

MAREK PAŃTAK

**Obciążenia
dynamiczne
generowane
podczas chodu
i biegu**

**Modele
pionowych
składowych
GRF**

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Tomasz Kapecki

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTW NAUKOWYCH

Jacek Pietraszek

REDAKTOR DYSCYPLINY
inżynieria lądowa, geodezja i transport
Andrzej Winnicki

REDAKTOR PROWADZĄCY
Mariusz Maślak


RECENZENCI
Mateusz Bocian
Marek Salamak

SEKRETARZ SEKCJI
Marta Wlazło

OPRACOWANIE REDAKCYJNE
Ilona Turowska

SKŁAD I ŁAMANIE
Anna Basista

PROJEKT OKŁADKI
Karolina Szafran

 <http://orcid.org/0000-0003-4807-4212>

© Copyright by Politechnika Krakowska

ISBN 978-83-67188-79-1

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków; tel. 12 628 37 25, fax 12 628 37 60
e-mail: wydawnictwo@pk.edu.pl www.wydawnictwo.pk.edu.pl
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Druk i oprawę wykonano w Dziale Poligrafii Politechniki Krakowskiej.
Ark. wyd. 13,00

Zam. 11/2024

Nakład 100 egz.

Cena zł 63,00 z VAT

SPIS TREŚCI

Wykaz ważniejszych oznaczeń	5
Przedmowa	7
1. Analizy dynamiczne – uwagi ogólne	13
2. Zagadnienia dynamiki kładek dla pieszych	19
2.1. Uwagi ogólne	19
2.2. Obciążenia dynamiczne generowane przez człowieka	20
2.2.1. Typy aktywności użytkowników na kładkach dla pieszych	20
2.2.2. Parametry dynamiczne i kinematyczne oddziaływań	24
2.2.2.1. Częstotliwości oddziaływań	24
2.2.2.2. Szybkość ruchu i długość kroku	34
2.2.2.3. Uwagi uzupełniające	55
2.2.3. Obciążenia dynamiczne – charakterystyka	57
2.2.3.1. Siły reakcji podłoża powstające podczas chodu	63
2.2.3.2. Siły reakcji podłoża powstające podczas biegu	68
3. Modele sił reakcji podłoża – charakterystyka i analiza	75
3.1. Modele siły VGRF generowanej podczas chodu	75
3.1.1. Modele ciągłych przebiegów VGRF	75
3.1.1.1. Uprozczone modele VGRF	77
3.1.1.2. Model VGRF bazujący na szeregu Fouriera	81
3.1.2. Model siły VGRF generowanej przez jedną stopę	88
3.2. Modele siły VGRF generowanej podczas biegu	91
3.2.1. Model VGRF bazujący na szeregu Fouriera	91
3.2.2. Model półsinusoidalny	94
3.2.3. Model dwumasowy	97
4. Własne modele obciążeń VGRF generowanych podczas chodu i biegu	103
4.1. Charakterystyka badań własnych	103
4.2. Wyniki badań własnych – charakterystyka i analiza	107
4.2.1. Analiza przebiegów VGRF generowanych podczas chodu	109
4.2.2. Analiza przebiegów VGRF generowanych podczas biegu	128
4.3. Własne modele obciążeń VGRF	130
4.3.1. Modele obciążeń VGRF generowanych podczas chodu	132
4.3.2. Modele obciążeń VGRF generowanych podczas biegu	136
4.3.3. Interpolacja przebiegów VGRF za pomocą splajnów kubicznych z kontrolą kształtu	151

5. Walidacja własnych modeli sił reakcji podłoża	183
5.1. Walidacja modeli obciążeń VGRF generowanych podczas chodu	184
5.2. Walidacja modeli obciążeń VGRF generowanych podczas biegu	199
6. Uwagi końcowe i podsumowanie	209
Literatura	211
Streszczenie	225
Abstract	226

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- a – przyspieszenie drgań [m/s^2],
 f – częstotliwość [Hz],
 f_s – częstotliwość kroków podczas chodu lub biegu [Hz],
 F_{VGRF}/G – unormowana (bezwymiarowa) wartość pionowej składowej sił reakcji podłoża $F_{\text{VGRF}}/G = \text{VGRF}/G$ [-],
 G – ciężar ciała poruszającej się osoby [N],
 GRF – siła reakcji podłoża (ang. *Ground Reaction Force*) [N],
 k – gęstość ruchu (gęstość potoku pieszych, gęstość tłumu) [os./m^2],
 l_s – długość kroku [m],
 s – droga [m],
 t – czas [s],
 t_c – czas kontaktu stopy z podłożem dla chodu lub biegu [s],
 Δt_d – czas dwunożnego kontaktu osoby idącej z podłożem [s],
 T_s – okres kroków podczas chodu lub biegu $T_s = 1/f_s$ [s],
 V – szybkość ruchu (chodu lub biegu) [m/s],
 VGRF – pionowa składowa sił reakcji podłoża [N],
- α_i – współczynniki Fouriera,
 β – współczynnik dynamiczny,
 δ – logarytmiczny dekrement tłumienia,
 ζ – ułamek tłumienia krytycznego ($\zeta \approx \delta/2\pi$).
 τ – współczynnik czasu kontaktu stopy z podłożem,
 φ_i – kąty przesunięć fazowych wyższych składowych harmonicznym szeregu Fouriera względem pierwszej składowej harmonicznym,
 ψ_d – współczynnik czasu dwunożnego kontaktu z podłożem.

Przedmowa

W świetle obowiązujących norm projektowanie konstrukcji wymaga weryfikacji warunków stanów granicznych nośności i użyteczności. W ramach weryfikacji stanu granicznego użyteczności zachodzi m.in. potrzeba wyznaczenia amplitud drgań konstrukcji i oceny komfortu użytkownika konstrukcji. W tym celu niezbędna jest znajomość obciążeń dynamicznych działających na konstrukcję.

Przedmiotem niniejszego opracowania jest przedstawienie modeli obciążeń dynamicznych generowanych przez człowieka podczas różnych form aktywności ruchowej. W biomechanice obciążenia te określane są terminem siły reakcji podłoża (ang. *Ground Reaction Forces, GRF*). Niniejsza monografia prezentuje modele pionowych składowych sił reakcji podłoża (ang. *Vertical Ground Reaction Forces, VGRF*) generowanych podczas chodu i biegu. W pracy przedstawiono aktualny stan wiedzy z zakresu modelowania oddziaływań VGRF (proponując różne modele) oraz własne propozycje modeli VGRF. Prezentowane modele własne opracowano na podstawie obszernych badań laboratoryjnych i kompleksowych analiz obciążeń VGRF generowanych podczas chodu i biegu. W rozdziałach poświęconych omówieniu istniejących modeli obciążeń VGRF zamieszczono także, opracowane na podstawie badań własnych, liczne uwagi i wytyczne uzupełniające braki dotychczasowych propozycji. W analizach własnych wykorzystano unormowane wartości pionowych składowych sił reakcji podłoża zdefiniowane jako $F_{VGRF}/G = VGRF/G$ (gdzie: VGRF – wartość siły reakcji podłoża zarejestrowana podczas badań [N], G – ciężar poruszającej się osoby [N]).

Pierwszy rozdział monografii, rozdział wprowadzający w zagadnienia analiz dynamicznych i oceny komfortu użytkownika drgających konstrukcji, poświęcono omówieniu znaczenia i zakresu analiz dynamicznych w procesie projektowania konstrukcji, w szczególności w procesie projektowania kładek dla pieszych. Przytoczono wymagania norm i wytycznych obowiązujących w różnych krajach dotyczące analiz dynamicznych kładek dla pieszych. Omówiono kwestię stosowania poprawnych kryteriów oceny komfortu użytkownika konstrukcji z uwzględnieniem okresu powrotu drgań (drgania natury codziennej, drgania rzadkie, drgania wyjątkowe). W rozdziale tym nie przytoczono kryteriów komfortu użytkownika konstrukcji, gdyż ich opracowanie i analizy nie były celem niniejszej monografii. Wskazano jednak materiały źródłowe, w których czytelnik może zapoznać się z właściwymi kryteriami oceny komfortu użytkownika konstrukcji.

W rozdziale 2 przedstawiono, opracowane na podstawie obszernych studiów licznych prac z zakresu biomechaniki i inżynierii ruchu pieszych, szczegółowe analizy parametrów opisujących ruch człowieka. Do parametrów tych należą: częstotliwość

kroków, szybkość ruchu oraz długość kroków. Przedstawiono m.in. zależności opisujące szybkość ruchu w funkcji gęstości ruchu oraz zależności częstotliwości i długości kroków od szybkości ruchu. Parametry te wywierają bezpośredni wpływ na dokładność analiz dynamicznych konstrukcji narażonych na dynamiczne oddziaływanie osób idących lub biegnących. Niepoprawne określenie ich wartości prowadzi do błędnego oszacowania amplitud drgań konstrukcji. W rozdziale 2 przedstawiono własne propozycje zależności empirycznych opisujących zmienność częstotliwości i długości kroków w funkcji szybkości ruchu. Zauważyć warto, że zaprezentowane zależności wykorzystać można do budowy złożonych modeli oddziaływań użytkowników na konstrukcję, uwzględniających losowy charakter obciążeń. Znajomość wzajemnych zależności pomiędzy parametrami ruchu oraz zależności opisujących granice przedziałów ich zmienności stwarza możliwość generowania losowych wartości tych parametrów oraz możliwość modelowania losowych oddziaływań dynamicznych powstających podczas ruchu grup pieszych o różnej liczebności.

W kolejnych podrozdziałach rozdziału 2 omówiono charakterystykę sił generowanych przez osoby idące i biegnące. Przedstawione informacje pozwalają poznać metody pomiaru i wyznaczania sił reakcji podłoża stosowane w biomechanice oraz mechanizmy generowania obciążeń dynamicznych przez poruszające się osoby. W podrozdziałach tych zaprezentowano szczegółowe charakterystyki cykli chodu i biegu oraz charakterystyczne przebiegi sił VGRF generowane przez osoby idące i biegnące. Oddziaływania te zobrazowano w szerokich zakresach częstotliwości ruchu: 1,20–2,40 Hz dla chodu; 2,40–3,40 Hz dla biegu (wyniki badań własnych). Znajomość tych zagadnień pozwala uniknąć błędów w modelowaniu oddziaływań VGRF na potrzeby analiz dynamicznych konstrukcji. Dotychczas brak tak szczegółowych opracowań tej tematyki w literaturze krajowej i zagranicznej poświęconej problemom modelowania oddziaływań dynamicznych poruszających się osób na konstrukcje.

Rozdział 3 poświęcono omówieniu i analizie istniejących modeli VGRF opracowanych przez różnych autorów, w tym także opracowań krajowych przedstawionych w pracach [65, 221]. Rozdział ten stanowi przegląd i analizę aktualnego stanu wiedzy. Jest to analiza wzbogacona wynikami badań własnych. W wielu przypadkach uzupełniono braki lub skorygowano błędy dotychczasowych propozycji, wykorzystując wyniki badań własnych. Przykładem istotnych informacji uzupełniających braki dotychczasowych modeli, znacznie zwiększających dokładność wyznaczania obciążeń VGRF, są informacje dotyczące wartości czasu kontaktu poruszającej się osoby z podłożem (t_c) prezentowane w rozdziale 3.2.2 dla biegu, niezbędne do poprawnego wyznaczenia obciążenia VGRF. Szczegółowe informacje dotyczące określania wartości t_c dla analizowanych typów aktywności ruchowej (chód, bieg) podano w rozdziale 4 poświęconym prezentacji i analizie wyników badań własnych.

Inny przykład opracowanych informacji uzupełniających dotyczy modeli VGRF zbudowanych na bazie szeregu Fouriera. W ramach analizy i omówienia tych modeli skorygowano i uzupełniono wytyczne dotyczące przyjmowania wartości

współczynników Fouriera i kątów przesunięć fazowych niezbędnych do poprawnego odwzorowania przebiegów VGRF. Prezentowane informacje pozwalają poprawnie wykorzystywać modele opracowane przez innych autorów.

Wśród omówionych modeli VGRF przedstawiono modele nieprezentowane dotychczas w krajowych opracowaniach dotyczących zagadnień dynamicznego oddziaływania użytkowników na konstrukcje. Przykładem takiego modelu jest dwumasowy model obciążenia VGRF generowanego podczas biegu.

Obciążenia VGRF wygenerowane przy wykorzystaniu omawianych modeli zobrazowano na zamieszczonych w rozdziale 3 licznych ilustracjach przedstawiających przebiegi zamodelowanych obciążeń VGRF w odniesieniu do wyników badań własnych. Porównania te pozwalają zaobserwować dokładność odwzorowania przebiegów obciążeń VGRF za pomocą analizowanych modeli i mogą pozwolić czytelnikowi uniknąć błędów w modelowaniu obciążeń VGRF na potrzeby analiz dynamicznych konstrukcji.

Głównym celem pracy jest prezentacja własnych propozycji modeli obciążeń VGRF generowanych podczas chodu oraz biegu. Modele te opracowano na podstawie obszernych badań własnych sił reakcji podłoża generowanych przez człowieka w różnych formach aktywności zrealizowanych przez autora przy współpracy z Zakładem Biomechaniki AWF Kraków mającym wieloletnie doświadczenie w tego typu badaniach. Wyniki badań wraz z ich szczegółową analizą i opracowanymi modelami obciążeń VGRF zaprezentowano w rozdziale 4.

Zaproponowane modele pozwalają odwzorować przebiegi obciążeń VGRF w szerokich zakresach częstotliwości: 1,20–2,40 Hz dla chodu; 2,40–3,40 Hz dla biegu. Uzupełnia to w znacznym stopniu ograniczenia dotychczasowych modeli mających największą dokładność i zastosowanie w wąskich przedziałach częstotliwości aktywności ruchowej człowieka odpowiadających tzw. normalnemu tempu aktywności (por. Tab. 1).

W propozycji własnej do odwzorowania przebiegów VGRF wykorzystano technikę interpolacji krzywych za pomocą krzywych sklepanych 3 stopnia z kontrolą kształtu (krzywych splajn z kontrolą kształtu). Szczegóły tej metody wraz z przykładem obliczeniowym i programami (skryptami) opracowanymi dla środowisk programistycznych GNU Octave oraz MATLAB przedstawiono w rozdziale 4.3.3. Wykorzystanie tej techniki modelowania przebiegu VGRF pozwoliło uniknąć wyznaczania licznych parametrów funkcji opisujących zmienność VGRF występujących w propozycjach innych autorów i daje możliwość łatwej modyfikacji przebiegu obciążenia poprzez prostą modyfikację położenia węzłów interpolacji krzywej VGRF.

W przypadku obciążeń VGRF generowanych podczas chodu wykonano szczegółową analizę zmienności i korelacji parametrów charakteryzujących krzywe VGRF takich jak: amplitudy lokalnych ekstremów krzywych VGRF, czasy występowania lokalnych ekstremów krzywych VGRF, ilorazy lokalnych ekstremów krzywych VGRF, czasy kontaktu stopy z podłożem, czasy dwunożnego kontaktu stopy z podłożem dla

chodu. Przedstawione wyniki analiz pozwalają zaobserwować wzajemne zależności między analizowanymi parametrami. Znajomość tych zależności pozwala uniknąć błędów w modelowaniu przebiegów VGRF generowanych podczas chodu i stwarza możliwość generowania losowych wartości analizowanych parametrów, a tym samym losowych przebiegów VGRF.

W przypadku obciążeń VGRF generowanych podczas biegu zwrócono uwagę na różne techniki biegu wywierające wpływ na przebieg obciążenia VGRF i w efekcie na odpowiedź dynamiczną konstrukcji. Opracowano modele VGRF dla biegu techniką piętową (bieg z lądowaniem na pięcie, ang. *heel strike running*) oraz biegu techniką sprinterską (bieg z lądowaniem na palcach, ang. *forefoot strike running*).

Zauważyć należy, że technika biegu wpływa na czas kontaktu stopy z podłożem oraz wartość amplitudy obciążenia VGRF. Parametry te wywierają wpływ na wartość odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Dotychczas zagadnienie to nie było uwzględniane w literaturze krajowej i zagranicznej w zakresie opisu i modelowania oddziaływań osób biegnących na konstrukcje. Uwzględnianie techniki biegu w analizach dynamicznych konstrukcji, szczególnie w analizach dotyczących oddziaływania grupy osób biegnących, przyczyni się do zwiększenia dokładności odwzorowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji.

W zakresie modelowania obciążeń generowanych podczas biegu zaproponowano dodatkowo alternatywną metodę modelowania przebiegów VGRF generowanych podczas biegu techniką piętową bazującą na wykorzystaniu funkcji Gaussa (opracowanie własne). Metoda ta polega na odwzorowaniu przebiegów VGRF przez superpozycję pięciu krzywych Gaussa o określonych parametrach zależnych od częstotliwości biegu. Szczegóły tej propozycji przedstawiono w rozdziale 4.3.2. Parametry krzywych Gaussa wyznaczono dla częstotliwości biegu w zakresie 2,40–3,40 Hz.

Opracowane modele własne VGRF poddano kilkietapowej walidacji, której metodykę i wyniki przedstawiono w rozdziale 5. W ramach walidacji modeli:

- etap 1: wyznaczono (w drodze analiz ESD, ang. *Energy Spectral Density*) i wykonano analizy porównawcze amplitud składowych widm gęstości energii ciągłych sygnałów VGRF zamodelowanych przy wykorzystaniu opracowanych modeli i sygnałów zarejestrowanych podczas badań laboratoryjnych;
- etap 2: wyznaczono (w drodze analiz numerycznych) i wykonano analizy porównawcze odpowiedzi dynamicznych układów o jednym stopniu swobody (układy SDOF) obciążonych oddziaływaniami VGRF wyznaczonymi z wykorzystaniem opracowanych modeli i obciążeniami zarejestrowanymi podczas badań laboratoryjnych;
- etap 3: wyznaczono (w drodze badań terenowych i analiz numerycznych) i wykonano analizy porównawcze odpowiedzi dynamicznych rzeczywistych kładek dla pieszych obciążonych rzeczywistymi oddziaływaniami osób idących i biegnących oraz oddziaływaniami VGRF odwzorowanym z wykorzystaniem opracowanych modeli.

Wyniki wykonanej walidacji modeli własnych wskazują na poprawne odwzorowywanie przebiegów VGRF, poprawne odwzorowywanie amplitud widm gęstości energii ciągłych sygnałów VGRF oraz poprawne oszacowanie wartości odpowiedzi dynamicznej konstrukcji.

Wykonanie walidacji opracowanych modeli przy wykorzystaniu analizy ESD pozwoliło wyznaczyć wartości amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii próbek ciągłych sygnałów VGRF odpowiadających różnym typom aktywności człowieka w szerokich zakresach częstotliwości. Utworzono tym samym narzędzie dające możliwość ilościowej oceny dowolnych sygnałów VGRF powstających podczas różnych form aktywności człowieka. Wykorzystując wyniki analiz widm gęstości energii ciągłych sygnałów VGRF przedstawione w podrozdziałach rozdziału 5, można ocenić poprawność i poziom odwzorowania energii dowolnego sygnału VGRF wykorzystywanego w analizie dynamicznej konstrukcji (energia minimalna, średnia lub maksymalna) oraz poziom wyznaczonej odpowiedzi dynamicznej konstrukcji (odpowiednio minimalny, średni lub maksymalny poziom drgań). Metoda ta nie była dotychczas stosowana w krajowych i zagranicznych opracowaniach z zakresu analizy i modelowania ciągłych przebiegów czasowych oddziaływań dynamicznych generowanych przez człowieka.

Oryginalnymi osiągnięciami pracy są:

- szczegółowe analizy obciążeń VGRF generowanych podczas chodu wraz z opracowaniem modeli VGRF generowanych podczas chodu;
- szczegółowe analizy obciążeń VGRF generowanych podczas biegu wraz z opracowaniem modeli VGRF dla dwóch technik biegu: bieg z lądowaniem na pięcie (technika piętowa) oraz bieg z lądowaniem śródstopno-palcowym (bieg z lądowaniem na palcach, technika sprinterska);
- szczegółowe analizy parametrów opisujących ruch człowieka wraz z opracowaniem zależności opisujących szybkość ruchu w funkcji gęstości ruchu oraz częstotliwość i długość kroków w funkcji szybkości ruchu;
- określenie zmienności amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii oddziaływań VGRF generowanych podczas chodu i biegu, dających poprawny obraz właściwości energetycznych tych oddziaływań i możliwość wykonywania oceny ilościowej zamodelowanych oddziaływań VGRF (opracowanie narzędzia umożliwiającego dokonywanie oceny ilościowej oddziaływań VGRF generowanych podczas chodu i biegu);
- przedstawienie licznych wytycznych uzupełniających lub korygujących dotychczasowe zalecenia w zakresie modelowania oddziaływań VGRF zwiększających dokładność modelowania przebiegów VGRF generowanych podczas chodu i biegu.

Ważną częścią niniejszego opracowania, której przygotowaniu poświęcono wiele uwagi, są liczne ilustracje obrazujące omawiane treści, dające pełny i jednoznaczny obraz wykonanych badań i analiz. Ilustracje zamieszczone w monografii stanowią

w całości opracowanie własne autora (110 ilustracji według numeracji w porządku następczym, 433 ilustracje z uwzględnieniem części składowych każdej ilustracji, np. il. 61 a–g, il. 95 a–n).

Zaprezentowane modele i zalecenia opracowano na podstawie wykonanych przez autora obszernych badań i analiz pionowych składowych sił reakcji podłoża (VGRF) generowanych podczas chodu i biegu zrealizowanych w szerokich zakresach częstotliwości: 1,20–2,40 Hz dla chodu; 2,40–3,40 Hz dla biegu.

Wykorzystanie wyników pozwala poprawnie odwzorować obciążenie dynamiczne generowane przez poruszające się osoby, a tym samym poprawnie odwzorować odpowiedź dynamiczną konstrukcji.

Przedstawione treści są efektem wieloletnich studiów i zainteresowań autora zagadnieniami modelowania obciążeń dynamicznych generowanych przez człowieka podczas różnych form aktywności (chód, bieg, skoki, przysiady, kołysanie ciałem). Opracowane modele własne oddziaływań VGRF zweryfikowano w drodze, wykonanych przez autora, licznych badań terenowych i analiz numerycznych istniejących kładek dla pieszych.

1. ANALIZY DYNAMICZNE – UWAGI OGÓLNE

Ciągły postęp w zakresie inżynierii materiałowej oraz rozwój metod i narzędzi obliczeniowych przekładają się w praktyce inżynierskiej na projektowanie i wznoszenie konstrukcji budowlanych o coraz większych rozpiętościach lub wysokościach. Systemy komputerowego wspomaganie projektowania (CAD) ułatwiają ich analizę i optymalizację. Dąży się do optymalnego wykorzystania nośności przekrojów i uzyskania zadowalających wskaźników efektywności ekonomicznej projektu. Tak zaprojektowane konstrukcje mogą jednak okazać się podatne na działanie obciążeń dynamicznych. Zwiększanie rozpiętości przęseł oraz redukcja wymiarów przekrojów elementów konstrukcyjnych (uzasadniona z punktu widzenia efektywności ekonomicznej projektu) prowadzi do zmniejszenia sztywności konstrukcji oraz jej masy, a co za tym idzie – zwiększenia podatności dynamicznej konstrukcji. Częstotliwości drgań własnych zoptymalizowanych konstrukcji mogą mieścić się w przedziale częstotliwości obciążeń dynamicznych działających na konstrukcję. W tej sytuacji zwiększa się ryzyko wzbudzenia nadmiernych drgań konstrukcji, w tym groźnych drgań rezonansowych.

Od poprawnie zaprojektowanych konstrukcji budowlanych wymaga się, aby spełniały one nie tylko warunki wytrzymałościowe, ale również by chroniły użytkowników przed niepożądanymi skutkami drgań [116, 182].

W przypadku obiektów inżynierskich (w tym: mostów, wiaduktów, estakad i kładek dla pieszych) krajowe przepisy prawne [182] wymagają, by konstrukcja obiektu spełniała warunki zapewniające nieprzekroczenie stanów granicznych nośności i stanów granicznych użyteczności w każdym z elementów i w całej konstrukcji. Wedle zapisów [182] stany graniczne użyteczności uważa się za przekroczone, jeżeli w konstrukcji wystąpią nadmierne ugięcia, zarysowania lub nadmierne drgania dokuczliwe dla użytkowników lub powodujące uszkodzenia konstrukcji obiektu oraz jego wyposażenia. W celu spełnienia tak określonych wymagań użytkowych konstrukcja powinna zachowywać się poprawnie zarówno pod działaniem obciążeń statycznych, jak i dynamicznych. Analiza dynamiczna jest więc w projektowaniu konstrukcji etapem koniecznym [116]. Dotyczy to przede wszystkim konstrukcji charakteryzujących się małym tłumieniem, w szczególności konstrukcji o dużych rozpiętościach przęseł oraz konstrukcji stalowych i zespolonych.

Projektowanie konstrukcji wyłącznie według zasad statyki budowli może prowadzić do błędów w ocenie jej parametrów użytkowych. W skrajnych przypadkach użytkowanie konstrukcji może okazać się niemożliwe z powodu nadmiernych drgań.

Znane są przypadki kładek dla pieszych, w przypadku których nadmierne drgania pomostu doprowadziły do znaczącego pogorszenia komfortu użytkowania. Do kładek tych należą kładka Parkovy Mist przez Dniepr w Kijowie [26], kładka w Neustadt-Erlach przez Men w Niemczech [90], kładka dla pieszych T-Bridge w mieście Toda w Japonii [135], kładka Millennium Bridge w Londynie [57, 155], kładka Léopolda Sédara Senghora w Paryżu [86, 175, 206] i inne. Z powodu nadmiernych drgań niezbędne były różne modyfikacje tych konstrukcji i często montaż tłumików drgań pionowych i poziomych. Przytoczyć można także krajowe przykłady potwierdzające występowanie nadmiernych drgań konstrukcji skutkujących m.in. wprowadzaniem ograniczeń w ruchu pieszych i zakazami wzbudzania drgań konstrukcji (il. 1).



Il. 1. Przykłady ograniczeń ruchu pieszych i zakazów wzbudzania drgań na kładkach dla pieszych jako efekt dużej podatności dynamicznej konstrukcji (od góry: kładka dla pieszych w Piwnicznej-Zdroju, kładka dla pieszych w Suchoj Beskidzkiej, kładka dla pieszych w Czernichowie w pobliżu zapory wodnej Tresna, kładka dla pieszych w Myślenicach)

Sytuacjom takim można zapobiec, przewidując możliwość wystąpienia nadmiernych drgań konstrukcji na etapie jej projektowania. W tym celu konieczne jest kompleksowe sprawdzenie stanów granicznych użyteczności konstrukcji z uwzględnieniem jej analiz dynamicznych. Analizy te na ogół obejmują następujące etapy:

- wyznaczenie postaci i częstotliwości drgań własnych konstrukcji;
- określenie typu i charakterystyk obciążenia dynamicznego mogącego oddziaływać na konstrukcję, w tym spektrum częstotliwościowego obciążenia i przebiegu obciążenia w czasie;
- wyznaczenie zakresu częstotliwości drgań własnych konstrukcji krytycznego z punktu widzenia możliwości wzbudzenia nadmiernych drgań konstrukcji, w tym drgań rezonansowych;
- ustalenie wartości tłumienia drgań konstrukcji;
- ustalenie dopuszczalnych amplitud drgań konstrukcji (np. dopuszczalnych przyspieszeń drgań konstrukcji);
- analizę drgań wymuszonych konstrukcji;
- ocenę bezpieczeństwa i komfortu użytkownika konstrukcji.

Realizacja pierwszych etapów analizy, obejmujących obliczenie częstotliwości drgań własnych konstrukcji, określenie typu i charakterystyk obciążenia dynamicznego oraz wyznaczenie krytycznego zakresu częstotliwości drgań własnych konstrukcji, składa się na wstępną analizę dynamiczną. Analiza ta pozwala wykluczyć lub potwierdzić ryzyko powstawania groźnego efektu rezonansu i konieczności wykonania szczegółowej analizy dynamicznej obejmującej wszystkie z wyszczególnionych powyżej etapów obliczeń.

Dla różnych typów obciążeń dynamicznych, w tym obciążeń generowanych przez użytkowników przemieszczających się po konstrukcji, zdefiniować można przedziały częstotliwości szczególnie istotne z punktu widzenia oceny komfortu użytkownika konstrukcji. Szczegółowe analizy dynamiczne wymagane będą tylko w przypadku konstrukcji o częstotliwościach drgań własnych mieszczących się w krytycznym przedziale częstotliwości (zagadnienie to w szerszym zakresie przedstawiono w rozdziale 2 w odniesieniu do kładek dla pieszych obciążonych różnymi formami aktywności użytkowników).

Ważnym etapem analizy dynamicznej jest ocena szkodliwości drgań (ocena możliwości i komfortu użytkownika konstrukcji). Zagadnienie to dotyczy może oceny wpływu drgań na konstrukcję, jej wyposażenie lub użytkowników. W przypadku oceny wpływu drgań na użytkowników zauważyć należy, że w ocenie tej istotne może być uwzględnienie pozycji ciała i sposobu aktywności osoby odbierającej drgania oraz częstości występowania drgań (okresu powrotu drgań), a niekiedy także czasu trwania lub czasu percepcji drgań. Rozróżnić można np.: drgania natury codziennej, drgania rzadkie (występujące np. raz na tydzień, raz na miesiąc) oraz drgania wyjątkowe. W zależności od okresu powrotu drgań lub czasu ich percepcji za akceptowalne uznać można różne poziomy drgań. Dokonywanie oceny warunków użytkownika konstrukcji bez uwzględnienia okresu powrotu drgań może okazać się postępowaniem

nieracjonalnym. Przykładem takiego postępowania może być ocena komfortu użytkownika konstrukcji na podstawie wyników analiz lub badań dynamicznych uzyskanych podczas wzbudzenia drgań przez skoki kilkudziesięcioosobowej grupy na kładce z wykorzystaniem kryteriów komfortu określonych dla drgań natury codziennej. We wskazanym przypadku oddziaływania na konstrukcję skaczącej grupy (oddziaływanie dynamiczne o bardzo małym prawdopodobieństwie występowania podczas codziennej eksploatacji konstrukcji) racjonalne jest uwzględnienie kryteriów komfortu obowiązujących dla wzbudzeń natury rzadkiej lub wyjątkowej. Innym rozwiązaniem jest określenie różnych poziomów komfortu użytkownika konstrukcji (maksymalny, średni, minimalny), których wybór uzależnić można od miejsca lokalizacji kładki i natężenia ruchu pieszych oraz wymagań inwestora w tym zakresie. Szerzej zagadnienie oceny drgań obiektów mostowych (w tym kładek dla pieszych) wraz z propozycjami kryteriów oceny komfortu użytkownika tych konstrukcji przedstawiono w pracach [46, 63, 78, 79, 80, 147, 148, 149, 150].

Przytoczony przepis [182] stwierdzający konieczność oceny poziomu drgań konstrukcji inżynierskich to tylko jeden z przykładów wskazujący na potrzebę i istotność wykonywania analiz dynamicznych oraz ocenę poziomu drgań w zakresie stanu granicznego użyteczności tych konstrukcji. Jak pokazuje praktyka, wymaganie to jest szczególnie uzasadnione w przypadku lekkich konstrukcji stalowych narażonych na dynamiczne oddziaływanie osób idących (spacerujących), biegnących lub skaczących. Na konieczność wykonywania analiz dynamicznego oddziaływania użytkowników na kładki zwrócono uwagę m.in. w normach [13, 37, 39, 94, 121, 160–162].

Zapisy normy [161] wskazują na konieczność wyznaczania częstotliwości drgań własnych (odnoszących się do drgań pionowych, poziomych i skrętnych) głównej konstrukcji przęsła kładek dla pieszych. W normie wskazano, że drgania konstrukcji mogą być wzbudzone przez użytkowników, którzy mogą spacerować, biegać, skakać lub tańczyć, oraz przez wiatr, akty wandalizmu itp. Stwierdzono, że siły wymuszane przez użytkowników z częstotliwością równą jednej z częstotliwości drgań własnych konstrukcji mogą powodować rezonans i muszą być brane pod uwagę w sprawdzanych stanach granicznych związanych z drganiami.

Stosowne wymagania oraz procedury analiz i oceny poziomu drgań wywołanych działaniem użytkowników w przypadku kładek dla pieszych o konstrukcji drewnianej przedstawione zostały również w normie [162] (załącznik B).

Norma [37] wskazuje na konieczność sprawdzania możliwości występowania nadmiernych drgań konstrukcji (kładek dla pieszych oraz kładek pieszo-rowerowych), które mogą być wzbudzone przypadkowo przez ruch użytkowników lub celowo przez wandalów. Konstrukcję można uznać za poprawnie zaprojektowaną, jeśli jej drgania nie przekraczają określonych w normie wartości dopuszczalnych.

Zapisy normy [121] wymagają by drgania nie powodowały dyskomfortu użytkownika oraz nie wzbudzały niepokoju użytkowników. Ocenę drgań konstrukcji zaliczono w normie do wymagań stanu granicznego użyteczności.

W wytycznych [13] dotyczących projektowania kładek dla pieszych zobowiązano projektanta do sprawdzenia możliwości wystąpienia nadmiernych drgań konstrukcji wzbudzanych w sposób niezamierzony przez tłum lub celowo przez wandalów. Projektant ocenić musi możliwości dopuszczenia kładki do eksploatacji z uwzględnieniem kryteriów komfortu użytkownika z uwagi na drgania.

Ważnym dokumentem wskazującym na duże znaczenie analiz dynamicznych w projektowaniu obiektów budowlanych jest norma [94] dotycząca oceny drgań budynków oraz kładek i galerii komunikacyjnych obciążonych ruchem pieszych. Dokument ten poświęcony został zagadnieniom oceny komfortu użytkownika konstrukcji narażonych na dynamiczne działanie ludzi i środowiska. Norma wskazuje na konieczność wykonywania analiz dynamicznych konstrukcji w sytuacjach, gdy nadmierne drgania mogą doprowadzić do obniżenia wydajności pracy, zakłóceń funkcjonowania procesów i przyrządów przemysłowych i laboratoryjnych oraz zaburzeń komfortu użytkownika konstrukcji. Drgania konstrukcji rozpatrywane są w normie w kategoriach stanu granicznego użyteczności. W treści normy, poza obszernymi rozdziałami poświęconymi kryteriom komfortu użytkownika drgających konstrukcji, przedstawiono także zagadnienia modelowania dynamicznego oddziaływania ludzi na konstrukcje.

Wyznaczenie reakcji konstrukcji na działanie obciążenia dynamicznego wiąże się z koniecznością ustalenia wartości tego obciążenia. Normy i wytyczne projektowe na ogół nie zawierają szczegółów dotyczących wyznaczania tego obciążenia. Jak zaznaczono w [48], wyznaczanie obciążeń dynamicznych jest jednym z obszernych zagadnień z zakresu dynamiki konstrukcji wymagającym na ogół odrębnych opracowań przedstawiających szczegóły określania ich wartości i zmienności.

W niniejszej monografii zobrazowano sposoby modelowania pionowych obciążeń dynamicznych (pionowych sił reakcji podłoża, ang. *Vertical Ground Reaction Forces*, VGRF) powstających podczas chodu i biegu. Przedstawiono wyniki badań własnych tych obciążeń, ich analizę i opracowane na tej podstawie własne propozycje modeli obciążeń. W celach porównawczych przytoczono i szczegółowo omówiono wybrane modele obciążeń opracowane przez różnych autorów. Zamieszczono, opracowane na podstawie badań własnych, zalecenia uzupełniające braki lub doprecyzowujące dotychczasowe modele w zakresie doboru wartości ich parametrów wejściowych. Przedstawione modele obciążeń mogą być wykorzystywane w analizach dynamicznych różnych konstrukcji budowlanych narażonych na dynamiczne oddziaływanie użytkowników.

2. ZAGADNIENIA DYNAMIKI KŁADEK DLA PIESZYCH

2.1. Uwagi ogólne

W wyniku działania obciążeń dynamicznych konstrukcje budowlane mogą doznawać nadmiernych drgań uciążliwych dla użytkowników, zakłócających pracę urządzeń, a niekiedy zagrażających bezpieczeństwu i trwałości tych konstrukcji. Wyznaczenie reakcji konstrukcji na działające na nią obciążenie dynamiczne oraz ocena wpływu drgań na konstrukcję, jej wyposażenie lub użytkowników to zasadnicze cele analiz dynamicznych konstrukcji. Określenie odpowiedzi dynamicznej konstrukcji wymaga znajomości charakterystyk dynamicznych tej konstrukcji oraz charakterystyk działającego na nią obciążenia dynamicznego.

Najczęściej stosowanymi charakterystykami dynamicznymi obiektów budowlanych są częstotliwości i odpowiadające im postacie drgań własnych oraz parametr tłumienia drgań. Przy czym parametr tłumienia wyrażony może być jako logarytmiczny dekrement tłumienia drgań δ , ułamek tłumienia krytycznego ζ lub za pomocą tzw. tłumienia Rayleigha nazywanego także masowo-sztywnościowym lub sztywnościowo-bezwładnościowym modelem tłumienia drgań [64, 98, 184, 200].

Parametrami opisującymi obciążenie dynamiczne mogą być: charakter obciążenia (obciążenie okresowe lub nieokresowe, obciążenie losowe: stacjonarne lub niestacjonarne [48]), częstotliwość i amplituda (w przypadku obciążeń okresowych) lub charakterystyki statystyczne (w przypadku obciążeń losowych). Często istotne jest także określenie lokalizacji obciążenia (ustalona lub zmienna), liczby punktów przekazywania obciążenia na konstrukcję, sposobu przyłożenia obciążenia do konstrukcji (obciążenie punktowe, liniowe lub powierzchniowe) oraz jednoczesności występowania obciążeń (w przypadku występowania większej ich liczby).

Kładki dla pieszych często charakteryzują się małym ciężarem własnym, a przez to wysokim stosunkiem zmiennych obciążeń użytkowych (obciążenia tłumem pieszych) do obciążeń stałych (obciążenie ciężarem własnym), małą sztywnością oraz niskim poziomem tłumienia drgań [184]. Cechy te przyczyniają się do zwiększenia wrażliwości kładek dla pieszych na działanie obciążeń dynamicznych. Z tego powodu kładki dla pieszych mogą doznawać nadmiernych drgań pod wpływem obciążeń dynamicznych związanych z działaniem wiatru lub użytkowników (osób idących, osób biegnących, oddziaływań wandalii itp.). Na etapie projektowania tych konstrukcji istotną kwestią projektową stają się analizy dynamiczne. Ich wykonanie, jak już wspomniano, wymaga znajomości charakterystyk dynamicznych konstrukcji oraz charakterystyk działającego na nią obciążenia dynamicznego.

2.2. Obciążenia dynamiczne generowane przez człowieka

2.2.1. Typy aktywności użytkowników na kładkach dla pieszych

Podstawową formą aktywności użytkowników na kładkach dla pieszych jest chód. Przypadki obciążeń dynamicznych konstrukcji związane z tą formą aktywności to: oddziaływanie pojedynczego pieszego, oddziaływanie zorganizowanych grup pieszych oraz oddziaływanie swobodnych potoków pieszych lub tłumu.

Spośród powyższych przypadków obciążeń dynamicznych oddziaływanie pojedynczego pieszego uznać należy za przypadek podstawowy, wymagający obligatoryjnego uwzględniania w analizach dynamicznych konstrukcji. Zaprojektowana konstrukcja powinna być bezwarunkowo odporna na działanie tego obciążenia. Wzbudzenie nadmiernych drgań przez jedną idącą osobę wskazuje na bezwzględną konieczność wprowadzenia zmian projektowych. W takim przypadku rozważyć można wprowadzenie rozwiązań pozwalających zmienić parametry dynamiczne konstrukcji poprzez modyfikację jej masy, sztywności i/lub tłumienia. Jeśli wprowadzane zmiany nie pozwalają osiągnąć oczekiwanych rezultatów, wymagana jest zmiana koncepcji konstrukcyjnej.

Oddziaływania grup pieszych, swobodnych potoków pieszych i tłumu należą do złożonych przypadków obciążeń dynamicznych. Ich uwzględnianie w analizach dynamicznych można uzależnić od prognoz ich występowania na konstrukcji związanych z jej lokalizacją. Jeśli okaże się to niezbędne, wymagane jest zebranie szerszych informacji dotyczących parametrów tych obciążeń. W obliczeniach, poza liczebnością grupy generującej obciążenie dynamiczne, należy uwzględnić także: rozmieszczenie pieszych na obiekcie, poziom swobody ruchu i związaną z tym szybkość chodu oraz częstotliwość stawiania kroków, stopień wzajemnej synchronizacji pieszych między sobą oraz możliwość i stopień synchronizacji pieszych z różnymi częstotliwościami drgań własnych konstrukcji (możliwość wystąpienia drgań rezonansowych).

Liczebności grup pieszych zalecane w przypadku analiz dynamicznych kładek dla pieszych określono m.in. w normach [39, 94, 160]. Według zaleceń norm [94, 160] w sytuacjach obliczeniowych przyjętych za stałe sytuacje obliczeniowe, uwzględniać należy obecność grup liczących od 8 do 15 osób normalnie spacerujących, w zależności od powierzchni pomostu lub rozpatrywanej części powierzchni pomostu.

Zgodnie z zaleceniami normy [39] w analizie dynamicznej kładek dla pieszych uwzględnić należy dwu-, cztero-, ośmio- lub 16-osobowe grup pieszych w zależności od lokalizacji konstrukcji i przewidywanego na niej natężenia ruchu pieszych.

W normach [94, 160] zalecono również, aby w analizie dynamicznej uwzględnić, tam gdzie jest to istotne, obecność potoków pieszych znacznie większych niż 15 osób oraz potoków pieszych występujących podczas okolicznościowych wydarzeń świątecznych (tłum). W normach tych nie przedstawiono jednak zaleceń dotyczących

gęstości potoków pieszych lub tłumu. Braki te uzupełnić można, wykorzystując propozycje kategorii ruchu pieszych przedstawione w pracy [65] (rozdział 10) opracowane na potrzeby analiz dynamicznych kładek dla pieszych, obejmujące m.in. przypadki swobodnych potoków pieszych oraz przypadki oddziaływań tłumu. Swobodne potoki pieszych zdefiniowano w pracy jako potoki o gęstości $k \leq 0,30$ os./m². W przypadku oddziaływania tłumu zaproponowano rozważanie w obliczeniach dwóch wartości gęstości tłumu $k = 0,50$ os./m² oraz $k = 0,80$ os./m². Przyjęto, że maksymalna gęstość tłumu istotna z punktu widzenia wpływów dynamicznych na konstrukcję to 1,0 os./m². Zaproponowane kategorie ruchu uzupełniono, przytoczonymi za pracą [84], kryteriami oceny swobody ruchu pieszych ([65] rozdział 9), które wykorzystać można do oszacowania szybkości chodu, a w dalszej kolejności częstotliwości stawiania kroków przez osoby poruszające się w potoku pieszych lub tłumie.

Podobne zalecenia dotyczące gęstości potoków pieszych i tłumu przedstawione zostały w normie [39]. W zależności od lokalizacji kładki zaleca się przyjmować następujące gęstości potoków pieszych lub tłumu: $k = 0,00$ os./m² w przypadku kładek zlokalizowanych w obszarach wiejskich (rolniczych), tzn. brak konieczności uwzględniania potoków pieszych; $k = 0,40$ os./m² w przypadku lokalizacji konstrukcji w obszarach podmiejskich; $k = 0,80$ os./m² w przypadku kładek zapewniających dostęp do biur i szkół oraz $k = 1,00$ os./m² w przypadku kładek zapewniających dostęp do obiektów użyteczności publicznej przeznaczonych do organizacji imprez masowych oraz stacji transportu publicznego. Maksymalną gęstość tłumu ograniczono do wartości $k = 1,00$ os./m² z powodu małego wpływu dynamicznego gęstego tłumu ($k > 1,00$ os./m²) na konstrukcję.

Inne formy aktywności użytkowników mogące wystąpić na kładkach dla pieszych to bieg, przysiady (półprzysiady, przysiady częściowe) oraz skoki. W niniejszej monografii przedstawiono szczegółowe informacje dotyczące modelowania pionowych obciążeń generowanych podczas chodu i biegu. Odrębna praca autora [154] dotyczy modelowania obciążeń generowanych podczas skoków i przysiadów.

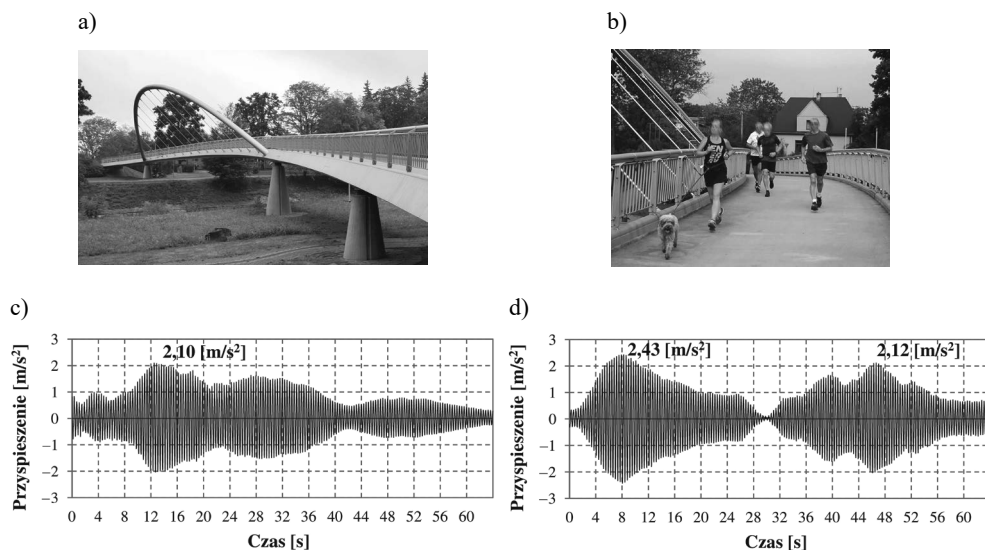
W pewnych przypadkach wystąpić mogą również dodatkowe formy aktywności użytkowników w postaci balansowania/kołysania ciałem na boki. Przykładowo, na kładkach dla pieszych o małej szerokości użytkowej i małej sztywności skrętnej, drgania skrętne konstrukcji wzbudzone mogą być przez osoby stojące w miejscu i kołyszące ciałem na boki lub przestępujące z nogi na nogę i przenoszące w ten sposób ciężar ciała z jednej nogi na drugą. Mała szerokość użytkowa konstrukcji, umożliwiająca ustawienie stóp przy krawędzi pomostu w miejscu występowania największych amplitud drgań skrętnych, sprzyja wykorzystywaniu tego sposobu do wzbudzania skrętnych drgań pomostu.

Bardzo istotną z punktu widzenia oceny komfortu użytkownika konstrukcji formą aktywności użytkowników może okazać się bieg. Amplitudy sił powstających podczas biegu przewyższają około 2,0–2,5-krotnie (a nawet 3,0-krotnie w przypadku biegu szybkiego) ciężar ciała biegnącej osoby. Przy tak znacznym dynamicznym zwiększeniu wartości obciążenia duże drgania konstrukcji często wywołuje już jedna osoba biegnąca (por. il. 3). W normie [39] zalecono, by w analizie dynamicznej kładek

dla pieszych, jeśli jest to konieczne z uwagi na lokalizację i sposób użytkowania konstrukcji, uwzględnić występowanie jednej, dwu lub czterech osób biegnących w tempie odpowiadającym tempu biegu rekreacyjnego (joggingu, średnia szybkość biegu 2,50 m/s, częstotliwość kroków 2,40–2,70 Hz).

Oddziaływania w postaci biegu mogą okazać się szczególnie istotnym przypadkiem obciążenia dynamicznego na kładkach zlokalizowanych w obszarach charakteryzujących się dużym prawdopodobieństwem występowania osób biegnących (osób uprawiających sport lub spieszących się), np. tereny wypoczynkowo-rekreacyjne (parki, bulwary miejskie itp.) lub okolice ważnych węzłów przesiadkowych transportu zbiorowego (dworców kolejowych, dworców autobusowych, przystanków komunikacji miejskiej itp.).

Osoby biegnące mogą także występować na kładkach dla pieszych przy okazji organizacji miejskich imprez sportowych w postaci maratonów, półmaratonów, biegów okolicznościowych itp. Wzbudzenie nadmiernych drgań kładek zlokalizowanych na trasie biegu może być kłopotliwe dla uczestników i organizatorów tych wydarzeń. Przykładem takiej sytuacji jest kładka SportMost w Cieszynie zlokalizowana w obrębie obszaru sportowo-rekreacyjnego SportPark (il. 2). Głównym celem budowy obszaru rekreacyjnego było zachęcenie mieszkańców miasta (po stronie polskiej i czeskiej) do aktywności fizycznej. Cel ten został osiągnięty. Lokalne kluby sportowe organizują maratony, półmaratony, biegi okolicznościowe oraz treningi biegowe cieszące się dużym zainteresowaniem (np. wydarzenie „Parkrun Cieszyn” odbywające się regularnie w każdy weekend na terenie SportParku).



Il. 2. Kładka SportMost w Cieszynie (rozpiętości przęsł 17,0 + 45,0 + 18,0 + 13,0 m):

- a) widok kładki, b) grupa osób biegnących podczas treningu biegowego (Parkrun Cieszyn),
c) i d) przyspieszenia drgań pionowych pomostu kładki zarejestrowane podczas treningu biegowego
(drgania zarejestrowane w miejscu maksymalnej rzędnej postaci drgań kładki)

Podczas treningów biegowych regularnie wzbudzone są duże drgania kładki Sport-Most zlokalizowanej na trasie biegu (il. 2c i d). Grupa osób przebiegająca przez kładkę wzbudza drgania o wartościach przyspieszeń rzędu $2,40 \text{ m/s}^2$. Drgania te zaburzają komfort użytkowania i budzą niepokój innych użytkowników obiektu. Odczuwane są również przez osoby biegnące i przyczyniają się do zaburzania tempa ich biegu. Częstotliwość drgań własnych kładki, wynosząca $2,75 \text{ Hz}$, mieści się w przedziale częstotliwości biegu (por. tab. 1), co sprzyja synchronizacji kroków osób biegnących z częstotliwością drgań własnych konstrukcji i wzbudzeniu jej drgań o dużej amplitudzie.

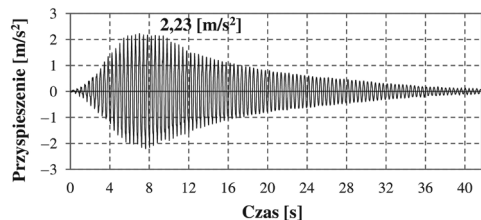
W skrajnych przypadkach nadmierne drgania konstrukcji wzbudzone przez osoby biegnące podczas wydarzeń sportowych doprowadzić mogą do dużych utrudnień biegu lub zatrzymania się osoby biegnącej zaskoczonej drganiami. W zależności od rangi wydarzenia prowadzić to może do różnych skutków ubocznych w tym konfliktów pomiędzy zawodnikami i organizatorami.

Przykład kładki w Cieszynie nie jest przypadkiem odosobnionym. Występowanie drgań o dużej amplitudzie wywołanych oddziaływaniem osób biegnących zaobserwować można szczególnie często na kładkach dla pieszych o konstrukcji stalowej już od rozpiętości przęsła $\sim 30,0 \text{ m}$.

a)



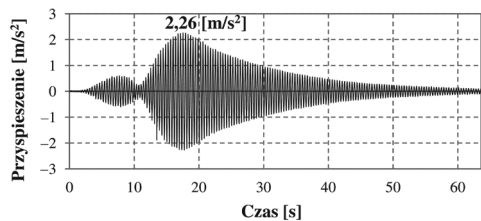
b)



c)



d)



Il. 3. Przykłady drgań kładek dla pieszych wywołane przez jedną osobę biegnącą:

a) kładka dla pieszych w Kielcach, b) kładka dla pieszych w Nowym Targu
(drgania zarejestrowane w miejscu maksymalnej rzędnej postaci drgań kładek)

Na il. 3 przedstawiono dwa przykłady takich kładek. Są to: podwieszona kładka dla pieszych w Kielcach nad ulicą Źródłową o rozpiętościach przęsła $28,10 + 13,70 \text{ m}$ (częstotliwość drgań własnych $f = 2,51 \text{ Hz}$, drgania giętne pionowe) oraz kładka o konstrukcji kratownicowej w Nowym Targu o rozpiętościach przęsła $15,00 + 36,00 + 24,00 \text{ m}$

(częstotliwość drgań własnych $f = 2,58$ Hz, drgania giętkie pionowe). Duże drgania pomostów tych kładek wzbudzone są już przez jedną osobę biegnącą w tempie biegu rekreacyjnego (jogging).

Wykonując analizy dynamiczne konstrukcji oraz ocenę warunków jej użytkowania, pamiętać należy, że przypadek obciążenia w postaci osób biegnących może mieć małe prawdopodobieństwo występowania na analizowanej konstrukcji i może być przypadkiem niemiernym do jej oceny. Jednak, jak pokazują powyższe przykłady, w sytuacji występowania na kładce osób biegnących przyspieszenia drgań konstrukcji mogą znacznie przekraczać granicę komfortu użytkowania konstrukcji wynoszącą $0,5 \text{ m/s}^2$ dla drgań częstych (drgań natury codziennej) oraz $1,0 \text{ m/s}^2$ dla drgań rzadkich (występujących rzadziej niż raz na tydzień) [148]. Stwierdzić należy, iż w przypadku lokalizacji kładki dla pieszych w obszarze o dużym prawdopodobieństwie wystąpienia osób biegnących uzasadnione jest uwzględnianie oddziaływań dynamicznych generowanych przez osoby biegnące w celu weryfikacji stanów granicznych użyteczności konstrukcji z uwagi na drgania.

Inne rodzaje aktywności użytkowników na kładkach dla pieszych to aktywności w postaci skoków, przysiadów oraz różnych form balansowania (kołysania) ciałem. Oddziaływania te to często oddziaływania intencjonalne związane z dążeniem do wzbudzenia drgań rezonansowych konstrukcji (pionowych, skrętnych lub poprzecznych do osi konstrukcji). Z racji ich znacznej odmienności od obciążeń występujących podczas normalnej eksploatacji konstrukcji zaliczyć je można do grupy obciążeń wyjątkowych [185]. Z tego powodu ich uwzględnianie w analizach dynamicznych podlegać może nieco innym regułom. Zagadnienia modelowania obciążeń generowanych przez osoby skaczące i wykonujące przysiady przedstawiono w odrębnej pracy autora [154].

2.2.2. Parametry dynamiczne i kinematyczne oddziaływań

2.2.2.1. Częstotliwości oddziaływań

W celu wykonania analizy dynamicznej konstrukcji niezbędna jest znajomość częstotliwości i postaci jej drgań własnych oraz częstotliwości i wartości (przebiegów czasowych) działających na nią obciążeń dynamicznych. Wykonanie analizy dynamicznej kładki dla pieszych obciążonej ruchem użytkowników wymaga znajomości częstotliwości oddziaływań powstających podczas różnych form aktywności użytkowników na konstrukcji. Zestawienie tych częstotliwości, opracowane z uwzględnieniem różnego tempa aktywności użytkowników, przedstawiono za pracą [6] w tab. 1.

Spośród przedstawionych oddziaływań szczególnie istotne z punktu widzenia analizy dynamicznej konstrukcji są oddziaływania w postaci chodu i biegu w tempie normalnym. W przypadku analizy wpływu tłumy pieszych na konstrukcję istotny będzie również przypadek chodu w tempie wolnym.

Tabela 1. Przedziały częstotliwości obciążeń dynamicznych generowanych podczas różnych typów aktywności człowieka [6]

Typ aktywności	Całkowity zakres częstotliwości [Hz]	Częstotliwość [Hz]		
		Wolno	Normalnie	Szybko
Chód	1,4–2,4	1,4–1,7	1,7–2,2	2,2–2,4
Bieg	1,9–3,3	1,9–2,2	2,2–2,7	2,7–3,3
Skoki	1,3–3,4	1,3–1,9	1,9–3,0	3,0–3,4

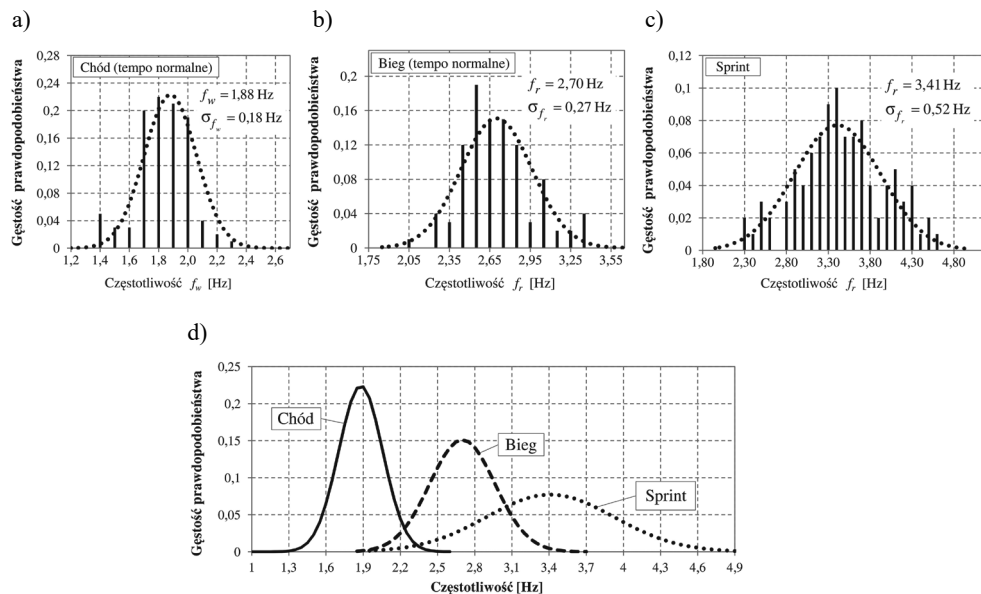
Wyniki badań aktywności pieszych przedstawione w licznych pracach, m.in. [6, 41, 78, 79, 97, 132, 144, 220], pozwalają zweryfikować wartości częstotliwości przedstawione w tab. 1 i uzupełnić je o informacje dotyczące typu i parametrów rozkładu tych częstotliwości. Badania te w dużym stopniu dotyczą aktywności w postaci chodu. Ich wyniki wskazują m.in. na możliwość opisu chodu za pomocą rozkładu normalnego. Nieliczne badania tego typu dotyczą oddziaływań w postaci biegu. Wyniki jednych z nich przedstawiono w pracy [79] i przytoczono w dalszej części rozdziału (il. 4b i c). Dotychczas brak tego typu badań dla przypadków aktywności w postaci skoków, przysiadów lub balansowania (kołysania) ciałem.

Badania przedstawione w pracy [79] dotyczyły aktywności w postaci chodu i biegu w tempie normalnym oraz biegu szybkiego (sprintu). Przeprowadzone zostały z udziałem stuosobowych grup wolontariuszy poruszających się na dystansie 45,0 m. Pomiary częstotliwości kroków wykonano przy użyciu krokomierzy oraz stoperów. Wyniki tych badań przedstawiono na il. 4.

Średnia wartość częstotliwości stawiania kroków podczas chodu, wyznaczona na podstawie badań grupy pieszych w wieku 14–76 lat z udziałem 41 kobiet i 51 mężczyzn, wyniosła 1,88 Hz, a jej odchylenie standardowe 0,18 Hz (il. 4a) (kadencja chodu¹ 113 ± 11 kroków/min). Analizując rozkład częstotliwości chodu przedstawiony na il. 4a, warto zauważyć, że częstotliwości z zakresu 1,70–2,0 Hz charakteryzują się zbliżonymi wartościami prawdopodobieństwa występowania (prawdopodobieństwa wyznaczane dla przedziałów 1,65–1,75 Hz; 1,75–1,85 Hz; 1,85–1,95 Hz; 1,95–2,05 Hz osiągają porównywalne wartości). Z punktu widzenia analizy dynamicznej kładek dla pieszych, na których chód w normalnym tempie jest typowym przypadkiem aktywności użytkowników, uznać należy, że przedział częstotliwości 1,70–2,0 Hz jest przedziałem odznaczającym się największym ryzykiem wzbudzenia nadmiernych drgań konstrukcji. W celu zminimalizowania tego ryzyka unikać należy częstotliwości pionowych drgań własnych konstrukcji mieszczących się w tym przedziale. Z uwagi na generowanie podczas chodu obciążeń poziomych poprzecznych do kierunku ruchu, o częstotliwości równej połowie częstotliwości oddziaływań pionowych, unikać również należy częstotliwości poziomych drgań własnych konstrukcji w przedziale 0,80–1,10 Hz. Jak wskazują na to badania i analizy oddziaływania tłumy pieszych na konstrukcje [14–17,

¹ Kadencja chodu lub biegu – liczba kroków na minutę.

43, 57, 90–92, 122, 177, 210], w przypadku drgań poziomych poprzecznych do osi konstrukcji istotne mogą być również częstotliwości drgań własnych w przedziale 0,40–0,60 Hz ($f \approx 1/3f_s$, gdzie f_s – częstotliwość kroków podczas chodu).



Il. 4. Histogramy częstotliwości stawiania kroków podczas chodu i biegu zarejestrowane podczas badań stuosobowych grup wolontariuszy [79]: a) chód, b) bieg w tempie normalnym, c) sprint, d) porównanie rozkładów częstotliwości chodu, biegu w tempie normalnym i sprintu

W przypadku biegu w normalnym tempie wartość średnia częstotliwości kroków, wyznaczona na podstawie badań grupy osób w wieku 14–73 lat z udziałem 35 kobiet i 65 mężczyzn, wyniosła 2,70 Hz, a jej odchylenie standardowe 0,27 Hz (kadencja biegu 162 ± 16 kroków/min) (il. 4b). Na il. 4b zauważyć można, że największym prawdopodobieństwem występowania odznaczają się częstotliwości z przedziału 2,50–2,60 Hz (kadencja biegu 150–156 kroków/min). Zaobserwowana tendencja świadczy o dominacji w badanej grupie tzw. biegu rekreacyjnego (joggingu) charakteryzującego się częstotliwościami kroków w przedziale 2,50–2,70 Hz (kadencja biegu: 150–165 kroków/min).

Rozkład częstotliwości biegu przedstawiony na il. 4b został opisany w pracy [79] przy wykorzystaniu rozkładu normalnego. Jednak z uwagi na widoczny na il. 4b niesymetryczny rozkład badanej zmiennej, uzasadnione może być wykorzystanie rozkładu skośnego (asymetrycznego) z tendencją do przesunięcia wartości średniej w kierunku niższych częstotliwości (rozkład prawoskośny). Stwierdzić można, że bieg mający największe prawdopodobieństwo wystąpienia na konstrukcji to bieg z częstotliwościami kroków w przedziale 2,40–2,80 Hz, odpowiadający wolnemu i normalnemu tempu biegu wg tab. 1.

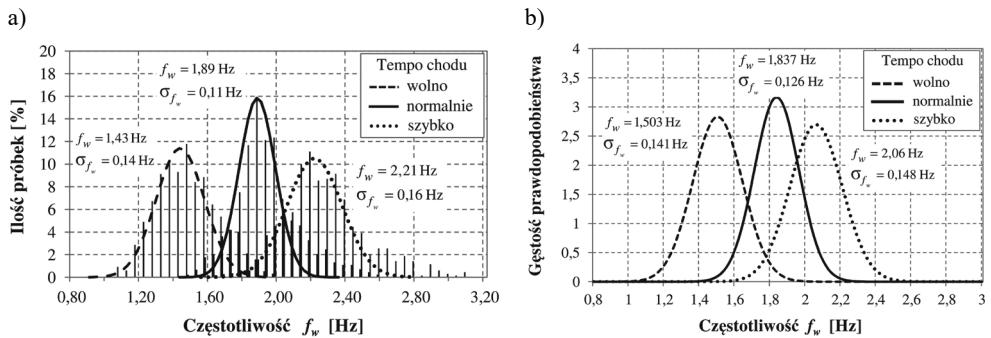
Kolejne wyniki przedstawione w pracy [79] dotyczą aktywności w postaci szybkiego biegu (sprintu). Przeprowadzone badania wykazały, że wartość średnia częstotliwości kroków podczas szybkiego biegu osób w badanej stuosobowej grupie (przedział wiekowy 6–51 lat, 30 kobiet, 70 mężczyzn) wyniosła 3,41 Hz, a jej odchylenie standardowe 0,51 Hz (kadencja biegu 205 ± 31 kroków/min). Zauważyć można, że uzyskana wartość średnia częstotliwości kroków wykracza poza przedział częstotliwości szybkiego biegu określony w tab. 1. Wynika to najprawdopodobniej z odmiennych warunków realizacji badań (odmiennych szybkości biegu). W pracach [6, 79] terminy „szybki bieg” oraz „sprint” nie zostały doprecyzowane pod względem szybkości biegu. Rozbieżności te mają jednak drugorzędne znaczenie z punktu widzenia analiz dynamicznych kładek dla pieszych. Przypadki szybkiego biegu lub sprintu mają bowiem małe prawdopodobieństwo występowania na kładkach dla pieszych. Aktywność użytkowników kładek w postaci biegu to najczęściej bieg rekreacyjny (jogging) o częstotliwości kroków w zakresie 2,50–2,70 Hz (kadencja biegu 150–165 kroków/min, średnia szybkość biegu 2,50 m/s). Dla porównania uczestnicy maratonów o wysokim stopniu wytrenowania, biegają z średnią szybkością wynoszącą 4,50 m/s i kadencją biegu 150–170 kroków/min (częstotliwość kroków 2,50–2,85 Hz). Czołowi maratończycy osiągają szybkości biegu 5,85 m/s i średnią kadencję biegu wynoszącą 180 kroków/min (częstotliwość kroków 3,00 Hz). Parametry biegu światowej czołówki w biegach sprinterskich to średnia szybkość rzędu 12,0 m/s, kadencja 260–280 kroków/min, częstotliwość kroków 4,30–4,70 Hz. Analiza ta pozwala stwierdzić, że prawdopodobieństwo występowania szybko lub bardzo szybko biegnących osób na kładkach dla pieszych (osób biegnących z częstotliwością kroków $f_r > 3,30$ Hz) jest bardzo małe. Z tego powodu małe jest praktyczne znaczenie tej formy aktywności w analizach dynamicznych kładek dla pieszych.

Analizując zestawienie wyników uzyskanych dla przypadków chodu, biegu oraz sprintu przedstawione na il. 4d, zauważyć można, że chód charakteryzuje się najmniejszym rozproszeniem wyników, a sprint rozproszeniem największym. Porównując rozkłady częstotliwości kroków uzyskane dla biegu i sprintu, widać, że szeroki zakres częstotliwości kroków o dużym prawdopodobieństwie wystąpienia zarejestrowanych podczas sprintu pokrywa się z częstotliwościami kroków dla biegu w tempie normalnym (przedział częstotliwości 2,70–3,20 Hz). Na tej podstawie stwierdzić można, że w zakresie biegu z dużymi szybkościami (sprint) najbardziej prawdopodobny jest bieg charakteryzujący się częstotliwościami kroków 2,70–3,20 Hz. Wyodrębniony w ten sposób przedział częstotliwości można umownie określić terminem „bieg szybki”. Porównując wartości przedstawione w tab. 1 dla biegu szybkiego (2,70–3,30 Hz) z wynikiem powyższej analizy, można zaobserwować bardzo duże podobieństwo tych zakresów częstotliwości. Wynik ten pozwala zrozumieć i poprawnie zinterpretować wartości przedstawione w tab. 1. Zauważyć należy, że zestawienie to obejmuje przedziały częstotliwości odznaczające się dużym prawdopodobieństwem wystąpienia i pomija przypadki ekstremalne

(skrajne), które choć mogą być zrealizowane, to ich wystąpienie na kładkach dla pieszych jest mało prawdopodobne.

W pracy [79] stwierdzono również, że oddziaływania o częstotliwościach mieszczących się w przedziale 2,20–2,40 Hz, odpowiadające przypadkom szybkiego chodu oraz wolnego biegu, charakteryzują się małym prawdopodobieństwem występowania (por. il. 4d). Jest to przedział częstotliwości, w którym, jak określono w pracy [221], piesi zaczynają poruszać się bardzo szybko (przy częstotliwości 2,20 Hz) lub nienaturalnie szybko (przy częstotliwości 2,40 Hz). Szybki chód rozpoczął się od częstotliwości 2,00 Hz. Wniosek ten potwierdzają również autorskie badania chodu (scharakteryzowane w rozdziale 4.1.) przeprowadzone z udziałem 25 wolontariuszy poruszających się z różną częstotliwością kroków wyznaczaną przez metronom. Podczas badań chód z częstotliwością kroków przekraczającą 2,20 Hz okazał się bardzo uciążliwy dla 44% badanych osób (11 osób). Osoby te w celu przemieszczania się wybierały wolny bieg zamiast szybkiego chodu. Zarówno chód, jak i bieg z częstotliwością kroków 2,20–2,40 Hz były nienaturalne, wywoływały dyskomfort poruszających się osób, przyczyniający się do zmiany tempa ruchu (zwolnienia chodu lub przyspieszenia biegu). Skutkuje to małym prawdopodobieństwem występowania tego typu aktywności. Przedział częstotliwości 2,20–2,40 Hz zidentyfikować należy jako przedział przemiany chodu w bieg. Z tego powodu aktywność tego typu będzie przypadkiem występującym rzadko, najczęściej w sytuacji zdeterminowanej indywidualną potrzebą pieszego (pośpiech). Występowanie takiej aktywności na konstrukcji uzależnione jest w dużej mierze od lokalizacji konstrukcji i celu podróży jej użytkowników. Wnioski te mają duże znaczenie z punktu widzenia analizy dynamicznej konstrukcji. Uznać można, że konstrukcje o częstotliwościach drgań własnych w przedziale 2,20–2,40 Hz, zlokalizowane w obszarach o małym prawdopodobieństwie wystąpienia osób śpieszających się, będą w małym stopniu narażone na wzbudzenie drgań rezonansowych przez ruch pieszych. Warto również odnotować, że na ogół w tempie szybkiego chodu porusza się na konstrukcji mała liczba osób. Z tego powodu w analizach dynamicznych ograniczyć można liczbę szybko idących osób, przyjmując jednoczesną obecność na konstrukcji, np. od dwóch do czterech osób (jeśli taki przypadek obciążenia może wystąpić na konstrukcji). Ponadto zauważyć należy, że w sytuacji ruchu z częstotliwością kroków przekraczającą 2,20 Hz, zmniejsza się prawdopodobieństwo występowania szybkiego chodu, wzrasta natomiast prawdopodobieństwo występowania wolnego biegu (por. il. 4d). Uznać można, iż w analizach dynamicznych kładek dla pieszych o częstotliwościach drgań własnych większych od 2,20 Hz, zlokalizowanych w obszarach o dużym prawdopodobieństwie wystąpienia użytkowników poruszających się w szybkim tempie, bardziej odpowiednie i miarodajne będzie uwzględnianie wpływu osób wolno biegnących (od jednej osoby do trzech osób) niż osób szybko idących.

Cennym uzupełnieniem powyższych analiz są zaprezentowane w pracach [41, 132] rozkłady prawdopodobieństwa częstotliwości kroków dla przypadków chodu w różnym tempie: wolno, normalnie, szybko (il. 5).

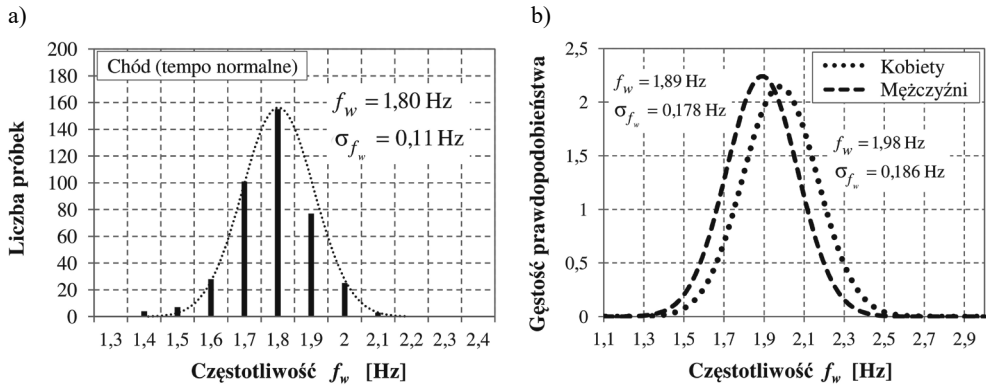


Il. 5. Rozkłady częstotliwości stawiania kroków podczas chodu w tempie wolnym, normalnym oraz szybkim: a) wg [132], b) wg [41]

Porównując przedstawione wyniki z wartościami z tab. 1, zauważyć można, że dolna granica przedziału częstotliwości kroków dla wolnego chodu przesunięta może zostać do wartości 1,20 Hz. Górna granica tego przedziału (1,70 Hz) może pozostać niezmienną. Ponadto skorygować można górną granicę przedziału częstotliwości kroków dla chodu w normalnym tempie, będącą jednocześnie dolną granicą przedziału chodu szybkiego. Proponuje się ustalić tę granicę na wartości 2,10 Hz. Innymi słowy, aktywność użytkowników z częstotliwością kroków większą od 2,10 Hz zaliczać należy do przedziału chodu szybkiego. Jak już wspomniano, w analizach dynamicznych uwzględniać należy fakt, iż występowanie aktywności pieszych w postaci szybkiego chodu w dużym stopniu zależne jest od lokalizacji konstrukcji. Rozważanie oddziaływania w postaci szybkiego chodu może być istotne w przypadku konstrukcji o częstotliwościach drgań własnych mieszczących się w przedziale 2,10–2,40 Hz zlokalizowanych w miejscach odznaczających się dużym prawdopodobieństwem wystąpienia osób spieszących się. Można również w odmienny sposób stwierdzić, że kładki dla pieszych o częstotliwościach drgań własnych większych od 2,10 Hz, zlokalizowane w obszarach o małym prawdopodobieństwie wystąpienia osób spieszących się, będą w małym stopniu narażone na wzbudzenie drgań rezonansowych. Rozważać można pominięcie tego typu aktywności użytkowników (szybki chód) w analizach dynamicznych tych konstrukcji. Konieczne może jednak być rozpatrywanie obecności osób biegnących w normalnym tempie (zob. tab. 1).

Uwzględnianie powyższych spostrzeżeń w analizach dynamicznych kładek dla pieszych pozwoli uniknąć błędów w ocenie warunków eksploatacji obiektu prowadzących do niewłaściwych zaleceń i np. wymagania redukcji drgań konstrukcji w sytuacji, gdy prawdopodobieństwo ich występowania jest znikome. W przypadku trudności w ustaleniu możliwości występowania na konstrukcji osób szybko idących lub wolno biegnących w analizach założyć można bezpieczną sytuację projektową i rozważyć obecność od jednej osoby do dwóch osób szybko idących lub jednej osoby wolno biegnącej.

Wyniki obszernych badań ruchu pieszych na kładkach podczas chodu w normalnym tempie przedstawione zostały w pracach [144, 220] i na il. 6.



Il. 6. Przykłady rozkładów częstotliwości chodu na kładkach dla pieszych:

- a) wg [144] ustalony na podstawie analizy chodu 400 przechodniów na kładkach dla pieszych,
 b) wg [220] z rozróżnieniem chodu kobiet i mężczyzn

Badania zaprezentowane w pracy [144] przeprowadzono na dwóch kładkach dla pieszych: kładka Merchant w Londynie i kładka Lowry w Manchesterze. Badania omówione w pracy [220] przeprowadzono na kładce łączącej budynki w obrębie kampusu Uniwersytetu w Sheffield (połączeniu pomiędzy biblioteką główną i budynkiem Uniwersytetu). Wyniki badań wskazują, że największym prawdopodobieństwem występowania odznacza się chód z częstotliwością kroków 1,70–2,10 Hz. W obu pracach zauważono, że częstotliwość kroków kobiet podczas chodu jest o około 4,0% wyższa od częstotliwości kroków mężczyzn (il. 6b). W pracy [144] przedstawiono też wyniki analizy chodu 200 pieszych w centrach handlowych. W tym przypadku średnia częstotliwość kroku wyniosła 2,00 Hz, a jej odchylenie standardowe 0,13 Hz.

Analizując rozkłady częstotliwości kroków przedstawione na il. 6, zauważyć można, że w normalnych warunkach eksploatacji konstrukcji chód z częstotliwością kroków większą od 2,20 Hz jest przypadkiem charakteryzującym się małym prawdopodobieństwem występowania. Wynik ten potwierdza wcześniejsze wnioski stwierdzające małe prawdopodobieństwo występowania chodu o częstotliwości kroków większej od 2,20 Hz.

Na podstawie przedstawionych analiz rozkładu częstotliwości kroków dotyczących podstawowych form aktywności użytkowników na kładkach dla pieszych w postaci chodu i biegu wskazać można przedziały częstotliwości drgań własnych tych konstrukcji krytyczne z uwagi na możliwość wzbudzenia drgań o charakterze rezonansowym. W przypadku kładek obciążonych swobodnym ruchem pieszych w normalnym tempie krytyczny przedział częstotliwości drgań własnych wynosi 1,60–2,00 Hz. W przypadku konstrukcji obciążonych swobodnym ruchem pieszych oraz narażonych na oddziaływanie osób szybko idących lub biegnących krytyczny przedział częstotliwości obejmuje zakres 1,60–2,70 Hz. Jeżeli konstrukcja narażona może być na oddziaływanie tłumy

pieszych, krytyczny zakres jej częstotliwości drgań własnych wynosi 1,40–2,00 Hz i obejmuje częstotliwości kroków pieszych poruszających się swobodnie (1,60–2,00 Hz) lub w tłumie z ograniczoną swobodą i szybkością (1,40–1,70 Hz). Krytycznym przedziałem częstotliwości drgań własnych konstrukcji może też okazać się przedział będący dwukrotnością częstotliwości kroków osób idących, tj. 3,40–4,40 Hz w przypadku oddziaływania swobodnego ruchu pieszych, lub 2,80–4,40 Hz w przypadku możliwości wystąpienia na konstrukcji potoków pieszych lub tłumy. Niniejsze rozszerzenie krytycznego zakresu częstotliwości drgań własnych konstrukcji wynika z wpływu wyższych składowych harmonicznym pionowego obciążenia dynamicznego generowanego przez osoby idące. Uwzględnianie tych przedziałów częstotliwości jest szczególnie istotne w analizach konstrukcji charakteryzujących się małym tłumieniem drgań, np. w przypadku kładek o konstrukcji stalowej i zespolonej stalowo-betonowej.

Wykonana analiza krytycznych przedziałów częstotliwości drgań własnych, dotycząca pionowych oddziaływań dynamicznych, wskazuje, iż kładki dla pieszych o częstotliwościach drgań własnych pionowych mniejszych od 3,00 Hz są szczególnie narażone na wzbudzenie drgań o charakterze rezonansowym przez ruch użytkowników. W przypadku kładek o konstrukcji stalowej (o małym tłumieniu drgań, $\delta \leq 3,0\%$) przedział ten rozszerzyć należy do wartości 4,50 (5,00) Hz.

Ruch pieszych wiąże się również z generowaniem obciążeń poziomych – wzdłużnych i poprzecznych do kierunku ruchu, o częstotliwościach równych połowie częstotliwości oddziaływań pionowych. Krytycznym przedziałem częstotliwości drgań własnych poziomych, określonym z uwzględnieniem oddziaływań tłumy i osób szybko idących, będzie zatem przedział 0,70–1,10 Hz. Badania dotyczące wzbudzenia poprzecznych drgań pomostu przez tłum [14–17, 43, 57, 90–92, 122, 177, 210] wskazują, że na oddziaływanie tłumy podatne są także konstrukcje o częstotliwości poprzecznych drgań własnych $f \approx 0,50$ Hz.

W tab. 2–5 przedstawiono krytyczne przedziały częstotliwości drgań własnych kładek dla pieszych dla przypadków drgań pionowych i poziomych, opracowane z uwzględnieniem informacji prezentowanych w pracach [6, 46, 14–17, 43, 57, 90–92, 122, 177, 210].

Tabela 2. Krytyczne przedziały częstotliwości drgań własnych kładek dla pieszych w przypadku drgań pionowych [46]

Ryzyko rezonansu	Drgania pionowe					
	Częstotliwość drgań własnych konstrukcji [Hz]					
	0,0	1,0	1,7	2,2	2,6	5,0
Maksymalne						
Średnie						
Małe						
Bardzo małe						

Tabela 3. Krytyczne przedziały częstotliwości drgań własnych kładek dla pieszych w przypadku drgań poziomych [14–17, 46, 57, 90–92, 122, 177, 210]

Ryzyko rezonansu	Drgania poziome					
	Częstotliwość drgań własnych konstrukcji [Hz]					
	0,0	0,4	0,8	1,1	1,3	2,5
Maksymalne						
Średnie						
Małe						
Bardzo małe						

Tabela 4. Krytyczne przedziały częstotliwości drgań własnych kładek dla pieszych z uwagi na możliwość wzbudzenia pionowych i poziomych (poprzecznych i równoległych do kierunku ruchu) drgań rezonansowych konstrukcji przez osoby idące (na podstawie [6, 14–17, 57, 90–92, 122, 177, 210] oraz badań własnych)

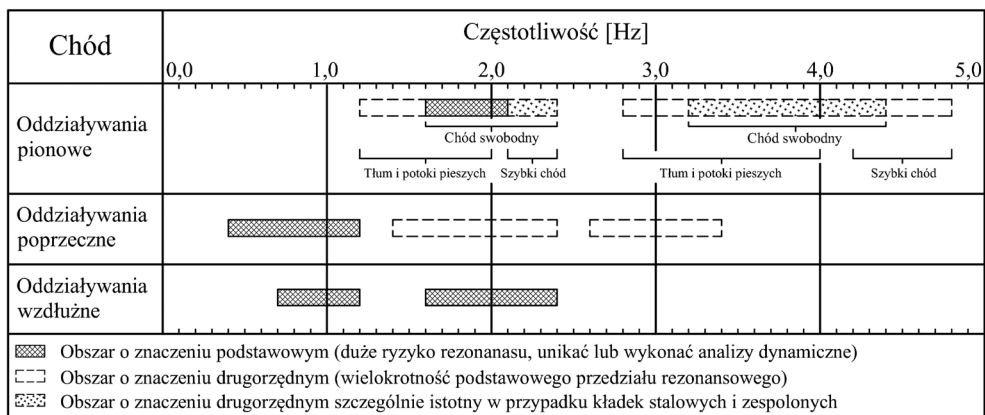
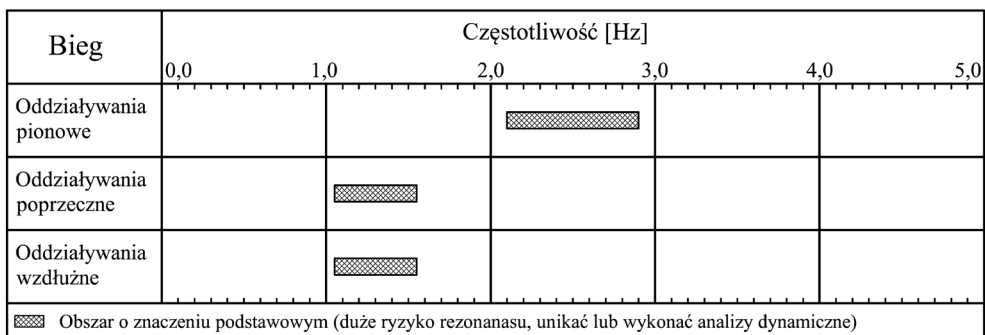


Tabela 5. Krytyczne przedziały częstotliwości drgań własnych kładek dla pieszych z uwagi na możliwość wzbudzenia pionowych i poziomych (poprzecznych i równoległych do kierunku ruchu) drgań rezonansowych konstrukcji przez osoby biegnące [6]



Zauważyć warto, że przedziały maksymalnego ryzyka rezonansu określone w tab. 2–3 odpowiadają częstotliwościom obciążeń dynamicznych występujących w normalnych warunków użytkowania kładek dla pieszych związanych ze swobodnym ruchem pieszych (warunki codziennej eksploatacji konstrukcji). Częstotliwości zdefiniowane jako średnie ryzyko rezonansu odpowiadają częstotliwościom obciążeń dynamicznych generowanych przez tłum (1,00–1,70 Hz) oraz osoby biegnące (2,20–2,60 Hz). Przedziały zdefiniowane jako małe ryzyko rezonansu związane są z rzadko występującymi formami aktywności użytkowników kładek, takimi jak szybki i bardzo szybki bieg (sprint). Przedziały określone jako bardzo małe ryzyko rezonansu to przedziały częstotliwości wykraczających poza częstotliwości aktywności ruchowej człowieka.

W tab. 4, poza krytycznymi obszarami częstotliwości o podstawowym znaczeniu, zauważyć warto wskazania obejmujące przedziały częstotliwości 2,80–4,40 Hz, a w szczególności przedział 3,20–4,40 Hz, będące odpowiednio dwukrotnością przedziału częstotliwości kroków wykonywanych podczas chodu w tłumie oraz chodu swobodnego. Jak wcześniej wspomniano, analiza konstrukcji o częstotliwościach drgań własnych w przedziale 2,80–4,40 Hz jest szczególnie istotna w przypadku konstrukcji charakteryzujących się małym tłumieniem drgań. W pracy [6] zaliczono do nich kładki o konstrukcji stalowej i zespolonej. Wskazany przedział częstotliwości może być dostosowany do przypadków ruchu pieszych występujących w miejscu lokalizacji konstrukcji, np. ruch swobodny w tempie normalnym bez osób biegnących i bez tłumy: przedział 3,20–4,20 Hz.

Analizując przedziały częstotliwości oddziaływania pieszych, warto również zwrócić uwagę na górne granice krytycznych przedziałów częstotliwości dotyczące pionowych oddziaływań tłumy, potoków pieszych i grup pieszych. Zauważyć warto, że małym prawdopodobieństwem odznacza się wystąpienie szybko przemieszczającego się tłumy idącego z częstotliwością kroków większą od 2,00 Hz. Mało prawdopodobne jest również wystąpienie szybko przemieszczających się potoków i grup pieszych, np. grup 8–16 osobowych zalecanych w normach [39, 94, 160] jako przypadek obliczeniowy (por. tab. 11 –szybkości chodu grup pieszych). W świetle wykonanych analiz rozkładu częstotliwości kroków podczas chodu uzasadnione jest przyjęcie górnych granic przedziałów częstotliwości kroków dla przypadków oddziaływania tłumy oraz potoków i/lub grup pieszych odpowiednio 1,60 Hz i 2,00 Hz. Przy czym, w przypadku potoków pieszych, w chwili wzrostu zagęszczenia pieszych w potoku i zmniejszenia szybkości poruszania się pieszych (por. tab. 9), górna granica krytycznego przedziału częstotliwości może ulec obniżeniu do wartości określonej dla tłumy. W tab. 4 krytyczny przedział częstotliwości oddziaływania tłumy i potoków pieszych ograniczono do 2,00 Hz oraz jego wielokrotność do 4,00 Hz. Częstotliwości o wartościach większych od 2,00 Hz (i odpowiednio 4,00 Hz) związane są z oddziaływaniem osób szybko idących (lub wolno biegnących), których występowanie na konstrukcji zależne jest od miejsca jej lokalizacji.

2.2.2.2. Szybkość ruchu i długość kroku

Ważnymi parametrami charakteryzującymi różne typy aktywności użytkowników konstrukcji, poza częstotliwościami kroków, są: szybkość poruszania się oraz długość kroku. Parametry te mają wpływ m.in. na czas oddziaływania obciążenia na konstrukcję oraz liczbę impulsów siły działających na konstrukcję (liczbę kroków generowanych przez użytkownika przemieszczającego się w obrębie konstrukcji). Przyjęcie nieoprawnych wartości tych parametrów prowadzi do błędnego oszacowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji (zaniżenia lub zawyżenia wyznaczanych amplitud drgań).

Przy przyjęciu założenia, że ruch pieszych jest, w krótkim przedziale czasu (podczas przebywania użytkownika na konstrukcji), ruchem jednostajnym, średnią szybkość poruszania się wyznaczyć można za pomocą zależności (1):

$$V = \frac{s}{t} \quad (1)$$

w której: V – średnia szybkość ruchu [m/s], s – długość drogi przebytej podczas ruchu [m], t – czas, w którym ta droga została przebyta [s].

Równanie (1) zapisać można w nieco innej formie, uzależniając wartość średniej szybkości ruchu od średniej długości i średniej częstotliwości kroków l_s i f_s :

$$V = \frac{l_s}{t_s} = l_s \cdot f_s \quad (2)$$

gdzie: V – średnia szybkość ruchu [m/s], l_s – średnia długość kroku [m], t_s – średni czas wykonywania jednego kroku [s], $f_s = 1/t_s$ – średnia częstotliwość kroków [Hz].

Proste przekształcenia zależności (2) pozwalają wyznaczyć średnią częstotliwość kroków f_s (przy znanej szybkości ruchu V i długości kroku l_s , równanie (3)) lub średnią długość kroku l_s (przy znanej szybkości ruchu V i częstotliwości kroków f_s , równanie (4)):

$$f_s = \frac{V}{l_s} \quad (3)$$

$$l_s = \frac{V}{f_s} \quad (4)$$

Zależność (1) wykorzystać można do oszacowania średniego czasu potrzebnego do przebycia drogi s , np. czasu przejścia przez kładkę o znanej długości:

$$t = \frac{s}{V} \quad (5)$$

Przykładowo: osoba idąca z średnią częstotliwością kroków $f_s = 1,82$ Hz, wykonująca kroki o długości $l_s = 0,75$ m przemieszcza się z szybkością $V = 0,75 \cdot 1,82 = 1,36$ m/s. Średni czas potrzebny do przebycia przez tę osobę drogi $s = 35,0$ m (np. długość kładki) wynosi $t = 35/1,36 \approx 26,0$ s.

W podobny sposób oszacować można średnią szybkość poruszania się tłumy lub osoby biegnącej oraz czas potrzebny do przejścia lub przebiegnięcia danego odcinka drogi. Wyznaczony czas stanowi podstawę do określenia czasu trwania analizy dynamicznej, który przyjmować należy na ogół kilkanaście sekund dłuższy od czasu potrzebnego do przebycia drogi w celu wyznaczenia drgań swobodnych konstrukcji występujących po ustaniu działania obciążenia dynamicznego.

Zależności przedstawione w równaniach (1)–(5) wykorzystać można do opisu ruchu człowieka, jeśli ruch ten jest ruchem jednostajnym i wykonywany jest instynktownie (bez świadomej kontroli jego parametrów). W przypadku analizy dynamicznej konstrukcji budowlanych w normalnych warunkach ich użytkowania przyjmując założenie, że ruchu użytkowników odbywający się w obrębie konstrukcji jest ruchem jednostajnym wykonywanym instynktownie. Możliwe jest więc wykorzystywanie równań (1)–(5) do opisu ruchu użytkowników na konstrukcji. W tym celu konieczna jest znajomość wartości takich parametrów ruchu jak szybkość i długość kroku podczas różnych form aktywności. Parametry te zostały scharakteryzowane w dalszej części rozdziału.

Szybkość przemieszczania się pieszych zależy od wielu czynników, takich jak: wiek, płeć i motywacja (cel) podróży, a także warunki drogowe (szerokości drogi, rodzaj nawierzchni, pochylenie) i warunki ruchowe (gęstość ruchu, stopień swobody ruchu) [221]. W normalnych warunkach, przy niewielkiej gęstości ruchu, przeciętna szybkość chodu wynosi: 0,60–1,20 m/s dla ruchu spacerowego; 0,80–1,40 m/s w przypadku normalnego ruchu niezwiązanego z pracą oraz 1,20–1,50 m/s w przypadku podróży do pracy, ruchu w trakcie wykonywania pracy oraz ruchu w obrębie obiektów użytku masowego [59, 112]. Przy niewielkiej gęstości ruchu umożliwiającej swobodne poruszanie się średnia szybkość przemieszczania się pieszych wynosi 1,34 m/s [67, 83].

Na szybkość poruszania się pieszych wpływają również okoliczności związane z ruchem (pora dnia i roku, pogoda, temperatura, długość drogi) [67, 84] oraz indywidualne cechy psychofizyczne pieszych (sprawności sensomotoryczne i cechy osobowościowe) oraz trudne do określenia czynniki społeczno-kulturowe związane z regionem (lub subregionem) świata, z którego wywodzą się piesi.

Z racji dużej liczby parametrów warunkujących szybkość poruszania się pieszych nie sposób uwzględnić ich wszystkich w opisie ruchu. Na potrzeby analiz dynamicznych konstrukcji budowlanych wystarczające wydaje się uwzględnienie: wieku i płci użytkowników konstrukcji oraz motywacji ich podróży (celu podróży). W razie potrzeby uwzględniać można również region świata, z którego wywodzą się użytkownicy konstrukcji.

W tab. 6 przedstawiono średnie wartości szybkości chodu swobodnego w zależności od wieku i płci pieszych (wartości uporządkowane w kolejności rosnącej) [67, 83].

Tabela 6. Średnie szybkości chodu swobodnego w zależności od wieku i płci idących osób [67, 83]

Płeć i wiek	Szybkość ruchu [m/s]
Małe dzieci, osoby starsze, kobiety idące z małymi dziećmi	0,70
Mężczyźni idący z małymi dziećmi	0,90
Dzieci w wieku 6–10 lat	1,10
Kobiety w wieku powyżej 50 lat	1,30
Kobiety w wieku poniżej 50 lat, mężczyźni w wieku powyżej 55 lat	1,40
Mężczyźni w wieku 40–50 lat	1,60
Mężczyźni w wieku poniżej 40 lat	1,70
Młodzież	1,80

Średnie szybkości ruchu pieszych wynikające z różnych motywacji podróży przedstawiono w tab. 7 [67, 83].

Tabela 7. Średnie szybkości chodu w zależności od motywacji podróży [67, 83]

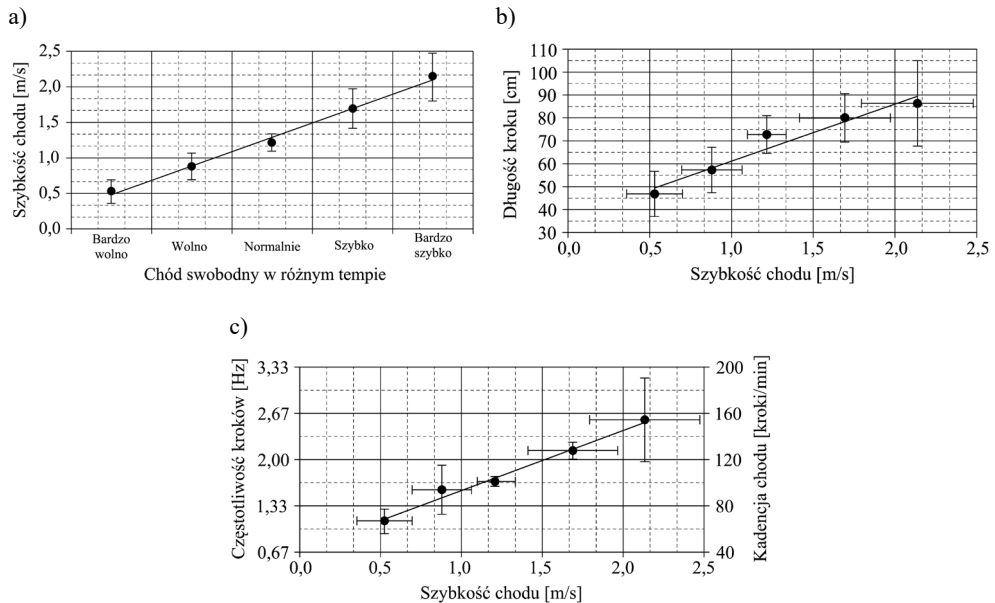
Motywacja podróży	Szybkość ruchu [m/s]
Chód w normalnych warunkach	1,34
Dojście do pracy, szkoły, uczelni	1,61
Chód związany z wykonywaniem pracy	1,49
Chód podczas zakupów	1,16
Chód spacerowy w czasie wolnym	1,10

Wartości szybkości chodu w różnym tempie oszacować można również za pomocą diagramów przedstawionych na il. 7 przytoczonych za pracą [114]. Na diagramach tych zobrazowane zostały zależności pomiędzy szybkością chodu i długością kroków oraz szybkością chodu i częstotliwością kroków (słupki na wykresach oznaczają błąd standardowy średniej SEM²).

Diagramy opracowano na podstawie badań chodu 10-osobowej grupy składającej się z pracowników i studentów instytutu badawczego Prince of Wales Medical Research Institute (Neuroscience Research Australia) odznaczających się dobrą kondycją fizyczną oraz brakiem urazów zaburzających zdolność poruszania się i równowagę (sześć kobiet, czterech mężczyzn, wiek 17–31 lat, wzrost 150–178 cm, waga 41–80 kg). W trakcie badań ich uczestnicy poproszeni zostali o chód: 1) bardzo wolny, znacznie wolniejszy od normalnego tempa chodu, podobny do tempa bardzo

² Im mniejszy jest błąd standardowy średniej tym lepiej średnia uzyskana z próby estymuje średnią z całej populacji.

wolnego spaceru w parku; 2) chód nieznacznie wolniejszy od normalnego tempa chodu; 3) chód w tempie normalnym (naturalnym); 4) chód w tempie szybszym od normalnego odpowiadający tempu chodu osoby spieszącej się oraz 5) chód w możliwie najszybszym tempie z uniknięciem biegu. Ustalona w wyniku badań normalna (naturalna, preferowana) szybkość chodu wyniosła $1,20 \pm 0,04$ m/s, odpowiadająca jej długość kroku to $73,0 \pm 3,0$ cm, a częstotliwość kroków $1,67 \pm 0,017$ Hz (kadencja chodu 100 ± 1 kroków/min). Całkowity przedział zmienności średniej szybkości chodu wyniósł od $0,50 \pm 0,05$ m/s do $2,10 \pm 0,10$ m/s. Przedział zmienności średniej długości kroków to $47,0 \pm 3,0$ cm (chód bardzo wolny) do $86,0 \pm 6,0$ cm (chód bardzo szybki). Natomiast całkowity przedział zmienności średniej częstotliwości kroków to $1,12 \pm 0,05$ Hz do $2,57 \pm 0,18$ Hz (kadencja chodu 67 ± 3 kroków/min do 154 ± 11 kroków/min).



Il. 7. Parametry chodu: a) średnia szybkość chodu, b) długości kroków, c) częstotliwości kroków (słupki na wykresach oznaczają błąd standardowy średniej SEM) [114]

Mała liczebność próby (10 osób) została skompensowana oszacowaniem standardowego błędu wartości średniej pozwalającego estymować rozrzut wartości średniej w populacji. Zauważyć można, że w przypadku chodu w normalnym tempie oszacowana średnia szybkości chodu odznacza się najmniejszą wartość błędu SEM. Duża dokładność oszacowania średniej szybkości chodu przekłada się w konsekwencji na większą dokładność estymacji długości i częstotliwości kroków. W przypadku chodu szybkiego i bardzo szybkiego zauważyć można duże wartości błędów SEM świadczące o dużym rozproszeniu wartości badanych parametrów w populacji.

Wyniki obszernych badań parametrów chodu w normalnym tempie, przeprowadzone z udziałem 251 osób, studentów i pracowników Ruhr-Universität Bochum (56 kobiet i 195 mężczyzn), przedstawiono w pracy [97]. Podczas badań rejestrowano chód wolontariuszy odbywający się w warunkach pełnej swobody ruchu na platformie o długości 6,0 m (jedna osoba na platformie). Wyniki badań opracowano z rozróżnieniem chodu kobiet i mężczyzn (tab. 8).

Analiza tych wyników pozwala zauważyć większą średnią szybkość chodu badanej grupy w porównaniu z wynikami badań zaprezentowanymi w pracy [114]. Zauważyć warto, że średnia szybkość chodu wynosząca wg [97] 1,37 m/s odpowiada średniej szybkości chodu w warunkach normalnych 1,34 m/s określonej w tab. 7. Wynik z pracy [114] uznać można za dolną granicę szybkości podczas chodu swobodnego w warunkach normalnych (por. tab. 9, poziom swobody C).

W tab. 8 można zaobserwować także różnicę pomiędzy częstotliwością kroków w przypadku chodu kobiet i mężczyzn. Średnia częstotliwość kroków kobiet jest wyższa o 6,1% od częstotliwości kroków mężczyzn. Różnica ta zaobserwowana w pracach [97, 220] wyniosła 3,8%. Średnio częstotliwość kroków wykonywanych przez kobiety jest większa o ~5,0% od częstotliwości kroków mężczyzn.

Tabela 8. Szybkość, długość i częstotliwość kroków podczas chodu [97]

Parametry chodu		Razem	Mężczyźni	Kobiety
Szybkość chodu V [m/s]	Średnia	1,37	1,37	1,36
	Błąd <i>RMS</i>	0,15	0,16	0,14
	Min.	1,00	1,00	1,00
	Max.	2,00	2,00	1,80
Długość kroku l_s [m]	Średnia	0,75	0,76	0,71
	Błąd <i>RMS</i>	0,07	0,07	0,06
	Min.	0,53	0,53	0,50
	Max.	1,02	1,02	0,88
Częstotliwość kroków f_s [Hz]	Średnia	1,82	1,80	1,91
	Błąd <i>RMS</i>	0,12	0,12	0,10
	Min.	1,45	1,45	1,60
	Max.	2,20	2,20	2,20

Warto zauważyć, że w przypadku analizy wpływu pieszych na konstrukcję różnica częstotliwości kroków poruszających się pieszych wpływa na zmniejszenie stopnia synchronizacji kroków pieszych i w konsekwencji zmianę wartości obciążenia dynamicznego działającego na konstrukcję. Stopień synchronizacji kroków poruszających się pieszych jest parametrem trudnym do dokładnego oszacowania z powodu losowego charakteru tego zjawiska. W przypadku ruchu osób w parach

lub grupach oraz w potokach pieszych (podczas chodu osób jedna za drugą i obok siebie), w większym stopniu dojść może do wzajemnej synchronizacji kroków niż w przypadku swobodnego ruchu pieszych [31, 65, 154, 159, 176, 196]. Synchronizacja ta zależy może od wielu parametrów, np. od gęstości potoku i dostępnej przestrzeni na ruch, zaburzenia strefy dystansu personalnego, znajomości osób w grupie/potoku pieszych, tego samego celu podróży itp. Wystąpić mogą różne losowe warunki determinujące wzajemne zależności między pieszymi i ich synchronizację. W celu uwzględnienia efektu synchronizacji kroków poruszających się pieszych w analizach wpływu potoków pieszych oraz tłumu na konstrukcję stosowane są dwa podejścia obliczeniowe: 1) budowa stochastycznych modeli obciążenia dynamicznego uwzględniających losową zmienność i synchronizację wybranych parametrów funkcji obciążenia (np. amplitudy obciążenia, częstotliwości kroków, przesunięcia fazowego kroków) oraz 2) wykorzystanie współczynników redukcyjnych pozwalających zredukować wartość obciążenia dynamicznego lub wartość amplitud drgań konstrukcji wyznaczonych przy założeniu pełnej synchronizacji przechodniów między sobą (pełnej zgodności częstotliwości kroków). Procedurę budowy obciążenia losowego odnaleźć można m.in. w pracy [221], w której scharakteryzowano metodę numerycznej symulacji losowej funkcji obciążenia generowanego przez tłum pieszych z uwzględnieniem losowej zmienności częstotliwości kroków (w określonym przedziale częstotliwości) oraz losowej zmienności przesunięcia fazowego kroków pieszych w tłumie. Metodę bazującą na wykorzystaniu współczynników redukcyjnych przedstawiono m.in. w normie [39]. Wykonując ocenę wpływu potoków pieszych lub tłumu na konstrukcję, pamiętać należy, że stopień synchronizacji kroków osób poruszających się na konstrukcji wywiera duży wpływ na wartość amplitud drgań konstrukcji. Zagadnienie to należy każdorazowo uwzględniać w analizie odpowiedzi dynamicznej konstrukcji narażonej na oddziaływanie potoku pieszych lub tłumu. Jego pominięcie może doprowadzić do znacznego przeszacowania wartości amplitud drgań i w konsekwencji błędnej oceny warunków eksploatacji konstrukcji.

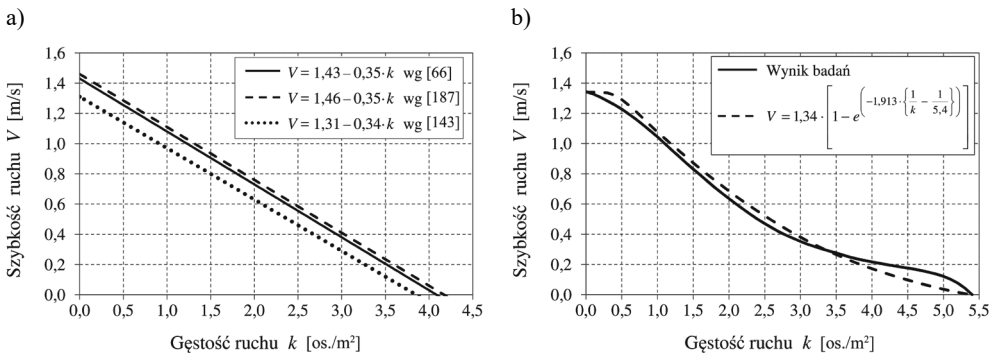
Przedstawione dotychczas wartości szybkości chodu pieszych dotyczą chodu swobodnego (nieskrępowanego) odbywającego się w warunkach dużej swobody ruchu. Szybkości te ulegają jednak zmianie w przypadku wzrostu gęstości pieszych i zmniejszenia powierzchni przypadającej na osobę (zmniejszenia swobody ruchu). Szybkości chodu odpowiadające różnym poziomom swobody ruchu pieszych przedstawione zostały m.in. w pracach [59, 67, 84, 112]. Przytoczono je w tab. 9 za pracą [84].

Pierwsze trzy poziomy swobody ruchu (poziomy *A*, *B*, *C*) pozwalają na zachowanie naturalnej szybkości poruszania się pieszych (warunki ruchu swobodnego). Począwszy od poziomu *D* szybkość ruchu zaczyna być ograniczana. Przy poziomie swobody *F* swoboda ruchu jest już poważnie ograniczona, piesi pokonują w ciągu jednej sekundy dystans wynoszący maksymalnie 75 cm.

Tabela 9. Poziomy swobody ruchu pieszych i odpowiadające im szybkości chodu [84]

Poziomy swobody ruchu (PSR)		Gęstość ruchu k [os./m ²]	Powierzchnia na osobę [m ² /os.]	Średnia szybkość ruchu V [m/s]	Intensywność ruchu [os./min/m]
Pełna swoboda ruchu	A	≤ 0,18	> 5,6	> 1,30	≤ 16
	B	0,18–0,27	3,7–5,6	1,27–1,30	16–23
	C	0,27–0,45	2,2–3,7	1,22–1,27	23–33
Ograniczona swoboda ruchu	D	0,45–0,71	1,4–2,2	1,14–1,22	33–49
	E	0,71–1,33	0,75–1,4	0,75–1,14	49–75
	F	≥ 1,33	≤ 0,75	≤ 0,75	zmienna

Średnią szybkość chodu w zależności od gęstości ruchu ustalić można również, wykorzystując diagramy przedstawione na il. 8 [66, 143, 187, 207].



Il. 8. Zależność szybkości chodu V od gęstości ruchu k : a) zależności liniowe wg [66, 187] dla ruchu w obrębie stacji transportu zbiorowego oraz [143] dla ruchu w obrębie ulic handlowych, b) zależność nieliniowa wg [207] dla ruchu jednokierunkowego na płaskiej powierzchni

W przypadku ruchu pieszych w jednym kierunku po płaskiej powierzchni zależność pomiędzy szybkością a gęstością ruchu pieszych przedstawia empiryczne równanie (6) [67, 207]:

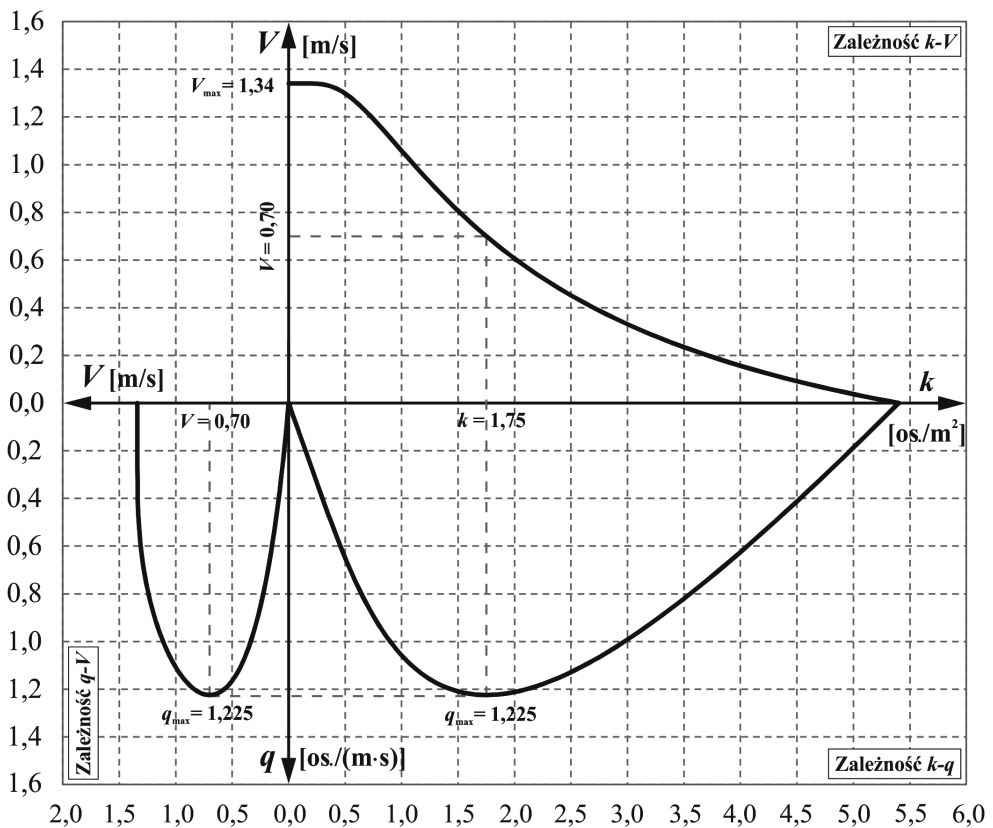
$$V = V_0 \cdot \left[1 - e^{\left(-\gamma \cdot \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{k_{\max}} \right\} \right)} \right] \quad (6)$$

gdzie: V_0 – szybkość w ruchu swobodnym (tzn. przy bardzo małej gęstości ruchu, bliskiej zeru) na płaskiej poziomej powierzchni [m/s], γ – współczynniki kalibracyjny ($\gamma = 1,913$), k – gęstość ruchu [os./m²], k_{\max} – gęstość maksymalna, przy której ruch pieszych jest niemożliwy ($k_{\max} = 5,4$ os./m²).

Przyjmując za pracę [207] wartość $V_0 = 1,34$ m/s i podstawiając stałe γ oraz k_{\max} do równania (6) przyjmie ono postać (7) (por. il. 8b):

$$V = 1,34 \cdot \left[1 - e^{\left(-1,913 \cdot \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{5,4} \right\} \right)} \right] \quad (7)$$

Wykorzystując równanie (7) oraz równanie stanu strumienia ruchu $q = k \cdot V$ (gdzie: q – intensywność ruchu [os./m·s] [67]), opracować można fundamentalny diagram ruchu pieszych obrazujący zależność pomiędzy gęstością, szybkością i intensywnością ruchu pieszych (il. 9) [67, 207]. Diagram ten posłużyć może np. do określania szybkości ruchu pieszych przy założonej intensywności lub gęstości ruchu.



V – szybkość ruchu [m/s] k – gęstość ruchu [os./m²] $q = V \cdot k$ – intensywność ruchu [os./m·s]

Il. 9. Fundamentalny diagram ruchu pieszych [67, 207]
(zależność pomiędzy gęstością k , szybkością V i intensywnością q ruchu pieszych)

W pracach [35, 36, 205] zaproponowano uogólnioną postać równania (6) pozwalającą uwzględnić wpływ celu podróży (motywacji podróży) oraz regionu świata, z którego wywodzą się piesi (Europa, Ameryka Północna, Azja) na wartość średniej szybkości ruchu. Równanie (6) zapisano w postaci (8):

$$V = V_M \cdot \left[1 - e^{\left(-\gamma \cdot \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{k_M} \right\} \right)} \right] \quad (8)$$

gdzie: V_M – szybkość w ruchu swobodnym z uwzględnieniem wpływu motywacji podróży i regionu świata:

$$V_M = V_0 \cdot \alpha_G \cdot \alpha_T \quad (9)$$

k_M – gęstość maksymalna, przy której ruch pieszych jest niemożliwy [os./m²] z uwzględnieniem wpływu regionu świata (Europa/Ameryka: $k_M \approx 6,0$ [os./m²], Azja: $k_M \approx 7,7$ [os./m²] [36]):

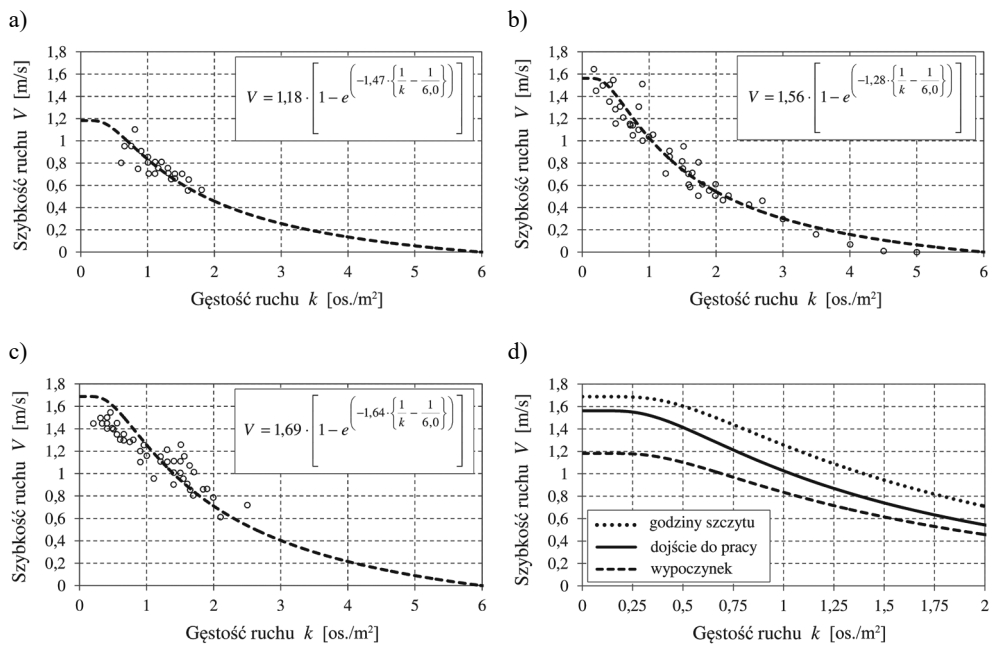
$$k_M = \frac{1}{\beta_G \cdot S_0} \quad (10)$$

Wartości współczynników γ , α_T , α_G , β_G określone dla różnych motywacji (celów) podróży i regionów świata przedstawiono w tab. 10. Wartość S_0 oznacza pole obszaru zajętego przez człowieka stojącego nieruchomo. Wartość tę wyznaczać można jako pole elipsy ($S_0 = 0,25 \cdot \pi \cdot w_{0,e} \cdot d_{0,e}$, gdzie: $w_{0,e}$ – długość dłuższej przekątnej elipsy, $d_{0,e}$ – długość krótszej przekątnej elipsy) lub pole prostokąta ($S_0 = w_{0,r} \cdot d_{0,r}$, gdzie: $w_{0,r}$ – długość dłuższego boku prostokąta, $d_{0,r}$ – długość krótszego boku prostokąta), w które wpisany jest widziany z góry kontur ciała stojącego człowieka. Przykładowo: $w_{0,e} = 58$ cm, $d_{0,e} = 33$ cm ($S_0 = 0,15$ m²) [66, 193] lub $w_{0,r} = 45$ cm, $d_{0,r} = 36$ cm ($S_0 = 0,16$ m²) [35, 205]. Wartości w_0 oraz d_0 oszacować można także na podstawie danych antropometrycznych określających wymiary ludzkiego ciała (w_0 – szerokość barkowa ciała, d_0 – głębokość klatki piersiowej) [95, 163, 164]. Tak ustalone wymiary ciała zwiększyć należy o strefę dystansu personalnego, tzn. odległość, jaką ludzie zachowują w stosunku do innych osób (np. strefę dystansu indywidualnego – strefa prywatna rozciągająca się od 45 do 120 cm wokół ciała lub strefę dystansu intymnego – strefa rozciągająca się w promieniu około 45 cm wokół ciała).

Tabela 10. Wartości współczynników γ , α_T , α_G , β_G dla różnych motywacji podróży i części świata [35, 36, 205]

Motywacja (cel) podróży			Region świata			
	Ruch w godzinach szczytu, realizacja obowiązków zawodowych	Dojście do pracy, dojście na spotkanie	Czas wolny, wypoczynek, zakupy	Europa	Ameryka Północna	Azja
α_T	1,20	1,11	0,84	α_G		
				1,05	1,01	0,92
γ	$0,273 \cdot k_M$	$0,214 \cdot k_M$	$0,245 \cdot k_M$	β_G		
				1,075	0,87	

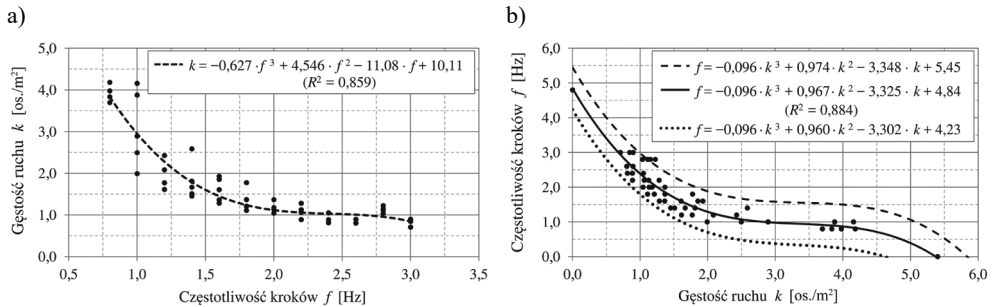
Na il. 10 przedstawiono zależności szybkości chodu od gęstości ruchu wyznaczone z wykorzystaniem równania (8) dla różnych motywacji podróży, przyjmując: $V_0 = 1,34$ m/s, $\alpha_G = 1,05$, $\beta_G = 1,075$ (Europa), $S_0 = 0,155$ m². Wyznaczone zależności odniesiono do wyników badań prezentowanych w pracach [66, 142] (opracowanie własne).



Il. 10. Zależności szybkości chodu V od gęstości ruchu k wyznaczone z uwzględnieniem wpływu motywacji podróży i regionu świata (Europa) w odniesieniu do wyników badań [66, 142]:

- a) chód spacerowy w czasie wolnym, podczas wypoczynku i w trakcie zakupów,
 b) chód związany z dojściem do pracy lub na umówione spotkanie, c) chód podczas realizacji obowiązków zawodowych, ruch w godzinach szczytu, d) zestawienie diagramów k - V w przedziale gęstości ruchu 0,0–2,0 [os./m²] (opracowanie własne)

Uzupełnieniem powyższych diagramów obrazujących zależność szybkości ruchu w funkcji gęstości $V(k)$ oraz informacji przedstawionych w tab. 9 są wyniki badań przedstawione w pracy [221] obrazujące zależność gęstości ruchu k w funkcji częstotliwości kroków f w przedziale częstotliwości kroków 0,80–3,00 Hz obejmującym ruch od bardzo wolnego chodu do szybkiego biegu (il. 11a).



Il. 11. Zależność pomiędzy gęstością ruchu k i częstotliwością kroków f :

a) wyniki badań z pracy [221] wraz z linią trendu – zależność $k(f)$, b) wyniki badań z pracy [221] w zmienionym układzie osi ekstrapolowane do wartości skrajnych ($f_{\max} = 4,80$ Hz, $k_{\max} = 5,40$ os./m²) z 95% przedziałem ufności prognozy – zależność $f(k)$ (opracowanie własne)

Wyniki przedstawione na il. 11a obrazują graniczne wartości gęstości potoku pieszych, przy których możliwe jest swobodne przemieszczanie się pieszych z określoną częstotliwością kroków. Po przekroczeniu wskazanej wartości granicznej swoboda ruchu pieszych jest ograniczona, piesi muszą zmieniać częstotliwość kroków w celu uniknięcia kolizji z innymi osobami. Przykładowo, dla częstotliwości kroków $f = 1,85$ Hz (chód w tempie normalnym) średnia graniczna gęstość potoku pieszych umożliwiająca swobodne poruszanie się, ustalona na podstawie linii trendu, wynosi $k = 1,20$ os./m² (por. tab. 9).

Na il. 11b zaprezentowano efekt analizy wyników z pracy [221] przedstawiający zależność częstotliwości kroków f w funkcji gęstości ruchu k (zmieniony układ osi wykresu, por. il. 8, 9, 10) wraz z naniesioną linią trendu ekstrapolowaną do wartości granicznych $f_{\max} = 4,80$ Hz (f_{\max} – graniczna częstotliwość kroków ustalona dla biegu sprinterskiego na podstawie [96, 128, 186], $k \approx 0,0$ os./m²) oraz $k_{\max} = 5,40$ os./m² (k_{\max} – graniczna gęstość ruchu, powyżej której przemieszczanie się pieszych jest niemożliwe (por. il. 8b oraz równania (6) i (7), $f \approx 0,0$ Hz)). Na wykresie przedstawiono również 95% przedział ufności prognozy³ badanej zmiennej, czyli granicznej gęstości ruchu swobodnego (opracowanie własne).

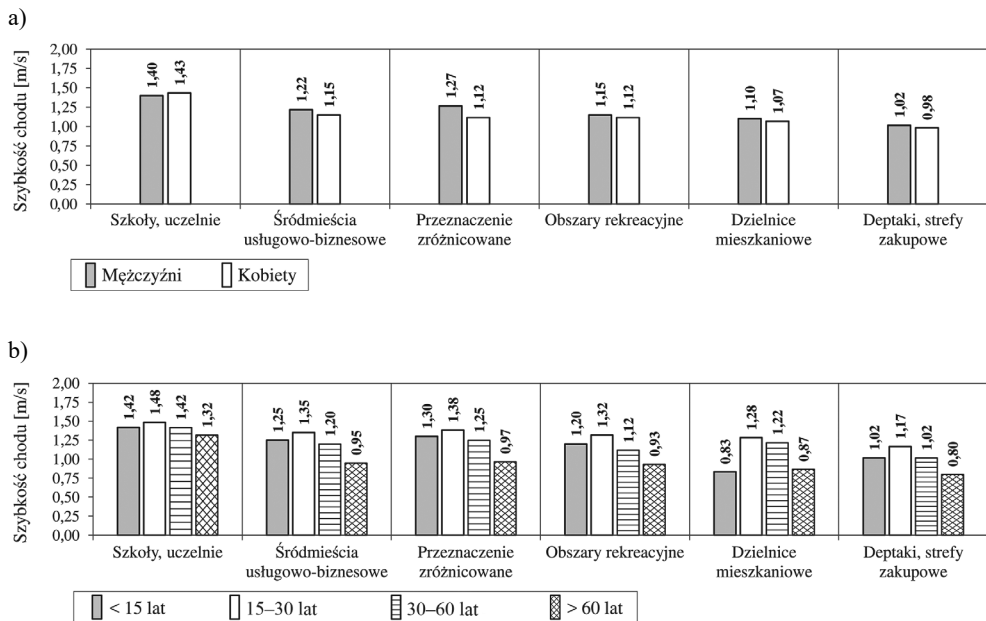
Wyniki obszernych badań szybkości chodu przeprowadzonych z uwzględnieniem szeregu parametrów wpływających na wartość szybkości chodu, takich jak: wiek,

³ Przedział ufności prognozy (przedział predykcji) – przedział, w obrębie którego, z określonym prawdopodobieństwem (np. 95%), znajdzie się prognozowana wartość badanej zmiennej.

pleć, szerokość chodników, przeznaczenie obszaru (obszar związany z edukacją, rekreacją, handlem, usługami, obszary mieszkaniowe itp.), liczebność grupy (grupy dwu-, trzy-, czteroosobowe itd.), czynniki zaburzające chód (bagaż, telefon komórkowy), zaprezentowano w pracy [174] (il. 12, tab. 11). Badania te wykonano w pięciu miastach w Indiach (Nowe Delhi, Chandigarh, Cennaj, Erode, Coimbatore), w 18 różnych lokalizacjach. Zaznaczyć należy, że przedziały wiekowe pieszych ustalane był szacunkowo na podstawie zapisów wideo (nie ankietowano badanych osób). Z tego powodu granice wieku traktować należy umownie, szczególnie granicę 30 lat, dla której uwzględniać można margines błędu +10 lat (w górę).

Wyniki tych badań przytoczono w celu zobrazowania różnic szybkości ruchu pieszych występujących w różnych warunkach ruchu. Efekt ten powinien być uwzględniany w analizach dynamicznych konstrukcji narażonych na oddziaływanie pieszych w celu zwiększenia dokładności tych analiz (zmiana szybkości ruchu wpływa na zmianę częstotliwości i długości korków, a tym samym na sposób dynamicznego oddziaływania pieszych na konstrukcję).

Na il. 12a przedstawione zostały wyniki szybkości chodu kobiet i mężczyzn. Zauważyć można, że podczas chodu swobodnego kobiety poruszają się na ogół z inną szybkością niż mężczyźni. Średnia procentowa różnica szybkości chodu swobodnego kobiet i mężczyźna ustalona na podstawie wyników prezentowanych w pracach [10, 97, 144, 220] wynosi 4,8% (~5,0%).



Il. 12. Średnie szybkości chodu w zależności od: a) przeznaczenia obszaru i płci pieszych, b) przeznaczenia obszaru i wieku pieszych [174]

Tabela 11. Średnie szybkości chodu pieszych w różnych kategoriach [174]

Kategoria	Szybkość chodu [m/s]			
	Chodniki (1,5–3,5 m)	Chodniki szerokie (4,0–7,0 m)	Deptaki	Wartość średnia
Płeć				
mężczyźni	1,22	1,17	1,07	1,15
kobiety	1,15	1,12	1,05	1,11
Wiek				
dzieci (< 15 lat)	1,23	1,21	1,08	1,17
młodzież/dorośli (15–30 lat)	1,37	1,29	1,19	1,29
osoby w średnim wieku (30–60 lat)	1,21	1,16	1,07	1,15
osoby starsze (> 60 lat)	0,94	0,93	0,89	0,92
Liczebność grupy				
grupy dwuosobowe	1,19	1,13	1,09	1,13
grupy trzyosobowe	1,06	1,01	1,00	1,03
grupy czterosobowe	0,92	0,98	1,00	0,96
grupy pięciosobowe	1,02	0,90	0,89	0,94
grupy o liczebności > pięciu osób	0,98	–	0,83	0,91
Czynniki zaburzające chód				
osoby z bagażem	1,03	1,09	1,10	1,07
osoby bez bagażu	1,31	1,20	1,02	1,18
osoby z telefonem komórkowym	1,05	1,04	0,99	1,02
osoby bez telefonu	1,30	1,26	1,13	1,23
Przeznaczenie obszaru				
usługi, biznes	1,11	1,26	–	1,18
szkoły, uczelnie	1,42	–	–	1,42
zróżnicowane (mieszane)	1,33	1,05	–	1,19
rekreacja	1,10	1,13	1,16	1,13
zakupy	1,08	–	–	1,08
dzielnice mieszkaniowe	–	1,09	0,92	1,00

W zestawieniu zauważyć można, że we wszystkich wyodrębnionych obszarach ruchu grupa wiekowa 15–30 lat jest grupą poruszającą się najszybciej (przedział szybkości chodu 1,17–1,48 m/s, szybkość średnia 1,32 m/s). Interesujący wynik uzyskano dla pieszych w wieku < 15 lat. W obszarach szkół osoby te poruszają się znacznie szybciej niż w obszarach mieszkaniowych (il. 12b). W przedziale wiekowym > 60 lat szybkości chodu w większości przypadków są mniejsze od 1,0 m/s. W przypadku

obszarów związanych z edukacją szybkość ta wynosi 1,32 m/s. W pracy [174] wyjaśniono, że w obszarze szkół większość starszych osób towarzyszyła dzieciom, co zmuszało ich do zwiększenia szybkości chodu. Wykluczając ten wynik z dalszej analizy jako chód z nienaturalną szybkością, oszacować można średnią szybkość chodu osób starszych na poziomie 0,92 m/s (tab. 11). Warto zauważyć, że szybkości poruszania się pieszych w śródmieściach usługowo-biznesowych oraz w obszarach skupiających różnorodne usługi administracyjne, finansowe, handlowe, prawne oraz kulturalne (przeznaczenie zróżnicowane) osiągają podobne wartości. Średnia wartość szybkości chodu ustalona dla grupy wiekowej 0,0 – 60 lat (z pominięciem osób starszych) wynosi 1,34 m/s. Szybkość ta odpowiada wartości określonej w pracach [67, 112, 207] jako średnia szybkość swobodnego chodu.

W tab. 11 zauważyć należy wpływ liczebności zorganizowanej grupy pieszych na średnią szybkość chodu. Już w przypadku grup dwuosobowych szybkość chodu jest mniejsza od średnich szybkości poruszania się pojedynczych osób. W miarę wzrostu liczebności grupy szybkość ta maleje. Podobny wpływ na redukcję szybkości chodu wywiera zaangażowanie pieszego w wykonywanie innych czynności podczas chodu, tj. rozmowa przez telefon komórkowy lub przenoszenie bagażu. Szybkość chodu w przypadku rozmowy przez telefon komórkowy zostaje zredukowana średnio o 17%, w przypadku transportu bagażu o około 10%.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że szybkości przedstawione na il. 12 i w tab. 11 mogą zmieniać się w różnych krajach świata w zależności od rozmaitych uwarunkowań społecznych i czynników kulturowych. Jednakże zaprezentowane wyniki wykorzystać można do oszacowania procentowych różnic średnich szybkości chodu w różnych przypadkach w odniesieniu np. do średniej szybkości chodu. Tak określone zależności procentowe wykorzystać można do oszacowania szybkości ruchu pieszych na potrzeby symulacji chodu potoków pieszych składających się z różnych grup wiekowych poruszających się w obszarach o różnorodnym przeznaczeniu w różnych krajach świata.

W celu umożliwienia czytelnikowi oceny wyników pracy [174] oraz zapewnienia możliwości oszacowania procentowych różnic szybkości chodu w tab. 12 i 13 oraz na il. 13 przedstawiono zestawienie średnich szybkości swobodnego chodu pieszych na chodnikach dla różnych krajów świata oraz w różnych grupach wiekowych [10, 33, 56, 174]. Wartość średnia średniej szybkości chodu wyznaczona na podstawie danych z tab. 12, z uwzględnieniem wszystkich krajów, wyniosła 1,33 m/s. Wynik ten potwierdza zalecenia przedstawione w [67, 112, 207] dotyczące średniej szybkości chodu swobodnego (por. tab. 7). Wartość średnia dla krajów europejskich wyniosła 1,42 m/s i zbliżona jest do wartości określonej w tab. 7 jako średnia szybkość chodu podczas wykonywania pracy.

Wykorzystując te dane, wyznaczyć można średnie parametry ruchu pieszych. Przykładowo, 1) przyjmując średnią szybkość chodu swobodnego $V_0 = 1,34$ m/s [67, 83] oraz średnią długość kroku $l_s = 0,70$ cm (por. il. 18 i 19), średnia częstotliwość

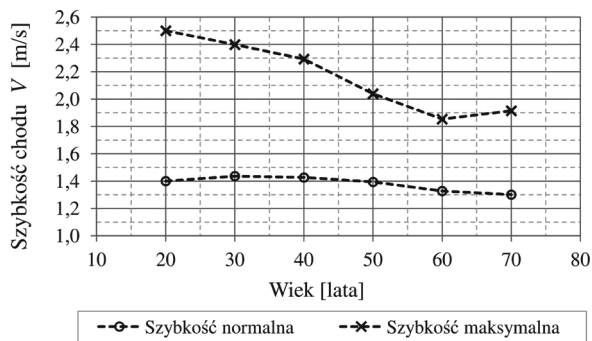
kroku wynosi $f_s = 1,34/0,70 = 1,91$ Hz; 2) przyjmując średnią częstotliwość kroków $f_s = 1,88$ Hz [79] oraz średnią długość kroku $l_s = 0,70$ m, średnia szybkość chodu swobodnego wynosi $V_0 = 1,88 \cdot 0,70 = 1,32$ m/s; 3) przyjmując średnią szybkość chodu swobodnego $V_0 = 1,34$ m/s [67, 83] oraz średnią częstotliwość kroków $f_s = 1,88$ Hz [79], średnia długość kroku wyniesie $l_s = 0,71$ m. W ten sposób ustalić można wartości częstotliwości i długości kroków pieszych na potrzeby analiz dynamicznych konstrukcji obciążonej oddziaływaniem pojedynczych pieszych, potoków pieszych lub tłumu. Przyjęcie różnych szybkości chodu i długości kroków pozwala wyznaczyć różne wartości częstotliwości kroków idących osób i modelować oddziaływania dynamiczne o charakterze losowym.

Tabela 12. Średnie szybkości swobodnego chodu pieszych na chodnikach w różnych krajach [10, 56, 174]

Kraj		Średnia szybkość chodu [m/s]	Wartość średnia [m/s]
Europa	Austria	1,45	1,42
	Francja	1,47	
	Holandia	1,42	
	Irlandia	1,27	
	Niemcy	1,50	
	Wielka Brytania	1,40	
Inne	Arabia Saudyjska	1,08	1,29
	Australia	1,45	
	Bangladesz	1,15	
	Chiny	1,27	
	Filipiny	1,38	
	Indie	1,24	
	Irak	1,23	
	Izrael	1,32	
	Japonia	1,36	
	Kanada	1,40	
	Kuwejt	1,18	
	Nowa Zelandia	1,47	
	Sri Lanka	1,25	
	Tajlandia	1,23	
	USA	1,34	
Wartość średnia [m/s]		1,33	
Odchylenie standardowe [m/s]		0,12	
Min. [m/s]		1,08	
Max. [m/s]		1,50	

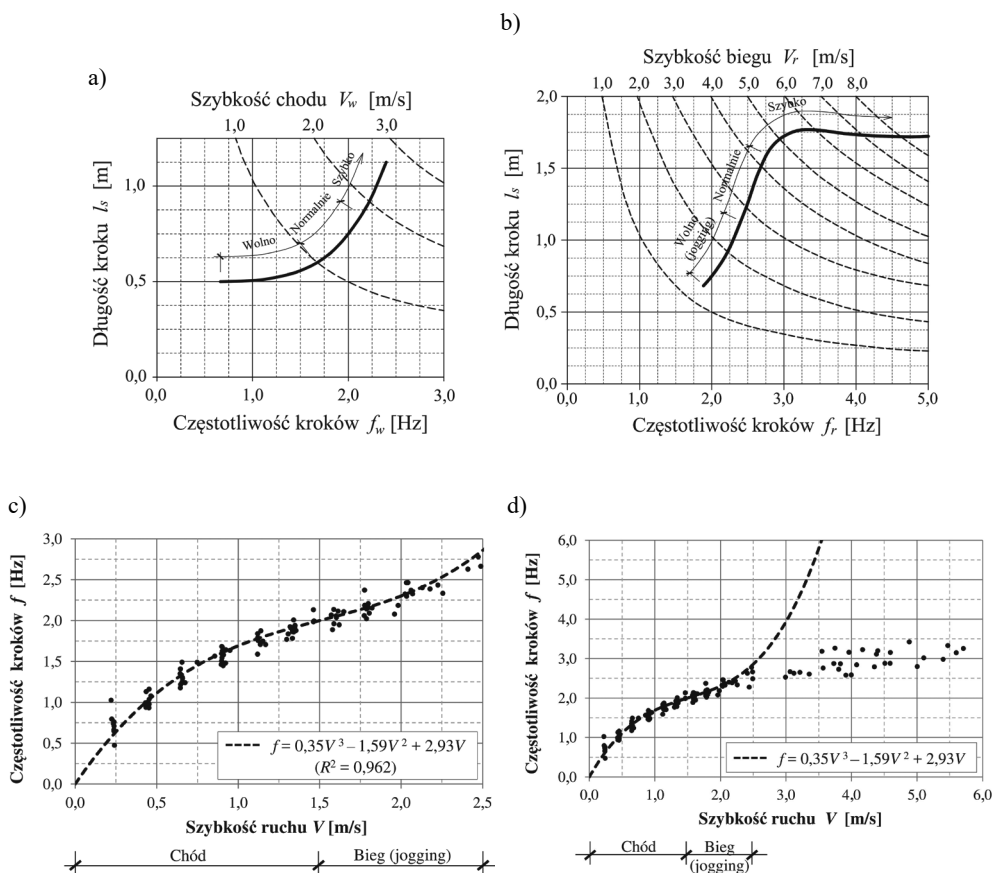
Tabela 13. Normalne i maksymalne szybkości swobodnego chodu w przedziale wiekowym 20–70 lat z rozróżnieniem chodu kobiet i mężczyzn (wyniki badań grupy 230 osób, stan Connecticut, USA) [33]

Wiek [lata]	Mężczyźni		Kobiety		Wartość średnia
	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	
Normalna szybkość chodu [m/s]					
20	1,39	0,15	1,41	0,18	1,40
30	1,46	0,09	1,42	0,13	1,44
40	1,46	0,16	1,39	0,16	1,43
50	1,39	0,23	1,40	0,15	1,39
60	1,36	0,21	1,30	0,21	1,33
70	1,33	0,20	1,27	0,21	1,30
Maksymalna szybkość chodu [m/s]					
20	2,53	0,29	2,47	0,25	2,50
30	2,46	0,32	2,34	0,34	2,40
40	2,46	0,36	2,12	0,28	2,29
50	2,07	0,45	2,01	0,26	2,04
60	1,93	0,36	1,77	0,25	1,85
70	2,08	0,36	1,75	0,28	1,91



Il. 13. Wartość średnia normalnej i maksymalnej szybkości chodu kobiet i mężczyzn w przedziale wiekowym 20–70 lat [33]

W celu wyznaczenia odpowiedzi dynamicznej konstrukcji narażonej na oddziaływanie osób biegnących konieczne jest ustalenie parametrów opisujących ruch tych osób. Parametry te ustalić można na podstawie diagramów przedstawionych na il. 14 [18, 35, 209]. Prezentowane dane obejmują również przedział aktywności w postaci chodu (opracowanie własne).

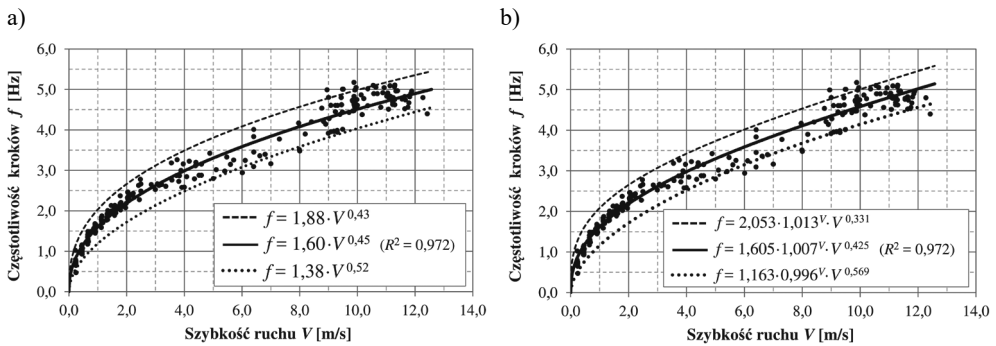


Il. 14. Zależność pomiędzy częstotliwością kroków, długością kroków i szybkością ruchu:

- a) dla chodu [209], b) dla biegu [209], c) zależność pomiędzy szybkością ruchu i częstotliwością kroków dla chodu i biegu w przedziale szybkości ruchu 0,0–2,50 m/s [18, 35],
 d) ekstrapolacja linii trendu z il. 14c – niewłaściwe oszacowanie częstotliwości kroków dla $V > 2,50$ m/s (opracowanie własne)

Na il. 14c zobrazowano wyniki analiz częstotliwości kroków w zależności od szybkości ruchu zaprezentowane w pracy [35], obejmujące analizę wyników z pracy [18]. Na wykresie przedstawiono linię trendu wyznaczoną w pracy [35] przez aproksymację wyników badań wielomianem trzeciego stopnia. Zaznaczyć należy, iż przedstawiona funkcja trendu obowiązuje wyłącznie w przedziale szybkości ruchu 0,20–2,50 m/s. Dla szybkości ruchu $V > 2,50$ m/s wyznaczane częstotliwości kroków osiągają niewłaściwe wartości (por. il. 14d oraz 15). Propozycja ta nie uwzględnia wyników badań przedstawianych w starszych pracach [75, 127] stwierdzających zależność częstotliwości kroków od szybkości ruchu w postaci funkcji pierwiastkowej.

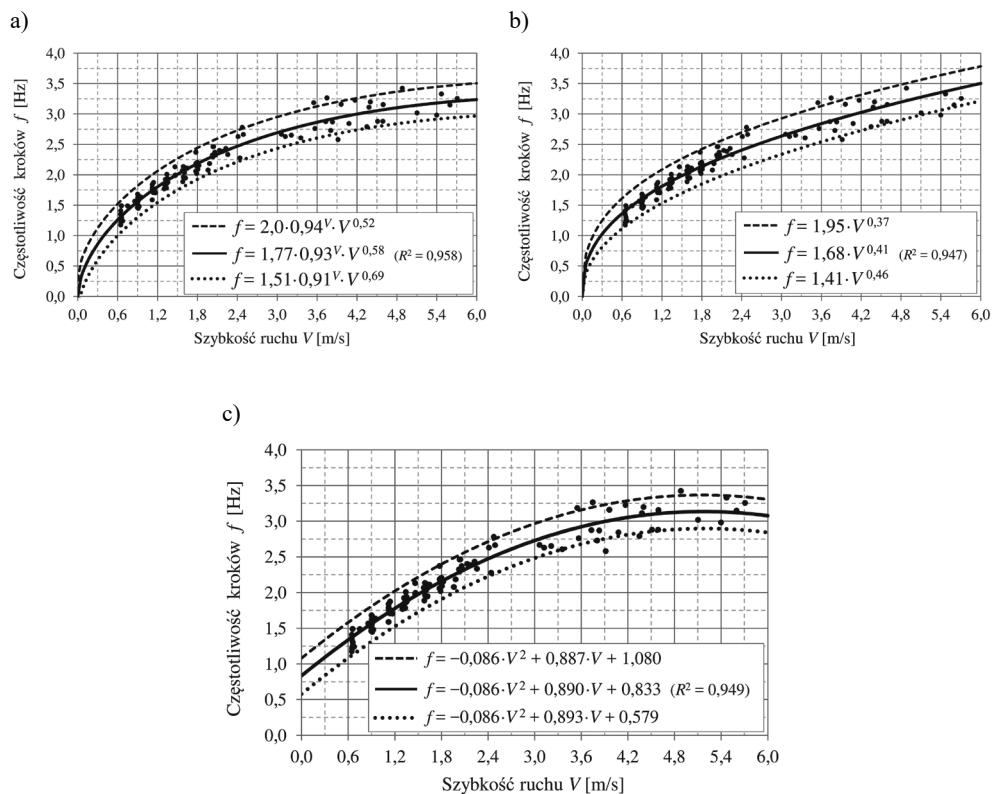
Na podstawie obszernych studiów literatury obejmujących m.in. pozycje [9, 96, 128, 186, 208] uzupełniono wyniki prezentowane w pracach [18, 35] o dane obejmujące przedział szybkości ruchu 2,50–12,5 m/s. Przedział szybkości ruchu 9,0–12,5 m/s obejmuje biegi sprinterskie (w zestawieniu uwzględniono wyniki uzyskiwane przez zawodowych sportowców). Dla zgromadzonych danych wyznaczono linię trendu w postaci funkcji potęgowej z wykładnikiem wymiernym/ułamkowym (funkcja pierwiastkowa) (il. 15a) oraz funkcji Hoerla (il. 15b). Na wykresach przedstawiono również 95% przedział predykcji (95% przedział ufności prognozy) wraz z równaniami opisującymi granice przedziału (opracowanie własne).



Il. 15. Zależność pomiędzy szybkością ruchu i częstotliwością kroków: a) linia trendu w postaci funkcji wykładniczej, b) linia trendu w postaci funkcji Hoerla (opracowanie własne)

Analizując dane zaprezentowane na il. 15, zauważyć można, że w przedziale szybkości ruchu 4,0–7,0 m/s znaczna większość wyników pomiarowych znajduje się poniżej wyznaczonej linii trendu. Stwierdzić można, że zmierzają one do niżej położonej asymptoty. Powodu takiej rozbieżności pomiędzy wyznaczoną linią trendu i danymi w przedziale 4,0–7,0 m/s można się dopatrywać w uwzględnieniu w analizowanym zestawieniu wyników biegów zawodowych sportowców o wysokim stopniu wytrenowania do biegów wyczynowych na krótkich dystansach. W celu oszacowania zależności częstotliwości kroków od szybkości biegu w warunkach bardziej zbliżonych do rzeczywistych sytuacji występujących na kładkach dla pieszych dalszej analizie poddano przedział szybkości biegu $V = 0,0$ –6,0 m/s obejmujący wyniki zarejestrowane podczas maratonów (biegów długodystansowych na wytrzymałość). Uznano, iż specyfika tych biegów zbliżona jest do sytuacji biegów rekreacyjnych występujących na kładkach dla pieszych.

Na il. 16 przedstawiono wyniki aproksymacji wartości średniej częstotliwości kroków w funkcji szybkości biegu uzyskane przy wykorzystaniu różnych funkcji aproksymujących: funkcji Hoerla (il. 16a), funkcji potęgowej z wykładnikiem wymiernym (il. 16b) oraz wielomianu drugiego stopnia (il. 16c) (opracowanie własne).



Il. 16. Zależność pomiędzy szybkością ruchu i częstotliwością kroków w przedziale szybkości 0,0–6,0 m/s: a) aproksymacja wartości średniej za pomocą funkcji Hoerla, b) aproksymacja wartości średniej za pomocą funkcji potęgowej z wykładnikiem wymiernym, c) aproksymacja wartości średniej za pomocą wielomianu drugiego stopnia (linie przerywane oznaczają granice 95% przedziału ufności prognozy) (opracowanie własne)

Analizując uzyskane wyniki, zauważyć można, iż funkcja Hoerla najlepiej aproksymuje średnią wartość badanej zmiennej (il. 16a) w pełnym przedziale szybkości ruchu. Linia trendu wyznaczona przy wykorzystaniu funkcji potęgowej (il. 16b) pozwala na zachowanie dużej dokładności aproksymacji w przedziale szybkości ruchu 0,00–5,00 m/s. Dokładność ta maleje w przedziale szybkości ruchu $V > 5,00$ m/s (widoczny trend wznoszący funkcji aproksymującej). Zastosowanie wielomianu drugiego stopnia pozwala zachować odpowiednią dokładność aproksymacji częstotliwości kroków w przedziale szybkości ruchu 0,60–5,50 m/s (il. 16c). Przy szybkościach ruchu $V > 5,50$ m/s dokładność ta maleje (widoczny trend opadający funkcji aproksymującej). Zauważyć jednak warto, iż ruch użytkowników na kładkach dla pieszych z szybkościami $V > 5,00$ m/s jest przypadkiem o bardzo małym prawdopodobieństwie wystąpienia. Zatem równania empiryczne (11), (12),

(13), opisujące częstotliwość kroków w funkcji szybkości ruchu, stosowane mogą być zamiennie w całym przedziale szybkości ruchu użytkowników na kładkach dla pieszych obejmującym chód i bieg ($V \approx 0,40\text{--}4,00$ m/s).

– funkcja Hoerla:

$$f = 1,77 \cdot 0,93^V \cdot V^{0,58} \quad (11)$$

– funkcja potęgowa:

$$f = 1,68 \cdot V^{0,41} \quad (12)$$

– wielomian drugiego stopnia:

$$f = -0,086 \cdot V^2 + 0,89 \cdot V + 0,833 \quad (13)$$

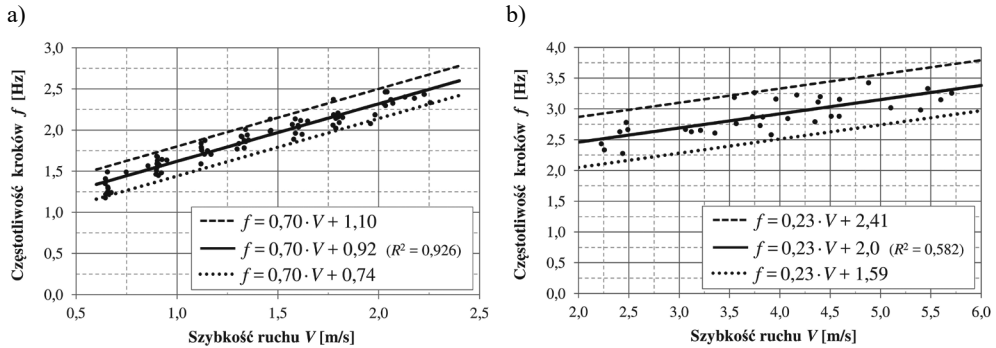
gdzie: V w [m/s], a f w [Hz].

Uzyskane wyniki są zgodne ze wskazówkami prac [75, 127] stwierdzającymi, że zależność częstotliwości kroków i szybkości ruchu opisać należy funkcją pierwiastkową, w szczególności funkcją wykorzystującą pierwiastek drugiego stopnia. Zauważyć można, że wykładniki zaproponowanych potęgowych funkcji trendu, równania (11) i (12) (funkcję Hoerla uznać można za rozbudowaną postać funkcji potęgowej) odbiegają od wartości 0,5, tzn. wykładnika potęgowego oznaczającego pierwiastek drugiego stopnia. Niemniej jednak wartość średnia tych wykładników zbliżona jest do wartości 0,5. Poniżej zaproponowano empiryczne równania (14) i (15) pozwalające wyznaczyć przybliżoną wartość częstotliwości kroków f w [Hz] w zależności od szybkości ruchu V w [m/s], oraz wartość szybkości ruchu (V [m/s]) w zależności od częstotliwości kroków (f [Hz]):

$$f \approx 1,60 \cdot \sqrt{V} \quad (14)$$

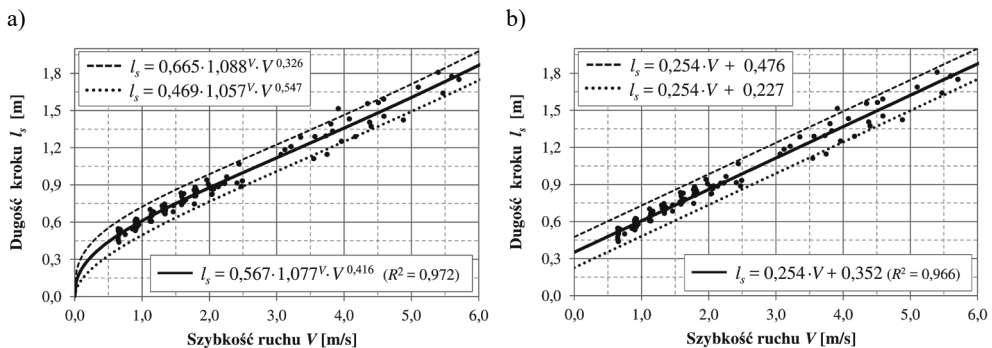
$$V \approx 0,40 \cdot f^2 \quad (15)$$

Na il. 15 i 16 zauważyć można, iż zależność pomiędzy szybkością ruchu i częstotliwością kroków jest zależnością nieliniową. Jednakże, rozpatrując chód i bieg jako niezależne formy aktywności użytkowników na konstrukcji, wyodrębnić można dwa przedziały szybkości ruchu: przedział szybkości chodu 0,00–2,25 m/s (max. $\sim 2,50$ m/s, por. tab. 13, il. 13) oraz przedział szybkości biegu 2,25–6,00 m/s. W przedziałach tych zależność częstotliwości kroków od szybkości ruchu z dużą dokładnością opisać można za pomocą funkcji liniowych przedstawionych na il. 17 (opracowanie własne).



Il. 17. Liniowa zależność pomiędzy szybkością ruchu i częstotliwością kroków: a) zależność dla chodu w przedziale szybkości 0,6–2,25 m/s, b) zależność dla biegu w przedziale szybkości 2,25–6,0 m/s (opracowanie własne)

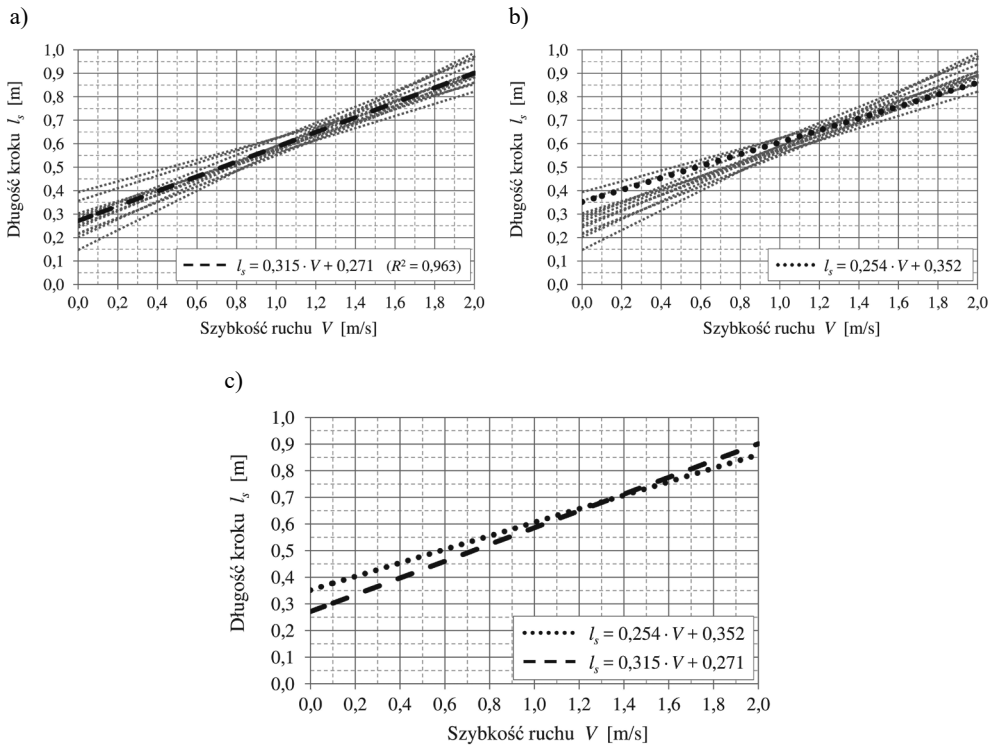
Zakładając, że ruch użytkowników na konstrukcji (chód, bieg) jest ruchem jednostajnym, wykorzystując równanie (4) oraz dane z il. 16 lub 17 obrazujące zależność częstotliwości kroków od szybkości ruchu, wyznaczyć można długości kroków odpowiadające znanym/analizowanym szybkościom ruchu i częstotliwościom kroków.



Il. 18. Zależność długości kroku l_s od szybkości ruchu V : a) aproksymacja z wykorzystaniem funkcji Hoerla, b) aproksymacja za pomocą funkcji liniowej (opracowanie własne)

Na il. 18 zaprezentowano zależność długości kroku od szybkości biegu wraz z funkcjami trendu aproksymującymi średnią długość kroku i granicami 95% przedziału ufności prognozy (opracowanie własne). Jako funkcje aproksymujące wykorzystano funkcję Hoerla (il. 18a) oraz funkcję liniową (il. 18b). Zastosowanie funkcji liniowej pozwoliło osiągnąć dużą dokładność aproksymacji długości kroku w funkcji szybkości ruchu.

Liniową zależność pomiędzy szybkością chodu i długością kroku potwierdzają różne prace, m.in. praca [201]. Na il. 19a uwzględniono wyniki z tej pracy wraz z wyznaczoną linią trendu (opracowanie własne).



Il. 19. Zależność długości kroku od szybkości ruchu: a) wyniki badań z pracy [201] z wyznaczoną linią trendu, b) wyniki z pracy [201] z linią trendu z il. 18b, c) porównanie linii trendu z il. 19a i 18b (opracowanie własne)

Na il. 19b przedstawiono linię trendu z il. 18b w odniesieniu do wyników badań z pracy [201]. Ilustracja 19c przedstawia porównanie dwóch linii trendu: linii trendu z il. 18b oraz linii trendu z il. 19a. Zauważyć można, że w przedziale szybkości ruchu 1,00–1,6 m/s przebiegi analizowanych linii trendu są do siebie zbliżone. Położenie punkt przecięcia tych linii odpowiada szybkości chodu $V = 1,33$ m/s. Szybkość ta uznawana jest za średnią szybkość ruchu w tempie normalnym (por. tab. 7). Długość kroku odpowiadająca tej szybkości wynosi 0,69 m, a częstotliwość kroków ustalona na podstawie zależności przedstawionej na il. 17a to 1,85 Hz. Według zależności z il. 16a i b częstotliwość ta wynosi 1,89 Hz. Są to wartości odpowiadające normalnemu tempu chodu (por. il. 4, 5, 6), co potwierdza poprawność estymacji parametrów chodu z wykorzystaniem prezentowanych zależności empirycznych stanowiących opracowanie własne.

2.2.2.3. Uwagi uzupełniające

W rozdziale 2.2.2 przedstawiono charakterystyki wybranych parametrów opisujących ruch człowieka istotnych z punktu widzenia analiz dynamicznych konstrukcji budowlanych. Należą do nich: częstotliwość kroków, szybkość ruchu oraz długość kroków.

Dużo uwagi poświęcono analizie szybkości ruchu. Przedstawiono m.in. zależności opisujące szybkość ruchu w funkcji gęstości ruchu z uwzględnieniem różnych motywacji podróży (różnych celów podróży) oraz zależności częstotliwości i długości kroków od szybkości ruchu. Parametry te mają bezpośredni wpływ na dokładność analiz dynamicznych konstrukcji. Niepoprawne określenie ich wartości prowadzi do błędnych wyników w postaci zawyżonych lub zaniżonych amplitud drgań konstrukcji.

Zauważyć należy, że w celu zapewnienia właściwej dokładności analiz dynamicznych istotne jest nie tylko poprawne określenie częstotliwości kroków użytkowników poruszających się po konstrukcji, lecz również poprawne określenie długości kroków odpowiadającej przyjętej częstotliwości kroków i szybkości ruchu (por. równanie (4)). Przyjęta długość kroku, ustalona odpowiednio do rozpatrywanego typu aktywności użytkowników (chód, bieg) oraz warunków ruchu panujących na konstrukcji (gęstości ruchu), wpływa na liczbę kroków wykonywanych w obrębie konstrukcji lub, innymi słowy, na liczbę impulsów obciążenia dynamicznego działających na konstrukcję i w konsekwencji na wartości amplitud drgań konstrukcji. Ponadto przy określonej częstotliwości kroków przyjęta długość kroków wpływa na szybkość ruchu, a co za tym idzie – na czas działania obciążenia na konstrukcję (por. równania (1)–(5)) i w konsekwencji na wartość amplitud drgań konstrukcji. Istotne jest zatem poprawne określenie zarówno wartości częstotliwości, jak i długości kroków użytkowników przemieszczających się po konstrukcji.

W rozdziale 2.2.2.2 przedstawiono empiryczne zależności opisujące zmienność częstotliwości i długości kroków w funkcji szybkości ruchu wraz z równaniami opisującymi granice 95% przedziałów ufności prognozy badanych zmiennych. Zauważyć warto, że zaprezentowane zależności wykorzystać można do budowy złożonych modeli oddziaływań użytkowników na konstrukcję uwzględniających losowy charakter obciążeń. Znajomość wzajemnych zależności pomiędzy parametrami ruchu oraz zależności opisujących granice przedziałów ich zmienności stwarza możliwość generowania losowych wartości tych parametrów (za pomocą generatorów liczb losowych) oraz możliwość modelowania losowych oddziaływań dynamicznych powstających podczas ruchu grup pieszych o różnej liczebności, potoków pieszych lub tłumu. Właściwa implementacja tych metod pozwala zwiększyć dokładność oszacowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji.

W analizach przedstawionych w rozdziale 2.2.2.1, dotyczących częstotliwości obciążeń dynamicznych oraz krytycznych przedziałów częstotliwości drgań własnych konstrukcji, starano się zwrócić uwagę czytelnika na duży wpływ lokalizacji konstrukcji na wybór przypadków obciążeń dynamicznych uwzględnianych w analizach konstrukcji. Zauważyć należy, że analizy dynamiczne konstrukcji należy każdorazowo poprzedzić wyborem przypadków obciążeń dynamicznych właściwych dla określonej lokalizacji. Analizy te obejmować powinny przypadki ruchu odznaczające się dużym prawdopodobieństwem występowania w określonej lokalizacji w warunkach normalnej eksploatacji konstrukcji. Niepoprawnym postępowaniem jest ocena warunków

użytkowania konstrukcji na podstawie oddziaływań o znikomym prawdopodobieństwie występowania oraz oddziaływań wyjątkowych, tzn. oddziaływań nietypowych, znacznie różniących się od oddziaływań występujących podczas normalnej eksploatacji konstrukcji. Przykładowo błędem będzie przyjęcie oddziaływania w postaci osób rytmicznie podskakujących na konstrukcji do oceny komfortu użytkowania konstrukcji w warunkach normalnej eksploatacji. Niepoprawne będzie także uwzględnienie oddziaływania gęstego tłumu pieszych ($k \geq 1,0$ os./m²) na konstrukcji zlokalizowanej w obszarze o znikomym prawdopodobieństwie wystąpienia ruchu o dużej gęstości.

Pamiętać również należy, że w zależności od lokalizacji konstrukcji zachodzić może potrzeba uwzględnienia w analizach dynamicznych oddziaływania osób biegnących. Może to być szczególnie istotne w przypadku lokalizacji konstrukcji w obszarach charakteryzujących się dużym prawdopodobieństwem wystąpienia osób biegnących (osób uprawiających sport lub osób spieszących się), np. tereny wycieczkowo-rekreacyjne (parki, bulwary miejskie itp.) lub okolice ważnych węzłów przesiadkowych transportu zbiorowego (dworców kolejowych, dworców autobusowych, przystanków komunikacji miejskiej itp.).

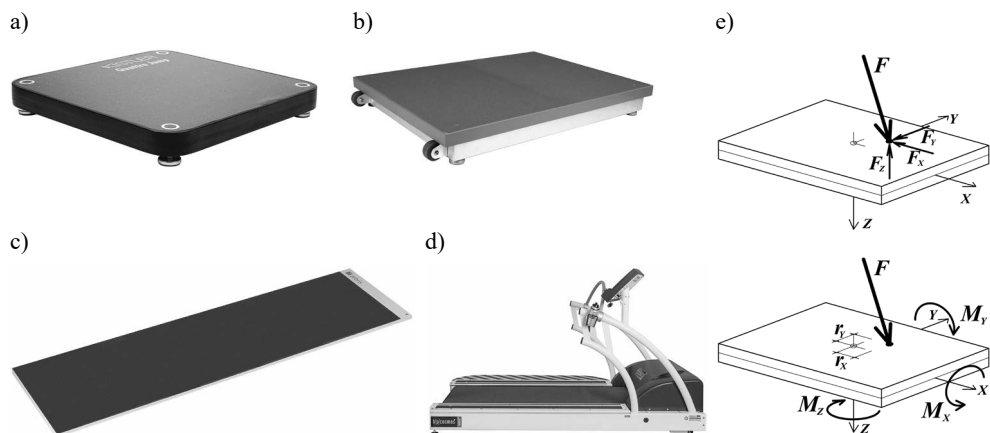
Ważnym parametrem charakteryzującym oddziaływania dynamiczne generowane przez poruszającego się człowieka są wartości obciążeń dynamicznych powstających podczas ruchu. Szczegółowe charakterystyki tych obciążeń przedstawiono w dalszych rozdziałach pracy.

2.2.3. Obciążenia dynamiczne – charakterystyka

Wynikiem aktywności ruchowej człowieka są siły działające na podłoże, na którym odbywa się ruch. Podłoże oddziałuje na człowieka siłami o tej samej amplitudzie i tym samym kierunku, lecz o przeciwnym zwrocie. W biomechanice, nauce zajmującej się opisem ruchu organizmów żywych z wykorzystaniem zasad mechaniki, siły te nazywane są siłami reakcji podłoża (ang. *Ground Reaction Forces*, GRF⁴). Wartości sił reakcji podłoża najczęściej mierzone są za pomocą platform dynamometrycznych (platformy Kistlera, AMTI, Zebris, h/p cosmos itp.) lub bieżni treningowych z możliwością pomiaru sił (il. 20).

Stosowane są też inne systemy pomiarowe umożliwiające symulację warunków wizualnych związanych z ruchem pieszym, np. systemy firmy Motek Medical B.V. Zespoły naukowe badające siły reakcji podłoża budują również własne platformy pomiarowe umożliwiające pomiar sił GRF [32, 91, 92, 176, 221]. Platformy takie umożliwić mogą pomiar sił z równoczesną symulacją drgań konstrukcji.

⁴ W pracy wykorzystywane będą akronimy GRF oraz VGRF oznaczające odpowiednio siłę reakcji podłoża oraz pionową składową siły reakcji podłoża (oznaczenia stosowane w pracach z zakresu biomechaniki).



Il. 20. Przykłady platform dynamometrycznych: a) platforma firmy Kistler, b) platforma AMTI, c) platforma Zebris, d) bieżnia h/p cosmos, e) składowe sił i momentów

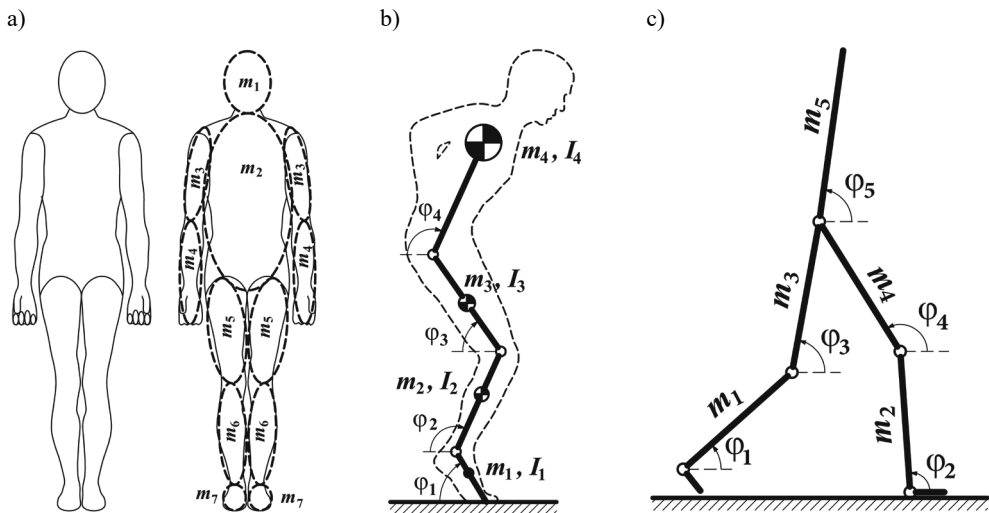
Na platformach lub bieżniach dynamometrycznych realizowane mogą być pomiary trzech ortogonalnych składowych GRF: składowej pionowej F_z , składowej porzeczej F_y (tzw. składowej przyśrodkowo-bocznej) oraz składowej wzdłużnej F_x (tzw. składowej strzałkowej lub przednio-tylnej). W zależności od możliwości urządzenia rejestrowane mogą być również wartości momentów. Momenty te nie są jednak reakcjami podłoża, lecz momentami wyznaczanymi na podstawie lokalizacji punktu przyłożenia obciążenia (tzw. centrum nacisku stopy) względem środka platformy. Tak zmierzone momenty wykorzystywane są do wyznaczenia trajektorii środka ciężkości ciała podczas ruchu. Wartości reakcji podłoża w postaci momentów można następnie wyznaczyć w drodze obliczeń.

Wartości sił reakcji podłoża wyznaczone mogą być również na podstawie rejestracji i analizy ruchu człowieka z wykorzystaniem systemów rejestracji ruchu składających się z zestawu szybkich kamer oraz markerów rozmieszczonych na ciele człowieka. Współczesne systemy rejestracji ruchu umożliwiają automatyczną identyfikację markerów umieszczonych na ciele człowieka (systemy OptiTrack, Qualisys, Codamotion, Vicon, APAS, Elite itp.). Zarejestrowane dane wykorzystywane są do wyznaczenia parametrów kinematycznych ruchu (długości kroku, średniej szybkości chodu, czasu trwania cyklu chodu, przemieszczeń wyodrębnionych części ciała itp.). Wideorejestracja uzupełniona może być o dodatkowe pomiary wykonywane z wykorzystaniem czujników umożliwiających np. pomiar przyspieszeń części ciała podczas ruchu [139]. Wyznaczone w ten sposób dynamiczne i kinematyczne parametry ruchu wykorzystywane są do budowy biomechanicznych modeli ludzkiego ciała stosowanych m.in. do oceny wpływu urazów na ruch, wpływu drgań na ciało człowieka, a także, jak wspomniano, do wyznaczania sił reakcji podłoża.

Najprostsze modele biomechaniczne redukują złożony układ biomechaniczny ludzkiego ciała do pojedynczego punktu materialnego. W punkcie tym skupiona zostaje

masa całego ciała i przyłożone zostają do niego wszystkie działające na ten punkt siły zewnętrzne. Modele tego typu budowane są w oparciu o zasadę ruchu środka masy, która głosi, że: środek masy układu punktów materialnych porusza się tak, jakby w tym punkcie była skupiona cała masa układu i jakby do tego punktu przyłożone były wszystkie siły zewnętrzne.

Bardziej zaawansowane modele biomechaniczne wykorzystywane w analizach ruchu człowieka budowane są z uwzględnieniem większej liczby segmentów o określonych parametrach statycznych i dynamicznych (il. 21).

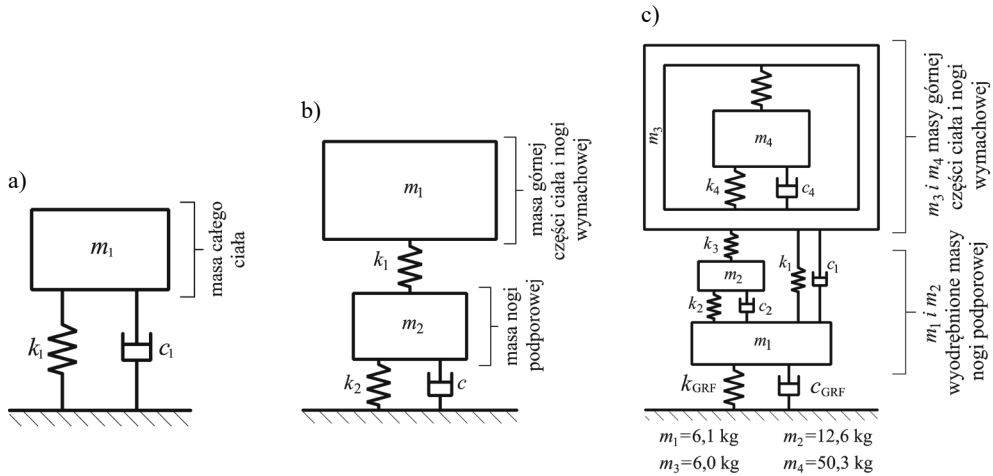


Il. 21. Przykłady biomechanicznych modeli ciała ludzkiego: a) przykład podziału ciała na segmenty (przestrzenny model ciała), b) model do badań wyskoku [146], c) model do badań chodu [130]

Innym typem biomechanicznych modeli ciała człowieka są modele budowane w postaci układów mas połączonych ze sobą za pomocą sprężyn i tłumików odzwierciedlających sprężyste i tłumiące właściwości występujące pomiędzy segmentami ciała (model jedno i wielomasowe, płaskie lub przestrzenne) (il. 22) [110, 120, 136–139, 202].

Dysponując danymi dotyczącymi budowy ciała człowieka, np. znając masy wyodrębnionych segmentów ciała (il. 21a) oraz znając zmienności parametrów ruchu tych segmentów w czasie, w szczególności ich przyspieszeń w trzech ortogonalnych kierunkach (x, y, z), siły reakcji podłoża (składową strzałkową, boczną i pionową) wyznaczyć można, wykorzystując II zasadę dynamiki Newtona [115, 124, 215, 216]. W myśl tej zasady składowa pionowa F_z [N] siły reakcji podłoża wynosi:

$$F_z = \sum_{i=1}^N m_i (a_{zi} + g) \quad (16)$$



Il. 22. Przykłady dynamicznych modeli ciała ludzkiego do badań lokomocji:

- a) model jednomasowy do badań zeskoku [110, 139] i chodu [202],
 b) model dwumasowy do badań biegu [139], c) model czteromasowy do badań biegu [120, 137, 138] (m_i , k_i , c_i – masa, sztywność, tłumienie)

Składowe poziome F_x , F_y [N] wynoszą:

$$F_x = \sum_{i=1}^N m_i a_{xi} \quad (17)$$

$$F_y = \sum_{i=1}^N m_i a_{yi} \quad (18)$$

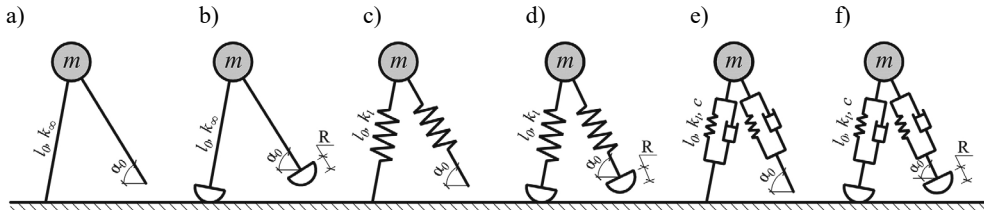
gdzie: m_i – masy wyodrębnionych segmentów ciała [kg], a_x , a_y , a_z – składowe przyspieszeń poszczególnych segmentów ciała [m/s^2] w trzech ortogonalnych kierunkach, g – przyspieszenie ziemskie ($g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$), N – liczba segmentów ciała, i – numer segmentu ciała.

W obliczeniach tych najwięcej trudności przysparza ustalenie (pomiar) wartości przyspieszeń poruszających się segmentów ciała. Uwzględnić należy zmienność tych wartości w zależności od typu aktywności człowieka (chód, bieg, skoki, przysiady itp.), szybkości ruchu, płci, wieku i innych.

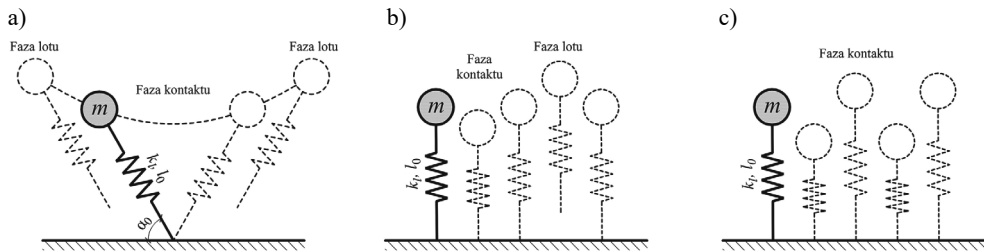
Badanie ruchu człowieka realizowane może być także z wykorzystaniem modeli w postaci odwróconego wahadła zawierającego masę odzwierciedlającą masę całego ciała oraz elementy sztywne, sprężyste lub sprężysto-tłumiące o zerowej masie (il. 23 i 24).

Wykorzystanie modeli przedstawionych na il. 23 i 24 wymaga znajomości, w zależności od złożoności modelu, odpowiednio: całkowitej masy ciała m , odległości środka ciężkości ciała od podłoża l_0 , liniowej i kątovej szybkości ruchu, kąta natarcia nogi na podłoże α_0 (wartość zależna od szybkości ruchu), sztywności kończyn dolnych

k_l (wartość zależna od szybkości ruchu) oraz wartości tłumienia c charakteryzującego wybrany typ aktywności. Niektóre z modeli zakładają również zmienność punktu przyłożenia siły do podłoża poprzez przyjęcie zaokrąglonych podstaw o promieniu R na końcu sztywnych lub sprężystych elementów podpierających masę.



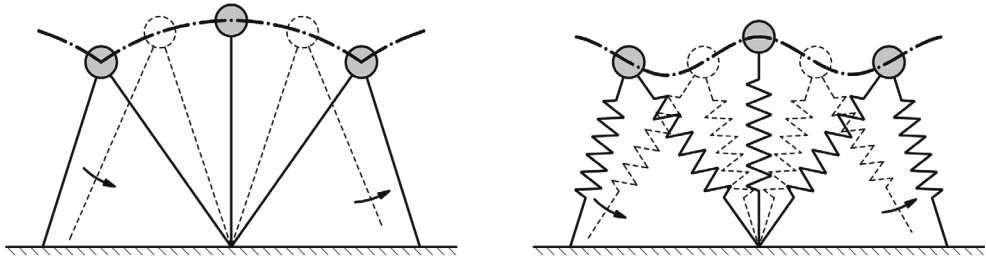
Il. 23. Przykłady dynamicznych modeli do badań chodu: a) odwrócone wahadło ze sztywnym podparciem masy [69, 188], b) odwrócone wahadło ze sztywnym podparciem masy i zaokrąglonymi podstawami [68], c) odwrócone wahadło ze sprężystym podparciem masy [69, 70, 119], d) odwrócone wahadło ze sprężystym podparciem masy i zaokrąglonymi podstawami [211], e) odwrócone wahadło ze sprężysto-tłumiącym podparciem masy [168], f) odwrócone wahadło ze sprężysto-tłumiącym podparciem masy i zaokrąglonymi podstawami [100, 218]



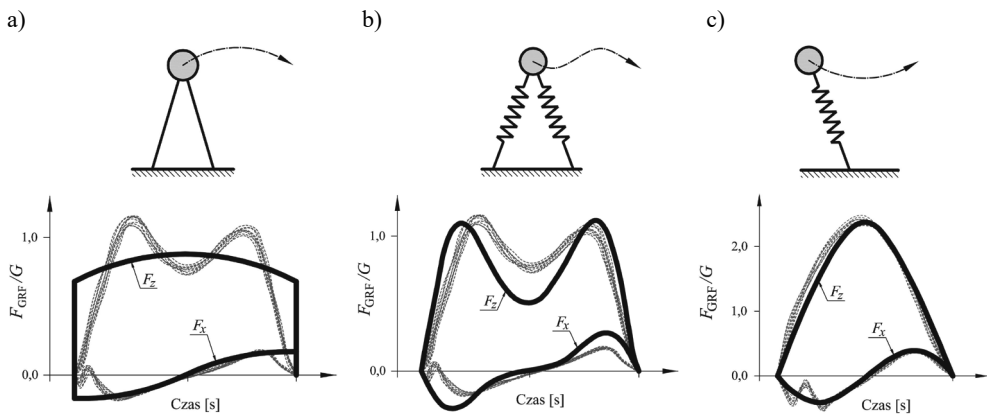
Il. 24. Przykłady modeli w postaci układów masowo-sprężystych: a) układ masowo-sprężysty w postaci odwróconego wahadła do badań biegu [27, 28, 70–72, 119], b) układ masowo-sprężysty do badań skoków [27], c) układ masowo-sprężysty do badań przysiadów [27]

W przypadku modeli przedstawionych na il. 23a i b pamiętać należy, że mechanizm odwróconego wahadła ze sztywnym podparciem masy stanowi paradygmat, który ulegał ewolucji wraz z pojawianiem się nowych faktów naukowych. Model ten ma swoje uproszczenia i ograniczenia. Jednym z głównych uproszczeń jest niezmienna długość kończyny podporowej, a w konsekwencji – stała odległość środka ciężkości od punktu podparcia kończyny dolnej na podłożu [49]. Przyjęte uproszczenie doprowadza do dużych niedokładności w odwzorowaniu toru ruchu masy (il. 25). Modelu tego nie należy wykorzystywać do wyznaczania sił reakcji podłoża, w szczególności pionowej składowej tych sił.

Zablokowanie swobody przemieszczeń masy w kierunku pionowym w istotny sposób zmienia wartości pionowego przyspieszenia poruszającej się masy i w konsekwencji w znacznym stopniu zmienia wartość pionowej składowej siły reakcji podłoża F_z (il. 26a). Składowa strzałkowa F_x wyznaczana jest z większą dokładnością, lecz jest wyłącznie przybliżeniem rzeczywistego przebiegu siły reakcji podłoża (il. 26a).



Il. 25. Tory ruchu masy w modelu odwróconego wahadła ze sztywnym i podatnym podparciem [42, 89]



Il. 26. Unormowane siły reakcji podłoża F_{GRF}/G wyznaczone z wykorzystaniem różnych modeli ruchu w odniesieniu do wyników badań (linia gruba – F_{GRF}/G wyznaczone w drodze obliczeń; linie cienkie – wyniki badań): a) analiza chodu – model odwróconego wahadła ze sztywnym podparciem masy, b) analiza chodu – model odwróconego wahadła ze sprężystym podparciem masy, c) analiza biegu – model odwróconego wahadła ze sprężystym podparciem masy (F_x – strzałkowa (przednio-tylna) składowa siły reakcji podłoża, F_z – pionowa składowa siły reakcji podłoża, $F_{\text{GRF}}/G = \text{GRF}/G$ – unormowana siła reakcji podłoża (G – ciężar poruszającej się osoby) [178]

Dokładniejsze odwzorowanie sił reakcji podłoża możliwe jest przy wykorzystaniu modeli uwzględniających sprężyste podparcie masy. Dokładność ta jest największa w przypadku modelowania biegu (il. 26c). Modele uwzględniające sprężyste podparcie masy charakteryzują się jednak dużą wrażliwością na relatywne zmiany wartości ich parametrów wejściowych, w szczególności kąta natarcia nogi na podłoże α_0 i sztywności kończyny podporowej k . Niewłaściwy dobór tych parametrów doprowadza do dużych błędów w odwzorowaniu ruchu masy m i w konsekwencji do niepoprawnego wyznaczenia sił reakcji podłoża.

Zauważyć należy również, że przedstawione modele dwuwymiarowe (płaskie) pozwalają odwzorować ruch masy wyłącznie w dwóch kierunkach – pionowym i poziomym równoległym do kierunku ruchu (ruch w płaszczyźnie strzałkowej). Modele te nie uwzględniają ruchu masy w kierunku poprzecznym. Przy ich

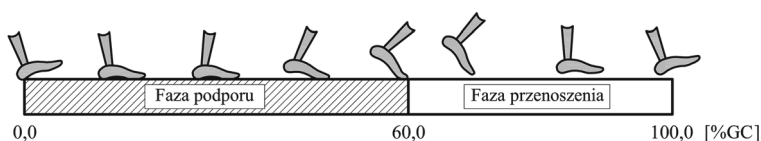
wykorzystaniu niemożliwe jest wyznaczenie poprzecznej (bocznej) składowej siły reakcji podłoża. W literaturze odnaleźć można modele odwróconego wahadła uwzględniające przestrzenne przemieszczanie się środka ciężkości ciała (punktu skupienia masy) podczas ruchu pozwalające wyznaczyć trzy składowe siły reakcji podłoża [73, 125, 218].

W niniejszej pracy modele sił reakcji podłoża generowanych podczas chodu i biegu opracowano w oparciu o wyniki badań zarejestrowane na platformach dynamometrycznych. Nie wykorzystano w tym celu modeli masowo-sprężystych. Budowa i kalibracja masowo-sprężystych biomechanicznych modeli ruchu człowieka jest złożonym, wieloparametrycznym zagadnieniem naukowym, którego rozwijanie stanowić może odrębny cel naukowy.

Warto w tym miejscu zauważyć, że modele sił reakcji podłoża przedstawione w dalszych rozdziałach pracy, opracowane na potrzeby analiz dynamicznych konstrukcji budowlanych, można również wykorzystać do kalibracji parametrów modeli masowo-sprężystych (il. 22–24) w celu zwiększenia dokładności odwzorowywania wartości i przebiegów czasowych sił reakcji podłoża.

2.2.3.1. Siły reakcji podłoża powstające podczas chodu

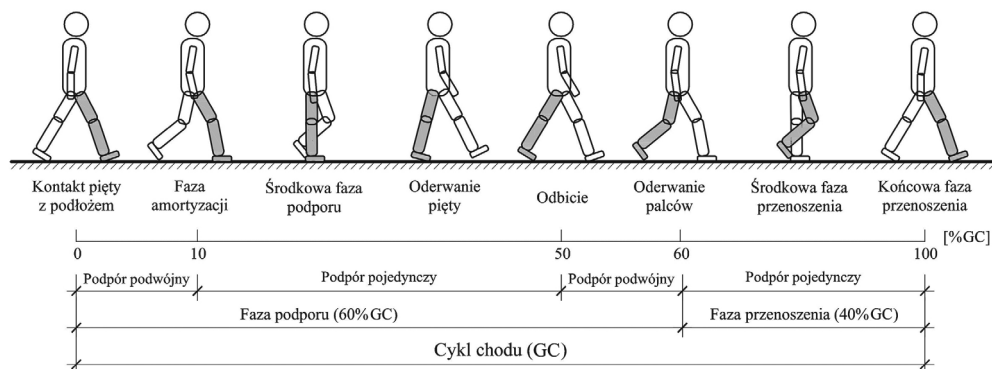
Powstawanie sił reakcji podłoża podczas chodu związane jest z serią rytmicznych, zmiennych ruchów kończyn i tułowia poruszającego się człowieka. Ruchy te wykonywane są w trakcie cyklu chodu (*Gait Cycle*, GC) rozpoczynającego się kontaktem pięty z podłożem jednej z kończyn i kończącego powtórny zetknięciem się z podłożem tej samej pięty. Cykl ten dzieli się na dwie podstawowe fazy: fazę podporu oraz fazę przenoszenia (wymachu) (il. 27).



Il. 27. Fazy cyklu chodu dla jednej nogi [157]

Faza podporu stanowi 60% cyklu chodu. Rozpoczyna się w momencie kontaktu pięty z podłożem, a kończy się wraz z oderwaniem palców od podłoża. Faza przenoszenia stanowi 40% cyklu chodu. Rozpoczyna się w momencie oderwania palców od podłoża, a kończy w momencie kontaktu pięty z podłożem. Fazę podporu można podzielić na: podpór pojedynczy – jedna stopa ma kontakt z podłożem (40% fazy podporu) oraz podpór podwójny (podpór dwunożny), występujący dwukrotnie podczas jednego cyklu chodu – dwie stopy mają kontakt z podłożem (2×10% fazy podporu) [157].

Dwie podstawowe fazy chodu (fazę podporu i fazę przenoszenia) dzieli się dodatkowo na fazy składowe (podfazy) (il. 28) [55, 93, 115, 157, 203].



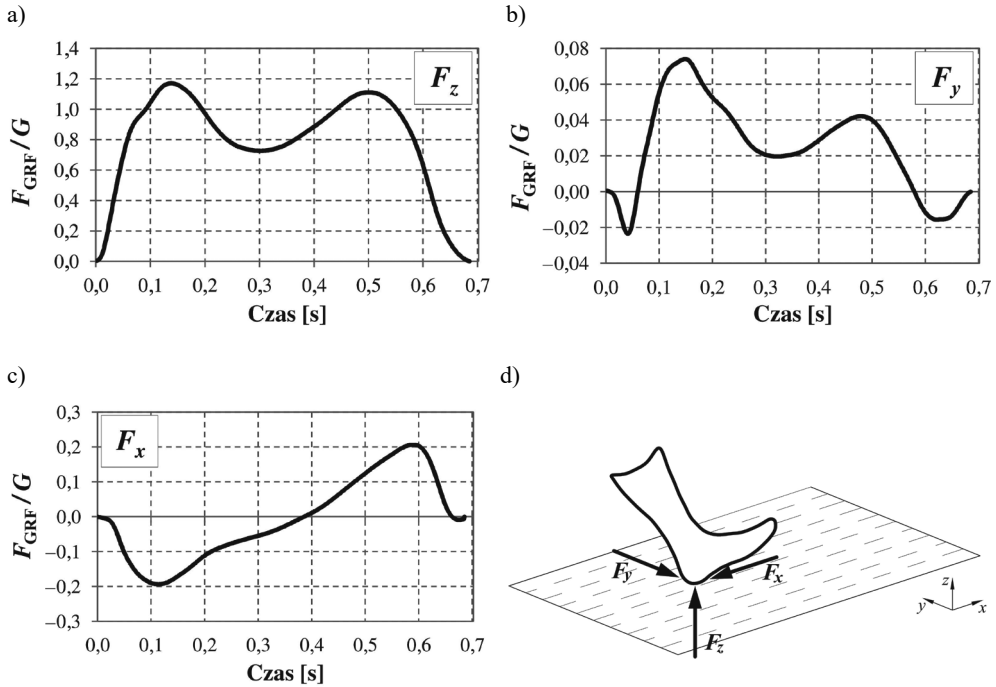
Il. 28. Podfazy cyklu chodu [55, 93, 115, 157, 203]

W fazie podporu wyróżnia się pięć faz składowych [157]: 1) kontakt pięty z podłożem (0–2,0% GC, początek podporu podwójnego), 2) fazę amortyzacji (0–10,0% GC, cała powierzchnia stopy przylega do podłoża, na końcu tej fazy następuje oderwanie drugiej stopy od podłoża – koniec podporu podwójnego), 3) środkową fazę podporu (10–30,0% GC, podpór pojedynczy, druga stopa oderwana od podłoża, w połowie fazy środek masy ciała znajduje się nad środkiem geometrycznym powierzchni styku stopy z podłożem tzw. podpór właściwy), 4) oderwanie pięty od podłoża (30–50,0% GC, druga noga jest w końcowej fazie przenoszenia, opada przed rozpoczęciem kontaktu z podłożem), 5) odbicie (50–60,0% GC, druga noga rozpoczyna kontakt z podłożem – początek drugiej fazy podporu podwójnego).

Fazę przenoszenia następującą po fazie podporu dzieli się na ogół na trzy podfazy: 1) oderwanie palców od podłoża (60–73,0% GC, druga noga jest w fazie amortyzacji), 2) środkowa faza przenoszenia (73–87,0% GC, druga noga jest w środkowej fazie podporu), 3) końcowa faza przenoszenia (87–100,0% GC, druga stopa jest w fazie unoszenia pięty poprzedzającej fazę odbicia i oderwania palców od podłoża).

Obciążenia powstające podczas chodu, będące efektem działania siły ciężkości oraz ruchu masy z określonym przyspieszeniem, przekazywane są na podłoże przez nogę znajdującą się w fazie podporu. Z uwagi na przemieszczenia masy ciała w trzech ortogonalnych kierunkach generowane są trzy składowe siły reakcji podłoża – składowa pionowa F_z oraz dwie składowe poziome: składowa strzałkowa (przednio-tylna) F_x i składowa boczna (przyśrodkowo-boczna) F_y . Przykładowe czasowe przebieg unormowanych składowych GRF ($F_{\text{GRF}}/G = \text{GRF}/G$) przedstawiono na il. 29.

Zauważyć należy, że składowa pionowa przez cały czas trwania fazy podporu przyjmuje wartości dodatnie (zawsze zwrócona jest ku górze). Składowa strzałkowa oraz składowa przyśrodkowo-boczna przyjmują zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne, składowe te zmieniają zwrot w zależności od fazy cyklu chodu. Na il. 29d przedstawiono zwroty sił reakcji podłoża podczas początkowej fazy kontaktu pięty z podłożem. Zwroty sił działających na konstrukcję są przeciwne do zwrotów reakcji zaprezentowanych na il. 29d.

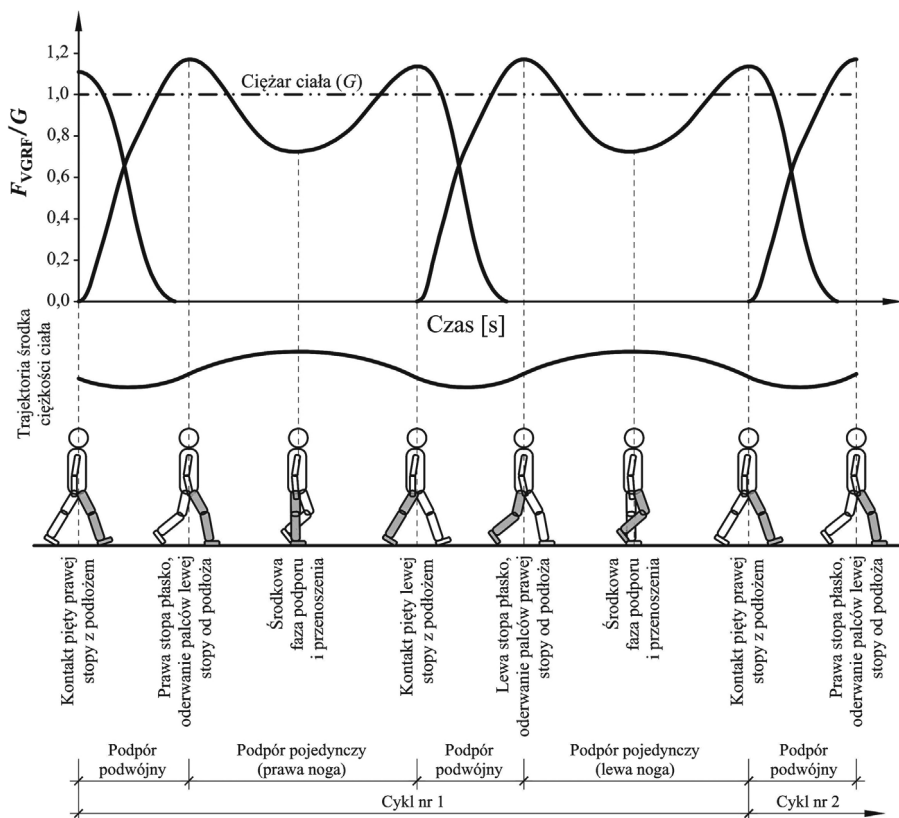


Il. 29. Unormowane składowe siły reakcji podłoża F_{GRF}/G : a) składowa pionowa F_z , b) składowa przyśrodkowo-boczna F_y , c) składowa strzałkowa (przednio-tylna) F_x , d) zwroty składowych GRF podczas początkowej fazy kontaktu pięty z podłożem

Na il. 30 przedstawiono czasowy przebieg pionowej składowej sił reakcji podłoża w odniesieniu do trajektorii środka ciężkości ciała oraz faz cyklu chodu. Zauważyć można, że siła ta przybiera kształt dwuwierzchołkowy. Kształt ten często określany jest terminem „krzywa M ”. Pierwszy wierzchołek krzywej M powstaje podczas amortyzacji uderzenia stopy o podłoże, natomiast drugi podczas odbicia stopy od podłoża. Dwuwierzchołkowy kształt pionowej składowej siły reakcji podłoża wynika z faktu, że ruch środka ciężkości ciała podczas chodu jest ruchem krzywoliniowym naprzemienne przyspieszonym i opóźnionym, charakteryzującym się zmianami zwrotu wektora przyspieszenia. W związku z tym siły powstające podczas chodu mają naprzemienne zwrot zgodny lub przeciwny do zwrotu siły ciężkości, co skutkuje odpowiednio zwiększaniem i zmniejszaniem wartości siły reakcji podłoża.

Podczas chodu w normalnym tempie (szybkości chodu $V \approx 1,20\text{--}1,40$ m/s, częstotliwość kroków $f_s \approx 1,75\text{--}1,95$ Hz) średnie wartości przyrostów amplitudy pionowej składowej siły reakcji podłoża, mierzone od poziomu ciężaru ciała G idącej osoby do maksymalnej wartości VGRF (wysokości wierzchołków VGRF), (por. il. 30), osiągają wartość $(10\text{--}20\%)G$. W środkowej fazie podporu, w chwili odciążenia, gdy nacisk na podłoże jest mniejszy od ciężaru ciała, średnia wartość zmniejszenia amplitudy VGRF, mierzona od poziomu ciężaru ciała do minimalnej wartości VGRF (głębokość

doliny pomiędzy wierzchołkami krzywej M), osiąga wartość (20–30%) G . Wartości tych fluktuacji amplitud ulegają zmianie wraz ze zmianą szybkości chodu i związaną z tym zmianą częstotliwości kroków [29].



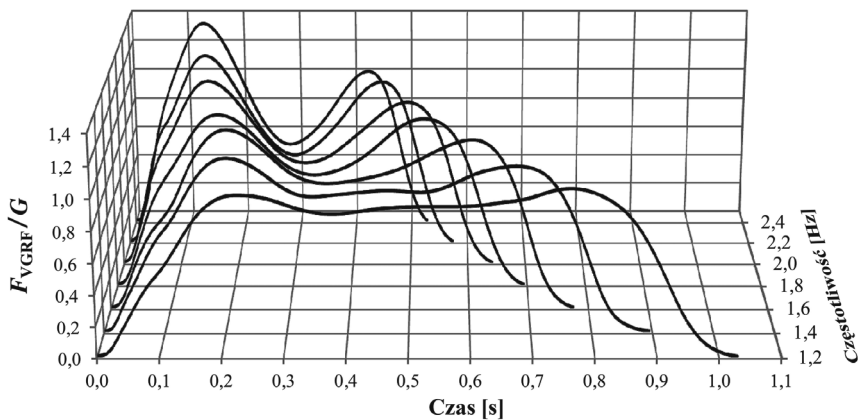
Il. 30. Unormowana pionowa składowa siła reakcji podłoża w odniesieniu do trajektorii środka ciężkości ciała oraz faz cyklu chodu [58, 215]

Na il. 31 przedstawiono przykładowe przebiegi czasowe zarejestrowane podczas badań własnych obrazujące zmienność pionowej składowej siły reakcji podłoża w funkcji częstotliwości kroków (przykładowe siły F_{VGRF}/G z pojedynczych kroków zarejestrowane dla jednej osoby: mężczyzna, wiek 22 lata, wzrost 173,0 cm, waga 68,8 kg).

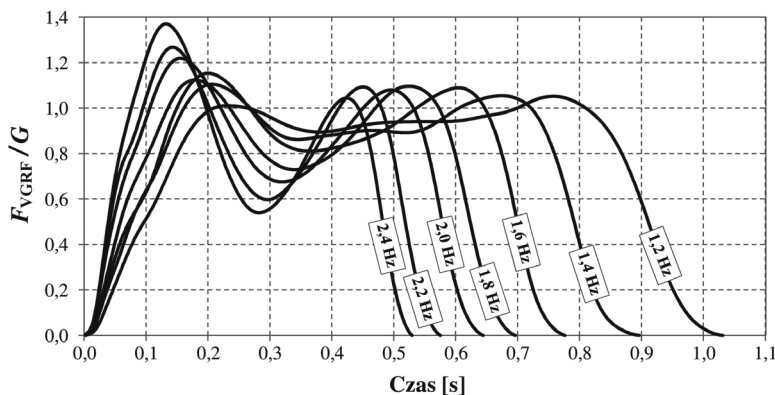
Zauważyć można, że amplitudy wierzchołków i doliny krzywej M zmieniają się wraz ze wzrostem częstotliwości kroków. Rośnie dynamiczna składowa obciążenia. Widoczne zmiany amplitud siły wynikają ze zmian wartości przyspieszeń i opóźnień występujących w krzywoliniowym ruchu środka ciężkości ciała na skutek zmiany szybkości chodu. W przypadku wolnego chodu (częstotliwość kroków $f = 1,20$ Hz, $V \approx 0,60$ m/s) siła reakcji podłoża osiąga wartość nieznacznie różniącą się od ciężaru idącej osoby (w fazie podporu siła ta jest zaledwie o około 10% mniejsza od ciężaru osoby idącej).

Przy mniejszej szybkości chodu, występującej przy dużej gęstości ruchu na konstrukcji (gęsty tłum), wahania amplitudy VGRF ulegają dalszemu zmniejszeniu (zanikają). W przypadkach tych przyjąć można, że pionowa składowa siły reakcji podłoża jest niezmienna w czasie i równa ciężarowi ciała idącej osoby (obciążenie quasi-statyczne). Z tego powodu oddziaływania bardzo wolno idących osób na ogół nie wywołują nadmiernych drgań konstrukcji. Zauważyć jednak należy, że w przypadku oddziaływania na konstrukcję licznej grupy wolno poruszających się i zsynchronizowanych ze sobą osób (wolno idący tłum o dużym stopniu synchronizacji pieszych) zwiększeniu ulegnie wartość wypadkowego obciążenia działającego na konstrukcję, co pomimo nieznacznych zmian amplitudy obciążenia prowadzić może do powstania dużych obciążeń dynamicznych i wzbudzenia nadmiernych drgań konstrukcji. Stwierdzić należy, że w analizach dotyczących oceny dynamicznego oddziaływania tłumy na konstrukcję istotne jest określenie stopnia synchronizacji pieszych w tłumie.

a)

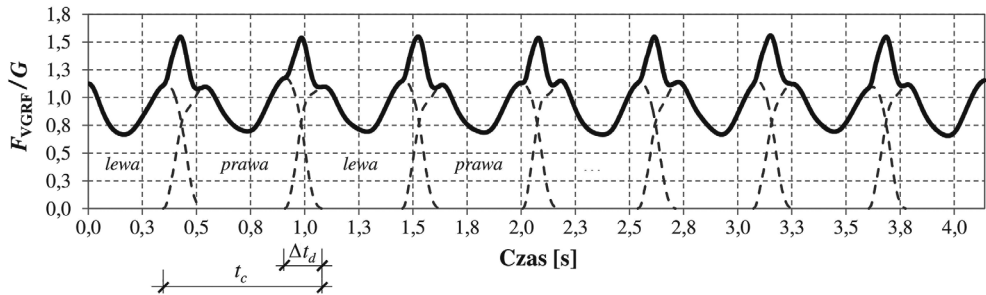


b)



Il. 31. Zmienność unormowanej pionowej składowej siły reakcji podłoża generowanej podczas chodu w funkcji częstotliwości kroków (wybrane wyniki badań własnych)

Na il. 31 widać także wpływ zwiększania częstotliwości kroków (zwiększenia szybkości chodu) na skrócenie czasu trwania fazy podporu lub innymi słowy, skrócenie czasu kontaktu stopy z podłożem t_c . Poprawne określenie wartości t_c oraz czasu trwania fazy podporu podwójnego Δt_d (il. 32) wpływa na dokładność odwzorowania ciągłej siły reakcji podłoża otrzymywanej przez sumowanie sił reakcji podłoża generowanych przez poszczególne stopy (il. 32).

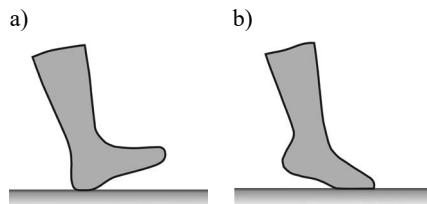


Il. 32. Unormowana ciągła pionowa składowa siły reakcji podłoża powstająca podczas chodu w normalnym tempie przy częstotliwości kroków $f = 1,80$ Hz (linia przerywana – efekt oddziaływania jednej stopy, linia gruba – siła ciągła otrzymana przez sumowanie oddziaływań na podłożu stopy prawej i lewej, wyniki badań własnych)

Na il. 32 zauważyć można podobieństwo siły ciągłej do fali sinusoidalnej. Właściwość tę wykorzystano w matematycznych modelach pionowej składowej siły reakcji podłoża (por. równania (19), (21), (22), (27)).

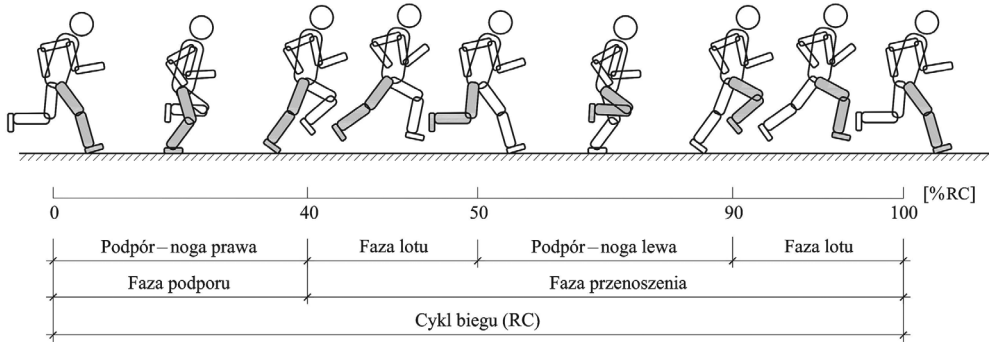
2.2.3.2. Siły reakcji podłoża powstające podczas biegu

Bieg jest formą szybkiego przemieszczania się człowieka realizowaną dzięki rozwijaniu siły napędowej przez wyłożoną pracę mięśni kończyn dolnych. Cykl biegu, analogicznie do cyklu chodu, rozpoczyna się od kontaktu jednej z kończyn dolnych z podłożem i kończy w chwili ponownego kontaktu tej samej kończyny z podłożem. Pełny cykl biegu obejmuje dwa kroki biegowe. Kontakt kończyny z podłożem następuje za pośrednictwem pięty (bieg z lądowaniem na pięcie, bieg techniką piętową) lub przedniej (bądź zewnętrznej) części stopy (bieg z lądowaniem śródstopno-palcowym, technika śródstopno-palcowa, technika sprinterska).



Il. 33. Techniki biegu: a) bieg z lądowaniem na pięcie (technika piętowa), b) bieg z lądowaniem śródstopno-palcowym (technika sprinterska)

Cykl biegu, podobnie do cyklu chodu, podzielić można na dwie podstawowe fazy: fazę podporu oraz fazę przenoszenia (wymachu) (il. 34). Uwzględniając w analizach tylko jeden krok biegowy, bieg podzielić można na fazę podporu i fazę lotu.



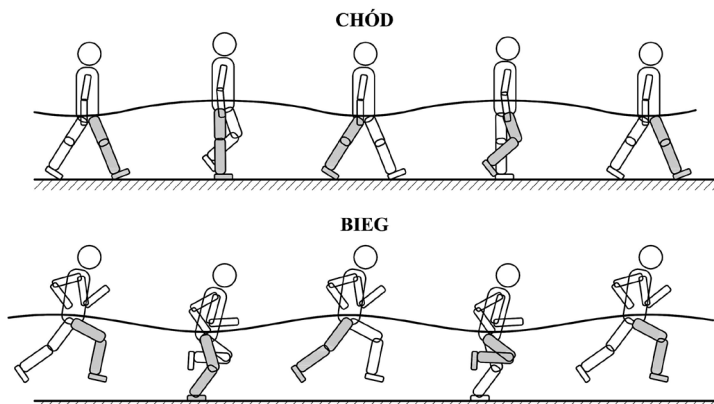
Il. 34. Fazy cyklu biegu (*Running Cycle*, RC; procentowe udziały faz dla szybkości biegu $V \approx 3,50$ m/s, $f_s \approx 3,0$ Hz)

Faza podporu podczas biegu jest fazą, w trakcie której kontakt z podłożem ma tylko jedna noga. Dla porównania w trakcie chodu w fazie podporu występują okresy podporu pojedynczego (jednonożnego) i podwójnego (dwunożnego) (por. il. 28 i 30). Kolejne różnice pomiędzy chodem i biegiem zauważyć można w fazie przenoszenia. Podczas biegu faza przenoszenia zaczyna się fazą lotu, w trakcie której osoba biegnąca traci kontakt z podłożem. Po fazie lotu następuje faza podporu pojedynczego na przeciwnej nodze, druga noga przenoszona jest do nowej pozycji. W fazie przenoszenia występuje nieprzerwany kontakt jednej nogi z podłożem.

Podczas biegu odmienny jest także procentowy udział faz podporu i przenoszenia w cyklu ruchu. Przy szybkości biegu $V \approx 3,50$ m/s faza podporu zajmuje średnio około 40% RC (RC – czas trwania cyklu biegu). Faza przenoszenia trwa średnio około 60% RC (il. 34), z czego $2 \times \sim 10\%$ RC to faza lotu i $\sim 40\%$ RC to faza podporu drugiej nogi. Podczas chodu procentowe udziały tych faz w cyklu chodu są odwrotne i wynoszą odpowiednio: faza podporu $\sim 60\%$ GC, faza przenoszenia $\sim 40\%$ GC (GC, czas trwania cyklu chodu) (il. 28). Zmiana szybkości ruchu prowadzi do zamian procentowych udziałów poszczególnych faz w cyklu ruchu. Przykładowo zwiększanie szybkości biegu prowadzi do skrócenia fazy podporu i wydłużenia fazy przenoszenia, w tym fazy lotu. Podczas sprintu, przy szybkości biegu $V \approx 9,0$ m/s (biegi olimpijskie), udział fazy podporu w cyklu biegu wynosi zaledwie $\sim 20\%$ RC, na fazę przenoszenia przypada $\sim 80\%$ RC, w tym na fazę lotu $2 \times \sim 30\%$ RC [140, 204].

Duża różnica pomiędzy chodem i biegiem związana jest także ze sposobem przemieszczania się środka ciężkości ciała poruszającej się osoby (il. 35). Podczas chodu w fazie podporu środek ciała unosi się ku górze (następuje zmniejszenie siły docisku stopy do podłoża, zmniejszenie wartości siły reakcji podłoża). W przypadku biegu

ruch środka ciężkości ciała w fazie podporu jest przeciwny. Środek ciężkości ciała przemieszcza się ku dołowi (następuje zwiększenie siły docisku stopy do podłoża, zwiększenie wartości siły reakcji podłoża).

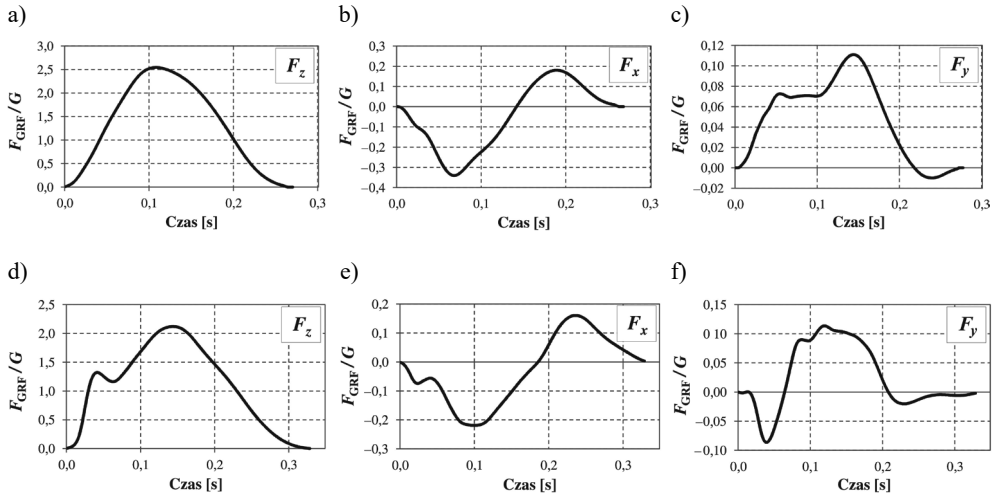


Il. 35. Trajektoria środka ciężkości ciała podczas chodu i biegu

Faza podporu jest fazą, w trakcie której obciążenie generowane przez poruszającą się osobę przekazywane jest na podłoże. Z racji przemieszczania się środka ciężkości ciała w trzech kierunkach powstają trzy składowe siły reakcji podłoża: składowa pionowa, składowa boczna i składowa strzałkowa (przednio-tylna) (il. 36). Największe wartości osiąga składowa pionowa. Maksymalna wartość tej składowej powstaje w chwili, gdy środek ciężkości ciała znajduje się w położeniu najniższym. Amplitudy składowej pionowej występujące w trakcie biegu w wolnym i średnim tempie (kadencja biegu 150–180 kroków/min) mieszczą się w przedziale $(2,00\text{--}2,50)G$ (G – ciężar osoby biegnącej). Podczas szybkiego biegu amplituda ta osiągać może wartość $3,00G$. W trakcie biegów sprinterskich jej wartość dochodzi do $(4,00\text{--}4,50)G$ [29, 50]. Składowa strzałkowa osiąga amplitudę wynoszącą około $(0,20\text{--}0,35)G$. Amplituda składowej bocznej mieści się w przedziale $(0,05\text{--}0,15)G$.

W czasie biegu wartość amplitudy pionowej składowej siły reakcji podłoża charakteryzuje się nieznaczną zmiennością wewnątrzsobniczą i większą zmiennością międzyosobniczą (por. il. 37 i 38).

Czasowy przebieg pionowej składowej siły reakcji podłoża powstającej podczas biegu (il. 36a i d) zależny jest od techniki biegu wynikającej z nawyków ruchowych lub wytrenowania osoby biegnącej. Podczas biegu techniką śródstopno-palcową (sprinterską) przebieg ten ma kształt jednowierzchołkowy zbliżony do kształtu dodatniej części sinusoidy (il. 36a). W przypadku biegu z lądowaniem na pięcie (bieg techniką piętową), występującego najczęściej podczas biegów rekreacyjnych (jogging) i długodystansowych (maratony), obejmującego 75–95% biegaczy [5, 77, 113], na wykresie VGRF występuje dodatkowy mniejszy wierzchołek powstający podczas uderzenia pięty o podłoże (ang. *impact peak*) (il. 36d).



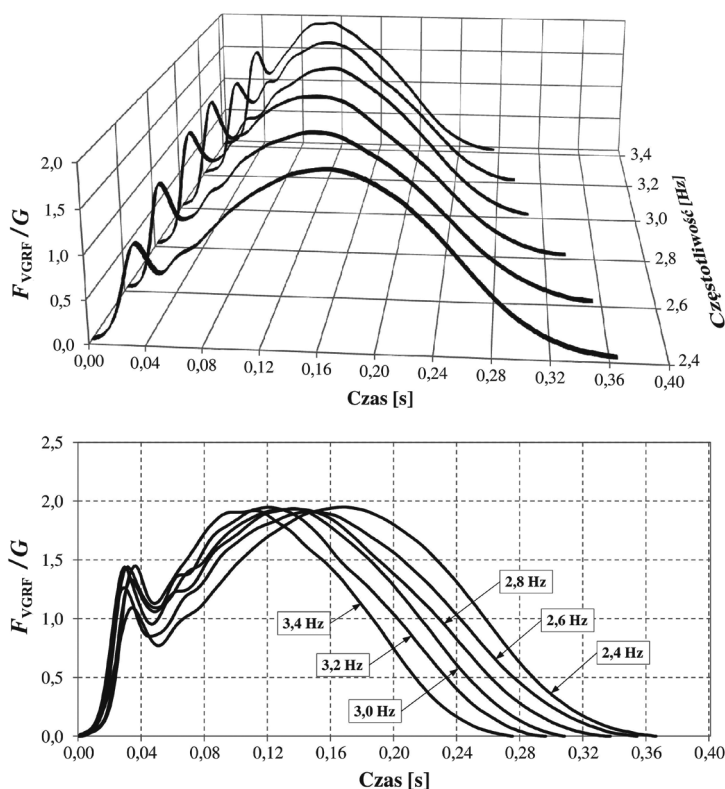
Il. 36. Przykładowe przebiegi czasowe unormowanych składowych siły reakcji podłoża (F_{GRF}/G) powstających podczas biegu: a) i d) składowa pionowa F_z , (gdzie: a) bieg techniką śródstopno-palcową, d) bieg techniką piętową), b) i e) składowa strzałkowa (przednio-tylna) F_x , c) i f) składowa boczna F_y .

Przebieg składowej strzałkowej (przednio-tylnej) (il. 36b i e) powstający podczas biegu jest podobny do przebiegu składowej strzałkowej powstającego podczas chodu (por. il. 29c). Ujemne i dodatnie amplitudy składowej strzałkowej wskazują na zmianę zwrotu tej składowej podczas ruchu.

Największą nieregularnością kształtu i amplitud odznacza się składowa boczna (przysrodkowo-boczna). Nieregularności te wynikają z nieregularnych przemieszczeń środka ciężkości ciała podczas biegu w kierunku poprzecznym do kierunku ruchu. Z punktu widzenia analiz dynamicznych konstrukcji obciążonych oddziaływaniem osób biegnących składowa boczna siły reakcji podłoża wywiera nieznaczny wpływ dynamiczny na konstrukcję, szczególnie w sytuacji oddziaływania jednej osoby biegnącej lub małej (dwu, trzysobowej) grupy osób. Z tego powodu oddziaływania boczne powstające podczas biegu na ogół są pomijane w analizach dynamicznych konstrukcji. W przypadku obciążenia konstrukcji przez większą liczbę osób biegnących (np. podczas zorganizowanych masowych imprez sportowych: maraton, półmaraton, biegi okolicznościowe itp.) wpływ składowej bocznej nabiera większego znaczenia. Pamiętać jednak należy o dużej wadze stopnia wzajemnej synchronizacji poruszających się osób na wartość obciążenia dynamicznego generowanego podczas ruchu, np. biegu. Przy małym stopniu wzajemnej synchronizacji osób biegnących oddziaływania dynamiczne będą się wzajemnie redukowały i nie będą groźne dla konstrukcji.

Analiza pionowych składowych sił reakcji podłoża wskazuje na nieznaczny wpływ zmiany częstotliwości kroków (i związanej z tym zmiany szybkości biegu) na wartość amplitudy siły generowanej przez jedną osobę (niewielka zmienność

wewnątrzsobnicza (indywidualna)). Stwierdza się jednocześnie dużą międzysobniczą zmienność wartości tej amplitudy (por. il. 37 i 38). Wzrost szybkości biegu prowadzi głównie do skrócenia czasu trwania fazy podporu (skrócenia czasu kontaktu stopy z podłożem t_c).

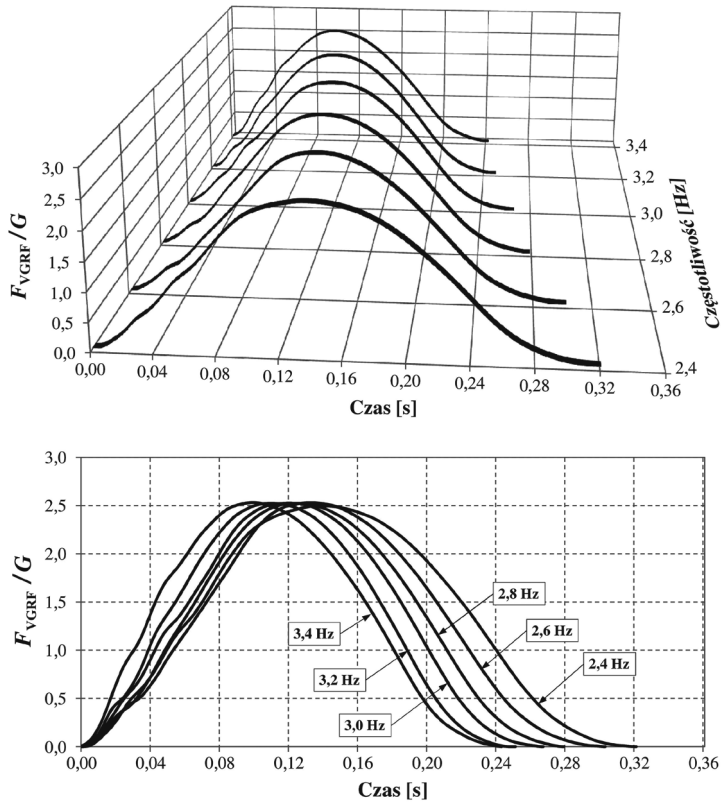


Il. 37. Zmienność unormowanej pionowej składowej siły reakcji podłoża generowanej podczas biegu w funkcji częstotliwości kroków – bieg z lądowaniem na pięcie (technika piętowa) (wyniki badań własnych)

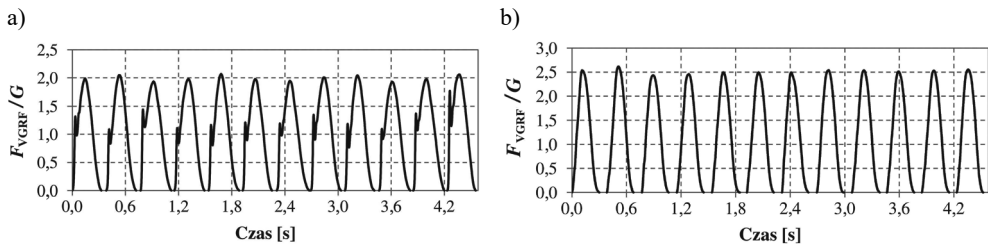
Przebiegi F_{VGRF}/G prezentowane na il. 37 i 38 przedstawiają przykładowe siły z pojedynczych kroków biegowych zarejestrowane podczas biegu dwóch różnych kobiet. Jedna z kobiet biegła techniką piętową, druga – techniką sprinterską. Na il. 37 przedstawiono przebiegi F_{VGRF}/G generowane przez kobietę biegnącą techniką piętową: wiek 34 lata, wzrost 158,0 cm, waga 51,6 kg. Na il. 38 przedstawiono przebiegi F_{VGRF}/G generowane przez kobietę biegnącą techniką sprinterską: wiek 22 lata, wzrost 161,0 cm, waga 54,3 kg.

Analizując przebiegi obciążenia generowanego podczas ciągłego biegu (il. 39), warto zauważyć, że w fazie lotu siła reakcji podłoża przyjmuje wartość $F_{GRF} = 0$.

Kolejne impulsy siły generowane podczas ciągłego biegu rozdzielone są więc krótkimi odcinkami wartości zerowych oznaczającymi fazę lotu. W trakcie biegu nie występuje faza podporu podwójnego. Siły reakcji podłoża powstające podczas kolejnych kroków biegowych nie sumują się.



Il. 38. Zmienność unormowanej pionowej składowej siły reakcji podłoża generowanej podczas biegu w funkcji częstotliwości kroków – bieg z lądowaniem śródstopno-palcowym (technika sprinterska) (wyniki badań własnych)



Il. 39. Pionowe składowe siły reakcji podłoża powstające podczas ciągłego biegu z częstotliwością kroków $f_s \approx 2,60$ Hz: a) bieg z lądowaniem na pięcie, b) bieg z lądowaniem śródstopno-palcowym (wyniki badań własnych)

3. MODELE SIŁ REAKCJI PODŁOŻA – CHARAKTERYSTYKA I ANALIZA

Ruch człowieka jest złożonym procesem biomechanicznym charakteryzującym się występowaniem szeregu ruchów względnych pomiędzy poszczególnymi częściami ciała [29, 115]. Teoretycznie znajomość parametrów ruchu poszczególnych części ciała pozwala wyznaczyć siły reakcji podłoża generowane w trakcie ruchu. W praktyce liczba zmiennych i złożone zależności między nimi są trudne do jednoznacznego określenia, co prowadzi do przyjmowania założeń upraszczających i w efekcie także do niedokładności w wyznaczaniu sił reakcji podłoża, szczególnie w przypadku chodu. Modele sił reakcji podłoża wykorzystywane w inżynierii lądowej bazują na ogół na pomiarze tych sił za pomocą platform dynamometrycznych lub bieżni treningowych i ich opisie z zastosowaniem funkcji matematycznych.

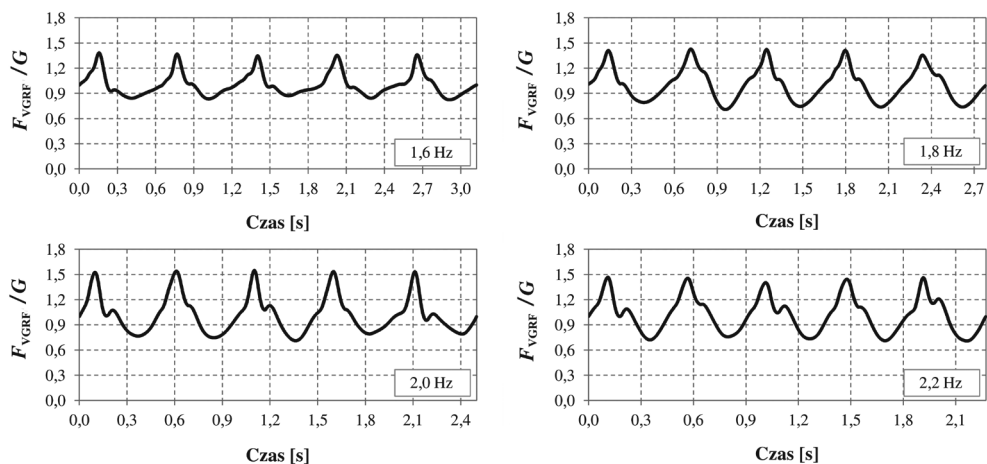
W dalszej części rozdziału przedstawiono znane autorowi modele matematyczne sił reakcji podłoża spotykane w literaturze przedmiotu (przegląd i analiza aktualnego stanu wiedzy). Charakterystykę dotychczasowych modeli uzupełniono autorskimi zaleceniami w zakresie przyjmowania wartości parametrów tych modeli, opracowanymi na podstawie badań własnych, uzupełniającymi braki lub korygującymi błędy dotychczasowych propozycji.

3.1. Modele siły VGRF generowanej podczas chodu

Dotychczasowe modele pionowej składowej sił reakcji podłoża generowanej podczas chodu podzielić można na dwie grupy. Pierwsza z tych grup to modele opisujące ciągłą siłę reakcji podłoża, powstającą jako efekt sumowania oddziaływania stóp idącej osoby na podłoże (por. il. 32). Druga grupa to modele opisujące siły reakcji podłoża generowane przez pojedynczą stopę (por. il. 29a, il. 31).

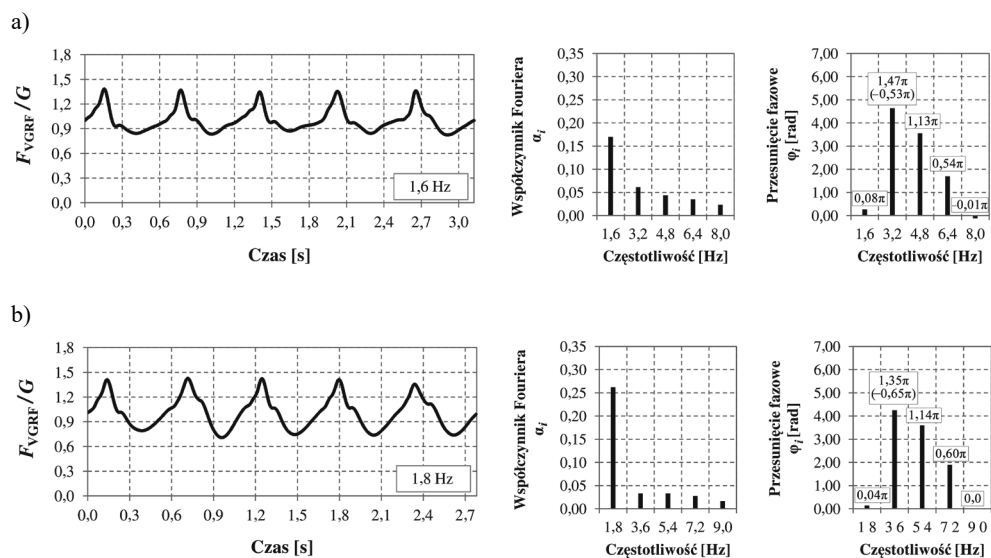
3.1.1. Modele ciągłych przebiegów VGRF

Modele ciągłej siły reakcji podłoża odzwierciedlają przebieg VGRF powstający w efekcie sumowania oddziaływania poszczególnych stóp na podłoże (il. 32). Tak otrzymany przebieg siły zbliżony jest do przebiegu fali sinusoidalnej (il. 40).

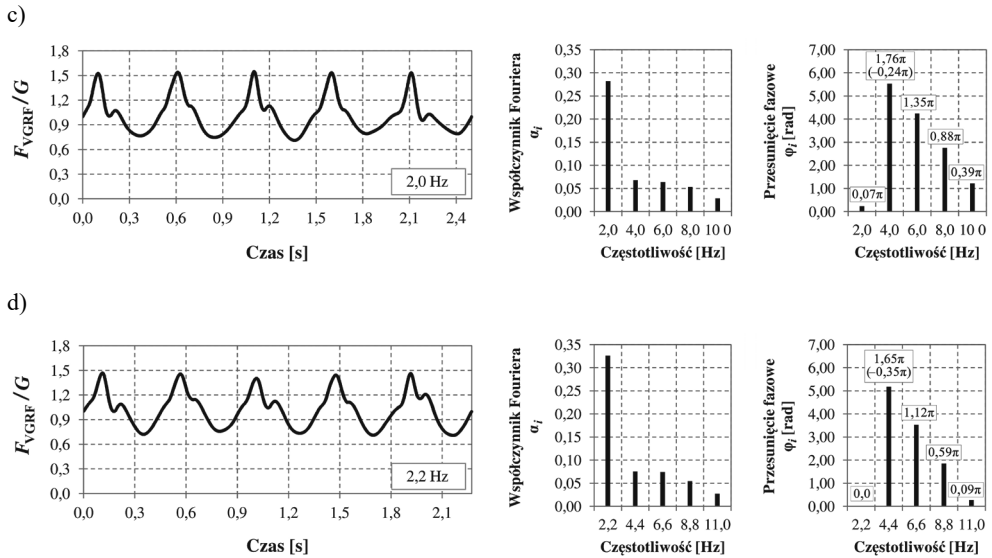


Il. 40. Przykładowe przebiegi unormowanej ciągłej pionowej składowej siły reakcji podłoża generowanej podczas chodu z częstotliwością $f_s = 1,60\text{--}2,20$ Hz (wyniki badań własnych)

W przypadku swobodnego, niczym niezakłóconego chodu przyjąć można, że przebieg ten jest funkcją okresową. Założenie to wykorzystywane jest w licznych matematycznych modelach opisujących ciągłą pionową składową sił reakcji podłoża, generowaną podczas chodu. Przyjęcie tego założenia upraszczającego modelowanie obciążenia prowadzi do nieznacznego przeszacowania drgań konstrukcji (przeszacowanie w granicach 4,0–8,0%).



Il. 41a. Wyniki analizy harmonicznej DFT unormowanych ciągłych przebiegów VGRF generowanych podczas chodu z częstotliwością: a) $f_s = 1,60$ Hz, b) $f_s = 1,80$ Hz



Il. 41b. Wyniki analizy harmonicznej DFT unormowanych ciągłych przebiegów VGRF generowanych podczas chodu z częstotliwością: c) $f_s = 2,00$ Hz, d) $f_s = 2,20$ Hz (wyniki badań własnych)

Analiza harmoniczna ciągłych przebiegów VGRF pozwala ujawnić wpływ składowych harmonicznych na ostateczny przebieg siły. Na il. 41 przedstawiono wyniki analizy harmonicznej DFT (ang. *Discrete Fourier Transform*) unormowanych ciągłych przebiegów VGRF zaprezentowanych na il. 40.

Zauważyć można duży wpływ pierwszej składowej harmonicznej na przebieg VGRF (duża wartość współczynnika Fouriera α_1 dla pierwszej składowej harmonicznej). Obserwacja ta stała się podstawą opracowania uproszczonych modeli VGRF uwzględniających wyłącznie pierwszą składową harmoniczną obciążenia. Bardziej złożone modele VGRF wykorzystują szereg Fouriera pozwalający uwzględnić większą liczbę składowych harmonicznych (na ogół od trzech do pięciu składowych).

3.1.1.1. Uprozczone modele VGRF

Jedną z pierwszych propozycji modelu VGRF był model przedstawiony w normie [40]. Model ten przytoczono także w normie [37] i obowiązywał on w Wielkiej Brytanii do czasu zastąpienia normy [37] przez [38, 39].

W normie [40] pionową składową sił reakcji podłoża generowaną podczas chodu przedstawiono w postaci siły skupionej F_{GRF} (równanie (19)) przemieszczającej się z szybkością V (równanie (20)).

$$F_{GRF} = 180 \sin(2\pi \cdot f_s \cdot t) \quad (19)$$

$$V = 0,9 f_s \quad (20)$$

gdzie: f_s – częstotliwość kroków podczas chodu [Hz], t – krok czasowy [s], V – szybkość przemieszczania się siły skupionej (szybkość chodu) [m/s].

W normach [37, 40] nie przedstawiono jednak założeń przyjętych w zdefiniowanym modelu oraz warunków jego stosowania.

Zauważyć należy dwie podstawowe wady modelu przedstawionego w normie [40]: 1) siła reakcji podłoża opisana równaniem (19) ma stałą amplitudę niezależną od ciężaru poruszającej się osoby ($A = 180$ N); 2) w równaniu (20) opisującym szybkość przemieszczania się siły skupionej, odzwierciedlającej ruch pieszego przyjęto stałą długość kroku $l_s = 0,90$ m (por. równanie (2)). W rzeczywistości w trakcie swobodnego naturalnego chodu zmiana szybkości chodu związana jest ze zmianą długości kroku. Dla chodu w normalnym tempie l_s wynosi średnio 65–70 cm. Z punktu widzenia dokładności analizy dynamicznej konstrukcji długość kroku jest jednym z istotnych parametrów. Przyjęta długość kroku wpływa na liczbę impulsów obciążenia dynamicznego działających na konstrukcję, a w efekcie na wartość odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Przyjęcie stałej długości kroku dla różnych szybkości chodu znacząco zmniejsza dokładność analizy dynamicznej.

W dokładniejszych modelach amplituda siły reakcji podłoża wyznaczana jest jako iloczyn ciężaru ciała idącej osoby G i odpowiedniego współczynnika dynamicznego (zob. równanie (22)). Współczynnik dynamiczny oznaczany jest symbolem DLF lub α_i (ang. *Dynamic Load Factor*, α_i – współczynnik Fouriera, i – numer składowej harmonicznej). Przyjmując ciężar ciała idącej osoby $G = 700$ N wartość amplitudy VGRF pierwszej składowej harmonicznej A_1 , w funkcji częstotliwości kroków, można oszacować na podstawie danych przedstawionych na il. 45 i opisanych równaniami (24), (25), (26) [99]. Przykładowo dla $f_s = 1,60$ Hz i $G = 700$ N: $A_1 = \alpha_1 \cdot G = 0,24 \cdot 700 = 168$ N. W tab. 14 przedstawiono dalsze wyniki obliczeń dla $G = 700$ N oraz częstotliwości kroków $f_s = 1,60$ – $2,40$ Hz.

Tabela 14. Średnie wartości współczynnika dynamicznego α_1 , amplitudy pierwszej składowej harmonicznej A_1 i współczynnika $k(f_s)$ w funkcji częstotliwości kroków f_s (opracowanie własne na podstawie [99])

Częstotliwość kroków f_s [Hz]	Współczynnik dynamiczny α_1 wg równania (24)	Amplituda pierwszej składowej harmonicznej A_1 [N]	Współczynnik $k(f_s) = A_1/280$
1,60	0,24	168	0,60
1,70	0,28	196	0,70
1,80	0,33	231	0,83
1,90	0,37	259	0,93
2,00	0,40	280	1,00

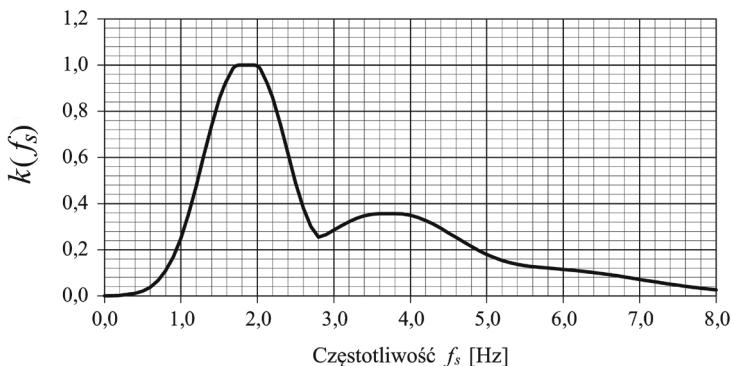
Częstotliwość kroków f_s [Hz]	Współczynnik dynamiczny α_1 wg równania (24)	Amplituda pierwszej składowej harmoniczej A_1 [N]	Współczynnik $k(f_s) = A_1/280$
2,10	0,44	308	1,10
2,20	0,46	322	1,15
2,30	0,48	336	1,20
2,40	0,48	336	1,20

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że amplituda siły reakcji podłoża określona w równaniu (19) odpowiada częstotliwości chodu $f_s \approx 1,64$ Hz, co oznacza chód w wolnym tempie z szybkością $V \approx 1,00$ m/s. Tymczasem szybkość chodu określona na podstawie równania (20) wyniesie dla częstotliwości kroków $f_s = 1,64$ Hz $V = 0,9 \cdot 1,64 = 1,48$ m/s, co zgodnie z wynikami przedstawionymi na il. 16 i opisanymi równaniami (11)–(13) odpowiada częstotliwości kroków $f_s = 1,90$ – $2,00$ Hz. Stwierdzić należy, że stosowanie modelu obciążenia zdefiniowanego w normach [37, 40] jest możliwe tylko w przypadku analizy oddziaływania na konstrukcję osób wolno idących ($f_s \approx 1,60$ Hz) pod warunkiem przyjęcia właściwej szybkości przemieszczania się siły reakcji podłoża na konstrukcji i właściwej długości kroku.

Kolejnym przykładem uproszczonego modelu pionowej składowej sił reakcji podłoża powstających podczas chodu jest model zdefiniowany w normie [39], który dla przypadku chodu jednej osoby ($N = 1$) przybiera postać równania (21):

$$F_{\text{GRF}} = 280 \cdot k(f_s) \cdot \sin(2\pi \cdot f_s \cdot t) \quad (21)$$

gdzie: f_s – częstotliwość kroków podczas chodu [Hz], t – krok czasowy [s], $k(f_s)$ – współczynnik według il. 42 ($k(f_s) = 1,0$ dla $f_s = 1,70$ – $2,00$ Hz) uwzględniający realną możliwość dynamicznego oddziaływania pieszych na konstrukcję, możliwość rezonansowego wzbudzenia drgań konstrukcji oraz wrażliwość pieszych na drgania [39].



Il. 42. Wartości współczynnika $k(f_s)$ [39]

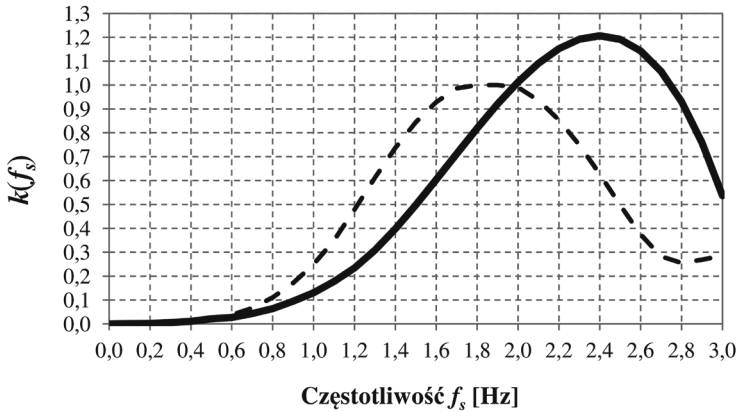
Szybkość poruszania się pieszego określono w powyższym modelu jako $V = 1,70$ m/s. Zgodnie z zależnościami (11)–(13) odpowiada to średniej częstotliwości kroków $f_s \approx 2,10$ Hz.

Powyższy model, podobnie jak wcześniejsza propozycja normy [40], nie jest uzależniony od ciężaru poruszającej się osoby. W pracy [11] zawierającej informacje o sposobie kalibracji modelu zamieszczonego w normie [39] określono, że model ten został skalibrowany przy przyjęciu średniego ciężaru idącej osoby $G = 700$ N. Na tej podstawie stwierdzić można, że amplituda siły reakcji podłoża przyjęta w modelu ($A_1 = 280$ N) odpowiada współczynnikowi dynamiczemu $\alpha = 280/700 = 0,40$. Porównując uzyskany wynik z wynikami przedstawionymi w tab. 14, zauważyć można, że przyjęta amplituda siły i współczynnik dynamiczny odpowiadają częstotliwości kroków $f_s = 2,00$ Hz.

Zgodnie z zaleceniami normy [39] wartość amplitudy siły reakcji podłoża wyrażana jest w funkcji częstotliwości kroków f_s za pomocą współczynnika $k(f_s)$ (il. 52). W przedziale częstotliwości $f_s = 1,70$ – $2,00$ Hz współczynnik $k(f_s) = 1,0$. W tab. 14 przedstawiono wartości współczynnika $k(f_s)$ wyznaczone dla częstotliwości $f_s = 1,60$ – $2,40$ Hz przy przyjęciu $G = 700$ N. Porównując uzyskane wartości z zaleceniami przedstawionymi na il. 42, można zauważyć, że w przedziale częstotliwości kroków $f_s < 2,00$ Hz zalecenia przedstawione w normie [39] prowadzą do wyznaczenia wartości współczynnika $k(f_s)$ znacznie przewyższających wartości średnie wyznaczone na podstawie danych prezentowanych na il. 45. Prowadzi to do wyznaczenia maksymalnej wartości amplitudy pionowej składowej siły reakcji podłoża generowanej przez pieszego. Dla $f_s > 2,00$ Hz wartości współczynnika $k(f_s)$ odczytane z il. 52 są znacznie niższe od wartości wyznaczonych na podstawie średnich wartości współczynnika dynamicznego prezentowanych na il. 45 (por. tab. 14). Przykładowo: dla częstotliwości kroków $f_s = 1,60$ Hz współczynnik $k(f_s)$ odczytany z il. 42 wynosi $k(f_s) \approx 0,93$, co o 55% przewyższa średnią wartość współczynnika $k(f_s)$ ustaloną na podstawie danych z il. 45, wynoszącą $k(f_s) \approx 0,24 \cdot 700/280 = 0,60$; dla częstotliwości kroków $f_s = 2,40$ Hz współczynnik $k(f_s)$ odczytany z il. 42 wynosi $k(f_s) \approx 0,63$, co stanowi zaledwie ~52% średniej wartości tego współczynnika ustalonej na podstawie danych z il. 45, wynoszącej $k(f_s) \approx 0,48 \cdot 700/280 = 1,20$ (por. tab. 14). Stwierdzić należy, że w przypadku chodu z częstotliwością kroków $f_s < 2,00$ Hz model zaproponowany w normie [39], wykorzystany do ustalenia dynamicznego obciążenia generowanego przez jednego pieszego ($N = 1$), prowadzi do wyznaczenia maksymalnej wartości współczynnika $k(f_s)$ oraz maksymalnej wartości amplitudy siły VGRF i w konsekwencji maksymalnej odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. W przypadku oddziaływania na konstrukcję osoby idącej z częstotliwością kroków $f_s > 2,00$ Hz współczynnik $k(f_s)$, amplituda siły VGRF i odpowiedź dynamiczna konstrukcji będą niedoszacowane.

Na il. 43 podano autorską propozycję korekty współczynnika $k(f_s)$ dla przypadku chodu jednej osoby, wyznaczoną dla średnich wartości amplitud pierwszej składowej harmonicznnej A_1 przedstawionych w tab. 14 (linia przerywana obrazuje

wartości współczynnika $k(f_s)$ wg normy [39], linia ciągła to autorska propozycja wartości współczynnika $k(f_s)$).



Il. 43. Korekta współczynnika $k(f_s)$ (linia przerywana – wartości współczynnika $k(f_s)$ wg normy [39], linia ciągła – autorska propozycja wartości współczynnika $k(f_s)$)

3.1.1.2. Model VGRF bazujący na szeregu Fouriera

Inna metoda modelowania ciągłej pionowej składowej siły reakcji podłoża generowanej podczas chodu polega na wykorzystaniu szeregu Fouriera. Metoda ta opisuje okresowy przebieg VGRF za pomocą sumy składowych harmonicznymi (sumy funkcji trygonometrycznych) o określonych amplitudach i przesunięciach fazowych.

Równanie (22) przedstawia ogólną postać szeregu Fouriera opisującą ciągłą pionową składową siłę reakcji podłoża generowaną podczas chodu.

$$F_{\text{GRF}}(t) = G + \sum_{i=1}^n G\alpha_i \sin(2\pi \cdot i \cdot f_s \cdot t + \varphi_i) \quad (22)$$

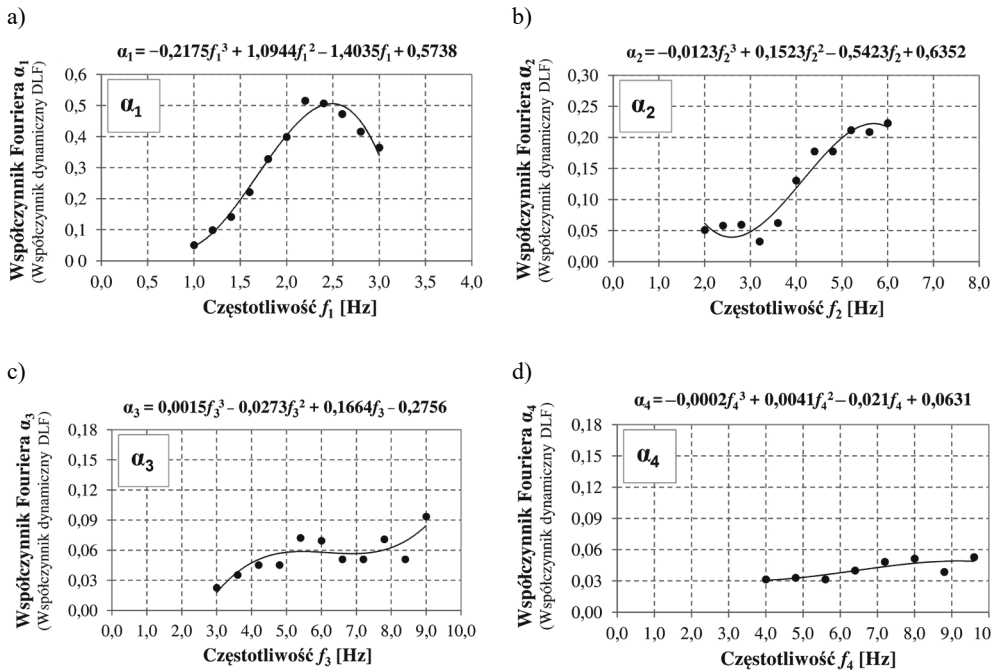
gdzie: G – ciężar osoby idącej (zazwyczaj $G \approx 700\text{--}800$ N), i – numer składowej harmonicznymi, n – liczba składowych harmonicznymi uwzględnionych w modelu (na ogół $n = 3\text{--}5$), α_i – współczynniki Fouriera określone dla poszczególnych składowych harmonicznymi (współczynniki dynamiczne DLF), $G\alpha_i$ – amplitudy poszczególnych składowych harmonicznymi, f_s – częstotliwość kroków podczas chodu, t – krok czasowy, φ_i – kąty przesunięć fazowych poszczególnych składowych harmonicznymi.

Równanie (23) przedstawia rozwinięcie szeregu Fouriera (22) z uwzględnieniem czterech składowych harmonicznymi ($n = 4$).

$$F_{\text{GRF}}(t) = G \cdot \left[1 + \alpha_1 \sin(2\pi \cdot f_s \cdot t + \varphi_1) + \alpha_2 \sin(4\pi \cdot f_s \cdot t + \varphi_2) + \alpha_3 \sin(6\pi \cdot f_s \cdot t + \varphi_3) + \alpha_4 \sin(8\pi \cdot f_s \cdot t + \varphi_4) \right] \quad (23)$$

Spośród parametrów modelu najtrudniejszymi do ustalenia są wartości współczynników Fouriera α_i oraz wartości kątów przesunięć fazowych φ_i . Wartości współczynników Fouriera α_i dla chodu przedstawione zostały w licznych pracach [7, 8, 61, 65, 94, 99, 133, 156, 170, 172, 173, 194, 212–214, 219]. Jednoznaczne określenie wartości kątów przesunięć fazowych φ_i dla poszczególnych składowych harmonicznich przysparza więcej trudności, gdyż parametr ten charakteryzuje się dużym rozrzutem.

Na il. 44 i 45 zaprezentowano wybrane zalecenia dotyczące wartości współczynników Fouriera α_i dla ciągłej pionowej składowej sił reakcji podłoża generowanej podczas chodu. Wartości współczynników α_i przedstawione na il. 44 ustalone zostały na podstawie badań chodu trzech osób w zakresie częstotliwości 1,0–3,0 Hz, przyrost częstotliwości 0,20 Hz [172, 173, 156]. Wyniki ustalone przy tak nielicznej próbie traktować należy jako wstępne oszacowanie wartości parametru α_i .



Il. 44. Współczynniki Fouriera α_i (współczynniki dynamiczne DLF) dla chodu w funkcji częstotliwości dla czterech składowych harmonicznich (uśrednione wyniki badań chodu trzech osób) a) α_1 – pierwsza składowa harmoniczna (f_1), b) α_2 – druga składowa harmoniczna ($f_2 = 2f_1$), c) α_3 – trzecia składowa harmoniczna ($f_3 = 3f_1$), d) α_4 – czwarta składowa harmoniczna ($f_4 = 4f_1$), (opracowanie własne na podstawie [156, 170, 172, 173, 219])

Dokładniejsze oszacowanie zmienności współczynników α_i przedstawiono w pracy [99]. Wartości współczynników α_i wyznaczono w [99] na podstawie badań grupy 40 osób (32 mężczyzn, osiem kobiet, w tym: 26 osób w wieku 20–30 lat, osiem osób

w wieku poniżej 20 lat, sześć osób w wieku 30–45 lat) i analizy ponad 800 przebiegów czasowych VGRF zarejestrowanych dla osób poruszających się po płaskiej powierzchni. Wyniki tych badań zobrazowano na il. 45.

Na il. 45a zaprezentowano dodatkowo za pracą [99] linie trendu wyznaczające wartość średnią współczynnika α_1 oraz granice (górną i dolną) 95% przedziału predykcji (95% przedziału ufności prognozy). Linie te opisują odpowiednio równania (24)–(26) [99].

– wartość średnia:

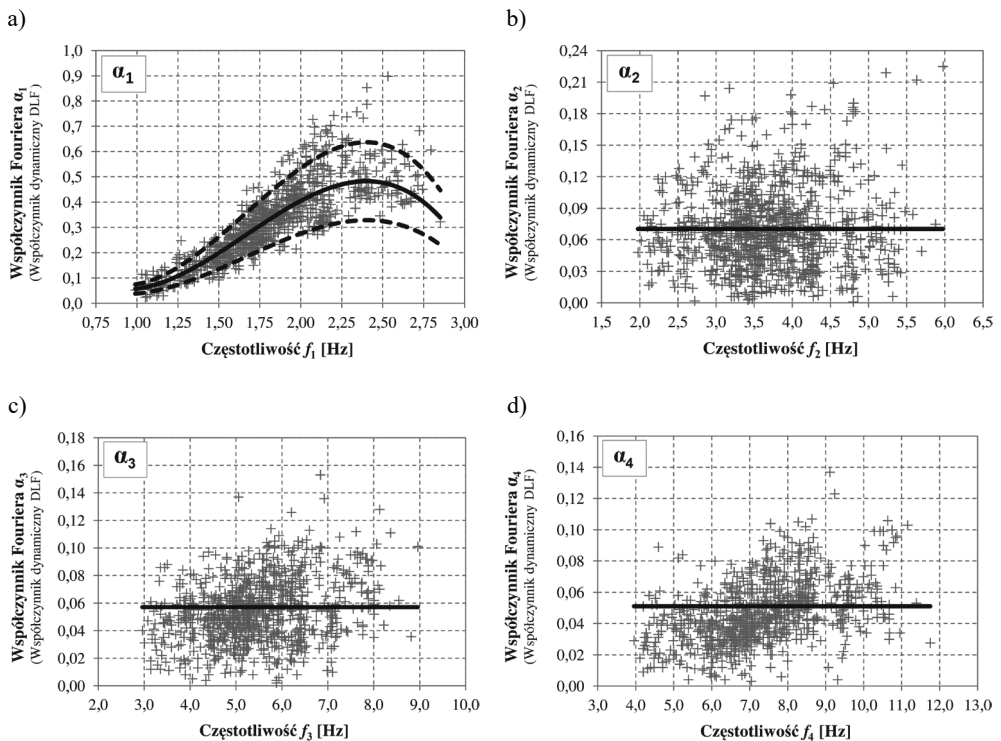
$$\alpha_1 = -0,2649f_1^3 + 1,3206f_1^2 - 1,7597f_1 + 0,7613 \quad (24)$$

– wartość graniczna górna:

$$\alpha_1 = -0,3497f_1^3 + 1,7432f_1^2 - 2,3228f_1 + 1,0049 \quad (25)$$

– wartość graniczna dolna:

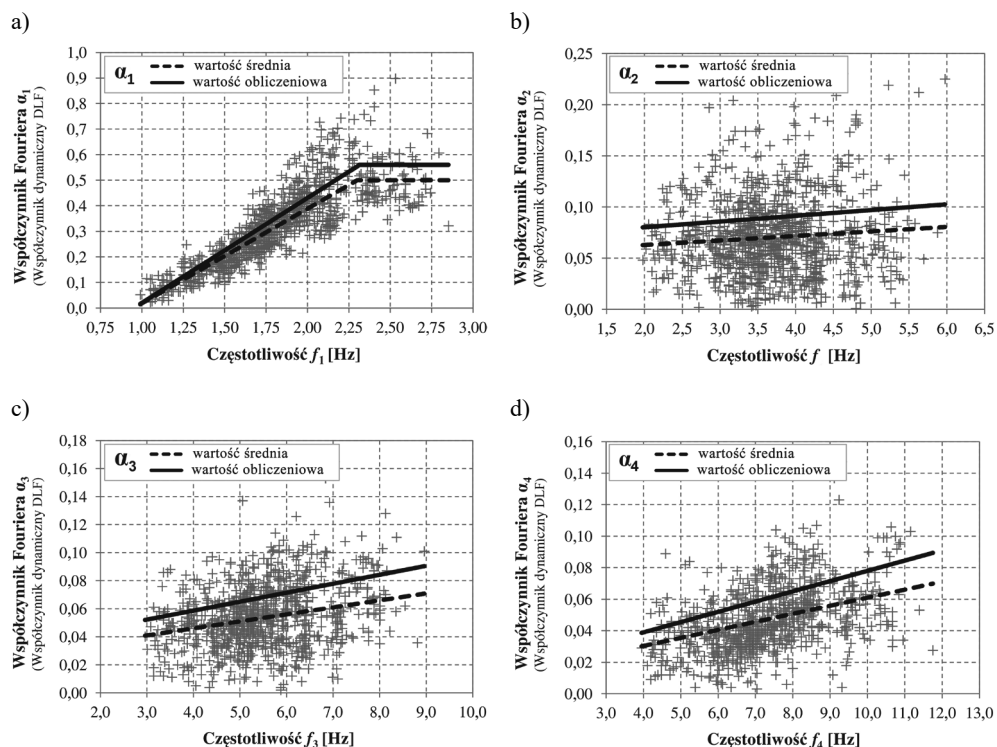
$$\alpha_1 = -0,1801f_1^3 + 0,898f_1^2 - 1,1966f_1 + 0,5177 \quad (26)$$



Il. 45. Współczynniki Fouriera (współczynniki dynamiczne DLF) dla chodu w funkcji częstotliwości dla czterech składowych harmoniczych: a) α_1 – pierwsza składowa harmoniczna (f_1), b) α_2 – druga składowa harmoniczna ($f_2 = 2f_1$), c) α_3 – trzecia składowa harmoniczna ($f_3 = 3f_1$), d) α_4 – czwarta składowa harmoniczna ($f_4 = 4f_1$) [99]

W przypadku współczynników α_2 , α_3 i α_4 , z uwagi na brak dominującego trendu w rozmieszczeniu danych pomiarowych w pracy [99], jako parametry charakteryzujące te współczynniki podano oszacowania ich wartości średnich oraz górną i dolną granicę 95% przedziałów ufności prognozy. Wartości średnie współczynników α_2 , α_3 i α_4 wynoszą odpowiednio: $\alpha_{2mean} = 0,070$, $\alpha_{3mean} = 0,057$, $\alpha_{4mean} = 0,051$. Natomiast 95% przedziały ufności prognozy wartości tych współczynników to odpowiednio: (0,0–0,13) – dla współczynnika α_2 oraz (0,01–0,09) – dla współczynników α_3 i α_4 .

Odmienną interpretację wyników badań z pracy [99] zaproponowano w pracach [212–214]. Zastosowano tam odmienny sposób opisu trendów wartości średnich współczynników α_1 , α_2 , α_3 i α_4 oraz określono wartości obliczeniowe tych współczynników jako wartości o prawdopodobieństwie ich przekroczenia wynoszącym 25% (prawdopodobieństwo nieprzekroczenia 75%). Propozycje te przedstawiono na il. 46 i w tab. 15.



Il. 46. Współczynniki Fouriera (współczynniki dynamiczne DLF) dla chodu (wartość średnia – linia przerywana, wartość obliczeniowa – linia ciągła) w funkcji częstotliwości dla czterech składowych harmonicznich: a) α_1 – pierwsza składowa harmoniczna (f_1), b) α_2 – druga składowa harmoniczna ($f_2 = 2f_1$), c) α_3 – trzecia składowa harmoniczna ($f_3 = 3f_1$), d) α_4 – czwarta składowa harmoniczna ($f_4 = 4f_1$) [212–214]

Tabela 15. Wartości średnie i obliczeniowe współczynników Fouriera (współczynników dynamicznych DLF) dla chodu w funkcji częstotliwości dla czterech składowych harmonicznych [212–214]

Numer składowej harmonicznej		Zakres częstotliwości [Hz]	Wartość średnia współczynnika Fouriera	Wartość obliczeniowa współczynnika Fouriera
1	f_1	1,0–2,8	$\alpha_{1m} = 0,37f_1 - 0,351$ $\alpha_{1m} \leq 0,50$	$\alpha_{1d} = 0,41f_1 - 0,389$ $\alpha_{1d} \leq 0,56$
2	$f_2 = 2f_1$	2,0–5,6	$\alpha_{2m} = 0,0044f_2 + 0,054$	$\alpha_{2d} = 0,0056f_2 + 0,069$
3	$f_3 = 3f_1$	3,0–8,4	$\alpha_{3m} = 0,005f_3 + 0,026$	$\alpha_{3d} = 0,0064f_3 + 0,033$
4	$f_4 = 4f_1$	4,0–11,2	$\alpha_{4m} = 0,0051f_4 + 0,01$	$\alpha_{4d} = 0,0065f_4 + 0,013$

Wartości obliczeniowe współczynników α_1 , α_2 , α_3 i α_4 o 25-procentowym prawdopodobieństwie przekroczenia wyznaczono przy założeniu normalnego rozkładu analizowanych zmiennych jako sumę wartości średnich i 70% odchyłeń standardowych wyznaczonych dla poszczególnych częstotliwości kroków f_s .

Wyniki badań przedstawione w pracach [99, 212–214] oraz na il. 45, 46 i w tab. 15 dają bardzo dobry obraz zmienności parametrów szeregu Fouriera w funkcji częstotliwości kroków, w szczególności dużej zmienności wartości współczynników α_2 , α_3 i α_4 . Taka forma opisu parametrów szeregu Fouriera w znacznym stopniu rozwija zalecenia przedstawione w pracach [6, 7, 8, 194] w postaci uśrednionych wartości współczynników α_1 , α_2 , α_3 i α_4 . Przyczynia się to do bardziej świadomego i dokładniejszego odwzorowania obciążeń dynamicznych generowanych przez osoby idące, stwarzając także możliwość losowego generowania wartości współczynników α_1 , α_2 , α_3 i α_4 w odpowiednich przedziałach ich zmienności.

Tabela 16. Wartości współczynników Fouriera (współczynników dynamicznych DLF) dla chodu w funkcji częstotliwości dla czterech składowych harmonicznych według [194]

Numer składowej harmonicznej		Zakres częstotliwości [Hz]	Współczynnik Fouriera	Kąt przesunięcia fazowego [rad]
1	f_1	1,8–2,2	$\alpha_1 = 0,436f_1 - 0,414$	$\varphi_1 = 0$
2	$f_2 = 2f_1$	3,6–4,4	$\alpha_2 = 0,006f_2 + 0,074$	$\varphi_2 = -\pi/2$
3	$f_3 = 3f_1$	5,4–6,6	$\alpha_3 = 0,007f_3 + 0,043$	$\varphi_3 = \pi$
4	$f_4 = 4f_1$	7,2–8,8	$\alpha_4 = 0,007f_4 + 0,014$	$\varphi_4 = \pi/2$

Warto także wspomnieć, że w oparciu o wyniki z prac [99, 212–214] opracowane zostały wytyczne zaprezentowane w pracach [94, 133, 194]. Norma [94] zaleca przyjmować pięć składowych harmonicznych do odwzorowania ciągłego przebiegu VGRF generowanego podczas chodu. Współczynnik α_1 , określony

w normie [94], $\alpha_1 = 0,37f_1 - 0,37$, przyjmuje wartości nieco mniejsze od wartości współczynnika α_{1m} zdefiniowanego w tab. 15. Pozostałe współczynniki zalecane w [94] wynoszą odpowiednio $\alpha_2 = 0,10$ oraz $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0,06$. Wytyczne [194] zalecają przyjmować wartości współczynników Fouriera zgodnie z tab. 16. Wartości α_1 , α_2 , α_3 i α_4 wyznaczone według wytycznych [194] są nieco większe od wartości obliczeniowych przedstawionych w tab. 15 ($\alpha_1 \approx 1,064\alpha_{1d}$, $\alpha_2 \approx 1,072\alpha_{2d}$, $\alpha_3 \approx 1,092\alpha_{3d}$, $\alpha_4 \approx 1,077\alpha_{4d}$).

Niedostatkim wielu prac zalecających wykorzystanie szeregu Fouriera do odwzorowania ciągłego przebiegu VGRF generowanego podczas chodu jest brak zaleceń dotyczących wartości kątów przesunięć fazowych poszczególnych składowych harmonicznym φ_i względem pierwszej składowej, niezbędnych do poprawnego odwzorowania przebiegów VGRF. Przyczyną takiego stanu rzeczy jest duża zmienność wartości kątów przesunięć fazowych, które zależą m.in. od tempa chodu oraz różnych nawyków ruchowych idących osób (stylu chodu) [61]. Przybliżone wartości przesunięć fazowych dla drugiej i trzeciej składowej harmonicznym, wynoszące $\varphi_2 = \varphi_3 \approx -\pi/2^{5*}$, podano w pracach [8, 12]. Odmienne wartości przesunięć fazowych, dla czterech składowych harmonicznym, podano w pracy [194]: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\pi/2$, $\varphi_3 \approx \pi$, $\varphi_4 = \pi/2^{6**}$. W pracy [8] przedstawiono komentarz dotyczący wartości przesunięć fazowych wyższych składowych harmonicznym w odniesieniu do pierwszej składowej harmonicznym, stwierdzający, że przesunięcia te mają drugorzędne znaczenie dla odwzorowania VGRF generowanych podczas chodu, gdyż wyższe składowe harmonicznym mają mały wpływ na przebieg wyznaczonej siły reakcji podłoża (dominujący jest wpływ pierwszej składowej harmonicznym). Zalecono jednocześnie indywidualne dostrajanie wartości przesunięć fazowych w celu wyznaczenia miarodajnej (niekorzystnej) kombinacji składowych harmonicznym. Uproszczenie takie może jednak prowadzić do niedokładnego odwzorowania GRF (przeszacowania amplitudy siły i/lub czasu jej działania) i w efekcie błędnego wyniku analiz dynamicznym. Należy jednocześnie zauważyć, że nieznaczące odstępstwa obliczonych przebiegów VGRF od przebiegów rzeczywistych są nieistotne z punktu widzenia analiz dynamicznym obiektów budowlanych, które są w małym stopniu podatne na niewielkie lokalne zmiany wartości obciążeń dynamicznym. Niemniej jednak znaczne przeszacowanie amplitudy siły i czasu jej działania prowadzić może do przeszacowania odpowiedzi dynamicznym konstrukcji rzędu 30%–70%, co może wywrzeć istotny wpływ na ocenę konstrukcji. Przeszacowania takie stwierdzono na podstawie własnych analiz i badań wykonanych z wykorzystaniem niepoprawnych wartości przesunięć fazowych.

^{5*} W pracach [8, 12] podano dodatkowo wartości $\varphi_2 = \varphi_3 \approx \pi/2$ z powodu wykorzystania równania przedstawiającego szereg Fouriera, w którym przesunięcia fazowe poprzedzone są znakiem minusa. Wykorzystując równanie (22) lub (23) należy przyjąć $\varphi_2 = \varphi_3 \approx -\pi/2$.

^{6**} Podane znaki wartości φ_2 , φ_3 , φ_4 są odpowiednie do wykorzystania w równaniu (22) i (23).

Modelowanie VGRF przy wykorzystaniu szeregu Fouriera nie było przedmiotem zainteresowania szczegółowych prac naukowych autora, w związku z tym w niniejszej pracy nie przedstawiono dokładniejszych zaleceń dotyczących przyjmowania wartości φ_i . W opinii autora stosowanie uśrednionych wartości φ_i zalecanych w pracy [194] jest podejściem poprawnym.

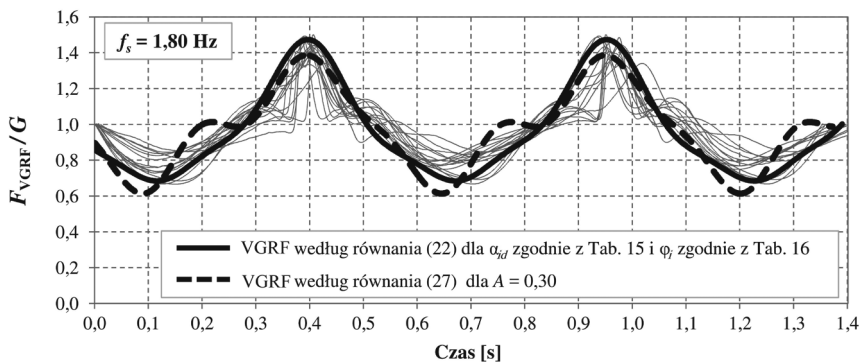
Inny sposób wykorzystania szeregu Fouriera do odwzorowania przebiegu VGRF zaprezentowany został w pracy [221]. W pracy tej sformułowano funkcję harmoniczną, opisującą obciążenie generowane przez pieszego podczas chodu w przedziale częstotliwości kroków 1,30–2,60 Hz (równanie (27)).

$$F_{\text{GRF}}(t) = G \cdot \left\{ 1 + A \cdot \left[\sin(2\pi f_s t) + 0,25 \sin(4\pi f_s t + \pi) + 0,25 \sin(6\pi f_s t + \pi) \right] \right\} \quad (27)$$

gdzie: G – ciężar osoby idącej, f_s – częstotliwość kroków podczas chodu, t – krok czasowy, A – współczynnik wzmocnienia dynamicznego opisany empirycznym równaniem (28), w którym f_s i G należy wstawić odpowiednio w [Hz] i w [kN]:

$$A = 0,4 f_s + 0,6 G - 0,84 \quad (28)$$

Propozycję tę opracowano na podstawie pomiarów pionowej składowej sił reakcji podłoża, generowanej dla częstotliwości kroków, mieszczącej się w przedziale 1,30–2,60 Hz. W badaniach VGRF uczestniczyło 30 osób o masie 55–95 kg.



Il. 47. Porównanie przebiegów czasowych VGRF wyznaczonych za pomocą równań (22) i (27) z wynikami badań laboratoryjnych dla $f_s = 1,80$ Hz (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wynik obliczeń)

Na il. 47 porównano przebiegi czasowe VGRF wyznaczone za pomocą równania (22) (gruba linia ciągła) i równania (27) (gruba linia przerywana) z wynikami badań laboratoryjnych (szare cienkie linie) dla częstotliwości kroków $f_s = 1,80$ Hz. Przyjęto: wartości α_{id} zgodnie z tab. 15, wartości φ_i zgodnie z tab. 16 oraz wartość $A = 0,30$.

3.1.2. Model siły VGRF generowanej przez jedną stopę

Odmienny sposób modelowania pionowej składowej sił reakcji podłoża został zaproponowany w pracy [117]. Jest to model opisujący pionową składową sił reakcji podłoża generowaną przez pojedynczą stopę. Jak zaznaczają autorzy pracy: „Siła reakcji podłoża generowana przez pojedynczą stopę jest bardziej realistycznym modelem obciążenia niż siła ciągła. Model w postaci siły generowanej przez pojedynczą stopę pozwala na uwzględnianie losowego charakteru obciążenia generowanego przez pieszych” [117].

Pionową składową sił reakcji podłoża generowaną przez pojedynczą stopę opisuje równanie (29):

$$F_{\text{GRF}}(t) = G \cdot \sum_{i=1}^5 A_i \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot t}{t_c}\right), \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (29)$$

gdzie: G – ciężar osoby idącej, A_i – amplituda i -tej składowej harmonicznnej zależna od częstotliwości kroków f_s , t_c – czas kontaktu stopy z podłożem, t – krok czasowy.

Wartości amplitud A_i przedstawiono na il. 48. Zmienności amplitud A_i w funkcji częstotliwości kroków f_s określają równania (30)–(34).

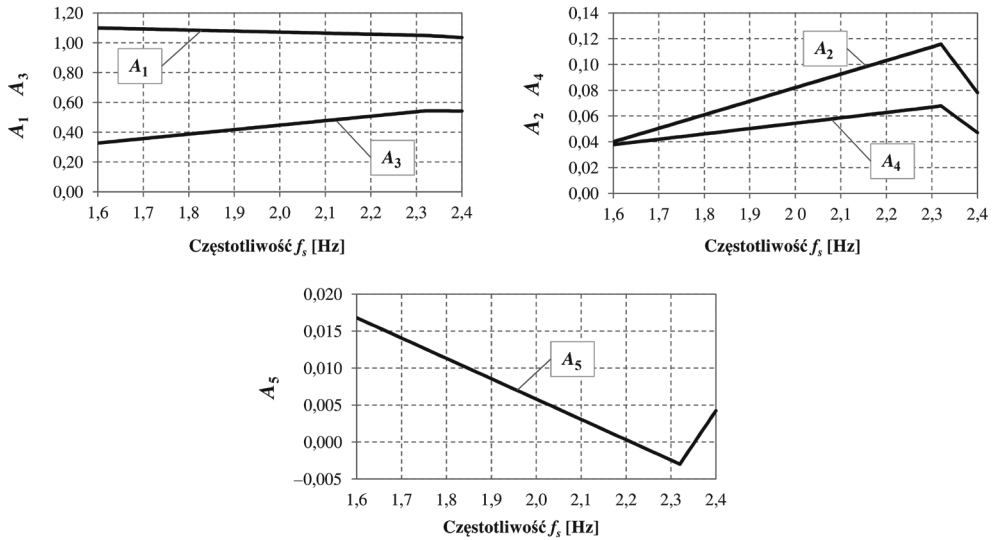
$$A_1 = \begin{cases} -0,0698f_s + 1,211 & 1,60 \text{ Hz} \leq f_s \leq 2,32 \text{ Hz} \\ -0,1784f_s + 1,463 & 2,32 \text{ Hz} \leq f_s \leq 2,40 \text{ Hz} \end{cases} \quad (30)$$

$$A_2 = \begin{cases} 0,1052f_s - 0,1284 & 1,60 \text{ Hz} \leq f_s \leq 2,32 \text{ Hz} \\ -0,4716f_s + 1,210 & 2,32 \text{ Hz} \leq f_s \leq 2,40 \text{ Hz} \end{cases} \quad (31)$$

$$A_3 = \begin{cases} 0,3002f_s - 0,1534 & 1,60 \text{ Hz} \leq f_s \leq 2,32 \text{ Hz} \\ -0,0118f_s + 0,5703 & 2,32 \text{ Hz} \leq f_s \leq 2,40 \text{ Hz} \end{cases} \quad (32)$$

$$A_4 = \begin{cases} 0,0416f_s - 0,0288 & 1,60 \text{ Hz} \leq f_s \leq 2,32 \text{ Hz} \\ -0,260f_s + 0,6711 & 2,32 \text{ Hz} \leq f_s \leq 2,40 \text{ Hz} \end{cases} \quad (33)$$

$$A_5 = \begin{cases} -0,0275f_s - 0,0608 & 1,60 \text{ Hz} \leq f_s \leq 2,32 \text{ Hz} \\ -0,0906f_s + 0,2132 & 2,32 \text{ Hz} \leq f_s \leq 2,40 \text{ Hz} \end{cases} \quad (34)$$



Il. 48. Wartości amplitud A_1 – A_5 [117]

Istotnym składnikiem modelu jest parametr t_c oznaczający czas kontaktu stopy z podłożem. W pracy [117] podano poniższe zależności (równania (35)–(37)) pozwalające wyznaczyć średnią wartość t_c w funkcji częstotliwości kroków f_s .

$$\frac{t_c}{\Delta t_d} \approx 4,165 \quad \rightarrow \quad \Delta t_d \approx 0,24 t_c \quad (35)$$

$$T_s = \frac{1}{f_s} = t_c - \Delta t_d \approx 0,76 t_c \quad (36)$$

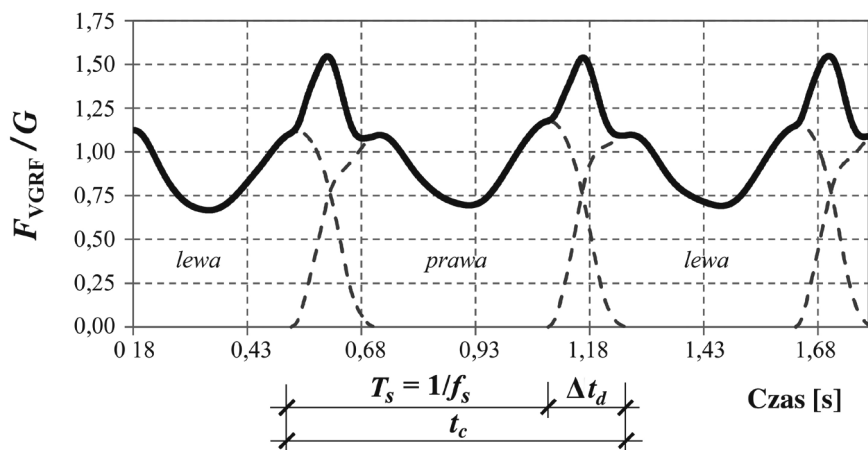
$$t_c \approx \frac{T_s}{0,76} \approx \frac{1}{0,76 f_s} \approx 1,32 T_s \quad (37)$$

gdzie: t_c – czas kontaktu stopy z podłożem [s], Δt_d – czas kontaktu dwóch stóp z podłożem [s] (faza podporu podwójnego, dwunożnego), $T_s = 1/f_s$ – okres kroków [s], f_s – częstotliwość kroków [Hz].

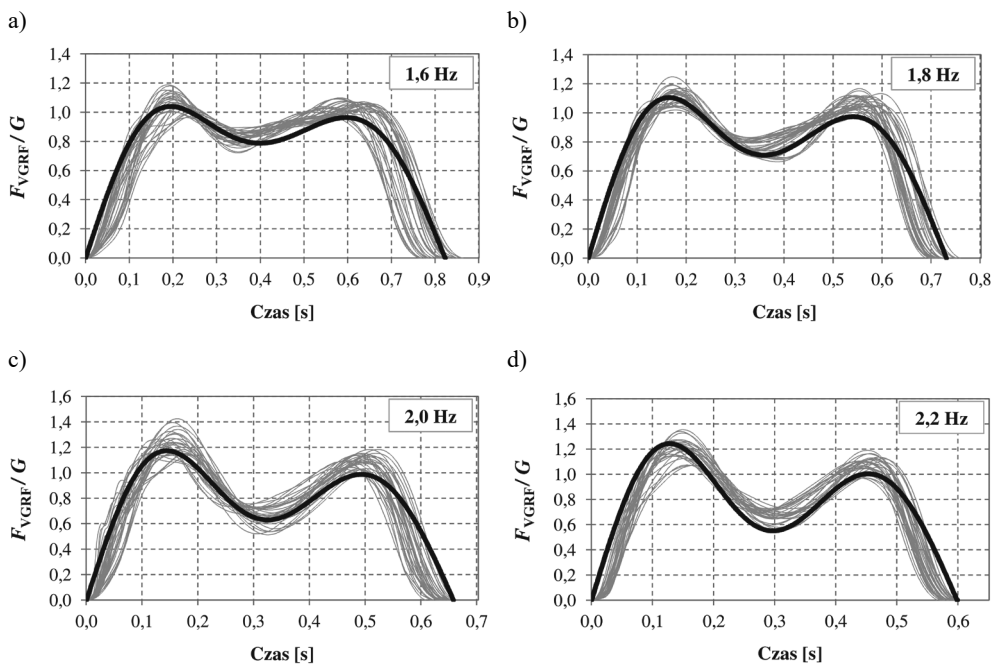
Parametry występujące w równaniach (35)–(37) zobrazowano na il. 49.

Dokładniejsze wytyczne dotyczące wartości t_c oraz Δt_d , opracowane na podstawie badań własnych autora, przedstawione zostały w rozdziale 4.2.1.

Na il. 50 podano przebiegi VGRF generowanej przez pojedynczą stopę wyznaczone za pomocą równania (29) dla częstotliwości chodu 1,60 Hz, 1,80 Hz, 2,00 Hz, 2,20 Hz w odniesieniu do przykładowych wyników badań laboratoryjnych (opracowanie własne).



Il. 49. Parametry t_c , T_s oraz Δt_d charakteryzujące oddziaływanie stóp na podłoże podczas chodu



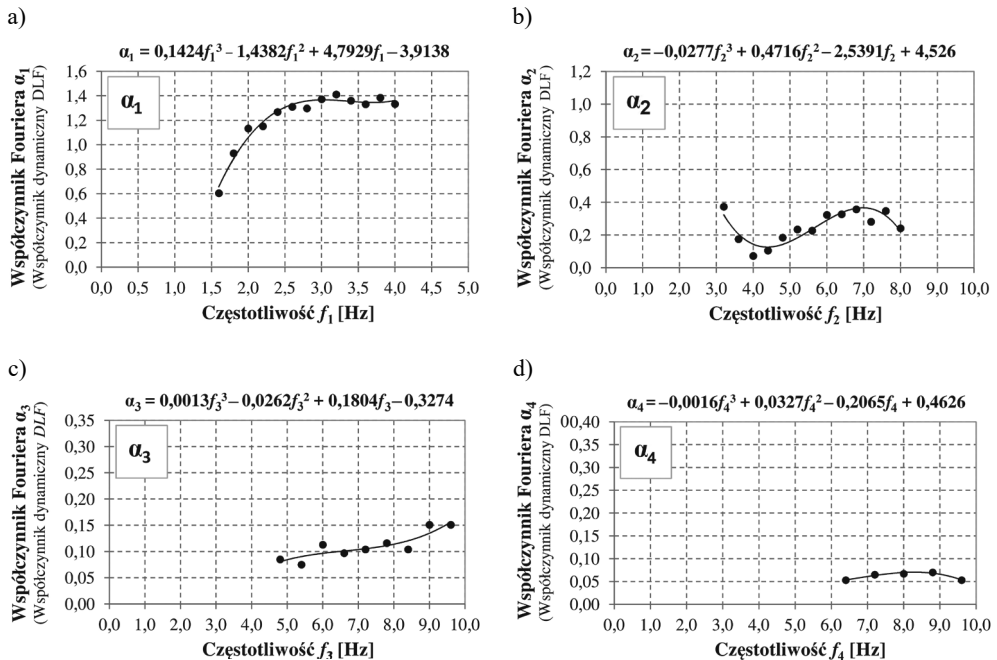
Il. 50. Porównanie przebiegów czasowych VGRF wyznaczonych za pomocą równania (29) z wynikami badań laboratoryjnych dla różnych częstotliwości chodu (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarna gruba linia – wynik obliczeń)

3.2. Modele siły VGRF generowanej podczas biegu

Czasowy przebieg pionowej składowej sił reakcji podłoża generowanych podczas biegu zbliżony jest do przebiegu dodatniej części funkcji sinus. Podobieństwo to wykorzystane zostało w różnych modelach matematycznych VGRF generowanej przez osoby biegnące. Przebieg VGRF odtworzyć można przy wykorzystaniu szeregu Fouriera (równanie (22)) z uwzględnieniem kilku składowych harmonicznich (zwykle od jednej do czterech składowych) lub za pomocą dodatniej połówki sinusoidy (tzw. model półsinusoidalny, ang. *half sine model*) (równanie (38)). Szereg Fouriera wykorzystany został m.in. w modelach omówionych w pracach [8, 156, 170, 172, 173, 219] oraz w normie [94]. Model półsinusoidalny przedstawiono w pracach [7, 12, 141, 179].

3.2.1. Model VGRF bazujący na szeregu Fouriera

Wykorzystanie szeregu Fouriera (równanie (22)) do odwzorowania VGRF generowanej podczas biegu wymaga znajomości odpowiednich wartości współczynników Fouriera α_i (współczynników dynamicznych DLF) oraz wartości kątów przesunięć fazowych φ_i . Wartości tych parametrów według różnych zaleceń przedstawiono na il. 51 i w tab. 17.



Il. 51. Współczynniki Fouriera $\alpha_1 - \alpha_4$ dla biegu w funkcji częstotliwości kroków (uśrednione wyniki badań biegu trzech osób) (opracowanie własne na podstawie [156, 170, 172, 173, 219])

Należy zaznaczyć, że wartości współczynników Fouriera przytoczone w tab. 17 za pracą [8] pozwalają odwzorować pionową składową sił reakcji podłoża generowaną podczas bardzo szybkiego biegu (szybkość ruchu 6,0–8,0 m/s, $f_s = 3,90$ –4,50 Hz). Pomimo że w pracy [8] określono, że zalecenia dotyczą biegu o częstotliwości kroków $f_s = 2,0$ –3,0 Hz, podane wartości współczynników Fouriera są niepoprawne do odwzorowania obciążeń powstających podczas biegu wolnego ($f_s = 2,20$ –2,60 Hz) i biegu w normalnym tempie ($f_s = 2,60$ –3,00 Hz), tzn. biegu rekreacyjnego lub biegu długodystansowego (półmaratony, maratony). Amplituda VGRF wyznaczona z wykorzystaniem zaleceń z pracy [8] jest o 30–60% większa od amplitudy siły generowanej podczas biegu rekreacyjnego i długodystansowego. Przeszacowania te określono na podstawie wyników badań własnych. Wartości współczynników Fouriera podane na il. 51 wyznaczono jako uśrednione wyniki badań biegu trzech osób. Należy stosować je z ostrożnością.

Tabela 17. Współczynniki Fouriera (współczynniki dynamiczne DLF) i kąty przesunięć fazowych dla biegu w funkcji częstotliwości dla trzech składowych harmoniczych według [8, 94]

Źródło	Numer składowej harmoniczej	Zakres częstotliwości [Hz]	Współczynnik Fouriera α_i	Kąt przesunięcia fazowego ϕ_i [rad]	
[94]	1	f_1	2,0–4,0	1,4	0
	2	$f_2 = 2f_1$	4,0–8,0	0,4	$\pi/2^{7*}$
	3	$f_3 = 3f_1$	6,0–12,0	0,1	$\pi/2^{7*}$
[8]	1	f_1	2,0–3,0	1,6	brak zaleceń
	2	$f_2 = 2f_1$	4,0–6,0	0,7	brak zaleceń
	3	$f_3 = 3f_1$	6,0–9,0	0,2	brak zaleceń

Niedostatkami pracy [8] jest również brak zaleceń dotyczących wartości kątów przesunięć fazowych. Przyjęcie wartości kątów przesunięć fazowych zalecanych w pracy [94] jako uzupełnienie zaleceń pracy [8] prowadzi do niepoprawnego odwzorowania amplitudy VGRF i czasu oddziaływania siły na podłoże (czasu kontaktu stopy z podłożem). Zalecenia pracy [8] uznać należy za niewłaściwe do opisu biegu w przedziale częstotliwości kroków $f_s = 2,0$ –3,0 Hz. Znacznie dokładniejsze są zalecenia pracy [94].

Na potrzeby odwzorowania VGRF generowanej podczas biegu rekreacyjnego lub długodystansowego wartość kątów przesunięć fazowych można oszacować, przyjmując zależność przedstawioną w pracy [8] dla oddziaływania w postaci skoków $\phi_2 = \phi_3 = \pi(1 - t_c f_s)$ (t_c – czas kontaktu stopy z podłożem podczas biegu, f_s – częstotliwość kroków podczas biegu), przy czym wartości współczynników Fouriera α_i należy przyjąć zgodnie z zaleceniami pracy [94] (tab. 17).

W tab. 18 przedstawiono własne propozycje wartości współczynników Fouriera α_i oraz kątów przesunięć fazowych ϕ_i odpowiednie do opisu biegu rekreacyjnego i długodystansowego z rozróżnieniem techniki biegu z lądowaniem śródstopno-palcowym

^{7*} W pracy [94] zalecono $\phi_2 = \phi_3 \approx \pi/2$. Wykorzystanie szeregu Fouriera w postaci równania (22) wymaga przyjęcia $\phi_2 = \phi_3 \approx -\pi/2$.

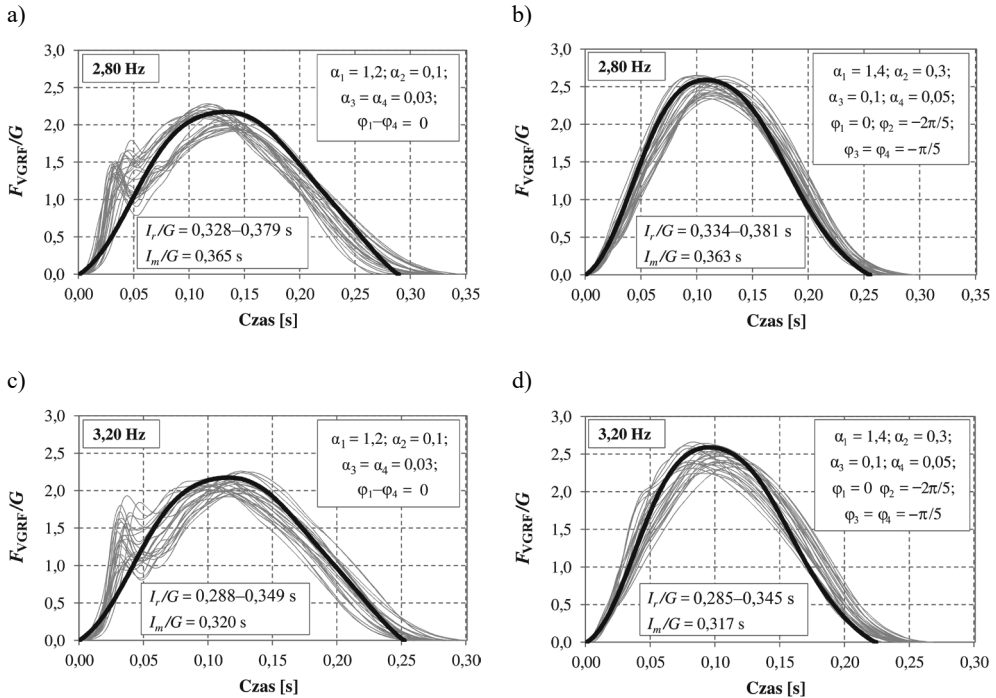
(technika sprinterska) oraz biegu z lądowaniem na pięcie (technika piętowa). W opinii autora rozróżnienie techniki biegu pozwala dokładniej odwzorować przebieg pionowej składowej sił reakcji podłoża (VGRF), pozwalając tym samym dokładniej oszacować wartości parametrów modelu (wartości współczynników Fouriera α_i oraz kątów przesunięć fazowych φ_i) zależnych m.in. od techniki biegu. Bieg techniką piętową jest najczęściej występującą techniką biegu wykorzystywaną przez 75–95% osób biegających rekreacyjnie (jogging) i uczestników maratonów. Fakt ten uwzględniać można w analizach dynamicznych konstrukcji w przypadku rozpatrywania oddziaływania dynamicznego grup biegających osób.

Tabela 18. Współczynniki Fouriera (współczynniki dynamiczne DLF) i kąty przesunięć fazowych dla biegu w funkcji częstotliwości dla czterech składowych harmonicznych (propozycja własna)

Technika biegu	Numer składowej harmonicznej	Zakres częstotliwości [Hz]	Współczynnik Fouriera	Kąt przesunięcia fazowego [rad]		
Technika sprinterska	1	f_1	2,0–4,0	1,4	0	0
	2	$f_2 = 2f_1$	4,0–8,0	0,3	$-2\pi/5$	$-\pi/2$
	3	$f_3 = 3f_1$	6,0–12,0	0,1	$-\pi/5$	0
	4	$f_4 = 4f_1$	8,0–16,0	0,05	$-\pi/5$	$-\pi/2$
Technika piętowa	1	f_1	2,0–4,0	1,2	0	0
	2	$f_2 = 2f_1$	4,0–8,0	0,1	0	$-\pi/4$
	3	$f_3 = 3f_1$	6,0–12,0	0,03	0	$-\pi/4$
	4	$f_4 = 4f_1$	8,0–16,0	0,03	0	$-\pi/4$

Na il. 52 porównano unormowane przebiegi czasowe F_{VGRF}/G wyznaczone za pomocą równania (22) z wykorzystaniem parametrów przedstawionych w tab. 18 z wynikami badań laboratoryjnych dla częstotliwości biegu $f_s = 2,80$ Hz oraz $f_s = 3,20$ Hz (I_v/G i I_m/G – unormowane impulsy siły (pole pod krzywą F_{VGRF}/G) wyznaczone dla sił zarejestrowanych w trakcie badań laboratoryjnych (I_v/G) oraz sił odwzorowanych za pomocą równania (22) (I_m/G)).

Na il. 52 można zauważyć, że odwzorowanie VGRF generowanej podczas biegu techniką piętową za pomocą szeregu Fouriera nie odtwarza występującego na wykresie VGRF lokalnego maksimum (lokalnego wierzchołka) powstającego podczas uderzenia pięty o podłoże (ang. *impact peak*, por. il. 37). Z punktu widzenia analizy dynamicznej konstrukcji budowlanych odwzorowanie tego lokalnego maksimum VGRF obrazującego uderzenie pięty o podłoże ma znaczenie podrzędne. Wskazały na to analizy i badania konstrukcji wykonane przez autora z wykorzystaniem własnego modelu obciążenia, uwzględniającego występowanie impulsu *impact peak*. Wytyczne dotyczące modelowania efektu *impact peak* podano w rozdziale 4.3.2 i w pracach [152, 153]. Istotniejszy wpływ na dokładność analizy dynamicznej wywiera poprawne odwzorowanie wartości impulsu siły (popędu siły) mierzonego jako pole pod wykresem VGRF (il. 52).



Il. 52. Porównanie przebiegów czasowych VGRF wyznaczonych za pomocą równania (22) z wynikami badań laboratoryjnych dla częstotliwości biegu 2,80 Hz i 3,20 Hz: a) i c) bieg techniką piętową, b) i d) bieg techniką sprinterską (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wynik obliczeń)

3.2.2. Model półsinusoidalny

Półsinusoidalny model pionowej składowej sił reakcji podłoża generowanej podczas biegu (ang. *half-sine model*) wykorzystuje podobieństwo czasowego przebiegu VGRF do dodatniej połówki krzywej sinusoidalnej. Model ten przedstawiony został m.in. w pracach [7, 12, 141, 179].

Obciążenie generowane przez osobę biegnącą opisane jest równaniem (38).

$$F_{VGRF}(t) = \begin{cases} \beta G \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{t_c}\right) & \text{dla } i \cdot T_s < t \leq (i + \tau) \cdot T_s \\ 0 & \text{dla } (i + \tau) \cdot T_s < t \leq (i + 1) \cdot T_s \end{cases} \quad (38)$$

gdzie: G – ciężar ciała osoby biegnącej [N], β – współczynnik dynamiczny, t_c – czas kontaktu stopy z podłożem [s], t – krok czasowy [s], τ – współczynnik czasu kontaktu stopy z podłożem $\tau = t_c/T_s = t_c f_s$, T_s – okres kroków podczas biegu $T_s = 1/f_s$ [s], f_s – częstotliwość kroków podczas biegu [Hz], $i = 0, 1, 2, \dots$

Współczynnik dynamiczny β oszacować można, przyjmując założenie, że pole pod połówką sinusoidy o okresie $T = 2t_c$ i amplitudzie $F_0 = \beta G$ czyli $f(t) = \beta G \sin(\pi t/t_c)$ dla $t \in \langle 0-t_c \rangle$ (t_c – czas kontaktu stopy z podłożem) jest równe polu funkcji stałej $f(t) = G$ dla $t \in \langle 0-T_s \rangle$ (T_s – okres kroków podczas biegu) [7, 65, 141, 179].

$$\int_0^{t_c} \beta G \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{t_c}\right) dt = \int_0^{T_s} G dt \quad (39)$$

$$\int_0^{t_c} \beta G \sin\left(\frac{\pi}{t_c} t\right) dt = \beta G \left(\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{t_c} t_c\right)}{\frac{\pi}{t_c}} - \frac{-\cos(0)}{\frac{\pi}{t_c}} \right) = \beta G \left(\frac{t_c}{\pi} + \frac{t_c}{\pi} \right) = \frac{2t_c}{\pi} \beta G \quad (40)$$

$$\int_0^{T_s} G dt = GT_s \quad (41)$$

$$\frac{2t_c}{\pi} \beta G = GT_s \quad (42)$$

$$\beta = \frac{\pi T_s}{2t_c} = \frac{\pi}{2t_c f_s} \quad (43)$$

Równanie (43) można również zapisać w postaci (44) przedstawionej w pracy [141].

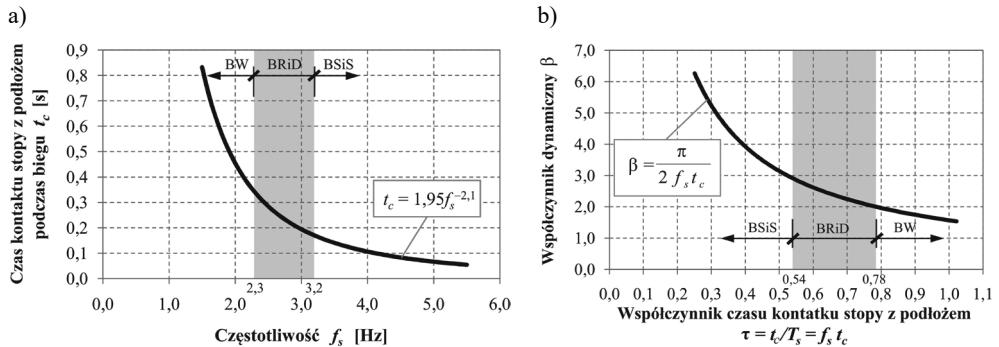
$$\beta = \frac{\pi}{2\tau} \quad (44)$$

gdzie: τ – współczynnik czasu kontaktu stopy z podłożem $\tau = t_c/T_s = t_c/f_s$, T_s – okres kroków podczas biegu [s] $T_s = 1/f_s$, f_s – częstotliwość kroków podczas biegu [Hz].

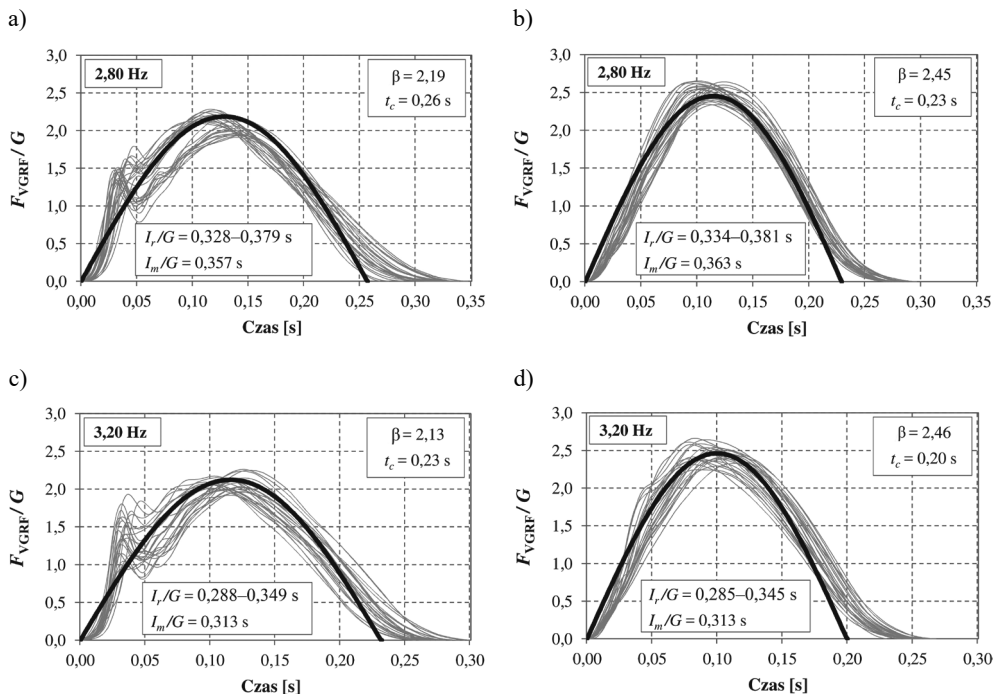
Należy zauważyć, że amplituda VGRF, wyrażona jako $F_0 = \beta G$, zależna jest od wartości t_c . Jest to zależność odwrotnie proporcjonalna. Przyjęcie zaniżonej wartości t_c prowadzi do przeszacowania amplitudy VGRF, a w efekcie również przeszacowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Określenie właściwej wartości czasu kontaktu stopy z podłożem t_c jest kluczowe dla poprawnego wyznaczenia VGRF i odpowiedzi dynamicznej konstrukcji.

Wartość t_c oszacować można na podstawie zaleceń przedstawionych w pracach [7, 209] zobrazowanych na il. 53. Zalecenia te uzupełniono dodatkowymi wskazówkami dotyczącymi szybkości biegu opracowanymi na podstawie badań własnych autora. Warto zauważyć, że prezentowane zalecenia nie rozróżniają techniki biegu (bieg techniką piętową lub bieg techniką sprinterską). Z badań własnych autora omówionych w rozdziale 4.2.2 wynika, że wartość t_c zależna jest od techniki biegu.

W rozdziale 4.2.2 przedstawiono własne zalecenia dotyczące wartości t_c dla biegu techniką piętową oraz biegu techniką sprinterską.



Il. 53. Parametry modelu półsinusoidalnego: a) czas kontaktu stopy z podłożem t_c [s], b) współczynnik dynamiczny dla biegu β , BW – bieg w wolnym tempie, BRiD – bieg rekreacyjny i długodystansowy, BSiS – bieg szybki i sprint (opracowanie własne na podstawie [7, 12, 209] i badań własnych)

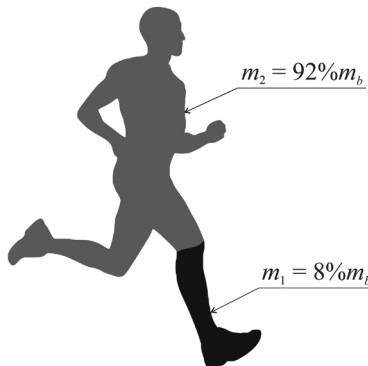


Il. 54. Porównanie przebiegów czasowych VGRF wyznaczonych za pomocą równania (38) z wynikami badań laboratoryjnych dla częstotliwości biegu 2,80 Hz i 3,20 Hz: a) i c) bieg techniką piętową, b) i d) bieg techniką sprinterską (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wynik obliczeń)

Na il. 54 porównano unormowane przebiegi czasowe F_{VGRF}/G wyznaczone za pomocą równania (38) z wynikami badań laboratoryjnych dla dwóch częstotliwości biegu $f_s = 2,80$ Hz oraz $f_s = 3,20$ Hz. W celach porównawczych na il. 52 i 54 wykorzystano te same zestawy sił VGRF zarejestrowanych podczas badań laboratoryjnych (I_r/G i I_m/G – unormowane impulsy siły (pole pod krzywą F_{VGRF}/G) wyznaczone dla sił zarejestrowanych w trakcie badań (I_r/G) laboratoryjnych oraz sił odwzorowanych za pomocą równania (38) (I_m/G)).

3.2.3. Model dwumasowy

Odmiennej sposób modelowania pionowej składowej sił reakcji podłoża generowanej podczas biegu zaproponowany został w pracach [51, 52]. W modelu tym ciało biegnącej osoby podzielone zostało na dwie masy $m_1 = 0,08m_b$, $m_2 = 0,92m_b$ (il. 55, m_b – masa ciała biegnącej osoby [kg]), odpowiedzialne za generowanie dwóch impulsów siły reakcji podłoża składających się na końcową wartość VGRF. Pierwszy impuls generowany jest podczas uderzenia w podłoże stopy wraz z goleniem (masa m_1). Drugi impuls powstaje jako efekt ruchu pozostałej części ciała (masa m_2). Dzięki uwzględnieniu impulsu siły wywoływanego przez masę m_1 model dwumasowy pozwala odwzorować VGRF generowaną podczas biegu techniką piętową. Impulsy VGRF modelowane są za pomocą funkcji o charakterystyce typu podniesiony sinus lub podniesiony cosinus i krzywiznie w kształcie dzwonu (ang. *bell-shaped raised cosine curve*). Krzywiznę taką odwzorować można np. za pomocą funkcji Hanna (Hanninga).



Il. 55. Podział ciała osoby biegnącej na masy składowe m_1 , m_2 (m_b – masa ciała biegnącej osoby)

W modelu dwumasowym pionowa składowa sił reakcji podłoża określona jest równaniami (45)–(51).

$$F_{\text{VGRF}}(t) = F_1(t) + F_2(t) \quad (45)$$

$$F_1(t) = F_{1,avg} \left[1 + \cos \left(\frac{t - \Delta t_1}{\Delta t_1} \pi \right) \right] \quad (46)$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ F_{2,avg} \left[1 + \cos \left(\frac{t - \eta_r t_c}{\eta_r t_c} \pi \right) \right] & \text{dla } 0 \leq t \leq \eta_r t_c \\ F_{2,avg} \left[1 + \cos \left(\frac{t - \eta_r t_c}{t_c (1 - \eta_r)} \pi \right) \right] & \text{dla } \eta_r t_c \leq t \leq t_c \\ 0 & \text{dla } t > t_c \end{cases} \quad (47)$$

$$F_{1,avg}(t) = m_1 \left(\frac{\Delta V_1}{\Delta t_1} + g \right) \quad (48)$$

$$F_{2,avg}(t) = \frac{I_T - I_1}{t_c} \quad (49)$$

$$I_T = m_b g T_s \quad (50)$$

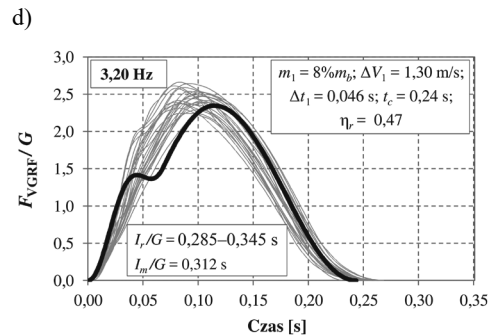
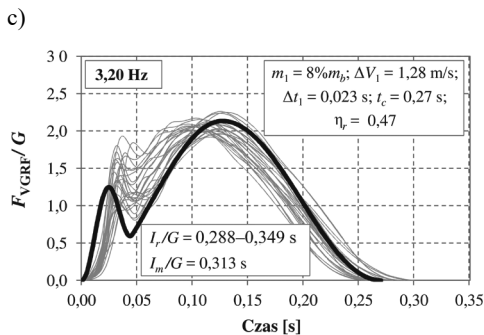
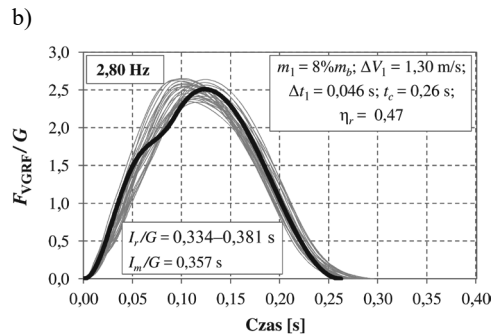
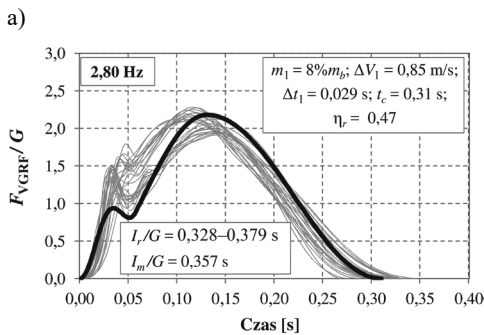
$$I_1 = 2F_{1,avg} \Delta t_1 \quad (51)$$

gdzie: ΔV_1 – zmiana pionowej składowej szybkości ruchu masy m_1 w początkowej fazie kontaktu stopy z podłożem [m/s] (tab. 19), Δt_1 – czas trwania początkowej fazy kontaktu stopy z podłożem [s] (czas trwania uderzenia pięty o podłoże (ang. *impact peak interval time*), czas mierzony od chwili kontaktu pięty z podłożem do chwili osiągnięcia minimalnej (bliskiej zero) wartości pionowej składowej szybkości ruchu masy m_1 , tab. 19), $m_1 = 0,08m_b$ [kg], m_b – masa ciała biegnącej osoby [kg], t_c – czas kontaktu stopy z podłożem, η_r – współczynnik położenia maksymalnej (szczytowej) wartości siły $F_2(t)$ ($\eta_r \approx 0,47$, dla $\eta_r = 0,50$ wykres siły $F_2(t)$ jest symetryczny), g – przyspieszenie ziemskie ($g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$), T_s – okres kroków podczas biegu [s] $T_s = 1/f_s, f_s$ – częstotliwość kroków podczas biegu [Hz].

W tab. 19 przedstawiono, za pracą [52], wartości ΔV_1 oraz Δt_1 określone na podstawie badań grupy 42 osób (19 kobiet, 23 mężczyzn) w wieku 18–37 lat (kobiety: wiek = $22,5 \pm 1,7$ roku (przedział 18–36 lat), wzrost = $1,68 \pm 0,06$ m (przedział 1,55–1,78 m), masa ciała $m_b = 63,3 \pm 9,4$ kg (przedział 43,4–82,0 kg); mężczyźni: wiek = $23,3 \pm 5,0$ lat (przedział 18–37 lat), wzrost = $1,79 \pm 0,07$ m (przedział 1,69–1,95 m), masa ciała $m_b = 81,1 \pm 8,5$ kg (przedział 71,0–101,5 kg). Grupa badanych osób obejmowała osoby trenujące rekreacyjnie, uczestników zawodów międzuczelnianych oraz zawodowych lekkoatletów, z których czterech było medalistami olimpijskimi w biegach sprinterskich lub biegach przez płotki.

Tabela 19. Wartości ΔV_1 i Δt_1 dla biegu techniką piętową oraz techniką sprinterską dla różnych szybkości biegu wg [52] (wartość średnia \pm odchylenie standardowe, N – liczba próbek VGRF)

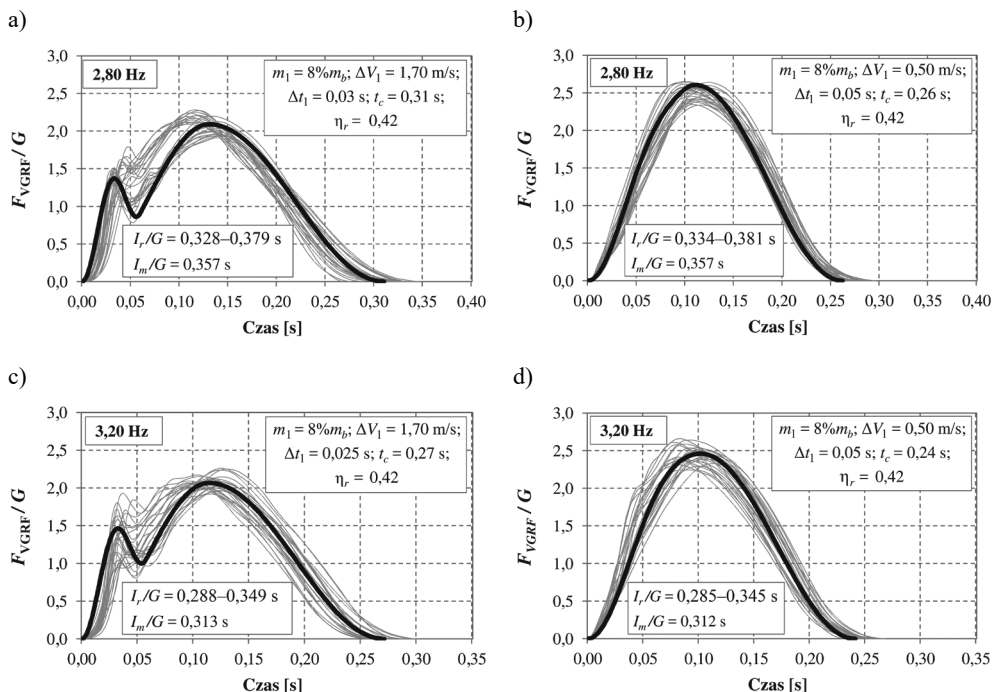
Technika biegu	Parametr	Szybkość biegu [m/s]			Średnia szybkość dla analizowanej techniki biegu [m/s]
		3,0–4,0	5,0–6,0	$\geq 7,0$	
Technika piętowa	ΔV_1	$0,85 \pm 0,02$	$1,28 \pm 0,03$	$2,01 \pm 0,04$	$1,35 \pm 0,04$
	Δt_1	$0,029 \pm 0,0005$	$0,023 \pm 0,0003$	$0,019 \pm 0,0002$	$0,024 \pm 0,0004$
	N	70	50	57	177
Technika sprinterska	ΔV_1	$1,30 \pm 0,07$	$1,37 \pm 0,02$	$2,08 \pm 0,03$	$1,72 \pm 0,03$
	Δt_1	$0,046 \pm 0,0011$	$0,034 \pm 0,0008$	$0,027 \pm 0,0003$	$0,033 \pm 0,0006$
	N	73	82	168	323
Wartość średnia dla wszystkich pomiarów	ΔV_1	$1,08 \pm 0,03$	$1,34 \pm 0,02$	$2,06 \pm 0,02$	$1,59 \pm 0,02$
	Δt_1	$0,038 \pm 0,0010$	$0,030 \pm 0,0007$	$0,025 \pm 0,0004$	$0,030 \pm 0,0004$
	N	143	132	225	500



II. 56. Porównanie przebiegów czasowych VGRF wyznaczonych za pomocą modelu dwumasowego z wynikami badań laboratoryjnych dla częstotliwości biegu 2,80 Hz i 3,20 Hz z uwzględnieniem wartości ΔV_1 , Δt_1 z tab. 19 a) i c) bieg techniką piętową, b) i d) bieg techniką sprinterską (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wynik obliczeń)

Na il. 56 przedstawiono przebiegi czasowe unormowanych sił F_{VGRF}/G , wyznaczone za pomocą modelu dwumasowego, w odniesieniu do wyników badań własnych zarejestrowanych dla częstotliwości biegu $f_s = 2,80$ Hz oraz $f_s = 3,20$ Hz (I_r/G i I_m/G – unormowane impulsy siły (pole pod krzywą F_{VGRF}/G) odpowiednio dla sił zarejestrowanych w trakcie badań laboratoryjnych i sił odwzorowanych za pomocą modelu dwumasowego). Wartości ΔV_1 , Δt_1 przyjęto zgodnie z tab. 19. Wartość t_c przyjęto na podstawie badań własnych (zob. rozdział 4.2.2). Na il. 52, 54 i 56 wykorzystano te same zestawy sił VGRF zarejestrowanych podczas badań laboratoryjnych.

Na il. 56 można zauważyć, że wykorzystanie średnich wartości parametrów ΔV_1 , Δt_1 określonych w pracy [52] (tab. 19) prowadzi do niedokładności w odwzorowaniu przebiegów VGRF. Zwiększenie dokładności odwzorowania VGRF za pomocą modelu dwumasowego wymaga dokładniejszych wytycznych dotyczących doboru wartości parametrów ΔV_1 , Δt_1 oraz ich korelacji z pozostałymi zmiennymi modelu. W celu poprawnego odwzorowania przebiegu VGRF niezbędna jest także znajomość poprawnej wartości czasu kontaktu stopy z podłożem t_c . Wartości t_c nie określono w pracy [52]. Wykorzystanie wartości t_c przedstawionych na il. 53 prowadzi do błędnego odwzorowania VGRF za pomocą modelu dwumasowego. Stosowne zalecenia dotyczące wartości t_c , opracowane na podstawie badań własnych, podano w rozdziale 4.2.2.



Il. 57. Porównanie przebiegów czasowych VGRF wyznaczonych za pomocą modelu dwumasowego z wynikami badań laboratoryjnych dla częstotliwości biegu 2,80 Hz i 3,20 Hz i zmodyfikowanych wartości ΔV_1 , Δt_1 : a) i c) bieg techniką piętową, b) i d) bieg techniką sprinterską (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wynik obliczeń)

Na il. 57 zamieszczono przebiegi VGRF dopasowane do wyników własnych badań laboratoryjnych sił reakcji podłoża generowanych podczas biegu. Stwierdzić należy, że przy odpowiednim doborze parametrów ΔV_1 , Δt_1 oraz t_c model dwumasowy poprawnie odwzorowuje przebiegi czasowe VGRF. Konieczne jest jednak uściślenie zasad doboru wartości ΔV_1 , Δt_1 dla różnych technik biegu.

4. WŁASNE MODELE OBCIĄŻEŃ VGRF GENEROWANYCH PODCZAS CHODU I BIEGU

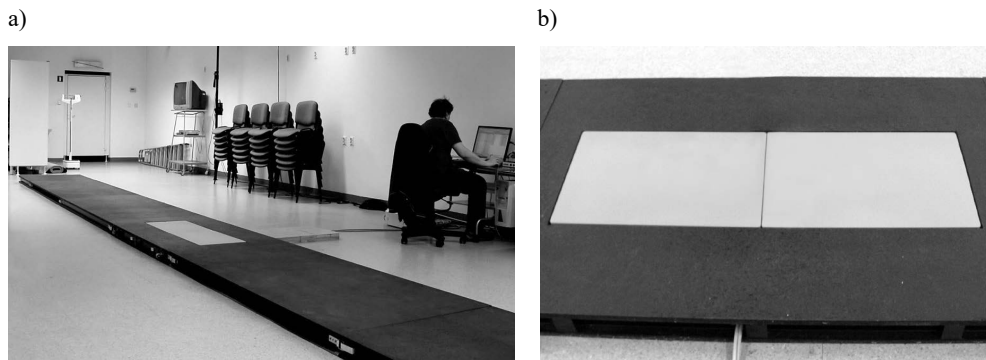
W niniejszym rozdziale przedstawiono autorskie propozycje sposobów modelowania unormowanych pionowych składowych sił reakcji podłoża generowanych podczas chodu i biegu opracowane w oparciu o wyniki badań własnych.

W przypadku chodu zaproponowano metodę bazującą na odwzorowaniu czasowych przebiegów VGRF za pomocą krzywych sklejanych (splajn) z kontrolą kształtu przechodzących przez charakterystyczne punkty krzywej VGRF określone dla różnych częstotliwości chodu ($f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz). Szeroki przedział częstotliwości obejmuje chód od bardzo wolnego ($f_s = 1,20$ Hz), występujący np. w warunkach dużego natężenia ruchu (tłum), do szybkiego ($f_s = 2,40$ Hz). Dotychczasowe modele VGRF generowanej podczas chodu pozwalają odwzorować przebiegi VGRF na ogół w przedziale częstotliwości kroków $f_s = 1,60\text{--}2,40$ Hz. Nie pozwala to odwzorować sił powstających podczas chodu wolnego i bardzo wolnego. Zaproponowana metoda modelowania VGRF uzupełnia braki w tym zakresie. Wykorzystać ją można również do modelowania pozostałych składowych sił reakcji podłoża generowanych podczas chodu: składowej przednio-tylnej i składowej bocznej (przysrodkowo-bocznej) po uprzednim ustaleniu położenia punktów charakteryzujących czasowe przebiegi tych składowych.

W przypadku VGRF generowanych podczas biegu zaproponowano dwie metody modelowania: 1) model na bazie krzywych Gaussa oraz 2) model oparty na krzywych sklejanych (krzywych splajn) z kontrolą kształtu.

4.1. Charakterystyka badań własnych

Badania sił reakcji podłoża generowanych podczas chodu i biegu wykonano w laboratorium Zakładu Biomechaniki Akademii Wychowania Fizycznego w Krakowie. Rejestrację przebiegów VGRF zrealizowano z wykorzystaniem dwóch płyt dynamometrycznych AMTI BP400600 (wymiary płyty 60×40 cm (dł. \times szer.)) ustawionych jedna za drugą w obrębie sztywnego pomostu o wymiarach $10,0 \times 1,50$ m (dł. \times szer.) z płyt MFP (il. 58). Łączna długość płyt dynamometrycznych AMTI (120 cm) zapewniała swobodne wykonywanie kroków podczas chodu i biegu (realizacja tzw. biegu rekreacyjnego z pominięciem sprintu). Podczas badań wykonano pomiar sześciu składowych sił reakcji podłoża ($F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$) z częstotliwością próbkowania sygnału 1,0 kHz.



Il. 58. Platforma pomiarowa z płytami dynamometrycznymi AMTI BP400600 – pomiar sił GRF generowanych podczas chodu i biegu

Badania sił generowanych podczas chodu zrealizowano przy udziale 25 dorosłych wolontariuszy wykazujących się pełną sprawnością ruchową, bez kontuzji (12 kobiet, 13 mężczyzn) w wieku 17–45 lat (średnia \pm odchylenie standardowe: $23,9 \pm 6,1$ roku), waga 48,7–109,6 kg ($73,8 \pm 15,1$ kg), wzrost 157,5–190,0 cm ($173,4 \pm 8,3$ cm).

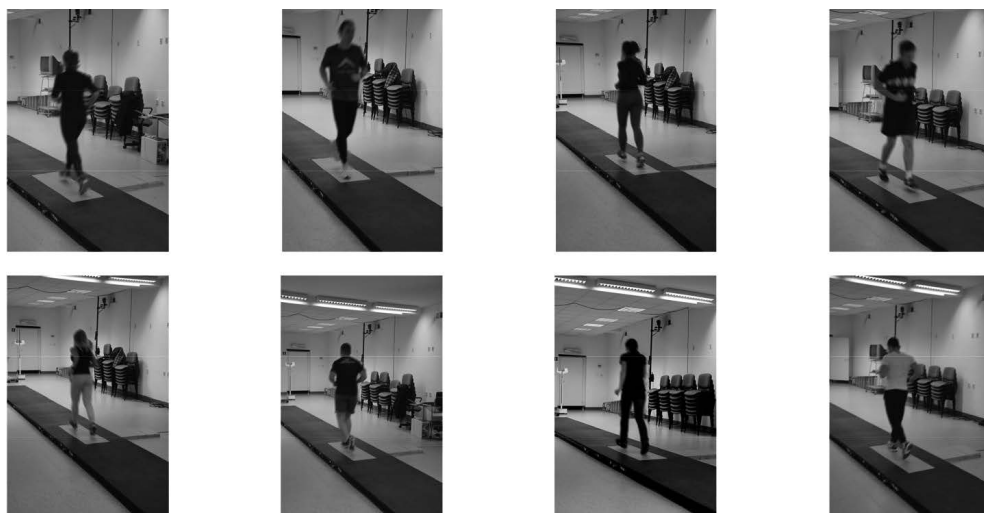
Rejestrację sił generowanych podczas chodu wykonano dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz, przyrost częstotliwości co 0,20 Hz w celu symulacji chodu w tempie wolnym, normalnym i szybkim (rejestracja GRF dla siedmiu częstotliwości kroków). Każdy z wolontariuszy wykonywał siedem serii chodu trwających 5 minut każda. Podczas każdej serii chodu siły reakcji podłoża rejestrowane były trzykrotnie przez 1 minutę (łącznie 3 min). Po wykonaniu jednej serii chodu dla określonej częstotliwości wolontariusz odpoczywał. W tym czasie kolejny uczestnik badań wykonywał przejście po pomoście pomiarowym. Na il. 59 przedstawiono przykłady realizacji pomiarów GRF podczas chodu.

Badania GRF generowanych podczas biegu zrealizowano przy udziale 13 dorosłych wolontariuszy wykazujących się pełną sprawnością ruchową, bez kontuzji (osiem kobiet, pięciu mężczyzn) w wieku 22–45 lat (średnia \pm odchylenie standardowe: $25,0 \pm 6,8$ roku), waga 51,6–108,4 kg ($70,2 \pm 16,2$ kg), wzrost 157,5–187,0 cm ($172,3 \pm 9,8$ cm).

Rejestrację sił generowanych podczas biegu wykonano dla częstotliwości kroków $f_s = 2,40\text{--}3,40$ Hz, przyrost częstotliwości co 0,20 Hz w celu symulacji biegu w tempie wolnym, normalnym i szybkim (rejestracja GRF dla sześciu częstotliwości kroków). Każdy z wolontariuszy wykonał sześć serii biegu trwających 3 min każda. Podczas każdej serii biegu siły reakcji podłoża rejestrowane były dwukrotnie przez 1 min (łącznie 2 min). Po wykonaniu jednej serii biegu dla określonej częstotliwości wolontariusz odpoczywał. W tym czasie kolejny uczestnik badań realizował bieg po pomoście pomiarowym. Na il. 60 przedstawiono przykłady realizacji pomiarów GRF podczas biegu.



II. 59. Przykłady realizacji pomiarów GRF podczas chodu



II. 60. Przykłady realizacji pomiarów GRF podczas biegu

W trakcie wszystkich testów uczestnicy badań ubrani byli w obuwie sportowe. Tempo chodu i biegu (częstotliwość kroków) wyznaczone było za pomocą metronomu elektronicznego. Częstotliwość aktywności danego typu wyrażoną w [Hz] przeliczono na liczbę uderzeń na minutę BPM wyznaczaną przez metronom (ang. *beats per minute*, $BPM = 60f_s$). Przed wykonaniem rejestracji sił uczestnicy badań poproszeni zostali o przeciwiczenie wykonywania określonej aktywności z częstotliwością wyznaczaną za pomocą metronomu do momentu przyzwyczajenia się do wyznaczonego tempa.

W trakcie docelowego testu rejestracja siły rozpoczynała się po dostosowaniu się poruszającej się osoby do częstotliwości wyznaczanej przez metronom. Uczestnicy badań nie byli informowani o rozpoczęciu rejestracji siły.

Uczestników (próbę badawczą) wybrano z grupy wiekowej 17–45 lat poprzez dobór wygodny, tzn. nielosową metodę doboru próby polegającą na wyborze uczestników z grona łatwo dostępnych osób spośród pracowników i studentów Politechniki Krakowskiej, Akademii Wychowania Fizycznego w Krakowie oraz uczniów krakowskich szkół średnich. Na przyjęty sposób wyboru próby badawczej zdecydowano się po wcześniejszych badaniach pilotażowych i obszernych studiach literatury z zakresy biomechaniki i medycyny, na podstawie których stwierdzono pomijalny (z punktu widzenia dynamiki konstrukcji budowlanych) wpływ wieku badanych osób na czasowe przebiegi sił reakcji podłoża. Tytułem wyjaśnienia zauważyć należy, że na ogół wiek wywiera znaczący wpływ na sprawność ruchową i wydolność (wytrzymałość) fizyczną poruszającej się osoby oraz zakres częstotliwości ruchu. W przedziale wiekowym 45–60 lat, w przypadku osób o pełnej sprawności ruchowej, nie obserwuje się znaczących różnic w przebiegach VGRF w odniesieniu do osób w wieku poniżej 45 lat. W przypadku osób w wieku powyżej 60 lat oraz osób z lekkimi urazami fizycznymi ograniczającymi sprawność ruchową tempo aktywności ruchowej ulega zmniejszeniu lub, innymi słowy, zawężeniu ulega zakres częstotliwości aktywności ruchowej, co przejawia się wolniejszym tempem chodu i biegu. Siły reakcji podłoża generowane przez osoby w wieku powyżej 60 lat dla niższych częstotliwości kroków podczas chodu i biegu są zbliżone do sił generowanych przez osoby z grupy wiekowej poniżej 60 lat podczas aktywności w tym samym przedziale częstotliwości kroków. Występujące różnice w przebiegach GRF, choć mogą być uznawane za istotne z punktu widzenia biomechaniki i medycyny w przypadku oceny sprawności ruchowej i urazów badanej osoby, nie są istotne z punktu widzenia analiz dynamicznych konstrukcji budowlanych. Na podstawie porównań i analiz stwierdzono dużą zgodność wyników badań własnych z wynikami badań różnych autorów wykonanymi na potrzeby biomechaniki i medycyny w szerokim przedziale wiekowym (18–80 lat). Ponadto, w przypadku biegu, grupa wiekowa 18–45 lat, wybrana w celu realizacji badań własnych, jest grupą społeczną charakteryzującą się wysokim odsetkiem biegaczy [189, 197]. Uwzględniając wyniki wykonanych analiz, przyjętą próbę badawczą uznano za miarodajną do ustalenia przebiegów czasowych i budowy modeli sił reakcji podłoża dla chodu i biegu na potrzeby analiz dynamicznych konstrukcji budowlanych.

Przebiegi VGRF zarejestrowane przez autora traktować należy jako otrzymane na podłożu niepodatnym. Wyniki te nie uwzględniają ewentualnego wpływu drgań konstrukcji na zmiany wartości sił reakcji podłoża. Zauważyć jednak należy, iż drgania konstrukcji nie wywierają wpływu na poruszające się osoby do momentu przekroczenia progu odczuwalności drgań. Percepcja drgań jest silnie zależna od sposobu aktywności na konstrukcji. Wibracja przy chodzie jest mniej dokuczliwa niż przy przebywaniu nieruchomym na obiekcie. W pracy [63] oraz w normie [94] i innych

pracach z zakresu oceny wpływu drgań na ludzi, m.in. w pracach wskazanych w rozdziale 1, odnaleźć można informacje dotyczące progów odczuwalności drgań przez ludzi. W sytuacji nieodczuwania drgań ruch użytkowników na konstrukcji odbywa się jak ruch na podłożu niepodatnym. Modele sił reakcji podłoża opracowane na podstawie badań własnych autora, wykonanych na podłożu niepodatnym, mogą być wykorzystywane w analizach dynamicznych konstrukcji w celu określenia poziomu ich drgań. W sytuacji, gdy drgania konstrukcji przekroczą próg odczuwalności drgań, rozważyć należy wykorzystanie zmodyfikowanych modeli obciążeń lub wykorzystanie współczynników korygujących wartość odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Przykładem badań wpływu drgań podłoża na obciążenie generowane przez pieszych są badania przedstawione w pracy [221]. W pracy tej stwierdzono, że oddziaływanie pieszego na podłoże wzrasta w fazie dostosowywania się pieszego do narastających drgań konstrukcji i następnie wyraźnie maleje po przystosowaniu się pieszego do ustabilizowanych drgań konstrukcji następującym przy amplitudzie przyspieszeń drgań pionowych podłoża $a > 1,20 \text{ m/s}^2$. Dokładne określenie wpływu drgań konstrukcji na obciążenie dynamiczne generowane przez poruszające się osoby (dla różnych form aktywności) wymaga dalszych badań z tego zakresu w celu określenia warunków początkowych zaistnienia interakcji i synchronizacji poruszających się osób z drgającą konstrukcją i wpływu tej interakcji na powstające obciążenie dynamiczne.

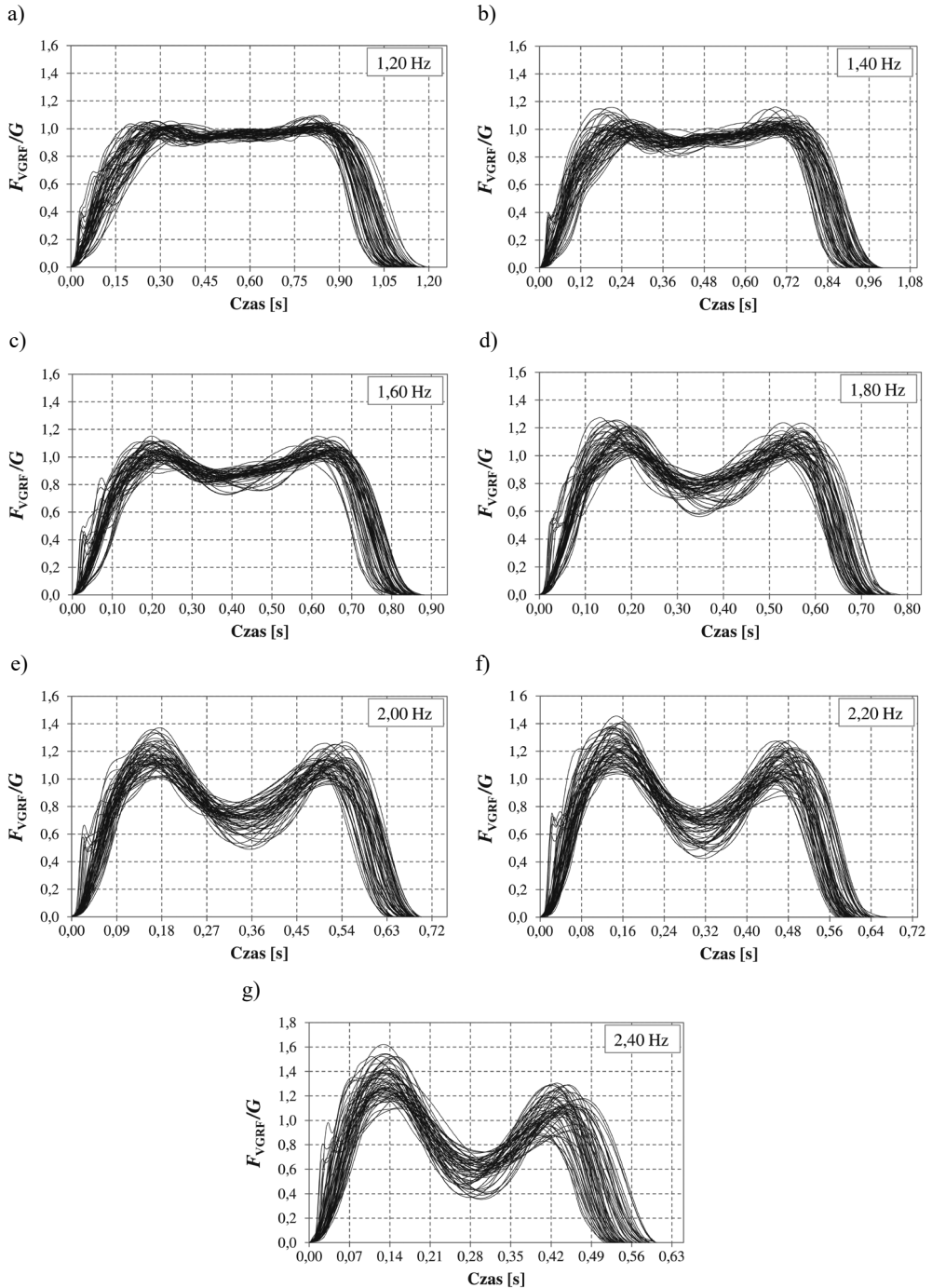
4.2. Wyniki badań własnych – charakterystyka i analiza

Podczas badań VGRF generowanych w trakcie chodu wykonano 525 testów i rejestracji sił GRF. Otrzymano zapis 4680 sygnałów pionowej składowej sił reakcji podłoża generowanych przez jedną stopę (450–820 sygnałów odpowiednio dla $f_s = 1,20 \text{ Hz}$ i $f_s = 2,40 \text{ Hz}$).

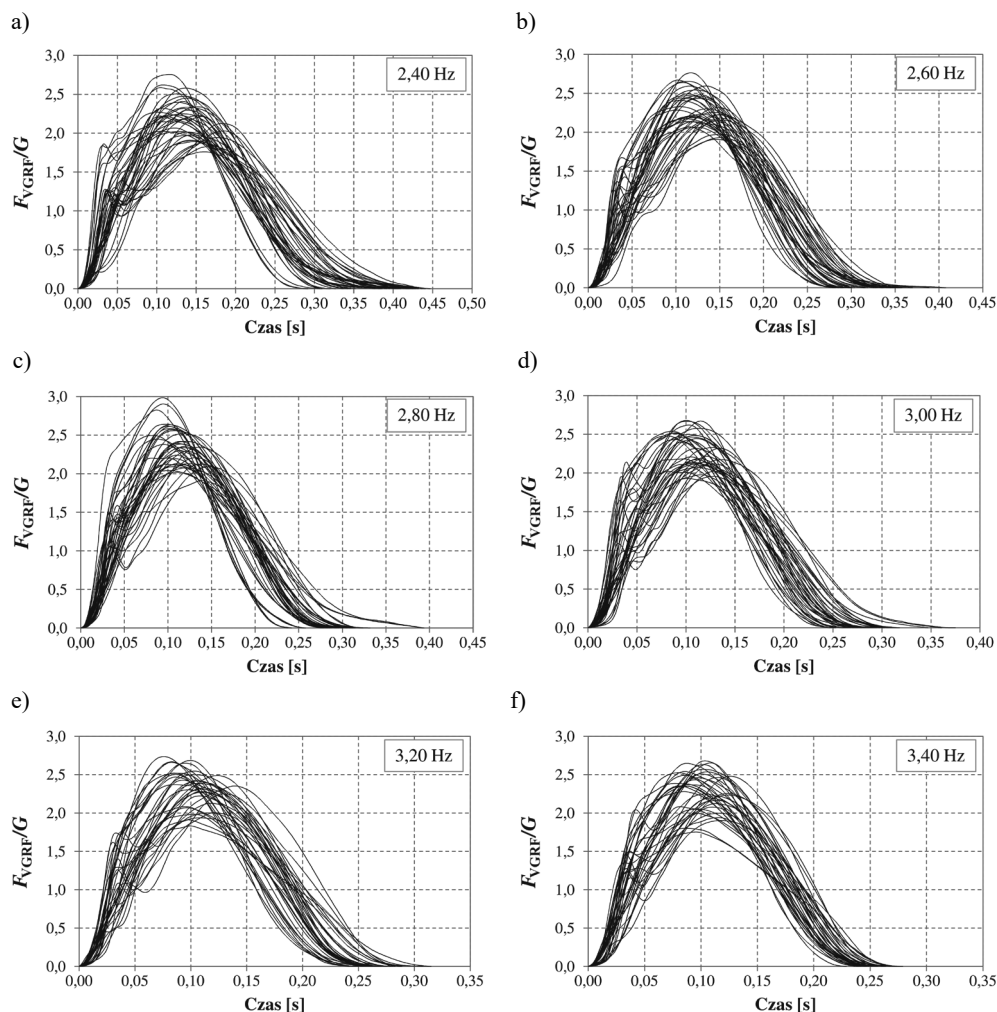
Podczas badań VGRF generowanych w trakcie biegu wykonano 156 rejestracji GRF. Otrzymano zapis 1473 sygnałów pionowej składowej sił reakcji podłoża generowanych przez jedną stopę (415–530 sygnałów odpowiednio dla $f_s = 2,40 \text{ Hz}$ i $f_s = 3,40 \text{ Hz}$).

Przed przystąpieniem do analizy przebiegów VGRF zarejestrowane sygnały poddano filtrowaniu z wykorzystaniem dolnoprzepustowego filtra Butterwortha rzędu 2 z częstotliwością odcięcia 40,0 Hz w celu usunięcia szumów wysokoczęstotliwościowych będących efektem zakłóceń elektromagnetycznych.

Na il. 61–62 przedstawiono przykładowe przebiegi VGRF zarejestrowane dla chodu i biegu w różnych zakresach częstotliwości. Na każdym z wykresów zamieszczono unormowane przebiegi F_{VGRF}/G generowane przez różne osoby (od trzech do pięciu przykładowych przebiegów F_{VGRF}/G zarejestrowanych dla każdego z uczestników badań).



Il. 61. Przykładowe przebiegi F_{VGRF}/G generowane przez różne osoby podczas chodu z częstotliwością kroków w przedziale $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz (wyniki badań własnych)



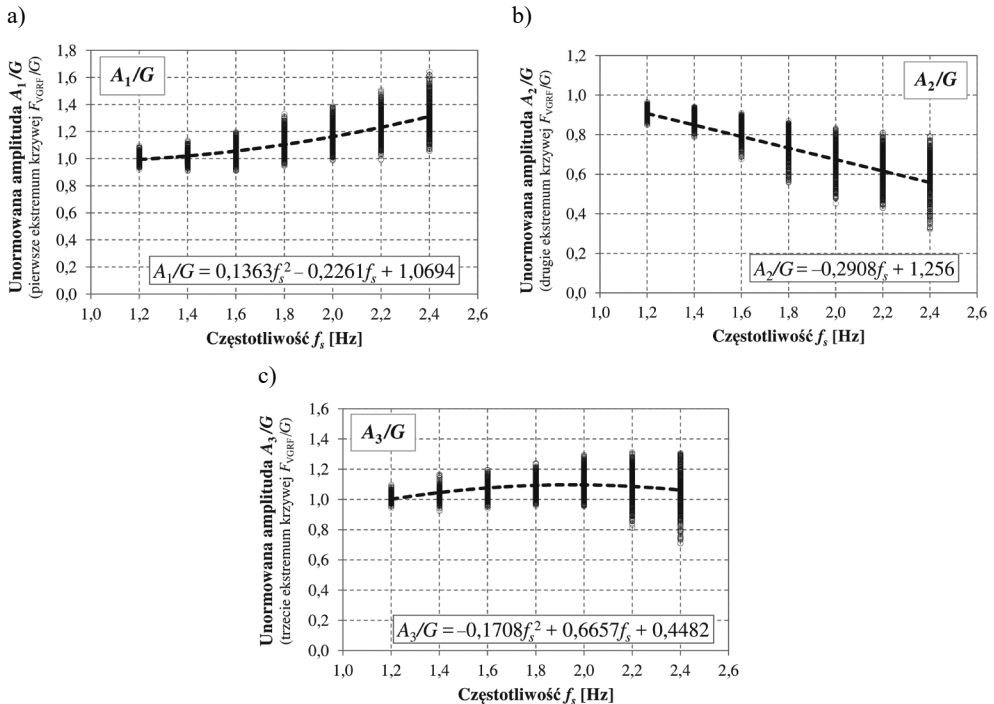
Il. 62. Przykładowe przebiegi F_{VGRF}/G generowane przez różne osoby podczas biegu z częstotliwością kroków w przedziale $f_s = 2,40\text{--}3,40$ Hz (wyniki badań własnych)

4.2.1. Analiza przebiegów VGRF generowanych podczas chodu

Unormowane przebiegi F_{VGRF}/G generowane podczas chodu przez jedną stopę, przypominające kształtem literę M (il. 61), scharakteryzować można kilkoma parametrami: 1) unormowanymi amplitudami lokalnych ekstremów A_1/G , A_2/G , A_3/G , oznaczającymi odpowiednio amplitudę pierwszego wierzchołka krzywej M , amplitudę krzywej M w miejscu jej wgłębienia oraz amplitudę drugiego wierzchołka krzywej M ; 2) unormowaną głębokością wgłębienia krzywej M , wyznaczaną jako różnica amplitud lokalnych ekstremów A_1/G i A_2/G oraz 3) czasem kontaktu stopy z podłożem t_c . Ciągłe przebiegi F_{VGRF}/G , będące sumą

przebiegów generowanych przez pojedyncze stopy, scharakteryzować można za pomocą wartości amplitudy międzyszczytowej (amplitudy pik–pik) mierzonej pomiędzy sąsiadującym ze sobą maksymalną i minimalną amplitudą ciągłych przebiegów F_{VGRF}/G . Lokalizację lokalnych ekstremów A_1/G , A_2/G , A_3/G przebiegów F_{VGRF}/G generowanych przez jedną stopę, sposób ustalania głębokości wglębenia krzywych F_{VGRF}/G generowanych przez jedną stopę oraz sposób ustalania amplitudy międzyszczytowej ciągłych przebiegów F_{VGRF}/G przedstawiono na il. 67. Analizując zmienność wartości tych parametrów, zauważyć można ich zależności od częstotliwości kroków.

Przy częstotliwości kroków $f_s = 1,20$ Hz (bardzo wolny chód) przebieg siły F_{VGRF}/G generowanej przez jedną stopę charakteryzuje się niemal stałą wartością amplitudy w fazie podporu pojedynczego równą ciężarowi osoby idącej ($f_{\text{VGRF}}/G \approx 1,0$, trapezowy wykres czasowego przebiegu F_{VGRF}/G). Wraz ze wzrostem częstotliwości kroków przebiegi F_{VGRF}/G generowane przez jedną stopę zmieniają się w przebiegi dwuwierzchołkowe (krzywa typu M , por. il. 61). Przypomnieć warto, że zmiany wartości amplitud VGRF wynikają z faktu, iż ruch środka ciężkości ciała idącej osoby jest ruchem krzywoliniowym naprzemiennie przyspieszonym i opóźnionym charakteryzującym się zmianami zwrotu wektora przyspieszenia. W związku z tym siły powstające podczas chodu mają naprzemiennie zwrot zgodny lub przeciwny do zwrotu siły ciężkości, co skutkuje odpowiednio zwiększaniem i zmniejszaniem wartości siły reakcji podłoża.



Il. 63. Zmienność unormowanych amplitud F_{VGRF}/G (A_1/G , A_2/G , A_3/G) w funkcji częstotliwości kroków (wyniki badań własnych)

Na il. 63 zobrazowano zmienność unormowanych amplitud A_1/G , A_2/G , A_3/G krzywych F_{VGRF}/G w funkcji częstotliwości kroków wraz z liniami trendu odzwierciedlającymi charakter zmian amplitud. Na prezentowanych wykresach, poza zmianą wartości amplitud, można również zauważyć wzrost rozrzutu analizowanych danych pomiarowych wraz ze wzrostem częstotliwości kroków.

W celu dokładniejszego zobrazowania zmienności przebiegów F_{VGRF}/G w tab. 20 przedstawiono przedziały zmienności wartości lokalnych ekstremów unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G względem poziomu odniesienia $F_{VGRF}/G = 1,0$ (por. il. 67c i d, $\Delta A_1/G = A_1/G - 1,0$; $\Delta A_2/G = A_2/G - 1,0$; $\Delta A_3/G = A_3/G - 1,0$).

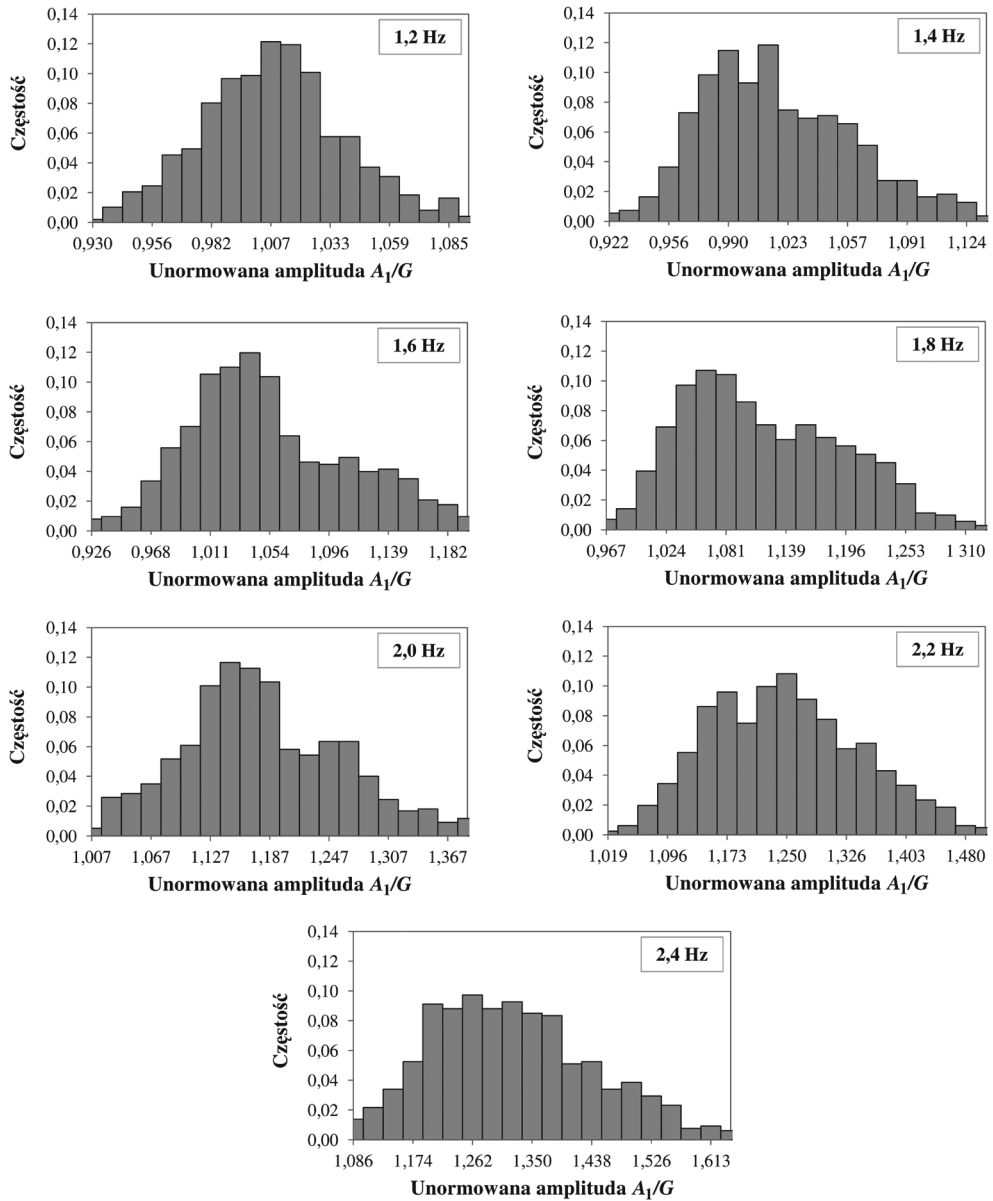
Tabela 20. Przedziały zmienności lokalnych ekstremów unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G względem poziomu odniesienia $F_{VGRF}/G = 1,0$ (wyniki badań własnych)

Częstotliwość [Hz]	$\Delta A_1/G$	$\Delta A_2/G$	$\Delta A_3/G$
1,2	$(-0,065 - +0,085)G$	$(-0,035 - -0,143)G$	$(-0,046 - +0,115)G$
1,4	$(-0,074 - +0,165)G$	$(-0,059 - -0,143)G$	$(-0,054 - +0,169)G$
1,6	$(-0,088 - +0,196)G$	$(-0,097 - -0,311)G$	$(-0,047 - +0,196)G$
1,8	$(-0,052 - +0,282)G$	$(-0,130 - -0,441)G$	$(-0,029 - +0,239)G$
2,0	$(-0,006 - +0,402)G$	$(-0,168 - -0,522)G$	$(-0,045 - +0,295)G$
2,2	$(+0,025 - +0,482)G$	$(-0,189 - -0,571)G$	$(-0,159 - +0,305)G$
2,4	$(+0,057 - +0,620)G$	$(-0,172 - -0,678)G$	$(-0,291 - +0,397)G$

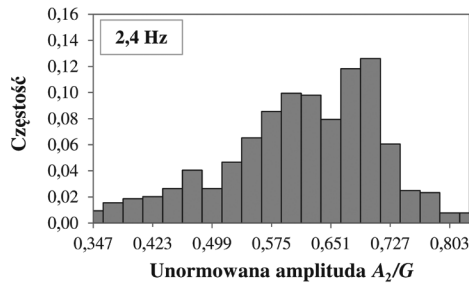
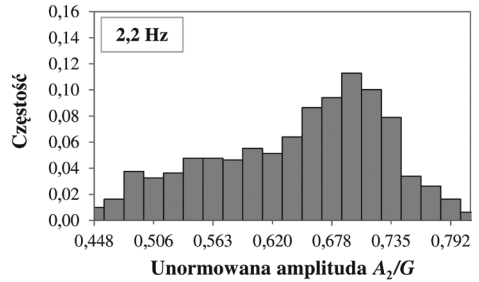
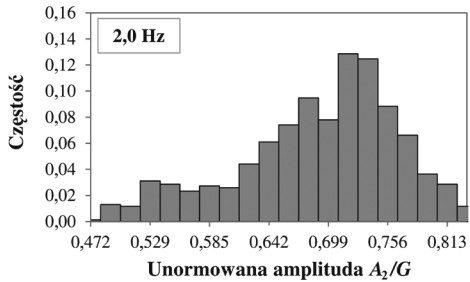
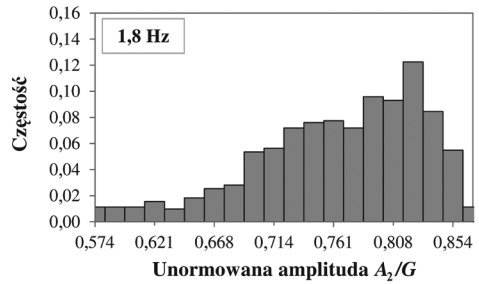
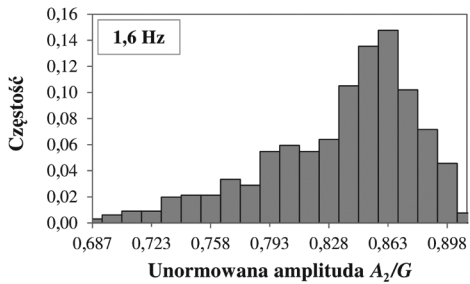
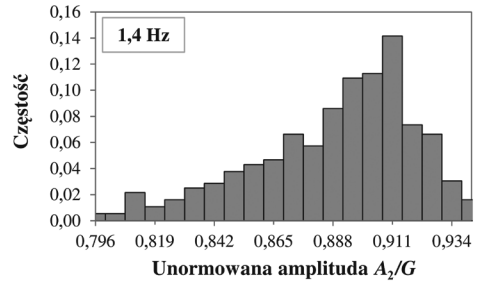
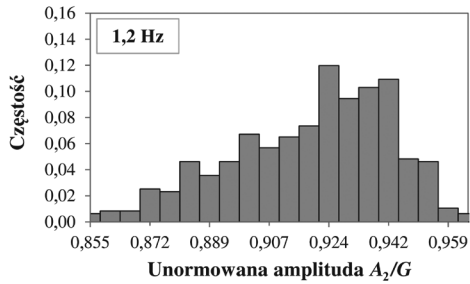
Dodatnia wartość oscylacji lokalnego ekstremum oznacza przyrost wartości amplitudy krzywej M względem poziomu odniesienia (lokalizacja lokalnego ekstremum ponad poziomem odniesienia). Ujemna wartość oscylacji lokalnego ekstremum oznacza redukcję wartości amplitud krzywej M względem poziomu odniesienia (lokalizacja lokalnego ekstremum poniżej poziomu odniesienia).

Na il. 64, 65, 66 przedstawiono histogramy rozkładów empirycznych unormowanych amplitud krzywych F_{VGRF}/G (A_1/G , A_2/G , A_3/G) obrazujące częstość występowania badanego parametru.

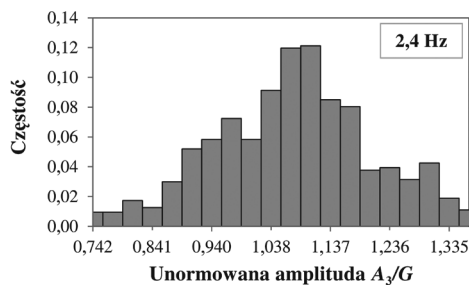
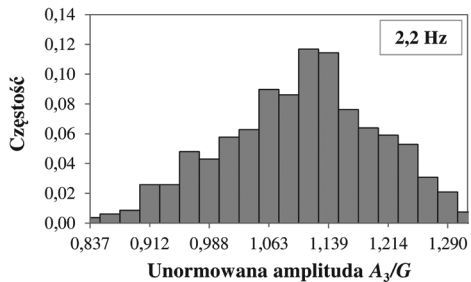
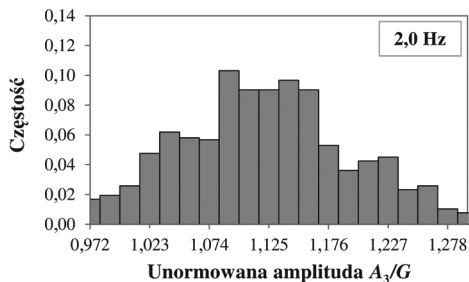
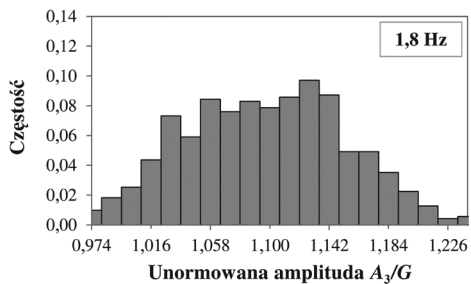
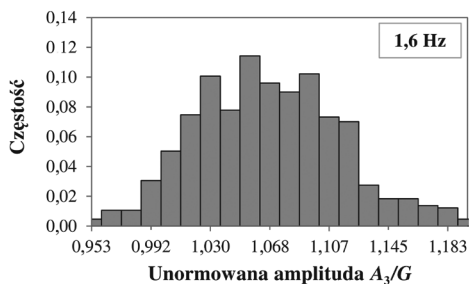
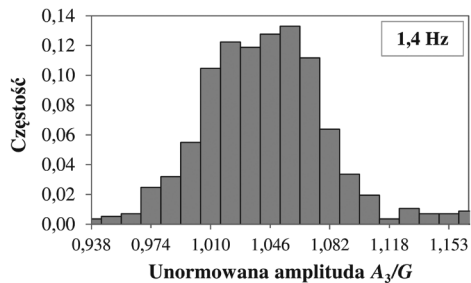
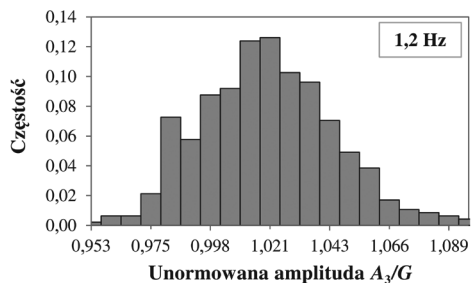
Kolejną zależnością charakteryzującą przebiegi F_{VGRF}/G generowane podczas chodu jest zależność głębokości wgłębienia krzywej F_{VGRF}/G generowanej przez jedną stopę oraz wartości amplitudy międzyszczytowej ciągłej krzywej F_{VGRF}/G od częstotliwości kroków. Analizując przebiegi F_{VGRF}/G generowane przez jedną stopę oraz ciągłe przebiegi F_{VGRF}/G , będące sumą przebiegów generowanych przez pojedyncze stopy, zauważyć można, że wraz ze wzrostem tempa chodu (wzrostem częstotliwości kroków) rośnie wartość głębokości wgłębienia krzywej F_{VGRF}/G oraz wartość amplitudy międzyszczytowej ciągłej krzywej F_{VGRF}/G . Efekty te zobrazowano na il. 67 dla różnych częstotliwości kroków, dla F_{VGRF}/G generowanych przez pojedynczą stopę (il. 67a, c, e) oraz dla ciągłych siły F_{VGRF}/G (il. 67b, d, f).



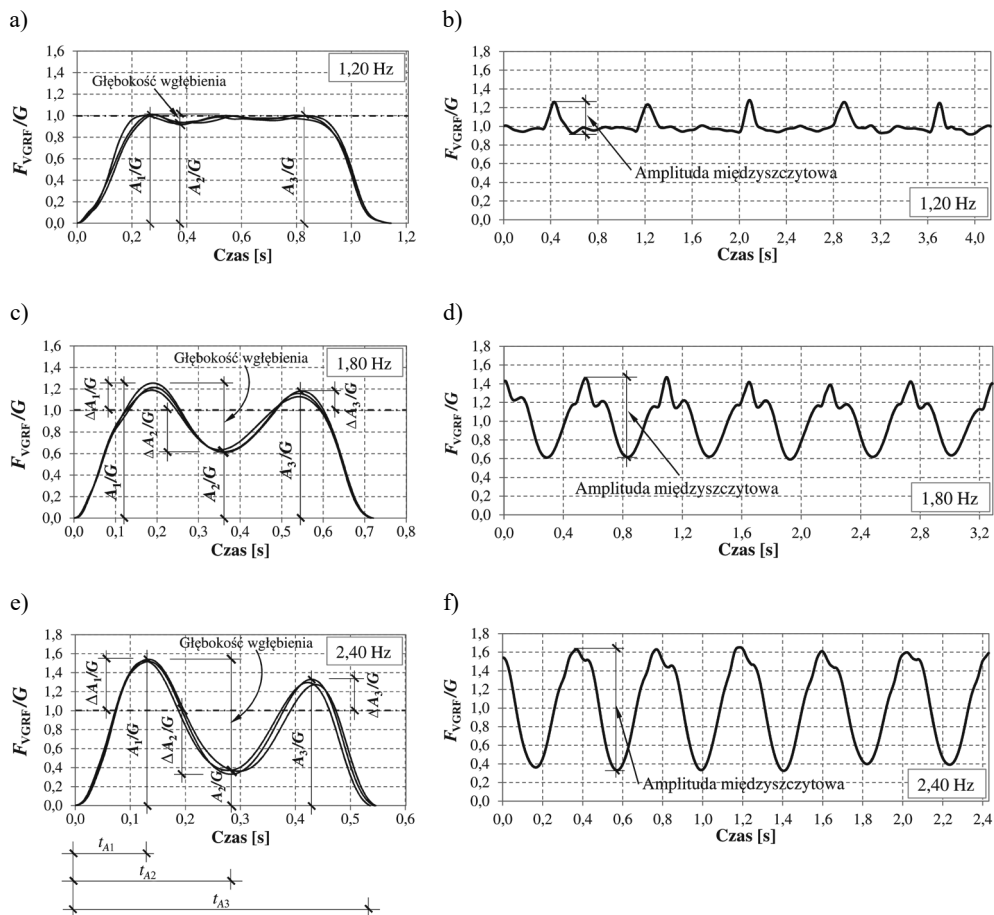
Il. 64. Histogramy rozkładów empirycznych unormowanej amplitudy A_1/G dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz (wyniki badań własnych)



Il. 65. Histogramy rozkładów empirycznych unormowanej amplitudy A_2/G dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20-2,40$ Hz (wyniki badań własnych)



Il. 66. Histogramy rozkładów empirycznych unormowanej amplitudy A_3/G dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20-2,40$ Hz (wyniki badań własnych)

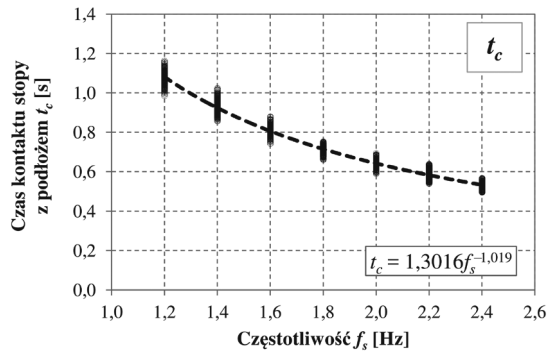


Il. 67. Lokalizacja unormowanych lokalnych ekstremów krzywej F_{VGRF}/G , unormowanej głębokości wgłębienia krzywej F_{VGRF}/G i unormowanej amplitudy międzyszczytowej ciągłej krzywej F_{VGRF}/G : a), c), e) przebiegi F_{VGRF}/G generowane przez pojedynczą stopę; b), d), f) ciągłe przebiegi F_{VGRF}/G

Maksymalne głębokości wgłębienia przebiegów F_{VGRF}/G generowanych przez jedną stopę zarejestrowane podczas badań własnych wyniosły: $0,20G$ dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20$ Hz; $0,32G$ dla $f_s = 1,40$ Hz; $0,48G$ dla $f_s = 1,60$ Hz; $0,70G$ dla $f_s = 1,80$ Hz; $0,90G$ dla $f_s = 2,00$ Hz; $0,93G$ dla $f_s = 2,20$ Hz oraz $1,20G$ dla $f_s = 2,40$ Hz.

Na il. 67b zauważyć można, że w przypadku bardzo wolnego chodu ($f_s \approx 1,20$ Hz) amplituda międzyszczytowa ciągłego przebiegu F_{VGRF}/G jest nieznacząca. Zauważyć można również, iż dynamiczne impulsy siły są krótkotrwałe i oddzielone od siebie stałymi wartościami $F_{VGRF}/G \approx 1,0$ oznaczającymi ciężar osoby idącej ($f_{VGRF} \approx G$). Amplituda międzyszczytowa ciągłych przebiegów F_{VGRF}/G wzrasta wraz ze wzrostem częstotliwości kroków.

Trzecim parametrem charakteryzującym czasowe przebiegi pionowej składowej sił reakcji podłoża generowanej przez jedną stopę jest czas kontaktu stopy z podłożem t_c . Na il. 61 można zauważyć, iż wartość t_c zmniejsza się wraz ze wzrostem częstotliwości kroków. Na il. 68 zobrazowano zmienność wartości t_c w funkcji częstotliwości kroków wraz z linią i równaniem trendu.

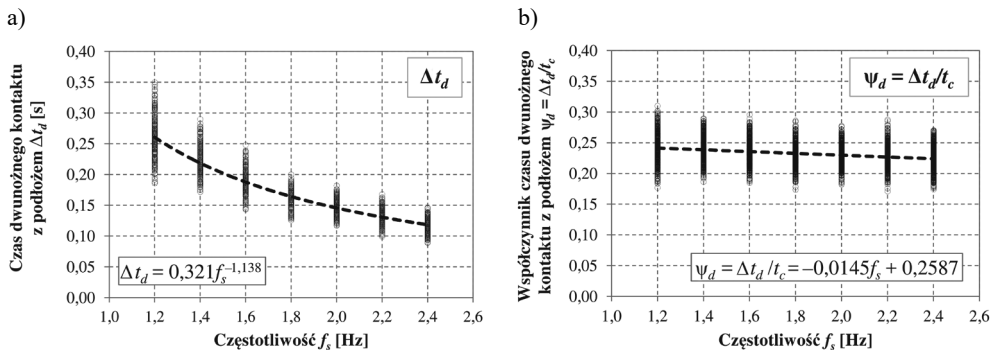


Il. 68. Czas kontaktu stopy z podłożem podczas chodu t_c (wyniki badań własnych)

Na podstawie analizy trendu średnią wartość czasu kontaktu stopy z podłożem wyznaczyć można z odpowiednią dokładnością za pomocą równania (52) (wynik badań własnych):

$$t_{c,m} \approx \frac{1,3}{f_s} \approx 1,3T_s \quad (52)$$

gdzie: $t_{c,m}$ – średnia wartość czasu kontaktu stopy z podłożem podczas chodu [s], f_s – częstotliwość kroków podczas chodu [Hz], T_s – okres kroków podczas chodu [s].



Il. 69. Parametry charakteryzujące fazę kontaktu dwunożnego: a) czas dwunożnego kontaktu pieszego z podłożem Δt_d , b) współczynnik czasu dwunożnego kontaktu pieszego z podłożem $\psi_d = \Delta t_d / t_c$ (wyniki badań własnych)

Na podstawie analizy przebiegów VGRF zarejestrowanych podczas badań laboratoryjnych z uwzględnieniem faz jedno- i dwunożnego kontaktu pieszego z podłożem wyodrębniono również dwa dodatkowe parametry charakteryzujące oddziaływania pieszych na podłoże, są to: czas dwunożnego kontaktu pieszego z podłożem Δt_d oraz współczynnik czasu dwunożnego kontaktu pieszego z podłożem $\psi_d = \Delta t_d/t_c$. Zmienność tych parametrów zobrazowano na il. 69.

Zauważyć można, iż zmienność współczynnika czasu dwunożnego kontaktu z podłożem ψ_d w funkcji częstotliwości kroków jest nieznaczna. W przybliżeniu przyjmując stałą wartość $\psi_{d,m} \approx 0,2326$ odpowiadającą średniej wartości współczynnika ψ_d w przedziale częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz. W celach porównawczych wyznaczyć można odwrotność średniej wartości współczynnika ψ_d równą: $1/\psi_{d,m} = t_{c,m}/\Delta t_{d,m} \approx 4,30$. Wynik ten jest zgodny z wynikami prezentowanymi w pracy [60] oraz wnioskami przedstawionymi w pracy [117]. Potwierdza to zbieżność wyników badań własnych z wynikami niezależnych badań innych autorów. Na podstawie otrzymanego wyniku zapisać można równania (53) i (54). Końcowy wynik wykonanych przekształceń jest zgodny z wynikiem opisanym równaniem (52).

$$\frac{t_{c,m}}{\Delta t_{d,m}} \approx 4,30 \quad \rightarrow \quad \Delta t_{d,m} \approx 0,2326 t_{c,m} \quad (53)$$

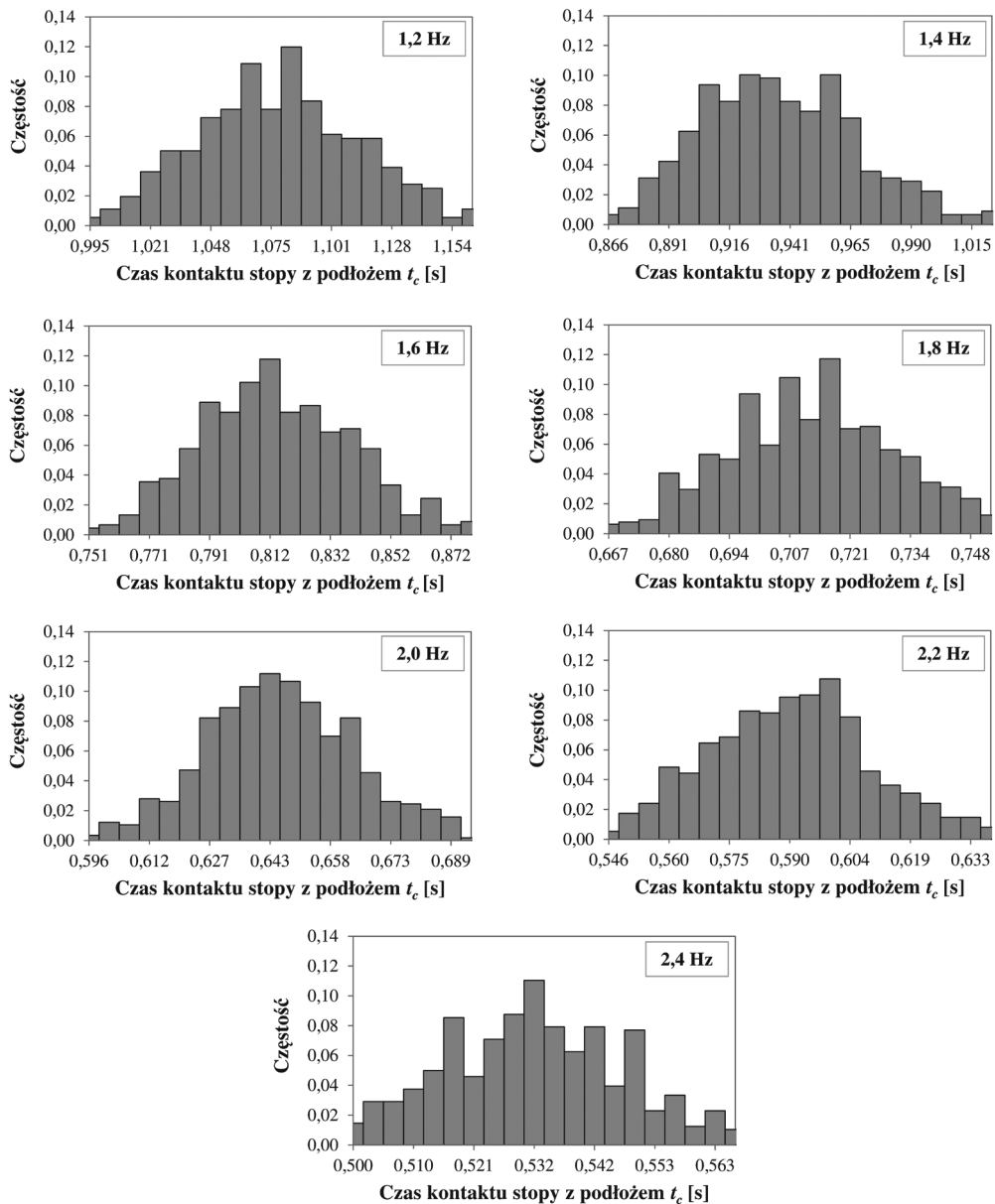
$$T_s = t_{c,m} - \Delta t_{d,m} \approx t_{c,m} - 0,2326 t_{c,m} \approx 0,7674 t_{c,m} \quad \rightarrow \quad t_{c,m} \approx 1,3 T_s \quad (54)$$

Na il. 70, 71 i 72 przedstawiono histogramy rozkładów empirycznych czasu kontaktu stopy z podłożem t_c , czasu dwunożnego kontaktu pieszego z podłożem Δt_d oraz współczynnika czasu dwunożnego kontaktu pieszego z podłożem ψ_d dające pełniejszy obraz rozkładu wartości badanych parametrów.

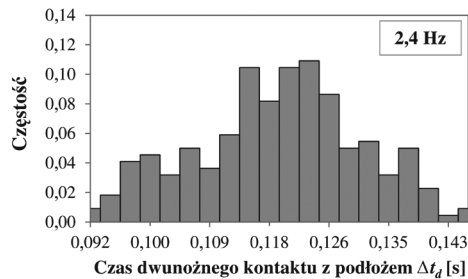
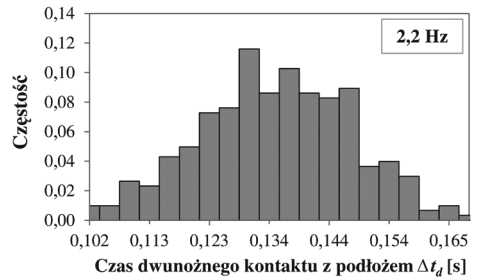
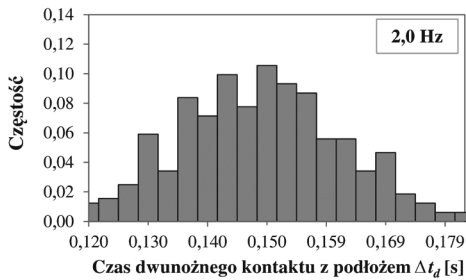
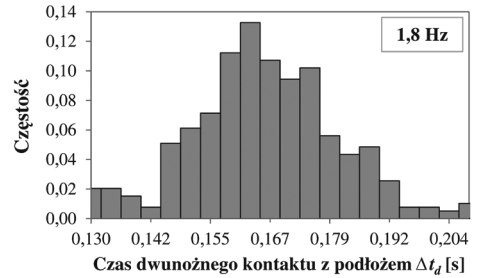
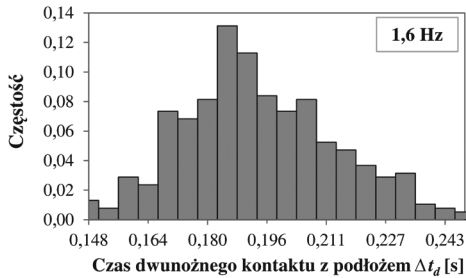
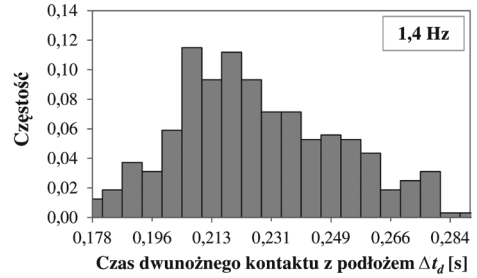
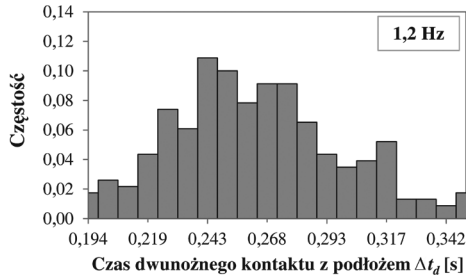
Kolejnymi parametrami charakteryzującymi przebiegi VGRF są czasy występowania lokalnych ekstremów tych przebiegów A_1/G , A_2/G , A_3/G . Parametry te oznaczono jako: t_{A_1} – czas występowania unormowanej amplitudy A_1/G , t_{A_2} – czas występowania unormowanej amplitudy A_2/G , t_{A_3} – czas występowania unormowanej amplitudy A_3/G . Na il. 73–76 zaprezentowano odpowiednio zmienność czasów występowania lokalnych ekstremów t_{A_1} , t_{A_2} , t_{A_3} w funkcji częstotliwości kroków wraz z liniami i równaniami trendu oraz histogramy rozkładów empirycznych tych parametrów.

Dalsze kroki analizy objęły badania zmienności i rozkładów empirycznych stosunków unormowanych amplitud $(A_2/G)/(A_1/G)$ i $(A_3/G)/(A_1/G)$ (il. 77 i 78) oraz badania współzależności między amplitudami A_1/G , A_2/G i A_1/G , A_3/G (analiza siły korelacji i jej istotności statystycznej).

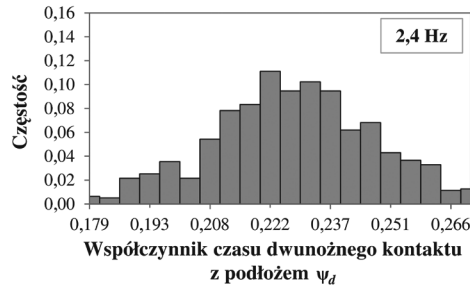
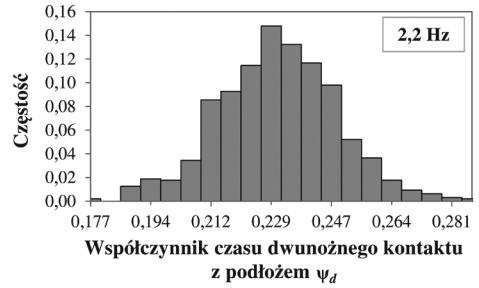
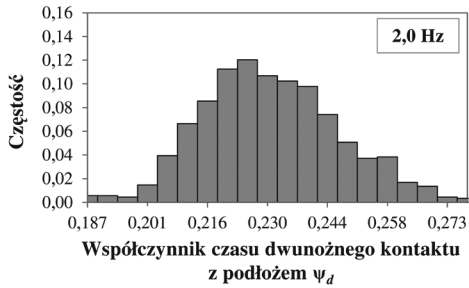
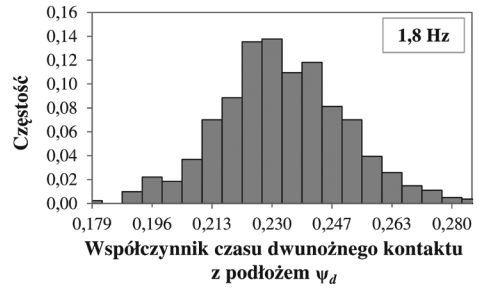
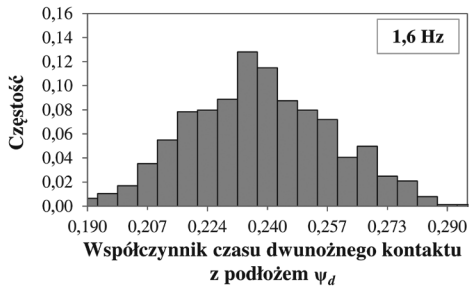
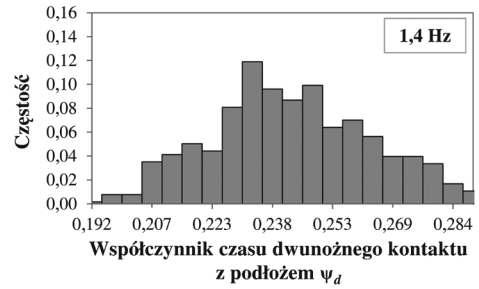
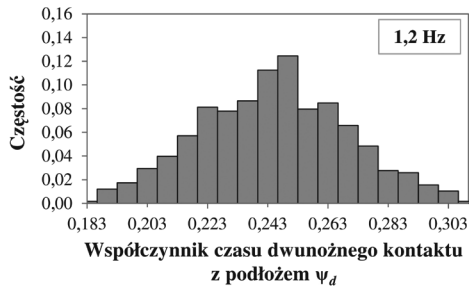
Badania ilorazów i korelacji zmiennych A_1/G i A_2/G oraz A_1/G i A_3/G wykonano na zbiorach danych zawierających pary zmiennych wyodrębnione z zarejestrowanych przebiegów F_{VGRF}/G niezależnie dla każdego z uczestników badań. Każda z analizowanych par zmiennych A_1/G i A_2/G oraz A_1/G i A_3/G pochodziła z tego samego przebiegu F_{VGRF}/G .



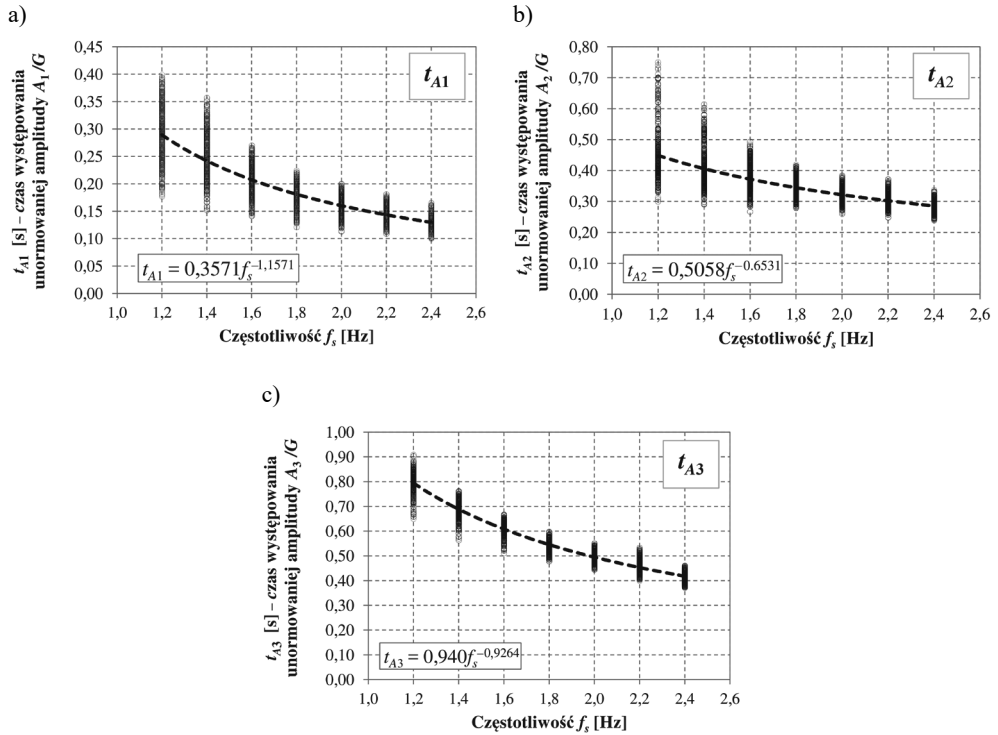
Il. 70. Histogramy rozkładów empirycznych czasu kontaktu stopy z podłożem t_c dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz (wyniki badań własnych)



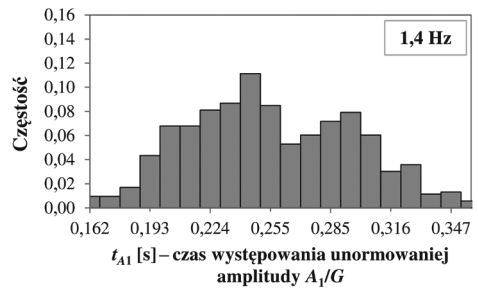
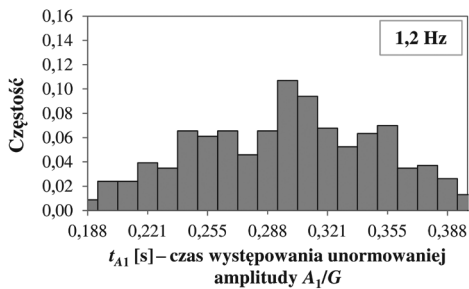
Il. 71. Histogramy rozkładów empirycznych czasu dwunożnego kontaktu pieszego z podłożem Δt_d dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz (wyniki badań własnych)

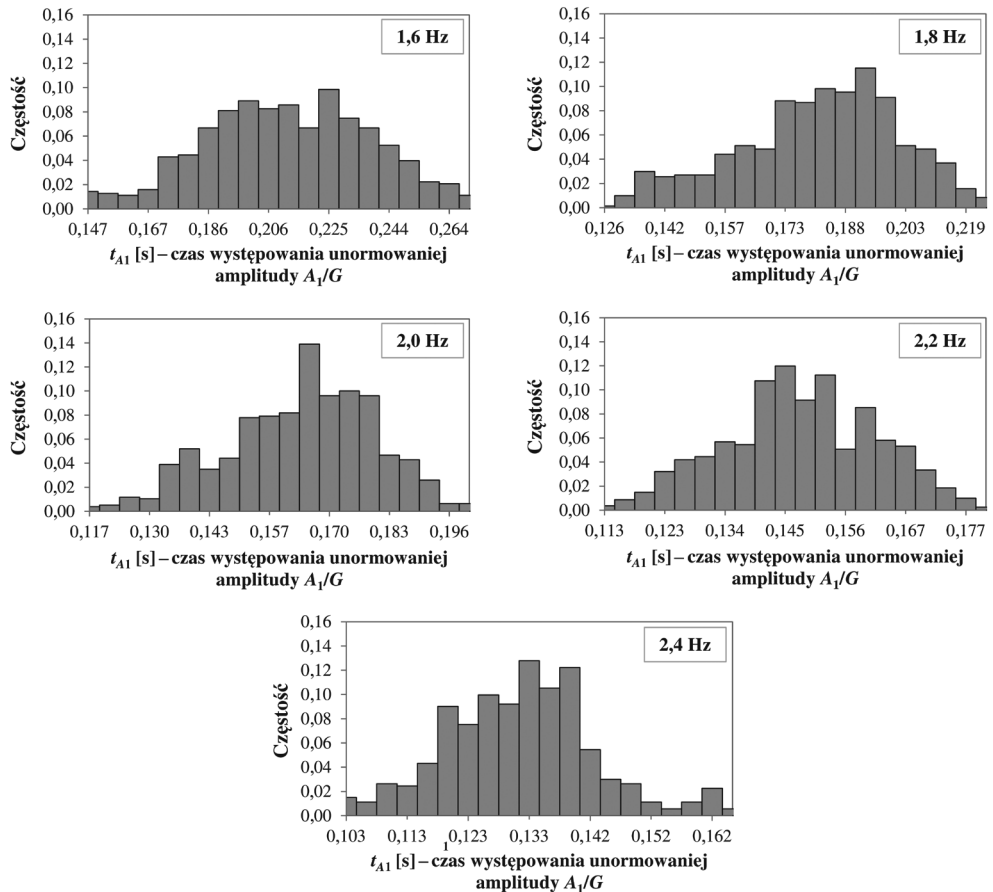


II. 72. Histogramy rozkładów empirycznych współczynnika czasu dwunożnego kontaktu pieszego z podłożem ψ_d dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz (wyniki badań własnych)

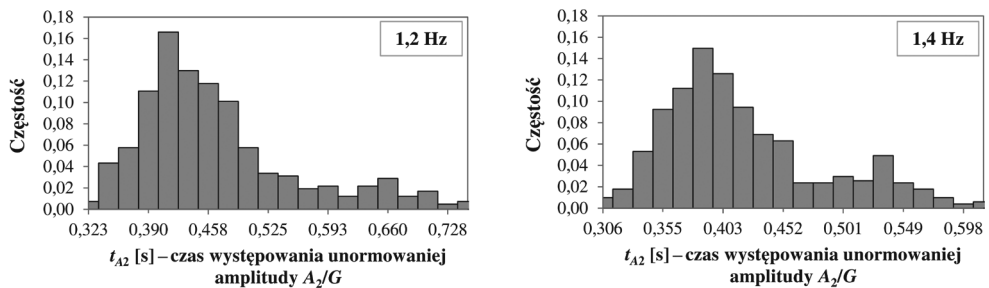


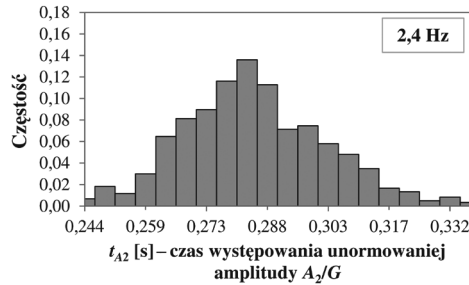
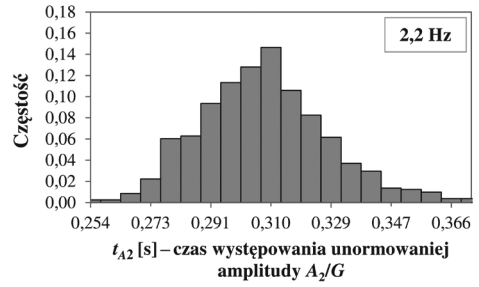
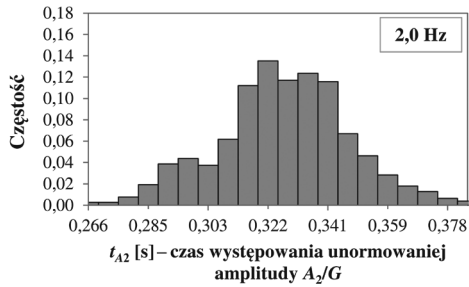
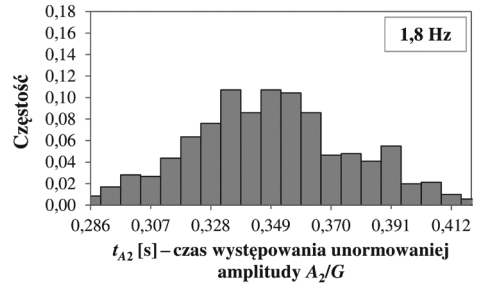
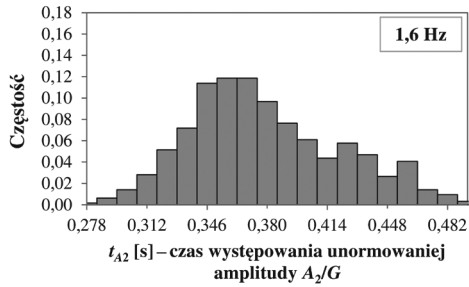
Il. 73. Czasy występowania unormowanych amplitud A_1/G , A_2/G , A_3/G dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20-2,40$ Hz: a) t_{A1} – czas występowania unormowanej amplitudy A_1/G , b) t_{A2} – czas występowania unormowanej amplitudy A_2/G , c) t_{A3} – czas występowania unormowanej amplitudy A_3/G (wyniki badań własnych)



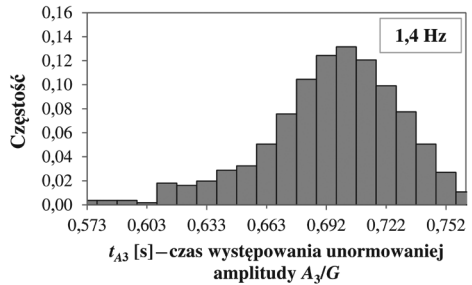
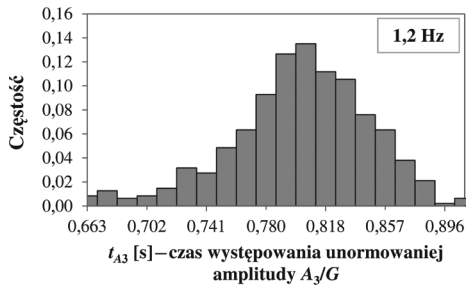


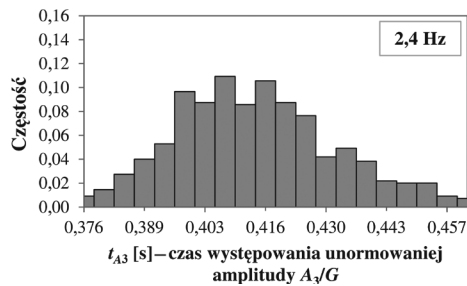
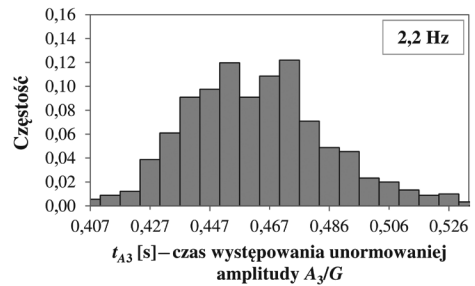
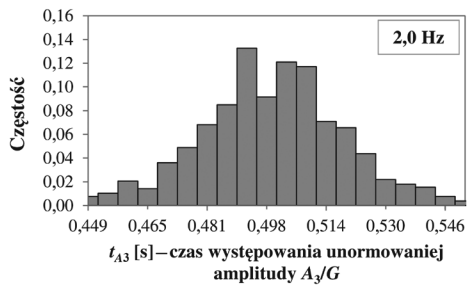
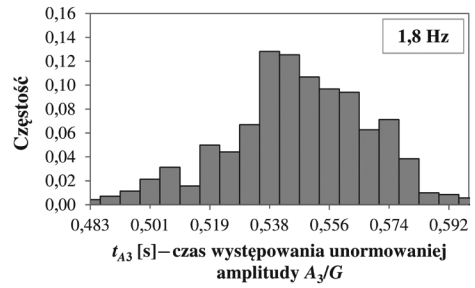
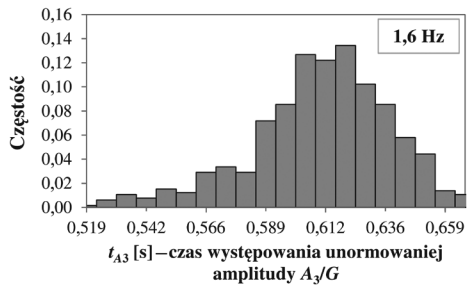
Il. 74. Histogramy rozkładów empirycznych czasu występowania unormowanej amplitudy A_1/G dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz (wyniki badań własnych)



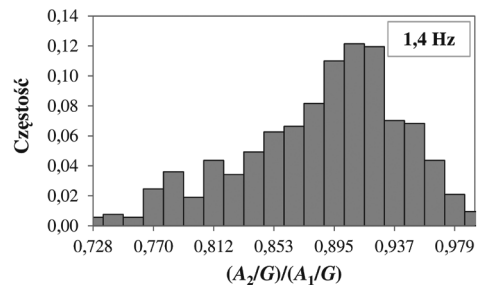
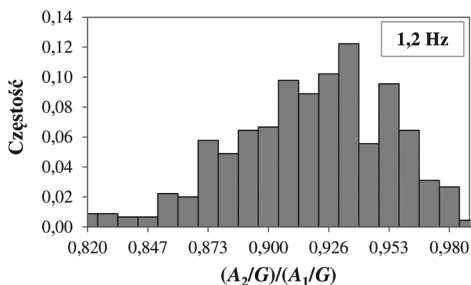


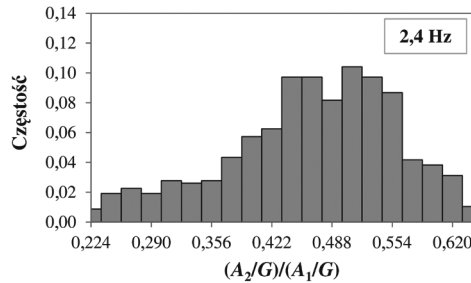
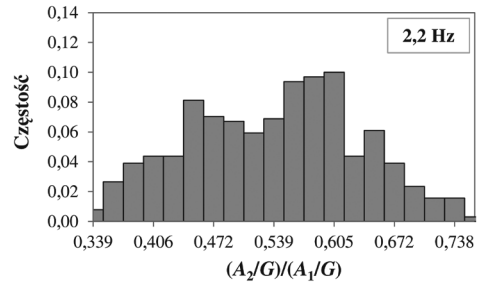
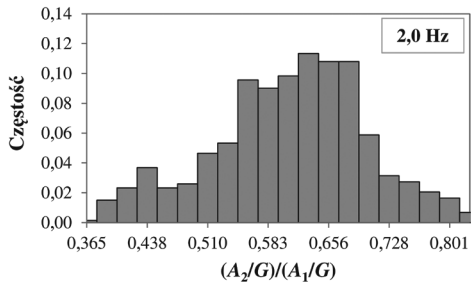
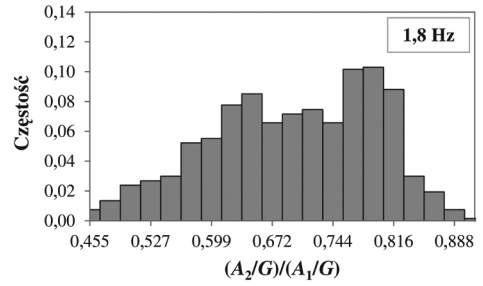
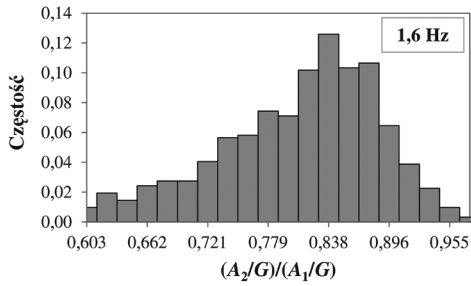
Il. 75. Histogramy rozkładów empirycznych czasu występowania unormowanej amplitudy A_2/G dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz (wyniki badań własnych)



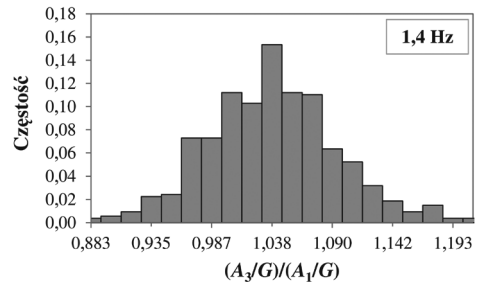
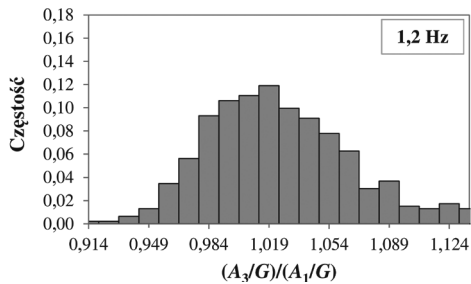


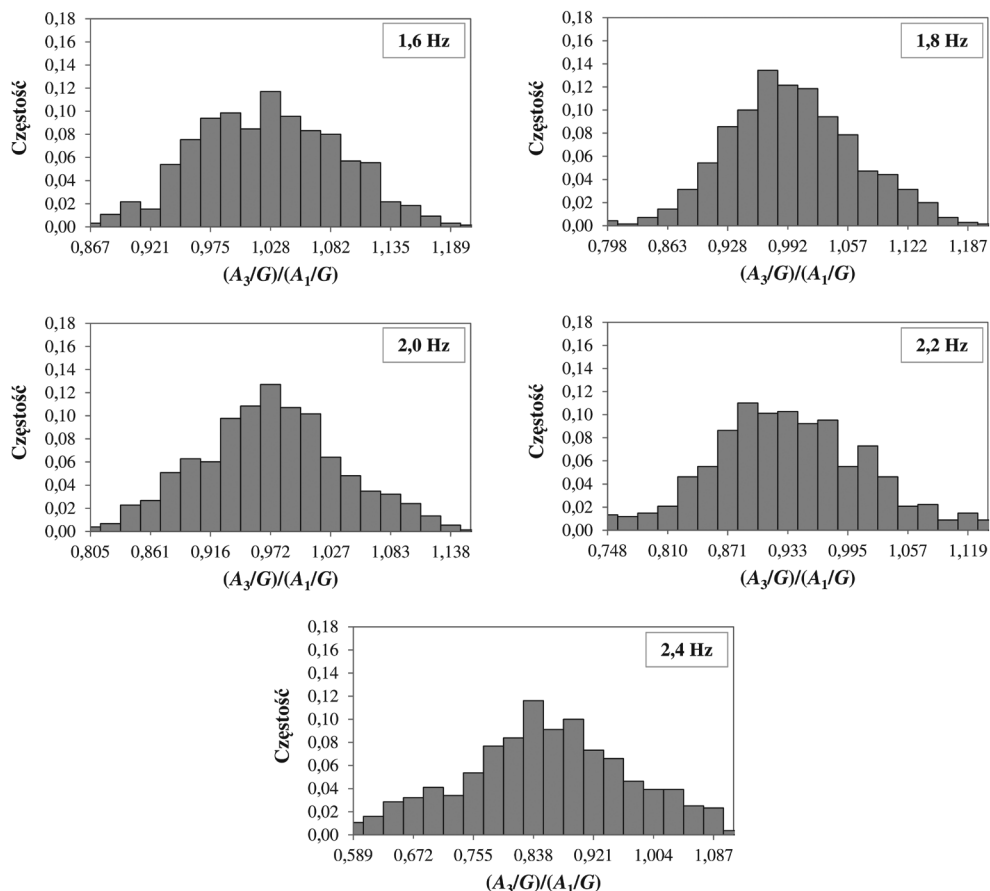
II. 76. Histogramy rozkładów empirycznych czasu występowania unormowanej amplitudy A_3/G dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20-2,40$ Hz (wyniki badań własnych)





II. 77. Histogramy rozkładów empirycznych stosunków unormowanych amplitud $(A_2/G)/(A_1/G)$ dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20-2,40$ Hz (wyniki badań własnych)





Il. 78. Histogramy rozkładów empirycznych stosunków unormowanych amplitud $(A_3/G)/(A_1/G)$ dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz (wyniki badań własnych)

Analizując wyniki przedstawione na il. 77 obrazującym stosunek unormowanych amplitud $(A_2/G)/(A_1/G)$, zauważyć można, iż wraz ze wzrostem częstotliwości kroków maleje wartość ilorazu amplitud. Dla częstotliwości kroków $f_s = 2,40$ Hz stosunek amplitud $(A_2/G)/(A_1/G)$ o największej częstości występowania znajduje się w przedziale wartości około dwukrotnie mniejszych od wartości $(A_2/G)/(A_1/G)$ odznaczających się największą częstością występowania dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20$ Hz. Efekt ten jest w dużej mierze skutkiem wzrostu amplitudy A_1/G oraz zmniejszania się wartości amplitudy A_2/G wraz ze wzrostem częstotliwości kroków. Dalsze analizy korelacji zmiennych A_1/G i A_2/G wskazały na duży stopień współwystępowania amplitud A_1/G o dużych wartościach z amplitudami A_2/G o małych wartościach.

Analiza korelacji amplitud A_1/G i A_2/G wskazuje na ujemną (negatywną) liniową zależność korelacyjną między tymi zmiennymi oznaczającą, iż amplitudy A_1/G o dużych wartościach często współwystępują z amplitudami A_2/G o wartościach

małych (wartości amplitud A_1/G i A_2/G zmieniają się przeciwstawnie do siebie). Liniowa korelacja ujemna dominowała w pełnym zakresie częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz. Stwierdzono, że siła korelacji amplitud A_1/G i A_2/G wzrasta wraz ze wzrostem częstotliwości kroków. Siła tej korelacji w przedziale częstotliwości kroków $f_s = 1,60\text{--}2,40$ Hz (normalne i szybkie tempo chodu) jest umiarkowana do silnej z przewagą wyników statystycznie istotnych o korelacji silnej (współczynnik korelacji badanych zmiennych $|r| = 0,42\text{--}0,88$). W przypadku wolnego tempa chodu (częstotliwości kroków $f_s = 1,20$ Hz i $f_s = 1,40$ Hz) korelacja amplitud A_1/G i A_2/G pozostawała ujemna, jednak była to zależność bardzo słaba do umiarkowanej. Współczynnik korelacji badanych zmiennych mieścił się w przedziale $|r| = 0,05\text{--}0,72$, z przewagą wyników w przedziale $|r| = 0,10\text{--}0,45$ obejmującą 90% i 80% wyników odpowiednio dla częstotliwości kroków $f_s = 1,20$ Hz i $f_s = 1,40$ Hz. Słaba korelacja amplitud A_1/G i A_2/G oznacza stosunkowo duże rozproszenie wartości amplitudy A_2/G wokół linii regresji w przedziałach wartości przedstawionych na il. 65.

Analizując histogramy ilorazu unormowanych amplitud $(A_3/G)/(A_1/G)$, zauważyć można, że w przedziale częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}1,60$ Hz ilorazy amplitud o największej częstości występowania osiągają wartości $(A_3/G)/(A_1/G) \approx 1,0$ (tzn. $A_1/G \approx A_3/G$). W przypadku częstotliwości kroków $f_s > 1,60$ Hz ilorazy $(A_3/G)/(A_1/G)$ o największej częstości występowania osiągają wartości $(A_3/G)/(A_1/G) < 1,0$. Oznacza to, że w przypadku $f_s > 1,60$ Hz wartość amplitudy A_3/G (drugi wierzchołek krzywej M) jest najczęściej mniejsza od amplitudy A_1/G (pierwszy wierzchołek krzywej M). Dalsze analizy korelacji zmiennych A_1/G i A_3/G wykazały jednak, że nie istnieje silna zależność korelacyjna (zależność współzmienności) między amplitudami A_1/G i A_3/G .

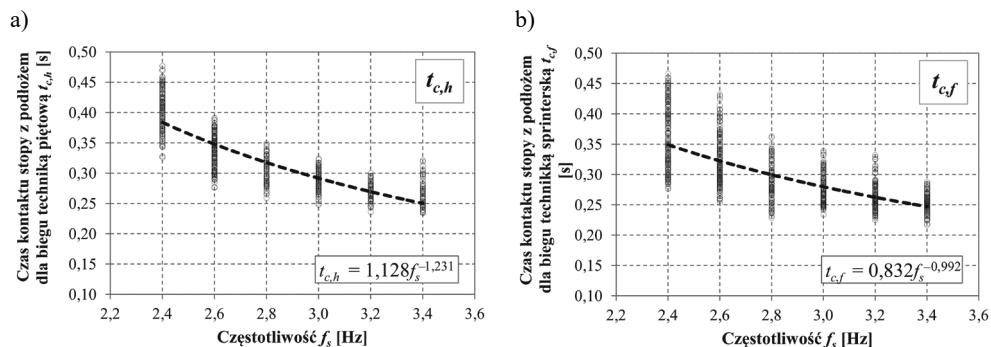
Analizy korelacji amplitud A_1/G i A_3/G w zakresie częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz wykazała, że jest to zależność bardzo słaba do umiarkowanej. Współczynnik korelacji badanych zmiennych mieścił się w przedziale $|r| = 0,01\text{--}0,64$ ze znaczną przewagą wyników w przedziale $|r| = 0,10\text{--}0,30$ (85–95% wyników dla poszczególnych częstotliwości kroków). Analizy kierunku korelacji amplitud A_1/G i A_3/G wykazały następujące prawidłowości: 1) w przypadku częstotliwości kroków $f_s = 1,20$ Hz i $f_s = 1,40$ Hz (wolne tempo chodu) nie zaobserwowano wyraźnego kierunku korelacji (linia regresji o nieznacznym nachyleniu dodatnim lub ujemnym w porównywalnej liczbie przypadków: 47% przypadków o dodatnim nachyleniu linii regresji, 53% przypadków o ujemnym nachyleniu linii regresji); 2) dominacja korelacji dodatniej w przedziale częstotliwości kroków $f_s = 1,60\text{--}2,20$ Hz (normalne i szybkie tempo chodu) oznaczającej, że amplitudy A_1/G o dużych wartościach współwystępują z amplitudami A_3/G o dużych wartościach (wartości amplitud A_1/G i A_3/G zmieniają się zgodnie ze sobą, 75% przypadków o dodatnim nachyleniu linii regresji, 25% przypadków o ujemnym nachyleniu linii regresji), dla częstotliwości kroków $f_s = 2,20$ Hz zaobserwowano zanikanie dominacji korelacji dodatniej (58% przypadków o dodatnim nachyleniu linii regresji, 42% przypadków o ujemnym nachyleniu linii regresji); 3) dominacja korelacji ujemnej w przypadku częstotliwości kroków $f_s = 2,40$ Hz

(bardzo szybkie tempo chodu) oznaczającej, że amplitudy A_1/G o dużych wartościach współwystępują z amplitudami A_3/G o wartościach małych (wartości amplitud A_1/G i A_3/G zmieniają się przeciwstawnie do siebie, 70% przypadków o ujemnym nachyleniu linii regresji, 30% przypadków o dodatnim nachyleniu linii regresji). Należy pamiętać, że siła korelacji amplitud A_1/G i A_3/G jest słaba, co oznacza stosunkowo duże rozproszenie wartości amplitudy A_3/G wokół linii regresji w przedziałach wartości przedstawionych na il. 66.

4.2.2. Analiza przebiegów VGRF generowanych podczas biegu

Na il. 62 przedstawione zostały unormowane czasowe przebiegi F_{VGRF}/G generowane przez osoby biegnące z częstotliwościami kroków $f_s = 2,40\text{--}3,40$ Hz. Uważna analiza wykresów pozwala zauważyć występowanie przebiegów generowanych przez osoby biegnące techniką piętową oraz techniką śródstopno-palcową zwaną także techniką sprinterską (por. rozdział 2.2.3.2, il. 37 i 38). Analizy zarejestrowanych przebiegów wykazały, że technika biegu wywiera wpływ na wartość czasu kontaktu stopy z podłożem oraz amplitudę pionowej składowej sił reakcji podłoża.

W przypadku biegu techniką piętową czas kontaktu stopy z podłożem t_c jest dłuższy niż w przypadku biegu techniką sprinterską. Na il. 79 zobrazowano zmienność wartości czasu kontaktu stopy z podłożem w funkcji częstotliwości kroków dla biegu techniką piętową $t_{c,h}$ (ang. *heel strike running*) i biegu techniką sprinterską $t_{c,f}$ (ang. *forefoot strike running*) wraz z liniami trendu i opisującymi je równaniami.



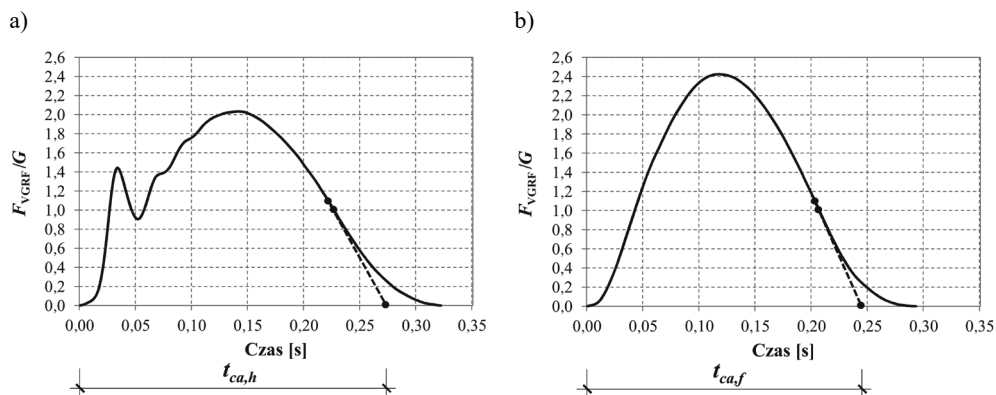
Il. 79. Czas kontaktu stopy z podłożem w funkcji częstotliwości kroków: a) dla biegu techniką piętową $t_{c,h}$, b) dla biegu techniką sprinterską $t_{c,f}$ (wyniki badań własnych)

Zaznaczyć należy, że wartości $t_{c,h}$ i $t_{c,f}$ przedstawione na il. 79 wyznaczone zostały dla rzeczywistych przebiegów pionowej składowej sił reakcji podłoża (przykłady rzeczywistych przebiegów VGRF przedstawiono na il. 62). Wyznaczając wartości $t_{c,h}$ i $t_{c,f}$ uwzględniono występowanie łagodnego zanikania krzywych VGRF w końcowej fazie kontaktu stopy z podłożem. Uwzględniono występowanie prawostronnego „ogona”

krzywej VGRF analogicznego do „ogona” wykresu funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu prawoskośnego. Wyznaczone w ten sposób wartości $t_{c,h}$ i $t_{c,f}$ wykorzystywane będą we własnym modelu pionowej składowej siły reakcji podłoża.

Wykorzystanie wartości $t_{c,h}$ i $t_{c,f}$ przedstawionych na il. 79 jest jednak nieodpowiednie w przypadku odwzorowania przebiegu VGRF za pomocą modelu półsinusoidalnego (zob. rozdział 3.2.2). Model ten pomija występowanie prawostronnego ogona krzywej VGRF. W celu umożliwienia dokładnego odwzorowania przebiegów VGRF za pomocą modelu półsinusoidalnego wyznaczono, wykorzystując wyniki badań własnych, aproksymowane wartości czasów kontaktu z podłożem dla biegu techniką piętową i techniką sprinterską, odpowiednio $t_{ca,h}$ i $t_{ca,f}$, z pominięciem prawostronnego ogona krzywych VGRF.

Na il. 80 przedstawiono sposób wyznaczania aproksymowanej wartości czasów $t_{ca,h}$ i $t_{ca,f}$. Aproksymowane wartości $t_{ca,h}$ i $t_{ca,f}$ wyznaczono, wykorzystując linię prostą przechodzącą przez dwa punkty o rzędnych $F_{VGRF}/G = 1,10$ i $F_{VGRF}/G = 1,0$.

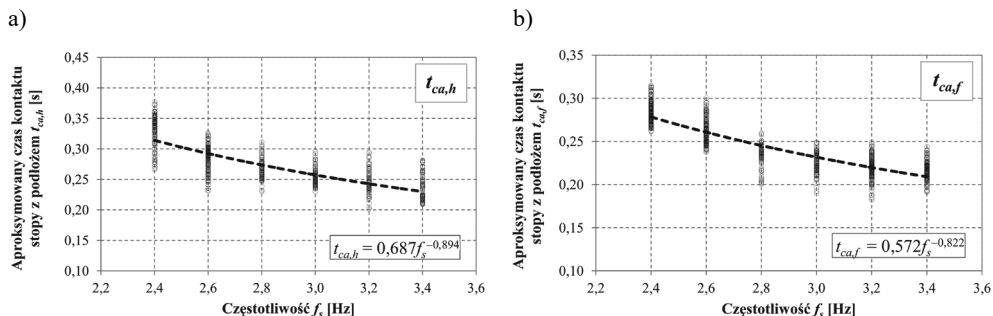


Il. 80. Sposób wyznaczania aproksymowanych czasów kontaktu stopy z podłożem: a) dla biegu techniką piętową $t_{ca,h}$, b) dla biegu techniką sprinterską $t_{ca,f}$ (wyniki badań własnych)

Ilustracja 81 obrazuje zmienność aproksymowanych wartości czasu kontaktu stopy z podłożem w funkcji częstotliwości kroków dla biegu techniką piętową $t_{ca,h}$ i biegu techniką sprinterską $t_{ca,f}$ wraz z liniami trendu i opisującymi je równaniami (trend potęgowy).

Kolejną wielkością zależną od techniki biegu jest wartość amplitudy siły F_{VGRF}/G . Analizując przebiegi F_{VGRF}/G zarejestrowane dla różnych technik biegu, zauważyć można, że w przypadku biegu techniką piętową amplituda F_{VGRF}/G jest mniejsza od amplitudy F_{VGRF}/G powstającej podczas biegu techniką sprinterską. Analizy histogramów empirycznych rozkładów częstości występowania amplitud F_{VGRF}/G wykazały, że w przypadku biegu techniką piętową amplitudy F_{VGRF}/G mieszczą się najczęściej w przedziale $(1,90-2,30)G$, natomiast w przypadku biegu techniką sprinterską amplitudy zawierają się zwykle w przedziale $(2,40-2,60)G$ (G – ciężar osoby biegnącej).

Przypomnieć warto, że według badań przedstawionych w pracach [5, 77, 113] bieg techniką piętową jest najczęściej występującą techniką biegu wykorzystywaną przez 75–95% osób biegających rekreacyjnie (jogging) i osób uprawiających biegi długodystansowe (uczestnicy maratonów). Fakt ten uwzględnić można w analizach dynamicznych konstrukcji w przypadku rozpatrywania oddziaływania dynamicznego grup biegnących osób.



Il. 81. Aproksymowane czasy kontaktu stopy z podłożem w funkcji częstotliwości kroków:

a) dla biegu techniką piętową $t_{ca,h}$, b) dla biegu techniką sprinterską $t_{ca,f}$ (wyniki badań własnych)

Analiza korelacji amplitudy siły F_{VGRF}/G i czasu kontaktu stopy z podłożem wykazała silną korelację ujemną między tymi zmiennymi (współczynnik korelacji $|r| = 0,65–0,83$) oznaczającą, że wzrost wartości jednej zmiennej pociąga za sobą spadek wartości drugiej zmiennej i odwrotnie. Innymi słowy, zależność między amplitudą VGRF i czasem kontaktu stopy z podłożem jest zależnością odwrotnie proporcjonalną. Wydłużenie czasu kontaktu stopy z podłożem podczas biegu techniką piętową prowadzi do zmniejszenia wartości amplitudy VGRF. Skrócenie czasu kontaktu stopy z podłożem podczas biegu techniką sprinterską prowadzi do wzrostu amplitudy VGRF.

4.3. Własne modele obciążeń VGRF

W rozdziale tym przedstawiono własne propozycje sposobu modelowania unormowanej pionowej składowej sił reakcji podłoża (F_{VGRF}/G) generowanej podczas chodu i biegu.

Głównym założeniem przyjętej metodyki modelowania przebiegów VGRF było odwzorowanie pojedynczych impulsów VGRF generowanych podczas określonej aktywności ruchowej. W przypadku chodu i biegu odwzorowano impulsy siły generowane podczas kontaktu stopy z podłożem. Podejście takie pozwala odwzorować przebiegi czasowe obciążenia dynamicznego generowane przez dowolną liczbę użytkowników przebywających na konstrukcji. W przypadku modelowania oddziaływań

generowanych podczas chodu odwzorowanie siły reakcji podłoża generowanej przez stopę, poza możliwością uwzględnienia dowolnej liczby użytkowników przemieszczających się po konstrukcji, pozwala także uwzględnić losowość parametrów VGRF takich jak: czas pojawienia się i czas działania obciążenia (czas kontaktu stopy z podłożem), wartość obciążenia (losową zmienność czasowego przebiegu obciążenia) oraz miejsce działania obciążenia. Zaproponowany sposób odwzorowania sił generowanych podczas chodu ma charakter bardziej uniwersalny od metody polegającej na wykorzystaniu ciągłej siły VGRF odznaczającej się ograniczoną możliwością wpływu na wartości losowych parametrów obciążenia.

Własne modele pionowej składowej siły reakcji podłoża opracowano, wykorzystując dwie metody odwzorowania czasowych przebiegów VGRF: 1) interpolacja przebiegu VGRF za pomocą funkcji sklepanych 3 stopnia z kontrolą kształtu (interpolacja za pomocą splajnów kubicznych zachowujących kształt przebiegu, ang. *piecewise shape-preserving cubic interpolation*) oraz 2) odwzorowanie przebiegu VGRF za pomocą funkcji Gaussa (superpozycja pięciu krzywych Gaussa o określonych parametrach zależnych od częstotliwości ruchu).

Pierwszą z metod (interpolacja przebiegu VGRF za pomocą funkcji splajn z kontrolą kształtu) opracowano w celu odwzorowania VGRF generowanych podczas chodu i biegu. Drugą metodę, polegającą na odwzorowaniu przebiegów VGRF za pomocą funkcji Gaussa, opracowano jako alternatywną metodę odwzorowania VGRF generowanych podczas biegu techniką piętową.

Zaproponowaną metodykę modelowania czasowych przebiegów VGRF, opartą na interpolacji przebiegów za pomocą funkcji splajn, zrealizowano poprzez wyznaczenie położenia charakterystycznych punktów (węzłów interpolacji) w obrębie analizowanych przebiegów VGRF. Analizie poddano unormowane, przefiltrowane przebiegi pionowej składowej siły reakcji podłoża F_{VGRF}/G (filtr Butterwortha, rząd: 2, częstotliwość odcięcia: 40,0 Hz).

Lokalizację punktów parametryzujących przebiegi F_{VGRF}/G przedstawiono na il. 82 i il. 83. Przyjęto:

- 13 punktów parametryzujących krzywą F_{VGRF}/G generowaną podczas chodu (il. 82),
- 11 punktów parametryzujących krzywą F_{VGRF}/G generowaną podczas biegu techniką piętową (bieg z lądowaniem na pięcie) (il. 83a),
- 10 punktów parametryzujących krzywą F_{VGRF}/G generowaną podczas biegu techniką sprinterską (technika śródstopno-palcowa, bieg z lądowaniem na palcach) (il. 83b).

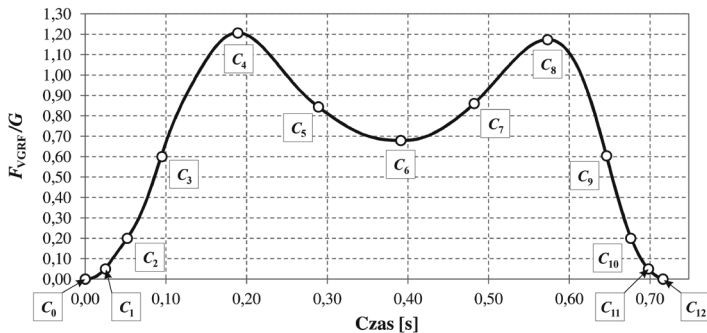
Jak zaznaczono w przedmowie do monografii, znajomość sposobu odwzorowania czasowych przebiegów siły reakcji podłoża generowanych podczas różnych form aktywności człowieka (znajomość obciążenia dynamicznego) ma podstawowe znaczenie w analizach dynamicznych konstrukcji. Zauważyć warto, że zaproponowany sposób odwzorowania przebiegów VGRF za pomocą funkcji sklepanych jest bardzo łatwy do

praktycznej implementacji. Przebiegi VGRF odwzorować można, wykorzystując dostępne programy komputerowe do obliczeń numerycznych i inżynierskich (bezpłatne środowisko obliczeniowo-programistyczne GNU Octave lub komercyjne środowisko obliczeniowo-programistyczne MATLAB itp.). Możliwe jest także opracowanie własnego programu komputerowego. Przykłady programów w języku programowania Python oraz Visual Basic dla Aplikacji (VBA) przedstawiono w dalszej części rozdziału (zob. rozdział 4.3.3).

4.3.1. Modele obciążeń VGRF generowanych podczas chodu

Unormowane czasowe przebiegi pionowej składowej sił reakcji podłoża F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz sparametryzowano za pomocą 13 punktów $C_0\text{--}C_{12}$ których lokalizację przedstawiono na il. 82. Położenie każdego z punktów opisano dwiema współrzędnymi: unormowaną amplitudą siły A_{C_i}/G oraz czasem jej występowania t_{C_i} .

W modelu przyjęto stałe wartości amplitud siły dla punktów $C_0, C_1, C_2, C_3, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ wynoszące odpowiednio: $A_{C_0}/G = A_{C_{12}}/G = 0,00$; $A_{C_1}/G = A_{C_{11}}/G = 0,05$; $A_{C_2}/G = A_{C_{10}}/G = 0,20$; $A_{C_3}/G = A_{C_9}/G = 0,60$. Dla tych punktów wyznaczono, w drodze analizy zarejestrowanych przebiegów F_{VGRF}/G , średnie czasy ich występowania $t_{C_{1,m}}, t_{C_{2,m}}, t_{C_{3,m}}, t_{C_{9,m}}, t_{C_{10,m}}, t_{C_{11,m}}, t_{C_{12,m}}$ i odchylenia standardowe tych wartości od ich średniej ($\pm SD$, ang. *Standard Deviation*). Przyjęto: $t_{C_0} = 0,00$ s oraz $t_{C_{12,m}} = t_c$, t_c – czas kontaktu stopy z podłożem (il. 68 lub równanie (52)).



Il. 82. Lokalizacja punktów parametryzujących czasowy przebieg unormowanej pionowej składowej sił reakcji podłoża F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu (opracowanie własne)

Lokalizację punktów C_4, C_5, C_6, C_7, C_8 opisano za pomocą średnich wartości amplitud siły i czasów ich występowania ($A_{C_{i,m}}/G, t_{C_{i,m}}$, gdzie $i = 4\text{--}8$) oraz odchylen standardowych tych wartości od ich średniej ($\pm SD$). Średnie czasy występowania punktów C_5 i C_7 ($t_{C_{5,m}}, t_{C_{7,m}}$) wyznaczono jako wartości średnie czasów występowania punktów odpowiednio C_4 i C_6 oraz C_6 i C_7 ; $t_{C_{5,m}} = (t_{C_{4,m}} + t_{C_{6,m}})/2$ oraz $t_{C_{7,m}} = (t_{C_{6,m}} + t_{C_{8,m}})/2$.

Wartości współrzędnych punktów parametryzujących przebieg F_{VGRF}/G generowane podczas chodu z częstotliwością kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz podano w tabelach 21–27.

Tabela 21. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością $f_s = 1,20$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 1,20$ Hz	Czas występowania punktu $C_i t_{C_i,m}$ [s] (czas \pm SD)	Unormowana amplituda siły $A_{C_i,m}/G$ [-] w punkcie C_i (wartość stała lub amplituda \pm SD)
C_0	0,00	0,00
C_1	0,020 \pm 0,003	0,05
C_2	0,048 \pm 0,008	0,20
C_3	0,125 \pm 0,020	0,60
C_4	0,281 \pm 0,025	1,007 \pm 0,021
C_5	0,382 \pm 0,034	0,955 \pm 0,011
C_6	0,483 \pm 0,042	0,944 \pm 0,014
C_7	0,652 \pm 0,043	0,964 \pm 0,016
C_8	0,819 \pm 0,046	1,020 \pm 0,019
C_9	0,971 \pm 0,031	0,60
C_{10}	1,031 \pm 0,036	0,20
C_{11}	1,077 \pm 0,035	0,05
C_{12}	1,117 \pm 0,032	0,00

Tabela 22. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością $f_s = 1,40$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 1,40$ Hz	Czas występowania punktu $C_i t_{C_i,m}$ [s] (czas \pm SD)	Unormowana amplituda siły $A_{C_i,m}/G$ [-] w punkcie C_i (wartość stała lub amplituda \pm SD)
C_0	0,00	0,00
C_1	0,021 \pm 0,004	0,05
C_2	0,043 \pm 0,008	0,20
C_3	0,095 \pm 0,014	0,60
C_4	0,221 \pm 0,024	1,017 \pm 0,034
C_5	0,331 \pm 0,032	0,938 \pm 0,015
C_6	0,439 \pm 0,041	0,885 \pm 0,019
C_7	0,576 \pm 0,034	0,946 \pm 0,013
C_8	0,713 \pm 0,023	1,037 \pm 0,027
C_9	0,838 \pm 0,017	0,60
C_{10}	0,887 \pm 0,021	0,20
C_{11}	0,921 \pm 0,021	0,05
C_{12}	0,954 \pm 0,020	0,00

Tabela 23. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością $f_s = 1,60$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 1,60$ Hz	Czas występowania punktu C_i $t_{C_i,m}$ [s] (czas \pm SD)	Unormowana amplituda siły $A_{C_i,m}/G$ [-] w punkcie C_i (wartość stała lub amplituda \pm SD)
C_0	0,00	0,00
C_1	0,020 \pm 0,003	0,05
C_2	0,040 \pm 0,008	0,20
C_3	0,076 \pm 0,012	0,60
C_4	0,188 \pm 0,019	1,051 \pm 0,045
C_5	0,278 \pm 0,021	0,931 \pm 0,017
C_6	0,368 \pm 0,028	0,828 \pm 0,028
C_7	0,502 \pm 0,023	0,932 \pm 0,018
C_8	0,638 \pm 0,019	1,061 \pm 0,037
C_9	0,744 \pm 0,017	0,60
C_{10}	0,785 \pm 0,019	0,20
C_{11}	0,812 \pm 0,019	0,05
C_{12}	0,838 \pm 0,019	0,00

Tabela 24. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością $f_s = 1,80$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 1,80$ Hz	Czas występowania punktu C_i $t_{C_i,m}$ [s] (czas \pm SD)	Unormowana amplituda siły $A_{C_i,m}/G$ [-] w punkcie C_i (wartość stała lub amplituda \pm SD)
C_0	0,00	0,00
C_1	0,013 \pm 0,003	0,05
C_2	0,024 \pm 0,007	0,20
C_3	0,052 \pm 0,009	0,60
C_4	0,150 \pm 0,017	1,174 \pm 0,051
C_5	0,248 \pm 0,016	0,913 \pm 0,022
C_6	0,346 \pm 0,020	0,707 \pm 0,041
C_7	0,454 \pm 0,017	0,891 \pm 0,021
C_8	0,563 \pm 0,016	1,133 \pm 0,037
C_9	0,651 \pm 0,014	0,60
C_{10}	0,683 \pm 0,016	0,20
C_{11}	0,709 \pm 0,016	0,05
C_{12}	0,735 \pm 0,017	0,00

Tabela 25. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością $f_s = 2,00$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 2,00$ Hz	Czas występowania punktu C_i $t_{C_i,m}$ [s] (czas \pm SD)	Unormowana amplituda siły $A_{C_i,m}/G$ [-] w punkcie C_i (wartość stała lub amplituda \pm SD)
C_0	0,00	0,00
C_1	0,013 \pm 0,003	0,05
C_2	0,025 \pm 0,006	0,20
C_3	0,051 \pm 0,010	0,60
C_4	0,148 \pm 0,013	1,176 \pm 0,058
C_5	0,236 \pm 0,011	0,915 \pm 0,024
C_6	0,324 \pm 0,017	0,649 \pm 0,052
C_7	0,426 \pm 0,014	0,868 \pm 0,024
C_8	0,527 \pm 0,015	1,113 \pm 0,053
C_9	0,607 \pm 0,017	0,60
C_{10}	0,639 \pm 0,017	0,20
C_{11}	0,665 \pm 0,017	0,05
C_{12}	0,682 \pm 0,015	0,00

Tabela 26. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością $f_s = 2,20$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 2,20$ Hz	Czas występowania punktu C_i $t_{C_i,m}$ [s] (czas \pm SD)	Unormowana amplituda siły $A_{C_i,m}/G$ [-] w punkcie C_i (wartość stała lub amplituda \pm SD)
C_0	0,00	0,00
C_1	0,015 \pm 0,003	0,05
C_2	0,027 \pm 0,006	0,20
C_3	0,046 \pm 0,010	0,60
C_4	0,125 \pm 0,011	1,281 \pm 0,067
C_5	0,220 \pm 0,012	0,925 \pm 0,031
C_6	0,315 \pm 0,015	0,631 \pm 0,060
C_7	0,400 \pm 0,016	0,843 \pm 0,031
C_8	0,484 \pm 0,016	1,113 \pm 0,075
C_9	0,555 \pm 0,018	0,60
C_{10}	0,586 \pm 0,018	0,20
C_{11}	0,602 \pm 0,017	0,05
C_{12}	0,613 \pm 0,016	0,00

Tabela 27. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością $f_s = 2,40$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 2,40$ Hz	Czas występowania punktu C_i $t_{C_i,m}$ [s] (czas \pm SD)	Unormowana amplituda siły $A_{C_i,m}/G$ [-] w punkcie C_i (wartość stała lub amplituda \pm SD)
C_0	0,00	0,00
C_1	0,013 \pm 0,003	0,05
C_2	0,022 \pm 0,005	0,20
C_3	0,039 \pm 0,008	0,60
C_4	0,115 \pm 0,010	1,407 \pm 0,085
C_5	0,204 \pm 0,009	0,926 \pm 0,039
C_6	0,292 \pm 0,016	0,531 \pm 0,077
C_7	0,366 \pm 0,011	0,815 \pm 0,051
C_8	0,440 \pm 0,015	1,098 \pm 0,102
C_9	0,507 \pm 0,017	0,60
C_{10}	0,538 \pm 0,016	0,20
C_{11}	0,560 \pm 0,014	0,05
C_{12}	0,582 \pm 0,014	0,00

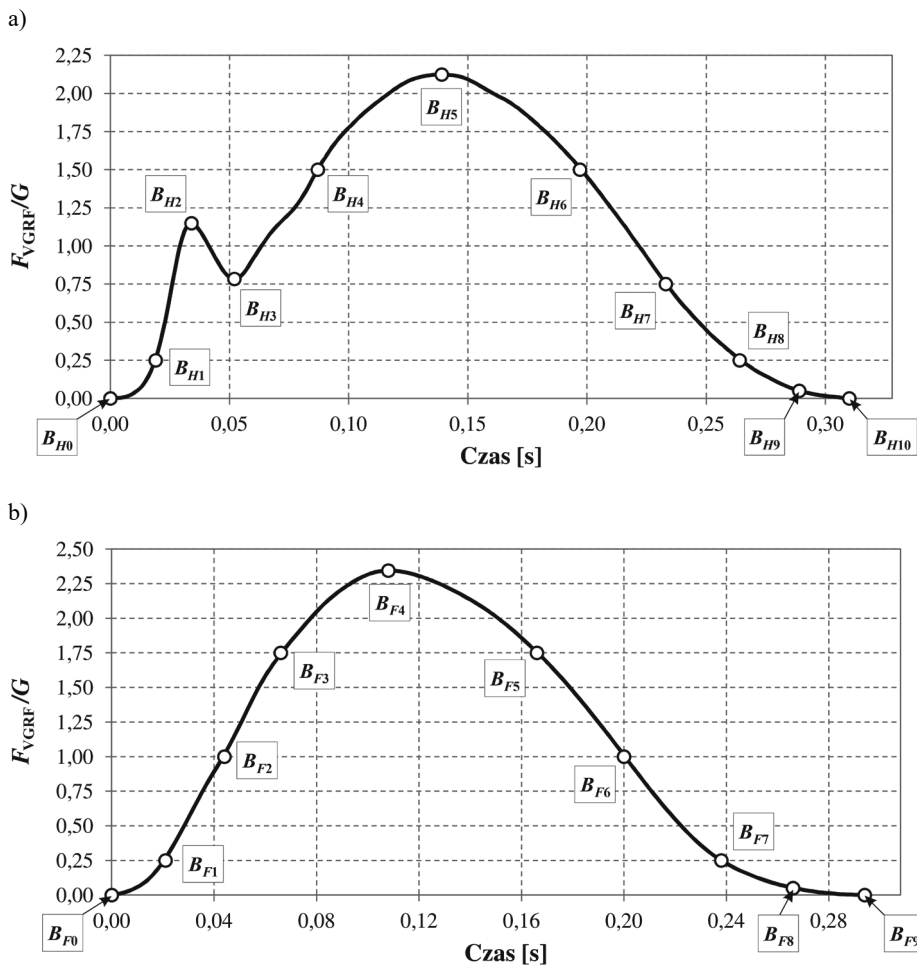
Przebiegi czasowe unormowanej siły F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu, wyznaczone w oparciu o dane prezentowane w tab. 21–27, przedstawiono w rozdziale 4.3.3.

4.3.2. Modele obciążeń VGRF generowanych podczas biegu

W przypadku biegu zaproponowano dwa sposoby modelowania unormowanych czasowych przebiegów F_{VGRF}/G generowanych w przedziale częstotliwości kroków $f_s = 2,40$ – $3,40$ Hz. Zaproponowano: 1) odwzorowanie F_{VGRF}/G generowanych podczas biegu techniką piętową i techniką sprinterską za pomocą interpolacji funkcjami sklejonymi 3 stopnia z kontrolą kształtu oraz 2) odwzorowanie F_{VGRF}/G generowanych podczas biegu techniką piętową za pomocą funkcji Gaussa (superpozycja pięciu funkcji Gaussa).

W celu odwzorowania przebiegów VGRF za pomocą funkcji splajn przebiegi VGRF zarejestrowane dla różnych technik biegu (bieg techniką piętową i bieg techniką sprinterską), charakteryzujące się odmienną geometrią, sparametryzowano różną liczbą punktów. Krzywe F_{VGRF}/G generowane podczas biegu techniką piętową (bieg z lądowaniem na pięcie, ang. *heel strike running*) sparametryzowano za pomocą 11 punktów B_{H0} – B_{H10} . Przebiegi czasowe F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką sprinterską (bieg z lądowaniem na palcach, ang. *forefoot strike running*) sparametryzowano za pomocą 10 punktów B_{F0} – B_{F9} . Lokalizację punktów parametryzujących

krzywe F_{VGRF}/G przedstawiono na il. 83. Położenie każdego z punktów opisano dwiema współrzędnymi: unormowaną amplitudą siły A_{BH_i}/G lub A_{BF_i}/G oraz czasem jej występowania odpowiednio t_{BH_i} lub t_{BF_i} .



Il. 83. Lokalizacja punktów parametryzujących czasowy przebieg unormowanej pionowej składowej sił reakcji podłoża F_{VGRF}/G generowanej podczas: a) biegu techniką piętową, b) biegu techniką sprinterską (bieg z lądowaniem na palcach) (opracowanie własne)

W modelu siły generowanej podczas biegu techniką piętową przyjęto stałe wartości amplitudy siły dla punktów B_{H0} , B_{H1} , B_{H4} , B_{H6} , B_{H7} , B_{H8} , B_{H9} , B_{H10} wynoszące odpowiednio: $A_{BH0}/G = A_{BH10}/G = 0,00$; $A_{BH1}/G = A_{BH8}/G = 0,25$; $A_{BH4}/G = A_{BH6}/G = 1,50$; $A_{BH7}/G = 0,75$; $A_{BH9}/G = 0,05$. Dla tych punktów wyznaczono, w drodze analizy zarejestrowanych przebiegów F_{VGRF}/G , średnie czasy ich występowania $t_{BH1,m}$, $t_{BH4,m}$, $t_{BH6,m}$, $t_{BH7,m}$, $t_{BH8,m}$, $t_{BH9,m}$ i odchylenia standardowe tych wartości od ich średniej ($\pm SD$, ang. *Standard*

Deviation). Lokalizację punktów B_{H2} , B_{H3} , B_{H5} opisano za pomocą średnich wartości amplitud siły i czasów ich występowania ($A_{B_{Hi},m}/G$, $t_{B_{Hi},m}$, gdzie $i = 2, 3, 5$) oraz odchyłeń standardowych tych wartości od ich średniej ($\pm SD$). Przyjęto: $t_{B_{H0}} = 0,00$ s. Wartość $t_{B_{H10},m}$ przyjąć można jako równą $t_{c,h}$ ($t_{B_{H10},m} = t_{c,h}$, $t_{c,h}$ – czas kontaktu stopy z podłożem dla biegu techniką piętową (il. 79a)).

W modelu siły generowanej podczas biegu techniką sprinterską (bieg z lądowaniem na palcach) przyjęto stałe wartości amplitud siły dla punktów B_{F0} , B_{F1} , B_{F2} , B_{F3} , B_{F5} , B_{F6} , B_{F7} , B_{H8} , B_{H9} wynoszące odpowiednio: $A_{B_{F0}}/G = A_{B_{F1}}/G = 0,00$; $A_{B_{F2}}/G = A_{B_{F3}}/G = 0,25$; $A_{B_{F4}}/G = A_{B_{F6}}/G = 1,00$; $A_{B_{F5}}/G = A_{B_{F7}}/G = 1,75$; $A_{B_{F8}}/G = 0,05$. Dla tych punktów wyznaczono, w drodze analizy zarejestrowanych przebiegów F_{VGRF}/G , średnie czasy ich występowania $t_{B_{F1},m}$, $t_{B_{H4},m}$, $t_{B_{H6},m}$, $t_{B_{H7},m}$, $t_{B_{H8},m}$, $t_{B_{H9},m}$ i odchylenia standardowe tych wartości od ich średniej ($\pm SD$). Lokalizację punktu B_{F4} opisano za pomocą średniej wartości amplitudy siły i czasu jej występowania ($A_{B_{F4},m}/G$, $t_{B_{F4},m}$) oraz odchyłeń standardowych tych wartości od ich średniej ($\pm SD$). Przyjęto: $t_{B_{F0}} = 0,00$ s. Wartość $t_{B_{F9},m}$ przyjąć można jako równą $t_{c,f}$ ($t_{B_{F9},m} = t_{c,f}$, $t_{c,f}$ – czas kontaktu stopy z podłożem dla biegu techniką sprinterską (il. 79b)).

Wartości współrzędnych punktów parametryzujących przebieg F_{VGRF}/G generowane podczas biegu techniką piętową z częstotliwością kroków $f_s = 2,40\text{--}3,40$ Hz podano w tabelach 28–33. Wartości współrzędnych punktów parametryzujących przebieg F_{VGRF}/G generowane podczas biegu techniką sprinterską (bieg z lądowaniem na palcach) z częstotliwością kroków $f_s = 2,40\text{--}3,40$ Hz podano w tabelach 34–39.

Tabela 28. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką piętową z częstotliwością $f_s = 2,40$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 2,40$ Hz	Średni czas występowania wartości B_{Hi} $t_{B_{Hi},m}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{B_{Hi},m}/G$ [-] w punkcie B_{Hi} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{H0}	0,00	0,00
B_{H1}	0,021 \pm 0,003	0,25
B_{H2}	0,045 \pm 0,005	1,353 \pm 0,068
B_{H3}	0,058 \pm 0,004	1,145 \pm 0,096
B_{H4}	0,088 \pm 0,008	1,50
B_{H5}	0,151 \pm 0,011	2,152 \pm 0,083
B_{H6}	0,219 \pm 0,008	1,50
B_{H7}	0,273 \pm 0,007	0,75
B_{H8}	0,322 \pm 0,008	0,25
B_{H9}	0,368 \pm 0,009	0,05
B_{H10}	0,402 \pm 0,012	0,00

Tabela 29. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką piętową z częstotliwością $f_s = 2,60$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 2,60$ Hz	Średni czas występowania wartości B_{Hi} $t_{BHi,m}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{BHi,m}/G$ [-] w punkcie B_{Hi} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{H0}	0,00	0,00
B_{H1}	0,020 \pm 0,004	0,25
B_{H2}	0,041 \pm 0,004	1,387 \pm 0,097
B_{H3}	0,052 \pm 0,003	1,182 \pm 0,098
B_{H4}	0,070 \pm 0,007	1,50
B_{H5}	0,130 \pm 0,006	2,158 \pm 0,087
B_{H6}	0,195 \pm 0,006	1,50
B_{H7}	0,241 \pm 0,007	0,75
B_{H8}	0,277 \pm 0,008	0,25
B_{H9}	0,306 \pm 0,010	0,05
B_{H10}	0,338 \pm 0,015	0,00

Tabela 30. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką piętową z częstotliwością $f_s = 2,80$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 2,80$ Hz	Średni czas występowania wartości B_{Hi} $t_{BHi,m}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{BHi,m}/G$ [-] w punkcie B_{Hi} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{H0}	0,00	0,00
B_{H1}	0,018 \pm 0,003	0,25
B_{H2}	0,040 \pm 0,004	1,436 \pm 0,098
B_{H3}	0,051 \pm 0,003	1,217 \pm 0,104
B_{H4}	0,066 \pm 0,006	1,50
B_{H5}	0,122 \pm 0,007	2,181 \pm 0,058
B_{H6}	0,183 \pm 0,006	1,50
B_{H7}	0,225 \pm 0,004	0,75
B_{H8}	0,259 \pm 0,006	0,25
B_{H9}	0,286 \pm 0,007	0,05
B_{H10}	0,310 \pm 0,008	0,00

Tabela 31. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką piętową z częstotliwością $f_s = 3,00$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 3,00$ Hz	Średni czas występowania wartości B_{H_i} $t_{B_{H_i,m}}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{B_{H_i,m}}/G$ [-] w punkcie B_{H_i} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{H0}	0,00	0,00
B_{H1}	0,018 \pm 0,002	0,25
B_{H2}	0,038 \pm 0,004	1,413 \pm 0,092
B_{H3}	0,049 \pm 0,002	1,178 \pm 0,108
B_{H4}	0,067 \pm 0,005	1,50
B_{H5}	0,118 \pm 0,008	2,166 \pm 0,064
B_{H6}	0,178 \pm 0,007	1,50
B_{H7}	0,219 \pm 0,006	0,75
B_{H8}	0,250 \pm 0,007	0,25
B_{H9}	0,273 \pm 0,007	0,05
B_{H10}	0,294 \pm 0,008	0,00

Tabela 32. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką piętową z częstotliwością $f_s = 3,20$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 3,20$ Hz	Średni czas występowania wartości B_{H_i} $t_{B_{H_i,m}}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{B_{H_i,m}}/G$ [-] w punkcie B_{H_i} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{H0}	0,00	0,00
B_{H1}	0,017 \pm 0,002	0,25
B_{H2}	0,039 \pm 0,003	1,498 \pm 0,106
B_{H3}	0,049 \pm 0,003	1,243 \pm 0,116
B_{H4}	0,062 \pm 0,005	1,50
B_{H5}	0,112 \pm 0,110	2,114 \pm 0,078
B_{H6}	0,167 \pm 0,005	1,50
B_{H7}	0,205 \pm 0,005	0,75
B_{H8}	0,235 \pm 0,006	0,25
B_{H9}	0,257 \pm 0,007	0,05
B_{H10}	0,275 \pm 0,008	0,00

Tabela 33. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką piętową z częstotliwością $f_s = 3,40$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 3,40$ Hz	Średni czas występowania wartości $B_{H_i} t_{B_{H_i,m}}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{B_{H_i,m}}/G$ [-] w punkcie B_{H_i} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{H0}	0,00	0,00
B_{H1}	0,016 \pm 0,002	0,25
B_{H2}	0,037 \pm 0,002	1,527 \pm 0,107
B_{H3}	0,046 \pm 0,003	1,323 \pm 0,104
B_{H4}	0,059 \pm 0,004	1,50
B_{H5}	0,111 \pm 0,007	2,156 \pm 0,044
B_{H6}	0,164 \pm 0,005	1,50
B_{H7}	0,198 \pm 0,006	0,75
B_{H8}	0,227 \pm 0,007	0,25
B_{H9}	0,247 \pm 0,007	0,05
B_{H10}	0,265 \pm 0,008	0,00

W tabelach Tab. 34–39 przedstawiono wartości współrzędnych punktów parametryzujących przebieg F_{VGRF}/G generowane podczas biegu techniką sprinterską z częstotliwością kroków $f_s = 2,40$ – $3,40$ Hz.

Tabela 34. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką sprinterską z częstotliwością $f_s = 2,40$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 2,40$ Hz	Średni czas występowania wartości $B_{F_i} t_{B_{F_i,m}}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{B_{F_i,m}}/G$ [-] w punkcie B_{F_i} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{F0}	0,00	0,00
B_{F1}	0,017 \pm 0,002	0,25
B_{F2}	0,042 \pm 0,005	1,00
B_{F3}	0,068 \pm 0,006	1,75
B_{F4}	0,124 \pm 0,006	2,359 \pm 0,098
B_{F5}	0,188 \pm 0,008	1,75
B_{F6}	0,227 \pm 0,008	1,00
B_{F7}	0,272 \pm 0,013	0,25
B_{F8}	0,301 \pm 0,021	0,05
B_{F9}	0,340 \pm 0,026	0,00

Tabela 35. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką sprinterską z częstotliwością $f_s = 2,60$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 2,60$ Hz	Średni czas występowania wartości $B_{F_i} t_{B_{F_i,m}}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{B_{F_i,m}}/G$ [-] w punkcie B_{F_i} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{F_0}	0,00	0,00
B_{F_1}	0,016 \pm 0,002	0,25
B_{F_2}	0,038 \pm 0,006	1,00
B_{F_3}	0,064 \pm 0,008	1,75
B_{F_4}	0,116 \pm 0,011	2,476 \pm 0,067
B_{F_5}	0,176 \pm 0,006	1,75
B_{F_6}	0,213 \pm 0,007	1,00
B_{F_7}	0,256 \pm 0,008	0,25
B_{F_8}	0,284 \pm 0,011	0,05
B_{F_9}	0,312 \pm 0,018	0,00

Tabela 36. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką sprinterską z częstotliwością $f_s = 2,80$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 2,80$ Hz	Średni czas występowania wartości $B_{F_i} t_{B_{F_i,m}}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{B_{F_i,m}}/G$ [-] w punkcie B_{F_i} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{F_0}	0,00	0,00
B_{F_1}	0,016 \pm 0,002	0,25
B_{F_2}	0,036 \pm 0,004	1,00
B_{F_3}	0,057 \pm 0,005	1,75
B_{F_4}	0,104 \pm 0,008	2,557 \pm 0,068
B_{F_5}	0,164 \pm 0,006	1,75
B_{F_6}	0,195 \pm 0,006	1,00
B_{F_7}	0,233 \pm 0,006	0,25
B_{F_8}	0,262 \pm 0,009	0,05
B_{F_9}	0,292 \pm 0,016	0,00

Tabela 37. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką sprinterską z częstotliwością $f_s = 3,00$ Hz (opracowanie własne)

$f_s = 3,00$ Hz	Średni czas występowania wartości $B_{F_i} t_{B_{F_i,m}}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{B_{F_i,m}}/G$ [-] w punkcie B_{F_i} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{F_0}	0,00	0,00
B_{F_1}	0,016 \pm 0,002	0,25

$f_s = 3,00 \text{ Hz}$	Średni czas występowania wartości B_{F_i} $t_{BF_i,m}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{BF_i,m}/G$ [-] w punkcie B_{F_i} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{F_2}	0,034 \pm 0,004	1,00
B_{F_3}	0,054 \pm 0,005	1,75
B_{F_4}	0,102 \pm 0,007	2,498 \pm 0,054
B_{F_5}	0,157 \pm 0,006	1,75
B_{F_6}	0,186 \pm 0,006	1,00
B_{F_7}	0,225 \pm 0,006	0,25
B_{F_8}	0,251 \pm 0,008	0,05
B_{F_9}	0,276 \pm 0,011	0,00

Tabela 38. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką sprinterską z częstotliwością $f_s = 3,20 \text{ Hz}$ (opracowanie własne)

$f_s = 3,20 \text{ Hz}$	Średni czas występowania wartości B_{F_i} $t_{BF_i,m}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{BF_i,m}/G$ [-] w punkcie B_{F_i} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{F_0}	0,00	0,00
B_{F_1}	0,015 \pm 0,002	0,25
B_{F_2}	0,035 \pm 0,005	1,00
B_{F_3}	0,054 \pm 0,005	1,75
B_{F_4}	0,097 \pm 0,005	2,448 \pm 0,078
B_{F_5}	0,151 \pm 0,007	1,75
B_{F_6}	0,181 \pm 0,007	1,00
B_{F_7}	0,217 \pm 0,008	0,25
B_{F_8}	0,239 \pm 0,009	0,05
B_{F_9}	0,262 \pm 0,012	0,00

Tabela 39. Model unormowanej krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką sprinterską z częstotliwością $f_s = 3,40 \text{ Hz}$ (opracowanie własne)

$f_s = 3,40 \text{ Hz}$	Średni czas występowania wartości B_{F_i} $t_{BF_i,m}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{BF_i,m}/G$ [-] w punkcie B_{F_i} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{F_0}	0,00	0,00
B_{F_1}	0,016 \pm 0,002	0,25
B_{F_2}	0,036 \pm 0,004	1,00
B_{F_3}	0,056 \pm 0,006	1,75

$f_s = 3,40 \text{ Hz}$	Średni czas występowania wartości B_{F_i} $t_{BF_i,m}$ [s] (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)	Średnia unormowana amplituda siły $A_{BF_i,m}/G$ [-] w punkcie B_{F_i} (wartość stała lub wartość średnia \pm SD)
B_{F_4}	0,097 \pm 0,007	2,424 \pm 0,083
B_{F_5}	0,151 \pm 0,006	1,75
B_{F_6}	0,182 \pm 0,006	1,00
B_{F_7}	0,217 \pm 0,007	0,25
B_{F_8}	0,235 \pm 0,008	0,05
B_{F_9}	0,258 \pm 0,009	0,00

Przebiegi czasowe unormowanej siły F_{VGRF}/G generowanej podczas biegu techniką piętową oraz techniką sprinterską, wyznaczone w oparciu o dane prezentowane odpowiednio w tab. 28–33 oraz tab. 34–39 przedstawiono w rozdziale 4.3.3.

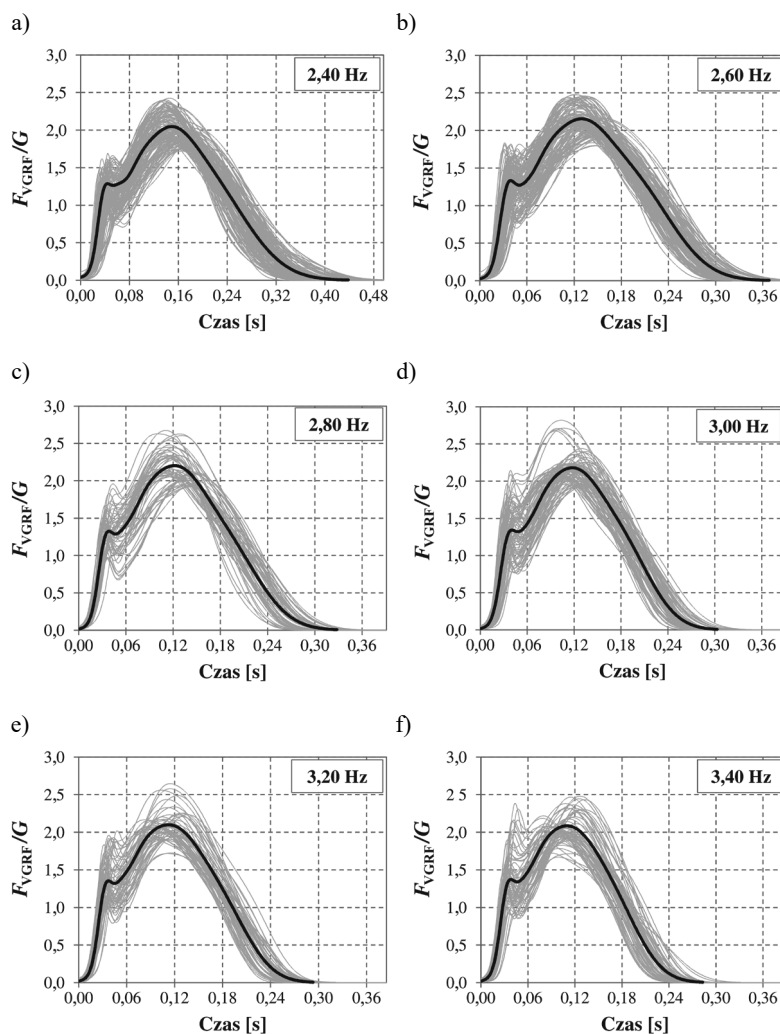
W dalszej części rozdziału zaprezentowano drugą metodę odwzorowania przebiegów F_{VGRF}/G generowanych podczas biegu techniką piętową (druga propozycja własna). Metoda ta polega na odwzorowaniu przebiegów F_{VGRF}/G za pomocą sumy funkcji Gaussa o parametrach zależnych od częstotliwości biegu (równanie (55)). Metodę taką przedstawili także inni autorzy w pracy [171]. Model własny opracowano niezależnie od propozycji przedstawionej w pracy [171]. Wykonano obszerne analizy zmienności parametrów funkcji Gaussa pozwalające modelować obciążenia VGRF w szerokim zakresie częstotliwości biegu 2,40–3,40 Hz.

$$\frac{F_{\text{VGRF}}(t)}{G} = \sum_{p=1}^k A_p \cdot e^{\left[-\ln(2) \cdot \frac{(t-t_p)^2}{\sigma_p^2} \right]} \quad (55)$$

gdzie: A_p – amplituda (wysokość, wartość szczytowa) krzywej Gaussa, t_p – lokalizacja wartości szczytowej krzywej Gaussa, σ_p – połowa szerokości połówkowej krzywej Gaussa (ang. *half width at half maximum*, HWHM), k – liczba krzywych Gaussa uwzględniona w modelu (w modelu przyjęto $k = 5$).

Na podstawie badań własnych opracowano wzorcowe przebiegi VGRF będące uśrednionymi przebiegami VGRF dla częstotliwości kroków 2,40 Hz, 2,60 Hz, 2,80 Hz, 3,00 Hz, 3,20 Hz oraz 3,40 Hz. Na il. 84 przedstawiono przebiegi krzywych wzorcowych (linia gruba) w odniesieniu do wyników badań (cienkie linie szare).

Wyznaczone przebiegi wzorcowe odwzorowano za pomocą sumy pięciu funkcji Gaussa ($k = 5$). W tabelach 40–45 przedstawiono parametry przebiegów wzorcowych opracowanych dla częstotliwości kroków $f_s = 2,40\text{--}3,40 \text{ Hz}$.



Il. 84. Wzorcowe przebiegi VGRF dla biegu techniką piętową z częstotliwością $f_s = 2,40\text{--}3,40$ Hz (opracowanie własne)

Tabela 40. Parametry krzywej wzorcowej dla częstotliwości biegu $f_s = 2,40$ Hz

f_s [Hz]	Parametr	Wartości parametrów krzywych Gaussa				
		$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
2,40	A_p	0,6132	0,4375	0,5052	1,0090	1,3767
	t_p	0,0360	0,0526	0,0838	0,1322	0,1967
	σ_p	0,0112	0,0169	0,0304	0,0505	0,0824

Tabela 41. Parametry krzywej wzorcowej dla częstotliwości biegu $f_s = 2,60$ Hz

f_s [Hz]	Parametr	Wartości parametrów krzywych Gaussa				
		$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
2,60	A_p	0,6514	0,4289	0,6545	1,5175	1,2871
	t_p	0,0332	0,0462	0,0736	0,1193	0,1909
	σ_p	0,0104	0,0152	0,0290	0,0457	0,0611

Tabela 42. Parametry krzywej wzorcowej dla częstotliwości biegu $f_s = 2,80$ Hz

f_s [Hz]	Parametr	Wartości parametrów krzywych Gaussa				
		$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
2,80	A_p	0,6605	0,4790	0,7682	1,5671	1,1958
	t_p	0,0324	0,0462	0,0737	0,1168	0,1793
	σ_p	0,0100	0,0156	0,0283	0,0417	0,0542

Tabela 43. Parametry krzywej wzorcowej dla częstotliwości biegu $f_s = 3,00$ Hz

f_s [Hz]	Parametr	Wartości parametrów krzywych Gaussa				
		$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
3,00	A_p	0,6422	0,4168	0,6953	1,7457	1,1136
	t_p	0,0333	0,0462	0,0711	0,1137	0,1774
	σ_p	0,0106	0,0152	0,0273	0,0416	0,0464

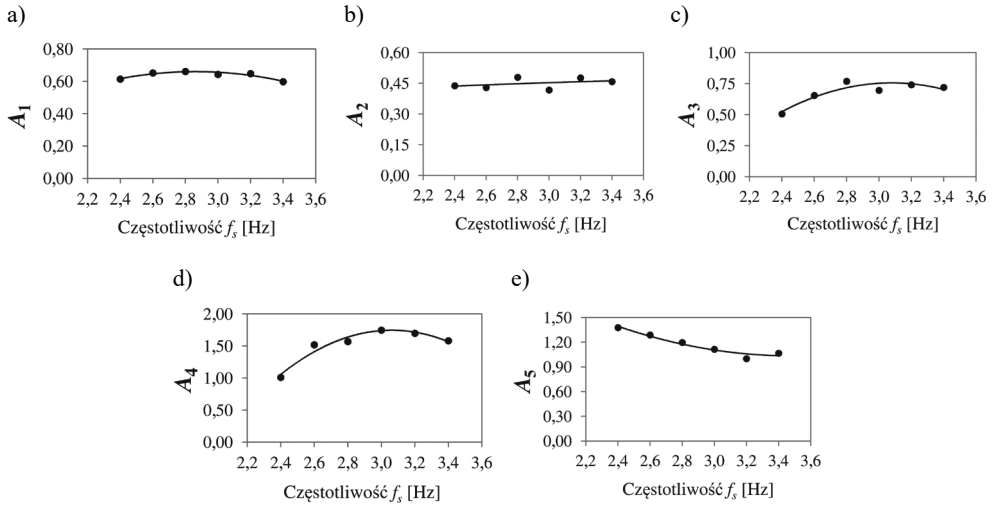
Tabela 44. Parametry krzywej wzorcowej dla częstotliwości biegu $f_s = 3,20$ Hz

f_s [Hz]	Parametr	Wartości parametrów krzywych Gaussa				
		$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
3,20	A_p	0,6470	0,4760	0,7403	1,6968	0,9996
	t_p	0,0315	0,0444	0,0700	0,1120	0,1735
	σ_p	0,0093	0,0149	0,0273	0,0414	0,0440

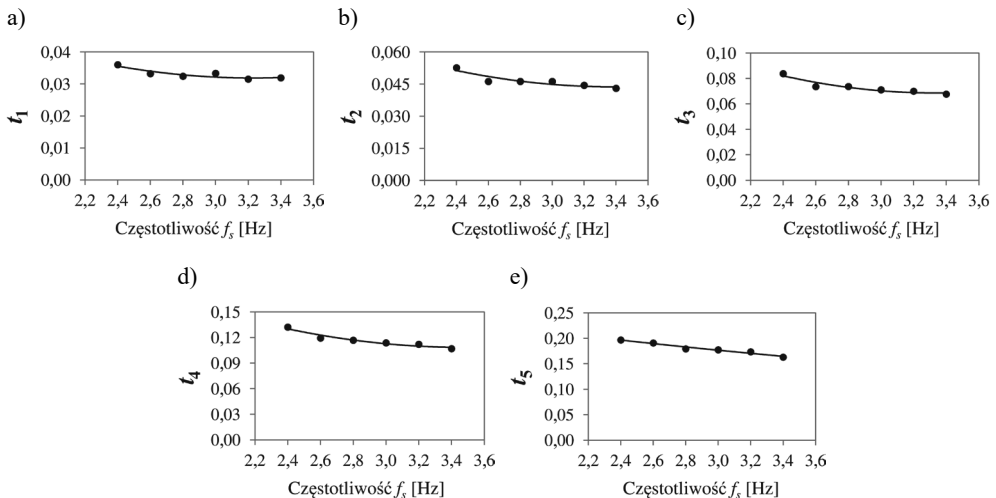
Tabela 45. Parametry krzywej wzorcowej dla częstotliwości biegu $f_s = 3,40$ Hz

f_s [Hz]	Parametr	Wartości parametrów krzywych Gaussa				
		$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
3,40	A_p	0,5975	0,4579	0,7195	1,5795	1,0661
	t_p	0,0319	0,0430	0,0677	0,1069	0,1630
	σ_p	0,0095	0,0149	0,0269	0,0393	0,0436

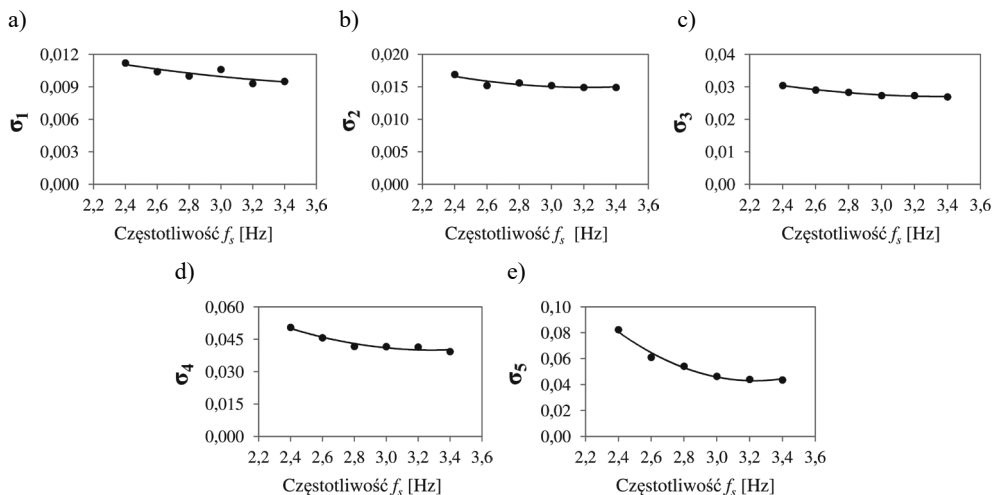
Na il. 85–87 i w Tab. 46–48 przedstawiono zmienność parametrów funkcji Gaussa (A_p, t_p, σ_p) w funkcji częstotliwości kroków f_s .



Il. 85. Zmienność amplitud (wartości szczytowych) funkcji Gaussa A_1 – A_5 dla biegu techniką piętową w funkcji częstotliwości biegu f_s (opracowanie własne)



Il. 86. Zmienność lokalizacji wartości szczytowych funkcji Gaussa t_1 – t_5 dla biegu techniką piętową w funkcji częstotliwości biegu f_s (opracowanie własne)



II. 87. Zmienność wartości połów szerokości połowkowych funkcji Gaussa σ_1 – σ_5 dla biegu techniką piętową w funkcji częstotliwości biegu f_s (opracowanie własne)

Tabela 46. Zmienność amplitud funkcji Gaussa A_p (wartość średnia \pm 95% przedział ufności prognozy CI (ang. *Confidence Interval*)) dla biegu techniką piętową z częstotliwością $f_s = 2,40$ – $3,40$ Hz

f_s [Hz]	Amplitudy funkcji Gaussa A_p				
	$A_1 \pm CI$	$A_2 \pm CI$	$A_3 \pm CI$	$A_4 \pm CI$	$A_5 \pm CI$
2,40	0,7909 \pm 0,0435	0,3891 \pm 0,0353	0,5485 \pm 0,0377	0,8602 \pm 0,0726	1,4617 \pm 0,0529
2,60	0,8895 \pm 0,0687	0,4087 \pm 0,0480	0,6989 \pm 0,0550	1,1932 \pm 0,0577	1,3224 \pm 0,0576
2,80	0,9317 \pm 0,0923	0,3767 \pm 0,0716	0,7423 \pm 0,1107	1,5161 \pm 0,0622	1,1242 \pm 0,0992
3,00	0,8367 \pm 0,0833	0,3090 \pm 0,0517	0,5415 \pm 0,0702	1,5875 \pm 0,0502	1,1293 \pm 0,0642
3,20	1,0070 \pm 0,0799	0,5878 \pm 0,0769	0,5338 \pm 0,0771	1,6129 \pm 0,0570	1,1183 \pm 0,0785
3,40	0,8430 \pm 0,0686	0,5574 \pm 0,0721	0,5512 \pm 0,0815	1,5478 \pm 0,0534	1,1180 \pm 0,0694

Tabela 47. Zmienność lokalizacji wartości szczytowych funkcji Gaussa t_p (wartość średnia \pm 95% przedział ufności prognozy CI) dla biegu techniką piętową z częstotliwością $f_s = 2,40$ – $3,40$ Hz

f_s [Hz]	Lokalizacje wartości szczytowych funkcji Gaussa t_p				
	$t_1 \pm CI$	$t_2 \pm CI$	$t_3 \pm CI$	$t_4 \pm CI$	$t_5 \pm CI$
2,40	0,0337 \pm 0,00098	0,0504 \pm 0,00234	0,0813 \pm 0,00273	0,1359 \pm 0,00264	0,2086 \pm 0,00413
2,60	0,0305 \pm 0,00063	0,0471 \pm 0,00218	0,0793 \pm 0,00262	0,1307 \pm 0,00249	0,1982 \pm 0,00404
2,80	0,0319 \pm 0,00096	0,0513 \pm 0,00232	0,0820 \pm 0,00295	0,1330 \pm 0,00404	0,1989 \pm 0,00604
3,00	0,0298 \pm 0,00101	0,0444 \pm 0,00344	0,0703 \pm 0,00432	0,1000 \pm 0,00322	0,1844 \pm 0,00514
3,20	0,0305 \pm 0,00074	0,0496 \pm 0,00192	0,0766 \pm 0,00205	0,1105 \pm 0,00332	0,1728 \pm 0,00483
3,40	0,0317 \pm 0,00127	0,0487 \pm 0,00255	0,0745 \pm 0,00319	0,1056 \pm 0,00313	0,1640 \pm 0,00392

Tabela 48. Zmienność wartości połów szerokości połówkowych funkcji Gaussa σ_p (wartość średnia $\pm 95\%$ przedział ufności prognozy CI) dla biegu techniką piętową z częstotliwością $f_s = 2,40\text{--}3,40$ Hz

f_s [Hz]	Połowy szerokości połówkowych funkcji Gaussa σ_p				
	$\sigma_1 \pm \text{CI}$	$\sigma_2 \pm \text{CI}$	$\sigma_3 \pm \text{CI}$	$\sigma_4 \pm \text{CI}$	$\sigma_5 \pm \text{CI}$
2,40	0,0100 \pm 0,00043	0,0177 \pm 0,00117	0,0315 \pm 0,00096	0,0491 \pm 0,00154	0,0777 \pm 0,00351
2,60	0,0089 \pm 0,00032	0,0176 \pm 0,00113	0,0314 \pm 0,00083	0,0461 \pm 0,00136	0,0639 \pm 0,00204
2,80	0,0095 \pm 0,00031	0,0169 \pm 0,00089	0,0316 \pm 0,00232	0,0434 \pm 0,00137	0,0515 \pm 0,00165
3,00	0,0090 \pm 0,00052	0,0156 \pm 0,00152	0,0266 \pm 0,00202	0,0408 \pm 0,00126	0,0505 \pm 0,00141
3,20	0,0086 \pm 0,00026	0,0160 \pm 0,00068	0,0207 \pm 0,00160	0,0394 \pm 0,00129	0,0453 \pm 0,00198
3,40	0,0087 \pm 0,00032	0,0162 \pm 0,00116	0,0207 \pm 0,00168	0,0375 \pm 0,00110	0,0432 \pm 0,00127

Równania (56)–(58) opisują linie trendu przedstawione na il. 85–87.

Amplitudy krzywych Gaussa A_p w funkcji f_s :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -0,2034f_s^2 + 1,1642f_s - 1,0063 \\
 A_2 &= -0,005f_s^2 + 0,0546f_s + 0,3332 \\
 A_3 &= -0,5024f_s^2 + 3,0932f_s - 4,0061 \\
 A_4 &= -1,5728f_s^2 + 9,6319f_s - 13,0028 \\
 A_5 &= 0,3079f_s^2 - 2,1426f_s + 4,7614
 \end{aligned} \tag{56}$$

Lokalizacja wartości szczytowych krzywych Gaussa t_p w funkcji f_s :

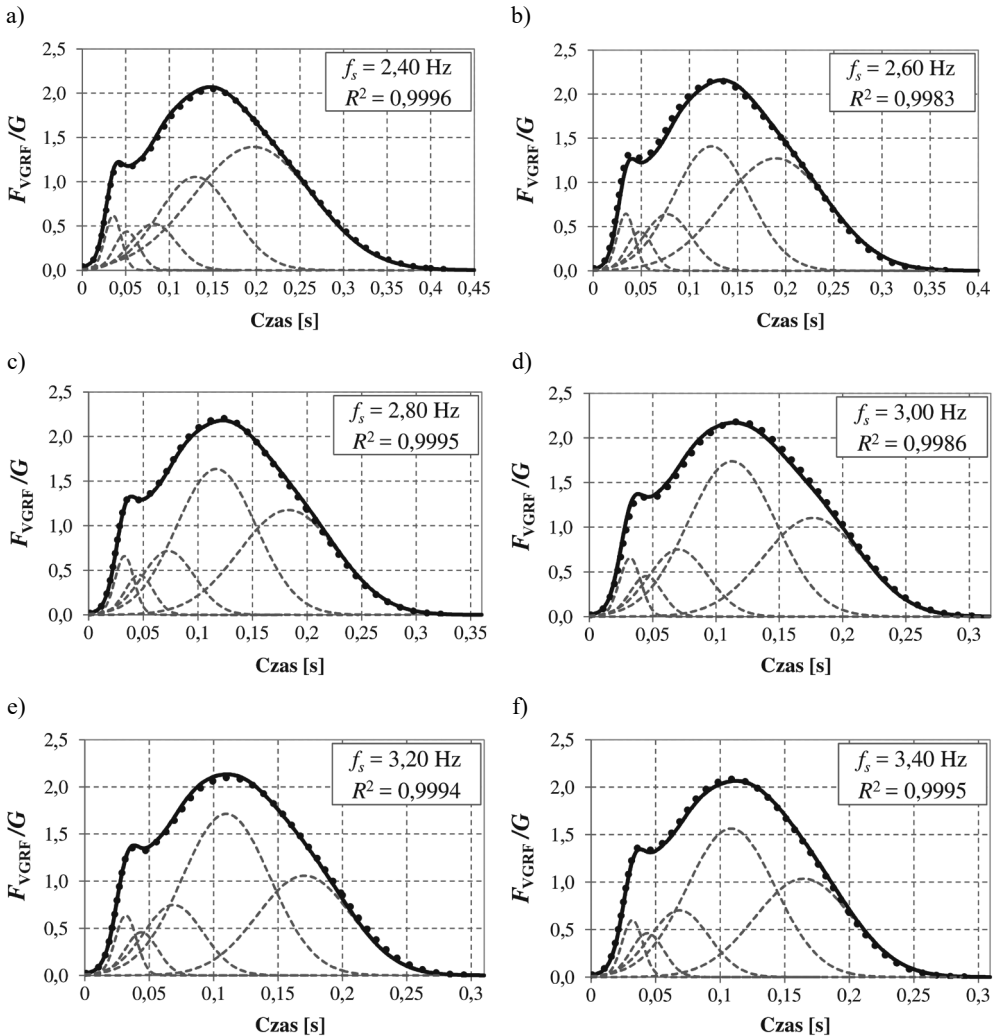
$$\begin{aligned}
 t_1 &= 0,0054f_s^2 - 0,0346f_s + 0,0877 \\
 t_2 &= 0,0079f_s^2 - 0,0537f_s + 0,1345 \\
 t_3 &= 0,0155f_s^2 - 0,1033f_s + 0,2407 \\
 t_4 &= 0,0188f_s^2 - 0,1309f_s + 0,3358 \\
 t_5 &= 0,0033f_s^2 - 0,0507f_s + 0,2994
 \end{aligned} \tag{57}$$

Połowy szerokości połówkowych krzywych Gaussa σ_p w funkcji f_s :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= 0,0006f_s^2 - 0,0052f_s + 0,0200 \\
 \sigma_2 &= 0,0025f_s^2 - 0,0164f_s + 0,0412 \\
 \sigma_3 &= 0,0035f_s^2 - 0,0236f_s + 0,0669 \\
 \sigma_4 &= 0,0128f_s^2 - 0,0842f_s + 0,1782 \\
 \sigma_5 &= 0,0547f_s^2 - 0,3533f_s + 0,6137
 \end{aligned} \tag{58}$$

Wykorzystanie równań (56)–(58) pozwala wyznaczyć krzywą wzorcową F_{VGRF}/G dla dowolnej częstotliwości biegu techniką piętową.

Na il. 88 przedstawiono przebiegi wzorcowe (czarna linia gruba), składowe funkcje Gaussa (szare linie przerywane) oraz przebiegi wynikowe wyznaczone jako suma funkcji Gaussa (czarna linia kropkowa) z wykorzystaniem parametrów przedstawionych w tab. 40–45 dla częstotliwości biegu 2,40–3,40 Hz. Współczynnik R^2 wskazuje dokładność dopasowania przebiegów wynikowych F_{VGRF}/G utworzonych przez sumowanie funkcji Gaussa do przebiegów wzorcowych.



Il. 88. Przebiegi wzorcowe (czarna linia gruba), składowe funkcje Gaussa (przerywane linie szare) i przebiegi wynikowe (czarna linia kropkowa) dla biegu techniką piętową z częstotliwościami $f_s = 2,40\text{--}3,40 \text{ Hz}$ (opracowanie własne)

Na il. 84 zauważyć można, że w przebiegu wzorcowym wartości amplitud wierzchołków powstających podczas uderzenia pięty o podłoże (ang. *impact peak*) są mniejsze od amplitud tych wierzchołków zarejestrowanych w trakcie badań laboratoryjnych. Jest to skutkiem uśredniania przebiegu krzywej F_{VGRF}/G . Z punktu widzenia analizy dynamicznej konstrukcji budowlanych odwzorowanie tego lokalnego maksimum VGRF obrazującego uderzenie pięty o podłoże ma znaczenie podrzędne. Krótkotrwała lokalna zmian wartości siły nie wywiera znaczącego wpływu na odpowiedź dynamiczną konstrukcji. W przypadku dążenia do dokładniejszego odwzorowania przebiegu F_{VGRF}/G wierzchołek obrazujący uderzenie pięty o podłoże odwzorować można z większą dokładnością, wykorzystując równanie (59) (proponycja własna [152, 153]).

$$\frac{\varphi_{ip}(t)}{G} = A_{\varphi} \sin(\alpha_{\varphi} \cdot \pi \cdot f_s \cdot t)^{\beta_{\varphi}} \quad (59)$$

gdzie: $\varphi_{ip}(t)$ – funkcja odwzorowująca wierzchołek uderzenia pięty o podłoże, A_{φ} – amplituda wierzchołka uderzenia pięty o podłoże, α_{φ} – wskaźnik lokalizacji wierzchołka uderzenia pięty o podłoże, β_{φ} – współczynnik smukłości wierzchołka uderzenia pięty o podłoże, G – ciężar osoby biegnącej, f_s – częstotliwość kroków podczas biegu [Hz], t – krok czasowy [s].

Wartość parametrów A_{φ} , α_{φ} , β_{φ} przyjmując można jako wartości z przedziałów $A_{\varphi} = 0,50-1,30$, $\alpha_{\varphi} = 4-8$ (najczęściej $\alpha_{\varphi} = 4-6$), $\beta_{\varphi} \geq 2$ (zalecane $\beta_{\varphi} = 4$), dostosowując odpowiednio kształt i lokalizację wierzchołka uderzenia pięty o podłoże do wyników badań. Wartości α_{φ} i β_{φ} mogą być liczbami dziesiętnymi. Należy przyjąć wartość wskaźnika α_{φ} zapewniającą lokalizację wierzchołka uderzenia pięty o podłoże 30–40 ms po rozpoczęciu kontaktu stopy z podłożem.

Krzywą obrazującą wierzchołek uderzenia pięty o podłoże, wyznaczoną przy przyjęciu odpowiednich wartości zmiennych występujących w równaniu (59), należy dodać do przebiegu F_{VGRF}/G odwzorowanego za pomocą sumy funkcji Gaussa lub inną metodą. Wykorzystując równanie (59), wierzchołek uderzenia pięty o podłoże można także odwzorować w przebiegach F_{VGRF}/G wyznaczonych za pomocą modelu opartego na szeregu Fouriera lub modelu półsinusoidalnego (zob. rozdział 3.2 oraz [152, 153]).

4.3.3. Interpolacja przebiegów VGRF za pomocą splajnów kubicznych z kontrolą kształtu

W praktyce inżynierskiej często nieznane jest równanie funkcji opisującej zmienność badanego procesu. Często potrafimy jednak zmierzyć wartości tych funkcji w określonych chwilach czasowych. Występuje zatem potrzeba zastąpienia funkcji

danej punktowo za pomocą dogodnej postaci analitycznej o odpowiedniej dokładności. Postępowanie prowadzące do znalezienia wartości funkcji dla dowolnego argumentu (np. dowolnej chwili czasowej) na podstawie znanych wartości tej funkcji w punktach zwanych węzłami nazywamy aproksymacją interpolacyjną, w skrócie interpolacją.

Istnieje szereg metod interpolacji przebiegu funkcji opracowanych i rozwijanych w ramach obszernych działów matematyki, jakimi są metody numeryczne i teoria aproksymacji [44, 47, 85, 101, 123, 166, 181, 191]. Prezentacja i analiza tych metod nie jest jednak celem niniejszej monografii. Dalsze działania autora ukierunkowane będą na wykorzystanie sześciennych krzywych sklejaných (splajnów kubicznych), w szczególności splajnów kubicznych z kontrolą kształtu, do odwzorowania przebiegów czasowych pionowych składowych sił reakcji podłoża (VGRF) generowanych przez człowieka podczas chodu i biegu.

W interpolacji powszechnie stosuje się funkcje interpolacyjne w postaci tzw. wielomianów uogólnionych. Interpolacja wielomianowa bywa jednak wrażliwa na strukturę (układ) danych wejściowych, co może prowadzić do gwałtownych zmian wartości wielomianu interpolacyjnego między węzłami i wyznaczania poszukiwanych wartości pozbawionych sensu fizycznego. Rozwiązaniem powyższych problemów jest zastosowanie interpolacji lokalnej wielomianami niskiego stopnia (interpolacja odcinkowa na kilku podprzedziałach) i ich późniejsze połączenie (sklejenie). Jest to interpolacja wielomianowa funkcjami sklejanymi (ang. *spline function*). Metoda ta gwarantuje gładkie przejście między kolejnymi podprzedziałami przez wymaganie równości wartości i pochodnych funkcji interpolacyjnych na granicach podprzedziałów. Często funkcje splajn to wielomiany trzeciego stopnia (splajny kubiczne).

Przebieg i gładkość funkcji interpolacyjnej kontrolować można poprzez definiowanie wartości pochodnych tej funkcji w węzłach interpolacji. Tak utworzone funkcje interpolacyjne nazywane są krzywymi splajn z kontrolą kształtu (ang. *shape-preserving interpolation splines*) [1, 2, 3, 34, 53, 54, 74, 87, 88, 103, 105, 106, 108, 111, 126, 129, 192, 198, 199].

Poniżej przedstawiono założenia obowiązujące w przypadku konstruowania funkcji interpolacyjnej składającej się z tzw. naturalnych splajnów kubicznych oraz założenia przyjęte w celu utworzenia funkcji interpolacyjnej ze splajnów kubicznych z kontrolą kształtu [108].

Założenia przyjmowane w przypadku konstruowania naturalnych splajnów kubicznych:

- krzywe interpolacyjne są wielomianami trzeciego stopnia:

$$f_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j \quad (60)$$

- krzywe interpolacyjne przechodzą przez wszystkie punkty węzłowe (innymi słowy krzywe interpolacyjne połączone są w punktach węzłowych):

$$f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i) = y_i \quad (61)$$

- wartości pierwszych pochodnych funkcji interpolacyjnych po obu stronach węzła interpolacji są sobie równe (tzn. nachylenia linii stycznej do krzywych interpolacyjnych są takie same po obu stronach punktu węzłowego):

$$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i) \quad (62)$$

- wartości drugich pochodnych funkcji interpolacyjnych po obu stronach węzła interpolacji są sobie równe:

$$f_i''(x_i) = f_{i+1}''(x_i) \quad (63)$$

- wartości drugich pochodnych funkcji interpolacyjnych w początkowym i końcowym węźle interpolacji są równe zero (splajn naturalny):

$$f_1''(x_1) = f_m''(x_m) = 0 \quad (64)$$

gdzie: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), \dots, (x_n, y_n)$ – współrzędne węzłów interpolacji, f_i – funkcja interpolacyjna po lewej stronie węzła interpolacji o współrzędnych (x_i, y_i) przyjmująca dla x_i wartość $f_i(x_i) = y_i$, f_{i+1} – funkcja interpolacyjna po prawej stronie węzła interpolacji o współrzędnych (x_i, y_i) przyjmująca dla x_i wartość $f_{i+1}(x_i) = y_i$, j – numer przedziału interpolacji $j = 1, 2, \dots, m-1$, m – liczba węzłów interpolacji.

Założenia przyjęte w celu utworzenia splajnów kubicznych z kontrolą kształtu:

Splajny kubiczne z kontrolą kształtu konstruowane są przy przyjęciu założeń opisanych równaniami (60), (61), (62) i (64) oraz zastąpieniu założenia (63) poniższym warunkiem (65):

- wartości pierwszych pochodnych funkcji interpolacyjnych po obu stronach węzła są sobie równe i przyjmują wartość $f'(x_i)$ wyrażoną równaniem (66) dla pośrednich węzłów interpolacji oraz równaniami (67) i (68) odpowiednio dla pierwszego i ostatniego węzła interpolacji:

$$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i) = f'(x_i) \quad (65)$$

$$f'(x_i) = \begin{cases} \frac{2}{\frac{x_{i+1} - x_i}{y_{i+1} - y_i} + \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}} & \\ 0 & \text{gdy pochodna zmienia w węźle znak} \end{cases} \quad (66)$$

$$f'_1(x_0) = \frac{3(y_1 - y_0)}{2(x_1 - x_0)} - \frac{f'(x_1)}{2} \quad (67)$$

$$f'_j(x_j) = \frac{3(y_j - y_{j-1})}{2(x_j - x_{j-1})} - \frac{f'(x_{j-1})}{2} \quad (68)$$

- wartości drugich pochodnych funkcji interpolacyjnych w dwóch sąsiednich węzłach interpolacji wynoszą:

$$f''(x_{i-1}) = -\frac{2[f'_i(x_i) + 2f'_i(x_{i-1})]}{(x_i - x_{i-1})} + \frac{6(y_i - y_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2} \quad (69)$$

$$f''(x_i) = \frac{2[2f'_i(x_i) + f'_i(x_{i-1})]}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{6(y_i - y_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2} \quad (70)$$

Warunek (66) wyprowadzono przy przyjęciu założenia, że pochylenie stycznej do krzywej interpolacyjnej determinowane jest przez prostą łączącą sąsiednie węzły interpolacji.

Równania (71)–(74) przedstawiają wzory rekurencyjne pozwalające wyznaczyć współczynniki splajnów kubicznych z kontrolą kształtu występujące w równaniu (60):

$$a_j = \frac{f''(x_j) - f''(x_{j-1})}{6(x_j - x_{j-1})} \quad (71)$$

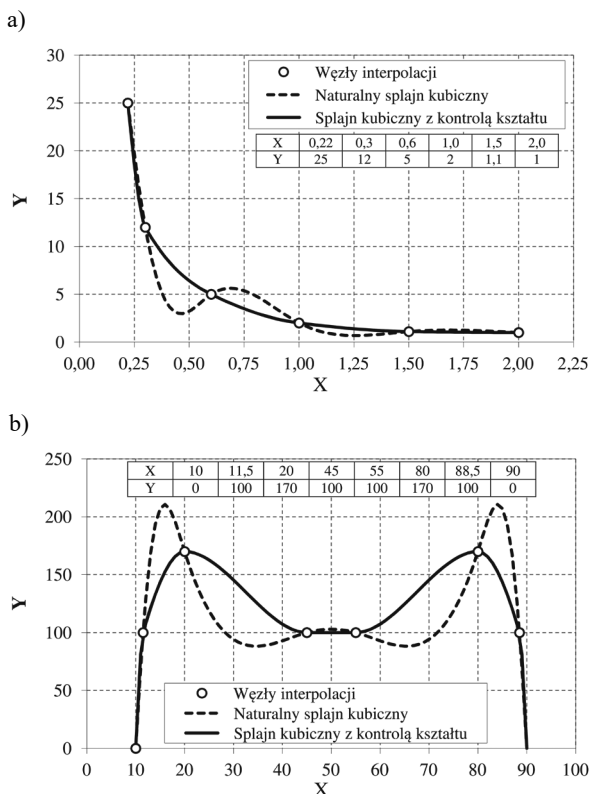
$$b_j = \frac{x_j f''(x_{j-1}) - x_{j-1} f''(x_j)}{2(x_j - x_{j-1})} \quad (72)$$

$$c_j = \frac{(y_j - y_{j-1}) - b_j(x_j^2 - x_{j-1}^2) - a_j(x_j^3 - x_{j-1}^3)}{(x_j - x_{j-1})} \quad (73)$$

$$d_j = y_{j-1} - c_j x_{j-1} - b_j x_{j-1}^2 - a_j x_{j-1}^3 \quad (74)$$

gdzie: j – numer przedziału interpolacji $j = 1, 2, \dots, m-1$, m – liczba węzłów interpolacji.

Na il. 89 przedstawiono porównanie interpolacji wykonanej za pomocą naturalnych splajnów kubicznych (linia przerywana) oraz splajnów kubicznych z kontrolą kształtu (linia ciągła). Zauważyć można oscylacje i gwałtowne zmiany wartości funkcji interpolacyjnej skonstruowanej z naturalnych splajnów kubicznych oraz dokładną interpolację wykonaną za pomocą splajnów kubicznych z kontrolą kształtu.



Il. 89. Przykład interpolacji danych za pomocą: a) naturalnych splajnów kubicznych (linia przerywana) oraz b) splajnów kubicznych z kontrolą kształtu (linia ciągła)

Przykład:

Wyznaczyć przebieg czasowy unormowanej pionowej składowej sił reakcji podłoża F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością kroków $f_s = 1,80$ Hz, wykorzystując interpolację splajnami kubicznymi z kontrolą kształtu.

Dane: współrzędne punktów parametryzujących przebieg krzywej F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością $f_s = 1,80$ Hz (por. tab. 24):

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0,0	0,013	0,024	0,052	0,150	0,248	0,346
y_i	0,0	0,05	0,20	0,60	1,174	0,913	0,707

i	7	8	9	10	11	12
x_i	0,454	0,563	0,651	0,683	0,709	0,735
y_i	0,891	1,133	0,60	0,20	0,05	0,0

Przedział nr 1: $j = 1$, $0 \leq x \leq 0,013$ Dane: $x_0 = 0$, $x_1 = 0,013$, $x_2 = 0,024$ $y_0 = 0$, $y_1 = 0,050$, $y_2 = 0,200$ Szukane: a_1 , b_1 , c_1 , d_1 , $f_1'(x_0)$, $f_1'(x_1)$, $f_1''(x_0)$, $f_1''(x_1)$, $f_1(x)$

$$f_1'(x_1) = 2 / \left[(x_2 - x_1) / (y_2 - y_1) + (x_1 - x_0) / (y_1 - y_0) \right] =$$

$$= 2 / \left[(0,024 - 0,013) / (0,2 - 0,05) + (0,013 - 0) / (0,05 - 0) \right] = 6,0$$

$$f_1'(x_0) = 3(y_1 - y_0) / \left[2(x_1 - x_0) \right] - f_1'(x_1) / 2 =$$

$$= 3(0,05 - 0) / \left[2(0,013 - 0) \right] - 6,0 / 2 = 2,76923077$$

$$f_1''(x_0) = -2 \left(f_1'(x_1) + 2f_1'(x_0) \right) / (x_1 - x_0) + 6(y_1 - y_0) / (x_1 - x_0)^2 =$$

$$= -2(6,0 + 2 \cdot 2,76923077) / (0,013 - 0) + 6(0,05 - 0) / (0,013 - 0)^2 = 0,0$$

$$f_1''(x_1) = 2 \left(2f_1'(x_1) + f_1'(x_0) \right) / (x_1 - x_0) - 6(y_1 - y_0) / (x_1 - x_0)^2 =$$

$$= 2(2 \cdot 6,0 + 2,76923077) / (0,013 - 0) - 6(0,05 - 0) / (0,013 - 0)^2 =$$

$$= 497,04142024$$

$$a_1 = \left(f_1''(x_1) - f_1''(x_0) \right) / \left[6((x_1 - x_0)) \right] =$$

$$= (497,04142024 - 0) / \left[6(0,013 - 0) \right] = 6372,32590051$$

$$b_1 = \left(x_1 f_1''(x_0) - x_0 f_1''(x_1) \right) / \left[2((x_1 - x_0)) \right] =$$

$$= (0,013 \cdot 0 - 0 \cdot 497,04142024) / \left[2(0,013 - 0) \right] = 0,0$$

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \left[(y_1 - y_0) - b_1(x_1^2 - x_0^2) - a_1(x_1^3 - x_0^3) \right] / (x_1 - x_0) = \\
 &= \left[(0,05 - 0) - 0 \cdot (0,013^2 - 0^2) - 6372,32590051 \cdot (0,013^3 - 0^3) \right] / (0,013 - 0) = \\
 &= 2,76923077
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= y_0 - c_1 x_0 - b_1 x_0^2 - a_1 x_0^3 = \\
 &= 0 - 2,76923076 \cdot 0 - 0 \cdot 0^2 - 6372,32590051 \cdot 0^3 = 0,0
 \end{aligned}$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 1 dla $0 \leq x \leq 0,018$ przyjmuje postać:

$$f_1(x) = 6372,3259x^3 + 2,76923x$$

Przedział nr 2: $j = 2$, $0,013 \leq x \leq 0,024$

Dane: $x_0 = 0$, $x_1 = 0,013$, $x_2 = 0,024$, $x_3 = 0,052$

$y_0 = 0$, $y_1 = 0,050$, $y_2 = 0,200$, $y_3 = 0,600$

Szukane: a_2 , b_2 , c_2 , d_2 , $f_2'(x_1)$, $f_2'(x_2)$, $f_2''(x_1)$, $f_2''(x_2)$, $f_2(x)$

$$\begin{aligned}
 f_2'(x_2) &= 2 \left[(x_3 - x_2) / (y_3 - y_2) + (x_2 - x_1) / (y_2 - y_1) \right] = \\
 &= 2 \left[(0,052 - 0,024) / (0,6 - 0,2) + (0,024 - 0,013) / (0,2 - 0,05) \right] = 13,95348837
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2'(x_1) &= 2 \left[(x_2 - x_1) / (y_2 - y_1) + (x_1 - x_0) / (y_1 - y_0) \right] = \\
 &= 2 \left[(0,024 - 0,013) / (0,2 - 0,05) + (0,013 - 0) / (0,05 - 0) \right] = 6,0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2''(x_1) &= -2 \left(f_2'(x_2) + 2f_2'(x_1) \right) / (x_2 - x_1) + 6(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)^2 = \\
 &= -2(13,95348837 + 2 \cdot 6,0) / (0,024 - 0,013) + 6(0,2 - 0,05) / (0,024 - 0,013)^2 = \\
 &= 2719,200461652
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2''(x_2) &= 2 \left(2f_2'(x_2) + f_2'(x_1) \right) / (x_2 - x_1) - 6(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)^2 = \\
 &= 2(2 \cdot 13,95348837 + 6,0) / (0,024 - 0,013) - 6(0,2 - 0,05) / (0,024 - 0,013)^2 = \\
 &= -1273,11166711
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \left(f_2''(x_2) - f_2''(x_1) \right) / \left[6((x_2 - x_1)) \right] = \\
 &= (-1273,11166711 - 2719,20046165) / \left[6(0,024 - 0,013) \right] = -60489,57770848
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 &= (x_2 f_2''(x_1) - x_1 f_2''(x_2)) / [2((x_2 - x_1))] = \\
 &= (0,024 \cdot 2719,20046165 - 0,013 \cdot (-1273,11166711)) / [2(0,024 - 0,013)] = \\
 &= 3718,69376145
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= [(y_2 - y_1) - b_2(x_2^2 - x_1^2) - a_2(x_2^3 - x_1^3)] / (x_2 - x_1) = \\
 &= [(0,2 - 0,05) - 3718,69376145 \cdot (0,024^2 - 0,013^2) - (-60489,57770848) \cdot \\
 &\cdot (0,024^3 - 0,013^3)] / (0,024 - 0,013) = -60,01782190
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_2 &= y_1 - c_2 x_1 - b_2 x_1^2 - a_2 x_1^3 = \\
 &= 0,05 - (-60,01782190) \cdot 0,013 - 3718,69376145 \cdot 0,013^2 - (-60489,57770848) \cdot \\
 &\cdot 0,013^3 = 0,33466804
 \end{aligned}$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 2 dla $0,013 \leq x \leq 0,024$ przyjmuje postać:

$$f_2(x) = -60489,57771x^3 + 3718,69376x^2 - 60,01782x + 0,33467$$

Przedział nr 3: $j = 3$, $0,024 \leq x \leq 0,052$

Dane: $x_1 = 0,013$, $x_2 = 0,024$, $x_3 = 0,052$, $x_4 = 0,150$

$y_1 = 0,050$, $y_2 = 0,200$, $y_3 = 0,600$, $y_4 = 1,174$

Szukane: a_3 , b_3 , c_3 , d_3 , $f_3'(x_2)$, $f_3'(x_3)$, $f_3''(x_2)$, $f_3''(x_3)$, $f_3(x)$

$$\begin{aligned}
 f_3'(x_3) &= 2/[(x_4 - x_3)/(y_4 - y_3) + (x_3 - x_2)/(y_3 - y_2)] = \\
 &= 2/[(0,150 - 0,052)/(1,174 - 0,6) + (0,052 - 0,024)/(0,6 - 0,2)] = 8,30800405
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3'(x_2) &= 2/[(x_3 - x_2)/(y_3 - y_2) + (x_2 - x_1)/(y_2 - y_1)] = \\
 &= 2/[(0,052 - 0,024)/(0,6 - 0,2) + (0,024 - 0,013)/(0,2 - 0,05)] = 13,95348837
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3''(x_2) &= -2(f_3'(x_3) + 2f_3'(x_2)) / (x_3 - x_2) + 6(y_3 - y_2) / (x_3 - x_2)^2 = \\
 &= -2(8,30800405 + 2 \cdot 13,95348837) / (0,052 - 0,024) + 6(0,6 - 0,2) / (0,052 - 0,024)^2 = \\
 &= 474,44014765
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3''(x_3) &= 2(2f_3'(x_3) + f_3'(x_2)) / (x_3 - x_2) - 6(y_3 - y_2) / (x_3 - x_2)^2 = \\ &= 2(2 \cdot 8,30800405 + 13,95348837) / (0,052 - 0,024) - 6(0,6 - 0,2) / (0,052 - 0,024)^2 = \\ &= -877,68902765 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= (f_3''(x_3) - f_3''(x_2)) / [6((x_3 - x_2))] = \\ &= (-877,68902765 - 474,44014765) / [6(0,052 - 0,024)] = -8048,38794821 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= (x_3 f_3''(x_2) - x_2 f_3''(x_3)) / [2((x_3 - x_2))] = \\ &= (0,052 \cdot 474,44014765 - 0,024 \cdot (-877,68902765)) / [2(0,052 - 0,024)] = \\ &= 816,70400610 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= [(y_3 - y_2) - b_3(x_3^2 - x_2^2) - a_3(x_3^3 - x_2^3)] / (x_3 - x_2) = \\ &= [(0,6 - 0,2) - 816,70400610 \cdot (0,052^2 - 0,024^2) - (-8048,38794821) \cdot \\ &\cdot (0,052^3 - 0,024^3)] / (0,052 - 0,024) = -11,34068955 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= y_2 - c_3 x_2 - b_3 x_2^2 - a_3 x_2^3 = \\ &= 0,2 - (-11,34068955) \cdot 0,024 - 816,70400610 \cdot 0,024^2 - (-8048,38794821) \cdot 0,024^3 = \\ &= 0,11301596 \end{aligned}$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 3 dla $0,024 \leq x \leq 0,052$ przyjmuje postać:

$$f_3(x) = -8048,38795x^3 + 816,70401x^2 - 11,34069x + 0,11302$$

Przedział nr 4: $j = 4$, $0,052 \leq x \leq 0,150$

Dane: $x_2 = 0,024$, $x_3 = 0,052$, $x_4 = 0,150$, $x_5 = 0,248$

$y_2 = 0,200$, $y_3 = 0,600$, $y_4 = 1,174$, $y_5 = 0,913$

Szukane: a_4 , b_4 , c_4 , d_4 , $f_4'(x_3)$, $f_4'(x_4)$, $f_4''(x_3)$, $f_4''(x_4)$, $f_4(x)$

$f_4'(x_4) = 0$ ponieważ pochodna zmienia znak w węźle x_4 .

$$\begin{aligned} f_4'(x_3) &= 2 / [(x_4 - x_3) / (y_4 - y_3) + (x_3 - x_2) / (y_3 - y_2)] = \\ &= 2 / [(0,150 - 0,052) / (1,174 - 0,6) + (0,052 - 0,024) / (0,6 - 0,2)] = 8,30800405 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_4''(x_3) &= -2(f_4'(x_4) + 2f_4'(x_3))/(x_4 - x_3) + 6(y_4 - y_3)/(x_4 - x_3)^2 = \\
 &= -2(0 + 2 \cdot 8,30800405)/(0,150 - 0,052) + 6(1,174 - 0,6)/(0,150 - 0,052)^2 = \\
 &= 19,49837697
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_4''(x_4) &= 2(2f_4'(x_4) + f_4'(x_3))/(x_4 - x_3) - 6(y_4 - y_3)/(x_4 - x_3)^2 = \\
 &= 2(2 \cdot 0 + 8,30800405)/(0,150 - 0,052) - 6(1,174 - 0,6)/(0,150 - 0,052)^2 = \\
 &= -189,04948003
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_4 &= (f_4''(x_4) - f_4''(x_3))/[6((x_4 - x_3))] = \\
 &= (-189,04948003 - 19,49837697)/[6(0,150 - 0,052)] = -354,67322619
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_4 &= (x_4 f_4''(x_3) - x_3 f_4''(x_4))/[2((x_4 - x_3))] = \\
 &= (0,150 \cdot 19,49837697 - 0,052 \cdot (-189,04948003))/[2(0,150 - 0,052)] = \\
 &= 65,07821177
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_4 &= [(y_4 - y_3) - b_4(x_4^2 - x_3^2) - a_4(x_4^3 - x_3^3)]/(x_4 - x_3) = \\
 &= [(1,174 - 0,6) - 65,07821177 \cdot (0,150^2 - 0,052^2) - (-354,67322619) \cdot \\
 &\quad \cdot (0,150^3 - 0,052^3)]/(0,150 - 0,052) = 4,41697924
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_4 &= y_3 - c_4 x_3 - b_4 x_3^2 - a_4 x_3^3 = \\
 &= 0,6 - 4,41697924 \cdot 0,052 - 65,07821177 \cdot 0,052^2 - (-354,67322619) \cdot 0,052^3 = \\
 &= 0,24421549
 \end{aligned}$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 4 dla $0,052 \leq x \leq 0,150$ przyjmuje postać:

$$f_4(x) = -354,67323x^3 + 65,07821x^2 + 4,41698x + 0,24421$$

Przedział nr 5: $j = 5$, $0,150 \leq x \leq 0,248$

Dane: $x_3 = 0,052$, $x_4 = 0,150$, $x_5 = 0,248$, $x_6 = 0,346$

$y_3 = 0,600$, $y_4 = 1,174$, $y_5 = 0,913$, $y_6 = 0,707$

Szukane: a_5 , b_5 , c_5 , d_5 , $f_5'(x_4)$, $f_5'(x_5)$, $f_5''(x_4)$, $f_5''(x_5)$, $f_5(x)$

$$\begin{aligned} f_5'(x_5) &= 2/\left[(x_6 - x_5)/(y_6 - y_5) + (x_5 - x_4)/(y_5 - y_4)\right] = \\ &= 2/\left[(0,346 - 0,248)/(0,707 - 0,913) + (0,248 - 0,150)/(0,913 - 1,174)\right] = \\ &= -2,34960451 \end{aligned}$$

$f_5'(x_4) = 0$ ponieważ pochodna zmienia znak w węźle x_4 .

$$\begin{aligned} f_5''(x_4) &= -2(f_5'(x_5) + 2f_5'(x_4))/(x_5 - x_4) + 6(y_5 - y_4)/(x_5 - x_4)^2 = \\ &= -2(-2,34960451 + 2 \cdot 0)/(0,248 - 0,150) + 6(0,913 - 1,174)/(0,248 - 0,150)^2 = \\ &= -115,10594711 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5''(x_5) &= 2(2f_5'(x_5) + f_5'(x_4))/(x_5 - x_4) - 6(y_5 - y_4)/(x_5 - x_4)^2 = \\ &= 2(2 \cdot (-2,34960451) + 0)/(0,248 - 0,150) - 6(0,913 - 1,174)/(0,248 - 0,150)^2 = \\ &= 67,15483466 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= (f_5''(x_5) - f_5''(x_4))/[6((x_5 - x_4))] = \\ &= (67,15483466 - (-115,10594711))/[6(0,248 - 0,150)] = 309,96731594 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_5 &= (x_5 f_5''(x_4) - x_4 f_5''(x_5))/[2((x_5 - x_4))] = \\ &= (0,248 \cdot (-115,10594711) - 0,150 \cdot 67,15483466)/[2(0,248 - 0,150)] = \\ &= -197,03826573 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_5 &= [(y_5 - y_4) - b_5(x_5^2 - x_4^2) - a_5(x_5^3 - x_4^3)]/(x_5 - x_4) = \\ &= [(0,913 - 1,174) - (-197,03826573) \cdot (0,248^2 - 0,150^2) - 309,96731594 \cdot \\ &\cdot (0,248^3 - 0,150^3)]/(0,248 - 0,150) = 38,18868589 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_5 &= y_4 - c_5 x_4 - b_5 x_4^2 - a_5 x_4^3 = \\ &= 1,174 - 38,18868589 \cdot 0,150 - (-197,03826573) \cdot 0,150^2 - 309,96731594 \cdot 0,150^3 = \\ &= -1,16708160 \end{aligned}$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 5 dla $0,150 \leq x \leq 0,248$ przyjmuje postać:

$$f_5(x) = 309,96732x^3 - 197,03827x^2 + 38,18869x - 1,16708$$

Przedział nr 6: $j = 6$, $0,248 \leq x \leq 0,346$ Dane: $x_4 = 0,150$, $x_5 = 0,248$, $x_6 = 0,346$, $x_7 = 0,454$ $y_4 = 1,174$, $y_5 = 0,913$, $y_6 = 0,707$, $y_7 = 0,891$ Szukane: a_6 , b_6 , c_6 , d_6 , $f_6'(x_5)$, $f_6'(x_6)$, $f_6''(x_5)$, $f_6''(x_6)$, $f_6(x)$ $f_6'(x_6) = 0$ ponieważ pochodna zmienia znak w węźle x_6 .

$$\begin{aligned} f_6'(x_5) &= 2 \left[(x_6 - x_5) / (y_6 - y_5) + (x_5 - x_4) / (y_5 - y_4) \right] = \\ &= 2 \left[(0,346 - 0,248) / (0,707 - 0,913) + (0,248 - 0,150) / (0,913 - 1,174) \right] = \\ &= -2,34960451 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_6''(x_5) &= -2 \left(f_6'(x_6) + 2f_6'(x_5) \right) / (x_6 - x_5) + 6(y_6 - y_5) / (x_6 - x_5)^2 = \\ &= -2 \left(0 + 2 \cdot (-2,34960451) \right) / (0,346 - 0,248) + 6(0,707 - 0,913) / (0,346 - 0,248)^2 = \\ &= -32,79415161 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_6''(x_6) &= 2 \left(2f_6'(x_6) + f_6'(x_5) \right) / (x_6 - x_5) - 6(y_6 - y_5) / (x_6 - x_5)^2 = \\ &= 2 \left(2 \cdot 0 + (-2,34960451) \right) / (0,346 - 0,248) - 6(0,707 - 0,913) / (0,346 - 0,248)^2 = \\ &= 80,74526406 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_6 &= \left(f_6''(x_6) - f_6''(x_5) \right) / \left[6((x_6 - x_5)) \right] = \\ &= (80,74526406 - (-32,79415161)) / \left[6(0,346 - 0,248) \right] = 193,09424434 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_6 &= \left(x_6 f_6''(x_5) - x_5 f_6''(x_6) \right) / \left[2((x_6 - x_5)) \right] = \\ &= (0,346 \cdot (-32,79415161) - 0,248 \cdot 80,74526406) / \left[2(0,346 - 0,248) \right] = \\ &= -160,05919359 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_6 &= \left[(y_6 - y_5) - b_6(x_6^2 - x_5^2) - a_6(x_6^3 - x_5^3) \right] / (x_6 - x_5) = \\ &= \left[(0,707 - 0,913) - (-160,05919359) \cdot (0,346^2 - 0,248^2) - 193,09424434 \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (0,346^3 - 0,248^3) \right] / (0,346 - 0,248) = 41,41155030 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_6 &= y_5 - c_6 x_5 - b_6 x_5^2 - a_6 x_5^3 = \\ &= 0,913 - 41,41155030 \cdot 0,248 - (-160,05919359) \cdot 0,248^2 - 193,09424434 \cdot 0,248^3 = \\ &= -2,45804880 \end{aligned}$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 6 dla $0,248 \leq x \leq 0,346$ przyjmuje postać:

$$f_6(x) = 193,09424x^3 - 160,05919x^2 + 41,41155x - 2,45805$$

Przedział nr 7: $j = 7$, $0,346 \leq x \leq 0,454$

Dane: $x_5 = 0,248$, $x_6 = 0,346$, $x_7 = 0,454$, $x_8 = 0,563$

$y_5 = 0,913$, $y_6 = 0,707$, $y_7 = 0,891$, $y_8 = 1,133$

Szukane: a_7 , b_7 , c_7 , d_7 , $f_7'(x_6)$, $f_7'(x_7)$, $f_7''(x_6)$, $f_7''(x_7)$, $f_7(x)$

$$\begin{aligned} f_7'(x_7) &= 2/\left[(x_8 - x_7)/(y_8 - y_7) + (x_7 - x_6)/(y_7 - y_6)\right] = \\ &= 2/\left[(0,563 - 0,454)/(1,133 - 0,891) + (0,454 - 0,346)/(0,891 - 0,707)\right] = \\ &= 1,92795289 \end{aligned}$$

$f_7'(x_6) = 0$ ponieważ pochodna zmienia znak w węźle x_6 .

$$\begin{aligned} f_7''(x_6) &= -2\left(f_7'(x_7) + 2f_7'(x_6)\right)/(x_7 - x_6) + 6(y_7 - y_6)/(x_7 - x_6)^2 = \\ &= -2(1,92795289 + 2 \cdot 0)/(0,454 - 0,346) + 6(0,891 - 0,707)/(0,454 - 0,346)^2 = \\ &= 58,94737446 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_7''(x_7) &= 2\left(2f_7'(x_7) + f_7'(x_6)\right)/(x_7 - x_6) - 6(y_7 - y_6)/(x_7 - x_6)^2 = \\ &= 2(2 \cdot 1,92795289 + 0)/(0,454 - 0,346) - 6(0,891 - 0,707)/(0,454 - 0,346)^2 = \\ &= -23,24454317 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_7 &= \left(f_7''(x_7) - f_7''(x_6)\right)/\left[6((x_7 - x_6))\right] = \\ &= (-23,24454317 - 58,94737446)/\left[6(0,454 - 0,346)\right] = -126,83937906 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_7 &= \left(x_7 f_7''(x_6) - x_6 f_7''(x_7)\right)/\left[2((x_7 - x_6))\right] = \\ &= (0,454 \cdot 58,94737446 - 0,346 \cdot (-23,24454317))/\left[2(0,454 - 0,346)\right] = \\ &= 161,13296269 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_7 &= \left[(y_7 - y_6) - b_7(x_7^2 - x_6^2) - a_7(x_7^3 - x_6^3)\right]/(x_7 - x_6) = \\ &= \left[(0,891 - 0,707) - 161,13296269 \cdot (0,454^2 - 0,346^2) - (-126,83937906) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (0,454^3 - 0,346^3)\right]/(0,454 - 0,346) = -65,94990087 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_7 &= y_6 - c_7 x_6 - b_7 x_6^2 - a_7 x_6^3 = \\
 &= 0,707 - (-65,94990087) \cdot 0,346 - 161,13296269 \cdot 0,346^2 - (-126,83937906) \cdot \\
 &\cdot 0,346^3 = 9,48937921
 \end{aligned}$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 7 dla $0,346 \leq x \leq 0,454$ przyjmuje postać:

$$f_7(x) = -126,83938x^3 + 161,13296x^2 - 65,9499x + 9,48938$$

Przedział nr 8: $j = 8$, $0,454 \leq x \leq 0,563$

Dane: $x_6 = 0,346$, $x_7 = 0,454$, $x_8 = 0,563$, $x_9 = 0,651$

$$y_6 = 0,707, y_7 = 0,891, y_8 = 1,133, y_9 = 0,600$$

Szukane: a_8 , b_8 , c_8 , d_8 , $f_8'(x_7)$, $f_8'(x_8)$, $f_8''(x_7)$, $f_8''(x_8)$, $f_8(x)$

$f_8'(x_8) = 0$ ponieważ pochodna zmienia znak w węźle x_8 .

$$\begin{aligned}
 f_8'(x_7) &= 2 \left[(x_8 - x_7) / (y_8 - y_7) + (x_7 - x_6) / (y_7 - y_6) \right] = \\
 &= 2 \left[(0,563 - 0,454) / (1,133 - 0,891) + (0,454 - 0,346) / (0,891 - 0,707) \right] = \\
 &= 1,92795289
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_8''(x_7) &= -2 \left(f_8'(x_8) + 2f_8'(x_7) \right) / (x_8 - x_7) + 6(y_8 - y_7) / (x_8 - x_7)^2 = \\
 &= -2(0 + 2 \cdot 1,92795289) / (0,563 - 0,454) + 6(1,133 - 0,891) / (0,563 - 0,454)^2 = \\
 &= 51,46137025
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_8''(x_8) &= 2 \left(2f_8'(x_8) + f_8'(x_7) \right) / (x_8 - x_7) - 6(y_8 - y_7) / (x_8 - x_7)^2 = \\
 &= 2(2 \cdot 0 + 1,92795289) / (0,563 - 0,454) - 6(1,133 - 0,891) / (0,563 - 0,454)^2 = \\
 &= -86,83665264
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_8 &= \left(f_8''(x_8) - f_8''(x_7) \right) / \left[6((x_8 - x_7)) \right] = \\
 &= (-86,83665264 - 51,46137025) / \left[6(0,563 - 0,454) \right] = -211,46486680
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_8 &= \left(x_8 f_8''(x_7) - x_7 f_8''(x_8) \right) / \left[2((x_8 - x_7)) \right] = \\
 &= (0,563 \cdot 51,46137025 - 0,454 \cdot (-86,83665264)) / \left[2(0,563 - 0,454) \right] = \\
 &= 313,74583371
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_8 &= \left[(y_8 - y_7) - b_8(x_8^2 - x_7^2) - a_8(x_8^3 - x_7^3) \right] / (x_8 - x_7) = \\
 &= \left[(1,133 - 0,891) - 313,74583371 \cdot (0,563^2 - 0,454^2) - (-211,46486680) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot (0,563^3 - 0,454^3) \right] / (0,563 - 0,454) = -152,19438666
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_8 &= y_7 - c_8 x_7 - b_8 x_7^2 - a_8 x_7^3 = \\
 &= 0,891 - (-152,19438666) \cdot 0,454 - 313,74583371 \cdot 0,454^2 - (-211,46486680) \cdot \\
 &\quad \cdot 0,454^3 = 25,107392075
 \end{aligned}$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 8 dla $0,454 \leq x \leq 0,563$ przyjmuje postać:

$$f_8(x) = -211,46487x^3 + 313,74583x^2 - 152,19439x + 25,10739$$

Przedział nr 9: $j = 9$, $0,563 \leq x \leq 0,651$

Dane: $x_7 = 0,454$, $x_8 = 0,563$, $x_9 = 0,651$, $x_{10} = 0,683$

$y_7 = 0,891$, $y_8 = 1,133$, $y_9 = 0,600$, $y_{10} = 0,200$

Szukane: a_9 , b_9 , c_9 , d_9 , $f_9'(x_8)$, $f_9'(x_9)$, $f_9''(x_8)$, $f_9''(x_9)$, $f_9(x)$

$$\begin{aligned}
 f_9'(x_9) &= 2 \left[(x_{10} - x_9) / (y_{10} - y_9) + (x_9 - x_8) / (y_9 - y_8) \right] = \\
 &= 2 \left[(0,683 - 0,651) / (0,2 - 0,6) + (0,651 - 0,563) / (0,6 - 1,133) \right] = -8,15982854
 \end{aligned}$$

$f_9'(x_8) = 0$ ponieważ pochodna zmienia znak w węźle x_8 .

$$\begin{aligned}
 f_9''(x_8) &= -2 \left(f_9'(x_9) + 2f_9'(x_8) \right) / (x_9 - x_8) + 6(y_9 - y_8) / (x_9 - x_8)^2 = \\
 &= -2(-8,15982854 + 2 \cdot 0) / (0,651 - 0,563) + 6(0,6 - 1,133) / (0,651 - 0,563)^2 = \\
 &= -227,51422740
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_9''(x_9) &= 2 \left(2f_9'(x_9) + f_9'(x_8) \right) / (x_9 - x_8) - 6(y_9 - y_8) / (x_9 - x_8)^2 = \\
 &= 2(2 \cdot (-8,15982854) + 0) / (0,651 - 0,563) - 6(0,6 - 1,133) / (0,651 - 0,563)^2 = \\
 &= 42,06357876
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_9 &= \left(f_9''(x_9) - f_9''(x_8) \right) / \left[6((x_9 - x_8)) \right] = \\
 &= (42,06357876 - (-227,51422740)) / \left[6(0,651 - 0,563) \right] = 510,56402682
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_9 &= (x_9 f_9''(x_8) - x_8 f_9''(x_9)) / [2((x_9 - x_8))] = \\
 &= (0,651 \cdot (-227,51422740) - 0,563 \cdot 42,06357876) / [2(0,651 - 0,563)] = \\
 &= -976,09975499
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_9 &= [(y_9 - y_8) - b_9(x_9^2 - x_8^2) - a_9(x_9^3 - x_8^3)] / (x_9 - x_8) = \\
 &= [(0,6 - 1,133) - (-976,09975499) \cdot (0,651^2 - 0,563^2) - 510,56402682 \cdot \\
 &\cdot (0,651^3 - 0,563^3)] / (0,651 - 0,563) = 613,58941707
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_9 &= y_8 - c_9 x_8 - b_9 x_8^2 - a_9 x_8^3 = \\
 &= 1,133 - 613,58941707 \cdot 0,563 - (-976,09975499) \cdot 0,563^2 - 510,56402682 \cdot 0,563^3 = \\
 &= -126,03644013
 \end{aligned}$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 9 dla $0,563 \leq x \leq 0,651$ przyjmuje postać:

$$f_9(x) = 510,56403x^3 - 976,09975x^2 + 613,58942x - 126,03644$$

Przedział nr 10: $j = 10$, $0,651 \leq x \leq 0,683$

Dane: $x_8 = 0,563$, $x_9 = 0,651$, $x_{10} = 0,683$, $x_{11} = 0,709$

$y_8 = 1,133$, $y_9 = 0,600$, $y_{10} = 0,200$, $y_{11} = 0,050$

Szukane: a_{10} , b_{10} , c_{10} , d_{10} , $f'_{10}(x_9)$, $f'_{10}(x_{10})$, $f''_{10}(x_9)$, $f''_{10}(x_{10})$, $f_{10}(x)$

$$\begin{aligned}
 f'_{10}(x_{10}) &= 2/[[(x_{11} - x_{10})/(y_{11} - y_{10}) + (x_{10} - x_9)/(y_{10} - y_9)]] = \\
 &= 2/[[(0,709 - 0,683)/(0,05 - 0,2) + (0,683 - 0,651)/(0,2 - 0,6)]] = -7,89473684
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'_{10}(x_9) &= 2/[[(x_{10} - x_9)/(y_{10} - y_9) + (x_9 - x_8)/(y_9 - y_8)]] = \\
 &= 2/[[(0,683 - 0,651)/(0,2 - 0,6) + (0,651 - 0,563)/(0,6 - 1,133)]] = -8,15982853
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''_{10}(x_9) &= -2(f'_{10}(x_{10}) + 2f'_{10}(x_9)) / (x_{10} - x_9) + 6(y_{10} - y_9) / (x_{10} - x_9)^2 = \\
 &= -2(-7,89473684 + 2 \cdot (-8,15982854)) / (0,683 - 0,651) + \\
 &+ 6(0,2 - 0,6) / (0,683 - 0,651)^2 = -830,350380
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{10}''(x_{10}) &= 2(2f_{10}'(x_{10}) + f_{10}'(x_9)) / (x_{10} - x_9) - 6(y_{10} - y_9) / (x_{10} - x_9)^2 = \\ &= 2(2 \cdot (-7,89473684) + (-8,15982854)) / (0,683 - 0,651) - \\ &= -6(0,2 - 0,6) / (0,683 - 0,651)^2 = 846,91861125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= (f_{10}''(x_{10}) - f_{10}''(x_9)) / [6((x_{10} - x_9))] = \\ &= (846,91861125 - (-830,350380)) / [6(0,683 - 0,651)] = 8735,77599612 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{10} &= (x_{10}f_{10}''(x_9) - x_9f_{10}''(x_{10})) / [2((x_{10} - x_9))] = \\ &= (0,683 \cdot (-830,350380) - 0,651 \cdot 846,91861125) / [2(0,683 - 0,651)] = \\ &= -17476,14571037 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{10} &= [(y_{10} - y_9) - b_{10}(x_{10}^2 - x_9^2) - a_{10}(x_{10}^3 - x_9^3)] / (x_{10} - x_9) = \\ &= [(0,2 - 0,6) - (-17476,14571037) \cdot (0,683^2 - 0,651^2) - 8735,77599612 \cdot \\ &\cdot (0,683^3 - 0,651^3)] / (0,683 - 0,651) = 11639,09007756 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{10} &= y_9 - c_{10}x_9 - b_{10}x_9^2 - a_{10}x_9^3 = \\ &= 0,6 - 11639,09007756 \cdot 0,651 - (-17476,14571037) \cdot 0,651^2 - 8735,77599612 \cdot 0,651^3 = \\ &= -2580,19173480 \end{aligned}$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 10 dla $0,651 \leq x \leq 0,683$ przyjmuje postać:

$$f_{10}(x) = 8735,7760x^3 - 17476,14571x^2 + 11639,09008x - 2580,19173$$

Przedział nr 11: $j = 11$, $0,683 \leq x \leq 0,709$

Dane: $x_9 = 0,651$, $x_{10} = 0,683$, $x_{11} = 0,709$, $x_{12} = 0,735$

$y_9 = 0,600$, $y_{10} = 0,200$, $y_{11} = 0,050$, $y_{12} = 0,000$

Szukane: a_{11} , b_{11} , c_{11} , d_{11} , $f_{11}'(x_{10})$, $f_{11}'(x_{11})$, $f_{11}''(x_{10})$, $f_{11}''(x_{11})$, $f_{11}(x)$

$$\begin{aligned} f_{11}'(x_{11}) &= 2 / [(x_{12} - x_{11}) / (y_{12} - y_{11}) + (x_{11} - x_{10}) / (y_{11} - y_{10})] = \\ &= 2 / [(0,735 - 0,709) / (0 - 0,05) + (0,709 - 0,683) / (0,05 - 0,2)] = -2,88461538 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11}'(x_{10}) &= 2 / [(x_{11} - x_{10}) / (y_{11} - y_{10}) + (x_{10} - x_9) / (y_{10} - y_9)] = \\ &= 2 / [(0,709 - 0,683) / (0,05 - 0,2) + (0,683 - 0,651) / (0,2 - 0,6)] = -7,89473684 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{11}''(x_{10}) &= -2(f_{11}'(x_{11}) + 2f_{11}'(x_{10})) / (x_{11} - x_{10}) + 6(y_{11} - y_{10}) / (x_{11} - x_{10})^2 = \\
 &= -2(-2,88461538 + 2 \cdot (-7,89473684)) / (0,709 - 0,683) + \\
 &+ 6(0,05 - 0,2) / (0,709 - 0,683)^2 = 105,107442487
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{11}''(x_{11}) &= 2(2f_{11}'(x_{11}) + f_{11}'(x_{10})) / (x_{11} - x_{10}) - 6(y_{11} - y_{10}) / (x_{11} - x_{10})^2 = \\
 &= 2(2 \cdot (-2,88461538) + (-7,89473684)) / (0,709 - 0,683) - \\
 &- 6(0,05 - 0,2) / (0,709 - 0,683)^2 = 280,28651598
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= (f_{11}''(x_{11}) - f_{11}''(x_{10})) / [6((x_{11} - x_{10}))] = \\
 &= (280,28651598 - 105,10744248) / [6(0,709 - 0,683)] = 1122,94277885
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= (x_{11}f_{11}''(x_{10}) - x_{10}f_{11}''(x_{11})) / [2((x_{11} - x_{10}))] = \\
 &= (0,709 \cdot 105,10744248 - 0,683 \cdot 280,28651598) / [2(0,709 - 0,683)] = \\
 &= -2248,35603261
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= [(y_{11} - y_{10}) - b_{11}(x_{11}^2 - x_{10}^2) - a_{11}(x_{11}^3 - x_{10}^3)] / (x_{11} - x_{10}) = \\
 &= [(0,05 - 0,2) - (-2248,35603261) \cdot (0,709^2 - 0,683^2) - 1122,94277885 \cdot \\
 &\cdot (0,709^3 - 0,683^3)] / (0,709 - 0,683) = 1491,83824182
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= y_{10} - c_{11}x_{10} - b_{11}x_{10}^2 - a_{11}x_{10}^3 = \\
 &= 0,2 - 1491,83824182 \cdot 0,683 - (-2248,35603261) \cdot 0,683^2 - 1122,94277885 \cdot 0,683^3 = \\
 &= -327,67519192
 \end{aligned}$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 11 dla $0,683 \leq x \leq 0,709$ przyjmuje postać:

$$f_{11}(x) = 1122,94278x^3 - 2248,35603x^2 + 1491,83824x - 327,67519$$

Przedział nr 12: $j = 12$, $0,709 \leq x \leq 0,735$

Dane: $x_{10} = 0,683$, $x_{11} = 0,709$, $x_{12} = 0,735$

$y_{10} = 0,200$, $y_{11} = 0,050$, $y_{12} = 0,000$

Szukane: a_{11} , b_{11} , c_{11} , d_{11} , $f_{11}'(x_{10})$, $f_{11}'(x_{11})$, $f_{11}''(x_{10})$, $f_{11}''(x_{11})$, $f_{11}(x)$

$$f'_{12}(x_{11}) = 2/\left[\frac{(x_{12} - x_{11})}{(y_{12} - y_{11})} + \frac{(x_{11} - x_{10})}{(y_{11} - y_{10})}\right] =$$

$$= 2/\left[\frac{(0,735 - 0,709)}{(0 - 0,05)} + \frac{(0,709 - 0,683)}{(0,05 - 0,2)}\right] = -2,88461538$$

$$f'_{12}(x_{12}) = 3(y_{12} - y_{11})/\left[2(x_{12} - x_{11})\right] - f'_{12}(x_{11})/2 =$$

$$= 3(0 - 0,05)/\left[2(0,735 - 0,709)\right] - (-2,88461538)/2 = -1,44230769$$

$$f''_{12}(x_{11}) = -2\left(f'_{12}(x_{12}) + 2f'_{12}(x_{11})\right)/(x_{12} - x_{11}) + 6(y_{12} - y_{11})/(x_{12} - x_{11})^2 =$$

$$= -2(-1,44230769 + 2 \cdot (-2,88461538))/(0,735 - 0,709) +$$

$$+ 6(0 - 0,05)/(0,735 - 0,709)^2 = 110,94674467$$

$$f''_{12}(x_{12}) = 2\left(2f'_{12}(x_{12}) + f'_{12}(x_{11})\right)/(x_{12} - x_{11}) - 6(y_{12} - y_{11})/(x_{12} - x_{11})^2 =$$

$$= 2\left(2 \cdot (-1,44230769) + (-2,88461538)\right)/(0,735 - 0,709) -$$

$$- 6(0 - 0,05)/(0,735 - 0,709)^2 = 0,0$$

$$a_{12} = \left(f''_{12}(x_{12}) - f''_{12}(x_{11})\right)/\left[6((x_{12} - x_{11}))\right] =$$

$$= (0 - 110,94674467)/\left[6(0,735 - 0,709)\right] = -711,19708122$$

$$b_{12} = \left(x_{12}f''_{12}(x_{11}) - x_{11}f''_{12}(x_{12})\right)/\left[2((x_{12} - x_{11}))\right] =$$

$$= (0,735 \cdot 110,94674467 - 0,709 \cdot 0)/\left[2(0,735 - 0,709)\right] =$$

$$= 1568,18956408$$

$$c_{12} = \left[(y_{12} - y_{11}) - b_{12}(x_{12}^2 - x_{11}^2) - a_{12}(x_{12}^3 - x_{11}^3)\right]/(x_{12} - x_{11}) =$$

$$= \left[(0 - 0,05) - 1568,18956408 \cdot (0,735^2 - 0,709^2) - (-711,19708122) \cdot\right.$$

$$\left. \cdot (0,735^3 - 0,709^3)\right]/(0,735 - 0,709) = -1154,06163729$$

$$d_{12} = y_{11} - c_{12}x_{11} - b_{12}x_{11}^2 - a_{12}x_{11}^3 =$$

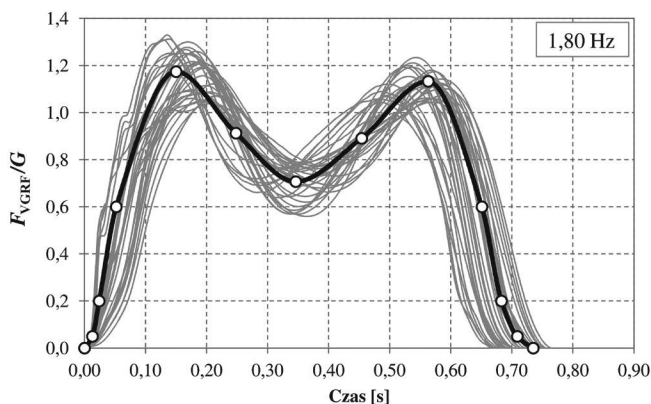
$$= 0,05 - (-1154,06163729) \cdot 0,689 - 1568,18956408 \cdot 0,689^2 - (-711,19708122) \cdot$$

$$\cdot 0,689^3 = 283,45183191$$

Funkcja interpolacyjna w przedziale nr 12 dla $0,689 \leq x \leq 0,715$ przyjmuje postać:

$$f_{12}(x) = -711,19708x^3 + 1568,18956x^2 - 1154,06164x + 283,45183$$

Na il. 90 przedstawiono wyznaczony przebieg czasowy siły F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością kroków $f_s = 1,80$ Hz (gruba linia czarna) w odniesieniu do wyników badań laboratoryjnych (cienkie linie szare).



Il. 90. Interpolowany czasowy przebieg unormowanej pionowej składowej sił reakcji podłoża F_{VGRF}/G generowanej podczas chodu z częstotliwością $f_s = 1,80$ Hz (przebieg interpolowany – gruba linia czarna, wyniki badań laboratoryjnych – cienkie linie szare, opracowanie własne)

Powyższy przykład przedstawiono w celu zobrazowania sekwencyjnej metody obliczeniowej, którą można zapisać w postaci programu komputerowego. Poniżej podano kody programów obliczeniowych zapisane w języku Python oraz Visual Basic dla Aplikacji (VBA) realizujących procedurę interpolacji za pomocą splajnów kubicznych z kontrolą kształtu [76, 102, 104, 118, 129, 180].

Wykorzystanie pierwszego kodu wymaga dostępu do środowiska programistycznego Python. Jest to obecnie możliwe między innymi za pośrednictwem usługi Google Colab (Google Colaboratory) – bezpłatnego produktu Google Research służącego do pisania i wykonywania kodów m.in. w języku Python w przeglądarce internetowej.

Drugi z kodów można zaimplementować w aplikacji MS Excel, wykorzystując wbudowany edytor Microsoft Visual Basic [4, 24, 25, 131].

Kod programu w języku Python

(Uwaga: W kodzie użyto wskaźnik \ oznaczający podział linii)

```
# VGRF interpolation with constrained cubic splines
import numpy as np
from decimal import *
```

```

getcontext().prec = 10
# Coordinates of interpolation nodes
Nodes = [(0,0), (0.013, 0.05), (0.024, 0.2), (0.052, 0.6),
         (0.150, 1.174), (0.248, 0.913), (0.346, 0.707),
         (0.454, 0.891), (0.563, 1.133), (0.651, 0.6), (0.683, 0.2),
         (0.709, 0.05), (0.735, 0)]

Nodes = [(Decimal(x), Decimal(y)) for (x,y) in Nodes]
# Calc Xi - Xi-1 to prevent div by zero
def dxx(x1, x0):
    if x1 == x0:
        return Decimal(10**30)
    else:
        return x1 - x0

class ConstrainedCubicSpline:

    # Calc first derivative
    def FirstDerivative(self, idx):
        derivative = Decimal(0)
        # print("idx = ", idx)
        if idx == 0: # lower edge
            derivative = Decimal(3) * (self.points[1][1] -
                self.points[0][1]) / (Decimal(2) * (self.points[1][0] -
                self.points[0][0])) - self.FirstDerivative(1) / Decimal(2)
        elif idx == (len(self.points)-1): # upper edge
            derivative = Decimal(3) * (self.points[-1][1] -
                self.points[-2][1]) / (Decimal(2) * (self.points[-1][0] -
                self.points[-2][0])) - \
                self.FirstDerivative(idx-1) / Decimal(2)
        elif (self.points[idx+1][1] - self.points[idx][1]) == 0 \
            and (self.points[idx][1] - self.points[idx-1][1]) == 0:
            derivative = Decimal(0)
        elif (self.points[idx+1][0] -
            self.points[idx][0]) / (self.points[idx+1][1] -
            self.points[idx][1]) + (self.points[idx][0] -
            self.points[idx-1][0]) / (self.points[idx][1] -
            self.points[idx-1][1]) == 0:
            derivative = Decimal(0)
        elif (self.points[idx+1][1] - self.points[idx][1]) * \
            (self.points[idx][1] - self.points[idx-1][1]) < 0:
            derivative = Decimal(0)
        else:
            derivative = Decimal(2.) / ((dxx(self.points[idx+1][0],
                self.points[idx][0]) / (self.points[idx+1][1] -
                self.points[idx][1])) + (dxx(self.points[idx][0],
                self.points[idx-1][0]) / (self.points[idx][1] -
                self.points[idx-1][1])))

        self.firstDerivative.append(derivative)
        return derivative

    # Calc second derivative fi(x_{i-1})
    def SecondDerivativeForIminus1(self, idx):

```

```

temp1 = Decimal(-2) * (self.FirstDerivative(idx) +
Decimal(2) * self.FirstDerivative(idx-1)) / \
(self.points[idx][0] - self.points[idx-1][0])
temp2 = Decimal(6) * (self.points[idx][1] -
self.points[idx-1][1]) / (self.points[idx][0] -
self.points[idx-1][0])**2
return temp1 + temp2

# Calc second derivative fi(x_{i})
def SecondDerivativeForI(self, idx):
    temp1 = Decimal(2) * (Decimal(2) * self.FirstDerivative(idx) +
self.FirstDerivative(idx-1)) / (self.points[idx][0] -
self.points[idx-1][0])
    temp2 = Decimal(6) * (self.points[idx][1] -
self.points[idx-1][1]) / \
(self.points[idx][0] - self.points[idx-1][0])**2
    return temp1 - temp2

# Constructor
# self.points - an array with points given by user
# self.calculatedParameters - an array with calculated
# parameters [(a0,b0,c0,d0), (a1,b1,c1,d1), ..., (an,bn,cn,dn)]
def __init__(self, points):
    # array of coords [(x0,y0), (x1,y1), (x2,y2), ..., (xn,yn)]
    self.points = [(Decimal(x), Decimal(y)) for (x,y) in points]
    # tuple (a,b,c,d)
    self.calculatedParameters = []
    self.firstDerivative = []
    if len(self.points) == 0:
        return 0
    elif len(self.points) == 1:
        return self.points[0][1]

for idx in range(len(self.points)):
    if idx == 0:
        continue
    a = (self.SecondDerivativeForI(idx) -
self.SecondDerivativeForIminus1(idx)) / (Decimal(6) *
(self.points[idx][0] - self.points[idx - 1][0]))
    b = (self.points[idx][0] * \
self.SecondDerivativeForIminus1(idx) -
self.points[idx-1][0] * self.SecondDerivativeForI(idx)) / \
(Decimal(2) * (self.points[idx][0] - self.points[idx - 1][0]))
    c = ((self.points[idx][1] - self.points[idx-1][1]) -
b * (self.points[idx][0]**2 - self.points[idx-1][0]**2) -
a * (self.points[idx][0]**3 - self.points[idx-1][0]**3)) / \
(self.points[idx][0] - self.points[idx-1][0])
    d = self.points[idx-1][1] - c * self.points[idx-1][0] - b * \
pow(self.points[idx-1][0], 2) - a * \
pow(self.points[idx-1][0], 3)

    self.calculatedParameters.append((a,b,c,d))

spline = ConstrainedCubicSpline(Nodes)

```

```
print("Coefficients of interpolation functions (a, b, c, d)")
for (a,b,c,d) in spline.calculatedParameters:
    print("(%f,%f,%f,%f)"%(a,b,c,d))

%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Interpolation of interval between given consecutive points
def f(params, x):
    return params[0] * pow(x, 3) + params[1] * pow(x, 2) + \
        params[2] * x + params[3]

# Create a plot for points generated by constrained cubic spline
def plot(paramsForAllIntervals, points, interval = 1000):

    size = len(points) if len(points) < len(paramsForAllIntervals) \
        else len(paramsForAllIntervals)
    pointsX = np.array([])
    pointsY = np.array([])
    for idx in range(size):
        step = 1 / Decimal(interval)
        pointsForNextInterval = np.arange(points[idx][0],
            points[idx+1][0], step)
        pointsX = np.concatenate((pointsX, pointsForNextInterval))
        pointsY = np.concatenate((pointsY,
            f(spline.calculatedParameters[idx], pointsForNextInterval)))

    plt.figure(figsize=(10, 15), dpi=100)
    plt.subplot(211)
    plt.grid(True, linestyle='dashed', alpha=0.5)
    # Plot points for each interval (points were generated by script)
    plt.plot(pointsX, pointsY, 'k')
    # Plot points added by user
    plt.plot([x[0] for x in points], [x[1] for x in points],
        'p', marker="o", color='k', markeredgewidth=1,
        markerfacecolor='w', markersize=6)
    print()
    print("Interpolation result: ")
    for i in range(len(pointsX)):
        print(round(pointsX[i],3), ",", round(pointsY[i],6))
    print(round(Nodes[len(Nodes)-1][0],3), ",",
        round(Nodes[len(Nodes)-1][1],6))
    print()
plot(spline.calculatedParameters, Nodes)
```

Kod programu w języku Visual Basic dla Aplikacji (VBA)

(Autor kodu: Kruger C.J.C. [108], w kodzie użyto wskaźnik _ oznaczający podział linii)

```
Option Explicit
Option Base 0
Function subspline(xi As Double, xx As Object, _
```

```

yy As Object) As Double
Dim i As Integer
Dim yi As Double
Dim x() As Double
Dim y() As Double
Dim y2() As Double
Dim j As Integer
j = -1
For i = 1 To UBound(xx())
    If yy(i) <> "" Then
        j = j + 1
        ReDim Preserve x(j)
        ReDim Preserve y(j)
        x(j) = CDb1(xx(i))
        y(j) = CDb1(yy(i))
    End If
Next i
    'Constrained cubic spline
    yi = SplineCon(xi, x(), y())
'Return
cubspline = yi
End Function

Public Function SplineCon(x As Double, xx() As Double, _
yy() As Double) As Double
'|-----
'| Function returns y value for a corresponding x value, based on
'| cubic spline. xx(0 to No_of_lines) is x values. X vallues must be
'| unique (no two consecutive ones the same), must be in ascending
'| order, No. of lines = Number of points - 1. yy(0 to No_of_lines)
'| is y values. Function dxx is used to prevent div by zero.
'| Developer: C. Kruger, Guildford, UK
'|-----
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim Nmax As Integer
Dim Num As Integer

'1st and 2nd derivative for left and right ends of line
Dim gxx(0 To 1) As Double
Dim ggxx(0 To 1) As Double

'Constants for cubic equations
Dim A As Double    'Also for linear extrapolation
Dim B As Double    'Also for linear extrapolation
Dim C As Double
Dim D As Double

'Number of lines = points - 1
Nmax = UBound(xx())

'(1a) Find LineNumber or segment. Linear extrapolate outside range
Num = 0
If x < xx(0) Or x > xx(Nmax) Then

```

```

`X outside range. Linear interpolate
`Below min or max?
If x < xx(0) Then Num = 1 Else Num = Nmax
B = (yy(Num) - yy(Num - 1)) / dxx(xx(Num), xx(Num - 1))
A = yy(Num) - B * xx(Num)
SplineCon = A + B * x
Exit Function

`(1b) Find LineNumber or segment
Else
`X in range. Get line.
For i = 1 To Nmax
  If x <= xx(i) Then
    Num = i
    Exit For
  End If
Next i
End If

`(2) Calc first derivative for intermediate points
For j = 0 To 1 `Two points around line
  i = Num - 1 + j
  If i = 0 Or i = Nmax Then
    `Set very large slope at ends
    gxx(j) = 10 ^ 30
  ElseIf (yy(i + 1) - yy(i) = 0) Or (yy(i) - _
yy(i - 1) = 0) Then
    `Only check for 0 dy. dx assumed NEVER equals 0!
    gxx(j) = 0
  ElseIf ((xx(i + 1) - xx(i)) / (yy(i + 1) - _
yy(i)) + (xx(i) - xx(i - 1)) / (yy(i) - _
yy(i - 1))) = 0 Then
    `Pos PLUS neg slope is 0. Prevent div by zero.
    gxx(j) = 0
  ElseIf (yy(i + 1) - yy(i)) * (yy(i) - _
yy(i - 1)) < 0 Then
    `Pos AND neg slope, assume slope = 0 to prevent overshoot
    gxx(j) = 0
  Else
    `Calculate an average slope for point based on connecting lines
    gxx(j) = 2 / (dxx(xx(i + 1), _
xx(i)) / (yy(i + 1) - yy(i)) + _
dxx(xx(i), xx(i - 1)) / (yy(i) - _
yy(i - 1)))
  End If
Next j

`(3) Reset first derivative (slope) at first and last point
If Num = 1 Then
  `First point has 0 2nd derivative
  gxx(0) = 3 / 2 * (yy(Num) - yy(Num - 1)) / _
dxx(xx(Num), xx(Num - 1)) - gxx(1) / 2
End If
If Num = Nmax Then

```

```

`Last point has 0 2nd derivative
gxx(1) = 3 / 2 * (yy(Num) - yy(Num - 1)) / _
dxx(xx(Num), xx(Num - 1)) - gxx(0) / 2
End If

`(4) Calc second derivative at points
ggxx(0) = -2 * (gxx(1) + 2 * gxx(0)) / _
dxx(xx(Num), xx(Num - 1)) + 6 * _
(yy(Num) - yy(Num - 1)) / dxx(xx(Num), _
xx(Num - 1)) ^ 2

ggxx(1) = 2 * (2 * gxx(1) + gxx(0)) / _
dxx(xx(Num), xx(Num - 1)) - 6 * _
(yy(Num) - yy(Num - 1)) / dxx(xx(Num), _
xx(Num - 1)) ^ 2

`(5) Calc constants for cubic
A = 1 / 6 * (ggxx(1) - ggxx(0)) / _
dxx(xx(Num), xx(Num - 1))

B = 1 / 2 * (xx(Num) * ggxx(0) - _
xx(Num - 1) * ggxx(1)) / dxx(xx(Num), _
xx(Num - 1))

C = (yy(Num) - yy(Num - 1) - B * _
(xx(Num) ^ 2 - xx(Num - 1) ^ 2) - _
A * (xx(Num) ^ 3 - xx(Num - 1) ^ 3)) / _
dxx(xx(Num), xx(Num - 1))

D = yy(Num - 1) - C * xx(Num - 1) - B * _
xx(Num - 1) ^ 2 - A * xx(Num - 1) ^ 3

`Return function
SplineCon = A * x ^ 3 + B * x ^ 2 + C * x + D

End Function

Public Function dxx(x1 As Double, x0 As Double) As Double
`Calc Xi - Xi-1 to prevent div by zero

dxx = x1 - x0
If dxx = 0 Then dxx = 10 ^ 30

End Function

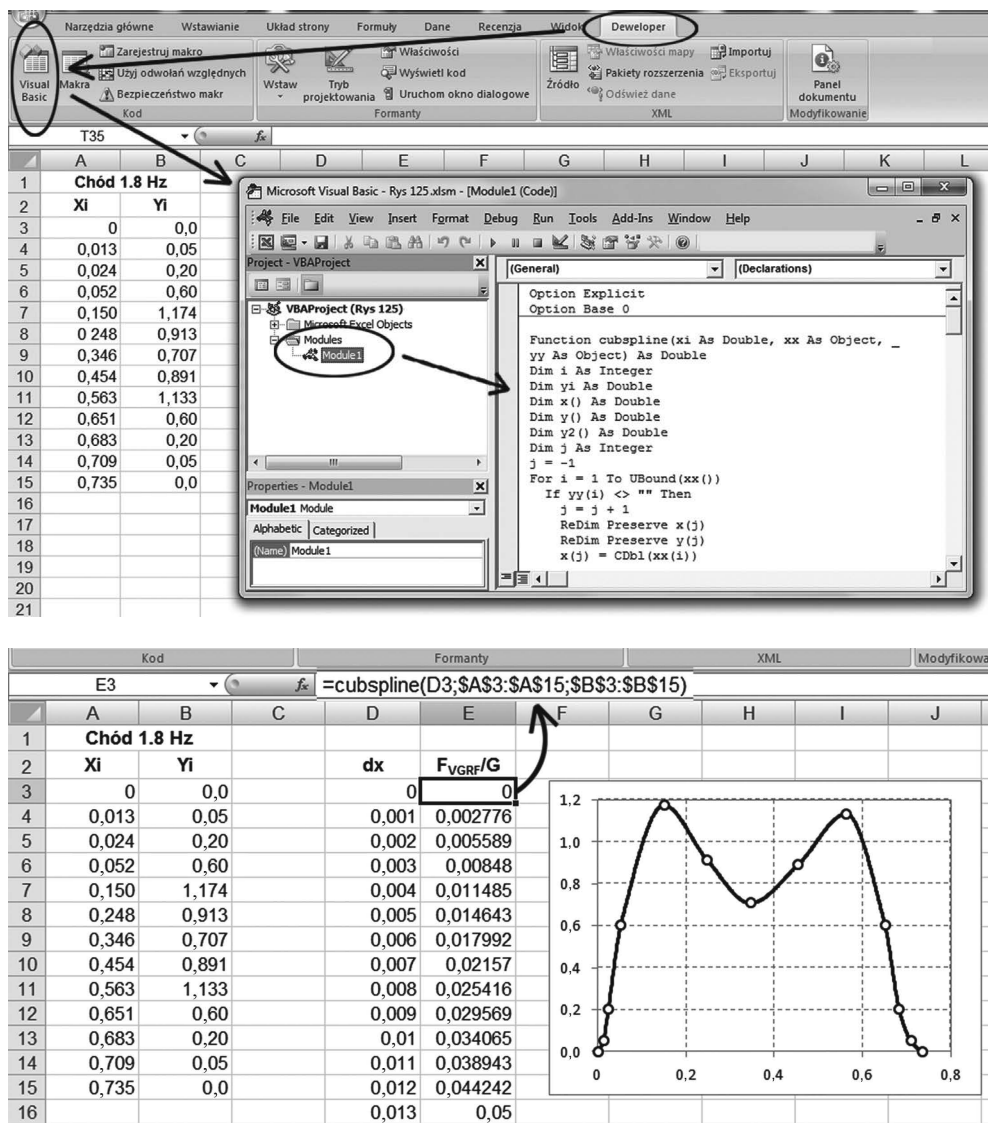
```

Wyznaczenie interpolowanego przebiegu krzywej F_{VGRF}/G w arkuszu kalkulacyjnym programu MS Excel wymaga:

- wprowadzenia i zapisania kodu programu obliczeniowego w edytorze Microsoft Visual Basic,
- zdefiniowania współrzędnych węzłów interpolacji $(x_0, y_0) \dots (x_n, y_n)$,
- zdefiniowania przyrostu argumentów funkcji interpolacyjnej dx ,

- wykorzystania funkcji `cubspine("dx";"x0:xn";"y0:yn")` z właściwymi parametrami wejściowymi w celu wyznaczenia wartości funkcji interpolacyjnej, gdzie dx – przyrost argumentu funkcji interpolacyjnej, $x_0:x_n$ – zakres komórek zawierających znane współrzędne x_i węzłów interpolacji, $y_0:y_n$ – zakres komórek zawierających znane współrzędne y_i węzłów interpolacji.

Sposób wykorzystania powyższej procedury zobrazowano na il. 91.



Il. 91. Wyznaczenie interpolowanego przebiegu krzywej F_{VGRF}/G w arkuszu kalkulacyjnym programu MS Excel (opracowanie własne)

Interpolację unormowanych czasowych przebiegów F_{VGRF}/G wykonać można również, wykorzystując środowiska obliczeniowo-programistyczne MATLAB lub GNU Octave [30, 45, 62, 109, 134, 145, 165, 169, 183]. Poniżej przedstawiono procedury umożliwiające wyznaczenie unormowanych przebiegów krzywych F_{VGRF}/G w tych środowiskach za pomocą funkcji *pchip()* realizującej interpolację odcinkową za pomocą wielomianu Hermite’a trzeciego stopnia bez zachowania ciągłości krzywizny funkcji interpolacyjnej (interpolacja z kontrolą kształtu).

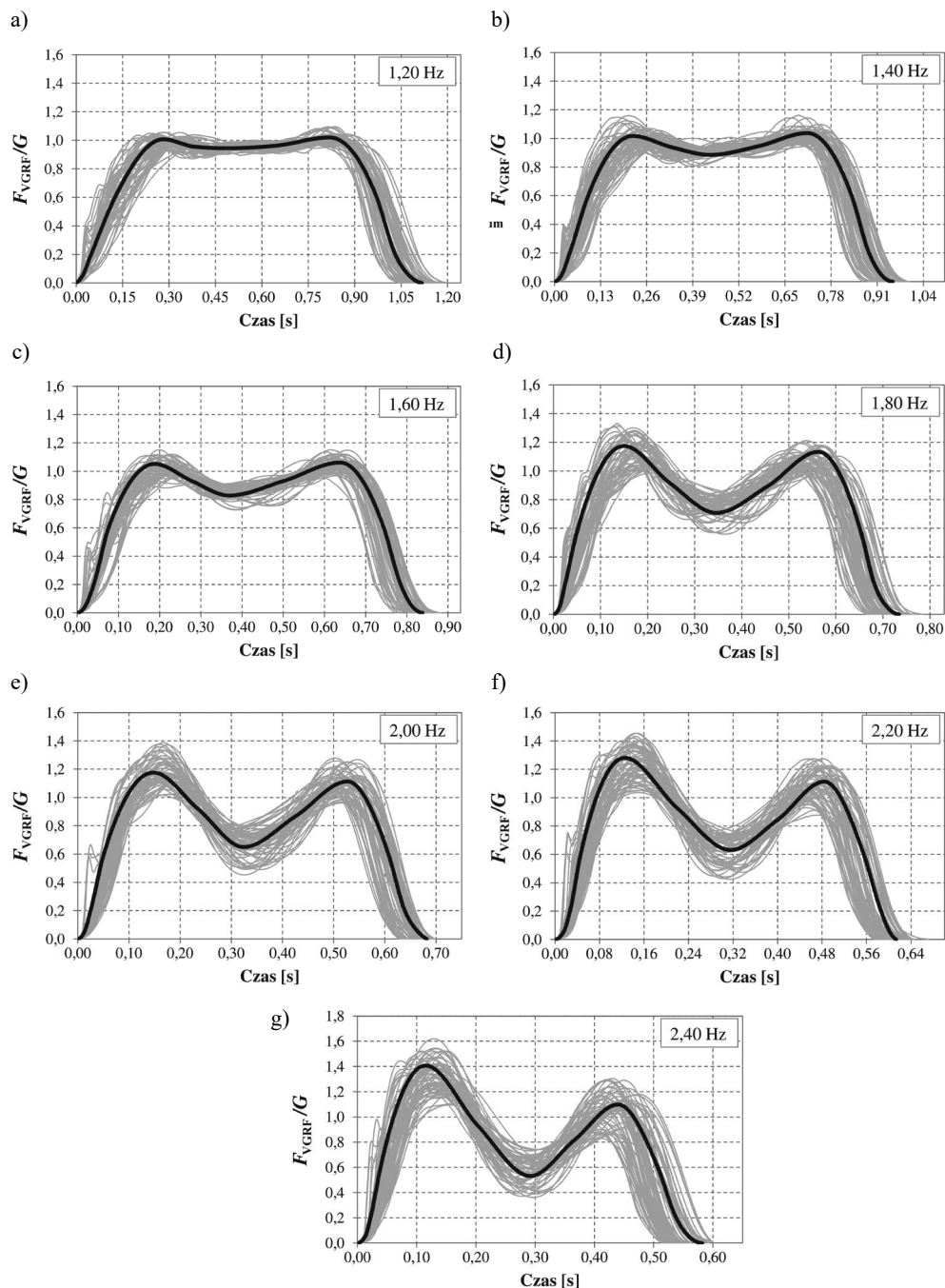
Procedura w języku programu MATLAB

```
% Wspolrzedne wezlow interpolacji (xi, yi)
x = [0, 0.013, 0.024, 0.052, 0.150, 0.248, 0.346, 0.454, 0.563, 0.651,
0.683, 0.709, 0.735];
y = [0, 0.05, 0.2, 0.6, 1.174, 0.913, 0.707, 0.891, 1.133, 0.6, 0.2,
0.05, 0];
% Krok czasowy
n = length(x);
t = 0:0.001:x(n);
% Interplacja odcinkowa funkcja splajn 3go stopnia
Spline = pchip(x,y,t);
VGRF = [t; Spline];
plot(t, Spline, 'k', x, y, 'o', 'MarkerSize',6, 'MarkerEdgeColor', 'k',
'MarkerFaceColor','w')
```

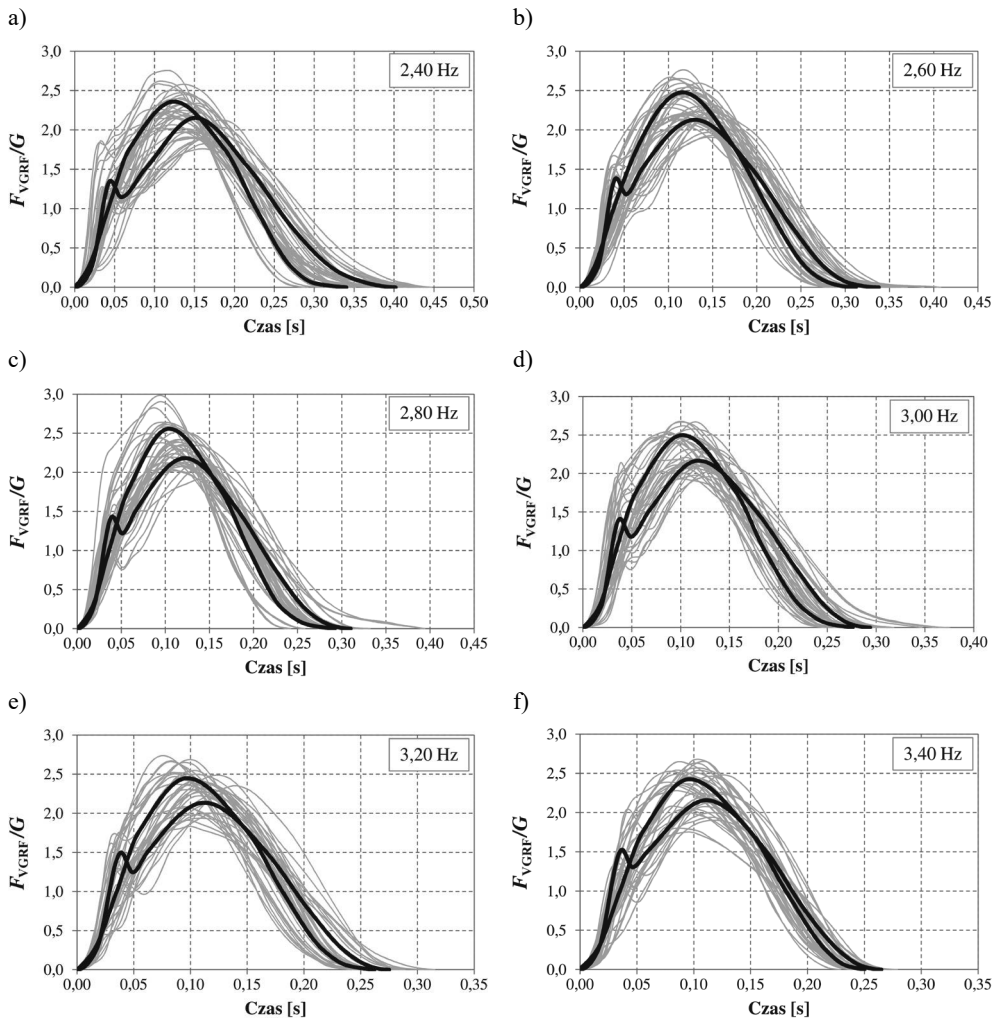
Procedura w języku programu GNU Octave

```
% Wspolrzedne wezlow interpolacji (xi, yi)
x = [0, 0.013, 0.024, 0.052, 0.150, 0.248, 0.346, 0.454, 0.563, 0.651,
0.683, 0.709, 0.735];
y = [0, 0.05, 0.2, 0.6, 1.174, 0.913, 0.707, 0.891, 1.133, 0.6, 0.2,
0.05, 0];
% Krok czasowy
n = length(x);
t = 0:.001:x(n);
% Interplacja odcinkowa funkcja splajn 3go stopnia
Spline = pchip (x,y);
VGRF = [t; ppval(Spline,t)];
plot(t, ppval(Spline,t), 'k', x, y, 'ko', 'MarkerSize',6,
'MarkerFaceColor','w');
```

Na il. 92 i il. 93 przedstawiono przebiegi unormowanych sił reakcji podłoża F_{VGRF}/G powstające odpowiednio podczas chodu i biegu wyznaczone za pomocą interpolacji splajnami kubicznymi z kontrolą kształtu z wykorzystaniem danych z tab. 21–27 dla sił F_{VGRF}/G generowanych podczas chodu i danych z tab. 28–39 dla sił F_{VGRF}/G generowanych podczas biegu w odniesieniu do wyników badań laboratoryjnych (przebiegi interpolowane – gruba linia czarna, wyniki badań laboratoryjnych – cienkie linie szare, opracowanie własne).



Il. 92. Interpolowane przebiegi F_{VGRF}/G generowane podczas chodu z częstotliwością kroków w przedziale $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz w odniesieniu do wyników badań laboratoryjnych (przebiegi interpolowane – gruba linia czarna, wyniki badań laboratoryjnych – cienkie linie szare, opracowanie własne)



Il. 93. Interpolowane przebiegi F_{VGRF}/G generowane podczas biegu techniką piętową oraz techniką sprinterską z częstotliwością kroków w przedziale $f_s = 2,40\text{--}3,40$ Hz w odniesieniu do wyników badań laboratoryjnych (przebiegi interpolowane – gruba linia czarna, wyniki badań laboratoryjnych – cienkie linie szare, opracowanie własne)

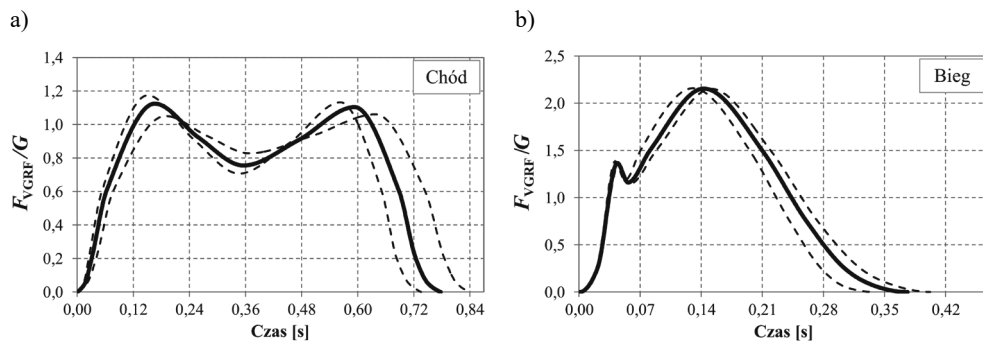
Badania laboratoryjne sił reakcji podłoża wykonano, przyjmując przyrost częstotliwości równy 0,20 Hz. Parametry unormowanych krzywych F_{VGRF}/G dla pośrednich częstotliwości f_n wyznaczyć można przez interpolację liniową (równania (75) i (76)), wykorzystując wartości parametrów znane dla zbadanych częstotliwości aktywności człowieka f_1 i f_2 (odpowiednio, czasy t_1 i t_2 oraz amplitudy A_1 i A_2).

$$t_j = t_2 + \frac{(t_1 - t_2)(f_2 - f_n)}{(f_2 - f_1)} \quad (75)$$

$$A_j = A_2 + \frac{(A_1 - A_2)(f_2 - f_n)}{(f_2 - f_1)} \quad (76)$$

gdzie: f_n – nowa częstotliwość aktywności człowieka ($f_1 < f_n < f_2$, częstotliwość pośrednia), f_1 i f_2 – sąsiednie częstotliwości aktywności człowieka o znanych położeniach węzłów interpolacji krzywej F_{VGRF}/G ($f_1 < f_2$), t_j – poszukiwany czas występowania nowego węzła interpolacji, A_j – poszukiwana amplituda siły F_{VGRF}/G w nowym węzle interpolacji, t_1 – czas występowania początkowego węzła przedziału interpolacji liniowej dla częstotliwości f_1 , t_2 – czas występowania końcowego węzła przedziału interpolacji liniowej dla częstotliwości f_2 , A_1 – amplituda siły F_{VGRF}/G w początkowym węzle przedziału interpolacji liniowej dla częstotliwości f_1 , A_2 – amplituda siły F_{VGRF}/G w końcowym węzle przedziału interpolacji liniowej dla częstotliwości f_2 .

Na il. 94 przedstawiono przykłady pośrednich przebiegów unormowanych krzywych F_{VGRF}/G wyznaczone przez interpolację liniową dla chodu z częstotliwością kroków $f_s = 1,72$ Hz (częstotliwość pośrednia między częstotliwościami $f_1 = 1,60$ Hz i $f_2 = 1,80$ Hz) oraz dla biegu techniką piętową z częstotliwością kroków $f_s = 2,48$ Hz (częstotliwość pośrednia między częstotliwościami $f_1 = 2,40$ Hz i $f_2 = 2,60$ Hz).



Il. 94. Pośrednie przebiegi F_{VGRF}/G wyznaczone przez interpolację liniową: a) dla chodu z częstotliwością kroków $f_s = 1,72$ Hz, b) dla biegu z częstotliwością kroków $f_s = 2,48$ Hz (linia ciągła – wynik interpolacji, linie przerywane – granice przedziału interpolacji, opracowanie własne)

5. WALIDACJA WŁASNYCH MODELI SIŁ REAKCJI PODŁOŻA

Opracowane modele pionowych składowych sił reakcji podłoża (VGRF) pozwalają wyznaczać unormowane czasowe przebiegi F_{VGRF}/G generowane przez poszczególne stopy osoby przemieszczającej się po konstrukcji (modele impulsów sił generowanych przez stopy osoby idącej lub biegnącej). Dzięki temu w trakcie modelowania ruchomego oddziaływania dynamicznego działającego na konstrukcję wybrać można dowolną ścieżkę przemieszczania się osoby idącej lub biegnącej. Modelowane obciążenia ruchome należy przyłożyć do konstrukcji w postaci sił skupionych przemieszczających się po konstrukcji. W procesie modelowania zachować należy właściwe wartości parametrów opisujących ruch przemieszczającej się osoby, takich jak: długość kroku (odpowiednia dla analizowanego rodzaju ruchu i szybkości ruchu) oraz częstotliwość kroków (częstotliwość opowiadająca normalnemu tempu chodu lub biegu bądź w przypadku analizy oddziaływań o charakterze rezonansowym częstotliwość dostosowana do częstotliwości drgań własnych konstrukcji).

Pamiętać należy, iż opracowane modele przedstawiają unormowaną pionową składową sił reakcji podłoża F_{VGRF}/G . W celu wyznaczenia rzeczywistej wartości obciążenia unormowane przebiegi F_{VGRF}/G należy przemnożyć przez ciężar poruszającej się osoby (G). Wykonać to można na dwa sposoby: *sposób 1*): przemnożyć unormowany przebieg F_{VGRF}/G przez ciężar osoby poruszającej się po konstrukcji (G) i tak wyznaczony rzeczywisty przebieg obciążenia przypisać do jednostkowych sił skupionych przyłożonych do konstrukcji lub *sposób 2*): przyłożyć do konstrukcji siły skupione o wartości G (zamiast sił jednostkowych) i do tak zdefiniowanych sił przypisać unormowane przebiegi F_{VGRF}/G .

Wykonanie analizy dynamicznej konstrukcji narażonej na oddziaływanie osób przemieszczających się po konstrukcji w sposób ciągły (osób pokonujących krok po kroku dystans z punktu startu do punktu docelowego) związane jest z utworzeniem ciągłej funkcji obciążenia składającej się z następujących po sobie sił reakcji podłoża VGRF. W celu uzyskania poprawnych wyników analiz dynamicznych utworzona ciągła funkcja obciążenia powinna odzwierciedlać parametry rzeczywistych ciągłych przebiegów VGRF. W przypadku obciążeń dynamicznych o złożonych przebiegach czasowych ich istotnymi charakterystykami, poza amplitudą i częstotliwością obciążenia oraz czasem jego działania, są: spektrum częstotliwościowe obciążenia oraz widmowa gęstość mocy (widmo mocy, ang. *power spectral density*, PSD) lub widmowa gęstość energii (widmo energii, ang. *energy spectral density*, ESD) obciążenia. Z licznych analiz wykonanych przez autora wynika, że miarodajnej oceny i porównania przebiegów VGRF generowanych podczas różnych form aktywności

człowieka dokonać można poprzez analizy widmowych gęstości energii ciągłych funkcji obciążeń VGRF (analizy spektrów ESD). Analizy takie wykorzystano w celu walidacji opracowanych modeli obciążeń VGRF.

Z punktu widzenia zamierzonego zastosowania zaproponowanych modeli obciążeń istotna jest także walidacja modeli poprzez sprawdzenie dokładności odwzorowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji narażonej na działanie tych obciążeń.

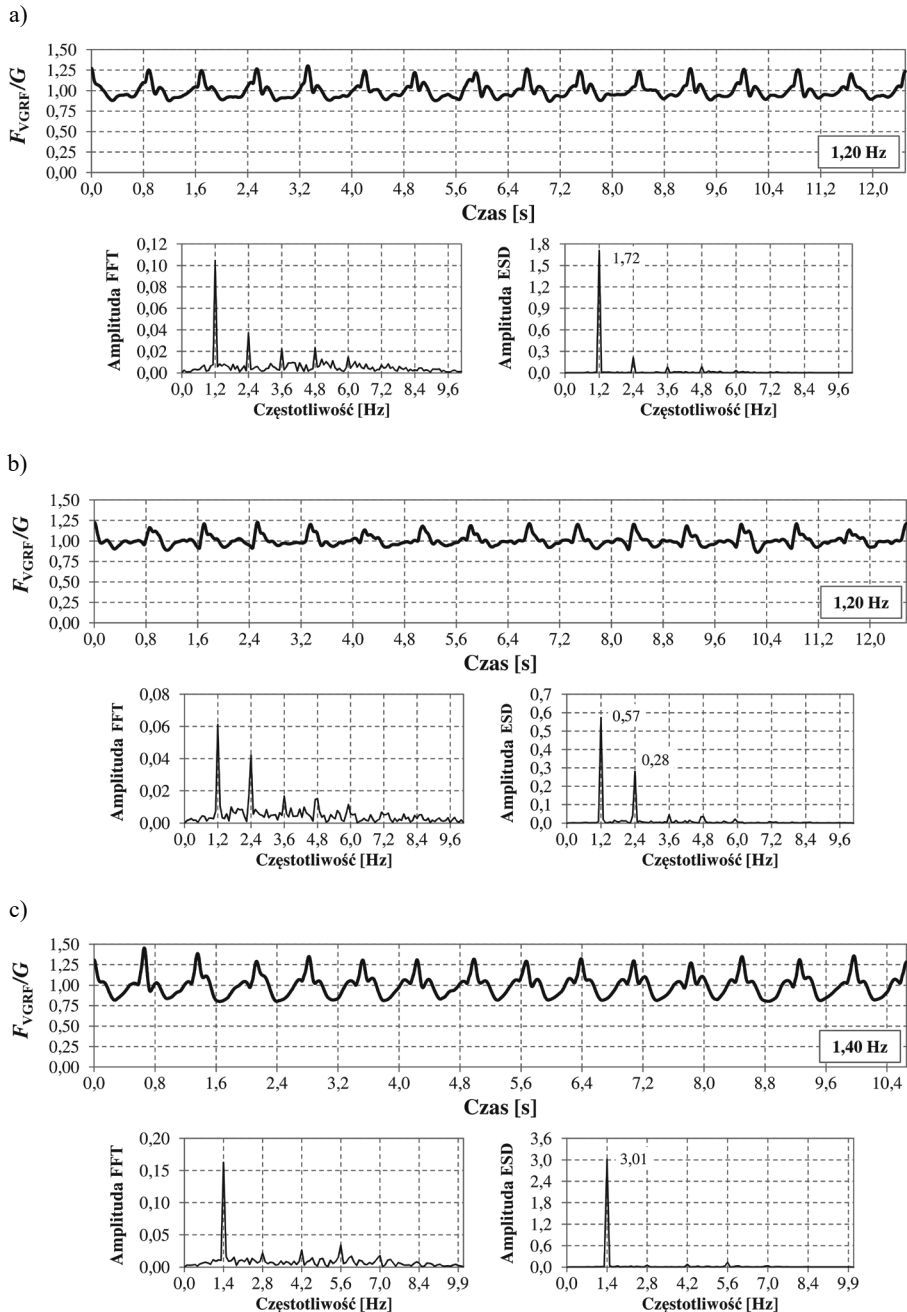
Walidację opracowanych modeli VGRF przeprowadzono w trzech etapach: 1) wyznaczenie spektrów energii unormowanych ciągłych przebiegów VGRF zarejestrowanych podczas badań oraz spektrów energii ciągłych przebiegów VGRF wygenerowanych z wykorzystaniem zaproponowanych modeli VGRF wraz z porównaniem wyników, 2) wykonanie analiz numerycznych drgań wymuszonych układów o jednym stopniu swobody (ang. *single degree of freedom*, SDOF) obciążonych przebiegami F_{VGRF}/G o maksymalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii zarejestrowanymi podczas badań oraz przebiegami wygenerowanymi za pomocą opracowanego modelu wraz z porównaniem wyników, 3) wykonanie dynamicznych badań terenowych i analiz numerycznych wybranych kładek dla pieszych w celu zarejestrowania i obliczenia odpowiedzi dynamicznych tych konstrukcji narażonych na oddziaływanie analizowanych obciążeń dynamicznych wraz z porównaniem wyników.

5.1. Walidacja modeli obciążeń VGRF generowanych podczas chodu

W celu walidacji własnych modeli obciążeń VGRF generowanych podczas chodu i biegu wykonano dodatkowe badania sił reakcji podłoża, podczas których zarejestrowano ciągłe przebiegi VGRF. Badania wykonano przy wykorzystaniu systemu pomiarowego składającego się z dwóch układów pomiaru siły: 1) prototypowego układu czujników siły w postaci wkładek do butów wraz przenośnym terminalem zapisu danych rejestrującym ciągłe sygnały VGRF oraz 2) platformy dynamograficznej do pomiaru i oceny sił reakcji podłoża Zebris FDM 1.5 stanowiącej układ weryfikujący pomiary systemem prototypowym.

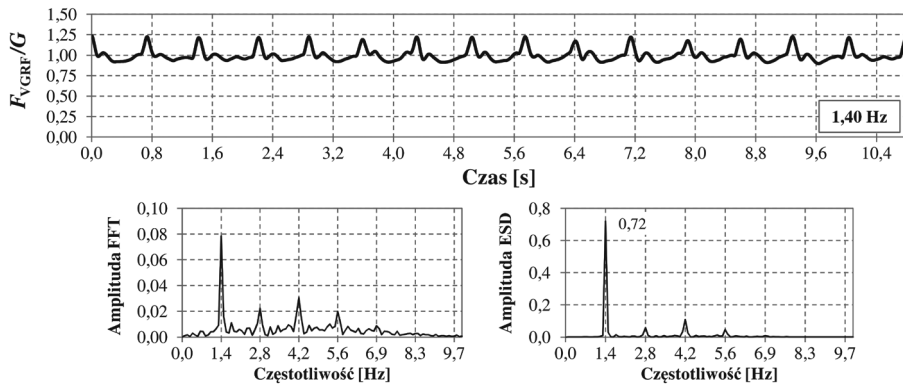
Rejestrację ciągłych przebiegów VGRF zrealizowano w zakresie częstotliwości kroków $f_s = 1,20\text{--}2,40$ Hz przy udziale grupy 20 wolontariuszy wykazujących się pełną sprawnością ruchową, bez kontuzji (10 kobiet, 10 mężczyzn) w wieku 18–44 lat (średnia \pm odchylenie standardowe: $34,6 \pm 12,4$ roku), waga $49,6\text{--}92,2$ kg ($70,3 \pm 18,2$ kg), wzrost $156,7\text{--}182,0$ cm ($173,2 \pm 6,4$ cm).

Na il. 95-1–95-2 przedstawiono przykładowe ciągłe przebiegi unormowanych sił F_{VGRF}/G zarejestrowane w trakcie badań. Analizy wykonano, przyjmując fragmenty ciągłych przebiegów obejmujące 15 impulsów F_{VGRF}/G .

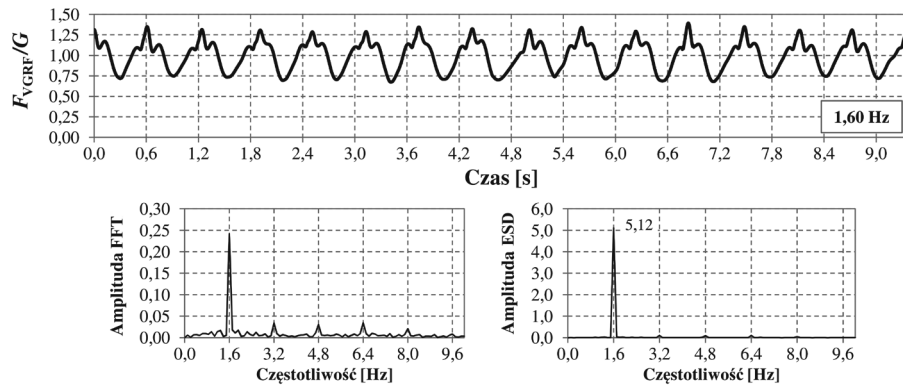


Il. 95-1. Przykłady ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G zarejestrowane podczas badań osób idących wraz z odpowiadającymi im widmami częstotliwości i widmami energii odpowiednio o maksymalnej i minimalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii: a), b) chód z częstotliwością $f_s = 1,20$ Hz, c) chód z częstotliwością $f_s = 1,40$ Hz (opracowanie własne)

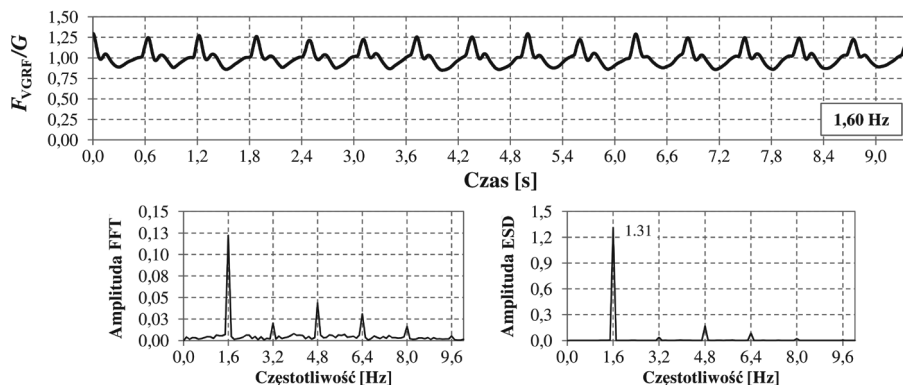
d)



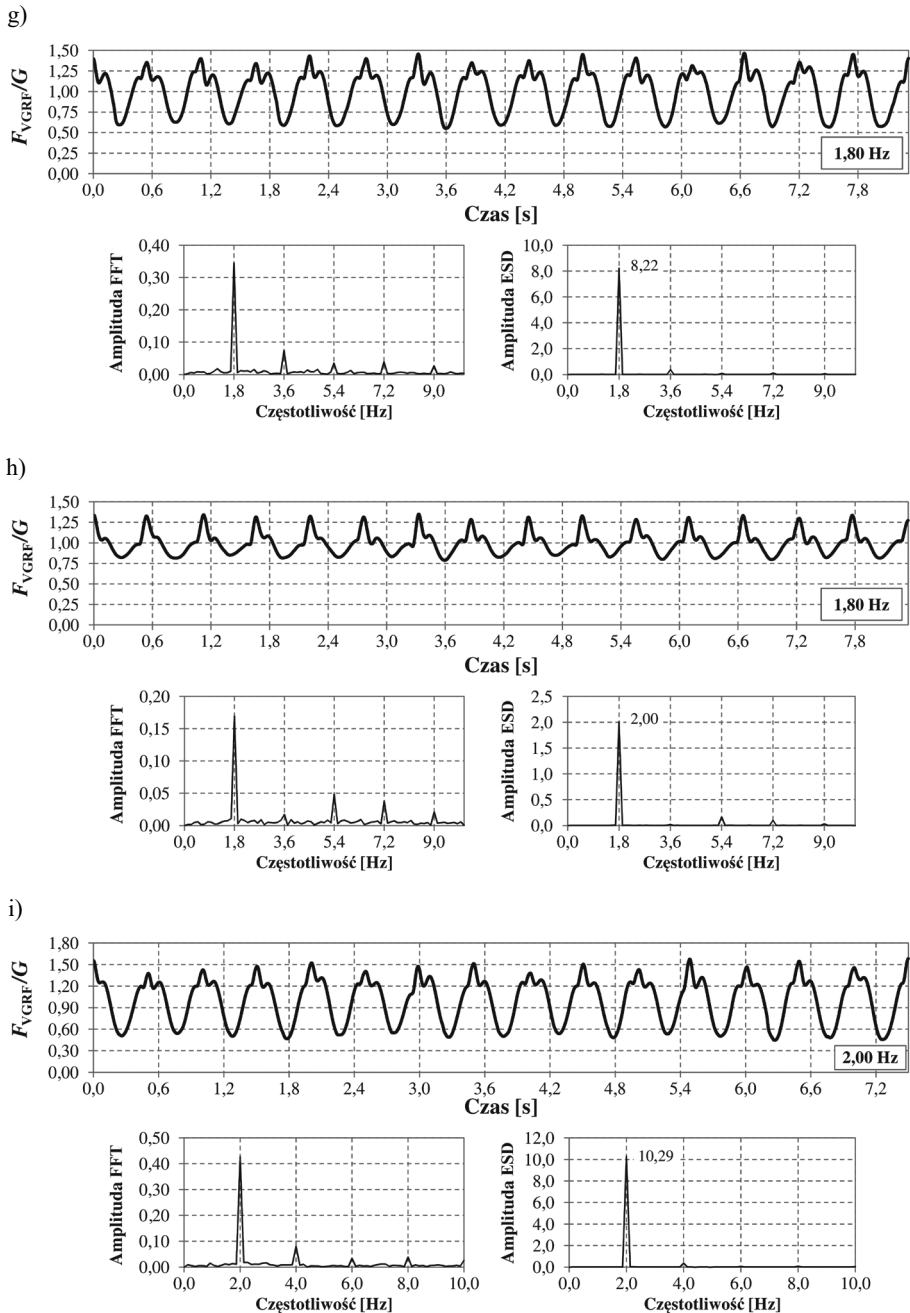
e)



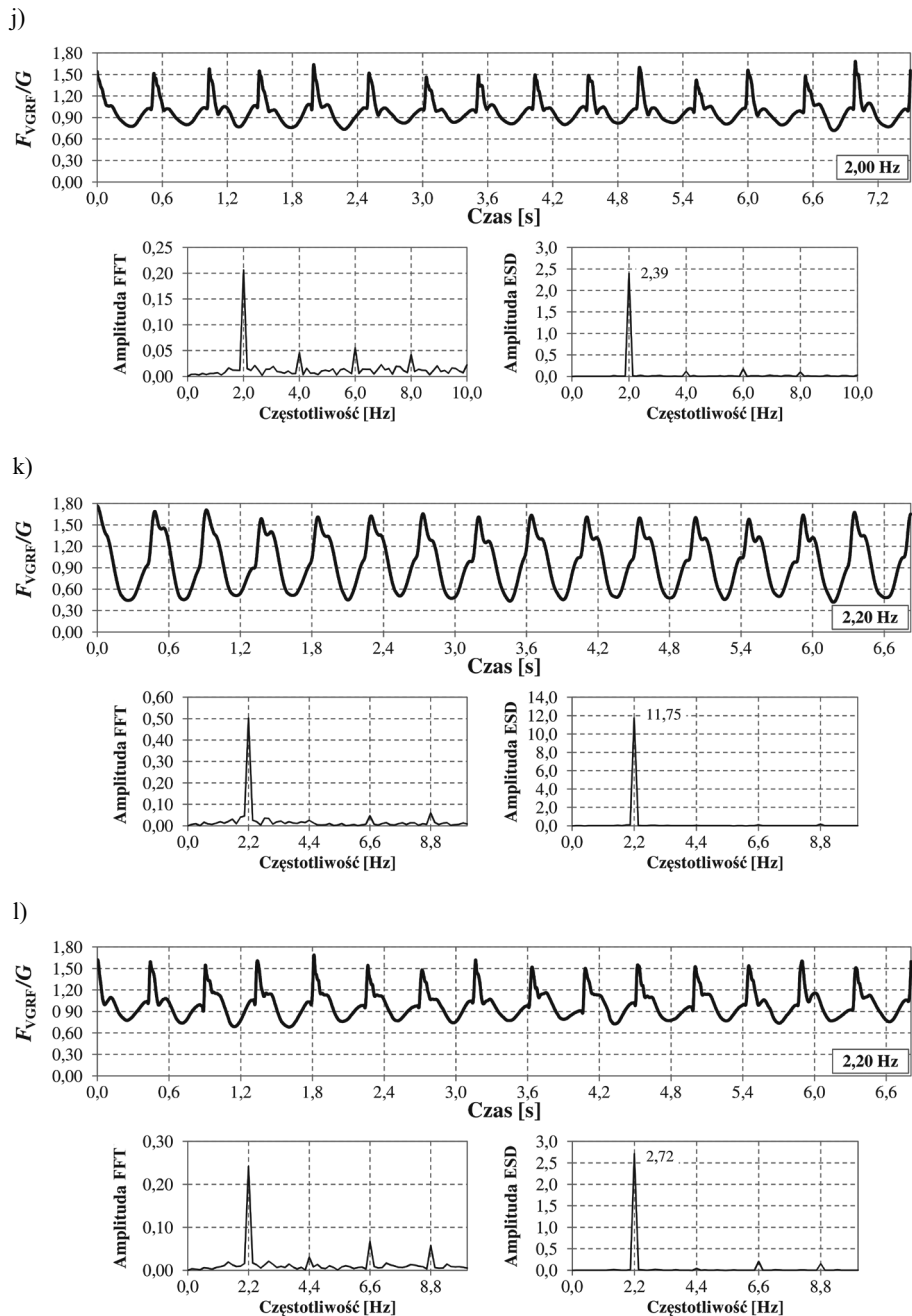
f)



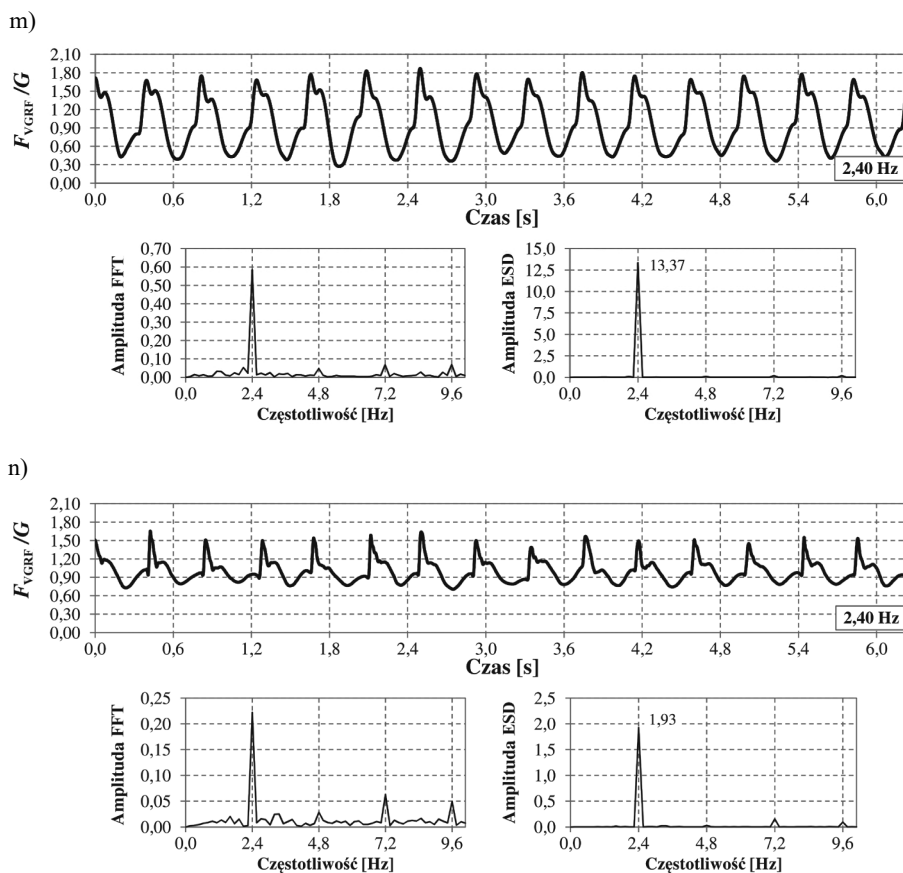
Il. 95-2. Przykłady ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G zarejestrowane podczas badań osób idących wraz z odpowiadającymi im widmami częstotliwości i widmami energii odpowiednio o maksymalnej i minimalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii: d) chód z częstotliwością $f_s = 1,40$ Hz, e, f) chód z częstotliwością $f_s = 1,60$ Hz (opracowanie własne)



Il. 95-3. Przykłady ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G zarejestrowane podczas badań osób idących wraz z odpowiadającymi im widmami częstotliwości i widmami energii odpowiednio o maksymalnej i minimalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii: g), h) chód z częstotliwością $f_s = 1,80$ Hz, i) chód z częstotliwością $f_s = 2,00$ Hz (opracowanie własne)



Il. 95-4. Przykłady ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G zarejestrowane podczas badań osób idących wraz z odpowiadającymi im widmami częstotliwości i widmami energii odpowiednio o maksymalnej i minimalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii:
 j) chód z częstotliwością $f_s = 2,00$ Hz, k), l) chód z częstotliwością $f_s = 2,20$ Hz, (opracowanie własne)



Il. 95-5. Przykłady ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G zarejestrowane podczas badań osób idących wraz z odpowiadającymi im widmami częstotliwości i widmami energii odpowiednio o maksymalnej i minimalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii: m), n) chód z częstotliwością $f_s = 2,40$ Hz (opracowanie własne)

W trakcie badań tempo aktywności poruszającej się osoby wyznaczone było przez elektroniczny metronom. Wykonane badania uwzględniają nieperfekcyjnie periodyczną naturę chodu człowieka w stopniu występującym w warunkach wyznaczania tempa ruchu przez metronom. Rejestracja przebiegów przy zachowaniu stałej częstotliwości kroków (stałego tempa ruchu) była założeniem upraszczającym przyjętym podczas realizacji badań oraz w opracowanym modelu obciążenia. Założenie to nie prowadzi do znaczących odstępstw od normalnych warunków ruchu pieszych w obrębie konstrukcji. Zauważyć należy, iż osoba idąca lub biegnąca przebywa w obrębie konstrukcji stosunkowo krótko w odniesieniu do czasu pokonania całej trasy swej podróży z punktu startu do punktu docelowego (np. z domu do pracy) i na ogół zachowuje na tym odcinku stałe tempo chodu lub biegu (sytuacja ta może ulec zmianie w przypadku dużego natężenia ruchu na konstrukcji). Nie można błędnie porównywać

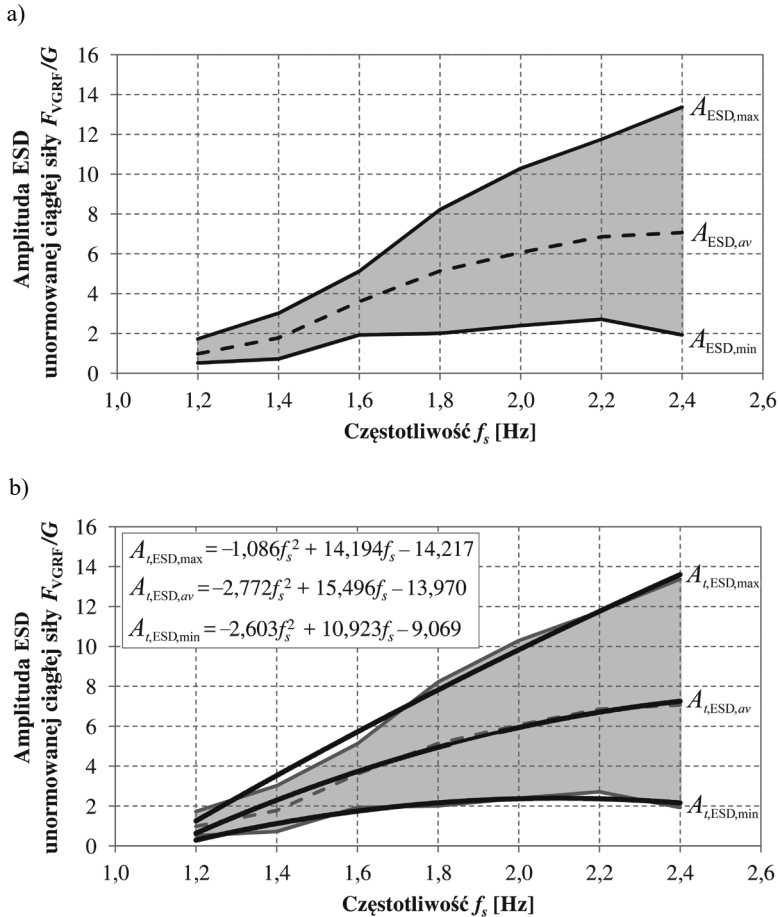
tempa chodu w obrębie konstrukcji z tempem chodu zmieniającym się w trakcie pokonywania przez przemieszczającą się osobę całkowitej trasy swej podróży do punktu docelowego. Zauważyć także należy, iż zaproponowany sposób modelowania oddziaływania dynamicznego za pomocą sił VGRF generowanych przez pojedyncze stopy umożliwia zmianę częstotliwości kroków i wartości obciążenia w przypadku zmiany tempa chodu lub biegu przez poruszającą się osobę spowodowaną np. przez duże naciężenie ruchu.

Na prezentowanych wykresach ESD zauważyć można, iż we wszystkich przypadkach dominująca jest amplituda pierwszej składowej widma gęstości energii. W trakcie analizy wyników zauważono także obniżanie wartości amplitudy pierwszej składowej widma gęstości energii w sygnałach o dużym udziale energetycznym wyższych składowych harmonicznych (il. 95-1b). Prawidłowość taką stwierdzono szczególnie w przypadkach ruchu w wolnym tempie (częstotliwość kroków $\sim 1,20\text{--}1,40$ Hz). Tłumaczyć to można zwiększonym wpływem różnych nawyków ruchowych (stylu chodu) na przebiegi VGRF podczas chodu w wolnym tempie. Wpływ ten objawia się w fazie podporu pojedynczego przypadającej na przebiegach VGRF na obszar wgłębienia (obszar doliny) krzywej M . Udział wyższych składowych maleje wraz ze wzrostem tempa chodu. Uznano, iż przy wyższych częstotliwościach kroków (przy szybszym tempie chodu) ruch ciała (ruch korpusu i kończyn) staje się bardziej uporządkowany, zapewne w celu utrzymania równowagi (właściwej pozycji ciała) i stabilności ruchu, co obniża wpływ wyższych składowych harmonicznych na przebiegi VGRF.

Analizując ciągle przebiegi VGRF przedstawione na il. 95-1–95-5, warto zauważyć, że wraz ze wzrostem częstotliwości kroków wzrasta wartość amplitudy międzyszczytowej obciążenia (amplituda pik-pik). Parametr ten można traktować jako przybliżony wskaźnik efektu dynamicznego generowanego przez osobę idącą (por. il. 67).

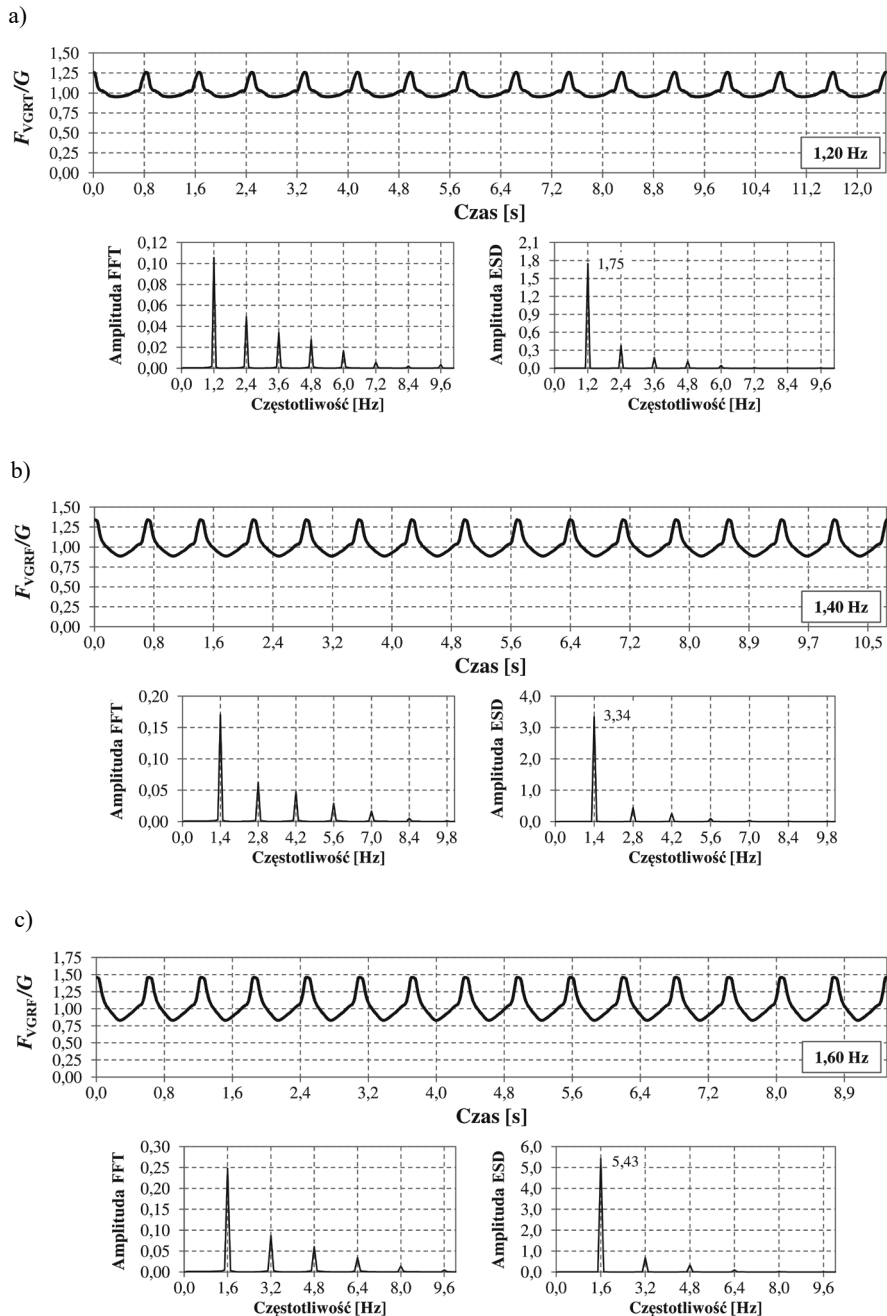
Na il. 96 przedstawiono wartości maksymalnych ($A_{\text{ESD,max}}$), średnich ($A_{\text{ESD,av}}$) i minimalnych ($A_{\text{ESD,min}}$) amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii wyznaczone dla ciągłych unormowanych sygnałów F_{VGRF}/G w funkcji częstotliwości kroków (il. 96a – rzeczywiste przebiegi amplitud A_{ESD} , il. 96b – aproksymacja przebiegów A_{ESD} wielomianami drugiego stopnia). Zaznaczyć należy, iż wynik analiz ESD zależy od długości sygnału F_{VGRF}/G . Analizie poddano sygnały obejmujące 15 kroków osoby idącej (15 impulsów F_{VGRF}/G).

Kolorem szarym zaznaczono obszar występowania pośrednich wartości amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii zarejestrowanych sygnałów F_{VGRF}/G . W przedziale częstotliwości kroków $f_s \approx 1,70\text{--}2,10$ Hz zauważyć można lokalny wzrost wartości amplitud widm gęstości energii. Ten przedział częstotliwości kroków określić można jako przedział normalnego (naturalnego lub komfortowego) tempa chodu.



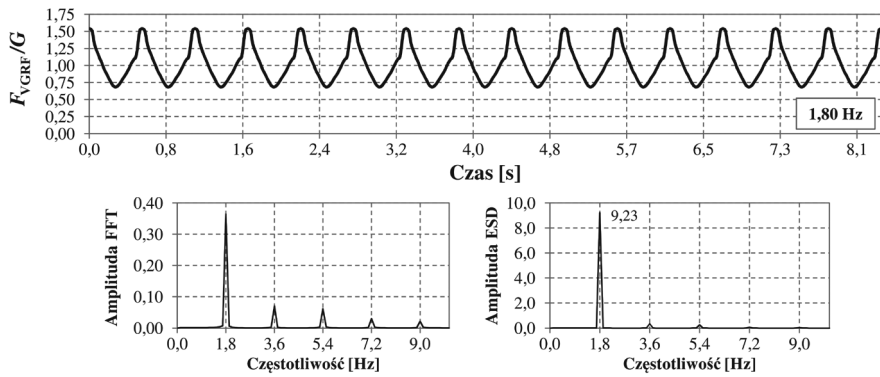
Il. 96. Wartości maksymalnych $A_{ESD,max}$, średnich $A_{ESD,av}$, i minimalnych $A_{ESD,min}$ amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych sygnałów F_{VGRF}/G generowanych podczas chodu (15 impulsów F_{VGRF}/G) w funkcji częstotliwości kroków f_s : a) przebiegi amplitud unormowanych sygnałów zarejestrowanych podczas badań, b) aproksymowane przebiegi amplitud $A_{t,ESD}$ (opracowanie własne)

W celu walidacji zaproponowanego modelu sił F_{VGRF}/G powstających podczas chodu wygenerowano ciągłe przebiegi unormowanych sił F_{VGRF}/G o długości 15 kroków (15 impulsów F_{VGRF}/G), wykorzystując dane przedstawione w tab. 21–27 przy założeniu stałego okresu kroków $T_s = 1/f_s$ odpowiadającego analizowanej częstotliwości chodu f_s . Wygenerowane przebiegi wraz z odpowiadającymi im widmami częstotliwości i widmami gęstości energii przedstawiono na il. 97–1–97-3.

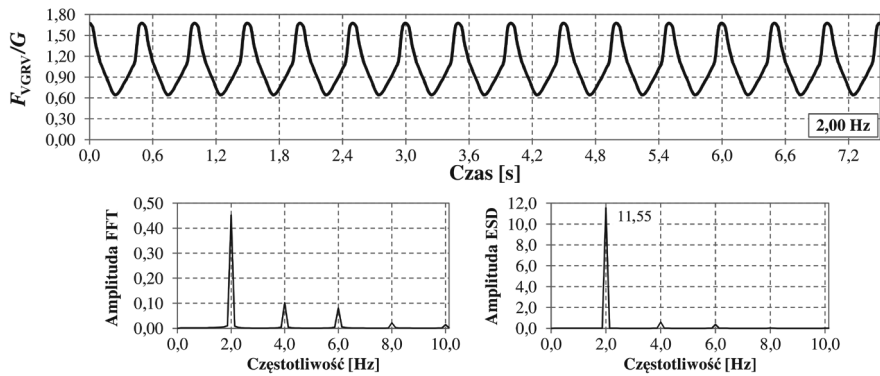


Il. 97-1. Ciągłe unormowane przebiegi F_{VGRF}/G wygenerowane przy wykorzystaniu zaproponowanego modelu F_{VGRF}/G wraz z odpowiadającymi im widmami częstotliwości i widmami energii (przebiegi o długości 15 impulsów F_{VGRF}/G): a) chód z częstotliwością $f_s = 1,20$ Hz, b) chód z częstotliwością $f_s = 1,40$ Hz, c) chód z częstotliwością $f_s = 1,60$ Hz (opracowanie własne)

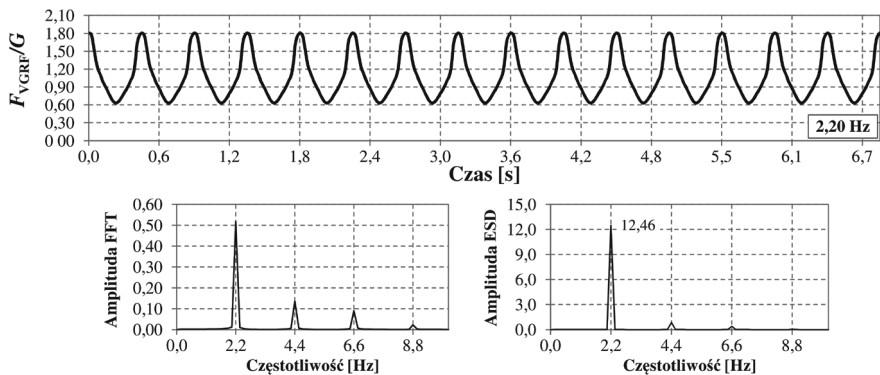
d)



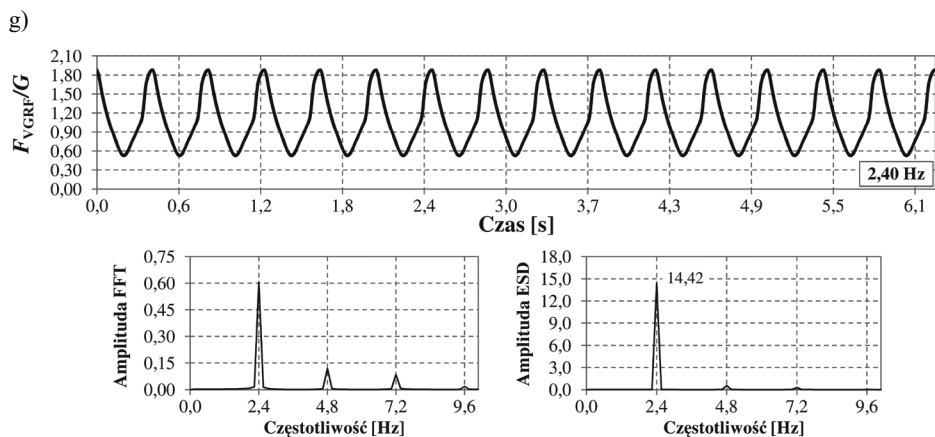
e)



f)



Il. 97-2. Ciągłe unormowane przebiegi F_{VGRF}/G wygenerowane przy wykorzystaniu zaproponowanego modelu F_{VGRF}/G wraz z odpowiadającymi im widniami częstotliwości i widniami energii (przebiegi o długości 15 impulsów F_{VGRF}/G): d) chód z częstotliwością $f_s = 1,80$ Hz, e) chód z częstotliwością $f_s = 2,00$ Hz, f) chód z częstotliwością $f_s = 2,20$ Hz (opracowanie własne)



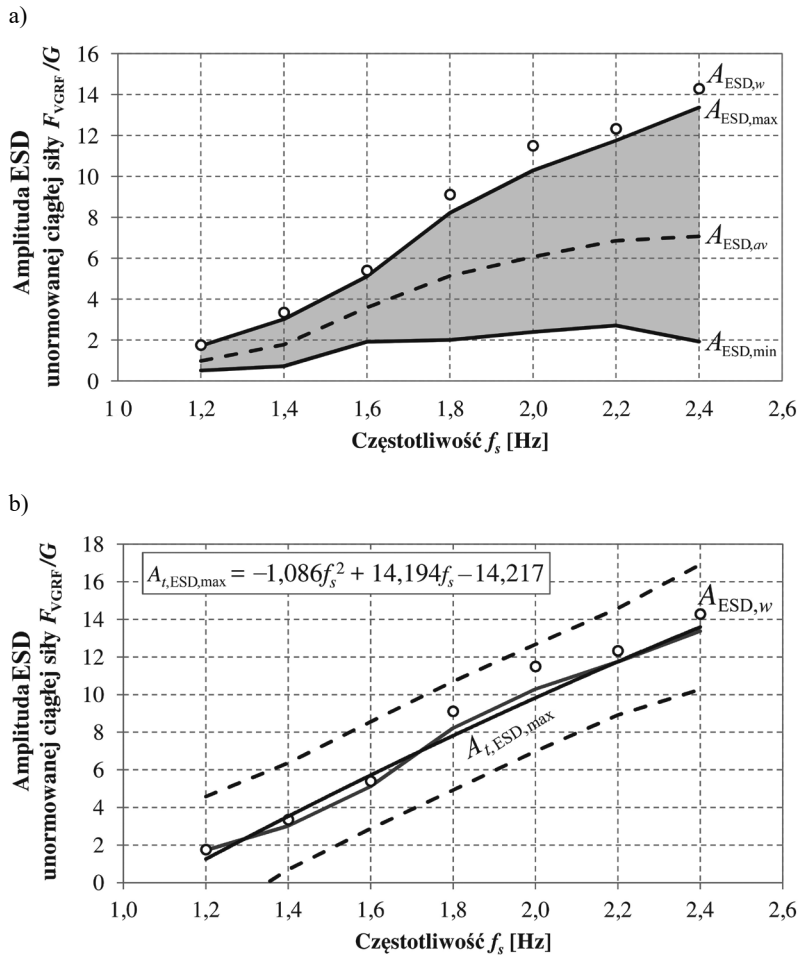
Il. 97-3. Ciągłe unormowane przebiegi F_{VGRF}/G wygenerowane przy wykorzystaniu zaproponowanego modelu F_{VGRF}/G wraz z odpowiadającymi im widmami częstotliwości i widmami energii (przebiegi o długości 15 impulsów F_{VGRF}/G): g) chód z częstotliwością $f_s = 2,40$ Hz (opracowanie własne)

Przyjęcie stałego okresu kroków pozwoliło uprościć proces modelowania ciągłych przebiegów F_{VGRF}/G . Celem analiz wykonanych przy tym założeniu było sprawdzenie wartości amplitud widm gęstości energii wyidealizowanych przebiegów F_{VGRF}/G i ich porównanie z amplitudami wyznaczonymi dla unormowanych przebiegów zarejestrowanych podczas badań. Wynik tych analiz przedstawiono na il. 98. Wartości amplitud pierwszych składowych ESD zamodelowanych przebiegów F_{VGRF}/G oznaczono białymi punktami z czarnym obramowaniem (amplitudy $A_{ESD,w}$).

Na il. 98a zauważyć można, iż zaproponowany model obciążenia, przy przyjęciu stałego okresu kroków osoby idącej T_s , pozwala wygenerować ciągle unormowane sygnały F_{VGRF}/G o amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii nieznacznie większej od maksymalnej wartości amplitudy pierwszej składowej widma gęstości energii sygnałów rzeczywistych $A_{ESD,max}$. Amplitudy wygenerowanych sygnałów mieszczą się w 95% przedziale predykcji maksymalnych amplitud sygnałów rzeczywistych wyznaczonym przy wykorzystaniu aproksymacji amplitud $A_{ESD,max}$ wielomianem drugiego stopnia (il. 98b – linie przerywane). Największe procentowe różnice porównywanych amplitud, wynoszące 7,0–12,0%, występują w przedziale częstotliwości kroków $f_s = 1,80$ – $2,40$ Hz.

W kolejnym etapie walidacji opracowanego modelu F_{VGRF}/G przeprowadzono obliczenia odpowiedzi dynamicznej przykładowych układów o jednym stopniu swobody (ang. *Single Degree of Freedom*, SDOF), o podstawowej częstotliwości drgań własnych odpowiadającej analizowanej częstotliwości kroków, obciążonych przebiegami F_{VGRF}/G o maksymalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii zarejestrowanymi podczas badań (il. 95a, c, e, g, i, k, m) oraz przebiegami wygenerowanymi za pomocą opracowanego modelu (il. 97). Obliczenia drgań wymuszonych

układów SDOF wykonano w programie Matlab (metoda Newmarka). W analizach przyjęto ciężar osoby idącej $G = 750$ N. W tab. 49 przedstawiono charakterystyki analizowanych układów SDOF oraz wartości odpowiedzi dynamicznych tych układów (maksymalne przyspieszenia drgań) wraz z procentowymi różnicami wartości tych przyspieszeń. Zauważyć można, iż różnice procentowe wartości przyspieszeń drgań nie przekraczają 5,0%.



Il. 98. Wartości amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii zamodelowanych ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G generowanych podczas chodu ($A_{ESD,w}$, białe punkty z czarnym obramowaniem) w odniesieniu do amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G zarejestrowanych podczas badań (15 impulsów F_{VGRF}/G): a) amplitudy zamodelowanych sygnałów F_{VGRF}/G w odniesieniu do amplitud sygnałów zarejestrowanych podczas badań, b) amplitudy zamodelowanych sygnałów F_{VGRF}/G ($A_{ESD,w}$) w odniesieniu do 95% przedziału predykcji maksymalnych amplitud sygnałów rzeczywistych – linie przerywane oraz linii trendu tych amplitud – czarna linia ciągła (opracowanie własne)

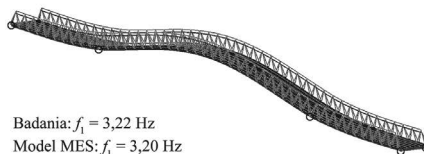
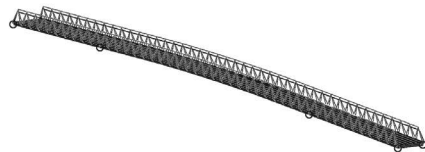
Tabela 49. Charakterystyki i odpowiedzi dynamiczne układów SDOF (opracowanie własne)

Częstotliwość [Hz]	Masa [kg]	Sztywność [N/m]	Ułamek tłumienia krytycznego [%]	Przyspieszenie [m/s^2]		Różnica [%]		
				Badania	Model			
1,20	13 400,0	761 775,5	0,5	0,216	0,220	1,85		
1,40		1 036 861,2		0,343	0,354	3,21		
1,60		1 354 267,6		0,504	0,513	1,79		
1,80		1 713 995,0		0,723	0,745	3,04		
2,00		2 116 043,2		0,899	0,939	4,45		
2,20		2 560 412,3		1,050	1,056	0,57		
2,40		3 047 102,2				1,215	1,181	2,80

W kolejnym kroku walidacji modelu sił VGRF generowanych podczas chodu wykonano analizy i badania dynamiczne rzeczywistych kładek dla pieszych. Analizowane konstrukcje wraz z ich modelami obliczeniowymi MES i podstawowymi postaciami drgań własnych pionowych przedstawiono na il. 99-1–99-2, są to: kratownicowa trójprzęsłowa kładka dla pieszych w miejscowości Ludźmierz (rozpiętości przęseł 15,0 + 36,0 + 15,0 m, podstawowa częstotliwość drgań własnych pionowych wyznaczona podczas badań $f_1 = 3,22$ Hz), dwuprzęsłowa podwieszona kładka Złotnicka we Wrocławiu (rozpiętości przęseł 34,0 + 34,0 m, podstawowa częstotliwość drgań własnych pionowych wyznaczona podczas badań $f_1 = 1,96$ Hz) [19, 22, 23, 81, 82], trójprzęsłowa belkowa kładka Piaskowa we Wrocławiu (rozpiętości przęseł 4,50 + 45,0 + 4,50 m, podstawowa częstotliwość drgań własnych pionowych wyznaczona podczas badań $f_1 = 2,23$ Hz) [20].

Badania i analizy dynamiczne kładki w Ludźmierzu wykonano dla częstotliwości kroków osoby idącej $f_s = 1,61$ Hz. W przypadku kładki Złotnickiej i kładki Piaskowej we Wrocławiu przyjęto $f_s = f_1$. Wyniki badań terenowych i analiz numerycznych kładek przedstawiono na il. 100–102.

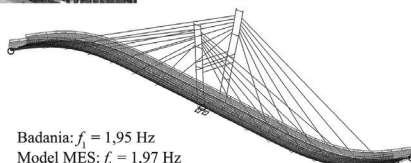
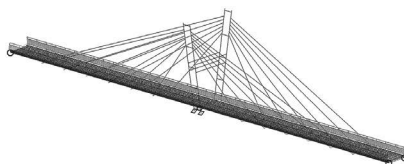
a)



Badania: $f_1 = 3,22$ Hz
Model MES: $f_1 = 3,20$ Hz

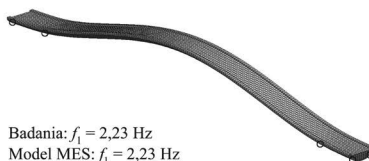
Il. 99-1. Analizowane kładki dla pieszych: a) kładka w Ludźmierzu (15,0 + 36,0 + 15,0 m)

b)



Badania: $f_1 = 1,95$ Hz
 Model MES: $f_1 = 1,97$ Hz

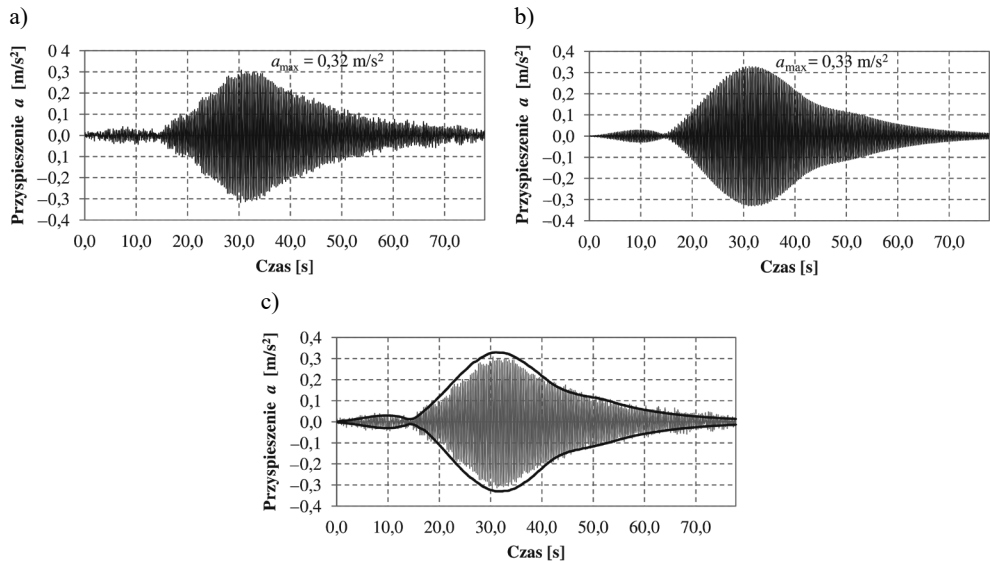
c)



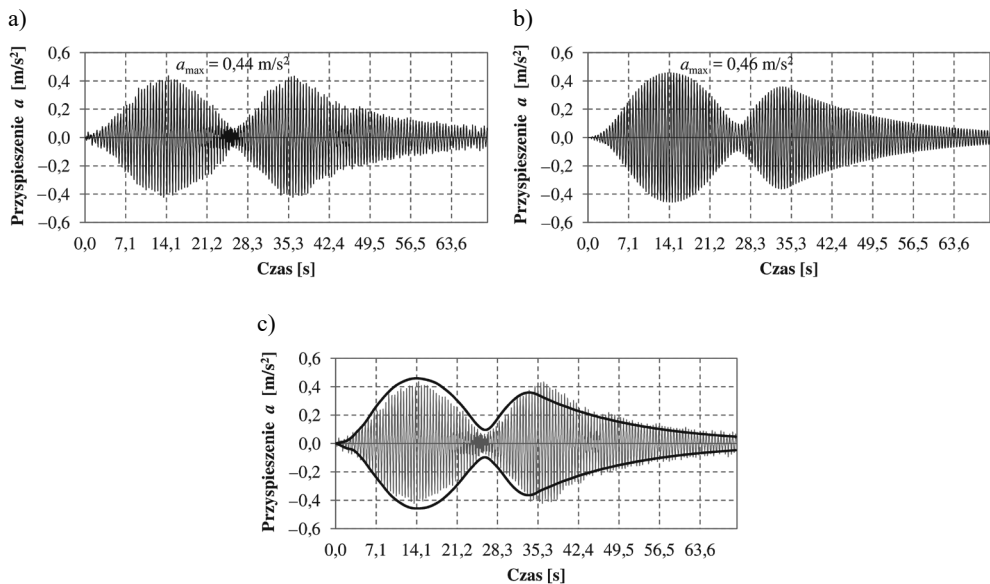
Badania: $f_1 = 2,23$ Hz
 Model MES: $f_1 = 2,23$ Hz

Il. 99-2. Analizowane kładki dla pieszych: b) kładka Złotnicka we Wrocławiu (34,0 + 34,0 m),
 c) kładka Piaskowa we Wrocławiu (4,5 + 45,0 + 4,5 m) (opracowanie własne)

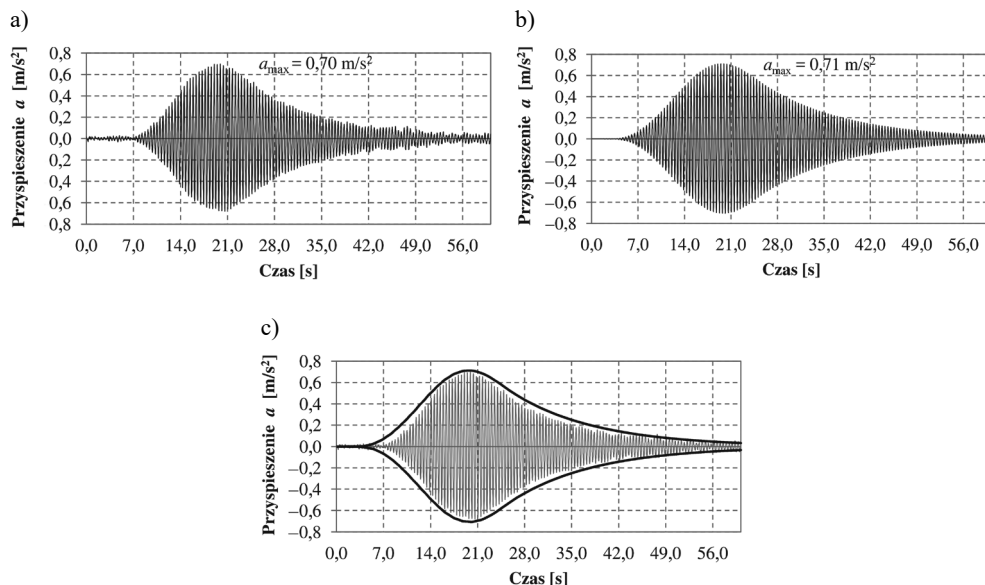
Obciążenie dynamiczne analizowanych kładek wygenerowano, przyjmując ciężar osoby idącej $G = 90$ kg (900 N), odpowiadający ciężarowi osoby uczestniczącej w badaniach kładek. Ważnym parametrem analiz numerycznych jest także długość kroku osoby idącej, a co za tym idzie liczba impulsów siły działających na model obliczeniowy. W wykonanych analizach numerycznych zachowano zgodność długości kroków osób idących ze średnimi długościami kroków osób idących ustalonymi podczas badań terenowych poszczególnych kładek. Średnią długość kroku ustalono na podstawie długości pokonanej drogi S i liczby kroków n wykonanych przez osobę uczestniczącą w badaniach kładki: $l_k = S/n$. W przypadku kładki w Ludźmierzu przyjęto średnią długość kroku osoby idącej $l_k = 83,0$ cm. W przypadku kładki Złotnickiej przyjęto średnią długość kroku osoby idącej $l_k = 97,0$ cm. W przypadku kładki Piaskowej przyjęto średnią długość kroku osoby idącej $l_k = 90,0$ cm. Na potrzeby analiz dynamicznych średnią długość kroku odpowiadającą analizowanej częstotliwości kroków ustalić można, wykorzystując il. 14 lub równanie (15) i il. 19. W analizach przyjęto średnie wartości ułamka tłumienia krytycznego wyznaczone na podstawie badań terenowych wynoszące: dla kładki w Ludźmierzu $\xi = 0,32\%$, dla kładki Złotnickiej $\xi = 0,45\%$, dla kładki Piaskowej $\xi = 0,53\%$.



Il. 100. Przyspieszenia drgań kładki w Ludźmierzu wzbudzone przez osobę idącą: a) sygnał o maksymalnych wartościach przyspieszeń zarejestrowany podczas badań terenowych, b) wynik analiz numerycznych, c) porównanie wyniku badań terenowych (sygnał w kolorze szarym) z wynikiem symulacji numerycznej (linie ciągłe – obwiednia wyniku symulacji) (opracowanie własne)



Il. 101. Przyspieszenia drgań kładki Złotnickiej wzbudzone przez osobę idącą: a) sygnał o maksymalnych wartościach przyspieszeń zarejestrowany podczas badań terenowych, b) wynik analiz numerycznych, c) porównanie wyniku badań terenowych (sygnał w kolorze szarym) z wynikiem symulacji numerycznej (linie ciągłe – obwiednia wyniku symulacji) (opracowanie własne)



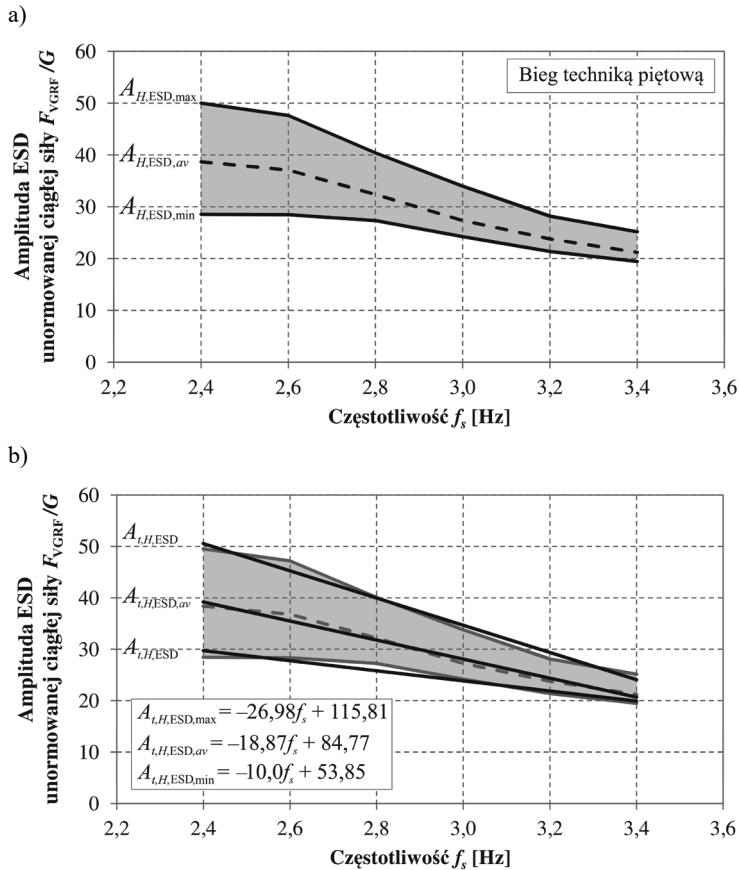
Il. 102. Przyspieszenia drgań kładki Piaskowej wzbudzone przez osobę idącą: a) sygnał o maksymalnych wartościach przyspieszeń zarejestrowany podczas badań terenowych, b) wynik analiz numerycznych, c) porównanie wyniku badań terenowych (sygnał w kolorze szarym) z wynikiem symulacji numerycznej (linie ciągłe – obwiednia wyniku symulacji) (opracowanie własne)

Procentowe różnice wartości przyspieszeń drgań pomostów analizowanych kładek, wyznaczonych przy wykorzystaniu opracowanych modeli F_{VGRF}/G , w stosunku do wyników badań terenowych, wyniosły: +3,1% (przeszacowanie wartości) dla kładki w Ludźmierzu, +4,5% (przeszacowanie wartości) dla kładki Żłotnickiej oraz +1,4% (przeszacowanie wartości) dla kładki Piaskowej. Na podstawie uzyskanych wyników uznano, iż opracowane modele sił VGRF generowanych podczas chodu pozwalają poprawnie oszacować odpowiedź dynamiczną konstrukcji. Amplitudy przyspieszeń drgań analizowanych konstrukcji wyznaczone są z nieznacznym przeszacowaniem nieprzekraczającym 5,0%.

5.2. Walidacja modeli obciążeń VGRF generowanych podczas biegu

W niniejszym rozdziale przedstawiono wyniki walidacji modeli sił reakcji podłoża generowanych podczas biegu techniką piętową oraz biegu techniką sprinterską. W tym celu wyznaczono maksymalne i minimalne amplitudy pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G zarejestrowanych

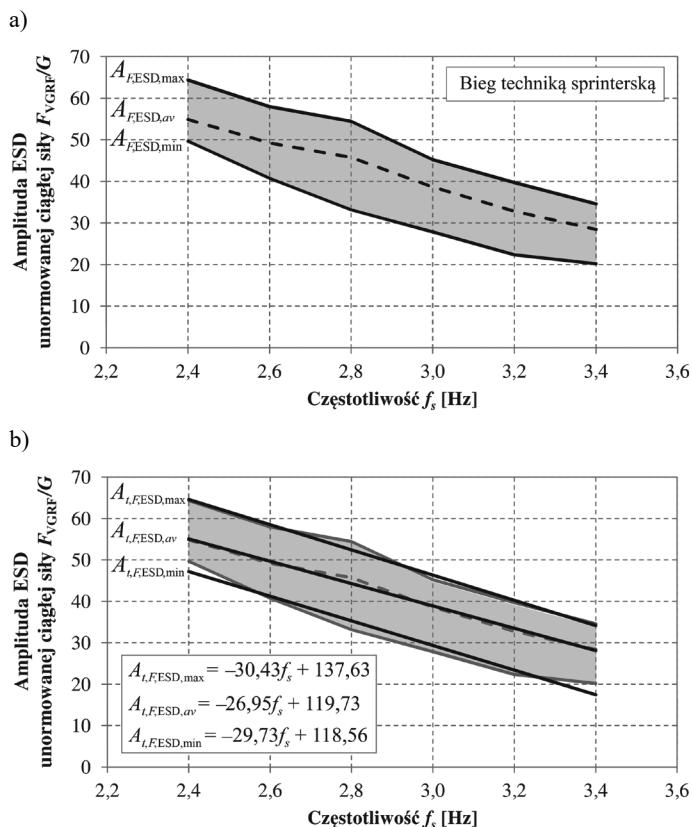
podczas badań. Analizie poddano sygnały obejmujące 15 kroków biegowych (15 impulsów F_{VGRF}/G). Zmienność wyznaczonych amplitud ESD zobrazowano na il. 103 dla biegu techniką piętową i il. 104 dla biegu techniką sprinterską.



Il. 103. Wartości maksymalnych $A_{H,ESD,max}$, średnich $A_{H,ESD,av}$, i minimalnych $A_{H,ESD,min}$ amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych sygnałów F_{VGRF}/G generowanych podczas biegu techniką piętową (15 impulsów F_{VGRF}/G): a) przebiegi amplitud unormowanych sygnałów F_{VGRF}/G zarejestrowanych podczas badań, b) aproksymowane przebiegi amplitud $A_{t,H,ESD}$ – aproksymacja liniowa (opracowanie własne)

Wykorzystując zaproponowane modele sił F_{VGRF}/G generowanych podczas biegu techniką piętową (tab. 28–33) oraz biegu techniką sprinterską (tab. 34–39), wygenerowano ciągłe przebiegi unormowanych sił F_{VGRF}/G obejmujące 15 kroków biegowych (15 impulsów F_{VGRF}/G) i wyznaczono amplitudy pierwszych składowych widm gęstości energii tych przebiegów ($A_{H,ESD}$ oraz $A_{F,ESD}$). Przebiegi F_{VGRF}/G utworzono przy założeniu stałego okresu kroków $T_s = 1/f_s$ odpowiadającego analizowanej częstotliwości biegu f_s . Przykłady przebiegów F_{VGRF}/G wykorzystanych w analizach przedstawiono

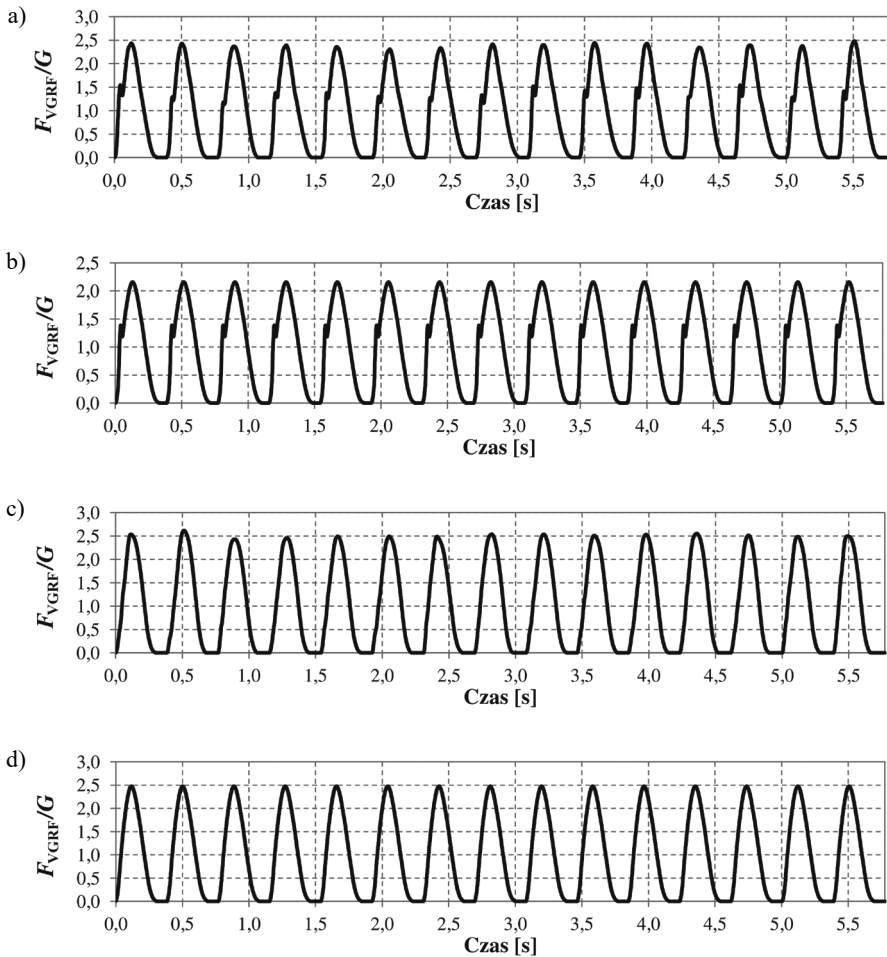
na il. 105. Wyznaczone amplitudy widm gęstości energii zamodelowanych ciągłych przebiegów F_{VGRF}/G przedstawiono na il. 106 w odniesieniu do maksymalnych, średnich i minimalnych amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G zarejestrowanych podczas badań.



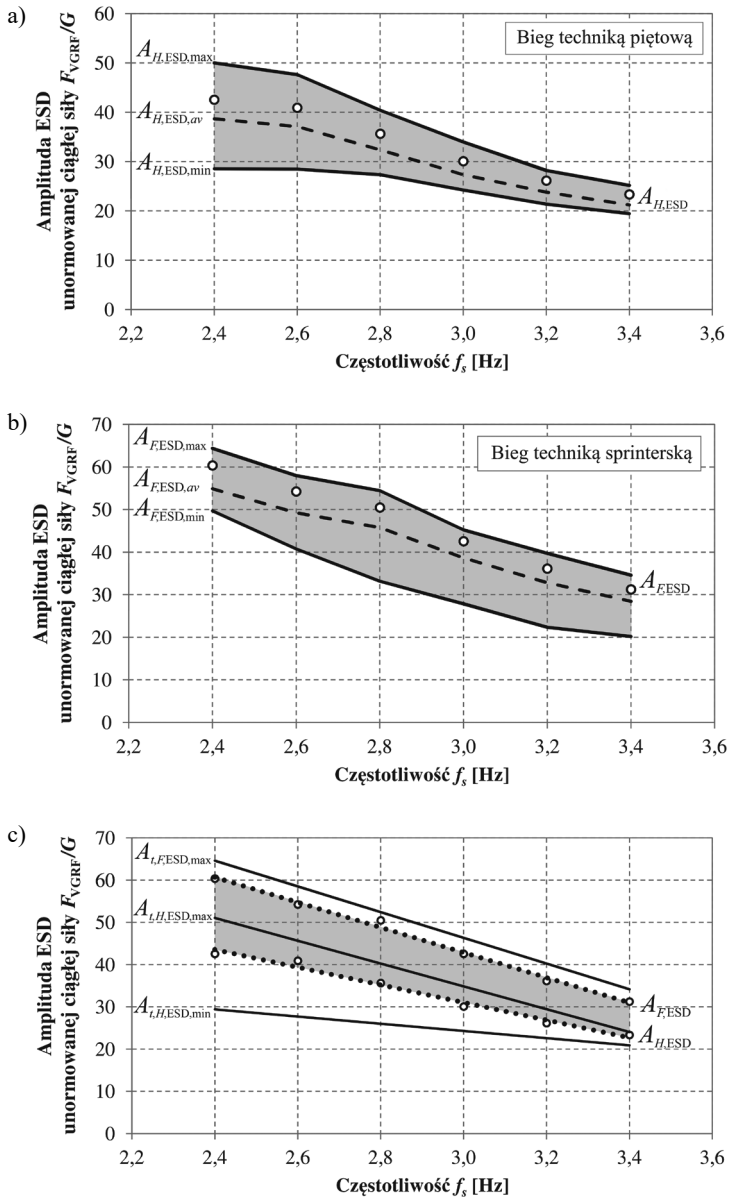
Il. 104. Wartości maksymalnych $A_{F,ESD,max}$, średnich $A_{F,ESD,av}$ i minimalnych $A_{F,ESD,min}$ amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych sygnałów F_{VGRF}/G generowanych podczas biegu techniką sprinterską (15 impulsów F_{VGRF}/G): a) przebiegi amplitud $A_{F,ESD}$ unormowanych sygnałów F_{VGRF}/G zarejestrowanych podczas badań, b) aproksymowane przebiegi amplitud $A_{F,ESD}$ – aproksymacja liniowa (opracowanie własne)

Amplitudy pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G wyznaczonych przy wykorzystaniu opracowanych modeli sił F_{VGRF}/G (amplitudy $A_{H,ESD}$ i $A_{F,ESD}$), przedstawione na il. 106, mają wartości o 10% większe od średnich wartości amplitud ESD ($A_{F,ESD,av}$) pierwszych składowych widm gęstości energii unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G zarejestrowanych podczas badań. Amplitudy $A_{H,ESD}$, wyznaczone dla biegu techniką piętową, mają wartości o 7,0–15,0% mniejsze od wartości maksymalnych amplitud $A_{H,ESD,max}$ (il. 106a). Amplitudy $A_{F,ESD}$

wyznaczone dla biegu techniką sprinterską zbliżone są do wartości maksymalnych amplitud $A_{F_{ESD,max}}$ i mają wartości o 6,0–10,0% mniejsze od wartości amplitud $A_{F_{ESD,max}}$ (il. 106b). Wykorzystanie zaproponowanych modeli obciążeń F_{VGRF}/G , odwzorowujących obciążenia dynamiczne generowane podczas biegu techniką piętową i biegu techniką sprinterską w analizach dynamicznych konstrukcji pozwala wyznaczyć odpowiednio dolne i górne przybliżenie amplitudy przyspieszeń drgań konstrukcji.



Il. 105. Przykładowe przebiegi obciążeń F_{VGRF}/G dla częstotliwości biegu $f_s = 2,60$ Hz: a) przebieg F_{VGRF}/G o maksymalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii zarejestrowany podczas badań osób biegnących techniką piętową, b) przebieg F_{VGRF}/G wygenerowany za pomocą opracowanego modelu F_{VGRF}/G dla biegu techniką piętową, c) przebieg F_{VGRF}/G o maksymalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii zarejestrowany w trakcie badań osób biegnących techniką sprinterską, d) przebieg F_{VGRF}/G wygenerowany z wykorzystaniem opracowanego modelu F_{VGRF}/G dla biegu techniką sprinterską (opracowanie własne)



- II. 106. Wartości amplitud widm gęstości energii zamodelowanych ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G generowanych podczas biegu ($A_{H,ESD}$, $A_{F,ESD}$ białe punkty z czarnym obramowaniem) w odniesieniu do amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów F_{VGRF}/G zarejestrowanych podczas badań (15 impulsów F_{VGRF}/G): a) amplitudy ESD przebiegów F_{VGRF}/G obejmujących 15 kroków osoby biegnącej techniką piętową $A_{H,ESD}$, b) amplitudy ESD przebiegów F_{VGRF}/G obejmujących 15 kroków osoby biegnącej techniką sprinterską $A_{F,ESD}$, c) amplitudy $A_{H,ESD}$ i $A_{F,ESD}$ w odniesieniu do aproksymowanych przebiegów amplitud $A_{H,ESD,max}$, $A_{F,ESD,max}$ oraz $A_{H,ESD,min}$ dla biegu techniką piętową i techniką sprinterską (opracowanie własne)

W celu weryfikacji dokładności oszacowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji za pomocą opracowanych modeli F_{VGRF}/G wykonano analizy dynamiczne układów o jednym stopniu swobody (układy SDOF) obciążonych przebiegami F_{VGRF}/G o maksymalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii zarejestrowanymi podczas badań oraz przebiegami F_{VGRF}/G wygenerowanymi z wykorzystaniem opracowanych modeli F_{VGRF}/G . W analizach dynamicznych układów SDOF przyjęto ciężar osoby biegnącej $G = 750 \text{ N}$.

W tab. 50 i 51 przedstawiono charakterystyki analizowanych układów SDOF oraz wartości maksymalnych przyspieszeń drgań wraz z procentowymi różnicami przyspieszeń drgań otrzymane odpowiednio dla biegu techniką piętową i biegu techniką sprinterską. W przypadku biegu techniką piętową różnice procentowe wartości przyspieszeń drgań mieszczą się w przedziale 3,80–7,40%, w przypadku biegu techniką sprinterską różnice te mieszczą się w przedziale 2,90–4,90%.

Tabela 50. Charakterystyki i odpowiedzi dynamiczne układów SDOF narażonych na oddziaływanie osoby biegnącej techniką piętową (opracowanie własne)

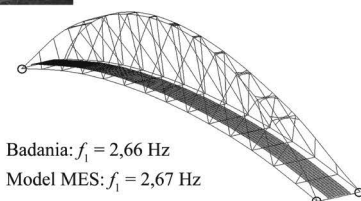
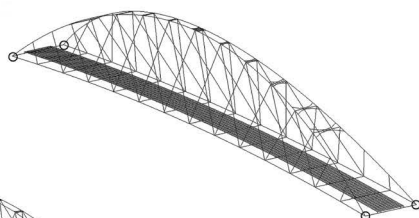
Częstotliwość [Hz]	Masa [kg]	Sztwność [N/m]	Ułamek tłumienia krytycznego [%]	Przyspieszenie [m/s^2]		Różnica [%]
				Badania	Model	
2,40	18 800,0	4 275 039,0	0,5	1,655	1,534	7,31
2,60		5 017 234,0		1,758	1,628	7,39
2,80		5 818 803,0		1,742	1,638	5,97
3,00		6 679 749,0		1,727	1,613	6,60
3,20		7 600 070,0		1,668	1,604	3,84
3,40		8 579 766,0		1,677	1,611	3,94

Tabela 51. Charakterystyki i odpowiedzi dynamiczne układów SDOF narażonych na oddziaływanie osoby biegnącej techniką sprinterską (opracowanie własne)

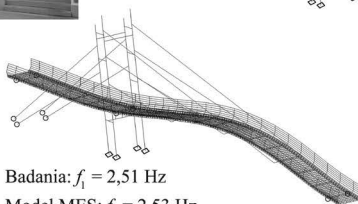
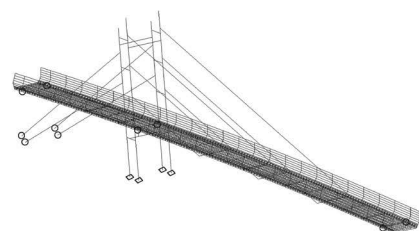
Częstotliwość [Hz]	Masa [kg]	Sztwność [N/m]	Ułamek tłumienia krytycznego [%]	Przyspieszenie [m/s^2]		Różnica [%]
				Badania	Model	
2,40	188 00,0	4 275 039,0	0,5	1,892	1,827	3,44
2,60		5 017 234,0		1,955	1,875	4,09
2,80		5 818 803,0		2,028	1,954	3,65
3,00		6 679 749,0		1,979	1,921	2,93
3,20		7 600 070,0		1,982	1,886	4,84
3,40		8 579 766,0		1,957	1,864	4,75

Weryfikację dokładności oszacowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji narażonych na oddziaływanie osób biegnących wykonano także w drodze analiz numerycznych i terenowych badań dynamicznych wybranych rzeczywistych kładek dla pieszych. Były to: trójprzęsłowa kładka dla pieszych w miejscowości Ludźmierz (il. 99-1a, rozpiętości przęseł 15,0 + 36,0 + 15,0 m, podstawowa częstotliwość drgań własnych pionowych wyznaczona podczas badań $f_1 = 3,22$ Hz), łukowa kładka dla pieszych w miejscowości Wola Wieruszycka (il. 107a, rozpiętość przęsła 63,0 m, podstawowa częstotliwość drgań własnych pionowych wyznaczona podczas badań $f_1 = 2,66$ Hz) [107] oraz dwuprzęsłowa podwieszona kładka dla pieszych w Kielcach (il. 107b, rozpiętości przęseł 28,10 + 13,66 m, podstawowa częstotliwość drgań własnych pionowych wyznaczona podczas badań $f_1 = 2,51$ Hz) [21, 167].

a)

Badania: $f_1 = 2,66$ HzModel MES: $f_1 = 2,67$ Hz

b)

Badania: $f_1 = 2,51$ HzModel MES: $f_1 = 2,53$ Hz

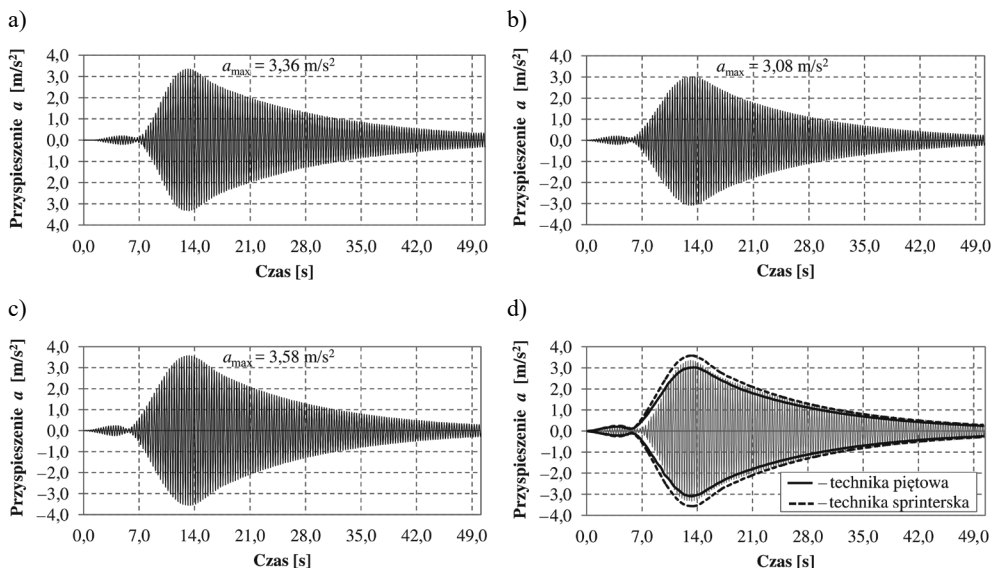
Il. 107. Analizowane kładki dla pieszych: a) kładka dla pieszych w miejscowości Wola Wieruszycka (63,0 m), b) kładka dla pieszych w Kielcach (28,10 + 13,66 m) (opracowanie własne)

Badania i analizy dynamiczne kładek wykonano dla częstotliwości kroków osoby biegnącej $f_s = f_1$. W analizach przyjęto średnie wartości ułamka tłumienia krytycznego

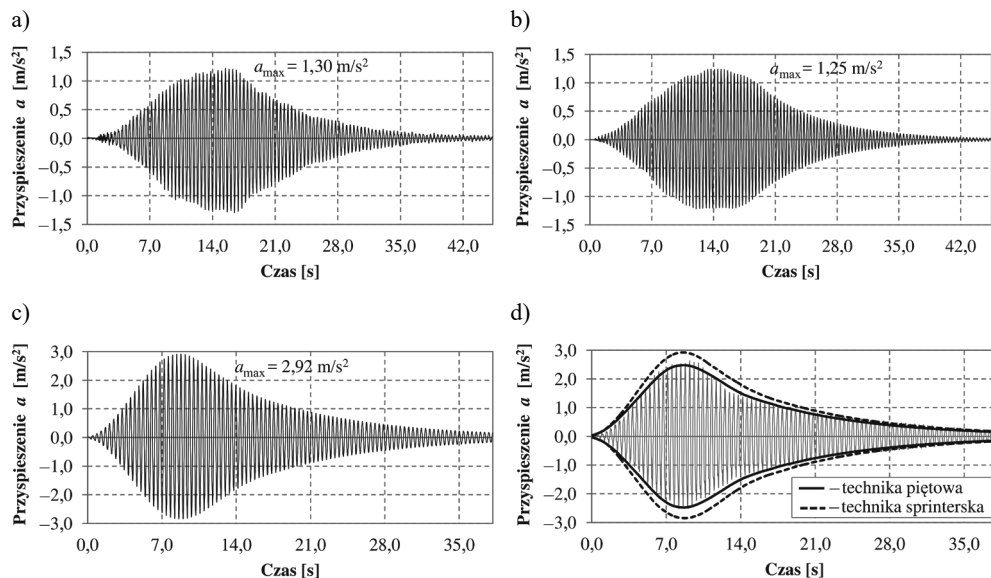
wyznaczone na podstawie badań terenowych wynoszące: dla kładki w Ludźmierzu $\xi = 0,32\%$, dla kładki w Woli Wieruszyckiej $\xi = 0,81\%$, dla kładki w Kielcach $\xi = 0,58\%$.

Na potrzeby analiz numerycznych obciążenie dynamiczne analizowanych kładek wygenerowano, przyjmując ciężar osoby biegnącej zgodny z ciężarem osoby uczestniczącej w badaniach kładek. Przyjęto $G = 90$ kg (900 N) dla kładki w Ludźmierzu i Wioli Wieruszyckiej oraz $G = 88$ kg (880 N) dla kładki w Kielcach. W wykonanych analizach numerycznych kładek zachowano zgodność długości kroków osób biegnących z średnimi długościami kroków osób biegnących ustalonymi podczas badań terenowych. Średnią długość kroku ustalono na podstawie długości pokonanej drogi S i liczby kroków n wykonanych przez osobę biegnącą uczestniczącą w badaniach kładki: $l_k = S/n$. W przypadku kładki w Ludźmierzu przyjęto średnią długość kroku osoby biegnącej $l_k = 105,0$ cm. W przypadku kładki w Woli Wieruszyckiej przyjęto średnią długość kroku osoby biegnącej $l_k = 121,0$ cm. W przypadku kładki w Kielcach przyjęto średnią długość kroku osoby biegnącej $l_k = 97,0$ cm.

Wyniki badań terenowych i analiz numerycznych poszczególnych kładek przedstawiono na il. 108–110. Zobrazowano przebiegi maksymalnych przyspieszeń drgań pomostu kładek zarejestrowane podczas badań terenowych oraz przebiegi przyspieszeń drgań wyznaczone w drodze analiz numerycznych dla biegu techniką piętową i biegu techniką sprinterską.



Il. 108. Przyspieszenia drgań kładki w Ludźmierzu wzbudzone przez osobę biegnącą: a) sygnał o maksymalnych wartościach przyspieszeń zarejestrowany podczas badań terenowych, b) wynik analizy numerycznej dla biegu techniką piętową, c) wynik analizy numerycznej dla biegu techniką sprinterską, d) porównanie wyniku badań terenowych (sygnał w kolorze szarym) z wynikami symulacji numerycznych (linie ciągłe – obwiednia wyniku symulacji dla biegu techniką piętową, linie przerywane – obwiednia wyniku symulacji dla biegu techniką sprinterską) (opracowanie własne)

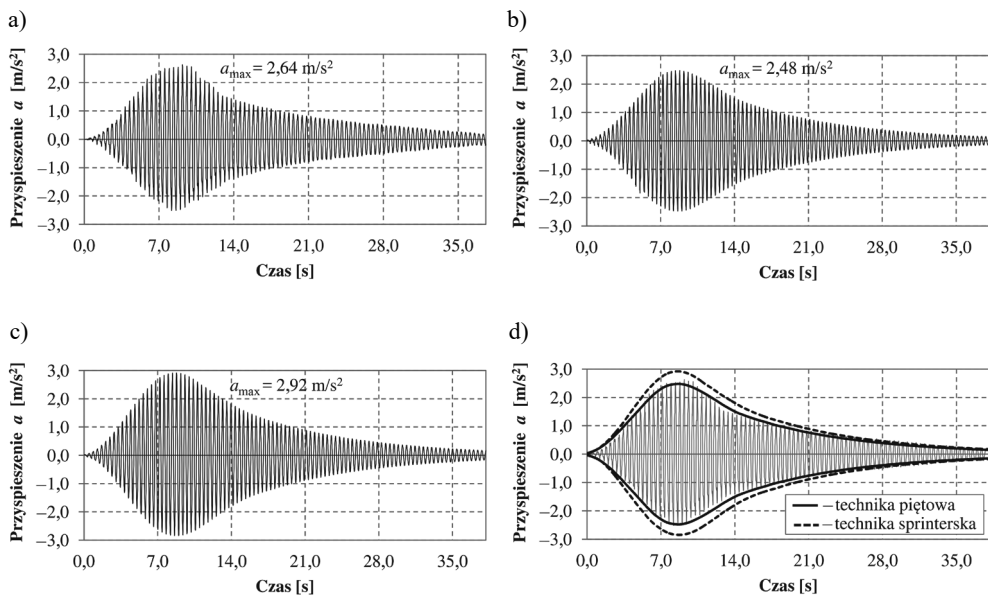


II. 109. Przyspieszenia drgań kładki w Woli Wieruszyckiej wzbudzone przez osobę biegnącą:

- a) sygnał o maksymalnych wartościach przyspieszeń zarejestrowany podczas badań terenowych, b) wynik analizy numerycznej dla biegu techniką piętową, c) wynik analizy numerycznej dla biegu techniką sprinterską, d) porównanie wyniku badań terenowych (sygnał w kolorze szarym) z wynikami symulacji numerycznych (linie ciągłe – obwiednia wyniku symulacji dla biegu techniką piętową, linie przerywane – obwiednia wyniku symulacji dla biegu techniką sprinterską) (opracowanie własne)

Procentowe różnice wartości przyspieszeń drgań pomostów analizowanych kładek wyznaczonych przy wykorzystaniu opracowanych modeli F_{VGRF}/G w stosunku do wyników badań terenowych, wyniosły: dla kładki w Ludźmierzu $-8,3\%$ (niedoszacowanie wartości) dla biegu techniką piętową oraz $+6,6\%$ (przeszacowanie wartości) dla biegu techniką sprinterską; dla kładki w Woli Wieruszyckiej $-3,8\%$ (niedoszacowanie wartości) dla biegu techniką piętową oraz $+10,0\%$ (przeszacowanie wartości) dla biegu techniką sprinterską; dla kładki w Kielcach $-6,1\%$ (niedoszacowanie wartości) dla biegu techniką piętową oraz $+10,6\%$ (przeszacowanie wartości) dla biegu techniką sprinterską. Średnie wartości przyspieszeń drgań wyznaczonych w drodze analiz numerycznych dla biegu techniką piętową i biegu techniką sprinterską wynoszące odpowiednio: $a_{\text{mean}} = 3,33 \text{ m/s}^2$ dla kładki w Ludźmierzu, $a_{\text{mean}} = 1,34 \text{ m/s}^2$ dla kładki w Woli Wieruszyckiej oraz $a_{\text{mean}} = 2,70 \text{ m/s}^2$ dla kładki w Kielcach zbliżone są do maksymalnych wartości przyspieszeń drgań zarejestrowanych podczas badań terenowych. Na podstawie uzyskanych wyników uznano, iż zaproponowane modele sił VGRF generowanych podczas biegu pozwalają poprawnie oszacować odpowiedź dynamiczną konstrukcji. Wykorzystanie w analizach dynamicznych konstrukcji modeli obciążeń dynamicznych generowanych podczas biegu techniką piętową oraz biegu techniką sprinterską pozwala wyznaczyć odpowiednio dolne i górne przybliżenie maksymalnej amplitudy przyspieszeń drgań konstrukcji. Wartość średnia przyspieszeń

drgań wyznaczonych dla biegu techniką piętową oraz biegu techniką sprinterską jest dobrym estymatorem wartości oczekiwanej przyspieszenia drgań konstrukcji narażonej na oddziaływanie osoby biegnącej. Zaproponowany sposób modelowania obciążeń dynamicznych generowanych przez osoby biegnące uznano za poprawny i efektywny.



Il. 110. Przyspieszenia drgań kładki w Kielcach wzbudzone przez osobę biegnącą: a) sygnał o maksymalnych wartościach przyspieszeń zarejestrowany podczas badań terenowych, b) wynik analizy numerycznej dla biegu techniką piętową, c) wynik analizy numerycznej dla biegu techniką sprinterską, d) porównanie wyniku badań terenowych (sygnał w kolorze szarym) z wynikami symulacji numerycznych (linie ciągłe – obwiednia wyniku symulacji dla biegu techniką piętową, linie przerywane – obwiednia wyniku symulacji dla biegu techniką sprinterską) (opracowanie własne)

Analizy drgań kładek w Ludźmierzu, Woli Wieruszyckiej oraz Kielcach, wymuszanych przez osoby biegnące, wykonano także, wykorzystując modele oddziaływań osób biegnących zaproponowane przez innych autorów. Uwzględniono modele zaproponowane w pracach [8, 94, 141] omówione we wcześniejszych rozdziałach niniejszej monografii. Wykorzystanie tych modeli prowadziło do znacznego przeszacowania wartości odpowiedzi dynamicznej konstrukcji wynoszącego 20–40% w odniesieniu do wyników badań terenowych. Zaproponowane własne modele oddziaływań osób biegnących znacznie zwiększają dokładność oszacowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji narażonej na dynamiczne oddziaływanie osób biegnących. Możliwe jest także zwiększenie tej dokładności poprzez uwzględnienie zmienności parametrów modelu, w szczególności poprzez uwzględnienie zmienności wartości amplitudy obciążenia oraz zmienności czasu kontaktu stopy z podłożem, co możliwe jest na podstawie wyników badań przedstawionych w rozdziałach 4.2.2 oraz 4.3.2.

6. UWAGI KOŃCOWE I PODSUMOWANIE

W projektowaniu kładek dla pieszych można zaobserwować tendencje prowadzące do tworzenia obiektów odznaczających się dużą smukłością, małym ciężarem własnym i małą sztywnością. Konstrukcje te, poprawnie zaprojektowane pod względem wymagań stanów granicznych nośności, często odznaczają się zwiększoną podatnością dynamiczną, wpływającą ujemnie na komfort ich użytkowania.

Projektowanie kładek dla pieszych, poza sprawdzeniem wymagań stanów granicznych nośności oraz stanów granicznych użyteczności w zakresie dopuszczalnych ugięć lub zarysowań elementów konstrukcyjnych, wymaga również wykonania analiz dynamicznych i weryfikacji bezpieczeństwa i komfortu użytkownika konstrukcji z uwagi na drgania (por. np. [13, 37, 39, 94, 121, 160–162, 182, 217]). Ważnymi opracowaniami krajowymi stwierdzającymi potrzebę analiz i badań dynamicznych kładek dla pieszych są dokumenty [182] oraz [217]. W dokumentach tych zaznaczono potrzebę wykonywania analizy dynamicznej projektowanego obiektu mostowego przeznaczonego do ruchu pieszych i rowerzystów w celu sprawdzenia jego częstotliwości drgań własnych i podjęcia decyzji o konieczności wykonania szczegółowych analiz dynamicznych. Wskazane w dokumentach [182, 217] analizy dynamiczne dotyczyć mogą m.in. sytuacji dynamicznego oddziaływania użytkowników na konstrukcję. W odniesieniu do kładek dla pieszych zalecane sposoby wymuszenia dynamicznego obejmują: chód swobodny oraz synchroniczny, bieg typu trucht swobodny oraz synchroniczny, sprint, skoki lub półprzysiady synchroniczne, a także poziome wychylenia przy balustradzie z określonymi częstotliwościami.

W niniejszej monografii przedstawiono w sposób kompleksowy zagadnienia modelowania pionowych składowych sił reakcji podłoża generowanych przez osoby idące i biegnące. Zaprezentowano m.in. szczegółowe analizy parametrów opisujących ruch człowieka, szczegółowe analizy zależności opisujących szybkość ruchu w funkcji gęstości ruchu, zależności opisujące częstotliwości i długości kroków w funkcji szybkości ruchu, charakterystyki cykli chodu i biegu, charakterystyki obciążeń VGRF, wytyczne uzupełniające lub korygujące dotychczasowe zalecenia w zakresie modelowania obciążeń VGRF, wytyczne oceny ilościowej przebiegów VGRF pod względem ich właściwości energetycznych oraz własne modele obciążeń VGRF dla chodu i biegu.

Własne modele obciążeń VGRF opracowano na podstawie obszernych badań laboratoryjnych sił reakcji podłoża generowanych przez człowieka w przedziałach częstotliwości: 1,20–2,40 Hz dla chodu oraz 2,40–3,40 Hz dla biegu. W przypadku biegu wyodrębniono, szczegółowo przeanalizowano i opracowano modele obciążeń VGRF dla dwóch technik biegu: bieg z lądowaniem na pięcie (technika piętowa) oraz bieg z lądowaniem na palcach (technika sprinterska).

W celu odwzorowania czasowych przebiegów VGRF zaproponowano wykorzystanie interpolacji za pomocą funkcji sklejanych 3 stopnia z kontrolą kształtu (splajny kubiczne z kontrolą kształtu). Dla analizowanych typów i przedziałów częstotliwości aktywności człowieka opracowano zestawy węzłów interpolacji pozwalające odwzorować przebiegi VGRF o parametrach energetycznych odpowiadających parametrom energetycznym przebiegów zarejestrowanych podczas badań.

Zaproponowana metoda odwzorowania przebiegów VGRF za pomocą krzywych splajn z kontrolą kształtu pozwala uzyskać dużą dokładność odwzorowania obciążeń VGRF i daje możliwość łatwej modyfikacji wartości i przebiegu obciążenia poprzez prostą modyfikację położenia węzłów interpolacji krzywej VGRF. Wyniki walidacji opracowanych modeli obciążeń wskazują na poprawne odwzorowanie przebiegów VGRF oraz poprawne odwzorowanie odpowiedzi dynamicznej konstrukcji na poziomie maksymalnych amplitud drgań wzbudzanych podczas badań terenowych.

W trakcie walidacji opracowanych modeli obciążeń VGRF stwierdzono duże znaczenie poprawnego odwzorowania spektrum energetycznego obciążenia dynamicznego wykorzystywanego w analizie dla poprawnego oszacowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Z tego powodu zaleca się, by opracowania dotyczące oceny dynamicznego wpływu użytkowników na konstrukcje zawierały wyniki analizy spektrum energetycznego (wyniki analizy ESD) obciążenia dynamicznego wykorzystanego w obliczeniach dynamicznych. Znajomość spektrum energetycznego sygnału VGRF umożliwia ocenę ilościową zamodelowanych oddziaływań VGRF oraz ocenę ilościową odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Na podstawie wyznaczonego spektrum energetycznego sygnału VGRF możliwa jest ocena poprawności i poziomu odwzorowania energii sygnału VGRF wykorzystanego w analizie dynamicznej konstrukcji (energia minimalna, średnia lub maksymalna) oraz ocena poziomu wyznaczonej odpowiedzi dynamicznej konstrukcji (odpowiednio minimalny, średni lub maksymalny poziom drgań).

Na podstawie badań własnych opracowano szereg zależności obrazujących związki pomiędzy parametrami ruchu człowieka (szybkość ruchu, częstotliwość kroków, długość kroków), a także pomiędzy parametrami obciążeń generowanych przez poruszającego się człowieka i określono przedziały zmienności tych parametrów. Znajomość tych zależności stwarza możliwość generowania losowych wartości parametrów oraz możliwość modelowania losowych oddziaływań dynamicznych. Przedstawione wyniki mogą być wykorzystane do wyznaczania oddziaływań dynamicznych generowanych przez grupy użytkowników o różnej liczebności. Opracowanie dokładnych wytycznych modelowania oddziaływania grup użytkowników na konstrukcje wymaga dalszych badań i szczegółowych analiz. Odrębnego opracowania wymaga zagadnienie modelowania poziomych obciążeń dynamicznych generowanych przez poruszające się osoby.

LITERATURA

- [1] Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L., *The theory of splines and their applications*, Academic Press, New York 1967.
- [2] Akima, H., *A method of smooth curve fitting*, ESSA Technical Report ERL 101-ITS 73, U.S. Government Printing Office, Washington 1969.
- [3] Akima, H., *A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures*, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 17, 1970, s. 589-602.
- [4] Alexander M., Walkenbach J., *Excel VBA programming*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken 2019.
- [5] Almeida M.O., Saragiotto B.T., Yamato T.P., Lopes A.D., *Is the rearfoot pattern the most frequently foot strike pattern among recreational shod distance runners?*, Physical Therapy in Sport, Vol. 16, 2015, s. 29-33.
- [6] Bachmann H., *“Lively” footbridges – a real challenge*, Proceedings of the 1st International Conference on Design and dynamic of footbridges: Footbridge 2002, OTUA, Paris 2002.
- [7] Bachmann H., Ammann W., *Vibrations in structures induced by man and machines*, IABSE, AIPC, IVBH Structural Engineering Documents 3e, 1987.
- [8] Bachmann H., Ammann W.J., Deischl F., Eisenmann J., Floegl I. et al., *Vibration problems in structures: practical guidelines*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin 1995.
- [9] Bailey J., Mata T., Mercer J.A., *Is the relationship between stride length, frequency, and velocity influenced by running on a treadmill or overground?*, International Journal of Exercise Science, Vol. 10, Iss. 7, 2017, s. 1067–1075.
- [10] Banerjee A., Kumar A.K., Lämmel G., *A review of pedestrian flow characteristics and level of service over different pedestrian facilities*, Collective Dynamics, Vol. 3, 2018, s. 1-52.
- [11] Barker C., Mackenzie D., *Calibration of the UK National Annex*, Proceedings of the 3rd International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges: Footbridge 2008, Porto 2008.
- [12] Baumann K., Bachmann H., *Durch Menschen verursachte dynamische Lasten und deren Auswirkungen auf Balkentragwerke*, Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zurich, Springer Basel AG, 1988.
- [13] BD 29/17: Design manual for roads and bridges: Volume 2 Section 2 Part 8: Design criteria for footbridges, Highways England, 2017.
- [14] Belykh I.V., Jeter R., Belykh V.N., *Bistable gaits and wobbling induced by pedestrian-bridge interactions*, Chaos, Vol. 26, Iss. 11, 2016.

- [15] Belykh I., Jeter R., Belykh V., *Foot force models of crowd dynamics on a wobbly bridge*, Science Advances, Vol. 3, Iss. 11, 2017.
- [16] Belykh I., Bocian M., Champneys A.R., Daley K., Jeter R., Macdonald J.H.G., McRobie A., *Emergence of the London Millennium Bridge instability without synchronization*, Nature Communications, Vol. 12, Article number: 7223, 2021.
- [17] Belykh I.V., Daley K.M., Belykh V.N., *Pedestrian-induced bridge instability: the role of frequency ratios*, Radiophysics and Quantum Electronics, Vol. 64, No. 10, 2022, s. 700-708.
- [18] Bertram J.E.A., Ruina A., *Multiple walking speed–frequency relations are predicted by constrained optimization*, Journal of Theoretical Biology, Vol. 209, Iss. 4, 2001, s. 445-453.
- [19] Biliszczyk J., *Mosty podwieszane, Projektowanie i realizacja*, Arkady, 2005.
- [20] Biliszczyk J., Rudze J., Stempin P., Wachulec P., *Budowa kładki Piaskowej przez Odrę we Wrocławiu*, Inżynieria i Budownictwo, nr 1-2, 2004, s. 26-28.
- [21] Biliszczyk J., Machelski C., Onysyk J., Sadowski K., Szczepański J., *Kładka dla pieszych o stalowej konstrukcji podwieszanej w Kielcach*, Inżynieria i Budownictwo, 9/2001, s. 498-501.
- [22] Biliszczyk J., Barcik W., Machelski C., Onysyk J., Sadowski K., Pustelnik M., *Projektowanie stalowych kładek dla pieszych*, DWE, Wrocław 2004.
- [23] Biliszczyk J., Onysyk J., Węgrzyniak M., Prabucki P., Rudze J., Suchy M., *Konstrukcja podwieszanej kładki dla pieszych we Wrocławiu Leśnicy*, Inżynieria i Budownictwo, nr 1, 2000, s. 3-6.
- [24] Billo E.J., *Excel for scientists and engineers. Numerical methods*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken 2007.
- [25] Birnbaum D., *Microsoft Excel VBA programming for the absolute beginner*, Thomson Course Technology PTR., Boston 2005.
- [26] Blekherman A. N., *Swaying of pedestrian bridges*, ASCE, Journal of Bridge Engineering, Vol. 10, Iss. 2, 2005 s. 142-150.
- [27] Blickhan R., *The spring-mass model for running and hopping*, Journal of Biomechanics, Vol. 22, Iss. 11/12, 1989, s. 1217-1227.
- [28] Blum Y., Lipfert S.W., Rummel J., Seyfarth A., *Swing leg control in human running*, Bioinspiration & Biomimetics, Vol. 5, No. 2, 2010.
- [29] Bober T., *Biomechanika chodu i biegu*, Studia i Monografie Akademii Wychowania Fizycznego we Wrocławiu, Zeszyt nr 8, 1985.
- [30] Bober W., Tsai C., Masory O., *Numerical and analytical methods with MATLAB*, CRC Press, Inc., Boca Raton 2009.
- [31] Bocian M., Brownjohn J.M.W., Racic V., Hester D., Quattrone A., Gilbert L., Beasley R., *Time-dependent spectral analysis of interactions within groups of walking pedestrians and vertical structural motion using wavelets*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 105, Iss. 15, 2018, s. 502-523.

-
- [32] Bocian M., Macdonald J.H.G., Burn J.F., Redmill D., *Experimental identification of the behaviour of and lateral forces from freely-walking pedestrians on laterally oscillating structures in a virtual reality environment*, Engineering Structures, Vol. 105, 2015, s. 62-76.
- [33] Bohannon R.W., *Comfortable and maximum walking speed of adults aged 20–79 years: reference values and determinants*, Age Ageing, Vol. 26, Iss. 1, 1997, s. 15-19.
- [34] Boor C., *A practical guide to splines*, Book series: Applied mathematical sciences (AMS), Vol. 27, Springer, New York 1994.
- [35] Bruno L., Venuti F., *The pedestrian speed-density relation: modelling and application*, Proceedings of the 3rd International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges: Footbridge 2008, Porto 2008.
- [36] Bruno L., Tosin A., Tricerri P., Venuti F., *Non-local first-order modelling of crowd dynamics: A multidimensional framework with applications*, Applied Mathematical Modelling, Vol. 35, Iss. 1, 2011, s. 426-445.
- [37] BS 5400-2:2006 Steel, concrete and composite bridges – Part 2: Specification for loads, British Standards Institution (BSI), 2006.
- [38] BS EN 1991-2:2003 Eurocode 1: Action on structures – Part 2: Traffic loads on bridges, British Standards Institution (BSI), 2003.
- [39] BS NA EN 1991-2:2003, UK National Annex to Eurocode 1: Action on structures – Part 2: Traffic loads on bridges, British Standards Institution (BSI), 2008.
- [40] BS 5400-2:1978 Steel, concrete and composite bridges – Part 2: Specification for loads, British Standards Institution (BSI), 1978.
- [41] Butz C., Feldmann M., Heinemeyer C., Sedlacek G. et al., *Advanced load models for synchronous pedestrian excitation and optimized design guidelines for steel footbridges*, RFCS – Research Fund for Coal and Steel European Commission, 2006.
- [42] Carpentier J., Benallegue M., Laumond J-P., *On the centre of mass motion in human walking*, International Journal of Automation and Computing, Vol. 14, Iss. 5, 2017, s. 542-551.
- [43] Carroll S.P., *Crowd-induced lateral bridge vibration*, Praca doktorska, The University of Nottingham, 2013.
- [44] Chapra S.C., Canale R.P., *Numerical methods for engineers*, McGraw-Hill Education, New York 2015.
- [45] Chapra S.C., *Applied numerical methods with MATLAB for engineers scientists*, McGraw-Hill, New York 2012.
- [46] Charles P., Hoorpah W. et al., *Technical guide: Footbridges – Assessment of vibrational behavior of footbridges under pedestrian loading*, SÉTRA/AFGC, 2006.
- [47] Cheney W., Kincaid D., *Numerical mathematics and computing*, Thomson Brooks/Cole, Belmont 2008.

- [48] Chmielewski T., Zembaty Z., *Podstawy dynamiki budowli*, Arkady, Warszawa 1998.
- [49] Chwała W., *Wpływ prędkości na zmiany położenia środka ciężkości ciała i sprawność mechanizmu odzyskiwania energii w chodzie fizjologicznym i sportowym*, Wydawnictwo AWF w Krakowie, Kraków 2013.
- [50] Clark K.P., Weyand P.G., *Are running speeds maximized with simple-spring stance mechanics?*, Journal of Applied Physiology, Vol. 117, Iss. 6, 2014, s. 604-615.
- [51] Clark K.P., Ryan L.J., Weyand P.G., *Foot speed, foot-strike and footwear: linking gait mechanics and running ground reaction forces*, Journal of Experimental Biology, Vol. 217, Iss. 12, 2014, s. 2037-2040.
- [52] Clark K.P., Ryan L.J., Weyand P.G., *A general relationship links gait mechanics and running ground reaction forces*, Journal of Experimental Biology, Vol. 220, Iss. 2, 2017, s. 247-258.
- [53] Costantini P., *An algorithm for computing shape-preserving interpolating splines of arbitrary degree*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 22, 1988, s. 89-136.
- [54] Costantini P., Morandi R., *An algorithm for computing shape preserving cubic spline interpolation to data*, Calcolo, Vol. 21, 1984, s. 295-305.
- [55] Cuccurullo S., *Physical medicine and rehabilitation board review*, Demos Medical Publishing, 2010.
- [56] Daamen W., Hoogendoorn S.P., *Free speed distributions – based on empirical data in different traffic conditions*, 3rd International Conference Pedestrian and Evacuation Dynamics 2005, Springer, 2007, s. 13-25.
- [57] Dallard P. Fitzpatrick T., Flint A., Low A. et al., *London Millennium Bridge: pedestrian-induced lateral vibration*, ASCE, Journal of Bridge Engineering, Vol. 6, Iss. 6, 2001, s. 412-417.
- [58] Dang H.V., *Experimental and numerical modelling of walking locomotion on vertically vibrating low-frequency structures*, Rozprawa doktorska, University of Warwick, 2014.
- [59] Datka S., Suchorzewski W., Tracz M., *Inżynieria ruchu*, WKŁ, Warszawa 1999.
- [60] Ebrahimpour A., Hamam A., Sack R.L., Patten W.N., *Measuring and modeling dynamic loads imposed by moving crowds*, Journal of Structural Engineering, Vol. 122 Iss. 12, 1996, s. 1468-1474.
- [61] Ellis B.R., *On the response of long-span floors to walking loads by individuals and generated crowds*, The Structural Engineer, Vol. 78, No. 10, 2000, s. 17-25.
- [62] Esfandiari R.S., *Numerical methods for engineers and scientists using MATLAB*, CRC Press, Inc., Boca Raton 2017.
- [63] Flaga A., *Problemy oceny wpływu drgań na ludzi znajdujących się na mostach*, Inżynieria i Budownictwo, nr 3-4, 2002, s. 182-187.

-
- [64] Flaga A., *Praktyczne ujęcie tłumienia drgań budowli jako całości*, I Sympozjum Wpływy Sejsmiczne na Budowle, Politechnika Krakowska, Kraków 1978, s. 135-145.
- [65] Flaga A., *Mosty dla pieszych*, WKŁ, Warszawa 2011.
- [66] Fruin, J. J., *Pedestrian planning and design*, Metropolitan Association of Urban Designers and Environmental Planners, 1971.
- [67] Gaca S., Suchorzewski W., Tracz M., *Inżynieria ruchu drogowego, Teoria i praktyka*, WKŁ, Warszawa 2009.
- [68] Gard, S.A., Childress, D.S., *What determines the vertical displacement of the body during normal walking?*, Journal of Prosthetics & Orthotics, Vol. 13, Iss. 3, 2001, s. 64–67.
- [69] Geyer H., *Simple models of legged locomotion based on compliant limb behavior (Grundmodelle pedaler Lokomotion basierend auf nachgiebigem Beinverhalten)*, Rozprawa doktorska, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2005.
- [70] Geyer H., Seyfarth A., Blickhan R., *Compliant leg behaviour explains basic dynamics of walking and running*, Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences, Vol. 273, Iss. 1603, 2006, s. 2861-2867.
- [71] Geyer H., Seyfarth A., Blickhan R., *Spring-mass running: simple approximate solution and application to gait stability*, Journal of Theoretical Biology, Vol. 232, Iss. 3, 2005, s. 315-328.
- [72] Geyer H., Seyfarth A., Günther M., Blickhan R., *A movement criterion for running*, Journal of Biomechanics, Vol. 35, 2002, s. 649-655.
- [73] Goldsztein G.H., *Modeling walking with an inverted pendulum not constrained to the sagittal plane. Numerical simulations and asymptotic expansions*, Applied Mathematics, Vol. 8, 2017, s. 57-76.
- [74] Gregory, J., *Shape preserving spline interpolation*, Computer Aided Design, Vol. 18, 1986, s. 53-58.
- [75] Grieve D., *Gait patterns and the speed of walking*, Bio-Medical Engineering, Vol. 3, 1968, s. 119-122.
- [76] Gurruchaga J.R., *Python recipes for engineers and scientists*, 2018.
- [77] Hasegawa H., Yamauchi T., Kraemer W.J., *Foot strike patterns of runners at the 15-km point during an elite-level half marathon*, Journal of Strength and Conditioning Research, Vol. 21, Iss. 3, 2007, s. 888-893.
- [78] Hawryszków P., *Analiza cech dynamicznych kładek dla pieszych, ocena wrażliwości dynamicznej oraz komfortu użytkowania*, Rozprawa doktorska, Politechnika Wroclawska, Raport serii PRE nr 6/2009.
- [79] Hawryszków P., *Analysis of dynamical sensitivity and comfort of footbridges*, 4th International Conference Footbridge 2011, Wrocław 2011, s. 1037-1046.
- [80] Hawryszków P., *Badania z zakresu komfortu odczuwania drgań przez pieszych na kładkach*, Inżynieria i Budownictwo, nr 9, 2016, s. 505-509.

- [81] Hawryszków P., Pimentel R., Silva R., Silva F., *Vertical vibrations of footbridges due to group loading: effect of pedestrian-structure interaction*, Applied Sciences, Vol. 11, Iss. 4, 2021.
- [82] Hawryszków P., Pimentel R., Silva F., *Vibration effects of loads due to groups crossing a lively footbridge*, Procedia Engineering, Vol. 199, 2017, s. 2808-2813.
- [83] HBS 2001, Handbuch für die Bemessung von Straßenverkehrsanlagen. Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen, Kommission Bemessung von Straßenverkehrsanlagen, Köln 2001.
- [84] HCM-2000, Highway Capacity Manual 2000. Chapter 11: Pedestrian and bicycle concepts, Transportation Research Board (TRB), Waszyngton, 2000.
- [85] Hoffman J.D., *Numerical methods for engineers and scientists*, Marcel Dekker, Inc., New York 2001.
- [86] Hoopah W., Flamand O., Caspedes X., *The Simone de Beauvoir footbridge in Paris. Experimental verification of the dynamic behaviour under pedestrian loads and discussion of corrective modifications*, Proceedings of the 3rd International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges: Footbridge 2008, Porto 2008.
- [87] Hussain M.Z., Sarfraz M., Shaikh T.S., *Shape preserving rational cubic spline for positive and convex data*, Egyptian Informatics Journal, Vol. 12, Iss. 3, 2011, s. 231-236.
- [88] Huynh H.T., *Accurate monotone cubic interpolation*, NASA Technical Memorandum 103789, 1991.
- [89] Iida F., Minekawa Y., Rummel J., Seyfarth A., *Toward a human-like biped robot with compliant legs*, Robotics and Autonomous Systems, Vol. 57, 2009, s. 139-144.
- [90] Ingólfsson E.T., Georgakis C.T., Jönsson J., *Pedestrian-induced lateral vibrations of footbridges: a literature review*, Engineering Structures, Vol. 45, 2012, s. 21-52.
- [91] Ingólfsson E.T., *Pedestrian-induced lateral vibrations of footbridges. Experimental studies and probabilistic modelling*, Praca doktorska, Technical University of Denmark Department of Civil Engineering, 2011.
- [92] Ingólfsson E.T., Georgakis C.T., Ricciardelli F., Jönsson J., *Experimental identification of pedestrian-induced lateral forces on footbridges*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 330, 2011, s. 1265-1284.
- [93] Inman V.T., Ralston H., Todd F., *Human walking*, Edwin Mellen Press Ltd., 1989.
- [94] ISO 10137:2007 Bases for design of structures – Serviceability of buildings and walkways against vibrations, International Organization for Standardization, 2007.
- [95] ISO 7250-3:2015 Basic human body measurements for technological design. Part 3: Worldwide and regional design ranges for use in product standards, International Organization for Standardization, 2015.
- [96] Ito A., Fukuda K., Kijima K., *Mid-phase movements of Tyson Gay and Asafa Powell in the 100 metres at the 2007 World Championships in Athletics*, New Studies in Athletics, Vol. 23, Iss. 2, 2008, s. 39-43.

- [97] Kasperski M., Sahnaci C., *Serviceability of pedestrian structures*, Proceedings of the IMAC XXV: A Conference and Exposition on Structural Dynamics, Orlando 2007.
- [98] Kawecki J., Kowalska A., *Thumienie drgań w opisie sztywnościowo-bezwładnościowym*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Czasopismo Techniczne: Budownictwo, z. 3-B, 2010, s. 43-50.
- [99] Kerr S.C., *Human induced loading on staircases*, PhD Thesis, University College London, Mechanical Engineering Department, 1998.
- [100] Kim, S. and Park, S., *Leg stiffness increases with speed to modulate gait frequency and propulsion energy*, Journal of Biomechanics, Vol. 44, Iss. 7, 2011, s. 1253-1258.
- [101] Kincaid D., Cheney W., *Analiza numeryczna*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne PWN, Warszawa 2006.
- [102] Kiusalaas J., *Numerical Methods in Engineering with Python 3*, Cambridge University Press, Cambridge 2010.
- [103] Knott G., *Interpolating cubic splines*, Birkhäuser Verlag, Boston 1999.
- [104] Kong Q., Siau T., Bayen A.M., *Python programming and numerical methods. A guide for engineers and scientists*, Elsevier Science Publishing, San Diego 2020.
- [105] Kosma Z., *Wstęp do metod funkcji sklepanych*, Wyższa Szkoła Inżynierska w Radomiu, Radom 1986.
- [106] A. Kouibia A., Pasadas M., *Approximation by shape preserving interpolation splines*, Applied Numerical Mathematics, Vol. 37, 2001, s. 271-288.
- [107] Krężel M., Krężel M., *Odbudowa kładki dla pieszych nad rzeką Stradomką w km 9+620, w ciągu drogi dojazdowej nr dz. 72/2 wraz z umocnieniem prawego brzegu na odcinku od km 9+565 do km 9+654 w m. Wola Wieruszycka*, Projekt budowlany odbudowy, Pracownia Inżynierska Projekt s.c., Bielsko-Biała 2011.
- [108] Kruger C.J.C., *Constrained cubic spline interpolation for chemical engineering applications*, KORF Technology Ltd., Ontario 2004.
- [109] Krzyżanowski P., *Obliczenia inżynierskie i naukowe: szybkie, skuteczne, efektywne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
- [110] Książek M., Ziemiński, D., *Ciało człowieka lądującego po zeskoku jako przykład układu mechanicznego ze stabilizującym sprzężeniem zwrotnym*, Czasopismo Techniczne: Mechanika, t. R. 105, z. 1-M, 2008, s. 162-169.
- [111] Kvasov B.I., *Methods of shape-preserving spline interpolation*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore 2000.
- [112] Lane R., *Elementy inżynierii ruchu*, WKŁ, Warszawa 1972.
- [113] Larson P., Higgins E., Kaminski J. et al., *Foot strike patterns of recreational and sub-elite runners in a long-distance road race*, Journal of Sports Sciences, Vol. 29, Iss. 15, 2011, s. 1665-1673.

- [114] Latt M., Menz H., Fung V., Lord S., *Walking speed, cadence and step length are selected to optimize the stability of head and pelvis accelerations*, Experimental Brain Research, Vol. 184, Iss. 2, 2007, s. 201-209.
- [115] Levine D., Richards J., Whittle M., Whittle: *Analiza chodu* (red. wyd. polskiego Gnat R.), Elsevier Urban & Partner, Wrocław 2014.
- [116] Lewandowski R., *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2006.
- [117] Li Q., Fan J., Nie J., Li Q., Chen Y., *Crowd-induced random vibration of footbridge and vibration control using multiple tuned mass dampers*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, Iss. 19, 2010, s. 4068-4092.
- [118] Linge S., Langtangen H.P., *Programming for computations – Python: A gentle introduction to numerical simulations with Python*, Springer, New York 2016.
- [119] Lipfert S.W., Gunther M., Renjewski D., Grimmer S., Seyfarth A., *A model-experiment comparison of system dynamics for human walking and running*, Journal of Theoretical Biology, Vol. 292, 2012, s. 11-17.
- [120] Liu, W., Nigg, B.M., *A mechanical model to determine the influence of masses and mass distribution on the impact force during running*, Journal of Biomechanics, Vol. 33, 2000, s. 219-224.
- [121] LRFD Guide specifications for the design of pedestrian bridges, American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), 2009.
- [122] Macdonald J.H.G., *Pedestrian-induced vibrations of the Clifton Suspension Bridge*, UK. Bridge Engineering, Vol 161, Iss. 2, 2008, s. 69-77.
- [123] Macukow B., Wąsowski J., Fortuna Z., *Metody numeryczne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne PWN, Warszawa 2015.
- [124] Marasovic T., Cecic M., Zanchi V., *Analysis and interpretation of ground reaction forces in normal gait*, WSEAS Transactions on Systems, Vol. 8, Iss. 9, 2009, s. 1105-1114.
- [125] Maus H-M., Seyfarth A., *Walking in circles: a modelling approach*, Journal of the Royal Society Interface, Vol. 11, Iss. 99, 2014.
- [126] Micula G., Micula S., *Handbook of splines*, Book series: Mathematics and its applications (MAIA), Vol. 462, Springer, New York 1999.
- [127] Milner M., Quanbury A., *Facets of control in human walking*, Nature, 227, 1970, s. 734-735.
- [128] Monte A., Muollo V., Nardello F., Zamparo P., *Sprint running: how changes in step frequency affect running mechanics and leg spring behaviour at maximal speed*, Journal of Sports Sciences, Vol. 35, Iss. 4, 2017, s. 339-345.
- [129] Montefusco L.B., *An interactive procedure for shape preserving cubic spline interpolation*, Computers and Graphics, Vol. 11, Iss. 4, 1987, s. 389-392.
- [130] Morecki A., Ramotowski W., *Biomechanika. Tom 5 [w:] Problemy biocybernetyki i inżynierii biomedycznej* (red. Nałęcz M.), WKŁ, Warszawa 1990.

-
- [131] Morgado F., *Programming Excel with VBA: A practical real-world guide*, Apress, New York 2016.
- [132] Mullarney B., Archbold P., *Modelling the vertical loads applied by pedestrians at a range of walking velocities*, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, Vol. 7, Iss. 5, 2013, s. 266-277.
- [133] Murray T.M., Allen D.E., Ungar E.E., Davis D.B., *AISC Design Guide 11: Vibrations of steel-framed structural systems due to human activity*, AISC, 2016.
- [134] Nagar S., *Introduction to Octave: For engineers and scientists*, Apress, New York 2018.
- [135] Nakamura S., Fujino Y., *Lateral vibration on a pedestrian cable-stayed bridge*. IABSE, Structural Engineering International, Vol. 12, Iss. 4, 2002, s. 295-300.
- [136] Nedergaard N.J., Verheul J., Drust B., Etchells T. et al., *The feasibility of predicting ground reaction forces during running from a trunk accelerometry driven mass-spring-damper model*, PeerJ 6: e6105, 2013.
- [137] Nigg, B.M., Liu, W., *The effect of muscle stiffness and damping on simulated impact forces during running*, Journal of Biomechanics, Vol. 32, 1999, s. 849-856.
- [138] Nikooyan A.A., Zadpoor A.A., *Mass-spring-damper modelling of the human body to study running and hopping – an overview*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine, Vol. 225, Iss. 12, 2011, s. 1121-1135.
- [139] Nosiadek L., *Synteza modeli biomechanicznych ciała człowieka opisujących zeskoki na podstawie badań doświadczalnych*, Praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 2006.
- [140] Novacheck T.F., *The biomechanics of running*, Gait and Posture, Vol. 7, 1998, s. 77-95.
- [141] Occhiuzzi A., Spizzuoco M., Ricciardelli F., *Loading models and response control of footbridges excited by running pedestrians*, Structural Control and Health Monitoring, Vol. 15, Iss. 3, 2008, s. 349-368.
- [142] Oeding D., *Verkehrbelastung und Dimensionierung von Gehwegen und anderen Anlagen des Fußgängerverkehrs Straßenbau und Straßenverkehrstechnik*, Heft 22, 1963.
- [143] Older, S. J., *Movement of pedestrians on footways in shopping streets*, Traffic Engineering and Control, Vol. 10, No. 4, 1968, s. 160-163.
- [144] Pachi A., Ji T., *Frequency and velocity of people walking*, The Structural Engineer, Vol. 83, Iss. 3, 2003, s. 36-40.
- [145] Pajankar A., Chandu S., *GNU Octave by example: A fast and practical approach to learning GNU Octave*, Apress, New York 2020.
- [146] Pandy, M.G., Anderson, F.C., Hull, D.G., *A parameter optimization approach for the optimal control of large-scale musculoskeletal systems*, ASME Journal of Biomechanical Engineering, Vol. 114, 1992, s. 450-460.

- [147] Pańtak M., Flaga A., *Krzywe komfortu wibracyjnego w odniesieniu do mostów dla pieszych według normy ISO/CD 10137:2005 i propozycje własne*, Inżynieria i Budownictwo, nr 10, 2006.
- [148] Pańtak M., Flaga A., *Weryfikacja doświadczalna własnych kryteriów komfortu wibracyjnego użytkowników kładek dla pieszych*, Seminarium Wrocławskie Dni Mostowe: *Kładki dla pieszych. Architektura, projektowanie, realizacja, badania*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2007.
- [149] Pańtak M., *Drgania jako stan graniczny użyteczności kładek dla pieszych*, Inżynieria i Budownictwo, nr 9, 2015, s. 502-505.
- [150] Pańtak M., *O dynamice i kryteriach oceny komfortu użytkowania kładek dla pieszych*, Inżynieria i Budownictwo, nr 2, 2018, s. 81-83.
- [151] Pańtak M., *Ground reaction forces generated by users on the pedestrian bridges in case of different types of activities: walking, running, jumping and squats*, Politechnika Krakowska, Monografia nr 478: *Recent advances in civil engineering: building structures* (red. J. Śliwiński), 2015, s. 133-154.
- [152] Pańtak M., *Runners on footbridges – a new VGRF model for heel strike running technique*, 64 Scientific Conference “Krynica 2018”, MATEC Web of Conferences, Vol. 262, 2019.
- [153] Pańtak M., *Vertical dynamic loads on footbridges generated by people running*, The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering, Vol. 15, Iss. 1, 2020, s. 47-75.
- [154] Pańtak M., *Intencjonalne wzbudzenia dynamiczne. Modele obciążeń dynamicznych generowanych podczas skoków i przysiadów*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2024.
- [155] Pavić A., M. Willford M., Reynolds P., Wright J., *Key results of modal testing of the Millennium Bridge*, London, Proceedings of the 1st International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges: Footbridge 2002, Paris 2002.
- [156] Pernica, G., *Dynamic load factors for pedestrian movements and rhythmic exercises*, Canadian Acoustics, Vol. 18, No. 2, 1990, s. 3-18.
- [157] Perry J., *Gait Analysis: Normal and pathological function*, SLACK Incorporated, 1992.
- [158] Peuker F., Maufroy C., Seyfarth A., *Leg-adjustment strategies for stable running in three dimensions*, Bioinspiration & Biomimetics, Vol. 7, No. 3, 2012.
- [159] Pimentel R.L., Carlos A. Braga Fernandes Brito, H.M., Vital de Brito J.L., *Synchronization among pedestrians in footbridges due to crowd density*, Journal of Bridge Engineering, Vol. 18, Iss. 5, 2013, s. 400-408.
- [160] PN-EN 1990:2004/A1:2008 Eurokod. Podstawy projektowania konstrukcji, PKN, Warszawa, 2008.
- [161] PN-EN 1991-2:2007 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 2: Obciążenia ruchome mostów, PKN, Warszawa 2007.

- [162] PN-EN 1995-2:2007 Eurokod 5: Projektowanie konstrukcji drewnianych – Część 2: Mosty, PKN, Warszawa 2007.
- [163] PN-EN 547-3+A1:2010 Bezpieczeństwo maszyn. Wymiary ciała ludzkiego. Część 3: Dane antropometryczne, PKN, Warszawa 2010.
- [164] PN-N-08000:1990 Dane ergonomiczne do projektowania. Wymiary ciała ludzkiego, PKN, Warszawa 1990.
- [165] Pratap R., *MATLAB dla naukowców i inżynierów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015.
- [166] Pusz P., Zima M., *Elementy metod numerycznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2020.
- [167] Pyła M., Bęc J., *Analiza dynamiczna mostu dla pieszych w Kielcach*, Logistyka, 6/2004, s. 9006-9015.
- [168] Qin, J.W., Law, S.S., Yang, Q.S., and Yang, N., *Pedestrian-bridge dynamic interaction, including human participation*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 332, Iss. 4, 2013, s.1107-1124.
- [169] Quarteroni A., Saleri F., Gervasio P., *Scientific computing with MATLAB and Octave*, Springer-Verlag, Heidelberg 2014.
- [170] Racić V., Pavić A., Brownjohn J.M.W., *Experimental identification and analytical modelling of human walking forces: literature review*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 326, Iss. 1-2, 2009, s. 1-49.
- [171] Racić V., Morin J.B., *Data-driven modelling of vertical dynamic excitation of bridges induced by people running*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 43, No. 1-2, 2014, s. 153-170.
- [172] Rainer J.H., Pernica, G., *Vertical dynamic forces from footsteps*, Canadian Acoustics, Vol. 14, No. 2, 1986, s. 12-21.
- [173] Rainer J.H., Pernica, G., Allen, D.E., *Dynamic loading and response of footbridges*, Proceedings C.S.C.E. Second International Conference on Short and Medium Span Bridges Ottawa, Ontario, Vol. 2, 1986, s. 335-347.
- [174] Rastogi R., Thaniarasu I., Chandra S., *Design implications of walking speed for pedestrian facilities*, ASCE Journal of Transportation Engineering, Vol. 137, Iss. 10, 2011, s. 687-696.
- [175] Ricciardelli F., *Lateral stability of footbridges subjected to crowd loading*, Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EUROLYN 2014, Porto 2014.
- [176] Ricciardelli F., Pansera A., *An Experimental investigation into the interaction among walkers in groups and crowd*, Proc. of 10th International Conference Recent Advances in Structural Dynamics, Southampton 2010.
- [177] Ricciardelli F., Pizzimenti A.D., *Lateral Walking-Induced Forces on Footbridges*, Journal of Bridge Engineering, Vol. 12, Iss. 6, 2007, s. 677-688.

- [178] Roberts T.J., Azizi E., *Flexible mechanisms: the diverse roles of biological springs in vertebrate movement*, Journal of Experimental Biology, Vol. 214, Iss. 3, 2011, s. 353-361.
- [179] Robilliard J.J., Wilson A.M., *Prediction of kinetics and kinematics of running animals using an analytical approximation to the planar spring-mass system*, Journal of Experimental Biology, Vol. 208, Iss. 23, 2005, s. 4377-4389.
- [180] Romano F., Baka B., Phillips D., *Getting started with Python*, Packt Publishing, Birmingham 2019.
- [181] Rosłaniec S., *Wybrane metody numeryczne z przykładami zastosowań w zadaniach inżynierskich*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2020.
- [182] Rozporządzenie Ministra Infrastruktury z dnia 24 czerwca 2022 r. w sprawie przepisów techniczno-budowlanych dotyczących dróg publicznych, Warszawa 2022 (Dz.U. 2022, poz. 1518).
- [183] Rucka M., Wilde K., *Dynamika budowli z przykładami w środowisku MATLAB*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2014.
- [184] Salamak M., *Doświadczalne metody określania poziomu tłumienia drgań w kładkach dla pieszych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska w Gliwicach, Gliwice 2003.
- [185] Salamak M., Weseli J., *Wymuszenia złośliwe w kładkach dla pieszych i sposoby przeciwdziałania ich skutkom*, Materiały cyklu seminariów: Projektowanie, Budowa i Estetyka Kładek dla Pieszych, Politechnika Krakowska, Kraków 2003, s. 173-187.
- [186] Salo A.I.T., Bezodis I.N., Batterham A.M., Kerwin D.G., *Elite Sprinting: Are athletes individually step-frequency or step-length reliant?*, Medicine & Science in Sports & Exercise, Vol. 43, Iss. 6, 2011, s. 1055-1062.
- [187] Sarkar A.K., Janardhan K.S.V.S., *Pedestrian flow characteristics at an Intermodal Transfer Terminal in Calcutta*, World Transport Policy & Practice, Vol. 6, Iss. 3, 2000, s. 32-38.
- [188] Saunders J.B.D.M., Inman V.T., Eberhart H.D., *The major determinants in normal and pathological gait*, Journal of Bone & Joint Surgery, Vol. 53, Iss. 3, 1953, s. 543-558.
- [189] Scheerder J., Breedveld K., Borgers J., *Running across Europe. The rise and size of one of the largest sport markets*, Palgrave Macmillan, London 2015.
- [190] Schoenfeld B.J., *Squatting kinematics and kinetics and their application to exercise performance*, NSCA Journal Strength and Conditioning Research, Vol. 24, No. 12, 2010, s. 3497-3506.
- [191] Schumaker L., *Spline functions: basic theory*, Cambridge University Press, Cambridge 2007.
- [192] Shikin E.V., Plis A.I., *Handbook on splines for the user*, CRC Press, Boca Raton 1995.

-
- [193] Singh N., Parida P., Advani M., Gujar R., *Human ellipse of Indian pedestrians*, Transportation Research Procedia, Vol. 15, 2016, s. 150-160.
- [194] Smith A.L., Hicks S.J., Devine P.J., *Design of floors for vibration: A new approach*, Steel Construction Institute (SCI), Publication P354, 2009.
- [195] Soczawa-Stronczyk A., Bocian M., *Gait coordination in overground walking with a virtual reality avatar*, Royal Society Open Science, Vol. 7, Iss. 7, 2020.
- [196] Soczawa-Stronczyk A., Bocian M., Wdowicka H., Malin J., *Topological assessment of gait synchronisation in overground walking groups*, Human Movement Science, Vol. 66, 2019, s. 541-553.
- [197] Sołtys M., Birnbaum A., Jeleniewski P., Bąbol D. et al., *Raport Polska biega – Narodowy spis biegaczy 2014*, Polska Biega, Agora SA, Warszawa 2014.
- [198] Späth H., *One dimensional spline interpolation algorithms*, CRC Press, Boca Raton 2018.
- [199] Sprague T., *Piecewise cubic interpolation shape preserving*, praca doktorska, Western Michigan University, Michigan 1990.
- [200] Szulej J., *Wyznaczenie ekwiwalentnego wiskotycznego tłumienia drgań w konstrukcjach wielomaterialowych*, Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury; Monografie, 2010.
- [201] Tanawongsuwan R., Bobick A., *Performance analysis of time-distance gait parameters under different speeds*, Proceedings of the 4th International Conference on Audio- and Video-Based Biometric Person Authentication AVBPA 2003, Guildford 2003, s. 715-724.
- [202] Toso M.A., Gomes H.M., Silva F.T., Pimentel R.L., *A biodynamic model fit for vibration serviceability in footbridges using experimental measurements in a designed force platform for vertical load gait analysis*, Mecânica Experimental, Vol. 22, 2013, s. 23-33.
- [203] Vaughan C.L., Davis B.L., O'Connor J.C., *Dynamics of human gait* (2nd Edition), Kiboho Publishers, 1999.
- [204] Vaughan C.L., *Biomechanics of running gait*, Critical Reviews in Biomedical Engineering, Vol. 12, Iss. 1, 1984, s. 1-48.
- [205] Venuti F., Bruno L., *Footbridge lateral vibrations induced by synchronised pedestrians: an overview on modelling strategies*, 3rd ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering COMPDYN 2011, Korfu 2011.
- [206] Vernet H., *A critical analysis of the passerelle Leopold Sedar Senghor*, Paris, University of Bath, Proceedings of Bridge Engineering 2 Conference, 2011.
- [207] Weidmann U., *Transporttechnik der Fussgänger*, Transporttechnische Eigenschaften des Fussgängerverkehrs (Literaturauswertung), IVT Institut für Verkehrsplanung, Transporttechnik, Strassen und Eisenbahnbau, ETH Zürich, serie IVT nr 90, 1993.

- [208] Weyand P.G., Sternlight D.B., Bellizzi M.J., Wright S., *Faster top running speeds are achieved with greater ground forces not more rapid leg movements*, Journal of Applied Physiology, Vol. 89, Iss. 5, 2000, s. 1991-1999.
- [209] Wheeler J.E., *Prediction and control of pedestrian induced vibration in footbridges*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 109, Iss. 9, 1982, s. 2045-2065.
- [210] White R.E., Alexander N.A., Macdonald J.H.G., Bocian M., *Characterisation of crowd lateral dynamic forcing from full-scale measurements on the Clifton Suspension Bridge*, Structures, Vol. 24, 2020, s. 415-425.
- [211] Whittington B.R., Thelen D.G., *A simple mass-spring model with roller feet can induce the ground reactions observed in human walking*, ASME Journal of Biomechanical Engineering, Vol. 131, 2009.
- [212] Willford M., Field C., Young P., *Improved methodologies for the prediction of footfall-induced vibration*, Proceedings of the 2006 Architectural Engineering National Conference Building Integration Solutions, ASCE, 2006, s. 206-221.
- [213] Willford M., Young P., Field C., *Predicting footfall-induced vibration: Part 1, ICE Structures and Buildings*, Vol. 160, Iss. 2, 2007, s. 65-72.
- [214] Willford M.R., Young P., *A design guide for footfall induced vibration of structures*, MPA The Concrete Centre, 2006.
- [215] Winiarski S., Rutkowska-Kucharska A., *Estimated ground reaction force in normal and pathological gait*, Acta of Bioengineering and Biomechanics, Vol. 11, No. 1, 2009, s. 53-60.
- [216] Winter D.A., *Biomechanics and motor control of human movement* (4th Edition), John Wiley & Sons, 2009.
- [217] WR-M-23: Wytyczne wykonywania badań drogowych obiektów mostowych pod próbnym obciążeniem. Wzorce i standardy rekomendowane przez Ministra właściwego ds. transportu, zespół autorski: Rymśza J., Olszcek P., Warszawa 2020.
- [218] Yang Q.S., Qin J.W., Law S.S., *A three-dimensional human walking model*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 357, 2015, s. 437-456.
- [219] Živanović S., Racić V., El-Bahnasy I., Pavić A., *Statistical characterisation of parameters defining human walking as observed on an indoor passerelle*, EVACES'07 International Conference Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures, 2007, s. 219-225.
- [220] Živanović S., Pavić A., Reynolds P., *Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 279, No. 1-2, 2005, s. 1-74.
- [221] Żółtowski K., *Pieszy na kładkach. Obciążenia i odpowiedź konstrukcji*, Monografie Politechniki Gdańskiej, t. 82, Gdańsk 2007.

Streszczenie

Niniejsza monografia poświęcona została przedstawieniu zagadnień modelowania pionowych obciążeń dynamicznych generowanych przez człowieka podczas chodu i biegu. Wykonano kompleksowe analizy parametrów charakteryzujących ruch człowieka (szybkość ruchu, częstotliwość kroków, długość kroków) i określono ich wzajemne zależności. Zaprezentowano różne sposoby modelowania pionowych obciążeń dynamicznych generowanych przez osoby idące i biegnące oraz opracowano własne modele pionowych obciążeń dynamicznych generowanych podczas chodu i biegu.

Głównym celem pracy było przedstawienie własnych modeli pionowych składowych sił reakcji podłoża (ang. *Vertical Ground Reaction Forces*, VGRF) generowanych podczas chodu i biegu. Modele własne opracowano na podstawie zrealizowanych przez autora obszernych badań laboratoryjnych sił reakcji podłoża w zakresach częstotliwości: 1,20–2,40 Hz dla chodu i 2,40–3,40 Hz dla biegu. Zaproponowano odwzorowanie przebiegów VGRF funkcjami sklejanymi 3 stopnia z kontrolą kształtu. W przypadku oddziaływań generowanych podczas biegu wyodrębniono, szczególnie przeanalizowano i opracowano modele obciążeń VGRF dla dwóch technik biegu: bieg z lądowaniem na pięcie (technika piętowa) oraz bieg z lądowaniem na palcach (technika sprinterska).

Monografia zawiera również liczne wytyczne uzupełniające lub korygujące dotychczasowe zalecenia w zakresie modelowania obciążeń generowanych podczas chodu i biegu opracowane na podstawie wyników badań własnych. Przedstawiono także wyniki autorskich szczegółowych analiz spektrów energetycznych sygnałów VGRF generowanych podczas chodu i biegu umożliwiające wykonywanie oceny ilościowej zamodelowanych przebiegów VGRF pod względem ich właściwości energetycznych (energia minimalna, średnia lub maksymalna) oraz oceny ilościowej wyznaczonej odpowiedzi dynamicznej konstrukcji (minimalny, średni lub maksymalny poziom drgań). Stworzono tym samym narzędzie oceny ilościowej modelowanych sygnałów VGRF i wyznaczonej odpowiedzi dynamicznej konstrukcji.

Poprawność modelowania oddziaływań VGRF potwierdzono w drodze trójetapewej walidacji. Wyniki walidacji modeli wskazały na poprawne odwzorowanie krzywych VGRF pod względem ich przebiegów czasowych i spektrów energetycznych oraz poprawne odwzorowanie odpowiedzi dynamicznej konstrukcji.

Słowa kluczowe: dynamika, drgania, chód, bieg, kładki dla pieszych, siły reakcji podłoża, obciążenia dynamiczne

DYNAMIC LOADS GENERATED DURING WALKING AND RUNNING. MODELS OF VERTICAL COMPONENTS OF THE *GRF*

Abstract

This monograph is dedicated to presenting the issues of modeling vertical dynamic forces generated by humans during walking and running. Comprehensive analyses of parameters characterizing human movement (speed of movement, steps frequency, steps length) and their interdependencies are presented. Various methods of modeling vertical dynamic loads generated by people walking and running were presented and own models of vertical dynamic loads generated during walking and running were developed.

The main purpose of the work is to present the author's proposals for models of vertical components of the ground reaction forces (VGRF) generated during walking and running. Own models were developed on the basis of extensive laboratory tests of the ground reaction forces carried out by the author in the frequency ranges: 1.20–2.40 Hz for walking and 2.40–3.40 Hz for running. Modelling of the VGRF curves with 3rd degree (cubic) shape-preserving splines was proposed. In the case of loads generated during running, two running techniques were isolated and analyzed in detail: heel strike running (heel technique) and forefoot strike running (sprint technique), and two VGRF load models were developed.

The monograph also presents numerous guidelines supplementing or correcting the existing recommendations in the field of modeling loads generated during walking and running, developed on the basis of the author's own research results. The results of the Energy Spectra Density (ESD) detailed analyses of VGRF signals generated during walking and running are also presented. The presented results enable the quantitative assessment of the modeled VGRF waveforms in terms of their energy properties (minimum, average or maximum energy) and the quantitative assessment of the determined dynamic response of the structure (minimum, average or maximum vibration level). Thus, a tool was created to quantify the modeled VGRF signals and the determined dynamic response of the structure.

The correctness of the VGRF modeling was confirmed by a three-stage validation. The validation results of the proposed VGRF models indicate the correct mapping of the VGRF curves in terms of their time course and energy spectra, as well as the correct estimation of the dynamic response of the structure.

Keywords: dynamics, vibrations, walking, running, footbridges, pedestrian bridges, ground reaction forces, dynamic loads