

# ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

**Dr. C. Reinhertz,**

und

**C. Steppes,**

Professor in Hannover.

Obersteuerrath in München.

—\*—

1900.

Heft 6.

Band XXIX.

—> 15. März. <—

Der Abdruck von Original-Artikeln ohne vorher eingeholte Erlaubniss der Schriftleitung ist untersagt.

## Vergleichung der Ergebnisse des geometrischen und des trigonometrischen Nivellements nach den durch v. Bauernfeind im Jahre 1881 ausgeführten Beobachtungen\*).

Von Landmesser Dr. O. Eggert, Assistent an der Landwirthschaftlichen Hochschule zu Berlin.

Im Jahre 1881 liess Professor Dr. v. Bauernfeind in drei Punkten des bayrischen Hochgebirges eine Reihe von Zenithdistanzmessungen ausführen, die zur Untersuchung der terrestrischen Refraction dienen sollten. Es wurden auf diesen Punkten während eines Zeitraums von 11 Tagen, soweit es die Witterung zuliess, fortlaufend gegenseitige und gleichzeitige Zenithdistanzen gemessen und die Punkte durch ein geometrisches Nivellement mit einander verbunden.\*\*)

Die aus diesen Zenithdistanzen auf Grund der v. Bauernfeind'schen Refractionstheorie berechneten Höhenunterschiede zeigten eine sehr schlechte Uebereinstimmung mit den Ergebnissen des geometrischen Nivellements, und selbst nach Beseitigung eines groben Fehlers in letzterem betragen

\*) Die vorliegende Arbeit ist im Wesentlichen ein Auszug aus der Inaugural-Dissertation des Verfassers, Berlin 1898. Die Anregung zur Bearbeitung dieses Themas gab Herr Geheimrath Professor Dr. Helmert, der im 2. Bande seines Werkes über „Die mathem. und physik. Theorien der höheren Geodäsie“ ebenfalls einen Theil der obengenannten Beobachtungen behandelt hat. Eine neue Bearbeitung des gesammten Beobachtungsmaterials erschien zweckmässig, weil inzwischen auch diesbezügliche astronomische Messungen veröffentlicht worden sind. In reichstem Maasse wurde die Arbeit durch gütige Unterstützung des Herrn Professor Dr. Helmert gefördert. In dem vorliegenden Auszuge sind einige allgemeinere Untersuchungen weggelassen, die mit dem eigentlichen Thema nicht in unmittelbarem Zusammenhang stehen. Dagegen ist das Zahlenmaterial vollständiger gegeben, um ein Verfolgen der Berechnungen zu erleichtern.

\*\*\*) Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraction von Carl Max v. Bauernfeind. 2. Mitt. Abh. d. II. Kl. d. k. Ak. d. Wiss. XV. Bd. I. Abt.

die Abweichungen beider Höhenbestimmungen von einander noch mehr als 1 m. \*) Diese Differenzen lassen sich theilweise durch die Mängel der v. Bauernfeind'schen Refractionstheorie erklären, zum Theil ist ihr Ursprung aber auch in der fehlerhaften Einführung der Lothabweichungen in die Berechnungen zu suchen.

Es soll der Inhalt der vorliegenden Abhandlung sein, mit Benutzung des durch v. Bauernfeind gegebenen Beobachtungsmaterials im Anschluss an Helmert „Höhere Geodäsie“ Bd. II, Kap. 8 Untersuchungen über die trigonometrische Höhenmessung anzustellen, und insbesondere die Unterschiede zwischen den Ergebnissen des trigonometrischen und des geometrischen Nivellements näher zu betrachten.

### I.

Die praktische Ausführung der trigonometrischen Höhenmessung besteht bekanntlich darin, dass man zwei Punkte der physischen Erdoberfläche durch einseitige oder gegenseitige Zenithdistanzmessung verbindet und gleichzeitig den Abstand der beiden Punkte von einander bestimmt.

Die Verwerthung solcher Messungen kann in zweifacher Weise geschehen, indem man sie entweder benutzt, um aus ihnen in Verbindung mit anderen Messungen nach der Methode von Bruns-Villarceau, \*\*) die Gestalt der Geoidoberfläche zu bestimmen, oder indem man von vorn herein für das Geoid eine Fläche von einfachem mathematischen Bildungsgesetz, z. B. ein Rotationsellipsoid einführt, und dann aus den gemessenen Zenithdistanzen und Entfernungen Differenzen der Abstände der Beobachtungspunkte von diesem Ellipsoid oder ellipsoidische Höhenunterschiede berechnet. Diese letzteren Berechnungen und ihre Verwendung zur Bestimmung von Meereshöhen sollen hier nur in Betracht kommen.

Die Lage des „Referenzellipsoides“ gegen das Geoid wird durch die Lothabweichungen gegeben. Sind diese in den Beobachtungspunkten bekannt, so kann man die gemessenen Zenithdistanzen, die sich auf die wirkliche Lothrichtung beziehen, auf die ellipsoidische Lothrichtung reduciren.

Es seien im Beobachtungspunkte  $P_1$  die Lothabweichungen im Meridian und im Azimut von  $90^\circ$  bezw.  $\xi_1$  und  $\eta_1$ , ferner sei  $z_1$  die gemessene und  $z_1$  die reducirte Zenithdistanz im Azimut  $a'$ . Alsdann ist nach Helmert a. a. O. I, S. 518:

$$z_1 = z_1 + \xi_1 \cos a' + \eta_1 \sin a', \quad (1)$$

wobei die Azimute von Süden aus gezählt werden.

Die Berechnung ellipsoidischer Höhenunterschiede vereinfacht sich wesentlich durch den Umstand, dass das Referenzellipsoid, dessen

\*) Nachtrag zu den Mittheilungen II u. III. Ebend. XVII. Bd. II Abt., S. 453/54.

\*\*) Bruns, Die Figur der Erde. Berlin 1878. Villarceau, Comptes rendus 1868.



Constanten nach Bessel\*) angenommen werden, eine sehr geringe Abplattung zeigt, so dass in erster Annäherung seine Krümmung der einer Kugel gleichkommt.

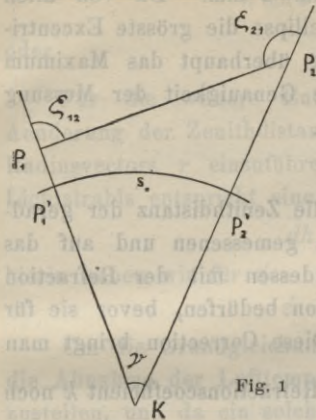


Fig. 1

In Fig. 1 seien  $KP_1$  und  $KP_2$  die beiden Ellipsoidnormalen in  $P_1$  und  $P_2$  projectirt auf eine ihnen parallele Ebene. Es kann davon abgesehen werden, dass die kürzeste Linie  $s_0$  und die Zenithdistanzen der geradlinigen Verbindung  $P_1 P_2$  nicht in wahrer Grösse auf dieser Ebene abgebildet werden können, da die Entfernung  $s_0$  in praktischen Fällen immer im Verhältniss zu  $KP_1$  sehr klein sein wird.

Das Dreieck  $P_1 P_2 K$  giebt die bekannten Beziehungen

$$\frac{P_2 K - P_1 K}{P_2 K + P_1 K} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\zeta_{21} - \zeta_{12})}{\operatorname{tg} \left\{ 180 - \frac{1}{2} (\zeta_{21} - \zeta_{12}) \right\}}$$

Führen wir für  $P_1' K + P_2' K$  den doppelten mittleren Krümmungsradius  $\rho_{12}$  ein, und setzen wir

$$\begin{aligned} \zeta_{21} &= \gamma + 180^\circ - \zeta_{12} \\ P_2' K - P_1' K &= e_{12} \end{aligned} \quad \text{so ist}$$

$$P_2 P_2' - P_1 P_1' = (2\rho_{12} + P_2 P_2' + P_1 P_1') \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\zeta_{21} - \zeta_{12}) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - e_{12}.$$

Näherungsweise ist  $s_0 = \gamma \cdot \rho_{12}$  und in der mittleren Höhe ist

$$s_m = s_0 \left( 1 + \frac{P_2 P_2' + P_1 P_1'}{2\rho_{12}} \right).$$

Entwickelt man  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  in eine Reihe, so ist

$$P_2 P_2' - P_1 P_1' = s_m \left( 1 + \frac{\gamma^2}{12} \right) \operatorname{cotg} \left( \zeta_{12} - \frac{\gamma}{2} \right) - e_{12}$$

oder wenn  $h$  den ellipsoidischen Höhenunterschied bezeichnet

$$h = s_m \left( 1 + \frac{\gamma^2}{12} \right) \operatorname{cotg} \left( \zeta_{12} - \frac{\gamma}{2} \right) - e_{12} \quad (2)$$

und für gegenseitige Zenithdistanzen

$$h = s_m \left( 1 + \frac{\gamma^2}{12} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\zeta_{21} - \zeta_{12}) - e_{12} \quad (3)$$

Das Ergänzungsglied  $e_{12}$  stellt die Differenz der beiden Ellipsoidlothe  $P_2' K$  und  $P_1' K$  dar.

Ein Ausdruck für  $e_{12}$  ist unter der Annahme, dass beide Punkte auf demselben Meridian liegen, in Helmert II, S. 563 und unabhängig hiervon in der Dissertation des Verfassers, S. 18 entwickelt worden.

\*) Engelmann, Abhandl. von F. W. Bessel, Leipzig 1876, III, S. 62.

Für eine Entfernung der beiden Punkte  $P_1'$  und  $P_2'$  von etwa 40 km beträgt das Glied  $e_{12}$  im Maximum 2 mm. Da von allen Verticalschnitten des Ellipsoids die Meridianellipse die grösste Excentricität hat, so stellt der vorstehende Betrag überhaupt das Maximum von  $e_{12}$  dar. Im Hinblick auf die sonstige Genauigkeit der Messung kann diese Correction vernachlässigt werden.

## II.

Bisher ist angenommen worden, dass die Zenithdistanz der geradlinigen Verbindung  $P_1 P_2$  bekannt ist. Die gemessenen und auf das Ellipsoid reducirten Zenithdistanzen sind indessen mit der Refraction behaftet, so dass sie also erst einer Correction bedürfen, bevor sie für die Rechnung verwendet werden können. Diese Correction bringt man gewöhnlich auf die Form  $\frac{1}{2} k \gamma$ , worin der Refractionscoefficient  $k$  noch näher bestimmt werden muss. Sind  $z'$  die gemessenen Zenithdistanzen, so erhält man also hieraus die wahren ellipsoidischen Zenithdistanzen nach (1)

$$\zeta = z + \frac{1}{2} k \gamma = z' + \frac{1}{2} k \gamma + \xi \cos a' + \eta \sin a'. \quad (4)$$

Hiermit geht (2) über in

$$h = s_m \left( 1 + \frac{\gamma^2}{12} \right) \cotg \left( z - \frac{1-k}{2} \gamma \right). \quad (5)$$

Für den weiteren Gebrauch entwickeln wir (5) nach Taylor's Satz in eine Reihe

$$h = s_m \cotg z + s_m \frac{1-k}{2 \sin^2 z} \gamma + \dots \quad (6)$$

Um einen Ausdruck für den Refractionscoefficienten  $k$  zu finden, betrachten wir zunächst den Gang des Lichtstrahls durch die Atmosphäre.

Die Luftschichten sind im Allgemeinen so angeordnet, dass die Flächen gleicher Dichtigkeit angenähert Parallelfächen zur Meeresoberfläche sind. In erster Annäherung können wir sogar die Abplattung dieser Flächen vernachlässigen und sie als kugelförmig ansehen.

Wir betrachten zwei auf einander folgende unendlich dünne Luftschichten mit den Brechungsexponenten  $n$  und  $n + dn$ . Ein von  $P_1$  (Fig. 2) ausgehender Lichtstrahl habe in diesen beiden Schichten die Zenithdistanzen  $z$  und  $z + d\beta$ . Es ist dann  $d\beta$  die Refraction, die der

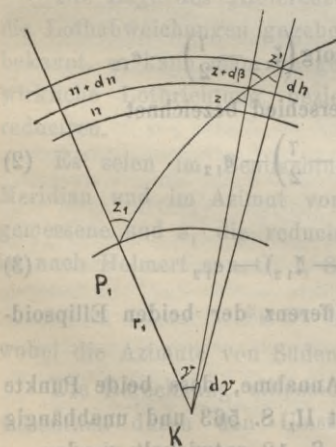


Fig. 2.

Lichtstrahl beim Eintritt in die neue Luftschicht erleidet.



Nach dem Brechungsgesetz ist

$$n \sin z = (n + dn) \sin (z + d\beta)$$

oder 
$$d\beta = -\frac{dn}{n} \operatorname{tg} z. \quad (7)$$

Für die weitere Entwicklung ist es zweckmässiger, statt der Aenderung der Zenithdistanz direct die Aenderung der Höhe oder des Radiusvectors  $r$  einzuführen. Dem vorher betrachteten Element des Lichtstrahls entspricht eine Höhenänderung  $dh$ , und es ist

$$dh = dr = r d\gamma \operatorname{cotg} z', \quad (8)$$

hierin haben wir für  $z'$

$$z' - z = dz = d\beta - d\gamma. \quad (9)$$

Um die Grundgleichung (8) integrieren zu können, ist es nothwendig, die Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe durch ein Gesetz darzustellen, und da ein solches Gesetz noch nicht bekannt ist, so muss man hier Hypothesen einführen. Wir können dies zunächst umgehen und direct eine Reihe für  $r$  entwickeln, indem wir den functionalen Zusammenhang von  $n$  und  $r$  noch unbestimmt lassen.

Nach Taylor's Satz hat man\*)

$$r = r_1 + \left(\frac{dr}{d\gamma}\right)_1 \frac{s_1}{r_1} + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2r}{d\gamma^2}\right)_1 \frac{s_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3r}{d\gamma^3}\right)_1 \frac{s_1^3}{r_1^3} + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4r}{d\gamma^4}\right)_1 \frac{s_1^4}{r_1^4} + \dots \quad (10)$$

Zur Berechnung der Differentialquotienten haben wir nach (8)

$$\frac{dr}{d\gamma} = r \operatorname{cotg} z,$$

wobei  $\operatorname{cotg} z$  statt  $\operatorname{cotg} z'$  eingeführt wird. Aus (7) und (9) haben wir

$$\frac{dz}{d\gamma} = -\left(1 + \frac{dn \operatorname{tg} z}{d\gamma n}\right) = -\left(1 + \frac{dn}{dr} \frac{r}{n}\right)$$

oder wenn man setzt  $-\frac{r}{n} \frac{dn}{dr} = x$ , so wird 
$$\frac{dz}{d\gamma} = -(1 - x) \quad (11)$$

$$\frac{dz}{d\gamma} = -(1 - x) \quad (12)$$

In den höheren Differentialquotienten von  $r$  vernachlässigen wir alle Glieder, die in (10) Glieder von der Ordnung  $\frac{1}{r_1^2}$  oder höhere Glieder geben. Dann ist

$$\left(\frac{d^2r}{d\gamma^2}\right)_1 = \frac{r_1(1-x_1)}{\sin^2 z_1}, \quad \left(\frac{d^3r}{d\gamma^3}\right)_1 = -\frac{r_1^2 \operatorname{cotg} z_1}{\sin^2 z_1} x_1', \quad \left(\frac{d^4r}{d\gamma^4}\right)_1 = -\frac{r_1^3 \operatorname{cotg}^2 z_1}{\sin^2 z_1} x_1''$$

folglich giebt (10), da  $r - r_1 = h$  ist

$$h = s_1 \operatorname{cotg} z_1 + \frac{(1-x_1)s_1^2}{2 \sin^2 z_1 r_1} - \frac{\operatorname{cotg} z_1}{6 \sin^2 z_1} \cdot \frac{s_1^3}{r_1} x_1' - \frac{\operatorname{cotg}^2 z_1}{24 \sin^2 z_1} \frac{s_1^4}{r_1} x_1'' \dots \quad (13)$$

\*) Die folgende Reihenentwicklung ist der in Helmert, Höhere Geodäsie II, S. 554 enthaltenen nachgebildet, jedoch neu gerechnet.

In (6) ist  $s_m = s_1 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{h s_1}{s_1 r_1} + \dots \right)$ , und da  $\frac{h}{s_1}$  von derselben Ordnung wie  $\frac{s_1}{r_1}$  ist, so kann man in (6) für diese Entwicklung  $s_m$  durch  $s_1$  ersetzen. Führen wir ferner in (6)  $k_1$  für  $k$ ,  $z_1$  für  $z$  und  $\frac{s_1}{r_1}$  für  $\gamma$  ein, und subtrahiren wir (13) von (6), so findet sich unmittelbar

$$k_1 = x_1 + \frac{1}{3} s_1 \cotg z_1 x'_1 + \frac{1}{12} s_1^2 \cotg^2 z_1 x''_1 + \dots$$

oder wenn wir rechts  $h := s_1 \cotg z$  setzen

$$k_1 = x_1 + \frac{1}{3} h x'_1 + \frac{1}{12} h^2 x''_1 + \dots \quad (14)$$

Hierin ist

$$x'_1 = \left( \frac{dx}{dh} \right)_1, \quad x''_1 = \left( \frac{d^2x}{dh^2} \right)_1,$$

Also ist für einen beliebigen Punkt der Lichtcurve nach Taylor's Satz

$$x = x_1 + h x'_1 + \frac{1}{2} h^2 x''_1 + \dots \quad (15)$$

Zur Anwendung der vorstehenden Formeln ist es nothwendig, die Grösse  $x$  und deren Ableitungen zu kennen, die von dem jeweiligen Zustande der Atmosphäre abhängen. Die Hauptschwierigkeit in der Bestimmung dieser Coefficienten beruht in der Unkenntniss eines Gesetzes für die Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe, und alle Versuche, die man bisher gemacht hat, eine solche Relation zu finden, gehen von Hypothesen aus, die nur in geringem Maasse der Wahrheit entsprechen. Diese Schwierigkeit ist deshalb eine wunde Stelle in allen Refractions-theorien, die man aus den physikalischen Gesetzen über die Constitution der Luftschichten entwickelt hat.

Es ist aber wohl kaum zu erwarten, dass sich die Temperaturverhältnisse in der Nähe der Erdoberfläche überhaupt durch ein einfaches Gesetz ausdrücken lassen. Die Erwärmung der der Erde benachbarten Luftschichten hängt zum grössten Theil von der Temperaturausstrahlung der Erde ab, nicht von der directen Erwärmung durch Sonnenstrahlung. Es ist deshalb anzunehmen, dass die Entfernung von der physischen Erdoberfläche von grosser Bedeutung ist, und dass erst in den höheren Luftschichten, die von terrestrischen Visirstrahlen garnicht erreicht werden, eine Ausgleichung in den einzelnen Niveauflächen erfolgt. Es wird also hiernach die Temperatur im Verlaufe eines Lichtstrahles von dem Profil des darunter liegenden Geländes abhängig sein.

Erst im Mittel zahlreicher Messungen, die sich auf möglichst verschiedene Luftverhältnisse vertheilen, kann dieser Einfluss des Profils einigermaassen eliminirt werden.



Wenn man sich von den meteorologischen Angaben möglichst frei machen will, so sind Beobachtungen von gleichzeitigen und gegenseitigen Zenithdistanzen auf mehr als zwei Punkten nothwendig, um die Refractionscoefficienten aus den Zenithdistanzen selbst berechnen zu können. Es müssen hierbei die Punkte in verschiedener Höhe oder in verschiedener Entfernung voneinander liegen.

Bei der Verwerthung der vorliegenden Messungen, die fortlaufend halbstündlich während ganzer Tage ausgeführt sind, sollen die Thermometer- und Barometerbeobachtungen nicht berücksichtigt werden, dagegen sollen die Tagesmittel der gemessenen Zenithdistanzen in die Rechnung eingeführt werden, da man annehmen kann, dass diese Mittel möglichst unabhängig von den Temperaturschwankungen im Laufe eines Tages sind.

Um das für drei Beobachtungspunkte gültige Gleichungssystem zu finden, kann man bekanntlich in folgender Weise vorgehen. Die drei Beobachtungspunkte seien  $P_1 P_2 P_3$ . Allgemein bezeichne ferner  $h_{mn}$  die Höhe von  $P_n$  über  $P_m$ ,  $k_{mn}$  den Refractionscoefficienten für den Strahl  $P_m P_n$  im Punkte  $P_m$ .

Nach den Gleichungen (14) und (15) ist dann mit den neuen Bezeichnungen

$$k_{12} = x_1 + \frac{1}{3} h_{12} x_1' + \frac{1}{12} h_{12}^2 x_1'' + \dots \quad (16)$$

$$k_{21} = x_2 - \frac{1}{3} h_{12} x_2' + \frac{1}{12} h_{12}^2 x_2'' + \dots$$

$$x_2 = x_1 + h_{12} x_1' + \frac{1}{2} h_{12}^2 x_1'' + \dots \quad (17)$$

$$x_1 = x_2 - h_{12} x_2' + \frac{1}{2} h_{12}^2 x_2'' + \dots$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung (17) sieht man sofort, dass

$$x_2' = x_1' + h_{12} x_1'' + \dots \quad (18)$$

$$x_2'' = x_1'' + \dots$$

ist, folglich geben die beiden Gleichungen (16)

$$k_{21} - k_{12} = x_2 - x_1 - \frac{1}{3} h_{12} (x_2' + x_1').$$

Aus (20) findet man durch Subtraction

$$2(x_2 - x_1) = h_{12} (x_2' + x_1') \quad \text{also ist}$$

$$k_{21} - k_{12} = \frac{x_2 - x_1}{3} \quad (19)$$

Setzt man (18) in (16) ein und addirt die beiden Gleichungen (16), so ergibt sich

$$\frac{k_{21} + k_{12}}{2} = x_1 + \frac{1}{2} h_{12} x_1' + \frac{1}{6} h_{12}^2 x_1'' \quad (20)$$

Dieser in (20) dargestellte mittlere Refractionscoefficient lässt sich nun andererseits leicht aus den gemessenen gegenseitigen und gleich-

zeitigen Zenithdistanzen  $z'$  ableiten. Denn da  $z_{12} + z_{21} = 180^\circ - \gamma$  ist, so haben wir nach (4)

$$\frac{k_{12} + k_{21}}{2} \gamma = \gamma - (z_{12}' + z_{21}' - 180^\circ) \\ - (\xi_1 \cos a_{12}' + \eta_1 \sin a_{12}') \\ - (\xi_2 \cos a_{21}' + \eta_2 \sin a_{21}') \quad (21)$$

Hiernach kann man die drei mittleren Refractionscoefficienten berechnen und erhält dann entsprechend (20) drei Gleichungen zur Bestimmung von  $x_1$ ,  $x_1'$  und  $x_1''$ . Führen wir für die mittleren Refractionscoefficienten in den drei Richtungen bezw. die Bezeichnungen (1·2), (2·3), (3·1) ein, so sind diese drei Gleichungen

$$(1 \cdot 2) = x_1 + \frac{1}{2} h_{12} x_1' + \frac{1}{6} h^2_{12} x_1'' \\ (2 \cdot 3) = x_1 + \frac{1}{2} (h_{12} + h_{13}) x_1' + \frac{1}{6} (h^2_{12} + h_{12} \cdot h_{13} + h^2_{13}) x_1'' \quad (22) \\ (3 \cdot 1) = x_1 + \frac{1}{2} h_{13} x_1' + \frac{1}{6} h^2_{13} x_1''$$

Diese drei Gleichungen (22) sind indessen nicht unabhängig von einander, wie man leicht sieht, indem man sie bezw. mit  $h_{12}$ ,  $h_{23}$  und  $h_{31}$  multiplicirt und addirt.

Es findet sich

$$(1 \cdot 2) h_{12} + (2 \cdot 3) h_{23} + (3 \cdot 1) h_{31} = 0 \quad (23)$$

Dieser Gleichung müssen die aus den Messungen gefundenen Werthe genügen, es muss also eine Ausgleichung erfolgen.

Um die drei Unbekannten  $x_1$ ,  $x_1'$  und  $x_1''$  bestimmen zu können, muss man die Gleichung

$$h_{12} + h_{23} + h_{31} = 0 \quad (24)$$

zu Hülfe nehmen. Sind die  $x$  berechnet, so benutzen wir zur Berechnung der Höhenunterschiede die Gleichung (3) in Verbindung mit (4)

$$h_{12} = s_m \left( 1 + \frac{\gamma^2}{12} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{z_{21} - z_{12}}{2} + \frac{k_{21} - k_{12}}{4} \gamma \right)$$

oder auch

$$h_{12} = s_m \left( 1 + \frac{\gamma^2}{12} \right) \operatorname{tg} \frac{z_{21} - z_{12}}{2} + \frac{k_{21} - k_{12}}{4} \frac{s^2_m}{\rho_{12}} \sec^2 \frac{z_{21} - z_{12}}{2}$$

und nach (19)

$$h_{12} = s_m \left( 1 + \frac{\gamma^2}{12} \right) \operatorname{tg} \frac{z_{21} - z_{12}}{2} + \frac{x_2 - x_1}{12} \frac{s^2_m}{\rho_{12}} \sec^2 \frac{z_{21} - z_{12}}{2} \quad (25)$$

### III.

Die Beobachtungen, auf die sich die folgenden Rechnungen beziehen, hat von Bauernfeind im August 1881 auf den drei Punkten Höhensteig, Irschenberg und Kampenwand in den bayrischen Alpen ausführen lassen. In dem geometrischen Nivellement, durch das die drei Punkte verbunden wurden, zeigte sich bei einer Wiederholung 1889 ein grober Fehler,



der in dem „Nachtrag zu Mittheilung II und III“ 1891 Seite 450 veröffentlicht ist. Hiernach sind die geographischen Breiten und die geometrisch nivellirten Höhen der drei Punkte

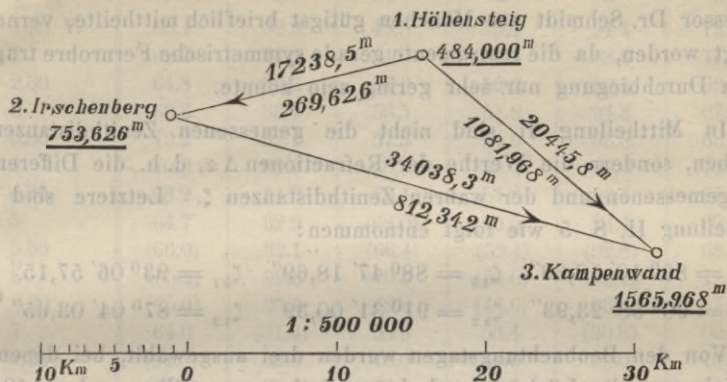


Fig. 3.

- |                |             |            |      |
|----------------|-------------|------------|------|
| 1. Höhensteig  | 47° 52' 00" | 484,000 m  |      |
| 2. Irschenberg | 47° 49' 47" | 753,626 m  | (26) |
| 3. Kampenwand  | 47° 45' 18" | 1565,968 m |      |

Aus den rechtwinkligen Coordinaten\*) finden sich folgende neu berechnete Werthe, die zum Theil mit den Angaben in Mittheilung II (S. 7—10) in Folge eines dort vorgekommenen Versehens nicht übereinstimmen, wohl aber mit Helmert, Höhere Geodäsie II, S. 602.

Richtung	Höh. — Irsch.	Irsch. — Kamp.	Kamp. — Höh.
Mittl. Azim.	76° 13' 59"	284° 09' 02"	127° 25' 06"
log $\rho$	6,805367	6,805362	6,804955
log $s_0$	4,2364985	4,5319674	4,3106040
log $s_m$	4,2365406	4,5320463	4,3106737
$\gamma$	556,52"	1099,08"	660,80"

Die Krümmungsradien sind aus Bremicker, Studien über höhere Geodäsie S. 74 entnommen.

Nachträglich sind auch die Lothabweichungen in den drei Punkten bekannt geworden. Sie betragen in den beobachteten Richtungen\*\*)

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= +0,89'' & \lambda_{2,3} &= +1,82'' & \lambda_{3,1} &= +8,74'' \\ \lambda_{2,1} &= +5,74'' & \lambda_{3,2} &= +4,27'' & \lambda_{1,3} &= -5,08'' \end{aligned} \quad (28)$$

Hierbei sind die Lothabweichungen des nördlichen Frauenturms in München\*\*\*) gleich Null angenommen worden. Die Beträge (28) sind

\*) Mittheilung II, S. 7.

\*\*) Nachtrag zu Mitth. II u. III, S. 452.

\*\*\*) Carl Oertel, Astronomische Bestimmung der Polhöhen auf den Punkten Irsch. Höh. und Kamp. München 1885, S. 61. In der kürzlich erschienenen Publication der bayerischen Commission für die internationale Erdmessung „Astronomisch-geodätische Arbeiten“ Heft 2, sind die definitiven Werthe der Lothabweichungen veröffentlicht worden. In den vorliegenden Berechnungen konnten dieselben jedoch noch nicht benutzt werden. Vergl. die Fussnote S. 132.

mit den vorstehenden Vorzeichen direct zu den gemessenen Zenithdistanzen hinzuzufügen, um ellipsoidische Zenithdistanzen zu geben.

Die Fernrohrbiegung ist bei den vorliegenden Messungen, wie Herr Professor Dr. Schmidt aus München gütigst brieflich mittheilte, vernachlässigt worden, da die Instrumente gerade symmetrische Fernrohre trugen, deren Durchbiegung nur sehr gering sein konnte.

In Mittheilung II sind nicht die gemessenen Zenithdistanzen  $z'$  gegeben, sondern die Werthe der Refractionen  $\Delta z$ , d. h. die Differenzen der gemessenen und der wahren Zenithdistanzen  $z$ . Letztere sind aus Mittheilung II, S. 5 wie folgt entnommen:

$$\begin{aligned} z'_{12} &= 89^{\circ} 10' 52,69'' & z'_{23} &= 88^{\circ} 47' 18,69'' & z'_{31} &= 93^{\circ} 06' 57,15'' \\ z'_{21} &= 90^{\circ} 58' 23,93'' & z'_{32} &= 91^{\circ} 31' 00,39'' & z'_{13} &= 87^{\circ} 04' 03,65'' \end{aligned} \quad (29)$$

Von den Beobachtungstagen wurden drei ausgewählt, bei denen es möglich war, die Lücken durch Interpolation auszufüllen und so 48 auf einanderfolgende Beobachtungen zu erhalten. Es sind dies die Beobachtungen vom

19. Aug. 1<sup>h</sup> 30 Vm. bis 20. Aug. 1<sup>h</sup> Vm.

22. „ 9<sup>h</sup> „ „ 23. „ 8<sup>h</sup> 30 „

25. „ 7<sup>h</sup> 30 „ „ 26. „ 7<sup>h</sup> „

Die Werthe der beobachteten Refractionen sind auf S. 123—125 dargestellt, wobei die durch Interpolation gefundenen Zahlen eingeklammert sind.

Aus diesen Beobachtungsreihen wurden Tagesmittel und schliesslich noch das Mittel aller drei Tage gebildet. Die gefundenen Werthe sind

	19. Aug.	22. Aug.	25. Aug.	Mittel.
$\Delta z_{12}$	0' 58,73''	1' 00,56''	1' 04,52''	1' 01,27''
$\Delta z_{21}$	0 52,23	0 52,65	0 55,56	0 53,48
$\Delta z_{23}$	1 35,65	1 35,74	1 38,24	1 36,54 (30)
$\Delta z_{32}$	1 11,80	1 13,47	1 10,83	1 12,03
$\Delta z_{31}$	0 34,37	0 35,88	0 35,28	0 35,18
$\Delta z_{13}$	1 12,67	1 15,12	1 23,10	1 16,96

Indem man die Refractionen (30) von den wahren Zenithdistanzen (29) subtrahirt, erhält man die gemessenen Zenithdistanzen, und wenn man zu diesen die Lothabweichungen (28) hinzufügt, so findet man die auf das Referenzellipsoid reducirten Zenithdistanzen.

Die Höhenunterschiede  $h_{12}$ ,  $h_{23}$  und  $h_{31}$  verhalten sich fast genau wie 1 : 3 : — 4, es können deshalb die Gleichungen (22) für den Gebrauch sehr vereinfacht werden. Setzen wir

$$a_1 = \frac{1}{2} h_{12} \dot{x}_1, \quad b_1 = \frac{1}{6} h_{12}^2 \dot{x}_1',$$



19. August 1<sup>h</sup> 30<sup>m</sup> Vm. bis 20. August 1<sup>h</sup> Vm.

Stunde	H—K	K—H	H—J	J—H	J—K	K—J
h. m.	"	"	"	"	"	"
1.30 V.	68.1	32.9	45.8	53.4	94.4	73.4
2	62.7	34.3	51.5	51.3	88.6	71.6
2.30	64.8	33.6	57.3	52.2	92.6	69.7
3	69.3	33.1	53.5	51.9	94.3	67.7
3.30	72.2	33.1	57.5	54.5	93.8	68.8
4	70.9	32.7	60.8	55.4	95.0	71.7
4.30	63.2	34.9	75.1	54.3	90.5	67.7
5	64.7	32.9	(68.0)	59.5	94.4	69.1
5.30	(66.0)	32.1	(66.4)	(52.4)	(92.8)	68.2
6	(65.2)	32.3	70.5	(51.0)	(92.4)	71.7
6.30	(65.0)	30.4	62.8	(48.6)	93.6	67.3
7	64.0	(31.6)	58.3	50.4	(90.8)	69.1
7.30	(64.0)	32.6	48.0	40.9	90.0	70.4
8	(63.7)	29.6	46.5	35.5	88.4	70.7
8.30	60.2	(31.5)	42.7	34.6	84.7	68.8
9	61.4	32.4	35.9	36.8	90.5	67.2
9.30	60.9	32.7	44.6	38.3	83.5	(68.5)
10	61.9	29.5	43.5	37.5	87.9	66.8
10.30	61.9	30.0	46.8	37.4	85.8	66.2
11	62.7	31.4	44.1	37.2	89.0	67.5
11.30	63.9	(31.9)	43.5	34.7	88.0	71.0
12	66.3	32.5	44.8	37.4	88.4	70.6
12.30 N.	64.1	(32.0)	41.1	38.4	85.7	(69.5)
1	63.7	29.9	43.4	37.8	88.0	71.2
1.30	60.9	34.2	42.6	43.2	87.6	71.2
2	59.9	(32.9)	44.2	39.6	88.1	70.8
2.30	61.1	33.6	45.4	40.4	87.1	(71.6)
3	62.1	32.8	44.9	40.8	89.8	(71.8)
3.30	65.5	33.9	44.8	39.5	83.1	(72.5)
4	66.1	32.4	38.5	38.0	89.6	74.2
4.30	66.8	33.7	45.0	35.4	90.0	72.6
5	66.9	(34.5)	51.5	41.4	94.9	(73.8)
5.30	64.9	35.9	49.9	39.7	95.3	(74.1)
6	69.5	(36.0)	49.5	41.6	(98.8)	(74.4)
6.30	75.5	(36.3)	60.3	(48.8)	101.4	(74.9)
7	86.5	(36.9)	68.5	46.5	(104.6)	(75.0)
7.30	87.2	(37.3)	68.8	56.6	107.8	(75.3)
8	90.4	41.0	79.3	60.9	106.4	76.5
8.30	84.8	38.7	75.0	64.7	115.9	78.4
9	96.6	36.2	74.5	67.0	115.1	77.2
9.30	96.6	37.9	78.6	74.8	123.0	72.1
10	94.7	38.3	76.2	(80.5)	112.1	74.1
10.30	95.0	39.2	79.5	(85.0)	103.1	75.6
11	105.3	38.6	84.3	(88.0)	110.9	71.2
11.30	(98.8)	36.8	78.5	(88.0)	118.5	71.6
12	100.4	44.4	91.0	(86.0)	109.8	72.7
12.30 V.	92.5	38.4	90.7	88.4	97.4	77.1
1	94.5	40.0	(88.6)	73.4	97.6	79.3
Mittel	72.67	34.37	58.73	52.23	95.65	71.80

22. August 9<sup>h</sup> Vm. bis 23. August 8<sup>h</sup> 30<sup>m</sup> Vm.

Stunde	H—K	K—H	H—J	J—H	J—K	K—J
h. m.	"	"	"	"	"	"
9	68.8	29.5	48.9	41.3	88.2	(71.3)
9.30	(65.0)	35.5	44.9	34.0	86.4	70.8
10	61.1	32.8	46.2	36.1	85.4	72.3
10.30	63.6	33.3	44.7	36.3	86.2	72.8
11	68.7	34.3	43.0	35.6	85.6	71.2
11.30	59.0	30.7	46.7	40.0	86.0	70.7
12	60.2	33.2	41.8	39.0	85.6	70.5
12.30 N.	63.4	(32.7)	46.5	42.2	76.6	(70.3)
1	61.5	33.0	49.4	34.9	87.4	69.8
1.30	60.1	34.4	38.9	39.0	(85.4)	71.1
2	(61.0)	32.4	40.7	32.7	87.2	68.0
2.30	(61.2)	33.5	42.8	35.9	85.4	67.0
3	(61.7)	(31.8)	44.7	34.8	(85.6)	71.0
3.30	60.4	31.2	51.8	28.5	87.1	69.1
4	67.9	27.9	54.9	34.5	85.6	70.3
4.30	65.8	27.9	45.9	38.5	85.8	67.3
5	65.1	31.8	51.3	(37.5)	84.9	68.6
5.30	70.2	31.6	(51.8)	36.6	84.0	71.7
6	67.4	30.3	45.6	41.2	83.0	(70.1)
6.30	63.7	30.2	54.4	44.5	87.8	69.1
7	(73.1)	(35.0)	56.1	44.9	86.7	(70.5)
7.30	81.9	(36.2)	58.8	41.7	97.1	69.6
8	82.1	35.9	65.8	48.1	99.4	71.2
8.30	78.3	39.0	60.7	49.2	98.1	(74.4)
9	83.4	37.9	57.9	46.0	94.1	74.7
9.30	(85.9)	(41.4)	(65.8)	54.7	109.8	77.4
10	(87.9)	39.5	(67.7)	67.0	112.3	86.3
10.30	(88.9)	45.5	77.5	59.2	113.8	87.8
11	87.8	42.8	72.2	75.2	119.8	88.9
11.30	93.2	43.7	67.7	64.7	118.4	97.1
12	93.1	(44.5)	67.8	(69.3)	122.7	101.3
12.30 V.	93.5	(44.3)	65.6	(70.8)	137.1	92.4
1	(89.1)	43.9	87.2	74.6	131.3	80.8
1.30	84.0	46.1	75.5	(73.2)	101.3	74.5
2	90.6	39.0	(80.6)	(73.6)	96.8	74.1
2.30	(85.7)	40.9	(80.9)	(73.8)	102.5	(73.2)
3	(84.0)	37.2	(80.5)	67.4	(101.2)	76.3
3.30	83.8	(40.6)	77.6	64.6	104.4	(70.2)
4	77.1	42.7	79.0	70.6	(96.3)	69.8
4.30	81.2	41.6	(76.8)	61.6	98.0	70.1
5	77.8	36.7	(74.8)	67.4	86.8	67.2
5.30	(78.7)	34.1	(73.4)	62.0	98.8	68.2
6	77.8	33.6	(71.6)	(67.8)	94.6	69.6
6.30	(77.8)	32.6	(69.4)	68.1	96.5	66.0
7	81.6	29.9	(67.7)	78.9	96.4	68.1
7.30	76.2	33.8	(65.6)	69.5	94.0	68.6
8	78.0	32.6	72.5	64.9	88.5	66.5
8.30	77.3	33.0	55.4	55.2	89.8	68.6
Mittel	75.12	35.88	60.56	52.65	95.74	73.47



25. August 7<sup>h</sup> 30<sup>m</sup> Vm. bis 26. August 7<sup>h</sup> Vm.

Stunde	H—K	K—H	H—J	J—H	J—K	K—J
h. m.	"	"	"	"	"	"
7.30 V.	79.2	32.0	55.9	50.1	92.4	67.8
8	70.5	31.9	(54.5)	44.8	91.9	68.7
8.30	72.4	28.5	54.1	44.0	90.0	66.5
9	70.5	33.6	54.9	41.1	90.6	61.9
9.30	68.3	31.9	54.6	43.2	91.8	78.1
10	68.6	30.1	49.9	38.8	89.7	66.2
10.30	68.2	29.5	49.6	39.4	84.8	67.4
11	66.8	31.8	45.6	36.4	81.5	65.6
11.30	70.0	29.8	33.4	(37.8)	(83.2)	66.1
12	66.0	28.9	43.5	40.8	82.8	66.3
12.30 N.	68.5	32.3	(42.7)	40.6	(82.7)	(66.9)
1	66.0	29.6	(42.7)	37.6	(83.1)	(66.6)
1.30	65.3	31.7	(42.5)	40.6	84.9	66.4
2	(65.7)	32.6	43.8	40.7	84.1	69.6
2.30	66.0	30.9	(43.2)	36.9	84.1	72.7
3	(66.4)	32.1	(43.9)	37.1	(85.4)	68.3
3.30	67.9	31.3	51.4	39.8	85.4	65.6
4	66.1	30.7	42.7	33.0	90.8	64.3
4.30	67.6	32.0	44.9	37.2	86.9	(67.1)
5	74.2	33.6	(50.3)	39.0	(89.8)	(67.5)
5.30	72.7	33.3	46.3	38.7	(91.0)	(68.1)
6	(75.2)	33.7	51.1	46.1	(92.9)	(68.3)
6.30	75.8	(34.0)	55.1	43.5	92.9	(69.0)
7	80.9	35.2	(59.7)	47.9	97.2	71.7
7.30	83.6	37.0	72.9	51.1	95.3	73.0
8	90.8	36.0	62.1	53.7	97.8	73.9
8.30	90.8	38.0	61.1	51.1	105.5	74.3
9	(89.1)	38.0	(74.0)	(59.9)	98.8	72.3
9.30	91.9	35.5	80.2	58.9	98.9	78.5
10	94.8	39.2	86.6	71.7	104.9	74.1
10.30	90.3	39.5	(82.7)	73.2	107.2	71.6
11	91.6	39.0	(84.7)	84.0	114.2	77.1
11.30	96.9	40.8	82.3	97.5	115.5	77.0
12	(98.6)	38.1	(88.7)	101.7	112.0	78.5
12.30 V.	102.5	48.7	82.5	96.4	112.2	79.5
1	(100.9)	46.9	(89.7)	83.7	117.3	83.2
1.30	108.3	(40.8)	93.8	85.7	122.6	77.0
2	(102.1)	41.3	(89.7)	75.5	120.8	75.9
2.30	94.2	41.2	85.4	79.0	108.5	74.3
3	(102.1)	37.7	(88.1)	(72.1)	110.5	73.5
3.30	97.7	40.3	88.8	(69.1)	(113.7)	70.3
4	(101.1)	37.8	(85.3)	(66.6)	107.2	71.1
4.30	107.3	38.0	(82.9)	(65.0)	(111.2)	68.3
5	(98.1)	37.3	(80.8)	67.0	110.7	70.2
5.30	(96.7)	35.6	(78.6)	(60.0)	(108.1)	70.5
6	(94.4)	33.9	(76.0)	(58.2)	(105.4)	68.3
6.30	(92.1)	36.4	(73.0)	(56.3)	105.7	70.1
7	93.9	35.5	(70.8)	(54.5)	101.7	70.6
Mittel	83.10	35.28	64.52	55.56	98.24	70.83

$$\begin{aligned} \text{so ist} \quad (1 \cdot 2) &= x_1 + a_1 + b_1 \\ (2 \cdot 3) &= x_1 + 5a_1 + 21b_1 \\ (3 \cdot 1) &= x_1 + 4a_1 + 16b_1 \end{aligned} \quad (31)$$

Für den 19. August hat man demnach folgende Berechnung:

### 19. August.

Aus (30) (29) und (28) erhält man die gemessenen und auf das Referenzellipsoid reducirten Zenithdistanzen

$$\begin{array}{r} z_{12} = z'_{12} - \Delta z_{12} + \lambda_{12} \\ \begin{array}{r} z'_{12} = 89^\circ 10' 52,69'' \\ - \Delta z_{12} = - \quad 58,73'' \\ \hline z'_{12} = 89^\circ 09' 53,96'' \\ + \lambda_{12} = + \quad 0,89'' \\ \hline z_{12} = 89^\circ 09' 54,85'' \end{array} \quad \begin{array}{r} z_{23} = 88^\circ 47' 18,69'' \\ - \Delta z_{12} = - \quad 1' 35,65'' \\ \hline z'_{23} = 88^\circ 45' 43,04'' \\ + \lambda_{23} = + \quad 1,82'' \\ \hline z_{23} = 88^\circ 45' 44,86'' \end{array} \\ \begin{array}{r} z'_{31} = 93^\circ 06' 57,15'' \\ \Delta z_{31} = - \quad 34,37'' \\ \hline z'_{31} = 93^\circ 06' 22,78'' \\ \lambda_{31} = + \quad 8,74 \\ \hline z_{31} = 93^\circ 06' 31,52'' \end{array} \quad \begin{array}{r} z'_{21} = 90^\circ 58' 23,93'' \\ - \Delta z_{21} = - \quad 52,23'' \\ \hline z'_{21} = 90^\circ 57' 31,70'' \\ + \lambda_{21} = + \quad 5,74'' \\ \hline z_{21} = 90^\circ 57' 37,44'' \end{array} \\ \begin{array}{r} z'_{32} = 91^\circ 31' 00,39'' \\ \Delta z_{32} = - \quad 1' 11,80'' \\ \hline z'_{32} = 91^\circ 29' 48,59'' \\ + \lambda_{32} = + \quad 4,27'' \\ \hline z_{32} = 91^\circ 29' 52,86'' \end{array} \quad \begin{array}{r} z_{13} = 87^\circ 04' 03,65'' \\ \Delta z_{13} = - \quad 1' 12,67'' \\ \hline z'_{13} = 87^\circ 02' 50,98'' \\ + \lambda_{13} = - \quad 5,08'' \\ \hline z_{13} = 87^\circ 02' 45,90'' \end{array} \\ \frac{z_{21} - z_{12}}{2} = +0^\circ 53' 51,30'' \quad \lg(s_m)_{12} = 4,2365406 \quad \gamma_{12} = 556,52'' \\ \frac{z_{32} - z_{23}}{2} = +1^\circ 22' 04,00'' \quad \lg(s_m)_{23} = 4,5320463 \quad \gamma_{23} = 1099,08'' \quad (32) \\ \frac{z_{13} - z_{31}}{2} = -3^\circ 01' 52,81'' \quad \lg(s_m)_{31} = 4,3106737 \quad \gamma_{31} = 660,80'' \end{array}$$

Nach (21) haben wir

$$\frac{k_{12} + k_{21}}{2} \gamma_{12} = (1 \cdot 2) \gamma = \gamma - (z_{12} + z_{21} - 180^\circ)$$

also wird mit obigen Zahlenwerthen

$$\begin{array}{ll} (1 \cdot 2) \gamma_{12} = 104,33'' & (1 \cdot 2) = 0,1874 + v_1 \\ (2 \cdot 3) \gamma_{23} = 161,36'' & \text{oder} \quad (2 \cdot 3) = 0,1468 + v_2 \\ (3 \cdot 1) \gamma_{31} = 103,38'' & (3 \cdot 1) = 0,1564 + v_3 \end{array}$$

wo  $v_1, v_2, v_3$  Verbesserungen des mittleren Refractionscoefficienten sind, die sich durch die Bedingungsgleichung

$$h_{12}(1 \cdot 2) + h_{23}(2 \cdot 3) + h_{31}(3 \cdot 1) = 0$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen lassen. Die Ausgleichung giebt



$$v_1 = -0,0001 \quad v_2 = -0,0003 \quad v_3 = +0,0003$$

also

$$(1 \cdot 2) = 0,1873 \quad (2 \cdot 3) = 0,1465 \quad (3 \cdot 1) = 0,1567$$

Mit diesen mittleren Refractionscoefficienten stellen wir nun die Gleichungen (31) auf mit den schon vorher eingeführten Abkürzungen

$$a_1 = \frac{1}{2} h_{12} x'_1 \quad b_1 = \frac{1}{2} h_{12}^2 x''_1$$

$$0,1873 = x_1 + a_1 + b_1$$

$$0,1465 = x_1 + 5 a_1 + 21 b_1$$

$$0,1567 = x_1 + 4 a_1 + 16 b_1$$

Aus den ersten beiden Gleichungen finden wir

$$x_1 = + \frac{5}{4} (1 \cdot 2) - \frac{1}{4} (2 \cdot 3) + 4 b_1 = + 0,1974 + 4 b_1$$

$$a_1 = - \frac{1}{4} (1 \cdot 2) + \frac{1}{4} (2 \cdot 3) - 5 b_1 = - 0,0102 - 5 b_1$$

Ferner hat man entsprechend (17)

$$x_2 = x_1 + h_{12} x'_1 + \frac{1}{2} h_{12}^2 x''_1 = x_1 + 2 a_1 + 3 b_1$$

$$x_3 = x_1 + h_{13} x'_1 + \frac{1}{2} h_{13}^2 x''_1 = x_1 + 8 a_1 + 48 b_1$$

$$x_2 = + 0,1770 - 3 b_1 \quad x_3 = + 0,1185 + 12 b_1$$

$$x_2 - x_1 = - 0,0204 - 7 b_1$$

$$x_3 - x_2 = - 0,0585 + 15 b_1 \quad (33)$$

$$x_1 - x_3 = + 0,0789 - 8 b_1$$

Die Werthe (32) und (33) setzen wir nun in (25) ein:

$$h_{12} = s_m \left( 1 + \frac{\gamma^2}{12} \right) \operatorname{tg} \frac{z_{21} - z_{12}}{2} + \frac{x_2 - x_1}{12} \frac{s^2}{\rho_{12}^2} \sec^2 \frac{z_{21} - z_{12}}{2} \quad (25)$$

$$h_{12} = + 270,10 - 0,08 - 27 b_1 = + 270,02 - 27 b_1$$

$$h_{23} = + 812,87 - 0,89 + 227 b_1 = + 811,98 + 227 b_1$$

$$h_{31} = - 1082,91 + 0,43 - 44 b_1 = - 1082,48 - 44 b_1$$

Aus der Bedingung  $h_{12} + h_{23} + h_{31} = 0$  findet sich

$$b_1 = + 0,00307$$

also

$$h_{12} = + 269,94 \quad \delta_1 = - 0,31$$

$$h_{23} = + 812,68 \quad \delta_2 = - 0,34$$

$$h_{31} = - 1082,62 \quad \delta_3 = + 0,65 \quad (34)$$

Die  $\delta$  bezeichnen die Abweichungen der gefundenen Höhenunterschiede von den Resultaten des geometrischen Nivellements.

Mit dem gefundenen  $b_1$  können auch noch die Differentialquotienten von  $x_1$  und dieses selbst berechnet werden. Es ergibt sich

$$x_1 = + 0,2097 \quad x'_1 = - 0,0001889 \quad x''_1 = + 0,000002527$$

In derselben Weise ist die Berechnung für die übrigen Beobachtungstage durchgeführt worden.

## 22. August.

## Berechnung der ellipsoidischen Zenithdistanzen.

$$\begin{array}{r} \zeta_{12} = 89^{\circ} 10' 52,69'' \\ - \Delta z_{12} = - 1' 00,56'' \\ \hline z'_{12} = 89^{\circ} 09' 52,13'' \\ + \lambda_{12} = + 0,89'' \\ \hline z_{12} = 89^{\circ} 09' 53,02'' \end{array} \quad \begin{array}{r} \zeta_{23} = 88^{\circ} 47' 18,69'' \\ - \Delta z_{23} = - 1' 35,74'' \\ \hline z'_{23} = 88^{\circ} 15' 42,95'' \\ + \lambda_{23} = + 1,82'' \\ \hline z_{23} = 88^{\circ} 45' 44,77'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \zeta_{31} = 93^{\circ} 06' 57,15'' \\ - \Delta z_{31} = - 0' 35,88'' \\ \hline z'_{31} = 93^{\circ} 06' 21,27'' \\ + \lambda_{31} = + 8,74'' \\ \hline z_{31} = 93^{\circ} 06' 30,01'' \end{array} \quad \begin{array}{r} \zeta_{21} = 90^{\circ} 58' 23,93'' \\ - \Delta z_{21} = - 52,65'' \\ \hline z'_{21} = 90^{\circ} 57' 31,28'' \\ + \lambda_{21} = + 5,74'' \\ \hline z_{21} = 90^{\circ} 57' 37,02'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \zeta_{32} = 91^{\circ} 31' 0,39'' \\ - \Delta z_{32} = - 1' 13,47'' \\ \hline z'_{32} = 91^{\circ} 29' 46,92'' \\ + \lambda_{32} = + 4,27'' \\ \hline z_{32} = 91^{\circ} 29' 51,19'' \end{array} \quad \begin{array}{r} \zeta_{13} = 87^{\circ} 04' 03,65'' \\ - \Delta z_{13} = - 1' 15,12'' \\ \hline z'_{13} = 87^{\circ} 02' 48,53'' \\ + \lambda_{13} = - 5,08'' \\ \hline z_{13} = 87^{\circ} 02' 43,45'' \end{array}$$

$$\frac{z_{21} - z_{12}}{2} = + 0^{\circ} 53' 52,00'' \quad (1 \cdot 2) \gamma_{12} = 106,58''$$

$$\frac{z_{32} - z_{23}}{2} = + 1^{\circ} 22' 03,21'' \quad (2 \cdot 3) \gamma_{23} = 163,12''$$

$$\frac{z_{13} - z_{31}}{2} = - 3^{\circ} 01' 53,28'' \quad (3 \cdot 1) \gamma_{31} = 107,34''$$

## Berechnung der Refraktionscoefficienten.

$$(1 \cdot 2) = 0,1915 + v_1 \quad v_1 = + 0,0005 \quad (1 \cdot 2) = 0,1920$$

$$(2 \cdot 3) = 0,1484 + v_2 \quad v_2 = + 0,0015 \quad (2 \cdot 3) = 0,1499$$

$$(3 \cdot 1) = 0,1624 + v_3 \quad v_3 = - 0,0020 \quad (3 \cdot 1) = 0,1604$$

$$0,1920 = x_1 + a_1 + b_1$$

$$0,1499 = x_1 + 5 a_1 + 21 b_1$$

$$0,1604 = x_1 + 4 a_1 + 16 b_1$$

$$x_1 = + \frac{5}{4} (1 \cdot 2) - \frac{1}{4} (2 \cdot 3) + 4 b_1 = + 0,2025 + 4 b_1$$

$$a_1 = - \frac{1}{4} (1 \cdot 2) + \frac{1}{4} (2 \cdot 3) - 5 b_1 = - 0,0105 - 5 b_1$$

$$x_2 = x_1 + 2 a_1 + 3 b_1 = + 0,1815 - 3 b_1$$

$$x_3 = x_1 + 8 a_1 + 48 b_1 = + 0,1185 + 12 b_1$$

$$x_2 - x_1 = - 0,0210 - 7 b_1$$

$$x_3 - x_2 = - 0,0630 + 15 b_1$$

$$x_1 - x_3 = + 0,0840 - 8 b_1$$



Berechnung der Höhenunterschiede.

$$\begin{aligned}
 h_{12} &= + 270,16 - 0,08 - 27 b_1 \\
 h_{23} &= + 812,74 - 0,95 + 227 b_1 & b_1 &= + 0,00397 \\
 h_{31} &= - 1082,95 + 0,46 - 44 b_1 \\
 h_{12} &= + 269,97 & \delta_1 &= - 0,34 \\
 h_{23} &= + 812,69 & \delta_2 &= - 0,35 \\
 h_{31} &= - 1082,66 & \delta_3 &= + 0,69 \\
 x_1 &= + 0,2184 & x_1' &= - 0,0002250 \\
 x_1'' &= + 0,000\ 000\ 3267
 \end{aligned} \tag{35}$$

25. August.

Berechnung der ellipsoidischen Zenithdistanzen.

$$\begin{array}{r}
 \zeta_{12} = 89^\circ 10' 52,69'' \\
 - \Delta z_{12} = - 1' 04,52'' \\
 \hline
 z'_{12} = 89^\circ 09' 48,17'' \\
 + \lambda_{12} = + 0,89'' \\
 \hline
 z_{12} = 89^\circ 09' 49,06'' \\
 \zeta_{31} = 93^\circ 06' 57,15'' \\
 - \Delta z_{31} = - 35,28'' \\
 \hline
 z'_{31} = 93^\circ 06' 21,87'' \\
 + \lambda_{31} = + 8,74'' \\
 \hline
 z_{31} = 93^\circ 06' 30,61'' \\
 \zeta_{32} = 91^\circ 31' 0,39'' \\
 - \Delta z_{32} = - 1' 10,83'' \\
 \hline
 z'_{32} = 91^\circ 29' 49,56'' \\
 + \lambda_{32} = + 4,27'' \\
 \hline
 z_{32} = 91^\circ 29' 53,83'' \\
 \zeta_{23} = 88^\circ 47' 18,69'' \\
 - \Delta z_{23} = - 1' 38,24'' \\
 \hline
 z'_{23} = 88^\circ 45' 40,45'' \\
 + \lambda_{23} = + 1,82'' \\
 \hline
 z_{23} = 88^\circ 45' 42,27'' \\
 \zeta_{21} = 90^\circ 58' 23,93'' \\
 - \Delta z_{21} = - 55,56'' \\
 \hline
 z'_{21} = 90^\circ 57' 28,37'' \\
 + \lambda_{21} = + 5,74'' \\
 \hline
 z_{21} = 90^\circ 57' 34,11'' \\
 \zeta_{13} = 87^\circ 04' 03,65'' \\
 - \Delta z_{13} = - 1' 23,10'' \\
 \hline
 z'_{13} = 87^\circ 02' 40,55'' \\
 + \lambda_{13} = - 5,08'' \\
 \hline
 z_{13} = 87^\circ 02' 35,47'' \\
 \frac{z_{21} - z_{12}}{2} = + 0^\circ 53' 52,52'' & (1 \cdot 2) \gamma_{12} = 113,45' \\
 \frac{z_{32} - z_{23}}{2} = + 1^\circ 21' 05,78'' & (2 \cdot 3) \gamma_{23} = 162,98' \\
 \frac{z_{13} - z_{31}}{2} = + 3^\circ 01' 57,57'' & (3 \cdot 1) \gamma_{31} = 114,72'
 \end{array}$$

Berechnung der Refraktionscoefficienten.

$$\begin{aligned}
 (1 \cdot 2) &= 0,2038 + v_1 & v_1 &= + 0,0018 & (1 \cdot 2) &= 0,2056 \\
 (2 \cdot 3) &= 0,1483 + v_2 & v_2 &= + 0,0053 & (2 \cdot 2) &= 0,1563 \\
 (3 \cdot 1) &= 0,1736 + v_3 & v_3 &= - 0,0070 & (3 \cdot 1) &= 0,1666
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0,2056 &= x_1 + a_1 + b_1 \\
 0,1563 &= x_1 + 5 a_1 + 21 b_1 \\
 0,1666 &= x_1 + 4 a_1 + 15 b_1 \\
 x_1 &= + \frac{5}{4} (1 \cdot 2) - \frac{1}{4} (2 \cdot 3) + 4 b_1 = + 0,2570 + 4 b_1
 \end{aligned}$$

$$a_1 = -\frac{1}{4}(1 \cdot 2) + \frac{1}{4}(2 \cdot 3) - 5 b_1 = -0,0130 - 5 b_1$$

$$x_2 = x_1 + 2 a_1 + 3 b_1 = +0,2310 - 3 b_1$$

$$x_3 = x_1 + 8 a_1 + 48 b_1 = +0,1530 + 12 b_1$$

$$x_2 - x_1 = -0,0360 - 7 b_1$$

$$x_3 - x_2 = -0,0780 + 15 b_1$$

$$x_1 - x_3 = +0,1040 - 8 b_1$$

Berechnung der Höhenunterschiede.

$$h_{12} = + 270,21 - 0,14 - 27 b_1$$

$$h_{23} = + 813,16 - 1,18 + 227 b_1 \quad b_1 = + 0,00487$$

$$h_{31} = - 1083,38 + 0,57 - 44 b_1$$

$$h_{12} = + 269,92 \quad \delta_1 = - 0,29$$

$$h_{23} = + 813,11 \quad \delta_2 = - 0,77$$

$$h_{31} = + 1083,03 \quad \delta_3 = + 1,06$$

$$x_1 = + 0,2765 \quad x'_1 = - 0,0002767$$

$$x_1'' = + 0,000\ 000\ 4008$$

(36)

### Mittel der drei Tage.

Ellipsoidische Zenithdistanzen (Mittel der 3 vorhergehenden Berechnungen).

$$z_{12} = 89^\circ 09' 52,31''$$

$$z_{21} = 90^\circ 57' 36,19''$$

$$z_{23} = 88^\circ 45' 43,97''$$

$$z_{32} = 91^\circ 29' 52,63''$$

$$z_{31} = 93^\circ 06' 30,71''$$

$$z_{13} = 87^\circ 02' 41,61''$$

$$\frac{z_{21} - z_{12}}{2} = + 0^\circ 53' 51,94'' \quad (1 \cdot 2) \gamma_{12} = 108,12''$$

$$\frac{z_{32} - z_{23}}{2} = + 1^\circ 22' 04,33'' \quad (2 \cdot 3) \gamma_{23} = 162,48''$$

$$\frac{z_{13} - z_{31}}{2} = - 3^\circ 01' 54,55'' \quad (3 \cdot 1) \gamma_{31} = 108,48''$$

Berechnung der Refraktionscoefficienten.

$$(1 \cdot 2) = 0,1942 + v_1 \quad v_1 = + 0,0007 \quad (1 \cdot 2) = 0,1949$$

$$(2 \cdot 3) = 0,1478 + v_2 \quad v_2 = + 0,0022 \quad (2 \cdot 3) = 0,1500$$

$$(3 \cdot 1) = 0,1642 + v_3 \quad v_3 = - 0,0030 \quad (3 \cdot 1) = 0,1612$$

$$0,1949 = x_1 + a_1 + b_1$$

$$0,1500 = x_1 + 5 a_1 + 21 b_1$$

$$0,1612 = x_1 + 4 a_1 + 16 b_1$$

$$x_1 = + \frac{5}{4}(1 \cdot 2) - \frac{1}{4}(2 \cdot 3) + 4 b_1 = + 0,2060 + 4 b_1$$

$$a_1 = - \frac{1}{4}(1 \cdot 2) + \frac{1}{4}(2 \cdot 3) - 5 b_1 = - 0,0112 - 5 b_1$$

$$x_2 = x_1 + 2 a_1 + 3 b_1 = + 0,1836 - 3 b_1$$

$$x_3 = x_1 + 8 a_1 + 48 b_1 = + 0,1164 + 12 b_1$$

$$x_2 - x_1 = - 0,0224 - 7 b_1$$

$$x_3 - x_2 = - 0,0672 + 15 b_1$$

$$x_1 - x_3 = + 0,0896 - 8 b_1$$



Berechnung der Höhenunterschiede.

$$h_{1,2} = + 270,16 - 0,09 - 27 b_1$$

$$h_{2,3} = + 812,93 - 1,02 + 227 b_1 \quad b_1 = + 0,00391$$

$$h_{3,1} = - 1083,08 + 0,49 - 44 b_1$$

$$h_{1,2} = + 269,96 \quad \delta_1 = - 0,33$$

$$h_{2,3} = + 812,80 \quad \delta_2 = - 0,46$$

$$h_{3,1} = + 1082,76 \quad \delta_3 = + 0,79 \quad (37)$$

$$x_1 = + 0,2216 \quad x'_1 = - 0,000 2278$$

$$x_1'' = + 0,000 000 3218$$

Die Resultate der beiden ersten Tage stimmen auffallend überein, die des dritten Tages weichen im Maximum um 0,4 m von jenen ab. Die Mittel (34), (35) und (36) stimmen fast genau mit (37) überein.

IV.

Es ist nun nach dem früher Gesagten nicht daran zu denken, diese ellipsoidischen Höhenunterschiede mit den Resultaten des geometrischen Nivellements zu vergleichen, die sich auf die Geoidoberfläche beziehen, jedoch auch noch nicht streng richtige Werthe der Höhenunterschiede geben. Es zeigen sich in der That Differenzen von mehr als 1 m.

Der Nullpunkt der Lothabweichungen, München, ist von den drei Punkten im Mittel etwa 50 km entfernt. Bei dieser Entfernung ist es in der Gebirgsgegend wahrscheinlich, dass das Referenzellipsoid sich an dieser Stelle dem Geoid nicht mehr nahe anschmiegt. Wir berechnen nach (1) aus (28) und den gegebenen\*) Lothabweichungen im Meridian diejenigen im ersten Vertical. Es findet sich

$$\xi_1 = - 5,44'' \quad \xi_2 = - 8,14'' \quad \xi_3 = - 12,92''$$

$$\tau_{11} = + 2,24'' \quad \tau_{12} = - 3,92'' \quad \tau_{13} = + 1,13'' \quad (38)$$

Wenn man das zu Grunde gelegte Referenzellipsoid ein wenig gegen die Geoidfläche neigt, so ist dies mit einer Aenderung sämtlicher  $\xi$  und  $\tau$  verbunden. Es lässt sich nun eine solche Lage des Ellipsoids finden, in der die Quadratsumme der Lothabweichungen ein Minimum wird. Wir fügen zu den Lothabweichungen kleine Verbesserungen  $\Delta$  hinzu und bestimmen diese  $\Delta$  so, dass

$$\Sigma \left\{ (\xi + \Delta \xi)^2 + (\tau + \Delta \tau)^2 \right\} \text{ ein Minimum wird.} \quad (39)$$

Nach Helmert, I S. 536 (9) ist

$$\Delta \xi_2 = \Delta \xi_1 \cos L_{1,2} + \Delta \tau_{11} \sin L_{1,2} \sin B_1$$

$$\Delta \tau_{12} = - \Delta \xi_1 \sin L_{1,2} \sin B_2 + \Delta \tau_{11} \left( \frac{\cos B_2}{\cos B_1} + \sin \frac{s_{1,2}}{a_0} \operatorname{tg} B_1 \cos \alpha_{2,1} \right) \quad (40)$$

wo  $L$  den Längenunterschied,  $B$  die geographische Breite,  $\alpha$  das Azimut,  $s$  die Entfernung, und  $a_0$  den Radius des Erdäquators darstellen.

\*) Dritte Mittheilung. S. 525.

Für den vorliegenden Fall erhalten wir durch Einsetzen der gegebenen Zahlenwerthe

$$\begin{aligned} \Delta \xi_1 &= x & \Delta \xi_2 &= x + 0,002 y & \Delta \xi_3 &= x - 0,002 y \\ \Delta \tau_{11} &= y & \Delta \tau_{12} &= -0,002 x + y \\ \Delta \tau_{13} &= +0,002 x + 1,004 y \end{aligned} \quad (41)$$

Setzt man dies in (39) ein und differentiirt nach  $x$  und  $y$ , so findet man zur Bestimmung derjenigen Werthe von  $x$  und  $y$ , die (39) zu einem Minimum machen

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 0,002 \tau_{12} + 0,002 \tau_{13} + 3x &= 0 \\ 0,002 \xi_2 - 0,002 \xi_3 + \tau_{11} + 1,001 \tau_{12} + 1,004 \tau_{13} + 3,009 y &= 0 \end{aligned}$$

und hieraus

$$x = +8,84'' \quad y = +0,18'' \quad (42)$$

Die Correctionen der Lothabweichungen werden dann

$$\begin{aligned} \Delta \xi_1 &= +8,84'' & \Delta \xi_2 &= +8,84'' & \Delta \xi_3 &= +8,84'' \\ \Delta \tau_{11} &= +0,18'' & \Delta \tau_{12} &= +0,16'' & \Delta \tau_{13} &= +0,20'' \end{aligned} \quad (43)$$

und die neuen Lothabweichungen selbst sind

$$\begin{aligned} \xi_1 &= +3,40'' & \xi_2 &= +0,70'' & \xi_3 &= +4,08'' \\ \tau_{11} &= +2,42'' & \tau_{12} &= -3,76'' & \tau_{13} &= +1,33'' \end{aligned} \quad (44)$$

Hieraus sind wieder die Lothabweichungen in den Richtungen der drei Visuren berechnet

$$\begin{aligned} \lambda'_{12} &= +3,16'' & \lambda'_{23} &= +3,82'' & \lambda'_{31} &= +3,54'' \\ \lambda'_{21} &= +3,48'' & \lambda'_{32} &= +2,29'' & \lambda'_{13} &= +0,15'' \end{aligned} \quad (45)$$

Benutzt man diese Lothabweichungen zur Berechnung der Höhenunterschiede, so lässt sich eine bessere Uebereinstimmung mit den Meereshöhen erwarten.\*) In (43) sind die  $\Delta \xi$  genau, die  $\Delta \tau$  fast genau einander gleich. Da in den mittleren Refractionscoefficienten nach (21) nur die Differenzen der  $\xi$  und  $\tau$  auftreten, so erhalten wir hier dieselben mittleren Refractionscoefficienten wie in III, wodurch die folgende Rechnung sehr vereinfacht ist.

## 19. August.

Die auf das neue Referenzellipsoid bezogenen Zenithdistanzen erhalten wir, indem wir zu den auf S. 126 berechneten  $z'$  die obenstehenden  $\lambda'$  addiren:

\*) Nach S. 175 der auf Seite 121 erwähnten Publication sind die endgültigen Werthe der Lothabweichungen

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -5,44'' & \xi_2 &= -8,14'' & \xi_3 &= -12,92'' \\ \tau_{11} &= +1,35'' & \tau_{12} &= -4,53'' & \tau_{13} &= +0,51'' \end{aligned}$$

Die  $\tau$  zeigen gegen die Werthe von (38) eine nahezu constante Differenz, die man sich also dem Obigen zufolge auch durch eine kleine Drehung des Referenzellipsoides gegen das Geoid entstanden denken kann. Es ist ersichtlich, dass die reducirten Lothabweichungen (45) und damit auch die folgenden Berechnungen durch diese Drehung nicht beeinflusst werden. Dass die Berechnungen in III hierdurch geändert werden, ist unwesentlich, da diese keine praktische Bedeutung haben.



$$\begin{aligned} z_{12} &= 89^{\circ} 09' 57,12'' & z_{21} &= 90^{\circ} 57' 35,18'' \\ z_{23} &= 88 45 46,86 & z_{32} &= 91 29 50,88 \\ z_{31} &= 93 06 26,32 & z_{13} &= 87 02 51,13 \end{aligned}$$

Refractionscoefficienten (von S. 127).

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= -0,0204 - 7 b_1 \\ x_3 - x_2 &= -0,0585 + 15 b_1 \\ x_1 - x_3 &= +0,0789 - 8 b_1 \end{aligned}$$

Höhenunterschiede.

$$\begin{aligned} h_{12} &= + 269,91 - 0,08 - 27 b_1 \\ h_{23} &= + 812,55 - 0,89 + 227 b_1 & b_1 &= + 0,003013 \\ h_{31} &= - 1082,39 + 0,43 - 44 b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{12} &= + 269,75 & \delta_1 &= - 0,12 \\ h_{23} &= + 812,34 & \delta_2 &= 0,0 \\ h_{31} &= - 1082,09 & \delta_3 &= + 0,12 \end{aligned} \quad (46)$$

## 22. August.

Ellipsoidische Zenithdistanzen (S. 128).

$$\begin{aligned} z_{12} &= 89^{\circ} 09' 55,29'' & z_{21} &= 90^{\circ} 57' 34,76'' \\ z_{23} &= 88 45 46,77 & z_{32} &= 91 29 49,21 \\ z_{31} &= 93 06 24,81 & z_{13} &= 87 02 48,68 \end{aligned}$$

Refractionscoefficienten (S. 128).

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= -0,0210 - 7 b_1 \\ x_3 - x_2 &= -0,0630 + 15 b_1 \\ x_1 - x_3 &= +0,0840 - 8 b_1 \end{aligned}$$

Höhenunterschiede.

$$\begin{aligned} h_{12} &= + 269,97 - 0,08 - 27 b_1 \\ h_{23} &= + 812,42 - 0,95 + 227 b_1 & b_1 &= + 0,0040 \\ h_{31} &= - 1082,44 + 0,46 - 44 b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{12} &= + 269,78 & \delta_1 &= - 0,15 \\ h_{23} &= + 812,38 & \delta_2 &= - 0,04 \\ h_{31} &= - 1082,16 & \delta_3 &= + 0,19 \end{aligned} \quad (47)$$

## 25. August.

Ellipsoidische Zenithdistanzen.

$$\begin{aligned} z_{12} &= 89^{\circ} 09' 51,33'' & z_{21} &= 90^{\circ} 57' 31,85'' \\ z_{23} &= 88 45 44,27 & z_{32} &= 91 29 51,85 \\ z_{31} &= 93 06 25,41 & z_{13} &= 87 02 40,70 \end{aligned}$$

Refractionscoefficienten (S. 129).

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= -0,0360 - 7 b_1 \\ x_3 - x_2 &= -0,0780 + 15 b_1 \\ x_1 - x_3 &= +0,1040 - 8 b_1 \end{aligned}$$

## Höhenunterschiede.

$$\begin{aligned}
 h_{12} &= + 270,00 - 0,14 = 27b_1 \\
 h_{23} &= + 812,83 - 1,18 + 227b_1 \quad b_1 = + 0,0050 \\
 h_{31} &= - 1082,86 + 0,57 - 44b_1 \\
 h_{12} &= + 269,72 \quad \delta_1 = - 0,09 \\
 h_{23} &= + 812,79 \quad \delta_2 = - 0,45 \\
 h_{31} &= - 1082,51 \quad \delta_3 = + 0,54
 \end{aligned} \tag{48}$$

## Mittel

## Ellipsoidische Zenithdistanzen (S. 130).

$$\begin{aligned}
 z_{12} &= 89^{\circ} 09' 54,58'' & z_{21} &= 90^{\circ} 57' 33,93'' \\
 z_{23} &= 88 45 45,97 & z_{32} &= 91 29 50,65 \\
 z_{31} &= 93 06 25,51 & z_{13} &= 87 02 46,84
 \end{aligned}$$

## Refractioncoefficienten (S. 130).

$$\begin{aligned}
 x_2 - x_1 &= - 0,0224 - 7b_1 \\
 x_3 - x_2 &= - 0,0672 + 15b_1 \\
 x_1 - x_3 &= + 0,0896 - 8b_1
 \end{aligned}$$

## Höhenunterschiede.

$$\begin{aligned}
 h_{12} &= + 269,97 - 0,09 - 27b_1 \\
 h_{23} &= + 812,60 - 1,02 + 227b_1 \quad b_1 = + 0,0039 \\
 h_{31} &= - 1082,56 + 0,49 - 44b_1 \\
 h_{12} &= + 269,77 \quad \delta_1 = - 0,14 \\
 h_{23} &= + 812,49 \quad \delta_2 = - 0,15 \\
 h_{31} &= - 1082,26 \quad \delta_3 = + 0,29
 \end{aligned} \tag{49}$$

Diese Ergebnisse zeigen wirklich eine grosse Annäherung an die Höhenunterschiede, und es ist wahrscheinlich, dass diese Annäherung durch Benutzung weiterer Lothabweichungen im Bereich der drei Punkte noch weiter gegangen wäre.

Eine völlige Uebereinstimmung der Resultate beider Höhenbestimmungen ist auch hierdurch nie zu erreichen, da kleine Differenzen aus folgenden Gründen vorhanden sein müssen. Schon Fehler von Bruchtheilen einer Sekunde in den Zenithdistanzen würden Aenderungen von einigen Centimetern in den Höhenunterschieden geben. Dazu kommt, dass bei der Entwicklung der Formeln ein normaler Zustand der Luftschichten vorausgesetzt wurde. Aber auch das geometrische Nivellement kann nicht genau Differenzen von Meereshöhen geben, da mangels Messung der Schwerkraft keine Reduction desselben möglich ist. Ferner sind auch die Messungsfehler des geometrischen Nivellements nicht zu vernachlässigen, die unter den vorliegenden Umständen mehrere Centimeter betragen werden.

Ausserdem kommt hierzu noch die aus dem Gange der Lothabweichungen hervorgehende Differenz, die man bei genügender Kenntniss derselben berechnen könnte. Denn, bezeichnen wir mit  $N_1$  den Abstand des Geoids vom Ellipsoid im Punkte  $P_1$ , und ist  $\lambda_1$  die Lothabweichung



in  $P_1$  im Azimut ( $P_1, P_2$ ), so kann die Erhebung des Geoids über dem Ellipsoid im Punkte  $P_2$  ausgedrückt werden durch (vgl. Helmert II. S. 607)

$$N_1 = \int \lambda ds.$$

Sind  $H$  die Meereshöhen und  $h$  die ellipsoidischen Höhen, so ist also

$$H_2 - H_1 = h_2 - h_1 + \int \lambda ds. \quad (50)$$

Bis auf den Betrag des Integrals sind folglich die in der trigonometrischen Höhenmessung gefundenen Höhenunterschiede mit den geoidischen vergleichbar.

Bei einer Anwendung des Integrals würde die Krümmung der Lothlinien eine strenge Berechnung unmöglich machen. Die Messung der Lothabweichungen geschieht auf der physischen Erdoberfläche und da die Lothlinien in Folge der Abweichung der Niveauflächen von der Kugelgestalt gekrümmt sind, so sind die gefundenen Lothabweichungen verschieden von denen auf dem Geoid, die in dem Integral vorkommen. Der regelmässige Theil der Lothkrümmung, der dadurch entsteht, dass die Niveauflächen gegen die Erde hin abgeplattet sind, ist hierbei nicht zu fürchten, da einmal die durch die Abplattung entstehenden Krümmungsbeträge bei den vorliegenden Höhenunterschieden sehr klein sind, andererseits sich auch nur in der Richtung des Meridians äussern, während die in Frage stehenden drei Richtungen nahe westöstlich sind. Anders ist es jedoch mit dem Theil der Lothkrümmung der durch den Einfluss der Schwerestörung im Gebirge entsteht. Dieser könnte in den Alpen doch eine derartige Grösse erreichen, dass der Werth des Integrals dadurch erheblich beeinflusst wird.

#### V.

In dem Integral in (50) treten die Lothabweichungen ihrem ganzen Betrage nach auf. Dies lässt sich jedoch vermeiden, wie wir später sehen werden, wenn man die Lothabweichungen nicht zu den Zenithdistanzen hinzufügt, sondern unmittelbar mit den gemessenen Zenithdistanzen rechnet. Bei der Berechnung des mittleren Refractionscoefficienten können jedoch die Lothabweichungen benutzt werden, da hierbei nach IV eine Drehung des Referenzellipsoides ohne Einfluss ist.

Hiernach ist die Berechnung nochmals mit folgenden Ergebnissen ausgeführt worden, wobei wie in IV die Refractionscoefficienten aus III entnommen sind, da die mittleren Refractionscoefficienten wieder dieselben geblieben sind. (Vergl. S. 132.)

19. August.

Gemessene Zenithdistanzen (S. 126).

$$\begin{aligned} z'_{12} &= 89^\circ 09' 53,96'' & z'_{21} &= 90^\circ 57' 31,70'' \\ z'_{23} &= 88^\circ 45' 43,04'' & z'_{32} &= 91^\circ 29' 48,59'' \\ z'_{31} &= 93^\circ 06' 22,78'' & z'_{13} &= 87^\circ 02' 50,98'' \end{aligned}$$

## Refractionscoefficienten (S. 127).

$$x_2 - x_1 = -0,0204 - 7b_1$$

$$x_3 - x_2 = -0,0585 + 15b_1$$

$$x_1 - x_3 = +0,0789 - 8b_1$$

## Höhenunterschiede.

$$h_{12} = + 269,90 - 0,08 - 27b_1$$

$$h_{23} = + 812,67 - 0,89 + 227b_1 \quad b_1 = + 0,0012$$

$$h_{31} = - 1082,22 + 0,43 - 44b_1$$

$$h_{12} = + 269,79 \quad \delta_1 = - 0,16$$

$$h_{23} = + 812,05 \quad \delta_2 = + 0,29$$

$$h_{31} = - 1081,84 \quad \delta_3 = - 0,13$$

(51)

## 22. August.

## Gemessene Zenithdistanzen (S. 128).

$$z'_{12} = 89^\circ 09' 52,13'' \quad z'_{21} = 90^\circ 57' 31,28''$$

$$z'_{23} = 88^\circ 45' 42,95'' \quad z'_{32} = 91^\circ 29' 46,92''$$

$$z'_{31} = 93^\circ 06' 21,27'' \quad z'_{13} = 87^\circ 02' 48,53''$$

## Refractionscoefficienten (S. 128).

$$x_2 - x_1 = -0,0210 - 7b_1$$

$$x_3 - x_2 = -0,0630 + 15b_1$$

$$x_1 - x_3 = +0,0840 - 8b_1$$

## Höhenunterschiede.

$$h_{12} = + 269,96 - 0,08 - 27b_1$$

$$h_{23} = + 812,54 - 0,95 + 227b_1 \quad b_1 = + 0,0022$$

$$h_{31} = - 1082,27 + 0,46 - 44b_1$$

$$h_{12} = + 269,82 \quad \delta_1 = - 0,19$$

$$h_{23} = + 812,09 \quad \delta_2 = + 0,25$$

$$h_{31} = - 1081,91 \quad \delta_3 = - 0,06$$

(52)

## 25. August.

## Gemessene Zenithdistanzen (S. 129).

$$z'_{12} = 89^\circ 09' 48,17'' \quad z'_{21} = 90^\circ 57' 28,37''$$

$$z'_{23} = 88^\circ 45' 40,45'' \quad z'_{32} = 91^\circ 29' 49,56''$$

$$z'_{31} = 93^\circ 06' 21,87'' \quad z'_{13} = 87^\circ 02' 40,55''$$

## Refractionscoefficienten (S. 130).

$$x_2 - x_1 = -0,0360 - 7b_1$$

$$x_3 - x_2 = -0,0780 + 15b_1$$

$$x_1 - x_3 = +0,1040 - 8b_1$$

## Höhenunterschiede.

$$h_{12} = + 270,01 - 0,14 - 27b_1$$

$$h_{23} = + 812,97 - 1,18 + 227b_1 \quad b_1 = + 0,0030$$

$$h_{31} = - 1082,69 + 0,57 - 44b_1$$

$$h_{12} = + 269,79 \quad \delta_1 = - 0,16$$

$$h_{23} = + 812,47 \quad \delta_2 = - 0,13$$

$$h_{31} = - 1082,26 \quad \delta_3 = + 0,29$$

(53)



Mittel.

Gemessene Zenithdistanzen.

$$\begin{aligned} z'_{12} &= 89^{\circ} 09' 51,42'' & z'_{21} &= 90^{\circ} 57' 30,45'' \\ z'_{23} &= 88^{\circ} 45' 42,15'' & z'_{32} &= 91^{\circ} 29' 48,36'' \\ z'_{31} &= 93^{\circ} 06' 21,97'' & z'_{13} &= 87^{\circ} 02' 46,69'' \end{aligned}$$

Refractionscoefficienten (S. 130).

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= -0,0224 - 7 b_1 \\ x_3 - x_2 &= -0,0672 + 15 b_1 \\ x_1 - x_3 &= +0,0896 - 8 b_1 \end{aligned}$$

Höhenunterschiede.

$$\begin{aligned} h_{12} &= + 269,95 - 0,09 - 27 b_1 \\ h_{23} &= + 812,72 - 1,02 + 227 b_1 & b_1 &= + 0,0022 \\ h_{31} &= - 1082,39 + 0,49 - 44 b_1 \\ h_{12} &= + 269,80 & \delta_1 &= - 0,17 \\ h_{23} &= + 812,20 & \delta_2 &= + 0,14 \\ h_{31} &= - 1082,00 & \delta_3 &= + 0,03 \end{aligned} \tag{54}$$

Bei den vorstehenden Berechnungen sind die gemessenen Zenithdistanzen nicht erst durch Hinzufügen der Lothabweichungen auf ein bestimmtes Referenzellipsoid reducirt worden. Da die Rechnung indessen doch nur für das Ellipsoid gilt, so ist dieses derartig angenommen, dass die Lothabweichungen in den Endpunkten jeder der drei Dreieckseiten in den Richtungen derselben entgegengesetzt gleich sind, so dass  $\lambda_{12} + \lambda_{21} = 0$  ist. Dies ist nur möglich, wenn für jede der drei Richtungen ein besonderes Referenzellipsoid angenommen wird.

Nehmen wir an, dass für einen beliebigen Punkt der geodätischen Linie  $s_{12}$  die Lothabweichung im Azimut der Linie sich durch die lineare Function

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{d\lambda}{ds} s$$

ausdrücken lässt, so finden wir unter der Bedingung  $\lambda_{12} + \lambda_{21} = 0$  den Werth Null für das Integral.

Wenn also die Lothabweichungen proportional der Entfernung wachsen, so liefert das angewendete Verfahren direct Meereshöhenunterschiede.

Ist das Gesetz für die Zunahme der Lothabweichungen

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{d\lambda}{ds} s + \frac{d^2\lambda}{ds^2} s^2$$

so findet sich für das Integral unter der Bedingung  $\lambda_{12} + \lambda_{21} = 0$  der Werth

$$- \frac{1}{6} \frac{d^2\lambda}{ds^2} s^2 *$$

\*) Helmert, Höhere Geodäsie II, S. 608.

Um den Einfluss des Correctionsgliedes  $-\int \lambda ds$  in dem vorliegenden Beispiele zahlenmässig berechnen zu können, ist die Kenntniss der Lothabweichungen in mehreren Zwischenpunkten der drei Nivellements-linien nothwendig. Derartige astronomische Messungen sind leider nicht ausgeführt worden. Ferner müsste man hierzu auch versuchen, die Lothkrümmung so gut als möglich zu schätzen.

Es seien die Lothkrümmungen in den Endpunkten einer Dreieck-seite  $\Delta \lambda_{12}$  und  $\Delta \lambda_{21}$ . Werden bei der Berechnung des Höhenunter-schiedes die Lothabweichungen nicht angebracht, so besteht die Gleichung  $\lambda_{12} + \lambda_{21} + \Delta \lambda_{12} + \Delta \lambda_{21} = 0$

Wären nun die Lothkrümmungen bekannt, so wäre es zweckmässig, diese zu den gemessenen Zenithdistanzen hinzuzufügen und nur die Lothabweichungen im Meeresniveau zu vernachlässigen, wobei man wieder die Vortheile der Gleichung  $\lambda_{12} + \lambda_{21} = 0$  erlangen würde.

Um einen Ueberblick über die gefundenen Resultate zu erhalten, sind die nach den 3 verschiedenen Berechnungsarten sich ergebenden Höhenunterschiede nachstehend zusammengestellt.

Höhenunterschied:	H — J	J — K	H — K
Geometrisches Nivellement:	269,63	812,34	1081,97
I 19. August:	9,94	2,68	2,62
22. „	9,97	2,69	2,66
25. „	9,92	3,11	3,03
II 19. August:	9,75	2,34	2,09
22. „	9,78	2,38	2,16
25. „	9,72	2,79	2,51
III 19. August:	9,79	2,05	1,84
22. „	9,82	2,09	1,91
25. „	9,79	2,47	2,26

Bei Vergleichung der Berechnungen I und II zeigt sich klar, dass man die mit Annahme eines beliebigen Nullpunktes berechneten Loth-abweichungen nicht ohne weiteres zur Reduction von Zenithdistanzen für die Zwecke der trigonometrischen Höhenmessung verwenden darf.

Sind die Lothabweichungen nur in den drei Beobachtungspunkten, oder noch in einigen wenigen benachbarten Punkten bekannt, so scheint die Berechnung II am vortheilhaftesten zu sein, da durch die ihr zu Grunde liegende Transformation der Lothabweichungen ein genäherter Parallelismus zwischen der Geoid- und der Ellipsoidfläche hergestellt ist, während bei III ein gesetzmässiger Verlauf der Lothabweichungen vorausgesetzt wird. Ist durch genügend viele Lothabweichungen die Lage des Referenzellipsoids gegen das Geoid bekannt, so müssen die durch (50) ausgedrückten Correctionen berechnet werden.



Die gute Uebereinstimmung der Ergebnisse vom 19. und 22. August scheint darauf hinzudeuten, dass die Voraussetzung normaler Luftschichten den thatsächlichen Verhältnissen annähernd entsprochen hat.

Dass die Witterung am 25. August den Beobachtungen nicht günstig gewesen ist, zeigen die vielen in den Beobachtungsreihen auftretenden Lücken. Hierdurch kann man die ungünstigen Resultate wohl zum Theil erklären. Andererseits ist aber möglicherweise auch die gute Uebereinstimmung der Ergebnisse vom 19. und 22. August theilweise dem Zufall zu verdanken, sodass man sich in Anbetracht des vorliegenden geringen Materials aller weiteren Folgerungen enthalten muss.

## Kleinere Mittheilungen.

### Einiges über Entwicklung und gegenwärtigen Zustand der optischen Werkstätte (Firma Carl Zeiss) Jena (Herbst 1899).

#### A. Eigenthümer.

Die Firma wurde im Jahre 1846 durch den (Ende 1888 verstorbenen) Mechaniker Dr. Carl Zeiss hierselbst gegründet. Derselbe war bis 1875 alleiniger Inhaber der Firma. In diesem Jahre trat Professor Abbe, der schon seit 1866 mit der Werkstätte in Verbindung gestanden hatte, als Theilhaber ein, und im Jahre 1881 als dritter Theilhaber der älteste Sohn des Begründers, Dr. Roderich Zeiss. Nach dem Tod von Dr. Carl Zeiss (Dec. 1888) und dem im nächsten Jahr erfolgten Rücktritt seines Sohnes hat bis zum Jahr 1891 Prof. Abbe allein die Firma geleitet. Im letzteren Jahr wurde sie in das Eigenthum der Carl Zeiss-Stiftung übergeführt, die im Jahre 1889 von Abbe zur Beförderung socialer und wissenschaftlicher Aufgaben begründet worden war. Seitdem wird die Firma verwaltet für Rechnung dieser Stiftung — welche als juristische Person durch das Cultus-Departement des Weimarischen Staatsministeriums vertreten ist — durch eine von der Stiftung bestellte Geschäftsleitung (z. Z. Prof. Abbe, Dr. Czapski, M. Fischer und Dr. Schott) unter Mitwirkung eines besonderen Stiftungs-Commissars (bis Juni d. J. der jetzige Staatsminister Dr. C. Rothe, jetzt Geh. Reg.-Rath M. Vollert).

#### B. Art und Umfang der Production.

Der Art der Erzeugnisse nach zerfällt der Betrieb in fünf Hauptabtheilungen, denen wissenschaftlich geschulte Fachmänner vorstehen.

1) Mikroskope und deren Nebenapparate, im Besonderen Apparate zur Mikrophotographie. Die Fabrikation dieser, gleich nach Gründung des Geschäfts auf Anregung der damaligen hiesigen Professoren Schleiden und Schacht unternommen, verdrängte allmählich die aller sonstigen

Instrumente, wurde lange Zeit ausschliesslich betrieben und war bis in die jüngste Zeit die bedeutendste.

Zahl der verkauften Mikroskop-Stativ in den letzten 15 Jahren je zwischen 1400 und 1800. Gesamtzahl der bisher fabricirten über 32 000. Durchschnittlicher Werth eines Stativs sammt zugehörigen optischen Systemen und Nebenapparaten etwa Mk. 600.—. Demgemäss Jahresumsatz (Facturawerth) in den letzten 15 Jahren zwischen  $\frac{3}{4}$  und 1 Million (in den letzten drei Jahren rund 1 Million) Mark. Achromatische Objective — seit 1864 — über 80 000 Stück, Apochromate — seit 1886 — über 11 000 Stück verkauft.

Neuerdings ist die Fabrikation von Projectionsapparaten für grössere durchsichtige und opake Gegenstände hinzugekommen.

2) Photographische Objective und mechanisch-optische Hilfsmittel der Photographie (insbes. Umkehrprismen und Momentverschlüsse).

Fabrikation der von Dr. P. Rudolph erfundenen „Anastigmat“ (dazu später die der „Planare“), begonnen 1890.

Verkauft in den letzten drei Jahren jeweilig 5000, 5900, 7200 Stück im Werthe von rund Mk. 465 000.—, Mk. 535 000.—, Mk. 587 000.—. Gesamtzahl der bis jetzt verkauften Objective über 34 000 im Werthe von ca.  $3\frac{1}{2}$  Millionen Mark (netto). Durch Lizenznehmer in Deutschland, England, Frankreich und Vereinigten Staaten bis Herbst 1899 etwa 40 000 Stück verkauft.

3) Optische Messinstrumente für technische und wissenschaftliche Zwecke (Refractometer, Spectrometer, Dilatometer u. s. w.).

Diese ursprünglich meist für den eigenen Laboratoriums- und Werkstattgebrauch construirten, später unter Leitung von Dr. Pulfrich weitergebildeten Instrumente werden seit 1892 auch für Andere fabricirt. Die betreffende, nach Zahl der beschäftigten Personen und Umfang der Production relativ kleine Abtheilung dient gleichzeitig als Lehrwerkstätte, sowie den Zwecken der kürzlich errichteten besonderen Versuchswerkstatt.

4) Erdfernrohre, Handfernrohre und Stand-(Stativ-)fernrohre, construiert unter Benutzung der Porro'schen und anderer bildumkehrender Prismensysteme, meist binocular mit erhöhter stereoskopischer Wirkung. Regelmässige Fabrikation seit 1894.

Umsatz in den letzten drei Jahren je 4200, 5400, 7500 Stück im (Factura-)Werth von Mk. 548 000.—, Mk. 748 000.—, Mk. 1 026 000.—. Gesamtzahl der bisher verkauften Handfernrohre 21 400 Stück im Werthe von nahezu 3 Millionen Mark (netto). Fabrikations-Lizenzen sind an je eine französische und amerikanische Firma ertheilt.

5) Astronomische Objective und Montirungen, insbesondere Objective mit vermindertem secundären Spectrum aus neuen Schott'schen Glasarten.



Diese Abtheilung ist erst vor 2 Jahren in Verbindung mit Herrn Dr. Pauly (früher in Mühlberg a. E.) errichtet und dem Betrieb angegliedert worden und hat zur Zeit noch einen bescheidenen, wenn auch stetig wachsenden Umfang. —

Der gesammte Jahres-Umsatz beträgt schon seit einiger Zeit mehr als 2 Millionen Mark (netto), im abgelaufenen Geschäftsjahr belief er sich auf über 2 $\frac{1}{2}$  Millionen. Von den hier erstellten Instrumenten gehen etwa zwei Drittel ins Ausland.

### C. Organisation des Betriebes.

Der Natur der Producte gemäss zerfällt der Betrieb in die beiden Haupttheile des feinmechanischen und feinoptischen, wozu dann noch gewisse Hilfsbetriebe treten.

Der mechanische Betrieb, in dem ebenso wie in dem optischen allmählich eine weitgehende Arbeitstheilung stattgefunden hat, umfasst: eine Fräselei, Dreherei, Polirerei, Lackirerei und Gravirerei (diese für alle Fabrikate gemeinsam) sowie die Roh- und Feinmontirwerkstätten je für die einzelnen Instrumentgattungen. Dazu gehört das Magazin für halbfertige Theile sowie für Werkzeug, Material und Verbrauchsmittel und die „Expeditionen“ (Controle und endgiltige Zusammenstellung der fertigen Instrumente), Anzahl der in diesem Betriebe beschäftigten Arbeiter (am 30. Sept. d. J.) 307, dazu 25 Lehrlinge.

Der optische Betrieb zerfällt in die verschiedenen, je nach Grösse und Zweck (verlangte Genauigkeit) der Linsen gegliederten Schleif- und Polir-Abtheilungen, die Kitterei, Lackirerei und Centrirerei (diese für alle Arten von Linsen gemeinsam), die Werkstätten zum Fassen von grösseren (photographischen, Lupen-, Ocular-) und kleineren (Mikroskop-) Linsen. Dazu gehören noch die Glasschneiderei, das Rohglaslager, das Magazin fertiger und halbfertiger Linsen, die Werkzeugverwaltung und eine Werkstätte für den Bau und Reparatur optischer Maschinen. Zahl der hier beschäftigten Arbeiter: 371.

Die Hilfsbetriebe sind: Metallgiesserei, Tischlerei (insbesondere für Holzetuis), Belederei und Werkstätte für Lederbehälter, Klempnerei, Bau- und Maschinenschlosserei. Arbeiterzahl: 129.

Der mechanische Betrieb arbeitet nach den vom Constructions-bureau gelieferten Unterlagen. Die einzelnen Abtheilungen sind Meistern (Werkführern) unterstellt, denen je nach Grösse der Abtheilungen noch Untermeister (Unterwerkführer) oder Assistenten zur Seite stehen.

Für den optischen Betrieb liefern die beiden Rechenbureaus die Constructionsdaten. Die ganze Linsenschleiferei ist einem (Ober-)Werkführer unterstellt, die Arbeit in den einzelnen Abtheilungen wird wie in der Mechanik von Meistern mit Assistenten geleitet.

Die Hilfsbetriebe werden von einzelnen selbstständigen Meistern geleitet.

Die Zahl der mit der Verpackung und Leitung der Betriebswerkstätten beauftragten Werkführer u. s. w. ist z. Zt. 58, in den Comptoirs etc. sind 36 Angestellte, als wissenschaftliche Mitarbeiter (Abtheilungsvorsteher, Assistenten, Rechner, Gehülfen) sind 22 Herren thätig.

#### D. Betriebsmittel.

Das Bau- und das Maschinenwesen sind besonderen Fachmännern unterstellt, die zugleich die betreffenden Werkstätten (für Neuherstellung und Reparaturen) leiten.

Das dem Betrieb dienende, zwischen Goethestrasse und Krautgasse belegene Grundstück der Firma ist 108 Ar gross, die bebaute Grundfläche beträgt 30 Ar; die gesammte, von den einzelnen Arbeitsstätten eingenommene Grundfläche (netto) 9400 qm.

Alle Werkstätten sind mit Centralheizung, elektrischer Beleuchtung und Ventilation versehen.

Als Betriebsmaschinen dienen eine Compounddampfmaschine mit Condensation von 140 PS. und eine eincylindrige ohne Condensation von 50 PS., erstere zur Erzeugung elektrischen (Dreh- und Gleich-) Stroms für Kraft und Licht, letztere zu Gleichstrom für Licht allein in Verbindung mit Accumulatoren. Die beiden Kessel haben 76 bezw. 58 qm Heizfläche, sie liefern neben dem Betriebsdampf noch solchen zur Beheizung der nächstgelegenen Fabrikgebäude.

#### Personalverhältnisse.

Das gesammte in dem Betrieb beschäftigte Personal untersteht hinsichtlich seiner Rechte und Pflichten den Bestimmungen des Statuts der Carl Zeiss-Stiftung. (Näheres hierüber in Pierstorff, „Die Carl Zeiss-Stiftung“ Leipzig 1897.)

Die Zahl der hier beschäftigten Personen war durchschnittlich in den Betriebsjahren:

	1896/7	1897/8	1898/9
Arbeiter im Betrieb (im Lohnverhältniss)	730	810	818
Beamte (mit Gehalt)	100	108	115
Zusammen	830	918	933

Der diesen bezahlte Lohn bzw. Gehalt betrug in den betreffenden Geschäftsjahren einschl. der Gewinnantheile

	1896/7	1897/8	1898/9
für die Arbeiter in den Betrieben	836	967	979 Tausend Mark
für die Beamten	274	312	359 „ „
Zusammen	1110	1279	1338 „ „

Nach dem Alter und jährlichen Durchschnittsverdienst während dieser letzten drei Geschäftsjahre ordnen sich die in den Betrieben beschäftigten im Wochenlohn stehenden Arbeiter wie folgt:



	Durchschnittl.	Durchschnittl.	
	Anzahl Tages-	Jahres-	Ver-
	Arbeiter	Ver-	dienst
I. Ueber 24 Jahre alte Arbeiter	412	5,20	1630 M
Ia. Ueber 24 Jahre alt und über 3 Jahre im Betrieb	298	5,66	1772 "
II. Im Alter von 21 bis 24 Jahren	90	4,54	1420 "
III. " " " 18 " 21 "	70	3,20	1000 "

Die Betriebs-Krankenkasse (für die Firmen Carl Zeiss und Schott & Gen. gemeinschaftlich) hatte Ende 1898 860 Mitglieder von dem einen und 316 von dem anderen Betriebe, zusammen 1176 Mitglieder. Die Netto-Ausgabe im Jahre 1898 betrug 31436 Mk., also 26,74 Mk. pro Mitglied.

Die Beiträge sind Seitens der Firmen und Kassenmitglieder gleich hoch, die Verwaltungskosten werden von den Firmen getragen. Die Familienangehörigen der Mitglieder sind mit versichert.

(Eingesendet von Dr. Doll.)

## Vereinsangelegenheiten.

### Kassenbericht für das Jahr 1899.

Der Deutsche Geometerverein bestand am Schlusse des Jahres 1899 aus 5 Ehrenmitgliedern, 21 Zweigvereinen und 1487 ordentlichen Mitgliedern.

Durch den Tod hat der Verein im vergangenen Jahre 14 Mitglieder verloren. Die Namen derselben sind:

1. Wiegand, Vermessungs-Revisor zu Cassel, Mitgliederkarte Nr. 29,
2. Müller, Heinrich, Bezirksgeometer zu Krum-  
bach i. Bayern, " " 180,
3. Brennecke, Kammer-Commissar zu  
Schwerin i. M., " " 331,
4. Jordan, Dr., Professor zu Hannover, " " 448,
5. von Egle, Hofbaudirector in Stuttgart, " " 669,
6. Schröder, Steuer-Inspector in Meschede i. W., " " 915,
7. Windstosser, Bezirksgeometer in Dachau, " " 1178,
8. Bretsch, Revisionsgeometer in Darmstadt, " " 1291,
9. Hennes, Stadtgeometer in Bonn, " " 1537,
10. von Liebermann, Oberlandmesser in Insterburg, " " 2293,
11. Schlemmer, Oberlandmesser in Loebischütz, " " 2342,
12. Düniges, Heinrich, Kgl. Landmesser in Osterode  
am Harz, " " 2582,
13. Heinrichs, Kgl. Landmesser in Gleiwitz, " " 2971,
14. Jaschke, Markscheider in Waldenburg in  
Schlesien, " " 3030.

Für 1900 haben 26 Mitglieder ihren Austritt angemeldet, denen 22 Eintrittserklärungen entgegenstehen, sodass am 1. Januar 1900 die Zahl der ordentlichen Mitglieder 1464 beträgt, mithin gegen das Vorjahr einen Zuwachs von 48 Mitgliedern erfahren hat.

Die Zahl der Ehrenmitglieder und Zweigvereine ist unverändert geblieben.

Die *Einnahmen* betragen für das Jahr 1899

I. An Mitgliederbeiträgen:

von 109 Mitgliedern zu 9 <i>M</i> .....	981,00 <i>M</i>
von 1362 Mitgliedern zu 6 <i>M</i> .....	8172,00 <i>n</i>

Summa 9153,00 *M*

II. An Zinsen ..... 284,53 *n*

Summa der Einnahmen 9437,53 *M*

Dagegen betragen die *Ausgaben*:

I. Für die Zeitschrift ..... 7131,07 *M*

II. An Unterstützungen..... 365,00 *n*

III. An Verwaltungskosten ..... 782,90 *n*

IV. Sonstige Ausgaben..... 448,55 *n*

Summa der Ausgaben 8727,52 *n*

bleibt Ueberschuss 710,01 *M*

Dazu der Kassenbestand vom 1. Januar 1899 ..... 657,40 *n*

Mithin Kassenbestand am 1. Januar 1900 ..... 1367,41 *M*

Das Vereinsvermögen beträgt am 1. Januar 1899 an

Werthpapieren:

3½ 0/0 Reichsanleihe im Betrage von ..... 3000,00 *M*

3 0/0 Preuss. consol. Anleihe im Betrage von.... 1000,00 *n*

Summa 4000,00 *M*

Hierzu der Kassenbestand ..... 1367,41 *n*

Zusammen 5367,41 *M*

Hierzu treten noch die Zinsen für die Spareinlagen vom Jahre 1899, welche erst im nächsten Jahre verrechnet werden können, da deren Auszahlung erst im Laufe des Monats Januar erfolgt.

Cassel, den 31. December 1899.

## Die Kassenverwaltung des Deutschen Geometer-Vereins.

Hüser.

### Inhalt.

Grössere Mittheilungen: Eggert, Vergleichung der Ergebnisse des geometrischen und des trigonometrischen Nivellements nach den durch v. Bauernfeind im Jahre 1881 ausgeführten Beobachtungen. — Kleinere Mittheilungen. — Vereinsangelegenheiten.