ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

herausgegeben vom

Deutschen Verein für Vermessungswesen (D.V.W.) E.V.

Schriftleiter: Professor Dr. Dr.-Ing. E. h. O. Eggert, Berlin-Dahlem, Ehrenbergstraße 21

Heft 20.

1938 15. Oktober Band LXVII

Reihenentwicklungen für die ebene Meridian-Konvergenz der Gauß-Krügerschen Projektion.

Von Dr. Wl. K. Hristow, Sofia.

Definitionsgemäß ist die ebene Meridiankonvergenz c gleich dem Winkel zwischen dem Bilde des Meridians l = const. und der zur x-Achse parallelen Geraden y = const., oder was für konforme Abbildungen dasselbe ist, gleich dem Winkel zwischen dem Bilde des Parallelkreises q = const. (φ = const.) und der zur x-Achse normalen Geraden x = const. Ausgehend von diesen beiden Auffassungen bilde ich an Hand der nebenstehenden Figur die nachstehenden Formeln für tg c.

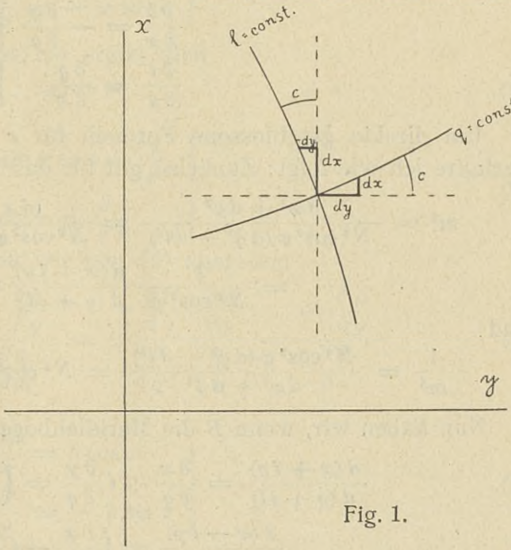

Fig. 1.

l = const.

$$\operatorname{tg} c = \frac{-dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial y}{\partial q} dq - \frac{\partial y}{\partial l} dl}{\frac{\partial x}{\partial q} dq + \frac{\partial x}{\partial l} dl} = \frac{-\frac{\partial y}{\partial q}}{\frac{\partial x}{\partial q}} \tag{1}$$

$$dl = \frac{\partial l}{\partial x} dx + \frac{\partial l}{\partial y} dy = 0,\ \operatorname{tg} c = \frac{-dy}{dx} = \frac{\frac{\partial l}{\partial x}}{\frac{\partial l}{\partial y}} \tag{2}$$

q = const.

$$\operatorname{tg} c = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{\partial x}{\partial q} dq + \frac{\partial x}{\partial l} dl}{\frac{\partial y}{\partial q} dq + \frac{\partial y}{\partial l} dl} = \frac{\frac{\partial x}{\partial l}}{\frac{\partial y}{\partial l}} \tag{3}$$

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy = 0, \ \operatorname{tg} c = \frac{dx}{dy} = \frac{-\frac{\partial q}{\partial y}}{\frac{\partial q}{\partial x}} \tag{4}$$

Man ersieht dabei, daß (1) mit (3) bzw. (2) mit (4) gleichwertig sind. Denn aus

$$\frac{d(x+iy)}{d(q+il)} = \frac{\partial x}{\partial q} + i \frac{\partial y}{\partial q} = -i \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial l} \tag{5}$$

bzw.

$$\frac{d(q+il)}{d(x+iy)} = \frac{\partial q}{\partial x} + i \frac{\partial l}{\partial x} = -i \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial y} \tag{6}$$

folgt

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial y}{\partial q} &= \frac{\partial x}{\partial l} \\ \frac{\partial x}{\partial q} &= \frac{\partial y}{\partial l} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial x} &= -\frac{\partial q}{\partial y} \\ \frac{\partial l}{\partial y} &= \frac{\partial q}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Um direkte geschlossene Formeln für c anstatt für tg c zu bekommen, verfahre ich wie folgt: Zunächst gilt für das Vergrößerungsverhältnis m

$$m^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + dl^2)} = \frac{(dx + i dy)(dx - i dy)}{N^2 \cos^2 \varphi (dq + i dl)(dq - i dl)} =$$
$$= \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{d(x+iy)}{d(q+il)} \cdot \frac{d(x-iy)}{d(q-il)} \tag{9}$$

und

$$\frac{1}{m^2} = \frac{N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + dl^2)}{dx^2 + dy^2} = N^2 \cos^2 \varphi \cdot \frac{d(q+il)}{d(x+iy)} \cdot \frac{d(q-il)}{d(x-iy)} \tag{10}$$

Nun haben wir, wenn B die Meridianbogenlänge bezeichnet,

$$\frac{d(x+iy)}{d(q+il)} = \frac{\partial x}{\partial q} + i \frac{\partial y}{\partial q} = \left(\frac{\partial x}{\partial B} + i \frac{\partial y}{\partial B}\right) \cdot \frac{dB}{dq} \tag{11}$$

$$\frac{d(x-iy)}{d(q-il)} = \left(\frac{\partial x}{\partial B} - i \frac{\partial y}{\partial B}\right) \cdot \frac{dB}{dq} \tag{12}$$

$$\frac{dB}{dq} = N \cos \varphi \tag{13}$$

(13) in (11) und (12), darauf (11) und (12) in (9) eingetragen gibt

$$m^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2 \tag{14}$$

Eine ähnliche Formel hat schon Krüger in seinem grundlegenden Buch „Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene", Veröffentlichung des Königlich Preußischen geodätischen Instituts, Neue Folge Nr. 52, abgeleitet. Benutzen wir Gl. (8), so haben wir

$$\frac{d(q+il)}{d(x+iy)} = \frac{\partial q}{\partial x} + i \frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} - i \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{dq}{dB} \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial x} - i \frac{\partial B}{\partial y}\right) \tag{15}$$

$$\frac{d(q-il)}{d(x-iy)} = \frac{dq}{dB} \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial x} + i\frac{\partial B}{\partial y}\right) \tag{16}$$

$$\frac{dq}{dB} = \frac{1}{N\cos\varphi} \tag{17}$$

(17) in (15) und (16), darauf (15) und (16) in (10) eingetragen, gibt

$$\frac{1}{m^2} = \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 \tag{18}$$

welches die Krügersche Formel l. c. S. 4 (15) ist.

Unter Benutzung von (1) habe ich

$$\frac{\sin c}{\cos c} = \operatorname{tg} c = \frac{-\dfrac{\partial y}{\partial q}}{\dfrac{\partial x}{\partial q}} = \frac{-\dfrac{\partial y}{\partial B}\cdot\dfrac{dB}{dq}}{\dfrac{\partial x}{\partial B}\cdot\dfrac{dB}{dq}} = \frac{-\dfrac{\partial y}{\partial B}}{\dfrac{\partial x}{\partial B}} \tag{19}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= g\cos c \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= -\,g\sin c \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Wird (20) in (14) eingesetzt, so ergibt sich

$$g = m \tag{21}$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} m\sin c &= -\frac{\partial y}{\partial B} \\ m\cos c &= \frac{\partial x}{\partial B} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

In ähnlicher Weise ist, wenn wir von (4) ausgehen

$$\frac{\sin c}{\cos c} = \operatorname{tg} c = \frac{-\dfrac{\partial q}{\partial y}}{\dfrac{\partial q}{\partial x}} = \frac{-\dfrac{dB}{dq}\cdot\dfrac{\partial q}{\partial y}}{\dfrac{dB}{dq}\cdot\dfrac{\partial q}{\partial x}} = \frac{-\dfrac{\partial B}{\partial y}}{\dfrac{\partial B}{\partial x}} \tag{23}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= h\cos c \\ \frac{\partial B}{\partial y} &= -\,h\sin c \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

(24) in (18) eingesetzt gibt

$$h = \frac{1}{m} \tag{25}$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m}\sin c &= -\frac{\partial B}{\partial y} \\ \frac{1}{m}\cos c &= \frac{\partial B}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

welches die Krügerschen Gleichungen l. c. S. 5, (17) sind.

Des weiteren multipliziere ich die erste Gleichung (22) mit i, addiere sie zu der zweiten und berücksichtige (12)

$$m\cos c + i\,m\sin c = m\,e^{ci} = \left(\frac{\partial x}{\partial B} - i\frac{\partial y}{\partial B}\right)\frac{dB}{dq}\cdot\frac{dq}{dB} = \frac{d(x-iy)}{d(q-il)}\cdot\frac{dq}{dB} \tag{27}$$

In ähnlicher Weise findet sich

$$m e^{-ci} = \frac{d(x+iy)}{d(q+il)} \cdot \frac{dq}{dB} \tag{28}$$

(27) dividiert durch (28), und darauf logarithmiert, gibt schließlich

$$c = \frac{1}{2i} \lg \text{nat} \left\{ \frac{d(x-iy)}{d(q-il)} : \frac{d(x+iy)}{d(q+il)} \right\} \tag{29}$$

Aehnliche Formel hat schon Krüger abgeleitet. Wird nämlich die erste Gleichung (26) multipliziert mit i und zu der zweiten Gleichung addiert, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (15)

$$\frac{1}{m}\cos c + i\frac{1}{m}\sin c = \frac{1}{m}e^{ci} = \frac{dB}{dq}\cdot\frac{dq}{dB}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - i\frac{\partial B}{\partial y}\right) = \frac{dB}{dq}\cdot\frac{d(q+il)}{d(x+iy)} \tag{30}$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\frac{1}{m}e^{-ci} = \frac{dB}{dq}\cdot\frac{d(q-il)}{d(x-iy)} \tag{31}$$

(30) dividiert durch (31) und darauf logarithmiert, gibt schließlich

$$c = \frac{1}{2i} \lg \text{nat} \left\{ \frac{d(q+il)}{d(x+iy)} : \frac{d(q-il)}{d(x-iy)} \right\} \tag{32}$$

welches die Krügersche Gleichung l. c. 5, (19) ist.

Gl. (29) wird mir zur Aufstellung der Reihen für c aus den geographischen Koordinaten, dagegen Gl. (32) — aus den rechtwinkligen Koordinaten dienen. Ich bemerke, daß sie im Grunde identisch sind. Das ist aber nicht der Fall mit den vorangehenden Gleichungen (22) und (26) bzw. (14) und (18), so daß die obigen Betrachtungen wohl manches Neue bringen.

Jetzt wende ich mich der eigentlichen Aufgabe zu. Ich gehe nämlich von den folgenden Potenzreihen aus, die für einen Punkt auf dem Grundmeridian angesetzt werden.

$$\begin{aligned} \Delta x \pm iy &= a_1(\Delta q \pm il) + a_2(\Delta q \pm il)^2 + a_3(\Delta q \pm il)^3 + \\ &\quad + a_4(\Delta q \pm il)^4 + a_5(\Delta q \pm il)^5 + a_6(\Delta q \pm il)^6 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \Delta q \pm il &= b_1(\Delta x \pm iy) + b_2(\Delta x \pm iy)^2 + b_3(\Delta x \pm iy)^3 + \\ &\quad + b_4(\Delta x \pm iy)^4 + b_5(\Delta x \pm iy)^5 + b_6(\Delta x \pm iy)^6 \end{aligned} \tag{34}$$

Die Differentiation von (33) bzw. (34) gibt nach gehöriger Entwicklung und Zusammenziehung

$$\begin{aligned} \frac{d(x \pm iy)}{d(q \pm il)} &= (a_1 + 2a_2 + 3a_3\Delta q^2 - 3a_3 l^2 + 4a_4\Delta q^3 - 12a_4\Delta q l^2 + \\ &\quad + 5a_5\Delta q^4 - 30a_5\Delta q^2 l^2 + 5a_5 l^4 + 6a_6\Delta q^5 - 60a_6\Delta q^3 l^2 + 30a_6\Delta q l^4) \pm \\ &\quad \pm i(2a_2 l + 6a_3\Delta q l + 12a_4\Delta q^2 l - 4a_4 l^3 + 20a_5\Delta q^3 l - \\ &\quad - 20a_5\Delta q l^3 + 30a_6\Delta q^4 l - 60a_6\Delta q^2 l^3 + 6a_6 l^5) \end{aligned} \tag{35}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{d(q \pm il)}{d(x \pm iy)} &= (b_1 + 2b_2\Delta x + 3b_3\Delta x^2 - 3b_3 y^2 + 4b_4\Delta x^3 - 12b_4\Delta x y^2 + \\ &\quad + 5b_5\Delta x^4 - 30b_5\Delta x^2 y^2 + 5b_5 y^4 + 6b_6\Delta x^5 - 60b_6\Delta x^3 y^2 + 30b_6\Delta x y^4) \pm \\ &\quad \pm i(2b_2 y + 6b_3\Delta x y + 12b_4\Delta x^2 y - 4b_4 y^3 + 20b_5\Delta x^3 y - \\ &\quad - 20b_5\Delta x y^3 + 30b_6\Delta x^4 y - 60b_6\Delta x^2 y^3 + 6b_6 y^5) \end{aligned} \tag{36}$$

Gl. (35) bzw. (36) eingesetzt in (29) bzw. (32) gibt

$$c = \frac{1}{2i} \lg \text{nat} \{[1 + A_{1\cdot 1} - iA_{1\cdot 2}] : [1 + A_{1\cdot 1} + iA_{1\cdot 2}]\} \tag{37}$$

bzw.

$$c = \frac{1}{2i} \lg \operatorname{nat} \{[1 + B_{1\cdot 1} + i B_{1\cdot 2}] : [1 + B_{1\cdot 1} - i B_{1\cdot 2}]\} \tag{38}$$

wo

$$A_{1\cdot 1} = 2\frac{a_2}{a_1}\Delta q + 3\frac{a_3}{a_1}\Delta q^2 - 3\frac{a_3}{a_1}l^2 + 4\frac{a_4}{a_1}\Delta q^3 - 12\frac{a_4}{a_1}\Delta q l^2 + 5\frac{a_5}{a_1}\Delta q^4 - $$
$$- 30\frac{a_5}{a_1}\Delta q^2 l^2 + 5\frac{a_5}{a_1}l^4 + 6\frac{a_6}{a_1}\Delta q^5 - 60\frac{a_6}{a_1}\Delta q^3 l^2 + 30\frac{a_6}{a_1}\Delta q l^4 \tag{39}$$

$$A_{1\cdot 2} = 2\frac{a_2}{a_1}l + 6\frac{a_3}{a_1}\Delta q l + 12\frac{a_4}{a_1}\Delta q^2 l - 4\frac{a_4}{a_1}l^3 + 20\frac{a_5}{a_1}\Delta q^3 l - 20\frac{a_5}{a_1}\Delta q l^3 + $$
$$+ 30\frac{a_6}{a_1}\Delta q^4 l - 60\frac{a_6}{a_1}\Delta q^2 l^3 + 6\frac{a_6}{a_1}l^5 \tag{40}$$

bzw.

$$B_{1\cdot 1} = 2\frac{b_2}{b_1}\Delta x + 3\frac{b_3}{b_1}\Delta x^2 - 3\frac{b_3}{b_1}y^2 + 4\frac{b_4}{b_1}\Delta x^3 - 12\frac{b_4}{b_1}\Delta x y^2 + 5\frac{b_5}{b_1}\Delta x^4 - $$
$$- 30\frac{b_5}{b_1}\Delta x^2 y^2 + 5\frac{b_5}{b_1}y^4 + 6\frac{b_6}{b_1}\Delta x^5 - 60\frac{b_6}{b_1}\Delta x^3 y^2 + 30\frac{b_6}{b_1}\Delta x y^4 \tag{41}$$

$$B_{1\cdot 2} = 2\frac{b_2}{b_1}y + 6\frac{b_3}{b_1}\Delta x y + 12\frac{b_4}{b_1}\Delta x^2 y - 4\frac{b_4}{b_1}y^3 + 20\frac{b_5}{b_1}\Delta x^3 y - $$
$$- 20\frac{b_5}{b_1}\Delta x y^3 + 30\frac{b_6}{b_1}\Delta x^4 y - 60\frac{b_6}{b_1}\Delta x^2 y^3 + 6\frac{b_6}{b_1}y^5 \tag{42}$$

Die Entwicklung von (37) bzw. (38) bis zur fünften Ordnung einschließlich gibt

$$c = -A_{1.2} + A_{1.1} \cdot A_{1.2} - A_{1.1}^2 \cdot A_{1.2} + \frac{1}{3}A_{1.2}^3 + A_{1.1}^3 \cdot A_{1.2} - A_{1.1} \cdot A_{1.2}^3 - $$
$$- A_{1.1}^4 \cdot A_{1.2} + 2A_{1.1}^2 \cdot A_{1.2}^3 - \frac{1}{5}A_{1.2}^5 \tag{43}$$

bzw.

$$c = B_{1.2} - B_{1.1} \cdot B_{1.2} + B_{1.1}^2 \cdot B_{1.2} - \frac{1}{3}B_{1.2}^3 - B_{1.1}^3 \cdot B_{1.2} + B_{1.1} \cdot B_{1.2}^3 + $$
$$+ B_{1.1}^4 \cdot B_{1.2} - 2B_{1.1}^2 \cdot B_{1.2}^3 + \frac{1}{5}B_{1.2}^5 \tag{44}$$

(39) und (40) eingesetzt in (43), bzw. (41) und (42) eingesetzt in (44), geben

$$c = -2\frac{a_2}{a_1}l + \left(-6\frac{a_3}{a_1} + 4\frac{a_2^2}{a_1^2}\right)\Delta q l + \left(-12\frac{a_4}{a_1} + 18\frac{a_2 a_3}{a_1^2} - 8\frac{a_2^3}{a_1^3}\right)\Delta q^2 l + $$
$$+ \left(4\frac{a_4}{a_1} - 6\frac{a_2 a_3}{a_1^2} + \frac{8}{3}\frac{a_2^3}{a_1^3}\right)l^3 + \left(-20\frac{a_5}{a_1} + 32\frac{a_2 a_4}{a_1^2} + 18\frac{a_3^2}{a_1^2} - 48\frac{a_2^2 a_3}{a_1^3} + \right.$$
$$\left. + 16\frac{a_2^4}{a_1^4}\right)\Delta q^3 l + \left(20\frac{a_5}{a_1} - 32\frac{a_2 a_4}{a_1^2} - 18\frac{a_3^2}{a_1^2} + 48\frac{a_2^3 a_3}{a_1^3} - 16\frac{a_2^4}{a_1^4}\right)\Delta q\, l^3 \tag{45}$$

bzw.

$$c = 2\frac{b_2}{b_1}y + \left(6\frac{b_3}{b_1} - 4\frac{b_2^2}{b_1^2}\right)\Delta x y + \left(12\frac{b_4}{b_1} - 18\frac{b_2 b_3}{b_1^2} + 8\frac{b_2^3}{b_1^3}\right)\Delta x^2 y + $$
$$+ \left(-4\frac{b_4}{b_1} + 6\frac{b_2 b_3}{b_1^2} - \frac{8}{3}\frac{b_2^3}{b_1^3}\right)y^3 + \left(20\frac{b_5}{b_1} - 32\frac{b_2 b_4}{b_1^2} - 18\frac{b_3^2}{b_1^2} + \right.$$
$$\left. + 48\frac{b_2^2 b_3}{b_1^3} - 16\frac{b_2^4}{b_1^4}\right)\Delta x^3 y + \left(-20\frac{b_5}{b_1} + 32\frac{b_2 b_4}{b_1^2} + 18\frac{b_3^2}{b_1^2} - 48\frac{b_2^2 b_3}{b_1^3} + \right.$$
$$\left. + 16\frac{b_2^4}{b_1^4}\right)\Delta x y^3 \tag{46}$$

wo die Glieder fünfter Ordnung weggelassen sind.

In (45) ist nun Δq durch $\Delta\varphi$ mittels

$$\left.\begin{aligned}\Delta q &= c_1\Delta\varphi + c_2\Delta\varphi^2 + c_3\Delta\varphi^3 + c_4\Delta\varphi^4\\ \Delta q^2 &= c_1^2\Delta\varphi^2 + 2c_1c_2\Delta\varphi^3 + (2c_1c_3 + c_2^2)\Delta\varphi^4\\ \Delta q^3 &= c_1^3\Delta\varphi^3 + 3c_1^2c_2\Delta\varphi^4\\ \Delta q^4 &= c_1^4\Delta\varphi^4\end{aligned}\right\}\tag{47}$$

zu ersetzen, wodurch herauskommt

$$\begin{aligned}c = &-2\frac{a_2}{a_1}l + \left(-6\frac{a_3c_1}{a_1} + 4\frac{a_2^2c_1}{a_1^2}\right)\Delta\varphi l + \left(-6\frac{a_3c_2}{a_1} - 12\frac{a_4c_1^2}{a_1} + \right.\\ &\left. + 4\frac{a_2^2c_2}{a_1^2} + 18\frac{a_2a_3c_1^2}{a_1^2} - 8\frac{a_2^3c_1^2}{a_1^3}\right)\Delta\varphi^2 l + \left(4\frac{a_4}{a_1} - 6\frac{a_2a_3}{a_1^2} + \right.\\ &\left. + \frac{8}{3}\frac{a_2^3}{a_1^3}\right)l^3 + \left(-6\frac{a_3c_3}{a_1} - 24\frac{a_4c_1c_2}{a_1} - 20\frac{a_5c_1^3}{a_1} + 4\frac{a_2^2c_3}{a_1^2} + 36\frac{a_2a_3c_1c_2}{a_1^2} + \right.\\ &\left. + 32\frac{a_2a_4c_1^3}{a_1^2} + 18\frac{a_3^2c_1^3}{a_1^2} - 16\frac{a_2^3c_1c_2}{a_1^3} - 48\frac{a_2^2a_3c_1^3}{a_1^3} + 16\frac{a_2^4c_1^3}{a_1^4}\right)\Delta\varphi^3 l + \\ &+ \left(20\frac{a_5c_1}{a_1} - 32\frac{a_2a_4c_1}{a_1^2} - 18\frac{a_3^2c_1}{a_1^2} + 48\frac{a_2^2a_3c_1}{a_1^3} - 16\frac{a_2^4c_1}{a_1^4}\right)\Delta\varphi l^3\end{aligned}\tag{48}$$

(48) und (46) stellen eine allgemeine Lösung der Aufgabe dar. Ich mache darin eine Spezialisierung, besonders auf die Gauß-Krügersche Projektion. Ich setze eben an b_n und c_n nach meinen Aufsätzen in Z.f.V. Bd. LXIII, 1934, H. 20 und Bd. LXIV, 1935, H. 21

$$\left.\begin{aligned}a_1 &= N\cos\varphi\\ a_2 &= -\frac{1}{2}N\cos^2\varphi\, t\\ a_3 &= -\frac{1}{6}N\cos^3\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2)\\ a_4 &= \frac{1}{24}N\cos^4\varphi\, t\,(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)\\ a_5 &= \frac{1}{120}N\cos^5\varphi\,(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2)\\ a_6 &= -\frac{1}{720}N\cos^6\varphi\, t\,(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta\ )\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

$$\left.\begin{aligned}b_1 &= \frac{1}{N\cos\varphi}\\ b_2 &= \frac{1}{2}\frac{1}{N^2\cos\varphi}t\\ b_3 &= \frac{1}{6}\frac{1}{N^3\cos\varphi}(1 + 2t^2 + \eta^2)\\ b_4 &= \frac{1}{24}\frac{1}{N^4\cos\varphi}t\,(5 + 6t^2 + \eta^2 - 4\eta^4)\\ b_5 &= \frac{1}{120}\frac{1}{N^5\cos\varphi}(5 + 28t^2 + 24t^4 + 6\eta^2 + 8t^2\eta^2)\\ b_6 &= \frac{1}{720}\frac{1}{N^6\cos\varphi}t\,(61 + 180t^2 + 120t^4 + 46\eta^2 + 48t^2\eta^2)\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{\cos\varphi}(1-\eta^2+\eta^4-\eta^6)\\
c_2 &= \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\varphi}\,t\,(1+\eta^2-3\,\eta^4)\\
c_3 &= \frac{1}{6}\frac{1}{\cos\varphi}(1+2t^2+\eta^2-3\,\eta^4+6\,t^2\,\eta^4)\\
c_4 &= \frac{1}{24}\frac{1}{\cos\varphi}\,t\,(5+6t^2-\eta^2)\\
c_5 &= \frac{1}{120}\frac{1}{\cos\varphi}(5+28\,t^2+24\,t^4)
\end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Die Eintragung von (49) und (51) in (48), bzw. (50) in (46), gibt schließlich

$$c = \cos\varphi_0\,t_0\,.\,l+\cos\varphi_0\,.\,\Delta\varphi\,l-\frac{1}{2}\cos\varphi_0 t_0\,.\,\Delta\varphi^2\,l+\frac{1}{3}\cos^3\varphi_0\,t_0\,(1+3\,\eta_0^2)\,.\,l^3-$$
$$-\frac{1}{6}\cos\varphi_0\,.\,\Delta\varphi^3\,l-\frac{1}{3}\cos^3\varphi_0\,(-1+2\,t_0^2)\,.\,\Delta\varphi\,l^3 \qquad (52)$$

bzw.

$$c=\frac{1}{N_0}t_0\,.\,y+\frac{1}{N_0^2}(1+t_0^2+\eta_0^2)\,.\,\Delta x y+\frac{1}{N_0^3}\,t_0\,(1+t_0^2-\eta_0^2)\,.\,\Delta x^2 y-$$
$$-\frac{1}{3N_0^3}\,t_0\,(1+t_0^2-\eta_0^2)\,.\,y^3+\frac{1}{3N_0^4}(1+4t_0^2+3t_0^4)\,.\,\Delta x^3 y-$$
$$-\frac{1}{3N_0^4}(1+4t_0^2+3t_0^4)\,.\,\Delta x\,y^3 \qquad (53)$$

Diese Formeln befinden sich bereits in Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde Bd. III, wo sie auf eine ganz andere Weise abgeleitet worden sind. Es steht dort

$$c = P\,.\,l+Q\,.\,\Delta\varphi\,l-R\,.\,\Delta\varphi^2\,l+S'\,.\,l^3-U\,.\,\Delta\varphi^3\,l-T\,.\,\Delta\varphi\,l^3 \qquad (54)$$

bzw.

$$c = p\,.\,y+q\,.\,\Delta x y+r\,.\,\Delta x^2 y-s'\,.\,y^3+u\,.\,\Delta x^3 y-t'\,.\,\Delta x\,y^3 \qquad (55)$$

wo ist

$$\left.\begin{aligned}
&P=\sin\varphi_0=\cos\varphi_0\,t_0,\; Q=\frac{\cos\varphi_0}{\varrho},\; R=\frac{1}{2\varrho^2}\sin\varphi_0=\frac{1}{2\varrho^2}\cos\varphi_0 t_0,\\
&S'=\frac{1}{3\varrho^2}\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0\,(1+3\,\eta_0^2+\eta_0^4)=\frac{1}{3\varrho^2}\cos^3\varphi_0\,t_0\,(1+3\eta_0^2+\eta_0^4),\\
&U=\frac{1}{6\varrho^3}\cos\varphi_0,\; T=\frac{1}{3\varrho^3}\cos^3\varphi_0\,(-1+2\,t_0^2)
\end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

$$\left.\begin{aligned}
p &= [2]\,t_0=\frac{\varrho}{N_0}t_0,\; q=\frac{[2]^2}{\varrho}(1+t_0^2+\eta_0^2)=\frac{\varrho}{N_0^2}(1+2\,t_0^2+\eta_0^2),\\
r &= \frac{[2]^3}{\varrho^2}t_0(1+t_0^2-\eta_0^2)=\frac{\varrho}{N_0^3}t_0(1+t_0^2-\eta_0^2), s'=\frac{[2]^3\,t_0}{3\varrho^2\cos^2\varphi_0}=\frac{\varrho}{3N_0^3}\frac{t_0}{\cos^2\varphi_0}=\\
&=\frac{\varrho}{3N_0^3}t_0\,(1+t_0^2), u=-t'=\frac{[2]^4}{3\,\varrho^3}(1+4t_0^2+3t_0^4)=\frac{\varrho}{3N_0^4}(1+4t_0^2+3t_0^4)
\end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Der Vergleich von (54) bis (57) mit (52) und (53) liegt an der Hand. Ein Unterschied stellt sich bei S' und s' heraus.

Ich unternehme nun mit (52) und (53) eine kleine Spezialisierung. Ich setze nämlich in (52) $\varphi_0=\varphi$ und in (53) $\varphi_0=\varphi_1$ (das ist die sog. Fußpunktsbreite, für welche $B=x$ ist). Dann wird im ersten Fall $\Delta\varphi=\varphi-\varphi_0=0$ und im zweiten Fall $\Delta x=x-B_0=0$, womit ich habe

$$c = \cos\varphi\, t \cdot l + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\, t\,(1 + 3\,\eta^2)\cdot l^3 \tag{58}$$

$$c = \frac{1}{N_1} t_1 \cdot y - \frac{1}{3\,N_1^3} t_1\,(1 + t_1^2 - \eta_1^2)\cdot y^3 \tag{59}$$

Ich werde jetzt zeigen, daß (58) und (59) das primäre und (52) und (53) das sekundäre sein können. Dieser Weg ist sogar der einfachere. Deswegen erhöhe ich die Genauigkeit um eine Stufe. Ich setze in (39) und (40) $\varDelta q = 0$, bzw. in (41) und (42) $\varDelta x = 0$ ein. Dann wird

$$\left.\begin{aligned} A_{1.1} &= -3\frac{a_3}{a_1} l^2 + 5\frac{a_5}{a_1} l^4 \\ A_{1.2} &= 2\frac{a_2}{a_1} l - 4\frac{a_4}{a_1} l^3 + 6\frac{a_6}{a_1} l^5 \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} B_{1.1} &= -3\frac{b_3}{b_1} y^2 + 5\frac{b_5}{b_1} y^4 \\ B_{1.2} &= 2\frac{b_2}{b_1} y - 4\frac{b_4}{b_1} y^3 + 6\frac{b_6}{b_1} y^5 \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

(60) eingesetzt in (43) bzw. (61) in (44), geben

$$\begin{aligned} c = {} & -2\frac{a_2}{a_1} l + \left(4\frac{a_4}{a_1} - 6\frac{a_2 a_3}{a_1^2} + \frac{8}{3}\frac{a_2^3}{a_1^3}\right) l^3 + \left(-6\frac{a_6}{a_1} + \frac{10\,a_2 a_5 + 12\,a_3 a_4}{a_1^2} - \right. \\ & \left. - \frac{18\,a_2 a_3^2 + 16\,a_2^2 a_4}{a_1^3} + 24\frac{a_2^3 a_3}{a_1^4} - \frac{32}{5}\frac{a_2^5}{a_1^5}\right) l^5 \end{aligned} \tag{62}$$

und

$$\begin{aligned} c = {} & 2\frac{b_2}{b_1} y + \left(-4\frac{b_4}{b_1} + 6\frac{b_2 b_3}{b_1^2} - \frac{8}{3}\frac{b_2^3}{b_1^3}\right) y^3 + \left(6\frac{b_6}{b_1} - \frac{10 b_2 b_5 + 12 b_3 b_4}{b_1^2} + \right. \\ & \left. + \frac{18 b_2 b_3^2 + 16 b_2^2 b_4}{b_1^3} - 24\frac{b_2^3 b_3}{b_1^4} + \frac{32}{5}\frac{b_2^5}{b_1^5}\right) y^5 \end{aligned} \tag{63}$$

Indem ich in (62) die Ausdrücke (49) und in (63) die Ausdrücke (50) einsetze, erhalte ich

$$c = \cos\varphi\, t\, l + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\, t\,(1 + 3\,\eta^2 + 2\,\eta^4)\, l^3 + \frac{1}{15}\cos^5\varphi\, t\,(2 - t^2)\, l^5 \tag{64}$$

und

$$c = \frac{t_1}{N_1} y + \frac{t_1}{3\,N_1^3}(-1 - t_1^2 + \eta_1^2 + 2\,\eta_1^4)\, y^3 + \frac{t_1}{15\,N_1^5}(2 + 5t_1^2 + 3t_1^4)\, y^5 \tag{65}$$

Ich hebe hervor, daß in der letzten Gleichung die Koeffizienten automatisch als Funktionen der Fußpunktbreite erscheinen, da $\varDelta x = 0$ gleichbedeutend mit $x_0 = B_0 = x$ ist. Gl. (64) und (65) entsprechen den Gleichungen in Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, siebente Auflage, S. 505 (4) und S. 506 (5).

Aus (64) und (65) zu Potenzreihenentwicklungen für den Punkt $(\varphi_0, 0)$ überzugehen, verfahre ich wie folgt. Es sei mit C ein Koeffizient in (64) und mit D_1 ein Koeffizient in (65) bezeichnet. Dann ist

$$C = C_0 + \left(\frac{d\,C}{d\,\varphi}\right)_0 \varDelta\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,C}{d\,\varphi^2}\right)_0 \varDelta\varphi^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\,C}{d\,\varphi^3}\right)_0 \varDelta\varphi^3 + \ldots. \tag{66}$$

und

$$D_1 = D_0 + \left(\frac{d\,D}{d\,B}\right)_0 \varDelta x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,D}{d\,B^2}\right)_0 \varDelta x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\,D}{d\,B^3}\right)_0 \varDelta x^3 + \ldots. \tag{67}$$

Die erste Gleichung ist ganz klar, da $\Delta\varphi$ von φ_0 aus gerechnet wird. Zu der zweiten Gleichung erwähne ich, daß für den Grundmeridian $B = x$ ist und Δx gerade der Abszissenunterschied zwischen den Punkten $(\varphi_0, 0)$ und $(\varphi_1, 0)$ ist.

Ich habe zuerst (66) bzw. (67) zu entwickeln, dann dieselben in (64) bzw. (65) einzusetzen, worauf die entsprechenden Glieder zusammenzuziehen sind. Um die Koeffizienten von (64) zu entwickeln, benutze ich die Formeln

$$\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -t\cos\varphi, \frac{dt}{d\varphi}\, 1 + t^2, \frac{d\eta^2}{d\varphi} = -2t\eta^2 \tag{68}$$

Entsprechend die Koeffizienten von (65) zu entwickeln, benutze ich die Formeln

$$\frac{dt}{dB} = \frac{1}{N}(1 + t^2 + \eta^2 + t^2\eta^2), \frac{d}{dB}\frac{1}{N} = -\frac{t\eta^2}{N^2}, \frac{d\eta^2}{dB} = -\frac{2t}{N}(\eta^2 + \eta^4) \tag{69}$$

Die Entwicklung nach dem Muster (66) und (67) und die Einsetzung in (64) und (65) geben nach gehöriger Rechnung schließlich

$$\begin{aligned} c = {} & \cos\varphi_0\, t_0 \,.\, l + \cos\varphi_0 \,.\, \Delta\varphi\, l + \frac{1}{2}\cos\varphi_0\, t_0\,(-1) \,.\, \Delta\varphi^2 l + \\ & + \frac{1}{3}\cos^3\varphi_0\, t_0\,(1 + 3\eta_0^2 + 2\eta_0^4) \,.\, l^3 + \frac{1}{6}\cos\varphi_0\,(-1) \,.\, \Delta\varphi^3 l + \\ & + \frac{1}{3}\cos^3\varphi_0 \,.\, (1 - 2t_0^2 + 3\eta_0^2 - 12t_0^2\eta_0^2) \,.\, \Delta\varphi\, l^3 + \frac{1}{24}\cos\varphi_0\, t_0 \,.\, \Delta\varphi^4 l + \\ & + \frac{1}{6}\cos^3\varphi_0 \,.\, t_0\,(-7 + 2t_0^2) \,.\, \Delta\varphi^2 l^3 + \frac{1}{15}\cos^5\varphi_0\, t_0\,(2 - t_0^2) \,.\, l^5 \end{aligned} \tag{70}$$

und

$$\begin{aligned} c = {} & \frac{t_0}{N_0} \,.\, y + \frac{1}{N_0^2}(1 + t_0^2 + \eta_0^2) \,.\, \Delta x y + \frac{t_0}{N_0^3}(1 + t_0^2 - \eta_0^2 - 2\eta_0^4) \,.\, \Delta x^2 y + \\ & + \frac{t_0}{3N_0^3}(-1 - t_0^2 + \eta_0^2 + 2\eta_0^4) \,.\, y^3 + \frac{1}{3N_0^4}(1 + 4t_0^2 + 3t_0^4 + 2t_0^2\eta_0^2) \,.\, \Delta x^3 y + \\ & + \frac{1}{3N_0^4}(-1 - 4t_0^2 - 3t_0^4 - 2t_0^2\eta_0^2) \,.\, \Delta x y^3 + \frac{t_0}{3N_0^5}(2 + 5t_0^2 + 3t_0^4) \,.\, \Delta x^4 y + \\ & + \frac{2}{3}\frac{t_0}{N_0^5}(-2 - 5t_0^2 - 3t_0^4) \,.\, \Delta x^2 y^3 + \frac{t_0}{15N_0^5}(2 + 5t_0^2 + 3t_0^4) \,.\, y^5 \end{aligned} \tag{71}$$

Diese Formeln, wie gewollt, sind um eine Stufe genauer als (52) und (53). Da sie mit solcher Genauigkeit in der Literatur noch nicht vorgekommen sind, will ich dieselben einer durchgreifenden Kontrolle unterziehen. Zu diesem Zwecke setze ich in (70) meine Potenzreihen aus Z.f.V. Bd. LXVI 1937, Heft 10, daselbst (17) und (18)

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = {} & \frac{1}{N_0}(1 + \eta_0^2) \,.\, \Delta x + \frac{3}{2}\frac{t_0}{N_0^2}(-\eta_0^2 - \eta_0^4) \,.\, \Delta x^2 + \frac{t_0}{2N_0^2}(-1 - \eta_0^2) \,.\, y^2 + \\ & + \frac{1}{2N_0^3}(-\eta_0^2 + t_0^2\eta_0^2 - 2\eta_0^4 + 6t_0^2\eta_0^4) \,.\, \Delta x^3 + \frac{1}{2N_0^3}(-1 - t_0^2 - 2\eta_0^2 + 2t_0^2\eta_0^2 - \\ & - \eta_0^4 + 3t_0^2\eta_0^4) \,.\, \Delta x y^2 + \frac{t_0}{2N_0^4}\eta_0^2 \,.\, \Delta x^4 + \frac{t_0}{4N_0^4}(-2 - 2t_0^2 + 9\eta_0^2 + t_0^2\eta_0^2) \,.\, \Delta x^2 y^2 + \\ & + \frac{t_0}{24N_0^4}(5 + 3t_0^2 + 6\eta_0^2 - 6t_0^2\eta_0^2) \,.\, y^4 + \frac{1}{6N_0^5}(-1 - 4t_0^2 - 3t_0^4) \,.\, \Delta x^3 y^2 + \\ & + \frac{1}{24N_0^5}(5 + 14t_0^2 + 9t_0^4) \,.\, \Delta x y^4 \end{aligned} \tag{72}$$

$$
\begin{aligned}
l = {} & \frac{1}{N_0 \cos\varphi_0} \cdot y + \frac{t_0}{N_0^2 \cos\varphi_0} \cdot \Delta x y + \frac{1}{2 N_0^3 \cos\varphi_0} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2) \cdot \Delta x^2 y + \\
& + \frac{1}{6 N_0^3 \cos\varphi_0} (-1 - 2 t_0^2 - \eta_0^2) \cdot y^3 + \frac{t_0}{6 N_0^4 \cos\varphi_0} (5 + 6 t_0^2 + \eta_0^2) \cdot \Delta x^3 y + \\
& + \frac{t_0}{6 N_0^4 \cos\varphi_0} (-5 - 6 t_0^2 - \eta_0^2) \cdot \Delta x y^3 + \frac{1}{24 N_0^5 \cos\varphi_0} (5 + 28 t_0^2 + 24 t_0^4) \cdot \Delta x^4 y + \\
& + \frac{1}{12 N_0^5 \cos\varphi_0} (-5 - 28 t_0^2 - 24 t_0^4) \cdot \Delta x^2 y^3 + \frac{1}{120 N_0^5 \cos\varphi_0} (5 + 28 t_0^2 + 24 t_0^4) \cdot y^5 \quad (73)
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis der Rechnung ist gerade die Gleichung (71), womit alles verifiziert und gesichert ist.

Schließlich gebe ich eine Anwendung auf Deutschland. Ich gebe nämlich zwei Tabellen der Koeffizienten in den Formeln (70) und (71) mit einer Stellenzahl, die der praktischen Anwendung entspricht, zugleich auch zwei Beispiele.

Es ist gegeben

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \ 50^0\ 15'\ 0''.00000 \\
l &= +\ 1\ \ 30\ \ 0\ .00000
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
x &= \ 5\ 569\ 160\overset{m}{.}920 \\
y &= +\ 106\ 969\ .665
\end{aligned}
$$

Es soll die ebene Meridiankonvergenz berechnet werden

Nach (70)

φ	$50^0\,15'\ 0''.00000$	$50^0\,15'\ 0''.00000$
φ_0	50 0 0 .00000	50 30 0 .00000
$\Delta\varphi$	+ 900 .00000	— 900 .00000
l	+ 5400 .00000	+ 5400 .00000
$.\,l$	$+ 1^0\,8'\,56''.6400$	$+ 1^0\,9'\,26''.7728$
$.\,\Delta\varphi l$	+ 15 .1453	— 14 .9872
$.\,\Delta\varphi^2 l$	— 0 .0394	— 0 .0397
$.\,l^3$	+ 0 .3937	+ 0 .3883
$.\,\Delta\varphi l^3$	— 0 .0027	+ 0 .0027
c	+ 1 9 12 .1369	+ 1 9 12 .1369

Nach (71)

x	5 569 160.920 m	5 569 160.920 m
x_0	5 540 279.543	5 595 890.160
Δx	+ 28 881.377	— 26 729.240
y	+ 106 969.665	+ 106 969.665
$.\,y$	$+ 1^0\,8'\,35''.0642$	$+ 1^0\,9'\,48''.6415$
$.\,\Delta xy$	+ 37 .8160	— 35 .7365
$.\,\Delta x^2 y$	+ 0 .2032	+ 0 .1809
$.\,y^3$	— 0 .9293	— 0 .9660
$.\,\Delta x^3 y$	+ 0 .0014	— 0 .0011
$.\,\Delta x y^3$	— 0 .0186	+ 0 .0181
$.\,\Delta x^2 y^3$	— 0 .0002	— 0 .0002
$.\,y^5$	+ 0 .0003	+ 0 .0003
c	+ 1 9 12 .1370	+ 1 9 12 .1370

φ_0	$\cdot l$	$\cdot \Delta\varphi l$	$\cdot \Delta\varphi^2 l$	$\cdot l^3$	$\cdot \Delta\varphi l^3$	x_0
						m
47° 0′	9.864 12746	4.519 358	8.934 *n*	8.4298	3.206 *n*	5 206 717.124
47 30	9.867 63088	4.515 258	8.938 *n*	8.4250	3.220 *n*	5 262 298.751
48 0	9.871 07346	4.511 086	8.941 *n*	8.4200	3.233 *n*	5 317 885.233
48 30	9.874 45614	4.506 839	8.945 *n*	8.4148	3.245 *n*	5 373 476.563
49 0	9.877 77986	4.502 518	8.948 *n*	8.4094	3.257 *n*	5 429 072.732
49 30	9.881 04552	4.498 119	8.951 *n*	8.4038	3.268 *n*	5 484 673.729
50 0	9.884 25397	4.493 642	8.954 *n*	8.3980	3.278 *n*	5 540 279.543
50 30	9.887 40606	4.489 085	8.958 *n*	8.3920	3.287 *n*	5 595 890.160
51 0	9.890 50259	4.484 447	8.961 *n*	8.3857	3.296 *n*	5 651 505.565
51 30	9.893 54437	4.479 724	8.964 *n*	8.3793	3.305 *n*	5 707 125.743
52 0	9.896 53214	4.474 917	8.967 *n*	8.3726	3.313 *n*	5 762 750.675
52 30	9.899 46665	4.470 022	8.970 *n*	8.3656	3.320 *n*	5 818 380.341
53 0	9.902 34862	4.465 038	8.972 *n*	8.3585	3.327 *n*	5 874 014.723
53 30	9.905 17872	4.459 962	8.975 *n*	8.3511	3.334 *n*	5 929 653.797
54 0	9.907 95764	4.454 794	8.978 *n*	8.3434	3.340 *n*	5 985 297.540
54 30	9.910 68603	4.449 529	8.981 *n*	8.3356	3.345 *n*	6 040 945.925
55 0	9.913 36452	4.444 166	8.983 *n*	8.3274	3.350 *n*	6 096 598.930

φ_0	$\cdot y$	$\cdot \Delta x y$	$\cdot \Delta x^2 y$	$\cdot y^3$	$\cdot \Delta x^3 y$	$\cdot \Delta x y^3$	$\cdot \Delta x^2 y^3$	$\cdot y^5$
47° 0′	8.539 34921	2.036 649	5.2603	4.78319 *n*	8.597	8.597 *n*	2.21 *n*	1.21
47 30	8.546 93996	2.044 800	5.2761	4.79898 *n*	8.617	8.617 *n*	2.24 *n*	1.24
48 0	8.554 54235	2.053 097	5.2920	4.81492 *n*	8.637	8.637 *n*	2.26 *n*	1.26
48 30	8.562 15874	2.061 542	5.3081	4.83103 *n*	8.657	8.657 *n*	2.29 *n*	1.29
49 0	8.569 79153	2.070 138	5.3244	4.84730 *n*	8.678	8.678 *n*	2.31 *n*	1.31
49 30	8.577 44312	2.078 889	5.3409	4.86375 *n*	8.699	8 699 *n*	2.34 *n*	1.34
50 0	8.585 11597	2.087 797	5.3575	4.88037 *n*	8.720	8.720 *n*	2.37 *n*	1.37
50 30	8.592 81255	2.096 865	5.3743	4.89718 *n*	8.742	8.742 *n*	2.39 *n*	1.39
51 0	8.600 53536	2.106 098	5.3913	4.91417 *n*	8.764	8.764 *n*	2.42 *n*	1.42
51 30	8.608 28698	2.115 498	5.4085	4.93136 *n*	8.786	8.786 *n*	2.45 *n*	1.45
52 0	8.616 06999	2.125 070	5.4259	4.94876 *n*	8.809	8.809 *n*	2.48 *n*	1.48
52 30	8.623 88706	2.134 816	5.4435	4.96636 *n*	8.831	8.831 *n*	2.51 *n*	1.51
53 0	8.631 74088	2.144 742	5.4613	4.98417 *n*	8.854	8.854 *n*	2.54 *n*	1.54
53 30	8.639 63424	2.154 851	5.4793	5.00221 *n*	8.878	8.878 *n*	2.57 *n*	1.57
54 0	8.647 56996	2.165 148	5.4976	5.02048 *n*	8.902	8.902 *n*	2.60 *n*	1.60
54 30	8.655 55095	2.175 636	5.5161	5.03899 *n*	8.926	8.926 *n*	2.63 *n*	1.63
55 0	8.663 58019	2.186 322	5.5348	5.05772 *n*	8.950	8.950 *n*	2.66 *n*	1.66

Zur Berechnung des Meridianbogens.

Von F. Hopfner, Wien.

In einer kürzlich erschienenen Veröffentlichung[1]) nimmt der Verfasser unter anderem auch auf die Berechnung des Meridianbogens am Rotationsellipsoide Bezug, indem er an die in der Geodäsie hiefür gebräuchlichen Fourierschen Reihen anknüpft. Die Berechnung der Bogenlänge der Meridianellipse ist ein in der älteren Mathematik oft behandelter Gegenstand; dennoch sind die dort entwickelten Verfahren von der Geodäsie anscheinend kaum jemals beachtet, geschweige denn rechnerisch angewendet worden, obzwar sie rasch und sicher zur Kenntnis der Bogenlänge führen. An diese Verfahren zu erinnern und auch den oben erwähnten Fourierschen Reihen den gebührenden Platz unter ihnen anzuweisen ist der Zweck der folgenden Darlegungen.

1. Die Bogenlänge s_m der Meridianellipse am Rotationsellipsoide zwischen den geographischen Breiten 0 und φ wird unter Beibehaltung des in der Geodäsie in der Regel bevorzugten Weges und bei Benützung der hier üblichen Bezeichnungsweise und der Abkürzung $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ von der Formel

$$\frac{s_m}{a} = (1 - e^2) \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{W^3} = \int_0^{\varphi} W \, d\varphi - \frac{e^2 \sin 2\varphi}{2W} \tag{1}$$

gegeben. Die Aufgabe ist hiermit auf die Berechnung des elliptischen Integrals 2. Gattung $E(e, \varphi)$ zurückgeführt, dessen Wert in Funktion des elliptischen Integrals 1. Gattung

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{W} \tag{2}$$

in der Normierung Legendres von der Formel[2])

$$E(e, \varphi) = \left[1 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\right] u + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} \tag{3}$$

gegeben wird; auf die Jacobische Funktion $\Theta(u)$ kommen wir später zu sprechen.

Vorweg möchte ich bemerken, daß ich in der vorliegenden Schrift die Bezeichnungsweise und Begriffe der älteren Theorie bevorzuge, weil wir uns vorwiegend mit dem elliptischen Integrale 1. Gattung in der Normierung Legendres zu beschäftigen haben werden. Natürlich besteht kein Hindernis, die Formeln der älteren Theorie — wie es in der neueren Literatur fast ausnahmslos geschieht[3]) — in die Weierstrassische Bezeichnungsweise umzusetzen. So bedeutungsvoll Weierstrass' Theorie in theoretischer Hinsicht auch gewesen ist, so scheint sie für die zahlenmäßige Berechnung — und

[1]) Lips, Die Abplattungsformeln für das Erdellipsoid, Z.f.Verm., 66, 1937.

[2]) H. Durège-L. Maurer, Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig, 1908, S. 226, P. Appell-E. Lacour, Principes de la théorie des fonctions élliptiques et applications, Paris, 1922, p. 275.

[3]) H. Burkhardt, Elliptische Funktionen, Leipzig, 1906, S. 86; A. Hurwitz-R. Courant, Funktionentheorie, Berlin, 1922. S. 239; R. Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, Leipzig-Berlin I, 1916, II 1922.

auf diese kommt es im Nachstehenden allein an — dennoch keinen eigentlichen Fortschritt über die ältere Theorie hinaus gebracht zu haben. Ferner möchte ich noch anführen, daß ich nur Literatur zitiere, die mir gerade zur Verfügung steht; auf Vollständigkeit erheben daher die Zitate keinen Anspruch.

2. Die letzte Formel zeigt, daß die Lösung der Aufgabe die Kenntnis der Werte des elliptischen Normalintegrals 1. Gattung voraussetzt; dieser Umstand macht eine kurze Besprechung der Wege zur Vermittlung dieser Kenntnis notwendig.

a) Das sich zunächst darbietende Verfahren bestünde in der Entwicklung des Integranden in der Formel (2) nach dem binomischen Lehrsatze in eine Potenzreihe und in der Integration der Reihenglieder. Die sich hiedurch einstellenden Reihen sind jedoch selbst bei einem kleinen Modul dann keineswegs zur numerischen Rechnung bequem anwendbar, wenn die Werte von u auf 8 und mehr Dezimalstellen berechnet werden sollen.

Zu nicht wesentlich anderen Ergebnissen gelangt man durch Entwicklung des Integranden in eine Fourier'sche Reihe und anschließende Integration der Reihenglieder. Behufs Verstärkung der Konvergenz müssen beide Verfahren mit der im folgenden Abschnitt besprochenen Methode kombiniert werden. Beispiele hiezu findet man u. zw. für den ersten Fall — um nur einige Autoren zu nennen — bei Schellbach, Schlömilch und H. A. Schwarz [4]) und für den zweiten Fall bei Legendre [5]) und Schlömilch a.a.O.

b) Das zweite Verfahren besteht in der Transformation der Intregationsveränderlichen durch eine quadratische Transformation von solcher Beschaffenheit, daß das Intregal 1. Gattung in ein eben solches, jedoch von geändertem Modul und transformierter Amplitude übergeht. Hieher gehört in erster Linie die allbekannte Landensche Substitution [6]); sie setzt den transformierten Modul k_1 gleich dem Verhältnis des geometrischen Mittels zum arithmetischen aus dem Modul e und der Zahl 1, d. h. sie setzt $k_1 = 2\sqrt{e} : (1 + e)$. Durch wiederholte Anwendung der Transformation entsteht eine Folge von Moduln $k_1, k_2, k_3 \ldots$, eine Modulleiter, deren einzelne Elemente beständig zunehmen und sich dem Werte 1 als obere Grenze nähern. Im umgekehrten Sinne angewendet, führt die Landensche Substitution daher auf eine gegen Null hin abnehmende Modulleiter. Ist man auf letzterem Wege zu einem Modul gekommen, dessen Wert unterhalb der Rechengenauigkeit liegt, so kann die Integration auf einfachste Weise bewerkstelligt werden; dann ist nämlich, da k_n praktisch gleich Null ist, $u\ (k_n,\ \varphi_n) = \varphi_n$, wenn unter φ_n der zugehörige Wert der transformierten Amplitude verstanden wird.

Zur Erläuterung des Verfahrens dient das nachstehende Beispiel. Es ist für die Amplituden $\varphi = 10^0, 45^0, 80^0, 90^0$ und den Modul $e = 0{,}081\ 69683$ nach den Formeln [7])

[4]) K. H. Schellbach, Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunktionen, Berlin, 1864, 4. Abschnitt; O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Braunschweig, II. 1866, S. 310 ff; H. A. Schwarz, Tafeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen, 2. Ausgabe, Berlin, 1893, I. Abteilung.

[5]) A. M. Legendre, Traité des fonctions élliptiques, I, Paris, 1825, p. 273 ff.

[6]) Hurwitz-Courant, a.a.O[3]), S. 241; R. Fricke, a.a.O.[3]) S. 292 u. 492; s. a. O. Schlömilch, a.a.O.[4]), S. 296.

[7]) H. Durège, a.a.O.[2]), 4. Auflage, Leipzig, 1887, S. 204, 205; Appell-Lacour. a.a.O.[2]), p. 353—359.

$$e = \sin\vartheta_0\,,\ \tan^2\frac{1}{2}\vartheta_0 = \sin\vartheta_1\,,\ \tan^2\frac{1}{2}\vartheta_1 = \sin\vartheta_2\,,\ \tan^2\frac{1}{2}\vartheta_2 = \sin\vartheta_3\,,\ \ldots$$

$$\ldots\ \tan^2\frac{1}{2}\vartheta_{n-1} = \sin\vartheta_n\,,\ \ldots$$

$$\frac{\pi}{2K} = \cos^2\frac{1}{2}\vartheta_0\cos^2\frac{1}{2}\vartheta_1\cos^2\frac{1}{2}\vartheta_2\ldots,$$

$$\tan(\varphi_1 - \varphi) = \cos\vartheta_0\tan\varphi\,,\ \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos\vartheta_1\tan\varphi_1\,,\ \ldots$$

$$\ldots\ \tan(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \cos\vartheta_{n-1}\tan\varphi_{n-1}\,,\ \ldots$$

$$u(e,\varphi) = \frac{2K}{\pi}\lim_{n=\infty}\frac{\varphi_n}{2^n}$$

durchgerechnet worden. Man berechnet zunächst den Wert K des vollständigen Integrals 1. Gattung zwischen den Integrationsgrenzen 0 u. $\pi/_2$; an dem angenommenen kleinen Wert des Moduls e ist es gelegen, daß die Modulleiter schon mit dem Werte ϑ_2 abbricht.

Tafel I.

	1. Näherung	2. Näherung	3. Näherung
ϑ	4° 41′ 9″, 983	0° 5′ 45″, 326	0° 0′ 0″, 145
$\log\cos\vartheta$	9,998 54583	9,999 99939	0,000 00000
$^1/_2\,\vartheta$	2° 20′ 34″, 991	0° 2′ 52″, 663	
$\log\cos^2\frac{1}{2}\vartheta$	9,999 27352	9,999 99970	
$\log\sin\vartheta_n$	7,223 80336	3,845 54850	
$\log\frac{\pi}{2K} = 9{,}999\,27322$, $\log K = 0{,}196\,84665$, $K = 1{,}573\,42717$			
φ	10°	45°	80°
$\log\tan\varphi$	9,246 31877	0,000 00000	0,753 68123
$\log\tan(\varphi_1 - \varphi)$	9,244 86459	9,998 54582	0,752 22705
φ_1	19° 58′ 2″, 077	89° 54′ 14″, 675	159° 58′ 1″, 706
$\log\tan\varphi_1$	9,560 29281	2,776 19670	9_n 561 84031
$\log\tan(\varphi_2 - \varphi_1)$	9,560 29220	2,776 19609	9_n 561 83970
φ_2	39° 56′ 4″, 062	179° 48′ 29″, 350	319° 56′ 3″, 504
$\frac{1}{4}\varphi_2$	35 941″, 016	161 827″, 338	287 940″, 876
$\log\operatorname{arc}\left(\frac{1}{4}\varphi_2\right)$	9,241 16522	9,894 62676	0,144 87819
$\log u$	9,241 89200	9,895 35354	0,145 60497
u	0,174 53881	0,785 87512	1,398 31486

Dieses in theoretischer und praktischer Hinsicht gleich ausgezeichnete Verfahren diente bekanntlich Legendre bei der Berechnung seines bekannten Tafelwerkes, von dem noch später die Rede sein wird. Wir merken hier nur noch an, daß $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2\ldots, K$ für ein vorgegebenes Rotationsellipsoid ebenso charakteristische Konstanten sind, wie etwa die Exzentrizität oder die Abplattung, und infolgedessen — einmal berechnet — als vorgegeben angesehen werden müssen; man entnimmt dieser Bemerkung die Erkenntnis, daß bei vorgegebener Modulleiter die Berechnung der Amplituden $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sehr rasch ausführbar ist. Die statt dieses Verfahrens häufig angewendete Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels von Gauß unterscheidet sich von ihm nur in formaler Hinsicht und gestattet bei maschinellem Rechnen gleichfalls eine sehr bequeme numerische Anwendung[8]).

Auch Transformationen höherer Ordnung können, wie Jacobi erstmalig gezeigt hat, zur numerischen Berechnung elliptischer Integrale angewendet werden[9]).

c) Das dritte Verfahren führt im allgemeinen ebenso rasch und sicher zum Ziele. Es beruht auf der Umkehrung der elliptischen Integrale und Einführung der Thetafunktionen. Ausführlich behandelt wird dieser Weg namentlich in der älteren Literatur[10]), wie beispielsweise in den Lehrbüchern von Schlömilch, Schellbach und J. Bertrand. Ich stelle die zur numerischen Berechnung des Integrals u nötigen Formeln unter der Voraussetzung zusammen, daß der Modul $e = \sin\vartheta_0$ den oben angenommenen kleinen Wert besitze und bei der numerischen Rechnung noch die 10. Dezimalstelle mitgenommen werden solle:

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{\cos\vartheta_0}}{1+\sqrt{\cos\vartheta_0}}, \quad \frac{K}{\pi} = \frac{1}{2}(1+2q)^2$$

$$\cot\lambda = \frac{W}{\sqrt{\cos\vartheta_0}}, \quad \cos v = \frac{\tan(45^0 - \lambda)}{2q}, \quad u = \frac{K}{\pi}\,v.$$

Die Größe q ist ebenso wie K eine für das vorgegebene Rotationsellipsoid charakteristische Konstante; bei achtstelliger Rechnung kann übrigens hinreichend genau $q = \frac{1}{4}\tan^2\frac{1}{2}\vartheta_0$ gesetzt werden. Für kleine Werte des Moduls $e = \sin\vartheta_0$ ist infolgedessen q eine kleine Zahl. Andererseits entnimmt man der ersten Formel in der zweiten Zeile die Erkenntnis, daß der Winkel λ für kleine Modulwerte sehr nahe bei 45^0 liegt. Aus beiden Gründen schließt man auf eine wenig sichere Bestimmung des Winkels v. Man darf daher für kleine Modulwerte nicht erwarten, daß eine zehnstellig geführte Rechnung den Wert von u auf 10 Dezimalstellen genau ergeben könnte.

Im nachstehenden Beispiel, dem der oben vorgegebene Modulwert zu Grunde liegt, wird die Rechnung achtstellig geführt; gesucht werden, wie oben, die Werte des Integrals u für $\varphi = 10^0, 45^0, 80^0$. Die Formeln der ersten Zeile geben:

$$\log q = 6{,}621\,74337 - 10, \quad \log\frac{K}{\pi} = 9{,}699\,69678 - 10,$$

$$\log K = 0{,}196\,84665\,.$$

Aus den Formeln der zweiten Zeile folgt:

---

[8]) K. H. Schellbach, a.a.O.[4]); O. Schlömilch, a.a.O.[4]), S. 300 ff; Hurwitz-Courant, a.a.O.[3]), S. 242.

[9]) Jacobis Ges. Werke, S. 361 ff; F. Klein-R. Fricke, Theorie der elliptischen Modulfunktionen, II, Leipzig, 1892, S. 111 ff; R. Fricke, a.a.O.[3]), II, S. 293.

[10]) O. Schlömilch, a.a.O.[4]), S. 437 ff; K. H. Schellbach, a.a.O.[4]), S. 59 ff; J. Bertrand, Calcul intégral, Paris, 1870, p. 682 ff.

Tafel II.

φ	10^0	45^0	80^0
$\log W$	9,999 95629	9,999 27413	9,998 58981
$\log \cot \lambda$	0,000 68338	0,000 00122	9,999 31690
$45^0 - \lambda$	$0^0\ 2'\ 42'', 283$	$0^0\ 0'\ 0'', 290$	$-0^0\ 2' 42'', 216$
$\log \tan (45^0 - \lambda)$	6,895 84799	4,147 97287	6_n 895 66865
$\log \cos v$	9,973 07462	7,225 19950	9_n 972 89528
v	$19^0 58'\ 4'', 013$	$89^0 54' 13'', 563$	$159^0 58'\ 1'', 961$
$\log \operatorname{arc} v$	9,542 20719	0,195 65526	0,445 90835
$\log u$	9,241 90397	9,895 35204	0,145 60513

Der Vergleich mit den im Abschnitte b) scharf berechneten Werten für log u zeigt, daß für den gewählten kleinen Modulwert mit Hilfe der voranstehenden Formeln selbst bei achtstellig geführter Rechnung nur die 5. Dezimale im Logarithmus von u halbwegs gesichert erhalten werden kann. Hingegen haben die Formeln den Wert des vollständigen Integrals K in voller Schärfe geliefert.

d) Nur der Vollständigkeit halber soll auch noch auf die Möglichkeit hingewiesen werden, den Wert des elliptischen Integrals 1. Gattung wie auch jedes anderen elliptischen Integrals durch mechanische Quadratur, gegebenenfalls mit Hilfe eines geeigneten Integraphen, zu bestimmen. Dieses Verfahren besitzt den Vorteil, daß es die Transformation der Integrale auf die Normalform nicht erfordert. Andererseits verlangt es, je nachdem die Integration numerisch oder graphisch ausgeführt werden soll, die Berechnung oder Zeichnung des Integranden für eine größere Anzahl von Stellen im Integrationsbereiche. Hiedurch wird der Vorteil des Verfahrens vor den übrigen wettgemacht und zwar insbesondere dann, wenn eine hohe Genauigkeit, d. h. eine große Stellenanzahl, im Endergebnis verlangt wird.

e) Eine letzte Möglichkeit besteht darin, daß man den Wert des Integrals u Tafeln entnimmt, deren einige bereits vorliegen[11]). Namentlich möchte ich jedoch auf die Tafeln von Legendre hinweisen[12]); sie geben für alle vollen Grade der Winkel ϑ_0 und φ zwischen 0^0 und 90^0 den Wert u ($\sin \vartheta_0$, φ) auf 10 bzw. 9 Dezimalstellen; die Logarithmen des vollständigen Integrals u ($\sin \vartheta_0$, $\pi/_2$) liegen sogar auf 12 Stellen berechnet vor. Man entnimmt diesen Tafeln mit $\vartheta_0 = 4^0$, 686 10691 beispielsweise für $\varphi = 10^0$, 45^0, 80^0 und 90^0 die folgenden Werte von u:

0,174 53880; 0,785 87512; 1,398 31486; 1,573 42723.

Die Uebereinstimmung mit den im Abschnitte b) achtstellig berechneten Werten ist befriedigend; jedoch sind die voranstehenden Werte jedenfalls die genaueren, da sie einer zehnstelligen Tafel entnommen sind.

3. Der Wert des elliptischen Integrals u kann demnach als bekannt vorausgesetzt werden. Wir haben uns infolgedessen nur noch mit der Funktion

---

[11]) J. B e r t r a n d, a.a.O.[10]), p. 716; E. J a h n k e - F. E m d e, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig u. Berlin, 1909; Keiichi Hayashi, Fünfstellige Funktionentafeln, Berlin, 1930; s. a. G. W i t t, Astron. Nachrichten, 165, 1904, S. 33—50, woselbst ein Verfahren zur raschen Berechnung der vollständigen Integrale 1. u. 2. Gattung angegeben wird und die zugehörigen Hilfstafeln veröffentlicht sind.

[12]) A. M. L e g e n d r e, a.a.O.[5]), II, Paris, 1826, Table I bzw. IX; Neudruck der Tafeln, Stuttgart, 1931, A. M. L e g e n d r e, Tafeln der elliptischen Integrale.

$\Theta\ (u)$ und ihren Ableitungen in der Gleichung (3) zu beschäftigen. Diese Funktion ist mit der Thetafunktion $\vartheta\ (u/2\,K)$ in der Weierstrassischen Bezeichnungsweise identisch[13]. Für $u = K$ verschwindet ihre Ableitung $\Theta'\ (u)$; da $\Theta\ (u)$ an dieser Stelle von Null verschieden ist, erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der Konstante $1 - \Theta''\ (0) \,/\, \Theta\ (0)$, wenn in Formel (3) $u = K$ gesetzt wird. Die Konstante ist demnach gleich dem Verhältnis des vollständigen Integrals 2. Gattung zum vollständigen Integrale 1. Gattung. Will man den Wert des ersteren Integrals nicht als gegeben voraussetzen, so kann der Quotient $\Theta''\ (0) \,/\, \Theta\ (0)$ unter der Voraussetzung, daß der Modul e den oben angenommenen kleinen Wert besitzt, auch mit Hilfe der Formel[14])

$$\frac{\Theta''\,(0)}{\Theta\,(0)} = \frac{\pi^2}{K^2}\,\frac{2\,q}{1-2\,q}$$

auf zehn Dezimalstellen berechnet werden. Unter der gleichen Voraussetzung gibt die Formel[15])

$$\frac{\Theta'\,(u)}{\Theta\,(u)} = \frac{\pi}{K}\,\frac{2\,q \sin v}{1-2\,q \cos v}$$

oder die für die numerische Rechnung ebenso vorteilhafte Formel

$$\frac{\Theta'\,(u)}{\Theta\,(u)} = \frac{2\,\pi}{K}\left(\frac{q \sin v}{1-q^2} + \frac{q^2 \sin 2\,v}{1-q^4} + \frac{q^3 \sin 3\,v}{1-q^6}\right)$$

$(v = \pi u/K)$ den Wert des Quotienten $\Theta'\ (u) \,/\, \Theta\ (u)$ auf 10 Dezimalstellen genau; die Werte von q^4 und q^6 liegen unterhalb der angenommenen Rechengenauigkeit; man darf infolgedessen $q^4 = q^6 = 0$ setzen und wird überdies bei der numerischen Rechnung den dritten Term rechter Hand in der letzten Formel meist unberücksichtigt lassen können.

Als Beispiel gebe ich die achtstellige Berechnung der Meridianbogen für $\varphi = 10^0$, 45^0, 80^0 und 90^0 unter Benutzung der im Abschnitte b) schon gewonnenen Ergebnisse. Die beiden Terme auf der rechten Seite der letzten Gleichung sind im folgenden Beispiel mit t_1 und t_2 bezeichnet; der Wert des dritten Terms liegt unterhalb der Rechengenauigkeit (Tafel III).

Wesentlich vereinfachen ließe sich die Berechnung durch Benutzung von Tafeln für die Werte der Thetafunktionen $\vartheta_0\ (v)$ und $\vartheta'_0\ (v)$[16]; es scheint aber, daß es keine solchen Tafeln in dem von der Geodäsie benötigten Umfange dermalen noch gibt.

4. Die Berechnung des elliptischen Integrals 2. Gattung $E\ (e,\ \varphi)$ nach Formel (3) ist vollständig auf der Kenntnis vom Werte des elliptischen Integrals 1. Gattung $u\ (e,\ \varphi)$ aufgebaut. Um sie kommt man überhaupt nicht herum, falls man nicht zu einer Reihenentwicklung des Integranden W im Integrale $E\ (e,\ \varphi)$ Zuflucht nimmt[17]. Wohl aber kann man seine numerische Berechnung ohne Zuhilfenahme der Funktion $\Theta\ (u)$ durch wiederholte Ausübung der Landenschen Transformation auf das Integral vornehmen. Auch

---

[13]) Durège-Maurer, a.a.O.[2]), S. 221; Appell-Lacour, a.a.O.[2]), p. 131.
[14]) J. Bertrand, a.a.O.[10]), S. 694.
[15]) O. Schlömilch, a.a.O.[4]), S. 457 ff.
[16]) Jahnke-Emde, a.a.O.[11]); Keiichi Hayashi, a.a.O.[11]).
[17]) K. H. Schellbach, a.a.O.[4]), 9. Abschnitt; A. M. Legendre, a.a.O.[5]), p. 276.

Tafel III.

$\log \frac{\pi^2}{K^2} \frac{2q}{1-2q} = 7{,}52\,3743$, $\log [1 - \Theta''(0) / \Theta(0)] = 9{,}998\,54704$

$\log \frac{\pi}{K} \frac{2q}{1-q^2} = 7{,}22\,3077$, $\log \frac{\pi}{K} \frac{2q^2}{1-q^2} = 3{,}8448$

φ	10^0	45^0	80^0	90^0
$\log [1 - \Theta''(0)/\Theta(0)]\, u$	9,240 43904	9,893 90058	0,144 15101	0,195 39369
v	19° 58′ 2″,0	89° 54′ 14″,7	159° 58′ 1″,8	180°
$\log \sin v$	9,53 3369	9,99 9999	9,53 4735	
$\log t_1$	6,75 6446	7,22 3076	6,75 7812	
$2v$	39° 56′,1	179° 48′,5	319° 56′,1	360°
$\log \sin 2v$	9,8075	7,5244	9_n 8086	
$\log t_2$	3,6523	1,3622	3_n 6534	
$[1 - \Theta''(0) / \Theta(0)]\, u$	0,173 95585	0,783 25032	1,393 64452	1,568 17199
t_1	+ 57075	+ 1 67138	+ 57255	0
t_2	+ 45	0	— 45	0
E	0,174 52705	0,784 92170	1,394 21662	1,568 17199
$\log \sin 2\varphi$	9,53 4052	0,00 0000	9,53 4052	
$\log \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi / W$	7,05 7476	7,52 4106	7,05 8842	
$\frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi / W$	0,001 14150	0,003 34277	0,001 14510	
s_m / a	0,173 38555	0,781 57893	1,393 07152	1,568 17199
s_m	1 105 748,5	4 984 439,3	8 884 170,1	10 000 855,5

dieses Verfahren trifft man in der älteren Literatur vielfach an[18]). Zur Berechnung dient die Formel

$$E(\sin \vartheta_0, \varphi) = \left[1 - \frac{1}{2} e^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin \vartheta_1 + \frac{1}{2^2} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \ldots\right)\right] u +$$
$$+ e \left(\frac{1}{2} \sqrt{\sin \vartheta_1} \sin \varphi_1 + \frac{1}{2^2} \sqrt{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2} \sin \varphi_2 + \ldots\right),$$

in der $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots; \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ nach den Formeln im Abschnitte b) berechnet werden können. Da in dem dort gewählten Beispiele ϑ_3 praktisch gleich Null ist, reichen die angeschriebenen Terme zur Berechnung des Integrals auf acht Dezimalstellen hin. Offensichtlich ist der Koeffizient von u in obiger Formel mit der vorhin bestimmten Konstanten $1 - \Theta''(0) / \Theta(0)$ identisch und das zweite Glied rechter Hand nur eine formal andere Reihe zur Berechnung des Quotienten $\Theta'(u) / \Theta(u)$.

5. Am vorteilhaftesten ist es natürlich, gar nicht zu rechnen, sondern den Wert des elliptischen Integrals 2. Gattung $E(\sin \vartheta_0, \varphi)$ auch den Tafeln von Legendre a.a.O [12]) zu entnehmen, woselbst man die Werte des Integrals

[18]) O. Schlömilch, a.a.O.[4]), S. 304 ff; J. Bertrand, a.a.O;[10]), p. 703 ff.

auf 9 Dezimalstellen und mehr für jeden ganzen Grad der Winkel ϑ_0 und φ von 0^0 bis 90^0 tabuliert vorfindet. Man entnimmt diesen Tafeln mit $\vartheta_0 = 4^0$, 686 10691 für $\varphi = 10^0$, 45^0, 80^0 und 90^0 folgende Zahlen auf 8 Dezimalen:

0,174 52705; 0,784 92170; 1,394 21662; 1,568 17202,

die mit den in Tafel III für $E\ (e, \varphi)$ berechneten gut übereinstimmen.

6. In der Geodäsie pflegt man den Integranden $1/W^3$ im ersten Integrale der Formel (1) in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln und sodann die Integration gliedweise auszuführen; die Reihenkoeffizienten, von denen je drei aufeinanderfolgende durch eine in ihnen lineare Gleichung miteinander verknüpft sind, ergeben sich hiebei als Potenzreihen fortschreitend nach den natürlichen Potenzen von e^2. Zur Verstärkung der Konvergenz unterwirft man die Koeffizienten quadratischen Transformationen. Allbekannt ist die erstmalig von Bessel[19]) bei diesem Anlasse benützte Substitution

$$n = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} = \frac{a-b}{a+b}, \quad \text{d. i.} \quad e = \frac{2\sqrt{n}}{1+n},$$

die sonach mit dem auf den Modul bezüglichen Teil der Landenschen Transformation identisch ist. Hingegen ist die von der quadratischen Substitution $\alpha = 1 - \sqrt{1-e^2}$ bewirkte Konvergenzverstärkung weniger günstig; schon Helmert war zu dieser Erkenntnis gekommen[20]); ersetzt nämlich die ersterwähnte Substitution im Grunde $\frac{1}{4}e^2$ durch n, so vertauscht letztere nur $\frac{1}{2}e^2$ mit α. Was endlich den Platz betrifft, den die Reihen der Geodäsie zur Berechnung des Meridianbogens unter den Methoden zur numerischen Berechnung der elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung einnehmen, so kann nach den vorausgegangenen Darlegungen darüber kaum ein Zweifel noch platzgreifen.

Ueber die Definition der mittleren Fehlerellipse.

Von A. Möhle, Bonn.

Die Ausführungen von Herrn Höpcke „Über die Ableitung der mittleren Fehlerellipse aus dem Fehlergesetz der Ebene“ (ZfV. 1937, S. 694—698) zwingen mich zu einer Erwiderung. Anschließend daran will ich die Gelegenheit benutzen, um noch einmal den grundsätzlichen Inhalt meiner von Herrn Höpcke angegriffenen Abhandlung (ZfV. 1936, S. 593—603) zu beleuchten.

Höpcke will die bekannte Fußpunktskurve der mittleren Fehlerellipse verteidigen. Hierzu wird die Gleichung dieser Kurve abgeleitet, indem die wahren Fehler ε auf die als veränderlich zu denkende Richtung ω_1 projiziert werden. Diese Art der Ableitung, die ich in meiner Abhandlung a. a. O. S. 603 angedeutet habe, ist nicht neu; vgl. z. B. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891, S. 369, wo entgegen der Ansicht von Höpcke, a. a. O. S. 695 oben, die Gültigkeit des Gaußschen Fehlergesetzes nicht vorausgesetzt worden ist. Wenn man — wie Höpcke es tut — das Gaußsche Fehlergesetz

---

19) Bessels Abhandlungen, III, S. 44.

20) Helmert, Höhere Geodäsie, I, S. 48.

doch voraussetzt, so wird die Ableitung der Fußpunktskurve nur durch unnötiges Beiwerk beschwert.

Doch schließlich steht ja die Ableitung der Fußpunktskurve bzw. der zu ihr gehörigen Ellipse gar nicht zur Diskussion. Die Frage dreht sich vielmehr darum, wie wir bei sinnvoller Übertragung des feststehenden Begriffes des linearen mittleren Fehlers zu einer vernünftigen Definition von Genauigkeitsmaßen für Punktbestimmungen in der Ebene gelangen.

In diesem Zusammenhang muß ich zunächst auf die vollkommen unzulässige Weise aufmerksam machen, wie Höpcke den für die Definitionen der Fehlertheorie grundlegenden mathematischen Begriff der „Wahrscheinlichkeit" benützt. Er sagt:

„Dann ist $\Phi(x, y)$ bzw. $\Phi(r, \omega)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Punktbestimmung die Koordinaten (x, y) bzw. (r, ω) ergibt." (a.a.O. S. 695.)

„Die Wahrscheinlichkeit, eine Punktbestimmung ergebe einen Punkt auf der Geraden durch den Fehlerursprung mit dem Richtungswinkel ω_1, ist: $\varphi(\omega_1) = \ldots$" (a.a.O. S. 696.)

„Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von den auf die Gerade fallenden Punkten einer (r, ω_1) ergibt:

$$\frac{\Phi(r, \omega_1)}{\varphi(\omega_1)} = \ldots\text{“ (a.a.O. S. 696.)}$$

Solche Wahrscheinlichkeiten gibt es bei einer kontinuierlichen ebenen Fehlerverteilung nicht, weder nach der Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsdefinition noch nach einer der Definitionen der Häufigkeitstheorie. Wohl aber kann es eine Wahrscheinlichkeit dafür geben, daß ein Punkt in eine bestimmte Fläche fällt, z. B. in einen Sektor oder in ein Flächenelement des Sektors usw. Man kann aus solcher Wahrscheinlichkeit dann durch Grenzübergang den Begriff der „Wahrscheinlichkeitsdichte" an der Stelle x, y ableiten, ähnlich wie aus dem Begriff der Masse derjenige der Massendichte abgeleitet werden kann (vgl. meine Abhandlung a.a.O., S. 597). Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichte müssen scharf auseinandergehalten werden, will man sich vor irrtümlichen Schlußfolgerungen hüten. Was Höpcke a.a.O. mit $\Phi(x, y)$, $\Phi(r, \omega)$ und $\varphi(\omega_1)$ bezeichnet, sind Wahrscheinlichkeitsdichten.

Nun wollen wir die Gleichung (9), Höpcke a.a.O., S. 696 richtig deuten. Hierzu sondern wir aus der unendlichen Folge aller Punktbestimmungen diejenige unendliche Teilfolge aus, bei der die Punkte innerhalb eines längs ω_1 liegenden Flächenstreifens von der gleichmäßigen differentiellen Breite db fallen. Die der Teilfolge entsprechende Wahrscheinlichkeit ist dann

$$\int_{r=-\infty}^{r=+\infty} \Phi(r, \omega_1)\, dr \cdot db = \varphi(\omega_1)\, db.$$

Jetzt sondern wir aus dieser Teilfolge weiter die unendliche Teilfolge derjenigen Punktbestimmungen aus, bei der die Punkte innerhalb eines von den Linien $r =$ const. und $r + dr =$ const. begrenzten Streifenelementes fallen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Streifenelement relativ zum Flächenstreifen

$$\frac{\Phi\,(r,\,\omega_1)\,d\,r\,d\,b}{\varphi\,(\omega_1)\,d\,b} = \frac{\Phi\,(r,\,\omega_1)}{\varphi\,(\omega_1)}\,d\,r.$$

Wir können also den Wert $\frac{\Phi\,(r,\,\omega_1)}{\varphi\,(\omega_1)}$ der fraglichen Gleichung (9) als die relative Wahrscheinlichkeitsdichte innerhalb des differentiellen Flächenstreifens deuten, kurz gesagt: als das Fehlergesetz innerhalb des Streifens. Aber der springende Punkt ist der, daß die Ebene gar nicht in solche durch den Fehlerursprung gehende Flächenstreifen aufgeteilt werden kann, so daß jeder Punkt der Ebene in einem und nur einem Streifen liegt, daß also die Summe der unendlichen Teilfolgen nicht die unendliche Folge aller Punktbestimmungen in der Ebene ergibt. Dieser Forderung genügt aber die von mir durchgeführte Aufteilung der Ebene in Sektoren.

Schließlich müssen wir uns noch mit einer mir unverständlichen Behauptung befassen. Höpcke sagt a. a. O., S. 695—696: „Für einen schmalen Sektor gilt der Näherungswert: $M^2\,(\omega_2 - \omega_1) \approx \frac{1}{p^2}$, worin p etwa für $\frac{1}{2}\,(\omega_2 + \omega_1)$ berechnet sein mag. Der Näherungswert ist umso genauer, je kleiner $\omega_2 - \omega_1$ ist. Für den Grenzfall $\omega_2 = \omega_1$ wird aber wegen Gleichung (5) $M^2\,(\omega_2 - \omega_1) = \frac{0}{0}$ unbestimmt. Der Übergang vom Sektor zur Geraden ist aus dieser Formelentwicklung nicht möglich.“ Man wird sich danach fragen müssen, in welchem Falle Höpcke überhaupt noch einen Grenzwert gelten läßt. Selbstverständlich ist

$$\lim_{(\omega_2 - \omega_1) \to 0} M^2\,(\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{p^2},$$

wie ich es bewiesen habe.

Nach dieser notwendigen Kritik der Höpckeschen Ausführungen möchte ich noch einmal kurz auf den grundsätzlichen Gedankengang meiner Abhandlung (ZfV. 1936, S. 593—603) eingehen.

Von möglichst allgemeinen Voraussetzungen über die Fehlerverteilung ausgehend ist klargelegt worden, daß der überlieferte „mittlere Punktfehler“ ein geeignetes Fehlerdurchschnittsmaß ist. Die Gültigkeit des Gaußschen Fehlergesetzes braucht hier nicht vorausgesetzt zu werden, ebensowenig wie bei der Definition des linearen mittleren Fehlers. Um nun die verschiedenen Richtungen der auftretenden Fehler zu berücksichtigen, ist allgemein eine Kurve der mittleren Fehler der Punktlagenmessungen in den verschiedenen Richtungen definiert worden, die ich kurz „mittlere Fehlerkurve“ genannt habe. Ist die Fehlerverteilung für alle Richtungen gleichmäßig, so geht die mittlere Fehlerkurve in einen Kreis über, dessen Radius gleich dem mittleren Punktfehler ist. Bei ungleichmäßiger Fehlerverteilung liegt der mittlere Punktfehler zwischen den Extremwerten für die Beträge des Radiusvektors der mittleren Fehlerkurve. Dieses Ergebnis mußte von vornherein erwartet werden. Bei Gültigkeit des Gaußschen Fehlergesetzes ergibt sich als mittlere Fehlerkurve die „mittlere Fehlerellipse“, deren Halbachsen $\sqrt{2}$ mal größer sind als diejenigen der bisher so bezeichneten Ellipse.

Zweifellos wird die Genauigkeit von Punktbestimmungen am besten durch Fehlerverteilungskurven bezw. durch ein gerade gültiges Fehlergesetz charakterisiert. Doch wie man bei linearen Fehlern im allgemeinen auf diese etwas umständliche Darstellungsweise verzichtet und sich mit dem Maß des „mittleren Fehlers“ begnügt — das gut in den Rahmen der Methode der kleinsten Quadrate hineinpaßt —, ebenso ergeben sich bei zweidimensionaler Fehlerverteilung als geeignete Fehlerdurchschnittsmaße der „mittlere Punktfehler“ und die „mittlere Fehlerkurve“. Beide bedeuten die sinnvolle Übertragung des Begriffes des linearen mittleren Fehlers auf die Verhältnisse der Ebene.

Zum besseren Verständnis möge noch das folgende einfache Beispiel behandelt werden, das die Bedeutung der mittleren Fehlerellipse und der Fußpunktskurve gut veranschaulicht.

Ein verloren gegangener Punkt P soll wiederhergestellt werden. Bei einer früheren Bestimmung seien als wahrscheinlichste Werte für P die Koordinaten x, y ermittelt worden. Die dazugehörige mittlere Fehlerellipse habe die Halbachsen A und B, wobei A relativ zu B sehr groß sei, so daß die Verhältnisse der Figur 1 vorliegen. Die Fußpunktskurve hat dann annähernd die Form von zwei aneinandergelegten Kreisen. Die Wiederherstellung des Punktes P soll von den beiden als fehlerfrei bekannten Festpunkten F_1 $\{x_1, y_1\}$ und F_2 $\{x_2, y_2\}$ aus mittels Bogenschlag geschehen. Hierzu werden aus den Koordinatenunterschieden die Entfernungen s_1 bezw. s_2 von F_1 bezw. F_2 nach der wahrscheinlichsten Lage $\{x, y\}$ von P berechnet. Die mittleren Fehler dieser berechneten Strecken s_1 bezw. s_2 seien m_1 bezw. m_2; ihre Größe ist bekanntlich gleich der Länge der Radiusvektoren $\overline{PQ_1}$ bezw. $\overline{PQ_2}$ der Fußpunktskurve (siehe Figur 1).

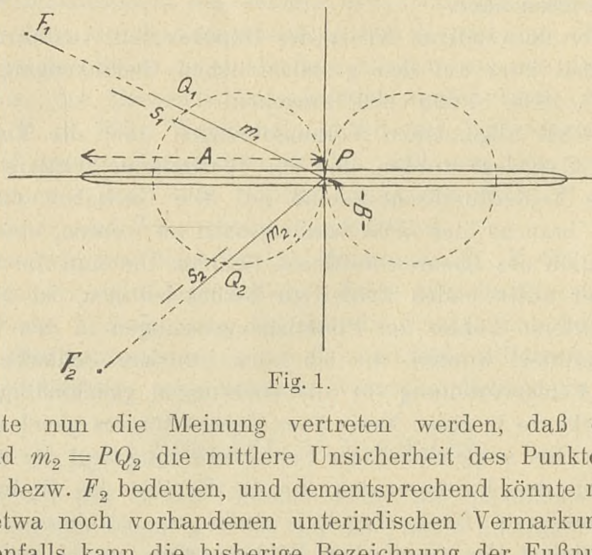

Fig. 1.

Es könnte nun die Meinung vertreten werden, daß diese Beträge $m_1 = PQ_1$ und $m_2 = PQ_2$ die mittlere Unsicherheit des Punktes P in Richtung nach F_1 bezw. F_2 bedeuten, und dementsprechend könnte man die Suche nach einer etwa noch vorhandenen unterirdischen Vermarkung von P einrichten. Jedenfalls kann die bisherige Bezeichnung der Fußpunktskurve als die Kurve der mittleren Fehler des Punktes für die verschiedenen Richtungen leicht zu dieser Ansicht verleiten. Tatsächlich ist es jedoch so, daß man eine etwaige unterirdische Vermarkung des Punktes P mit einer mittleren Vermutung (Wahrscheinlichkeit $\approx$ 0,63) innerhalb der mittleren Fehlerellipse, die in unserem Beispiel der Figur 1 sehr schmal ist, zu suchen hat. Der mittlere Fehler der früher bestimmten Punktlage in Richtung nach F_1 bezw. nach F_2 ist hier bedeutend kleiner als PQ_1 bezw. PQ_2. Die Fußpunktskurve ist lediglich als Hilfsmittel für die Bestimmung des mittleren Entfernungsfehlers zu bewerten; eine andere Bedeutung kommt ihr nicht zu. Sind etwa die mittleren Fehler M_x bezw. M_y der Entfernungen des Punktes P von den Koordinatenachsen gesucht, d. h. die mittleren Fehler von x bezw. y, so findet man diese als die Längen der Radiusvektoren der Fußpunktskurve in Richtung der Koordinatenachsen.

Diese Ausführungen werden, so hoffe ich, zum Verständnis der neuen Definition der mittleren Fehlerellipse beitragen. Bei der immerhin nicht unwichtigen theoretischen Bedeutung der Frage ist eine ernsthafte Kritik stets erwünscht.

Die Auswertung der Ergebnisse der Bodenschätzung.

Von Oberregierungsrat Dr. Rösch, Berlin.

Die Ergebnisse der Bodenschätzung werden nach den bestehenden Bestimmungen auf Grund der Feldschätzungsbücher und der Feldkarten in die Schätzungsbücher für Ackerland und für Gründland sowie in die Schätzungsreinkarten übernommen. Die Schätzungsbücher und die Schätzungsreinkarten sind als die eigentlichen Urkunden der Bodenschätzung anzusehen (vgl. § 2 der Verordnung über die Offenlegung der Ergebnisse der Bodenschätzung vom 31. Januar 1936). Diese Urkunden sind nur für den Dienstgebrauch bestimmt und der Allgemeinheit nicht zugänglich.

Der Reichsminister der Finanzen hat daher mit Erlaß vom 10. August 1938 — S 3372 — 30 III — „Richtlinien für die Nutzbarmachung der Ergebnisse der Bodenschätzung für nichtsteuerliche Zwecke“ mit Kartenmustern herausgegeben. In diesen Richtlinien wird erläutert, wie die bei der Bodenschätzung gewonnenen Unterlagen für verschiedene praktische Zwecke auszuwerten sind.

I. Die katastermäßige Ausarbeitung der Schätzungsergebnisse.

Durch den Nachweis der rechtskräftig festgestellten Schätzungsergebnisse im Liegenschaftskataster werden Hilfsmittel geschaffen, die für manche praktischen Zwecke unmittelbar verwendet werden können, z. B. für die Besteuerung, Beleihung, Wirtschaftsberatung, Statistik usw. Der Katasternachweis umfaßt die Endergebnisse der Bodenschätzung, die von allgemeiner und bleibender Bedeutung sind.

1. Der Schätzungsplan.

Der Schätzungsplan enthält die Umfangsgrenzen der einzelnen Schätzungsflächen, also der Klassenflächen, Klassenabschnitte und Sonderflächen, sowie die zugehörigen Klassenbezeichnungen, und zwar beim

Ackerland Bodenart, Zustandsstufe und Entstehung, beim Grünland Bodenart und -stufe, Klima, Wasserverhältnisse, endlich die Wertzahlen, nämlich die Bodenzahl und Ackerzahl bezw. die Grünlandgrundzahl und Grünlandzahl.

2. Das Flurbuch.

Das Flurbuch enthält die Flächenangaben für die zu einem Flurstück gehörenden Teile der Schätzungsflächen, die entsprechenden Klassenbezeichnungen, Wertzahlen und Ertragsmeßzahlen.

3. Das Liegenschaftsbuch.

In den nach Eigentümern geordneten Bestandsblättern des Liegenschaftsbuchs werden bei jedem Flurstück die Flächenangaben und die Ertragsmeßzahlen für ein und dieselbe Kulturart zusammengefaßt. Aus diesen Angaben kann der Ertragswert eines landwirtschaftlich genutzten Flurstücks, soweit er von den natürlichen Ertragsbedingungen abhängig ist, durch Vervielfältigung der Ertragsmeßzahl mit dem auf die Wertzahl 100 bezogenen Ertragswert der Flächeneinheit ermittelt werden.

II. Die Herstellung von Bodenkarten auf Grund der Schätzungsergebnisse.

Für manche Zwecke, insbesondere für Planungen, ist es notwendig, die Schätzungsergebnisse bildmäßig in Bodenkarten durch verschiedene Farben und Zeichen darzustellen. Je nach der Zweckbestimmung ist zu entscheiden, welche Unterlagen für die Bodenkarten zu verwenden sind. Für großmaßstäbliche Bodenkarten, die ein mehr oder minder großes zusammenhängendes Gebiet überdecken sollen, wird die Katasterplankarte oder die Deutsche Grundkarte 1:5000 die Grundlage bilden müssen. In Einzelfällen wird auch der jeweils vorliegende Katasterplan in Betracht kommen. Kleinmaßstäbliche Bodenkarten (Übersichtskarten) werden unter Benutzung von Meßtischblättern oder ähnlichen topographischen Karten im Maßstab 1:25000 unter Umständen auch in kleineren Maßstäben herzustellen sein.

1. Die großmaßstäbliche Bodenkarte.

In der großmaßstäblichen Bodenkarte sind alle bei der Bodenschätzung erfaßten Einzelheiten darzustellen, die für die Beurteilung der Bodenverhältnisse von Bedeutung sind, also Bodenart, Zustandsstufe, Entstehung, Wasserverhältnisse, Besonderheiten wie Verschießen und Hangneigung, Wertzahlen. Die Bodenarten werden durch Flächenfarben, die Entstehungsarten durch farbige Umrandung gekennzeichnet. Durch die verschiedenartige Darstellung der Wasserverhältnisse wird erreicht, daß sich die natürlichen Ackerflächen deutlich von den natürlichen Gründlandflächen abheben.

2. Die kleinmaßstäbliche Bodenkarte.

Die kleinmaßstäbliche Bodenkarte ist als Übersichtskarte über die bodenkundlichen Verhältnisse großer zusammenhängender Gebiete gedacht. Hierfür ist eine weitgehende Zusammenfassung aller Schätzungsergebnisse geboten. Daher werden aus den 8 mineralischen Bodenarten des Schätzungsrahmens 4 Gruppen und aus den 7 Zustandsstufen des Ackerlandes zusammen mit den 3 Stufen des Grünlandes 3 Gruppen gebildet. Die Entstehungsarten werden in Flächensignaturen dargestellt. Die 5 Wasserstufen des Grünlandes werden ebenfalls in 3 Gruppen zusammengefaßt. Die Unterscheidung zwischen Ackerland und Grünland wird auch hier durch die entsprechenden Wasserzeichen erleichtert. Wertzahlen werden in die Übersichtskarten nicht mehr eingetragen.

Die vom Reichsminister der Finanzen herausgegebenen Richtlinien und die zugehörigen Kartenmuster geben ein Bild von der Vielgestaltigkeit der durch die Bodenschätzung gewonnenen Ergebnisse. Sie sollen vor allem richtungweisend dafür sein, wie diese Ergebnisse zu Bodenkarten ausgewertet werden können, um die Einheitlichkeit der Herstellung solcher Karten sicherzustellen.

Zur reichsrechtlichen Regelung des Erlöschens der Familienfideikommisse.

Von Oberlandgerichtsrat a. D. Ermel, Cranz i. Ostpreußen.

Das Reichsgesetz vom 6. Juli 1938 über das Erlöschen der Familienfideikommisse und sonstiger gebundener Vermögen weicht von den Vorschriften der Landesgesetzgeber auf diesem Rechtsgebiet in verschiedenen Punkten beträchtlich ab; es ist daher angebracht, die wesentlichen Änderungen des Reichsgesetzgebers vor allem von dem Auflösungsrecht Preußens, wie es in den Gesetzen vom 22. April 1930 enthalten ist, in aller Kürze darzustellen.

1. Nach dem preußischen Auflösungsrecht sollten Familienfideikommisse mit Beginn des 1. Juli 1938 erlöschen. Das neue Reichsrecht bestätigt die Zwischenlösung der Verordnung des Reichsjustizministers vom 28. Juni 1938 über den Aufschub dieses Stichtags und bestimmt als solchen nunmehr den 1. Januar 1939. Jedoch können Verfahren zur freiwilligen Auflösung aus der Zeit vor dem 30. Juni 1938 noch durchgeführt werden, aber die beteiligten Minister können die Verfahrensdauer befristen. Dagegen erlöschen Familienfideikommisse mit Beginn des 1. Januar 1939, bei denen die freiwillige Auflösung erst nach dem 30. Juni 1938 begonnen hat oder bei denen ein Zwangsauflösungsverfahren schwebt, ohne daß sie vor dem 1. Januar 1939 freies Vermögen geworden sind.

2. Auch nach dem neuen Reichsrecht erhält der letzte Fideikommißbesitzer mit dem Erlöschen des Fideikommisses freies Vermögen daran mit der Beschränkung des preußischen Rechts während der Sperrfrist, bis die öffentlichen Belange — Waldschutz, Kunstschutz — und die privaten Belange — Fideikommißgläubiger, Stiftungen — gesichert sind. Erst der Fideikommißauflösungsschein gibt ihm, wie bisher, die völlige Verfügungsmacht.

3. Abweichend vom preußischen Recht erlöschen die Rechte der Anwärter und Anfallberechtigten entschädigungslos. Nur wenn mit hoher Wahrscheinlichkeit anzunehmen ist, das Fideikommiß würde ganz oder zum Teil bei seinem Fortbestand auf den Anwärter oder Anfallberechtigten über-

gegangen sein, kann das Fideikommißgericht — der Fideikommißsenat des Oberlandesgerichts, im Lande Österreich der Fideikommißsenat beim Oberlandesgericht in Wien — zur Vermeidung unbilliger Härten auf Antrag binnen 3 Monaten seit dem Erlöschen eine Entschädigung aus dem Fideikommißvermögen bis zu höchstens einem Viertel seines Wertes gewähren, die auch in Feld oder Wald — nur bei sachlicher und persönlicher Eignung — bestehen darf und in solchem Falle ministeriell genehmigt werden muß. Die vertragsmäßige und gesetzliche Regelung der Rechte der Anwärter, wie sie die §§ 10 bis 27 des preußischen Zwangsauflösungsgesetzes vorsehen, hat das Reichsgesetz nicht übernommen.

Bei den freiwilligen Auflösungen hatte der Familienschluß vielfach bestimmt, daß der beim Wegfall des bisherigen Fideikommißbesitzes nächste Anwärter die Rechtsstellung des Nacherben erhalten sollte, während der Besitzer die des Vorerben hatte. Diese Regelung fällt gleichfalls mit dem 1. Januar 1939 fort, soweit sie nicht schon zuvor praktisch geworden ist: die Einsetzung des Vorerben wird mit dem genannten Zeitpunkt unwirksam und dem Nacherben verbleibt nur der Antrag auf Entschädigung aus Billigkeit, wie zuvor erörtert. Eine ähnliche Vorschrift gilt für den Fall der freiwilligen allmählichen Auflösung, bei dem der Reichsjustizminister besondere Härten mildern kann.

4. Der Fideikommißwald, der in einer Größe von über 100 ha schutzwürdig ist, darf fortan, auch in den am 30. Juni 1938 anhängigen Verfahren, nur noch in der Rechtsform des Schutzforstes gesichert werden. Waldgüter und Waldstiftungen des preußischen Rechts gibt es nicht mehr; bei den zahlreichen Waldgütern, die unter der Herrschaft des preußischen Auflösungsrechts gebildet worden sind, erlischt die Waldguteigenschaft spätestens mit dem 1. Januar 1939, und sie werden in Schutzforste umgewandelt. Als solche dürfen sie aber auch nicht forstlich genutzte Grundstücke und sonstige Gegenstände des jetzigen oder früheren Fideikommißvermögens umfassen, die zur Waldwirtschaft erforderlich sind. Mit der Waldgutseigenschaft erlischt auch das landesrechtliche Anerbenrecht. Dasselbe gilt für das Erlöschen der Deichguts-, Weinguts- und Landgutseigenschaft und des damit verbundenen Anerbenrechts.

5. Gegenstände des Fideikommißvermögens von besonderem künstlerischen, wissenschaftlichen, geschichtlichen oder heimatlichen Wert sind in gleicher Weise wie nach preußischem Rechte im öffentlichen Interesse zu schützen, erforderlichenfalls auch in der Rechtsform einer Stiftung. Diese Form kann das Fideikommißgericht auch wählen, wenn es Ansprüchen aus einem Dienst- oder Arbeitsverhältnis, aus Schul- und Patronatslasten, von Versorgungsberechtigten und Versorgungsmaßen sicherstellen will. Es ist ihm dagegen verwehrt, zu anderen Zwecken Stiftungen zu errichten, insbesondere Fideikommisse in Stiftungen umzuwandeln und Genossenschaften, sonstige juristische Personen sowie Personenverbände ohne gesetzliche Ermächtigung zu bilden.

6. Rechte und Ansprüche der Fideikommißgläubiger einschließlich der Versorgungs- und Abfindungsansprüche sind auf Antrag der Berechtigten in geeigneter Weise zu sichern, soweit sie etwa das Erlöschen des Fideikommisses gefährdet, doch muß der Antrag innerhalb dreier Monate seit dem Erlöschen gestellt werden. Dagegen hat das Fideikommißgericht die Gehalts-, Ruhegehalts- und Hinterbliebenenansprüche von Fideikommißangestellten von Amtswegen sicherzustellen, sofern hierfür ein Bedürfnis besteht.

7. Stiftungen mit Land- oder Waldbesitz aus der Zeit vor dem 30. Juni 1938, die aus Anlaß der Fideikommißauflösung errichtet worden sind, müssen regelmäßig ihren Grundbesitz bis zum 1. Januar 1941 veräußert haben, widrigenfalls sie erlöschen. Doch kann der Reichsjustizminister Ausnahmen hiervon zulassen.

8. Die Möglichkeit des Reichserbhofgesetzes, ein Fideikommiß zum Erbhof ausnahmsweise umzuwandeln, wird aufrecht erhalten und eine Befreiung von dem Erfordernis der Eigenwirtschaft des Besitzers oder der Bewirtschaftung von einer Hofstelle aus für den Fall zugestanden, daß es zur Sicherung bedeutsamer und im Interesse des deutschen Volkes zu erhaltender Kulturwerte auf dem Gute geboten ist, oder wenn der Besitzer sich besonders hervorragend um den nationalsozialistischen Staat verdient gemacht hat, doch muß der dazu nötige Antrag bis zum 31. Dezember 1939 gestellt werden.

9. Endlich schließt das neue Reichsrecht alle Entschädigungsansprüche aus, die wegen seiner Maßnahmen erhoben werden könnten. —

Wie ein roter Faden zieht sich durch die Bestimmungen des Reichsgesetzes vom 6. Juli 1938 die agrarpolitische Richtlinie der Reichsregierung, daß als das beste Mittel zur Gesundung des deutschen Volkes eine möglichst große Zahl mittlerer und kleiner Bauernstellen zu schaffen und zu erhalten ist. Aus diesem Gesichtspunkt erklärt sich ihr Bestreben, den großen Grundbesitz aus seiner Gebundenheit an die Familie möglichst bald und unbeschränkt in die freie Verfügungsmacht selbst wirtschaftender Besitzer zu überführen.

Bücherschau.

Die Methode der Physik. Von Prof. Dr. Hugo Dingler. 424 Seiten. Gr. 8°. Verlag Ernst Reinhardt in München. Brosch. M. 11.—, Leinen M. 13.—.

Die Meßmethoden der „Praktischen Geometrie" sind in einer Entwicklung begriffen, die mehr und mehr von der „Physikalischen Meßtechnik" so beeinflußt werden, daß diese Meßtechnik als ein unmittelbares Angrenzgebiet der Geodäsie bezeichnet werden muß. Die wertende Anzeige eines Buches, das sich von grundsätzlichen Erwägungen aus mit der „Methode der Physik" befaßt, wird daher für die „Zeitschrift für Vermessungswesen" von Nutzen sein können. — Wer ein modernes Lehrbuch der Physik[1]) durcharbeitet oder auch nur durchliest, wird von dem Eindruck der staunenswerten schöpferischen Leistungen gebannt sein, die das menschliche Geistesleben in den letzten Jahrzehnten auf die-

[1]) Von den „Einbändigen" ist sehr zu empfehlen: Physik, Ein Lehrbuch von Wilhelm H. Westphal, a.o. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Berlin. 4. Auflage. Mit 619 Abb. 625 S. Berlin. J. Springer 1937.

sem Gebiete hervorgebracht hat. Die Fülle der neuen Entdeckungen und Erfindungen wird als erdrückend und fast mehr noch als verwirrend empfunden. Soll die Physik angesichts dieser Fülle nicht zu einem Chaos von Erscheinungen und Gesetzen oder nur Sätzen, die einander nur gegenüber- oder gar entgegenstehen, werden, dann können nur „Grundlagenforschungen" wirklich helfen. Dadurch kann der Glaube in Physikerkreisen, daß „die Einzelerscheinungen in ihrer verwirrenden Fülle nur Sonderfälle sind, die sich aus grundlegenden Gesetzen ableiten lassen" schließlich zur Gewißheit werden. — Nun hat die Mathematik — als Nachbargebiet der Physik — die, wie schon Galilei erkannte, für die Physik nicht nur Hilfswissenschaft, also dienende Magd, sondern vielmehr gebende Mutter ist, eine Grundlagenkrisis erlebt, die die größten lebenden Mathematiker beschäftigt hat. Hieraus ist unter Führung des Altmeisters der Mathematik D. Hilbert in Göttingen eine Beweistheorie entstanden mit dem Endziel, unsere üblichen Methoden der Mathematik samt und sonders als widerspruchsfrei zu erkennen. Die „Mathematische Methode", so schwierig sie unter dem obengesetzten Ziel, daß bei beliebig fortgesetzten Schlußketten niemals Widersprüche auftreten dürfen, auch ist, so steht sie hinter einer „Methode der Physik" mit dem gleichen Ziel der Widerspruchsfreiheit und Sicherheit weit zurück. Dies sei an der Definition Euklids „Ein Punkt ist, was keinen Teil hat" aufgezeigt. Dieser mathematische Punkt hat keine räumliche Existenz, aber den für die Schlußsicherheit einzigartigen Vorzug, daß er nur durch eine einzige, oder mindestens endliche Anzahl von Eigenschaften charakterisiert werden kann. Wenn nun auch der Aufbau der Grundlagen der Geometrie durch Hilbert ein wesentlich anderer als der durch Euklid ist, so ist beiden aber die Tatsache gemeinsam, daß ihren Grundbegriffen nur eine endliche Anzahl von Eigenschaften und Beziehungen zugeordnet wird. Darin liegt überhaupt erst die Möglichkeit, zu sicheren und widerspruchsfreien Schlüssen durch Ausbau der mathematischen Methoden zu kommen. — Viel schwieriger liegen aber nun die Verhältnisse auf dem Gebiete der Physik. Ein physikalischer Punkt hat Materie, und was er an Eigenschaften und Kräften alles besitzt, läßt sich wohl zu keiner Zeit endgültig aussagen, wie ein Blick in die moderne Atomtheorie deutlich zeigt. Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß bei dieser nicht absehbaren Anzahl von Eigenschaften eine „Methode der Physik", die die einzige sein und das gleiche Ziel erreichen will wie die mathematische Methode, vor weit weit größeren Schwierigkeiten steht. — „Vorwort und Einleitung" weisen schon kurz auf die wissenschaftlichen Auffassungen hin, die des Verfassers „System letztbegründeter Erkenntnisse" gegenüberstehen. — Die verschiedenen und weiten Bereiche, auf die sich die Untersuchungen des Verfassers beziehen, seien entsprechend der Gliederung des Buches an Hand charakterisierender Stichworte aufgewiesen. Nach einem I. Kapitel über Wesen der strengen Wissenschaft (Idee, Begriff, Aussagen; axiomatische Natur der methodischen Fundamente, Ziel und Sinn der Wissenschaft) und dem II. über Wesen der physikalischen Methode (Lücken der Schulmeinung, Logik, Zahl, Raum, Kausalität, Dynamik, Satz vom zureichenden Grunde), dem III. Kapitel: Axiomatisierung (Eindeutigkeit, Systemprinzipien, Vollständigkeitsbeweis, Genauigkeit, reale Bestimmungen, Logik der Hypothese) folgt das IV. Kapitel: Fortschritt der Physik (Experiment und Formung, Mathematismus, Atomistik, Materie und Elektrizität, Wahrscheinlichkeit, Chemie, das System und die modernen Theorien, biologische Gesetze und über die Rolle der Erfahrung in der Methodik). In einem Schlußwort wird die Entstehung des Werkes und der wissenschaftliche Werdegang des Verfassers skizziert. Nur durch einige führende Grundauffassungen können hier noch einige Leitgedanken des Werkes charakterisiert werden. Da die Methodenlehre der Physik die Wege finden will, die überhaupt und sicher zur physikalischen Erkenntnis führen, so liegt eine große Verwandtschaft mit der Kantischen Auffassung und der vom Verfasser getroffenen Formulierung vor: Wie ist Physik als Wissenschaft überhaupt möglich? Während aber sonst in der Physik als Grundfaktoren gelten: 1) die sogenannte Natur, 2) das vom Geiste zu dieser Natur Hinzugebrachte, führt des Verfassers strenge Methodik zu der Einteilung: a) das an der Physik, was von unseren eigenen Handlungen (Methoden) d. h. also zuletzt von unserem „Willen" abhängig ist, b) und das von unserem Willen Unabhängige. Die hier anschließenden Betrachtungen führen den Verfasser nun zu der Erkenntnis, daß die letzte Begründbarkeit der physikalischen Methodik erreicht sein wird, wenn es gelingt, diese Wissenschaft allein auf „unbekümmerten Aussagearten", nämlich Erlebnis- und Handlungsaussagen zu gründen. Dieses führt zur Forderung einer „idealen Methodik" (Prinzip der Begründung, Prinzip der Ordnung, Prinzip des beliebigen Neuaufbaus der Physik), die nun in Auseinandersetzung mit gegenüberstehenden Auffassungen eingehend untersucht und neu aufgebaut wird. Eingehende Betrachtungen werden der Entstehung, Verwendung der Meßapparate und ihre Bedeutung für die physikalische Methode und Erkenntnis gewidmet, wobei naturgemäß der Genauigkeitsbegriff eine entscheidende Rolle spielt. Dabei weist der Verfasser mit vollem Recht immer wieder auf die Bedeutung des „unmittelbaren Menschen" hin, diesen methodischen Ausgangspunkt, von dem aus alle Theorien erst geschaffen werden, und dessen aktives formgebendes Gestaltenwollen gegenüber aller rein passiven Erfahrung von entscheidender Bedeutung ist. Von diesem Punkte aus wird es dem Geodäten, der ohne wollende Meßtätigkeit mit entsprechenden Erwartungen der zu erzielenden Genauigkeit einfach nicht leben kann, wohl am besten gelingen, Verständnis zu gewinnen für die nicht immer gerade leichtverständlichen Ausführungen, die in vielseitigem und lebendigem Gegenüber zu gegenwärtigen Auffassungen über die Grundlagen der Physik stehen, wie das angesichts der Schwierigkeit der großen Aufgabe nicht anders zu erwarten ist. E. Brennecke.

Galilei, Kepler, Tycho Brahe und ihr Kreis. Katalog 652.

Unter diesem Titel versendet der Buchhändler und Antiquar Karl W. Hiersemann, Leipzig, soeben einen Antiquariatskatalog, der in 111 Nummern (teilweise sehr seltene) Drucke jener Autoren und ihrer Zeit anbietet, die zwar — obgleich manche von allgemein kulturhistorischer Bedeutung sind — in erster Linie den geschichtlich interessierten Astronomen angehen, darüber hinaus aber durch ihre zahlreichen Hinweise auf die Geschichte der Meßwerkzeuge und speziell auf die Geschichte des Fernrohres auch den Geodäten interessieren. Vor allem aber verdient der unter Nr. 106 zum Preise von 680 RM. angebotene Hpgtbd. des Willibrord Snellius: Eratosthenes Batavus de terrae ambitus vera quantitate, Lugduni-Batavorum 1617, hier hervorgehoben zu werden. Arns.

Gesetze, Verordnungen und Erlasse.

Annahme- und Ausbildungsordnung der Anwärter für den gehobenen mittleren vermessungstechnischen Dienst.

RdErl. d. RMdJ. v. 29. 8. 1938 — VI a 4269/38-6842. RMBliV. S. 1469.

Auf Grund des § 3 Abs. 1 des Ges. über die Neuordnung des Vermessungswesens v. 3. 7. 1934 (RGBl. I S. 534) ordne ich an:

I. Annahme von Zivilanwärtern.

§ 1.

Für die Laufbahn des gehobenen mittleren vermessungstechnischen Dienstes sind nur solche reichsdeutschen männlichen Bewerber deutschen und artverwandten Blutes zugelassen, die

a) das 26. Lebensjahr nicht überschritten haben,
b) den Nachweis des erfolgreichen Besuchs
   aa) einer als voll ausgestaltet anerkannten Mittelschule oder
   bb) von 6 Klassen einer öffentlichen oder anerkannten höheren Schule oder von 4 Klassen einer solchen in Aufbauform
   erbringen,
c) das Abschlußzeugnis eines 3-semestrigen Lehrganges einer anerkannten vermessungstechnischen Fachschule besitzen,
d) den Nachweis erbringen, daß sie vor Eintritt in die Fachschule mindestens 12 Monate zu ihrer Ausbildung bei Vermessungsbehörden oder Öffentlich bestellten Vermessungsingenieuren praktisch tätig gewesen sind,
e) völlig gesund sind, insbesondere ausreichend sehen und hören, und sich nach ihrer Begabung für den gehobenen mittleren vermessungstechnischen Dienst eignen,
f) sich einwandfrei geführt haben.

§ 2.

Während des Vorbereitungsdienstes erhalten die Supernumerare (§ 6) einen angemesenen Unterhaltszuschuß. Außerdem sind ihnen Kinderzuschläge wie planmäßigen Beamten zu zahlen.

§ 3.

(1) Das Einberufungsgesuch ist an die Verwaltung zu richten bei der der Bewerber dauernd beschäftigt zu werden wünscht.

(2) Dem Gesuch sind folgende Unterlagen beizufügen:

a) Eine von dem Bewerber verfaßte und handschriftlich gefertigte Darstellung seines Lebenslaufs,

b) ein amtsärztliches Zeugnis über den Gesundheitszustand, das Seh-, Farbenunterscheidungs- und Hörvermögen,

c) das Zeugnis über den erfolgreichen Besuch

aa) einer als voll ausgestaltet anerkannten Mittelschule oder

bb) von 6 Klassen einer öffentlichen oder anerkannten höheren Schule oder von 4 Klassen einer solchen in Aufbauform,

d) das Reifezeugnis des Lehrganges einer anerkannten vermessungstechnischen Fachschule,

e) Zeugnisse über die bisherige Beschäftigung,

f) lückenlose polizeiliche Führungszeugnisse für die Zeit nach Verlassen der Schule,

g) sämtliche Urkunden zum Nachweis der Abstammung des Bewerbers und gegebenenfalls seiner Ehefrau oder Ahnenpaß,

h) parteiamtliche Bescheinigung über Zugehörigkeit zur NSDAP., deren Gliederungen und angeschlossenen Verbände,

i) der Wehrpaß oder der Ausmusterungsschein,

k) ein Lichtbild (Brustbild) aus neuerer Zeit.

§ 4.

(1) Die Anzahl der einzustellenden Anwärter bemißt sich nach Bedarf

(2) Sofern sie die geforderten Voraussetzungen erfüllen und eine mindestens durchschnittliche Befähigung aufweisen, sind die Bewerber aus kinderreichen Familien bevorzugt zu berücksichtigen.

(3) Wegen der bevorzugten Berücksichtigung von Soldaten und Arbeitsmännern wird auf die §§ 16 bis 18 der VO. über Fürsorge für Soldaten und Arbeitsmänner v. 30. 9. 1936 (RGBl. I S. 865) verwiesen.

(4) Bewerberlisten werden nicht geführt. Verbindliche Vormerkungen werden nicht gestattet.

(5) Die Anwärter sind in der Regel zum 1. 4. oder 1. 10. j. J. einzuberufen.

II. Annahme von Versorgungsanwärtern.

§ 5.

Versorgungsanwärter weisen ihre Eignung durch das Zeugnis der Abschlußprüfung II (Reifeprüfung der Höheren Heereslehranstalt für Vermessungswesen) nach. Die Vorschriften des § 1 a bis d gelten für die Annahme von Versorgungsanwärtern nicht. An Stelle der in § 3 Abs. 2 c und d vorgeschriebenen Zeugnisse haben sie das Zeugnis über die Abschlußprüfung II der Höheren Heereslehranstalt für Vermessungswesen vorzulegen. Im übrigen gelten die Bestimmungen der Anstellungsgrundsätze.

III. Vorbereitungsdienst.

§ 6.

Wer in den gehobenen mittleren vermessungstechnischen Dienst einberufen wird, ist zum Beamten zu ernennen. Er führt die Dienstbezeichnung „Vermessungssupernumerar".

§ 7.

(1) Der Vorbereitungsdienst, der bei der Anstellungsbehörde abzuleisten ist, dauert grundsätzlich 2½ Jahre; er wird aber für eine Übergangsfrist auf 2 Jahre herabgesetzt.

(2) Der Anwärter ist am Tage des Dienstantritts als Beamter zu vereidigen. Über die Vereidigung ist eine Niederschrift aufzunehmen, die von dem Anwärter mit zu vollziehen ist. Sie ist zu der Dienstakte des Anwärters zu nehmen.

§ 8.

Die Ausbildung während des Vorbereitungsdienstes ist so zu gestalten, daß die theoretische Ausbildung, die der Vermessungssupernumerar auf der Fachschule genossen hat, durch eine vielseitige praktische Beschäftigung auf das gründlichste ausgebaut und ergänzt wird. Zu diesem Zweck muß der Vermessungssupernumerar das gesamte vermessungstechnische Arbeitsgebiet seiner Verwaltung von Grund auf kennenlernen und während einer kurzfristigen Beschäftigung auch Einblick in die Arbeitsgebiete nehmen, die mit dem Vermessungswesen seiner Verwaltung in Berührung stehen.

IV. Prüfung.

§ 9.

Voraussetzung für die spätere planmäßige Anstellung als Beamter des gehobenen mittleren vermessungstechnischen Dienstes ist das Bestehen der Fachprüfung.

V. Einstellung.

§ 10.

Die Vermessungssupernumerare sind mit der Aushändigung des Zeugnisses über die bestandene Prüfung zum außerplanmäßigen Beamten der RBesGr. A 4 c 2 oder der entsprechenden Besoldungsgruppe einer anderen Besoldungsordnung mit der Dienstbezeichnung „Vermessungspraktikant" zu ernennen.

VI. Anstellung.

§ 11.

Die Vermessungspraktikanten werden nach Maßgabe ihrer Eignung und Bewährung und unter Berücksichtigung des Prüfungsergebnisses in verfügbaren Planstellen der RBes.Gr. A 4 c 2 oder der entsprechenden Besoldungsgruppe einer anderen Besoldungsordnung mit der Amtsbezeichnung „Vermessungsinspektor" angestellt.

VII. Übergangs- und Schlußbestimmungen.

§ 12.

(1) Personen, die den Probe- und Vorbereitungsdienst für den gehobenen mittleren vermessungstechnischen Dienst bei Inkrafttreten dieser Anordnung bereits angetreten haben und von ihrer Behörde als unmittelbare Anwärter geführt werden, beenden ihre Ausbildung nach den Vorschriften, die bisher auf sie Anwendung gefunden haben.

(2) Die am 1. 9. 1938 vorhandenen planmäßigen und außerplanmäßigen Beamten des gehobenen mittleren vermessungstechnischen Dienstes der RBesGr. A 4 c 2 oder der entsprechenden Besoldungsgruppe einer anderen Besoldungsordnung stehen den nach den neuen Vorschriften ausgebildeten und geprüften Vermessungsinspektoren und -praktikanten gleich.

(3) Beamte des einfachen mittleren vermessungstechnischen Dienstes können zur Vermessungsinspektorprüfung zugelassen werden, wenn sie die hierfür erforderliche persönliche Eignung besitzen und die Prüfung für ihre bisherige Stelle mit dem Prädikat „Gut" bestanden oder den Durchschnitt erheblich überragende Leistungen und Fähigkeiten aufzuweisen haben.

(4) Beamte des einfachen mittleren vermessungstechnischen Dienstes (planmäßige, außerplanmäßige Beamte und Beamte im Vorbereitungsdienst), denen der Aufstieg nach den bisherigen Bestimmungen in Planstellen des gehobenen mittleren vermessungstechnischen Dienstes ohne Prüfung offen stand, können nur dann in Planstellen des gehobenen mittleren vermessungstechnischen Dienstes übernommen werden, wenn sie ihre Befähigung durch eine Prüfung nachweisen.

§ 13.

Ergeben sich wegen der Anwendung der Vorschriften im § 12 Abs. (4) Zweifel oder besondere Härten, so ist die Entscheidung des RMdI. einzuholen.

§ 14.

Die Fachminister des Reichs und der Länder erlassen für ihren Geschäftsbereich die erforderlichen Durchführungs- und Prüfungsvorschriften (§ 9) im Einvernehmen mit dem RMdI.

§ 15.

Die Annahme- und Ausbildungsordnung tritt mit dem 1. 9. 1938 in Kraft. Bis zum 31. 3. 1941 können im Einvernehmen mit dem RMdI. im Bedarfsfalle noch Anwärter nach den bisher geltenden Bestimmungen eingestellt werden.

An die Landesregierungen, nachgeordneten Behörden, Gemeinden und Gemeindeverbände.
An die Obersten Reichsbehörden durch Abdruck.

Mitteilungen der Geschäftsstelle.

Preußen. Landeskulturverwaltung. **Ernannt:** z. Verm.Rat: Reg.Landm. Kolwe, Elbing, Jaitner, Schneidemühl, Manke, Göttingen, Meitzner, Köln, Stöwener, M.-Gladbach, Buch, Düren. z. Verm.Oberinsp.: Verm.Insp. Kanngießer, Koblenz, Schmieder, Magdeburg. z. Verm.Insp.: Verm.Prakt. Steinweg, Allenstein, Sternberg, Lötzen, Jekat, Liegnitz, Splett, Stettin, Wetzel, Stralsund. Planstelle in A 4 c 1 verliehen: Verm.Insp. Otto, Köslin. — **Bestellt:** z. leit. Verm.Beamten Verm.Rat Knöpfler, M.-Gladbach, Verm.Insp. Lissau z. Bürovorsteher i. Vermessungsbüro d. Kulturamts in Frankfurt a. d. O. — **Versetzt:** Verm.Rat Hupbach, Marburg I nach Eisenach, Reg.Landm. Henning, Schmalkalden nach Fulda, Kayser, Simmern nach Aachen, Schwindt, Aachen nach Simmern. Verm.Assessor Voigt, Hannover nach Göttingen, Jordan, Verden nach Hannover (L.K.A.), Verm.Insp. Schmidt, Siegburg nach Bonn, Feuring (Friedrich), Saarbrücken nach Siegburg, Linsel, Simmern nach Koblenz, Verm.Obersekr. Wintrath, Bernkastel nach Saarbrücken, Verm.Sup. Bernt, Allenstein nach Lötzen, Herrmann, Breslau nach Ratibor, Kasper u. Birkholz, Koblenz nach Simmern, Greiner, Koblenz nach Prüm, Steffes, Mayen, Herlet, Koblenz, Oettershagen, Waldbröl, Clemens, Euskirchen, Winzen, Trier nach Koblenz (L.K.A.), Knappe u. Kunze, Nordhausen nach Magdeburg (L.K.A.). Verm.Insp. Frigger, Bielefeld nach Saarbrücken, Verm.Sup. Ditzel u. Eschenbruch, Minden, Hofius, Siegen, Schulte, Münster nach Münster (L.K.A.), Harnisch u. Dreher, Stettin, Papritz, Stralsund nach Stettin (L.K.A.). — **In den thüringischen Landesdienst versetzt:** Verm.Rat Hupbach, Marburg nach Eisenach, Reg.Landm. Wolfes, Simmern nach Hildburghausen. — **Ausgeschieden:** Verm.Assessor Feuerstak, Stettin. — **In den Ruhestand:** Verm.Rat Rohde, Berlin, Dümmen, Olpe. — **Gestorben:** Verm.Insp. Zacharias, Arnsberg 11. 8. 38. — **In den Staatsdienst als Vermessungssupernumerar übernommen:** Volontär Kramer, Fulda, Klein, Arnsberg.

Preußen. Wasserbauverwaltung: **Ernannt:** z. Reg.- u. Verm.Räten d. Reg.Landm. Printz, Magdeburg b. d. Elbstromverwaltg. Magdeburg, Olbrich, Torgau b. d. Wasserstraßendirektion Stettin. — **Ernannt:** z. Verm.Räten d. Reg.-Landm. Benkendorff, Frankfurt/Oder, Kaschade, Breslau, Langmann, Landsberg/Warthe, Schulze, Halle a. S. u. Danz, Koblenz.

Berichtigungen

zur Abhandlung: „Über die Richtungsreduktionen bei der Gauß'schen konformen Abbildung . . .“ (Z. f. V. 1933).

S. 530, Z. 14 v. unt.: Statt 504 lies 505

S. 531, Z. 12: Statt $\frac{x}{R}$ lies $\frac{\triangle}{R}$

S. 531, Z. 13: Statt (22) S. 503 lies (14) S. 502

S. 531, Z. 20 von oben und Z. 8 von unten: Statt (21) lies (20). Gr.

Verlag von Konrad Wittwer in Stuttgart.

Druck von Carl Hammer (Inh. Wilh. Herget), Hofbuchdruckerei in Stuttgart.