ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

Dr. C. Reinhertz, Professor in Hannover und **C. Steppes,** Obersteuerrath in München.

1900. Heft 11. Band XXIX.

1. Juni.

Zur konformen Doppelprojection der Preussischen Landesaufnahme.

Sphäroid und Kugel. Gauss'sche Projection.

Fortsetzung von Seite 613 vorigen Jahrganges der Zeitschrift.

Uebertragung der Richtungen und Entfernungen.

Vergl. KD, Seite 21—30.

Zweck und Inhalt. Zur Uebertragung der in geographischen Coordinaten gegebenen Punkte eines Dreiecksnetzes auf die Kugel reichen die bis jetzt abgeleiteten Vorschriften aus. Eine solche Uebertragung gewährt zwar den Vortheil, die Messungsergebnisse in einer einfacheren Form (nämlich in sphärischen anstatt in sphäroidischen Coordinaten) zu besitzen; die Herbeiführung dieser Form ist aber keineswegs der Hauptzweck der gegenwärtigen Entwickelungen, dieser besteht vielmehr darin, die Ausgleichung und endgültige Berechnung der Messungen vermittelst Uebertragung auf die Kugel zu erleichtern. Dies kann aber nur dadurch geschehen, dass alle auf dem Sphäroid unmittelbar gegebenen und gemessenen Grössen, also nicht bloss Punkte, sondern auch Winkel und Seiten, auf die Kugel übertragen werden, und auf dieser sodann das ganze Dreiecksnetz ausgeglichen und endgültig berechnet wird. 25

Nun wird ein auf dem Sphäroid von kürzesten Linien gebildetes Dreiecksnetz auf der Kugel durch ein solches dargestellt, in welchem zwar die Winkel den entsprechenden sphäroidischen gleich, dessen Seiten aber keine Grösstekreisbögen, sondern andere Kurven sind, da nur die mit einem Meridian zusammenfallenden Dreiecksseiten durch Grösstekreisbögen dargestellt werden.

Ein solches Dreiecksnetz lässt sich aber nicht berechnen. Damit dies geschehen könne, müssen die Bilder der Dreiecksseiten durch die zwischen den Dreieckspunkten gezogenen Grösstekreisbögen ersetzt werden, dergestalt, dass auf der Kugel ein aus sphärischen Dreiecken bestehendes Netz zu Stande kommt, worin die Punkte, Winkel und Seiten, welche den gegebenen, bezw. gemessenen, auf dem Sphäroid entsprechen, gleichfalls bekannt sind.

Die Entwickelung des Verfahrens, wie eine derartige Uebertragung auszuführen ist, bildet den Inhalt des gegenwärtigen Abschnitts (Art. 25—52).

26 **Uebersicht des Verfahrens.** Wir verstehen unter „Azimuth einer Linie AB in einem ihrer Punkte M", sowohl auf dem Sphäroid als auch auf der Kugel, stets den Winkel, den die Linie, im Sinne von A nach B, im Punkte M mit der Nordrichtung einschliesst, diesen Winkel von letzterer nach rechts gezählt.

Es seien nun auf dem Sphäroid:

P_1 und P_2 zwei Winkelpunkte eines Dreiecks,
S die Länge der Dreiecksseite (geodätischen Linie) $P_1 P_2$, [23])
T_1 und T_2 die Azimuthe der (in unbestimmter Ausdehnung betrachteten) geodätischen Linie $P_1 P_2$ in P_1 und P_2.

Es seien ferner auf der Kugel:

p_1 und p_2 die Bilder der Punkte P_1 und P_2,
R die Länge des Grösstenkreisbogens $p_1 p_2$,
U_1 und U_2 die Azimuthe des Grösstenkreises $p_1 p_2$ in p_1 und p_2.

Für Dreiecksseiten, die nicht grösser sind, als sie in wirklich messbaren Dreiecken vorkommen können, unterscheiden sich die sphärischen Grössen U_1, U_2, R nur sehr wenig (nur um Bruchtheile der Secunde) von den sphäroidischen T_1, T_2, S, und die Unterschiede $T_1 - U_1$, $T_2 - U_2$, $\log S - \log R$ lassen sich scharf berechnen, sobald nur roh angenäherte Coordinaten der Dreieckspunkte zu Gebote stehen. Wenn aber diese, wie kleine Reductionen anzusehenden Unterschiede für sämmtliche Seiten bekannt sind, so lässt sich sowohl die im vorigen Artikel geforderte Uebertragung auf die Kugel, als auch, nach ausgeführter Berechnung der Seiten und Winkel, deren Rückübertragung auf das Sphäroid ohne Weiteres ausführen.

Es bedarf daher nur der Herleitung von Formeln, nach denen die in Rede stehenden Reductionen für jede Dreiecksseite aus den angenäherten Coordinaten ihrer Endpunkte berechnet werden können. [24])

---

[23]) Wir drücken, wie bisher, lineare Längen in Theilen des Kugelhalbmessers A, und kleine Winkel in Theilen des dem Halbmesser gleichen Bogens aus, wo nicht ein Anderes ausdrücklich gesagt ist.

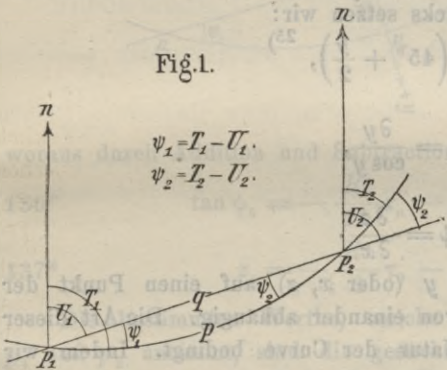
[24]) Die von Gauss gegebenen Reductionsformeln (GA, Art. 12 u. 13) setzen die angenäherte Kenntniss der Entfernung R, der Azimuthe U_1, U_2 und der Breiten b_1, b_2 voraus. Es ist aber vortheilhafter, anstatt von diesen Werthen, von den sphärischen Coordinaten b_1, l_1 und b_2, l_2 als den einzigen Gegebenen auszugehen, da diese Coordinaten nicht nur in der Form bequemer sind, als Azimuth und Entfernung, sondern man sich auch hinreichend angenäherte Werthe derselben besonders leicht verschaffen kann; meistens genügt es, sie aus einer

Die hierzu nöthigen Entwickelungen sind einfach, wenn man sie, wie Gauss dies gethan hat, auf die blosse Herleitung der Gebrauchsformeln beschränkt. Wenn man aber auch deren Genauigkeit bestimmen will, so müssen sie um zwei Ordnungen der Seitenlänge weiter getrieben werden. Obgleich dies sehr umständlich ist, werden wir doch umsoweniger darauf verzichten, als gerade bei den in Rede stehenden Formeln ein blosses Schätzen der Genauigkeit völlig im Stich lässt, und die Kenntniss der letzteren behufs Herrichtung zu möglichst bequemem Gebrauch unentbehrlich ist.

Wir entwickeln zunächst (Art. 27—47) die Formeln für die Azimuthreductionen $T_1 - U_1$ und $T_2 - U_2$, und darnach (Art. 48—51) diejenigen für die Entfernungsreduction $\log S - \log R$. Vergl. KD, §§ 17—23.

Entwickelung der Azimuthreductionen $T_1 - U_1$ und 27
$T_2 - U_2$ in Reihen nach Potenzen der Seitenlänge R. In der auf der Kugel gedachten Figur 1 sei p die konforme Darstellung der geodätischen Linie $P_1 P_2$ (diese in unbestimmter Ausdehnung betrachtet), q der durch p_1 und p_2 geführte Grösstekreis, und $p_1 n$ und $p_2 n$ seien die durch p_1 und p_2 gehenden Meridiane, also die Bilder der Meridiane der Sphäroidpunkte P_1 und P_2. Da alle von einem Punkte ausgehenden Linien auf dem Sphäroid dieselben Winkel mit einander einschliessen, wie ihre Bilder auf der Kugel, so sind die Azimuthe der Bildcurve p in p_1 und p_2 den sphäroidischen Azimuthen T_1 und T_2, mithin die Azimuthreductionen $T_1 - U_1$ und $T_2 - U_2$ den stets sehr kleinen Winkeln ψ_1 und ψ_2 gleich, welche die Curve p in p_1 und p_2 mit dem Grösstenkreise q macht.

Fig. 1.



Irgend ein Punkt p der Bildcurve (Fig. 2) werde bestimmt durch seinen Abstand y vom Grösstenkreise $p_1 q$ und durch das dem Fusspunkte dieses Perpendikels zukommende x, gezählt von einem zunächst willkürlich in $p_1 q$ gewählten Anfangspunkt, positiv in der Richtung von p_1 nach p_2. Die positive y-Richtung nehmen wir, entsprechend dem Sinne, in welchem die Azimuthe gezählt werden, 90^0 rechts von der positiven x-Richtung an. x und y sind somit rechtwinklige sphärische

bildlichen Darstellung des Netzes zu entnehmen, die ohnehin zur Hand sein muss. Der Umstand, dass die sphärischen Coordinaten der Dreieckspunkte als gegeben vorausgesetzt werden, ist für den Fall, wo nur die sphäroidischen bekannt sind, bei der Leichtigkeit des Ueberganges von den einen zu den anderen um so unerheblicher, als es dabei auf einige Secunden nicht ankommt.

Coordinaten. Wir verstehen dieselben als in Theilen des Kugelhalbmessers A ausgedrückt.

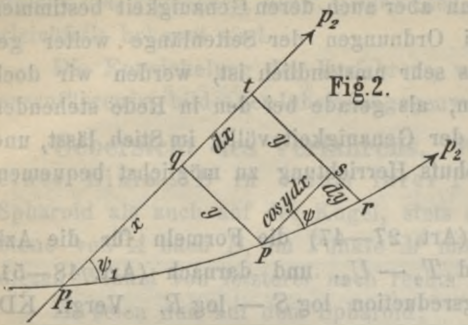


Fig. 2.

Es sei ferner ψ der Winkel, den die Bildcurve mit der Parallelen $p\,s$ zu $p_1\,q$ macht, Curve und Parallele im Sinne wachsender x verstanden, und den Winkel von letzterer nach rechts positiv gezählt.

Da die Parallele $p\,s$ ein Bogen des dem Grösstenkreise $p_1\,q$ parallelen Kugelkreises ist, der den Abstand y von $p_1 q$, mithin den Halbmesser cos y hat, so ist in dem rechtwinkligen Differentialdreieck psr: $ps = \cos y \partial x$ und $rs = \partial y$, folglich:

130* $$\tan \psi = \frac{\partial y}{\cos y\, \partial x}.$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks setzen wir:

131* $$z = l \tan \left(45^0 + \frac{y}{2}\right),$$ [25)]

woraus:

132* $$\partial z = \frac{\partial y}{\cos y},$$

mithin:

133* $$\tan \psi = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Da sich die Coordinaten x, y (oder x, z) auf einen Punkt der Bildcurve beziehen, so sind sie von einander abhängig. Die Art dieser Abhängigkeit wird durch die Natur der Curve bedingt. Indem wir diese zunächst noch unbestimmt lassen, und demgemäss nur voraussetzen, dass y (und somit auch z) irgend eine Function von x sei, wird vermöge 133* auch tan ψ eine solche.

Es seien nun: τ', τ'', ... die successiven Ableitungen von tan ψ nach x, und z_0, ψ_0, τ'_0, τ''_0, ... die bestimmten Werthe von z, ψ, τ', τ'', ... für $x = 0$. Dann giebt der Maclaurin'sche Satz:

134* $$\tan \psi = \tan \psi_0 + \tau'_0\, x + \frac{1}{2} \tau''_0\, x^2 + \frac{1}{6} \tau'''_0\, x^3 + \frac{1}{24} \tau_0^{\mathrm{IV}}\, x^4 + \ldots,$$

und da man nach 133* hat:

$$z = z_0 + \int_0^x \tan \psi \, \partial x,$$

25) Denkt man sich die sphärische Figur 2 nach Mercator's-Projection, mit $p_1\,q$ als Hauptkreis und Abscissenachse, auf eine Ebene übertragen, so sind, zufolge 131*, x, z die ebenen rechtwinkligen Coordinaten des dem Punkte p entsprechenden Bildpunktes. In Reihenform giebt 131*: $z = y + \frac{y^3}{6} + \ldots$. Da y stehts sehr klein ist, so unterscheiden sich z und y nur äusserst wenig von einander.

so folgt:

135* $$z = z_0 + x \tan \psi_0 + \frac{1}{2}\tau_0' x^2 + \frac{1}{6}\tau_0'' x^3 + \frac{1}{24}\tau_0''' x^4 + \frac{1}{120}\tau_0^{\mathrm{IV}} x^5 +$$

Wir legen nunmehr den Anfangspunkt der x in die Mitte c des Grösstenkreisbogens $p_1\, p_2$ (Fig, 3), und bezeichnen die Länge des letzteren mit R. Dann giebt die vorige Reihe, da z in den Punkten p_1 und p_2, d. i. für $x = -\frac{R}{2}$ und $x = +\frac{R}{2}$, Null werden muss:

$$0 = z_0 - \frac{R}{2}\tan\psi_0 + \frac{R^2}{8}\tau_0' - \frac{R^3}{48}\tau_0'' + \frac{R^4}{384}\tau_0''' - \frac{R^5}{3840}\tau_0^{\mathrm{IV}} + \dots,$$

$$0 = z_0 + \frac{R}{2}\tan\psi_0 + \frac{R^2}{8}\tau_0' + \frac{R^3}{48}\tau_0'' + \frac{R^4}{384}\tau_0''' + \frac{R^5}{3840}\tau_0^{\mathrm{IV}} + \dots,$$

Fig. 3.

woraus durch Addition und Subtraction:

136* $$\tan\psi_0 = -\frac{R^2}{24}\tau_0'' - \frac{R^4}{1920}\tau_0^{\mathrm{IV}} - \dots,$$

137* $$z_0 = -\frac{R^2}{8}\tau_0' - \frac{R^4}{384}\tau_0''' - \dots.$$ [26)]

Die bestimmten Werthe, welche der Winkel ψ in den Punkten p_1 und p_2 annimmt, sind die gesuchten Azimuthreductionen $T_1 - U_1$ und $T_2 - U_2$, die wir im ersten Absatz dieses Artikels bereits mit ψ_1 und ψ_2 bezeichnet haben. Für ihre Tangenten ergeben sich aus 134* und 136* die Reihen:

138* $$\tan\psi_1 = -\frac{R}{2}\tau_0' + \frac{R^2}{12}\tau_0'' - \frac{R^3}{48}\tau_0''' + \frac{R^4}{480}\tau_0^{\mathrm{IV}} - \dots,$$

139* $$\tan\psi_2 = +\frac{R}{2}\tau_0' + \frac{R^2}{12}\tau_0'' + \frac{R^3}{48}\tau_0''' + \frac{R^4}{480}\tau_0^{\mathrm{IV}} + \dots$$

---

26) Substituirt man die Werthe 136* und 137* in 134* und 135*, so kommt:

140* $$\tan\psi = \tau_0' x + \frac{1}{2}\tau_0''\left(x^2 - \frac{R^2}{12}\right) + \frac{1}{6}\tau_0''' x^3 + \frac{1}{24}\tau_0^{\mathrm{IV}}\left(x^4 - \frac{R^4}{80}\right) + \dots,$$

141* $$z = \frac{1}{2}\tau_0'\left(x^2 - \frac{R^2}{4}\right) + \frac{1}{6}\tau_0'' x\left(x^2 - \frac{R^2}{4}\right) + \frac{1}{24}\tau_0'''\left(x^4 - \frac{R^4}{16}\right) + \frac{1}{120}\tau_0^{\mathrm{IV}} x\left(x^4 - \frac{R^4}{16}\right) + \dots$$

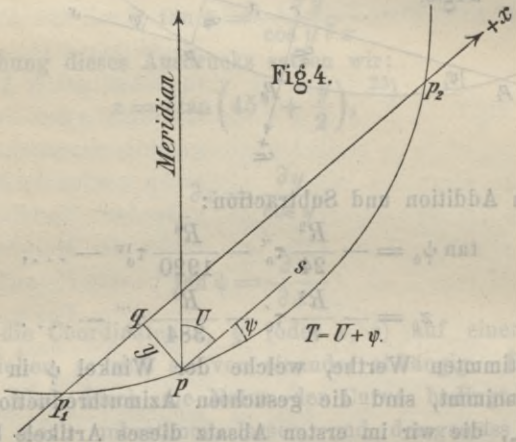
Die Reihe für z kann man — vorbehaltlich der Bestimmung der Werthe τ_0, τ_0'', ... — als die Gleichung der Bildcurve p ansehen.

Nach diesen Reihen lassen sich die Reductionen ψ_1 und ψ_2 berechnen, sobald die Grössen $\tau_0', \tau_0'', \ldots$, d. i. die Werthe der Ableitungen $\tau', \tau'', \ldots$ im Punkte p_0 der Bildcurve (für $x = 0$) bekannt sind.

Wir gehen nunmehr zur Entwickelung dieser Ableitungen, und zwar zunächst der ersten τ', über.

28 **Entwickelung der Ableitung τ'.** Die Ableitung τ', d. i. der Differentialquotient $\frac{\partial \tan \psi}{\partial x}$ oder, nach 133*, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ hängt von der Natur der Bildcurve $p_1\, p\, p_2$, und — da diese die konforme Darstellung einer geodätischen Linie ist — von der Natur der letzteren ab.

Um einen geeigneten Ausdruck für τ' zu erhalten, gehen wir von einer bekannten Eigenschaft der geodätischen Linie aus, die zugleich die Natur dieser Curve völlig bestimmt, nämlich von der Eigenschaft, wonach in jedem ihrer Punkte das Product aus dem Cosinus der reducirten Breite in den Sinus des Azimuths einen constanten Werth hat.



Bedeutet demnach β die reducirte Breite des unbestimmten Punktes P der geodätischen Linie $P_1\, P_2$ und T ihr Azimuth in diesem Punkte, so hat man:

142* $$\cos \beta \sin T = \text{Const.}$$

Zwischen der reducirten Breite β und der geographischen Breite B besteht bekanntlich die Relation:

$$\cos \beta = \frac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}.$$

Hiermit ergiebt sich aus 65* (S. 597 v. J.) für das Vergrösserungsverhältniss m im Punkte p der Ausdruck:

$$m = \frac{A\, \alpha \cos b}{a \cos \beta}, \text{ woraus: } \cos \beta = \frac{A\, \alpha \cos b}{a\, m},$$

und mit diesem Werthe aus 142*, da A, a, α Constanten sind:

143* $$\frac{1}{m} \cos b \sin T = \text{Const.}$$

Es sei ferner (Fig. 4) U das Azimuth des dem Grösstenkreise $q p_2$ parallelen Kugelkreises $p s$ (diesen im Sinne wachsender x verstanden) im Punkte p. Alsdann hat man, da T gleich dem Azimuth der Bildcurve $p p_2$ in p ist: $T = U + \psi$, mithin zufolge 143*:

$$\frac{1}{m} \cos b \sin (U + \psi) = \text{Const.}$$

Durch logarithmische Differentiation dieser Gleichung, wobei wir m als Function von b ansehen, erhalten wir:

$$\left(-\frac{\partial l m}{\partial b} - \tan b\right) \partial b + \cot (U + \psi) (\partial U + \partial \psi) = 0,$$

und hieraus:

144* $$\frac{\partial \psi}{\partial x} = (m' + \tan b) \tan (U + \psi) \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

145* $$m' = \frac{\partial l m}{\partial b}.$$ [27)]

Fortsetzung. Zur Weiterentwickelung der Gleichung 144* 29
brauchen wir geeignete Ausdrücke für die Differentialquotienten $\frac{\partial b}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial x}$, die wir zunächst ableiten. Wir erhalten sie aus den allgemeinen Beziehungen, welche in zwei sphärischen Coordinatensystemen, hier der x, y und der b, l (oder b, U) stattfinden.

Fig. 5.

Auf der Kugel seien (Fig. 5):

x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines unbestimmten Punktes p der Kugelfläche, bezogen auf einen beliebigen, als x-Achse gewählten

27) Dieser für die weiteren Entwickelungen wichtige Differentialquotient lässt sich in Function von b darstellen und für dieses Argument numerisch berechnen (vergl. Art. 34). Wir sehen daher m' (ebenso wie m) stets als in Function der Breite b gegeben an.

Grösstenkreis qt, die positive y-Richtung 90^0 von der positiven x-Richtung verstanden;

b die Breite des Punktes p,

U das Azimuth des dem Grösstenkreise qt parallelen Kugelkreises ps (diesen im Sinne wachsender x verstanden) im Punkte p;

$x + \partial x,\ y + \partial y,\ b + \partial b,\ U + \partial U$ dieselben Grössen in Bezug auf einen dem Punkte p unendlich nahen Punkt r.

Ferner seien in Figur 5:

pn und rn die Meridiane der Punkte p und r,

vw der durch s geführte Parallelkreis,

ru der durch r, parallel zum Grösstenkreis qt geführte Kugelkreis.

Alsdann geben die rechtwinkligen Differentialdreiecke pvs und rws, da in letzterem der Winkel r gleich $90^0 - (U + \partial U)$ ist:

$$pv = \cos y \cos U \partial x \quad \text{und} \quad rw = \sin U \partial y.$$

Nun ist $pv - rw = \partial b$, mithin:

146* $$\partial b = \cos y \cos U \partial x - \sin U \partial y.$$

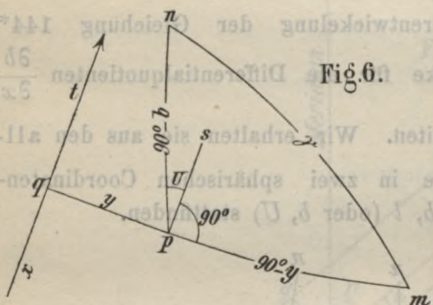


Fig. 6.

Dies ist das vollständige Differential von b nach den von einander unabhängigen Veränderlichen x und y.

Das vollständige Differential des Azimuths U erhalten wir am einfachsten aus dem sphärischen Dreieck zwischen dem Punkte p, dem Erdpol n und dem Pol m des Grösstenkreises qt (Fig. 6).

In diesem Dreieck besteht die Relation:

$$\cos \gamma = \sin y \sin b - \cos y \cos b \sin U.$$

Da γ, als Abstand der Pole n und m, constant ist, so erhält man durch Differentiation nach allen darin enthaltenen Veränderlichen:

$$0 = (\sin y \cos b + \cos y \sin b \sin U)\, \partial b + (\cos y \sin b + \sin y \cos b \sin U)\, \partial y - \cos y \cos b \cos U \partial U,$$

und hieraus in Verbindung mit 146* nach leichter Reduction:

147* $$\partial U = (\cos y \tan b \sin U + \sin y)\, \partial x + \tan b \cos U \partial y.$$

Dies ist das vollständige Differential von U nach den von einander unabhängigen Veränderlichen x und y.

Zufolge der Formeln 146* und 147* hat man für die partiellen Differentialquotienten von b und U nach x und y folgende Ausdrücke: [28])

148*	$\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right) = \cos y \cos U$	$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \cos y \tan b \sin U + \sin y,$
149*	$\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right) = -\sin U$	$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \tan b \cos U.$

[28]) Wir unterscheiden hier, wie auch fernerhin, stets die partiellen Differentialquotienten durch Einschliessung in runde Klammern von den totalen.

Die Differentialformeln 146*—149* gelten ganz allgemein für zwei beliebige, unendlich nahe Punkte p und r der Kugelfläche (Fig. 5).

Fig. 7.

Wenn die Punkte p und r der Bildcurve $p p_2$ angehören (Fig. 7), mithin y eine Function von x, und zufolge 130*:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos y \tan \psi$$

ist, so ergeben sich aus 146* und 147* für die vollständigen Differentialquotienten von b und U nach x die Ausdrücke:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \cos y \cos U - \cos y \tan \psi \sin U,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cos y \tan b \sin U + \cos y \tan \psi \tan b \cos U + \sin y,$$

denen wir für den vorliegenden Zweck folgende Formen geben:

150* $$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\cos y}{\cos \psi} \cos (U + \psi),$$

151* $$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\cos y}{\cos \psi} \tan b \sin (U + \psi) + \sin y.$$

Diese Ausdrücke sind völlig streng und in ihrer Allgemeinheit durch keinerlei Voraussetzungen über die Natur der Bildcurve beschränkt.

Wir können nunmehr die Entwickelungen des Artikels 28 zu Ende führen. Durch Einsetzung der Ausdrücke 150* und 151* in 144* kommt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = m' \sin (U + \psi) \frac{\cos y}{\cos \psi} - \sin y$$
$$= m' \sin U \cos y + m' \cos U \tan \psi \cos y - \sin y,$$

woraus wir wegen: $\tau' = \frac{\partial \tan \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\cos^2 \psi \, \partial x}$, erhalten:

152* $$\tau' = (m' \sin U + m' \cos U \tan \psi - \tan y) \frac{\cos y}{\cos^2 \psi}.$$

Dieser Ausdruck ist ebenfalls völlig streng. Er gilt zufolge seiner Herleitung für jede konforme Uebertragung der Sphäroidfläche auf die Kugelfläche, für welche das Vergrösserungsverhältniss m allein von der Breite (nicht aber von der Länge) abhängt.

Zeichenerklärung. Der Uebersicht wegen stellen wir nachstehend die folgenden, zum Theil bereits eingeführten, zum Theil neu einzuführenden Bezeichnungen zusammen. Auf der Kugel bedeuten (Fig. 8): 30

x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines unbestimmten Punktes p

der Bildcurve, bezogen auf die Mitte c des Grösstenkreisbogens $p_1 p_2$ als Anfangspunkt,

b die Breite des Punktes p,

U das Azimuth des dem Grösstenkreise $p_1 p_2$ parallelen Kugelkreises $p\,s$ im Punkte p,

b_0 und U_0 die Werthe von b und U im Punkte p_0 (für $x = 0$),

b_x und U_x die Breite und das Azimuth des Grösstenkreises $p_1 p_2$ im Fusspunkt q der Ordinate y (für $y = 0$),

b_c und U_c die Breite und das Azimuth des Grösstenkreisbogens $p_1 p_2$ in seiner Mitte c (für $x = 0$, $y = 0$),

b_1 und U_1 die Breite und das Azimuth des Grösstenkreises $p_1 p_2$ im Punkte p_1 (für $x = -\frac{R}{2}$, $y = 0$),

b_2 und U_2 die Breite und das Azimuth des Grösstenkreises $p_1 p_2$ im Punkte p_2 (für $x = +\frac{R}{2}$, $y = 0$).

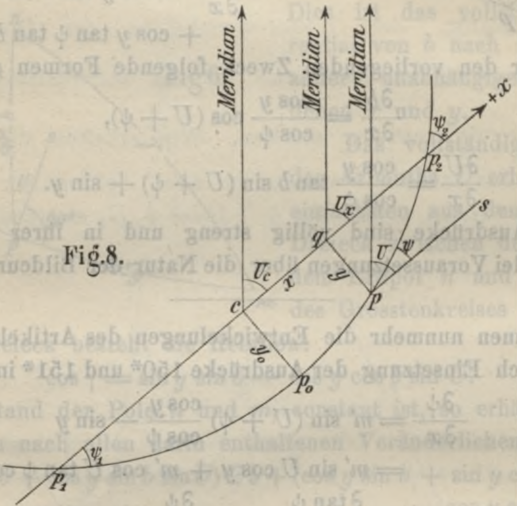


Fig.8.

Wir bezeichnen ferner mit:

$$F \;\big|\; F_0 \;\big|\; F_x \;\big|\; F_c \;\big|\; F_1 \;\big|\; F_2\,,$$

die Werthe einer Grösse F (d. i. irgend einer Function von x, y oder b, U) in den Punkten:

	p	p_0	q	c	p_1	p_2,
d. i. für	$x = x$	0	x	0	$-\frac{R}{2}$	$+\frac{R}{2}$,
	$y = y$	y_0	0	0	0	0.

Durch Hinzufügung des Index x zur Bezeichnung F wird mithin angezeigt, dass anstatt der Werthe, welche die Grösse F in der Bildcurve $p_1\,p$ hat, diejenigen angewandt werden sollen, welche in den entsprechenden Punkten des Grösstenkreises $p_1\,q$ (für $y = 0$) stattfinden. Die durch den Index x gekennzeichneten Grössen sind daher stets als Functionen von x allein, nicht aber von y, anzusehen.[29])

Vereinfachung des strengen Ausdrucks 152* für die Ableitung τ'. Für den vorliegenden Zweck, wo bloss das zwischen den Punkten p_1 und p_2 liegende Stück der Bildcurve (Fig. 8) in Betracht kommt, in dessen sämmtlichen Punkten y und ψ nur sehr kleine Werthe haben können,[30]) dürfen wir in dem Ausdruck 152* folgende Vereinfachungen eintreten lassen: 31

1. Anstatt $\cos y$ und $\cos^2 \psi$ dürfen wir 1 setzen, wodurch der Factor $\dfrac{\cos y}{\cos^2 \psi}$ fortfällt.

2. $\tan y$ kann mit z vertauscht werden. Da nämlich $\tan y = y + \dfrac{y^3}{3} + \cdots$, und nach der Fussnote S. 260: $z = y + \dfrac{y^3}{6} + \ldots$, so unterscheiden sich diese beiden Grössen nur um $\dfrac{y^3}{6}$ von einander.

3. Das Glied $m' \cos U \tan \psi$ kann fortgelassen werden, da es gegen $m' \sin U$ sehr klein ist.

4. In dem Ausdruck:

$$\tau' = m' \sin U - z,$$

in welchen somit der Ausdruck 152* übergeht, können wir anstatt der Werthe, welche m' und U in der Bildcurve $p_1\,p$ haben, diejenigen anwenden, welche in den entsprechenden Punkten des Grösstenkreises $p_1\,q$ (für $y = 0$) stattfinden; d. h. wir können setzen:

153* $$\tau' = m'_x \sin U_x - z,$$

wo nach dem vorigen Artikel m'_x den zum Argument b_x gehörigen Werth von m' bezeichnet.

Wir werden weiter unten (Art. 38 und 39) nachweisen, dass die Fehler, welche durch die Vereinfachungen 1—4 in den Formeln für die Reductionen ψ_1 und ψ_2 erzeugt werden, weit kleiner sind, als andere darin zu duldende. Vorbehaltlich dieses Nachweises machen wir einstweilen Gebrauch von diesen Vereinfachungen.

Entwickelung der Ableitungen τ'', τ''', τ^{IV}. Wir erhalten diese Ableitungen durch wiederholtes Differentiiren des Ausdrucks 153* nach x. Hierbei brauchen wir die Ableitungen von b_x (da m' in Function von b gegeben ist) und U_x nach x, die sich aus den par- 32

---

29) Abweichend von den obigen Bezeichnungen sind in *KD*, § 13—23, die Grössen b_c, U_c, m_c, h_c mit b_0, U_0, m_0, h_0 bezeichnet worden.

30) Wie sich weiter unten (Art. 36) zeigen wird, kann y nicht grösser als 0,02 Sec., und ψ nicht grösser als 1,3 Sec. werden, solange das Curvenstück $p_1\,p_2$ (d. i. die Projection der Dreiecksseite $P_1\,P_2$) kleiner als 500 km bleibt, und seine Mitte sich nicht weiter als $8^1/_3$ Breitengrade vom Normalparallelkreis entfernt.

tiellen Differentialquotienten 148* ergeben, wenn man darin $y = 0$ setzt. Dadu ch kommt:

154* $$\frac{\partial b_x}{\partial x} = \cos U_x \text{ und } \frac{\partial U_x}{\partial x} = \tan b_x \sin U_x.$$

Beachtet man ferner, dass die successiven (vollständigen) Ableitungen von z nach x sind: $\tan\psi, \tau', \tau'', \ldots$, bezeichnet die successiven Ableitungen von m' nach b mit $m'', m''', \ldots$, und setzt zur Abkürzung:

155* $$\begin{cases} 2\,\mathfrak{B} = m'' + m' \tan b, \\ 4\,\mathfrak{C} = m''' + 3\,m'' \tan b + m'(3\tan^2 b + 1), \\ 4\,\mathfrak{C}' = m''' - m'' \tan b - m'(\tan^2 b + 3), \\ 8\,\mathfrak{D} = m^{\text{iv}} + 6\,m''' \tan b + m''(15\tan^2 b + 4) \\ \qquad\qquad + m'(15\tan^3 b + 9\tan b), \\ 8\,\mathfrak{D}' = 2m^{\text{iv}} - 6m'' \tan^2 b - m'(6\tan^3 b + 2\tan b), \end{cases}$$

so findet man zunächst:

156 $$\begin{cases} \tau' = m'_x \sin U_x - z, \\ \tau'' = \mathfrak{B}_x \sin 2\,U_x - \tan\psi, \\ \tau''' = \mathfrak{C}_x \sin 3\,U_x + (\mathfrak{C}'_x + m'_x)\sin U_x - \tau', \\ \tau^{\text{iv}} = \mathfrak{D}_x \sin 4\,U_x + (\mathfrak{D}'_x + \mathfrak{B}_x)\sin 2\,U_x - \tau'', \end{cases}$$

und hieraus, wenn man die beiden ersten Werthe in den beiden letzten substituirt:

157* $$\begin{cases} \tau' = m'_x \sin U_x - z, \\ \tau'' = \mathfrak{B}_x \sin 2\,U_x - \tan\psi, \\ \tau''' = \mathfrak{C}_x \sin 3\,U_x + \mathfrak{C}'_x \sin U_x + z, \\ \tau^{\text{iv}} = \mathfrak{D}_x \sin 4\,U_x + \mathfrak{D}'_x \sin 2\,U_x + \tan\psi, \end{cases}$$

wo die Grössen $m'_x, \mathfrak{B}_x, \mathfrak{C}_x, \mathfrak{C}'_x, \ldots$ allein von b_x abhängen.

33 **Ausdrücke für die Grössen $\tau'_0, \tau''_0, \tau'''_0, \tau^{\text{iv}}_0$.** Für $x = 0$ gehen die Ausdrücke 157* in die folgenden über:

158* $$\begin{cases} \tau'_0 = m'_c \sin U_c - z_0, \\ \tau''_0 = \mathfrak{B}_c \sin 2\,U_c - \tan\psi_0, \\ \tau'''_0 = \mathfrak{C}_c \sin 3\,U_c + \mathfrak{C}'_c \sin U_c + z_0, \\ \tau^{\text{iv}}_0 = \mathfrak{D}_c \sin 4\,U_c + \mathfrak{D}'_c \sin 2\,U_c + \tan\psi_0, \end{cases}$$

wo die mit den Indices 0 und c versehenen Bezeichnungen bezw. die in den Punkten p_0 und c (Fig. 8, S. 266) stattfindenden Werthe der bezüglichen Grössen bedeuten.

Da man nach 136* und 137* bis zur Ordnung R^4 ausschl. genau hat:

$$z_0 = -\frac{R^2}{8}\tau'_0 = -\frac{R^2}{8} m'_c \sin U_c,$$

$$\tan\psi_0 = -\frac{R^2}{24}\tau''_0 = -\frac{R^2}{24}\mathfrak{B}_c \sin 2\,U_c,$$

so kann man anstatt der vorigen Ausdrücke die folgenden setzen:

$$159^* \quad \begin{cases} \tau_0' = m_c' \sin U_c \left(1 + \frac{R^2}{8}\right), \\ \tau_0'' = \mathfrak{B}_c \sin 2\, U_c \left(1 + \frac{R^2}{24}\right), \\ \tau_0''' = \mathfrak{C}_c \sin 3\, U_c + \mathfrak{C}_c' \sin U_c, \\ \tau_0^{\mathrm{IV}} = \mathfrak{D}_c \sin 4\, U_c + \mathfrak{D}_c' \sin 2\, U_c, \end{cases}$$

und zwar die beiden ersten bis zur Ordnung R^4 ausschl., die beiden folgenden bis zur Ordnung R^2 ausschl. genau.

Nach diesen Formeln in Verbindung mit 155* können die Grössen $\tau_0', \tau_0'', \ldots$ aus b_c, U_c und R numerisch berechnet werden, sobald die Zahlenwerthe der $m_c', m_c'', \ldots$ bekannt geworden sind (vergl. den folgenden Artikel). Mit den so erhaltenen Werthen der $\tau_0', \tau_0'', \ldots$ ergeben sich alsdann nach den Reihen 138* und 139* die Reductionen ψ_1 und ψ_2 bis zur Ordnung R^5 ausschl. genau.

Die Reductionen ψ_1 und ψ_2 kann man zwar auf diesem Wege mit aller wünschenswerthen Schärfe erhalten, die Rechnung ist aber für eine ausgedehnte Anwendung viel zu weitläufig, selbst wenn Tafeln zu Gebote stehen, aus denen sich die Werthe der Grössen $m', \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \ldots$ für jede gegebene Breite entnehmen lassen. Wir werden sehen (Art. 40 u. flgde.), dass erheblich einfachere Formeln möglich sind, wobei nur die Werthe der ersten Ableitung τ' in einigen Punkten der Bildcurve, nicht aber die höheren Ableitungen $\tau'', \tau''', \ldots$, bekannt zu sein brauchen.

Dagegen ist auch die Kenntniss der letzteren nothwendig, um die Genauigkeit der abzuleitenden Formeln zu bestimmen (vergl. den vorletzten Absatz des Art. 26). Für diesen Zweck genügt es jedoch vollkommen, die Grössen $\tau_0', \tau_0'' \ldots$ nur roh angenähert, etwa bis auf ein Hundertstel ihres Werthes, zu kennen. Wir dürfen daher in 159* die Factoren $1 + \frac{R^2}{8}$ und $1 + \frac{R^2}{24}$ fortlassen,[31]) und somit setzen:

$$160^* \quad \begin{cases} \tau_0' = m_c' \sin U_c, \\ \tau_0'' = \mathfrak{B}_c \sin 2\, U_c, \\ \tau_0''' = \mathfrak{C}_c \sin 3\, U_c + \mathfrak{C}_c' \sin U_c, \\ \tau_0^{\mathrm{IV}} = \mathfrak{D}_c \sin 4\, U_c + \mathfrak{D}_c' \sin 2\, U_c; \end{cases}$$

so dass diese Grössen nicht mehr von R, sondern nur noch von b_c und U_c abhängen.

Numerische Berechnung der Grössen $m', m'', \ldots$ und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \ldots$ behufs Genauigkeitsbestimmungen. 34 Aus der am Schluss des Art. 20 (S. 609 v. J.) gegebenen Reihe für lm erhält man durch aufeinanderfolgende Differentiationen nach b ähnliche Reihen für die Ableitungen $m', m'', \ldots$, nach denen die Zahlenwerthe der letzteren für

31) Die Annäherung bleibt selbst für eine Seitenlänge von 1500 km noch genügend, indem für diese: $\frac{R^2}{8} = 0{,}0069$.

gegebene Kugelbreiten, solange sich diese nicht zu weit von der Normalbreite entfernen, berechnet werden können. Die Convergenz dieser Reihen nimmt jedoch mit jeder Differentiation so rasch ab, dass schon die Ableitung m^{IV} für die äussersten Breiten unseres Anwendungsgebiets (vergl. die Fussnote S. 598 v. J.) etwa um zwei Hundertstel ihres Werthes unsicher bleibt.

Es sind daher die auf Seite 271 verzeichneten Zahlenwerthe der $m', m'',\ldots$ noch auf eine zweite Art, nämlich direct nach den Gleichungen 78*—80* (S. 599—601 v. J.), berechnet worden,[32] was zwar ziemlich umständlich, aber in Anbetracht, dass wir nur die Werthe der vier ersten Ableitungen je für fünf Breiten kennen zu lernen beabsichtigen, immerhin der kürzeste zu genaueren Werthen führende Weg sein dürfte.

Um bei dieser Berechnungsart nicht mit mehr Ziffern als nöthig rechnen zu müssen, entnehmen wir den Unterschied $B—b$ aus der Tafel I in KD (in Sec.), und berechnen alsdann die Unterschiede $\alpha \sin b - \sin B$ und $\alpha \cos b - \cos B$ nach den leicht abzuleitenden Reihen:

$$161^* \quad \alpha \sin b - \sin B = (\alpha - 1) \sin b - \frac{B-b}{\rho} \cos b + \frac{(B-b)^2}{2!\,\rho^2} \sin b + \frac{(B-b)^3}{3!\,\rho^3} \cos b - \ldots,$$

$$162^* \quad \alpha \cos b - \cos B = (\alpha - 1) \cos b + \frac{B-b}{\rho} \sin b + \frac{(B-b)^2}{2!\,\rho^2} \cos b - \frac{(B-b)^3}{3!\,\rho^3} \sin b - \ldots.$$

Nachdem die Zahlenwerthe der $m', m'',\ldots$ bekannt geworden sind, erhält man die der $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}',\ldots$ nach 155*.

Auf diese Weise ist die Uebersichtstafel auf Seite 271 entstanden, in welche, um alles Gleichartige bei einander zu haben, ausser den genannten Grössen auch alle ähnlichen aufgenommen sind, die wir noch gebrauchen werden (vergl. die in der letzten Spalte bezeichneten Formeln).

Die Tafel enthält die Werthe der in der Eingangsspalte verzeichneten, sämmtlich allein von der Breite abhängigen Grössen für fünf gleichabständige Parallelkreise, von denen die beiden äussersten unsere Zone von $16^2/_3$ Breitengraden (vergl. die Fussnote S. 598 v. J.) begrenzen. Der decadische Rang der höchsten Ziffer eines jeden Werthes ist über dieser Ziffer angegeben, z. B.: $0{,}0046 = \overset{-3}{4}6$. Sämmtliche Werthe sind bis auf eine halbe Einheit ihrer letzten (fünften) Ziffer genau.

[32]) In den Gleichungen 80* sind die Ableitungen $m', m'',\ldots$ mit $m_1, m_2,\ldots$ bezeichnet worden.

Werthe der Grössen log $m, lm, m', m'', \ldots \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \ldots$ usw.

Function von b	*b* 44° 20′	48° 30′	52° 40′	56° 50′	61° 0′	Formel
log m	$\overset{-6}{+\,28100}$	$\overset{-7}{+\,35559}$	0	$\overset{-7}{-\,36546}$	$\overset{-6}{-\,29743}$	
lm	$\overset{-6}{+\,64702}$	$\overset{-7}{+\,81877}$	0	$\overset{-7}{-\,84149}$	$\overset{-6}{-\,68487}$	
m'	$\overset{-4}{-\,13237}$	$\overset{-5}{-\,33636}$	0	$\overset{-5}{-\,34894}$	$\overset{-4}{-\,14306}$	
m''	$\overset{-3}{+\,17905}$	$\overset{-4}{+\,61745}$	0	$\overset{-4}{-\,97004}$	$\overset{-3}{-\,20231}$	
m'''	$\overset{-2}{-\,11695}$	$\overset{-2}{-\,12308}$	$\overset{-2}{-\,12940}$	$\overset{-2}{-\,13803}$	$\overset{-2}{-\,15321}$	
m^{IV}	$\overset{-3}{-\,89141}$	$\overset{-3}{-\,82157}$	$\overset{-3}{-\,96183}$	$\overset{-2}{-\,15033}$	$\overset{-2}{-\,28635}$	
$\mathfrak{B}$	$\overset{-4}{+\,83061}$	$\overset{-4}{+\,43972}$	0	$\overset{-4}{-\,51172}$	$\overset{-3}{-\,11406}$	155*
$\mathfrak{B}^{(1)}$	$\overset{-4}{+\,95994}$	$\overset{-4}{+\,47774}$	0	$\overset{-4}{-\,45832}$	$\overset{-4}{-\,88249}$	172*
$\mathfrak{B}^{(2)}$	$\overset{-4}{+\,51230}$	$\overset{-4}{+\,24837}$	0	$\overset{-4}{-\,21581}$	$\overset{-4}{-\,37672}$	243*
$\mathfrak{B}^{(3)}$	$\overset{-4}{+\,38297}$	$\overset{-4}{+\,21035}$	0	$\overset{-4}{-\,26921}$	$\overset{-4}{-\,63482}$	243*
$\mathfrak{C}$	$\overset{-3}{-\,17395}$	$\overset{-3}{-\,23400}$	$\overset{-3}{-\,32350}$	$\overset{-3}{-\,46339}$	$\overset{-3}{-\,69524}$	155*
$\mathfrak{C}'$	$\overset{-3}{-\,32302}$	$\overset{-3}{-\,33004}$	$\overset{-3}{-\,32350}$	$\overset{-3}{-\,30331}$	$\overset{-3}{-\,26940}$	155*
$\mathfrak{C}''$	$\overset{-4}{-\,15944}$	$\overset{-5}{-\,51382}$	0	$\overset{-5}{-\,90418}$	$\overset{-4}{-\,50138}$	211*
$\mathfrak{C}'''$	$\overset{-5}{-\,99279}$	$\overset{-5}{-\,25227}$	0	$\overset{-5}{-\,26171}$	$\overset{-4}{-\,10730}$	211*
$\mathfrak{C}^{\mathrm{IV}}$	$\overset{-4}{+\,34107}$	$\overset{-4}{+\,22935}$	0	$\overset{-4}{-\,42064}$	$\overset{-3}{-\,11810}$	217*
$\mathfrak{C}^{\mathrm{V}}$	$\overset{-3}{+\,14023}$	$\overset{-4}{+\,81697}$	0	$\overset{-3}{-\,10168}$	$\overset{-3}{-\,21462}$	217*
$\mathfrak{C}^{(1)}$	$\overset{-3}{-\,99552}$	$\overset{-3}{-\,99684}$	$\overset{-3}{-\,97049}$	$\overset{-3}{-\,91691}$	$\overset{-3}{-\,83681}$	172*
$\mathfrak{D}$	$\overset{-3}{-\,59606}$	$\overset{-3}{-\,89385}$	$\overset{-2}{-\,13926}$	$\overset{-2}{-\,22757}$	$\overset{-2}{-\,39531}$	155*
$\mathfrak{D}'$	$\overset{-3}{-\,33854}$	$\overset{-3}{-\,28871}$	$\overset{-3}{-\,24046}$	$\overset{-3}{-\,19479}$	$\overset{-3}{-\,15259}$	155*
$\mathfrak{D}''$	$\overset{-4}{-\,95819}$	$\overset{-3}{-\,55801}$	$\overset{-2}{-\,13926}$	$\overset{-2}{-\,29387}$	$\overset{-2}{-\,59517}$	211*
$\mathfrak{D}'''$	$\overset{-3}{+\,26553}$	$\overset{-3}{+\,10210}$	$\overset{-3}{-\,24046}$	$\overset{-3}{-\,92173}$	$\overset{-2}{-\,22938}$	211*
$\mathfrak{D}^{\mathrm{IV}}$	$\overset{-3}{-\,39313}$	$\overset{-3}{-\,76867}$	$\overset{-2}{-\,13926}$	$\overset{-2}{-\,24894}$	$\overset{-2}{-\,45597}$	217*
$\mathfrak{D}^{\mathrm{V}}$	$\overset{-3}{+\,86015}$	$\overset{-3}{+\,52343}$	$\overset{-3}{-\,24046}$	$\overset{-2}{-\,18203}$	$\overset{-2}{-\,50779}$	217*
$\mathfrak{D}^{(1)}$	$\overset{-3}{-\,67709}$	$\overset{-3}{-\,57742}$	$\overset{-3}{-\,48091}$	$\overset{-3}{-\,38957}$	$\overset{-3}{-\,30519}$	172*
$\mathfrak{D}^{(2)}$	$\overset{-3}{+\,38174}$	$\overset{-3}{+\,64969}$	$\overset{-3}{+\,91173}$	$\overset{-2}{+\,11620}$	$\overset{-2}{+\,13948}$	172*
$\mathfrak{D}^{(3)}$	$\overset{-3}{+\,16612}$	$\overset{-4}{+\,87943}$	0	$\overset{-3}{-\,10234}$	$\overset{-3}{-\,22812}$	185*
$\mathfrak{D}^{(4)}$	$\overset{-4}{+\,63252}$	$\overset{-3}{+\,18472}$	$\overset{-3}{+\,30391}$	$\overset{-3}{+\,41787}$	$\overset{-3}{+\,52377}$	185*

35 **Maximalwerthe der Grössen τ_0', τ_0'',...** Zur Bestimmung der Genauigkeit der abzuleitenden Reductionsformeln müssen wir die Maximalwerthe der Grössen τ_0', τ_0'',... und mehrerer ähnlicher Functionen von b_c und U_c kennen. Substituirt man die einer bestimmten Breite b_c entsprechenden Werthe m_c', $\mathfrak{B}_c$, $\mathfrak{C}_c$, $\mathfrak{C}_c'$,... in 160*, so erhält man die entsprechenden Ausdrücke der Grössen τ_0', τ_0'',..., die alsdann nur noch von U_c abhängen, und deren Maximalwerthe sich daher leicht bestimmen lassen. So ist z. B. für $b_c = 44^0 20'$ nach 160* und den auf S. 271 verzeichneten Werthen:

$$\tau_0^{\text{IV}} = -0{,}0059606 \sin 4\, U_c - 0{,}0033854 \sin 2\, U_c,$$

und hieraus ergiebt sich auf bekannte Art (nämlich aus der Bedingung: $\frac{\partial \tau_0^{\text{IV}}}{\partial U_c} = 0$) das den Maximalwerth liefernde Azimuth: $U_c = 25^0 7'$, und der Maximalwerth selbst, d. i. der absolut-grösste Werth, den τ_0^{IV} für $b_c = 44^0 20'$ und für beliebige Werthe von U_c erreichen kann, nämlich: $\tau_0^{\text{IV}} = -0{,}00846$.

Auf diese Art ist die Uebersichtstafel auf S. 273 berechnet, in welche ausser den Grössen τ_0', τ_0'', τ_0''', τ_0^{IV} auch alle anderen Functionen von b_c und U_c aufgenommen sind, deren Maximalwerthe wir noch gebrauchen werden (vergl. die in der letzten Spalte bezeichneten Formeln).

Die Tafel enthält für die drei Werthe: $b_c = 44^0 20'$, $52^0 40'$, $61^0 0'$, d. i. für die drei Fälle, wo die Mitte des Grösstenkreisbogens $p_1\, p_2$ in einem der beiden äussersten Parallelkreise unseres Anwendungsgebiets oder im Normalparallelkreis liegt, die Maximalwerthe der in der Eingangsspalte bezeichneten Functionen von b_c und U_c nebst den Werthen von U_c, für die sie eintreten. Von diesen sind indessen nur die im ersten Quadranten liegenden aufgeführt, da den Azimuthen U_c, $180^0 - U_c$, $180^0 + U_c$, $360^0 - U_c$ gleiche Absolutwerthe der Functionen entsprechen.

Die Tafel lässt erkennen, dass für jede der darin aufgeführten Functionen der absolut-grösste Werth, den sie für Werthe von b_c innerhalb der Breitenzone $44^0 20'$ bis $61^0 0'$ erreichen kann, an deren nördlichen Grenze stattfindet. Die in der Spalte $61^0 0'$ verzeichneten Werthe sind daher überhaupt die Maximalwerthe für beliebige Werthe von b_c zwischen $44^0 20'$ und $61^0 0'$ und beliebige Werthe von U_c, oder — mit anderen Worten — für beliebige Dreiecksseiten, deren Mitte innerhalb unseres Anwendungsgebiets von $16\,^2/_3$ Breitengraden liegt. [33])

---

[33]) Die Beschränkung auf Dreiecksseiten, deren Mitte innerhalb unseres Anwendungsgebiets von $16\,^2/_3$ Breitengraden liegt, werden wir bei der Bestimmung von Maximal- und Grenzwerthen auch fernerhin festhalten, wenn nicht ein Anderes ausdrücklich gesagt wird.

Maximalwerthe der Grössen τ_0', τ_0'', ... und anderer Functionen von b_c und U_c.

Function von b_c und U_c	b_c 44° 20′	b_c 52° 40′	b_c 61° 0′	U_c			Formel
τ_0'	$\overset{-4}{-1324}$	0	$\overset{-4}{-1431}$	90° 0′	—	90° 0′	160*
τ_0''	$\overset{-4}{+831}$	0	$\overset{-3}{-1141}$	45 0	—	45 0	„
τ_0'''	$\overset{-3}{-3583}$	$\overset{-3}{-4981}$	$\overset{-3}{-8342}$	39 31	35° 16′	32 6	„
τ_0^{iv}	$\overset{-3}{-846}$	$\overset{-2}{-1565}$	$\overset{-2}{-4061}$	25 7	23 21	22 42	„
μ_c'	$\overset{-4}{-1324}$	0	$\overset{-4}{-1431}$	0 0	—	0 0	173*
μ_c''	$\overset{-3}{+1791}$	0	$\overset{-3}{-2023}$	0 0	—	0 0	„
μ_c'''	$\overset{-2}{-1169}$	$\overset{-2}{-1294}$	$\overset{-2}{-1532}$	0 0	0° 0′	0 0	„
μ_c^{iv}	$\overset{-2}{+1074}$	$\overset{-2}{+2325}$	$\overset{-2}{+5351}$	53 15	47 29	45 33	„
χ_c	$\overset{-3}{-1791}$	0	$\overset{-3}{+2023}$	90 0	90 0	90 0	184*
χ_c'	$\overset{-3}{+3583}$	$\overset{-3}{+4981}$	$\overset{-3}{+8342}$	50 29	54 44	57 54	„
χ_c''	$\overset{-3}{-825}$	$\overset{-2}{-1697}$	$\overset{-2}{-4705}$	90 0	90 0 0 0	0 0	„
$\mathfrak{C}_c''\sin 3U_c - \mathfrak{C}_c'''\sin U_c$	$\overset{-4}{+2587}$	0	$\overset{-4}{+6087}$	90 0	—	90 0	211*
$\mathfrak{D}_c''\sin 4U_c + \mathfrak{D}_c'''\sin 2U_c$	$\overset{-3}{+314}$	$\overset{-2}{-1565}$	$\overset{-2}{-7625}$	58 5	23° 21′	24 20	„
$\mathfrak{C}_c^{\mathrm{iv}}\sin 3U_c - \mathfrak{C}_c^{\mathrm{v}}\sin U_c$	$\overset{-3}{-1743}$	0	$\overset{-3}{+3327}$	90 0	—	90 0	218*
$\mathfrak{D}_c^{\mathrm{iv}}\sin 4U_c + \mathfrak{D}_c^{\mathrm{v}}\sin 2U_c$	$\overset{-2}{+1086}$	$\overset{-2}{-1565}$	$\overset{-2}{-8445}$	59 30	23° 21′	27 13	219*
$\mathfrak{B}_c^{(2)}\cos 2U_c + \mathfrak{B}_c^{(3)}$	$\overset{-4}{+895}$	0	$\overset{-3}{-1012}$	0 0	—	0 0	245*

Grenzwerthe der Grössen z, y und ψ.[34]) Wir brauchen die in diesem und dem folgenden Artikel zu bestimmenden Grenzwerthe zu dem in den Artikeln 38 und 39 geführten Nachweis. 36

Die genannten Grössen sind ausser von τ_0', τ_0'', ... auch von R und x abhängig. Zufolge der Fussnote auf Seite 261 hat man bis zur Ordnung R^3 einschl. genau:

---

34) Wir verstehen unter Grenzwerth einen Werth, der nicht überschritten werden kann, der also ebenso gross oder grösser ist als der Maximalwerth, d. i. als der grösste wirklich erreichbare Werth. Wir begnügen uns mit einem Grenzwerth, wenn der Maximalwerth entbehrlich und seine Bestimmung umständlicher ist. Wir schreiben: $x \leqq a$, wenn a der Maximalwerth, dagegen: $x < a$, wenn a ein Grenzwerth von x ist.

163* $$z = \frac{1}{2}\tau_0'\left(x^2 - \frac{R^2}{4}\right),$$

164* $$\tan\psi = \tau_0' x + \frac{1}{2}\tau_0''\left(x^2 - \frac{R^2}{12}\right) + \frac{1}{6}\tau_0''' x^3,$$

woraus sich für $x = 0$, bezw. für $x = \mp \frac{R}{2}$, die in den Punkten p_0, bezw. p_1 und p_2 (Fig. 8, S. 266), stattfindenden Werthe von z und $\tan\psi$ ergeben, nämlich (in Uebereinstimmung mit 136*—139*):

165* $$\begin{cases} z_0 = -\frac{R^2}{8}\tau_0' \text{ und } \tan\psi_0 = -\frac{R^2}{24}\tau_0'', \\ \tan\psi_1 = -\frac{R}{2}\tau_0' + \frac{R^2}{12}\tau_0'' - \frac{R^3}{48}\tau_0''', \\ \tan\psi_2 = +\frac{R}{2}\tau_0' + \frac{R^2}{12}\tau_0'' + \frac{R^3}{48}\tau_0'''. \end{cases}$$

Aus 163* und 164* ist ersichtlich, dass die grössten Werthe, welche z und $\tan\psi$ für Werthe von x zwischen $-\frac{R}{2}$ und $+\frac{R}{2}$ erreichen können, keinesfalls grösser sind als diejenigen, welche man erhält, wenn man setzt:

in 163*: $x = 0$, in 164*: $x = \frac{R}{2}$,

„ 163* und 164*: anstatt der Grössen τ_0', τ_0'', τ_0''' ihre Maximalwerthe $\overset{-4}{1431}$, $\overset{-3}{1141}$, $\overset{-3}{8342}$ (siehe die Tafel S. 273),

und wenn man überdies in 164* die Zahlenwerthe der drei Glieder positiv nimmt.

Auf diese Art ergeben sich die Grenzwerthe:

$$z < \frac{\overset{-4}{1431}}{8} R^2,$$

$$\tan\psi < \frac{\overset{-4}{1431}}{2} R + \frac{\overset{-3}{1141}}{12} R^2 + \frac{\overset{-3}{8342}}{48} R^3.$$

R und z in Theilen des Halbmessers.

Zufolge 165* kann man diese Werthe zugleich als Grenzwerthe von z_0 und $\tan\psi_1$ oder $\tan\psi_2$ ansehen, und da sich y von z, und ψ von $\tan\psi$ nur um sehr kleine Theile ihrer Werthe unterscheiden, so gelten sie als solche auch für y und ψ, ψ_1, ψ_2.

Indem wir noch den Grenzwerth:

$$\psi_0 < \frac{\overset{-3}{1141}}{24} R^2$$

hinzufügen, welcher aus dem unter 165* gegebenen Werthe von $\tan \psi_0$ folgt, und indem wir R in Kilometern anstatt in Theilen des Kugelhalbmessers verstehen, finden wir: [35)]

$$166^* \quad \left| \begin{aligned} & z,\ y,\ z_0,\ y_0 < \overset{-13}{439}\, R^2, \\ & \psi,\ \psi_1,\ \psi_2 < \overset{-8}{112}\, R + \overset{-12}{233}\, R^2 + \overset{-16}{67}\, R^3, \\ & \psi_0 < \overset{-12}{117}\, R^2. \end{aligned} \right.$$

R in Kilometern, alle übrigen Grössen in Theilen des Halbmessers.

Dies giebt:

167*

für $R \leqq$	100 km	500 km	1000 km	1500 km ist:
$z,\ y,\ z_0,\ y_0 <$	$\overset{-9}{439}$	$\overset{-7}{110}$	$\overset{-7}{439}$	$\overset{-7}{988}$
$\psi,\ \psi_1,\ \psi_2 <$	$\overset{-6}{114}$	$\overset{-6}{626}$	$\overset{-5}{142}$	$\overset{-5}{243}$
$\psi_0 <$	$\overset{-8}{117}$	$\overset{-7}{292}$	$\overset{-6}{117}$	$\overset{-6}{263}$,

oder in Secunden:

168*

$z,\ y,\ z_0,\ y_0 <$	0,001″	0,023″	0,09″	0,20″
$\psi,\ \psi_1,\ \psi_2 <$	0,24	1,3	2,9	5,0
$\psi_0 <$	0,002	0,06	0,2	0,54.

Diese Grenzwerthe gelten zufolge ihrer Herleitung für Dreiecksseiten, deren Mitte innerhalb der Breitenzone von $44^0\ 20'$ bis 61^0 0 liegt (vergl. die Fussnote S. 272).

Grenzwerthe der Grössen $m'\sin U$ und $m'\cos U$. Da 37
$\tau'', \tau''', \ldots$ die successiven Ableitungen von τ' nach x sind, so hat man nach dem Maclaurin'schen Satze die Reihe:

$$169^* \qquad \tau' = \tau_0' + \tau_0''\, x + \frac{1}{2}\tau_0'''\, x^2 + \frac{1}{6}\tau_0^{\mathrm{IV}}\, x^3 + \ldots,$$

die sich auch durch Differentiation der Reihe 134* ergiebt. Hieraus folgt mit dem Maximalwerth $\frac{R}{2}$ von x und den auf S. 273 verzeichneten Maximalwerthen der $\tau_0', \tau_0'', \ldots$:

$$\tau' < \overset{-4}{1431} + \frac{\overset{-3}{1141}}{2} R + \frac{\overset{-3}{8342}}{8} R^2 + \frac{\overset{-2}{4061}}{48} R^3,$$

oder, R in Kilometern:

$$\tau' < \overset{-4}{143} + \overset{-8}{894}\, R + \overset{-11}{256}\, R^2 + \overset{-15}{325}\, R^3,$$

woraus für $R \leqq 1500$ km: $\tau' < \overset{-4}{35}$.

---

35) Soll R in Kilometern anstatt in Theilen des Kugelhalbmessers verstanden werden, so ist $\frac{R}{A}$ anstatt R zu setzen, wo A den in Kilometern ausgedrückten Kugelhalbmesser bedeutet. Es ist: $A = 6383$ km, $\log A = 3{,}8050$.

Da nach Art. 31: $\tau' = m' \sin U - z$, und da z für $R \leqq 1500$ km den Werth $\overset{-7}{988}$ nicht überschreiten kann (siehe 167*), so gilt der obige Grenzwerth von τ' auch als Grenzwerth von $m' \sin U$.

Bezeichnet man ferner mit $\mu_x', \mu_x'', \ldots$ die successiven Ableitungen von lm_x nach x, und mit $\mu_c', \mu_c'', \ldots$ ihre bestimmten Werthe im Punkte c (für $x = 0$), so giebt der Maclaurin'sche Satz:

170* $$lm_x = lm_c + \mu_c' x + \frac{1}{2}\mu_c'' x^2 + \frac{1}{6}\mu_c''' x^3 + \ldots.$$

Da man aber hat:

$$\mu_x' = \frac{\partial l m_x}{\partial x} = \frac{\partial l m_x}{\partial b_x}\,\frac{\partial b_x}{\partial x} = m_x \cos U_x,$$

so kommt durch Differentiation der vorigen Reihe nach x (oder auch unmittelbar nach dem Maclaurin'schen Satze):

171* $$m_x' \cos U_x = \mu_c' + \mu_c'' x + \frac{1}{2}\mu_c''' x^2 + \ldots.$$

Führt man die successiven Differentiationen aus und setzt zur Abkürzung:

172* $$\begin{cases} \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D} \text{ siehe } 155^*, \\ 2\mathfrak{B}^{(1)} = m'' - m' \tan b, \\ 4\mathfrak{C}^{(1)} = 3m''' - 3m'' \tan b - m'(3\tan^2 b + 1), \\ 8\mathfrak{D}^{(1)} = 4m^{\mathrm{IV}} - 12m'' \tan^2 b - m'(12\tan^3 b + 4\tan b), \\ 8\mathfrak{D}^{(2)} = 3m^{\mathrm{IV}} - 6m''' \tan b - m''(3\tan^2 b + 4) \\ \qquad\qquad - m'(3\tan^3 b + 5\tan b), \end{cases}$$

so findet man:

173* $$\begin{cases} \mu_c' = m_c' \cos U_c, \\ \mu_c'' = \mathfrak{B}_c \cos 2U_c + \mathfrak{B}_c^{(1)}, \\ \mu_c''' = \mathfrak{C}_c \cos 3U_c + \mathfrak{C}_c^{(1)} \cos U_c, \\ \mu_c^{\mathrm{IV}} = \mathfrak{D}_c \cos 4U_c + \mathfrak{D}_c^{(1)} \cos 2U_c + \mathfrak{D}_c^{(2)}. \end{cases}$$ [36])

Mit den auf S. 273 verzeichneten Maximalwerthen der $\mu_c', \mu_c'', \ldots$ und dem Maximalwerth $\frac{R}{2}$ von x giebt die Reihe 171*:

$$m_x' \cos U_x < \overset{-4}{1431} + \frac{\overset{-3}{2023}}{2} R + \frac{\overset{-2}{1532}}{8} R^2 + \frac{\overset{-2}{5351}}{48} R^3,$$

oder, R in Kilometern:

$$m_x' \cos U_x < \overset{-4}{143} + \overset{-7}{158} R + \overset{-11}{470} R^2 + \overset{-15}{429} R^3,$$

woraus für $R \leqq 1500$ km: $m_x' \cos U_x < \overset{-4}{50}.$

Da die Bildcurve sich immer nur sehr wenig von dem Grösstenkreisbogen $p_1 p_2$ (Fig. 8, S. 266) entfernt, so können sich auch die

36) Von der Reihe 170* und den Werthen 173* werden wir weiter unten (Art. 50 und 51) noch Gebrauch machen.

Werthe, welche die Grösse $m' \cos U$ in zwei einander entsprechenden Punkten p und q hat, immer nur sehr wenig von einander unterscheiden. Man kann daher den obigen Grenzwerth von $m_x' \cos U_x$ zugleich als einen solchen von $m' \cos U$ ansehen.

Es ist somit nachgewiesen, dass für $R \leqq 1500$ km:

174* $$m' \sin U < \overset{-4}{35} \text{ und } m' \cos U < \overset{-4}{50}.$$

Vergl. die Fussnote S. 272.

Vereinfachung des strengen Ausdrucks 152* für τ'. Nach 152* ist streng: 38

175* $$\tau' = (m' \sin U + m' \cos U \tan \psi - \tan y) \frac{\cos y}{\cos^2 \psi},$$

und da τ' die vollständige Ableitung von $\tan \psi$ nach x ist, so hat man gleichfalls streng:

176* $$\tan \psi_1 = \int_0^{-\frac{R}{2}} \tau' \partial x \quad \text{und} \quad \tan \psi_2 = \int_0^{+\frac{R}{2}} \tau' \partial x,$$

worin wir wegen der Kleinheit der Winkel ψ_1 und ψ_2 (siehe 168*) ohne Weiteres diese selbst anstatt ihrer Tangenten setzen können.

Es soll in diesem und dem folgenden Artikel nachgewiesen werden, dass man nach 176* die Azimuthreductionen ψ_1 und ψ_2 für Dreiecksseiten bis zu 1500 km Länge genauer als auf 0,0005 Secunden erhält, wenn man in den bestimmten Integralen den strengen Ausdruck 175* durch den im Sinne des Artikels 31 (S. 267) vereinfachten:

177* $$\tau' = m_x' \sin U_x - z$$

ersetzt.

Indem wir von der an genannter Stelle unter 4. bezeichneten Vereinfachung zunächst absehen und demgemäss setzen:

178* $$\tau' = m' \sin U - z,$$

wo sich die Grösse $m' \sin U$ auf einen unbestimmten Punkt p der Bildcurve bezieht (Fig. 8, S. 266), haben wir streng:

$$\tau' = m' \sin U - z + \Delta,$$

$$\Delta = -m' \sin U \left(1 - \frac{\cos y}{\cos^2 \psi}\right) + m' \cos U \tan \psi \frac{\cos y}{\cos^2 \psi} - \tan y \frac{\cos y}{\cos^2 \psi} + z,$$

wo Δ die Summe der zu vernachlässigenden Glieder des Ausdrucks 175* bezeichnet, und zufolge 176* werden die aus der Vernachlässigung von Δ hervorgehenden Fehler von $\tan \psi_1$ und $\tan \psi_2$ (oder von ψ_1 und ψ_2) dargestellt durch die bestimmten Integrale:

179* $$\int_0^{-\frac{R}{2}} \Delta \partial x \quad \text{und} \quad \int_0^{+\frac{R}{2}} \Delta \partial x.$$

Im Ausdruck für Δ, wo es sich nur um ganz roh angenäherte Werthe handelt, können wir im ersten Gliede setzen:

$$1 - \frac{\cos y}{\cos^2 \psi} = \frac{y^2}{2} - \tan^2 \psi, \quad {}^{37)}$$

und in den beiden folgenden den nur sehr wenig von 1 verschiedenen Factor $\frac{\cos y}{\cos^2 \psi}$ fortlassen. Beachtet man noch, dass nach Art. 31. 2: $z - \tan y = -\frac{y^3}{6}$, und führt die Bezeichnungen ein:

$\Delta' = + m' \cos U \tan \psi,$	$\Delta''' = - m' \sin U \, \frac{y^2}{2},$
$\Delta'' = + m' \sin U \tan^2 \psi,$	$\Delta^{\text{IV}} = - \frac{y^3}{6},$

so hat man: $\Delta = \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta^{\text{IV}}.$

Nach 174* und 167* ist aber für $R \leqq 1500$ km:

$\Delta' < \overset{-4}{50} \times \overset{-5}{243} = \overset{-8}{12},$	$\Delta''' < \overset{-4}{35} \times \frac{\overset{-7}{988^2}}{2} = \overset{-16}{17},$
$\Delta'' < \overset{-4}{35} \times \overset{-5}{243^2} = \overset{-13}{21},$	$\Delta^{\text{IV}} < \frac{\overset{-7}{988^3}}{6} = \overset{-19}{16},$

woraus ersichtlich, dass für $R \leqq 1500$ km die Summe Δ den Werth $\overset{-8}{12}$ nicht überschreiten kann.

Da allgemein das bestimmte Integral: $\int_0^a f(x)\,\partial x$ die Summe: $\partial x\,[f(0) + f(\partial x) + f(2\,\partial x) + \ldots + f(\overline{n-1} \cdot \partial x)]$, worin $n\,\partial x = a$, für ein unendlich grosses n darstellt, so ist klar, dass der Werth dieses Integrals nicht grösser sein kann als derjenige von $n\,\partial x \cdot w = a\,w$, wo w den grössten Werth bezeichnet, den $f(x)$ für $x = 0$ bis $x = a$ annehmen kann.

Die Anwendung dieses allgemeinen Satzes auf die Integrale 179* liefert für jedes derselben den Grenzwerth $\frac{R}{2} w$, wenn w den Maximalwerth oder einen Grenzwerth von Δ für $x = -\frac{R}{2}$ bis $x = +\frac{R}{2}$, d. i. für Werthe von x zwischen den Punkten p_1 und p_2, bedeutet. Mit dem obigen Grenzwerth: $\Delta < \overset{-8}{12}$ ergiebt sich daher, dass für Dreieckseiten bis zu 1500 km Länge der aus der Vernachlässigung von Δ, d. i. der aus der Anwendung des Ausdrucks 178* anstatt desjenigen 175*,

---

37) Es ist nämlich:

$$1 - \frac{\cos y}{\cos^2 \psi} = 1 - \left(1 - \frac{y^2}{2} + \ldots\right)\left(1 + \tan^2 \psi\right) = \frac{y^2}{2} - \tan^2 \psi.$$

hervorgehende Fehler der Azimuthreduction ψ_1 oder ψ_2 nicht grösser sein kann als:

$$\overset{-8}{12} \times \frac{1500\,\rho}{2\,A} = 0{,}00029 \text{ Secunden.}$$ [38)]

Vergl. die Fussnote S. 272.

Fortsetzung. Da von der im Art. 31, S. 267, unter 4. bezeichneten Vereinfachung im vorigen Artikel abgesehen worden ist, so bleibt noch der Unterschied $m' \sin U - m'_x \sin U_x$ zwischen den Ausdrücken 177* und 178* zu entwickeln übrig. 39

Der Maclaurin'sche Satz giebt:

180* $$m' \sin U = m'_x \sin U_x + y\left(\frac{\partial \cdot m' \sin U}{\partial y}\right)_x + \ldots.$$

Indem wir den partiellen Differentialquotienten von $m' \sin U$ nach y mit χ bezeichnen, haben wir:

$$\chi = m'' \sin U\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right) + m' \cos U\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

und da nach 149*: $\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right) = -\sin U$ und $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \tan b \cos U$, so kommt:

$$\chi = (m'' + m' \tan b) \cos^2 U - m'',$$

mithin:

181* $$\left(\frac{\partial \cdot m' \sin U}{\partial y}\right)_x = \chi_x = (m''_x + m'_x \tan b_x) \cos^2 U_x - m''_x,$$

und nach 180*:

182* $$m' \sin U - m'_x \sin U_x = \chi_x y.$$

Behufs Bestimmung des Maximalwerthes oder eines Grenzwerthes dieses Unterschiedes entwickeln wir zunächst χ_x in eine Reihe nach x. Indem wir mit $\chi'_x, \chi''_x, \ldots$ die successiven Ableitungen von χ_x nach x, und mit $\chi'_c, \chi''_c, \ldots$ ihre im Punkte c (d. i. für $x = 0$) stattfindenden Werthe bezeichnen, haben wir nach dem Maclaurin'schen Satze:

183* $$\chi_x = \chi_c + \chi'_c x + \frac{1}{2}\chi''_c x^2 + \ldots.$$

Die Ableitungen $\chi'_x, \chi''_x, \ldots$ erhalten wir durch aufeinander folgende Differentiationen der Gleichung 181* nach x mit Beachtung der Werthe 154*. Wir geben den sich ergebenden Ausdrücken für $\chi_x, \chi'_x, \chi''_x, \ldots$ folgende Form:

184* $$\begin{cases} \chi_x = \mathfrak{B}_x \cos 2\,U_x - \mathfrak{B}^{(1)}_x, \\ \chi'_x = \mathfrak{C}_x \cos 3\,U_x - \mathfrak{C}'_x \cos U_x, \\ \chi''_x = \mathfrak{D}_x \cos 4\,U_x + \mathfrak{D}^{(3)}_x \cos 2\,U_x - \mathfrak{D}^{(4)}_x, \end{cases}$$

---

38) Auf ähnliche Weise kann man für jeden Werth von R einen Grenzwerth desjenigen Fehlers von ψ_1 und ψ_2 bestimmen, welcher aus der Vernachlässigung des Gliedes $-z$ im Ausdruck 178* hervorgeht. Man findet, dass dieser Fehler:

für $R \leq$ 100 km, 500 km, 1000 km, 1500 km

nicht grösser sein kann als:

$0{,}00007''$, $0{,}0009''$, $0{,}007''$, $0{,}024''$.

worin:

$$185^* \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^{(1)}, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{D} \text{ siehe } 155^* \text{ und } 172^*, \\ &8\,\mathfrak{D}^{(3)} = 8\,m'' + 8\,m' \tan b = 16\,\mathfrak{B}, \\ &8\,\mathfrak{D}^{(4)} = m^{\mathrm{IV}} - 2\,m''' \tan b - m'' (\tan^2 b + 4) \\ &\qquad\qquad - m' (\tan^3 b - \tan b). \end{aligned} \right.$$

Um die dem Punkte c entsprechenden Werthe χ_c, χ_c', χ_c'' zu erhalten, braucht man nur sämmtliche Grössen in 184* und 185* mit dem Index c zu versehen.

Mit den auf S. 273 verzeichneten Maximalwerthen der χ_c, χ_c', χ_c'' folgt aus der Reihe 183*, dass für Werthe von $x = -\frac{R}{2}$ bis $x = +\frac{R}{2}$ (d. i. zwischen den Punkten p_1 und p_2) ist:

$$\chi_x < \overset{-3}{2023} + \frac{\overset{-3}{8342}}{2} R + \frac{\overset{-2}{4705}}{8} R^2,$$

oder, R in Kilometern:

$$\chi_x < \overset{-3}{202} + \overset{-7}{654} R + \overset{-10}{144} R^2,$$

woraus für $R \leqq 1500$ km: $\chi_x < \overset{-3}{33}$.

Mit diesem und dem Grenzwerth $y < \overset{-7}{988}$ (siehe 167*) erhält man nach 182* für Seiten bis zu 1500 km Länge:

$$m' \sin U - m_x' \sin U_x < \overset{-3}{33} \times \overset{-7}{988} = \overset{-9}{33},$$

und hiermit ergiebt sich — den Ausführungen des vorigen Artikels zufolge — für den aus der Anwendung des Werthes $m_x' \sin U_x$ anstatt desjenigen $m' \sin U$ (d. i. des Ausdrucks 177* anstatt desjenigen 178*) hervorgehenden Fehler der Azimuthreduction ψ_1 oder ψ_2 der Grenzwerth:

$$\overset{-9}{33} \times \frac{1500\,\rho}{2\,A} = 0{,}00008 \text{ Secunden.}$$

Durch Vereinigung dieses Grenzwerthes mit dem am Schluss des vorigen Artikels gefundenen erhält man für den aus sämmtlichen im Art. 31 (S. 267) angegebenen Vereinfachungen hervorgehenden Fehler den Grenzwerth: 0,00037 Secunden.

Wir fassen nunmehr die Ergebnisse dieses und des vorigen Artikels wie folgt zusammen:

Wenn man in 176* anstatt des strengen Ausdrucks 175* den vereinfachten:

$$186^* \qquad \tau' = m_x' \sin U_x - z$$

anwendet, so kann daraus für Dreiecksseiten, die nicht länger als 1500 km sind und deren Mitte innerhalb der Breitenzone von 44° 20′

bis $61^0\ 0'$ liegt, in der Bestimmung der Azimuthreductionen ψ_1 und ψ_2 kein grösserer Fehler entstehen als:

0,00037 Secunden.

Da die nachstehend (Art. 40—47) entwickelten Formeln für die Azimuthreductionen (K D, § 17—20) bei einer Genauigkeit von 0,0005 Sec. nur bis zu Seitenlängen von 500 km reichen, so genügt der Ausdruck 186* vollauf zur Herleitung dieser Formeln. Das Glied $-z$ in demselben darf dagegen (zufolge der Fussnote S. 279) nicht ohne Weiteres vernachlässigt werden. (Schluss folgt.)

Die bayerische Gesetzgebung über die Anlage des Grundbuchs und sonstige damit zusammenhängende Materien.

Vielfach schon wurde in dieser Zeitschrift darauf hingewiesen, dass gerade der mit dem Vermessungswesen in näherer Beziehung stehende Theil des neuen bürgerlichen Rechtes keine volle, ja zum Theil recht wenige Befriedigung hervorzurufen vermöge. Ich darf in dieser Hinsicht vielleicht auf meinen Vortrag auf der letzten Versammlung unseres Vereins — vergl. Jahrgang 1899, Seite 266 und folgende — Bezug nehmen. Der Umstand, dass das Einführungsgesetz zum Bürgerlichen Gesetzbuch und die Grundbuchordnung zahlreiche und umfangreiche Materien durch Landesgesetze überlassen hat, lässt das Ziel eines einheitlichen Sachenrechtes für ganz Deutschland unerfüllt und rückt die Befürchtung nur zu nahe, dass diese wichtige Materie in einzelnen deutschen Ländern je nach Lage der Dinge in ungenügender, vielleicht in geradezu unglücklicher Weise geregelt werden oder eigentlich richtiger geregelt worden sein könnte.

Ich fürchte sonach, dass die Grundbuchsfrage die deutschen Vermessungsbeamten noch sehr viel, die kommende Generation vielleicht in recht fataler Weise wird beschäftigen müssen. Und es wird daher für die Berufsgenossen die nähere Kenntniss darüber, wie sich die Dinge in den einzelnen Staaten gestaltet haben und weiter entwickeln, kaum zu entbehren sein.

Ich hoffe daher, mich keiner Vergeudung des Raumes dieser Zeitschrift schuldig zu machen, wenn ich zunächst für Bayern, anschliessend daran aber mit der erhofften Unterstützung seitens dortiger Collegen auch für alle anderen deutschen Staaten eine Zusammenstellung der einschlägigen Gesetze und Verordnungen bringen möchte. Dem einheimischen Collegen ist der Besitz einer derartigen Zusammenstellung ohnedem Bedürfniss, dem fernerstehenden wird sie vielleicht behufs Vergleiches der heimischen Entwicklung mit der der Nachbarstaaten gleichfalls willkommen sein. — —

Ich darf vorausschickend wohl darauf hinweisen, dass die bayerische Staatsregierung zur Herstellung des Grundbuches den Weg beschritten hat, das durch das Gesetz vom 1. Juni 1822 geschaffene Hypothekenbuch zum Grundbuch umzuwandeln, indem es durch den Eintrag der bisher noch nicht eingetragenen (weil nicht verpfändeten) Grundstücke ergänzt wird. Für die Pfalz, wo keine geeigneten Hypothekenbücher vorhanden waren, werden neue Grundbücher angelegt, worauf später gesondert zurückzukommen ist. Das Verfahren zur Anlegung des Grundbuches ist nach Art. 186 des Einführungsgesetzes zum Bürgerlichen Gesetzbuch (= B. G. B.) der landesherrlichen Verordnung vorbehalten. In Rücksicht auf die Adaptirung der vorhandenen Hypothekenbücher zu Grundbüchern schien es aber erwünscht, einige hypothekengesetzliche Bestimmungen sofort zu ändern, die mit dem Inslebentreten des B. G. B. beziehungsweise des Grundbuchrechtes geändert bezw. aufgehoben waren, deren sofortiger Wegfall daher die Grundbuchanlage nur erleichtern und fördern konnte.

Wir stossen also in der einschlägigen bayerischen Gesetzgebung zunächst auf das Gesetz vom 18. Juni 1898, die Verbreitung der Anlegung des Grundbuchs in den Landestheilen rechts des Rheins betreffend, welches nach Weglassung der Einleitung und Schlussformel lautet:

I. Eintragung der bisher folienfreien Grundstücke in das Hypothekenbuch.

Artitel 1. Die Grundstücke, für welche im Hypothekenbuch ein Folium nicht angelegt ist, werden von Amtswegen in das Hypothekenbuch eingetragen.

Artikel 2. Durch Königliche Verordnung wird bestimmt, auf welche der im § 90 der Grundbuchordnung bezeichneten Grundstücke die Vorschrift des Artikels 1 keine Anwendung findet.

Artikel 3. Das Verfahren, in welchem die Eintragung erfolgt, wird durch Königliche Verordnung bestimmt. Die Gemeindebehörden können zur Mitwirkung in dem Verfahren herangezogen werden.

II. Münchener Grundbuch.

Artikel 4. Das bei dem Amtsgerichte München I geführte Hypothekenbuch gilt von dem Inkrafttreten dieses Gesetzes an als Grundbuch im Sinne der Münchener Grundbuchordnungen.

Von dieser Zeit an werden nur noch solche Eintragungen in das Münchener Grundbuch vorgenommen, welche Löschungen oder Veränderungen der eingetragenen Grunddienstbarkeiten oder Ewiggelder betreffen.

Ist eines der im Artikel 2 bezeichneten Grundstücke im Grundbuch, aber nicht im Hypothekenbuch eingetragen, so wird es in dieses von Amtswegen eingetragen, sofern nicht der im Grundbuch eingetragene Eigenthümer beantragt, die Eintragung zu unterlassen.

III. Gesammthypotheken.

Artikel 5. Besteht für dieselbe Forderung eine Hypothek an mehreren Grundstücken (Gesammthypothek), so kann der Gläubiger die Befriedigung nach seinem Belieben aus jedem Grundstücke ganz oder zu einem Theile suchen. Im Falle der Zwangsversteigerung kann der Gläubiger im Vertheilungsverfahren dieses Recht nur unbeschadet der durch das geringste Gebot gedeckten Rechte ausüben.

Der Gläubiger ist berechtigt, den Betrag der Forderung auf die einzelnen Grundstücke in der Weise zu vertheilen, dass jedes Grundstück nur für den zugetheilten Betrag haftet.

Artikel 6. Zur Theilung eines mit einer Hypothek belasteten Grundstückes ist die Einwilligung des Gläubigers nicht erforderlich. Das Gleiche gilt für die Trennung von Grundstücken, welche auf einem Folium des Hypothekenbuchs vorgetragen sind.

Die Hypothek besteht als Gesammthypothek fort.

Eine Vereinbarung, durch welche der Eigenthümer zu Gunsten des Hypothekengläubigers in der Befugniss zur Vornahme einer der im Abs. 1 bezeichneten Verfügungen beschränkt oder verpflichtet wird, die Verfügung nicht ohne Einwilligung des Gläubigers vorzunehmen, ist nichtig.

Artikel 7. Die Vorschriften der Artikel 5 und 6 gelten auch für die vor dem Inkrafttreten dieses Gesetzes eingetragenen Hypotheken, für die vor diesem Zeitpunkte erfolgten Theilungen und Trennungen von Grundstücken, sowie für die vor diesem Zeitpunkte getroffenen Vereinbarungen der im Artikel 6 Abs. 3 bezeichneten Art.

Artikel 8. Auf ein Realrecht, das Gegenstand einer Hypothek sein kann, finden die Vorschriften der Artikel 5 bis 7 entsprechende Anwendung.

Artikel 9. Die §§ 39 und 40 des Hypothekengesetzes vom 1. Juni 1822 sowie der Artikel 12 und die Vorschrift im Artikel 26 Nr. 2 des Gesetzes vom 29. Mai 1886, Aenderungen der Bestimmungen über die Zwangsvollstreckung in das unbewegliche Vermögen betreffend, sind aufgehoben.

IV. Schlussbestimmungen.

Artikel 10. Das Hypothekenamt ist zuständig, Erklärungen, Eintragungsbewilligungen und Verträge, die durch die Anlegung des Grundbuchs veranlasst werden, zu beurkunden. Der Beiziehung eines Gerichtsschreibers bedarf es nicht. Das Staatsministerium der Justiz kann auch geprüfte Rechtspraktikanten mit der Beurkundung betrauen.

Diese Vorschriften gelten im Falle der Rechtshülfe auch für das ersuchte Gericht.

Artikel 11. Die Notaren haben den Gerichten auf Ersuchen die Urschriften ihrer Urkunden zu übersenden oder über deren Inhalt

Auskunft zu geben. Im Falle der Uebersendung der Urschrift ist die Zurückbehaltung einer Abschrift nicht erforderlich.

Für die Erledigung eines nach Abs. 1 gestellten Ersuchens kann eine Gebühr nicht beansprucht werden.

Artikel 12. Das Verfahren zur Vorbereitung der Anlegung des Grundbuchs einschliesslich der im Artikel 10 Abs. 1 bezeichneten Beurkundung ist gebührenfrei.

Die baaren Auslagen werden auf die Staatskasse übernommen.

Artikel 13. Das Staatsministerium der Finanzen kann gestatten, dass die Umschreibung im Grundsteuerkataster, im Hypothekenbuch und im Münchener Grundbuch vor der Entrichtung oder Hinterlegung der Staatsgebühren vorgenommen wird.

Artikel 14. Ueber die Einrichtung des Hypothekenbuches kann das Staatsministerium der Justiz von den Bestimmungen des Hypothekengesetzes abweichende Anordnungen treffen.

So wenig ich beabsichtige, zu den hier zusammenzutragenden Gesetzen und Verordnungen, eine eingehende Kritik oder einen Commentar zu geben, so möchte ich doch jene Erläuterungen in aller Kürze beigeben, die der mit der bayerischen Gesetzeslage nicht näher vertraute Leser beanspruchen kann. Es sei daher zu Ziff. II des vorstehenden Gesetzes bemerkt, dass speciell für den Bereich der Stadt München seit Jahrhunderten ein Grundbuch bestanden hat. Dasselbe wäre jedoch als Grundbuch im Sinne des B. G. B. nicht nur in Rücksicht auf den Rechtsinhalt seiner bisherigen Einträge, sondern auch wegen seiner formellen Führung nicht geeignet gewesen. Man stösst also auf die eigenthümliche Erscheinung, dass das Münchener Grundbuch zunächst durch ein Hypothekenbuch ersetzt werden muss, um dann als solches in das Grundbuch im Sinne des B. G. B. umgewandelt zu werden. Der III. Abschnitt ist an sich rein rechtlicher Natur und durch eine Abweichung des neuen vom bisherigen Hypotheken-Rechte bedingt; es dürfte aber meines Erachtens hier ein Gebiet gegeben sein, auf welchem die eigenthümliche, von dem Geiste des B. G. B. selbst abweichende Grundstücks-Definition der Grundbuch-Ordnung (G. B. O.) — wonach jede mit einer Steuer bezeichnete Fläche als selbstständiges Grundstück gilt — zu schweren Verwicklungen führen dürfte. Die Bestimmung in Art. 10 endlich ist eine bei der Unentgeltlichkeit dieser Beurkundung gegenüber dem sonst ziemlich kostspieligen Notariatszwang sehr wohlwollende Einrichtung. Sie wäre unter Umständen auch geeignet, die mancherlei Schäden, die sich durch die Indolenz und Arglist der Grundbesitzer in die Kataster und Hypothekenbücher eingeschlichen, einigermaassen zu beseitigen. Dabei muss aber ein sehr genaues Verständniss nicht nur der Hypothekenbeamten und geprüften Reichspraktikanten, sondern leider auch der Grundbesitzer selbst für die Beurtheilung der

Katasterverträge auf ihre Uebereinstimmung mit dem thatsächlichen Besitzstande vorausgesetzt werden. —

Hauptsächlich maassgebend für die Grundbuchs-Anlage sind die Vollzugsvorschriften, wie sie zu den §§ 87 bis 91 der G. B. O. bezw. zu Art. 2 und 3 des vorstehenden Gesetzes erlassen wurden.

I. Kgl. Verordnung vom 1. Juli 1898, die vom Buchungszwange befreiten Grundstücke betreffend.

§ 1. Die im § 90 Abs. 1 der Grundbuchordnung bezeichneten Grundstücke erhalten nur auf Antrag ein Grundbuchblatt.

Juristische Personen im Sinne des § 90 Abs. 1 der Grundbuchordnung sind die Kreis- und Districtsgemeinden, die politischen und Kirchengemeinden, die Ortschaften, die öffentlichen Stiftungen, die Klöster und die Versicherungsanstalten für Invaliditäts- und Altersversicherung.

§ 2. Auf die im § 1 bezeichneten Grundstücke findet der Artikel 1 des Gesetzes vom 18. Juni 1898, die Vorbereitung der Anlegung des Grundbuchs in den Landestheilen rechts des Rheins betreffend, keine Anwendung.

II. Kgl. Verordnung vom 23. Juli 1898, die Anlegung des Grundbuchs in den Landestheilen rechts des Rheins betreffend.

Erster Abschnitt, D. 10.

Erster Abschnitt.

Eintragung der folienfreien Grundstücke in das Hypothekenbuch.

§ 1. Die Grundstücke, deren Eintragung in das Hypothekenbuch nach Artikel 1 des Gesetzes vom 18. Juni 1898, die Vorbereitung der Anlegung des Grundbuchs in den Landestheilen rechts des Rheines betreffend, von Amtswegen zu erfolgen hat, werden, soweit nicht die Eintragung nach den Vorschriften des Hypothekengesetzes erforderlich wird, in einem besonderen Verfahren nach Maassgabe der §§ 2 bis 19 dieser Verordnung eingetragen.

§ 2. Der Eintragung hat die Ermittelung der Eigenthümer der einzelnen Grundstücke vorauszugehen. Die Ermittelungen werden nach Steuergemeinden angestellt.

§ 3. Die Amtsgerichte, bei welchen die in den §§ 1, 2 bezeichneten Vorarbeiten zur Anlegung des Grundbuchs (Anlegungsarbeiten) vorzunehmen sind, und die Richter, denen die Anlegungsarbeiten obliegen (Anlegungsbeamte), werden vom Staatsministerium der Justiz bestimmt. Zur Verrichtung der den Anlegungsbeamten obliegenden Arbeiten kann das Staatsministerium der Justiz auch Rechtspraktikanten (Anlegungscommissäre) bestimmen.

§ 4. Der Beginn der Anlegungsarbeiten in einer Gemeinde ist von dem Anlegungsbeamten öffentlich bekannt zu machen.

§ 5. Ueber die Eigenthumsverhältnisse sind zu vernehmen:

1) der im Grundsteuerkataster als Besitzer Bezeichnete oder dessen Erben,
2) diejenigen Personen, welche von den in Nr. 1 Genannten als Eigenthümer bezeichnet werden, oder für dereu Eigenthum sich sonst Anzeichen ergeben.

§ 6. Die Vernehmung erfolgt mündlich oder schriftlich; sie kann durch Vermittelung der Gemeindebehörde erfolgen. Sie kann unterbleiben, wenn sie unthunlich ist oder wenn der zu Vernehmende sich ausserhalb des Deutschen Reichs aufhält. Ist dem Anlegungsbeamten bekannt, dass der zu Vernehmende einen Vertreter hat, so ist dieser zu vernehmen.

Die Beamten, welche zur Verwaltung der von der Eintragung in das Hypothekenbuch befreiten Grundstücke (§ 2 der Königlichen Verordnung vom 1. Juli 1898, die vom Buchungszwange befreiten Grundstücke betreffend) berufen sind, werden nur dann mündlich vernommen, wenn ihre schriftlichen Erklärungen mündliche Aufschlüsse nothwendig machen.

§ 7. Die im § 5 bezeichneten Personen haben auf Verlangen des Anlegungsbeamten Aufschluss über den Erwerb des Eigenthums zu geben und die sich hierauf beziehenden Urkunden vorzulegen

§ 8. Wer ausser den Fällen des § 5 das Eigenthum beansprucht, hat seinen Anspruch schriftlich oder mündlich anzumelden. Soweit die Anmeldung einer Ergänzung bedarf, ist der Anmeldende nach den §§ 6, 7 zu vernehmen.

§ 9. Der Anlegungsbeamte kann die Befolgung der von ihm verfügten Ladungen und die Erfüllung der im § 7 bezeichneten Verpflichtung durch Geldstrafen erzwingen. Die einzelne Strafe darf den Betrag von einhundertfünfzig Mark nicht übersteigen. Der Festsetzung der Strafe muss eine Androhung vorausgehen. Gegen die Strafverfügung findet das Rechtsmittel der Beschwerde statt. Eine Anfechtung der Entscheidung des Beschwerdegerichts ist unzulässig. Erfolgt nachträglich genügende Entschuldigung, so ist die Strafverfügung aufzuheben.

Der Anlegungsbeamte kann sich die verweigerten Aufschlüsse auf Kosten des Säumigen verschaffen. (Fortsetzung folgt.)

Zur Lage der Stadt-Geometer.

In den „Braunschweigischen Anzeigen“ vom 6. d. Mts. wird von der städtischen Bauverwaltung zur Wiederbesetzung der Stelle eines Stadt-Geometers in Braunschweig ein vereidigter Landmesser gesucht, welcher mit dem städtischen Vermessungswesen, der Bearbeitung der Fluchtlinien- und Bebauungspläne und mit Fortschreibungsarbeiten vollständig vertraut ist. Das Einkommen ist auf 2200—4000 Mk. festgesetzt. Aelteren erfahrenen Bewerbern kann jedoch ein höheres Anfangsgehalt bewilligt werden. (Höheres Endgehalt also nicht.) Wohnungsgeld wird nicht gewährt.

Da für folgende städtische Beamte:

1) Stadtkämmerer	5400 Mk.
2) Cassirer	4500 „
3) Stadtsecretair	4800 „
4) Rechnungsrevisor	4000 „
5) Registrator	4000 „
6) angestellte Schreiber . . .	2900 „ und
7) Volksschul-Inspector . . .	5100 „

als Endgehalt festgesetzt ist, so wird demnach der Stadt-Geometer mit einem Rechnungsrevisor und einem Registrator gleichgestellt und einem Stadtkämmerer, Stadtsecretair und Volksschul-Inspector nachgeordnet; mit welchem Rechte, will ich einmal hier untersuchen:

Die unter 1 bis 6 aufgeführten Beamten sind sämmtlich aus dem niederen Schreiberstande hervorgegangen, eine höhere Schul- oder sonstige Vorbildung wird von denselben nicht verlangt, und ein Volksschul-Inspector hat das Examen als Volksschullehrer an einem Lehrerseminar und danach das Rectoratsexamen abgelegt, wogegen bekanntlich ein Landmesser mindestens das Reifezeugniss für Prima einer höheren Schule beibringen muss und sodann nach der praktischen Ausbildung und einem 4 semestrigen Studium an der landwirthschaftlichen Hochschule das Staatsexamen zum Landmesser ablegen muss.

Letzteres scheint den städtischen Behörden in Braunschweig nicht bekannt zu sein, sonst würden sie einen Landmesser nicht mit einem Registrator auf dieselbe Stufe stellen.

Ob sich auf dieses verlockende Angebot überhaupt tüchtige Kräfte melden werden, dürfte mehr als zweifelhaft sein, zumal sich Braunschweig keineswegs durch billige Lebens- und Wohnungsverhältnisse vor anderen Städten auszeichnet.

Wie andere Städte die Kraft eines tüchtigen Landmessers zu schätzen wissen, dürfte aus folgenden Angaben der Gehaltsverhältnisse hervorgehen:

Hannover . . .	2900—6000 Mk.,
Königsberg . .	4200—6600 „
Frankfurt a. M. .	3200—6800 „
Münster i. W. . .	3900—5000 „
Hamburg . . .	5200—9000 „

und hiergegen

Braunschweig . .	2200—4000 Mk.

(steigend von 3 zu 3 Jahren um nur 200 Mk.). Welch ein Unterschied!

X.

Personalnachrichten.

Vermessungsbureau der Stadt Charlottenburg.

Der bisherige Stadtgeometer Wick wurde zum Vermessungs-Inspector ernannt. Die neue Gehaltsscala wurde unter Beibehaltung des bisherigen Dienstalters (1. April 1891) festgesetzt auf 4500 Mk. Anfangs- bis 6300 Mk. Endgehalt mit Steigungen von je 300 Mk. nach 3 Jahren.

Der erste Landmesser, College Stumpf, erhielt folgende Gehaltsscala: Anfangsgehalt 3600 Mk., Höchstgehalt 5400 Mk. mit Steigungen von je 300 Mk. nach 3 Jahren. Dienstalter: 1. October 1899.

Für die Assistenten Blank und Schmidt wurde folgende Scala festgesetzt: Aufangsgehalt 2000 Mk., Höchstgehalt 3400 Mk. mit Steigungen von je 200 Mk. nach 3 Jahren. Dienstalter: 1. April 1898.

Die übrigen Kräfte des Vermessungsbureaus sind diätarisch beschäftigt.

Druckfehler-Berichtigung

zu „Das Nivellement zum Zwecke der Anlage der zweiten Hochquellenleitung für die Stadt Wien". Von Ing. Siegmund Wellisch. S. 242—244. Durch ein Versehen der Druckerei sind folgende Druckfehler stehen geblieben:

S. 242. 12. Zeile von unten muss heissen: „Horizontalfäden nicht möglich sein sollten".

S. 243. Nivellements-Protokoll, unterster Absatz „(Vorwärts)", zweite Reihe, vierte Ablesung „Libelle, Ocul." muss heissen: „10,1" statt „20,1".

S. 243. Text vierte Zeile von oben: „$\pm\, \alpha''$" statt „$+\, \alpha''$".

S. 244. 22. Zeile von oben „$m + n = 2\,M$" statt „$m + n = 2\,Mk$", weiter ist zu setzen: $\Delta\, h = \frac{P e}{4\,(a - 2\,b\,M)}$ statt $\Delta\, h = \frac{P e}{4\,(a - 2\,C\,M)}$; im letzten Absatz, 2. Zeile, ist zu setzen: „Handlangern" statt „Handlagern", endlich ist dort statt — — — einzuschalten „bei Ueberwindung eines Höhenunterschiedes von durchschnittlich 30 m per km".

Inhalt.

Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart — Druck von Gebrüder Jänecke in Hannover.