

Zeitschrift für Vermessungswesen

Herausgegeben vom Arbeitskreis Deutscher Verein für Vermessungswesen (DVW.) E. V.
in der Fachgruppe Bauwesen E. V. des Nationalsozialistischen Bundes Deutscher Technik
über die Kriegsdauer vereinigt mit

Allgemeine Vermessungsnachrichten

Bildmessung und Luftbildwesen

Zeitschrift der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie E. V.

Photogrammetria

Offizielles Organ der Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie

Hauptschriftleiter i. N.: Professor Dr. Dr.-Ing. E. h. **O. Eggert**, Berlin-Dahlem, Ehrenbergstr. 21
Stellv. Hauptschriftleiter i. N.: Off. best. Verm.-Ing. Kurd Slawik, Berlin W. 50, Spichernstr. 2

Mitarbeiter: Oberleutnant Geßner, Berlin SW. 29, Flughafenneubau
und Professor Dr.-Ing. habil. W. Großmann, Hannover, Techn. Hochschule

Heft 11

15. November 1943

72. Jahrgang

Der Abdruck von Originalartikeln ohne vorher eingeholte Erlaubnis der Schriftleitung ist untersagt

Ministerialdirigent Albert Pfitzer

die Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften

Ehren halber verliehen.

Die Landwirtschaftliche Fakultät der Universität Bonn verlieh am 18. Oktober 1943 dem Ministerialdirigenten Albert Pfitzer anlässlich der 125-Jahr-Feier der Universität in Anerkennung der von ihm in Wort und Schrift wissenschaftlich begründeten und schöpferisch durchgeführten Reform des großdeutschen Vermessungswesens, das er hierdurch auf eine der deutschen Wissenschaft würdige Höhe gebracht hat, die

*Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften
Ehren halber.*

Der Nationalsozialistische Bund Deutscher Technik, Arbeitskreis Deutscher Verein für Vermessungswesen, freut sich über diese seltene Ehrung eines seiner verdienstvollsten Mitglieder und spricht ihm seine aufrichtigsten Glückwünsche aus.

I. A. Speidel.



FÜR VATERLAND UND VOLK GABEN IHR LEBEN:

KÖSTER, GEORG
gefallen Mai 1942 im Osten
Verm. Techniker, Hannover.

SARTORIUS, PAUL
gefallen Juni 1942 im Osten
Verm. Rat, Bromberg.

KLOTZ, HELMUT
gefallen Juni 1942 im Osten
Verm. Inspektor, Soldin/Neum.

Dipl. Ing. **SCHULTZ, WERNER**
gefallen September 1942 im Osten
Öff. best. Verm. Ing., Güstrow/Meckl.

GNIRCK, ALBERT
gefallen September 1942 im Osten
Assessor d. Verm. Dienstes, Königsberg/Pr.

EINHOFF, ERICH
gefallen November 1942 im Osten
Verm. Rat, Blankenburg.

SIECKSMEYER, EDUARD
gefallen Dezember 1942 im Osten
Kat. Techniker, Berlin.

DIEDRICH, HEINZ
gefallen Januar 1943 im Osten
Verm. Inspektor, Dessau.

KÜMPEL, HELMUT
gefallen Januar 1943 im Osten
Reg. Verm. Rat, Solingen.

Dipl. Ing. **LEY, HANS**
gefallen Januar 1943 im Osten
Verm. Referendar, Wernich über Euskirchen

RÖHR, WERNER
gefallen Februar 1943 im Osten
Verm. Assessor, Hildesheim.

JUNGBLUTH, FRIEDEL
gefallen März 1943 im Osten
Verm. Assessor, Godesberg.

EBENRECHT, HEINRICH
gefallen August 1943 im Osten
Verm. Techniker, Dresden.

FETTE, SIGMUND
gefallen im Osten
Reg. Landmesser, Elbing.

Die Mecklenburgischen Koordinaten (normale konforme Kegelprojektion).

Von Dr. Wl. K. Hristow, Sofia.

Im folgenden sollen alle nötigen Formeln für die Mecklenburgischen Koordinaten abgeleitet werden, um eine vollständige Übersicht zu geben. Zu den schon bekannten Formeln, die mit größerer Genauigkeit abgeleitet werden, sind auch neue Formeln hinzugekommen. Dabei bemerke ich noch, daß ich darin manche allgemeine Formeln von mir verwendet habe, damit deren Anwendungsmöglichkeit deutlich zutage tritt.

Geographische Koordinaten
in Mecklenburgische Koordinaten und umgekehrt.

Nach meiner Arbeit in ZfV. Bd. LXVI, 1937, Heft 3, Formeln (8), (9), (12) und (13) habe ich

$$\begin{aligned}
 x = & a_1 c_1 \cdot \Delta \varphi + (a_1 c_2 + a_2 c_1^2) \cdot \Delta \varphi^2 - a_2 \cdot l^2 + (a_1 c_3 + 2 a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^3) \cdot \Delta \varphi^3 - \\
 & - 3 a_3 c_1 \cdot \Delta \varphi l^2 + (a_1 c_4 + 2 a_2 c_1 c_3 + a_2 c_2^2 + 3 a_3 c_1^2 c_2 + a_4 c_1^4) \cdot \Delta \varphi^4 - (3 a_3 c_2 + \\
 & + 6 a_4 c_1^2) \cdot \Delta \varphi^2 l^2 + a_4 \cdot l^4 + (a_1 c_5 + 2 a_2 c_1 c_4 + 2 a_2 c_2 c_3 + 3 a_3 c_1^2 c_3 + \\
 & + 3 a_3 c_1 c_2^2 + 4 a_4 c_1^3 c_2 + a_5 c_1^5) \cdot \Delta \varphi^5 - (3 a_3 c_3 + 12 a_4 c_1 c_2 + \\
 & + 10 a_5 c_1^3) \cdot \Delta \varphi^3 l^2 + 5 a_5 c_1 \cdot \Delta \varphi l^4
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$y = a_1 \cdot l + 2 a_2 c_1 \cdot \Delta \varphi l + (2 a_2 c_2 + 3 a_3 c_1^2) \cdot \Delta \varphi^2 l - a_3 \cdot l^3 + (2 a_2 c_3 + 6 a_3 c_1 c_2 + 4 a_4 c_1^3) \cdot \Delta \varphi^3 l - 4 a_4 c_1 \cdot \Delta \varphi l^3 + (2 a_2 c_4 + 6 a_3 c_1 c_3 + 3 a_3 c_2^2 + 12 a_4 c_1^2 c_2 + 5 a_5 c_1^4) \cdot \Delta \varphi^4 l - (4 a_4 c_2 + 10 a_5 c_1^2) \cdot \Delta \varphi^2 l^3 + a_5 \cdot l^5 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = & b_1 d_1 \cdot x + (b_2 d_1 + b_1^2 d_3) \cdot x^2 - b_2 d_1 \cdot y^2 + (b_3 d_1 + 2 b_1 b_2 d_2 + \\ & + b_1^3 d_3) \cdot x^3 - (3 b_3 d_1 + 2 b_1 b_2 d_2) \cdot x y^2 + (b_4 d_1 + 2 b_1 b_3 d_2 + b_2^2 d_2 + \\ & + 3 b_1^2 b_2 d_3 + b_1^4 d_4) \cdot x^4 - (6 b_4 d_1 + 6 b_1 b_3 d_2 + 2 b_2^2 d_2 + 3 b_1^2 b_2 d_3) \cdot x^2 y^2 + \\ & + (b_4 d_1 + b_2^2 d_2) \cdot y^4 + (b_5 d_1 + 2 b_1 b_4 d_2 + 2 b_2 b_3 d_2 + 3 b_1^2 b_3 d_3 + \\ & + 3 b_1 b_2^2 d_3 + 4 b_1^3 b_2 d_4 + b_1^5 d_5) \cdot x^5 - (10 b_5 d_1 + 12 b_1 b_4 d_2 + 8 b_2 b_3 d_2 + \\ & + 9 b_1^2 b_3 d_3 + 6 b_1 b_2^2 d_3 + 4 b_1^3 b_2 d_4) \cdot x^3 y^2 + (5 b_5 d_1 + 2 b_1 b_4 d_2 + \\ & + 6 b_2 b_3 d_2 + 3 b_1 b_2^2 d_3) \cdot x y^4 \end{aligned} \quad (3)$$

$$l = b_1 \cdot y + 2 b_2 \cdot x y + 3 b_3 \cdot x^2 y - b_3 \cdot y^3 + 4 b_4 \cdot x^3 y - 4 b_4 \cdot x y^3 + 5 b_5 \cdot x^4 y - 10 b_5 \cdot x^2 y^3 + b_5 \cdot y^5 \quad (4)$$

Hierin sind zu setzen aus meinen Arbeiten in ZfV. Bd. LXIV, 1935, Heft 5, Formeln (27) und (31)

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= N_0 \cos \varphi_0 \\ a_2 &= \frac{1}{2} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0 (-1) \\ a_3 &= \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 t_0^2 \\ a_4 &= \frac{1}{24} N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0 (-t_0^2) \\ a_5 &= \frac{1}{120} N_0 \cos^5 \varphi_0 t_0^4 \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \\ b_2 &= \frac{1}{2 N_0^2 \cos \varphi_0} t_0 \\ b_3 &= \frac{1}{3 N_0^3 \cos \varphi_0} t_0^2 \\ b_4 &= \frac{1}{4 N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 t_0^2 \\ b_5 &= \frac{1}{5 N_0^5 \cos \varphi_0} t_0^4 \end{aligned} \right\} (6)$$

und in ZfV. Bd. LXIV, 1935, Heft 21, Formeln (3) und (7)

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\cos \varphi_0} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \\ c_2 &= \frac{1}{2 \cos \varphi_0} t_0 (1 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^4) \\ c_3 &= \frac{1}{6 \cos \varphi_0} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^4 + 6 t_0^2 \eta_0^4) \\ c_4 &= \frac{1}{24 \cos \varphi_0} t_0 (5 + 6 t_0^2 - \eta_0^2) \\ c_5 &= \frac{1}{120 \cos \varphi_0} (5 + 28 t_0^2 + 24 t_0^4) \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2) \\ d_2 &= \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 t_0 (-1 - 4 \eta_0^2 - 3 \eta_0^4) \\ d_3 &= \frac{1}{6} \cos^3 \varphi_0 (-1 + t_0^2 - 5 \eta_0^2 + 13 t_0^2 \eta_0^2 - 7 \eta_0^4 + 27 t_0^2 \eta_0^4) \\ d_4 &= \frac{1}{24} \cos^4 \varphi_0 t_0 (5 - t_0^2 + 56 \eta_0^2 - 40 t_0^2 \eta_0^2) \\ d_5 &= \frac{1}{120} \cos^5 \varphi_0 (5 - 18 t_0^2 + t_0^4) \end{aligned} \right\} (8)$$

(5) bis (8) eingesetzt in (1) bis (4) gibt

$$\begin{aligned}
 x = & N_0 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \cdot A \varphi + \frac{3}{2} N_0 t_0 (\eta_0^2 - 2 \eta_0^4) \cdot A \varphi^2 + \frac{1}{2} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0 \cdot l^2 + \\
 & + \frac{1}{6} N_0 (1 + \eta_0^2 - 3 t_0^2 \eta_0^2 - 3 \eta_0^4 + 21 t_0^2 \eta_0^4) \cdot A \varphi^3 + \frac{1}{2} N_0 \cos^2 \varphi_0 (-t_0^2 + \\
 & + t_0^2 \eta_0^2 - t_0^2 \eta_0^4) \cdot A \varphi l^2 + \frac{1}{24} N_0 t_0 (1 - \eta_0^2) \cdot A \varphi^4 + \frac{3}{4} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0 (-t_0^2 \eta_0^2) \cdot \\
 & \cdot A \varphi^3 l^2 + \frac{1}{24} N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0 (-t_0^2) \cdot l^4 + \frac{1}{120} N_0 (5 + 3 t_0^2) \cdot A \varphi^5 + \frac{1}{12} N_0 \cos^2 \varphi_0 \\
 & (-t_0^2) \cdot A \varphi^3 l^2 + \frac{1}{24} N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0^4 \cdot A \varphi l^4 \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y = & N_0 \cos \varphi_0 \cdot l + N_0 \cos \varphi_0 t_0 (-1 + \eta_0^2 - \eta_0^4) \cdot A \varphi l + \frac{3}{2} N_0 \cos \varphi_0 (-t_0^2 \eta_0^2 + \\
 & + 2 t_0^2 \eta_0^4) \cdot A \varphi^2 l + \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 (-t_0^2) \cdot l^3 + \frac{1}{6} N_0 \cos \varphi_0 t_0 (-1 - \eta_0^2 + \\
 & + 3 t_0^2 \eta_0^2) \cdot A \varphi^3 l + \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 t_0 (t_0^2 - t_0^2 \eta_0^2) \cdot A \varphi l^3 + \\
 & + \frac{1}{24} N_0 \cos \varphi_0 (-t_0^2) \cdot A \varphi^4 l + \frac{1}{120} N_0 \cos^5 \varphi_0 t_0^4 \cdot l^5 \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \varphi = & \frac{1}{N_0} (1 + \eta_0^2) \cdot x + \frac{3}{2 N_0^2} t_0 (-\eta_0^2 - \eta_0^4) \cdot x^2 + \frac{1}{2 N_0^2} t_0 (-1 - \eta_0^2) \cdot y^2 + \\
 & + \frac{1}{6 N_0^3} (-1 - 5 \eta_0^2 + 3 t_0^2 \eta_0^2 - 7 \eta_0^4 + 18 t_0^2 \eta_0^4) \cdot x^3 + \frac{1}{2 N_0^3} (-t_0^2 + \\
 & + 2 t_0^2 \eta_0^2 + 3 t_0^2 \eta_0^4) \cdot x y^2 + \frac{1}{24 N_0^4} t_0 (-1 + 26 \eta_0^2) \cdot x^4 + \frac{1}{4 N_0^4} t_0 (1 - 2 t_0^2 + \\
 & + 5 \eta_0^2 + t_0^2 \eta_0^2) \cdot x^2 y^2 + \frac{1}{8 N_0^4} t_0 (t_0^2 - 2 t_0^2 \eta_0^2) \cdot y^4 + \frac{1}{120 N_0^5} (5 - 3 t_0^2) \cdot x^5 + \\
 & + \frac{1}{6 N_0^5} (2 t_0^2 - 3 t_0^4) \cdot x^3 y^2 + \frac{1}{8 N_0^5} (-t_0^2 + 3 t_0^4) \cdot x y^4 \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l = & \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \cdot y + \frac{1}{N_0^2 \cos \varphi_0} t_0 \cdot x y + \frac{1}{N_0^3 \cos \varphi_0} t_0^2 \cdot x^2 y + \frac{1}{3 N_0^3 \cos \varphi_0} (-t_0^2) \cdot y^3 + \\
 & + \frac{1}{N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 t_0^2 \cdot x^3 y + \frac{1}{N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 (-t_0^2) \cdot x y^3 + \frac{1}{N_0^5 \cos \varphi_0} t_0^4 \cdot x^4 y + \\
 & + \frac{2}{N_0^5 \cos \varphi_0} (-t_0^4) \cdot x^2 y^3 + \frac{1}{5 N_0^5 \cos \varphi_0} t_0^4 \cdot y^5 \quad (12)
 \end{aligned}$$

Diese Formeln (9) bis (12) habe ich einmal mit den Formeln in W. Jordan, K. Mauck und R. Vogeler, Die konforme Kegelprojektion und ihre Anwendung auf das trigonometrische Netz I. Ordnung, Schwerin 1895, S. 19, F. (3) und (4) [in Verbindung mit S. 13, F. (24) bis (26)] und mit S. 22 u. f., F. (5), (5a) und (9), (9a) und ein zweites Mal mit Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde Bd. III, Stuttgart 1923, S. 539—540, Gl. (7) bis (10) verglichen. Es stellte sich kein Widerspruch mit den Formeln in J.-M.-V. heraus, womit die Richtigkeit der obigen Entwicklungen bestätigt worden ist.

Meridiankonvergenz.

Es gilt für diese Koordinaten bzw. diese Projektion die bekannte einfache Formel für die Meridiankonvergenz c

$$c = \sin \varphi_0 \cdot l = \cos \varphi_0 t_0 \cdot l \quad (13)$$

Wenn man darin (12) einsetzt, resultiert

$$\begin{aligned}
 c = & \frac{1}{N_0} t_0 \cdot y + \frac{1}{N_0^2} t_0^2 \cdot x y + \frac{1}{N_0^3} t_0 t_0^2 \cdot x^2 y + \frac{1}{3 N_0^3} t_0 (-t_0^2) \cdot y^3 + \\
 & + \frac{1}{N_0^4} t_0^4 \cdot x^3 y + \frac{1}{N_0^4} (-t_0^4) \cdot x y^3 + \frac{1}{N_0^5} t_0 t_0^4 \cdot x^4 y + \\
 & + \frac{2}{N_0^5} t_0 (-t_0^4) \cdot x^2 y^3 + \frac{1}{5 N_0^5} t_0 t_0^4 \cdot y^5 \quad (14)
 \end{aligned}$$

In (13) bzw. (14) haben wir also sofort die fertigen Formeln zur Berechnung von c aus den geographischen bzw. rechtwinkligen Koordinaten.

Durch die Meridiankonvergenz wird der Zusammenhang zwischen Azimut A und Richtungswinkel T , sowohl auf dem Referenzellipsoid wie auch in der Bildebene ausgedrückt

$$\left. \begin{aligned} A &= T + c \\ T &= A - c \end{aligned} \right\} (15)$$

Vergrößerungsverhältnis (Maßstab).

Das Vergrößerungsverhältnis m hängt ausschließlich von der geographischen Breite und nicht von der geographischen Länge ab. Ich betrachte deswegen die Verhältnisse zunächst im Grundmeridian $l=0$. Nach der schon angeführten Arbeit in ZfV. Bd. LXIV, 1935, Heft 5, F. (27) gilt

$$\begin{aligned} x_M &= N_0 \cos \varphi_0 \cdot \Delta q + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 t_0 (-1) \cdot \Delta q^2 + \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 t_0^2 \cdot \Delta q^3 + \\ &+ \frac{1}{24} N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0 (-t_0^2) \cdot \Delta q^4 + \frac{1}{120} N_0 \cos^5 \varphi_0 t_0^4 \cdot \Delta q^5 + \\ &+ \frac{1}{720} N_0 \cos^6 \varphi_0 t_0 (-t_0^4) \cdot \Delta q^6 \end{aligned} \quad (16)$$

und ebenso nach ZfV. 1934, Heft 20, F. (10) bis (14)

$$\begin{aligned} \Delta q &= \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \cdot \Delta B + \frac{1}{2 N_0^2 \cos \varphi_0} t_0 \cdot \Delta B^2 + \frac{1}{6 N_0^3 \cos \varphi_0} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2) \cdot \Delta B^3 + \\ &+ \frac{1}{24 N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 (5 + 6 t_0^2 + \eta_0^2 - 4 \eta_0^4) \cdot \Delta B^4 + \frac{1}{120 N_0^5 \cos \varphi_0} (5 + 28 t_0^2 + \\ &+ 24 t_0^4 + 6 \eta_0^2 + 8 t_0^2 \eta_0^2) \cdot \Delta B^5 + \frac{1}{720 N_0^6 \cos \varphi_0} t_0 (61 + 180 t_0^2 + 120 t_0^4) \cdot \Delta B^6 \end{aligned} \quad (17)$$

wo Δq den Inkrement der isometrischen Breite und ΔB den Inkrement der Meridianbogenlänge bedeuten.

Die Elimination von Δq aus (16) und (17) gibt

$$\begin{aligned} x_M &= \Delta B + \frac{1}{6 N_0^2} (1 + \eta_0^2) \cdot \Delta B^3 + \frac{1}{24 N_0^3} t_0 (1 - 3 \eta_0^2 - 4 \eta_0^4) \cdot \Delta B^4 + \\ &+ \frac{1}{120 N_0^4} (5 + 3 t_0^2 + 6 \eta_0^2 + 3 t_0^2 \eta_0^2) \cdot \Delta B^5 + \frac{1}{240 N_0^5} t_0 (7 + 4 t_0^2) \cdot \Delta B^6 \end{aligned} \quad (18)$$

woraus wir nach Differentiation sofort erhalten

$$\begin{aligned} m_M &= 1 + \frac{1}{2 N_0^2} (1 + \eta_0^2) \cdot \Delta B^2 + \frac{1}{6 N_0^3} t_0 (1 - 3 \eta_0^2 - 4 \eta_0^4) \cdot \Delta B^3 + \\ &+ \frac{1}{24 N_0^4} (5 + 3 t_0^2 + 6 \eta_0^2 + 3 t_0^2 \eta_0^2) \cdot \Delta B^4 + \frac{1}{40 N_0^5} t_0 (7 + 4 t_0^2) \cdot \Delta B^5 \end{aligned} \quad (19)$$

Die Umkehrung von (18)

$$\begin{aligned} \Delta B &= x_M + \frac{1}{6 N_0^2} (-1 - \eta_0^2) \cdot x_M^3 + \frac{1}{24 N_0^3} t_0 (-1 + 3 \eta_0^2) \cdot x_M^4 + \\ &+ \frac{1}{120 N_0^4} (5 - 3 t_0^2) \cdot x_M^5 \end{aligned} \quad (20)$$

eingetragen in (19) gibt

$$\begin{aligned} m_M &= 1 + \frac{1}{2 N_0^2} (1 + \eta_0^2) \cdot x_M^2 + \frac{1}{6 N_0^3} t_0 (1 - 3 \eta_0^2 - 4 \eta_0^4) \cdot x_M^3 + \\ &+ \frac{1}{24 N_0^4} (1 + 3 t_0^2 - 2 \eta_0^2 + 3 t_0^2 \eta_0^2) \cdot x_M^4 + \frac{1}{20 N_0^5} t_0 (1 + 2 t_0^2) \cdot x_M^5 \end{aligned} \quad (21)$$

Weiter setze ich in (9) $l=0$ und bekomme

$$\begin{aligned} x_M &= N_0 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \cdot \Delta q + \frac{3}{2} N_0 t_0 (\eta_0^2 - 2 \eta_0^4) \cdot \Delta q^2 + \\ &+ \frac{1}{6} N_0 (1 + \eta_0^2 - 3 t_0^2 \eta_0^2 - 3 \eta_0^4 + 21 t_0^2 \eta_0^4) \cdot \Delta q^3 + \frac{1}{24} N_0 t_0 (1 - \eta_0^2) \cdot \Delta q^4 + \\ &+ \frac{1}{120} N_0 (5 + 3 t_0^2) \cdot \Delta q^5 \end{aligned}$$

Jetzt trage ich (22) in (21) ein, wodurch schließlich resultiert

$$m = 1 + \frac{1}{2} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \cdot A \varphi^2 + \frac{1}{6} t_0 (1 + 3 \eta_0^2 - 7 \eta_0^4) \cdot A \varphi^3 + \\ + \frac{1}{24} (5 + 3 t_0^2 - 2 \eta_0^2 - 3 t_0^2 \eta_0^2) \cdot A \varphi^4 + \frac{1}{40} t_0 (7 + 4 t_0^2) \cdot A \varphi^5 \quad (23)$$

wo ich den Index M weggestrichen habe, da die Formel für den ganzen Parallelkreis gilt.

Um das Vergrößerungsverhältnis auch als Reihe der rechtwinkligen Koordinaten zu haben, brauche ich in (23) nur (11) einzutragen, wodurch herauskommt

$$m = 1 + \frac{1}{2 N_0^2} (1 + \eta_0^2) \cdot x^2 + \frac{1}{6 N_0^3} t_0 (1 - 3 \eta_0^2 - 4 \eta_0^4) \cdot x^3 + \\ + \frac{1}{2 N_0^3} t_0 (-1 - \eta_0^2 - \eta_0^4) \cdot x y^2 + \frac{1}{24 N_0^4} (1 + 3 t_0^2 - 2 \eta_0^2 + 3 t_0^2 \eta_0^2) \cdot x^4 + \\ + \frac{1}{4 N_0^4} (-3 t_0^2 + t_0^2 \eta_0^2) \cdot x^2 y^2 + \frac{1}{8 N_0^4} (t_0^2 + t_0^2 \eta_0^2) \cdot y^4 + \frac{1}{20 N_0^5} t_0 (1 + 2 t_0^2) \cdot \\ \cdot x^5 + \frac{1}{12 N_0^5} t_0 (-1 - 12 t_0^2) \cdot x^3 y^2 + \frac{1}{2 N_0^5} t_0 t_0^2 \cdot x y^4 \quad (24)$$

Weiter ersetze ich N_0 durch den mittleren Krümmungsradius R_0 mittels

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{N_0} &= \frac{1}{8 R_0} (8 - 4 \eta_0^2 + 3 \eta_0^4) \\ \frac{1}{N_0^2} &= \frac{1}{R_0^2} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \\ \frac{1}{N_0^3} &= \frac{1}{8 R_0^3} (8 - 12 \eta_0^2 + 15 \eta_0^4) \\ \frac{1}{N_0^4} &= \frac{1}{R_0^4} (1 - 2 \eta_0^2) \end{aligned} \right\} (25)$$

und erhalte

$$m = 1 + \frac{1}{2 R_0^2} \cdot x^2 + \frac{1}{48 R_0^3} t_0 (8 - 36 \eta_0^2 + 19 \eta_0^4) \cdot x^3 + \\ + \frac{1}{16 R_0^3} t_0 (-8 + 4 \eta_0^2 - 11 \eta_0^4) \cdot x y^2 + \frac{1}{24 R_0^4} (1 + 3 t_0^2 - 4 \eta_0^2 - 3 t_0^2 \eta_0^2) \cdot x^4 + \\ + \frac{1}{4 R_0^4} (-3 t_0^2 + 7 t_0^2 \eta_0^2) \cdot x^2 y^2 + \frac{1}{8 R_0^4} (t_0^2 - t_0^2 \eta_0^2) \cdot y^4 + \\ + \frac{1}{20 R_0^5} t_0 (1 + 2 t_0^2) \cdot x^5 + \frac{1}{12 R_0^5} t_0 (-1 - 12 t_0^2) \cdot x^3 y^2 + \frac{1}{2 R_0^5} t_0 t_0^2 \cdot x y^4 \quad (26)$$

Diese letzte Formel habe ich auf eine ganz andere Weise in ZfV. Bd. LXVII, 1938, Heft 18, F. (59) abgeleitet und nachträglich noch die sphärischen Glieder 5. Ordnung hinzugefügt. Es fand sich vollständige Übereinstimmung, wobei alles aufs durchgreifendste kontrolliert worden ist.

Ich nehme noch die Logarithmen von (23) und (26)

$$lg m = \frac{\mu}{2} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \cdot A \varphi^2 + \frac{\mu}{6} t_0 (1 + 3 \eta_0^2 - 7 \eta_0^4) \cdot A \varphi^3 + \\ + \frac{\mu}{24} (2 + 3 t_0^2 - 2 \eta_0^2 - 3 t_0^2 \eta_0^2) \cdot A \varphi^4 + \frac{\mu}{120} t_0 (11 + 12 t_0^2) \cdot A \varphi^5 \quad (27)$$

$$lg m = \frac{\mu}{2 R_0^2} \cdot x^2 + \frac{\mu}{48 R_0^3} t_0 (8 - 36 \eta_0^2 + 19 \eta_0^4) \cdot x^3 + \frac{\mu}{16 R_0^3} t_0 (-8 + 4 \eta_0^2 - \\ - 11 \eta_0^4) \cdot x y^2 + \frac{\mu}{24 R_0^4} (-2 + 3 t_0^2 - 4 \eta_0^2 - 3 t_0^2 \eta_0^2) \cdot x^4 + \frac{\mu}{4 R_0^4} (-3 t_0^2 + \\ + 7 t_0^2 \eta_0^2) \cdot x^2 y^2 + \frac{\mu}{8 R_0^4} (t_0^2 - t_0^2 \eta_0^2) \cdot y^4 + \frac{\mu}{30 R_0^5} t_0 (-1 + 3 t_0^2) \cdot x^5 + \\ + \frac{\mu}{6 R_0^5} t_0 (1 - 6 t_0^2) \cdot x^3 y^2 + \frac{\mu}{2 R_0^5} t_0 t_0^2 \cdot x y^4 \quad (28)$$

Die korrespondierenden Formeln in W. J. — K. M. — R. V. mit geringerer Genauigkeit sind: zu (23) — S. 16, F. (8), zu (26) — S. (26), F. (4), zu (27) — S. 16, F. (9), und zu (28) fehlt.

Geodätische Übertragung der Mecklenburgischen Koordinaten.

Es gehe von einem Punkt (x_1, y_1) unter dem Richtungswinkel $T_1 = T_{1,2}$ eine geodätische Strecke $s = s_{1,2}$ nach einem zweiten Punkt (x_2, y_2) . Es wird nach den Koordinaten x_2, y_2 dieses Punktes und dem inversen Richtungswinkel $T_{2,1} = T_2 \pm \pi$ gefragt, also nach den Koordinatendifferenzen $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ und der sog. Ordinatenkonvergenz $\Delta T = T_2 - T_1$. Die allgemeinen Formeln habe ich in ZfV. Bd. LXVI, 1937, Heft 6, daselbst (36) und (37), gegeben, wo die Koeffizienten für den ersten Punkt gelten

$$\left. \begin{aligned} s &= s_{1,2} \\ T_1 &= T_{1,2} \end{aligned} \right\} (29)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= s \cos T_1 \\ v &= s \sin T_1 \end{aligned} \right\} (30)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + m \cdot u + \frac{1}{2} m \frac{\partial m}{\partial x} \cdot u^2 + m \frac{\partial m}{\partial y} \cdot u v - \frac{1}{2} m \frac{\partial m}{\partial x} \cdot v^2 + \\ &+ \left[\frac{1}{6} m \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{3} m \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{6} m^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} \right] \cdot u^3 + \left[\frac{3}{2} m \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{1}{2} m^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \right] \cdot u^2 v + \\ &+ \left[-\frac{5}{6} m \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} m \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{6} m^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{1}{3} m^2 \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right] \cdot u v^2 + \\ &+ \left[-\frac{1}{2} m \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} - \frac{1}{6} m^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \right] \cdot v^3 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + m \cdot v - \frac{1}{2} m \frac{\partial m}{\partial y} \cdot u^2 + m \frac{\partial m}{\partial x} \cdot u v + \frac{1}{2} m \frac{\partial m}{\partial y} \cdot v^2 + \\ &+ \left[-\frac{1}{2} m \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} - \frac{1}{6} m^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \right] \cdot u^3 + \left[\frac{2}{3} m \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 - \frac{5}{6} m \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{3} m^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{1}{6} m^2 \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right] \cdot u^2 v + \left[\frac{3}{2} m \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{1}{2} m^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \right] \cdot u v^2 + \\ &+ \left[-\frac{1}{3} m \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{6} m \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{6} m^2 \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right] \cdot v^3 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 - \frac{\partial m}{\partial y} \cdot u + \frac{\partial m}{\partial x} \cdot v + \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} - \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \right] \cdot u^2 + \\ &+ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right] \cdot u v + \\ &+ \left[\frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \right] \cdot v^2 \end{aligned} \quad (33)$$

$$T_{2,1} = T_2 \pm \pi \quad (34)$$

Um diese Formeln in unserem konkreten Fall anzuwenden, bilde ich aus (26)

$$\left. \begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{6 R_0^3} t_0 \cdot x^2 + \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x^3 - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x y^2 \\ \frac{1}{m} &= 1 - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x^2 - \frac{1}{6 R_0^3} t_0 \cdot x^3 + \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x y^2 \end{aligned} \right\} (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \lg m &= \frac{\mu}{2 R_0^2} \cdot x^2 + \frac{\mu}{6 R_0^3} t_0 \cdot x^3 - \frac{\mu}{2 R_0^3} t_0 \cdot x y^2 \\ \frac{\partial m}{\partial x} &= \frac{1}{R_0^2} \cdot x + \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x^2 - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot y^2 \\ \frac{\partial m}{\partial y} &= -\frac{1}{R_0^3} t_0 \cdot x y \\ \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 &= 0, \quad \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 = 0, \\ \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} &= \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_0^3} t_0 \cdot x \\ \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{R_0^3} t_0 \cdot y \\ \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} &= -\frac{1}{R_0^3} t_0 \cdot x \end{aligned} \right\} (36)$$

(35) und (36) genommen für den ersten Punkt und eingetragen in (31), (32) und (33) ergeben schließlich

$$\begin{aligned} x_2 = & x_1 + \left(1 + \frac{1}{2 R_0^2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{6 R_0^3} t_0 \cdot x_1^3 - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x_1 y_1^2\right) \cdot u + \\ & + \left(\frac{1}{2 R_0^2} \cdot x_1 + \frac{1}{4 R_0^3} t_0 \cdot x_1^2 - \frac{1}{4 R_0^3} t_0 \cdot y_1^2\right) \cdot u^2 - \frac{1}{R_0^3} t_0 \cdot x_1 y_1 \cdot u v + \\ & + \left(-\frac{1}{2 R_0^2} \cdot x_1 - \frac{1}{4 R_0^3} t_0 \cdot x_1^2 + \frac{1}{4 R_0^3} t_0 \cdot y_1^2\right) \cdot v^2 + \left(\frac{1}{6 R_0^2} + \frac{1}{6 R_0^3} t_0 \cdot x_1\right) \cdot u^3 - \\ & - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot y_1 \cdot u^2 v + \left(-\frac{1}{6 R_0^2} - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x_1\right) \cdot u v^2 + \frac{1}{6 R_0^3} t_0 \cdot y_1 \cdot v^3 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} y_2 = & y_1 + \left(1 + \frac{1}{2 R_0^2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{6 R_0^3} t_0 \cdot x_1^3 - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x_1 y_1^2\right) \cdot v + \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x_1 y_1 \cdot u^2 + \\ & + \left(\frac{1}{R_0^2} \cdot x_1 + \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x_1^2 - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot y_1^2\right) \cdot u v - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x_1 y_1 \cdot v^2 + \frac{1}{6 R_0^3} t_0 \cdot y_1 \cdot u^3 + \\ & + \left(\frac{1}{3 R_0^2} + \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x_1\right) \cdot u^2 v - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot y_1 \cdot u v^2 - \frac{1}{6 R_0^3} t_0 \cdot x_1 \cdot v^3 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} T_2 = & T_1 + \frac{1}{R_0^3} t_0 \cdot x_1 y_1 \cdot u + \left(\frac{1}{R_0^2} \cdot x_1 + \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot x_1^2 - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot y_1^2\right) \cdot v + \\ & + \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot y_1 \cdot u^2 + \left(\frac{1}{2 R_0^2} + \frac{1}{R_0^3} t_0 \cdot x_1\right) \cdot u v - \frac{1}{2 R_0^3} t_0 \cdot y_1 \cdot v^2 \end{aligned} \quad (39)$$

Diese Formeln kommen zum ersten Mal in die Literatur.

Inverse Aufgabe zur geodätischen Übertragung.

Es seien gegeben die zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) . Es wird nach der Länge der Verbindungsstrecke $s = s_{1,2}$ und den beiden Richtungswinkeln $T_{1,2} = T_1$ und $T_{2,1} = T_2 \pm \pi$ gefragt. Aus meiner Arbeit in ZfV. 1941, Heft 14, S. 282, Form. (12) bis (14) habe ich

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta y &= y_2 - y_1 \end{aligned} \right\} (40)$$

$$\left. \begin{aligned} x_m &= \frac{1}{2} (x_1 + x_2) \\ y_m &= \frac{1}{2} (y_1 + y_2) \end{aligned} \right\} (41)$$

$$\begin{aligned} s \sin T_m = & \frac{1}{m} \cdot \Delta y - \frac{1}{12 m^2} \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \cdot \Delta x^3 + \left[\frac{1}{12 m^3} \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{24 m^3} \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)^2 + \right. \\ & + \left. \frac{1}{24 m^2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{1}{12 m^2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right] \cdot \Delta x^2 \Delta y + \frac{1}{4 m^3} \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} \cdot \Delta x \Delta y^2 + \\ & + \left[-\frac{1}{24 m^3} \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{12 m^3} \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{24 m^2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right] \cdot \Delta y^3 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} s \cos T_m = & \frac{1}{m} \cdot \Delta x + \left[\frac{1}{12 m^3} \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{24 m^3} \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{24 m^2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} \right] \cdot \Delta x^3 + \\ & + \frac{1}{4 m^3} \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} \cdot \Delta x^2 \Delta y + \left[-\frac{1}{24 m^3} \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{12 m^3} \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)^2 - \right. \\ & - \left. \frac{1}{12 m^2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{1}{24 m^2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right] \cdot \Delta x \Delta y^2 - \frac{1}{12 m^2} \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \cdot \Delta y^3 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\Delta T = -\frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial y} \cdot \Delta x + \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial x} \cdot \Delta y \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{1,2} &= T_1 = T_m - \frac{1}{2} \Delta T \\ T_{2,1} &= T_2 \pm \pi = T_m + \frac{1}{2} \Delta T \pm \pi \end{aligned} \right\} (45)$$

wo die Koeffizienten für den Mittelpunkt (x_m, y_m) gelten.

Wenn ich darin (35) und (36) einsetze, so bekomme ich schließlich

$$s \sin T_m = \left(1 - \frac{1}{2R_0^2} \cdot x_m^2 - \frac{1}{6R_0^3} t_0 \cdot x_m^3 + \frac{1}{2R_0^3} t_0 \cdot x_m y_m^2\right) \cdot \Delta y + \\ + \frac{1}{12R_0^3} t_0 \cdot y_m \cdot \Delta x^3 + \left(\frac{1}{24R_0^2} + \frac{1}{8R_0^3} t_0 \cdot x_m\right) \cdot \Delta x^2 \Delta y + \frac{1}{24R_0^3} t_0 \cdot x_m \cdot \Delta y^3 \quad (46)$$

$$s \cos T_m = \left(1 - \frac{1}{2R_0^2} \cdot x_m^2 - \frac{1}{6R_0^3} t_0 \cdot x_m^3 + \frac{1}{2R_0^3} t_0 \cdot x_m y_m^2\right) \cdot \Delta x + \\ + \left(-\frac{1}{24R_0^2} - \frac{1}{24R_0^3} t_0 \cdot x_m\right) \cdot \Delta x^3 + \left(-\frac{1}{12R_0^3} - \frac{1}{8R_0^3} t_0 \cdot x_m\right) \cdot \Delta x \Delta y^2 + \\ + \frac{1}{12R_0^3} t_0 \cdot y_m \cdot \Delta y^3 \quad (47)$$

$$\Delta T = \frac{1}{R_0^3} t_0 \cdot x_m y_m \cdot \Delta x + \left(\frac{1}{R_0^2} \cdot x_m + \frac{1}{2R_0^3} t_0 \cdot x_m^2 - \frac{1}{2R_0^3} t_0 \cdot y_m^2\right) \cdot \Delta y \quad (48)$$

Auch diese Formeln kommen zum ersten Mal in die Literatur.

Richtungs- und Entfernungsreduktion.

Alle Aufgaben bis jetzt sind auf dem Rotationsellipsoid behandelt worden, im besonderen die Aufgaben der geodätischen Übertragung und der inversen Aufgabe dazu. Nun wollen wir die beiden letzteren Aufgaben in der Bildebene mittels der sog. Richtungs- und Entfernungsreduktion lösen. Wir verbinden nämlich die zwei Bildpunkte durch die Sehne von der Länge $d = d_{1,2}$ und den Richtungswinkeln $t_{1,2}$ und $t_{2,1} = t_{1,2} \pm \pi$. Unter den Richtungsreduktionen werden die kleinen Winkel $\psi_{1,2}$ und $\psi_{2,1}$ zwischen dem Bild der geodätischen Strecke und der Sehne im Sinne

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1,2} &= T_{1,2} - t_{1,2} \\ \psi_{2,1} &= T_{2,1} - t_{2,1} \end{aligned} \right\} (49)$$

und unter der Entfernungsreduktion die Differenz

$$(lg d - lg s) = lg d_{1,2} - lg s_{1,2} \quad (50)$$

verstanden.

a) Geodätische Übertragung. Gegeben $x_1, y_1, T_{1,2}, s_{1,2}$; gesucht $x_2, y_2, T_{2,1}$.

Ich erwähne vorgreifend, daß man zur Berechnung der Reduktionen die genäherten Werte von x_2 und y_2 braucht. Dann hat man

$$\left. \begin{aligned} t_{1,2} &= T_{1,2} - \psi_{1,2} \\ lg d_{1,2} &= lg s_{1,2} + (lg d_{1,2} - lg s_{1,2}) \end{aligned} \right\} (51)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + d_{1,2} \cos t_{1,2} \\ y_2 &= y_1 + d_{1,2} \sin t_{1,2} \end{aligned} \right\} (52)$$

$$\left. \begin{aligned} t_{2,1} &= t_{1,2} \pm \pi \\ T_{2,1} &= t_{2,1} + \psi_{2,1} \end{aligned} \right\} (53)$$

b) Inverse Aufgabe. Gegeben x_1, y_1, x_2, y_2 ; gesucht $s_{1,2}, T_{1,2}$ und $T_{2,1}$.

Hier kann man gleich die Reduktionen berechnen. Darauf berechnet man aus

$$\left. \begin{aligned} d_{1,2} \sin t_{1,2} &= y_2 - y_1 \\ d_{1,2} \cos t_{1,2} &= x_2 - x_1 \end{aligned} \right\} (54)$$

$$\left. \begin{aligned} lg d_{1,2}, t_{1,2}, t_{2,1} &= t_{1,2} + \pi \text{ und weiter} \\ lg s_{1,2} &= lg d_{1,2} - (lg d_{1,2} - lg s_{1,2}) \\ T_{1,2} &= t_{1,2} + \psi_{1,2} \\ T_{2,1} &= t_{2,1} + \psi_{2,1} \end{aligned} \right\} (55)$$

Für die Richtungs- und Entfernungsreduktion habe ich aus meiner Arbeit in ZfV. 1940, Heft 4, Form. (40), (41) und (46), wo alle Koeffizienten für den Mittelpunkt $x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ zu nehmen sind,

$$\psi_{1.2} = \frac{1}{2m} \frac{\partial m}{\partial y} \cdot \Delta x - \frac{1}{2m} \frac{\partial m}{\partial x} \cdot \Delta y - \frac{1}{12m} \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \cdot \Delta x^2 + \left[\frac{1}{12m} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{1}{12m^2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right] \cdot \Delta x \Delta y + \left[\frac{1}{12m} \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \right] \cdot \Delta y^2 \quad (56)$$

$$\psi_{2.1} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial m}{\partial y} \cdot \Delta x + \frac{1}{2m} \frac{\partial m}{\partial x} \cdot \Delta y - \frac{1}{12m} \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \cdot \Delta x^2 + \left[\frac{1}{12m} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{1}{12m^2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right] \cdot \Delta x \Delta y + \frac{1}{12m} \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \cdot \Delta y^2 \quad (57)$$

$$\begin{aligned} l y d - l g s &= l y m + \mu \left[\frac{1}{12m^2} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{24m^2} \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{24m} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} \right] \cdot \Delta x^2 + \\ &+ \mu \left[-\frac{1}{4m^2} \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{1}{12m} \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \right] \cdot \Delta x \Delta y + \\ &+ \mu \left[\frac{1}{24m^2} \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{12m^2} \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{24m} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right] \cdot \Delta y^2 \end{aligned} \quad (58)$$

Darin setze ich (35) und (36), womit ich schließlich bekomme

$$\begin{aligned} \psi_{1.2} &= -\frac{1}{2R_0^3} t_0 \cdot x_m y_m \cdot \Delta x + \left(-\frac{1}{2R_0^2} \cdot x_m - \frac{1}{4R_0^3} t_0 \cdot x_m^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4R_0^3} t_0 \cdot y_m^2 \right) \Delta y + \frac{1}{12R_0^3} t_0 \cdot y_m \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{1}{12R_0^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{6R_0^3} t_0 \cdot x_m \right) \cdot \Delta x \Delta y - \frac{1}{12R_0^3} t_0 \cdot y_m \cdot \Delta y^2 \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2.1} &= +\frac{1}{2R_0^3} t_0 \cdot x_m y_m \cdot \Delta x + \left(\frac{1}{2R_0^2} \cdot x_m + \frac{1}{4R_0^3} t_0 \cdot x_m^2 - \right. \\ &- \left. \frac{1}{4R_0^3} t_0 \cdot y_m^2 \right) \cdot \Delta y + \frac{1}{12R_0^3} t_0 \cdot y_m \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{1}{12R_0^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{6R_0^3} t_0 \cdot x_m \right) \cdot \Delta x \Delta y - \frac{1}{12R_0^3} t_0 \cdot y_m \cdot \Delta y^2 \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} l y d - l g s &= \frac{\mu}{2R_0^2} \cdot x_m^2 + \frac{\mu}{6R_0^3} t_0 \cdot x_m^3 - \frac{\mu}{2R_0^3} t_0 \cdot x_m y_m^2 + \\ &+ \left(\frac{\mu}{24R_0^2} + \frac{\mu}{24R_0^3} t_0 \cdot x_m \right) \cdot \Delta x^2 - \frac{\mu}{12R_0^3} t_0 \cdot y_m \cdot \Delta x \Delta y - \frac{\mu}{24R_0^3} t_0 \cdot x_m \cdot \Delta y^2 \end{aligned} \quad (61)$$

Den Formeln (59) und (60) entspricht in W. J. — K. M. — R. V., S. 34, Form. (7), welche geringere Genauigkeit hat.

Damit ist eine vollständige Theorie der Mecklenburgischen Koordinaten (der normalen konformen Kegelp Projektion) gegeben worden.

Über einige Verfahren zur Lösung von Normalgleichungen.

Von Bertil Hallert, Stockholm.

Mit Beschränkung auf drei Unbekannte x , y und z ist die Fehlergleichung in allgemeiner Form

$$v = ax + by + cz - l,$$

woraus die Normalgleichungen in bekannter Weise gebildet werden. Diese sind:

$$\begin{aligned} [a a] x + [a b] y + [a c] z - [a l] &= 0 \\ [a b] x + [b b] y + [b c] z - [b l] &= 0 \\ [a c] x + [b c] y + [c c] z - [c l] &= 0 \end{aligned} \quad \dots (1)$$

Durch Hinzufügung einer vierten Gleichung wird die Möglichkeit gegeben, $[v v]$ in Zusammenhang mit der gewöhnlichen Elimination zu berechnen. Diese Gleichung lautet:

$$-[a l] x - [b l] y - [c l] z + [l l] = [v v] \quad \dots (1a)$$

Mit gewöhnlichen Abkürzungen wird das Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{aligned} [a a] x + [a b] y + [a c] z - [a l] &= 0 \\ [b b] y + [b c] z - [b l] &= 0 \\ [c c] z - [c l] &= 0 \\ + [l l] &= [v v] \end{aligned} \quad \dots (2)$$

Durch Elimination erhält man mit Gauß' Bezeichnungen die Endgleichungen:

$$\begin{aligned} [a a] x + [a b] y + [a c] z - [a l] &= 0 \\ [b b \cdot 1] y + [b c \cdot 1] z - [b l \cdot 1] &= 0 \\ [c c \cdot 2] z - [c l \cdot 2] &= 0 \\ [l l \cdot 3] &= [v v] \end{aligned} \quad \dots (3)$$

wo $[b b \cdot 1] = [b b] - \frac{[ab]}{[aa]} [a b]$; $[b c \cdot 1] = [b c] - \frac{[ab]}{[aa]} [a c]$; $- [b l \cdot 1] = - [b l] + \frac{[ab]}{[aa]} [a l]$

$$[c c \cdot 2] = [c c] - \frac{[ac]}{[aa]} [a c] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [b c \cdot 1]; - [c l \cdot 2] = - [c l] + \frac{[ac]}{[aa]} [a l] + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [b l \cdot 1]$$

$$[l l \cdot 3] = [l l] - \frac{[al]}{[aa]} [a l] - \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [b l \cdot 1] - \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [c l \cdot 2]$$

Aus den Endgleichungen können dann die Unbekannten bestimmt werden. Durch Austausch der Absolutglieder in den Normalgleichungen gegen 0 oder 1 können die Gewichtskoeffizienten berechnet werden. Da diese Auflösungsverfahren der Normalgleichungen für die Rechenmaschine nicht besonders geeignet ist, wurde folgendes vorgeschlagen¹⁾:

Die Endgleichungen von Gauß werden, jede Gleichung für sich, durch $\sqrt{1}$ Koeffizient dividiert.

Mit symbolischen Bezeichnungen sind die Endgleichungen nach Cholesky:

$$\left. \begin{aligned} (a a) x + (a b) y + (a c) z - (a l) &= 0 \\ (b b) y + (b c) z - (b l) &= 0 \\ (c c) z - (c l) &= 0 \\ [l l \cdot 3] &= [v v] \end{aligned} \right\} \quad \dots (4)$$

Die Symbole () bezeichnen also:

$$(a a) = \sqrt{[aa]} \quad (b b) = \sqrt{[bb \cdot 1]} = \sqrt{[bb] - \frac{[ab]}{[aa]} [ab]} = \sqrt{[bb] - (ab)(ab)}$$

$$(a b) = \sqrt{\frac{[ab]}{[aa]}} = \frac{[ab]}{(aa)} \quad (b c) = \frac{[bc \cdot 1]}{(bb)} = \frac{1}{(bb)} \left\{ [bc] - \frac{[ab]}{[aa]} [ac] \right\} = \frac{1}{(bb)} \left\{ [bc] - (ab)(ac) \right\}$$

$$(a c) = \frac{[ac]}{(aa)} \quad \text{In derselben Weise wird gefunden}^2):$$

$$(a l) = \frac{[al]}{(aa)} \quad (b l) = \frac{1}{(bb)} \left\{ [bl] - (ab)(al) \right\}$$

$$(c c) = \sqrt{[cc] - (ac)(ac) - (bc)(bc)}$$

$$(c l) = \frac{1}{(cc)} \left\{ [cl] - (ac)(al) - (bc)(bl) \right\}$$

$$[l l \cdot 3] = [l l] - (al)(al) - (bl)(bl) - (cl)(cl)$$

¹⁾ Die folgenden Endgleichungen wurden ursprünglich von einem im Jahre 1918 gefallenen französischen Offizier Cholesky gefunden. Ein Bericht darüber wurde von Benoit in Bulletin géodésique 1924, S. 67-77 gegeben; Note sur une méthode de résolution des équations normales provenant de l'application de la méthode des moindres carrés à un système d'équations linéaires en nombre inférieur à celui des inconnues. — Die Methode war indessen nur für Korrelatenausgleichung vorgesehen und überdies in einer recht umständlichen Weise dargestellt. Von Prof. Rubin in Stockholm wurde das Verfahren weiter entwickelt und wesentlich verbessert. Eine Veröffentlichung findet man in Svensk Landmäteritidskrift 1926, Heft 1, S. 3-9.

²⁾ Allgemein können die Koeffizienten der Endgleichungen in folgender Weise geschrieben werden: Quadratische oder Diagonalkoeffizienten

$$(nn) = \sqrt{[nn] - (an)(an) - (bn)(bn) - \dots - (mn)(mn)}$$

Nichtquadratische Koeffizienten (außer der Diagonale)

$$(nq) = \left\{ [nq] - (an)(aq) - (bn)(bq) - \dots - (mn)(mq) \right\} : (nn)$$

Sämtliche Ausdrücke lassen sich bequem mit der Rechenmaschine berechnen. Für die Rechnung kann folgendes Schema benutzt werden:

x	y	z	$-l$	
$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$-[al]$	Normalgleichungen
	$[bb]$	$[bc]$	$-[bl]$	
		$[cc]$	$-[cl]$	
			$[ll]$	Komplettierung
(aa)	(ab)	(ac)	$-(al)$	Endgleichungen
	(bb)	(bc)	$-(bl)$	
		(cc)	$-(cl)$	
			$[l \cdot \vartheta]$	Reduz. Komplettierung = $[v \nu]$

Aus den Endgleichungen können die Unbekannten berechnet werden:

$$z = \frac{(cl)}{(cc)}$$

$$y = \frac{(bl) - (bc)z}{(bb)}$$

$$x = \frac{(al) - (ac)z - (ab)y}{(aa)}$$

Nach Austausch der Absolutglieder $-l$ in den Normalgleichungen gegen

$$\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}$$

und $0 \ 0 \ -1$ können die Gewichtskoeffizienten in gleicher Weise berechnet werden.

Das Gleichungssystem zur Bestimmung von z. B. $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ und $[\alpha\gamma]$ ist:

$$\begin{array}{l} [a a] \cdot [\alpha\alpha] + [a b] [\alpha\beta] + [a c] [\alpha\gamma] - 1 = 0 \\ [a b] \cdot [\alpha\alpha] + [b b] [\alpha\beta] + [b c] [\alpha\gamma] - 0 = 0 \\ [a c] \cdot [\alpha\alpha] + [b c] [\alpha\beta] + [c c] [\alpha\gamma] - 0 = 0 \end{array} \quad \dots (5)$$

Um die quadratischen Gewichtskoeffizienten $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$ und $[\gamma\gamma]$ zu bekommen, müssen bei der Auflösung von (5) und entsprechenden Systemen auch die nichtquadratischen Koeffizienten $[\alpha\beta]$ usw. berechnet werden. Da man gewöhnlich nur von den quadratischen Gewichtskoeffizienten Gebrauch macht, wurde zur Vereinfachung der Rechenarbeit folgendes vorgeschlagen:

Zum Gleichungssystem (5) wurde noch eine Gleichung gefügt, nämlich die Identität

$$-1 [\alpha\alpha] - 0 [\alpha\beta] - 0 [\alpha\gamma] + 0 = -[\alpha\alpha] \quad \dots (5a)$$

In abgekürzter Schreibweise wird somit das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} [a a] [\alpha\alpha] + [a b] \cdot [\alpha\beta] + [a c] \cdot [\alpha\gamma] - 1 = 0 \\ [b b] \cdot [\alpha\beta] + [b c] \cdot [\alpha\gamma] - 0 = 0 \\ [c c] \cdot [\alpha\gamma] - 0 = 0 \\ + 0 = -[\alpha\alpha] \end{array} \quad \dots (6)$$

(6) ist offenbar mit (2) analog, d. h. wenn die $[\alpha\alpha]$ usw. eliminiert werden, ist nach der Elimination $[0 \cdot 5] = -[\alpha\alpha]$. $[\alpha\alpha]$ wird also gefunden wie oben $[v \nu]$, nur mit negativem Vorzeichen. In derselben Weise können übrige quadratische Gewichtskoeffizienten berechnet werden, ohne daß man die Nichtquadratischen berechnen muß.

Gemeinsame Berechnung der Unbekannten und ihrer Gewichtskoeffizienten.

Das Gleichungssystem (1) wird mit $i = \sqrt{-1}$ multipliziert und dann zum System (5) addiert.

Wenn

$$\begin{array}{l} A = x \cdot i + [\alpha\alpha] \\ B = y \cdot i + [\alpha\beta] \\ C = z \cdot i + [\alpha\gamma] \end{array}$$

bekommt man

$$\begin{aligned} [a a] \cdot A + [a b] \cdot B + [a c] \cdot C - [a l] \cdot i - 1 &= 0 \\ [a b] \cdot A + [b b] \cdot B + [b c] \cdot C - [b l] \cdot i - 0 &= 0 \\ [a c] \cdot A + [b c] \cdot B + [c c] \cdot C - [c l] \cdot i - 0 &= 0 \end{aligned} \quad \dots (7a)$$

Die sog. unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen ist:

$$\begin{aligned} [a l] \cdot [\alpha \alpha] + [b l] \cdot [\alpha \beta] + [c l] \cdot [\alpha \gamma] &= x \\ [a l] \cdot [\alpha \beta] + [b l] \cdot [\beta \beta] + [c l] \cdot [\beta \gamma] &= y \\ [a l] \cdot [\alpha \gamma] + [b l] \cdot [\beta \gamma] + [c l] \cdot [\gamma \gamma] &= z \end{aligned} \quad \dots (8)$$

Wenn man die Gleichung (1a) mit i multipliziert und zu der ersten Gleichung in (8) addiert, erhält man mit denselben Bezeichnungen wie oben:

$$-[a l] \cdot A - [b l] \cdot B - [c l] \cdot C + [l l] \cdot i + 0 = [v v] \cdot i - x \quad \dots (7b)$$

Diese Gleichung und eine Identität werden zu (7a) gefügt:

$$\begin{aligned} [a a] \cdot A + [a b] \cdot B + [a c] \cdot C - [a l] \cdot i - 1 &= 0 \\ [a b] \cdot A + [b b] \cdot B + [b c] \cdot C - [b l] \cdot i - 0 &= 0 \\ [a c] \cdot A + [b c] \cdot B + [c c] \cdot C - [c l] \cdot i - 0 &= 0 \\ -[a l] \cdot A - [b l] \cdot B - [c l] \cdot C + [l l] \cdot i + 0 &= [v v] \cdot i - x \\ -1 \cdot A - 0 \cdot B - 0 \cdot C + 0 \cdot i + 0 &= -x \cdot i - [a a] \end{aligned} \quad \dots (7)$$

In diesem System werden A , B und C in irgendwelcher Weise eliminiert. Die Rechnung soll dabei so durchgeführt werden, daß die rechte Seite der beiden letzten Gleichungen unverändert wird, d. h. die beiden letzten Gleichungen dürfen nicht verlängert oder kombiniert werden.³⁾

Nach der Elimination stehen an Stelle $\begin{matrix} + [l l] \cdot i + 0 \\ + 0 \cdot i + 0 \end{matrix}$ die Zahlwerte $\begin{matrix} R_i + S \\ S_i + T \end{matrix}$, welche mit $[v v] \cdot i - x$ identifiziert werden. Daraus folgt sofort $R = [v v]$, $-S = x$ und $-T = [a a]$.

In derselben Weise können die beiden Gleichungssysteme gebildet werden, die zur Bestimmung von y und $[\beta \beta]$ bzw. z und $[\gamma \gamma]$ dienen. Alle beide sind vom Typ (7) und enthalten dieselben Koeffizienten. Nur wird die Ziffer 1 der letzten Kolonne und der niedrigsten Zeile in verschiedene Stellen eingesetzt.

Alle drei Gleichungen werden übersichtlich in ein Schema zusammengestellt, wo auch die Summenproben mitgenommen werden.

x	y	z	$-l$	α	β	γ	$s-1$	Σ
[aa]	[ab]	[ac]	-[al]	-1	0	0	[as] - 1	[aa] + ... - 1
	[bb]	[bc]	-[bl]	0	-1	0	[bs] - 1	[ab] + ... - 1
		[cc]	-[cl]	0	0	-1	[cs] - 1	[ac] + ... - 1
			[ll]	0	0	0	[ls]	-[al] + ... + [ll]
				0	0	0		

Die Auflösung der Gleichungssysteme wird zweckmäßig mit der Methode nach Rubin-Cholesky ausgeführt. In folgendem Schema nach Ing. Bergman wird das Verfahren vollständig angegeben.

Eine Nachprüfung der Resultate des Auflösungsverfahrens kann einfach in folgender Weise ausgeführt werden.

Wie oben gezeigt wurde, können die Unbekannten unmittelbar gefunden werden als

$$\begin{aligned} z &= \frac{(cl)}{(cc)} \\ y &= \frac{(bl) - (bc)z}{(bb)} = \frac{(bl)}{(bb)} - \frac{(bc)(cl)}{(cc)(bb)} \\ x &= \frac{(al) - (ac)z - (ab)y}{(aa)} = \frac{(al)}{(aa)} - \frac{(ac)(cl)}{(aa)(cc)} - \frac{(ab)(bl)}{(aa)(bb)} + \frac{(ab)(bc)(cl)}{(aa)(bb)(cc)} \end{aligned}$$

³⁾ Bei der Verwendung des Auflösungsverfahrens nach Rubin-Cholesky werden die Koeffizienten in den Endgleichungen nach den oben angegebenen Formeln berechnet. Nur bei der Berechnung der Resultate R , T und S findet eine Änderung statt, indem der Wurzelauszug bzw. die Division nicht ausgeführt wird. Dies dürfte deutlich aus der unten angegebenen Tabelle hervorgehen.

Lösung von Normalgleichungen

x	y	z	$-l$	α
[aa] 1	[ab] 2	[ac] 3	- [al] 4	- l 5
	[bb] 10	[bc] 11	- [bl] 12	0 13
		[cc] 18	- [cl] 19	0 20
			[ll] 25	0 26
				0 31
$\sqrt{1}$ 34	$\frac{2}{34}$ 35	$\frac{3}{34}$ 36	$\frac{4}{34}$ 37	$\frac{5}{34}$ 38
	$\sqrt{10-35 \cdot 35}$ 43	$\frac{11-36 \cdot 35}{43}$ 44	$\frac{12-37 \cdot 35}{43}$ 45	$\frac{13-38 \cdot 35}{43}$ 46
		$\sqrt{18-36 \cdot 36-44 \cdot 44}$ 51	$\frac{19-37 \cdot 36-45 \cdot 44}{51}$ 52	$\frac{20-38 \cdot 36-46 \cdot 44}{51}$ 53
			25-37.37-45.45-52.52; 58	26-38.37-46.45-53.52; 59
				31-38.38-46.46-53.53; 64

$[vv] = 58 = 25 - 4 \cdot 59 - 12 \cdot 60 - 19 \cdot 61;$

Gemäß dem Schema wird z berechnet als $-65 = 28 - 42 \cdot 59 - 50 \cdot 47 - 57 \cdot 54$, was gibt $z = 57 \cdot 54$ und nach Einführung von den Symbolen $z = \frac{(l)}{(cc)}$.

In genau derselben Weise können die übrigen Unbekannten geprüft werden. Durch entsprechende Auflöser der Gewichtsgleichungen und Vergleich mit den Ergebnissen aus dem Schema kann man auch die Gewichtskoeffizienten nachprüfen. Dabei ergibt sich, daß man die nichtquadratischen Gewichtskoeffizienten einfach aus dem Auflösungsschema berechnen

x	y	z	u	$-l$
+ 8,825	+ 4,142	- 0,128	- 2,700	- 0,274
	+ 9,992	+ 0,918	- 5,197	- 2,327
		+ 3,362	- 0,509	- 0,020
			+ 7,526	+ 2,685
				+ 3,689
+ 2,971	+ 1,394	- 0,043	- 0,909	- 0,092
	+ 2,837	+ 0,345	- 1,385	- 0,775
		+ 1,800	- 0,039	+ 0,135
			+ 2,186	+ 0,701
				+ 2,570

4) Dieses wurde zuerst von Staatsgeodät L. Asplund bewiesen.

nach Rubin-Cholesky.

β	γ	$s-l$	Σ
0 6	0 7	[as]-l 8	1+2+3+4+5+6+7; 9
- 1 14	0 15	[bs]-l 16	2+10+11+12+13+14+15; 17
0 21	- 1 22	[cs]-l 23	3+11+18+19+20+21+22; 24
0 27	0 28	[ls] 29	4+12+19+25+26+27+28; 30
0 32	0 33		
$\frac{6}{34}$ 39	$\frac{7}{34}$ 40	$\frac{8}{34}$ 41	34+35+36+37+38+39+40; 42
$\frac{14-39 \cdot 35}{43}$ 47	$\frac{15-40 \cdot 35}{43}$ 48	$\frac{16-41 \cdot 35}{43}$ 49	43+44+45+46+47+48; 50
$\frac{21-39 \cdot 36-47 \cdot 44}{51}$ 54	$\frac{22-40 \cdot 36-48 \cdot 44}{51}$ 55	$\frac{23-41 \cdot 36-49 \cdot 44}{51}$ 56	51+52+53+54+55 57
27-39.37-47.45-54.52; 60	28-40.37-48.45-55.52; 61	29-41.37-49.45-56.52; 62	58+59+60+61 63
32-39.39-47.47-54.54; 65	33-40.40-48.48-55.55; 66		

$x = -59 \quad y = -60 \quad z = -61$
 $[\alpha\alpha] = -64 \quad [\beta\beta] = -65 \quad [\gamma\gamma] = -66$

kann. 4) $[\alpha\beta]$ wird also berechnet als die Produktsumme der α - und β -Kolumnen in den Endgleichungen, d. h. also $40 \cdot 41 + 48 \cdot 49 + 55 \cdot 56$, und die $[\alpha\gamma]$ bzw. $[\beta\gamma]$ in entsprechender Weise.

Das Verfahren ist natürlich nicht auf nur drei Unbekannte beschränkt, sondern kann auf beliebig viele Unbekannte ausgedehnt werden.

Das folgende numerische Beispiel enthält, wie ersichtlich, vier Unbekannte und behandelt die Ausgleichung einer Doppelpunkteinschaltung.

α	β	γ	δ	$s-1$	Σ
- 1	0	0	0	+ 8,865	+ 8,865
0	- 1	0	0	+ 6,530	+ 6,528
0	0	- 1	0	+ 2,624	+ 2,623
0	0	0	- 1	+ 0,803	+ 0,805
0	0	0	0	+ 3,751	+ 3,753
- 0,337	0	0	0	+ 2,984	+ 2,984
+ 0,166	- 0,352	0	0	+ 0,835	+ 0,836
- 0,040	- 0,067	- 0,556	0	+ 1,368	+ 1,367
- 0,036	- 0,222	- 0,010	- 0,457	+ 2,163	+ 2,162
+ 0,128	- 0,126	+ 0,082	+ 0,320	+ 2,972	+ 2,974
- 0,144	- 0,178	- 0,309	- 0,209		

Als Resultat der Rechnung wird erhalten:

$$\begin{array}{ll} [\rho v] = 2,570 & \text{Kontrolle: } [\rho v] = 2,573 \\ x = -0,128 & [a\sigma] = +0,144 \\ y = +0,126 & [\beta\beta] = +0,178 \\ z = -0,082 & [\gamma\gamma] = +0,309 \\ u = -0,320 & [\delta\delta] = +0,209 \end{array}$$

Die Nullen der zweiten Komplettierungsgleichung sind nicht mitgenommen, da sie für die Rechnung ohne praktische Bedeutung sind.

Schlüßbemerkungen.

Das oben angegebene Verfahren dürfte in Einfachheit und Überschaulichkeit nicht übertroffen werden können. Bei vielen Unbekannten treten die Vorteile besonders hervor.

Mit wenigen Änderungen läßt sich das Verfahren auch bei Korrelatenausgleichung verwenden. Man erhält das folgende Rechenschema:

k_1	k_2	k_3	w	α	β	γ	$s - w - 1$	Σ
[aa]	[ab]	[ac]	$-w_1$	-1	0	0	$[a\sigma] - w_1 - 1$	-
	[bb]	[bc]	$-w_2$	0	-1	0	$[b\sigma] - w_2 - 1$	-
	[cc]	$-w_3$	0	0	-1	$[c\sigma] - w_3 - 1$	-	
			0	0	0	[w]	-	
(aa)	(ab)	(ac)	\swarrow	$\frac{1}{(aa)}$	0	0	\swarrow	-
	(bb)	(bc)	\swarrow	\swarrow	$-\frac{1}{(bb)}$	0	\swarrow	-
		(cc)	\swarrow	\swarrow	\swarrow	$-\frac{1}{(cc)}$	\swarrow	-
			$-[\rho v]$	$-k_1$	$-k_2$	$-k_3$	\swarrow	-

Anstatt der -1 sind die Widersprüche $-w$ der Bedingungsgleichungen eingesetzt und die Normalgleichungen mit 0 komplettiert. Die Berechnung von $[\rho v]$ und den Korrelaten geschieht in genau derselben Weise wie oben.

Folgearbeiten bei der Einschaltung des Aufnahmenetzes in vorhandene Dreiecks- und Polygonnetze.

Von Regierungsvermessungsrat Schneider, Wittlich.

Zu Beginn dieses Krieges haben in der westlichen Grenzzone des Reiches Netzverdichtungsarbeiten durch die Hauptvermessungsabteilungen nach dem damals noch geltenden TP-AP-Runderlaß vom 26. 10. 1936, der inzwischen durch den FP-Erlaß vom 15. 8. 1940 ersetzt worden ist, stattgefunden. Zur Verwirklichung der natürlichen Forderung, vorhandene trigonometrische und Polygonnetze anderer Vermessungsdienststellen in das Aufnahmenetz einzuschalten (vergl. auch Ziff. 25 (2) FP-Erl.), wurde eine Gemeinschaftsarbeit zwischen den Hauptvermessungsabteilungen und der Preußischen Katasterverwaltung vereinbart, die vor allem darin bestand, daß die letztgenannte Verwaltung sämtliche vorhandenen trigonometrischen Punkte ihrer Dreiecksnetze örtlich aufsuchen und durch Ausflagung kenntlich machen ließ, um so die Übernahme der alten Punkte in das Aufnahmenetz zu erleichtern. Auf die Freilegung nur solcher Punkte wurde im Benehmen mit den Sachbearbeitern oder Gruppenleitern der Hauptvermessungsabteilungen verzichtet, bei denen ungünstige Lage, schlechte Bestimmungsstücke oder dergleichen eine Übernahme als TP (A) von vorneherein ausschlossen.

Wäre die hiermit verfolgte Absicht — Einschaltung möglichst vieler der vorhandenen Festpunkte des Katasters in das Aufnahmenetz — erreicht worden, so hätte die Katasterverwaltung

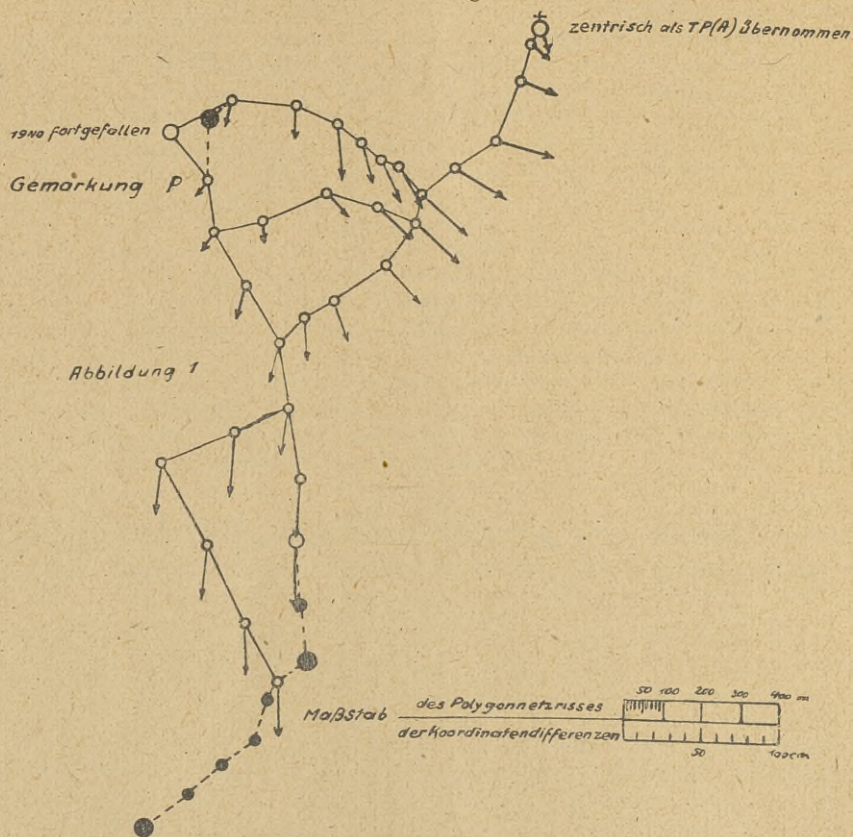
damit die Möglichkeit gehabt, ihre sämtlichen älteren Festpunktnetze in dem netzverdichteten Gebiet (es kommen hier vorwiegend die Arbeiten der Landeskulturverwaltung in Frage) ohne örtliche Arbeiten in das Gauß-Krüger'sche Koordinatensystem umzurechnen, so daß dann größere Spannungen zwischen den Katasternetzen und dem Aufnahmenetz, die sich bei späteren Messungen als störend erweisen würden, nicht mehr zu befürchten gewesen wären. Bedauerlicherweise ist dieses Ziel aber nicht überall in befriedigendem Maße erreicht worden. So waren beispielsweise im Kreise Wittlich über 350 trigonometrisch bestimmte Punkte vorhanden, von denen jedoch nur 81, also nicht einmal ein Viertel der Gesamtzahl, zentrisch als Aufnahme-punkte in das Aufnahmenetz übernommen worden sind. (In dieser geringen Anzahl enthalten sind 14 Hochpunkte — Kirchtürme u. dergl. — sowie etwa 10—20 Bodempunkte, die bereits von der Kataster- oder der Landeskulturverwaltung nach den Vorschriften des TP-AP-Rund-erlasses vorher als Aufnahme-punkte bestimmt worden waren.) Weitere 39 Punkte wurden polar angeschnitten, und über 65 v. H. sämtlicher trigonometrischen Punkte und das gesamte Polygonnetz wurden bei der Schaffung des Aufnahmenetzes ganz übergangen. Bei der Auswahl der wenigen übernommenen trigonometrischen Punkte ist auch keine Rücksicht genom-men worden auf die Möglichkeit der Einrechnung der übergangenen trigonometrischen Netze (vergl. hierzu Ministerialrat Pfitzer, „Aufgaben und Aufbau einer Reichsvermessung“, Zeit-schrift für Vermessungswesen 1936, S. 9), so daß die Hauptvoraussetzung für eine rechnerische Einpassung der trigonometrischen und polygonometrischen Netze in das Aufnahmenetz, das Vorhandensein einer hinreichenden Anzahl von identischen Punkten, entfallen ist.

Der zweckmäßigste und für alle Vermessungsdienststellen befriedigendste Weg wäre der gewesen, von vorneherein bei der Schaffung des Aufnahmenetzes die bereits vorhandenen Katastertriangulationen und -polygonisierungen genau so als gegeben zu betrachten wie die trigonometrischen Punkte des Landesdreiecksnetzes. Diese Katastertriangulationen und -polygonisierungen sind ja in der Regel bereits auf Grund der Bestimmungen des Zentral-direktoriums der Vermessungen im Preußischen Staat vom 29. 12. 1879 und nach den Kataster-anweisungen bzw. den Vorschriften anderer Vermessungsverwaltungen von jeher an das Landesdreiecksnetz angeschlossen worden. Die Punktdichte ist im allgemeinen größer, als im FP-Erlaß gefordert wird, so daß also überall ihre Dreiecks- oder geeigneten Polygonpunkte gemäß Ziffer 51 des TP-AP-RdErl. bzw. Ziffer 25 (2) FP-Erl. durch vorschriftsmäßige TP(A)-Vermarkung, durch nachträgliche Höhenbestimmung und gegebenenfalls durch Umformung der Soldner'schen Koordinaten in Gauß-Krüger'sche zu Aufnahme-punkten gemacht werden konnten. Auch dort, wo die heutigen Genauigkeitsanforderungen nicht erfüllt sind (z. B. bei älteren Netzen), hätten diese Netze nicht übergangen werden dürfen; vielmehr mußten dazu die nach Neubeobachtung durch Ausgleichung neu bestimmten Koordinatenwerte eingeführt werden. Dann aber wäre ein organisch gewachsenes Festpunktfeld mit einheitlicher Koordinierung entstanden, das alle an sie gestellten Forderungen befriedigt hätte.

Da dieser an sich selbstverständliche geodätische Grundsatz nun leider nicht befolgt worden ist, liegt die Frage nahe, ob und wie das damals Versäumte noch nachgeholt werden kann. Vorerst ist aber die Frage zu klären, ob eine Verknüpfung der beiden unabhängig von einander entstandenen Netze überhaupt durchgeführt werden muß. Es ist zu betonen, daß die vorhandenen Katasterkarten der umgelegten Gemarkungen gut und für Kataster-zwecke nicht verbesserungsbedürftig sind. Soweit Umformungen vom Soldner'schen in das Gauß-Krüger'sche System in Frage kommen, sind die erforderlichen Vorarbeiten für eine rationelle Arbeit bereits in früheren Jahren vom Vermessungskommissariat der Rheinprovinz geleistet worden (vergl. Katasterdirektor Schwede, „Vorbereitung und Durchführung von Koordinatenumformungen größeren Umfanges in der Rheinprovinz“, ZfV. 1936, S. 420 u. f.). Aber abgesehen davon, daß es wirklich nicht im Sinne einer Zusammenfassung und einheitlichen Koordinierung sämtlicher Vermessungsarbeiten liegt, wenn man zwei verschiedenartige Festpunktnetze nebeneinander bestehen läßt, und abgesehen davon, daß dieses Nebeneinanderarbeiten in der Literatur von den berufensten Vertretern der verschiedenen mit Ver-messungsarbeiten beschäftigten Verwaltungen verurteilt und bekämpft wird, gewinnt diese Frage praktische Bedeutung, sobald — und das wird vor allem am Rande der Umlegungs-gebiete öfters der Fall sein — Messungen mit Festpunktnetzen der Katasterverwaltung einer-seits und mit dem außerhalb der Kataster- bzw. Umlegungsnetze vorhandenen Aufnahmenetz andererseits in Verbindung gebracht werden müssen (z. B. beim Anschluß größerer Fort-führungs-, Umlegungs- oder Neumessungen an das Reichsfestpunktfeld). Denn es ist klar, daß

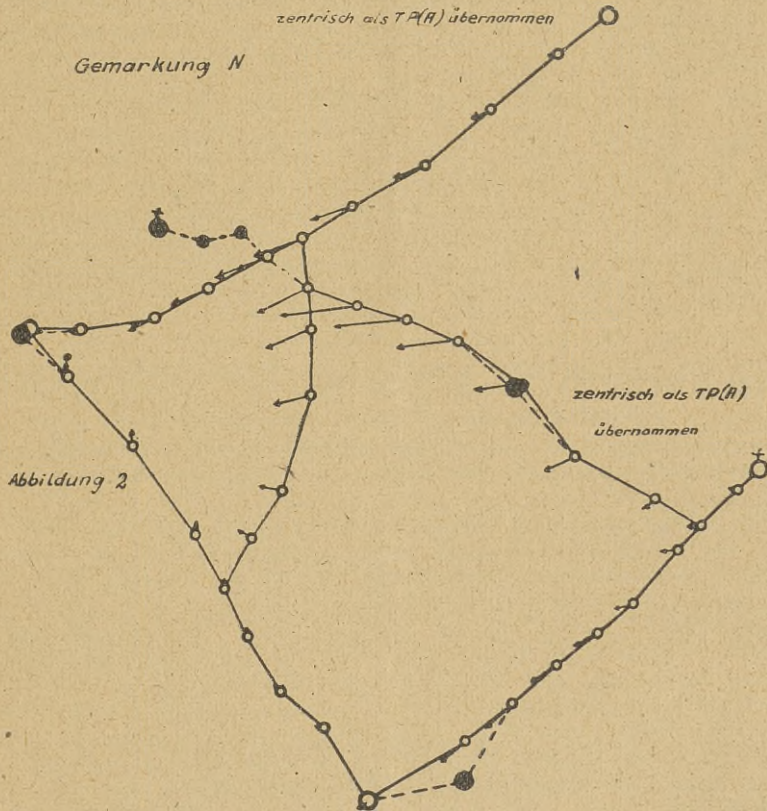
hierbei Spannungen größeren Ausmaßes zu befürchten sind, weil den beiden verschiedenartigen Netzen die unbedingt erforderliche Verbindung miteinander fehlt.

Zur Untersuchung der Größe dieser Spannungen sind in zwei beliebig gewählten umgelegten Gemarkungen Teile der Umlegungsnetze, die ohne Rücksicht auf das Aufnahmenetz durch Massenumformung in das Gauß-Krüger'sche Netz umgerechnet waren, nachträglich an das Aufnahmenetz angeschlossen worden. Die Umlegungsnetze waren bei beiden Umlegungen ursprünglich auch an die Landesaufnahme angeschlossen und im Rahmen des Landesdreiecksnetzes im Soldner'schen System gerechnet, es fehlte ihnen aber die Verbindung mit dem — erst später zwischengeschalteten — Aufnahmenetz. — Das Gelände, in dem die trigonometrischen und Polygonnetze lagen, ist zu den Geländeklassen I und II zu zählen, so daß also mit besonders ungünstigen Fehleranhäufungen infolge schwieriger örtlicher Verhältnisse bei den Polygonisierungen nicht zu rechnen war. — Die Züge wurden in den trigonometrischen Formularen 19 und 24 der Preußischen Vermessungsanweisung IX vom 25. Oktober 1881 entsprechend der in den §§ 37 und 38 der Anweisung XI gegebenen Vorschrift für Umformungen auf kleinem Gebiet unter Beibehaltung der früher gemessenen Strecken und Winkel neu berechnet und die Ergebnisse dieser Berechnungen den Werten gegenübergestellt, die durch Massenumformung ohne Anschluß an die Aufnahmepunkte ermittelt waren. Die sich hierbei ergebenden Differenzen sind in den Abbildungen 1 und 2 im Maßstabsverhältnis 1:50 dargestellt. Als Maximal- und Durchschnittsfehler ergaben sich:



- a) Gemarkung P. (Umlegung von 1919; Abbildung 1):
 $f_y(\max) = 0,37 \text{ m}$; $f_x(\max) = 0,46 \text{ m}$; $f_s(\max) = 0,46 \text{ m}$;
 Durchschnittlicher Fehler D (bei 31 Punkten) = 29,6 cm;
- b) Gemarkung N. (Umlegung von 1928; Abbildung 2):
 $f_y(\max) = 0,51 \text{ m}$; $f_x(\max) = 0,16 \text{ m}$; $f_s(\max) = 0,51 \text{ m}$;
 D (bei 36 Punkten) = 19,6 cm.

Die mittlere Koordinatendifferenz beträgt in der Gemarkung P. $m = \sqrt{\frac{[vv]}{n}} = \pm 30,7$ cm und in der Gemarkung N. $\pm 23,5$ cm. (In den Abbildungen 1 und 2 sind die Koordinatendifferenzen durch Pfeile dargestellt.)



Zeichenerklärung:

- ○ Trigonometrisch oder polygonometrisch bestimmte Punkte der Umlegung.
- ● Neue Aufnahme- und Polygonpunkte.
- Strecken der Umlegungspolygonisierung.
- - - Neu gelegte Anschlußstrecken.
- ← Koordinatendifferenzen.

Es soll nicht bestritten werden, daß diese Differenzen z. T. ihre Begründung finden in der Einführung einzelner neuer Messungselemente (Anschlußstrecken, Brechungs- und Abschlußwinkel) sowie in der Berechnung in anderer Zugfolge. Durch Versuchsmessungen ist aber festgestellt worden, daß die jetzt durchgeführte Längenmessung und diejenige der beiden Umlegungspolygonisierungen ins Gewicht fallende Differenzen nicht aufweisen. Es darf auch nicht übersehen werden, daß bei der polygonometrischen oder der linearen Verbindung der beiden Umlegungspolygonisierungen stets neue Messungselemente einzuführen sind und auch eine andere Zugfolge bei Polygonzugsberechnungen zwangsläufig gewählt werden muß, so daß derartige Beeinflussungen nicht vermieden werden können.

Aus dieser kurzen Fehlerbetrachtung, die sich, wie schon gesagt, bei zwei ganz beliebig herausgegriffenen Umlegungen ergibt, ersieht man ohne weiteres, daß die auftretenden Spannungen eine derartige Verbindung solcher verschiedenartiger Koordinatenwerte nicht zulassen. Tatsächlich fanden sich auch bei der Berechnung der in beiden Fällen an das Aufnahmenetz

einerseits und die durch Massenumformung in das Gauß-Krüger'sche System umgerechneten Umlegungsnetze andererseits angeschlossenen Polygonzüge Differenzen, die die amtlichen Fehlergrenzen überschritten.

Wenn man nun bedenkt, daß in vielen Gebieten die umgelegte Fläche einen großen Vomhundertsatz der Gesamtfläche einnimmt (beispielsweise beträgt sie im Kreise Wittlich 26 v. H. der Gesamtfläche), so ist die Frage, wie diese Spannungen zu beseitigen sind, von größerer Wichtigkeit und Bedeutung, als es zunächst den Anschein haben mag. Da es sich bei den trigonometrischen und polygonometrischen Kataster-netzen und dem Aufnahme-netz um ganz voneinander unabhängige Messungen handelt, liegen hier keine gleichartigen Koordinaten im Sinne des § 10 der Preuß. Anweisung XI vor, sondern ungleichartige. Vorschriften über die Umformung ungleichartiger Koordinaten bestehen in Preußen nicht, wohl aber ist diese Frage in der Fachliteratur Gegenstand häufiger Erörterungen gewesen.

Bei der Entscheidung der Frage, wie die Beseitigung der Spannungen vorzunehmen ist, sind fehlertheoretische und auch wirtschaftliche Belange in Erwägung zu ziehen. Eine dahingehende Lösung, daß ganze Dreiecks- und Polygonnetze örtlich mit dem Aufnahme-netz in Verbindung gebracht werden, um dann entweder entsprechend der Vorschrift in den §§ 37 und 38 der Preuß. Anweisung XI in den trigonometrischen Formularen 19 und 24 sämtliche Punkte neu zu rechnen oder die Gauß-Krüger'schen Koordinaten in einem Umformungsverfahren zu ermitteln, muß im allgemeinen als zu unwirtschaftlich verworfen werden, es sei denn, daß es sich um kleinere Umlegungs- oder Neumessungsgebiete handelt. Im allgemeinen aber wird man darauf verzichten müssen, die Dreiecks- und Polygonnetze in ihrem ganzen Umfange mit dem Aufnahme-netz zu verbinden, da diese Arbeit zu kostspielig und in einer Zeit stärkster Inanspruchnahme aller vermessungstechnischen Kräfte undurchführbar ist.

Der Gedanke liegt nahe, diese Anpassung der Umlegungsnetze an das Aufnahme-netz nur am Rande der Umlegungsgebiete durchzuführen mit dem Ziel, für die am Rande gelegenen Punkte in beiden Gemarkungen gesonderte Koordinaten zu vergeben. Diese Lösung hieße aber, den an sich schon herrschenden Koordinatenwirrwarr nur noch zu vergrößern, und ist daher vom geodätischen Standpunkt aus nicht vertretbar. Was für die trigonometrischen Punkte gilt, daß es nämlich für einen Punkt auch nur eine koordinatenmäßige Festlegung geben soll, muß naturgemäß auch für die übrigen Festpunkte (Polygon- und Kleinpunkte) gelten (vergl. auch die Ausführungen von Dr. Pinkwart im Heft 18 der Allgemeinen Vermessungsnachrichten 1940, S. 285 u. f.). Eine derartige Lösung könnte von vorneherein nur behelfsmäßigen, vorübergehenden Charakter tragen; bei ihrer später unbedingt anzustrebenden Beseitigung würde die Verschmelzung der Doppelkoordinaten aber eine weitere, zusätzliche Arbeit bedeuten, so daß also das Gegenteil von dem erreicht würde, was ursprünglich bezweckt werden sollte.

Dagegen erscheint es zweckmäßiger und wirtschaftlich sowohl als auch geodätisch vertretbar, am Rande der Umlegungsgebiete Übergangszonen zu schaffen, in denen die Spannungen zum Rande des Gebietes hin allmählich beseitigt werden.

In den Allgemeinen Vermessungsnachrichten 1938, H. 11 und 12, hat Ober-Reg. u. Verm. Rat Dr. Pinkwart für die Eingliederung selbständiger Dreiecksnetze in das Reichsfestpunktfeld ein Verfahren beschrieben, das in ähnlicher Form für die hier in Betracht kommenden Arbeiten geeignet erscheint, da es ohne allzuviel örtliche Arbeit die Spannungen am Rande der Umlegungsgebiete ausschalten würde. Das Verfahren wäre demnach folgendermaßen zu gestalten:

Soweit nicht bereits Gauß-Krüger'sche Koordinaten vorliegen — wie bei den neueren Umlegungen, nach etwa 1928 — werden die Festpunkte im gesamten Umlegungsgebiet durch Massenumformung ohne Rücksicht auf das Aufnahme-netz in das Gauß-Krüger'sche System umgerechnet. In einer je nach der Größe der auftretenden Spannungen größer oder kleiner zu wählenden Übergangszone entlang dem Gebietsrande wird die Verbindung zwischen Umlegungs- und Aufnahme-netz örtlich in einfachster Form hergestellt, so daß die Koordinaten der Aufnahme-punkte innerhalb der Übergangszone von den Umlegungs-festpunkten (Dreiecks-, Polygon- oder gegebenenfalls auch Kleinpunkten) aus berechnet werden können. Beim Vergleich dieser Koordinatenwerte mit den im Reichsfestpunktfeld durch Ausgleichung gewonnenen ergeben sich Differenzen, die die Unterlagen bilden für die graphische Darstellung der Koordinatenverbesserungen entsprechend dem affinen Umformungsverfahren oder der Strinz'schen Methode (vergl. Strinz, „Koordinatenumformung mit graphischer Ausgleichung“).

ZfV. 1925, Hefte 15 und 16). Nach Zuschlagen der aus diesen Tafeln entnommenen Verbesserungen zu den durch Massenumformung gewonnenen Werten vollzieht sich ein allmählicher Übergang zum Rande des Umlegungsgebietes hin, so daß sich die Spannungen auf ein größeres Gebiet verteilen und am Rande ganz ausgeschaltet sind. — In den Fällen, wo die vorhandenen Umlegungsnetze auf einer neueren trigonometrischen Netzverdichtung beruhen, die der Aufnahmenetzverdichtung gleichwertig oder doch fast gleichwertig ist, ist es zweckmäßiger und wirtschaftlicher, die Übergangszone nicht in das Umlegungsgebiet, sondern entlang demselben in das Aufnahmenetz zu legen, weil dann nur eine geringere Anzahl von Punkten zu deformieren ist. — Im Inneren des Umlegungsgebietes werden die durch Massenumformung gewonnenen Koordinaten beibehalten, weil hier ein Bedürfnis zur Verknüpfung beider Netze und zur Beseitigung der Spannungen zwischen Aufnahme- und Umlegungsnetz nicht vorliegt. Die nach Abschluß der Katastermessungen bestimmten Aufnahmepunkte sind für das geschlossene Katasterwerk Fremdkörper und werden als nicht bestehend angesehen. Sofern man jedoch ein einheitliches Festpunktfeld haben will, wären die im Inneren der Katasternetze liegenden Aufnahmepunkte in das Katasternetz einzurechnen, und zwar, soweit es noch nicht geschehen ist, auf Grund noch auszuführender örtlicher Messungen (Einmessung in das Polygon- bzw. Liniennetz).

Geometrische Konstruktionen zur Fehlerellipse.

Von Dr.-Ing. habil. Ernst Gotthardt, Berlin.

Sowohl die allgemeine Ableitung der Formeln für die Fehlerellipse bei trigonometrischen Punkteinschaltungen als auch die Ermittlung ihrer Daten für ein beliebig gegebenes Zahlenbeispiel lassen sich, wie bisher noch nicht beachtet zu sein scheint, durch einfache geometrische Überlegungen und Konstruktionen wesentlich erleichtern. Diese seien daher, da sie wohl für manchen Fachmann von Nutzen sein können, im folgenden kurz skizziert.

I. Formelableitung.

Zur Formelableitung braucht im wesentlichen nur die Kenntnis der Formel für das Gewicht einer Funktion der Unbekannten vorausgesetzt zu werden. Bezeichnen wir die Koordinaten mit x, y , die Gewichtskehrwerte mit Q_{xx}, Q_{xy}, Q_{yy} , wobei

$$Q_{xx} = \frac{[bb]}{[aa \ bb] - [ab]^2}, \quad Q_{xy} = \frac{-[ab]}{[aa] [bb] - [ab]^2}, \quad Q_{yy} = \frac{[aa]}{[aa] [bb] - [ab]^2}$$

ist¹⁾, so lautet die bekannte Formel für den Gewichtskehrwert Q_{ff} einer Funktion $f = f_1 x + f_2 y$:

$$Q_{ff} = f_1^2 Q_{xx} + 2 f_1 f_2 Q_{xy} + f_2^2 Q_{yy}$$

Führen wir nun ein neues, um den Winkel ψ gegen das ursprüngliche System gedrehtes Koordinatensystem mit den Koordinaten x', y' ein, so gelten die Gleichungen $x' = x \cdot \cos \psi + y \cdot \sin \psi$, $y' = -x \cdot \sin \psi + y \cdot \cos \psi$, und wir erhalten für den Gewichtskehrwert der neuen Abszisse: $Q_{x'x'} = Q_{xx} \cdot \cos^2 \psi + 2 Q_{xy} \cdot \sin \psi \cos \psi + Q_{yy} \cdot \sin^2 \psi$. Durch einige einfache Umformungen ergibt sich hieraus

$$Q_{x'x'} = Q_{xx} \cdot \frac{1 + \cos 2\psi}{2} + Q_{xy} \cdot \sin 2\psi + Q_{yy} \cdot \frac{1 - \cos 2\psi}{2}$$

und schließlich

$$Q_{x'x'} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} + \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2} \cdot \cos 2\psi + Q_{xy} \cdot \sin 2\psi$$

Dieser Ausdruck ist aber, wie Abb. 1 erkennen läßt, einfach geometrisch zu deuten. Man zeichnet um einen Punkt M einen Kreis mit dem Radius $\frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2}$, nimmt eine Ausgangsrichtung MA an, trägt auf der Geraden AMB von M aus entgegengesetzt zur Ausgangsrichtung die Größe $\frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2} = MC$ ab und errichtet auf ihr im Punkt C die Senkrechte $CO = Q_{xy}$. Legt man nun durch M einen Strahl, der mit MA den Winkel 2ψ einschließt, so ist der Abstand DE des Fußpunktes des von O auf diesen Strahl gefällten Lotes von der Kreisperipherie gleich der Größe $Q_{x'x'}$.

Vergrößert man den Winkel ψ um 100g, so geht der Strahl ME in den entgegengesetzt gerichteten Strahl MF über, und der Gewichtskehrwert für diese Richtung wird durch die Strecke DF dargestellt. Die Summe der Gewichtskehrwerte für zwei um 100g verschiedene

¹⁾ In Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, lauten die Bezeichnungen für die Gewichtskehrwerte $[aa]$, $[a\beta]$, $[\beta\beta]$.

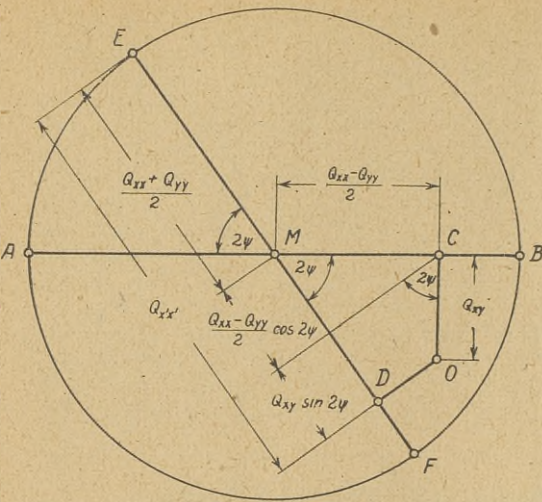


Abb. 1.

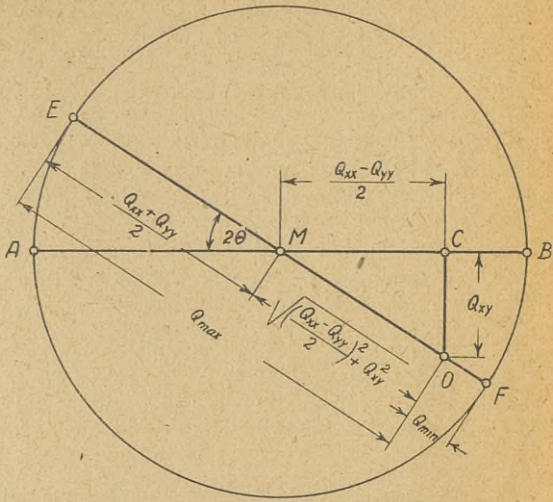


Abb. 2.

Richtungen ($DE + DF$) ist also stets konstant, und zwar gleich $Q_{xx} + Q_{yy}$. Das bedeutet aber nichts anderes als die Unabhängigkeit des mittleren Punktfehlers von dem gewählten Koordinatensystem.

Ferner läßt sich ohne weiteres erkennen, für welche Richtungen das Funktionsgewicht einen Größt- oder Kleinstwert annimmt. Dies geschieht offenbar dann, wenn MD , die Projektion von MO auf den durch M gehenden Strahl, gleich der Strecke MO selbst ist. Der betreffenden Strahl muß also durch O verlaufen, und es gelten die aus Abb. 2 sofort ablesbaren Gleichungen:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$$

θ = Richtungswinkel für den größten Q -Wert

$$Q_{\max, \min} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2}\right)^2 + Q_{xy}^2} \quad (1)$$

Das sind aber die bekannten Gleichungen für die Daten der Fehlerellipse²⁾.

II. Bestimmung der numerischen Daten.

Die zeichnerische Bestimmung der Daten der Fehlerellipse kann ohne weiteres mit Hilfe der in Abb. 2 angedeuteten Konstruktion erfolgen. Sie würde jedoch so viele zusätzliche Berechnungen erfordern, daß eine Vereinfachung gegenüber den bisherigen Lösungen nicht zustande käme. Eine solche läßt sich jedoch leicht erreichen, wenn man Gleichung (1) mit dem Quadrat des mittleren Richtungsfehlers m multipliziert und beachtet, daß $m^2 Q_{xx} = m_x^2$, $m^2 Q_{yy} = m_y^2$ usw. ist. Setzt man noch $m^2 Q_{xy} = m_v^2$, so erhält man die Gleichung:

$$m^2_{\max, \min} = \frac{m_x^2 + m_y^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_x^2 - m_y^2}{2}\right)^2 + m_v^2}$$

Sie kann zeichnerisch genau so ausgewertet werden wie Gleichung (1), erfordert aber nach der wohl stets vorweggenommenen Berechnung der mittleren Koordinatenfehler nur noch die Bestimmung einer einzigen Hilfsgröße, nämlich m_v , deren Ermittlung auf Grund der Beziehungen $m_v^2 = -m_x^2 \cdot \frac{[ab]}{[bb]} = -m_y^2 \cdot \frac{[ab]}{[aa]}$ überdies sehr einfach ist³⁾.

Zur praktischen Durchführung der Konstruktion (vgl. Abb. 3) geht man am besten von einem rechtwinkligen Achsenkreuz aus, von dessen Ursprung C nach links $CA = m_x^2$, nach rechts $CB = m_y^2$, nach unten $CO = m_v^2$ abgetragen wird (negatives m_v^2 nach oben). Die

²⁾ Vgl. z. B. Jordan-Eggert, Band I, 8. Aufl., S. 463, Formeln (42).

³⁾ Bei Ausgleichungen nach den preußischen Katasterformularen steht der Quotient $\frac{[ab]}{[aa]}$ unter der Bezeichnung

$\frac{B_1}{A_1}$ sogar bereits fertig ausgerechnet zur Verfügung.

Halbierung von AB liefert den Mittelpunkt M des mit dem Radius $MA = MB$ zu beschreibenden Kreises. Schließlich ist durch M noch die Gerade MO zu zeichnen, deren von O abgewandter Schnittpunkt mit dem Kreis E , der andere F genannt sei. Dann ist $OE = m_{\max}^2$, $OF = m_{\min}^2$. Winkel AME gleich dem doppelten Richtungswinkel der großen Achse der Fehlerellipse.

Zur Vermeidung von Umrechnungen bei der Auftragung und Entnahme der Fehler wird am besten ein besonderer, quadratisch geteilter Maßstab verwendet, vor allem bei häufigerer Benutzung der Konstruktion. Im Fall der gelegentlichen Anwendung stellt es aber auch keine nennenswerte Mehrbelastung dar, die vor Auftragung der Fehler und Niederschrift der Ergebnisse erforderlichen Quadrierungen und Radizierungen mit dem Rechenschieber durchzuführen, wobei auf eine schriftliche Festhaltung der Zwischenergebnisse verzichtet werden kann. Als sehr angenehm wird man es empfinden, daß im Gegensatz zu anderen vorgeschlagenen Rechenhilfsmitteln alle Fallunterscheidungen bis auf die Beachtung des Vorzeichens von m_v^2 fortfallen. Der Umstand, daß in der Kon-

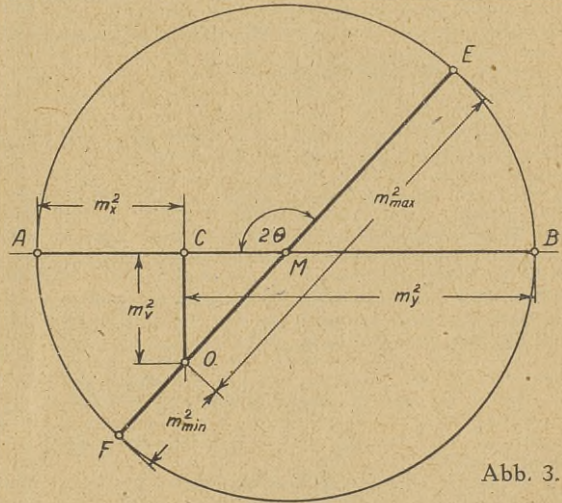


Abb. 3.

struktion nur die Quadrate der Fehler erscheinen, bewirkt eine mit wachsenden Fehlern zunehmende Genauigkeit. Dies entspricht insofern einem praktischen Bedürfnis, als es meist auf die Feststellung ankommen wird, ob die Größtfehler noch innerhalb eines bestimmten Grenzwertes bleiben. Soll die Einhaltung des in der Regel vorgeschriebenen Betrages von 15 cm überprüft werden, so empfiehlt es sich, das Fehlerquadrat von 10 cm als Strecke von 5 cm aufzutragen. In diesem Maßstab ist es ohne weiteres möglich, die große Achse der Fehlerellipse, wenn sie den Wert von 10 cm überschreitet, auf 1 mm genau zu bestimmen.

Hochschulnachrichten.

Der Herr Reichsminister für Wissenschaft und Volksbildung hat Herrn Prof. Edwin Feyer in der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule in Stutt-

gart die planmäßige Professur für Vermessungswesen verliehen und ihn zugleich zum Direktor des Geodätischen Instituts der Technischen Hochschule Stuttgart bestellt.

Bücherschau.

Die Gauß-Krüger'schen Koordinaten auf dem Ellipsoid.

Von Dr. Wl. K. Hristow. Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin. 80 Seiten Din C5. Preis RM. 6.—

Wie der Verfasser im Vorwort selbst bemerkt, sind die beiden grundlegenden Werke über die Gauß-Krüger'schen Koordinaten: die Schreiber'sche Abhandlung von 1866 und die 1912 erschienene Veröffentlichung des Geodätischen Instituts Potsdam von L. Krüger, seit Jahren im Buchhandel vergriffen; diese Lücke auszufüllen, ist der Zweck des vorliegenden Leitfadens.

Dr. Hristow ist in deutschen Fachkreisen kein Unbekannter; seine zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten, die wohl ausnahmslos in der Zeitschrift für Vermessungswesen erschienen sind, bieten eine Fülle von Anregungen und zeigen ihn als einen gründlichen Kenner der Projektionslehre.

Der Verfasser erläutert einleitend zuerst auf der Kugel die Verwandtschaft zwischen geographischen und Soldner'schen Koordinaten, vollzieht dann durch Einführung der isometrischen Breite den Übergang zu den Merkator-Koordinaten und zeigt deren Wesensgleichheit mit den sphärischen Gauß-Krüger'schen Koordinaten. Anschließend daran werden die Unterschiede der orthogonalen, isothermen und cartesischen Koordinatensysteme besprochen und alle damit im Zusammenhang stehenden Begriffe analytisch und, soweit dies möglich, auch geometrisch defi-

niert. Nach dieser allgemeinen Orientierung folgt die strenge Definition der Gauß-Krüger'schen Koordinaten auf dem Ellipsoid; erst beim Vergrößerungsverhältnis kommt die Bildebene als gleichberechtigtes Element hinzu, und nun erst werden die konformen Eigenschaften auseinandergesetzt. Der sich hier zeigende Dualismus zwischen Ellipsoid und Bildebene, zwischen Isometrie und Konformität ist typisch für die Hristow'sche Darstellung des Stoffes, wobei überall die Verhältnisse auf dem Ellipsoid als primär, in der Bildebene dagegen als sekundär betrachtet werden, was in der Literatur nur selten anzutreffen ist, aber doch ganz dem Sinne der Gauß'schen Flächentheorie entspricht.

Die Aufgaben, die in dem Buche behandelt werden, sind:

1. Berechnung der Gauß-Krüger'schen Koordinaten, der Meridian-Konvergenz und des Vergrößerungsverhältnisses aus den geographischen Koordinaten;
2. Berechnung der geographischen Koordinaten, der Meridian-Konvergenz und des Vergrößerungsverhältnisses aus den Gauß-Krüger'schen Koordinaten;
3. Übertragung der Gauß-Krüger'schen Koordinaten;
4. Berechnung der Richtungs- und Entfernungsreduktionen;
5. Transformation der Gauß-Krüger'schen Koordinaten im gemeinsamen Gebiet zwischen zwei Meridianstreifen.

Die wichtigsten Reihen sind fast überall in zwei verschiedenen Formen abgeleitet: mit veränderlichen und festen Koeffizienten; die ersteren bieten größere rechnerische Vorteile, während die zweiten in manchen Fällen nur als Notbehelf zu benutzen sein werden. Aber alle Entwicklungen und Formeln des Buches sind gerade diejenigen, die vom praktischen Standpunkt aus als die besten angesprochen werden können; sie sind durchweg elastisch im Aufbau und eignen sich sowohl für Logarithmen wie auch für Maschinenrechnen.

Der zweite Teil will dem rechnenden Praktiker die Benutzung des Werkes erleichtern; er bringt zuerst eine Zusammenstellung aller notwendigen Bezeichnungen, Formeln und Reihen und dann für alle praktischen Fälle gut gewählte Zahlenbeispiele. Damit möglichst viele Rechenwege gezeigt werden können, sind kurze Tafeln für die Zone 50°—51° entworfen worden, die dem Leser Gelegenheit geben, sich über die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Rechenformulare selbst zu unterrichten.

Besonders anerkennenswert ist die planvolle Anlage des Leitfadens; alles, was gebraucht wird, ist zwar knapp gehalten, aber dennoch streng, vollständig und klar; an keiner Stelle wird auf das Werk eines anderen Autors verwiesen, nur für diejenigen, die sich gründlicher mit der Theorie beschäftigen wollen, wird auf die Hristow'schen Arbeiten in der Zeitschrift für Vermessungswesen hingewiesen, wo vieles von anderer Seite beleuchtet und abgeleitet wird.

Nach meiner Überzeugung kann das Hristow'sche Buch als das dritte Fundamentalwerk über die Gauß-Krüger'schen Koordinaten angesehen werden, dem die Aufgabe zufällt, die theoretischen Grundlagen der vielseitigen geodätischen Praxis anzupassen, nachdem die Werke von Schreiber und Krüger ihren Zweck erreicht haben, der darin bestand, den Gauß-Krüger'schen Koordinaten das Ansehen zu erkämpfen, das sie verdienen. Boltz.

Deutsche Antarktische Expedition 1938/39. Wissenschaftliche und fliegerische Ergebnisse. Herausgegeben im Auftrage der Deutschen Forschungsgemeinschaft von

Kapitän Alfred Ritscher. 2 Bände mit 304 Seiten, 56 Abb., 57 Bildtafeln und 4 Karten. Verlag Koehler u. Amelang, Leipzig 1942. Preis geb. RM. 18.—.

Die zur Vorbereitung einer Besitzergreifung antarktischen Gebietes veranstaltete Deutsche Antarktische Expedition 1938/39 hatte als wichtigste Aufgabe die Erkundung der in Betracht kommenden Flächen durch umfassende luftphotogrammetrische Aufnahmarbeiten durchzuführen. Ihre Schilderung und die der mühevollen Auswertung des angefallenen, aus über 11000 Meßbildern bestehenden Bildmaterials stellen das Kernstück des jetzt vorliegenden ersten Teils des Expeditionsberichtes dar, der daneben formen- und gletscherkundliche Abhandlungen sowie Navigationsberichte und geographische Ausführungen allgemeiner Art enthält. Für den Vermessungsfachmann von Wichtigkeit sind die Ausführungen des Expeditionsleiters Kapitän Ritscher, der im Rahmen einer allgemeinen Schilderung der Vorbereitung und des Verlaufs der Expedition auch die Bildflüge eingehend behandelt, ferner die von Direktor Gebner, der außer Einzelheiten des Aufnahmeverfahrens besonders die Herstellung der vorläufigen Übersichtskarte 1:1500000 durch die Hansa Luftbild GmbH. beschreibt. Die bei weitem höchste Bedeutung besitzt jedoch der Beitrag von Professor O. v. Gruber über die großmaßstäbliche Auswertung einzelner Teilgebiete, den er kurz vor seinem Tode noch fertigstellen konnte. Er bringt hier in seiner lebendigen Darstellungsweise eine äußerst lehrreiche Zusammenstellung der mannigfaltigen Kunstgriffe, durch die schließlich eine bei dem Mangel an einwandfreien Unterlagen erstaulich weitgehende Sicherheit der Ergebnisse erzielt wurde.

Neben einem guten Überblick über die Möglichkeiten und Grenzen einer ohne größere Vorbereitungen durchgeführten, extrem extensiven photogrammetrischen Vermessung erhält der Leser durch die erdkundlichen Beiträge und die vielen vorzüglichen, zum Teil im Anlagendruck wiedergegebenen Bildtafeln eine eindrucksvolle Vorstellung von den durch die Expedition entdeckten antarktischen Gebieten. E. Gotthardt.

Mitteilungen des DVW.

Allgemeine Landesvermessung. Reich. Ernann z. ORR.: RR. Nowatzky, RL: z. RuVR.: RVR. Liede HVA. XII; z. RVR.: RVAss. Faust*) HVA. I, Georg*) HVA. II, Schabacker*) HVA. XI und DiplIng. Ascher*) HVA. XIII.

Katasterverwaltung. Reich. Ernann z. RVR.: RVAss. Huep*) KA. Krotoschin, Schroll*) KA. Lissa und DiplIng. Moder*) KA. Karlsbad. Versetzt: ORuvR. Salow v. d. Reg. Litzmannstadt a. d. Beh. d. RStH. Sudetengau (KatHVerw.) Reichenberg. — **Baden.** Ernann z. RVR.: RVAss. DiplIng. Rösch*) VA. Mülheim. — **Bayern.** Ernann z. ORuvR.: RuVR. Lex Bayer. LVA.; z. RVR.: RVAss. Antretter*) VA. Weiden, Reiter*) VA. Vilshofen u. Werthaler*) VA. Landsberg. **In den Ruhestand versetzt:** MAD. Müller (Emmeran) VA. Abensberg, Amberger VA. Neustadt, Haser VA. Ansbach u. Zoll VA. Friedberg. **Verstorben:** ROvR. Streitberger Forchheim, Aug. 43. — **Hessen.** Verstorben: RVR. Eich Nidda. — **Preußen.** Ernann z. RuVR.: RVR. Bretag Schneidemühl; z. RVR.: AmtsR. Bremer, RVAss. Ansorge, Gräwe, Jansen, Kampmann, Lobner, Niemann, Raddatz, Reckfuß, Reuter, Riemkasten, Schlottmann, Schrader, Schünke, Stanitzki, Weule u. Ving. Lillegrave u. Szeliga. **Verstorben:** ORuvR. Schröder Düsseldorf und RVR. Thomas Koblenz, Feb. 43. — **Sachsen.** Verstorben: StadttamtsbauR. DiplIng. Schönert Dresden, Dez. 42, u. AmtsbauR. Morgner Dresden, Juni 43. — **Thüringen.** Ernann z. RVR.: ROL. Maas Greiz. **Den Hel-**

dentod starb: RVAss. DiplIng. Ritter Weimar, Juni 43. — **Württemberg.** Verstorben: Ving. Dannemann Reutlingen, Sept. 43, u. OL. i. R. Rottmann er Isny, März 43.

Landeskulturverwaltung. Reich. Ernann z. RVR. RVAss. DiplIng. Brauner*) u. Ving. Berger Marienbad. — **Hessen.** Ernann z. RVR.: RVAss. Fleischhaker*) Limburg. — **Preußen.** Ernann z. ORuvR.: RVR. Wittenberg Münster/Westf.; z. RVR.: RVAss. Reder*) Siegburg, Duppe*) Arnsberg, Koch*) Heide/Holstein, Tuschling*) Berlin, Wernicke*) Berlin, Hoffmann (Walter*) Hannover, Ide*) Wiesbaden, Riemenschneider*) Marburg, Fuhrmann*) Flensburg, Goeing*) Simmern, Flick*) Göttingen, Richard*) Adenau, Selter*) Dortmund, Henke*) Meppen, Kessens*) Bernkastel-Kues, Waldmann Nordhausen u. Ruthemann*) Bingen. **In den Ruhestand versetzt:** RuVR. Bilse Kassel. **Verstorben:** RVR. Rose, Soest, April 43. — **Thüringen.** Ernann z. RVR.: RVAss. Loos*), Kind*) u. Linkhorst*) Rudolstadt u. Krämer*) Gera. — **Württemberg.** Ernann z. RVR.: VAmT. Junginger*) Geislingen, Widmann*) Rottweil, Schmidhäuser Ludwigsburg, Klett Schwäbisch-Hall u. Striebel*) Ravensburg.

Kommunalverwaltung. Verstorben: StVD. Banditt Eberswalde, Mai 43, und StVR. Schmitt (Bruno) Beuthen, Sept. 43.

Öff. best. Verm.Ingenieure. Verstorben: Öff. best. Ving. Hille Wurzen/Sa., Juni 43.

*) (z. Z. im Wehrdienst).