ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

Organ des Deutschen Geometervereins.

Herausgegeben von

Dr. C. Reinhertz, Professor in Hannover. und C. Steppes, Obersteuerrath in München.

1901. Heft 16. Band XXX.

15. August.

Sphärisch-trigonometrische Beziehungen.

Gelegentlich der Sichtung älterer Acten bin ich auf zwei sphärisch-trigonometrische Abhandlungen aus längst vergangenen Zeiten gestossen: Beide sind jeweils nur wenigen Einzelnen zugänglich gewesen und doch wegen der bisher noch nicht gegebenen Lösungen von Problemen geeignet, das Interesse weiterer Kreise zu erwecken. Mit hoher Genehmigung des k. Katasterbureaus bringe ich daher dieselben zur Veröffentlichung.

Als im Jahre 1820 die k. bayrische Steuer-Kataster-Commission gemeinsam mit dem topographischen Bureau des Generalstabes die Triangulirung an verschiedenen Stellen des Königreichs nach Festlegung des Netzes erster Ordnung fortsetzen wollte, wurde der k. Steuerrath und Astronom Soldner aufgefordert, einen Instructionsentwurf für die beiderseitigen Trigonometer bezw. Ingenieur-Geographen auszuarbeiten. Diesem Ansinnen entsprach der mit Veröffentlichungen sehr karge Gelehrte unter dem 2. Mai 1820 gegenüber erstgenannter Stelle in folgender Weise:

„Die Mittheilung der Instruction für Trigonometer an das topographische Bureau betreffend, ist weiter nichts zu thun, als eine Abschrift des schon vor mehreren Jahren von mir angefertigten, sogenannten „praktischen Handbuchs zur Berechnung eines Dreiecksnetzes“ hinüber zu geben. Diese paar Bogen enthalten Alles, was bei uns eigenthümlich und positiv ist. Wie man Instrumente rectificirt und Winkel misst, muss jeder, welchem man trigonometrische Arbeiten anvertrauen kann, schon wissen; das gehört in keine Instruction, sondern muss in Lehrbüchern gesucht werden.“

Dieses Handbuch*) enthält nun nur, wie in Instructionen üblich, ohne irgend welche Formel-Entwicklung „die Anleitung zur Berechnung eines Punktes aus der Lage dreier anderer.“

*) Das in den Acten vorgefundene Handbuch ist eine Abschrift des wahrscheinlich längst verlorengegangenen Originals.

Die zweite der oben erwähnten Abhandlungen „Handbuch für Trigonometer und Obergeometer bei der allgemeinen Landesvermessung“ hat der Trigonometer Silvan Wild 1832 vorgelegt.

Nachdem von dem damals schon schwer erkrankten Soldner ein erbetenes Gutachten nicht einlief, wurde nach einem Jahre das Handbuch dem Verfasser mit dem Ausdrucke der Zufriedenheit wegen des damit bewiesenen Geschäftseifers zurückgegeben, fand jedoch keine officielle Anwendung. Als Wild, welcher sein Verfahren streng geheim gehalten haben soll, 1868 starb, gerieth dasselbe bald in völlige Vergessenheit.

Soldner, Anleitung zur Berechnung eines Punktes aus der Lage dreier anderer.

§ 1. Die zur Auflösung dieses Problems gegebene Instruction des ehemaligen topographischen Bureaus ist theils unbrauchbar geworden, nachdem die Coordinaten nicht mehr ausschliesslich eben gerechnet werden, theils ist dieselbe in zu vielerlei Fälle zergliedert, um mit Bequemlichkeit vielfältigen Gebrauch von ihr machen zu können. Die älteren Lehrbücher geben die Formeln ebenso umgestaltet und die von Cagnoli ist wenig bekannt und doch auch weitläufig.

Mittelst nachstehender Formeln wird der jedesmalige Bedarf einer Figur entbehrlich, und die Berechnung selbst ist durch eine mechanische Ordnung erleichtert, wodurch manche sonst vorkommende Irrungen vermieden werden.

Wenn von einer Station aus zwei Winkel zwischen drei bekannten Punkten gemessen sind, und man will mittelst dieser Winkel die Lage der Station selbst bestimmen, so halte man sich genau ohne alle Rücksicht auf irgend eine Figur mit der Bezeichnung der Punkte an folgende Ordnung:

D sei die Station oder der gesuchte vierte Punkt,
A heisse der bekannte Ort zur Linken,
B „ „ „ „ in der Mitte,
C „ „ „ „ zur Rechten.

Das Viereck, welches diese Punkte bilden, mag lauter auswärts oder auch einen einwärts gehenden Winkel (d. i. einen solchen von mehr als 180^0) haben, so nenne man überhaupt die vier von den Vierecksseiten eingeschlossenen Winkel nach den Eckpunkten A, B, C und D, und man hat, wenn man die Winkel jedesmal consequent vom linken zum rechten Schenkel herüber bezeichnet:

$D = \measuredangle\, A D C$ bekannt als Summe der zwei gemessenen Winkel,
$B = \measuredangle\, C B A$ bekannt aus dem bekannt vorausgesetzten Dreiecke,
$\left.\begin{array}{l} A = \measuredangle\, B A D \\ C = \measuredangle\, D C B \end{array}\right\}$ beide unbekannt.

Ferner nennen wir jedesmal

m den in D gemessenen Winkel links,

n " " " " " rechts,

e den unbekannten sphärischen Excess im Dreieck $B\,A\,D$,

e' denselben im Dreieck $B\,D\,C$, welche Dreiecke aber in allen Fällen erst durch eine vorläufige Rechnung (sowie bei der Centrirung der Winkel) mit Weglassung von $e + e' = s$ berechnet werden müssen, woraus sich s mit hinlänglicher Genauigkeit ergiebt.

Unter diesen Voraussetzungen hat man zur Auflösung des in Frage stehenden Problems folgende allgemeine Formel

$$-\operatorname{tg} A = \frac{\sin p \cdot \sin(B + D - s)}{\sin(p + B + D - s)}$$

wo

$$\operatorname{tg} p = \frac{\sin B\,C \cdot \sin m \cdot \sin(B + D - s)}{\sin A\,B \cdot \sin n}$$

oder

$$-\operatorname{tg} C = \frac{\sin q \cdot \sin(B + D - s)}{\sin(q + B + D - s)}$$

$$\operatorname{tg} q = \frac{\sin A\,B \cdot \sin n \cdot \sin(B + D - s)}{\sin B\,C \cdot \sin m.}$$

Da A und C von einander abhängig sind, so dient es zur Controle der Berechnung, wenn man beide sucht, was um so leichter ist, weil die nämlichen Logarithmen sich in beiden Formeln wiederholen.

$\sin A\,B$ und $\sin B\,C$ sind die Sinusse der Seiten des bekannten Dreiecks.

Obige Formeln lassen sich, wie folgt, herleiten.

Die Identität für $\sin B\,D$ in beiden Dreiecken ergiebt

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin A\,B \cdot \sin n}{\sin B\,C \cdot \sin m} = k. \tag{1}$$

Weil dann

$$360^0 + s = A + B + C + D \quad \text{also}$$

$$A + C = 360^0 - (B + D - s),$$

$$\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C = \frac{\sin(A + C)}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$= -\frac{\sin(B + D - s)}{\frac{\sin C}{\sin A} \sin^2 A}$$

$$= -\frac{\sin(B + D - s)}{k \cdot \sin^2 A} \tag{2}$$

ferner $\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg}(A + B + D - s)$

$$= \frac{1}{\sin^2 A} \cdot \frac{1}{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg}(B + D - s)} \tag{3}$$

Nach (2) und (3)

$$\operatorname{tg} A = -\frac{\sin(B + D - s)}{\cos(B + D - s) + k}$$

Die Einführung des durch seine Tangente definirten Hülfswinkels liefert die Soldner'sche Formel.

Wie ich mich nachträglich überzeugte, leitet auf etwas anderem Wege Joh. Tob. Mayer, praktische Geometrie, 2. Aufl., 2. Theil, 1793 S. 289 die Formel

$$-\operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg}(B + D) + \frac{k}{\sin(B + D)}$$

ab und rechnet nach derselben ein Beispiel.

Ableitung wie Beispiel finden sich noch reproducirt in: A. Schulz-Montanus, Land- und Erdmessung, 2. Theil, 1819, S. 158—159 und Späth, höhere Geodäsie, 1. Theil, 1816, S. 215 u. ff.

Soldner beschliesst nach einigen Bemerkungen weniger wesentlicher Natur den Paragraphen mit den Worten:

Aus der Berechnung Nr. 2 (angefügtes Beispiel mit a u s g e g l i c h e n e n Winkeln des Hauptnetzes) sieht man zwar, dass diese Formeln selbst bei einem gebrauchten Sinus für weniger als einen Grad die Resultate richtig liefern, jedoch ist diese Genauigkeit der Resultate bloss von der Genauigkeit der gemessenen Winkel und von dem Grade der Uebereinstimmung der Punkte in den Hauptdreiecken abhängig. Ein Fehler von 5″ im Winkel m (d. i. der im Beispiele noch nicht einen Grad betragende) würde in den Winkeln A und C eine Differenz von 10—12″ hervorbringen.

§ 2. Im Falle als m oder n einer der gemessenen Winkel in der Station D zu klein wäre und dessen Sinus bei einem geringen Messungsfehler zu empfindlich, so hat man folgende besonderen Formeln:

Es seien mit Beibehaltung der übrigen eben angegebenen Bezeichnungen

1) im gegebenen Dreieck ABC: $\sphericalangle\, C = c$,
„ gesuchten „ CDB: $\sphericalangle\, B = x$

der sphärische Excess e durch Vorrechnung zu finden.

im gesuchten Dreieck CDA: $\sphericalangle\, A = y$

der sphärische Excess e' durch Vorrechnung zu finden.

$$d = e - e'$$

2) im gegebenen Dreieck ABC: $\sphericalangle\, A = a$
„ gesuchten „ BDA: $\sphericalangle\, B = w$, sphär. Excess ε
„ „ „ CDA: $\sphericalangle\, C = z$ „ „ e'

$$d = \varepsilon - e'$$

so wird

$$-\operatorname{tg} x = \frac{\sin p \cdot \sin(c - m - d)}{\sin(p - [e - m - d])}$$

für

$$\operatorname{tg} p = \frac{\sin AC \cdot \sin n \cdot \sin(c - m - d)}{\sin BC \cdot \sin m + n)}$$

und

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin q \cdot \sin (c - m - d)}{\sin (q - [c - m - d])}$$

$$\operatorname{tg} q = \frac{\sin B\,C \cdot \sin (m + n) \cdot \sin (c - m - d)}{\sin A\,C \cdot \sin n}$$

sowie ähnliche Formeln für tg w und tg z.

Aus den beiden sphärischen Dreiecken $C\,B\,D$ und $C\,D\,A$ folgt nun

$$\sin C\,D = \frac{\sin B\,C \cdot \sin x}{\sin n} = \frac{\sin A\,C \cdot \sin y}{\sin (m + n)}$$

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin B\,C \cdot \sin (m + n)}{\sin A\,C \cdot \sin n} = k, \tag{1}$$

sodann

$$x + c + z + n = 180^0 + e$$
$$y + m + n + z = 180^0 + e'$$
$$x - y = -(c - m - d). \tag{2}$$

Analog wie in § 1

$$\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} y = \frac{\sin (c - m - d)}{k \cdot \sin^2 x} \tag{3}$$

und y nach Gl. 2 durch x ausgedrückt, wie oben

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin (c - m - d)}{k - \cos (c - m - d)}; \tag{4}$$

k eingesetzt und den Hülfswinkel p eingeführt, giebt dann Soldner's Resultat.

Derselbe beschliesst nach Mittheilung der Formeln für tg x...tg q den Paragraphen folgendermaassen:

Sind im Punkte D mehr als zwei Winkel gemessen, d. i. auch noch auf einen vierten bekannten Punkt, so kann durch Aufnahme desselben und Weglassung eines andern, mit Beobachtung der vorgeschriebenen Bezeichnung, die Ortsbestimmung selbst controlirt werden, und nur in diesem Falle kann man sich von der Genauigkeit seiner Arbeit und von der richtigen Bestimmung des Punktes direct überzeugen.

§ 3. Aus der Auflösung dieses Problems geht natürlich auch die Richtigkeit des Satzes hervor, dass man von der richtigen Bestimmung eines Punktes sich überzeugen könne, welcher bloss von einer einzelnen Station heranvisirt, folglich nur aus einem Dreiecke mit zwei gemessenen Winkeln gerechnet wäre, sobald man diesen Punkt auch noch aus der Lage dreier anderer bestimmen könnte. Geräth man bei Berechnung eines Netzes auf solche Fälle, so sollte man die Anwendung dieses Satzes niemals unterlassen. Ebenso sollte man auch im umgekehrten Falle, wo ein Punkt bloss aus der Lage dreier anderer bestimmt wäre (nur mittelst zweier Winkel), möglichst darauf bedacht sein, noch einen Winkel aus einem der zur Bestimmung gebrauchten drei Orte her zur Vertification zu erhalten.

Nachdem Soldner noch als nothwendig aufführt, dass die gegebenen Orte A, B, C aus Dreiecken mit drei gemessenen Winkeln bestimmt sein sollen und eine Reihe unwesentlicherer Bemerkungen einfliessen lässt, stellt er eine von seinem Entwickelungsgang für die Dreiecksrechnung ganz abweichende Formel für die Tangente des Richtungswinkels auf. Er schreibt:

Da solche drei zur Bestimmung dienende Orte nicht immer unter sich auf die übliche Weise mittelst einer gegebenen Seite berechnet werden können und oft wohl gar keine Seite gegeben sein kann, hingegen ein Winkel und die einschliessenden Seiten zwischen diesen Punkten für obige Formeln bekannt sein müssen, so müssen die Seiten und Winkel in solchen Fällen aus den sphärischen Coordinaten berechnet werden, wozu nachstehende Formeln gelten.*)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(a' - a)\left(\frac{\sec w}{\sec \alpha}\right)^{1/3} \cdot \sec \alpha}{o' \left(\frac{\sec w'}{\sec w}\right)^{2/3} \cdot \sec \alpha - o} \tag{1}$$

$$\sin d = \frac{\sin \alpha \cdot \cos w'}{\sin \delta} \tag{2}$$

wo δ der Directionswinkel von einem Orte aus mit den Coordinaten a und o nach einem anderen mit den Coordinaten a' und o', d, deren Distanz,

$$\alpha = \frac{a' - a}{r}, \quad w' = \frac{o'}{r} \quad \text{und} \quad w = \frac{o}{r}$$

bedeutet.

Aus dem bekannten sphärischen Dreiecke $P_1 P_2 W$ (W Westpunkt) folgt:

$$\sin \delta = \frac{\sin \alpha \cdot \cos w'}{\sin d} \quad \text{und damit Gl. 2;}$$

ferner

$$\cos \delta = \frac{\sin w' - \cos d \cdot \sin w}{\sin d \cdot \cos w}$$

also

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \alpha \cdot \cos w \cdot \cos w'}{\sin w' - \cos d \cdot \sin w.}$$

Im Nenner

$$\cos d = \sin w \cdot \sin w' + \cos w \cdot \cos w' \cdot \cos \alpha$$

gesetzt giebt

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} w' \cdot \cos w - \sin w \cdot \cos \alpha}$$

*) Bei der Ausgleichung wurde der Punkt aus mehreren Dreiecken bestimmt, wobei mit den Winkelbedingungsgleichungen die Identität derselben Seiten aus verschiedenen Dreiecken herzustellen war. Vergl. v. Orff, die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage. S. 282 u. ff.

also nach Maskelyne's Regel

$$\operatorname{tg}\delta \underline{\underline{\pm}} \frac{\frac{a'-a}{r}\cdot\sec\alpha^{\,-\,1/3}}{\frac{o'}{r}\cdot(\sec w')^{2/3}\cdot\cos w - \frac{o}{r}\cdot\cos\alpha\,(\sec\cdot w)^{-\,1/3}},$$

woraus dann die Soldner'sche Formel leicht folgt.

Da diese Berechnung eine bestimmte Ordnung und viele Aufmerksamkeit erfordert, so liegt sub Nr. 4 ein Muster bei. (Die Rechnung wird dann noch ausführlich beschrieben.)

Die hier mitgetheilte Formel ist entschieden weniger vortheilhaft als die von Wild gegebene (s. u. S. . . .).

§ 4. Wenn die Lage dreier Punkte mittelst Coordinaten gegeben ist und aus einem vierten Punkt zwei Winkel auf selbe bekannt sind, so kann man auch aus den gegebenen Coordinaten die des vierten Punktes unmittelbar finden, ohne vorher die Directionswinkel und Seiten für die drei gegebenen Punkte untereinander zu berechnen. Diese Berechnung muss ebenfalls wie die in § 1 und 2 doppelt geführt werden, nämlich zuerst eine vorläufige und dann eine definitive.

Als allgemeine Vorbereitung dient zu beiden Berechnungen die Bezeichnung der gegebenen Punkte von der linken zur rechten (wie in § 1)

mit A, B, C und D (gesucht)
ihrer Abscissen a' a'' a''' a
„ Ordinaten o' o'' o''' o.

Die Unterschiede dieser Coordinaten seien

$$a'-a''=M \qquad a'-a'''=M' \qquad a''-a'''=M''$$
$$o'-o''=N \qquad o'-o'''=N' \qquad o''-o'''=N''$$

Die in D gemessenen Winkel sollen hier heissen

α der Winkel links (§ 1 m)
β „ „ rechts (§ 1 n)
$\alpha+\beta=d$

endlich

$$W D A=\delta$$
$$W D B=\delta+\alpha$$
$$W D C=\delta+\alpha+\beta.$$

Man findet zur vorläufigen Berechnung diese Directionswinkel aus

$$\operatorname{tg} W D A=\frac{M'\operatorname{cotg} d - M\operatorname{cotg}\alpha - N''}{N'\operatorname{cotg} d - N\cdot\operatorname{cotg}\alpha + M''}$$

$$\operatorname{tg} W D B=\frac{M''\operatorname{cotg}\beta - M\operatorname{cotg}\alpha - N'}{N''\operatorname{cotg}\beta - N\cdot\operatorname{cotg}\alpha + M'}$$

$$\operatorname{tg} W D C=\frac{M''\operatorname{cotg}\beta - M'\operatorname{cotg} d - N}{N''\operatorname{cotg}\beta - N'\operatorname{cotg} d + M}$$

Die Unterschiede der Coordinaten des vierten Punktes von den bekannten seien

$$a' - a = m \qquad a'' - a = m' \qquad a''' - a = m''$$
$$o' - o = n \qquad o'' - o = n' \qquad o''' - o = n''$$

für die vorläufige Berechnung, so findet man zunächst die Seiten aus

$$D\,A = \frac{N \cdot \sin(\delta + \alpha) - M \cos(\delta + \alpha)}{\sin \alpha}$$
$$D\,B = \frac{N'' \sin(\delta + d) - M'' \cos(\delta + d)}{\sin \beta}$$
$$D\,C = \frac{N' \sin \delta - M' \cos \delta}{\sin d}$$

und mittelst der Seiten obige Unterschiede der Coordinaten, folglich auch letztere

$$m = D\,A \cdot \sin \delta \qquad n = D\,A \cdot \cos \delta \qquad \text{u. s. f.} \tag{1}$$

Ausser den Coordinaten-Differenzen braucht man nur mehr die Ordinate von D, um zur definitiven Berechnung folgende Werthe zu finden, als

$$\frac{(\text{Ord}.\,A)^2}{2\,r^2} \cdot m - \frac{n^2\,m}{6\,r^2} = x \qquad \text{Ord}.\,D \cdot \frac{m^2}{2\,r^2} + \frac{m^2\,n}{6\,r^2} = y \qquad \text{u. s. f.}$$

Indem man nun zur definitiven Berechnung, wo in obigen Formeln M, M', M'' und N, N', N'' vorkommen, überall

anstatt M den Werth $M + (x' - x)$ und für N den Werth $N - (y' - y)$
„ M' „ „ $M' + (x'' - x)$ „ „ N' „ „ $N' - (y'' - y)$
„ M'' „ „ $M'' + (x'' - x')$ „ „ N'' „ „ $N'' - (y'' - y')$

substituirt, so findet man für das sphärische Coordinaten-System Directionswinkel und Seitenlängen (deren Anschreiben hier wohl unterlassen werden darf).

Die Ableitung für tg δ und die Seiten $D\,A$ und $D\,C$ folgt mit Hülfe der untenstehenden Figur 1.

$$A\,D \text{ aus } \Delta\, A\,B\,D$$
$$A\,D = \frac{A\,B \cdot \sin A\,B\,D}{\sin \alpha}$$

Da $A\,E$ senkrecht $B\,D$ gezogen, so

$$A\,B \cdot \sin A\,B\,D = A\,E$$

und zu Folge des von F auf $A\,E$ gefüllten Perpendikels, weil

$$\measuredangle\, F\,A\,E = 90^0 - (\alpha + \delta)$$
$$A\,D = \frac{N \cdot \sin(\alpha + o) - M \cos(\alpha + \delta)}{\sin \alpha} \tag{1}$$

Analog

$$D\,C = \frac{A\,C \cdot \sin D\,A\,C}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{C\,G}{\sin(\alpha + \beta)}$$
$$\measuredangle\, F\,A\,G = \delta$$
$$D\,C = \frac{N' \sin \delta - M' \cos \delta}{\sin(\alpha + \beta)} \tag{2}$$

und AD nochmals aus $\Delta\, ACD$

$$AD = \frac{AC \cdot \sin ACD}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AH}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\measuredangle\, HAF = 90^0 - (\delta + \alpha + \beta)$$

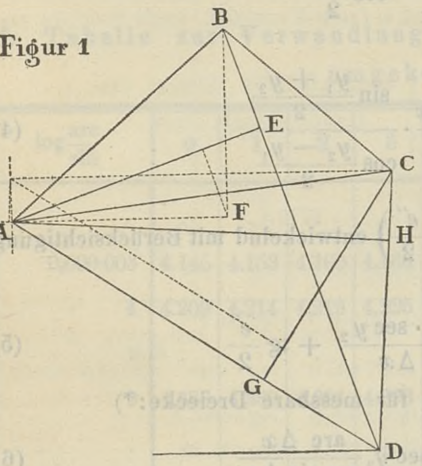
$$AD = \frac{N' \sin(\delta + \alpha + \beta) - M' \cos(\delta + \alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \qquad (3)$$

Aus 1) und 3) aber folgt durch Entwicklung von $\sin(\delta + \alpha)$ und $\sin(\delta + [\alpha + \beta])$, wie der entsprechenden Cosinus

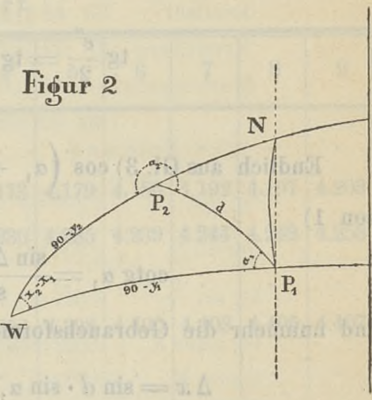
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{M' \operatorname{cotg}(\alpha + \beta) - M \operatorname{cotg} \alpha - N''}{N' \operatorname{cotg}(\alpha + \beta) - N \operatorname{cotg} \alpha + M''}$$

und ähnlich $\measuredangle\ WDB$ und WDC aus je zwei Werthen für die Entfernungen DB und DC.

Figur 1



Figur 2



Wild,
Handbuch für Trigonometer und Obergeometer bei der allgemeinen Landesvermessung.

Die fünf ersten Seiten des Manuscriptes enthalten Tafeln für die numerische Berechnung, Seite 6 giebt die Formeln ohne Entwickelung oder Figur und zwar I. Triangulirung: 1) Berechnung der Dreiecke, 2) der Directionswinkel und sphärischen Coordinaten, 3) der Winkel eines Dreieckes; Seite 7 enthält II. Geometrische Punktbestimmung: 1) Verkürzung der Abscissentheile (hierzu Tabelle IV), 2) Visionen- (Blattschnitts-)Rechnung; auf letztere beide soll hier nicht eingegangen werden. Seite 8 sind Beispiele für I, 1—3, Seite 9 solche zu II gegeben.

Wir wenden uns sogleich zur Ableitung der Formeln. Die hierzu benöthigte Fig. 2 stellt zunächst das schon bekannte, oft benutzte sphärische Dreieck WP_1P_2 dar. Zur weiteren Entwicklung denken wir uns den durch P_1 gehenden Parallelkreis zum Meridian (Ort gleicher y_1) bis zum Schnitt N mit dem Ordinatenkreise des Punktes P_2 gezogen und nun P_1 und N durch einen grössten Kreis verbunden.

Sind wie üblich bezeichnet mit

$x_1\, y_1$ die Coordinaten des ersten Punktes

$x_2\, y_2$ „ „ „ zweiten „

$\alpha_1\, \alpha_2$ die Richtungswinkel der gegebenen Seite $P_1 P_2 = d$, endlich mit e' der sphärische Excess des Ordinaten-Trapezes, e'' derselbe für den speciellen Fall $y_2 = y_1$, so folgt aus Dreieck $W P_1 P_2$

$$\sin \Delta x = \sin d \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sec y_2 \tag{1}$$

und

$$\sin \alpha_2 = -\sin \alpha_1 \cdot \cos y_1 \cdot \sec y_2 \tag{2}$$

Aus Dreieck $P_1 P_2 N$

$$\sin \Delta y = \frac{\sin d \cdot \cos\left(\alpha_1 + \frac{e''}{2}\right)}{\cos \frac{e''}{2}} \tag{3}$$

und

$$\operatorname{tg} \frac{e''}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{y_1 + y_2}{2}}{\cos \frac{y_2 - y_1}{2}} \tag{4}$$

Endlich aus Gl. 3) $\cos\left(\alpha_1 + \frac{e''}{2}\right)$ entwickelnd mit Berücksichtigung von 1)

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{\sin \Delta y \cdot \sec y_2}{\sin \Delta x} + \operatorname{tg} \frac{e''}{2} \tag{5}$$

und nunmehr die Gebrauchsformeln für messbare Dreiecke: *)

$$\Delta x = \sin d \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sec y_2 \frac{\operatorname{arc} \Delta x}{\operatorname{arc} \sin \Delta x} \tag{6}$$

$$\Delta y = \sin d \cdot \cos\left(\alpha_1 + \frac{e''}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{arc} \Delta y}{\operatorname{arc} \sin \Delta y}$$

$$\Delta y = \sin d \cdot \cos\left(\alpha_1 + \frac{y_1 \Delta x}{2 r^2 \sin 1''}\right) \cdot \frac{\operatorname{arc} \Delta y}{\operatorname{arc} \sin \Delta y} \tag{7}$$

$$\log \operatorname{cotg} \alpha_1 = \log \frac{\sin \Delta y \cdot \sec y_2}{\sin \Delta x} + \frac{y_1 \Delta x}{2 r^2 \sin 1''} \cdot \log (\Delta \cos \alpha_1)$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \log \frac{\sin \Delta x}{\sin \Delta y \cdot \sec y_2} - \frac{y_1 \Delta x}{2 r^2 \sin 1''} \log (\Delta \cos \alpha_1) \tag{8}$$

unter $\log \Delta \cos \alpha_1$ die logarithmische Differenz für die Zunahme von α_1 um eine Secunde verstanden.

Die numerische Berechnung verlangt nun die schon eingangs erwähnten Tafeln, welche hier in dem Umfange erscheinen, wie er für das Verständniss der Beispiele nothwendig wird.

---

*) Vergl. Helmert, höhere Geodäsie Bd. I, S. 121.

I. Tabelle zur Berechnung des sphärischen Excesses.

Secunden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	8.812	8.815	8.818	8.821	8.824	8.827	8.830	8.833	8.836	8.839
15	8.842	8.845	8.847	8.850	8.853	8.856	8.859	8.862	8.864	8.867
.										
19	8.945	8.947	8.949	8.951	8.954	8.956	8.958	8.960	8.963	8.965
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

II. Tabelle zur Verwandlung log arc in log sin arc und umgekehrt.

$\log\frac{\text{arc}}{\text{sin}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0,000 003	4.145	4.153	4.160	4.166	4.173	4.179	4.186	4.192	4.197	4.203
4	4.209	4.214	4.219	4.225	4.230	4.235	4.239	4.244	4.249	4.253
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	4.386	4.389	4.391	4.393	4.396	4.398	4.400	4.403	4.405	4.407
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

III. Tabelle für log sec Ord.

Ord		000	100	200	300	400	500	600	700	800	900
		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
38	0,0000	654.5	658.0	661.4	664.9	668.4	671.9	675.4	678.9	682.4	685.9
39		689.4	693.0	696.5	700.1	703.7	707.2	710.8	714.4	718.0	721.6
		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Hülfstafel I liefert für die auf drei Stellen genauen Logarithmen

$$\log \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2\,r^2 \sin 1''} \quad \text{oder} \quad \log \frac{\Delta\, x \cdot y}{2\,r^2 \sin 1''},$$

die linearen Grössen in bayerischen Ruthen (^{0}) ausgedrückt, den sphärischen Excess bez. den Richtungswinkel im jenseitigen Punkte auf Zehntelsecunden.

Hülfstafel II ist der Soldner'schen Additamenten-Tafel entnommen. Während aber der Genannte seine Tafel zur Verwandlung von log sin φ in φ in Ruthenmaass mit Hülfe der von ihm entwickelten Reihe

$$\log n = \log r + \frac{1}{6} M \sin^2 \varphi + \frac{11}{180} M \sin^4 \varphi + ..$$

ansetzte, ist hier der constante Theil von log n, d. i. der log r von dem mit der Länge des Bogens veränderlichen getrennt und log r sogleich mit log d vereinigt. Man findet also zu log $\left[r \cdot \sin\left(\frac{d}{r}\right)\right]$ sofort das zugehörige d. Dieser Vorgang wurde von der k. Steuer-Kataster-Commission adoptirt. Vergl. hierzu von Orff, die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, S. 281.

Tabelle III bedarf wohl keiner Erläuterung.

1) Berechnung der Dreiecke (zum Vergleich nach Soldner und Wild angesetzt):

Breitsöl	53	45	17,5	ausgeglichene Winkel des Hauptdreiecknetzes.
Kreuzberg	68	02	42,0	
Murleinsnest	58	12	10,0	
	180	00	09,5	

Soldner		Wild	
$\log \sin \frac{KM}{r}$	7.986 789 7	4.326 993 0	$\log r \cdot \sin \frac{KM}{r}$
$\log \sin B$	9.906 601 5	9.906 601 5	$\log \sin B$
$\log \sin \frac{BM}{r}$	8.047 491 7	4.387 695 0	$\log r \cdot \sin \frac{BM}{r}$
$\log \operatorname{cosec} K$	0.032 696 5	0.032 696 5	$\log \operatorname{cosec} K$
$\log \sin M$	9.929 377 1	9.929 377 1	$\log \sin M$
$\log \sin \frac{BK}{r}$	8.009 565 3	4.349 768 6	$\log r \cdot \sin \frac{BK}{r}$

$$\log \sin \frac{BM}{r} = 8{,}047\,491\,7$$

$$\log n = 6.340\,212\,3 \quad \text{für } 8.047 \text{ nach Add.-Tafel}$$

$$\log BM = 4.387\,704\,0$$

$$-\,90 \quad \text{„ } 4.388 \text{ „ Hülfs-Tafel II}$$

$$\log r \sin \frac{BM}{r} = 4.387\,695\,0$$

(Lediglich hier zur Controle der beiden Rechnungsweisen eingeschaltet.)

Zum Fortgang der Rechnung nach Soldner muss $\sin \frac{BK}{r}$ in BK verwandelt werden, während nach Wild mit $r \cdot \sin \frac{BK}{r}$ weiter operirt wird.

$$\log \sin \frac{BK}{r} = 8.0095653$$

$$\log n = 6.3402109$$

$$\log BK = 4.3497762 \quad \text{nach Add.-Tafel.}$$

Kreuzberg aus Breitsöl

Soldner (Instruction).

$WMB = 2\ 26\ 33{,}8$	$WBM\ 182\ 26\ 35{,}6$	$\log\sin WBK = 9.8924048$	$\log\cos WBK = 9.7959385\,n$
$+M = 58\ 12\ 10{,}0$	$-B\ 53\ 45\ 17{,}5$	$\log BK = 4.3497762$	$\log BK = 4.3497762$
$WMK\ 60\ 38\ 43{,}8$	$WBK\ 128\ 41\ 18{,}1$	$\log\Delta x\ 4.2421810$	$\log\Delta y = 4.1457147\,n$
	$+\ 180$	$\Delta x = +17465{,}50$	$\Delta y = -13986{,}68$
	$+\dfrac{y_1\,\Delta x}{r^2\sin 1''} = 39{,}7$	$\dfrac{y_2^2\,\Delta x}{2r^2}\ +\ 2{,}73$	$\dfrac{-y_1\,\Delta x^2}{2r^2} = -1{,}68$
	$+\dfrac{\Delta x\,.\,\Delta y}{2r^2\cdot\sin 1''} = -5{,}2$	$\dfrac{-\Delta y^2\,\Delta x}{6r^2}\ -\ 0{,}12$	$\dfrac{-\Delta x^2\cdot\Delta y}{6r^2} = +0{,}15$
		$x_1 = +67974{,}05$	$y_1 = +52814{,}47$
	$WKB\ 308\ 41\ 52{,}6$	$x_2 = +85442{,}18$	$y^2 = +38826{,}26$

Wild

$WBM\ \ 182\ 26\ 35{,}6$	$\log\sin WBK\ \ 9.8924048$	$\log\cos\left(WBK + \dfrac{e''}{2}\right) = 9.7959907\,n$
$-B\ \ 53\ 45\ 17{,}5$	$\log r\cdot\sin\dfrac{BK}{r}\ \ 4.3497686$	$\log r\sin\dfrac{KB}{r} = 4.3497686$
$WBK\ \ 128\ 41\ 18{,}1$	$\log\dfrac{\text{arc}}{\sin}\ \ 46$	$\log\dfrac{\text{arc}}{\sin}\ \ 30$
$\dfrac{y_1\,\Delta x}{2r^2\sin 1''}\ +\ 19{,}9$	$\log\sec y_2\ \ 683$	
$\dfrac{y_2\,\Delta x}{2r^2\sin 1''}\ +\ 14{,}6$		
$WKB\ \ 308\ 41\ 52{,}6$	$\log\Delta x\ \ 4.2422463$	$\log\Delta y\ \ 4.1457623\,n$
	$\Delta x = +17468{,}13$	$\Delta y = -13988{,}21$
	$x_1 = +67974{,}05$	$y_1 = +52814{,}47$
	$x_2 = +85442{,}18$	$y_2 = +38826{,}26$

Die gesammte Nebenrechnung Wild's besteht im nachfolgenden kleinen Ansatz:

$\log\dfrac{e''}{2}$	8.965
$\log y_1$	4.723
$\log\Delta x$	4.242
$\log y_2$	4.589
$\log\dfrac{e''}{2}$	8.831

wozu Tafel I 19.9″ bz. 14.6″ liefert; die $\log\dfrac{\text{arc}}{\sin}$ mit 46 und 30, entsprechend dem dreistellig schon bekannten $\log\Delta x$ bz. $\log\Delta y$, folgen unmittelbar aus Tafel II, ebenso wie für y_2 $\log\sec y_2$ nach Tafel III. Die Soldner'sche Nebenrechnung gestaltet sich demnach umfangreicher.

Die Entnahme des Unterschiedes der Richtungswinkel nach Wild aus der Gleichung

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x}{r^2\sin 1''}\cdot\frac{y_1+y_2}{2}$$

statt nach der Formel der Instruction

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x}{r^2\sin 1''}\left\{y_1 + \frac{\Delta y}{2}\right\}$$

benöthigt eine weniger voluminöse Tafel I.

Für das erstmalige Rechnen mag es unbequem erscheinen, nicht $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$, sondern $\sin\alpha$ und $\cos\left(\alpha + \frac{e''}{2}\right)$ aufschlagen zu müssen.

2) Directionswinkel aus sphärischen Coordinaten.

(Nach Gl. 8.)

Gesucht Richtungswinkel von Kreuzberg in Breitsöl

	Absc.	Ord.
Kreuzberg	+ 85 442,17	+ 38 826,25
Breitsöl	+ 67 974,05	+ 52 988,47
	$\Delta x = +$ 17 468,12	$\Delta y = -$ 13 988,22

$$-\frac{y_1 \cdot \Delta x}{2r^2 \cdot \sin 1''} \cdot \log \Delta \cos \alpha_1 = (-19.9)(-26.3) = +523.$$

$\log\left(-\frac{y_1 \cdot \Delta x}{2r^2 \sin 1''} \cdot \Delta \log \cos \alpha_1\right) =$	523
$\log \sin \Delta x$	$= 4.2422417$
log Zähler	$= 4.2422940$
$\log \sin \Delta y$	$= 4.1457593\,n$
$\log \sec y_2$	$=$ 683
log Nenner	$= 4.1458276\,n$
$\log \operatorname{tg} \alpha_1$	$0.0964664\,n$

$$\alpha_1 = 128^0\ 41'\ 18{,}1''$$

Die Berechnung ist insofern eine unmittelbare, als man das Correctionsglied für $\log \operatorname{tg} \frac{e''}{2}$ mit $(-19.9) \cdot (-26.3)$ erst zum Schluss beifügen wird, wenn $\log \operatorname{tg} \alpha_1$ zur schärfsten Entnahme der logarithmischen Differenz des Cosinus für eine Secunde schon bekannt vorliegt.

Wild sagt a. a. O.: Die Berechnung von $\operatorname{tg}\alpha$ wird unnöthig, wenn das Coordinaten-Verzeichniss unter einer Rubrik die vom Standpunkte sichtbaren trigonometrischen Punkte und unter einer anderen die Directionswinkel dahin, aus den trigonometrischen Rechnungen copirt, enthält.

Zwei Jahre nach Ueberreichung seines Handbuches hat Wild dann noch ein ebenso wie das Soldner'sche, auf Tattoniren beruhendes Ausgleichungsverfahren, welches jedoch von den Tangenten der Richtungswinkel ausgeht, mithin auf Gl. 8 sich stützt, in Vorlage gebracht.

Es ist noch kurz zu erwähnen:

3) Berechnung der Winkel eines Dreiecks.

Setzt man in einem Dreieck das Verhältniss der Sinus zweier Seiten gleich $\operatorname{tg}\mu$ und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich Ψ, so erhält man zur Berechnung der beiden andern, unbekannten Winkel x, y folgende Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{cotg}(45^0 + \mu) \cdot \operatorname{cotg}\frac{\Psi - e}{2},$$

analog wie bei der bekannten Ableitung für das Rückwärts-Einschneiden.

Ein Beispiel mag hier wegbleiben.

München, December 1900. *Jg. Bischoff.*

The transcontinental Triangulation and the American Arc of the Parallel.

Washington, Government Printing Office. 1900.

In diesem starken Quartband von gegen 900 S. publizirt das geodätische Hauptinstitut der Vereinigten Staaten, die „Coast and Geodetic Survey", seine Triangulation quer durch Nordamerika vom Atlantischen zum Pacifischen Ocean, dem Parallel 39^0 entlang. Die Triangulation, die zugleich der Landesaufnahme der von ihr durchzogenen Strecken zur Grundlage dient, und als Parallelkreisbogenmessung ausgeführt ist, stellt das „grösste geodätische Werk vor, das bisher von einer einzelnen Nation unternommen worden ist". Die Gesammtkosten von 1871 bis 1897 waren (abgesehen von den Gehältern der Beamten) rund 500 000 Doll.

Der jetzige Vorstand der C. and G. Survey (der 7. seit Beginn des nunmehr vollendet vorliegenden Werkes), Dr. Henry S. Pritchett zählt in der Einleitung folgende Besonderheiten der Arbeiten, ferner Verbesserungen und Fortschritte während ihrer Durchführung auf: Verfeinerung der Basismessungen; Verschärfung der Winkelmessungen; ebenso der directen (astronomischen) geogr. Ortsbestimmungen; sowohl Horizontalwinkelmessungen als astronomische Bestimmungen, die in Höhen von 4000 m gemacht werden, verlangen besondere Einrichtungen bei der Messung und besondere Reductionen, wie auch die grossen Dreiecke zwischen dem Pikes Peak und der Sierra Nevada Verschärfung der Excessberechnung verlangen; die Refractionstheorie bei der Höhenberechnung war zu vervollständigen; die Natur des von der Dreieckskette durchzogenen Landes hat neue Modelle von Signalbauten und Instrumentenständen erfordert: der höchste Instrumentenstandpunkt lag mehr als 46 m über dem Boden, der höchste Zielpunkt hatte die Höhe 84 m über dem Boden bei $36^1/_2$ m Höhe des Instrumentenstandpunkts. Diese beiden Bauten sind abgebildet.

Für den ganzen Parallelkreisbogen, der von Cap May in New Jersey an der Atlantischen Küste in $74^0 56'$ W. Gr. zum Point Arena in Californien an der Pacifischen Küste in $123^0 42'$ W. Gr. reicht und demnach $48^0 46'$ Längenunterschied oder auf 39^0 Breite eine Strecke von 4224 km überspannt, sind auf 109 Stationen directe Polhöhenmessungen, auf 73 directe Azimutmessungen, auf 37 directe Längenunterschiedsbestimmungen ausgeführt worden. Der ganze Bogen ist in drei Theile zerlegt, die westliche, mittlere und östliche Abtheilung. Die erste ist gekennzeichnet durch die meist sehr grossen Höhen der Dreieckspunkte über dem Meer und die meist sehr langen Dreiecksseiten (viele über 150 km) bei der Ueberschreitung der westlichen Gebirge; die mittlere Abtheilung steigt von 1800 m Höhe im Westen bis zu rund

140 m am Mississippi herab; die östliche endlich liegt z. Th. in der Ebene, z. Th. im Hügelland und hat in den Alleghanies abermals Höhen von 1300 m zu überschreiten.

Die ganze Dreieckskette stützt sich auf 10 Grundlinien, je durch besondere Netze auf die nächsten Dreiecksseiten entwickelt. Der erste Theil des Werks giebt über diese directen Längenmessungen und Entwicklungsnetze Auskunft. Nach der Zeitfolge der Messung sind die Namen und Längen (je auf das Meer reduzirt) der Grundlinien die Folgenden:

Kent Island - Grundlinie	(Maryland 1844)	8 688	m
American Bottom „	(Illinois 1872)	7 267	„
Olney . . . . „	(Illinois 1879)	6 591	„
El Paso . . . . „	(Colorado 1879)	11 289	„
Yolo . . . . „	(California 1881)	17 487	„
Holton . . . . „	(Indiana 1891)	5 501	„
St. Albans . . . . . „	(West Virginia 1892)	3 870	„
Salina . . . . „	(Kansas 1896)	6 552	„
Salt Lake . . . . . „	(Utah 1896)	11 199	„
Versailles . . . . . „	(Missouri 1897)	7 644	„

Die 10 Grundlinien sind also zusammen 86 km lang, so dass die Durchschnittslänge 8,6 km beträgt und die Gesammtlänge $\frac{1}{49}$ der ganzen Längenerstreckung der auf sie gegründeten Dreieckskette ist.

Auf die verschiedenen Basismessapparate, die bei diesen Grundlinien gebraucht worden sind, kann ich hier ebensowenig eingehen, wie auf die Basisnetze, in deren Winkeln z. Th. sehr hohe Genauigkeiten erreicht worden sind.

Der zweite Theil giebt die Bestimmung der Höhen der Stationen, meist durch Messung von Zenithdistanzen (in Gebieten, die für das Fein-Nivellement unzugänglich sind). Wo einseitige Zenithdistanzen gemessen sind, wird (mit den bei uns üblichen Bezeichnungen) die Gleichung benutzt:

$$\Delta h = H_2 - H_1 = s \cdot \operatorname{cotg} z + \frac{1-k}{2r} s^2 + \frac{1-k}{r} s^2 \operatorname{cotg}^2 z + \ldots, \quad (1)$$

wo s die Entfernung der zwei Punkte im Meeresniveau und r den mittlern Krümmungshalbmesser von s bedeutet. Wo aber gegenseitige Zenithdistanzen z_1 und z_2 gemessen sind, ist die verwendete Gleichung

$$\Delta h = H_2 - H_1 = s \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(z_2 - z_1) \left(1 + \frac{H_1 + H_2}{2r} + \frac{s^2}{12 r^2} + \ldots\right). \quad (2)$$

Aus den gegenseitigen Zenithdistanzen ist der Refractionscoefficient k (in dem Werke ist statt unseres k überall $m = \frac{1}{2} k$ benutzt) abgeleitet nach

$$k = 1 - \frac{r}{s} \frac{(z_1 + z_2 - 180^0)''}{\rho''}; \quad (3)$$

wenn der Höhenunterschied Δh aus dem Fein-Nivellement bekannt ist, und eine einseitige Zenithdistanz z gemessen wurde, kann man k auch rechnen aus

$$k = 1 - \frac{(\Delta h - s \operatorname{cotg} z)\, r}{s^2}. \tag{4}$$

Dieser Abschnitt enthält werthvolle Mittheilungen über die Veränderungen des Refractionscoeffizienten, sowohl für den Refractionscoeffizienten an einem und demselben Ort im Lauf der Zeit als auch des Mittelwerths von k an verschiedenen Orten (z. B. Einfluss der Seenähe S. 276 und 277).

Aus dem III. Theil, Triangulirung (Horizontalwinkelmessung und Ausgleichung) sei zunächst mitgetheilt, dass bei der Entwicklung der Grundlinien die Länge der Basen mit folgenden (hier abgerundeten) wahrscheinlichen Fehlern auf die nächsten Dreiecksseiten übertragen wurden:

Von der Kent Island - Grundlinie die nächste Seite mit $1/_{110\,000}$,
„ „ St. Albans- „ „ 2 nächsten Seiten mit im Mittel $1/_{180\,000}$,
„ „ Holton- „ „ 2 „ „ „ „ „ $1/_{300\,000}$,
„ „ Olney- „ „ 3 „ „ „ „ „ $1/_{290\,000}$,
„ „ American Bottom- „ „ 4 „ „ „ „ „ $1/_{80\,000}$,
„ „ Versailles- „ „ 4 „ „ „ „ „ $1/_{280\,000}$,
„ „ Salina- „ „ 2 „ „ „ „ „ $1/_{220\,000}$,
„ „ El Paso- „ „ 2 „ „ „ „ „ $1/_{350\,000}$,
„ „ Salt Lake- „ „ nächste Seite mit $1/_{275\,000}$,
„ „ Yolo- „ „ 2 nächsten Seiten mit im Mittel $1/_{350\,000}$.

Bei allen Basisnetzen ist also hohe Genauigkeit erreicht, mit Ausnahme etwa des Netzes der American Bottom-Grundlinie.

Zur Messung der Dreieckswinkel sind 75 cm-, 50 cm-, 35 cm- und 30 cm-Theodolite verwendet worden; es sind auch ziemliche Verschiedenheiten im w. F. einer Richtung vorhanden. Auch die Länge der Seiten der Dreiecke zeigt grosse Schwankungen: es kommen z. B. in dem Stück zwischen der Versailles-Grundlinie und der Salina-Basis verhältnissmässig kleine Dreiecke mit Seiten von durchschnittlich etwa 25 km Länge vor, an andern Stellen wieder Riesendreiecke von durchschnittlich 150 km Seitenlänge. Diese letzte Zahl mag etwa als mittleres Seitenmaass in den Dreiecken zwischen den Seiten Treasury Mountain-Uncompahgre und der Seite Pilot Peak-Wheeler Peak sein (Dreieckskette in den Rocky Mountains, in Colorado und Utah, zwischen der El Paso-Grundlinie und der Great Salt Lake-Basis). Auf diesem Theil der Dreieckskette befindet sich auch die längste Dreiecksseite der Welt (die in beiden Endpunkten beobachtet ist), die in dieser Zeitschr. bereits erwähnte Entfernung Uncompahgre - Mount Ellen mit etwas über 294 km Länge und es finden sich hier und gegen Westen die höchsten Erhebungen der Dreieckspunkte, die über 4000 m hinaufreichen! Einige schöne Abbildungen der Berge, die als Stationen gewählt sind, zeigen u. A.

die Schutzvorrichtungen, mit denen der Winkelmessungsstandpunkt in solchen Höhen umbaut werden musste und lassen die Leistung solcher Messung auch nach der Seite der körperlichen Strapazen hin im rechten Licht erscheinen. Bemerkenswerth ist auch das neuste Modell des Heliotrops (Tafel 37); dass die Amerikaner ihre Heliotrope gleich mit dem ohnehin nöthigen, kräftigen Fernrohr ausgerüstet haben, ist bekannt; neuerdings wird aber an dem Instrument noch ein kleiner Horizontalkreis als Sucher angebracht und das Ganze auf einen Dreifuss mit Stellschrauben gesetzt.

Den Schluss dieses Abschnitts III, des umfangreichsten des Werks, bilden Zusammenstellungen über die w. Fehler eines Dreieckswinkels und einer Richtung in den einzelnen Theilen der ganzen Dreieckskette, sowie über die Fehler der folgeweisen Basisanschlüsse. Aus der ersten dieser Tabellen mag angegeben sein, dass aus im Ganzen 701 geschlossenen Dreiecken der

mittlere Fehler eines Dreieckswinkels $= \pm 0{,}77''$

und aus im Ganzen 1660 beobachteten Richtungen der

wahrscheinliche Fehler einer Richtung $= \pm 0{,}44''$

hervorgeht, aus der letzten Tabelle aber, dass sich nach den Dreiecksverbindungen zwischen den einzelnen Grundlinien folgende Basisanschlussfehler ergeben (die Zahlen sind die relativen w. F., mit denen sich von Ost nach West jede folgende Basis aus der vorhergehenden ableiten lässt; es sind 9 Abschnitte zwischen den 10 Grundlinien vorhanden und auf sie beziehen sich in der angegebenen Reihenfolge die hier noch etwas weiter abgerundeten Zahlen): $^1/_{395\,000}$, $^1/_{181\,000}$, $^1/_{61\,000}$, $^1/_{724\,000}$, $^1/_{50\,000}$, $^1/_{26\,000}$, $^1/_{47\,000}$, $^1/_{51\,000}$, $^1/_{53\,000}$. Der grösste relative Fehler der Triangulirung zwischen zwei nacheinanderfolgenden Grundlinien mit $^1/_{25\,700}$ ist auf der Strecke zwischen der Versailles- und der Salina-Grundlinie in einem nur etwa 5^0 Längendifferenz umfassenden Abschnitt vorhanden, der die schon oben erwähnten kleinen Dreiecksseiten zeigt.

Der Abschnitt IV giebt die Breitenbestimmungen, sämmtlich nach der Talcott'schen Methode gemessen; der w. F. einer vollständigen Messung sinkt bei einzelnen Punkten bis auf $^1/_{25}{}''$; die Synopsis der Ergebnisse aller direct gemessenen Polhöhen S. 734—737, 109 Stationen, zeigt w. F. zwischen $\pm 0{,}04''$ und $\pm 0{,}23''$.

Zu den directen Azimutmessungen (Abschnitt V) sind die auch bei der Horizontalwinkelmessung benutzten Theodolite von 75, 60, 50, 35 und 30 cm Theilungsdurchmesser verwendet worden; die 73 Nummern der Schlussliste S. 800 bis 801 zeigen w. F. von $\pm 0{,}09''$ bis $\pm 0{,}59''$ (je ausschliesslich des Fehlerantheils, der von der Winkelmessung zwischen Azimutmarke und einem Dreieckspunkt noch dazu kommt).

Von Längenunterschieden (Abschnitt VI) sind 29 telegraphisch bestimmt (1879—1898); ihre w. F. nach der innern Uebereinstimmung bei jedem einzelnen gehen von $\pm 0{,}006^s$ bis $\pm 0{,}04^s$ und sind meist zwischen $\pm 0{,}01^s$ und $\pm 0{,}02^s$. Die Schlusstafel S. 826 giebt die Greenwich-Längen von 15 Haupt- und 25 weitern Stationen.

Im VII. Abschnitt werden zunächst mit vorläufigen Ausgangs-Annahmen die geographischen Positionen und Azimute auf dem Clarke'schen Ellipsoid (1866) berechnet und mit den direct gemessenen verglichen. Bei der Berechnung wird zur geodätischen Uebertragung von Punkt zu Punkt von folgenden Formeln Gebrauch gemacht:

$$-\Delta\varphi = s\cos\alpha\cdot B + s^2\sin^2\alpha\cdot C + (\delta\varphi)^2\cdot D - h\,s^2\sin^2\alpha\cdot E$$

$$\Delta\lambda = s\sin\alpha\cdot\sec\varphi_1\cdot A$$

$$-\Delta\alpha = \Delta\lambda\cdot\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\sec\frac{\Delta\varphi}{2} + (\Delta\lambda)^3\cdot F,$$

wo $\delta\varphi = s\cos\alpha\cdot B + s^2\sin^2\alpha\cdot C - hs^2\sin^2\alpha\cdot E$ und

$$h = s\cos\alpha\cdot B$$

ist und womit sich

$$\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi;\ \lambda_1 = \lambda + \Delta\lambda;\ \alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha \pm 180^0$$

ergiebt. Die Bedeutung der Coeffizienten A bis F ist im Report U. S. Coast and Geodetic Survey for 1894, Appendix 9, entwickelt. Die Formeln genügen für Dreiecksseiten von nicht wesentlich über $1^0 = 111$ km Länge; bei längern Seiten muss übrigens nur $\Delta\varphi$ ein Zusatzglied erhalten. Nach jenen vorläufigen Rechnungen sind dann die Positionen und Azimute definitiv sowohl auf dem Clarke'schen wie auf dem Bessel'schen Ellipsoid berechnet und in den Tafeln S. 841—846 für 109 Hauptpunkte zusammengestellt.

In der mittlern Ableitung des Bogens ergiebt sich eine durchschnittliche meridionale Lothabweichung (astronomisch—geodätisch) von $+ 2''$ (Clarke) oder $+ 3^1/_2''$ (Bessel), in der westlichen Ableitung dagegen von $- 3^1/_2''$ (Clarke) oder $- 3''$ (Bessel). Die Abweichungen im Azimut sind natürlich beträchtlich grösser, ebenso die in den Längenunterschieden.

Im Ganzen zeigen die Messungen, dass die mittlere Krümmung des Parallelbogens 39^0 auf den östlichen $^4/_7$ der ganzen Länge sehr gut mit dem Clarke'schen Ellipsoid stimmt, während die Krümmung der westlichen $^3/_7$ besser durch das Bessel'sche Ellipsoid dargestellt wird. Der Bogen verlangt also ein zwischen Clarke (1866) und Bessel liegendes Ellipsoid auf, dem 1^0 des Parallelkreises 39^0 rund 86 624 m lang ist, während diese Länge auf Clarke 86 629 und auch Bessel 86 616 m beträgt. (Der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung der ganzen Länge des Bogens von rund 4224 km ist rund 26 m oder $^1/_{160000}$ der Länge, oder 6,2 mm für 1 km; die zwei oben genannten verwendeten Ellipsoide zeigen aber auf dem Parallel 39^0 für $48^3/_4{}^0$ Längendifferenz einen Unterschied ihrer Parallelkreisbögen von $12{,}6 \times 48^3/_4 =$ über 600 m, sodass die angegebene Genauigkeit der Parallelbogenmessung mit w. F. $= \pm 26$ m sicher mehr als genügend ist.)

Zuletzt werden in dem Abschnitt VII auch noch die bisher in ganz Amerika gemessenen Bögen von Meridianen und Parallelkreisen zusammengestellt und paarweise combinirt. Es seien von den Ergebnissen dieser Rechnungen (— zu allen Combinationen, die den alten Perubogen enthalten, wird man kein grosses Vertrauen haben dürfen —) nur die Dimensionen der Meridianellipse angeführt, die aus der Combination der oben beschriebenen Parallelbogenmessung auf 39^0 Breite und des „Lake Superior"-Meridianbogens entsteht (jener Parallelkreisbogen hat $(48^3/_4 \times \cos 39^0)^0$ Amplitude und 28 direct gemessene λ, dieser Meridianbogen $9^0 24'$ Ampl. und 10 direct gemessene φ), nämlich

$$a = 6\,377\,912 \text{ m}, \; b = 6\,356\,309 \text{ m}, \; \alpha = \frac{1}{295{,}2}.$$

Zum Vergleich damit mögen auch die Bessel'schen und Clarke'schen (1866) Zahlen ausgeschrieben sein, die aus Meridianbogenmessungen in verschiedenen Theilen der Erdoberfläche hervorgegangen sind (bei Bessel Gesammtlänge der Meridianbögen rund $50^1/_2{}^0$ mit 38 directen Polhöhen; bei Clarke $76^1/_2{}^0$ mit 40 Polhöhen):

$$\text{Bessel 1841} \quad a = 6\,377\,397 \text{ m}, \; b = 6\,356\,079 \text{ m}, \; \alpha = \frac{1}{299{,}2}$$

$$\text{Clarke 1866} \quad a = 6\,378\,206 \text{ m}, \; b = 6\,356\,584 \text{ m}, \; \alpha = \frac{1}{295{,}0}$$

Die Uebereinstimmung der obigen Zahlen mit diesen ist so auffallend, dass sie einigermaassen dem Zufall zugeschrieben werden muss; immerhin zeigt sich auch hier wieder, dass grosse Abweichungen der Formen der einzelnen Meridiane von einander auf der Erde nicht vorhanden zu sein scheinen.

Ein ausserordentlich wichtiger Beitrag zur Kenntniss der Erdfigur liegt in diesem Bande vor. Die ganze geodätische Welt hat Grund, den Vereinigten Staaten dankbar dafür zu sein, dass sie ihre wissenschaftlich-geodätische Centralbehörde in den Stand setzen, Arbeiten von solcher Tragweite durchzuführen. *Hammer*.

Die Anträge des preussischen Abgeordnetenhauses, betreffend die Umgestaltung der Generalcommissionen.

Von **A. Hüser**, Königl. Oberlandmesser zu Cassel.

(Schluss.)

Die sogenannten neueren Aufgaben der Generalcommissionen auf dem Gebiete des Ansiedelungswesens und der Landesmeliorationen bieten eigentlich wenig Anhaltspunkte zur Besprechung. Das Ansiedelungswesen (Bildung von Rentengütern) ist, soweit dieses möglich war, den Formen der eigentlichen Auseinandersetzungssachen angepasst und die Landesmeliorationen als Aufgabe der Generalcommission gehören vorläufig noch in das Reich der Zukunftspläne, wenn auch hier und da eine solche wirklich einmal durch die eine oder die andere Generalcommission bearbeitet worden ist.

Zur Mitwirkung bei der Auslegung von Rentengütern sind bereits seit einer Reihe von Jahren landwirthschaftliche Beiräthe berufen, die in Function treten, sobald die Auftheilung eines Gutes zu Rentengütern beantragt ist. Dieselben haben sich über die Zweckmässigkeit der Auftheilung selbst, über die Höhe des Kaufpreises, kurz über alle in Betracht kommenden Verhältnisse auszusprechen, ehe zur Weiterbearbeitung der Sache geschritten wird. Diese Einrichtung, welche durch Ministerial-Erlass etwa 4—5 Jahre nach Erlass der Rentengutsgesetze in's Leben getreten ist, soll sich gut bewährt haben und namentlich einen wohlthätigen Einfluss auf die Regulirung der Kaufpreise ausüben.

Persönliche Erfahrungen stehen mir in dieser Hinsicht leider nicht zu Gebote, möge daher diese Besprechung die Anregung geben, dass ein College aus den Ostprovinzen, für welche die Rentengutsgesetze eine weit grössere Bedeutung haben als für den Westen, seine in der Praxis gesammelten Erfahrungen in dieser Zeitschrift veröffentlicht.

Bis zum Erlasse der erwähnten Ministerialverfügung war die Mitwirkung der Landwirthe auf die Taxe der Güter beschränkt. Diese ist mit der Bonitirung in Zusammenlegungs- oder Gemeinheitstheilungssachen gar nicht vergleichbar, da sie einen ganz andern Zweck verfolgt. Während es hier Zweck der Bonitirung ist, den gegenseitigen Werth der Grundstücke mit möglichster Genauigkeit zu ermitteln, um ihn dem Landumtausche zu Grunde zu legen, dient die Rentengutstaxe lediglich dazu, die Höhe des zu gewährenden Staatscredites darnach zu berechnen. Sie wird daher auch meistens erst vorgenommen, wenn die Güter bereits eingetheilt und verkauft sind. Ausgeschlossen ist es indessen nicht, dass sie auch als Anhaltspunkt für die Kaufwerthe nutzbar gemacht und alsdann dem Schätzungsverfahren in den sogenannten eigentlichen Auseinandersetzungssachen ähnlicher zu gestalten sein wird.

Was nun das Wegenetz und die Planlage betrifft, so kann von einem eingehenden Project vor dem Verkaufe keine Rede sein. Da alle derartigen Arbeiten bedeutende Kosten verursachen, welche, falls der Verkauf nicht zu Stande kommt, dem Antragsteller zur Last fallen, so wird man dieselben selbstverständlich auf das geringste Maass zu beschränken suchen. Auch deckt sich in den wenigsten Fällen ein solches Vorproject mit den Wünschen und Mitteln der Käufer. Der projectirende Beamte kann daher nicht eher einen bestimmten Entschluss fassen, bis das Gut oder doch ein grösserer Theil desselben thatsächlich verkauft ist. Auch dann hat er sich immerhin mehr oder weniger den Anträgen der Käufer zu fügen.

Ob unter diesen Umständen die Mitarbeit der Landwirthe bei der Planlage von grossem Werthe sein würde, mag dahingestellt bleiben.

Die Folgeeinrichtungen werden, soviel ich dieses nach meiner etwa zweijährigen Thätigkeit in Rentengutssachen beurtheilen kann, auch nicht mit der Sorgfalt hergestellt, wie dieses bei den Zusammenlegungen des

Westens geschieht, denn während bei den letzteren die Eifersucht der Interessenten unter sich die beste Triebfeder zu einem intensiven Ausbau der neuen Anlagen bildet, fehlt es bei den Rentengutsbildungen vielfach an jeglicher Initiative zumal dort, wo die Güter in Einzelhöfe zerlegt sind.

Schon die Anlage neuer Wege und Gräben wird in der Regel auf das Allernothwendigste beschränkt, denn entweder muss der Rentengutsgeber den Grund und Boden dazu unentgeltlich hergeben, oder die Käufer müssen ihn erwerben, wodurch sich der Kaufpreis des Gutes pro Flächeneinheit stets vertheuert. Zu einem intensiven Ausbau fehlt es aber regelmässig an Geld. Die Mittel des Ansiedlers, namentlich wenn er neue Gebäude errichten muss, werden schon derart in Anspruch genommen, dass ihm für den Ausbau der Folgeeinrichtungen einschliesslich etwaiger Meliorationen nicht mehr viel übrig bleibt. Der Verkäufer aber hat natürlich nicht das geringste Interesse mehr an dem Ausbau, und im Allgemeinen auch gar nicht die Mittel, irgend etwas zu thun. Ja, vielfach hält es schon schwer, zu den erforderlichen Messungen die allernöthigsten Hülfskräfte gestellt zu bekommen.

Es bleibt also nur noch der Staatszuschuss, der aber niemals so reichlich bemessen werden kann und auch wohl grundsätzlich niemals bemessen wird, dass er allein zum vollständigen Ausbau der neuen Anlagen ausreicht.

Ist nun auch die Stellung des Sachlandmessers bei der Errichtung von Rentengütern eine ähnliche wie bei den Zusammenlegungen, so nimmt doch unter den obwaltenden Verhältnissen die eigentlich geometrische Thätigkeit desselben dort einen verhältnissmässig breiteren Raum ein als hier, namentlich dann, wenn die Auftheilung eine vollständig neue Vermessung des Objectes unter Anschluss an das Dreiecksnetz der Landesvermessung im Gefolge hat. Dieses dürfte aber für den weitaus grössten Theil der Ostprovinzen die Regel bilden.

Die juristisch commissarischen Geschäfte gestalten sich durch die Vermittelung der Ankäufe und des Zwischencredits im Verhältniss zur Gesammtarbeit weitläufiger als bei den Zusammenlegungen, dagegen tritt die Beilegung von Streitigkeiten fast völlig in den Hintergrund

Da alle Grundlagen des Auseinandersetzungsplanes auf Vereinbarungen beruhen, so kann von Unzufriedenen oder Monenten keine Rede sein, und es dürfte zu den allergrössten Seltenheiten gehören, dass der Plan durch Erkenntniss festgestellt werden muss.

Demnach würde der Hauptsache nach die Specialcommission nur in ihrer ständigen Zusammensetzung als Administrativbehörde in Wirksamkeit treten, während die Einberufung des Spruchcollegiums wohl nur selten in Frage kommen dürfte. —

Kommen wir nun zu den Landesmeliorationen.

Bis jetzt sind Meliorationssachen von den Generalcommissionen fast ausschliesslich im Zusammenhange mit Auseinandersetzungssachen bearbeitet worden, wobei der Commissar und der Landmesser in der bekannten Weise functionirten. Die Mitglieder der Generalcommission haben von Einzelfällen abgesehen lediglich die Aufsichts- und Prüfungsinstanz gebildet. —

Der Commissionsbericht setzt voraus, dass in Zukunft die Meliorationen überhaupt den Generalcommissionen zur Bearbeitung zu überweisen seien und zieht daraus das Facit in dem Antrage II zu Nr. 3. „Es ist für die Bearbeitung der den Generalcommissionen auf dem Gebiete der inneren Colonisation und der Landesmelioration bereits überwiesenen und der ihnen auf diesem und ähnlichen Gebieten der Landeskultur noch weiter zu überweisenden Aufgaben eine diesen Aufgaben entsprechende Vermehrung der meliorationstechnisch gebildeten Beamten, sowie eine Mitwirkung gewählter Laien mit entscheidender Stimme in den Collegien vorzusehen.“

Was nun die Laien bei den Meliorationen sollen, ist mir nicht recht klar. Man könnte ihnen allenfalls die Rentabilitätsberechnungen vorlegen zur Mitentscheidung der Frage, ob die aufzubringenden Kosten im Verhältniss zu den zu erwartenden Vortheilen stehen, ob also das Project zu genehmigen oder umzuarbeiten und zu vereinfachen ist, oder ob es überhaupt nicht zur Ausführung kommen soll. Bezüglich der Tracirung selbst kann man doch unmöglich Jemandem eine beschliessende Stimme geben, der nicht wenigstens mit den Grundzügen der Kulturtechnik vertraut ist. Es ist aber auch die Vermehrung der meliorationstechnischen Beamten beantragt worden, und es entsteht für den Landmesser die Frage: „Was ist unter meliorationstechnischen Beamten zu verstehen?“ Die Antwort des Regierungscommissars lässt nun nicht den geringsten Zweifel darüber bestehen, dass für die oberen Stellen lediglich die Regierungsbaumeister des Ingenieurbaufaches in Frage kommen werden, denn wenn auch gleichzeitig über einen Mangel an solchen geklagt wird, so werden sich Bewerber sicher genügend finden, sobald Aussichten und Stellungen geschaffen sind. Dem Mangel würde indessen sofort abgeholfen sein, wenn man für den Landmesser als K u l t u r t e c h n i k e r ähnliche Stellungen als Landeskulturinspectoren bei den Generalcommissionen schaffen wollte, wie sie für die Vermessungstechnik schon in den Stellen der Vermessungsinspectoren vorhanden sind. Am zweckmässigsten würde es wohl sein, beides zu vereinigen und nur eine entsprechende Vermehrung dieser Stellen vorzunehmen; denn beide Disciplinen gehen derart ineinander über, dass sie nicht gut völlig von einander zu trennen sind. — Für die niederen Stellen sind, wie der Bericht durchblicken lässt, als Meliorationstechniker die Wiesenbaumeister und Wiesenbautechniker in Aussicht genommen. Hoffen wir demnach, dass für den Landmesser und Kulturtechniker die mittlere Stellung offen gehalten, und dass diese dann eine so selbständige werde, wie sie weiter oben als dem S a c h l a n d m e s s e r gebührend hingestellt wurde. Damit wäre dann gewährleistet, dass der eigentliche Entwurf der Meliorationsanlagen dem Landmesser und Kulturtechniker übertragen, die Einzelheiten unter seiner Leitung durch den Wiesenbautechniker ausgearbeitet werden und dem Meliorationsbaubeamten die Prüfung der Projecte zufiele, wie dieses ja schon jetzt der Fall ist. — Die Befürchtungen vieler Collegen, dass der Landmesser als Kulturtechniker gänzlich übergangen und lediglich in seiner Eigenschaft als Landmesser zur Anfertigung der Vorarbeiten sowie der Aufmessung und Katastrirung der neuen Anlagen zugezogen werden solle, vermag ich nicht zu theilen; denn aus der Aeusserung des Vertreters der Königlichen Staatsregierung: „Die Landmesser haben sämmtlich die kulturtechnische Prüfung abzulegen u. s. w.“ geht hervor, dass man an maassgebender Stelle doch ein gewisses Gewicht auf diese Prüfung legt, wie denn auch in dem weiteren Verlaufe seiner Aeusserung: „Der Entwurf eines Zusammenlegungsplanes darf einem Landmesser erst anvertraut werden, wenn er alle Vorstadien in geodätischer wie kulturtechnischer Beziehung mit Erfolg durchgemacht hat“ das Zugeständniss enthalten ist, dass der Planentwurf Aufgabe des Landmessers ist.

Sollte demnach eine Umgestaltung der Generalcommissionen in ein oder der andern Weise seitens der Königlichen Staatsregierung geplant sein, so wollen wir hoffen, dass es gelingen möge, dem Landmesser eine maassgebende Stimme im Rahmen der Behörden zu erringen, umsomehr, als ja nach dem Entwurfe des Gesetzes, betreffend die Umlegung von Grundstücken in Frankfurt a. M., dem Landmesser Sitz und Stimme in der zu bildenden Umlegungscommission zugedacht ist.

Was aber dem Landmesser im Städtebau zugestanden ist, wird hoffentlich dem Landmesser in Landesculturangelegenheiten nicht vorenthalten werden.

Vereinsangelegenheiten.

In der am 2. Juni zu Offenbach a. M. abgehaltenen 19. ordentlichen Generalversammlung des Vereins Grossh. Hessischer Geometer I. Klasse wurden in den Vorstand gewählt:

1) Revisionsgeometer Bergauer zu Darmstadt als Vorsitzender; 2) Stadtgeometer Schmirmund zu Mainz als Schriftführer; 3) Stadtgeometer Wissner zu Giessen als Rechner; 4) Feldbereinigungsgeometer Müller I zu Friedberg und 5) Katastergeometer Jul. Heineck zu Friedberg.

Der Sitz des Vereins bleibt bis auf Weiteres Darmstadt.

Die bisherigen Mitglieder des Vorstands Revisionsgeometer Hiemenz zu Darmstadt, Katasteringenieur Weinerth zu Darmstadt und Katastergeometer Hauck zu Michelstadt hatten eine Wiederwahl abgelehnt.

Inhalt.

Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart. — Druck von Gebrüder Jänecke in Hannover.