

# ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

herausgegeben vom

Deutschen Verein für Vermessungswesen (D.V.W.) E.V.

Schriftleiter: Professor Dr. Dr.-Ing. E. h. O. Eggert, Berlin-Dahlem,  
Ehrenbergstraße 21

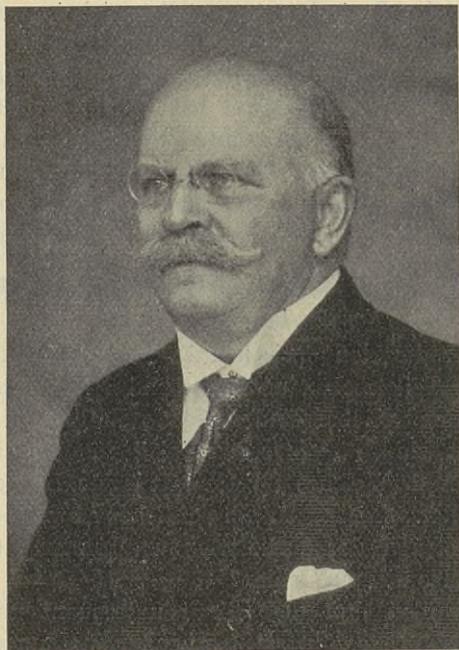
Heft 8.

1939

15. April

Band LXVIII

Der Abdruck von Original-Artikeln ohne vorher eingeholte Erlaubnis der Schriftleitung ist untersagt



## Oberregierungsrat a. D., Professor Dr.-Ing. Gustav Clauß †.

Am 6. Oktober 1958 verschied in München der Oberregierungsrat a. D. und Honorarprofessor an der Technischen Hochschule München Dr.-Ing. Gustav Clauß im Alter von 67½ Jahren.

Aus Anlaß seines 65. Geburtstages wurden im Jahre 1936 sein 43jähriges Wirken im Dienst des bayerischen Vermessungswesens und seine wissenschaftliche Tätigkeit ausführlich in unserer Zeitschrift gewürdigt. Obgleich er mit der Vollendung des 65. Lebensjahres in den Ruhestand trat, durfte er sein großes Wissen noch weiter zur Verfügung stellen, indem er durch das Bayerische Staatsministerium der Finanzen zum wissenschaftlichen Berater des Landesvermessungsamts ernannt wurde und gleichzeitig die Be-

rechnungsarbeiten für das neue bayerische Hauptdreiecksnetz übernahm. Eine heimtückische Krankheit, die schon seit längerer Zeit seine Schaffenskraft beeinträchtigte, verschlimmerte sich schließlich derart, daß er seine Arbeit aufgeben mußte, und bald darauf erlöste ihn der Tod von seinen Leiden.

Mit Gustav Clauß ist eine bedeutende Persönlichkeit von uns geschieden, ein arbeitsfroher Mann, ein begeisterter Jünger der Wissenschaft und ein liebenswerter Freund. Alle seine Fachgenossen, und besonders die, die ihm im Leben näher gestanden haben, werden ihm ein treues Gedenken bewahren.

Eggert.

## Einschaltung von Aufnahmepunkten in ein Dreiecksnetz durch Streckenzüge mit optischer Längenmessung.

Von Reg. Verm. Rat Benno Huber und Dr. Ing. Karl Rinner.

Der Verdichtung des Dreiecksnetzes stellen sich in waldreichen Gebieten und tief eingeschnittenen Tälern große Schwierigkeiten entgegen, die sich oft kaum oder nur unter Aufwand erheblicher Mittel befriedigend lösen lassen. Das Bayerische Landesvermessungsamt hat im Jahre 1937 für solche Fälle versuchsweise durch zwei Abteilungen Feinpolygonzüge mit optischer Längenmessung ausführen lassen. Zur Verwendung gelangten drei Theodolithe II und die Streckenmeßausrüstung mit Basislatte 2 m der Firma Zeiß. Im folgenden wird über die dabei gemachten Erfahrungen berichtet.

### I. Methode der direkten optischen Längenmessung.

Von Dr. Ing. Karl Rinner.

Die Methode der direkten optischen Längenmessung besteht darin, daß die Polygonseiten in Teilstrecken unterteilt und direkt optisch mit der Basislatte gemessen werden. Hierbei sind folgende Fragen zu überlegen: 1. Mit welcher Genauigkeit sind die Streckenwinkel für verschieden lange Teilstrecken zu messen? 2. Welches ist die günstigste Länge der Teilstrecken? 3. Welche Längenfehler verursachen ein seitliches Abweichen der Teilstrecken, ein Nichtorthogonalstehen der Basislatte zur Richtung der zu messenden Seite, sowie ein Horizontierungsfehler?

Diese Fragen werden nun theoretisch untersucht und hierauf die auf Grund der Ergebnisse durchgeführten Streckenzugsmessungen besprochen.

#### 1. Genauigkeit des Streckenwinkels bei verschiedener Streckenlänge.

Es ist  $s = \frac{l}{2} \cotg \frac{\alpha}{2}$  und hieraus durch differenzieren

$$m_{\alpha} = \sin \alpha \frac{m_s}{s} \quad (1)$$

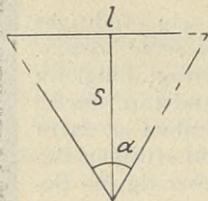


Fig. 1.

Aus  $m_{\alpha} = \frac{m_0}{\sqrt{n}}$  und (1) ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Satz Zahl  $n$ , in welcher der Streckenwinkel gemessen wird und der relativen (= inneren) Genauigkeit  $\frac{m_s}{s}$  von  $s$ .

$$n = \left( \frac{m_0}{\sin \alpha} \cdot \frac{s}{m_s} \right)^2 \quad (2)$$

Für die weitere Untersuchung wird  $m_0 = \pm 5^{cc1}$ ) angenommen und  $\frac{m_s}{s} = a \cdot 10^{-4}$  gesetzt, was einen Fehler von  $a_{cm}$  auf 100 m bedeutet. Weiters kann sin  $\alpha = \alpha$  gesetzt werden. Durch differenzieren von (2) erhält man nämlich

$$dn = -2 \sqrt{n} \frac{s m_0}{m_s} \frac{d \sin \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

wobei  $d \sin \alpha = (\sin \alpha - \alpha) = -\frac{\alpha^3}{6}$  ist. Für Strecken  $s > 20$  m ist  $\alpha < 6^s$  und mit der (übertrieben günstigen) Annahme  $\frac{m_s}{s} = 10^{-4}$  bzw.  $m_0 = \pm 5^{cc}$  wird  $dn < 2 \cdot 10^{-2}$ , das heißt der Fehler, der durch sin  $\alpha = \alpha$  entsteht, wirkt sich erst in der 2. Dezimale der Satz Zahl  $n$  aus und kann vernachlässigt werden. Somit wird aus (2) die Gebrauchsformel

$$n = \left( \frac{5}{a^g a} \right)^2 \tag{2a}$$

oder, wenn man an Stelle von  $\alpha$  die Strecke  $s \doteq \frac{l}{\alpha}$  einführt (was wie oben zulässig ist)

$$n = \left( \frac{5 s_m}{l a^g a} \right)^2 = 1550 \left( \frac{s_{km}}{a} \right)^2 \tag{2b}$$

Sie gibt an, in wieviel Sätzen  $n$  der Streckenwinkel einer Strecke  $s$  bei vorgegebener „innerer“ Genauigkeit  $a \cdot 10^{-4}$  zu messen ist.

Eine Begrenzung von  $n$  ergibt sich aus der Forderung, daß gerade noch jenes  $n_0$  als „rentabel“ angesehen werden soll, für welches die durch Hinzufügen eines weiteren Satzes zu erwartende Verbesserung des Streckenmittels  $\frac{a s_{cm}}{\delta} 10^{-4}$  ist, das heißt  $\left( \frac{a}{\delta} \right)$  cm auf 100 m beträgt.  $\delta$  wird später noch geeignet gewählt.

Hiezu dient folgende Überlegung: Ist  $\alpha_n$  bzw.  $\alpha_{n+1}$  das Mittel aus  $n$  bzw.  $(n+1)$  Sätzen und  $o_{n+1}$  die  $(n+1)$ .te Winkelbeobachtung, so ist  $\alpha_{n+1} = \frac{n}{n+1} \alpha_n + \frac{o_{n+1}}{n+1}$  und die Änderung des Mittels  $(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = \frac{1}{n+1} (o_{n+1} - \alpha_n)$ . Setzt man nun  $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| = d\alpha = |m_a|$  und  $|o_{n+1} - \alpha_n| = |m_0|$ , so wird  $n = \frac{m_0}{m_a} - 1$  bzw. nach (1)  $n = \frac{s \cdot m_0}{m_s \sin \alpha} - 1$ . Für  $\frac{m_s}{s} = \frac{a}{\delta} \cdot 10^{-4}$  erhält man die noch rentable Satz Zahl

$$n_0 = \frac{m_0 \delta}{a \sin \alpha} \cdot 10^{-4} - 1 \tag{3}$$

Aus  $n \leq n_0$  ergeben sich — vom Standpunkt der Genauigkeit — die Grenzen  $s_0$  der zu messenden Strecken  $s$  als Funktion von  $a$  und  $\delta$ . Setzt man in (3) sin  $\alpha \doteq \alpha$  (was wie oben zulässig ist), so ist nach (2a) die  $\alpha_0$  bzw.  $s_0(\alpha_0)$  bestimmende Gleichung

$$\left( \frac{m_0}{a \alpha} \right)^2 - \left( \frac{m_0}{a \alpha} \right) \delta + 1 = 0$$

<sup>1)</sup> F. A c k e r l, Untersuchung eines Universaltheodolithes II von Zeiß, Zeitschrift f. Instr.kunde, 54. Jahrgang, 9. Heft, S. 300.

und hieraus  $\alpha_0^{g_{1,2}} = \frac{m_0^{cc}}{\alpha \cdot z_{1,2}}$ , wobei  $z_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - 1}$  ist. Von den beiden Wurzeln  $z_{1,2}$  braucht nur  $z_1$  betrachtet werden, welches wegen  $z_1 > z_2$  und  $\alpha_{01} < \alpha_{02}$  bzw.  $s_{01} > s_{02}$  die gesuchte obere Grenze gibt.

Tabelle 1.

$\alpha$	1	2	3	4	5
$s_0^m$	70	130	200	260	330

Tabelle 2.

$e_m$	$n$				
	$\alpha = 1$	2	3	4	5
20	1	1	1	1	1
30	1	1	1	1	1
40	2	1	1	1	1
50	4	1	1	1	1
60	6	1	1	1	1
70	8	2	1	1	1
80		2	1	1	1
90		3	1	1	1
100		4	2	1	1
110		5	2	1	1
120		6	2	1	1
130		7	3	2	1
140			3	2	1
150			4	2	1
160			4	2	2
180			5	3	2
200			7	4	2
250				6	3
300					6
350					7

Da wieder  $s_0 = \frac{l}{\alpha_0}$  gesetzt werden kann, ist für  $m_0 = \pm 5^{cc}$  und  $l = 2m$

$$s_0 = a \cdot z_1 \frac{l \cdot g}{m_0} = 25,5 \cdot z_1 \cdot a \quad (4)$$

Für  $\beta =$  konstant ändert sich  $s$  gerade proportional mit  $a$ . Wählt man  $\beta = 3$ , d. h. betrachtet man bloß jene Satzzahl als lohnend, für welche die zu erwartende Verbesserung mehr als  $\left(\frac{\alpha}{3}\right)$  cm auf 100 m beträgt, so wird  $z_1 = 2,62$  und  $s_0^m = 66 \cdot a$ . Für verschiedene Genauigkeiten  $a$  zeigt Tabelle 1 die zugehörigen Grenzstrecken. Wertet man unter Berücksichtigung dieses Ergebnisses Formel (2b) zahlenmäßig aus, so erhält man Tabelle 2.

Ist z. B. eine Genauigkeit von 2 cm auf 100 m verlangt, so kann man, mit obigen Annahmen, Strecken bis 130 m direkt optisch messen und zwar bis 60 m in einem, von 60—90 m in 2 Sätzen usw.

Obige Zahlen werden wesentlich von  $m_0$  beeinflusst. Dieses ist für jeden Beobachter verschieden, bleibt aber auf jeden Fall in der Nähe des angenommenen Wertes  $\pm 5^{cc}$ .

## 2. Günstigste Länge der Teilstrecken.

Ist  $S$  die zu messende Polygonseite, welche in  $n$  Teilstrecken  $s$  unterteilt wird, so ist  $m_s = m_s \sqrt{n}$  und nach (2) bzw. wegen  $\alpha = \frac{l}{s}$

$$m_s = \frac{m_a}{l} \cdot s^{\frac{3}{2}} \cdot S^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Bei vorgegebener Strecke  $S$  ist, weil  $m_a$  als konstant anzusehen ist,  $m_s$  umso kleiner, je kleiner  $s$  wird. Vom Standpunkt der Genauigkeit wäre also  $s$  möglichst klein zu wählen, wirtschaftlich betrachtet hingegen möglichst groß. Am besten wählt man  $s$  gleich der einer vorgegebenen Genauigkeit  $\alpha \cdot 10^{-4}$  entsprechenden Grenzstrecke  $s_0$  (Tab. 1), also für  $\alpha = 2$ ,  $s = s_0 = 130$  m.

### 3. Fehlerinflüsse.

Ein seitliches Abweichen einer Teilstrecke um  $\alpha$  bewirkt einen Längenfehler  $|d s| = s \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2$ . Für  $d s = 1$  mm und  $s = 130$  m wird  $\alpha = 0,2^{\text{g}}$ , was linear 0,4 m ausmacht; das heißt, die Stativeinweisung kann sehr roh erfolgen.

Steht die Basislatte nicht orthogonal  $s$ , sondern um  $\vartheta$  gegen die richtige Lage verdreht, so wird statt  $\alpha$  ( $\varphi + \psi$ ) gemessen. Der Fehler der Streckenwinkelmessung  $d\alpha = \alpha - (\varphi + \psi)$  wird wegen  $\text{tg } \varphi = \frac{x}{s-y}$ ,  $\text{tg } \psi = \frac{x}{s+y}$ , sowie  $x = \frac{l}{2} \cos \delta$ ,  $y = \frac{l}{2} \sin \delta$  und weil  $\delta$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  sehr kleine Winkel sind

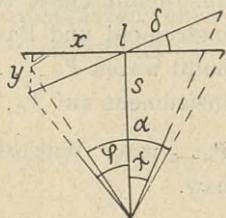


Fig. 2.

$$|d\alpha| = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2 \quad \text{oder} \quad |d\alpha| = \frac{l \rho}{2s} \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2 \quad (6)$$

Damit z. B. für  $s = 130$  m,  $d\alpha = 0,5^{\text{c}}$  (also unmaßgeblich klein) wird, muß  $\delta = 0,7^{\text{g}}$  sein. Diesem entspricht ein linearer Fehler der Dioptereinstellung von 1,5 m, das ist mehr als Stativbreite.

Ein Horizontierungsfehler wirkt sich ähnlich aus. Sind  $\beta_1$  bzw.  $\beta_2$  die Fehlerkomponenten orthogonal bzw. in der Richtung von  $s$ , so hat  $\beta_2$  keinen Einfluß und  $\beta_1$  bewirkt

$$|d\alpha'| = \frac{l \rho}{2s} \left(\frac{\beta_1}{\rho}\right)^2$$

Ähnlich wie oben muß die Horizontierung auf  $0,7^{\text{g}}$  richtig sein; damit  $|d\alpha'| < 0,5^{\text{c}}$  bleibt. Und dies ist wohl leicht zu erreichen.

Die Stativeinstellung über einem bestimmten Punkt soll grundsätzlich mit dem optischen Lot erfolgen, da bei den Stativen der Streckenmeßaus-rüstung der Senkelhaken nicht wie bei den gewöhnlichen Zeißstativen in der Ebene der Fußschraubenspitzen, sondern etwa 7 cm unterhalb befestigt ist. Eine Neigung des Stativstellers um  $\alpha$  hat einen Zentrierfehler von  $d z = 7 \cdot \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)$  cm zur Folge.

### 4. Praktische Ergebnisse.

In Pirmasens (Pfalz) wurden 4 Streckenzüge gemessen, welche am Ende verknotet waren. Die Sichten von Stein zu Stein waren möglich, doch ließ das Gelände — ein tiefes enges Tal und eine an einem bewaldeten Abhang verlaufende Straße — nur die Methode der direkten optischen Längenmessung zu. Lediglich 2 Anschlußseiten wurden indirekt gemessen. Der Boden war sumpfig und für die Stativaufstellung sehr ungünstig. Ebenso war das Wetter als ausgesprochen schlecht zu bezeichnen (Nebel, Regen, Schnee, Temperatur um 0 Grad C).

Der Meßvorgang war folgender: Die Strecke  $\overline{ab}$  zwischen den TP-Steinen  $a$  und  $b$  wurde in Teilstrecken  $s \doteq 130$  m unterteilt und unter Annahme  $a = 2$  in den aus Tabelle 2 folgenden Satzzahlen gemessen. Und zwar anfangs in je  $\frac{n}{2}$  Sätzen hin und zurück, um eventuelle systematische Fehler auszuschalten. Doch erwies sich dies als zeitraubend und außerdem bestand die Gefahr eines Verrückens der Stative durch das oftmalige Umsetzen von Instrument und Basislatte. Hierauf wurde in Sprungständen beobachtet, das heißt waren  $P_{n-1}$ ,  $P_n$  und  $P_{n+1}$  drei aufeinanderfolgende Punkte, so kam das Instrument auf  $P_n$ , die Latte auf  $P_{n-1}$  und  $P_{n+1}$ , dann das Instrument auf  $P_{n+2}$  usw. War  $\overline{ab}$  gemessen, so wurde der Polygonwinkel  $\widehat{abc}$  bestimmt usw.

Die Basislatte wurde des öfteren an einer Vergleichsstrecke von 100 m bzw. 150 m geeicht und dabei festgestellt, daß sie 100 m um 3,5 cm zu groß angibt, also einen systematischen relativen Fehler von  $-3,5 \cdot 10^{-4}$  verursacht. Es ist möglich, daß dies davon herrührt, daß der die Latte mit einem Motorrad transportierende Gehilfe am Beginn der Messung während der Fahrt an einen entgegenkommenden Wagen angeschlossen, also die Latte einen kleinen Knick bekam.

Die durchschnittliche Tagesleistung betrug 1,3 km, der durchschnittliche Richtungsfehler  $\mu$  für  $n = 3$  Sätze  $\pm 1,9^{cc}$  und für  $n = 6$ ,  $\pm 1,6^{cc}$ ; d. h.  $m_0$  war  $\pm 4,6^{cc}$  bzw.  $\pm 5,5^{cc}$ . Messungen bei künstlichem Licht ergaben in 3 Sätzen  $\mu = \pm 2,7^{cc}$ .

Die Ausgleichung erfolgte nach Reduktion der Seiten nach der „Dienst-anweisung für Triangulierung und Polygonierung in Bayern“, Näherungsausgleich II. Das Ergebnis zeigt Tabelle 3.  $\frac{v'_L}{L}$  ist die Längenabweichung ohne Berücksichtigung des systematischen Fehlers  $-3,5 \cdot 10^{-4}$ .

Tabelle 3.

Zug	$[s]_{km}$	Punktzahl $n$	$\frac{v'_L}{L}$ $10^{-5}$	$\frac{v_L}{L}$ $10^{-5}$	$\frac{V w}{L}$ $10^{-5}$	$f_{\beta}^{cc}$
I	2,46	11	- 36	- 1	+ 4	fehlt
II	1,88	10	- 27	+ 8	- 2	- 7
III	4,08	12	- 29	+ 6	+ 3	+ 7
IV	3,34	10	- 25	+ 10	- 1	+ 2

Zur Kontrolle wurde der 8. Punkt des Zuges I aus Innen- und Außenstrahlen einwandfrei trigonometrisch bestimmt. Die so erhaltenen Koordinaten ergaben gegenüber den aus den Streckenzügen gerechneten Unterschieden  $dx = -2$  cm und  $dy = +2$  cm.

## II. Die Basismethode und ihr Vergleich mit der direkten optischen Längenmessung.

Von Reg. Verm. Rat Benno Huber.

Von der Basislatte 2 m lassen sich nicht ohne weiteres beliebig lange Strecken ableiten, da sich die Genauigkeit der Winkelmessung nicht beliebig hochschrauben läßt. Man bestimmt deshalb lange Seiten durch zweimalige Anwendung eines Vergrößerungsdreieckes, so daß dem unvermeidlichen Fehler der Winkelmessung eine noch tragbare Längenunsicherheit entspricht. Es seien die verwendeten Bezeichnungen vorangestellt.

$l$  = Latte = 2 m

$b$  = die aus der Latte direkt abgeleitete Basisstrecke

$s$  = die durch eine Basisstrecke ermittelte Seite

$s'$  = die direkt gemessene Seite

$P'$  = die aus direkt gemessenen Strecken ermittelte Polygonseite

$Z$  = Zuglänge = Summe der Seiten

$L$  = Entfernung Anfangspunkt—Endpunkt

$m_s, m_{s'}$  = mittlere Längenfehler

$m_0$  = mittlerer Fehler einer Winkelmessung

$m_\alpha, m_\beta, \mu$  = mittlere Fehler von Winkelmitteln

$\frac{v_l}{L}$  = relativer Längenfehler

$\frac{v_w}{L}$  = relative Querabweichung

### 1. Der Längenfehler einer mittels Basis gemessenen Seite.

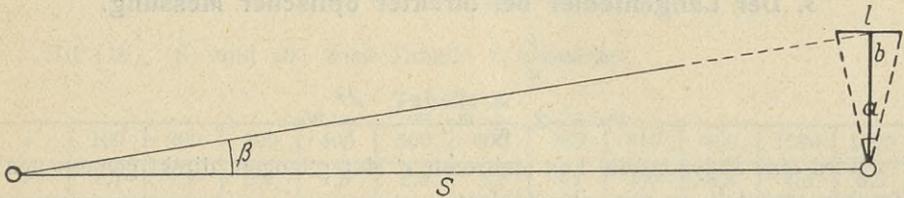


Fig. 1.

Für die Fehleruntersuchung ist mit genügender Genauigkeit:

$$b = s \cdot \beta$$

$$l = b \cdot \alpha$$

$$s = \frac{b}{\beta} = \frac{l}{\alpha \cdot \beta}$$

$$ds = -\frac{l \cdot d\alpha}{\alpha^2 \cdot \beta} - \frac{l \cdot d\beta}{\beta^2 \cdot \alpha} = -\frac{b \cdot s \cdot d\alpha}{l} - \frac{s^2 \cdot d\beta}{b}$$

$$m_s^2 = \frac{b^2 \cdot s^2}{l^2} m_\alpha^2 + \frac{s^4}{b^2} m_\beta^2$$

Für  $m_\alpha = m_\beta = \mu$  wird:

$$m_s = \pm s \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{l^2} + \frac{s^2}{b^2}} \quad (1)$$

Der relative Längenfehler der Seite  $s$  ist dann:

$$\frac{m_s}{s} = \pm \mu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{l^2} + \frac{s^2}{b^2}} \quad (2)$$

## 2. Das beste Basisverhältnis.

$m_s$  sowie  $\frac{m_s}{s}$  werden bei gleicher Genauigkeit der Winkelmessung klein, wenn die Wurzel der Formeln (1) und (2) klein werden. Es wird also gefordert, daß

$$\lambda = \frac{b^2}{l^2} + \frac{s^2}{b^2}$$

ein Minimum wird. Die einzige Veränderliche ist dabei die Basis  $b$ .

$$\frac{d\lambda}{db} = \frac{2b}{l^2} - \frac{2s^2}{b^3} = 0$$

Also:

$$b^2 = s \cdot l \quad (3)$$

Da der zweite Differentialquotient größer als Null ist, liegt bei 3 ein Minimum vor. Das heißt, daß die günstigste Fehlerfortpflanzung eintritt, wenn  $b$  das geometrische Mittel aus  $s$  und  $l$  ist, oder mit anderen Worten, wenn der Winkel nach der Basis dem Winkel nach der Latte gleich wird.

Mit der Annahme

$$b^2 = s \cdot l$$

wird, wenn man alle Werte in Meter ausdrückt,

$$m_s = \pm s \cdot \mu \sqrt{\frac{2s}{4} + \frac{s^2}{2s}} = \pm \mu s^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

## 3. Der Längenfehler bei direkter optischer Messung.

$$s' = \frac{l}{\alpha}$$

$$m_{s'} = \pm \frac{l}{\alpha^2} m_\alpha = \pm \frac{s'^2}{l} m_\alpha$$

Wird eine Polygonseite aus mehreren  $s'$  Meter langen, direkt gemessenen Strecken ermittelt, so wird ihr Fehler:

$$m_{P'} = \pm m_s \cdot \sqrt{\frac{P'}{s'}} = \pm \mu \cdot \frac{s'^2}{l} \sqrt{\frac{P'}{s'}} \quad (5)$$

Werden wieder alle Größen in Meter ausgedrückt und  $s'$  zu 100 Meter angenommen, so folgt:

$$m_{s'} = \pm 500 \mu \sqrt{P'} \quad (6)$$

## 4. Festsetzung der für einen bestimmten relativen Längenfehler notwendigen Genauigkeit der Winkelmessung und der dadurch bedingten Zahl der zu messenden Sätze bei der Basismethode.

Aus (4)

$$m_s = \pm \mu \cdot s^{\frac{3}{2}}$$

wird

$$\frac{m_s}{s} = \pm \mu s^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Wenn  $m_0$  den Fehler des einmal gemessenen Winkels bedeutet, und  $n$  die Anzahl der Sätze, so ergibt sich mit der Annahme  $m_0 = 5^{cc}$ :

$$\mu = \frac{m_0}{\sqrt{n}} \tag{8}$$

$$n = \frac{m_0^2}{\mu^2} = \frac{25}{\mu^2} \tag{9}$$

Nach (7) und (8) lassen sich für die verschiedenen Längen von  $s$  die zugehörigen Werte von  $\mu$  und  $n$  berechnen, die in Tabelle 1 zusammengestellt sind. Als relative Genauigkeit ist dabei  $\frac{m_s}{s} = \frac{1}{10000}$  gefordert.

Tabelle 1.

$s$ in $m$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200
$\mu^{cc}$	6,4	4,5	3,7	3,2	2,9	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,8
$n$	1	1	2	2	3	4	4	5	6	6	8

Für eine relative Genauigkeit  $\frac{m_s}{s} = \frac{1}{15000}$  erfordert eine Seite von 600 m bereits 9, eine Seite von 1000 m 15 Sätze, was unwirtschaftlich sein dürfte.

### 5. Festsetzung der erforderlichen Satzzahl bei der direkten optischen Längenmessung.

Aus (6)  $m_{s'} = \pm 500 \mu \sqrt{P'}$  bekommen wir:

$$\frac{m_{s'}}{P'} = \pm \frac{500 \mu}{\sqrt{P'}} \tag{10}$$

Mit (10), (8) und (9) wird Tabelle 2 berechnet.

Tabelle 2.

$s'$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1500
$\mu^{cc}$	1,3	1,8	2,2	2,6	2,9	3,1	3,4	3,6	3,9	4,2	5,0
$n$	15	8	5	4	3	3	2	2	2	1	1

Wird eine 100 m-Strecke mit einer Genauigkeit von  $\mu = 1,3^{cc}$  gemessen, so beträgt der Fehler der Erfassung der 2 m-Latte 0,21 mm, der durch die Rechnung 50 mal in die 100 m-Strecke eingeht. Der Fehler der Strecke ist dann:

$$0,21 \times 50 = 10 \text{ mm oder } \frac{1}{10000} \text{ der Strecke.}$$

Wird die gleiche Entfernung aus einem Satz mit  $\mu = m_0 = 5^{cc}$  ermittelt, so wird in mm:

$$m_{p'} = 0,8 \times 50 = 40$$

Ein Zug aus 15 mit dieser Genauigkeit bestimmten Seiten wird einen mittleren Längenfehler haben von

$$40 \times \sqrt{15} = 150 = \frac{1}{10\,000}$$

Die Annahme des Fehlerfortpflanzungsgesetzes, daß sich bei einer Summe gleich genauer Elemente die Fehler teilweise gegenseitig aufheben, so daß der Gesamtfehler mit der Wurzel aus der Anzahl der Summanden wächst, scheint der direkten Methode einen Vorsprung zu sichern. Wird die 1500 m-Strecke aber in drei Teilen von je 500 m nach Tabelle 1 gemessen, so wird ihr Längenfehler noch geringer, nämlich in mm:

$$m_s = 50 \sqrt{3} = 87$$

Jedenfalls wird es sich lohnen, die beiden Methoden in Rücksicht auf die erreichbare Genauigkeit mit einander zu vergleichen.

## 6. Vergleich der Genauigkeit der beiden Methoden.

Der Fehler einer Winkelmessung wird wesentlich vom Einstellfehler mitbestimmt. Dieser wächst im allgemeinen mit der Abnahme des eingestellten Objekts vom Instrument. Es hängt dies z. B. bei der Beobachtung im Kleinnetz mit der erschwerten Zielerfassung bei nahen, dicken Signalstangen oder einseitiger Beleuchtung zusammen. Durch die präzise Ausführung der Marken an der 2 m-Latte, die bei nahen Zielungen eine Erfassung auf Teile eines Millimeters ermöglicht, ist dieses Anwachsen des Einstellfehlers hintangehalten. Wir dürfen deshalb im Einklang mit den Ergebnissen der Beobachtung den Fehler der Winkelmessung für nahe und weite Zielungen gleich setzen.

Aus (4) und (6) folgt für eine Polygonseite  $S$ , die einmal mit einer Basis, ein anderes Mal in 100 m-Teilstrecken direkt gemessen wird, wenn  $\mu$  beide Male gleich groß ist:

$$\frac{m_s}{m_{s'}} = \frac{S^{\frac{3}{2}}}{500 \cdot S^{\frac{1}{2}}} = \frac{S}{500} \quad (11)$$

Das heißt, daß die indirekte Messung der direkten bis zur Seitenlänge  $S = 500$  m an Genauigkeit überlegen ist. Werden die Teilstrecken zu 140 m genommen, so wird der Quotient  $\frac{m_s}{m_{s'}}$  bei etwa 830 m = 1.

Der Längenfehler des nach der Basismethode gemessenen Zuges  $Z$  wird aus (4):

$$m_z = \pm m_s \sqrt{\frac{Z}{s}} = \pm \mu \cdot s^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{Z}{s}} = \pm \mu s \sqrt{Z} \quad (12)$$

Der Längenfehler des aus direkt gemessenen Strecken bestehenden Zuges  $Z'$  ist nach (5):

$$m_{z'} = \pm \mu \frac{s'^2}{2} \sqrt{\frac{Z'}{s}} = \pm \frac{\mu}{2} s'^{\frac{3}{2}} \sqrt{Z'} \quad (13)$$

Wir setzen nun:  $m_z = m_{z'}$  und  $Z = Z'$

Es folgt:

$$s = \frac{s'^{\frac{3}{2}}}{2} \quad (14)$$

Diese Gleichung bestimmt die Tabelle 3.

Das heißt: Wird ein und derselbe Zug mit beiden Methoden gemessen, sämtliche Winkel, die zur Längenermittlung dienen mit der gleichen Genauigkeit oder der gleichen Satzzahl beobachtet, und dabei das aus Tabelle 3 ersichtliche Verhältnis der  $s$  und  $s'$  eingehalten, so ist bei beiden Berechnungen etwa die gleiche Genauigkeit in der Länge zu erwarten. Ferner würden sich hiernach auch in ein und demselben Zug zwei Polygonseiten in bezug auf ihren Beitrag zur Längenabweichung homogen verhalten, wenn beide beispielsweise 500 m lang wären, und die eine durch eine Basis, die andere in 100 m-Strecken mit dem gleichen mittleren Winkelfehler bestimmt würden.

**Tabelle 3.**

$s'$	$s$
100	500
110	575
120	655
130	740
140	830

### 7. Zusammenfassung.

Für die Praxis läßt sich abschließend sagen:

1. Die Basismethode ist, wo immer möglich anzuwenden. Sie gibt mit dem geringsten Aufwand an Beobachtungs- und Rechenarbeit das günstigste Resultat. Es empfiehlt sich, den Streckenzug in Seiten von 500 bis 600 m zu unterteilen, die Basisstrecken nach Formel 3 festzulegen und die Winkel in mindestens 4 Sätzen zu beobachten.

2. Hinsichtlich der Genauigkeit ist die Methode der direkten Messung der Basismethode ebenbürtig, doch erfordert sie einen unvergleichlich höheren Arbeitsaufwand. Als Teilstrecken wählt man Längen von 100 bis 140 m. Die Winkel werden in drei Sätzen beobachtet.

3. In gestreckten Zügen lassen sich beide Methoden nebeneinander verwenden. Im nicht gestreckten Zug empfiehlt es sich, die in Tabelle 3 angegebenen Verhältnisse zu wahren.

### 8. Besprechung der praktischen Erfahrungen und Ergebnisse.

Die Erkundungsarbeit wird mit geringem Zeitaufwand erledigt, denn die optische Längenmessung bietet viele Handhaben, die Geländeschwierigkeiten zu überwinden. Ist die Anlage einer Basis senkrecht zur Seite nicht möglich, so werden die drei Winkel im Vergrößerungsdreieck gemessen; wo eine Basis nicht mehr Platz hat, hilft die direkte Methode durch Unterteilen der Strecke oder Anlegen eines Hilfszuges, aus dem die Polygonseite vorgerechnet wird; die direkte Methode ist sogar in lichtem Wald anwendbar; Höhenunterschiede machen keine Schwierigkeit, solange ein Stativ sicher aufgestellt werden kann. In Dahn wurde mit einem Aufschreiber und zwei Hilfsarbeitern beobachtet. Nur bei Regen und greller Sonne hatte ein dritter Gehilfe den Schirm zu tragen. Bei Anwendung der Basismethode ist trotzdem die ständige Mithilfe eines dritten Hilfsarbeiters zu empfehlen. Bei der Anwendung der direkten Methode wiederholte sich auf jedem Stand folgender Vorgang: Auf Punkt  $n$  Messung des Brechungswinkels in zwei, bei langen Seiten in drei Sätzen, Höhenwinkel rückwärts und vorwärts je zweimal, Längenwinkel nur vorwärts. Während der Beobachtung des Längenwinkels

wird das rückliegende Stativ ( $n-1$ ) mit Zieltafel abgebaut, sein Träger stellt den Punkt ( $n+2$ ) auf und nimmt vom Hilfsarbeiter ( $n+1$ ) die inzwischen freiwerdende Latte mit, das Instrument ( $n$ ) und die Zieltafel ( $n+1$ ) wechseln die Plätze. Bei der Anwendung der Basismethode ist, wie bereits gesagt, die Verwendung eines vierten Stativs mit einem eigenen Hilfsarbeiter empfehlenswert. Die Aufstellung erfolgte mit Hilfe eines Schnurlotes. Nur bei Abbruch der Arbeit innerhalb eines Zuges wurde mit einem optischen Lot genau aufgestellt und eine Anschlußrichtung nach einem weitentfernten Punkt mitbeobachtet. Die höchste Tagesleistung war bei der direkten Methode 1,8 km, bei Verwendung beider Methoden 2,5 km. Dabei ist zu bedenken, daß die Züge nur gemessen wurden, weil es eine andere Möglichkeit, in die tiefeingeschnittenen Täler Dreieckspunkte zu bringen nicht gab. Der durchschnittliche mittlere Fehler der Längenwinkel betrug  $1,5''$ . Sie wurden in 4 bis 8 Sätzen gemessen. Ein Anwachsen der Genauigkeit bei gleicher Satzzahl und zunehmender Seitenlänge läßt sich nicht feststellen. Beobachtungen mit dem Zeiß II neuer Teilung waren übrigens durchwegs um  $0,2''$  genauer als die mit einem Instrument alter Teilung, was von der genaueren Ablesemöglichkeit herrühren mag.

Vor der eigentlichen Zugsberechnung wurden die Seiten zusammengestellt und Korrekturen für Temperatur, Reduktion auf Normalnull und auf das legale Meter des bayerischen Dreiecksnetzes angebracht. Bei der Berechnung kam die Näherungsausgleichung II der „Dienstanweisung für Triangulierung und Polygonierung in Bayern“ zur Anwendung. Nach ihr werden die Winkelabschlußfehler gleichmäßig verteilt, die Verbesserungen der Koordinatenunterschiede aber aus Differentialgleichungen abgeleitet. Auch die Verbesserung der Brechungswinkel durch Zwischenableitungen wurde vorgenommen. Die nachfolgende Tabelle 4 gibt einige bemerkenswerte Daten aus der Berechnung. Sie gibt die Seiten in Meter, Winkelfehler in Neusekunden, den relativen Längenfehler und die relative Querabweichung in Meter mal  $10^{-5}$ . Die angegebenen Seitenlängen lassen ersehen, daß auf die theoretischen Forderungen bei der Anlage der Züge, wie gleiche Seiten und gestreckte Winkel infolge des schwierigen Geländes keine Rücksicht genommen werden konnte. Das Ausgangsnetz ist ein modernes Dreiecksnetz bester Stimmigkeit. Beobachtet wurde grundsätzlich bei jeder Witterung.

Tabelle 4.

Zug	Anzahl der Seiten	Davon direkt gemessen	Seitenlängen	[s]	$f_{\beta}$	$\frac{V_l}{L}$	$\frac{V_w}{L}$
1	6	4	100—650	2134	0	+ 8	- 1
2	4	2	400—630	2208	- 18	+ 7	- 2
3	56	56	57—149	5100	+ 18	+ 7	- 1
4	10	0	200—400	2966	+ 18	+ 10	- 3
5	16	10	30—1160	4230	+ 24	- 5	+ 1

Das eigenartige Verhalten des Zuges 5, der in der Längs- und Querabweichung die Größenordnung einhält, jedoch die Vorzeichen wechselt, fällt auf. Doch ist das vorliegende Material nicht umfangreich genug, um weitere Vermutungen darüber aufzustellen. Aus dem durchschnittlichen Längenfehler von  $\pm 7 \cdot 10^{-5}$  ist auf alle Fälle ersichtlich, daß die im theoretischen Teil vorgesehene Genauigkeit sicher erreicht werden kann. Nach den angegebenen mittleren Winkel Fehlern wäre ja eine noch höhere Genauigkeit zu erwarten. Es sei daran erinnert, daß diese Fehler nur die innere Genauigkeit der Winkelmessung angeben; sehr viele Fehlerquellen, deren Einfluß die eigentliche Beobachtungsungenauigkeit oft übersteigen wird, sind darin nicht erfaßt. Bemerkenswert ist der geringe Winkelabschlußfehler. Sämtliche Fehler haben ein Drittel der in Bayern für sonstige Hauptzüge zugelassenen Grenzen nicht erreicht. Da die Längen- und Querabweichung durch die Ausgleichung noch teilweise eliminiert werden, kann der Streckenzug mit optischer Längenmessung als vollwertiges Mittel zur Einschaltung von Aufnahme Punkten gelten. Der Längenmessung mit Band oder Latte ist die optische Längenmessung fast ebenbürtig, in ungünstigem Gelände überlegen. In Zug 5 wurde beispielsweise auf 400 Meter Länge ein Höhenunterschied von 150 Meter über Fels und Geröll in kleinen Teilstrecken überwunden. Trotzdem hat im offenen Gelände die Netzverdichtung wegen des geringeren Arbeitsaufwandes den Vorzug, es sei denn, daß der Bestimmung der Dreieckspunkte die Einzelaufnahme auf dem Fuß folgt, so daß die Messung der Landesvermessungszüge die Polygonierung erspart.

## Die beiden Hauptaufgaben der geodätischen Uebertragung.

Von F. Hopfner, Wien.

Mit den beiden Hauptaufgaben der geodätischen Übertragung hat es eine eigenartige Bewandnis; nur für eine von beiden ist — wenigstens meines Wissens — die direkte Lösung gefunden worden. Es handelt sich um die Aufgaben:

1. Gegeben ist im Punkte  $P_1$  des Rotationsellipsoids ( $a$ ,  $e$ ) die geographische Breite  $\varphi_1$  sowie das Azimut  $\alpha_1$  jener Kürzesten von der Bogenlänge  $s$ , die den Punkt  $P_1$  mit dem Punkte  $P(\varphi, \lambda)$  verbindet; gesucht werden die Breite  $\varphi$  und das Azimut  $\alpha$  der Kürzesten in  $P$  sowie der geographische Längenunterschied  $\lambda - \lambda_1$  der Punkte  $P_1$  und  $P$ . Die Lösung dieser Aufgabe begegnete keinerlei grundsätzlichen Schwierigkeiten.

2. Gegeben sind in den Punkten  $P_1$  und  $P$  ihre Breiten  $\varphi_1$  und  $\varphi$  sowie ihr Längenunterschied  $\lambda - \lambda_1$ ; gesucht werden die Bogenlänge  $s$  der Kürzesten zwischen  $P_1$  und  $P$  und ihre Azimute  $\alpha_1$  und  $\alpha$  daselbst. Ich will zeigen, daß auch diese Aufgabe — wenigstens unter gewissen Voraussetzungen — eine direkte Lösung ohne grundsätzliche Schwierigkeiten zuläßt; denn auf Grund der bisher bekannt gewordenen Lösungen könnte man leicht auf die Vermutung kommen, daß diese Aufgabe auf direktem Wege unlösbar sei.

a) Wir lösen zum Nachweise dieser Behauptung zunächst die Aufgabe, den Breiten- und Längenunterschied,  $d \cdot i \cdot \varphi - \varphi_1 = b$ ,  $\lambda - \lambda_1 = l$ , in Umgebung des Punktes  $P_1$  durch je eine nach natürlichen Potenzen der beiden Veränderlichen

$$s \cdot \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)_1, s \cdot \left( \frac{d\lambda}{ds} \right)_1$$

fortschreitende Reihe darzustellen.

Zum Nachweise der Existenz solcher Reihen gehen wir von der grundlegenden Eigenschaft der geodätischen Kurven aus, daß durch einen vorgegebenen Punkt irgend einer analytischen Fläche eine und nur eine geodätische Kurve hindurchgeht, die in jenem Punkte eine Tangente von vorgegebener Richtung besitzt; mit anderen Worten, eine geodätische Kurve ist durch die beiden Forderungen vollständig bestimmt, daß sie durch einen vorgegebenen Punkt der Fläche hindurchgehe und daselbst eine Tangente von vorgegebener Richtung besitze. Mit diesem Satze ist, nebenbeibemerkt, der Grund aufgedeckt, weshalb die 1. Aufgabe ohne grundsätzliche Schwierigkeiten lösbar ist.

Wenn man dagegen, wie es bei der 2. Aufgabe geschieht, einer geodätischen Kurve vorschreibt, sie solle zwei vorgegebene Punkte enthalten, so ist leicht einzusehen, daß diese Aufgabe unter Umständen unzählig viele Lösungen besitzen kann; hierin liegt infolgedessen auch die grundsätzliche Schwierigkeit für die Lösung der 2. Aufgabe. Ich erinnere, um ein einfaches Beispiel zu bringen, an den geraden Kreiszylinder, dessen geodätische Kurve die gemeine Schraubenlinie ist. Es ist allgemein bekannt, daß durch zwei Punkte des Zylinders unzählig viele Schraubenlinien hindurchgehen; sie unterscheiden sich durch ihre verschiedene Ganghöhe voneinander.

Aber die Sachlage wird anders, wenn die beiden vorgegebenen Punkte  $P_1$  und  $P$  hinreichend nahe beieinander liegen; nur unter dieser Voraussetzung läßt die 2. Aufgabe überhaupt eine bestimmte Lösung zu. Diese Aussage läßt sich mit Hilfe des nachstehenden Satzes in voller Strenge nachweisen: Welcher Art auch immer die Fläche sein mag, es gibt eine Zahl  $s_0$  von solcher Eigenschaft, daß, wenn auf jeder geodätischen Kurve durch den Punkt  $P_1$  — oder die von ihm ausgeht — eine Bogenlänge  $s > s_0$  abgetragen wird, durch den Punkt  $P_1$  und den Endpunkt in der Entfernung  $s$  keine andere geodätische Kurve hindurchgeht, deren Bogenlänge kleiner als  $s_0$  wäre.

Zum Nachweise dieses Satzes gehen wir von der Differentialgleichung der geodätischen Kurve aus. Man weiß, daß die krummlinigen Koordinaten  $u, v$  eines Punktes der geodätischen Kurve in Funktion der Bogenlänge  $s$  durch die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} 2 D^2 u'' &= a u'^2 + 2 b u' v' + c v'^2, \\ 2 D^2 v'' &= d u'^2 + 2 e u' v' + f v'^2 \end{aligned}$$

erklärt werden, in denen die mit Akzenten versehenen Buchstaben Ableitungen nach  $s$  bedeuten und  $D, a, b, \dots, f$  Funktionen von  $u, v$  sind, auf die wir noch weiter unten zurückkommen werden<sup>1)</sup>. Zieht man die Gesamtheit

<sup>1)</sup> G. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, II, Leipzig, 1902, S. 396 ff; G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, II, Paris, 1915, chap. 4, p. 416.

der durch den Punkt  $P_1(u_1, v_1)$  hindurchgehenden geodätischen Kurven in Betracht, so erkennt man, daß die Differentialgleichungen für die Koordinaten  $u, v$  eines zweiten Kurvenpunktes  $P$  Funktionen geben werden, die von der von  $P_1$  aus gezählten Bogenlänge  $s$  und den Werten  $u_1, v_1; u_1', v_1'$  von  $u, v; u', v'$  in diesem Punkte abhängen.

Man sieht weiter, daß die beiden Differentialgleichungen sich bei Vertauschung von  $s$  mit  $cs$  — unter  $c$  eine Konstante verstanden — nicht ändern; also dürfen sich auch die Werte der Koordinaten  $u, v$  im Punkte  $P$  bei Vertauschung von

$$s, u_1', v_1' \text{ mit } cs, \frac{u_1'}{c}, \frac{v_1'}{c}$$

nicht ändern. Wir schließen hieraus, daß die Koordinaten  $u, v$  — außer von  $u_1, v_1$  — nur von den Veränderlichen

$$\bar{u} = s u_1', \bar{v} = s v_1'$$

abhängen können; denn dann und nur dann ändern sich die Werte der Koordinaten  $u, v$  des Punktes  $P$  bei der Vertauschung nicht. Wir haben es also mit Gleichungen der Form

$$u = g(u_1, v_1; \bar{u}, \bar{v}), \quad v = h(u_1, v_1; \bar{u}, \bar{v})$$

als allgemeine Integrale der beiden Differentialgleichungen zu tun. Wenn daher ihre Koeffizienten  $D, a, b, \dots f$  nach natürlichen Potenzen der Koordinatendifferenzen  $u - u_1, v - v_1$  entwickelbar sind, so werden die Funktionen  $g$  und  $h$  nach natürlichen Potenzen der Veränderlichen  $\bar{u}, \bar{v}$  entwickelbar sein, d. h. man erhält Potenzreihen der Form

$$\begin{aligned} u - u_1 &= \bar{u} + A_{20} \bar{u}^2 + 2 A_{11} \bar{u} \bar{v} + A_{02} \bar{v}^2 + \dots, \\ v - v_1 &= \bar{v} + B_{20} \bar{u}^2 + 2 B_{11} \bar{u} \bar{v} + B_{02} \bar{v}^2 + \dots, \end{aligned}$$

worin die Koeffizienten nur von  $u_1, v_1$  abhängen; als Wert für den Koeffizienten des ersten Terms in beiden Reihen erschließt man 1 aus der Erwägung, daß die Verhältnisse

$$\frac{u - u_1}{s}, \frac{v - v_1}{s} \text{ für } \lim s = 0$$

die Werte  $u_1', v_1'$  annehmen. Die Reihen konvergieren für alle Werte  $\bar{u}, \bar{v}$ , deren Absolutbetrag unterhalb einer festen Schranke liegt. Hiemit ist die zu Beginn der vorangehenden Darlegungen gestellte Aufgabe zunächst in allgemeiner Form gelöst.

Da die Funktionaldeterminante der beiden vorangehenden Gleichungen,  $d \cdot i$ .

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})},$$

gleich 1 für  $\bar{u} = \bar{v} = 0$  ist, können sie nach  $\bar{u}, \bar{v}$  aufgelöst werden und geben daher für diese Veränderlichen Reihen, die nach natürlichen Potenzen von  $u - u_1, v - v_1$  fortschreiten und konvergieren, wenn nur die Absolutbeträge der beiden Koordinatendifferenzen unterhalb einer festen Schranke liegen. Hiermit ist nachgewiesen, daß die 2. Aufgabe eine direkte und unter den getroffenen Voraussetzungen auch bestimmte Lösung besitzt. Denn das eben ge-

wonnene Ergebnis lehrt auch, daß durch den Punkt  $P_1$  und den hinreichend nahe gewählten Punkt  $P$  eine und nur eine geodätische Kurve hindurchgeht, wenn nur die Absolutbeträge von  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  unterhalb einer festen Schranke liegen, d. h. wenn die Bogenlänge  $s$  der Kurve unterhalb der Schranke  $s_0$  liegt. Da nämlich im Punkte  $P_1$  der geodätischen Kurve

$$E_1 u_1'^2 + 2 F_1 u_1' v_1' + G_1 v_1'^2 = 1$$

ist, worin  $E_1, F_1, G_1$  die Werte der Fundamentalgrößen  $E, F, G$  der Fläche in jenem Punkte bedeuten, so erhält man durch Multiplikation der Gleichung mit  $s^2$  die weitere Gleichung

$$E_1 \bar{u}^2 + 2 F_1 \bar{u} \bar{v} + G_1 \bar{v}^2 = s^2,$$

die zeigt, daß die Bogenlänge  $s$  unterhalb der Schranke  $s_0$  bleibt, wenn nur die Werte der Veränderlichen  $\bar{u}, \bar{v}$  unterhalb einer festen Schranke liegen. Kurzer Hand kann man sagen, daß um den Punkt  $P_1$  herum ein solcher Bereich abgegrenzt werden kann, daß durch irgend einen Punkt des Bereiches und den Punkt  $P_1$  eine und nur eine geodätische Kurve hindurchgeht, die vollständig innerhalb des Bereiches liegt. Hiemit sind alle in diesem Abschnitte ausgesprochenen Behauptungen nachgewiesen.

Bevor ich mich den weiteren Darlegungen zuwende, erinnern wir uns noch der Bedeutung der Koeffizienten  $D, a, b, \dots, j$  in den beiden Differentialgleichungen; diese Koeffizienten sind Funktionen der Fundamentalgrößen  $E, F, G$  der betrachteten Fläche und ihrer 1. Ableitungen nach  $u$  und  $v$ , wie die nachstehenden Gleichungen lehren:

$$\begin{aligned} D^2 &= EG - F^2, \\ a &= 2F \frac{\partial F}{\partial u} - G \frac{\partial E}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v}, & d &= F \frac{\partial E}{\partial u} + E \frac{\partial E}{\partial v} - 2E \frac{\partial F}{\partial u}, \\ b &= F \frac{\partial G}{\partial u} - G \frac{\partial E}{\partial v}, & e &= F \frac{\partial E}{\partial v} - E \frac{\partial G}{\partial u}, \\ c &= F \frac{\partial G}{\partial v} + G \frac{\partial G}{\partial u} - 2G \frac{\partial F}{\partial v}, & f &= 2F \frac{\partial F}{\partial v} - E \frac{\partial G}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u}; \end{aligned}$$

man sieht, daß einander entsprechende Koeffizienten beider Differentialgleichungen durch Vertauschung von  $u$  mit  $v$  sowie von  $E$  mit  $G$  auseinander hervorgehen. Um übrigens  $u$  und  $v$  vollständig in Funktion von  $s$  zu bestimmen, muß noch die Gleichung

$$E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2 = 1$$

hinzugenommen werden, die die Veränderliche  $s$  als Bogenelement der geodätischen Kurve erklärt.

b) Nach diesen einleitenden Darlegungen treten wir an unsere spezielle Aufgabe heran, den Breiten- und Längenunterschied  $b$  bzw.  $l$  durch Reihen darzustellen, die nach natürlichen Potenzen der Veränderlichen

$$u = s \varphi_1', \quad v = s \lambda_1'$$

fortschreiten, indem wir den oben eingeführten Querstrich über  $u$  und  $v$  als jetzt überflüssig fortlassen. Ich suche also Potenzreihen der Form

$$\begin{aligned} b &= u + A_{20} u^2 + 2 A_{11} u v + A_{02} v^2 + A_{30} u^3 + 3 A_{21} u^2 v + 3 A_{12} u v^2 + A_{03} v^3 + \dots \\ l &= v + B_{20} u^2 + 2 B_{11} u v + B_{02} v^2 + B_{30} u^3 + 3 B_{21} u^2 v + 3 B_{12} u v^2 + B_{03} v^3 + \dots, \end{aligned}$$

indem ich die Allgemeinheit der Aufgabe gleichzeitig durch die Annahme einschränke, daß die vorgegebene Fläche eine Rotationsfläche sei. In solchem Falle wird das Bogenelement  $ds$  der Fläche von der Gleichung  $ds^2 = \varrho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2$  gegeben; mit  $\varrho$  wird der Krümmungsradius der Meridiankurven und mit  $r$  der Radius der Parallelkreise bezeichnet. Die Fundamentalgrößen der Fläche sind demnach  $E = \varrho^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = r^2$ ; da die Meridiankurven und Parallelkreise auf der Fläche ein Orthogonalsystem erzeugen, verschwindet natürlich die Fundamentalgröße  $F$ . Schließlich merken wir noch an, daß

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 2\varrho \frac{d\varrho}{d\varphi}, \quad \frac{\partial E}{\partial \lambda} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 2r \frac{dr}{d\varphi}, \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0$$

ist.

Um zu den gesuchten Potenzreihen zu kommen, entwickeln wir den Breiten- und Längenunterschied  $b$  bzw.  $l$  in Umgebung des Punktes  $P_1$  nach dem Taylorschen Satze in eine nach Potenzen der Bogenlänge  $s$  fortschreitende Reihe, d. h. wir setzen

$$b = \frac{s}{1} \varphi_1' + \frac{s^2}{2!} \varphi_1'' + \frac{s^3}{3!} \varphi_1''' + \dots$$

$$l = \frac{s}{1} \lambda_1' + \frac{s^2}{2!} \lambda_1'' + \frac{s^3}{3!} \lambda_1''' + \dots$$

Die Werte der aufeinanderfolgenden Ableitungen berechnen wir rekurrent mit Hilfe der beiden Differentialgleichungen für die geodätische Kurve. Sie geben die 2. Ableitungen unmittelbar in Funktion der 1. Ableitungen. Leitet man die Differentialgleichungen nach  $s$  ab, so stellen sich die 3. Ableitungen zunächst in Funktion der beiden 2. Ableitungen dar, die Funktionen der 1. Ableitungen sind; eliminiert man die 2. Ableitungen aus den 3., so ergeben sich diese in Funktion der 1. Ableitungen. Geht man in solcher Weise schrittweise vor, so läßt sich jede Ableitung beliebig hoher Ordnung in Funktion der Ableitungen 1. Ordnung darstellen.

Als Differentialgleichungen der geodätischen Kurven auf Rotationsflächen erhält man im Hinblick auf die Erklärung ihrer Fundamentalgrößen und deren partielle Ableitungen nach  $\varphi$  und  $\lambda$  die beiden Gleichungen

$$2E \varphi'' = -\frac{\partial E}{\partial \varphi} \varphi'^2 + \frac{\partial G}{\partial \varphi} \lambda'^2, \quad G \lambda'' = -\frac{\partial G}{\partial \varphi} \varphi' \lambda'.$$

Aus ihnen leitet man in der angegebenen Weise die Ableitungen der aufeinanderfolgenden Ordnungen von  $\varphi$  und  $\lambda$  nach  $s$  ab; man bekommt:

$$\varphi'' = -\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{d\varphi} \varphi'^2 + \frac{r}{\varrho^2} \frac{dr}{d\varphi} \lambda'^2,$$

$$\varphi''' = \frac{1}{\varrho^2} \left[ 3 \left( \frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} \right] \varphi'^3 + \frac{1}{\varrho^2} \left[ -3 \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - 4 \frac{r}{\varrho} \frac{d\varrho}{d\varphi} \frac{dr}{d\varphi} + r \frac{d^2r}{d\varphi^2} \right] \varphi' \lambda'^2,$$

. . . . .

$$\lambda'' = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\varphi} \varphi' \lambda',$$

$$\lambda''' = \frac{2}{r} \left[ \frac{3}{r} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{d\varphi} \frac{dr}{d\varphi} - \frac{d^2r}{d\varphi^2} \right] \varphi'^2 \lambda' - \frac{2}{\varrho^2} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \lambda'^3,$$

. . . . .

Die vorangehenden Werte für die Ableitungen tragen wir in die Taylor-  
schen Reihen für  $b$  und  $l$  ein; es ergibt sich durch Einführung der beiden  
Veränderlichen  $u, v$  in die Potenzreihe für  $b$ :

$$\begin{aligned} \frac{s}{1} q_1' &= u, \quad \frac{s^2}{2!} q_1'' = -\frac{1}{2 \varrho_1} \left( \frac{d \varrho}{d \varphi} \right)_1 u^2 + \frac{r_1}{2 \varrho_1^2} \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1 v^2, \\ \frac{s^3}{3!} q_1''' &= \frac{1}{6 \varrho_1^2} \left[ 3 \left( \frac{d \varrho}{d \varphi} \right)_1^2 - \varrho_1 \left( \frac{d^2 r}{d \varphi^2} \right)_1 \right] u^3 + \frac{1}{6 \varrho_1^2} \left[ -3 \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1^2 - 4 \frac{r_1}{\varrho_1} \left( \frac{d \varrho}{d \varphi} \right)_1 \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1 + \right. \\ &\quad \left. + r_1 \left( \frac{d^2 r}{d \varphi^2} \right)_1 \right] u v^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

und in der Potenzreihe für  $l$ :

$$\begin{aligned} \frac{s}{1} \lambda_1' &= v, \quad \frac{s^2}{2!} \lambda_1'' = -\frac{1}{r_1} \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1 u v, \\ \frac{s^3}{3!} \lambda_1''' &= \frac{1}{3 r_1} \left[ \frac{3}{r_1} \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1^2 + \frac{1}{\varrho_1} \left( \frac{d \varrho}{d \varphi} \right)_1 \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1 - \left( \frac{d^2 r}{d \varphi^2} \right)_1 \right] u^2 v - \frac{1}{3 \varrho_1^2} \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1^2 v^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

die mit dem Index 1 behafteten Größen beziehen sich natürlich auf den  
Punkt  $P_1$ . Hiemit sind die gesuchten Koeffizienten  $A_{20}, 2 A_{11}, \dots A_{03}; B_{20},$   
 $2 B_{11}, \dots B_{03}$  in den Reihen für den Breiten- und Längenunterschied  $b$  bzw.  $l$   
fortschreitend nach natürlichen Potenzen von  $u$  und  $v$  gefunden; denn es ist

$$\begin{aligned} A_{20} &= -\frac{1}{2 \varrho_1} \left( \frac{d \varrho}{d \varphi} \right)_1, \quad 2 A_{11} = 0, \quad A_{02} = \frac{r_1}{2 \varrho_1^2} \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1, \\ A_{30} &= \frac{1}{6 \varrho_1^2} \left[ 3 \left( \frac{d \varrho}{d \varphi} \right)_1^2 - \varrho_1 \left( \frac{d^2 \varrho}{d \varphi^2} \right)_1 \right], \quad 3 A_{21} = 0, \\ 3 A_{12} &= \frac{1}{6 \varrho_1^2} \left[ -3 \left( \frac{d \varrho}{d \varphi} \right)_1^2 - 4 \frac{r_1}{\varrho_1} \left( \frac{d \varrho}{d \varphi} \right)_1 \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1 + r_1 \left( \frac{d^2 r}{d \varphi^2} \right)_1 \right], \quad A_{03} = 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{20} &= 0, \quad 2 B_{11} = -\frac{1}{r_1} \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1, \quad B_{02} = 0, \quad B_{30} = 0, \\ 3 B_{21} &= \frac{1}{3 r_1} \left[ \frac{3}{r_1} \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1^2 + \frac{1}{\varrho_1} \left( \frac{d \varrho}{d \varphi} \right)_1 \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1 - \left( \frac{d^2 r}{d \varphi^2} \right)_1 \right], \quad 3 B_{12} = 0, \\ B_{03} &= -\frac{1}{3 \varrho_1^2} \left( \frac{d r}{d \varphi} \right)_1^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Die Existenz der geforderten Potenzreihen — aus allgemeinen Erwägungen  
erschlossen — ist damit an einem allerdings sehr speziellen Fall durch Aus-  
führung der Entwicklung nochmals nachgewiesen.

c) Ich treffe eine weitere Einschränkung; die Rotationsfläche soll das  
Rotationsellipsoid von der großen Halbachse 1 und der Exzentrizität  $e$  sein.  
Dann hat man es zunächst mit folgenden Formeln zu tun, wenn ich an-  
nehme, daß mit wachsender Bogenlänge  $s$  der geodätischen Kurve die Breite  
 $\varphi$  ab- und die Länge  $\lambda$  zunimmt:

$$\begin{aligned} \varphi' &= -\frac{\cos \alpha}{\varrho}, \quad \lambda' = \frac{\sin \alpha}{r}, \quad \varrho = \frac{1-e^2}{W^3}, \quad r = N \cos \varphi, \quad N = \frac{1}{W}, \quad W = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}, \\ \frac{d\varrho}{d\varphi} &= \frac{3}{2} \varrho N^2 e^2 \sin 2\varphi, \quad \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = 3\varrho N^2 e^2 \cos 2\varphi + \frac{15}{4} \varrho N^4 e^4 \sin^2 2\varphi, \\ \frac{dr}{d\varphi} &= -N \sin \varphi + \frac{1}{2} N^3 e^2 \cos \varphi \sin 2\varphi, \\ \frac{d^2r}{d\varphi^2} &= -N \cos \varphi + N^3 e^2 \cos 3\varphi + \frac{3}{4} N^5 e^4 \cos \varphi \sin^2 2\varphi, \\ \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{9}{4} \varrho^2 N^4 e^4 \sin^2 2\varphi, \\ \frac{d\varrho}{d\varphi} \frac{dr}{d\varphi} &= -\frac{3}{2} \varrho N^3 e^2 \sin \varphi \sin 2\varphi + \frac{3}{4} \varrho N^5 e^4 \cos \varphi \sin^2 2\varphi, \\ \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= N^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} N^4 e^2 \sin^2 2\varphi + \frac{1}{4} N^6 e^4 \cos^2 \varphi \sin^2 2\varphi; \end{aligned}$$

$N$  bedeutet den Querkrümmungsradius. Diese Werte sind in die Formeln für die Koeffizienten  $A_{20}, 2 A_{11}, \dots A_{03}; B_{20}, 2 B_{11}, \dots B_{03}$  einzutragen; gleichzeitig lege ich die Veränderlichen  $u, v$  mit einer kleinen, aber geeigneten Abänderung gegenüber ihrer Erklärung im vorangehenden Abschnitte durch die Gleichungen

$$u = \frac{s \cos \alpha_1}{\varrho_1}, \quad v = \frac{s \sin \alpha_1}{N_1}$$

fest; ich gedenke also das negative Vorzeichen der Ableitung  $\varphi_1'$  mit den Reihenkoeffizienten zu vereinigen und statt des Parallelkreisradius  $r_1$  im Punkte  $P_1$  den Querkrümmungsradius  $N_1$  daselbst in der Veränderlichen  $v$  zu verwenden, indem ich den Faktor  $\cos \varphi_1$  in  $r_1$  in die Koeffizienten als Faktor hinzunehme. Hiedurch stellen sich die nachstehenden beiden Reihen ein, die sich von den im vorangehenden Abschnitte aufgestellten Reihen in formaler Hinsicht zwar ein wenig, grundsätzlich aber gar nicht unterscheiden:

$b = -u + A_{20} u^2 + 2 A_{11} u v + A_{02} v^2 + A_{30} u^3 + 3 A_{21} u^2 v + 3 A_{12} u v^2 + A_{03} v^3 + \dots;$   
 $l = v \sec \varphi_1 + B_{20} u^2 + 2 B_{11} u v + B_{02} v^2 + B_{30} u^3 + 3 B_{21} u^2 v + 3 B_{12} u v^2 + B_{03} v^3 + \dots$   
 die Koeffizienten werden von folgenden Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} A_{20} &= -\frac{3}{4} N_1^2 e^2 \sin 2\varphi_1, \quad 2 A_{11} = 0, \quad A_{02} = -\frac{N_1^2 \tan \varphi_1}{2 \varrho_1^2} (1 + N_1^2 e^2 \cos^2 \varphi_1), \\ A_{30} &= \frac{1}{2} N_1^2 e^2 (\cos 2\varphi_1 - N_1^2 e^2 \sin^2 2\varphi_1), \quad 3 A_{21} = 0, \\ 3 A_{12} &= \frac{N_1^2 \sec^2 \varphi_1}{6 \varrho_1^2} \left[ 1 + 2 \sin^2 \varphi_1 - \frac{1}{2} N_1^2 e^2 (9 \sin^2 2\varphi_1 + 2 \cos \varphi_1 \cos 3\varphi_1) + 3 N_1^4 e^4 \sin^2 2\varphi_1 \right], \\ A_{03} &= 0, \dots, \dots, \quad B_{20} = 0, \\ 2 B_{11} &= -\tan \varphi_1 \sec \varphi_1 (1 - N_1^2 e^2 \cos^2 \varphi_1), \quad B_{02} = 0, \quad B_{30} = 0, \\ 3 B_{21} &= \frac{1}{3} \sec \varphi_1 [1 + 3 \tan^2 \varphi_1 - N_1^2 e^2 (9 \sin^2 \varphi_1 + \sec \varphi_1 \cos 3\varphi_1) + \frac{3}{4} N_1^4 e^4 \sin^2 2\varphi_1], \\ 3 B_{12} &= 0, \quad B_{03} = -\frac{N_1^2 \tan^3 \varphi_1 \sec \varphi_1}{3 \varrho_1^2} (1 - 2 N_1^2 e^2 \cos^2 \varphi_1 + N_1^4 e^4 \cos^4 \varphi_1), \\ &\dots \end{aligned}$$

Will man unter der Annahme, daß die Bogenlänge  $s$  der geodätischen Kurve zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P$  von der Ordnung der Exzentrizität  $e$

der Meridianellipse sei, Größen von der Ordnung  $e^6$  vernachlässigen, so können in den Koeffizienten  $A_{30}$ ,  $3 A_{12}$ ,  $3 B_{21}$ ,  $B_{03}$  die  $e^4$  als Faktor enthaltenden Terme unterdrückt werden. Bei der Berechnung der 4. und 5. Ableitungen von  $\varphi$  und  $\lambda$  nach  $s$  darf in weiterer Folge  $\varrho = 1$ ,  $r = \cos \varphi$  gesetzt werden. Hiedurch stellen sich beträchtliche Vereinfachungen ein; doch kommt der Berechnung keinerlei theoretisches Interesse zu.

Helmert<sup>2)</sup> hat für den Breiten- und Längenunterschied zwei ähnliche Potenzreihen aufgestellt. Die Veränderlichen  $u$  und  $v$  erklärte er durch die Gleichungen

$$u = \frac{W_1}{\alpha_0} s \cos \alpha_1, \quad v = \frac{W_1}{\alpha_0} s \sin \alpha_1$$

und berechnete die aufeinanderfolgenden Ableitungen von  $\varphi$  und  $\lambda$  nach  $s$  ohne Zuhilfenahme der Differentialgleichungen für die geodätische Kurve. Ich lasse die Frage nach der besseren Konvergenz seiner oder meiner Potenzreihen offen, da ihre Entscheidung für die folgenden Darlegungen ohne Bedeutung ist.

d) Jetzt erst kann ich mich der eingangs dieser Schrift formulierten Frage zuwenden. Man sieht zunächst ohne weiteres ein, daß die im vorigen Abschnitt aufgestellten Potenzreihen für den Breiten- und Längenunterschied  $b$  bzw.  $l$  zur Lösung der 1. Aufgabe herangezogen werden könnten. Weil nämlich die Bogenlänge  $s$  sowie  $\varphi_1$  und  $\alpha_1$  im Punkte  $P_1$  vorgegeben sind, kann mit Hilfe jener beiden Potenzreihen  $b$  und  $l$  berechnet werden; hiedurch ist der Längenunterschied  $\lambda - \lambda_1$  zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P$  bekannt geworden und auch die Breite  $\varphi$  im Punkte  $P$  kann nunmehr berechnet werden. Das Azimut  $\alpha$  der geodätischen Kurve im Punkte  $P$  wird sodann vom Clairautschen Satze in der Form

$$\frac{\cos \varphi \sin \alpha}{W} = \frac{\cos \varphi_1 \sin \alpha_1}{W_1}$$

gegeben. Die 1. Aufgabe läßt sich sonach mit den vorangehenden Formeln direkt lösen, wie übrigens nach den Darlegungen im Abschnitte a) gar nicht anders zu erwarten war.

Gehen wir zur 2. Aufgabe über, für die jene Ausführungen auch eine direkte Lösung in Aussicht stellen. Man erhält sie darnach durch Umkehrung der Potenzreihen für  $b$  und  $l$ . Der Wert der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial (b, l)}{\partial (u, v)}$$

ist für  $u = v = 0$ , also im Punkte  $P_1$ , gleich  $-\sec \varphi_1$ ; sie besitzt demnach, wo auch immer der Punkt  $P_1$  am Rotationsellipsoide liegen mag, einen von Null verschiedenen Wert, die beiden Pole möglicherweise ausgenommen, die als Schnittpunkte unzählig vieler Meridiankurven singuläre Punkte sind, so daß die oben vorgenommenen Entwicklungen nicht ohne weiteres für sie existieren.

<sup>2)</sup> F. R. Helmert, Die mathem. u. phys. Theorien der höheren Geodäsie, I, Leipzig, 1880, S. 296 ff.

Die Umkehrung der beiden Potenzreihen für  $b$  und  $l$  bewerkstelligen wir in der üblichen Weise. Wir setzen zunächst

$$\begin{aligned} u &= -b + A_{20} u^2 + 2 A_{11} u v + A_{02} v^2 + \dots \\ v \sec \varphi_1 &= l - B_{20} u^2 - 2 B_{11} u v - B_{02} v^2 - \dots \end{aligned}$$

Vernachlässigt man hierin Größen der Ordnung  $e^2$  unter der Voraussetzung, daß die Bogenlänge der geodätischen Kurve von der Ordnung  $e$  sei und daher auch die Koordinaten  $u, v$  nicht größer sind, so ergibt sich

$$u = -b, \quad v \sec \varphi_1 = l.$$

Also ist bis auf Größen von der Ordnung  $e^3$  einschließlich

$$\begin{aligned} u &= -b + A_{20} b^2 - 2 A_{11} b l \cos \varphi_1 + A_{02} l^2 \cos^2 \varphi_1 - \\ &\quad - A_{30} b^3 + 3 A_{21} b^2 l \cos \varphi_1 - 3 A_{12} b l^2 \cos^2 \varphi_1 + A_{03} l^3 \cos^3 \varphi_1, \\ v \sec \varphi_1 &= l - B_{20} b^2 + 2 B_{11} b l \cos \varphi_1 - B_{02} l^2 \cos^2 \varphi_1 + \\ &\quad + B_{30} b^3 - 3 B_{21} b^2 l \cos \varphi_1 + 3 B_{12} b l^2 \cos^2 \varphi_1 - B_{03} l^3 \cos^3 \varphi_1. \end{aligned}$$

Will man noch Größen von der Ordnung  $e^5$  berücksichtigen, so müßten in den Potenzreihen für  $b$  und  $l$  noch Größen der Ordnungen  $e^4$  und  $e^5$  mitgenommen werden und in diese erweiterten Reihen die Werte von  $u$  und  $v$  aus den beiden vorangehenden Gleichungen in geeigneter Weise eingetragen werden, indem nämlich bei der Bildung der Potenzen von  $u$  und  $v$  alle Größen von der Ordnung  $e^6$  fortgelassen werden.

In den vorangehenden Gleichungen für  $u$  und  $v \sec \varphi_1$  liegt eine direkte Lösung der 2. Aufgabe vor. Denn da die Breiten- und Längendifferenz  $b$  bzw.  $l$  der Punkte  $P_1$  und  $P$  sowie auch die Breite  $\varphi_1$  in  $P_1$  vorgegeben sind, können die Werte von  $u$  und  $v$  aus jenen Gleichungen und in weiterer Folge auch die Bogenlänge  $s$  der geodätischen Kurve zwischen  $P_1$  und  $P$  sowie ihr Azimut  $\alpha_1$  in  $P_1$  berechnet werden; ihr Azimut  $\alpha$  im Punkte  $P$  gibt sodann der Clairautsche Satz, da ja auch die Breite  $\varphi$  in diesem Punkte vorgegeben ist.

Die Konvergenz der Potenzreihen steht außer Frage; die Größe ihres Konvergenzkreises hingegen erfordert eine besondere Untersuchung. A priori läßt sich nur aussagen, daß die Potenzreihen für  $b$  und  $l$  konvergieren, solange  $\tan \varphi_1$  und  $\sec \varphi_1$  den Wert 1 nicht allzuviel überschreiten; die Potenzreihen dürften demnach auch noch für Punkte  $P_1$  bis zu  $60^\circ$  Breite und vielleicht auch darüber bei Bogenlängen von der Ordnung  $e$  verwendbar sein. Auch glaube ich, daß sich die Formeln zu einem für die zahlenmäßige Rechnung geeigneten Verfahren ausbauen ließen.

## Der Vermessungsingenieur und die Wirtschaft.

Von Theodor Soyka, Vermessungsingenieur, Berlin.

Es hat Zeiten gegeben, wo aus Gründen des Arbeitsmangels ein Beruf dem anderen Arbeitsgebiete zu entreißen versuchte, um seine wirtschaftliche Lage zu verbessern, ohne immer die Wirtschaft selbst dadurch zu verbessern. Die Wirtschaft mußte aber aus den Nachteilen die mangelnde Eignung allmählich erkennen, und so grenzten sich die Arbeitsgebiete bei schnellerem

Wirtschaftstempo auch schneller ab. Diese Grenzen werden natürlich nie unveränderlich sein, denn schon die ständige Entwicklung des Rechtes wird immer wieder zu einer Nachprüfung der Eignung zwingen, neue Gebiete erschließen und alte der Abgabe verfallen lassen.

Für den Vermessungsingenieur hat sich in der Zeit der intensiven Wirtschaft aus Gründen der besten Eignung ein ungeheurer Aufgabenkreis geradezu aufgedrängt, so daß die allgemeine Kenntnis sowohl für die Wirtschaft selbst als auch für die geistige Führung des Berufes von Wichtigkeit ist. Die Wirtschaft muß erkennen, daß durch sachgemäße Vorbereitung und Planung dem Volksvermögen große vermeidliche Ausgaben erspart werden können, und deshalb dem geeigneten Vermessungsingenieur die zweckmäßig von ihm allein zu lösenden Aufgaben übertragen. Die geistige Führung, besonders die Hochschule, muß durch entsprechende Vorbildung den Vermessungsingenieur auf den höchsten Stand der Eignung bringen. Ein starr begrenzter Lehrplan ist deshalb wie in jedem anderen Beruf unmöglich.

Der Vermessungsingenieur hat lange Zeit unter der Berufsbezeichnung „Landmesser“ gelitten, denn der Fernstehende hat seinen Aufgabenkreis immer im Vermessen von Land erschöpft gesehen. Es ist deshalb auch viele Jahrzehnte die Notwendigkeit der vertieften Ausbildung selbst von berufenen Stellen nicht erkannt worden. Noch in neuester Zeit ist der Aufgabenkreis nicht restlos erkannt worden, denn die in den Vordergrund gestellte Urkundstätigkeit ist wohl die Grundlage des Berufes und die vornehmste Aufgabe, für die Wirtschaft aber durchaus nicht immer die wichtigste. Die Beziehungen des Vermessungsingenieurs zur Wirtschaft, besonders des „Oeffentlich bestellten“, der naturgemäß die vielseitigsten Arbeiten zu leisten hat und deshalb die umfassendste Ausbildung benötigt, können deshalb nicht klar genug herausgestellt werden, sie zwingen zu einem Programm für die Zukunft.

Die bisherige Ausbildung war im wesentlichen eine praktische, eine mathematische, vermessungs- und bautechnische, physikalische, chemische, kartographische und rechtswissenschaftliche. In neuerer Zeit hat auch die Photogrammetrie an Bedeutung gewonnen. Die Wirtschaft dürfte aber auch auf dem Gebiete der Ausbildung Reformen erfordern.

Allgemein bekannt ist wohl die Urkundstätigkeit des Vermessungsingenieurs besonders bei Neuauftellung und Fortführung des Katasters. Unter Urkundstätigkeit ist aber jede Arbeit zu verstehen, an die sich rechtliche Wirkung knüpft, also die Aufstellung aller Unterlagen für Stadtbebauungspläne, baupolizeiliche, wasserpolizeiliche und eisenbahntechnische Genehmigungen, für wasserrechtliche Verfahren, Höhenfeststellungen, ja sogar Bauabrechnungen. Weniger bekannt ist die Ingenieurstätigkeit, die gerade in der heutigen Zeit eine sehr große Rolle spielt. Wie schon im Weltkrieg die Vermessungstechnik zu ungeheurer Bedeutung gelangte, — ich denke hier an den Artillerietrigonometrie, ohne den die letzten Offensiven überhaupt undenkbar gewesen wären — so hat besonders der Oeffentlich bestellte Vermessungsingenieur in Jahren der Aufrüstung und des Vierjahresplanes immer wieder seine Unentbehrlichkeit bewiesen. Seine Tätigkeit in der Planung und Ueber-

wachung spart Zeit und Geld in ungewöhnlichen Ausmaßen, und so sollen gerade die Beziehungen zur Bauwirtschaft besonders beleuchtet werden.

Welche Fehler wurden früher bei Großbauten sehr häufig gemacht? Die Auswahl des Geländes nahm gewöhnlich der Kaufmann unter Beratung eines Architekten oder Bauingenieurs vor. An den Vermessungsingenieur dachte man nie. Es wurden Kaufpreis, Verkehrslage, Eisenbahn- und Wasseranschlußmöglichkeit lediglich nach Ortsbesichtigungen erörtert, und dann war die Angelegenheit beschlußreif, das Gelände wurde erworben. Jetzt begann leider zu spät die Tätigkeit des Vermessungsingenieurs. Nach Kenntnis des Projektes traten ihm hier Bedenken bezüglich der Eignung auf. Die Lage am Wasserlauf war notwendig, es war aber nicht festgestellt worden, daß der bisher höchste Hochwasserstand den größten Teil des Geländes überflutete und deshalb eine bedeutende Aufhöhung erforderte, die Hunderttausende kostete. Der bei Hochwasser ansteigende Grundwasserstand machte die Abdichtung aller Keller notwendig, weiterhin bedingte die zu tiefe Lage bei der Abführung der großen Abwässermengen den Einbau von Pumpwerken, um auch die Ableitung bei Hochwasser zu sichern. Der Vermessungsingenieur stellte durch Tachymetrierung oder sein Flächennivellement fest, daß das Gelände nicht geeignet war oder in Anbetracht des Werkumfanges eine Verteuerung des Baues um Millionen notwendig machte.

In anderen Fällen wurde durch nachträgliche Messungen festgestellt, daß Abwässerleitungen im beabsichtigten Umfange wegen mangelnder Aufnahmefähigkeit oder mangelnden Gefälles des Vorfluters ohne erhebliche Flußregulierungen nicht durchführbar waren, oder daß die Einleitung auf rechtliche Schwierigkeiten stieß. Es gibt Fälle, wo große Werke gebaut wurden, ohne vorher die notwendigen Wasserrechtsverleihungen durchzuführen. Und später sind diese Rechte versagt worden. Es könnten noch weitere interessante Beispiele aus der Praxis angeführt werden. Für die Wirtschaft ergibt sich jedenfalls die unbedingte Notwendigkeit, den Vermessungsingenieur schon vor dem Kauf als Berater in Anspruch zu nehmen, denn er ist der wichtigste Sachverständige hierbei.

Nach der Geländeauswahl wurde gewöhnlich vom Architekten ein Projekt ausgearbeitet und den Behörden oder übergeordneten Dienststellen zur Genehmigung vorgelegt. Auch hier mußte der Vermessungsingenieur bei der späteren Absteckung häufig die Undurchführbarkeit des Planes feststellen. Entweder waren Höhenunterschiede und demnach die notwendigen Erdmassenbewegungen zu groß, oder es waren ausgerechnet auf Sümpfen und Moorstellen Gebäude zu errichten. Die Pläne mußten nach diesen Erkenntnissen umgearbeitet werden.

Bei Arbeiten großer Dringlichkeit — und das sind seit fünf Jahren fast alle — sind nach einer verhältnismäßig rohen Geländeaufnahme die Spezialfachbearbeiter sofort an die Arbeit gegangen, und dann stellte sich später heraus, daß Straßenbau, Eisenbahnbau, Kanalisation, Flußregulierung, Fernheizung nicht die notwendige Uebereinstimmung in der Grundlage hatten. Nimmt beispielsweise das Straßenprojekt nicht Rücksicht auf die Kanali-

sation oder auf eine andere Spezialbearbeitung, dann treten Zeitverluste durch die notwendigen Abänderungen ein, und die Projektänderungen sind für die Spezialbearbeitung nicht immer günstig. Der hauptsächlichste Mangel solcher Projekte liegt in dem fehlenden Verständnis des Spezialbearbeiters für die Notwendigkeiten der anderen Bearbeiter. Das beste Projekt wird dann zustandekommen, wenn ein Hauptbearbeiter alle Voraussetzungen der Spezialbearbeiter übersieht und hiernach den günstigsten Generalplan aufstellt. Und hierfür ist der Vermessungsingenieur der geeignetste, weil er die beste Vorbildung mitbringt.

Seine Tätigkeit beginnt bei der Auswahl des Geländes. Bei der Projektierung muß zuerst Aufnahmefähigkeit und Höhe des Vorfluters sowie die Möglichkeit wasserrechtlicher Verleihungen oder wasserpolizeilicher Genehmigungen geprüft werden. In der Nähe der Städte ist die Anschlußmöglichkeit an eine vorhandene Kanalisation zu untersuchen. Anschließend müssen die Schwankungen der Oberflächen- und Grundwasserstände sowie die geologischen Profile nach vorzunehmenden Bohrungen dargestellt werden. Die Hauptvorarbeit besteht in der gesamten Geländeaufnahme mit Plandarstellung aller Einzelheiten in Lage und Höhe einschließlich der erforderlichen Eisenbahn- und Wegeanschlüsse und der Eigentumsverhältnisse. Bei allen diesen Vorarbeiten erhält der Vermessungsingenieur die genauesten Ortskenntnisse und den besten Einblick in die Rechtsverhältnisse, was sich bei der Gesamtplanung besonders günstig auswirkt.

Anschließend ist die Lage der Straßen unter Berücksichtigung der beabsichtigten Bebauung, der Verkehrsverhältnisse und der Höhenlage festzulegen. Hierbei ist zuerst die mögliche Entwässerung zu prüfen, mithin also, vom Vorfluter ausgehend, die Höhenlage der Kanalisation unter Berücksichtigung des zweckmäßigen Gefälles an einzelnen Stellen des Geländes zu errechnen. Durch die notwendige Deckung über den Rohren wird noch die zukünftige Höhenlage des Geländes bestimmt, und es fällt außerdem die Entscheidung, ob Pumpwerke notwendig werden. Nach dieser Entscheidung muß die Straßenfestlegung nach Lage und Höhe unter Berücksichtigung des erforderlichen Massenausgleiches des zu bewegenden Bodens erfolgen, und dies dürfte zu den wichtigsten Arbeiten des Vermessungsingenieurs gehören. Es sollen die günstigsten Vorbedingungen für alle Teilbearbeitungen geschaffen, die günstigsten Verkehrsverhältnisse bezüglich der Steigungen gewährleistet und trotzdem die möglichst geringste Bodenmasse bewegt werden. Die Grundbedingung wird schon hier der Ausgleich von Auftrag und Abtrag sein, wobei alle eintretenden Ausschachtungen der Gebäude, Kanalisation, Wasserleitung, Fernheizung, Kabel usw. roh geschätzt werden müssen. Dann ist die Lage der Kanalisation unter Berechnung der Höhen und des Gefälles festzulegen und anschließend die erforderliche Höhe der Häuser zu bestimmen, die sich wegen der Entwässerungsmöglichkeit nach der Höhe der Kanalisation richten muß.

Auf dieser Grundlage baut sich dann die weitere Teilplanung auf, bei der sich der Vermessungsingenieur wohl beteiligen kann, bei großen Bauvorhaben

aber schon aus Mangel an Zeit auf Teilnahme verzichten muß. Er wird sich der wichtigsten Aufgabe unterziehen müssen, die eingehenden Bearbeitungen auf Übereinstimmung in der Grundlage zu prüfen und im Bauplan einheitlich zu verarbeiten. Bei ausreichender Zeit ist jedoch der Vermessungsingenieur in der Lage, Spezialbearbeitungen der Entwässerung und der Eisenbahnanschlüsse vorzunehmen. Die Unterlagen werden dann so aufgestellt, daß sie für die Herbeiführung der landespolizeilichen Genehmigung der Eisenbahn und für die Verleihungsverfahren der benötigten Wasserrechte genügen. Gerade auf diesen Gebieten haben sich Vermessungsingenieure auch als gute Spezialisten ausgezeichnet.

Mit Abschluß der Projektierung treten nun an den Vermessungsingenieur mehrere Aufgaben heran, zu deren Erledigung viel Hilfspersonal erforderlich ist. Zuerst müssen die wasserrechtlichen Verleihungsverfahren für die benötigten Wasserrechte der Wasser- und Abwässereinleitung in den Vorfluter, die Zutageförderung unterirdischen Wassers, für Häfen, Stichkanäle, Anlegestellen, ferner die Zwangsrechtsverfahren gegen Grundeigentümer, die die Durchführung von Rohrleitungen zur Wasserbeschaffung oder Beseitigung der Abwässer nicht dulden wollen, mit den entsprechenden Planunterlagen ausgestattet und rechtlich durchgeführt werden. Dann sind aber auch in gleicher Weise die wasserpolizeilichen und wegepolizeilichen Genehmigungen herbeizuführen. Gerade der Vermessungsingenieur wird hier die größte Zeitersparnis erzielen können, denn bei den vorbereitenden Arbeiten der Planung wird bereits auf diese Notwendigkeiten Rücksicht genommen, die Unterlagen müssen im wesentlichen vorbereitet sein. Außerdem muß zu gleicher Zeit die endgültige Berechnung der zu bewegenden Erdmassen, die Ermittlung aller für die Ausschreibung der Bauarbeiten festzustellenden Flächen und Größen erfolgen und dann die Aufstellung der Massenverteilungspläne mit Festlegung der vorgeschriebenen Beförderungsweiten, die die größte Verbilligung der Arbeiten gewährleistet. Es kann dann an jeder beliebigen Stelle angefangen werden, und stets wird festliegen, wohin der Boden zu bewegen ist. Die „Fortschreibung“ der Massenverteilungspläne bei später notwendig werdenden Abänderungen entsprang der Erfahrung eines Vermessungsingenieurs und hat der Bauleitung die notwendige Sicherheit gegeben.

Weiterhin müssen zu gleicher Zeit die Absteckungen für den Bau von Straßen, Häusern, Eisenbahnen, Kanalisierung, Wasserleitung, Fernheizung mit allen notwendigen Höhenangaben vorgenommen werden, und diese belasten den Vermessungsingenieur mit einer ungewöhnlichen Verantwortung. Da fast alle Unternehmer zu gleicher Zeit beginnen müssen, ist rechtzeitige Vorsorge unbedingt erforderlich. Wie wichtig ist auch die ständige Höhenkontrolle durch Feinnivellement, wenn Gebäude auf unsicherem Baugrund errichtet werden. Mit jeder zusätzlichen Belastung von Stockwerk zu Stockwerk wird die Haltbarkeit der künstlichen Fundierung durch den Vermessungsingenieur geprüft. Selbst nebensächliche Entscheidungen werden heute auf den Vermessungsingenieur abgewälzt, er weiß wegen seiner örtlichen Orientierung am

besten, wo Baubuden errichtet, behelfsmäßige Transportwege geschaffen werden können, ohne daß sie andere Arbeiten behindern.

Zu gleicher Zeit wird der Grunderwerb getätigt, und es sind deshalb die Katasterfortschreibungsmessungen in Angriff zu nehmen. Nach der vorläufigen Ermittlung der Flächen werden Abschlagszahlungen geleistet und ebenso werden vermessungstechnisch die fortschreitenden Bauarbeiten überwacht, um die genaue Innehaltung des Planes zu sichern. Bei Abschluß der Bauarbeiten hat dann die Schlußaufnahme nach Lage und Höhe zu erfolgen, die die Grundlage für alle Abrechnungen der Unternehmer bildet. Auch hier muß schwere Verantwortung durch den Vermessungsingenieur übernommen werden.

Die Vorbereitung der Fortschreibungsmessungen mit den erfolgten Bau- und Schlußvermessungen befähigt dann auch den Vermessungsingenieur zur Aufstellung einwandfreier Schlußpläne. Es lassen sich alte voraufgegangene Messungen hierzu verwerten, und es braucht nicht Doppelarbeit geleistet zu werden, was z. B. dann erforderlich ist, wenn von dem vorbeschriebenen Verfahren abgegangen und Kräfte beschäftigt werden, die den Zusammenhang nicht übersehen und die Messungsverfahren nicht entsprechend beherrschen.

Es war auch ein Oeffentlich bestellter Vermessungsingenieur, der durch seine Vorschläge Ministerialerlasse herbeigeführt hat, die die Notwendigkeit solcher Schlußpläne anordneten. Damit wurde wichtigstes Messungsmaterial gesichert, das bisher in den Akten buchstäblich verschwand. Wie häufig sind kostspielige Messungen wiederholt worden, weil die früheren nicht mehr bekannt waren.

Diese Schlußpläne müssen deshalb auch in Zukunft „fortgeschrieben“ und in besonderen Dienststellen aufbewahrt werden und jede notwendige Auskunft geben. Es wird dann nicht mehr vorkommen, daß man in späteren Jahren bei neuen Bauten unterirdisch auf Anlagen stößt, von deren Vorhandensein bei der Projektierung der neuen Arbeiten nichts bekannt war. Kostspielige Umlegungen werden damit vermieden.

Es ergibt sich aus diesen Ausführungen, daß der Vermessungsingenieur die Seele eines Großbaues ist oder sein kann. Gewiß kann die eine oder andere Arbeit von Ingenieuren anderer Fachrichtungen geleistet werden, weil sie in den Grenzgebieten liegen. Für die Wirtschaft bietet aber die einheitliche Bearbeitung des Vermessungsingenieurs außerordentliche Vorteile durch Zeitgewinn und Zeitersparnisse. Selbstverständlich wird der Oeffentlich bestellte Vermessungsingenieur der geeignetste sein, denn er erhält durch ständig wechselnde Aufgaben die größte Erfahrung, was dem fachlich spezialisierten Beamten nicht möglich ist. Für diesen sind schon durch den Verwaltungsbereich seines zuständigen Ministeriums die Grenzen gezogen. Wer die Bedürfnisse der Wirtschaft kennt, wird deshalb den Oeffentlich bestellten Vermessungsingenieur gerade durch die glückliche Verbindung von Eignung und Urkundsbefähigung als unentbehrlich schätzen. Es gibt heute Riesenbauvorhaben, die nachweislich in weniger als Jahresfrist durchgeführt wurden. Ohne den Vermessungsingenieur wäre das bestimmt nicht möglich gewesen.

Aber auch auf anderen Gebieten ist der Vermessungsingenieur heute unentbehrlich. Bei großen Bauvorhaben hat heute die Methode der Grundwasser-senkung zur Trockenlegung der Baugruben in Deutschland allgemeine Verwendung gefunden. Ganz Berlin liegt zeitweilig in solchen Senkungstrichtern, und es bleibt kaum ein Gebäude in seiner Höhenlage unbeeinflusst. Eine Schadensersatzforderung kann immer nur dann geltend gemacht werden, wenn bewiesen werden kann, daß die Schäden auf Senkung zurückzuführen sind, in welcher Zeit und durch wen. Diese Aufklärung kann der Vermessungsingenieur allein durch seine Feinmessung geben, es ist hier für Hauseigentümer, Hypothekengläubiger, Versicherungsgesellschaften mit der Beurkundung der ermittelten Höhen und Veränderungen der wichtigste Sachverständige oder Zeuge bei Eintritt eines Schadens. Seine Arbeiten sichern wie keine anderen das von der Wirtschaft im Hausbesitz angelegte Kapital. Auch hier hat ein Vermessungsingenieur die neuen Wege der Beweissicherung gezeigt und den Berufsstand zu außerordentlicher wirtschaftlicher Bedeutung gebracht.

Es gibt noch viele andere Beziehungen zur Wirtschaft. Der Hypothekengläubiger verlangt beglaubigte Unterlagen des Beleihungsgegenstandes, der Landwirt Wirtschaftskarten, Schätzungen, das Gericht unabhängige Sachverständige, und für jede Verwaltung ist er bei Arbeitsanhäufung die letzte Arbeitsreserve. Wer die Notwendigkeit des Öffentlich bestellten Vermessungsingenieurs bestreitet, kennt nicht die Bedürfnisse der Wirtschaft. Er kann hier auch nie durch einen Beamten abgelöst werden, denn der Beamte ist immer der Spezialist, der die vorher herausgehobenen Vorteile nicht bieten kann, und er ist nicht unabhängig. Die Zukunft verlangt die Lösung größerer Aufgaben als die Vergangenheit. Wenn schon die Vergangenheit bei der Verbeholdlichung außerordentliche Schwächen durch Mangel an Leistungsfähigkeit aufgedeckt hat, die Gegenwart untrüglich die absolute Notwendigkeit des Öffentlich bestellten Vermessungsingenieurs beweist, so muß die Zukunft bei der immer größer werdenden Wirtschaft sogar zur Verstärkung, geistiger Vertiefung und Förderung dieses Standes unbedingt führen.

## Bücherschau.

*Die Fernrohre und Entfernungsmesser.* Von Dr. Albert König, Beamten des Zeiß-Werkes. Zweite Auflage. Mit 360 Abbildungen und 13 Bildnissen. Berlin. Verlag von Jul. Springer. 1937. V + 242 S. Preis geh. 22.50 RM., geb. 24.00 RM.

Gegenüber der ersten im Jahr 1923 erschienenen Auflage ist die Neubearbeitung in vielen Teilen ein neues Buch geworden. Das spricht sich schon im ersten Kapitel aus, in dem jetzt eine eingehende Darstellung der allgemeinen Abbildung durch Linsen, Spiegel und Prismen gebracht wird. Ebenso ist dem Auge und dem Sehen, auch besonders dem räumlichen Sehen ein gegen früher erweitertes Kapitel gewidmet. Dann erst folgt als eines der Hauptkapitel der Bau des Fernrohrs, in dem alle Einzelformen des Fernrohrs, das holländische Fernrohr, das astronomische Fernrohr, das Spiegelfernrohr und die verschiedenen Konstruktionen für die Aufstellung der Fernrohre auf den Sternwarten beschrieben werden. Weitere Abschnitte umfassen u. a. das Erdfernrohr, die Prismenfernrohre, die Periskope und die Doppelfernrohre; wertvolle Angaben über die Prüfung des Fernrohrs beschließen dieses Kapitel.

Die Beschreibung der Richtfernrohre, die den Inhalt des nächsten Kapitels bildet, enthält nicht nur die Zielfernrohre der Meßinstrumente, sondern auch die der Gewehre und Geschütze.

Alles dies bezog sich auf das Fernrohr. Der nächste Abschnitt, in dem die Mikrometer behandelt werden, enthält auch manches geodätisch interessante, z. B. das Schraubenmikrometer, das unpersönliche Mikrometer des Durchgangsinstrumentes, die Parallelplattenmikrometer u. a.

Besonders interessant ist das Kapitel über Entfernungsmesser, das in dieser Vollständigkeit anderswo kaum zu finden ist. Von den geodätischen Entfernungsmessern sind aufgenommen der von Reichenbach mit den verschiedenen Mitteln zur Verfeinerung der Lattenablesung, z. B. von Dieperink, Heckmann, Tichy. Es folgen die Tangentschraube, die Schiebe- und Kontakttachymeter und weiter in großer Vollständigkeit die selbsttätigen Reduktionsvorrichtungen bis zum Tachymeter Zeiß-Boßhardt.

Die als Zweistandentfernungsmesser bezeichneten Instrumente sind in erster Linie für militärische Zwecke bestimmt; unter ihnen sind besonders interessant die Raumbildentfernungsmesser oder stereoskopischen Entfernungsmesser.

Wir übergehen die Ausführungen über Höhenmesser, die hauptsächlich für die Bekämpfung von Flugzeugen bestimmt sind und erwähnen nur noch die Hochstands-entfernungsmesser, worunter die Instrumente verstanden sind, die zur Entfernungsbestimmung nach Zielpunkten auf See von hochliegenden Küstenpunkten aus dienen. Solche Messungen sind naturgemäß in hohem Maß von den Schwankungen der Refraktion abhängig.

Das letzte Kapitel behandelt die Geschichte des Fernrohrs von Lipperhey bis Porro, das schon im Anfang über die Erfindung Lipperheys interessante Einzelheiten gibt. Es wird dann eingehend die Entwicklung des Fernrohrs geschildert bis zu Fraunhofer, der dem astronomischen Fernrohr im wesentlichen die heutige Gestalt gegeben hat, und zu Porro, der mit seinen vielen Erfindungen der Vorläufer neuer Konstruktionen, so z. B. des heutigen Prismenfernrohrs geworden ist.

Das Buch ist sehr gut ausgestattet und zeigt viele wertvolle Abbildungen sowie eine Reihe von Bildern der Männer, die sich in erster Linie um die Förderung des Fernrohrs verdient gemacht haben.

Das Werk wird allen willkommen sein, die sich über den Rahmen der geodätischen Lehrbücher hinaus mit den vielen Formen des Fernrohrs und seinen Anwendungen beschäftigen wollen.

Eggert.

## Gesetze, Verordnungen und Erlasse.

### Verwendung der Luftphotogrammetrie für Umlegungsmessungen.

RdErl. d. RMiEuL. v. 21. 3. 1939 — VI/14-40204 —.

Bei allen Umlegungen muß bereits in einem möglichst frühen Zeitpunkt geprüft werden, ob die vorhandenen Kartenunterlagen zur Durchführung der Umlegung genügen oder ob umfangreiche Ergänzungen und Berichtigungen notwendig sind. Ist letzteres der Fall, so müssen zur Beschleunigung alle arbeitsfördernden, vermessungstechnischen Verfahren herangezogen werden. Es ist jeweils zu prüfen, ob die bisherigen terrestrischen Arbeitsweisen wirtschaftlich sind, oder ob durch Anwendung der Luftphotogrammetrie diese Arbeiten unter Einsparung von Arbeitskräften in kurzer Zeit mit genügender Genauigkeit erledigt werden können.

Ich empfehle die Anwendung der Luftphotogrammetrie

1. zur Ergänzung vorhandener Katasterkarten hinsichtlich der Veränderungen von Wasserläufen, Wegen usw. und der Kulturarten einschl. der Obstbaumanlagen für die Schätzung der Grundstücke, den Entwurf des Wege- und Gewässerplanes und die Bearbeitung des Besitzstands- und Schätzungsnachweises. In ebenem Gelände genügt hierzu die Entzerrung und Anfertigung eines Luftbildplanes; in hügeligen Lagen jedoch müssen Doppelbilder zu einer Karte ausgewertet werden;

2. zur Herstellung der Schätzungsrisse und Übersichtskarten (Einlagenkarten), wenn die vorhandenen Karten für die Umlegungsarbeiten unbrauchbar sind;
3. zur Fertigung von Höhenschichtenkarten, wenn solche zum Entwurf des Wege- und Gewässerplanes erforderlich sind, die Meßtischaufnahmen jedoch keine Schichtlinien enthalten und auch sonst keine brauchbaren Höhendarstellungen vorhanden sind.

Wegen der Verwendung der Luftphotogrammetrie zu Katasterneumessungen im Umlegungsverfahren habe ich ein Gutachten des Forschungsbeirats für Vermesstechnik und Kartographie erbeten.

Bis zum 1. 1. 1940 ist mir zu berichten, welche Erfahrungen bei der Anwendung der Luftphotogrammetrie bei Umlegungen gemacht wurden.

Im übrigen, besonders hinsichtlich Antrag, Kosten und Bezuschussung verweise ich auf meinen RdErl. v. 15. 10. 1936 — VI 14946/VII 55512 — (LwRMBL. S. 537).  
— LwRMBL. S. 374.

### Hilfskräfte bei Öffentlich bestellten Vermessungsingenieuren.

RdErl. d. RMDI. v. 25. 3. 1939 — VI a 5178/39-6846.

Der Öffentlich bestellte Vermessungsingenieur hat die in § 1 Abs. 1 Ziff. 1 und 2 VermIngBO. (RGBl. 1938 I S. 40) genannten Arbeiten insoweit persönlich auszuführen, als es seine Beurkundungspflicht erfordert. Das schließt jedoch die Beschäftigung von Angestellten nicht aus. Der Öffentlich bestellte Vermessungsingenieur ist vielmehr gem. § 5 der Geschäftsordnung für die Öffentlich bestellten Vermessungsingenieure (Anl. C des RdErl. v. 31. 3. 1938 — VI a 4136/38-6846, RMBliV. S. 585) verpflichtet, sich bei der Durchführung seiner Berufsarbeiten der Mitwirkung von Hilfskräften zu bedienen, wenn dieses nach der Art der ihm übertragenen Arbeiten für eine zweckentsprechende Erledigung erforderlich erscheint. Die Hilfskräfte müssen für die von ihnen auszuführenden Arbeiten geeignet und vorgebildet sein. Im einzelnen bestimme ich folgendes:

#### I.

(1) Die im Arbeitnehmerverhältnis beschäftigten Hilfskräfte, die entweder zum höheren vermessungstechnischen Verwaltungsdienst (VO. v. 3. 11. 1937, RGBl. I S. 1165) befähigt sind

oder den Befähigungsnachweis für die bisherige Vereidigung gem. § 36 der GewO. besitzen,

dürfen mit Genehmigung der Aufsichtsbehörden alle vermessungstechnischen Arbeiten unter der Leitung und vollen Mitverantwortung des Öffentlich bestellten Vermessungsingenieurs ausführen, soweit diese Arbeiten nicht infolge des allein dem Öffentlich bestellten Vermessungsingenieur vorbehaltenen Beurkundungsrechtes von diesem persönlich ausgeführt werden müssen. (So ist z. B. die Beurkundung von Grenzverhandlungen allein Sache des Öffentlich bestellten Vermessungsingenieurs.)

(2) Der Öffentlich bestellte Vermessungsingenieur hat das Gesuch um Erteilung der Genehmigung zu (1) unter Beifügung eines Lebenslaufs, eines polizeilichen Führungszeugnisses, von Zeugnissen über die Ausbildung und die bisherige Tätigkeit der Hilfskraft bei der Aufsichtsbehörde einzureichen. Die Genehmigung ist gegen jederzeitigen Widerruf auszusprechen.

#### II.

(1) Anderen vermessungstechnischen Angestellten können einfachere örtliche Messungsarbeiten in beschränktem Umfange übertragen werden, insbesondere die Abmarkung sowie bei Fortführungsmessungen die eigentliche Aufmessung und bei Neumessungen die Stückvermessung — einschl. der Führung des Feldbuches (Neumessungsrisse) —. Die von diesen Hilfskräften geführten Feldbücher usw. sind von den Feldbüchern der Öffentlich bestellten Vermessungsingenieure und gegebenenfalls der unter I genannten Hilfskräfte getrennt zu führen.

(2) Die Aufsichtsbehörde entscheidet darüber, welchen bei Öffentlich bestellten Vermessungsingenieuren tätigen vermessungstechnischen Angestellten solche örtlichen Messungsarbeiten übertragen werden dürfen. Der in Frage kommende vermessungstechnische Angestellte muß

entweder das Abschlußzeugnis eines anerkannten dreisemestrigen vermessungstechnischen Lehrganges einer Staatsbauschule besitzen und das 21. Lebensjahr überschritten haben

oder mindestens 8 Jahre lang im Vermessungswesen beschäftigt gewesen sein.

(3) Dem von dem Öffentlich bestellten Vermessungsingenieur einzureichenden Gesuch sind mindestens 3 Probearbeiten des vermessungstechnischen Angestellten, die er unter Aufsicht des Öffentlich bestellten Vermessungsingenieurs ausgeführt hat, und zu denen sich der Öffentlich bestellte Vermessungsingenieur gutachtlich zu äußern hat, sowie der Lebenslauf, das polizeiliche Führungszeugnis und Zeugnisse über Ausbildung und bisherige Tätigkeit beizufügen. Auf den zu den Probearbeiten gehörenden Feldbüchern ist zu bescheinigen, daß der vermessungstechnische Angestellte die Messungen selbständig ausgeführt hat. Die Genehmigung ist in einem dem Geschäftsbetriebe des Öffentlich bestellten Vermessungsingenieurs angepaßten Umfange (im allgemeinen für nicht mehr als 2 Angestellte) gegen jederzeitigen Widerruf auszusprechen.

### III.

(1) Der Öffentlich bestellte Vermessungsingenieur hat alle Arbeiten seiner Hilfskräfte ständig zu überwachen und sich fortlaufend von ihrer Zuverlässigkeit und Sorgfalt zu überzeugen.

(2) Er hat ferner jede Messungsschrift auf ihre Richtigkeit und Verwendbarkeit hin eingehend zu prüfen und zu bescheinigen, daß die Messung unter seiner ständigen Leitung und Aufsicht und seiner vollen Verantwortung ausgeführt worden ist. Eine Prüfungsniederschrift ist den Messungsschriften beizufügen.

### IV.

Nach Nr. 3 der Ausf.-Vorschriften zur Berufsordnung der Öffentlich bestellten Vermessungsingenieure v. 31. 3. 1938 — VI a 4136/38-6846 können Neuzulassungen nur in beschränktem Umfange und bei dringendem Bedarf erfolgen. Die Annahme von Assessoren des Vermessungsdienstes zur Ausbildung nach § 2 Abs. 3 Ziff. 2 VermIng.BO. bedarf daher meiner Zustimmung.

— RMBliV. S. 725.

## Vermessungswesen in Sachsen.

Erl. des Reichsstatthalters in Sachsen — Landesregierung —  
v. 20. Dez. 1938, Nr. II A 211/8 : 6.

In Durchführung des Gesetzes über die Bildung von Hauptvermessungsabteilungen vom 18. März 1938 (RGBl. I. S. 277) und des dazu ergangenen Runderlasses des Reichsministers des Innern vom 7. Juni 1938 (RMBliV. S. 981) bestimme ich, daß das Vermessungswesen aus dem Geschäftsbereiche des Finanzministeriums in den des Ministeriums des Innern übergeht. Beim Ministerium des Innern wird eine Abteilung Vermessungswesen gebildet, der als Unterabteilungen angehören:

- a) Die Hauptvermessungsabteilung III, umfassend den Hauptvermessungsbezirk III — Land Sachsen —,
- b) das bisherige Landesvermessungsamt, das die Bezeichnung „Kataster- und Messungsverwaltung“ führt.

Die Bezirksvermessungsämter erhalten die Bezeichnung „Katasterämter“. Sie gehören ebenfalls zum Geschäftsbereiche des Ministeriums des Innern.

Sächs. Vbl. I. v. 23. 12. 38, S. 443.

## Mitteilungen des D V V.

### Veranstaltungen.

**Gaugruppe Ostpreußen:** 22. April 39, 17 Uhr in Königsberg/Pr., Hotel Berliner Hof, Steindamm. Es spricht Vermessungsdirektor Kurandt über „Untersuchungen über die Verwendung der Luftbildmessung zur Erneuerung des Katasters“.

**Gaugruppe Schlesien.** Einladung zur Hauptversammlung des Bezirksvereins Mittelschlesien des D.V.V. am 22. 4. 39 um 17.30 Uhr im Hörsaal 140 der Technischen Hochschule zu Breslau. Einziger Punkt der Tagesordnung: Bericht des Vorsitzenden und Beschlußfassung über die Auflösung des alten Bezirksvereins e. V.

**Gaugruppe Rhein-Westfälisches Industriegebiet.** 14. Mai 1939, Duisburg, im Saale der Börse: Frühjahrsversammlung. Hauptvortrag: Reg. Rat Kurandt vom Reichsministerium des Innern über „Das neue Reichskataster“. Anschließend ist ein Kurzvortrag über moderneervielfältigung von Karten vorgesehen. Den Abschluß der Tagung bildet eine Besichtigungsfahrt durch die Duisburg-Ruhrorter Häfen. Die genaue Tagungsordnung wird noch später bekannt gegeben.

### Verichte.

**Gaugruppe Berlin-Brandenburg:** Am 11. März fand ein Bezirkstreffen in Angermünde statt, zu dem 50 Berufskameraden aus Angermünde, Prenzlau, Eberswalde und Bad Freienwalde erschienen waren. Vermessungsrat Unger behandelte in seinem Vortrag „der Deutsche Verein für Vermessungswesen und die Neuordnung des Vermessungswesens“ zunächst die neuen Aufgaben, die dem Vermessungswesen auf Grund des Gesetzes über die Neuordnung des Vermessungswesens vom 3. 7. 1934 gestellt sind. Er wies daraufhin, daß für die meisten Vermessungsverwaltungen heute andere Aufgaben im Vordergrund stehen als einst und schilderte, wie der Deutsche Verein für Vermessungswesen durch seine Einrichtungen namentlich die Reichsfachauschüsse und die Gaugruppen an der Neugestaltung des deutschen Vermessungswesens mitwirken kann und muß. Der Kreisschulungswalter des Nationalsozialistischen Bundes Deutscher Technik, Pg. Dehrmann, legte anschließend die Aufgaben des NS-Bundes Deutscher Technik sowie seine Organisation und insbesondere die Stellung der technisch-wissenschaftlichen Vereine dar. Er rief alle Berufskameraden zur tatkräftigen, aktiven Mitarbeit in dem von Dr. Todt geleiteten Nationalsozialistischen Bund Deutscher Technik auf. Den Hauptvortrag hielt Regierungsrat Dr. Gronwald vom Reichsamt für Landesaufnahme. Er sprach über „Die Laufendhaltung der topographischen Kartenwerke“. Er vermittelte den Teilnehmern einen Einblick in die heute so wichtigen Aufgaben der Topographie, schilderte zunächst die verschiedenen Aufnahmeverfahren und nahm zu ihnen kritisch Stellung, behandelte dann eingehend die Laufendhaltung dieser Kartenwerke und zeigte, wie jede einzelne Messungsverwaltung hieran beteiligt ist; denn der topographische Meldedienst erfordert die Mitwirkung auch des abseits gelegenen Messungsamtes. Die Ausführungen wurden mit großem Beifall aufgenommen und bei dem anschließenden Beisammensein im Hotel Drei Kronen wurden immer wieder die Wünsche laut, derartige Veranstaltungen auch in kleineren Städten der Gaugruppe zu wiederholen.

**Gaugruppe Hessen-Nassau:** Am 12. III. 39 sprach in Frankfurt a. M. Vermessungsamtmann Klamm vom R. f. L. über das Kriegsvermessungswesen im Weltkrieg 1914 bis 1918. „Die Landesaufnahme hatte für den Kriegsfall gewisse organisatorische Vorbereitungen getroffen, die im Verlauf des Weltkrieges den erhöhten Anforderungen angepaßt wurden. Die Hauptaufgabe bestand in der Schaffung von Einheitskarten 1: 25 000 und Spezialkarten für Artillerie, Minenwerfer, Pioniere u. f. f. Ab Juli 1915 erhielt jede Armee eine Vermessungsabteilung, denen die modernsten und besten Hilfsmittel zur Verfügung standen. Der Redner erwähnte die Schwierigkeiten, die sich aus dem Fehlen des Kartengrundmaterials, bzw. seiner außerordentlichen Verschiedenartigkeit für die Herstellung einheitlicher Kartenwerke zwangsläufig ergaben. So lag den älteren französischen Karten das Sphäroid von Delambre, dagegen den neueren das Erdsphäroid von Clarke zu Grunde. Die Differenz der Meridianbogenlänge beträgt bei 54° der Breite bereits 50 m. Die älteren russischen Karten basierten auf dem Erdsphäroid von Walbeck, die neueren auf dem Sphäroid von Bessel, und für das Gouvernement Warschau war ein Uebereinstimmungssphäroid im Gebrauch. Hier waren auch verschiedene Maße, das internationale und das von Tenner (das kürzer ist) im Gebrauch. Auch die Höhenangaben in den verschiedenen Feindländern, in die uns der Krieg führte, waren bei der Herstellung der artilleristischen Schießpläne zu beachten. So liegt der französische Nullpunkt 0,809 m tiefer als der deutsche, der russische dagegen 0,31 m höher. Mit all diesen Widerwärtigkeiten hatten die Feindmächte bei ihrer Kartenherstellung kaum zu kämpfen. Die glänzenden Leistungen der Vermes-

fungsfachleute wurden im Heeresbericht vom 16. Juli 1918, sowie durch Generalfeldmarschall v. Hindenburg und General Ludendorff besonders anerkannt.“ — Als zweiter Redner sprach Pg. Ministerialrat a. D. Dr. Ing. Müller aus Darmstadt über „die Bedeutung der Morphologie für die Wehrgeodäsie“. Heute versuche jeder Wissenszweig das herauszukristallisieren und zu entwickeln, was der Landesverteidigung nützen kann. Wir sprechen demgemäß von Wehrtechnik, Wehrgeographie, Wehrgeologie usw. und können sehr wohl auch von Wehrgeodäsie reden. Dazu gehört u. a. die Kartenaufnahme und -zeichnung. An drei Beispielen, einer Eisfendlandschaft mit Maaren, einer Stufenlandschaft und einer Endmoränenlandschaft, zeigte der Redner, daß die Geländedarstellung und ihre Generalisierung für Karten kleinen Maßstabs nur nach geomorphologischen Gesichtspunkten erfolgen könne.

**Gaugruppe Mecklenburg:** Im verfloßenen Winterhalbjahr veranstaltete die Gaugruppe Mecklenburg drei Vortragsabende, davon zwei in Schwerin und einen in der Seestadt Rostock. Auf der ersten Veranstaltung in Schwerin sprach Reichsbahnrat Höfer, Altona, über „Neuzeitliche Messungen zur Verbesserung der Gleisbogen“, auf der zweiten Veranstaltung in Schwerin Reg. = u. Verm. Rat Schack, Schwerin, über „Reichsumlegungsordnung und ihre Bedeutung für Mecklenburg“ und auf der Veranstaltung in der Seestadt Rostock Reg. = u. Verm. Rat Dr. Wiedow über „Erfahrungen bei Anfertigung der Katasterplankarte in Mecklenburg“. Der Besuch der Tagungen war sehr gut.

#### Personalnachrichten.

**Preußen.** Landeskulturverwaltung. **Ernannt:** Verm. rat Verbe z. Reg. = u. Verm. rat u. z. verm. technischen Dezernenten b. d. Landeskulturabt. i. Münster; z. Verm. rat: Reg. landm. Dieck, Heide, Hauer u. Frobenius i. Bad Kreuznach, Wagner, Paul, Prüm, Kossyk u. Risse, Trier, Schmidt, Heinrich, Udenau, Lübke, Siegburg, Schneider, Münster; z. Verm. insp.: Verm. obersekr. Bauer, Lübeck, Verm. prakt. Viehlig u. Rudolph, Heide, Neumann, Simmern, Teebaark, Mayen, Kolfelz, Prüm, Müller, Simmern, Kaake, Merseburg, Nicolaus, Torgau, Neumann, Merseburg, Engelbach, Arnsberg, Kube, Bielefeld, Klawitter, Dortmund, Verm. obersekr. Braach, Siegen. — **Bestellt:** Zum lt. Vermessungsbeamten: die Verm. Räte Lange, Kassel (Landeskulturabt.), Kompf, Koblenz, u. Wagner Paul, Prüm; zum Bürovorsteher: Verm. insp. Hiler, Göttingen. — **Verteigt:** die Verm. assessoren Hengesbach, Düsseldorf nach Prüm, Grobel, Elbing nach Trier, Nordmann, Bonn nach Prüm, Kiewendt, Stendal nach Magdeburg (L. K. A.), u. Ufer, Eisenach nach Torgau; Reg. Landm. Düllmann, Soest nach Bielefeld, die Verm. inspektoren Stauffenberg, Eschwege nach Meppen, Osburg, Dillenburger nach Lüneburg, Held, Dillenburger nach Hannover, u. Schott, Kassel nach Merseburg (Landeskulturarchiv), Verm. prakt. Volstorf, Lüneburg nach Wesermünde. — **In den Staatsdienst übernommen:** Als Verm. supernumerar: Verm. Volontär Löwer, Dillenburger; Schulte, Arnsberg. — **In den Ruhestand getreten:** Reg. = u. Verm. rat Becker, Münster, Reg. Landm. Johann, Limburg. — **Aus dem Staatsdienst ausgeschieden:** Verm. prakt. Geimer, Prüm.

**Verstorben:** Verm. Rat i. R. Purps, Lübben, Verm. Rat i. R. Warkenthien, Köln.

**Gaugruppe Hessen-Nassau.** **Ernannt:** Oberlandmesser Bärenz, Darmstadt, zum Vermessungsrat.

#### Inhalt:

**Oberregierungsrat a. D., Professor Dr.-Ing. Gustav Clausz †.** — **Wissenschaftliche Mitteilungen:** Einschaltung von Aufnahmepunkten in ein Dreiecksnetz durch Streckenzüge mit optischer Längenmessung, von Huber und Rinner. — Die beiden Hauptaufgaben der geodätischen Uebertragung, von Hopfner. — Der Vermessungsingenieur und die Wirtschaft, von Soyka. — **Bücherschau.** — **Gesetze, Verordnungen und Erlasse.** — **Mitteilungen des DVW.**