ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

herausgegeben vom

Deutschen Verein für Vermessungswesen (D.V.W.) E.V.

im Nationalsozialistischen Bund Deutscher Technik

Hauptschriftleiter: Professor Dr. Dr.-Ing. E. h. O. Eggert, Berlin-Dahlem

Ehrenbergstraße 21

Heft 20.

1939 15. Oktober 68. Jahrgang

Jacobis geodätische Abbildung des Rotationsellipsoids auf die Kugel.

Von F. Hopfner, Wien.

Bei der Verbiegung einer Fläche — gegebenenfalls verbunden mit einer ähnlichen Vergrößerung — auf eine zweite gehen die geodätischen Kurven beider Flächen ineinander über. Solche geodätische Abbildungen schließen wir von der Betrachtung aus; denn das Rotationsellipsoid kann auf die Kugel nicht verbogen werden. Wir fassen infolgedessen nur solche reelle Abbildungen ins Auge, die aufeinander unverbiegbare Flächen Punkt für Punkt so abbilden, daß ihre geodätischen Kurven ineinander übergehen. Als erster hat sich erfolgreich mit dieser besonderen Klasse geodätischer Abbildungen Beltrami befaßt, dem der Nachweis gelang, daß sich die Flächen konstanter Krümmung und nur diese Flächen geodätisch in die Ebene abbilden lassen [1]. Ein bekanntes Beispiel zu dem Satze liegt in der Zentralprojektion der Kugel auf eine Ebene vor. Wir schließen aus dem Satze, daß das Rotationsellipsoid in die Ebene geodätisch nicht abbildbar ist; denn es gehört nicht zu den Flächen konstanter Krümmung. Aber es kann auch nicht auf die Kugel geodätisch abgebildet werden. Wäre es nämlich auf die Kugel geodätisch abbildbar, so wäre es auf dem Umwege über diese auch auf die Ebene geodätisch abbildbar. Drei Jahre später wies Dini nach, daß sich zwei Flächen dann und nur dann geodätisch aufeinander abbilden lassen, wenn sich die Quadrate ihrer Bogenelemente mittels eines und desselben Parameterpaares u, v, das auf beiden Flächen einander entsprechenden Punkten angehört, auf die Formen

$$ds^2 = (U - V)(U_1^2\,du^2 + V_1^2\,dv^2),\quad d\bar{s}^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{U_1^2\,du^2}{U} + \frac{V_1^2\,dv^2}{V}\right)$$

bringen lassen, worin U, U_1 Funktionen nur von u und V, V_1 Funktionen nur von v sind; beide Flächen müssen demnach Liouvillesche Flächen sein [2]. Darboux machte aufmerksam, daß jeder solchen Fläche ∞^2 Liouvillesche Flächen geodätisch zugeordnet werden können, deren eine Schar allerdings nur durch eine ähnliche Vergrößerung hervorgeht [3]. Kugel und Rotationsellipsoid sind Flächen vom Liouvilleschen Typus; man könnte daher im Gegensatze zu dem oben gezogenen Schluß vermuten, daß beide Flächen geodätisch aufeinander abbildbar sind. Hier schafft ein weiterer Satz von Darboux Klarheit, der mit ihm Dinis Ergebnis verschärfte und vertiefte: Dafür, daß eine Fläche auf eine zweite geodätisch abgebildet werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß die Differentialgleichung ihrer geodätischen Kurven ein erstes Integral besitzt, das homogen und vom zweiten Grade in den Ableitungen $du : ds$, $dv : ds$ ist [4]. Das Abbildungsproblem ist damit auf die Aufgabe zurückgeführt, alle Flächen zu suchen, deren geodätische Kurven solche Differentialgleichungen haben. Eine erste Klasse derartiger Flächen bilden die Liouvilleschen Flächen; die Flächen der zweiten Klasse sind im allgemeinen imaginär [5]. Für die Klärung der Frage ist ausschlaggebend, daß die Rotationsflächen auch hinsichtlich der geodätischen Abbildung ihre Sonderstellung unter den Liouvilleschen Flächen bewahren; denn sie sind, insoweit sie nicht aufeinander verbogen werden können, nicht geodätisch aufeinander abbildbar. Wie nämlich zuerst Massieu nachwies, sind die Rotationsflächen und die auf sie verbiegbaren Flächen die einzigen, deren Differentialgleichung für die geodätische Kurve ein erstes Integral besitzt, das homogen und linear in den Ableitung $du : ds$, $dv : ds$ ist [6]. Diese Flächen erfüllen demnach nicht jene Bedingung, die nach Darboux für die geodätische Abbildung zweier Flächen aufeinander notwendig und hinreichend ist. Im besonderen wird man daher nochmals schließen dürfen, daß das Rotationsellipsoid Punkt für Punkt und reell nicht auf die Kugel geodätisch abgebildet werden kann. Bei dieser Sachlage ist Jacobis bekannte Abbildung des Rotationsellipsoids auf die Kugel ein Kuriosum; denn sie bildet die geodätischen Kurven des Rotationsellipsoids so in die Großkreise der Kugel ab, daß die geographischen Breiten der Bildpunkte den reduzierten Breiten der Originalpunkte gleich sind [7]. Die grundsätzliche Bedeutung dieser Abbildung für die elementare Lehre von der geodätischen Kurve am Rotationsellipsoid rechtfertigt die Frage nach ihrem Platze unter den übrigen geodätischen Abbildungen. Ich gedenke die Frage durch Aufstellung und Untersuchung der Abbildungsgleichungen zu beantworten.

Man bildet das Rotationsellipsoid ($a > c$) $x = a \cos\beta \cos\lambda$, $y = a \cos\beta \sin\lambda$, $z = c \sin\beta$ auf die Kugel (a) $\bar{x} = a \cos\bar{\beta} \cos\bar{\lambda}$, $\bar{y} = a \cos\bar{\beta} \sin\bar{\lambda}$, $\bar{z} = a \sin\bar{\beta}$ affin ab, wenn $\bar{\beta} = \beta$, $\bar{\lambda} = \lambda$ gesetzt wird; die Bogenelemente der Meridiankurven beider Flächen sind durch die Gleichung $du = w\, d\bar{u}$ ($w = +\sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta}$) mit einander verknüpft. Eine allgemeinere Abbildung stellt sich ein, die die affine Abbildung als einfachsten Fall umfaßt, wenn der Ansatz $\bar{\beta} = \beta$, $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\beta, \lambda)$ gewählt wird, in dem $\bar{\lambda}(\beta, \lambda)$ eine analytische, im übrigen willkürlich wählbare Funktion von β, λ sein soll. Die hiemit erklärte Abbildung hat mit der affinen Abbildung die Eigenschaft gemein, daß der Parallelkreisradius r bei der Abbildung unverändert vom Rotationsellipsoid auf die Kugel übertragen wird; denn es ist $x^2 + y^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$, wie auch immer die Funktion $\bar{\lambda}(\beta, \lambda)$ gewählt werden mag.

Die Unbestimmtheit der Funktion $\bar{\lambda}(\beta, \lambda)$ versetzt uns in die Lage, der Abbildung nach Belieben eine Eigenschaft vorzuschreiben. Wir fordern mit Jacobi, die Abbildung solle so beschaffen sein, daß die geodätischen Kurven des Rotationsellipsoids in die Großkreise der Kugel übergehen. Diese Kurven beider Flächen erfüllen den Clairautschen Satz; wir setzen ihn zunächst in der Form

$$r \sin \alpha = c, \qquad r \sin \bar{\alpha} = \bar{c}$$

an. Offensichtlich muß $\bar{c} = c$ gewählt werden, wenn die Abbildung reell sein soll; denn c ist der Wert von r für $\alpha = \pi/2$. Mit der Bedingung $\bar{c} = c$ schreiben wir vor, daß jede geodätische Kurve des Rotationsellipsoids so in einen Großkreis der Kugel abgebildet werden soll, daß die Scheitelpunkte der abzubildenden Kurve und der Bildkurve auf Parallelkreisen von gleichem Radius liegen. Die Forderung $\bar{c} = c$ hat die Gleichung $\bar{\alpha} = \alpha$ im Gefolge. Man sieht: Bildet man das Rotationsellipsoid geodätisch auf die Kugel so ab, daß die Scheitelpunkte einander entsprechender geodätischer Kurven in Parallelkreisen von gleichem Radius liegen, so haben jene Kurven in zusammengehörigen Punkten dasselbe Azimut. Diese Eigenschaften der Abbildung sind allgemein bekannt.

Wir machen von den Ergebnissen zur Bestimmung der Funktion $\bar{\lambda}(\beta, \lambda)$ Gebrauch, indem wir nochmals an den Clairautschen Satz anknüpfen, den wir diesmal in der Form

$$d\lambda = \frac{c\, du}{r\sqrt{r^2 - c^2}}, \qquad d\bar{\lambda} = \frac{c\, d\bar{u}}{r\sqrt{r^2 - c^2}}$$

ansetzen. Jede dieser Gleichungen kann auch als die Differentialgleichung der geodätischen Kurve auf der zugehörigen Fläche angesehen werden; denn jede ist ein erstes Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung für die geodätische Kurve. Wir bilden den Quotienten beider Gleichungen

$$\frac{d\bar{\lambda}}{d\lambda} = \frac{d\bar{u}}{du} = \frac{1}{w}.$$

Hieraus ergibt sich die Gleichung, die das Bogenelement ds des Rotationsellipsoids mit dem Bogenelement $d\bar{s}$ der Bildkugel verbindet; es ist nämlich

$$ds^2 = du^2 + r^2\, d\lambda^2 = w^2 (d\bar{u}^2 + r^2\, d\bar{\lambda}^2) = w^2\, d\bar{s}^2.$$

In den Parametern $\bar{u}, \bar{\lambda}$ werden daher die Fundamentalgrößen beider Flächen von den Gleichungen $E = w^2$, $F = 0$, $G = w^2 r^2$; $\bar{E} = 1$, $\bar{F} = 0$, $\bar{G} = r^2$ gegeben, so daß die Proportion $\bar{E} : \bar{G} = E : G$ besteht. Hiemit in Übereinstimmung ist das Verhältnis

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{1}{w}$$

eine Funktion des Orts und nur des Orts; zusammengehörige Flächenelemente beider Flächen sind demnach einander ähnlich; Jacobis geodätische Abbildung ist konform.

Mit Hilfe der Formeln $du = \cos\alpha\, ds = w \cos\alpha\, d\bar{s}$, $d\bar{u} = \cos\alpha\, d\bar{s}$, $\cos\alpha : \sqrt{r^2 - c^2} = 1 : r = 1 : a\cos\beta$ transformieren wir die beiden Differentialgleichungen und ziehen sie in die Gleichung

$$d\overline{\lambda} = d\lambda + \frac{c(1-w)}{a^2\cos^2\beta}\, ds$$

zusammen. Im Grunde ist hiemit die Abbildungsfunktion $\overline{\lambda}(\beta, \lambda)$ schon gefunden. Es sind daher nur noch Transformationen formaler Natur erforderlich, um die Funktion in einer für die Diskussion geeigneten Form zu erhalten. Wir setzen $d\overline{s} = a\,d\eta$ und zählen den Bogen η im Sinne wachsender Längen vom obern Scheitelpunkt aus, dessen Breite β_0 von der Gleichung $c:a = \cos\beta_0$ gegeben wird. Dem rechtwinkligen, sphärischen Dreieck zwischen dem Scheitelpunkt, dem nächstgelegenen Pole und dem Punkte der Breite $\overline{\beta}$ am Großkreise entnimmt man die Formel $\sin\overline{\beta} = \sin\beta_0 \cos\eta$. Hieraus ergibt sich

$$\overline{\lambda} = \lambda - \int\limits_{\beta_0}^{\beta} \frac{(1-w)\cos\beta_0}{\cos\beta\sqrt{\sin^2\beta_0 - \sin^2\beta}}\, d\beta.$$

Obzwar der Integrand bei Annäherung von β an den Wert β_0 unbegrenzt zunimmt, hat das Integral dennoch einen bestimmten, endlichen Wert; er ist negativ und von der Größenordnung e^2. Das Auftreten der Konstante β_0 in der Gleichung aber ist charakteristisch für die Abbildung. Abschließend kann man demnach sagen, daß die geodätische Abbildung des Rotationsellipsoids auf die Kugel von Gleichungen der Form

$$\overline{\beta} = \beta,\; \overline{\lambda} = \lambda + e^2 f(\beta; c)$$

bewirkt wird, wenn $f(\beta; c)$ eine positive Funktion bedeutet und anstelle der Konstante β_0 wieder die Konstante c eingeführt wird.

Man schließt aus den Abbildungsgleichungen, daß, wenn $f(\beta; c)$ eine eindeutige Funktion ihrer Argumente ist, jedem Wertepaar β, λ dann und nur dann ein Wertepaar $\overline{\beta}$, $\overline{\lambda}$ zugeordnet sein wird, wenn c eine absolute Konstante ist. Unter dieser Voraussetzung würde die Abbildung zu jenen gehören, die zwei Flächen punktweise aufeinander abbilden; jedem Punkt der abzubildenden Fläche würde, von singulären Stellen abgesehen, ein und nur ein Punkt auf der Bildkugel entsprechen. Aber die Voraussetzung der absoluten Unveränderlichkeit der Konstante c trifft bei der Abbildung Jacobis nicht zu; denn die Konstante ändert beim Übergang von einer geodätischen Kurve zur andern ihren Wert. Es ergeben sich infolgedessen verschiedene Wertepaare $\overline{\beta}, \overline{\lambda}$, je nachdem man den Punkt β, λ am Rotationsellipsoid als Punkt der einen oder andern von den durch ihn hindurchtretenden geodätischen Kurven auffaßt. Jedem Punkt des Rotationsellipsoids wird durch die Abbildung auf der Kugel somit nicht ein Punkt, sondern im allgemeinen eine Punktmenge zugeordnet, deren Elemente auf einem kleinen Stück des Parallelkreises von der Breite $\overline{\beta}$ liegen. Die Vieldeutigkeit der Abbildung verschwindet, wenn man von der Zuordnung der Punkte auf beiden Flächen absieht und sich begnügt, die geodätischen Kurven beider Flächen einander entsprechen zu lassen. Längs jeder geodätischen Kurve besitzt nämlich c einen unveränderlichen Wert, so daß jedem Punkt einer geodätischen Kurve am Rotationsellipsoid ein und nur ein Punkt am zugeordneten Großkreis der Kugel entspricht. Man sieht, daß Jacobis Abbildung des Rotationsellipsoids auf die Kugel nicht zu jenen geodätischen Abbildungen gehört, die zwei Flächen punktweise aufeinander beziehen; also besteht auch kein Widerspruch zwischen ihr und den Sätzen von Beltrami, Dini und Darboux, sowie den aus ihnen gezogenen Schlüssen.

Literatur:

[1] Beltrami, Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappressentate da linee rette, Ann. di Matematica, 1, 1866, p. 185.

[2] Dini, Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra, Ann. di Matematica, 3, 1869, p. 269.

[3] Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 3, Paris, 1894, p. 51.

[4] a. a. O[3]), p. 63.

[5] Bour, Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre, Journ. de l'école polytéchnique, 39. cah., 1862, p. 149; S. Lie, Untersuchungen über geodätische Kurven, Mathem. Am. 20, S. 357; G. Koenigs, Sur les géodésiques à intégrales quadratiques, a. a. O[3]) 4, Paris 1896, p. 368.

[6] Massieu, Sur les intégrales algébriques des problèmes de mécanique, Thèse presentée à la Faculté de Sciences de Paris, Paris, 1861.

[7] Jacobi, Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie, Journ. f. r. u. a. Mathem. 53, 1857, S. 335.

Reihenentwicklungen für das Vergrößerungsverhältnis der Gauß-Krügerschen Projektion.

Von Dr. Wl. K. Hristow, Sofia.

In meinen Arbeiten „Entwicklung des Maßstabes der Gauß-Krügerschen, der stereographischen, der Mecklenburgischen und der Dessauer Projektion als Potenzreihe der Kataster-Koordinaten“, Z.f.V. Bd. LXVII, 1938, Heft 18, und „Ueber das Vergrößerungsverhältnis der Gauß-Krügerschen Projektion“, Z.f.V. Bd. LXVII, 1938, Heft 19, habe ich verschiedene Reihen für das Vergrößerungsverhältnis der Gauß-Krügerschen Projektion abgeleitet. Ich will dieselben auf eine ganz andere Weise ableiten, wobei ich die Genauigkeit etwas erhöhe.

Um nun die vorliegende Aufgabe zu lösen, gehe ich von der Grundgleichung aus

$$m^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{N^2 \cos^2 \varphi \, (dq^2 + dl^2)} = \frac{(dx + i dy)\,(dx - i dy)}{N^2 \cos^2 \varphi \, (dq + i dl)\,(dq - i dl)} =$$

$$= \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\,(x + iy)}{d\,(q + il)} \cdot \frac{d\,(x - iy)}{d\,(q - il)} \tag{1}$$

bzw.

$$\frac{1}{m^2} = N^2 \cos^2 \varphi \cdot \frac{d\,(q + il)}{d\,(x + iy)} \cdot \frac{d\,(q - il)}{d\,(x - iy)} \tag{2}$$

Zur Aufstellung von Reihenentwicklungen für m, begehe ich die folgenden zwei Wege, von denen der erstere nur kurz skizziert sein mag, da er umständlicher ist.

Mittels

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN}{dq} &= N\cos\varphi\, t\,\eta^2, \quad \frac{d\cos\varphi}{dq} = -\cos^2\varphi\, t\,(1+\eta^2) \\ \frac{d\eta^2}{dq} &= -2\cos\varphi\, t\,(\eta^2+\eta^4), \quad \frac{dt}{dq} = \cos\varphi\,(1+t^2+\eta^2+t^2\eta^2) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

findet sich zunächst die folgende Taylorsche Reihe, angesetzt für $q = q_0$ bzw. $\varphi = \varphi_0$,

$$N\cos\varphi = N_0\cos\varphi_0 \Big[1 - \cos\varphi_0 t_0 \cdot \Delta q - \frac{1}{2}\cos^2\varphi_0 (1 - t_0^2 + \eta_0^2)\cdot \Delta q^2 + \\ + \frac{1}{6}\cos^3\varphi_0 t_0 (5 - t_0^2)\cdot \Delta q^3\Big] \quad (4)$$

Damit

$$N^2\cos^2\varphi = N_0^2\cos^2\varphi_0 \Big[1 - 2\cos\varphi_0 t_0 \cdot \Delta q - \cos^2\varphi_0 (1 - 2t_0^2 + \eta_0^2)\cdot \Delta q^2 + \\ + \frac{4}{3}\cos^3\varphi_0 t_0 (2 - t_0^2)\cdot \Delta q^3\Big] \quad (5)$$

und

$$\frac{1}{N^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{N_0^2\cos^2\varphi_0}\Big[1 + 2\cos\varphi_0 t_0 \cdot \Delta q + \cos^2\varphi_0 (1 + 2t_0^2 + \eta_0^2)\cdot \Delta q^2 + \\ + \frac{4}{3}\cos^3\varphi_0 t_0 (1 + t_0^2)\cdot \Delta q^3\Big] \quad (6)$$

Andererseits ist nach meinem Aufsatz in Z.f.V. Bd. LXIII, 1934, H. 20

$$\Delta x \pm iy = N_0\cos\varphi_0 (\Delta q \pm il) - \frac{1}{2} N_0\cos^2\varphi_0 t_0 (\Delta q \pm il)^2 - \\ - \frac{1}{6} N_0\cos^3\varphi_0 (1 - t_0^2 + \eta_0^2)(\Delta q \pm il)^3 + \frac{1}{24} N_0\cos^4\varphi_0 t_0 (5 - t_0^2)(\Delta q \pm il)^4 \quad (7)$$

$$\Delta q \pm il = \frac{1}{N_0\cos\varphi_0}(\Delta x \pm iy) + \frac{1}{2}\frac{1}{N_0^2\cos\varphi_0} t_0 (\Delta x \pm iy)^2 + \\ + \frac{1}{6}\frac{1}{N_0^3\cos\varphi_0}(1 + 2t_0^2 + \eta_0^2)(\Delta x \pm iy)^3 + \frac{1}{24}\frac{1}{N_0^4\cos\varphi_0} t_0 (5 + 6t_0^2)(\Delta x \pm iy)^4 \quad (8)$$

Die Differentiation von (7) bzw. (8) gibt

$$\frac{d(x \pm iy)}{d(q \pm il)} = N_0\cos\varphi_0 - N_0\cos^2\varphi_0 t_0 (\Delta q \pm il) - \frac{1}{2} N_0\cos^3\varphi_0 (1 - t_0^2 + \eta_0^2)(\Delta q \pm il)^2 + \\ + \frac{1}{6} N_0\cos^4\varphi_0 t_0 (5 - t_0^2)(\Delta q \pm il)^3 \quad (9)$$

bzw.

$$\frac{d(q \pm il)}{d(x \pm iy)} = \frac{1}{N_0\cos\varphi_0} + \frac{1}{N_0^2\cos\varphi_0} t_0 (\Delta x \pm iy) + \\ + \frac{1}{2}\frac{1}{N_0^3\cos\varphi_0}(1 + 2t_0^2 + \eta_0^2)(\Delta x \pm iy)^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{N_0^4\cos\varphi_0} t_0 (5 + 6t_0^2)(\Delta x \pm iy)^3 \quad (10)$$

oder durch Trennung des Reellen vom Imaginären

$$\frac{d(x \pm iy)}{d(q \pm il)} = N_0\cos\varphi_0 \Big\{1 - \cos\varphi_0 t_0 \Delta q - \frac{1}{2}\cos^2\varphi_0 (1 - t_0^2 + \eta_0^2)\Delta q^2 + \\ + \frac{1}{2}\cos^2\varphi_0 (1 - t_0^2 + \eta_0^2) l^2 + \frac{1}{6}\cos^3\varphi_0 t_0 (5 - t_0^2)\Delta q^3 - \frac{1}{2}\cos^3\varphi_0 t_0 (5 - t_0^2)\Delta q l^2 \pm \\ \pm i\Big[-\cos\varphi_0 t_0 l - \cos^2\varphi_0 (1 - t_0^2 + \eta_0^2)\Delta q l + \frac{1}{2}\cos^3\varphi_0 t_0 (5 - t_0^2)\Delta q^2 l - \\ - \frac{1}{6}\cos^3\varphi_0 t_0 (5 - t_0^2) l^3\Big]\Big\} \quad (11)$$

bzw.

$$\frac{d(q \pm i l)}{d(x \pm i y)} = \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \Big\{ 1 + \frac{1}{N_0} t_0 \Delta x + \frac{1}{2 N_0^2} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2) \Delta x^2 -$$
$$- \frac{1}{2 N_0^2} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2) y^2 + \frac{1}{6 N_0^3} t_0 (5 + 6 t_0^2) \Delta x^3 - \frac{1}{2 N_0^3} t_0 (5 + 6 t_0^2) \Delta x y^2 \Big] \pm$$
$$\pm i \Big[\frac{t_0}{N_0} y + \frac{1}{N_0^2} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2) \Delta x y + \frac{1}{2 N_0^3} t_0 (5 + 6 t_0^2) \Delta x^2 y -$$
$$- \frac{1}{6 N_0^3} t_0 (5 + 6 t_0^2) y^3 \Big] \Big\} \tag{12}$$

Aus (11) bzw. (12) ergibt sich weiter

$$\frac{d(x + iy)}{d(q + il)} \cdot \frac{d(x - iy)}{d(q - il)} = N_0^2 \cos^2 \varphi_0 \Big\{ 1 - 2 \cos \varphi_0 t_0 \Delta q - \cos^2 \varphi_0 (1 - 2 t_0^2 + \eta_0^2) \Delta q^2 +$$
$$+ \cos^2 \varphi_0 (1 + \eta_0^2) l^2 + \frac{4}{3} \cos^3 \varphi_0 t_0 (2 - t_0^2) \Delta q^3 - 4 \cos^3 \varphi_0 t_0 \Delta q l^3 \Big\} \tag{13}$$

bzw.

$$\frac{d(q + il)}{d(x + iy)} \cdot \frac{d(q - il)}{d(x - iy)} = \frac{1}{N_0^2 \cos^2 \varphi_0} \Big\{ 1 + \frac{2}{N_0} t_0 \Delta x + \frac{1}{N_0^2} (1 + 3 t_0^2 + \eta_0^2) \Delta x^2 -$$
$$- \frac{1}{N_0^2} (1 + t_0^2 + \eta_0^2) y^2 + \frac{4}{3 N_0^3} t_0 (2 + 3 t_0^2) \Delta x^3 - \frac{4}{N_0^3} t_0 (1 + t_0^2) \Delta x y^2 \Big\} \tag{14}$$

Um weiter fortzufahren, entnehme ich zunächst aus (8), durch Vergleichung der reellen Teile

$$\Delta q = \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{1}{N_0^2 \cos \varphi_0} t_0 \Delta x^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{N_0^2 \cos \varphi_0} t_0 y^2 +$$
$$+ \frac{1}{6} \frac{1}{N_0^3 \cos \varphi_0} (1 + 2 t_0^2) \Delta x^3 - \frac{1}{2} \frac{1}{N_0^3 \cos \varphi_0} (1 + 2 t_0^2) \Delta x y^2 \tag{15}$$

(15) eingetragen in (5) gibt nach gehöriger Reduktion

$$N^2 \cos^2 \varphi = N_0^2 \cos^2 \varphi_0 \Big\{ 1 - \frac{2}{N_0} t_0 \Delta x - \frac{1}{N_0^2} (1 - t_0^2 + \eta_0^2) \Delta x^2 + \frac{1}{N_0^2} t_0^2 y^2 +$$
$$+ \frac{4}{3} \frac{1}{N_0^3} t_0 \Delta x^3 + \frac{2}{N_0^3} t_0 \Delta x y^2 \Big\} \tag{16}$$

Jetzt multipliziere ich einerseits (6) mit (13) und andererseits (16) mit (14) und finde gemäß (1) und (2)

$$m^2 = 1 + \cos^2 \varphi_0 (1 + \eta_0^2) \cdot l^2 - 2 \cos^3 \varphi_0 t_0 \cdot \Delta q l^2 \tag{17}$$

und

$$\frac{1}{m^2} = 1 - \frac{1}{N_0^2} (1 + \eta_0^2) \cdot y^2 = 1 - \frac{1}{R_0^2} \cdot y^2 \tag{18}$$

In (17) ersetze ich Δq durch $\Delta \varphi$ mittels

$$\Delta q = \frac{1}{\cos \varphi_0} (1 - \ldots) \Delta \varphi + \ldots \tag{19}$$

und finde

$$m^2 = 1 + \cos^2 \varphi_0 (1 + \eta_0^2) \cdot l^2 - 2 \cos^2 \varphi_0 t_0 \cdot \Delta \varphi l^2 \tag{20}$$

Damit endlich erhalte ich aus (20) und (18)

$$m = 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 (1 + \eta_0^2) \cdot l^2 - \cos^2 \varphi_0 t_0 \cdot \Delta \varphi l^2 \tag{21}$$

und

$$m = 1 + \frac{1}{2 R_0^2} \cdot y^2 \tag{22}$$

Hierin unternehme ich die folgende Spezialisierung. Ich setze in (21) $\Delta\varphi = 0$, was gleichbedeutend mit $\varphi_0 = \varphi$ ist, und in den höheren Gliedern in (22) denke ich mir $\Delta x = 0$, was gleichbedeutend mit $\varphi_0 = \varphi_1$ ist. Damit bekomme ich

$$m = 1 + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\,(1+\eta^2)\,l^2 \tag{23}$$

und

$$m = 1 + \frac{1}{2\,R_1^2}\,y^2 \tag{24}$$

Ich werde nun zeigen, daß (23) und (24) das primäre sein können, und (21) und (22) — das sekundäre. Dieser zweite Weg zur Aufstellung der Formeln ist sogar der einfachere. Deswegen bediene ich mich desselben um genauere Reihenentwicklungen zu bekommen.

Ich gehe dabei von den genaueren Potenzreihenentwicklungen aus

$$\begin{aligned}\Delta x \pm iy = {} & a_1(\Delta q \pm il) + a_2(\Delta q \pm il)^2 + a_3(\Delta q \pm il)^3 + a_4(\Delta q \pm il)^4 + \\ & + a_5(\Delta q \pm il)^5 + a_6(\Delta q \pm il)^6 + a_7(\Delta q \pm il)^7\end{aligned} \tag{25}$$

und

$$\begin{aligned}\Delta q \pm il = {} & b_1(\Delta x \pm iy) + b_2(\Delta x \pm iy)^2 + b_3(\Delta x \pm iy)^3 + b_4(\Delta x \pm iy)^4 + \\ & + b_5(\Delta x \pm iy)^5 + b_6(\Delta x \pm iy)^6 + b_7(\Delta x \pm iy)^7\end{aligned} \tag{26}$$

wo nach Z.f.V. Bd. LXIII, H. 20 ist

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= N_0\cos\varphi_0 \\
a_2 &= -\frac{1}{2}N_0\cos^2\varphi_0\,t_0 \\
a_3 &= -\frac{1}{6}N_0\cos^3\varphi_0\,(1-t_0^2+\eta_0^2) \\
a_4 &= \frac{1}{24}N_0\cos^4\varphi_0\,t_0\,(5-t_0^2+9\eta_0^2+4\eta_0^4) \\
a_5 &= \frac{1}{120}N_0\cos^5\varphi_0\,(5-18t_0^2+t_0^4+14\eta_0^2-58t_0^2\eta_0^2) \\
a_6 &= -\frac{1}{720}N_0\cos^6\varphi_0\,t_0\,(61-58t_0^2+t_0^4) \\
a_7 &= -\frac{1}{5040}N_0\cos^7\varphi_0\,(61-479t_0^2+179t_0^4-t_0^6)
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{N_0\cos\varphi_0} \\
b_2 &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{N_0^2\cos\varphi_0}\,t_0 \\
b_3 &= \frac{1}{6}\,\frac{1}{N_0^3\cos\varphi_0}\,(1+2t_0^2+\eta_0^2) \\
b_4 &= \frac{1}{24}\,\frac{1}{N_0^4\cos\varphi_0}\,t_0\,(5+6t_0^2+\eta_0^2-4\eta_0^4) \\
b_5 &= \frac{1}{120}\,\frac{1}{N_0^5\cos\varphi_0}\,(5+28t_0^2+24t_0^4+6\eta_0^2+8t_0^2\eta_0^2) \\
b_6 &= \frac{1}{720}\,\frac{1}{N_0^6\cos\varphi_0}\,t_0\,(61+180t_0^2+120t_0^4) \\
b_7 &= \frac{1}{5040}\,\frac{1}{N_0^7\cos\varphi_0}\,(61+662t_0^2+1320t_0^4+720t_0^6)
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Die Differentiation von (25) bzw. (26) gibt

$$\frac{d(x \pm iy)}{d(q \pm il)} = a_1 + 2a_2(\Delta q \pm il) + 3a_3(\Delta q \pm il)^2 + 4a_4(\Delta q \pm il)^3 + \\ + 5a_5(\Delta q \pm il)^4 + 6a_6(\Delta q \pm il)^5 + 7a_7(\Delta q \pm iy)^6 \tag{29}$$

bzw.

$$\frac{d(q \pm il)}{d(x \pm iy)} = b_1 + 2b_2(\Delta x \pm iy) + 3b_3(\Delta x \pm iy)^2 + 4b_4(\Delta x \pm iy)^3 + \\ + 5b_5(\Delta x \pm iy)^4 + 6b_6(\Delta x \pm iy)^5 + 7b_7(\Delta x \pm iy)^6 \tag{30}$$

Hierin mache ich gleich die folgende Spezialisierung. Ich setze in (29) $\Delta q = 0$, was gleichbedeutend mit $\varphi_0 = \varphi$ ist, und weiter setze ich in (30) $\Delta x = 0$, was gleichbedeutend mit $\varphi_0 = \varphi_1$ ist; also sind im ersten Falle die Koeffizienten a_n in (27) mit φ zu berechnen, und im zweiten Fall — die Koeffizienten b_n in (28) mit φ_1 zu berechnen. Damit wird (29) bzw. (30)

$$\frac{d(x \pm iy)}{d(q \pm il)} = (a_1 - 3a_3 l^2 + 5a_5 l^4 - 7a_7 l^6) \pm i(2a_2 l - 4a_4 l^3 + 6a_6 l^5) \tag{31}$$

bzw.

$$\frac{d(q \pm il)}{d(x \pm iy)} = (b_1 - 3b_3 y^2 + 5b_5 y^4 - 7b_7 y^6)_1 \pm i(2b_2 y - 4b_4 y^3 + 6b_6 y^5)_1 \tag{32}$$

Aus (31) bzw. (32) erhalte ich sofort

$$\frac{d(x+iy)}{d(q+il)} \cdot \frac{d(x-iy)}{d(q-il)} = a_1^2 + (-6a_1a_3 + 4a_2^2)l^2 + (10a_1a_5 - 16a_2a_4 + 9a_3^2)l^4 + \\ + (-14a_1a_7 + 24a_2a_6 - 30a_3a_5 + 16a_4^2)l^6 \tag{33}$$

bzw.

$$\frac{d(q+il)}{d(x+iy)} \cdot \frac{d(q-il)}{d(x-iy)} = (b_1^2)_1 + (-6b_1b_3 + 4b_2^2)_1 y^2 + (10b_1b_5 - 16b_2b_4 + 9b_3^2)_1 y^4 + \\ + (-14b_1b_7 + 24b_2b_6 - 30b_3b_5 + 16b_4^2)_1 y^6 \tag{34}$$

Jetzt setze ich in (33) bzw. (34) die Ausdrücke (27) bzw. (28) ein und bekam

$$\frac{d(x+iy)}{d(q+il)} \cdot \frac{d(x-iy)}{d(q-il)} = N^2\cos^2\varphi\Big[1 + \cos^2\varphi(1+\eta^2)l^2 + \frac{1}{3}\cos^4\varphi(2 - t^2 + \\ + 5\eta^2 - 7t^2\eta^2)l^4 + \frac{1}{45}\cos^6\varphi(17 - 26t^2 + 2t^4)l^6\Big] \tag{35}$$

bzw.

$$\frac{d(q+il)}{d(x+iy)} \cdot \frac{d(q-il)}{d(x-iy)} = \frac{1}{N_1^2\cos^2\varphi_1}\Big[1 + \frac{1}{N_1^2}(-1 - t_1^2 - \eta_1^2)y^2 + \frac{1}{3N_1^4}(2 + 5t_1^2 + 3t_1^4 + \\ + 3\eta_1^2 + 4t_1^2\eta_1^2)y^4 + \frac{1}{45N_1^6}(-17 - 77t_1^2 - 105t_1^4 - 45t_1^6)y^6\Big] \tag{36}$$

Um von den Formeln (1) und (2) Gebrauch machen zu können, muß ich in (2) vorerst $N^2\cos^2\varphi$ als Funktion von φ_1 und y ausdrücken. Zu diesem Zwecke setze ich in (5) φ_1 statt φ_0, also unter Δq verstehe ich $q - q_1$

$$N^2\cos^2\varphi = N_1^2\cos^2\varphi_1\,[1 + 2\cos\varphi_1\, t_1(-1)(q - q_1) + \\ + \cos^2\varphi_1(-1 + 2t_1^2 - \eta_1^2)(q - q_1)^2 + \frac{4}{3}\cos^3\varphi_1\, t_1(2 - t_1^2)(q - q_1)^3] \tag{37}$$

Für $q - q_1$ habe ich aus (26), indem ich darin $\Delta x = 0$ setze und die reellen Teile vergleiche

$$q - q_1 = -b_2 y^2 + b_4 y^4 - b_6 y^6 = \frac{1}{2} \frac{1}{N_1^2 \cos \varphi_1} t_1 (-1) y^2 +$$

$$+ \frac{1}{24} \frac{1}{N_1^4 \cos \varphi_1} t_1 (5 + 6 t_1^2 + \eta_1^2) y^4 + \frac{1}{720} \frac{1}{N_1^6 \cos \varphi_1} t_1 (-61 - 180 t_1^2 - 120 t_1^4) y^6 \quad (38)$$

(38) eingetragen in (37) gibt

$$N^2 \cos^2 \varphi = N_1^2 \cos^2 \varphi_1 \left[1 + \frac{1}{N_1^2} t_1^2 y^2 + \frac{1}{3 N_1^4} (-2 t_1^2 - t_1^2 \eta_1^2) y^4 + \frac{17}{45 N_1^6} t_1^2 y^6 \right] \quad (39)$$

Nun multipliziere ich (35) mit $\frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi}$ und habe gemäß (1)

$$m^2 = 1 + \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) l^2 + \frac{1}{3} \cos^4 \varphi (2 - t^2 + 5 \eta^2 - 7 t^2 \eta^2) l^4 +$$

$$+ \frac{1}{45} \cos^6 \varphi (17 - 26 t^2 + 2 t^4) l^6 \quad (40)$$

Gleichfalls multipliziere ich (36) mit (39) und habe gemäß (2)

$$\frac{1}{m^2} = 1 + \frac{1}{N_1^2} (-1 - \eta_1^2) y^2 + \frac{1}{3 N_1^4} (2 + 3 \eta_1^2) y^4 + \frac{17}{45 N_1^6} (-1) y^6 \quad (41)$$

Jetzt wende ich auf (40) und (41) die Reihen

$$\left. \begin{aligned} (1 + \alpha)^{1/2} &= 1 + {}^1/_2 \alpha - {}^1/_8 \alpha^2 + {}^1/_{16} \alpha^3 \\ (1 + \alpha)^{-1/2} &= 1 - {}^1/_2 \alpha + {}^3/_8 \alpha^2 - {}^5/_{16} \alpha^3 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

an und bekam

$$m = (m^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) l^2 + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (5 - 4 t^2 + 14 \eta^2 - 28 t^2 \eta^2) l^4 +$$

$$+ \frac{1}{720} \cos^6 \varphi (61 - 148 t^2 + 16 t^4) l^6 \quad (43)$$

und

$$m = \left(\frac{1}{m^2} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2 N_1^2} (1 + \eta_1^2) y^2 + \frac{1}{24 N_1^4} (1 + 6 \eta_1^2) y^4 + \frac{1}{720 N_1^6} y^6 \quad (44)$$

In der letzten Formel ersetze ich, wie üblich N durch den mittleren Krümmungsradius R mittels

$$N^2 = R^2 (1 + \eta^2) \quad (45)$$

womit herauskommt

$$m = 1 + \frac{1}{2 R_1^2} y^2 + \frac{1}{24 R_1^4} (1 + 4 \eta_1^2) y^4 + \frac{1}{720 R_1^6} y^6 \quad (46)$$

Die Gleichungen (43) und (46) stimmen bis auf die Gliedeı 6. Ordnung mit meinen Gleichungen Z.f.V. Bd. LXVII, 1938, Heft 19, F. (12) und F. (10) vollkommen überein; sie sind in Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde Bd. III, 1923, § 91, S. 510 unter (20) und (22) aufzufinden. Es sollen zur Kontrolle also nur noch die Glieder 6. O. auf eine andere Weise abgeleitet werden. Da bei ihnen die sphäroidischen Glieder weggelassen sind, leite ich die sphärischen Teile ab, indem ich die Aufgabe noch einmal rein sphärisch behandle.

Ich bezeichne die Soldnersche Ordinate mit $\mathfrak{y}$ zum Unterschied von der Gaußischen y. Dann habe ich

$$m = \sec \frac{\mathfrak{y}}{R} \quad (47)$$

$$y = \int_0^{\mathfrak{y}} \sec \frac{\mathfrak{y}}{R} \, d\mathfrak{y} \quad (48)$$

Weiter habe ich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck Punkt, Fußpunkt, Pol

$$\sin \frac{\mathfrak{y}}{R} = \cos \varphi \cdot \sin l \tag{49}$$

Aus (47) und (49) findet sich

$$m = 1 : \cos [\arcsin (\cos \varphi \cdot \sin l)] \tag{50}$$

Es ist

$$\sin l = 1 - \frac{1}{6} l^3 + \frac{1}{120} l^5 \tag{51}$$

$$\cos \varphi \cdot \sin l = \cos \varphi \cdot l - \frac{1}{6} \frac{\cos^3 \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot l^3 + \frac{1}{120} \frac{\cos^5 \varphi}{\cos^4 \varphi} \cdot l^5 =$$

$$= \cos \varphi \cdot l + \frac{1}{6} \cos^3 \varphi (-1 - t^2) l^3 + \frac{1}{120} \cos^5 \varphi (1 + 2t^2 + t^4) l^5 \tag{52}$$

$$\arcsin (\cos \varphi \cdot \sin l) = \cos \varphi\, l + \frac{1}{6} \cos^3 \varphi (-t^2) l^3 + \frac{1}{120} \cos^5 \varphi (-8t^2 + t^4) l^5 \tag{53}$$

$$\cos [\arcsin (\cos \varphi \cdot \sin l)] = 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi (-1) l^2 + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (1 + 4t^2) l^4 +$$

$$+ \frac{1}{720} \cos^6 \varphi (-1 + 28t^2 - 16t^4) l^6 \tag{54}$$

$$m = 1 : \cos [\arcsin (\cos \varphi \,.\, \sin l)] = 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi\, l^2 + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (5 - 4t^2) l^4 +$$

$$+ \frac{1}{720} \cos^6 \varphi (61 - 148t^2 + 16t^4) l^6 \tag{55}$$

womit die Richtigkeit der sphärischen Glieder in (43) erwiesen ist.

Um noch (46) zu kontrollieren, habe ich zunächst aus (47)

$$m = \sec \frac{\mathfrak{y}}{R} = 1 + \frac{\mathfrak{y}^2}{2R^2} + \frac{5}{24} \frac{\mathfrak{y}^4}{R^4} + \frac{61}{720} \frac{\mathfrak{y}^6}{R^6} \tag{56}$$

darauf nach (48) durch Integration

$$y = \mathfrak{y} + \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{y}^3}{R^2} + \frac{1}{24} \frac{\mathfrak{y}^5}{R^4} \tag{57}$$

und durch Umkehrung

$$\mathfrak{y} = y - \frac{1}{6} \frac{y^3}{R^2} + \frac{1}{24} \frac{y^5}{R^4} \tag{58}$$

folgt.

(58) eingetragen in (56) gibt

$$m = 1 + \frac{1}{2R^2} y^2 + \frac{1}{24R^4} y^4 + \frac{1}{720R^6} y^6 \tag{59}$$

womit auch (46) kontrolliert worden ist.

Um weiter die Reihen (43) und (46) in Potenzreihen mit festen Koeffizienten zu verwandeln, setze ich die Koeffizienten von (43) in der Form

$$C = C_0 + \left(\frac{dC}{d\varphi}\right)_0 \Delta\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 C}{d\varphi^2}\right)_0 \Delta\varphi^2 + \ldots \tag{60}$$

und diejenigen von (46) — in der Form

$$D_1 = D_0 + \left(\frac{dD}{dB}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 D}{dB^2}\right)_0 \Delta x^2 + \ldots \tag{61}$$

an. Indem ich mich der Formeln

$$\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -t\cos\varphi\,,\ \frac{dt}{d\varphi} = 1+t^2,\ \frac{d\eta^2}{d\varphi} = -2t\eta^2 \tag{62}$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{dR}{dB}=\frac{2t\eta^2}{\sqrt{1+\eta^2}}=t(2\eta^2-\eta^4),\ \frac{dt}{dB}=\frac{1+t^2+\eta^2+t^2\eta^2}{R\sqrt{1+\eta^2}}=\frac{1}{2R}(2+2t^2+\eta^2+t^2\eta^2)\\ \frac{d\eta^2}{dB}=-\frac{2t\eta^2}{R}\sqrt{1+\eta^2}=-\frac{2t\eta^2}{R}\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

bediene, bekomme ich nach gehöriger Anordnung

$$\begin{aligned}m=&1+\frac{1}{2}\cos^2\varphi_0(1+\eta_0^2).l^2+\cos^2\varphi_0 t_0(-1-2\eta_0^2).\varDelta\varphi l^2+\frac{1}{2}\cos^2\varphi_0(-1+t_0^2-\\&-2\eta_0^2+6t_0^2\eta_0^2).\varDelta\varphi^2 l^2+\frac{1}{24}\cos^4\varphi_0(5-4t_0^2+14\eta_0^2-28t_0^2\eta_0^2).l^4+\\&+\frac{2}{3}\cos^2\varphi_0 t_0.\varDelta\varphi^3 l^2+\frac{1}{6}\cos^4\varphi_0 t_0(-7+2t_0^2).\varDelta\varphi l^4+\\&+\frac{1}{6}\cos^2\varphi_0(1-t_0^2).\varDelta\varphi^4 l^2+\frac{1}{12}\cos^4\varphi_0(-7+27t_0^2-2t_0^4).\varDelta\varphi^2 l^4+\\&+\frac{1}{720}\cos^6\varphi_0(61-148t_0^2+16t_0^4).l^6\end{aligned} \tag{64}$$

und

$$\begin{aligned}m=&1+\frac{1}{2R_0^2}.y^2+\frac{1}{R_0^3}t_0(-2\eta_0^2+\eta_0^4).\varDelta xy^2+\frac{1}{R_0^4}(-\eta_0^2+t_0^2\eta_0^2).\varDelta x^2y^2+\\&+\frac{1}{24R_0^4}(1+4\eta_0^2).y^4+\frac{1}{720R_0^6}.y^6\end{aligned} \tag{65}$$

Die Gleichungen (64) und (65) stimmen bis auf die Glieder 5. und 6. Ordnung mit meinen Gleichungen Z.f.V. Bd. LXVII, 1938, H. 19, F. (1) und (8) überein. Um die Glieder 5. und 6. Ordnung in (64) — die sphäroidischen Teile sind weggelassen — zu kontrollieren, behandelte ich die Aufgabe rein sphärisch, ausgehend von (55). Ich habe zunächst

$$\cos\varphi=\cos\varphi_0-\cos\varphi_0 t_0.\varDelta\varphi-\frac{1}{2}\cos\varphi_0.\varDelta\varphi^2+\frac{1}{6}\cos\varphi_0 t_0.\varDelta\varphi^3+\frac{1}{24}\cos\varphi_0.\varDelta\varphi^4 \tag{66}$$

$$t=t_0+(1+t_0^2).\varDelta\varphi+t_0(1+t_0^2).\varDelta\varphi^2 \tag{67}$$

Daraus findet sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cos^2\varphi=&\frac{1}{2}\cos^2\varphi_0+\cos^2\varphi_0 t_0(-1).\varDelta\varphi+\frac{1}{2}\cos^2\varphi_0(-1+t_0^2).\varDelta\varphi^2+\\&+\frac{2}{3}\cos^2\varphi_0 t_0.\varDelta\varphi^3+\frac{1}{6}\cos^2\varphi_0(1-t_0^2).\varDelta\varphi^4\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{24}\cos^4\varphi(5-4t^2)=&\frac{1}{24}\cos^4\varphi_0(5-4t_0^2)+\frac{1}{6}\cos^4\varphi_0 t_0(-7+2t_0^2).\varDelta\varphi+\\&+\frac{1}{12}\cos^4\varphi_0(-7+27t_0^2-2t_0^4).\varDelta\varphi^2\end{aligned} \tag{69}$$

Also (55) wird

$$\begin{aligned}m=&1+\frac{1}{2}\cos^2\varphi_0.l^2+\cos^2\varphi_0 t_0(-1).\varDelta\varphi l^2+\frac{1}{2}\cos^2\varphi_0(-1+t_0^2).\varDelta\varphi^2 l^2+\\&+\frac{1}{24}\cos^4\varphi_0(5-4t_0^2).l^4+\frac{2}{3}\cos^2\varphi_0 t_0.\varDelta\varphi^3 l^2+\frac{1}{6}\cos^4\varphi_0 t_0(-7+2t_0^2).\varDelta\varphi l^4+\\&+\frac{1}{6}\cos^2\varphi_0(1-t_0^2).\varDelta\varphi^4 l^2+\frac{1}{12}\cos^4\varphi_0(-7+27t_0^2-2t_0^4).\varDelta\varphi^2 l^4+\\&+\frac{1}{720}\cos^6\varphi_0(61-148t_0^2+16t_0^4).l^6\end{aligned} \tag{70}$$

womit die Richtigkeit von (64) vollkommen erwiesen ist.

Was (65) anbelangt, so liegt die Richtigkeit aller Glieder auf der Hand: die Glieder bis zur 4. O. stimmen mit denjenigen in l. c. (8) überein, die Glieder 5. O., wie leicht zu ersehen ist, enthalten nur sphäroidische Teile, die ich fortlasse, und das Glied 6. O. ist bereits durch (46) und (59) kontrolliert worden.

Ein Zahlenbeispiel dabei erübrigt sich, da ich solche in den anfangs erwähnten Arbeiten gegeben habe.

Gesetze, Verordnungen und Erlasse.

Vereinfachung der Katasterverwaltung.
RdErl. d. FM. v. 21. 9. 1939 (KV 1. 1200). — MBl. 39. S. 221.

Zufolge des Führererlasses vom 28. August 1939 (RGBl. I S. 1535) bestimme ich für den Bereich der Katasterverwaltung, insbesondere hinsichtlich der Dienstgeschäfte der Katasterämter (Nebenstellen), folgendes:

I. Allgemeines.

Nach II (1) und (2) des Führererlasses sind die mit der Reichsverteidigung zusammenhängenden Aufgaben mit dem Vorrang vor allen anderen Arbeiten zu erledigen; jeder Behördenleiter ist verpflichtet, den Geschäftsbetrieb seiner Dienststelle so zu gestalten, daß diese zur beschleunigten Durchführung der mit der Reichsverteidigung zusammenhängenden Aufgaben in der Lage ist.

Die Regierungspräsidenten werden ermächtigt, zur Deckung des Personalbedarfs über die Verwendung der der Regierung und den Katasterämtern des Bezirks zugewiesenen Beamten selbständig unter Beachtung größter Sparsamkeit zu verfügen.

II. Hauszinssteuer und Grundvermögensteuer.

Die Vereinfachung des Rechtsmittelverfahrens usw. bei der Hauszinssteuer und der in der Abwicklung befindlichen Grundvermögensteuer ist in dem RdErl. vom 20. d. M. — K V 2. gen 110 — S 3200/20. 9. 39. — geregelt.

III. Fortführung und Abschluß der Katasterbücher.

Die Verbindung zwischen Kataster und Grundbuch muß aufrechterhalten werden. Die hierauf bezüglichen Arbeiten — Fortführung der Katasterbücher — sind nach Maßgabe der bisherigen Bestimmungen, jedoch unter Beachtung der nachfolgenden Anordnungen auszuführen:

1. Gebäudesteuerrolle:

Die Veränderungen im Bestande der Gebäude sind — wie bisher — in die Gebäudesteuerrolle zu übernehmen, jedoch mit folgenden Einschränkungen:

a) Der Gebäudesteuernutzungswert für neu entstandene oder in ihrem Bestande veränderte Gebäude ist nur noch in den Gemeinden festzustellen, in denen er der Bemessung gemeindlicher Gebühren und Beiträge zugrunde gelegt wird.

b) Die Berechnung der Gebäudesteuer fällt in allen Gemeinden fort.

c) Der Abschluß der veränderten Gebäudesteuerrollennummern beschränkt sich auf die Feststellung der Anzahl der Gebäude — vorläufig noch mit der bisher üblichen Unterscheidung 4 %, 2 %, steuerfrei —. Für die zu a genannten Gemeinden ist in der Gebäudesteuerrolle außerdem der Gebäudesteuernutzungswert aufzurechnen.

2. Jahresabschluß der Katasterbücher:

a) Summarischer Nachweis der Form- und Bestandsveränderungen und Gebäudesteuerveränderungsnachweisung:
Der Abschluß beschränkt sich auf die Feststellung des Zu- und Abganges.

b) Abschlußliste:
Die Rückseite wird nicht ausgefüllt.

c) Hauptübersichten des Bestandes an Liegenschaften und Gebäuden:
Die Aufstellung unterbleibt bis auf weiteres; die entsprechenden Bezirksübersichten fallen fort.

IV. Vermessungen.

1. Neumessungen sind einzustellen, wenn sie mit dem noch vorhandenen Personal nicht mehr fortgeführt werden können oder wenn das Personal für andere katasteramtliche Arbeiten benötigt wird.

2. Fortschreibungsvermessungen sind in dem unbedingt notwendigen Maße auszuführen. Anträge auf Grenzwiederherstellungen, soweit solche in der heutigen Zeit überhaupt gestellt werden sollten, sind tunlichst zurückzustellen.

3. Vermessungsarbeiten aller Art, die mit der Reichsverteidigung zusammenhängen, sind mit größter Beschleunigung fortzuführen; neue Anträge sind vordringlich in Angriff zu nehmen und durchzuführen. Hierzu gehören auch die Vermessungen für die Hermann-Göring-Werke, für das Volkswagenwerk und für im Zuge des Vierjahresplans errichtete Betriebe.

V. Katasterplankarte.

Die Arbeiten zur Herstellung der Katasterplankarten sind mit dem dafür angesetzten und noch verfügbaren Personal durchzuführen. Soweit die Karten den Zwecken der Reichsverteidigung dienen, ist ihre Herstellung als besonders dringlich zu behandeln. Die Berichte über den Stand der Arbeiten fallen bis auf weiteres fort (vgl. VII Ziff. 12).

VI. Reichsbodenschätzung.

Ueber die Einschränkung der Reichsbodenschätzungsarbeiten, insbesondere der Arbeiten der Schätzungsausschüsse und der Arbeiten zur Uebernahme der Schätzungsergebnisse in das Kataster werden der Reichsminister der Finanzen und der Reichsminister des Innern besondere Anordnung treffen.

VII. Personalverwaltung.

Wegen der Vereinfachungen in der Personalverwaltung verweise ich auf meinen Erlaß vom 19. September 1939 — I C 2000/19. 9. —; Ergänzungen behalte ich mir vor.

VIII. Fortfall von Berichterstattung zu wiederkehrenden Terminen.

Die nachstehend aufgeführten Berichterstattungen unterbleiben bis auf weiteres. Ich behalte mir vor, zu gegebener Zeit besondere Berichte über die einzelnen Gebiete einzufordern, deswegen es notwendig ist, grundlegende Aufzeichnungen in einfacher Form zu führen.

Lfd. Nr.	Betrifft	Anordnung	Termin
1	Nachweisung der Vermessungsassessoren und Referendare des Reg.-Bez.	Anweisung IV § 25	1. 3. u. 1. 9. j. J.
2	Beurteilung der Leistungen und Führung der Vermessungsassessoren	RdErl. v. 11. 7. 1934 — KV 1. 508 —	1. 3. j. J.
3	Berichte über Assessoren des Vermessungsdienstes zwecks Prüfung der Eignung zur Übernahme ins Beamtenverhältnis	28. 7. 1939 — KV 1. 1000 —	15. 9. j. J. (Bericht zum 15. 3. j. J. bleibt!)
4	Geschäftsverteilung bei der Reg.	15. 12. 1936 — KV 1. 1100 —	1. 3. j. J.
5	Übersicht über den Personalbestand der Kat.-Verw. des Reg.-Bez.	26. 5. 1938 — KV 1. 860 —	15. 4. j. J.
6	Übersicht über die Aufmessung der trig. Punkte und die Erwerbung der Bodenfläche	20. 7. 1878 — I 8514 usw. — (M. H. 37 S. 411)	1. 8. j. J.
7	Bericht über die bei Anwendung der Katasteranweisung II gemachten Erfahrungen	17. 6. 1920 — KV 839 —	1. 10. j. J.

Lfd. Nr.	Betrifft	Anordnung	Termin
8	Nachweisungen über die Ausgaben und Leistungen der Lichtumdruckstellen	9. 12. 1930 — K V 2. 722 —	15. 6. j. J.
9	Bericht über die bei Anwendung der Ergänzungsbestimmungen I. Teil zu den Anweisungen VIII, IX und X gemachten Erfahrungen	20. 8. 1931 — K V 2. 170 —	1. 10. j. J.
10	Vorlage von Lichtpausen der Übersichtsblätter über den Stand der Kataster-Neumessungsarbeiten und Rentenguts-(Siedlungs-)neumessungen	10. 9. 1932 — K V 2. 870 — u. 8. 2. 1934 — K V 2. 110 —	15. 4. u. 15. 10. j. J.
11	Jahresberichte nebst allen Anlagen	Anweisung VI Nr. 10 u. RdErl. 13. 1. 1934 — K V 2. 20 —	1. 7. j. J.
12	Berichte zu den Arbeiten an der Katasterplankarte	RdErl. v. 30. 10. 1936 — K V 2. 1200 — u. v. 24. 8. 1937 — K V 2. 999 — u. v. 15. 12. 1937 — K V 2. 1340 —	15. 3., 15. 6., 15. 9. u. 15. 12. j. J.
13	Erfahrungen bezüglich der Ausführung von Vermessungen durch Beamte des gehobenen Dienstes	11. 1. 1938 — K V 2. 1467/37 —	1. 5. j. J.
14	a) Verzeichnis der Studierenden, die ihre praktische Beschäftigung bei Kat.-Ämtern abgeleistet haben b) Verzeichnis der im Vorbereitungsdienst befindlichen Vermessungsreferendare c) Änderungs- und Ergänzungsvorschläge zu den Ausbildungsvorschriften für Vermessungsreferendare	31. 5. 1938 — K V 2. 620 —	15. 7. j. J.

Wiederkehrende Berichte der Katasterämter an die Regierungspräsidenten sind, soweit sie nicht schon zufolge Fortfalls der unter 1 bis 14 genannten Berichte entbehrlich sind, möglichst einzuschränken.

Tagebücher (Anweisung V § 13) und Arbeitsbücher (Anweisung VI Ziffer 25) sind nicht mehr zu führen.

Ausf.-Best. zur VO. über die Ausbildung und Prüfung für den höheren vermessungstechnischen Verwaltungsdienst (3. Nachtrag).
RdErl. d. RMdI. v. 25. 9. 1939 — VI a 9566/39-6841.

Auf Grund des § 5 der VO. über die Ausbildung und Prüfung für den höheren vermessungstechnischen Verwaltungsdienst v. 3. 11. 1937[1]) ordne ich an:

1. Vermessungsreferendare, die den Vorbereitungsdienst gem. § 10 der Ausbildungs- und Prüfungsordnung für den höheren vermessungstechnischen Verwaltungsdienst[2]) in den Abschn. I bis VI abgeleistet haben, sind zur vereinfachten Großen Staatsprüfung zuzulassen, wenn sie für die Reichsverteidigung zur Wehrmacht einberufen worden sind.

2. (1) Vermessungsreferendare, die die Voraussetzungen nach Nr. 1 erfüllen, sind von der Ueberwachungsbehörde unverzüglich zur Zulassung zur vereinfachten

[1]) Vgl. RGBl. 1937 I S. 1165.
[2]) Vgl. RGBl. 1937 I S. 1166.

Prüfung unter Beifügung der vorgeschriebenen Unterlagen dem Reichsprüfungsamt für den höheren vermessungstechnischen Verwaltungsdienst zu melden.

(2) Vermessungsreferendare, die die Probearbeit bereits angefertigt haben, sind nur mündlich zu prüfen.

(3) Vermessungsreferendare, die die Probearbeit noch nicht angefertigt haben oder nach Landesvorschrift keine Probearbeit anzufertigen brauchen, haben zwei Aufsichtsarbeiten und die mündliche Prüfung abzuleisten. Die schriftliche und mündliche Prüfung sind an zwei aufeinander folgenden Tagen abzunehmen. Die schriftliche Prüfung hat der mündlichen voranzugehen.

(4) Der in der mündlichen Prüfung zu haltende freie Vortrag entfällt.

An die Landesregierungen, den Reichskommissar für das Saarland, den Reichsstatthalter im Sudetengau, die preuß. Ober- und Reg.-Präs., den Präs. der Bau- und Finanzdirektion in Berlin, den Präs. des Reichsamts für Landesaufnahme, die Hauptvermessungsabteilungen, den Präs. des Reichsprüfungsamts für den höheren vermessungstechnischen Verwaltungsdienst. — RMBliV. S. 2063.

Hochschulnachrichten.

Der Regierungsbaurat und nichtbeamtete außerordentliche Professor Dr. Heinrich Merkel ist zum außerordentlichen Professor in der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule Karlsruhe ernannt worden.

Der ordentliche Professor in der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule Berlin und Direktor des Preußischen Geodätischen Instituts in Potsdam, Dr., Dr.-Ing. E. h. Otto Eggert, ist wegen Erreichens der Altersgrenze von den amtlichen Pflichten entbunden worden.

Der ordentliche Professor in der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule Berlin, Dr. Heinz Schmehl ist zum Direktor des Preußischen Geodätischen Instituts in Potsdam ernannt worden.

Mitteilungen des DVW.

Personalnachrichten.

Reich. Ernannt: Oberreg.Rat Dr. Rösch im Reichsfinanzministerium z. Min.Rat.

Reichsbahn. Ernannt: z. Reichsbahnräten d. Reichsbahnverm.assessoren Frenck, Essen, Hugo Lehmann, Halle u. Oskar Weber, Mainz, sowie die Oberlandm. awD. Waiblinger, Berlin, Störling, Berlin, Scholz u. Nick, Stuttgart, Sauerbrey, Saarbrücken, Kuhnen, Königsberg, Ramspeck, Frankfurt/Main, Schäfer, Hannover u. Hahn, Oppeln. — **Versetzt:** Reichsbahnrat Hartmann, Oppeln nach Stettin.

Bayern. Landesvermessungsamt. **Ernannt:** z. Verw.Sekr. d. Verw.Ass. Kurt Heiden. — Hauptvermessungsabteilung XIII: **Ernannt:** z. Kartogr.-sekr. d. Kartogr.ass. Georg Kistler u. Franz Geier; z. Kartogr.obersekr. d. Kartogr.-sekr. Hans Meyerhuber. — Flurbereinigung. **Ernannt:** z. Verw.Ass. d. Angest. Gustav Riedinger u. Alexander Böckeler, München (1. 8. 39). — **Versetzt:** Direktor Anton Haas, Bamberg, als Oberreg.rat u. Reg.Baurat 1. Kl. Wilhelm Münch, München, als Reg.Rat 1. Kl. i. d. Staatsmin. f. Wirtschaft, Abtlg. Landwirtschaft. — **Entlassen:** auf Antrag: Verw.Insp. Karl May, Würzburg. — Vermessungsdienst. **Ernannt:** z. Vermessungsinsp. d. Verw.Sekr. Hans Maier u. Georg Forster, Regensburg, Ernst Müller, Frankenthal, Max Rosner, Miesbach, Martin Schmid, Fürth, Eugen Metsch, Traunstein, Friedrich Kaim, Neumark (Bayer. Ostmark), Benno Seidl, Fürstenfeldbruck. — **In den Ruhestand versetzt:** Mess.amtsdir. Friedrich Fischer, Weißenburg i. B.

Sachsen. Verstorben: Reg.Oberlandm. Knaut, Dresden.

Württemberg. Verstorben: Verm.Rat Blickle, Stuttgart.

Baden. Verstorben: Verm.Rat Boos, Heidelberg.

Verlag von Konrad Wittwer in Stuttgart.
Druck von Carl Hammer (Inh. Wilh. Herget), Hofbuchdruckerei in Stuttgart.