

# ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

**Dr. C. Reinhardt,**

Professor in Hannover

und

**C. Steppes,**

Obersteuerrath in München.

—\*—

1900.

Heft 12.

Band XXIX.

—> 15. Juni. <—

Der Abdruck von Original-Artikeln ohne vorher eingeholte Erlaubniss der Schriftleitung ist untersagt.

## Zur konformen Doppelprojection der Preussischen Landesaufnahme.

Sphäroid und Kugel. Gauss'sche Projection.

Fortsetzung von Seite 281 der Zeitschrift und Schluss.

Ausdrücke der Azimuthreduktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  durch bestimmte Werthe der Ableitung  $\tau'$ . Man kann  $\tan \psi_1$  und  $\tan \psi_2$  nach 176\* mittels angenäherter Intergration bestimmen, sobald man eine genügende Anzahl von Werthen der Function  $\tau'$  kennt, die ebenso vielen, mit constanter Differenz von  $-\frac{R}{2}$  bis  $+\frac{R}{2}$  fortschreitenden Werthen der Abscisse  $x$  entsprechen. Anstatt hierzu jedoch eine der bekannten Methoden, z. B. die Simpson'sche Regel, zu benutzen, gehen wir von den Reihen 138\* und 139\* aus, deren durch ihre Herleitung ohnehin feststehende Identität mit den bestimmten Integralen 176\* sich auch unmittelbar ergibt, wenn man in diesen anstatt  $\tau'$  die nach dem Maclaurin'schen Satz stattfindende Reihe (vergl. 169\*):

$$187^* \quad \tau' = \tau_0 + \tau_0'' x + \frac{1}{2} \tau_0''' x^2 + \frac{1}{6} \tau_0^{IV} x^3 + \dots$$

setzt, und alsdann die Integration ausführt.

Die Entwicklung gewinnt an Eleganz und Uebersichtlichkeit, wenn man, anstatt der Reductionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  selbst, zunächst ihre Summe und Differenz entwickelt. Wir bilden daher aus den Reihen 138\* und 139\*, indem wir zugleich  $\psi_1$  und  $\psi_2$  anstatt  $\tan \psi_1$  und  $\tan \psi_2$  setzen, die Ausdrücke:

$$188^* \quad \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) = \frac{R}{2} \tau'_0 + \frac{R^3}{48} \tau_0''' + \dots,$$

$$189^* \quad \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{R^2}{12} \tau_0'' + \frac{R^4}{480} \tau_0^{IV} + \dots,$$

welche bezw. bis zu den Ordnungen  $R^4$  und  $R^5$  einschl. genau sind.

Wenn man nun in der Reihe 187\* der Veränderlichen  $x$  nach einander angemessene, in Theilen der Entfernung  $R$  ausgedrückte Werthe beilegt, so kann man aus den Reihen, die man auf diese Weise für die entsprechenden Werthe von  $\tau'$  erhält, Ausdrücke zusammensetzen, die jenen 188\* und 189\* mehr oder weniger nahe kommen. Die einfachsten und zweckmässigsten Werthe, die man zu diesem Behufe wählen kann, sind  $-\frac{R}{2}$ ,  $0$ ,  $+\frac{R}{2}$ , welche den beiden Endpunkten und der Mitte des

Grösstenkreisbogens  $p_1, c, p_2$  entsprechen (Fig. 8, S. 266). Setzt man diese Werthe nach einander in die mit  $R$  multiplizierte Reihe 187\*, so kommt:

$$\text{für } x = -\frac{R}{2}: R\tau'_1 = R\tau'_0 - \frac{R^2}{2} \tau_0'' + \frac{R^3}{8} \tau_0''' - \frac{R^4}{48} \tau_0^{IV} + \dots,$$

$$\text{„ } x = 0: R\tau'_0 = R\tau'_0,$$

$$\text{„ } x = +\frac{R}{2}: R\tau'_2 = R\tau'_0 + \frac{R^2}{2} \tau_0'' + \frac{R^3}{8} \tau_0''' + \frac{R^4}{48} \tau_0^{IV} + \dots,$$

worin  $\tau'_1, \tau'_0, \tau'_2$  die bestimmten Werthe von  $\tau'$  in den Punkten  $p_1, p_0, p_2$  der Bildcurve bedeuten. Hieraus bilden wir folgende Ausdrücke:

$$\frac{R}{12}(\tau'_1 + 4\tau'_0 + \tau'_2) = \frac{R}{2} \tau_0' + \frac{R^3}{48} \tau_0''' + \dots,$$

$$\frac{R}{12}(\tau'_2 - \tau'_1) = \frac{R^2}{12} \tau_0'' + \frac{R^4}{288} \tau_0^{IV} + \dots,$$

deren Vergleichung mit 188\* und 189\* zeigt, dass man hat:

$$190^* \quad \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) = \frac{R}{12}(\tau'_1 + 4\tau'_0 + \tau'_2), \text{ Rest von der Ordnung } R^5,$$

$$191^* \quad \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{R}{12}(\tau'_2 - \tau'_1), \text{ Rest} = -\frac{R^4}{720} \tau_0^{IV}.$$

Diese Ausdrücke geben, wie ihre Reste zeigen,  $\psi_1$  und  $\psi_2$  bis zur Ordnung  $R^3$  einschl. genau, und erfordern die Kenntniss des Werthes von  $\tau'$  in drei Punkten der Bildcurve  $p$ .

Um die Genauigkeit um eine Ordnung zu erhöhen, müsste der Werth von  $\tau'$  in den vier Punkten der Bildcurve bekannt sein, die den Abscissen  $-\frac{R}{2}$ ,  $-\frac{R}{6}$ ,  $+\frac{R}{6}$ ,  $+\frac{R}{2}$  entsprechen. Es ist leicht, das Verfahren dergestalt zu verallgemeinern, dass jede beliebige Genauigkeit erreicht werden kann. Da jedoch über die Ordnung  $R^3$  hinaus die entsprechend genaue Berechnung der Werthe von  $\tau'$  zu weitläufig wird, so beschränken wir uns auf die obigen Ausdrücke.



Fig. 9.

**Berechnung der Azimuthreductionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  aus den sphärischen Coordinaten  $b_1, l_1$  und  $b_2, l_2$ .**

Behufs Berechnung der bestimmten Werthe  $\tau'_1, \tau'_0, \tau'_2$  der Ableitung  $\tau'$  führen wir anstatt der stets negativen Grösse:

$$m' = \frac{\partial l m}{\partial b}, \text{ diejenige:}$$

$$192^* \quad h = -\frac{m'}{6 \cos b}$$

ein (vergl. KD, § 11), wodurch der Ausdruck 186\* übergeht in:  $\tau' = -6h_x \cos b_x \sin U_x - z$ , oder, da nach dem Sinussatz in allen Punkten des Grösstenkreises  $p_1, p_2$  (Fig. 9) das Product  $\cos b_x \sin U_x$  constant ist, in:

$$193^* \quad \tau' = -6h_x \cos b_1 \sin U_1 - z;$$

und hieraus folgt, da  $z$  in den Punkten  $p_1$  und  $p_2$  verschwindet:

$$\begin{cases} \tau'_1 = -6h_1 \cos b_1 \sin U_1, \\ \tau'_0 = -6h_c \cos b_1 \sin U_1 - z_0, \\ \tau'_2 = -6h_2 \cos b_1 \sin U_1. \end{cases}$$

194\*

Durch Einsetzung dieser Werthe und desjenigen 137\* von  $z_0$  gehen die Formeln 190\* und 191\* in die folgenden über:

$$195^* \quad \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2) = \frac{R}{2} \cos b_1 \sin U_1 (h_1 + 4h_c + h_2) - \frac{R^3}{24} \tau'_0,$$

Rest v. d. Ordn.  $R^5$ ,

$$196^* \quad \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{R}{2} \cos b_1 \sin U_1 (h_1 - h_2), \text{ Rest} = -\frac{R^4}{720} \tau'_0 v.$$

In 195\* können wir wegen 188\* setzen:

$$\frac{R^2}{24}(\psi_1 - \psi_2) \text{ anstatt } -\frac{R^3}{24} \tau'_0.$$

Die hieraus hervorgehende Gleichung, für  $\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2)$  aufgelöst, giebt:

$$197^* \quad \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2) = \frac{R}{2} \cos b_1 \sin U_1 (h_1 + 4h_c + h_2) \left(1 + \frac{R^2}{12}\right),$$

Rest v. d. Ordn.  $R^5$ .

Da ferner:  $\frac{\sin \lambda}{\sin R} = \frac{\sin U_1}{\cos b_2}$ , so kommt:

$$R \cos b_1 \sin U_1 = \sin \lambda \cos b_1 \cos b_2 \frac{R}{\sin R}, \quad \lambda = l_2 - l_1$$

wofür man auch schreiben kann:

$$R \cos b_1 \sin U_1 = \sin \lambda \cos b_1 \cos b_2 \left(1 + \frac{R^2}{6}\right), \text{ Rest v. d. Ordn. } R^5.$$

Mit diesem Werthe und den Abkürzungen:

$$198^* \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2} \sin \lambda \cos b_1 \cos b_2 (h_1 + 4 h_c + h_2) \left(1 + \frac{R^2}{4}\right), \\ v = \frac{1}{2} \sin \lambda \cos b_1 \cos b_2 (h_1 - h_2) \left(1 + \frac{R^2}{6}\right), \end{cases}$$

erhalten wir aus 197\* und 196\* durch Addition und Subtraction folgende Ausdrücke der Azimuthreductionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  durch die sphärischen Coordinaten  $b_1, l_1$  und  $b_2, l_2$ :

$$199^* \quad \psi_1 = +u + v \quad \left| \quad \text{Rest} = -\frac{R^4}{720} \tau_0^{IV}, \right.$$

$$200^* \quad \psi_2 = -u + v \quad \left| \quad \text{Rest} = -\frac{R^4}{720} \tau_0^{IV}, \right.$$

deren gemeinschaftlicher Rest bis zur Ordnung  $R^5$  ausschl. genau ist.

Diese Formeln sind mit den in KD, § 20, gegebenen identisch, nur fehlt dort in der Formel für  $v$  der Factor  $1 + \frac{R^2}{6}$ , wodurch indessen 199\* und 200\* nur eine sehr geringe Einbusse an Genauigkeit erleiden [vergl. die Fussnote <sup>41</sup>], S. 293].

Die Factoren  $1 + \frac{R^2}{4}$  und  $1 + \frac{R^2}{6}$  in 198\* können dadurch in Rechnung gestellt werden, dass den Logarithmen von  $u$  und  $v$  bezw. die stets sehr kleinen Correctionen  $\frac{1}{4} MR^2$  und  $\frac{1}{6} MR^2$  hinzugefügt werden.

Im Uebrigen verweisen wir hinsichtlich des Gebrauchs der Formeln auf die an genannter Stelle gegebene Anweisung. Die Entwicklung der Formel für  $b_c$ , nach welcher die Tafel VIII berechnet ist, siehe am Schluss des Artikels 44.

42

**Genauigkeit der Formeln 199\*/200\*.** Durch Einsetzung des Maximalwerthes 0,04061 von  $\tau_0^{IV}$  (siehe S. 273) in den gemeinschaftlichen Rest der Formeln 199\*/200\* ergibt sich für diesen der in Secunden ausgedrückte Maximalwerth:

$$\text{Rest } 199^*/200^* \leq [5,8456 - 20] R^4,$$

wo  $R$  Kilometer bedeutet, <sup>39)</sup> und anstatt des Coefficienten von  $R^4$  dessen Logarithmus geschrieben ist. Derselbe tritt, wie der Maximalwerth von  $\tau_0^{IV}$ , für  $b_c = 61^\circ 0'$  und  $U_c = 22^\circ 42'$  ein, gilt aber nur für genügend kleine Werthe von  $R$ , für welche die Restglieder von den Ordnungen  $R^5, R^6, \dots$  vernachlässigt werden dürfen.

Um die in Rede stehenden und die noch weiterhin (Art. 43—47) abzuleitenden Formeln für  $\psi_1$  und  $\psi_2$  bezüglich ihrer Genauigkeit mit einander vergleichen zu können, bringen wir die letztere durch Angabe derjenigen Seitenlänge  $R$  zum Ausdruck, für welche der Fehler oder

<sup>39)</sup> Zur Einführung dieser Maasseinheiten ist zu setzen (vergl. die Fussnote S. 275):  $\frac{\rho R^4}{A^4}$  anstatt  $R^4$ ,  $\log \frac{\rho}{A^4} = 0,0943 - 10$ .

Rest der Formel den Werth von 0,0005 Azimuthsecunden erreichen, aber nicht überschreiten kann. <sup>40)</sup>

Für die Formeln 199\*/200\* ergibt sich diese Seitenlänge aus der Bedingung:  $[5,8456 - 20] R^4 = 0,0005$ , woraus:  $R = 517$  km.

Diese Ergebnisse fassen wir in abgekürzter Schreibweise wie folgt zusammen:

Rest 199\*/200\*  $\leq [5,8456 - 20] R^4$ ,  $b_c = 61^0 0'$ ,  $U_c = 22^0 42'$ ,  $R = 517$  km; d. h.: für Dreiecksseiten, die nicht länger als 517 km sind, und deren Mitte innerhalb der Breitenzone von  $44^0 20'$  bis  $61^0 0'$  liegt (vergl. die Fussnote S. 272), kann der Fehler der nach 199\*/200\* berechneten Azimuthreduktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  nicht grösser als 0,0005 Sec. sein; derselbe erreicht diese Grenze für  $b_c = 61^0 0'$ ,  $U_c = 22^0 42'$ ,  $R = 517$  km. <sup>41)</sup>

### Einfachere Formeln für die Azimuthreduktionen $\psi_1$ und $\psi_2$ . 43

Für einen ausgedehnten Gebrauch sind die im Art. 41 abgeleiteten Formeln nicht bequem genug. Zu ihrer Vereinfachung brauchen wir verschiedene Relationen, die wir zunächst verzeichnen und darnach bezüglich ihrer Herleitung feststellen. Mit den Bezeichnungen:

$$201^* \quad \left\{ \begin{array}{l} b = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) \text{ und } u = \frac{1}{2} (U_1 + U_2), \\ \eta = \text{Werth der Tafelgrösse } h \text{ zum Argument } b, \end{array} \right.$$

sind diese Relationen:

$$202^* \quad b = b_c - \frac{R^2}{8} \tan b_c \sin^2 U_c, \quad (R^4)$$

$$203^* \quad u = U_c + \frac{R^2}{8} (2 \tan^2 b_c + 1) \sin U_c \cos U_c, \quad (R^4)$$

$$204^* \quad \cos b = \cos b_c \left[ 1 + \frac{R^2}{8} \tan^2 b_c \sin^2 U_c \right], \quad (R^4)$$

$$205^* \quad \sin u = \sin U_c \left[ 1 + \frac{R^2}{8} (2 \tan^2 b_c + 1) \cos^2 U_c \right], \quad (R^4)$$

$$206^* \quad R \sin u = \lambda \cos b \left[ 1 + \frac{R^2}{24} (\cos^2 U_c - \tan^2 b_c \sin^2 U_c) \right], \quad (R^5)$$

$$207^* \quad R \sin U_c = \lambda \cos b_c \left[ 1 - \frac{R^2 (4 \tan^2 b_c + 1) \cos^2 U_c - \tan^2 b_c}{12} \right], \quad (R^5)$$

$$208^* \quad \eta = h_c + \frac{R^2}{24} \frac{\mathfrak{B}_c \tan b_c \sin^2 U_c}{\cos b_c}, \quad (R^4)$$

wo rechts die niedrigste vernachlässigte Ordnung angegeben ist.

<sup>40)</sup> Diese Fehlergrenze entspricht der Schärfe, womit die Trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme die Richtungswinkel ihrer Hauptdreiecksseiten berechnet.

<sup>41)</sup> In KD, § 20, sind anstatt der obigen Werthe:  $U_c = 22^0 42'$  und  $R = 517$  km, diejenigen:  $U_c = 66^0 17'$  und  $R = 499$  km, gegeben. Diese Verschiedenheit ist lediglich eine Folge der im vorigen Artikel bereits hervorgehobenen Verschiedenheit der Formeln bezüglich des Factors  $1 + \frac{R^2}{6}$ .

Durch die (hier zur Schonung des Raumes unterdrückte) Entwicklung des Restgliedes von der Ordnung  $R^5$  findet man, dass dieses für  $R = 517$  km nicht grösser als 0,000044 Sec. werden, und daher auf die obige Genauigkeitsbestimmung nur einen sehr geringen Einfluss haben kann.

Zu diesen Relationen ist vorerst zu bemerken, dass sich, wie aus 202\* und 203\* ersichtlich,  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{ll}$  erst in der zweiten Ordnung von  $b_c$  und  $U_c$  unterscheiden, und dass man daher in dem mit  $R^2$  multiplicirten Gliede einer jeden Relation 202\*—208\*  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{ll}$  mit  $b_c$  und  $U_c$  vertauschen kann, ohne die angegebenen Ordnungszahlen zu ändern. Darnach ergibt sich:

202\* wie folgt: nach der Maclaurin'schen Reihe ist:

$$b_x = b_c + x \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} \right)_c + \frac{x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 b_x}{\partial x^2} \right)_c + \dots,$$

und nach 154\*:

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} = \cos U_x, \quad \frac{\partial^2 b_x}{\partial x^2} = -\sin^2 U_x \tan b_x;$$

folglich:

$$b_1 = b_c - \frac{R}{2} \cos U_c - \frac{R^2}{8} \sin^2 U_c \tan b_c,$$

$$b_2 = b_c + \frac{R}{2} \cos U_c - \frac{R^2}{8} \sin^2 U_c \tan b_c,$$

woraus 202\*.

203\* auf analoge Art wie 202\*.

204\* und 205\* bezw. aus 202\* und 203\*.

206\* wie folgt: im sphärischen Dreieck  $Np_1p_2$  (Fig. 9, S. 291) ist eine der vier Gauss'schen Gleichungen:

$$\sin \frac{R}{2} \sin \mathfrak{ll} = \sin \frac{\lambda}{2} \cos \mathfrak{b},$$

woraus durch Reihenentwicklung von  $\sin \frac{R}{2}$  und  $\sin \frac{\lambda}{2}$ :

$$R \sin \mathfrak{ll} = \lambda \cos \mathfrak{b} \left( 1 + \frac{R^2 - \lambda^2}{24} \right), \quad (R^3)$$

und hieraus:

$$\lambda^2 = \frac{R^2 \sin^2 \mathfrak{ll}}{\cos^2 \mathfrak{b}} = R^2 (1 + \tan^2 \mathfrak{b}) \sin^2 \mathfrak{ll}, \quad (R^4)$$

folglich:

$$R^2 - \lambda^2 = R^2 (\cos^2 \mathfrak{ll} - \tan^2 \mathfrak{b} \sin^2 \mathfrak{ll}), \quad (R^4)$$

womit der vorige Werth von  $R \sin \mathfrak{ll}$  übergeht in 206\*.

207\* durch Einsetzung der Werthe 204\* und 205\* in 206\*.

208\* wie folgt: nach dem Taylor'schen Satze ist:

$$h_c = \mathfrak{b} + (b_c - \mathfrak{b}) \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial b} + \dots;$$

ferner ist wegen 192\* und 155\*:

$$\frac{\partial h}{\partial b} = -\frac{m'}{6 \cos b} - \frac{m' \sin b}{6 \cos^2 b} = -\frac{m' + m' \tan b}{6 \cos b} = -\frac{\mathfrak{B}}{3 \cos b},$$

woraus sich mit dem aus 202\* zu entnehmenden Werth von  $b_c - \mathfrak{b}$  die Relation 208\* ergibt.

**Fortsetzung.** Zur Vereinfachung der Formeln des Artikels 41 gehen wir von den Ausdrücken 195\* und 196\* aus, die wir, beachtend dass  $\cos b_1 \sin U_1 = \cos b_c \sin U_c$ , wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2) &= \frac{R}{2} \cos b_c \sin U_c (h_1 + 4h_c + h_2) & \text{Rest} &= -\frac{R^3}{24} \tau'_0, \\ \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) &= \frac{R}{2} \cos b_c \sin U_c (h_1 - h_2) & \text{Rest} &= -\frac{R^4}{720} \tau''_0. \end{aligned}$$

Indem wir hierin setzen:

$$\lambda \cos^2 b_c \text{ anstatt } R \cos b_c \sin U_c,$$

erhalten wir:

$$209^* \quad \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2) = \frac{1}{2} \lambda \cos^2 b_c (h_1 + 4h_c + h_2), \quad \text{Rest} = -\frac{R^3}{24} \tau'_0 + \Delta',$$

$$210^* \quad \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{1}{2} \lambda \cos^2 b_c (h_1 - h_2), \quad \text{Rest} = -\frac{R^4}{720} \tau''_0 + \Delta'',$$

wo  $\Delta'$  und  $\Delta''$  die infolge der Substitution hinzukommenden Resttheile bedeuten.

Um geeignete Ausdrücke für die letzteren zu erhalten, setzen wir für den Augenblick:

$$f = \frac{R^2}{12} [(4 \tan^2 b_c + 1) \cos^2 U_c - \tan^2 b_c];$$

alsdann folgt aus 207\*:

$$R \cos b_c \sin U_c = \lambda \cos^2 b_c (1 - f), \quad (R^5)$$

$$\text{und hiermit:} \quad \Delta' = -\frac{1}{2} \lambda \cos^2 b_c (h_1 + 4h_c + h_2) f, \quad (R^5)$$

$$\Delta'' = -\frac{1}{2} \lambda \cos^2 b_c (h_1 - h_2) f, \quad (R^6)$$

woraus ersichtlich, dass  $\Delta'$  eine Grösse dritter Ordnung, und (da  $h_1 - h_2$  von der ersten)  $\Delta''$  eine Grösse vierter Ordnung ist. Da somit die Ausdrücke 209\* und 210\* bezw. bis zu den Ordnungen  $R^3$  und  $R^4$  ausschl. genau sind, so hat man:

$$\Delta' = -\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2) f, \quad (R^5)$$

$$\Delta'' = -\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) f; \quad (R^6)$$

und da ferner nach 188\* und 189\*:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2) = -\frac{R}{2} \tau'_0, \quad (R^3)$$

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) = +\frac{R^2}{12} \tau''_0, \quad (R^4)$$

so kann man setzen:

$$\Delta' = + \frac{R}{2} \tau'_0 f, \quad (R^5)$$

$$\Delta'' = - \frac{R^2}{12} \tau''_0 f. \quad (R^6)$$

Die Einsetzung dieser Werthe in die Reste 209\* und 210\* unter Wiederherstellung des Werthes von  $f$  giebt:

$$\text{Rest } 209^* = + \frac{R^3}{24} [(4 \tan^2 b_c + 1) \tau'_0 \cos^2 U_c - (\tan^2 b_c + 1) \tau'_0], \quad (R^5)$$

$$\text{Rest } 210^* = - \frac{R^4}{720} [\tau_0^{IV} + (20 \tan^2 b_c + 5) \tau''_0 \cos^2 U_c - 5 \tau''_0 \tan^2 b_c]. \quad (R^6)$$

Hierin setzen wir für die Grössen  $\tau'_0$ ,  $\tau''_0$ ,  $\tau_0^{IV}$  ihre Werthe 160\*; mit den Abkürzungen:

$$211^* \begin{cases} 4 \mathfrak{C}'' = m' (4 \tan^2 b + 1) & | & 4 \mathfrak{D}'' = 4 \mathfrak{D} + \mathfrak{B} (20 \tan^2 b + 5), \\ 4 \mathfrak{C}''' = 3 m' & | & 4 \mathfrak{D}''' = 4 \mathfrak{D}' + \mathfrak{B} (20 \tan^2 b + 10), \end{cases}$$

ergiebt sich alsdann:

$$212^* \quad \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi_2) = \frac{1}{2} \lambda \cos^2 b_c (h_1 + 4 h_c + h_2),$$

$$\text{Rest} = + \frac{R^3}{24} (\mathfrak{C}_c'' \sin 3 U_c - \mathfrak{C}_c''' \sin U_c), \quad (R^5)$$

$$213^* \quad \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) = \frac{1}{2} \lambda \cos^2 b_c (h_1 - h_2),$$

$$\text{Rest} = - \frac{R^4}{720} (\mathfrak{D}_c'' \sin 4 U_c + \mathfrak{D}_c''' \sin 2 U_c). \quad (R^6)$$

Aus den Resten ergeben sich mit den auf Seite 273 verzeichneten Maximalwerthen folgende, im Sinne des Artikels 42 zu verstehende Werthe:

$$\text{Rest } 212^* \leq [9,3035 - 20] R^3 \left| \begin{array}{l} b_c = 61^\circ 0' \\ U_c = 90^\circ 0' \\ R = 292 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$\text{Rest } 213^* \leq [6,1192 - 20] R^4 \left| \begin{array}{l} b_c = 61^\circ 0' \\ U_c = 24^\circ 20' \\ R = 442 \end{array} \right.$$

Für die Reductionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  selbst ergeben sich aus 212\* und 213\* die Formeln:

$$214^* \quad \psi_1 = + \lambda \cos^2 b_c (h_1 + 2 h_c),$$

$$215^* \quad \psi_2 = - \lambda \cos^2 b_c (h_2 + 2 h_c),$$

deren Reste sich bezw. aus der Summe und Differenz der Reste 212\* und 213\* zusammensetzen. Da aber der Rest 213\* für  $R = 292$  km nicht grösser als 0,0001 werden kann, so darf man ihn gegen den Rest 212\* um so eher vernachlässigen, als er gleichzeitig mit dem Eintreten des Maximalwerthes des letzteren (d. i. für  $U_c = 90^\circ$ ) verschwindet. Demnach ist zu setzen:

$$\text{Rest } 214^* = + \frac{R^3}{24} (\mathfrak{C}_c'' \sin 3 U_c - \mathfrak{C}_c''' \sin U_c), \quad (R^4)$$

$$\text{Rest } 215^* = - \frac{R^3}{24} (\mathfrak{C}_c'' \sin 3 U_c - \mathfrak{C}_c''' \sin U_c), \quad (R^4)$$

$$\text{Rest } 214^*/215^* \leq [9,3035 - 20] R^3, \quad b_c = 61^\circ 0', \quad U_c = 90^\circ 0', \quad R = 292 \text{ km}.$$



Die Formeln 214\* und 215\* sind mit den in KD, § 19, gegebenen identisch. Hinsichtlich ihres Gebrauches vergl. die daselbst gegebene Anweisung.

Die Breite  $b_c$  ergibt sich aus den sphärischen Coordinaten  $b_1, l_1$  und  $b_2, l_2$  nach der Formel:

$$216^* \quad b_c = b + \frac{\lambda^2}{16} \sin 2b, \quad (R^4)$$

die aus 202\* in Verbindung mit 207\* hervorgeht.<sup>42)</sup> Vergl. KD, Fussnote S. 27.

**Weitere Vereinfachung der Formeln für die Azimuthreduktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$ .** Wenn man in den Formeln 214\* und 215\* des vorigen Artikels anstatt der Breite  $b_c$  diejenige  $b$  anwendet, und demgemäss setzt:

$$\cos^2 b \text{ anstatt } \cos^2 b_c \text{ und } h \text{ anstatt } h_c,$$

so wird die Berechnung der Correction  $b_c - b$  nach 216\* (oder deren Entnahme aus der Tafel VIII in KD) und ihre Hinzufügung zur Breite  $b$  erspart.

Um die Wirkung dieser Vereinfachung auf die Genauigkeit der Formeln zu bestimmen, bilden wir zunächst die infolge der vorstehenden Substitutionen zu den Resten 212\* und 213\* hinzukommenden Theile  $\Delta'''$  und  $\Delta^{iv}$ . Wenn man für den Augenblick setzt:

$$f' = \frac{R^2}{4} \tan^2 b_c \sin^2 U_c \text{ und } f'' = \frac{R^2}{6} \frac{\mathfrak{B}_c \tan b_c \sin^2 U_c}{\cos b_c},$$

so ist nach 204\* und 208\*:

$$\frac{1}{2} \lambda \cos^2 b_c (h_1 + 4h_c + h_2) = \frac{1}{2} \lambda \cos^2 b (1 - f') (h_1 + 4h + h_2 - f''),$$

$$\frac{1}{2} \lambda \cos^2 b_c (h_1 - h_2) = \frac{1}{2} \lambda \cos^2 b (1 - f'') (h_1 - h_2),$$

woraus sich (auf ähnliche Art wie im vorigen Artikel für  $\Delta'$  und  $\Delta''$ ) ergibt:

$$\Delta''' = + \frac{R^3}{24} (3m'_c \tan^2 b_c - 2\mathfrak{B}_c \tan b_c) \sin^3 U_c, \quad (R^5)$$

$$\Delta^{iv} = - \frac{R^4}{24} \mathfrak{B}_c \tan^2 b_c \sin^3 U_c \cos U_c. \quad (R^6)$$

Wenn man diese Resttheile mit den Resten 212\* und 213\* vereinigt,

<sup>42)</sup> Um das folgende Glied oder den Rest dieser Formel zu erhalten, muss die Reihe 202\* um ein Glied weiter, d. i. bis zur Ordnung  $R^4$  einschl., entwickelt werden. Darnach ergibt sich mittels der übrigen im Art. 43 abgeleiteten Formeln:

$$\text{Rest } 216^* = + \frac{R^4}{384} [(11 \tan^3 b_c + 5 \tan b_c) \sin^4 U_c - 12 \tan^3 b_c \sin^2 U_c].$$

Der Coefficient von  $R^4$  wird am grössten für  $b_c = 61^\circ 0'$  und  $U_c = 43^\circ 47'$ . Mit diesen Werthen findet man:

$$\text{Rest } 216^* \leq [8,7369 - 20] R^4,$$

und hieraus folgt, dass der Rest erst für  $R = 550$  km den Werth von einer halben Secunde erreichen, und für  $R = 300$  km nicht grösser als  $0,044$  werden kann.

und die Abkürzungen einführt:

$$217^* \begin{cases} 4 \mathfrak{U}^{\text{IV}} = m'' \tan b + m' (2 \tan^2 b + 1) & | & 4 \mathfrak{D}^{\text{IV}} = 4 \mathfrak{D} + \mathfrak{B} (5 \tan^2 b + 5), \\ 4 \mathfrak{U}^{\text{V}} = 3 m'' \tan b - m' (6 \tan^2 b - 3) & | & 4 \mathfrak{D}^{\text{V}} = 4 \mathfrak{D}' + \mathfrak{B} (50 \tan^2 b + 10), \end{cases}$$

so kommt:

$$218^* \quad \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi_2) = \frac{1}{2} \lambda \cos^2 b (h_1 + 4 \mathfrak{h} + h_2),$$

$$\text{Rest} = + \frac{R^3}{24} (\mathfrak{U}_c^{\text{IV}} \sin 3 U_c - \mathfrak{U}_c^{\text{V}} \sin U_c), \quad (R^5)$$

$$219^* \quad \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) = \frac{1}{2} \lambda \cos^2 b (h_1 - h_2),$$

$$\text{Rest} = - \frac{R^4}{720} (\mathfrak{D}_c^{\text{IV}} \sin 4 U_c + \mathfrak{D}_c^{\text{V}} \sin 2 U_c). \quad (R^6)$$

Aus den Resten ergeben sich mit den auf S. 273 verzeichneten Maximalwerthen folgende, im Sinne des Art. 42 zu verstehende Werthe:

$$\text{Rest } 218^* \leq [0,0412 - 10] R^3 \quad | \quad b_c = 61^\circ 0' \quad | \quad U_c = 90^\circ 0' \quad | \quad R = 166 \text{ km},$$

$$\text{Rest } 219^* \leq [6,1636 - 20] R^4 \quad | \quad b_c = 61^\circ 0' \quad | \quad U_c = 27^\circ 13' \quad | \quad R = 430 \text{ km}.$$

Für die Reductionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  selbst erhält man aus 218\* und 219\* die Formeln:

$$220^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = + \lambda \cos^2 b (h_1 + 2 \mathfrak{h}), \\ \text{Rest} = + \frac{R^3}{24} (\mathfrak{U}_c^{\text{IV}} \sin 3 U_c - \mathfrak{U}_c^{\text{V}} \sin U_c), \quad (R^4) \end{array} \right.$$

$$221^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_2 = - \lambda \cos^2 b (h_2 + 2 \mathfrak{h}), \\ \text{Rest} = - \frac{R^3}{24} (\mathfrak{U}_c^{\text{IV}} \sin 3 U_c - \mathfrak{U}_c^{\text{V}} \sin U_c), \quad (R^4) \end{array} \right.$$

wo in den Resten das Glied von der vierten Ordnung fortgelassen ist, was hier mit noch mehr Grund als in den Resten 214\* und 215\* geschehen kann. Wir können daher setzen:

$$\text{Rest } 220^* | 221^* \leq [0,0412 - 10] R^3, \quad b_c = 61^\circ 0', \quad U_c = 90^\circ 0',$$

$$R = 166 \text{ km}.$$

Die Formeln 220\* und 221\* sind identisch mit den in KD, § 18, gegebenen.

46 **Einfachste Formeln für die Azimuthreductionen und  $\psi_1$  und  $\psi_2$ .** Aus den Reihen 138\* und 139\* folgt:

$$\psi_1 = - \frac{R}{2} \tau_0 \quad | \quad \text{Rest} = + \frac{R^2}{12} \tau_0', \quad (R^3)$$

$$\psi_2 = + \frac{R}{2} \tau_0 \quad | \quad \text{Rest} = + \frac{R^2}{12} \tau_0'. \quad (R^3)$$

Nach 194\* ist wegen  $\cos b_1 \sin U_1 = \cos b_c \sin U_c$ :

$$\frac{R}{2} \tau_0 = - 3 R h_c \cos b_c \sin U_c, \quad (R^3)$$

oder wegen 207\*, 208\*, 204\*:

$$\frac{R}{2} \tau_0 = - 3 \lambda \mathfrak{h} \cos^2 b. \quad (R^3)$$

Für den Gebrauch der mit diesem Werth hervorgehenden Reductionsformeln ist es vorthailhaft, anstatt der bisherigen Tafelgrösse  $h$  (siehe 192\*) die folgende einzuführen:

$$k = 3 \times 60 \times 1000 h \cos^2 b = 180000 h \cos^2 b,$$

so dass, wenn  $\lambda$  in Minuten ausgedrückt ist, die Azimuthreduktionen nach den Formeln:

$$222^* \quad \psi_1 = + k \lambda \quad \left| \quad \text{Rest} = + \frac{R^2}{12} \tau_0'', \right.$$

$$223^* \quad \psi_2 = - k \lambda \quad \left| \quad \text{Rest} = + \frac{R^2}{12} \tau_0'', \right.$$

(Argument zu  $k = b$ ) in Tausendstel Secunden erhalten werden. Aus den Resten ergibt sich im Sinne des Art. 42:

$$\text{Rest } 222^* | 223^* \leq [3,6825 - 10] R^2, \quad b_c = 61^0 0', \quad U_c = 45^0 0',$$

$$R = 32 \text{ km.}$$

Die Formeln 222\* und 223\* sind identisch mit den in KD, § 17, gegebenen.

**Die Gauss'schen Formeln für die Azimuthreduktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$ .** Nach dem im Art. 40 angegebenen Verfahren findet man leicht, dass man hat:

47

$$\frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) = \frac{R}{4} (\tau_1' + \tau_2') \quad \left| \quad \text{Rest} = - \frac{R^3}{24} \tau_0''', \quad (R^5) \right.$$

$$\frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) = \frac{R}{12} (\tau_2' - \tau_1') \quad \left| \quad \text{Rest} = - \frac{R^4}{720} \tau_0''', \quad (R^6) \right.$$

woraus:

$$\psi_1 = - \frac{R}{6} (2 \tau_1' + \tau_2') \quad \left| \quad \text{Rest} = + \frac{R^3}{24} \tau_0''', \quad (R^4) \right.$$

$$\psi_2 = + \frac{R}{6} (2 \tau_2' + \tau_1') \quad \left| \quad \text{Rest} = - \frac{R^3}{24} \tau_0'''. \quad (R^4) \right.$$

Setzt man hierin die Werthe ein:  $\tau_1' = m_1' \sin U_1$  und  $\tau_2' = m_2' \sin U_2$ , welche sich — da  $z$  in den Punkten  $p_1$  und  $p_2$  verschwindet — aus 186\* ergeben, so kommt:

$$224^* \quad \psi_1 = - \frac{R}{6} (2 m_1' \sin U_1 + m_2' \sin U_2) \quad \left| \quad \text{Rest} = + \frac{R^3}{24} \tau_0''', \quad (R^4) \right.$$

$$225^* \quad \psi_2 = + \frac{R}{6} (2 m_2' \sin U_2 + m_1' \sin U_1) \quad \left| \quad \text{Rest} = - \frac{R^3}{24} \tau_0'''. \quad (R^4) \right.$$

Dies sind die von Gauss in GA, Art. 13, gegebenen Formeln.<sup>43</sup> Aus ihren Resten ergibt sich im Sinne des Art. 42:

<sup>43</sup> Mit den daselbst angewandten Bezeichnungen sind diese Formeln:

$$\psi^0 = - \frac{h}{3} (2 k^0 \sin V^0 - k' \sin V'),$$

$$\psi' = - \frac{h}{3} (2 k' \sin V' - k^0 \sin V^0),$$

wo  $k^0$  und  $k'$  die Werthe der Gauss'schen Tafelgrösse:  $k = - \frac{\rho}{2} m' = - \frac{\rho}{2} \frac{\partial l m}{\partial b}$ ,

Rest  $224^*/225^* \leq [0,4404 - 10] R^3$ ,  $b_c = 61^0 0'$ ,  $U_c = 32^0 6'$ ,  
 $R = 122 \text{ km.}$

Sie sind somit weniger scharf, als die Formeln  $214^*/215^*$  oder  $220^*/221^*$ , und während diese nur die geographischen Coordinaten der Dreieckspunkte als gegeben voraussetzen, müssen beim Gebrauch der Gauss'schen Formeln neben der einen dieser Coordinaten, der Breite, noch die Azimuthe und Längen der Dreiecksseiten zur Hand sein [vergl. die Fussnote <sup>24)</sup>, S. 258].

Diese letzteren Grössen kann man übrigens, unter Einführung des Längenunterschiedes  $\lambda$ , mittels einer ähnlichen Umformung eliminiren, wie sie vorstehend mehrfach angewandt ist. In solcher Weise ergeben sich die Formeln:

$$\psi_1 = + \lambda \cos^2 b (2 h_1 + h_2),$$

$$\psi_2 = - \lambda \cos^2 b (2 h_2 + h_1),$$

welche dieselbe Schärfe haben wie  $224^*/225^*$ .

Hiermit ist die am Schluss des Art. 26 in Aussicht gestellte Entwicklung der zur Uebertragung der Azimuthe dienenden Formeln der Gauss'schen Projection (KD, § 17—20) erledigt. Wir entwickeln nunmehr die Formeln für die Entfernungsreduction  $\log S - \log R$ .

48 **Entwicklung des Verhältnisses  $S:R$  in eine Reihe nach geraden Potenzen von  $R$ .** An Art. 27 und Fig. 2 (S. 260) wieder anknüpfend, haben wir in dem rechtwinkligen Differentialdreieck  $psr$ :

$$ps = \cos y \partial x \text{ und } rs = \partial y.$$

Für das Element  $pr$  der Bildcurve  $p_1 p_2$  ergiebt sich daher der Ausdruck:

$$pr = \frac{\cos y \partial x}{\cos \psi}.$$

Die Grösse des Elements der geodätischen Linie  $P_1 P_2$  dem das Element  $pr$  entspricht, ist daher:

$$\frac{\cos y \partial x}{m \cos \psi}.$$

Als Anfangspunkt der  $x$  nehmen wir zunächst wieder einen beliebigen Punkt des Grösstenkreises  $p_1 q p_2$ . Es sei  $X$  die Länge desjenigen Stücks der geodätischen Linie  $P_1 P_2$ , dem das zwischen der  $y$ -Achse und dem Punkte  $p$  enthaltene Stück der Bildcurve entspricht. Dann ist:

$$226^* \quad \partial X = \frac{\cos y}{\cos \psi} \frac{\partial x}{m},$$

in den Punkten  $p_1$  und  $p_2$  bedeuten, und worin die mit:

$$\psi^0 \quad | \quad \psi' \quad | \quad h \quad | \quad V^0 \quad | \quad V' \quad | \quad k^0 \quad | \quad k'$$

bezeichneten Grössen identisch sind mit:

$$\psi_1 \quad | \quad \psi_2 \quad | \quad R \quad | \quad 18^0 + U_1 \quad | \quad U_2 \quad | \quad 3\rho h_1 \cos b_1 \quad | \quad 3\rho h_2 \cos b_2,$$

$\psi_1$  und  $\psi_2$  in Sec.,  $R$  in Theilen des Kugelhalbmessers,  $\rho = \text{arc rad.}$  in Sec.

wo  $y, \psi$  und  $m$  als Functionen von  $x$  anzusehen sind. Es ist daher auch  $X$  eine Function von  $x$ .

Es seien nun:

$X', X'', \dots$  die successiven Ableitungen von  $X$  nach  $x$ ,

$X'_0, X''_0, \dots$  ihre bestimmten Werthe für  $x=0$ ;

dann ergibt sich nach 226\* für die erste dieser Ableitungen der Ausdruck:

$$227^* \quad X' = \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{m} \frac{\cos y}{\cos \psi},$$

und nach dem Maclaurin'schen Satze die Reihe:

$$228^* \quad X' = X'_0 + X''_0 x + \frac{1}{2} X'''_0 x^2 + \frac{1}{6} X^{IV}_0 x^3 + \dots,$$

woraus für die Bogenlänge  $X$  folgt:

$$229^* \quad X = \int_0^x X' \partial x = X'_0 x + \frac{1}{2} X''_0 x^2 + \frac{1}{6} X'''_0 x^3 + \dots$$

Wir legen nunmehr den Anfangspunkt der  $x$  in die Mitte  $c$  des Grösstenkreisbogens  $p_1 p_2$  (Fig. 3, S. 261), und zählen  $x$  von  $c$  nach  $p_2$  positiv. Dann erhalten wir nach 229\* für die Länge  $S$  des zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  liegenden Stücks der geodätischen Linie den Ausdruck:

$$230^* \quad S = - \int_0^{\frac{R}{2}} X' \partial x + \int_0^{\frac{R}{2}} X' \partial x,$$

und für das Verhältniss  $S:R$  die Reihe:

$$231^* \quad \frac{S}{R} = X'_0 + \frac{R^2}{24} X'''_0 + \frac{R^4}{1920} X^{V}_0 + \dots$$

Die Ausdrücke und Reihen 226\*—231\* sind völlig streng und gelten zufolge ihrer Herleitung für jede konforme Uebertragung der Sphäroidfläche auf die Kugelfläche.

Nach der Reihe 231\* kann man das Verhältniss  $S:R$ , und darnach die Reduction  $\log S - \log R$ , scharf berechnen, sobald die Grössen  $X'_0, X'''_0, \dots$ , d. i. die Werthe der Ableitungen  $X', X''', \dots$  im Punkte  $p_0$  der Bildeurve (für  $x=0$ ), bekannt sind. Dies kann aber viel einfacher nach dem im folgenden Artikel angegebenen Verfahren geschehen, welches dem zur Berechnung der Azimuthreductionen angewandten (vergl. Art. 33 und 40) analog ist, und wobei nur die Werthe der ersten Ableitung  $X'$  in einigen Punkten der Bildeurve, nicht aber die höheren Ableitungen, bekannt zu sein brauchen. Dagegen ist auch die Kenntniss der letzteren nothwendig, um die Genauigkeit der abzuleitenden Formeln zu bestimmen; für diesen Zweck genügen aber ganz roh angenäherte Werthe dieser Grössen.

**Ausdrücke des Verhältnisses  $S:R$  durch bestimmte Werthe der Ableitung  $X'$ .** Zu geeigneten Ausdrücken dieser Art gelangen wir durch sinngemässe Anwendung des im Art. 40 ange-

gebenen Verfahrens angenäherter Integration auf den Ausdruck 230\*. Aus diesem ergibt sich einerseits die Reihe 231\*, und andererseits giebt die Reihe 228\*, wenn wir mit  $X'_1, X'_0, X'_2$  die bestimmten Werthe von  $X'$  in den Punkten  $p_1, p_0, p_2$  der Bildcurve bezeichnen:

$$\text{für } x = -\frac{R}{2} : X'_1 = X'_0 - \frac{R}{2} X''_0 + \frac{R^2}{8} X'''_0 - \frac{R^3}{48} X^{IV}_0 + \frac{R^4}{384} X^V_0 - \dots,$$

$$\text{„ } x = 0 : X'_0 = X'_0,$$

$$\text{„ } x = +\frac{R}{2} : X'_2 = X'_0 + \frac{R}{2} X''_0 + \frac{R^2}{8} X'''_0 + \frac{R^3}{48} X^{IV}_0 + \frac{R^4}{384} X^V_0 + \dots,$$

und wenn wir diese Ausdrücke bezw. mit  $\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$  multipliciren und alsdann summiren, so kommt:

$$\frac{1}{6} (X'_1 + 4 X'_0 + X'_2) = X'_0 + \frac{R^2}{24} X'''_0 + \frac{R^4}{1152} X^V_0 + \dots$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit 231\* zeigt, dass man hat:

$$232^* \quad \frac{S}{R} = \frac{1}{6} (X'_1 + 4 X'_0 + X'_2), \text{ Rest} = -\frac{R^4}{2880} X^V_0.$$

Dieser Ausdruck giebt das Verhältniss  $S:R$  bis zur Ordnung  $R^3$  einschl. genau, und erfordert die Kenntniss der Werthe der Ableitung  $X'$  in den drei Punkten  $p_1, p_0, p_2$  der Bildcurve, denen die Abscissen  $-\frac{R}{2}, 0, +\frac{R}{2}$  entsprechen.

Um die Genauigkeit über die Ordnung  $R^3$  hinaus zu erhöhen, müsste der Werth von  $X'$  in den fünf, zu den Abscissen  $-\frac{R}{2}, -\frac{R}{4}, 0, +\frac{R}{4}, +\frac{R}{2}$  gehörigen Punkten der Bildcurve bekannt sein; der entsprechende Ausdruck für das Verhältniss  $S:R$  würde dieses alsdann bis zur Ordnung  $R^5$  einschl. genau liefern. Für den gegenwärtigen Zweck genügt jedoch die mit dem Ausdruck 232\* erreichte Genauigkeit. Wir setzen daher nur noch die folgenden einfacheren, aber minder genauen Ausdrücke hierher, von denen wir Gebrauch zu machen beabsichtigen, und von denen der erste mittels des angezeigten Verfahrens, der zweite dagegen unmittelbar aus 231\* sich ergibt:

$$233^* \quad \frac{S}{R} = \frac{1}{2} (X'_1 + X'_2), \text{ Rest} = -\frac{R^2}{12} X''_0;$$

$$234^* \quad \frac{S}{R} = X'_0, \text{ Rest} = +\frac{R^2}{24} X''_0.$$

**50 Vereinfachung des strengen Ausdrucks 227\* für die Ableitung  $X'$ .** Unter sinngemässer Anwendung des in den Artikeln 38 und 39 angegebenen Verfahrens soll hier nachgewiesen werden, dass der Ausdruck 230\* die Reduction  $\log S - \log R$  für Dreiecksseiten bis zu 1500 km Länge genauer als auf 6,7 Einheiten der zehnten Man-

tissenstelle darstellt, wenn man in den bestimmten Integralen den strengen Ausdruck 227\* durch den einfacheren:

$$235^* \quad X' = 1 - l m_x$$

ersetzt, worin  $m_x$  das im Fusspunkt  $q$  der Ordinate  $y$  (Fig. 8, S. 266) stattfindende Vergrößerungsverhältniss bedeutet (vergl. Art. 30).

Zur Ueberführung des Ausdrucks 227\* in denjenigen 235\* setzen wir in ersterem nach einander:

$$1 \text{ anstatt } \frac{\cos y}{\cos \psi},$$

$$1 - l m \text{ anstatt } \frac{1}{m},$$

$$l m_x \text{ anstatt } l m.$$

Bezeichnen wir alsdann die aus diesen Substitutionen hervorgehenden Aenderungen der Ableitung  $X'$  mit  $\Delta'$ ,  $\Delta''$ ,  $\Delta'''$ , so haben wir streng:

$$X' = 1 - l m_x + \Delta, \quad \Delta = \Delta' + \Delta'' + \Delta''',$$

$$\Delta' = -\frac{1}{m} \left( 1 - \frac{\cos y}{\cos \psi} \right),$$

$$\Delta'' = \frac{1}{m} - (1 - l m),$$

$$\Delta''' = -l m + l m_x,$$

und der aus der Vernachlässigung von  $\Delta$  hervorgehende Fehler von  $S$  wird zufolge 230\* dargestellt durch:

$$236^* \quad - \int_0^{\frac{R}{2}} \Delta \frac{\partial^2 x}{\partial^2} + \int_0^{\frac{R}{2}} \Delta \frac{\partial^2 x}{\partial^2}.$$

Zur Bestimmung von Grenzwerten der kleinen Unterschiede  $\Delta'$ ,  $\Delta''$ ,  $\Delta'''$  gelangen wir, beachtend dass wir diese Werthe nur ganz roh angenähert brauchen, wie folgt:

Zu  $\Delta'$ . Da man hat:

$$\frac{\cos y}{\cos \psi} = \frac{1 - \frac{1}{2} y^2 + \dots}{1 - \frac{1}{2} \psi^2 + \dots} = 1 + \frac{1}{2} (\psi^2 - y^2) + \dots,$$

und da der Factor  $\frac{1}{m}$  sich nur wenig von 1 unterscheidet, so kann

man setzen:  $\Delta' = \frac{1}{2} (\psi^2 - y^2)$ , und hieraus folgt mit den unter 167\* verzeichneten Grenzwerten von  $\psi$  und  $y$ , dass für  $R \leq 1500$  km:

$$\Delta' < \frac{1}{2} \left( -\frac{5}{243} \right)^2 \frac{-10}{30} = 30.$$

Zu  $\Delta''$ . Da  $l m$  eine kleine Zahl ist, kann man setzen:

$$\frac{1}{m} = e^{-l m} = 1 - l m + \frac{1}{2} (l m)^2,$$

mithin:  $\Delta'' = \frac{1}{2} (lm)^2$ , oder, da sich  $lm$  nur wenig von  $lm_x$  unterscheidet:

$$\Delta'' = \frac{1}{2} (lm_x)^2.$$

Die Reihe 170\* giebt mit den S. 273 verzeichneten Maximalwerthen der  $\mu'_c, \mu''_c, \dots$  und mit dem Maximalwerth  $\frac{R}{2}$  von  $x$ :

$$lm_x < 6849 + \frac{1431}{2} R + \frac{2023}{8} R^2 + \frac{1532}{48} R^3 + \frac{5351}{384} R^4,$$

oder,  $R$  in Kilometern:

$$lm_x < 685 + 112 R + 621 R^2 + 123 R^3 + 839 R^4,$$

woraus für  $R \leq 1500$  km:

$$lm_x < 422, \text{ mithin: } \Delta'' < \frac{1}{2} \left( \begin{matrix} -5 \\ 422 \end{matrix} \right)^2 = 89.$$

Zu  $\Delta'''$ . Maclaurin's Satz giebt die Reihe:

$$lm = lm_x + y \left( \frac{\partial lm}{\partial y} \right)_x + \dots,$$

wo zuzuge der im Art. 30 eingeführten Bezeichnungen der Coefficient von  $y$  den im Fusspunkt  $q$  der Ordinate  $y$  (Fig. 8, S. 266) stattfindenden Werth des partiellen Differentialquotienten von  $lm$  nach  $y$  bedeutet. Da nach 145\* und 149\*:

$$\left( \frac{\partial lm}{\partial y} \right) = \frac{\partial lm}{\partial b} \left( \frac{\partial b}{\partial y} \right) = -m' \sin U,$$

und nach 153\* wegen  $z_x = 0$ :  $m'_x \sin U_x = \tau'_x$ , so giebt die obige Reihe:  $lm - lm_x = -\tau'_x y$ , und, da sich  $\tau'_x$  nur wenig von  $\tau'$  unterscheidet:  $\Delta''' = \tau' y$ . Nach 167\* und Art. 37 hat man für  $R \leq 1500$  km:

$$y < 988 \text{ und } \tau' < 35, \text{ mithin: } \Delta''' < 988 \times 35 = 35.$$

Es ist somit erwiesen, dass für  $R \leq 1500$  km:

$$\Delta' < 30, \Delta'' < 89, \Delta''' < 35, \text{ mithin: } \Delta < 154.$$

In Anwendung des S. 278 angeführten allgemeinen Satzes auf die beiden Integrale in 236\* ergibt sich für jedes derselben der Grenzwert  $\frac{1}{2} R w$ , wenn  $w$  den Maximalwerth oder einen Grenzwert von

$\Delta$  für  $x = -\frac{R}{2}$  bis  $x = +\frac{R}{2}$ , d. i. für Werthe von  $x$  zwischen den

Punkten  $p_1$  und  $p_2$  bedeutet. Mithin ist der aus der Vernachlässigung von  $\Delta$  hervorgehende Fehler von  $S$  kleiner als  $R w$ , folglich der aus dieser Ursache hervorgehende Fehler des Verhältnisses  $S:R$  kleiner als  $w$ , und der aus der nämlichen Ursache hervorgehende Fehler der Reduction  $\log S - \log R$  kleiner als  $M w$ .



Für  $R \leq 1500$  km ergibt sich daher mit dem obigen Grenzwert  
von  $\Delta$  für den letztgenannten Fehler der Grenzwert:  $154 M = 67$ ,  
und somit ist folgendes festgestellt:

Wenn man in 230\* anstatt des strengen Ausdrucks 227\* den ver-  
einfachten 235\*, nämlich:

$$237^* \quad X' = 1 - l m_x,$$

anwendet, so kann daraus für Dreiecksseiten, die nicht länger als  
1500 km sind und deren Mitte innerhalb der Breitenzone von  $44^{\circ}20'$  bis  $61^{\circ}0'$   
liegt, in der Bestimmung der Entfernungsreduction  $\log S - \log R$  kein  
größerer Fehler entstehen als **6,7 Einheiten der zehnten Mantissen-**  
**stelle.**

Da die im folgenden Artikel entwickelten Formeln für die Ent-  
fernungsreduction (KD, § 21 — 23) bei einer Genauigkeit von 50 Ein-  
heiten der zehnten Mantissenstelle nur bis zu Seitenlängen von 1000 km  
reichen, so genügt der Ausdruck 237\* vollauf zur Herleitung dieser  
Formeln.

### Formeln für die Entfernungsreduction $\log R - \log S$ . 51

Von dem Ausdruck 237\* ausgehend, haben wir mit den in den Ar-  
tikeln 37 und 48 eingeführten Bezeichnungen:

$$238^* \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = 1 - l m_x \\ X'' = -\mu_x' \\ X''' = -\mu_x'' \\ \text{u. s. w.} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} X'_0 = 1 - l m_c \\ X''_0 = -\mu_c' \\ X'''_0 = -\mu_c'' \\ \text{u. s. w.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} X'_1 = 1 - l m_1, \\ X'_2 = 1 - l m_2, \end{array} \right.$$

und somit nach 231\*:

$$\frac{S}{R} = 1 - l m_c - \frac{R^2}{24} \mu_c'' - \frac{R^4}{1920} \mu_c^{IV} - \dots$$

Die rechte Seite dieser Gleichung für den Augenblick mit  $1 - \beta$  be-  
zeichnend, hat man:

$$\frac{S}{R} = 1 - \beta, \quad l \frac{S}{R} = -\beta - \frac{1}{2} \beta^2 - \dots,$$

$$\beta = l m_c + \frac{R^2}{24} \mu_c'' + \frac{R^4}{1920} \mu_c^{IV} + \dots,$$

woraus sich mit den S. 271 und 273 verzeichneten Maximalwerthen von  
 $l m_c, \mu_c'', \mu_c^{IV}$  ergibt, dass man für  $R \leq 1500$  km hat:

$$\beta < 116, \quad \text{woraus: } \frac{1}{2} \beta^2 < 67,$$

und dass man folglich setzen kann:  $l \frac{S}{R} = -\beta = \frac{S}{R} - 1$ , oder:

$$239^* \quad 1 - (lR - lS) \text{ anstatt } \frac{S}{R}.$$

Durch Einführung dieser Substitution und der Werthe 238\* in die  
Formeln 232\*—234\* erhält man nach leichter Reduction und durch  
Uebergang von den natürlichen zu den gemeinen Logarithmen:

$$240^* \quad \log R - \log S = \frac{1}{6} (\log m_1 + 4 \log m_c + \log m_2),$$

$$\text{Rest} = - \frac{MR^4}{2880} \mu_c^{1V};$$

$$241^* \quad \log R - \log S = \frac{1}{2} (\log m_1 + \log m_2), \quad \text{Rest} = - \frac{MR^2}{12} \mu_c'';$$

$$242^* \quad \log R - \log S = \log m_c, \quad \text{Rest} = + \frac{MR^2}{24} \mu_c''.$$

Um diese Formeln bezüglich ihrer Genauigkeit mit einander vergleichen zu können, bringen wir die letztere durch Angabe derjenigen Seitenlänge  $R$  zum Ausdruck, für welche der Fehler oder Rest der Formel den Werth von 5 Einheiten der neunten Mantissenstelle von  $\log R$  erreichen, aber nicht überschreiten kann. <sup>44)</sup>

Unter sinngemässer Anwendung der im Art. 42 eingeführten Schreibweise ergibt sich mit den S. 273 verzeichneten Maximalwerthen von  $\mu_c''$  und  $\mu_c^{1V}$ :

$$\text{Rest } 240^* \leq [9,6867 - 30] R^4 \mid b_c = 61^0 0' \mid U_c = 45^0 33' \mid R = 1007 \text{ km,}$$

$$\text{Rest } 241^* \leq [8,2545 - 20] R^2 \mid b_c = 61 0 \mid U_c = 0 0 \mid R = 53,$$

$$\text{Rest } 242^* \leq [7,9535 - 20] R^2 \mid b_c = 61 0 \mid U_c = 0 0 \mid R = 75.$$

Die Formeln 240\* und 242\* werden etwas bequemer, wenn man darin anstatt des zum Argument  $b_c$  den zum Argument  $b = \frac{1}{2} (b_1 + b_2)$

gehörigen Werth von  $\log m$  anwendet. Den letzteren mit  $\log m$  bezeichnend, haben wir nach Taylor:

$$l m = l m_c + \left( \frac{\partial l m}{\partial b} \right)_c (b - b_c) + \dots = l m_c + m'_c (b - b_c) + \dots,$$

mithin wegen 202\*:

$$\log m = \log m_c - \frac{MR^2}{8} m'_c \tan b_c \sin^2 U_c.$$

Durch die Substitution:  $\log m$  anstatt  $\log m_c$ , in 240\* geht daher der Rest dieser Formel über in:

$$+ \frac{4}{6} \cdot \frac{MR^2}{8} m'_c \tan b_c \sin^2 U_c - \frac{MR^4}{2880} \mu_c^{1V},$$

oder, da das zweite Glied viel kleiner ist als das erste, in:

$$+ \frac{MR^2}{12} m'_c \tan b_c \sin^2 U_c.$$

Durch die gleiche Substitution in 242\* geht der Rest dieser Formel über in:

$$+ \frac{MR^2}{24} (\mu_c'' + 3 m'_c \tan b_c \sin^2 U_c),$$

<sup>44)</sup> Diese Fehlergrenze entspricht der Schärfe, womit die Trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme die Seiten ihrer Hauptdreiecke berechnet.

oder, wenn man hierin für  $\mu_c''$  seinen Werth aus 173\* setzt, und die Abkürzungen:

$$243^* \quad 2\mathfrak{B}^{(2)} = m'' - 2m' \tan b \quad \text{und} \quad 2\mathfrak{B}^{(3)} = m'' + 2m' \tan b$$

einführt, in:

$$+ \frac{MR^2}{24} [\mathfrak{B}_c^{(2)} \cos 2U_c + \mathfrak{B}_c^{(3)}].$$

Die Substitution:  $\log m$  anstatt  $\log m_c$ , in 240\* und 242\* liefert daher die neuen Formeln:

$$244^* \quad \log R - \log S = \frac{1}{6} (\log m_1 + 4 \log m + \log m_2),$$

$$\text{Rest} = + \frac{MR^2}{12} m' \tan b_c \sin^2 U_c;$$

$$245^* \quad \log R - \log S = \log m, \quad \text{Rest} = + \frac{MR^2}{24} [\mathfrak{B}_c^{(2)} \cos 2U_c + \mathfrak{B}_c^{(3)}];$$

und aus den Restausdrücken ergibt sich mit den S. 271 und 273 verzeichneten Werthen:

$$\text{Rest } 244^* \leq [7,3602 - 20] R^2 \quad | \quad b_c = 61^0 0' \quad | \quad U_c = 90^0 0' \quad | \quad R = 148 \text{ km},$$

$$\text{Rest } 245^* \leq [7,9535 - 20] R^2 \quad | \quad b_c = 61 \quad 0 \quad | \quad U_c = 0 \quad 0 \quad | \quad R = 75.$$

Die Substitution:  $\log m$  anstatt  $\log m_c$ , hat mithin eine erhebliche Verminderung der Genauigkeit der Formel 240\* zur Folge, lässt dagegen die der Formel 242\* unverändert.

Die Formeln 240\*, 244\* und 245\* sind identisch mit den in KD, bezw. unter 43), 42) und 41) gegebenen. Hinsichtlich ihres Gebrauchs vergl. die daselbst gegebene Anweisung.

Die Formel 241\* ist die von Gauss in GA, Art. 12, unter der Form:  $S = \frac{AR}{\sqrt{m_1 m_2}}$ , gegebene, wo  $R$  in Theilen des Kugelhalbmessers  $A$ , und  $S$  in demselben Längenmass wie  $A$  zu verstehen ist (vergl. KD, Fussnote S. 28).

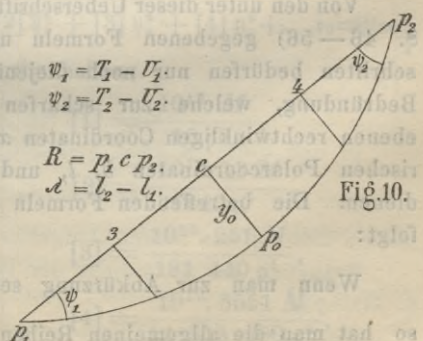
Hiermit ist die Entwicklung der in KD (S. 7—30, § 4—23) gegebenen Formeln der Gauss'schen Projection erledigt.

Wir fügen im folgenden Artikel noch erheblich weiter reichende (in KD nicht enthaltene) Reductionsformeln dieser Projection hinzu.

### Reductionsformeln für Dreiecksseiten bis zu 1500 km 52

**Länge.** Wir setzen nur die Formeln selbst hierher, während wir ihre Herleitung, die übrigens lediglich durch Erweiterung vorangegangener Entwicklungen geschehen kann, zur Schonung des Raumes unterdrücken.

Durch die in Fig. 10 mit 3, c, 4 bezeichneten Punkte sei der Grösstkreisbogen  $p_1 p_2$  in vier gleiche Theile getheilt. Wir bezeichnen die in den Punkten:



stattfindenden Werthe der Grössen  $b, h, m$  der Reihe nach mit:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} p_1 & 3 & c & 4 & p_2 \\ \hline b_1 & b_3 & b_c & b_4 & b_2, \\ h_1 & h_3 & h_c & h_4 & h_2, \\ m_1 & m_3 & m_c & m_4 & m_2, \end{array}$$

und setzen zur Abkürzung:

$$246^* \quad Q = \frac{\rho \sin \lambda}{\sin R} \cos b_1 \cos b_2,$$

$$247^* \quad u = \frac{QR}{30} (7h_1 + 32h_3 + 12h_c + 32h_4 + 7h_2) \\ + \frac{QR^3}{40} (h_1 + 8h_c + h_2) + \frac{QR^5}{40} h_c,$$

$$248^* \quad v = \frac{QR}{30} (7h_1 + 16h_3 - 16h_4 - 7h_2) + \frac{QR^3}{120} (h_1 - h_2).$$

Dann sind die Reductionen:

$$249^* \quad \psi_1 = +u + v \quad \text{und} \quad \psi_2 = -u + v,$$

$$250^* \quad \log R - \log S = \frac{1}{90} (7 \log m_1 + 32 \log m_3 + 12 \log m_c \\ + 32 \log m_4 + 7 \log m_2).$$

$R$  in Theilen des Kugelhalbmessers  $A$ ,  $\psi_1$  und  $\psi_2$  in Secunden.

Nachdem man sich hinreichend angenäherte Werthe der Kugelbreiten  $b_1, b_3, b_c, b_4, b_2$  verschafft hat, können die ihnen entsprechenden Werthe der Grössen  $h$  und  $\log m$  aus der Tafel I in KD entnommen, oder — wo diese nicht ausreicht — nach den Formeln 29)–31) berechnet werden.

Durch Entwickelung der Reste der Formeln 249\* und 250\* ist unter Berücksichtigung der am Schluss der Artikel 39 und 50 bestimmten Fehlergrenzen (0,000 37 Secunden und 6,7 Einheiten der zehnten Mantissenstelle) Folgendes festgestellt worden:

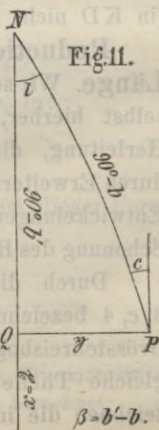
Für Dreiecksseiten, die nicht länger als 1500 km sind und deren Mitte innerhalb der Breitenzone von  $44^\circ 20'$  und  $61^\circ 0'$  liegt, liefern die Formeln 246\*–250\* die Azimuthreduktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  genauer als auf 0,0009 Secunden, und die Entfernungsreduction  $\log R - \log S$  genauer als auf 9 Einheiten der zehnten Mantissenstelle.

## 53 Sphäroid und Ebene. Doppelprojection.

Von den unter dieser Ueberschrift in KD (§ 35–40, S. 46–56) gegebenen Formeln und Rechnungsvorschriften bedürfen nur noch diejenigen einer näheren Bedrüdung, welche zur scharfen Berechnung der ebenen rechtwinkligen Coordinaten  $x, y$  aus den sphärischen Polarcoordinaten  $b, l$ , und dieser aus jenen dienen. Die betreffenden Formeln ergeben sich wie folgt:

$$\text{Wenn man zur Abkürzung setzt: } v_0 = 2 \tan \frac{v}{2},$$

so hat man die allgemeinen Reihen:



$$251^* \begin{cases} l v_0 = l v + \frac{1}{12} v^2 + \frac{7}{1440} v^4 + \frac{31}{90\,720} v^6 + \frac{127}{4\,838\,400} v^8 + \dots, \\ l v = l v_0 - \frac{1}{12} v_0^2 + \frac{13}{1440} v_0^4 - \frac{251}{181\,440} v_0^6 + \frac{3551}{14\,515\,200} v_0^8 - \dots, \end{cases} \quad v_0 = 2 \tan \frac{v}{2}$$

die sich, nebst ihrem Gesetz, aus 1\* — 5\* (Jahrg. 1899, S. 492) leicht ergeben.

Ferner findet nach 12\* (Jahrg. 1899, S. 494) zwischen der sphärischen Ordinate  $\eta$  und der ebenen  $y$  die Gleichung der Mercator'schen Projection statt:  $\tan \frac{\eta}{2} = \frac{1}{i} \tan \frac{i y}{2}$ , welche in Verbindung mit 251\* und mit der Abkürzung:  $\eta_0 = 2 \tan \frac{\eta}{2}$ , zeigt, dass man hat:

$$252^* \begin{cases} l \eta_0 = l y - \frac{1}{12} y^2 + \frac{7}{1440} y^4 - \frac{31}{90\,720} y^6 + \frac{127}{4\,838\,400} y^8 - \dots, \\ l y = l \eta_0 + \frac{1}{12} \eta_0^2 + \frac{13}{1440} \eta_0^4 + \frac{251}{181\,440} \eta_0^6 + \frac{3551}{14\,515\,200} \eta_0^8 + \dots, \end{cases} \quad \eta_0 = 2 \tan \frac{\eta}{2}$$

worin die Coefficienten mit denen in 251\* bis auf die Vorzeichen übereinstimmen. Sämmtliche Grössen in den vorstehenden Reihen sind in Theilen des Halbmessers, bezw. des Kugelhalbmessers  $A$ , zu verstehen;  $l$  bedeutet  $\log \text{nat}$ .

Indem wir nunmehr in 251\* und 252\* die Grössen  $\eta_0$ ,  $v$ ,  $v_0$  in Secunden,  $y$  dagegen in Metern verstehen, und, um auch die letztere Grösse in Secunden zu verwandeln, setzen:  $\eta = \frac{\rho}{A} y$ ; indem wir ferner zu den gemeinen Logarithmen übergehen, und die Correctionsglieder in Einheiten der zehnten Mantissenstelle ausdrücken, schreiben wir die Reihen 251\* und 252\* wie folgt:

$$253^* \begin{cases} \log v_0 = \log v + (1) v^2 + (2) v^4 + (3) v^6 + (4) v^8 + \dots, \\ \log v = \log v_0 - [1] v_0^2 + [2] v_0^4 - [3] v_0^6 + [4] v_0^8 - \dots, \end{cases} \quad v_0 = 2 \rho \tan \frac{v}{2}$$

und:

$$254^* \begin{cases} \log \eta_0 = \log \eta - (1) \eta^2 + (2) \eta^4 - (3) \eta^6 + (4) \eta^8 - \dots, \quad \eta = \frac{\rho}{A} y \\ \log y = \log \left( \frac{A}{\rho} \eta_0 \right) + [1] \eta_0^2 + [2] \eta_0^4 + [3] \eta_0^6 + [4] \eta_0^8 + \dots, \quad \eta_0 = 2 \rho \tan \frac{\eta}{2} \end{cases}$$

worin die Coefficienten folgende Werthe haben:

$(1) = \frac{10^{10} \cdot M}{12 \rho^2}$	$[1] = \frac{10^{10} \cdot M}{12 \rho^2},$
$(2) = \frac{10^{10} \cdot 7 M}{1440 \rho^4}$	$[2] = \frac{10^{10} \cdot 13 M}{1440 \rho^4},$
$(3) = \frac{10^{10} \cdot 31 M}{90\,720 \rho^6}$	$[3] = \frac{10^{10} \cdot 251 M}{181\,440 \rho^6},$
$(4) = \frac{10^{10} \cdot 127 M}{4\,838\,400 \rho^8}$	$[4] = \frac{10^{10} \cdot 3551 M}{14\,515\,200 \rho^8}.$

Hiernach wird die folgende Herleitung der Formeln ohne Weiteres verständlich sein.

**Gegeben:  $x, y$ . Gesucht:  $b, l, c$ . | Gegeben:  $b, l$ . Gesucht:  $x, y, c$ .**

Die Gauss'schen Gleichungen, auf das sphärische Dreieck  $NQP$  (Fig. 11) angewandt und zur Abkürzung  $\beta = b' - b$  gesetzt, geben:

$$\begin{aligned} \tan \frac{\beta}{2} &= \tan \left( b' - \frac{\beta}{2} \right) \tan^2 \frac{\eta}{2}, & \tan \frac{\beta}{2} &= \frac{\sin \left( b + \frac{1}{2} \beta \right) \cos \left( b + \frac{1}{2} \beta \right)}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} \tan^2 \frac{l}{2}, \\ \tan \frac{l}{2} &= \frac{\cos \frac{1}{2} \beta}{\cos \left( b' - \frac{1}{2} \beta \right)} \tan \frac{\eta}{2}, & \tan \frac{l}{2} &= \frac{\cos \left( b + \frac{1}{2} \beta \right)}{\cos \frac{1}{2} \beta} \tan \frac{l}{2}, \\ \tan \frac{c}{2} &= \tan \left( b' - \frac{\beta}{2} \right) \tan \frac{\eta}{2}, & \tan \frac{c}{2} &= \frac{\sin \left( b + \frac{1}{2} \beta \right)}{\cos \frac{1}{2} \beta} \tan \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned} l_0 &= 2 \rho \tan \frac{l}{2}, & l_0 &= 2 \rho \tan \frac{l}{2}, \\ \beta_0 &= 2 \rho \tan \frac{\beta}{2}, & \beta_0 &= 2 \rho \tan \frac{\beta}{2}, \\ \eta_0 &= 2 \rho \tan \frac{\eta}{2}, & \eta_0 &= 2 \rho \tan \frac{\eta}{2}, \\ c_0 &= 2 \rho \tan \frac{c}{2}, & c_0 &= 2 \rho \tan \frac{c}{2}, \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$255^* \left\{ \begin{aligned} \beta_0 &= \frac{\eta_0^2}{2\rho} \tan \left( b' - \frac{\beta}{2} \right), & \beta_0 &= \frac{l_0^2 \sin \left( b + \frac{1}{2} \beta \right) \cos \left( b + \frac{1}{2} \beta \right)}{2 \rho \cos^2 \frac{1}{2} \beta}, \\ l_0 &= \frac{\eta_0 \cos \frac{1}{2} \beta}{\cos \left( b' - \frac{1}{2} \beta \right)}, & \eta_0 &= \frac{l_0 \cos \left( b + \frac{1}{2} \beta \right)}{\cos \frac{1}{2} \beta}, \\ c_0 &= \eta_0 \tan \left( b' - \frac{\beta}{2} \right), & c_0 &= \frac{l_0 \sin \left( b + \frac{1}{2} \beta \right)}{\cos \frac{1}{2} \beta}, \end{aligned} \right.$$

und den Reihen 253\* und 254\* zufolge ist:

$$256^* \left\{ \begin{aligned} \log l &= \log l_0 - [1] l_0^2 + [2] l_0^4 - [3] l_0^6 + \dots, \\ \log \beta &= \log \beta_0 - [1] \beta_0^2 + [2] \beta_0^4 - [3] \beta_0^6 + \dots, \\ \log \eta_0 &= \log \eta_0 - (1) \eta_0^2 + (2) \eta_0^4 - (3) \eta_0^6 + \dots, \\ \log c &= \log c_0 - [1] c_0^2 + [2] c_0^4 - [3] c_0^6 + \dots \\ \log l &= \log l + (1) l^2 + (2) l^4 + (3) l^6 + \dots, \\ \log \beta &= \log \beta_0 - [1] \beta_0^2 + [2] \beta_0^4 - [3] \beta_0^6 + \dots, \\ \log y &= \log \left( \frac{A}{\rho} \eta_0 \right) + [1] \eta_0^2 + [2] \eta_0^4 + [3] \eta_0^6 + \dots, \\ \log c &= \log c_0 - [1] c_0^2 + [2] c_0^4 - [3] c_0^6 + \dots \end{aligned} \right.$$

In den Formeln 255\* und 256\*, und den Relationen:

$$\eta = \frac{\rho}{A} y, \quad b' = \text{Normalkugelbreite} + \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\rho}{A} x,$$

ist die Lösung der beiden Aufgaben enthalten.

Bezüglich des Gebrauchs der Formeln siehe die Beispiele in KD, S. 50—53.

## Refraction über grossen Wasserflächen.

Von Prof. Dr. E. Hammer.

Nach der vor Kurzem in dieser Zeitschrift ausgetragenen Controverse über die Sichtbarkeit eines Leuchtfeuers, wobei u. A. der Refractions-Coefficient 0,25 als „sehr stark“ bezeichnet wurde (vergl. Jordan, Zeitschr. für Verm. 1899, S. 26, vergl. ferner ebenda 1898, S. 529 und 1899, S. 25 und S. 363) scheint es, dass man sich selbst in den Kreisen der Geodäten zu sehr an die Zahlen 0,13 (allenfalls mit den Extremen Morgens und Abends etwa 0,20, über Mittag 0,08) als allgemein gültige Werthe des Refractions-Coefficienten gewöhnt hat und zu sehr aus den Augen lässt, zwischen welchen weiten Grenzen dieser Coefficient sowohl über Landflächen als über Meeresflächen schwanken kann.

Dass gerade auch über grossen Wasserflächen (nicht nur über stark erhitztem Wüstenboden) grosse Anomalien der Refraction sehr häufig vorkommen, ist an sich bekannt genug. Der Unterschied zwischen der Wassertemperatur an der Oberfläche des Wassers und der Lufttemperatur über der Wasserfläche spielt hier die Hauptrolle. Neben zahlreichen älteren Beobachtungen haben dies neuerdings besonders bestätigt die Beobachtungen von Prof. Kayser in Danzig, von Professor Forel am Genfer See (vergl. C. R. der Pariser Akademie, 1899 Juli 31, Bd. 129, S. 272—274, „Les variations de l'horizon apparent“) und die von Koss z. Th. vom Strand von Verudella (beim Kriegshafen Pola in Istrien) aus, z. Th. durch das österreich-ungarische Kriegsschiff „Pola“ auf der zweiten Rothen Meer-Expedition.

Besonders auf die zuletzt genannten Messungen (in Verudella vom Linienschiffsleutenant Koss und dem Schiffsfähnrich Grafen Thun angestellt; vergl. den „Akademischen Anzeiger“ 1900, Nr. 1, Bericht über Sitz. Math. Nat. Kl. Akad. Wiss. Wien) mag hier etwas näher eingegangen werden. Die Ergebnisse von 360 Zenithdistanzen der Kimme aus der Aughöhe 10 m über dem Wasserspiegel, 740 Zenithdistanzen aus 16 m, 160 aus 42 m und (von Bord der „Pola“ aus) 260 in 6,5 m und aus mehr als 1000 Temperaturmessungen (die in Verudella durch einen besondern kleinen Dampfer in See gemessen wurden, während die Zenithdistanzen der Kimme mit einem grössern Universalinstrument und einem Präcisions-Nivellirinstrument bestimmt sind) ergab sich Folgendes:

1) Die Kimmtiefe (Depression des Seehorizonts) ändert sich mit dem Unterschied zwischen der Luft- und der Wassertemperatur; Luftdruck, Feuchtigkeit, Bewölkung sind fast ohne Einfluss.

2) Die Beträge scheinbarer Hebung (oder Senkung) der Kimme über (unter) ihren mathematischen Senkungsbetrag (ohne Rücksicht auf

Refraction, nur abhängig von Augeshöhe und Erdhalbmesser) können gross werden (3' und mehr); sie lassen sich folgendermaassen darstellen. Bezeichnet  $\Delta$  den Unterschied: Lufttemperatur (unmittelbar über der Wasserfläche) minus Wassertemperatur (an der Oberfläche) in  $C^0$ , so sind diese Beträge

bei 6,45 m Augeshöhe	Hebung	=	$21,2 \cdot \Delta + 15''$
„ 10,15 „	„	=	$21,4 \cdot \Delta + 18''$
„ 15,9 „	„	=	$22,1 \cdot \Delta + 28''$
„ 41,8 „	„	=	$21,0 \cdot \Delta + 36''$

(Die Zahlen sind absichtlich hier etwas abgerundet; Koss stellt sie auch in einer Figur dar.)

Diese Beträge (wirkliche „Hebungen“ bei positivem, Senkungen bei negativem  $\Delta$ , wenn dann  $k \cdot \Delta$  grösser ist als das zweite Glied der Ausdrücke rechter Hand) sind mit richtigem Zeichen zu der rein geodätisch (ohne Rücksicht auf die Refraction) berechneten Kimmtiefe hinzuzufügen, um die wirkliche (optische oder physische) Kimmtiefe zu erhalten.

Die angegebenen Grössen gelten für den Fall, dass eine Brise von mindestens der Stärke 2—3 (Beaufort-Scala) die Luft gut mischt. In andern Fällen können grosse Anomalien entstehen; z. B. wurde in einem Fall, wo bei ganz stillem Wetter statt der normalen Temperaturabnahme nach oben eine starke Temperaturzunahme vorhanden war, aus 16 m Aughöhe ein rapides Steigen der Kimme beobachtet, so lange bis sie, statt normalerweise 7' 40'' unter dem mathematischen Horizont zu liegen, 1' 7'' über diesem Horizont erschien! Ein anderes Mal erschien die Kimme in dem  $\frac{1}{2}^0$  grossen Gesichtsfeld des Fernrohrs in der linken Hälfte um 2' höher als in der rechten Hälfte. Der grösste Werth des Refractions-Coefficienten, den Walter in seiner Theorie der atmosph. Strahlenbrechung (Leipzig, Teubner 1898) als aus den Beobachtungen sich ergebend anführt, nämlich 0,81 ist durch den ersten Fall weit übertroffen. Man hat hier ein terrestrisches Analogon zu der Seeliger'schen Hypothese, dass in der Sonnenhülle so starke Refractionen vorkommen, dass Lichtstrahlen aus dieser Hülle gar nicht austreten. — Die extremen Werthe des Refractions-Coefficienten, die aus den Beobachtungen von Koss hervorgehen, sind + 2,75 und — 0,52. Ohne Zweifel liegt in diesen Zahlen und ihrer zu Zeiten sehr schnellen Wandelbarkeit ein Theil der Erklärung für das Misslingen genauer trigonometrischer Höhenmessungen, selbst bei möglichst gut synchronen Beobachtungen über grosse Wasserflächen hinweg (vgl. z. B. den Höhenanschluss von Helgoland an Punkte des Festlands).

Man wird nach diesen Ergebnissen Höhenwinkelmessungen, die vom Schiff aus mit dem Sextanten oder andern Reflexionsinstrumenten über der natürlichen Kimme gemacht sind (Circum-Meridian-Höhen für die Breite, Höhen in der Nähe des I. Vertikals für die Ortszeit und damit aus der Chronometerzeit für die Länge), wenn sie sich für Kimmtiefe (und Refraction) nur auf Beobachtung der Lufttemperatur am Schiffe gründen, sehr



skeptisch ansehen müssen (um den Fehler der angenommenen Kimmtiefe wird auch die gemessene Höhe falsch); sogar wenn die Wassertemperatur am Schiffe gemessen und die Berichtigung nach den Koss'schen Ausdrücken oder Figuren gemacht wird, sind grosse Fehler denkbar.

Die Seeleute haben also nicht nur wegen der häufig auch bei Tag vorhandenen Unmöglichkeit, die Kimme zu benutzen („unsichtiges“, d. h. nebliges oder „diesiges“ Wetter), sondern auch wegen der möglichen grossen Fehler (3' kann gar nicht selten sein) in der an der Messung angebrachten Kimmtiefe Grund, sich nach Instrumenten umzusehen, die sie von der Kimme unabhängig machen. Es sind dies die „Libellensextant“ oder ähnlich benannten Instrumente, die fast alle auf dem Princip der „Freihandhöhenwinkelmesser“ der Geodäsie beruhen, indem das Einspielen einer Libelle gleichzeitig mit der Zielung nach einem Punkt, hier einem Gestirn, beobachtet werden kann. Ein so einfaches Instrument wie der Höhenwinkelmesser von Hamann, dessen Genauigkeit etwa auf  $\frac{1}{20}$  Grad m. F. gebracht werden kann (vgl. Hammer in Zeitschr. für Verm. 1898, S. 146—147), der Quadrant von Butenschön, der auf etwa dieselbe Genauigkeit gebracht werden kann, u. s. f. sind, obwohl sie die Approbation der Seebehörden noch nicht ganz haben, in ihren thatsächlichen Leistungen den kleineren, gewöhnlichen Sextanten von 1' oder 30" Lesung schon einigermaassen vergleichbar, weil bei diesen die Unsicherheit der Kimmtiefe (bei dem gewöhnlichen Reductionsverfahren) die genauere Messung der Höhe über der Kimme nicht voll zur Geltung kommen lässt. Von neueren Instrumenten von der Art der Libellen-Freihandinstrumente sei bei dieser Gelegenheit der Libellensextant erwähnt, den der bekannte schwedische Geodät Jäderin für die verunglückte Andree'sche Nordpolexpedition construirt hat und den ich merkwürdigerweise in Deutschland nirgends erwähnt finde (vergl. Förhandl. K. Vetensk. Akad. Stockholm 1897, 54. Bd., Stockholm 1898, S. 493—505). — Eine andere Art der Unabhängigmachung vom „natürlichen Horizont“ der Seeleute, der Kimme (oder auch dem gewöhnlichen künstlichen Horizont auf dem Festlande hat bekanntlich der Apparat des französischen Admirals Fleuriais benutzt, der im Wesentlichen auf dem Princip der automatischen Vertical-Richtung der Achse eines Kreisels beruht; der Apparat, der 1' Genauigkeit haben soll und damit der Messung über der Kimme selbst bei Rücksicht auf die Koss'schen Zahlen gleichsteht, heisst deshalb auch Gyroskop-Collimator oder „horizon gyroscopique“. Vgl. über ihn meinen Lexikon-Artikel: Künstlicher Horizont in Lueger, Lexikon der Technik, Bd. V, S. 741, und die daselbst angegebene Literatur, sowie etwa (wegen leichter Erreichbarkeit) die inzwischen erschienene ziemlich eingehende Beschreibung (von mir nicht bekannter Seite) in Meyer's Konv.-Lexikon, 5. Aufl. Bd. 18, Leipzig 1898 (S. 567, Artikel Kreisel sextant).

## Die bayerische Gesetzgebung über die Anlage des Grundbuchs und sonstige damit zusammenhängende Materien.

(Fortsetzung von S. 286.)

§ 10. Die Beteiligten können mit Beiständen erscheinen; sie können sich auch durch Bevollmächtigte vertreten lassen. Zur Vertretung genügt eine vom Bürgermeister beglaubigte Vollmacht. Für die Beglaubigung wird eine Gebühr nicht erhoben. Der Anlegungsbeamte kann jederzeit das persönliche Erscheinen anordnen und in Gemässheit des § 1 Abs. 1 erzwingen.

§ 11. Jedermann ist verpflichtet, dem Anlegungsbeamten auf Verlangen Auskunft über die ihm bekannten Eigenthumsverhältnisse eines Grundstücks zu erteilen, sowie die auf den Erwerb bezüglichen Urkunden vorzulegen, soweit sie sich in seinem Besitze befinden. Die Vorschriften des § 9 finden Anwendung.

Der Anlegungsbeamte kann Zeugen und Sachverständige nach Maassgabe der Vorschriften der Civilprocessordnung vernehmen. Ueber die Beeidigung eines Zeugen oder Sachverständigen entscheidet jedoch, unbeschadet der §§ 358, 367 der Civilprocessordnung, das Ermessen des Anlegungsbeamten.

§ 12. Wer im Grundsteuerkataster als Besitzer bezeichnet ist, wird als Eigenthümer eingetragen, wenn sein Eigenthum glaubhaft gemacht ist. Zur Glaubhaftmachung genügt insbesondere die Beibringung der Erwerbssurkunde.

§ 13. Wer im Grundsteuerkataster nicht als Besitzer bezeichnet ist, wird, falls er das Eigenthum als Rechtsnachfolger des im Grundsteuerkataster als Besitzer Bezeichneten in Anspruch nimmt, als Eigenthümer eingetragen, wenn dessen Eigenthum und die Rechtsnachfolge glaubhaft gemacht sind.

§ 14. Wird in anderen Fällen das Eigenthum von einem nicht im Grundsteuerkataster als Besitzer Bezeichneten beansprucht, so ist zur Eintragung ausser der Glaubhaftmachung des Eigenthums erforderlich, dass der im Grundsteuerkataster als Besitzer Bezeichnete oder sein Rechtsnachfolger der Eintragung zustimmt.

Die Zustimmung gilt als erteilt, wenn der im Grundsteuerkataster als Besitzer Bezeichnete oder sein Rechtsnachfolger auf eine Aufforderung des Anlegungsbeamten nicht binnen zwei Wochen Widerspruch erhebt. Der Rechtsnachtheil ist in der Aufforderung anzudrohen.

Ist die Mittheilung der Aufforderung an die im Abs. 2 Genannten unthunlich, so ist die Aufforderung an die Gerichtstafel anzuheften und einmal in das für die Bekanntmachungen des Amtsgerichts bestimmte Blatt einzurücken. Die Frist beginnt mit dem Ablaufe von zwei Wochen seit der Einrückung.

§ 15. Wird im Falle des § 14 Widerspruch erhoben oder liegen sonst einander widerstreitende Eigenthumsansprüche vor, so hat der Anlegungsbeamte zunächst unter den Betheiligten zu vermitteln. Kommt eine Einigung nicht zustande, so wird derjenige als Eigenthümer eingetragen, von dem der Anlegungsbeamte auf Grund der vorhandenen Belege und der Ermittlungen annimmt, dass er Eigenthümer ist. Zugleich ist für den anderen Betheiligten eine Protestation einzutragen. Die Protestation ist von Amtswegen zu löschen, wenn derjenige, für den sie eingetragen wird, nicht binnen einer ihm vom Anlegungsbeamten zu bestimmenden Frist von mindestens drei Monaten nachweist, dass er den Rechtsstreit gegen den als Eigenthümer Eingetragenen anhängig gemacht hat. Die Vorschriften des § 14 Abs. 3 finden entsprechende Anwendung.

§ 16. Miteigenthümer können auf die Erklärung eines einzelnen Miteigenthümers eingetragen werden, wenn der Anlegungsbeamte die Vernehmung der übrigen Miteigenthümer nicht für erforderlich erachtet. Vor der Eintragung sind die nicht vernommenen Miteigenthümer davon zu benachrichtigen, welche Eintragung in Aussicht genommen ist; damit ist die Bestimmung einer Frist und die Aufforderung zu verbinden, einen Widerspruch binnen der Frist zu erheben. Die Vorschriften des § 14 Abs. 3 finden entsprechende Anwendung. Wird binnen der Frist Widerspruch nicht erhoben, so erfolgt die Eintragung.

§ 17. Bei einem im Miteigenthum stehenden Gebäude, bei welchem die Benutzung nach räumlich getrennten Theilen ausgeschieden ist (Stockwerks- oder Geschosseigenthum, Herbergsrechte), werden die einzelnen Antheile als besondere Grundstücke behandelt.

§ 18. Die vererblichen und veräusserlichen Rechte, welche an den Grundstücken der im Artikel 164 des Einführungsgesetzes zum Bürgerlichen Gesetzbuche bezeichneten Verbände bestehen, werden, soweit nicht die Berechtigung an Grundbesitz geknüpft ist, gleich den Grundstücken behandelt. Die Eintragung erfolgt nur auf Antrag.

§ 19. Stehen mehrere Grundstücke im Eigenthum derselben Person, so bestimmt der Anlegungsbeamte, ob und inwieweit für die Grundstücke ein gemeinschaftliches Folium geführt werden soll.

§ 20. Die Grundstücke, für welche ein Folium nicht angelegt worden ist, weil die Eigenthumsverhältnisse nicht festgestellt werden konnten, sind nach Steuergemeinden zu verzeichnen.

## Zweiter Abschnitt.

### Anmeldung der nicht eingetragenen Rechte.

§ 21. Nach dem Abschlusse des im ersten Abschnitte geregelten Verfahrens hat das Amtsgericht die Betheiligten aufzufordern, binnen drei Monaten

1. die Eintragung der von ihnen beanspruchten, nicht im Hypothekenbuch eingetragenen und nicht in einer Grunddienstbarkeit bestehenden Rechte an den im Hypothekenbuch eingetragenen Grundstücken und der Rechte an einem solchen Rechte,
2. die Eintragung der zu ihren Gunsten bestehenden Beschränkungen des Berechtigten in der Verfügung über ein im Hypothekenbuch eingetragenes Recht,
3. die Eintragung ihrer Verwahrungen gegen den Inhalt des Hypothekenbuchs zu erwirken.

Dabei ist bekannt zu machen, dass nach dem Ablaufe der Frist das Grundbuch für angelegt erklärt werden kann und dass die Beteiligten nach dieser Erklärung den öffentlichen Glauben des Grundbuchs gegen sich gelten lassen müssen.

§ 22. Die im § 21 bezeichnete Aufforderung ist durch Anheften an die Gerichtstafel und in den Gemeinden an dem hierfür üblichen Platze sowie durch Einrückung in das für die Bekanntmachungen des Amtsgerichtes bestimmte Blatt zu veröffentlichen.

Der Anfang und das Ende der Frist sind in der Bekanntmachung anzugeben.

Das Schriftstück soll während der ganzen Dauer der Frist angeheftet bleiben. Die Einrückung soll einen Monat vor dem Ablaufe der Frist wiederholt werden.

Das Amtsgericht kann die Einrückung in weitere Blätter, sowie andere Veröffentlichungen anordnen.

§ 23. Die Behandlung der in Folge der Aufforderung eingehenden Eintragungsgesuche richtet sich nach den Vorschriften des Hypothekengesetzes.

### Dritter Abschnitt.

#### Erklärung des Hypothekenbuchs zum Grundbuche.

§ 24. Die in den Landestheilen rechts des Rheins bestehenden Hypothekenbücher gelten von dem Zeitpunkt an, den das Staatsministerium der Justiz für die einzelnen Bezirke bestimmt (§ 26), als Grundbücher im Sinne des Bürgerlichen Gesetzbuchs.

Bei dem Amtsgerichte München I gilt von diesem Zeitpunkt an für die Ewiggelder, die vor dem Inkrafttreten des Gesetzes vom 18. Juni 1898, die Vorbereitung der Anlegung des Grundbuchs in den Landestheilen rechts des Rheins betreffend, im Münchener Grundbuch eingetragen worden sind, dieses zusammen mit dem Hypothekenbuch als Grundbuch im Sinne des Bürgerlichen Gesetzbuchs. Im Hypothekenbuch ist auf die im Münchener Grundbuch eingetragenen Ewiggelder zu verweisen.

§ 25. Nach der im § 22 Abs. 3 vorgeschriebenen zweiten Einrückung der Aufforderung hat das Amtsgericht dem Staatsministerium der Justiz über die erfolgten Veröffentlichungen und über den Tag, an welchem die dreimonatige Frist abläuft, zu berichten und eine Abschrift des im

§ 20 vorgeschriebenen Verzeichnisses der Grundstücke vorzulegen, für welche Folien nicht angelegt worden sind.

§ 26. Das Staatsministerium der Justiz bestimmt den Zeitpunkt, in welchem das Grundbuch für einen Bezirk als angelegt anzusehen ist dabei bezeichnet es die Grundstücke, welche von der Anlegung des Grundbuchs ausgenommen sind.

Die Verfügung ist durch das Amtsgericht in Gemässheit des § 22 Abs. 1 zu veröffentlichen. Das Staatsministerium der Justiz kann; weitere Veröffentlichungen anordnen.

Zwischen der Einrückung der Bekanntmachung und dem im Abs. 1 bezeichneten Zeitpunkte muss eine Frist von zwei Wochen liegen.

§ 27. Sobald in Ansehung eines Grundstücks, das von der Anlegung des Grundbuchs ausgenommen worden ist (§ 26 Abs. 1), die Hindernisse beseitigt sind, welche im Anlegungsverfahren der Anlegung eines Foliums entgegenstanden, hat das Amtsgericht von Amtswegen ein Grundbuchblatt anzulegen. Auf dem Grundbuchblatt ist zu vermerken, dass das Grundstück von der Anlegung des Grundbuchs noch ausgenommen ist.

Die Vorschriften der §§ 21 bis 23, 25, 26 finden entsprechende Anwendung.

Nach dem Eintritte des Zeitpunkts, in dem das Grundbuch für das Grundstück als angelegt anzusehen ist, wird der Vermerk im Grundbuche gelöscht.

#### Vierter Abschnitt.

##### Schlussbestimmungen.

§ 28. Die Vorschriften dieser Verordnung finden auf dns Bergwerkseigenthum, auf die unbeweglichen Kuxe (Gewerkschaftsantheile nach älterem Bergrechte) und auf die für die Bergwerke geführten besonderen Hypothekenbücher entsprechende Anwendung. An die Stelle des Grundsteuerkatasters treten die bezirksbergamtlichen Bücher. In der Eintragung ist, sofern nicht der Bergwerkseigenthümer oder der Gewerke der Anlegung eines Foliums im Hypothekenbuche zugestimmt, zu vermerken, dass sie erst mit der Erklärung des Hypothekenbuchs zum Grundbuche wirksam wird.

§ 29. Die Vorschriften dieser Verordnung finden auf das Recht, auf oder uuter der Oberfläche eines fremden Grundstücks ein selbstständiges Bauwerk zu haben (Erbbaurecht im Sinne des Bürgerlichen Gesetzbuchs), entsprechende Anwendung. Ein besonderes Folium wird für das Recht nur auf Antrag angelegt.

Auf die übrigen Rechte, welche Gegenstand einer Hypothek sein können, finden die Vorschriften im zweiten und dritten Abschnitte dieser Verordnung Anwendung, wenn für das Recht ein Folium im Hypothekenbuch angelegt ist.

§ 30. Die zum Vollzuge dieser Verordnung erforderlichen Anordnungen werden vom Staatsministerium der Justiz erlassen.

(Schluss folgt.)

## Bücherschau.

Der Quadrant I des Grossen Straub'schen Uebersichtsplanes von Berlin, Verh. 1:4000, ist mit den jetzt erschienenen Blättern I B und I C (Friedrichshain, Friedenstrasse, Landsberger Allee, Central-Viehhof) nunmehr vollständig geworden. Es wird auf 9 Blättern zu je 2 Mark das ganze nordöstliche Viertel Berlins mit allen wesentlichen Einzelheiten dargestellt.

Die uns vorliegenden Probedblätter I B und I C lassen erkennen, mit welcher ungemeiner Sorgfalt sowohl die Reduction des gewählten Maassstabverhältnisses 1:4000 aus den Plänen 1:1000 des städt. Vermessungsamtes zu Berlin, als auch der Kupferstich und der Umdruck in 8 Planfarben vorgenommen worden sind, um ein Werk zu schaffen, das Uebersichtlichkeit und peinlichste Schärfe der Darstellung in jeder Weise vollkommen zu vereinigen bestrebt ist.

Was uns an den beiden neuen Blättern gegenüber früheren besonders gefällt, ist der Umstand, dass nicht (wie ursprünglich) die Farbe der Gebäude hell- bzw. dunkelcarmin, sondern hell- und dunkelgrau gewählt ist, und dass wichtige Privatgebäude gleich den öffentlichen durch dunkleren Farbenton, aber zum Unterschiede von letzteren schraffirt, hervorgehoben sind. Die graue Abtönung der Gebäude ermöglicht eine übersichtliche und sofort erkennbare Darstellung von Entwürfen aller Art, die ja in der Regel durch Carmin oder Zinnober gekennzeichnet zu werden pflegen, was bei dem früheren rothen Druck weniger klar erreicht werden konnte.

Die öffentlichen Strassen sind braun angelegt und enthalten, soweit sie noch nicht vollständig bebaut sind, die planmässigen Breitenangaben; eisenbahnfiscalisches Land ist, abgesehen von den mit Hütungsgrün hervorgehobenen Böschungen, durch Violett gekennzeichnet. Im Bau befindliche Gebäude sind von den fertigen durch Punktirung ihrer Umrisse unterschieden. Alle Eigenthumsgrenzen sind in stärkeren Linien gezeichnet als die übrige Situation.

Besser und übersichtlicher gezeichnete Stadtpläne als der vorliegende „Uebersichtsplan von Berlin in 1:4000“ werden kaum hergestellt werden können; vielleicht möchte aber bei umfangreicheren Projecten (Hochbahnen, Untergrundbahnen, Bahnenverlegungen u. dgl.) hier und da der Wunsch auftauchen, die Pläne in grösserem Format erstehen und verwenden zu können; das jetzige beträgt 40:30 cm, also etwa ein Viertel Whatman, so dass in der Länge 1600 und in der Höhe 1200 m zur Darstellung gelangen. Für die riesigen Entfernungen Berlins sind das nur geringe Ausdehnungen, so dass bei grossen Entwürfen stets mehrere Pläne zusammengeklebt werden müssen und dadurch mit Fehlern behaftet werden, die bei grösserem Blattumfange sehr viel mehr zu vermeiden wären. Doch mögen die Herstellung der Kupferplatten und die ganze Drucklegung ein kleines Format haben nothwendig werden lassen.

Wir möchten bei dieser Gelegenheit nicht unerwähnt lassen, dass (wie der uns vorliegende Probedruck einer Forstkarte im Maassstabe 1:25000 in ungefährender Grösse eines preussischen Messtischblattes

aus der Strassburger Katasterdruckerei ersichtlich macht) die photozinkographische Vervielfältigung bei ganz ausserordentlicher Arbeitsverminderung kaum gegenüber derjenigen durch Kupferstich zurücksteht. Der photozinkographische Abdruck fraglicher Wirthschaftskarte ist in seiner Ausführung von einem neueren preussischen Messtischblatt so gut wie garnicht zu unterscheiden, hat aber jedem Kupferstich gegenüber den grossen Vortheil fast unvermittelter Originalität. Ab.

## Vereinsangelegenheiten.

### Ordnung

#### der 22. Hauptversammlung des Deutschen Geometer-Vereins.

Die 22. Hauptversammlung des Deutschen Geometer-Vereins wird in der Zeit vom 29. Juli bis 1. August 1900 in

### Cassel

nach folgender Ordnung abgehalten werden:

#### Sonntag, den 29. Juli.

- Vorm. 9 Uhr: Sitzung der Vorstandschaft im „Hotel Stück“, Museumstrasse.
- Vorm. 11 Uhr: Sitzung der Vorstandschaft und der Abgesandten der Zweigvereine daselbst.
- Nachm. 6 Uhr: Versammlung und Begrüssung der eingetroffenen Theilnehmer im „Hannusch-Saale“ am Ständeplatz.

#### Montag, den 30. Juli.

- Vorm. 9 Uhr: Hauptversammlung und Berathung der Vereinsangelegenheiten im neuen Kaufmannshause, Hohenzollernstrasse, in nachstehender Reihenfolge:
- 1) Bericht der Vorstandschaft über die Vereinsthätigkeit seit der letzten Hauptversammlung.
  - 2) Bericht des Rechnungsprüfungs-Ausschusses und Beschlussfassung über Entlastung der Vorstandschaft.
  - 3) Wahl eines Rechnungsprüfungs-Ausschusses für die Zeit bis zur nächsten Hauptversammlung.
  - 4) Vortrag des Herrn Professor Dr. Reinhertz über Christian Ludwig Gerlings geodätische Thätigkeit.
  - 5) Berathung des Antrags der Vorstandschaft auf Aenderung des § 12 der Satzungen und des § 7 der Geschäftsordnung.
  - 6) Berathung des Vereinshaushalts für die Kalenderjahre 1900 u. 1901.
  - 7) Antrag eines Mitgliedes auf Ausgabe eines Gesamtinhalts-Verzeichnisses der Zeitschrift für Vermessungswesen.
  - 8) Neuwahl der Vorstandschaft.
  - 9) Vorschläge für Ort und Zeit der nächsten Hauptversammlung. Nach Schluss der Versammlung Besich-

tigung von Sehenswürdigkeiten der Stadt und von mechanischen Werkstätten.

Mittags 2 $\frac{1}{2}$  Uhr: Festessen im Stadtpark.

Abends 6 Uhr: Concert in der Karlsäue (bei ungünstigem Wetter im Stadtparksaale).

### Dienstag, den 31. Juli.

Vorm. 9 Uhr: Fachwissenschaftliche Vorträge im neuen Kaufmannshause.

- 1) Das staatliche Besiedlungswesen in den preussischen Ostprovinzen. Herr Oekonomierath Wittschier aus Posen.
- 2) Die im Zusammenlegungs-Verfahren anzufertigenden Kartenwerke mit besonderer Rücksicht auf die neuen Katasterkarten und Bücher. Herr Steuerinspector Lehnert aus Cassel.
- 3) Mittheilungen über die Wirksamkeit der Unterstützungskasse für hilfsbedürftige Landmesser und deren Hinterbliebene. Herr Steuerinspector Fuchs-Breslau.

Nach Schluss der Versammlung Besichtigung der Sammlung älterer Instrumente im Zwerenthurm.

(Auch wird um diese Zeit die Hauptversammlung der Unterstützungskasse für hilfsbedürftige Landmesser und deren Hinterbliebene abgehalten werden.)

Nachm. 4 Uhr: Ausflug nach Hann. Münden mit Sonderzug der Königl. Preussischen Staatsbahn.

### Mittwoch, den 1. August.

Morgens 8 Uhr: Fahrt mit Sonderzug der elektrischen Strassenbahn nach Wilhelmshöhe. Besichtigung des Schlosses und der Löwenburg, Spaziergang durch den Wald und das Druselthal nach der „Hohen Gras“ (Aussichtsturm), daselbst Frühstück. Fortsetzung des Spazierganges nach dem Hercules. Nachmittags 3 Uhr Abstieg vom Hercules mit den Wassern und gleichzeitige Besichtigung der Wasserkünste. Um 5 Uhr Abschiedsessen im Gasthof von Schombart.

Von der Veranstaltung einer Ausstellung musste in diesem Jahre wegen Mangels geeigneter Räumlichkeiten abgesehen werden, wir hoffen jedoch, dass die Besichtigung der Sehenswürdigkeiten der Stadt und der Besuch mechanischer Werkstätten einigen Ersatz für die Ausstellung bieten werden.

Altenburg S.-A., im April 1900.

## Die Vorstandschaft des Deutschen Geometer-Vereins.

L. Winckel.

### Inhalt.

**Grössere Mittheilungen:** Zur konformen Doppelprojection der preussischen Landesaufnahme, von Schreiber (Schluss). — Refraction über grossen Wasserflächen, von Hammer. — Bayerische Gesetzgebung über Grundbuchanlage. — Bücherschau. — Vereinsangelegenheiten.