



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299102













ABRISS  
DER  
FESTIGKEITSLEHRE  
FÜR DEN  
MASCHINENBAU

---





---

Abbildungen  
aus dem xylographischen Atelier  
von Friedrich Vieweg und Sohn  
in Braunschweig

---

# ABRISS DER FESTIGKEITSLEHRE

FÜR DEN  
MASCHINENBAU

VON

14/2  
PROF. DR. DR. ING. F. REULEAUX

GEH. REGIERUNGSRAT

MITGLIED DER KÖNIGL. TECHNISCHEN DEPUTATION FÜR GEWERBE A. D.  
KORRESP. MITGLIED D. LOMBARDISCHEN INSTITUTES U. D. SCHWEDISCHEN GEWERBEVEREINS  
AUSWÄRTIGES MITGLIED DER KÖNIGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN STOCKHOLM  
EHRENMITGLIED DER GEWERBEVEREINE IN RIGA UND ERFURT  
DES TECHNISCHEN VEREINS IN FRANKFURT A. M., DER SOCIÉTÉ DES ARTS IN GENÈVE  
DER GESELLSCHAFT FLORA IN KÖLN, DER AMERICAN PHILOSOPHICAL SOCIETY  
UND DER AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS  
DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN ZÜRICH, DES VEREINS FÜR EISENBAHNKUNDE  
UND DES VEREINS FÜR GEWERBEFLEISS IN BERLIN

7. Nr. 25799 SONDER-ABDRUCK

AUS DES

VERFASSERS HANDBUCH „DER KONSTRUKTEUR“

FÜNFTE AUFLAGE

MIT 75 EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1904



XXX  
782



115458

---

Alle Rechte, namentlich dasjenige der Übersetzung in fremde Sprachen,  
vorbehalten

---

Akc. Nr. 5237/50



MEINEM HOCHVEREHRTEN FREUNDE

DR. WILHELM FLIESS

ZUGEEIGNET



## V O R W O R T

---

Bei der Neubearbeitung meines „Konstruktors“ habe ich dessen einleitendem Abschnitt von der Festigkeit der Baustoffe die ihm schon längere Zeit zugedachte und als notwendig erkannte Aufmerksamkeit widmen können; bis dahin hatte es mir an Muße gefehlt, die nicht ganz einfache Durcharbeitung vorzunehmen. Diese letztere lege ich denn hiermit in besonderem Abdruck vor. Im allgemeinen habe ich dem Abschnitt seine bisherige Richtung belassen, die darin bestand, nicht sowohl die mathematische Entwicklung der Festigkeitsrechnungen, als vielmehr nur deren Schlußformeln gut geordnet vorzuführen, und zwar auch nur so weit, als sie der Maschinenbauer zu benutzen pflegt; es handelt sich, mit anderen Worten, jetzt wie früher um ein Handbuch, nicht um ein Lehrbuch. In Beziehung auf die Anwendung der Formeln, sowie der immer reichlicher zufließenden Versuchsergebnisse aus den Prüfungsanstalten habe ich aber verschiedene, im Laufe der Jahre als wichtig erkannte Neuerungen und Erweiterungen eintreten lassen. Ich gestatte mir, sie in kurzem Überblick hier hervorzuheben.

Für die Übersicht über die so mannigfachen Festigkeitsäußerungen schien es mir empfehlenswert, zu Anfang auf die Fouriersche Theorie des Aufbaues „fester“, d. h. hier: allseitig widerstandsfähiger Körper zurückzugreifen, ja, diese Theorie noch auf die einseitig widerstandsfähigen Körper zu erweitern. Diese letzteren Körper sind die reinen Zug- und Druckelemente, die ich anderswo „Tracke“ und „Flude“ der Kürze halber zu nennen vorgeschlagen habe. Die Fouriersche Theorie erklärt ganz schlicht



die, an sich betrachtet erstaunliche Eigentümlichkeit, daß die Formänderungen belasteter Körper ziemlich weit hin der Belastung proportional ausfallen. Man hat diese Eigentümlichkeit ein Gesetz, und zwar mit großem Beifall das „Hookesche Gesetz“ genannt. Meines Erachtens geschah dies mit logisch durchaus bezweifelbarem Recht, da das geradlinige Verhalten erst aus zwei wirklichen, aber nicht geradlinigen Gesetzen folgt, auch oft nicht einmal weit reicht. Die Franzosen sind strenger geblieben; im Anschluß an sie habe ich das besprochene Verhalten den Carnotschen Satz genannt (vgl. §. 6).

In betreff der Elastizitätsgrenze bin ich der, im Ausland ringsum im Gebrauch erhaltenen Anschauung treu geblieben, sie dorthin zu verlegen, wo die elastische Längsänderung aufhört, der Belastung proportional zuzunehmen, wo sie also aufhört, dem Carnotschen Satz zu folgen. Das sich anschließende, immer noch elastische Verhalten bis zur Streck- und Stauchgrenze habe ich abnehmende Elastizität, daher das vorausgehende die steigende Elastizität genannt. In einer Darstellung, die die Elastizität, die Streckung und die Stauchung zusammen vorführt, vgl. S. 20, nenne ich das mittlere Gebiet das „Elastizitätsfeld“, die beiden Gebiete der bleibenden Formänderungen die „Setzfelder“, indem ich mich dem Gebrauch im englischen Sprachgebiet, der das Strecken und Stauchen zusammenfassend das „Setzen“ nennt, angeschlossen habe.

Unter den Versuchen von bestimmtem Verlauf, die uns doch jetzt in Mannigfaltigkeit zu Gebote stehen, habe ich einen der besonderen Beachtung empfohlen; es ist derjenige, den ich den „Wiederholungsversuch“ zu nennen vorschlage und in den §§. 4 und 6 eingehend bespreche. Er verleiht dem Versuchsstab einen Zustand, in welchem seine „steigende“ Elastizität erwehert auftritt, was bis nahe vor den Bruch geschehen kann, wenn der Stoff dazu geeignet ist. Die erforderliche Eigenschaft des Baustoffes ist das, was man die Zähigkeit, allgemeiner noch die Bildsamkeit nennt. Das Verfahren als Ganzes ist in der, so überaus wichtigen und entwickelten Behandlung der Metalle im Ziehvorgang zu technisch großartig zu nennender Bedeutung gelangt; die theoretische Einführung in dies Gebiet ist der „Wiederholungsversuch“. Dieser zeigt sich andererseits auch geeignet, bei nicht

als zäh geltenden Stoffen, wie z. B. Gußeisen, Aufschlüsse über die wahre Lage der Elastizitätsgrenze zu geben; dies ist in §. 6 näher gezeigt. Aus diesen mehrfachen Gründen habe ich den Wiederholungsversuch als empfehlenswert hervorgehoben.

Ein lebhafter Austausch zwischen den Metallkennern der Kulturnationen hat in den letzten Jahren stattgefunden, um zur Aufstellung gemeinsamer Bedingnisse für die Festigkeit der Baumetalle zu gelangen. Im Laufe dieses Jahres 1904 sollte auf einem Festigkeitskongreß in Petersburg der Versuch zu gemeinsamen Vorschriften gemacht werden\*). In §. 7 habe ich die einschlägigen Fragen berührt. Im allgemeinen möchte bei den Beratungen im Auge zu behalten sein, daß die Bereitung des Stahls — auf den es in erster Linie ankommt — sich in lebhafter Bewegung befindet, wie sich namentlich bezüglich des Nickelstahls gezeigt hat. Gemeinsame Bestimmungen werden deshalb immerhin nur eine vorläufige Gültigkeit haben können. Die Prüfungen auf Zug kommen bei den bereits vorliegenden Vorschlägen durchaus in erster Linie in Betracht. Darin ist man auch behördlich in der letzten Zeit schon recht weit gegangen, indem man die verhältnismäßige (prozentale) Streckung der Probestäbe vorschreibt. Ich habe hierzu im Text Bedenken in sofern geäußert, als die Streckungsziffern sich nur selten unmittelbar vergleichen lassen. Denn es sind, wie u. a. die umfassenden Versuche bestätigen, die Prof. Unwin, London, auf Veranlassung der fünf größten technischen Vereine Englands angestellt hat (London, Crosby Lockwood and son, November 1903), die Streckungsziffern nur unter der Voraussetzung unmittelbar vergleichbar, daß die Probestäbe streng geometrisch ähnlich geformt sind; wo dies nicht der Fall ist, treten Unstimmigkeiten ein, die den Wert der erlassenen Vorschriften zu vermindern geeignet sind. Wichtiger als die Streckung ist meines Erachtens die mit ihr nahe zusammenhängende Querschnittsverminderung vor dem Zerreißen. Hinweisen habe ich auch auf den Umstand, daß man oft durch Vorversuche an den Probestäben deren Festigkeitsmodel wesentlich verschieben kann; wie ich aus guter Quelle entnehmen konnte, ist man auch in der Praxis schon darauf aufmerksam geworden.

---

\*) Während der Drucklegung des Vorstehenden lief die Nachricht ein, daß der Kongreß um ein Jahr verschoben worden sei.



Bei der Betrachtung der Biegungsfestigkeit, wie auch der Drehungsfestigkeit, habe ich den Vorschlag gemacht, die übliche Benennung „Widerstandsmoment“ durch „Widerstandsmodul“ zu ersetzen, weil die zu bezeichnende Größe gar kein statisches Moment ist. Die gebräuchliche Benennung erschwert deshalb beim Lernenden das Verständnis; die neue Benennung würde deshalb unschwer einzuführen sein.

Ein mir nicht unwichtig scheinender Hinweis ist der in §. 17 gegebene, daß der Baustoffverbrauch eines auf Biegung beanspruchten Bauteiles um so kleiner ausfällt, je kleiner man vermöge der noch freistehenden Wahl der Querschnittsverhältnisse die Biegung, die der Körper unter seiner Belastung annimmt, werden läßt oder einführt. Dieser Satz steht im Widerspruch mit unseren üblichen Anschauungen, nach denen Steifheit und Stoffverbrauch eines Balkens ungefähr gleich wachsen oder abnehmen. Ich habe dieses Widerspruchs wegen den Satz ausführlich begründet und an zahlreichen Beispielen erhärtet, auch gezeigt, daß er in den bekannten Biegungsformeln steckt, wo man ihn nur nicht beachtet hatte. Ich habe dann weiterhin dessen Gültigkeit auch für Drehungs-, Zug-, Druck- und Schubfestigkeit gezeigt. Er gilt — wohlverstanden — da, wo „Verhältnisse“, Maßbeziehungen zwischen den linearen Quererstreckungen der Bauteile bestimmend mitwirken. Der Satz gilt also nicht von dem einzelnen geraden Stab, der auf Zug oder Druck belastet ist und daher nur bei einer einzigen Querschnittsgröße eine gegebene Spannung im Querschnitt erfährt. Wohl aber gilt er unter gewisser Einschränkung da, wo, wie im Fachwerk, zwei oder mehr Stäbe die Belastung aufzunehmen haben und unter zu wählenden Winkeln zusammentreffen (§. 23). Baulich interessant ist dabei, daß der schlankere, elegantere Fachwerkbau wesentlich schwerer ausfällt, d. h. auffallend viel mehr Baustoff beansprucht, als der derbere, plumper aussehende. Unter Umständen ist das, der Bauschönheit gebrachte Opfer zweifellos gerechtfertigt. Man ist ja auch im allgemeinen von dem älteren trockenen Satz zurückgekommen, daß Baustoffersparnis in erster Linie in Betracht komme. Die Größe des etwa erhöhten Baustoffaufwandes lehrt die erwähnte Rechnung kennen.

Bei der Berechnung der stark beanspruchten Gefäßwände



habe ich stärker als schon früher auf eine sehr nachteilige Gewohnheit im Bau der hydraulischen Pressen aufmerksam gemacht, diejenige, daß man, wie vor einem vollen Jahrhundert, den Preßzylinder an die festen Preßstangen „hängt“, statt ihn auf das, von den Stangen festgehaltene Bodenstück zu „stellen“. Wie viele Preßzylinder sind deshalb schon gesprungen und haben schweres Unheil angerichtet! und wieviel Baustoff verschwendet man bis heute wegen dieser ungeeigneten Bauart. Aufs neue habe ich danach auch gezeigt, wie man durch Wahl eines größeren Kolbendurchmessers an dem kostbaren Baustoff für den Preßzylinder erheblich sparen kann.

Mit den Hochdruckzylindern verwandt sind die Aufzug- oder Aufzwängungsringe. Neuere Bestrebungen und gute Versuche, deren Ergebnisse in §. 29 ziemlich eingehend besprochen und beleuchtet sind, haben in diesem Gebiet die Theorien, deren ich früher schon eine aufgestellt hatte, in willkommener Weise ergänzt. In ganz besonderem Maße kommt hierbei die Genauigkeitsmessung zur Verwendung. Unsere Versuchsanstalten könnten durch Aufnahme der Aufzieh- und Aufschrümpfungsversuche der Technik noch wertvolle Dienste erweisen, zumal die Zwängungsverbindungen an Anwendungen stetig zunehmen.

Bei den Federn, §. 30, die aus Metall bestehen, tritt die Frage nach dem Körperinhalt in sofern besonders hervor, als hier die elastische Nachgiebigkeit nicht klein gehalten werden darf, sondern gerade im Gegenteil groß gemacht werden soll, zu welchem Ende die „Verhältnisse“ der Abmessungen besonders gewählt werden müssen. Dies bringt mit sich, daß die Federn von allen Bauteilen die schwersten im Verhältnis zu ihrer Belastung sind; man braucht, um dies auf einen Blick zu sehen, ihr Gewicht mit dem der Federstützen der Eisenbahnwagen zu vergleichen, die die Last auf sie zu übertragen haben und die oft nur ein Hundertstel so viel wiegen, als die Federn selbst.

In §. 31 habe ich die Federkräftigkeit, d. i. zugleich Stoßfestigkeit der Bauteile, noch bezüglich der Festigkeitsmodel der angewandten Baustoffe untersucht und verglichen. Es handelt sich um zwei Model: den Tragmodul  $T$  und den Elastizitätsmodul  $E$ . Beide sind Spannungen. Den aus ihnen gebildeten Quotienten  $E:T^2$  habe ich daher den Spannungsquotienten des

Baustoffes genannt. Es ergibt sich aus der Betrachtung der Körperinhaltsformeln etwas Eigentümliches. Nämlich, daß ein hoher Elastizitätsmodul den Baustoffaufwand für einen auf Stoß beanspruchten Bauteil, z. B. die Panzerplatte, erhöht, nicht wie gewöhnlich angenommen wird, vermindert. Ein hoher Tragmodul dagegen ist, wie auch allgemein angenommen wird, günstig für den Baustoffaufwand, zumal er in der zweiten Potenz im Nenner der Körperinhaltsformel steht. Um die Vergleichung der verschiedenen Baustoffaufwendungen zu erleichtern, habe ich die Spannungsquotienten der gebräuchlichsten Baustoffe des Maschinenbaues, Bauholz mit eingeschlossen, in zwei Zahlentafeln zusammengestellt. Am ungünstigsten geht Messing, am günstigsten Gußstahl aus der angestellten Vergleichung hervor. Es ist dann noch gezeigt, daß bei Vergleichen von Baustoffen der umgekehrte Wert der Spannungsquotienten als Maß der Widerstandsfähigkeit gegen lebendige Kraft dienen kann, weshalb der Wert  $T^2:E$  als Modulus der „lebendigen Festigkeit“ des Baustoffes anzusehen ist, was den Überblick bei Vergleichen erleichtert.

Im Schlußparagraphen 32 bin ich auf die, an Wichtigkeit für die Metallkenntnis zunehmende Betrachtung des mikroskopischen Kleingefüges des Eisens in Kürze eingegangen. Die Untersuchungen, die in dieser Richtung angestellt worden sind und noch fortwährend weiter geführt werden, versprechen noch ungewein wichtige Aufschlüsse für das Hüttenwesen. Warmen Dank spreche ich bei dieser Gelegenheit der Leitung des Friedrich Kruppschen Laboratoriums für die gütige, höchst lehrreiche Mitteilung von Gefügebildern und deren Erläuterungen aus. Metallurgische Wissenschaft und metallurgische Praxis schreiten auf diesem Gebiete Hand in Hand voran.

Berlin, im April 1904

Der Verfasser



# INHALT

---

	Seite
§. 1 Einleitung . . . . .	1
§. 2 Körpertheorie . . . . .	2
§. 3 Bemerkungen zur Zugfestigkeit der Baustoffe . . . . .	8
§. 4 Der Wiederholungsversuch . . . . .	12
§. 5 Bemerkungen zur Druckfestigkeit der Baustoffe . . . . .	15
§. 6 Wiederholungsversuch für Druckfestigkeit . . . . .	16
§. 7 Verwertung der Versuchsergebnisse . . . . .	22
§. 8 Über die Wirkung der Wärme auf die Festigkeit . . . . .	31
§. 9 Festigkeitswerte . . . . .	32
§. 10 Zug- und Druckfestigkeit . . . . .	38
§. 11 Körper von gleicher Zug- und Druckfestigkeit . . . . .	38
§. 12 Schub- oder Scherfestigkeit . . . . .	39
§. 13 Biegungsfestigkeit . . . . .	41
§. 14 Querschnittstafel . . . . .	49
§. 15 Körper von gleicher Biegungsfestigkeit . . . . .	52
§. 16 Wahl der Querschnittsverhältnisse . . . . .	54
§. 17 Biegung und Körperinhalt . . . . .	55
§. 18 Weiteres über die Inhaltsberechnung . . . . .	59
§. 19 Gleitung gebogener Fasern . . . . .	63
§. 20 Drehungsfestigkeit . . . . .	65
§. 21 Polare Trägheitsmomente und Widerstandsmodel . . . . .	66
§. 22 Körperinhalt bei Verdrehungsbelastung . . . . .	69
§. 23 Körperinhalt bei Zug- und Druckbelastung . . . . .	70
§. 24 Knickungs- oder Strebfestigkeit . . . . .	76
§. 25 Körper von gleicher Strebfestigkeit . . . . .	78
§. 26 Zusammengesetzte Festigkeit . . . . .	79
§. 27 Festigkeit der Gefäßwände . . . . .	82
§. 28 Umgürtete dickwandige Rohre . . . . .	88
§. 29 Aufziehen und Aufpassen von Ringen auf volle Zylinder . . . . .	91
§. 30 Berechnung der Federn . . . . .	97
§. 31 Stoßfestigkeit und Körperinhalt . . . . .	109
§. 32 Über die Zusammensetzung des Eisens . . . . .	115

---





# FESTIGKEIT DER BAUSTOFFE

## §. 1

### Einleitung

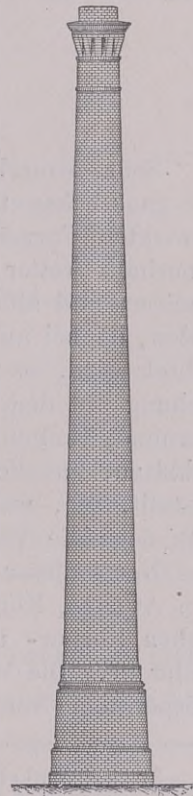
Die Festigkeitslehre ist ein für alles Bauwesen höchst wichtiger Teil der Mechanik. Sie betrachtet die Beziehungen zwischen äußeren und inneren Kräften, entgegen anderen Untersuchungen, welche die Beziehungen von äußeren zu äußeren Kräften ermitteln wollen. Während nämlich, um ein Beispiel für beides anzuführen, die Stabilitäts- oder Standfähigkeitslehre einen steinernen Schornstein, Fig. 1, daraufhin prüft, ob die äußere Belastung durch Wind nicht die, ebenfalls äußere Schwerkraft überwinden, d. h. das Bauwerk umkippen könnte, untersucht die Festigkeitslehre, ob seine Ziegel- und Mörtelschichten ausreichend durch ihre inneren Kräfte zusammengehalten seien, um das Ganze als eine schwere Einheit ansehen zu dürfen. Noch eingehender wird diese Untersuchung sein müssen, wenn es sich um dynamische Einflüsse, wie die von drohenden oder stattgehabten Erschütterungen handelt. Die Festigkeitslehre beruht, gleich der Mechanik überhaupt, auf Erfahrung, insbesondere auf der beabsichtigten Erfahrung: dem Versuch, der durch mathematische Behandlung auf die Einzelfälle übertragen wird.

Man unterscheidet praktisch gewöhnlich sechs Arten der Beanspruchung, nämlich die auf:

Zug, Druck, Schub, Biegung, Drehung  
und Knickung.

Reuleaux, Festigkeitslehre

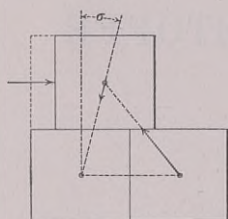
Fig. 1



Schornstein in Ziegelbau

Drei von ihnen, Druck, Schub und Biegung, kamen schon bei dem erwähnten Schornstein vor. Am einfachsten liegen die Dinge bei gleichmäßig verteiltem Zug und Druck. Danach käme

Fig. 2



Schubfestigkeit

das „Schieben“ einer Teilchenschicht über die benachbarte; aber da finden Zug und Druck gleichzeitig statt, nämlich Entfernung von dem einen, Annäherung an das folgende Teilchen, (siehe Fig. 2\*). Dies gilt auch für die Drehung. Die Biegung bedeutet Zug auf der einen, Druck auf der anderen Seite; das gilt auch für die Knickung. Somit bilden Näherung und Entfernung der Teilchen die Grundfragen in der Festigkeitslehre; auf sie ist deshalb das erste Augenmerk zu richten, wie denn auch die Versuchsanstalten tun.

## §. 2

### Körpertheorie

Sehr bemerkenswert ist bei den meisten Beanspruchungen die ganz bekannte Erscheinung, daß die von den äußeren Kräften bewirkten Formänderungen den sie hervorrufenden Kraftgrößen innerhalb weiter Grenzen proportional sind, einfach mit ihnen wachsen und abnehmen. Dies muß bei näherer Überlegung auffallen, da bei anderen Naturkräften doch so ganz Anderes beobachtet wird, so z. B. bei der allgemeinen Schwere, deren Anziehung mit dem Quadrat der wachsenden Entfernung ab-, nicht zunimmt, ähnlich bei Magnetismus usw. Diesen Widerspruch aufzuklären, hat Fourier\*\*) eine Theorie des Körperaufbaues aufgestellt, die, wenn sie auch heute nicht mehr als erschöpfend gilt, doch die Verschiedenheit wegräumt.

Nach dieser Theorie bestehen die Moleküle aus zwei Arten von Atomen, Körperatomen und Ätheratomen. Die Körperatome ziehen Körper- und Ätheratome an, die Ätheratome stoßen einander ab. Die Moleküle bilden sich demzufolge so, daß in ihnen Körperatome von Ätheratomen umhüllt sind, so daß die Körper-

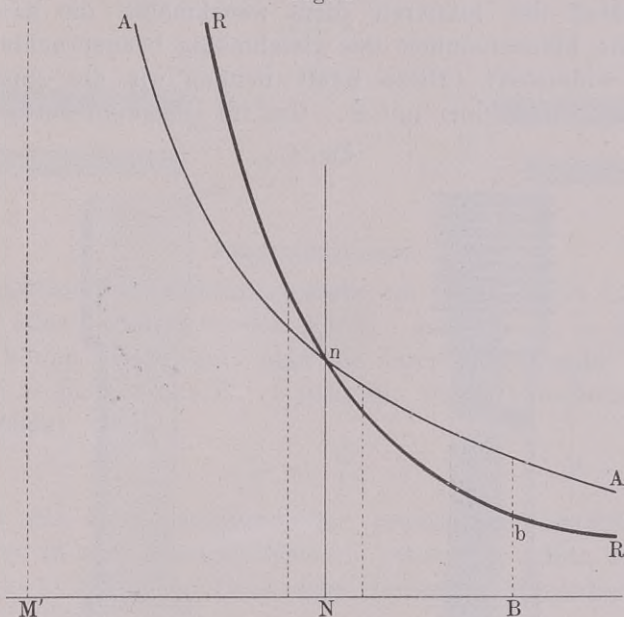
\*) Der Winkel  $\sigma$ , um den die Verbindungslinie der Mittelpunkte abgelenkt wird, ist sehr klein, siehe §. 20.

\*\*) Jean Baptiste Joseph Fourier, französischer Mathematiker, 1768 bis 1830, von Napoleon 1808 baronisiert.



atome einander nicht berühren; dies bedeutet mit anderen Worten: daß die Moleküle noch näherungsfähig sind. Anziehung und Abstoßung der Moleküle, erklärt Fourier, nehmen nun beide bei Näherung der Moleküle rasch zu, bei Auseinanderrückung ab. Die beiden, die Kraftgesetze\*) schematisch darstellenden Kurven  $A$  und  $R$ , Anziehung und Rückstoßung (Attraktion und Repulsion) Fig. 3, schneiden einander. Dies heißt: es überwiegt rechts von

Fig. 3



Die Fourierschen Kraftkurven

dem Schnittpunkt  $n$  die Ordinate von  $A$ , links davon die Ordinate von  $R$ . Der Schnittpunkt  $n$  entspricht dem noch ungestörten, sogenannten Normalzustand des Körpers. Vermehrt man durch Zug den Abstand der Moleküle, so widersteht  $A - R$ , vermindert man ihn durch Druck, so widersteht  $R - A$ .

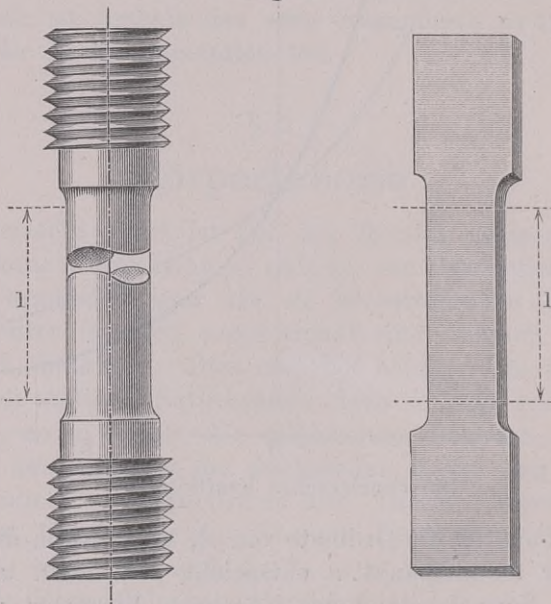
Was wir also messen beim Zug wie beim Druck, ist nicht die auf die Moleküle wirkende innere Anziehung oder Abstoßung selbst, sondern ist nur der Unterschied dieser beiden Kräfte, ist der jeweilige Überschuß der einen über

\*) Man kann sie sich ähnlich der allgemeinen Schwere vorstellen, die ja durch eine kubische Hyperbel,  $x^2y = C$  ausgedrückt wird.

die andere. Aus diesem Unterschied unmittelbar Schlüsse auf die wirkliche Größe der beiden Kräfte selbst zu ziehen, ist nicht statthaft, indessen aber erklärt die Ähnlichkeit des stetigen Verlaufs der beiden Kurven die, soviel wie geradlinige Zu- und Abnahme der Widerstandsordinaten, also die bekannte Proportionalität der Wirkung nach außen.

Als Maß der letzteren dient zweckmäßig die Kraft, mit welcher die Flächeneinheit des gleichmäßig beanspruchten Querschnittes widersteht. Diese Kraft nennen wir die „Spannung“ und bezeichnen sie hier mit  $\mathfrak{S}$ . Um sie allgemein betrachten zu

Fig. 4



Versuchskörper

können, setzt man voraus, der untersuchte Körper sei prismatisch geformt; man gestaltet ihn auch so an der geprüften Stelle, sieh beispielsweise Fig. 4. Wird alsdann der Stab an dem untersuchten prismatischen Teil, den wir die Kehle nennen wollen, und der die Länge  $l^*$ ) habe, zuerst um  $\lambda$ , dann um  $\lambda_1$  ausge-

\*) Beliebt sind die beiden Kehllängen 200 und 50 mm, im englischen Sprachgebiet 9" und 2", letzteres Maß für den runden, ersteres für den rechteckigen Stab.

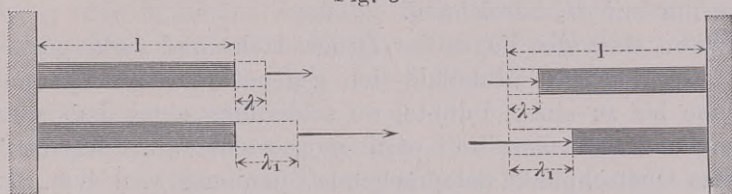


dehnt oder verkürzt, vgl. Fig. 5, so besagt die erwähnte Beobachtung von der Proportionalität, daß

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} \dots \dots \dots (1)$$

Dies setzt stillschweigend voraus, daß der Querschnitt beim Versuch seine Form und Größe nicht ändere. Um nun aus dem Versuch allgemein mittelbare Angaben zu erhalten, macht man noch eine Annahme oder einen Rechnungsansatz, nämlich: daß der Stab

Fig. 5



Längenänderungen

bei demselben Formänderungsgesetz um seine ganze Länge ausgedehnt oder verkürzt werden könne, daß also  $\lambda_1 = l$  gemacht werden könne. Bezeichnet man die dann entstehende Spannung  $\mathfrak{S}_1$  noch besonders mit  $E$ , so geht die vorige Gleichung über in die folgende:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mathfrak{S}}{E} \dots \dots \dots (2)$$

Dies ist die Grundgleichung der praktischen Festigkeitslehre. Der Wert  $E$  wird Elastizitätsmodul genannt\*). Man nennt den Ausdruck (1) häufig das Hookesche Gesetz\*\*); er verdient logisch

\*) Vorgeschlagen wurde dieses Maß 1807 durch Thomas Young, den berühmten englischen Physiker, 1779 bis 1829; die Engländer nennen daher  $E$  auch den Youngschen Modul. Man braucht nicht zu besorgen, daß die Annahme von Zusammendrückbarkeit bis auf Null unzulässig sei; man denke nur an die Gase, die vor ihrer Verflüssigung auf den 200- bis 300sten Teil ihrer Säulenhöhe gepreßt werden können. Für die Dehnung haben wir kein so günstiges Beispiel wie dieses, indem zwar beispielsweise beim Kautschuk Ausdehnung um die ganze Länge  $l$  geschehen kann, aber der Querschnitt dabei auch auf die ungefähre Hälfte herabgeht.

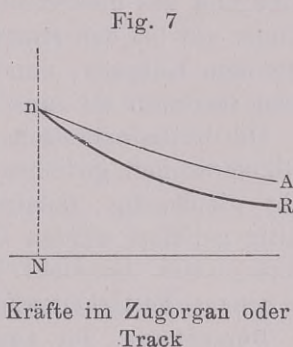
\*\*\*) Robert Hooke, englischer Physiker, 1635 bis 1705. Der von ihm vom Jahre 1678 gemeldete Satz (vgl. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik S. 47): *Ut tensio sic vis* scheint mir für damals nichts Anderes, als die in Rede stehende äußerliche Beobachtung bedeutet zu haben, daß die (elastischen) Formänderungen sich verhalten wie die Belastungen, da für die überaus feinen Zug- und Druckergebnisse es an Messungshilfsmitteln noch durchaus gebrach. Der sorgfältig beobachtende Galilei nahm meßbare Zusammenpressungen überhaupt noch nicht an. Auch Thomson (Math. Papers II, S. 16) scheint mir zu viel in die Hooke'sche Sentenz hinein zu beweisen.





werden aus ihrem „Aggregatzustand“ (zu deutsch Herdenzustand) versprengt, verflocht, fliehen auseinander in unbestimmte Weite, d. h. sie bilden ein Gas. Es wird klar, daß der tropfbarflüssige Zustand ein Grenzzustand eines Gases ist, der dem Zerquetschtwerden beim starren Körper nicht wenig ähnelt, obwohl er ihm nicht gleich ist. Denn die Flüssigkeit ist in ihrem, durch Fig. 6 dargestellten Normalzustand noch zusammendrückbar, und zwar gemäß dem stetigen Verlauf der beiden Kraftkurven auch wieder so, daß die Wirkung nach außen proportional der Aneinanderückung der Moleküle ausfällt; dies wird durch den Versuch bis zu weiten Grenzen bestätigt. Die Flüssigkeiten, tropfbare und gasförmige, wollen wir im Folgenden unter dem Namen „Flude“\*) zusammenfassen.

Die schulmäßige Lehre von den drei Aggregatzuständen, dem festen, dem tropfbar- und dem gasförmig-flüssigen, tritt uns hier nicht mit der erwünschten logischen Sicherheit entgegen; es ist etwas Zögerndes, Schwankendes darin; jedenfalls kann man in der Festigkeitslehre die beiden letztgenannten Zustände kaum auseinander halten. Andererseits fehlt aber ein Zustand in der althergebrachten Reihe, einer, der jener in Fig. 6 abgelösten anderen Hälfte des Kurvenpaares entspricht, nämlich von solchen Körpern handeln muß, die nur gegen Zug Widerstand leisten. Das sind die Fäden, Schnüre, Bänder, Seile, Riemen usw. Der Physiker macht, obgleich er sie bisher nicht eingeordnet hat, von ihnen ruhig Gebrauch, indem er sie als völlig biegsame, aber gegen Zug sehr feste, linienähnliche Gebilde behandelt\*\*). Wir müssen sie hier einreihen und wollen sie nun Zugelemente, Zugorgane oder „Tracke“\*\*\*) nennen. Fig. 7 stellt ihre Molekularkraftäußerungen in der Fourierschen Weise dar; wir haben die beiden Kraftkurven *A* und *R*, soweit sie rechts vom Punkte *n* liegen, vor



\*) Über die Benennung Flud (das Flud) vgl. meine Kinematik II, S. 157. Zu den Fluiden sind kinematisch auch körnerige, sandige Massen, da sie nur einem Druck Widerstand leisten, zu rechnen.

\*\*) Unser Wort Linie stammt ja unmittelbar von dem aus *linum*, der Leinpflanze, hergestellten Faden ab.

\*\*\*) Über die Benennung Track (das Track, Mehrzahl die Tracke) vgl. meine Kinematik II, S. 323.

uns. Als Ganzheit betrachtet leistet ein Zugkörper, den wir wieder prismatisch annehmen, keinen Widerstand gegen Längsdruck; wohl aber tun dies seine vereinzelt kurzen Abschnitte. Demnach bleibt die Kurve  $B$  bestehen und hat auch ganz dasselbe Verhalten zur Kurve  $A$  wie in Fig. 3. Sie drückt mit ihr zusammen aus, daß die nach außen wirkenden Zugkräfte des Zugkörpers dessen Dehnungen zuerst proportional sind, bei  $b$  einen Höchstwert aufweisen und jenseits davon das zur Trennung führende Ungleichgewicht zeigen. Die Zugkörper oder Tracke stehen also den Druckkörpern oder Fluden als völlig gleichberechtigt gegenüber.

### §. 3

## Bemerkungen zur Zugfestigkeit der Baustoffe

Die vorgeführte Theorie nimmt an, daß der Körperstoff durch die ganze Masse gleichartig gebildet sei und daß seine Moleküle ringsum mit gleicher Kraft begabt, oder, wie man es nennt, isotropisch — was man mit „gleichkräftig“ wiedergeben kann — seien. Auch läßt sie die übrigen physikalischen Eigenschaften unerörtert. Alles dies erweist den wissenschaftlich angelegten Versuch als unentbehrlich. Am genauesten treffen das gleichartige und das gleichkräftige Verhalten bei den Flüssigkeiten zu, weniger gut bei den starren oder steifen, d. i. allseitig Widerstand leistenden Körpern, namentlich den Metallen. Die Zugfestigkeit dieser letzteren sei zunächst etwas allgemeiner besprochen.

Die hüttenmännische Eisenbereitung ist heute zu so hoher Vollkommenheit gediehen, daß die verschiedenen Eisengattungen recht gleichartig, indessen auch, wenn erforderlich, ungleichkräftig geliefert werden können, wie z. B. im Schalenguß und bei Panzerplatten geschieht\*). Zu diesem Stande der Industrie hat die genaue Festigkeitswägung außerordentlich beigetragen.

Bemerkung. Die Anstalten für Festigkeitsversuche sind zu hoher Ausbildung gebracht worden. Die staatlichen Anstalten in Berlin (Martens, Rudeloff, Gary), Zürich (Tetmajer), München (Bauschinger), Stuttgart (v. Bach), Breteuil (Guillaume), London (Kirkaldy, Kennedy), Woolwich (Anderson), Boston (Lanza), Ithaca (Thurston), Montreal (Bovey) u. a. m., sowie zahlreiche private Versuchsstätten leisten fortwährend ausgezeichnete Dienste. An die Festigkeitsversuche haben die Leiter wertvolle physika-

\*) Der beobachteten [Ungleichkräftigkeit der basischen Martinblöcke (vgl. Stahl und Eisen 1902)] wird man wohl bald Herr werden.

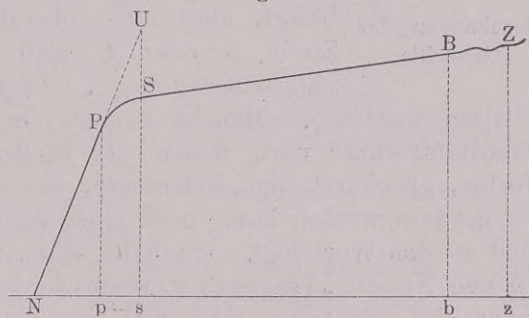


lische und chemische Untersuchungen angeschlossen und diese ausgetauscht. Demzufolge ist heute die Festigkeitskunde nicht mehr wie ehemals auf vereinzelte abgeschlossene Versuchsreihen angewiesen, sondern sie steht in ununterbrochener Verbindung mit der fortschreitenden Industrie, so zwar, daß für jede einzelne Anwendungsart der Baustoffe, sowie auch verschiedener daraus gebildeter Industrie-Erzeugnisse der Versuch jederzeit zu Gebote steht und auch unablässig benutzt wird. Durch internationale Vereinbarungen werden die Versuchsergebnisse außerdem noch mehr und mehr zum Gemeingut gemacht. Einen vorzüglichen Überblick über den heutigen Stand der Versuchsmittel und -Verfahren gewährt Prof. Rudeloffs Bericht über das „Materialprüfungswesen auf der Pariser Weltausstellung 1900“ in den Verh. d. Vereins f. Gewerbeleiß 1901, S. 37 bis 111.

Gußeisen, Schmiedeeisen\*) und Stahl stehen heute nicht mehr so deutlich verschieden da, wie früher; alle drei sind Eisen mit mehr oder weniger Kohlenstoffgehalt oder -Beimengung und Zumischung von anderen Grundstoffen. Als wichtig betrachtet man die Eigenschaft des Eisens, sich entweder schweißen zu lassen, oder nicht, weshalb man auf Weddings Vorschlag (1876) „Schweißisen“ und „Flußisen“ unterscheidet, während der Name Schmiedeeisen mehr in den Hintergrund getreten ist; im Maschinenbau ist er indessen gebräuchlich geblieben.

Unterwirft man einen Schmiedeeisenstab einem Zug, so zeigen Kräfte und Dehnungen ein Verhalten, das in Fig. 8 dargestellt

Fig. 8



Zugfestigkeit von Schmiedeeisen

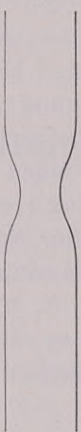
ist und in gedrängter Kürze hier besprochen sei. Bis zu einer gewissen Verlängerung  $Np$  und Belastung  $Pp$  fallen die Dehnungen ganz nahe proportional den Belastungen aus, verschwinden indessen nach Entlastung bis auf vernachlässigbare Reste. Letzteres geschieht auch noch bis zu einer Verlängerung  $Ns$ , Belastung  $Ss$ ; nur nehmen die Zugkräfte dabei zwar noch stetig, aber weit langsamer zu, als die

\*) Die Schreibung Schmiedeeisen ist bei uns sehr verbreitet, aber sie ist sprachlich nicht gut. Hier ist gemäß rheinländischem Gebrauch und mit Karmarsch und Kick — erst in der fünften Auflage von Karmarschs Technologie hat Hartig die unkräftige Form mit zwei e eingeführt — die schlichte obige Form angewandt. Wer Schmiedeeisen schreibt, müßte auch Schweißeeisen, Gießeeisen schreiben, man findet aber nicht, daß er es tut.

Dehnungen;  $PS$  wird eine krumme Linie. Dieser ganze Verlauf  $NPS$  entspricht dem theoretischen aus Fig. 3 von  $n$  an bis ungefähr zum dortigen Punkte  $b$ .

Bei noch weiter getriebener Belastung tritt aber nicht, wie dort, ganz bald der Bruch ein, sondern es entsteht bleibende Dehnung oder sogenannte „Streckung“, welche sodann, und zwar ganz bedeutend langsamer, als die Formänderung zwischen  $N$  und  $P$ , ebenfalls wesentlich proportional der Belastung wächst bis zu einer Größe  $Bb$  der Zugkraft. Der Verlauf  $SB$  wird soviel wie geradlinig, die Stabquerschnitte vermindern sich entsprechend den Streckungen. Bei einer gewissen Überschreitung von  $B$  aber bekommt der Stab an irgend einer Stelle der Kehle eine Einschnürung, vgl. Fig. 9, und zerreißt danach an dieser selben, auch stark verlängerten Stelle um  $z$  herum, wobei die Bruchbelastung  $Zz$  wenig verschieden von  $Bb$ , manchmal kleiner ist, als diese. Das entspricht aber der Stelle rechts von  $b$  in Fig. 3. Eingeschaltet in deren Linienzug ist die Streckung; diese konnte Fouriers Theorie nicht vorsehen.

Fig. 9

Einschnürung der  
Stabkehle

Man hat die Stellen  $p$ ,  $s$  und  $b$  mit Namen belegt, aber nicht überall mit denselben. Die Stelle  $p$  oder  $P$  hieß früher allgemein die „Elastizitätsgrenze“. Dies wird auch hier beibehalten werden<sup>\*)</sup>. Manche nennen sie jetzt<sup>\*\*)</sup> die „Proportionalitätsgrenze“ und, wegen der großen Schwerfälligkeit des Wortes, abgekürzt die „P-Grenze“, was sprachlich nicht glücklich genannt werden kann, auch einen deutlich gemachten Begriff nicht in das Wort legt. Ich habe schon früh für den Wert bei  $Pp$  den Namen „Tragmodul“ vorgeschlagen, welchem Vorschlag Andere<sup>\*\*\*)</sup> beigetreten sind, und bezeichne diesen Modul mit  $T$ .

Es ist nach meiner Ansicht empfehlenswert, mit den Ausländern die Bezeichnung „Elastizitätsgrenze“ für die Stelle  $Pp$  beizubehalten, aus dem wichtigen Grunde, daß

\*) Man vergleiche die entschiedene Zustimmung hierzu in Engineering Mechanics, Neuyork 1897, März, S. 42, sowie den englischen und amerikanischen Gebrauch überhaupt.

\*\*) Mit v. Bach und Martens.

\*\*\*) Auch Grashof, sieh dessen Festigkeitslehre, S. 12.



auch der Name „Elastizitätsmodul“ von uns und allgemein beibehalten worden ist, welche Benennung, wie oben gezeigt, sich fest darauf gründet, daß die Dehnungen von  $N$  bis  $p$  dem Carnotschen Satze folgen.

Will man die Elastizitätsgrenze nach  $S$  verlegt wissen, weil von  $P$  bis  $S$  noch Rückkehr zum Normalzustand zu beobachten ist, so hält man den geometrischen Teil des Begriffes „Elastizitätsmodul“ nicht fest, weshalb starke Mißverständnisse entstehen können, z. B. geglaubt werden kann, der Tragmodul für Zug stiege bis  $sU$  in Fig. 8. Sollte eine Benennung des Übergangsbereiches  $PSsp$  erforderlich sein, so könnte man es dasjenige der „abnehmenden“ Elastizität nennen, gegenüber der „steigenden“ von  $N$  bis  $P$ . Ich will im Folgenden wirklich so verfahren. — Für die Stelle  $S$  hat man den treffenden Ausdruck „Streckgrenze“ \*) eingeführt.

Die Spannung bei der Bruchgrenze  $B$ , die unwesentlich verschieden ist von derjenigen beim Zerreißen bei  $z$ , ist der schon erwähnte Bruchmodul für Zug  $B_z$ .

Eine Frage tritt hier auf wegen der Querschnitte. Der Stab hat bei seiner bleibenden Verlängerung  $sb$  eine gewisse Verkleinerung seiner Querschnitte erfahren, ja erfährt eine ganz bedeutende an der Einschnürungsstelle. Kurz vor dem Bruch haben die Spannungen im Längsverlauf der Stabkehle Werte erhalten, wie sie etwa durch Fig. 10 dargestellt werden \*\*) und

Fig. 10



Spannungen in der Stabkehle

an der Einschnürung leicht doppelt so hoch ausfallen können, als diesseits und jenseits davon; Belege hierzu gibt der oben erwähnte Rudeloffsche Bericht. Es entsteht daher die Frage, auf welchen Querschnitt man die Bruchspannung beziehen soll: auf den ursprünglichen, oder auf den eingeschnürten. Man hat letzteres verschiedentlich empfohlen \*\*\*), sich indessen ziemlich allgemein dahin entschieden, die Spannungen auf den Urquer-

\*) Im englischen Sprachgebiet *Yield point*.

\*\*) Vgl. z. B. Madamet, *Résistance des matériaux*, p. 48.

\*\*\*) In jüngerer Zeit hatte noch Hartig darauf hinzuwirken gesucht, früher schon auch Anderson in seiner lehrreichen *Strength of materials*, London 1872, ohne übrigens bei den Versuchen selbst danach zu rechnen.



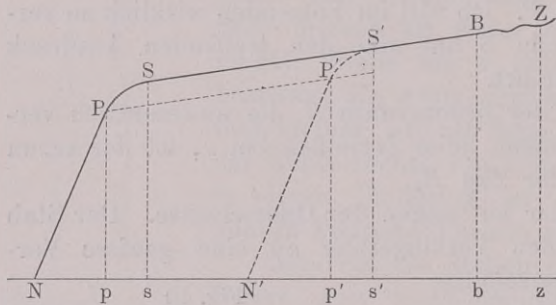
schnitt zu beziehen, also dessen Änderungen nicht in Rechnung zu ziehen. Das ist sicherlich zweckmäßig für die Proben und beugt großen Weitläufigkeiten vor. Es wird deshalb auch hier so verfahren\*). Auf Ausnahmen komme ich weiter unten (S. 14) zurück.

## §. 4

## Der Wiederholungsversuch

Eine wichtige Eigentümlichkeit der zähen Baustoffe ist nun noch hervorzuheben. Geht man beim Zugversuch nicht bis zum Bruch, sondern nur bis zu einer gewissen Streckung  $ss'$ , Fig. 11,

Fig. 11



Wiederholungsversuch

entlastet dann bis zu Null und beginnt danach aufs neue mit den allmählichen Belastungen, zieht aber nach der Messung der Dehnungen von diesen die bleibende Dehnung  $ss' = NN'$  ab, so erhält man für die Dehnungen den in die Figur einge-

tragenen Verlauf  $N'P'S'$ . Hierin entspricht  $N'P'$  der steigenden Elastizität, und zwar, in sehr beachtenswerter Weise so, daß  $N'P'$  parallel  $NP$  ausfällt, d. h. dem früher gefundenen Elastizitätsmodul folgt. Dies bedeutet: daß nun der Stab eine höhere Elastizitätsgrenze, einen höheren Tragmodul  $P'p'$  und auch eine hinaus-

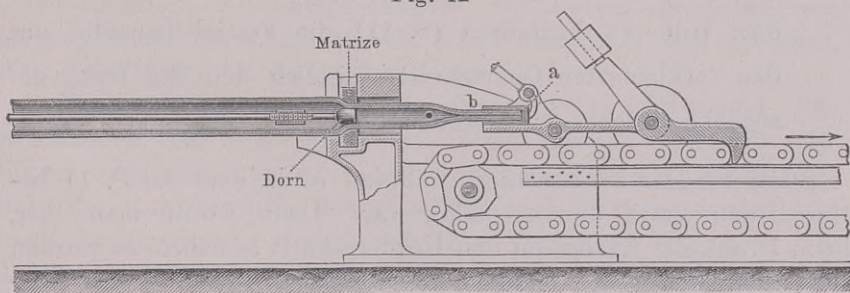
\*) Der Praktiker wolle nicht vergessen, daß bei der Kleinheit von  $l$ , die auf gewöhnlichen Versuchsmaschinen allein zulässig, jedenfalls durchaus üblich ist, die Dehnungen bis zur Elastizitätsgrenze maßstäblich sehr klein ausfallen, was sowohl äußerst feine Hilfsmittel, als auch höchste Genauigkeit der Beobachtung erfordert. So kommt z. B. für Schmiedeeisen, das den Elastizitätsmodul 20000 aufweist, wenn der Versuchsstab die schon recht ansehnliche Kehllänge 200 hat, beim Tragmodul 15 der Wert  $\lambda = 200 \cdot 15 : 20000 = \frac{15}{100}$  mm, beim 50er Stab sogar nur nun  $\frac{4}{100}$  mm. Hier erkennt man auch, wie notwendig für das Verständnis es ist, die Dehnungen in figürlichen Darstellungen vergrößert aufzutragen. Der anfängliche Abstand der benachbarten Moleküle darf auch in obiger Fig. 3 nicht als durch den Wert  $NM'$  angedrückt angesehen werden; er ist ganz bedeutend größer, weshalb auch die Ordinatenachse nur punktirt angegeben ist.

gerückte Streckgrenze  $s' S'$  für den verschobenen Normalzustand erhalten hat. Der Stab ist also durch das Strecken tatsächlich tragfähiger geworden.

Der Baustoff hat sich hier ziehen lassen, weshalb man ihn „zäh“ nennt, auch einen kalt formbaren Stab gelegentlich einen „Zain“ \*) nennt (Münzerei). Eine „Zähigkeit“ von gemessenem Grade wird heute von Stahl ausdrücklich verlangt — 10, 25 bis 33 Hundertstel der Länge  $l$  — und ihm auch hüttenmännisch verliehen, ist also anerkannte Festigkeitseigenschaft. Der „Zähigkeit“ gegenüber steht die „Sprödigkeit“.

Unseren obigen Versuch kann man den „Wiederholungsversuch“ nennen. Führt man mittelst seiner die Streckgrenze  $S$  eines Stoffes bis in die nächste Nähe des Bruchmoduls, sodaß  $S$  mit  $B$  soviel wie zusammenfällt, so hat man dem Versuchsstab an der eingeschnürten Stelle die Kräftekurven des Fourierschen Aufbaues, soweit es den Zug betrifft, verliehen. Der Versuch hat dabei die beiden Kurven  $A$  und  $R$  von Fig. 3 ihrem Wesen nach nicht verändert, sondern nur weitergeführt und dadurch eine wertvolle Bestätigung der Fourierschen Theorie geliefert. Auf das Ausglühen, das dem Stab die gesteigerte Elastizität wieder nimmt, wird weiter unten zurückgekommen werden.

Fig. 12



Röhrenziehbank

Eine andere wichtige Seite der „Zähigkeit“ von Metallen ist die, daß man bei geeignetem Verfahren die Streckung ganz gleichförmig, d. h. ohne Einschnürung, über den ganzen Stab zu verteilen vermag, was beim obigen Versuchsstab kaum je gelingt. Wohl aber gelingt es technisch auf der Ziehbank. Es geschieht

\*) Auch „Zein“ geschrieben. Zein heißt auch die schmiegsame Gerte, daher Zeine, schweizerisch der Korb, aber im bairischen Wald auch der Draht (Schmeller, W. B.), und altnordisch *teina*, zu Draht strecken.



beim Drahtziehen mittelst des einfachen „Zieheisens“, beim Röhrenziehen mittelst „Zieheisens und Dorns“, Fig. 12 (a. v. S.), vielfach auch ohne Dorn, auch mit mancherlei anderen „Eisen“ in der Messingrohrbearbeitung, wie z. B. dem Kreuz Eisen usw. Alle verkleinern stufenweis den Querschnitt des Werkstückes mit jedesmal engerem Zieheisen oft sehr beträchtlich. Dabei kann nicht nur, wie vorhin, der Tragmodul, sondern auch der Bruchmodul bedeutend gesteigert, der Baustoff also sowohl elastischer, als auch fester gemacht werden\*). Hier sehen wir also den „Wiederholungsversuch“ innerhalb einer wichtigen, zugleich schon recht alten Technik in vollem Gebrauch vor uns. Es galt bloß, den Versuch in dem Verfahren der Technik wiederzuerkennen.

Durch Ausglühen werden Trag- und Bruchmodul zäher Metalle wieder auf ihre anfänglichen Festigkeitswerte herabgesetzt. Dies wird technisch so ausgiebig benutzt, daß man es z. B. durch wiederholtes Ziehen und Glühen bei Stahlröhren bis zu Verzehnfachungen, bei Drähten gar bis zu Vertausendfachungen der Anfangslänge treiben kann. Hier ist nun hervorzuheben:

daß es üblich ist, bei den, durch regelmäßiges Ziehen gewonnenen Drähten, Röhren, Sprossen usw. abweichend von dem früheren Verfahren (S. 11) die Festigkeitsmodul auf den verkleinerten Querschnitt, nämlich den des fertig gezogenen Stückes, zu beziehen.

Das ist hier zweckmäßig, während es in dem auf S. 11 besprochenen Falle unzweckmäßig war. Denn wollte man hier, beim Draht, die Kräfte auf den Urquerschnitt beziehen, so würden statt der Modul des fertigen Erzeugnisses, die doch der Verbraucher kennen will, bedeutend kleinere aus der Berechnung

---

\*) Es sei hier bemerkt, daß Manche annehmen, man könne durch das Strecken zwar den Tragmodul  $T_z$ , nicht aber den Bruchmodul  $B_z$  steigern; dieser Annahme folgt auch Madamet a. a. O. Aber schon die Betrachtung von Fig. 10, die die Spannungen in und neben der Einschnürung aus einer ausgeführten Versuchsreihe darstellt, zeigt, daß die wirkliche Spannung dicht vor dem Bruch bereits außerordentlich hoch ausfallen kann. Das entgeht dem Bemerkwerden wegen der stillschweigenden Übereinkunft bezüglich des Urquerschnittes. Durch „Ziehen“ wird, nebenbei bemerkt, der Stoff nicht dichter, wie man annehmen könnte, ja er wird sogar nach guten Beobachtungen spezifisch erheblich leichter, sieh weiter unten.



hervorgehen. Beispielsweis käme für einen Stahldraht, der aus 10 mm dickem Knüppel bis auf 1 mm Dicke gezogen wäre und dabei 125 kg Bruchmodul aufwiese, ein solcher von 125 dividiert durch 100, d. i.  $1\frac{1}{4}$  kg für den Rohstab. Daß man diesen übrigens nicht außer Betracht lassen darf, geht daraus hervor, daß ganz derselbe Draht durch Ausglühen auf den Bruchmodul des Rohstabs, sagen wir 50 kg, gebracht wird.

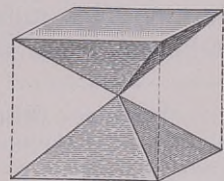
### §. 5

## Bemerkungen zur Druckfestigkeit der Baustoffe

Wird der Stab statt auf Zug, auf Längsdruck unter Verhinderung jedes Ausbiegens beansprucht, so findet man zunächst, entsprechend der Fourierschen Theorie (Fig. 3) denselben Elastizitätsmodul wie beim Zug, überhaupt verwandte, nur umgekehrte Verhältnisse; man findet eine Grenze der „steigenden“ Elastizität, mit Modul  $T_d$ , und eine solche der „abnehmenden“, die zugleich, wie früher, Formänderungsgrenze ist. Diese Formänderung ist nun eine „Stauchung“ statt Streckung und kann wie diese weiter verfolgt werden. Stauchung und Streckung zeigen außerordentlich viel Entsprechendes; wir wollen sie daher, wie im englischen Sprachgebiet seit lange geschieht, das „Setzen“, die „Setzungen“ des Baustoffes nennen.

Nach oder jenseits der Stauchung treten notwendig Abweichungen vom Zugergebnis ein. Wird nämlich nicht nur seitliches Ausbiegen, sondern auch jede nennenswerte Querschnittdehnung durch seitliche Einschließung verhindert, so wächst, wie auch die Fouriersche Anschauung lehrt, der Druckwiderstand bis ins Maßlose; ein Bruchmodul für Druck, der genau  $B_z$  entspräche, ist dann gar nicht angebbar\*). Denn das Zerbrechen kann ja dem Druck gegenüber nicht anders stattfinden, als daß die Teilchen Platz zum Ausweichen finden. Um dies zu erzielen, macht man das Probeprisma niedrig; die Ausbiegungen sind dann vermieden, Querdehnungen aber gestattet. Beim Würfel wird alles am regelmäßigsten. Er neigt, wenn aus sprödem Stoff ge-

Fig. 13



Zerdrückter Würfel

Beim Würfel wird

\*) Vgl. auch v. Bach, Elastizität und Festigkeit, S. 50.

bildet, dazu, in sechs Pyramiden zu zerfallen (Fig. 13, a. v. S.\*). Man darf nicht übersehen, daß der auf diesem Wege ermittelte Bruchmodul einen ungemein verwickelten Vorgang in sich schließt.

## §. 6

## Wiederholungsversuch für Druckfestigkeit

Die künstliche Erhöhung der steigenden Elastizität kann auch für Druck gelingen. Überzeugender kann der Vorgang nicht dargelegt werden, als an einem, der sorgfältigen Versuchspraxis unmittelbar entnommenen Beispiel.

*Beispiel.* Die Ermittlung des Drucktragmoduls  $T_a$  für Eisen erfordert, um zuverlässig zu sein, einen sehr langen Probestab, wie er auf unsern gewöhnlichen Festigkeitswagen nicht gut unterzubringen ist. Anderson hat aber im Arsenal zu Woolwich Versuche an einem 10' langen Stabe aus gutem (englischen) Gußeisen ausgeführt, der genau prismatisch eingebettet war und wegen seiner großen Länge elastische Drückungen von mehr als 8 mm annahm, also noch recht genaues Messen gestattete\*\*). Wir wenden nun auf ihn hier auf dem Papier nachträglich den „Wiederholungsversuch“ an. Anderson hatte nämlich bei seinen mit äußerster Genauigkeit ausgeführten Versuchen (Strength of Materials and Structures, by John Anderson. Sup.-Int<sup>t</sup> War Dep<sup>t</sup>, London 1872, S. 41) auch „wiederholt“, ohne freilich die Messungen in dem oben empfohlenen Sinne zu verwerten, hatte aber glücklicherweise nach jedem Versuch Kürzung  $\lambda'$  und Stauchung  $\lambda''$  scharf gemessen. In der folgenden Tafel sind beide neben den übrigen Werten auf metrisch umgerechnet\*\*\*), dann voneinander abgezogen und so die elastische Kürzung  $\lambda_1$  ermittelt. Mit dieser ist dann aus Grundgleichung (2) für die letzte Spalte der Elastizitätsmodul  $E$  berechnet. Das Ergebnis ist merkwürdig.

(Sieh nebenstehende Tafel.)

Die Beständigkeit von  $E$  durch die ganze Zahlensäule herab, die den Durchschnittswert 9511, also rund 9500 aufweist, ist geradezu erstaunlich. Wie genau gemessen ward, zeigen die Dezimalen bei den Kürzungen. Anderson, dem es entgieng, welch merkwürdigen Aufschluß seine Versuchsreihe barg, bezeichnet die Stelle um 28 kg herum als den Bruchmodul  $B_a$ . Daß bis ganz

\*) Schönes Beispiel bei v. Bach S. 34 in Lichtdruck wiedergegeben.

\*\*\*) Andere Versuche führte nach Andersons Vorgang eine Kommission in Woolwich an vollen 50' langen Gußeisenstäben aus, leider nur unter Ermittlung weniger Werte.

\*\*\*\*) Engl. Tonnen auf 1 □'' vervielfacht mit 1,575 gibt kg/qmm. Für Annäherungen, denen aber hier nicht stattgegeben ist, genügt Wert 1,6 oder  $\frac{8}{5}$ . Umgekehrt erhält man also aus kg/qmm durch Vervielfachung mit  $\frac{5}{8}$  sehr annähernd die Werte für Tonnen auf den □''. — Engl. Pfund auf den □'' vervielfacht mit  $\frac{7}{10000}$  gibt kg/qmm, und umgekehrt ergibt sich aus kg/qmm durch Vervielfachung mit 1430 annähernd engl. Pfund auf den □''.

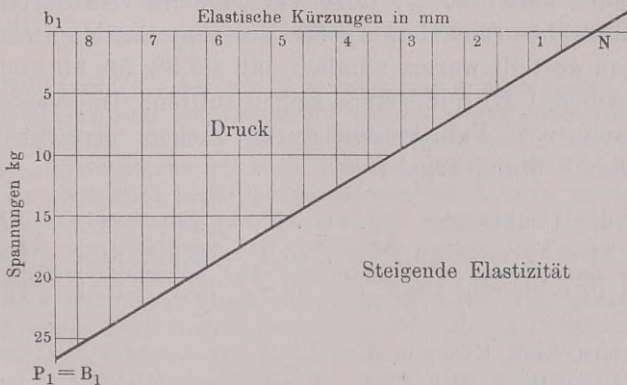


Gußeisenstab von 1 □" Querschnitt und 10' Länge auf Druck geprüft

Belastung Tonnen	Spannung ε	Kürzung λ' <sub>1</sub>	Stauchung λ'' <sub>1</sub>	Elastische Kürzung λ <sub>1</sub>	Elastizitäts- modul E = ε l : λ <sub>1</sub>
0,92	1,45	0,476	0,012	0,464	9500
1,84	2,90	0,958	0,057	0,928	9525
2,76	4,34	1,518	0,102	1,417	9355
3,68	5,80	2,001	0,164	1,837	9738
4,60	7,25	2,576	0,215	2,311	9562
5,52	8,69	3,056	0,276	2,779	9531
6,44	10,14	3,597	0,357	3,241	9228
7,36	11,59	4,150	0,435	3,715	9621
8,28	13,04	4,702	0,521	4,260	9328
9,21	14,35	5,238	0,631	4,608	9604
11,04	17,39	6,340	0,818	5,522	9599
12,88	20,29	7,544	1,092	6,452	9583
14,42	23,18	8,977	1,548	7,429	9375
16,56	26,18	10,451	2,139	8,312	9600

dicht davor eine so strenge Geradlinigkeit der Widerstandszunahme erkennbar ward, bestätigt über Erwarten die Fouriersche Theorie. In Fig. 14 sind die Ergebnisse der vorstehenden Prüfung über-

Fig. 14

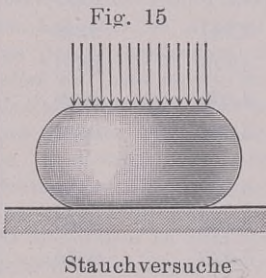


Gußeisen auf Druck geprüft



sichtlich dargestellt, nämlich die elastischen Kürzungen in zehnfacher Größe, die Spannungen mit 1,6 mm für 1 kg. Die Verschiebung des Normalzustandes durch Stauchung hat  $2\frac{1}{7}$  mm betragen, d. i. den kleinen Betrag von  $\frac{1}{1422}$  der Stablänge. Die Höhe des auf dem Wiederholungswege erzielten, völlig gültigen Tragmoduls  $T_d$  auf mehr als 26 kg ist als sehr bemerkenswert zu bezeichnen. Nach früheren Anschauungen würde man  $T_d$  bei 14 bis 15 kg als erreicht angesehen haben. Lehrreich wäre es gewesen, wenn der Beobachter mit ganz denselben Stäben auch noch Zugversuche angestellt hätte; solche zweireihige Prüfungen werden in Zukunft wohl noch wichtige Belehrungen liefern können.

Der Baustoff des soeben besprochenen Stabes war gegen Zugkräfte spröde, nicht zäh; mit zähen Metallen sind aber ebenfalls weitgehende Druckversuche oft und bis heute angestellt worden, teils elastisch, teils mit Stoß wirkende\*). Man hat dabei gelegentlich dieselbe Überschreitung der Setzgrenze herbeigeführt wie beim Drahtziehen, nämlich den niedrigen, sich ringsum ausbauchenden Versuchskörper, Fig. 15, wieder ausgeglüht, bevor er Risse warf, und dann aufs neue gepreßt. So stauchte



Anderson\*\*) ein zollhohes rundes Pfeilerchen aus Schmiedeisen von 13,5 mm Dicke zu einer richtigen dünnen Blechscheibe aus, wozu ein Druck von 160 kg/qmm, bezogen auf den Urquerschnitt, erforderlich wurde (vgl. weiter unten Fig. 20 b).

Die Wiederholungsversuche an schmiedbarem Eisen können durch abgeschlossene Prüfungen von Drähten vertreten werden. Prof. Rudeloff berichtet\*\*\*) über Versuche an vier Sorten 2 mm dicker Stahldrähte (aus Hamm), für die vom Besteller bestimmte Forderungen gestellt waren, nämlich daß sie 38, 50, 80 und 120 kg Zerreißungsmodul  $B_z$  mindestens zeigen sollten. Die Verschiedenheiten waren vom Fabrikanten durch Ziehen erreicht worden. Die amtliche Prüfung ergab:

für die Drahtsorte . . .	A	B	C	D
die Streckgrenze zu . . .	25,2	53,6	86,4	108,3
den Bruchmodul zu . . .	38,8	59,1	92,1	127,1

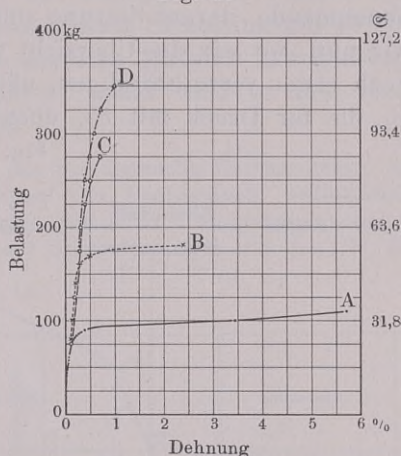
\*) Martens, Kick, Exner u. A.

\*\*) Sieh a. a. O., S. 66 und 67.

\*\*\*) In den Mitteilungen der Berliner Versuchsanstalten, 1897, S. 137 ff.

Fig. 16 ist eine verkleinerte Wiedergabe der dem Bericht beigegebenen Darstellung der Versuchsergebnisse; ich habe nur rechts noch die Spannungen an- gemerkt, die den Belastungsstufen von je 100 kg entsprechen. Augenfällig macht die Figur, wie durch das Ziehen ganz desselben Drahtes dessen Elastizitäts- wie Streckgrenzen mächtig hinaufgerückt worden sind, mit ihnen aber auch der Bruchmodul, der beim Draht *A* ganz tief stand.

Fig. 16



Leistung des Ziehens an Drähten

Soviel von Zug und Druck. Bei den vier anderen Festigkeitsarten kommen die geschilderten Setzwirkungen in höherer, oft verwickelter Form zur Geltung.

Die besprochenen Beziehungen innerer Kräfte zu äußeren Kräften, durchgeführt auch für die vier anderen Festigkeitsarten, stellen in ihrer Gesamtheit, nämlich: der steigenden und der abnehmenden Elastizität, der Zähigkeit, der Sprödigkeit und der verschiedenen Bruchvorgänge dasjenige dar, was man unter Festigkeit der Baustoffe versteht\*).

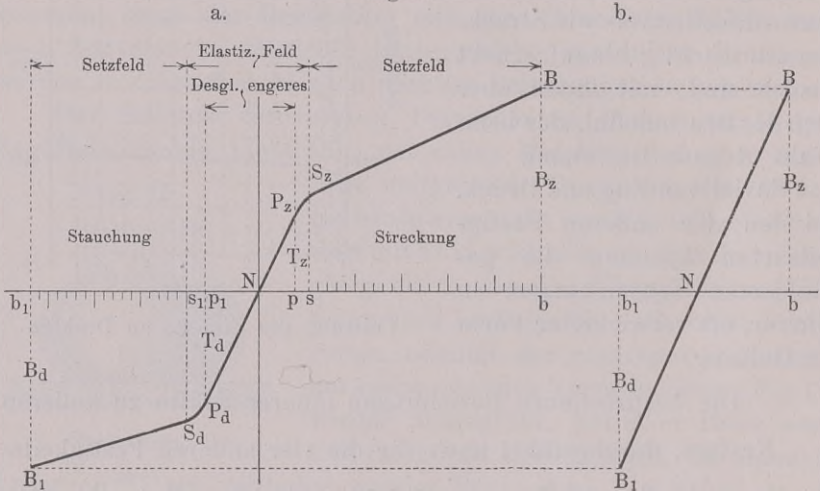
Fassen wir nunmehr, nachdem wir die beiden Grundfestigkeiten allgemein besprochen haben, ihre Messung am selben Bau-

\*) Will man, wie bei uns Manche, Grashof nachfolgend, tun, diese Gesamtheit „Elastizität und Festigkeit“ nennen, wobei die Meisten noch die letztere Hälfte des Namens bloß auf die Bruchgrenzen beziehen, so belastet man sich nicht nur mit einer überaus umständlichen Ausdrucksweise, von der man u. a. auch kein Eigenschaftswort bilden kann, sondern schließt auch die Setzeigenschaften gänzlich aus, läßt übrigens außer Acht, daß die Elastizität ja ein wirklicher Teil des festen Aggregatzustandes ist. Unser treffliches Wort „Festigkeit“ in dem oben stets gebrauchten umfassenden und zugleich natürlichen Sinne entspricht übrigens auch genau dem englischen *Strength*, französischen *Résistance*, italienischen *Resistenza*, holländischen *Vastigheid*, schwedischen *Hållfasthed* usw. Mit der Wiederherstellung der einfacheren Bezeichnungsweise würde man die internationale Verständigung, die doch angestrebt wird, nicht unwesentlich erleichtern.



stoff in eine Gesamtdarstellung zusammen, so kommen wir zu dem, in Fig. 17 gegebenen Bilde. Unter  $a$  ist beiderseits vom Normalzustand bei  $N$  Elastizität, und zwar zuerst steigende, dann abnehmende, darauf Setzung und Bruch angedeutet. Hier wollen wir nun, wo wir die Übersicht vor uns haben, die Bezeichnungen noch etwas vervollständigen, nämlich: die Setzgrenze für Zug mit  $S_z$ , die für Druck mit  $S_d$ , ebenso die Elastizitätsgrenzen mit  $P_z$

Fig. 17



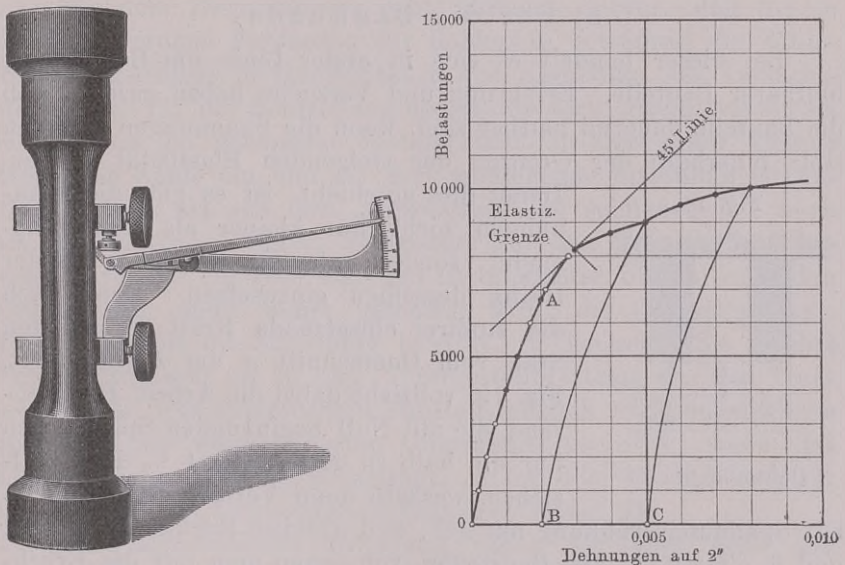
Wiederholungsversuch bei Zug und Druck

und  $P_d$  bezeichnen. So ist denn in unserer Figur  $P_z p$  der Tragmodul  $T_z$  für Zug,  $P_d p_1$  der Tragmodul  $T_d$  für Druck. Die Senkrechten, die durch die Hauptpunkte der Kräftelinie gezogen sind, fassen nun in der Mitte das „Elastizitätsfeld“, außen die beiden „Setzfelder“ ein; die schmalen Streifen einwärts der Setzfelder sind die Gebiete der „abnehmenden Elastizität“. Was zwischen ihnen liegt, kann man, wo erwünscht, das „engere Elastizitätsfeld“ nennen. Unter  $b$  unserer Figur ist für ganz denselben Baustoff, unter der Annahme, daß durch Wiederholungsversuche beiderseits Setzung bis dicht vor den Bruch ausgeführt worden sei, der sich dann darbietende schlichte Verlauf der durchweg steigenden Elastizität angegeben. Das Zusammenfassende in der gegebenen Darstellung ist meiner Ansicht nach nützlich. Die Fig. 17 macht auch einleuchtend, warum die früheren Bruchversuche bei Biegung und Drehung die Model nicht rein zu liefern vermochten; dafür würde Kongruenz der Linienzüge  $NP_z S_z B$  und  $N_d P_d S_d B_1$  erforderlich sein, eine Gleichheit, die nicht in der Natur der Verhältnisse liegt.

Bei Schaulinien wie die unter *a* kann man die Setzungen, ausgedrückt in Hundertsteln der Kehllänge, durch Einteilung der Abszissen deutlich machen; Maßstab willkürlich, kann Millimeterstab sein. Die 25 Teile, die auf der Zugseite von *s* bis *b* aufgetragen sind, machen die etwa beobachtete Streckung um 25/100 ersichtlich; auf der Druckseite ist derselbe Maßstab anzuwenden; im Elastizitätsfeld darf ein anderer, meist wird es ein übertriebender sein, angewandt werden.

An dieser Stelle möchte ich auf das Summersche Extensometer, ein Instrument zum Messen der Dehnungen von Probestäben, aufmerksam machen, das für vorläufige schnelle Prüfungen nicht übel geeignet scheint; Fig. 18 stellt es dar. Es wird mit zwei Schraubzwingen auf den, in die

Fig. 18



#### Vorläufige Dehnungsmessungen

Versuchswage eingehängten Probestab so aufgeklemt, daß die Körnschrauben der beiden stählernen Klemmschrauben recht genau 2'' Abstand haben. Als dann wird die Wage belastet, nachdem der Fühlhebel auf einen bestimmten oberen Teilstrich eingestellt ist. Der Fühlhebel übersetzt der Zeichnung\*) nach 35fach. Die Dehnungen können nun verhältnismäßig genau abgelesen und in ein vorbereitetes Täfelchen, wie es hier beispielsweise angegeben, eingetragen werden. Statt einer Geraden wie *NP* in Fig. 17 liefern die Ablesungen infolge der Hebelformen eine Kurve *oA*, die Zahlen sind ja aber

\*) Entnommen dem American Machinist vom 4. 7. 1903.



entscheidend. Bemerkenswert ist, daß der Erfinder auch alsbald zwei Wiederholungsversuche, bei *B* und *C*, aufgetragen hat; künftig wird der Wiederholer, wie ich annehme, allgemeiner in Übung kommen. Benutzt hat der Erfinder den kleinen Schnellmesser im Arsenal von Rocky Island zur Vorprüfung von Bronzelegierungen.

## §. 7

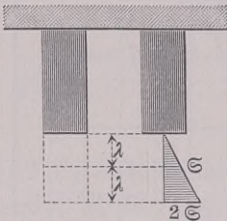
### Verwertung der Versuchsergebnisse

Die Versuche werden, abgesehen davon, daß sie über die Natur der geprüften Stoffe in mechanischer Hinsicht Aufschlüsse geben, in der Technik für zwei Gebiete verwertet: zunächst für die Baukunde und dann für die mechanische Technologie.

#### a) Für die Baukunde

Bei dieser handelt es sich in erster Linie um Berechnung haltbarer Bauteile. Erfahrung und Versuche haben gezeigt, daß die Bauteile dauernd haltbar sind, wenn die Spannungen in ihnen stets innerhalb der Grenzen der steigenden Elastizität bleiben.

Fig. 19



Dehnung um  $2\lambda$

Damit dies geschieht, ist es gut, die Spannungen nicht nur kleiner als den Tragmodul, sondern niemals mit mehr als der Hälfte desselben einzusetzen. Denn auch die stoßfrei einsetzende Kraft  $P$ , die den Stab vom Querschnitt  $q$  um  $\lambda$  verlängert, Fig. 19, vollzieht dabei die Arbeit  $P\lambda$ , während die mit Null beginnenden Spannungen nur die halb so große Arbeit  $\frac{1}{2} \epsilon q \lambda$  vollziehen, weshalb denn Verlängerung auf  $2\lambda$

mit Spannungserhöhung auf  $2\epsilon$ , und alsdann Rückkehr bis zu  $\lambda$  und  $\epsilon$  eintritt\*). Bei Baustoffen, von denen man nur die Bruchmodul kennt, bleibt man mit  $\epsilon$  bei Gestein bei etwa  $\frac{1}{10}$ , bei Metallen bei  $\frac{1}{7}$  bis  $\frac{2}{5}$  derselben.

Außer der Haltbarkeit der Bauteile, also Vermeidung von Setzungen, fordert die Baukunde in gewissen Fällen noch Voraus-

\*) Die von Wöhler 1857 empfohlenen und in Berlin unter Martens noch stets weitergeführten Spannungswechselversuche, die inzwischen auch im V. Staaten-Arsenal in steten Betrieb gebracht sind, haben die Richtigkeit der Einschränkung von  $\epsilon$  auf Tragmodulhälfte bestätigt; auch Bauschinger und Kirkaldy mit Kennedy sind durch Versuche zu demselben Ergebnis gelangt. Bei vielen der Wöhlerschen Versuche findet regelmäßig die obige  $\epsilon$ -Verdoppelung statt.

kenntnis der elastischen Formänderungen, also Biegungen, Dehnungen, Verdrehungen usw.; bei gewissen Aufgaben soll die schnellkräftige Formänderung groß sein, wie z. B. bei den Federn (siehe unten), bei andern klein, wie z. B. bei Waghebelwerk; einmal ist es also große, das andere mal kleine Nachgiebigkeit, was zu berechnen und zu kennen sehr wichtig ist.

Hiernach ist das Festigkeitsgebiet der Baukunde das Elastizitätsfeld der Baustoffe, meistens dasjenige der steigenden Elastizität. Die Grenzen dieses Feldes am gegebenen Stoff zu erweitern, kann wünschenswert sein — man denke nur an die Luftschiffe und Rennjachten — dann treten die künstlich verlegten Setzgrenzen (siehe S. 20) an die Stelle des natürlichen; von ersteren gehen wir ja bei den Drähten z. B. schon immer aus.

Aus dem Besprochenen geht übrigens hervor, daß die so üblich gewordene Forderung der Baukunde betreffend die Zähigkeit, ausgedrückt in Hundertteilen der Kehllänge des Versuchstabes, sich für die Beurteilung des Stoffes nicht streng verwerten läßt. Denn die gemessene Setzung tritt an einer ganz kleinen Stelle der Kehle ein und die dort entstehende Spannung ist ungleich größer als aus dem „Prozentsatz“ zu schließen ist, auch als die Belastung angibt, da letztere auf den Urquerschnitt bezogen wird (vgl. Fig. 10). Dagegen ist es wichtig, obwohl es in den Bedingungen nicht immer gefordert wird, die Querschnittsverkleinerung, die die Streckung bewirkt, zu kennen. Sie belehrt darüber, wie weit die in Fig. 17 dargestellte Steigerung des Tragmoduls bei dem untersuchten Baustoff möglich ist. Die wirkliche Spannung im eingeschnürten Querschnitt ist z. B., wenn das Einschnürungsmaß 60 v. H. beträgt,  $1 : 0,6$  oder  $1\frac{2}{3}$  mal so groß, als der, auf den Urquerschnitt bezogene Modul  $B_z$ .

Eine eigentümliche Folgerung haben wir aber noch aus unserer Betrachtung des Wiederholungsversuches zu ziehen. Zur Zeit werden teils national, teils international Vereinbarungen über Festigkeitsbedingungen, vor allem für Stahl, getroffen. Dabei werden Vorschriften verabredet über die Tragmodel, Bruchmodel, und Setzgrenzen. Nun haben wir aber erkannt:

daß in gegebenen Baustoffen die Elastizitätsgrenzen und auch die Bruchmodel nicht festliegen, jedenfalls an Probekörpern durch Vorversuche verschoben werden können. Es empfiehlt sich deshalb, noch vorzuschreiben, daß die



zu entscheidenden Versuchen bestimmten Probekörper noch „ungeprüft“, „unbehandelt“ sein müßten.

*Beispiel.* Die bereits 1901 in Kraft getretenen amerikanischen Vereinbarungen\*) schreiben für Stahl, der zu Kurbelzapfen verwendet werden soll, auf S. 26 vor, daß sein Bruchmodul für Zug  $B_z$  den Wert 65,2 und sein Tragmodul 44,0 kg/qmm erreichen müsse. Wenn man nun einen Stahl hat, dessen Bruchmodul ausreichen würde, dessen Tragmodul (Elastizitätsgrenze)  $T_z$  aber vielleicht nur 33,0 beträgt, was nicht schlecht ist, so brauchte man den Probekörper vor der Entscheidung nur mit etwa 45 bis 46 kg/qmm zu belasten (beim Zweizöller aus Fig. 4 mit 5700 bis 5800 kg), um ihm einen Tragmodul von der geforderten Höhe zu verleihen. Die Streckung betrage nur etwas über  $\frac{1}{10}$  mm, wäre also mit dem bloßen Auge nicht zu entdecken.

Eine Vervollständigung der Bedingungen in dieser Richtung, wobei Ausglühen eine Rolle spielen könnte, ist hiernach anzuraten. — Daß die Technik beginnt, die künstliche Grenzverschiebung in Betracht zu ziehen, ist u. a. aus einer Erwägung zu folgern, die Considéré (in den *Comptes rendus*, August 1902) über den Gurtbeton (*Béton fretté*) anstellt, indem er sagt, „. . . obwohl die Elastizitätsgrenze des Gurtbetons beträchtlichen Verschiebungen durch Behandlung (*manipulations*) fähig sei“, die Versuche doch gezeigt hätten, daß diese Grenze immerhin weit unter der Bruchgrenze liege. Die Anwendungen der mit Stahlstangen durchgürteten Betonbalken nehmen zu an Zahl und Bedeutung. Gemäß Versuchen von Breuillé wird die Verbindung der Stangen mit dem Beton sehr innig und dauerhaft. Weiter unten kommen wir auf den Gurtbeton noch in Kürze zurück; seine Herstellung hat sich in kurzer Zeit zu einer beträchtlichen Industrie entwickelt\*\*).

## b) Für die Technologie

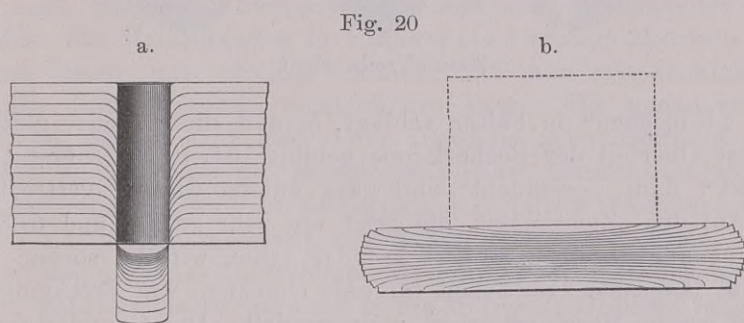
Das Festigkeitsgebiet für die technologischen Verfahrensweisen ist das der Setzfelder, beiderseits bis zum Bruch. Um

\*) Sieh A. L. Colby, Review and text of the American Standard specifications for Steel, Easton Pa, 1902. Die amerikanischen Feststellungen wurden im September 1901 in Budapest beim Festigkeitskongreß vorgelegt neben den deutschen und französischen Vorschlägen; 1904 soll in Petersburg ein internationaler Beschluß darüber herbeigeführt werden. Er soll betreffen Zug- und Biegezugfestigkeit von: Stahlguß, Stahlschienen, Baustahl, Stahl für Kessel. Bemerkenswert ist, daß Bedingungen für den Elastizitätsmodul in den amerikanischen Vereinbarungen nicht gestellt sind.

\*\*) Vgl. Stahl und Eisen 1903, 1 bis 6, sowie Tonindustrie-Zeitung 1903, 27; ferner Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Archit.-Vereins 1903, sowie das Internat. Organ f. armierten Beton 1902 u. 1903, auch Süddeutsche Bauzeitung 1903 u. a. m.

letztere selbst handelt es sich bei allen Bearbeitungen, bei denen Späne oder Stücke fallen. Ganz innerhalb der Setzgebiete liegen dagegen die Anwendungen der schon genannten Ziehbank, der Ziehpresse, des Prägwerks, des Biegewerks, der Lochpresse, der Schmiedepresse usw., auch die Handarbeiten des Treibens, Drückens, Stemmens, Schmiedens usf., aber auch ein großer Teil der Faserstoffbearbeitung u. a. mehr.

In Beziehung auf diese formändernde Bearbeitung hat Trescas glücklicher Gedanke, die Druckwirkung auf Metalle an geschichteten Bleiplatten zu studiren, sieh Fig. 20, mit Bestimm-



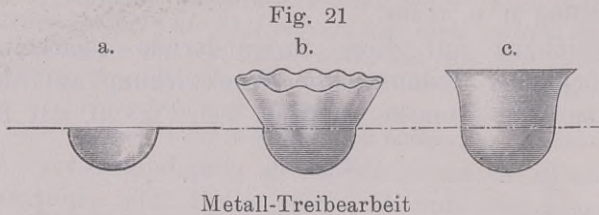
Trescas Versuche mit geschichteten Bleiplatten

heit zu der fruchtbaren Einsicht vom Fließen gepreßter Körper geführt. Wir können sie noch etwas weiter verfolgen. Wie man nämlich bei den Pumpen das Saugen vom Drücken unterscheidet, können wir es auch hier. Beim Drahtziehen, Röhrenziehen (vgl. Fig. 12) wird „vor“ dem Zieheisen Ungleichgewicht zwischen den Molekularkräften herbeigeführt, gerade wie beim Saugen der Pumpe. Dagegen wird in der Bleirohrpresse, der Geschoßpresse, der Drainrohrpresse usw., auch bei Chardonnets Erzeugung künstlicher Seide, „hinter“ dem Durchlaß Überdruck hervorgebracht und dadurch das Ausfließen erzwungen. Die beiden Maschinengattungen stehen einander somit gerade so gegenüber, wie Saug- und Druckpumpe; beidemal aber wird „Streckung“ bewirkt.

Beim Münzprägen, oder dem Prägen überhaupt, ist es vorwiegend Stauchung, was Gestaltung bewirkt, seit die Randprägung, die die Alten nicht kannten, eingeführt ist. Wie die Teilchen aber fließen, wenn der Rand frei gelassen wird, zeigt Fig. 20b, die einen Schnitt durch Trescas Block aus zwanzig Platten, von 60 auf 10,8 mm Gesamthöhe gedrückt, darstellt.

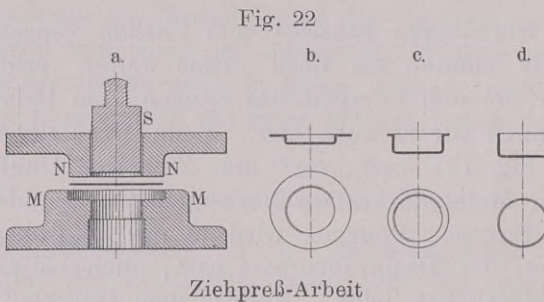


Bei den Biegewerken für dünne wie dicke Platten aus zähem Metall findet Streckung mit Stauchung gleichzeitig statt\*). Beim „Treiben“ geschehen diese Formänderungen nacheinander. Der Kunstschmied z. B., der aus dem Mittelteil einer milden Eisen- oder auch Silberplatte zuerst durch Austreiben ein Becken bildet, sieh Fig. 21 unter *a*, darauf den stehengelassenen flachen Rand



beim „Einziehen“ in Falten schlägt, *b*, und diese wieder glättet, bis das Oberteil der Becherkuppe gebildet ist, *c*, hat zuerst „gestreckt“, dann „gestaucht“ und ganz zuletzt wieder „gestreckt“.

Auf der „Ziehpresse“, die jetzt ein sehr großes und fruchtbares Industriegebiet erobert hat\*\*), sehen wir die soeben erwähnte langsame Treibarbeit für eine Unmenge von Erzeugnissen in die rasche Maschinenarbeit umgewandelt. Das Grundsätzliche führt Fig. 22 vor Augen. Das Austreiben aus ebener Platte be-



wirkt der auf- und niedergehende Stößel *S*, die Faltenbildung läßt nicht aufkommen der Niederhalter *N*, der gleich zu Anfang

\*) Einen großen Tweddellschen Plattenbieger vorzüglicher Bauart sieh Kinematik, II. Bd., S. 527.

\*\*) Große und erfreuliche Ausbildung hat der Ziehpressenbau bei uns durch Kircheis in Aue in Sachsen (Kurbelbetrieb) und durch Lorenz in Karlsruhe (Wasserdruck-Kolbenbetrieb) gefunden. Bei der Kurbelziehpresse ist die von den Amerikanern eingeführte Aus- und Einrückung einer selbsttätig anspringenden Kupplung allgemein angenommen worden. Lorenz andererseits war der Erste, der die Herstellung großer messingener Kartuschenhülsen für Kanonen unternahm und mit ausgezeichnetem Erfolge durchführte.

fest auf die „Matrize“  $M$  aufgesetzt wird. Der flache Rand des von Haus aus ebenen Werkstückes kann schmaler und schmaler gezogen werden, sieh unter  $c$ , auch ganz weggezogen, sieh unter  $d$ . Ein von unten herauf wirkender Austreiber dient häufig dazu, das fertige Stück aus der Form zu heben. Durch sogenanntes „Nachziehen“, d. i. Ausüben der Zieharbeit auf vorbereitend gezogene und wieder ausgeglühte Stücke, können die weitgehendsten Umformungen erzielt werden. Die beiden Setzfelder so mancher Metalle, vgl. nochmals Fig. 17, kommen hier in un-  
gemein nützlicher Weise zur Geltung\*).

Statt metallener Stempel kann man auch Flüssigkeiten das Treiben von Metallwänden in vorbereitete bauchige Matrizen bewirken lassen; man erreicht dadurch, daß man sehr verwickelte Formen durch Prägung verwirklichen kann. Die genau vorgearbeitete Matrize wird zwei- oder allenfalls auch dreiteilig hergestellt und in eine fest geschlossene Hülse konisch eingesetzt; das „vorgezogene“, schlicht becherförmig gestaltete Werkstück wird in die Matrize hineingestellt, mit Wasser gefüllt und dieses, nach Abdeckung mit einer Kautschukplatte, mittelst Stempels zusammenpreßt, wobei es die Becherwand in die Matrizenhöhlungen prägend hineintreibt. Das Verfahren ist leicht auszuüben und eignet sich gut für Edelmetall-Arbeiten, wofür es auch seit längerer Zeit schwunghaft im Gebrauch ist\*\*). Sind die Höhlungsformen der Matrize einfacher Art, so ist statt des Wassers ein weicher Kautschukblock verwendbar.

In den letzten Jahren (seit 1896) ist das Verfahren durch Ingenieur Huber als „hydraulisches Preß- und Prägeverfahren“ — „Fludprägung“ können wir es nennen — noch beträchtlich ausgebildet worden\*\*\*). Herr Huber übt Wasserdruck bis zu 7000 at nicht bloß von innen auf das Werkstück, sondern zugleich von außen auf die Matrize aus, die nun nicht mehr schwer und dickwandig zu sein braucht. Das geschieht in einem, fest mit (fünf) konaxialen Stahlringen umgürteten Behälter, in den von unten her ein dünner Kolben von einem viermal so dicken mit Wasserdruck eingetrieben wird. Eine ganze Anzahl Stücke

---

\*) Eine lehrreiche zusammenfassende Darstellung der gestaltenden Preßbetriebe gibt Oberlin Smyths Schrift: *Press-working of metals*, Newyork, Wiley 1899.

\*\*\*) Sieh American Maschinist 12. 9. 1903, Jos. Woodworth, *Die Work for Medals, Jewelry and Art Goods*.

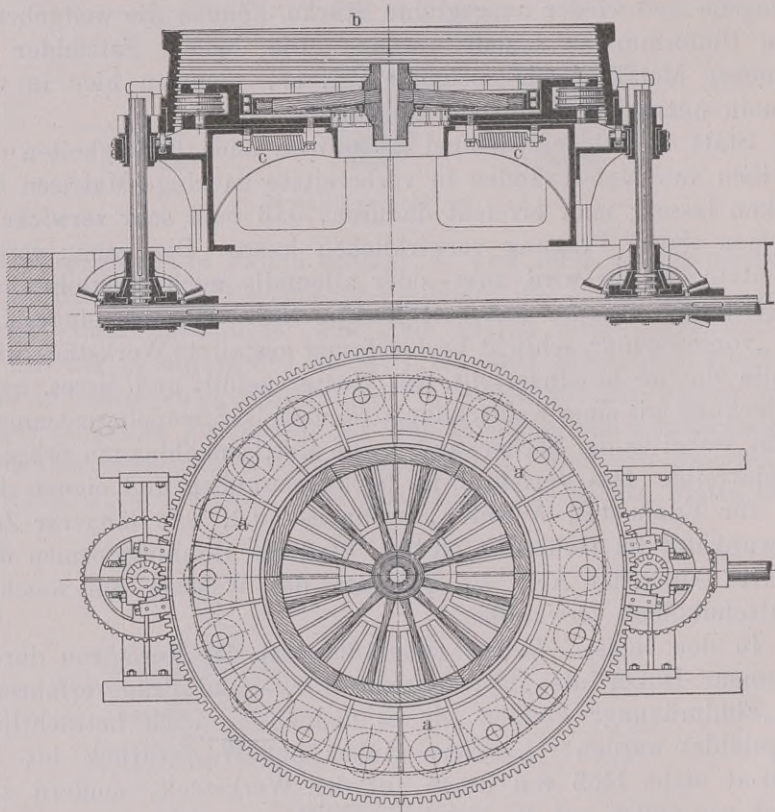
\*\*\*) Sieh Sitzungsberichte des Ver. f. Gewerbleiß 1901, April, S. 169 ff.



von nicht zu großem Umfang können zugleich der Fludprägung unterworfen werden.

Stauchung, die den eigentümlichen Zweck hat, einen Körper für hohe Zugspannung geeignet zu machen, findet statt bei der Kunzschenschen Radreifenpresse\*), von der Fig. 23 Grundriß und Durchschnitt

Fig. 23



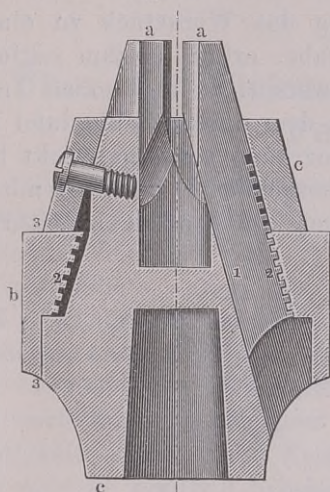
Radreifenpresse

gibt. Sie drückt den in kaltem Zustand auf den Radbock gesetzten Eisenreif ringsum so stark zusammen, und zwar stauchend, daß er nach Freilassung die sich wieder ausdehnende Felge fest mit Zug umspannt. Die (achtzehn) Spannblöcke *a*, die den Reif von außen fassen, werden mittelst einer hohlkegeligen Schraubmutter *b* unter Vermittlung bereifter, aber drehrunder Laufrollen,

\*) Gebaut von der Maschinen- u. Armaturenfabrik vorm. Breuer & Cie in Höchst am Main.

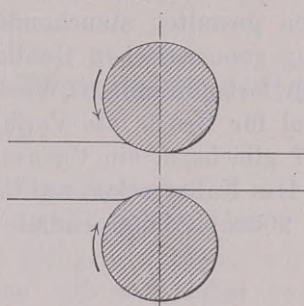
die die gleitende Reibung soviel wie beseitigen, zusammengedrückt; später werden die Spannblöcke durch Federn *c* wieder nach außen gezogen. Geometrisch ist die Arbeitsweise der Presse nahe verwandt mit der bei manchen Spann Futter n, z. B. dem Skinner-

Fig. 24



Skinner's Spann Futter

Fig. 25

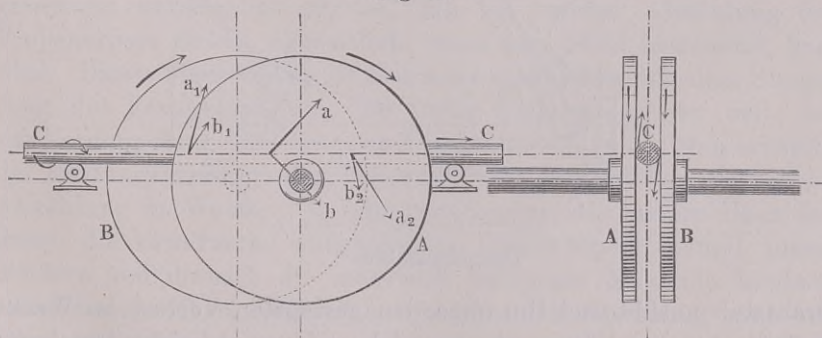


Walzenwirkung

schen, Fig. 24. Die Rollung der Laufrollen geschieht unter Annäherung an die reine Wälzbewegung.

Beim gewöhnlichen Walzverfahren findet Fortbewegung des Werkstückes vermöge der Reibung statt, vgl. Fig. 25; dabei wird Streckung durch „Ziehen“ sowohl als durch „Breiten“ seitlich ausgeübt, letzteres aber nur, wenn die Ränder der Walzenfurchen es nicht hindern, ansonst Stauchung stattfindet wie oben beim

Fig. 26



Walzwerk zum Rundglätten

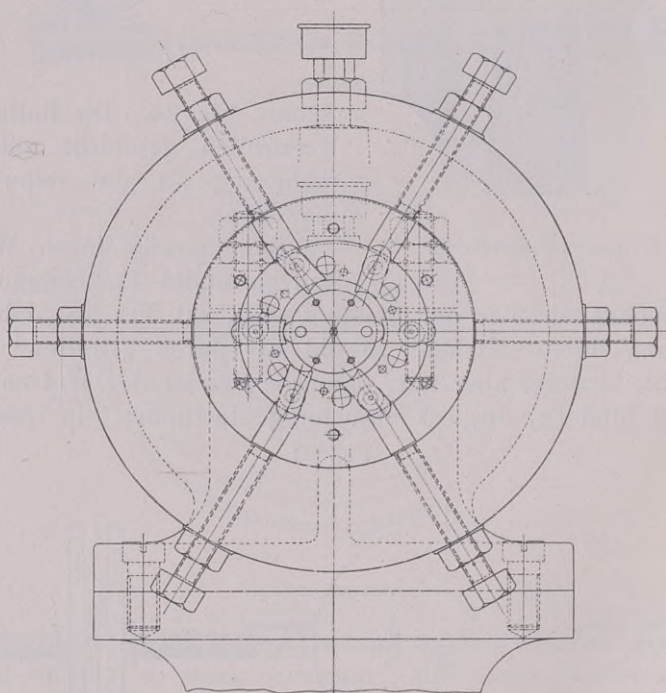
Prägen. Dabei kommen oft recht verwickelte Teilchenbewegungen, aus Stauchung und gleichzeitiger Streckung quer dazu bestehend,



vor. Stauchende, zusammenpressende Walzung wird bei verschiedenen Bearbeitungen, so bei dem Kirkstaller Verfahren zum Rundglätten zylindrischer Stäbe, vgl. Fig. 26, benutzt, neuerdings auch bei der Herstellung stählerner Lagerkugeln aus roh vorgeschnittenen Stahlblöcken (Ludw. Löwe u. C<sup>ie</sup>). In beiden Fällen gestaltet stauchende Wälzung das Werkstück zu einem streng geometrischen Gebilde um; dabei erteilt es ihm zugleich durch fortwährenden „Wiederholungsversuch“ einen hohen Tragmodul für Druck, ein Verfahren, von dem unsere Zahlentafel auf S. 17 gleichsam ein theoretisches Programm vorausgeschickt hat.

Das Kaltstrecken auf der Dengelmaschine, Fig. 27, die minutlich 2000 bis 6000 radiale Pressungen auf den hineingeführten

Fig. 27



Dengelmaschine

Drahtstab ausübt und ihn ohne den geringsten Verlust an Werkstoff (Stahl) zur Nähmaschinennadel umformt, bewirkt Streckung unter oder durch Zusammendrückung\*).

\*) Sieh Kinematik Bd. II, S. 702, Goodyears Dengelmaschine.

Das Hämmern und Walzen, wodurch man kupfernen und messingenen Gefäßwänden und Platten eine so merkwürdig gesteigerte Festigkeit verleiht, wirkt durch Stauchung und Streckung, also durch Ausnutzung der Setzfelder.

## §. 8

## Über die Wirkung der Wärme auf die Festigkeit

Die Frage, wie ungewöhnliche Wärmeänderungen auf die Festigkeit, namentlich der Metalle einwirken, ist durch verschiedene Versuchsreihen in Betracht gezogen worden, worüber einiges Nähere unten. Im allgemeinen hat sich dabei gezeigt, daß Abkühlungen bis auf  $-200^{\circ}\text{C}$  keinen großen Einfluß, zwar immerhin einen günstigen, ausüben, und sodann, daß Erwärmungen bis zu  $400^{\circ}\text{C}$  bei den meisten Metallen wenig ändern, daß aber bei noch weiter getriebener Erwärmung ein rascher Verfall der Festigkeit eintritt; die Festigkeitsmodel gehen z. B. bei Eisen von  $400^{\circ}$  ab sämtlich herab und zwar begreiflicherweise bis auf Null, wenn bis zum Fließen erhitzt wird. Hatte ein Metallkörper vorher durch Ziehen und Stauchen die besprochenen Festigkeitserhöhungen erlangt, so verliert er diese mit den vorher besessenen durch hohe Erhitzung. Wird diese aber nicht zu weit getrieben, so kehrt der Körper wieder in seinen Anfangszustand zurück. Es ist das „Ausglühen“, was vor sich geht.

Eine zweite Wirkung kann aber noch der Erhitzung abgewonnen werden; es ist die, daß bei rascher Abkühlung des Probekörpers dieser, namentlich, wenn aus Stahl bestehend, hart wird. Dieses Hartwerden ist abermals verbunden mit einer Steigerung der Festigkeitswerte, die unter Umständen sehr weit, bis zur Verdoppelung von Trag- und Bruchmodul, geht. Man schreibt die Härtungswirkung dem Umstande zu, daß bei der plötzlichen Abkühlung in Wasser, Öl, oder was immer, die äußere Haut des durch die Erwärmung ausgedehnten Probekörpers schnell zuerst erstarre und deshalb die innerhalb belegenen Moleküle hindere, zusammenzurücken, demzufolge eine starke Spannung zwischen allen übrig bleiben müsse; diese Spannung bedeute das Hartwerden sowie das Festerwerden. Sollte diese Deutung sich der Wahrheit nähern, so müßte das spezifische Gewicht des gehärteten Probekörpers kleiner sein, als das des ungehärteten. In der Tat



bestätigen Versuche an Stahl diese Schlußfolgerung; sie ergaben z. B. \*) für Proben:

weichen Stahl . . . .	das spezif. Gewicht	7,9288
desselben gehärtet . . . .	„ „ „	7,6578
weichen Stahl . . . .	„ „ „	8,0923
desselben gehärtet . . . .	„ „ „	7,7647

was unvernachlässigbare Änderungen sind. Beachtet man hierzu, daß bei hartgezogenen Metallkörpern das spezifische Gewicht, wider Erwarten, ebenfalls kleiner gefunden wird, als bei unbehandelten\*\*), so leitet das zu dem Schlusse, daß das Härter- und Festerwerden in beiden Fällen nicht bloß von einer Abstands-, sondern auch von einer Lagenänderung der Moleküle mindestens begleitet, wenn nicht verursacht werde. In den letzten Jahren ist es gelungen, die Härtung der Dreh- und Hobelstähle beträchtlich zu vervollkommen, so zwar, daß sie nicht nur bedeutend stärkere Späne als früher ablösen können, sondern dies auch schneller und zugleich dauernder bewirken\*\*\*). Die Härtung wird so vorgenommen, daß der Stahl bis zu 1100° erhitzt, dann auf etwa 930° im Blei- oder im Ölbad entwärmt und darauf im Luftstrom vollständig abgekühlt wird. Andererseits ist hervorzuheben, daß die Bedeutung der Härtung auch für die Baukunde zur Zeit auffallend im Steigen begriffen ist.

## §. 9

### Festigkeitswerte

Die in den folgenden Aufzählungen A bis E zusammengestellten Festigkeitsmodel für Zug und Druck, bemessen auf Kilogramm und Quadratmillimeter, sind die für die Baukunde wichtigsten. Man nennt sie häufig auch Festigkeits„koeffizienten“, was sprachlich nicht besonders gut ist, da ein Koeffizient sonst eine unbenannte Zahl ist. Als Elastizitätsgrenze ist die der steigenden Elastizität (bei uns, wie erwähnt, von Manchen P-Grenze genannt) angegeben. Es ist nach Möglichkeit gesucht, die neueren Quellen zu benutzen.

\*) Sieh Kick und Gintl, Technisches Wörterbuch IV, S. 222.

\*\*) Anderson sagt a. a. O. S. 55: „Ein Eisendraht, gezogen aus Eisen von 40 kg Bruchmodul, erhält durch das Ziehen einen solchen von 56 kg; die bemerkenswerteste Erscheinung dabei ist, daß zugleich sein spezifisches Gewicht sich tatsächlich verringert.“

\*\*\*) Vgl. Berliner Verhandl. 1900, Sitzungsbericht v. 5. 11., S. 179.

## A. Metalle

Baustoffe	Elastizitätsmodul $E$	Elastizitätsgrenzen		Setzgrenzen		Bruchgrenzen	
		Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck
		$T_z$	$T_d$	$S_z$	$S_d$	$B_z$	$B_d$
Schweißeisen . . . . .	20000	15—18	15—18	18—26	18—25	40—59	—
Desgl., geringer . . . . .	15000	12	12	—	—	—	—
Schweißeisen(blech) . . . . .	20600	11—15	—	23—25	—	34—36	—
Tho. Flußeisen(blech) . . . . .	20600	22—26	—	28—30	—	28—40	—
Flußeisendraht . . . . .	20000	45	—	25—108	—	39—117	—
Bas. Martineisen(blech)	20600	13—15	—	21,5	—	35	—
Eisendraht, weich . . . . .	20000	30	—	—	—	40	—
Desgl., hartgezogen . . . . .	20000	40	—	—	—	56	—
Gußstahl, weich . . . . .	20000	25	—	—	—	80	—
Desgl., federhart . . . . .	25000	65—150	—	—	—	100	—
Gußstahldraht . . . . .	22000	55—100	—	—	—	100—180	—
Nickelstahl*) . . . . .	22000	35—48	—	—	—	66—70	—
Gußeisen **) . . . . .	10000	7,5	15	—	—	12—16	10—75
Kupfer, gehämmert . . . . .	12000	4—9	—	—	—	34—43	70
Kupferdraht, hart . . . . .	13000	12	—	—	—	34—40	—
Messing, gehämmert . . . . .	6500	4,8	—	—	—	12	110
Messingdraht . . . . .	10000	13	—	—	—	50—70	—
Rotguß . . . . .	3200	4—8	—	—	—	12—20	—
Sterrometall . . . . .	7500	15	—	13,6	—	32—50	—
Deltametall . . . . .	11000	12	—	17	—	42	—
Aluminium***) . . . . .	7000	6,8—12	—	10	—	17	—
Zink . . . . .	9400	1,5	—	—	—	5,7	—

Die vorstehenden Werte gelten für gewöhnliche Tageswärme. Bei Anwendungen für die Baupraxis können sie als erster Anhalt dienen. Wenn wichtige Neuausführungen zu machen sind, tut

\*) Nickelgehalt 3 bis 4 v. H., wenn gehärtet und angelassen zeigt der Nickelstahl noch höhere Werte als hier angegeben.

\*\*) Das festeste Gußeisen ist auch heute noch kalt erblasenes Holzkohlenroheisen (Stahl und Eisen 1902).

\*\*\*) Nach Versuchsreihen von Lanza, Boston 1899.



man gut, auf die ausführlichen Mitteilungen der Prüfungsanstalten und auf die Bedingnishefte für Baustoffeigenschaften, die teils vorliegen, teils international beraten werden, zurückzugehen.

Die Wärmeeinflüsse sind schon früher (Fairbairn), inzwischen aber ausführlicher geprüft worden. Einige Angaben folgen hier.

Gubeisen behält, *sieh Berliner Mitteilungen 1900, Heft 6 (Rudeloff)*, bis zu 400° C seinen Bruchmodul  $B_z$  ungefähr bei, wird aber, wenn darüber hinaus erwärmt, rasch schwächer.

Bei 10°	100°	300°	400°	500°	600° C	ergab sich
13,0	10,5	11,4	13,9	8,8	4,3 kg/qmm	Bruchlast $B_z$ .

Schmiedeeisen verhält sich einigermaßen ähnlich\*).

Stahlguß, *sieh Berliner Mitteilungen wie vor (Rudeloff)*, zeigt Folgendes:

Bei 20°	194°	400°	600° C	ergab sich
43,9	46,2	42,1	19,3 kg/qmm	Bruchlast $B_z$ .

Temperguß(-Eisen), *sieh Berliner Mitteilungen wie vor (Rudeloff)*, zeigt was folgt:

Bei 20°	194°	400°	600° C	ergab sich
32,2	36,7	34,0	13,7 kg/qmm	Bruchlast $B_z$ ,

wenn aber bei 600° Erwärmung in 100° heißem Wasser abgeschreckt, ergab sich

$$T_z = 7,5, \quad B_z = 35,2, \quad E = 16350,$$

also eine Art Stahlverhalten.

Kupfer, *sieh Berliner Mitteilungen 1898, Heft 4 (Rudeloff)*, zeigt Folgendes:

Bei 20°	100°	200°	300°	400°	500°	600° C	ergab sich
43,8	41,8	39,7	36,3	28,4	10,7	6,6 kg/qmm	Bruchlast $B_z$ ,

oder, nach einer älteren, zuverlässigen Versuchsreihe aus dem Franklin-Institut ergab sich bei:

50°	100°	150°	200°	250°	294°	367°	427°	500°	644°	722° C
eine Verminderung des Bruchmoduls $B_z$ um:										
0,018	0,054	0,093	0,151	0,205	0,256	0,343	0,439	0,558	0,866	1,00

Neuere Versuche von Professor Stribeck haben gezeigt, daß die Dauer der Belastung erwärmten Kupfers sehr von Einfluß ist, daß z. B. dauernde Erwärmung auf 160° schon so stark wirkt, wie die kürzere auf 260° C.

\*) Bekannt ist, daß bei Feuersbrünsten die mit schmiedeisernem Gebälk versehenen Gebäude rasch den inneren Halt verlieren. Das zeigte sich auch in auffallendster Weise bei dem Brand des großen Warenhauses 1894 in Hamburg. Einhüllung der schmiedeisernen Säulen mit dichten festen Ziegelmänteln ist deshalb sehr zweckmäßig.

## B. Hölzer

Die Bauhölzer sind weder gleichartig (homogen) noch gleichkräftig (isotrop, vgl. §. 3) gebildet und haben daher schwankende Festigkeitswerte. Hier folgen einige aus älteren und neueren Versuchsreihen\*), immer Beanspruchung in der Faserrichtung vorausgesetzt.

Holzart:	Tanne	Esche	Weißbuche	Eiche, deutsche	Eiche, englische	Teak
$B_z$ . . .	8—9	11—13	8—16	10,2	6,3—13	5,7—10
$B_d$ . . .	4,7—6,5	6—6,5	5,4—6,5	4,5—7	2,7—7	4—8

Der Elastizitätsmodul  $E$  beträgt im Durchschnitt 1000 bis 1100 (nur Pappel hat bloß 500)  $T_z$  ist etwa = 2.

## C. Gesteine und Bindemittel

Die zu Bauwerken geeigneten Steine und die Mörtelstoffe sind neuerdings vielfach geprüft worden und werden bei Lieferungen noch immer wieder geprüft. Es kommt bei beiden fast allein auf Druckwiderstand an. Trotzdem werden Zemente der Einfachheit des Versuches halber vorzugsweis auf Zug geprüft, was im Hinblick auf die Fouriersche Körpertheorie als ganz richtig auch vom theoretischen Standpunkt zu erkennen ist.

Baustoff:	Sandstein	Granit	Kalkstein	Carrara-Marmor	Ziegel	Ziegelmauer	Zement, weich	Zement, hart	Beton
$B_d$ . . .	6,8	8	5	3,2	{0,6 1,3	{0,4 1,5	4	8	2
$B_z$ . . .	—	—	—	—	—	—	0,57	0,7	0,12

Die Form der Versuchskörper für Steine ist von großem Einfluß. Die Würfelform (vgl. S. 15, Fig. 13) eignet sich der Vergleiche wegen sehr gut. Geviertsteine von halber Würfelhöhe sind etwa doppelt so fest, solche von Viertels-Würfelhöhe etwa dreimal so fest, als der Würfel. Im Hoch- und Brückenbau wendet man bei Quadermauern höchstens Würfelhöhe, häufig

\*) Einen ausführlichen Bericht über eingehende Versuche an Kiefernholz hat Professor Rudeloff in den „Mitteilungen“ von 1897, Heft I, erstattet.



halbe Würfelhöhe an; unsere gewöhnlichen Ziegel können als aus zwei Halbwürfeln bestehend angesehen werden. Die Versuche verschiedener Beobachter stimmen manchmal schlecht zusammen, wahrscheinlich wegen der Höhenwahl.

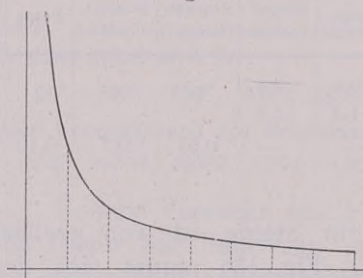
#### D. Flüssigkeiten oder Flude

Hier folgen die Werte der Elastizitätsmodul für einige tropfbare Flude. Die Versuche wurden an Prismen in fester, undehnbar gemachter Hülle ausgeführt; indem die Flüssigkeiten in diese eingeschlossen sind, besitzen sie unbegrenzte Druckfestigkeit (vgl. S. 15) zeigen aber Elastizität.

Stoffe:	Wasser	Äther	Schwefelsäure	Quecksilber
$E =$	195—199 ~ 200	72,8	118	1929

Der Wert für Wasser ist umgerechnet aus den Zahlen, welche die wichtigen Versuche von Colladon und Sturm geliefert haben\*). Ein Wasserprisma, das unter 90 at Druck steht, und 8 m Länge hat, erleidet danach die Verkürzung  $\lambda = 8000 \cdot 0,9 : 200 = 36$  mm; ebensoviel bei 900 at Druck in einem als undehnbar anzusehenden Preßzylinder von 800 mm Höhe, nämlich  $\lambda = 800 \cdot 9 : 200 = 36$  mm. Wenn man also einen solchen Preß-

Fig. 28



Widerstand der Gase

kolben entlastet, wird er von dem sich wieder ausdehnenden Wasser um 36 mm gehoben. Von gasförmigen Fluiden, wie Luft, Dampf usw., ist ein Elastizitätsmodul nicht anzugeben, da für sie der Carnotsche Satz [Gleichung (2)] keine Geltung hat; denn ihr Widerstand gegen Druck ist nicht diesem geradlinig proportional, sondern steigt nach dem Mariottischen Gesetz bei konstanter Temperatur wie die Ordinaten einer Hyperbel, sieh Fig. 28. Dies läßt, wenn wir einen Blick auf S. 3 zurückwerfen,

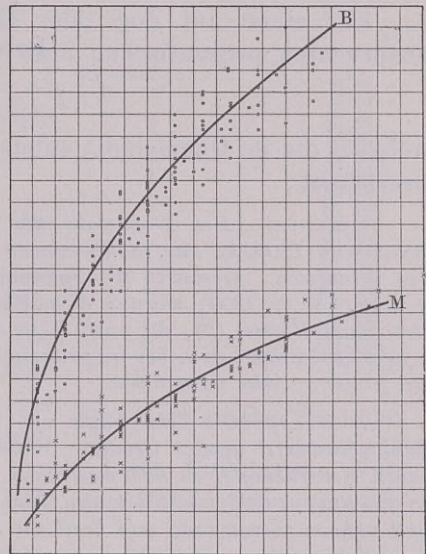
\*) Siehe Mémoire s. l. compression des liquides 1827, neu abgedruckt 1887, Genf, Schuckardt. Die „Unzusammendrückbarkeit“ des Wassers wurde durch diese Versuche als grundloses Vorurteil erwiesen.

Fouriers Wahl der beiden hyperbolischen Widerstandskurven als auf wissenschaftlicher Vergleichung beruhend erkennen; denn bei den gasförmigen Fluiden fehlt die eine der beiden, nämlich die Anziehungskurve von Fig. 3.

### E. Zugorgane oder Tracke

Die Tracke aus faserigem Stoff sind an sich, ausgenommen vielleicht das Leder, nicht gleichkräftig wie Metalle, und zeigen deshalb dem Zug gegenüber nicht ein so regelmäßiges Verhalten wie jene. Namentlich ist die steigende Elastizität bei ihnen kaum zu finden. Beispielsweis zeigt Fig. 29 die aufgetragenen Ergebnisse an (jedemal einer ganzen Reihe von) Baumwoll- und Manila-seilen, geprüft in der Versuchsanstalt in Boston durch Professor Lanza\*). Die Kurven lassen deutlich „abnehmende“ Elastizität erkennen; man hat allerdings nicht zu vergessen, daß das Seil ein zusammengesetzter Körper ist. Die in folgendem Täfelchen dennoch angegebenen Elastizitätsmodel der Hanfseile stammen aus älteren, nicht so scharf, wie heute der Brauch ist, angestellten Versuchen.

Fig. 29



Versuche an Seilen

Stoff:	Hanfseil, neu	Hanfseil, alt	Manila-seil	Baumwoll-seil	Aloëseil	Riemenleder
$E$ . . .	250 (?)	50 (?)	—	—	—	15—20**)
$T_3$ . . .	5 (?)	1	—	—	1,02***)	1,6
$B_z$ . . .	12	5	1,4—3,0	1,8—5,3	—	2—3

\*) Sieh Results of tests made in the Engineering Laboratories of the Massachusetts Institute of Technology, XI. appl. Mechanics.

\*\*\*) Nach Adolf Hirn.

\*\*\*) Nach C. Vertongen, Cables plats en aloës, Liège 1901.



Bei den Anwendungen sind jetzt amtliche und private Vorversuche im Gebrauch, so daß die vorstehenden Zahlen nur einen Anhalt zu geben bestimmt sind. — Wir gehen nunmehr zu den einzelnen Festigkeitsarten über.

## §. 10

**Zug- und Druckfestigkeit**

Für einen auf Zug oder Druck durch eine Kraft  $P$  beanspruchten prismatischen Stab vom Querschnitt  $q$  hat man:

$$P = \mathfrak{S} q \dots \dots \dots (3)$$

wobei  $\mathfrak{S}$  die im Querschnitt entstehende Zug- oder Druckspannung bezeichnet.

*Beispiel.* Ein Dachstuhl übe an seinem Fuß einen wagerechten Schub von 12000 kg aus, aufzunehmen durch eine wagerechte runde Stange aus Flußeisen. Gestattet sei Spannung  $\mathfrak{S} = 10$  kg, gibt  $10 q = 12000$ ,  $q = \pi/4 d^2 = 1200$ , woraus  $d = 39,6 \sim 40$  mm. Die Stange verlängert sich nach Formel (2), da nach §. 9 A für Flußeisen  $E = 20600$  ist, um  $\lambda = 1 \cdot 10 : 20600$ , d. i. bei ursprünglicher Länge von 12 m um  $\lambda = 12000 : 20600 =$  sehr nahe 6 mm.

2. *Beispiel.* Eine Säule mit 120 Tonnen Belastung soll auf einen Sandsteinwürfel gesetzt werden. Wählt man für diesen 10fache Sicherheit gegen Zerdrückung, so hat man nach §. 9 C zu setzen:  $q = 120000 : 0,68 = 176400 = 420^2$ ; man hat also dem Würfel 420 mm Kantenlänge zu geben und nahezu ebenso lang und breit die Fußplatte der Säule zu machen; diese ist mit Zement zu untergießen, damit sie gleichmäßig aufliegt.

## §. 11

**Körper von gleicher Zug- und Druckfestigkeit**

In vereinzelt Fällen ist es wichtig, die Querschnitte von bloß auf Zug oder Druck beanspruchten Körpern so zu wählen, daß in allen die Spannung  $\mathfrak{S}$  denselben Wert erhält. Ist der senkrecht herabhängende Körper durch eine Endkraft  $P$ , s. Fig. 30a, und außerdem erheblich durch sein Eigengewicht mit  $\gamma$  für die Kubikeinheit belastet, so ergibt sich für den Querschnitt  $q$  bei der Stelle  $x$ :

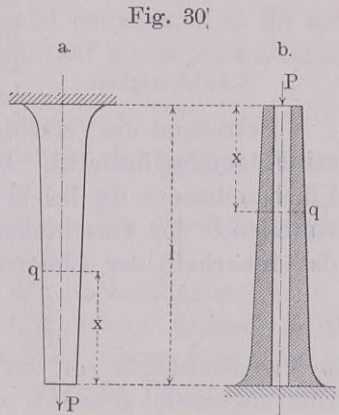
$$\left. \begin{aligned}
 q &= \frac{P}{\mathfrak{E}} e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{E}} x} \quad \text{oder} \quad \log q = \log \frac{P}{\mathfrak{E}} + 0,434 \frac{\gamma}{\mathfrak{E}} x \\
 \text{auch, da } P:\mathfrak{E} &\text{ der Querschnitt } q_0 \text{ bei } x = 0 \text{ ist,} \\
 q &= q_0 e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{E}} x} \quad \text{oder} \quad \log q = \log q_0 + 0,434 \frac{\gamma}{\mathfrak{E}} x
 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

wobei  $e = 2,718$  die Grundzahl der natürlichen Logarithmen.

Im Falle von Fig. 30 b ist angenommen, daß der hier auf Druck beanspruchte Körper eine zylindrische Höhlung vom Halbmesser  $r$  habe, also ein Rohr bilde. Die Wanddicke betrage  $\delta$  an der Stelle  $x$ ,  $\delta_0$  an der Anfangs-,  $\delta_1$  an der Befestigungsstelle. Dann folgt aus (4):

$$\left. \begin{aligned}
 \log [(r + \delta)^2 - r^2] &= \\
 \log [(r + \delta_0)^2 - r^2] + 0,434 \frac{\gamma}{\mathfrak{E}} l
 \end{aligned} \right\} (5)$$

Der Fall a paßt für die sogenannten verjüngten Förderseile für tiefe Schächte\*), Fall b für hohe Schornsteine, gelegentlich auch als bloße und ausdrucksvolle Grundform, so bei hohen Viadukt Pfeilern\*\*) auch beim Eiffelturm. Von Vollziegelmauerwerk wiegt 1 cbm 1600, von Hohlziegelmauerwerk 1100 kg.



Körper von gleicher Festigkeit

§. 12

Schub- oder Scherfestigkeit

Ein Körper wird auf Schub- oder Scherfestigkeit, die auch wohl Gleitungsfestigkeit genannt wird, beansprucht, wenn die ihn angreifende Kraft  $P$  in der Ebene des Querschnitts wirkt. Hat letzterer die Größe  $q$  und ist  $\mathfrak{E}$  die in ihm entstehende Schubspannung, so hat man, Gleichkräftigkeit und Gleichartigkeit des Baustoffes vorausgesetzt, wie bei Zug und Druck:

$$P = \mathfrak{E} q \dots \dots \dots (6)$$

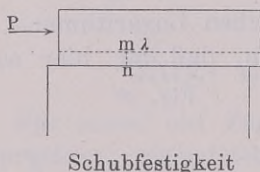
\*) Diese Aufgabe nimmt an Verwicklung zu, aus je größerer Teufe die Kohlenförderung jetzt zu geschehen hat. Eingehend ist die Sache behandelt in der wertvollen Fachschrift von Charles Vertongen, Étude théorique et pratique sur l'emploi des Cables plats en Aloès. Liège 1901.

\*\*) Vgl. Baumeister, Architektonische Formenlehre, Stuttgart 1866, S. 226.



Die Theorie der Schubfestigkeit ist trotz diesem schlichten Verhalten nicht einfach, indem der Widerstand des verschobenen Teilchens aus Zug und Druck zusammengesetzt ist, wie in §. 1 gezeigt wurde\*). Die Elastizitätsgrenze wird erreicht, wenn  $\mathfrak{S} = \frac{4}{5}$  des kleineren der beiden Tragmodel des Baustoffes wird,

Fig. 31



also beim Schmiedeisen, wo  $T_z = T_d = 15$ , bei  $\mathfrak{S} = 12$ , beim Gußeisen, wo  $T_z$  der kleinere Wert ist und 7,5 beträgt, bei  $\mathfrak{S} = 6$ . Die höchste Spannung tritt nämlich nicht in der Ebene von  $q$ , sondern um  $45^\circ$  dagegen geneigt ein und hat die  $\frac{5}{4}$ fache Größe von  $\mathfrak{S}$ .

Betreffend die Verschiebung der sich spiegelnden Querschnitte sei Folgendes bemerkt. Die Kraft  $P$  habe, siehe Fig. 31, an dem Flächenelement  $dq$  bei  $mn$  mit dem auf das Element fallenden Anteil  $dP$  die Verschiebung  $\lambda$  bewirkt, dann lehrt der Versuch, daß innerhalb der Elastizitätsgrenze gilt:

$$\frac{dP}{dq} = \lambda \cdot \text{Konstante,}$$

welche Konstante von der Natur des Baustoffes abhängt und der Gleitungsmodul genannt, sowie nach Übereinkunft mit  $G$  bezeichnet wird. Der Quotient  $dP : dq$  ist aber die Scherspannung  $\mathfrak{S}$ , und, indem man nun  $\lambda$  auf Längeneinheit bezieht, hat man:

$$\frac{\lambda}{1} = \frac{\mathfrak{S}}{G} \dots \dots \dots (7)$$

ganz ähnlich wie in Formel (2) für Zug und Druck. Der Gleitungsmodul  $G$  steht in einem als fest anzusehenden Verhältnis zu dem Elastizitätsmodul  $E$  und zwar hat man:

$$\frac{G}{E} = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} \dots \dots \dots (8)$$

wobei der Wert  $m$  nach Einigen theoretisch  $= 4$ , nach Versuchen zwischen 3 und 4 (nach Giulio bei  $\pi$ ) liegt. Für Metalle trifft der Wert 4 recht gut zu, sodaß für diese gilt und anerkannt ist:

$$G = \frac{2}{5} E \dots \dots \dots (9)$$

Wenn die Elastizitätsgrenze überschritten, also das Gebiet der Setzungen betreten wird, verwickeln sich die Vorgänge bedeutend. Ein deutliches Zeugnis hiervon legt der Trescasche Versuch von Fig. 20 ab; Streckung und Stauchung treten neben-

\*) Sieh Grashof, El. u. F., S. 144, auch v. Bach, El. u. F., S. 135 und besonders Madamet, a. a. O. S. 79 ff.

einander ein, allerdings in großer Regelmäßigkeit, sodaß die Formen der Schichten, die durchrissen oder weggedrängt werden, sich stets wiederholen. Die Versuchsmessung ist demzufolge entscheidend. Als ungefähren Bruchmodul erweist sich der Wert  $1,1 B_z$ .

## §. 13

## Biegungsfestigkeit

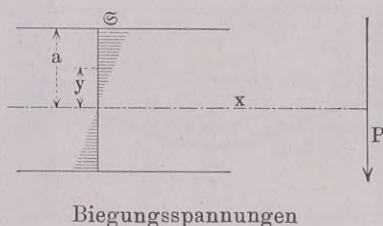
In der folgenden Tafel, Biegungstafel genannt, sind für eine Reihe von Angriffsarten biegender Kräfte auf einen prismatischen Stab die Werte zusammengestellt für:

- das Kraftmoment  $M$  für den Punkt  $x$ ,
- die Tragkraft  $P$  nach einer alsbald dargelegten Formel,
- die Koordinaten der elastischen Linie,
- die Biegungen  $f$ , d. i. die Abszissen der elastischen Linie für Hauptpunkte der Stablänge.

Zur Erläuterung der Tafel dient das Nachstehende.

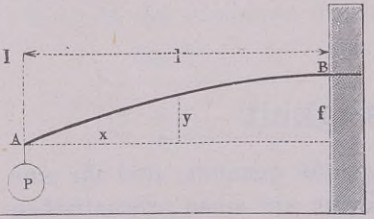
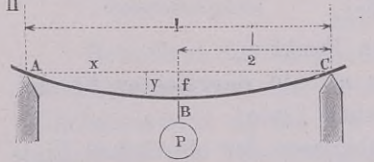
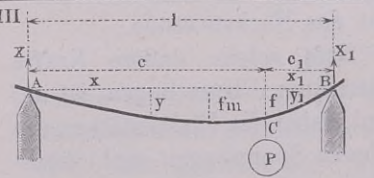
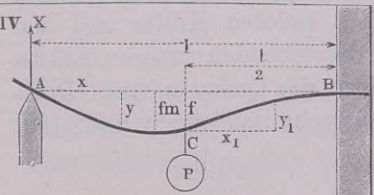
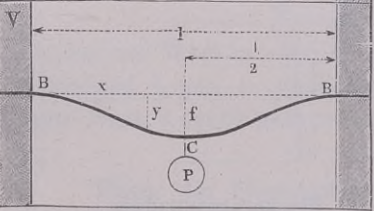
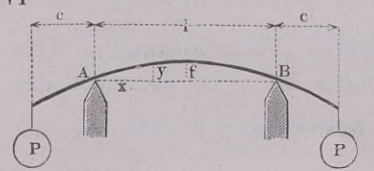
Ein stabförmiger Körper, an dem solche äußere Kräfte wirken, die rechtwinklig zu ihm in derselben Ebene liegen, ist auf Biegungsfestigkeit beansprucht. Wird dabei die Elastizitätsgrenze durch die dabei im Stab hervorgerufenen Spannungen nicht überschritten wird, so tritt für jeden Stabquerschnitt Gleichgewicht ein zwischen dem statischen Moment der äußeren Kräfte und den Momenten der in dem Querschnitt widerstehenden inneren Kräfte, beide bezogen auf die „neutrale Achse“ des Querschnittes. Diese geht durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche\*) und steht rechtwinklig zur Biegungs- oder Kräfteebene. Sie teilt den Querschnitt in zwei Teile, Zug- und Druckseite; in ihnen entstehen Spannungen rechtwinklig zum Querschnitt, die den Abständen  $y$  der Flächenteilchen von der neutralen Achse proportional sind, vgl. Fig. 32. Die Spannung bei  $y$  verhält sich deshalb zur stärksten Spannung  $\mathcal{E}$ , wie  $y$  zum größten „Faser“abstand  $a$ . Das statische Moment des Flächenstreifchens bei  $y$  ist demnach das

Fig. 32



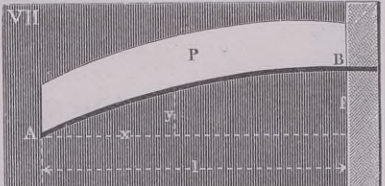
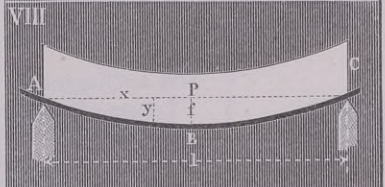
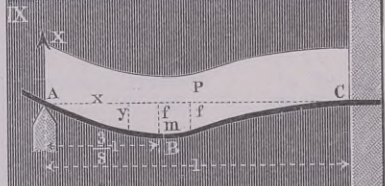
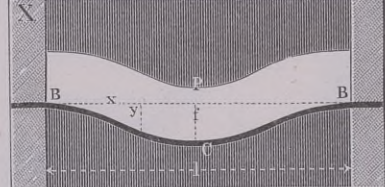
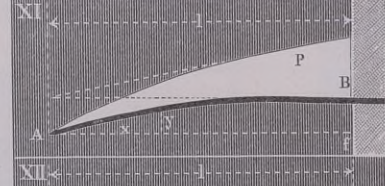
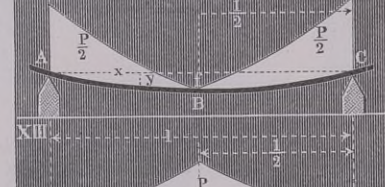
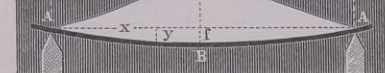
\*) Galilei hatte angenommen, die ausdehnungslose Schicht liege am unteren Rande des Querschnittes.



Angriffsweise	Kraftmoment $M$	Tragkraft
	$M = Px$	$P = \frac{\mathcal{E}J}{la}$
	$M = \frac{Px}{2}$	$P = 4 \frac{\mathcal{E}J}{al}$
	Für AC: $M = \frac{Pc_1x}{l}$ Für BC: $M = \frac{Pcx_1}{l}$	$P = \frac{l}{c_1} \frac{\mathcal{E}J}{a}$
	Für AC: $M = \frac{5}{16} Px$ Für BC: $M = Pl \left( \frac{5}{32} - \frac{11x_1}{16l} \right)$	$P = \frac{16}{3} \frac{\mathcal{E}J}{la}$
	$M = \frac{Pl}{2} \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{4} \right)$	$P = 8 \frac{\mathcal{E}J}{la}$
	Für AB: $M = Pc$	$P = \frac{\mathcal{E}J}{ca}$

Gleichung der elastischen Linie	Biegung $f$	Bemerkungen
$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{2} \left[ \frac{x}{l} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{3}$	Freitäger Gefährlicher Querschnitt bei B
$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{16} \left[ \frac{x}{l} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{48}$	Frei aufliegender Träger, Brückenträger *) *) Nicht Brückenträger
$y = \frac{P}{JE} \frac{c^2 c_1^2}{6l} \left[ 2 \frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2 c_1} \right]$ $y_1 = \frac{P}{JE} \frac{c_1^2 c^2}{6l} \left[ 2 \frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1^2 c} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{3} \frac{c^2}{l^2} \frac{c_1^2}{l^2}$ $f_{max}$ bei $x = c \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{c_1}{c}}$	Gefährl. Querschnitt bei C Kraft $X = P \frac{c_1}{l}$ " $X_1 = P \frac{c}{l}$
$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{32} \left[ \frac{x}{l} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$ $y_1 = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{32} \left[ \frac{1}{4} \frac{x_1}{l} + \frac{5}{2} \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3} \frac{x_1^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{7l^3}{768}$ $f_{max} = \sqrt{\frac{1}{5}} \frac{Pl^3}{48JE}$ bei $x = l \sqrt{\frac{1}{5}}$	Halb eingespannter Träger Gefährl. Querschnitt bei B Kraft $X = \frac{5}{16} P$
$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{16} \left[ \frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{192}$	Eingespannter Träger Gefährl. Querschnitte bei B und C
$y = f - \varrho + \sqrt{\varrho^2 - x^2 + l \left( x - \frac{l}{4} \right)}$ wobei $\varrho = \frac{JE}{Pc}$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{8} \frac{c}{l}$	Gefährl. Querschnitt an einer beliebigen Stelle zwischen A und B



Angriffsweise	Kraftmoment $M$	Tragkraft $P$	Gleichung der elastischen Linie	Biegung $f$	Bemerkungen
	$M = \frac{Px}{2} \frac{x}{l}$	$P = 2 \frac{EJ}{la}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{6} \left[ \frac{x}{l} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{l^4} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{8}$	Freitragler Gefährl. Querschnitt bei B
	$M = \frac{Px}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)$	$P = 8 \frac{EJ}{la}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{24} \left[ \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{5l^3}{384}$	Frei aufliegender Träger, Brückträger
	$M = \frac{Px}{2} \left( \frac{3}{4} - \frac{x}{l} \right)$	$P = 8 \frac{EJ}{la}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{48} \left[ \frac{x}{l} - 3 \frac{x^3}{l^3} + 2 \frac{x^4}{l^4} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{192}$	Gef. Querschnitt bei C Stärkste Senkung bei $x = \frac{l}{16} (1 + \sqrt{33})$ Kraft $X = \frac{3}{8} P$ Wendepunkt bei $x = \frac{3}{4} l$
	$M = \frac{Pl}{2} \left( \frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right)$	$P = 12 \frac{EJ}{la}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{24} \left[ \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{384}$	Gef. Querschnitt bei B Wendepunkt bei $x = \frac{l}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$
	$M = \frac{Px}{3} \frac{x^2}{l^2}$	$P = 3 \frac{EJ}{la}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{12} \left[ \frac{x}{l} - \frac{1}{5} \frac{x^5}{l^5} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{15}$	Freitragler Gef. Querschnitt bei B
	$M = Px \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2} \right)$	$P = 12 \frac{EJ}{la}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{12} \left[ \frac{3}{8} \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2}{5} \frac{x^5}{l^5} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{3l^3}{320}$	Gef. Querschnitt in der Mitte
	$M = Px \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2} \right)$	$P = 6 \frac{EJ}{la}$	$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{12} \left[ \frac{5}{8} \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5} \frac{x^5}{l^5} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{60}$	Gef. Querschnitt in der Mitte





XIV. Für einen auf zwei symmetrisch angebrachte Stützen *A* und *B* gelagerten Stab mit der gleichförmig verteilten Last *P* hat man für das Kraftmoment:

$$M = \frac{Px}{2} \left( \frac{x}{l} - 1 + \frac{c}{x} \right)$$

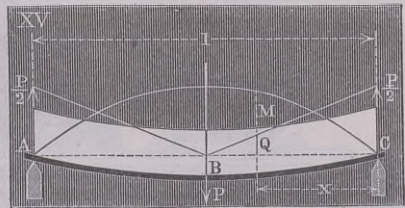
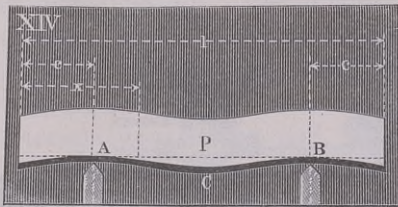
Die Tragkraft ändert sich je nach der Stellung der Stützen, also dem Verhältnis von *c* zu *l*; sie wird ein Maximum, wenn

$$c = 0,207l, \text{ d. i. } (\sqrt{0,5} - 0,5)$$

gemacht wird. Die Tragkraft ist alsdann sehr nahe:

$$P = 47 \frac{\mathcal{E}J}{la}$$

also fast sechsmal so groß, als im Falle VIII, die Stützungsart mithin sehr günstig. Gefährliche Querschnitte liegen dabei an



den Punkten *A*, *B* und *C*. Diese Stützungsart macht sich bemerklich in der Formgebung für Drehbankbetten, Schleifbankständern usw., wovon ein Beispiel die in Fig. 33 dargestellte Schleifmaschine (von Schmalz in Offenbach) gibt.

XV. Wenn die Biegungsbeanspruchung eines Trägers nicht durch reine Kräftepaare, was selten ist, hervorgebracht wird, so entsteht in den Querschnitten außer dem Biegungsmoment eine Scher- oder Querkraft. Diese sei für den gleichförmig belasteten Träger von Fall VIII noch beispielsweise ermittelt. Die Linie, die ihren Verlauf darstellt, wird Querkraftlinie, auch häufig Einflußlinie genannt. Sie leistet namentlich Dienste bei der Berechnung von Brücken und verwandten größeren Bauwerken; im Maschinenbau kommt sie weniger zur Anwendung. An den Endpunkten *A* und *C* des Trägers wirken die Stützen mit je  $\frac{1}{2}P$  der Belastung *P* entgegen. An der Stelle *x* wird das biegende Moment

$$= \frac{P}{2}x - \frac{P}{l}x \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \frac{P}{l} (lx - x^2)$$

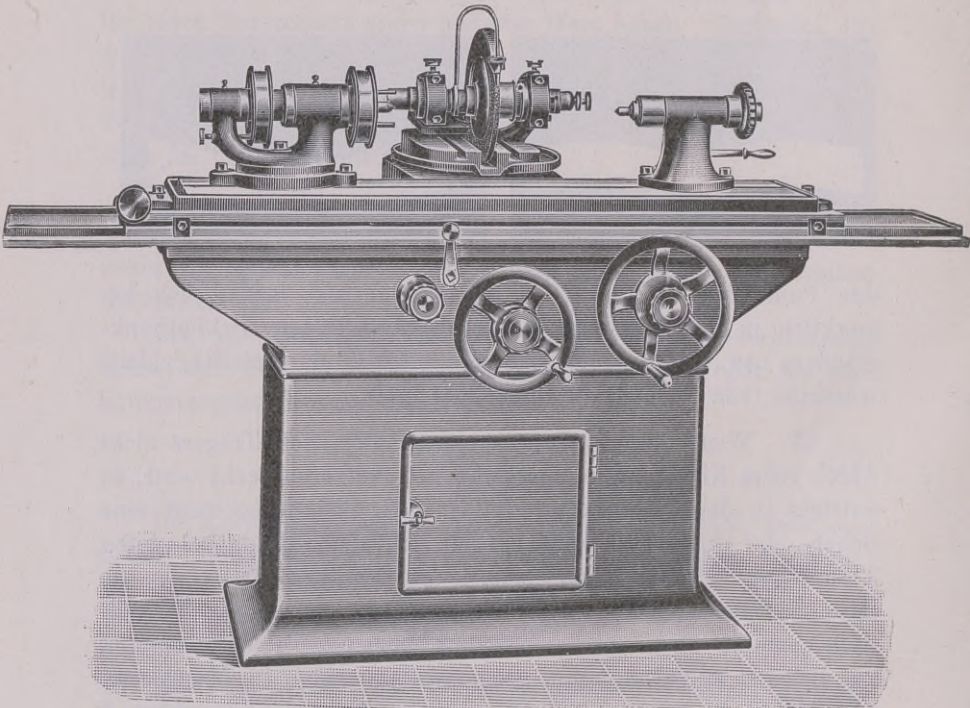


Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel über  $B$  auf der Pfeilhöhe  $\frac{1}{8}Pl$  liegt. Um die Querkraft  $Q$  zu erhalten, teilen wir die Summanden des Biegemomentes mit bez.  $x$  und  $\frac{1}{2}x$ . Dann erhalten wir:

$$Q = \frac{1}{2} \frac{P}{l} (l - 2x) = \frac{P}{l} \left( \frac{l}{2} - x \right)$$

Der Querkraftverlauf wird also für jede Hälfte des Trägers ausgedrückt durch eine Gerade, die von den Endkräften zur Mitte der Sehne  $AC$  geht. Bei Trägern von schmalen Steg kann die Querkraft Beachtung erfordern. — Wenn die Belastungen der Träger nicht rechtwinklig, sondern schiefwinklig zur Stabachse wirken, so tritt Beanspruchung auf zusammengesetzte Festigkeit ein, wovon §. 26 handelt.

Fig. 33



Rundschleifmaschine

Die Fälle XI und XII der Biegungstafel sind vorwiegend deshalb aufgenommen, um zu zeigen, wie durch angemessene Lastverteilung in Magazinen, Getreidespeichern, Vorrathshäusern die

Aufnahmefähigkeit der Räume gesteigert werden kann gegenüber ihrer Belegung mit gleichförmig verteilten Lasten. Die Lastanordnung in Fall XII gestattet,  $1\frac{1}{2}$  mal so viel Last auf ein gegebenes Gebälk zu legen als die gleichförmige von Fall VIII.

## §. 14

## Querschnittstafel

Der Wert  $J/a$  hängt bloß von den Abmessungen des Querschnittes ab und wird im Folgenden Widerstandsmodul genannt und mit  $W$  bezeichnet\*). Für eine Reihe von Querschnittsformen sind in umstehender Tafel die Werte für:

das (äquatoriale) Trägheitsmoment  $J$  zur neutralen Achse

und den zugehörigen Widerstandsmodul  $W = \frac{J}{a}$

zusammengestellt. Die Figuren I bis VII sind zweiachsig symmetrisch, die drei letzten nur einachsig. Das Trägheitsmoment  $J$  heißt insbesondere ein äquatoriales, wenn es von dem bei der Drehungsfestigkeit Verwendung findenden polaren Trägheitsmoment unterschieden werden soll, vgl. §. 20.

Die Elastizitätsgrenze wird in einem gebogenen Stabe auf Zug- und Druckseite einzeln erreicht, wenn die dort eintretende Spannung  $\mathfrak{S}$  gleich dem betreffenden Tragmodul wird. Man darf daher für  $\mathfrak{S}$  nicht einen so großen Wert einsetzen, daß beim Gebrauch des Körpers auf einer der beiden Seiten der Tragmodul überschritten würde. Dies bedeutet, daß man bei den zweiachsig symmetrischen Querschnitten für  $\mathfrak{S}$  den kleineren der beiden Tragmodul als zu vermeidende Grenze anzusehen hat (vgl. S. 54). Das gilt praktisch von Gußeisen, wie aus dem Verzeichnis §. 9 hervorgeht. Für gußeiserne Balken kann man aber, wenn sie stets von derselben Seite belastet sind, den einachsig symmetrischen Querschnitt so gestalten, daß auf beiden Seiten dieselbe Annäherung an den Tragmodul stattfindet, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden wird.

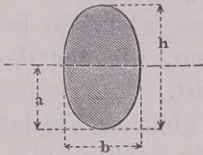
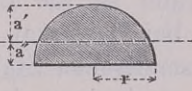
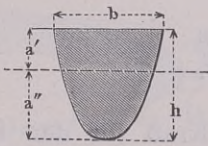
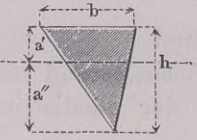
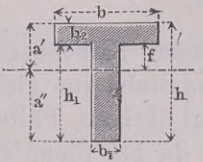
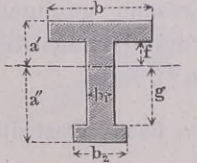
\*) Vielfach wird bei uns der Wert  $J/a$  „Widerstandsmoment“ genannt; er ist aber gar kein statisches Moment, er bildet erst eines beim Zusammentritt mit einer Spannung. Deshalb ist die Bezeichnung Widerstandsmoment für das Verständnis nicht förderlich, sondern eher irreführend. Ich habe ihn in meinen Veröffentlichungen bislang „Querschnittsmodul“ genannt, bin aber nun zu „Widerstandsmodul“ übergegangen und konnte deshalb auch die gebräuchliche Buchstabenbezeichnung  $W$  annehmen.



## Querschnittstafel

Nummer	Querschnitt	Trägheitsmoment $J$	Widerstandsmodul $W$
I		$\frac{b h^3}{12}$	$\frac{b h^2}{6}$
II		$\frac{b (h^3 - h_1^3)}{12}$	$\frac{b (h^3 - h_1^3)}{6 h}$
III		$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b^3}{3}$
IV		$\frac{b h^3 - (b - b_1) h_1^3}{12}$	$\frac{b h^3 - (b - b_1) h_1^3}{6 h}$
V		$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{12}$	$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{6 h}$
VI		$\frac{\pi}{64} d^4$	$\frac{\pi}{32} d^3$
VII		$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4)$	$\frac{\pi}{32} \frac{d^4 - d_1^4}{d}$

Querschnittstafel

Nummer	Querschnitt	Trägheitsmoment $J$	Widerstandsmodul $W$
VIII		$\frac{\pi}{64} b h^3$	$\frac{\pi}{32} b h^2$
IX		$0,110 r^4$ $a' = 0,5755 r$ $a'' = 0,4244 r$	$Z' = 0,19 r^3$ $Z'' = 0,26 r^3$
X		<p>Parabel</p> $\frac{8}{175} b h^3$ $a' = \frac{2}{5} h$ $a'' = \frac{3}{5} h$	$Z' = \frac{4}{35} b h^2$ $Z'' = \frac{8}{105} b h^2$
XI		$\frac{b h^3}{36}$	$Z' = \frac{b h^2}{12}$ $Z'' = \frac{b h^2}{24}$
XII		$\frac{1}{3} [b (a'^3 - f^3) + b_1 (f^3 - a''^3)]$	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$
XIII		$\frac{1}{3} [b (a'^3 - f^3) + b_1 (f^3 + g^3) + b_2 (a''^3 - g^3)]$	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$



## §. 15

**Körper von gleicher Biegefestigkeit**

Ein Träger hat durchweg gleiche Biegefestigkeit, wenn die größte Spannung in allen seinen Querschnitten dieselbe ist. In nebenstehender Tafel folgen einige wichtige Beispiele für Rechteckquerschnitt. Die Formen zeigen, wie der Baustoff sparsam und ausdrucksvoll zu verwenden ist.

Die Biegung, welche Körper von gleicher Festigkeit infolge der Belastung annehmen, ist notwendig größer, als bei prismatischen Körpern von derselben Angriffweise der biegenden Kraft. Bei mehreren Fällen der folgenden Tafel ist die Einsenkung  $f$  angegeben; sie ist z. B. bei I doppelt, bei II  $\frac{4}{3}$  mal so groß als bei dem gleicherweis angegriffenen prismatischen Stabe. Im allgemeinen gilt für die elastische Linie derjenigen der folgenden Körper, deren Achse im unbelasteten Zustande gerade ist, der Ausdruck:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{M_0}{E J_0} \frac{a_0}{a_x}$$

wenn

$M_0$  das Moment der biegenden Kraft für den Querschnitt an der Befestigungsstelle,

$J_0$  dessen Trägheitsmoment,

$a_0$  dessen größten Faserabstand, und

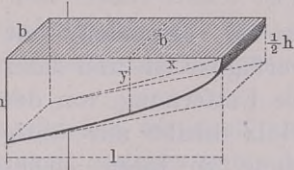
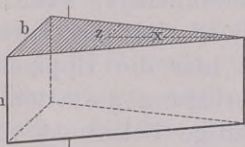
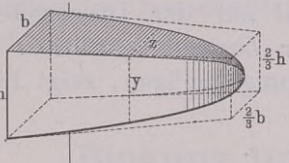
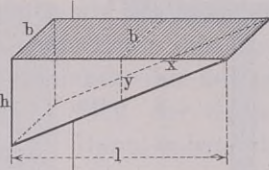
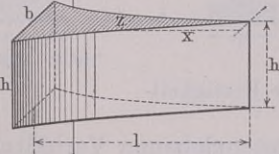
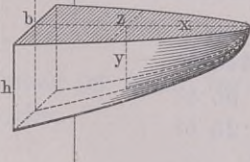
$a_x$  den entsprechenden größten Faserabstand bei  $x$ .

Für den Krümmungshalbmesser  $\rho$  der elastischen Kurve an der Stelle  $xy$  ist dann:

$$\rho = \frac{E J_0}{M_0 a_0} a_x$$

welcher Wert konstant wird, also einem Kreisbogen angehört, wenn  $a_x = a_0$ , d. h. wenn alle Höhen im Stabe von gleicher Größe sind, wie bei Fall II und V. In den übrigen Fällen sind die gegebenen Gleichungen Annäherungen, da bei ihnen die neutrale Schicht im unbelasteten Zustand einen gekrümmten Verlauf hat. Für die praktischen Zwecke des Bauwesens genügen diese Annäherungen vollkommen, für feine Formänderungsfragen muß zu genauerer Behandlung gegriffen werden\*).

\*) Ausführliches und Eingehendes gibt v. Bach, Elastizität und Festigkeit, fünfter Abschnitt.

Form	Be- lastung	Bemerkungen
<p>I</p> 	Belastet am freien Ende Fall I, S. 39	Rechtecke von gleicher Breite $\frac{y^2}{h^2} = \frac{x}{l}$ , Inhalt $\frac{2}{3} bhl$ Biegung $f = \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{JE}$ , $J = \frac{bh^3}{12}$ Kurve eine Parabel
<p>II</p> 		Rechtecke von gleicher Höhe $y = h$ , $\frac{z}{b} = \frac{x}{l}$ , Inhalt $\frac{1}{2} hbl$ Biegung $f = \frac{1}{2} \frac{Pl^3}{JE}$ , $J = \frac{bh^3}{12}$ Dreiecksträger
<p>III</p> 		Rechtecke von gleichem Seitenverhältnis $\frac{z}{y} = \frac{b}{h}$ , $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ , Inhalt $\frac{3}{5} bhl$ Kurve kubische Parabel
<p>IV</p> 		Beim Rechteckquerschnitt allgemein: $\frac{zy^2}{bh^2} = \frac{x^2}{l^2}$ $z = b$ , $\frac{y}{h} = \frac{x}{l}$ , Keil
<p>V</p> 		$y = h$ , $\frac{x}{l} = \sqrt{\frac{z}{b}}$ Parabolisch zugespitzter Keil
<p>VI</p> 		$\frac{z}{y} = \frac{b}{h}$ , $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}$ Pyramide abgestumpft nach semikubischen od. Neilschen Parabeln

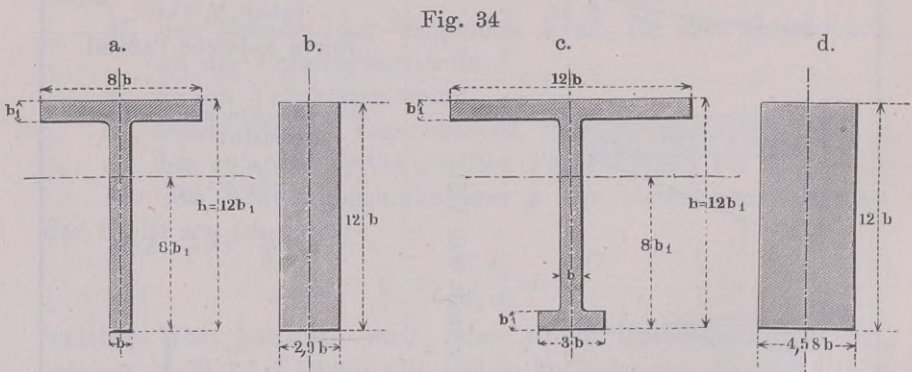
Last P gleichförmig verteilt, Fall VIII



## §. 16

## Wahl der Querschnittsverhältnisse

Um in Trägern den Baustoff gut zu verwenden, hat man sich nach den Formen, in denen er verfügbar ist, und dann nach dem alten Satz zu richten, daß große Entfernung von der neutralen Achse vorteilhaft ist. Bei Holz bleibt nur übrig, die höhere Abmessung in die Kraftrichtung zu legen, ebenso bei Schmiedeisen, das aus Hammerarbeit hervorgeht. Ein Holzbalken vom Verhältnis 1 : 2 seiner Querschnittseiten trägt, wenn hochkant angewandt,  $1 \cdot 2^2 : 2 \cdot 1^2 =$  doppelt so viel, als flachkant. Ganz anders bei gegossenen Trägern, da hier die rippigen und hohlen Querschnitte eine günstige Stoffverlegung gestatten. Bei Gußeisen insbesondere kann man, einseitige Belastung vorausgesetzt, die Ungleichheit der Tragmodel ( $T_a = 15$ ,  $T_z = 7,5$ ) günstig berücksichtigen, indem man  $a''$  und  $a'$  in eben dieses Verhältnis bringt. Dann kann man auf der Druckseite das Doppelte der höchsten Spannung der Zugseite einführen. Zwei Trägerquerschnitte, die dieser Bedingung genügen, zeigt Fig. 34



Querschnitte von gleicher Festigkeit

unter a und c. Man hat bei den eingeschriebenen Verhältnissen, wenn der Widerstandsmodul  $W$  mit  $a''$  ermittelt wird, für:

a.	c.
$J = 278 b^4$	$440 b^4$
$W = 34,8 b^3$	$55 b^3$
$F = 19 b^2$	$25 b^2$

wobei noch  $F$  die Querschnittsfläche bezeichnet. Vergleicht man

nun  $a$  mit dem einfachen, dabei ebenso hohen Rechteckquerschnitt unter  $b$ , so hat man  $\mathfrak{S} \cdot 34,8 b^3 = \frac{1}{2} \mathfrak{S} \frac{b' h^2}{6}$ , worin  $h = 12 b$ . Damit aber erhält man  $b' : b = 34,8 : 12$ , d. i.  $b' = 2,9 b$ , also die Querschnittsfläche  $F'$  des einfachen Rechteckes  $= 12 \cdot 2,9 b^2 = 34,8 b^2$ , während Querschnitt  $a$  nur  $19 b^2$ , d. i. 0,55 mal so viel verlangt.

Vergleichen wir auch noch den Querschnitt  $c$  mit dem ihm an Festigkeit gleichen unter  $d$ . Sein Trägheitsmoment  $J$  berechnet sich nach XIII der Querschnittstafel zu  $537,5 b^4$ , woraus durch Teilung mit  $6 b$  folgt  $W = 89,6 b^3$ . Das Spannungsmoment ergibt sich hieraus zu  $0,5 \mathfrak{S} \cdot 89,6 b^3 = 44,8 b^3$ , während das zu  $c$  sich auf  $\mathfrak{S} \cdot 55 b^3$  stellt. Die beiden Spannungsmomente verhalten sich hiernach wie  $44,8 : 55$ , das ist günstiger als vorhin; dies rührt daher, daß wir Rippenquerschnitt eingeführt hatten.

Das wäre alles soweit brauchbar; es gibt aber noch eine andere Rücksichtnahme, die zu noch wesentlich bedeutenderen Ergebnissen der Querschnittswahl führen kann; auf diese ist noch einzugehen.

§. 17

### Biegung und Körperinhalt

Kehren wir jetzt nochmals zum prismatischen Freiträger I, S. 42 zurück, indem wir ihm einfachen Rechteckquerschnitt  $b h$  geben, und untersuchen ihn nun auf Stoffverbrauch unter Berücksichtigung nicht bloß der Spannung  $\mathfrak{S}$ , sondern zugleich auch der Biegung  $f$ . Dann haben wir zunächst wieder  $Pl = \frac{1}{6} \mathfrak{S} b h^2$  und daraus:

$$b = \frac{6 Pl}{\mathfrak{S} h^2} \dots \dots \dots (14)$$

außerdem aber

$$f = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{JE}$$

worin  $Pl$  durch seinen Wert  $\mathfrak{S} J : a$  ersetzt werden kann. Das gibt

$$f = \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{S} l^2}{a E}$$

Hierin aber ist beim vorliegenden Querschnitt  $a = \frac{1}{2} h$ ; eingesetzt gibt

$$h = \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{S} l^2}{E f} \dots \dots \dots (15)$$



eine bestimmte Gleichung für  $h$  als Funktion von  $\mathfrak{S}$  und  $f$ . Nun ist der Körperinhalt  $V$  des Stabes aber  $= bhl$ , wofür, wenn wir nun  $b$  und  $h$  aus (14) und (15) einführen, kommt:

$$V = bhl = \frac{6Pl}{\mathfrak{S}h^2} hl = \frac{6Pl^2}{\mathfrak{S}h} = \frac{6Pl^2 E f}{\mathfrak{S}^{2/3} \mathfrak{S} l^2},$$

das gibt

$$\left. \begin{array}{l} V = 9 P f \frac{E}{\mathfrak{S}^2} \\ V = C P f \frac{E}{\mathfrak{S}^2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

wobei  $C$  eine von den Querschnittsformen abhängige konstante Zahl bedeutet. Diese bemerkenswerte Formel, führt, da  $Pf$  die Nachgiebigkeit ausdrückt, zu folgendem Satz:

Das Gewicht eines auf Biegung beanspruchten Bauteiles fällt um so kleiner aus, je mehr man, wenn die Querschnittsverhältnisse dies gestatten, durch geeignete Wahl dieser letzteren den Bauteil steifer zu machen, sein Verhalten den äußeren Kräften gegenüber der völligen Unnachgiebigkeit oder Starrheit zu nähern sucht\*).

Gemäß unseren üblichen Anschauungen wäre das gerade Gegenteil zu erwarten: je unbiegsamer, um so schwerer! während vorstehender Satz sagt: je unbiegsamer, um so leichter geht der Bauteil aus der Berechnung hervor. Wegen dieses Widerspruches empfiehlt es sich, die Bedeutung des Satzes noch an auszurechnenden Beispielen klar zu machen. — Die Konstante  $C$  in Formel (16) wollen wir, da sie über den Baustoffverbrauch wichtige Aufschlüsse gibt, die Verbrauchsziffer nennen.

1. *Beispiel.* Es sei für unsern obigen Freiträger gegeben:  $P = 1000$  kg,  $l = 800$ , der Baustoff Gußeisen mit  $E$ -Modul  $E = 10000$ , zulässige Spannung  $\mathfrak{S} = 3$  kg, und es werde gewünscht, daß die Biegung  $f$  nicht über 1 mm gehe. Dann hat man vorerst nach (15) zu nehmen  $h = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 800^2 : 10000 \cdot 1 = 2.640000 : 10000 = 128$  mm. Ferner  $b$  nach (14)  $= 6 \cdot 1000 \cdot 800 : 3 \cdot 128^2 = 1600000 : 16384 = 100000 : 1024 = 97,6562$  mm, was abzurunden wäre. Nun aber kommt  $bhl = 97,6562 \cdot 128 \cdot 800 = 10000000$  cbmm oder 10 cbdm. — Denselben Wert liefert Formel (16) unmittelbar, nämlich  $V = 9 \cdot 1000 \cdot 1 \cdot 10000 : 9 = 10000000$ .

\*) Vgl. unten S. 100, sodann auch Weisbachs Ingen., VII. Aufl. 1896, S. 708 ff., wo ich vorstehende Theorie zuerst, allerdings nur unvollständig, wiedergegeben habe.

2. *Beispiel.* Im selben Falle  $f = 2 \text{ mm}$  fordernd, erhalten wir  $h = 64$ , d. i. halb so groß, als vorhin, deshalb  $b$  viermal so groß, d. i.  $390,62 \text{ mm}$  und  $V 4 \times \frac{1}{2}$  mal, d. i. zweimal den obigen Wert, wie (16) anzeigte, gibt  $20 \text{ cbdm}$ .

3. *Beispiel.* Noch  $f = 3 \text{ mm}$  setzend, erhalten wir  $h$  dreitels so groß, also  $b$  neunmal so groß, als vorhin, somit  $V$  dreimal so viel, d. i.  $30 \text{ cbdm}$  umfassend.

Sehen wir nun einmal zu, wie sich die Körper von gleicher Festigkeit, S. 53, hier stellen; sie müssen sich als vorteilhafter ergeben, als die vorigen. Für die Körper mit Rechteckquerschnitt überhaupt erhält man, wenn man  $C$  allgemein entwickelt,  $C = 3\beta : \sigma\varphi$ , wofern  $\beta$ ,  $\sigma$  und  $\varphi$  folgenden Sinn haben:

$$V = \beta b h l, \quad Pl = \sigma \mathfrak{E} \frac{J}{a}, \quad f = \varphi \frac{Pl^3}{JE}.$$

Beim parabolischen Freitträger I, S. 53 ist nun  $\beta = \frac{2}{3}$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\varphi = \frac{2}{3}$ , somit  $C = 3$ ; sodann ist bei dem, im Grundriß dreieckigen Träger II  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\varphi = \frac{1}{2}$ , so daß auch hier kommt  $C = 3$ , beidemale nur dreitels so viel, als bei dem prismatischen Träger aus Beispiel 1. Ermitteln wir indessen für beide noch  $h$  und  $b$ .

4. *Beispiel.* Für den parabolischen Freitträger hat man  $f = \frac{2}{3} \mathfrak{E} l^3 : E \cdot 0,5 h$ , und daraus  $h = \frac{1}{3} \mathfrak{E} l^3 : E f$ , woraus für  $f = 1$  die Höhe  $h$  an der Befestigungsstelle =  $256$  und damit die Breite  $b = 97,65 : 4 = 24,41 \text{ mm}$  kommt. Damit ergibt sich  $V$  zu  $\sim 3333000 \text{ cbmm}$ , d. i.  $\frac{1}{3}$  des ersten Wertes, wie kommen muß.

5. *Beispiel.* Für den Dreiecksträger ergibt sich aus  $f = \frac{1}{2} Pl^3 : JE$  und  $Pl = \mathfrak{E} J : a$  bei  $f = 1$  die Höhe  $h = 192$  und die Breite  $b = 43,4 \text{ mm}$ ; auch hier kommt  $V \sim 3333000 \text{ cbmm}$ , d. i.  $\frac{1}{3}$  des Wertes aus dem Beispiel 1.

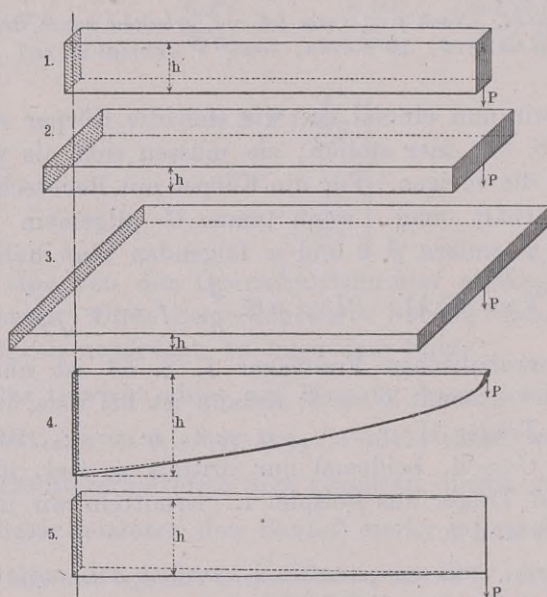
Die in diesen fünf Beispielen ermittelten Maße für eine und dieselbe Aufgabe sind umstehend in Kavalierperspektive (1:1:1/2) zusammen dargestellt. Man hat beim Vergleich zu beachten, daß Baustoff und Sicherheit in allen fünf Fällen dieselben sind, und daß trotzdem im 4ten und 5ten Beispiel nur ein Drittel von der Baustoffmenge vom 1sten, und gar nur ein Neuntel desjenigen vom 3ten Beispiel sich als erforderlich erwiesen hat. Im ganzen hat unsere Untersuchung ergeben, daß die Vorteile, die man bisher vorzugsweise in der Querschnitts-„Form“ gesucht hat, weit zurückstehen gegen die Inbetrachtziehung der Biegungen, und ganz besonders der Kleinhaltung derselben.

Der volle Quadratquerschnitt und der volle Kreisquerschnitt lassen jedesmal nur eine einzige Lösung für dieselbe Spannung  $\mathfrak{E}$



zu, da Breite und Höhe das unwandelbare Verhältnis 1 haben\*); wohl aber eignet sich der volle elliptische Trägerquerschnitt zu

Fig. 35



Gleichbelastete Freiträger aus Gußeisen

wechselnden Annahmen. Für die Höhenachse  $h$  der Ellipse haben wir aus  $f = \frac{1}{3} Pl^3 : JE$  gemäß VIII, S. 51 den Wert:

$$h = \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{E}}{E} \frac{l^2}{f} \dots \dots \dots (17)$$

und für die Querachse aus der Tragkraftgleichung:

$$b = \frac{32}{\pi} \frac{Pl}{\mathfrak{E}h^2} \dots \dots \dots (18)$$

und mit beiden für den unverjüngten Stab den Inhalt  $V = \frac{\pi}{4} bhl$ :

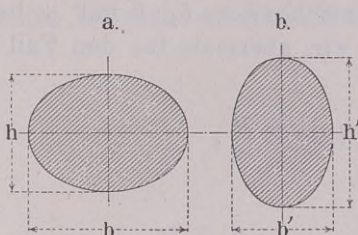
$$V = 12 Pf \frac{E}{\mathfrak{E}^2} \dots \dots \dots (19)$$

sehen also, daß der elliptische Schaft  $\frac{4}{3}$ mal so schwer wird, als der rechteckige; er kann indessen unter Umständen doch recht brauchbar sein, wie folgendes Beispiel zeigen soll.

\*) Vgl. §. 22, wo eine verwandte Aufgabe für Drehungsfestigkeit behandelt ist.

6. Beispiel. Angaben und Forderungen wie vor. Dann haben wir  $h = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 64000 : 10000 = 128$ , ganz wie beim Rechteck in Beispiel 1, und sodann nach (18)  $b = 32 \cdot 1000 \cdot 800 : \pi \cdot 3 \cdot 128^2$ . Dies ergibt für die Querachse 166 mm, die Ellipse also breiter, als hoch, sieh Fig. 36 unter a.

Fig. 36



Querschnitt-Ellipsen

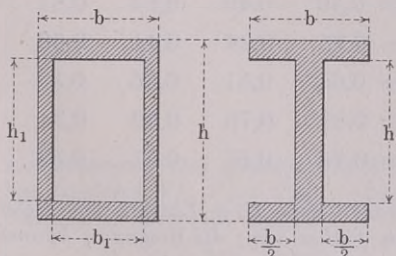
und nunmehr  $b' =$  dem 0,64sten Teil von 166, d. i. 106 mm, wie Fig. 36 unter b darstellt; der Querschnitt, also der Baustoffaufwand, wird nach (19) jetzt  $\frac{4}{5}$  so groß, als vorher. Sollte man wünschen, den Träger hohl zu erhalten, so brauchte man nur, wenn man die innere Ellipse  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{7}{10}$  der äußeren machte, bei der Berechnung den  $\frac{16}{15}$ -, bzw.  $\frac{4}{3}$ fachen Wert von P in die Rechnung einzuführen; doch läßt sich auch nach dem alsbald folgenden Verfahren rechnen, und zwar für Hohlellipse sowohl, als für Hohlkreis.

§. 18

### Weiteres über die Inhaltsberechnung

Die Rippen- und Kastenquerschnitte sind nämlich recht brauchbar, da sie sowohl gute Stoffverteilung, als auch bei gegossenen Körpern Einsicht in die Güte des Gusses gewähren;

Fig. 37



Rippenquerschnitte

aber sie sind bei dem bisher üblichen Verfahren der Annahme einzelner Maßverhältnisse sehr umständlich in der rechnerischen Behandlung. Wir können sie indessen durch einen Kunstgriff von diesen Schwierigkeiten befreien, wenigstens für viele Fälle, wie für den Doppel-T-Querschnitt hier noch gezeigt werden soll.

Wir gestalten das Doppel-T und gleichzeitig das ihm an Querschnitt gleiche Hohlrechteck so, daß die inneren Halbprofile



den äußeren geometrisch ähnlich ausfallen, so daß, (siehe Fig. 37,  $b_1 : b = h_1 : h$  wird. Dann haben wir das Trägheitsmoment

$$J = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12} = \frac{bh^3}{12} \left(1 - \frac{b_1h_1^3}{bh^3}\right) = \frac{bh^3}{12} (1 - \psi^4),$$

indem wir das „Höhlungs“-Verhältnis  $h_1 : h = b_1 : b$  mit  $\psi$  be-

und . . .  $(1 - \psi^4) \cdot (1 - \psi^4) = 0,14 \quad 0,07 \quad 0,01 \quad 0,00$

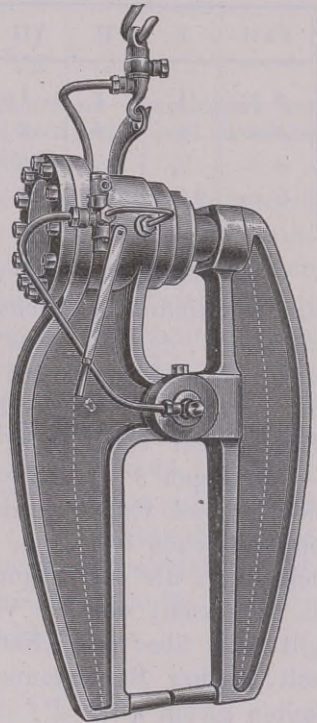
7. Beispiel. Gußeiserner Freiträger von 1,6 m Länge, am freien Ende mit 12 t belastet,  $E = 10\,000$ ,  $S$  wie früher 3 kg; die Biegung  $f$  können wir, da der Träger doppelt so lang ist, als früher, über 1 mm hinausgehen lassen, wählen aber nur 1,25 mm und außerdem das Höhlungsverhältnis  $\psi = 0,8$ . Dann haben wir zunächst nach dem Vorstehenden  $h = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 1600^2 : 1,25 = 410$  mm, und damit die äußere Breite  $b = 6 \cdot 12000 \cdot 1600 : 3 \cdot 410^2 (1 - \psi^4) = 2 \cdot 12000 \cdot 32 : 168100 \cdot 0,59 = 387$  mm. Der so berechnete Querschnitt kann sowohl für Kastenform, als für Doppel-T dienen. Für

die Verbrauchsziffer  $C$  haben wir nun noch gemäß (21)  $C = 9 \cdot 0,61 = 5,49 \sim 5,5$ , überhaupt statt 9 bei:

$\psi = 0,6$	0,7	0,8	0,9
$C = 6,7$	6,0	5,5	5,0

Hebelarme oder Freitträger mit Doppel-T-Querschnitt werden häufig bei verhängbaren Nietern, deren Fig. 38 einen\*) vor Augen führt, angewandt. Die Biegung  $f$  der Arme wird dann recht klein in die Berechnung eingeführt, z. B.  $\frac{3}{4}$  bis 1 mm für jeden Arm. Das macht immerhin im ganzen 2 mm aus, im Anfang sogar gemäß der Erörterung auf S. 22 doppelt so viel, was alles auf Einschränkung von  $f$  hindrängt. Man hat dabei übrigens nicht zu vergessen, daß die neutrale Schicht bei den hier dargestellten Armen schon vor der Belastung nach der Niete hin gekrümmt ist, wie ich durch Punktirung angedeutet habe. Das Biegen der Teile verkürzt deshalb nicht die Arme wie im Fall I, S. 42, sondern verlängert sie um ein Weniges, da sie die neutrale Schicht streckt. — Die Inhaltsberechnung sei noch in einem weiteren Beispiel beleuchtet.

Fig. 38



Verhängbarer hydraulischer Nieterr

8. Beispiel. Zwei rechteckige Freitträger oder Hebelarme aus Gubeisen, nach Anordnung I belastet, der eine mit 3000, der andere mit 1000 kg, der erste von 4 m, der zweite von 1 m Armlänge, sollen die Biegungen  $f = 1,25$  und  $f' = 3,75$  mm unter ihren Belastungen erleiden, so daß man hat  $Pf = 3000 \cdot 1,25 = P'f' = 1000 \cdot 3,75 = 3750$ .  $S$  und  $E$  seien dieselben in beiden Fällen. Dann erhalten die Träger nach (16) gleichen Körperinhalt, also gleiches Gewicht, was rechnerisch zu prüfen sei. Man hat zunächst  $V' : V = b' h' l' : b h l$ , und darin  $l' : l = 1000 : 4000 = \frac{1}{4}$ . Sodann ist nach (14) und (15):

$$\frac{h'}{h} = \left(\frac{l'}{l}\right)^2 \frac{f}{f'} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{48}$$

$$\frac{b'}{b} = \left(\frac{l'}{l}\right) \left(\frac{h}{h'}\right)^2 \frac{P'}{P} = \frac{1}{4} \cdot 48^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{48^2}{12}$$

\*) Der Kalker Werkzeugmaschinenfabrik.



und nun:

$$\frac{b' h' l'}{b h l} = \frac{48^2}{12} \frac{1}{48} \frac{1}{4} = 1$$

wie Formel (16) behauptete.

Fassen wir nun noch die besprochenen und einige andere der wichtigsten Verbrauchsziffern für Träger mit Rechteckquerschnitt zusammen, so erhalten wir was folgt.

Fall	I	II	VII	VIII	XI	XII	XIII	I, S. 47	V, S. 47
$\beta =$	1	1	1	1	1	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\sigma =$	1	4	2	8	3	12	6	1	1
$\varphi =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{384}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{320}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
$C =$	9	36	12	$\sim 29$	15	$\sim 27$	30	3	3

Die Werte sind hier zum Vergleich nebeneinander gestellt, um ihr Verständnis möglichst zu sichern, namentlich aber auch, um zu zeigen, daß man aus den Zahlenwerten der Verbrauchsziffern nicht ohne weiteres auf den Baustoffaufwand zu schließen hat. So z. B. könnte es den Ingenieur in Erstaunen setzen, daß der Brückträger von Fall II eine viermal so große Verbrauchsziffer — 36 gegen 9 — aufweist, als der einfache Freitragler I, der doch so viel, viel ungünstiger beansprucht wird. Dieses Erstaunen entfließt eben der oben, S. 56, besprochenen herkömmlichen Anschauung, die die Biegung außer Betracht läßt. Es ist ja nicht zu vergessen, daß die Verbrauchsziffer für den besonderen Fall gilt, daß über die „Nachgiebigkeit“, die ein Träger aufweisen soll, vorher Bestimmung getroffen ist. Sollen die Nachgiebigkeiten gleich groß,  $Pf = P'f'$  sein, so verhalten sich gemäß der Ziffer  $C$  die Stoffverbräuche der beiden Träger, gleiche übrige Verhältnisse vorausgesetzt, in der Tat wie 4 : 1, d. h. wird der Brückträger 4mal so schwer, als der Freitragler. Dies sei hier noch ziffermäßig nachgewiesen.

9. Beispiel. Freitragler und Brückträger von gleicher Nachgiebigkeit bei rechteckigem Querschnitt, gleicher Länge, gleicher Belastung, gleichem Baustoff und gleicher Sicherheit. Nach der Biegungstafel S. 42 bis 45 haben wir gemäß Fall I und II für gleiche Biegung  $f = \frac{1}{3} Pl^3 : JE = \frac{1}{48} Pl^3 : J'E$  Dies gibt:

$$\frac{J'}{J} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

Ferner ist  $Pl = \odot \frac{J}{a} = 4 \odot \frac{J'}{a'}$ , woraus folgt

$$\frac{a'}{a} = 4 \frac{J'}{J} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Es ist aber wegen der Rechteckform  $a = \frac{1}{2}h$ ,  $a' = \frac{1}{2}h'$ , d. h. es folgt  $h' \cdot h = \frac{1}{4}$ . Nun ist aber auch  $b h^3 : 12 [= J] = 16 b' h'^3 : 12 [= 16 J']$ .

Demnach ist

$$\frac{b}{16 b'} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{256}, \text{ somit } \frac{b}{b'} = \frac{16}{256} = \frac{1}{16}.$$

Und nun folgt alsbald das Inhaltsverhältnis

$$\frac{V}{V'} = \frac{b h l}{b' h' l'} = \frac{b h}{16 b \cdot \frac{1}{4} h} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

wie die Verbrauchsziffer angab. Der Querschnitt des Brückträgers wird 16mal so breit als der Freitträger und 4tels so hoch, alles, wohl zu merken, weil gleiche Nachgiebigkeit gefordert worden war.

Auffallend ähnlich im Stoffverbrauch erscheinen in Anbetracht ihrer Verbrauchsziffern die Fälle VIII, XII und XIII, während die Lastverteilung bei XIII doch so ungünstig, bei XII doch sehr günstig ist. Aber die Forderung der gleichen Nachgiebigkeit ist hier nicht praktisch; sie würde z. B. bei XII zu ähnlicher Verbreiterung des Querschnittes führen wie dies in Beispiel 9 geschah. Unser Körperinhaltssatz kann aber auch hier seine Dienste leisten, indem wir ungleiche statt gleicher Nachgiebigkeit in die Rechnung einführen. Verlangten wir für Fall XII, S. 44, eine Nachgiebigkeit  $P' f' = \frac{1}{6}$  derjenigen  $P f$  für Fall XIII, so erhielten wir  $V' : V = \frac{27}{6} : 30$ , d. i.  $4,5 : 30$  oder  $1 : 6\frac{2}{3}$ . Diese Forderung von  $\frac{1}{6}$  der Nachgiebigkeit ist aber durchaus gerechtfertigt, da die Lastverteilung so günstig ist. Somit gibt auch hier der Körperinhaltssatz die gewünschten Aufschlüsse.

## §. 19

### Gleitung gebogener Fasern

Da in einem gebogenen Stabe auf der Zugseite lauter Zugkräfte, auf der Druckseite lauter Druckkräfte zwischen den Faser-molekülen wirken, erfährt die neutrale Schicht eine Beanspruchung auf Scherfestigkeit, und darf deshalb nicht unter einer gewissen Breitenabmessung ausgeführt werden\*). Die zu vermeidende untere Grenze liegt zwar in der Regel sehr tief; doch verdient sie immerhin gekannt zu sein. Heißt die kleinste zulässige Breite

\*) Siehe Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1859, S. 193; auch Grashofs Festigkeitslehre (Berlin, Gärtner) S. 147.



$l_0$ , und die Mittelkraft der auf einer oder der anderen Seite eines Querschnittes angreifenden äußeren Kräfte  $R$ , so muß sein, wenn die Schubspannung in der neutralen Schicht den Wert  $\epsilon_0$  nicht überschreiten soll:

$$l_0 \geq \frac{R}{\epsilon_0} \frac{U}{2J} \dots \dots \dots (23)$$

Hierin bedeutet  $J$  wie bisher das Trägheitsmoment des Querschnittes, d. i. die Summation der Produkte aller der neutralen Schicht parallelen Flächenelemente mit den Quadraten ihrer Abstände von der neutralen Schicht,  $U$  aber das „statische“ Moment des Querschnittes, d. i. die Summation der Produkte aller jener Flächenelemente mit den genannten Abständen selbst.

Für den Rechteckquerschnitt ist

$$U = \frac{b h^2}{4}$$

für den Doppel-T-Querschnitt Nr. IV der Querschnittstafel

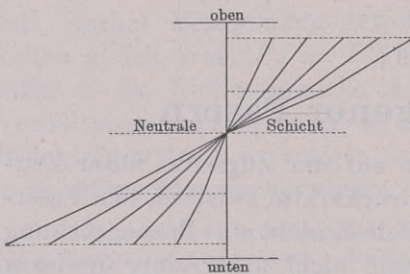
$$U = \frac{b h^2 - (b - b_1) h_1^2}{4}$$

$R$  ist in jedem einzelnen Falle besonders zu ermitteln, bei der Angriffsweise Nr. II, S. 42, ist z. B.  $R$  für alle Querschnitte zwischen  $B$  und  $C$  gleich der Stützkraft  $\frac{1}{2} P$  usf.

Auch außerhalb der neutralen Schicht kann Gleitung der Fasern eintreten, vor allem wenn der Baustoff etwa nicht gleichkräftig ist, vielmehr schwächere neben stärkeren Molekülschichten besitzt. Das aber ist u. a. der Fall in den Hölzern, die bekannt-

lich wirkliche Fasern in der Längsrichtung der Stämme und Aste aufweisen, die mit einem Bindemittel aneinanderhaften. Dieses Bindemittel ist gewöhnlich immerhin recht fest, aber doch nicht so fest wie die Holzfaser selbst. Man hat neuerdings die Faserdehnungen und -Kürzungen genauer als je zuvor zu messen unter-

Fig. 39



Extensometeraufnahme

nommen, indem man sich eines neuen, sehr empfindlichen Instrumentes, „Extensometer“ genannt, bedient. Verschiedene Versuchsanstalten, namentlich in Nordamerika, wo ja das Holz als Baustoff so wichtig ist, haben sich diese Messungen ange-

legen sein lassen. Die Gleitung bringt mit sich, daß die Faserdehnungen und -Kürzungen auf Zug- und Druckseite nicht streng proportional den Abständen von der neutralen Schicht ausfallen, die Wiedergaben der Spannungen deshalb nicht ganz streng zwischen Geraden verlaufen, wie Fig. 32 angab, sondern zwischen Kurven, aber nur leicht gebogenen. Eine Extensometeraufnahme an einem Holzbalken, belastet nach Fall II, S. 42, von Professor H. T. Bovey in Montreal ausgeführt, zeigt Fig. 39\*). Es geht aus dieser Gattung von Beobachtungen hervor, daß man bei den Hölzern nicht mit Bestimmtheit die Gleichung  $M = \mathfrak{E} J : a$  benutzen darf, sondern weit mehr, als bei den Metallen, auf die Biegungsversuche auch innerhalb der Elastizitätsgrenzen angewiesen ist.

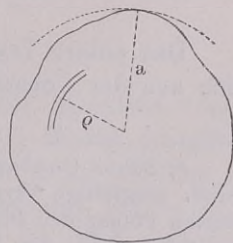
## §. 20

## Drehungsfestigkeit

Ein stabförmiger Körper, den entgegengerichtete Kräftepaare um seine geometrische Achse zu drehen streben, wird auf Drehungsfestigkeit beansprucht. Hierbei widerstehen die Moleküle eines quergeführten Schnittes mit ihrer Schubfestigkeit, und zwar bildet sich Gleichgewicht zwischen dem Moment  $M$  der verdrehenden äußeren Kräfte und den Momenten der Spannungen im Querschnitt, beide bezogen auf die „polare“ Schwerpunktsachse des Querschnittes, d. h. auf die im Schwerpunkt des letzteren rechtwinklig auf ihm stehende Achse.

Die Drehungsfestigkeit ist somit eine höhere Gattung der Schub- oder Scherfestigkeit §. 12. So lange die Beanspruchung innerhalb der Elastizitätsgrenze bleibt, behält der Querschnitt seine Form bei. Daraus folgt, daß dann die Spannungen zwischen den Molekülen deren Entfernungen  $\varrho$  von der polaren Achse, Fig. 40, proportional sind und sich also zur größten Spannung  $\mathfrak{E}$  verhalten wie  $\varrho$  zum größten Faserabstand  $a$ . Das Moment des Teilchens bei  $\varrho$  ist deshalb proportional  $\varrho^2$ . Die Summe aller dieser Momente ist somit gleich derjenigen aller Produkte der Flächenteilchen mit den

Fig. 40



Polare Momente

\*) Sieh Transactions of the Royal Society of Canada, 1901 — 1902, Henry T. Bovey, A new extensometer.



Quadraten ihrer Achsenabstände vervielfacht mit der Spannung  $\mathfrak{S} : a$ . Erstere Summe ist das polare Trägheitsmoment des Querschnittes, welches wir mit  $J_p$  bezeichnen wollen. Wir haben daher für das Gleichgewicht zwischen Kraftmoment und Spannungsmoment:

$$M = \mathfrak{S} \frac{J_p}{a} \dots \dots \dots (24)$$

Führt man das Moment  $M$  auf einen Arm  $R$  zurück, so hat man die Tragkraft  $P$  des Stabes:

$$P = \frac{\mathfrak{S}}{R} \frac{J_p}{a} \dots \dots \dots (25)$$

Die Elastizitätsgrenze wird erreicht, wie bei der Schubfestigkeit, wenn  $\mathfrak{S} = \frac{4}{5}$  des kleineren der beiden Tragmodel wird, also z. B. bei Gußeisen bei  $\mathfrak{S} = 0,8 \cdot 7,5 = 6 \text{ kg}$ .

Die Verdrehung, die zwei um  $x$  auseinander stehende Stabquerschnitte gegeneinander annehmen, heißt der Verdrehungswinkel. Er wurde mit  $\vartheta$  bezeichnet; man hat allgemein:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M}{J_p G} \dots \dots \dots (26)$$

wobei  $G$  den Gleitungsmodul (§. 12) hier auch Drehungsmodul genannt, bedeutet und  $= \frac{2}{5} E$  ist. Man sieht, daß  $\vartheta$  beim prismatischen Stab proportional  $x$  wird. Für den Kreisquerschnitt ist  $J_p = \pi/32 d^4$ ). Die nebenstehende Tafel enthält für die wichtigsten Fälle die Werte für die Tragkraft  $P$  und den Verdrehungswinkel in Bogenmaß\*\*).

## §. 21

### Polare Trägheitsmomente und Widerstandsmodel

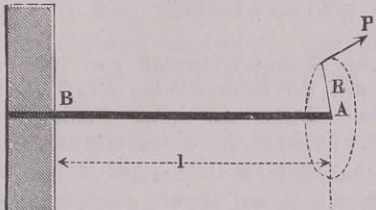
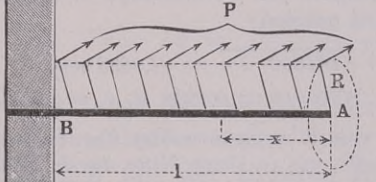
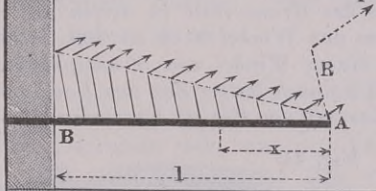
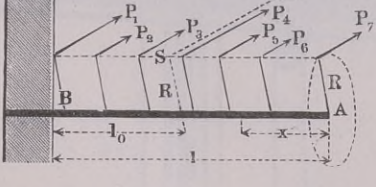
Das polare Trägheitsmoment  $J_p$  eines Querschnittes bestimmt sich aus der Formel

$$J_p = J_1 + J_2 \dots \dots \dots (27)$$

\*) Schon Coulomb — französischer Physiker, 1736 bis 1806 — fand durch sorgfältige Versuche an Drähten, daß  $\vartheta$  verkehrt proportional der vierten Potenz der Dicke des zylindrischen Stabes sei.




\*\*) Der bei Fig. 2 in §. 1 schon erwähnte Winkel  $\sigma$ , um welchen die Verbindungslinien gleichgelegener Punkte aufeinanderliegender Teilchen abgelenkt werden, ist derselbe Winkel, um den die Erzeugende eines Zylinders in Fall I unserer Tafel aus ihrer Lage gebracht wird. Er beträgt  $\vartheta a : l$ , d. i.  $tg \sigma$  ist  $= \mathfrak{S} : G$ . Bei Schmiedeeisen, wo  $G = 8000$ , gibt dies bei  $\mathfrak{S} = 12$  (El. Grenze)  $3 : 2000$  oder  $0,0015$ , entsprechend 5 Bogensekunden.

Verdrehungstafel

Nr.	Angriffsweise	Tragkraft	Verdrehungswinkel
I		$P = \frac{\mathfrak{E} J_p}{a R}$ für den Kreis $P R = \mathfrak{E} \frac{\pi}{16} d^3$	$\vartheta = \frac{P R \cdot l}{J_p G}$ $= \frac{\mathfrak{E} l}{G a}$ für den Kreis ist $J_p = \frac{\pi}{32} d^4$
II		$P = \frac{\mathfrak{E} J_p}{a R}$ für den Kreis $P R = \mathfrak{E} \frac{\pi}{16} d^3$	$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{P R \cdot l}{J_p G}$ $= \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E} l}{G a}$
III		$P = \frac{\mathfrak{E} J_p}{a R}$ für den Kreis $P R = \mathfrak{E} \frac{\pi}{16} d^3$	$\vartheta = \frac{1}{3} \frac{P R \cdot l}{J_p G}$ $= \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{E} l}{G a}$
IV		$P = \frac{\mathfrak{E} J_p}{a R}$ für den Kreis $P R = \mathfrak{E} \frac{\pi}{16} d^3$	$\vartheta = \frac{P R \cdot l_0}{J_p G}$ $= \frac{\mathfrak{E} l_0}{G a}$

worin  $J_1$  und  $J_2$  äquatoriale Trägheitsmomente desselben Querschnittes zu rechtwinkligen Schwerlinien sind; Werte derselben bot in größerer Anzahl die Querschnittstafel §. 14. Leicht ist hiernach, auch den zugehörigen Widerstandsmodul  $W_p = J_p : a$  zu bestimmen. Eine Ausnahme machen nur die bloß einachsigen symmetrischen Querschnitte; ihre Model bedürfen einer gewissen Berichtigung, die bei gestreckten Querschnitten wegen des Windschiefwerdens weitläufig ist. Hier folgen die Werte für Kreis, Quadrat und Rechteck, letzterer in der „berichtigten“ Form.



	Kreis . . .	$J_p = \frac{\pi}{32} d^4$	. . .	$W_p = \frac{J_p}{a} = \frac{\pi}{16} d^3$
	Quadrat . . .	$= \frac{b^4}{6}$	. . .	$= \frac{b^3}{3 \sqrt{2}}$
	Rechteck . . .	$= \frac{1}{3} \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2}$	. . .	$= \frac{b^2 h^2}{3 \sqrt{b^2 + h^2}}$

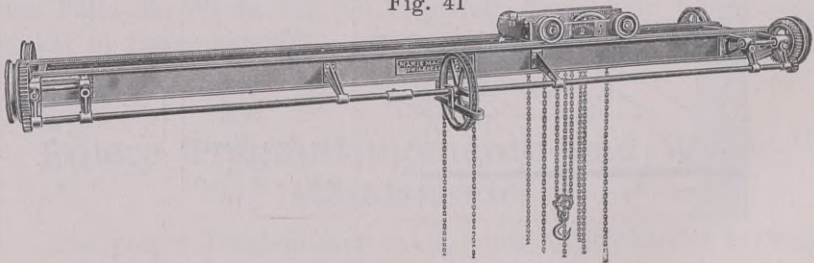
1 Beispiel. Ein zylindrischer Schmiedeisenstab von 100 mm Dicke und 12 m Länge sei nach I, S. 67 von der verdrehenden Kraft  $P = 540 \text{ kg}$  am Arm  $R = 600 \text{ mm}$  ergriffen. Dann ist seine Umfangsspannung  $\mathcal{E} = PR : W_p = 540 \cdot 600 : \pi/16 \cdot 100^3 = 324000 \cdot 16 : \pi \cdot 1000000 = 1,65 \text{ kg}$ , und demzufolge der entstehende Verdrehungswinkel  $\vartheta = 1,65 \cdot 12000 : 8000 \cdot 50 = 0,0495$ , d. i.  $\text{arc } 2^\circ 50'$ . Sollte nun  $d$  so viel kleiner gewählt werden, daß  $\mathcal{E} =$  dem vierten Teil des Tragmoduls für Verdrehung, d. i. (vgl. §. 12)  $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 15 = 3 \text{ kg}$  würde, so wäre zu nehmen

$$d = \sqrt[3]{16 PR : \pi \mathcal{E}} = \sqrt[3]{5184000 : 3 \pi} = 81,9282 \text{ mm.}$$

Dann wird Winkel  $\vartheta = 3 \cdot 12000 : 8000 \cdot 41 = 0,1098$ , d. i.  $\text{arc } 6^\circ 12'$ .

2. Beispiel. Ein Laufkran von 16 m Spannweite, Fig. 41, werde vermittelst einer 60 mm dicken Querwelle, die in ihrer Mitte durch Treibkettenzug von 25 kg an  $R = 400$  angetrieben wird, längsweis verschoben. Griffe die Treibkette an einem der Enden des Krans statt in dessen Mitte an, so würde nach S. 67 die Querwelle um den Winkel  $\vartheta = 25 \cdot 400 \cdot 16000 : \pi/32 \cdot 60^4 \cdot 8000 = 0,0157$  verdreht, was einem Winkel von  $9^\circ$  entspräche. Diese Verdrehung ist so beträchtlich, daß sie nach kurzer Zeit den Laufkran schiefrängen würde, was bei dem Mittelantrieb von Fig. 41 vermieden ist. Anderer-

Fig. 41



Laufkran

seits ergibt eine ähnliche Rechnung wie die vorstehende, daß eine Erhöhung der Wellendicke auf 90 mm den Verdrehungswinkel dann auf  $(\frac{2}{3})^4$ , d. i. rund  $\frac{1}{5}$  des ersten Wertes herabziehen, also die Anbringung des Kettenrades am Ende der Brücke gestatten würde.

3. Beispiel. Eine flache prismatische Klinge aus gut gehärtetem Stahl (vgl. S. 33) werde als Türschließfeder an einer 2 m hohen Tür benutzt, die um  $120^\circ$  aufschlägt. Die Klinge habe 10 mm Breite und 1 mm Dicke; welche Spannung erfährt sie beim Öffnen der Tür? Wir haben nach I  $\mathcal{E} = G a \vartheta : l$ , worin  $G = 6000$ ,  $a \sim 5$ ,  $\vartheta = \text{arc } 120^\circ = 2,1$ . Es kommt  $\mathcal{E} = 8000 \cdot 5 \cdot 2,1 : 2000 = 20 \cdot 2,1 = 42 \text{ kg/qmm}$ .

§. 22

**Körperinhalt bei Verdrehungsbelastung**

Für den Körperinhalt des auf Verdrehung beanspruchten Stabes kann man, ähnlich wie bei der Biegung (siehe §. 17) auch Vorausberechnung anstellen, um die Verdrehung in Betracht zu ziehen. Ist der Stab zylindrisch und nach Fall I, S. 67 beansprucht, so haben wir  $V = l \pi/4 d^2$  und finden aus der Tragkraftgleichung  $PR = \mathfrak{S} \pi/16 d^3$  den Querschnitt  $q = \pi/4 d^2 = 4 PR : \mathfrak{S} d$ . Sodann leitet sich aus der Gleichung für den Verdrehungswinkel ab  $l = G d/2 \vartheta : \mathfrak{S}$ . Eingesetzt gibt:

$$V = lq = \frac{G d \vartheta 4 PR}{2 \mathfrak{S}^2} = 2 PR \vartheta \frac{G}{\mathfrak{S}^2}$$

Nun ist aber  $R \vartheta$  der Umfangsweg am Kreise  $R$ , den die Belastung  $P$  durchlaufen macht; dieser Umfangsweg ist zudem genau zu vergleichen mit der linearen Biegung  $f$  der neutralen Achse eines gebogenen Stabes. Wir bezeichnen ihn daher ebenfalls mit  $f$  und haben dann

$$V = 2 P f \frac{G}{\mathfrak{S}^2}$$

Hierin können wir, um die Vergleichung mit den Biegungsformeln zu erleichtern, für den Gleitungsmodul  $G$  (vgl. §. 12) seinen Wert  $0,4 E$  einsetzen und erhalten dann:

$$V = \frac{4}{5} P f \frac{E}{\mathfrak{S}^2} \dots \dots \dots (28)$$

finden also die Verbrauchsziffer  $C = 4/5$ , überhaupt für die vier Fälle von S. 67:

I	II	III	IV
$C = 0,8$	$1,6$	$2,4$	$0,8 \frac{l}{l_0}$

Wiederum zeigt (28), daß der schwächer verdrehbare Stab als leichter aus der Rechnung hervorgeht. Zugleich aber sehen wir, daß, wie bei Quadrat und Vollkreis oben bei der Biegung, mit den Querschnittverhältnissen nichts zu erreichen ist, da die einzige verfügbare Urveränderliche die Spannung  $\mathfrak{S}$  ist. Es empfiehlt sich deshalb immerhin, in einem Beispiel auf die Werte einzugehen.



*Beispiel.* Gegeben zu Fall I:  $P = 500$ ,  $R = 400$ ,  $l = 2000$  mm, sowie  $G = 8000$ , d. h. Schmiedeisen als Baustoff, und gefordert Verdrehungsweg  $f = 4$  mm. Nun haben wir für die Grundgleichung  $PR = \mathfrak{S} \pi / 16 d^3$  die Spannung  $\mathfrak{S}$  so zu wählen, daß der geforderte Verdrehungsweg  $f$  herauskommt. Als Funktion von  $\mathfrak{S}$  haben wir also zu nehmen  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S} G d / 2 : l$ . Es folgt also  $PR = \mathfrak{S} G d \pi d^3 : l \cdot 16 \cdot 2 = \mathfrak{S} G \pi d^4 : 32 l$ . Nun ist uns nicht  $\mathfrak{S}$  selbst vorgeschrieben, sondern das Produkt  $R \mathfrak{S} = f$ . Es einführend haben wir

$$PR^2 = \frac{R \mathfrak{S}}{l} G \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{f}{l} G \frac{\pi}{32} d^4$$

Hiermit können wir  $d$  bestimmen aus der Gleichung

$$d = \sqrt[4]{\frac{PR^2 \cdot 32 \cdot l}{G \cdot \pi \cdot f}} = \sqrt[4]{\frac{500 \cdot 400^2 \cdot 32 \cdot 2000}{8000 \cdot 4 \cdot \pi}}$$

Es ergibt sich  $d = 84,29$  mm. Nunmehr erst kann man  $\mathfrak{S}$  ermitteln aus

$$\mathfrak{S} = \frac{16}{\pi} \frac{PR}{d^3} = \frac{16 \cdot 500 \cdot 400}{\pi \cdot 84,29^3}$$

Man erhält daraus  $\mathfrak{S} = 1,699 \sim 1,7$  kg. Für den Inhalt hat man nun

$$V = \frac{\pi}{4} 84,29^2 \cdot 2000 = 11160000 \text{ cbmm}$$

und nach (28)

$$V = \frac{0,8 \cdot 500 \cdot 4 \cdot 20000}{1,7^2} = 11072000 \text{ cbmm}$$

also genügend genau übereinstimmend.

Will man bestimmte größere oder kleinere Werte von  $f$  bei derselben Spannung erzielen, so braucht man nur in demselben Maß die Stablänge  $l$  zu vergrößern oder verkleinern. Die Vorausberechnung des Körperinhalts für Verdrehung kommt seltener in Betracht, als die für Biegung; sie war aber hier vorzuführen, weil es sich bei der Verdrehung um Schub- oder Scherfestigkeit handelt.

## §. 23

### Körperinhalt bei Zug- und Druckbelastung

Da wir gefunden haben, daß bei Biegungs- und Drehungsbelastung sich so bemerkenswerte Beziehungen zwischen Baustoffaufwand und Nachgiebigkeit zeigen, wird es am Platze sein, auch reine Zug- und Druckbelastung daraufhin zu untersuchen. Wird ein prismatischer Stab ganz rein auf Zug oder Druck beansprucht, so läßt sich sein Inhalt  $V$  aus Last, Längenänderung und Spannung berechnen, gleichgültig wie lang, oder wie groß er im Querschnitt ist. Denn nach dem Youngschen Satz, Formel (2), hat

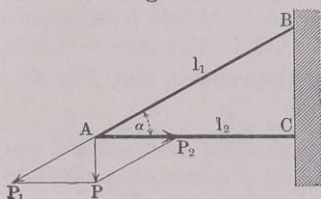
man  $\lambda:l = \mathfrak{S}:E$ , woraus  $l = \lambda E:\mathfrak{S}$ , und außerdem für den Querschnitt  $q = P:\mathfrak{S}$ . Daraus aber folgt sofort

$$V = ql = P\lambda \frac{E}{\mathfrak{S}^2} \dots \dots \dots (29)$$

Hier ist die Verbrauchsziffer  $C$  somit  $= 1$ . Dies ist der kleinste Wert den  $C$  überhaupt annehmen kann, da bei reiner Zug- oder Druckbelastung alle Teilchen gleich beansprucht werden. Die Übereinstimmung der Hauptform der Gleichung mit denjenigen für Biegung und Drehung ist beachtenswert, desgleichen, daß der weniger nachgiebige Stab der leichtere wird. Der Vergleich hat aber hier wenig Bedeutung, da jedesmal nur eine einzige Lösung möglich ist. Etwas anders aber verhält sich die Sache, wenn ein Träger aus Zug- und Druckstäben zusammengesetzt ist. Das aber ist der Fall in den „Fachwerken“ oder „Fachwerkträgern“.

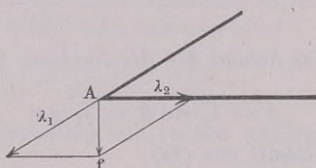
1. Beispiel. Einen möglichst einfach gehaltenen Fall versinnlicht Fig. 42. An einer festen senkrechten Wand sei bei B eine Stange widerstandsfähig angelenkt, ebenso eine zweite AC bei C rechtwinklig zur Wand,

Fig. 42



Element eines Fachwerkträgers

Fig. 43



Fachwerkfeld

bei A seien die Stäbe unter dem Winkel  $\alpha$  aneinandergelenkt und daselbst wirke eine senkrechte Kraft  $P$ . Dann haben die beiden Stäbe, die nun einen Träger bilden, bei den Längen  $l_1$  und  $l_2$  zusammen den Inhalt

$$V = l_1 q_1 + l_2 q_2$$

wenn ihre Querschnitte mit  $q_1$  und  $q_2$  bezeichnet werden. Man hat nun nach Zerlegung von  $P$  in den Stabrichtungen  $q_1 = P_1:\mathfrak{S}_1$ ,  $q_2 = P_2:\mathfrak{S}_2$ ; es ist aber  $P_1 = P:\sin \alpha$ ,  $P_2 = P:\text{tg } \alpha$ , somit  $q_1 = P:\sin \alpha \mathfrak{S}_1$ ,  $q_2 = P:\text{tg } \alpha \mathfrak{S}_2$ , außerdem  $l_2 = l_1 \cos \alpha$ , daher denn:

$$V = \frac{l_2 P}{\sin \alpha \cos \alpha \mathfrak{S}_1} + \frac{l_2 P}{\text{tg } \alpha \mathfrak{S}_2} \dots \dots \dots (30)$$

Nehmen wir an, die Stäbe  $l_1$  und  $l_2$  seien aus gleichem Baustoff herzustellen (Schmiedeeisen, Stahl), so können wir zweckgemäß  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}$  setzen. Dann aber folgt:

$$V = \frac{Pl_2}{\mathfrak{S}} \left\{ \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{\text{tg } \alpha} \right\} = \frac{Pl_2}{\mathfrak{S}} C \dots \dots \dots (31)$$

Für einige Werte von  $\alpha$  kommt hieraus für die Verbrauchsziffer  $C$  was folgt:



$\alpha = 14\frac{1}{2}^\circ$	$24^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha = 0,25$	0,40	0,50	0,71	0,87
$\cos \alpha = 0,97$	0,91	0,87	0,71	0,50
$1 : \sin \alpha \cos \alpha = 4,17$	2,75	2,30	2,00	2,30
$tg \alpha = 0,26$	0,45	0,58	1,00	1,73
$1 : tg \alpha = 3,85$	2,22	1,72	1,00	0,58
$C = 8,02$	4,97	4,02	3,00	2,88

Die Verschiedenheiten des Baustoffaufwandes, die die Verbrauchsziffer je nach der Wahl von  $\alpha$  erkennbar macht, sind beträchtlich. Die Frage taucht aber hier auf, ob nicht die Gleichung für  $V$  auf dieselbe Form zu bringen wäre wie bei der Biegung, auf eine solche nämlich, bei der  $V$  als Funktion der Einsenkung  $f$ , Fig. 43, erschiene. Das kann zwar in der Tat geschehen, indem wir haben:

$$l_1 = \lambda_1 \frac{E}{\mathfrak{E}_1}, \quad l_2 = \lambda_2 \frac{E}{\mathfrak{E}_2}$$

in (30) eingesetzt gibt:

$$V = \lambda_1 \frac{E}{\mathfrak{E}_1^2} \frac{P}{\sin \alpha} + \lambda_2 \frac{E}{\mathfrak{E}_2^2} \frac{P}{tg \alpha} \dots \dots \dots (32)$$

Dann aber folgt aus (31) bei Gleichheit des Baustoffes

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

und es kommt für die Senkung  $f$  des freien Trägerendes, *sieh Fig. 43*,

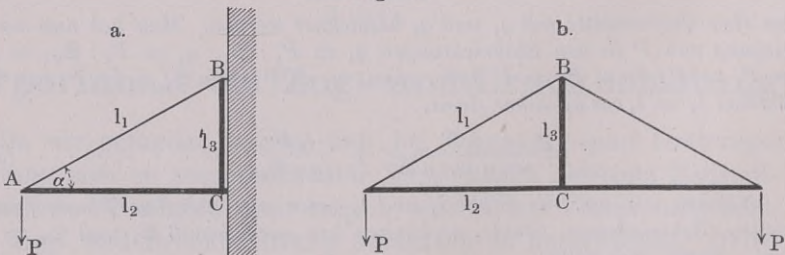
$$f = \lambda_1 \sin \alpha = \lambda_2 tg \alpha \quad \text{d. i.} \quad \lambda_1 = \frac{f}{\sin \alpha}, \quad \lambda_2 = \frac{f}{tg \alpha}$$

und damit aus (32)

$$V = Pf \frac{E}{\mathfrak{E}^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{tg^2 \alpha} \right\} = C \cdot Pf \frac{E}{\mathfrak{E}^2} \dots \dots \dots (33)$$

Wir erhalten also für das Element des Fachwerkträgers eine Formel, welche den Biegungs- und Drehungsformeln, die den Körperinhalt der Träger ausdrücken, in der Form durchaus ähnlich ist, können indessen davon keinen

Fig. 44

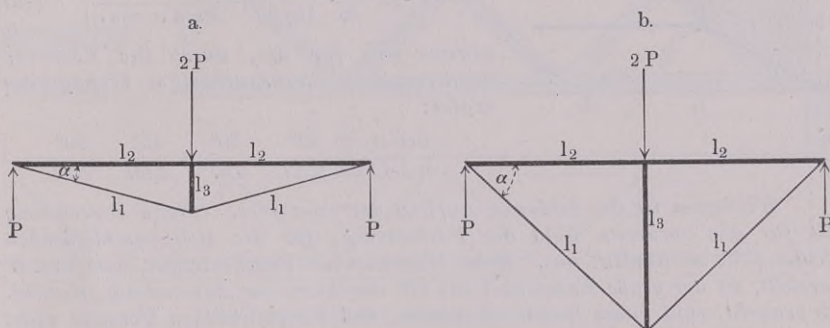


praktischen Gebrauch machen, weil hier  $f$  nicht, wie früher, frei wählbar ist, sondern durch die anderen Größen bestimmt wird.

Gehen wir aber zunächst noch dazu über, die Stangenverbindung zu einem vollständigen Brückträger zu verwenden.

Wir bringen zu dem Ende vor der Wand und parallel zu ihr einen dritten Stab  $l_3$ , Fig. 44 a, zur Aufnahme der Befestigungskräfte an; der wird durch die Kraft  $P_1 \sin \alpha = (P : \sin \alpha) \sin \alpha = P$  zusammengedrückt und erfährt dabei eine Verkürzung  $\lambda_3 = l_3 \mathfrak{E}_3 : E$ , die indessen so viel wie einflußlos auf die Senkung  $f$  bei A ist. Wiederholt man nun unter Weglassung der Wand rechts das tragende Dreieck, so erhält man einen bekannten Fachwerkträger, Fig. 45. Der Körperinhalt desselben ist = 2mal dem Werte

Fig. 45



aus (31) vermehrt um  $l_3 q_3$ . Letzterer Querschnitt ist, weil am Knotenpunkt C Gelenkigkeit besteht, belastet mit  $2P$ , somit seine Spannung  $\mathfrak{E}_3 = 2P : q_3$ , und es kommt  $\lambda_3 = l_3 \mathfrak{E}_3 : E$ . Damit erhält man nun zunächst:

$$V = \frac{2Pl_2}{\mathfrak{E}} \left\{ \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right\} + \frac{l_3 2P}{\mathfrak{E}_3}$$

und, indem man auch in  $l_3$  dieselbe Spannung wie in den anderen Stäben eintreten läßt, wegen  $l_3 = l_2 \operatorname{tg} \alpha$ :

$$V = \frac{Pl_2}{\mathfrak{E}} 2 \left\{ \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right\} \dots \dots \dots (34)$$

In Fig. 45 ist unter a der Winkel  $\alpha = 14^{1/2}$ , unter b derselbe Winkel =  $45^\circ$  gemacht. Damit kommt für die Verbrauchsziffer:

$$\begin{aligned} \text{bei } \alpha = 14^{1/2} & \dots \dots \dots 45^\circ \\ C = 2(8,02 + 0,26) & = 16,56 \dots \dots \dots 2(3 + 1) = 8 \end{aligned}$$

Der schlank aussehende Träger unter a verlangt hiernach bei gleicher Sicherheit und gleichem Baustoff doppelt so viel Baustoff, als der weniger gefällig aussehende unter b.

Vorstehende Berechnung setzt voraus, daß die Druckstäbe solche Verhältnisse zwischen Länge und Quermaßen haben, daß sie nicht auf Knickung beansprucht werden, eine Beanspruchung, die im folgenden Paragraphen behandelt werden wird. Wegen anderer Aufeinanderfolge der Winkel zwischen den Stäben sei noch ein weiteres Beispiel eingefügt.

2. Beispiel. Die Anordnung der Stäbe AB und BC sei so, wie in Fig. 46 angegeben, daß der Winkel  $ABC = BAC = \alpha$  sei, P rechtwinklig

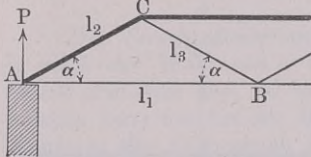


zu  $AB$  wirke. Dann hat man wieder  $V = l_1 q_1 + l_2 q_2$ , worin, indem wir jetzt schon Zug- und Druckspannung =  $\mathfrak{S}$  setzen,  $q_1 = P_1 : \mathfrak{S} = P : \operatorname{tg} \alpha \cdot \mathfrak{S}$ ,  $q_2 = P_2 : \mathfrak{S} = P : \sin \alpha \cdot \mathfrak{S}$ , also sich ergibt:

$$V = \frac{l_1 P}{\operatorname{tg} \alpha \mathfrak{S}} + \frac{l_2 P}{\sin \alpha \mathfrak{S}}$$

oder, da wir haben  $l_2 = \frac{1}{2} l_1 : \cos \alpha$  als Ausdruck für den Körperinhalt:

Fig. 46



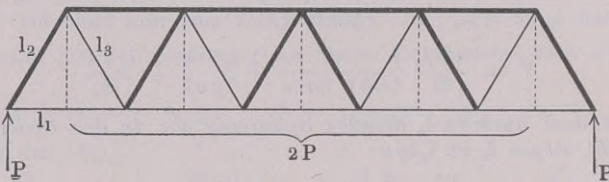
$$V = \frac{Pl_1}{\mathfrak{S}} \left\{ \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \right\} \quad (35)$$

woraus sich für die, durch die Klammer wiedergegebene Verbrauchsziffer  $C$  folgendes ergibt:

bei $\alpha = 24^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
wird $C = 3,60$	$2,87$	$2,00$	$1,73$

Wiederum ist der schlanke Aufbau der schwerere. Unsere Berechnung gilt für das vorderste Feld des Fachwerkes; für die sich anschließenden Felder fällt sie ähnlich aus. Beim Warrenschen Brückenträger, den Fig. 47 darstellt, ist der große Endwinkel von  $60^\circ$  durchweg zur Anwendung gebracht. Es braucht wohl kaum betont zu werden, daß die gefundenen Formeln nicht zur wirklichen Gewichts Berechnung, sondern nur zur Hervorhebung des

Fig. 47



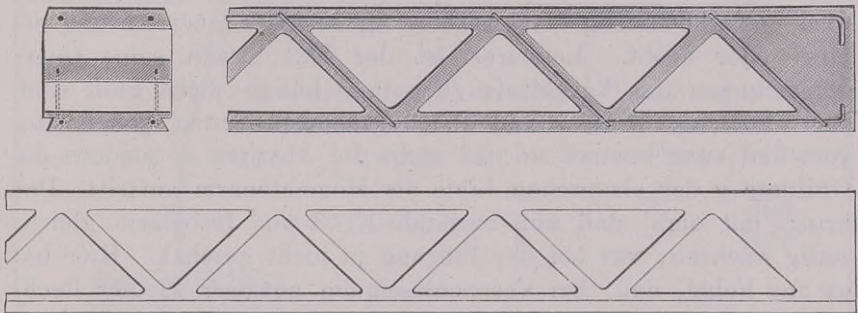
Warrenscher Brückenträger

großen Einflusses der Winkelgrößen dienen sollen. Es sei nicht unterlassen, zu bemerken, daß die Größe des Baustoffaufwandes eines Ingenieur- oder auch Maschinenbauwerkes nur einer von verschiedenen Einflüssen ist, die bei der Vorausberechnung seiner Herstellungskosten in Betracht kommen. Die Herstellungsweise der Teile, die Zerlegbarkeit des Ganzen, die leichtere oder schwierigere Aufstellung u. a. m. können in den Gesteungskosten eine manchmal ebenso große, ja unter Umständen größere Rolle spielen, als der Baustoffaufwand.

Anwendung kann das Vorausgegangene finden auf die, mehr und mehr in Gebrauch kommenden Balken aus Gurtbeton, deren schon auf S. 24 Erwähnung getan wurde. Der in Fig. 48 dargestellte Visintinische Gurtbetonbalken zeigt für den Aufsteigungswinkel an der Untergurte den Wert  $45^\circ$  und für den Winkel an der Obergurte  $90^\circ$ , was nach Formel (35) für den einstoffigen Balken zur Verbrauchsziffer  $C = 2$  führen würde; immerhin gibt dieses  $C$  auch hier einigen Anhalt. Im dem dar-

gestellten Brückträger werden die Drucke wesentlich durch Beton aufgenommen, die Züge aber durch die eingelegten Stahlgurten\*). Die Gurtbetonbalken sind Verbundkörper, die aus der Reihe der einfachen Fälle von §. 13 herausfallen und eine besondere Be-

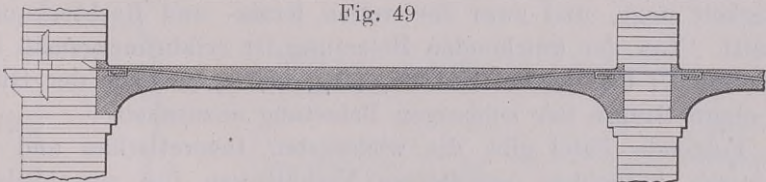
Fig. 48



Der Visintinische Gurtbetonbalken

rechnungswise erfordern. Ein gleichfalls viel angewandter Gurtbetonträger ist die Koenensche „Vutenplatte“, die Fig. 49 in Skizze vorführt\*\*). Bei diesem Träger ist die Steigerung der Festigkeit glücklich verwertet, die ein Brückträger erfährt, wenn er beiderseits eingespannt wird; vgl. Fall X und VIII auf S. 40 oder Fall V mit II auf S. 38, wo zuerst die  $1\frac{1}{2}$  fache, dann die

Fig. 49



Die Koenensche „Vutenplatte“

2fache Tragkraft herauskommt. Was die Gürtung in Fig. 49 angeht, so ist zu beachten, daß die Schlankheit des Winkels, den die Gurte mit der Hauptlinie einschließt, gemäß Formel (33) auf großen Stoffverbrauch hinwirkt.

\*) Vgl. die Zeitschrift Beton und Eisen, III. Heft, 1903, S. 159 und ebenda S. 195 ff.

\*\*) Über die Berechnung siehe Hart, die Koenensche Vutenplatte in dem oben angeführten Heft S. 154. — Eingehend hat sich Professor Ramisch, Breslau, mit den Gurtbetonträgern befaßt, siehe z. B. Beton u. Eisen 1903, III, S. 202; Dingers Journal 1903, S. 561 ff.; Z. d. österr. Ing.- u. Architekten-Vereins 1903, S. 365 ff.; Süddeutsche Bauzeitung 1903, S. 277 u. s. f.



## §. 24

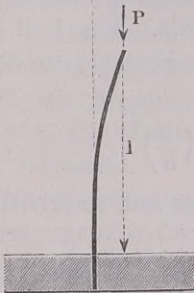
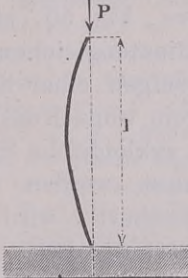

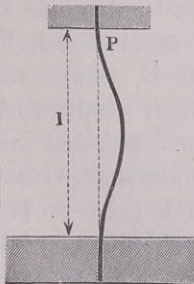
**Knickungs- oder Strebfestigkeit**

Ein prismatischer Stab wird auf Strebfestigkeit beansprucht, wenn er in der Richtung seiner Längsachse zusammengedrückt wird und gleichzeitig eine Ausbiegung in einer Querrichtung erfährt oder droht. Letzteres ist der Fall, wenn seine Querabmessungen im Verhältnis zu seiner Länge nicht groß sind. Hier kommen Druck- und Biegungsbeanspruchung gleichzeitig vor, und zwar letztere so, daß nicht die Abszisse  $x$ , sondern die Ordinate  $y$  der elastischen Linie als Momentenarm auftritt. Das bringt mit sich, daß nun biegende Kraft und Hebelarm gleichzeitig wachsen, was bei der Biegung ja nicht geschah. Hier hat es zur Folge, daß, bei Vernachlässigung gewisser kleiner Rechnungswerte, diejenige Druckkraft, die überhaupt eine seitliche Ausbiegung des Stabes hervorbringen kann, dies theoretisch bei jeder Größe der Ausbiegung vermag, also auch zum Bruch führt. Diese Kraft stellt also Tragkraft und Bruchkraft gleichzeitig vor, ist somit durchaus zu vermeiden; Gleichgewicht mit anzunehmender Spannung  $\mathcal{S}$  kommt, die erwähnten Vernachlässigungen vorbehalten, nicht vor. Durch Rechnung und Versuche hat man einigermaßen festgestellt, bei welchen Verhältnissen der Querabmessungen zur Länge die Grenze zwischen Streb- und Druckfestigkeit liegt, und zwar für vollen Kreis- und Rechteckquerschnitt. Von der knickenden Belastung ist erfahrungsgemäß bei Gußeisen  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{6}$ , bei Holz  $\frac{1}{12}$ ,  $\frac{1}{10}$  bis  $\frac{1}{6}$ , je nach der Güte, als obere Grenze der zulässigen Belastung anzusehen.

Folgende Tafel gibt die wichtigsten theoretischen und als praktisch brauchbar ermittelten Verhältnisse für verschiedene Beanspruchungen an. — Wichtig ist bei der „losen“, d. i. Mittelpunktsbelastung, daß diese wirklich auf die geometrische Achse gebracht wird, weshalb kugelige Lagerung am sichersten ist.  $J$  ist in den Tragkraftausdrücken das kleinste der äquatorialen Trägheitsmomente des Querschnittes, also beim Rechteck  $\frac{1}{12}hb^3$ .

An den zahlreichen strebenähnlichen Säulen, die an den Straßenübergängen der Berliner Stadt- und Ringbahn angewandt worden sind (vgl. Fig. 50) ist die Lagerung auf kugelige Fläche an Fuß wie Kapital zur Ausführung gelangt. — In Fabrikgebäuden mit aufeinanderstehenden Säulen und Stockwerken läßt sich Fall IV wirksam verwerten.

Strebfestigkeitstafel

Nr.	Angriffsweise	Trag- und Bruchkraft	Auf Druckfestigkeit zu berechnen, wenn		
			Kreis	Rechteck	Baustoff
I		Freitragend $P = \frac{\pi^2}{4} \frac{JE}{l^2}$	$\frac{l}{d}$ kleiner als	$\frac{l}{b}$ kleiner als	Gußeisen Schmied- eisen Holz
			5	$5\frac{3}{4}$	
			12	14	
			6	9	
II		Lose $P = \pi^2 \frac{JE}{l^2}$	$\frac{l}{d}$ kleiner als	$\frac{l}{b}$ kleiner als	Gußeisen Schmied- eisen Holz
			10	$11\frac{1}{2}$	
			24	28	
			$12\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	
III		Halb ein- gespannt $P = 2\pi^2 \frac{JE}{l^2}$	$\frac{l}{d}$ kleiner als	$\frac{l}{b}$ kleiner als	Gußeisen Schmied- eisen Holz
			14	16	
			33	38	
			16	19	
IV		Eingespannt $P = 4\pi^2 \frac{JE}{l^2}$	$\frac{l}{d}$ kleiner als	$\frac{l}{b}$ kleiner als	Gußeisen Schmied- eisen Holz
			20	23	
			48	56	
			23	27	



§. 25

**Körper von gleicher Strebfestigkeit**

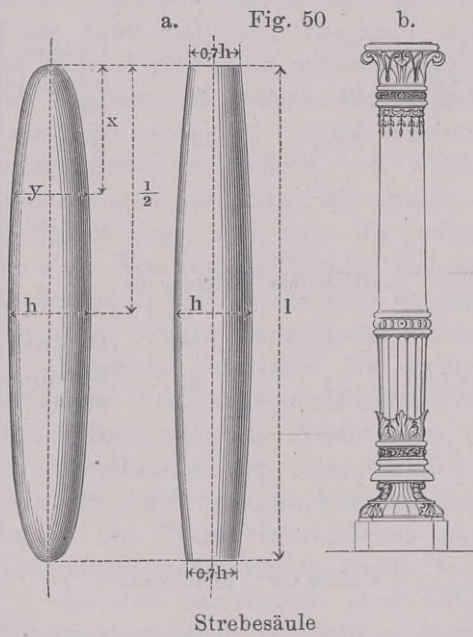
Man erhält einen Körper von gleicher Strebfestigkeit, wenn man seine Querschnitte vom gefährlichen Querschnitt aus so abnehmen läßt, daß, eine kleine eingetretene Biegung angenommen,  $\mathcal{E}$  für jeden Querschnitt denselben Wert erhält. Für Fall II gilt dann bei kreisförmigen Querschnitten folgende Formel (von Redtenbacher):

$$x = \frac{l}{\pi} \left[ \arcsin \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2} \right]. \dots (36)$$

Löst man die Gleichung in eine Doppelgleichung auf, so erhält man:

$$\frac{y}{h} = \sin \varphi \quad \text{und} \quad \frac{x}{l} = \frac{1}{2\pi} (2\varphi - \sin 2\varphi)$$

Die Abszissengleichung der Biegungskurve, Fig. 50, stammt mit derjenigen einer Orthozykloide, die Ordinatengleichung mit derjenigen einer Sinoide überein, wonach die Kurve eine zyklodische Sinoide genannt werden kann.



Angenähert wird die Körperform durch die in der zweiten Figur angegebene. Bei Pleuelstangen kommt die Annäherung hie und da zur Anwendung, dient aber gelegentlich als Grundform für Säulen, die man der Wärmeschwankungen der getragenen Balken wegen unten und oben beweglich lagert, sieh Fig. 50 unter b, Säule von der Berliner Stadt- und Ringbahn. Bei den antiken,

und den ihnen nachgebildeten Säulen der Renaissance-Architekten ist vorwiegend die Beanspruchung von Fall I (von S. 77) zum Ausdruck gebracht. Die Gothik hat den schlanken, nicht geschwellten Schaft durchgeführt.

## §. 26

## Zusammengesetzte Festigkeit

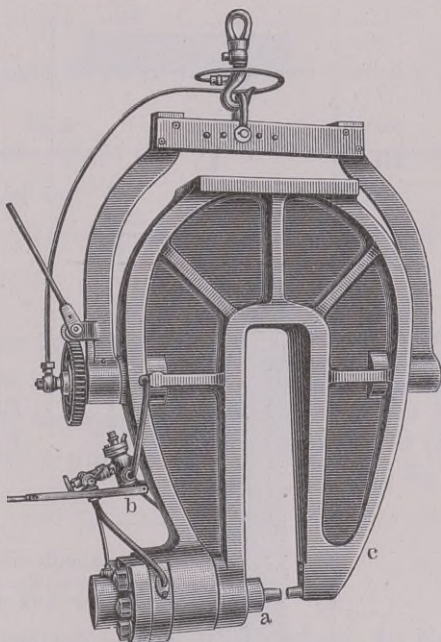
Nicht selten wird ein Körper gleichzeitig auf verschiedene Arten beansprucht. Für die wichtigsten einfachen Fälle dieser sogenannten zusammengesetzten Festigkeit sind die Hauptformeln in der umstehenden Tafel zusammengestellt. Außer den früheren Bezeichnungen gelten noch folgende. Es bezeichnet:

$M_b$  ein biegendes,  $M_d$  ein verdrehendes Moment,  
 $(M_b)_i$  ein ideelles biegendes,  $(M_d)_i$  ein ideelles verdrehendes Moment.

Eine Betrachtung dieser Formeln zeigt, daß man manchmal die zusammengesetzte Beanspruchung sehr wohl beachten muß.

1. *Beispiel.* Wenn im Fall I  $R = \frac{1}{2} h$  ist, d. h. die an einer Stange aufgehängte Last unter dem Rand des Querschnittes ihren Schwerpunkt hat, so ist  $P = \frac{1}{4} \mathfrak{S}bh$ , also die Tragkraft nur  $\frac{1}{4}$  so groß, als bei einer genau zentralen Aufhängung. Ist der Querschnitt ein Kreis ( $d$ ), so wird  $P = \mathfrak{S} \pi / 4 d^2 : (1 + 8R : d)$ , d. i. wenn wieder die Last am Rande angebracht, also  $R = \frac{1}{2} d$  gemacht wird,  $P = \frac{1}{5} \mathfrak{S} \pi / 4 d^2$ ; die Tragkraft ist also noch kleiner als beim Rechteckquerschnitt. Die Fälle I und II leiten sich aus III ab, indem man dort beziehlich  $a$  oder  $R = 0$  setzt.

Fig. 51

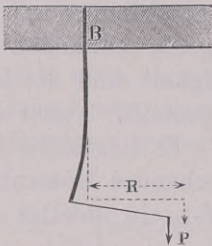
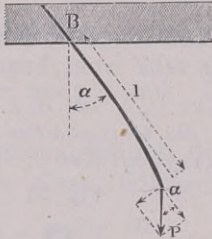
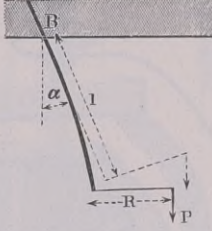
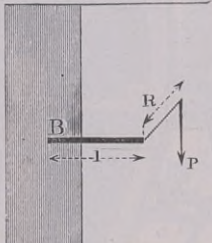
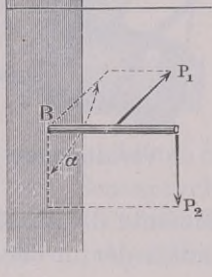


Verhängbarer Nieter

Eine besondere Brauchbarkeit haben namentlich für den aufmerksam Rechnenden die angegebenen „ideellen“ Momente. Es ist zu beachten, daß beim Ellipsen- und dem Rechteckquerschnitte  $h$  als in der Biegungsebene liegend angenommen ist. Kennt man diese Abmessung im voraus, was bei Annahme des Profils eines zu entwerfenden Trägers sehr häufig der Fall ist,

so läßt sich mit Hilfe der ideellen Momente die zusammengesetzte Festigkeit leicht in Betracht ziehen, indem der in der Klammer zur



Nr.	Angriffsweise	Tragkraft
I		$P = \frac{\varepsilon F}{1 + R \frac{F}{Z}}$ <p>Beim Rechteckquerschnitt (<math>b h</math>)</p> $P = \frac{\varepsilon b h}{1 + 6 \frac{R}{h}}$
II		$P = \frac{\varepsilon F}{\cos \alpha + \frac{F}{Z} l \sin \alpha}$ <p>Beim Rechteckquerschnitt (<math>b h</math>)</p> $P = \frac{\varepsilon b h}{\cos \alpha + 6 \frac{l}{h} \sin \alpha}$
III		$P = \frac{\varepsilon F}{\cos \alpha + \frac{F}{Z} (l \sin \alpha + R \cos \alpha)}$ <p>Beim Rechteckquerschnitt (<math>b h</math>)</p> $P = \frac{\varepsilon b h}{\cos \alpha + 6 \frac{l}{h} \left( \sin \alpha + \frac{R}{l} \cos \alpha \right)}$
IV		$P = \frac{\varepsilon Z}{\sqrt[3]{\frac{8}{3} l + \frac{5}{3} \sqrt{l^2 + R^2}}}$ <p><math>Pl</math> ist ein biegendes Moment <math>M_b</math>  <math>PR</math> ein verdrehendes Moment <math>M_d</math></p>
V		$l = \frac{\varepsilon Z}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2 M_1 M_2 \cos \alpha}}$ <p>wobei <math>M_1</math> das (biegende) Moment von <math>P_1</math>, <math>M_2</math> dasjenige von <math>P_2</math> bezeichnet</p>

Ideelle Momente

Ideelles biegendes Moment für die Spannung  $\mathcal{E}$ :  $(M_b)_i = P \left( R + \frac{Z}{F'} \right)$

Beim Kreisquerschnitt ( $d$ ):	Beim Ellipsenquerschnitt ( $bh$ ):	Beim Rechteckquerschnitt ( $bh$ ):
$(M_b)_i = P \left( R + \frac{d}{8} \right)$	$(M_b)_i = P \left( R + \frac{h}{8} \right)$	$(M_b)_i = P \left( R + \frac{h}{6} \right)$

Bei Berechnung von Lasthaken und ähnlichen Bauteilen verwendbar.

Ideelles biegendes Moment für die Spannung  $\mathcal{E}$ :  $(M_b)_i = P \left( l \sin \alpha + \frac{Z}{F'} \cos \alpha \right)$

Beim Kreisquerschnitt ( $d$ ):	Beim Ellipsenquerschnitt ( $bh$ ):	Beim Rechteckquerschnitt ( $bh$ ):
$(M_b)_i = P \left( l \sin \alpha + \frac{d}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i = P \left( l \sin \alpha + \frac{h}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i = P \left( l \sin \alpha + \frac{h}{6} \cos \alpha \right)$

Ideelles biegendes Moment  $(M_b)_i$  f. d. Spann.  $\mathcal{E}$ :  $(M_b)_i = P \left( R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{Z}{F'} \cos \alpha \right)$

Beim Kreisquerschnitt ( $d$ ):	Beim Ellipsenquerschnitt ( $bh$ ):	Beim Rechteckquerschnitt ( $bh$ ):
$(M_b)_i =$ $P \left( R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{d}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i =$ $P \left( R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{h}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i =$ $P \left( R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{h}{6} \cos \alpha \right)$

Ideelles biegendes Moment für die Spannung  $\mathcal{E}$ :

$$(M_b)_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$$

Ideelles verdrehendes Moment für die Spannung  $\mathcal{E}$ :

$$(M_d)_i = \frac{3}{5} M_b + \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$$

Ziemlich häufig vorkommende Beanspruchungsweise. Wenn  $M_b = M_d$  ist, so kommt  $(M_b)_i \sim 1\frac{1}{4} M_b$ .

Ideelles biegendes Moment für die Spannung  $\mathcal{E}$ :

$$(M_b)_i = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2 M_1 M_2 \cos \alpha}$$

In den Fällen IV und V ist vorausgesetzt, daß der Querschnitt des Stabes zweiachsig symmetrisch sei.



Rechten enthaltene Ausdruck den Hebelarm der gegebenen Kraft  $P$  für das ideelle Moment angibt. Derselbe ist meistens, namentlich zeichnerisch, sehr leicht zu bestimmen, und man kann alsdann gerade so wie bei einer gewöhnlichen Biegungsbeanspruchung rechnen.

2. *Beispiel.* Ist im Falle II bei  $\alpha = 45^\circ$ , also  $\cos \alpha = \sin \alpha = 0,707$ , die Rechteckhöhe  $h$  gewählt, so ist der Querschnitt bei B so zu berechnen, als griffe eine biegende Kraft  $P$  an dem Arme  $0,707 l$  (der Projektion von  $l$  auf die Befestigungsebene)  $+ 0,707 \cdot \frac{1}{6} h$  an. Im Falle I erhält man bei  $R = 0$  für den Kreisquerschnitt  $(M_b)_i = P d/8$ , was gleichzusetzen ist  $\mathfrak{E} \pi/32 d^3$ ; dies gibt  $P = \mathfrak{E} \pi/4 d^2$ , wie kommen muß, weil bei  $R = 0$  der Stab nur auf Zugfestigkeit beansprucht ist.  $d/8$  ist danach also der Hebelarm, an welchem angreifend eine biegende Kraft  $P$  den Stab ebenso stark beansprucht, wie eine in der Achsenrichtung ziehende von gleicher Größe. Das gilt allerdings streng nur unter Vernachlässigung der Schubspannungen bei Berechnung der Biegung.

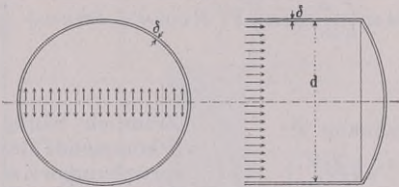
3. *Beispiel.* Der in Fig. 51 dargestellte mit Druckwasser oder mit Preßluft betriebene verhängbare Nieter ist im Quersteg seines Gestells auf zusammengesetzte Festigkeit nach Fall I beansprucht.  $R$  sei die Armlänge bis zur Mitte des Quersteges,  $h$  des letzteren Höhe. Man rechne wie beim 6ten Beispiel §. 17 unter Einführung der Armlänge  $R' = R + \frac{1}{6} h$ , nachdem  $h$  gewählt ist.

## §. 27

## Festigkeit der Gefäßwände

a) Dünnwandige Rohre. Die Festigkeit der Wände zylindrischer nahtloser Gefäße, deren Wanddicke  $\delta$  klein ist im Verhältnis zu ihrem inneren Durchmesser  $d$ , sieh Fig. 52,

Fig. 52



Gefäßfestigkeit

ist für gewöhnlich durch eine annähernde Berechnung völlig ausreichend zu beurteilen. Ist  $p$  der von innen (nach Abzug der rückseitigen Pressung) wirkende Flächendruck, so entstehen gewöhnlich zwei Arten

von Festigkeitswiderständen, der eine im Längsschnitt  $2 \delta l$ , der andere im Querschnitt  $\sim \pi d \delta$ . Für den Längsschnitt hat man  $p d l = \mathfrak{E} 2 \delta l$ , woraus:

$$\frac{\delta}{d} = \frac{1}{2} \frac{p}{\mathfrak{E}}$$

oder, wenn der Druck  $a$  Atmosphären beträgt, also  $p = \frac{a}{100}$  } · · (37)

$$\frac{\delta}{d} = \frac{1}{200} \frac{a}{\mathfrak{E}}$$

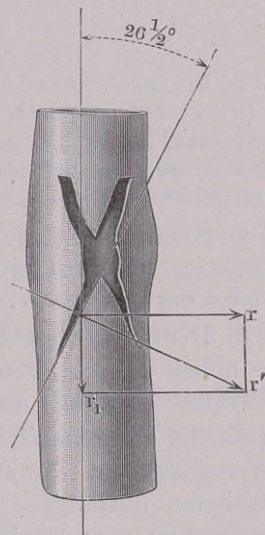
und sodann für den Querschnitt wegen  $p \frac{\pi}{4} d^2 = \mathcal{E}_1 \pi d \delta$ ,

$$\frac{\delta}{d} = \frac{1}{4} \frac{p}{\mathcal{E}_1} = \frac{1}{400} \frac{a}{\mathcal{E}_1} \dots \dots \dots (38)$$

Die Längsschnitte des Rohres sind also doppelt so stark beansprucht, als die Querschnitte; man berechnet deshalb gewöhnlich die Wanddicke aus der Gleichung für die Längsschnitte. Die an ein und demselben Punkt einer Rohrwandung angreifenden Kräfte  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{E}_1$  treten zu einer Mittelkraft  $\mathcal{E}'$  zusammen, die  $1/\cos \varphi$  mal  $\mathcal{E}$  ist, wenn  $\varphi$  den Winkel zur trigonometrischen Tangente  $\mathcal{E}_1 : \mathcal{E}$  bedeutet. Nun ist aber  $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} \mathcal{E}$  und der Winkel zu  $tg = \frac{1}{2}$  in Graden =  $26,5^\circ$ . Demzufolge müßte die Rißfuge eines gesprengten dünnwandigen Hohlzylinders um  $26\frac{1}{2}^\circ$  schräg gegen die Zylinderachse stehen.

1. Beispiel. Ein gußstählernes Mannesmannrohr von 275 mm Weite und 4,4 mm Wanddicke zeigte recht genau dieses Verhalten, wie die nach Photographie hergestellte Fig. 53 zeigt. Ob die Schrägung nach links oder nach rechts fällt, hängt von kleinen Ungleichheiten ab; an der Spitze des aufrechten Lappens fand Sprengung sowohl nach rechts, als nach links statt, daher der Kreuzriß. Man braucht nicht gerade nach der Spannung  $\mathcal{E}'$  zu rechnen, hat aber zu beachten, daß  $\mathcal{E}' = 1 : \cos \varphi$  hier =  $1 : 0,8949 \sim 1,12$  mal  $\mathcal{E}$  ist, der Sicherheitsgrad also von letzterem Werte bestimmt wird. Das erwähnte Rohr platzte bei 212 at oder 2,12 kg innerem Druck. Daraus berechnet sich die Querspannung  $\mathcal{E}$  beim Bruch zu 66 und die schräg gerichtete  $\mathcal{E}'$  zu  $B_z = 74$  kg.

Fig. 53

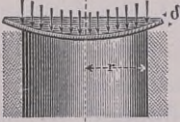
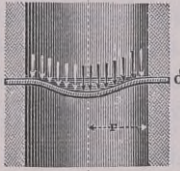


Gesprengtes Mannesmannrohr

Rohre mit äußerem Druck erfahren Beanspruchung wie die mit innerem, Formel (37), sind aber dem Knicken und, wenn sie versteifte Enden haben, Längsbiegungen ihrer Wände ausgesetzt; so beanspruchte Gefäße sind die Flammrohre der Dampfkessel.

Flache Böden fordern, wenn unverankert, große Wanddicken. Nach Grashof hat man für die lose aufliegende und für die eingespannte runde Platte was folgt.



	$p = \epsilon \left( \frac{\delta}{r} \right)^2$	$\frac{\delta}{r} = \sqrt{\frac{p}{\epsilon}}$ $\frac{f}{\delta} = \frac{5}{6} \left( \frac{r}{\delta} \right)^4 \frac{p}{E}$
	$p = \frac{3}{2} \epsilon \left( \frac{\delta}{r} \right)^2$	$\frac{\delta}{r} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{p}{\epsilon}}$ $\frac{f}{\delta} = \frac{1}{6} \left( \frac{r}{\delta} \right)^4 \frac{p}{E}$

2. *Beispiel.* Eine runde Platte von 1 m Durchmesser, belastet mit 3 at Druck, hat bei freiem Aufliegen, wenn sie nicht über 12 kg Spannung erfahren soll, zu erhalten die Wanddicke  $\delta = 500 \sqrt{0,03 : 12} = 500 \sqrt{1 : 400} = 25 \text{ mm}$ ; sie biegt sich um  $f = 25 \cdot \frac{5}{6} \cdot (500 : 25)^4 \cdot 0,03 : 20000 = 125 \cdot 20^4 \cdot 0,03 : 6 \cdot 20000 = 5 \text{ mm}$ .

3. *Beispiel.* Wird dieselbe Platte ringsum eingespannt, so bedarf sie nur einer Wanddicke  $\delta = 500 \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{0,03 : 12} = 50 \sqrt{\frac{1}{6}} = 20,4 \sim 20 \text{ mm}$  und biegt sich um  $f = 20 \cdot \frac{1}{6} \cdot 25^4 \cdot 0,03 : 20000 = 1,95 \text{ mm}$ .

b) Dickwandige Rohre. Für Gefäße, deren Wände wegen sehr hoher innerer Pressungen eine große Dicke im Verhältnis zur Weite erhalten müssen, wie Preßzylinder, Kanonen usw., reichen die vorstehenden Formeln nicht aus, da die Spannungen an verschiedenen Punkten des Radius unter Umständen stark verschieden ausfallen. Je nachdem dieses Spannungsverhältnis angenommen oder ermittelt wird, gestalten sich die Formeln für die Wanddicke anders. Brix macht die Annahme, daß die Dicke der Rohrwand durch die innere Pressung nicht geändert werde; Barlow nimmt eine Änderung an, und zwar eine solche, bei der der ringförmige Querschnitt des (runden) Gefäßes seine Größe nicht ändere; Lamé berechnet die Spannungsänderung, welche von Stelle zu Stelle stattfindet\*), v. Bach kommt zu andern Ergebnissen in betreff desselben Punktes. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen erhält man nach den vier Theorien die in der folgenden kleinen Tafel behufs Vergleichung zusammengestellten Formeln.

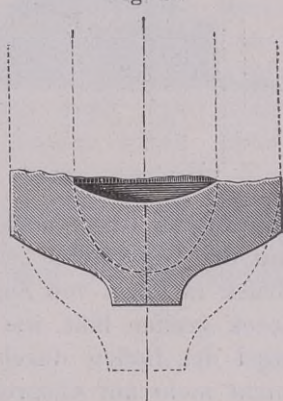
\*) Sieh Organ f. Eisenbahnwesen 1889, S. 59: Die Elastizitätsverhältnisse der Röhren von Baurat Dr. H. Scheffel.

Werte	Brix	Barlow	Lamé	v. Bach
Hohlzylinder	$p = \mathfrak{E} \ln e^{\frac{p}{\mathfrak{E}}} - 1$	$\frac{\mathfrak{E}}{1 + \frac{r}{\delta}}$	$\mathfrak{E} \frac{(r + \delta)^2 - r^2}{(r + \delta)^2 + r^2}$	$\mathfrak{E} \frac{(r + \delta)^2 - r^2}{1,3 (r + \delta)^2 + 0,4 r^2}$
	$\frac{\delta}{r} = e^{\frac{p}{\mathfrak{E}}} - 1$	$\frac{p}{\mathfrak{E} - p}$	$\sqrt{\frac{\mathfrak{E} + p}{\mathfrak{E} - p}} - 1$	$\sqrt{\frac{\mathfrak{E} + 0,4 p}{\mathfrak{E} - 1,3 p}} - 1$
Hohlkugel	$p = 2 \mathfrak{E} \frac{\delta}{r}$	$\frac{2 \mathfrak{E}}{1 + \frac{r}{\delta}}$	$2 \mathfrak{E} \frac{(r + \delta)^3 - r^3}{(r + \delta)^3 + 2 r^3}$	$\mathfrak{E} \frac{(r + \delta)^3 - r^3}{0,65 (r + \delta)^3 + 0,4 r^3}$
	$\frac{\delta}{r} = \frac{1}{2} \frac{p}{\mathfrak{E}}$	$\frac{p}{2 \mathfrak{E} - p}$	$\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{E} + p)}{2 \mathfrak{E} - p}} - 1$	

Alle vier Theorien lehren, daß die Umfangsspannung an der inneren Wandfläche am stärksten wird, die drei letzten außerdem noch, daß bei Steigerung von  $p$  über eine gewisse Grenze die Tragkraft durch Vergrößerung der Wanddicke nicht mehr erhöht wird. Diese Grenze wird nach Barlow und nach Lamé erreicht, wenn  $p = \mathfrak{E}$ , nach v. Bach sogar schon, wenn  $1,3 p = \mathfrak{E}$  oder  $p = 0,77 \mathfrak{E}$  wird. Das Zerspringen vieler Preßzylinder erklärt sich aus diesen Umständen.

Alle vier Theorien vernachlässigen den Druck in der Achsenrichtung, was aber in Anbetracht der im Beispiel 1 besprochenen Verhältnisse nicht erwünscht scheint, indessen, wie sich bald zeigen wird, ausgeglichen werden kann. Die Sprengung in der Achsenrichtung ist freilich keineswegs selten. Als älteres Beispiel führe ich den Preßzylinder von der Britannia-Brücke an\*), weil er seiner Zeit in der Ingenieurwelt beträchtliches Aufsehen erregte. Sein Boden sprang bei 573 at Wasserdruck ab in der Form, die Fig. 54 vor Augen führt; der Bruch verursachte gewaltigen Schaden. Was man darauf tat, war, daß man einen neuen Zylinder in den alten Abmessungen, nur von besonders ausgesuchtem Gußeisen herstellte

Fig. 54



Preßzylinderbruch

\*) Vgl. Herrmann-Weisbachs Mechanik III, 2, S. 111.



und die scharfe Randkante durch die punktirt angegebene Linienführung vermied; daß Stück hielt nun.

Das Abspringen des Zylinderbodens läßt sich aber völlig vermeiden. Es ist begründet durch die übliche Bauart der Pressen, die gewohnheitsgemäß seit Bramah wiederholt wird, indem man nämlich den Zylinder in das Bodenstück hinein- „hängt“, wie Fig. 55 u. 56 beispielsweise darstellen \*). Dieses „Hängen“ des Kolben-

Fig. 55

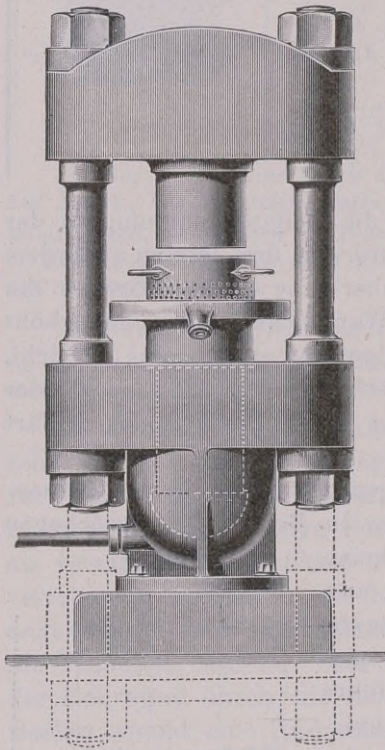
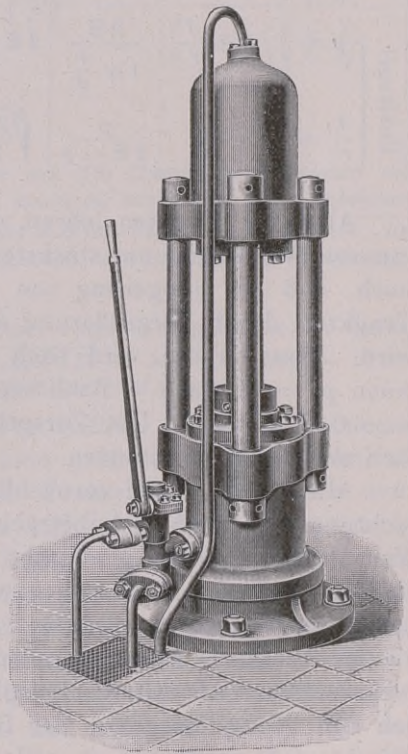


Fig. 56

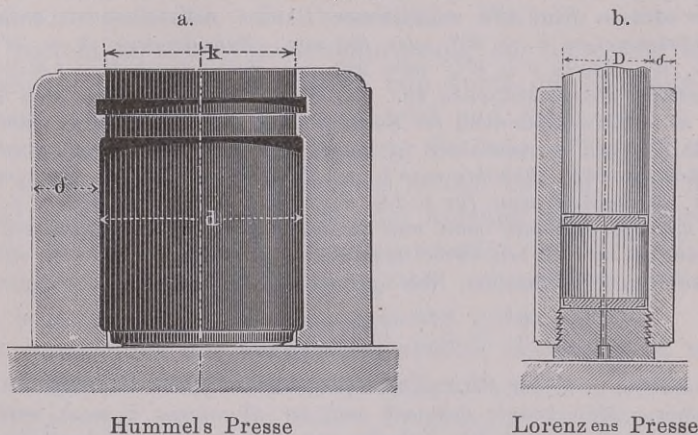


rohrs kann man leicht vermeiden, indem man den Zylinderboden auf das Unterstück „stellt“, aber zugleich auch die, den Kolbendruck in Form von Zug aufnehmenden Stangen unter das Bodenstück greifen läßt, wie Fig. 55 durch Punktirung andeutet. Dann wird der Boden durch den Wasserdruck nur zusammengepreßt, nicht mehr auf Absprengung beansprucht. Seine Entlastung von

\*) Auch bei letzterer Presse „hängt“ der Boden in der Urausführung, obgleich er mit einem Fuß auf dem Unterstück steht, da die Stangen am oberen Ende des Zylinders angreifen.

Biegung geht so weit, daß man ihn, so zu sagen, unendlich dünn machen, d. h. weglassen darf. Man braucht dann, wie unter a Fig. 57, die ebenflächig abgedrehte Ringfläche nur mit einer Lederdichtung auf die Bettplatte zu setzen, oder kann den dichten

Fig. 57



Verschuß auch durch ein eingeschraubtes Bodenstück mit Stulpdichtung herbeiführen wie unter b, wo aber auch das Bodenstück unmittelbar auf die Bettplatte gesetzt ist. Bei beiden Ausführungen, der Hummelschen wie der Lorenzschen, beansprucht nun der Wasserdruck das Kolbenrohr nur mit reiner Umfangsspannung auf Zug.

Gemäß einem Vorurteil, das ebenso alt ist wie die vorhin erwähnte Gewohnheit, wird die Wasserpressung häufig zu hoch, d. h. der Kolbendurchmesser zu klein gewählt. Nun aber fällt, was zu beachten ist, der Baustoffverbrauch nicht etwa größer, sondern sogar kleiner aus, wenn man  $p$  kleiner wählt. Setzen wir nämlich in den Ausdruck für den Rohrquerschnitt  $F = \pi(d + \delta)\delta$  für die Wanddicke  $\delta$  den Laméschen Wert ein, so erhalten wir nach einiger Umformung  $F = \pi/4 d^2 2p : \mathcal{E} - p$ . Aus dem Kolbendurchmesser  $k$  haben wir aber für den Kolbendruck  $P = \pi/4 k^2 \cdot p$ . Eingesetzt gibt:

$$F = \left(\frac{d}{k}\right)^2 \frac{2p}{\mathcal{E} - p} \dots \dots \dots (39)$$

und bei Einsetzung der v. Bachschen Formel:

$$F = \left(\frac{d}{k}\right)^2 \frac{1,7 p}{\mathcal{E} - 1,3 p} \dots \dots \dots (40)$$



Beidemale fällt, da  $p$  im Zähler wie im Nenner vermindern wirkt, wenn es verkleinert wird, der Rohrquerschnitt bei größer gewähltem  $d$  kleiner aus.

4. *Beispiel.* Bei einer Hummelschen hydraulischen Presse zur Herstellung papierener Walzenhüllen sind zwei zusammen arbeitende Preßzylinder der in Fig. 48 a angegebenen Bauart nebeneinander aufgestellt. Kolbendurchmesser  $k = 23''$  oder 601 mm, Zylinderweite  $d = 24''$  oder 628 mm, Wanddicke  $\delta = 8\frac{1}{2}''$  oder 222 mm. Kolbendruck  $P = 1$  Million kg, Gesamtdruck also 2 Millionen kg. Die Wasserverspannung ergibt sich hieraus zu 352 at und die Spannung im Baustoff nach Lamé zu 7,19 kg (und nach v. Bach 7,71 kg). — Auch hier ist gemäß dem älteren Vorurteil  $p$  zu hoch,  $k$  zu klein gewählt. Erhöhte man  $k$  auf 26'' oder rund  $\frac{9}{8}$  des angenommenen Wertes, so bekäme man für  $p$  den  $(\frac{9}{8})^2$  oder 0,79fachen Wert, d. i. mit Lamé 2,78 kg. Behielte man nun die bereits bewährte, obwohl recht hohe Spannung  $\mathfrak{S} = 7,19$  bei, bliebe auch bei dem Verhältnis von  $d:k$ , so ergäbe sich für das Verhältnis der Wandquerschnitte  $F'$  und  $F$ :

$$\frac{F'}{F} = \frac{2,78}{3,52} \cdot \frac{7,19 - 3,52}{7,19 - 2,78} = 0,6657$$

oder rund  $\frac{2}{3}$ ; d. h. der Preßzylinder fielen um ein ganzes Drittel leichter aus, als früher. Man könnte demnach mit der Spannung  $\mathfrak{S}$  auch unter 7,19 herabgehen und dennoch den Zylinder mit weniger Baustoff herstellen.

Für die Spannung  $\mathfrak{S}'$  in einer um  $r'$  von der Mitte abliegenden Ringschicht ergibt die Lamésche Untersuchung:

$$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r'} \right)^2 \right] - \frac{p}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r'} \right)^2 \right] \quad \dots \quad (41)$$

5. *Beispiel.* Setzt man hierin für  $r'$  den äußeren Rohrhalmmesser, so ist  $\mathfrak{S}'$  die Umfangsspannung  $\mathfrak{S}_1$ . Für  $\delta = r$ , d. i.  $r' = 2r$  ist zunächst nach S. 85 die innere Pressung  $p = \mathfrak{S} (3r^2 : 5r^2) = \frac{3}{5}\mathfrak{S}$  und es folgt nun nach (41)  $\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{S} [\frac{3}{4} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}] = \frac{2}{5}\mathfrak{S}$ . Der Baustoff ist also außen am Umfang ungleich schwächer beansprucht, als innen\*).

## §. 28

### Umgürtete dickwandige Rohre

Zu den stärksten beanspruchten Rohren gehören die Geschütze, da sie inneren Pressungen bis zu 3000 at (entsprechend  $p = 30$ ) und darüber ausgesetzt sind. Nun gibt es allerdings jetzt Nickelstahl, dessen Tragmodul  $T_z$  auch im ungehärteten Zustand bis 48 geht, also 36 wohl vertrüge. Aber auch bei dieser hohen

\*) Wegen der weiteren Ergebnisse, zu denen v. Bach in seiner Theorie gelangt, sehe man dessen „Elastizität und Festigkeit“, 6ter Abschnitt. — Madamet kommt in seinem oben angeführten Werke für das von innen gepreßte dickwandige Rohr zu denselben Ausdrücken wie Lamé.

Spannung, die zwar nach Lamés, nicht aber nach v. Bachs Ausdruck ausreichen würde, tritt der Umstand, daß die äußere Umfangsspannung, wie wir eben sahen, so weit zurückbleibt, derart in den Vordergrund, daß nach anderen Mitteln zu suchen gewesen ist. Diese hat man im Umreifen oder Umgürten der Kanonenrohre gefunden. Die wesentliche Wirkung dieses Verfahrens besteht in einer Zusammenpressung der innersten Ringschichten des Rohres; diese werden nun durch die Pressung der Pulvergase vorerst in den Normalzustand und dann erst in den gedehnten versetzt, während gleichzeitig die äußeren Ringschichten deshalb stark in Anspruch genommen werden können. Auf diese Weise ist es vollkommen gelungen, der Aufgabe Herr zu werden; obendrein haben die neueren Errungenschaften beim Nickelstahl noch wesentlich zur Verminderung der erforderlichen Wandstärken beigetragen. Wir kommen darauf unten zurück.

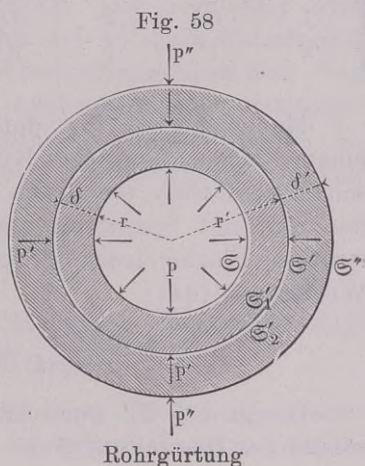
Die Berechnung der Festigkeit unreifer Geschütze ist weitläufig; einigen Überblick kann das Folgende geben. Zieht man außer der inneren auch die äußere Pressung  $p'$  in Betracht, so erhält man die folgende, ebenfalls von Lamé entwickelte Beziehung:

$$\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 = \frac{\mathfrak{S} + p}{\mathfrak{S} - p + 2p'} \dots \dots \dots (42)$$

und daraus, wenn man, abzukürzen,  $2 + \delta/r = \mu$  setzt:

$$p = \mathfrak{S} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} + 2p' \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \dots \dots \dots (43)$$

wonach  $\mathfrak{S}$  um so kleiner gegen  $p$  ausfällt, je größer  $p'$  ist. Beim gegürteten Rohr ist nun  $p'$  veränderlich, hängt nämlich ab von dem durch  $p$  hervorgerufenen Druck der Zylinderwand auf den Reifen. Nehmen wir vorerst bei Benutzung der in Fig. 58 eingeschriebenen Bezeichnungen an, daß im Normalzustand der Ring das Rohr mit der Spannung 0 berühre, so dehnen sich, wenn nun innen die Spannung  $p$  eintritt,  $p'$  vernachlässigbar klein ist, die Schichten bei  $r'$  um gleichviel aus, nehmen also gleiche Zugspannung  $\mathfrak{S}'_1 - \mathfrak{S}'_2$  an. Dann aber bewirkt





die Spannung  $\mathfrak{S}'_2$  den nach innen gerichteten Druck  $p'$ , und es besteht zwischen diesem, der dem vom Rohr nach außen gerichteten gleich ist, die durch die Lamésche Formel  $\lambda$  von S. 85 angegebene Beziehung

$$p' = \mathfrak{S}'_2 \frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1} \dots \dots \dots (44)$$

wofür  $1 + \delta'/r' = \mu'$  gesetzt wird. Dies in (43) eingeführt, gibt

$$p = \mathfrak{S} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} + 2\mathfrak{S}' \frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1} \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1}$$

$\mathfrak{S}'$  ist aber gemäß (41) durch  $\mathfrak{S}$  und  $p$  ausdrückbar. Damit kommt nach einiger Umformung:

$$p = \frac{\mu^2 \mu'^2 - 1}{\mu^2 \mu'^2 + 1} = \frac{\left(1 + \frac{r}{\delta}\right)^2 \left(1 + \frac{r'}{\delta'}\right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{r}{\delta}\right)^2 \left(1 + \frac{r'}{\delta'}\right)^2 + 1} \dots \dots (45)$$

Hier ist nun, wie früher, die Spannung  $\mathfrak{S}$  der innersten Ringschicht immer noch  $> p$ , allein ihr Verhältnis zu  $p$  nähert sich doch mehr der Einheit, als früher, wie folgende Zahlengruppe zeigt:

Wenn:		so ist:		und wird:			
$\frac{\delta}{r}$	$\frac{\delta'}{r'}$	$\mu$	$\mu'$	$\frac{p}{\mathfrak{S}}$	$\frac{\mathfrak{S}}{p}$	$\frac{\mathfrak{S}'}{p}$	$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}$
1	0	2	1	0,600	1,667	0,667	0,400
1	0,5	2	1,5	0,800	1,250	0,406	0,325
2	1	3	2	0,905	1,057	0,143	0,135

Man sieht aus ihr, daß die bloße druckfreie Belegung mit einem Reif aus demselben Baustoff wie der des Rohres das letztere schon wesentlich verstärken kann; mehr noch gelingt dies, wenn der Reif mit Spannung umgelegt wird. Ist sein einwärts gerichteter Flächendruck  $p'$ , so erhält man nach Einführung dessen Wertes aus (44):

$$p = \mathfrak{S} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} + 2\mathfrak{S}'_2 \frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1} \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \dots \dots (46)$$

Hierin ist  $\mathfrak{S}'_2$  zwar eine Funktion von  $p$ , aber auch eine solche der Herstellungsweise des Rohres, wie denn überhaupt die

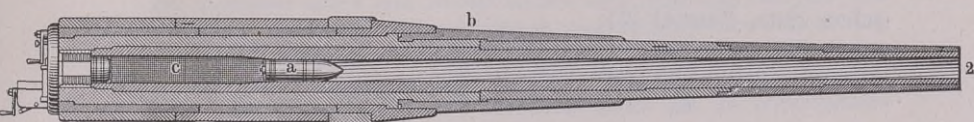
praktische Behandlung der vorliegenden Aufgabe vom größten Einfluß auf das Endergebnis ist. Nimmt man an, daß beim Höchstwert von  $p$  im Rohr die Spannung  $\mathfrak{S}_2' =$  werde der Spannung  $\mathfrak{S}$  der Rohrseele, so kommt aus (46):

$$\frac{p}{\mathfrak{S}} = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} + 2 \frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1} \frac{\mu^2}{\mu^2 - 1}.$$

*Beispiel.* Bei  $\delta = r$ ,  $\delta' = \delta = \frac{1}{2} r'$  kommt  $\mu = 2$ ,  $\mu' = \frac{3}{2}$ , worauf folgt:  $p : \mathfrak{S} = \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{79}{65}$ . Hier bleibt also  $\mathfrak{S}$  hinter dem Wert von  $p$  zurück, d. h.  $p$  darf über den Tragmodul des Baustoffes hinaus gesteigert werden.

Weitere Umgürtungen erhöhen das Ergebnis; Fig. 59 zeigt im Längsschnitt ein Küstengeschützrohr, bei dem drei Gürtungen übereinander angewandt sind. Ein älteres Verfahren von Uchatius, der bronzene Rohre dadurch schußfester machte, daß er die Seelenbohrung vermöge Hindurchtreibung eines Dornes etwas erweiterte, erkennen wir als Steigerung von  $T_z$  durch den Wieder-

Fig. 59



Küstengeschützrohr

holungsversuch von Fig. 11 und 17. Jüngst ist dieses Verfahren in den Ver. Staaten wieder aufgenommen worden für Stahlgeschütze, und zwar in der Form, daß nach allem Abdrehen, Ausdrehen, Zusammenbauen, Härten und Tempern das Seelenrohr durch inneren Flüssigkeitsdruck gepreßt und verdichtet wird. Diese ganze Schießrohrtechnik befindet sich in ihren Einzelheiten immer noch in Aufwärtsbewegung; Wärmesteigerungen und -Verminderungen (§. 8) verbunden mit Ausbeutung der Setzungen (§. 6) werden zur Erhöhung der Widerstandsfähigkeit gegen die immer noch wachsende Pulvergaskraft wettbewerblich ins Feld geführt.

## §. 29

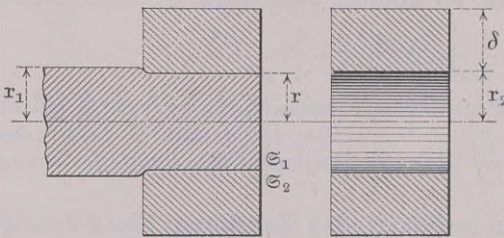
## Aufziehen und Aufpassen von Ringen auf volle Zylinder

Neben dem Aufbringen nach vorheriger Erwärmung kommt auch das Aufziehen oder -Zwängen in kaltem Zustand viel zur



Anwendung. Bohrungsweite und Kerndicke müssen dabei in geeignetem Verhältnis stehen, damit Sprengung nicht zu besorgen ist. Die Theorie für den einfachen Fall sei hier vorgeführt.

Fig. 60



Aufziehen oder Aufzwängen

ist. Die Theorie für den einfachen Fall sei hier vorgeführt.

Vor der Aufzwängung habe der Kernzylinder den Halbmesser  $r_1$ , die Ringhohlung den Halbmesser  $r_2$ ; nach der Aufbringung sei der beiden gemeinsame Halbmesser  $= r$ , siehe Fig. 60.

Im Kern herrscht nach der Aufzwängung eine gleichförmig verteilte Druckspannung  $\epsilon_1$ , im Ring an der innersten Schicht eine Zugspannung  $\epsilon_2$ . Für diese Spannungen gilt bei den Elastizitätsmodellen  $E_1$  und  $E_2$  gemäß dem Carnotschen Satz, Formel (2):

$$\frac{\epsilon_1}{E_1} = \frac{r_1 - r}{r_1} \quad \frac{\epsilon_2}{E_2} = \frac{r - r_2}{r_2} \quad \dots \quad (47)$$

Addierend erhält man:

$$r_1 (\epsilon_1 : E_1) + r_2 (\epsilon_2 : E_2) = r_1 - r_2.$$

Bezeichnet man nun den Wert  $\frac{r_1 - r_2}{r_2}$  mit  $\psi$ , so erhält man:

$$\psi = \frac{r_1}{r_2} \frac{\epsilon_1}{E_1} + \frac{\epsilon_2}{E_2} = \frac{\frac{\epsilon_1}{E_1} + \frac{\epsilon_2}{E_2}}{1 - \frac{\epsilon_1}{E_1}} \quad \dots \quad (48)$$

$\epsilon_2$  und  $\epsilon_1$  sind aber voneinander abhängig, und zwar haben sie nach der Laméschen Formel folgende Beziehung:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} = \epsilon_2 \frac{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 - 1}{\left(1 - \frac{\delta}{r}\right)^2 + 1},$$

wofür der Kürze halber gesetzt werde  $\epsilon_1 = \epsilon_2 \rho$ . Dies ergibt aber annähernd:

$$\psi = \frac{\epsilon_1}{E_1} + \frac{\epsilon_1}{\rho E_2} = \frac{\epsilon_2}{E_2} + \frac{\epsilon_2 \rho}{E_1} \quad \dots \quad (49)$$

Hierin ist, wenn:

$\frac{\delta}{r} =$	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,5	2,0	3,0
$\varrho =$	0,385	0,438	0,486	0,528	0,600	0,724	0,800	0,882

Auch hat man noch aus (49):

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\psi E_1}{1 + \frac{E_1}{E_2} \frac{1}{\varrho}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_2 = \frac{\psi E_2}{1 + \frac{E_2 \varrho}{E_1}} \quad \cdot \cdot \quad (50)$$

Der Wert  $\psi$  fällt meistens so klein aus, daß die Herstellung des richtigen Verhältnisses zwischen  $r_1$  und  $r_2$  auf der Drehbank große Sorgfalt erheischt und nur bei Anwendung der feinen Mittel der Genauigkeitsmessung gelingt.

*Beispiel.* Schmiedeeiserne Achse, gußeiserne Nabe,  $E_1 = 20000$ ,  $E_2 = 10000$ ; es sei die Wanddicke  $\delta = 2r$ , also  $\varrho = 0,8$ , und werde gefordert, daß  $\mathfrak{E}_2$  nicht 7 kg übersteige. Dann ist zu machen nach (49)  $\psi = 7/10000 + 0,8 \cdot 7/20000 = (14 + 5,6) : 20000 \sim 1/1000$ . Das ist eine so feine Abweichung, daß schon die Tiefe der Drehstriche von voller Bedeutung wird, daher ein glattes Ab- und Ausdrehen notwendig ist.

Die Praktiker haben sich in der letzten Zeit eingehend mit der vorliegenden Frage beschäftigt. Sie gelangen zu wesentlich stärkerer Abweichung  $a = 2(r_1 - r_2)$ , als unsere vorstehende Berechnung ergeben hat. Die Untersuchung und Regelbildung geht dabei allgemein auf das Aufeinanderpassen von Hohl- und Vollzylinder aus. Zunächst haben die an verschiedenen Stellen in England und Amerika das Gemeinsame ergeben:

daß stets der Hohlzylinder als das zuerst Herzustellende angesehen wird.

Es seien die Angaben von zwei sorgfältig berichtenden Beobachtern, die des englischen Ingenieurs H. J. Marshall (Gainsborough)\*) und die des amerikanischen Ingenieurs St. H. Moore (Kansas City)\*\*) hier aufgeführt. Marshall empfiehlt oder verlangt für die Ausbohrung des Ringes eine Genauigkeit von  $\frac{3}{160}$  mm; es soll nämlich ein Lehrbolzen:

von  $a = + \frac{1}{40}$  mm nicht in die Bohrung hineingehen,  
von  $a = - \frac{1}{80}$  mm wohl in die Bohrung hineingehen.

Sodann soll für „feste“ Zwängung eine Grenzlehre, vgl. Fig. 61,

bei  $a = + \frac{3}{20}$  mm auf den Kern gehen,  
bei  $a = + \frac{2}{20}$  mm nicht auf den Kern gehen,  
entsprechend für den Kern dem Wert  $a = + \frac{1}{40}$  mm

als Abweichung von der Bohrungsweite. Diese Abweichung macht also Marshall konstant, unabhängig von der Kerndicke, und zwar bis zur oberen Grenze von 150 mm Kerndicke.

\*) Sieh American Machinist, Juli 11, 1903, S. 498 E, worin die Frage eingehend behandelt ist.

\*\*) Ausführlicher Vortrag in Saratoga über „Fits und Fitting“ vom Juni 1903 vor der Am. Gesellschaft der Maschinen-Ingenieure. Vgl. Transactions Band XXIV.



Nach Moores Ermittlungen soll man nun für „feste“ Passung oder Zwängung nehmen beim Kerndurchmesser  $d$ :

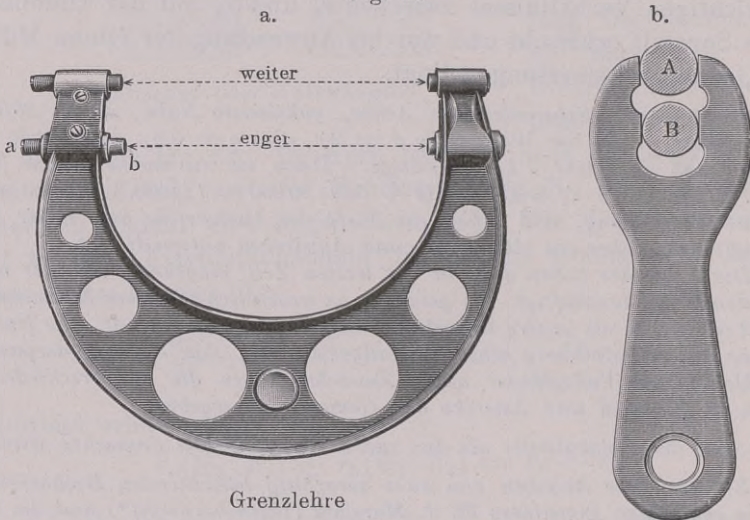
$$a = \frac{d}{500} + \frac{1}{80} \text{ mm}$$

und, wie gleich hinzugefügt sei, für warme Aufschrüpfung, §. 28:

$$a = \frac{d}{940} + \frac{1}{80} \text{ mm}$$

Der Zusatz von dem 80stel mm scheint schwer durchzuführen. Bemerkenswert aber ist, daß das Verhältnis zu  $d$  beidemal weit größer angegeben und

Fig. 61



Grenzlehre

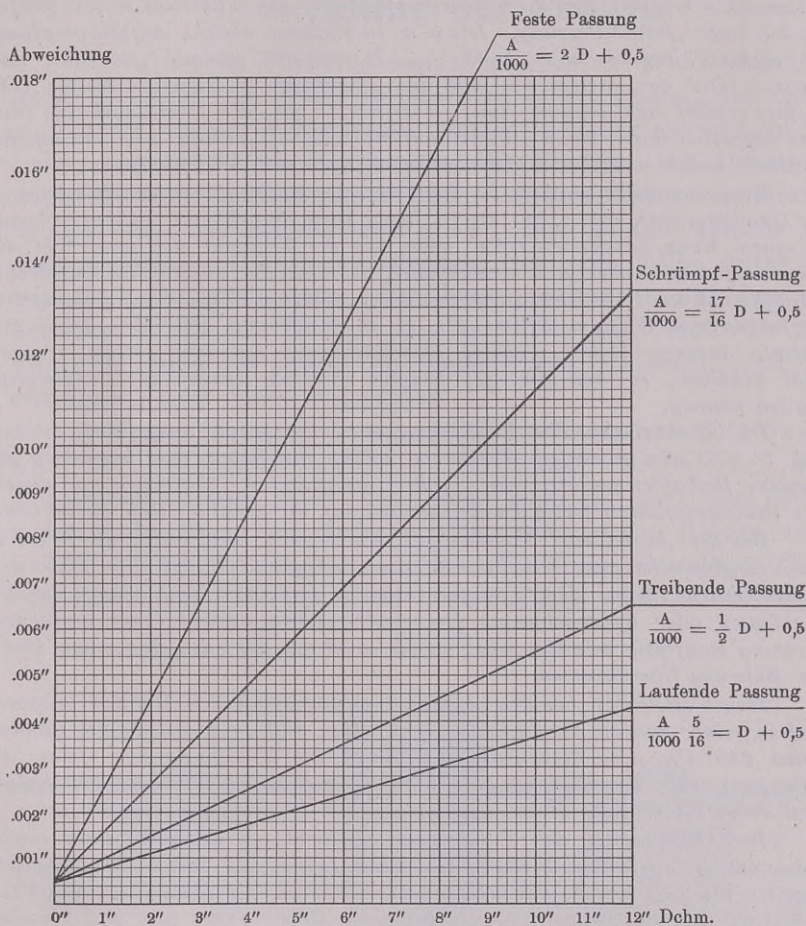
als praktisch brauchbar erprobt worden ist, als wir oben durch Rechnung ermittelt hatten. Moore bemerkt auch, daß sein Ausdruck mit den Betrachtungen über Gefäßfestigkeit nicht stimmen möchte, schreibt dies aber dem Umstand zu, daß das Gußeisen der Ringe (Radnaben) entfernt davon sei, als gleichkräftig gelten zu können, vielmehr wegen seiner Poren nachgiebiger sei, als die Probestücke der Festigkeitswagen. Auch bei uns geht man in der Praxis bis zu  $\frac{1}{500}$  der Durchmesser der Bohrung.

Die verstellbare Grenzlehre Fig. 61a ist die von Newall in London. Es sei bemerkt, daß die Amerikaner von der Anwendung der verstellbaren Meßpföcke ganz entschieden abraten, da erfahrungsgemäß die Arbeiter nur zu leicht unnötige Verstellungen der Pföcke vornehmen, die zu großen Schwierigkeiten und Streitigkeiten führen.

Die Aufzwängungsfrage ist als Frage der Festigkeit so wichtig, daß sie den Versuchsanstalten anempfohlen werden kann. Die vorliegende Mooresche Behandlung derselben berücksichtigt die Versuche von Prof.

Wetmore und von T. C. Kelly, welch letzterer über rund 800 Versuche mit „fester“ Pressung berichtet hatte\*). Von den acht Kräftebildern Moores sei hier eines, das die von ihm behandelten vier verschiedenen Passungen zusammenfaßt, wiedergegeben.

Fig. 62



Passungen für Voll in Hohl nach Moore

$A/1000$  bedeutet unsre Abweichung  $a$  in 1000stel des englischen Zolles. Die dritte der vier Passungen, die „treibende“, bezeichnet Moore als weniger wichtig. Vier Passungsgrößen führt auch Marshall auf: die „feste“, die „treibende“, die „gleitende“ und die „laufende“, bemerkt aber dazu, daß sie noch nicht allgemem in England ausgeführt würden; die Schrumpfpassung führt er gar nicht auf.

\*) Vgl. *American Machinist*, Bd. XXII (1899).



Bemerkenswert bei Moore ist, daß der Schrumpfpassung kleinere Abweichungen zugewiesen sind, als der festen Passung; es wird zu ihr noch angegeben, daß die Abweichung von  $\frac{17}{18} D + 0,5$  bis in die dritte Stelle übereinstimme mit derjenigen der „Am. Railway Master Mechanics Association“ für Treibradnaben und Radreifen. Prof. Wetmores Versuche hatten dazu ergeben, daß diese Schrumpfpassung gegen dreimal so fest greife, als die kalte „feste“ Passung. Die u. a. in Rußland übliche Aufschrümpfung in Siedhitze, bei der  $a = \text{rund } \frac{1}{1000} D$  ausfällt, stimmt recht nahe mit Moore. Der von diesem für alle vier Passungen angewandte Zusatz von  $\frac{1}{80}$  mm erklärt sich daraus, daß, je kleiner  $D$  ist, die Pressungskurve (die eine Hyperbel wird) um so stärker auftritt, ja zu Anfang eine unendliche Ordinate haben würde, wenn die Abweichungen mit Null begännen.

Ganz besonders wichtig ist die „Aufschrümpfung“ bei der Herstellung der Geschützrohre, vgl. §. 28; sie ist heute hoch ausgebildet. In senkrechtem, an einem Kran hängenden Ofen, oder, wie der Erfinder sich ausdrückt, in einer tragbaren senkrechten Heizkammer, die über das aufgestellte Innenrohr herabgesenkt wird, werden z. B. bei dem, auch in Deutschland patentierten Verfahren von William Sellers (D. R.-P. 89807 vom Dezember 1896) die fertigen inneren Rohre vermöge Durchströmung mit sehr kaltem Wasser kühl gehalten, so daß die auf Rotglut erhitzten Ringe gut aufgestreift werden können.

Die Bearbeitung der Paßflächen soll sehr genau ausgeführt werden (vgl. S. 93); alle gebohrten Hölzungen sollten mindestens mit besonders geeigneten Reibahlen geglättet sein; größere, ausgedrehte Hohlflächen sind durch das Schleifverfahren fertig zu stellen und auf ihr genaues Maß zu bringen.

Bei der „laufenden“ Passung gilt, wie Moore hervorhebt, der Wert  $a$  als der Zuwachs zum Durchmesser des Vollzylinders, der die Weite des Hohlzylinders ergibt. Der Zwischenraum ist fein, aber groß genug, das Öl zuzulassen oder aufzunehmen. Drehstriche sollen auch bei der laufenden Passung sorgfältig beseitigt sein, da sie sonst das Öl nach dem einen Ende der Bohrung hinschrauben.

Moore empfiehlt, bei den Aufschrümpfungen den Hohlteil langsam und in seiner ganzen Ausdehnung zu erhitzen, und zwar auf dunkle Rotglut (etwa  $430^{\circ} \text{C}$ ). Das bloße rasche Erhitzen der Hohlfläche von innen her habe statt einer Erweiterung eine Verengung des Hohlzylinders zur Folge, weil dabei die erhitzte Masse sich nach innen zu dehnen gezwungen sei.

Das Einpressen des Vollkörpers geschieht zweckmäßig unter reichlicher Ölung. Sehr dazu empfohlen wird Leinöl als treffliches Schmiermittel. Wichtig ist es, die geometrischen Achsen des Hohl- und des Vollzylinders zum Zusammenfallen zu bringen; Moore führt an, daß einzelne Ingenieure, um es zu sichern, den Kern auf seine halbe Länge um einen Bruchteil der Abweichung  $a$  dünner zu drehen, damit der Kern leicht und genau eintritt und dann mit Sicherheit bis zur vollen Tiefe eingepreßt werden kann.

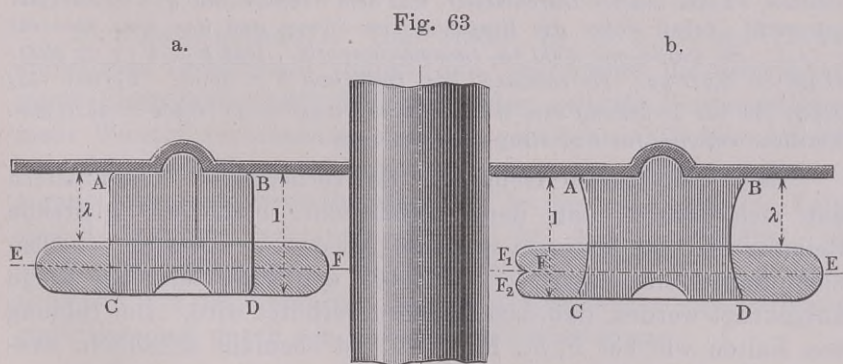
Marshall geht auf die Fabrikation der beiden Teile der Paßerbindung ein. Er betont mit Recht nachdrücklich, daß sie durchaus getrennt herzustellen seien, jedes ohne Nachmesserei am andern Stück, beide rein unter genauer Innehaltung vorgeschriebener Abmessungen. Das Zusammensetzen habe dann aus den beiden Vorräten als Arbeit für sich stattzufinden. Durchmesser und Längen sollten durch Vorstöße, die den Weg des Stichel-schlittens begrenzten, auf Maß gebracht werden, worauf die Feinmessung einzusetzen habe, alles Vorschriften die für den Austauschbau allgemein gelten.

## §. 30

## Berechnung der Federn

Neben der im Vorausgehenden behandelten praktischen Aufgabe, Körpern eine große Starrheit zu geben, kommt die andere vor, ihnen eine vorausbestimmte elastische Nachgiebigkeit zu verleihen; so behandelte Körper sind die Federn. Sie dienen zur Aufnahme von Stoßwirkungen (Buffer, Wagenfedern), zum Hervorbringen von Bewegungen (Uhrwerke), zum Bilden weicher und doch elastischer Unterlagen (Polster) usw. Sie fallen unter verschiedene Festigkeitsarten. Für Beanspruchungen auf Zug sind dehnbare Stoffe wie Kautschuk, für solche auf Druck die luftförmigen Flude, für solche auf Biegung und Drehung Hölzer und namentlich aber Metalle geeignet.

a) Gummifedern. Der geschwefelte Kautschuk oder Gummi wird als Federstoff namentlich für Buffer, Prellklötze, auch Tragfedern, obwohl alles dieses nicht mehr so stark wie früher, meist in der Form von übereinander geschichteten Ringen angewandt, die durch Eisenplatten getrennt und zugleich gegen Querverschiebungen geschützt sind. Gebräuchlich sind die in Fig. 63



Bufferringe aus Kautschuk

dargestellten Ringquerschnitte; Wulst in Hohlkehle verhindert Querbewegungen. Versuche, die auf Veranlassung des Verfassers durch den Ingenieur Werder in Nürnberg 1857 vorgenommen wurden, haben Folgendes ergeben.

Beim Zusammenpressen des Ringes bleibt sein geometrischer Körperinhalt soviel wie ungeändert. Die stärkst gespannten Fasern



liegen auf dem äußeren Rande des Wulstes bei  $E$  und sind auf Zugfestigkeit beansprucht; dies zeigt sich darin, daß daselbst bei zu weit getriebener Niederpressung Risse entstehen. Die Elastizitätsgrenze wird erreicht bei der Druckspannung  $\mathfrak{S} = 0,5 \text{ kg/qmm}$ , bezogen auf den zur Achse rechtwinkligen ursprünglichen, den Grundquerschnitt, möchte man sagen, des Ringes. Dieser den Tragmodul vertretende Wert ist etwas höher (bis  $0,55 \text{ kg}$ ) bei den spezifisch leichteren, etwas tiefer (bis zu  $0,45$ ) bei den schwereren Gummisorten. Das spez. Gewicht  $\gamma$  des Stoffes beträgt bei den weniger geschwefelten 1 und steigt bei den stärker beladenen bis  $1,15$  und sogar  $1,32$ .

Bei Belastung bis zur Elastizitätsgrenze ist der Umfang  $ECDF$  des Ringdurchschnittes ungefähr  $\frac{4}{3}$  des ursprünglichen  $ABCD$  geworden; der Ring hat also Dehnung erfahren und zwar hat der Querschnitt nach  $EFFE$  sich ungefähr verdoppelt. Die Ergebnisse der Werderschen Versuche lassen sich durch die Formel

$$\lambda = \frac{l}{\gamma} \sqrt{\frac{P}{q}} \dots \dots \dots (51)$$

wiedergeben, wobei  $q$  den ursprünglichen Querschnitt bezeichnet.

1. *Beispiel.* Ein nach a Fig. 63 gestalteter Buffering hatte  $142 \text{ mm}$  äußeren,  $74 \text{ mm}$  inneren Durchmesser, was dem Querschnitt  $q = 11536 \text{ qmm}$  entspricht, besaß dabei die Ringhöhe  $l = 35 \text{ mm}$  und das spez. Gewicht  $\gamma = 1$ . Es wurde mit  $2500 \text{ kg}$  zusammengepreßt. Das gibt  $P:q = 2500:11536 = 0,217 \text{ kg}$ . Es entstand die Drückung  $\lambda = 16,75$ . Formel (51) liefert für die Drückung den Wert  $\lambda = 35 \sqrt{0,217} = 35 \cdot 0,466 = 16,31 \text{ mm}$ . Versuche ergaben für den Ring  $\lambda = 16,75 \text{ mm}$ .

Beim praktischen Gebrauch der vorliegenden Gummifedern hat sich gezeigt, daß deren gefährlicher Feind die gleitende Reibung ist. Um diese zu verhüten, müssen die Zwischenscheiben nach außen wie innen so weit über den Ring oder die Ringe ausgekragt werden, daß das Schleifen verhütet wird. Die Bildung von Falten wie bei  $F_1 F_2$ , Fig. 63 b, ist ebenfalls schädlich, deshalb die rechteckige Querschnittsform unter a vorzuziehen\*).

b) Die Luft als Feder. Für manche Zwecke verwendet man mit gutem Erfolge die Luft als Feder, so in den Luftbuffern

\*) Größere Versuchsreihen an Gummiringen hat noch der belgische Ingenieur Stévant 1869 bis 1870 ausgeführt, siehe *De Cuyper, Revue universelle* Bd. 28, S. 424 und Bd. 30, S. 401. Seine Versuche haben die Werdersche Beobachtung, daß der Kautschuk nicht merklich zusammendrückbar sei, vollkommen bestätigt.

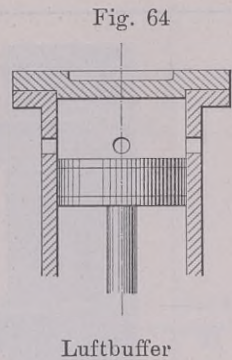
mancher Kolbenmaschinen, sodann in ungezählten Ausführungen in den Felgen der Fahrräder und der Kraftwagenräder. Der Widerstand zusammengedrückter Luft folgt nicht, wie auch schon auf S. 36 hervorgehoben wurde, dem Carnotschen Satz [Gleichung (2)], sondern steigt weit schneller bei zunehmendem  $\lambda$ , und zwar, wenn Wärmersteigerungen verhütet werden, hyperbolisch, vgl. Fig. 28. Deshalb wirkt selbst ein kurzer Luftbuffer, auch Luftkissen genannt, Fig. 64, trotz dem kleinen Anfangsdruck von 1 at recht gut. Denn nach  $\frac{3}{4}$  des Hubes ist schon die Spannung, auf 4 at, nach  $\frac{9}{10}$  auf 10 at gestiegen, beträchtlich mehr noch, wenn die Wärme nicht abgeleitet wird. Bei den Luftfederhämmern dienen zwei solcher Luftkissen, eines über, eines unter dem Kolben, geradezu an Stelle von stählernen Blattfedern.

Bei den pneumatischen Radfelgen ist der Felgenring ein Gummischlauch, dem Luft von nicht unbeträchtlichem Druck eingepreßt wird, was durchaus notwendig ist, da die Verminderung des geometrischen Inhaltes der Felge durch die Belastung gar nicht groß ist.

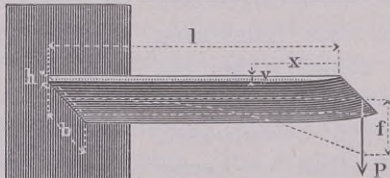
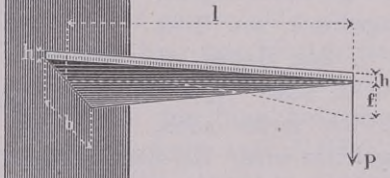
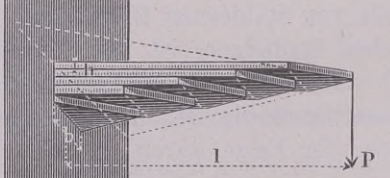
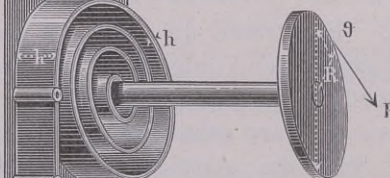

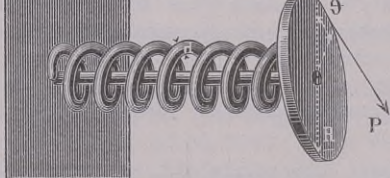
c) Biegungsfedern. Hier treten die in §. 16 und 17 besprochenen Verhältnisse\*) ganz in den Vordergrund; die bemerkenswerte Eigentümlichkeit, daß nachgiebig gebaute Biegungskörper mehr Baustoff verbrauchen, als starr gehaltene, fällt hier, einmal bemerkt, besonders auf, weil die elastische Nachgiebigkeit  $f$  gerade hier groß vorgeschrieben ist. In der nachfolgenden Tafel sind deshalb die Verbrauchsziffern  $C$  (vgl. §. 17) aufgeführt; sie erscheinen recht günstig. Doch empfiehlt es sich gerade deshalb, nochmals auf das Verhältnis des Baustoffaufwandes zu dem Nachgiebigkeitsmaß durch ein Beispiel zurückzukommen.

2. Beispiel. Gegeben Belastung  $P = 4000$ , Armlänge des Freitragers nach Fall II der folgenden Tafel  $l = 600$ ; Spannung  $\mathcal{E}$  soll sein 30 bei  $E = 20000$ , und nun zuerst  $f = 5$ , dann  $f = 50$  mm Biegung verlangt werden, d. h. bei derselben Sicherheit zuerst ziemliche Starrheit, im zweiten Fall eine beträchtliche elastische Nachgiebigkeit gefordert sein. Man hat nun nach der sechsten Spalte: a)  $h = l^2 \mathcal{E} : f E = 360\,000 \cdot 30 : 5 \cdot 20\,000$ , woraus kommt  $h = 108$  mm; sodann nach der vierten Spalte:  $b = 6 Pl$ :

\*) Sieh meine Konstruktion und Berechnung der wichtigsten Federarten, Winterthur 1857.





Nr.	Form	Benennung	Tragkraft
I		Rechteckfeder, parabolisch zugeshärft	$P = \frac{\epsilon}{6} \frac{bh^2}{l}$
II		Einfache Dreieckfeder	$P = \frac{\epsilon}{6} \frac{bh^2}{l}$
III		Zusammengesetzte oder geschichtete Dreieckfeder	$P = \frac{\epsilon}{6} \frac{ibh^2}{l}$ <i>i</i> die Blätterzahl
IV		Spiralfeder, flachdrätig, <i>l</i> = Länge des gestreckten Blattes	$P = \frac{\epsilon}{6} \frac{bh^2}{R}$
V		Drehschraubenfeder, flachdrätig	$P = \frac{\epsilon}{6} \frac{bh^2}{R}$
VI		Drehschraubenfeder, runddrätig	$P = \frac{\epsilon \pi}{32} \frac{d^3}{R}$

Federung	Nachgiebigkeit	Verbrauchsziffer <i>C</i>	Bemerkungen
$f = 6 \frac{Pl^3}{Ebh^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{h}$	3	In der Ausführung meist anzunähern durch ein Trapezprofil mit der Endhöhe $\frac{1}{2} h$
$f = 6 \frac{Pl^3}{Ebh^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{h}$	3	Das freie Ende in der Regel mit Verstärkung zu versehen
$f = 6 \frac{Pl^3}{Eibh^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{h}$	3	Verhält sich wie eine einfache Dreieckfeder von der Basisbreite <i>ib</i>
$f = R\vartheta = 12 \frac{PlR^2}{Ebh^3}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{h}$	3	Zur Kraftübertragung auf drehbare Teile gebräuchlich
$f = R\vartheta = 12 \frac{PlR^2}{Ebh^3}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{h}$	3	<i>f</i> : <i>R</i> ist der Winkel $\vartheta$ der durch <i>P</i> hervorgebrachten Verdrehung, die aber, wie auch im Falle VI, Biegung der Feder hervorruft
$f = R\vartheta = \frac{64}{\pi} \frac{PlR^2}{Ed^3}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\epsilon}{E} \frac{l}{d}$	4	



Nr	Form	Benennung	Tragkraft
VII		Einfache Torsionsfeder, runddrätig	$P = \epsilon \frac{\pi d^3}{16 R}$
VIII		Einfache Torsionsfeder, flachdrätig	$P = \frac{\epsilon}{3 R} \frac{b^2 h^2}{\sqrt{b^2 + h^2}}$ Annähernd ( $h > b$ ) $P = \frac{\epsilon}{R} \frac{b^2 h^2}{3(0,4b + 0,96h)}$
IX		(Zylindrische) Schraubenfeder, runddrätig	$P = \epsilon \frac{\pi d^3}{16 R}$
X		(Zylindrische) Schraubenfeder, flachdrätig	$P = \frac{\epsilon}{3 R} \frac{b^2 h^2}{\sqrt{b^2 + h^2}}$ Annähernd ( $h > b$ ) $P = \frac{\epsilon}{R} \frac{b^2 h^2}{3(0,4b + 0,96h)}$
XI		Kegelschraubenfeder oder Kegelfeder, runddrätig	$P = \epsilon \frac{\pi d^3}{16 R}$
XII		Kegelfeder, flachdrätig	$P = \frac{\epsilon}{3 R} \frac{b^2 h^2}{\sqrt{b^2 + h^2}}$ Annähernd ( $h > b$ ) $P = \frac{\epsilon}{R} \frac{b^2 h^2}{3(0,4b + 0,96h)}$

Federung	Nachgiebigkeit	Verbrauchsziffer C	Bemerkungen
$f = R \vartheta = \frac{32 P R^2 l}{\pi G d^4}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\epsilon l}{G d}$	$\frac{5}{4}$	In den Fällen VII bis X Körper von gleicher Drehungsfestigkeit
$f = 3 \frac{P R^2 l}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{\epsilon l \sqrt{b^2 + h^2}}{G b h}$	$\frac{15}{8}$	Nicht sehr häufig angewandt
$f = \frac{32 P R^2 l}{\pi G d^4}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\epsilon l}{G d}$	$\frac{5}{4}$	l immer die Länge des gestreckt gedachten Drahtes, auch bei X bis XII
$f = 3 \frac{P R^2 l}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{\epsilon l \sqrt{b^2 + h^2}}{G b h}$	$\frac{15}{8}$	Es gilt gleich, wie die größere Querschnittseite zur Achse steht
Annähernd: $= \frac{16 P R^2 l}{\pi G d^4}$	$\frac{f}{R} = \frac{\epsilon l}{G d}$	$\frac{5}{2}$	Feder bis zur Kegelspitze ausgeführt angenommen
Annähernd: $f = \frac{3 P R^2 l}{2 G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon l \sqrt{b^2 + h^2}}{G b h}$	$\frac{15}{4}$	Läßt sich durch Verjüngung der Querschnittshöhe h zu einem Körper von gleicher Festigkeit machen



$\mathcal{E}h^2 = 6 \cdot 4000 \cdot 600 : 30 \cdot 108^2$ , was ergibt  $b = 41,15 \sim 41$  mm. Damit erhält man den Körperinhalt  $V = 41 \cdot 108 \cdot 600 \cdot 0,5 = 1\,328\,400$  cbmm, und zur Probe  $V'$  nach Formel (16), da hier, wie in der siebenten Spalte angegeben, die Verbrauchsziffer  $C = 3$  ist,  $V' = 3 \cdot 4000 \cdot 5 \cdot 20000 : 900$ , was ergibt  $V' = 1\,333\,333$ , also stimmt. b) Für den anderen Fall haben wir  $h = \sqrt[3]{\mathcal{E} : f E} = 600^2 \cdot 30 : 50 \cdot 20000$ , d. i. den zehnten Teil der vorigen Höhe,  $10,8 : 10 = 10,8$  mm. Und nun  $b = 6 \cdot 4000 \cdot 600 : 30 \cdot 10,8^2$ , woraus sich rechnet  $b = 4115$ , was zu einer vielblättrigen Feder nach Nr. III der vorstehenden Tafel führt. Nun kommt  $V = 10,8 \cdot 4115 \cdot 600 \cdot 0,5$ , d. i.  $13\,332\,600$  rund 10mal den Wert unter a. Wir haben den Fall vor uns, der sich bei den Eisenbahnwagen in einem fort wiederholt, daß der federnde Träger vielmal so schwer ausfallen muß, vielmal so viel Baustoff beansprucht, als der steifgebaut. Man vergleiche auch nur diese Federn mit den Federstützen, die ihre Kraft aufnehmen. Tatsächlich sind die Federn, die der Maschinenbauer verwendet, weitaus die schwersten aller von ihm gebauten Teile im Verhältnis zu der Last, die sie tragen.

An dieser Stelle sei die neue Feinmessungswage von Salvioni erwähnt. Sie stellt eine Anwendung des Falles I der vorstehenden Tafel dar; der Freitragler ist als feiner Glasstab ausgeführt, der am freien Ende belastet wird. Es heißt, daß auf diese Weise Tausendstel Milligramme noch wägbare seien.

d) Verdrehungs- oder Torsionsfedern. Von diesen Federn ist die weitaus gebräuchlichste die Schraubenfeder, entstanden durch zylindrische Windung der runden oder flachen Stabfeder Nr. VII und VIII, wodurch die Formen IX und X entstehen. Die Verbrauchsziffer  $C$  ist hier zurückgerechnet auf den Elastizitätsmodul  $E$ , während Federung und Nachgiebigkeit auf den Gleitungsmodul  $G = \frac{2}{5} E$  gerichtet sind. Zugleich ist angenommen, daß die einzusetzende Schubspannung nicht über  $\frac{4}{5}$  der statthaften Zugspannung gehen solle; dies ist in die Berechnung der Verbrauchsziffer einbezogen worden\*), zu dem Zwecke, unmittelbaren Vergleich zwischen Biegungs- und Verdrehungsfeder zu gestatten. Die Formel vom Baustoffverbrauch,

$$V = C P f \frac{E}{\mathcal{E}^2}$$

lehrt auch, daß Federn von gleicher Grundform und gleichem Baustoff bei gleicher Sicherheit für dieselbe Federungsarbeit  $Pf$  immer gleichschwer ausfallen. Der Quotient  $E/\mathcal{E}^2$  ist, was den Baustoff angeht, besonders beachtenswert. Er lehrt, daß die Höhe des Elastizitätsmoduls für Federn nicht günstig ist. Federharter Stahl zeigt z. B. nach der Tafel S. 33 den Wert  $E = 25\,000$  bis

\*) In früheren Bearbeitungen hatte ich dies noch nicht getan, hier sind die Werte von  $C$  deshalb etwas größer ausgefallen, als früher.

30000, während gewöhnlicher nur 20000 bis 22000 aufweist, den Nickelstahl eingeschlossen. Ein kleiner Elastizitätsmodul würde für die Bestimmung zur Feder günstig sein. Der Stahl aber, sobald gehärtet und angelassen, macht durch Höhe des Tragmoduls alles wieder gut, da er damit (vgl. S. 33) von 65 bis 150 geht. Der Vergleichung halber setzen wir den Tragmodul  $T$  (Grenze der steigenden Elastizität) ein und haben dann für:

Gußstahl gehärtet und angelassen	$\frac{E}{T^2} = \frac{30\,000}{65^2}$	bis	$\frac{30\,000}{150^2}$	= 7,10 bis 1,33
Gewöhnlichen Stahl (ungehärtet)	$= \frac{20\,000}{25^2}$	=		32,00
Messing	$= \frac{6500}{4,8^2}$	=		282,61
Holz	$= \frac{1100}{2^2}$	=		275,00

wonach sich der gehärtete und angelassene Gußstahl als der weit-aus geeignetste Baustoff für Federn ergibt. Näheres in §. 31.

Man hat nun für rundstäbigen Federstahl Außerordentliches getan für Gleichmäßigkeit und Gleichkräftigkeit (vgl. S. 33), überhaupt gute Beschaffenheit hinsichtlich seiner Anwendung für Federn\*). Als besonders brauchbar zeigt sich der Kohlenstoffstahl, und zwar wird als gute Regel angegeben, für Rundstahl von über 25 mm Dicke 0,70 bis 0,90 Hundertstel Kohlenstoff, für 25 bis 18 mm Dicke herab 0,90 bis 1,10, für 18 bis 12 mm herab 1,10 bis 1,20 ja 1,30 Hundertstel, und endlich für Stäbe unter 12 mm Dicke bis 1,45 Hundertstel Kohlenstoffanteil zu wählen.

Die Kleinheit der Verbrauchsziffer  $C$  bei der runddrähtigen Schraubenfeder gegenüber der der Blattfedern —  $1\frac{1}{4}$  gegen 3 — ist auffallend und empfiehlt diese Federform für Eisenbahnwagen. Hierauf machte ich schon 1857 in der mehrerwähnten Schrift aufmerksam. Gewohnheiten und feste Bestimmungen scheinen den Übergang zu erschweren; nur auf dem Gebiet der Straßenbahnen, ob mit Pferde- oder elektrischem Betrieb, hat die Schraubenfeder die wohlverdiente Würdigung erfahren; ganz kleine gepaarte Blattfedern dienen neben ihr als Geradföhler.

Eine Umrechnung von  $C$  sei vorgeführt an Fall VII. Man hat die Gleichungen  $PR = \mathfrak{S} \pi/16 d^3$  und  $\mathfrak{d} = PRl : \pi/32 d^3 G$ , sowie die Inhaltsgleichung  $V = \pi/4 d^2 l$ . Durch Verbindung der

\*) Vgl. American Machinist vom 8. August 1903, Auszug aus einem Vortrag des Ingenieurs Metcalf, der umfassende Kenntnis des Gegenstandes schon früher bewiesen hat.



Ausdrücke erhält man  $V = 2PR\vartheta G : \mathfrak{E}^2$ , worin  $R\vartheta$  die Federung  $f$ ; also folgt  $V = 2Pf(G : \mathfrak{E}^2)$ . Hierin  $G = \frac{2}{5}E$  und  $\mathfrak{E} = \frac{4}{5}$  der Spannung  $\mathfrak{E}_b$  der Biegungsfeder einfühend, erhalten wir statt der schon günstig scheinenden Verbrauchsziffer  $C = 2$  die noch kleinere  $2 \times \frac{2}{5} \times \frac{25}{16} = \frac{5}{4}$ , so daß nun folgt die Inhalts-gleichung  $V = \frac{5}{4} Pf \frac{E}{\mathfrak{E}^2}$ .

Auch für Fall VIII sei die Umrechnung noch behandelt; sie ist nicht so kurz wie die vorstehende, weil die Werte  $J_p$  und  $W$  nicht so einfach sind. Man hat aber

$$PR = \frac{1}{3} \mathfrak{E} b^2 h^2 : \sqrt{b^2 + h^2} \text{ und } R\vartheta = 3PR^2 l (b^2 + h^2) : \frac{1}{3} b^2 h^2 G.$$

Aus beiden kommt

$$\vartheta = (\mathfrak{E} l : G) (\sqrt{b^2 + h^2}) : (bh) \text{ und daraus } \sqrt{b^2 + h^2} = bh \vartheta G : \mathfrak{E} l.$$

Nun ist ja  $V = bhl$ , also

$$V^2 = b^2 h^2 l^2 = (3PR : \mathfrak{E}) (\sqrt{b^2 + h^2} \cdot l^2).$$

Hierin den gefundenen Wert für die  $V$  einsetzend, erhält man

$$V^2 = 3PRlbbh \cdot \vartheta G : \mathfrak{E}^2,$$

worin  $lbbh$  zur Rechten  $= V$ , weshalb nun folgt  $V = 3PfG : \mathfrak{E}^2$ , d. i. Verbrauchsziffer für Verdrehung  $1\frac{1}{2}$  mal so groß, als vorhin, also  $C = \frac{15}{8}$ .

Daß die runddrähtige Schraubenfeder so günstig ist wie die erste (Fall VII), leuchtet ein, da alle ihre Querschnitte gleich beansprucht sind. Ihre ziffermäßige Berechnung ist nicht ganz einfach, weshalb ein Beispiel.

3. Beispiel. Zu berechnen eine solche Feder für einen Güterwagen, Fig. 65. Belastung durch Fracht und Wagengewicht sei 3750 kg, wobei  $f = 45$  mm werden soll. Der Drehungsmodul  $G$  des Stahldrahtes betrage 6800 kg. Da es erwünscht ist, für die Drahtdicke  $d$  eine runde Zahl zu erhalten, nehmen wir  $d$  an, d. h. berechnen für mehrere Werte desselben den Windungshalbmesser  $R$ . Wir wählen nacheinander

$$d = 26 \quad 27 \quad 28 \quad 29 \text{ mm}$$

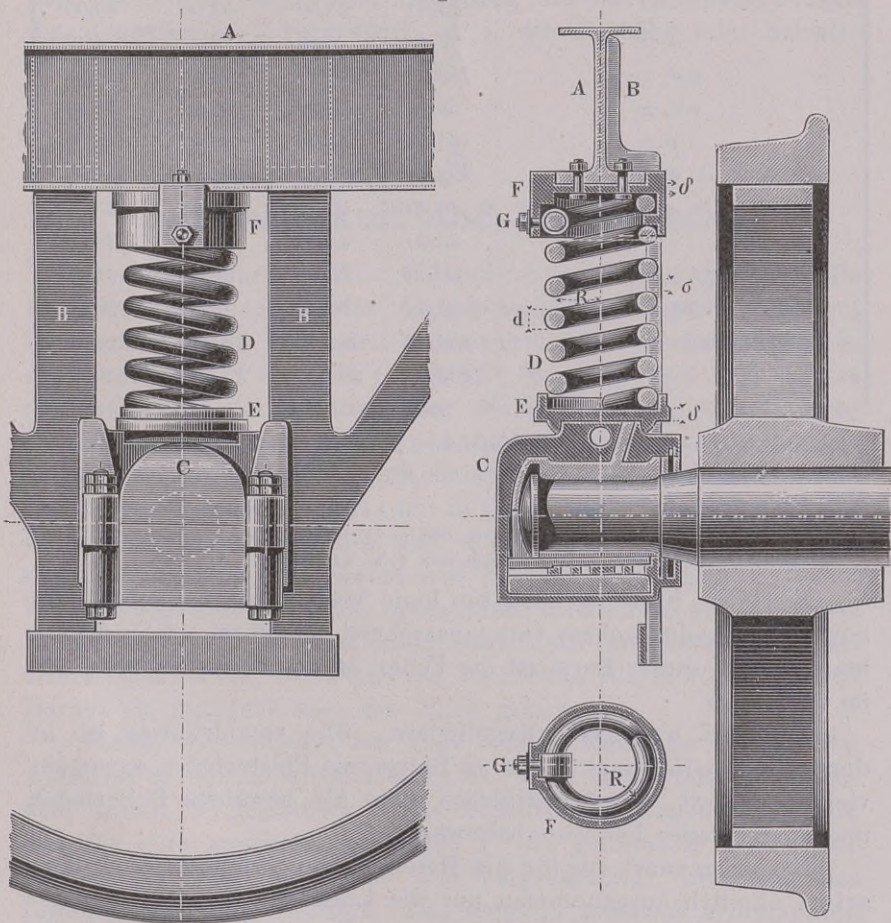
und ermitteln die Anzahl  $n$  der Windungen, die die Feder erhalten muß, damit  $f = 45$  werde. Für  $n$  ist genügend angenähert  $2\pi Rn =$  der Drahtlänge  $l$ , oder, gemäß Formel bei IX,  $f = 2 \mathfrak{E} \cdot 2\pi R^2 n : Gd$ , woraus  $n = fGd : 4\pi \mathfrak{E} R^2$ . Der Abstand der Kappe  $F$  von der Sohlplatte  $E$  müßte nun mindestens  $= nd + f$  sein; indessen müssen wir bei zusammengepreßter Feder noch zwischen den Gängen einen gewissen Spielraum  $s_0$  bestehen lassen, damit die Feder noch frei schwingen kann. Es sei  $s_0 = 8$  mm.

Darauf können wir die Steigung  $s$  der Schraubengänge der unbelasteten Feder ermitteln. Dieselbe beträgt:

$$s = \frac{nd + f + n\sigma}{n}$$

Die Gesamthöhe der unbelasteten Feder, wie sie aus der Werkstätte kommt, ist nun aber noch um  $1,5s + d$  größer als  $ns$ , weil oben die Feder

Fig. 65



Schraubenfeder für Güterwagen

um  $1\frac{1}{2}$  Windungen in die Kappe  $F$  hineinreichen soll, und weil unten und oben je  $\frac{1}{2}$  Drahtdicke hinzukommt. Zählen wir hierzu endlich noch die Bodenstärke  $\delta$  der Kappe  $F$  und die der Sohlplatte  $E$ , die wir jede mit 13 mm einführen können, so erhalten wir die Höhe des ganzen Federwerkes. Dieselbe darf nicht größer ausfallen, als der zwischen der Langwinde  $A$  und dem Lager  $C$  verfügbar bleibende größte Abstand. Dieses Maß beträgt bei



der, der obigen Figur zu Grunde gelegten Zeichnung 350. Man erhält nun aus den angedeuteten Rechnungen die folgenden Zahlenergebnisse.

$d =$	26	27	28	29
$R = \dots\dots$	43,30	48,40	54,10	60,03
$\sim \dots\dots$	43,00	48,00	54,00	60,00
$n = \dots\dots$	7,27	6,63	4,97	4,17
$nd = \dots\dots$	189,02	176,01	139,16	120,93
$n\sigma = \dots\dots$	58,16	53,04	39,76	33,36
$f = \dots\dots$	45,00	45,00	45,00	45,00
$n(d + \sigma) + f = \dots\dots$	292,28	277,05	223,92	199,29
$s = \dots\dots$	40,20	41,79	45,05	47,78
$\sim \dots\dots$	40,00	42,00	45,00	48,00
$1,5s = \dots\dots$	60,00	63,00	67,50	72,00
$2d = \dots\dots$	26,00	26,00	26,00	26,00
Gesamthöhe $= \dots\dots$	404,28	393,05	344,42	326,29
$\sim \dots\dots$	404,00	393,00	344,00	326,00

Die beiden ersten der Schlußwerte sind zu groß, die beiden letzten dagegen brauchbar, da sie kleiner als der verfügbare Wert 350 mm sind. Man kann daher nehmen:

$$d = 28 \text{ mm mit } s = 45 \text{ mm}$$

$$\text{oder } d = 29 \text{ mm mit } s = 48 \text{ mm.}$$

Fall X. Statt flachdrähtig kann man diese Schraubenfeder auch mit quadratischem Gangquerschnitt ausführen; d. i.  $b = h$  machen. In dieser Form ist die Feder an Straßenbahnwagen viel im Gebrauch.

Fall XI und XII, Kegelfedern. Die runddrähtige ist in doppelter Ausführung, Spitze an Spitze, als Polsterfeder ungemein viel angewandt, die flachdrähtige dient als bewährte Bufferfeder und Anzugsfeder bei Eisenbahnwagen.

Bemerkenswert ist für die Mehrzahl der aufgeführten Federarten, nämlich ausgenommen nur die Luftfeder und die Gummifeder, daß bei ihnen die Federung oder Verschiebung  $f$  des Lastpunktes proportional der Belastung ist, und zwar gilt dies für positive wie negative Belastung. Dieser Umstand hat zur Folge, daß die Schwingungen, die die belastete Feder macht, in die Klasse der „einfachen“ oder „pendelartigen“ (Helmholtz) fallen und eine leicht berechenbare Dauer haben. Bei Vernachlässigung des Federgewichtes schwingen nämlich die genannten Federn wie

einfache Pendel von der Länge  $f$ , so daß die Zeit  $t$  eines Hinganges oder eines Herganges ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{f}{g}} \dots \dots \dots (52)$$

wobei  $g$  = der Beschleunigung der Schwere = 9,81 m ist. Bei den Spieluhren wird durch Belastung der schwingenden Zungen die Pendellänge  $f$  vergrößert, d. i. die Tonhöhe oder Schwingungszahl künstlich herabgezogen.

### §. 31

## Stoßfestigkeit und Körperinhalt

Die Inhaltsformel  $V = CPf(E:\mathfrak{E}^2)$ , die wir nun für alle Festigkeitsarten außer der Strebfestigkeit als gültig erkannt haben, war schon lange ermittelt, wurde aber wesentlich nur in der Anordnung  $Pf = (V:C)(\mathfrak{E}^2:E)$  beachtet, auch dies nur im allgemeinen als Betrachtung über die mechanische Arbeit, nicht für die eigentlichen baulichen Aufgaben. Früh habe ich allerdings auf sie wegen ihres Aufschlusses über den Baustoffaufwand hingewiesen\*), aber auch das nur in Betreff stark federnder Körper. Im Vorausgehenden hat sich nun wiederholt gezeigt, daß sie auch für die Berechnung möglichst steif herzustellender Bauteile recht wertvoll sein kann, wie sich in mehreren Richtungen ergab. Einen Punkt haben wir indessen dabei noch nicht eingehend genug erörtert. Das ist der, betreffend die wirklichen Werte von  $E$  und  $\mathfrak{E}$ . Darauf sei nunmehr noch der Blick gekehrt.

Fassen wir zunächst ins Auge, welche Rolle der Elastizitätsmodul  $E$  in der Inhaltsformel spielt. Sein Wert steht im Zähler dem Inhalt  $V$  gegenüber. Das bedeutet die Eigentümlichkeit, daß für eine gegebene Belastung  $P$  bei geforderter Größe der Nachgebung  $f$  ein höheres  $E$  eine Vergrößerung, Steigerung des Baustoffaufwandes erfordert. Das steht in scharfem Widerspruch mit der herkömmlichen Meinung, die genau das Umgekehrte annimmt\*\*). Der kleine Elastizitätsmodul des Gußeisens spricht

\*) In der mehrerwähnten Schrift von 1857 über die Federn.

\*\*\*) Vgl. im Engineering Record vom August 1903 den eingehenden Vortrag des hervorragenden Kenners des Nickelstahls, A. L. Colby, vor der amerikanischen Ges. für Baustoffprüfungen. Darin wird das bestehende „Vorurteil“ bekämpft, daß der Nickelstahl den „Fehler“ habe, einen zu



für die Verwendung des letzteren in Bodenplatten, Bankbetten und andern Gestellteilen mit wesentlicher Druckbelastung. Das kommt auch neuerdings zu besonderer Geltung, wo die Schnellstähle so bedeutend gesteigerte Ansprüche an die Bankbetten stellen. Die Kleinheit von  $E$  ist aber auch für das Verhalten von Bauteilen gegen lebendige Kräfte von Wichtigkeit. Denn das Produkt  $Pf$  kann auch als Ausdruck einer mechanischen Arbeit angesehen werden, einer mechanischen Arbeit, der zu widerstehen der Bauteil vermöge seines Inhaltes  $V$ , vermöge seiner Stoffkräfte  $E$  und  $\mathfrak{S}$  und vermöge seiner Verbrauchsziffer  $C$  mehr oder weniger geeignet ist. Denn der Wert  $\frac{1}{2} Pf$  ist gleich der lebendigen Kraft  $\frac{1}{2} mv^2$  der stoßenden Masse  $m$ , die mit der Schnelle  $v$  in der Richtung von  $P$  auftritt, ohne den Bauteil zu zerstören. Diese Masse und diese Stoßschnelle können aber einem Geschloß angehören. Daher haben wir für diesen wichtigen Fall aus der obigen Inhaltsformel zu folgern, daß ein niedriger Elastizitätsmodul bei sonst gleichen Umständen für Panzer günstig sein würde. Der gebräuchlichen Meinung steht dies entgegen.

Einen ungleich größeren Einfluß als  $E$  übt ja aber die in Betracht kommende Spannung  $\mathfrak{S}$  aus, da sie in der zweiten Potenz steht. Sie wird für haltbar sein sollende Bauwerke, seien sie statisch, seien sie dynamisch beansprucht, stets innerhalb der Elastizitätsgrenzen eingeführt, wie wir in §. 7 ausführlich begründet haben. Um eine Übersicht zu ermöglichen, wollen wir sie hier mit ihrem größten zulässigen Wert, dem Tragmodul  $T$  — in der Regel wird es der Zug-Tragmodul  $T_z$  sein — in die Rechnung einführen. Der Quotient  $E:T^2$  wird alsdann als Anhalt für den Baustoffaufwand bei gegebenem Angriffsstoß, oder andererseits für die Widerstandsfähigkeit bei gegebenem Körperinhalt dienen können. Wir wollen, da er aus Spannungswerten gebildet ist, den Quotienten

$$\frac{E}{T^2} \text{ den „Spannungsquotienten“}$$

nennen. Hier folgt nun eine Zusammenstellung der Spannungsquotienten für eine Reihe der in §. 4 aufgeführten Baustoffe, vor allem der Baumetalle.

---

kleinen (!) Elastizitätsmodul zu besitzen. Der Vortragende gibt zu, daß bei einem Nickelanteil von  $\frac{20}{100}$  der Modul  $E$  kleiner sei, als beim Kohlenstoffstahl, hebt aber hervor, daß bei  $\frac{4}{100}$  Nickel  $E$  so groß sei wie beim Kohlenstoffstahl. Wir sahen oben, daß es einen Vorzug für den Nickelstahl bedeuten würde, wenn die Zweifler recht gehabt hätten.

## Spannungsquotienten

Schmiedeeisen . . . . .	1)	bei $E = 20\,000$ und $T = 15$	liefert $\frac{E}{T^2} = 89$
Schmiedeeisen . . . . .	2)	" $E = 20\,000$ " $T = 15$	" " = 62
Schmiedeeisen . . . . .	3)	" $E = 15\,000$ " $T = 12$	" " = 104
Eisenblech . . . . .	"	" $E = 20\,600$ " $T = 15$	" " = 89
Flußeisen . . . . .	1)	" $E = 20\,600$ " $T = 26$	" " = 31
Flußeisen . . . . .	2)	" $E = 20\,600$ " $T = 22$	" " = 43
Martineisen . . . . .	1)	" $E = 20\,600$ " $T = 13$	" " = 122
Martineisen . . . . .	2)	" $E = 20\,600$ " $T = 15$	" " = 92
Gußstahl . . . . .	1)	" $E = 20\,000$ " $T = 25$	" " = 32
Gußstahl, hart . . . . .	2)	" $E = 25\,000$ " $T = 65$	" " = 6
Stahlguß . . . . .	1)	" $E = 20\,000$ " $T = 19$	" " = 56
Stahlguß . . . . .	2)	" $E = 20\,000$ " $T = 22$	" " = 41
Stahlguß . . . . .	3)	" $E = 20\,000$ " $T = 27$	" " = 25
Nickelstahl . . . . .	1)	" $E = 21\,000$ " $T = 35$	" " = 17
Nickelstahl . . . . .	2)	" $E = 21\,000$ " $T = 48$	" " = 9
Nickelstahl*) . . . . .	3)	" $E = 21\,000$ " $T = 56$	" " = 6,7
Nickelstahl, hart . . . . .	4)	" $E = 21\,000$ " $T = 54$	" " = 7,2
Gußeisen . . . . .	"	" $E = 10\,000$ " $T = 7,6$	" " = 178
Messing . . . . .	"	" $E = 6\,500$ " $T = 4,8$	" " = 283
Rotguß . . . . .	1)	" $E = 3\,200$ " $T = 4$	" " = 200
Rotguß . . . . .	2)	" $E = 3\,200$ " $T = 8$	" " = 50
Bauholz, deutsches . . . . .	"	" $E = 1\,000$ " $T = 2$	" " = 250

Die Aufstellung macht nicht auf Vollständigkeit Anspruch, zumal manche Werte aus Angaben verschiedener Herkunft herausgehoben werden mußten; immerhin aber gewährt sie einen Überblick. Ordnen wir die Quotienten nun nach ihrer Höhe, so wird die Reihe wie folgt.

## Spannungsquotienten

nach der Höhe geordnet

Messing . . . . .	$\frac{E}{T^2} = 283$	Rotguß (2) . . . . .	$\frac{E}{T^2} = 50$
Bauholz . . . . .	" = 250	Flußeisen (2) . . . . .	" = 43
Rotguß (1) . . . . .	" = 200	Stahlguß (2) . . . . .	" = 41
Gußeisen . . . . .	" = 178	Gußstahl (1) . . . . .	" = 32
Martineisen (1) . . . . .	" = 122	Flußeisen (1) . . . . .	" = 31
Schmiedeeisen (3) . . . . .	" = 104	Stahlguß (3) . . . . .	" = 25
Martineisen (2) . . . . .	" = 92	Nickelstahl (1) . . . . .	" = 17
Schmiedeeisen (1) . . . . .	" = 89	Nickelstahl (2) . . . . .	" = 9
Eisenblech . . . . .	" = 89	Nickelstahl (4) . . . . .	" = 7,2
Schmiedeeisen (2) . . . . .	" = 62	Nickelstahl (3) . . . . .	" = 6,7
Stahlguß (1) . . . . .	" = 56	Gußstahl (2) . . . . .	" = 6

\*) Nach Colby, Eng. Record 22. 8. 1903, bei Gewehrläufen neuester Herstellung.



Der Einblick, den die Liste gewährt, ist in verschiedenen Richtungen lehrreich. Man wolle bei ihrer Betrachtung nicht vergessen, daß es sich bei  $E$  und bei  $T$  immer um kg auf 1 qmm des ursprünglichen Querschnittes des Probekörpers handelt. Zwar sind die Abstufungen stellenweis noch zu sprunghaft. Das liegt aber zum Teil daran, daß die neueren Stahlsorten kaum als fertig anzusehen sind\*). Im Ganzen aber werden die Zahlen als brauchbar gelten können. Ins Auge fällt der absteigende Verlauf vom Baustoff Gußeisen mit 178 zum gehärteten Gußstahl mit 6, oder auch schon zum ungehärteten Nickelstahl mit Quotient 9. Bemerket sei dazu, daß ich vom Gußeisen die gewöhnlichen Sorten, nicht eine verfeinerte (sieh unten), aufgenommen habe, sodann daß auch andererseits die höchsten Gußstahlsorten weggelassen sind. Hervorzuheben ist hier, daß wir oben in §. 17 bei den Vergleichen der Baustoffaufwendungen nur den einzigen Baustoff Gußeisen, dem, wie wir sehen, der Spannungsquotient 178 zukommt, eingeführt haben. Würde Nickelstahl (2) angewandt, so würde der Stoffaufwand sich auf  $9 : 178 =$  nahe dem 20<sup>sten</sup> Teil herausstellen, bei gehärtetem Gußstahl (2) sogar auf  $6 : 178 =$  nahe dem 30<sup>sten</sup> Teil. Bei solchen Vergleichen von Bauwerken oder Bauteilen wird man übrigens die Verbrauchsziffern  $C$  stets zu beachten haben; diese sind in den vorstehenden Listen ja sämtlich gleich gesetzt, d. h. nicht in die Berechnung aufgenommen worden.

Ein helles Licht wirft letztere auf die neueren Bewegungen im Panzerplattengebiet. Trotz der Steigerung der Geschößschnelle und -Schwere haben die Stahlhütten es erstaunlicherweise vermocht, mit weit geringeren Plattendicken als früher auszukommen; auch erachten sie jetzt die Spitzgeschosse, die eine Zeitlang so

---

\*) Stellen doch z. B. die beiden Baubehörden der zwei neuesten, staatlich im Bau begriffenen Brücken über den East-River vor Neuyork — Manhattan-Brücke und Blackwells-Insel-Brücke — verschieden hohe Anforderungen an den zum Bau zuzulassenden Nickelstahl erster Güte.

Die eine verlangt		Die andere verlangt	
für ausgeglühten Nickelstahl:		für nicht ausgeglühten Nickelstahl:	
$T_z = 33,6$	$B_z = 59,5 \text{ kg}$	$T_z = 36,4$	$B_z = 63 \text{ bis } 73,5 \text{ kg}$
(48000 Pfd.)	(85000 Pfd.)	(52000 Pfd.)	(90000 bis 105000 Pfd.)

Beide Forderungen gelten für die wichtigsten auf Zug beanspruchten Teile; für die weniger wichtigen Bauteile werden geringere Festigkeitsansprüche gestellt. Die beiden Brücken werden die größten bisher aus Nickelstahl ausgeführten Bauwerke sein. Man rechnet darauf, den erstgenannten Übergang bis 1906 fertig zu stellen.

unwiderstehlich schienen, nicht mehr für wirksamer, als die stumpfen. Mit Recht wird beides der eingeführten Härtung der Platten zugeschrieben. Härten heißt nämlich hier nicht: scharf und schneidig machen, sondern einfach: einen höheren Tragmodul verleihen. Wie sehr das wirken kann, zeigen die letzten Werte der Liste. Es ist zwar zu beachten, daß bei der Panzerhärtung ein Teil der Plattenmasse noch weich bleibt; der Vergleich indessen, den die Inhaltsformel gewährt, bleibt dennoch zulässig. Zieht man z. B. Schmiedeseisen (1) heran, dessen Spannungsquotienten die Liste mit 89 beziffert, und vergleicht diesen nun mit dem vom Nickelstahl (2), d. i. 9, so findet man, daß letzterer Baustoff theoretisch 9 : 89 oder rund  $\frac{1}{10}$  der Baustoffmenge von früher erfordern würde. Verständlich wird daraus bei Berücksichtigung der praktischen Nebeneinflüsse, als Aufbau, Panzerstützen usw., daß das Dickenverhältnis  $\frac{4}{10}$  vom ehemaligen, von dem berichtet worden ist, sich verwirklicht hat.

Bemerkenswert für allen unseren Stahl ist das Haften des Elastizitätsmoduls an der Gegend von 20 000 (29 Millionen bei engl. Maß). Könnte man es dahin bringen,  $E$  kleiner, vielleicht so klein wie bei Gußeisen hüttenmännisch herauszubringen, ohne vom Tragmodul  $T$  etwas herzugeben, so würde die Panzerplatte abermals einen beträchtlichen Gewinn davontragen\*). „Hoher Tragmodul, verbunden mit niederem Elastizitätsmodul“, ist das Erstrebenswerte. Das würde auch für die Friedensbauten von großem, ja um so größerem Werte sein, weil bei ihnen die Sprengstückwirkungen nicht in Betracht kommen. Für Brückenbauten, wo die Spannweiten so große Forderungen an die Baustoffbeschränkung stellen, würden dabei die statischen, wie auch die dynamischen, die Stoßwirkungen, die die Fuhrwerke ausüben, zugleich Berücksichtigung finden. Die rege Forschungstätigkeit in der Stahlbereitung hat zwar bis jetzt eher auf Steigerung als auf Verminderung von  $E$  hingearbeitet; wenn aber das bisher gar nicht anvisierte Ziel einmal ins Auge gefaßt wird, ist doch vielleicht Erfolg zu erwarten (vgl. freilich unten); jedenfalls aber sind noch Steigerungen von  $T$  in nahe Aussicht gestellt. Unsere Quotienten-

---

\*) Neuere, in Österreich angestellte Versuche, bei denen Kanonenrohre durch Sprengung von Granaten im Geschützlauf geprüft wurden, sind dem Vernehmen nach zu Gunsten der Geschützbronze gegenüber Stahl ausgefallen. Nach Vorstehendem möchte die Kleinheit von  $E$  bei Bronze (3200) hierbei eine beachtenswerte Rolle gespielt haben.



liste wird, wenn sich die Aussicht verwirklicht, weil  $T$  in der zweiten Potenz im Nenner vorkommt, zum Vorteil des Bauwesens nach unten vervollständig werden können.

Die Inhaltsformel kann noch auf eine andere Form gebracht werden, die geeignet ist, den Überblick zu erleichtern. Auf S. 110 wurde mit Rücksicht auf §. 7 die Gleichung gebildet:  $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} P f$ . Sie weist links einen Ausdruck für die „lebendige Kraft“ des angreifenden Körpers auf; dem gegenüber kann man wohl den Ausdruck zur Rechten die „lebendige Festigkeit“ des angegriffenen Körpers nennen, wobei wir von den Massenwirkungen absehen. Bezeichnen wir die erstere Größe mit  $L_k$ , die andere mit  $L_f$ , so stellt sich die Bedingung für die Haltbarkeit des wesentlich mit Stoßwirkung angegriffenen Körpers so dar, daß dafür:

$$L_f \geq L_k$$

sein, d. i.: die lebendige Festigkeit des angegriffenen Körpers gleich oder größer sein muß, als die lebendige Kraft des angreifenden. Genügt die lebendige Festigkeit dieser Bedingung nicht, so wird der angegriffene Teil zerstört oder doch bleibend verformt.

Den höchsten Wert erreicht  $L_f$ ; gemäß der Formel  $V = C P f (\mathcal{E}^2 : E)$  wenn

$$L_f = \frac{P f}{2} = \frac{V}{2C} \frac{T^2}{E} \dots \dots \dots (33)$$

Man hat bei älteren Untersuchungen den Wert  $(\mathcal{E}^2 : E)$  gelegentlich den „Arbeitsmodul“ genannt; viel gebraucht hat man diesen seinen gewiß richtig gebildeten Namen nicht. Hier sehen wir, daß wir seinen Höchstwert  $(T^2 : E)$  den „Modulus der lebendigen Festigkeit“ nennen können. Die Werte dieses Moduls sind die Umkehrungen der Spannungsquotienten auf S. 111.

Es kann noch gefragt werden, wie es mit den Druck- und Zugelementen, den „Fluden“ und „Tracken“, in Beziehung auf ihre Rauminnahme, wenn sie als Kraftträger dienen sollen, aussieht. Für Wasser hat man nach §. 36 den Wert  $E = 200$ ; Pressungen von 1000 at überträgt Wasser leicht. Damit ergibt sich der Quotient  $E : \mathcal{E}^2$  zu  $200 : 10^2 = 2$ ; der Wasserstrang ist also als Stoßkraftträger dem Stahl ähnlich zu verwenden. Für neue Hanfseile ist nach §. 37 etwa zu setzen  $E = 250$  und  $T_z = 5$ ; damit ergibt sich der Spannungsquotient  $E : T^2 = 250 : 25 = 10$ . Das Seil ist also mindestens fünfmal so raumbedürftig bei Kraftübertragung, als das Wasser.

## §. 32

## Über die Zusammensetzung des Eisens

In §. 3 wurde vorübergehend bemerkt, daß bei den Metallen die Annahme der Gleichartig- und Gleichkräftigkeit weniger gut zuträfe; diese Bemerkung, aus der wir dort vorläufig nur folgerten, daß die immer wieder erneuerten Festigkeitswägungen für die Metalle wichtig seien, war darin begründet, daß bei den technischen Metallen ungleichartige Zusammensetzung schon länger bekannt war. Überraschen konnte sie nicht bei Legierungen zu Bronze, sie wurde ja auch absichtlich herbeigeführt beim Schalen-  
guß. Sie findet sich aber auch bei solchem Eisen, das ganz gleichartig scheint, sobald man dessen inneren Bau recht scharf ins Auge faßt\*). Die Bedeutung dieser Zusammensetzung für die technischen Eisensorten wird mehr und mehr erkannt; daher sei hier unter Hinweis auf die neueren Forschungen auf diesen inneren Aufbau des Eisens in Kürze eingegangen.

Es sind die wissenschaftlichen Versuche an Feinschliffen, die da zeigen, daß das Eisen, aus dem wir bauen und mit dem wir schneiden, eine „granitisch“, d. h. körnigt zusammengesetzte, nicht eine einheitliche Masse ist. Zu dieser Erkenntnis hat das Mikroskop bei der Prüfung des Kleingefüges verschiedener Eisengattungen geführt. Als Hauptbestandteile des Eisens haben sich deutlich zwei Körper ergeben:

---

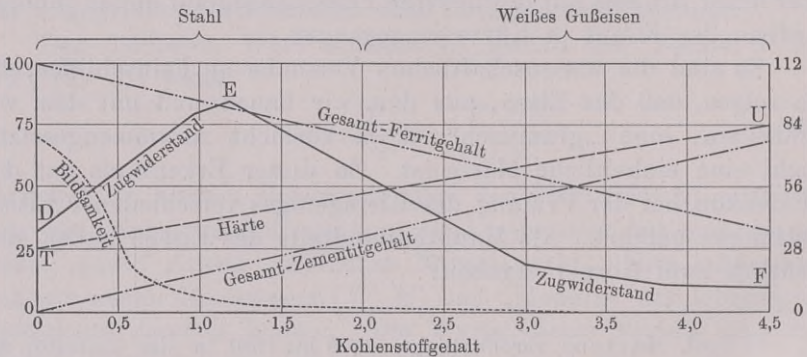
\*) Prof. Martens veröffentlichte 1878 bis 1880 in der Zeitschr. des Vereins Deutscher Ingenieure eine Reihe von Mitteilungen „über das Kleingefüge des Roheisens“, die zum Teil in den Berliner Verhandlungen wiedergegeben wurden. Sieh sodann in Glasers Annalen Bd. XXX, 1892, S. 201, Martens „Über die mikroskopische Untersuchung der Metalle“ und in Stahl und Eisen 1892 Martens, „Das Gefüge der Schienenköpfe“. Sieh ferner: Mitteilungen der Königl. technischen Versuchsanstalten 1898, Ingenieur (jetzt Professor) Heyn, „Mikroskopische Untersuchungen an tiefgeätzten Eisenschliffen“, worin die Verfahrungsweisen eingehend dargestellt sind, desgl. darangeschlossene spätere Mitteilungen; sodann: Freiherr Jüptner v. Jonstorff, „Das Gefüge des Eisens nach neueren Anschauungen“, sehr lehrreicher Vortrag vom 3. Juni 1901 in V. f. Gewerbleiß; ferner Prof. Henry M. Howe, „The Metallography of Iron and Steel“, Engineering Magazine, Vol. XXV, Neuyork 1903, mit vorausgehender, inzwischen auch gesondert erschienener Einleitung „Introduction to the Study of Alloys“ u. a. mehr.



1. Ferrit, d. i. wesentlich reines metallisches Eisen, chemisch geschrieben Fe, weich, sehr bildsam, darin dem Kupfer ähnlich, mäßig fest, gut elektrisch leitend,
2. Zementit, ein Eisencarbid, chemisch geschrieben  $\text{Fe}_3\text{C}$ , hart, härter als Glas, spröde, splitterig, also nicht bildsam, aber sehr zugfest in der Achsenrichtung seiner Gefügeteile.

Aus diesen beiden, so grundverschiedenen Körpern, der eine weich, der andere hart und britzelig, der eine nur mittelfest nach allen Seiten, der andere sehr fest in einer einzigen Richtung, bauen sich die gebräuchlichen Eisensorten bestimmend auf und verdanken ihnen — abgesehen vom gehärteten Stahl, wovon später — die wichtigsten Eigenschaften. Die Einflüsse der Beimengungen von Graphit und Schlacke treten dabei so weit zurück, daß sie bei einem allgemeinen Überblick vernachlässigt werden können. Einen derartigen Überblick zu gewähren, ist die folgende zeichnerische Darstellung von Prof. Howe bestimmt.

Fig. 66



Graphitfreier Stahl und weißes Gußeisen

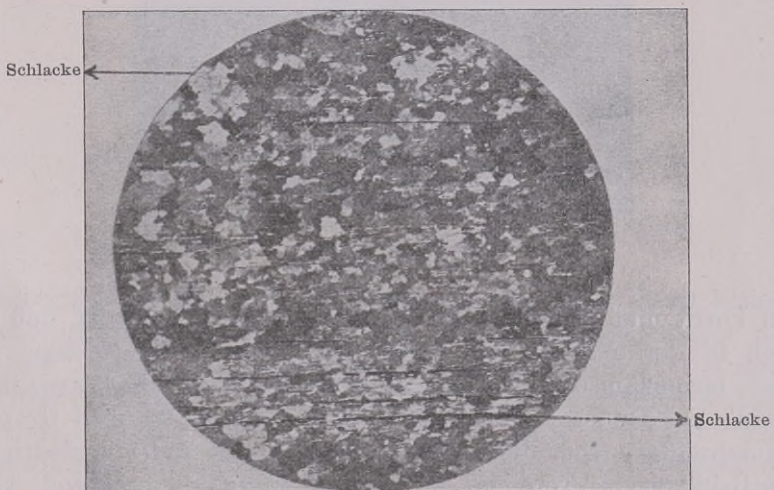
Ferrit und Zementit sind hier zunächst als die einzigen das gebräuchliche Eisen bildenden Elemente hingestellt. Sie ergänzen einander stets zu der Einheit von 100 Hundertsteln, Ferrit von 100 bis herab zu 32, Zementit von 0 bis zu 68 Hundertsteln. Mit dem Gehalt an Zementit steigt einfach der Kohlenstoffanteil, wie durch die Einteilung der Grundlinie angegeben ist. Das hat in der Praxis dahin geführt, beim Stahl für den Anteil an Zementit den an Kohlenstoff zu zählen. Von einem Schienenstahl z. B., der wesentlich aus 92,5 Teilen Ferrit und 7,5 Teilen Zementit besteht, sagt man, er enthalte 0,5 Hundertstel Kohlenstoff, vgl. die Figur,

indem  $\frac{1}{15}$  rund das Verhältnis zwischen Zementit und seinem Kohlenstoff ausdrückt.

Links in Fig. 66 steht Schmiedeeisen, dem aller Zementit fehlt. Eine kleine Beimengung von Zementit, also auch Kohlenstoff, läßt aber schon Stahl entstehen. Bei 30 Zementit oder rund 2 Kohlenstoff beginnt schon das Gußeisen, das sodann bei fernerer Steigerung des Zementitanteils völlig in weißes übergeht.

Die Widerstandsfähigkeit gegen Zug wird durch den Zementitgehalt stark beeinflußt, und zwar anfänglich rasch gesteigert bis zu einem Höchstwerte von  $B_z$ , der bei etwa 85 Ferrit und 15 Zementit liegt; weiterhin fällt  $B_z$  fortwährend bis zu Ende, wie die Kurve angibt. Diese Kurve stellt in ununterbrochener Folge eine große Reihe von Werten dar, von denen wir in der Zusammenstellung von §. 33 einzelne vor uns hatten. Die Härte des Gemisches steigt stetig und gleichmäßig mit dem Zementitgehalt; die Bildsamkeit dagegen fällt bei zunehmendem Zementitanteil rasch ab.

Fig. 67



Schmiedeeisenstab

Gehen wir nun von diesem theoretischen Gesamtbilde zu einzelnen mikroskopischen „Eisenbildern“, wie ich sie nennen möchte, über. Zuerst zu einem Stück Längsschnitt eines Schmiedeeisenstabes (nach Howe), Fig. 67.

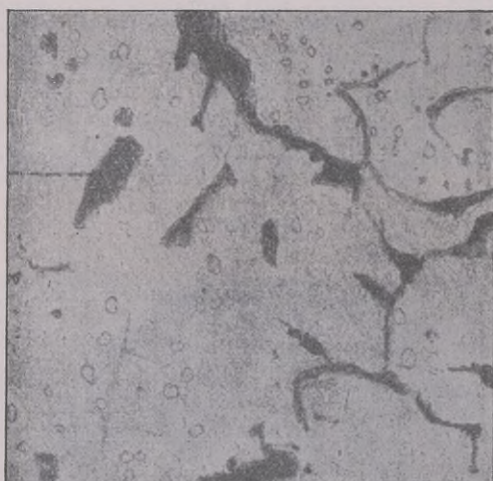
Er besteht aus kristallisiertem Ferrit, dem aber in dünnen



Schichten Schlacke zugemischt ist. Die Bearbeitung zwischen den Walzen und unter den Hämmern hat die Schlackenklümpchen zu dünnen Blättern oder Fäden ausgezogen. Die Ferritkristalle liegen, wie bei neunfacher Vergrößerung des geätzten Flächenstückes ersichtlich geworden ist, in verschiedenen Stellungen dicht nebeneinander.

Das folgende Eisenbild (nach v. Jonstorff) zeigt in 150facher Vergrößerung graues Roheisen, abgeschliffen, aber ungeätzt. Die schwarzen Stellen bedeuten Graphit, die grauen eine Verbindung

Fig. 68



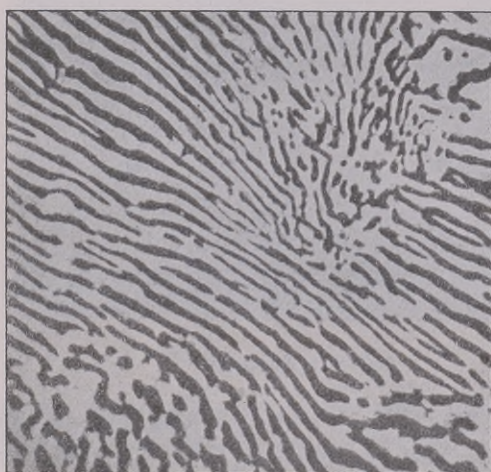
Graues Roheisen

von Ferrit und Zementit, die so reich an Kohlenstoff ist, daß sie auch in der Wärme nicht mehr schmiedbar oder bildsam ist. Nach fachmännischer Ansicht wäre die Kleinheit des Elastizitätsmoduls des Gußeisens dem so wenig widerstandsfähigen Graphit zuzuschreiben, daher die Aussicht, hohen Tragmodul mit niedrigem Elastizitätsmodul vereinigt zu finden, wenig versprechend wäre (vgl. §. 31). Prüfwert bleibt die Sache immerhin.

Die soeben formlos erscheinende Verbindung von Ferrit mit Zementit bildet unter Umständen klare Schichtung oder Gegensetzung. Da ist zunächst der „Perlit“. Er ist kein eigentliches Elementarbestandteil von Eisen, sondern ein, und zwar recht wichtiges Gemenge der beiden Eisenformen Zementit und Ferrit, im ungefähren Gewichtsverhältnis 1 zu 6, ein Gemenge aber, das

gewöhnlich fast regelmäßig gelagerte, abwechselnde, blättchenartige Schichtungen bildet. Fig. 69 führt ein charakteristisches Beispiel (nach Howe) vor Augen. Ihren Namen hat die Verbindung nach einer Äußerlichkeit erhalten, nämlich davon, daß beim Schleifen sich der weiche Ferrit viel tiefer ausreißt, als die harten Zementitblättchen, wodurch ein Gefüge entsteht, das bei schwachen Vergrößerungen ein irisierendes Farbenspiel wie Perlmutter zeigt. Die in der Figur dunkel dargestellten Zementitblättchen sehen in Wirklichkeit weiß aus; nur die photographische

Fig. 69



Perlit

Wiedergabe hat sie dunkel erscheinen lassen. Der Perlit kommt namentlich im ungehärteten Stahl vor — der abgebildete war bei 800° C ausgeglüht worden — und zwar um so stärker, je mehr der Kohlenstoffanteil beträgt; bei 0,8 bis 0,9 Hundertstel Kohlenstoffanteil besteht der Stahl (nach Howe) ganz aus Perlit. Eine merkwürdige Beobachtung ist\*) vor der Birminghamer Metallurgischen Gesellschaft neuerdings durch Mr. Jude vorgetragen worden; nach ihr fände Bruch mit aller Regelmäßigkeit so statt, daß die Bruchlinien im Ferrit den Zementitgrenzen folgten.

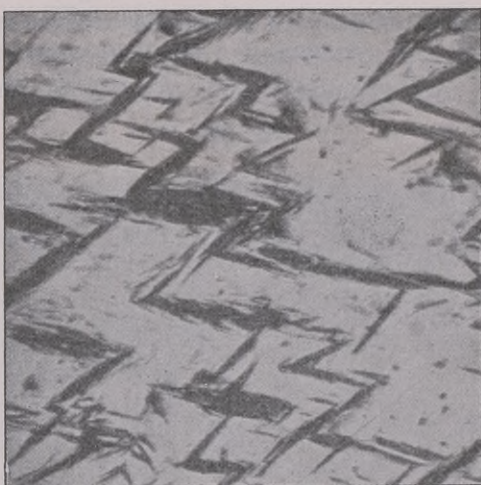
Eine weitere Elementenverbindung, und zwar nur in gehärtetem Stahl, ist der „Austenit“, benannt nach dem englischen Forscher Roberts-Austen. Die Anwesenheit von Austenit zeigt

\*) Nach dem American Machinist vom 5. Dezember 1903, S. 909 E.



stattgehabte Härtung an; er findet sich nur in solchem kohlenstoffreichen Stahl, der nach hoher Erhitzung in sehr kalter Flüssigkeit abgeschreckt worden ist. Ein Austenitbild (nach Howe) gibt Fig. 70.

Fig. 70



Austenit

Die hellen Flächenteile bedeuten Austenit, die dunkeln Zementit. Kohlenstoffgehalt des Musters etwa 1,5 v. H.; erhitzt war es worden auf  $1050^{\circ}\text{C}$  und abgekühlt in Eiswasser.

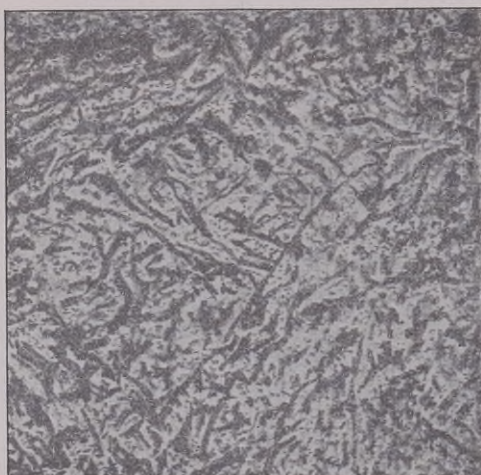
Ebenfalls im gehärteten Stahl kommt vor der „Martensit“, benannt nach dem Leiter der Berliner Versuchsanstalten. Die Zusammensetzung des Martensits ist zur Zeit noch nicht mit Sicherheit festgestellt; er ist aber ein Übergangsgebilde zwischen Austenit einerseits und Ferrit mit Zementit andererseits. Fig. 71 zeigt (nach v. Jonstorff) ein Gemisch, eine Schmelze von Martensit in Austenit. Die dunkeln, nadelartigen Kristallbildungen sind Martensit, die hellen Gebilde Austenit. Erhitzt man gehärteten Stahl auf eine gewisse Stufe, so wandelt er sich um, indem Martensit in Perlit übergeht.

Ein ferneres Formelement im Stahl ist der „Troostit“, benannt nach dem französischen Gelehrten Troost, und erst in jüngerer Zeit durch Chatelier als ein Eisencarbid bestimmt, das sich in Stahl bei nicht gar hoher Härtungswärme bildet.

Zu erwähnen ist endlich auch der „Sorbit“, benannt nach

dem eigentlichen Begründer der Mikrometallurgie, dem englischen Arzt Dr. Sorby\*). Der Sorbit scheidet sich in dünnen Blättchen zwischen Ferrit- und Zementitkristallen aus und enthält Kohlenstoff; seine genaue Bestimmung steht noch aus.

Fig. 71



Martensit in Austenit

Nach einer, durch Jüptner v. Jonstorff aufgestellten Übersicht erhielte man an Carbiden des gehärteten Stahls:

bei den höchsten in Betracht kommenden Wärmestufen „Austenit“, wahrscheinlich als Lösung von elementarem Kohlenstoff in Eisen,

bei etwas niedriger Härtungswärme „Martensit“, vielleicht eine Lösung des von Campbell bestimmten Eisencarbids  $C_2Fe_6$  in Eisen,

bei noch tieferer Wärmestufe „Troostit“, etwa eine Lösung des Carbids  $C_3Fe_9$  in Eisen, und endlich

bei den niedersten Hitzegraden den „Perlit“ als ein Gemenge von Eisen und Eisencarbid, vielleicht hauptsächlich  $C_4Fe_{12}$ .

\*) Nach Mineral Industry, Bd. V, 1896, S. 697 hat Dr. Sorby seine hauptsächlichsten Präparate, die jetzt in der technischen Schule von Sheffield aufbewahrt werden, vor 1864 hergestellt. Seine Untersuchungen wurden in der Technik anfangs nicht beachtet, jedoch Ende der 70er Jahre in Deutschland wesentlich durch Martens nach ihrer Bedeutung gewürdigt und gelangten darauf in der wissenschaftlichen Welt zu allgemeiner Anerkennung.



Etwas anders faßt Howe die verschiedenen metallurgischen Aufbauformen zusammen. Nach ihm bildeten die besprochenen Eisenkörper:

1. in langsam gekühltem Zustand „Perlit“, ein Konglomerat von:

2. dem weichen, bildsamen „Ferrit“ mit:

3. dem harten, britzeligen „Zementit“ im Verhältnis von rund 6 : 1,

4. ebenfalls in langsam gekühltem Zustand des Gußeisens den „Graphit“ als nicht metallischen, sozusagen fremden Körper,

5. in rasch gekühltem Zustand des Stahls wie des Gußeisens den „Austenit“.

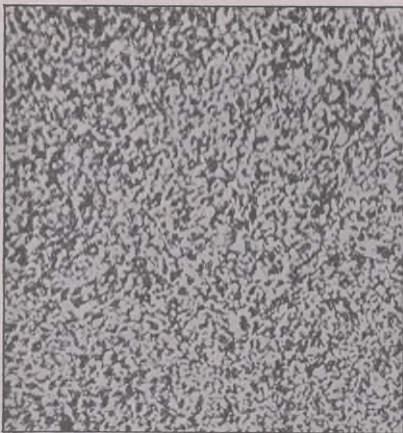
Man könnte, nimmt Howe an, hiernach alle Eisencarbone, alle unsere Stahl- wie Gußeisensorten ordnen.

Bemerkenswert ist, daß alle die vorgeführten Eisenbilder sich auf Kohlenstoffstahl beziehen und daß der an Bedeutung so rasch

Fig. 72

a.

b.



#### Weicher Nickelstahl

zunehmende Nickelstahl dabei fehlt\*), ebenso andere Elementenverbindungen mit dem Grundstoff Eisen. Große Güte der Verwaltung der Gußstahlfabrik von Friedrich Krupp, Essen, ermög-

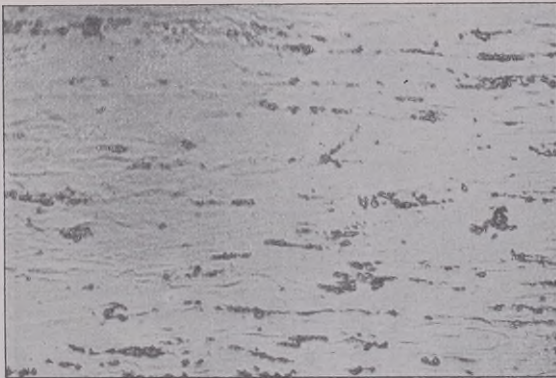
\*) Auch eine Preisausschreibung des Vereins für Gewerbleiß ist bis jetzt (Anfang 1904) ohne Lösung geblieben.

licht mir, das Vorausgegangene durch einige wichtige Eisenbilder aus einer größeren Anzahl von solchen, die in dem chemisch-physikalischen Versuchslaboratorium des Werkes hergestellt sind, zu vervollständigen.

Fig. 72 stellt in 200facher Vergrößerung weichen Nickelstahl von 5 v. H. Nickelgehalt, bei 0,20 v. H. Kohlenstoffgehalt und 55 kg Zerreißungsmodul  $B_z$  dar, unter a im Verbrauchszustand,

Fig. 73

a.



b.



Flußeisendraht

unter b kristallinisch geworden durch Wiedererwärmen zum Schmieden. Letztere, wenn erneute Behandlung, wird das feinkörnige Sandgefüge wieder herstellen.

Fig. 73 zeigt zwei Schlitze aus 3,4 mm dickem Flußeisendraht, unter a im hartgezogenen Zustand, unter b nach Ausglühung;



beide Schiffe sind schwach geätzt; Vergrößerung beidemale 100 fach. Kohlenstoffgehalt 0,07 v. H., Mangan 0,43 v. H., Silicium Spuren. Hier wird im Schliffbilde a deutlich erkennbar, wie durch das Ziehverfahren die Teilchen gezwungen worden sind, sich schnur-förmig hintereinander zu legen, in dem Bilde b aber auch, wie sie durch das Ausglühen in die, nach allen Seiten gleichgültige Lage zurückfallen; es sind große Ortsänderungen, die da vorgehen. Die Zugfestigkeit des Drahtes (vgl. §. 18 u. 19) verändert

Fig. 74



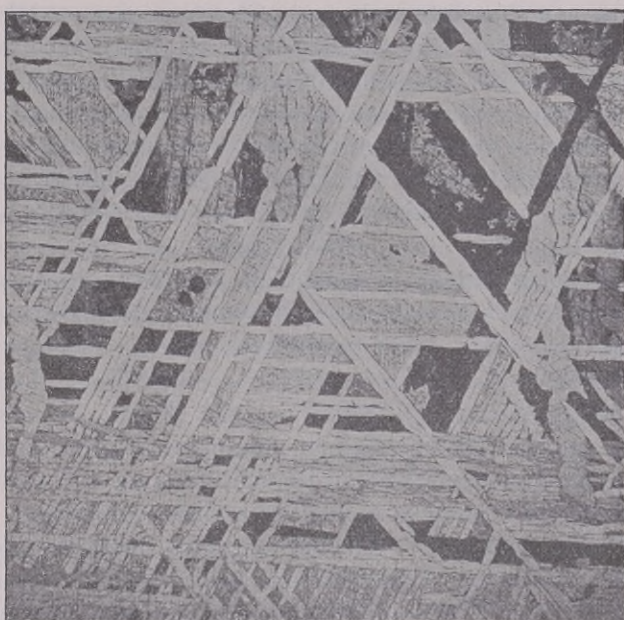
Stahl mit hohem Phosphorgehalt

sich aber dabei auch stark; der Zerreißungsmodul  $B_z$  beträgt nämlich bei dem Muster unter a 105, bei dem unter b nur 45 kg/qmm. Bei tieferer Ätzung wird die körnichte Lagerung der Ferritteilchen unter b noch weit deutlicher.

Bemerkung. Die beiden Drahtbilder lassen erkennen, daß durch den Ziehvorgang die inneren Teilchen vom Punkte N in Fig. 3 nach rechts verlegt worden sind, demnach aufeinander eine Zugwirkung ausüben. Dem Zug entgegen muß ein Druck in entgegengesetzter Richtung vorhanden sein, um die Drahtform zu erhalten. Wo, in welchen Schichten des Drahtes dieser Druck, hervorgebracht durch die gewaltsame Verlegung der Teilchen, stattfindet, bleibt noch festzustellen. Versuche, die im Anschluß an jedesmalige Erhebung von Eisenbildern vorzunehmen wären, könnten darüber Aufschluß geben.

Wenn Phosphor dem reinen Schmiedeisen oder überhaupt kohlenstoffarmem Schweißisen beigemischt ist, so schadet das bis zu dem Phosphorgehalt 0,5 v. H., ja bis 0,75 v. H., nicht erheblich\*). Bei merklicher Anwesenheit von Kohlenstoff aber, also beim Übergang zu Stahl, tritt dagegen bald Verminderung der Zähigkeit, tritt Kaltbrüchigkeit und wirkliche Sprödigkeit ein. Ein Eisenbild mit hohem Phosphorgehalt führt Fig. 74 vor Augen. Vergrößerung 200fach. Die dunkeln Phosphorkörner sind aus Perlitteilchen, die in Ferrit liegen, gebildet und sind von einem

Fig. 75



Meteoreisen

weißen Saum (aus Eisenphosphid) und stark durch das Schleifen angegriffenen Ferritbändern umgeben. Kohlenstoffgehalt des Probestückes 0,13, Phosphorgehalt 0,93 v. H.

Schließlich sei noch in Fig. 75 ein Schlibbild vorgeführt, das, wie das vorausgehende, im Kruppschen Laboratorium, und zwar einem schweren Meteorblock aus Deutsch-Südwestafrika ent-

\*) Näheres in den Berliner Verhandlungen Sept. 1903, A. Schmitz, Untersuchungen über Zugfestigkeit usw. von Eisen- und Stahlstäben.



nommen worden ist. Vergrößerung nur 5fach. Die Natur hatte, als sie das Stäbchennetz bildete, neben der Hauptmasse von Ferrit auch Nickel in ansehnlicher Menge zur Verfügung. Die Analyse ergab nämlich für die Beimengungen an: Nickel 7,3, Kobalt 0,5, Chrom 0,075, Schwefel 0,003, Phosphor 0,036 v. H., Kohlenstoff nur Spuren, Mangan und Silicium Null.

\*

\*

\*\*

Der Überblick über die vorgeführten Eisenbilder läßt Merkwürdiges erkennen. Zunächst zeigt er uns für den inneren Bereich der Festigkeitslehre, wie wenig man in eigentlicher Strenge die im Beginn von §. 3 besprochenen „Gleichartigkeit“ und „Gleichkräftigkeit“ bei den Baumetallen vorauszusetzen das Recht hat. Statt Gleichheit der Eigenschaften tritt uns in einem und demselben Probestück sogar eine erstaunliche Ungleichheit entgegen, die von Stück zu Stück noch obendrein wechselt. Die unbestechliche Eindringlichkeit des Schauglases macht allerdings die Verschiedenheiten noch merkbarer, als sie dem Durchschnitt entsprechen. Immerhin aber erkennt man, daß wir — einstweilen wenigstens — je länger je mehr auf den Festigkeitsversuch angewiesen sind und demselben sein Bestreben, immer wieder Unterabteilungen zu bilden, nicht verdenken können. Es folgt übrigens daraus, ebenfalls als innere Angelegenheit, daß die mathematischen Festigkeitsuntersuchungen, soweit sie die Metalle betreffen, nicht über eine gewisse Hochgradigkeit hinaus verfolgbar sind, da die Annahme der Gleichartigkeit an Berechtigung zu viel verloren hat. Verständlich wird auch aus der Eisenbildvergleihung, daß die Festigkeitsversuche noch von Fall zu Fall schwankende Ergebnisse liefern können. Daneben wird aus Bild und Versuch deutlich, welcher hoher Wert auf die hüttenmännische Erzeugung der Eisensorten zu legen ist und welche Anerkennung der Ausbildung der Hüttentechnik bei uns und im Ausland zukommt. Es zeigt sich hierbei, wie berechtigt die Anträge aus unseren Hüttenwerksgebieten sind, die wissenschaftliche Behandlung der metallurgischen Verfahrungsweisen an den Hochschulen ausgedehnt zu sehen.

Ein zweites Hauptergebnis der Überschau ist die Erkenntnis, daß die Feinuntersuchung der Baumetalle noch weit entfernt ist, die, von Manchen schon als bevorstehend erachtete Vollendung erreicht zu haben; hörte man doch schon die Meinung äußern, die Feinschau werde die Festigkeitsversuche vertreten können, was noch in weitem Felde steht. Denn einesteils ist das Lese-

verständnis der Eisenbilderschrift noch keineswegs als sicher zu bezeichnen, andernteils auch fehlen noch viele Untersuchungen. Ist doch die Nickelbeimengung, wie schon vorhin erwähnt wurde, trotz der schnellen Eroberung, die der Nickelstahl verzeichnen darf, im Eisenbild erst wenig lesbar gemacht. Dann auch fehlen noch so viele Zwischenglieder, wie diejenigen der Verbindung des Eisens z. B. mit Wolfram, Chlor und auch dem Titan, dessen seltsamer Einfluß auf Gußeisen noch so sehr der ferneren Beobachtung wert ist. Es fehlen dann aber auch zum großen Teil die Metalle der Kupferreihe und des ganzen Anhangs. Im Stahlgebiet selbst hat die Einführung der Schnellstähle sowohl die Härtungsfrage aus ihrer Ruhe aufgerüttelt (vergl. §. 32), als auch in der Technologie die größte Unruhe hervorgerufen, indem nun von allen Seiten nach Verstärkung, die einem Umbau gleichkommt, der Drehbänke, Hobelmaschinen, Fräs- und Bohrbänke gerufen wird, was alles starke Verschiebungen in der Industrie zur Folge haben könnte. Die Technologie der kalten Metallbearbeitung wird, das scheint sicher, deshalb ein neues Blatt umschlagen müssen. Im Ganzen betrachtet, zeigt unsere Untersuchung, daß die Naheschaubilder der Metalle auch für die Festigkeitslehre ihre große Bedeutung haben, weshalb denn hier ihre Besprechung nicht fehlen durfte.

## REGISTER

- |   |  |  |
|---|--|--|
| <p>Abnehmende Elastizität 11.<br/>           Anderson 11. 16. 18. 32.<br/>           Aufziehen von Ringen 92.<br/>           Austen (Roberts-) 119.<br/>           Austenit 120. 121. 122.</p> <p><b>B</b>ach (v.) 8. 10. 15. 16.<br/>           40. 52. 85. 88.<br/>           Barlow 85.<br/>           Baumeister 39.<br/>           Bauschinger 8. 22.<br/>           Biegung und Körperinhalt 54.<br/>           Biegungsfedern 99.<br/>           Biegungsfestigkeit 41.<br/>           Bovey 8. 65.<br/>           Bramah 86.<br/>           Breuer &amp; Cie 28.<br/>           Britanniabrücke 85.<br/>           Brix 85.</p> | <p><b>C</b>ampbell 121.<br/>           Carnot 6. 10. 11. 36.<br/>           Chardonnet 25.<br/>           Colby 24. 109. 111.<br/>           Colladon 36.<br/>           Considéré 24.<br/>           Coulomb 66.</p> <p><b>D</b>engelmachine 30.<br/>           Dickwandige Röhre 84.<br/>           Drahtziehen 14. 15. 19. 25.<br/>           Drehungsfestigkeit 65.<br/>           Druckfestigkeit 25. 38.</p> <p><b>E</b>ast-River-Brücken 112.<br/>           Eiffelturm 39.<br/>           Einflußlinie 47.<br/>           Elastizitätsmodul 5. 6. 11.<br/>               12. 15.<br/>           Elastizitätsgrenze 10. 20.<br/>           „Elastizitätsfeld“ 20.</p> | <p>Emery 8.<br/>           Exner 18.<br/>           Extensometer 26. 64.</p> <p><b>F</b>achwerke 71 bis 74.<br/>           Fairbairn 34.<br/>           Federn 97.<br/>           Ferrit 116.<br/>           Festigkeitswerte 33 bis 37.<br/>           „Flud“ 7. 36.<br/>           Flußeisendraht 123.<br/>           Föppl 5.<br/>           Fourier 2. 3. 6. 7. 10.<br/>               13. 27.</p> <p><b>G</b>alilei 41.<br/>           Gary 8.<br/>           Gefäßwände 82.<br/>           Geschützrohre 84. 91. 113.<br/>           Goodyear 30.<br/>           Graphit 118. 122.</p> |
|---|--|--|



- Grashof 10. 19. 40. 62.  
Guilleaume 8.  
Gurtbeton 24. 75.
- Hartig** 9.  
Helmholtz 108.  
Heyn 115.  
Hirn 37.  
Hooke 5.  
Howe 115. 116. 117. 119.  
Huber 27.  
Hummel 87.
- Jüptner v. Jonstorff**  
105.
- Kalker Masch.-Fabrik** 60.  
Kanonenbronze 113.  
Karmarsch 9.  
Kautschukfedern 97.  
„Kehle“ 4.  
Kelly 95.  
Kennedy 8. 22.  
Kick 18.  
Kick u. Gintl 32.  
Kircheis 26.  
Kirkaldy 8. 22. 77.  
Kleingefüge 115 ff.  
Koenen 75.  
Körperinhalt bei Zug und  
Druck 76.  
Krupp 122. 125.  
Kunz 78.  
Küstengeschütz 91.
- Lamé** 85, 88, 89.  
Lanza 33. 37.  
Laufkran 68.  
Lebendige Festigkeit 114.  
Lorenz 76. 87.  
Ludw. Löwe & Cie 30.  
Luft, die, als Feder 98.
- Madamet** 11. 14. 40. 88.  
Mannesmannrohr 83.  
Marshall 93. 95.  
Martens 8. 10. 18. 22.  
115. 121.  
Martensit 120. 121.
- Metcalf** 103.  
Meteoreisen 175.  
Moore 93 bis 95.
- Newall** 94.  
Nickelstahl 122.  
Nieter, hydraulischer 60.  
79.
- Oberlin Smyth** 27.
- Panzerplatten** 8. 113. 114.  
„P-Grenze“ 10. 32.  
Paßverbindungen 96.  
Perlit 119. 121.
- Querschnittsmodul** 49.  
Querschnittsformen 53.
- Radreifenpresse** 28.  
Ramisch 75.  
Redtenbacher 78.  
Roberts-Austen 119.  
Röhrenziehen 13.  
Rudeloff 8. 9. 11. 18.  
34. 35.
- Scheffler** 84.  
Schornstein 1. 39.  
Schmalz 67.  
Schmeller 13.  
Schnellstähle 32.  
Schrümpfen 96.  
Schubfestigkeit 2. 40.  
Schwungradarm 58.  
Sellers 96.  
„Setzung“ 15. 20.  
Skinner 29.  
Sorbit 121.  
Sorby 121.  
Spannungsquotient 110.  
114.  
Stauchung 15. 18. 25. 28.  
Stabkehle 4. 11. 23.  
Steigende Elastizität 11.  
Stévant 98.  
Stoßfestigkeit 104.  
Strebfestigkeit 76.  
Streckgrenze 11.  
Streckung 10. 25.
- Stribeck** 34.  
Sturm 36.  
Summers 21.
- Tetmajer** 8.  
Thomson 5.  
Thurston 8.  
Torsion s. Verdrehung.  
„Track“ 7. 37.  
Tragmodul 10.  
Tresca 25.  
Troost 120.  
Troostit 121.  
Tweddell 26.
- Urquerschnitt** 11. 23.
- Verdrehung** 64.  
Verdrehungsfedern 102.  
Verdrehung und Körper-  
inhalt 69.  
Versuchskörper 4.  
Vertongen 37. 39.  
Visintini 75.
- Walzenwirkung** 29.  
Warrenscher Träger 74.  
Wärme und Festigkeit 31.  
Wedding 9.  
Weisbach 56.  
Wetmore 95.  
Werder 98.  
Widerstandsmodul 48. 51.  
Widerstandsmoment 48.  
Wiederholungsversuch 12.  
14. 22. 30.  
Wöhler 22.  
Woodworth 27.
- Young** 5. 70.
- Zähigkeit** 13.  
Zain 13.  
Zementit 116 ff.  
Zerdrückungsmodul 6.  
Zerreißungsmodul 32.  
Ziehbank 13.  
Ziehpresse 26.  
Zugelemente 7.  
Zugfestigkeit 8. 9. 38.

## Druckfehler

Seite 72, Zeile 13 von oben lies  $\left\{ \frac{1}{\sin \alpha^2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha^2} \right\}$  statt  $\left\{ \frac{l}{\sin \alpha^2} + \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha^2} \right\}$ .

Seite 84, Zeile 1 von unten lies Scheffler statt Scheffel.













WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

5458

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299102