

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Organ des Deutschen Geometervereins

J. II. 7/47

Herausgegeben von

Dr. O. Eggert,

Professor a. d. Kgl. Techn. Hochschule
Danzig-Langfuhr, Hermannshöfer Weg 6.

20206.

Heft 1.

1918.

Januar.

Band XLVII.

Der Abdruck von Original-Artikeln ohne vorher eingeholte Erlaubnis der Schriftleitung ist untersagt.

Bestimmung einer Geraden aus den gemessenen Koordinaten ihrer Punkte.

I.

Die vorstehende Aufgabe behandelt Prof. R. Schumann in den Sitzungsberichten der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa, 125. Band, 10. Heft, 1916, S. 1429—1466. Es wird angenommen, dass die rechtwinkligen Koordinaten einer Reihe von Punkten einer Geraden gemessen sind, aus denen die Koeffizienten der Gleichung der Geraden nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden sollen. Die Ausgleichung wird in verschiedener Weise durchgeführt, indem der Reihe nach verschiedene Formen der Gleichung der Geraden zu Grunde gelegt werden.

Die ersten beiden Ansätze gehen von den Gleichungen

$$b + ax_i - y_i = v_i \quad i = 1 \dots n \quad (1)$$

und

$$b' + a'y_i - x_i = v'_i \quad i = 1 \dots n \quad (2)$$

aus, in denen die Quadratsumme $[vv]$ bzw. $[v'v']$ zu einem Minimum gemacht werden muss. Es wird dann als

$$\text{mittlerer Fehler einer Gleichung } m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}$$

$$\text{bzw. } m = \pm \sqrt{\frac{[v'v']}{n-2}}$$

angenommen.

Zwei weitere Ansätze, die der in den Gleichungen (1) und (2) auftretenden Bevorzugung einer der beiden Messungsgrößen aus dem Wege gehen, benutzen die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + p_1 v_1 + p_1' v_1' & \dots \dots \dots - w_1 = 0 \\ a_2 \Delta x + b_2 \Delta y & \dots \dots + p_2 v_2 + p_2' v_2' & \dots \dots \dots - w_2 = 0 \\ a_3 \Delta x + b_3 \Delta y & \dots \dots \dots + p_3 v_3 + p_3' v_3' - w_3 = 0 \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (10)$$

Sollen die Unbekannten und die Verbesserungen so bestimmt werden, dass $[vv] + [v'v']$ ein Minimum wird, und dass gleichzeitig die Gleichungen (10) erfüllt werden, so haben wir in bekannter Weise das Minimum des Ausdrucks

$$\begin{aligned} [vv] + [v'v'] - 2k_1(a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + p_1 v_1 + p_1' v_1' & \dots \dots \dots - w_1) \\ & - 2k_2(a_2 \Delta x + b_2 \Delta y & \dots \dots + p_2 v_2 + p_2' v_2' - w_2) \end{aligned} \quad (10^*)$$

zu suchen, in dem $k_1, k_2 \dots$ unbestimmte Hilfsfaktoren sind. Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= p_1 k_1 & v_1' &= p_1' k_1 \\ v_2 &= p_2 k_2 & v_2' &= p_2' k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} (11)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \dots &= 0 \\ b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + \dots &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} (12)$$

Dies gibt in (10) eingesetzt

$$\left. \begin{aligned} a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + p_1 p_1 k_1 + p_1' p_1' k_1 - w_1 &= 0 \\ a_2 \Delta x + b_2 \Delta y + p_2 p_2 k_2 + p_2' p_2' k_2 - w_2 &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} (13)$$

Hiermit erhält man

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= - \frac{a_1}{p_1^2 + p_1'^2} \Delta x - \frac{b_1}{p_1^2 + p_1'^2} \Delta y + \frac{w_1}{p_1^2 + p_1'^2} \\ k_2 &= - \frac{a_2}{p_2^2 + p_2'^2} \Delta x - \frac{b_2}{p_2^2 + p_2'^2} \Delta y + \frac{w_2}{p_2^2 + p_2'^2} \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} (14)$$

Zur Vereinfachung setzen wir hierin

$$\frac{1}{p_1^2 + p_1'^2} = g_1 \quad \frac{1}{p_2^2 + p_2'^2} = g_2 \dots \dots (15)$$

Führen wir dann die Werte von (14) und (15) in (13) ein, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} [aag] \Delta x + [abg] \Delta y - [awg] &= 0 \\ [abg] \Delta x + [bbg] \Delta y - [bwg] &= 0 \end{aligned} \right\} (16)$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Die Normalgleichungen (16) zeigen jedoch, dass man zu demselben Resultat auf viel einfacherem Wege gelangen kann. Setzt man nämlich in den Gleichungen (10)

$$\left. \begin{aligned} p_1 v_1 + p_1' v_1' &= -\lambda_1 & \text{Gew. } g_1 \\ p_2 v_2 + p_2' v_2' &= -\lambda_2 & \text{„ } g_2 \\ \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

so ergeben sich die neuen Fehlergleichungen

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -w_1 + a_1 \Delta x + b_1 \Delta y & \text{Gew. } g_1 \\ \lambda_2 &= -w_2 + a_2 \Delta x + b_2 \Delta y & \text{„ } g_2 \\ \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

deren Normalgleichungen mit den Gleichungen (16) übereinstimmen.

Sollen nach Beendigung der Ausgleichung auch die Einzelverbesserungen v und v' angegeben werden, so hat man hierzu nach (11) und (17)

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 k_1 + p_1'^2 k_1 &= -\lambda_1 & k_1 &= -\lambda_1 g_1 \\ p_2^2 k_2 + p_2'^2 k_2 &= -\lambda_2 & \text{also } k_2 &= -\lambda_2 g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

und hiermit wird

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -\lambda_1 g_1 p_1 & v_1' &= -\lambda_1 g_1 p_1' \\ v_2 &= -\lambda_2 g_2 p_2 & v_2' &= -\lambda_2 g_2 p_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Die Berechnung des mittleren Fehlers einer Messung kann sowohl aus den v als auch aus den λ erfolgen. Es ist

$$\begin{aligned} v_1^2 + v_1'^2 &= \lambda_1^2 g_1^2 (p_1^2 + p_1'^2) = \lambda_1^2 g_1 \\ v_2^2 + v_2'^2 &= \lambda_2^2 g_2^2 (p_2^2 + p_2'^2) = \lambda_2^2 g_2 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

also

$$[vv] + [v'v'] = [\lambda\lambda g] \quad (21)$$

und

$$m^2 = \frac{[vv] + [v'v']}{n-2} = \frac{[\lambda\lambda g]}{n-2} \quad (22)$$

Ebenso erhalten wir aus den Fehlergleichungen (18) die Gewichte der Unbekannten und somit auch deren mittlere Fehler.

II.

Zur zahlenmässigen Anwendung des Vorstehenden benutzen wir das zweite Beispiel in der Abhandlung von Prof. Schumann. Es sind hier vermittelt eines Koordinatographen die Koordinaten von zehn Punkten

einer Geraden gemessen worden, deren Gleichung ermittelt werden soll. Wir wollen die Koordinaten als Messungsgrößen mit l und l' statt mit x und y bezeichnen, indem die letzteren Buchstaben für die unbekanntenen Koeffizienten der Gleichung der Geraden vorbehalten bleiben sollen.

Die gegebenen Koordinaten sind

	l	l'
1	+ 55,58 mm	+ 40,50 mm
2	+ 68,50 "	+ 46,40 "
3	+ 78,00 "	+ 50,70 "
4	+ 82,15 "	+ 52,51 "
5	+ 95,44 "	+ 58,52 "
6	+ 115,80 "	+ 67,54 "
7	+ 120,05 "	+ 69,50 "
8	+ 130,18 "	+ 74,00 "
9	+ 144,40 "	+ 80,55 "
10	+ 154,50 "	+ 84,98 "

(23)

Als erste Form der Gleichung der Geraden benutzen wir die folgende:

$$x - (l + v) + (l' + v') \cot y = 0 \quad (24)$$

die dem obigen Ansatz (2) bei Schumann entspricht. Es bezeichnet hierin y den Richtungswinkel der Geraden gegen die Abszissenachse. Nach Gleichung (6) führen wir Näherungswerte ein, indem wir setzen

$$\left. \begin{aligned} x &= (x) + \Delta x & y &= (y) + \Delta y \\ l_1 &= (l_1) + \Delta l_1 & l'_1 &= (l'_1) + \Delta l'_1 \\ l_2 &= (l_2) + \Delta l_2 & l'_2 &= (l'_2) + \Delta l'_2 \\ \dots & & \dots & \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Als Näherungswert für den Richtungswinkel y wurde aus der Ausgleichung von Schumann der Wert

$$(y) = 24^{\circ}11'5''$$

angenommen. Hiermit wurden die Werte $l \tan(y)$ berechnet, von den l' subtrahiert und die Differenzen $l' - l \tan(y)$ um ihren Mittelwert vergrößert. Die so erhaltenen Zahlen wurden als Näherungswerte (l') angenommen, während der Einfachheit wegen $(l) = l$, also $\Delta l = 0$ angenommen wurde. Hiermit wurden folgende Zahlen erhalten, deren Stellenzahl in Rücksicht auf den Zweck des Beispiels wesentlich höher beibehalten wurde, als es die Genauigkeit der Messung verlangte.

$$\text{tang}(y) = 0,4490973540$$

	$ltang(y)$	$l' - ltang(y)$
1	+ 24,96083094	+ 15,53916906
2	+ 30,76316875	+ 15,63683125
3	+ 35,02959361	+ 15,67040639
4	+ 36,89334763	+ 15,61665237
5	+ 42,86185147	+ 15,65814853
6	+ 52,00547359	+ 15,53452641
7	+ 53,91413735	+ 15,58586265
8	+ 58,46349354	+ 15,53650646
9	+ 64,84965792	+ 15,70034208
10	+ 69,38554119	+ 15,59445881

	(l')	$\Delta l'$
1	+ 40,56812134	- 0,06812134
2	+ 46,37045915	+ 0,02954085
3	+ 50,63688401	+ 0,06311599
4	+ 52,50063803	+ 0,00936197
5	+ 58,46914187	+ 0,05085813
6	+ 67,61276399	- 0,07276399
7	+ 69,52142775	- 0,02142775
8	+ 74,07078398	- 0,07078398
9	+ 80,45694832	+ 0,09305168
10	+ 84,99283159	- 0,01283159

Nunmehr gehen wir zur Aufstellung der Fehlergleichungen über. Die Einführung der Werte (25) in die Fehlergleichung (24) gibt

$$(x) + \Delta x - ((l) + \Delta l + v) + ((l') + \Delta l' + v') \cotg((y) + \Delta y) \quad (26)$$

und nach Entwicklung nach Taylors Satz unter Vernachlässigung aller Glieder zweiter Ordnung

$$(x) - (l) + (l') \cotg(y) - \Delta l + \cotg(y) \Delta l' + \Delta x - (l') \frac{1}{\sin^2(y)} \Delta y - v + \cotg(y) v' = 0 \quad (26^*)$$

Setzen wir hierin

$$\left. \begin{aligned} - \Delta l + \cotg(y) \Delta l' &= -w \\ -v + \cotg(y) v' &= \lambda \text{ Gew. } g = \frac{1}{1 + \cotg^2(y)} = \sin^2(y) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

und wählen den Näherungswert (x) so, dass

$$(x) - (l) + (l') \cotg(y) = 0 \quad (28)$$

wird, so haben wir die Fehlergleichung

$$\lambda = -w + \Delta x - (l') \frac{1}{\sin^2(y)} \Delta y \quad g = \sin^2(y) \quad (29)$$

Der Näherungswert (x) wird der Gleichung (28) entsprechend

$$(x) = -34,75257705$$

gefunden, und die Einsetzung der übrigen Zahlenwerte in (29) gibt die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0,0681213 \cotg(y) + \Delta x - \frac{1}{\sin^2(y)} 40,568121 \Delta y \\ \lambda_2 &= +0,0295408 \quad \text{,,} \quad + \Delta x - \quad \text{,,} \quad 46,370459 \Delta y \\ \lambda_3 &= +0,0631160 \quad \text{,,} \quad + \Delta x - \quad \text{,,} \quad 50,636884 \Delta y \\ \lambda_4 &= +0,0093620 \quad \text{,,} \quad + \Delta x - \quad \text{,,} \quad 52,500638 \Delta y \\ \lambda_5 &= +0,0508581 \quad \text{,,} \quad + \Delta x - \quad \text{,,} \quad 58,469142 \Delta y \\ \lambda_6 &= -0,0727640 \quad \text{,,} \quad + \Delta x - \quad \text{,,} \quad 67,612764 \Delta y \\ \lambda_7 &= -0,0214278 \quad \text{,,} \quad + \Delta x - \quad \text{,,} \quad 69,521428 \Delta y \\ \lambda_8 &= -0,0707840 \quad \text{,,} \quad + \Delta x - \quad \text{,,} \quad 74,070784 \Delta y \\ \lambda_9 &= +0,0930517 \quad \text{,,} \quad + \Delta x - \quad \text{,,} \quad 80,456948 \Delta y \\ \lambda_{10} &= -0,0128316 \quad \text{,,} \quad + \Delta x - \quad \text{,,} \quad 84,992832 \Delta y \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{Gewicht } g = \sin^2(y).$$

Aus der Summe der Fehlergleichungen (30) ergibt sich noch die Beziehung

$$\Delta x - \frac{1}{\sin^2(y)} 62,52 \Delta y = 0 \quad (31)$$

die man dazu benutzen kann, die Unbekannte x auszuschneiden. Es bleiben dann die vereinfachten Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0,0681213 \cotg(y) + \frac{1}{\sin^2(y)} 21,9519 \Delta y \\ \lambda_2 &= +0,0295408 \quad \text{,,} \quad + \quad \text{,,} \quad 16,1495 \Delta y \\ \lambda_3 &= +0,0631160 \quad \text{,,} \quad + \quad \text{,,} \quad 11,8831 \Delta y \\ \lambda_4 &= +0,0093620 \quad \text{,,} \quad + \quad \text{,,} \quad 10,0194 \Delta y \\ \lambda_5 &= +0,0508581 \quad \text{,,} \quad + \quad \text{,,} \quad 4,0509 \Delta y \\ \lambda_6 &= -0,0727640 \quad \text{,,} \quad - \quad \text{,,} \quad 5,0928 \Delta y \\ \lambda_7 &= -0,0214278 \quad \text{,,} \quad - \quad \text{,,} \quad 7,0014 \Delta y \\ \lambda_8 &= -0,0707840 \quad \text{,,} \quad - \quad \text{,,} \quad 11,5508 \Delta y \\ \lambda_9 &= +0,0930517 \quad \text{,,} \quad - \quad \text{,,} \quad 17,9369 \Delta y \\ \lambda_{10} &= -0,0128316 \quad \text{,,} \quad - \quad \text{,,} \quad 22,4728 \Delta y \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{Gewicht } g = \sin^2(y)$$

Man erhält hiermit die Normalgleichung

$$- 0,010974 \cotg(y) + 2035,8349 \frac{1}{\sin^2(y)} \Delta y = 0 \quad (33)$$

und mit

$$(y) = 24^\circ 11' 5''$$

$$\Delta y = + 0,0000020145$$

oder

$$\Delta y = + 0,4155''$$

Mit Hilfe der Gleichung (31) findet man auch den Wert von Δx , nämlich

$$\Delta x = + 0,000750 \text{ mm}$$

Somit sind die endgiltigen Werte der beiden Unbekannten

$$\left. \begin{aligned} x &= - 34,751827 \text{ mm} \\ y &= - 24^\circ 11' 5,4155'' \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Wir gehen nun zur Berechnung der mittleren Fehler über und bestimmen zunächst mit Hilfe der reduzierten Fehlergleichungen (32) die Werte der λ sowie deren Quadrate. Es wird

$\lambda_1 = - 0,151422$	$\lambda_1^2 = 0,022928$
$\lambda_2 = + 0,065972$	$\lambda_2^2 = 0,004352$
$\lambda_3 = + 0,140682$	$\lambda_3^2 = 0,019791$
$\lambda_4 = + 0,020967$	$\lambda_4^2 = 0,000440$
$\lambda_5 = + 0,113294$	$\lambda_5^2 = 0,012836$
$\lambda_6 = - 0,162084$	$\lambda_6^2 = 0,026271$
$\lambda_7 = - 0,047797$	$\lambda_7^2 = 0,002285$
$\lambda_8 = - 0,157753$	$\lambda_8^2 = 0,024886$
$\lambda_9 = + 0,206982$	$\lambda_9^2 = 0,042842$
$\lambda_{10} = - 0,028842$	$\lambda_{10}^2 = 0,000832$
$[\lambda\lambda] = 0,157463$	$[\lambda\lambda g] = 0,026428$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{10 - 2}} = \pm 0,057476 \text{ mm.} \quad (35)$$

Aus der Normalgleichung (33) ergibt sich unmittelbar die Gewichtsreziproke

$$\frac{1}{g_y} = \frac{\sin^2(y)}{2035,8349} = 0,0000824434$$

somit wird

$$m_y = \pm \frac{m}{\sqrt{g_y}} = \pm 0,00052187$$

oder auch

$$m_y = \pm 107,643''.$$

Berechnet man mit Hilfe der ursprünglichen Fehlergleichungen auch noch die Gewichtsreziproke $\frac{1}{g_x}$, so findet man

$$\frac{1}{g_x} = 12,03507$$

also

$$m_x = \pm \frac{m}{\sqrt{g_x}} = \pm 0,199394 \text{ mm.}$$

Der Vollständigkeit wegen sollen auch noch die einzelnen Verbesserungen v und v' der Abszissen und Ordinaten berechnet werden, wozu wir uns der Gleichungen (20) bedienen müssen. Hiernach ist

$$v = + \lambda \sin^2(y) \qquad v' = - \lambda \sin^2(y) \cotg(y)$$

und man findet hiermit folgende Werte:

$v_1 = - 0,025414 \text{ mm}$	$v_1' = + 0,056590 \text{ mm}$
$v_2 = + 0,011073 \text{ „}$	$v_2' = - 0,024655 \text{ „}$
$v_3 = + 0,023612 \text{ „}$	$v_3' = - 0,052576 \text{ „}$
$v_4 = + 0,003519 \text{ „}$	$v_4' = - 0,007836 \text{ „}$
$v_5 = + 0,019015 \text{ „}$	$v_5' = - 0,042340 \text{ „}$
$v_6 = - 0,027204 \text{ „}$	$v_6' = + 0,060574 \text{ „}$
$v_7 = - 0,008022 \text{ „}$	$v_7' = + 0,017863 \text{ „}$
$v_8 = - 0,026477 \text{ „}$	$v_8' = + 0,058956 \text{ „}$
$v_9 = + 0,034739 \text{ „}$	$v_9' = - 0,077354 \text{ „}$
$v_{10} = - 0,004841 \text{ „}$	$v_{10}' = + 0,010779 \text{ „}$

(36)

Als Endergebnis der Ausgleichung erhalten wir folgende Gleichung der Geraden

$$\begin{aligned} - 34,75183 - x + 2,22668 y &= 0 \\ \pm 0,19939 \qquad \pm 0,00311 & \end{aligned} \qquad (37)$$

worin nun wieder wie üblich x und y die Abszissen und Ordinaten bezeichnen sollen.

III.

Es ist nun zu prüfen, wie die Ausgleichung sich gestaltet, wenn eine andere Form der Gleichung der Geraden eingeführt wird. Wir beginnen mit dem Ansatz (1) von Schumann, der mit unseren Bezeichnungen wie folgt zu schreiben ist:

$$x' + (l + v) \text{tang} y - (l' + v') = 0 \qquad (38)$$

Die Grösse x' bezeichnet hier die Strecke, die die Gerade von der Ordinatenachse abschneidet, stimmt also nicht mit der Grösse x aus Gleichung (24) überein; y ist wiederum der Richtungswinkel der Geraden gegen die x -Achse.

Werden wieder entsprechend den Gleichungen (6) Näherungswerte eingeführt, indem man setzt

$$\begin{aligned} x' &= (x') + \Delta x' & l &= (l) + \Delta l \\ y &= (y) + \Delta y & l' &= (l') + \Delta l' \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} (x') + \Delta x' + (l) \operatorname{tang}(y) + \operatorname{tang}(y) \Delta l + \operatorname{tang}(y) v' + l \frac{1}{\cos^2(y)} \Delta y - \\ - (l') - \Delta l' - v' = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Diese Gleichung wäre der früheren Gleichung (26*) entsprechend weiter zu behandeln und der Ausgleichung zu Grunde zu legen. Indessen lässt sich sofort einsehen, dass beide Gleichungen identisch sind. Für die beiden Grundgleichungen (24) und (38) trifft dies ohne weiteres zu, da

$$x' = -x \operatorname{tang} y$$

ist. Mit Einführung der Näherungswerte ist dann ferner

$$(x') + \Delta x' = - \left((x) + \Delta x \right) \operatorname{tang} \left((y) + \Delta y \right)$$

oder

$$(x') + \Delta x' = - (x) \operatorname{tang}(y) - (x) \frac{1}{\cos^2(y)} \Delta y - \operatorname{tang}(y) \Delta x$$

Wird dies in (39) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (x) - (l) + (l') \operatorname{cotg}(y) - \Delta l + \operatorname{cotg}(y) \Delta l' + \Delta x - (l) \frac{1}{\cos^2(y)} \operatorname{cotg}(y) \Delta y + \\ + x \frac{1}{\cos^2(y)} \operatorname{cotg}(y) \Delta y - v + \operatorname{cotg}(y) v' = 0 \end{aligned}$$

Da aber leicht einzusehen ist, dass

$$\left((l) - (x) \right) \frac{\operatorname{cotg}(y)}{\cos^2(y)} = (l') \frac{1}{\sin^2(y)} \quad (40)$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} (x) - (l) + (l') \operatorname{cotg}(y) - \Delta l + \operatorname{cotg}(y) \Delta l' + \Delta x - (l') \frac{1}{\sin^2(y)} \Delta y - \\ - v + \operatorname{cotg}(y) v' = 0 \end{aligned}$$

was mit Gleichung (26*) übereinstimmt.

Zur weiteren Prüfung wollen wir noch eine andere Form der Gleichung der Geraden heranziehen, die Schumann seinem dritten Ansatz zu Grunde legt. Es ist dies die Gleichung

$$-P - (l + v) \sin y + (l' + v') \cos y = 0 \quad (41)$$

in der P den senkrechten Abstand des Koordinatennullpunktes von der Geraden bezeichnet, während wieder y der Richtungswinkel der Geraden ist.

Mit Einführung der Näherungswerte erhält man hieraus

$$-P - (l + \Delta l + v) \sin(y + \Delta y) + \\ + (l' + \Delta l' + v') \cos(y + \Delta y) = 0$$

oder

$$-P - (l + \Delta l + v)(\sin(y) + \cos(y)\Delta y) + \\ + (l' + \Delta l' + v')(\cos(y) - \sin(y)\Delta y) = 0 \quad (42)$$

Da

$$P = -x \sin y = -((x) + \Delta x)(\sin(y) + \Delta y)$$

oder

$$-P = (x)\sin(y) + \sin(y)\Delta x + (x)\cos(y)\Delta y$$

ist, so findet man sofort

$$(x) + \Delta x - (l) - \Delta l + (l') \cotg(y) + \cotg(y)\Delta l' + (x)\cotg(y)\Delta y - \\ - (l)\cotg(y)\Delta y - (l')\Delta y - v + \cotg(y)v' = 0$$

Nach (40) ist aber

$$((x)\cotg(y) - (l)\cotg(y) - (l'))\Delta y = (-l'\cotg^2(y) - (l'))\Delta y = \\ = -l' \frac{1}{\sin^2(y)} \Delta y$$

infolgedessen geht die vorstehende Gleichung über in

$$(x) - (l) + (l')\cotg(y) - \Delta l + \cotg(y)\Delta l' + \Delta x - (l') \frac{1}{\sin^2(y)} \Delta y - \\ - v + \cotg(y)v' = 0$$

welche Gleichung wieder mit (26*) übereinstimmt. Auch diese Form der Ausgleichung führt somit zu demselben Resultat. Bemerkenswert ist hierbei noch das Gewicht der zur Vereinfachung einzuführenden Verbesserung λ . Es ist nämlich hier nach (42) zu setzen

$$\sin(y)v - \cos(y)v' = \lambda \\ \text{Gewicht } g = \frac{1}{\sin^2(y) + \cos^2(y)} = 1 \quad (43)$$

Die Verbesserungen λ sind also mit dem Gewicht $g = 1$ wie die ursprünglichen Verbesserungen v und v' einzuführen.

IV.

Wenn hiermit die Identität der verschiedenen Formen der Fehlergleichungen in der vorliegenden Aufgabe nachgewiesen ist, so könnten

noch Zweifel bestehen, ob auch für verschiedene Grössen der Näherungswerte dasselbe Resultat gefunden wird, d. h. ob die Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung in der Gleichung (26) die Zahlenergebnisse wesentlich beeinflusst. Es wurde deshalb die Berechnung des Abschnittes II nochmals unter Zugrundelegung des Näherungswertes

$$(y) = 24^{\circ}11'6''$$

$$\text{tang}(y) = 0,4491031800$$

durchgeführt. Hiermit ergab sich zunächst folgende Berechnung der (l') und $\Delta l'$

	$ltang(y)$	$l' - ltang(y)$
1	+ 24,96115474	+ 15,53884526
2	+ 30,76356783	+ 15,63643217
3	+ 35,03004804	+ 15,66995196
4	+ 36,89382623	+ 15,61617377
5	+ 42,86240750	+ 15,65759250
6	+ 52,00614824	+ 15,53385176
7	+ 53,91483675	+ 15,58516325
8	+ 58,46425197	+ 15,53574803
9	+ 64,85049919	+ 15,69950081
10	+ 69,38644130	+ 15,59355870

	(l')	$\Delta l'$
1	+ 40,56783656	— 0,06783656
2	+ 46,37024965	+ 0,02975035
3	+ 50,63672986	+ 0,06327014
4	+ 52,50050805	+ 0,00949195
5	+ 58,46908932	+ 0,05091068
6	+ 67,61283006	— 0,07283006
7	+ 69,52151857	— 0,02151857
8	+ 74,07093379	— 0,07093379
9	+ 80,45718101	+ 0,09281899
10	+ 84,99312312	— 0,01312312

Nehmen wir nach Gleichung (28) den Näherungswert

$$(x) = - 34,7507711$$

an, so erhalten wir die Fehlergleichungen

Mit diesen Werten der Unbekannten wurden auch noch die Verbesserungen λ bzw. v und v' berechnet

$\lambda_1 = -0,151419$	$v_1 = -0,025414$	$v_1' = +0,056589$
$\lambda_2 = +0,065972$	$v_2 = +0,011073$	$v_2' = -0,024655$
$\lambda_3 = +0,140681$	$v_3 = +0,023612$	$v_3' = -0,052576$
$\lambda_4 = +0,020966$	$v_4 = +0,003519$	$v_4' = -0,007836$
$\lambda_5 = +0,113292$	$v_5 = +0,019015$	$v_5' = -0,042340$
$\lambda_6 = -0,162082$	$v_6 = -0,027204$	$v_6' = +0,060574$
$\lambda_7 = -0,047796$	$v_7 = -0,008022$	$v_7' = +0,017862$
$\lambda_8 = -0,157751$	$v_8 = -0,026477$	$v_8' = +0,058955$
$\lambda_9 = +0,206979$	$v_9 = +0,034740$	$v_9' = -0,077353$
$\lambda_{10} = -0,028842$	$v_{10} = -0,004841$	$v_{10}' = +0,010779$

Hiermit wird

$$[\lambda\lambda g] = 0,026428$$

$$m = \pm 0,057476 \text{ mm}$$

Endlich haben wir noch

$$\frac{1}{g_x} = 12,03485 \qquad \frac{1}{g_y} = 0,0000824421$$

$$m_x = \pm 0,199392 \text{ mm}$$

$$m_y = \pm 0,00052187$$

oder $m_y = \pm 107,643''$

Die sehr weit gehende Uebereinstimmung der Ergebnisse in den Abschnitten II und IV zeigt, dass in der Tat die Aenderung der Näherungswerte ohne schädlichen Einfluss geblieben ist.

V.

Die bisher behandelte Theorie ist nur für Beobachtungen gleicher Genauigkeit entwickelt worden. Da Helmert aber a. a. O. die Ausgleichung der Fehlergleichungen (9), die ja auch die vorliegende Aufgabe enthalten, auch für Beobachtungen ungleicher Genauigkeit durchgeführt hat, so bedarf diese Frage keiner weiteren Erörterung. Indessen lässt sich leicht zeigen, dass die einfache nur für die Gleichungen (10) gültige Lösung auch für Beobachtungen ungleicher Genauigkeit keine Schwierigkeiten bietet. Nimmt man nämlich an, dass den Beobachtungen der Gleichungen (10) die Gewichte γ und γ' zukommen, so ist in (18) für das Gewicht g_i der Ausdruck

$$\frac{1}{\frac{p_i^2}{\gamma_i} + \frac{p_i'^2}{\gamma_i'}} = g_i \qquad (44)$$

zu setzen, womit das Weitere sich wie im Abschnitt I ergibt.

Es möge hier noch kurz auf eine Aufgabe eingegangen werden, die K. Weigel in einem Aufsätze „Ueber die Behandlung der Fehlergleichungen, deren Koeffizienten bei der Unbekannten nicht fehlerfrei sind“, Oesterr. Zeitschr. f. Vermessungsw. 1913 S. 297—304, als Beispiel für eine neu aufgestellte Theorie mitteilt. Es handelt sich in dieser Aufgabe um die Bestimmung des plausibelsten Radius eines im Felde abgesteckten Kreisbogens, von dem die Tangente im Bogenanfangspunkte und die einzelnen Bogenpunkte gegeben sind. Gemessen sind im Anfangspunkte des Bogens die Winkel zwischen den einzelnen Bogenpunkten und der Tangente, sowie die Längen der entsprechenden Sehnen. Bezeichnet man die gemessenen Winkel und Sehnen mit α und d , den unbekanntem Radius mit x , so besteht zwischen diesen Grössen die Gleichung

$$d = 2x \sin \alpha$$

und die Fehlergleichungen haben die Form

$$2x \sin(\alpha + v_\alpha) - (d + v_d) = 0. \quad (45)$$

Führen wir wieder Näherungswerte ein, indem wir setzen

$$x = (x) + \Delta x \quad \alpha = (\alpha) + \Delta \alpha \quad d = (d) + \Delta d$$

wobei die Näherungswerte so gewählt sein sollen, dass

$$2(x) \sin(\alpha) - (d) = 0$$

ist, so erhalten wir die Fehlergleichungen in der linearen Form

$$2(x) \cos(\alpha) \Delta \alpha - \Delta d + 2 \sin(\alpha) \Delta x + 2(x) \cos(\alpha) v_\alpha - v_d = 0. \quad (46)$$

Werden hierzu noch die Gewichte γ_α und γ_d für die gemessenen Winkel und Sehnen angenommen, so kann man die Ausgleichung nach der von Helmert angegebenen Methode durchführen. Einer neuen Theorie bedarf es hierzu jedenfalls nicht.¹⁾ Jedoch treffen auch hier die Voraussetzungen der Gleichungen (10) zu, so dass man die beiden Verbesserungen in (46) zusammenfassen kann. Wir setzen hierzu nach (17)

$$- 2(x) \cos(\alpha) v_\alpha + v_d = \lambda \quad (47)$$

und das Gewicht dieser Verbesserung λ ist nach (15)

$$g = \frac{1}{\frac{4(x)^2 \cos^2(\alpha)}{\gamma_\alpha} + \frac{1}{\gamma_d}} \quad (48)$$

welche Grösse übrigens mit dem von Weigel a. a. O. S. 303 gefundenen Gewicht übereinstimmt.

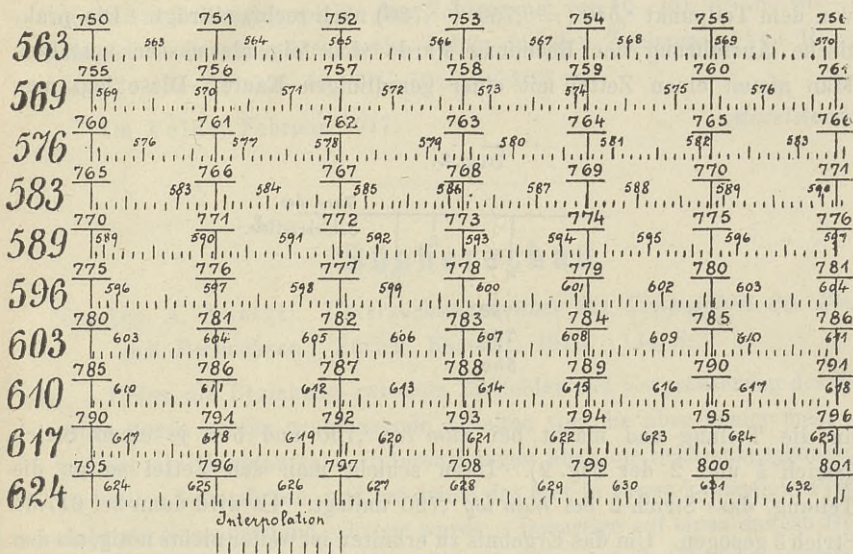
Eggert.

¹⁾ Vergl. auch eine hierher gehörige Aufgabe in dem Aufsatz E. Doležal., Das Pantograph-Planimeter, Sitzungsber. der K. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Klasse, Abt. IIa, 124. Bd., S. 863.

Die Graphische Logarithmentafel.

In einem früheren Heft dieser Zeitschrift ist ein Entwurf einer graphischen Multiplikationstafel enthalten. Diese Tafel ist ein Versuch, die Vorteile des Rechenschiebers auf Teilungen von grösserer Länge zu übertragen, ohne dass es nötig ist, zwei vollständig gleiche Teilungen aneinander zu verschieben. Denn gerade die Herstellung von zwei genau gleichen und bei verschiedenen Witterungsverhältnissen gleichbleibenden logarithmischen Skalen ist technisch sehr schwer durchführbar. Im folgenden soll gezeigt werden, dass man auch eine einzelne Skala in vielen Fällen gut für graphisch-numerisches Rechnen verwenden kann.

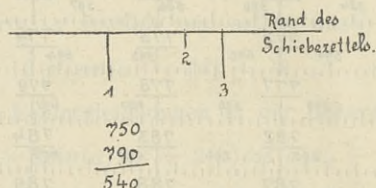
Fig. 1.



Hat man eine logarithmische Skala von 20 m Länge und ordnet diese so an wie der in Fig. 1 dargestellte zwanzigste Teil der Gesamtskala, so ist es zunächst möglich zu jeder Zahl den zugehörigen Logarithmus abzulesen. Nehmen wir z. B. die erste in Fig. 1 aufgeführte Zahl 563, so finden wir dazu als Mantisse in erster Linie die drei Stellen 750, die links der kleinen Zahl 563 etwas höher angeschrieben sind. Der vertikale Strich des T unter der Zahl 750 bezeichnet auf der logarithmischen Skala die Zahl, deren Logarithmus genau ,75000 ist. Ebenso ist $\text{num log } ,751 = 56362$. Um nun zur Zahl 563 die zwei Mantissenstellen nach 750 zu finden, braucht man nur die Entfernung vom Teilstrich 563 nach dem vertikalen Strich des T von 750 in Zehnteln und Hundertteilen der Strecke zwischen $\text{num log } ,750$ und $\text{num log } ,751$ auszumessen, wozu der kleine

mit „Interpolation“ überschriebene Masstab am Fuss der Fig. 1 verwendet werden kann. Danach ergeben sich für die vierte und fünfte Mantissenstelle des $\log 563$ die Ziffern 50 oder als Gesamtergebnis $\log 563 = ,75050$. (Da die Fig. 1 nur den Grundgedanken erläutern soll, ist die Teilung nicht ganz genau, so dass die fünfte Mantissenstelle hier im allgemeinen von der Angabe der Logarithmentafel abweichen wird). Um nun mit der Tafel zu multiplizieren, könnte man daraus die beiden Logarithmen fünfstellig entnehmen, diese zahlenmässig addieren und die dazu gehörige Zahl aufsuchen. Vorteilhafter aber ist es, die beiden letzten Mantissenstellen nur als Strecken zu ermitteln, so dass man hat z. B. $\log 563 = ,750 + s_1$, $\log 617,34 = ,790 + s_2$. Daraus ergibt sich $\log 563 \times 617,34 = ,750 + ,790 + s_1 + s_2$. Die Strecken s_1 und s_2 werden graphisch addiert und man findet das Produkt auf der Skala, wenn man die Strecke $s_1 + s_2$ von dem Teilpunkt $,540 (= ,750 + ,790)$ nach rechts abträgt. Die praktische Ausführung der Rechnung würde sich folgendermassen gestalten. Man nimmt einen Zettel mit einer geradlinigen Kante. Diese legt man

Fig. 2.



an die Teilung und macht bei *num log* $,750$ und 563 je einen Strich (Strich 1 und 2 der Fig. 2). Dann schiebt man den Zettel so an die Teilung, dass Strich 2 bei *num log* $,790$ anliegt. Es wird dann bei $617,34$ Strich 3 gezogen. Um das Ergebnis zu erhalten ist weiter nichts nötig, als den Zettel mit Strich 1 bei *num log* 540 anzulegen und bei Strich 3 die Skala abzulesen. Die drei ersten Mantissenstellen der beiden Faktoren schreibt man mit auf den Schieberzettel, so dass dieser die gesamte Berechnung enthält. Der Vorteil dieses Verfahrens vor dem üblichen rein zahlenmässigen liegt darin, dass die immer sehr störende Interpolation ganz mechanisch erfolgt und dass bei der numerischen Rechnung mit 3 statt mit 5 Stellen gerechnet werden kann. Das Verfahren scheint mir wohl geeignet, das logarithmische Rechnen, das durch die Rechenmaschine stark beschränkt wurde, wieder zu Ehren zu bringen. Ein besonderer Vorteil des Verfahrens ist es, dass man die Genauigkeit der graphischen Tafel der erforderlichen Rechengenauigkeit besser anpassen kann als dies bei einer Zahlentafel möglich ist. Gerade bei den gewöhnlichen landmesserischen Arbeiten kommt oft eine Genauigkeit von etwa $\frac{1}{10000}$ in Frage, wozu eine 4stellige

Logarithmentafel nicht ausreicht, während die 5stellige wieder zu weit geht. Hier könnte eine graphische Tafel von 5 m Teilungslänge, die sich auf einer einzigen Seite in Aktenformat unterbringen lässt, gute Dinge leisten — namentlich bei Kleinpunktsberechnungen. Zweckmässig wäre es dann aber die gleichmässige Teilung zur Bestimmung der ersten Mantissenstellen in anderer Farbe, etwa rot, auszuführen. Ebenso wie für gewöhnliche logarithmische Rechnung eignet sich das Verfahren für logarithmisch-trigonometrische Rechnungen. Das Prinzip der Vereinigung von numerischer und graphischer Rechnung lässt sich ferner mit Vorteil für die Berechnung von $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ verwenden, wenn statt der logarithmischen eine quadratische Teilung gewählt wird. Will man hierbei eine gleichbleibende Genauigkeit erzielen, so muss man mehrere Tafeln anwenden. Für die gewöhnlichen landmesserischen Rechnungen werden drei Tafeln von je 2 m Teilungslänge für den Zahlenraum von 10—20, 20—50, 50—100 genügen — besser wären sechs Tafeln für den Zahlenraum von 10—16; 16—22; 22—32; 32—50; 50—70; 70—100 m.

Im Felde, Februar 1917.

Mittelstaedt.

Bücherschau.

Dr.-Ing. A. Noetzli. *Untersuchungen über die Genauigkeit des Zielens mit Fernröhren.* Zürich, Rascher, 1915. 144 S.

Ueber die Beziehung zwischen Zielfehler und Vergrösserung des Fernrohrs liegen bereits grundlegende Arbeiten vor, die aber immer mehr oder weniger als Hauptaufgabe Untersuchungen über die Schätzungsgenauigkeit an Skalen behandelten, und bei denen das hier in Frage kommende Problem mehr als Nebenumstand erörtert wurde. Derartige auf einen andern Hauptzweck gerichtete Untersuchungen lassen aber auf die Beziehung zwischen Zielfehler und Fernrohrvergrösserung keinen zuverlässigen Schluss zu, da bei ihnen die Ursachen, die in ihrer Gesamtheit den Zielfehler ausmachen, nicht scharf voneinander getrennt werden, und somit keine eingehende Ergründung finden.

Als ausschlaggebendes Moment bei den Noetzlischen Untersuchungen tritt nun aber gerade der Umstand hervor, dass der Verfasser sich mit der grössten Sorgfalt und Umsicht bemüht hat, den Einfluss der reinen Vergrösserung des Fernrohrs auf den Zielfehler streng zu trennen von allen physikalischen und psychologischen beim Zielen auftretenden Nebenumständen. Schon die Arbeiten von Stampfer und Reinhertz zeigen bei näherer Betrachtung Widersprüche, die eben darin ihren Grund haben, dass diese systematischen Einflüsse, die den Zielfehler hinsichtlich der

Fernrohrvergrößerung gewissermassen „verfälschen“, bei der Beurteilung entweder nicht genügend beachtet, oder nicht zutreffend erkannt wurden. Hierzu kommt, dass bei früheren Arbeiten, wie oben erwähnt, der Hauptzweck ein anderer war, als die spezielle Behandlung des Zielfehlers in Bezug auf die Fernrohrvergrößerung, woraus sich auch erklärt, dass die Grössenunterschiede der in Betracht gezogenen Vergrößerungen nicht genügend grosse waren, um aus ihnen einen allgemein gültigen Schluss mit Sicherheit ziehen zu können. Bei dem Streben nach Ausschaltung systematischer, speziell psychologischer Fehler ist beachtenswert, dass Noetzli seine Versuche so anordnete, dass die scheinbare Grösse des Zielobjekts bei den verschiedenen starken Vergrößerungen stets gleich gross blieb, damit auf diese Weise die Beobachtungsergebnisse ermöglichten, den Einfluss der Vergrößerung in ihrem expliciten Betrage zu ergründen. Den Begriff des Zielens definiert Verfasser als „Schätzen in die Mitte des Intervalls“. Hier liegt nun sofort der Schluss nahe, an die Untersuchungen über das Nivellieren mit Libellenausschlägen unter Einstellung des Fadens auf die Mitte des Skalenintervalls zu denken. Die hierauf bezüglichen Arbeiten können aber hier deshalb nicht zum Vergleich herangezogen werden, weil bei ihnen die klare Erkenntnis der Beziehung zwischen Zielfehler und Vergrößerung verwischt wird durch die auftretenden Nebenumstände, besonders auch durch die in Frage kommenden aus den Libellen resultierenden Fehlerquellen.

Es kam also in allererster Linie darauf an, unter Ausschaltung der physikalischen und psychologischen Einflüsse zunächst die wahre, von systematischen Fehlern freie Beziehung aus den Versuchen zu erhalten. Dieses Ziel konnte nur, wie Verfasser von vornherein erkannte, durch sachgemässe Anordnung der Beobachtungen erreicht werden, bei der die systematischen Einflüsse dadurch unschädlich zu machen waren, dass die sie erzeugenden Faktoren möglichst konstant gehalten wurden. Vor den rein äusserlichen Fehlerquellen, wie Bewegung der Luft, Erschütterung des Instruments, wechselnde Tagesbeleuchtung, wurden die grundlegenden Untersuchungen dadurch geschützt, dass sie in geschlossenem Raume auf fester Unterlage des Apparats bei künstlicher Beleuchtung stattfanden. Um möglichst grosse Verschiedenheit in den Vergrößerungen zu erhalten, setzte Noetzli die Objektive und Okulare verschiedener Fernrohre je nach Bedarf zusammen. Ferner wurde eine möglichst gleiche Helligkeit durch Abblendung des Objektivs erzielt, wobei der Durchmesser der Austrittspupille auf 1 mm gehalten wurde. Die erwähnte möglichste Konstanterhaltung der scheinbaren Zielobjektgrösse bei Anwendung verschieden starker Vergrößerungen erfolgte durch entsprechende Veränderung der Entfernung zwischen Zielobjekt und Fernrohr.

Die Resultate der Noetzlischen Untersuchungen beruhen in ihren Grund-

lagen hauptsächlich auf den Schlüssen aus zwei verschiedenen Beobachtungsmethoden, nämlich erstens aus Beobachtungen ohne Fernrohrfäden, bei denen der Zielfaden sich nicht wie gewöhnlich im Fernrohre selbst befand, sondern direkt vor dem Zielobjekt bewegt wurde, und zweitens aus Beobachtungen mit Zielfäden innerhalb des Fernrohrs, also der gewöhnlichen Fadenkreuzanordnung.

Die auf den ersten Blick eigenartig erscheinende erste Anordnung mit „Faden ausserhalb des Fernrohrs“ bot für die Unschädlichmachung physikalischer und psychologischer Fehlerquellen folgende Vorteile. Zunächst war die Grössenbeziehung zwischen scheinbarem Intervall und Fadenstärke für alle Vergrösserungen konstant. Ferner wurde die Parallaxe völlig ausgeschaltet, und durch die geschickt ersonnene Art der Anordnung der Beobachtungen war die Ablesegenauigkeit bis zu jeder gewünschten Genauigkeit erhöht. Erschütterungen des Instruments, Zittern des Fernrohrbildes durch Bewegung der Luft und Wechsel in der Beleuchtung kam ebenfalls bei diesen Versuchen nicht in Betracht, weil sie in geschlossenem Raume bei künstlicher Beleuchtung stattfanden. Ganz kurz mag hier nur erwähnt sein, dass der vom Verfasser eingehend beschriebene Beobachtungsapparat mit Hilfe des Rahmens eines Stereokomparators hergestellt wurde. Der durch eine Mikrometerschraube bewegliche Schlitten trug eine Tafel mit dem Zielobjekt. Auf dem festen Untergestell des Rahmens war eine Anzahl schwarzer Papierstreifen, welche die Fäden darstellten, angebracht, und zwar so, dass zwischen den „Fäden“ und der Zieltafel nur ein ganz geringer Zwischenraum blieb. Durch Bewegen des Schlittens konnte nun der als Faden im Fernrohr erscheinende Papierstreifen in die Mitte des Zielobjekts, das Keilform hatte, eingestellt werden, wobei die erhaltene Einstellung an der Mikrometerschraube des Schlittens, die bei 0,01 mm Angabe noch 0,001 mm schätzen liess, abgelesen wurde. Für jede Untersuchung erfolgten die Zielungen in Reihen von 20 Visuren. Die Unbequemlichkeit des Einwinkens der Fadenstellung vom Instrument aus unter Mithilfe eines Gehilfen umging Verfasser dadurch, dass er das Beobachtungsinstrument direkt neben dem Zielapparat aufstellte, und durch einen in entsprechender Entfernung vor dem Instrument aufgestellten Präzisionspiegel das Bild der Zieltafel beobachtete. Das Grundprinzip war, wie mehrfach erwähnt, dem Auge immer ein bei den verschiedenen Vergrösserungen scheinbar gleichgrosses Zielobjekt darzubieten, was durch Aenderung der Entfernung des Zieles, d. h. durch Aenderung der Entfernung des Präzisionsspiegels, erreicht werden konnte. Der Verfasser führte nun ca. 1300 Visuren unter Anwendung von Vergrösserungen von $v = 1$ bis $v = 78$ in folgender Weise aus. Der „Faden“ wurde durch Verschieben des Schlittens auf Mitte des Zielintervalls eingestellt, und zwar waren die Grössenverhältnisse von Fadenbreite und Zielintervall so gewählt, dass

zwischen den Rändern des Intervalls und des Fadens beiderseits nur immer ein ganz kleiner Zwischenraum blieb, wodurch die Einstellung sehr scharf erfolgen konnte. Hierauf wurde der Stand der Mikrometerschraube, der naturgemäss für jede Visur ein etwas verschiedener war, abgelesen. Aus jeder Beobachtungsreihe für eine gewählte Vergrösserung ergab nun zunächst aus den einzelnen Ablesungen an der Mikrometerschraube die seitliche Fadenverschiebung ein lineares Fehlermass m_T , aus dem der mittlere Zielfehler in Sekunden nach $m'' = \frac{m_T}{D} \cdot \varrho''$ berechnet wurde. Hierin ist D die Gesamtentfernung Fernrohr—Spiegel—Zielobjekt. Zur Sicherung gegen Selbstbeeinflussung wurden die Mikrometerschraubenablesungen meist von einem andern Beobachter vorgenommen, auch wurden Beobachtungsreihen durch andere Beobachter angestellt. Unter Benutzung von Vergrösserungen von 1 bis 78fach ergab nun das sehr umfangreiche Material als deutliches einwandfreies Ergebnis, dass die Produkte $m \cdot v$ annähernd konstant blieben.

Hiermit kommt Noetzli zu seinem ersten grundlegenden Resultat: Unter besonders günstigen Umständen, bei denen alle systematischen Einflüsse nach Möglichkeit ausgeschaltet sind, und bei denen der Faden ausserhalb des Fernrohrs unmittelbar vor dem Zielobjekt bewegt wird, wächst die Zielgenauigkeit proportional mit der Vergrösserung. Es ist

$$m \cdot v = \text{konstant}; \quad m = \frac{c}{v},$$

d. h. anders ausgedrückt, der Zielfehler ist unter den genannten Verhältnissen umgekehrt proportional der Vergrösserung.

Nachdem somit die Anordnung „Fäden ausserhalb des Fernrohrs unmittelbar vor dem Zielobjekt“ zweifellos das wichtige Resultat ergeben hatten, dass bei dieser Anordnung im Prinzip direkte Proportionalität zwischen Zielgenauigkeit und Fernrohrvergrösserung herrscht, wurde nun die zweite Hauptgruppe der Untersuchungen mit „Fäden innerhalb des Fernrohrs“ vorgenommen. Die äussere Anordnung war im allgemeinen die gleiche, wie bei der ersten Versuchsgruppe. Das Instrument stand auf einem festen Pfeiler, neben ihm der Zielapparat, dessen Zieltafel wieder durch den Präzisionsspiegel, dessen Entfernung wechselte, beobachtet wurde. Die Beobachtungen erfolgten im dunkeln Raume bei Beleuchtung durch eine Glühbirne. Der Vorgang beim Zielen war derselbe wie vorhin. Durch Verschieben der Zieltafel wurde der Faden des Fernrohrs möglichst genau in die Mitte des Zielintervalls gebracht und der Stand der Mikrometerschraube abgelesen. Auch jetzt wurden die Ablesungen wieder durch einen Gehilfen vorgenommen, so dass der Beobachter, da er die Ergebnisse der einzelnen Ablesungen gar nicht kannte, ganz unbeeinflusst war.

Das Ergebnis dieser zweiten Beobachtungsanordnung war nun ein ganz anderes als bei der ersten Versuchsreihe. Die Beobachtungsergebnisse zeigten

nämlich, dass bei dieser Anordnung mit Faden innerhalb des Fernrohrs von einem konstanten Verhalten der Produkte $m \cdot v$ keine Rede mehr sein konnte, da diese eine deutliche systematische Zunahme mit zunehmender Vergrößerung erkennen liessen. Es handelte sich nun darum, festzustellen, durch welche Ursachen und in welcher Weise wird diese systematische Zunahme der Produkte $m \cdot v$ bewirkt.

Zur Lösung dieser schwierigen Frage betrachtet nun der Verfasser 8 Fehlerursachen, die hier in Betracht kommen können: Zunächst den Einfluss der Parallaxe, 2. die Unschärfe von Faden oder Bild bei Parallaxe, 3. der Faden als dreidimensionales Objekt, 4. Unregelmässigkeiten an Faden oder Zielobjekt, 5. die relative Verschlechterung des Fernrohrbildes bei wachsender Vergrößerung, 6. Diffraktionserscheinungen, 7. Bewegungen der Instrumente, 8. Bewegungen der Luft. Die sehr grosse Schwierigkeit lag darin, dass bei jedem dieser Faktoren die weitere Untersuchung notgedrungen auf gewisse Annahmen begründet werden mussten, und erst der weitere Verlauf der Untersuchung konnte zeigen, ob diese Annahmen annähernd zutreffend waren, denn eine scharfe rein mathematische Zugänglichkeit der einzelnen Faktoren war bei ihrer teilweisen Unberechenbarkeit, z. B. der Luftbewegung, ausgeschlossen. Gleich an dieser Stelle mag vorausgeschickt werden, dass es Noetzli geglückt ist, tatsächlich seine Annahmen so zu formulieren, dass sie zu einem plausibeln Resultat führen. Er bespricht einzeln den Einfluss der einzelnen Fehlerquellen, und kommt schliesslich zu dem Ergebnis, dass die Gesamtwirkung s aller äusseren Einflüsse angenommen werden kann als umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Vergrößerung, also $s = \frac{\textit{konstant}}{\sqrt{v}}$.

Hierbei muss allerdings für die Vergrößerungen $V = 1$ bis 8,6 und $V = 15,7$ bis 78 infolge anderer Annahmen über die Parallaxenwirkung für die Konstante ein besonderer Wert angesetzt werden. Wird nun der früher ermittelte Wert für den mittleren Zielfehler m , der also noch mit den systematischen Fehlereinflüssen behaftet ist, von diesen nach Berechnung der Werte s unter Zugrundelegung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes getrennt, so ergibt sich ein reduzierter, von systematischen Fehlereinflüssen befreiter Fehlerwert m_r , nach $m_r = \sqrt{m^2 - s^2}$. Werden jetzt nun die Produkte $m_r \cdot v$ gebildet, so lassen auch tatsächlich die auf Grund der Beobachtungen ermittelten Produkte $m_r \cdot v$ im allgemeinen wieder ein konstantes Verhalten erkennen, jedenfalls zeigen sie keine systematische Zunahme mehr. Damit ist aber zweierlei gefunden. Zunächst ist bewiesen, dass die Annahmen, die hinsichtlich der Gesamtwirkung der in Betracht gezogenen systematischen Fehlerquellen der Untersuchung zugrunde gelegt wurden, tatsächlich zutreffend waren, und zweitens folgt ferner, dass überhaupt prinzipiell Proportionalität zwischen Zielgenauigkeit und Vergrös-

serung besteht, die durch systematische Einflüsse aber nicht zur Geltung kommt. An Hand des vorliegenden Beobachtungsmaterials wird nun nachgewiesen, dass für schwächere Vergrößerungen, etwa bis 10fach, der Zielfehler wieder umgekehrt proportional der Vergrößerung ist, während er bei stärkeren Vergrößerungen, etwa von über 10fach an, umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Vergrößerung wird. Da die schwachen Vergrößerungen 1—10fach praktisch ohne Bedeutung sind, so fasst Noetzli das Untersuchungsergebnis einheitlich in seinem zweiten Hauptergebnis zusammen:

Unter sehr günstigen äusseren Umständen ist die Zielgenauigkeit bei Anwendung von Fernrohrfäden proportional der Quadratwurzel aus der Fernrohrvergrößerung, oder anders ausgedrückt der Zielfehler ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Vergrößerung:

$$m = \frac{c}{\sqrt{v}}$$

Für seine vorliegenden Beobachtungen erhielt Noetzli $m'' = \frac{0,72}{\sqrt{v}}$. Hierbei ist aber sofort scharf hervorzuheben, dass der Faktor 0,72 keineswegs den Charakter einer allgemein gültigen Konstanten haben kann, sondern nur unter den vorliegenden physikalischen und psychologischen Verhältnissen zutreffend war, während in jedem einzelnen andern Falle die notgedrungen anderen äusseren Verhältnisse auch andere Werte für die Konstante ergeben werden. Wie Verfasser ausdrücklich betont, ist besonders die Oszillation geeignet, andere Ergebnisse herbeizuführen, zumal die durch sie bewirkte Unruhe des Fernrohrbildes auch eine völlige Beseitigung der Parallaxe erschwert. Die Unberechenbarkeit der mannigfach verschiedenen äusseren Einflüsse bringt es eben mit sich, dass ein Gesetz zwischen Fernrohrvergrößerung und Zielfehler mit bestimmten Konstanten überhaupt nicht aufgestellt werden kann, wohl dagegen lässt sich eine allgemeine Beziehung zwischen beiden finden. Auf Grund der Noetzlischen Untersuchungen ist man berechtigt anzunehmen, dass für beliebige Fälle die Bedingung gilt

$$\sqrt{m^2 - s^2} = m_r = \frac{\text{const}}{v}$$

hierin ist m der mittlere Fehler einer Zielung,

s der ihm anhaftende systematische Einfluss von der Form:

$$s = \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot f(v)$$

Bestimmte allgemein gültige Werte für $f(v)$ können nicht angegeben werden, da die sie bestimmenden äusseren Verhältnisse in jedem Falle wechseln. Bei günstigen äusseren Verhältnissen ist anzunehmen, dass $f(v)$ konstant bleibt, bei weniger günstigen Verhältnissen mit zunehmender Vergrößerung aber ständig wachsen wird.

Die bisher behandelten beiden Hauptgruppen von Versuchen waren ihrer grundlegenden Natur entsprechend zur Feststellung der prinzipiellen Verhältnisse unter künstlich herbeigeführten äusserst günstigen Verhältnissen ausgeführt worden. Zur Feststellung des Verhaltens zwischen Zielfehler und Vergrösserung unter mehr normalen, der Praxis sich nähernden Verhältnissen wurden weitere Versuche angestellt. Bei diesen bediente sich Verfasser einer von ihm erdachten, auf einem Hebelprinzip beruhenden Vorrichtung, die ihm erlaubte, am Unterbau eines Theodoliten, der als Fernrohrlager für die verschiedenen einzulegenden Fernrohre diente, noch $0,02''$ der Drehung der Alhidade zu schätzen, wobei ein mittlerer Einstellfehler von $m = \pm 0,09''$ erhalten wurde. Mit dieser von Noetzli als „Richtungsinstrument“ bezeichneten Vorrichtung wurden nun Beobachtungen angestellt, die trotz der abweichenden instrumentellen Anordnung wieder das Ergebnis $m = \frac{v}{\sqrt{c}}$ lieferten. Bei weiteren Versuchen wurden nun künstlich grössere Zielfehler dadurch herbeigeführt, dass durch Verbreiterung der angezielten Parallelstreifen das Zielobjekt ungünstiger gestaltet wurde. Hierbei war die Absicht, den rein zufälligen Zielfehler so gross werden zu lassen, dass ihm gegenüber die systematischen Verfälschungen verschwinden würden. Hierbei ergab sich nun, dass der mittlere Zielfehler sich wieder von dem Gesetze $m = \frac{c}{\sqrt{v}}$ mehr der Beziehung $m = \frac{c}{v}$ näherte, „je mehr die systematischen ‚Verfälschungen‘“, wie Noetzli sich ausdrückt, „die im allgemeinen die relativ geringere Genauigkeitszunahme des Ziels bei wachsender Fernrohrvergrösserung unter Verwendung von Fernrohrfäden hervorrufen, in der Grösse des rein zufälligen Fehlers verschwinden“. Hieraus folgert er, dass es richtig ist, beim Zielen auf Nivellierskalen prinzipiell die Zielgenauigkeit proportional der Fernrohrvergrösserung anzunehmen. Es ist aber weiter zu berücksichtigen, dass in Wirklichkeit durch psychologische Einflüsse eine Zunahme der Zielgenauigkeit nur mit der Wurzel aus der Vergrösserung erfolgt, und nur durch diesen psychologischen Einfluss konnte Reinhertz zu der Beziehung $m = \frac{c}{\sqrt{v}}$ gelangen. Aus der Nichtbeachtung der psychologischen Einflüsse erklärt es sich auch, dass Stampfer und Reinhertz aus dem gleichen Beobachtungsmaterial zu verschiedenen Resultaten kommen konnten. Während Stampfer die Zielgenauigkeit proportional der Fernrohrvergrösserung erhielt, kam Reinhertz zu dem Ergebnis $m = \frac{c}{\sqrt{v}}$, was die Unsicherheit der bisherigen Annahmen über das Verhältnis zwischen Zielfehler und Vergrösserung deutlich erkennen lässt.

Um nun auch für Verhältnisse, die völlig der Praxis entsprechen, ein klares Bild über sein Problem zu bekommen, stellte Verfasser auch Ver-

suche im Felde mit Zielungen auf trigonometrische Signale an. Es wurden wieder in die Lager des „Richtungsinstruments“ verschiedene Fernrohre eingelegt. Die Beobachtungen fanden nicht ausschliesslich unter günstigen Verhältnissen statt, auch wurden von weniger geübten Beobachtern Beobachtungsreihen ausgeführt. Wie sich erwarten liess, waren infolge der äusseren Einflüsse die Genauigkeitsergebnisse jetzt andere als bei den früheren Versuchen. Während Verfasser unter besonders günstigen Verhältnissen einen mittleren Zielfehler von $0,15''$ — $0,20''$ bei 20—30facher Vergrösserung erhalten hatte, ergab sich im Felde ein doppelt bis fünf-fach so grosser mittlerer Zielfehler. Den Hauptgrund hierfür erblickt Noetzi in der Bewegung der Luft, durch welche infolge des unruhigen Fernrohrbildes die Vertilgung der Parallaxe erschwert wurde. Hinsichtlich der Helligkeit und des Auflösungsvermögens der Fernrohre liessen die Beobachtungen keine direkte Abhängigkeit des Zielfehlers erkennen, trotzdem eine solche nach Ansicht des Verfassers unbedingt vorhanden sein wird. Die angewandten Vergrösserungen schwankten zwischen 12 bis 38fach. Was nun den jetzt im Felde sich zeigenden Einfluss der Vergrösserung auf den Zielfehler anbelangt, so ergab sich zunächst, dass die Beträge $m \cdot v$ nicht konstant wurden, dass also bei Feldbeobachtungen keine Proportionalität zwischen Zielgenauigkeit und Vergrösserung besteht. Sehr wichtig war nun das Ergebnis, dass die Werte $m \cdot \sqrt{v}$ im allgemeinen wohl konstant blieben, aber stets bei grösserem v den grösseren Betrag zeigten. Hieraus kommt Verfasser zu dem dritten Hauptergebnis:

„Unter normalen äusseren Verhältnissen ist bei Zielungen auf trigonometrische Signale die Beziehung zwischen Vergrösserung und Zielgenauigkeit im allgemeinen noch ungünstiger, als sie durch das Gesetz $m = \frac{const.}{\sqrt{v}}$ ausgedrückt ist.“

Diese relativ geringere Leistungsfähigkeit der stärkeren Vergrösserungen erklärt sich Verfasser aus dem Einfluss der Luftbewegung, durch welche der Zusammenhang zwischen v und dem Betrage s der systematischen Fehler ein anderer war, als er unter Annahme besonders günstiger

Umstände bei Ableitung des Gesetzes $m = \frac{c}{\sqrt{v}}$ zugrunde gelegt wurde.

Da die Grösse s eine Funktion von v , und gleichzeitig von den Einflüssen der systematischen Fehler, besonders der Oszillation, abhängig ist, so kann ein Fall eintreten, in dem die systematischen Fehler so gross werden, dass von einer bestimmten Vergrösserung an eine Zunahme der Zielgenauigkeit überhaupt nicht mehr möglich ist, man ist dann bei der sogenannten „toten Vergrösserung“ angelangt. Diese theoretische Erwägung entspricht durchaus der Praxis, da bei starker Oszillation eine stärkere Vergrösserung fast keine oder überhaupt keine Erhöhung der Zielgenauigkeit mehr herbei-

führen kann. Auf Grund seiner Untersuchungen kommt nun Noetzli zu dem Ergebnis, dass bei Zielungen auf trigonometrische Signale die bisherigen Annahmen:

$$m = \frac{10''}{v} \text{ (Stamper);} \quad m = \frac{50''}{v} \text{ (Vogler)}$$

$$m = \frac{60''}{v} \text{ bis } \frac{40''}{v} \text{ (Hammer);} \quad m = \frac{30''}{v} \text{ (Hartner-Doležal)}$$

nicht mehr als zutreffend betrachtet werden können, sondern unter normalen äusseren Verhältnissen für einen mittelmässigen bis guten Beobachter zu ersetzen sein dürften durch die Beziehung

$$m = \frac{4''}{\sqrt{v}} \text{ bis } \frac{3''}{\sqrt{v}}$$

Hinsichtlich der Fadenstärke ergaben die Feldbeobachtungen, dass bei weichen relativ kontrastlosen Bildern dünne Einzelfäden in den meisten Fällen am günstigsten sind, während bei lichtstarken Zielen (Heliotropen, Sternen) stärkere Fäden am Platze sind, weil bei solchen Zielen der dünne Faden leicht verschwindet. Dicke Fäden sind schlecht, weil bei Triangulationen 2. und 3. Ordnung die Ziele sehr klein erscheinen. Doppelfäden sind weniger günstig als dünne Einzelfäden, soweit solche anwendbar sind. Sie bieten aber bei lichtstarken Zielen den Vorteil der Möglichkeit, das Ziel so einstellen zu können, dass es den Raum zwischen den Fäden möglichst ganz ausfüllt, wodurch die Zielgenauigkeit erhöht wird. Als eine Verbesserung der Doppelfäden könnten nach Vorschlag des Verfassers Keilfäden angewandt werden, bei denen die Fäden von der Mitte des Gesichtsfeldes radiär nach dem Rande zu auseinandergehen, so dass der Fadenzwischenraum einen Kreissektor darstellt. Durch diese Anordnung wird erreicht, dass man für jedes Ziel ein Fadenintervall finden kann, bei dem das Ziel den Fadenzwischenraum nahezu ausfüllt, wodurch die Einstellgenauigkeit grösser wird, als bei gewöhnlichen Doppelfäden, bei denen das Fadenintervall konstant bleibt. Weitere Beobachtungen zeigten, dass die Beobachtungsgenauigkeit an Fäden, die nicht durch die optische Achse des Fernrohrs gehen, abnimmt, je mehr die Fäden nach dem Rande des Bildes zu gerückt sind. Als günstigste Form der Zielmarke ergab sich die Keilform, bei der die Zielgenauigkeit desto grösser war, je kleiner der Oeffnungswinkel des Keiles wurde.

Die Farbe des Signals soll nach den Untersuchungen, die Noetzli auch über diesen Punkt anstellte, möglichst kontrastreich zum Hintergrund gewählt werden. Bei verschiedenfarbigem Hintergrund nach verschiedenen Richtungen hin sollte auch die Farbe des Signals nach verschiedenen Richtungen hin geändert werden. Am besten geeignet erwiesen sich für den Anstrich die Farben schwarz und weiss.

Starke systematische Fehlerquellen entstehen bei allen dreidimensionalen Signalen durch die verschiedenen Beleuchtungsphasen. Man neigt nämlich umso mehr dazu, den Schwerpunkt der momentan beleuchteten Fläche anzuzielen, je weniger deutlich man die Umrisse des schattigen Teiles des Ziels sehen kann. Eine Ausschaltung des Phaseneinflusses dadurch, dass man die Anzahl der Zielungen gleichmässig auf Vor- und Nachmittag verteilt, ist wegen der Witterungsabhängigkeit praktisch nicht durchführbar. Ein gänzliches Vermeiden dieser gefährlichen Fehlerquelle ist nur durch Anwendung ebener Signale oder Heliotropen zu erreichen. Da aber die Anwendung des Heliotropen durch die Abhängigkeit von der Sonnenstrahlung zeitraubend und teuer wird, so empfiehlt Verfasser die Einführung von Nachtbeobachtungen unter Zubilfenahme künstlicher Lichtquellen. Bei Nachtbeobachtungen würde die Gefahr der Phasenbeleuchtung fortfallen, und die Genauigkeit grösser als bei Tagesbeobachtungen werden, so dass man die jetzige Genauigkeit mit etwa $\frac{2}{3}$ bis der Hälfte der jetzt nötigen Messungen erreichen könnte. Zieht man noch in Betracht, dass man die nächtliche Beobachtungszeit weiter ausdehnen könnte, so liessen sich durch diese Massnahme ausser einem Gewinn an Genauigkeit auch finanzielle Vorteile erreichen.

Die Hauptergebnisse der Noetzlischen Untersuchungen bestehen in der Erkenntnis, dass praktisch die Fernrohrvergrösserung nicht den Einfluss auf die Erhöhung der Zielgenauigkeit hat, den man ihr bisher einräumte. Eine allgemeine weitere Erhöhung der Zielgenauigkeit wird daher viel weniger durch die Erhöhung der Vergrösserung, als vielmehr durch die Vervollkommnung der Zielform und der Zielsichtbarkeit zu erreichen sein. Für Triangulationen werden Fernrohre mit 20 bis 30facher Vergrösserung meistens völlig genügen, bei denen jedoch grösster Wert auf grösstmögliche Helligkeit durch Objektivdurchmesser von 35—45 mm zu legen ist. Ausser auf die Vervollkommnung der Zielform und der Zielsichtbarkeit wird aber bei dem Streben nach erhöhter Genauigkeit bei Triangulationsarbeiten das Hauptgewicht auf die Vermeidung der sehr gefährlichen systematischen Zielfehlerquellen zu richten sein, die als Folgen der Phasenbeleuchtung bei ungünstiger Signalform in Erscheinung treten, und das Resultat ganz wesentlich verschlechtern können. Ob die von Noetzi zur Vermeidung der Phasenbeleuchtung vorgeschlagenen Nachtbeobachtungen für allgemeine Anwendung praktisch durchführbar sind, wird die Praxis zu entscheiden haben.

Bei zusammenfassender Betrachtung der Noetzlischen Arbeit wird man zu dem Schluss kommen müssen, dass durch die höchst beachtenswerten Untersuchungen des Verfassers über den Wert der Vergrösserung für die Erhöhung der Zielgenauigkeit völlig neue Grundlagen für die Behandlung dieser Frage geboten werden. Die Arbeit bildet einen wertvollen grund-

legenden Beitrag zu der Erkenntnis über die Art und die Wichtigkeit der beim Zielen zu berücksichtigenden äusseren Umstände, die in Form von physikalischen und psychologischen Einflüssen die ursprünglich prinzipielle Proportionalität zwischen Fernrohrvergrösserung und Zielgenauigkeit zu Ungunsten der ersteren herabdrücken, so dass man die Genauigkeitszunahme nur proportional mit der Wurzel aus der Vergrösserung im allgemeinen in Betracht ziehen darf. In der Vermeidung oder in der möglichststen Unschädlichmachung dieser systematischen Fehler liegt aber, wie die Noetzschen Untersuchungen gezeigt haben, der Weg zur weiteren Erhöhung der Zielgenauigkeit, während hierfür die Fernrohrvergrösserung bei weitem nicht die Bedeutung hat, die man ihr bisher beilegte.

Hauser.

Dr. K. Graff, Observator der Hamburger Sternwarte. *Grundriss der geographischen Ortsbestimmung aus astronomischen Beobachtungen.*

Mit 64 Figuren. Berlin und Leipzig, Göschen, 1914. VIII, 210 S.

Bei Beurteilung eines Buches über geographische Ortsbestimmung, welches wie das vorliegende in erster Linie den rein praktischen Zwecken des Anfängers dienen will, sind zwei Gesichtspunkte massgebend. Zuerst die Art der Einführung in die astronomischen Grundbegriffe und in den Bau und die Behandlung der in Betracht kommenden Instrumente, und sodann die treffende Auswahl der zur Anwendung zu empfehlenden Beobachtungsmethoden. Das vorliegende Werk ist bestrebt, diesen beiden Ansprüchen dadurch gerecht zu werden, dass es nach einer knappen, aber stets leicht verständlich bleibenden Entwicklung der Grundbegriffe aus der Fülle der theoretisch möglichen Beobachtungsmethoden nur eine begrenzte Zahl auswählt, diese aber unter Beifügung rechnerisch durchgeführter Zahlenbeispiele gründlich zur Darstellung bringt. Zwei Charakteristika verleihen dem Werke seine Eigenart. Zunächst ist überall nachdrücklicher Wert darauf gelegt, bei jeder der besprochenen Methoden den Zusammenhang zwischen dem direkt erhaltenen Beobachtungselement und dem aus ihm abgeleiteten Resultat dem Benutzer zum Bewusstsein zu bringen. Der Anfänger wird in aner kennenswerter Weise von Anfang an dazu angehalten, sich ständig über die Eigenart und den Wert der einzelnen Methode und die Wichtigkeit der richtigen Anordnung der Beobachtungen Rechenschaft abzulegen. Er soll Verständnis für die richtige Auswahl der nach den gegebenen Verhältnissen in jedem einzelnen Falle zur Anwendung zu bringenden Methode gewinnen. Ein zweites wertvolles Charakteristikum des Buches ist darin zu erkennen, dass es neben einer, nur das Wesentliche berücksichtigenden, aber in sich vollkommen abgeschlossenen Darstellung des Stoffes, wie sie z. B. für den Forschungsreisenden ausreicht, gleichzeitig überall verstreut zahlreiche erweiternde

Hinweise und Andeutungen bietet. Hierdurch wird es für denjenigen, der sich später eingehender mit der Materie zu befassen gedenkt, vorzüglich zu einem ersten Wegweiser geeignet.

Die Gliederung des Inhalts in 6 Abschnitte lässt 2 Hauptteile erkennen, der erste bringt die Erläuterung der Grundbegriffe und Hilfsmittel, der zweite behandelt die ausgewählten Beobachtungsmethoden. Von den Instrumenten zieht die Darstellung nur kleinere mit etwa 20" Angabe in Betracht. Anzuerkennen ist die Erörterung des hier sehr angebrachten Libellenquadranten, dessen vervollkommnete Formen leider nur zitiert, aber nicht vorgeführt werden. Bei der Erläuterung der Beobachtungsmethoden wird zunächst im 3. Abschnitt für jedes der Grundelemente Polhöhe, Zeit, Länge, Azimut je eine genäherte Bestimmung geboten, worauf im 4. Abschnitt die strengeren Methoden behandelt werden. Beachtenswert ist bei den genäherten Längenbestimmungen ein Hinweis auf die Anwendung der Methoden mittels der Verfinsterung der Jupitertrabanten. Diese noch verhältnismässig sehr wenig für einfachere Beobachtungsmittel zur Anwendung gelangende Methode ist beachtenswert, weil die später eingehend behandelte Methode der Sternbedeckungen durch den Mond bei den Reisenden wegen der unbequemen Vorausberechnung wohl immer wenig beliebt bleiben wird, so unentbehrlich sie an und für sich auch ist. Bei der Azimutbestimmung kann man über die Bezeichnung des Südpunktes am Horizontalkreis als „Indexfehler des Horizontalkreises“ geteilter Meinung sein. An einigen Stellen hat der Verfasser die Grenzen, die er sich gesteckt hat, und die er im allgemeinen streng innehält, überschritten. Zunächst findet das Passageninstrument kleineren Massstabes eine unverhältnismässig eingehende Besprechung. Selbstverständlich gehört die Behandlung der Meridiandurchgangsmethoden in das Bereich der im Rahmen des Buches eingehend zu behandelnden Aufgaben. Hierbei hätte aber das Universal als Beobachtungsinstrument beibehalten werden können, und ein kurzer Hinweis auf das Passageinstrument als einer Spezialform des im Meridian aufgestellten Universals genügt, zumal sich die Mitnahme eines kleinen Durchgangsinstruments für den Forschungsreisenden im allgemeinen nicht lohnen wird. Ferner hätte das klassische Gauss'sche Problem der drei gleichen Zenitdistanzen, dem der Verfasser selbst nur geringen praktischen Wert zuspricht, ebenso in Fortfall kommen können, wie das nur rein nautischen Zwecken dienende Problem der Sumner-Standlinien. Der durch diese Fortlassungen gewonnene Raum hätte vielleicht noch dem Teile über die Instrumente zugute kommen können, der auch durch Vorführung einiger besonders empfehlenswerter Typen des Universals einige Erweiterung hätte erfahren können. Vor allem aber hätte hier auch die Bedeutung der Beobachtung an mehreren Vertikalfäden des Fadennetzes eingehend behandelt werden müssen, die in der jetzigen Fassung allerdings

beim Passageninstrument bereits gegeben ist. Auffallenderweise sind aber nur bei diesem die Beobachtungen an mehreren Fäden erwähnt, während alle andern Beobachtungsmethoden, wie die Zahlenbeispiele zeigen, nur durch Beobachtung am Mittelfaden erfolgt sind. Gerade bei kleineren hier in Betracht kommenden Instrumenten lässt sich aber in leicht ausführbarer Weise durch Beobachtung an mehreren Vertikalfäden das Resultat wesentlich sichern. Eine stärkere Hervorhebung dieses sehr wichtigen Hilfsmittels wäre daher wohl am Platze gewesen. Auch die Messung der Temperatur und des Luftdrucks, die für die Refraktion in Betracht kommen, hätte kurze Erläuterung finden können. Im übrigen ist die Auswahl der behandelten Methoden für die Beobachtungen als eine sehr wohlgelungene zu bezeichnen, wobei noch besonders die im Anhang enthaltene zahlenmässige Durchführung von praktischen Beobachtungsbeispielen lobend hervorzuheben ist. Die beigegebenen Tafeln hätten der Vollständigkeit wegen um eine kurze Tabelle über die Reduktion der Barometerstände auf 0° vermehrt werden sollen.

Das Buch stellt eine in sich abgeschlossene, durchaus wohlgelungene Arbeit dar, durch welche die für die vorliegenden Zwecke in Betracht kommende Fachliteratur, die bekanntlich keine grosse Auswahl bietet, eine wertvolle Bereicherung erfahren hat. Neben dem Forschungsreisenden wird es infolge seiner erwähnten Eigenart, überall erweiternde Ausblicke zu bieten, auch dem Studierenden der Geodäsie und der angewandten Mathematik ein anregendes Lehrbuch sein, das dem Benutzer in allen einschlägigen Fragen als nie versagender Berater dienen wird. Das Werk kann allen Interessenten bestens empfohlen werden.

Hauser.

Zeitschriftenschau.

F. Kuhn, *Zweimittige Korbboegen*. (Organ f. d. Fortschritt des Eisenbahnwesens 1917 S. 4—8.)

Verf. macht darauf aufmerksam, dass zwischen den beiden Tangententlängen, dem Winkel zwischen den Tangenten und den beiden Radien eines zweitheiligen Korbboegens Beziehungen bestehen, die von L. Herzka in Wien im Jahre 1903 zuerst aufgestellt sind. Diese Herzkaschen Beziehungen werden mit einigen Anwendungen vorgeführt.

Es handelt sich um dieselben Lehrsätze, die bereits von d'Ocagne im Jahre 1898 gefunden worden sind und über die E. Hammer im Jahrg. 1900 S. 236—241 d. Z. ausführlich berichtet hat, so dass wir uns darauf beschränken können, auf diesen Bericht hinzuweisen.

Die Anwendungen behandeln Aufgaben, in denen zwischen den beiden Radien bestimmte Bedingungen erfüllt sein sollen, z. B. dass ihre Differenz ein Minimum wird, oder dass ihr Quotient möglichst wenig von der Einheit abweicht, oder dass die Differenz der reziproken Radien möglichst gering wird usw.

K. Hennig, *Einschaltung eines Gegenbogens zwischen sich schneidende Gerade.* (Organ f. d. Fortschritt des Eisenbahnwesens 1917 S. 145 bis 146.)

Es wird die Aufgabe behandelt, zwei Geraden durch zwei Kreisbogen von gleichem Radius und eine Zwischengerade zu verbinden. Als gegeben werden hierbei angesehen Anfangs- und Endpunkt des Gegenbogens und der Radius; hiermit lassen sich einfache Formeln zur Berechnung der Länge der Zwischengeraden entwickeln.

Personalmeldungen.

Königreich Preussen. Dem Katasterinspektor, Steuerrat Lotz in Allenstein O.-Pr., dem Herzogl. Obergeometer Göpfert in Schleiden (Eifel), dem Regierungslandmesser Firlé in Konitz, dem Stadt-Vermessungs-Inspektor Reis in Cöln und den Oberlandmessern Reiter in Allenstein, Michalowski in Tilsit und Grodzioki in Königsberg i. Pr. ist das Verdienstkreuz für Kriegshilfe verliehen worden. — Die Abteilungsvorsteher im Kgl. Geodätischen Institut in Potsdam Prof. Dr. Kühnen und Prof. Dr. Galle sowie Professor Curtius Müller in Bonn sind zu Geheimen Regierungsräten ernannt worden.

Katasterverwaltung. Zu Steuerinspektoren sind ernannt: Die Katasterkontrolleure Bauer in Hamm, Becker in Recklinghausen, Breitkreuz in Vreden, Brune in Wiedenbrück, Busse in Burgwedel, Christoph in Siegburg, Dibbelt in Uslar, Gedat in Darkehmen, Goeken in Büren, Haffner in Kellinghausen, Hartdegen in Tecklenburg, Heim in Bolkenhain, Hertmanni in Papenburg, Heweker in Arnberg, Hoffmann in Ziesar, Krause in Springe, Krueger in Rotenburg, Kylburg in Münstermaifeld, Lehmann in Osterburg, Machert in Lüdenscheid, Marciniec in Heiligenbeil, Motz in Putzig, Overdiek in Finsterwalde, Rossel in Gladbeck, Rothe in Beuthen, Seinecke in Neustadt a. Rbge., Schmidt in Kastellaun, Schroeder in Barmen, Tacke in Neuhausleben, Tobien in Lauenburg und der Regierungslandmesser Wetzels in Erfurt. — Versetzt sind: Die Katasterkontrolleure, Steuerinspektoren Schaar von Weissensee i. Th. nach Mühlhausen i. Th. (Kat.-Amt I), Schröder von Mogilno nach Weissensee i. Th., Hellenschmidt von Kosten als Regierungslandmesser nach Posen und der Regierungslandmesser Hartfiel von Posen als Katasterkontrolleur nach Kosten.

Kommunalverwaltung. Der Vermessungs-Inspektor Reis in Cöln ist zum städtischen Güter-Direktor ernannt worden.

Grossherzogtum Hessen. Seine Königliche Hoheit der Grossherzog haben Allergnädigst geruht, zum 25. November 1917 den Katastergeometern Julius Heineck und Johannes Laubner zu Friedberg den Charakter als Rechnungsrat zu verleihen.

Inhalt.

Wissenschaftliche Mitteilungen: Bestimmung einer Geraden aus den gemessenen Koordinaten ihrer Punkte, von Eggert. — Die Graphische Logarithmentafel, von Mittelstaedt. — **Bücherschau.** — **Zeitschriftenschau.** — **Personalmeldungen.**