

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

herausgegeben vom

Deutschen Verein für Vermessungswesen (D.V.W.) E.V.
 Schriftleiter: Professor Dr. Dr.-Ing. E. h. O. Eggert, Berlin-Dahlem,
 Ehrenbergstraße 21

Heft 17.

1938

1. September

Band LXVII

Der Abdruck von Original-Artikeln ohne vorher eingeholte Erlaubnis der Schriftleitung ist untersagt

Das österreichische Kartenwesen.

Von Obstlt. a. D. Obervermessungsrat Karl Milius.

Es war für uns Oesterreicher nicht leicht, in unserem kleinen und armen Staat auf dem Gebiete des Kartenwesens mit unseren großen und wohlhabenden Nachbarn Schritt zu halten. Die Not an den nötigen Mitteln brachte es ja nicht nur dazu, daß die Zahl unserer Arbeitskräfte auf ein notdürftiges Mindestmaß verringert wurde, — es konnten auch diese wenigen Fachleute nicht voll ausgenützt werden, da man sie, um Geld zu ersparen, nicht voll beschäftigte.

Trotzdem haben wir keine Ursache, uns zu verstecken und wenn auch unsere Leistungen in den letzten zwanzig Jahren in Bezug auf ihre Menge sicher nur unbedeutend sind, so können sie was Güte betrifft, sich überall sehen lassen und werden ihren alten Rang neben den besten Karten der Welt behaupten.

Die Nachkriegszeit brachte vor allem eine wichtige Veränderung, nämlich das Abgehen von der schraffierten Geländedarstellung. Das bedeutete das Fallenlassen unserer alten Spezialkarte 1:75 000, die zwar während des Krieges als wichtigste Kriegskarte ihre Aufgabe erfüllte und in vielen Millionen Stücken in Verwendung stand, sich aber hiebei immer mehr als unzulänglich erwies.

Das an die Stelle des Mil.-geographischen Institutes tretende Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen entschloß sich daher sehr bald, die Spezialkarte durch die neuen österreichischen Karten 1:50 000 und 1:25 000 zu ersetzen. Diese Karten entsprechen allen gegenwärtigen Anforderungen sowohl was Inhalt, wie äußere Form betrifft. Leider ist ihre Zahl sehr gering, sie beschränken sich auf etwa ein Achtel der Fläche Oesterreichs. In den übrigen sieben Achteln werden wir uns noch auf lange Zeit mit der alten Spezialkarte begnügen müssen.

Während die Spezialkarte aus der im Jahre 1871 begonnenen dritten österreichischen Landesaufnahme hervorging, sind die neuen Staatskarten das Ergebnis der vierten Landesaufnahme oder sogenannten Präzisionsaufnahme, welche 1896 begonnen wurde.

Die in den 18 Jahren vor dem Kriege bearbeiteten Gebiete gingen aber größtenteils in den Besitz der Nachfolgestaaten über, so daß wir nach dem Kriege gezwungen waren, in der engeren Heimat eigentlich ganz von vorne anzufangen.

Diese 4. Aufnahme erfolgt grundsätzlich im Maße 1:25 000. (Nur in wenigen Ausnahmefällen wurde auf das Maß 1:10 000 oder 1:12 500 herabgegangen). Das Aufnahmeblatt, das dem 16. Teil eines Spezialkartenblattes entspricht, ist $71\frac{1}{2}$ Längenminuten lang und $33\frac{3}{4}$ Breitenminuten hoch und hat daher einen Flächenraum von ungefähr 66 km². Die Gradeinteilung erfolgt nach Ferro.

Als Grundlage dient eine Triangulierung I. bis IV. Ordnung, die nunmehr in einigen Gebieten noch auf V. Ordnung verdichtet wurde. Die Koordinaten werden in drei Grad breiten Meridianstreifen nach Gauß mit den Meridianen 28^o, 31^o und 34^o östlich von Ferro gerechnet.

Bezugsfläche für das Dreiecksnetz ist das Bessel'sche Erdellipsoid.

Auf ein Blatt entfallen 8 bis 12 Festpunkte (es kommt somit auf 5 bis 8 km² ein Punkt) wobei sie 3 bis 4 km voneinander entfernt sind. Außer diesem Punktnetz wird auch ein Quadratkilometernetz auf das Aufnahmeblatt nach Koordinaten aufgetragen.

Ueber dieses Festpunktnetz wird der Grundsteuerkataster aus den Mappen 1:2880 einpantographiert, so daß der Topograph von Haus aus die Gebäude, Grundstücke und meisten Wege am Blatt hat.

In den meisten Gebieten Oesterreichs konnte weiters als Grundlage der Präzisionsaufnahme eine photogrammetrische Aufnahme erfolgen. Sie ist im Gebirge eine Erdbildaufnahme, die etwa 70 bis 80% der Fläche überdeckt. Im Mittelgebirge wird die Ueberdeckung geringer und sinkt im Hügelland auf 30% und noch weniger herab. In den letzten Jahren wurde auch bereits die Luftbildmessung angewendet.

Auf den so vorbereiteten Aufnahmeblättern erfolgt die Arbeit des Topographen als Meßtischaufnahme entweder auf tachymetrischem Wege oder im Gebirge von Gegenüber durch Vorwärtseinschneiden. Die Genauigkeit dieser Arbeit wurde seit dem Kriege sehr gesteigert. Während früher 10 bis 22 Höhenmessungen auf den km² ohne Photogrammetrie gefordert wurden, steigt jetzt die Zahl der Höhenmessungen auf das Doppelte bis Vierfache. Die Geländedarstellung erfolgt in Höhenschichtenlinien von 100 m, 20 m, in flacheren Teilen von 10 m und 5 m und in den Ebenen von 1 m Höhenabstand.

Die österreichische Karte 1:25 000 ist eine getreue Wiedergabe der Präzisionsaufnahme und wird nur dort aufgelegt, wo eine Neuaufnahme vorhanden ist. Sie ist eine Vielfarbenkarte mit schwarzem Kartengeripp, blauen Gewässern, hellgrünem Wald, sattgrünen Gärten, weinroten Weingärten, grauem Fels und Geröll und blaugrünen Gletschern. Der Schichtenplan ist braun, im Gletscher blaugrün. Die meisten Blätter haben einen besonderen Farbaufdruck für die markierten Wege. Die Karte enthält 4 bis 6 Höhenangaben auf den km².

Die ersten Karten 1:25 000 erschienen als Einzelblätter in der Größe des Aufnahmeblattes. Es erwies sich aber bald die Herausgabe von Doppelblättern als vorteilhaft. Bis jetzt erschienen etwa 100 Doppelblätter.

Die Karte 1:25 000 ist infolge ihrer sehr anschaulichen und natürlichen Darstellung von Fels und Gletscher die eigentliche Wanderkarte für das Hochgebirge und erfreut sich der besonderen Würdigung jener Bergsteiger, die gerne führerlos gehen.

Die österreichische Karte 1:50 000 ist als Ersatz der alten Spezialkarte 1:75 000 gedacht. Sie umfaßt die halbe Fläche einer solchen, ist daher 15 Längengraden breit und 15 Breitengraden hoch und enthält acht Aufnahmeblätter der Originalaufnahme. Auch sie wird nur dort aufgelegt, wo eine Neuaufnahme vorliegt. Sie ist ebenfalls eine mehrfarbige Schichtenkarte mit ähnlichen Farben wie früher genannt, nur hat der Fels einen Brauntönen und der Schichtenplan ist im allgemeinen mit grauer, im Gletscher mit blaugrüner Lavierung unterlegt. Der Höhenschichtenabstand beträgt 20 m, im Flachland 10 m. Es sind bisher 18 Blätter erschienen.

Diese Karte 1:50 000 ist die eigentliche Uebersichtskarte. Obwohl sie über 500 km² Fläche umfaßt, enthält sie infolge ihrer sehr sorgfältigen Zeichnung und ihres guten Druckes alle bemerkenswerten Einzelheiten der Meßtischblätter. Sie entspricht daher ebenso den militärischen wie allen sonstigen Zwecken.

Die Spezialkarte 1:75 000 (sie umfaßt 30 Längengraden- und 15 Breitengraden) entstand für das Gebiet der Ostmark in den Jahren 1871 bis 1875 als das Ergebnis der 3. Landesaufnahme. Damals — vor mehr als 60 Jahren — galt sie als eine sehr schöne, allen Bedürfnissen entsprechende Karte. Der Umstand, daß es möglich war, in nicht ganz zwanzig Jahren dieses Kartenwerk für die ganze öst.-ung. Monarchie zu schaffen, erregte allgemeines Aufsehen und trug viel zu dem hohen Ruf des damaligen Militärgeographischen Institutes bei.

Heute aber ist die Spezialkarte vollkommen veraltet. Schon im Krieg erwies sie sich als unzureichend und wurde, wo es ging durch Aufnahmeblätter 1:25 000 ersetzt. Der Umstand, daß sie eine schraffierte Schwarzkarte ist, die nur 100 m Höhenschichtenlinien enthält, macht sich immer ungünstiger fühlbar. Die Geländedarstellung ist nach heutigen Begriffen viel zu ungenau und oft falsch. Auch der Maßstab entspricht nicht. Nach dem Kriege dann, als die Anforderungen besonders in technischer Hinsicht sich immer mehr steigerten, wurde die Unzufriedenheit begreiflicherweise immer noch größer.

Dazu kam noch, daß die Karten Innerösterreichs — von einer flüchtigen, ganz kurzen Manöverrevision abgesehen — gar keiner richtigen Fortführung oder Nachführung unterzogen worden waren. Wohl hat man inzwischen manches getan. Dort, wo bereits österreichische Karten 1:25 000 und 1:50 000 vorliegen, hat man die Spezialkarten ganz aus dem Verkehr gezogen. Eine Fläche von 12 176 km² wurde im Maße 1:75 000 und 12 886 km² sind auf den Aufnahmeblättern 1:25 000 einer Ueberprüfung unterzogen worden, so

daß seit dem Kriegsende mit samt der Neuaufnahme 39 000 km² durchgearbeitet worden sind. Aber Oesterreich war ja 84 000 km² groß und es blieben daher 45 000 km² übrig, in denen sich heute die Karten (mit Ausnahme der Eintragung der allerwichtigsten Verkehrslinien) in ebendemselben Zustand befinden, in dem sie vor 60 Jahren waren. Aber auch dort wo eine Kartenrevision stattfand, konnte sie sich nur auf die Verbesserung des Kartengerippes, nicht aber des Geländes erstrecken. Also auch dort ist die Spezialkarte, wenn auch verbessert, noch bei weitem nicht gut und mit einer großen Anzahl von Mängeln behaftet.

Leider werden wir unter diesem beklagenswerten Zustand noch sehr lange zu leiden haben. Es ist für uns nur ein schwacher Trost, daß wir eine erstklassige Präzisionsaufnahme und daraus hervorgehend vorzügliche neue österreichische Karten 1:25 000 und 1:20 000 besitzen. Wir besitzen sie ja nur über rund 14 000 km², während volle 70 000 km² noch der Neuaufnahme harren.

Wann soll das aufgenommen werden? Wir konnten im bisherigen Oesterreich mit unseren kleinen Personalständen und den geringen Mitteln jährlich kaum 1000 km² bewältigen. Das heißt, daß wir im Jahre 2000 mit der tp. Landesaufnahme die bereits 1896 begann, noch nicht fertig geworden wären und daß unsere Enkel noch immer sich mit jenen Spezialkarten hätten abplagen müssen, die bereits unsere Väter für minderwertig befunden hatten.

Das wird nun wohl anders werden. Mit berechtigter stolzer Hoffnung blicken wir auf das große mächtige Reich, dem wir nun angehören. Daß man hier für die hohe Bedeutung des Kartenwesens größtes Verständnis hat, sehen wir alle Tage. Es wird aber auch dem bedeutend vergrößerten Körper nicht leicht fallen, Versäumtes rasch nachzuholen, und es wird noch eine Reihe von Jahren dauern, bis wir von unserer zwar altherwürdigen, aber daher auch gänzlich altersschwachen Spezialkarte 1:75 000 befreit sein werden.

Die Generalkarte von Mitteleuropa 1:200 000 ist eine sehr gute, gefällige seit dem Jahre 1885 bestehende Uebersichtskarte. Sie ist einen Breitegrad hoch und einen Längegrad breit, hat braun schraffiertes Gelände, blaue Gewässer und grünen Waldaufdruck. Sie erfreute sich im Krieg bei allen Truppenverbänden großer Beliebtheit und wird ständig fortgeführt. Es bestehen im ganzen 266 Blätter, die weit über die Grenzen der ehem. österr.-ungar. Monarchie hinausreichen.

Von der Uebersichtskarte von Mitteleuropa 1:750 000 gibt es zwei Ausfertigungen. Die ältere mit der Projektion nach Bonne besteht aus 54 Blättern mit rechtwinkliger Blatteinteilung. Sie ist ein Mehrfarbendruck, Schrift und Bahnen schwarz, Straßen rot, Gewässer blau, Gelände braun schraffiert, Grenzaufdruck farbig. Die jüngere Ausfertigung erfolgt in flächentreuer Kegelprojektion nach Albers. Bis jetzt sind 12 Blätter in Mehrfarbendruck, Schrift und Bahnen schwarz, Straßen rot, Gewässer blau, Wald grün, Grenzen farbig, Gelände teils braun schraffiert, teils braun geschummert mit Höhenschichten erschienen. Die Blätter sind rechteckig umrahmt und übergreifen sich daher bezüglich des Inhaltes nach allen Seiten.

Außer den aufgezählten Kartenwerken gibt das Kartographische (früher Milit.-geogr.) Institut noch eine Reihe anderer Karten heraus, so:

Stadtplan von Wien 1:15 000;

Die Kopien der 3. österr. Landesaufnahme 1:25 000;

Stadtumgebungsplan 1:25 000, 1:30 000 und 1:75 000;

Gebirgskarten 1:25 000, 1:40 000, 1:50 000, 1:75 000;

Wintersportkarten 1:50 000;

Wanderkarten 1:75 000;

Automobilkarten 1:200 000;

Straßenkarte 1:200 000, 1:500 000;

Karte von Oesterreich 1:500 000;

Verkehrskarte Oesterreichs und Südbayern 1:600 000;

Staatenkarten und Schulkarten.

Zur Koordinatenumformung.

Von K. Blaß, Vermessungsrat i. R., Trautheim b. Darmstadt.*)

I. Einleitung.

Der Anregung mehrerer Kollegen folgend, veröffentliche ich hiermit den wesentlichen Inhalt meines Vortrages und füge noch einiges, was mir wichtig scheint, hinzu.

Die Koordinatenumformung ist in den letzten zehn Jahren ein nicht zu unterschätzender Gegenstand der Landesvermessung geworden.

Man könnte die Koordinatenumformung in zwei Gruppen einteilen:

Die 1. Gruppe würde das Folgende sein: Zwei Koordinatensysteme mit je einem Nullpunkt liegen nebeneinander, gehören einer Triangulierung an und beruhen somit auf einer Grundlage. Die Meridiane durch diese Nullpunkte bilden die Abszissenachsen. Die Konvergenz dieser Meridiane und die geographischen Koordinaten der beiden Nullpunkte sind bekannt. Alsdann lassen sich Formeln aufstellen, nach denen ein beliebiger Punkt des einen Systems in das andere System widerspruchsfrei übertragen werden kann. Das trifft zu z. B. bei der Umformung aus einem preußischen Katastersystem in ein angrenzendes preußisches Katastersystem; oder aus einem solchen in einen Meridianstreifen oder umgekehrt; oder auch aus einem Meridianstreifen in einen angrenzenden Meridianstreifen. Es trifft ferner zu für die Umformung aus dem neuen hessischen konformen Koordinatensystem mit dem Nullpunkt Darmstadt in ein angrenzendes preußisches Katastersystem usw. [5] und [6].

Die 2. Gruppe der Koordinatenumformung würde sein: Zwei Koordinatensysteme liegen übereinander, haben einen gemeinsamen Nullpunkt, gehören aber zwei verschiedenen Triangulierungen an und beruhen somit auch auf verschiedenen Grundlagen. Außerdem sind eine Anzahl Punkte des einen Systems im anderen System bestimmt worden. Diese Doppelbestimmungen zeigen Differenzen, auf die sich die Umformung für einen Punkt

*) Aus dem Vortrag, gehalten in Frankfurt a. M. am 28. 2. 1937 vor der Gaugruppe Hessen-Nassau.

aus dem einen System in das andere zu gründen hat. Hier wird man auf Widersprüche stoßen, die besonders zu behandeln sind. Mit solcher Umformung will ich mich hier befassen.

Das Verfahren, das ich vortragen werde, ist z. T. schon veröffentlicht, und zwar in [1] und [2].

Die erste Anwendung erfuhr dieses Verfahren bei der Herstellung einer vollständigen Stromvermessung am Rhein in Hessen um d. J. 1900 herum. Die Katasterkarten am Rhein waren in zwei Koordinatensystemen gezeichnet, und zwar die der linksrheinischen Gemarkungen im linksrheinischen und die der rechtsrheinischen Gemarkungen im rechtsrheinischen Koordinatensystem. Die Koordinaten eines Punktes — in beiden Systemen bestimmt — wichen um mehrere Meter voneinander ab.

Herr Prof. Dr. Nell leitete zu diesem Zweck in den 90er Jahren zur Umformung aus dem linksrheinischen in das rechtsrheinische System von den Dreieckspunkten I. Ord. aus Formeln ab, deren Anwendung auf zwei, in beiden Systemen bestimmten Punkte die Differenzen ergab:

b. Bodenheim II. Ord. 0,8 m,

b. Worms II. Ord. 3,7 m.

Hiernach war diese Umformungsart unbrauchbar. Diese Differenzen ergaben aber mit noch anderen Gründen den ersten Anstoß zur Ausführung der Rheintriangulierung in Hessen. Damit erstand ein 3. Koordinatensystem für die Rheinstromvermessung. Die Katasterkarten wurden dazu benützt, die Lücken in den Stromkarten auszufüllen. Und dabei ist das nachfolgende einfache Verfahren entstanden und kam zum ersten Male hier zur Anwendung. Eine weitere wichtige Anwendung erfuhr es bei der Uebertragung der durch nassauische Koordinaten bestimmten Landesgrenze zwischen Preußen und Hessen in die hessischen Katasterkarten.

Man vergleiche hierzu auch [1] Seite 693 und 694.

II. Entwicklung der Formeln.

In den Formeln (6) und (12) von [1] Seite 696 und 712 setzen wir jetzt

$$\frac{m_i}{S_i} = a_i \text{ und } \frac{p_i}{S_i} = b_i$$

S_i , m_i , p_i und $1/s_i$ werden auf einer maßstäblichen Übersicht graphisch und dabei a_i und b_i mittels Rechenschieber bestimmt. Mit Vorteil kann hierbei die in [1] Seite 727 beschriebene Tafel benützt werden. Eine neue und einfachere graphische Tafel zu diesem Zweck habe ich unten in V beschrieben und in Fig. 6 abgebildet.

Wir erhalten für (6) in [1]

$$\left. \begin{aligned} \eta &= dy_a + a wy + b wx \\ \xi &= dx_a + a wx - b wy \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dabei ist $wy = dy_e - dy_a$, $wx = dx_e - dx_a$

$$dy = Y - y \quad dx = X - x$$

YX System I, yx System II

Pa und Pe sind in beiden Systemen bestimmt und P wird durch Umformung aus System II in das System I übertragen.

Hierzu genügen die Formeln (1) in den meisten Fällen und genügen dann nicht mehr, wenn die doppelt bestimmten Punkte (Paßpunkte) unverhältnismäßig weit auseinanderliegen oder in dem Gebiet ungünstig verteilt sind. Alsdann kann durch ein erweitertes Verfahren noch eine Anzahl Paßpunkte durch Umformung eingeschaltet werden, worauf das einfache Verfahren nach (1) wieder angewandt werden kann.

Das erweiterte Verfahren besteht darin, daß das einfache nach (1) auf einem Punkt innerhalb eines größeren Rahmens von Paßpunkten mehrfach angewandt wird. Für η und ξ werden alsdann eine Anzahl von Bestimmungen erhalten, deren arithmetisches Mittel den anzunehmenden Wert liefert.

Hierzu werden die Formeln (12) von [1] Seite 712 benützt, die wir auseinandergezogen hierher setzen, und noch die Gewichte $1/s$ in rechtsläufigem und linksläufigem Sinne hinzufügen. Dabei sei noch ausdrücklich bemerkt, daß die Bestimmung der $1/s$, a und b so wie es Fig. 1 auch zeigt, stets im rechtsläufigen Sinne zu erfolgen hat.

Gewichte linksläufig	=	Gewichte rechtsläufig
$1/s_2 \dots \eta_1 = dy_1 + a_1 wy_1 + b_1 wx_1 \dots$		$1/s_1$
$1/s_3 \dots \eta_2 = \dots \dots \dots \dots \dots$		$1/s_2$
$1/s_1 \dots \eta_3 = \dots \dots \dots \dots \dots$		$1/s_3$
$1/s_2 \dots \xi_1 = dx_1 + a_1 wx_1 - b_1 wy_1 \dots$		$1/s_1$
$1/s_3 \dots \xi_2 = \dots \dots \dots \dots \dots$		$1/s_2$
$1/s_1 \dots \xi_3 = \dots \dots \dots \dots \dots$		$1/s_3$

(s. Fig. 1.)

Bei gleichen Gewichten erhält man für η bezw. ξ die gleichen Werte, ob man links- oder rechtsläufig rechnet (vergl. auch (1) Seite 712).

Bei ungleichen Gewichten aber können diese Ergebnisse verschieden ausfallen. Es ist daher zu untersuchen, ob die rechtsläufige oder die linksläufige Rechnung die genauere ist und wie dies im voraus erkannt werden kann. Zu diesem Zwecke drücken wir die arithmetischen Mittel für η und ξ nach (2) unmittelbar durch die dy , dx aus und erhalten:

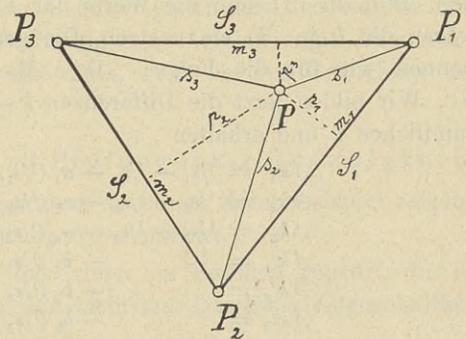


Fig. 1.

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{k_1 dy_1 + k_2 dy_2 + k_3 dy_3 + k'_1 dx_1 + k'_2 dx_2 + k'_3 dx_3}{[1/s]} \\ \xi &= \frac{k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 - k'_1 dy_1 - k'_2 dy_2 - k'_3 dy_3}{[1/s]} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dabei ist zufolge (2)

Linksläufig	Rechtsläufig	
$K_1 = {}^1/s_2 - a_1 {}^1/s_2 + a_3 {}^1/s_1$	$k_1 = {}^1/s_1 - a_1 {}^1/s_1 + a_3 {}^1/s_3$	}
$K_2 = {}^1/s_3 - a_2 {}^1/s_3 + a_1 {}^1/s_2$	$k_2 = {}^1/s_2 - a_2 {}^1/s_2 + a_1 {}^1/s_1$	
$K_3 = {}^1/s_1 - a_3 {}^1/s_1 + a_2 {}^1/s_3$	$k_3 = {}^1/s_3 - a_3 {}^1/s_3 + a_2 {}^1/s_2$	
$K'_1 = -b_1 {}^1/s_2 + b_3 {}^1/s_1$	$k'_1 = -b_1 {}^1/s_1 + b_3 {}^1/s_3$	
$K'_2 = -b_2 {}^1/s_3 + b_1 {}^1/s_2$	$k'_2 = -b_2 {}^1/s_2 + b_1 {}^1/s_1$	
$K'_3 = -b_3 {}^1/s_1 + b_2 {}^1/s_3$	$k'_3 = -b_3 {}^1/s_3 + b_2 {}^1/s_2$	
$[K] = [{}^1/s]$	$[k] = [{}^1/s]$	
$[K'] = 0$	$[k'] = 0$	

Diese Gleichungen können nach der Regel gebildet werden:

$$\left. \begin{aligned} K_i &= {}^1/s_{i+1} - a_i {}^1/s_{i+1} + a_{i-1} {}^1/s_i & k_i &= {}^1/s_i - a_i {}^1/s_i + a_{i-1} {}^1/s_{i-1} \\ &{}^1/s_{i+1} \text{ linksläufig} & & {}^1/s_i \text{ rechtsläufig} \\ \text{Das 3. Glied von } K_i &\text{ bzw. } k_i = -2. \text{ Glied von } K_{i-1} \text{ bzw. } k_{i-1} \\ \text{Das 2. „ „ } K'_i & \text{ „ } k'_i = -1. \text{ „ „ } K'_{i-1} \text{ „ } k'_{i-1} \end{aligned} \right\} (4^a)$$

Hiernach brauchen für K und k nur die zweiten und für K' und k' nur die ersten Glieder ausgerechnet zu werden.

Setzen wir nunmehr in (3) einmal die k und ein andermal die K ein, dann werden wir bei ungleichen Gewichten für η und ξ jedesmal andere Werte erhalten können. Um zu entscheiden, welche der beiden Rechnungen die genauere ist, machen wir die Annahme, daß der Paßpunkt P_i , welcher dem Punkt P am nächsten liegt, die größte Anziehungskraft auf diesen Punkt hat. In Fig. 1 wäre dies P_1 auf P . Diese Annahme erfordert, daß man sich bei den zwei verschiedenen Werten von k und K für den größeren entscheidet und daß somit durch die Multiplikation des größeren k_1 bzw. K_1 mit dy_1 und dx_1 die größere Anziehungskraft von P_1 auf P betätigt wird.

Ist also hier $K_1 > k_1$ (links $>$ rechts), dann ist linksläufig zu rechnen. D. h. in (3) sind die Werte der K einzusetzen. Im umgekehrten Falle wären die k in (3) einzusetzen. Die genauere Rechnung von diesen beiden nennen wir für die Folge: „Die Rechnung mit dem größeren K “. Wir bilden jetzt die Differenzen $k - K = \Delta k$ (rechtsl. — linksl.) für die sämtlichen k und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \Delta k_1 &= {}^1/s_1 - {}^1/s_2 - a_1 ({}^1/s_1 - {}^1/s_2) + a_3 ({}^1/s_3 - {}^1/s_1) \\ \Delta k_2 &= {}^1/s_2 - {}^1/s_3 - a_2 ({}^1/s_2 - {}^1/s_3) + a_1 ({}^1/s_1 - {}^1/s_2) \\ \Delta k_3 &= {}^1/s_3 - {}^1/s_1 - a_3 ({}^1/s_3 - {}^1/s_1) + a_2 ({}^1/s_2 - {}^1/s_3) \\ \Delta k'_1 &= -b_1 ({}^1/s_1 - {}^1/s_2) + b_3 ({}^1/s_3 - {}^1/s_1) \\ \Delta k'_2 &= -b_2 ({}^1/s_2 - {}^1/s_3) + b_1 ({}^1/s_1 - {}^1/s_2) \\ \Delta k'_3 &= -b_3 ({}^1/s_3 - {}^1/s_1) + b_2 ({}^1/s_2 - {}^1/s_3) \\ \Delta k &= 0 = [\Delta k'] \end{aligned} \right\} (5)$$

Diese Gleichungen können nach der Regel angeschrieben werden:

$$\Delta k_i = {}^1/s_i - {}^1/s_{i+1} - a_i ({}^1/s_i - {}^1/s_{i+1}) + a_{i-1} ({}^1/s_{i-1} - {}^1/s_i)$$

Das 3. Glied von $\Delta k_i = -2$. Glied von Δk_{i-1}

Das 2. Glied von $\Delta k'_i = -1$. Glied von $\Delta k'_{i-1}$

Hiernach brauchen für die Δk nur die zweiten und für die $\Delta k'$ nur die ersten Glieder ausgerechnet zu werden.

Zunächst benützen wir von (5) nur die Gleichungen für Δk_1 und $\Delta k'_1$ — von P_1 , der P am nächsten liegt — und von diesen auch nur ihre Summe:

$$\Delta k_1 + \Delta k'_1 = {}^1/s_1 - {}^1/s_2 - (a_1 + b_1) ({}^1/s_1 - {}^1/s_2) + (a_3 + b_3) ({}^1/s_3 - {}^1/s_1)$$

oder allgemein

$$\Delta k_i + \Delta k'_i = {}^1/s_i - {}^1/s_{i+1} - (a_i + b_i) ({}^1/s_i - {}^1/s_{i+1}) + (a_{i-1} + b_{i-1}) ({}^1/s_{i-1} - {}^1/s_i) \quad (6)$$

Wird das Vorzeichen von $\Delta k_i + \Delta k'_i = k_i + k'_i - (K_i + K'_i) = (+)$, dann ist rechtsläufig, und wenn dieses Vorzeichen = $(-)$, dann ist linksläufig zu rechnen.

Mittels der Formel (6) kann man also die Richtung der Rechnung für (3) im voraus bestimmen, ohne daß man k und K selbst kennt. Sind zwei oder drei größte Gewichte vorhanden, dann rechnet man für jeden betr. Paßpunkt $\Delta k + \Delta k'$ aus und bildet die Summe von sämtlichen Δk . Das Vorzeichen, das sich dabei ergibt, zeigt die Richtung der auszuführenden Rechnung an.

Des weiteren kann durch die Gleichungen (4) leicht bewiesen werden, daß, wenn P sich einem Rahmenpunkt P_i stetig nähert, sich auch η , ξ , dy_i , dx_i stetig nähern, und wenn P mit P_i zusammenfällt $\eta = dy_i$ bzw. $\xi = dx_i$ wird. Das gilt sowohl für rechtsläufige als auch für linksläufige Rechnung.

Setzen wir in Fig. 1 $s_1 = 0$, dann wird ${}^1/s_1 = \infty$ und damit $a_1 = b_1 = b_3 = 0$.

$$\text{Ferner } {}^1/s_1 = {}^1/s_2; \quad {}^1/s_3 = {}^1/s_3; \quad a_3 = S_3/S_3 = 1.$$

Dividieren wir noch sämtliche Gewichte durch ∞ , dann wird ${}^1/s_1 = 1$ und alle übrigen Gewichte = 0, woraus sich ergibt: $K_1 = k_1 = 1$ und alle übrigen $k = 0$.

Hiernach wird $\eta = dy_1$ und $\xi = dx_1$. Berücksichtigt man, daß bei Gleichheit der Gewichte die K_i den k_i bzw. gleich sind, so werden die η , ξ bei rechts- und linksläufiger Rechnung bzw. gleich sein. Dies werden sie aber auch sein bei ${}^1/s_i = 0$, also dann, wenn bei den Gewichten die größte Ungleichheit besteht.

III. Anwendung der Formeln und Prüfung ihrer Genauigkeit.

Bevor wir die Einfachheit der Rechnung an einem Zahlenbeispiel zeigen, ist es notwendig, noch einige Ausführungen zu machen.

Das Umformungsverfahren hatte ich früher an Punkten geprüft, die in beiden Systemen nach der Methode der kleinsten Quadrate eingeschnitten waren.

Die Differenzen zwischen den Koordinaten der doppelt bestimmten Punkte dy , dx sollten gleich sein den aus der Umformung erhaltenen η , ξ . Die Abweichungen waren etwas größer als die mittleren Fehler des Einschneidens. Nun ist aber das Einschneiden, insbesondere das Rückwärtseinschneiden nicht ganz einwandfrei, weil bei ihm die Fehler der Anschlußpunkte nicht

voll, sondern nur ihre Projektion zur Zielrichtung erfaßt werden, was auch auf die Drehungs- und Streckungsfehler der Rahmenseiten zutrifft. S. unten Fig. 4. Ich habe deshalb der Prüfung des Umformungsverfahrens nunmehr bessere Beispiele zugrunde gelegt und zwar einmal das „Pfälzische Dreiecksnetz“ und ein andermal das „Thüringische Dreiecksnetz“. Beide Netze wurden bearbeitet von der Trigonometrischen Abteilung der ehem. Preußischen Landesaufnahme und veröffentlicht im XI. bzw. VII. Teil des Werkes „Hauptdreiecke“. In beiden Netzen sind sämtliche Winkel gemessen worden. Jedes Netz wurde zweimal ausgeglichen, und zwar das erste Mal ohne und das zweite Mal mit Anschlußzwang. Für jede Ausgleichung wurden die ebenen Koordinaten berechnet. Wir bezeichnen diese Koordinaten der 1. Ausgleichung mit YX , die der 2. Ausgleichung mit yx und dementsprechend wie früher $dy = Y - y$, $dx = X - x$. Wir behandeln zunächst das Pfäl-

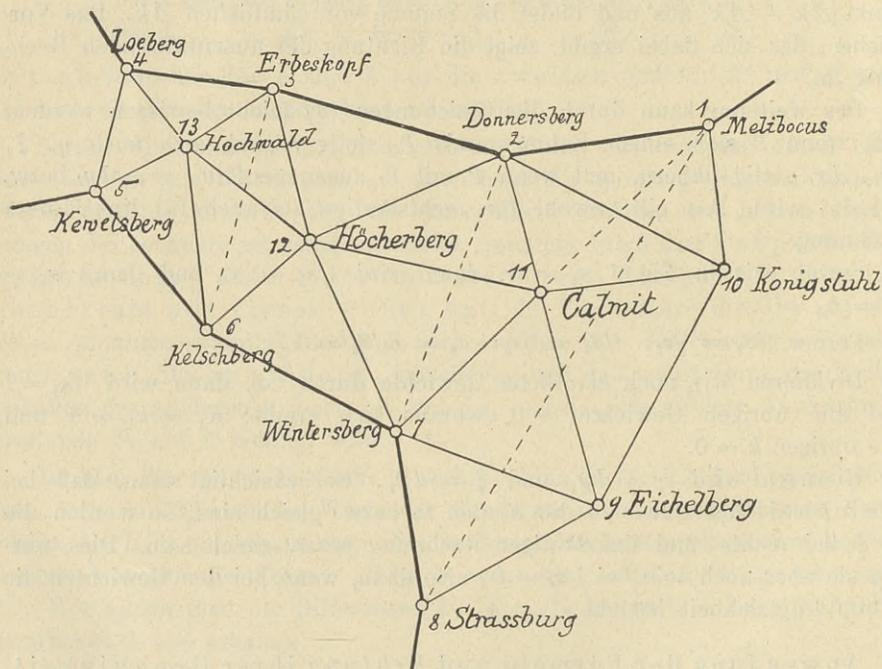


Fig. 2.

zische Dreiecksnetz. Die Umfangspunkte 1—8 werden dabei als fester Rahmen angenommen, während die Punkte 9—13 durch Umformung aus dem System yx in das System YX übertragen werden. Wir könnten nun wohl diese Punkte mittels der Formeln (1) umformen. Die Ergebnisse würden auch für manche Zwecke noch hinreichend genau werden, jedoch nicht für alle. Da nämlich die Differenzen dy , dx hier beträchtlich und auch unregelmäßig sind, so wird es notwendig, für die Punkte 9—13 das erweiterte Verfahren nach den Formeln (3) anzuwenden. Hiernach wird in Tafel 1 der Punkt (12) innerhalb des engeren Rahmens 7, 6, 3, 2 behandelt.

Tafel 2.

Nr. des Punktes Rahmen	Endgültig dy dx	Linksläufig			Rechtsläufig			$[1/s]$ $\Delta k + \Delta k'$
		η ξ	v_η v_ξ	v_η^2 v_ξ^2	η ξ	v_η v_ξ	v_η^2 v_ξ^2	
12 über 7, 6, 3, 2	+ 50 - 1,6	+ 48,5 - 1,0	+ 1,5 - 0,6	2,25 0,36	+ 48 + 0,4	+ 2 - 2	4,00 4,00	3,23 - 0,82
13 über 6, 5, 4, 3	+ 28 - 9	+ 28 - 10,5	0 + 1,5	0,00 2,25	+ 28 - 11	0 + 2	0,00 4,00	3,38 - 0,16
11 über 8, 7, 2, 1	+ 44 + 32	+ 44 + 33	0 - 1	0,00 1,00	+ 38 + 35	+ 6 - 3	36,00 9,00	2,71 - 0,16
9 über 8, 7, 11, 1	+ 69 + 49	+ 69 + 46	0 + 3	0,00 9,00	+ 67 + 52	+ 2 - 3	4,00 9,00	3,43 - 0,29
10 über 9, 11, 1, 2	+ 4,4 + 55	+ 10 + 54,5	- 5,6 + 0,5	31,40 0,25	+ 13 + 55	- 8,6 0,0	73,90 0,00	2,80 - 0,99
Mittlerer Umformungsfehler m_1				46,51			143,90	
Mittlerer radialer Fehler des Netzes m_r				2,15	cm	m_2	3,80	cm
				12,5	cm		12,5	cm
		$\frac{m_1}{m_r}$		0,17		$\frac{m_2}{m_r}$	0,30	
<u>Berechnung von m_r</u>								
Nach [3] Seite 648 ist für								
Die Punkte 1 — 13 und zwar								
1 — 8 $[uu] + [vv] = 0,2384$ und								
9 — 13 „ „ = 0,1036								
Zusammen 0,3420								
$m_r = \sqrt{\frac{0,3420}{26-4}} = \pm 0,125$ m								

Das Thüringische Dreiecksnetz ist in Fig. 3 abgebildet.

Die Punkte 1—4 gehören der Hannoversch-sächsischen Kette an. An sie wurde das Thüringische Dreiecksnetz angeschlossen. Aus [4] Seite 369 sind die Differenzen η , ξ zwischen den Koordinaten der beiden Ausgleichungen entnommen und in Tafel 3 als endgültige Werte für dy , dx der Punkte 5—18 eingetragen.

Diese Punkte wurden über den Punkten 1—4 auf Grund derer Differenzen dy , dx mittels der Formeln (3) aus dem System yx in das System YX übertragen. In Tafel 3 sind die Ergebnisse eingetragen. Auch hier wurde nach (6) die Richtung der Rechnung für jeden Punkt im voraus bestimmt. Da sämtliche Punkte außerhalb des festen Rahmens 1—4 liegen und bei rechtsläufiger Bestimmung die Minuswerte der p überwiegend sind, so ergab sich, daß für die Punkte 5—7 und 9—18 rechtsläufig und nur für 8 links-läufig zu rechnen war.

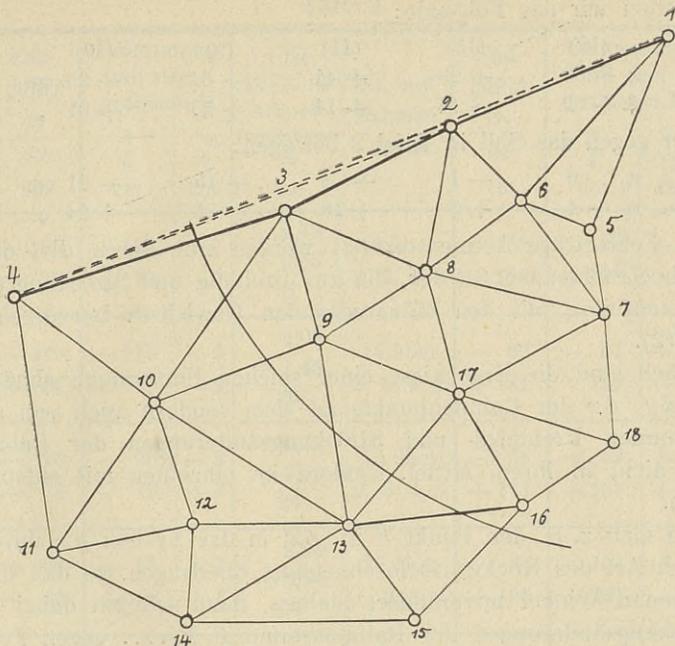


Fig. 3.

Die mittleren Umformungsfehler wurden hier nach den Abständen der Punkte von dem Rahmen 1—4 in drei Zonen geordnet und betragen:

1. Für die 1. Zone mit 27 km mittlerem Abstand von dem Rahmen

$$m_u = \pm 1,4 \text{ cm}, \quad m_u : m_r = 0,14$$

2. Für die 2. Zone mit 52 km mittlerem Abstand von dem Rahmen

$$m_u = \pm 1,7 \text{ cm}, \quad m_u : m_r = 0,17$$

3. Für die 3. Zone mit 78 km mittlerem Abstand von dem Rahmen

$$m_u = \pm 4,2 \text{ cm}, \quad m_u : m_r = 0,42$$

Nach diesen Feststellungen und derjenigen im Pfälzischen Dreiecksnetz kann man den mittleren Umformungsfehler mit $\frac{1}{5}$ des mittleren Fehlers der umgeformten Punkte annehmen. Diese Genauigkeit dürfte für die laufende Praxis genügen.

Zu diesen Untersuchungen ist noch das Folgende zu bemerken:

Der heutige Stand der Wissenschaft zeigt, daß die Umformung der obigen Art mit geschlossenen Formeln über größere Gebiete versagt, was auch für kleinere Gebiete noch zutrifft, wenn größere unregelmäßigen Fehler in den Netzen vorhanden sind.

Bilden wir fernerhin für die Punkte 9—13 des Pfälzischen Dreiecksnetzes die gewonnenen Mittel

$$\eta = \frac{\left[\frac{dy}{s} \right]}{\left[\frac{1}{s} \right]}, \quad \xi = \frac{\left[\frac{dx}{s} \right]}{\left[\frac{1}{s} \right]},$$

dann erhalten wir das Folgende:

(12)	(13)	(11)	(9)	(10)
$\eta + 50$	$+ 29$	$+ 41$	$+ 54$	$+ 25$ cm
$\xi + 2$	$- 14$	$+ 14$	$+ 23$	$+ 31$ „

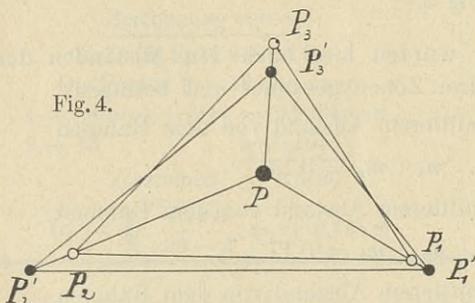
Die Fehler gegen das Soll in Tafel 2 betragen:

v_η	0	- 1	+ 3	+ 15	- 21 cm
v_ξ	- 4	+ 5	+ 18	+ 26	+ 24 „

Diese Fehl beträge können ersetzt werden nur durch die, den obigen Formeln noch fehlenden Glieder, die aus Drehung und Streckung der einzelnen Rahmenseiten mit den entsprechenden Gewichten hervorgehen. Siehe Formeln (2).

Hiernach sind die Ergebnisse einer solchen Umformung abhängig nicht nur von dy , dx der Rahmenpunkte an sich, sondern auch von den durch sie bestimmten Drehungs- und Streckungsänderungen der Rahmenseiten, und dies nicht in ihrem Mittel, sondern im einzelnen mit entsprechenden Gewichten.

Wollte man z. B. den Punkt P in $y'x'$ in das System yx durch Umformung nach Art des Rückwärtseinschneidens übertragen, so daß die in $y'x'$ ausgeglichenen Winkel unverändert bleiben, dann würden dabei Drehungs- und Streckungsänderungen der Rahmenseiten $P_1P_2\dots$ gegen $P_1'P_2'$ nicht berücksichtigt werden. Wird dagegen die Umformung nach den Formeln (3) durchgeführt, dann bleibt kein Fehler der Paßpunkte $P_1 - P_3$ bzw. der Rahmenseiten außer Betracht. Hieraus geht aber hervor, daß das Anschmiegen der Fig. $P_1'P_2'P_3'$ mit P an das Dreieck $P_1P_2P_3$ nur von den Rahmenseiten aus überhaupt möglich ist.



Bei der Einteilung eines umzuformenden Netzes in engere Rahmen ist es sehr wichtig auf die Einzelheiten zu achten. Das Dreieck oder Viereck genügen als engere Rahmen, und letzteres wird die Regel bilden. Vor allem stelle man diejenigen Rahmenseiten fest, auf denen die größten Differenzen liegen $\left(= \sqrt{\frac{wy^2 + wx^2}{S}} \right)$. Solche Seiten sind als Rahmenseiten im vornherein festzulegen. Sie sind für alle in ihrer Nähe liegenden Punkte als Rahmenseiten zu benutzen, weil sie diese Punkte am stärksten beeinflussen. Dagegen sind diese Seiten für weit abliegende Punkte nicht mehr zu verwenden, weil sonst die Gefahr einer ungünstigen Verschleppung von Fehlern besteht. Nach den beim Pfälzischen und Thüringischen Netz gemachten Erfahrungen kann der Abstand der Punkte etwas über das Zweifache der Länge der betreffenden Seite hinausgehen. Im Pfälzischen Netz wurde z. B. die Diagonale $1 \cdot 11 < 2 \cdot 10$ als Rahmenseite zur Umformung der Punkte 9 und 10 benutzt, weil auf ihr die größte Differenz lag.

Tafel 3.

Nr. und Rahmen für <i>P</i>	End- gültig <i>dy</i> <i>dx</i> cm	Umformung mit dem größeren <i>k</i>		[¹ / <i>s</i>] <i>Δk + Δk'</i> Abstand vomRahmen in km	Nr. und Rahmen für <i>P</i>	End- gültig <i>dy</i> <i>dx</i> cm	Umformung mit dem größeren <i>k</i>		[¹ / <i>s</i>] <i>Δk + Δk'</i> Abstand vomRahmen in km
		<i>η</i> <i>ξ</i> cm	<i>v_η</i> <i>v_ξ</i> cm				<i>η</i> <i>ξ</i> cm	<i>v_η</i> <i>v_ξ</i> cm	
5 über 1, 2, 3, 4	- 135 + 73	- 135 + 73	0 0	2,72 + 0,62 31	13 über 2, 3, 4, 1	- 58 + 118	- 62 + 115	+ 4 + 3	3,09 + 0,30 68
6 über 1, 2, 3, 4	- 119 + 66	- 119 + 68	0 - 2	2,09 + 1,45 20	14 über 2, 3, 4, 1	- 23 + 121	- 27 + 122	+ 4 - 1	3,04 + 0,06 76
8 über 1, 2, 3, 4	- 98 - 76	- 96 - 79	- 2 + 3	2,72 - 0,53 24	15 über 2, 3, 4, 1	- 63 + 141	- 69 + 137	+ 6 + 4	3,37 + 0,25 92
9 über 1, 2, 3, 4	- 64 + 83	- 65 + 82	+ 1 + 1	2,24 + 0,94 28	16 über 1, 2, 3, 4	- 94 + 130	- 101 + 131	+ 7 - 1	3,46 + 0,46 78
10 über 2, 3, 4, 1	- 34 + 79	- 34 + 79	0 0	2,48 + 0,37 30	18 über 1, 2, 3, 4	- 121 + 125	- 127 + 125	+ 6 0	3,30 + 0,25 76
$m_u = \sqrt{\frac{19}{10}} = \pm 1,4$ $m_u : m_r = 0,14$					$m_u = \sqrt{\frac{180}{10}} = \pm 4,2$ $m_u : m_r = 0,42$				
27 km					78 km				
7 über 1, 2, 3, 4	- 130 + 98	- 132 + 97	+ 2 + 1	3,00 + 0,60 48	<p>Nach Seite 371 der Z. f. V. 1896 beträgt der mittlere radiale Fehler</p> $m_r = \sqrt{\frac{3010}{32 - 4}} = 10 \text{ cm}$				
17 über 1, 2, 3, 4	- 90 + 103	- 92 + 104	+ 2 - 1	3,12 + 0,79 52					
12 über 2, 3, 4, 1	- 33 + 105	- 33 + 104	0 + 1	3,05 + 0,06 56					
11 über 2, 3, 4, 1	- 6 + 97	- 6 + 100,5	0 - 3,5	2,39 + 0,18 51					
$m_u = \sqrt{\frac{23}{8}} = \pm 1,7$ $m_u : m_r = 0,17$					52 km				

Im Thüringischen Netz lag die größte Differenz auf der Rahmenseite 1·2. Diese Seite wurde daher für alle Punkte benützt, die innerhalb des Kreisbogens liegen, der von 1 aus geschlagen wurde. Fig. 3. Diese Punkte wurden über dem Rahmen $\underline{1 \cdot 2}$, $\underline{2 \cdot 3}$, $\underline{3 \cdot 4}$, $\underline{4 \cdot 1}$ umgeformt. Die außerhalb des Kreisbogens liegenden Punkte sind über dem Rahmen $\underline{2 \cdot 3}$, $\underline{3 \cdot 4}$, $\underline{4 \cdot 2}$, $\underline{1 \cdot 4}$ umgeformt worden, wobei also die Seite $\underline{1 \cdot 2}$ wegen ungünstiger Fehlerverschleppung nicht benützt wurde. So wurden z. B. die Punkte 9, 11 und 15 auch über dem Rahmen $\underline{1 \cdot 2}$, $\underline{2 \cdot 3}$, $\underline{3 \cdot 4}$, $\underline{4 \cdot 1}$ berechnet und es ergab sich das Folgende:

(9)	(11)	(15)
$\eta - 65$	— 4	— 73 cm
$\xi + 78$	+ 111	+ 148 .

Dabei ist

$v_\eta + 2$	— 2	+ 10 cm
$v_\xi + 4$	— 14	— 7 .

Wie man sieht, sind die Umformungsfehler hier beträchtlich größer als diejenigen in Tafel 3 für die obigen Punkte, die dort über dem Rahmen $\underline{2 \cdot 3}$, $\underline{3 \cdot 4}$, $\underline{4 \cdot 2}$, $\underline{1 \cdot 4}$ übertragen worden sind.

Das sind bei solchen Unterlagen, wie sie hier benützt wurden, wertvolle Erfahrungen, die in anderen Fällen gute Dienste leisten können.

Das Thüringische Netz hätte man für die Umformung mit Vorteil auch anders einteilen können, wodurch man noch günstigere Ergebnisse erhalten hätte. Das soll jedoch einer späteren Erörterung vorbehalten bleiben.

IV. Verdichtung des Pfälzischen Dreiecksnetzes.

Es wäre unwirtschaftlich, wenn man die Umformung für sämtliche Punkte nach den Formeln (3) vornehmen wollte. Trotzdem in diesem Netze die Dreieckspunkte günstig verteilt sind, würde es nicht genügen, die Verdichtungen mittels der Formeln (1) auszuführen. Es ist daher notwendig, noch eine Anzahl Zwischenpunkte mittels der Formeln (3) zu bestimmen, womit man alsdann ein Punktfeld erhält, in dem man die Formeln (1) anwenden kann. So wurden nach den Formeln (3) 38 Zwischenpunkte eingeschaltet, die in Fig. 5 mit schwarzen Kreischen dargestellt sind. Die Dreieckspunkte sind hier mit weißen Kreischen bezeichnet. Die Werte von dy , dx bzw. η , ξ sind beige geschrieben.

Tafel 4.

Nr. des Punktes	dy_e	dx_e	F	cm	cm
	$dy_e - dy_a$ = wy	$dx_e - dx_a$ = wx		+ 51	+ 36
				— 9	+ 3
$m: S = a$	$a \cdot wy$	$b \cdot wx$	+ 0,57	— 5,1	+ 1,7
$p: S = b$	$b \cdot wx$	$- b \cdot wy$	+ 0,70	+ 2,1	+ 6,3
	dy_a	dx_a		+ 60	+ 33
	η	ξ		+ 57	+ 41

In diesem Punktfeld sind zur Prüfung 10 Punkte A—K nach den Formeln (1) bestimmt worden und zwar jeder Punkt doppelt von zwei Seiten.

In der Tafel 4 ist die Umformung eines Punktes nach den Formeln (1) schematisch dargestellt, um die Einfachheit der Rechnung zu zeigen.

Fig. 5 enthält die Probepunkte A—K und ihre Bestimmungsart durch punktierte Linien. Tafel 5 enthält die Ergebnisse.

Hiernach betragen die Differenzen:

4 cm	1 mal
3 „	6 „
2 „	3 „
1 „	6 „
0 „	4 „

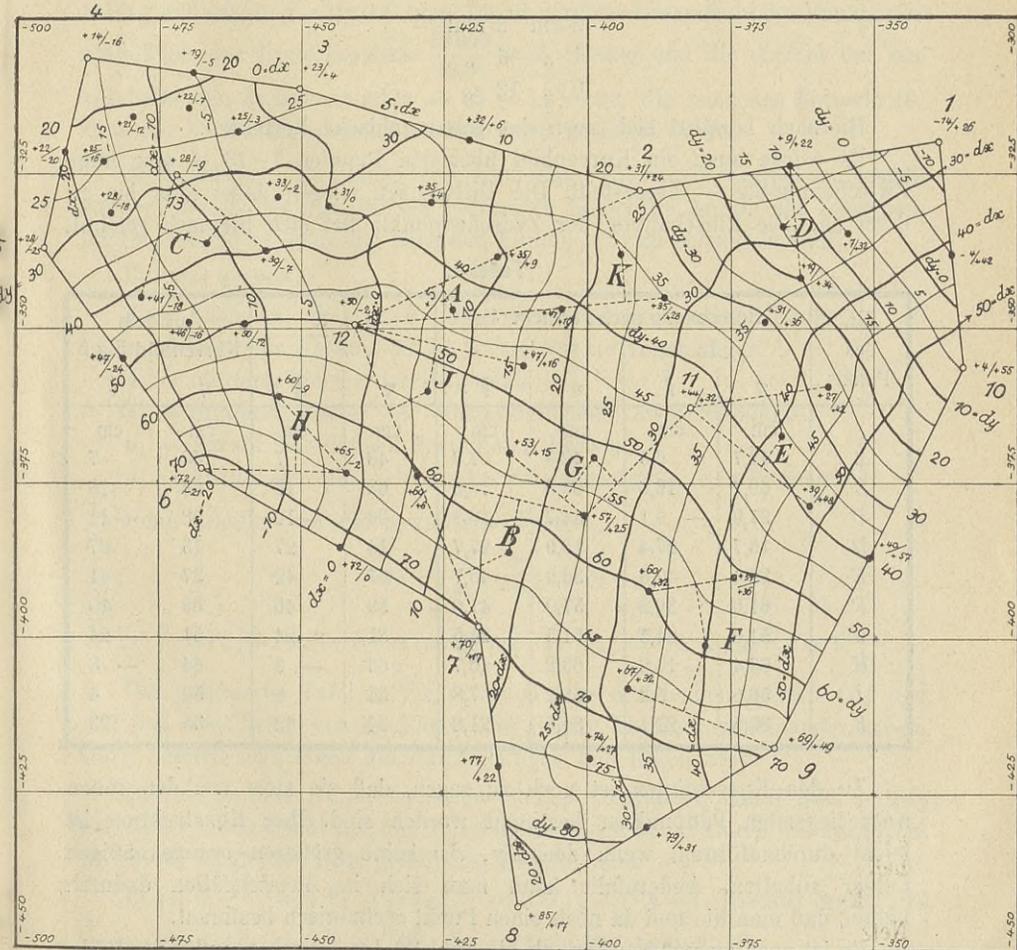


Fig. 5.

Die Summe der Quadrate dieser Differenzen = 88 ergibt den mittleren Fehler einer Koordinate für das Mittel aus zwei Bestimmungen

$$= \sqrt{\frac{88}{20 \cdot 2 \cdot 2}} = \pm 1 \text{ cm}$$

oder für den gesamten Punktfehler = $\pm 1,5$ cm.

Das einfache Verfahren nach Formeln (1) kann auch durch ein ganzgraphisches Verfahren ersetzt werden, wenn Massenübertragungen dies gebieten.

Mit Hilfe von dy , dx der Dreieckspunkte und von η , ξ der Zwischenpunkte — zusammen 51 Punkte — wurden in Fig. 5 für Dezimeter und Halbdezimeterwerte von dy , dx die Kurven aufgetragen. In diesem Kurvenbild kann man die Werte von η , ξ für jeden beliebigen Punkt unmittelbar ablesen.

In Tafel 5 sind die Werte für die Probepunkte A—K angegeben. Ihr Vergleich mit den Mitteln der errechneten Werte ergibt die Differenzen:

2 cm 2 mal
1 „ 6 „
0 „ 12 „

Hiernach bewährt sich auch das ganzgraphische Verfahren.

Es wurde auch ein Kurvenbild über den Punkten 1—13 — also ohne Zwischenpunkte — hergestellt. Die Differenzen stiegen dabei aber bis zu 6 cm an. Die Einschaltung der Zwischenpunkte hat sich hiernach gelohnt.

Tafel 5.

Nr. des Punkts	Berechnung nach Formeln (1)				$\frac{I + II}{2}$		Aus dem Kurvenbild Fig. 5	
	I		II		η	ξ	η	ξ
	η	ξ	η	ξ				
	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm
A	43,7	6,5	42,9	7,3	43	7	43	7
B	62,7	16,8	63,6	18,5	63	18	63	18
C	37,9	— 9,1	34,7	— 10,9	36	— 10	38	— 11
D	15,7	27,4	12,9	27,7	14	27	15	27
E	37,4	40,6	36,2	43,7	37	42	37	41
F	61,0	39,2	57,0	41,0	59	40	59	40
G	51,0	24,5	51,5	24,5	51	24	51	24
H	63,4	— 10,2	63,2	— 6,7	63	— 8	64	— 8
I	56,5	5,2	53,2	7,8	55	6	53	6
K	33,5	22,1	34,8	21,8	34	22	35	23

Zu den Kurvenlinien ist noch zu sagen, daß sie stets von den ihnen naheliegenden Paßpunkten bestimmt worden sind. Ihre Konstruktion ist leicht durchzuführen, wenn den dy , dx keine größeren unregelmäßigen Fehler anhaften. Andernfalls kann man sich in Zweifelsfällen dadurch helfen, daß man hie und da noch einen Punkt rechnerisch bestimmt.

Es ist noch zu untersuchen, ob die Zahl 38 der Zwischenpunkte im Pfälz. Netz notwendig war, oder ob auch eine geringere Zahl ausgereicht hätte.

Diese Zwischenpunkte wurden hier in Ermangelung von Dreieckspunkten niederer Ordnung gewählt. Ihre mittleren Fehler kann man denjenigen der Zwischenpunkte I. Ord. und der II. Ord. der Preuß. Landesaufnahme gleichsetzen, die für die Koordinate zu 5 cm und als Gesamtfehler für den Punkt zu 7 cm hier angenommen werden. Den mittleren Umformungsfehler kann man daher für einen solchen Zwischenpunkt $= 5 \cdot 0,2 = 1$ cm setzen. Der mittlere radiale Punktfehler für das gesamte Pfälzische Hauptnetz ist nach Tafel 2 $= 12,5$ cm. Hiernach der mittlere Umformungsfehler $= 12,5 \times 0,2 = 2,5$ cm. Die mittlere Länge einer Dreiecksseite I. Ord. beträgt im Pfälzischen Dreiecksnetz 46,7 km und damit der mittlere Umformungsfehler auf 1 km $= 2,5 : 46,7 = 0,054$ cm. Der Abstand der nach den Formeln (3) einzuschaltenden Zwischenpunkte sei $= x$ km. Da der mittlere Umformungsfehler eines solchen Zwischenpunktes 1 cm (s. oben) betragen kann, so ist $0,054 \cdot x = 1$ zu setzen und damit wird $x = 1 : 0,054 = 18,5$ km. Der Flächeninhalt des Pfälz. Netzes beträgt roh ermittelt $= 12000$ qkm. Damit wird die Gesamtzahl der Punkte einschließlich der Dreieckspunkte $\frac{12000}{18,5^2} = 35$ Punkte und die Anzahl der einzuschaltenden Zwischenpunkte $= 35 - 13 = 22$, die nach den Formeln (3) statt der 38 Zwischenpunkte zu berechnen gewesen wären.

Nach dieser Entwicklung soll noch eine allgemeine Formel aufgestellt werden, mittels der man für ein begrenztes Gebiet die Anzahl der Zwischenpunkte berechnen kann, die nach den Formeln (3) zu behandeln sind.

Es wird gesetzt:

F = Fläche in qkm des Gebietes der doppelt bestimmten Punkte.

s_m = mittlerer Abstand in km dieser Punkte voneinander.

m_1 = mittlerer Fehler der Paßpunkte.

m_2 = mittlerer Fehler der einzuschaltenden Zwischenpunkte.

n_1 = Anzahl der doppelt bestimmten Punkte.

n_2 = Anzahl der einzuschaltenden Zwischenpunkte nach Formeln (3).

Dann erhalten wir die gewünschte Formel

$$n_2 = \frac{F}{s_m^2} \cdot \frac{m_1^2}{m_2^2} - n_1.$$

V. Graphische Bestimmung für $1/s$, $\frac{m}{S} = a$ und $\frac{p}{S} = b$.

Die graphische Tafel in Fig. 6 besteht aus den beiden Achsen OA und AA mit einer Schar von Parallelen, die gleiche Abstände voneinander haben. Dazu benutzt man einen gut durchsichtigen und festen Stoff.

Die Achse OA ist an mehreren Stellen durchlocht, damit man mittels der Nadel einen Punkt auf die Unterlage absetzen kann. Durch die Parallelen ist sie in 10 gleiche Teile geteilt, die beziffert sind.

Es ist $O = P_1$ und $P_1 P_2 = s$, $s \cdot \cos AOP_2 = OA = 1$. Hieraus ergibt sich $\frac{1}{s} = \cos AOP_2 = BB = 0,69$, das Gewicht der Seite $P_1 P_2$.

Der praktische Gebrauch der Tafel gestaltet sich wie folgt:

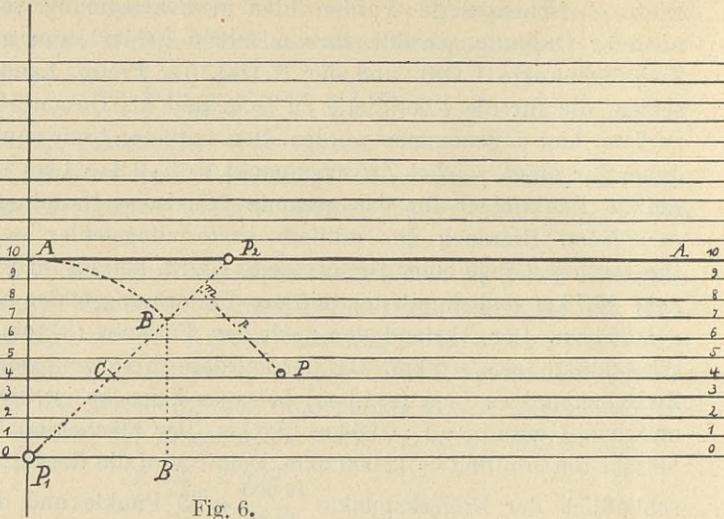


Fig. 6.

Sind von einem Punkte P , dessen Koordinaten umzuformen sind, nach den Paßpunkten $P_1 \dots P_n$ die Gewichte $1/s_1 \dots 1/s_n$ zu bestimmen, dann bringt man den Nullpunkt der Tafel genau über P , nimmt OA in den Zirkel, setzt eine Zirkelspitze in O bzw. P ein, wodurch die Tafel in P oder O drehbar wird. Die erste Drehung geht so weit bis AA den Punkt P_1 schneidet. Mit der anderen Zirkelspitze liest man alsdann in PP_1 das Gewicht $1/s_1$ in der Teilung ab.

Zur Bestimmung von $1/s_2$ dreht man die Tafel um P (Zirkelspitze) bis AA den Punkt P_2 schneidet. Mit OA im Zirkel liest man in der Richtung PP_2 das Gewicht $1/s_2$ unmittelbar ab, usw.

Um die Größen a und b zu bestimmen, setzt man beim Drehen der Tafel um P die Lote p auf die Rahmenseiten mittels der Nadel in der Achse OA auf der Zeichnung ab, sobald die betreffende Rahmenseite in der Parallelen-schar mit dieser parallel erscheint.

Als dann bringt man die Tafel mit ihrem Nullpunkt auf P_1 , nimmt p_1 in den Zirkel, setzt eine Zirkelspitze in O bzw. P_1 ein, dreht die Tafel bis AA P_2 schneidet, liest bei m die Größe a und mit der anderen Zirkelspitze in C die Größe b unmittelbar in der Teilung ab. In Fig. 6 ist $a = +0,84$ und $b = +0,41$. Als dann setzt man die Tafel mit O nach und nach in P_2, P_3 und P_n ein und verfährt in der vorgeschriebenen Weise.

VI. Schlußbemerkungen.

Zum Schlusse will ich die Merkmale des ganzen Verfahrens noch einmal kurz zusammenfassen: Es besteht aus dem einfachen, dem erweiterten und dem ganzgraphischen Verfahren mittels Kurvenbild. Die Größen dy, dx der Rahmenpunkte werden grundsätzlich nicht verändert, etwa durch eine Ausgleichung. Grundlegend für das einfache und das erweiterte Verfahren sind diese dy, dx , sowie die Drehungs- und Streckungsänderungen der Rahmen-

seiten. Hinzu kommen die einfachen Gewichte $1/s$ im rechts- oder linksläufigen Sinne. Das erweiterte Verfahren wird nur dann angewandt, wenn es an Paßpunkten fehlt, oder wenn diese auf das Gebiet nicht günstig verteilt sind. Alsdann ist eine im voraus zu berechnende Anzahl von Zwischenpunkten als Ersatz für Paßpunkte zu bestimmen, worauf das einfache Verfahren einsetzen, oder auch bei Massenumformungen die Herstellung eines Kurvenbildes für Dezimeter- und Halbdezimeterwerte erfolgen kann.

Der mittlere Umformungsfehler beträgt rund $1/5$ des mittleren Punktfehlers.

In [2] hatte ich s. Z. für das Verfahren aus gewissen Gründen den Ausdruck „streng richtig“ gebraucht. Das war selbstverständlich nicht so gemeint, als wären die Ergebnisse identisch mit denen einer vollständigen Neuausgleichung des gesamten Netzes. Das ist ja schon deshalb nicht möglich, weil beide Ausgleichungen — die meines Verfahrens und die große Netzausgleichung — unter ganz verschiedenen Bedingungen stattfinden. Wenn ich nun trotzdem den genannten Ausdruck gebraucht habe, so war dies nur im engeren Sinne zu verstehen, weil sich nämlich die Bestimmung von η und ξ auf ein Minimum der Summe der Fehlerquadrate gründet, und sich diese Ausgleichung in einem kleineren Rahmen, ähnlich dem Einschneiden, vollzieht. Bei anderen Umformungsverfahren aus der letzten Zeit trifft dies nicht zu, weshalb sich von diesen Verfahren das meinige vorteilhaft abhebt. Auf jeden Fall lag es mir vollkommen fern, aus dem Verfahren etwas machen zu wollen, was es in Wirklichkeit nicht ist. Daß dies meine Meinung war, konnte der verständige Leser auch leicht herausfinden. Dieser Umstand wurde nun aber von anderer Seite gegen mich in einer Weise ausgenützt, die an wissenschaftlicher Strenge noch weit hinter der meinigen zurückblieb. Ich verzichte daher auf Einzelheiten einzugehen und empfehle dem Leser meine früheren Ausführungen in [2] — die durch nichts widerlegt wurden — sich nur genau anzusehen.

Eine geradlinige Abbildung gewährt auch die Ausgleichung, wenn eine entsprechende Bedingung eingeführt wird. Es fragt sich daher, welche Linien sich hier als Gerade abzubilden haben und von welcher Länge sie sind. In der Landmessung kommt dies nur bei Grenz- und Messungslinien vor, deren Längen wohl kaum über 1 km hinausgehen. In solchen Fällen werden die einfachen Formeln (6) in [1] S. 697 benützt. Sie lauten:

$$\left. \begin{aligned} dy &= dy_a + a \cdot wy \\ dx &= dx_a + a \cdot wx \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

- [1] K. Blaß. Maschenweise Übertragung pp. Allg. Verm.Nachr. 1933.
- [2] K. Blaß. Bemerkungen zur maschenweisen Übertragung von Dreieckspunkten. Z.f.V. 1935 S. 107—115.
- [3] G. Förster. Zusammenschluß von zwei selbständigen Triangulierungen mit einzelnen identischen Punkten. Z.f.V. 1931.
- [4] Dr. L. Krüger. Über den Anschluß eines sekundären Dreiecksnetzes an ein Hauptnetz. Z.f.V. 1896.
- [5] K. Blaß. Koordinatenumformung in Hessen unter Berücksichtigung der Erkrümmung. Allg. Verm.Nachr. 1931.
- [6] K. Blaß. Desgleichen, Fortsetzung 1932.

Ueber die Transformation zwischen zwei Gauß-Krügerschen Streifen mit Anwendung auf Deutschland.

Von Dr. Wl. K. Hristow, Sofia.

In Z.f.V. Bd. LXIII, 1934, Heft 17, habe ich die Transformation zwischen den Gauß-Krügerschen Koordinaten behandelt. Ich komme wieder darauf zurück, indem ich von einer anderen Seite aus bequemere Formeln ableite, und zwar gerade für den praktisch am wichtigsten Fall — Transformation im Gebiete, in dem zwei benachbarte Gauß-Krügersche Streifen aneinanderstoßen.

Es liege beispielsweise ein Westsystem mit zweigestrichenen Koordinaten und ein Ostsystem mit eingestrichenen Koordinaten vor. Die entsprechenden komplexen Veränderlichen, zuzüglich derer aus den Mercator-Koordinaten, bezeichne ich mit

$$\left. \begin{aligned} z &= q + il \\ z' &= x' + iy' \\ z'' &= x'' + iy'' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Weiter nehme ich auf ein und demselben Parallelkreis $q = q_0$ drei rechnerische Nullpunkte an: auf dem Grundmeridian des Westsystems — $P \cdot 2$, auf dem Grundmeridian des Ostsystems — $P \cdot 1$, und gerade dazwischen — $P \cdot 0$, oder im Zeichen

$$\left. \begin{aligned} P. 2: z_2'' &= x_2'' + iy_2''; z_2 = q_0 + il_2 \\ P. 1: z_1' &= x_1' + iy_1'; z_1 = q_0 + il_1 \\ P. 0: z_0'' &, z_0'; z_0 = q_0 + i \frac{l_1 + l_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

x_2'' , y_2'' , x_1' , y_1' brauchen nicht null zu sein, weil die Koordinaten durch additive Konstanten modifiziert sein können.

Die Aufgabe läuft darauf hinaus, die der komplexen Gleichung

$$z' = z_0' + k_1(z'' - z_0'') + k_2(z'' - z_0'')^2 + k_3(z'' - z_0'')^3 \quad (3)$$

entsprechenden Transformationsformeln aufzustellen.

Aus geometrischen Ueberlegungen habe ich für den ersten Koeffizienten sofort

$$k_1 = \cos 2c_0'' + i \sin 2c_0'' = \cos(-2c_0') + i \sin(-2c_0') \quad (4)$$

wo c die ebene Meridiankonvergenz bedeutet.

Weiter gilt für den zweiten und dritten Koeffizienten

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 z'}{dz''^2} \right)_0, \quad k_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 z'}{dz''^3} \right)_0 \quad (5)$$

Um diese letzteren zu bestimmen, verfare ich in Anlehnung an meine Arbeit in Z.f.V. Bd. LXIV, 1935, Heft 18. Ich setze

$$z' = z_1' + a_1(z - z_1) + a_2(z - z_1)^2 + a_3(z - z_1)^3 + a_4(z - z_1)^4 + a_5(z - z_1)^5 \quad (6)$$

$$z = z_2 + b_1(z'' - z_2'') + b_2(z'' - z_2'')^2 + b_3(z'' - z_2'')^3 + b_4(z'' - z_2'')^4 + b_5(z'' - z_2'')^5 \quad (7)$$

wo aus Z.f.V. Bd. LXIII, 1934, Heft 20, ist

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= N \cos \varphi \\ a_2 &= -\frac{1}{2} N \cos^2 \varphi \cdot t \\ a_3 &= -\frac{1}{6} N \cos^3 \varphi \cdot (1 - t^2 + \eta^2) \\ a_4 &= \frac{1}{24} N \cos^4 \varphi \cdot t (5 - t^2 + 9 \eta^2) \\ a_5 &= \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi \cdot (5 - 18 t^2 + t^4) \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{N \cos \varphi} \\ b_2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{N^2 \cos \varphi} t \\ b_3 &= \frac{1}{6} \frac{1}{N^3 \cos \varphi} (1 + 2 t^2 + \eta^2) \\ b_4 &= \frac{1}{24} \frac{1}{N^4 \cos \varphi} t (5 + 6 t^2 + \eta^2) \\ b_5 &= \frac{1}{120} \frac{1}{N^5 \cos \varphi} (5 + 28 t^2 + 24 t^4) \end{aligned} \right\} (9)$$

Eine ähnliche Gleichung wie (6), aus einem gleich zu ersehendem Grunde, setze ich auch für das zweigestrichene System an, und zwar für den Punkt 0

$$z_0'' - z_2'' = a_1 (z_0 - z_2) + a_2 (z_0 - z_2)^2 + a_3 (z_0 - z_2)^3 \quad (10)$$

Für die Differentialquotienten in (5) gilt

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 z'}{d z''^2} &= \frac{d^2 z'}{d z^2} \left(\frac{d z}{d z''} \right)^2 + \frac{d z'}{d z} \frac{d^2 z}{d z''^2} \\ \frac{d^3 z'}{d z''^3} &= \frac{d^3 z'}{d z^3} \left(\frac{d z}{d z''} \right)^3 + 3 \frac{d^2 z'}{d z^2} \frac{d z}{d z''} \frac{d^2 z}{d z''^2} + \frac{d z'}{d z} \frac{d^3 z}{d z''^3} \end{aligned} \right\} (11)$$

Darin ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{d z'}{d z} &= a_1 + 2 a_2 (z_0 - z_1) + 3 a_3 (z_0 - z_1)^2 + 4 a_4 (z_0 - z_1)^3 \\ \frac{d^2 z'}{d z^2} &= 2 a_2 + 6 a_3 (z_0 - z_1) + 12 a_4 (z_0 - z_1)^2 + 20 a_5 (z_0 - z_1)^3 \\ \frac{d^3 z'}{d z^3} &= 6 a_3 + 24 a_4 (z_0 - z_1) + 60 a_5 (z_0 - z_1)^2 \end{aligned} \right\} (12)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{d z}{d z''} &= b_1 + 2 b_2 (z_0'' - z_2'') + 3 b_3 (z_0'' - z_2'')^2 + 4 b_4 (z_0'' - z_2'')^3 \\ \frac{d^2 z}{d z''^2} &= 2 b_2 + 6 b_3 (z_0'' - z_2'') + 12 b_4 (z_0'' - z_2'')^2 + 20 b_5 (z_0'' - z_2'')^3 \\ \frac{d^3 z}{d z''^3} &= 6 b_3 + 24 b_4 (z_0'' - z_2'') + 60 b_5 (z_0'' - z_2'')^2 \end{aligned} \right\} (13)$$

Wenn ich zur Abkürzung setze

$$l_1 - l_2 = 2p \quad (14)$$

wo wie gewöhnlich $2p = 3^0$ ist, so gibt die letzte Spalte in (2)

$$\left. \begin{aligned} z_0 - z_1 &= -p i \\ z_0 - z_2 &= +p i \end{aligned} \right\} (15)$$

Damit wird (12)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz'}{dz} &= a_1 - 2 a_2 p i - 3 a_3 p^2 + 4 a_4 p^3 i \\ \frac{d^2 z'}{dz^2} &= 2 a_2 - 6 a_3 p i - 12 a_4 p^2 + 20 a_5 p^3 i \\ \frac{d^3 z'}{dz^3} &= 6 a_3 - 24 a_4 p i - 60 a_5 p^2 \end{aligned} \right\} (16)$$

und ebenso (10) $z_0'' - z_2'' = a_1 p i - a_2 p^2 - a_3 p^3 i$ (17)

Weiter (17) in (13) eingesetzt gibt

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dz''} &= b_1 + 2 a_1 b_2 p i + (-2 a_2 b_2 - 3 a_1^2 b_3) p^2 + \\ &\quad + (-2 a_3 b_2 - 6 a_1 a_2 b_3 - 4 a_1^3 b_4) p^3 i \\ \frac{d^2 z}{dz''^2} &= 2 b_2 + 6 a_1 b_3 p i + (-6 a_2 b_3 - 12 a_1^2 b_4) p^2 + \\ &\quad + (-6 a_3 b_3 - 24 a_1 a_2 b_4 - 20 a_1^3 b_5) p^3 i \\ \frac{d^3 z}{dz''^3} &= 6 b_3 + 24 a_1 b_4 p i + (-24 a_2 b_4 - 60 a_1^2 b_5) p^2 \end{aligned} \right\} (18)$$

Zunächst ersetze ich die allgemeinen Koeffizienten in (16) und (18) mittels (8) und (9) und bekomme

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz'}{dz} &= N \cos \varphi + N \cos^2 \varphi \cdot t p i + \frac{1}{2} N \cos^3 \varphi \cdot (1 - t^2 + \eta^2) p^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6} N \cos^4 \varphi \cdot t (5 - t^2) p^3 i \\ \frac{d^2 z'}{dz^2} &= -N \cos^2 \varphi \cdot t + N \cos^3 \varphi \cdot (1 - t^2 + \eta^2) p i + \\ &\quad + \frac{1}{2} N \cos^4 \varphi \cdot t (-5 + t^2 - 9 \eta^2) p^2 + \frac{1}{6} N \cos^5 \varphi \cdot (5 - 18 t^2 + t^4) p^3 i \\ \frac{d^3 z'}{dz^3} &= N \cos^3 \varphi \cdot (-1 + t^2 - \eta^2) + N \cos^4 \varphi \cdot t (-5 + t^2 - 9 \eta^2) p i + \\ &\quad + \frac{1}{2} N \cos^5 \varphi \cdot (-5 + 18 t^2 - t^4) p^2 \\ \frac{dz}{dz''} &= \frac{1}{N \cos \varphi} + \frac{1}{N} t p i + \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi}{N} (-1 - t^2 - \eta^2) p^2 + \frac{1}{6} \frac{\cos^2 \varphi}{N} t (-1 - t^2) p^3 i \\ \frac{d^2 z}{dz''^2} &= \frac{1}{N^2 \cos \varphi} t + \frac{1}{N^2} (1 + 2 t^2 + \eta^2) p i + 2 \frac{\cos \varphi}{N^2} t (-1 - t^2) p^2 + \\ &\quad + \frac{2}{3} \frac{\cos^2 \varphi}{N^2} (-1 - 3 t^2 - 2 t^4) p^3 i \\ \frac{d^3 z}{dz''^3} &= \frac{1}{N^3 \cos \varphi} (1 + 2 t^2 + \eta^2) + \frac{1}{N^3} t (5 + 6 t^2 + \eta^2) p i + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi}{N^3} (-5 - 23 t^2 - 18 t^4) p^2 \end{aligned} \right\} (19)$$

Jetzt trage ich (19) und (20) in (11) ein, führe die Multiplikationen aus, ziehe die entsprechenden Glieder zusammen, und bekomme schließlich

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 z'}{dz''^2} &= 2 \frac{\cos \varphi}{N} (1 + \eta^2) p i + 6 \frac{\cos^2 \varphi}{N} t (-1 - \eta^2) p^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{\cos^3 \varphi}{N} (-1 - 31 t^2) p^3 i \\ \frac{d^3 z'}{dz''^3} &= 2 \frac{\cos \varphi}{N^2} t (-1 - 5 \eta^2) p i + 2 \frac{\cos^2 \varphi}{N^2} (-3 + 4 t^2) p^2 \end{aligned} \right\} (21)$$

Transformation von einem Westsystem in ein Ostsystem

φ	$x_0 = x_0'$ m	y_0 m	y_0' m	$1 - k_{1,1}$	$k_{1,2}$	κ_2	ω_2'	κ_2	ω_2	x m
I 47° 0'	5207809,275	614069,260	385 980,740	+ 0,000 73327	+ 0,038 28834	1,4477 ⁻¹⁰	+ 93,17,5	4,20 ⁻²⁰	+ 88	5266000
II 47 30	5263389,432	613000,516	386 999,484	+ 0,000 74519	- 0,038 59823	1,4485	+ 93,19,1	4,20	+ 88	5291000
III 48 0	5318974,111	611923,105	388 076,895	+ 0,000 75708	+ 0,038 90517	1,4392	+ 93,20,7	4,21	+ 88	5347000
IV 48 30	5374563,306	610837,105	389 162,895	+ 0,000 76896	+ 0,039 20914	1,4349	+ 93,22,3	4,21	+ 88	5402000
V 49 0	5430157,000	609742,600	390 257,400	+ 0,000 78082	+ 0,039 51013	1,4305	+ 93,23,9	4,21	+ 88	5458000
VI 49 30	5485755,209	608639,672	391 360,328	+ 0,000 79265	+ 0,039 80811	1,4261	+ 93,25,4	4,22	+ 88	5514000
VII 50 0	5541357,897	607528,402	392 471,598	+ 0,000 80445	- 0,040 10360	1,4216	+ 93,26,9	4,22	+ 88	5569000
VIII 50 30	5596965,059	606408,875	393 584,875	+ 0,000 81621	+ 0,040 39494	1,4170	+ 93,28,4	4,22	+ 88	5625000
IX 51 0	5652576,681	605281,175	394 718,825	+ 0,000 82792	- 0,040 68744	1,4123	+ 93,29,9	4,23	+ 88	5681000
X 51 30	5708192,750	604145,386	395 854,614	+ 0,000 83959	+ 0,040 96945	1,4075	+ 93,31,4	4,23	+ 88	5736000
XI 52 0	5763813,247	603001,593	396 998,405	+ 0,000 85122	+ 0,041 25204	1,4027	+ 93,32,8	4,23	+ 87	5792000
XII 52 30	5819438,155	601849,888	398 150,112	+ 0,000 86280	+ 0,041 53148	1,3978	+ 93,34,3	4,24	+ 87	5847000
XIII 53 0	5875067,456	600690,332	399 309,648	+ 0,000 87432	+ 0,041 80776	1,3928	+ 93,35,7	4,24	+ 87	5903000
XIV 53 30	5930701,127	599528,073	400 476,927	+ 0,000 88578	+ 0,042 08085	1,3877	+ 93,37,2	4,24	+ 87	5959000
XV 54 0	5986339,148	598348,140	401 651,860	+ 0,000 89718	+ 0,042 35073	1,3825	+ 93,38,6	4,24	+ 87	6014000
XVI 54 30	6041981,494	597165,642	402 834,358	+ 0,000 90853	- 0,042 61739	1,3772	+ 93,40,0	4,25	+ 87	6070000
XVII 55 0	6097628,144	595975,669	404 024,331	+ 0,000 91882	+ 0,042 88080	1,3718 ⁻¹⁰	+ 93,41,3	4,25 ⁻²⁰	+ 87	6070000

Transformation von einem Ostsystem in ein Westsystem

φ	$x_0 = x_0'$ m	y_0 m	y_0' m	$1 - k_{1,1}$	$k_{1,2}$	κ_2	ω_2'	κ_2	ω_2	x m
I 47° 0'	5207809,275	614069,260	385 980,740	+ 0,000 73327	- 0,038 28834	1,4477 ⁻¹⁰	- 93,17,5	4,20 ⁻²⁰	+ 88	5266000
II 47 30	5263389,432	613000,516	386 999,484	+ 0,000 74519	- 0,038 59823	1,4485	- 93,19,1	4,20	+ 88	5291000
III 48 0	5318974,111	611923,105	388 076,895	+ 0,000 75708	+ 0,038 90517	1,4392	- 93,20,7	4,21	+ 88	5347000
IV 48 30	5374563,306	610837,105	389 162,895	+ 0,000 76896	- 0,039 20914	1,4349	- 93,22,3	4,21	+ 88	5402000
V 49 0	5430157,000	609742,600	390 257,400	+ 0,000 78082	+ 0,039 51013	1,4305	- 93,23,9	4,21	+ 88	5458000
VI 49 30	5485755,209	608639,672	391 360,328	+ 0,000 79265	- 0,039 80811	1,4261	- 93,25,4	4,22	+ 88	5514000
VII 50 0	5541357,897	607528,402	392 471,598	+ 0,000 80445	- 0,040 10360	1,4216	- 93,26,9	4,22	+ 88	5569000
VIII 50 30	5596965,059	606408,875	393 584,875	+ 0,000 81621	+ 0,040 39494	1,4170	- 93,28,4	4,22	+ 88	5625000
IX 51 0	5652576,681	605281,175	394 718,825	+ 0,000 82792	- 0,040 68744	1,4123	- 93,29,9	4,23	+ 88	5681000
X 51 30	5708192,750	604145,386	395 854,614	+ 0,000 83959	+ 0,040 96945	1,4075	- 93,31,4	4,23	+ 88	5736000
XI 52 0	5763813,247	603001,593	396 998,405	+ 0,000 85122	+ 0,041 25204	1,4027	- 93,32,8	4,23	+ 87	5792000
XII 52 30	5819438,155	601849,888	398 150,112	+ 0,000 86280	+ 0,041 53148	1,3978	- 93,34,3	4,24	+ 87	5847000
XIII 53 0	5875067,456	600690,332	399 309,648	+ 0,000 87432	+ 0,041 80776	1,3928	- 93,35,7	4,24	+ 87	5903000
XIV 53 30	5930701,127	599528,073	400 476,927	+ 0,000 88578	+ 0,042 08085	1,3877	- 93,37,2	4,24	+ 87	5959000
XV 54 0	5986339,148	598348,140	401 651,860	+ 0,000 89718	- 0,042 35073	1,3825	- 93,38,6	4,24	+ 87	6014000
XVI 54 30	6041981,494	597165,642	402 834,358	+ 0,000 90853	+ 0,042 61739	1,3772	- 93,40,0	4,25	+ 87	6070000
XVII 55 0	6097628,144	595975,669	404 024,331	+ 0,000 91882	+ 0,042 88080	1,3718 ⁻¹⁰	- 93,41,3	4,25 ⁻²⁰	+ 87	6070000

$$\left. \begin{aligned} \varrho \sin \vartheta &= \Delta y = y - y_0 \\ \varrho \cos \vartheta &= \Delta x = x - x_0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} x' &= x_0' + \Delta x - (1 - k_{1,1}) \Delta x - k_{1,2} \Delta y + \kappa_2 \varrho^2 \cos(2\vartheta + \omega_2) + \kappa_3 \varrho^3 \cos(3\vartheta + \omega_3) \\ y' &= y_0' + \Delta y - (1 - k_{1,1}) \Delta y + k_{1,2} \Delta x + \kappa_2 \varrho^2 \sin(2\vartheta + \omega_2) + \kappa_3 \varrho^3 \sin(3\vartheta + \omega_3) \end{aligned}$$

Die rechnerischen Nullpunkte sind in den Mittelmeridianen im Abstände von einem halben Grad gesetzt. Die letzte Spalte zeigt, welche Reihe für ein gegebenes x zu benutzen ist.

Die Leistungsfähigkeit dieser Tafeln will ich durch wenige Zahlenbeispiele belegen. Es ist ein Punkt im System (9⁰) durch die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= 5\,569\,241.722^m \\ y &= 3\,588\,014.385 \end{aligned}$$

gegeben. Es werden dessen Koordinaten im System (12⁰) gesucht. Wir haben eine Transformation von einem Westsystem in ein Ostsystem. Ich benutze sowohl die Reihe VII wie die Reihe VIII.

	VII x' ^m	VIII x' ^m
x_0'	5 541 357.897	5 596 965.059
+ Δx	+ 27 883.825	- 27 723.337
- $(1 - k_{1,1}) \Delta x$	- 22.431	+ 22.628
- $k_{1,2} \Delta y$	+ 782.571	+ 743.044
Gl. 2. 0.	+ 2.805	- 2.726
Gl. 3. 0.	- 0.006	- 0.006
x'	5 570 004.661	5 570 004.662
	y' ^m	y' ^m
y_0'	4 392 471.598	4 393 591.125
+ Δy	- 19 514.017	- 18 394.490
- $(1 - k_{1,1}) \Delta y$	+ 15.698	+ 15.014
+ $k_{1,2} \Delta x$	+ 1 118.227	- 1 119.882
Gl. 2. 0.	+ 1.218	+ 0.960
Gl. 3. 0.	+ 0.001	- 0.001
y'	4 374 092.725	4 374 092.726

Es soll auch die rückwärtige Transformation ausgeführt werden. Ich setze

$$\begin{aligned} x &= 5\,570\,004.661 \\ y &= 4\,374\,092.725 \end{aligned}$$

und habe

	VII x' ^m	VIII x' ^m
x_0'	5 541 357.897	5 596 965.059
+ Δx	+ 28 646.764	- 26 960.398
- $(1 - k_{1,1}) \Delta x$	- 23.045	+ 22.005
- $k_{1,2} \Delta y$	- 737.050	- 787.637
Gl. 2. 0.	- 2.851	+ 2.687
Gl. 3. 0.	+ 0.006	+ 0.006
x'	5 569 241.721	5 569 241.722

	y' ^m	y' ^m
y_0'	3 607 528 . 402	3 606 408 . 875
+ Δy	— 18 378 . 873	— 19 498 . 400
— $(1 - k_{1,1}) \Delta y$	+ 14 . 785	+ 15 . 915
+ $k_{1,2} \Delta x$	— 1 148 . 823	+ 1 089 . 064
Gl. 2. 0.	— 1 . 105	— 1 . 070
Gl. 3. 0.	— 0 . 001	+ 0 . 002
y'	<u>3 588 014 . 385</u>	<u>3 588 014 . 386</u>

Bem. d. Schriftleitung: Die vorstehende Arbeit ist bei der Schriftleitung bereits längere Zeit vor dem Erscheinen der in Heft 15 veröffentlichten Arbeit des Herrn Hirvonen eingegangen; sie ist deshalb durch die letztere in keiner Weise beeinflusst worden.

Planbreitenberechnung aus Koordinaten.

Von Vermessungsreferendar G. Schulz, Berlin-Steglitz.

I.

Wenn bei der Bearbeitung von Umlegungen die Urkarte II nach Berechnung von rechtwinkligen Koordinaten mit Hilfe des Koordinatografen hergestellt wird, liegt es nahe, die einmal berechneten Koordinaten auch den weiteren technischen Ermittlungen wie der Berechnung der Planbreiten zu Grunde zu legen. Die Planbreiten werden bisher halbgrafisch ermittelt. Den Anforderungen der Praxis, Parallelität der Plangrenzen und Wahrung des im Block- und Elementenheft errechneten Soll-Flächeninhaltes wird dabei überall dort Genüge getan, wo Kartierungen im Maßstab 1:1000 vorliegen und zur Erfassung der Reststücke und zusätzlicher Kahrenflächen genügend Urzahlen vorhanden sind. Ist die Arbeitskarte kleineren Maßstabes und fehlen die erforderlichen Urzahlen, so wird die dem zukünftigen Planbesitzer erwünschte Parallelität der Plangrenzen nicht immer soweit erreicht, wie es mit Hinblick auf die Bestellung des Ackers mit modernen landwirtschaftlichen Maschinen erforderlich ist. Die aus Koordinaten berechneten Planbreiten stimmen auf cm und erfüllen die erwähnten Anforderungen genau. Es wird zu untersuchen sein, wie weit die Wirtschaftlichkeit in Bezug auf die rechnerische Arbeit gegenüber dem halbgrafischen Verfahren gewahrt bleibt. Diese Untersuchung soll zum Schluß dieses Aufsatzes angestellt werden, nachdem die mathematischen Grundlagen und die formale Erfassung des Stoffes vorgelegt wurden.

II.

Die mathematische Lösung der vorliegenden Aufgabe ist bei Gauß „die Teilung der Grundstücke“ 3. Auflage in den §§ 41, 42 u. f. bereits gegeben. Da die spezielle Aufgabenstellung eine Zusammenfassung mehrerer dort gelöster Probleme verlangt, soll hier eine Ableitung gebracht werden.

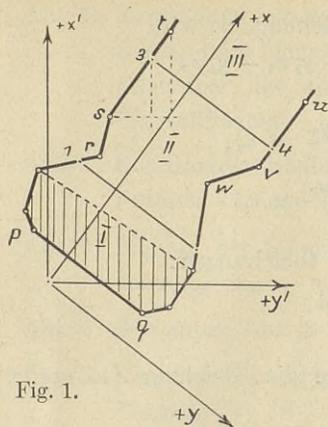


Fig. 1.

Bei Berechnung der Plangrenzpunkte 3 und 4 (s. Fig. 1) sind die Forderungen zu erfüllen:

1. Die Summe der Planflächen I und II muß der Summe beider Flächen aus dem Block- und Elementenheft entsprechen:

$$2(F_1 + F_2) = \sum y_n'(x_{n-1}' - x_{n+1}')$$

2. Die Plangrenze muß parallel der Wege-
seite pq verlaufen:

$$\frac{y_p' - y_q'}{x_p' - x_q'} = m = \frac{y_s' - y_t'}{x_s' - x_t'}$$

3. Punkt 3 muß in der Geraden st liegen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_s' & x_t' & x_3' \\ y_s' & y_t' & y_3' \end{vmatrix} = 0$$

4. Punkt 4 muß in der Geraden vu liegen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_v' & x_u' & x_4' \\ y_v' & y_u' & y_4' \end{vmatrix} = 0$$

Die Berechnung der vier Unbekannten aus diesen Gleichungen erfordert einen großen Aufwand an Zeit. Jedoch können die vier Unbekannten durch Drehung der Koordinatenachsen auf drei reduziert werden, indem man ein Koordinatensystem einführt, dessen y -Achse parallel den Plangrenzen verläuft, so daß $x_3' = x_4' = x$ wird. Braucht man die Abkürzungen

$$(1) \quad o = -\frac{y_p' - y_q'}{p q} \quad \text{und} \quad a = +\frac{x_p' - x_q'}{p q}$$

so bestehen zwischen alten und neuen Koordinaten die Beziehungen:

$$(2) \quad \begin{aligned} y &= y' o - x' a \\ x &= x' o + y' a \end{aligned}$$

und es bleiben, da $m = o$ wird, die drei Gleichungen

$$(3) \quad 2F = \sum y_n(x_{n-1} - x_{n+1})$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_s & x_t & x \\ y_s & y_t & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_v & x_u & x \\ y_v & y_u & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Diese werden im Folgenden entwickelt, wobei in der Gaußschen Flächenformel die Glieder, in denen keine Unbekannte als Faktor auftritt, mit dem

Wert $2F$ zu S zusammengefaßt werden. Aus Gleichung (3) wird

$$(6) \quad 0 = S - x(y_s - y_v) - x(y_3 - y_4) + y_3 x_s - y_4 x_v$$

Es soll sein:

$$(7) \quad \frac{y_s - y_t}{x_s - x_t} = m_1, \quad \frac{x_s y_t - x_t y_s}{x_s - x_t} = n_1,$$

$$(8) \quad \frac{y_v - y_u}{x_v - x_u} = m_2 \quad \text{und} \quad \frac{x_v y_u - x_u y_v}{x_v - x_u} = n_2$$

Dann ergeben die Determinanten (4) und (5) die Gleichungen:

$$(9) \quad y_3 = m_1 x + n_1 \quad \text{und}$$

$$(10) \quad y_4 = m_2 x + n_2$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (5) und (6) in die Gleichung (4) ergibt sich:

$$(11) \quad 0 = S - x(y_s - y_v + n_1 - n_2 - m_1 x_s + m_2 x_v) - x^2(m_1 - m_2) + x_s n_1 - x_v n_2$$

Hierin läßt sich zunächst der Koeffizient von x vereinfachen, denn es ist

$$y_s - y_v - m_1 x_s + m_2 x_v = n_1 - n_2$$

Setzt man weiter

$$(12) \quad m_1 - m_2 = C$$

$$(13) \quad n_1 - n_2 = D$$

$$(14) \quad x_s n_1 - x_v n_2 = E$$

so erhält man

$$0 = x^2 + 2 \cdot \frac{D}{C} x - \frac{E}{C} - \frac{S}{C}$$

und endlich, wenn

$$(15) \quad \left(\frac{D}{C}\right)^2 + \frac{E}{C} = N$$

gesetzt wird

$$(16) \quad x = -\frac{D}{C} - \sqrt{N + \frac{S}{C}}$$

Der positiven Wurzel entspricht eine verschränkte Figur, die hier nicht weiter betrachtet werden soll.

Mit der Berechnung von x ist die vorliegende Aufgabe im wesentlichen gelöst, denn die einzelnen Planbreiten ergeben sich unmittelbar aus der Projektion. Die Planbreite s_3 ist beispielsweise nach der Figur

$$(17) \quad \overline{s_3} = \overline{s.t} \frac{x_3 - x_s}{x_t - x_s}$$

III.

Zur rechnerischen Auswertung gebraucht man die Formeln (1), (2), (7), (8), (12) bis (17). Hierfür ist ein drei DIN-Seiten umfassendes Formular entworfen, das seines Umfangs wegen hier nicht abgedruckt werden kann. Es gliedert sich in sechs Abteilungen, die folgenden Rechenvorgang aufnehmen:

- Abt. 1: Berechnung unregelmäßiger Planteilflächen (schraffierter Teil der Figur) nach dem Elling'schen Rechenverfahren und deren Differenz gegenüber der aus dem Block- und Elementenhefte entnommenen Plansollflächen.
- Abt. 2: Koordinatentransformation
Formeln (1) und (2).
- Abt. 3: Bildung der Summen S aus den Faktoren der in Abteilung 4 gebildeten y_n ($x_{n-1} - x_{n+1}$) mittels einer handlichen Maske.
- Abt. 4: Wie unter Abt. 3 angegeben.
- Abt. 5: Koordinatenberechnung der neuen Grenzpunkte.
Formeln (7), (8), (12) bis (16).
- Abt. 6: Berechnung der einzelnen Planbreiten.
Formel (17).

IV.

Nach Bearbeitung verschiedener Blöcke von regelmäßiger und unregelmäßiger Gestalt durch verschiedene Rechner konnte festgestellt werden, daß ein Zeitverlust durch das hier beschriebene Verfahren nicht eintrat. Es ist gegenüber einem gemischten Verfahren, das heißt halbkoordinatenmäßiger und halbgrafischer Behandlung der einzelnen Pläne zeitlich sogar überlegen. Vorausgesetzt wird jedoch, daß die Koordinaten dem Rechner fehlerfrei gegeben sind. Ist er gezwungen diese selbst zu ermitteln, so müssen 50% Zeitverlust angesetzt werden. Die durchgreifende Probeberechnung wurde bei den Vergleichen mit 25% der eigentlichen Berechnungszeit veranschlagt, was eher zu hoch als zu niedrig geschätzt ist. Wie die Probeberechnung im einzelnen erfolgen soll, wird je nach Maßstab der Arbeitskarte verschieden sein. Bei großmaßstäblichen Karten empfiehlt es sich, um gleichzeitig die Güte der Kartierung zu überprüfen, abgegriffene Höhen mit den berechneten Breiten zu kombinieren. Jedoch bietet die strenge Berechnung der y -Koordinaten aus $y_{135} = m_1 x + n_1$ und $y_{246} = m_2 x + n_2$ und der darauf erfolgenden Probeberechnung, d. h. Ermittlung der Fläche jedes zweiten Planes aus den Koordinaten und Vergleich dieser Flächen mit den anfangs gegebenen einen Ueberblick über die Genauigkeit des Rechenverfahrens an sich. Und da wegen der speziellen Lage des Koordinatensystems die einzelnen Unterschiede in x die rechtwinkelige Planbreite und die einzelnen Unterschiede in y die Planlänge ergeben, so hat man ohne große Mehrarbeit weitere Daten zur örtlichen Ueberprüfung.

An Genauigkeit ist dieses Verfahren allen anderen überlegen, wenn auch für die Praxis das halbgrafische Verfahren, besonders an großmaßstäblichen Arbeitskarten ausreicht. Bei Arbeitskarten im Maßstab zu 1:2000 wurden jedoch zwischen den einzelnen Plangrenzen, die nach der Breiten-

oder Höhenmethode bzw. nur grafisch ermittelt waren, folgende Abweichungen in der Parallelität gegenüber der strengen Ermittlung festgestellt: (in cm)

Block Nr. 1	55	54	6	15	14	3	4		
2	46	10	2	47	9	16	40	8	3
3	57	6	24	34	5				
4	11	42	16	8	8				
5	8	1	1						
6	16	11	8						
7	17	13	15						

Es ergaben sich also teilweise Differenzen, die auch praktisch gesehen zu groß waren.

Mitteilungen der Geschäftsstelle.

Bereinsnachrichten.

Gaugruppe Bayern. (Schluß von Seite 512). — Hierauf ergriff der Vorsitzende der Gaugruppe Bayern Pg. Schneider das Wort. Er betonte, daß es Pflicht jedes Technikers sei, zur Bewältigung der vom Führer gestellten großen Aufgaben seine Person, seine Erfahrung und sein Wissen in den Dienst der Weiterentwicklung zu stellen und mit der Fortentwicklung seines engeren Fachgebiets und der Randgebiete verbunden zu bleiben. DVW. und NSVD. böten hierzu Gelegenheit und müßten deshalb auch von allen Berufskameraden ohne Rücksicht auf geringfügige Opfer unterstützt werden. Dann schloß der Vorsitzende den offiziellen Teil der Tagung mit einem „Sieg Heil“ auf unseren Führer. — Nachmittags wurde das Reichsparteitagsgelände unter der fachkundigen Führung des Direktors des Städt. Vermessungsamts Nürnberg Pg. Schmidt besichtigt. Besonderes Interesse wurde von den Teilnehmern der Einmessung und Einwägung der im Bau befindlichen 65 m hohen Kongreßhalle entgegengebracht. Bemerkenswert ist, daß bei dem im früheren Dugendteich auf Pfahlrost errichteten Gebäude nur eine gleichmäßige Senkung von 14 mm wahrgenommen wurde. Ein kameradschaftliches Beisammensein im Kaffee Dugendteich und im Künstlerhaus beschloß die Tagung.

Gaugruppe Sachsen. Einladung zur Mitgliederversammlung, Sonntag, 18. September 1938, 10.00 Uhr in Dresden, Hygienemuseum. Tagesordnung: 1. Begrüßung, 2. Vortrag Prof. Dr.-Ing. K. H u g e r s h o f f, Dresden, Meidenburgerstr. 20, über „Alte und neue Methoden der Kolonialvermessung“ (mit Lichtbildern), 3. Tätigkeitsbericht des Vorsitzers. 4. Verschiedenes. (Zu Pkt. 3 und 4 haben nur Mitglieder Zutritt.)
R ö s l e r.

Personalnachrichten.

Preußen. Wasserbauverwaltung: **Ernannt:** Reg.Ldm. Schirmer, Hannover, z. Reg. u. Verm.Kat b. d. Rheinstrombauverwaltg. Koblenz; Reg.Ldm. W i c h m a n n, Potsdam, z. Reg. u. Verm.Kat b. d. Wasserstraßendirektion Kurmark, Berlin.

Inhalt:

Wissenschaftliche Mitteilungen: Das österreichische Kartenwesen, von Milius. — Zur Koordinatenumformung, von Blaß. — Ueber die Transformation zwischen zwei Gauß-Krügerschen Streifen mit Anwendung auf Deutschland, von Hristow. — Planbreitenberechnung aus Koordinaten, von Schulz. — **Mitteilungen der Geschäftsstelle.**