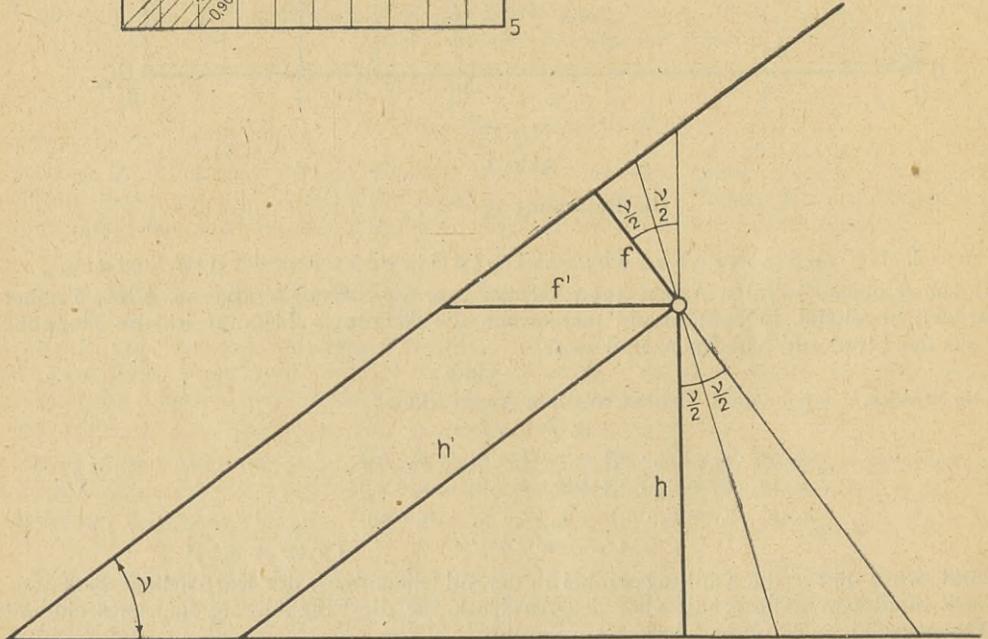


Abb. 5.
Der Hauptvertikalschnitt der Bild- und Geländeebene.

Neue Ableitung.

Es wäre wünschenswert, eine Berechnungsmethode zu finden, durch welche teils eine genaue Berechnung der Flughöhe h_g erreicht werden kann, teils das aus numerischen Gesichtspunkten unpraktische Produktglied vermieden wird, das in Limes das Aussehen $0 \cdot \infty$ hat.

Die hier vorgeschlagene Methode stützt sich darauf, daß eine Strecke sich längs einer Bildhorizontalen als eine mit derselben parallele Strecke in der Geländeebene abbildet. Wird diese durch den winkeltreuen Punkt (Isozentrum) W' gewählt, hier die „Isozentrumhorizontale“ genannt, findet man, daß eine einfache Beziehung zwischen einer Strecke längs dieser Horizontalen und ihrer Abbildung in der Geländeebene besteht.

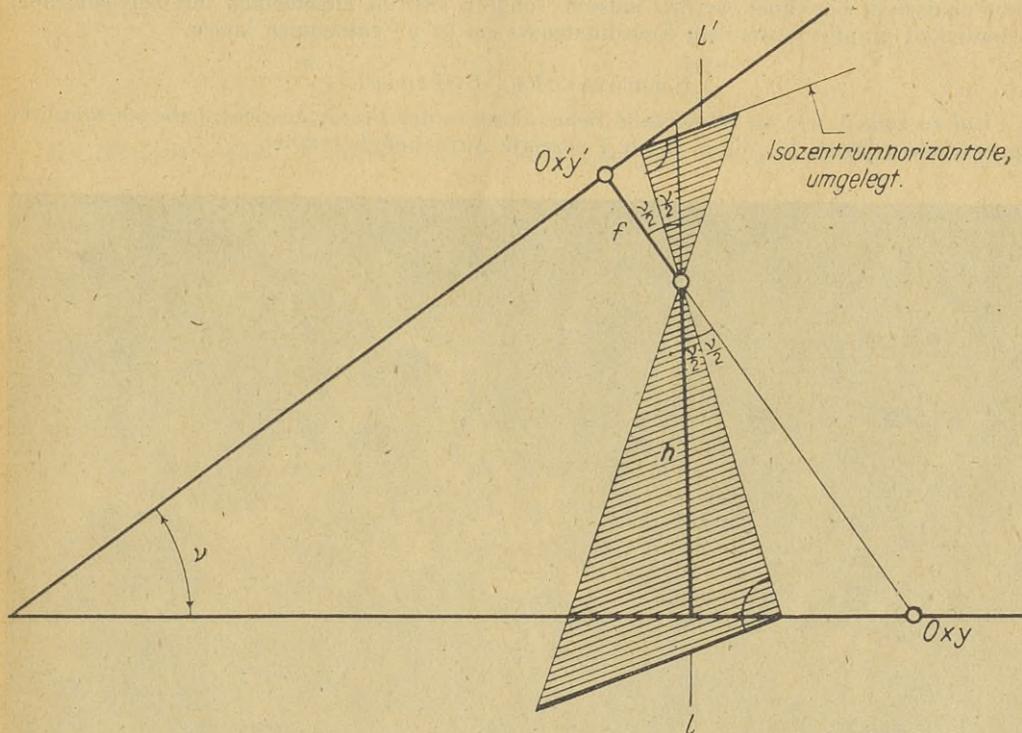


Abb. 6.

Der Hauptvertikalschnitt der Bild- und Geländeebene. Die Isozentrumhorizontale ist in die Zeichenebene umgelegt.

In Abb. 6, die einen Vertikalschnitt durch die Bildhauptvertikale darstellt, sind die angegebenen Strecken in die Ebene des Papiers „umgelegt“, und man findet

$$\frac{f_a}{h_g} = \frac{O' W'}{O W}$$

und ferner

$$\frac{l'}{l} = \frac{O' W'}{O W}$$

woraus sich ergibt

$$\boxed{h_g = \frac{l}{l'} \cdot f_a} \quad (7)$$

Man findet folglich: Zwischen einer Strecke längs der Isozentrumhorizontalen und der entsprechenden Strecke im Gelände besteht dieselbe Beziehung wie zwischen der Brennweite der Kammer und der Flughöhe.

Wie man sieht, werden die Berechnungen vom Neigungswinkel gar nicht beeinflusst. Nähert sich also sein Wert der Größe 0, so bedeutet dies nur, daß die Isozentrumhorizontale sich der Lage der Bildhauptvertikalen nähert, um schließlich mit derselben zusammenzufallen.

Die numerischen Berechnungen der Flughöhe werden nun in folgender Weise angestellt: Zunächst wird die Lage des Isozentrums aus der Neigung ν berechnet und danach wird eine beliebige Strecke längs der Isozentrumhorizontalen gewählt. Die entsprechende Strecke in der Geländeebene wird hiernach gemäß Gl. (1) berechnet. Durch Einsetzung der Längen der beiden Strecken l' und l in Gl. (7) wird man die Flughöhe h_g direkt erhalten. Die Berechnung geht sehr rasch, und sie wird noch dadurch erleichtert, daß die beiden Endpunkte der Strecke l' nicht analytisch berechnet werden müssen, sondern sich im allgemeinen mit befriedigender Genauigkeit graphisch aus dem Koordinatensystem $(x' y')$ entnehmen lassen.

Numerisches Beispiel.

Um zu zeigen, wie die numerische Behandlung in der Praxis aussieht, habe ich sämtliche geometrischen Daten für die in Abb. 7 gezeigte Aufnahme berechnet.

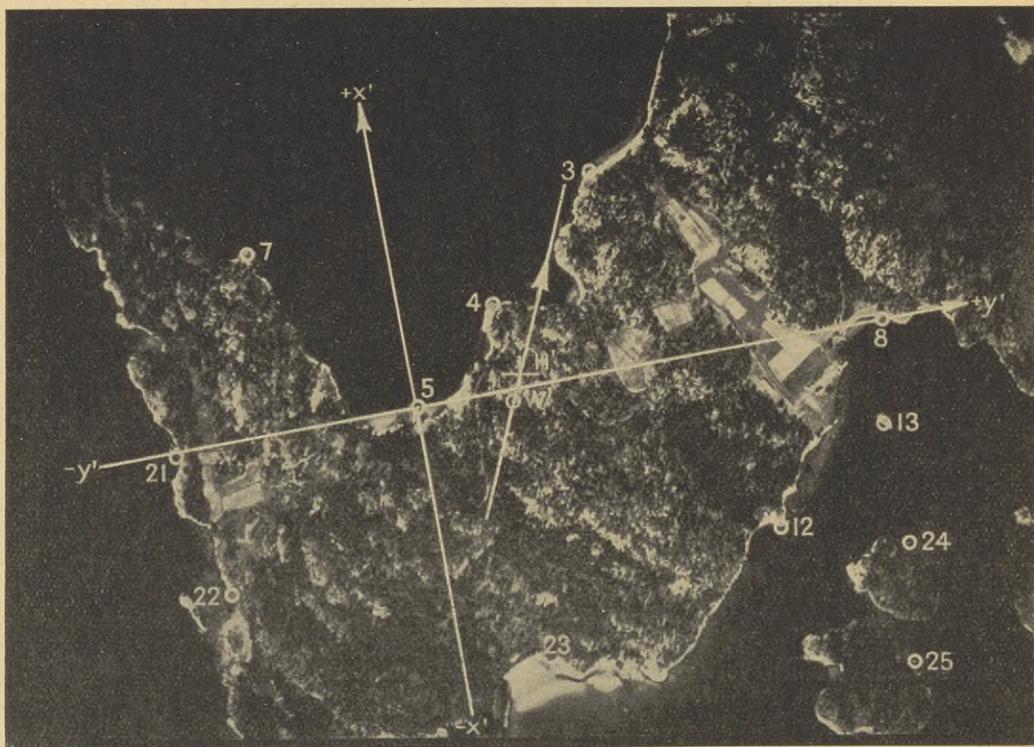


Abb. 7.

Die Aufnahme mit dem eingetragenen Koordinatensystem $(x' y')$.

Hierbei sind die Paßpunkte 3, 5, 8 und 12 zu ihren Lagen geodätisch eingemessen, und da sie alle in der Wasserlinie gewählt sind, liegen sie praktisch in ein und derselben Ebene. Dieselben Punkte sind im Bilde gemessen, und zwar in einem Koordinatensystem $(x' y')$, dessen Ursprung im Paßpunkt 5 liegt und deren Ordinatenachse durch den Paßpunkt 8 geht. Durch diese Maßnahmen werden die Berechnungen, wie aus meiner obenerwähnten Dissertation näher hervorgeht, sehr vereinfacht.

Die Paßpunkte haben in der Geländeebene folgende Koordinaten:

	x m	y m
3	6 437 015,7	16 361,6
5	6 436 878,3	15 927,2
8	6 436 553,3	16 590,0
12	6 436 396,7	16 266,5

Das Koordinatensystem wird jetzt zum Paßpunkt 5 als Ursprung parallel verschoben, und man erhält folgende auf den Maßstab 1:10 000 reduzierten Koordinaten:

	x mm	y mm
5	0	0
8	- 32,50	+ 66,28
3	+ 13,74	+ 43,44
12	- 48,16	+ 33,93

Die Bildkoordinaten, die mittels eines Koordinatographen gemessen sind, haben folgende Werte:

	x' mm	y' mm
5	0	0
8	0	+ 74,70
3	+ 31,64	+ 33,35
12	- 28,89	+ 52,74

Aus diesen beiden Koordinatengruppen werden jetzt die acht Koeffizienten gemäß dem ausgearbeiteten Schema bestimmt, und man erhält folgende Ausdrücke:

$$x = \frac{+ 0,882\ 90 \cdot x' - 0,431\ 04 \cdot y'}{- 0,000\ 2840 \cdot x' - 0,000\ 1240 \cdot y' + 1}$$

$$y = \frac{+ 0,428\ 36 \cdot x' + 0,879\ 06 \cdot y'}{- 0,000\ 2840 \cdot x' - 0,000\ 1240 \cdot y' + 1}$$

die also die perspektivische Beziehung zwischen den beiden Ebenen darstellen.

Neupunkte im Gelände lassen sich jetzt ohne weiteres bestimmen. Beispielsweise erhält man für den Paßpunkt 24 mit den Koordinaten $x' = - 35,44$ und $y' = + 72,37$

$$x_{24} = - 62,42$$

$$y_{24} = + 48,38$$

Aus den berechneten Koeffizienten erhält man jetzt

$$\kappa = + 73^{\circ} 79$$

und ferner

$$\nu = + 3^{\circ} 56$$

Aus den erhaltenen Werten läßt sich jetzt die Flughöhe h_g bestimmen. Die Berechnung ist graphisch durchgeführt worden. Das Koordinatensystem wurde zu diesem Zwecke auf Millimeterpapier aufgezeichnet. Längs der eingetragenen Isozentrumschizontalen wurde so eine Strecke von 90 mm aufgetragen, die Koordinaten der Endpunkte dieser Strecke wurden abgelesen und die entsprechenden Punkte im Gelände berechnet. Die hieraus ermittelten Strecken l und l' berechneten sich zu

$$l' = 89,595\ \text{mm}$$

$$l = 88,003$$

und somit

$$h_g = \frac{88,003}{89,595} \cdot 180,00 = 176,80\ \text{mm}$$

Die Flughöhe ist folglich 1768 m.

Hieraus ergibt sich der Maßstabswert zu

$$M_b = \frac{1\ 768,0}{0,18} = 9\ 822$$

Der Aufnahmemaßstab ist also etwa 1:9820.

Die Bedingungsgleichungen bei der gegenseitigen Orientierung von Luftaufnahmen.

Von A. Ansermet, Lausanne.

Die nachstehende Abhandlung gründet sich besonders auf den Artikel von Schermerhorn in Photogrammetria (1941, S. 28—45).

Für die beobachteten Parallaxen hat man

$$v_i = Pv_i - \Delta P_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

R. Finsterwalder hat folgende Werte gefunden:

$$\begin{array}{llll} \Delta P_1 = & 66,7 \, dx_{II} + 200 \, d\omega & & \\ \Delta P_2 = 66,7 \, dx_I & & + 200 \, d\omega & \\ \Delta P_3 = & 66,7 \, dx_{II} + 232 \, d\omega & - 26,7 \, d\varphi_{II} & \\ \Delta P_4 = 66,7 \, dx_I & & + 232 \, d\omega & - 26,7 \, d\varphi_I \\ \Delta P_5 = & 66,7 \, dx_{II} + 232 \, d\omega & + 26,7 \, d\varphi_{II} & \\ \Delta P_6 = 66,7 \, dx_I & & + 232 \, d\omega & + 26,7 \, d\varphi_I \end{array}$$

von denen die 5 Differentiale die (unbekannten) Orientierungsveränderlichen sind. Man hat

$$2 \Delta P_1 - 2 \Delta P_2 - \Delta P_3 + \Delta P_4 - \Delta P_5 + \Delta P_6 = 0,$$

worin die anderen Veränderlichen enthalten sind. Daraus ergibt sich die Fehlergleichung

$$2 v_1 - 2 v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + v_6 = -\omega$$

oder:

$$2 p_{v1} - 2 p_{v2} - p_{v3} + p_{v4} - p_{v5} + p_{v6} = -\omega$$

Wir führen folgende Größen ein:

$$b = 66,7, \quad f = 200, \quad f \left(1 + \frac{a^2}{f^2}\right) = 232, \quad \frac{a \cdot b}{f} = 26,7 \quad (a = 80)$$

Gewichtsbestimmung.

Die optisch-mechanische Orientierung gestattet verschiedene Abänderungen, die durch größere oder geringere Gewichte gekennzeichnet sind; wir suchen die Maximalwerte für

$$p\varphi_I = p\varphi_{II}, \quad p\omega, \quad p\kappa_I = p\kappa_{II}$$

Bekanntlich ist

$$p\varphi_I = p\varphi_{II} = 2 \frac{a^2 b^2}{f^2} (v_3 = v_5, v_4 = v_6)$$

und $v_4 + v_6 - 2v_2 = -\frac{\omega}{2}$, mithin

$$\frac{2 a^2}{f} \cdot d\omega = p_{v1} + p_{v2} - \frac{1}{2} (p_{v3} + p_{v4} + p_{v5} + p_{v6})$$

$$p_\omega = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^4}{f^2}$$

Diese Werte sind unveränderlich, da

$$v_3 = v_5 = \frac{w}{n} = -v_4 = -v_6 \quad \text{und} \quad v_2 = -v_1 = \frac{w}{n'}$$

$$w = w \left(\frac{2}{n'} + \frac{2}{n'} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) \quad \text{oder} \quad n + n' = \frac{n \cdot n'}{4}$$

Einzel-Lösungen.

$$1) \quad n = n' = 8 \quad |v_1| = |v_2| = |v_3| = |v_4| = |v_5| = |v_6| = \left| \frac{w}{8} \right|$$

$$\left[v \cdot v \right] = \frac{6}{64} \cdot w^2 = 0,094 \cdot w^2$$

$$2) \quad n = 12, \quad n' = 6 \quad \left[v \cdot v \right] = \frac{1}{12} \cdot w^2 = 0,083 \cdot w^2 \quad (\text{Minimum})$$

Gewichte der Funktionen ΔP_i ($i=1, 2, \dots, 6$)

Es ist $\Delta P_i = F_1 d\alpha_I + f_2 d\alpha_{II} + F_3 d\omega + F_4 d\varphi$ ($i = 3, 4, 5, 6$)

$$F_1 = b, F_2 = 0, F_3 = f \left(1 + \frac{a^2}{f^2}\right), F_4 = \frac{a \cdot b}{f} \quad (i = 6)$$

$$\frac{F_1^2}{[aa]} = \frac{b^2}{3 \cdot b^2} = \frac{1}{3} \quad [F_2 \cdot 1] = 0$$

$$[cc \cdot 2] = \frac{4}{3} \frac{a^4}{f^2} = p_\omega \quad [dd \cdot 3] = 2 \frac{a^2 b^2}{f^2} = p_{\varphi I} = p_{\varphi II} = p_\varphi$$

$$\frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} = \frac{a^4}{9f^2} : p_\omega = \frac{1}{12} \quad \frac{[F_4 \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} = \frac{a^2 b^2}{f^2} : p_\varphi = \frac{1}{2}$$

Es genügt, die bekannte Formel anzuwenden:

$$\frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{[aa]} + \frac{[F_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{[F_4 \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

$$P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = \frac{12}{11} \quad \text{und} \quad P_1 = P_2 = \frac{3}{2}$$

Damit haben wir die Maxima erhalten

$$\left[\frac{1}{P} \right]_{i=1}^{i=6} = 5 \quad (5 \text{ Unbekannte})$$

Gewichte von $(P_{vi} - v_i)$?

$$|v_i| = \left| \frac{w}{n} \right| \quad (i = 3, 4, 5, 6)$$

$$\frac{1}{P} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{12}{n^2} = \frac{1}{4n^2} (4n^2 - 8n + 48)$$

Für $i = 1, 2$ ist, falls $n + n' = \frac{n \cdot n'}{4}$:

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_2} = 1 - \frac{4}{n'} + \frac{12}{n'^2} = \frac{1}{4n'^2} (3n'^2 - 8n' + 48)$$

oder die Unveränderliche $\frac{1}{P_i} - \frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_i} - \frac{1}{P_2} = \frac{1}{4} \quad (i = 3, 4, 5, 6)$

Einzel-Lösungen.

$$1) n = n' = 8 \quad \frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_2} = 1 - \frac{4}{8} + \frac{12}{64} = \frac{11}{16} = 0,69$$

$$\frac{1}{P_i} = 1 - \frac{2}{8} + \frac{12}{64} = \frac{15}{16} = 0,94$$

$$2) n = 12, n' = 6 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_2} = 1 - \frac{4}{6} + \frac{12}{36} = \frac{2}{3} = 0,67 \\ \frac{1}{P_i} = 1 - \frac{2}{12} + \frac{12}{144} = \frac{11}{12} = 0,92 \end{array} \right\} \text{Minima}$$

$$\text{Die Unveränderliche: } \frac{15}{16} - \frac{11}{16} = \frac{11}{12} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

Die Rechnung wird sehr einfach, wenn man die Gewichtskoeffizienten wegläßt, und vor allem, wenn man die 5 Orientierungsunbekannten eliminiert.

Über den Wert des Widerspruches w ist keine Festsetzung getroffen.

L'équation de condition de l'équation relative.

Par A. Ansermet, Lausanne.

Le calcul ci-dessous est basé notamment sur l'article paru dans *Photogrammetria* (1941, pages 28-45).

Pour chaque parallaxe observée on a:

$$v_i = pv_i - \Delta P_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

Le prof. R. Finsterwalder a trouvé les valeurs

$$\begin{array}{llll} \Delta P_1 = & 66.7 \, d\alpha_{II} + 200 \, d\omega & & \\ \Delta P_2 = 66.7 \, d\alpha_I & & + 200 \, d\omega & \\ \Delta P_3 = & 66.7 \, d\alpha_{II} + 232 \, d\omega & & - 26.7 \, d\varphi_{II} \\ \Delta P_4 = 66.7 \, d\alpha_I & & + 232 \, d\omega & - 26.7 \, d\varphi_I \\ \Delta P_5 = & 66.7 \, d\alpha_{II} + 332 \, d\omega & & + 26.7 \, d\varphi_{II} \\ \Delta P_6 = 66.7 \, d\alpha_I & & + 232 \, d\omega & + 26.7 \, d\varphi_I \end{array}$$

ou les 5 différentielles sont les variables d'orientation (inconnues). On a:

$$2 \Delta P_1 - 2 \Delta P_2 - \Delta P_3 + \Delta P_4 - \Delta P_5 + \Delta P_6 = 0$$

expression qui subsiste pour d'autres variables. Il reste

$$\begin{array}{l} 2 v_1 - 2 v_3 - v_3 + v_4 - v_5 + v_6 = -w \\ \text{ou } 2 p_{v1} - 2 p_{v2} - p_{v3} + p_{v4} - p_{v5} + p_{v6} = -w \end{array}$$

Introduisons les notations

$$b = 66.7, f = 200, f \left(1 + \frac{a^2}{f^2}\right) = 232, \frac{a b}{f} = 26.7 \quad (a = 80)$$

Calcul des poids.

L'orientation optique-mécanique comporte diverses variantes caractérisées par des poids plus ou moins forts. Cherchons les valeurs *maximums*

$$p\varphi_I - p\varphi_{II}, p\omega, p\alpha_I = p\alpha_{II}$$

on sait que

$$p\varphi_I = p\varphi_{II} = 2 \frac{a^2 b^2}{f^2} (v_3 = v_5, v_4 = v_6)$$

de même $v_4 + v_6 - 2v_2 = -\frac{w}{2}$ entraîne

$$\begin{array}{l} \frac{2 a^2}{f} \cdot d\omega = p_{v1} + p_{v2} - \frac{1}{2} (p_{v3} + p_{v4} + p_{v5} + p_{v6}) \\ p_{\omega} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^4}{f^2} \end{array}$$

Ces valeurs sont *invariantes* pour

$$v_3 = v_5 = \frac{w}{n} = -v_4 = -v_6 \text{ et } v_2 = -v_1 = \frac{w}{n'}$$

$$w = w \left(\frac{2}{n'} + \frac{2}{n'} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) \text{ ou } n + n' = \frac{1}{4} n n'$$

Solutions particulières.

$$1) \quad n = n' = 8 \quad |v_1| = |v_2| = |v_3| = |v_4| = |v_5| = |v_6| = \left| \frac{w}{8} \right|$$

$$[v \cdot v] = \frac{6}{64} \cdot w^2 = 0,094 \cdot w^2$$

$$2) \quad n = 12, n' = 6 \quad [v \cdot v] = \frac{1}{12} \cdot w^2 = 0,083 \cdot w^2 \text{ (minimum)}$$

Poids des fonctions ΔP_i ($i = 1, 2, \dots, 6$)

Considérons la fonction

$$\Delta P_i = F_1 dx_I + F_2 dx_{II} + F_3 \cdot d\omega + F_4 d\varphi \quad (i = 3, 4, 5, 6)$$

$$F_1 = b, F_2 = 0, F_3 = f \left(1 + \frac{a^2}{f^2}\right), F_4 = \frac{a b}{f}. \quad (i = 6)$$

$$\frac{F_1^2}{[aa]} = \frac{b^2}{3 b^2} = \frac{1}{3} \quad [F_2 \cdot 1] = 0$$

$$[cc \cdot 2] = \frac{4 a^4}{3 f^2} = p_{\omega} \quad [dd \cdot 3] = 2 \frac{a^2 b^2}{f^2} = p_{\varphi I} = p_{\varphi II} = p_{\varphi}$$

$$\frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} = \frac{a^4}{9 f^2} : p_{\omega} = \frac{1}{12} \quad \frac{[F_4 \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} = \frac{a^2 b^2}{f^2} : p_{\varphi} = \frac{1}{2}$$

Il suffit d'appliquer la formule connue

$$\frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{[aa]} + \frac{[F_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{[F_4 \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

$$P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = \frac{12}{11}; \text{ on trouverait } P_1 = P_2 = \frac{3}{2}$$

ce sont des maximums

$$\left[\frac{1}{P} \right]_{i=1}^{i=6} = 5; \quad (5 \text{ inconnues})$$

$$\text{Poids de } (p_{v_i} - v_i)? \quad |v_i| = \left| \frac{w}{n} \right| \quad (i = 3, 4, 5, 6)$$

$$\frac{1}{P_i} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{12}{n^2} = \frac{1}{4 n^2} (4 n^2 - 8 n + 48)$$

$$\text{Pour } i = 1, 2 \text{ on a toujours si } n + n' = \frac{1}{4} n n'$$

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_2} = 1 - \frac{4}{n'} + \frac{12}{n'^2} = \frac{1}{4 n'^2} (3 n^2 - 8 n + 48)$$

$$\text{ou l'invariant: } \frac{1}{P_i} - \frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_i} - \frac{1}{P_2} = \frac{1}{4} \quad (i = 3, 4, 5, 6)$$

Solutions particulières.

$$1^0) n = n' = 8 \quad \frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_2} = 1 - \frac{4}{8} + \frac{12}{64} = \frac{11}{16} = 0.69$$

$$\frac{1}{P_i} = 1 - \frac{2}{8} + \frac{12}{64} = \frac{15}{16} = 0.94$$

$$2^0) n = 12, n' = 6 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_2} = 1 - \frac{4}{6} + \frac{12}{36} = \frac{2}{3} = 0.67 \\ \frac{1}{P_i} = 1 - \frac{2}{12} + \frac{12}{144} = \frac{11}{12} = 0.92 \end{array} \right\} \text{minimums}$$

$$\text{Invariant: } \frac{15}{16} - \frac{11}{16} = \frac{11}{12} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

Le calcul devient très simple si on fait abstraction des coefficients de poids et surtout si on élimine les 5 variables d'orientation.

Aucune hypothèse n'est formulée sur la valeur du résidu w (Widerspruch).

Bücherschau.

Wissenschaftliche Photographie. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Von Dr. Ernst v. Angerer, a.o. Prof. d. T.H. München. Dritte Auflage mit 107 Abbildungen im Text, davon 3 Tafeln. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1943. Preis geb. RM. 13.60.

Das Werk verfolgt eine dreifache Zielsetzung:

1. Überblick über die stark verzweigte wissenschaftliche Photographie.
2. Zuverlässige Beratung über moderne photographische Methoden und Erzeugnisse.
3. Anregung zur eigenen Arbeit und eigenem Nachdenken.

Die Neubearbeitung zeigt einige neue kleine Abschnitte wie z. B. über das Empfindlichkeitskriterium von Jones, über die Reflexminderung durch dünne Schichtüberzüge und über Stereophotographie.

Nach einer Vorbemerkung über Lichtwellenlängen zeigt das I. Kapitel einen knappen Abriss der Anwendungsgebiete der Photographie.

Kapitel II „Die photographische Platte“ — die steigende Verwendung von Film empfiehlt die Überschrift „Photographisches Material“ oder „Emulsion“ — zeigt die wissenschaftlichen Grundlagen für die fabrikatorische Herstellung der Schicht, für die photographische Bildentstehung und die Ermittlung der bezeichnenden Eigenschaften auf. Besonders hervorzuheben ist die eingehende wissenschaftliche Klarlegung des photographischen Elementarvorganges und die Diskutierung seiner praktischen Auswirkungen. Weitere Abschnitte des Kapitels befassen sich mit der Schwärzungskurve, mit Sensitometrie und mit Sonderemulsionen.

Das III. Kapitel ist dem photographischen Apparat gewidmet (Objektiv, Lichtfilter, Blende, Zubehör und Belichtung) und berücksichtigt in seiner gründlichen Darstellung die neuesten Ergebnisse.

Kapitel IV „Das Negativ“ befaßt sich mit der photographischen Verarbeitung (Entwicklung usw.) des Aufnahmematerials in Theorie und Praxis und vermittelt wertvolles Wissen über die Beeinflussung des Bildaufbaues.

Das sehr interessante Gebiet der Photographie außerhalb des sichtbaren Spektralbereiches wird neben der Stereophotographie im V. Kapitel behandelt.

Die Ausführungen des VI. Kapitels beziehen sich auf die „Abbildungstreuere der photographischen Schicht“. Es wird die ausgezeichnete Eignung der Photographie für Meßzwecke dargelegt. Das Auflösungsvermögen, der Begriff „Körnigkeit“, die verschiedenen photographischen „Effekte“ und die photographische Photometrie als Methode der vergleichenden Energiemessung werden mit den ihnen zugrundeliegenden Gesetzen näher untersucht und auseinandergesetzt.

Kapitel VII bringt wertvolle Winke für die „Korrektur des Negatives“ (Retusche, Abschwächen, Verstärken).

Im VIII. Kapitel werden die verschiedenen Möglichkeiten der Farbenphotographie, ihre Theorie und die technische Anwendung des Dreifarbenverfahrens (additiv und subtraktiv) aufgezeigt.

Das IX. Kapitel erläutert Theorie und Praxis des Positivverfahrens (Kopieren) mit einem besonderen Abschnitt über den Pigmentdruck.

In einem kurzen Anhang werden schließlich die Becquerel-Herschel-Clayden-Effekte mit ihren Ursachen und Auswirkungen dargestellt.

Trotz des Charakters einer Einführung wird die gesamte wissenschaftliche Photographie erfreulich eingehend behandelt. Das Werk ist über eine exakte Darstellung hinaus durch viele Literaturhinweise, durch sehr zahlreiche qualitative und quantitative Angaben und Beurteilungen, durch Zahlentafeln und Kurvendarstellungen auch hinsichtlich Spezialfragen in solchem Umfang bereichert, daß es sehr wohl als Grundlage zu eigenen Arbeiten dienen kann, seien diese praktischer, wissenschaftlicher oder forschender Natur.

Damit ist dem Verfasser seine im Vorwort ausgesprochene Absicht voll gelungen.

Das Werk, das sich einer guten Ausstattung erfreut, ist dem Geodäten und besonders dem Photogrammeter, der am Fortschritt auf seinem Arbeitsgebiet mitarbeitet, warm zu empfehlen.

Burkhardt.

Mitteilungen der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie.

Der Deutsche Verein für Vermessungswesen hat am 31. Juli 1943, dem 100. Geburtstag F. R. Helmerts, dem Vorstandsmittglied der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, Dr. Dr. Ing. e. h. Otto Eggert, o. Prof. der TH. Berlin, und dem Ehrenmitglied der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, Geheimen Rat Dr. rer. nat.,

Dr. phil. h. c., Dr. rer. techn. h. c. Sebastian Finsterwalder, o. Prof. der TH. München, in dankbarer Anerkennung ihrer Förderung der geodätischen Wissenschaft die

Friedrich - Robert - Helmert - Denkmünze verliehen.

Berichtigung.

Im Aufsatz „Die Ortung von Senkrechtaufnahmen durch Bildvergleich“ (B. u. L., Heft 1/2 1943, S. 56) soll der auf (29) folgende Satz ausdrücken, daß die Formeln (27) bis (29) im Gegensatz zu den auf Seite 45 erwähnten Formeln von E. Wolf keine d-Werte enthalten und damit nicht an ebenes Gelände gebunden sind. Sie berücksichtigen allerdings nicht die bei besonderer Höhengestaltung des Geländes eintretende Änderung des Überkorrekturfaktors

für ω . Dieser wird unter Beachtung des Zweckes nur in Ausnahmefällen wesentliche Abweichungen zeigen; für die dann erforderliche Formelerweiterung vgl.: Gotthardt, „Rechnerische und zeichnerische Verfahren zur Verbesserung und Beschleunigung der Orientierung von Senkrechtbildpaaren gebirgigen Geländes“, Mitt. d. D.G.f.Pf., H. 2, 1939. (In der dortigen Formel (7) ist statt $f - \frac{y^2}{f}$ zu setzen

$$f + \frac{y^2}{f}$$

R. Burkhardt.