

**MAREK  
PAŃTAK**

**Intencjonalne  
wzbudzenia  
dynamiczne**

**Modele obciążeń  
dynamicznych  
generowanych  
podczas skoków  
i przysiadów**

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Tomasz Kapecki

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTW NAUKOWYCH

Jacek Pietraszek

REDAKTOR DYSCYPLINY  
inżynieria lądowa, geodezja i transport  
Andrzej Winnicki

REDAKTOR PROWADZĄCY  
Mariusz Maślak


RECENZENCI  
Robert Jankowski  
Marek Salamak

SEKRETARZ SEKCJI  
Marta Wlazło

OPRACOWANIE REDAKCYJNE  
Anna Warzecha

SKŁAD I ŁAMANIE  
Anna Basista

PROJEKT OKŁADKI  
Karolina Szafran

 <http://orcid.org/0000-0003-4807-4212>

© Copyright by Politechnika Krakowska

ISBN 978-83-67188-80-7

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków; tel. 12 628 37 25, fax 12 628 37 60  
e-mail: [wydawnictwo@pk.edu.pl](mailto:wydawnictwo@pk.edu.pl)  [www.wydawnictwo.pk.edu.pl](http://www.wydawnictwo.pk.edu.pl)  
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

---

Druk i oprawę wykonano w Dziale Poligrafii Politechniki Krakowskiej.  
Ark. wyd. 6,00.

Zam. 12/2024

Nakład 100 egz.

Cena zł 42,00 z VAT

# SPIS TREŚCI

Wykaz ważniejszych oznaczeń . . . . .	5
Przedmowa . . . . .	7
1. Intencjonalne oddziaływania dynamiczne – uwagi ogólne . . . . .	11
2. Obciążenia dynamiczne generowane podczas skoków i przysiadów . . . . .	15
2.1. Siły reakcji podłoża generowane podczas skoków . . . . .	15
2.2. Siły reakcji podłoża generowane podczas przysiadów . . . . .	18
3. Modele sił reakcji podłoża generowanych podczas skoków i przysiadów . . . . .	23
3.1. Modele obciążeń VGRF generowanych podczas skoków . . . . .	23
3.1.1. Model masowo-sprężysty . . . . .	24
3.1.2. Model VGRF bazujący na szeregu Fouriera . . . . .	34
3.1.3. Model półsinusoidalny . . . . .	43
3.1.4. Model na bazie funkcji Hanna . . . . .	47
3.2. Modele obciążeń VGRF generowanych podczas przysiadów . . . . .	51
4. Własne modele obciążeń VGRF generowanych podczas skoków i przysiadów . . . . .	55
4.1. Charakterystyka badań . . . . .	55
4.2. Wyniki badań – charakterystyka i analiza . . . . .	57
4.2.1. Analiza przebiegów $F_{VGRF}/G$ generowanych podczas skoków . . . . .	61
4.2.2. Analiza przebiegów $F_{VGRF}/G$ generowanych podczas przysiadów . . . . .	63
4.3. Własne modele obciążeń VGRF . . . . .	66
4.3.1. Modele sił VGRF generowanych podczas skoków . . . . .	67
4.3.2. Modele sił VGRF generowanych podczas przysiadów . . . . .	74
4.3.3. Interpolacja przebiegów VGRF za pomocą splajnów kubicznych z kontrolą kształtu . . . . .	83
5. Walidacja własnych modeli sił reakcji podłoża . . . . .	91
5.1. Walidacja modeli obciążeń VGRF generowanych podczas skoków . . . . .	92
5.2. Walidacja modeli obciążeń VGRF generowanych podczas przysiadów . . . . .	99
6. Uwagi końcowe i podsumowanie . . . . .	105
Literatura . . . . .	109
Streszczenie . . . . .	115
Abstract . . . . .	116



## WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- $a$  – przyspieszenie drgań [ $\text{m/s}^2$ ],  
 $f$  – częstotliwość [Hz],  
 $f_j$  – częstotliwość skoków [Hz],  
 $f_{sq}$  – częstotliwość przysiadów [Hz],  
 $F_{\text{VGRF}}/G$  – unormowana (bezwymiarowa) wartość pionowej składowej sił reakcji podłoża  $F_{\text{VGRF}}/G = \text{VGRF}/G$  [-],  
 $g$  – przyspieszenie ziemskie ( $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ ),  
 $G$  – ciężar ciała poruszającej się osoby [N],  
GRF – siła reakcji podłoża (ang. *Ground Reaction Force*) [N],  
 $k_1$  – sztywność kończyn dolnych podczas skoków,  
 $l_0$  – długość kończyn dolnych [m],  
 $m_b$  – masa ciała osoby skaczącej,  
SDOF – układ o jednym stopniu swobody (ang. *Single Degree of Freedom System*),  
 $t$  – czas [s],  
 $t_a$  – czas lotu, ang. *aerial time* [s],  
 $t_c$  – czas kontaktu osoby skaczącej z podłożem [s],  
 $T_j$  – okres skoków  $T_j = 1/f_j$  [s],  
 $T_{sq}$  – okres przysiadów  $T_{sq} = 1/f_{sq}$  [s],  
VGRF – pionowa składowa siła reakcji podłoża [N],  
 $y_0$  – początkowe położenie masy  $m_b$  [m],  
 $y_c$  – przemieszczenie masy  $m_b$  w fazie podporu [m],  
 $\dot{y}_c$  – przyspieszenie masy  $m_b$  w fazie podporu [ $\text{m/s}^2$ ],  
 $\dot{y}_a$  – przyspieszenie masy  $m_b$  w fazie lotu [ $\text{m/s}^2$ ],
- $\alpha_i$  – współczynniki Fouriera,  
 $\delta$  – logarytmiczny dekrement tłumienia,  
 $\zeta$  – ułamek tłumienia krytycznego ( $\zeta \approx \delta/2\pi$ ),  
 $\varphi_i$  – kąty przesunięć fazowych wyższych składowych harmonicznym szeregu Fouriera względem pierwszej składowej harmonicznej,  
 $\omega_j$  – częstość podskoków.



## PRZEDMOWA

Konstrukcje budowlane odznaczające się dużą smukłością, małym ciężarem własnym i małą sztywnością często okazują się być konstrukcjami wrażliwymi na działanie obciążeń dynamicznych. Jednym ze źródeł tych obciążeń mogą być osoby korzystające z konstrukcji. Jeżeli podczas codziennej eksploatacji użytkownicy zaobserwują jej dużą podatność dynamiczną, podejmują oni próby umyślnego wzbudzenia drgań konstrukcji w celu zweryfikowania własnych obserwacji lub zaprezentowania ich swoim współtowarzyszom spaceru, wzbudzenia u nich ciekawości lub lęku. W takich sytuacjach na obiekcie charakteryzującym się zwiększoną podatnością dynamiczną pojawiają się obciążenia dynamiczne generowane przez osoby skaczące lub wykonujące przysiady. Wzbudzenie drgań poprzez skoki lub przysiady jest często kilkakrotnie powtarzane oraz naśladowane przez innych użytkowników konstrukcji.

Obciążenia generowane podczas skoków lub przysiadów nie należą do normatywnych obciążeń użytkowych konstrukcji. Pojawianie się oddziaływań w postaci skoków i przysiadów na konstrukcjach, np. kładkach dla pieszych, które nie pełnią funkcji obiektów rekreacyjno-sportowych lub rozrywkowych, jest działaniem mogącym prowadzić, poza znaczącym pogorszeniem komfortu użytkowania konstrukcji, również do jej osłabienia lub zniszczenia. Oddziaływania te opisać można terminami: wzbudzenia intencjonalne, wzbudzenia celowe lub wzbudzenia złośliwe.

Przedmiotem niniejszego opracowania jest kompleksowa charakterystyka oddziaływań dynamicznych generowanych podczas skoków i przysiadów oraz prezentacja modeli obciążeń dynamicznych (modeli pionowych składowych sił reakcji podłoża, ang. *Vertical Ground Reaction Forces*, VGRF), powstających w trakcie tego typu aktywności ruchowej człowieka. W pracy zaprezentowano aktualny stan wiedzy oraz modele własne obciążeń dynamicznych generowanych przez osoby skaczące w miejscu i osoby wykonujące przysiady w miejscu. Prezentowane modele własne opracowano na podstawie własnych badań laboratoryjnych i kompleksowych analiz obciążeń VGRF.

W rozdziale pierwszym pracy przedstawiono ogólne uwagi dotyczące występowania oddziaływań dynamicznych w formie skoków i przysiadów na konstrukcjach podatnych dynamicznie. Krótko scharakteryzowano czynniki decydujące o występowaniu tej formy aktywności na konstrukcjach.

W rozdziale drugim omówiono charakterystykę sił generowanych przez osoby skaczące lub wykonujące przysiady. Zobrazowano i omówiono fazy cykli skoków i przysiadów oraz zaprezentowano charakterystyczne przebiegi sił generowanych przez osoby skaczące lub wykonujące przysiady. Oddziaływania te zobrazowano w szerokich zakresach częstotliwości ruchu osoby skaczącej lub wykonującej przysiady: 1,00–3,00 Hz dla skoków oraz 0,50–3,00 Hz dla przysiadów (wyniki badań własnych).

Rozdział trzeci stanowi przegląd i analizę aktualnego stanu wiedzy z zakresu modelowania obciążeń generowanych przez osoby skaczące i wykonujące przysiady, w tym także opracowań krajowych przedstawionych w pracach [29, 81]. Wykorzystując wyniki badań własnych, uzupełniono braki dotychczasowych propozycji, np. wyróżniono dwie techniki wykonywania skoków: skoki swobodne oraz skoki intensywne oraz zaproponowano zależności pozwalające ustalić wartość czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem ( $t_c$ ) niezbędne do poprawnego wyznaczenia obciążeń VGRF generowanych podczas skoków wyodrębnionymi technikami. Intensywność wykonywania skoków wpływa na wartość amplitudy generowanego obciążenia dynamicznego, co w sposób oczywisty wywiera wpływ na odpowiedź dynamiczną konstrukcji. Zagadnienie to nie było uwzględniane w dotychczasowych opracowaniach z zakresu modelowania obciążeń dynamicznych generowanych podczas skoków.

Wśród omówionych modeli VGRF pokazano modele nieprezentowane dotychczas w krajowych opracowaniach i publikacjach dotyczących zagadnień modelowania oddziaływań dynamicznych generowanych przez człowieka wykonującego cykliczne skoki, np. model masowo-sprężysty obciążeń generowanych podczas skoków, model symulacyjny skoków zrealizowany w środowisku MATLAB Simulink oraz model obciążeń generowanych podczas skoków opracowany z wykorzystaniem funkcji Hanna.

Głównym celem pracy jest prezentacja własnych propozycji modeli obciążeń VGRF generowanych podczas skoków i przysiadów. Modele te opracowano na podstawie obszernych badań własnych sił reakcji podłoża generowanych podczas skoków i przysiadów. Wyniki tych badań wraz z ich szczegółową analizą i opracowanymi modelami obciążeń VGRF przedstawiono w rozdziale czwartym.

Zaproponowane modele pozwalają odwzorować przebiegi obciążeń VGRF w szerokich zakresach częstotliwości: 1,00–3,00 Hz dla skoków oraz 0,50–3,00 Hz dla przysiadów. Uzupełnia to w znacznym stopniu dotychczasowe propozycje w zakresie modelowania tych obciążeń. Propozycje te dotyczą przedziałów częstotliwości w zakresie tzw. normalnego tempa aktywności 1,80–3,00 Hz. W propozycjach własnych poza normalnym tempem aktywności uwzględniono nieanalizowane dotychczas przedziały bardzo wolnego i wolnego tempa wykonywania skoków i przysiadów (odpowiednio 0,50–1,00 Hz i 1,00–1,40 Hz). Jak można zauważyć w rozdziale czwartym, tempo wykonywania skoków i przysiadów ma znaczący wpływ na czasowy przebieg obciążenia VGRF. Znajomość przebiegów obciążeń generowanych przy wolnym i bardzo wolnym tempie aktywności wykorzystywać można w analizach dynamicznych (oraz analizach zmęczeniowych) konstrukcji charakteryzujących się niskimi częstotliwościami drgań własnych pionowych i skrętnych (obiekty podwieszane, wiszące, wstęgowe).

Modele własne opracowano z wykorzystaniem techniki interpolacji krzywych za pomocą funkcji sklepanych 3-go stopnia z kontrolą kształtu (splajny kubiczne z kontrolą kształtu). Szczegóły tej metody nakreślono w podrozdziale 4.3.3.



Opracowane modele własne VGRF poddano kilkietapowej walidacji, której metodykę i wyniki przedstawiono w rozdziale piątym. W ramach walidacji modeli:

- etap 1: wyznaczono i wykonano analizy porównawcze amplitud składowych widm gęstości energii ciągłych sygnałów VGRF odwzorowanych przy wykorzystaniu opracowanych modeli i sygnałów zarejestrowanych podczas badań laboratoryjnych (analizy ESD, ang. *Energy Spectral Density*);
- etap 2: wyznaczono i wykonano analizy porównawcze odpowiedzi dynamicznych układów o jednym stopniu swobody (układy SDOF) obciążonych oddziaływaniami VGRF odwzorowanymi za pomocą opracowanych modeli i obciążeniami zarejestrowanymi podczas badań laboratoryjnych;
- etap 3: wyznaczono i wykonano analizy porównawcze odpowiedzi dynamicznych rzeczywistych kładek dla pieszych określonych w drodze analiz numerycznych przy wykorzystaniu obciążeń VGRF odwzorowanych za pomocą opracowanych modeli oraz zarejestrowanych podczas dynamicznych badań terenowych analizowanych kładek.

Wyniki wykonanej walidacji modeli własnych wskazują na poprawne odwzorowywanie przebiegów VGRF i poprawne odwzorowywanie amplitud widm gęstości energii ciągłych sygnałów VGRF przy wykorzystaniu zaproponowanych modeli oraz prawidłowe oszacowanie wartości odpowiedzi dynamicznej konstrukcji.

Wyznaczenie wartości amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych sygnałów VGRF, generowanych podczas skoków i przysiadów, pozwoliło opracować narzędzie dające możliwość ilościowej oceny dowolnych sygnałów VGRF, odzwierciedlających oddziaływanie generowane podczas skoków i przysiadów. Wykorzystując wyniki analiz widm gęstości energii ciągłych sygnałów VGRF omówione w podrozdziałach rozdziału piątego, można dokonać oceny poprawności i poziomu odwzorowania energii sygnału VGRF wykorzystanego w analizie dynamicznej konstrukcji (energia minimalna, średnia lub maksymalna) oraz oceny poziomu wyznaczonej odpowiedzi dynamicznej konstrukcji (odpowiednio minimalny, średni lub maksymalny poziom drgań). Metoda ta nie była dotychczas stosowana w krajowych i zagranicznych opracowaniach z zakresu analizy i modelowania ciągłych przebiegów czasowych oddziaływań dynamicznych generowanych przez człowieka.

Prezentowane treści są efektem wieloletnich studiów i zainteresowań autora zagadnieniami modelowania obciążeń dynamicznych generowanych przez człowieka podczas różnych form aktywności (chód, bieg, skoki, przysiady). Opracowane modele własne oddziaływań VGRF zweryfikowano w drodze, wykonanych przez autora, licznych badań terenowych i analiz numerycznych istniejących kładek dla pieszych.



## 1. INTENCJONALNE ODDZIAŁYWANIA DYNAMICZNE – UWAGI OGÓLNE

Konstrukcje charakteryzujące się małym ciężarem własnym, a przez to wysokim stosunkiem zmiennych obciążeń użytkowych do obciążeń stałych, małą sztywnością oraz niskim poziomem tłumienia drgań często okazują się być konstrukcjami wrażliwymi na działanie obciążeń dynamicznych. Dlatego mogą doznawać nadmiernych drgań pod wpływem obciążeń dynamicznych związanych z działaniem wiatru lub użytkowników (pieszych, osób biegnących, oddziaływań wandalii itp.).

Oddziaływania dynamiczne wandalii są oddziaływaniami intencjonalnymi (umyślnymi, celowymi, złośliwymi) ukierunkowanymi na zakłócenie normalnych warunków użytkowania konstrukcji, wzbudzenie zainteresowania lub lęku innych użytkowników konstrukcji. Działania te przybierają formę rytmicznych skoków w miejscu, przysiadów lub rytmicznego kołysania ciałem.

Występowanie tego typu oddziaływań dynamicznych na konstrukcji jest często następstwem zaobserwowania przez użytkowników jej dużej podatności dynamicznej w warunkach normalnego użytkowania (podczas chodu lub biegu). W efekcie tego, w celu zweryfikowania własnych obserwacji lub unaocznienia i zaprezentowania drgań konstrukcji, np. współtowarzyszom spaceru, użytkownicy podejmują próby umyślnego wzbudzania jej drgań. Jeśli próby te zakończą się powodzeniem, to często są one kilkakrotnie powtarzane i naśladowane przez innych użytkowników. Gdy sytuacje takie występują na konstrukcji systematycznie, należy podjąć działania prowadzące do zmniejszenia poziomów drgań konstrukcji przez zmianę jej parametrów dynamicznych (masy, sztywności, tłumienia) lub przez ograniczenie swobody wzbudzania drgań, np. jeśli to możliwe, za pomocą monitoringu wizyjnego konstrukcji. Przede wszystkim należy jednak dążyć do unikania sytuacji prowokujących celowe wzbudzenie drgań konstrukcji poprzez unikanie nadmiernej podatności dynamicznej konstrukcji w warunkach jej normalnej eksploatacji przez pieszych lub osoby biegnące.

Występowanie wzbudzeń dynamicznych o charakterze intencjonalnym zostało zasygnalizowane jako jeden z możliwych przypadków obciążeń dynamicznych kładek dla pieszych, m.in. w normach [17, 60] oraz w wytycznych [10].

W normie [60] wskazano, że drgania konstrukcji mogą być wzbudzone przez pieszych (mogących wykonywać różne czynności: spacerować, biegać, skakać lub tańczyć), wiatr oraz wandalizm itp.

Norma [17] wskazuje na konieczność sprawdzania możliwości występowania nadmiernych drgań kładek dla pieszych, które mogą być wzbudzone przypadkowo przez ruch użytkowników lub celowo przez wandalii.

W wytycznych [10] zobowiązano projektanta do sprawdzenia możliwości wystąpienia nadmiernych drgań konstrukcji wzbudzanych w sposób niezamierzony przez tłum lub celowo przez wandali.

Ocena możliwości wzbudzenia drgań konstrukcji przez osoby skaczące lub wykonujące przysiady wymaga znajomości wartości częstotliwości tego typu aktywności ruchowej człowieka. Przedziały częstotliwości różnych typów aktywności ruchowej człowieka określono m.in. w pracy [6] (tab. 1).

Tabela 1. Przedziały częstotliwości różnych typów aktywności ruchowej człowieka [6]

Typ aktywności	Całkowity zakres częstotliwości [Hz]	Częstotliwość [Hz]		
		wolno	normalnie	szybko
Chód	1,4–2,4	1,4–1,7	1,7–2,2	2,2–2,4
Bieg	1,9–3,3	1,9–2,2	2,2–2,7	2,7–3,3
Skoki	1,3–3,4	1,3–1,9	1,9–3,0	3,0–3,4

W tabeli 1 nie zdefiniowano oddziaływania w postaci przysiadów. Można przyjąć, iż przedziały częstotliwości wykonywania przysiadów odpowiadają przedziałom częstotliwości wykonywania skoków. Należy jednak zaznaczyć, że oddziaływania w postaci skoków i przysiadów można wykonywać także w znacznie wolniejszym oraz nieco szybszym tempie niż określono to w tab. 1. Możliwe jest wykonywanie skoków i przysiadów z częstotliwością np. 0,10 Hz, 0,50 Hz, 1,0 Hz, itp. Oznacza to, że aktywność ruchowa w postaci skoków lub przysiadów może być wykorzystywana do wzbudzania drgań rezonansowych konstrukcji charakteryzujących się niskimi częstotliwościami drgań własnych. Tempo aktywności ruchowej w postaci skoków i przysiadów można dostosować do częstotliwości drgań własnych konstrukcji w szerokim zakresie częstotliwości.

Oddziaływania dynamiczne w postaci skoków lub przysiadów wykonywanych w bardzo wolnym tempie mają formę krótkotrwałych, zmiennych w czasie impulsów siły rozdzielonych przedziałami obciążenia o stałej wartości równej ciężarowi osoby skaczącej lub wykonującej przysiady. W przypadku konstrukcji charakteryzujących się małą wartością tłumienia konstrukcyjnego oddziaływania te mogą być przyczyną wzbudzenia drgań o dużych amplitudach.

Możliwe jest także wykonywanie skoków i przysiadów z częstotliwością większą od maksymalnej wartości 3,40 Hz, określonej w tab. 1. Wykonywanie skoków lub przysiadów z częstotliwością  $f > 3,40$  Hz możliwe jest przy wykorzystaniu urządzeń wskazujących tempo aktywności (np. elektroniczny metronom). Warto jednak zauważyć, że aktywność z częstotliwością  $f > 4,0$  Hz staje się utrudniona. Wykonywanie skoków lub przysiadów wymaga w tym przypadku zwiększonego wysiłku i skupienia uwagi na rytmie wskazywanym przez metronom, przy czym wykonywanie skoków z wysokimi częstotliwościami jest łatwiejsze niż wykonywanie przysiadów.

Możliwość szybkiego wykonywania przysiadów jest ograniczona możliwościami ruchowymi ludzkiego ciała (brak możliwości uginania i prostowania kolan w szybkim tempie). Przysiady o wysokich częstotliwościach przypominają raczej pionowe podrygiwania ciała.

Wartość częstotliwości 3,40 Hz można określić jako granicę szybkiego, lecz w dalszym ciągu komfortowego tempa wykonywania skoków, tzn. tempa niewymagającego zwiększonego wysiłku poprzez napięcie mięśni kończyn dolnych. W przypadku przysiadów wartość tę ustalić można na poziomie  $\sim 3,0$  Hz.

Z praktycznego punktu widzenia wymuszanie drgań o wysokich częstotliwościach w sposób intencjonalny jest przypadkiem mało prawdopodobnym w warunkach codziennej eksploatacji konstrukcji z powodu dużego fizycznego obciążenia, wynikającego z tego typu aktywności. Bardziej prawdopodobnym przypadkiem jest intencjonalne wzbudzenie drgań o niskich częstotliwościach, np. pionowych, skrętnych lub poprzecznych konstrukcji podwieszonych, wstępowych lub wiszących.

Zgodnie z wymaganiami [68] niedopuszczalne jest występowanie nadmiernych drgań konstrukcji uciążliwych dla użytkowników (powodujących zaburzenie komfortu użytkownika konstrukcji) lub powodujących uszkodzenia obiektu oraz jego wyposażenia. W przypadku intencjonalnego (złośliwego) wzbudzania drgań konstrukcji wymóg zapewnienia odpowiedniego komfortu użytkownika konstrukcji może okazać się niemożliwy do spełnienia. Prowadzić to może do znacznych problemów projektowych. Jednakże uwzględniając fakt, że intencjonalne wzbudzenie drgań poprzez skoki lub przysiady jest nietypowym sposobem użytkowania konstrukcji, oddziaływania te można zaliczyć do grupy obciążeń wyjątkowych [70]. Przemawia za tym również znaczna odmienność obciążeń generowanych podczas skoków lub przysiadów od obciążeń występujących podczas normalnej eksploatacji konstrukcji. Z tego powodu można rozważać dopuszczenie sporadycznego występowania nadmiernych drgań konstrukcji niekomfortowych dla użytkowników, jeśli nie zagrażają one bezpieczeństwu użytkownika i trwałości konstrukcji. Podejście takie pozwala na bardziej racjonalną ocenę drgań konstrukcji wzbudzanych intencjonalnie.

Warto zauważyć, że podczas występowania na konstrukcji wzbudzeń intencjonalnych amplitudy jej drgań na ogół znacznie przekraczają wartości dopuszczalne (najczęściej kilkukrotnie). Przyjąć można a priori, że stany graniczne użytkowności z uwagi na komfort użytkownika konstrukcji są w tych przypadkach każdorazowo przekroczone. W sytuacji tej ograniczenie drgań konstrukcji może okazać się konieczne głównie z uwagi na zapewnienie bezpieczeństwa użytkownika i trwałości konstrukcji. Analizy dynamiczne konstrukcji narażonych na oddziaływania intencjonalne (skoki, przysiady) powinny mieć przede wszystkim na celu weryfikację nośności konstrukcji i jej wytrzymałości zmęczeniowej. Jeśli drgania wzbudzane celowo nie zagrażają bezpieczeństwu użytkownika i trwałości konstrukcji, i gdy wzbudzane są sporadycznie, a na ich odczuwanie narażona jest nieznaczna grupa osób (np. grupa osób wzbudzająca drgania), to można rozważać dopuszczenie ich występowania.

Jednocześnie nadmierne drgania konstrukcji wzbudzone złośliwie, mogące skutkować zmniejszeniem nośności i trwałości konstrukcji oraz drgania, na których odczuwanie narażona może być duża liczba użytkowników (drgania wzbudzone przy dużym natężeniu ruchu na konstrukcji), należy uznać za niedopuszczalne i wymagające podjęcia środków zaradczych.

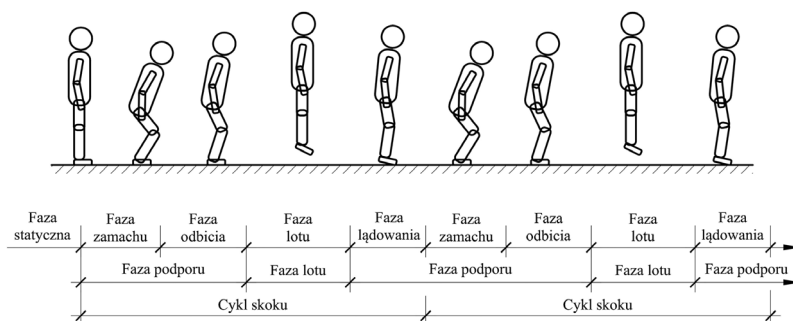
Warto także zauważyć, że w przypadku oceny wpływu drgań wzbudzanych intencjonalnie na konstrukcję i jej użytkowników należy zastosować właściwe kryteria oceny drgań, które powinny uwzględniać typ oddziaływania dynamicznego (np. oddziaływania podstawowe: chód lub oddziaływania wyjątkowe: skoki) oraz częstość występowania drgań (okres powrotu drgań): drgania częste, rzadkie, wyjątkowe. Drgania wzbudzone celowo należy oceniać, wykorzystując kryteria obowiązujące dla przypadków drgań wyjątkowych lub drgań rzadkich. W pierwszej kolejności należy zwrócić uwagę na wpływ drgań na nośność i wytrzymałość zmęczeniową konstrukcji, a następnie, jeśli to konieczne, na komfort jej użytkowania. Wykonywanie oceny drgań wzbudzanych przez działania intencjonalne z wykorzystaniem kryteriów obowiązujących dla drgań natury codziennej jest dużym błędem. Postępowanie takie prowadzi do niewłaściwych wniosków w zakresie oceny podatności dynamicznej konstrukcji, w szczególności w zakresie oceny jej komfortu użytkowania.

Wyznaczenie reakcji konstrukcji na działanie obciążenia dynamicznego wymaga znajomości wartości i zmienności tego obciążenia. Normy i wytyczne projektowe na ogół nie zawierają szczegółów dotyczących wyznaczania tego obciążenia. W niniejszej monografii przedstawiono sposoby modelowania pionowych obciążeń dynamicznych, powstających podczas skoków i przysiadów. Zaprezentowano wyniki badań własnych tych obciążeń, ich analizę i opracowane na tej podstawie własne propozycje modeli obciążeń. Przytoczono i scharakteryzowano także modele obciążeń opracowane przez różnych autorów. Na podstawie badań własnych opracowano liczne zalecenia uzupełniające braki dotychczasowych modeli w zakresie doboru wartości ich parametrów wejściowych. Opisane modele obciążeń dynamicznych mogą być wykorzystywane w analizach dynamicznych kładek dla pieszych oraz w analizach konstrukcji budowlanych innych typów (stropy, schody, trybuny sportowe itp.) narażonych na oddziaływanie osób skaczących lub wykonujących przysiady.

## 2. OBCIĄŻENIA DYNAMICZNE GENEROWANE PODCZAS SKOKÓW I PRZYSIADÓW

### 2.1. Siły reakcji podłoża generowane podczas skoków

Skoki to rodzaj aktywności fizycznej człowieka polegającej na rytmicznym odbijaniu się osoby skaczącej od podłoża (rytmicznym przechodzeniu z fazy podporu w fazę lotu) realizowanym dzięki pracy mięśni kończyn dolnych wykonywanej podczas ich naprzemiennego rozciągania i gwałtownego skracania w trakcie uginania i gwałtownego prostowania kończyn dolnych (il. 1).



Il. 1. Pionowe skoki w miejscu – fazy cyklu skoku (opracowanie własne)

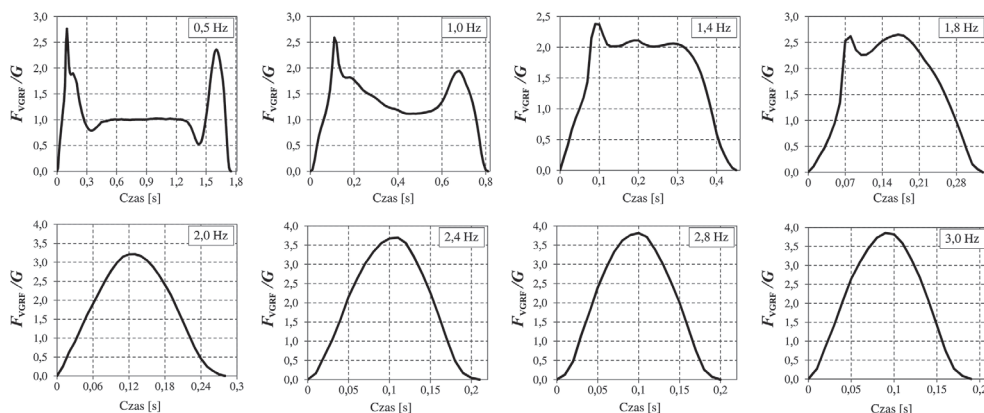
Naprzemienne rozciąganie i skracanie mięśni kończyn dolnych pozwala generować siłę o wartości przewyższającej ciężar ciała osoby skaczącej, umożliwiającą wybiec się w górę.

Aktywność człowieka w postaci skoków występująca w obrębie konstrukcji budowlanych to głównie pionowe skoki w miejscu. W odróżnieniu od pionowych wyskoków, będących przedmiotem zainteresowania biomechaniki jako formy testu sprawdzającego cechy motoryczne człowieka oraz umiejętności generowania mocy mięśniowej, na konstrukcjach budowlanych najczęściej występują rytmiczne podskoki – powtarzające się pionowe skoki w miejscu na niewielką wysokość.

Dwie podstawowe fazy skoków to faza podporu (nazywana także fazą kontaktu) oraz faza lotu (il. 1). W fazie podporu kontakt z podłożem realizowany jest za pośrednictwem dwóch stóp. Faza podporu stanowi około 58% cyklu skoku dla częstotliwości skoków  $f_j = 3,00$  Hz oraz około 88% cyklu skoku dla częstotliwości skoków  $f_j = 0,50$  Hz. W trakcie cyklicznych skoków fazę podporu można podzielić na fazy: lądowania (amortyzacji), zamachu oraz odbicia. Faza lądowania rozpoczyna

się od kontaktu palców dwóch stóp z podłożem i kończy się w chwili uderzenia pięt o podłoże. Po zakończeniu fazy amortyzacji następuje faza zamachu, w której środek ciężkości ciała przemieszcza się w dół (uginanie kolan, rozciąganie mięśni). Faza zamachu kończy się, gdy środek ciężkości ciała znajduje się w położeniu najniższym (siła reakcji podłoża osiąga wartość maksymalną). Po osiągnięciu najniższego położenia następuje zmiana kierunku ruchu środka ciężkości. Rozpoczyna się ruch ciała w górę (prostowanie kolan, skracanie mięśni). Inicjuje to fazę odbicia, która kończy się w chwili utraty kontaktu stóp z podłożem. W fazie odbicia wartość siły reakcji podłoża maleje. Po odbiciu od podłoża rozpoczyna się faza lotu (siła reakcji podłoża  $F_{VGRF} = 0$ ). W fazie tej wyodrębnić można etap wznoszenia i etap opadania (spadek swobodny). Po zakończeniu fazy lotu rozpoczyna się cykl kolejnego skoku.

Na ilustracji 2 przedstawiono przykładowe unormowane przebiegi czasowe pionowej składowej sił reakcji podłoża ( $F_{GRF}/G$ ) powstające podczas skoków o różnych częstotliwościach.

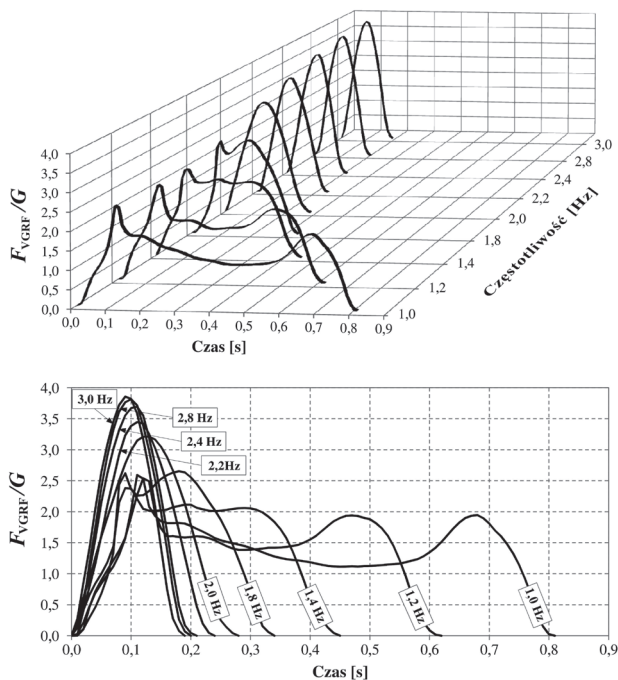


II. 2. Przykładowe unormowane przebiegi czasowe pionowej składowej sił reakcji podłoża powstające podczas skoków o częstotliwościach  $f_j = 0,50\text{--}3,00$  Hz (wyniki badań własnych)

Pierwszy wierzchołek widoczny na wykresach VGRF w przedziale częstotliwości skoków  $f_j = 0,50\text{--}1,80$  Hz powstaje w fazie lądowania w efekcie uderzenia pięt o podłoże. Wierzchołek ten zanika podczas skoków z częstotliwościami  $f_j \geq 2,00$  Hz. Wraz ze wzrostem częstotliwości skoków zanika różnica pomiędzy fazą lądowania i fazą zamachu. Na wykresie przedstawiającym VGRF, powstającą w trakcie skoków o częstotliwości  $f_j = 0,50$  Hz, wyraźnie widoczna jest faza lądowania ( $t_c \approx 0,00\text{--}0,50$  s,  $t_c$  – czas kontaktu stóp z podłożem) oraz faza zamachu i odbicia ( $t_c \approx 1,25\text{--}1,75$  s). Fazy te rozdzielone są fazą statyczną, w trakcie której wartość siły reakcji podłoża równa jest ciężarowi ciała osoby skaczącej ( $F_{VGRF} = G$ ,  $F_{VGRF}/G = 1,0$ ). Wraz ze wzrostem częstotliwości skoków faza statyczna zanika.



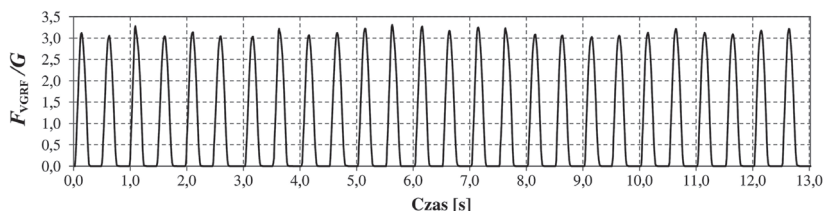
Na ilustracji 3 przedstawiono zestawienie unormowanych przebiegów sił reakcji podłoża powstających podczas skoków o częstotliwościach  $f_j = 1,00\text{--}3,00$  Hz.



Il. 3. Przykładowe unormowane przebiegi czasowe pionowej składowej sił reakcji podłoża, powstające podczas skoków o częstotliwościach  $f_j = 1,00\text{--}3,00$  Hz (wyniki badań własnych)

Można zauważyć dużą zmienność przebiegu siły reakcji podłoża oraz czasu kontaktu z podłożem  $t_c$  w przedziale częstotliwości  $f_j = 1,00\text{--}2,00$  Hz oraz ujednoczenie przebiegów VGRF w przypadku skoków o częstotliwościach  $f_j \geq 2,00$  Hz. Dla  $f_j \geq 2,00$  Hz widoczne jest podobieństwo wykresów VGRF do dodatniej połówki krzywej sinusoidalnej. Podobieństwo to wykorzystano w modelach matematycznych opisujących oddziaływania dynamiczne osób skaczących (por. podrozdziały 3.1.2, 3.1.3). Należy zauważyć, że uwzględnienie w analizach dynamicznych oddziaływania osób skaczących, wykonujących skoki o częstotliwościach  $f_j < 2,00$  Hz, wymaga jednak wykorzystania innego sposobu modelowania siły reakcji podłoża z uwagi na odmienny kształt krzywej VGRF w szczególności dla  $f_j < 1,80$  Hz (por. il. 2).

Na ilustracjach 2 i 3 można zaobserwować również wzrost wartości amplitudy siły wraz ze wzrostem częstotliwości skoków oraz małą zmienność wartości czasu kontaktu stóp z podłożem  $t_c$  w przypadku skoków o częstotliwościach  $f_j \geq 2,40$  Hz. Amplitudy VGRF mieszczą się na ogół w przedziale  $2,0G\text{--}4,0G$ . Czas kontaktu stóp z podłożem dla  $f_j \geq 2,40$  Hz można przyjmować jako  $t_c = 0,18\text{--}0,20$  s [14].

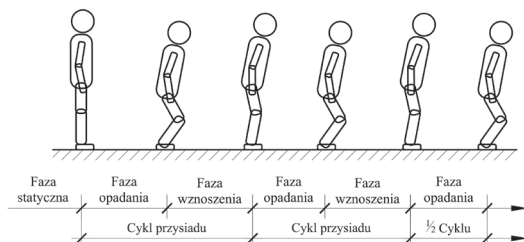


Il. 4. Przebieg siły reakcji podłoża powstającej podczas skoków jednej osoby z częstotliwością  $f_j = 2,0$  Hz (wyniki badań własnych)

Na ilustracji 4 przedstawiono przykładowy przebieg siły reakcji podłoża, powstającej podczas skoków jednej osoby z częstotliwością  $f_j = 2,0$  Hz.

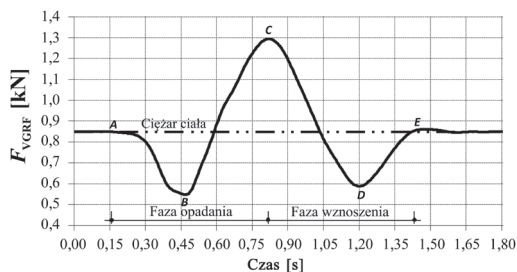
## 2.2. Siły reakcji podłoża generowane podczas przysiadów

Przysiady są formą fizycznej aktywności człowieka, polegającą na naprzemiennym uginaniu i prostowaniu kończyn dolnych z zachowaniem ciągłego kontaktu stóp z podłożem (brak fazy lotu).



Il. 5. Fazy przysiadów (opracowanie własne)

Podstawowe fazy przysiadu to faza opadania i faza wznoszenia (il. 5). Fazy te w odniesieniu do przebiegu pionowej składowej siły reakcji podłoża, powstającej podczas pojedynczego przysiadu, zaprezentowano na il. 6.

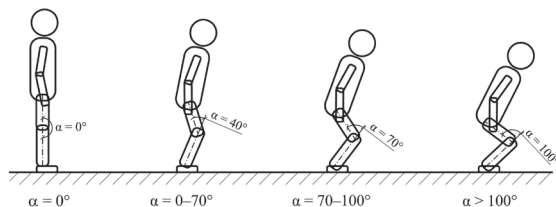


Il. 6. Fazy przysiadu w odniesieniu do pionowej składowej siły reakcji podłoża (VGRF), powstającej podczas pojedynczego przysiadu (wyniki badań własnych)

W początkowym etapie fazy opadania, podczas pochylenia tułowia do przodu, kompensacji luzów w stawach kończyn dolnych i rozpoczęcia napinania mięśni, VGRF osiąga wartości mniejsze od ciężaru ciała osoby wykonującej przysiad (il. 6, odcinek A–B). W dalszym etapie fazy opadania wartość VGRF wzrasta, osiągając wartości większe od ciężaru ciała poruszającej się osoby (il. 6, odcinek B–C). Maksymalna wartość VGRF (il. 6, punkt C) występuje w chwili osiągnięcia przez środek ciężkości ciała najniższego położenia. Wtedy rozpoczyna się ruch ciała ku górze (początek fazy wznoszenia). Wartość VGRF maleje (il. 6, odcinek C–D). W końcowym etapie fazy wznoszenia VGRF osiąga wartość mniejszą od ciężaru ciała. Minimalna wartość VGRF (il. 6, punkt D) występuje w chwili osiągnięcia przez środek ciężkości ciała najwyższego położenia w fazie wznoszenia. W przypadku pojedynczego przysiadu w końcowym etapie jego wykonywania tułów powraca do pozycji pionowej, stopy opierają się całą powierzchnią na podłożu, mięśnie nóg rozluźniają się, a VGRF osiąga wartość ciężaru ciała osoby wykonującej przysiad (il. 6, odcinek D–E). Etap ten zanika stopniowo podczas przysiadów cyklicznych wykonywanych kolejno po sobie z częstotliwością  $f_{sq} > 1,40$  Hz. W przypadku przysiadów wykonywanych z częstotliwością  $f_{sq} \geq 1,80$  Hz, w trakcie których po osiągnięciu przez środek ciężkości ciała położenia najwyższego (punkt D) rozpoczyna się płynny ruch ciała ku dołowi (początek kolejnego przysiadu), ruch osoby wykonującej przysiadu przypomina ruch masy zawieszonyj na sprężynie.

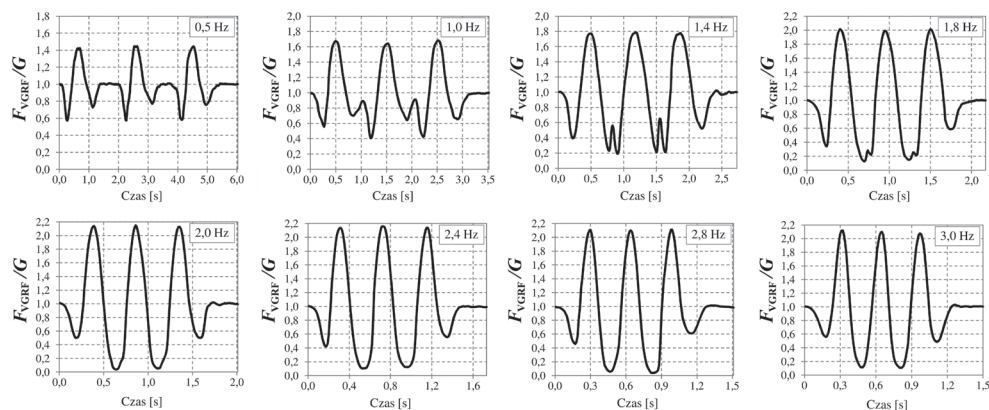
Warto zauważyć, że podczas wykonywania cyklicznych przysiadów szybkość uginania i szybkość prostowania kończyn dolnych (szybkość rozciągania i skracania mięśni kończyn dolnych) są do siebie zbliżone. Praca mięśni wygląda odmiennie podczas skoków. W fazie odbicia następuje gwałtowne skrócenie mięśni (gwałtowne wyprostowanie nóg) w celu wygenerowania siły o wartości większej od ciężaru ciała, pozwalającej osobie skaczącej oderwać się od podłoża.

Jednym z parametrów charakteryzujących przysiadu jest ich głębokość, wyrażona wartością kąta ugięcia kolan  $\alpha$  (il. 7,  $\alpha = 0^\circ$  – nogi wyprostowane). Nieformalny podział przysiadów stosowany przez trenerów sportowych wyodrębnia: przysiadu częściowe ( $\alpha = 0\text{--}70^\circ$  (najczęściej  $\alpha \approx 40^\circ$ ), półprzysiadu ( $\alpha = 70\text{--}100^\circ$ ), przysiadu pełne (przysiadu głębokie,  $\alpha > 100^\circ$ ) [71] (il. 7).



Il. 7. Rodzaje przysiadów w funkcji kąta ugięcia kolan: przysiadu częściowe  $\alpha = 0\text{--}70^\circ$ , półprzysiadu ( $\alpha = 70\text{--}100^\circ$ ), przysiadu pełne (głębokie)  $\alpha > 100^\circ$  (opracowanie własne)

Na ilustracji 8 przedstawiono przykładowe przebiegi unormowanej pionowej składowej siły reakcji podłoża  $F_{VGRF} / G$  powstające podczas przysiadów częściowych o częstotliwościach  $f_{sq} = 1,00\text{--}3,00$  Hz. Przedstawione przebiegi czasowe odpowiadają trzem przysiadom wykonanym kolejno po sobie.



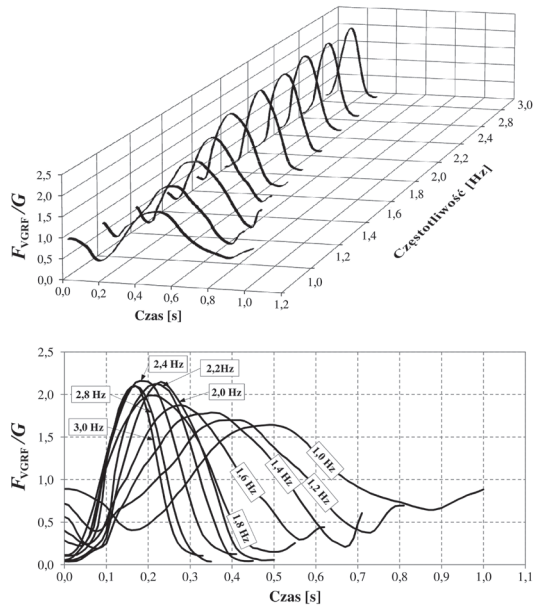
Il. 8. Przebiegi czasowe pionowej składowej siły reakcji podłoża powstające podczas przysiadów o częstotliwościach  $f_{sq} = 0,50\text{--}3,00\text{ Hz}$  (wyniki badań własnych)

Warto przypomnieć, że maksymalna wartość VGRF występuje w chwili osiągnięcia przez środek ciężkości ciała najniższego położenia. Podczas wykonywania przysiadów obie stopy zachowują ciągły kontakt z podłożem. W odróżnieniu od skoków VGRF generowane podczas przysiadów nie osiągają wartości zerowych. Maksymalne i minimalne wartości VGRF generowane podczas wykonywania przysiadów zależą od częstotliwości przysiadów i wynoszą: wartość maksymalna  $1,20G\text{--}1,50G$  dla  $f_{sq} = 0,50\text{ Hz}$ ,  $2,10G\text{--}2,30G$  dla  $f_{sq} = 3,00\text{ Hz}$ ; wartość minimalna  $0,45G\text{--}0,60G$  dla  $f_{sq} = 0,50\text{ Hz}$ ,  $0,05G\text{--}0,15G$  dla  $f_{sq} = 1,80\text{--}3,00\text{ Hz}$ .

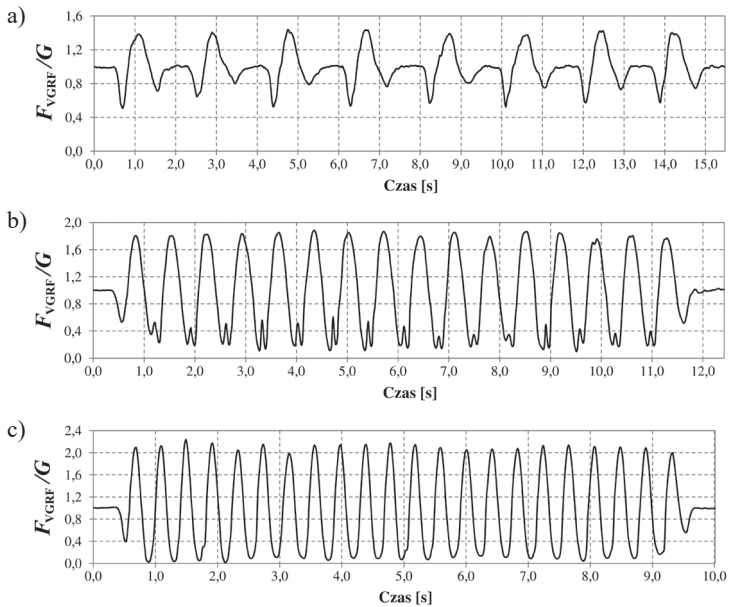
Analizując il. 8, można zauważyć, że VGRF generowane podczas przysiadów o częstotliwości  $f_{sq} \geq 1,80\text{ Hz}$  mają przebiegi zbliżone do przebiegów sinusoidalnych odzwierciedlających np. ruch masy zawieszonyj na sprężynie. Należy jednak zaznaczyć, że przebiegi te nie są idealnymi przebiegami sinusoidalnymi, symetrycznymi względem położenia równowagi odpowiadającego wartości  $F_{GRF}/G = 1,0$ . Wartości maksymalne VGRF oddalone są nieco bardziej od położenia równowagi niż ich wartości minimalne. W przypadku przysiadów o częstotliwości  $f_{sq} < 1,80\text{ Hz}$  przebiegi VGRF odbiegają od przebiegów sinusoidalnych. Dla  $f_{sq} = 0,50\text{ Hz}$  na przebiegach VGRF można zauważyć odcinki, na których siła reakcji podłoża równa jest ciężarowi ciała osoby wykonującej przysiady ( $F_{GRF}/G = 1,0$  – faza statyczna). Faza ta zanika wraz ze wzrostem częstotliwości przysiadów.

Na ilustracji 9 zestawiono unormowane przebiegi sił reakcji podłoża, powstające podczas przysiadów o częstotliwościach  $f_{sq} = 1,00\text{--}3,00\text{ Hz}$ . Prezentowane krzywe  $F_{GRF}/G$  odpowiadają pojedynczemu przysiadowi wyodrębnionemu z przebiegów VGRF zarejestrowanych podczas wykonywania serii następujących po sobie przysiadów.

Na ilustracji 10 przedstawiono przykładowe przebiegi pionowej składowej siły reakcji podłoża powstającej podczas wykonywania przysiadów z częstotliwością  $0,50\text{ Hz}$ ,  $1,40\text{ Hz}$ ,  $2,40\text{ Hz}$ .



II. 9. Przebiegi czasowe pionowej składowej siły reakcji podłoża powstające podczas przysiadów o częstotliwościach  $f_{sq} = 1,00\text{--}3,00$  Hz (wyniki badań własnych)



II. 10. Przykładowe przebiegi pionowej składowej siły reakcji podłoża generowanej podczas wykonywania przysiadów z częstotliwością: a)  $f_{sq} = 0,50$  Hz, b)  $f_{sq} = 1,40$  Hz, c)  $f_{sq} = 2,40$  Hz (wyniki badań własnych)



### 3. MODELE SIŁ REAKCJI PODŁOŻA GENEROWANYCH PODCZAS SKOKÓW I PRZYSIADÓW

#### 3.1. Modele obciążeń VGRF generowanych podczas skoków

Przypadek oddziaływania dynamicznego generowanego przez osoby skaczące występujący na konstrukcjach budowlanych (w szczególności na kładkach dla pieszych) to głównie powtarzające się podskoki w miejscu na nieznaczną wysokość. Należy wyraźnie rozróżnić ten sposób aktywności użytkowników konstrukcji od wyskoków będących przedmiotem zainteresowania biomechaniki i formą testu sprawdzającego cechy motoryczne człowieka oraz umiejętność generowania mocy mięśniowej.

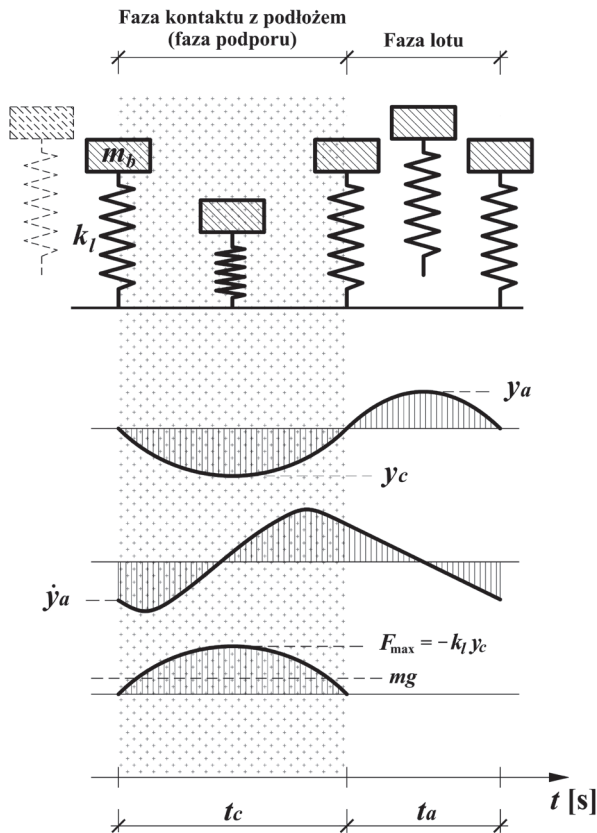
Osoby podskakujące na kładkach dla pieszych pojawiają się głównie w sytuacjach podwyższonej podatności dynamicznej konstrukcji odczuwanej przez użytkowników w normalnych warunkach jej eksploatacji (podczas chodu lub biegu). Tego typu oddziaływanie dynamiczne zwykle prowadzi do przekroczenia dopuszczalnych poziomów drgań definiowanych dla normalnych warunków eksploatacji konstrukcji. Takie są bowiem intencje osób skaczących wzbudzających drgania. W tej sytuacji ocena komfortu użytkownika konstrukcji schodzi na plan dalszy. Istotniejsza staje się ocena bezpieczeństwa użytkownika konstrukcji, wyczerpania elementów konstrukcyjnych oraz ich wytrzymałości zmęczeniowej.

Warto także zauważyć, że w celu uniknięcia sytuacji prowokujących celowe wzbudzenie drgań przez osoby podskakujące, wykonujące przysiady lub balansujące ciałem, podstawowym wymogiem projektowym powinno być unikanie nadmiernej podatności dynamicznej konstrukcji w normalnych warunkach jej użytkowania, tzn. podczas użytkowania konstrukcji przez osoby idące lub biegnące.

W dalszej części rozdziału opisano różne sposoby modelowania pionowej składowej siły reakcji podłoża, powstającej podczas cyklicznych skoków w miejscu: model masowo-sprężysty wraz z programem symulacji skoków opracowanym w programie MATLAB Simulink, model bazujący na szeregu Fouriera, model półsinusoidalny oraz model na bazie funkcji Hanna.

### 3.1.1. Model masowo-sprężysty

Masowo-sprężysty model pionowej składowej sił reakcji podłoża zaproponowany został w publikacji [14]. Niezależne opracowanie modelu masowo-sprężystego przedstawiono także w pracy [29] w podrozdziale 8.3.4.



Il. 11. Model masowo-sprężysty osoby skaczącej w miejscu [14, 29]

W modelu tym pionowa składowa sił reakcji podłoża wyznaczana jest na podstawie równań ruchu sprężysto podpartej masy (il. 11), z wyodrębnieniem dwóch faz tego ruchu: faza 1 – faza kontaktu osoby skaczącej z podłożem (faza podporu), w której ruch opisany jest liniowym niejednorodnym równaniem różniczkowym rzędu drugiego; faza 2 – faza lotu (brak kontaktu osoby skaczącej z podłożem), w której ruch można opisać równaniami znanymi dla przypadków rzutu pionowego w górę oraz spadku swobodnego.

Wyznaczenie VGRF wymaga rozwiązania równania różniczkowego opisującego ruch masy w fazie podporu. Rozwiązania tego poszukuje się dla określonych



parametrów: masy osoby skaczącej  $m_b$ , sztywności kończyn dolnych podczas podskoków  $k_l$  oraz prędkości ruchu masy  $m_b$  na początku fazy podporu (koniec fazy spadku swobodnego)  $\dot{y}_a$ .

Poniżej podano równania opisujące ruch osoby skaczącej w dwóch fazach ruchu. Faza podporu (faza kontaktu osoby skaczącej z podłożem):

$$m_b \ddot{y}_c + k_l y_c = -m_b g \quad (1)$$

Faza lotu (brak kontaktu osoby skaczącej z podłożem):

$$m_b \ddot{y}_a = -m_b g \quad (2)$$

gdzie:  $m_b$  – masa ciała osoby skaczącej,  $k_l$  – sztywność kończyn dolnych podczas skoków,  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $y_c$ ,  $\ddot{y}_c$  – odpowiednio przemieszczenie i przyspieszenie masy  $m_b$  w fazie podporu,  $\ddot{y}_a$  – przyspieszenie masy  $m_b$  w fazie lotu.

Rozwiązanie równania (1) można przedstawić w postaci:

$$y_c(t) = A \cos \omega_j t + B \sin \omega_j t - \frac{g}{\omega_j^2} \quad (3)$$

Stąd:

$$\dot{y}_c(t) = -A \omega_j \sin \omega_j t + B \omega_j \cos \omega_j t \quad (4)$$

gdzie:  $A$  i  $B$  – stałe całkowania,  $\omega_j$  – częstość podskoków

$$\omega_j = \sqrt{\frac{k_l}{m_b}} \quad (5)$$

Dla poniższych warunków brzegowych:

$$y_c(t=0) = 0 \quad (6)$$

$$\dot{y}_c(t=0) = \dot{y}_a \quad (7)$$

otrzymujemy:

$$A = \frac{g}{\omega_j^2} \quad (8)$$

$$B = \frac{\dot{y}_a}{\omega_j} \quad (9)$$

gdzie:  $\dot{y}_a$  – prędkość ruchu masy  $m_b$  na końcu fazy lotu (koniec fazy spadku swobodnego) dla  $t = t_a/2$  ( $t_a$  – czas lotu, ang. *aerial time*).

Równanie (3) przyjmuje postać:

$$y_c(t) = \frac{g}{\omega_j^2} \cos \omega_j t + \frac{\dot{y}_a}{\omega_j} \sin \omega_j t - \frac{g}{\omega_j^2} \quad (10)$$

Wartość prędkości ruchu masy  $m_b$  na początku fazy kontaktu z podłożem  $\dot{y}_a$  można wyznaczyć wykorzystując równanie (2). Rozwiązanie równania (2), wyrażające przemieszczenie w rzucie pionowym w górę i w spadku swobodnym, można zapisać w postaci:

$$y_a(t) = \dot{y}_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad (11)$$

gdzie:  $\dot{y}_0$  – prędkość początkowa.

Prędkość ruchu masy  $m_b$  wynosi:

$$\dot{y}_a(t) = \dot{y}_0 - gt \quad (12)$$

Dla prędkości początkowej  $\dot{y}_0 = 0$ , występującej w najwyższym punkcie fazy lotu (koniec fazy wznoszenia, początek fazy spadku swobodnego), oraz dla czasu  $t = t_a/2$ , oznaczającego koniec spadku swobodnego (początek fazy kontaktu z podłożem, początek fazy podporu), otrzymujemy:

$$\dot{y}_a = -\frac{gt_a}{2} \quad (13)$$

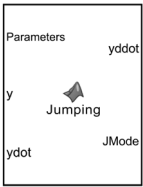


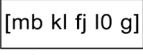













gdzie:  $t_a$  – czas lotu (czas braku kontaktu osoby skaczącej z podłożem),  $t_a = T_j - t_c$ ,  $T_j$  – okres skoków,  $T_j = 1/f_j = 2\pi/\omega_j$ ,  $f_j$  – częstotliwość skoków,  $t_c$  – czas kontaktu osoby skaczącej z podłożem.

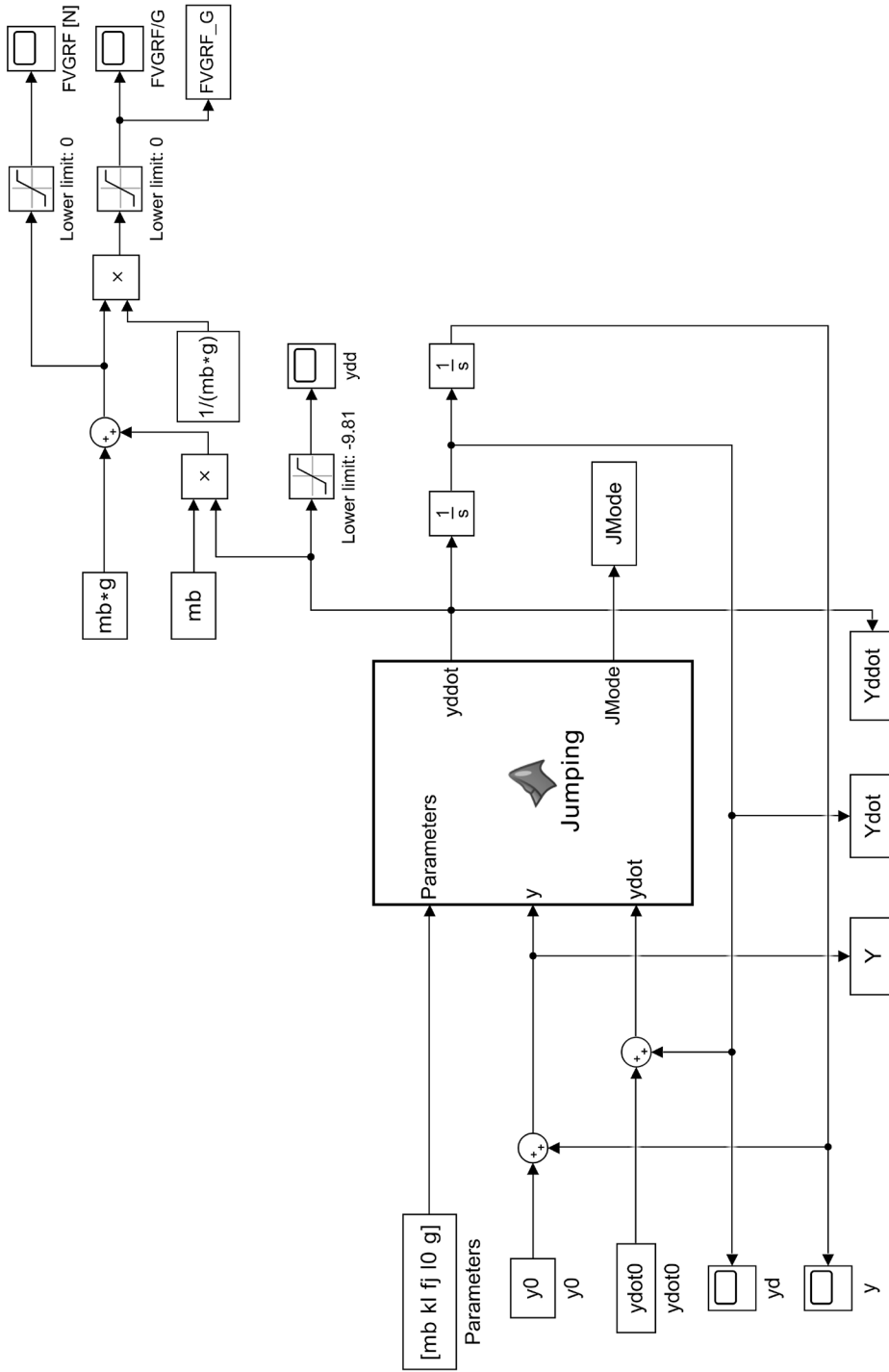
Spośród wszystkich parametrów opisujących ruch osoby skaczącej w miejscu ( $m_b, k_p, \omega_j, t_c, t_a, y, y_c, y_a, \dot{y}_a, f_j, T_j$ ) tylko trzy są niezależne. Po przyjęciu wartości tych trzech parametrów pozostałe można wyznaczyć metodami numerycznymi.

Na ilustracji 12 nakreślono schemat modelu symulacyjnego (*Jumping\_sim*) przygotowany w programie MATLAB Simulink, pozwalający wyznaczyć pionową składową sił reakcji podłoża generowaną przez osobę skaczącą w miejscu.

W tabeli 2 przedstawiono charakterystykę bloków wykorzystanych w modelu symulacyjnym.

Tabela 2. Parametry bloków wykorzystanych w modelu symulacyjnym *Jumping\_sim* (MATLAB Simulink, opracowanie własne)

Typ bloku	Parametr bloku	Typ bloku	Parametr bloku
 MATLAB Function	Show port labels: FromPortIcon Read/Write permissions: Read/Write Sample time: -1	 To Workspace	Variable name: <i>Yddot</i> Save format: Timeseries Sample time: -1
 To Workspace	Variable name: <i>JMode</i> Save format: Timeseries Sample time: -1	 Constant	Constant value: $[mb \ k \ f \ l \ 0 \ g]$ Sample time: inf
 Constant	Constant value: <i>y0</i> Sample time: inf	 Integrator	External reset: none Initial condition source: internal Initial condition: 0
 Constant	Constant value: <i>ydot0</i> Sample time: inf	 Saturation	Upper limit: inf Lower limit: -9.81 Lower limit: 0
 Scope	<i>y, yd, ydd, FVGRF [N], FVGRF/G</i>	 Constant	Constant value: <i>mb</i> Sample time: inf
 Sum	List of signs: ++	 Constant	Constant value: $mb * g$ Sample time: inf
 To Workspace	Variable name: <i>Y</i> Save format: Timeseries Sample time: -1	 Constant	Constant value: $1/(mb * g)$ Sample time: inf
 To Workspace	Variable name: <i>Ydot</i> Save format: Timeseries Sample time: -1	 Product	Number of inputs: 2 Multiplication: Element-wise(.*)
		 To Workspace	Variable name: <i>FVGRF_G</i> Save format: Timeseries Sample time: -1



Il. 12. Model symulacyjny osoby skaczącej w miejscu *Jumping\_sim* (MATLAB Simulink, opracowanie własne)

Poniżej zamieszczono skrypt definiujący parametry wejściowe modelu symulacyjnego wraz z animacją osoby skaczącej (*Jumping\_data.m*) oraz skrypt zamieszczony w bloku funkcyjnym MATLAB Function *Jumping*, wykorzystanym w modelu blokowym MATLAB Simulink. Uruchomienie symulacji wymaga utworzenia pliku *Jumping\_data.m* zawierającego prezentowany poniżej skrypt oraz pliku *Jumping\_sim.slx* wraz ze schematem blokowym przedstawionym na il. 12.

### Skrypt *Jumping\_data.m*

```
mb = 75;           % masa osoby skaczącej [kg]
kl = 30200;       % sztywność kończyn [N/m] (wartość zależna od mb i fj)
fj = 2.5;         % częstotliwość skoków [Hz]
l0 = 0.97;        % długość kończyn dolnych [m]
g = 9.81;         % przyspieszenie ziemskie [m/s^2]
ydot0 = 0.0;      % prędkość początkowa [m/s]
y0 = 1.0;         % początkowe położenie masy mb [m]

simulation = sim('Jumping_sim');

% Animation
for t = 1:500:Y.Length
    x = Y.data(t);
    y = Y.data(t);
    mode = JMode.data(t);

    plot(0,y,'.','MarkerSize',200)
    grid on
    set(gca,'xticklabel',[])
    line([-0.3 0.3],[-0.005 -0.005],'LineWidth',3);
    if JMode.data(t) == 1
        line([0.025 0.025],[y 0],'LineWidth',4);
        line([-0.025 -0.025],[y 0],'LineWidth',4);
    else
        line([0.025 0.025],[y y-1_0],'LineWidth',4);
        line([-0.025 -0.025],[y y-1_0],'LineWidth',4);
    end

    axis([-0.5 0.5 -0.015 1.2]);
    pause(0);
end
```

### Skrypt bloku funkcyjnego MATLAB Function *Jumping*

```
function [yddot, JMode] = Jumping(Parameters, y, ydot)

mb = Parameters(1);
kl = Parameters(2);
fj = Parameters(3);
l0 = Parameters(4);
```

```

g = Parameters(5);

persistent mode;
if isempty(mode)
    mode = 0;
end

Tj = 1/fj;
tc = 0.211;          % czas kontaktu z podłożem (wartość zależna od fj)
ta = Tj - tc;
va = g*ta/2;

if y > 10 && ydot <= va
    mode = 0;
end

if y <= 10
    mode = 1;
end

if mode == 1
    yddot = (k1*(10 - y)/mb) - g;
else
    yddot = -g;
end

JMode = mode;

```

W prezentowanych skryptach uwzględniono wartości  $k_l = 30\,200$  N/m oraz  $t_c = 0,211$  s odpowiednie dla częstotliwości skoków  $f_j = 2,5$  Hz. Wartość  $t_c$  wymaga zmiany w zależności od przyjętej częstotliwości skoków. Wartość  $k_l$  należy korygować w zależności od częstotliwości skoków  $f_j$  oraz masy osoby skaczącej  $m_b$ .

Należy zauważyć, że prezentowany model masowo-sprężysty, składający się z pojedynczej masy umieszczonej na sprężystej podstawie, pozwala wyznaczyć pionową składową siłę reakcji podłoża o przebiegu zbliżonym do dodatniej połówki krzywej sinusoidalnej. Taki przebieg VGRF występuje w przypadku skoków z częstotliwością  $f_j \geq 2,00$  Hz. Przebiegi czasowe VGRF dla częstotliwości skoków  $f_j < 1,80$  Hz charakteryzują się bardziej złożonym kształtem dwuwierchołkowym (por. il. 2 i 3). Należy uznać, że model masowo-sprężysty w prezentowanej postaci jest nieodpowiedni do odwzorowania VGRF generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_j < 1,80$  Hz. Przedział częstotliwości  $f_j = 1,80\text{--}2,00$  Hz można potraktować jako przedział przejściowy, w którym model masowo-sprężysty może stanowić przybliżenie przebiegu VGRF.

W tabeli 3 przedstawiono wartości sztywności kończyn dolnych  $k_l$  oraz czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_c$ , odpowiednie do symulacji skoków osoby o masie  $m_b = 75,0$  kg w przedziale częstotliwości  $f_j = 2,00\text{--}3,00$  Hz. Wartości te wyznaczono przy założeniu  $l_0 = 0,97$  m oraz  $y_0 = 1,0$  m. Obliczenia VGRF wykonano dla kroku czasowego  $\Delta t = 0,0001$  s. Czas trwania symulacji potrzebny do osiągnięcia ustalonego

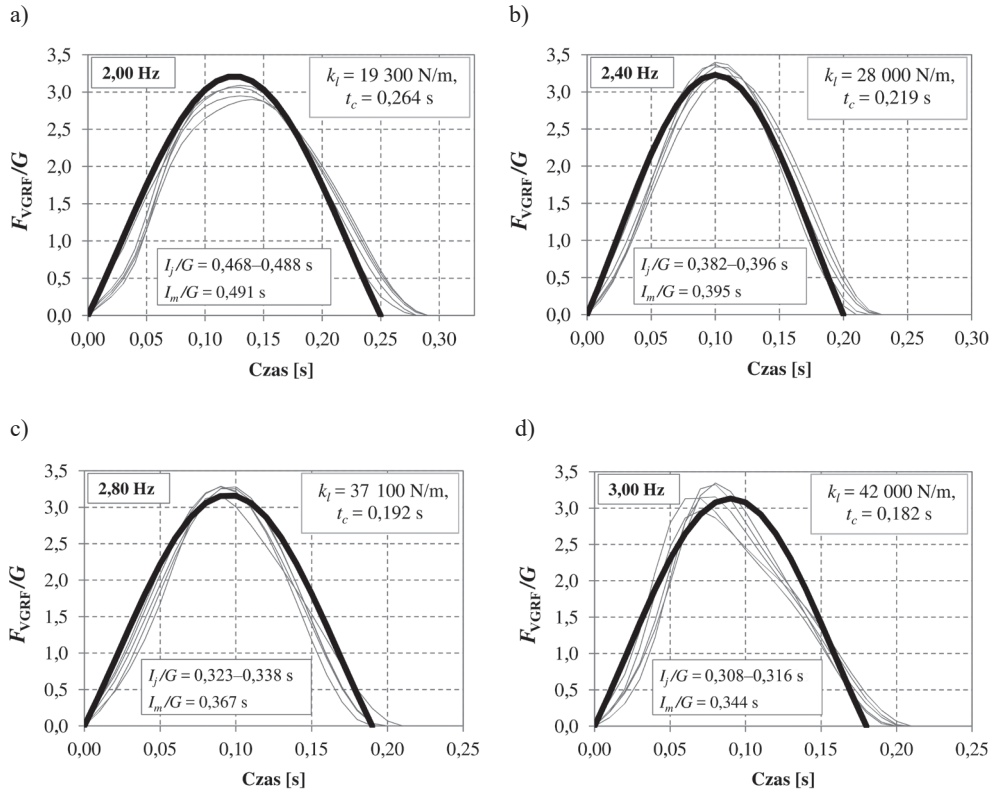
stanu amplitudy VGRF zależał od częstotliwości skoków i wynosił  $\sim 80,0$  s dla  $f_j = 2,00$  Hz,  $\sim 35,0$  s dla  $f_j = 2,50$  Hz,  $\sim 8,0$  s dla  $f_j = 3,00$  Hz.

Tabela 3. Wartości sztywności kończyn dolnych  $k_l$  i czasu kontaktu z podłożem  $t_c$  w funkcji częstotliwości skoków  $f_j$  dla  $m_b = 75,0$  kg,  $l_0 = 0,97$  m oraz  $y_0 = 1,0$  m (opracowanie własne)

Częstotliwość skoków $f_j$ [Hz]	Sztywność $k_l$ [N/m]	Czas kontaktu z podłożem $t_c$ [s]
2,00	19 300	0,264
2,10	21 400	0,250
2,20	23 600	0,238
2,30	25 800	0,228
2,40	28 000	0,219
2,50	30 200	0,211
2,60	32 600	0,204
2,70	35 000	0,197
2,80	37 100	0,192
2,90	40 000	0,186
3,00	42 000	0,182

Na ilustracji 13 pokazano przebiegi VGRF wyznaczone za pomocą modelu symulacyjnego MATLAB Simulink dla różnych częstotliwości skoków w odniesieniu do wyników badań laboratoryjnych ( $I_f/G$  i  $I_m/G$  – unormowane impulsy siły, pole pod krzywą  $F_{VGRF}/G$ , odpowiednio dla sił zarejestrowanych podczas badań laboratoryjnych i sił wyznaczonych za pomocą modelu masowo-sprężystego). Porównanie wartości impulsów siły, generowanych w trakcie badań laboratoryjnych, z impulsami VGRF, wyznaczonymi z wykorzystaniem modelu masowo-sprężystego, wskazuje na większe wartości impulsów dla modelu masowo-sprężystego, co w efekcie pozwoli oszacować górną wartość odpowiedzi dynamicznej analizowanej konstrukcji.

Należy także zaznaczyć, że przebiegi VGRF wyznaczone z wykorzystaniem modelu masowo-sprężystego i parametrów przedstawionych w tab. 2 są przebiegami uśrednionymi, odzwierciedlającymi skoki swobodne realizowane przez osobę skaczącą bez celowego zwiększania wysokości skoku lub usztywnienia kończyn dolnych. W przypadku zmiany sposobu wykonywania skoków (np. poprzez zwiększenie ich wysokości) wartości VGRF ulegają zwiększeniu. Jak określono w pracy [14], amplitudy VGRF zmierzone podczas badań osób podskakujących w miejscu na maksymalną wysokość, wynikającą z indywidualnych preferencji (skoki intensywne), są o około 20% większe od amplitud VGRF wyznaczonych za pomocą modelu masowo-sprężystego.



Il. 13. Porównanie przebiegów czasowych VGRF wyznaczonych za pomocą modelu masowo-sprężystego z wynikami badań laboratoryjnych dla: a)  $f_j = 2,00$  Hz, b)  $f_j = 2,40$  Hz, c)  $f_j = 2,80$  Hz, d)  $f_j = 3,00$  Hz (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wyniki obliczeń)

Przybliżoną wartość VGRF, dla częstotliwości skoków  $f_j \geq 2,00$  Hz, można także wyznaczyć w sposób uproszczony, wykorzystując zależności (10) i (14).

$$F_{\text{VGRF}}(t) = -k_l y_c(t) \quad (14)$$

Wykorzystując równania (5) i (13) zależność (10), można zapisać w postaci (15):

$$y_c(t) = \frac{m_b g}{k_l} \cos\left(\sqrt{\frac{k_l}{m_b}} \cdot t\right) - \frac{g t_a}{2} \sqrt{\frac{m_b}{k_l}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_l}{m_b}} \cdot t\right) - \frac{m_b g}{k_l} \quad (15)$$

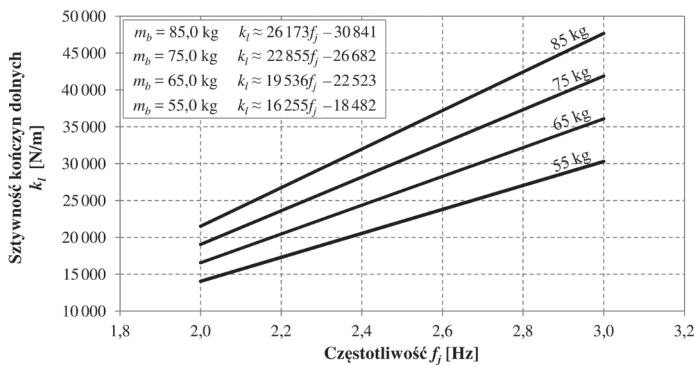
Podstawiając zależność (15) do wzoru (14), otrzymujemy:

$$F_{\text{VGRF}}(t) = -m_b g \cos\left(\sqrt{\frac{k_l}{m_b}} \cdot t\right) + \frac{g t_a}{2} \sqrt{m_b k_l} \sin\left(\sqrt{\frac{k_l}{m_b}} \cdot t\right) + m_b g \quad (16)$$

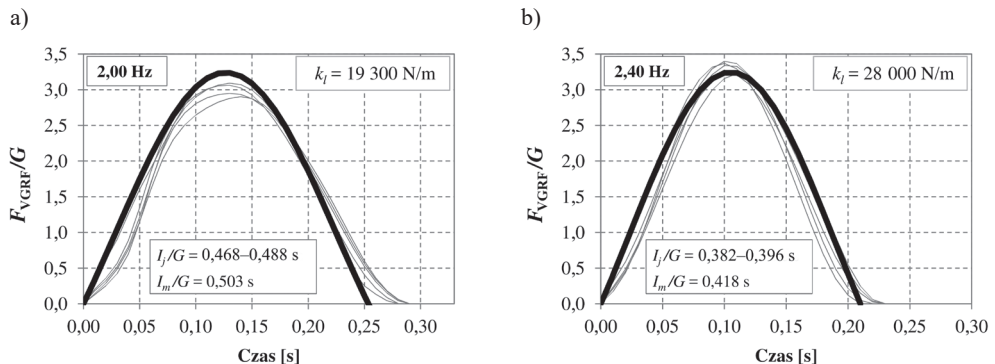


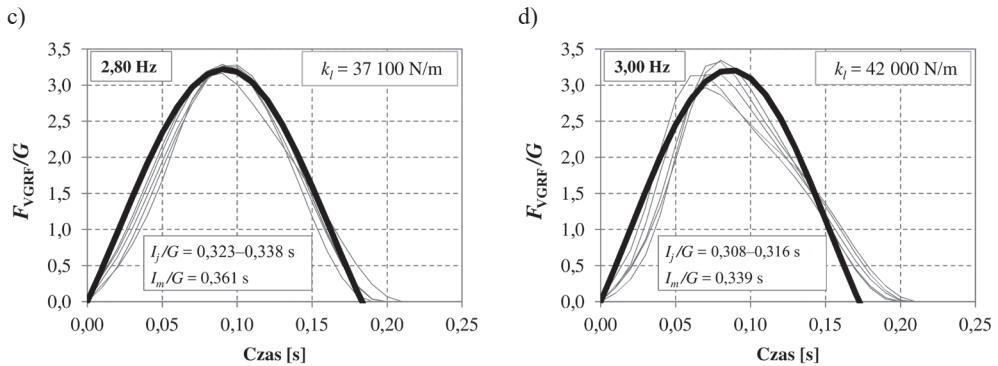
Poniżej zaprezentowano procedurę pozwalającą wyznaczyć przybliżony przebieg VGRF za pomocą równania (16) (opracowanie własne).

1. Przyjąć częstotliwość skoków  $f_j$  [Hz].
2. Przyjąć masę osoby skaczącej  $m_b$  [kg].
3. Przyjąć sztywność kończyn dolnych  $k_l$  [N/m], właściwą dla modelowanej częstotliwości skoków  $f_j$  i masy osoby skaczącej  $m_b$  (il. 14). W tabeli 3 umieszczono wartości  $k_l$  [kN/m] odpowiednie dla odwzorowania VGRF generowanej przez osobę skaczącą o masie  $m_b = 75,0$  kg. Wartość  $k_l$  dla pośrednich częstotliwości skoków można ustalić poprzez interpolację liniową.
4. Wyznaczyć częstość skoków  $\omega_j = 2\pi f_j$  [rad/s].
5. Wyznaczyć przybliżony czas kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_{c,a} \approx \pi/\omega_j = 1/(2f_j) = 0,5T_j$  [s].
6. Wyznaczyć przybliżony czas trwania fazy lotu  $t_{a,a} \approx T_j - t_{c,a} = 0,5T_j$  [s].
7. Wyznaczyć siłę  $F_{VGRF}$  [N] wykorzystując równanie (16), przyjmując  $t_a = t_{a,a}$ .



Il. 14. Sztywność kończyn dolnych  $k_l$  w funkcji częstotliwości skoków  $f_j$  i masy osoby skaczącej  $m_b$  (opracowanie własne)





Il. 15. Porównanie przebiegów czasowych VGRF wyznaczonych metodą uproszczoną z wynikami badań laboratoryjnych dla  $m_b = 75,0$  kg: a)  $f_j = 2,00$  Hz, b)  $f_j = 2,40$  Hz c)  $f_j = 2,80$  Hz, d)  $f_j = 3,00$  Hz (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wyniki obliczeń)

Na ilustracji 15 przedstawiono przebiegi VGRF wyznaczone metodą uproszczoną w odniesieniu do wyników badań laboratoryjnych;  $I_j/G$  i  $I_m/G$  – unormowane impulsy siły (pole pod krzywą  $F_{VGRF}/G$ ) odpowiednio dla sił zarejestrowanych podczas badań laboratoryjnych i sił wyznaczonych metodą uproszczoną.

### 3.1.2. Model VGRF bazujący na szeregu Fouriera

Modelowanie pionowej składowej sił reakcji podłoża VGRF, generowanej przez osobę skaczącą przy wykorzystaniu szeregu Fouriera, wymaga znajomości wartości współczynników Fouriera  $\alpha_i$  (współczynników dynamicznych DLF) oraz wartości przesunięć fazowych  $\varphi_i$  wyższych składowych harmonicznym względem pierwszej składowej harmonicznym. W modelu uwzględnia się na ogół od trzech do sześciu składowych harmonicznym. Stosowne zalecenia dotyczące wartości  $\alpha_i$  i  $\varphi_i$  odnaleźć można m.in. w pracach [7, 24–26, 29, 35–37, 49, 55, 59, 80].

Szereg Fouriera, opisujący przebieg VGRF, można zapisać w postaci:

$$F_{GRF}(t) = G \left( 1,0 + \sum_{n=1}^m \alpha_n \sin(2\pi \cdot n \cdot f_j \cdot t + \varphi_n) \right) \quad (17)$$

gdzie:  $G$  – ciężar osoby skaczącej (zazwyczaj  $G \approx 700\text{--}800$  N),  $n$  – numer składowej harmonicznym,  $m$  – liczba składowych harmonicznym uwzględnionych w modelu,  $\alpha_n$  – współczynniki Fouriera określone dla poszczególnych składowych harmonicznym (współczynniki dynamiczne DLF),  $f_j$  – częstotliwość skoków,  $t$  – krok czasowy,  $\varphi_n$  – kąty przesunięć fazowych poszczególnych składowych harmonicznym.

Według zaleceń zawartych w opracowaniach [24, 25] wartości współczynników Fouriera  $\alpha_i$  i przesunięć fazowych  $\varphi_i$  wynoszą:

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } 2n\tau = 1 \\ \left| \frac{2\cos(n\pi\tau)}{1-(2n\tau)^2} \right| & \text{dla } 2n\tau \neq 1 \end{cases} \quad (18)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } 2n\tau = 1 \\ \left. \begin{array}{l} \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\cos(2n\pi\tau)}{\sin(2n\pi\tau)}\right) - \pi \\ -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\cos(2n\pi\tau)}{\sin(2n\pi\tau)}\right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dla } \frac{\sin(2n\pi\tau)}{1-(2n\tau)^2} < 0 \\ \text{dla } \sin(2n\pi\tau) = 0 \\ \text{dla } \frac{\sin(2n\pi\tau)}{1-(2n\tau)^2} > 0 \end{array} \quad \text{dla } 2n\tau \neq 1 \end{cases} \quad (19)$$

gdzie:  $\tau$  – współczynnik czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $\tau = t_c/T_j = f_j t_c$ .

Ważnym wnioskiem wynikającym z badań pionowej składowej sił reakcji podłoża generowanej podczas skoków jest stwierdzenie, że wartość średnia VGRF jest równa ciężarowi osoby skaczącej [25, 78]. Potwierdzają to również wyniki badań własnych autora. Zależność tę można zapisać w postaci równania (20), przyjmując założenie, że VGRF odzwierciedla dodatnia połówka sinusoidy:

$$\frac{1}{T_j} \int_0^{t_c} \beta G \sin\left(\frac{\pi}{t_c} t\right) dt = G \quad (20)$$

gdzie:  $G$  – ciężar ciała osoby skaczącej [N],  $\beta$  – współczynnik dynamiczny,  $t_c$  – czas kontaktu osoby skaczącej z podłożem [s],  $t$  – krok czasowy [s].

Z równania (20) można wyznaczyć współczynnik dynamiczny  $\beta$  dla VGRF generowanej podczas skoków (równanie (21)). Jak można zauważyć, wartość  $\beta$  jest zależna od częstotliwości skoków  $f_j$  i czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_c$ .

$$\beta = \frac{\pi T_j}{2t_c} = \frac{\pi}{2f_j t_c} = \frac{\pi}{2\tau} \quad (21)$$

gdzie:  $T_j$  – okres skoków [s],  $T_j = 1/f_j$ ,  $f_j$  – częstotliwość skoków [Hz],  $\tau$  – współczynnik czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem,  $\tau = t_c/T_j = f_j t_c$ .

Analizując równania (18), (19), warto zauważyć, że parametry  $\alpha_n$ ,  $\phi_n$  w znacznym stopniu zależne są od wartości współczynnika czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $\tau$ , będącego funkcją  $t_c$ . Z tego powodu wartość  $t_c$  staje się istotnym parametrem modelu. Poprawne określenie wartości  $t_c$  decyduje o poprawności wyznaczenia współczynnika  $\tau$  i w efekcie o poprawności wyznaczenia przebiegu VGRF.

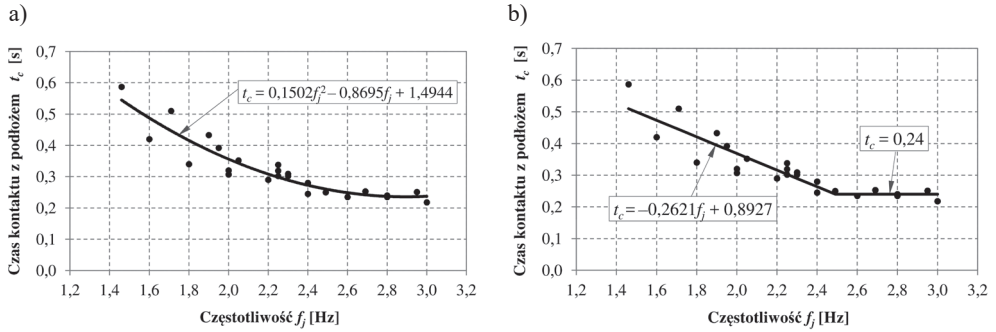
Wartość  $t_c$  zależy od szeregu parametrów, wśród których można wskazać m.in. wiek, sprawność fizyczną, indywidualne nawyki ruchowe i masę ciała osoby skaczącej. Ważnym parametrem jest także sposób (intencja) wykonywania skoków. Skoki w miejscu (podskoki) mogą być wykonywane w celu dążenia osoby skaczącej do minimalizacji wydatku energetycznego (minimalizacji wysiłku, naturalne, podświadome dążenie do minimalizacji zużycia energii) lub w celu maksymalizacji wydatku energetycznego i wzmożonej pracy mięśni (np. skoki podczas ćwiczeń fizycznych) [9]. Pierwszy sposób wykonywania skoków można określić jako komfortowy dla osoby skaczącej (skoki wykonywane bez nadmiernego wysiłku i napięcia mięśni, bez celowego zwiększania wysokości skoków). Będzie on określany terminem skoki swobodne. Drugi sposób wykonywania skoków nazwano skokami intensywnymi. Skoki swobodne, w odróżnieniu od intensywnych, można wykonywać przez dłuższy czas bez odczuwania wyraźnego zmęczenia.

Wpływ sposobu wykonywania skoków na wartość  $t_c$  objawia się wydłużeniem czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem w przypadku skoków swobodnych i skróceniem  $t_c$  w przypadku skoków intensywnych. Na podstawie badań własnych stwierdzono, iż w przypadku skoków intensywnych czas kontaktu z podłożem jest o około 15–30% krótszy od wartości  $t_c$  rejestrowanej dla skoków swobodnych.

Z uwagi na to, że współczynnik dynamiczny  $\beta$  jest odwrotnie proporcjonalny do wartości  $t_c$ , w przypadku wykonywania skoków intensywnych, charakteryzujących się krótkim czasem kontaktu osoby skaczącej z podłożem, wartość współczynnika  $\beta$  (i w efekcie wartość amplitudy siły reakcji podłoża) będzie większa od wartości  $\beta$  (i amplitudy siły) generowanej podczas skoków swobodnych. Przyjęcie zaniżonej wartości  $t_c$  prowadzi do przeszacowania amplitudy VGRF i vice versa. Z punktu widzenia poprawności analiz dynamicznych konstrukcji wzbudzanych przez osoby skaczące istotne jest rozpoznanie intencji osób skaczących (sposobu wykonywania skoków) i odpowiednie przyjęcie wartości  $t_c$ .

Na ilustracji 16 pokazano zmienność  $t_c$  w funkcji częstotliwości skoków  $f_j$  dla skoków swobodnych wraz z trendem wielomianowym i liniowym.

Wartość  $t_c$ , odczytaną z il. 16, można wykorzystać do ustalenia wartości współczynnika  $\tau = t_c/T_j$  dla analizowanej częstotliwości skoków. Dla tak ustalonej wartości  $\tau$  z il. 20 można odczytać wartość współczynnika dynamicznego  $\beta$ , oznaczającego amplitudę unormowanej pionowej składowej siły reakcji podłoża  $F_{VGRF}/G$  generowanej podczas skoków.



Il. 16. Czas kontaktu osoby skaczącej z podłożem (skoki swobodne): a) interpolacja wielomianowa, b) interpolacja liniowa (opracowanie własne na podstawie [18, 28, 64, 65] i badań własnych)

Wyniki badań wskazują, że podczas skoków z częstotliwością 1,80–3,20 Hz współczynnik dynamiczny  $\beta$  (amplituda unormowanej pionowej składowej sił reakcji podłoża  $F_{\text{VGRF}}/G$ ) mieści się w przedziale  $\beta \approx 3,00\text{--}4,50$ . Wykorzystując zależność (21), można wyznaczyć teoretyczną wartość czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_{c,t}$  w funkcji współczynnika dynamicznego  $\beta$  (22), pozwalającą określić dla przyjętej częstotliwości skoków przybliżony przebieg VGRF o amplitudzie w przedziale 3,00–4,50.

$$t_{c,t} = \frac{\pi}{2f_j \beta} \quad (22)$$

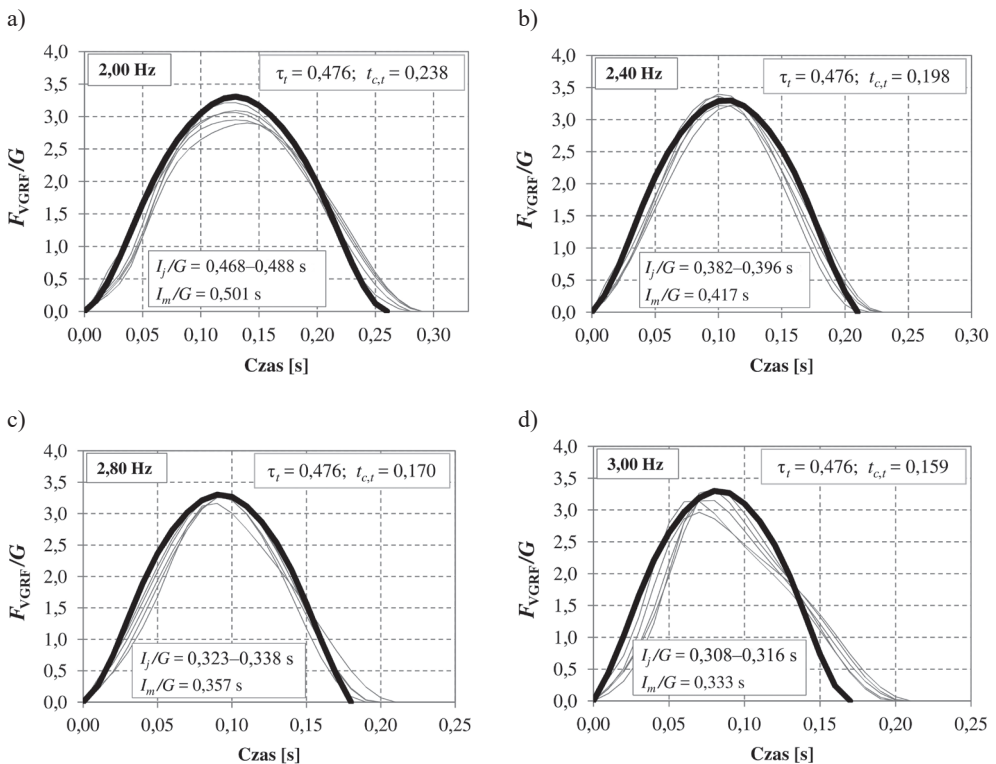
W tabeli 4 przedstawiono wartości teoretyczne czasu kontaktu z podłożem  $t_{c,t}$  wraz z teoretycznymi wartościami współczynnika czasu kontaktu z podłożem  $\tau_t$  w funkcji częstotliwości skoków, pozwalające osiągnąć amplitudy unormowanej pionowej składowej sił reakcji podłoża  $F_{\text{VGRF}}/G$  wynoszące  $\beta = 3,30$  dla skoków swobodnych oraz  $\beta = 4,50$  dla skoków intensywnych.

Tabela 4. Wartości teoretyczne czasu kontaktu z podłożem  $t_{c,t}$  i współczynnika  $k_t$  w funkcji częstotliwości skoków  $f_j$  dla skoków swobodnych i intensywnych (opracowanie własne)

Częstotliwość $f_j$ [Hz]	Skoki swobodne $\beta = 3,30$		Skoki intensywne $\beta = 4,50$	
	$t_{c,t}$ [s]	$\tau_t = f_j t_{c,t}$	$t_{c,t}$ [s]	$\tau_t = f_j t_{c,t}$
1,80	0,264	0,476	0,194	0,349
2,00	0,238		0,175	
2,20	0,216		0,159	
2,40	0,198		0,145	
2,60	0,183		0,137	
2,80	0,170		0,125	
3,00	0,159		0,116	
3,20	0,149		0,109	

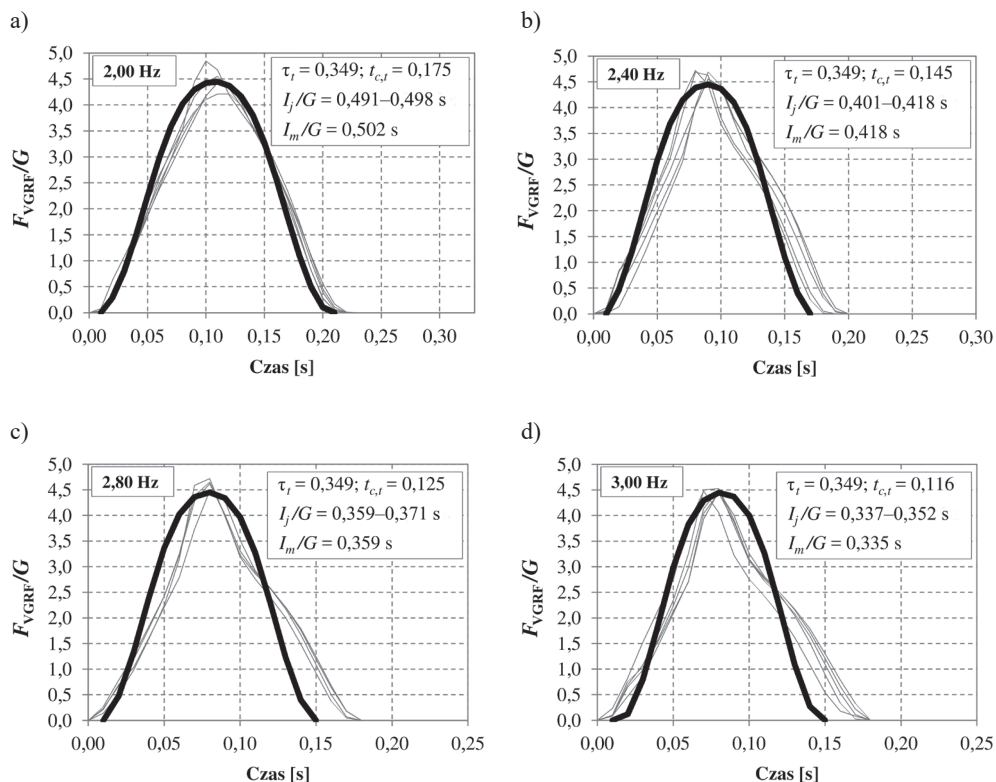
Należy zaznaczyć, że teoretyczne wartości czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_{c,t}$  są wartościami mniejszymi od wartości  $t_c$  mierzonych podczas badań osób skaczących. Przyjęcie wartości  $t_c = t_{c,t}$ , zaprezentowanych w tabeli 4 i wynikających z nich wartości współczynników  $\tau = \tau_t$  w modelu siły reakcji podłoża opartym na szeregu Fouriera (17) ze współczynnikami  $\alpha_n, \varphi_n$  określonymi (18), (19), pozwala wyznaczyć przybliżone przebiegi VGRF spełniające zależność (20). Przebiegi te pozwalają poprawnie prognozować odpowiedź dynamiczną konstrukcji.

Z uwagi na zmienność parametrów skoków ( $t_c$  i  $\beta$ ), obserwowaną podczas skoków ciągłych (następujących jeden po drugim) w analizach dynamicznych konstrukcji, można przyjąć czasowy przebieg VGRF, odzwierciedlający przebieg uśredniony pomiędzy skokami swobodnymi i intensywnymi. W celu wyznaczenia średniego przebiegu VGRF za pomocą szeregu Fouriera współczynnik  $\tau$ , występujący w równaniach (18), (19), można przyjąć jako równy średniej wartości współczynnika  $\tau_t$  z tab. 4  $\tau = \bar{\tau}_t = (0,476 + 0,349)/2 = 0,412$ .



Il. 17. Porównanie przebiegów czasowych  $F_{VGRF}/G$ , wyznaczonych za pomocą szeregu Fouriera dla skoków swobodnych, z wynikami badań laboratoryjnych: a)  $f_j = 2,00$  Hz, b)  $f_j = 2,40$  Hz, c)  $f_j = 2,80$  Hz, d)  $f_j = 3,00$  Hz, (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wyniki obliczeń)

Na ilustracjach 17 i 18 przedstawiono przebiegi VGRF wyznaczone za pomocą szeregu Fouriera z uwzględnieniem współczynników  $\alpha_n$ ,  $\varphi_n$ , określonych równaniami (18), (19), i współczynnika  $k = k_t$ , określonego w tab. 4 dla skoków swobodnych oraz skoków intensywnych, w odniesieniu do wyników badań własnych.



Il. 18. Porównanie przebiegów czasowych  $F_{VGRF}/G$ , wyznaczonych za pomocą szeregu Fouriera dla skoków intensywnych, z wynikami badań laboratoryjnych: a)  $f_j = 2,00$  Hz, b)  $f_j = 2,40$  Hz, c)  $f_j = 2,80$  Hz, d)  $f_j = 3,00$  Hz, (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wyniki obliczeń)

W pracach [25, 36, 37] przedstawiono wartości współczynników  $\alpha_n$ ,  $\varphi_n$  dla różnych wartości współczynnika czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $\tau$  w zależności od rodzaju aktywności fizycznej: aerobik o niskim poziomie oddziaływania dynamicznego, aerobik o wysokim poziomie oddziaływania dynamicznego, skoki normalne. Wartości te, wyznaczone za pomocą zależności (18) i (19), zamieszczono w tab. 5. Określenia różnych rodzajów aktywności zawarte w tej tabeli wyjaśniono w pracach [5, 9]. Według [5] termin aerobik o niskim poziomie oddziaływania oznacza ćwiczenia fizyczne, podczas których jedna stopa ma zawsze kontakt z podłożem, natomiast termin aerobik o wysokim poziomie oddziaływania określa ćwiczenia fizyczne, podczas

których obie stopy tracą kontakt z podłożem. Według [9] termin skoki normalne oznacza skoki ciągłe (następujące jeden po drugim) o częstotliwości w przedziale 2,00–3,20 Hz.

W świetle badań własnych i wyników prac [18, 28, 64, 65] wartość współczynnika  $\tau = 1/3$ , zalecana w pracach [25, 36, 37], dla skoków normalnych budzi duże wątpliwości z powodu wynikającej z tego zalecenia zaniżonej wartości  $t_c$ . Przyjęcie  $\tau = 1/3$  oznacza, że czas kontaktu osoby skaczącej z podłożem dla skoków normalnych wynosi  $t_c = 1/3T_j$ , gdzie  $T_j$  to okres skoków ( $T_j = 1/f_j$ ). Czas kontaktu  $t_c$  ustalony na tej podstawie jest znacznie mniejszy od wartości  $t_c$  uzyskiwanej podczas badań VGRF generowanych przez osoby skaczące.

Tabela 5. Wartości współczynników Fouriera  $\alpha_n$  i kątów przesunięć fazowych  $\varphi_n$  dla różnych wartości współczynnika czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $\tau$  w zależności od rodzaju aktywności fizycznej [25, 36, 37]

Współczynnik czasu kontaktu z podłożem $\tau$   Rodzaj aktywności		Współczynniki Fouriera i przesunięcia fazowe dla sześciu składowych harmonicznych						
		$n$	1	2	3	4	5	6
$\tau = 2/3$	aerobik o niskim poziomie oddziaływania	$\alpha_n$	9/7	9/55	2/15	9/247	9/391	2/63
		$\varphi_n$	$-\pi/6$	$-5\pi/6$	$-\pi/2$	$-\pi/6$	$-5\pi/6$	$-i/6$
$\tau = 1/2$	aerobik o wysokim poziomie oddziaływania*	$\alpha_n$	$\pi/2$	2/3	0	2/15	0	2/35
		$\varphi_n$	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$
$\tau = 1/3$	skoki normalne**	$\alpha_n$	9/5	9/7	2/3	9/55	9/91	2/15
		$\varphi_n$	$\pi/6$	$-\pi/6$	$-\pi/2$	$-5\pi/6$	$-\pi/6$	$-\pi/2$

\* Aktywność zwaną „aerobikiem o wysokim poziomie oddziaływania” można interpretować jako „skoki swobodne”.

\*\* Termin „skoki normalne”, przytoczony za pracami źródłowymi, przypisany do trzeciego przypadku aktywności ( $\tau = 1/3$ ), jest terminem nieprecyzyjnym. Należy pamiętać, że oznacza on skoki o częstotliwości 2,00–3,20 Hz. Określenie to nie wskazuje na intensywność wykonywania skoków. Wyniki badań własnych autora dowodzą, że przebiegi czasowe VGRF, wyznaczone z uwzględnieniem współczynników  $\tau$ ,  $\alpha_n$  i  $\varphi_n$  zdefiniowanych dla przypadku „skoki normalne” odzwierciedlają przebiegi VGRF odpowiadające skokom intensywnym, tzn. skokom wykonywanym w sposób związany z maksymalizacją wydatku energetycznego i wzmożoną pracą mięśni. Przebiegi te charakteryzują się zaniżonym czasem kontaktu z podłożem, jednak spełniają zależność opisaną równaniem (20), co pozwala poprawnie prognozować odpowiedź dynamiczną konstrukcji. Termin „skoki normalne” należy interpretować jako „skoki intensywne”.

Wartość  $\tau = 1/3$ , określona w [25, 36, 37], dla skoków normalnych zbliżona jest do wartości teoretycznej przedstawionej w tab. 4 dla skoków intensywnych. W trakcie badań laboratoryjnych osób skaczących nie udało się osiągnąć wartości  $t_c$  odpowiadającej wartości  $\tau = 1/3$ , przypisanej w [25, 36, 37] do przypadku „skoki normalne”. Czasy kontaktu rejestrowane podczas badań dla skoków intensywnych i swobodnych były dłuższe od czasów wynikających z przyjęcia współczynnika



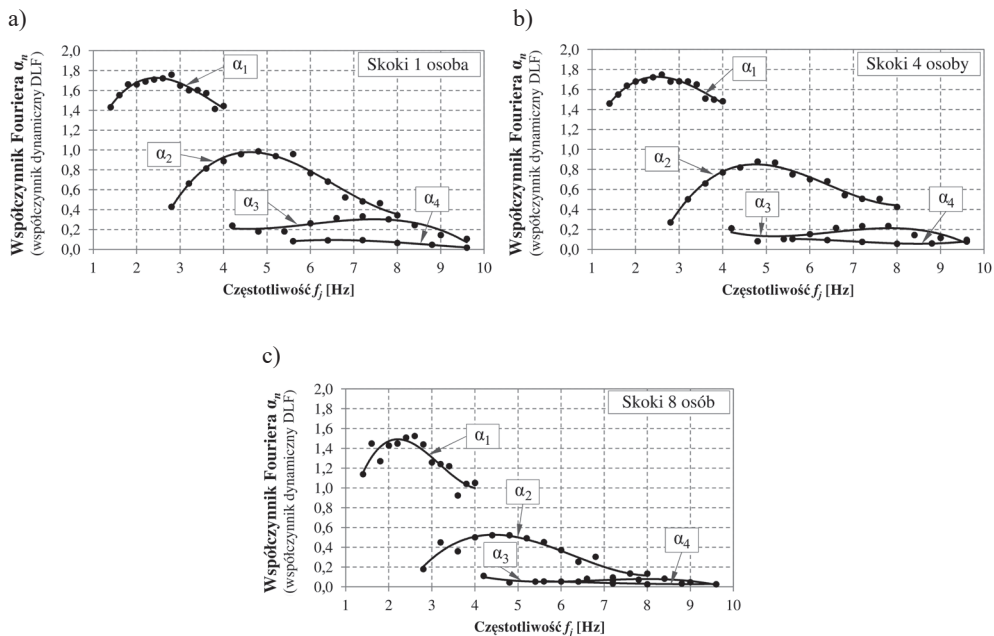
$\tau = 1/3$ . Prace innych autorów [18, 28, 64, 65] również wskazują dłuższe czasy kontaktu z podłożem osób skaczących niż wynika to z zaleceń wskazanych w [25, 36, 37]. Największą zgodność z wynikami badań własnych oraz wynikami badań innych autorów stwierdzono dla przypadku określonego w tab. 5 terminem „aerobik o wysokim poziomie oddziaływania”. Wartości współczynników  $\alpha_n$ ,  $\varphi_n$  zalecane dla tego przypadku, wykorzystane w równaniach (18) i (19), pozwalają wyznaczyć przebiegi VGRF najbardziej zbliżone do przebiegów rejestrowanych dla skoków swobodnych.

Wartości współczynników  $\alpha_n$  i  $\varphi_n$ , opisane równaniami (18) i (19), dotyczą przypadku skoków jednej osoby. Wartości  $\alpha_n$  i  $\varphi_n$  zalecane dla skoków wykonywanych jednocześnie przez kilka osób można odnaleźć m.in. w pracach [7, 24, 35, 59, 74] (tab. 6).

Tabela 6. Wartości współczynników Fouriera  $\alpha_n$  i kątów przesunięć fazowych  $\varphi_n$  dla różnych przypadków skoków wykonywanych przez jedną osobę i grupy kilkusobowe według [7, 24, 35, 59, 74]

Skoki	Częstotliwość $f_j$	Współczynniki Fouriera $\alpha_n$	Przesunięcia fazowe $\varphi_n$	Uwagi
1 osoba	$f_1 = 1,40-4,00$ Hz	$\alpha_1 = 1,80; \alpha_2 = 1,10;$ $\alpha_3 = 0,47; \alpha_4 = 0,18$	brak zaleceń, można przyjąć: $\varphi_1 = 0;$ $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = -\pi/2$	maksymalne wartości zarejestrowane podczas badań według [59]
4 osoby		$\alpha_1 = 1,75; \alpha_2 = 0,96;$ $\alpha_3 = 0,28; \alpha_4 = 0,12$		
8 osób		$\alpha_1 = 1,55; \alpha_2 = 0,52;$ $\alpha_3 = 0,11; \alpha_4 = 0,04$		
0,25 os./m <sup>2</sup> (maks. 0,50 os./m <sup>2</sup> )	skoki swobodne 2,0 Hz	$\alpha_1 = 1,80; \alpha_2 = 1,30;$ $\alpha_3 = 0,70$	$\varphi_1 = 0;$ $\varphi_2 = \varphi_3 = \pi(1 - f_j t_c)$	według [7]
	skoki swobodne 3,0 Hz	$\alpha_1 = 1,70; \alpha_2 = 1,10;$ $\alpha_3 = 0,50$		
	skoki intensywne 2,0 Hz	$\alpha_1 = 1,90; \alpha_2 = 1,60;$ $\alpha_3 = 1,10$		
	skoki intensywne 3,0 Hz	$\alpha_1 = 1,80; \alpha_2 = 1,30;$ $\alpha_3 = 0,80$		
	$f_1 = 1,50-3,50$ Hz $f_2 = 2f_1$ $f_3 = 3f_1$	$\alpha_1 = 2,10 - 0,15f_1$ $\alpha_2 = 1,90 - 0,17f_2$ $\alpha_3 = 1,25 - 0,11f_3$	brak zaleceń, można przyjąć: $\varphi_1 = 0;$ $\varphi_2 = \varphi_3 = -\pi/2$	według [35]
$2 \leq p \leq 64$ $p$ – liczba skaczących	$f_1 = 2,00-3,00$ Hz	$\alpha_1 = 1,61p^{-0,082}$ $\alpha_2 = 0,94p^{-0,24}$ $\alpha_3 = 0,44p^{-0,31}$	zgodnie z tab. 5 dla odpowiedniego rodzaju aktywności	według [24]

Na ilustracji 19 zobrazowano zmienność współczynników Fouriera w funkcji częstotliwości skoków i liczby skaczących osób. Przedstawione linie trendu opisują równania (23)–(25) (opracowanie własne na podstawie [59]).



Il. 19. Współczynniki Fouriera (współczynniki dynamiczne DLF) dla skoków w funkcji częstotliwości dla czterech składowych harmoniczych i różnej liczebności osób skaczących:

- a)  $\alpha_1$  – pierwsza składowa harmoniczna ( $f_1$ ), b)  $\alpha_2$  – druga składowa harmoniczna ( $f_2 = 2f_1$ ),  
 c)  $\alpha_3$  – trzecia składowa harmoniczna ( $f_3 = 3f_1$ ), d)  $\alpha_4$  – czwarta składowa harmoniczna ( $f_4 = 4f_1$ )  
 (opracowanie własne na podstawie [59])

Równania linii trendu z il. 19a – skoki 1 osoba:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 0,0499 f_j^3 - 0,5718 f_j^2 + 1,9028 f_j - 0,238 \\
 \alpha_2 &= 0,0224 f_j^3 - 0,4407 f_j^2 + 2,6322 f_j - 3,9891 \\
 \alpha_3 &= -0,0079 f_j^3 + 0,1418 f_j^2 - 0,8028 f_j + 1,6627 \\
 \alpha_4 &= 0,0018 f_j^3 - 0,049 f_j^2 + 0,406 f_j - 0,9738
 \end{aligned} \tag{23}$$

Równania linii trendu z il. 19b – skoki 4 osoby:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 0,041 f_j^3 - 0,4846 f_j^2 + 1,652 f_j - 0,0161 \\
 \alpha_2 &= 0,022 f_j^3 - 0,4244 f_j^2 + 2,5416 f_j - 4,0075 \\
 \alpha_3 &= -0,0085 f_j^3 + 0,1665 f_j^2 - 1,03768 f_j + 2,2241 \\
 \alpha_4 &= 0,0033 f_j^3 - 0,0692 f_j^2 + 0,4561 f_j - 0,8628
 \end{aligned} \tag{24}$$

Równania linii trendu z il. 19c – skoki 8 osób:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 0,139f_j^3 - 1,324f_j^2 + 3,8161f_j - 1,9759 \\
 \alpha_2 &= 0,0169f_j^3 - 0,3183f_j^2 + 1,8241f_j - 2,7802 \\
 \alpha_3 &= -0,0045f_j^3 + 0,0918f_j^2 - 0,6092f_j + 1,3709 \\
 \alpha_4 &= 0,0004f_j^3 - 0,0078f_j^2 + 0,0321f_j + 0,0436
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Decydując się na odwzorowanie VGRF za pomocą szeregu Fouriera, należy pamiętać, że model zapewnia największą dokładność odwzorowania VGRF generowanej podczas skoków o częstotliwości  $f_j \geq 2,00$  Hz, w przypadku których krzywa VGRF charakteryzuje się przebiegiem jednowierzchołkowym zbliżonym do przebiegu dodatniej połówki krzywej sinusoidalnej. Przebiegi czasowe VGRF dla częstotliwości skoków  $f_j < 1,80$  Hz charakteryzują się bardziej złożonym kształtem dwuwierzchołkowym (por. il. 2 i 3). Model oparty na szeregu Fouriera potrzebuje większej ilości danych do dokładnego odwzorowania VGRF generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_j < 1,80$  Hz i dlatego jest niepraktyczny. Przedział częstotliwości  $f_j = 1,80\text{--}2,00$  Hz można traktować jako przedział przejściowy, w którym model oparty na szeregu Fouriera może stanowić przybliżenie przebiegu VGRF. Z uwagi na dużą liczbę parametrów wejściowych o znacznej zmienności losowej model VGRF, oparty na szeregu Fouriera, należy uznać za model o dużym stopniu złożoności. Jest to wada tego sposobu modelowania VGRF, niewystępująca w dwóch modelach VGRF omówionych w dalszej części rozdziału: półsinusoidalnym oraz zbudowanym na bazie funkcji Hanna.

### 3.1.3. Model półsinusoidalny

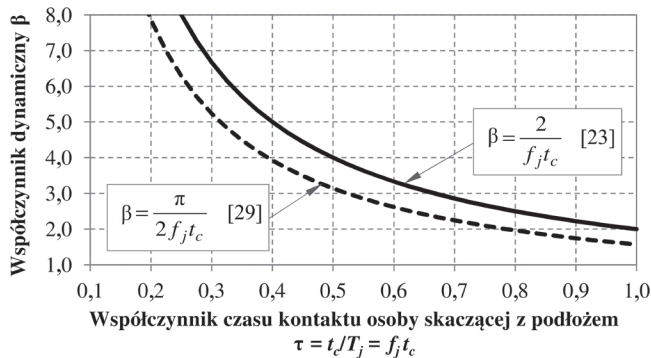
Czasowy przebieg pionowej składowej sił reakcji podłoża VGRF, generowanej podczas skoków o częstotliwości  $f_j \geq 1,80$  Hz, zbliżony jest do przebiegu dodatniej połówki funkcji sinus. Przebieg ten można odwzorować wykorzystując model półsinusoidalny opisany równaniem (26).

$$F_{\text{VGRF}}(t) = \begin{cases} \beta G \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{t_c}\right) & \text{dla } i \cdot T_j < t \leq (i + \tau) \cdot T_j \\ 0 & \text{dla } (i + \tau) \cdot T_j < t \leq (i + 1) \cdot T_j \end{cases}
 \tag{26}$$

gdzie:  $G$  – ciężar ciała osoby skaczącej [N],  $\beta$  – współczynnik dynamiczny,  $t_c$  – czas kontaktu osoby skaczącej z podłożem [s],  $t$  – krok czasowy [s],  $\tau$  – współczynnik czasu kontaktu z podłożem  $\tau = t_c/T_j = f_j t_c$ ,  $T_j$  – okres skoków [s],  $T_j = 1/f_j$ ,  $f_j$  – częstotliwość skoków [Hz],  $i = 0, 1, 2, \dots$

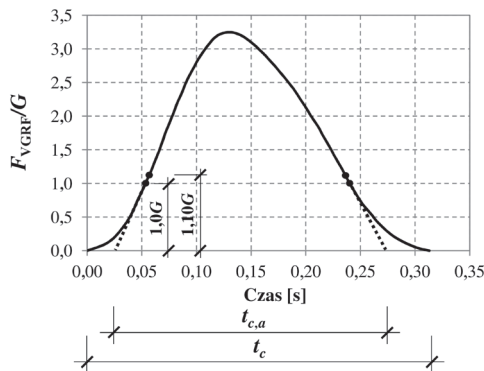
Równanie (26) jest tożsame z równaniem wykorzystanym do opisu VGRF generowanej podczas biegu. Różnice w modelowaniu VGRF generowanych podczas biegu i skoków polegają na przyjęciu innych wartości współczynnika dynamicznego  $\beta$  i czasu kontaktu z podłożem  $t_c$ .

Na ilustracji 20 umieszczono wartości współczynnika dynamicznego  $\beta$  w funkcji współczynnika czasu kontaktu z podłożem  $\tau = f_j t_c$  według zaleceń prac [8, 18]. Widoczne na ilustracji 20 różnice w wartościach  $\beta$  można wytłumaczyć odmienną intensywnością wykonywania skoków.



Il. 20. Współczynnik dynamiczny  $\beta$  według [8, 18]

W celu wyznaczenia czasowego przebiegu VGRF za pomocą modelu półsinusoidalnego, poza znajomością wartości  $\beta$ , niezbędna jest również znajomość wartości czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_c$ . Należy zauważyć, że odwzorowanie VGRF za pomocą dodatniej części sinusoidy wymusza przyjęcie



Il. 21. Sposób wyznaczenia aproksymowanej wartości czasu kontaktu stopy z podłożem  $t_{c,a}$  (przykładowy przebieg VGRF generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_j = 2,0$  Hz). (opracowanie własne)

czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem krótszego od rzeczywistej wartości  $t_c$  mierzonej podczas badań. Na ilustracji 21 przedstawiono sposób wyznaczenia przybliżonej wartości czasu kontaktu z podłożem  $t_{c,a}$  na potrzeby modelu półsinusoidalnego. Wartość  $t_{c,a}$  wyznaczano poprzez aproksymację przebiegu VGRF liniami prostymi przechodzącymi przez punkty  $1,0G$  i  $1,10G$  ( $G$  – ciężar osoby skaczącej). Na podstawie badań własnych ustalono, że aproksymowana wartość  $t_{c,a}$  wynosi  $t_{c,a} = (0,70-0,80)t_c$  w przypadku skoków swobodnych oraz  $t_{c,a} = (0,60-0,70)t_c$  w przypadku skoków intensywnych.

Poniżej przedstawiono procedurę wyznaczania czasowego przebiegu VGRF za pomocą modelu półsinusoidalnego dla rozważanej częstotliwości skoków  $f_j$  (opracowanie własne).

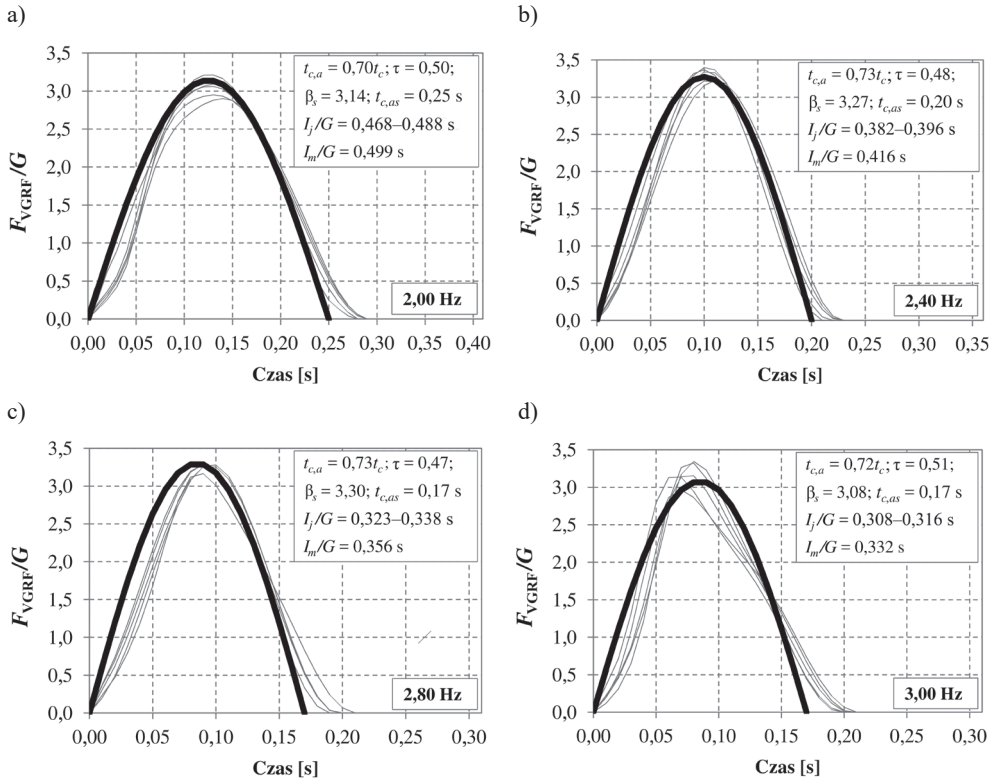
- 1) Wyznaczyć wartość czasu kontaktu z podłożem  $t_c$  dla rozważanej częstotliwości skoków  $f_j$  według il. 20 lub zaleceń zawartych na il. 31 (wyniki badań własnych).
- 2) Wyznaczyć wartość  $t_{c,a} = (0,70-0,80)t_c$  dla skoków swobodnych lub  $t_{c,a} = (0,60-0,70)t_c$  dla skoków intensywnych.
- 3) Wyznaczyć współczynnik  $\tau = f_j t_{c,a}$  dla skoków swobodnych lub skoków intensywnych.
- 4) Wyznaczyć wartość współczynnika  $\beta$  według il. 20, odpowiednio dla skoków swobodnych  $\beta_s$  według zaleceń [8] lub skoków intensywnych  $\beta_i$  według zaleceń [18].
- 5) Wyznaczyć nową wartość czasu kontaktu z podłożem za pomocą równania (22):  $t_{c,as}$  lub  $t_{c,ai}$ , odpowiednio dla skoków swobodnych lub intensywnych dla  $\beta = \beta_s$  lub  $\beta = \beta_i$  (w przypadku skoków swobodnych  $t_{c,as} = t_{c,a}$ ).
- 6) Wyznaczyć przebieg VGRF za pomocą równania (26) z uwzględnieniem właściwych wartości  $t_{c,as}$  i  $\beta_s$  dla skoków swobodnych lub  $t_{c,ai}$  i  $\beta_i$  dla skoków intensywnych.

Określenie sposobu wykonywania skoków na analizowanej konstrukcji (skoki swobodne lub intensywne) wymaga indywidualnej analizy przypadku. Można przyjąć, że skoki swobodne występują na konstrukcji we wszystkich przypadkach niezwiązanych z celowym dążeniem osoby skaczącej do maksymalizacji wydatku energetycznego, tzn. w sytuacjach, gdy osoba skacząca wykonuje skoki przy minimalnym wydatku energetycznym, chcąc zminimalizować wysiłek i uniknąć zmęczenia.

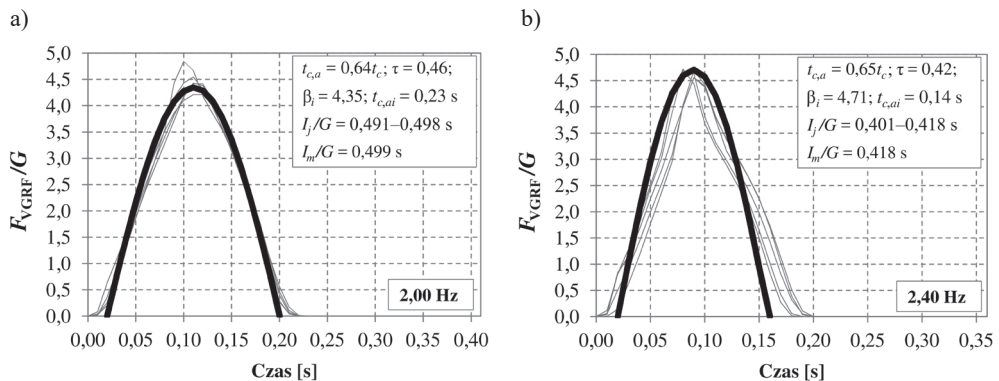
W przypadku gdy drgania konstrukcji odczuwane są przez osoby skaczące skoki swobodne mogą zmieniać się w skoki intensywne przy celowym wzbudzeniu drgań konstrukcji (akty wandalizmu) i odwrotnie, skoki intensywne mogą zmieniać się w skoki swobodne z obawy o własne bezpieczeństwo (może nastąpić również zaprzestanie wykonywania skoków).

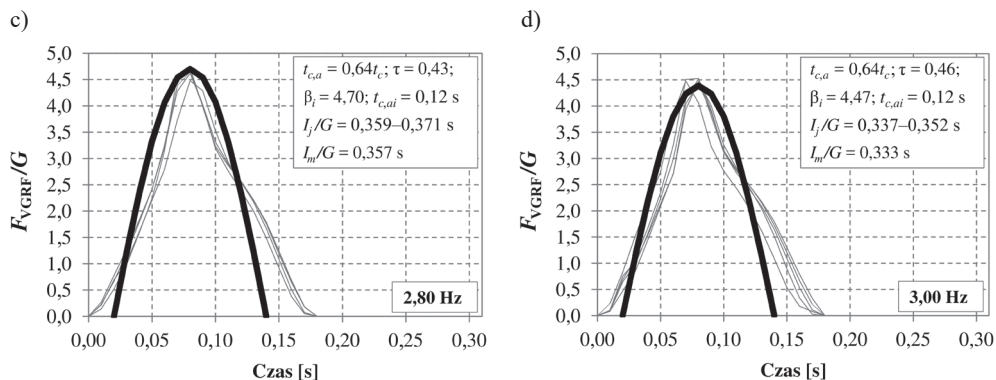
Z uwagi na zmienność parametrów skoków ( $t_c$ ,  $\beta$ ) obserwowaną podczas skoków ciągłych (następujących jeden po drugim), w celu prognozowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji, można przyjąć czasowy przebieg VGRF odzwierciedlający przebieg uśredniony pomiędzy skokami swobodnymi i intensywnymi, wyznaczony z uwzględnieniem wartości średnich parametrów modelu  $t_{c,a}$  i  $\beta$  dla analizowanej częstotliwości skoków  $f_j$ .

Na ilustracjach 22 i 23 przedstawiono przebiegi VGRF wyznaczone za pomocą modelu półsinusoidalnego dla skoków swobodnych i intensywnych w odniesieniu do wyników badań własnych.



Il. 22. Porównanie przebiegów czasowych  $F_{VGRF}/G$ , wyznaczonych za pomocą modelu półsinusoidalnego dla skoków swobodnych, z wynikami badań laboratoryjnych: a)  $f_j = 2,00$  Hz, b)  $f_j = 2,40$  Hz, c)  $f_j = 2,80$  Hz, d)  $f_j = 3,00$  Hz, (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wyniki obliczeń)





Il. 23. Porównanie przebiegów czasowych  $F_{VGRF}/G$ , wyznaczonych za pomocą modelu półsinusoidalnego dla skoków intensywnych, z wynikami badań laboratoryjnych: a)  $f_j = 2,00$  Hz, b)  $f_j = 2,40$  Hz, c)  $f_j = 2,80$  Hz, d)  $f_j = 3,00$  Hz (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wyniki obliczeń)

Jak można zauważyć na il. 23, przebiegi czasowe VGRF wyznaczone za pomocą modelu półsinusoidalnego dla skoków intensywnych różnią się od przebiegów zarejestrowanych podczas badań. Różnica ta zwiększa się wraz ze wzrostem częstotliwości skoków. Wyznaczone przebiegi teoretyczne spełniają jednak zależność (20), co pozwala poprawnie prognozować odpowiedź dynamiczną konstrukcji.

### 3.1.4. Model na bazie funkcji Hanna

Funkcja Hanna (zwana także funkcją Hanninga) to funkcja typu podniesiony sinus lub podniesiony cosinus (druga potęga funkcji sinus lub cosinus) o krzywiźnie w kształcie dzwonu. Zwracając uwagę na przebiegi VGRF rejestrowane dla częstotliwości skoków  $f_j \geq 1,80$  Hz (np. il. 2 i 3), można zauważyć ich podobieństwo do krzywej dzwonej. Dążąc do zwiększenia dokładności odwzorowania VGRF generowanej podczas skoków, w pracy [28] zaproponowano model na bazie funkcji Hanna. Różne wersje tego modelu przedstawiają równania (27) i (28).

$$F_{VGRF}(t) = \begin{cases} \beta G \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{t_c}\right) = \beta G \left[1 - \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{t_c}\right)\right] & \text{dla } i \cdot T_j < t \leq (i + \tau) \cdot T_j \\ 0 & \text{dla } (i + \tau) \cdot T_j < t \leq (i + 1) \cdot T_j \end{cases} \quad (27)$$

$$F_{\text{VGRF}}(t) = \begin{cases} \beta G \left[ 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{t_c}\right) \right] & \text{dla } i \cdot T_j < t \leq (i + \tau) \cdot T_j \\ 0 & \text{dla } (i + \tau) \cdot T_j < t \leq (i + 1) \cdot T_j \end{cases} \quad (28)$$

gdzie:  $G$  – ciężar ciała osoby skaczącej [N],  $\beta$  – współczynnik dynamiczny,  $t_c$  – czas kontaktu osoby skaczącej z podłożem [s],  $t$  – krok czasowy [s],  $\tau$  – współczynnik czasu kontaktu z podłożem  $\tau = t_c/T_j = f_j t_c$ ,  $T_j$  – okres skoków [s],  $T_j = 1/f_j$ ,  $f_j$  – częstotliwość skoków [Hz],  $i = 0, 1, 2, \dots$

Odwzorowanie przebiegu VGRF za pomocą funkcji Hanna wymaga przyjęcia odpowiednich wartości współczynnika dynamicznego  $\beta$  oraz czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_c$ . Wartość  $\beta$  można wyznaczyć korzystając z krzywej według zaleceń pracy [18] (ciągła linia na il. 20), przyjmując  $\tau \approx 0,60$  dla skoków swobodnych, czyli  $t_{cs} \approx 0,60T_j$  oraz  $\tau \approx 0,45$  dla skoków intensywnych, czyli  $t_{ci} \approx 0,45T_j$  ( $T_j$  – okres skoków,  $T_j = 1/f_j$ ) (zalecenia na podstawie badań własnych). Pośrednie wartości współczynnika  $\tau$  odpowiadają pośrednim przypadkom intensywności skoków.

Teoretyczną wartość czasu kontaktu z podłożem  $t_{c,t}$ , odpowiadającą przyjętemu współczynnikowi dynamicznemu  $\beta$ , można wyznaczyć za pomocą zależności (29) będącej przekształconą postacią równania opisującego współczynnik dynamiczny  $\beta$  [18].

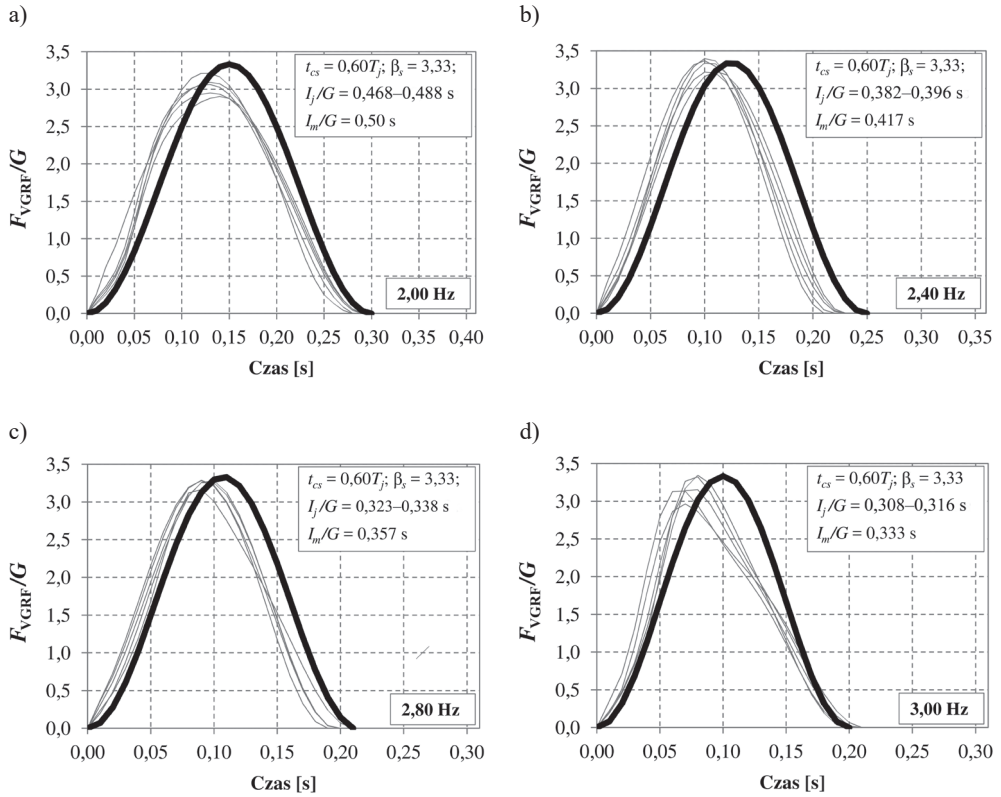
$$t_{c,t} = \frac{2}{\beta f_j} \quad (29)$$

Uwzględnienie w modelu wartości  $t_c = t_{c,t}$ , wyznaczonej za pomocą równania (29) dla przyjętej wartości współczynnika dynamicznego  $\beta$ , zapewnia spełnienie zależności opisanej równaniem (20) i tym samym poprawne oszacowanie odpowiedzi dynamicznej konstrukcji.

Odpowiednią wartość  $t_c$  można również wyznaczyć korzystając z wyników badań autora przedstawionych w podrozdziale 4.2.1 (il. 31). Znajomość wartości  $t_c$  pozwala wyznaczyć odpowiadające jej wartości współczynników  $\tau = f_j t_c$  i  $\beta$  z il. 20 dla analizowanej częstotliwości skoków.

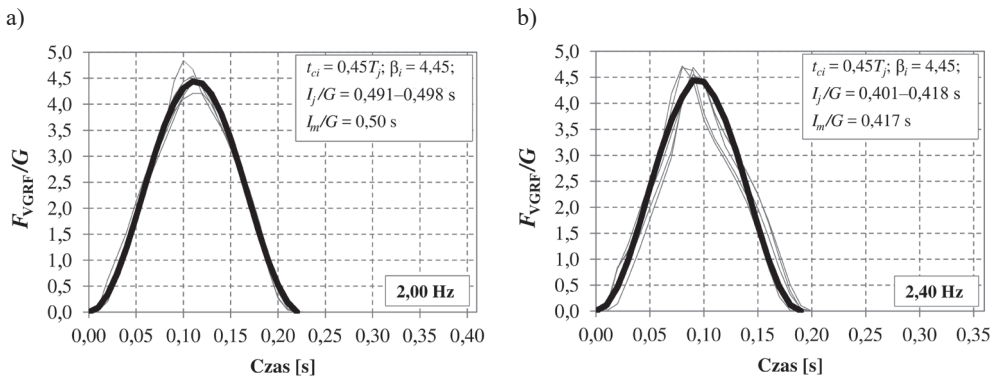
Na ilustracjach 24 i 25 przedstawiono przebiegi VGRF wyznaczone za pomocą modelu na bazie funkcji Hanna dla skoków swobodnych (dla  $t_{cs}$  i  $\beta_s$ ) oraz skoków intensywnych (dla  $t_{ci}$  i  $\beta_i$ ) w odniesieniu do wyników badań własnych.

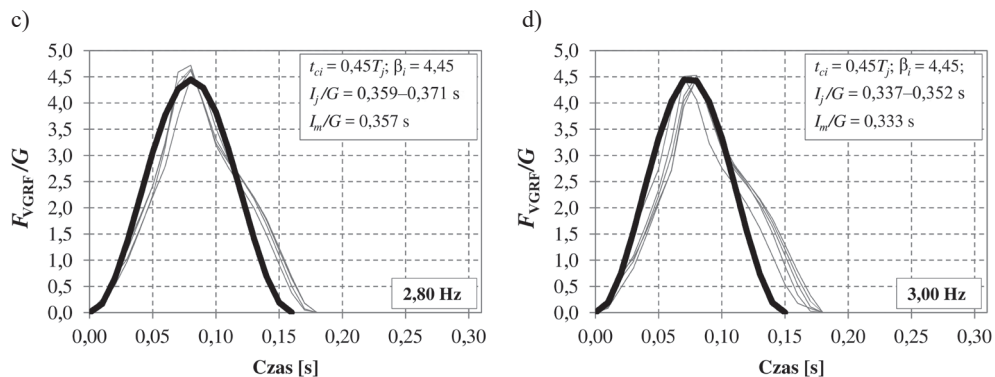




II. 24. Porównanie unormowanych przebiegów czasowych  $F_{VGRF}/G$ , wyznaczonych za pomocą modelu na bazie funkcji Hanna dla skoków swobodnych, z wynikami badań laboratoryjnych:

a)  $f_j = 2,00$  Hz, b)  $f_j = 2,40$  Hz, c)  $f_j = 2,80$  Hz, d)  $f_j = 3,00$  Hz (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wyniki obliczeń)





Il. 25. Porównanie unormowanych przebiegów czasowych  $F_{\text{VGRF}}/G$ , wyznaczonych za pomocą modelu na bazie funkcji Hanna dla skoków intensywnych, z wynikami badań laboratoryjnych: a)  $f_j = 2,00$  Hz, b)  $f_j = 2,40$  Hz, c)  $f_j = 2,80$  Hz, d)  $f_j = 3,00$  Hz (opracowanie na podstawie badań własnych, szare cienkie linie – wyniki badań laboratoryjnych, czarne grube linie – wyniki obliczeń)

Z uwagi na zmienność parametrów skoków ( $\beta$  i  $t_c$ ), obserwowaną podczas skoków ciągłych (następujących jeden po drugim) w celu prognozowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji, można przyjąć czasowy przebieg VGRF odzwierciedlający przebieg uśredniony pomiędzy skokami swobodnymi i intensywnymi wyznaczony z uwzględnieniem wartości średniej współczynnika  $\tau$ ,  $\bar{\tau} \approx 0,52$ , co odpowiada wartości  $t_c \approx 0,52T_j$  ( $T_j$  – okres skoków,  $T_j = 1/f_j$ ).

Model na bazie funkcji Hanna, podobnie jak scharakteryzowane we wcześniejszych rozdziałach model masowo-sprężysty, model na bazie szeregu Fouriera i model półsinusoidalny, można stosować do odwzorowania przebiegów VGRF o kształcie jednowierzchołkowym, powstających podczas skoków z częstotliwością  $f_j \geq 1,80$  Hz. Odwzorowanie przebiegów VGRF, powstających podczas skoków z częstotliwością  $f_j < 1,80$  Hz, wymaga wykorzystania innych sposobów modelowania. Mimo że najbardziej istotna wydaje się być możliwość modelowania skoków wykonywanych w normalnym tempie ( $f_j = 1,90\text{--}3,00$  Hz, tab. 1 [6]), to z punktu widzenia oceny bezpieczeństwa i komfortu użytkownika konstrukcji charakteryzujących się niskimi częstotliwościami drgań własnych (np. kładki dla pieszych o konstrukcji podwieszanej i wiszącej) narażonych na oddziaływanie osób skaczących (akty wandalizmu), równie istotna może okazać się możliwość modelowania skoków o niskich częstotliwościach  $f_j < 1,80$  Hz. Własną propozycję modelowania przebiegów VGRF, generowanych podczas skoków w przedziale częstotliwości  $1,00 \leq f_j \leq 3,40$  Hz, przedstawiono w podrozdziale 4.3.1.

### 3.2. Modele obciążeń VGRF generowanych podczas przysiadów

Charakterystyczną cechą przysiadów, odróżniającą je od skoków, jest utrzymywanie ciągłego kontaktu stóp z podłożem przez osobę wykonującą przysiady. W trakcie przysiadów nie występuje faza lotu pojawiająca się w trakcie skoków, związana z utratą kontaktu z podłożem przez osobę skaczącą, podczas której  $VGRF = 0,0$ . Pionowa składowa siła reakcji podłoża generowana podczas przysiadów nie osiąga wartości zerowej (il. 8–10).

Jak wspomniano w podrozdziale 2.2, jednym z parametrów charakteryzujących przysiady jest ich głębokość, wyrażana wartością kąta ugięcia kolan  $\alpha$  (il. 7). Można przyjąć, że przysiady wykonywane w trakcie intencjonalnego (celowego) wzbudzenia drgań konstrukcji są przysiadami częściowymi ( $\alpha = 0-70^\circ$ , najczęściej  $\alpha \approx 40^\circ$ ). Półprzysiady i przysiady pełne występują na ogół w przypadku przysiadów wykonywanych w ramach ćwiczeń fizycznych.

Należy zauważyć, że głębokość przysiadów wywiera wpływ na zakres częstotliwości, z jaką są one wykonywane ( $f_{sq}$ ). Ograniczone uginanie kolan podczas wykonywania przysiadów częściowych pozwala na ich wykonywanie w szerokim zakresie częstotliwości, z górną granicą około 3,5 Hz (stwarza to możliwość wzbudzenia drgań własnych konstrukcji w szerokim przedziale częstotliwości). W przypadku półprzysiadów i przysiadów pełnych zakres częstotliwości ich wykonywania ulega zawężeniu. Półprzysiady i przysiady pełne wykonywane są zwykle z częstotliwością w przedziale odpowiednio 0,80–1,00 Hz i 0,30–0,60 Hz (wyniki badań własnych). Częstotliwość ta zależy m.in. od kondycji fizycznej i stopnia wytrenowania osoby wykonującej przysiady oraz od przyjętej intensywności wykonywania ćwiczeń. W celu określenia przedziału częstotliwości przysiadów istotnego z punktu widzenia analizy dynamicznej konstrukcji należy ustalić jaki typ przysiadów może wystąpić na konstrukcji (przysiady częściowe, półprzysiady, przysiady pełne). Wymaga to indywidualnej analizy przypadku.

Wraz ze zmianą częstotliwości przysiadów przekształceniu ulega czasowy przebieg VGRF (il. 8–10). Przy niskich częstotliwościach przysiadów ( $f_{sq} < 1,00$  Hz) przebiegi VGRF mają postać impulsów VGRF powstających podczas pojedynczego przysiadu (il. 6), rozdzielonych stałymi wartościami VGRF, odpowiadającymi ciężarowi osoby wykonującej przysiady. Wraz ze wzrostem częstotliwości przysiadów przebiegi VGRF zbliżają się do przebiegów sinusoidalnych.

W literaturze krajowej modele siły VGRF generowanej podczas przysiadów odnaleźć można w pracach [29, 81]. W dalszej części podrozdziału przeanalizowana została propozycja opisana w pracy [81]. W koncepcji tej czasowy przebieg VGRF opisany został z wykorzystaniem funkcji harmonicznej z tłumieniem:

$$F_{VGRF}(t) = G \left[ 1 + A \cos(4,8\pi |t| - \varphi) e^{-|t|\delta} \right] \quad (30)$$

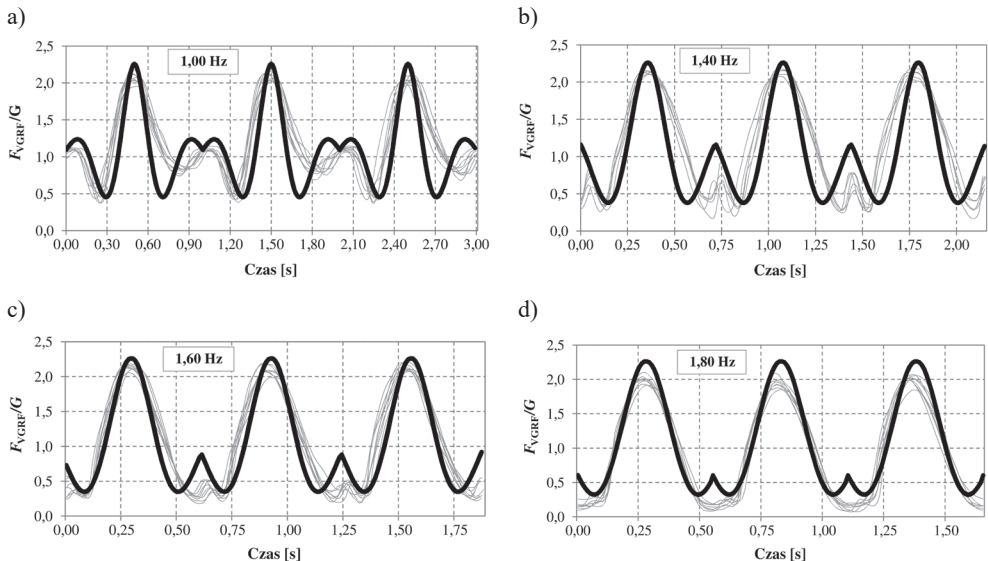
gdzie:  $G$  – ciężar ciała osoby skaczącej [N],  $t$  – krok czasowy [s]:  $t \in (-0,50T_{sq}, 0,50T_{sq})$ ,  $T_{sq}$  – okres przysiadów,  $T_{sq} = 1/f_{sq}$ ,  $A$  – amplituda składowej dynamicznej VGRF,  $\delta$  – współczynnik tłumienia,  $\varphi$  – przesunięcie fazowe.

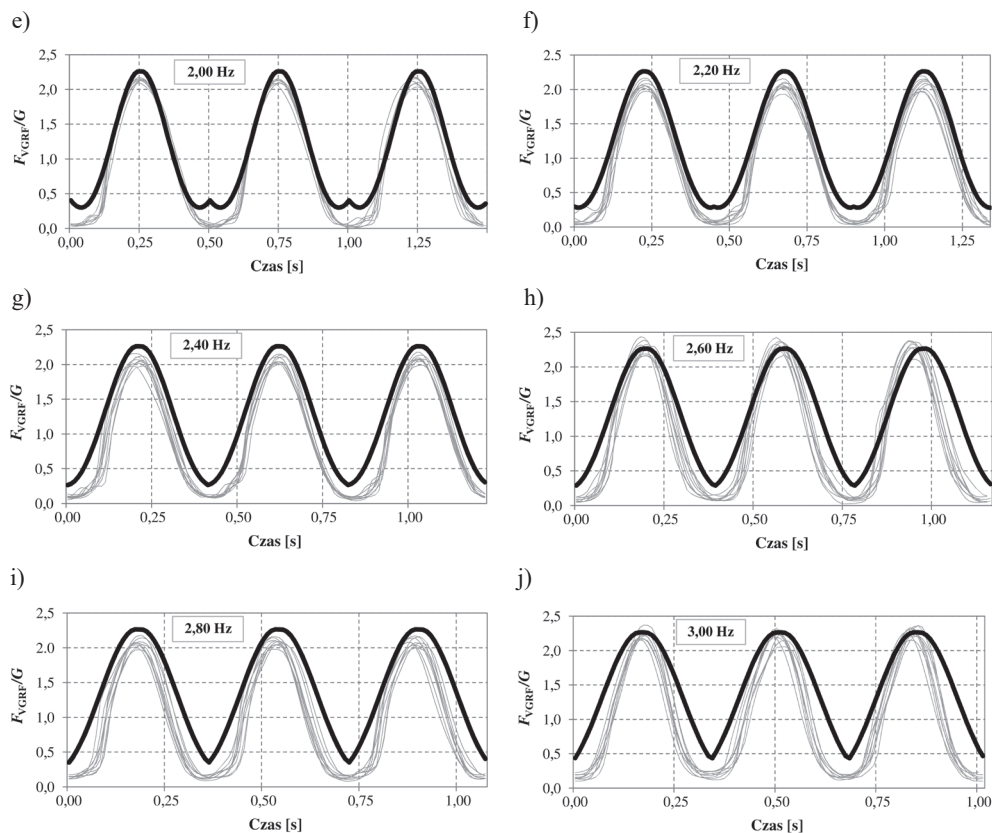
Amplituda składowej dynamicznej VGRF wyznaczona została w pracy [81] na podstawie badań 33-osobowej grupy (12 kobiet, 21 mężczyzn w wieku 22–24 lata), wykonującej przysiady z częstotliwością  $f_{sq} = 2,00$  Hz. Wartość średnia amplitudy wyniosła  $A_{mean} = 1,30$  ( $A_{min} = 1,07$ ,  $A_{max} = 1,52$ ,  $Var(A) = 0,128$ ). Zgodnie z zaleceniami pracy [81]  $\delta = 4\sqrt{T_{sq}}$  oraz  $\varphi = 0,25$ .

Przyjmując  $G = 0,75$  kN oraz  $A = A_{mean} = 1,3$ , równanie (30) można zapisać w postaci:

$$F_{VGRF}(t) = 0,75 \cdot \left[ 1 + 1,3 \cos(4,8\pi |t| - 0,25) e^{-4|t|\sqrt{T_{sq}}} \right] \quad (31)$$

Na ilustracji 26 zaprezentowano unormowane przebiegi  $F_{VGRF}/G$ , wyznaczone za pomocą równania (31) dla przysiadów wykonywanych z częstotliwością  $f_{sq} = 1,00$ – $3,00$  Hz, w odniesieniu do wyników badań własnych. Przedstawiono zapis VGRF dla trzech przysiadów wykonywanych kolejno po sobie.





Il. 26. Porównanie unormowanych przebiegów czasowych  $F_{VGRF}/G$ , wyznaczonych za pomocą równania (83) dla różnych częstotliwości przysiadów, z wynikami badań laboratoryjnych:

a)  $f_{sq} = 1,00$  Hz, b)  $f_{sq} = 1,40$  Hz, c)  $f_{sq} = 1,60$  Hz, d)  $f_{sq} = 1,80$  Hz, e)  $f_{sq} = 2,00$  Hz, f)  $f_{sq} = 2,20$  Hz, g)  $f_{sq} = 2,40$  Hz, h)  $f_{sq} = 2,60$  Hz, i)  $f_{sq} = 2,80$  Hz, j)  $f_{sq} = 3,00$  Hz (opracowanie na podstawie badań własnych, cienkie linie szare – wyniki badań laboratoryjnych, grube linie czarne – wyniki obliczeń)

Średnie wartości parametrów modelu ( $A$ ,  $\delta$ ), przedstawione w pracy [81] i uwzględnione w równaniu (31), wyznaczono na podstawie badań przysiadów wykonywanych z częstotliwością  $f_{sq} = 2,00$  Hz. W opracowaniu [81] wykazano jednocześnie, że zaproponowany model pozwala z wystarczającą dokładnością symulować oddziaływanie powstające podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 1,00–2,40$  Hz. Wyniki modelowania siły VGRF zamieszczone na il. 26, opracowane na podstawie niezależnych badań własnych autora, potwierdzają ten wniosek. Nieznaczne różnice pomiędzy przebiegami rzeczywistymi i przebiegami obliczonymi, występujące w przedziale częstotliwości  $f_{sq} = 1,00–2,40$  Hz, nie wywierają znaczącego wpływu na wartość odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. W przypadku  $f_{sq} > 2,40$  Hz dokładność oszacowania przebiegu VGRF maleje. Zwiększenie dokładności estymacji VGRF można uzyskać przez odpowiedni dobór wartości parametrów  $A$  i  $\delta$  dla wyższych częstotliwości przysiadów. Doprecyzowanie wartości tych parametrów wymaga dalszych prac badawczych.



## 4. WŁASNE MODELE OBCIĄŻEŃ VGRF GENEROWANYCH PODCZAS SKOKÓW I PRZYSIADÓW

W niniejszym rozdziale przedstawiono autorską propozycję sposobu modelowania unormowanych pionowych składowych sił reakcji podłoża generowanych podczas skoków i przysiadów, opracowaną na podstawie wyników badań własnych zrealizowanych z udziałem grupy wolontariuszy w wieku 15–45 lat.

Zaproponowano metodę odwzorowania czasowych przebiegów VGRF za pomocą krzywych sklejanych (krzywych splajn) trzeciego stopnia z kontrolą kształtu, przechodzących przez węzły interpolacji krzywych VGRF. Lokalizację węzłów interpolacji określono w szerokich przedziałach częstotliwości aktywności człowieka:  $f_j = 1,00\text{--}3,00$  Hz dla skoków oraz  $f_{sq} = 0,50\text{--}3,00$  Hz dla przysiadów.

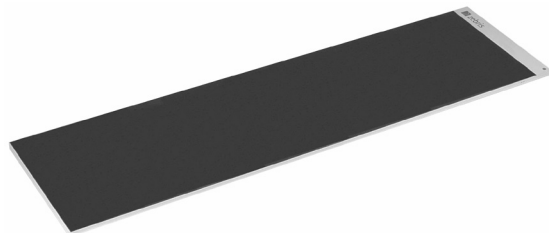
Należy zaznaczyć, że opracowane modele sił VGRF generowanych podczas przysiadów z różnymi częstotliwościami dotyczą tzw. przysiadów częściowych, odpowiadających kątowi ugięcia kolan w zakresie  $0\text{--}70^\circ$  (por. podrozdział 2.2, il. 7). Warto także zauważyć, iż wykorzystanie krzywych splajn z kontrolą kształtu do odwzorowania przebiegów pionowej składowej sił reakcji podłoża, generowanych podczas skoków i przysiadów, pozwala uzyskać dużą dokładność odwzorowania przebiegów VGRF w szerokim zakresie częstotliwości.

### 4.1. Charakterystyka badań

Rejestrację czasowych przebiegów VGRF dla aktywności w postaci skoków i przysiadów wykonano w warunkach laboratoryjnych.

Badania VGRF generowanych podczas skoków i przysiadów zrealizowano z wykorzystaniem platformy dynamometrycznej Zebris FDM-1.5, o wymiarach obszaru pomiarowego  $149,0 \times 54,0$  cm (il. 27), umieszczonej bezpośrednio na posadzce laboratorium.

Wykorzystana platforma Zebris FDM-1.5 umożliwiała rejestrację wyłącznie pionowej składowej GRF z częstotliwością próbkowania sygnału 100,0 Hz. Przebiegi VGRF zarejestrowane podczas badań należy traktować jako otrzymane na podłożu niepodatnym.



Il. 27. Platforma dynamometryczna Zebris FDM-1.5 wykorzystana do pomiarów GRF generowanych podczas skoków i przysiadów o wymiarach 149,0 x 54,0 cm (opracowanie własne)

Badania sił VGRF generowanych podczas skoków i przysiadów zrealizowano przy udziale 10 wolontariuszy, wykazujących się pełną sprawnością ruchową, bez kontuzji (5 kobiet, 5 mężczyzn) w wieku 15–45 lat (średnia  $\pm$  odchylenie standardowe:  $33,8 \pm 13,8$  lat), waga 50,4–91,3 kg ( $69,7 \pm 19,9$  kg), wzrost 157,5–182,0 cm ( $174,2 \pm 7,6$  cm).

Rejestrację sił generowanych podczas skoków wykonano dla częstotliwości  $f_j = 1,00\text{--}3,00$  Hz, przyrost częstotliwości co 0,20 Hz (rejestracja VGRF dla 11 częstotliwości skoków). Rejestrację sił generowanych podczas przysiadów wykonano dla częstotliwości  $f_{sq} = 1,00\text{--}3,00$  Hz, przyrost częstotliwości co 0,20 Hz oraz dla częstotliwości  $f_{sq} = 0,50$  Hz i  $f_{sq} = 0,80$  Hz (rejestracja VGRF dla 13 częstotliwości przysiadów).

Podczas każdej serii skoków i przysiadów siły reakcji podłoża rejestrowano w czasie wymaganym do wykonania od 20 do 30 skoków lub przysiadów. Przysiady wykonywane podczas badań uznano za przysiady częściowe (klasyfikacja przysiadów patrz podrozdział 2.2, il. 7).

Uczestnicy badań mieli obuwie sportowe. Tempo (częstotliwość) skoków i przysiadów wyznaczane było za pomocą metronomu elektronicznego. Częstotliwość aktywności danego typu wyrażoną w [Hz] przeliczono na liczbę uderzeń na minutę BPM wyznaczaną przez metronom (ang. *Beats Per Minute*,  $\text{BPM} = 60f_s$ ). Przed wykonaniem rejestracji GRF poproszono badanych o przeciwiczenie wykonywania określonej aktywności z częstotliwością wyznaczaną za pomocą metronomu do momentu przyzwyczajenia się do określonego tempa (częstotliwości).

Uczestników badań (próbę badawczą) wybrano poprzez dobór wygodny, tzn. stosując nielosową metodę doboru próby, polegającą na wyborze uczestników z grona łatwo dostępnych osób. Grupę badawczą wybrano spośród znajomych oraz pracowników i studentów Politechniki Krakowskiej. Przyjęto, że aktywność w postaci skoków i przysiadów związana z intencjonalnym wzbudzaniem drgań konstrukcji występuje głównie w grupie wiekowej 15–45 lat. Na tej podstawie przyjętą próbę badawczą uznano za reprezentatywną i miarodajną do ustalenia przebiegów czasowych i budowy modeli sił reakcji podłoża dla skoków i przysiadów na potrzeby analiz dynamicznych konstrukcji budowlanych.



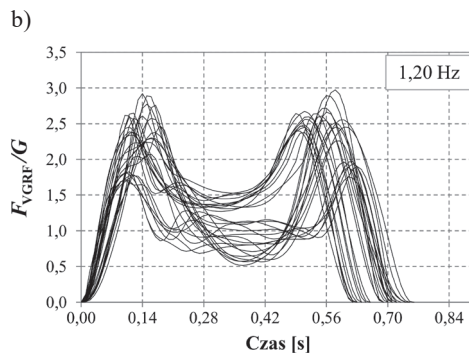
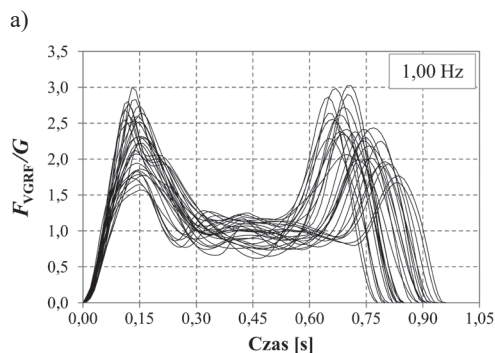
Na podstawie porównań stwierdzono dużą zgodność wyników badań własnych z wynikami badań publikowanymi przez różnych autorów w zakresie VGRF generowanych podczas skoków i przysiadów w grupie wiekowej 18–80 lat, rejestrowanych na potrzeby biomechaniki oraz medycyny (zgodność m.in. amplitud sił oraz czasów kontaktu stóp z podłożem).

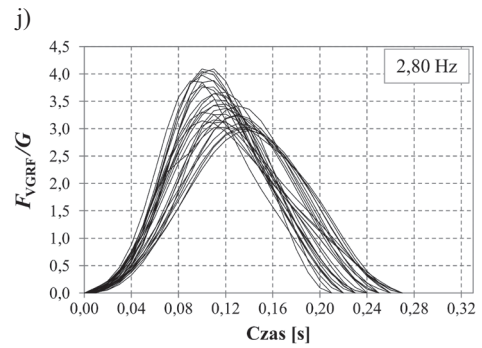
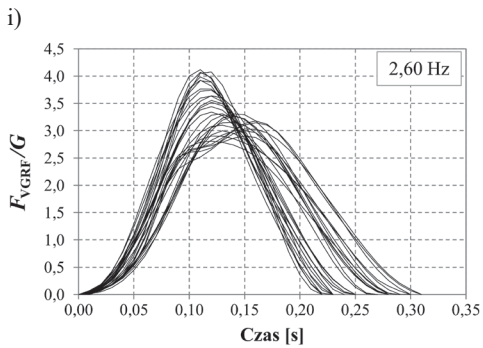
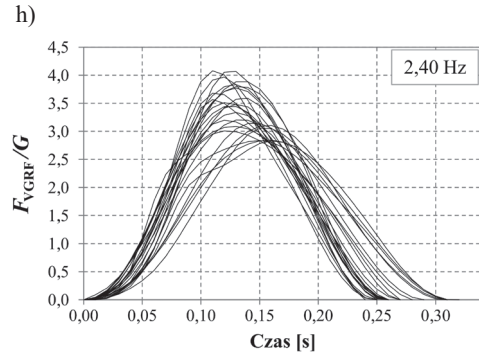
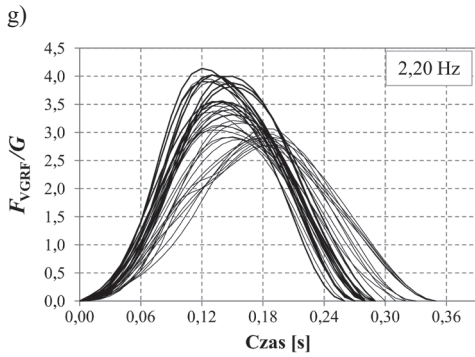
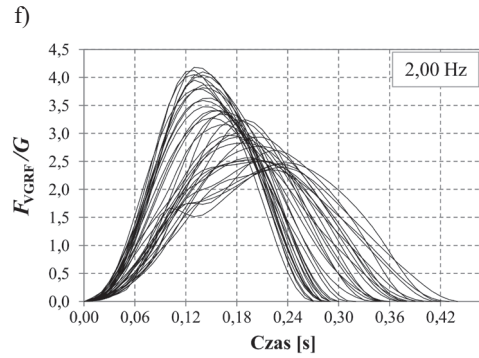
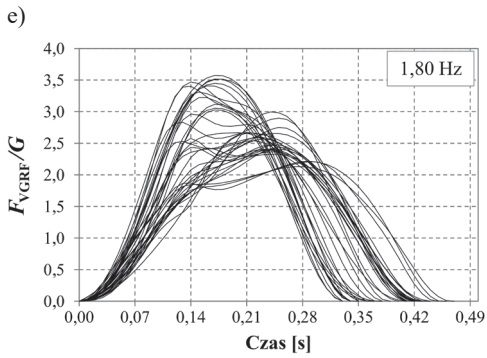
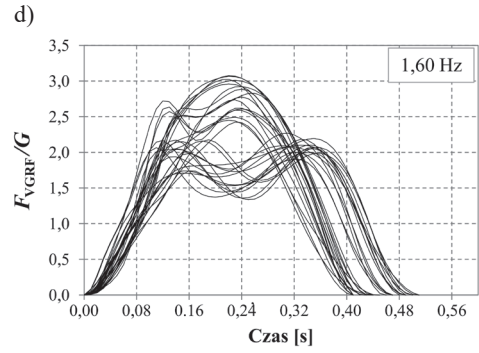
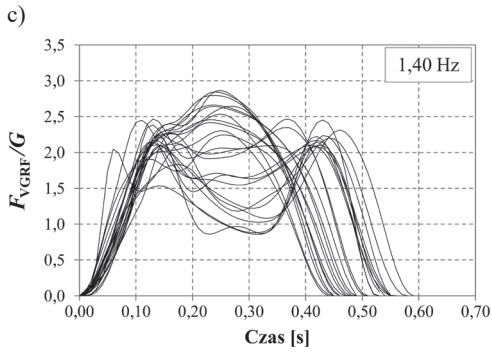
## 4.2. Wyniki badań – charakterystyka i analiza

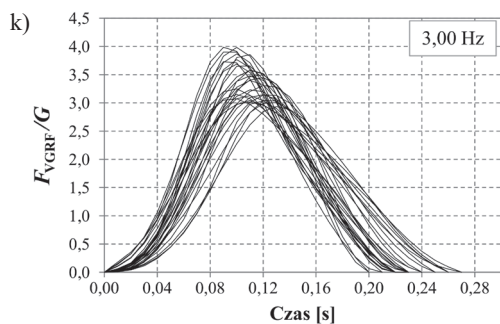
Podczas badań VGRF generowanych w trakcie skoków i przysiadów wykonano 122 testy dla skoków oraz 136 testów dla przysiadów. Otrzymano zapis 2443 przebiegów pionowej składowej sił reakcji podłoża dla skoków (203–312 sygnałów odpowiednio dla  $f_j = 1,00$  Hz i  $f_j = 3,00$  Hz) oraz 3134 przebiegów pionowej składowej sił reakcji podłoża dla przysiadów częściowych (244–317 sygnałów odpowiednio dla  $f_{sq} = 0,50$  Hz i  $f_{sq} = 3,00$  Hz).

Przed przystąpieniem do analizy przebiegów VGRF zarejestrowane sygnały poddano filtrowaniu z wykorzystaniem dolnoprzepustowego filtra Butterwortha rzędu 2 z częstotliwością odcięcia 40,0 Hz w celu usunięcia szumów wysokoczęstotliwościowych, będących efektem zakłóceń elektromagnetycznych.

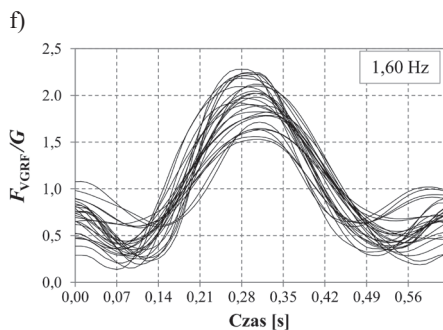
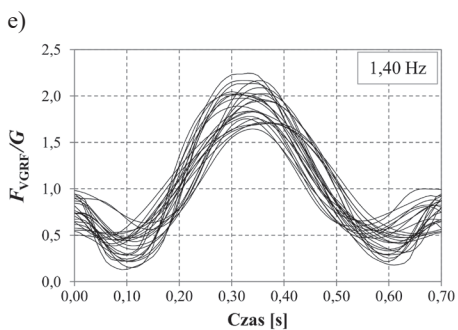
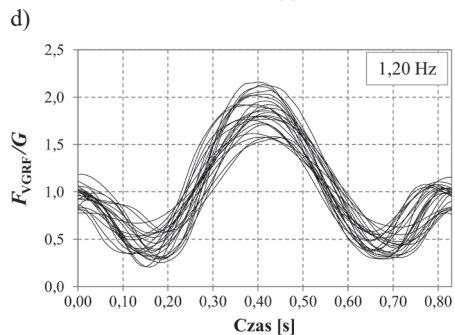
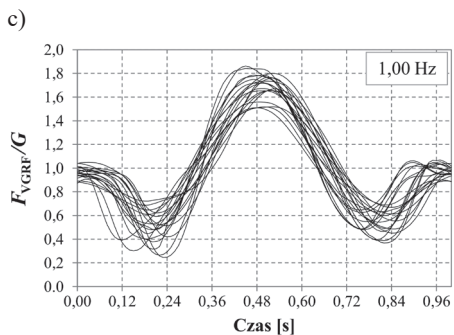
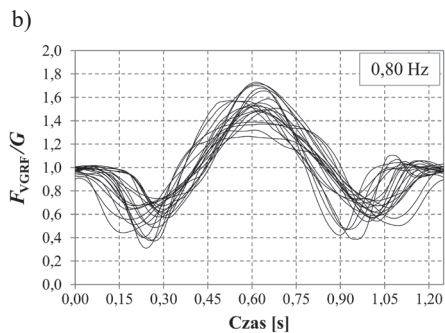
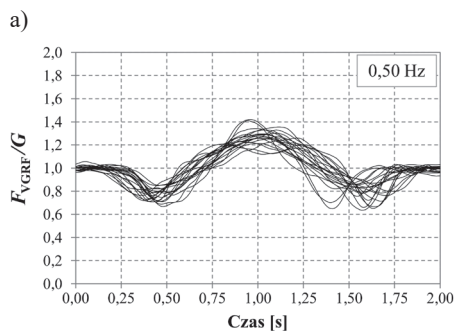
Na ilustracjach 28 i 29 przedstawiono przykładowe przebiegi VGRF zarejestrowane dla skoków i przysiadów w różnych zakresach częstotliwości. Na każdym z wykresów zamieszczono przebiegi  $F_{VGRF}/G$  generowane przez różne osoby (3–5 przykładowych przebiegów  $F_{VGRF}/G$  zarejestrowanych dla każdego uczestnika badań).

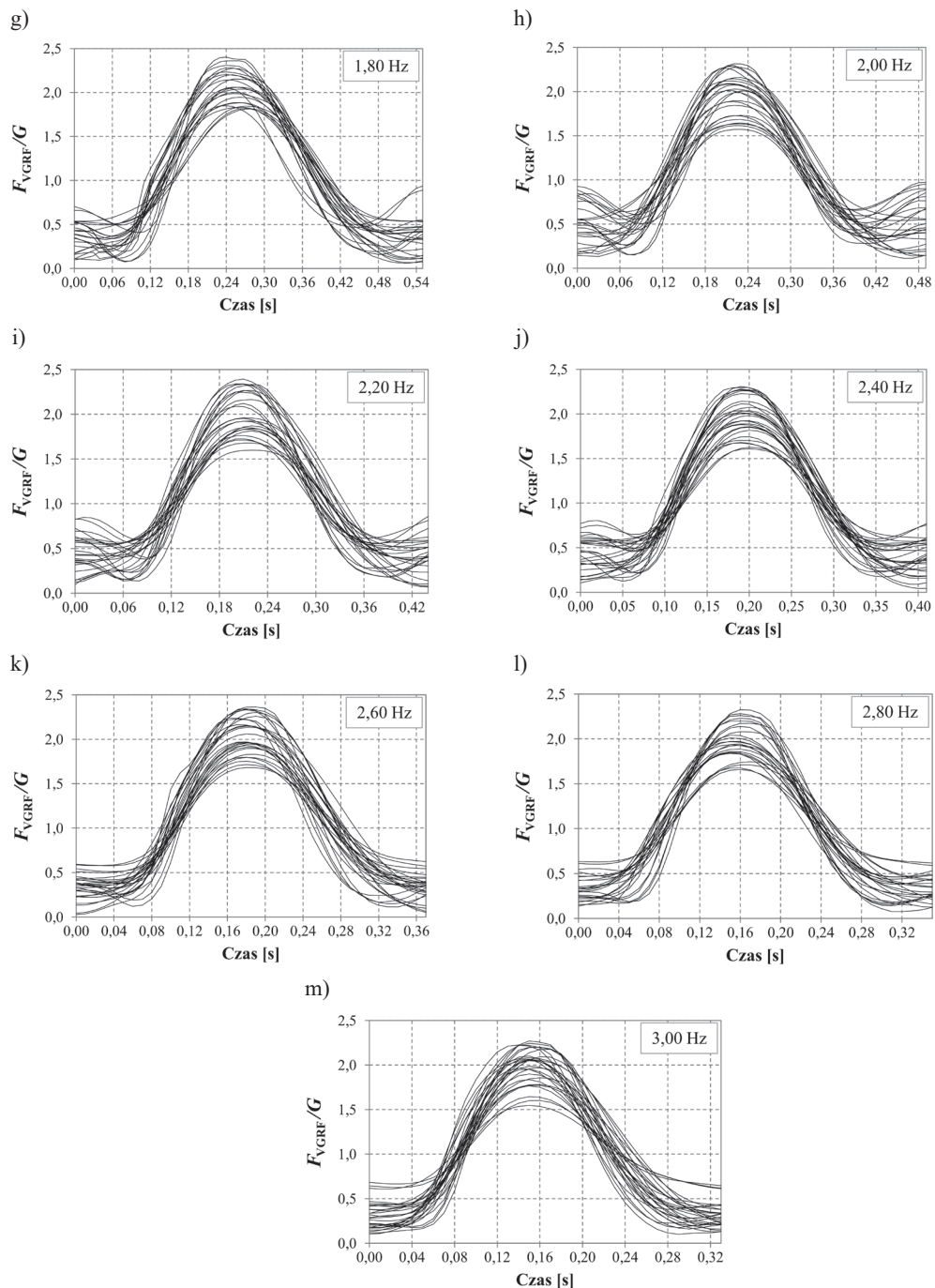






Il. 28. Przykładowe unormowane przebiegi  $F_{VGRF}/G$  generowane przez różne osoby podczas wykonywania skoków z częstotliwością  $f_j = 1,00-3,00$  Hz (wyniki badań własnych)





Il. 29. Przykładowe unormowane przebiegi  $F_{VGRF}/G$  generowane przez różne osoby podczas wykonywania przysiadów częściowych z częstotliwością  $f_s = 0,50\text{--}3,00$  Hz (wyniki badań własnych)

#### 4.2.1. Analiza przebiegów $F_{\text{VGRF}}/G$ generowanych podczas skoków

Na ilustracji 28 zobrazowano przykładowe przebiegi unormowanej pionowej składowej siły reakcji podłoża  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowane przez osoby wykonujące następujące po sobie (cykliczne) podskoki w miejscu w zakresie częstotliwości  $f_j = 1,0\text{--}3,0$  Hz. Analiza wykresów pozwala zauważyć: 1) większe zróżnicowanie geometrii przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  dla poszczególnych częstotliwości skoków w porównaniu ze zmiennością geometrii przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanych podczas chodu lub biegu; 2) zależność geometrii przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  od częstotliwości skoków (występowanie przebiegów jedno- i dwuwierzchołkowych); 3) odwrotnie proporcjonalną zależność amplitudy siły od czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_c$ .

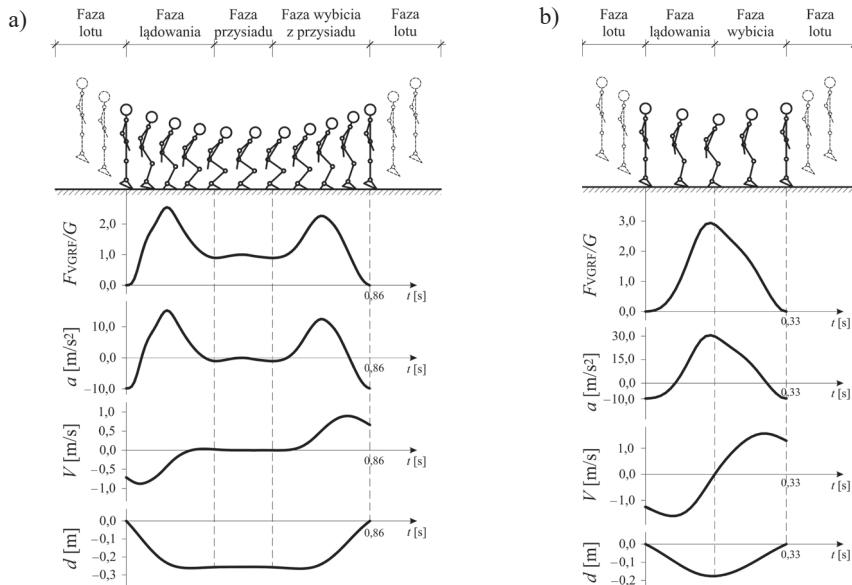
W zakresie skoków o częstotliwości  $f_j < 1,60$  Hz można zauważyć występowanie wyłącznie dwuwierzchołkowych przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  o zmiennych wartościach amplitud maksymalnych i minimalnych. Dla  $f_j > 1,80$  Hz przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  przyjmują formę jednowierzchołkową. Zmiana geometrii przebiegów występuje w przedziale częstotliwości skoków  $1,40 \leq f_j \leq 1,80$  Hz. Wskazuje to na występowanie zmian w kinematyce ruchu skaczącego człowieka w tym przedziale częstotliwości skoków. Należy zaznaczyć, że dążąc do wyznaczenia maksymalnej wartości odpowiedzi dynamicznej konstrukcji o częstotliwościach drgań własnych w przedziale  $1,60 \leq f \leq 1,80$  Hz, przy założeniu równej masy ciała osób skaczących generujących przebiegi jedno- i dwuwierzchołkowe, w analizach dynamicznych trzeba wykorzystać jednowierzchołkowe przebiegi VGRF. Charakteryzują się one większymi amplitudami i większymi wartościami średnimi oraz krótszym czasem kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_c$ . Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona siła o dużej wartości średniej, działająca na ciało przez stosunkowo krótki czas, wywoła ruch ciała charakteryzujący się dużym przyspieszeniem. Wydłużenie czasu działania siły przy jednoczesnym zmniejszeniu wartości średniej tej siły prowadzi do zmniejszenia przyspieszenia ciała. Innymi słowy, w przypadku konstrukcji o częstotliwościach drgań własnych mieszczących się w przedziale  $1,60 \leq f \leq 1,80$  Hz, wzbudzanej przez osoby o tej samej masie ciała, generujące podczas skoków różne przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  (przebiegi jedno- i dwuwierzchołkowe), przyspieszenia drgań wywoływane przez osobę generującą siłę o przebiegu jednowierzchołkowym będą większe niż przyspieszenia drgań wywoływane przez osobę generującą siłę o przebiegu dwuwierzchołkowym. Osoby generujące siłę o przebiegu jednowierzchołkowym poruszają się w czasie kontaktu z podłożem z większą szybkością niż osoby generujące siłę o przebiegu dwuwierzchołkowym. Oznacza to, że osoby generujące siłę o przebiegu jednowierzchołkowym posiadają większy pęd niż osoby generujące siłę o przebiegu dwuwierzchołkowym. Oddziaływanie na konstrukcję osoby skaczącej posiadającej większy pęd prowadzi do większych przyspieszeń drgań tej konstrukcji. Maksymalne przyspieszenia drgań konstrukcji o częstotliwościach drgań własnych w przedziale  $1,60 \leq f \leq 1,80$  Hz można zatem wyznaczyć wykorzystując przebiegi o geometrii jednowierzchołkowej. Należy jednak pamiętać, że przebiegi jednowierzchołkowe

nie są jedyną formą przebiegów generowanych podczas skoków o częstotliwości  $1,60 \leq f_j \leq 1,80$  Hz. W przypadku analizy oddziaływania na konstrukcję kilku osób skaczących istotne może być uwzględnianie zróżnicowanych przebiegów  $F_{VGRF}/G$  w celu osiągnięcia odpowiedniej dokładności analiz.

Na ilustracji 30 przedstawiono fazy ruchu ciała człowieka podczas skoków z częstotliwością  $f_j = 1,0$  Hz oraz  $f_j = 2,0$  Hz w odniesieniu do generowanej siły reakcji podłoża oraz przyspieszenia  $a$  [m/s<sup>2</sup>], szybkości  $V$  [m/s] i przemieszczenia  $d$  [m] środka ciężkości ciała skaczącego człowieka. Wartość szybkości i przemieszczenia w fazie kontaktu osoby skaczącej z podłożem wyznaczono przez całkowanie przebiegu przyspieszenia przy przyjęciu odpowiednich warunków brzegowych (początkowej szybkości  $V_0$  i przemieszczenia  $d_0$ ). Szybkość  $V_0$  wyznaczono jako wartość na końcu fazy lotu (koniec fazy spadku swobodnego), znając wysokość skoku. Przemieszczenie  $d_0$  przyjęto jako  $d_0 = 0,0$  m (początek kontaktu osoby skaczącej z podłożem).

W przypadku skoków wykonywanych w wolnym tempie  $f_j < 1,60$  Hz (il. 30a) w fazach ruchu człowieka można zauważyć fazę przysiadu, podczas której szybkość ruchu środka ciężkości ciała  $V \approx 0,0$  [m/s]. Siła reakcji podłoża generowana w tej fazie odpowiada ciężarowi skaczącej osoby. Przebieg VGRF jest przebiegiem dwuwierzchołkowym. Pierwszy wierzchołek przebiegu VGRF powstaje w fazie lądowania, drugi w fazie wybicia z przysiadu.

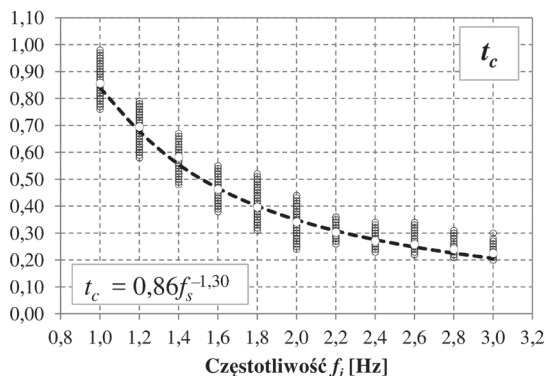
W przypadku skoków wykonywanych z częstotliwością  $f_j = 2,0$  Hz faza przysiadu nie występuje (il. 30b). Przebieg VGRF jest przebiegiem jednowierzchołkowym o kształcie zbliżonym do krzywej dzwonowej.



Il. 30. Fazy ruchu ciała człowieka podczas wykonywaniu skoków z częstotliwością:

a)  $f_j = 1,0$  Hz, b)  $f_j = 2,0$  Hz (opracowanie własne)

Na ilustracji 31 pokazano zmienność wartości czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_c$  w funkcji częstotliwości skoków  $f_j$  wraz z linią trendu. Białymi punktami na wykresie oznaczono średnie wartości czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem (wynik badań własnych).

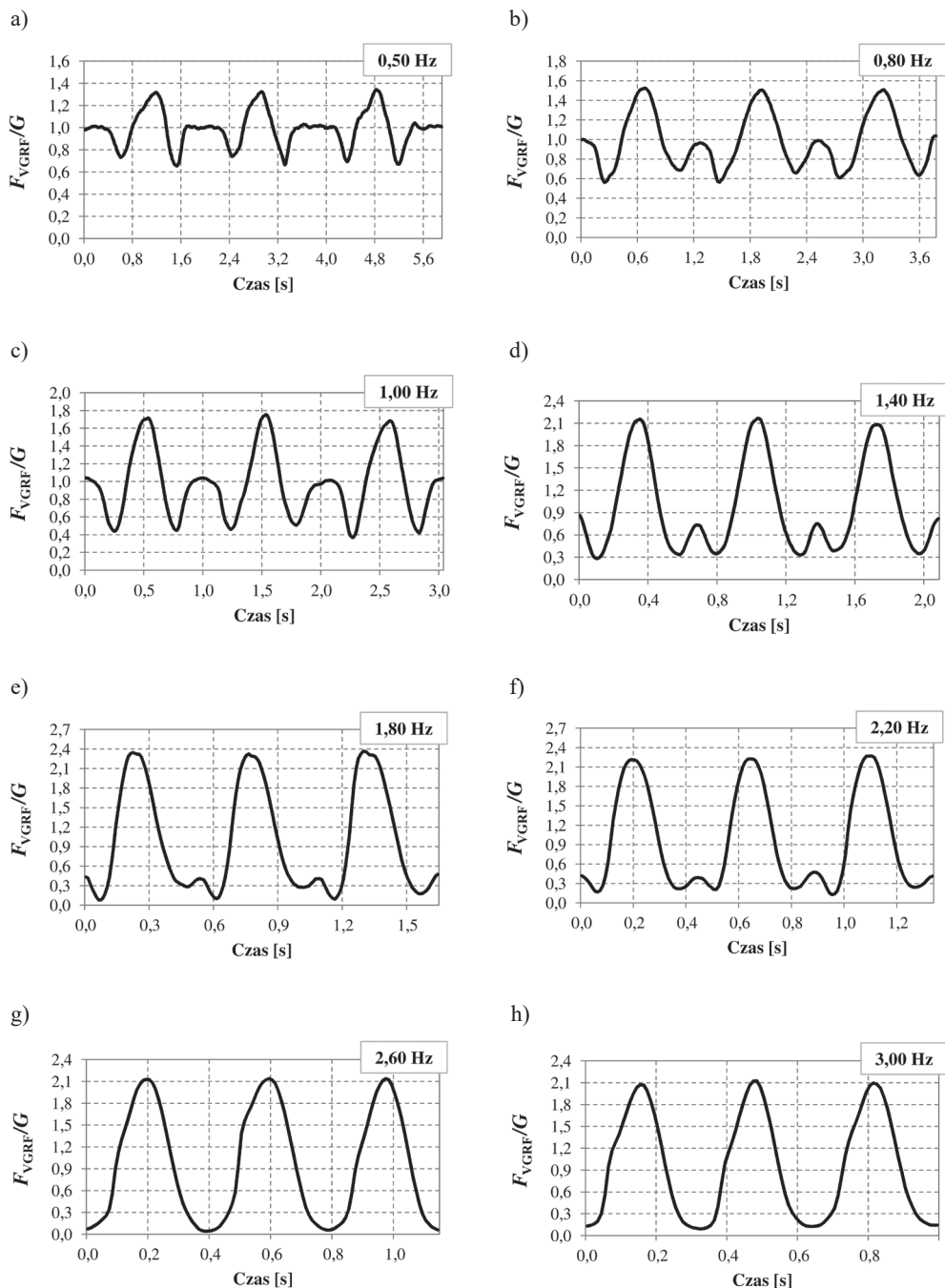


Il. 31. Czas kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_c$  w funkcji częstotliwości skoków  $f_j$  (wyniki badań własnych)

Analizując przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  (przedstawione na il. 28) pod kątem wartości czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem, można zauważyć odwrotnie proporcjonalną zależność między czasem kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_c$  oraz amplitudą siły  $F_{\text{VGRF}}/G$ . Analiza korelacji amplitudy siły  $F_{\text{VGRF}}/G$  i czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem  $t_c$  wykazała silną korelację ujemną między tymi zmiennymi (współczynnik korelacji  $|r| = 0,48-0,93$ ). Oznacza to, że wydłużenie czasu kontaktu stopy z podłożem podczas skoków prowadzi do zmniejszenia wartości amplitudy  $F_{\text{VGRF}}/G$  i odwrotnie.

#### 4.2.2. Analiza przebiegów $F_{\text{VGRF}}/G$ generowanych podczas przysiadów

We wcześniejszym podrozdziale 4.2 (il. 29) zobrazowano przebiegi czasowe pojedynczych impulsów unormowanej pionowej składowej sił reakcji podłoża  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowane podczas następujących po sobie przysiadów wykonywanych z częstotliwością  $f_{sq} = 0,50-3,00$  Hz. Prezentowane pojedyncze impulsy siły wyodrębniono z zarejestrowanego ciągłego przebiegu siły  $F_{\text{VGRF}}/G$ . Na ilustracji 32 przedstawiono przykładowe przebiegi obejmujące trzy następujące po sobie przysiady. Zestawienie to pozwala zauważyć zmiany geometrii przebiegów wraz ze zmianą częstotliwości przysiadów.



Il. 32. Przebiegi czasowe unormowanej pionowej składowej sił reakcji podłoża  $F_{VGRF}/G$  dla trzech kolejnych następujących po sobie przysiadów (wyniki badań własnych)

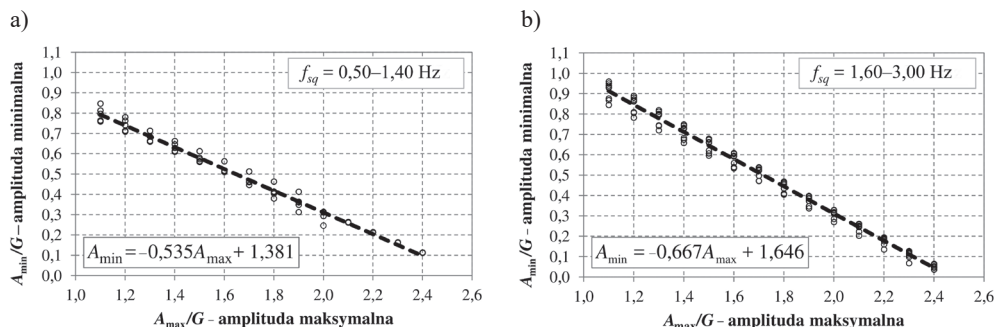


W przypadku przysiadów wykonywanych w wolnym tempie  $f_{sq} \leq 1,20$  Hz pomiędzy kolejnymi przysiadami widoczna jest faza, w trakcie której unormowana pionowa składowa sił reakcji podłoża  $F_{VGRF}/G$  wynosi około 1,0. Jest to krótkotrwała faza statyczna, w trakcie której pionowa składowa sił reakcji podłoża równa jest ciężarowi osoby wykonującej przysiady. Faza ta zanika wraz ze wzrostem tempa wykonywania przysiadów (wzrostem częstotliwości przysiadów). Przy częstotliwościach przysiadów  $f_{sq} \geq 1,80$  Hz przebiegi pionowej składowej sił reakcji podłoża zbliżone są do przebiegów krzywej sinusoidalnej (patrz il. 8, 26, 29). Dla  $f_{sq} \geq 1,80$  Hz ruch środka ciężkości ciała osoby wykonującej przysiady przypomina ruch masy zawieszonyj na sprężynie. Sprężyną tą (lub sprężynami) są kończyny dolne osoby wykonującej przysiady.

Przebiegi siły generowanej podczas przysiadów wykonywanych w wolnym tempie  $f_{sq} \leq 1,20$  Hz mają charakter impulsów rozdzielonych obciążeniem statycznym, odpowiadającym ciężarowi osoby wykonującej przysiady (porównaj il. 6). Pierwsza połowa przebiegów czasowych tych impulsów ma geometrię odpowiadającą geometrii siły reakcji podłoża generowanej przez osobę wykonującą wyskok w miejscu z pozycji stojącej (wyskok dosiężny, ang. *countermovement jump*) w fazie wykonywania „zejścia w dół” (przysiadu), pozwalającego osobie skaczącej wybić się do wysokości [48].

Analizując przebiegi sił  $F_{VGRF}/G$ , generowane podczas przysiadów, warto zauważyć, że maksymalna wartość siły występuje w chwili największego przemieszczenia ciała w dół. Wartość minimalna  $F_{VGRF}/G$  występuje w chwili największego przemieszczenia ciała w górę (w chwili maksymalnego uniesienia ciała), powodującego zmniejszenie nacisku stóp na podłoże.

Na ilustracji 33 przedstawiono linie trendu obrazujące zależność między średnimi wartościami maksymalnych ( $A_{max}$ ) i minimalnych ( $A_{min}$ ) amplitud  $F_{VGRF}/G$  dla przysiadów wykonywanych z częstotliwościami  $f_{sq} = 0,50-1,40$  Hz i  $f_{sq} = 1,60-3,00$  Hz (wyniki badań własnych). Dwa przedziały częstotliwości przysiadów wyodrębniono z uwagi na wyraźną zmianę przebiegu linii trendu w tych przedziałach częstotliwości.



Il. 33. Zależność między maksymalną ( $A_{max}/G$ ) i minimalną ( $A_{min}/G$ ) amplitudą  $F_{VGRF}/G$  dla przysiadów o częstotliwości: a)  $f_{sq} = 0,50-1,40$  Hz, b)  $f_{sq} = 1,60-3,00$  Hz (wyniki badań własnych)

Zarejestrowane podczas badań wartości średnie i odchylenia standardowe maksymalnych amplitud  $F_{\text{VGRF}}/G$  dla poszczególnych częstotliwości przysiadów wyniosły dla:  $f_{sq} = 0,50 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 1,317 \pm 0,103$ ;  $f_{sq} = 0,80 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 1,563 \pm 0,112$ ;  $f_{sq} = 1,00 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 1,727 \pm 0,122$ ;  $f_{sq} = 1,20 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 1,878 \pm 0,177$ ;  $f_{sq} = 1,40 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 2,025 \pm 0,204$ ;  $f_{sq} = 1,60 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 1,969 \pm 0,199$ ;  $f_{sq} = 1,80 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 2,142 \pm 0,181$ ;  $f_{sq} = 2,00 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 2,014 \pm 0,220$ ;  $f_{sq} = 2,20 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 1,952 \pm 0,208$ ;  $f_{sq} = 2,40 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 1,986 \pm 0,214$ ;  $f_{sq} = 2,60 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 2,060 \pm 0,170$ ;  $f_{sq} = 2,80 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 1,973 \pm 0,167$ ;  $f_{sq} = 3,00 \text{ Hz}$   $A_{\text{max}} = 2,008 \pm 0,170$ .

Analiza korelacji wartości maksymalnych i minimalnych amplitud  $F_{\text{VGRF}}/G$  wskazała na silną (do bardzo silnej) korelację ujemną między tymi parametrami w całym analizowanym przedziale częstotliwości przysiadów  $f_{sq} \geq 0,50\text{--}3,00 \text{ Hz}$  (współczynnik korelacji  $|r| = 0,67\text{--}0,92$ ). Korelacja ujemna oznacza, iż wzrost maksymalnej wartości  $F_{\text{VGRF}}/G$  pociąga za sobą zmniejszenie minimalnej wartości  $F_{\text{VGRF}}/G$  i odwrotnie. Wartość współczynnika korelacji wzrastała wraz ze zwiększaniem się częstotliwości przysiadów.

### 4.3. Własne modele obciążeń VGRF

W tym podrozdziale zaprezentowano własne propozycje sposobu modelowania pionowej składowej sił reakcji podłoża (VGRF) generowanej podczas wykonywania cyklicznych skoków w miejscu oraz cyklicznych przysiadów częściowych w miejscu.

Głównym założeniem przyjętej metodyki modelowania przebiegów VGRF było odwzorowanie pojedynczych impulsów VGRF generowanych w trakcie analizowanej aktywności ruchowej.

Własne modele pionowej składowej sił reakcji podłoża opracowano wykorzystując metodę interpolacji krzywych za pomocą funkcji sklepanych 3-go stopnia z kontrolą kształtu (ang. *piecewise shape-preserving cubic interpolation*). W tym celu sygnały VGRF zarejestrowane podczas badań laboratoryjnych poddano parametryzacji poprzez wyznaczenie położenia węzłów interpolacji. Położenie każdego z węzłów interpolacji opisano dwiema współrzędnymi: unormowaną amplitudą siły oraz czasem jej występowania. Analizie poddano unormowane i przefiltrowane przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  (filtr Butterwortha, rząd: 2, częstotliwość odcięcia: 40,0 Hz).

Lokalizację punktów parametryzujących przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  przedstawiono na il. 34 dla skoków i il. 35 dla przysiadów. Przyjęto:

- 13 punktów parametryzujących dwuwierzchołkową krzywą  $F_{\text{VGRF}}/G$ , generowaną podczas cyklicznych skoków w miejscu z częstotliwością  $f_j < 1,40 \text{ Hz}$  (il. 34a);
- 9 punktów parametryzujących jednowierzchołkową krzywą  $F_{\text{VGRF}}/G$ , generowaną podczas cyklicznych skoków w miejscu z częstotliwością  $f_j \geq 1,40 \text{ Hz}$  (il. 34b);

- 13 punktów parametryzujących krzywą  $F_{\text{VGRF}}/G$ , generowaną podczas cyklicznych przysiadów częściowych w miejscu z częstotliwością  $f_{sq} < 2,00$  Hz. Punkty parametryzujące krzywą  $F_{\text{VGRF}}/G$  ustalono w czterech przedziałach krzywej wyznaczonych przez punkty jej lokalnych ekstremów  $P_3, P_6, P_9$  (il. 35a);
- 13 punktów parametryzujących krzywą  $F_{\text{VGRF}}/G$ , generowaną podczas cyklicznych przysiadów częściowych w miejscu z częstotliwością  $f_{sq} \geq 2,00$  Hz. Punkty parametryzujące krzywą  $F_{\text{VGRF}}/G$  ustalono w dwóch przedziałach krzywej wyznaczonych przez punkt  $P_6$  (il. 35b);

Szczegółowe informacje dotyczące parametryzacji krzywych  $F_{\text{VGRF}}/G$  przedstawiono w dalszych rozdziałach pracy.

Warto zauważyć, że zaproponowany sposób odwzorowania przebiegów VGRF za pomocą funkcji sklepanych jest bardzo łatwy do praktycznej implementacji. Przebiegi VGRF można odwzorować wykorzystując dostępne programy komputerowe do obliczeń numerycznych i inżynierskich (np. bezpłatne środowisko obliczeniowo-programistyczne GNU Octave lub komercyjne środowisko obliczeniowo-programistyczne MATLAB). Możliwe jest także opracowanie własnego programu komputerowego. Przykłady programów w języku programowania Python oraz Visual Basic dla Aplikacji (VBA) przedstawiono w odrębnej monografii autora, poświęconej modelowaniu obciążeń VGRF generowanych podczas chodu i biegu [58].

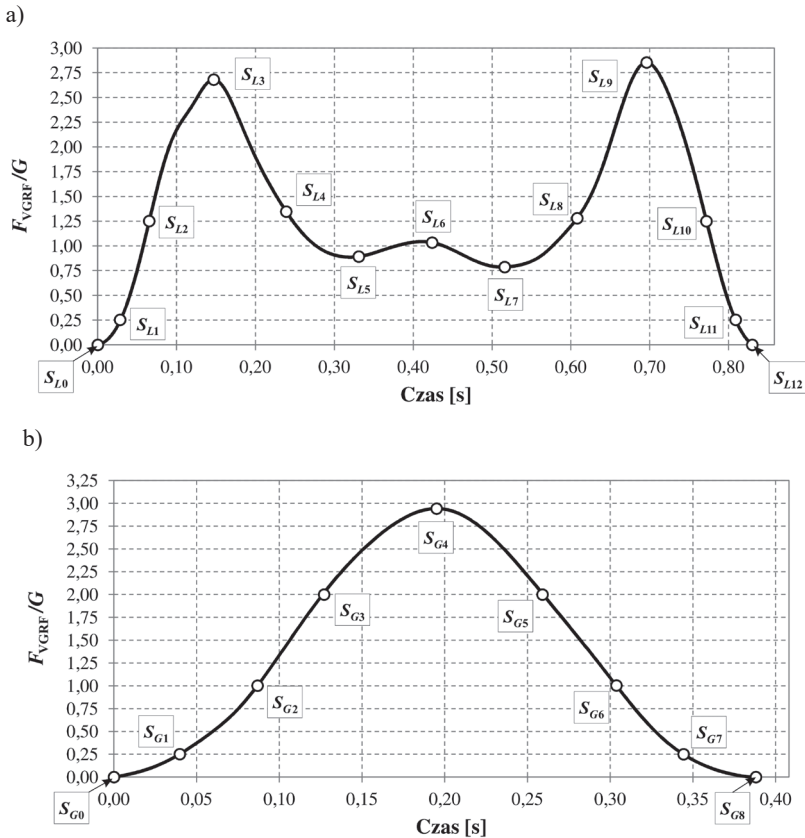
#### 4.3.1. Modele sił VGRF generowanych podczas skoków

Na ilustracji 28 można zauważyć, że geometria czasowych przebiegów pionowej składowej sił reakcji podłoża, generowanych podczas skoków, zmienia się wraz z częstotliwością ich wykonywania. Z tego powodu unormowane czasowe przebiegi pionowej składowej sił reakcji podłoża  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowane podczas skoków sparametryzowano różną liczbą punktów w zależności od częstotliwości skoków. Na ilustracji 34 zaprezentowano lokalizację punktów parametryzujących krzywe  $F_{\text{VGRF}}/G$  o geometrii dwuwierchołkowej, występującej przy częstotliwości skoków  $f_j < 1,40$  Hz (il. 34a) oraz krzywe o geometrii jednowierchołkowej, występującej przy częstotliwości skoków  $f_j \geq 1,40$  Hz (il. 34b).

Analiza il. 28 pokazuje, że w przedziale częstotliwości  $f_j = 1,40\text{--}1,80$  Hz występują krzywe  $F_{\text{VGRF}}/G$  o zróżnicowanej geometrii jedno- i dwuwierchołkowej. Jak wspomniano w podrozdziale 4.2.1, jednowierchołkowe przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  są przebiegami pozwalającymi na wyznaczenie maksymalnych wartości przyspieszeń drgań konstrukcji. Dlatego dla  $f_j > 1,20$  Hz opracowano modele jednowierchołkowych krzywych  $F_{\text{VGRF}}/G$ .

Przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  o geometrii odpowiadającej krzywej przedstawionej na il. 34a (krzywa dwuwierchołkowa w kształcie litery  $M$ ) sparametryzowano za pomocą 13 punktów  $S_{L0}\text{--}S_{L12}$ . Położenie każdego punktu opisano dwiema współrzędnymi:

unormowaną amplitudą siły  $A_{SLi}/G$  oraz czasem jej występowania  $t_{SLi}$ . W modelu przyjęto stałe wartości amplitud siły dla punktów  $S_{L0}, S_{L1}, S_{L2}, S_{L10}, S_{L11}, S_{L12}$ , wynoszące odpowiednio:  $A_{SL0}/G = A_{SL12}/G = 0,00$ ;  $A_{SL1}/G = A_{SL11}/G = 0,25$ ;  $A_{SL2}/G = A_{SL10}/G = 1,25$ . Przedział między punktami  $S_{L3}$  i  $S_{L9}$  (przedział czasowy  $t_{SL3} - t_{SL9}$ ) podzielono na sześć równych odcinków czasowych.



Il. 34. Lokalizacja punktów parametryzujących czasowy przebieg unormowanej pionowej składowej sił reakcji podłoża  $F_{VGRF}/G$ : a) o geometrii dwuwierzchołkowej  $f < 1,40$  Hz, b) o geometrii jednowierzchołkowej  $f \geq 1,40$  Hz (opracowanie własne)

Przebiegi  $F_{VGRF}/G$  o geometrii nakreślonej na il. 34b (krzywa jednowierzchołkowa o kształcie zbliżonym do kształtu krzywej dzwonowej), występujące podczas skoków o częstotliwości  $f_j \geq 1,40$  Hz, sparametryzowano za pomocą 9 punktów  $S_{G0} - S_{G8}$ . Położenie punktów opisano unormowaną amplitudą siły  $A_{SGi}/G$  oraz czasem jej występowania  $t_{SGi}$ . W modelu przyjęto stałe wartości amplitud siły dla punktów  $S_{G0}, S_{G1}, S_{G2}, S_{G3}, S_{G5}, S_{G6}, S_{G7}, S_{G8}$ , wynoszące odpowiednio:  $A_{SG0}/G = A_{SG8}/G = 0,00$ ;  $A_{SG1}/G = A_{SG7}/G = 0,25$ ;  $A_{SG2}/G = A_{SG6}/G = 1,00$ ;  $A_{SG3}/G = A_{SG5}/G = 2,00$ .

W opracowanych modelach unormowanych krzywych  $F_{\text{VGRF}}/G$ , generowanych podczas skoków, położenie punktów parametryzujących przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  wyznaczono przy założeniu uzyskania amplitudy pierwszej składowej widma ESD<sup>1</sup> zamodelowanego ciągłego sygnału  $F_{\text{VGRF}}/G$  większej o 10% od maksymalnej amplitudy pierwszej składowej widma ESD ciągłego sygnału  $F_{\text{VGRF}}/G$  zarejestrowanego podczas badań laboratoryjnych. W analizach wykorzystano ciągłe sygnały  $F_{\text{VGRF}}/G$  złożone z 15 impulsów unormowanych sił  $F_{\text{VGRF}}/G$ . Szczegóły analiz ESD sygnałów  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanych podczas skoków przedstawiono w rozdziale piątym.

W tabelach 7–17 zamieszczono wartości współrzędnych punktów parametryzujących przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowane podczas skoków z częstotliwością  $f_j = 1,00\text{--}3,00$  Hz. Opracowane modele krzywych  $F_{\text{VGRF}}/G$  spełniają przyjęte założenie dotyczące amplitudy pierwszej składowej spektrum ESD w całym analizowanym przedziale częstotliwości skoków.

Tabela 7. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_s = 1,00$  Hz (opracowanie własne)

$f_j = 1,00$ Hz	Czas $t_{SLi}$ [s] występowania punktu $S_{Li}$	Unormowana amplituda siły $A_{SLi}/G$ [-] w punkcie $S_{Li}$
$S_{L0}$	0,000	0,000
$S_{L1}$	0,031	0,250
$S_{L2}$	0,074	1,250
$S_{L3}$	0,133	2,577
$S_{L4}$	0,228	1,662
$S_{L5}$	0,324	1,171
$S_{L6}$	0,419	1,091
$S_{L7}$	0,506	1,144
$S_{L8}$	0,592	1,487
$S_{L9}$	0,679	2,561
$S_{L10}$	0,758	1,250
$S_{L11}$	0,801	0,250
$S_{L12}$	0,822	0,000

<sup>1</sup> Widmo ESD – widmowa gęstości energii, widmo energii (ang. *Energy Spectral Density*).

Tabela 8. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_s = 1,20$  Hz (opracowanie własne)

$f_j = 1,20$ Hz	Czas $t_{SLi}$ [s] występowania punktu $S_{Li}$	Unormowana amplituda siły $A_{SLi}/G$ [-] w punkcie $S_{Li}$
$S_{L0}$	0,000	0,000
$S_{L1}$	0,031	0,250
$S_{L2}$	0,074	1,250
$S_{L3}$	0,142	2,664
$S_{L4}$	0,207	1,993
$S_{L5}$	0,271	1,524
$S_{L6}$	0,336	1,354
$S_{L7}$	0,395	1,519
$S_{L8}$	0,455	1,988
$S_{L9}$	0,514	2,517
$S_{L10}$	0,581	1,250
$S_{L11}$	0,618	0,250
$S_{L12}$	0,642	0,000

Tabela 9. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_s = 1,40$  Hz (opracowanie własne)

$f_j = 1,40$ Hz	Czas $t_{SGi}$ [s] występowania punktu $S_{Gi}$	Unormowana amplituda siły $A_{SGi}/G$ [-] w punkcie $S_{Gi}$
$S_{G0}$	0,000	0,000
$S_{G1}$	0,031	0,250
$S_{G2}$	0,069	1,000
$S_{G3}$	0,128	2,000
$S_{G4}$	0,240	2,707
$S_{G5}$	0,345	2,000
$S_{G6}$	0,401	1,000
$S_{G7}$	0,435	0,250
$S_{G8}$	0,458	0,000

Tabela 10. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_s = 1,60$  Hz (opracowanie własne)

$f_j = 1,60$ Hz	Czas $t_{SGi}$ [s] występowania punktu $S_{Gi}$	Unormowana amplituda siły $A_{SGi}/G$ [-] w punkcie $S_{Gi}$
$S_{G0}$	0,000	0,000
$S_{G1}$	0,030	0,250
$S_{G2}$	0,069	1,000
$S_{G3}$	0,114	2,000
$S_{G4}$	0,220	2,991
$S_{G5}$	0,323	2,000
$S_{G6}$	0,368	1,000
$S_{G7}$	0,407	0,250
$S_{G8}$	0,431	0,000

Tabela 11. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_s = 1,80$  Hz (opracowanie własne)

$f_j = 1,80$ Hz	Czas $t_{SGi}$ [s] występowania punktu $S_{Gi}$	Unormowana amplituda siły $A_{SGi}/G$ [-] w punkcie $S_{Gi}$
$S_{G0}$	0,000	0,000
$S_{G1}$	0,027	0,250
$S_{G2}$	0,059	1,000
$S_{G3}$	0,089	2,000
$S_{G4}$	0,174	3,455
$S_{G5}$	0,264	2,000
$S_{G6}$	0,298	1,000
$S_{G7}$	0,330	0,250
$S_{G8}$	0,353	0,000

Tabela 12. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_s = 2,00$  Hz (opracowanie własne)

$f_j = 2,00$ Hz	Czas $t_{SGi}$ [s] występowania punktu $S_{Gi}$	Unormowana amplituda siły $A_{SGi}/G$ [-] w punkcie $S_{Gi}$
$S_{G0}$	0,000	0,000
$S_{G1}$	0,022	0,250

cd. tab. 12

$S_{G2}$	0,047	1,000
$S_{G3}$	0,073	2,000
$S_{G4}$	0,139	4,093
$S_{G5}$	0,215	2,000
$S_{G6}$	0,244	1,000
$S_{G7}$	0,271	0,250
$S_{G8}$	0,292	0,000

Tabela 13. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_s = 2,20$  Hz (opracowanie własne)

$f_j = 2,20$ Hz	Czas $t_{SGi}$ [s] występowania punktu $S_{Gi}$	Unormowana amplituda siły $A_{SGi}/G$ [-] w punkcie $S_{Gi}$
$S_{G0}$	0,000	0,000
$S_{G1}$	0,028	0,250
$S_{G2}$	0,057	1,000
$S_{G3}$	0,078	2,000
$S_{G4}$	0,136	3,981
$S_{G5}$	0,205	2,000
$S_{G6}$	0,231	1,000
$S_{G7}$	0,254	0,250
$S_{G8}$	0,271	0,000

Tabela 14. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_s = 2,40$  Hz (opracowanie własne)

$f_j = 2,40$ Hz	Czas $t_{SGi}$ [s] występowania punktu $S_{Gi}$	Unormowana amplituda siły $A_{SGi}/G$ [-] w punkcie $S_{Gi}$
$S_{G0}$	0,000	0,000
$S_{G1}$	0,025	0,250
$S_{G2}$	0,049	1,000
$S_{G3}$	0,069	2,000
$S_{G4}$	0,121	3,979
$S_{G5}$	0,188	2,000



cd. tab. 14

$S_{G6}$	0,214	1,000
$S_{G7}$	0,241	0,250
$S_{G8}$	0,261	0,000

Tabela 15. Model unormowanej krzywej  $F_{VGRF}/G$  generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_s = 2,60$  Hz (opracowanie własne)

$f_j = 2,60$ Hz	Czas $t_{SGi}$ [s] występowania punktu $S_{Gi}$	Unormowana amplituda siły $A_{SGi}/G$ [-] w punkcie $S_{Gi}$
$S_{G0}$	0,000	0,000
$S_{G1}$	0,022	0,250
$S_{G2}$	0,045	1,000
$S_{G3}$	0,064	2,000
$S_{G4}$	0,112	3,967
$S_{G5}$	0,173	2,000
$S_{G6}$	0,198	1,000
$S_{G7}$	0,224	0,250
$S_{G8}$	0,241	0,000

Tabela 16. Model unormowanej krzywej  $F_{VGRF}/G$  generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_s = 2,80$  Hz (opracowanie własne)

$f_j = 2,80$ Hz	Czas $t_{SGi}$ [s] występowania punktu $S_{Gi}$	Unormowana amplituda siły $A_{SGi}/G$ [-] w punkcie $S_{Gi}$
$S_{G0}$	0,000	0,000
$S_{G1}$	0,018	0,250
$S_{G2}$	0,040	1,000
$S_{G3}$	0,060	2,000
$S_{G4}$	0,102	3,885
$S_{G5}$	0,157	2,000
$S_{G6}$	0,185	1,000
$S_{G7}$	0,211	0,250
$S_{G8}$	0,225	0,000

Tabela 17. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas skoków z częstotliwością  $f_s = 3,00$  Hz (opracowanie własne)

$f_j = 3,00$ Hz	Czas $t_{SGi}$ [s] występowania punktu $S_{Gi}$	Unormowana amplituda siły $A_{SGi}/G$ [-] w punkcie $S_{Gi}$
$S_{G0}$	0,000	0,000
$S_{G1}$	0,017	0,250
$S_{G2}$	0,040	1,000
$S_{G3}$	0,060	2,000
$S_{G4}$	0,097	3,891
$S_{G5}$	0,151	2,000
$S_{G6}$	0,175	1,000
$S_{G7}$	0,197	0,250
$S_{G8}$	0,212	0,000

Przebiegi czasowe unormowanych sił  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanych podczas skoków, wyznaczone na bazie danych zaprezentowanych w tab. 7–17, przedstawiono w podrozdziale 4.3.3 (il. 36). Należy pamiętać, że w opracowanym modelu sił  $F_{\text{VGRF}}/G$  amplitudy sił reakcji podłoża są wartościami unormowanymi w stosunku do ciężaru osoby skaczącej  $G$ . W celu wygenerowania przebiegów  $F_{\text{VGRF}}$ , odpowiadających rzeczywistemu ciężarowi osoby skaczącej  $G$ , unormowane przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  należy przemnożyć przez ciężar osoby skaczącej  $G$  ( $F_{\text{VGRF}} = G \cdot F_{\text{VGRF}}/G$ ).

Dalsze szczegóły charakteryzujące modele sił  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanych podczas skoków opisano w rozdziale 5, poświęconym walidacji modeli sił  $F_{\text{VGRF}}/G$ .

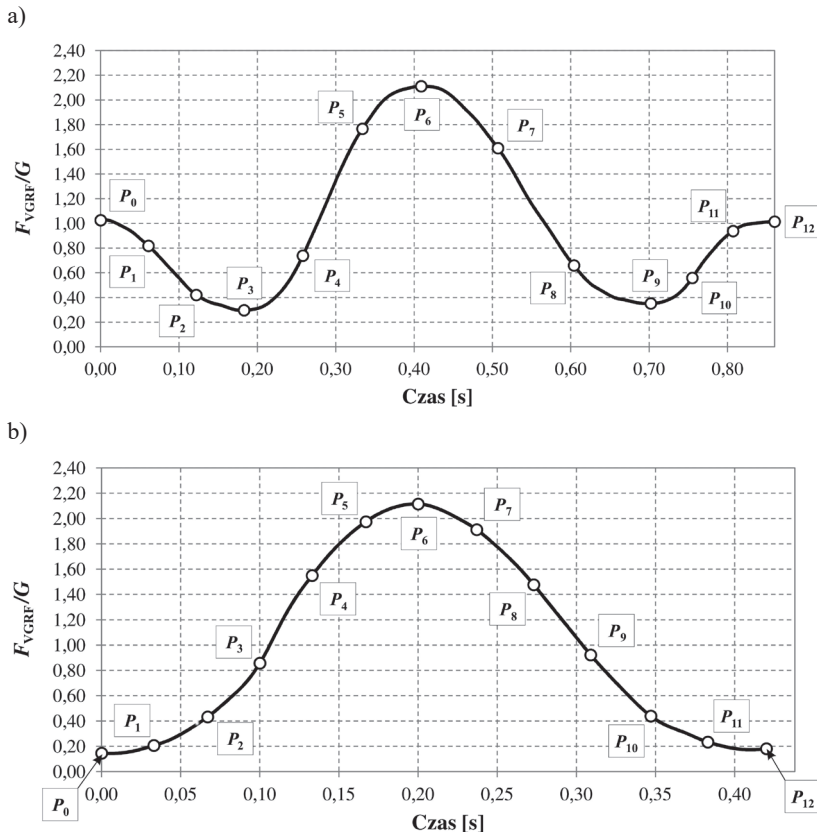
#### 4.3.2. Modele sił VGRF generowanych podczas przysiadów

W niniejszym podrozdziale przedstawiono wyniki parametryzacji krzywych VGRF generowanych podczas wykonywania następujących po sobie (cyklicznych) przysiadów częściowych z częstotliwością  $f_{sq} = 0,50$ – $3,00$  Hz (charakterystyka przysiadów – patrz podrozdział 2.2).

Geometria czasowych przebiegów krzywych VGRF generowanych podczas przysiadów zmienia się wraz z częstotliwością przysiadów (por. il. 8, 10, 26, 29). Z tego powodu unormowane czasowe przebiegi pionowej składowej sił reakcji podłoża  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowane podczas przysiadów sparametryzowano na dwa różne sposoby, w zależności od częstotliwości przysiadów. Krzywe VGRF generowane podczas cyklicznych przysiadów częściowych wykonywanych z częstotliwością  $f_{sq} < 2,00$  Hz podzielono na cztery odcinki względem punktów lokalnych ekstremów  $P_3, P_6, P_9$

(il. 35a, odcinki  $P_0-P_3$ ,  $P_3-P_6$ ,  $P_6-P_9$ ,  $P_9-P_{12}$ ). Każdy z tak wyznaczonych odcinków krzywej VGRF sparametryzowano czterema punktami (punkt początkowy, dwa punkty pośrednie i punkt końcowy), rozmieszczonymi w równych odstępach czasowych. Punkt końcowy analizowanego odcinka krzywej VGRF przyjmowano za punkt początkowy kolejnego odcinka krzywej VGRF. Krzywe VGRF generowane podczas cyklicznych przysiadów częściowych wykonywanych z częstotliwością  $f_{sq} \geq 2,00$  Hz podzielono na dwa odcinki względem punktu  $P_6$  (il. 35b, odcinki  $P_0-P_6$ ,  $P_6-P_{12}$ ). Każdy z tak wyznaczonych odcinków krzywej VGRF sparametryzowano siedmioma punktami (punkt początkowy, pięć punktów pośrednich i punkt końcowy) rozmieszczonymi w równych odstępach czasowych.

Na ilustracji 35 przedstawiono lokalizację punktów parametryzujących unormowane krzywe  $F_{VGRF}/G$  generowane podczas cyklicznych przysiadów częściowych (punkty  $P_0-P_{12}$ ).



Il. 35. Lokalizacja punktów parametryzujących czasowy przebieg unormowanej pionowej składowej sił reakcji podłoża  $F_{VGRF}/G$ , generowanej podczas: a) przysiadów częściowych z częstotliwością  $f_{sq} < 2,00$  Hz, b) przysiadów częściowych z częstotliwością  $f_{sq} \geq 2,00$  Hz (opracowanie własne)

Położenie każdego z punktów  $P_0-P_{12}$  opisano dwiema współrzędnymi: unormowaną amplitudą siły  $A_{P_i}/G$  oraz czasem jej występowania  $t_{P_i}$ . Wartości współrzędnych punktów, parametryzujących przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowane podczas przysiadów wykonywanych z częstotliwością  $f_{sq} = 0,50-3,00$  Hz, podano w tab. 18–30.

Tabela 18. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 0,50$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 0,50$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	1,000
$P_1$	0,135	1,000
$P_2$	0,271	0,906
$P_3$	0,406	0,732
$P_4$	0,603	0,944
$P_5$	0,800	1,201
$P_6$	0,997	1,346
$P_7$	1,195	1,203
$P_8$	1,392	0,936
$P_9$	1,590	0,731
$P_{10}$	1,727	0,919
$P_{11}$	1,863	1,000
$P_{12}$	2,000	1,000

Tabela 19. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 0,80$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 0,80$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,985
$P_1$	0,076	0,921
$P_2$	0,153	0,706
$P_3$	0,229	0,518
$P_4$	0,357	0,933
$P_5$	0,484	1,388
$P_6$	0,612	1,651

cd. tab. 19

$P_7$	0,752	1,387
$P_8$	0,893	0,927
$P_9$	1,033	0,541
$P_{10}$	1,105	0,813
$P_{11}$	1,178	0,944
$P_{12}$	1,250	0,985

Tabela 20. Model unormowanej krzywej  $F_{VGRF}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 1,00$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 1,00$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,955
$P_1$	0,053	0,892
$P_2$	0,105	0,634
$P_3$	0,158	0,394
$P_4$	0,267	0,886
$P_5$	0,376	1,497
$P_6$	0,485	1,837
$P_7$	0,600	1,477
$P_8$	0,716	0,863
$P_9$	0,831	0,401
$P_{10}$	0,887	0,628
$P_{11}$	0,944	0,878
$P_{12}$	1,000	0,955

Tabela 21. Model unormowanej krzywej  $F_{VGRF}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 1,20$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 1,20$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,937
$P_1$	0,045	0,814
$P_2$	0,091	0,542

cd. tab. 12

$P_3$	0,136	0,354
$P_4$	0,226	0,866
$P_5$	0,317	1,663
$P_6$	0,407	2,134
$P_7$	0,509	1,653
$P_8$	0,610	0,871
$P_9$	0,712	0,356
$P_{10}$	0,752	0,537
$P_{11}$	0,793	0,823
$P_{12}$	0,833	0,937

Tabela 22. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 1,40$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 1,40$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,778
$P_1$	0,036	0,643
$P_2$	0,072	0,418
$P_3$	0,108	0,265
$P_4$	0,183	0,856
$P_5$	0,258	1,756
$P_6$	0,334	2,275
$P_7$	0,425	1,688
$P_8$	0,517	0,828
$P_9$	0,608	0,297
$P_{10}$	0,643	0,431
$P_{11}$	0,679	0,668
$P_{12}$	0,714	0,778

Tabela 23. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 1,60$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 1,60$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,596
$P_1$	0,021	0,515
$P_2$	0,043	0,344
$P_3$	0,064	0,258
$P_4$	0,141	0,916
$P_5$	0,218	1,814
$P_6$	0,295	2,311
$P_7$	0,385	1,718
$P_8$	0,474	0,781
$P_9$	0,564	0,253
$P_{10}$	0,584	0,347
$P_{11}$	0,605	0,514
$P_{12}$	0,625	0,596

Tabela 24. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 1,80$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 1,80$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,351
$P_1$	0,019	0,301
$P_2$	0,037	0,197
$P_3$	0,056	0,151
$P_4$	0,121	0,826
$P_5$	0,186	1,827
$P_6$	0,251	2,347
$P_7$	0,336	1,747
$P_8$	0,421	0,803
$P_9$	0,506	0,146
$P_{10}$	0,522	0,201
$P_{11}$	0,539	0,304
$P_{12}$	0,555	0,351

Tabela 25. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 2,00$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 2,00$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,242
$P_1$	0,037	0,181
$P_2$	0,075	0,363
$P_3$	0,113	0,911
$P_4$	0,150	1,562
$P_5$	0,187	2,116
$P_6$	0,225	2,328
$P_7$	0,271	2,121
$P_8$	0,317	1,544
$P_9$	0,363	0,903
$P_{10}$	0,408	0,413
$P_{11}$	0,454	0,187
$P_{12}$	0,500	0,242

Tabela 26. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 2,20$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 2,20$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,116
$P_1$	0,035	0,157
$P_2$	0,071	0,394
$P_3$	0,106	0,984
$P_4$	0,141	1,643
$P_5$	0,177	2,134
$P_6$	0,212	2,324
$P_7$	0,252	2,115
$P_8$	0,293	1,591
$P_9$	0,333	0,927
$P_{10}$	0,373	0,382
$P_{11}$	0,414	0,148
$P_{12}$	0,454	0,116



Tabela 27. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 2,40$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 2,40$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,085
$P_1$	0,032	0,105
$P_2$	0,065	0,341
$P_3$	0,097	1,010
$P_4$	0,129	1,657
$P_5$	0,162	2,128
$P_6$	0,194	2,316
$P_7$	0,231	2,112
$P_8$	0,268	1,574
$P_9$	0,305	0,878
$P_{10}$	0,343	0,278
$P_{11}$	0,380	0,098
$P_{12}$	0,417	0,085

Tabela 28. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 2,60$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 2,60$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,082
$P_1$	0,030	0,124
$P_2$	0,060	0,306
$P_3$	0,089	0,945
$P_4$	0,119	1,619
$P_5$	0,149	2,108
$P_6$	0,179	2,306
$P_7$	0,213	2,091
$P_8$	0,248	1,529
$P_9$	0,282	0,857
$P_{10}$	0,316	0,304
$P_{11}$	0,351	0,121
$P_{12}$	0,385	0,082

Tabela 29. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 2,80$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 2,80$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,083
$P_1$	0,028	0,121
$P_2$	0,056	0,305
$P_3$	0,084	0,885
$P_4$	0,112	1,552
$P_5$	0,140	2,091
$P_6$	0,168	2,287
$P_7$	0,200	2,068
$P_8$	0,231	1,566
$P_9$	0,262	0,931
$P_{10}$	0,294	0,372
$P_{11}$	0,326	0,125
$P_{12}$	0,357	0,083

Tabela 30. Model unormowanej krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanej podczas przysiadów z częstotliwością  $f_{sq} = 3,00$  Hz (opracowanie własne)

$f_{sq} = 3,00$ Hz	Czas $t_{P_i}$ [s] występowania punktu $P_i$	Unormowana amplituda siły $A_{P_i}/G$ [-] w punkcie $P_i$
$P_0$	0,000	0,122
$P_1$	0,025	0,201
$P_2$	0,050	0,417
$P_3$	0,075	0,854
$P_4$	0,099	1,511
$P_5$	0,124	1,983
$P_6$	0,149	2,231
$P_7$	0,180	1,979
$P_8$	0,210	1,467
$P_9$	0,241	0,854
$P_{10}$	0,272	0,412
$P_{11}$	0,302	0,206
$P_{12}$	0,333	0,122

W zaproponowanym modelu cyklicznych przysiadów częściowych przyjęto czas wykonywania pojedynczego przysiadu  $t_{p12}$  (czas występowania punktu  $P_{12}$ ) jako równy okresowi przysiadów  $t_{p12} = T_{sq} = 1/f_{sq}$ . Ponadto, w celu zachowania ciągłości krzywej  $F_{VGRF}/G$ , unormowane amplitudy  $F_{VGRF}/G$  w punktach  $P_0$  i  $P_{12}$ , tzn.  $A_{P_0}/G$  i  $A_{P_{12}}/G$ , wyznaczono przyjmując dane zarejestrowane dla czasu  $t_{p_0} = 0,0$  s (początek przysiadu) oraz  $t_{p12} = 1/f_{sq}$  s (koniec przysiadu) jako jeden łączny zestaw danych. W ten sposób wartości amplitud  $A_{P_0}/G$  i  $A_{P_{12}}/G$  w punktach  $P_0$  i  $P_{12}$  są sobie równe.

W opracowanych modelach unormowanych krzywych  $F_{VGRF}/G$ , generowanych podczas przysiadów, położenia punktów parametryzujących przebiegi  $F_{VGRF}/G$  wyznaczono przy założeniu uzyskania amplitudy pierwszej składowej widma ESD ciągłego sygnału  $F_{VGRF}/G$ , wygenerowanego z wykorzystaniem opracowanego modelu, większej o 10% od maksymalnej amplitudy pierwszej składowej widma ESD ciągłego sygnału  $F_{VGRF}/G$  zarejestrowanego podczas badań laboratoryjnych. W analizach wykorzystano ciągłe sygnały  $F_{VGRF}/G$  złożone z 15 impulsów unormowanych sił  $F_{VGRF}/G$ . Szczegóły analiz ESD sygnałów  $F_{VGRF}/G$  generowanych podczas przysiadów omówiono w rozdziale piątym.

### 4.3.3. Interpolacja przebiegów VGRF za pomocą splajnów kubicznych z kontrolą kształtu

Istnieje wiele metod interpolacji przebiegu krzywej obrazującej zmienność badanego procesu opracowanych i rozwijanych w ramach obszernych działów matematyki, jakimi są metody numeryczne i teoria aproksymacji [19, 21, 32, 38, 50, 62, 67, 72]. Dalsze działania autora niniejszej monografii są ukierunkowane na wykorzystanie sześciennych krzywych sklepanych (splajnów kubicznych), w szczególności splajnów kubicznych z kontrolą kształtu (ang. *shape-preserving interpolation splines*) [1, 2, 3, 16, 22, 23, 30, 33, 34, 40, 42–44, 46, 51, 52, 73, 75, 76], do odwzorowania przebiegów czasowych pionowych składowych sił reakcji podłoża (VGRF) generowanych przez człowieka podczas skoków i przysiadów.

Wykorzystanie interpolacji przebiegu krzywych VGRF za pomocą splajnów kubicznych z kontrolą kształtu pozwala uniknąć oscylacji i gwałtownych zmian wartości wielomianu interpolacyjnego między węzłami interpolacji.

Poniżej przedstawiono założenia obowiązujące w przypadku konstruowania funkcji interpolacyjnej za pomocą splajnów kubicznych z kontrolą kształtu [44].

#### Założenia przyjęte w celu utworzenia splajnów kubicznych z kontrolą kształtu

- krzywe interpolacyjne są wielomianami trzeciego stopnia:

$$f_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j \quad (32)$$

- krzywe interpolacyjne przechodzą przez wszystkie punkty węzłowe (czyli krzywe interpolacyjne połączone są w punktach węzłowych):

$$f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i) = y_i \quad (33)$$

- wartości pierwszych pochodnych funkcji interpolacyjnych po obu stronach węzła interpolacji są sobie równe (tzn. nachylenia linii stycznej do krzywych interpolacyjnych są takie same po obu stronach punktu węzłowego):

$$f'_i(x_i) = f'_{i+1}(x_i) \quad (34)$$

- wartości pierwszych pochodnych funkcji interpolacyjnych po obu stronach węzła są sobie równe i przyjmują wartość  $f'(x_i)$ , wyrażoną równaniem (36) dla pośrednich węzłów interpolacji oraz równaniami (37) i (38) odpowiednio dla pierwszego i ostatniego węzła interpolacji:

$$f'_i(x_i) = f'_{i+1}(x_i) = f'(x_i) \quad (35)$$

$$f'(x_i) = \begin{cases} \frac{2}{\frac{x_{i+1} - x_i}{y_{i+1} - y_i} + \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}} \\ 0 \quad \text{gdy pochodna zmienia w węźle znak} \end{cases} \quad (36)$$

$$f'_1(x_0) = \frac{3(y_1 - y_0)}{2(x_1 - x_0)} - \frac{f'(x_1)}{2} \quad (37)$$

$$f'_j(x_j) = \frac{3(y_j - y_{j-1})}{2(x_j - x_{j-1})} - \frac{f'(x_{j-1})}{2} \quad (38)$$

- wartości drugich pochodnych funkcji interpolacyjnych w dwóch sąsiednich węzłach interpolacji wynoszą:

$$f''_i(x_{i-1}) = -\frac{2[f'_i(x_i) + 2f'_i(x_{i-1})]}{(x_i - x_{i-1})} + \frac{6(y_i - y_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2} \quad (39)$$

$$f''_i(x_i) = \frac{2[2f'_i(x_i) + f'_i(x_{i-1})]}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{6(y_i - y_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2} \quad (40)$$

- wartości drugich pochodnych funkcji interpolacyjnych w początkowym i końcowym węźle interpolacji są równe zero:

$$f_1''(x_i) = f_n''(x_i) = 0 \quad (41)$$

gdzie:  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), \dots, (x_n, y_n)$  – współrzędne węzłów interpolacji,  $f_i$  – funkcja interpolacyjna po lewej stronie węzła interpolacji o współrzędnych  $(x_i, y_i)$ , przyjmująca dla  $x_i$  wartość  $f_i(x_i) = y_i$ ,  $f_{i+1}$  – funkcja interpolacyjna po prawej stronie węzła interpolacji o współrzędnych  $(x_i, y_i)$  przyjmująca dla  $x_i$  wartość  $f_{i+1}(x_i) = y_i$ ,  $j$  – numer przedziału interpolacji  $j = 1, 2, \dots, m-1$ ,  $m$  – liczba węzłów interpolacji.

Warunek (36) wyprowadzono przyjmując, że pochylenie stycznej do krzywej interpolacyjnej determinowane jest przez prostą łączącą sąsiednie węzły interpolacji.

Równania (42)–(45) przedstawiają wzory rekurencyjne, pozwalające wyznaczyć współczynniki splajnów kubicznych z kontrolą kształtu występujące w równaniu (32):

$$a_j = \frac{f_j''(x_j) - f_j''(x_{j-1})}{6(x_j - x_{j-1})} \quad (42)$$

$$b_j = \frac{x_j f_j''(x_{j-1}) - x_{j-1} f_j''(x_j)}{2(x_j - x_{j-1})} \quad (43)$$

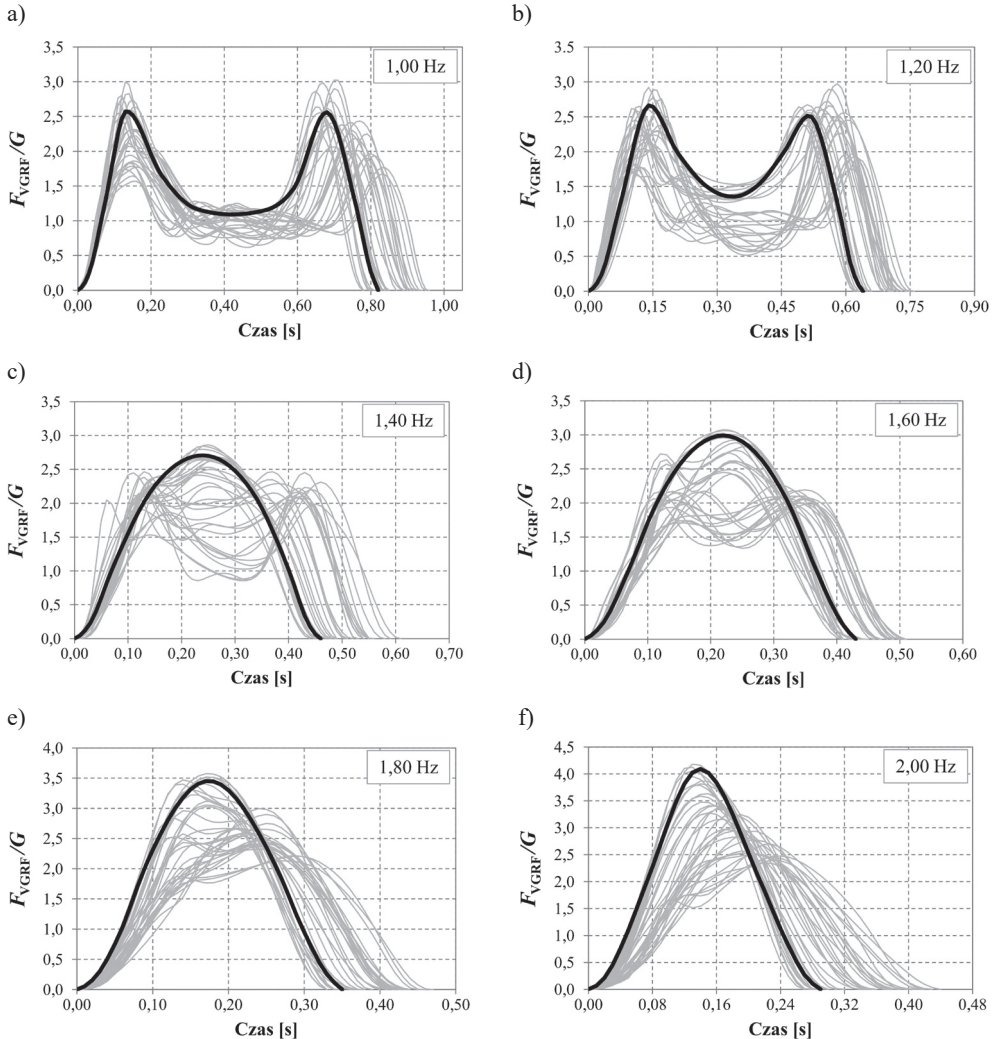
$$c_j = \frac{(y_j - y_{j-1}) - b_j(x_j^2 - x_{j-1}^2) - a_j(x_j^3 - x_{j-1}^3)}{(x_j - x_{j-1})} \quad (44)$$

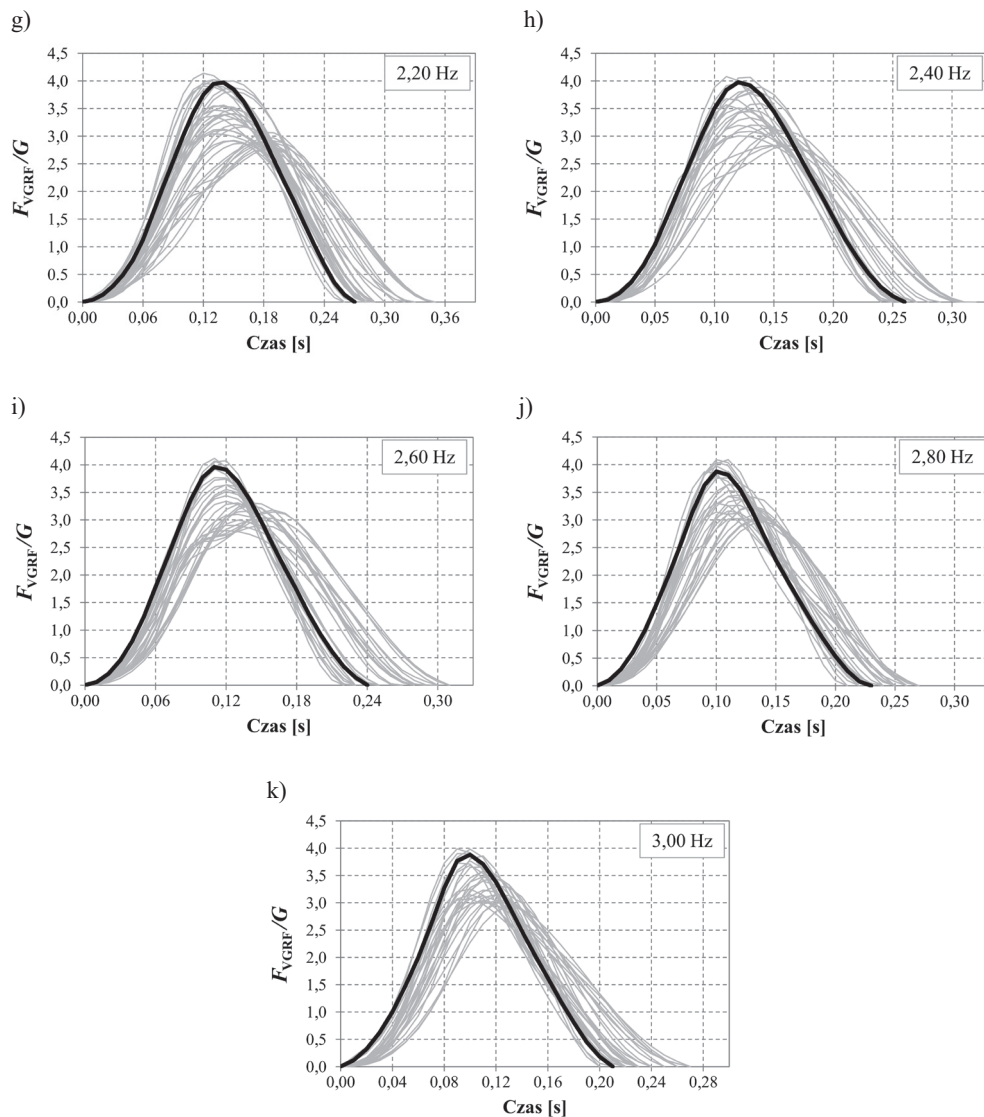
$$d_j = y_{j-1} - c_j x_{j-1} - b_j x_{j-1}^2 - a_j x_{j-1}^3 \quad (45)$$

gdzie:  $j$  – numer przedziału interpolacji  $j = 1, 2, \dots, m-1$ ,  $m$  – liczba węzłów interpolacji.

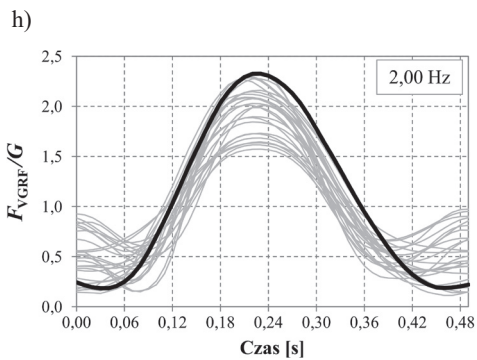
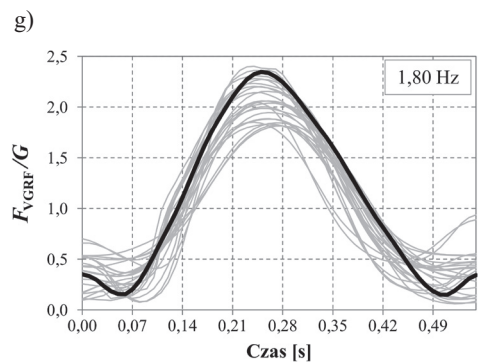
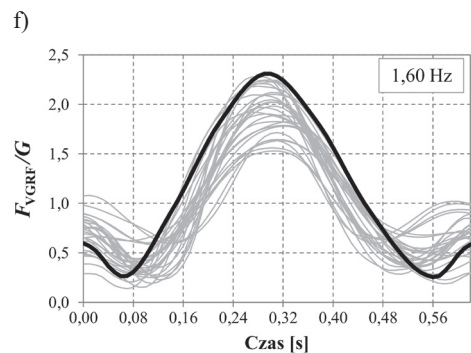
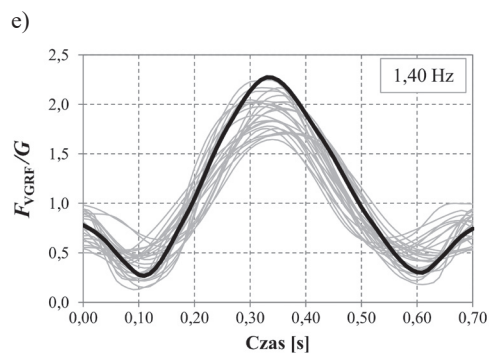
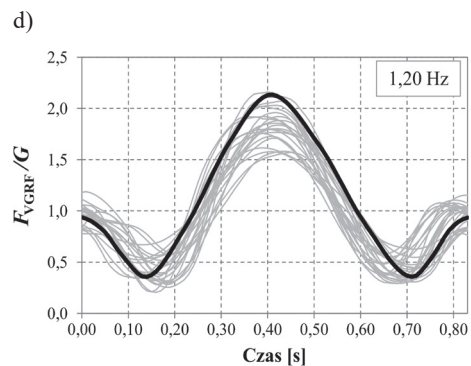
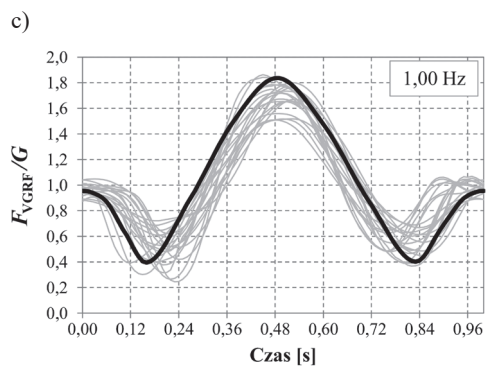
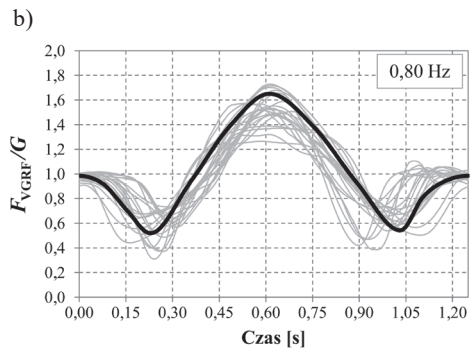
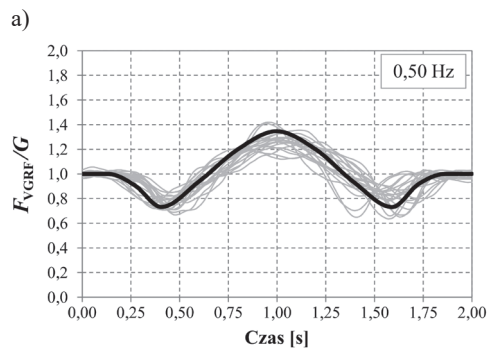
W odrębnej monografii autora, poświęconej modelowaniu obciążeń VGRF generowanych podczas chodu i biegu, przedstawiono przykład wykorzystania krzywych sklepanych z kontrolą kształtu do odwzorowania przebiegów VGRF opisanych położeniem wybranych węzłów interpolacji [58]. W monografii tej zamieszczono także kody programów obliczeniowych zapisane w językach Python i Visual Basic dla Aplikacji (VBA), realizujące procedurę interpolacji za pomocą splajnów kubicznych z kontrolą kształtu [4, 12, 13, 31, 39, 41, 47, 53, 66] oraz skrypty dla środowisk obliczeniowo-programistycznych MATLAB i GNU Octave [15, 20, 27, 45, 54, 56, 61, 63, 69].

Na ilustracjach 36 i 37 przedstawiono przebiegi unormowanych sił reakcji podłoża  $F_{\text{VGRF}}/G$ , powstające odpowiednio podczas skoków i przysiadów częściowych, wyznaczone za pomocą interpolacji splajnami kubicznymi z kontrolą kształtu z wykorzystaniem opracowanych modeli obciążeń  $F_{\text{VGRF}}/G$ , zawartych w tab. 7–17 (skoki) oraz 18–30 (przysiady częściowe) w odniesieniu do wyników badań laboratoryjnych.

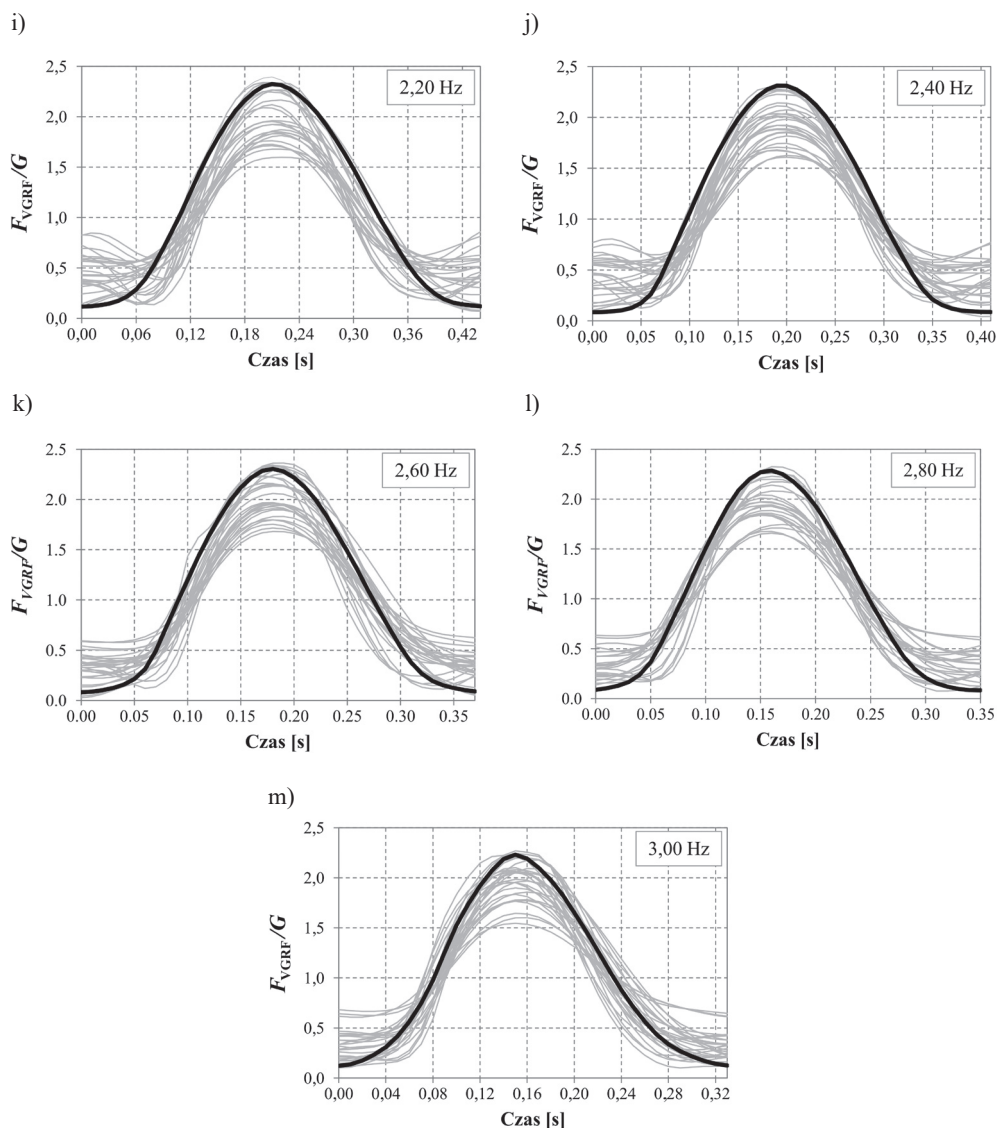




Il. 36. Interpolowane unormowane przebiegi  $F_{VGRF}/G$ , generowane podczas skoków z częstotliwością  $f_j = 1,00-3,00$  Hz, w odniesieniu do wyników badań laboratoryjnych (przebiegi interpolowane – gruba linia czarna, wyniki badań laboratoryjnych – cienkie linie szare, opracowanie własne)







Il. 37. Interpolowane unormowane przebiegi  $F_{VGRF}/G$ , generowane podczas wykonywania przysiadów częściowych z częstotliwością  $f_{sq} = 0,50-3,00$  Hz, w odniesieniu do wyników badań laboratoryjnych (przebiegi interpolowane – gruba linia czarna, wyniki badań laboratoryjnych – cienkie linie szare, opracowanie własne)

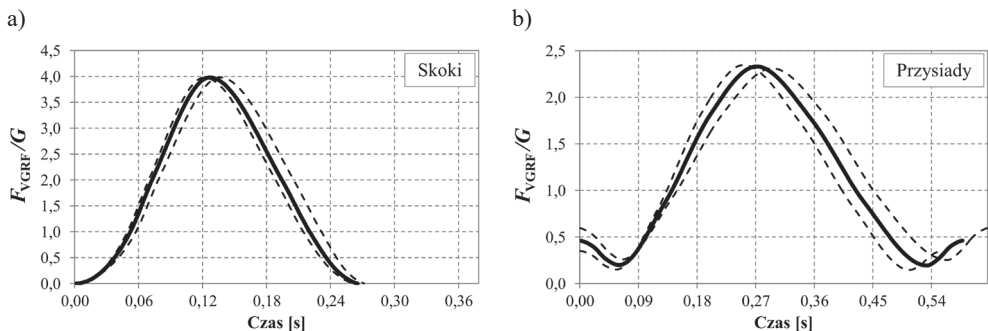
Badania laboratoryjne sił reakcji podłoża wykonano przyjmując przyrost częstotliwości równy 0,20 Hz. Parametry unormowanych krzywych  $F_{\text{VGRF}}/G$  dla pośrednich częstotliwości  $f_n$  można wyznaczyć przez interpolację liniową (równania (46) i (47)), wykorzystując wartości parametrów znane dla zbadanych częstotliwości aktywności człowieka  $f_1$  i  $f_2$  (odpowiednio czasy  $t_1$  i  $t_2$  oraz amplitudy  $A_1$  i  $A_2$ ).

$$t_j = t_2 + \frac{(t_1 - t_2)(f_2 - f_n)}{(f_2 - f_1)} \quad (46)$$

$$A_j = A_2 + \frac{(A_1 - A_2)(f_2 - f_n)}{(f_2 - f_1)} \quad (47)$$

gdzie:  $f_n$  – nowa częstotliwość aktywności człowieka ( $f_1 < f_n < f_2$ , częstotliwość pośrednia),  $f_1$  i  $f_2$  – sąsiednie częstotliwości aktywności człowieka o znanych położeniach węzłów interpolacji krzywej  $F_{\text{VGRF}}/G$  ( $f_1 < f_2$ ),  $t_j$  – poszukiwany czas występowania nowego węzła interpolacji,  $A_j$  – poszukiwana amplituda siły  $F_{\text{VGRF}}/G$  w nowym węźle interpolacji,  $t_1$  – czas występowania początkowego węzła przedziału interpolacji liniowej dla częstotliwości  $f_1$ ,  $t_2$  – czas występowania końcowego węzła przedziału interpolacji liniowej dla częstotliwości  $f_2$ ,  $A_1$  – amplituda siły  $F_{\text{VGRF}}/G$  w początkowym węźle przedziału interpolacji liniowej dla częstotliwości  $f_1$ ,  $A_2$  – amplituda siły  $F_{\text{VGRF}}/G$  w końcowym węźle przedziału interpolacji liniowej dla częstotliwości  $f_2$ .

Na ilustracji 38 przedstawiono przykłady pośrednich przebiegów unormowanych krzywych  $F_{\text{VGRF}}/G$  wyznaczone przez interpolację liniową dla skoków wykonywanych z częstotliwością  $f_j = 2,33$  Hz (częstotliwość pośrednia między częstotliwościami  $f_1 = 2,20$  Hz i  $f_2 = 2,40$  Hz) oraz dla przysiadów wykonywanych z częstotliwością  $f_{sq} = 1,71$  Hz (częstotliwość pośrednia między częstotliwościami  $f_1 = 1,60$  Hz i  $f_2 = 1,80$  Hz).



Il. 38. Pośrednie przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  wyznaczone przez interpolację liniową: a) dla skoków wykonywanych z częstotliwością  $f_j = 2,33$  Hz, b) dla przysiadów wykonywanych z częstotliwością  $f_{sq} = 1,71$  Hz (linia ciągła – wynik interpolacji, linie przerywane – granice przedziału interpolacji, opracowanie własne)

## 5. WALIDACJA WŁASNYCH MODELI SIŁ REAKCJI PODŁOŻA

Opracowane modele pionowych składowych sił reakcji podłoża (VGRF) pozwalają wyznaczać unormowane czasowe przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowane w trakcie skoków i przysiadów. Uwzględnienie oddziaływania osób skaczących lub wykonujących przysiady w analizach konstrukcji wymaga przypisania odwzorowanych obciążeń do konstrukcji. Należy pamiętać, że opracowane modele obrazują unormowaną pionową składową siłę reakcji podłoża  $F_{\text{VGRF}}/G$ . W celu wyznaczenia rzeczywistej wartości obciążenia unormowane przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  należy przemnożyć przez ciężar  $G$  poruszającej się osoby. Wykonać to można na dwa sposoby: 1) przemnożyć unormowany przebieg  $F_{\text{VGRF}}/G$  przez ciężar osoby poruszającej się po konstrukcji i tak wyznaczony rzeczywisty przebieg obciążenia przypisać do jednostkowych sił skupionych przyłożonych do konstrukcji, 2) przypisać do konstrukcji siły skupione o wartości  $G$  (zamiast sił jednostkowych) i przypisać do nich unormowane przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$ .

W odróżnieniu od sposobu modelowania wpływu osoby idącej lub biegnącej na konstrukcję siły VGRF generowane podczas skoków lub przysiadów nie przemieszczają się po konstrukcji. Obciążenia generowane przez jedną osobę podczas skoków lub przysiadów można przypisać do konstrukcji w postaci pojedynczej siły skupionej odwzorowującej całkowity ciężar ciała osoby skaczącej lub wykonującej przysiady zlokalizowanej w miejscu wykonywania skoków lub przysiadów. Innym rozwiązaniem jest zamodelowanie oddziaływania osoby skaczącej lub wykonującej przysiady w postaci dwóch, ustawionych blisko siebie sił skupionych, odwzorowujący dwie nogi osoby skaczącej lub wykonującej przysiady i przypisanie do nich po połowie ciężaru ciała modelowanej osoby.

Wykonanie analizy dynamicznej konstrukcji narażonej na oddziaływanie osób wykonujących na konstrukcji podskoki bądź przysiady w sposób ciągły związane jest z wygenerowaniem ciągłej funkcji obciążenia składającej się z następujących po sobie sił reakcji podłoża VGRF. W celu uzyskania poprawnych wyników analiz dynamicznych wygenerowana ciągła funkcja obciążenia powinna odzwierciedlać parametry rzeczywistych ciągłych przebiegów VGRF. Istotnymi parametrami charakteryzującymi przebiegi obciążeń dynamicznych są: spektrum częstotliwościowe obciążenia oraz jego widmowa gęstość mocy (widmo mocy, ang. *Power Spectral Density* PSD) lub widmowa gęstość energii (widmo energii, ang. *Energy Spectral Density* ESD). Z licznych analiz wykonanych przez autora wynika, że miarodajnej oceny i porównania przebiegów VGRF generowanych podczas różnych form aktywności człowieka można dokonać dzięki analizom widmowych gęstości energii

ciągłych funkcji obciążeń VGRF (analizy spektrów ESD). Analizy takie wykorzystano w celu walidacji opracowanych modeli obciążeń VGRF.

Z punktu widzenia zamierzonego zastosowania zaproponowanych modeli obciążeń istotna jest także walidacja modeli poprzez sprawdzenie dokładności odwzorowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji narażonej na działanie tych obciążeń.

Walidację opracowanych modeli VGRF przeprowadzono w trzech etapach:

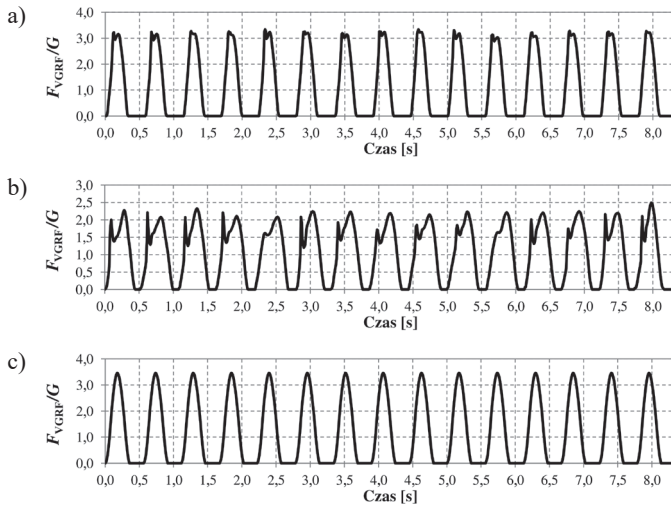
- 1) wyznaczenie spektrów energii unormowanych ciągłych przebiegów VGRF zarejestrowanych podczas badań oraz spektrów energii ciągłych przebiegów VGRF wygenerowanych z wykorzystaniem zaproponowanych modeli VGRF wraz z porównaniem wyników,
- 2) wykonanie analiz numerycznych drgań wymuszonych układów o jednym stopniu swobody (SDOF, ang. *Single Degree of Freedom*), obciążonych przebiegami  $F_{\text{VGRF}}/G$  o maksymalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii, zarejestrowanymi podczas badań oraz przebiegami wygenerowanymi za pomocą opracowanego modelu wraz z porównaniem wyników,
- 3) wykonanie dynamicznych badań terenowych i analiz numerycznych wybranych kładek dla pieszych w celu zarejestrowania i obliczenia odpowiedzi dynamicznych tych konstrukcji, narażonych na oddziaływanie analizowanych obciążeń dynamicznych, wraz z porównaniem wyników.

## 5.1. Walidacja modeli obciążeń VGRF generowanych podczas skoków

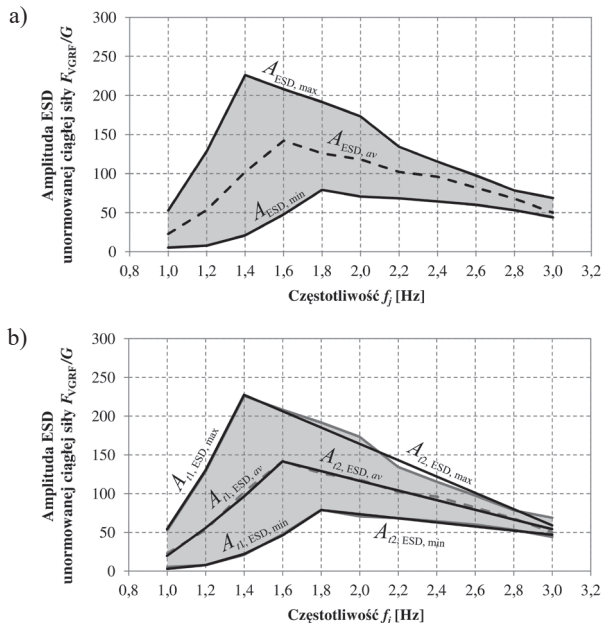
Walidację modeli oddziaływań dynamicznych generowanych przez osoby skaczące w miejscu wykonano z wykorzystaniem ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  o długości 15 impulsów siły, zarejestrowanych podczas badań laboratoryjnych, oraz ciągłych unormowanych sygnałów  $F_{\text{VGRF}}/G$  wygenerowanych za pomocą opracowanych modeli obciążeń  $F_{\text{VGRF}}/G$  (tab. 7–17). Na ilustracji 39 przedstawiono przykłady unormowanych przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  zarejestrowanych i wyznaczonych dla częstotliwości skoków  $f_j = 1,80$  Hz.

Przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  wygenerowane z użyciem opracowanego modelu  $F_{\text{VGRF}}/G$  utworzono przy założeniu stałego okresu skoków  $T_j = 1/f_j$ , odpowiadającego analizowanej częstotliwości skoków  $f_j$ .

W wyniku analizy sygnałów  $F_{\text{VGRF}}/G$  wyznaczono maksymalne, średnie i minimalne amplitudy pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  zarejestrowanych podczas badań ( $A_{\text{ESD,max}}$ ,  $A_{\text{ESD,av}}$ ,  $A_{\text{F,ESD,min}}$ ) oraz amplitudy zamodelowanych sygnałów  $F_{\text{VGRF}}/G$  ( $A_{\text{ESD,j}}$ ). Zmienność wyznaczonych amplitud ESD zobrazowano na il. 40 i 41.



Il. 39. Przykładowe przebiegi obciążeń  $F_{VGRF}/G$  generowanych przez osobę skaczącą (skoki o częstotliwości  $f_j = 1,80$  Hz): a) przebieg  $F_{VGRF}/G$  o maksymalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii zarejestrowany podczas badań, b) przebieg  $F_{VGRF}/G$  o minimalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii zarejestrowany podczas badań c) przebieg  $F_{VGRF}/G$  wygenerowany z wykorzystaniem opracowanego modelu  $F_{VGRF}/G$  (opracowanie własne)



Il. 40. Wartości maksymalnych  $A_{ESD,max}$ , średnich  $A_{ESD,av}$  i minimalnych  $A_{ESD,min}$  amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych sygnałów  $F_{VGRF}/G$  generowanych podczas skoków w miejscu (15 impulsów  $F_{VGRF}/G$ ): a) przebiegi amplitud unormowanych sygnałów zarejestrowanych podczas badań, b) aproksymowane przebiegi amplitud  $A_{t,ESD}$  (opracowanie własne)

Równania (48)–(53) opisują przebiegi funkcji aproksymujących maksymalne  $A_{t,ESD,max}$ , średnie  $A_{t,ESD,av}$  i minimalne  $A_{t,ESD,min}$  amplitudy pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych sygnałów  $F_{VGRF}/G$ , zarejestrowanych podczas badań pokazanych na il. 40b.

$$A_{t1,ESD,max} = 272,87 f_j^2 - 221,87 f_j + 2,83 \quad (48)$$

$$A_{t2,ESD,max} = -105,30 f_j + 374,87 \quad (49)$$

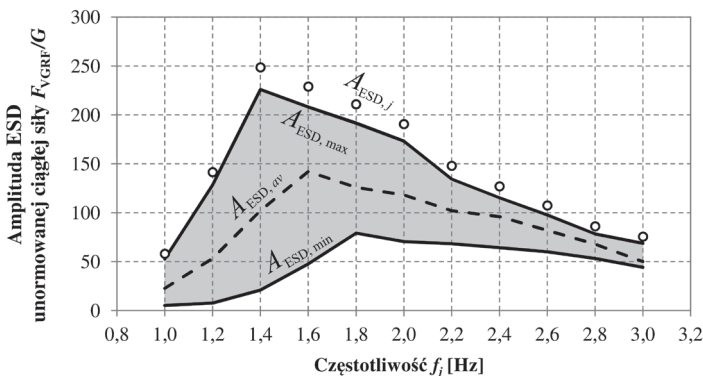
$$A_{t1,ESD,av} = 58,75 f_j^2 + 50,45 f_j - 88,76 \quad (50)$$

$$A_{t2,ESD,av} = -62,38 f_j + 241,48 \quad (51)$$

$$A_{t1,ESD,min} = 120,13 f_j^2 - 240,35 f_j + 123,19 \quad (52)$$

$$A_{t2,ESD,min} = -26,46 f_j + 127,34 \quad (53)$$

Na ilustracji 41 przedstawiono wyznaczone amplitudy widm gęstości energii za-modelowanych ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{VGRF}/G$  ( $A_{ESD,j}$ ) w odniesieniu do amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{VGRF}/G$ , zarejestrowanych podczas badań.



Il. 41. Wartości amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{VGRF}/G$  generowanych podczas skoków wyznaczonych przy wykorzystaniu opracowanych modeli sił  $F_{VGRF}/G$  ( $A_{ESD,j}$ , białe punkty z czarnym obramowaniem) w odniesieniu do amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{VGRF}/G$ , zarejestrowanych podczas badań (opracowanie własne)

Amplitudy pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$ , wyznaczonych z wykorzystaniem opracowanych modeli sił  $F_{\text{VGRF}}/G$  (amplitudy  $A_{\text{ESD}_j}$ ), mają wartości o 10% większe od maksymalnych wartości amplitud  $A_{F,\text{ESD},\text{max}}$  pierwszych składowych widm gęstości energii unormowanych ciągłych przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  zarejestrowanych podczas badań.

W celu sprawdzenia dokładności oszacowania odpowiedzi dynamicznej za pomocą opracowanego modelu obciążeń  $F_{\text{VGRF}}/G$ , generowanych przez osoby skaczące w miejscu, wykonano analizy dynamiczne układów o jednym stopniu swobody (układy SDOF), o podstawowej częstotliwości drgań własnych odpowiadającej analizowanej częstotliwości skoków, oraz analizy dynamiczne wybranych rzeczywistych kładek dla pieszych.

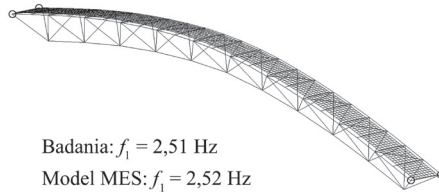
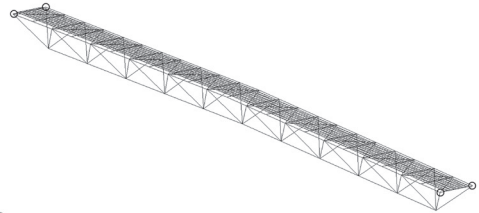
Analizowane układy SDOF obciążono przebiegami  $F_{\text{VGRF}}/G$  o maksymalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii zarejestrowanymi podczas badań oraz przebiegami wygenerowanymi za pomocą opracowanych modeli  $F_{\text{VGRF}}/G$ . W analizach przyjęto ciężar osoby skaczącej  $G = 750$  N. Obliczenia wykonano w programie MATLAB (metoda Newmarka). W tabeli 31 zamieszczono charakterystyki analizowanych układów SDOF oraz wartości odpowiedzi dynamicznych tych układów (maksymalne przyspieszenia drgań) wraz z procentowymi różnicami wartości tych przyspieszeń. Można zauważyć, że przy przyjętym sposobie modelowania obciążeń dynamicznych różnice procentowe wartości przyspieszeń drgań nie przekraczają 10,0%.

Tabela 31. Charakterystyki i odpowiedzi dynamiczne układów SDOF narażonych na oddziaływanie osoby skaczącej (opracowanie własne)

Częstotliwość [Hz]	Masa [kg]	Szytywność [N/m]	Ułamek tłumienia krytycznego [%]	Przyspieszenie [m/s <sup>2</sup> ]		Różnica [%]
				badania	model	
1,00	18 800,0	742 195,0	0,5	0,768	0,797	3,78
1,20		1 068 760,0		1,387	1,425	2,74
1,40		1 454 701,0		2,085	2,213	6,14
1,60		1 900 018,0		2,333	2,400	2,87
1,80		2 404 710,0		2,498	2,610	4,48
2,00		2 968 777,0		2,640	2,760	4,55
2,20		3 592 221,0		2,505	2,678	6,91
2,40		4 275 039,0		2,573	2,700	4,94
2,60		5 017 234,0		2,573	2,670	3,77
2,80		5 818 803,0		2,467	2,580	4,58
3,00		6 679 749,0		2,463	2,588	5,08

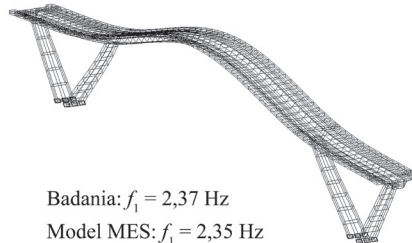
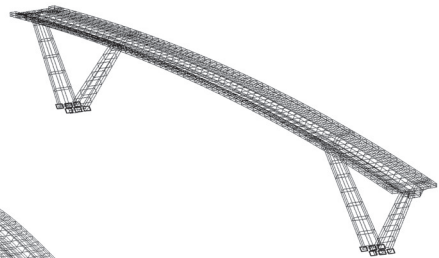
W kolejnym kroku walidacji modelu obciążeń  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanych podczas skoków wykonano analizy i badania dynamiczne rzeczywistych kładek dla pieszych. Analizowane konstrukcje wraz z modelami obliczeniowymi MES i ich podstawowymi postaciami drgań własnych pionowych przedstawiono na il. 42. Są to: jednoprzęsłowa kratownicowa kładka dla pieszych w miejscowości Sławięcice [11, 17] (rozpiętość przęsła 44,77 m, podstawowa częstotliwość drgań własnych pionowych wyznaczona podczas badań  $f_1 = 2,52$  Hz), trójprzęsłowa betonowa (sprężona) kładka dla pieszych o konstrukcji ramowej nad autostradą A4 w obrębie MOP Stanisławice-Kłaj (rozpiętości przęseł 15,0 + 34,0 + 15,0 m, podstawowa częstotliwość drgań własnych pionowych wyznaczona podczas badań  $f_1 = 2,37$  Hz).

a)



Badania:  $f_1 = 2,51$  Hz  
Model MES:  $f_1 = 2,52$  Hz

b)



Badania:  $f_1 = 2,37$  Hz  
Model MES:  $f_1 = 2,35$  Hz

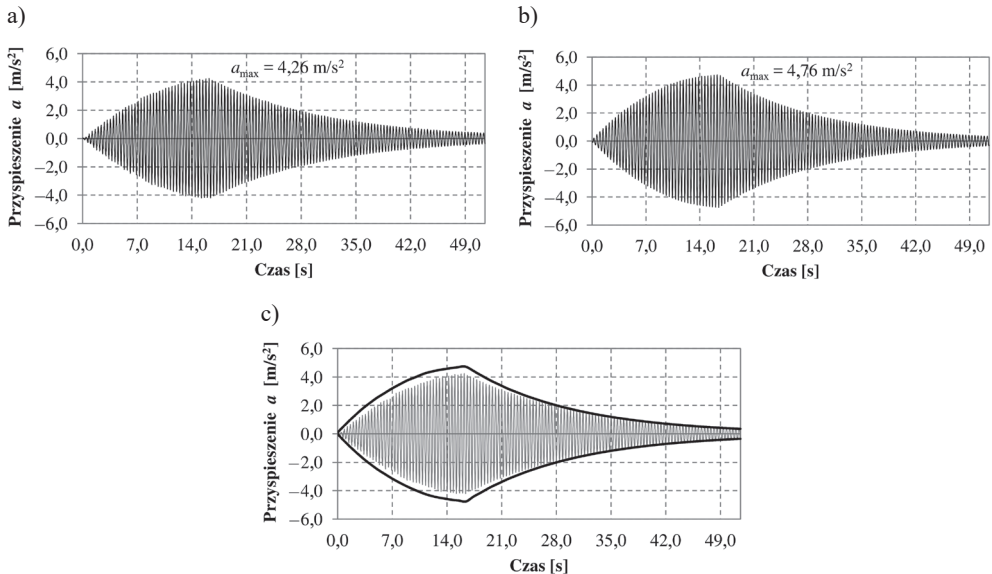
Il. 42. Analizowane kładki dla pieszych: a) kładka dla pieszych w miejscowości Sławięcice (44,77 m), b) kładka dla pieszych nad autostradą A4 MOP Stanisławice w gminie Kłaj (15,0 + 34,0 + 15,0 m) (opracowanie własne)



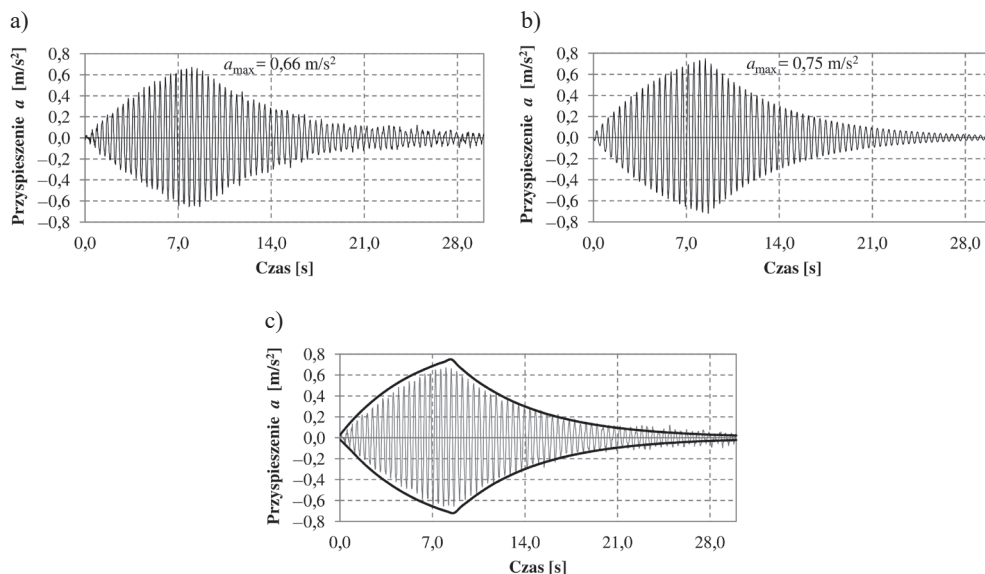
Badania i analizy dynamiczne kładek wykonano dla częstotliwości skoków  $f_j = f_1$ . W analizach przyjęto średnie wartości ułamka tłumienia krytycznego wyznaczone na podstawie badań terenowych: dla kładki w Sławięcicach  $\xi = 0,45\%$ , dla kładki nad autostradą A4 MOP Stanisławice  $\xi = 1,11\%$ .

Na potrzeby analiz numerycznych obciążenie dynamiczne kładek wygenerowano przyjmując ciężar osoby skaczącej zgodny z ciężarem osoby uczestniczącej w badaniach kładek. Przyjęto  $G = 91$  kg (910 N) dla kładki w Sławięcicach oraz  $G = 90$  kg (900 N) dla kładki nad autostradą A4 MOP Stanisławice. W analizach numerycznych kładek zachowano zgodność ilości skoków wykonanych na konstrukcjach podczas badań terenowych: 20 skoków dla każdej konstrukcji. Wyniki badań terenowych i analiz numerycznych kładek przedstawiono na il. 43 i 44. Zobrazowano przebiegi maksymalnych przyspieszeń drgań pomostu kładek zarejestrowane podczas badań terenowych oraz przebiegi przyspieszeń drgań wyznaczone w wyniku analiz numerycznych.

Procentowe różnice wartości przyspieszeń drgań pomostów analizowanych kładek, wyznaczonych za pomocą opracowanych modeli  $F_{VGRF}/G$ , w stosunku do wyników badań terenowych wyniosły: +11,7% (przeszacowanie wartości) dla kładki w Sławięcicach; +13,6% (przeszacowanie wartości) dla kładki nad autostradą A4 MOP Stanisławice.



Il. 43. Przyspieszenie drgań kładki w Sławięcicach wzbudzone przez osobę skaczącą: a) sygnał o maksymalnych wartościach przyspieszeń zarejestrowany podczas badań terenowych, b) wynik analiz numerycznych, c) porównanie wyniku badań terenowych (sygnał w kolorze szarym) z wynikiem symulacji numerycznej (linie ciągłe – obwiednia wyniku symulacji) (opracowanie własne)



Il. 44. Przyspieszenie drgań kładki nad autostradą A4 MOP Stanisławice wzbudzone przez osobę skaczącą: a) sygnał o maksymalnych wartościach przyspieszeń zarejestrowany podczas badań terenowych, b) wynik analiz numerycznych, c) porównanie wyniku badań terenowych (sygnał w kolorze szarym) z wynikiem symulacji numerycznej (linie ciągłe – obwiednia wyniku symulacji) (opracowanie własne)

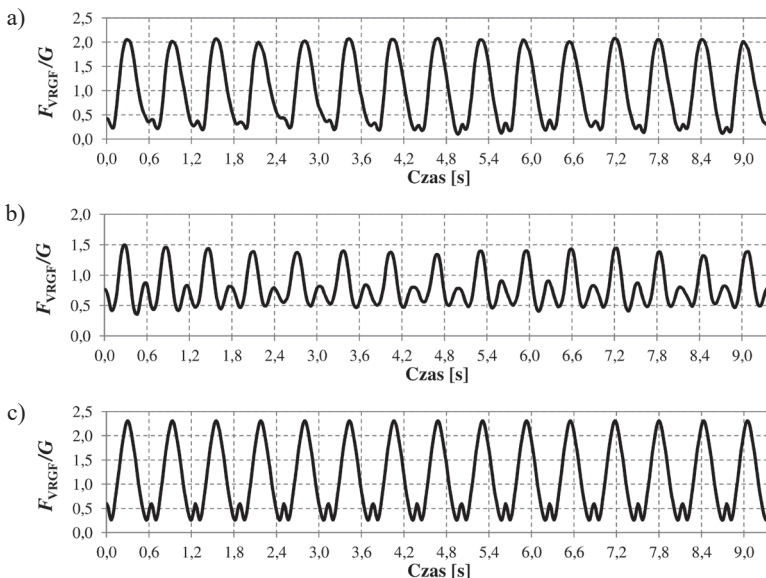
Zwracając uwagę na przyjęty sposób modelowania obciążeń  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanych podczas skoków, związany z ustaleniem wartości amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii zamodelowanych ciągłych sygnałów  $F_{\text{VGRF}}/G$  na poziomie o 10% wyższym od amplitud widm gęstości energii sygnałów  $F_{\text{VGRF}}/G$  zarejestrowanych podczas badań można zauważyć, że przeszacowanie odpowiedzi dynamicznej analizowanych konstrukcji, mieszczące się w przedziale 10–15%, jest zbliżone do przyjętego przewyższenia amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii zamodelowanych sygnałów w stosunku do sygnałów zarejestrowanych podczas badań. Wynik ten, osiągnięty przy uproszczonym sposobie modelowania ciągłych przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$ , polegającym na pominięciu fluktuacji amplitudy siły i częstotliwości skoków, występujących w rzeczywistych przebiegach  $F_{\text{VGRF}}/G$ , pozwala uznać zaproponowane modele obciążeń generowanych podczas skoków za poprawne i efektywne. Warto zauważyć, że przyjęte uproszczenie modelowania ciągłego sygnału  $F_{\text{VGRF}}/G$ , polegające na przyjęciu stałej amplitudy siły i stałej częstotliwości skoków, znacznie upraszcza stosowanie opracowanych modeli obciążeń generowanych przez osoby wykonujące cykliczne podskoki w miejscu. Jednocześnie zachowana jest właściwa dokładności odwzorowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji.

## 5.2. Walidacja modeli obciążeń VGRF generowanych podczas przysiadów

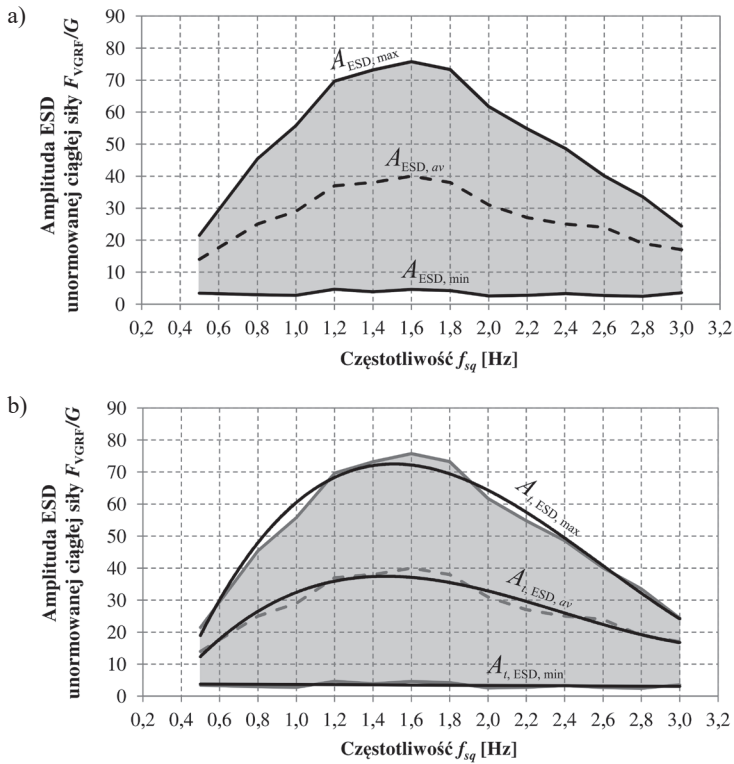
Walidację modeli oddziaływań dynamicznych generowanych przez osoby wykonujące cykliczne przysiady w miejscu wykonano z wykorzystaniem ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  o długości 15 impulsów siły, zarejestrowanych podczas badań laboratoryjnych, oraz ciągłych unormowanych sygnałów  $F_{\text{VGRF}}/G$  wygenerowanych za pomocą opracowanych modeli obciążeń  $F_{\text{VGRF}}/G$  (tab. 18–30). Na ilustracji 45 pokazano przykłady unormowanych przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  zarejestrowanych i wyznaczonych dla częstotliwości przysiadów  $f_{sq} = 1,60$  Hz.

Przebiegi  $F_{\text{VGRF}}/G$  wygenerowane dzięki opracowanemu modelowi  $F_{\text{VGRF}}/G$  utworzono przy założeniu stałego okresu przysiadów  $T_{sq} = 1/f_{sq}$ , odpowiadającego analizowanej częstotliwości przysiadów  $f_{sq}$ .

W wyniku analizy sygnałów  $F_{\text{VGRF}}/G$  wyznaczono maksymalne, średnie i minimalne amplitudy pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  zarejestrowanych podczas badań ( $A_{\text{ESD,max}}$ ,  $A_{\text{ESD,av}}$ ,  $A_{F,\text{ESD,min}}$ ) oraz amplitudy zamodelowanych sygnałów  $F_{\text{VGRF}}/G$  ( $A_{\text{ESD,sq}}$ ). Zmienność wyznaczonych amplitud ESD zobrazowano na il. 46 i 47.



Il. 45. Przykładowe przebiegi obciążeń  $F_{\text{VGRF}}/G$  generowanych przez osobę wykonującą cykliczne przysiady w miejscu (przysiady o częstotliwości  $f_j = 1,60$  Hz): a) przebieg  $F_{\text{VGRF}}/G$  o maksymalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii zarejestrowany podczas badań, b) przebieg  $F_{\text{VGRF}}/G$  o minimalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii zarejestrowany podczas badań, c) przebieg  $F_{\text{VGRF}}/G$  wygenerowany z wykorzystaniem opracowanego modelu  $F_{\text{VGRF}}/G$  (opracowanie własne)



Il. 46. Wartości maksymalnych  $A_{\text{ESD,max}}$ , średnich  $A_{\text{ESD,av}}$  i minimalnych  $A_{\text{ESD,min}}$  amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych sygnałów  $F_{\text{VGRF}}/G$ , generowanych podczas cyklicznych przysiadów częściowych w miejscu (15 impulsów  $F_{\text{VGRF}}/G$ ): a) przebiegi amplitud unormowanych sygnałów zarejestrowanych podczas badań, b) aproksymowane przebiegi amplitud  $A_{t,\text{ESD}}$  (opracowanie własne)

Równania (54)–(56) opisują przebiegi funkcji aproksymujących maksymalne  $A_{t,\text{ESD,max}}$ , średnie  $A_{t,\text{ESD,av}}$  i minimalne  $A_{t,\text{ESD,min}}$  amplitudy pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych sygnałów  $F_{\text{VGRF}}/G$ , zarejestrowanych podczas badań przedstawionych na il. 46b.

$$A_{t,\text{ESD,max}} = 12,30 f_{sq}^3 - 95,84 f_{sq}^2 + 205,25 f_{sq} - 61,24 \quad (54)$$

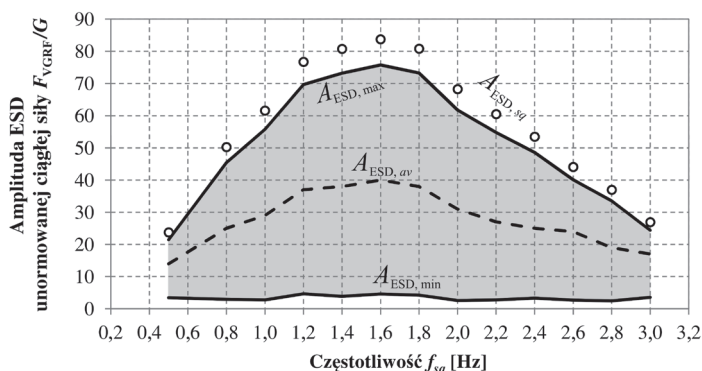
$$A_{t,\text{ESD,av}} = 7,26 f_{sq}^3 - 51,82 f_{sq}^2 + 105,14 f_{sq} - 28,16 \quad (55)$$

$$A_{t,\text{ESD,min}} = -0,273 f_{sq} + 3,854 \quad (56)$$

Na ilustracji 47 przedstawiono wyznaczone amplitudy widm gęstości energii za-modelowanych ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{\text{VGRF}}/G$  ( $A_{\text{ESD,sq}}$ ) w odniesieniu

do amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{VGRF}/G$  zarejestrowanych podczas badań.

Amplitudy pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{VGRF}/G$ , wyznaczonych z wykorzystaniem opracowanych modeli sił  $F_{VGRF}/G$  (amplitudy  $A_{ESD,sg}$ ), mają wartości o 10% większe od maksymalnych wartości amplitud  $A_{F,ESD,max}$  pierwszych składowych widm gęstości energii unormowanych ciągłych przebiegów  $F_{VGRF}/G$  zarejestrowanych podczas badań.



Il. 47. Wartości amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{VGRF}/G$ , generowanych podczas cyklicznych przysiadów częściowych wyznaczonych za pomocą opracowanych modeli sił  $F_{VGRF}/G$  ( $A_{ESD,sg}$ , białe punkty z czarnym obramowaniem) w odniesieniu do amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii ciągłych unormowanych przebiegów  $F_{VGRF}/G$  zarejestrowanych podczas badań (opracowanie własne)

W celu sprawdzenia dokładności oszacowania odpowiedzi dynamicznej za pomocą opracowanego modelu obciążeń  $F_{VGRF}/G$  generowanych przez osoby wykonujące przysiady w miejscu przeprowadzono analizy dynamiczne układów o jednym stopniu swobody (układy SDOF) o podstawowej częstotliwości drgań własnych, odpowiadającej analizowanej częstotliwości przysiadów oraz analizy dynamiczne wybranych rzeczywistych kładek dla pieszych.

Analizowane układy SDOF obciążono przebiegami  $F_{VGRF}/G$  o maksymalnej amplitudzie pierwszej składowej widma gęstości energii, zarejestrowanymi podczas badań, oraz przebiegami wygenerowanymi za pomocą opracowanych modeli  $F_{VGRF}/G$ . W analizach przyjęto ciężar osoby skaczącej  $G = 750$  N. Obliczenia wykonano w programie MATLAB (metoda Newmarka). W tabeli 32 scharakteryzowano analizowane układy SDOF oraz wartości odpowiedzi dynamicznych tych układów (maksymalne przyspieszenia drgań) wraz z procentowymi różnicami wartości tych przyspieszeń. Można zauważyć, że przy przyjętym sposobie modelowania obciążeń dynamicznych różnice procentowe wartości przyspieszeń drgań nie przekraczają 10,0%.

Tabela 32. Charakterystyki i odpowiedzi dynamiczne układów SDOF narażonych na oddziaływania osoby wykonującej przysiady (opracowanie własne)

Częstotliwość [Hz]	Masa [kg]	Szytywność [N/m]	Ułamek tłumienia krytycznego [%]	Przyspieszenie [m/s <sup>2</sup> ]		Różnica [%]
				badania	model	
0,50	18 800,0	185 549,0	0,5	0,239	0,252	5,44
0,80		475 005,0		0,526	0,574	9,13
1,00		742 195,0		0,717	0,787	9,76
1,20		1 068 760,0		0,997	1,050	5,32
1,40		1 454 701,0		1,142	1,253	9,72
1,60		1 900 018,0		1,395	1,455	4,30
1,80		2 404 710,0		1,522	1,605	5,45
2,00		2 968 777,0		1,553	1,635	5,28
2,20		3 592 221,0		1,538	1,688	9,75
2,40		4 275 039,0		1,650	1,725	4,55
2,60		5 017 234,0		1,620	1,703	5,12
2,80		5 818 803,0		1,613	1,673	3,72
3,00		6 679 749,0		1,448	1,538	6,22

W kolejnym kroku walidacji modelu obciążeń  $F_{VGRF}/G$ , generowanych podczas przysiadów, wykonano analizy i badania dynamiczne dwóch rzeczywistych kładek dla pieszych: kładki dla pieszych w Sławięcicach oraz kładki dla pieszych nad autostradą A4 MOP Stanisławice. Analizowane konstrukcje scharakteryzowano w podrozdziale 5.1. Modele obliczeniowe MES i podstawowe postacie drgań własnych pionowych analizowanych kładek widoczne są na il. 42.

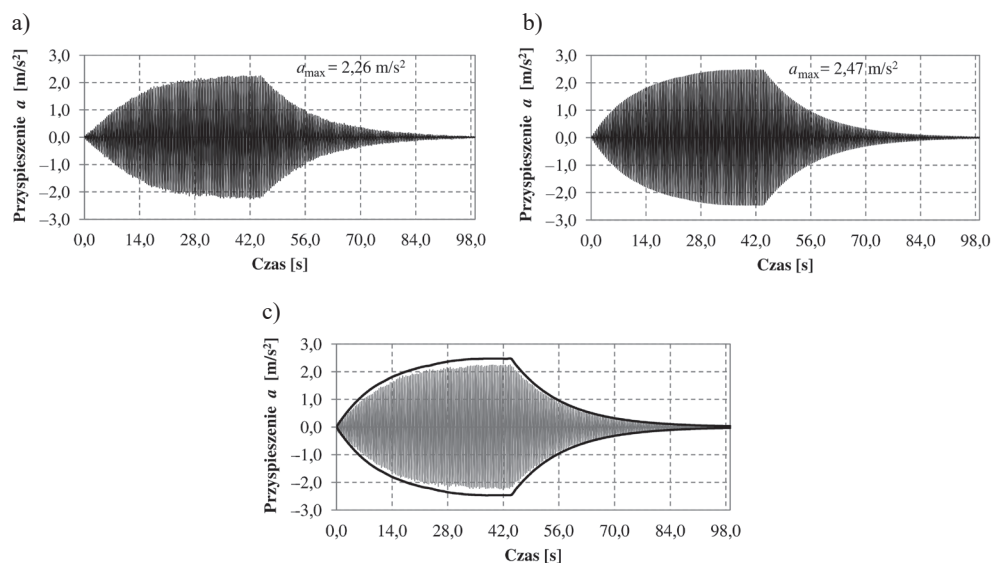
Badania i analizy dynamiczne kładek wykonano dla częstotliwości skoków  $f_{sq} = f_1$ . W analizach przyjęto średnie wartości ułamka tłumienia krytycznego wyznaczone na podstawie badań terenowych, wynoszące: dla kładki w Sławięcicach  $\xi = 0,45\%$ , dla kładki nad autostradą A4 MOP Stanisławice  $\xi = 1,11\%$ .

Na potrzeby analiz numerycznych obciążenie dynamiczne kładek wygenerowano przyjmując ciężar osoby wykonującej przysiady zgodny z ciężarem osoby uczestniczącej w badaniach kładek. Przyjęto  $G = 51$  kg (510 N) dla kładki w Sławięcicach oraz  $G = 90$  kg (900 N) dla kładki nad autostradą A4 MOP Stanisławice. W wykonanych analizach numerycznych kładek zachowano zgodność ilości przysiadów wykonanych na konstrukcjach podczas badań terenowych: 110 przysiadów na kładce w Sławięcicach oraz 20 przysiadów na kładce nad autostradą A4 MOP Stanisławice. Wyniki badań terenowych i analiz numerycznych kładek przedstawiono na il. 48

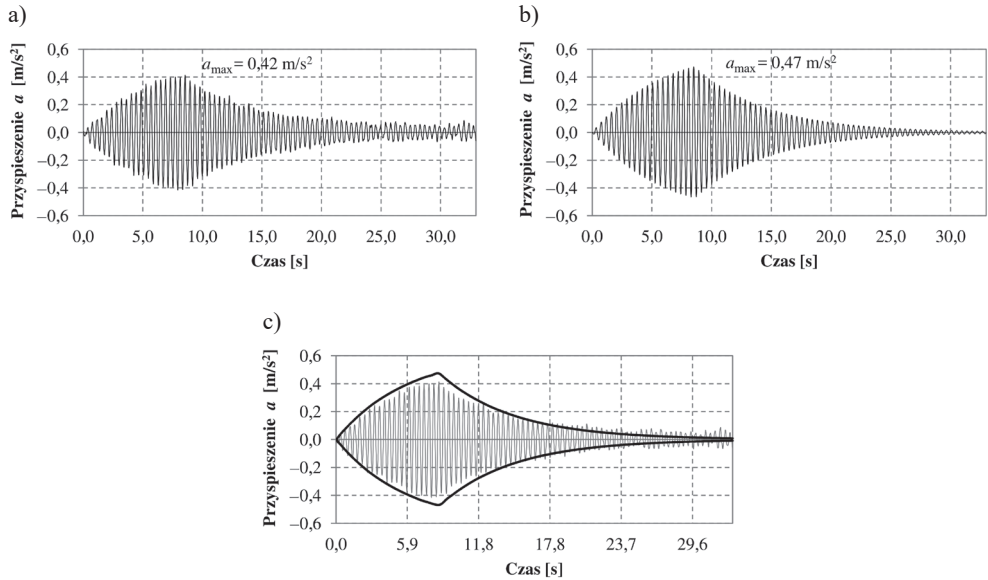
i 49, gdzie zobrazowano przebiegi maksymalnych przyspieszeń drgań pomostu kładek zarejestrowane podczas badań terenowych oraz przebiegi przyspieszeń drgań wyznaczone w wyniku analiz numerycznych.

Procentowe różnice wartości przyspieszeń drgań pomostów analizowanych kładek, wyznaczonych przy wykorzystaniu opracowanych modeli  $F_{VGRF}/G$ , w stosunku do wyników badań terenowych, wyniosły: +9,3% (przeszacowanie wartości) dla kładki w Sławięcicach; +11,9% (przeszacowanie wartości) dla kładki nad autostradą A4 MOP Stanisławice.

Uzyskane przeszacowanie odpowiedzi dynamicznej analizowanych konstrukcji jest zbliżone do przyjętego w modelu przewyższenia amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii syntetycznych ciągłych sygnałów  $F_{VGRF}/G$  w stosunku do sygnałów zarejestrowanych podczas badań, wynoszącego 10%. Na tej podstawie opracowane modele obciążeń generowanych podczas przysiadów można uznać za poprawne. Przyjęte uproszczenie modelowania ciągłego sygnału  $F_{VGRF}/G$ , związane z pominięciem nieregularnych zmienności (fluktuacji) amplitudy siły i częstotliwości przysiadów występujących w rzeczywistych przebiegach VGRF, znacznie upraszcza modelowanie obciążeń generowanych podczas przysiadów. Stwierdzono, że przy zaproponowanym sposobie modelowania obciążeń generowanych przez osoby wykonujące przysiady jest zachowana właściwa dokładność odwzorowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji.



Il. 48. Przyspieszenia drgań kładki w Sławięcicach wzbudzone przez osobę wykonującą przysiady w miejscu: a) sygnał o maksymalnych wartościach przyspieszeń zarejestrowany podczas badań terenowych, b) wynik analiz numerycznych, c) porównanie wyniku badań terenowych (sygnał w kolorze szarym) z wynikiem symulacji numerycznej (linie ciągłe – obwiednia wyniku symulacji) (opracowanie własne)



Il. 49. Przyspieszenia drgań kładki nad autostradą A4 MOP Stanisławice wzbudzone przez osobę wykonującą przysiady w miejscu: a) sygnał o maksymalnych wartościach przyspieszeń zarejestrowany podczas badań terenowych, b) wynik analiz numerycznych, c) porównanie wyniku badań terenowych (sygnał w kolorze szarym) z wynikiem symulacji numerycznej (linie ciągłe – obwiednia wyniku symulacji) (opracowanie własne)



## 6. UWAGI KOŃCOWE I PODSUMOWANIE

Konstrukcje budowlane odznaczające się podatnością dynamiczną odczuwalną podczas ich normalnego użytkowania, w szczególności obiekty mostowe z przeznaczeniem dla ruchu pieszych (kładki dla pieszych), często narażone są na pojawianie się na nich oddziaływań dynamicznych w postaci skoków i przysiadów, mających na celu intencjonalne (złośliwe) wzbudzenie ich nadmiernych drgań. Jak zauważono w pracy [70], oddziaływania w postaci skoków, przysiadów lub innych form balansowania ciałem to często działania o charakterze zabawowym wynikające z fascynacji zjawiskiem drgań rezonansowych. Odkrycie konstrukcji łatwej do rozkołysania jest impulsem do podejmowania prób wzbudzania jej dużych drgań.

Dwa istotne przepisy krajowe [68, 79], związane z projektowaniem i badaniami obiektów mostowych, dowodzą potrzeby analiz i badań dynamicznych obiektów mostowych przeznaczonych dla ruchu pieszych i rowerzystów w celu sprawdzenia ich częstotliwości drgań własnych i podjęcia decyzji o konieczności wykonania szczegółowych analiz dynamicznych lub zastosowania środków zaradczych zmniejszających drgania konstrukcji. Wskazane w tych przepisach analizy dynamiczne mogą dotyczyć m.in. sytuacji dynamicznego oddziaływania na konstrukcję osób skaczących lub wykonujących półprzysiady synchroniczne.

W niniejszej monografii zaprezentowano zagadnienia modelowania pionowych składowych sił reakcji podłoża generowanych przez osoby skaczące i wykonujące przysiady. Przedstawiono m.in. szczegółowe charakterystyki cykli skoków i przysiadów, charakterystyki przebiegów obciążeń VGRF, własne modele obciążeń VGRF, autorskie wytyczne oceny właściwości energetycznych przebiegów VGRF oraz wytyczne uzupełniające lub korygujące dotychczasowe zalecenia w zakresie modelowania oddziaływań VGRF, generowanych podczas skoków i przysiadów. W przypadku oddziaływań w postaci skoków wyodrębniono na podstawie wyników badań własnych dwie techniki wykonywania skoków: skoki swobodne oraz skoki intensywne. Wykonano analizy zmienności parametrów obciążeń VGRF generowanych podczas skoków swobodnych i intensywnych i przedstawiono wytyczne ich modelowania. Wyodrębnienie różnych technik wykonywania skoków jest oryginalną propozycją autora. W dotychczasowych opracowaniach z zakresu modelowania oddziaływania osób skaczących nie uwzględniano technik wykonywania skoków i ich wpływu na wartości generowanych obciążeń VGRF.

Własne modele obciążeń VGRF opracowano na podstawie badań laboratoryjnych pionowych składowych sił reakcji podłoża generowanych przez osoby skaczące i wykonujące przysiady w przedziałach częstotliwości: 1,00–3,00 Hz dla skoków oraz 0,50–3,00 Hz dla przysiadów.

W celu odwzorowania czasowych przebiegów VGRF zaproponowano wykorzystanie interpolacji przebiegu krzywych VGRF funkcjami sklejanymi 3-go stopnia z kontrolą kształtu. Dla analizowanych typów i przedziałów częstotliwości aktywności człowieka opracowano zestawy węzłów interpolacji pozwalające odwzorować przebiegi VGRF o parametrach energetycznych odpowiadających parametrom energetycznym przebiegów zarejestrowanych podczas badań. Zaproponowana metoda odwzorowania przebiegów VGRF za pomocą krzywych splajn z kontrolą kształtu pozwala uzyskać dużą dokładność odwzorowania obciążeń VGRF i daje możliwość łatwej modyfikacji wartości i przebiegu obciążenia poprzez prostą modyfikację położenia węzłów interpolacji krzywej VGRF. Warto zauważyć, że zaproponowany sposób modelowania przebiegów VGRF można wykorzystać do generowania oddziaływań osób skaczących lub wykonujących przysiady uwzględniających losowy charakter obciążenia VGRF (np. losowe wartości: częstotliwości skoków lub przysiadów, losowe wartości czasu kontaktu osoby skaczącej z podłożem lub amplitud obciążenia). Procedurę generowania obciążenia VGRF o losowych wartościach amplitud, wykorzystującą wyniki badań własnych zawarto w [57].

Wyniki walidacji opracowanych modeli obciążeń wskazują na poprawne odwzorowanie przebiegów VGRF oraz odpowiedzi dynamicznej konstrukcji na poziomie maksymalnych amplitud drgań wzbudzanych podczas badań terenowych.

Walidacja opracowanych modeli obciążeń VGRF udowodniła istotne znaczenie poprawnego odwzorowania spektrum energetycznego obciążenia dynamicznego wykorzystywanego w analizie dla poprawnego oszacowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Z tego powodu zaleca się, by opracowania dotyczące oceny dynamicznego oddziaływania użytkowników na konstrukcję zawierały wyniki analizy spektrum energetycznego (ESD) obciążenia dynamicznego wykorzystanego w obliczeniach dynamicznych. Znajomość spektrum energetycznego sygnału VGRF umożliwia ocenę ilościową zamodelowanych oddziaływań VGRF oraz odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Na podstawie wyznaczonego spektrum energetycznego sygnału VGRF możliwa jest ocena poprawności i poziomu odwzorowania energii sygnału VGRF wykorzystanego w analizie dynamicznej konstrukcji (energia minimalna, średnia lub maksymalna) oraz ocena poziomu wyznaczonej odpowiedzi dynamicznej konstrukcji (odpowiednio minimalny, średni lub maksymalny poziom drgań).

Przedstawione modele obciążeń można wykorzystać w analizach dynamicznych obiektów mostowych oraz analizach innych konstrukcji budowlanych (np. stropy w salach z przeznaczeniem na ćwiczenia fitness) narażonych na oddziaływanie osób podskakujących lub wykonujących przysiady (przysiady częściowe) w miejscu. Prezentowane modele obciążeń generowanych przez osoby skaczące można także zastosować w analizach dynamicznych i wytrzymałościowych trybun widowiskowych i sportowych w przypadku przewidywania możliwości występowania tego typu oddziaływań w ich obrębie. Należy jednak zaznaczyć, iż kwestia oddziaływania grup osób skaczących lub wykonujących przysiady i wzajemnej synchronizacji członków

grupy ze sobą jest odrębnym zagadnieniem, nieomawianym w tej publikacji. Synchronizacja osób skaczących lub wykonujących przysiady w grupie może być znacząca (pełna), jeśli aktywność członków grupy odbywa się np. w rytm muzyki, uderzeń w instrumenty perkusyjne, przyśpiewek lub rytmicznych komend głosowych.

Oryginalnymi osiągnięciami niniejszej monografii są:

- opracowanie własnych modeli obciążeń VGRF generowanych podczas skoków i przysiadów,
- wyznaczenie zmienności amplitud pierwszych składowych widm gęstości energii oddziaływań VGRF generowanych podczas skoków i przysiadów w szerokich zakresach częstotliwości, dających poprawny obraz właściwości energetycznych sygnałów VGRF generowanych podczas skoków i przysiadów i stanowiących narzędzie oceny ilościowej modelowanych oddziaływań VGRF,
- wyodrębnienie dwóch technik wykonywania skoków: 1) skoki swobodne i 2) skoki intensywne, określenie zmienności parametrów obciążeń VGRF dla wyodrębnionych technik skoków i omówienie wytycznych ich modelowania,
- przedstawienie wytycznych uzupełniających lub korygujących dotychczasowe zalecenia w zakresie modelowania oddziaływań VGRF generowanych podczas skoków i przysiadów.



## LITERATURA

- [1] Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L., *The theory of splines and their applications*, Academic Press, New York 1967.
- [2] Akima H., *A method of smooth curve fitting*, ESSA Technical Report ERL 101-ITS 73, U. S. Government Printing Office, Washington 1969.
- [3] Akima H., *A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures*, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 17, 1970, s. 589-602.
- [4] Alexander M., Walkenbach J., *Excel VBA programming*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken 2019.
- [5] Allen D.E., *Floor vibrations from aerobics*, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 17, No. 5, 1990, s. 771-779.
- [6] Bachmann H., *“Lively” footbridges – a real challenge*, Proceedings of the 1st International Conference on Design and Dynamic of Footbridges: Footbridge 2002, OTUA, Paris 2002.
- [7] Bachmann H. et al., *Vibration problems in structures: practical guidelines*, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin 1995.
- [8] Bachmann H., Ammann W., *Vibrations in structures induced by man and machines*, Structural Engineering Documents 3e, IABSE, AIPC, IVBH, Zürich 1987.
- [9] Baumann K., Bachmann H., *Durch Menschen verursachte dynamische Lasten und deren Auswirkungen auf Balkentragwerke*, Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zurich, Springer Basel AG, 1988.
- [10] BD 29/17: Design manual for roads and bridges: Vol. 2, Section 2, Part 8: Design criteria for footbridges. Highways England, 2017.
- [11] Biliszczyk J., Rabięga J., *Kładka dla pieszych w parku w Sławięcicach*, Inżynieria i Budownictwo, 7-8, 1995, s. 357-360.
- [12] Billo E.J., *Excel for scientists and engineers. Numerical methods*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken 2007.
- [13] Birnbaum D., *Microsoft Excel VBA programming for the absolute beginner*, Thomson Course Technology PTR, Boston 2005.
- [14] Blickhan R., *The spring-mass model for running and hopping*, Journal of Biomechanics, Vol. 22, Iss. 11/12, 1989, s. 1217-1227.
- [15] Bober W., Tsai C., Masory O., *Numerical and analytical methods with MATLAB*, CRC Press, Inc., Boca Raton 2009.
- [16] Boor C., *A practical guide to splines, book series: Applied mathematical sciences (AMS)*, Vol. 27, Springer, New York 1994.

- [17] BS 5400-2: 2006 Steel, concrete and composite bridges – Part 2: Specification for loads, British Standards Institution (BSI), 2006.
- [18] Caetano E., Cunha A., Moutinho C., *Vandal loads and induced vibrations on a footbridge*, Journal of Bridge Engineering, Vol. 16, Iss. 3, 2011, s. 375-382.
- [19] Chapra S.C., Canale R.P., *Numerical methods for engineers*, McGraw-Hill Education, New York 2015.
- [20] Chapra S.C., *Applied numerical methods with MATLAB for engineers scientists*, McGraw-Hill, New York 2012.
- [21] Cheney W., Kincaid D., *Numerical mathematics and computing*, Thomson Brooks/Cole, Belmont 2008.
- [22] Costantini P., *An algorithm for computing shape-preserving interpolating splines of arbitrary degree*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 22, 1988, s. 89-136.
- [23] Costantini P., Morandi R., *An algorithm for computing shape preserving cubic spline interpolation to data*, Calcolo, Vol. 21, 1984, s. 295-305.
- [24] Ellis B.R., Ji T., *Loads generated by jumping crowds: numerical modelling*, The Structural Engineer, Vol. 82, No. 17, 2004, s. 35-40.
- [25] Ellis B.R., Ji T., *The response of structures to dynamic crowd loads*, BRE Press, Digest, 426, 2004.
- [26] Ellis B.R., Ji T., Littler J.D., *The response of grandstands to dynamic crowd loads*, Structures and Buildings, Vol. 140, Iss. 4, 2000, s. 355-365.
- [27] Esfandiari R.S., *Numerical methods for engineers and scientists using MATLAB*, CRC Press, Inc., Boca Raton 2017.
- [28] Faisca R.G., *Characterization of dynamic loads associated with human activities*, (*Caracterização de cargas dinâmicas geradas por atividades humanas*), PhD. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro 2003 (j. portugalski).
- [29] Flaga A., *Mosty dla pieszych*, WKŁ, Warszawa 2011.
- [30] Gregory J., *Shape preserving spline interpolation*, Computer Aided Design, Vol. 18, 1986, s. 53-58.
- [31] Gurruchaga J.R., *Python recipes for engineers and scientists. Scripts that devour your integrals, equations, differential equations, and interpolations!*, 2018.
- [32] Hoffman J.D., *Numerical methods for engineers and scientists*, Marcel Dekker, Inc., New York 2001.
- [33] Hussain M.Z., Sarfraz M., Shaikh T.S., *Shape preserving rational cubic spline for positive and convex data*, Egyptian Informatics Journal, Vol. 12, Iss. 3, 2011, s. 231-236.
- [34] Huynh H.T., *Accurate monotone cubic interpolation*, NASA Technical Memorandum, 103789, 1991.
- [35] ISO 10137: 2007 Bases for design of structures – Serviceability of buildings and walkways against vibrations, International Organization for Standardization, 2007.

- 
- [36] Ji T., Ellis B.R., *Floor vibration induced by dance-type loads: theory*, The Structural Engineer, Vol. 72, No. 31, 1994, s. 37-44.
- [37] Ji T., Ellis B.R., *Floor vibration induced by dance-type loads: verification*, The Structural Engineer, Vol. 72, No. 31, 1994, s. 45-50.
- [38] Kincaid D., Cheney W., *Analiza numeryczna*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne PWN, Warszawa 2006.
- [39] Kiusalaas J., *Numerical Methods in Engineering with Python 3*, Cambridge University Press, Cambridge 2010.
- [40] Knott G., *Interpolating cubic splines*, Birkhäuser Verlag, Boston 1999.
- [41] Kong Q., Siau T., Bayen A.M., *Python programming and numerical methods. A guide for engineers and scientists*, Elsevier Science Publishing, San Diego 2020.
- [42] Kosma Z., *Wstęp do metod funkcji sklepanych*, Wyższa Szkoła Inżynierska w Radomiu, Radom 1986.
- [43] Kouibia A., Pasadas M., *Approximation by shape preserving interpolation splines*, Applied Numerical Mathematics, Vol. 37, 2001, s. 271-288.
- [44] Kruger C.J.C., *Constrained cubic spline interpolation for chemical engineering applications*, KORF Technology Ltd., Ontario 2004.
- [45] Krzyżanowski P., *Obliczenia inżynierskie i naukowe: szybkie, skuteczne, efektywne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
- [46] Kvasov B.I., *Methods of shape-preserving spline interpolation*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore 2000.
- [47] Linge S., Langtangen H.P., *Programming for computations – Python: A gentle introduction to numerical simulations with Python*, Springer, New York 2016.
- [48] Linthorne N.P., *Analysis of standing vertical jumps using a force platform*, American Journal of Physics, Vol. 69, Iss. 3, 2001, s. 1198-1204.
- [49] Máca J., Rokoš O., *Modelling of synchronized jumping crowds on grandstands*, Procedia Engineering, Vol. 190, 2017, s. 645-652.
- [50] Macukow B., Wąsowski J., Fortuna Z., *Metody numeryczne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne PWN, Warszawa 2015.
- [51] Micula G., Micula S., *Handbook of splines*, Mathematics and Its Applications (MAIA), Vol. 462, Springer, New York 1999.
- [52] Montefusco L.B., *An interactive procedure for shape preserving cubic spline interpolation*, Computers and Graphics, Vol. 11, Iss. 4, 1987, s. 389-392.
- [53] Morgado F., *Programming Excel with VBA: A practical real-world guide*, Apress, New York 2016.
- [54] Nagar S., *Introduction to Octave: For engineers and scientists*, Apress, New York 2018.
- [55] Nhleko S., Zingoni A., Moyo P., *A variable mass model for describing load impulses due to periodic jumping*, Engineering Structures, Vol. 30, Iss. 6, 2008, s. 1760-1769.

- [56] Pajankar A., Chandu S., *GNU Octave by example: A fast and practical approach to learning GNU Octave*, Apress, New York 2020.
- [57] Pańtak M., *Dynamic forces with random amplitudes from rhythmic jumps and squats*, MATEC Web of Conferences, Vol. 211, 09004 (2018), Proceedings of the 14th International Conference on Vibration Engineering and Technology of Machinery (VETOMAC XIV), Section: Bridge Dynamics, Lisbon 2018.
- [58] Pańtak M., *Obciążenia dynamiczne generowane podczas chodu i biegu. Modele pionowych składowych GRF*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2024.
- [59] Pernica G., *Dynamic load factors for pedestrian movements and rhythmic exercises*, Canadian Acoustics, Vol. 18, No. 2, 1990, s. 3-18.
- [60] PN-EN 1991-2: 2007 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje – Część 2: Obciążenia ruchome mostów, PKN, Warszawa 2007.
- [61] Pratap R., *MATLAB dla naukowców i inżynierów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015.
- [62] Pusz P., Zima M., *Elementy metod numerycznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2020.
- [63] Quarteroni A., Saleri F., Gervasio P., *Scientific computing with MATLAB and Octave*, Springer-Verlag, Heidelberg 2014.
- [64] Racić V., Pavic A., Brownjohn M.W., *Number of successive cycles necessary to achieve stability of selected ground reaction force variables during continuous jumping*, Journal of Sports Science and Medicine, Vol. 8, Iss. 4, 2009, s. 639-647.
- [65] Racić V., Pavic A., *Stochastic approach to modelling of near-periodic jumping loads*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 24, Iss. 8, 2010, s. 3037-3059.
- [66] Romano F., Baka B., Phillips D., *Getting started with Python*, Packt Publishing, Birmingham 2019.
- [67] Rosłaniec S., *Wybrane metody numeryczne z przykładami zastosowań w zadaniach inżynierskich*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2020.
- [68] Rozporządzenie Ministra Infrastruktury z dnia 24 czerwca 2022 r. w sprawie przepisów techniczno-budowlanych dotyczących dróg publicznych, Dz.U. 2022, poz. 1518.
- [69] Rucka M., Wilde K., *Dynamika budowli z przykładami w środowisku MATLAB*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2014.
- [70] Salamak M., Weseli J., *Wymuszenia złośliwe w kładkach dla pieszych i sposoby przeciwdziałania ich skutkom*, Materiały cyklu seminariów „Projektowanie, Budowa i Estetyka Kładek dla Pieszych”, Politechnika Krakowska, Kraków 2003, s. 173-187.
- [71] Schoenfeld B.J., *Squatting kinematics and kinetics and their application to exercise performance*, NSCA Journal Strength and Conditioning Research, Vol. 24, No. 12, 2010, s. 3497-3506.



- 
- [72] Schumaker L., *Spline functions: basic theory*, Cambridge University Press, Cambridge 2007.
- [73] Shikin E.V., Plis A.I., *Handbook on splines for the user*, CRC Press, Boca Raton 1995.
- [74] Smith A.L., Hicks S.J., Devine P.J., *Design of floors for vibration: A new approach*, Steel Construction Institute (SCI), Publication P354, 2009.
- [75] Späth H., *One dimensional spline interpolation algorithms*, CRC Press, Boca Raton 2018.
- [76] Sprague T., *Piecewise cubic interpolation shape preserving*, praca doktorska, Western Michigan University, Michigan 1990.
- [77] Strojecka M., *Badanie wpływu cementów drugorzędnych na wyężenie dźwigarów głównych przęsla mostowego*, Inżynieria i Budownictwo, 3, 1996, s. 194-195.
- [78] Tuan C.Y., Saul W.E., *Loads due to spectator movements*, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 111, No. 2, 1985, s. 418-434.
- [79] WR-M-23: Wytyczne wykonywania badań drogowych obiektów mostowych pod próbnym obciążeniem. Wzorce i standardy rekomendowane przez Ministra właściwego ds. transportu, zespół autorski: Rymśza J., Olaszek P., Warszawa 2020.
- [80] Živanović S., Pavić A., Reynolds P., *Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 279, No. 1-2, 2005, s. 1-74.
- [81] Źółtowski K., *Pieszy na kładkach. Obciążenia i odpowiedź konstrukcji*, Monografie Politechniki Gdańskiej, t. 82, Gdańsk 2007.



## Streszczenie

Niniejsza monografia przybliży zagadnienia modelowania oddziaływań dynamicznych generowanych przez osoby skaczące w miejscu i wykonujące przysiady w miejscu. Przedstawiono charakterystyki aktywności człowieka w postaci skoków i przysiadów oraz charakterystyki obciążeń generowanych podczas tej aktywności. Zaprezentowano aktualny stan wiedzy w zakresie modelowania obciążeń dynamicznych generowanych przez osoby skaczące w miejscu lub wykonujące przysiady oraz propozycje własnych modeli obciążeń generowanych podczas skoków i przysiadów.

Głównym celem pracy jest zaprezentowanie własnych propozycji modeli pionowych składowych sił reakcji podłoża (ang. *Vertical Ground Reaction Forces*, VGRF) generowanych podczas skoków i przysiadów. Modele własne opracowano na podstawie zrealizowanych przez autora obszernych badań laboratoryjnych sił reakcji podłoża w zakresach częstotliwości: 1,00–3,00 Hz dla skoków i 0,40–3,00 Hz dla przysiadów.

Własne modele obciążeń VGRF zbudowano z wykorzystaniem techniki interpolacji przebiegu krzywych VGRF funkcjami sklejanymi 3-go stopnia z kontrolą kształtu. Poprawność modelowania oddziaływań VGRF potwierdzono w drodze trój etapowej walidacji. Wyniki walidacji modeli wskazały na poprawne odwzorowanie krzywych VGRF pod względem ich przebiegów czasowych i spektrów energetycznych oraz poprawne odwzorowanie odpowiedzi dynamicznej konstrukcji wyznaczonej przy ich wykorzystaniu.

W monografii zawarto liczne wytyczne uzupełniające lub korygujące dotychczasowe zalecenia w zakresie modelowania oddziaływań VGRF generowanych podczas skoków i przysiadów opracowane na podstawie wyników badań własnych. W przypadku oddziaływań w postaci skoków wyodrębniono dwie techniki wykonywania skoków: skoki swobodne oraz intensywne. Dokonano analizy zmienności parametrów obciążeń VGRF w zależności od techniki skoków i przedstawiono wytyczne ich modelowania.

W publikacji zamieszczono również wyniki autorskich szczegółowych analiz spektrów energetycznych sygnałów VGRF generowanych podczas skoków i przysiadów umożliwiające wykonywanie oceny ilościowej zamodelowanych przebiegów VGRF pod względem ich właściwości energetycznych (energia minimalna, średnia lub maksymalna) oraz oceny ilościowej wyznaczonej odpowiedzi dynamicznej konstrukcji (minimalny, średni lub maksymalny poziom drgań).

Słowa kluczowe: dynamika, drgania, skoki, przysiady, kładki dla pieszych, mosty dla pieszych, wzbudzenia intencjonalne, siły reakcji podłoża, obciążenia dynamiczne.

# INTENTIONAL DYNAMIC EXCITATIONS. MODELS OF DYNAMIC LOADS GENERATED DURING JUMPS AND SQUATS

## Abstract

This monograph is dedicated to presenting the issues of modeling the dynamic forces generated by people jumping in place and squatting in place. The characteristics of human activity in the form of jumps and squats as well as the characteristics of loads generated during this activity are presented. The current state of knowledge in the field of modeling dynamic loads generated by people jumping in place or performing squats as well as own proposals of models of loads generated during jumps and squats are presented.

The main purpose of the work is to present author's own proposals for models of vertical components of ground reaction forces (VGRF) generated during jumps and squats. These models were developed on the basis of extensive laboratory tests of ground reaction forces carried out by the author in the frequency ranges: 1.00–3.00 Hz for jumps and 0.40–3.00 Hz for squats.

Own VGRF load models were built using the technique of interpolation of the VGRF curves with 3rd degree (cubic) shape-preserving splines. The accuracy of the VGRF modeling was confirmed by a three-stage validation. The results of the validation of the models indicated the correct mapping of the VGRF curves in terms of their time courses and energy spectra, as well as the correct estimation of the dynamic response of the structure.

The monograph presents numerous guidelines supplementing or correcting the existing recommendations in the field of modeling the VGRF generated during jumps and squats, developed on the basis of the author own research results. In the case of activity in the form of jumps, two jumping techniques were distinguished: free jumps and intensive jumps. An analysis of the variability of the VGRF parameters depending on the technique of jumps was conducted and guidelines for their modeling were presented.

The publication also presents the results of the author's detailed analyses of Energy Spectra Densities (ESD) of the VGRF signals generated during jumps and squats, enabling the quantitative assessment of the modeled VGRF waveforms in terms of their energy properties (minimum, average or maximum energy) and the quantitative assessment of the determined dynamic response of the structure (minimum, medium or maximum vibration level).

**Keywords:** dynamics, vibrations, jumps, squats, footbridges, pedestrian bridges, intentional excitations, ground reaction forces, dynamic loads.