ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

herausgegeben vom

Deutschen Verein für Vermessungswesen (D.V.W.) E.V.

Schriftleiter: Professor Dr. Dr.-Ing. E. h. O. Eggert, Berlin-Dahlem, Ehrenbergstraße 21

Heft 19.

1938 1. Oktober Band LXVII

Zur Geschichte des Satzes von Legendre.

Von F. Hauer in Wien.

I. Einleitung.

Vor der Entdeckung und Anwendung des Theorems von Legendre erfolgte die Berechnung der Triangulierungen durch Reduktion der sphärischen Dreiecke auf ihre zugehörigen Sehnendreiecke und umgekehrt. Diese Methode, deren Ausführung immer eine beschwerliche Arbeit war, fand noch bei den französischen Gradmessungsarbeiten durch Delambre[1]) zu Ende des 18. Jahrhunderts und bei den österreichischen Vermessungen durch Fallon[2]) im ersten Viertel des 19. Jahrhunderts Anwendung; sie war keinesfalls dort zu umgehen, wo noch die Messung schiefer Winkel mit dem Bordaschen Kreise üblich war.

Das Theorem von Legendre, dessen geniale Einfachheit die Berechnung der Triangulationen so erleichterte, daß es die Ausführung der großen Vermessungsarbeiten des 19. Jahrhunderts sicher wesentlich begünstigt hat, war anfänglich heftigen Zweifeln an seiner Gültigkeit, sowie durch lange Zeit großen Bedenken über den Grad seiner Annäherung ausgesetzt. Dort jedoch, wo man seine Bedeutung erkannte, wurde die Auflösung der sphärischen Dreiecke, deren Abmessungen im Verhältnis zum Radius klein sind, nur mehr mit seiner Hilfe ausgeführt.

In den 150 Jahren, die nun seit der Entdeckung des Satzes von Legendre vergangen sind, haben sich immer wieder die Mathematiker und die Geodäten mit der Herleitung und dem Beweise dieses berühmten Theorems beschäftigt. Neben den Bestrebungen zur Erweiterung des Theorems gingen Untersuchungen über die Genauigkeit seiner Annäherung. Den Zweifeln an seiner Richtigkeit und den Versuchen, die Berechnung kleiner sphärischer Dreiecke nach anderen Methoden auszuführen, stehen Arbeiten gegenüber, die die Möglichkeit seiner Anwendung zur Auflösung kleiner geodätischer Dreiecke am Ellipsoid oder überhaupt auf Flächen eines allgemeinen ana-

[1]) Man vgl. hiezu: Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, par J. B. J. Delambre, Paris an VII, p. 36—42, Réduction à l'horizon.

[2]) Man vgl. hiezu den Aufsatz von A. Nagel: Über die Reduktion eines sphärischen Dreieckes von geringer Krümmung auf sein Sehnendreieck in der Zeitschrift für Mathematik und Physik von O. Schlömilch und B. Witzschel, Leipzig 1856, 1. Bd., S. 257—275.

lytischen Bildungsgesetzes untersuchen. Mehrfach wurden die Arbeiten verschiedener Autoren zur selben Zeit in gleicher Art ausgeführt oder manchmal auch Jahrzehnte nach der Veröffentlichung einer Ableitung dieselbe in Unkenntnis der vorangehenden wieder als neu veröffentlicht.

Diese Umstände boten den Anlaß, den Versuch zu unternehmen, die Literatur über den Satz von Legendre einer Durchsicht zu unterziehen und sie nach sachlichen und nach zeitlichen Gesichtspunkten zu ordnen.

Um die Gegenüberstellung der verschiedenen Arbeiten übersichtlicher zu gestalten, wurden in den nachfolgenden Ausführungen, falls nicht ausdrücklich anderes vermerkt ist, stets folgende Bezeichnungen angewendet: es bedeuten ε den sphärischen Exzeß, F die Fläche des sphärischen, F^* die Fläche des ebenen Dreiecks; A, B, C die dem sphärischen, A^*, B^*, C^* die dem ebenen Dreieck zugehörigen Winkel; a, b, c die Längen der den Winkeln A, B, C bzw. A^*, B^*, C^* gegenüberliegenden Dreiecksseiten; r den Radius der Kugel, soweit er nicht gleich der Einheit gesetzt wurde.

Die Methoden, die die Herleitung des einfachen Legendreschen Satzes zum Ziele haben, konnten, wegen des im allgemeinen kurzen und einfachen Beweisganges, ausführlicher besprochen werden als diejenigen, die auf die Entwicklung der höheren Glieder ausgehen. Bei den letzteren mußte wegen des großen Umfanges der Entwicklungen, die Betrachtung meist nur auf die Angabe der Art ihrer Durchführung beschränkt bleiben.

II. Legendres Abhandlungen über sein Theorem.

Erstmalig hat Legendre seinen Satz ohne Beweis in der „Histoire de l'Académie royale de sciences, Paris 1787“, in „Mémoire sur les Opérations trigonometriques, dont les résultats dépendent de la figure de la Terre, par A. M. Le Gendre[3]), p. 352—383“ unter „Théorème concernant les triangles sphériques dout les côtés sont très-petits par rapport au ragon de la sphère“ veröffentlicht, in der Fassung:

„Si la somme des trois angles d'un triangle sphérique infinement petit, est supposée $180^d + \omega$, et que de chaque angle ou retranche $\frac{1}{3}\omega$, afin que la somme des angles restants soit précisément de 180^d, le sinus de ces angles seront entr'eux comme les côtés opposés; de sorte que le triangle, avec les angles ainsi diminués, pourra être considéré et résolu comme s'il étoit parfaitement rectiligne.“

Den ersten Beweis seines Satzes hat Legendre „le 9 nivôse au VII“, d. i. am 29. Dezember 1798[4]) in der Einleitung zu den „Méthodes analyti-

[3]) Zur Schreibweise von Legendres Namen sei hier folgendes bemerkt. Legendre schrieb seinen Namen vor der französischen Revolution getrennt: Le Gendre, nachher jedoch zusammengefügt in der bekannten Weise: Legendre. Im deutschen Schrifttum hingegen wurde noch längere Zeit die ältere Schreibart beibehalten; man findet sie z. B. noch bei F. Zach in einer Besprechung und Anzeige von L. Puissants Traité de géodésie in der „Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“, Gotha 1807, 16. Bd., S. 452.

[4]) Daß es sich tatsächlich um den 29. Dezember 1798 handelt und nicht, wie J. Frischauf in seinem Aufsatze „Legendres Theorem“ in der Öst. Zeitschrift für Vermessungsw., Wien 1916, 14. Bd., S. 65 angegeben hat, um den 30. Dezember 1798, kann z. B. aus den „Hilfstafeln für Chronologie“ von R. Schram, erschienen in den Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften, Wien, Mathematisch-naturwissensch. Klasse, 45. Bd. S. 289—358, festgestellt werden.

ques pour la détermination d'un arc du méridien, par J. B. J. Delambre, Paris au VII, p. 12—14" in der Abhandlung „Méthode pour déterminer la longueur exacte du quart du méridien d'après les observations faites pour la mesure de l'arc compris entre Dunkerque et Barcelone, par A. M. Legendre" unter „Note III, Résolution des triangles sphériques dont des côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère" gegeben.

Legendre ging hiezu vom Sinussatze des sphärischen Dreiecks

$$\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$$

aus und entwickelte ihn unter der Voraussetzung kleiner Dreieckseiten 1. Ordnung für die Kugel vom Radius Eins. Es ist dann mit Vernachlässigung kleiner Größen 4. Ordnung:

$$\sin A : \sin B = a\left(1 - \frac{1}{6}a^2\right) : b\left(1 - \frac{1}{6}b^2\right).$$

Der Ansatz

$$a : b = \sin(A - x) : \sin(B - x)$$

gibt

$$\tan x = \frac{a \sin B - b \sin A}{a \cos B - b \cos A},$$

woraus man nach Einführung des entwickelten Sinussatzes

$$\tan x = \frac{\left(1 - \frac{1}{6}b^2\right)\sin A \sin B - \left(1 - \frac{1}{6}a^2\right)\sin B \sin A}{\left(1 - \frac{1}{6}b^2\right)\sin A \cos B - \left(1 - \frac{1}{6}a^2\right)\sin B \cos A}$$

erhält und hieraus mit gleicher Genauigkeit

$$x = \frac{1}{6}(a^2 - b^2)\frac{\sin A \sin B}{\sin(A - B)} = \frac{1}{3}F^*,$$

somit auch

$$x = \frac{1}{3}\omega,$$

unter ω den Exzeß des sphärischen Dreiecks verstanden. Es ist also

$$a : b = \sin\left(A - \frac{1}{3}\omega\right) : \sin\left(B - \frac{1}{3}\omega\right).$$

Da sich die Größe x, unter den Voraussetzungen, daß die Seiten des sphärischen Dreiecks klein von 1. Ordnung sind und daß Größen 4. Ordnung vernachlässigt werden dürfen, mit $\frac{1}{3}\omega$ ergab, war hierdurch die Möglichkeit gegeben, kleine Dreiecke auf der Kugel in ebene Dreiecke mit denselben Seiten zu verwandeln.

Legendre faßte seine Ableitung in die Worte zusammen: „Si la somme des trois angles d'un triangle sphérique, dont les côtés sont très-petits, est supposée $180^0 + \omega$, et que de chaque angle on retranche $\frac{1}{3}\omega$, ce qui réduira la somme des angles restants à 180^0 juste, je dis que le sinus des angles ainsi diminués seront proportionnels aux côtés opposés, de sorte que le triangle pourra être résolu comme s'il étoit parfaitement rectiligne" und fügte noch hinzu: „C'est la proposition que j'avais donnée sans démonstration dans les Mémoires de l'Académie, année 1787, pag. 338[5]).“

In einer weiteren Arbeit in den „Mémoires de la classe de sciences mathématiques et physiques de l'Institut National de France, Paris 1806, Tome septième, I^re^ partie“ hat Legendre in dem Aufsatze „Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroide, par A. M. Legendre, lu le 3 mars 1806, p. 130—161“ seinen Aufsatz auf kleine sphärische Dreiecke angewendet.

Die Ansicht, daß es sich bei dieser Arbeit um eine Erweiterung des Theorems auf Glieder 4. Ordnung handle und daß demnach die Herleitung dieser Glieder fehlerhaft sei, wie dies J. Frischauf[6]) und, mit Bezug auf diesen E. Hammer[7]) angeben, ist völlig unrichtig, wie sich auch aus dem Nachstehenden ergeben wird.

Legendre entwickelt zunächst Formeln für Dreiecke, die aus zwei Meridianen und einer geodätischen Linie gebildet werden, die zwei ihrer Punkte verbindet, um dann im „§ IV. Du triangle dont les côtés sont fort petits par rapport aux dimensions du sphéroide“ die Anwendung seines Satzes auf kleine sphäroidische Dreiecke zu untersuchen, wie aus Punkt (19): „Considérons enfin le triangle sphéroidique MBN, dont les côtés sont très-petits par rapport aux dimensions du sphéroide. Jl s'agit d'examiner si les regles à suivre pour la résolution de ces sortes de triangles sont sensiblement les mêmes que celles qui s'appliquent aux triangles sphériques dont les côtés sont très-petits, ou si elles en différent de manière à exiger une modification particulière“ und aus Punkt (21): „Considérons un triangle rectiligne mbn dont les côtés seroient égaux à ceux du triangle sphéroidique MBN. Dans celui-ci appelons A l'angle MBN, et supposerons que dans le triangle rectiligne mbn l'angle correspondent $mbn = A - z$, z étant une inconnue qu'il faut déterminer. On sait que z seroit égale au tiers de l'aire du triangle[8]), s'il étoit sphérique; mais il faut voir quel changement apportera à ce résultat en différence du sphéroide à la sphère“, seiner Abhandlung hervorgeht.

Bezeichnen a, b, c die den Ecken B, N, M bzw. b, n, m gegenüberliegenden Seiten, so ist bekanntlich im ebenen Dreieck

$$\cos(A - z) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

und, da mit Vernachlässigung der 3. Potenzen in z

$$\cos(A - z) = \cos A + z \sin A - \frac{1}{2} z^2 \cos A,$$

so ist auch

$$z \sin A - \frac{1}{2} z^2 \cos A = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos A - a^2}{2bc}.$$

[5]) Sollte richtig heißen: pag. 358; die Angabe: pag. 338 ist mit einem Druckfehler behaftet.

[6]) Österr. Zeitschrift für Vermessungsw., Wien 1916, 14. Bd., S. 65—71, 86—90, J. Frischauf, Legendres Theorem.

[7]) Allgemeine Vermessungsnachrichten, Liebenwerda 1917, 29. Jgg., S. 6—15, E. Hammer, Legendrescher Satz und Soldnersche Additamentenmethode.

[8]) Natürlich bei Vernachlässigung kleiner Glieder 4. Ordnung, wie Legendre aus seiner Herleitung des Theorems aus dem Sinussatz vollkommen klar gewesen sein muß.

Andererseits folgt, unter N das Azimut der Seite $NM = a$ verstanden, ein Ausdruck für a^2 aus der Quadratsumme zweier Potenzreihen für $a \cos N$ und $a \sin N$, die Legendre bei der Entwicklung der Formeln für solche Dreiecke herleitet, die aus zwei Meridianen und einer geodätischen Linie, die zwei ihrer Punkte verbindet, gebildet werden. Dieser Ausdruck lautet

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A - \frac{1}{3} b^2 c^2 \sin^2 A\,;$$

die Einführung desselben in die vorige Gleichung ergibt

$$z \sin A \left(-\frac{1}{2} z^2 \cos A\right) = \frac{1}{6} b\,c \sin^2 A\,,$$

woraus schließlich

$$z = \frac{1}{6} b\,c \sin A \left(+ \frac{1}{72} b^2 c^2 \sin A \cos A\right)$$

folgt.

Der Ausdruck für z ist somit von 2. Ordnung. Dividiert man den Ausdruck für a^2 durch $2\,b\,c$, so erhält man

$$\frac{a^2}{2\,b\,c} = \frac{b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A}{2\,b\,c} - \frac{1}{6} b\,c \sin^2 A\,,$$

eine Entwicklung, die nur noch Glieder 2. Ordnung beachtet, wogegen, da nun z als klein von 2. Ordnung erkannt ist, festgestellt werden kann, daß die Entwicklung für $\cos\,(A - z)$ bis einschließlich kleine Glieder 4. Ordnung geführt wurde. Es muß somit die Reihe für z mit dem Gliede 2. Ordnung abgebrochen werden. Hätte Legendre die Glieder 4. Ordnung mitnehmen wollen, so hätte er auch im Ausdruck $a^2/2\,b\,c$ bis zur einschließlich 4. Ordnung entwickeln müssen. Dies war jedoch nicht in seiner Absicht gelegen, wie aus seinen weiteren Ausführungen zu erkennen ist, denn er bemerkt zur Formel

$$z = \frac{1}{6} b\,c \sin A + \frac{1}{72} b^2 c^2 \sin A \cos A\,,$$

„mais le second terme, qui est du quatrième ordre, doit être supprimé, parce qu'il supposeroit dans la valeur de a^2, la conservation des termes du sixième ordre, tandis qu'on s'est borné an quatrième on a donc simplement

$$z = \frac{1}{6} b\,c \sin A\,,$$

ou z égal au tiers de l'aire du triangle, résultat qui est absolutement le même que si le triangle étoit sphérique, et qui doit être exact aux quantités près du troisième ordre.“

Auch der Schluß der Abhandlung von Legendre zeigt, daß nur die Auflösung kleiner sphäroidischer Dreiecke beabsichtigt war, denn er führt zur Bemerkung: „La résolution des triangls sphéroidiques dont les côtés sont très-petits par rapport aux dimensions du sphéroide, se ramène donc immédiatement à celle des triangles rectilignes, non seulement lorsque le sphéroide est elliptique et de révolution, mais lorsqu'il est irrégulier d'une manière quelconque, avec la seule condition d'être peu différent d'une sphère.“

In seinen „Éléments de géometrie[9]), p. 424—428“, hat Legendre unter dem Titel „Résolution des triangles sphériques, dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère“ einen vom Kosinussatz ausgehenden Beweis veröffentlicht. Legendre entwickelt hiezu den Kosinussatz des sphärischen Dreiecks

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$$

mit Vernachlässigung kleiner Größen 4. Ordnung und erhält

$$\cos A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)},$$

woraus sich nach Multiplikation von Zähler und Nenner mit dem Faktor

$$1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}$$

der Ausdruck

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2}$$

ergibt. Mit Rücksicht auf

$$\cos A^* = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

und

$$4b^2c^2\sin^2 A^* = -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2,$$

folgt hieraus

$$\cos A = \cos A^* - \frac{bc}{6r^2}\sin^2 A^*.$$

Ist nun

$$A = A^* + x,$$

so ist mit Vernachlässigung kleiner Glieder x^2

$$\cos A = \cos A^* - x\sin A^*.$$

Der Vergleich der beiden Ausdrücke für cos A liefert

$$x = \frac{bc}{6r^2}\sin A^*.$$

Die Einführung der Formeln

$$F^* = \frac{1}{2}\,bc\sin A^*$$

und weiter

$$\frac{F^*}{r^2} = \varepsilon$$

in den Ausdruck für x gibt

$$x = \frac{\varepsilon}{3}$$

mit Vernachlässigung kleiner Glieder 4. Ordnung.

---

[9]) Eléments de géometrie, avec des notes, par A. M. Legendre, Paris 1823. Eine deutsche Übersetzung hievon hat A. L. Crelle gegeben unter dem Titel: Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie von A. M. Legende, übersetzt und mit Anmerkungen von A. L. Crelle, Berlin 1833.

Sein Resultat formt Legendre nun zum dritten Mal — in der Weise, die heute noch zur Angabe seines Satzes gebräuchlich ist — mit den Worten: „Les triangles sphériques très-peu courbe dont les angles sont A, B, C et les côtés opposés a, b, c, répond toujours à un triangle rectiligne qui a les côtés de même longueur a, b, c, et dont les angles opposés sont $A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C - \frac{1}{3}\varepsilon$, ε étant l'excès de la somme des angles du triangle sphérique propose sur deux angles droits."

III. Herleitung des Satzes von Legendre aus dem Kosinussatz.

Der Beweis des Theorems von Legendre aus dem Kosinussatz wurde zuerst von Lagrange[10]) durchgeführt und ist durch das ganze 19. Jahrhundert immer wieder ausgeführt worden. Er ist, wie sich E. Hammer[11]) in bezug auf die noch zu besprechende Arbeit von Proß ausdrückt, in Deutschland fast klassisch geworden und durch Jahrzehnte allein üblich gewesen.

Lagrange entwickelte hiezu den Kosinussatz für das sphärische Dreieck unter der Voraussetzung, daß die Verhältnisse $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ klein von 1. Ordnung sind, mit Vernachlässigung kleiner Größen 4. Ordnung in nahezu gleicher Weise wie dies nach ihm Legendre in seinen „Éléments de géometrie" ausgeführt hat und wie im II. Abschnitt besprochen wurde, so daß sich ein näheres Eingehen auf diese Arbeit erübrigt. Seine Ausführungen schließen mit dem Hinweis: „Ce beau théorème est dû à Legendre, qui l'a donné d'abord sans démonstration, dans les Mémoires de l'Académie des sciences pour l'année 1787, et qui vient de la démontrer d'une manière un peu differente de la précédente, dans un Mémoire sur la méthode de déterminer la longueur du quart du méridien."

In seinem „Traité de Géodésie" hat L. Puissant[12]) nach der Einleitung: „La résolution des triangles sphériques très-peu courbes se ramène immédiatement à celle des triangles rectilignes, au moyen d'un théorème remarquable dû à Legendre, et qui est très-utile dans les opérations géodésiques" ebenfalls die Herleitung des Theorems aus dem Kosinussatz in fast derselben Weise wie Legrange gebracht, ohne aber anzugeben, ob die Ableitung von ihm selbst stammt.

Man findet hierzu bei Helmert[13]) die Bemerkung: „Den Kosinussatz wandte (nach Puissant, Traité de Géodésie) Lagrange an in dem Mémoire sur la trigonometrie sphérique (Journal de l'École Polytechnique, Nr. 6)." In der hier angeführten Ausgabe von Puissants „Traité de Géodésie" konnte der Verfasser einen derartigen Hinweis jedoch nicht auffinden.

---

[10]) Journal de l' École Polytechnique, à Paris, thermidor an VII (d. i. im Sommer 1799), sixième cahier, p. 270—296, J. L. Lagrange, Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques, avec une analyse complète de ces triangles.

[11]) E. Hammer, Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Stuttgart 1923. 5. Aufl. S. 514 und 664.

[12]) L. Puissant, Traité de Géodésie, à Paris an XIV ≟ 1805, Livre II, Chap. III, p. 41—43, Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.

[13]) F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie, Leipzig, 1880, I. Teil, S. 94.

Die Anwendung seines Theorems auf ein kleines sphäroidisches Dreieck durch Legendre, die im II. Abschnitt besprochen wurde, ist eigentlich auch eine Herleitung des einfachen Satzes aus dem Kosinussatz, für eine Kugel, deren Krümmung gleich ist der mittleren Krümmung des sphäroidischen Dreiecks. Denn entwickelt man den Kosinussatz des sphärischen Dreiecks mit Vernachlässigung kleiner Größen 4. Ordnung für die Kugel vom Radius Eins, so erhält man

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2)}{12},$$

woraus man unter Beachtung von

$$16F^{*2} = -a^4 - b^4 - c^4 + 2\,(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2)$$

auf den von Legendre aus den Potenzreihen für $a \cos N$ und $a \sin N$ hergeleiteten Ausdruck

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A - \frac{1}{3}\,b^2 c^2 \sin^2 A$$

kommt.

Die erste Erweiterung des Legendreschen Satzes hat Buzengeiger[14]) ausgeführt. Hiezu schrieb er den Kosinussatz für das sphärische Dreieck in der Form

$$\cos A = \frac{2 \cos a - \cos(b - c) - \cos(b + c)}{\cos(b - c) - \cos(b + c)}$$

und entwickelte ihn nach Potenzen der Seiten mit Vernachlässigung kleiner Größen 6. Ordnung. Das Resultat dieser wohl elementaren, jedoch langwierigen Entwicklung wird durch die Ausdrücke

$$A = A^* + \frac{1}{3}F^* + \frac{1}{360}F^*(7\,b^2 + 7\,c^2 + a^2)$$

$$B = B^* + \frac{1}{3}F^* + \frac{1}{360}F^*(7\,c^2 + 7\,a^2 + b^2)$$

$$C = C^* + \frac{1}{3}F^* + \frac{1}{360}F^*(7\,a^2 + 7\,b^2 + c^2)$$

gegeben, aus denen man unter Bedachtnahme auf die Formeln

$$A + B + C = \Pi + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad A^* + B^* + C^* = \Pi$$

die bekannten Beziehungen

$$F = F^* + \frac{1}{24}F^*(a^2 + b^2 + c^2) \qquad \text{bzw.} \qquad F^* = F - \frac{1}{24}F(a^2 + b^2 + c^2)$$

bekommt, wenn noch beachtet wird, daß für die Kugel vom Radius Eins der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks F gleich seinem Exzeß ε ist.

Die Einführung der zweiten dieser Beziehungen, die man übrigens auch durch Entwicklung der Formel von L'Huilier

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}$$

nach Potenzen der Seiten a, b, c und Vergleich dieser Formel mit derjenigen von Heron

[14]) Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften von B. von Lindenau und J. G. F. Bohnenberger, Tübingen 1818, 6. Bd., S. 264—270, Buzengeiger, Vergleichung zweier kleiner Dreiecke von gleichen Seiten, wovon das eine sphärisch, das andere eben ist.

$$F^* = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

erhält, in die obige Formelgruppe, führt zu den bekannten Ausdrücken

$$A^* = A - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{180}(b^2 + c^2 - 2a^2),$$

$$B^* = B - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{180}(c^2 + a^2 - 2b^2),$$

$$C^* = C - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{180}(a^2 + b^2 - 2c^2),$$

die die Reduktion der sphärischen auf die ihnen entsprechenden ebenen Dreieckswinkel mit Beachtung kleiner Glieder 4. Ordnung angeben.

Diese Formelgruppe läßt sich noch weiter transformieren, wenn man in die Glieder 4. Ordnung die bekannten Flächenformeln für das ebene Dreieck

$$2F^* = \frac{b^2 - a^2}{\cot A^* - \cot B^*} = \frac{c^2 - b^2}{\cot B^* - \cot C^*} = \frac{a^2 - c^2}{\cot C^* - \cot A^*}$$

einführt. Die erste der Formeln der obigen Gruppe z. B. erhält dann die Gestalt

$$A^* = A - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon F^*}{90}(\cot B^* + \cot C^* - 2\cot A^*)$$

oder auch mit gleicher Genauigkeit

$$A^* = A - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{90}(\cot B + \cot C - 2\cot A).$$

Analoge Ausdrücke folgen für B^* und für C^*.

Die Glieder 4. Ordnung führen auch die Bezeichnung „Buzengeigersche Korrektionen".

Buzengeiger fügte seiner Herleitung folgende Bemerkungen bei: „Läßt man in dieser Formel auch das Glied ε^2 weg, so erhält man $A^* = A - \frac{\varepsilon}{3}$, welches der berühmte Satz von Legendre ist, welcher hier zum erstenmal so bewiesen ist, daß man seine wahre Beschaffenheit erkennen kann. Der Beweis, den Hr. Puissant in seinem Traité de Géodésie davon gegeben, läßt dies nicht zu, weil er das Glied ε^2 vernachlässigt hat."

Der Beweis aus dem Kosinussatz, den Legendre in seinen „Éléments de géometrie" ausgeführt hat und der chronologisch als nächster folgt, gleicht ebenso wie der oben angeführte Beweis von Puissant in allen wesentlichen Teilen der Ableitung, die Lagrange gegeben hat, so daß es wohl möglich ist, daß diese Beweise auf die Untersuchung von Lagrange zurückzuführen sind.

Anschließend an die Abhandlung von Buzengeiger führte J. A. Grunert[15]) eine ganz allgemeine, vom Kosinussatz ausgehende Untersuchung durch, deren Zweck in der Aufstellung rekurrierender Formeln für eine beliebig weitgehende Entwicklung liegt. Hiefür waren nach seiner Meinung zwei besondere Gründe vorhanden: der Aufsatz von Buzengeiger „scheint nicht so bekannt geworden zu sein, wie er es verdient" und die von ihm angewandte

[15]) J. A. Grunert, Archiv der Mathematik und Physik, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Lehranstalten, Greifswald 1847, 9. Teil, S. 8—45, über sphärische Dreiecke, deren Seiten im Verhältnis zu dem Halbmesser der Kugel, auf welcher sie liegen, sehr klein sind.

Methode läßt gar nicht erkennen „wie man sich zu verhalten haben würde, wenn man die Entwicklung noch weiter treiben wollte.“

Grunert ging wieder vom Kosinussatz für das sphärische Dreieck in der Form

$$\cos A = \frac{2 \cos a x - \cos (b - c) x - \cos (b + c) x}{\cos (b - c) x - \cos (b + c) x}$$

aus, wobei $x = \frac{1}{r}$, die Krümmung bedeutet und entwickelte $\cos A$ an der Stelle der Krümmung Null in eine nach Potenzen der Krümmung fortschreitende Reihe. Mit Vernachlässigung von Gliedern 8. Ordnung folgt dann für $\cos A$ der Ausdruck:

$$\cos A = \cos A^* - \left\{\frac{1}{6}\, b c \sin^2 A^*\right\} x^2 - \left\{\frac{1}{180}\, b c\,(3 b^2 + 3 c^2 - a^2) \sin^2 A^*\right\} x^4 -$$
$$- \left\{\frac{1}{5040}\, b c \left[\frac{17}{2} b^4 + \frac{29}{3} b^2 c^2 + \frac{17}{2} c^4 - \frac{11}{3} (b^2 + c^2)\, a^2 + \frac{1}{2} a^4 \sin^2 A^*\right]\right\} x^6$$

woraus schließlich, nach Einführung des Exzesses ε des sphärischen Dreiecks ABC, die Differenz $A - A^*$ in der Form

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{180 r^2} (2 a^2 - b^2 - c^2) - \frac{\varepsilon}{90720\, r^4} (38 a^4 - 19 b^4 - 19 c^4 - a^2 b^2 + 2 b^2 c^2 - c^2 a^2)$$

bzw. nach Elimination der Seiten des sphärischen Dreiecks durch dessen Winkel, mit

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{90} (2 \cot A - \cot B - \cot C) + \frac{\varepsilon^3}{378} \Big\{ 2 \cot^2 A - \cot^2 B - \cot^2 C -$$
$$- \frac{1}{15} [\cot A\, (\cot B + \cot C) - 2 \cot B \cot C] \Big\}$$

resultiert.

Der Beweis des einfachen Satzes von Legendre aus dem Kosinussatz, wie ihn Lagrange durchgeführt hat, und wie er dann noch bei Puissant und bei Legendre vorkommt, findet sich wieder in der am Eingang dieses Abschnittes schon erwähnten Arbeit von Proß im „Anhang zu einer Abhandlung über das vollständige Viereck, in der Einladungsschrift der K. Polyt. Schule in Stuttgart zum Geburtsfest des Königs Wilhelm 1850“, wie dies E. Hammer [16]) angegeben hat.

Die von Proß gegebene Entwicklung stimmt mit derjenigen nach Lagrange in allen wesentlichen Punkten überein, sie findet sich in derselben Form wieder bei Hammer [17]) und bei Jordan [18]).

Die nächste Entwicklung des erweiterten Legendreschen Theorems aus dem Kosinussatz mit Berücksichtigung kleiner Größen 6. Ordnung hat P. A. Hansen [19]) gegeben. Er geht hiezu von den Ansätzen

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c$$

---

[16]) E. Hammer, Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Stuttgart 1923, 5. Aufl., S. 664—665.

[17]) ebenda, S. 511—515, Berechnung der geodätischen Dreiecke nach dem Satz von Legendre.

[18]) W. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart 1916, 6. Aufl., III. Bd., S. 246—250, Der Legendresche Satz; ebenso 1923, 7. Aufl., III. Bd., S. 242—246; 1896, 4. Aufl., III. Bd., S. 234—237.

[19]) P. A. Hansen, Geodätische Untersuchungen. Des VIII. Bds. der Abh. der mathematisch-physischen Classe d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. Nr. I, Leipzig 1865, S. 107—110, 219—221.

und

$$b\,c\cos(A + \varDelta A) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$$

aus und entwickelt hieraus die Größe $\varDelta A$ mit

$$\varDelta A = -\frac{1}{3}\varepsilon\left\{1 - \frac{1}{60\,r^2}(2a^2 - b^2 - c^2) - \frac{1}{30240\,r^4}(38a^4 - 19b^4 - 19c^4 - a^2b^2 + 2b^2c^2 - c^2a^2)\right\}$$

Auch Helmert[20]) gab einen Beweis des einfachen Theorems von Legendre in der bekannten Weise, sowie eine Erweiterung desselben unter Mitnahme kleiner Glieder 6. Ordnung bei teilweiser Benutzung der Gedankengänge in Grunerts allgemeinen Entwicklungen. Er ging hiebei vom Kosinussatz für das sphärische Dreieck in der Form

$$\cos A = \frac{2\cos\alpha - \cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)}{\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)}$$

aus, wobei

$$\alpha = \frac{a}{r}, \qquad \beta = \frac{b}{r}, \qquad \gamma = \frac{c}{r}$$

bedeuten und verband ihn unter Einführung von

$$(\beta + \gamma)^2 = s^2, \qquad (\beta - \gamma)^2 = d^2$$

mit dem Kosinussatz für das ebene Dreieck

$$\cos A^* = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2\,b\,c} = \frac{-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\,\beta\,\gamma}$$

zur Formel

$$\cos A - \cos A^* = \frac{(s^2 - d^2)\cos\alpha + (\alpha^2 + s^2)\cos(\beta - \gamma) - (\alpha^2 - d^2)\cos(\beta + \gamma)}{2\,\beta\,\gamma\,[\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)]},$$

deren Entwicklung, nach Wiedereinführung der Bögen für s^2 und d^2, sowie nach Ersatz der Bögen durch die Seiten und nach Einführung von

$$m^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \qquad n^4 = \frac{1}{3}(a^4 + b^4 + c^4)$$

die Endformel

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3}\left[1 + \frac{m^2 - a^2}{20\,r^2} + \frac{20\,(n^4 - a^4) - 3\,m^2\,(m^2 - a^2)}{10080\,r^4}\right]$$

ergab.

Zwei weitere Methoden der Herleitung des Theorems von Legendre unter Beachtung kleiner Glieder 4. Ordnung hat Jordan angegeben. Die erste Methode[21]) geht von der Identität

$$\frac{1 + \cos A}{1 + \cos A^*} - \frac{1 - \cos A}{1 - \cos A^*} = 2\,\frac{\cos A - \cos A^*}{\sin^2 A^*}$$

aus, in deren linke Seite die Entwicklung für

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$$

[20]) F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie, Leipzig 1880, I. Teil, S. 88—94.

[21]) W. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart 1878, 2. Aufl., II. Bd., S. 126 bis 132, Dreiecksberechnung nach dem Legendreschen Satz.

sowie die Formel

$$\cos A^* = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

eingeführt werden, so daß sich

$$\frac{\cos A - \cos A^*}{\sin^2 A^*} = b\,c \left\{ -\frac{1}{6\,r^2} + \frac{1}{180\,r^4}\,(a^2 - 3\,b^2 - 3\,c^2) \right\}$$

ergibt, woraus schließlich das bekannte Ergebnis

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180\,r^2}\,(-2\,a^2 + b^2 + c^2)$$

folgt.

Die zweite Methode[22]) wird in der folgenden Weise durchgeführt. Im sphärischen Dreieck ABC wird vom Punkte A aus der auf die Seite a senkrechte Großkreis errichtet, wobei der Winkel A in die Teile A_1 und A_2 zerlegt wird, wovon der erstere der Seite b, der letztere der Seite c anliegen möge. Ist die Länge des auf die Seite a senkrechten Großkreisbogens gleich p und bezeichnet man von den Abschnitten, in die die Seite a im Schnittpunkte D mit dem senkrechten Großkreis p geteilt wird, den bei der Seite b liegenden mit q_1, den bei der Seite c befindlichen mit q_2, dann ergibt sich aus den Reihenentwicklungen für die im Punkte D rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke ACD bzw. ABD:

$$b \cos A_1 = p - \frac{p\,q_1^2}{3\,r^2} - \frac{p\,q_1^2}{360\,r^4}\,(16\,p^2 + 8\,q_1^2)\,,$$

$$c \cos A_2 = p - \frac{p\,q_2^2}{3\,r^2} - \frac{p\,q_2^2}{360\,r^4}\,(16\,p^2 + 8\,q_2^2)\,,$$

$$b \sin A_1 = q_1 + \frac{p^2\,q_1}{6\,r^2} + \frac{p^2\,q_1}{360\,r^4}\,(7\,p^2 - 16\,q_1^2)\,,$$

$$c \sin A_2 = q_2 + \frac{p^2\,q_2}{6\,r^2} + \frac{p^2\,q_2}{360\,r^4}\,(7\,p^2 - 16\,q_2^2)\,.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung

$$2\,b\,c \cos A = 2\,b\,c\,(\cos A_1 \cos A_2 - \sin A_1 \sin A_2)$$

ein, die aus $A = A_1 + A_2$ gewonnen wird, so ergibt ein Vergleich mit dem Kosinussatz für das ebene Dreieck

$$2\,b\,c \cos A^* = b^2 + c^2 - a^2\,,$$

in den noch bei Beachtung von

$$b^2 = b^2 \cos^2 A_1 + b^2 \sin^2 A_1\,,$$
$$c^2 = c^2 \cos^2 A_2 + c^2 \sin^2 A_2\,,$$
$$a^2 = (q_1 + q_2)^2\,,$$

die obigen Reihen für $b \cos A_1$, $b \sin A_1$, $c \cos A_2$, $c \sin A_2$ eingesetzt worden sind, schließlich über die Entwicklung der Differenz $\cos A - \cos A^*$ wieder das bekannte Resultat

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180\,r^2}\,(-2\,a^2 + b^2 + c^2)\,.$$

[22]) W. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart 1916, 6. Aufl., III. Bd., S. 256 bis 266, Sphärisch-trigonometrische Reihenentwicklungen bis zur Ordnung $\frac{1}{r^4}$ einschließlich, Der erweiterte Legendresche Satz; ferner auch 1923, 7. Aufl., III. Bd., S. 252—262; 1896, 4. Aufl., III. Bd., S. 244—255.

Schließlich hat noch der Verfasser[23]) eine Herleitung des einfachen Satzes von Legendre aus dem Projektionssatz angegeben, die auch unter die Beweise aus dem Kosinussatz eingereiht werden kann. Entwickelt man den Projektionssatz für das sphärische Dreieck

$$\sin\frac{c}{r}\cos\frac{b}{r}=\sin\frac{a}{r}\cos B+\cos\frac{c}{r}\sin\frac{b}{r}\cos A$$

bei Vernachlässigung kleiner Größen 4. Ordnung, so ergibt sich

$$c=a\cos B+b\cos A+\frac{1}{12\,c\,r^2}\left(-a^4-b^4-c^4+2\,b^2c^2+2\,c^2a^2+2\,a^2b^2\right),$$

woraus in bekannter Weise

$$c=a\cos B+b\cos A+\frac{F^*}{3\,c\,r^2}\left(b\,c\sin A+a\,c\sin B\right)$$

und hieraus mit gleicher Genauigkeit

$$c=a\left(\cos B+\frac{\varepsilon}{3}\sin B\right)+b\left(\cos A+\frac{\varepsilon}{3}\sin A\right)$$

folgt. Es ist somit auch

$$c=a\cos\left(B-\frac{\varepsilon}{3}\right)+b\cos\left(A-\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Dies ist aber der Projektionssatz für das ebene Dreieck mit den Seiten a, b, c und mit den Winkeln

$$A=A^*-\frac{\varepsilon}{3},$$

$$B=B^*-\frac{\varepsilon}{3},$$

$$C=C^*-\frac{\varepsilon}{3},$$

womit der einfache Satz von Legendre hergeleitet ist.

IV. Herleitung des Satzes von Legendre aus den Sätzen für den halben Winkel oder die halbe Seite.

Die Herleitung und der Beweis des Theorems von Legendre aus Halbwinkelformeln oder aus ihren polaren Formeln, den Sätzen für die halbe Seite, begann etwa um die Mitte des 19. Jahrhunderts und wurde seither in verschiedener Weise zur Durchführung gebracht.

Unter dem Titel „Elementare Ableitung eines zuerst von Legendre aufgestellten Lehrsatzes der sphärischen Trigonometrie" hat C. F. Gauß[24]) eine Herleitung gegeben, die eine völlig strenge Formel liefert. Dieser Beweis, der auch in Bauernfeinds Vermessungskunde[25]) abgedruckt wurde und sich, wie Grunert[26]) sagte, „durch seine Eleganz vorzüglich auszeichnet", wurde von letzterem in seinem Archiv[27]) näher erläutert.

[23]) Österr. Zeitschrift für Vermessungsw., Wien 1937, 35. Bd. S. 71—75, F. Hauer, Zwei neue Herleitungen des Satzes von Legendre.

[24]) A. L. Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik in zwanglosen Heften, Berlin 1841, 2. Bd., S. 96 ff.

[25]) C. M. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, Stuttgart 1890, 7. Aufl., 2. Bd., S. 282—283, Ein geodätisches Dreieck nach Legendre wie ein ebenes zu berechnen.

[26]) J. A. Grunert, Archiv für angewandte Mathematik und Physik, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Lehranstalten, Greifswald 1847, 9. Teil, S. 8.

[27]) ebenda; Greifswald 1841, 1. Bd., S. 436—440, Miscellen.

Bezeichnet man den Exzeß eines sphärischen Dreiecks mit 3ω, die 3 Seiten mit a, b, c und die ihnen gegenüberliegenden Winkel mit $A+\omega$, $B+\omega$, $C+\omega$, so gehen die bekannten Formeln

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{-\cos S\cos[S-(A+\omega)]}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)}$$

und

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos[S-(B+\omega)]\cos[S-(C+\omega)]}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)}$$

bei Bedachtnahme auf

$$(A+\omega)+(B+\omega)+(C+\omega)-\Pi = 3\omega$$

und

$$S = \frac{(A+\omega)+(B+\omega)+(C+\omega)}{2}$$

in die Gestalt

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{3}{2}\omega\sin\left(A-\frac{1}{2}\omega\right)}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)}$$

und

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\sin\left(B-\frac{1}{2}\omega\right)\sin\left(C-\frac{1}{2}\omega\right)}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)}$$

über, aus deren Verbindung sich

$$\frac{\sin^6\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\sin^3\frac{3\omega}{2}\sin^3\left(A-\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^2(B+\omega)\sin\left(B-\frac{\omega}{2}\right)\sin^2(C+\omega)\sin\left(C-\frac{\omega}{2}\right)}$$

ergibt. Ebenso ist

$$\frac{\sin^6\frac{b}{2}}{\cos^2\frac{b}{2}} = \frac{\sin^3\frac{3\omega}{2}\sin^3\left(B-\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^2(A+\omega)\sin\left(A-\frac{\omega}{2}\right)\sin^2(C+\omega)\sin\left(C-\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Wird nun aus dem Quotienten dieser beiden Gleichungen die Quadratwurzel gezogen, so erhält man

$$\frac{\sin^3\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{b}{2}}{\sin^3\frac{b}{2}} = \frac{\sin(A+\omega)\sin^2\left(A-\frac{\omega}{2}\right)}{\sin(B+\omega)\sin^2\left(B-\frac{\omega}{2}\right)},$$

eine Gleichung, die man auch in der Form

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}\sqrt[3]{D}$$

ansetzen kann, wenn D durch den Ausdruck

$$D = \frac{a^3\cos\frac{a}{2}}{8\sin^3\frac{a}{2}}\cdot\frac{8\sin^3\frac{b}{2}}{b^3\cos\frac{b}{2}}\cdot\frac{\sin(A+\omega)\sin^2\left(A-\frac{\omega}{2}\right)}{\sin^3 A}\cdot\frac{\sin^3 B}{\sin(B+\omega)\sin^2\left(B-\frac{\omega}{2}\right)}$$

gegeben ist. Diese Gleichung ist strenge richtig. Man sieht leicht, daß jeder

der vier Faktoren im Ausdruck für D nur um Größen 4. Ordnung von der Einheit abweicht, wenn a, b, c klein von 1. Ordnung sind.

Als nächster ging A. Winkler[28]) von den Formeln für die Tangenten der halben Winkel im sphärischen und ebenen Dreieck aus. Entwickelt man in den Formeln

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)}},\quad \tan\frac{A^*}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}},$$

den Ausdruck für $\tan\frac{1}{2}A$ nach Potenzen der Seiten mit Vernachlässigung kleiner Größen 4. Ordnung, so ergibt sich

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}}\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2-2bc)}{1-\frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2+2bc)}},$$

somit

$$\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{A^*}{2}\sqrt{1+\frac{1}{3}bc},$$

woraus

$$\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{A^*}{2}=\frac{1}{6}bc\tan\frac{A^*}{2}$$

und weiter, stets mit gleicher Genauigkeit

$$\sin\frac{1}{2}(A-A^*)=\frac{1}{6}bc\sin\frac{1}{2}A^*\cos\frac{1}{2}A^*$$

folgt. Es ist somit

$$A-A^*=\frac{1}{6}bc\sin A^*$$

und hieraus schließlich

$$A-A^*=\frac{1}{3}\varepsilon.$$

Im Jahre 1874 hat A. M. Nell[29]), wieder von den Formeln für $\tan\frac{1}{2}A$ und $\tan\frac{1}{2}A^*$ ausgehend, den Legendreschen Satz hergeleitet und hierbei seine Entwicklungen mit Vernachlässigung kleiner Glieder 8. Ordnung ausgeführt. Von den Ansätzen

$$\tan^2\frac{1}{2}A=\frac{\sin\frac{s-b}{r}\sin\frac{s-c}{r}}{\sin\frac{s}{r}\sin\frac{s-a}{r}}$$

und

$$\tan^2\frac{1}{2}A^*=\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$$

[28]) A. L. Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik in zwanglosen Heften, Berlin 1852, Bd. 44, S. 273, A. Winkler, Kurze Ableitung des Legendreschen Satzes über die Reduktion der Berechnung eines sphärischen auf die eines ebenen Dreiecks.

[29]) Zeitschrift für Mathematik und Physik von O. Schlömilch, E. Kahl, M. Cantor, Leipzig 1874, 19. Bd., S. 324—334, Nell, Neue Herleitung des Legendreschen Satzes nebst einer Erweiterung desselben.

ausgehend, gelangt Nell wieder zu den bekannten Ergebnissen

$$\varepsilon = \frac{F^*}{r^2}\left(1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{24\,r^2} + \frac{a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{360\,r^4}\right),$$

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3}\left(1 + \frac{b^2+c^2-2\,a^2}{60\,r^2} + \frac{19\,(b^4+c^4-2\,a^4)+a^2b^2+a^2c^2-2\,b^2c^2}{30240\,r^4}\right).$$

Etwa 60 Jahre nach Winkler und 40 Jahre nach Nell benutzt E. Hammer[30]) wieder die Formeln

$$\tan\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{s-b}{r}\,\sin\frac{s-c}{r}}{\sin\frac{s}{r}\,\sin\frac{s-a}{r}}}$$

und

$$\tan\frac{1}{2}A^* = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}} = \sqrt{\frac{\frac{s-b}{r}\,\frac{s-c}{r}}{\frac{s}{r}\,\frac{s-a}{r}}}$$

zur Herleitung des Theorems von Legendre, in der Meinung, dies erstmalig zu tun. Der Weg, den Hammer hierbei eingeschlagen hat, weicht vom Wege Winklers wenig ab.

Er entwickelt aus obigen Formeln mit Vernachlässigung kleiner Glieder 4. Ordnung die Gleichung

$$\tan\frac{1}{2}A = \tan\frac{1}{2}A^* + \frac{b\,c}{6\,r^2}\tan\frac{1}{2}A^*.$$

Der Ansatz $A = A^* + x$, liefert mit Vernachlässigung von Gliedern x^2 die Gleichung

$$\tan\frac{1}{2}A = \tan\frac{1}{2}A^* + \frac{x}{2}\sec^2\frac{1}{2}A^*.$$

Sollen die beiden letzten Gleichungen gleichzeitig bestehen, so muß somit

$$\frac{b\,c}{6\,r^2}\tan\frac{A^*}{2} = \frac{x}{2}\sec^2\frac{A^*}{2}$$

sein, d. h. es muß gelten

$$x = \frac{1}{3}\,\varepsilon.$$

Diese Herleitung, die nach Hammer[31]) die nächstliegende sein sollte, da sie „den wichtigsten einen Winkel des sphärischen und einen Winkel des ebenen Dreiecks in den gegebenen Seiten ausdrückenden Satz zugrunde legt, nämlich die Ausdrücke für $\tan\frac{1}{2}A$ und für $\tan\frac{1}{2}A^*$ in den Seiten vergleicht“, wurde, wie Hammer[32]) weiter angibt und wie er erst nachträglich sah, schon von anderen vor ihm benützt, so u. a. von Clarke in England, Serret und Bourgeois in Frankreich, Witkowsky in Rußland.

[30]) Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1911, 40. Bd., S. 33—35, E. Hammer, Noch ein Beweis des Legendreschen Satzes.

[31]) E. Hammer, Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Stuttgart 1923, 5. Aufl., S. 514.

[32]) E. Hammer, Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Stuttgart 1923, 5. Aufl., S. 664; ferner Allgemeine Vermessungsnachrichten, Liebenwerda 1917, 29. Jg. S. 6—15, E. Hammer, Legendrescher Satz und Soldnersche Additamentenmethode.

Hierbei geht z. B. Bourgeois[33]) bis zur Formel

$$\tan\frac{1}{2}A = \tan\frac{1}{2}A^*\left(1+\frac{bc}{6r^2}\right)$$

den gleichen Weg wie Hammer, um dann das bekannte Theorem von Lagrange

$$\tan x = m\tan y$$

anzuwenden, wobei m wenig von der Einheit abweicht. Hammer scheint jedoch, der von ihm „eingeschlagene Weg, wenn nicht kürzer, so doch durchsichtiger und natürlicher zu sein".

W. Witkowsky benützt die Formeln für $\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}A^*$, $\cos\frac{1}{2}A^*$ im sphärischen und im ebenen Dreieck und entwickelt mit diesen den Unterschied $A - A^*$ aus der Gleichung

$$\sin\frac{1}{2}(A-A^*) = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A^* - \cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}A^*.$$

Diese Ableitung veranlaßt Hammer zur Bemerkung, daß es kürzer sei, „von den praktisch wichtigsten Ausdrücken für den halben Winkel, nämlich von den Gleichungen für $\tan\frac{1}{2}A$ und $\tan\frac{1}{2}A^*$, auszugehen".

Auch J. Frischauf[34]) geht von den Formeln für $\tan\frac{1}{2}A$ und $\tan\frac{1}{2}A^*$ aus und entwickelt die Differenz $A - A^*$ mit Verwendung des Theorems von Lagrange — in nicht sehr durchsichtiger Weise — mit Beachtung kleiner Glieder 4. Ordnung.

In derselben Abhandlung leitet Frischauf unter Anlehnung an die Gedankengänge der oben angeführten Arbeit von Gauß den einfachen sowie den erweiterten Legendreschen Satz her, indem er vom Satz von Maskelyne ausgeht. Bekanntlich ist mit Vernachlässigung kleiner Glieder x^5

$$\sin x = x\sqrt[3]{\cos x},$$

also

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b} = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b} : \frac{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{2}a}}{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{2}b}}.$$

Wird jetzt für die rechte Gleichungsseite unter Bedachtnahme auf die Untersuchung von Gauß und mit Rücksicht auf

$$A + B + C = 2S$$

der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\frac{\sin A\cos^2(S-A)}{\sin B\cos^2(S-B)}}$$

[33]) Man vgl. zu den Ausführungen über Bourgeois und Witkowsky und den Bemerkungen hierzu die Mitteilung von E. Hammer in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1911, 40. Bd., S. 252—253, „Bemerkung zu Seite 33 ff". Hiernach findet sich die Herleitung von Bourgeois in seinem „Cours de Géodésie" (2. Abdruck, Paris 1908, S. 70—71), die Ableitung von Witkowsky in seiner „Praktischen Geodäsie" (russisch; St. Petersburg 1911, S. 160—162).

[34]) Österr. Zeitschrift für Vermessungsw., Wien 1916, 14. Bd., S. 65—71, 86—90, J. Frischauf, Legendres Theorem.

eingeführt, in dem noch

$$S - A = \frac{1}{2}\,\Pi - \left(A - \frac{1}{2}\,\varepsilon\right),$$

$$S - B = \frac{1}{2}\,\Pi - \left(B - \frac{1}{2}\,\varepsilon\right)$$

gesetzt wird, so erhält man

$$\frac{a}{b} = \sqrt[3]{\frac{\sin A \sin^2\left(A - \frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}{\sin B \sin^2\left(B - \frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}}$$

und hieraus mit Vernachlässigung kleiner Glieder 4. Ordnung

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\left(A - \frac{1}{3}\,\varepsilon\right)}{\sin\left(B - \frac{1}{3}\,\varepsilon\right)}.$$

Um die Glieder 4. Ordnung noch zu erhalten, ist es notwendig, die Formel von Maskelyne zu erweitern. Es ist dann mit Vernachlässigung kleiner Glieder a^7

$$\sin\frac{1}{2}\,a : \sqrt[3]{\cos\frac{1}{2}\,a} = \frac{1}{2}\,a\left(1 + \frac{1}{720}\,a^4\right).$$

Wird diese Formel voranstehender Entwicklung zu Grunde gelegt, so ergibt sich der erweiterte Satz von Legendre mit Beachtung kleiner Größen 4. Ordnung in bekannter Weise.

Schließlich hat kürzlich noch der Verfasser[35]) einen Beweis des Legendreschen Satzes aus den Analogien von Neper ausgeführt. Entwickelt man die erste der beiden Formeln

$$\frac{\cot\frac{C}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2\,r}}{\sin\frac{a-b}{2\,r}}, \qquad \frac{\cot\frac{C^*}{2}}{\tan\frac{A^*-B^*}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$

unter Vernachlässigung kleiner Größen 4. Ordnung, so ist

$$\frac{\cot\frac{C}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}} = \frac{a+b}{a-b}\left(1 - \frac{a\,b}{6\,r^2}\right).$$

Wird nun vorausgesetzt, daß $\tan\frac{A-B}{2} = \tan\frac{A^*-B^*}{2}$ sei, so ergibt sich

$$\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{C^*}{2} - \frac{a\,b}{6\,r^2}\cot\frac{C^*}{2},$$

d. h.

$$\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{C^*}{2} - \frac{\varepsilon}{6}\csc^2\frac{C^*}{2},$$

woraus man ersieht

$$C = C^* + \frac{\varepsilon}{3}.$$

---

[35]) Österr. Zeitschrift für Vermessungsw., Wien 1937, 35. Bd. S. —, F. Hauer, Herleitung und Beweis des Satzes von Legendre aus dem Sinus-Kosinussatz und aus den Analogien von Neper.

Dieses Ergebnis tritt ein für $A - B = A^* - B^*$, somit auch für

$$A - A^* = B - B^* = \varphi .$$

Da nun

$$(A - A^*) + (B - B^*) + (C - C^*) = \varepsilon$$

ist, so hat man auch

$$2\varphi + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

somit

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{3},$$

wodurch wieder das Resultat

$$A^* = A - \frac{\varepsilon}{3}, \quad B^* = B - \frac{\varepsilon}{3}, \quad C^* = C - \frac{\varepsilon}{3}$$

gewonnen wurde. (Fortsetzung folgt.)

Ueber das Vergrößerungsverhältnis der Gauß-Krügerschen Projektion.

Von Dr. Wl. K. Hristow, Sofia.

In Z.f.V. Bd. LXVII, 1938, Heft 18, habe ich für das Vergrößerungsverhältnis der Gauß-Krügerschen Projektion die folgenden Formeln, l. c. (57) u. (61),

$$m = 1 + \frac{1}{2R^2} \cdot y^2 + \frac{1}{R^3} t(-2\eta^2 + \eta^4) \cdot \Delta x y^2 + \\ + \frac{1}{R^4}(-\eta^2 + t^2\eta^2) \cdot \Delta x^2 y^2 + \frac{1}{24R^4}(1 + 4\eta^2) \cdot y^4 \qquad (1)$$

und

$$\lg m = \frac{\mu}{2R^2} \cdot y^2 + \frac{\mu}{R^3} t(-2\eta^2 + \eta^4) \cdot \Delta x y^2 + \\ + \frac{\mu}{R^4}(-\eta^2 + t^2\eta^2) \cdot \Delta x^2 y^2 + \frac{\mu}{12R^4}(-1 + 2\eta^2) \cdot y^4 \qquad (2)$$

abgeleitet, wo die Koeffizienten für den Punkt $\Delta x = y = 0$ gelten.

Ich will nun analoge Formeln in $\Delta\varphi$ und l ableiten. Zu diesem Zwecke gehe ich von den Formeln (9) und (10) aus meiner Arbeit in Z.f.V. Bd. LXVI, 1937, Heft 10, aus.

$$\Delta x = N(1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \cdot \Delta\varphi + \frac{3}{2} N t(\eta^2 - 2\eta^4) \cdot \Delta\varphi^2 + \\ + \frac{1}{2} N\cos^2\varphi\, t \cdot l^2 + \frac{1}{2} N(\eta^2 - t^2\eta^2 - 2\eta^4 + 7t^2\eta^4) \cdot \Delta\varphi^3 + \\ + \frac{1}{2} N\cos^2\varphi(1 - t^2 + t^2\eta^2 - t^2\eta^4) \cdot \Delta\varphi\, l^2 + \frac{1}{2} N t(-\eta^2) \cdot \Delta\varphi^4 + \\ + \frac{1}{4} N\cos^2\varphi\, t(-4 + 3\eta^2 - 3t^2\eta^2) \cdot \Delta\varphi^2 l^2 + \frac{1}{24} N\cos^4\varphi\, t(5 - t^2 + 9\eta^2) \cdot l^4 \qquad (3)$$

$$y = N\cos\varphi \,.\, l + N\cos\varphi\, t\,(-1 + \eta^2 - \eta^4)\,.\,\varDelta\varphi\, l +$$
$$+ \frac{1}{2} N\cos\varphi\,(-1 + \eta^2 - 3\,t^2\eta^2 - \eta^4 + 6\,t^2\eta^4)\,.\,\varDelta\varphi^2 l +$$
$$+ \frac{1}{6} N\cos^3\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2)\,.\,l^3 + \frac{1}{6} N\cos\varphi\, t\,(1 - 10\,\eta^2 + 3\,t^2\eta^2)\,.\,\varDelta\varphi^3 l +$$
$$+ \frac{1}{6} N\cos^3\varphi\, t\,(-5 + t^2 - 4\,\eta^2 - t^2\eta^2)\,.\,\varDelta\varphi\, l^3 \qquad (4)$$

Darin ersetze ich zunächst N durch R mittels

$$N = R\sqrt{1+\eta^2} = R\left(1 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{8}\eta^4 + \frac{1}{16}\eta^6\right) \qquad (5)$$

und bekomme

$$\varDelta x = R\left(1 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{8}\eta^4 - \frac{5}{16}\eta^6\right).\varDelta\varphi + \frac{3}{2}R t\left(\eta^2 - \frac{3}{2}\eta^4\right).\varDelta\varphi^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}R\cos^2\varphi\, t\left(1 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{8}\eta^4\right).l^2 + \frac{1}{2}R(\eta^2 - t^2\eta^2 - {}^3/_2\eta^4 + 6{}^1/_2 t^2\eta^4).\varDelta\varphi^3 +$$
$$+ \frac{1}{2}R\cos^2\varphi\left(1 - t^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}t^2\eta^2 - \frac{1}{8}\eta^4 - \frac{3}{8}t^2\eta^4\right).\varDelta\varphi\, l^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}R t\,(-\eta^2)\,.\,\varDelta\varphi^4 + \frac{1}{4}R\cos^2\varphi\, t\,(-4 + \eta^2 - 3\,t^2\eta^2)\,.\,\varDelta\varphi^2 l^2 +$$
$$+ \frac{1}{24}R\cos^4\varphi\, t\,(5 - t^2 + 11{}^1/_2\eta^2 - {}^1/_2 t^2\eta^2)\,.\,l^4 \qquad (6)$$

$$y = R\cos\varphi\left(1 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{8}\eta^4 + \frac{1}{16}\eta^6\right).l + R\cos\varphi\, t\,(-1 + {}^1/_2\eta^2 - {}^3/_8\eta^4)\,.\,\varDelta\varphi\, l +$$
$$+ \frac{1}{2}R\cos\varphi\,(-1 + {}^1/_2\eta^2 - 3\,t^2\eta^2 - {}^3/_8\eta^4 + 4{}^1/_2 t^2\eta^4)\,.\,\varDelta\varphi^2 l +$$
$$+ \frac{1}{6}R\cos^3\varphi\,(1 - t^2 + {}^3/_2\eta^2 - {}^1/_2 t^2\eta^2 + {}^3/_8\eta^4 + {}^1/_8 t^2\eta^4)\,.\,l^3 +$$
$$+ \frac{1}{6}R\cos\varphi\, t\,(1 - 9{}^1/_2\eta^2 + 3\,t^2\eta^2)\,.\,\varDelta\varphi^3 l +$$
$$+ \frac{1}{6}R\cos^3\varphi\, t\,(-5 + t^2 - 6{}^1/_2\eta^2 - {}^1/_2 t^2\eta^2)\,.\,\varDelta\varphi\, l^3 \qquad (7)$$

Jetzt trage ich (6) und (7) in (1) ein, womit nach gehöriger Reduktion herauskommt

$$m = 1 + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\,(1 + \eta^2)\,.\,l^2 + \cos^2\varphi\, t\,(-1 - 2\,\eta^2)\,.\,\varDelta\varphi\, l^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\cos^2\varphi\,(-1 + t^2 - 2\,\eta^2 + 6\,t^2\eta^2)\,.\,\varDelta\varphi^2 l^2 +$$
$$\frac{1}{24}\cos^4\varphi\,(5 - 4\,t^2 + 14\,\eta^2 - 28\,t^2\eta^2)\,.\,l^4 +$$
$$+ \frac{1}{6}\cos^4\varphi\, t\,(-7 + 2\,t^2)\,.\,\varDelta\varphi\, l^4 \qquad (8)$$

Der Logarithmus von (8) ist, wenn das Zusatzglied fünfter Ordnung weggelassen wird

$$\lg m = \frac{\mu}{2}\cos^2\varphi\,(1 + \eta^2)\,.\,l^2 + \mu\cos^2\varphi\, t\,(-1 - 2\,\eta^2)\,.\,\varDelta\varphi\, l^2 +$$
$$+ \frac{\mu}{2}\cos^2\varphi\,(-1 + t^2 - 2\,\eta^2 + 6\,t^2\eta^2)\,.\,\varDelta\varphi^2 l^2 +$$
$$+ \frac{\mu}{12}\cos^4\varphi\,(1 - 2\,t^2 + 4\,\eta^2 - 14\,t^2\eta^2)\,.\,l^4 \qquad (9)$$

Die Gl. (1), (2), (8) und (9) benutze ich für eine Spezialisierung. In (1) und (2) denke ich mir die Koeffizienten berechnet mit der Breite des Fußpunktes, d. h. ich setze $x_0 = x$. Dann wird aber $\Delta x = 0$ und (1) und (2) werden

$$m = 1 + \frac{1}{2R^2} \cdot y^2 + \frac{1}{24R^4} (1 + 4\eta^2) \cdot y^4 \tag{10}$$

$$\lg m = \frac{\mu}{2R^2} \cdot y^2 + \frac{\mu}{12R^4} (-1 + 2\eta^2) \cdot y^4 \tag{11}$$

Ebenso denke ich mir in (8) und (9) die Koeffizienten berechnet mit der Breite des Punktes selbst, d. h. ich setze $\varphi_0 = \varphi$. Dann wird $\Delta\varphi = 0$ und ich habe

$$m = 1 + \frac{1}{2} \cos^2\varphi\,(1 + \eta^2) \, . \, l^2 + \frac{1}{24} \cos^4\varphi\,(5 - 4t^2 + 14\eta^2 - 28t^2\eta^2) \, . \, l^4 \tag{12}$$

$$\lg m = \frac{\mu}{2} \cos^2\varphi\,(1 + \eta^2) \, . \, l^2 + \frac{\mu}{12} \cos^4\varphi\,(1 - 2t^2 + 4\eta^2 - 14t^2\eta^2) \, . \, l^4 \tag{13}$$

Ich will hervorheben, daß auf dem Wege der Spezialisierung der allgemeineren Formeln (1), (2), (8) und (9), der in der Literatur vorkommende Uebergang von der Breite des Punktes zu der Fußpunktbreite, wenn von (12) und (13) in (10) und (11) übergegangen werden soll, erspart wird.

Als Anwendung von (8) und (9) habe ich die Koeffizienten für das Ellipsoid von Bessel für die Breiten von Deutschland, unter der Annahme, daß $\Delta\varphi$ und l in Bogensekunden ausgedrückt sind, berechnet.

$$m = 1 + a_1 \, . \, l^2 + a_2 \, . \, \Delta\varphi\, l^2 + a_3 \, . \, \Delta\varphi^2\, l^2 + a_4 \, . \, l^4 + a_5 \, . \, \Delta\varphi\, l^4$$

	φ_0		$. \, l^2$	$. \, \Delta\varphi\, l^2$	$. \, \Delta\varphi^2\, l^2$	$. \, l^4$	$. \, \Delta\varphi\, l^4$
I	47°	0′	8.739 0416	3.75735 *n*	7.329	6.233	2.69 *n*
II	47	30	8.730 8163	3.75670 *n*	7.415	5.928	2.67 *n*
III	48	0	8.722 4461	3.75592 *n*	7.488	4.298	2.65 *n*
IV	48	30	8.713 9282	3.75501 *n*	7.551	5.889 *n*	2.64 *n*
V	49	0	8.705 2598	3.75395 *n*	7.606	6.186 *n*	2.62 *n*
VI	49	30	8.696 4377	3.75277 *n*	7.655	6.356 *n*	2.60 *n*
VII	50	0	8.687 4588	3.75145 *n*	7.699	6.470 *n*	2.58 *n*
VIII	50	30	8.678 3198	3.75000 *n*	7.738	6.558 *n*	2.56 *n*
IX	51	0	8.669 0175	3.74840 *n*	7.774	6.628 *n*	2.54 *n*
X	51	30	8.659 5482	3.74668 *n*	7.807	6.684 *n*	2.51 *n*
XI	52	0	8.649 9084	3.74481 *n*	7.838	6.732 *n*	2.48 *n*
XII	52	30	8.640 0941	3.74280 *n*	7.867	6.773 *n*	2.46 *n*
XIII	53	0	8.630 1014	3.74064 *n*	7.893	6.808 *n*	2.43 *n*
XIV	53	30	8.619 9262	3.73835 *n*	7.918	6.838 *n*	2.40 *n*
XV	54	0	8.609 5641	3.73591 *n*	7.941	6.865 *n*	2.37 *n*
XVI	54	30	8.599 0107	3.73333 *n*	7.963	6.889 *n*	2.34 *n*
XVII	55	0	8.588 2613	3.73060 *n*	7.985	6.909 *n*	2.30 *n*

$$\lg m = a_1' \,.\, l^2 + a_2' \,.\, \Delta\varphi\, l^2 + a_3' \,.\, \Delta\varphi^2\, l^2 + a_4' \,.\, l^4$$

	φ_0	$.\, l^2$	$.\, \Delta\varphi\, l^2$	$.\, \Delta\varphi^2\, l^2$	$.\, l^4$
I	47° 0′	8.376 8259	3.39513 *n*	6.97	6.762 *n*
II	47 30	8.368 6006	3.39448 *n*	7.05	6.772 *n*
III	48 0	8.360 2304	3.39370 *n*	7.12	6.781 *n*
IV	48 30	8.351 7125	3.39279 *n*	7.19	6.789 *n*
V	49 0	8.343 0441	3.39173 *n*	7.24	6.796 *n*
VI	49 30	8.334 2220	3.39055 *n*	7.29	6.802 *n*
VII	50 0	8.325 2431	3.38923 *n*	7.34	6.808 *n*
VIII	50 30	8.316 1041	3.38778 *n*	7.38	6.813 *n*
IX	51 0	8.306 8018	3.38618 *n*	7.41	6.817 *n*
X	51 30	8.297 3325	3.38446 *n*	7.44	6.821 *n*
XI	52 0	8.287 6927	3.38259 *n*	7.47	6.824 *n*
XII	52 30	8.277 8784	3.38058 *n*	7.50	6.827 *n*
XIII	53 0	8.267 8857	3.37842 *n*	7.53	6.829 *n*
XIV	53 30	8.257 7105	3.37613 *n*	7.56	6.830 *n*
XV	54 0	8.247 3484	3.37269 *n*	7.58	6.831 *n*
XVI	54 30	8.236 7950	3.37111 *n*	7.60	6.831 *n*
XVII	55 0	8.226 0456	3.36838 *n*	7.62	6.831 *n*

Als Zahlenbeispiel rechne ich m und $\lg m$ für $\varphi = 50^0\,15'$ u. $l = 1^0\,30'$.

	VII m	VIII m
	+ 1.000 0000 000	+ 1.000 0000 000
$\cdot l^2$	+ 0.000 1419 863	+ 0.000 1390 296
$\cdot \Delta\varphi\, l^2$	— 0.000 0014 807	+ 0.000 0014 758
$\cdot \Delta\varphi^2\, l^2$	+ 0.000 0000 012	+ 0.000 0000 013
$\cdot l^4$	— 0.000 0000 025	— 0.000 0000 031
$\cdot \Delta\varphi\, l^4$	— 0.000 0000 003	+ 0.000 0000 003
m	+ 1.000 1405 040	+ 1.000 1405 039

	VII $\lg m$	VIII $\lg m$
$\cdot l^2$	0.000 0616 639	0.000 0603 798
$\cdot \Delta\varphi\, l^2$	— 0.000 0006 431	+ 0.000 0006 409
$\cdot \Delta\varphi^2\, l^2$	+ 0.000 0000 005	+ 0.000 0000 006
$\cdot l^4$	— 0.000 0000 055	— 0.000 0000 055
$\lg m$	0.000 0610 158	0.000 0610 158

Transformationsformeln zwischen den Gauß-Krügerschen und den geographischen Koordinaten und umgekehrt.

Von Dr. Wl. K. Hristow, Sofia.

Es mögen die folgenden Potenzreihen vorliegen, die für einen Punkt $(x_0, 0)$ bzw. $(\varphi_0, 0)$ der Abszissenachse angesetzt sind.

$$\Delta y + iy = a_1(\Delta q + il) + a_2(\Delta q + il)^2 + a_3(\Delta q + il)^3 + a_4(\Delta q + il)^4 + \\ + a_5(\Delta q + il)^5 + a_6(\Delta q + il)^6 + a_7(\Delta q + il)^7 + a_8(\Delta q + il)^8 \qquad (1)$$

$$\Delta q + il = b_1(\Delta x + iy) + b_2(\Delta x + iy)^2 + b_3(\Delta x + iy)^3 + b_4(\Delta x + iy)^4 + \\ + b_5(\Delta x + iy)^5 + b_6(\Delta x + iy)^6 + b_7(\Delta x + iy)^7 + b_8(\Delta x + iy)^8 \quad (2)$$

In die Koeffizienten von (1) setze ich φ_0 gleich der Breite φ des Punktes, dessen geographische Koordinaten in Gauß-Krügersche Koordinaten umzuwandeln sind. Dann wird $\triangle q = 0$ und die Zerlegung von (1) in Real- und Imaginärteil gibt

$$\Delta x = -a_2 l^2 + a_4 l^4 - a_6 l^6 + a_8 l^8 \quad (3)$$

$$y = a_1 l - a_3 l^3 + a_5 l^5 - a_7 l^7 \quad (4)$$

Das ist der Gang der Ableitung der Transformationsformeln zum Uebergang von den geographischen zu den Gauß-Krügerschen Koordinaten.

Für die umgekehrte Aufgabe wird in der Literatur aber etwas umständlicher vorgegangen, damit die betreffenden Koeffizienten als Ausdrücke der sogenannten Fußpunktsbreite φ_1 (sie entspricht der Meridianbogenlänge $B = x$) erscheinen. Ich entgehe dem auf folgende Weise. Ich gehe von (2) aus, wo ich in den Koeffizienten von vornherein φ_0 gleich φ_1 mache. Dann wird $\triangle x = 0$ und die Zerlegung in Real- und Imaginärteil gibt

$$\Delta q = -b_2 y^2 + b_4 y^4 - b_6 y^6 + b_8 y^8 \quad (5)$$

$$l = b_1 y - b_3 y^3 + b_5 y^5 - b_7 y^7 \quad (6)$$

In (6) haben wir sofort die fertige Formel für die geographische Länge.

Um auch diejenige für die geographische Breite zu bekommen, setze ich (5) in die als bekannt vorausgesetzte Gleichung

$$\Delta\varphi = d_1 \Delta q + d_2 \Delta q^2 + d_3 \Delta q^3 + d_4 \Delta q^4 + \dots \quad (7)$$

womit resultiert

$$\Delta\varphi = -b_2 d_1 y^2 + (b_4 d_1 + b_2^2 d_2) y^4 - (b_6 d_1 + 2 b_2 b_4 d_2 + b_2^3 d_3) y^6 + \\ + [b_8 d_1 + (b_4^2 + 2 b_2 b_6) d_2 + 3 b_2^2 b_4 d_3 + b_2^4 d_4] y^8 \quad (8)$$

Die Koeffizienten a_n, b_n bzw. d_n entnehme ich aus meinen Aufsätzen in Z.f.V. Bd. LXIII, 1934, Heft 20, bzw. Bd. LXIV, 1935, Heft 21.

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= N\cos\varphi \\
a_2 &= -\frac{1}{2} N\cos^2\varphi\, t \\
a_3 &= -\frac{1}{6} N\cos^3\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2) \\
a_4 &= \frac{1}{24} N\cos^4\varphi\, t\,(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \\
a_5 &= \frac{1}{120} N\cos^5\varphi\,(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) \\
a_6 &= -\frac{1}{720} N\cos^6\varphi\, t\,(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2) \\
a_7 &= -\frac{1}{5040} N\cos^7\varphi\,(61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6) \\
a_8 &= \frac{1}{40\,320} N\cos^8\varphi\, t\,(1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6)
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{N\cos\varphi} \\
b_2 &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{N^2\cos\varphi}\,t \\
b_3 &= \frac{1}{6}\,\frac{1}{N^3\cos\varphi}\,(1+2t^2+\eta^2) \\
b_4 &= \frac{1}{24}\,\frac{1}{N^4\cos\varphi}\,t\,(5+6t^2+\eta^2-4\eta^4) \\
b_5 &= \frac{1}{120}\,\frac{1}{N^5\cos\varphi}\,(5+28t^2+24t^4+6\eta^2+8t^2\eta^2) \\
b_6 &= \frac{1}{720}\,\frac{1}{N^6\cos\varphi}\,t\,(61+180t^2+120t^4+46\eta^2+48t^2\eta^2) \\
b_7 &= \frac{1}{5040}\,\frac{1}{N^7\cos\varphi}\,(61+662t^2+1320t^4+720t^6) \\
b_8 &= \frac{1}{40\,320}\,\frac{1}{N^8\cos\varphi}\,t\,(1385+7266t^2+10920t^4+5040t^6)
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned}
d_1 &= \cos\varphi\,(1+\eta^2) \\
d_2 &= -\frac{1}{2}\cos^2\varphi\,t\,(1+4\eta^2+3\eta^4) \\
d_3 &= -\frac{1}{6}\cos^3\varphi\,(1-t^2+5\eta^2-13t^2\eta^2) \\
d_4 &= \frac{1}{24}\cos^4\varphi\,t\,(5-t^2)
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Damit werden schließlich (3), (4), (8) und (6)

$$\begin{aligned}
x = B &+ \frac{1}{2\varrho^2}N\cos^2\varphi\,t\,.\,l^2 + \frac{1}{24\varrho^4}N\cos^4\varphi\,t\,(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4)\,.\,l^4 - \\
&- \frac{1}{720\varrho^6}N\cos^6\varphi\,t\,(-61+58t^2-t^4-270\eta^2+330t^2\eta^2)\,.\,l^6 - \\
&- \frac{1}{40320\varrho^8}N\cos^8\varphi\,t\,(-1385+3111t^2-543t^4+t^6)\,.\,l^8
\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
y = &\frac{1}{\varrho}N\cos\varphi\,.\,l - \frac{1}{6\varrho^3}N\cos^3\varphi\,(-1+t^2-\eta^2)\,.\,l^3 - \\
&- \frac{1}{120\varrho^5}N\cos^5\varphi\,(-5+18t^2-t^4-14\eta^2+58t^2\eta^2)\,.\,l^5 - \\
&- \frac{1}{5040\varrho^7}N\cos^7\varphi\,(-61+479t^2-179t^4+t^6)\,.\,l^7
\end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\varphi = \varphi_1 &- \frac{\varrho}{2}\frac{1}{N_1^2}t_1(1+\eta_1^2)\,.\,y^2 + \\
&+ \frac{\varrho}{24}\frac{1}{N_1^4}t_1\,(5+3t_1^2+6\eta_1^2-6t_1^2\eta_1^2-3\eta_1^4-9t_1^2\eta_1^4)\,.\,y^4 - \\
&- \frac{\varrho}{720}\frac{1}{N_1^6}t_1\,(61+90t_1^2+45t_1^4+107\eta_1^2-162t_1^2\eta_1^2-45t_1^4\eta_1^2)\,.\,y^6 + \\
&+ \frac{\varrho}{40320}\frac{1}{N_1^8}t_1\,(1385+3633t_1^2+4095t_1^4+1575t_1^6)\,.\,y^8
\end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
l = &\,\varrho\frac{1}{N_1\cos\varphi_1}\,.\,y - \frac{\varrho}{6}\frac{1}{N_1^3\cos\varphi_1}(1+2t_1^2+\eta_1^2)\,.\,y^3 + \\
&+ \frac{\varrho}{120}\frac{1}{N_1^5\cos\varphi_1}(5+28t_1^2+24t_1^4+6\eta_1^2+8t_1^2\eta_1^2)\,.\,y^5 - \\
&- \frac{\varrho}{5040}\frac{1}{N_1^7\cos\varphi_1}(61+662t_1^2+1320t_1^4+720t_1^6)\,.\,y
\end{aligned} \quad (15)$$

Die Einmessung der Gebäude im preußischen Kataster.

Von Vermessungsrat Ahrens, Hersfeld.

Nach den Vorschriften unter Nr. 4 und 5 im § 1 der preußischen Kataster-Anweisung I vom 31. 3. 1877 waren sämtliche Gebäude nachzutragen, während durch den Erlaß des Preuß. Finanzministers vom 10. 3. 92 (Mitt. Heft 28, S. 12) angeordnet wurde, daß neu entstandene oder entfernte Gebäude, die auf bereits als Hofraum oder Hausgarten zur Gebäudesteuer veranlagten Grundflächen standen, nicht mehr regelmäßig aufzumessen waren, es sei denn, daß die Aufmessung von den Beteilgten auf ihre Kosten ausdrücklich beantragt wurde.

Nach den „Abänderungen der Katasteranweisungen I, II und III" und der dazu erlassenen Verfügung vom 16. 3. 1909 zu §§ 2 und 38 der Anweisung II erübrigte sich eine Einmessung der Gebäude allgemein, so daß von diesem Zeitpunkt an die Gebäude nur noch gelegentlich bei Teilmessungen oder auf Kosten der Beteiligten aufgemessen wurden. Letzteres ist wohl nur in seltenen Fällen erfolgt, so daß seit 1910 die Katasterkarten den wirklichen Zustand der Bebauung nicht mehr nachweisen und infolgedessen für verschiedene Zwecke unbrauchbar geworden sind. Die Schuld hierfür wurde, wenn auch zu Unrecht, den Katasterämtern zugeschoben. Die Folge hiervon war, daß die Städte, Planungsbehörden usw. zur Selbsthilfe schreiten mußten und die Gebäude für die eigenen Zwecke selbst aufgemessen haben, ohne daß eine Übernahme in das preußische Kataster erfolgte und die hierfür aufgewandten Mittel auch für alle vorkommenden Zwecke nutzbar gemacht werden können.

Um diese mit der Zeit immer größer werdenden Lücken und Mängel abzustellen ist es ein dringendes Erfordernis, daß die Katasterkarten hinsichtlich des Gebäudebestandes vervollständigt werden; insbesondere auch mit Rücksicht auf die im Entstehen begriffenen Katasterplankarten.

Auch mit Rücksicht auf das Gesetz über die Neuordnung des Vermessungswesens vom 3. Juli 1934, nach dem das Vermessungswesen Reichsangelegenheit geworden ist, ist eine einwandfreie Aufmessung der Gebäude umsomehr erforderlich, als dies in einem Teil der deutschen Staaten stets laufend erfolgt ist. Die übrigen deutschen Staaten werden sich also diesem Verfahren zwangsläufig anschließen müssen, wenn eine Einheitlichkeit erzielt werden soll. Nur bei einwandfreier Aufmessung der Gebäude ist ein Entstehen brauchbarer, für alle Zwecke verwendbarer Kartenwerke gesichert zum Nutzen des Volkes, des Heeres, der Wirtschaft, der Verwaltung und des Rechts.

Die Frage über die Art und Genauigkeit der Gebäudeeinmessungen habe ich mit Rücksicht auf den Zeit- und Personalmangel eingehend geprüft. Ich halte kein einfacheres Verfahren für empfehlenswert, da die Katasterkarten und Unterlagen durch die in früheren Jahrzehnten erfolgten Gebäudeaufmessungen und Fortschreibungsvermessungen ohne Anschluß an das Liniennetz das ursprünglich gute Material so verschlechtert haben, daß eine weitere Belastung nach dieser Richtung hin nicht mehr tragbar ist. Während also durch das unten vorgeschlagene Verfahren die Karten dauernd verbessert und die Messungen von Jahr zu Jahr erleichtert werden und deshalb schneller ausgeführt werden können, würde ein einfacheres Verfahren wohl zuerst schneller zum Ziele führen, später aber in das Gegenteil umschlagen. Es hat sich stets vorteilhaft ausgewirkt, wenn von vornherein ganze Arbeit geleistet und alles Handeln nicht etwa auf die Befriedigung des augenblicklichen Bedürfnisses abgestellt wird. In der Übergangszeit und solange die seit Jahrzehnten nicht nachgetragenen Gebäude aufgemessen sind, muß eine geringe Doppelarbeit in Kauf genommen werden, um die fristgerechte Herstellung bald benötigter Katasterplankarten nicht zu gefährden.

Um jedoch für die Gebäudeeinmessungen eine gewisse Erleichterung zu verschaffen, ist die Fehlergrenze zu verdoppeln, damit alles Kleinliche ausgeschaltet wird. Hiervon ist ein größerer Vorteil zu erwarten, als wenn die Maße nur auf eine Stelle hinter dem Komma abgelesen werden, wie von anderer Seite vorgeschlagen wird. Das Ablesen und Schreiben einer Zahl mehr macht an und für sich keine besondere Arbeit, wohl aber das Durchfluchten, Freilegen der Messungs- oder Grenzlinien usw. Außerdem würde man bei gleichzeitigem Aufmessen von Grenzen und Gebäuden überlegen müssen, welches Maß wird auf *dm* und welches auf *cm* abgelesen. Weiter dürften die Endmaße alter Messungslinien in keinem Falle auf *dm* abgelesen werden, da dadurch das Zahlenmaterial entgegen den jetzigen Bestrebungen statt Vereinfachung Verwirrung bringen würde. Die Überlegung, wann auf *dm* und wann auf *cm* abzulesen ist, sowie die Abrundung erfordert mehr Zeit als wenn man, wie gewohnt, einheitlich die Maße abliest und einträgt. Die städtischen Vermessungsämter, die für die Mehrzahl der aufzumessenden Gebäude in Frage kämen, werden wohl sowieso ihr bisheriges Verfahren, auf *cm* abzulesen, beibehalten. Für die Längen der rechten Winkel und deren Sicherung halte ich Vorschriften für überflüssig, da das Maß der Sicherung den Aufnehmenden überlassen bleiben muß. Außerdem bieten die zu messenden Gebäudelängen und -breiten in den meisten Fällen genügende Sicherheit.

Wohin es führt, wenn zur rechtzeitigen Bewältigung der Arbeiten vereinfachte Arbeitsverfahren zugelassen werden, geht daraus hervor, daß das durch den Runderlaß des preußischen Finanzministers vom 9. 11. 1931 K.V. 2. 950 (F.M.Bl. S. 142) zugelassene vereinfachte Fortschreibungsverfahren bei Rentengutsgründungen durch den Runderlaß vom 22. 9. 1934 K.V. 2. 839 (F.M.Bl. S. 120) wieder eingeschränkt worden ist.

Die aus Anlaß der Grundsteuervermessungen entstandenen Katasterkarten weisen meistens neben den vermarkten Polygonpunkten, die inzwischen teilweise verschwunden sind, nur noch die vor 60 bis 70 Jahren bei den Neuaufnahmen vorhanden gewesenen Gebäude als brauchbare Anhaltspunkte nach, während damals leider keine Grenz- und Kleinpunkte vermarkt worden sind. Da auch diese alten Gebäude mehr und mehr verschwinden, würde der Zeitpunkt kommen, an dem Punkte der Katasterkarte in der Örtlichkeit kaum noch vorhanden sind, wodurch die heute noch brauchbaren Karten immer mehr an Wert verlieren und schließlich unbrauchbar würden.

Wie die Praxis gezeigt hat, ist bei den nachträglich nicht im Anschluß an das Liniennetz aufgemessenen Gebäuden, die auf nicht versteinten Eigentumsgrenzen (Hecken usw.) oder in geringer Entfernung davon gebaut sein sollen, vielfach nicht festzustellen, ob die Grenzen nicht etwa überbaut sind, wodurch ebenfalls Prozesse für die Eigentümer und Hypothekengläubiger entstehen können. Die einwandfreie Einmessung der Gebäude bildet das zuverlässigste Hilfsmittel für eine Sicherung und Wiederherstellung der Liniennetz- und Grenzpunkte und damit der Eigentums- und sonstigen Rechte.

Vor der Aufmessung der Gebäude müßte, soweit erforderlich, die Wiederherstellung der etwa fehlenden Polygonpunkte oder der Entwurf neuer Polygonzüge unter Mitwirkung von beamteten Vermessungsingenieuren erfolgen. Es muß deren vornehmlichste Aufgabe sein, darauf zu achten, daß jede Messung einer späteren Erneuerung der Karten dienstbar gemacht werden kann und vor allem eine weitgehende Vermarkung des Liniennetzes erfolgt im gleichen Sinne, wie ich es in einem in Kürze in dieser Zeitschrift erscheinenden Aufsatz über Erhaltung und allmähliche Erneuerung der Katasterkarten zu Abschnitt XIV der Anweisung II niedergelegt habe. Die Mehrarbeiten in den ersten Jahren machen sich für die Dauer um eine Vielfaches bezahlt.

Es wäre erwünscht, wenn die Gebäudeaufmessungen wegen ihrer liegenschaftsrechtlichen Bedeutung von Beamten ausgeführt würden. Dieses halte ich besonders mit Rücksicht auf die Nachtragung der seit Jahrzehnten nicht aufgemessenen Gebäude kaum durchführbar, da diese Arbeiten mit den zur Verfügung stehenden Beamten in absehbarer Zeit wohl nicht nachgeholt werden können, zumal sie weitere erhebliche örtliche und häusliche Ergänzungs- und Fortschreibungsarbeiten nach sich ziehen. Daher ist die Heranziehung der Katastertechniker zweckmäßig in den Fällen, in denen keine Eigentumsgrenzen berührt werden. Soweit Eigentumsgrenzen berührt werden, treten die Bestimmungen für Fortschreibungsvermessungen in Kraft. Die zahlreichen Gebäudeaufmessungen, bei denen Eigentumsgrenzen berührt und erst durch Verhandlungen usw. festgelegt werden oder bei denen ein Liniennetz herzustellen ist, können nicht ohne umfangreiche Mitwirkung von Beamten erfolgen, so daß hier eine besonders gute Überwachung vorliegt. Die Aufmessung innerhalb des vermarkten Liniennetzes prüft sich von selbst und ist leicht nachzuprüfen, so daß mir die Übertragung der Arbeiten an die geprüften Katastertechniker auch aus diesen Gründen möglich erscheint, zumal dieses Verfahren bei den meisten Stadtvermessungsämtern bereits Brauch sein dürfte und deshalb eine Umkehr hiervon bedenklich ist. Außerdem tritt hierdurch auch eine wesentliche Verbilligung der Arbeiten ein.

Gerade die auf Kosten der Beteiligten aufzumessenden Gebäude bieten einen Anlaß, die allmähliche Erneuerung der Katasterkarten wesentlich zu fördern. Sind einmal die Messungslinien im Anschluß an die Gebäude festgelegt, so tritt eine wesentliche Vereinfachung der Vermessungen, sowie der wirksamen örtlichen und häuslichen Prüfungen der Vermessungen ein.

Die Vermarkung der Messungspunkte erfordert nur geringe Mehrarbeit, wenn man im nicht steinigen Boden einen von der Gemeinde für die Dauer zu beschaffenden Pfahl mit Eisenspitze und Eisenring, wie ihn erfahrungsgemäß jeder Schmied für einen geringen Preis anfertigt, in den Erdboden vorschlägt und das *D* in das vorgeschlagene Loch einsetzt. Bei steinigem Boden erfolgt die Vermarkung durch Eisenrohre, die nach meinen Erfahrungen als Abfallstücke von verzinkten Wasserleitungsrohren bei fast jedem Schmied vorhanden sind und von der Gemeinde für ein geringes Entgelt beschafft werden können. Das Einschlagen der Rohre nimmt nicht wesentlich mehr Zeit in Anspruch als das Einschlagen der Pfähle. Insbesondere wird durch das Vermarken der Linien zwangsläufig eine gewissenhaftere Arbeit erreicht.

Die Aufmessung der Gebäude wird in der Regel von den Messungslinien aus erfolgen müssen, da die Eigentumsgrenzen in den meisten Fällen nicht vermarkt sein werden. Aber auch in den Fällen, in denen die Eigentumsgrenzen durch Grenzsteine vermarkt sind, wird häufig die Aufmessung von Messungslinien aus sicherer und schneller zum Ziele führen, da die Grenzsteine infolge der Bebauung und Auffüllung des Geländes in vielen Fällen verschüttet sind, die Aufdeckung der Grenzsteine, von denen oft 4 Zäune usw. abgehen, lange Zeit in Anspruch nehmen wird und das Einfluchten und Messen auf den Grenzstrecken infolge der darauf stehenden Hindernisse wie Zäune, Hecken usw. erschwert, wenn nicht unmöglich wird.

Die durch die laufenden Gebäudeeinmessungen entstehenden Mehrarbeiten sind nicht so erheblich, daß sie nicht mit dem nach Abgabe der Steuerarbeiten den Katasterämtern zur Verfügung stehenden Personal erledigt werden können. Für das Katasteramt Hersfeld, das als mittelgroßes Amt angesprochen werden kann und deshalb Durchschnittssätze ergibt: habe ich folgendes ermittelt:

Nach dem Durchschnitt der Jahre 1911—1913 und 1934—1936 sind im Kreise Hersfeld im Jahre ca. 330 Gebäude (280 Neubauten und 50 Anbauten) neu errichtet bezw. durch Anbau verändert. Das sind 1,5% vom Gesamtbestande der Gebäude (Spalten 7 und 8 der Hauptübersicht des Bestandes an Gebäuden des Rechnungsjahres 1936). Der vorgenannte Satz von 1,5% ist hier in Stadt und Land ziemlich gleich, in den Städten überwiegen die Wohngebäude und in den ländlichen Ortschaften die landwirtschaftlichen Nebengebäude und Anbauten. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß in den Städten mit Vermessungsämtern die Gebäude zum Teil bereits so eingemessen worden sind, daß sie ohne weiteres in die Katasterkarte übernommen werden können, wie auch in der Stadt Hersfeld, wo teilweise eine einwandfreie Aufnahme der Gebäude durch das Stadtvermessungsamt erfolgt ist.

Die örtliche Arbeitszeit für die Aufmessung der 330 Gebäude und Anbauten wird etwa 2 bis 3 Monate in Anspruch nehmen; rechnet man für die häusliche Bearbeitung etwa 1 bis 2 Monate, so wird für diese Zwecke ein Techniker im Durschnitt etwa 3 bis 5 Monate benötigen, — in großen Ämtern entsprechend mehr und in kleinen Ämtern entsprechend weniger.

Außerdem ist zu berücksichtigen, daß bereits ein wesentlicher Teil der Gebäude durch die Stadtvermessungsämter aufgemessen wird, z. B. in der Stadt Hersfeld etwa 70 Gebäude = $^1/_5$ der oben genannten, so daß sich die oben genannten Zeiten für örtliche und häusliche Arbeiten entsprechend vermindern. Erforderlich ist natürlich, daß die Ämter mit geübten Meßgehilfen und allen technischen Hilfsmitteln ausgerüstet sind.

Allgemein könnten den Städten mit eigenen Vermessungsämtern die Gebäudeeinmessungen als Auftragsarbeiten übertragen werden.

Da die Beteiligten nur ganz ausnahmsweise von der Möglichkeit, die Gebäude auf ihre Kosten aufmessen zu lassen, Gebrauch gemacht haben, muß durch Verordnung gefordert werden, daß sämtliche Neubauten und Anbauten gebührenpflichtig aufgemessen werden müssen, wie es schon in einem Teil der deutschen Länder geschieht. Die durch die Katasterämter festzustellenden Gebühren wären zweckmäßigerweise mit den Baupolizeigebühren einzuziehen und an die Staatskasse abzuführen. Um die Aufmessung sicherzustellen, dürfte der Bauabnahmeschein durch die Baupolizeibehörde nicht eher erteilt werden, bis eine Bescheinigung des Katasteramts vorläge, daß die Gebäude eingemessen oder daß die Messung beantragt und die Gebühren als Vorschuß eingezahlt sind. Dieses Verfahren müßte deshalb vorgesehen werden, um bei Häufung der Anträge die Abnahme nicht zu verzögern. Soweit die städtischen Vermessungsämter die Gebäude selbst einmessen, würden den Städten die Gebühren zu etwa $^3/_4$ zufließen, was in Städten mit Vermessungsämtern wohl die Regel bilden wird. Es wäre wohl das Nächstliegende, daß die Gebühren für die Gebäudeeinmessungen von der Katasterverwaltung selbst eingezogen würden. Dieses Verfahren halte ich aber deswegen für schwer durchführbar, weil die Bauherrn meist kein großes Interesse an der Aufmessung haben und deshalb bei der Zahlung der Gebühren stets Schwierigkeiten machen werden. Auch im Zwangswege dürfte oft keine Bezahlung erreicht werden, während die Zahlung ohne weiteres erfolgt, wenn davon die Erteilung des Bauscheines abhängig gemacht wird.

Die Kostenfrage für die rückständige Aufmessung der Gebäude ist natürlich sehr schwierig, und es könnte hier nur nach den Neumessungsbestimmungen mit den Beteiligten und Gemeinden verhandelt werden. Auch könnten hier im Sinne der vorstehenden Ausführungen Bestimmungen durch das Reichsinnenministerium, dem ja die Gemeinden und das Vermessungswesen unterstehen, getroffen werden. Damit ist die Gewähr geboten, daß sämtliche noch nicht aufgemesssenen Gebäude nachgetragen werden, woran ja auch ein erhebliches Reichsinteresse vorliegt.

Soweit neben neu errichteten oder veränderten aufgemessenen Gebäuden auf demselben Grundstück sich noch alte bisher in der Katasterkarte nicht nachgewiesene Gebäude befinden, müssen sie natürlich mitaufgemessen werden, aber für eine geringere Gebühr, die etwa die Hälfte der für neu errichtete oder veränderte Gebäude betragen dürfte und bei Aufmessungen größeren Umfangs nach Maßgabe des Gebührentarifs für Neumessungen zu berechnen wäre. Der Gebührentarif wäre zweckmäßig zu staffeln nach dem Baukostenwert und der Zahl der aufzumessenden Gebäude mit einer Mindestgebühr von 5 RM bis etwa 5000 RM Baukostenwert. Bei diesen Sätzen werden die dem Staate für die Aufmessung erwachsenen Kosten gedeckt. Diese Gebühr dürfte im Vergleich zu den Gebühren der Baupolizei keine nennenswerte Belastung für den Bauherrn ergeben, zumal die Einmessung, die vielfach schon von den Finanzinstituten und den Hypothekengläubigern gefordert wird, in seinem Interesse liegt.

Der Abbruch von in der Katasterkarte verzeichneten Gebäuden muß von dem Eigentümer gemeldet werden, anderenfalls die darauf entfallenden Steuern weiter erhoben werden; die hiermit verbundenen Arbeiten werden nach erfolgter Abmeldung gebührenfrei ausgeführt.

Da eine Wiederherstellung und Vermarkung des Messungsliniennetzes nicht nur dem zufälligen Antragsteller zugute kommt, sondern auch den übrigen Anliegern und besonders der Gemeinde, die mit Wegen usw. in den meisten Fällen angrenzt, so ist es ein Akt der Gerechtigkeit, daß die Gemeinde zu diesen Kosten auch mit herangezogen wird und zwar in der Weise, wie ich es in meinem Vorschlag über die allmähliche Erneuerung des Katasters niedergelegt habe.

Die Heranziehung der Gemeinden und Eigentümer zu den Kosten ist im Gegensatz zu den früheren Verfahren nach dem Grund- und Gebäudesteuergesetz auch gerechtfertigt, da die erstmaligen Aufnahmen nur im Interesse des Staates zu Steuerzwecken ausgeführt sind, während durch die später erfolgte Zurückführung des Grundbuches auf die Katasterangaben deren Hauptwert in der Sicherung des Eigentums im Interesse der Eigentümer liegt. Diese können deshalb ebenso wie bei den Grundbuchkosten auch zu den Vermessungskosten wenigstens teilweise herangezogen werden.

Durch die Beteiligung der Gemeinden und Eigentümer an den Kosten wird auch deren Interesse an der Erhaltung der Messungspunkte geweckt. Für die Anweisung zur Gebäudeaufmessung schlage ich folgenden Wortlaut vor:

Anweisung.

A. Die vom Inkrafttreten dieser Anweisung an neu errichteten oder veränderten Gebäude sind auf Kosten der Eigentümer aufzumessen; desgleichen die mit den vorgenannten Gebäuden auf demselben Grundstück stehenden alten, bisher im Kataster noch nicht nachgewiesenen Gebäude.

B. Die auf abzumessenden Trennstücken ganz oder teilweise errichteten Gebäude sind aufzumessen, sofern nicht bereits einwandfreie Messungszahlen für diese Gebäude vorliegen. Ebenso ist bei Gebäuden auf Reststücken zu verfahren, wenn die Gebäude für die Festlegung der Trennstücksgrenzen von Bedeutung sind oder wenn die Trennstücke mitzuvermessen sind.

C. Die alten in der Katasterkarte nicht nachgewiesenen Gebäude werden auf Antrag und Kosten der Beteiligten oder der Gemeinden bei umfangreichen Aufmessungen in einem Zuge nach Maßgabe der Neumessungsbestimmungen aufgemessen.

Anhang zu A und B.

Unter den Begriff Gebäude fallen die mit dem Grund und Boden durch Fundamente fest verbundenen Bauwerke, die für die Dauer errichtet sind und

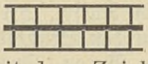
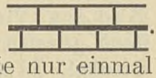
Personen, Tieren oder Sachen gegen äußere Einflüsse Schutz gewähren und einen Umfang haben, der den Eintritt von Personen ermöglichen.

Von der Aufmessung einzeln gelegener topographisch nicht hervortretender Gebäude, die keinen Wohnzwecken dienen, kann abgesehen werden; desgleichen von der Aufmessung von Gebäuden, deren bebaute Grundfläche weniger als 20 qm Grundfläche beträgt, sofern es sich nicht um topographisch hervortretende Bauwerke handelt.

Bei Veränderungs- und Anbauten kann von der Aufmessung abgesehen werden, wenn sie nicht mehr als 10% der bebauten Gesamtgrundfläche betragen.

Die Gebäude sind möglichst vom Liniennetz aus aufzumessen. Soweit kein Liniennetz vorhanden ist, sind die Aufmessungslinien so anzulegen, daß sie für eine spätere Erneuerung der Katasterwerke nutzbar gemacht werden können. Die Messungslinien sind, soweit sie nicht örtlich von festen Punkten ausgehen und auf solche enden, dauerhaft zu vermarken. Falls alte Messungslinien infolge örtlicher Hindernisse nicht hergestellt werden können, sind die neuen in das Polygonnetz einzubindenden Linien so zu legen, daß voraussichtlich keine Verbauung dieser Linien eintritt.

Die Kataster- oder Vermessungstechniker führen die Gebäudeaufmessungen aus, während die bei der Aufmessung der Gebäude sich ergebenden Grenzabweichungen unter Mitwirkung von Beamten zu beseitigen sind. Schwierige oder umfangreiche Wiederherstellungen des Liniennetzes — insbesondere der Polygonpunkte — haben unter Mitwirkung von Vermessungsingenieuren zu erfolgen. Wird eine Ueberbauung der Eigentumsgrenze festgestellt, so ist den Beteiligten anheimzugeben, die Fortschreibung der Eigentumsgrenze auf ihre Kosten zu beseitigen. Die ausgeführten Gebäudeaufmessungen sind durch Vermessungsingenieure mindestens einmal im Jahre durch örtliche Nachmessungen zu prüfen, wobei auf die Nachprüfung des Liniennetzes besonderer Wert zu legen ist. Erst nach Unterschrift eines Vermessungsingenieurs ist die Gebäudeaufmessungssache in das Kataster zu übernehmen.

Bei den auf Eigentumsgrenzen errichteten Gebäuden sind mit Ausnahme solcher, die an Straßen, Wege usw. grenzen, die Eigentumsverhältnisse der die Gebäude abschließenden Mauern im Feldbuch darzustellen und zwar für gemeinschaftliche Mauern mit dem Zeichen  und für besondere Abschlußmauern eines jeden Grundstücks mit dem Zeichen . Die Aufmessung hat in einfachster Weise so zu erfolgen, daß die nur einmal zu messenden Gebäudelängen und -breiten als Sicherungsmaße dienen. Kleinere Anbauten sind durch rechtwinklige Abstände von den Gebäudewänden aus aufzumessen. Schiefwinklige Ecken sind als solche zu kennzeichnen.

Soweit keine Eigentumsverhältnisse entgegenstehen, sind als Begrenzungslinien der Gebäude in der Regel die aus dem Erdboden tretenden Fundamentslinien aufzumessen.

Als Fehlergrenze für die Gebäudeeinmessungen ist das Doppelte der für Fortschreibungsvermessungen vorgesehenen Fehlergrenzen zulässig, sofern die Gebäude unzweifelhaft von den Grenzen zurückbleiben und auch später nicht als Eigentumsgrenzen in Frage kommen.

Mitteilungen der Geschäftsstelle.

Personalnachrichten.

Preußen. Landeskulturverwaltung. **Ernannt:** 3. V.räten: die Reg.L. Schmidt, (Hermann), Adenau, Bohn, Gleiwitz, Braukmeier, Wesermünde, Ernesti, Heide, Holzhausen, Schneidemühl, Knöpfler, M.-Gladbach, Wurzel, Euskirchen. 3. V.Oberinspekt.: die V.I. Plag (Adolf), Berlin, Reichsernährungsministerium, Arlitt, Kassel, Ostermeyer, Hannover, Noll u. Harder, Münster. 3. V.insp.: die V.Prakt. Nanzka, Torgau, Hanke, Stendal, Placzek, Nordhausen, Lammertz, Siegen, Henke, Soest, Hielscher, Gleiwitz, Stenzel, Liegnitz, Weitze, Hannover, Klöhn, Osnabrück, Weiershausen, Dillenburg, Aschenbrenner, Eschwege, Lammeyer, Fulda, Plannet, Wetzlar, Draude, Wiesbaden, Sternberg, Königsberg, Botor, Kiel, die O.Sekr. Giersmann, Münster, Schneider (Ferdinand), Siegburg, Schweitzer, Koblenz, Horn, Koblenz, Weber, Trier, Steiner, Königsberg. — **Planstelle in** A 4 c 1 **erhalten:** V.Insp. Berg, Aachen, Reithe, Torgau, Köhler, Frankenberg, Burghard, Hanau, Apel, Hersfeld, Plag, Wiesbaden, Lohfink, Bonn, Heimberg, Koblenz, Schulte, Köln, Bagdahn, Bad Kreuznach, Fingerhut, Mayen, Willberg, M.-Gladbach, Laubye, Prüm, Banz, Simmern, Höhne, Waldbröl, Busch, Merseburg, Lütke, Coesfeld, Kleimann, Coesfeld, Wille, Dortmund, Degener, Olpe, Siebert, Siegburg. — **Bestellt:** V.Rat Bohm z. lt. Vermess.Beamten d. Kulturämter Gleiwitz u. Ratibor, V.Rat Schmidt (Hermann) z. lt. Vermess.Beamten d. Kulturamtes Adenau, V.Rat Reichenbach z. lt. Vermess.Beamten d. Kult.amtes Stralsund, Verm.Insp. Prüfing z. Bürovorsteher d. Vermess.Büros Marburg II, Verm.Insp. Jentsch, z. Bürovorsteher d. Vermess.Büros Münster. — **Versetzt:** die V.Räte Bilse, Frankenberg nach Kassel, Bornemann, Dillenburg nach Wiesbaden, die Reg.L. Schmitt, Torgau nach M.-Gladbach, Gümmer, Bernkastel nach Minden, Dr. Faulstich, Frankenberg nach Fulda, Wolfeld, Simmern i. d. Landesdienst Thüringen z. Kulturamt Hildburghausen, Verm.Ass. Meyer, Frankenberg nach Fulda, die V.Insp. Burghardt, Frankenberg nach Fulda, Berthel, Dillenberg nach Fulda, Beisheim, Limburg nach Wiesbaden, Risse, Dillenburg nach Wiesbaden, Hielscher, Ratibor nach Gleiwitz, Dülberg, Soest nach Münster (L.K.A.), Hahn, Münster nach Soest, die V.O.Sekr. Brack, Frankenberg nach Fulda, Hofmann, Frankenberg nach Fulda, V.Prakt. Weitze, Göttingen nach Hannover, die V.Sup. Winter, Prenzlau nach Berlin, Struwe, Perleberg nach Schneidemühl, Kolifka, Lüneburg nach Hannover, Helm, Göttingen nach Hannover, Cullmann, Marburg nach Kassel, Gundlach, Eschwege nach Kassel, Hennemuth, Fulda nach Kassel, Rein, Dillenburg nach Kassel, Kuhn, Fulda nach Kassel, Schubert, Schmalkalden nach Kassel, Zange, Eschwege nach Kassel, Jokisch, Frankenberg nach Kassel. — **In den Staatsdienst übernommen:** als Verm.Sup., die Zivilanwärter Beckers, Berlin, Vagt, Frankfurt a. O., Stricker, Waldbröl. — **In den Ruhestand getreten:** die Verm.Räte Meune, Düsseldorf, Leipold, Düsseldorf, Noack, Stendal, Zimmermann, Hildburghausen, Nitze, Olpe, Riebeling, Marburg, Bünnecke, Limburg, Stockstrom, Eschwege, Reg.L. Timpe, Stolp, die V.Insp. Rebsch, Dillenburg, Grun, Dillenburg, Harting, Marburg. — **Gestorben:** Verm.Insp. Freyen (Anton), in Simmern, 16. 6. 38, Verm.Rat Kaiser in Arnsberg, 30. 7. 38.

Inhalt:

Verlag von Konrad Wittwer in Stuttgart.

Druck von Carl Hammer (Inh. Wilh. Herget), Hofbuchdruckerei in Stuttgart.