1

?

Grodáč

Elemente

der

Festigkeitslehre

in

elementarer Darstellung

mit

zahlreichen, teilweise vollständig gelösten Uebungsbeispielen, sowie vielen praktisch bewährten Konstruktionsregeln

für

Maschinen- und Bautechniker, sowie zum Gebrauche in technischen Lehranstalten

von

Dr. P. J. Johnen,
Oberlehrer an der Gewerbeschule zu Mülhausen i. E.

Mit 176 in den Text gedruckten Abbildungen und mehreren Profiltabellen.

Weimar, 1889.
Bernhard Friedrich Voigt.

Meinem lieben Bruder Julius,

Ingenieur und Fabrikant in Pr. Eylau,

gewidmet.

Vorwort.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist zunächst, den Schülern der oberen Gewerbeklasse der Mülhauser Gewerbeschule ein Buch zu liefern, das zur Wiederholung der vom Verfasser seit Jahren an genannter Anstalt behandelten Festigkeitslehre dienen und von dem Teil der Schüler, welche gleich in das praktische Leben eintreten, zum weiteren Studium benutzt werden kann.

Daher wurde bei der übrigens ganz mathematisch durchgeführten Arbeit die Anwendung der Differential- und Integralrechnung vermieden.

Durch diese Behandlung mussten allerdings einige Entwickelungen weniger einfach ausfallen, andererseits wurde aber hierdurch das Buch eben auch für alle die Techniker brauchbar, welche sich mit den Gesetzen der Festigkeitslehre nur auf Grund der Elementar-Mathematik vertraut machen können und wollen.

Auch auf die Verwendung der graphischen Statik wurde verzichtet, weil es sonst sicher wünschenswert gewesen wäre, die wichtigsten Sätze dieser Methode erst zu entwickeln, um das Vorgeführte gemeinverständlich zu machen.

Im übrigen habe ich mich bemüht, die Durchführung möglichst kurz, klar und übersichtlich zu gestalten und durch zahlreiche, vollständig gelöste bau- und maschinentechnische Beispiele, sowie durch viele im praktischen Leben vorkommende Aufgaben die verschiedenen Festigkeitsarten auch rechnerisch näher zu erläutern.

Was ich anderen Quellen, wie den Arbeiten von Bach, Grashof, Müller, Rankine, v. Reiche, Reuleaux, Simerka, Templeton, Uhland, Weisbach, Wernicke u. a. verdanke, erlaubt der Raum nicht, im einzelnen namhaft zu machen. Sachverständige Beurteiler werden es ohnedies bemerken.

Indem ich die Arbeit dem wohlwollenden Urteil der Herren Fachgenossen unterbreite, wünsche ich derselben eine freundliche Aufnahme.

Mülhausen i. E.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1.

Einleitung.

Jeder Körper ist der Inbegriff einer gewissen Menge materieller kleinster Teile (Moleküle).

Die Art, wie die einzelnen Teilchen miteinander verbunden sind oder nebeneinander bestehen, bestimmt den Aggregatzustand, und je nach der Art dieses Zusammenhanges unterscheiden wir die Körper als feste und flüssige. Bei den ersteren hängen die Teilchen untereinander so zusammen, dass die Bewegung eines Teiles zugleich eine Bewegung der anderen Teile nach sich zieht und zur Trennung der einzelnen Teile eine gewisse Kraft erforderlich ist.

Die erste Wirkung nun, welche äussere Kräfte auf einen festen Körper hervorbringen, ist eine Veränderung in der Lage seiner Teile gegeneinander und eine daraus erwachsende Form- und Volumenveränderung des Körpers. Einem jeden Körper ist aber eine eigentümliche innere Kraft, Kohäsionskraft, eigen, vermöge welcher er einer durch äussere Kräfte verursachten Verrückung seiner materiellen Punkte einen gewissen Widerstand entgegensetzt, und letzterer kommt, wie überhaupt jede Widerstandskraft, nur mit derjenigen Intensität zur Wirkung, welche der äusseren Kraft entspricht.

Die Grenze, die ein Körper bei der Formänderung nicht überschreiten darf, um nach Beseitigung der Inanspruchnahme seine frühere normale Gestalt wieder anzunehmen, nennt man die Elastizitätsgrenze. Diese Fähigkeit selbst, in den Normalzustand wieder zurückgehen zu wollen, heisst Elastizität (élasticité; elasticity). Die inneren Kräfte, mit welchen der Körper seine ursprüngliche Form wieder herzustellen strebt, heissen auch allgemein Spannkräfte.

Die Elastizitätsgrenze liegt für verschiedene Materialien im allgemeinen verschieden; für denselben Körper geht die Lage der Elastizitätsgrenze im Laufe der Zeit infolge hoher und sehr wechselnder Temperaturverhältnisse, sowie wiederholter Inanspruchnahme zurück, indem hierdurch z. B. bei Schmiedeeisen die faserige Struktur in einen körnigen Zustand übergeführt wird.

Wird ein Körper über die Elastizitätsgrenze hinaus beansprucht, so tritt stets eine bleibende Formänderung ein und hierauf bei noch weiterer Belastung ein Zerstören des Materials; den Widerstand, den ein Körper seiner Zerteilung entgegensetzt, nennt man seine Festigkeit (résistance; strength); die Belastung, welche dieser Grenze entspricht, heisst Bruchbelastung.

Die Erfahrung lehrt:

a) Für Anstrengungen des Materials, welche noch unterhalb der Beanspruchung für die Elastizitätsgrenze sind, kann auch eine bleibende Formänderung auftreten, wenn nämlich die äusseren Kräfte lange Zeit wirken; jedoch ist in diesem Falle dieselbe gering gegen die verschwindende Formänderung.

b) Durch Ausglühen und dann langsames Erkalten kann eine zurückgebliebene Formänderung wieder beseitigt werden.

c) Die Elastizitäts- und Bruchgrenze eines Materials lässt sich dadurch höher legen, dass man dasselbe wiederholt bis zu beiden Grenzen beansprucht, die Sprödigkeit nimmt dann aber zu, die Zähigkeit dagegen und damit die Widerstandsfähigkeit gegen veränderliche Kraftäusserungen, wie sie eben bei Maschinenteilen meist auftreten, ab.

Bei Aufstellung der Gesetze über die Widerstandsfähigkeit der Materialien, für die wir eine prismatische oder stabförmige Gestalt mit gerader Schwerlinie oder Achse voraussetzen und die wir uns als aus über- und nebeneinander liegenden Längenfasern, unendlich dünnen fadenförmigen Elementen, bestehend denken, tritt nun folgende Aufgabe entgegen:

Es sollen die Dimensionen eines Körpers unter der Bedingung bestimmt werden, dass

1. er bei möglichst kleinem Materialaufwand einer gegebenen äusseren Kraft einen möglichst grossen Widerstand leistet;
2. die Formänderung in keinem Punkte des Körpers eine gewisse Grenze überschreite, welche erfahrungsgemäss inne zu halten oder durch den besonderen Zweck des Maschinenteils gesteckt ist.

Je nach der Lage, in welcher die Richtungslinie der Resultante der einen Körper angreifenden Kräfte zur Körperachse selbst liegt und der hierdurch bedingten Art des Bestrebens, eine Trennung oder Formänderung der Körpermasse zu erwirken, unterscheidet man:

I. Die **einfache** Elastizität und Festigkeit.

Dieselbe umfasst:

a) Die absolute oder Zugelastizität und Festigkeit (élasticité et résistance de traction ou extension; elasticity and strength of extension). Die sämtlichen Kräfte oder ihre Resultante sind in der Richtung der Achse des Körpers thätig und suchen den letzteren zu verlängern.

b) Die rückwirkende oder Druckelastizität und Festigkeit (élasticité et résistance de compression; elasticity and strength of compression). Die resultierende Kraft wirkt wie vorher in Richtung der Körperachse, ist aber bestrebt, den Körper zusammenzudrücken, wobei vorausgesetzt wird, dass die Länge des Stabes gegen die kleinere Querschnittsdimension nicht zu gross sei.

c) Die relative oder Biegungselastizität und Festigkeit (élasticité et résistance de flexion; elasticity and strength of flexure). Die Kräfte schneiden die Achse des Körpers rechtwinkelig und suchen ein Verbiegen desselben zu bewirken.

d) Die Schub- oder Scherelastizität und Festigkeit (élasticité et résistance par cisaillement; elasticity and strength of stearing). Die Resultante der Kräfte liegt in einem Querschnitt des Körpers von geringer Länge und schneidet die Achse desselben. Ein Verbiegen kann mithin hier nicht eintreten, sondern nur ein Verschieben eines Teiles des Körpers gegen den andern.

e) Die Drehungs- (Torsions-) Elastizität und Festigkeit (élasticité et résistance de torsion; elasticity and strength of torsion). Die Kräfte sind rechtwinkelig und windschief gegen die Körperachse gerichtet, suchen demnach den Körper zu verdrehen oder abzuwürgen.

II. Die **zusammengesetzte** Elastizität und Festigkeit.

Dieselbe tritt auf, wenn ein Körper gleichzeitig mehreren der obigen Inanspruchnahmen unterworfen ist.

Alle diese verschiedenen Wirkungsweisen sind auf Ausdehnungen oder Verkürzungen nach gewissen Richtungen im Körper zurückzuführen.

Denken wir uns einen parallel-epipedischen Stab von der Länge l und der Querabmessung b, auf welchen eine Kraft P in Richtung der Länge l wirkt. Durch diese Kraft wird nun der Stab in der Richtung l ausgedehnt, während die Querabmessung b sich zusammenzieht. Es seien nach vollständiger Wirkung der Kraft P jetzt $l(1+\alpha)$ und $b(1-\beta)$ die veränderten Dimensionen des Stabes; dann ist offenbar die Verlängerung von l gleich αl, dagegen ist βb die Verkürzung der Seite b; die Volumenänderung ist demnach:

$$(1+\alpha) l \{(1-\beta) b\}^2 - l b^2 = (\alpha - 2\beta) l b^2 \rightarrow = l b^2 (1+\alpha-2\beta$$

angenähert; dabei ist:

$$\alpha - 2\beta > 0 \text{ oder } \beta < \tfrac{1}{2}\alpha$$

und also auch:

$$\beta = m\,\alpha.$$

Auf Grund der Versuche von Redtenbacher und Poisson nimmt man in der Praxis für die gebräuchlicheren Metalle:

$$m = \tfrac{1}{4}.$$

Was nun speziell die Längenausdehnung anbetrifft, so gilt innerhalb der Elastizitätsgrenze der Satz:

> Die Längenausdehnung eines prismatischen Stabes in Richtung der wirkenden Kraft ist der Länge des Stabes und der Grösse der Kraft direkt, dem Querschnitt aber umgekehrt proportional.

In dem obigen Falle ist mithin:

$$\alpha\,l = \frac{P\,l}{b^2} \cdot \frac{1}{E},$$

oder:

$$\alpha = \frac{P}{b^2} \cdot \frac{1}{E},$$

wobei E ein Erfahrungskoeffizient ist, der für verschiedene Materialien verschieden und durch Rechnung aus Versuchen zu bestimmen ist; man nennt ihn **Elastizitätsmodul** (coefficient d'élasticité; modul of elasticity).

Für $b^2 = 1$ und $P = 1$ ergibt sich:

$$\alpha = \frac{1}{E}.$$

d. h. der Elastizitätsmodul ist diejenige Zahl, durch welche man die ursprüngliche Länge eines Stabes dividieren muss, um die einer Spannung gleich 1 auf die Flächeneinheit entsprechende Verlängerung zu erhalten.

Setzt man ausser $b^2 = 1$ auch $P = E$, so findet man:

$$\alpha\,l = l,$$

d. h. auch:

der Elastizitätsmodul ist diejenige Kraft, die einen Körper vom Querschnitt 1 um seine eigene Länge ausdehnen würde, wenn dies das Material zuliesse.

Für ein und dasselbe Material nimmt man den Elastizitätsmodul für eine Zugkraft gleich dem für eine Druckkraft, solange die Beanspruchung durch letztere unterhalb der Elastizitätsgrenze bleibt. Für Schmiedeeisen entspricht diese Annahme am meisten den thatsächlichen Verhältnissen, für Gusseisen und Holz weniger.

In der folgenden Tabelle ist der Wert des Elastizitätsmodul für die wichtigeren Materialien zusammengestellt, um mit Hilfe desselben die Längenänderung eines Stabes bei gegebener Spannung feststellen zu können.

Man nennt die erfahrungsmässig **zulässige** Belastung eines Stabes vom Querschnitt gleich der Einheit den **Sicherheitsmodul**, hingegen jene Belastung, welche einem Stabe vom Querschnitt ebenfalls gleich der Einheit für die Elastizitätsgrenze zukommt oder den Bruch herbeiführt, **Tragmodul** bezw. **Bruchmodul**.

Die numerischen mittleren Werte dieser drei Moduls für verschiedene Materialien bei ihrer Verwendung zu stabilen Konstruktionen und in gewöhnlicher Temperatur der Luft befinden sich ebenfalls in genannter Tabelle.

Bezüglich der angegebenen Sicherheitsmoduls ist anzuführen, dass beim Auftreten lebendiger Kräfte von Bedeutung natürlich diesem Umstande bei der Dimensionierung eines Maschinenteiles besonders Rechnung zu tragen ist und hiernach eine entsprechende Verminderung der zulässigen Belastung einzutreten hat.

Mit Rücksicht hierauf pflegt man auch wohl die zulässige Beanspruchung **indirekt** anzugeben durch das Verhältnis zwischen dem Trag- oder Bruchmodul zu der stärksten eintretenden Spannung des Körpers. Dies Verhältnis, immer grösser als 1, heisst **Sicherheitskoeffizient** oder allgemein **Sicherheit,** und man spricht so von einer mfachen Trag- und Bruchsicherheit, wenn die thatsächliche grösste Anstrengung des Materials m mal kleiner ist als der entsprechende Trag- bezw. Bruchmodul.

In Anbetracht nun der Verschiedenartigkeit der auf ein Maschinenelement einwirkenden zerstörenden Einflüsse ist bei Maschinen behufs Erzielung einer möglichst gleichen Widerstandsfähigkeit der einzelnen Teile eine verschiedene Sicherheit für die ungleich funktionierenden Elemente zu fordern.

Wie gross obiges m zu wählen ist, hängt demnach ganz und gar von dem Zweck und der Anstrengung ab, denen das Element unterworfen ist.

Als Hauptgrundsatz ist festzuhalten, dass mindestens eine zweifache Tragsicherheit anzuwenden ist.

Was die vermerkten Bruchmoduls anbetrifft, so ist nicht zu übersehen, dass, wie auch die Woehlerschen Versuche bestätigen, bei einer veränderlichen Beanspruchung die Zerstörung des Materials eher eintreten kann, als bei ruhiger, stossfreier Inanspruchnahme.

Die von dem ausführenden Konstrukteur angewandte Bruchsicherheit muss aus diesem Grunde in ziemlich weiten Grenzen, zwischen 4 und 20 und noch darüber liegen, je nach dem Zweck der Konstruktion und dem zur Verfügung stehenden Material.

Als Anhaltepunkt kann dienen:

Für Metalle ist im allgemeinen eine 6 bis 7fache, für Schmiedeeisen zu Maschinenschrauben eine 12 bis 15fache, für Hanfseile zu Winden und Krahnen eine 5fache, für Holz und Stein eine 10fache und darüber und für Mauerwerk eine 10 bis 20fache Bruchsicherheit in Anwendung zu bringen.

Da die üblichen Zerreissungsversuche den Zeitpunkt des vollständigen Bruches insofern nicht ganz richtig anzugeben vermögen, als hierbei die Zeitdauer des Versuches und die Grösse des Querschnittes von Einfluss ist, so schlagen viele Konstrukteure die Bestimmung eines Querschnitts auf Grund des Tragmoduls vor, wofern letzterer für das betreffende Material bekannt ist.

dozwolone naprężenie — napręż. na granicy elast. — granica wytrzymałości

Tabelle I der Festigkeitskoeffizienten.

Material	Kilogramm auf den Quadratmillimeter: Sicherheitsmodul			Tragmodul			Bruchmodul			Elastizitätsmodul		Ausdehnung an der Elastizitätsgrenze in Millimetern auf den laufenden Meter		Mittleres spezifisches Gewicht
	Zug	Druck	Schub	Zug	Druck	Schub	Zug	Druck	Schub	Zug und Druck	Schub	Zug	Druck	
	S	S_1	S_2	T	T_1	T_2	K	K_1	K_2	E_1	E_2	σ	σ_1	γ
Gusseisen (fer fondu; cast-iron)	2,5	5—7	2	7,5	15	5,6	12,5	75	15	10000	4000	0,75	1,5	7,25
Schmiedeeisen in Stäben (fer forgé; wrought-iron)	7	7	6	14	14	10,5	40	38	35	20000	8000	0,7	0.7	7,78
Eisenblech (fer en tôle laminée; iron-plate)	7	7	6	14	14	10,5	32	—	—	17500	7000	0,8	0,8	7,78
Eisendraht (fil de fer; iron-wire)	12	—	—	30	—	—	70	—	—	20000	8000	1,5	—	7,75
Bessemerstahl (acier Bessemer; Bessemer steel)	13,5	13,5	10,8	30	30	—	55	—	40	21500	8600	1,4	1,4	7,6
Feiner Federstahl (acier à ressort; spring-steel)	32,2	32,2	24,2	64	—	48	—	—	—	21500	8600	—	—	—
Guter Gussstahl (acier fondu; cast-steel)	30	30	22	65	—	45	100	120	75	27500	11000	2,36	—	7,85
Geschützstahl (acier à canon; gun-steel)	—	—	—	10	—	—	50	—	—	—	—	—	—	—
Gussstahldraht (fil d'acier; steel-wire)	19,2	—	—	—	—	—	115	—	—	28000	11200	—	—	7,8
Kupferblech (plaque de cuivre; copper-plate) geglüht	2,5	2	1,5	3	2,75	2	21	41	—	10700	4280	0,28	0,25	8,79
dito dito gehämmert	6,6	6,6	5	14	14	10,5	—	—	—	11100	4440	1,26	1,26	8,88
Kupferdraht (fil de cuivre; copper-wire)	6,6	—	—	12	—	—	40,3	—	—	12100	4840	1	—	8,89
Zink (zinc; zinc) gegossen	0,87	—	—	2,29	—	—	5,26	—	—	9500	3800	0,24	—	7,03
Messing (laiton; brass) gegossen	2,5	—	2	4,85	—	—	12,5	100	—	6500	2600	0,75	—	8,55
Messingdraht (fil de laiton; brass-wire)	6,6	—	5	13,3	—	—	36,5	—	—	9870	3948	1,35	—	8,53
Zinn (étain; tin)	0,6	—	—	—	—	—	3,5	—	—	3500	1400	—	—	7,24
Oesterreich. Geschützbronze (bronce à canon; gun-metal)	3	—	—	3,85	—	—	22+	—	—	7000	2800	0,55	—	8,80
Blei (plomb; lead) gegossen	0,17	—	—	1,05	—	—	1,25	5,1	—	500	187,5	2,1	—	11,40

Buchenholz (hêtre; beech) ||	1,2	0,66	0,07	2	1,8	—	8,8	5,7	0,66	1110	61,7	1,8	1,6	0,74
dito dito ⊥	—	0,36	—	—	—	—	0,73	3,5	—	—	—	—	—	—
Eichenholz (chêne; oak) ||	1,1	0,66	0,06	2,2	1,8	—	7,8	5,8	0,79	1200	72	1,8	1,5	0,735
dito dito ⊥	—	0,36	—	—	—	—	0,58	3,5	0,9	—	—	—	—	—
Tannenholz (sapin; fir) ||	0,7	0,44	—	2,35	1,9	—	8,2	4,6	0,42	1300	67	1,8	1,45	0,56
dito dito ⊥	—	0,22	—	—	—	—	0,48	2,2	0,67	—	—	—	—	—
Hanfseil (corde en chanvre; hemp-cord) trocken	0,8 —1,1	—	—	—	—	—	(6,1—0,025 δ)	—	—	—	—	—	—	—
Rundes Seil aus Eisendraht (corde en fer; iron-cord)	6,75—12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Gew. eiserne Kette (chaîne en fer; iron-chain)	6,3	—	—	—	—	—	20	—	—	—	—	—	—	—
Maschinenriemen von Rindleder (courroie en cuir; leather-strap)	0,225	—	—	1,6	—	—	2,0	—	—	17,5	—	—	—	—
Basalt (basalte; basalt)	—	0,75	—	—	—	—	—	19,7	—	—	—	—	—	3,05
Gneiss und Granit (geneiss et granite; geneis and granit)	—	0,45	—	—	—	—	—	5,85	—	—	—	—	—	2,75
Marmor (marbre; marble)	—	0,2	—	—	—	—	—	2,3	—	—	—	—	—	2,68
Kalkstein (pierre à chaux; lime-stone)	—	0,3	—	—	—	—	—	3,65	—	—	—	—	—	2,65
Harter Sandstein (grès; sand-stone)	—	0,35	—	—	—	—	—	3,87	—	—	—	—	—	2,30
Gew. guter Ziegelstein (brique; brick)	—	0,08	—	—	—	—	—	0,8	—	—	—	—	—	1,85
Zementmörtel (mortier de cement; mortar of cement)	—	0,15	—	—	—	—	—	1,5	—	—	—	—	—	—
Kalkmörtel (mortier de chaux; mortar of chalk)	—	0,04	—	—	—	—	—	0,4	—	—	—	—	—	—
Kalkstein-Mauerwerk (mur en pierre à chaux; wall of lime-stones)	—	—	—	—	—	—	—	1,46	—	—	—	—	—	2,12
Sandstein-Mauerwerk (gresserie; wall of sand-stones)	—	—	—	—	—	—	—	1,5	—	—	—	—	—	2,085
Ziegel-Mauerwerk (mur en briques; wall of bricks)	—	—	—	—	—	—	—	0,4	—	—	—	—	—	1,63

+ Erhöhung der Festigkeit der Bronze durch Zusatz von etwas Phosphor (Phosphorbronze) bis zu 40 kg, || bedeutet in Richtung der Fasern, ⊥ senkrecht zu denselben.

I. Die einfache Elastizität und Festigkeit.

1. Zug- und Druckfestigkeit.

§ 2.

a) Ohne Berücksichtigung des Eigengewichts.

Durch Versuche hat man festgestellt, dass die Festigkeit stabförmiger Körper aus demselben Material gegen äussere, ein Ausdehnen oder Zusammendrücken bewirkende Kräfte in direktem Verhältnis steht zu den Querschnitten der Körper.

Ist daher F der kleinste auf der Zug- oder Druckrichtung senkrechte Querschnitt eines Stabes, so ergibt sich, da man sich den Stab als ein Bündel von F einzelnen Stangen von je 1 qmm Querschnitt vorstellen kann, für die zulässige Belastung P des Stabes:

$$P = F S. \tag{1}$$

Behufs Bestimmung des Querschnittes, welcher einer Stange gegeben werden muss, damit bei einem gewissen äusseren Zug oder Druck die Spannung auf den Quadratmillimeter einen bestimmten Wert nicht überschreite, hat man aus (1):

$$F = \frac{P}{S}. \tag{2}$$

Handelt es sich bei einer gegebenen Konstruktion um Ermittelung der in den Fasern herrschenden Spannung, so bedient man sich der ebenfalls aus (1) folgenden Formel:

$$S = \frac{P}{F}. \tag{3}$$

Formel (1) gilt auch noch für Inanspruchnahmen über die Elastizitätsgrenze hinaus, so dass, wenn man für den Sicherheitsmodul S den Tragmodul T oder Bruchmodul K einführt, man die Belastung an der Elastizitätsgrenze bezw. die Bruchbelastung erhält.

Bezeichnen wir in der in § 1 entwickelten Formel die gefundene Längenausdehnung α l (die sog. elastische Dehnung) des prismatischen Stabes in Richtung der wirkenden Kraft P mit λ, und den konstanten Querschnitt mit F, so ist:

(4) $$\lambda = \frac{P\,l}{F\,E}$$ > λ : l = P : FE

oder für $\frac{P}{F}$ den Wert S eingeführt: vide (3)

(4 α) $$\lambda = \frac{S\,l}{E},$$

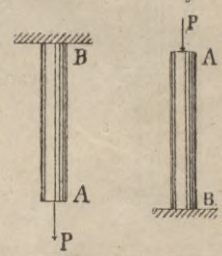
durch welche Formeln auch ohne weiteres die Verkürzung λ eines gedrückten Stabes gefunden wird.

b) Mit Berücksichtigung des Eigengewichts.

Ist die Länge A B = l des in vertikaler Lage in B (Fig. 1 und 2) aufgehängten oder unterstützten Stabes bedeutend, so wird der Zug oder Druck auf jeden Querschnitt, verursacht durch die äussere Kraft P, noch ansehnlich vergrössert durch das Eigengewicht des Stabes.

Die Inanspruchnahme ist dabei aber für die verschiedenen Querschnitte vom freien Ende A nach dem festgehaltenen Ende B hin nicht gleich, indem auf die verschiedenen Querschnitte zwischen A und B ein verschieden langes Stabstück zieht oder drückt. Auf den Querschnitt B wirkt demnach die grösste Belastung, nämlich P + G, wenn G das ganze Eigengewicht des Stabes ist.

Fig. 1. Fig. 2.



Unter Voraussetzung eines überall gleich dicken Stabes und durchweg aus demselben Material bestehend, wird daher in B am ehesten ein Zerstören des Materials eintreten können; man wird mithin dem Stabe einen Querschnitt gleich dem gefährlichen Querschnitt bei B geben müssen. Drückt man G durch F l γ aus, wobei γ das spez. Gewicht des Materials ist, so folgt für den vorliegenden Fall aus der Beziehung P + G = F S:

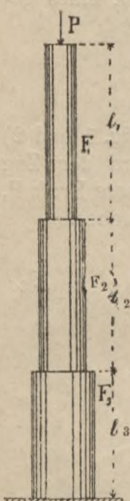
(5) $$F = \frac{P}{S - l\gamma}.$$

Für $l = \frac{S}{\gamma}$ wird $F = \infty$ d. h. für diese Länge genügt kein Querschnitt mehr, um die auftretende Spannung gleich der zulässigen zu erhalten; es ist dies folglich die Grenze, welche die Länge eines Stabes in vertikaler Lage höchstens noch erreichen darf und zwar nur dann, wenn die äussere Kraft P = 0 ist.

Besitzt der zu konstruierende prismatische Stab Teile aus anderem Material und etwa noch seitliche Vorsprünge, so kann man natürlich behufs Feststellung der Grösse des gefährlichen Querschnittes die

Formel (5) nicht anwenden, da ja in der ihr zu Grunde liegenden Formel $P + G = F S$ das G noch unbekannt ist. Um nun hier zum Ziele zu kommen, nimmt man zunächst den gefährlichen Querschnitt an, bestimmt das Totalgewicht G aus dem Gewichte des Stabes nebst den übrigen Teilen und berechnet nun aus $P + G = F S$ den Querschnitt F, welcher mit dem angenommenen Querschnitt bei richtiger Wahl übereinstimmen muss. Bei etwaiger Differenz in dem einen oder anderen Sinne muss man dann den gefährlichen Querschnitt grösser oder kleiner wählen und dies Verfahren solange wiederholen, bis Uebereinstimmung mit der Rechnung eintritt.

Fig. 3.



Sind grössere Konstruktionen, wie z. B. hohe Mauern und Brückenpfeiler auszuführen, so kann man eine grosse Materialersparnis dadurch erzielen, dass man die ganze Höhe in passende Abschnitte einteilt und nun jedem Abschnitte den Querschnitt gibt, der ihm mit Rücksicht auf die äussere Belastung P, das wirkende Eigengewicht und die zulässige Spannung des Materials in seinem gefährlichen Querschnitt zukommt.

Seien Fig. 3 $l_1, l_2, l_3 \ldots$ die Längen der einzelnen Abschnitte, gerechnet vom freien Ende an, sowie $F_1, F_2, F_3 \ldots$ die bezüglichen Querschnitte, so sind für das spez. Gewicht γ die Gewichte der einzelnen Teile $F_1\, l_1\, \gamma$, $F_2\, l_2\, \gamma$, $F_3\, l_3\, \gamma \ldots$

Für den ersten Abschnitt hat man demnach:

$$P + F_1\, l_1\, \gamma = F_1\, S,$$

woraus wie oben der erforderliche Querschnitt:

$$F_1 = \frac{P}{S - l_1\, \gamma}.$$

Zur Bestimmung des Querschnitts F_2 dient:

$$P + F_1\, l_1\, \gamma + F_2\, l_2\, \gamma = F_2\, S.$$

Führt man für F_1 den eben gefundenen Wert ein, so findet man:

$$F_2 = \frac{P\,S}{(S - l_1\,\gamma)\,(S - l_2\,\gamma)}.$$

Ebenso erhält man:

$$F_3 = \frac{P\,S^2}{(S - l_1\,\gamma)\,(S - l_2\,\gamma)\,(S - l_3\,\gamma)}$$

und allgemein:

$$(6) \qquad F_n = \frac{P\,S^{n-1}}{(S - l_1\,\gamma)\,(S - l_2\,\gamma)\,(S - l_3\,\gamma) \ldots}.$$

Ist $l_1 = l_2 = l_3 = \ldots = l$, so ergibt sich:

$$(7) \qquad F_n = \frac{P}{S}\left(\frac{S}{S - l\,\gamma}\right)^n.$$

Anmerkung. Ist x die Entfernung irgend eines Querschnittes C, Fig. 4 und 5, vom freien Ende und setzt man $x = n l$, so folgt aus letzterer Gleichung auch:

$$F_n = \frac{P}{S} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x\gamma}{nS}\right)^n}.$$

Aber:

$$\left(1 - \frac{x\gamma}{nS}\right)^n = 1 - n \cdot \frac{x\gamma}{nS} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{x\gamma}{nS}\right)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{x\gamma}{nS}\right)^3 + \ldots$$

Es ist nun für $n = \infty$:

$$n - 1 = n - 2 = \ldots = n,$$

daher auch:

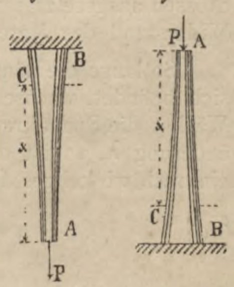
$$\left(1 - \frac{x\gamma}{nS}\right)^n = 1 - \frac{x\gamma}{S} + \frac{1}{2}\left(\frac{x\gamma}{S}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{x\gamma}{S}\right)^3 + \ldots = e^{-\frac{x\gamma}{S}},$$

wobei $e = 2{,}71828\ldots$ (die Basis des natürlichen Logarithmensystems) ist; mithin ist für diesen Fall:

(8) $$F_n = \frac{P}{S} e^{\frac{x\gamma}{S}}.$$

Die nach dieser Formel konstruierten Körper bieten bei kleinstem Materialverbrauch in allen Querschnitten gleiche Sicherheit und heissen Körper **gleicher** Festigkeit (solides d'égale résistance; bodies of uniform strength).

Fig. 4. Fig. 5



Was nun die Verlängerung oder Verkürzung λ mit Bezug auf den Fall anbetrifft, welcher der Formel (5) zu Grunde liegt, so setzen sich beide Längenänderungen zusammen aus der durch die äussere Kraft P hervorgerufenen λ_1, die durch Formel (4) bestimmt ist, und aus der λ_2, welche das Eigengewicht G erzeugt. Zur Feststellung der letzteren denken wir uns den überall gleich dicken Stab von der Länge l in lauter sehr dünne Scheiben von der Höhe $\frac{l}{n}$ und dem Gewicht $\frac{G}{n}$ eingeteilt.

Für die dem freien Ende zunächst liegende Scheibe ist dann nach Formel (4) die Längenänderung:

$$\lambda' = \frac{\frac{G}{n} \cdot \frac{l}{n}}{F \cdot E}.$$

Für die zweite Scheibe ist:

$$\lambda'' = \frac{2\frac{G}{n} \cdot \frac{l}{n}}{F \cdot E}.$$

Die dritte Scheibe erleidet eine solche von:

$$\lambda''' = \frac{3\frac{G}{n} \cdot \frac{l}{n}}{F \cdot E} \text{ u. s. w.,}$$

daher:

$$\lambda_2 = (\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \ldots) = \frac{G\,l}{n^2 F \cdot E}(1 + 2 + 3 + \ldots + n).$$

Aber $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n^2}{2}$ für $n = \infty$; demnach:

$$\lambda_2 = \frac{G\,l}{2\,F \cdot E}$$

und also die totale Verlängerung oder Verkürzung ausgedrückt durch:

(9) $$\lambda = \frac{(P + \frac{1}{2}G)\,l}{F \cdot E}.$$

Wird ein Körper durch äussere Kräfte gedehnt oder zusammengedrückt, so verrichten diese Kräfte, demnach auch die molekularen Widerstände, die inneren Spannkräfte, eine gewisse Arbeit, deren Bestimmung besonders dann von Wichtigkeit ist, wenn die Konstruktion Stössen ausgesetzt ist, deren zerstörende Wirkung durch den elastischen Widerstand des Materials aufgehoben werden muss.

So lange die Längenänderung noch unterhalb der Elastizitätsgrenze sich befindet, wachsen die Spannkräfte proportional der Längenänderung. Wächst die Spannkraft stetig von 0 bis P und ist die erzeugte Längenänderung λ, so ist die geleistete mechanische Arbeit dargestellt durch ein rechtwinkeliges Dreieck von der Basis λ und der Höhe P, also:

(10) $$A = \frac{\lambda\,P}{2}.$$

Für die Elastizitätsgrenze ist $\lambda = \frac{T\,l}{E}$ und $P = T\,F$, demnach auch

(10 α) $$A = \frac{T^2\,F\,l}{2\,E}.$$

Um die durch die Spannkräfte bis zur Zerstörung durch Zerreissen oder Zerdrücken geleistete Arbeit festzustellen, kann man nur vom Versuch ausgehen, da von der Elastizitätsgrenze an die Spannkräfte nicht mehr proportional den Längenänderungen wachsen. Nach Poncelet ergibt sich für die Arbeit bis zum Zerreissen bei den nachstehenden Materialien:

Tabelle II.

Materialien		Bruchorbeit auf den Quadratmeter Querschnitt und den laufenden Meter bezogen
Eiche, Buche, Tanne, Lärche, Esche, Ulme . . .		12100
Stabeisen und Eisendraht	weich oder angelassen .	4000000
	hart oder nicht angelassen	80000
Gew. Stahl, gehärtet und angelassen		70000
Feinster englischer Gussstahl		160000
Stahl, stark gehärtet und sehr spröde.		12500
Messingdraht, angelassen		4500000
Starker Messingdraht, nicht angelassen . , . .		200050
Bleidraht, kalt gezogen, von 4 mm Durchmesser .		350000

Diese Resultate zeigen deutlich, wie sehr die Anwendung von weichen, biegsamen Metallen der Verwendung von spröden vorzuziehen ist besonders bei Konstruktionen, die oftmals heftigen und plötzlich auftretenden Stössen ausgesetzt sind. Da, wo es sich darum handelt, eine oft bedeutende lebendige Kraft zu zerstören, fällt die dazu nötige Kraftanstrengung natürlich um so kleiner aus, je grösser der durchlaufene Weg, also hier die Längenänderung des Körpers ist. Daher ist es klar, wie auch die Tabelle zeigt, dass Bleidrähte Stössen widerstehen, welche für Gussstahldraht auch der besten Sorte bei gleicher Stärke ein Zerreissen bedingen würden.

Beispiele.

1. Eine rechteckige Stange aus Schmiedeeisen hat an der schwächsten Stelle die Dimensionen 54 und 35 mm.

Welches ist die zulässige Zugbelastung, sowie die Belastung an der Elastizitätsgrenze und beim Zerreissen?

Es ist:

$$F = 54 \cdot 35 \text{ qmm} = 1890 \text{ qmm};$$

demnach:

$$\begin{aligned} P &= 1890 \cdot 7 \text{ kg} = 13230 \text{ kg} \\ P_1 &= 1890 \cdot 14 \text{ „} = 26460 \text{ „} \\ P_2 &= 1890 \cdot 40 \text{ „} = 75600 \text{ „} \end{aligned}$$

2. Eine an einer Maschine befindliche quadratische schmiedeeiserne Stange, welche an der schwächsten Stelle 22 mm Seite hat, ist einem Zuge von 4215 kg unterworfen.

Welche Spannung, bezogen auf den Quadratmillimeter, herrscht im Stabe?

$$S = \frac{4215}{22^2} = 8{,}708 \text{ kg}.$$

3. Eine gusseiserne Stange von 75 mm Breite und 30 mm Dicke ist auf Zug beansprucht.

Bei welcher Kraft zerreisst dieselbe?

$$P = 30 \cdot 75 \cdot 12,5 \text{ kg} = 28125 \text{ kg}.$$

4. Wie gross muss die Seite des quadratischen Querschnitts einer Hängesäule aus Tannenholz sein, wenn dieselbe eine ständige Last von 25000 kg aufnehmen soll?

$$F = \frac{25000}{0,7} \text{ qmm} = 35714,3 \text{ qmm},$$

also die Seite

$$b = \sqrt{35714,3} = 189 \text{ mm}.$$

5. Die Probebelastung zwischen zwei gegenüberliegenden Tragbändern einer Hängebrücke beträgt 3000 kg.

Welcher Durchmesser ist jedem Tragband zu geben?

Setzen wir mit Rücksicht auf die vertikalen Schwingungen, welchen diese Brücken ausgesetzt sind, eine 4 fache Tragsicherheit voraus; dann ist, da auf jedes Band die Hälfte der Belastung kommt:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 1500}{3,5 \cdot 3,1416}} = 23,5 \text{ mm}.$$

6. Welche Last kann man einer offenen eisernen Schakenkette mit Sicherheit anhängen, wenn die Schaken aus d mm dickem Eisen hergestellt sind?

Mit Rücksicht auf die Schwächung der Tragfähigkeit durch die Krümmung und die Schweissung des Eisens nehme man nach Tabelle den Sicherheitsmodul $S = 6,3$ kg; dann ergibt sich aus $P = 2 \frac{\pi d^2}{4} \cdot 6,3$ angenähert:

$$P = 10 d^2.$$

Anmerkung. Eine Stegkette erträgt eine um etwa 20 Prozent grössere Belastung.

7. Im Cylinder einer zu konstruierenden hydraulischen Presse, deren Pressstempel 270 mm Durchmesser bekommt, herrsche ein Maximaldruck von 250 Atm.

Wie gross ist der Durchmesser jeder der 4 schmiedeeisernen Säulen zu nehmen, welche das Pumpengestell mit der Deckplatte verbinden, wenn 8 fache Bruchsicherheit angenommen wird?

Der Flächeninhalt des Pressstempel-Querschnittes ist:

$$\frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,1416}{4} \cdot 270^2 = 57255,5 \text{ qmm}.$$

Der Druck einer Atmosphäre auf den Quadratmillimeter ist 0,010334 kg, demnach der Totaldruck:

$$P = 57255,5 \cdot 250 \cdot 0,010334 \text{ kg} = 147919,58425 \text{ kg}.$$

Dieser Druck muss von den 4 Säulen aufgenommen werden. Wenn nun auch der Widerstand, den der zu pressende Gegenstand darbietet, im allgemeinen nicht in allen Punkten der Pressplatte derselbe ist, so kann man doch annähernd eine gleichmässige Verteilung obigen Druckes auf alle 4 Säulen voraussetzen und zwar um so mehr, als eine 8 fache Bruchsicherheit, demnach 5 kg auf den Quadratmillimeter immerhin eine sehr geringe Beanspruchung ist, eine kleine Mehrbelastung für eine Säule daher wohl ohne Gefahr einer Ueberbelastung für dieselbe eintreten darf.

Ist nun d der Durchmesser einer Säule, so folgt:

$$\frac{\pi d^2}{4} S = \frac{147919,58425}{4} \text{ kg},$$

woraus:

$$d = \sqrt{\frac{147919,58425}{5 \cdot 3,1416}} = 97 \text{ mm}.$$

8. Der Horizontalschub eines Daches betrage 10000 kg, und derselbe werde durch eine horizontal liegende schmiedeeiserne Zugstange aufgenommen, welche aus 2 Flacheisen von je 1,5 cm Stärke zusammengesetzt ist.

Welche Breite ist der Zugstange zu geben?

Es ist

$$2 \cdot 1,5 \cdot x = \frac{10000}{700} = 4,8 \text{ cm}.$$

9. Bei einer Kettenbrücke werden schmiedeeiserne Stäbe bester Sorte von 4 cm Dicke und 10 cm Breite angewandt, von denen ein Quadratzentimeter mit genügender Sicherheit 1000 kg tragen soll. Bei der Prüfung vor der Montierung ergibt sich, dass die Stäbe durchschnittlich bei einer Belastung von 280000 kg zerreissen.

Welchen Grad von Sicherheit bietet das hier verwandte Material?

Es ist:

$$P = F \cdot K.$$

Die Werte von P und F eingeführt, gibt:

$$K = \frac{280000}{40} = 7000 \text{ kg}.$$

Die vorgeschriebene zulässige Belastung ist aber nur 1000 kg, mithin ist eine 7 fache Bruchsicherheit vorhanden.

10. Welchen Durchmesser bekommt ein Hanfseil, das mit P Kilogramm gespannt wird?

a) Für festgeschlagene (stehende oder Tragseile) kann man $S = 1,1$ kg auf den Quadratmillimeter setzen; alsdann ist:

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot 1,1 = 0,864 d^2$$

und also:

$$d = 1,08 \sqrt{P}.$$

b) Für lose geschlagene (laufende oder Triebseile) nehme man $S = 0{,}8$ kg auf den Quadratmillimeter, mithin:

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}628\, d^2$$

und daher:

$$d = 1{,}26 \sqrt{P}.$$

11. Ein rundes Seil aus Eisendraht bestehe aus i Drähten und habe eine Zugkraft P zu überwinden.

Wie gross ist der Durchmesser δ der Drahtdicke und d des Seiles zu wählen?

Die Tragkraft der Drahtseile kann nahezu gleich der Summe der Tragkräfte aller im Seile enthaltenen Drähte gesetzt werden.

a) Für runde Tragseile darf man im Mittel $S = 12$ kg auf den Quadratmillimeter setzen; demnach folgt im allgemeinen:

$$P = i \frac{\pi}{4} \delta^2 \cdot 12 = 9{,}425\, i\, \delta^2$$

und folglich:

$$\delta = 0{,}326 \sqrt{\frac{P}{i}}.$$

Es ist ungefähr für:

$$i = 36;\quad 48;\quad 54;\quad 60;\quad 66;\quad 72.$$

$$\frac{d}{\delta} = 8;\quad 10{,}25;\quad 11{,}33;\quad 12{,}8;\quad 13{,}35;\quad 14{,}2.$$

Nehmen wir ein Seil aus 6 Litzen oder Strähnen zu 6 Drähten, so ist also:

$$\delta = 0{,}054 \sqrt{P},$$

$$d = 0{,}432 \sqrt{P}.$$

b) Für Triebseile aus Eisendraht kann man als Mittelwert $S = 6{,}75$ kg auf den Quadratmillimeter setzen, also:

$$P = i \cdot \frac{\pi}{4} \delta^2 \cdot 6{,}75 = 5{,}301 \cdot i \cdot \delta^2$$

und:

$$\delta = 0{,}434 \sqrt{\frac{P}{i}}.$$

Setzen wir auch hier, wie vorwiegend bei Transmissionen anzutreffen ist, $i = 36$, so findet man:

$$\delta = 0{,}072 \sqrt{P},$$

$$d = 0{,}576 \sqrt{P}.$$

Das Eigengewicht der Drahtseile für den laufenden Meter lässt sich ausdrücken durch

$$G = \frac{3}{4} i \frac{\delta^2}{100} = 0{,}0075 \cdot i \cdot \delta^2.$$

12. Eine Riemenscheibe von R mm Halbmesser habe bei n Umdrehungen in der Minute N Pferdestärken mittels eines einfachen Riemens zu übertragen.

Welcher Querschnitt ist dem Riemen zu geben?

Ist T die grössere Spannung des Riemens,
e die Basis des natürllichen Logarithensystems,
a das Verhältnis des vom Riemen umspannten Bogens der kleineren Scheibe zur ganzen Peripherie derselben,
μ der Reibungskoeffizient für die Gleitung des Riemens auf der Scheibe = 0,28 für gewöhnliche fette Riemen auf eisernen Scheiben,

so ist bekanntlich:

$$T = \frac{e^{2\mu\pi a}}{e^{2\mu\pi a} - 1} \cdot P,$$

wobei P die am Scheibenumfange ausgeübte nützliche Zugkraft des Riemens ist, und also für:

$$a = 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8,$$

$$\frac{T}{P} = 3{,}4;\ 2{,}4;\ 2;\quad 1{,}7;\ 1{,}6;\ 1{,}4;\ 1{,}3.$$

Für a = 0,4 im Durchschnitt folgt mithin T = 2 P.

In Praxis werden in der Regel die Riemen stärker angespannt als nötig und als die Rechnung feststellt; wir wollen daher annehmen:

$$T = 2{,}2\,P.$$

Bezeichnet:

b die Riemenbreite und
δ die Lederdicke desselben,

so muss demnach für S = 0,225 kg der Querschnitt des Riemens

$$b\,\delta = \frac{2{,}2\,P}{0{,}225} = 10\,P$$

angenähert sein.

Aber:

$$P = 716200 \frac{N}{n\,R};$$

daher auch:

$$b\,\delta = 7162000 \frac{N}{n\,R}.$$

Nimmt man im Mittel $\delta = 4$ mm, so hat man allgemein für die Breite:

$$b = 1790500 \frac{N}{n R}.$$

Für $N = 2$, $n = 900$ und $R = 75$ mm, erhält man:

$$b = 53 \text{ mm}.$$

13. Eine schmiedeeiserne Schraube wird in Richtung ihrer Achse durch eine Kraft P auf Zug beansprucht.

Wie stark ist die Schraube zu machen?

Ist d_1 der Kerndurchmesser, so ist:

$$P = \frac{\pi d_1^2}{4} S.$$

Nach Farey kann man $S = 2,6$ kg auf den Quadratmillimeter setzen, daher:

$$P = 2,042\, d_1^2$$

und:

$$d_1 = 0,7 \sqrt{P}.$$

Diese Werte gelten für scharfe und flache Gewinde.

Der Spindeldurchmesser ist nach Whitworth:

a) für scharfe Gewinde:

$$d = \frac{d_1 + 1,3}{0,9} \text{ mm};$$

b) für flache Gewinde:

$$d = \frac{d_1 + 2}{0,91} \text{ mm}.$$

14. Die kupfernen hohlen Stehbolzen des Feuerkastens einer Lokomotive haben 20 mm äusseren und 4 mm inneren Durchmesser, dabei rechnet man behufs genügender Verankerung etwa einen Bolzen auf jeden Quadratdezimeter.

Wie gross ist die Inanspruchnahme jedes Bolzens auf dem Quadratmillimeter bei 10 Atm. Kesselspannung?

Der Querschnitt eines Stehbolzens ist $\frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,1416}{4} \cdot 20^2$ $= 314,16$ qmm; daher die durch jeden Bolzen abzusteifende Druckfläche:

$$10000 - 314,16 = 9685,84 \text{ qmm}$$

und der darauf lastende Druck:

$$P = 10 \cdot 9685,84 \cdot 0,010334 \text{ kg} = 1000,9347 \text{ kg}.$$

Die Ringfläche des Bolzens ist:

$$\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2) = \frac{3,1416}{4}(20^2 - 4^2) = 301,594 \text{ qmm}$$

nnd also die gesuchte Spannung:

$$S = \frac{1000,9347}{301,594} = 3,32 \text{ kg.}$$

15. Ein Dampfcylinder hat 30 cm Durchmesser und wird mit Dampf gefüllt, welcher mit 5 Atm. Ueberdruck arbeitet.

Wie stark muss jede der 6 Schraubenbolzen werden, die Cylinder und Deckel verbinden?

Die Druckfläche ist:

$$\frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,1416}{4} \cdot 300^2 = 70685,8 \text{ qmm},$$

mithin der Totaldruck:

$$P = 5 \cdot 70685,8 \cdot 0,010334 = 3652,335 \text{ kg}$$

und also der Kerndurchmesser jedes Schraubenbolzens:

$$d_1 = 0,7 \sqrt{\frac{3652,335}{6}} = 17,3 \text{ mm},$$

daher der gesuchte Bolzendurchmesser:

$$d = \frac{17,3 + 1,3}{0,9} = 20,5 \text{ mm}$$

angenähert.

16. Durch welche Belastung wird eine kurze quadratische Stange aus Schmiedeeisen oder Gusseisen zerdrückt, wenn die schwächste Stelle 25 mm Seite hat?

$$P = 25^2 \cdot 38 = 23750 \text{ kg},$$
$$P_1 = 25^2 \cdot 75 = 46875 \text{ „}$$

17. Welches ist für obige Stange in Aufgabe 16 die Belastung an der Elastizitätsgrenze?

$$P = 25^2 \cdot 14 = 8750 \text{ kg},$$
$$P_1 = 25^2 \cdot 15 = 9375 \text{ „}$$

18. Ein kurzer runder und hohler gusseiserner Ständer, dessen innerer Durchmesser d_2 gleich $\frac{2}{3}$ des äusseren d_1 ist, soll eine Last von 12000 kg mit Sicherheit tragen?

Welche Werte haben d_1 und d_2?

Nimmt man $S = 6$ kg, so folgt:

$$12000 = \frac{\pi}{4} [d_1^2 - (\tfrac{2}{3} d_1)^2] \cdot 6,$$

daraus:

$$d_1 = 68 \text{ mm}$$

und

$$d_2 = 45,3 \text{ „}$$

19. Eine Holzkonstruktion von etwa 15000000 kg Gewicht soll auf einem Fundament von Zementmörtel aufgeführt werden.

Welche Oberfläche muss die Zementgrundung erhalten, wenn eine gleichmässige Verteilung der Belastung vorausgesetzt wird?

$$F = \frac{15000000}{150000} = 100 \text{ qm.}$$

20. Welche Länge l muss man einer 20 cm breiten Unterlagsplatte geben, wenn dieselbe einen Druck von 5000 kg auf Kalksteinmauerwerk gleichmässig übertragen soll?

Nehmen wir 20fache Bruchsicherheit, so ist:

$$b\,l = \frac{P}{S_1},$$

also:

$$l = \frac{P}{b\,S_1} = \frac{5000}{200 \cdot \frac{1,46}{20}} = 342,5 \text{ mm.}$$

21. Auf einem kurzen Ständer aus Eichenholz, der 105 mm breit und 85 mm stark ist, lastet ein Druck von 9900 kg.

Welche Spannung auf den Quadratmillimeter herrscht in demselben?

$$S_1 = \frac{9900}{85 \cdot 105} = 1,11 \text{ kg.}$$

22. Welche Maulbreite D ist einem Schraubenschlüssel mit festen Backen zu geben bezw. welches ist die Breitendimension D der sechsseitigen Schraubenmutter oder des Schraubenkopfes, wenn d der Durchmesser des Schraubenbolzens ist?

Unter der Voraussetzung, die Mutter sei an der Auflagestelle keiner grösseren Spannung ausgesetzt, als der zugehörige Bolzen und der Druck P verteile sich gleichmässig über die Auflagefläche, deren Grösse nahezu $\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ ist, folgt:

$$\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\,S_1 = P = \frac{\pi}{4}\,d^2\,S_1,$$

demnach $D = 1,414\,d$, wofür wir behufs möglichster Sicherheit

$$D = 1,4\,d + 5 \text{ mm}$$

nehmen.

Hieraus ergibt sich für den Durchmesser D_1 des dem Sechskant umschriebenen Kreises, da $D = D_1 \cos 30$ ist, wenn man für D den Wert einsetzt, annähernd:

$$D_1 = 1,62\,d + 6 \text{ mm.}$$

23. Welches ist die zulässige Belastung eines Pfeilers aus Ziegelmauerwerk und von quadratischem Querschnitt bei 20facher Bruchsicherheit,

a) wenn der Pfeiler 1 Stein stark ist?

$$P = 250^2 \cdot \frac{0,4}{20} = 1250 \text{ kg.}$$

b) wenn derselbe $1\frac{1}{2}$ Stein stark ist?

$$P = 380^2 \cdot \frac{0,4}{20} = 2888 \text{ kg.}$$

c) wenn derselbe 2 Stein stark ist?

$$P = 510^2 \cdot \frac{0,4}{20} = 5202 \text{ kg.}$$

d) wenn derselbe $2\frac{1}{2}$ Stein stark ist?

$$P = 640^2 \cdot \frac{0,4}{20} = 8192 \text{ kg.}$$

e) wenn derselbe 3 Stein stark ist?

$$P = 770^2 \cdot \frac{0,4}{20} = 11858 \text{ kg.}$$

24. Wie stark sind die Fundamentmauern eines 18 m langen, 12,5 m breiten und 17,5 Millionen Kilogramm schweren Gebäudes zu machen, wenn man hierzu gut bearbeitete Granitsteine verwendet?

Ist e die gesuchte Mauerdicke, so ist die mittlere Mauerlänge 18 — e und die mittlere Mauerbreite 12,5 — e, demnach der mittlere Umfang:

$$2(18 - e + 12,5 - e) = 61 - 4e,$$

und daher die Gesamtgrundfläche:

$$(61 - 4e)\, e \text{ qm} = 10000\,(61e - 4e^2) \text{ qcm.}$$

Nimmt man für die Granitmauer 15fache Bruchsicherheit, so folgt:

$$10000\,(61e - 4e^2)\,\frac{585}{15} = 17500000.$$

Hieraus ergibt sich als Stärke der Mauer:

$$e = 0,775 \text{ m.}$$

25. Welche Belastung ist notwendig, um bei einem quadratischen Stabe aus Bessemerstahl von 25 mm Seite und 3,5 m Länge eine Verlängerung von 1,5 mm zu erzeugen?

Es ist:

$$P = E\,F\,\frac{\lambda}{l} = 21500 \cdot 25 \cdot \frac{1,5}{3500} = 5758,9 \text{ kg.}$$

26. Wie gross ist die verhältnismässige Ausdehnung eines Eisendrahts, der mit 10 kg auf den Quadratmillimeter gespannt ist?

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{S}{E} = \frac{10}{20000} = \frac{1}{2000}.$$

27. Welchen Durchmesser muss eine eiserne Stange von 2,5 m Länge erhalten, wenn dieselbe sich unter Einwirkung einer Zugkraft von 4500 kg nur 1 mm verlängern soll?

Aus

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{E} \frac{l}{\lambda} = \frac{4500}{20000} \cdot \frac{2500}{1} = 562{,}5 \text{ qmm}$$

folgt:

$$d = 26{,}8 \text{ mm}.$$

28. Ein horizontal liegendes, gut gelagertes schmiedeeisernes Gestänge, das im unbeanspruchten Zustande 150 m lang ist, sei in seiner Längenrichtung einer an dem einen Ende angreifenden Zugkraft und zwar mit 7 kg auf den Quadratmillimeter unterworfen.

Um wieviel verlängert sich das Gestänge?

$$\lambda = \frac{S\,l}{E} = 7 \cdot \frac{150000}{20000} = 52{,}5 \text{ mm}.$$

Der Angriffspunkt der Kraft muss sich um diese Strecke, den sogen. toten Gang, bereits bewegt haben, bevor das andere Ende in Bewegung kommt.

29. Wie gross ist die Verkürzung einer gusseisernen, 1,5 m hohen Stütze, wofern der Quadratzentimeter mit 500 kg belastet und eine Seitenausbiegung unmöglich ist?

$$\lambda = \frac{S_1\,l}{E} = \frac{500 \cdot 150}{1000000} = 0{,}075 \text{ cm} = 0{,}75 \text{ mm}.$$

30. Wie gross ist die Belastung auf den Quadratmillimeter Querschnitt einer Säule aus Eichenholz, wenn die Verkürzung $\frac{1}{2000}$ der ursprünglichen Länge sein soll?

$$S_1 = E \frac{\lambda}{l} = 1200 \cdot \frac{1}{2000} = 0{,}6 \text{ kg}.$$

31. Welche Stärke muss das quadratische schmiedeeiserne Gestänge einer nach Art der gewöhnlichen Hubpumpen konstruierten Schachtpumpe mit seitlichem Druckrohr von 350 mm Kolbendurchmesser erhalten, wenn dieselbe das Wasser auf 110 m Förderhöhe heben soll?

Die grösste Beanspruchung und zwar auf Zug tritt bei der Aufwärtsbewegung des Kolbens ein, wobei als äussere Kräfte die auf den Kolben drückende Wassermasse, sowie die verschiedenen Reibungswiderstände auftreten, für welche wir $\frac{1}{6}$ des Gewichts der zu hebenden Wassermasse setzen wollen. Demnach ist:

$$P = \frac{7}{6} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{350^2 \cdot 110000}{1000000} = 18520{,}675 \text{ kg}.$$

Behufs Feststellung des Gestängequerschnitts setzt man nun in Formel (5) für l die um etwa 12 Prozent vergrösserte Förderhöhe, um so den beim Gestänge an den verschiedenen Verbindungsstellen der einzelnen Stangen, aus denen das Gestänge zusammengesetzt ist, vorhandenen Vorsprüngen, durch welche das Gestängegewicht vergrössert wird, Rechnung zu tragen, d. h. also man führt statt des Gestänges von der Länge der wirklichen Förderhöhe und von nicht durchgehends gleichem Querschnitt ein ideelles, um 12 Prozent längeres von konstantem Querschnitt ein. Wir nehmen also $l = 110000 + \frac{12}{100} \cdot 110000$ $= 123200$ mm, folglich:

$$F = \frac{P}{S - l\gamma} = \frac{18520{,}675}{7 - 123200 \cdot 0{,}00000778},$$

woraus:

$$F = 3065{,}4 \text{ qmm}$$

und daher die Seite:

$$a = 55{,}4 \text{ mm}.$$

32. Bei welcher Länge zerreisst eine Bleistange durch ihr Eigengewicht?

$$l = \frac{K}{\gamma} = \frac{1{,}25}{0{,}0000114} = 109649 \text{ mm} = 109{,}649 \text{ m}.$$

Ihre Ausdehnung erreicht die Elastizitätsgrenze bei einer Länge von

$$l_1 = \frac{T}{\gamma} = \frac{1{,}05}{0{,}0000114} = 92105 \text{ mm} = 92{,}105 \text{ m}$$

und die dieser Grenze entsprechende Ausdehnung ist:

$$\lambda = \frac{T\,l_1}{E} = \frac{1{,}05 \cdot 92105}{500} = 193{,}4 \text{ mm}.$$

33. Auf einem Brückenpfeiler aus Kalkstein-Mauerwerk, Fig. 6, welcher aus zwei gleichhohen Teilen von je 7,25 m Höhe zusammengesetzt werden soll, lastet ein Druck von 1200 Tonnen.

Das obere Prisma habe einen rechteckigen Querschnitt, dessen eine Seite 9,5 m und dessen andere Seite x_1 ist.

Das untere Prisma besteht aus einem Rechteck von der Breite x_2, einem Halbkreise und einem gleichseitigen Dreieck.

Es werde 20fache Bruchsicherheit vorausgesetzt.

Wie gross ist x_1 und x_2?

Das Gewicht eines Kubikdezimeter Kalkstein-Mauerwerk ist nach Tabelle I gleich 2,12 kg, demnach das Gewicht eines Kubikmeters gleich 2,12 Tonnen.

Weiter ist die zulässige Druckspannung $S_1 = \frac{1{,}46}{20} = 0{,}073$ kg auf den Quadratmillimeter = 73 Tonnen auf den Quadratmeter.

Nach Formel (7) ergibt sich nun für den oberen Querschnitt:

$$F_1 = \frac{P}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S_1 - l\gamma} = \frac{1200}{73} \cdot \frac{73}{73 - 7{,}25 \cdot 2{,}12} = 16{,}44 \cdot 1{,}2667$$
$$= 20{,}824 \text{ qm};$$

Fig. 6.

daher:

$$x_1 = \frac{20,824}{9,5} = 2,192 \text{ m.}$$

Für den unteren Querschnitt hat man:

$$F_2 = \left(\frac{P}{S_1}\right)\left(\frac{S_1}{S_1 - l\gamma}\right)^2 = 16,44 \cdot 1,2667^2$$
$$= 26,378 \text{ qm.}$$

Zur Bestimmung von x_2 hat man:

$$26,378 = 9,5\,x_2 + \frac{\pi x_2^2}{8} + \frac{x_2}{2}\sqrt{x_2^2 - \frac{x_2^2}{4}}$$
$$= 9,5\,x_2 + 0,8257\,x_2^2\,,$$

daraus:

$$x_2 = 2,31 \text{ m.}$$

34. Welche Stärke muss man den Mauern eines vier Stockwerk hohen Fabrikgebäudes von 13,5 m Tiefe geben, wenn die Höhen der einzelnen Stockwerke, von oben nach unten gerechnet, 3,6 m, 4,2 m, 4,5 m und 4 m betragen?

Nach Redtenbacher soll die Mauerdicke in Wohn- und Fabrikgebäuden, wenn t die Tiefe des Gebäudes, h_1, h_2, h_3 u. s. w. die Höhen der von oben nach unten gezählten Stockwerke und e_1, e_2, e_3 u. s. w. die Mauerdicken in den einzelnen Stockwerken sind, betragen:

$$e_1 = \frac{t}{40} + \frac{h_1}{25};\ e_2 = \frac{t}{40} + \frac{h_1 + h_2}{25};\ e_3 = \frac{t}{40} + \frac{h_1 + h_2 + h_3}{25} \text{ u. s. w.}$$

Führt man nun obige Werte ein, so erhält man demnach:

$$\text{im 4. Stock: } e_1 = \frac{13,5}{40} + \frac{3,6}{25} = 0,482 \text{ m,}$$

$$\text{im 3. Stock: } e_2 = \frac{13,5}{40} + \frac{7,8}{25} = 0,65 \text{ m,}$$

$$\text{im 2. Stock: } e_3 = \frac{13,5}{40} + \frac{12,3}{25} = 0,83 \text{ m,}$$

$$\text{im 1. Stock: } e_4 = \frac{13,5}{40} + \frac{16,3}{25} = 0,99 \text{ m.}$$

35. Ein Dampfhammer mit Handsteuerung habe ein Fallgewicht von 600 kg und die Höhe des Arbeitsraumes unter den beiden Ständern betrage 2 m.

Es werde angenommen, dass der Fallbär mit 4 m Geschwindigkeit infolge nachlässiger Handhabung des Steuermechanismus gegen das die Ständer verbindende Rahmstück stosse.

Welchen Querschnitt müssen die Ständer haben, um diesem Stosse genügend Widerstand zu leisten?

Die lebendige Kraft des aufsteigenden Fallbäres muss durch die Arbeit des elastischen Widerstandes beider Ständer aufgehoben werden, folglich

$$\frac{G v^2}{2 g} = \frac{T^2 F l}{2 E}$$

sein, woraus:

$$F = \frac{G v^2 \cdot E}{g T^2 \cdot l} = \frac{600 \cdot 4^2 \cdot 10000000000}{9{,}81 \cdot 7500000^2 \cdot 2} = 0{,}087 \text{ qm.}$$

Jeder Ständer muss daher einen Querschnitt $F_1 = \frac{F}{2} = 0{,}0435$ qm haben.

36. Wie gross ist die Dicke eines Seiles zu nehmen, wenn eine Masse plötzlich in Bewegung gesetzt werden soll?

Wir nehmen zunächst an, dass die Last G in horizontaler Richtung bewegt werden soll; auch sehen wir vorerst von allen Bewegungshindernissen (Reibung) ab.

Durch die plötzliche Anspannung des schlaff auf dem Boden hängenden Seiles springt augenblicklich die Geschwindigkeit der Last G von o auf v über unter Hervorbringung eines Stosses, und die Last bekommt die lebendige Kraft $\frac{G v^2}{2 g}$, welche nur durch die Ausdehnung des Seiles hervorgerufen werden kann. Es muss daher diese lebendige Kraft gleich der Arbeit des Seiles bei dieser Ausdehnung sein, also:

$$G \frac{v^2}{2} = \frac{S^2 F l}{2 E},$$

wobei S die zulässige Spannung bezeichnet, daraus:

$$S = v \sqrt{\frac{G E}{g F l}}.$$

Ist ausserdem nun noch ein Widerstand Q zu überwinden, so folgt für die Spannung des Seiles:

$$S + S^1 = \frac{Q}{F} + v \sqrt{\frac{G E}{g F l}}.$$

Da diese Spannung $S + S^1$ nur im Augenblick des Anziehens vorhanden und nachher nur $\frac{Q}{F}$ zu überwinden ist, so kann man mit dem Sicherheitsmodul sehr nahe an den Tragmodul herangehen und demnach setzen:

$$T = \frac{Q}{F} + v \sqrt{\frac{G E}{g F l}}.$$

Wird die Last in die Höhe gezogen, so hat man für Q das Gewicht G zu nehmen.

Aus letzterer Formel lässt sich nun F und somit die Dicke des Seiles angeben.

37. In welchem Verhältnis stehen die Konstruktionsmaterialien Schmiedeeisen, Gusseisen, Bessemerstahl und Tannenholz hinsichtlich ihres Verhaltens gegen Zug- und Druckkräfte?

Gehen wir von den Spannungen bei Erreichung der Elastizitätsgrenze aus, so sehen wir aus $P = FT$, dass für dieselbe Inanspruchnahme P die Querschnitte sich umgekehrt wie die Tragmoduls verhalten. Nehmen wir nun den Querschnitt des Holzes gleich 1, so folgt:

a) Für Zugkräfte

der Querschnitt eines Stabes aus Schmiedeeisen $= \frac{2,35}{14} = \frac{1}{6}$,

der Querschnitt eines Stabes aus Gusseisen . $= \frac{2,35}{7,5} = \frac{1}{3,2}$,

der Querschnitt eines Stabes aus Bessemerstahl $= \frac{2,35}{30} = \frac{1}{12,8}$.

Setzt man das Gewicht des gleichlangen Holzstabes gleich 1, so ist:

das Gewicht eines Stabes aus Schmiedeeisen $= \frac{1}{6} \cdot \frac{7,78}{0,56} = 2,3$,

das Gewicht eines Stabes aus Gusseisen . $= \frac{1}{3,2} \cdot \frac{7,25}{0,56} = 4$,

das Gewicht eines Stabes aus Bessemerstahl $= \frac{1}{12,8} \cdot \frac{7,6}{0,56} = 1$.

b) Für Druckkräfte

der Querschnitt eines Stabes aus Schmiedeeisen $= \frac{1,9}{14} = \frac{1}{7,4}$,

der Querschnitt eines Stabes aus Gusseisen . $= \frac{1,9}{15} = \frac{1}{7,9}$,

der Querschnitt eines Stabes aus Bessemerstahl $= \frac{1,9}{30} = \frac{1}{15,7}$.

Nimmt man wie vorher das Gewicht eines gleichlangen Holzstabes gleich 1, so folgt:

das Gewicht eines Stabes aus Schmiedeeisen $= \frac{1}{7,4} \cdot \frac{7,78}{0,56} = 1,9$,

das Gewicht eines Stabes aus Gusseisen . $= \frac{1}{7,9} \cdot \frac{7,25}{0,56} = 1,6$,

das Gewicht eines Stabes aus Bessemerstahl $= \frac{1}{15,7} \cdot \frac{7,6}{0,56} = 0,9$.

Welches Material nun in einem gegebenen Falle anzuwenden sei, würde ausser von anderen, die Wahl etwa bestimmenden Verhältnissen noch wesentlich von dem Preise des Materials abhängig sein. Würden nur die Preisverhältnisse in Betracht kommen, so müsste z. B., wenn man zwischen Schmiedeeisen und Gusseisen bei Beanspruchung auf Zug wählen wollte, das letztere Material für die Kubikeinheit mindestens $\frac{4}{2,3} = 1,74$ mal billiger sein als Schmiedeeisen, um sich für Gusseisen zu entscheiden.

Aufgaben.

1. Wie gross muss die Zugkraft sein, um eine schmiedeeiserne Stange von 30 mm Durchmesser bis zur Elastizitätsgrenze auszudehnen?

$$P = 9896,012 \text{ kg.}$$

2. Eine Stange aus Gussstahl hat einen Zug von 3752 kg auszuhalten.

a) Wie stark muss die Stange werden, wenn sie quadratisch sein soll?

$$b = 11,5 \text{ mm.}$$

b) Wie dick muss dieselbe werden, wenn sie aus Flacheisen von 35 mm Breite gemacht wird:

$$d = 3,5 \text{ mm.}$$

3. Ein Dachstuhl übe an seinem Fusse einen Horizontalschub von 10000 kg aus, welcher durch eine horizontale Zugstange aus Schmiedeeisen von 50,5 mm Durchmesser aufgenommen werden soll.

Welche Spannung herrscht in der Stange?

$$S = 4,9 \text{ kg.}$$

4. Bei welcher Belastung reisst eine Hängesäule aus Tannenholz von 20 cm Breite und 15 cm Dicke und welche Last kann dieselbe mit Sicherheit tragen?

$$P = 246000 \text{ kg.}$$

$$P_1 = 21000 \text{ „}$$

5. Welchen Durchmesser hat man dem Seile einer Winde zu geben, wenn die Winde für eine Maximalleistung von 1000 kg berechnet ist:

$$d = 34 \text{ mm.}$$

6. Welches ist die Breite eines Maschinentreibriemens von 5 mm Dicke, welcher auf einer Scheibe von 1,5 m Durchmesser liegt, die 45 Umdrehungen in der Minute macht, wenn der Riemen 8 Pferdestärken übertragen soll?

$$b = 339,5 \text{ mm.}$$

Man wird hier zwei Riemen von je der halben Breite nehmen.

7. Ein Seilaufzug von 200 kg Zuglast, welche durch ein 15 mm dickes Seil gehoben werden soll, habe eine Seiltrommel von 90 mm Halbmesser (gemessen bis zur Seilmitte) und soll durch eine auf der Trommelwelle sitzende Riemenscheibe von 1 m Durchmesser, der eine gleichgrosse gegenüber steht, getrieben werden.

Welche Riemenbreite ist zu wählen, wenn die Riemendicke 4 mm ist?

$$b = 90 \text{ mm.}$$

8. Welche Stärke muss das Eisen eines Kettengliedes bei einer Belastung von 12000 kg erhalten?

$$d = 34{,}6 \text{ mm.}$$

9. Zur Hebung der Brittanniabrücke benutzte man eine hydraulische Presse; die Belastung war 900000 kg.

Welchen Durchmesser hatte man den 4 Ankersäulen zu geben, welche den Druck aufzunehmen hatten, bei einer zulässigen Spannung von 6 kg auf den Quadratmillimeter?

$$d = 218{,}5 \text{ mm.}$$

10. Ein Dampfcylinder hat 500 mm inneren Durchmesser, und der Dampf soll mit 6 Atm. Ueberdruck arbeiten.

Welcher Durchmesser ist den 9 Bolzen zu geben, welche den Deckel mit dem Cylinder verbinden?

$$d = 30 \text{ mm.}$$

11. Die gusseisernen Bogen der Austerlitzbrücke in Paris werden auf den Quadratmillimeter höchstens mit 4,4 kg belastet.

Wie gross ist die Bruchsicherheit?

Es herrscht stark 17fache Sicherheit.

12. Welchen Druck kann eine dicke Platte aus Basalt von 0,5 m Seite im Quadrat mit Sicherheit aushalten?

$$P = 187500 \text{ kg.}$$

13. Welche Last kann eine runde Säule aus Marmor mit Sicherheit tragen, wenn der Durchmesser 50 cm und eine Biegung nicht zu erwarten ist?

$$P = 39270 \text{ kg.}$$

14. Der quadratische Sockel einer Säule sei mit 30500 kg belastet.

Wie gross ist die Seite des Quadrats zu nehmen,

a) wenn der Sockel aus hartem Sandstein ist?

$$b = 295 \text{ mm.}$$

b) wenn derselbe aus Gneiss ist?

$$b_1 = 260 \text{ mm.}$$

c) wenn derselbe aus Eichenholz ist?

$$b_2 = 215 \text{ mm}.$$

15. Ein doppelter T-Träger, dessen Flantschenbreite 176 mm beträgt, drückt auf eine Unterlage von Ziegelmauerwerk mit 4500 kg.

Wie weit muss der Träger auf der Mauer aufliegen, wenn keine besondere Auflagerplatte zur Verteilung des Druckes angewendet werden soll?

Bei 15facher Bruchsicherheit ergibt sich:

$$x = 959 \text{ mm}.$$

16. Eine kurze kreuzförmige Säule aus Gusseisen mit gleichen Flügeln, deren Dicke gleich 18 mm ist, hat einen Druck von 10000 kg auszuhalten.

Welche Höhe müssen die Flügel bekommen, wenn der Sicherheitsmodul gleich 5 kg angenommen wird?

$$h = 46{,}5 \text{ mm}.$$

17. Welche Stärke müssen die aus Sandsteinmauerwerk bestehenden Grundmauern eines aussen 20 m langen und 14 m breiten Gebäudes haben, wenn auf diesen Mauern ein Druck von 6000000 kg lastet und 20fache Bruchsicherheit verlangt wird?

$$e = 1{,}272 \text{ m}.$$

18. Behufs Anlage eines Fabrikgebäudes ist ein Pfahlrostwerk auszuführen, wozu man eichene Pfähle von 0,3 m im Durchmesser wählt, welche zusammen eine Last von 18000000 kg zu tragen haben.

Wie viel Pfähle müssen zum Tragen dieser Last eingerammt werden?

Aus praktischen Beispielen ergibt sich als Grenze der Belastung für Grundpfähle in festem Grunde 70 kg auf den Quadratzentimeter Kopffläche.

Nehmen wir eine Belastung von 35 kg an, so folgt für die Anzahl der Pfähle:

$$n = 728.$$

Anmerkung. Nach Angaben von Rankine ist es ein Zeichen, dass ein Pfahl genügend eingerammt sei, wenn er bei 30 Schlägen mit einem 400 kg schweren Rammbär und bei 1,5 m Fallhöhe um nicht mehr als 5 mm eindringt, also bei einer Reihe von Schlägen, deren gesamtes mechanisches Wirkungsvermögen sich beläuft auf:

$$30 \cdot 400 \cdot 1{,}5 = 18000 \text{ kgm}.$$

19. Welchen Durchmesser muss man einer schmiedeeisernen Stange geben, welche bei einer Belastung von 13000 kg eine Verlängerung von $\frac{1}{2500}$ der Länge erleiden soll?

$$d = 45{,}5 \text{ mm}.$$

20. Der gussstählerne Radreifen (Bandage) eines Lokomotivrades besitzt vor dem Aufziehen auf den Radkranz einen Durchmesser von 2 m, nachher jedoch den Durchmesser 2,001 m.

Welche Spannung herrscht in demselben nach dem Aufziehen?

$$S = 13{,}75 \text{ kg.}$$

21. Ein Dachstuhl drückt an seinem Fussende mit einem Horizontalschub von 9900 kg. Der letztere soll durch eine horizontale schmiedeeiserne Querstange aus Rundeisen aufgenommen werden, welche eine ursprüngliche Länge von 30 m hat.

Welcher Durchmesser ist der Stange zu geben und welche Verlängerung erleidet dieselbe?

$$d = 42{,}5 \text{ mm}; \ \lambda = 10{,}5 \text{ mm.}$$

22. Um wieviel verkürzt sich eine gusseiserne Stütze, welche bei 3 m Länge und einem konstanten Durchmesser von 90 mm einen gegen das Stangenende wirkenden Druck von 8000 kg erfährt?

$$\lambda = 0{,}85 \text{ m.}$$

23. Eine vertikale Zugstange besitzt eine Länge von 25 m und ist einer Belastung von 20000 kg unterworfen.

Welchen Durchmesser hat man der Stange zu geben und wie gross ist die Verlängerung?

a) ohne Berücksichtigung des Eigengewichts?

$$d = 60{,}5 \text{ mm}; \ \lambda = 8{,}7 \text{ mm};$$

b) unter Berücksichtigung des Eigengewichts?

$$d = 61 \text{ mm}; \ \lambda = 8{,}7 \text{ mm.}$$

Diese Resultate zeigen, dass man für gewöhnlich das Eigengewicht unberücksichtigt lassen kann.

24. Welchen Querschnitt muss ein Schachtgestänge aus Tannenholz von 80 m Länge erhalten, wenn dasselbe mit einer Kraft von 8000 kg auf Zug in Anspruch genommen wird und eine 10fache Sicherheit gegen das Zerreissen erreicht werden soll? Wie gross ist die Verlängerung des Gestänges?

$$F = 10342 \text{ qmm}; \ \lambda = 49 \text{ mm.}$$

25. Welches ist die grösste zulässige Höhe einer Säule aus Marmor?

$$h = 74{,}254 \text{ m.}$$

26. Es soll ein quadratischer Pfeiler aus Sandsteinmauerwerk für eine Belastung von 100000 kg konstruiert werden. Der Pfeiler wird in 3 Absätzen ausgeführt, von denen jeder, von oben nach unten gerechnet, 5,5 m, 3 m und 1,5 m Höhe erhält.

Welche Seitenlänge bekommen die Querschnitte bei 10facher Bruchsicherheit?

$$a = 850 \text{ mm}; \ a_1 = 877 \text{ mm}; \ a_2 = 886 \text{ mm.}$$

27. Welche Arbeit ist nötig, um einen prismatischen Körper aus Schmiedeeisen von 350 ccm Inhalt bis zur Elastizitätsgrenze auszudehnen?

$$A = 1{,}715 \text{ kgm.}$$

Tabelle III zur Berechnung des Querschnitts, des Gewichts und der Tragfähigkeit runder und quadratischer Stangen.

Durchmesser oder Seite in	Querschnitt in Quadratmillimetern		Gewicht des lauf. Meters in Kilogrammen				Tragfähigkeit in Kilogrammen			
			Schmiedeeisen		Gussstahl		Schmiedeeisen		Gussstahl	
Millimetern	Rundeisen	Quadrateisen	Rundeisen	Quadrateisen	Rundeisen	Quadrateisen	Rundeisen	Quadrateisen	Rundeisen	Quadrateisen
5	19,6	25	0,153	0,195	0,154	0,196	137,2	175	588	750
6	28,3	36	0,220	0,280	0,222	0,283	198,1	252	849	1080
7	38,5	49	0,299	0,381	0,302	0,385	269,5	343	1155	1470
8	50,3	64	0,391	0,498	0,395	0,502	352,1	448	1509	1920
9	63,6	81	0,495	0,630	0,499	0,636	445,2	567	1908	2430
10	78,5	100	0,611	0,778	0,616	0,785	549,5	700	2355	3000
11	95,0	121	0,739	0,941	0,746	0,950	665,0	847	2850	3630
12	113,1	144	0,880	1,120	0,888	1,130	791,7	1008	3393	4320
13	132,7	169	1,033	1,315	1,042	1,327	928,9	1183	3981	5070
14	153,9	196	1,198	1,525	1,208	1,539	1077,3	1372	4617	5880
15	176,7	225	1,375	1,751	1,387	1,766	1236,9	1575	5301	6750
16	201,1	256	1,564	1,992	1,579	2,010	1407,7	1792	6033	7680
17	227,0	289	1,766	2,248	1,782	2,269	1589,0	2023	6810	8670
18	254,5	324	1,980	2,521	1,998	2,543	1781,5	2268	7635	9720
19	283,5	361	2,206	2,809	2,225	2,834	1984,5	2527	8505	10830
20	314,2	400	2,444	3,112	2,466	3,140	2199,4	2800	9426	12000
21	346,4	441	2,695	3,431	2,719	3,462	2424,8	3087	10392	13230
22	380,1	484	2,957	3,766	2,984	3,799	2660,7	3388	11403	14520
23	415,5	529	3,252	4,116	3,262	4,153	2908,5	3703	12465	15870
24	452,4	576	3,520	4,481	3,551	4,522	3166,8	4032	13572	17280
25	490,9	625	3,819	4,863	3,854	4,906	3436,3	4375	14727	18850
26	530,9	676	4,130	5,259	4,168	5,307	3716,3	4732	15927	20280
27	572,6	729	4,455	5,672	4,495	5,723	4008,2	5103	17178	21870
28	615,8	784	4,791	6,100	4,834	6,154	4310,6	5488	18474	23520
29	660,5	841	5,139	6,543	5,185	6,602	4623,5	5887	19815	25230
30	706,9	900	5,499	7,002	5,549	7,065	4946,3	6300	21207	27000
31	754,8	961	5,872	7,477	5,925	7,544	5283,6	6727	22644	28830
32	804,2	1024	6,257	7,967	6,313	8,038	5629,4	7168	24126	30720

Durchmesser oder Seite in	Querschnitt in Quadratmillimetern		Gewicht des lauf. Meters in Kilogrammen				Tragfähigkeit in Kilogrammen			
			Schmiedeeisen		Gussstahl		Schmiedeeisen		Gussstahl	
Millimetern	Rundeisen	Quadrateisen	Rundeisen	Quadrateisen	Rundeisen	Quadrateisen	Rundeisen	Quadrateisen	Rundeisen	Quadrateisen
33	855,3	1089	6,654	8,382	6,714	8,549	5987,1	7623	25659	32670
34	907,9	1156	7,064	8,994	7,127	9,075	6355,3	8092	27237	34680
35	962,1	1225	7,485	9,531	7,552	9,616	6734,7	8575	28863	36750
36	1017,9	1296	7,919	10,085	7,990	10,174	7125,3	9072	30537	38880
37	1075,2	1369	8,365	10,651	8,440	10,747	7526,4	9583	32256	41070
38	1134,1	1444	8,823	11,234	8,903	11,335	7938,7	10108	34023	43320
39	1194,6	1521	9,294	11,833	9,378	11,940	8362,2	10647	35838	45630
40	1256,6	1600	9,776	12,448	9,864	12,560	8796,2	11200	37698	48000
41	1320,3	1681	10,272	13,078	10,364	13,196	9242,1	11767	39609	50430
42	1385,4	1764	10,778	13,724	10,875	13,847	9697,8	12348	41562	52920
43	1452,2	1849	11,298	14,385	11,400	14,515	10165,4	12943	43566	55470
44	1520,5	1936	11,829	15,062	11,936	15,198	10643,5	13552	45615	58080
45	1590,4	2025	12,373	15,755	12,485	15,896	11132,8	14165	47712	60750
46	1661,9	2116	12,930	16,462	13,046	16,611	11633,3	14812	49857	63480
47	1734,9	2209	13,498	17,186	13,619	17,341	12144,3	15463	52047	66270
48	1809,6	2304	14,079	17,925	14,205	18,086	12667,2	16128	54288	69120
49	1885,7	2401	14,671	18,680	14,803	18,848	13199,9	16807	56571	72030
50	1963,5	2500	15,276	19,450	15,413	19,625	13744,5	17500	58905	75000
55	2375,8	3025	18,484	23,535	18,650	23,746	16630,6	21165	71274	90750
60	2827,4	3600	21,997	28,008	22,195	28,260	19791,8	25200	84822	108000
65	3318,1	4225	25,815	32,871	26,047	33,166	23226,7	29575	99543	126750
70	3848,4	4900	29,941	38,122	30,210	38,465	26938,8	34300	115452	147000
75	4417,9	5625	34,371	43,763	34,681	44,156	30925,3	39375	132537	168750
80	5026,6	6400	39,107	49,792	39,459	50,240	35186,2	44800	150798	192000
85	5674,5	7225	44,148	56,210	44,545	56,716	39721,5	50575	170235	216750
90	6361,7	8100	49,494	63,018	49,939	63,585	44531,9	56700	190851	243000
95	7088,2	9025	55,146	70,215	55,642	70,846	49617,4	63175	212646	270750
100	7854,0	10000	61,104	77,800	61,654	78,500	54978,0	70000	235620	300000

Tabelle IV zur Berechnung des Gewichts und der Tragfähigkeit

a) von Hanfseilen aus der Fabrik von Felten & Guilleame in Köln.

Aus rheinischem Schleisshanf.

Runde Seile (ungeteert)			Kabelseile (geteert)		
Durchmesser Millimeter	Gewicht des lauf. Meters Kilogramme	Zuläs. Belastung bei 8 facher Sicherheit Kilogramme	Durchmesser Millimeter	Gewicht des lauf Meters Kilogramme	Zuläs. Belastung bei 8 facher Sicherheit Kilogramme
16	0,21	200	46	1,65	2250
20	0,32	300	52	2,13	3000
23	0,37	400	59	2,67	3600
26	0,53	500	65	3,70	4500
29	0,64	750	72	4,00	5000
33	0,80	900	78	4,80	6200
36	0,96	1000	85	5,60	7500
39	1,06	1250	92	6,40	8700
46	1,55	1500	98	7,46	10000
52	2,03	2000	105	8,53	12500

b) von runden Drahtseilen aus derselben Fabrik.

Seildurchmesser Millimeter	Anzahl der Drähte	Drahtstärke Millimeter	Gewicht des lauf. Meters Kilogramme	Ruhende Bruchbelastung	
				Eisendraht	Gussstahldraht
7	24	0,9	0,15	850	1800
9	36	0,9	0,22	1300	2700
10	42	0,9	0,26	1500	3200
11	49	0,9	0,30	1700	3700
12	36	1,2	0,40	2200	4900
13	42	1,2	0,45	2600	5700
14	36	1,4	0,50	3100	6700
15	36	1,6	0,70	4000	8700
16	42	1,6	0,80	4600	10100
17	36	1,8	0,85	5000	11000
18	42	1,8	1,00	5800	12800
19	36	2,0	1,10	6200	13600
21	42	2,0	1,25	7200	15800
23	49	2,0	1,50	8400	18500
25	56	2,0	1,80	10200	21100
27	96	1,8	2,30	13400	29300
30	96	2,0	2,80	16600	36000
33	96	2,2	3,40	20000	44000

Seildurchmesser Millimeter	Anzahl der Drähte	Drahtstärke Millimeter	Gewicht des lauf. Meters Kilogramme	Ruhende Bruchbelastung Eisendraht	Gussstahldraht
35	114	2,2	4,10	24000	52000
37	96	2,5	4,50	26000	57000
40	114	2,5	5,35	31000	67000
45	133	2,5	6,25	36000	78000
50	133	2,8	7,70	45000	98000
55	133	3,1	9,30	55000	121000
60	133	3,4	11,20	66000	145000

c) von Krahnenketten aus der Fabrik von H. Schlieper Sohn in Grüne bei Iserlohn.

Stärke des Ketteneisens Millimeter	Gewicht des lauf. Meters Kilogramme	Garantierte Tragfähigkeit Kilogramme	Stärke des Ketteneisens Millimet.	Gewicht des lauf. Meters Kilogramme	Garantierte Tragfähigkeit Kilogramme
6,5	0,80	500	18	7,63	3500
7	1,08	720	20	9,13	4375
9	1,60	925	21	10,40	5175
10	2,23	975	23	12,00	5725
11	3,20	1250	25	13,90	6575
13	4,13	1950	26	16,00	7375
15	5,40	2250	33	24,00	11250
16	6,40	2925	40	53,20	15000

§ 3.

Stärke der Gefässwände mit innerem Ueberdruck.

a) Hohlkugelförmige Gefässe.

Das kugelförmige Gefäss z. B. ein Windkessel werde durch eine Schnittebene, welche durch den Mittelpunkt geht, in zwei Halbkugelflächen zerlegt, deren gemeinschaftliche Projektion auf dieser Ebene eine Kreisfläche ist, die als Durchmesser den inneren Durchmesser D der Hohlkugel hat. Der für die innere Oberfläche in normaler Richtung vorhandene Normaldruck sei p_1 und der äussere Normaldruck sei p_2, beide Drucke auf die Flächeneinheit bezogen.

Nach dem Satze:

> der ganze in der Achsenrichtung einer Röhre wirkende Druck irgend einer Flüssigkeit gegen den von ihr berührten Teil der Oberfläche eines die Röhre verschliessenden Körpers ist gleich dem Drucke, welchen die Projektion der Druckfläche auf einer rechtwinkelig zur Achse der Röhre stehenden Ebene erleiden würde,

ist der innere Totaldruck gegen jede der beiden Kugelflächen $p_1 \frac{\pi D^2}{4}$ und der äussere, diesem entgegenwirkende Druck $p_2 \frac{\pi (D+2\delta)^2}{4}$, wenn δ die Wanddicke ist, also der Ueberdruck:

$$p_1 \frac{\pi D^2}{4} - p_2 \frac{\pi (D+2\delta)^2}{4}.$$

Diesem Druck müssen die in der ringförmigen Trennungsfläche auftretenden Spannungswiderstände der Gefässwand widerstehen; demnach besteht die Beziehung:

$$p_1 \frac{\pi}{4} D^2 - p_2 \frac{\pi}{4} (D+2\delta)^2 = S \frac{\pi}{4} \left\{ (D+2\delta)^2 - D^2 \right\},$$

woraus, wenn für $p_1 - p_2$ der Ueberdruck p auf die Flächeneinheit gesetzt wird:

$$p D - 4 p_2 \delta \left(1 + \frac{\delta}{D}\right) = 4 S \delta \left(1 + \frac{\delta}{D}\right).$$

Bei geringer Wandstärke kann man $\frac{\delta}{D}$ gegen 1 vernachlässigen, sowie das zweite Glied links gegen das erste, und man erhält für hohlkugelförmige Gefässe von geringer Wanddicke den Näherungswert:

$$(11) \qquad \delta = \frac{p D}{4 S}$$

und bei gegebenen Abmessungen:

$$(12) \qquad S = \frac{p D}{4 \delta}.$$

Wir haben bei Entwickelung dieser Fzrmeln vorausgesetzt, dass sich die Spannung gleichförmig über den ringförmigen Querschnitt verteile, was aber der Wirklichkeit in keiner Weise entspricht und etwa nur für eine sehr dünne Wandung zulässig ist. Die Spannung nimmt im Gegenteil von innen nach aussen ab, so dass die grösste Spannung an der Innenwandung vorkommt. Auf dem Wege der höheren Mathematik findet man nach Lamé folgende allgemeinere Beziehung für dickwandige hohlkugelförmige Gefässe:

$$(13) \qquad \delta = \frac{D}{2} \left\{ \sqrt[3]{\frac{2(S+p)}{2S-p}} - 1 \right\}$$

und wenn D_1 der äussere Durchmesser ist:

$$(14) \qquad S = \frac{p}{2} \cdot \frac{D_1^3 + 2 D^3}{D_1^3 - D^3}.$$

b) Röhren.

Ist eine cylindrische, an den Enden geschlossene Röhre einem Drucke von innen ausgesetzt, so ist zunächst zu bedenken, dass hier sowohl Quer- als Längenrisse auftreten können, und mit Bezug auf erstere ergibt sich die notwendige Wandstärke und die auftretende Spannung nach letzteren Formeln.

Was nun die Inanspruchnahme in einer Längendurchschnittsfläche anbetrifft, so mögen wieder p_1 und p_2 die vorige Bedeutung haben. Für $p_1 > p_2$ wären streng genommen 4 Umstände in Betracht zu ziehen.

Zunächst wird sich die Röhre erweitern, es wird eine absolute Ausdehnung hervorgerufen; ferner findet in radialer Richtung eine Pressung statt; weiter tritt, wie schon angedeutet, bei an den Enden geschlossenen Röhren eine Spannung in der Achsrichtung der Röhre auf, und endlich sucht der Druck von innen nach aussen ein Ausbauchen zu erzeugen, welches wegen des grösseren Widerstandes der Kopfende in der Mitte grösser als an den Enden ist, so dass sich das Rohr der Fassform nähert, also eine Krümmung der Längenfasern eintritt.

Von den 3 letzteren Wirkungen des inneren Ueberdrucks sehen wir hier jedoch ab. Ist daher l die Länge der Röhre, so ist nach obigem Satze die in Betracht kommende Druckfläche $l D$, mithin der Druck von innen nach aussen $p_1 l D$, sowie der Druck von aussen nach innen $p_2 l (D + 2\delta)$, also der Ueberdruck:

$$p_1 l D - p_2 l (D + 2\delta).$$

Diesem müssen die Spannungswiderstände in den beiden rechteckigen Schnittflächen widerstehen, in welchen die Rohrwand von einer durch die Achse gelegten Ebene geschnitten wird, folglich:

$$p_1 l D - p_2 l (D + 2\delta) = 2 S l \delta,$$

woraus:

$$(p_1 - p_2) l D - 2 p l \delta = 2 S l \delta.$$

Setzt man wieder $p_1 - p_2 = p$ und vernachlässigt man $2 p_2 l \delta$, so erhält man die zuerst von Mariotte hergeleitete Formel, welche bis 10 Atm. Ueberdruck anwendbar ist:

$$\delta = \frac{p D}{2 S} \tag{15}$$

und hieraus:

$$S = \frac{p D}{2 \delta}. \tag{16}$$

Formel (11) und (15) besagen, dass eine Rohrwandung doppelt so stark genommen werden muss, als die Dicke der abschliessenden Kugelhaube.

Die Formel (15) gibt für $p = 0$ auch $\delta = 0$ d. h. Röhren, welche keinem Drucke ausgesetzt sind, können unendlich dünn gemacht werden. Allein die praktische Ausführung (Möglichkeit des Kernverlegens), sowie die Porosität und etwaige Abnutzung durch mechanische und chemische Einflüsse bedingen schon von vornherein eine gewisse Dicke δ_0, welche als das Minimum der praktisch zulässigen Wandstärke anzusehen und welche der durch obige Formel bedingten und einem Drucke p entsprechenden Wandstärke δ hinzuzufügen ist.

Ist n der innere Ueberdruck in Atmosphären, so ist $p = 0{,}10334\, n$ kg, und demnach lautet unsere Formel:

(17) $$\delta = \frac{0{,}005167\, n\, D}{S} + \delta_0.$$

Aus derselben folgt nun für:

a) Gusseiserne Gas- und Wasserleitungsröhren bis 5 Atm. Ueberdruck.

$$n = 5,\ S = 2,\ \delta_0 = 8:$$
$$\delta = 0{,}01292\, D + 8 \text{ mm}.$$

b) Gusseiserne Dampf- und starke Wasserleitungsrohre, sowie Luftpumpencylinder.

$$n = 8,\ S = 2,\ \delta_0 = 12:$$
$$\delta = 0{,}02067\, D + 12 \text{ mm}.$$

c) Gusseiserne Dampfcylinder und Pumpenstiefel.

$$n = 10,\ S = 2,\ \delta_0 = 16:$$
$$\delta = 0{,}02584\, D + 16 \text{ mm}.$$

d) Gezogene schmiedeeiserne Gas- und Wasserleitungsröhren.

Dieselben werden fabrikmässig angefertigt und kommen im Handel vor bis $D = 150$ mm bei einer Wandstärke:

$$\delta = 0{,}08\, D + 2 \text{ mm}.$$

e) Genietete oder gelötete schmiedeeiserne Heizröhren.

$$n = 5,\ S = 4,\ \delta_0 = 1{,}5:$$
$$\delta = 0{,}00646\, D + 1{,}5 \text{ mm}.$$

$$n = 8,\ S = 4,\ \delta_0 = 1{,}5:$$
$$\delta = 0{,}010334\, D + 1{,}5 \text{ mm}.$$

f) Gelötete Kupferröhren:

α) Schwache Wasser- und Heizröhren.

$$n = 5,\ S = 3,\ \delta_0 = 1:$$
$$\delta = 0{,}00861\, D + 1 \text{ mm}.$$

β) Dampf-, Speise- und Wasserdruckröhren.

$$n = 8,\ S = 3,\ \delta_0 = 1:$$
$$\delta = 0{,}01378\, D + 1 \text{ mm}.$$

g) Gezogene Kupferröhren.

$$S = 3,\ \delta_0 = 1{,}5:$$
$$\delta = 0{,}001722\, n\, D + 1{,}5 \text{ mm}.$$

h) Messingröhren.

α) Schwache Messingröhren.

$$n = 5,\ S = 2,\ \delta_0 = 1:$$
$$\delta = 0{,}01292\, D + 1 \text{ mm}.$$

β) Starke Messingröhren.

$$n = 8,\ S = 2,\ \delta_0 = 1:$$
$$\delta = 0{,}02067\, D + 1 \text{ mm}.$$

i) Bleiröhren.

Diese kommen von $\delta = 3$ bis 6 mm Wandstärke und bis $D = 60$ mm lichter Weite im Handel vor, und man erhält für

$$S = 0{,}25 \text{ und } \delta_0 = 4{,}5:$$
$$\delta = 0{,}02067\, n\, D + 4{,}5 \text{ mm}.$$

k) Genietete Dampfkessel-, Dampf- und Wasserleitungsröhren.

α) Schmiedeeisenblech.

$$S = 3,\ \delta_0 = 2:$$
$$\delta = 0{,}001722\, n\, D + 2 \text{ mm}.$$

Anmerkung. In Frankreich wird die Blechstärke für Dampfkessel nach der Formel

$$\delta = 0{,}0018\, n\, D + 3 \text{ mm}$$

bestimmt, dabei ist 15 mm als die grösste zulässige Wandstärke festgestellt.

Der Verband der Dampfkessel-Ueberwachungsvereine hat die Formel:

$$\delta = 0{,}001488\, n\, D + \delta_0$$

aufgestellt, wobei δ_0 je nach dem Grad der zu befürchtenden Abnutzung zwischen 0 und 3 mm liegt.

β) Gussstahlblech.

$$S = 5{,}5,\ \delta_0 = 2:$$
$$\delta = 0{,}00094\, n\, D + 2 \text{ mm}.$$

Die Formeln (15) und (16) sind ebenfalls nur so lange richtig, als $\frac{\delta}{D}$ sehr klein ist; für grössere Werte ist auch hier die gemachte Annahme nicht mehr zulässig, dass sich die Spannung gleichförmig über die Schnittfläche $1\,\delta$ verteile.

Bei Röhren, welche einem hohen inneren Drucke ausgesetzt sind und demnach grosse Wandstärken erhalten müssen, bedient man sich der Formel von Brix (s. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses in Preussen 1834):

$$\delta = \frac{D}{2}\left(e^{\frac{p}{s}} - 1\right) + \delta_0, \tag{18}$$

wobei e die Basis 2,7182818 . . . des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet.

Aus dieser Formel folgt der Näherungswert:

$$(19) \qquad \delta = \frac{D}{2} \cdot \frac{p}{S} \left(1 + \frac{p}{2S}\right) + \delta_0,$$

welche Formel in die Mariottesche übergeht bei Vernachlässigung des Summanden $\frac{p}{2S}$.

Anmerkung. Setzt man in Formel (18): $p = 0{,}010334\,n$, $S = 3{,}5$ und $\delta_0 = 2{,}6$, so erhält man die Formel:

$$(20) \qquad \delta = \frac{D}{2}(e^{0{,}003\,n} - 1) + 2{,}6 \text{ mm},$$

nach welcher früher in Preussen die Dampfkessel aus Eisenblech, sowie die kupfernen Dampfröhren berechnet werden mussten.

Nach Aufhebung der gesetzlichen Bestimmungen über die Wandstärken kann man bei gutem Schmiedeeisenblech die Wandstärke 0,8 von den früheren Angaben wählen. Gewöhnlich macht man das Blech nicht über 13 mm und nicht unter 5 mm stark. Der Verband der Dampfkessel-Ueberwachungsvereine schlägt sogar eine Minimalstärke von 7 mm vor behufs Erzielung einer dichten Stemmfuge.

Für dickwandige hohle Cylinder z. B. für hydraulische Pressen empfiehlt Lamé die Formel:

$$(21) \qquad \delta = \frac{D}{2}\left\{\sqrt{\frac{S+p}{S-p}} - 1\right\},$$

woraus bei gegebenen Abmessungen und wenn D_1 den äusseren Durchmesser bezeichnet:

$$(22) \qquad S = p\,\frac{D_1^2 + D^2}{D_1^2 - D^2}.$$

Grashof stellt für diesen Fall die korrigierte Lamésche Formel auf:

$$(23) \qquad \delta = \frac{D}{2}\left\{\sqrt{\frac{4S+3p}{4S-5p}} - 1\right\},$$

wobei der Praxis entsprechend $p = 0{,}5\,S$ zu setzen ist und also:

$$(24) \qquad S = p\,\frac{5D_1^2 + 3D^2}{4(D_1^2 - D^2)}.$$

Anmerkung: Sind ebene Bleche durch Stehbolzen miteinander verbunden (wie bei Lokomotiv- und Lokomobilkesseln), welche um a Millimeter voneinander abstehen, so nimmt man die Wandstärken, wenn die Bleche von Eisen:

$$(25) \qquad \delta = 0{,}0387\,a\sqrt{n} + 2{,}6 \text{ mm}$$

und gleich dem $1\frac{1}{4}$fachen dieses Wertes, wenn von Kupfer.

Die Formel (11 bis 25) haben natürlich keine Geltung mehr, wenn (wie beim Kanonenguss durch Abkühlen des Kerns, Herstellung der schmiedeeisernen Kanonen aus einzelnen Röhren, deren äussere in erwärmtem Zustande über die inneren kalten gezogen werden, Binden gusseiserner Cylinder mit warm darüber gezogenen schmiedeeisernen Bändern u. s. w.) im Material Spannungen derart erzeugt werden, dass das in den inneren Ringen liegende Material auf rückwirkende, das in den äusseren Ringen liegende aber auf absolute Festigkeit in Anspruch genommen wird.

Da solche Gefässe eine bei weitem grössere Festigkeit besitzen, so kann ihre Wandstärke eine weit geringere werden als die der anderen, und die Pressung, welcher derartige Gefässe unterworfen werden können, kann nach dem jetzigen Standpunkt als unbegrenzt angesehen werden.

Anmerkung: Für **äusseren** Ueberdruck siehe Zerknickungsfestigkeit.

Beispiele.

1. Zur Hebung der Britanniabrücke benutzte man u. a eine hydraulische Presse, deren gusseiserner Presscylinder 533 mm Weite und 280 mm Wandstärke hatte; der Kolben besass einen Durchmesser von 507 mm und erfuhr eine Belastung von nahezu 900000 kg.

a) Welches ist die Materialspannung nach der Mariotteschen Formel?

Es ist

$$p = \frac{900000}{\pi \frac{507^2}{4}} = 4{,}458 \text{ kg.}$$

Demnach:

$$S = \frac{pD}{2\,\delta} = \frac{4{,}458 \cdot 533}{2 \cdot 280} = 4{,}242 \text{ kg.}$$

b) Welchen Wert hat dieselbe nach der Brixschen Formel?

Aus

$$\delta = \frac{D}{2}\left(e^{\frac{p}{s}} - 1\right)$$

folgt:

$$S = \frac{p \log e}{\log\left(\frac{2\,\delta}{D} + 1\right)} = \frac{4{,}458 \cdot 0{,}4343}{0{,}3119} = 6{,}175 \text{ kg.}$$

c) Welche Spannung ergibt sich nach der Laméschen Formel?

$$S = p\,\frac{D_1^2 + D^2}{D_1^2 - D^2} = 4{,}458 \cdot \frac{(533 + 2 \cdot 280)^2 + 533^2}{(533 + 2 \cdot 280)^2 - 533^2} = 7{,}240 \text{ kg.}$$

d) Wie gross ist die Spannung nach der Grashofschen Formel?

$$S = p \cdot \frac{5\,D_1^2 + 3\,D^2}{4\,(D_1^2 - D^2)} = 4{,}458 \cdot \frac{5\,(533 + 2 \cdot 280)^2 + 3 \cdot 533^2}{4\left\{(533 + 2 \cdot 280)^2 - 533\right\}^2}$$
$$= 8{,}354 \text{ kg.}$$

2. Der Kolben einer hydraulischen Presse hat 300 mm Durchmesser, und der gusseiserne Cylinder hat im Lichten eine Weite von $D = 340$ mm.

a) Wie gross wird die Wandstärke des Presscylinders sein müssen, wenn der Kolben einen Druck von 180000 kg erhalten soll?

Zunächst ist

$$p = \frac{180000}{\pi \frac{300^2}{4}} = 2{,}546 \text{ kg},$$

da $p = 0{,}5\, S$ gebräuchlich, so wird demnach $S = 2\, p = 5$ kg zu nehmen sein und also nach Grashof:

$$\delta = \frac{D}{2} \left\{ \sqrt{\frac{4\, S + 3\, p}{4\, S - 5\, p}} - 1 \right\} = \frac{340}{2} \left\{ \sqrt{\frac{4 \cdot 5 + 3 \cdot 2{,}546}{4 \cdot 5 - 5 \cdot 2{,}546}} - 1 \right\}$$

$$= 162 \text{ mm}.$$

b) Wie gross wird ferner die Wandstärke des bronzenen Pumpencylinders sein müssen, wenn derselbe eine lichte Weite von 25 mm hat?

Nach Formel (23) muss $5\, p < 4\, S$, oder $p < 0{,}8\, S$; wähle $p = 0{,}75\, S$, so folgt als zulässiger Wert $S = 3{,}5$ kg und mithin:

$$\delta_1 = \frac{25}{2} \left\{ \sqrt{\frac{4 \cdot 3{,}5 + 3 \cdot 2{,}546}{4 \cdot 3{,}5 - 5 \cdot 2{,}546}} - 1 \right\} = 39 \text{ mm}.$$

3. Eine Wassersäulenmaschine hat senkrechtstehende, im Innern 260 mm weite Einfallröhren. Welche Stärke müssen dieselben bei 31,4 und 62,8 m Tiefe bekommen?

Nach Formel (17) ergibt sich für $S = 2$ und $\delta_0 = 12$, da $n = \frac{31{,}4}{10{,}334} = 3{,}04$ ist:

$$\delta = 0{,}005167 \frac{3{,}04 \cdot 260}{2} + 12 = 14 \text{ mm}$$

$$\delta_1 = 0{,}005167 \frac{2 \cdot 3{,}04 \cdot 260}{2} + 12 = 16 \text{ mm}.$$

Wendet man die oben angegebene Formel

$$\delta = 0{,}02067\, D + 12 \text{ mm}$$

für starke Wasserleitungsröhren an, so erhält man durchgehends:

$$\delta = 17{,}5 \text{ mm}.$$

4. Es soll die Wanddicke eines Glasrohrs von 6 cm Durchmesser von der Art, wie man sie als äussere Hülle der Wasserkompressionsmaschinen anwendet, so berechnet werden, dass dasselbe einem Drucke von 10 kg auf den Quadratzentimeter mit Sicherheit Widerstand leistet.

Welche Wandstärke hat man zu nehmen?

Nach übereinstimmenden Erfahrungen kann ein Glasstab von 1 qcm Querschnitt 50 kg mit Sicherheit tragen ohne zu zerreissen; daher

$$\delta = \frac{p\,D}{2\,S} = \frac{10 \cdot 6}{100} = 0{,}6 \text{ cm} = 6 \text{ mm}.$$

Bei einer solchen Dicke kann dann der Druck ohne grosse Gefahr selbst bis zu 15 kg auf den Quadratzentimeter verstärkt werden.

5. Welches ist der innere Druck, durch den ein Dampfkessel, dessen Durchmesser gleich 1 m und dessen Blechdicke 12 mm ist, auseinander gesprengt wird?

Setzt man mit Fairbairn die Widerstandsfähigkeit einer einfachen Vernietung gleich der Hälfte der Widerstandsfähigkeit von Kesselblechen, so folgt der zum Zersprengen auf den Quadratmeter nötige Druck:

$$p = \frac{2\,\delta\,K}{D} = \frac{2 \cdot 0{,}012 \cdot 16000000}{1} = 384000 \text{ kg}$$

oder in Atmosphären bei

$$n = \frac{384000}{10334} = 37{,}16 \text{ Atm.}$$

6. Wie gross ist die Wandstärke des Cylinders einer Dampfmaschine von 0,50 m innerem Durchmesser, wenn die Dampfspannung im Kessel 4 Atm. beträgt?

Unter Anwendung der Formel (17 c) findet man:

$$\delta = 0{,}02584 \cdot 500 + 16 = 29 \text{ mm}.$$

Aufgaben.

1. Wie gross muss die Wanddicke einer gusseisernen Wasserleitungsröhre, deren innerer Durchmesser 20 cm sein soll, bei einer Druckhöhe von 100 m angenommen werden?

$$\delta = 17 \text{ mm}.$$

2. Zur Hebung der Konwaybrücke in England wurde eine hydraulische Presse von 457 mm Kolbendurchmesser und 508 mm Cylinderweite bei einer Wanddicke von 222 mm benutzt. Die bronzene Presspumpe hat 27 mm Cylinderweite und 27 mm Wandstärke. Wie stark waren die Materialspannungen im Presscylinder und Pumpencylinder, wenn der Druck auf den Presskolben 660000 kg betrug?

$$S = 8{,}229 \text{ kg},$$
$$S_1 = 5{,}601 \text{ kg}.$$

3. Durch den Presskolben einer hydraulischen Presse soll ein Druck von 150 Atm. ausgeübt werden. Welche Dicke muss der Presscylinder haben, dessen innerer Durchmesser 280 mm ist?

$$\delta = 128 \text{ mm}.$$

4. Welche Blechstärke ist einem cylindrischen Kessel von 1,553 m Durchmesser zu geben, wenn derselbe für Dämpfe von 4 Atm. bestimmt ist?

$$\delta = 10 \text{ mm.}$$

5. Es ist die Stärke eines gusseisernen Rohres zu bestimmen, das bei 0,2 m Weite unter gewöhnlichen Verhältnissen den Druck einer Wassersäule von 20 m auszuhalten hat.

$$\delta = 9 \text{ mm.}$$

6. In einer langen cylindrischen Röhre von 500 mm Durchmesser und 20 mm Wandstärke steht die Flüssigkeit unter einem Drucke von 0,1 kg auf den Quadratmillimeter.

Welches ist die Spannung in der Röhrenwand?

$$S = 1{,}25 \text{ kg.}$$

---

2. Biegungsfestigkeit.

§ 4.

Aufstellung der allgemeinen Gesetze.

Für die folgenden Untersuchungen zur Berechnung des Widerstandes, den ein, wie es am meisten vorkommt, horizontal gelagerter Balken dem Zerbrechen in Richtung der Querschnittsdimensionen entgegensetzt, nehmen wir zunächst an, dass sämtliche äussere Kräfte, welche der früheren Definition gemäss die Achse des prismatischen Balkens rechtwinkelig schneiden müssen, in einer Vertikalebene liegen, welche zugleich eine Symmetrieebene desselben ist.

Die thätigen äusseren Kräfte verursachen nun eine Biegung des Balkens; dabei machen wir aber weiter die Voraussetzung, dass die Projektion der gebogenen Achse auf die ursprüngliche Achsrichtung gleich der Achslänge sei und dass die zur Achse senkrechten und materiell gedachten ebenen Schnitte, die Querschnitte, bei der Biegung nach Form und Grösse unverändert und senkrecht zur gebogenen Achse bleiben.

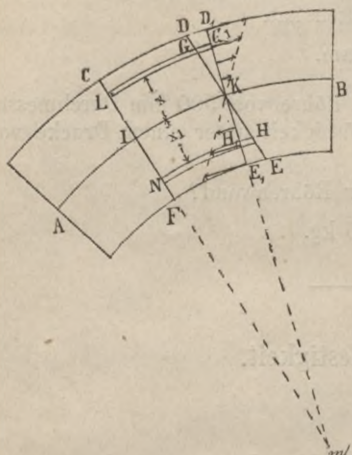
Der aus über und nebeneinander liegenden Längenfasern bestehend gedachte Körper wird bei der Biegung auf der konvexen Seite ausgedehnt, während seine konkave Seite sich verkürzt; innerhalb des Körpers muss daher eine Schicht sein, die weder verlängert, noch verkürzt wird, sie heisst die neutrale Faserschicht (couche des fibres invariables; neutral surface of a deflected beam).

Letztere schneidet jeden Querschnitt in einer Geraden, welche die neutrale Achse des Querschnittes heisst.

Die von den einzelnen neutralen, parallel miteinander laufenden Fasern dargestellte Kurve heisst „elastische Linie"; sie liefert einen Massstab für die Biegung des Balkens.

Zwischen der neutralen Schicht und den äussersten Schichten nimmt Verlängerung und Verkürzung infolge obiger dritter Annahme allmählich zu.

Fig. 7



Ein vor der Biegung zwischen den sehr nahen Querschnitten C F und D E liegendes Balkenstück A C B Fig. 7 erhält durch die Biegung die Form C D_1 E_1 F, dabei nimmt der Querschnitt D E die Lage D_1 E_1 an, da er aus seiner zu C F parallelen Lage heraustritt und sich wie C F rechtwinkelig auf die neutrale Faser I K des Balkens stellt. Das Faserelement C D geht demnach in C D_1, das Faserelement E F in E_1 F über, daher wird das erstere um D D_1 verlängert und das letztere um E E_1 verkürzt, während das Faserelement I K in der neutralen Schicht A B von unveränderter Länge bleibt. Entsprechend verlängern und verkürzen sich zwischenliegende Fasern, wie L G, N H.

Ist ϱ der Krümmungsradius des neutralen Faserelements, so folgt:

$$G G_1 = \frac{I K \cdot K G}{m I} = I K \cdot \frac{x}{\varrho}$$

oder wenn die Verlängerung oder Verkürzung mit λ bezeichnet wird:

$$\lambda = I K \frac{x}{\varrho} \text{ bezw. } I K \frac{x_1}{\varrho}.$$

Nach Formel (4α) ist aber auch:

$$\lambda = \frac{s \cdot I K}{E} \text{ bezw. } \frac{s_1 \cdot I K}{E},$$

wobei s und s_1 die in dem betrachteten Faserelement herrschende Spannung oder Pressung, bezogen auf die Flächeneinheit, bedeuten.

Aus beiden Beziehungen ergibt sich nun:

$$(26) \quad \begin{cases} s = E \dfrac{x}{\varrho} \\ s_1 = E \dfrac{x_1}{\varrho}. \end{cases}$$

Sind S und S_1 die Spannungen oder Pressungen in den äussersten Fasern, ferner a und a_1 die bezüglichen Entfernungen dieser letzteren von der neutralen Schicht, so erhält man demnach auch:

$$\to \varepsilon = \frac{\Delta \varrho}{x}$$

$$(27) \qquad \begin{cases} S = E \dfrac{a}{\varrho} \\ S_1 = E \dfrac{a_1}{\varrho}. \end{cases}$$

und hieraus mit Hilfe von Formel (26):

$$(28) \qquad \begin{cases} s = S \dfrac{x}{a} \\ s_1 = S_1 \dfrac{x_1}{a_1} \end{cases}$$

d. h.:

die Spannung oder Pressung in einer Faserschicht ist proportional dem Abstand derselben Schicht von der neutralen Schicht.

Die auf das sehr kleine Balkenstück $C D_1 E_1 F$ wirkenden äusseren Kräfte können wir in zwei Komponenten zerlegen in Richtung IK und senkrecht dazu. Da nun aber der Annahme gemäss, entsprechend der Praxis, die Biegung des Balkens eine verschwindende sein soll, so kann man erstere Komponente vernachlässigen; daraus folgt aber dann behufs Gleichgewicht, dass die algebraische Summe der horizontalwirkenden Spannungen und Pressungen gleich Null sein muss. Bedeutet daher f den Querschnitt einer gespannten und f_1 den einer gepressten Faser, so ist mithin:

$$\Sigma s f - \Sigma s_1 f_1 = 0$$

oder nach Formel (28):

$$\frac{S}{a} \Sigma f x - \frac{S_1}{a_1} \Sigma f_1 x_1 = 0.$$

Aber nach Formel (27) ist:

$$(29) \qquad \frac{S}{a} = \frac{S_1}{a_1},$$

folglich auch:

$$\Sigma f x - \Sigma f_1 x_1 = 0,$$

welche Gleichung besagt:

die neutrale Achse eines jeden Querschnitts geht durch den Schwerpunkt desselben.

Weiter bildet die Summe der Spannungen und Pressungen für die neutrale Achse als Drehachse ein Moment $\Sigma s f x + \Sigma s_1 f_1 x_1$, welches das Moment der inneren Kräfte genannt wird und welches, damit kein Zerbrechen des Balkens an irgend einer Stelle eintritt, dem Moment $M m$ der äusseren Kräfte für dieselbe Stelle und dieselbe Drehachse gleich sein muss, demnach:

$$M m = \Sigma s f x + \Sigma s_1 f_1 x_1$$

oder nach Formel (28):

$$M m = \frac{S}{a} (\Sigma f x^2 + \Sigma f_1 x_1{}^2) = \frac{S_1}{a_1} (\Sigma f x^2 + \Sigma f_1 x_1{}^2).$$

Bezieht sich f und x auf alle Flächenelemente des betrachteten Querschnitts, so können wir hierfür auch setzen:

$$Mm = \frac{S}{a} \Sigma f x^2 = \frac{S_1}{a_1} \Sigma f x^2.$$

Der Ausdruck $\Sigma f x^2$ oder die Summe der Produkte aus den einzelnen Flächenelementen eines Querschnitts in das Quadrat ihrer Entfernung von der neutralen Achse ist nur von der Querschnittsform abhängig; man nennt denselben allgemein Trägheitsmoment, auch äquatoriales Trägheitsmoment, und bezeichnet ihn mit I. Ferner heisst der Quotient $\frac{I}{a}$ und $\frac{I}{a_1}$ das Widerstandsmoment des Querschnitts; setzen wir dies gleich W bezw. W_1, so lautet nun die Bedingung für den Widerstand gegen Bruch:

$$(30) \qquad Mm = \begin{cases} S \dfrac{I}{a} = W S \\ S_1 \dfrac{I}{a_1} = W_1 S_1. \end{cases}$$

§ 5.

Zweckmässige Wahl des Querschnitts.

Zur Erzielung der günstigsten Anordnung des Materials wird es notwendig sein, dass in einem Querschnitt, sobald der äusserste Punkt auf der einen Seite die grösste zulässige absolute Spannung erreicht, bei dem äussersten Punkt auf der anderen Seite die grösste rückwirkende Spannung eintritt, widrigenfalls man entweder die absolute oder rückwirkende Festigkeit des Materials unvollkommen ausnutzen würde.

Es müssen folglich, da für die Elastizitätsgrenze $\frac{Mm \cdot a}{I} = T$ und $\frac{Mm \cdot a_1}{I} = T_1$ ist, die Abmessungen des Querschnitts so gewählt werden, dass

$$a : a_1 = T : T_1$$

wird.

Querschnitte, welche dieser Bedingung genügen, heissen **Querschnitte gleicher Festigkeit.**

Da für Gusseisen $T = \frac{T_1}{2}$ angenommen werden kann, so macht man den Querschnitt gusseiserner Träger so, dass $a = \frac{a_1}{2}$ ist; bei Anwendung von Schmiedeeisen und Stahl dagegen nimmt man vorteilhaft $a = a_1$, weil für beide Materialien $T = T_1$ ist.

Träger, aus beiden letzteren Materialien hergestellt, gibt man demnach am zweckmässigsten solche Querschnitte, die durch die neutrale Achse in zwei symmetrische Hälften geteilt werden, daher hier unter anderem das Doppel-T-Profil mit gleichen Flantschen; erfordert die Konstruktion, wie bei den Eisenbahnschienen, eine andere Querschnittsform, so sucht man doch eine solche Massenverteilung zu erzielen, dass man obiger Bedingung möglichst gerecht wird.

Für gusseiserne Träger würde sich dagegen neben dem in der Praxis nicht vorkommenden dreieckigen Profil das einfache T- und das Doppel-T-Profil mit ungleichen Flantschen empfehlen, wobei dann der Träger so gelagert werden muss, dass die Flantsche bezw. die grössere Flantsche auf die Zugseite zu liegen kommt. Weist die elastische Linie Wendepunkte auf, welcher Fall z. B. auftritt, wenn der Balken an einem Ende befestigt und am anderen Ende unterstützt oder aber an beiden Enden befestigt ist, so sind gusseiserne Träger von genannter Form mit Vorteil nicht anzuwenden, da dann die Zug- und Druckseite ihre gegenseitige Lage vertauschen.

§ 6.

Feststellung der Tragfähigkeit bei gegebenem Querschnitt.

Es ist klar, dass das äussere Kraftmoment für einen Querschnitt um so grösser werden kann, je grösser dessen inneres Kraftmoment ist.

Ist nun der Querschnitt eines gegebenen Trägers unsymmetrisch gegen die neutrale Achse, so hat derselbe bekanntlich zwei Widerstandsmomente $W = \frac{I}{a}$ und $W_1 = \frac{I}{a_1}$.

Es tritt nun für diesen Fall die Frage auf, auf Grund welches Widerstandmomentes das äussere Kraftmoment und hieraus das Tragvermögen des vorliegenden Balkens festzustellen ist.

Sei der Träger gleich widerstandsfähig gegen Zug und Druck, wie solches bei Schmiedeeisen und Stahl der Fall ist, also $T = T_1$, so ist einleuchtend, dass dann das kleinere von beiden Widerstandsmomenten der Rechnung zu Grunde zu legen ist.

Wenn dagegen, wie bei Gusseisen, die Spannung und Pressung an der Elastizitätsgrenze, also T und T_1, einen verschieden grossen Wert haben, so hat man nachzusehen, welches von beiden Produkten $W\,T$ und $W_1\,T_1$ das kleinere ist, und nach diesem kleineren Biegungsmoment ist dann die zulässige Belastung anzugeben, natürlich unter Einführung der bezüglichen Werte S bezw. S_1.

Es ist aber nun:

$$W\,T < W_1\,T_1$$

oder:

$$\frac{I}{a}\,T < \frac{I}{a_1}\,T_1,$$

wenn:

$$\frac{T}{a} < \frac{T_1}{a_1}$$

oder:

$$\frac{a}{a_1} > \frac{T}{T_1}$$

ist; dagegen

$$W_1 T_1 < W T,$$

wenn, wie in gleicher Weise folgt:

$$\frac{a}{a_1} < \frac{T}{T_1}$$

ist. Endlich ist:

$$W T = W_1 T_1,$$

wenn:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{T}{T_1}$$

ist. In letzterem Falle ist es demnach gleichgültig, welchen Wert $W S$ oder $W_1 S_1$ man in Rechnung zieht.

Mit Bezug auf Gusseisen, für welches $T = \frac{T_1}{2}$ genommen werden kann, nehme man mithin für die Berechnung:

$$M m = W S,$$

wenn:

$$\frac{a}{a_1} > \frac{1}{2}$$

ist; aber:

$$M m = W_1 S_1,$$

wenn sich

$$\frac{a}{a_1} < \frac{1}{2}$$

ergibt; schliesslich setze man:

$$M m = W S = W_1 S_1,$$

wenn

$$\frac{a}{a_1} = \frac{1}{2}$$

folgt. In letzterem Falle hat man es bekanntlich mit einem Querschnitt gleicher Festigkeit zu thun, die Materialausnutzung ist dann eine vollkommene.

Ist der Querschnitt jedoch symmetrisch gegen die neutrale Achse, mithin $W = W_1$, so hat man die kleinere der beiden Spannungen S und S_1 zu berücksichtigen behufs Bestimmung der Tragkraft des gegebenen Trägers.

Für Gusseisen gibt Tabelle I bei absoluter Beanspruchung einen Sicherheitsmodul von nur 2,5 kg; jedoch kann bei relativer Inanspruchnahme gutes, dichtes Gusseisen der Erfahrung zufolge bis zu 4,5 kg und darüber bei ruhender Belastung beansprucht werden, wohl infolge der bedeutenden rückwirkenden Festigkeit, die dies Metall besitzt.

§ 7.

Berechnung der Trägheits- und Widerstandsmomente.

a) Allgemeine Sätze.

1. Satz: Ist f, Fig. 8, ein Element einer ebenen Fläche F, x dessen Entfernung von der durch den Schwerpunkt gehenden Achse n n, sowie e die Entfernung der letzteren von einer zu ihr parallelen Geraden $n_1\, n_1$, so ist das Trägheitsmoment I_1 der Fläche F in Bezug auf $n_1\, n_1$ ausgedrückt durch:

Fig. 8.

$$I_1 = \Sigma f (x + e)^2 = \Sigma f x^2 + 2 e \Sigma f x + e^2 \Sigma f.$$

Aber $\Sigma f x^2$ ist das Trägheitsmoment I der Fläche F in Bezug auf die Schwerpunktsachse n n; weiter ist $\Sigma f x$ das statische Moment der Fläche F in Bezug auf eine Schwerpunktsachse, also gleich Null, und endlich ist $\Sigma f = F$; demnach:

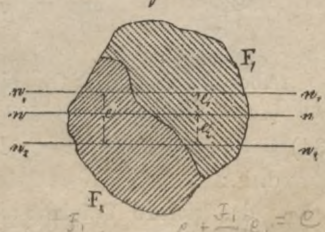
$$(31) \qquad I_1 = I + F e^2,$$

d. h.:

das Trägheitsmoment einer ebenen Fläche F für eine zur Schwerpunktsachse parallele Achse ist gleich dem Trägheitsmoment für die Schwerpunktsachse plus dem Produkt aus dem Inhalt der gegebenen Fläche in das Quadrat des Abstandes beider Achsen.

2. Satz: Eine Fläche F, Fig. 9, sei die Summe der beiden Flächen F_1 und F_2; weiter seien n n, sowie $n_1\, n_1$ und $n_2\, n_2$ bezügliche, untereinander parallele Schwerpunktsachsen und endlich sei $e = e_1 + e_2$ die Entfernung der beiden letzteren Achsen. Alsdann folgt, wenn i_1 und i_2 die Trägheitsmomente der beiden Flächen F_1 und F_2 für ihre Schwerachse $n_1\, n_1$ bezw. $n_2\, n_2$ bezeichnen, das Trägheitsmoment der Gesamtfläche F in Bezug auf n n:

Fig. 9.



$$I = i_1 + F_1 e_1^2 + i_2 + F_2 e_2^2.$$

Aber aus den Beziehungen

$$e = e_1 + e_2, \quad \rightarrow e_2 = e - e_1$$
$$F_1 e_1 = F_2 e_2 \quad \rightarrow e_2 = \frac{F_1 e_1}{F_2}$$

ergibt sich:

$$e_1 = \frac{F_2}{F} e,$$

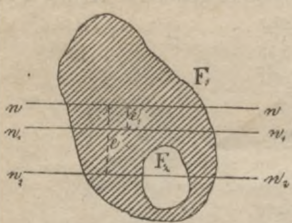
$$e_2 = \frac{F_1}{F} e.$$

Diese Werte in den Ausdruck für I eingeführt, gibt:

(32) $$I = i_1 + i_2 + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e^2.$$

3. Satz: Sei F die Differenz der beiden Flächen F_1 und F_2, Fig. 10, so ist unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnung:

Fig. 10.



$$i_1 = I + F e_1^2 + i_2 + F_2 e^2$$

und also:

$$I = i_1 - i_2 - F e_1^2 - F_2 e^2.$$

Aber:

$$F e_1 = F_2 e,$$

demnach:

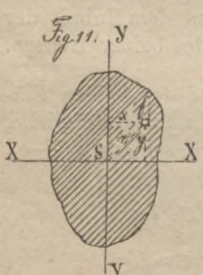
$$e_1 = \frac{F_2 e}{F} = \frac{F_2 e}{F_1 - F_2}.$$

Durch Einführung dieses Wertes folgt:

(33) $$I = i_1 - i_2 - \frac{F_1 F_2}{F_1 - F_2} e^2.$$

4. Satz: Zeigt f, Fig. 11, wiederum irgend ein Element einer ebenen Fläche F an und ist r der Abstand dieses Elements von einer Achse, die durch den Schwerpunkt S der Fläche geht und senkrecht zu letzterer steht, so heisst $\Sigma f r^2$ das **polare** Trägheitsmoment der Fläche F; wir bezeichnen dasselbe mit I_p. Sind x und y die Koordinaten des Elements f für zwei durch S gehende und in der betrachteten Fläche F liegende, rechtwinkelig zu einander stehende Achsen, so ist:

Fig. 11.



$$r^2 = x^2 + y^2$$

und mithin auch:

$$\Sigma f r^2 = \Sigma f x^2 + \Sigma f y^2.$$

Aber $\Sigma f x^2$ und $\Sigma f y^2$ sind die **äquatorialen** Trägheitsmomente I_y und I_x für die beiden Achsen X und y, folglich:

(34) $$I_p = I_x + I_y,$$

d. h.:

das **polare** Trägheitsmoment einer ebenen Fläche F ist gleich der Summe zweier **äpuatorialen** Trägheitsmomente für zwei aufeinander senkrecht stehende Schwerachsen.

Für einen zum Schwerpunkt symmetrischen Querschnitt, wie Kreis, Quadrat, regelmässiges 6, 8, 12 eck u. s. w. ist $I_x = I_y$, also dann:

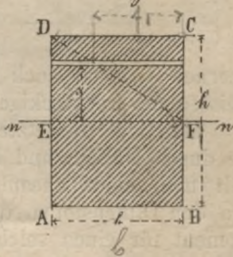
(34 α) $$I_p = 2 I.$$

b) Besondere Fälle.

1. Rechteck:

Man zerlege die rechteckige Fläche, Fig. 12, in lauter Streifen f parallel der Basis b; ist nun x die Entfernung eines solchen Streifens von der zur Basis parallelen neutralen Achse, so ist demnach das Trägheitsmoment I in Bezug auf die letztere Achse:

Fig. 12.



$$I = \Sigma f x^2.$$

Verbinde D mit F; ist f_1 das Stück von f zwischen D F und F C, so folgt: $f : f_1 = \frac{h}{2} : x$, woraus:

$$f = f_1 \frac{h}{2x}.$$

Dies in den Wert von I eingeführt, gibt auch:

$$I = \frac{h}{2} \Sigma f_1 x.$$

Aber $\Sigma f_1 x$ ist das statische Moment der beiden Dreiecke A F B und D F C in Bezug auf n n, mithin:

$$\Sigma f_1 \cdot x = 2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{b h^2}{6},$$

daher:

$$I = \frac{b h^3}{12}, \tag{35}$$

und da $a = a_1 = \frac{h}{2}$ ist:

$$W = W_1 = \frac{b h^2}{6}. \tag{36}$$

Es ist leicht einzusehen, dass die beiden letzten Formeln auch für ein Parallelogramm von der Basis b und der Höhe h ihre Gültigkeit haben.

Wenn nun bei gegebenem Inhalt eines Querschnitts dessen Widerstandsmoment möglichst gross ausfallen soll, so muss h möglichst gross genommen werden, wobei aber wohl zu beachten ist, dass durch ein zu kleines b der Widerstand des Trägers gegen Seitendruck sehr herabgedrückt wird.

Letzteres lässt sich nun leicht dadurch umgehen, dass man den Querschnitt, wenn thunlich, aus zwei Rechtecken zusammensetzt, wie

Fig 13.

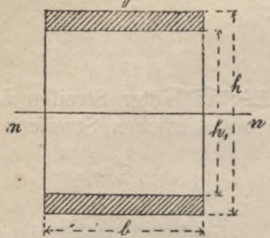


Fig. 13 zeigt, wodurch zugleich ein grosses W erzielt werden kann. Für diesen Fall ist:

$$(37) \qquad I = \frac{b\,(h^3 - h_1{}^3)}{12}$$

und:

$$(38) \qquad W = W_1 = \frac{b\,(h^3 - h_1{}^3)}{6\,h}.$$

Anwendung von dem zuletzt Bemerkten macht man ausser bei durchbrochenen gusseisernen Trägern auch häufig bei hölzernen Balken, bei denen ja am meisten der rechteckige Querschnitt auftritt.

Man legt die letzteren wohl zu mehreren aufeinander und verbindet sie durch Dübeln und Bolzen oder verzahnt sie. Auf diese Weise erhält man einen zusammengesetzten Balken, der als einfacher Balken von den Dimensionen der Verbindung anzusehen ist. Das Widerstandsmoment für einen solchen Balken ist ausgedrückt durch:

$$W = \frac{b\,(n\,h)^2}{6} = n^2\,\frac{b\,h^2}{6},$$

wenn n die Anzahl der einzelnen Balken und b und h deren Dimensionen sind, also für $n = 2$:

$$W^1 = \tfrac{2}{3}\,b\,h^2.$$

Eine andere Anordnung besteht auch darin, dass man zwischen zwei Balken Holzklötze, Keile, einschiebt und dann durch diese und die beiden Balken Bolzen zieht.

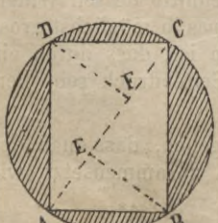
Ist a der Spielraum zwischen beiden Balken, so ist nun:

$$W = \frac{b}{12\left(h + \frac{a}{2}\right)}\left\{(2\,h + a)^3 - a^3\right\} = \frac{b\,h}{3}\left\{2\,(h + a) + \frac{a^2}{2\,h + a}\right\}.$$

Anmerkung. a) Beim Beschlagen von Hölzern zu rechteckigen Balken tritt die Aufgabe entgegen, aus einem runden Stamm einen rechteckigen Balken so zu zimmern, dass derselbe, hochkantig gelegt, ein möglichst grosses Widerstandsmoment hat, um so das möglichst grösste Tragvermögen zu erzielen.

Sei $A\,C = d$, Fig. 14, der Durchmesser des Baumstamm-Querschnittes, $A\,B = b$ die Breite und $A\,D = h$ die Höhe des Querschnitts, für welchen W ein Maximum ist, so folgt, da

Fig 14.



$W = \dfrac{b\,h^2}{6} = \dfrac{b\,(d^2 - b^2)}{6}$ ist, dass letzterer Wert ein Maximum erreicht, wenn

$$b\,(d^2 - b^2) = \text{Max.}$$

Für jeden anderen Querschnitt, dessen Breite $(b \pm x)$ ist, muss demnach die Differenz

$$b\,(d^2 - b^2) - (b \pm x)\left\{d^2 - (b \pm x)^2\right\} = +$$

werden. Daraus resultiert:

$$\mp\,x\,(d^2 - 3\,b^2) + 3\,b\,x^2 \pm x^3 = +.$$

Diese Beziehung muss richtig sein für jeden möglichen Wert von x, demnach auch für x gleich unendlich klein; dann aber dürfen wir x^3 vernachlässigen, und es bleibt:

$$\mp x(d^2 - 3b^2) + 3bx^2 = +.$$

Das zweite Glied ist für jeden Wert von x positiv, während das erste bald positiv, bald negativ sein kann. Da nun aber x so gewählt werden kann, dass das zweite Glied kleiner wird als das erste, das ganze aber unter allen Umständen stets positiv sein muss, so lässt sich dies nur dadurch erreichen, dass, indem ja x nicht in Null übergehen darf, die Klammer des ersten Gliedes verschwindet, also:

$$d^2 - 3b^2 = 0$$

wird. Man erhält folglich für die gesuchte Breite:

$$b = d\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

und also:

$$h = d\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

mithin:

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{7} \text{ (angenähert).}$$

Genau erhält man durch folgende, von den Zimmerleuten angewandte Regel den gewünschten Querschnitt: Man teile den Durchmesser des Kreises in 3 gleiche Teile und errichte in den Teilpunkten Senkrechte zu ihm, so schneiden diese den Kreisumfang in den beiden Eckpunkten des Rechtecks, dessen beide andere Ecken die Endpunkte des Durchmessers sind.

Die Richtigkeit dieser Regel folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke A E B und A B C, sowie A D F und A D C.

b) Für die Basis b, Fig. 12, als Achse ist nach Formel (31):

$$I_1 = \frac{bh^3}{3}, \tag{39}$$

und für eine zur Basis parallele Achse, von welcher die Punkte C und B den Abstand h und h_1 haben, folgt:

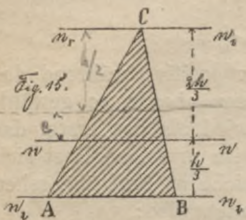
$$I_1 = \frac{b}{3}(h^3 - h_1{}^3), \tag{39α}$$

welche Formel vielfache Anwendung bei Bestimmung des Trägheitsmoments der aus Rechtecken zusammengesetzten Querschnittsformen findet. —

2. Dreieck:

Da das Dreieck A B C, Fig. 15, von der Basis b und der Höhe h die Hälfte eines Parallelogramms von derselben Basis und Höhe ist, so ist das Trägheitsmoment des Dreiecks mit Bezug auf die zur Basis parallele Schwerachse des Parallelogramms: $\frac{bh^3}{24}$ und daher das Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf seine zur Basis parallele Schwerachse nach Formel (31):

Fig. 15.



$$I = \frac{b\,h^3}{24} - \frac{b\,h}{2}\left(\frac{h}{2} - \frac{h}{3}\right)^2, \quad J_1 = J - Fe^2$$

woraus:

$$(40) \qquad I = \frac{b\,h^3}{36},$$

und daher für $a = \frac{h}{3}$:

$$(41) \qquad W = \frac{b\,h^2}{12},$$

sowie für $a_1 = \frac{2}{3}\,h$:

$$(42) \qquad W_1 = \frac{b\,h^2}{24}.$$

Anmerkung: Für eine durch die Spitze gehende und zur Basis parallele Achse folgt:

$$I_1 = \frac{b\,h^3}{36} + \frac{b\,h}{2}\left(\tfrac{2}{3}\,h\right)^2$$

oder:

$$(43) \qquad I_1 = \frac{b\,h^3}{4},$$

und für die Basis b als Achse ergibt sich:

$$I_2 = \frac{b\,h^3}{36} + \frac{b\,h}{2}\left(\tfrac{1}{3}\,h\right)^2,$$

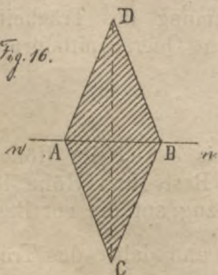
daraus:

$$(44) \qquad I_2 = \frac{b\,h^3}{12}.$$

3. Rhomboidaler Querschnitt:

Ist die Breite $A\,B = b$ und die Höhe $C\,D = h$, Fig. 16, so findet man für $A\,B$ als Achse nach letzterer Formel:

Fig. 16.



$$I = 2 \cdot \frac{b}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^3$$

oder:

$$(45) \qquad I = \frac{b\,h^3}{48}$$

und also:

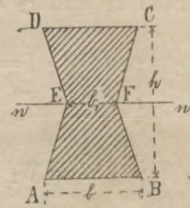
$$(46) \qquad W = W_1 = \frac{b\,h^2}{12} = \frac{bh^2}{24}$$

4. Doppeltrapez:

Für die Höhe $AD = BC = h$, sowie $AB = DC = b$ und $EF = b_1$, Fig. 17, hat man mit Bezug auf nn als Achse:

$$I = \frac{b h^3}{12} - 4 \frac{(b - b_1)}{2 \cdot 12} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3,$$

Fig. 17.



oder:

$$I = \frac{(3b + b_1) h^3}{48} \tag{47}$$

und

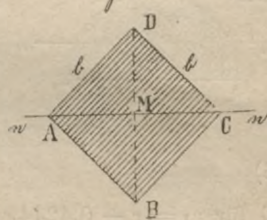
$$W = W_1 = \frac{(3b + b_1) h^2}{24}. \tag{48}$$

5. Quadrat:

Ist b die Seite desselben, so folgt für die Diagonale als Achse, Fig. 18:

$$I = 4 \cdot \frac{AM \cdot MD^3}{12} = \frac{AM^4}{3},$$

Fig. 18.



woraus, da $AM = \cancel{\frac{b\sqrt{2}}{2}}$ ist: $\frac{b}{\sqrt{2}}$

$$I = \frac{b^4}{12} \tag{49}$$

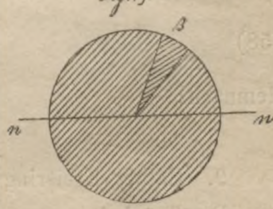
und also:

$$W = W_1 = 0{,}118\, b^3. \tag{50}$$

6. Kreis:

Zerlegt man die Kreisfläche, Fig. 19, in lauter gleiche, sehr kleine Sektoren, so sind diese als Dreiecke aufzufassen von der Höhe r und der Basis β; demnach das Trägheitsmoment eines solchen Dreiecks in Bezug auf eine durch die Spitze zur Basis parallele Achse:

Fig. 19.



$$i = \frac{\beta r^3}{4}.$$

Die Summe aller dieser Trägheitsmomente aber gibt das polare Trägheitsmoment, mithin das äquatoriale Trägheitsmoment für einen Durchmesser nach Formel (34 α):

$$I = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{\beta r^3}{4} = \frac{r^3}{8} \Sigma \beta;$$

$\Sigma \beta = 2 \pi r$, also auch:

$$I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \tag{51}$$

und:

(52) $$W = W_1 = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

7. Kreisring:

Sind r_1 und r_2 die beiden Radien, so ist:

(53) $$I = \frac{\pi}{4}(r_1{}^4 - r_2{}^4) = \frac{\pi}{64}(d_1{}^4 - d_2{}^4)$$

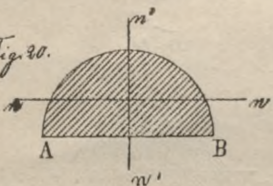
und:

(54) $$W = W_1 = \frac{\pi}{4\,r_1}(r_1{}^4 - r_2{}^4) = \frac{\pi}{32\,d_1}(d_1{}^4 - d_2{}^4).$$

8. Halbkreis:

Für die zum Durchmesser A B, Fig. 20, parallele Schwerachse ist nach Formel (31):

Fig. 20.



$$I = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi}\right)^2$$

oder:

(55) $$I = 0{,}110\, r^4.$$

Weiter folgt für $a = \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi} = 0{,}4244\, r$:

(56) $$W = 0{,}2592\, r^3$$

und für $a_1 = r - 0{,}4244\, r = 0{,}5756\, r$:

(57) $$W_1 = 0{,}1911\, r^3.$$

Für die zur Achse n n senkrechte Schwerachse $n^1 n^1$ ist:

(58) $$I^1 = \frac{\pi r^4}{8} = 0{,}3927\, r^4,$$

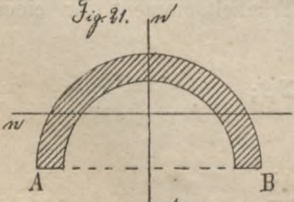
demnach:

$$I^1 = 3{,}57\, I.$$

9. Halber Kreisring:

Das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf seine zu A B, Fig. 21, parallele Schwerachse ist nach Formel (33):

Fig. 21.



$$I = 0{,}110\,(r_1{}^4 - r_2{}^4)$$

$$- \frac{\frac{\pi}{2} r_1{}^2 \, \frac{\pi}{2} r_2{}^2}{\frac{\pi}{2}(r_1{}^2 - r_2{}^2)} \cdot \left\{0{,}4244\,(r_1 - r_2)\right\}^2,$$

daraus durch Reduktion:

$$(59) \qquad I = 0{,}110\,(r_1{}^4 - r_2{}^4) - 0{,}283\, r_1{}^2\, r_2{}^2 \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\right)$$

und bezogen auf die zu n n senkrechte Achse $n^1 n^1$:

$$(60) \qquad I^1 = 0{,}3927\,(r_1{}^4 - r_2{}^4),$$

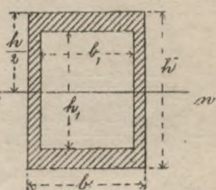
also auch hier:

$$I^1 > I.$$

10. Hohler rechteckiger Querschnitt:

Sind b und h, sowie b_1 und h_1 die Dimensionen dieses Querschnitts, Fig. 22, so ergibt sich für das Trägheitsmoment desselben, bezogen auf die zu b parallele Schwerachse sofort:

Fig. 22.



$$(61) \qquad I = \frac{b\,h^3 - b_1\,h_1{}^3}{12},$$

sowie:

$$(62) \qquad W = W_1 = \frac{b\,h^3 - b_1\,h_1{}^3}{6\,h}.$$

Für die durch Fig. 23 bis 25 dargestellten Profile erhält man dieselben Werte, da ja durch zu b parallele Verschiebung der Flächenteilchen weder der Flächeninhalt, noch auch die Entfernung der einzelnen Elemente von der gewählten Schwerachse geändert wird.

Fig. 23.

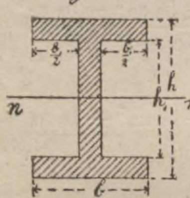


Fig. 24.

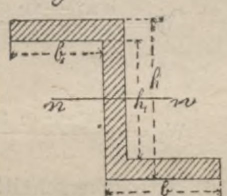
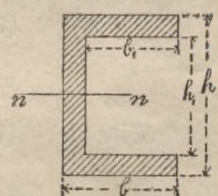


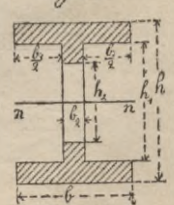
Fig. 25.



13. Durchbrochener ⊥-Querschnitt:

Bezogen auf die zu b parallele Schwerachse, Fig. 26, erhält man direkt:

Fig. 26



$$(63) \qquad I = \frac{b\,h^3 - b_1\,h_1{}^3 - b_2\,h_2{}^3}{12}$$

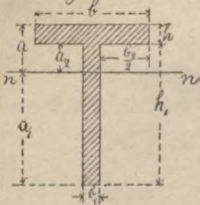
und:

$$(64) \qquad W = W_1 = \frac{b\,h^3 - b_1\,h_1{}^3 - b_1\,h_2{}^3}{6\,h}.$$

14. Einfacher ⊤-Querschnitt:

Hat man die Entfernungen a und a_1, Fig. 27, der äussersten Fasern von der zur Flantsche parallelen Schwerachse bestimmt, so folgt nach Formel 39:

Fig. 27.



$$(65)\qquad I = \frac{b\,a^3 + b_1\,a_1{}^3 - b_2\,a_2{}^3}{3};$$

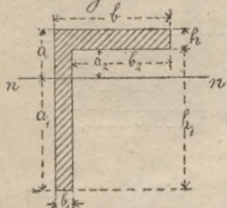
ferner:

$$(66)\qquad W = \frac{b\,a^3 + b_1\,a_1{}^3 - b_2\,a_2{}^3}{3\,a},$$

sowie:

$$(67)\qquad W_1 = \frac{b\,a^3 + b_1\,a_1{}^3 - b_2\,a_2{}^3}{3\,a_1}.$$

Fig. 28.



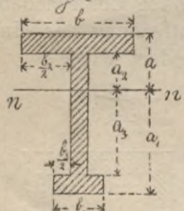
Auch findet man auf Grund von Formel (32):

$$(68)\qquad I = \frac{b\,h^3 + b_1\,h_1{}^3}{12} + \frac{b\,h \cdot b_1\,h_1}{b\,h + b_1\,h_1}\left(\frac{h + h_1}{2}\right)^2.$$

Bei dem ⌈‾-Eisen, Fig. 28, ergeben sich für I und W dieselben Beziehungen.

15. Doppel-⊤-Querschnitt mit ungleichen Flantschen.

Fig. 29.



Nach Bestimmung von a und a_1, Fig. 29, ergibt sich auch hier auf Grund der Formel (39) direkt:

$$(69)\qquad I = \frac{b\,a^3 + b_1\,a_1{}^3 - b_2\,a_2{}^3 - b_3\,a_3{}^3}{3},$$

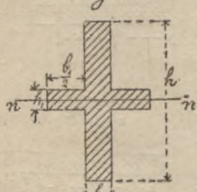
sowie:

$$(70)\qquad W = \frac{b\,a^3 + b_1\,a_1{}^3 - b_2\,a_2{}^3 - b_3\,a_3{}^3}{3\,a}$$

und:

$$(71)\qquad W_1 = \frac{b\,a^3 + b_1\,a_1{}^3 - b_2\,a_2{}^3 - b_3\,a_3{}^3}{3\,a_1}.$$

Fig. 30.



16. Kreuzquerschnitt:

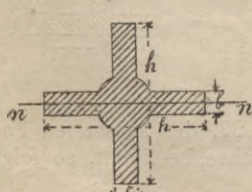
Es ist hier Fig. 30:

$$(72)\qquad I = \frac{b\,h^3 + b_1\,h_1{}^3}{12}$$

und also:

$$(73)\qquad W = W_1 = \frac{b\,h^3 + b_1\,h_1{}^3}{6\,h}.$$

Fig. 31.



17. Sternförmiger Querschnitt:

Ist d der Durchmesser des Kerns, Fig. 31, so folgt nach Formel (35 und 51):

$$(74)\qquad I = \frac{\pi\,d^4}{64} + \frac{b\,(h^3 - d^3) + (h - d)\,b^3}{12}$$

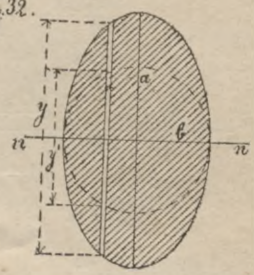
und demnach:

(75) $$W = W_1 = \frac{1}{h}\left\{\frac{\pi d^4}{32} + \frac{b(h^3 - d^3) + (h-d)b^3}{6}\right\}.$$

18. Elliptischer Querschnitt:

Man beschreibe in die Ellipse, Fig. 32, mit der halben kleinen Achse b als Radius einen Kreis und zerlege die Ellipsenfläche in lauter Streifen parallel der grossen Achse. Diese Flächenstreifen haben, soweit sie dem Kreise angehören, die Länge y^1 und, soweit sie zur Ellipse gehören, die Länge y. Man kann nun diese Elementarstreifen als Rechtecke ansehen von der Breite β und der Höhe y; demnach ist das Trägheitsmoment eines solchen Ellipsenstreifens, bezogen auf die mit der kleinen Achse b zusammenfallende Schwerachse n n: $\frac{\beta y^3}{12}$, somit das Trägheitsmoment der ganzen Ellipse für dieselbe Achse:

Fig. 32.



$$I = \Sigma \frac{\beta y^3}{12}.$$

Nun aber verhält sich:

$$y : y^1 = a : b,$$

also
$$y = \frac{a}{b} y^1.$$

Diesen Wert eingeführt, gibt:

$$I = \frac{a^3}{b^3} \cdot \Sigma \frac{\beta {y_1}^3}{12}.$$

Das Σ bedeutet aber das Trägheitsmoment des der Ellipse eingeschriebenen Kreises, also nach Formel (51) gleich $\frac{\pi b^4}{4}$, folglich auch:

(76) $$I = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

und:

(77) $$W = W_1 = \frac{\pi a^2 b}{4}.$$

Mit Bezug auf die grosse Achse ergibt sich ebenso:

(78) $$I^1 = \frac{\pi a b^3}{4}$$

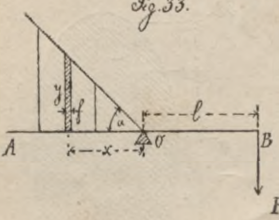
und:

(79) $$W^1 = W_1^1 = \frac{\pi a b^2}{4}.$$

Anmerkung. Das Trägheitsmoment irgend eines Querschnitts lässt sich nach Ingenieur E. Bauer auch mittels einer Wage wie folgt feststellen:

Ueber der Figur, deren Trägheitsmoment man bestimmen will, wird ein Keil, etwa aus Erlenholz, konstruiert und auf A O, Fig. 33, so gelegt, dass die Keilschneide in die Achse O der Wage fällt. Es sei y die Höhe eines Säulchens des Keiles über f als Flächenelement und x die Entfernung von der Schneide, also auch der Achse der Wage, dann ist der Inhalt eines solchen Säulchens f y, dessen Gewicht $f y \gamma$ und also das Moment desselben für die Drehachse: $f y \gamma \cdot x$.

Fig. 33.



Für das Gleichgewicht zwischen dem Keil und dem an den zweiten Arm O B der Wage angehängten Gewicht besteht mithin die Beziehung:

$$\Sigma f y \gamma \cdot x = P l.$$

Aber $y = x \operatorname{tg} \alpha$, daher auch:

$$\gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \Sigma f x^2 = P l,$$

woraus für die Drehachse:

$$I_1 = \frac{P l}{\gamma \operatorname{tg} \alpha}.$$

Das polare Trägheitsmoment muss aus zwei Beobachtungen bestimmt werden.

Beispiele.

1. In einem Paralleltrapez haben die beiden parallelen Seiten die Dimensionen $a = 200$ mm und $b = 150$ mm, und die Höhe h ist gleich 210 mm.

Welchen Wert haben das Trägheits- und Widerstandsmoment für die zu a und b parallele Schwerachse?

Die Entfernung des Schwerpunktes von einer der parallelen Seiten bestimme man entweder praktisch durch Versuch, indem man eine aus Blech oder Karton hergestellte Schablone auf eine Schneide derart legt, dass letztere parallel den parallelen Seiten des Trapezes wird, und nun die Schablone so lange ohne Aenderung der Richtung der Schneide verschiebt, bis Gleichgewicht eintritt, oder aber genauer durch Rechnung wie folgt.

Der Abstand des Schwerpunktes von a bestimmt sich durch:

$$x \cdot \frac{a + b}{2} \cdot h = \frac{a h}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{b h}{2} \cdot \frac{2}{3} h,$$

woraus:

$$x = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2 b}{a + b}.$$

Obige Werte eingeführt, gibt nun:

$$x = \frac{210}{3} \cdot \frac{(200 + 2 \cdot 150)}{200 + 150} = 100 \text{ mm.}$$

Das Trägheitsmoment des Trapezes, bezogen auf a als Achse, ist nach Formel (39 und 44):

$$I_1 = \frac{b\,h^3}{3} + \frac{(a - b)\,h^3}{12} = \frac{(a + 3\,b)\,h^3}{12},$$

demnach das Trägheitsmoment für genannte Schwerachse nach Formel (31):

$$I = \frac{(a + 3\,b)\,h^3}{12} - \left(\frac{a + b}{2}\right) h \cdot \left\{\frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2\,b}{a + b}\right\}^2,$$

oder:

$$I = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{a^2 + 4\,a\,b + b^2}{a + b},$$

mithin unter Berücksichtigung obiger Werte:

$$I = 134137500,$$

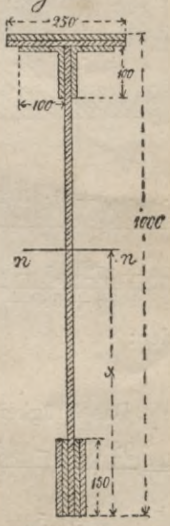
also:

$$W = \frac{134137500}{100} = 1341375$$

und:

$$W_1 = \frac{134137500}{210 - 100} = 1219431{,}8.$$

Fig. 34.



2. Es ist das Trägheits- und Widerstandsmoment des durch Fig. 34 angegebenen, aus Blech und Winkeleisen, beides von 10 mm Stärke, zusammengesetzten Querschnitts für die zur Mittelwand senkrechte Schwerachse zu bestimmen.

Der Abstand des Schwerpunktes von der unteren Kante ist gegeben durch:

$$x = \frac{250 \cdot 20 \cdot 990 + 200 \cdot 10 \cdot 975 + 90 \cdot 20 \cdot 925 + 980 \cdot 10 \cdot 490 + 40 \cdot 150 \cdot 75}{250 \cdot 20 + 200 \cdot 10 + 90 \cdot 20 + 980 \cdot 10 + 40 \cdot 150}$$

$$= \frac{13817000}{24600}$$

oder angenähert:

$$x = 562 \text{ mm.}$$

Das Trägheitsmoment für die zur Flantsche parallele Schwerachse ist nun:

$$I = \tfrac{1}{3}\left\{250\,(438^3 - 418^3) + 2 \cdot 100\,(418^3 - 408^3) + 2 \cdot 10\,(408^3 - 318^3)\right.$$
$$\left. + 10\,(418^3 + 562^3) + 4 \cdot 10\,(562^3 - 412^3)\right\} = 3765034400,$$

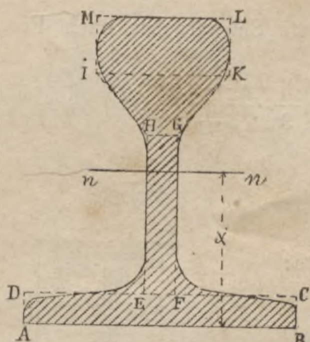
also:

$$W = \frac{3765034400}{562} = 6699349,5$$

und:

$$W_1 = \frac{3765034400}{438} = 8595969.$$

Fig. 35.



3. Für eine Eisenbahnschiene, Fig. 35, ist das Trägheits- und Widerstandsmoment, bezogen auf die zum Fusse parallele Schwerachse, zu bestimmen.

Man ersetze zunächst die krummlinige Umfangslinie durch eine geradlinige Begrenzung, welche sich der ersteren möglichst anschliesst, und es sei:

A B = 92 mm, A D = 13 mm, E F = 13 mm, E H = 53 mm, I K = 54 mm, I M = 20,5 mm und die Höhe des Trapezes G H I K = 31,5 mm.

Die Entfernung des Schwerpunktes von der unteren Kante ist: oberen

$$x = \frac{13 \cdot 92 \cdot 6,5 + 13 \cdot 53\,(26,5 + 13) + (13 + 54) \cdot \frac{31,5}{2} \left\{ \frac{31,5}{3} \left(\frac{13 + 2 \cdot 54}{13 + 54} \right) + 66 \right\} + 54 \cdot 20,5 \cdot 107,75}{13 \cdot 92 + 13 \cdot 53 + 67 \cdot 15,75 + 54 \cdot 20,5}$$

$$= \frac{7774 + 27215,5 + 89696,25 + 119279,25}{1196 + 689 + 1055,25 + 1107} = \frac{243965}{4047,25}$$

oder:

$$x = 60 \text{ mm}.$$

Das Trägheitsmoment für genannte Achse ist mithin:

$$I = \frac{92\,(58^3 - 45^3) + 13\,(45^3 + 8^3)}{3} + \frac{31,5^3}{36} \cdot \left(\frac{13^2 + 4 \cdot 13 \cdot 54 + 54^2}{13 + 54} \right)$$

$$+ \frac{31,5}{2}(13 + 54) \left\{ \frac{31,5}{3} \left(\frac{13 + 2 \cdot 54}{13 + 54} \right) + 8 \right\}^2 + \frac{54\,(60^3 - 39,5^3)}{3}$$

$$= 3585317 + 76359,949 + 763589,4525 + 2778662,25$$

$$= 7203928,65$$

und also:

$$W = \frac{7203928,65}{60} = 120065,$$

sowie:

$$W_1 = \frac{7203928,65}{58} = 124206.$$

4. Wie gross ist der Verlust an Tragvermögen, den ein Baumstamm durch das Beschlagen zu einem rechteckigen Balken vom grössten Widerstandsmoment erleidet?

Der rohe Balken vom Durchmesser d hat ein Tragvermögen

$$M m = \frac{\pi d^3}{32} S$$

und der daraus gezimmerte Balken ein solches von

$$M m_1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot d \cdot \frac{2}{3} d^2}{6} S.$$

Die beiden Tragvermögen verhalten sich demnach wie

$$\frac{d^3}{\sqrt{243}} : \frac{\pi d^3}{32} = \frac{32}{\pi \sqrt{243}} = 0{,}65.$$

Der Verlust an Tragvermögen ist also 35 Prozent.

5. Ein Balken aus Eichenholz von 200 mm Breite und 300 mm Höhe soll durch einen hohlen gusseisernen Träger von 120 mm äusserer Breite und 250 mm Höhe ersetzt werden, der die gleiche Tragfähigkeit besitzt.

Welche Wandstärke δ muss der Träger erhalten?

Für diesen Fall besteht, wenn wir den Sicherheitsmodul für Eichenholz und Gusseisen gleich 0,66 kg bezw. 4,5 kg nehmen, die Beziehung:

$$\frac{200 \cdot 300^2}{6} \cdot 0{,}66 = \frac{120 \cdot 250^3 - (120 - 2\,\delta)(250 - 2\,\delta)^3}{6 \cdot 250} \cdot 4{,}5,$$

woraus folgt:

$$(120 - 2\,\delta)(250 - 2\,\delta)^3 = 1215000000.$$

Für $\delta = 10$ mm und 10,5 mm tritt ein Zeichenwechsel ein; wir nehmen daher für die gesuchte Metallstärke:

$$\delta = 10{,}5 \text{ mm}.$$

6. Bei einem hohlen, innen und aussen rechteckig geformten Träger, an welchem die biegenden Kräfte parallel zu zwei gegenüber liegenden Seitenwänden wirken, soll die Breite $\frac{3}{4}$ der Höhe, die Wandstärke überall 12 mm und das Widerstandsmoment 8124265, bezogen auf Millimeter, betragen.

Wie gross ist die nötige Höhe und Breite des Querschnitts zu nehmen?

Nach Formel (62) ist:

$$W = \frac{0{,}75\,h^4 - (0{,}75\,h - 24)(h - 24)^3}{6\,h};$$

$h = 810$ mm angenommen, gibt:

$$W = 8129672;$$

und $h = 809$ mm gesetzt, liefert:

$$W^1 = 7903073;$$

demnach:

$$h = 810 \text{ mm}$$

genügt, daher:

$$b = 607{,}5 \text{ mm.}$$

7. Ein Doppel-T-Träger aus Gusseisen mit ungleichen Flantschen, welcher durch Kräfte parallel der Mittelrippe auf Biegen beansprucht wird, erfordert für die Seite der Neutralachse, auf welcher die grössere Flantsche liegt, ein Widerstandsmoment, bezogen auf Millimeter, von 1119258.

Welche Dimensionen erhält der Querschnitt, wofern die Stärke der Mittelrippe 0,05, die Breite der kleineren Flantsche 0,24, die der grösseren 0,7 der Querschnittshöhe, ferner die Stärke der kleineren Flantsche gleich der der Mittelrippe, die Stärke der grösseren aber das $1\frac{1}{2}$ fache der letzteren betragen soll, bei welchen Verhältnissen die Neutralachse von der äusseren Kante der grösseren Flantsche einen Abstand gleich nahezu $\frac{1}{3}$ der totalen Trägerhöhe hat?

Nach Formel (70) ergibt sich, wenn man obige Beziehungen und $h = 300$ mm einführt:

$$W = 1120245;$$

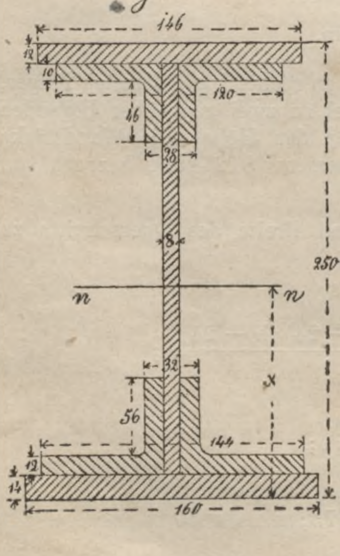
dagegen für $h = 299$ mm folgt:

$$W^1 = 1109180.$$

Ersterer Wert von h ist daher anzuwenden, woraus sich nun die übrigen Werte auf Grund obiger Annahmen bestimmen lassen.

Aufgaben.

Fig. 36.



1. Welchen Wert hat das Trägheits- und Widerstandsmoment des in Fig. 36 skizzierten, aus Blech und Winkeleisen konstruierten Trägers für die zur Mittelwand senkrechte Schwerachse?

Der Abstand der Schwerachse von der untersten Begrenzungslinie des Querschnitts ist:

$$x = 113 \text{ mm};$$

daher das Trägheitsmoment für genannte Schwerachse:

$$I = 106339008,$$

demnach:

$$W = \frac{106339008}{113} = 941053$$

und:

$$W_1 = \frac{106339008}{137} = 776197.$$

2. Wie gross ist das Widerstandsmoment eines]-Träger für jede Seite der zur Mittelwand senkrechten Schwerachse, wenn die Höhe des Trägers 180 mm, die Breite der oberen Flantsche 40 mm, die der unteren 75 mm, die Stärke der Mittelrippe 16 mm, die der oberen Flantsche 20 mm und die der unteren 30 mm ist.

Es ist:

$$W = 266924$$

und:

$$W_1 = 177949.$$

3. Ein Träger ist gebildet durch zwei Eisenbahnschienen wie Fig. 35, die mit ihren Füssen zusammengeschraubt sind.

Welchen Wert hat das Trägheitsmoment dieses Trägers, bezogen auf die Schienenbasis?

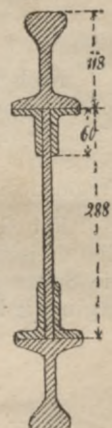
Man findet:

$$I = 43548057{,}3$$

und also:

$$W = 369051.$$

Fig. 37.



4. Zur Unterlage einer Ueberbrückung sind zwei Eisenbahnschienen von vorigem Profil, wie Fig. 37 zeigt, durch ein Stehblech und Winkeleisen, beides von 6 mm Stärke, miteinander verbunden.

Welches ist das Trägheitsmoment des Querschnitts dieser Verbindung, bezogen auf die zur Blechwand senkrechte Schwerachse?

Es ist:

$$I = 400015737{,}3$$

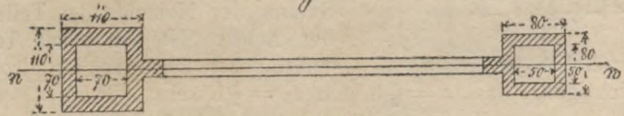
und also:

$$W = 1526777{,}6.$$

5. Wie gross ist das Trägheitsmoment des Querschnitts, Fig. 38, einer durchbrochenen Gusswand?

$$I = 13092500.$$

Fig. 38.



6. Ein röhrenförmiger, gusseiserner Träger verlangt ein Widerstandsmoment, bezogen auf Millimeter, von 369612.

Welchen Durchmesser erhält er, wenn die Wandstärke gleich 20 mm gemacht werden soll?

$$d = 180 \text{ mm}.$$

7. Welche Dimensionen bekommt der doppel-T-förmige Querschnitt eines gusseisernen Trägers, an dem die äusseren Kräfte parallel zur Mittelrippe gerichtet sind, wenn die Breite der einen Flantsche 0,23 der Trägerhöhe, die der andern 0,7, die Stärke der ersteren 0,075, die Stärke der letzteren 0,11, die Stärke der Mittelrippe 0,075 der Trägerhöhe und das Widerstandsferment für die Seite der schwächeren Flantsche 113000 betragen soll?

Bei obigen Verhältnissen ist die Neutralachse von der äusseren Begrenzung der schwächeren Flantsche um $\frac{2}{3}$ der Trägerhöhe entfernt.

Trägerhöhe $h = 160$ mm.

Die anderen Verhältnisse des Querschnitts ergeben sich hieraus nach obigen Beziehungen.

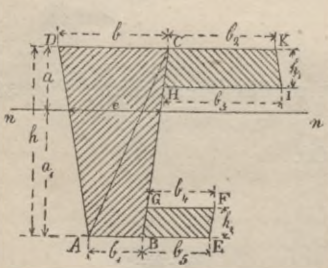
§ 8.

Querschnitte gleicher Festigkeit für Gusseisen.

Nach § 5 soll man behufs Erzielung der günstigsten Materialverteilung eines Trägers den Querschnitt so konstruieren, dass das Verhältnis zwischen den grössten Abständen a und a_1 der Fasern zu beiden Seiten der neutralen Achse gleich ist dem Verhältnis zwischen den Tragmodeln T und T_1 des Zerreissens und Zerdrückens.

Für Gusseisen muss bekanntlich dies Verhältnis wie 1 : 2 sein. Ein dreiseitiger Träger aus Gusseisen ist mithin so zu legen, dass die Spitze auf die Druckseite, die Basis folglich, welche rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung gerichtet ist, auf die Zugseite zu liegen kommt.

Fig. 39.



Um nun andere der Bedingung $a : a_1 = 1 : 2$ entsprechende Querschnitte gusseiserner Träger zu erhalten, gehen wir von einem beliebigen trapezförmigen Querschnitt A B C D, Fig. 39, aus, welchem wir zu beiden Seiten der Neutralachse zwei beliebige Trapeze hinzufügen. Für die neutrale Achse n n als eine Schwerachse muss die Summe der Momente der Teile über der Achse gleich sein der Summe der Momente der Teile unter der Achse. Ist nun e der Teil der Achse, welcher innerhalb des Grundtrapezes liegt, so ist also unter Berücksichtigung, dass $a = \frac{1}{3} h$ und $a_1 = \frac{2}{3} h$ sein soll:

$$\left(\frac{b + e}{2}\right) \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{h}{9} \cdot \left(\frac{2b + e}{b + e}\right) + \left(\frac{b_2 + b_3}{2}\right) \cdot h_1 \cdot \left\{\frac{h}{3} - \frac{h_1}{3}\left(\frac{2b_3 + b_2}{b_3 + b_2}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{b_1 + e}{2}\right) \frac{2}{3} h \cdot \frac{2}{9} h \cdot \left(\frac{2b_1 + e}{b_1 + e}\right) + \left(\frac{b_4 + b_5}{2}\right) \cdot h_2 \left\{\frac{2}{3} h - \frac{h_2}{3}\left(\frac{2b_4 + b_5}{b_4 + b_5}\right)\right\};$$

daraus:

$$\frac{h^2}{9}\left\{2\,(4\,b_1 - b) + 3\,e\right\} = h_1\left\{h\,(b_2 + b_3) - h_1\,(2\,b_3 + b_2)\right\}$$
$$- h_2\left\{2\,h\,(b_4 + b_5) - h_2\,(2\,b_4 + b_5)\right\}.$$

Es muss sich aber auch verhalten:

$$b - b_1 : e - b_1 = 3 : 2,$$

woraus:

$$e = \frac{2\,b + b_1}{3}.$$

Dies eingeführt, gibt:

$$(80)\qquad h^2\,b_1 = h_1\left\{h\,(b_2 + b_3) - h_1\,(b_2 + 2\,b_3)\right\} - h_2\left\{2\,h\,(b_4 + b_5) - h_2\,(2\,b_4 + b_5)\right\}.$$

Für die vorgedachte Lage der Neutralachse verschwindet demnach das b; letztere Formel stellt also zunächst einen Querschnitt von der Form A B E F G H I K C, Fig. 39, dar. Da aber die Lage der Schwerachse durch Hinzufügung des beliebigen Dreiecks A C D nicht geändert wird und weiter aus der Formel für Trägheits- und Widerstandsmoment hervorgeht, dass man die Teile eines Profiles in horizontaler Lage willkürlich verschieben kann, ohne dass sich dadurch Trägheits- und Widerstandsmoment irgendwie ändert, so gibt uns Formel (80) bei beliebiger Wahl von b auch die Grundgleichung zur Verzeichnung irgend eines vollen Querschnitts gleicher Festigkeit für Gusseisen.

Sei:

$$(1)\qquad b = b_1 = h_1,\ b_2 = b_3,\ h = 12\,b \text{ und } h_2 = 0.$$

Alsdann folgt nach Formel (80):

$$b_2 = 6{,}857\,b$$

und demnach die ganze Breite des oberen Flantsches:

$$x = 7{,}857\,b.$$

Die in Fig. 40 bis 43 skizzierten Querschnitte entsprechen diesen Verhältnissen.

Das Trägheitsmoment und die Widerstandsmomente dieser Profile sind nach Formel (65 bis 67):

Fig. 40.

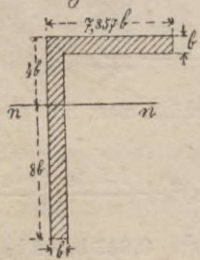


Fig. 41.

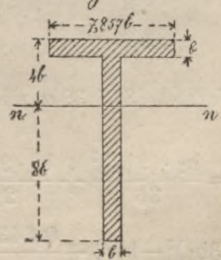


Fig. 42.

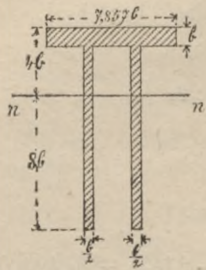
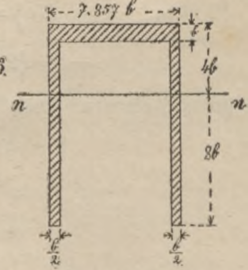


Fig. 43.



$$I = 276{,}569\, b^4,$$

$$W = 69{,}142\, b^3$$

und:

$$W_1 = 34{,}571\, b^3.$$

(2) $b = 1{,}5\, b_1,\ b_3 = 3\, b_1,\ h = 9\, b_1,\ h_1 = 2\, b_1$

und $h_2 = 0.$

Formel 80 gibt dann:

$$b_2 = 3{,}643\, b$$

und also die obere Flantschbreite:

$$x = 3{,}643\, b_1 + 1{,}5\, b_1 = 5{,}143\, b_1.$$

Diesen Bedingungen entspricht Fig. 44 und 45, wobei die Rippe auch wieder geteilt werden konnte.

Fig. 44

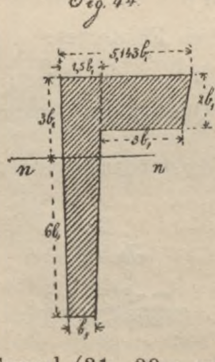
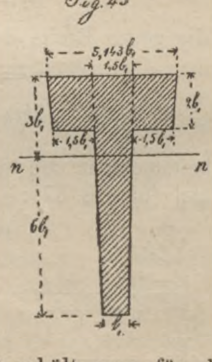


Fig. 45



Nach Formel (31, 39 α und 40) erhält man für das Trägheitsmoment:

$$I = \frac{b_1 \cdot (9 b_1)^3}{36} + \frac{b_1 \cdot 9\, b_1}{2} \cdot (3\, b_1)^2 + \frac{1{,}5\, b_1 \cdot (9\, b_1)^3}{36}$$

$$+ \frac{3{,}643\, b_1}{3} \left\{(3 b_1)^3 - b_1{}^3\right\} - \frac{0{,}643\, b_1\, (2\, b_1)^3}{36} - \frac{0{,}643\, b_1 \cdot 2\, b_1}{2} \left(\tfrac{2}{3}\, b_1 + b_1\right)^2$$

oder:

$$I = 120{,}768\, b_1{}^4,$$

demnach:

$$W = 40{,}256\, b_1{}^3$$

und:

$$W_1 = 20{,}128\, b_1{}^3.$$

(3) $b = b_1 = h_1 = h_2$, $b_2 = b_3 = 8\,b$, $b_4 = b_5$ und $h = 10{,}5\,b$.

In diesem Falle findet man aus Formel (80):

$$b_2 = 0{,}865\,b.$$

Die Querschnitte Fig. 46 und 47 stimmen mit diesen Verhältnissen überein.

Fig. 46.

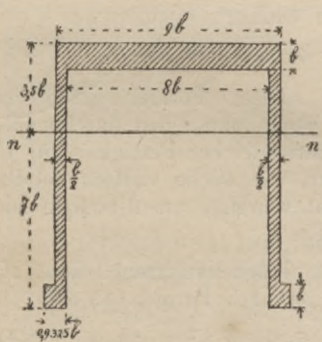
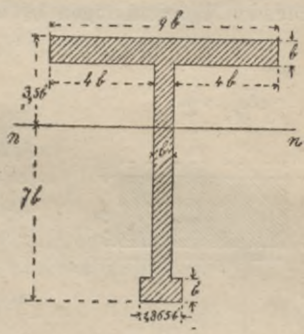


Fig. 47.



Formel (69) gibt für das Trägheitsmoment:

$$I = 237{,}9\,b^4;$$

ferner bekommt man:

$$W = 67{,}97\,b^3$$

und:

$$W_1 = 33{,}985\,b^3.$$

(4) $b = 1{,}3\,b_1$, $b_2 = b_3 = 4{,}5\,b_1$, $b_4 = b_5 = 0{,}75\,b_1$, $h = 6\,b_1$ und $h_2 = b_1$.

Diese Werte geben nach Formel (80):

$$h_1 = 1{,}592\,b_1.$$

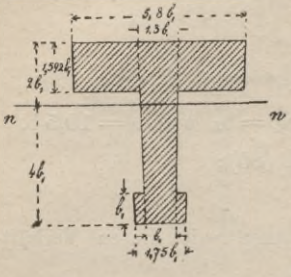
Die Abmessungen des Profils Fig. 48 entsprechen diesen Verhältnissen.

Das Trägheitsmoment ist:

$$I = \frac{b_1 \cdot (6\,b_1)^3}{36} + \frac{b_1 \cdot 6\,b_1\,(2\,b_1)^2}{2} + \frac{1{,}3\,b_1\,(6\,b_1)^3}{36}$$

$$+ \frac{4{,}5\,b_1}{3}\left\{(2\,b_1)^3 - (0{,}408\,b_1)^3\right\} + \frac{0{,}75\,b_1}{3}\left\{(4\,b_1)^3 - (3\,b_1)^3\right\}$$

Fig. 48.



oder

$$I = 46{,}948\, b_1{}^4,$$

mithin:

$$W = 23{,}474\, b_1{}^3$$

und:

$$W_1 = 11{,}737\, b_1{}^3.$$

Wählt man für die in Formel (80) auftretenden Grössen, sowie für b andere Beziehungen, so ergeben sich noch weitere Profile gleicher Festigkeit.

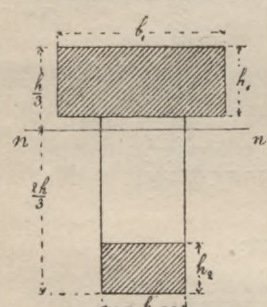
Setzt man in Formel (80) die Breite $b_1 = 0$, weiter $b_3 = b_2$ und $b_5 = b_4$, so geht diese Formel über in:

$$b_2\, h_1\, (2\, h - 3\, h_1) = b_4\, h_2\, (4\, h - 3\, h_2),$$

woraus, wenn man noch für b_2 und b_4 die den Höhen h_1 und h_2 entsprechenden Bezeichnungen b_1 und b_2 einführt, folgt:

(81) $$b_1\, h_1\, (2\, h - 3\, h_1) = b_2\, h_2\, (4\, h - 3\, h_2).$$

Fig. 49.



Die dieser Formel entsprechende Fig. 49 stellt nun einen durchbrochenen Querschnitt gleicher Festigkeit für Gusseisen dar, wie solche vielfach bei Balken gebraucht werden, um dieselben leichter zu machen.

Das Trägheitsmoment dieses Querschnitts ist nach Formel (39 α):

$$I = \frac{b_1}{3} \left\{ \left(\frac{h}{3}\right)^3 - \left(\frac{h}{3} - h_1\right)^3 \right\} + \frac{b_2}{3} \left\{ \left(\frac{2}{3}\, h\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\, h - h_2\right)^3 \right\}$$

oder:

$$I = \frac{b_1 \left\{ h_1 \left[h\,(h - 3\, h_1) + 3\, h_1{}^2 \right] \right\} + b_2 \left\{ h_2 \left[2\, h\, (2\, h - 3\, h_2) + 3\, h_2{}^2 \right] \right\}}{9},$$

demnach:

$$W = \frac{b_1 \left\{ h_1 \left[h\,(h - 3\, h_1) + 3\, h_1{}^2 \right] \right\} + b_2 \left\{ h_2 \left[2\, h\, (2\, h - 3\, h_2) + 3\, h_2{}^2 \right] \right\}}{3\, h}$$

und:

$$W_1 = \frac{b_1 \left\{ h_1 \left[h\,(h - 3\, h_1) + 3\, h_1{}^2 \right] \right\} + b_2 \left\{ h_2 \left[2\, h\, (2\, h - 3\, h_2) + 3\, h_2{}^2 \right] \right\}}{6\, h}$$

Sei:

1. $b_1 = 2\, b_2$ und $h_1 = 1{,}5\, h_2$, so ergibt sich aus Formel (81):

$$h = 3{,}5\, h_1 = 5{,}25\, h_2.$$

Diese Werte eingeführt, liefert:

$$I = 1{,}873\, b_1\, h_1{}^3,$$

$$W = 1{,}605\, b_1\, h_1{}^2$$

und:

$$W_1 = 0{,}8025\, b_1\, h_1{}^2.$$

Fig. 48 entspricht diesen Beziehungen.

2. $h_1 = h_2$ und $h = 15\,h_1$.

Alsdann findet man nach Formel (81):

$$b_2 = 0{,}474\,b_1.$$

Für diesen Fall folgt:

$$I = 63{,}151\,b_1\,h_1^{\,3},$$

$$W = 12{,}6302\,b_1\,h_1^{\,2}$$

und:

$$W_1 = 6{,}3151\,b_1\,h_1^{\,2}.$$

Fig. 50 ist nach diesen Abmessungen skizziert.

3. $b_1 = b_2$ und $h = 3\,h_1$.

Dann erhält man aus Formel (81):

$$h_2 = 0{,}268\,h_1.$$

Fig. 51 stimmt mit diesem Falle überein.

Hier ist:

$$I = 1{,}2681\,b_1\,h_1^{\,3},$$

$$W = 1{,}2681\,b_1\,h_1^{\,2}$$

und:

$$W_1 = 0{,}63405\,b_1\,h_1^{\,2}.$$

Gibt man nun dem letzteren Profil dieselbe Höhe h wie dem in Fig. 50 angedeuteten, so bekommt das obere Rechteck eine Höhe von $\frac{15\,h_1}{3} = 5\,h_1$ und das untere eine solche von $0{,}268 \cdot 5\,h_1 = 1{,}34\,h_1$, wenn h_1 die im Falle 2 angegebene Höhenabmessung der Rechtecke ist.

Man kann nun beide Fälle miteinander vereinigen, da hierdurch die Schwerpunktslage nicht geändert wird, und erhält so das in Fig. 52 dargestellte kombinierte Profil gleicher Festigkeit.

Fig. 50.

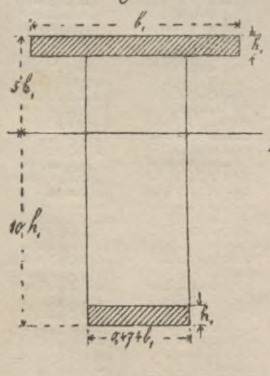


Fig. 51.

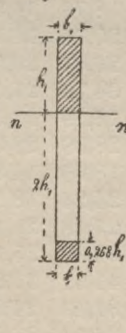
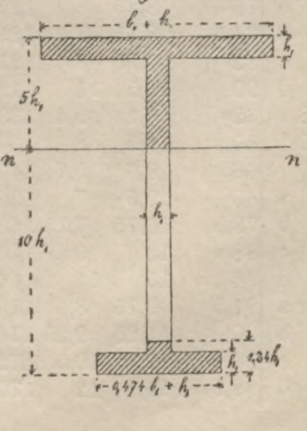


Fig. 52.



Das Trägheits- und Widerstandsmoment ist demnach:

$$I = 63{,}151\, b_1 h_1{}^3 + 1{,}2681\, h_1 (5 h_1)^3 = (63{,}151\, b_1 + 158{,}5125\, h_1)\, h_1{}^3,$$

$$W = (12{,}6302\, b_1 + 31{,}7025\, h_1)\, h_1{}^2,$$

und:

$$W_1 = (6{,}3151\, b_1 + 15{,}85125\, h_1)\, h_1{}^2.$$

In ganz ähnlicher Weise lässt sich eine Reihe anderer Profile ableiten.

Tabelle V über die Dimensionen, Querschnitte, Gewichte, Trägheits- und Widerstandsmomente von ⊥-Eisen.

b mm Flantschenbreite, t mm mittlere Flantschdicke, d mm Stegdicke, h mm Trägerhöhe, F = Querschnitt in Quadratzentimetern, G = Gewicht des lauf. Meters in Kilogrammen, I = Trägheitsmoment und W = Widerstandsmoment, beide bezogen auf Zentimeter.

a) Profile der Luxemburger Bergwerks- und Saarbrücker Eisenhütten-Aktien-Gesellschaft (Burbacher Hütte bei Saarbrücken).

Profil Nr.	b	t	d	h	F	G	I	W
1 a	78,5	8	6,5	78,5	16,80	13,0	169,9603	43,302
b	78	8,5	7	77	17,90	13,9	168,9457	43,882
c	83	9,5	8	75	20,70	16,0	182,0362	48,543
2	42	5,9	3,9	80	7,61	5,9	78,4840	19,621
3	50 u. 80	8	8	80	16,00	12,4	197,6645	35,939
4	52 u. 82	8	10	80	17,60	13,7	200,2364	38,507
5	46	6,3	4,2	90	9,05	7,0	117,9315	26,207
6 a	50	7	5	100	11,50	8,9	178,1450	35,629
b	49,5	8	6	98,5	13,10	10,2	190,6665	38,714
c	53	10	7,5	97	16,65	12,9	229,9967	47,422
d	59	12,5	10	95	22,00	17,1	281,4850	59,260
7 a	75	8,25	6	125	18,78	14,5	476,0562	76,169
b	74,5	8,75	7	123,5	20,75	16,1	499,4896	80,889
c	82	10,75	8	121,5	26,41	20,5	613,1376	100,928
d	90	13,5	11	119,5	34,75	27,0	758,8250	127,000
8	62	8,1	5,4	130	16,19	12,6	441,0000	67,800
9	85	11,5	8	130	28,39	22,0	770,1395	118,483
10	66	8,6	5,7	140	18,35	14,3	579,0000	82,700
11 a	80	9,5	7	150	24,24	18,5	882,4113	117,654
b	79,5	10,75	7,75	148	27,18	21,1	937,3358	126,667
c	88	12	9	146	32,38	25,1	1086,8021	148,877
d	94	15	11	144	41,02	31,8	1314,2880	182,540
12 a	91,5	9,75	8,5	176	31,13	24,0	1480,3032	168,216
b	90	11,25	9,25	174	34,54	26,8	1611,1095	185,185
c	96	12,75	10,5	172	40,14	31,2	1830,5014	212,849
d	99,5	15,5	12	170	47,80	37,1	2115,4290	248,874

Profil Nr.	b	t	d	h	F	G	I	W
13 a	100	11	9	200	38,30	29,5	2389,8547	238,985
b	99	12	10	198	41,44	32,2	2496,8592	252,208
c	106	14	11,5	196	49,28	38,3	2917,0484	297,658
d	113,5	17	14	194	61,27	47,6	3509,6249	361,817
14	100	11,5	10	220	42,98	33,4	3139,3010	285,391
15	91,5	10	8,5	235	36,72	28,5	2855,9433	243,059
16	94,5	11,75	8,5	235	40,48	31,4	3439,7890	292,748
17 a	96	12	10	235	44,42	33,8	3649,9848	310,637
b	97	13	11	233,5	48,30	37,5	3888,0202	333,021
c	107	14,75	12,5	232	57,15	44,4	4595,1776	396,136
d	113	16,75	15	230	67,61	52,5	5261,0000	457,500
18	93	10	10	235	40,10	31,1	3183,8035	271,962
19	90	11,75	10	235	42,50	33,0	3426,1590	291,588
20	91,5	13,5	13	235	51,75	40,2	4008,8415	341,178
21	106	13,1	8,7	240	46,40	36,2	4288,0000	357,000
22 a	115	13,5	11	250	55,80	43,3	5363,0000	429,040
b	114	14,5	11,75	248	59,00	45,8	5540,5184	446,816
c	122,5	16,75	13	246	69,01	53,6	6441,0057	523,659
d	131	19	15	244	80,95	62,8	7407,9864	607,212
23 a	140	14,5	10	250	63,00	48,9	6535,8125	522,865
b	139	15,75	10,75	248,5	67,40	52,3	6854,3010	551,654
c	150	18,5	12	247	80,92	62,8	8186,3704	662,864
d	158	22	14	245	97,94	76,0	9618,3447	785,171
24	96	14	9,5	262	49,11	38,1	5151,8108	393,268
25 a	98	14	11,5	262	54,65	42,4	5451,5519	416,149
b	97,75	15	12,5	260	58,37	45,3	5673,4860	436,422
c	112,5	16,75	14,5	258	70,68	54,9	6859,7040	531,760
d	117	19,5	17	256	82,80	64,3	7842,5216	612,697
26 a	125	15,5	13	300	74,00	57,4	9957,5649	663,837
b	124,5	17	14	298	79,55	61,8	10512,8738	705,562
c	132	19,25	16	296	92,30	71,7	12023,0464	812,368
d	142	23	19	293	112,60	87,4	14319,3202	977,428
27 a	136	19	16	320	97,10	75,4	14711,2903	919,456
b	135	20,5	17	317,5	102,60	79,6	15219,9975	958,740
c	144	22,75	19	315	117,00	90,8	17117,6198	1086,833
28 a	142	16	13	355	87,70	68,1	16715,3703	941,711
b	141	18,5	14	353	96,70	75,1	18289,5124	1036,233
c	150	21,5	16	350	113,90	88,4	21283,6225	1216,207
29 a	140	18,75	16	400	110,50	85,8	25444,0800	1272,204
b	139	20	17	398	116,80	90,7	26379,4599	1325,601
c	150	22,5	19	396	134,50	104,4	30416,3838	1536,181
30	160	21	17	425	133,99	104	35404,0725	1666,074
31	168	22,5	17	450	147,23	114,3	43983,7650	1954,834
32	176	25,5	18	500	174,60	135,5	64150,1750	2566,007
33	200	30	19	550	215,21	164,0	99837,7600	3630,464
34	41	6,75	4,5	80	8,60	6,7	85,4840	21,371
35	42	7,5	5	100	10,65	8,3	160,6446	32,129

Profil Nr.	b	t	d	h	F	G	I	W
36	44	8	5,5	120	12,86	10	272,7061	45,451
37	47	8,5	6	140	15,47	12	438,9350	62,705
38	51	8,5	6,5	160	18,07	14	656,4000	82,050
39	55	8,75	7	180	21,10	16,4	956,5920	106,288
40	60	9,75	7,5	200	25,34	19,7	1427,1700	142,717
41	65	11,25	8	220	30,52	23,7	2108,3920	191,672

Supplement-Blätter: Deutsche Normal-Profile:

8	42	5,9	3,9	80	7,61	6,0	78,4000	19,600
9	46	6,3	4,2	90	9,05	7,1	118,0000	26,200
10	50	6,8	4,5	100	10,69	8,3	172,0000	34,400
11	54	7,2	4,8	110	12,36	9,6	241,0000	43,800
12	58	7,7	5,1	120	14,27	11,1	331,0000	55,100
13	62	8,1	5,4	130	16,19	12,6	441,0000	67,800
14	66	8,6	5,7	140	18,35	14,3	579,0000	82,700
15	70	9	6,0	150	20,50	16,0	743,0000	99,000
16	74	9,5	6,3	160	22,90	17,9	945,0000	118,000
17	78	9,9	6,6	170	25,40	19,8	1177,0000	139,000
18	82	10,4	6,9	180	28,00	21,9	1460,0000	162,000
19	86	10,8	7,2	190	30,70	24,0	1779,0000	187,000
20	90	11,3	7,5	200	33,70	26,2	2162,0000	216,000
21	94	11,7	7,8	210	36,60	28,5	2587,0000	246,000
22	98	12,2	8,1	220	39,80	31,0	3090,0000	281,000
23	102	12,6	8,4	230	42,90	33,5	3642,0000	317,000
24	106	13,1	8,7	240	46,40	36,2	4288,0000	357,000
26	113	14,1	9,4	260	53,70	41,9	5798,0000	446,000
28	119	15,2	10,1	280	61,40	47,9	7658,0000	547,000
30	125	16,2	10,8	300	69,40	54,1	9888,0000	659,000
32	131	17,5	11,5	320	78,20	61,0	12622,0000	789,000
34	137	18,3	12,2	340	87,20	68,0	15827,0000	931,000
36	143	19,5	13,0	360	97,50	76,1	19766,0000	1098,000
38	149	20,5	13,7	380	107,50	83,9	24208,0000	1274,000
40	155	21,6	14,4	400	118,30	92,3	29446,0000	1472,000
$42\frac{1}{2}$	163	23	15,3	425	133,00	103,7	37266,0000	1754,000
45	170	24,3	16,2	450	147,70	115,2	46204,0000	2054,000
$47\frac{1}{2}$	178	25,6	17,1	475	163,60	127,6	56912,0000	2396,000
50	185	27	18,0	500	180,20	140,5	69245,0000	2770,000

b) Profile des Neunkircher Eisenwerks bei Saarbrücken (Gebrüder Stumm).

Profil Nr.	b	d	h	F	G	I	W
1	50	5	100	11,7	9,0	178,1	35,6
2	51	5,5	99	13,0	10,0	203,3	41,1
3	54	7	97	16,4	12,6	235,4	48,5
4	60	10	95	22,7	17,5	291,8	61,4
5	75	6	125	18,8	14,5	476,1	76,2
6	77	7	123	21,8	16,8	518,8	84,4
7	84	8,5	121	27,3	21,0	623,6	103,1
8	91	11	119	35,0	27,0	750,3	126,1
9	80	7	150	24,0	18,5	882,4	117,7
10	84	7,75	149	28,6	22,0	996,0	133,7
11	92	9	147	34,2	26,3	1163,9	158,3
12	102	11	145	42,2	32,5	1392,3	192,0
13	90	8,5	175	31,2	24,0	1441,1	164,7
14	93	9,5	173	35,1	27,0	1636,2	189,2
15	100	10,5	171	41,7	32,0	1901,2	222,4
16	109	12	169	50,0	38,5	2236,8	264,7
17	100	9	200	38,4	29,5	2389,9	239,0
18	104	10	199	44,2	34,0	2703,2	271,7
19	109	11	197	50,7	39,0	3037,5	308,3
20	116	14	195	63,0	48,5	3620,4	371,3
21	96	10	235	44,5	33,75	3650,0	310,6
22	99	11	234	49,4	38,0	4019,0	343,5
23	104	12,5	232	56,5	43,5	4537,3	391,1
24	108	14	230	65,0	50,0	5052,2	439,3
25	115	11	250	56,2	43,25	5363,0	429,0
26	118	12	249	62,4	48,0	5839,2	469,0
27	125	13,5	247	72,1	55,5	6676,9	540,6
28	134	16	245	87,5	66,3	7825,7	638,8
36	140	10	250	66,0	49,0	6615,0	529,2
37	145	11	249	73,7	56,5	7311,8	587,3
38	154	12	247	86,3	66,5	8458,1	684,9
39	163	13,5	245	103,5	79,5	9886,3	807,0
29	125	13	300	74,5	57,75	9957,6	663,8
30	130	14	298	82,4	63,0	10882,5	730,4
31	138	16	296	97,2	74,0	12567,0	849,1
32	147	19	293	118,6	91,0	14934,0	1019,4
33	136	16	320	98,0	75,5	14711,3	919,5
34	141	17	318	106,2	81,5	15822,6	995,1
35	147	19	316	121,3	93,5	17659,1	1117,7
46	40	4	80	8,7	6,7	88,3	22,1
47	53	9	77	15,4	11,9	128,2	33,3
48	80	8	80	16,8	13	152,6	32,7
49	92	11	77	23,7	18,2	188,7	41,8

Profil Nr.	b	d	h	F	G	I	W
51	98	11,5	262	55,1	42,0	5451,6	416,2
52	103	12,5	260	60,8	46,8	5962,7	458,7
53	110	14,5	258	71,0	54,6	6822,4	528,9
54	121	17	256	85,1	65,6	8061,2	629,8
40	142	13	355	89,8	69,2	17050,8	960,6
41	144	14	353	98,3	75,7	18437,8	1044,6
42	156	16	350	116,6	89,8	21649,7	1237,1
43	140	16	400	109,1	83,0	24418,6	1220,9
44	145	17	398	120,4	91,6	27032,2	1358,4
45	155	19	396	137,6	104,7	30782,0	1554,6
50	176	18	500	176,5	136,0	64944,7	2597,8

Deutsche Normalprofile: S. Burbacher Hütte Prof. 10 bis 30 und 45.

c) Profile der Eisenwerke von Hayange-Moyeuvre und Stiring-Wendel (Deutsch-Lothringen).

Nummer Folio	Profil	b	d	h	F	G	I	W
XI	1 a	40	3,5	80	8,45	6,5	78,96	19,74
	b	43	6,5	80	10,85	8,35	110,12	27,53
	2 a	45	4,7	120	13,63	10,5	261,72	43,62
	b	49	8,7	120	18,43	14,19	312,60	52,10
	3 a	48	5,2	140	16,23	12,5	445,90	63,70
	b	53	10,2	140	23,23	17,88	560,00	80,00
	4 a	50	6	160	19,50	15,0	648,80	81,10
	b	55	11	160	27,50	21,15	819,20	102,40
	5 a	55	6,5	180	23,40	18,0	1017,00	113,00
	b	60	11,5	180	32,40	24,90	1260,00	140,00
XII	6 a	60	7	200	27,30	21,0	1420,00	142,00
	b	66	13	200	39,30	32,20	1820,00	182,00
	7 a	65	7,5	220	31,85	24,5	1954,70	177,70
	b	71	13,5	220	45,05	34,60	2487,10	226,10
XIII	1 a	55	3,5	80	10,70	8,2	109,3487	27,336
	1 b	58	6,5	80	13,10	10,0	122,1487	30,536
	2 a	50	8	80	15,66	12,0	142,4367	31,305
	b	52	10	80	17,18	13,2	151,4013	33,645
	3 a	50	5	100	11,60	8,9	178,1457	35,629
	b	53	8	100	14,60	11,2	203,1457	40,629
	4 a	60	4,2	100	14,70	11,3	234,1535	46,830
	b	63	7,2	100	17,70	13,6	259,1535	51,830
	5 a	70	4,7	120	19,20	14,7	442,0224	73,670
	b	74	8,7	120	24,00	18,4	499,6224	83,270
	6 a	75	6	125	18,78	14,5	476,0614	76,169
	b	81	12	125	26,28	20,2	573,7176	91,794

Nummer Folio	Nummer Profil	b	d	h	F	G	I	W
XIV	7 a	70	6	140	22,50	17,2	670,5791	95,799
	b	73	9	140	26,70	20,3	739,1804	105,597
	c	81	8	138	29,30	22,0	837,4038	121,363
	8 a	80	7	150	24,24	18,5	882,4113	117,654
	b	81,5	8,5	150	26,49	20,2	924,5988	123,279
	c	89	9	148	32,90	25,0	1054,8064	142,541
	9 a	70	6	160	24,00	18,5	922,3120	115,289
	b	72	8	160	27,20	21,0	990,5810	123,822
	c	83	8,5	158	32,10	24,4	1189,5267	150,573
XV	10 a	91,5	8,5	175	31,30	23,8	1460,6690	166,933
	b	93,5	10,5	175	34,80	26,4	1549,9919	177,142
	c	105	10,5	170	42,00	32,2	1898,0828	223,304
	11 a	90	8	180	30,70	23,5	1522,2510	169,139
	b	91	9	180	32,50	24,9	1570,8510	174,539
	c	102	10,5	177	42,00	32	1982,4956	224,010
XVI	12 a	100	9	200	38,42	29,2	2389,8547	238,985
	b	103	12	200	44,42	33,8	2589,8547	258,985
	c	110	11	197,5	48,70	37	2972,6626	301,029
	13 a	100	7,5	220	45,10	34,5	3351,7000	304,700
	b	102	9,5	220	49,50	37,9	3529,1666	320,833
	c	110	9	217	55,20	42	4647,8925	428,377
XVII	14 a	91,5	8,5	235	38,94	27,5	2876,7056	244,826
	b	94,5	11,5	235	45,99	32,8	3201,1525	272,438
	c	102	11	233	48,38	36,7	3927,7615	337,147
	15 a	90	10	235	43,00	33,0	3470,7855	295,386
	b	93	13	235	50,05	38,4	3795,2324	322,998
	c	102	13	233	55,20	42,0	4362,3854	374,453
XVIII	16 a	96	10	235	44,70	34,2	3649,9828	310,618
	b	98	12	235	49,40	37,8	3866,2806	329,026
	c	108	12,5	233	54,20	41,8	4528,1996	388,686
	17 a	115	11	250	56,18	43,0	5363,0003	429,040
	b	117	13	250	61,18	46,8	5623,4166	449,873
	c	129	13	246	72,75	55,3	6727,6099	546,797
XIX	18 a	140	10	250	65,00	49,4	6648,3379	531,867
	b	142	12	250	70,00	53,2	6908,7546	552,701
	c	152	12	246	80,32	61,1	7897,1994	642,048
XX	19 a	120	9	280	53,60	41,0	6173,8358	440,988
	b	123	12	280	62,00	47,5	6722,6358	480,188
	c	134	11	277	68,80	52,3	7913,2460	571,353
XXI	20 a	140	10	300	69,25	53,0	9458,0482	630,536
	b	143	13	300	78,25	59,9	10133,0482	675,536
	21 a	125	13	300	75,60	57,5	9957,5649	663,837
	b	135	13	300	89,60	68,0	12506,0666	833,737

Nummer Folio	Nummer Profil	b	d	h	F	G	I	W
XXII	22 a	136	16	320	98,00	74,5	14711,2986	919,456
	b	146	16	320	113,30	86,1	17825,7816	1114,111
	23	105,6	19	129	54,12	41,2	1272,1811	192,755
XXIII	24 a	142	13	355	89,87	68,3	17059,1188	961,077
	b	155	15	355	111,65	84,9	21668,7122	1220,772
XXIV	25 a	140	16	400	107,36	81,6	24004,5075	1200,225
	b	150	16	400	123,29	93,7	29405,6345	1470,281

Tabelle VI über die Dimensionen, Querschnitte, Gewichte, Trägheits- und Widerstandsmomente von [-Eisen.

b mm Fussbreite, d mm Stegdicke, h mm Trägerhöhe, F = Querschnitt in Quadratzentimetern, G = Gewicht des lauf. Meters in Kilogrammen, I = Trägheitsmoment und W = Widerstandsmoment, beides bezogen auf Zentimeter.

Der Steg des Eisens steht vertikal.

a) Burbacher Hütte bei Saarbrücken.

Profil Nr.	b	d	h	F	G	I	W
1	15	5	56	4,[illegible]0	3,5	17,0072	6,074
2	24	5	60	5,30	4,1	23,3048	8,106
3	38	6,5	57	8,28	6,4	38,4949	13,507
4	40 u. 57	10	53	12,50	9,7		
5	30	7	75	8,60	6,7	62,3887	16,637
6	36,5	8	75	10,50	8,2	77,9175	20,778
7	40	9	75	11,95	9,3	88,9050	23,708
8	45	10	75	13,75	10,7	102,7537	27,401
9	40	6	80	10,18	7,9	94,6360	23,659
10	40	8	100	13,76	10,7	183,5950	36,719
11	66	9	105	22,65	17,6	374,7922	71,389
12	65	8	105	19,30	15,0	324,9172	61,889
13	65	10	117,5	23,40	18,2	466,8392	79,462
14	72	9,75	125	26,70	20,7	621,3750	99,420
15	45	7	130	15,45	12,0	360,8670	55,518
16	25	8	136	13,51	10,5	273,0812	40,159
17	45	7	140	17,70	13,7	488,6140	69,802
18	78	12	144	35,20	27,3	1059,9984	147,222
19	85,5	13	142	40,00	31,0	1179,8638	166,178
20	60	8	145	21,60	16,8	657,4807	90,687
21	41,5	9	151	21,39	16,6	635,9138	84,227
22	58	7	153	21,31	16,5	742,4554	97,053
23	65,5	8	151	24,15	18,7	817,4611	108,273
24	60	8	175	25,10	19,5	1097,0400	125,376

Profil Nr.	b	d	h	F	G	I	W
25	73	9,75	176	31,86	24,7	1428,7064	162,353
26	77,75	10,75	174,5	36,00	27,9	1595,8112	182,901
27	78	13	196	49,25	38,2	2675,5274	273,013
28	82,5	14	194	54,60	42,4	2914,4911	300,463
29	100	10	210	44,50	34,5	3045,3675	290,035
30	105,5	11	208	47,60	37,0	3164,0440	304,235
31	87	14	215	53,60	41,6	3477,1520	323,456
32	96	15	214	58,20	45,2	3770,9903	352,429
33	70	10	220	35,96	27,9	2388,6390	217,149
34	90	10	235	44,40	34,5	3647,1882	310,399
35	70	10	235	38,95	30,2	2889,5062	253,575
36	77	11	233	43,87	34,0	3343,5849	287,003
37	85	10	235	44,00	34,2	3403,3405	289,646
38	90	11	233	48,80	37,9	3897,9735	334,590
39	72	10	255	38,50	29,9	2561,8320	200,928
40	79	11	253	43,25	33,6	3721,5288	294,192
41	80	10	250	42,10	32,7	3593,3625	287,469
42	90	10	260	47,05	36,5	4640,0640	356,928
43	92	13	260	54,80	42,5	5134,9904	391,984
44	102	14	258,5	60,75	47,2	5696,3104	439,022
45	98,5	12	300	62,55	48,6	8053,0050	536,867
46	105	12,75	298	67,00	52,0	8523,1278	572,022
47	75	10	300	47,10	36,6	5732,4600	382,164

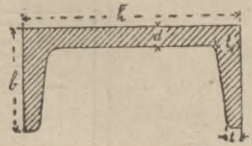
Supplementblatt XXVI:

2	75	8,5	200	32,30	25,2	1927,0000	193,000
3	81	9,5	199	36,30	28,2	2105,1000	212,570
8	55	7	120	17,04	13,3	368,0000	61,300
11	29,5	6	59,5	7,10	5,5	35,6640	11,900
12	40	8	70	10,08	8,3	65,5000	19,280
13	50	10	75	15,35	11,6	120,3000	32,080

b) Neunkircher Eisenwerk bei Saarbrücken.

Profil Nr.	b	d	h	F	G	I	W
1	15	4	30	2,2	1,67		
2	17	4,5	29	2,6	2,00		
3	20	5	40	2,8	3,6		
4	24	5,5	39	4,4	3,4		
5	25	6	50	5,4	4,1		
6	26	6,5	49	6,1	4,7		
7	30	6	60	7,0	5,4		
8	32	7	59	8,1	6,3		
9	30	7	75	8,3	6,5		
10	35	8	74	9,5	7,5		
11	40	9	75	11,8	9,0		
12	45	10	74	13,6	10,5		
13	40	8	100	13,9	10,5	186,5	37,3
14	45	9	99	16,1	12,4	213,1	43,1
15	65	8	105	19,6	15,0	324,9	61,8
16	69	8,5	104	21,7	16,7	353,3	67,9
17	65	10	117,5	23,7	18,0	466,8	79,5
18	71	11	116	26,5	20,4	508,2	87,6
19	60	8	145	21,9	16,8	657,5	90,7
20	64	8,5	144	24,1	18,5	721,3	100,2
21	58	7	153	21,3	16,5	742,5	97,1
22	63	8	152	24,6	19	836,7	110,1
23	72	9,75	176	31,8	24,3	1413,1	160,6
24	79	10,75	174,5	36,9	28,4	1578,6	180,9
25	90	10	235	45,2	34,5	3647,2	310,4
26	100	11	233	51,5	39,7	4151,6	356,4

c) Eisenwerke von Hayange, Moyeuvre und Stiring-Wendel.



F in Quadratzentimetern und G in Kilogrammen für den laufenden Meter.

Profil Nr.	b	t	t_1	d	h	F	G
1	9,5	3	3,5	3,5	18	10,5	0,80
2	21	4	4,5	4	27	2,60	2,00
3	15	4		4	30	2,02	1,55
4	20	4	5	5	40	3,41	2,62
5	25	5	7	6	49	5,20	4,00
6	30	5	7	6	60	6,76	5,20
7	40	6	9	9	75	11,53	8,87
8 a	40	8	10	8	100	14,00	10,78
b	42	8	10	10	100	16,00	12,32
9 a	65	7	9	8	105	18,35	14,10
b	67	7	9	10	105	20,45	15,70
10 a	65	9	11	10	117,5	23,40	17,98
b	67	9	11	12	117,5	25,75	19,80
11 a	60	8	10	8	145	21,55	16,58
b	62	8	10	10	145	24,45	18,80
12 a	72	10	13	10	176	31,62	24,45
b	74	10	13	12	176	35,14	27,00
13 a	87	14	19	14	215	55,25	42,50
b	89	14	19	16	215	59,55	45,80
14 a	70	9	14	10	220	36,40	28,00
b	72	9	14	12	220	40,80	31,25
15 a	90	8	14	10	235	44,80	34,44
b	92	10	14	12	235	49,50	38,04
16 a	90	8	11	10	260	43,30	33,30
b	92	8	11	12	260	48,50	37,30
17 a	97	12	17	12	300	61,00	46,90
b	99	12	17	14	300	67,00	51,50

Tabelle VII über die Dimensionen, Querschnitte, Gewichte, Trägheits- und Widerstandsmomente von ⊥-Eisen.

Den einzelnen Werten liegen die Abmessungen der vorigen Tabellen zu Grunde.

a) Burbacher Hütte bei Saarbrücken.

Profil Nr.	b	t	d	d_1	h	F	G	⊥		⊢	
								I	W	I^1	W^1
1	16	7,5	6		50,75	3,92	3,0	9,4950	3,160	0,3740	0,468
2	50	6,5	6,5	8	59	7,05	5,5	24,0930	6,070	7,4370	2,970
3	54	7	7	9	58	7,86	6,1	25,5000	6,450	9,4030	3,610
4	49	8	7	9	66	8,56	6,6	30,7750	7,140	8,1240	3,310
5	75	8	6	9	65	10,27	8,0	39,6850	7,930	28,3250	7,280
6	80	9,5	7	10	75	13,50	10,5	67,6540	12,530	40,8610	10,215
7	52	9	8	10	80	11,07	8,6	70,3830	13,400	10,9770	4,222
8	55	9,5	9	11	77	11,97	9,3	69,6450	13,740	13,7340	5,180
9	51	10,75	9	11	91	13,50	10,5	110,0130	18,800	12,5500	4,920
10	92	9,5	9	11	85,5	16,34	12,7	114,8500	18,820	62,2800	13,540
11	100	11	9	12	100	20,34	15,8	189,0900	26,260	92,5250	18,500

12	96	12	10	14	115	23,88	18,5	304,4400	38,050	89,9570	18,740
13	115	12,5	11	16	125	29,56	22,9	421,3910	46,300	158,5720	27,570
14	125	17	13	17	152	41,50	32,2	856,3460	79,290	280,5670	44,840
15	137	18,5	15	22	161	51,70	40,1	1201,5900	106,330	404,2360	59,010
16	100	8	8	10	60	12,95	10,5	37,5464	8,288	66,9825	13,396
17	122	10	8	14	74	19,45	15,1	86,1591	15,241	152,0305	24,923
18	118	11	8	14,5	88	22,10	17,2	130,5124	19,664	151,5249	25,682
19	123	16	12,5	13	86	29,28	22,7	154,0959	24,021	249,3246	40,540
20	125	15,75	14	15	86	30,15	23,4	170,2710	26,600	262,1780	41,950
21	134	21,5	18	19	106	44,44	34,5	351,9600	45,700	435,5000	65,000
22	148	23	21	24	103	52,04	40,4	423,1200	57,180	628,9300	84,990
23	144	15	12	20	75	31,20	24,2	113,6880	19,950	375,4250	52,140
24	143	21,25	14	21	92	43,18	33,5	231,8200	33,600	518,6820	72,540
25	144	20	13	20	98	41,70	32,4	264,3300	35,720	498,6720	69,260
26	150	11	11	14	65	23,25	18,0	68,6600	13,730	310,2800	41,370
27	150	11	11	14	75	24,50	19,0	104,7300	18,210	310,4410	41,390
28	140	22,25	14	21	113	47,40	36,8	444,2188	52,997	512,8280	73,261
29	152	24	18	28	108	56,38	43,8	710,8785	93,537	449,4235	63,783
30	200	13	14	18	103	40,40	31,4	347,5924	44,104	869,7384	86,974
31	208	15	15	20	113	48,35	37,5	496,3901	58,392	1129,1674	108,575
32	216	18	15	21	124	57,96	45	681,1435	71,279	1516,8060	140,445

b) Neunkircher Eisenwerk bei Saarbrücken.

Profil Nr.	b	t	t_1	d	d_1	h	F	G
1	80	6,5		9		45	8,7	6,7
2	28	5		5		35	2,9	2,2
3	28	4		4,5		25	2,1	1,6
4	18	4,5		4,5		20	1,5	1,15
5	30	5		5		28	2,65	2,0
6	55	6	7	5	8	30	5,1	3,9
7	52	6	7	7	8	56	7,1	5,5
8	60	8	10	10,5	13	57	10,6	8,0
9	90	9		12	14	48	13,0	10,0
10	80	6,5	12	7	10	75	12,7	10,0
11	75	5	10	6	8	65	9,7	7,4
12	40	5		5		40	3,65	2,8
13	54	6		5	7	19	4	3,1
14	91	8	11	8,5	10,5	85	15,8	12,2
15	70	6		7,5		30	6	4,6

c) Eisenwerke von Hayange, Moyeuvre und Stiring-Wendel.

Profil Nr.	b	t	t_1	d	d_1	h	G
1	23	4		4	5	15	1,15
2	29	4		4		15	1,225
3	18	4		3,5	5	17	0,7
4	19	2		2,5	3,5	17	0,68
5	20	2,5		3,5	4	17	0,85
6	25	4		4,5	5,5	17	1,25
7	27	4		4,5	5,5	17	1,40
8	22	3,5		3	3,5	18	1,12
9	20	3,5		4,5	5	19	1,15
10	17	4		4	5	21	1,16
11	24	4		5	5,5	22	1,42
12	20	4		4,5	5	25	1,20
13	25	4		4	5	25	1,55
14	27	4		4,5	5,5	25	1,62
15	30	4		4,5	5	26	1,78
16	25	4,5		4,5	5	30	1,70
17	30	7		6	8	34	3,05
18	33	7		6,5	9	35	3,05
19	35	4		4,5	6,5	35	2,35
20	38	4		4		40	2,31
21	40	5		5		45	3,06
22	45	6,5		6,5		45	4,18
23	45	6,5		6,5		50	4,50

Profil Nr.	b	t	t_1	d	d_1	h	G
24	50	7		7		55	5,35
25	90	10,5		10,5		55	10,75
26	60	8		8		60	7,00
27	70	9		9		70	9,20
28	55	6		5	7	30	3,67
29	28	5		5		35	2,20
30	80	6,5		9	10,5	45	6,50
31	52		8,5	7	8,5	56	5,75
32	125	10		8	13	60	13,55
33	75	6	9	6	9	65	7,50
34	80	7,5	10,5	7	10,5	75	10,25
35	152,6	9,5		9,5		76,3	16,70
36	91,5	7	12	7	10,5	85	11,35
37	100	8,5	14,5	9	12	100	15,75
38	150	10		12	20	100	23,27
39	90		11	7,5	10	130	15,30
40	100		11	9	10	145	18,80
41	100		12	9	12	160	21,66

Tabelle VIII über die Höhen, Querschnitte, Gewichte, Trägheits- und Widerstandsmomente der Eisenbahnschienen.

	Höhe der Schienen in Millimetern	Flächeninhalt in Quadratzentimeter	Gewicht des lauf. Meters in Kilogrammen	Trägheitsmoment, bezogen auf Zentimeter für die horizontale Schwerachse	Trägheitsmoment, bezogen auf Zentimeter für die vertikale Schwerachse	Widerstandsmoment, bezogen auf Zentimeter für die horizontale Schwerachse
	130,8	42,75	32,66	919,00	149,73	140,4
	118,0	39,00	29,80	691,59	140,38	117,5
	104,6	34,20	26,10	470,26	121,66	90
	Gekuppelte Schienen					
	zu 130,8	85,5	65,31	5521,5	299,47	422,2
	„ 118,0	78,8	59,60	4083,6	280,75	346,9
	„ 104,6	68,4	52,20	2812,2	243,32	268,46

§ 9.

Tragfähigkeit und Durchbiegung der Freiträger.

Der Balken sei an einem Ende A frei und am anderen Ende B in horizontaler Lage umwandelbar befestigt, eingespannt oder eingemauert, dabei überall von gleichem Querschnitt (wie solches namentlich bei Freiträgern aus Walzeisen oder Holz anzutreffen ist).

I. Eine Einzellast T wirke am freien Ende vertikal abwärts.

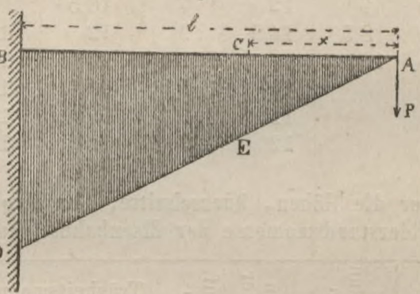
Für einen Querschnitt C, Fig. 53, in der Entfernung x vom freien Ende A ist das äussere Kraftmoment

(82) $$\mathrm{M\,m_C = P\,x}$$

wirksam. Dasselbe wächst demnach mit x, erhält also seinen Maximalwert im befestigten Querschnitt B; für letzteren, den gefährlichen Querschnitt, hat man:

(83) $$\mathrm{M\,m_B = P\,l}.$$

Fig. 53.



Zur Bestimmung der Querschnittsdimensionen folgt mithin bei gegebener Belastung P nach Formel (30) allgemein:

(84) $$\mathrm{W = \frac{P\,l}{S}},$$ $\mathrm{Mm = W\,S}$ (30)

sowie zur Feststellung der Tragfähigkeit:

(85) $$\mathrm{P = \frac{W\,S}{l}}.$$

Aus Formel (82 und 83) ergibt sich noch:

$$\mathrm{M\,m_C : M\,m_B = x : l}$$

d. h.: Trägt man auf einer zur Kraftrichtung parallelen Geraden B D nach irgend einem Massstabe das Maximalmoment Pl = BD ab und verbindet D mit A, so gibt die zu BD parallele, durch AD abgeschnittene Strecke CE konstruktiv das in C herrschende äussere Kraftmoment an, da die die Endpunkte der Momentenstrecken verbindende Kurve, die sog. **Momentenkurve**, für vorliegenden Fall nach obiger Beziehung eine gerade Linie AD sein muss.

Die Figur ABD, hier ein Dreieck, heisst Momentenfläche.

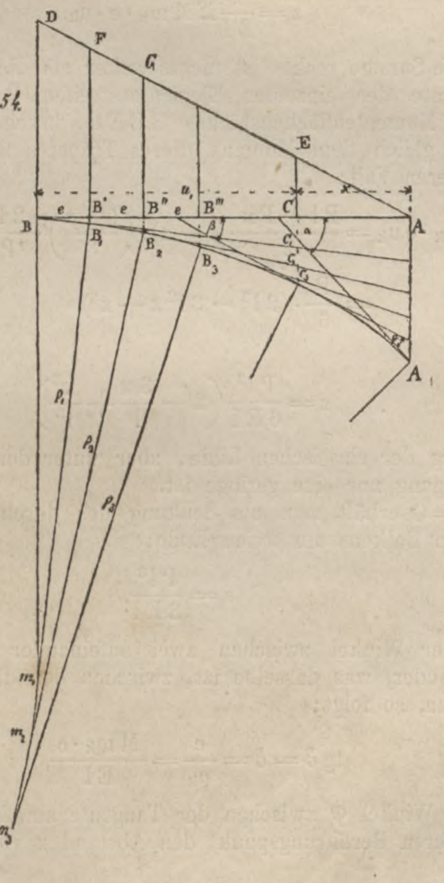
Aus Formel (27 und 30) folgt:

(86) $$\varrho \cdot \mathrm{M\,m = E\,I}.$$

Diese Gleichung besagt nun, dass das Produkt aus Krümmungshalbmesser und Kraftmoment für alle Punkte der elastischen Linie konstant, demnach für das freie Ende A, für welches $M m = 0$ wird, $\varrho = \infty$, der Balken also hier geradlinig ist, während für das befestigte Ende, für welches $M m$ den Maximalwert erreicht, ϱ den Minimalwert hat, der Balken mithin an dieser Stelle am stärksten gekrümmt ist. Vom befestigten nach dem freien Ende hin wächst folglich der Krümmungsradius von einem bestimmten endlichen Werte an stetig bis ins Unendliche.

Behufs Feststellung der Durchbiegung an irgend einer Stelle C in dem Abstande x vom freien Ende A teilen wir die elastische Linie $B A_1$, Fig. 54, in gleiche, unendlich kleine Strecken $e = B B_1 = B_1 B_2 = B_2 B_3 = \ldots$ und ziehen die bezüglichen Krümmungshalbmesser $B_1 m_1$, $B_2 m_2$, $B_3 m_3 \ldots$, sowie die entsprechenden Tangenten $B_1 C_1$, $B_2 C_2$, $B_3 C_3 \ldots$, welche die Einsenkung z in C in die Teile $C C_1$, $C_1 C_2$, $C_2 C_3 \ldots$ zerlegen. Wegen der Kleinheit der Elemente $B B_1$, $B_1 B_2$, $B_2 B_3 \ldots$ fallen letztere in die Richtung der bezüglichen Tangenten $B_1 C_1$, $B_2 C_2$, $B_3 C_3 \ldots$, und man kann setzen:

Fig. 54.



$\triangle C B C_1 \backsim \triangle B m_1 B_1$, $\triangle C_1 B_1 C_2 \backsim \triangle B_1 m_2 B_2$ u. s. w.,

daher:

$$C C_1 = \frac{B B_1 \cdot B C_1}{\varrho_1} = \frac{e \cdot B C_1}{\varrho_1},$$

$$C_1 C_2 = \frac{B_1 B_2 \cdot B_1 C_2}{\varrho_2} = \frac{e \cdot B_1 C_2}{\varrho_2} \text{ u. s. w.}$$

Eine geringe Biegung des Balkens vorausgesetzt, können wir die Projektionen $B B'$, $B' B''$ . . . der einzelnen Elemente $B B_1$, $B_1 B_2$ . . . der elastischen Linie auf die Horizontale $B A$ diesen Elementen gleich, sowie $B C_1 = B C$, $B_1 C_2 = B' C$ . . . setzen.

Bezeichnet man nun den Abstand $B C$, $B' C$ . . . des betrachteten Punktes C von den Punkten B, B' . . . allgemein mit u_k und das in letzteren Punkten herrschende äussere Kraftmoment mit $M m_k$, so folgt, wenn man die Summe von $C C_1$, $C_1 C_2$ . . . bildet und für ϱ den Wert aus Formel (86) einsetzt, für die Senkung an der Balkenstelle C allgemein:

$$z = \frac{1}{E I} \Sigma M m_k \cdot e \cdot u_k. \tag{87}$$

Aber die Summe rechts ist nichts weiter als die Summe der statischen Momente der einzelnen Elementarstreifen $B B' F D$, $B' B'' G F$ u. s. w. des Momentenflächenstückes $B C E D$, bezogen auf die Achse $E C$, mithin gleich dem Moment dieses Trapezes für dieselbe Achse, also für unseren Fall:

$$\Sigma M m_k \cdot e u_k = \frac{P l + P x}{2} \cdot (l - x) \cdot \left(\frac{l - x}{3}\right) \cdot \frac{2 P l + P x}{P l + P x}$$
$$= \frac{P}{6} \cdot (2 l^3 - 3 l^2 x + x^3)$$

und also:

$$z = \frac{P l^3}{6 E I}\left(2 - \frac{3 x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right) \tag{88}$$

die Gleichung der elastischen Linie, aber unter der Bedingung, dass die Durchbiegung nur eine geringe ist.

Für $x = 0$ erhält man als Senkung des durch die Einzellast P beanspruchten Balkens am freien Ende:

$$s = \frac{P l^3}{3 E I}. \tag{89}$$

Ist δ der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Krümmungsradien oder, was dasselbe ist, zwischen den diesen entsprechenden Tangenten, so folgt:

$$\operatorname{tg} \delta = \delta = \frac{e}{\varrho_k} = \frac{M m_k \cdot e}{E I},$$

und also der Winkel φ zwischen der Tangente am freien Ende A und derjenigen, deren Berührungspunkt den Abstand x von A hat:

$$\varphi = \Sigma\,\delta = \frac{1}{E\,I}\,\Sigma\,M\,m \cdot e.$$

Letztere Summe ist aber gleich dem Teil A C E der Momentenfläche A B D, demnach $\Sigma\,M\,m \cdot e = \frac{P\,x}{2} \cdot x = \frac{P\,x^2}{2}$ und daher:

(90) $$\varphi = \frac{P\,x^2}{2\,E\,I}.$$

Für $x = l$ erhält man die totale Neigung:

(91) $$\alpha = \frac{P\,l^2}{2\,E\,I}$$

und nun für den Winkel zwischen der Tangente im betrachteten Punkte C und der Horizontalen in B:

(92) $$\beta = \frac{P\,(l^2 - x^2)}{2\,E\,I}.$$

II. Eine Last Q sei gleichförmig über die ganze Länge l verteilt.

$P = x \cdot \frac{q}{2}$

Ist q die Belastung auf die Längeneinheit, so ist q x die Belastung auf die Länge x und also das äussere Kraftmoment für den bezüglichen Querschnitt C, Fig. 55:

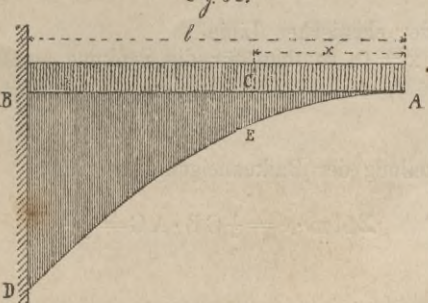
(82) $Mm_c = Px$
[illegible]
$P = \frac{qx}{2}$ … $Mm_c = \frac{qx^2}{2}$

(93) $q\,l = Q$ $$M\,m_C = \frac{q\,x^2}{2} = \frac{Q\,x^2}{2\,l}.$$

Dies Moment erreicht seinen Maximalwert auch an der Einklemmungsstelle B, und für diesen Querschnitt ist:

(94) $$\frac{Ql^2}{2l} = M\,m_B = \frac{Q\,l}{2}.$$

Fig. 55.



Die Abmessungen des gefährlichen Querschnitts B bestimmen sich nun aus dem Widerstandsmoment:

$$(95) \qquad W = \frac{Q\,l}{2\,S},$$

und die Tragfähigkeit ist gegeben durch:

$$(96) \qquad Q = \frac{2\,W\,S}{l}.$$

Die gleichförmig verteilte Last Q kann demnach unter sonst gleichen Verhältnissen doppelt so gross sein als die Einzellast P am freien Ende A des Trägers.

Aus Formel (93 und 94) folgt noch:

$$M\,m_C : M\,m_B = x^2 : l^2,$$

welche Beziehung besagt, dass die Momentenkurve in diesem Falle eine Parabel darstellt, deren Scheitel im freien Ende A liegt und deren Achse die Vertikale durch A ist.

Die Momentenfläche ist hier die Ergänzungsfläche A B D der Parabelfläche.

Was die Durchbiegung des Trägers anbetrifft, so beachte man zunächst:

Ist P a das Moment einer Kraft P, bezogen auf eine durch A gehende Achse, so ist $P(a - x) = P\,a - P\,x$ das Moment derselben Kraft, bezogen auf eine durch C gehende parallele Achse, wenn C zwischen A und dem Angriffspunkt der Kraft P liegt und um x von A entfernt ist.

Dies nun auf die Momentenfläche B C E D angewandt, gibt:

$$\Sigma\,M\,m_k \cdot e \cdot u_k = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q\,l}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4}\,l - \frac{1}{3} \cdot \frac{Q\,x^2}{2\,l} \cdot x \cdot \frac{3}{4}\,x$$

$$- \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{Q\,l}{2} \cdot l - \frac{1}{3} \cdot \frac{Q\,x^2}{2\,l} \cdot x\right) x = \frac{Q\,l^3}{24}\left(3 - \frac{4\,x}{l} + \frac{x^4}{l^4}\right).$$

Demnach nach Formel (87):

$$(97) \qquad z = \frac{Q\,l^3}{24\,E\,I}\left(3 - \frac{4\,x}{l} + \frac{x^4}{l^4}\right)$$

die Gleichung der elastischen Linie.

Setzt man $x = 0$, so folgt für die Senkung am freien Ende:

$$(98) \qquad s = \frac{Q\,l^3}{8\,E\,I}.$$

Zur Feststellung der Balkenneigung hat man:

$$\Sigma\,M\,m \cdot e = \tfrac{1}{3}\,C\,E \cdot A\,C = \tfrac{1}{3}\,\frac{Q\,x^3}{2\,l}$$

und also:

$$(99) \qquad \varphi = \frac{Q\,x^3}{6\,E\,I \cdot l}.$$

Daraus ergibt sich die Gesamtneigung für $x = l$:

(100) $$\alpha = \frac{Q\,l^2}{6\,E\,I}$$

und folglich der Winkel zwischen der Tangente in C und B:

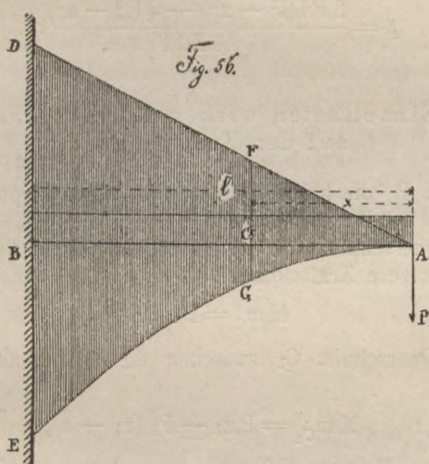
(101) $$\beta = \frac{Q\,(l^3 - x^3)}{6\,E\,I \cdot l}.$$

III. Eine Einzellast P wirke am freien Ende vertikal abwärts, und eine Last Q sei gleichförmig über die ganze Länge l verteilt.

In diesem Falle ist das Totalmoment für einen Querschnitt C, Fig. 56, in der Entfernung x vom freien Ende gleich der Summe der den einzelnen Belastungen entsprechenden Momente für diesen Querschnitt, also:

(102) $$M\,m_C = P\,x + \frac{Q\,x^2}{2\,l},$$

wobei Q auch das Eigengewicht des Trägers bezeichnen kann.



Für x = l erhält man im Befestigungspunkt das Maximalmoment:

(103) $$M\,m_B = \left(P + \frac{Q}{2}\right) l$$

und hieraus folgt:

(104) $$W = \left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{l}{S}.$$

Behufs graphischer Bestimmung des äusseren Kraftmoments für irgend einen Querschnitt konstruiert man nach Obigem für beide Belastungen die Momentenkurve A D und A E; alsdann gibt die zu D E parallele Strecke F G das in C herrschende Moment an.

Da sich die Durchbiegung aus den beiden Teilen für jede einzelne Belastungsart zusammensetzen muss, so folgt als Gleichung der elastischen Linie:

$$(105)\qquad z = \frac{P\,l^3}{6\,E\,I}\left(2 - \frac{3\,x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right) + \frac{Q\,l^3}{24\,E\,I}\left(3 - \frac{4\,x}{l} + \frac{x^4}{l^4}\right),$$

demnach die Durchbiegung am freien Ende:

$$(106)\qquad s = \frac{l^3}{E\,I}\left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right).$$

Für die Neigung ergibt sich:

$$(107)\qquad \varphi = \frac{x^2}{2\,E\,I}\left(P + \frac{Q\,x}{3\,l}\right),$$

daher die Gesamtneigung:

$$(108)\qquad \alpha = \frac{l^2}{2\,E\,I}\left(P + \frac{Q}{3}\right)$$

und demnach:

$$(109)\qquad \beta = \frac{3\,P\,l\,(l^2 - x^2) + Q\,(l^3 - x^3)}{6\,E\,I\,l}.$$

IV. Mehrere Einzellasten wirken in vertikaler Richtung auf den Freiträger.

Seien P und P_1 die beiden Kräfte, deren Angriffspunkte A und A_1 die Entfernung a voneinander haben.

Für einen Querschnitt C zwischen A und A_1 in der Entfernung x von A ist das äussere Kraftmoment:

$$(110)\qquad M\,m_C = P\,x.$$

In einem Querschnitt C_1 zwischen A_1 und B dagegen ist das Moment:

$$(111)\qquad M\,m_{C_1} = P\,x_1 \pm P_1\,(x_1 - a),$$

wobei das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die beiden Kräfte gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben.

Für den ersteren Fall wächst das resultierende Moment mit x, Fig. 57, erreicht demnach den Maximalwert in B; die Tragfähigkeit des Balkens ergibt sich mithin aus:

$$(112)\qquad M\,m_B = P\,l + P_1\,(l - a),$$

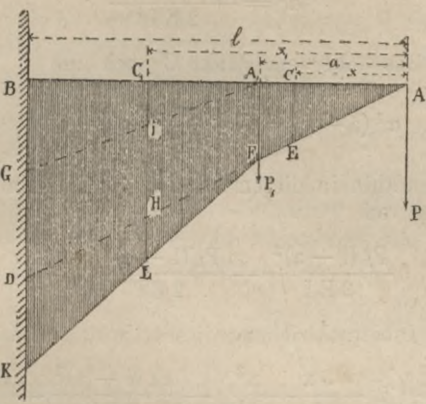
woraus:

$$(113)\qquad W = \frac{P\,l + P_1\,(l - a)}{S}.$$

Macht man nun $BD = P\,l$, so ist bekanntlich Dreieck ABD die der Kraft P entsprechende Momentenfläche und also CE das Moment in C, sowie A_1F dasjenige in A_1.

Fig. 57.

$AA_1 = a$



Ist ferner $BG = P_1(l - a)$, so ist das Dreieck A_1BG die der Kraft P_1 zugehörige Momentenfläche, daher $C_1H + C_1I$ das Moment in C_1, $BD + BG$ das in B.

Zum bequemen Abgreifen mache man $DK = BG$ und verbinde K mit F, dann ist $C_1I = HL$, also auch C_1L das Moment in C_1, sowie BK das Moment in B, die gebrochene Linie AFK daher die resultierende Momentenkurve und ABKF die diesem Falle entsprechende resultierende Momentenfläche.

Die Gleichung der elastischen Linie, sowie die Grösse der Neigung lassen sich aus den bereits in I gefundenen Formeln wie folgt aufstellen.

Es ist allgemein:

a) für die Strecke A_1B:

$$(114)\quad z_1 = \frac{Pl^3}{6EI}\left\{2 - \frac{3x_1}{l} + \frac{x_1^3}{l^3}\right\} + \frac{P_1(l-a)^3}{6EI}\left\{2 - \frac{3(x_1-a)}{l-a} + \frac{(x_1-a)^3}{(l-a)^3}\right\}$$

und:

$$(115)\quad \beta_1 = \frac{P(l^2 - x_1^2) + P_1\left\{(l-a)^2 - (x_1-a)^2\right\}}{2EI},$$

demnach für Punkt A_1 selbst, für welchen $x_1 = a$ ist:

$$(116)\quad s_1 = \frac{Pl^3}{6EI}\left(2 - \frac{3a}{l} + \frac{a^3}{l^3}\right) + \frac{P_1(l-a)^3}{3EI},$$

sowie:

$$(117)\quad \alpha_1 = \frac{P(l^2 - a^2) + P_1(l-a)^2}{2EI}.$$

b) Für die Strecke $A A_1$:

Hier berücksichtige man, dass für diese Strecke in allen Punkten die in A_1 auftretende Neigung

$$\alpha^1 = \frac{P_1 (l - a)^2}{2 E I}$$

vorhanden ist, dass daher ein Punkt C noch um

$$\alpha^1 (a - x) = \frac{P_1 (l - a)^2}{2 E I} (a - x)$$

unter A_1 liegt, mithin in diesem Punkte durch alleinigen Einfluss von P_1 eine Senkung von

$$\frac{P_1 (l - a)^3}{3 E I} + \frac{P_1 (l - a)^2}{2 E I} (a - x)$$

auftritt. Unter Inbetrachtziehung dieses Umstandes ist nun:

(118) $$z = \frac{P l^3}{6 E I}\left(2 - \frac{3 x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right) + \frac{P_1 (l - a)^3}{3 E I} + \frac{P_1 (l - a)^2 (a - x)}{2 E I}$$

und:

(119) $$\beta = \frac{P (l^2 - x^2) + P_1 (l - a)^2}{2 E I},$$

daher für A, für welchen Punkt $x = 0$ ist:

(120) $$s = \frac{2 P l^3 + P_1 (l - a)^2 (2 l + a)}{6 E I}$$

und:

(121) $$\alpha = \frac{P l^2 + P_1 (l - a)^2}{2 E I}.$$

Für beliebig viele Einzellasten lässt sich in derselben Weise überall Senkung und Neigung feststellen.

Ist noch eine gleichförmig verteilte Last Q vorhanden, so sind hierfür die Formeln aus II wie in III in Anwendung zu bringen.

Ist die Belastungsrichtung in A_1 entgegengesetzt der in A, so bleibt zunächst für die Strecke $A A_1$ die Formel (110) bestehen, dagegen ist in Formel (111), wie schon bemerkt, das untere Zeichen zu nehmen, und man hat also allgemein für einen Querschnitt C_1 zwischen A_1 und der Befestigungsstelle B:

(122) $$M m_{C_1} = P x_1 - P_1 (x_1 - a) = (P - P_1) x_1 + P_1 a.$$

Dieses Moment kann nun je nach dem Verhältnis von $P x_1$ zu $P (x_1 - a)$ positiv, Null und negativ sein.

a) Es ist $M m_{C_1}$ so lange positiv, als $P x_1 > P_1 (x_1 - a)$ oder $\frac{P}{P_1} > 1 - \frac{a}{x_1}$ ist. Für die Befestigungsstelle B ist x_1 am grössten, also

$\frac{a}{x_1}$ am kleinsten; daher $M\,m_{C_1}$ so lange positiv, als $\frac{P}{P_1} > 1 - \frac{a}{l}$ ist.

Dabei kann nun noch $P \gtreqless P_1$ sein.

Für $P > P_1$ wächst nach Formel (122) das Moment mit x_1, erreicht also in B den grössten Wert:

$$M\,m_B = (P - P_1)\,l + P_1\,a,$$

und dies Moment ist dann bei Beurteilung der Tragfähigkeit zu Grunde zu legen.

Für $P = P_1$ folgt, dass in allen Querschnitten zwischen A_1 und B dasselbe äussere Kraftmoment herrscht, diese Querschnitte also alle gleich gefährlich sind, und es hat das Maximalmoment den Wert:

$$M\,m_{A_1} = M\,m_B = P\,a.$$

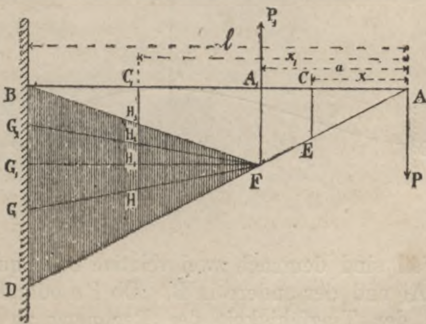
Das Auftreten eines Kräftepaares zeigt sich z. B. bei den Achsen der Eisenbahnwagen; dabei sind nämlich der Druck der Feder auf die Achsbüchse und die Reaktion der Schiene zwei gleiche und entgegengesetzt wirkende Kräfte, und die Achse ist anzusehen als ein in der Mitte horizontal eingespannter Balken, da ja die Belastung der Achse beiderseits symmetrisch angeordnet ist.

Ist endlich $P < P_1$, so nimmt das Moment von A_1 aus allmählich ab, der Bruchquerschnitt liegt mithin in A_1; bei Berechnung der Tragfähigkeit ist also auch letzteres Moment in Betracht zu ziehen.

Ein anschauliches Bild von der Veränderlichkeit der Momente erhält man für diesen Fall a, wenn man wie in I die den Momenten der Kräfte P und P_1 entsprechende Momentenkurve A D, sowie bezw. F G, F G_1 und F G_2, Fig. 58, konstruiert, wobei F G_1 für $P = P_1$ parallel A B ist.

Es ist nun bezw. C_1 H, C_1 H_1 und C_1 H_2 das resultierende Kraftmoment in C_1; die resultierende Momentenfläche liegt also ganz unter A B.

Fig. 58.



b) Das Moment $M m_{C_1}$ wird Null, wenn $\frac{P}{P_1} = 1 - \frac{a}{x_1}$ ist.

An dieser Stelle herrscht demnach keine Spannung, ebenso wie am freien Ende A; dieser Punkt ist allgemein bestimmt durch:

(123) $$x_0 = \frac{P_1}{P_1 - P} a.$$

Für alle Querschnitte nun zwischen diesem Punkte und A_1 ist noch immer das Moment $M m_{C_1}$ positiv.

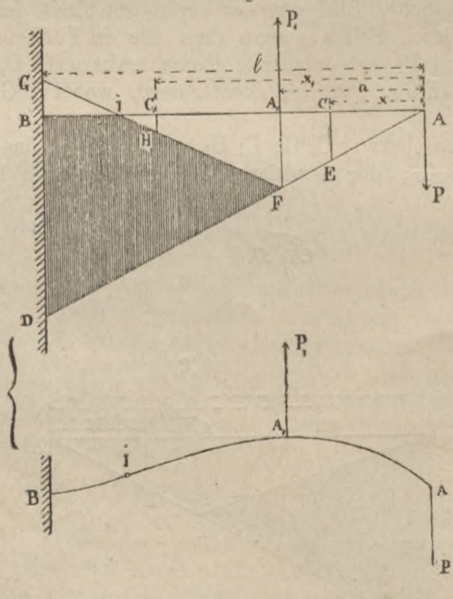
Ergibt sich hierbei $x_0 = l$, so ist wiederum in A_1 der Bruchquerschnitt, die gebrochene A F B, Fig. 58, ist dann die resultierende Momentenkurve und also $C_1 H_3$ das resultierende Moment in C_1.

Tritt aber die Bedingung in Formel (123) schon für $x_0 < l$ ein, so findet man von hier an:

c) Das Moment $M m_{C_1}$ wird negativ.

Bezeichnet man diese Stelle mit I, Fig. 59, so ist auf der Strecke A I das resultierende Kraftmoment stets positiv und das Maximum, in A_1 gelegen, hat den Wert $P \cdot a$. Zwischen I und B ist aber das resultierende Moment negativ und erreicht in B seinen grössten Wert $P l - P_1 (l - a)$.

Fig. 59.



Für diesen Fall sind demnach zwei relative Bruchquerschnitte vorhanden, einer in A_1 und der andere in B. Ob $P a$ oder $P l - P_1 (l - a)$ bei Untersuchung der Tragfähigkeit der Rechnung zu Grunde gelegt werden soll, dies hängt jedoch davon ab, welches von beiden Momenten das absolut grössere ist.

Die resultierende Momentenkurve ist A F G und das Moment in C_1 gegeben durch die Strecke C_1 H.

Was die Biegungsverhältnisse anbetrifft, so ergeben sich die bezüglichen Werte für Senkung und Neigung, wenn man in den Formeln 114 bis 121 das P_1 negativ einführt. Dabei ist noch zu bemerken:

Für den Fall a ist die elastische Linie nach derselben Richtung, nämlich überall konkav nach unten gekrümmt, wie wenn P_1 die Richtung von P hat. Ist hier $P = P_1$, so ist die Krümmung des Balkens zwischen A_1 und B konstant wie das äussere Kraftmoment für diesen Spezialfall, und zwar bildet dann die elastische Linie einen Kreisbogen, dessen Halbmesser nach der Formel (86) bestimmt ist durch:

$$\varrho = \frac{E\,I}{P\,a}.$$

Dabei erhält man für die Strecke A_1 B als Gleichung der elastischen Linie:

(124) $$z_1 = \frac{P\,a}{2\,E\,I}(l - x_1)^2$$

und die Neigung:

(125) $$\beta_1 = \frac{P\,a}{E\,I}(l - x_1);$$

also für Punkt A_1 insbesondere:

(126) $$s_1 = \frac{P\,a}{2\,E\,I}(l - a)^2$$

und:

(127) $$\alpha_1 = \frac{P\,a}{E\,I}(l - a).$$

Ebenso folgt für die Strecke A A_1 als Gleichung der elastischen Linie:

(128) $$z = \frac{P}{6\,E\,I}\left\{3\,a\,(l - x)^2 - (a - x)^3\right\}$$

und die Neigung:

(129) $$\beta = \frac{P}{2\,E\,I}\left\{l^2 - x^2 - (l - a)^2\right\};$$

daher für Punkt A die Senkung:

(130) $$s = \frac{P\,a}{6\,E\,I}(3\,l^2 - a^2)$$

und die Neigung:

(131) $$\alpha = \frac{P\,a}{2\,E\,I}(2\,l - a).$$

Im Falle b hat die elastische Linie nur für den speziellen Wert $x_0 = l$ ebenfalls durchgehends eine konkave Krümmung nach unten hin.

Aber für $x_0 < l$ besitzt der Balken nur zwischen A und I, Fig. 59, eine Krümmung wie im Falle a, wobei bis A_1 die Krümmung zunächst wächst, dann aber von diesem Punkte an abnimmt bis zu Null in I, wo eben $\varrho = \infty$, die elastische Linie also wie in A geradlinig ist.

Von I aus tritt nun der Fall c ein, die elastische Linie ändert hier ihre Krümmung und wird konkav nach oben mit wachsender Krümmung bis B. Den Punkt I nennt man deshalb auch **Wende-** oder **Inflexionspunkt.**

Anmerkung. Hat bei den behandelten Inanspruchnahmen I bis IV die elastische Linie im festen Punkte B bereits eine kleine Neigung α_0 beim Einspannen erhalten, so ist im Ausdruck für die Senkung y noch die Vertikalprojektion eines Tangentenstückes $(l - x)$ d. h. $\alpha_0 (l - x)$ zu addieren. Auch ist dann der Neigung β und α noch der Neigungswinkel α_0 hinzuzufügen.

Bezüglich der totalen Senkung sei noch bemerkt, dass in der Praxis in der Regel das relative Biegungsverhältnis $\frac{s}{l} = \frac{1}{500}$ zulässig ist.

Beispiele.

1. Welche Höhe muss man einem an einem Ende horizontal eingemauerten Balken aus Tannenholz geben, welcher am anderen Ende 750 kg tragen soll, wenn seine Länge 1,75 m und seine Breite 0,2 m ist?

Aus

$$P\,l = \frac{b\,h^2}{6} \cdot 0{,}44$$

folgt:

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 750 \cdot 1750}{0{,}44 \cdot 200}} = 299 \text{ mm}.$$

2. Derselbe Balken soll eine gleichmässig über seine ganze Länge verteilte Belastung erhalten.

Wie gross kann diese sein?

Dieselbe wird doppelt so gross, also gleich 1500 kg.

3. Welchen Durchmesser muss eine schmiedeeiserne runde Stange von 3 m Länge erhalten, wenn solche an einem Ende befestigt und am anderen Ende mit 1600 kg belastet ist und wenn auf das Eigengewicht der Stange selbst Rücksicht genommen wird?

Das Eigengewicht ist:

$$G = \frac{\pi\,d^2}{4} \cdot 3000 \cdot 0{,}00000778 = 0{,}0183312\, d^2;$$

demnach:

$$(1600 + 0{,}0183312\,d^2)\,3000 = \frac{\pi\,d^3}{32} \cdot 7,$$

woraus:

$$d = 205 \text{ mm}.$$

4. Ein Balken von konstantem rechteckigem Querschnitt, dessen Breite 30 mm und Höhe 45 mm misst, ist an einem Ende eingemauert und am anderen Ende mit 100 kg belastet.

Welches sind die Spannungen und Pressungen in der Entfernung 200, 400 und 600 mm vom Angriffspunkt der Last?

Es ist:

$$S = \frac{P\,x}{W} \text{ und } S_1 = \frac{P\,x}{W_1}.$$

Da aber $W = W_1$ ist, so folgt $S = S_1$; demnach ist Spannung und Pressung allgemein bestimmt durch:

$$S = \frac{P\,x}{W}.$$

Es ist nun, da $W = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{30 \cdot 45^2}{2} = 10125$ ist:

für den 1. Querschnitt: $S' = \frac{100 \cdot 200}{10125} = 1{,}975$ kg,

„ „ 2. „ $S'' = \frac{100 \cdot 400}{10125} = 3{,}950$ „

„ „ 3. „ $S''' = \frac{100 \cdot 600}{10125} = 5{,}925$ „

5. Ein gewalzter Doppel-T-Träger in horizontaler Lage und von 1,5 m Länge ist am freien Ende durch eine Last von 2000 kg beansprucht, welche parallel der Mittelrippe wirkt.

Welches Profil ist anzuwenden, und wie gross ist die Senkung am freien Ende?

Das hier erforderliche Widerstandsmoment ist, bezogen auf Zentimeter:

$$W = \frac{2000 \cdot 150}{700} = 428{,}57.$$

Die Profile Tab. Va Nr. 22a, Vb Nr. 25 und Vc Bl. XVIII Nr. 17a genügen also vollständig.

Die Senkung ergibt sich aus Formel (89):

$$s = \frac{P\,l^3}{3\,E\,I} = \frac{2000 \cdot 150^3}{3 \cdot 2000000 \cdot 5363} = 0{,}2 \text{ cm}.$$

6. Welches ist die Tragfähigkeit eines gleichmässig belasteten gusseisernen Freiträgers von einfach T förmigem Querschnitt bei 1 m Länge, dessen Höhe 300 mm, Flantschbreite 120 mm, sowie Flantsch und Stegdicke 20 mm ist, und wie gross ist die totale Senkung und Neigung?

Die Entfernung x der neutralen Achse von der äusseren Flantschkante ist:

$$x = \frac{120 \cdot 20 \cdot 10 + 280 \cdot 20\,(140 + 20)}{120 \cdot 20 + 280 \cdot 20} = 115 \text{ mm}$$

und also das Trägheitsmoment nach Formel (65), bezogen auf Millimeter:

$$I = \frac{120 \cdot 115^3 + 20 \cdot 185^3 - 100 \cdot 95^3}{3} = 74466666{,}6.$$

Liegt der Träger so, dass die Flantsche oben, also auf der gezogenen Seite ist, so ist $a = 115$ mm und $a_1 = 185$ mm, mithin $\frac{a}{a_1} = \frac{115}{185} > \frac{1}{2}$; es ist daher zu nehmen:

$$W = \frac{74466666{,}6}{115} = 647536$$

und $S = 2{,}5$ kg; mithin:

$$Q = \frac{2 \cdot 647536 \cdot 2{,}5}{1000} = 3237{,}68 \text{ kg}.$$

Die Senkung erhält man aus Formel (98) zu:

$$s = W \frac{Q\,l^3}{8\,E\,I} = \frac{3237{,}68 \cdot 1000^3}{8 \cdot 10000 \cdot 74466666{,}6} = 0{,}5 \text{ mm},$$

und die Gesamtneigung gibt Formel (100) zu:

$$\alpha = \frac{Q\,l^2}{6\,E\,I} = \frac{3237{,}68 \cdot 1000^2}{6 \cdot 10000 \cdot 74466666{,}6} = 0{,}00000007.$$

7. Ein Freiträger aus Gusseisen von 1 m Länge, dessen einfach T förmiger Querschnitt eine Höhe gleich 12 b, eine Flantschbreite gleich 8 b, sowie eine Flantsch- und Rippendicke gleich b hat, ist mit 3000 kg gleichmässig belastet, welche Last parallel der Mittelrippe wirkt.

Welches sind die Dimensionen des Querschnitts?

Ist x die Entfernung der Schwerachse von der unteren Rippenkante, so folgt:

$$x = \frac{12 \cdot b^2 \cdot 6\,b + 7\,b^2\,(11\,b + 0{,}5\,b)}{12\,b^2 + 7\,b^2} = 8{,}026\text{ b}.$$

Nehmen wir angenähert:

$$x = 8\,b,$$

so ist das Widerstandsmoment für die Schwerachse nach Formel (70):

$$W = \frac{8\,b\,(4\,b)^3 + b\,(8\,b^3) - 7\,b\,(3\,b)^3}{3 \cdot 4\,b} = 69{,}583\,b^3.$$

Hier ist nun $S = 2{,}5$ kg auf den Quadratmillimeter zu nehmen; daher:

$$\frac{3000 \cdot 1000}{2} = 69{,}583\,b^3 \cdot 2{,}5;$$

also:

$$b = 21 \text{ mm}$$

und demnach:

die Trägerhöhe: $12 \cdot 21 = 252$ mm,
die Flantschbreite: $8 \cdot 21 = 168$ „

8. Vier Balken aus Eichenholz, welche an einem Ende horizontal eingemauert sind, sollen als Auslager zu einem Balkon dienen, dessen Boden von Granitplatten von 130 mm Dicke gebildet wird. Die Länge der Balken ist 2 m, und der Abstand vom ersten bis zum letzten, d. h. die Breite des Balkons sei 3 m.

Welches sind die Abmessungen des Balkenquerschnittes, wenn sich die Breite zur Höhe wie 1 : 3 verhält und der Balkon am äussersten Ende eine Last von 350 kg zu tragen im stande ist?

Das Gewicht der Platten ist:

$$G = 130 \cdot 2000 \cdot 3000 \cdot 0{,}00000275 = 2145 \text{ kg}.$$

Es ist nun, wenn noch das Eigengewicht jeden Balkens berücksichtigt wird:

$$\frac{350}{4} \cdot 2000 + \frac{1}{2}\left(\frac{2145}{4} + \frac{h^2}{3} \cdot 2000 \cdot 0{,}000000735\right) \cdot 2000 = \frac{h^3}{18} \cdot 0{,}66,$$

oder:

$$0{,}000037\,h^3 - 0{,}00049\,h^2 = 711{,}25;$$

daraus:

$$h = 273 \text{ mm}$$

und also:

$$b = 91 \text{ mm}.$$

9. An einem schmiedeeisernen Winkelhebel A B C, welcher um einen Fixpunkt B zu oszillieren hat, soll an einer mit dem Punkte A verbundenen Zugstange A D eine Kraft von 250 kg in normaler Richtung gegen die Mittellinie des Hebelarmes A B zu dem Behufe einwirken, dass sie den im Punkte C wirkenden Widerstand Q überwinde.

Welchem Querschnitt muss der Arm A B erhalten, wenn die Länge von $AB = 500$ mm misst und 10fache Bruchsicherheit für die Konstruktion vorausgesetzt wird?

Es ist, bezogen auf Millimeter:

$$W = \frac{P\,l}{S} = \frac{250 \cdot 500}{\frac{38}{10}} = 32894{,}7.$$

Erhält der Hebelarm einen rechteckigen Querschnitt, wobei $b=\frac{h}{3}$, so folgt demnach:

$$\frac{h^3}{18}=32894{,}7,$$

woraus: $$h=84 \text{ mm}$$

und folglich: $$b=28 \text{ mm}.$$

10. Ein Freiträger AB aus Gusseisen von 2 m Länge sei am Ende A der Einwirkung einer Last $P=800$ kg abwärts und in der Entfernung 0,8 m vom freien Ende einer solchen von $P_1=1500$ kg aufwärts ausgesetzt.

Wo befindet sich das Maximalmoment, und wie gross ist hier das Widerstandsmoment für $S=1{,}5$ kg auf den Quadratmillimeter?

Für den Angriffspunkt A_1 der Last P_1 hat man das Moment:

$$M\,m_{A_1}=800\cdot 0{,}8=640 \text{ kgm},$$

und in der Befestigungsstelle herrscht das Moment:

$$M\,m_B=800\cdot 2-1500\,(2-0{,}8)=-200 \text{ kgm}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also im Punkte A_1, und für diesen ist das Widerstandsmoment, bezogen auf Millimeter:

$$W=\frac{640000}{1{,}5}=426666{,}6.$$

Der hier auftretende Inflexionspunkt ist bestimmt durch:

$$x=\frac{1500}{1500-800}\cdot 0{,}8=1{,}714 \text{ m}$$

von A.

11. Es sind die Abmessungen der Tragzapfen am Ende eines rotierenden Körpers zu bestimmen.

Ist P der über den Zapfen gleichmässig verteilte Druck, d der Durchmesser, l die Länge des Zapfens und n die Umdrehungszahl in der Minute, so ist:

$$\frac{P\,l}{2}=W\,S=\frac{\pi d^3}{32}S,$$

woraus:

$$d=\sqrt{\frac{16}{\pi}\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{P}{S}}.$$

Mit Rücksicht auf die Arbeit des Reibungswiderstandes würde ein schwacher Zapfen vorteilhaft sein. Andererseits aber verlangt die Rücksicht auf Abnutzung und das damit verbundene Warmlaufen starke Zapfen, um so den Flächendruck $\frac{P}{l\,d}$ möglichst herabzudrücken.

Diesen sich widersprechenden Bedingungen sucht die Praxis dadurch gerecht zu werden, indem sie das Längenverhältnis unter der Voraussetzung bestimmt, dass der Flächendruck $\frac{P}{l\,d}$ gewisse Erfahrungswerte, die mit der Schnelligkeit der Bewegung abnehmen müssen, nicht überschreitet.

Nach Bach können für kontinuierlich sich drehende Zapfen in nachstellbaren Lagern normaler Maschinen im allgemeinen folgende Zahlen als obere Grenzwerte der zulässigen Pressung $\frac{P}{l\,d}$ auf den Quadratmillimeter angenommen werden:

Gehärteter Gussstahl, auf gehärtetem Gussstahl laufend, bei ganz besonders sorgfältiger Arbeit und Wartung, sowie sachgemässer Oelzuführung bis	1,5 kg.
Gehärteter Gussstahl auf Bronze	0,8 „
Ungehärteter „ „ „	0,5 „
Schmiedeeisen mit glatter und dichter Oberfläche auf Bronze	0,4 „
Schmiedeeisen mit nicht ganz reiner Oberfläche, Gusseisen auf Bronze	0,3 „
Schmiedeeisen mit nicht ganz reiner Oberfläche auf Gusseisen	0,25 „
Schmiedeeisen auf Pockholz bei Wasserschmierung . .	0,25 „

Für nur oszillierende Zapfen liegen die Grenzwerte noch etwas höher.

Die vom Material abhängige Spannung S nehme man im Mittel hier für Schmiedeeisen 5 kg, für Gusseisen 2,5 kg und für Gussstahl 8 kg.

Bei Lagerschalen aus Bronze, Weissmetall oder Pockholz ist nun

a) für Zapfen aus Schmiedeeisen:

$$\text{wenn } n < 150: \frac{l}{d} = 1{,}5 \text{ und also } d = 1{,}24\sqrt{P};$$

$$\text{wenn } n > 150: \frac{l}{d} = 0{,}12\sqrt{n} \text{ und also } d = 0{,}35\sqrt[4]{n}\sqrt{P}.$$

b) Für Zapfen aus Gusseisen:

$$\text{wenn } n < 150: \frac{l}{d} = \frac{4}{3} \text{ und also } d = 1{,}65\sqrt{P}.$$

Bei $n > 200$ werden gusseiserne Zapfen nicht gebraucht, und bis zu dieser Grenze ist letzterer Wert von $\frac{l}{d}$ und d anzuwenden.

c) Für Zapfen aus Gussstahl:

$$\text{wenn } n < 150: \frac{l}{d} = 1{,}78 \text{ und also } d = 1{,}06\sqrt{P};$$

$$\text{wenn } n > 150: \frac{l}{d} = 0{,}15\sqrt{n} \text{ und also } d = 0{,}31\sqrt[4]{n}\sqrt{P}.$$

Ist das Lagermetall Gusseisen und der Zapfen Schmiedeeisen, so nehme man:

$$\text{wenn } n < 150 : \frac{l}{d} = 1{,}75 \text{ und also } d = 1{,}2\sqrt{P}.$$

Für hohle Zapfen hat man, wenn

d_1 der äussere Durchmesser,
d_2 der innere und
d der Durchmesser des gleichbelasteten massiven Zapfens

ist, für dieselbe Sicherheit:

$$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi (d_1^4 - d_2^4)}{32 d_1},$$

daraus:

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}.$$

Aus letzterem Werte ergibt sich folgende Tabelle:

$\frac{d_2}{d_1} =$	0,8;	0,75;	0,7;	0,6;	0,5;	0,4;	0,3;	0,2
$\frac{d_1}{d} =$	1,19;	1,13;	1,10;	1,05;	1,02;	1,01;	1,003;	1,0004

Bei schmiedeeisernen und gusseisernen Tragzapfen, welche nicht dauernd laufen, sondern nur eine gewisse Drehbarkeit haben sollen, ist nur die Festigkeit massgebend und ein kleines Längenverhältnis günstig, sowie eine kleinere Sicherheit statthaft, so dass man bei Schmiedeeisen $S = 7$ und bei Gusseisen $S = 3{,}75$ setzen darf.

Für Stirnzapfen bei Hebeln und Kurbeln, die in Bronze oder Weissmetall laufen, kann man nehmen, wenn

a) der Zapfen aus Schmiedeeisen:

$$\frac{P}{l\,d} = 0{,}5 \text{ kg}, \; S = 4 \text{ kg}, \; \frac{l}{d} = 1{,}25 \text{ und also } d = 1{,}26\sqrt{P};$$

b) der Zapfen aus Gussstahl:

$$\frac{P}{l\,d} = 0{,}6 \text{ kg}, \; S = 6 \text{ kg}, \; \frac{l}{d} = 1{,}4 \text{ und also } d = 1{,}1\sqrt{P}.$$

Soll der Stirnzapfen kugelförmig werden, so gebe man der Kugel eine Dicke gleich 1,5 mal dem Durchmesser des gleich belasteten cylindrischen Stirnzapfens.

Die Doppel-Hebelzapfen sind nach denselben Grundsätzen zu bestimmen, nur ist die Hälfte des Gesamtdruckes P für jeden einzelnen Zapfen einzuführen, so dass zwischen dem Durchmesser d_1 eines solchen Zapfens und dem Durchmesser d eines Stirnzapfens für denselben Druck P die Beziehung herrscht:

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}7\,d.$$

12. Welche Länge und Dicke müssen die gusseisernen Wellenzapfen eines oberschlächtigen Wasserrades erhalten, wenn das Rad samt Welle 20000 kg wiegt und $4\frac{1}{2}$ cbm Wasser hat?

Setzen wir voraus, dass der Schwerpunkt von Welle, Wasser- und Zahnrad sich in der Mitte befindet, so ist die Belastung jedes Zapfens:

$$P = \frac{20000 + 4{,}5 \cdot 1000}{2} = 12250 \text{ kg};$$

demnach nach vorigem Beispiel:

$$d = 1{,}65 \sqrt{12250} = 183 \text{ mm und } l = \tfrac{4}{3} \cdot d = 244 \text{ mm}.$$

13. Für eine aus Gussstahl zu fertigende Eisenbahnwagenachse von 3800 kg Zapfenbelastung seien die Zapfen zu bestimmen.

Die Räder haben 850 mm Durchmesser und der Wagen soll eine Geschwindigkeit von 12 m haben.

Dann ist die Umdrehungszahl der Zapfen:

$$n = \frac{12 \cdot 60}{0{,}85\,\pi} = 270 \text{ nahezu};$$

demnach:

$$d = 0{,}31 \sqrt[4]{n} \sqrt{P} = 31 \sqrt[4]{270} \sqrt{3800} = 77{,}5 \text{ mm},$$

also:

$$l = 0{,}15 \sqrt{n} \cdot d = 0{,}15 \sqrt{270} \cdot 77{,}5 = 191 \text{ mm}.$$

14. Der Haken eines mit 40 Zentner oder 2000 kg belasteten Flaschenzuges steckt in einem schmiedeeisernen Querhaupt, dessen Zapfen zu berechnen ist.

Jeder der beiden Zapfen ist mit 1000 kg belastet. Wählt man nun das Längenverhältnis $\frac{1}{3}$, so ist, für $S = 7$ kg gesetzt, da eine kleinere Sicherheit hier anwendbar ist:

$$d = \sqrt{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{P}{S}} = \sqrt{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1000}{7}} = 15{,}5 \text{ mm}.$$

15. Die Zapfen der hohlen gusseisernen Hauptbalancierachse der Wasserhaltungsmaschine auf der Grube Bleiberg in Belgien sind belastet mit 140550 kg und haben das Höhlungsverhältnis 0,5.

Welche Zapfenverhältnisse würden zu nehmen sein?

Für $\frac{d_2}{d_1} = 0{,}5$ folgt aus Beispiel 11:

$$d_1 = 1{,}02\, d = 1{,}02 \cdot 1{,}65 \sqrt{140550} = 631 \text{ mm},$$

sowie:

$$l = \tfrac{4}{3} \cdot 1{,}65 \sqrt{140550} = 825 \text{ mm}.$$

Der Flächendruck in den Lagerschalen ergibt sich demnach zu:

$$\frac{P}{l\,d} = \frac{140550}{631 \cdot 825} = 0{,}27 \text{ kg},$$

welcher Wert nicht zu hoch ist.

16. Welche Abmessungen erhält der gussstählerne Kurbelzapfen einer Dampfmaschine von 300 mm Cylinderdurchmesser, wenn die Maschine bei ziemlich ruhigem Gang mit 4 Atm. Ueberdruck ohne Kondensation arbeiten soll?

Es ist:

$$P = 4 \cdot 1{,}0334 \frac{\pi\, 30^2}{4} = 2921{,}868 \text{ kg oder } 3000 \text{ kg rund;}$$

demnach:

$$d = 1{,}1 \sqrt{3000} = 60{,}5 \text{ mm}$$

und:

$$l = 1{,}4\, d = 85 \text{ mm.}$$

17. Es sind die Abmessungen der Zähne eines Rades festzustellen.

Wir setzen zunächst voraus, dass zeitweise nur ein einziges Zahnpaar den ganzen Druck zu übertragen hat. Weiter nehmen wir an, dass der Zahndruck normal zur Mittelebene des Zahnes gerichtet ist und stets am Kopfende desselben angreift. Endlich wird noch angenommen, dass die Zähne am Kopf- und Fussende die gleiche Dicke und zwar gleich der halben Teilung t haben.

Da nun ein Zahn als ein prismatischer Körper anzusehen ist, welcher an einem Ende festgehalten und am freien Ende durch die im Teilkreis auftretende Kraft P beansprucht wird, so ist die Festigkeitsbedingung eines solchen Zahnes gegeben durch:

$$P\, l = W\, S.$$

Für gewöhnlich ist die Zahnlänge $l = 0{,}7\, t$; weiter setzen wir die Breite b des Zahnes gleich c t, wobei der Koeffizient c das Breitenverhältnis des Zahnes heisst; dann folgt auch:

$$P \cdot 0{,}7\, t = \frac{c\, t^3}{24} \cdot S$$

und also:

$$t = 4{,}1 \sqrt{\frac{P}{c\, S}}.$$

Ist N die Anzahl Pferdestärken, welche das Rad bei einer Umdrehungszahl n in der Minute übertragen soll, so besteht die Beziehung:

$$P = \frac{60 \cdot 75 \cdot 1000}{2\,\pi} \cdot \frac{N}{n\, R} = 716200 \frac{N}{n\, R},$$

wobei R in Millimetern ausgedrückt ist. Diesen Wert oben eingeführt, gibt:

$$t = 3468{,}7 \sqrt{\frac{N}{n\, c\, R\, S}}.$$

Will man statt des Teilkreisradius R die Zähnezahl Z in der Formel haben, so wird, da $R = \frac{Z\,t}{2\,\pi}$ ist:

$$t = 422{,}85 \sqrt[3]{\frac{N}{n\,c\,Z\,S}}.$$

Führt man in den ersten Wert von t für P den gleichen Wert $\frac{M\,m}{R}$ ein, wenn M m das zu übertragende Moment in Kilogramm-Millimeter bedeutet, so erhält man auch:

$$t = 4{,}1 \sqrt{\frac{M\,m}{c\,R\,S}}$$

und hieraus, für R wieder $\frac{Z\,t}{2\,\pi}$ eingesetzt:

$$t = 4{,}73 \sqrt[3]{\frac{M\,m}{c\,Z\,S}}.$$

Was nun den Wert von c und S anbetrifft, so nehme man bei Gusseisen als Zahnmaterial:

a) Für Aufzugsmaschinen:

$$c = \frac{b}{t} = 2 \text{ bis } 2{,}5,$$

S = 2,5 bis 3 kg auf den Quadratmillimeter.

b) Für leichte und ruhig laufende Transmissionsräder:

Hier wähle man c um so grösser, aber S um so kleiner, je grösser die Umfangsgeschwindigkeit ist und zwar:

$$c = \frac{b}{t} = 2{,}3 \text{ bis } 5,$$

S = 1,3 bis 2,5 kg auf den Quadratmillimeter.

c) Für schwere und raschlaufende Räder:

$$c = \frac{b}{t} = 3 \text{ bis } 5,$$

S = 1,25 kg auf den Quadratmillimeter und darunter.

Hat man für zusammenarbeitende Eisenzahnräder eine Teilung t gefunden, so nehme man diejenige

für zusammenarbeitende Holz- und Eisenzähne:	$t_1 = 1{,}4\ t$,
für Holzzähne, die mit Holzzähnen arbeiten:	$t_1 = 1{,}58\ t$,
bei Zähnen aus Schmiedeeisen:	$t_1 = 0{,}7\ t$,
bei Zähnen aus Messing und Bronze:	$t_1 = 1{,}3\ t$.

18. Es soll die Tragfähigkeit einer an einem Ende eingemauerten Platte berechnet werden.

Sei l die Länge, b die Breite und d die Dicke der Platte, alsdann ist, wenn die Kraft in der Mitte der vorderen Kante angreift, die Tragfähigkeit bestimmt durch:

$$P = \frac{b\,d^2}{6\,l} \cdot S.$$

Greift dagegen die Kraft in einer Ecke an und ist φ der Winkel, den die Längskante l mit der schiefen Bruchebene bildet, so ist das wirkende Moment:

$$P^1\, l \sin\varphi = \frac{l}{\cos\varphi} \cdot \frac{d^2}{6} \cdot S$$

und also nun die Tragfähigkeit:

$$P^1 = \frac{d}{3 \sin 2\varphi} \cdot S.$$

Letzterer Ausdruck erreicht seinen Minimalwert für $\varphi = 45^0$ und demnach die grösste zulässige Belastung für diese Angriffsweise:

$$P^1_{\min} = \frac{d^2}{3} \cdot S.$$

Hat man nun eine Last, deren Angriffspunkt veränderlich ist, so ist offenbar der günstigste Fall der, für welchen $P = P^1_{\min}$ oder

$$\frac{b\,d^2}{6\,l} = \frac{d^2}{3},$$

mithin:

$$b = 2\,l$$

ist, ein Anhaltepunkt zur Bestimmung der Zahnbreiten bei Zahnrädern.

Aufgaben.

1. Ein Krahnbalken aus Tannenholz von 3 m Länge und 350 mm Höhe soll eine an seinem Ende angehangene Last von 900 kg tragen. Wie breit muss derselbe genommen werden?

$$b = 300 \text{ mm}.$$

2. Welche Last kann ein Balken aus Eichenholz von 2 m Länge, 200 mm Breite und 300 mm Dicke an einem Ende aufnehmen, wenn er mit dem anderen Ende horizontal eingemauert ist, und wie gross ist die Gesamtsenkung?

$$P = 990 \text{ kg},$$
$$s = 5 \text{ mm nahezu}.$$

3. Die Durchmesser eines runden, an einem Ende eingespannten und gleichmässig auf je 100 mm mit 45 kg belasteten Balkens von 900 mm totaler Länge seien in den Abständen 800 mm, 801 mm und 802 mm vom freien Ende gleich 68 mm, 69 mm und 70 mm.

Welches sind die Spannungen und Pressungen in den äussersten Fasern dieser Querschnitte?

$$S' = 4{,}665 \text{ kg},$$
$$S'' = 4{,}476 \text{ „}$$
$$S''' = 4{,}298 \text{ „}$$

4. Es ist die grösste Spannung und Pressung auf den Quadratmillimeter eines an einem Ende eingemauerten hohlen Trägers von 2 m Länge zu bestimmen, wenn die rechteckige Querschnittsform eine äussere Breite von 110 mm, eine äussere Höhe von 160 mm, sowie eine Wandstärke von 12 mm hat und der Träger ausser einer gleichmässig verteilten Last von 400 kg noch am freien Ende eine Last von 800 kg trägt.

$$S = 8{,}197 \text{ kg}.$$

5. Welche Last trägt eine 130 mm hohe Eisenbahnschiene von 0,8 m Länge an ihrem freien Ende mit Sicherheit, wenn die biegende Kraft senkrecht zum Fusse wirkt?

Auf Grund der Tabelle VIII findet man:

$$P = 1228{,}5 \text{ kg}.$$

6. Die Belastung eines Freiträgers von 2 m Länge besteht aus einer gleichmässig verteilten Last von 840 kg und einer am freien Ende wirkenden Kraft von 500 kg.

Welche gekuppelte Eisenbahnschiene ist hinreichend?

Die gekuppelte Schiene Tabelle VIII von je 104,6 mm Höhe genügt vollständig.

7. Ein Balken von 4 m Länge aus Tannenholz ist an einem Ende horizontal eingemauert, und sein rechteckiger Querschnitt hat 130 mm Breite, sowie 200 mm Höhe.

Wie gross ist die Tragkraft und die Durchbiegung des Balkens bei Berücksichtigung des Eigengewichts,

a) wenn die Last am Ende des Trägers wirkt?

$$P = 66{,}213 \text{ kg},$$
$$s = 16{,}8 \text{ mm};$$

b) wenn die Last über den Balken gleichmässig verteilt ist?

$$P_1 = 132{,}426 \text{ kg},$$
$$s_1 = 13{,}5 \text{ mm}.$$

8. Ein horizontal eingemauerter Balken aus Eichenholz hat eine Länge von 2 m, sowie eine Breite von 155 mm, und er trägt eine Last von 250 kg.

Welche Höhe muss der Balken erhalten,

1. ohne Rücksicht auf das Eigengewicht,

a) wenn die Last am freien Ende angreift?

$$h = 171 \text{ mm};$$

b) wenn die Last gleichmässig verteilt ist?

$$h_1 = 121 \text{ mm};$$

2. mit Rücksicht auf das Eigengewicht,

a) wenn die Last am freien Ende wirkt?

$$h_2 = 178{,}5 \text{ mm};$$

b) wenn die Last gleichmässig verteilt ist?

$$h_3 = 127{,}5 \text{ mm}.$$

9. Ein Freiträger aus Tannenholz von 1,8 m Länge soll am Ende eine Last von 800 kg tragen.

Welche Abmessungen muss man dem Querschnitte geben, wenn die Breite zur Höhe sich verhalten soll wie 5 : 7?

$$h = 302 \text{ mm},$$
$$b = 216 \text{ „}$$

10. Auf welche Länge l kann das Profil Tabelle Vc, Bl. XII, Nr. 6 b freitragend bei einer Belastung von 2000 kg am Ende gelegt werden?

$$l = 63{,}7 \text{ cm}.$$

11. Eine gusseiserne Lagerkonsole hat den in Fig. 26 angedeuteten gefährlichen Querschnitt in der Entfernung 0,5 m vom Angriffspunkt der Einzellast $P = 400$ kg.

Welche Dimensionen sind hier zu geben, wenn ausser $S = 1$ kg auf den Quadratmillimeter $b = \frac{h}{3}$, $h_1 = 0{,}9\,h$, $h_2 = \frac{h}{2}$, $b_1 = 0{,}15\,h$ und $b_2 = 0{,}05\,h$ sein soll?

$$h = 177 \text{ mm},$$
$$b = 59 \text{ „}$$
$$h_1 = 159{,}5 \text{ „}$$
$$h_2 = 88{,}5 \text{ „}$$
$$b_1 = 26{,}5 \text{ „}$$
$$b_2 = 9 \text{ „}$$

12. Welche Ausladung darf man der Eisenbahnschiene Tab. VIII von 130,8 mm Höhe geben, die gleichmässig mit 700 kg auf den laufenden Meter belastet ist, wenn $S = 4$ kg auf den Quadratmillimeter genommen wird?

$$l = 126{,}7 \text{ cm}.$$

13. Ein in Bronze laufender schmiedeeiserner Stirnzapfen von $n = 125$ Umdrehungen hat einen Druck von 5120 kg auszuhalten.

Welche Dimensionen wird der Zapfen erhalten?

$$d = 89 \text{ mm},$$
$$l = 133{,}5 \text{ „}$$

14. Ein in Bronze laufender schmiedeeiserner Stirnzapfen macht 400 Umdrehungen und erhält 4000 kg Druck.

Wie gross sind die erforderlichen Zapfendimensionen?

$$d = 99 \text{ mm},$$
$$l = 238 \text{ „}$$

15. Ein Wasserradzapfen für 7000 kg Druck soll hohl aus Gusseisen gemacht werden.

Welche Dimensionen wird man ihm passend geben?

$$d_1 = 145 \text{ mm},$$
$$d_2 = 87 \text{ „}$$
$$l = 184 \text{ „}$$

16. Ein gussstählerner Kurbelzapfen hat 4200 kg Druck auszuhalten.

Welches sind die Zapfendimensionen?

$$d = 71{,}5 \text{ mm},$$
$$l = 100 \text{ „}$$

§ 10.

Freiträger gleicher Festigkeit.

Unter einem Träger gleicher Festigkeit (corps d'égale résistance; body of the strongest form) versteht man einen solchen, der in jedem Querschnitt solche Dimensionen hat, die der Summe der Momente der an diesem Querschnitt auf Bruch wirkenden Kräfte genau entsprechen, oder, was dasselbe besagt, für welchen in den entferntesten Punkten aller Querschnitte die bezügliche absolute und rückwirkende Spannung gleichzeitig denselben Wert erreicht.

Die Konstruktionsbedingung für solche Körperformen ist demnach:

$$S = \frac{M\,m}{W} = \text{konstant.} \tag{132}$$

Bringt man hierbei noch Querschnittsformen gleicher Festigkeit (s. § 5) zur Anwendung, so haben diese Träger mithin die rationellste Form, indem sie ja in allen Querschnitten gleiche Sicherheit gegen Bruch bieten, und beanspruchen unter allen Körpern von derselben Festigkeit den geringsten Materialaufwand.

Solche Körperformen und besonders ihre Annäherungen finden daher behufs Materialersparnis und Vermeidung unnötiger Belastung ihre mannigfache Anwendung im Maschinenbau, vornehmlich bei Verwendung von Gusseisen.

Die Durchbiegung derartiger Körper ist natürlich grösser als bei prismatischen Körpern, dieselbe Beanspruchung vorausgesetzt.

Zur Herleitung einiger Formen solcher Träger nehmen wir an:

I. Eine Einzellast P wirke am freien Ende vertikal abwärts.

Für die Einmauerungsstelle B ist bekanntlich:

$$P\,l = W_B\,S$$

und für einen anderen Querschnitt C in dem Abstande x vom freien Ende:

$$P\,x = W_c\,S.$$

Durch Division beider Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{l}{x} = \frac{W_B}{W_c}. \tag{133}$$

Setzen wir voraus:

a) Der Träger habe einen rechteckigen Querschnitt.

Die Dimensionen an der Einmauerungsstelle seien b und h, diejenigen im Querschnitt C dagegen u und v, so ist:

$$\frac{W_B}{W_c} = \frac{b\,h^2}{u\,v^2};$$

daher auch:

$$\frac{l}{x} = \frac{b\,h^2}{u\,v^2}. \tag{134}$$

Ist $b = u =$ konstant, d. h. hat der Grundris des Trägers die Form eines Rechtecks, so folgt:

$$v^2 = \frac{h^2}{l}\,x.$$

Die Seitenansicht des Balkens ist daher entweder eine ganze Parabel mit der Maximalordinate $\frac{h}{2}$, Fig. 60, oder eine halbe mit der Maximalordinate h, Fig. 61.

Fig. 60.

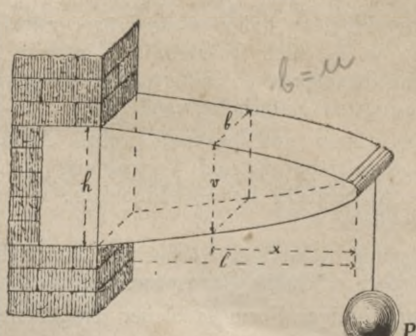
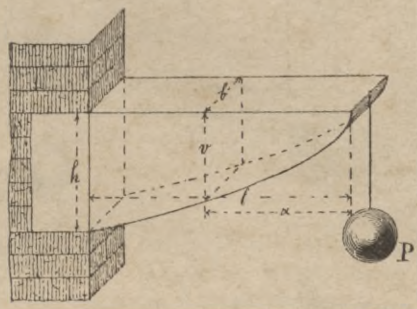
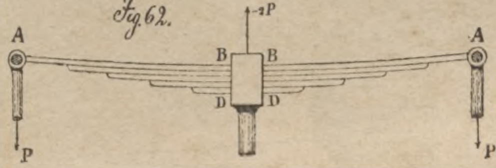


Fig. 61.



Durch erstere Form ist diejenige von Balancierarmen mit einfach rechteckigem Querschnitt und durch letztere die von Lagerkonsolen, sowie die der geschichteten, rechteckigen Wagenfedern bestimmt. Die ganze Tragkraft einer solchen Feder, Fig. 62, ist natürlich 2 P und die Länge l nicht von der Mitte, sondern von den Enden BD, BD der Fassung zu messen.

Fig. 62.



Eine leicht durchzuführende Annäherung an die genauen Formen Fig. 60 und 61 erhält man, wenn man im Scheitel der Parabel, also im freien Ende, eine Berührende oder Vertikale zieht, diese gleich der halben Ordinate im Befestigungspunkte, mithin gleich $\frac{h}{4}$ bezw. $\frac{h}{2}$ macht und nun den Endpunkt letzterer Ordinate mit dem Endpunkte der besagten Berührenden verbindet. Man erhält so einen ebenflächigen, abgestumpft keilförmigen Träger, Fig. 63 und 64, welcher den parabolischen ganz umschliessen muss, wie sich aus der bekannten Konstruktion der Parabeltangente folgert.

Diese Annäherungsformen sind, was Materialersparnis anbetrifft, fast so günstig wie die Parabelform.

Für $h = v =$ konstant hat die Seitenansicht des Trägers eine rechteckige Form und Gleichung (134) gibt:

$$\frac{l}{x} = \frac{b}{u}.$$

Der Grundriss des Trägers ist also ein beliebiges Dreieck, Fig. 65.

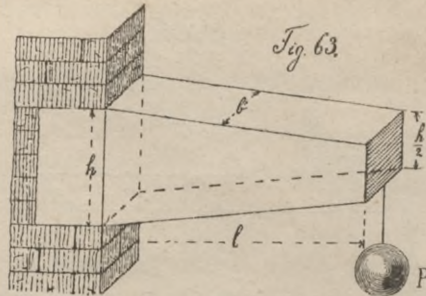


Fig. 63.

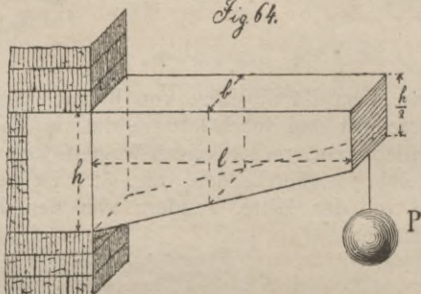


Fig. 64.

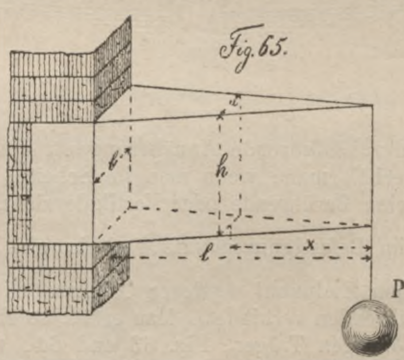
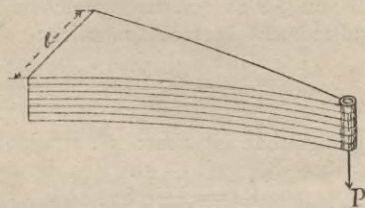


Fig. 65.

Anwendung von dieser Balkenform macht man unter anderem auch wieder bei Wagenfedern, die man, um neben grosser Biegsamkeit ein bedeutendes Tragvermögen zu erzielen, oft aus übereinander liegenden einfachen Dreieckfedern mit geringer Krümmung zusammensetzt, Fig. 66. Die Tragkraft der ganzen Feder bei n dreieckigen Einzelfedern ist, wenn b die Basisbreite, h die Dicke und l die Länge derselben ist:

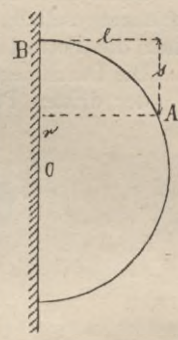
$$P = \frac{n\,b\,h^2}{6\,l} \cdot S. \tag{135}$$

Fig. 66.



Was die Durchbiegung vorliegenden Trägers anbetrifft, so beachte man, dass der Voraussetzung gemäss die Spannung S und die Höhe konstant ist; da nun auch der Elastizitätsmodul E konstant ist, so folgt nach Formel (27), dass auch der Krümmungsradius ϱ für die verschiedenen Punkte der elastischen Linie denselben Wert hat, dass mithin die elastische Linie für diesen Fall ein Kreisbogen ist. Die ungebogene Richtung des Trägers berührt die elastische Linie im Befestigungspunkte B, Fig. 67, daher muss der Mittelpunkt O der von der elastischen Linie gebildeten Kreislinie in der Vertikalen durch den befestigten Punkt liegen und daher die Länge l des Balkens die mittlere Proportionale zwischen der totalen Durchbiegung s und $2r - s$, also $l^2 = (2r - s)s$ sein. Vernachlässigen wir s gegen 2 r, so ergibt sich hieraus:

Fig. 67

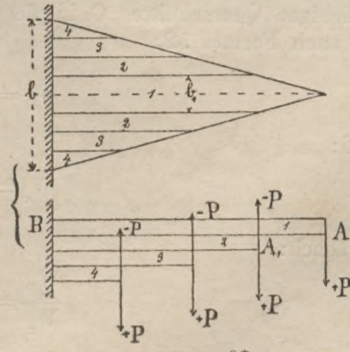


$$s = \frac{l^2}{2r}.$$

Da aber $r = \frac{aE}{S} = \frac{aE}{Pl} \cdot W = \frac{EI}{Pl}$, so ist auch die Senkung:

$$(136) \qquad s = \frac{Pl^3}{2EI} = \frac{6Pl^3}{nEbh^3}.$$

Fig. 68.



Nimmt man als Grundriss des Trägers, Fig. 65, ein gleichschenkeliges Dreieck, teilt den Träger durch vertikale Schnitte in eine gerade Anzahl Streifen von gleicher Breite und legt dann die einzelnen Streifen untereinander, wie Fig. 68 andeutet, so bleibt die Tragfähigkeit des Trägers unverändert.

Uebrigens ergibt sich dies auch daraus, dass jeder der Streifen nur auf die Länge $\frac{l}{n}$ freitragend ist, während das übrige parallelepipedische Stück von dem nächstfolgenden Streifen gestützt wird. Letzterer erleidet von dem ersteren in A_1 den Druck P nach unten und übt daher einen gleich grossen Gegendruck nach oben aus; für den nicht freitragenden Teil jedes Streifens tritt daher der Spezialfall von § 9 IV ein, nach welchem zwischen A_1 und B dasselbe äussere Kraftmoment herrscht, nämlich:

$$P \frac{l}{n} = \frac{b_1 h^2}{6} S.$$

Für die Befestigungsstelle ist aber:

$$P l = \frac{b h^2}{6} S;$$

demnach:

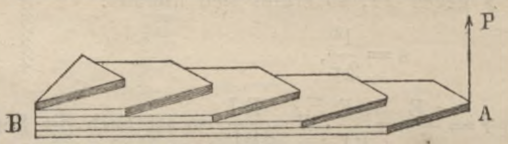
$$b_1 = \frac{b}{n},$$

was eben der Konstruktion entspricht.

Auch diese Anordnung gebraucht man bei der Konstruktion von zusammengesetzten Blattfedern, Fig. 69. Für Tragkraft und Senkung gelten die Formeln 135 und 136 und letztere besagt:

Die Durchbiegung der Feder, ist proportional der Belastung P und der dritten Potenz der Länge l.

Fig. 69.



b) der Träger habe einen kreisförmigen Querschnitt.

Ist d der Durchmesser an der Einmauerungsstelle und y der des beliebigen Querschnittes C in der Entfernung x vom freien Ende, so ist nach Formel 52:

$$W_B = \frac{\pi d^3}{32}$$

und:

$$W_c = \frac{\pi y^3}{32};$$

demnach:

$$\frac{W_B}{W_c} = \frac{d^3}{y^3}$$

und also auch nach Formel 133:

$$\frac{l}{x} = \frac{d^3}{y^3},$$

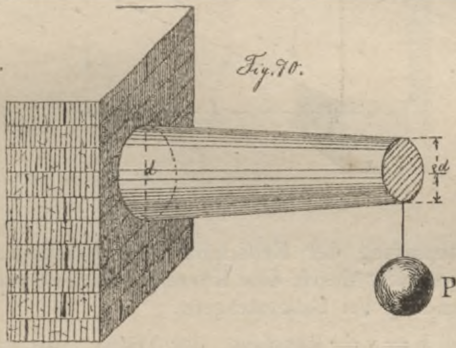
oder:

$$y^3 = \frac{d^3}{l} x.$$

Die Meridianlinie des Trägers ist folglich eine kubische Parabel.

Macht man die Tangente im Scheitel, im freien Ende gelegen, gleich $\frac{2}{3}$ des Durchmessers im Befestigungspunkte und verbindet nun die Endpunkte, so erhält man als angenäherte Form einen Normalkegelstumpf, Fig. 70.

Fig. 70.



II. Eine Last Q sei gleichförmig über die ganze Länge l verteilt.

Für die Befestigungsstelle ist dann:

$$\frac{Q\,l}{2} = W_B\, S$$

und für den Querschnitt C in der Entfernung x vom freien Ende:

$$\frac{Q\,x^2}{2\,l} = W_c\, S;$$

mithin:

$$\frac{l^2}{x^2} = \frac{W_B}{W_c}. \tag{137}$$

Nehmen wir wieder an, der Querschnitt des Trägers sei rechteckig. Dann erhält man wie oben:

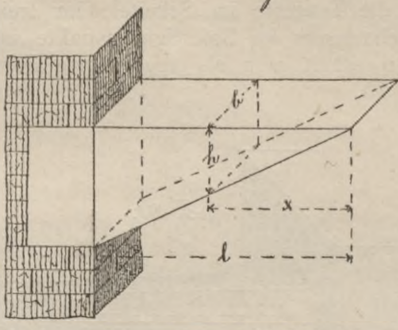
$$\frac{l^2}{x^2} = \frac{b\,h^2}{u\,v^2}. \tag{138}$$

Für $b = u =$ konstant ist der Grundriss reckteckig, und es folgt weiter:

$$\frac{l}{x} = \frac{h}{v},$$

d. h. das Profil des Trägers ist ein Dreieck, die Gestalt des Trägers also keilförmig. Fig. 71.

Fig. 71.



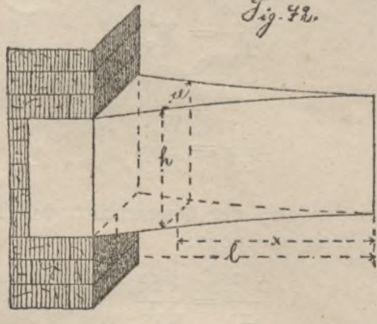
Unter Abstumpfung der Endschärfe und Ersetzung der unteren geradlinigen Begrenzung durch eine Kurve findet diese Balkenform vielfach ihre Verwendung bei Balkonträgern.

Ist dagegen $h = v =$ konstant, der Träger also im Längenprofil rechteckig, so gibt Formel 138:

$$x^2 = \frac{l^2}{b} u,$$

der Grundriss daher eine in eine Spitze auslaufende Figur, deren Begrenzung ein Parabelbogen ist, der Träger mithin ein parabolisch zugeschärfter Keil, Fig. 72.

Fig. 72.



Für die Durchbiegung dieses Trägers am freien Ende haben wir auch hier die Beziehungen wie oben unter dem entsprechenden Falle I a:

$$s = \frac{l^2}{2\,r}$$

und:

$$r = \frac{a\,E}{S} = \frac{a\,E\,W}{Q\,\frac{l}{2}} = \frac{2\,E\,I}{Q\,l};$$

daher auch:

(139) $$s = \frac{Q\,l^3}{4\,E\,I} = \frac{3\,Q\,l^3}{E\,b\,h^3}.$$

Sollen die Querschnitte einander ähnliche Figuren bilden, dann muss sich verhalten:

$$\frac{u}{v} = \frac{b}{h},$$

und die Beziehung in Formel 138 gibt daher:

$$\frac{l^2}{x^2} = \frac{h^3}{v^3},$$

sowie:

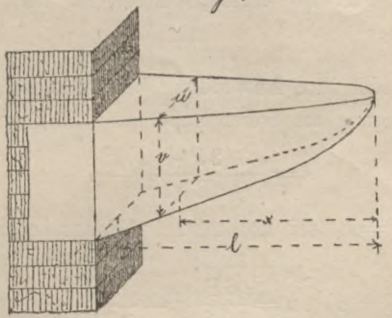
$$\frac{l^2}{x^2} = \frac{b^3}{u^3}$$

und also:

(140) $$\begin{cases} v^3 = \dfrac{h^3}{l^2}\,x^2, \\ u^3 = \dfrac{b^3}{l^2}\,x^2. \end{cases}$$

Längenprofil und Grundriss sind daher durch semikubische oder Neilsche Parabeln begrenzt, Fig. 73.

Fig. 73.



III. Eine Einzellast P wirke am freien Ende vertikal abwärts, und eine Last Q sei gleichförmig über die ganze Länge l verteilt.

Für den beliebigen Querschnitt C hat man bei rechteckigem Querschnitt nach Formel 36 und 102:

$$u\,v^2 = \frac{6\,P}{S}\,x + \frac{3\,Q}{l\,S}\,x^2. \tag{141}$$

Ist nun die Breite $u = b =$ konstant, so folgt:

$$\alpha)\quad v^2 = \frac{6\,P}{b\,S}\,x + \frac{3\,Q}{b\,l\,S}\,x^2.$$

Setzen wir $x = X - \frac{P\,l}{Q}$, so geht letztere Beziehung über in:

$$v^2 = \frac{6\,P}{b\,S}\left(X - \frac{P\,l}{Q}\right) + \frac{3\,Q}{b\,l\,S}\left(X - \frac{P\,l}{Q}\right)^2,$$

woraus:

$$\frac{X^2}{\left(\frac{P\,l}{Q}\right)^2} - \frac{v^2}{\frac{3\,P^2\,l}{b\,S\,Q}} = 1.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Hyperbel mit der Hauptachse $2\,A = \frac{2\,P\,l}{Q}$ und der Nebenachse $2\,B = 2\,P\sqrt{\frac{3\,l}{b\,S\,Q}}$ als Koordinatenachsen.

Das durch Gleichung α) charakterisierte Längenprofil unseres Trägers ist demnach auch eine Hyperbel, deren Scheitel im freien Ende liegt und deren Hauptachse mit der Längenachse des Trägers zusammenfällt. Auf Grund der Gleichung einer Tangente an die Hyperbel lässt sich folgern, dass die Tangente im Einmauerungspunkte mit den Koordinaten b und h die Hauptachse in einem Abstande $\frac{P\,l}{P + Q}$ vom Scheitel, die Tangente in letzterem Punkte demnach in einer Höhe $v_0 = \frac{P\,h}{2\,P + Q}$ trifft, wodurch sich höchst einfach die sehr brauchbare Annäherungsform Fig. 74 ergibt; dabei ist für $Q = P$ der Wert $v_0 = \frac{h}{3}$.

Die Form findet ihre Anwendung bei Balkonträgern.

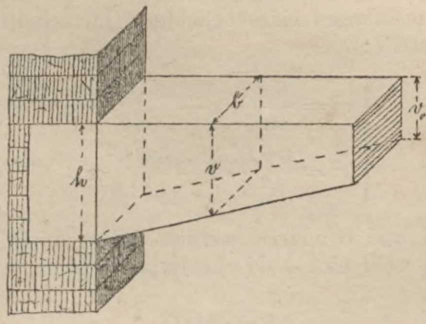
Die Durchbiegung am freien Ende ist nach Formel 136 und 139:

$$s = \frac{3\,(2\,P + Q)\,l^3}{E\,b\,h^3}. \tag{142}$$

Die Höhe $v = h$ sei konstant. Alsdann ergibt sich aus Formel 140:

$$\beta)\quad u = \frac{6\,P}{h^2\,S}\,x + \frac{3\,Q}{h^2\,l\,S}\,x^2.$$

Fig. 74.



Führt man in diese Gleichung für u und x die Werte $U - \frac{3 P^2 l}{h^2 S Q}$ bezw. $X - \frac{P l}{Q}$ ein, so hat man nun:

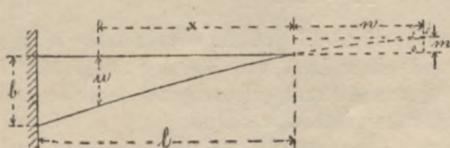
$$U - \frac{3 P^2 l}{h^2 S Q} = \frac{6 P}{h^2 S}\left(X - \frac{P l}{Q}\right) + \frac{3 Q}{h^2 l S}\left(X - \frac{P l}{Q}\right)^2$$

und hieraus:

$$X^2 = \frac{h^2 l S}{3 Q} \cdot U.$$

Da diese Gleichung aber die bekannte Parabelgleichung darstellt, so ist daher in diesem Falle der durch Gleichung β) bestimmte Grundriss ebenfalls durch eine parabolische Kurve begrenzt, deren Scheitel jedoch über das freie Ende hinausliegt und durch $m = \frac{3 P^2 l}{h^2 S Q}$ und $n = \frac{P l}{Q}$ gegeben ist, Fig. 75.

Fig. 75.



Die Form des Trägers hat Aehnlichkeit mit der in Fig. 72. Für den Fall, dass sämtliche Querschnitte ähnliche Rechtecke bilden sollen, folgt aus dem Verhältnis

$$\frac{u}{v} = \frac{b}{h}$$

zwischen den Abmessungen eines beliebigen Querschnitts und denen an der Befestigungsstelle:

$$(143) \qquad \begin{cases} v^3 = \dfrac{6\,P\,h}{b\,S}\,x + \dfrac{3\,Q\,h}{b\,l\,S}\,x^2, \\ u^3 = \dfrac{6\,P\,b^2}{h^2\,S}\,x + \dfrac{3\,Q\,b^2}{h^2\,l\,S}\,x^2. \end{cases}$$

Längenprofil und Grundriss werden daher durch eine Kurve bestimmt, die man wohl eine kubische Hyperbel nennen könnte.

Beispiele.

1. Es ist eine einfache Dreieckfeder von feinem Federstahl zu berechnen für eine Last $P = 50$ kg und eine Federung $s = 20$ mm bei einer Länge $l = 40$ mm.

Aus

$$P\,l = \frac{b\,h^2}{6}\,S$$

und

$$s = \frac{P\,l^3}{2\,E\,I} = \frac{6\,P\,l^3}{E\,b\,h^3}$$

folgt durch Multiplikation:

$$s = \frac{S\,l^2}{E\,h}$$

und hieraus die Dicke h der Feder:

$$h = \frac{S\,l^2}{E\,s} = \frac{32{,}2 \cdot 400^2}{21500 \cdot 20} = 12 \text{ mm nahezu.}$$

Nun ergibt sich aus obiger Formel für das äussere Kraftmoment die Breite der Feder:

$$b = \frac{6 \cdot 50 \cdot 400}{12^2 \cdot 32{,}2} = 26 \text{ mm angenähert.}$$

2. Eine nach Fig. 66 zusammengesetzte Wagenfeder, welche 450 mm lang und einer Last von 300 kg ausgesetzt ist, dabei aber eine Durchbiegung von 40 mm erleiden darf, soll aus feinem Federstahl von 60 mm Breite hergestellt werden.

Welche Stärke muss der Federstahl haben, und wieviel Blätter sind zu nehmen?

Aus

$$P\,l = n\,\frac{b\,h^2}{6}\,S$$

und

$$s = \frac{6 P l^3}{n E b h^3}$$

erhält man die Stärke jeder Feder:

$$h = \frac{S l^2}{E s} = \frac{32,2 \cdot 450^2}{21500 \cdot 40} = 7,5 \text{ mm}.$$

Aus der ersten Formel findet man jetzt für die Blätterzahl:

$$n = \frac{6 \cdot 300 \cdot 450}{60 \cdot 7,5^2 \cdot 32,2} = 7,5 \text{ mm nahezu}.$$

Nehmen wir $n = 7$ Blätter, so folgt bei obigem $h = 7,5$ mm für die Dicke des Stahles als korrigierte Breite:

$$b = \frac{6 \cdot 300 \cdot 450}{7 \cdot 7,5^2 \cdot 32,2} = 64 \text{ mm}.$$

3. Es ist eine Maschinenkurbel (Hebel) zu konstruieren. Der wirkende Druck ist P, senkrecht zum Arme.

Sei:

R der Arm der Kurbel oder des Hebels,

b die Armbreite,

h die Armhöhe, in der Achsmitte gemessen,

S^1 die zulässige Spannung,

so ist für den rechteckigen Querschnitt, entsprechend der Achsmitte:

$$P R = \frac{b h^2}{6} S^1.$$

Setzen wir zunächst einen Stirnzapfen an der Kurbel oder dem Hebel voraus, dessen Länge l und Durchmesser d ist, so ist nach § 9, Beispiel 11:

$$P = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d^3}{l} \cdot S = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d}{l} \cdot d^2 \cdot S.$$

Diesen Wert oben für P eingeführt, gibt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt{\frac{3}{8} \pi \frac{d}{l} \cdot \frac{R}{b} \cdot \frac{S}{S^1}} \text{ und } \frac{b}{d} = \frac{3}{8} \pi \frac{d}{l} \cdot \frac{d}{h} \cdot \frac{R}{h} \cdot \frac{S}{S^1}.$$

Bedenkt man, dass P beim Stirnzapfen ausserhalb der Mittelebene der Kurbel wirksam und infolgedessen der Arm auch einer Verdrehung ausgesetzt ist, so darf man S^1 für Schmiedeeisen nur gleich 4,5 kg und für Gusseisen nur gleich 2,25 kg auf den Quadratmillimeter nehmen. Demnach wird unter Berücksichtigung der für $\frac{l}{d}$ und S in § 9, Beispiel 11, angegebenen Werte bei Zapfen aus Schmiedeeisen und Gussstahl:

1. für schmiedeeiserne Kurbeln oder Hebel

a) mit schmiedeeisernen Stirnzapfen:

$$\frac{h}{d} = 0{,}915 \sqrt{\frac{R}{b}} \text{ und } \frac{b}{d} = 0{,}838 \frac{d}{h} \cdot \frac{R}{h};$$

b) mit gussstählernen Stirnzapfen:

$$\frac{h}{d} = 1{,}06 \sqrt{\frac{R}{b}} \text{ und } \frac{b}{d} = 1{,}122 \frac{d}{h} \cdot \frac{R}{h};$$

2. für gusseiserne Kurbeln und Hebel

a) mit schmiedeeisernen Stirnzapfen:

$$\frac{h}{d} = 1{,}294 \sqrt{\frac{R}{b}} \text{ und } \frac{b}{d} = 1{,}675 \frac{d}{h} \cdot \frac{R}{h};$$

b) mit gussstählernen Stirnzapfen:

$$\frac{h}{d} = 1{,}5 \sqrt{\frac{R}{b}} \text{ und } \frac{b}{d} = 2{,}244 \frac{d}{h} \cdot \frac{R}{h}.$$

Bei Kurbeln und Hebeln mit Doppel- und Gabelzapfen, bei welchen die Kraft zu beiden Seiten der Zapfenhülse, bezw. in der Mittelebene des Armes wirkt, tritt die oben erwähnte Verdrehung infolge einer seitlichen Beanspruchung nicht auf; man kann daher hier S^1 für Schmiedeeisen gleich 5 kg und für Gusseisen gleich 2,5 kg setzen. Mithin:

1. für schmiedeeiserne Kurbeln und Hebel

a) mit schmiedeeisernen Doppel- und Gabelzapfen:

$$\frac{h}{d} = 0{,}868 \sqrt{\frac{R}{b}} \text{ und } \frac{b}{d} = 0{,}754 \frac{d}{h} \cdot \frac{R}{h};$$

b) mit gussstählernen Doppel- und Gabelzapfen:

$$\frac{h}{d} = 1{,}005 \sqrt{\frac{R}{b}} \text{ und } \frac{b}{d} = 1{,}01 \frac{d}{h} \cdot \frac{R}{h};$$

2. für gusseiserne Kurbeln und Hebel

a) mit schmiedeeisernen Doppel- und Gabelzapfen:

$$\frac{h}{d} = 1{,}228 \sqrt{\frac{R}{b}} \text{ und } \frac{b}{d} = 1{,}508 \frac{d}{h} \cdot \frac{R}{h};$$

b) mit gussstählernen Doppel- und Gabelzapfen:

$$\frac{h}{d} = 1{,}42 \sqrt{\frac{R}{b}} \text{ und } \frac{b}{d} = 2{,}02 \frac{d}{h} \cdot \frac{R}{h}.$$

Behufs Verjüngung des Armes nach aussen hin nehme man bei konstanter Armbreite b die Höhe des Armes in der Zapfenhülse gleich $\frac{h}{2}$ (siehe Fig. 63.)

Bei Bestimmung der Abmessungen b und h in der Achsmitte werde zweckmässig die Armhöhe h angenommen, da für die Seitenansicht das Gefühl am wenigsten fehlgeht.

Gibt man dem Arm in der Richtung der Achsebene eine Mittelrippe (s. Fig. 30), so kann diese bei Feststellung des Querschnittes vernachlässigt werden, da sie sich ganz in der Nähe der neutralen Schicht befindet.

Statt des kreuzförmigen Querschnitts wendet man aber auch häufig einen doppel-T-förmigen (s. Fig. 23 und 36) an. Die Saumnerve nun ist bei kleineren Konstruktionen ebenfalls ausser acht zu lassen.

Was die Dimensionen der Zapfenhülse und Nabe anbetrifft, so möge man, wenn d die Zapfen- und D die Wellenstärke bedeutet, auf Grund empirischer Angaben nehmen:

a) bei schmiedeeisernen Kurbeln und Hebeln:

Hülsenlänge = 1,5 d bis 2 d, Hülsenstärke = 0,5 d bis 0,7 d,
Nabenlänge = D bis 1,25 D, Nabenstärke = 0,4 D bis 0,5 D;

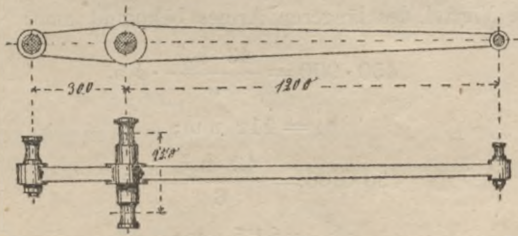
b) bei gusseisernen Kurbeln und Hebeln:

Hülsenlänge = 2 d, Hülsenstärke = 0,7 d,
Nabenlänge = D bis 1,5 D, Nabenstärke = 0,5 D bis 0,6 D.

Dabei ist noch zu bemerken, dass die Nabe immer dann möglichst lang zu nehmen ist, wenn der Arm in der gewöhnlichen Weise wie Räder aufgekeilt wird.

4. Der kürzere Arm eines zweiarmigen schmiedeeisernen Hebels, Fig. 76, mit Zapfen von gleichem Material habe eine Länge von 300 mm, der andere eine Länge von 1200 mm. An dem Zapfen des kürzeren Armes wirke im Maximum vertikal abwärts ein Widerstand von 1800 kg,

Fig. 76.



so dass die an dem Zapfen des längeren Armes angreifende Kraft gleich $\frac{1800 \cdot 300}{1200} = 450$ kg sein muss. Die Entfernung von Mitte bis Mitte der symmetrisch liegenden Zapfen der Drehachse sei 250 mm. Der Hebel erhalte einen rechteckigen Querschnitt und zwar soll dicht bei der mittleren Nabe das Verhältnis der Höhe, zur Breite = 3 : 1 sein; die Stärke der Hebelarme sei überall dieselbe.

Welches sind die Abmessungen der Zapfen und Drehachse, sowie die des Hebels dicht bei der mittleren Nabe, sowie in den Querschnitten für die Drittel des kürzeren und Viertel des längeren Armes?

Für den Zapfen des kürzeren Armes ist nach § 9, Beispiel 11:

$$d = 1{,}26 \sqrt{P} = 1{,}26 \sqrt{1800} = 53{,}5 \text{ mm},$$

$$l = 1{,}25\, d = 1{,}25 \cdot 53{,}5 = 67 \text{ mm}.$$

Ebenso folgt für den Zapfen des längeren Armes:

$$d_1 = 1{,}26 \sqrt{P} = 1{,}26 \sqrt{450} = 27 \text{ mm},$$

$$l_1 = 1{,}25\, d = 1{,}25 \cdot 27 = 34 \text{ mm}.$$

Für den Hebelquerschnitt in der Nähe der Drehachse hat man:

$$1800 \cdot 300 = \frac{b\,h^2}{6} \cdot 4{,}5 = \frac{h^3}{18} \cdot 4{,}5,$$

daraus:

$$h = 129{,}5 \text{ mm},$$

also die konstante Breite:

$$b = 43 \text{ mm}.$$

In den Dritteln des kürzeren Armes ergibt sich nun für die Höhe:

$$1800 \cdot 200 = \frac{43 \cdot h_1^2}{6} \cdot 4{,}5,$$

$$h_1 = 102{,}5 \text{ mm}$$

und:

$$1800 \cdot 100 = \frac{43 \cdot h_2^2}{6} \cdot 4{,}5,$$

$$h_2 = 72{,}5 \text{ mm}.$$

Für die Viertel des längeren Armes bekommt man:

$$450 \cdot 900 = \frac{43 \cdot h_2^2}{6} \cdot 4{,}5,$$

$$h_2 = 112 \text{ mm};$$

$$450 \cdot 600 = \frac{43 \cdot h_3^2}{6} \cdot 4{,}5,$$

$$h_3 = 91{,}5 \text{ mm};$$

$$450 \cdot 300 = \frac{43 \cdot h_4^2}{6} \cdot 4{,}5,$$

$$h_4 = 65 \text{ mm}.$$

Die Stärke der Drehachse folgt demnach aus:

$$\frac{1800+450}{2}\left(\frac{250-43}{2}\right)=\frac{\pi D^3}{32}\cdot 6{,}5,$$

da die Drehzapfen nicht dauernd laufen, mithin eine geringere Sicherheit zulässig ist; man findet nun:

$$D = 57 \text{ mm}.$$

5. Es sei die Länge R eines zu konstruierenden einfachen Hebels für einen Doppelzapfen gleich 2000 mm, die Zapfenbelastung P = 2500 kg. Der Arm soll aus Gusseisen konstruiert werden und eine Höhe von 320 mm in der Nabe erhalten.

Welches sind die übrigen Verhältnisse des Hebels?

Bei rechteckigem Querschnitt ist die Breite

$$b_0 = \frac{6\cdot 2500\cdot 200}{320^2\cdot 2{,}5} = 117{,}2 \text{ mm}.$$

Da dies zu viel ist, so wählen wir einen doppel-T-förmigen Querschnitt (s. Fig. 23) unter Beibehaltung der totalen Höhe $h_0 = 320$ mm.

Wir setzen dabei:

$$h_0 - h_1 = \frac{h}{6}, \text{ also } h_1 = \frac{5}{6} h_0 \text{ und } b - b_1 = \frac{b}{4}, \text{ mithin } b_1 = \frac{3}{4} b,$$

dann ist:

$$\frac{b\,h_0^3 - b_1\,h_1^3}{6\,h_0} = \frac{b\,h_0^3 - \frac{3}{4} b\left(\frac{5}{6} h_0\right)^3}{6\,h_0} = 0{,}566\,\frac{b\,h_0^2}{6}.$$

Nun muss aber

$$0{,}566\,\frac{b\,h_0^3}{6} = \frac{b_0\,h_0^2}{6}$$

sein, demnach die Saumnervenbreite:

$$b = \frac{b_0}{0{,}566} = \frac{117{,}2}{0{,}566} = 207 \text{ mm};$$

weiter:

$$b_1 = \tfrac{3}{4} b = \tfrac{3}{4}\cdot 207 = 155 \text{ mm}$$

und:

$$h_1 = \tfrac{5}{6} h_0 = \tfrac{5}{6}\cdot 320 = 267 \text{ mm},$$

lauter höchst brauchbare Werte.

Für einen anderen Querschnitt, z. B. den mittleren folgt:

$$\frac{6\cdot 2500\cdot 1000}{2{,}5} = \frac{b_2\,h_2^3 - b_3\,h_3^3}{h_2}.$$

Sei mit Rücksicht auf die möglichste Einfachheit des Modells:

$b_2 = b = 207$ mm, $b_3 = b_1 = 155$ mm, $h_2 - h_3 = h_0 - h_1 = 320 - 267 = 53$ mm, so ist auch:

$$6000000 = \frac{207\,h_2^3 - 155\,(h_2 - 53)^3}{h_2},$$

woraus:

$$h_2 = 204 \text{ mm}$$

und also:

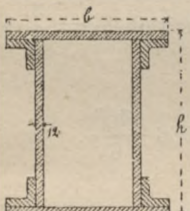
$$h_3 = 151 \text{ mm}.$$

In ähnlicher Weise liessen sich andere Querschnitte bestimmen und so der Hebel von gleicher Festigkeit vorzeichnen.

Jedoch kann man für kleinere Konstruktionen auch die Annäherungsform Fig. 63 anwenden, besonders wenn man die Verjüngung etwas stärker nimmt, und für grössere Hebel die Konstruktion, welche für die Bestimmung der Balancierarme in allgemeinem Gebrauche sind.

6. Der Hebel der vorigen Aufgabe soll aus Eisenblech von einem Querschnitt, wie Fig. 77 zeigt, hergestellt werden.

Fig. 77.



Wir behalten die obige Höhe $h_0 = 320$ mm bei; alsdann ergibt sich für

$$b_0 = \frac{6 \cdot 2500 \cdot 2000}{320^2 \cdot 5} = 58{,}6 \text{ mm}.$$

Wir nehmen hier:

$h_0 - h_1 = \frac{h}{16}$, also $h_1 = \frac{15}{16} h_0$ und $b - b_1 = \frac{b}{9}$, mithin $b_1 = \frac{8}{9} b$, und es muss wieder sein unter Vernachlässigung der Winkeleisen:

$$\frac{b\,h_0^3 - b_1\,h_1^3}{6\,h_0} = \frac{b\,h_0^3 - \frac{8}{9}\,b\,(\frac{15}{16}\,h_0)^3}{6\,h_0} = 0{,}2676\,\frac{b\,h_0^2}{6} = \frac{b_0\,h_0^2}{6},$$

folglich:

$$b = \frac{b_0}{0{,}2676} = \frac{58{,}6}{0{,}2676} = 219 \text{ mm},$$

daher:

$$b_1 = \tfrac{8}{9}\,b = \tfrac{8}{9} \cdot 219 = 195 \text{ mm}.$$

Die Stegdicke ist also 24 mm, welche wir auf zwei Bleche von 12 mm Dicke verteilen.

Weiter ist:

$$h_1 = \tfrac{15}{16}\,h_0 = \tfrac{15}{16} \cdot 320 = 300 \text{ mm}.$$

Sei auch hier:

$b_2 = b = 219$ mm, $b_3 = b_1 = 195$ mm, $h_2 - h_3 = h_0 - h_1 = 320 - 300 = 20$ mm, so ist für den Querschnitt in der Mitte:

$$\frac{6 \cdot 2500 \cdot 1000}{5} = \frac{b_2 h_2^3 - b_3 h_3^3}{h_2} = \frac{219 h_2^3 - 195 (h_2 - 20)^3}{h_2};$$

daraus:

$$h_2 = 197 \text{ mm}$$

und folglich:

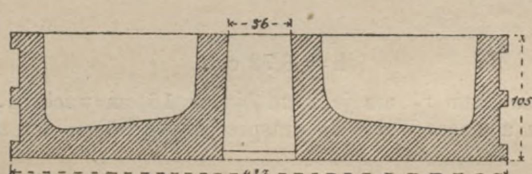
$$h_3 = 177 \text{ mm}.$$

Im übrigen gilt das im vorigen Beispiel über die Annäherungsform Gesagte natürlich auch hier.

Anmerkung: Der durch Fig. 77 dargestellte Querschnitt eines Hebels eignet sich auch zweckmässig für Balanciers bei grossen Armlängen und Kräften, wobei dann noch eine Versteifung durch zwischengeschraubte Zapfenhülsen angewandt wird.

7. Für einen Lokomotivcylinder soll ein schwedischer Kolben, Fig. 78, von 427 mm Durchmesser konstruiert werden. Das Material sei Schmiedeeisen. Welche Stärken hat man den Kolbenkörper zu geben?

Fig. 78.



Man kann den Kolben als einen Balken betrachten, welcher in der Mitte der Kolbenstange befestigt und über seine ganze Länge gleichmässig belastet ist. Der wirkende Druck für jeden ringförmigen Querschnitt ergibt sich, wenn man den Inhalt der ringförmigen Fläche zwischen dem äusseren Radius r und dem des betrachteten Querschnitts r_1 mit dem konstanten Druck p auf die Flächeneinheit multipliziert, also:

$$P = \pi (r^2 - r_1^2) p.$$

Zur Feststellung des Hebelarmes für diesen Druck teile man den äusseren Kreisumfang in Elemente α und verbinde die Teilpunkte mit dem Mittelpunkte; der Abstand des Schwerpunktes der so entstandenen trapezförmigen Elementarfläche mit den parallelen Seiten α und β von der Seite β ist dann:

$$l = \frac{r - r_1}{3} \cdot \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} = \frac{r - r_1}{3} \, \frac{\frac{4\pi r}{n} + \frac{2\pi r_1}{n}}{\frac{2\pi r}{n} + \frac{2\pi r_1}{n}},$$

oder:

$$l = \frac{(r - r_1)(2r + r_1)}{3(r + r_1)},$$

wodurch besagter Hebelarm bestimmt ist.

Betrachte einen ringförmigen Querschnitt in der Entfernung 40 mm = 4 cm vom Kolbenmittel, so ist, wenn wir $p = 9$ kg auf den Quadratzentimeter annehmen:

$$P = \pi (21{,}35^2 - 4^2) \cdot 9;$$

der in Betracht kommende Hebelarm ist:

$$l = \frac{(21{,}35 - 4)(2 \cdot 21{,}35 + 4)}{3(21{,}35 + 4)} = 10{,}65 \text{ cm}.$$

Wir haben demnach zur Bestimmung des in Rede stehenden ringförmigen Querschnitts von der Breite $b = 2\pi \cdot 4$ und der fraglichen Höhe h:

$$\pi (21{,}35^2 - 4^2)\, 9 \cdot 10{,}65 = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot h^2}{6} \cdot 700,$$

woraus:

$$h = 6{,}72 \text{ cm}.$$

Lässt man nun r_1 um je 2 cm bis zu 16 cm wachsen, so findet man in ganz analoger Weise die entsprechenden Höhen der zugehörigen Schnitte:

$$h_1 = 4{,}96 \text{ cm},\ 3{,}81 \text{ cm},\ 2{,}95 \text{ cm},\ 2{,}22 \text{ cm},\ 1{,}67 \text{ cm und } 1{,}16 \text{ cm}.$$

Anmerkung: Bei einem vorliegenden Kolben aus der Fabrik Andrée Köchlin in Mülhausen ergab sich für die Stelle $r_1 = 8$ cm nur eine Stärke von 2,3 cm statt 3,81 cm; überhaupt fanden sich diese aus genannter Fabrik für die Bahnverwaltung gelieferten Kolben viel zu schwach.

Aufgaben.

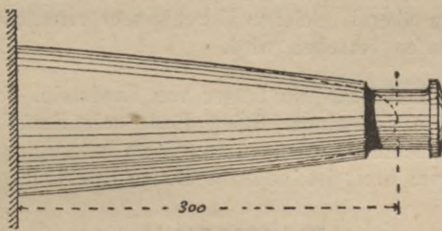
1. Es ist eine Feder aus Gussstahl von der Form Fig. 69 und für eine Last von 800 kg zu konstruieren, wobei die Blätter eine Dicke von 10 mm, sowie eine Breite von 80 mm erhalten und das längste Blatt eine Länge von 500 mm haben soll.

Wieviel Blätter sind zu dem Federwerk zu verwenden?

$$n = 10 \text{ Blätter}.$$

2. An dem Zapfen des in Fig. 79 dargestellten schmiedeeisernen runden Armes greife eine, um den Zapfen sich drehende Stange an, die im Maximum einen Zug von 2000 kg ausübt. Der Abstand des Zapfenmittels vom befestigten Ende des Armes sei 300 mm, die Länge des Zapfens sei 54 mm. Der Arm ist möglichst auf gleiche Festigkeit zu konstruieren und dabei die zulässige Spannung, wie der zulässige Druck mit Rücksicht auf die Abnützung zu 5 kg auf den Quadratmillimeter anzunehmen.

Fig. 79.



Welche Dimension ist dem Zapfen, sowie dem übrigen Teil des Armes für $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{5}$ der Armlänge, gerechnet vom Zapfenmittel an, zu geben?

Für einen Querschnitt in der Entfernung x vom Zapfenmittel ist:

$$W_x = \frac{P x}{S}$$

und also für die Befestigungsstelle:

$$W = \frac{P l}{S} = \frac{2000 \cdot 300}{5} = 120000;$$

daher auch allgemein:

$$W_x = \frac{x}{l} \cdot W.$$

Folglich für den Zapfenquerschnitt:

$$W_1 = \frac{27}{300} \cdot 120000 = \frac{\pi d_1^3}{32},$$

also:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \cdot \frac{27}{300} \cdot 120000} = 2{,}167 \sqrt[3]{\frac{27}{300} \cdot 120000},$$

woraus:

$$d_1 = 48 \text{ mm}.$$

Für die anderen Querschnitte folgt nun der Reihe nach:

$$d_2 = 2{,}167 \sqrt[3]{\tfrac{1}{5} \cdot 120000} = 62{,}5 \text{ mm},$$

$$d_3 = 2{,}167 \sqrt[3]{\tfrac{2}{5} \cdot 120000} = 79 \quad „$$

$$d_4 = 2{,}167 \sqrt[3]{\tfrac{3}{5} \cdot 120000} = 90 \quad „$$

$$d_5 = 2{,}167 \sqrt[3]{\tfrac{4}{5} \cdot 120000} = 99{,}5 \quad „$$

$$d_6 = 2{,}167 \sqrt[3]{\tfrac{5}{5} \cdot 120000} = 107 \quad „$$

Die punktierte Linie gibt die strenge Form des Armes für gleiche Festigkeit an, von der aber natürlich hier abgewichen werden muss, da ja der Zapfen überall gleichen Durchmesser erhalten und an seinen Enden mit Anläufen versehen wird.

3. Welche Last kann ein Träger von Sandstein, der nach Fig. 61 geformt ist, nahe an seinem freien Ende mit Berücksichtigung des Eigengewichts aufnehmen, wenn er an seinem befestigten Ende 500 mm hoch und 250 mm breit ist und die Länge des Trägers 900 mm beträgt?

$$P = 1673{,}711 \text{ kg}.$$

4. Es sei eine Kurbel aus Schmiedeeisen mit rechteckigem Querschnitt zu konstruieren. Die am gussstählernen Stirnzapfen wirksame Kraft sei 2000 kg, die Armlänge $B = 600$ mm und die Armdicke $b = 35$ mm. Welches sind die übrigen Abmessungen der Kurbel?

Zapfenstärke	$d =$	49,5 mm,
Zapfenlänge	$l =$	69,5 „
Armhöhe	$h =$	217,5 „

also die Armverjüngung $= \dfrac{h}{2} = 109$ mm.

§ 11.

Tragfähigkeit und Durchbiegung eines in zwei Punkten unterstützten Trägers.

Ein beiderseits frei aufliegender und belasteter Träger übt auf die Stützen einen gewissen Druck aus, den man sich ersetzt denken kann durch eine Kraft, die im Stützpunkt angreift und entgegengesetzt den äusseren Kräften wirkt und zwar so, dass der Träger dabei in gleicher Weise im Gleichgewicht gehalten wird, als wenn er in den Stützpunkten aufruhte. Diese von der Stütze auf den Träger ausgeübte Kraft nun nennt man auch die Auflager-Reaktion; ihre Grösse festzustellen, ist die zunächst liegende Aufgabe bei genannter Trägerlagerung.

Die auftretenden Spannungsmomente nennen wir rechtsdrehend, wenn dieselben eine Drehung im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers erstreben; für eine Drehung im entgegengesetzten Sinne heissen sie linksdrehend; erstere Momente führen wir als positiv, die letzteren als negativ in Rechnung ein.

Zwischen dem Moment Mm an irgend einer Stelle eines stetig belasteten Trägers und der hier auftretenden Vertikalkraft V als der Mittelkraft aller äusseren, auf Verschieben in vertikaler Richtung wirkenden Kräfte besteht eine äusserst wichtige Beziehung:

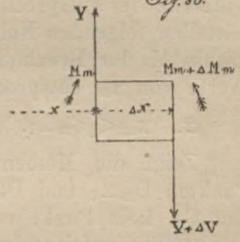
Denkt man sich nämlich zwei um eine unendlich kleine Strecke $\triangle x$ voneinander entfernte Querschnitte, so muss, wofern keine Unterbrechung in der Stetigkeit der Spannungen stattfindet, behufs Gleichgewicht, Fig. 80,

$$Mm + \triangle Mm = Mm + (V + \triangle V) \triangle x,$$

also unter Vernachlässigung von $\triangle V \cdot \triangle x$

$$V = \frac{\triangle Mm}{\triangle x}$$

Fig. 80.



sein. Wachsen nun von der betrachteten Stelle an die Momente, so ist die Differenz $\triangle Mm$ zweier aufeinanderfolgender Momente positiv; nehmen dagegen die Momente ab, so ist $\triangle Mm$ negativ. An der Uebergangsstelle vom Wachsen zum Fallen, wo also $\triangle Mm = 0$ ist, liegt das Maximalmoment, und da $\triangle x$ zwar unendlich klein, aber grösser als Null ist, so folgt aus obiger Beziehung auch:

$$V = 0,$$

d. h.:

das Maximalmoment, also auch der Bruchquerschnitt liegt da, wo die Scherkraft V gleich Null wird.

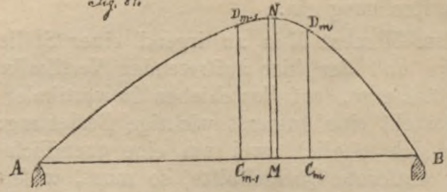
Stellt man daher von derselben Trägerseite aus zunächst die Werte der Scherkräfte für verschiedene Trägerpunkte fest, so ist der gefährliche Querschnitt zwischen den Querschnitten zu suchen, die für die Scherkräfte einen Zeichenwechsel ergeben. Die genaue Feststellung des Bruchquerschnittes erfolgt dann in der Weise, dass man für den Querschnitt in der Entfernung x_m die Grösse der Scherkraft bestimmt und diese gleich Null setzt, woraus sich dann der fragliche Wert von x_m ergibt.

Seien nun a_{m-1} und a_m die Abstände der beiden Angriffspunkte C_{m-1} und C_m zweier Einzellasten von A, für welche sich ein Zeichenwechsel der Scherkraft herausstellt, so können folgende 3 Fälle auftreten. Man hat gefunden:

1. $x_m > a_{m-1}$ und $< a_m$.

Konstruiert man für recht viele Trägerpunkte die Momentenkurve, so wird dieselbe aus einer Reihe von Kurvenstücken $D_{m-1} D_m$, Fig. 81, zusammengesetzt. Soll nun der gefährliche Querschnitt wirklich zwischen den den Punkten D_{m-1} und D_m entsprechenden Angriffspunkten C_{m-1} und C_m zweier Einzellasten liegen, so muss notwendig die Kurve von D_{m-1} aus bis zu einem gewissen Punkte N zwischen D_{m-1} und D_m steigen und dann von hier aus bis D_m fallen oder mit anderen Worten,

Fig. 81.

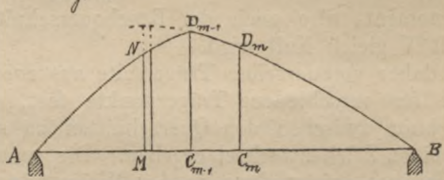


zwischen C_{m-1} und C_m muss ein Punkt M liegen, für welchen die Differenz der entsprechenden Ordinate der Momentenkurve und der unmittelbar folgenden Null ist. Es ist also dann M N das Maximalmoment, mithin M der Bruchquerschnitt. Dieser Fall würde demnach obigem Werte von x_m entsprechen.

2. $x_m < a_{m-1}$.

Zeigt die Momentankurve eine ständige Abnahme zwischen den Punkten D_{m-1} und D_m, Fig. 82, so besagt dies, dass zwischen C_{m-1} und C_m kein Punkt vorhanden ist, für welchen die Differenz zweier unmittelbar aufeinander folgender Ordinaten der Momentenkurve Null ist. Das Maximum der Ordinaten muss demnach ausserhalb $D_m D_{m-1}$ liegen, und die grösste hier in Betracht zu ziehende Ordinate ist in C_{m-1}, welcher Punkt demnach die Lage des Bruchpunktes angibt. Der unter 2 angegebene Werte von x_m wird daher diesem Falle entsprechen.

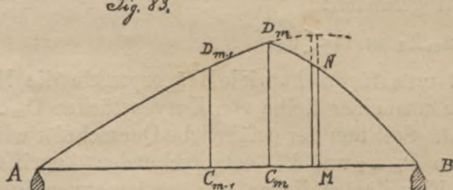
Fig. 82.



3. $x_m > a_m$.

Ganz in derselben Weise schliesst man, dass für letzteren Wert von x_m das Maximalmoment in D_m, Fig. 83, zu suchen ist.

Fig. 83.



Bei der Verwendung von Guss- oder Schmiedeeisen zu Trägern ist es nach § 5 von Wichtigkeit, vorher zu wissen, ob die elastische Linie Wendepunkte hat oder nicht. Für den Wendepunkt ist bekanntlich $\varrho = \infty$, daher nach Formel (27) auch:

$$S = 0$$

und somit nach Formel (30):

$$M\,m = 0.$$

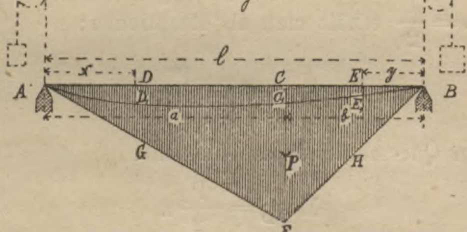
Ein Träger hat folglich nur dann Wendepunkte, wenn sich für die Momente, gebildet von derselben Seite des Trägers aus, ein Zeichenwechsel feststellen lässt. Die Lage des Wendepunktes folgt dann daraus, dass man das für einen Querschnitt im Abstande x_0 aufgestellte Moment gleich Null setzt und nun zusieht, ob sich für x_0 ein reeller, für den betreffenden Fall zulässiger Wert ergibt.

I. Der an den Enden unterstützte Träger sei durch eine Einzellast beansprucht.

Sind a und b, Fig. 84, die Entfernungen des Angriffspunktes C der Einzellast P von den Stützpunkten A und B und ist l die Länge des Trägers zwischen den Stützen, so folgt auf Grund der Hebelgesetze und mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Gleichgewichtslage für B und A als Drehpunkt, wenn man noch die Reaktionen selbst mit A und B bezeichnet:

$$(144)\qquad \begin{cases} A = P\,\dfrac{b}{l}, \\[2mm] B = P\,\dfrac{a}{l}. \end{cases}$$

Fig. 84.



Die Summe beider Reaktionen gibt P, was zeigt, dass eine Verschiebung in vertikaler Richtung nicht eintreten kann.

Das Biegungsmoment für eine beliebige Stelle D zwischen A und C in der Entfernung x von A ist:

$A = \frac{P \cdot b}{l}$

$$(145)\qquad M\,m_D = A\,x = P\,\frac{b}{l}\,x.$$

Ebenso ist das Moment für eine Stelle E zwischen B und C in der Entfernung y von B:

$$\mathrm{M\,m_E} = -\,\mathrm{B\,y} = -\,\mathrm{P}\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{l}}\,\mathrm{y}. \tag{146}$$

Beide Werte werden, absolut genommen, am grössten für $x = a$ und $y = b$, daher das Maximalmoment:

$$\mathrm{M\,m_c} = \mathrm{P}\,\frac{\mathrm{a\,b}}{\mathrm{l}}. \tag{147}$$

Die Abmessungen des gefährlichen Querschnittes C sind mithin zu besimmen aus:

$$\mathrm{W} = \mathrm{P}\,\frac{\mathrm{a\,b}}{\mathrm{l\,S}}, \tag{148}$$

und die Tragfähigkeit folgt aus:

$$\mathrm{P} = \mathrm{W\,S}\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a\,b}}. \tag{149}$$

Aus Formel (145) und (147), sowie (146) und (147) ergibt sich:

$$\mathrm{M\,m_D} : \mathrm{M\,m_c} = \mathrm{x} : \mathrm{a}$$

und:

$$\mathrm{M\,m_E} : \mathrm{M\,m_c} = \mathrm{y} : \mathrm{b}.$$

Trägt man folglich auf einer zur Kraftrichtung parallelen und durch C gehenden Geraden von C aus das Moment $\mathrm{P}\,\frac{\mathrm{a\,b}}{\mathrm{l}}$ ab und verbindet den Endpunkt F mit A und B, so ist die Gebrochene A F B die Momentenkurve, daher die Vertikale D G und E H das Moment in D bezw. E.

Für $a = b = \frac{l}{2}$ erhält man als Reaktionen:

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \frac{\mathrm{P}}{2}; \tag{150}$$

weiter für einen Querschnitt D das Moment:

$$\mathrm{M\,m_D} = \frac{\mathrm{P}}{2}\,\mathrm{x} \tag{151}$$

und für das Maximalmoment, in der Trägermitte gelegen:

$$\mathrm{M\,m} = \mathrm{P}\,\frac{\mathrm{l}}{4}. \tag{152}$$

Demnach sind die Querschnittsdimensionen zu bestimmen aus:

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{P\,l}}{4\,\mathrm{S}}, \tag{153}$$

sowie die Tragfähigkeit nach:

(154) $$P = \frac{4\,W\,S}{l},$$

also das Vierfache der Tragfähigkeit eines Trägers, der an einem Ende eingeklemmt und am anderen belastet ist.

Setzt man in Formel (147) $a = \frac{l}{2} - z$ und also $b = \frac{l}{2} + z$, so folgt: $a\,b = \frac{l^2}{4} - z^2$. Das Bruchmoment erreicht daher den grössten Wert für $z = 0$, d. h. die Tragkraft unseres Trägers ist, wenn die Einzellast in der Mitte hängt, kleiner, als wenn die Last an irgend einem anderen Punkte zwischen A und B angreift.

Zur Ermittelung der Biegungsverhältnisse können wir uns vorstellen, der Träger sei im Punkte D_1 der elastischen Linie unter dem Winkel β gegen den Horizont festgeklemmt, das Stück $A\,D_1$ sei also ein Freiträger, dessen Momentenfläche die Fläche $A\,D\,G$ ist. Es ist demnach die allgemeine Gleichung der elastischen Linie für den Teil $A\,C$ des Trägers $A\,B$ nach Formel (87) und der Anmerkung zu § 9:

$$z = \beta\,x + \frac{1}{E\,I} \cdot \Sigma\,M\,m_k\,e\,u_k.$$

Ist Θ der Winkel zwischen der Tangente in A und C_1 an die elastische Linie, α_c der Winkel der Tangente in C_1 gegen die Horizontale, sowie φ der Winkel zwischen der Tangente in A und D_1, so ist:

$$\beta = \Theta - \varphi - \alpha_c.$$

Es ist aber:

$$\Theta = \frac{1}{E\,I}\,P\,\frac{b}{l}\,a \cdot \frac{a}{2} = P\,\frac{a^2\,b}{2\,E\,I\,l}$$

und:

$$\varphi = \frac{1}{E\,I} \cdot P\,b\,x\,\frac{x}{2} = P\,\frac{b\,x^2}{2\,E\,I\,l};$$

weiter ist:

$\Sigma\,M\,m_k\,e \cdot u_k$ = Moment der Momentenfläche $A\,D\,G$, bezogen auf A =

$$P\,\frac{b}{l}\,x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{3}\,x = P\,\frac{b\,x^3}{3\,l}.$$

Daher folgt für die Strecke $A\,C$:

$$z = -\,\alpha_c\,x + P\,\frac{a^2\,b^2}{6\,E\,I\,l}\left(\frac{3\,x}{b} - \frac{x^3}{a^2\,b}\right)$$

und:

$$\beta = -\,\alpha_c + \frac{P\,b}{2\,E\,I\,l}\,(a^2 - x^2).$$

Ist ebenso Θ_1 der Winkel zwischen den Tangenten in B und C_1 an die elastische Linie, so wie φ_1 der Winkel zwischen den Tangenten in B und E_1, so ist der Winkel der Tangente in E_1 gegen die Horizontale:

$$\beta_1 = \Theta_1 - \varphi_1 + \alpha_c,$$

dabei ist:

$$\Theta_1 = P \frac{a\,b^2}{2\,E\,I\,l}$$

und:

$$\varphi_1 = \frac{P \cdot a\,y^2}{2\,E\,I\,l},$$

und man erhält für die Strecke B C allgemein:

$$z_1 = + \alpha_c\,y + \frac{P\,a^2\,b^2}{6\,E\,I\,l}\left(\frac{3\,y}{a} - \frac{y^3}{a\,b^2}\right)$$

und:

$$\beta_1 = + \alpha_c + \frac{P\,a}{2\,E\,I\,l}(b^2 - y^2).$$

Für $x = a$ und $y = b$ wird $z = z_1$ und also:

$$-\alpha_c\,a + \frac{P\,a^3\,b}{3\,E\,I\,l} = + \alpha_c\,b + \frac{P\,a\,b^3}{3\,E\,I\,l},$$

woraus:

$$\alpha_c = \frac{P\,a\,b}{3\,E\,I\,l}(a - b). \tag{155}$$

Diesen Wert eingeführt, gibt schliesslich für die Strecke A C:

$$z = \frac{P\,a^2\,b^2}{6\,E\,I\,l}\left(\frac{2\,x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2\,b}\right) \tag{156}$$

und:

$$\beta = \frac{P\,ab}{6\,E\,I\,l}\left(a + 2\,b - \frac{3\,x^2}{a}\right), \tag{157}$$

sowie für die Strecke B C:

$$z_1 = \frac{P\,a^2\,b^2}{6\,E\,I\,l}\left(\frac{y}{a} + \frac{2\,y}{b} - \frac{y^3}{a\,b^2}\right) \tag{158}$$

und:

$$\beta_1 = \frac{P\,a\,b}{6\,E\,I\,l}\left(2\,a + b - \frac{3\,y^2}{b}\right). \tag{159}$$

Die Durchsenkung des Trägers in C ergibt sich aus Formel (156) und (158) für $x = a$, bezw. $y = b$ zu:

$$s_c = P \frac{a^2\,b^2}{3\,E\,I\,l}. \tag{160}$$

Setzt man x und $y=0$, so geben die Formeln (157) und (159) die Winkel, welche die elastische Linie in den Stützpunkten mit der Horizontalen einschliesst und zwar:

(161) $$\alpha_A = P \frac{a\,b}{6\,E\,I\,l}(a+2\,b)$$

und:

(162) $$\alpha_B = P \frac{a\,b}{6\,E\,I\,l}(2\,a+b).$$

Die grösste Senkung liegt nicht in C, wofern P ausserhalb der Trägermitte angreift, da ja sonst $\alpha_c = 0$ sein müsste.

Um nun die Lage dieses Punktes anzugeben, setze man den Wert für den Neigungswinkel der elastischen Linie in der grösseren Strecke, hier also $\beta = 0$; man findet dann durch Auflösung dieser Gleichung nach x den diesen fraglichen Punkt bestimmenden Wert von $x_s = \sqrt{\frac{a\,(a+2\,b)}{3}}$ und hierdurch, wenn man nun letzteren Wert in Formel (156) einführt, die gesuchte grösste Senkung:

(163) $$s = P \frac{a\,b\,(a+2\,b)}{9\,E\,I\,l}\sqrt{\frac{a\,(a+2\,b)}{3}}.$$

Greift die Last P in der Mitte an, so gehen die letzteren Formeln über in:

(164) $$z = P \frac{l^3}{48\,E\,I}\left(\frac{3\,x}{l} - \frac{4\,x^3}{l^3}\right)$$

und:

(165) $$\beta = P \frac{l^2}{16\,E\,I}\left(1 - \frac{4\,x^2}{l^2}\right),$$

sowie:

(166) $$\alpha_A = \alpha_B = P \frac{l^2}{16\,E\,I}$$

und:

(167) $$s = P \frac{l^3}{48\,E\,I}.$$

II. Der an den Enden unterstützte Träger sei über seine ganze Länge gleichmässig belastet.

Die Reaktionen in den Stützen sind:

(168) $$A = B = \frac{Q}{2}.$$

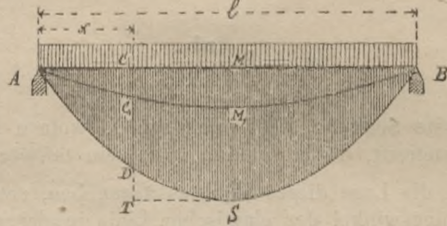
Für einen beliebigen Querschnitt C, Fig. 85, in der Entfernung x von einer Stütze ist das Kraftmoment für q als Belastung auf die Längeneinheit:

(94) – (93)

(169) $$M\,m_c = \frac{Q}{2}\,x - q\,\frac{x^2}{2} = \frac{Q}{2\,l}\,x\,(l - x).$$

$q = \frac{Q}{l}$

Fig. 85.



Da für die Trägermitte die Scherkraft $V = 0$ ist, so liegt hier der gefährliche Querschnitt, und das M a x i m a l m o m e n t hat den Wert:

(170) $$M\,m_M = \frac{Q\,l}{8},$$

mithin das erforderliche Widerstandsmoment zu bestimmen durch:

(171) $$W = \frac{Q\,l}{8\,S},$$

sowie die Tragfähigkeit aus:

(172) $$Q = \frac{8\,W\,S}{l},$$

ein d o p p e l t so grosser Wert als einem gleichlangen Träger bei einer in der Mitte angehängten Einzellast zukommt.

Die Formeln (169) und (170) geben:

$$M\,m_c : M\,m_M = x\,(l - x) : \frac{l^2}{4}.$$

Die Momentenkurve ist mithin eine durch A und B gehende P a r a b e l, deren Hauptachse die Vertikale durch die Mitte des Trägers ist; denn verlegt man den Koordinatenanfang von den Stützen nach dem Punkte der durch die Mitte gehenden Vertikalen, welcher durch $x_1 = \frac{l}{2} - x$ und durch $y_1 = M\,m_M - M\,m_c = \frac{Q\,l}{8} - y$ bestimmt ist, so folgt aus obiger Beziehung:

$$\frac{Q\,l}{8} - y_1 : \frac{Q\,l}{8} = \left(\frac{l}{2} - x_1\right)\left(\frac{l}{2} + x_1\right) : \frac{l^2}{4}$$

und hieraus die Scheitelgleichung der Parabel:

$$x_1^2 = \frac{2\,l}{Q}\,y_1 = \frac{2}{q}\,y_1,$$

deren Parameter $\frac{2}{q}$ ist.

Das Stück $A C_1$ des gebogenen Trägers lässt sich auch hier ansehen als ein bei C_1 unter dem Winkel β gegen den Horizont eingeklemmter Freiträger, dessen Momentenfläche die Fläche ACD ist; demnach ist die allgemeine Gleichung der elastischen Linie nach Formel (87) und der Anmerkung zu § 9:

$$z = \beta x + \frac{1}{EI} \Sigma M m_k e u_k.$$

Es ist aber:

$$\beta = \alpha - \varphi,$$

wenn α und φ die Winkel zwischen den Tangenten in den Punkten A und M_1 bezw. in den Punkten A und C_1 der elastischen Linie sind, folglich:

$$\beta = \frac{\text{Fläche}\,(AMS - ACD)}{EI} = \frac{AMS - \{AMS - (MSTC - STD)\}}{EI}$$

$$= \frac{MSTC - STD}{EI} = \frac{1}{EI}\left\{\frac{Ql}{8}\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{1}{3}\left[\frac{Ql}{8} - \frac{Qx}{2l}(l-x)\right]\left(\frac{l}{2} - x\right)\right\}.$$

Führt man dies weiter aus und berücksichtigt, dass mit Bezug auf A

$$\Sigma M m_k \cdot e \cdot u_k = \frac{2}{3} \cdot \frac{Ql}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Ql}{8}\left(\frac{l}{2} - x\right)\left(\frac{\frac{l}{2} - x}{2} + x\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\left[\frac{Ql}{8} - \frac{Qx}{2l}(l-x)\right]\left(\frac{l}{2} - x\right)\left[\frac{1}{4}\left(\frac{l}{2} - x\right) + x\right]$$

$$= \frac{Ql^3}{24}\left(\frac{4x^3}{l^3} - \frac{3x^4}{l^4}\right)$$

ist, so erhält man für die Senkung:

$$z = \frac{Ql^3}{24EI}\left(\frac{x}{l} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right) \tag{173}$$

und für die Neigung:

$$\beta = \frac{Ql^3}{24EI}\left(\frac{1}{l} - \frac{6x^2}{l^3} + \frac{4x^3}{l^4}\right). \tag{174}$$

Für $x = \frac{l}{2}$ folgt nun für die grösste Senkung aus Formel (173):

$$s = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{EI}, \tag{175}$$

und für $x = 0$ erhält man nach Formel (174) für die Neigung der elastischen Linie in den Stützpunkten gegen den Horizont:

$$\alpha_A = \alpha_B = \frac{Ql^2}{24EI}. \tag{176}$$

III. Der an beiden Enden unterstützte Träger sei durch eine Einzellast P, sowie gleichmässig belastet.

In den Stützpunkten A und B herrschen die Drucke:

$$(177)\qquad \begin{cases} A = P\dfrac{b}{l} + \dfrac{Q}{2}, \\[2ex] B = P\dfrac{a}{l} + \dfrac{Q}{2}, \end{cases}$$

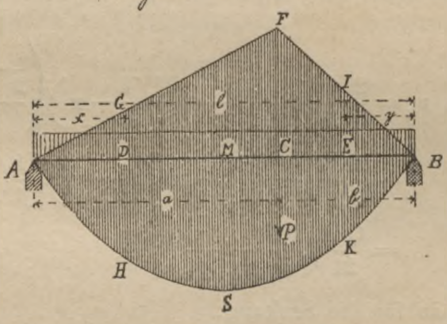
und es ist das Biegungsmoment in einem Punkt D zwischen A und dem Angriffspunkt C der Einzellast, Fig. 86:

$$(178)\qquad M\,m_D = A\,x - \frac{q\,x^2}{2} = P\,\frac{b}{l}\,x + \frac{Q}{2\,l}\,x\,(l - x),$$

sowie in einem Punkte E zwischen B und C:

$$(179)\qquad M\,m_E = -B\,y + \frac{q\,y^2}{2} = -\left[P\,\frac{a}{l}\,y + \frac{Q}{2\,l}\,y\,(l - y)\right].$$

Fig. 86.



Aus beiden Werten folgt für $x = a$, bezw. $y = b$ als Moment in C, absolut genommen:

$$(180)\qquad M\,m_C = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{a\,b}{l}.$$

→ (l-x)=(l-a)=b

x=a

Die Momente $M\,m_D$ und $M\,m_E$ werden für den Punkt zu einem absoluten Maximum, für welchen die Scherkraft

$$V = \left(P\,\frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right) - q\,x_m \text{ bezw. } \left(P\,\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}\right) - q\,y_m$$

gleich Null wird, also für die Werte:

$$(181)\qquad \begin{cases} x_m = \dfrac{P\,b}{Q} + \dfrac{l}{2}, \\[2ex] y_m = \dfrac{P\,a}{Q} + \dfrac{l}{2}, \end{cases}$$

woran aber die Bedingung haftet:

$$x_m < a$$

und:

$$y_m < b.$$

Nehmen wir an, es sei:

$a > b$, also auch $a > \frac{l}{2}$, so sehen wir aus dem Werte von y_m, dass zwischen B und C kein Bruch stattfinden kann; zugleich besagt der Wert von x_m, dass dieser Bruch über die Mitte M des Trägers hinaus liegen muss, also zwischen M und C; mithin hier:

$$x_m < a$$

oder:

$$P \frac{b}{Q} + \frac{l}{2} < a,$$

oder:

$$\frac{P}{Q} < \frac{a - b}{2\,b}$$

die Bedingung, dass der Bruchquerschnitt zwischen M und C liegt.

Setzt man für diesen Fall den Wert von x_m in Formel (178) ein, so folgt als Maximalmoment:

$$M\,m_M = \left(\frac{P\,b}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 \frac{l}{2\,Q} = A^2 \frac{l}{2\,Q}. \tag{182}$$

Ergibt sich aber:

$$\frac{P}{Q} \geqq \frac{a - b}{2\,b},$$

so muss der Bruch in C eintreten, da das Gesagte über x_m bestehen bleibt, während nun $x_m < a$ nicht mehr gilt.

Ist dagegen:

$a < b$, so folgt in gleicher Weise:

$$\frac{P}{Q} < \frac{b - a}{2\,a}$$

als Bedingung für den Bruch zwischen B und C. Das Maximalmoment ist dann nach Formel (179), wenn man nun den Wert von y_m einführt, absolut genommen:

$$M\,m_M = \left(P \frac{a}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 \frac{l}{2\,Q} = B^2 \frac{l}{2\,Q}. \tag{183}$$

Ist $a = b = \frac{l}{2}$, so ist:

$$A = B = \frac{P + Q}{2} \tag{184}$$

und also:

$$(185) \qquad M\,m_D = \frac{P}{2}\,x + \frac{Q}{2\,l}\,x\,(l - x),$$

sowie das in der Trägermitte nun auftretende **Bruchmoment**:

$$(186) \qquad M\,m_M = \frac{P + Q}{2} \cdot \frac{l}{4}.$$

Auf graphischem Wege erhält man das Moment an irgend einer Stelle des Trägers, wenn man für die Einzellast und die gleichmässige Belastung die Momentenkurve konstruiert; erstere gibt die gebrochene A F B und letztere das Parabelsegment A S B. Das Moment in D und E z. B. ist dann die zu A B Senkrechte G H bezw. I K.

Das Maximalmoment ergibt sich, wenn man obiges x_m und y_m von A bezw. B aus abträgt.

Die Durchbiegung und Neigung findet sich durch Summierung der bezüglichen Werte für jede der beiden Belastungsarten, daher für die Strecke A C:

$$(187) \qquad z = P\,\frac{a^2\,b^2}{9\,E\,I\,l}\left(\frac{2\,x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2\,b}\right) + Q\,\frac{l^3}{24\,E\,I}\left(\frac{x}{l} - \frac{2\,x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)$$

und:

$$(188) \qquad \beta = P\,\frac{a\,b}{6\,E\,I\,l}\left(a + 2\,b - \frac{3x^2}{a}\right) + Q\,\frac{l^3}{24\,E\,I}\left(\frac{1}{l} - \frac{6\,x^2}{l^3} + \frac{4\,x^3}{l^4}\right),$$

sowie für die Strecke B C:

$$(189) \qquad z_1 = P\,\frac{a^2\,b^2}{6\,E\,I\,l}\left(\frac{y}{a} + \frac{2\,y}{b} - \frac{y^3}{a\,b^2}\right) + \frac{Q\,l^3}{24\,E\,I}\left(\frac{y}{l} - \frac{2\,y^3}{l^3} + \frac{y^4}{l^4}\right)$$

und:

$$(190) \qquad \beta_1 = P\,\frac{a\,b}{6\,E\,I\,l}\left(2\,a + b - \frac{3\,y^2}{b}\right) + \frac{Q\,l^3}{24\,E\,I}\left(\frac{1}{l} - \frac{6\,y^2}{l^3} + \frac{4\,y^3}{l^4}\right).$$

Lage und Grösse der Maximaleinsenkung erhält man, wenn man wie in I verfährt.

Liegt der Angriffspunkt der Einzellast in der Mitte, so folgt:

$$(191) \qquad z = P\,\frac{l^3}{48\,E\,I}\left(\frac{3\,x}{l} - \frac{4\,x^3}{l^3}\right) + \frac{Q\,l^3}{24\,E\,I}\left(\frac{x}{l} - \frac{2\,x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)$$

und:

$$(192) \qquad \beta = P\,\frac{l^2}{16\,E\,I}\left(1 - \frac{4\,x^2}{l^2}\right) + \frac{Q\,l^3}{24\,E\,I}\left(\frac{1}{l} - \frac{6\,x^2}{l^3} + \frac{4\,x^3}{l^4}\right).$$

Die Maximalsenkung, welche hier in der Trägermitte liegt, ergibt sich zu:

$$(193) \qquad s = \frac{l^3}{48\,E\,I}\left(P + \frac{5}{8}\,Q\right)$$

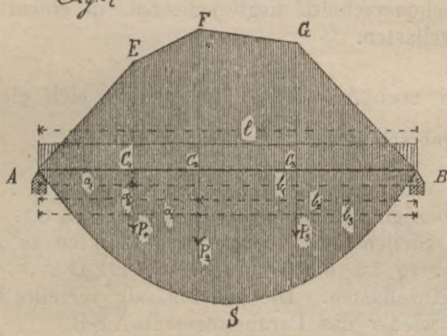
und die Neigung in den Stützpunkten:

$$(194) \qquad \alpha_A = \alpha_B = \frac{l^2}{8EI}\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{3}\right).$$

IV. Der an beiden Enden unterstützte Träger sei ausser durch mehrere Einzellasten noch gleichmässig durck Q belastet.

Seien a_1, a_2, a_3 ... und b_1, b_2, b_3 ..., Fig. 87, die Abstände der Einzellasten von dem Stützpunkt A bezw. B, so herrschen in letzteren Punkten die Reaktionen:

Fig. 87



$$(195) \qquad \begin{cases} A = \sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k \dfrac{b_k}{l} + \dfrac{Q}{2}, \\ B = \sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k \dfrac{a_k}{l} + \dfrac{Q}{2}. \end{cases}$$

Für einen Punkt D in der Abteilung $C_{m-1} C_m$ ist das Moment:

$$(196) \qquad M m_D = A x - \sum_{k=1}^{k=m-1} P_k (x - a_k) - q \frac{x^2}{2}$$

$$= (A - \sum_{k=1}^{k=m-1} P_k)\, x - \frac{Q}{2l} x^2 + \sum_{k=1}^{k=m-1} P_k a_k,$$

und die hier herrschende vertikale Schubkraft hat den Wert:

$$(197) \qquad V_D = A - \sum_{k=1}^{k=m-1} P_k - \frac{Q}{l} x.$$

Die Bestimmung der Lage und Grösse des Maximalmomentes geschieht auf Grund des in der Einleitung zu diesem Paragraphen Gesagten.

Berücksichtigt man die gleichmässige Belastung nicht, setzt also $Q = 0$, so geht Formel (195) über in:

$$(198)\qquad \begin{cases} A = \sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k \dfrac{b_k}{l}, \\ B = \sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k \dfrac{a_k}{l}. \end{cases}$$

Weiter gibt Formel (196):

$$(199)\qquad M m_D = \left(A - \sum_{k=1}^{k=m-1} P_k\right) x - \sum_{k=1}^{k=m-1} P_k a_k,$$

welcher Ausdruck für $x = a_m$ zu einem Maximum wird, d. h.:

Ein Bruchquerschnitt liegt jedesmal in einem Angriffspunkte der Einzellasten.

Wird dabei noch $A = \sum\limits_{k=1}^{k=m-1} P_k$, so ergeben sich gleich grosse Momente für alle Querschnitte zwischen C_{m-1} und C_m.

Trägt man von den Angriffspunkten C_1, C_2, C_3 . . . der Einzellasten aus die bezüglichen Momente $C_1 E$, $C_2 F$, $C_3 G$ . . . der Einzellasten für diese Stellen auf die in diesen Punkten zu A B errichteten Senkrechten ab, so ist die Gebrochene A E F G . . . die Momentenkurve für die Einzellasten. Die gleichmässig verteilte Last Q gibt als Momentenkurve wieder das Parabelsegment A S B.

Was die Biegungsverhältnisse anbetrifft, so lassen sich diese für die Einzellasten ähnlich wie in I für die durch diese Kräfte angegebenen Felder bestimmen, wobei dann zur Feststellung der totalen Biegung in einem Punkte die gleichmässige Belastung für diese Stelle schliesslich noch nach II in Rechnung gezogen werden muss.

Da aber die Kenntnis der Maximaldurchbiegung von grossem Interesse ist, so werde in folgendem noch auf eine bemerkenswerte Beziehung zwischen der elastischen Linie und der vertikalen Scherkraft an irgend einer Stelle eines auf zwei Stützen ruhenden und irgendwie belasteten Trägers aufmerksam gemacht, wodurch sich Lage und Grösse der Maximaldurchbiegung in jedem bestimmten Falle leicht angeben lassen.

Setzen wir im Gegensatze zu einer Einzel- oder konzentrierten Belastung eine nach irgend einem Gesetze über den Träger stetig verteilte, sog. kontinuierliche Belastung voraus, deren obere Begrenzungskurve Belastungskurve genannt werde; die zwischen letzterer und der Trägerachse liegende Fläche heisse kurz Belastungsfläche.

Sei nun F der Inhalt des Stückes A D C, Fig. 88, der Belastungsfläche, a die Entfernung des Schwerpunktes dieser Fläche von der Stütze A, so ist das äussere Kraftmoment für den Querschnitt C im Abstand x von A.

$$Mm = Ax - F(x - a) = Vx + Fa,$$

da A — F die in C auftretende vertikale Scherkraft bedeutet.

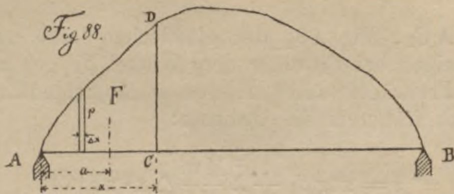


Fig. 88.

Zerlegt man nun diese Fläche in vertikale Streifen von der Breite $\triangle x$, so ist der Inhalt eines solchen Elementarstreifens $p \triangle x$ und das Moment desselben, bezogen auf A, allgemein $p \triangle x \cdot x$; demnach auch:

$$Fa = \sum_{0}^{x} p \triangle x \cdot x,$$

sowie:

$$Mm = Vx + \sum_{0}^{x} p \triangle x \cdot x.$$

Gibt die über AB, Fig. 89, gezeichnete Kurve die Momentenkurve an und konstruiert man für den Querschnitt C und den unmittelbar hinter C folgenden Querschnitt die Momente Mm und Mm_1, so ist die Verbindungslinie ab der beiden Endpunkte a und b der letzteren die Tangente an die Momentenkurve in C, folglich, wenn β der Winkel dieser Tangente mit der Horizontalen ist:

$$\frac{Mm_1 - Mm}{\triangle x} = \frac{\triangle Mm}{\triangle x} = tg\,\beta.$$

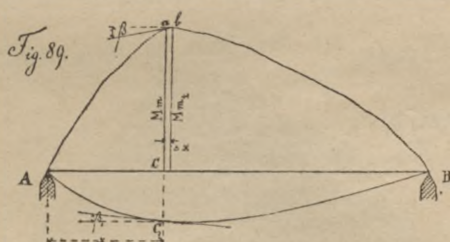


Fig. 89.

Wir fanden aber oben auch:

$$\frac{\triangle Mm}{\triangle x} = V,$$

mithin:

$$V = tg\,\beta.$$

Für das Biegungsmoment erhalten wir daher auch:

$$\text{(200)} \qquad M\,m = x \operatorname{tg} \beta + \sum_0^x p \triangle x \cdot x.$$

Das Stück $A\,C_1$, Fig. 89, der elastischen Linie unseres Trägers können wir als einen bei C_1 unter dem Winkel β_1 gegen den Horizont eingeklemmten Freiträger ansehen, dessen Momentenfläche $A\,C\,a$ ist; demnach ist nach früherem die Ordinate:

$$z = x \operatorname{tg} \beta_1 + \sum_0^x \frac{M\,m}{E\,I} \triangle x \cdot x.$$

Letzterer Wert folgt aber auch aus Formel (200), wenn wir p durch $\frac{M\,m}{E\,I}$ ersetzen, und wir haben daher:

> Die elastische Linie ist die Momentenkurve für eine Belastungsfläche, deren Ordinate die durch E I dividierten Biegungsmomente sind.

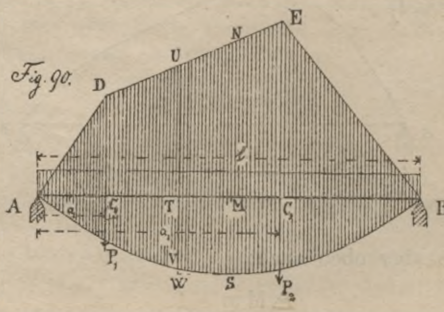
Auf Grund dieser neuen Auffassung der elastischen Linie ist nun $\operatorname{tg} \beta_1$ oder β_1 bei sehr kleinem Winkel, was ja immer vorauszusetzen ist, die durch die Belastungsfläche hervorgerufene vertikale Scherkraft. Da wo letztere Null wird, ist die grösste Durchbiegung der elastischen Linie zu suchen.

Sind E und I konstant, so braucht man nicht $\frac{M\,m}{E\,I}$, sondern nur M m als Ordinate der Belastungsfläche zu nehmen; der für s gefundene Wert ist dann nur durch E I zu dividieren.

Sei z. B. Fig. 90:

$$P_1 = 3000 \text{ kg}, \; P_2 = 5000 \text{ kg}, \; Q = 4500 \text{ kg},$$
$$l = 5{,}5 \text{ m}, \; a_1 = 1 \text{ m und } a_2 = 3{,}5 \text{ m}.$$

Fig. 90.



Wir konstruieren die den Einzellasten P_1 und P_2, sowie die der gleichmässigen Belastung Q entsprechenden Momentenflächen A D E B und A S B.

Für die Einzellasten ist die Reaktion in A:

$$A = \frac{5000 \cdot 2 + 3000 \cdot 4{,}5}{5{,}5} = 4272{,}727 \text{ kg};$$

folglich das Moment $C_1 D$:

$$M\, m_{C_1} = 4272{,}727 \text{ kgm},$$

das Moment $C_2 E$:

$$M\, m_{C_2} = 4272{,}727 \cdot 3{,}5 - 3000 \cdot 2{,}5 = 7454{,}544 \text{ kgm}$$

und das Moment $M N$ in der Balkenmitte:

$$M\, m_M = 4272{,}727 \cdot 2{,}75 - 3000 \cdot 1{,}75 = 6500 \text{ kgm}.$$

Sehen wir nun beide Momentenflächen als Belastungsflächen an, so ist die dem Belastungspolygon $A D E B$ entsprechende Reaktion:

$$A_1 = \frac{1}{l} \Big\{ B E C_2 \cdot \frac{2}{3}\left(l - \frac{a}{2}\right) + C_2 E D C_1 \Big[l - \frac{a}{2}$$

$$+ \left(\frac{a_2 - a_1}{3}\right)\left(\frac{2 C_1 D + C_2 E}{C_1 D + C_2 E}\right)\Big] + C_1 D A \left(l - a_1 + \frac{a_1}{3}\right)\Big\}$$

$$= \frac{1}{5{,}5} \Big\{ 2\left(\frac{7454{,}544}{2}\right)\frac{2}{3} \cdot 2 + \left(\frac{7454{,}544 + 4272{,}727}{2}\right) 2{,}5 \cdot \Big[2$$

$$+ \frac{2{,}5}{3}\left(\frac{2 \cdot 4272{,}727 + 7454{,}544}{4272{,}727 + 7454{,}544}\right)\Big] + \frac{1 \cdot 4272{,}727}{2}\left(4{,}5 + \frac{1}{3}\right)\Big\}$$

$$= 12045{,}442 \text{ kgm}^2.$$

Die der gleichmässigen Belastung entsprechende Reaktion A_2 ist der halbe Inhalt der Parabelfläche $A S B$, also:

$$A_2 = \frac{2}{3} \cdot M S \cdot A M = \frac{2}{3} \cdot \frac{4500 \cdot 5{,}5}{8} \cdot \frac{5{,}5}{2} = 5671{,}875 \text{ kgm}^2,$$

demnach:

$$A^1 = A_1 + A_2 = 17717{,}317 \text{ kgm}^2.$$

Der Inhalt der Fläche $A D N S$ ist:

$$\frac{4272{,}727}{2} + \frac{4272{,}727 + 6500}{2} \cdot 2{,}5 + 5671{,}875 = 21274{,}147 \text{ kgm}^2,$$

also um $3556{,}83$ kgm² grösser als A^1. Die grösste Durchbiegung liegt folglich zwischen A und der Mitte M des Trägers. Ist T diese Stelle, so muss

$$M N U T + M S V T = 3556{,}83,$$

oder $MT = u$ gesetzt,

$$\frac{MN + TU}{2} \cdot u + MSWT - SVW = 3556{,}83$$

sein. Es ist aber:

$$MN = 6500,$$

$$TU = A\left(\frac{l}{2} - u\right) - P_1\left(\frac{l}{2} - a_1 - u\right) = 4272{,}727\,(2{,}75 - u)$$

$$+ 3000\,(1{,}75 - u) = 6500 - 1272{,}727\,u,$$

$$MSWT = \frac{4500 \cdot 5{,}5}{8}\,u = 3093{,}75\,u,$$

$$SVW = \frac{1}{3}SW \cdot VW = \frac{u}{3}(MS - TV) = \frac{u}{3}\left\{3093{,}75 - \frac{4500}{2}\left(\frac{5{,}5}{2} - u\right)\right.$$

$$\left. + \frac{4500}{2 \cdot 5{,}5}\left(\frac{5{,}5}{2} - u\right)^2\right\} = 136{,}363\,u^3.$$

Diese Werte eingeführt, gibt:

$$\frac{6500 + 6500 - 1272{,}727\,u}{2}\,u + 3093{,}75\,u - 136{,}363\,u^3 = 3556{,}83;$$

daraus folgt:

$$u = 0{,}381 \text{ m};$$

daher:

$$AT = 2{,}75 - 0{,}381 = 2{,}369 \text{ m}.$$

Nun ist:

$$TU = 6500 - 1272{,}727 \cdot 0{,}381 = 6015{,}091 \text{ kgm}^2,$$

mithin das statische Moment der Fläche ADUT, bezogen auf T:

$$\frac{4272{,}727 \cdot 1}{2}\left(\frac{1}{3} + 1{,}369\right)$$

$$+ \frac{6015{,}091 + 4272{,}727}{2} \cdot 1{,}369 \cdot \frac{2 \cdot 4272{,}727 + 6015{,}091}{4272{,}727 + 6015{,}091} \cdot \frac{1{,}369}{3}$$

$$= 8184{,}225 \text{ kgm}^2.$$

Die in T durch die Einzellasten hervorgerufene Biegung ist deshalb:

$$s_1 = \frac{8184{,}225}{EI}.$$

Die durch die gleichmässige Belastung erzeugte Durchbiegung in T ist nach Formel (173):

$$s_2 = \frac{4500}{24\,EI} \cdot 5{,}5 \left\{ \frac{2{,}369}{5{,}5} - \frac{2 \cdot 2{,}369^3}{5{,}5^3} + \frac{2{,}369^4}{5{,}5^4} \right\} = \frac{9524{,}705}{EI};$$

daher die totale Senkung in T:

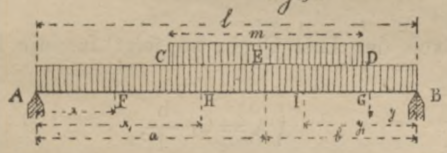
$$s = s_1 + s_2 = \frac{17708{,}93}{EI}\,\mathrm{m}.$$

V. Der an beiden Enden unterstützte Träger sei ausser durch eine gleichmässig verteilte Last Q noch durch eine über die Strecke m gleichmässig verteilte Last Q_1 beansprucht.

Sind a und b, Fig. 91, die Entfernungen der Mitte E der Last Q_1 von den Stützpunkten, so sind die Reaktionen in letzteren Punkten:

$$(201) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{Q}{2} + \frac{Q_1\,b}{l}, \\ B &= \frac{Q}{2} + Q_1\,\frac{a}{l}. \end{aligned} \right.$$

Fig. 91.



Für einen Querschnitt F zwischen A und C ist das Moment:

$$(202) \qquad M\,m_F = A\,x - \frac{q\,x^2}{2} = \frac{Q}{2\,l}\,x\,(l - x) + Q_1\,\frac{b}{l}\,x$$

und für einen Querschnitt G zwischen B und D:

$$(203) \qquad M\,m_G = -\left[\frac{Q\,y}{2\,l}(l - y) + Q_1\,\frac{a}{l}\,y\right].$$

Betrachten wir einen Querschnitt H zwischen C und der Mitte E der Last Q_1, so ist dagegen das Moment:

$$M\,m_H = A\,x_1 - q\,\frac{x_1^2}{2} - q_1\,\frac{HC^2}{2}.$$

Aber $HC = AH - AC = x_1 - (AE - CE) = x_1 - a + \frac{m}{2}$.

Dies eingeführt, gibt:

$$(204) \qquad M\,m_H = Q\,\frac{x_1}{2\,l}(l - x_1) + Q_1 \left\{ \frac{b}{l}\,x_1 - \frac{\left(x_1 - a + \frac{m}{2}\right)^2}{2\,m} \right\}.$$

Ebenso findet man für einen Querschnitt I zwischen D und E:

$$(205) \qquad M\,m_I = -\left[\frac{Q\,y^1}{2\,l}(l - y_1) + Q_1\left\{\frac{a}{l}\,y_1 - \frac{\left(y_1 - b + \frac{m}{2}\right)^2}{2\,m}\right\}\right].$$

Für die Stelle E erhält man nun das absolute Biegungsmoment, wenn man in den beiden letzteren Formeln $x_1 = a$ und $y_1 = b$ setzt, also:

$$(206) \qquad M\,m_E = Q\,\frac{a\,b}{l} + Q_1\left(\frac{a\,b}{l} - \frac{m}{8}\right).$$

Das Maximalmoment ist da zu suchen, wo die Scherkraft

$$V = \frac{Q}{2} + \frac{Q_1\,b}{l} - \frac{Q}{l}\,x_m - \frac{Q_1}{m}\left(x_m - a + \frac{m}{2}\right)$$

gleich Null wird, mithin in einer Entfernung von A gleich:

$$(207) \qquad x_m = \frac{Q\,m\,l + 2\,Q_1\left\{m\,b + l\left(a - \frac{m}{2}\right)\right\}}{2\,(Q\,m + Q_1\,l)}.$$

Mit Hilfe dieses Wertes ergibt sich dann aus Formel (204) das Tragvermögen.

Sehen wir von der Last Q ab, so folgt für die Drucke auf die Stützen:

$$(208) \qquad \begin{cases} A = Q_1\,\dfrac{b}{l}, \\[2ex] B = Q_1\,\dfrac{a}{l}. \end{cases}$$

Ferner sind die Momente:

$$(209) \qquad M\,m_F = \cdot\, Q_1\,\frac{b}{l}\,x,$$

$$(210) \qquad M\,m_G = -\,Q_1\,\frac{a}{l}\,y,$$

$$(211) \qquad M\,m_H = Q_1\left\{\frac{b\,x_1}{l} - \frac{\left(x_1 - a + \frac{m}{2}\right)^2}{2\,m}\right\},$$

$$(212) \qquad M\,m_I = -\,Q_1\left\{\frac{a}{l}\,y_1 - \frac{\left(y_1 - b + \frac{m}{2}\right)^2}{2\,m}\right\},$$

sowie:

$$(213) \qquad M\,m_E = Q_1\left(\frac{a\,b}{l} - \frac{m}{8}\right).$$

Die Lage des Maximalmomentes ist hier bestimmt durch:

$$x_m = \frac{m\,b}{l} + a - \frac{m}{2}, \tag{214}$$

und das Maximalmoment selbst hat dann den Wert:

$$M\,m_M = Q_1 \frac{a\,b}{l}\left(1 - \frac{m}{2\,l}\right). \tag{215}$$

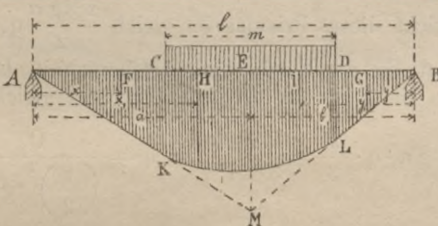
Schiebt sich die Last Q_1 von dem einen Ende des Trägers gegen das andere hin, so erreicht der letztere Ausdruck den grössten Wert, wenn die Mitte E der Last mit der Trägermitte zusammenfällt, so dass in diesem Falle das letzterer Lage entsprechende **Maximalmoment,** also

$$M\,m^*_M = Q_1 \frac{l}{4}\left(1 - \frac{m}{2\,l}\right) \tag{216}$$

der Berechnung des Trägers zu Grunde gelegt werden muss.

Da nach Formeln (209 und 210) die Momente für die Strecken A C und B D mit x bezw. y wachsen, so erhält man nach früherem für diese Strecken die Momentenkurve, wenn man auf den Senkrechten in C und D zu A B, Fig. 92, die hier herrschenden Kraftmomente C K und D L abträgt und die Endpunkte mit A bezw. B verbindet. Beide gerade Linien A K und B L müssen sich in einem Punkte M, senkrecht unter E gelegen, schneiden, da für Q_1 als Einzellast E M das Moment in E wäre.

Fig. 92.



Für die Strecke C D dagegen erhalten wir als Momentenkurve eine krumme Linie K N L, die sich in K und L tangential an A K und B L anschliessen und dabei ganz innerhalb des Winkels A M B liegen muss, indem die auf der Strecke C D = m liegende Last den Reaktionen A und B entgegenwirkt, daher nach Formeln (211 und 212) für diese Strecke eine Verminderung des einer Einzellast Q_1 entsprechenden Momentes $Q_1 \frac{b}{l} x_1$ und $Q_1 \frac{a}{l} y_1$ erzeugt.

Die der gleichmässigen Belastung Q_1 entsprechende Momentenfläche ist daher A K N L B.

Bezüglich der Durchbiegung durch die letztere partielle Belastung zerlege man den Teil der Momentenfläche zwischen C und D in zur Trägerachse senkrechte Streifen und fasse diese rechteckige, in ihren Schwerpunkten konzentrierte Streifen als Einzellasten auf.

VI. Der an beiden Enden unterstützte Träger sei ungleichmässig belastet.

Die Last nehme nach der Mitte des Trägers gleichmässig zu oder ab, die Belastungsfläche bestehe demnach aus zwei kongruenten Dreiecken, Fig. 93 und 94.

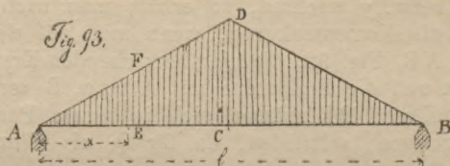
Ist Q die totale Last, so folgt das Gewicht, welches jede Stütze in beiden Fällen zu tragen hat:

(217) $$A = B = \frac{Q}{2}.$$

Das Kraftmoment für einen Querschnitt E, Fig. 93, in der Entfernung x von der Stütze A ist:

$$M\,m_E = \frac{Q}{2}\,x - \text{Moment des Lastprismas } A\,E\,F, \text{ bezogen auf } E\,F.$$

Fig. 93.



Das Gewicht dieses Prismas ist gleich $\frac{x^2 \operatorname{tg} \alpha}{2} q$, wenn q das Gewicht der Last für die Flächeneinheit Querschnitt bedeutet, und das Moment dieses Gewichts für die Achse EF ist gleich:

$$\frac{x^2}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot q \cdot \frac{x}{3} = \frac{2}{3} Q \frac{x^3}{l^2}, \text{ da } q = \frac{Q}{\left(\frac{l}{2}\right)^2 \operatorname{tg} \alpha} \text{ ist;}$$

daher auch:

(218) $$M\,m_E = Q\,x \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Der gefährliche Querschnitt liegt da, wo die Vertikalkraft

$$V = \frac{Q}{2} - \frac{x^2 \operatorname{tg} \alpha}{2} q = \frac{Q}{2} - \frac{2\,Q\,x^2}{l^2}$$

gleich Null wird, demnach im Abstande $\frac{l}{2}$ von der Trägerstütze.

Das Maximalmoment ist folglich:

(219) $$M\,m_C = \frac{Q\,l}{6},$$

also das Widerstandsmoment:

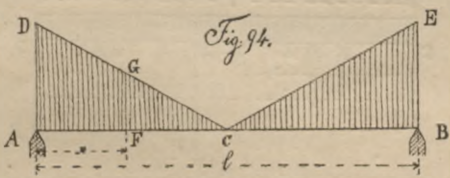
$$W = \frac{Q\,l}{6\,S} \tag{220}$$

und die Tragkraft:

$$Q = \frac{6\,W\,S}{l}. \tag{221}$$

Im zweiten Falle ist das Kraftmoment für den Querschnitt F G, Fig. 94:

$$M\,m_F = \frac{Q\,x}{2} - \text{Moment des Lastprismas A F G D, bezogen auf F G.}$$



Das Gewicht dieses Prismas ist:

$$\frac{\frac{l}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \left(\frac{l}{2} - x\right)\mathrm{tg}\,\alpha}{2}\,x\,q = \frac{l - x}{2} \cdot x\,q\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

und das genannte Moment:

$$\frac{l - x}{2} \cdot x\,q\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{x}{3}\,\frac{2 \cdot \frac{l}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \left(\frac{l}{2} - x\right)\mathrm{tg}\,\alpha}{\frac{l}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \left(\frac{l}{2} - x\right)\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{3\,l - 2\,x}{3\,l^2} \cdot x^2 \cdot Q;$$

daher auch:

$$M\,m_F = Q\,x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{l^2}\right). \tag{222}$$

Der Bruchquerschnitt ist auch hier in der Trägermitte und mithin das Maximalmoment:

$$M\,m_C = \frac{Q\,l}{12}; \tag{223}$$

daher das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{Q\,l}{12}\,S \tag{224}$$

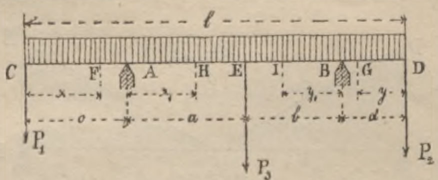
und die Tragkraft:

$$Q = \frac{12\,W\,S}{l}. \tag{225}$$

VII. Der in zwei Zwischenpunkten unterstützte Träger ist an beiden Enden und in einem Punkte zwischen den Stützen durch die Einzellasten P_1, P_2 und P_3, sowie gleichmässig durch Q belastet.

Die Enden C und D des Trägers von der Länge l, Fig. 95, an welchen die Kräfte P_1 und P_2 wirken, seien von den Stützen A und B um bezw. c und d und die Zwischenlast P_3 von genannten Stützpunkten um a und b entfernt.

Fig. 95.



Die Reaktionen in A und B sind:

$$(226)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{P_1(a+b+c) - P_2 d + P_3 b + \frac{Q}{2l}\{a+b+c)^2 - d^2\}}{a+b}, \\ B &= \frac{-P_1 c + P_2(a+b+d) + P_3 a + \frac{Q}{2l}\{(a+b+d)^2 - c^2\}}{a+b}. \end{aligned}\right.$$

Für einen Punkt F innerhalb AC in der Entfernung x von C ist das Moment:

$$(227)\qquad M\,m_F = -\left(P_1 x + \frac{Q}{2l} x^2\right).$$

Ebenso ist für einen Punkt G innerhalb BD in der Entfernung y von D das Kraftmoment:

$$(228)\qquad M\,m_G = P_2 y + \frac{Q}{2l} y^2.$$

Für $x = c$ und $y = d$ gehen die beiden Momente über in:

$$(229)\qquad M\,m_A = -\left(P_1 c + \frac{Q}{2l} c^2\right)$$

und:

$$(230)\qquad M\,m_B = P_2 d + \frac{Q}{2l} d^2.$$

Das Moment für einen Punkt H innerhalb AE in der Entfernung x_1 von A dagegen ist:

(231) $$M m_{II} = A x_1 - P_1 (x_1 + c) - \frac{Q}{2l}(x_1 + c)^2,$$

sowie das Moment für einen Punkt I innerhalb BE in der Entfernung y_1 von B:

(232) $$M m_I = - B y_1 + P_2 (y_1 + d) + \frac{Q}{2l}(y_1 + d)^2.$$

Diese beiden Momente erreichen ihr Maximum für:

$$V = A - P_1 - \frac{Q}{l}(x_m + c) = 0,$$

$$V_1 = B - P_2 - \frac{Q}{l}(y_m + d) = 0,$$

also in einem Punkte, der bestimmt ist durch:

(233) $$\begin{cases} x_m = \dfrac{(A - P_1)}{Q} l - c, \\ y_m = \dfrac{(B - P_2)}{Q} l - d. \end{cases}$$

Behufs Feststellung des Widerstandsmomentes ist nun von den drei relativen Maximalmomenten das absolut grösste zu nehmen.

Für $x_1 = a$ und $y_1 = b$ geben die Formeln (231 und 232) das Moment in E.

Die Lage der etwa vorhandenen Wendepunkte der elastischen Linie ergibt sich aus der Beziehung:

$$A x_0 - P_1 (x_0 + c) - \frac{Q}{2l}(x_0 + c)^2 = 0,$$

$$- B y_0 + P_2 (y_0 + d) + \frac{Q}{2l}(y_0 + d)^2 = 0,$$

woraus deren Entfernung von den Stützen A und B:

(234) $$\begin{cases} x_0 = \dfrac{(A-P_1) l - Q c \pm \sqrt{\{(A-P_1) l - Q c\}^2 - (2 P_1 l + Q c) Q c}}{Q}, \\ y_0 = \dfrac{(B-P_2) l - Q d \pm \sqrt{\{(B-P_2) l - Q d\}^2 - (2 P_2 l + Q d) Q d}}{Q}. \end{cases}$$

Ist der Träger nur an den Enden und zwar durch die gleiche Kraft P, Fig. 96, beansprucht und ist $c = d$, so ergibt sich für die beiden Reaktionen:

(235) $$A = B = P.$$

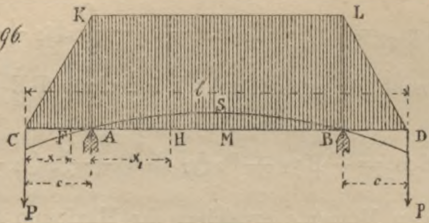
Für einen Punkt F innerhalb AC ist nun das Moment:

(236) $$M m_F = - P x,$$

das sein Maximum in den Stützen erreicht:

(237) $$M m_A = - P c.$$

Fig. 96.



Das Moment für einen Punkt H zwischen den Stützen A und B ist:

(238) $$M\,m_H = A\,x_1 - P\,(x_1 + c) = -P\,c,$$

also konstant.

Für diesen Fall ist daher das erforderliche Widerstandsmoment:

(239) $$W = \frac{P\,c}{S}$$

und die Tragkraft:

(240) $$P = \frac{W\,S}{c}.$$

Die Momentenfläche ist hier das Trapez CKLD.

Bezüglich der Biegung ist zu bemerken, dass nach Formel (238) das neutrale Faserstück AB nach einem Kreisbogen gekrümmt ist, dessen Radius den Wert

$$r = \frac{E\,I}{P\,c}$$

hat. Die Bogenhöhe ist demnach:

(241) $$M\,S = s = \frac{\left(\frac{l - 2\,c}{2}\right)^2}{2\,r} = \frac{P\,c\,(l - 2\,c)^2}{8\,E\,I}.$$

Die Neigung der Trägerachse in A und B ist:

(242) $$\alpha_1 = \frac{\frac{l - 2\,c}{2}}{r} = \frac{P\,c\,(l - 2\,c)}{2\,E\,I}$$

und also die Bogenhöhe von AC und BD:

(243) $$s_1 = \alpha_1\,c + \frac{P\,c^3}{3\,E\,I} = \frac{P\,c^2}{6\,E\,I}(3\,l - 4\,c).$$

Wendepunkte besitzt die elastische Linie in diesem Falle keine, da für die von derselben Seite aus gebildeten Momente kein Zeichenwechsel eintritt.

Wenn der Träger nur gleichmässig belastet und dabei wiederum $c = d$ ist, so folgt Fig. 97:

(244) $$A = B = \frac{Q}{2}$$

Fig. 97

und das Moment zwischen einem Ende und einer Stütze:

(245) $$M\,m_F = -\frac{Q}{2\,l}\,x^2,$$

sowie in einer Stütze selbst:

(246) $$M\,m_A = -\frac{Q}{2\,l}\,c^2.$$

Weiter ist das Moment für einen Punkt H zwischen den Stützen:

(247) $$M\,m_H = \frac{Q}{2}\,x_1 - \frac{Q}{2\,l}\,(x_1 + c)^2.$$

Für diese Strecke A B liegt der Bruchquerschnitt in der Mitte M des Trägers und also:

(248) $$M\,m_M = \frac{Q}{8}\,(l - 4\,c).$$

Die Lage der etwa auftretenden beiden Wendepunkte ist für diesen Fall bestimmt durch:

(249) $$x_0 = y_0 = \frac{l}{2} - c - \frac{1}{2}\sqrt{l\,(l - 4\,c)}.$$

Welches von den beiden relativen Bruchmomenten der Rechnung zu Grunde zu legen ist, dies hängt davon ab, welcher dieser Werte, absolut genommen, der grössere ist.

Es ist nun

$$M\,m_A \gtrless M\,m_M$$

für:

$$\frac{c^2}{l} \gtrless \frac{l - 4\,c}{4},$$

oder für:

$$c \gtrless 0{,}207\,l.$$

Im ersteren Falle ist demnach das erforderliche Widerstandsmoment:

(250) $$W = \frac{Q\,c^2}{2\,l\,S},$$

sowie das Tragvermögen:

$$Q = \frac{2\,W\,S\,l}{c^2}. \tag{251}$$

Der Querschnitt in der Mitte ist dann nicht völlig ausgenutzt.

Solange dabei $c < 0{,}25\,l$ ist, bleibt $M\,m_M$ Formel (248) positiv, und der Träger hat zwei Wendepunkte.

Wird aber $c > 0{,}25\,l$, so wird der Wert von $M\,m_M$ auch negativ, der Träger hat demnach dann keine Wendepunkte aufzuweisen.

Im zweiten Falle dagegen, also für $c < 0{,}207\,l$, ist zu nehmen:

$$W = \frac{Q}{8\,S}(l - 4\,c) \tag{252}$$

und:

$$Q = \frac{8\,W\,S}{l - 4\,c}. \tag{253}$$

Dann ist der Querschnitt in den Stützen zu stark.

Auch hier treten natürlich zwei Wendepunkte auf.

Die zweckmässigste Ausnutzung des Materials unseres prismatischen Trägers tritt jedenfalls dann ein, wenn die Querschnitte in der Mitte und über den Stützen gleich gefährlich sind, d. h. wenn

$$M\,m_A = M\,m_M,$$

also:

$$c = 0{,}207\,l$$

ist. Das **Maximalmoment** hat nun den absoluten Wert:

$$M\,m = 0{,}0214\,Q\,l, \tag{254}$$

mithin das nötige Widerstandsmoment:

$$W = 0{,}0214\,\frac{Q\,l}{S} \tag{255}$$

und die Tragkraft:

$$Q = 46{,}7\,\frac{W\,S}{l}, \tag{256}$$

folglich fast 6 mal so gross, als wenn die Stützpunkte in den Enden liegen.

Nimmt man:

$$c = 0{,}25\,l,$$

so wird das relative Bruchmoment in der Mitte gleich Null; das absolute **Maximalmoment,** in den Stützen gelegen, hat dann den Wert:

$$M\,m_A = \frac{Q\,c^2}{2\,l} = \frac{Q\,l}{32}; \tag{257}$$

demnach das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{Q\,l}{32\,S} \tag{258}$$

und die Tragkraft:

$$(259) \qquad Q = 32 \frac{W S}{l},$$

daher 4 mal so gross als bei einer Unterstützung in den Endpunkten.

Es tritt kein Wendepunkt auf.

Die graphische Darstellung der Biegungsmomente gibt für die überstehenden Enden A C und B D auf Grund der Formel (245) wie in § 9 II einen Parabelbogen, dessen Scheitel in C bezw. D liegt und für welchen C D die Scheiteltangente ist.

Die Formeln (247 und 248) geben:

$$M m_H : M m_M = 4 l x_1 - 4 (x_1 + c)^2 : l (l - 4 c).$$

Rückt man nun den Koordinatenanfangspunkt von den Stützen nach einem Punkte S vertikal unter der Mitte M des Trägers, der durch die Koordinaten

$$x^1 = \frac{l}{2} - c - x_1$$

und:

$$y^1 = M m_M - M m_H = \frac{Q}{8} (l - 4 c) - y_1$$

bestimmt ist, so hat man auch:

$$\frac{Q}{8}(l-4 c)-y^1 : \frac{Q}{8} (l - 4 c) = 4 l \left(\frac{l}{2} - c - x^1\right) - 4 \left(\frac{l}{2} - x^1\right)^2 : l (l-4 c);$$

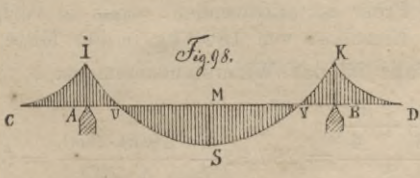
daraus:

$$x^{1^2} = \frac{2 l}{Q} y^1.$$

Der Zweig der Momentenkurve für das Trägerstück zwischen den Stützen ist demnach ebenfalls ein Parabelbogen, dessen Hauptachse mit der Vertikalen durch M zusammenfällt und dessen Scheitel in genanntem Punkte S liegt.

Ist dabei, Fig. 98, $c < 0{,}25\, l$, so schneidet der letztere Zweig der Momentenkurve die Gerade A B in den Wendepunkten U und V, deren Abstand von M sich aus der Beziehung

Fig. 98.



$$\frac{Q}{8} (l - 4 c) = \frac{Q}{2 l} x_0^{1^2}$$

ergibt zu:

$$x_0^1 = \frac{1}{2} \sqrt{l(l - 4c)}.$$

Für $c = 0{,}25\,l$ dagegen wird, wie Fig. 99 andeutet, besagter Zweig die Grade A B in M berühren.

Ist endlich $c > 0{,}25\,l$, so liegt die Momentenkurve, Fig. 100, ganz oberhalb C D.

Die Durchbiegungsverhältnisse lassen sich für das Trägerstück A C und B D nach § 9 II und für das zwischen den Stützen liegende Stück A B nach dem in diesem Paragraphen bereits Angeführten feststellen.

Fig. 99.

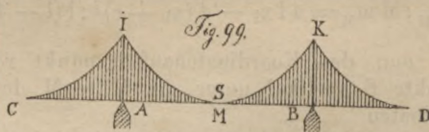
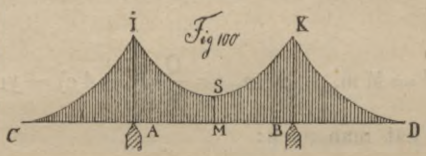


Fig. 100



Beispiele.

1. Ein an seinen Enden unterstützter schmiedeeiserner Träger von 3,7 m Länge ist mit 4500 kg gleichmässig belastet.

Welches Profil genügt?

Das Widerstandsmoment ist:

$$W = \frac{Q\,l}{8\,S} = \frac{4500 \cdot 370}{8 \cdot 700} = 297{,}32.$$

Die Profile Tabelle V a, Nr. 13 c, V b, Nr. 19 und V c, Bl. XVI, Nr. 12 c sind genügend.

2. Welches Profil ist anzuwenden, wenn in voriger Aufgabe der Träger noch eine Einzellast von 1800 kg in der Mitte tragen soll?

In diesem Falle ist das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{\frac{Q\,l}{8} + \frac{P\,l}{4}}{S} = 297{,}32 + \frac{1800 \cdot 370}{4 \cdot 700} = 535{,}17.$$

Die Profile Tabelle V a, Nr. 23 b, V b, Nr. 27 und V c, Bl. XVIII, Nr. 17 c genügen.

3. Ein Träger AB von der Länge 4,5 m ist an beiden Enden unterstützt und trägt in den Punkten C_1, C_2, C_3 und C_4 in den Entfernungen 1 m, 1,4 m, 2 m und 2,5 m, von A aus gerechnet, die Einzellasten 2000 kg, 1500 kg, 950 kg und 2870 kg.

Welches sind die Auflagerdrucke, sowie die Kraftmomente in den Angriffspunkten der Lasten, und wo liegt der gefährliche Querschnitt?

Es ist:

$$A = \frac{2000 \cdot 3{,}5 + 1500 \cdot 3{,}1 + 950 \cdot 2{,}5 + 2870 \cdot 2}{4{,}5} = 4392{,}2 \text{ kg},$$

$$B = \frac{2000 \cdot 1 + 1500 \cdot 1{,}4 + 950 \cdot 2 + 2870 \cdot 2{,}5}{4{,}5} = 2927{,}8 \text{ kg}.$$

Weiter ist:

$$M\,m_{c_1} = 4392{,}2 \text{ kgm},$$

$$M\,m_{c_2} = 4392{,}2 \cdot 1{,}4 - 2000 \cdot 0{,}4 = 5348{,}92 \text{ kgm},$$

$$M\,m_{c_3} = 4392{,}2 \cdot 2 - 2000 \cdot 1 - 1500 \cdot 0{,}6 = 5884{,}4 \text{ kgm},$$

$$M\,m_{c_4} = 4392{,}2 \cdot 2{,}5 - 2000 \cdot 1{,}5 - 1500 \cdot 1{,}1 - 950 \cdot 0{,}5 = 5855{,}5 \text{ kgm}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also in C_3.

4. Ein in den Endpunkten A und B unterstützter Träger von der Länge 3,5 m ist in den Punkten C_1 und C_2, welche die Abstände 0,7 m und 2,2 m von A haben, durch die Einzellasten $P_1 = 1500$ kg und $P_2 = 1200$ kg, sowie durch eine auf seiner ganzen Länge gleichmässig verteilten Belastung $Q = 4000$ kg beansprucht.

Welchen Wert hat das Maximalmoment?

Die Reaktionen sind:

$$A = \frac{4000}{2} + \frac{1500 \cdot 2{,}8 + 1200 \cdot 1{,}3}{3{,}5} = 3645{,}7 \text{ kg},$$

$$B = \frac{4000}{2} + \frac{1200 \cdot 2{,}2 + 1500 \cdot 0{,}7}{3{,}5} = 3054{,}3 \text{ kg}.$$

Für die Querschnitte in C_1 und C_2 sind die Scherkräfte:

$$V_{c_1} = 3645{,}7 - \frac{4000}{3{,}5} \cdot 0{,}7 - 1500 = + 1345{,}7 \text{ kg},$$

$$V_{c_2} = 3645{,}7 - \frac{4000}{3{,}5} \cdot 2{,}2 - 1500 - 1200 = - 1568{,}58 \text{ kg}.$$

(Würde man V_{c_2} von B aus gebildet haben, so hätte man erhalten:

$$V_{c_2} = 3054{,}3 - \frac{4000}{3{,}5} \cdot 1{,}3 = + 1568{,}58 \text{ kg},$$

die Kraft 1200 darf hier nicht in Rechnung gezogen werden, da dieselbe als zum Trägerstück A C_2 gehörig berücksichtigt ist; ebenso erhielte man:

$$V_{c_1} = 3054,3 - \frac{4000}{3,5} \cdot 2,8 - 1200 = -1345,7 \text{ kg.})$$

Der gefährliche Querschnitt befindet sich demnach zwischen C_1 und C_2, und seine Entfernung von A ergibt sich aus:

$$3645,7 - 1500 - \frac{4000}{3,5} x_m = 0,$$

$$x_m = 1,877 \text{ m}.$$

Das Maximalmoment hat folglich nach Formel (196) den Wert:

$$M\, m_M = (3645,7 - 1500)\, 1,877 - \frac{4000}{2 \cdot 3,5} \cdot 1,877^2 + 1500 \cdot 0,7$$
$$= 3064,262 \text{ kgm}.$$

5. Ein an beiden Enden A und B unterstützter Träger A B von der Länge 4,2 m ist auf einer Strecke A C = 0,7 m und B D = 1,4 m gleichmässig mit den Lasten 1000 kg bezw. 2000 kg belastet.

Welches ist das Maximalmoment?

Die Reaktionen haben den Wert:

$$A = \frac{1000 \cdot 3,85 + 2000 \cdot 0,7}{4,2} = 1250 \text{ kg},$$

$$B = \frac{1000 \cdot 0,35 + 2000 \cdot 3,5}{4,2} = 1750 \text{ kg}.$$

Die Vertikalkräfte, von B aus gebildet, sind nun:

$$V_B = +1750 \text{ kg},$$
$$V_D = 1750 - 2000 = -250 \text{ kg}.$$

Demnach liegt der Bruchquerschnitt zwischen B und D; sein Abstand von B ist bestimmt durch:

$$1750 - \frac{2000}{1,4} \cdot y_m = 0,$$

$$y_m = 1,225 \text{ m}$$

und also das Maximalmoment:

$$M\, m_M = -1750 \cdot 1,225 + \frac{2000}{1,4} \cdot \frac{1,225^2}{2} = -1071,875 \text{ kgm}.$$

6. Der an den Enden A und B unterstützte und durch 2200 kg über seine ganze Länge = 3,3 m gleichmässig belastete Träger A B trägt ausser den Einzellasten 900 kg und 1200 kg in den Punkten C_1 und C_2, in der Entfernung 0,9 m und 2,2 m von A, noch auf einer Strecke A D = 1,8 m eine gleichmässig verteilte Last gleich 2700 kg.

Welchen Wert hat das Maximalmoment?

Es sind die Reaktionen

$$A = \frac{2200}{2} + \frac{900 \cdot 2{,}4 + 1200 \cdot 1{,}1 + 2700 \cdot 2{,}4}{3{,}3} = 4118{,}182 \text{ kg},$$

$$B = \frac{2200}{2} + \frac{900 \cdot 0{,}9 + 1200 \cdot 2{,}2 + 2700 \cdot 0{,}9}{3{,}3} = 2881{,}818 \text{ kg}.$$

Die vertikale Scherkraft in C_1 und D ist:

$$V_{c_1} = 4118{,}182 - 900 - \left(\frac{2200}{3{,}3} + \frac{2700}{1{,}8}\right) 0{,}9 = +1268{,}183 \text{ kg},$$

$$V_D = 4118{,}182 - 900 - \frac{2200}{3{,}3} \cdot 1{,}8 - 2700 = -681{,}817 \text{ kg}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt demnach zwischen C_1 und D und für denselben ist:

$$4118{,}182 - 900 - \left(\frac{2200}{3{,}3} + \frac{2700}{1{,}8}\right) x_m = 0,$$

$$x_m = 1{,}485 \text{ m};$$

daher das Maximalmoment:

$$M\,m_M = 4118{,}182 \cdot 1{,}485 - 900(1{,}485 - 0{,}9) - \left(\frac{2200}{3{,}3} + \frac{2700}{1{,}8}\right) \frac{1{,}485^2}{2}$$
$$= 3199{,}5 \text{ kgm}.$$

7. Ein Träger von der Länge 4 m ist im Endpunkte A und einem Punkte B, der die Entfernung 1 m von dem anderen Ende D hat, unterstützt und wird in den Punkten C_1, C_2 und C_3 in den Abständen 0,5 m, 1 m und 2 m von A, sowie am freien Ende D der Reihe nach von den Kräften 1500 kg, 800 kg, 3000 kg und 2000 kg angegriffen.

Welches sind die Reaktionen und die Momente in den Punkten C_1, C_2, C_3 und B?

Es ist:

$$A = \frac{1500 \cdot 2{,}5 + 800 \cdot 2 + 3000 \cdot 1 - 2000 \cdot 1}{3} = 2116{,}7 \text{ kg},$$

$$B = \frac{2000 \cdot 4 + 3000 \cdot 2 + 800 \cdot 1 + 1500 \cdot 0{,}5}{3} = 5183{,}3 \text{ kg}.$$

Die Kraftmomente sind:

$$M\,m_{c_1} = 2116{,}7 \cdot 0{,}5 = 1058{,}35 \text{ kgm},$$
$$M\,m_{c_2} = 2116{,}7 \cdot 1 - 1500 \cdot 0{,}5 = 1366{,}7 \text{ kgm},$$
$$M\,m_{c_3} = 2116{,}7 \cdot 2 - 1500 \cdot 1{,}5 - 800 \cdot 1 = 1183{,}4 \text{ kgm},$$
$$M\,m_B = 2000 \cdot 1 = 2000 \text{ kgm}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt demnach in B.

Das Moment in letzterem Punkte ist vom überragenden Ende aus gebildet worden. Bestimmt man aber dasselbe wie die drei anderen ebenfalls von A aus, so hat man:

$$M\,m_B = 2116{,}7 \cdot 3 - 1500 \cdot 2{,}5 - 800 \cdot 2 - 3000 \cdot 1 = -2000\,\text{kgm}.$$

Es ergibt sich demnach für die Momente ein Zeichenwechsel, ein gusseiserner Balken wäre daher hier unzulässig. Der auftretende Wendepunkt muss zwischen B und C_3 liegen; seine Entfernung von B ist bestimmt durch:

$$2000\,(1 + y_0) - 5183{,}3\,y_0 = 0\quad y_0 = 0{,}628\ \text{m o.}$$

8. Die eine Stütze A eines gleichmässig belasteten Trägers steht am Ende.

Welche Lage muss die andere Stütze B haben, damit die Tragfähigkeit des Trägers ein Maximum wird?

Offenbar ist die Stützenlage dann die vorteilhafteste, wenn das Moment über der Stütze B gleich dem Maximalmoment zwischen den Stützen ist, da in diesem Falle zwei gleich gefährliche Querschnitte auftreten, das Trägermaterial dann doch an zwei Stellen völlig ausgenutzt wird.

Ist nun d die gesuchte Entfernung der Stütze B vom zweiten Ende D, so ist das Moment über B:

$$M\,m_B = \frac{Q}{2\,l}\,d^2.$$

Ist weiter x_m die Entfernung des Bruchquerschnittes zwischen A und B von A, so folgt:

$$A - \frac{Q}{l}\,x_m = 0.$$

Aber nach Formel (225):

$$A = \frac{Q}{2} \cdot \left(\frac{l - 2\,d}{l - d}\right);$$

demnach:

$$x_m = \frac{l\,(l - 2\,d)}{2\,(l - d)}.$$

Das Maximalmoment zwischen den Stützen ist, von A aus gebildet;

$$M\,m_M = A\,x_m - \frac{Q}{2\,l}\,x^2_m = \frac{Q}{l}\,x^2_m - \frac{Q}{2\,l}\,x^2_m = \frac{Q}{2\,l}\,x^2_m.$$

Den Wert von x_m eingeführt, gibt:

$$M\,m_M = \frac{Q}{2\,l}\left\{\frac{l\,(l - 2\,d)}{2\,(l - d)}\right\}^2 = \frac{Q\,l}{8}\left(\frac{l - 2\,d}{l - d}\right)^2.$$

Zur Feststellung von d hat man daher:

$$\frac{Q\,d^2}{2\,l} = \frac{Q\,l}{8}\left(\frac{l-2\,d}{l-d}\right)^2,$$

woraus:

$$d = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}293\ l.$$

Durch Konstruktion ergibt sich dieser Wert wie folgt:

Man bestimme die Mitte M des Trägers, ziehe $ME \perp AD$, mache $ME = \frac{l}{2}$ und hierauf $AB = AE$; dann ist DB die gesuchte Strecke d; denn $AB = AE = \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}} = \frac{l}{\sqrt{2}}$, daher:

$$DB = DA - AB = l - \frac{l}{\sqrt{2}} = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Es ist dabei noch $BM = DM - DB = \frac{l}{2} - l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}207\ l$, also gleich der in VII angegebenen Strecke, für welche beide Stützen nach innen geschoben werden müssen, wenn ein gleichmässig belasteter Balken, dessen beide Stützen um dieselbe Strecke von den Enden abstehen, das Maximum tragen soll.

Das Maximalmoment ist nun:

$$M\,m_M = \frac{Q}{2\,l}(0{,}293\ l)^2 = 0{,}0429\ Q\,l;$$

daher das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{0{,}0429\ Q\,l}{S}$$

und die Tragkraft:

$$Q = 23{,}3\,\frac{W\,S}{l},$$

mithin sehr nahe dreimal so gross, als wenn beide Stützen bei derselben Belastung an den Enden sich befinden.

Bildet man obiges $M\,m_M$ ebenfalls von B aus, so ergibt sich ein negativer Wert; es hat somit die elastische Linie einen Wendepunkt, dessen Entfernung von B nach Formel (234), wenn man hier $B = Q - A = Q - \frac{Q}{2}\,\frac{(l-2\,d)}{l-d} = Q\,\frac{l}{2\,(l-d)}$ einsetzt, ist:

$$y_0 = \frac{d^2}{l-d} = \frac{(0{,}293\ l)^2}{l - 0{,}293\ l} = 0{,}1214\ l.$$

9. Die Stütze A eines gleichmässig belasteten Trägers ist um die Strecke c vom Ende C entfernt.

Welche Entfernung muss die Stütze B vom anderen Ende D haben, damit die elastische Linie keinen Wendepunkt aufweist?

Die Reaktion in B ist nach Formel (225):

$$B = \frac{Q}{2}\left(\frac{l - 2c}{l - c - d}\right)$$

und die Entfernung des Bruchquerschnittes zwischen den Stützen, von B aus gerechnet, nach Formel (233):

$$y_m = \frac{B\,l}{Q} - d = \frac{l(l - 2c)}{2(l - c - d)} - d.$$

Soll nun kein Wendepunkt auftreten, so muss das Bruchmoment zwischen den Stützen Null werden, also nach Formel (232):

$$B\,y_m = \frac{Q}{2\,l}\,(y_m + d)^2.$$

Obigen Wert von B und y_m eingeführt, gibt:

$$\frac{l - 2c}{l - c - d}\left\{\frac{l(l - 2c)}{2(l - c - d)} - d\right\} = \frac{l(l - 2c)^2}{4(l - c - d)^2},$$

woraus:

$$d = \frac{l - c}{2} \pm \frac{c}{2}.$$

Hier ist, da d von c abhängig ist, nur das untere Zeichen der Wurzel zulässig; mithin ergibt sich für die gesuchte Strecke:

$$d = \frac{l}{2} - c,$$

d. h. gleich der Entfernung der Stütze A von der Trägermitte.

10. Ein gusseiserner, einfacher ⊤ Träger von 2 m Länge liege an beiden Seiten frei auf, sei mit 5500 kg gleichmässig belastet und habe 21 cm Höhe, sowie 5 cm Flantschdicke.

Welches ist die Flantschbreite und die Rippenstärke, wenn das Profil gleicher Festigkeit sein soll?

Das Widerstandsmoment für die Zugseite hat den Wert:

$$W = \frac{5500 \cdot 2000}{8 \cdot 2{,}5}\ 550000.$$

Es ist aber auch:

$$W = \frac{I}{70} = \frac{70^3\,x - 20^3\,y + 140^3\,(x - y)}{3 \cdot 70} = 14700\,x - 13028{,}57\,y,$$

wenn x die Flantschbreite und x — y die Rippenstärke angibt.

Der Querschnitt muss dabei der Bedingung genügen:

$$70\left[50x + 160(x - y)\right] = 50x \cdot 25 + 160(x - y)(80 + 50);$$

daraus:

$$y = 0{,}765\,x.$$

Demnach auch:

$$W = 14700\,x - 13028{,}57 \cdot 0{,}765\,x = 4733{,}144\,x.$$

Obigen Wert von W eingeführt, gibt nun als Flantschbreite:

$$x = \frac{550000}{4733{,}144} = 116{,}5 \text{ mm}$$

und also die Rippenstärke:

$$x - y = x - 0{,}765\,x = 0{,}235 \cdot 116{,}5 = 27{,}5 \text{ mm}.$$

11. Eine schmiedeeiserne quadratische Achse von 4 m Länge trägt in den Abständen 0,4 m, 1,5 m und 2,5 m von dem einen Ende A die Lasten 700 kg, 1800 kg und 1200 kg.

Wo liegt der gefährliche Querschnitt, und wie gross ist die Seite des Querschnitts?

Die Drucke in den Endlagern A und B sind:

$$A = \frac{700 \cdot 3{,}6 + 1800 \cdot 2{,}5 + 1200 \cdot 1{,}5}{4} = 2205 \text{ kg},$$

$$B = 700 + 1800 + 1200 - 2205 = 1495 \text{ kg}.$$

Der Bruchquerschnitt liegt in einem der Angriffspunkte der Einzellasten; die Momente der letzteren, von A aus gebildet, sind:

$$2205 \cdot 0{,}4 = 882 \text{ kgm},$$
$$2205 \cdot 1{,}5 - 700 \cdot 1{,}1 = 2537{,}5 \text{ kgm},$$
$$2205 \cdot 2{,}5 - 700 \cdot 2{,}1 - 1800 \cdot 1 = 2242{,}5 \text{ kgm}.$$

Das absolute Maximalmoment liegt also im Angriffspunkt der Last von 1800 kg.

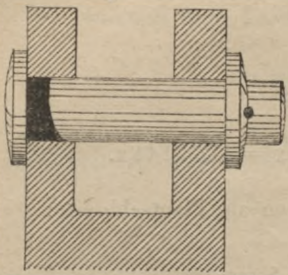
Wird $S = 5$ kg auf den Quadratmillimeter genommen, um dieselbe Sicherheit für Achse und Zapfen zu haben, so ist:

$$2537{,}5 \cdot 1000 = \frac{a^3}{6} \cdot 5,$$

$$a = \sqrt[3]{3045000} = 145 \text{ mm}.$$

12. Es sind die Abmessungen eines Gabel- oder Bolzenzapfens, Fig. 101, zu bestimmen.

Fig. 101.



Die grösste Beanspruchung tritt auf, wenn der Schubstangenkopf richtig der ganzen Länge des Zapfens nach aufliegt, den Zapfen also gleichmässig belastet. Ist nun P diese gleichmässige Belastung und d der Durchmesser des Zapfens, sowie l die Länge des letzteren, so ist:

$$\frac{P\,l}{8} = \frac{\pi\,d^3}{32}\,S$$

und also:

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi}\,\frac{l}{d}\,\frac{P}{S}}.$$

Setzt man auch hier wie für Stirnzapfen bei Hebeln und Kurbeln (s. § 9), wenn

a) der Zafen aus Schmiedeeisen:

$$S = 4 \text{ kg und } \frac{l}{d} = 1{,}25, \text{ so folgt: } d = 0{,}63\sqrt{P};$$

b) der Zapfen aus Gussstahl:

$$S = 6 \text{ kg und } \frac{l}{d} = 1{,}4, \text{ so folgt: } d = 0{,}55\sqrt{P};$$

für beide Fälle demnach gleich dem halben Durchmesser des gleich belasteten Stirnzapfens.

13. Für den doppel-T förmig gewalzten, beiderseits gestützten und 3,6 m langen Träger eines Deckenlaufkrahnes sei die Belastung in der Mitte $P_1 = 4000$ kg, eine $P_2 = 800$ kg in der Entfernung 1 m von dem einen Auflager B.

Welcher Querschnitt ist zu nehmen?

Die Reaktionen haben den Wert:

$$A = \frac{4000 \cdot 1{,}8 + 800 \cdot 1}{3{,}6} = 2222{,}222 \text{ kg},$$

$$B = 4000 + 800 - 2222{,}222 = 2577{,}778 \text{ kg}.$$

Das Moment in der Trägermitte hat den Wert, von A aus gebildet:

$$M\,m_M = 2222{,}222 \cdot 1{,}8 = 4000 \text{ kgm}$$

und das Moment im Angriffspunkte C der Last P_2, von B aus:

$$M\,m_c = -\,2577{,}778 \cdot 1 = -\,2577{,}778 \text{ kgm}.$$

Der gefährliche Querschnitt befindet sich also in der Mitte. Das nötige Widerstandsmoment ist folglich, da auf jeden Träger die Hälfte des Momentes kommt:

$$W = \frac{4000 \cdot 100}{2 \cdot 700} = 285{,}7 \text{ für cm.}$$

Das Profil Tab. Va, Nr. 19 würde also hinreichen.

14. Ein Träger A B sei 3,2 m lang, mit 450 kg auf den laufenden Meter gleichmässig und ausserdem in der Entfernung $A C_1 = a_1 = 1$ m mit $P_1 = 500$ kg und $A C_2 = a_2 = 2{,}2$ m mit $P_2 = 2000$ kg belastet.

Wo liegt der gefährliche Querschnitt, und welchen Wert hat das Maximalmoment?

Die Auflagerdrucke sind:

$$A = \frac{1}{3{,}2} \left\{ \frac{450 \cdot 3{,}2^2}{2} + 500 \cdot 2{,}2 + 2000 \cdot 1 \right\} = 1688{,}75 \text{ kg},$$

$$B = \frac{1}{3{,}2} \left\{ \frac{450 \cdot 3{,}2^2}{2} + 500 \cdot 1 + 2000 \cdot 2{,}2 \right\} = 2251{,}25 \text{ kg}.$$

Die Schwerkräfte in C_1 und C_2 sind, von A aus gebildet:

$$V_{c_1} = 1688{,}75 - 450 - 500 = + 738{,}75 \text{ kg},$$

$$V_{c_2} = 1688{,}75 - 450 \cdot 2{,}2 - 500 - 2000 = - 1801{,}25 \text{ kg}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt mithin nicht über C_2 hinaus und seine Entfernung von A ist bestimmt durch:

$$1688{,}75 - 500 - 450\, x_m = 0,$$

$$x_m = 2{,}642 \text{ m}.$$

d. h. in C_2 selbst. Das Maximalmoment hat daher den Wert:

$$M\, m_{c_2} = (1688{,}75 - 500) \cdot 2{,}2 - \frac{450 \cdot 2{,}2^2}{2} + 500 \cdot 1$$

$$= 2026{,}25 \text{ kgm}.$$

15. Ein Balken aus Eichenholz von 235 mm Breite, 314 mm Höhe und 3,766 m freier Länge soll durch einen untergezogenen schmiedeeisernen Träger von rechteckigem Querschnitt so verstärkt werden, dass er eine Last von 9000 kg in der Mitte tragen kann.

Welche Dimensionen sind für den Unterzug zu wählen?

Ist P_1 und P_2 der Teil der Last, welcher auf den Balken aus Eichenholz bezw. aus Schmiedeeisen kommt, so ist die grösste Durchbiegung in der Mitte für beide Balken:

$$s_1 = \frac{P_1\, l^3}{48\, E_1\, I_1}$$

und:

$$s_2 = \frac{P_2\, l^3}{48\, E_2\, I_2}.$$

Es ist nun aber, um die Tragfähigkeit vollständig auszunutzen, bei kombinierten Trägern $s_1 = s_2$ zu machen; daher haben wir aus letzteren Beziehungen auch:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}.$$

Die Maximalmomente beider Träger sind:

$$\frac{P_1 l}{4} = \frac{I_1}{a_1} S_1$$

und:

$$\frac{P_2 l}{4} = \frac{I_2}{a_2} S_2;$$

daraus auch:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1 S_1 a_2}{I_2 S_2 a_1}.$$

Mithin:

$$\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} = \frac{I_1 S_1 a_2}{I_2 S_2 a_1}$$

und also:

$$a_2 = \frac{E_1 S_2}{E_2 S_1} \cdot a_1.$$

Setzt man die bezüglichen Werte ein, so folgt:

$$a_2 = \frac{1200 \cdot 7}{20000 \cdot 0{,}66} \cdot 157 = 100 \text{ mm}$$

und mithin die fragliche Höhe des schmiedeeisernen Trägers:

$$h_2 = 2\, a_2 = 200 \text{ mm}.$$

Behufs Bestimmung der Breitendimension ist zunächst der Teil P_1 der totalen Last von 9000 kg zu bestimmen, welcher auf den eichenen Balken kommt.

Es ist:

$$P_1 = \frac{4\, b_1\, h_1^2}{6\, l} \cdot S_1 = \frac{4 \cdot 235 \cdot 314^2 \cdot 0{,}66}{6 \cdot 3766} = 2707{,}07 \text{ kg};$$

daher:

$$P_2 = 9000 - 2707{,}07 = 6292{,}93 \text{ kg}.$$

Aus

$$\frac{P_2 l}{4} = \frac{b_2\, h_2^2}{6} S_2$$

folgt nun:

$$b_2 = \frac{6\, P_2\, l}{4\, h_2^2\, S_2} = \frac{6 \cdot 6292{,}93 \cdot 3766}{4 \cdot 200^2 \cdot 7} = 127 \text{ mm}.$$

Anstatt nun einen einzigen schmiedeeisernen Träger von 200 mm Höhe und 127 mm Breite kann man auch 3 Träger von derselben Höhe, aber 42,3 mm Breite anwenden. Dadurch erreicht man gleichzeitig den Vorteil, dass der hölzerne Träger nicht in seiner Mitte allein unterstützt wird.

Würde man für die Höhe des eisernen Trägers ebenfalls 314 mm nehmen, so fände man die Breite aus:

$$\frac{6292{,}93 \cdot 3766}{4} = \frac{b_2^1 \cdot 314^2 \cdot 7}{6}$$

und demnach:

$$b_2^1 = 51{,}5 \text{ mm}.$$

Der obige Querschnitt wäre:

$$F_2 = 127 \cdot 200 = 25400 \text{ qmm}$$

und der jetzige:

$$F_2^1 = 51{,}5 \cdot 314 = 16171 \text{ qmm}.$$

Im letzteren Falle würde fast $36\frac{1}{2}$ Prozent weniger Material verbraucht als im ersteren. Allein würde man hierbei den eisernen Träger, wie vorher dicht unter den hölzernen legen, so könnte sich der letztere natürlich nicht mehr durchbiegen als der erstere. Aus der Beziehung

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}$$

folgt nun als zulässige Belastung:

$$P_1 = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \cdot P_2 = \frac{1200 \cdot 235 \cdot 314^3 \cdot 6292{,}93}{20000 \cdot 51{,}5 \cdot 314^3} = 1722{,}9 \text{ kg}.$$

Die höchste zulässige totale Belastung wäre daher jetzt:

$$P = 1722{,}9 + 6292{,}93 = 8015{,}83 \text{ kg},$$

also um 9000 — 8015,83 = 984,17 kg geringer als bei der ersteren Anordnung. Dies kommt daher, dass der schmiedeeiserne Träger weniger biegsam ist als der hölzerne.

Will man nun dennoch den eisernen Träger vom Querschnitt F_2^1 benutzen, so muss man für diesen Fall die beiden grössten Senkungen s_1 und s_2 für die Belastungen $P_1 = 2707{,}07$ kg und $P_2 = 6292{,}93$ kg der beiden Träger einzeln berechnen und dann den eisernen im unbelasteten Zustande mit $s_1 - s_2$ Zwischenraum unter den hölzernen legen; alsdann wird bei der Maximalbelastung auch jeder Träger die Maximaldurchbiegung erreichen.

16. Zur Ueberführung einer Eisenbahn über einen Weg ist ein einfacher Träger von 5 m Spannweite zu konstruieren.

Welche Grösse hat das beim Befahren auftretende Maximalmoment?

Zur Feststellung desselben wird man natürlich vom ungünstigsten Falle ausgehen müssen. Dieser tritt aber auf, wenn Lokomotive mit Tender über die Brücke fährt.

Die Lokomotive habe 3 Achsen, deren Abstand voneinander je 1,1 m betrage und die einzeln auf jedes Schienengeleise einen Druck von 13000 kg ausüben; die Hinterachse der Lokomotive sei von der nächsten der beiden Tenderachsen um 1,2 m entfernt, und jede dieser beiden Achsen drücke auf jede Schiene mit 8500 kg. Die ungünstigste Lage von Lokomotive und Tender mit Bezug auf den Träger wird nun die sein, dass die 3 Lokomotivachsen, sowie eine Tenderachse auf dem Brückenträger stehen, und dabei noch die Resultante der 4 Kräfte gerade durch die Trägermitte geht; daraus ergibt sich, da

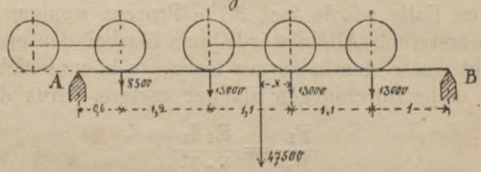
$$39000\,x = 8500\,(2{,}3 - x)$$

und also

$$x = 0{,}4 \text{ m}$$

ist, die in Fig. 102 angedeutete Anordnung.

Fig. 102.



Die Reaktion in A ist:

$$A = \frac{8500 \cdot 4{,}4 + 13000\,(3{,}2 + 2{,}1 + 1)}{5} = 23860 \text{ kg};$$

demnach, von A aus gerechnet, die Momente in den aufeinanderfolgenden Achspunkten:

$$M\,m_{c_1} = 23860 \cdot 0{,}6 = 14316 \text{ kgm},$$

$$M\,m_{c_2} = 23860 \cdot 1{,}8 - 8500 \cdot 1{,}2 = 32748 \text{ kgm},$$

$$M\,m_{c_3} = 23860 \cdot 2{,}9 - 8500 \cdot 2{,}3 - 13000 \cdot 1{,}1 = 37344 \text{ kgm},$$

$$M\,m_{c_4} = 23860 \cdot 4 - 8500 \cdot 3{,}4 - 13000\,(2{,}2 + 1{,}1) = 23640 \text{ kgm}.$$

Der Bruchquerschnitt liegt also in C_3, 2,9 m von A entfernt, und das Maximalmoment hat den Wert $M\,m_{c_3}$.

17. Wie hoch und breit ist ein an beiden Enden aufruhender gusseiserner Träger zu machen, welcher bei dem Dimensionsverhältnis $\frac{h}{6} = 4$ auf eine Länge von 3 m eine gleichmässig verteilte Last $Q = 2000$ kg tragen und dabei die relative Durchbiegung $\frac{s}{l} = \frac{1}{500}$ sein soll?

Es ist nach Formel (175):

$$\frac{s}{l} = \frac{5}{384} \frac{Q\,l^2}{E\,I}.$$

Die Werte eingeführt, gibt:

$$\frac{1}{500} = \frac{5}{384} \cdot \frac{2000 \cdot 3000^2}{10000 \cdot \frac{h^4}{4 \cdot 12}} = \frac{5 \cdot 2000 \cdot 9000000 \cdot 48}{384 \cdot 10000\, h^4};$$

daraus:

$$h = \sqrt[4]{\frac{500 \cdot 5 \cdot 2000 \cdot 9000000 \cdot 48}{384 \cdot 10000}} = 154 \text{ mm}$$

und also:

$$b = 38{,}5 \text{ mm}.$$

Aufgaben.

1. Ein an beiden Enden unterstützter schmiedeeiserner Träger von 1,8 m Länge soll eine Last von 10000 kg, über seine Länge gleichmässig verteilt, tragen.

Wieviel Eisenbahnschienen von 118 mm Höhe werden genügen?

3 Eisenbahnschienen.

2. Welche Lösung der vorigen Aufgabe ergibt sich, wenn die beiden Stützen

a) um 0,25 m,

b) um 0,2071 m

von den Trägerenden abstehen?

Für den ersteren Abstand sind zwei Schienen, für den letzteren ist nur eine Schiene von 104,6 mm Höhe erforderlich.

3. Ein an beiden Enden unterstützter Balken von 4 m Länge trägt ausser einer gleichmässig verteilten Last $Q = 3900$ kg noch eine Einzellast $P = 1600$ kg in der Entfernung $a = 1{,}5$ m von der Stütze A.

Wo liegt das Maximalmoment, und welchen Wert hat dasselbe?

Der Bruchquerschnitt liegt im Angriffspunkt C der Einzellast, und das bezügliche Moment hat den Wert:

$$M\,m_c = 3328{,}125 \text{ kgm}.$$

4. Ein an den Enden unterstützter Träger von der Länge 5,5 m ist in den Punkten C_1, C_2, C_3 und C_4, welche die Abstände 1 m, 1,5 m, 2,5 m und 4,5 m von dem einen Ende A haben, durch die Einzellasten $P_1 = 800$ kg, $P_2 = 1000$ kg, $P_3 = 1200$ kg und $P_4 = 900$ kg, sowie durch die gleichmässig verteilte Last $Q = 3000$ kg belastet.

Wie gross ist das Maximalmoment?

$$M\,m_{c_3} = 5345{,}455 \text{ kgm.}$$

5. Ein an den Enden A und B unterstützter Träger von 4 m Länge ist auf der Strecke C D = 2 m gleichmässig mit 2500 kg belastet, wobei der Punkt C von A die Entfernung 0,5 m hat.

Welchen Wert hat das Maximalmoment?

$$M\,m_M = 1757{,}812 \text{ kg.}$$

6. Ein Träger von der Länge 4,5 m, welcher in zwei von den Enden C und D um 1 m und 0,5 m entfernten Punkten A und B unterstützt ist, werde von den 4 Einzellasten 1000 kg, 1400 kg, 600 kg und 500 kg angegriffen, von denen die beiden ersteren in den Punkten C und D und die letzteren in C_1 und C_2 zwischen den Stützen A und B, in den Entfernungen 1 m und 2 m von A, angreifen.

Wie gross sind die Reaktionen und die Momente in A, B, C_1 und C_2?

$$A = 1666{,}7 \text{ kg,}$$
$$B = 1833{,}3 \text{ „}$$

und:

$$M\,m_A = 1000 \text{ kgm.}$$
$$M\,m_{C_1} = 333{,}3 \text{ „}$$
$$M\,m_{C_2} = 266{,}6 \text{ „}$$
$$M\,m_B = 700 \text{ „}$$

7. Ein Träger von der Länge 4,4 m ist in den Punkten A und B, welche die Entfernung bezw. 0,8 m und 1 m von den Trägerenden C und D haben, unterstützt und wird ausser von einer gleichmässig verteilten Last = 7200 kg noch von den Einzellasten 1200 kg, 1600 kg und 1000 kg beansprucht, von denen die beiden ersten in den Endpunkten C und D und die dritte in einem Punkte E angreift, der 1,6 m von A entfernt ist.

Welchen Wert hat das Maximalmoment, und sind Wendepunkte bei der elastischen Linie vorhanden?

Das Maximalmoment ist:

$$M\,m_B = 2418{,}183 \text{ kgm.}$$

Wendepunkte treten keine auf.

8. Welche Entfernung d muss im Beisp. 8 die Stütze B vom Ende haben, damit kein Wendepunkt vorhanden ist, und wie gross ist dann die Tragfähigkeit des Trägers?

$$d = \frac{l}{2},$$

$$Q = \frac{8\,W\,S}{l}.$$

9. Ein gusseiserner Träger von 3 m Länge und einfach ┬förmigen Querschnitt liege an den Enden frei auf und sei mit 4000 kg gleichmässig belastet. Die Höhe des Querschnittes betrage 24 cm und die Stärke des Flantsches sei 4 cm.

Wie gross ist die Flantschbreite, sowie die Rippenstärke zu nehmen, wenn das Profil ein solches gleicher Festigkeit sein soll?

Für $S_1 = 2\,S = 5$ kg auf den Quadratmillimeter folgt:

Flantschbreite: 112,5 mm,

Rippenstärke: 22,5 „

10. Ein mit beiden Enden frei aufliegender Balken aus Tannenholz sei mit 1000 kg auf den laufenden Meter belastet und habe eine Breite von 20 cm, sowie eine Höhe von 30 cm.

Welche Länge kann der Träger erhalten?

$$l = 3{,}25 \text{ m}.$$

11. Eine Röhre von gutem, dichtem Gusseisen von 6 m Länge, welche mit beiden Enden frei aufliegt, hat 35 cm äusseren Durchmesser und 3,5 cm Wandstärke.

Welche ruhende Last kann dieselbe in der Mitte tragen, wenn $S = 4$ kg auf den Quadratmillimeter angenommen wird?

$$P = 14112{,}693 \text{ kg}.$$

12. Eine liegende Achse aus Gusseisen, deren Endzapfen 4,5 m voneinander entfernt sind, trägt 2,5 m von dem einen Ende ein 850 kg schweres Rad.

Welcher Durchmesser ist der Achse zu geben?

$$d = 157 \text{ mm},$$

wenn Achse und Zapfen dieselbe Sicherheit haben sollen.

13. Ein gusseiserner, mit beiden Enden frei aufliegender Träger von einfach ┬ förmigem Querschnitt, dessen Flantschbreite 32 cm, Flantsch- und Rippenstärke 4 cm, sowie totale Höhe 48 cm beträgt, hat eine Länge von 3,5 m.

Welche gleichmässig verteilte Last kann derselbe tragen, wenn mit Rücksicht auf eintretende Erschütterungen $S = 2$ kg auf den Quadratmillimeter angenommen wird?

$$Q = 20358 \text{ kg}.$$

14. Vier Träger von dem in Fig. 37 angegebenen Profil sollen als Brückenunterlage dienen und mit 2000 kg auf den laufenden Meter gleichmässig belastet werden.

Welchen Abstand kann man den beiden Unterstützungspunkten jedes Trägers geben bei einer Spannung $S = 6$ kg auf den Quadratmillimeter?

$$l = 12{,}107 \text{ m.}$$

15. Eine hohle gusseiserne Tragachse von 2,35 m Länge trägt in der Entfernung $a = 0{,}72$ m von einem Ende A eine Last $P = 2400$ kg. Der innere Durchmesser d_1 soll $^3/_4$ des äusseren d werden.

Wie gross sind diese Durchmesser zu nehmen, wenn $S = 2{,}5$ kg auf den Quadratmillimeter gewählt wird?

$$d = 193 \text{ mm,}$$
$$d_1 = 145 \text{ „}$$

16. Eine an beiden Enden unterstützte gusseiserne Röhre von 165 mm innerem Durchmesser habe eine Länge von 2,4 m und sei mit 700 kg auf den laufenden Meter gleichmässig belastet.

Welchen äusseren Durchmesser muss man nehmen, wenn $S = 1{,}5$ kg auf den Quadratmillimeter angenommen wird?

$$d = 194 \text{ mm.}$$

17. Welche Last trägt ein hohler parallelepipedischer Träger aus 10 mm dickem Eisenblech, dessen äussere Höhe 500 mm und äussere Breite 160 mm beträgt, wenn er auf 2 m Länge gleichmässig belastet wird und der Schwerpunkt der Last von den beiden Stützpunkten 3 m und 2 m entfernt ist?

$$Q = 10979{,}113 \text{ kg.}$$

18. Ein an seinen Enden unterstützter Balken aus Tannenholz hat die Breite $b = 180$ mm und die Höhe $h = 240$ mm und wird von einer Last angegriffen, deren Angriffspunkt von jeder der Stützen 3 m entfernt ist.

Wie gross kann die Last sein?

$$P = 506{,}88 \text{ kg.}$$

19. Welche Last in der Mitte trägt bei der Durchbiegung $= \frac{1}{500}$ der ursprünglichen Länge der in voriger Aufgabe angegebene Balken aus Tannenholz?

$$P = 718{,}848 \text{ kg.}$$

§ 12.

An den Enden aufruhende Träger gleicher Festigkeit.

Unter Hinweis auf § 10 setzen wir voraus:

I. Der Träger sei durch eine Einzellast beansprucht.

Fassen wir die beiden Trägerstücke AC und BC als Freiträger auf, die in C, dem Angriffspunkt der Einzellast, festgehalten und in den Auflagerpunkten durch die Reaktionen A und B als Einzellasten beansprucht werden, so ergibt sich:

a) Der Träger sei rechteckig.

Ist der Träger von konstanter Breite, so wird das Längenprofil durch zwei Parabeln begrenzt, die in C zusammenstossen und deren Scheitel in den Auflagerpunkten liegen. Fig. 60 und 61.

Balancier- und Wagebalken werden gewöhnlich so geformt.

Näherungsformen ergeben sich nach Fig. 63 und 64.

Ist die Höhe konstant, so ist das Seitenprofil ein Rechteck und der Grundriss des Trägers ein Rhombus. Fig. 65.

b) Der Träger habe einen kreisförmigen Querschnitt.

In diesem Falle ist die Meridianlinie jedes Trägerstückes genau eine kubische Parabel, wozu eine Annäherungsform in Fig. 70 angedeutet ist.

Tragachsen, wozu die Achsen der Balanciers, der meisten Wasserräder, der Eisenbahnwagen und der übrigen Fuhrwerke zu zählen sind, sind nach diesem Falle zu behandeln.

Hat die Tragachse zwei Lasten zu tragen, so ist jedes Achsende wie vorher zu konstruieren; das Zwischenstück, der Schaft, wird ein Kegelstumpf, der in einen Cylinder übergeht, wenn beide Lasten gleich sind und gleich weit von den Auflagerpunkten angreifen.

II. Der Träger sei über die ganze Länge gleichmässig belastet.

Es ist für den Querschnitt in der Trägermitte bekanntlich:

$$\frac{Q l}{8} = W_M S$$

und für einen Querschnitt C in der Entfernung x von der Stütze A:

$$\frac{Q}{2 l} x (l - x) = W_C S.$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Division:

(260) $$\frac{l^2}{4 x (l - x)} = \frac{W_M}{W_C}.$$

Nehmen wir nun an, der Querschnitt sei rechteckig und es seien b und h die Dimensionen in der Mitte, sowie u und v die im Querschnitt C, so folgt:

$$\frac{l^2}{4\,x\,(l-x)} = \frac{b\,h^2}{u\,v^2}.$$

Hat nun der Querschnitt überall gleiche Breite b, so ist auch:

$$\frac{l^2}{4\,x\,(l-x)} = \frac{h^2}{v^2}.$$

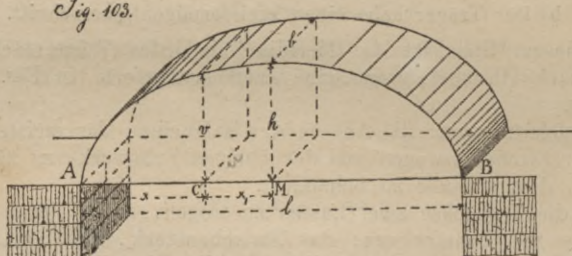
Führen wir $x = \frac{l}{2} - x_1$ ein, d. h. rücken wir den Koordinatenursprung von A nach der Mitte M des Trägers, so findet man:

$\frac{v^2}{h^2} = 1 - \left(\frac{2}{l}\right)^2 x_1^2$

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{v^2}{h^2} = 1.$$

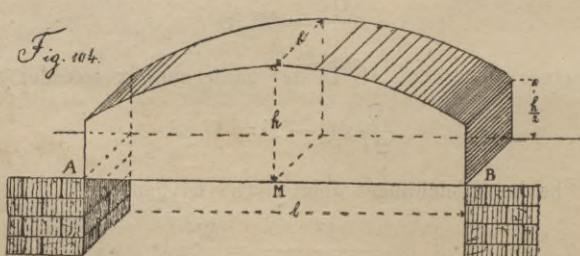
Das Seitenprofil des Trägers ist mithin eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{l}{2}$ und h, Fig. 103.

Fig. 103.



Eine genügende Annäherung an die genaue Form findet man, wenn man in den Endpunkten der grossen Achse eine Tangente gleich $\frac{h}{2}$ an die Ellipse zieht und nun die obere Begrenzung cylindrisch durchführt, Fig. 104.

Fig. 104.



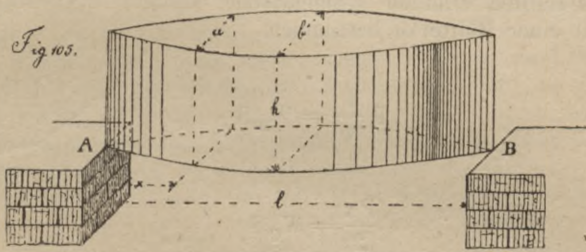
Ist dagegen die Höhe konstant, so ergibt sich:

$$\frac{l^2}{4\,x\,(l-x)} = \frac{b}{u}.$$

Behufs Feststellung der Trägerform im Grundriss setzen wir $x = \frac{l}{2} - x_1$ und $u = b - u_1$, d. h. wir verlegen den Koordinatenursprung in den Endpunkt der Breite b des Querschnitts in der Mitte, so resultiert:

$$x_1^2 = \frac{l^2}{4\,b} u_1.$$

Die Körperform ist also ein Prisma mit parabolisch begrenzten Grundflächen; der Scheitel der 4 Parabeln liegt in dem Endpunkte der mittleren Breite b, Fig. 105.



Ersetzt man in dem Werte s der Senkung des § 10 I, a die Länge l durch $\frac{l}{2}$ und führt man ausserdem

$$r = \frac{a\,E}{S} = \frac{a\,E\,W}{\frac{Q\,l}{8}} = \frac{8\,E\,I}{Q\,l}$$

für den Radius der Kreislinie ein, welche die elastische Linie darstellt, so erhält man als Durchbiegung in der Mitte:

(261) $$s = \frac{Q\,l^3}{64\,E\,I} = \frac{3}{16} \cdot \frac{Q\,l^3}{E\,b\,h^3}.$$

Beispiele.

1. Eine schmiedeeiserne Traverse, Fig. 106, soll in der Mitte einen im Maximum mit 7500 kg belasteten Kloben eines Flaschenzuges tragen, dabei ist der Abstand der an den Enden der Traverse befindlichen Drehzapfen, von Mitte bis Mitte gerechnet, 1000 mm und die Länge eines jeden Zapfens 50 mm.

Welche Abmessungen sind zu nehmen, wenn die Traverse möglichst für gleiche Festigkeit konstruiert werden und dabei die Breite des rechteckigen Querschnitts zur Höhe sich wie 1:3 verhalten soll?

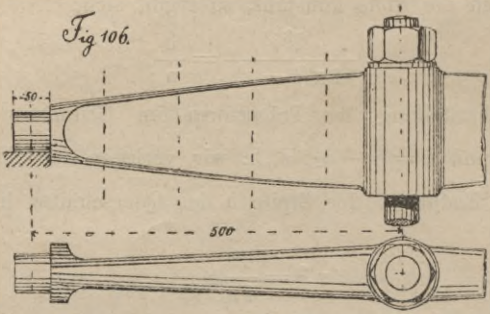


Fig 106.

Bei sorgfältiger Ausführung kann man eine gleichmässige Auflage der Zapfen in ihrer ganzen Länge erwarten, daher für die Länge der Traverse $l = 1000$ mm einführen.

Beide Hälften erhalten symmetrische Gestalt; es genügt daher, die Gestalt einer Hälfte zu bestimmen.

Aus

$$P \frac{l}{4} = W_M S$$

und:

$$\frac{P x}{2} = W_C S$$

folgt nun das Widerstandsmoment W_C eines beliebigen Querschnitts in der Entfernung x vom Zapfenmittel allgemein:

$$W_C = W_M \cdot \frac{x}{\frac{l}{2}}.$$

Es ist für den mittleren Querschnitt:

$$W_M = \frac{7500 \cdot 1000}{7} = 267857.$$

Teilen wir nun die halbe Länge der Traverse in 5 gleiche Teile, so folgt, wenn man ausserdem einen der Schnitte durch das Zapfenende führt, für $\frac{x}{\frac{l}{2}}$ der Reihe nach: $\frac{25}{500}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{5}$; demnach sind die entsprechenden Widerstandsmomente:

a) $\frac{25}{500} \cdot 267857 = 13392{,}85$, c) $\frac{2}{5} \cdot 267857 = 107142{,}8$,

b) $\frac{1}{5} \cdot 267857 = 53571{,}4$, d) $\frac{3}{5} \cdot 267857 = 160714{,}2$,

e) $\frac{4}{5} \cdot 267857 = 214285{,}6$.

Die bezüglichen Querschnittsdimensionen ergeben sich wie folgt:

a) $\frac{\pi d^3}{32} = 13392,85$, $d = 51,5$ mm, c) $\frac{h_2^3}{18} = 107142,8$, $h_2 = 125$ mm

$b_2 = 42$ „

b) $\frac{h_1^3}{18} = 53571,4$, $h = 99$ „ d) $\frac{h_3^3}{18} = 160714,2$, $h_3 = 142,5$ „

$b = 33$ „ $b_3 = 47,5$ „

c) $\frac{h_4^3}{18} = 214285,6$, $h_4 = 157$ mm

$b_4 = 52$ „

Für den mittleren Querschnitt ist:

f) $\frac{h_5^3}{18} = 267857$, $h_5 = 169$ mm

$b_5 = 56$ „

Die Mitte der Traverse hat ein Auge, durch welches der Bolzen geht, an dem der Kloben hängt; der Querschnitt besteht daher hier nicht aus einem einfachen Rechteck, sondern ist aus zwei nebeneinander liegenden gleichen Rechtecken zusammengesetzt, deren Breite $= 28$ mm beträgt.

Der Bolzen ist auf Zug beansprucht durch eine Kraft $= 7500$ kg; nehmen wir nun für die schwächste Stelle, also den Kern des Gewindes, eine zulässige Spannung von 2,6 kg, so folgt als Querschnitt:

$$\frac{7500}{2,6} = 2884,6 \text{ qmm}$$

und daher der Durchmesser:

$$d_1 = 60,5 \text{ mm}.$$

Diesem Kerndurchmesser der Schraube entspricht ein äusserer Durchmesser von etwa 68,5 mm, welchem die Weite des Auges entsprechend anzunehmen ist.

Die Stärke der Stange dagegen ergibt sich aus:

$$7500 = \frac{\pi d_2^2}{4} 7,$$

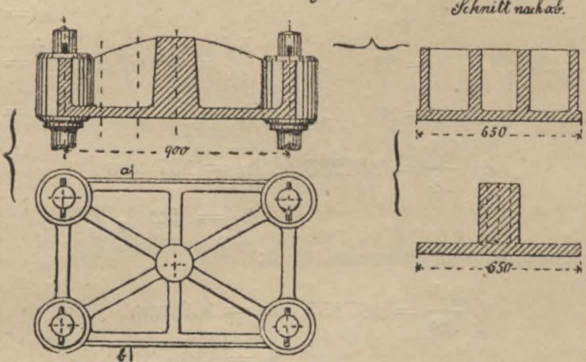
$$d_2 = 37 \text{ mm}.$$

2. Der Abstand der 4 Säulen, welche den gusseisernen Holm (Kopfplatte) einer hydraulischen Presse, Fig. 107, tragen, sei in der Vorderansicht 900 mm, die Breite der Holms 650 mm, der Druck gegen den Pressstempel, der dem Drucke der Einlage gegen den Holm gleich ist, im Maximum 148000 kg, wobei angenommen wird, dass dieser Druck auf der ganzen Pressfläche des Holms gleichmässig verteilt sei.

Welches sind die Querschnittsdimensionen des Holms für thunlichst gleiche Festigkeit?

Wir können den Holm ansehen als einen Balken, der an beiden Enden frei aufliegt, wobei $l = 900$ mm und die gleichmässig verteilte Belastung $Q = 148000$ kg ist.

Fig. 107.



Das Profil des Holms ist als ein einfach ⊤-förmiges anzunehmen, das aus jenem durch Vereinigung der rechteckigen Schnitte seiner 4 vertikalen Rippen zu einem Rechteck entsteht.

Die obere Seite der Neutralachse ist hier die Zugseite; da nun infolge der Rippen die äussersten gezogenen Teile des Profils von dieser Achse weiter entfernt liegen als die äussersten gepressten, so ist nach § 6 das Zugwiderstandsmoment der Rechnung zu Grunde zu legen.

Genügend dürfte die Gestalt des Holms markiert sein, wenn ausser dem mittleren Querschnitt noch zwei Schnitte einer Hälfte, welche durch die Drittel des halben Säulenabstandes gehen, festgestellt werden.

Wir wollen im Maximum eine Zugspannung von 4 kg zulassen; alsdann ergibt sich für den mittleren Querschnitt:

$$W_M = \frac{148000 \cdot 900}{8 \cdot 4} = 4162500.$$

Es ist:

$$\frac{Q\,l}{8} = W_M \cdot S$$

und:

$$\frac{Q}{2\,l} \cdot x\,(l - x) = W_C\,S;$$

daraus:

$$W_C = W_M \cdot 4\,\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Demnach ist für den Querschnitt C_1, für den $\frac{x}{l} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2}}{l}$ $= \frac{1}{6}$, also $4\,\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) = \frac{5}{9}$:

$$W_{C_1} = \tfrac{5}{9} \cdot 4162500 = 2312500$$

und für den Querschnitt C_2, für den $\frac{x}{l} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{l} = \frac{1}{3}$, mithin $4 \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) = \frac{8}{9}$:

$$W_{C_2} = \tfrac{8}{9} \cdot 4162500 = 3700000.$$

Bei der nun folgenden Bestimmung der Dimensionen des mittleren Querschnitts nehme man entweder die Dicken oder die Höhen desselben, zweckmässiger ist letztere und zwar behufs Materialersparnis möglichst gross, nämlich gleich 320 mm an; auf dem Wege des Probierens findet sich dann die dem obigen W_M entsprechende Dicke, wobei aber noch zu beachten ist, dass die Vertikalrippen stärker gehalten werden müssen, als die horizontale Wand, um die neutrale Achse möglichst nach oben zu rücken. Setzen wir die Dicke der Höhenrippe gleich 48 mm, sowie die der horizontalen Wand gleich 40 mm, so folgt bei einer Höhe des Profils von 320 mm und einer Breite von 650 mm der Abstand der Neutralachse von den äussersten gezogenen Fasern gleich 192 mm, daher das Trägheitsmoment:

$$I_M = 803329707$$

und also das Widerstandsmoment:

$$W_M = \frac{803329707}{192} = 4184009,$$

mithin hinreichend.

Behält man nun die obigen Dicken durchweg bei, so ergibt sich für den Querschnitt C_1 und C_2 bei einer Höhe von 240 mm bezw. 300 mm als Abstand der Neutralachse von den äussersten gezogenen Fasern 148 mm bezw. 181 mm, demnach das Trägheitsmoment:

$$I_{C_1} = 354724266$$

und das zugehörige Widerstandsmoment:

$$W_{C_1} = \frac{354724266}{148} = 2396785,$$

sowie:

$$I_{C_2} = 669350587$$

und:

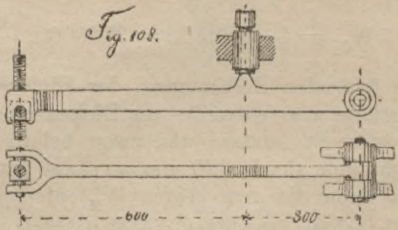
$$W_{C_2} = \frac{669350587}{181} = 3698069,$$

also auch genügend.

Die Säulen sind auf Zug zu berechnen. Die Verstärkung der Stangen da, wo das Keilloch angebracht ist, sowie die Dimensionen des Keiles und des Auges bestimmen sich nach § 17, Beispiel 10.

3. Bei dem zum Stellzeug eines Mahlganges gehörigen schmiedeeisernen Hebel, Fig. 108, sei die Entfernung vom Drehpunkt bis Mitte Mühleisen 300 mm, von Mitte Mühleisen bis Mitte Zugstange 600 mm, und die Gewichte der auf dem Hebel ruhenden Teile, aus Läuferstein, Mühleisen samt Haue, Triebrad und Spurlager bestehend, betragen zusammen 1100 kg.

Fig. 108.



Welche Höhen sind bei konstanter Stärke des Hebels gleich 30 mm zu geben a) dem durch Mitte Mühleisen gehenden Querschnitt, b) den beiden in jedem Drittel des kürzeren Hebelarmes und c) den dreien, in jedem Viertel des übrigen Hebelstückes liegenden Querschnitten, wenn eine zulässige Spannung von 6,5 kg angenommen wird, und welchen Durchmesser erfordert der Drehzapfen bei 40 mm Länge?

Sehen wir den Hebel als einen an den Enden unterstützten Träger an, so folgt

a) für den Querschnitt C:

$$1100 \frac{300 \cdot 600}{900} = \frac{30 \cdot h_C{}^2}{6} \cdot 6{,}5,$$

$$h_C = 82 \text{ mm};$$

b) für den kürzeren Arm:

$$1100 \cdot \frac{600}{900} \cdot 100 = \frac{30 \cdot h_{D_1}^2}{6} \cdot 6{,}5,$$

$$h_{D_1} = \frac{h_C}{\sqrt{3}} = 47{,}5 \text{ mm},$$

$$h_{D_2} = h_{D_1} \cdot \sqrt{2} = 67 \text{ mm};$$

c) für den längeren Arm:

$$\frac{1100 \cdot 300}{900} \cdot 150 = \frac{30\, h_{E_1}^2}{6} \cdot 6{,}5,$$

$$h_{E_1} = 41 \text{ mm},$$

$$h_{E_2} = h_{E_1} \cdot \sqrt{2} = 58 \text{ mm},$$

$$h_{E_3} = h_{E_1} \cdot \sqrt{3} = 71 \text{ mm}.$$

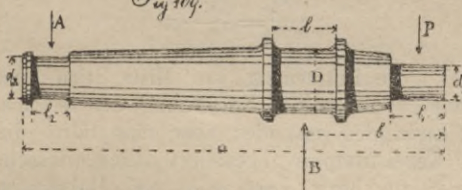
Zur Bestimmung des Drehzapfens setzen wir dieselbe Sicherheit voraus, und wir haben demnach, da der Zapfen doppelt ist:

$$\frac{1100}{2} \cdot \frac{40}{2} = \frac{\pi\, d^3}{32} \cdot 6{,}5,$$

$$d = 26 \text{ mm}.$$

4. Bei einer freitragenden (überhängenden) Achse aus Gusseisen, Fig. 109, wirke auf das Achsenende vom Durchmesser d_1 die Last $P = 12000$ kg; weiter sei $a = 1800$ mm, $b = 600$ mm, sowie $l_1 = 330$ mm.

Fig. 109.



Welche Verhältnisse ergeben sich für die Achse?

Die Zapfendrucke sind:

$$A = P\,\frac{b}{a-b} = 12000 \cdot \frac{600}{1200} = \ \ 6000 \text{ kg},$$

$$B = P\,\frac{a}{a-b} = 12000 \cdot \frac{1800}{1200} = 18000 \ \text{„}$$

Zur Bestimmung des Lastzapfens hat man:

$$12000 \cdot \frac{330}{2} = \frac{\pi\, d_1^3}{32} \cdot 2{,}5,$$

$$d_1 = 201 \text{ mm}.$$

Der Durchmesser des Stirnzapfens ergibt sich nach § 9, Beispiel 11 zu:

$$d_2 = 1{,}65 \sqrt{6000} = 128 \text{ mm}$$

und die Länge also:

$$l_2 = \tfrac{4}{3} \cdot 128 = 171 \text{ mm}.$$

Den Durchmesser D des Halszapfens erhält man aus der Beziehung:

$$6000 \cdot 1200 = \frac{\pi\, D^3}{32} \cdot 2{,}5,$$

$$D = 308{,}5 \text{ mm}.$$

Die Länge dieses Zapfens macht man gleich der Länge eines Stirnzapfens für dieselbe Belastung; der Durchmesser D_0 eines solchen Zapfens ist aber:

$$D_0 = 1{,}65 \sqrt{18000} = 221{,}5 \text{ mm}$$

und also die gesuchte Länge:

$$l = \tfrac{4}{3} \cdot 221{,}5 = 295{,}5 \text{ mm}.$$

Die Höhe der Anläufe beim Halszapfen nehme man $= 3$ mm $+ 0{,}1\, D = 34$ mm.

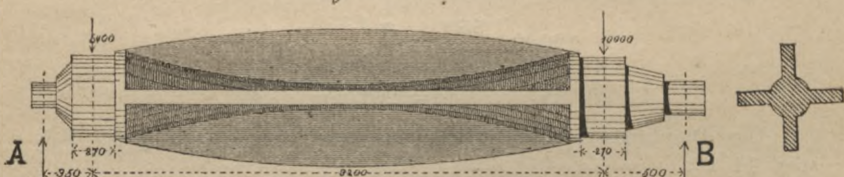
Die Verzeichnung der beiden Achsenstücke zwischen Stirn- und Halszapfen, sowie zwischen letzterem und dem Lastzapfen kann nun in der Weise erfolgen, dass man sich für einige Schnitte die Durchmesser mit Hilfe von

$$z^3 = \frac{D^3}{l} \cdot x$$

bestimmt, wobei l die Entfernung von Mitte Stirn- bezw. Lastzapfen bis Mitte Halszapfen und x die Entfernung des betrachteten Schnittes von einem der Endzapfen ist oder aber man führt die Konstruktion mit Hilfe eines Kegelstumpfes angenähert durch, dessen Endflächen in den Mitten von Stirn- bezw. Lastzapfen und Halszapfen liegen, wobei D und $\frac{2}{3}$ D die Durchmesser dieser Endflächen sind.

5. Für ein Wasserrad mit zwei Armsystemen soll eine Flügelachse, Fig. 110, konstruiert werden; die Länge der Achse zwischen den Mitten der Achsköpfe sei 3,2 m; die Länge der beiden Achsköpfe betrage 270 mm und die der Achsschenkel 350 mm und 500 mm. Aus der Anordnung des Rades ergebe sich ferner, dass die Drucke auf die Mitten der Achsköpfe 640 kg und 10000 kg sind.

Fig. 110.



Welche Verhältnisse verlangt die Achse?

Die Drucke auf die beiden Zapfen sind:

$$A = \frac{6400\,(3200 + 500) + 10000 \cdot 500}{350 + 3200 + 500} = 7081{,}482 \text{ kg},$$

$$B = \frac{10000\,(3200 + 350) + 6400 \cdot 350}{500 + 3200 + 350} = 9318{,}518 \;\text{„}$$

Für den Zapfen A hat man nun:

$$d = 1{,}65 \sqrt{7081{,}482} = 139 \text{ mm},$$

$$l = \tfrac{4}{3} \cdot 139 = 185 \text{ mm}.$$

Für den Zapfen B folgt:

$$d_1 = 1{,}65 \sqrt{9318{,}518} = 159{,}5 \text{ mm},$$

$$l_1 = \tfrac{4}{3} \cdot 159{,}5 = 213 \text{ mm}.$$

Wird der Querschnitt der Achsköpfe kreisförmig, so findet man den Durchmesser D des einen aus:

$$7081{,}482 \cdot 350 = \frac{\pi D^3}{32} \cdot 2{,}5,$$

$$D = 216{,}5 \text{ mm}$$

und den Durchmesser D_1 des zweiten aus:

$$9318{,}518 \cdot 500 = \frac{\pi D_1^3}{32} \cdot 2{,}5,$$

$$D_1 = 267 \text{ mm}.$$

Mit Rücksicht auf eine leichtere Anfertigung des Achsenmodells und eine bequemere Montierung der Achse ist es wünschenswert, beiden Zapfen und Achsköpfen die gleichen und zwar die grösseren Verhältnisse zu geben, um so eine mehr symmetrische Form zu erzielen.

Würde nun das Mittelstück der Achse massiv cylindrisch, so müsste man demselben den obigen Durchmesser $D_1 = 267$ mm geben. Behufs möglichster Vermeidung von Gussfehlern ist aber ein sternförmiger Querschnitt, wie ihn Fig. 31 angibt, vorgeschrieben. Da jedoch einerseits bei gleichem Widerstandsmoment die Rippenhöhe h grösser werden muss als der Durchmesser des vollen Querschnitts, zugleich aber auch das Mittelstück in die Achsköpfe überzugehen hat, so wählt man für das Rippenprofil eine gekrümmte Form (s. Konstrukteur v. Reuleaux, § 101) und gibt dann zur Ausgleichung der dadurch entstandenen Verminderung des Widerstandsmomentes bei gleicher Rippenstärke b dem Querschnitt einen nach den Achsköpfen hin vergrösserten Kerndurchmesser.

Formel (75) liefert als Widerstandsmoment für den Sternquerschnitt, wenn k die Kerndicke bezeichnet:

$$W = \frac{1}{h} \left\{ \frac{\pi k^4}{32} + \frac{b (h^3 - k^3) + (h - k) b^3}{6} \right\}.$$

Für gleiche Festigkeit muss nun sein:

$$\frac{\pi D^3}{32} = \frac{1}{h} \left\{ \frac{\pi k^4}{32} + \frac{b (h^3 - k^3) + (h - k) b^3}{6} \right\},$$

woraus allgemein:

$$\frac{D}{h} = \sqrt[3]{\left(\frac{k}{h}\right)^4 + \frac{16}{3\pi} \cdot \frac{b}{h} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{h}\right)^3 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{k}{h}\right) \right\}}.$$

Nehmen wir nach dem Gefühl für die Rippenhöhe h in der Mitte des Mittelstückes 480 mm und die konstante Rippenstärke $b = 45$ mm, so wird diese Gleichung genügend erfüllt für $k = 190$ mm.

Für eine zweite Stelle sei $h = 350$ mm, alsdann erhält man bei derselben Rippenstärke aus obiger Beziehung für $k = 262$ mm.

Diese beiden Werte von k sind vollkommen hinreichend, um die Form des Kernstückes zu verzeichnen.

Aufgaben.

1. Eine einfache Achse aus Schmiedeeisen ist mit $P = 5000$ kg belastet und zwar in einer Entfernung $a = 600$ mm und $b = 400$ mm von den Zapfenmitten, so dass die ganze Achse 1000 mm lang ist.

Welches sind die Hauptdimensionen der Achse?

Für die Zapfen erhält man bei $n < 150$:

$$d_1 = 55{,}5 \text{ mm}, \quad l_1 = 83{,}5 \text{ mm},$$
$$d_2 = 68 \quad " \quad l_2 = 102 \quad "$$

Unter Voraussetzung gleicher Sicherheit für Achse und Zapfen ergibt sich für die Laststelle:

$$D = 134{,}5 \text{ mm}.$$

Die Achsschenkel werden entweder streng nach einem kubischen Paraboloid oder konstruktiv leichter nach einem Kegelstumpf geformt. Der zur Aufnahme der Belastung (Rades, Kranzes u. s. w.) dienende sogen. Achskopf wird mit Rücksicht auf den Keil bis zu $\frac{1}{10}$ stärker genommen als obiges D angibt; die Länge desselben ist durch die Breite der Nabe bedingt, welche das zu tragende Stück verlangt.

2. Bei einer zweifach tragenden Achse aus Gussstahl seien die beiden Lasten $P_1 = 2000$ kg und $P_2 = 1000$ kg; die Länge der bezüglichen Achsschenkel sei 800 mm und 1000 mm und die des zwischen liegenden Schaftes 1800 mm.

Welche Dimensionen sind zu geben für $n = 250$ im Maximum?

Es ergibt sich für beide Zapfen:

$$d_1 = 53 \text{ mm}, \quad l_1 = 127{,}5 \text{ mm},$$
$$d_2 = 42{,}5 \quad " \quad l_2 = 102 \quad "$$

Für die Laststellen folgt:

$$D_1 = 123{,}5 \text{ mm}, \quad D_2 = 114{,}5 \text{ mm}.$$

Ist z der Durchmesser eines Querschnitts in der Entfernung x von der Mitte des der Last P_1 zunächst liegenden Zapfens, A der Druck dieses Zapfens und a die Länge des bezüglichen Achsschenkels, so ist:

$$z = D_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{P_1}{A} + \frac{x}{a}\left(1 - \frac{P_1}{A}\right)}.$$

Der Schaft müsste demnach nach zwei kubischen Parabelbogen profiliert werden. Genügend ist jedoch, diese Bogen durch zwei Geraden zu ersetzen, so dass dann der Schaft ein Kegelstumpf wird.

3. Eine gusseiserne Achse von 2010 mm Länge zwischen den Stützpunkten hat in den Entfernungen 370 mm von ihren Stützen die gleichen Lasten von je 6500 kg zu tragen.

Welche Dimensionen sind beiden Zapfen zu geben, und welche Stärke erfordern die beiden Schenkel und der Schaft?

Für den Zapfendurchmesser findet man:

$$d = 133 \text{ mm} \text{ und } l = 177{,}5 \text{ mm}.$$

Der Durchmesser an den Belastungsstellen ergibt sich zu:

$$D = 214 \text{ mm}.$$

Das Mittelstück wird cylindrisch.

4. Eine hohle gusseiserne und gleichschenkelige Wasserradachse, welche eine Länge von 3,9 m zwischen den Mitten der Stützen hat, soll konstruiert werden. Der Druck auf die Mitte jeden Achskopfes betrage 9600 kg und die Schenkellänge sei 500 mm.

Welche Verhältnisse erfordert die Achse bei einem Höhlungsverhältnis von 0,6?

Der äussere Zapfendurchmesser wird:

$$d_1 = 170{,}5 \text{ mm};$$

daher der innere:

$$d_2 = 102{,}5 \text{ mm}.$$

Die Länge des Zapfens ist:

$$l_1 = 216 \text{ mm}.$$

Der äussere Durchmesser des Achskopfquerschnittes ergibt sich zu:

$$D_1 = 283 \text{ mm},$$

der innere desselben zu:

$$D_2 = 170 \text{ mm}.$$

Die letzteren Dimensionen sind auch die des Schaftes.

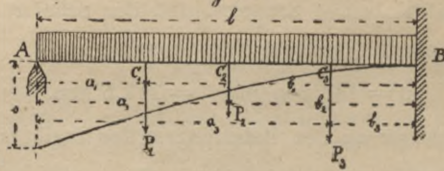
§ 13.

An dem einen Ende aufliegende und dem anderen eingespannte oder an beiden Enden eingespannte Träger.

I. Der Träger liegt an dem einen Ende frei auf und ist an dem anderen horizontal eingespannt.

Behufs Feststellung des Stützendruckes A, Fig. 111, welcher vorerst zu bestimmen ist, wollen wir zunächst annehmen, die Stütze A sei nicht vorhanden. Alsdann ist die Senkung s_1 des Trägers in A infolge der Einzellasten $P_1, P_2 \ldots P_n$, wenn man beachtet, dass das Trägerstück $C_1 A$ ungebogen, also geradlinig sein würde, nach Formel (120 und 121):

Fig. 111



$$s_1 = \frac{2 P_1 b_1^3 + \sum\limits_{k=2}^{k=n} P_k b_k^2 (3 b_1 - b_k)}{6 E I} + (l - b_1) \frac{P_1 b_1^2 + \sum\limits_{k=2}^{k=n} P_k b_k^2}{2 E I}$$

$$= \frac{3 b_1 \left\{ P_1 b_1^2 + \sum\limits_{k=2}^{k=n} P_k b_k^2 \right\} - P_1 b_1^3 - \sum\limits_{k=2}^{k=n} P_k b_k^3}{6 E I} + l \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^2}{2 E I} - b_1 \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^2}{2 E I}$$

$$= b_1 \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^2}{2 E I} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^3}{6 E I} + l \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^2}{2 E I} - b_1 \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^2}{2 E I}$$

$$= \frac{3 l \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^2 - \sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^3}{6 E I}.$$

Ist weiter s_2 die durch die gleichmässig verteilte Belastung Q erzeugte Senkung in A, so ist nach Formel (98):

$$s_2 = \frac{Q l^3}{8 E I}.$$

Demnach die totale Senkung s in A:

$$s = \frac{3 l \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^2 - \sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^3}{6 E I} + \frac{Q l^3}{8 E I}.$$

Die Stütze A soll aber diese Durchsenkung verhindern; deshalb muss der hier herrschende Stützendruck A eine Durchbiegung nach entgegengesetzter Richtung erzeugen, welche gleich der obigen ist. Die von A als Einzellast bedingte Durchbiegung ist aber:

$$s^1 = A \frac{l^3}{3 E I}.$$

Aus beiden gleichen Werten folgt nun:

$$A = \frac{3 l \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^2 - \sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k b_k^3}{2 l^3} + \frac{3}{8} Q. \tag{262}$$

Das Moment der äusseren Kräfte für einen Querschnitt in der Entfernung x von A ergibt sich durch Rechnung genau nach Formel (196).

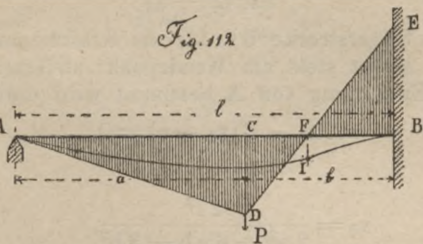
a) Auf den Träger wirke nur eine Einzellast P in dem Abstande a von A und b von B.

Der Stützendruck hat dann den Wert:

(263) $$A = \frac{P\,b^2(3\,l - b)}{2\,l^3} = \frac{P\,b^2(2\,l + a)}{2\,l^3}.$$

Das Moment für die Angriffsstelle C der zentrierten Last P, Fig. 112, ist daher:

Fig. 112



$$M\,m_C = A\,a$$

oder:

(264) $$M\,m_C = P\,\frac{a\,b^2\,(2\,l + a)}{2\,l^3}$$

und für die Befestigungsstelle B:

$$M\,m_B = A\,l - P\,b,$$

woraus:

(265) $$M\,m_B = -\,P\,\frac{a\,b\,(l + a)}{2\,l^2}.$$

Zur Bestimmung der Lage des Bruchquerschnitts ist festzustellen, ob absolut genommen:

$$M\,m_B \gtrless M\,m_C$$

oder:

$$P\,\frac{a\,b\,(l + a)}{2\,l^2} \gtrless P\,\frac{a\,b^2\,(2\,l + a)}{2\,l^3},$$

woraus die Ungleichung:

$$a \gtrless b\,\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

oder auch:

$$a \gtrless 0{,}707\,b$$

folgt.

Für $a > 0{,}707\,b$ liegt daher der gefährliche Querschnitt in der Einklemmungsstelle, die Tragfähigkeit ist dann also:

(266) $$P = \frac{2\,W\,S\,l^2}{a\,b\,(l + a)}.$$

Ist dagegen $a < 0{,}707\,b$, so muss der Bruchquerschnitt im Angriffspunkt der Einzellast liegen, und die Tragfähigkeit ist nun gegeben durch:

(267) $$P = \frac{2\,W\,S\,l^3}{a\,b^2\,(2\,l + a)}.$$

Da auf der Trägerstrecke $B\,C$ für die Kraftmomente ein Zeichenwechsel eintritt, so ist stets ein Wendepunkt zwischen B und C vorhanden, dessen Entfernung von A bestimmt wird durch:

$$A\,x_0 - P\,(x_0 - a) = 0,$$

also:

(268) $$x_0 = \frac{2\,l^3}{2\,a^2 + 6\,a\,b + 3\,b^2}.$$

Die Veränderlichkeit der Momente ist durch die Figur graphisch angedeutet.

Greift die Einzellast in der Mitte an, ist also $a = b = \frac{l}{2}$, so folgt:

(269) $$A = \frac{5}{16}\,P.$$

Der Bruchquerschnitt muss, da hier $a > 0{,}707\,b$ ist, in der Einklemmungsstelle liegen und also das absolute M a x i m a l m o m e n t:

(270) $$M\,m_B = \frac{3}{16}\,P\,l;$$

demnach die Tragfähigkeit:

(271) $$P = \frac{16\,W\,S}{3\,l}.$$

Der Wendepunkt hat von A die Entfernung:

(272) $$x_0 = \frac{8}{11}\,l.$$

b) Der Träger sei nur durch eine gleichmässig verteilte Last Q beansprucht.

Der Auflagerdruck in A ist dann:

(273) $$A = \frac{3}{8}\,Q.$$

Der Bruchquerschnitt liegt da, wo die vertikale Scherkraft

$$A - \frac{Q}{l}\,x_m = 0$$

ist, mithin in einer Entfernung von A:

(274) $$x_m = \frac{3}{8} l,$$

und das hier auftretende Moment hat den Wert:

$$M\,m_M = A\,x_m - \frac{Q}{2\,l} x_m^2,$$

also:

(275) $$M\,m_M = \frac{9}{128} Q\,l.$$

Das Moment in B ist:

$$M\,m_B = A\,l - Q\,\frac{l}{2}$$

oder:

(276) $$M\,m_B = -\frac{Q\,l}{8}.$$

Der absolut gefährliche Querschnitt liegt folglich in B und daher die Tragfähigkeit zu berechnen nach:

(277) $$Q = \frac{8\,W\,S}{l}.$$

Das Tragvermögen ist mithin in diesem Falle viermal so gross, als ohne die Stütze in A und $8 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{2}$ mal so gross, als wenn bei derselben Auflagerung des Trägers die Last in der Mitte wirkte.

Ein Wendepunkt tritt auch hier auf; sein Abstand von A ist gegeben durch:

$$A\,x_0 - Q\,\frac{x_0^2}{2\,l} = 0,$$

woraus:

(278) $$x_0 = \frac{3}{4} l.$$

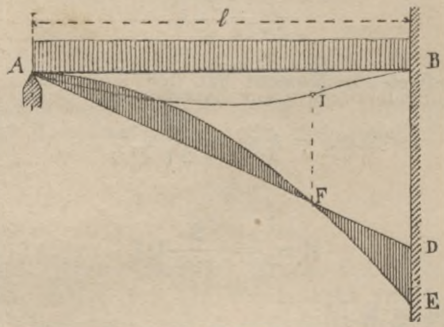
Stellt man in Fig. 113 für die Reaktion A und die entgegengesetzt wirkende Last Q nach § 9 I und II die zugehörigen Momentenflächen dar, so ergibt sich als resultierende Momentenfläche die schraffierte Fläche A F E. Hierbei ist noch zu bemerken, dass, da

$$B\,D = A\,l = \frac{3}{8} Q\,l$$

und:

$$B\,E = Q\,\frac{l}{2},$$

Fig. 113.

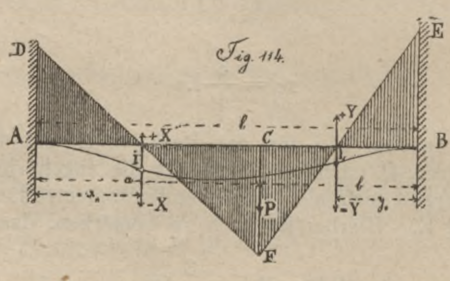


also $BD < BE$ ist, die der Kraft A entsprechende Momentenkurve AD die Parabel AFE immer schneiden muss, wodurch ebenfalls die Existenz des Wendepunktes angezeigt ist.

II. Der Träger sei an beiden Enden eingespannt.

a) Auf den Träger wirke eine Einzellast P in dem Abstande a von A und b von B.

In den hier auftretenden beiden Wendepunkten I und I_1, Fig. 114, ist bekanntlich das Kraftmoment, also auch die Biegungsspannung gleich Null, und man kann demnach den Träger in jedem dieser beiden Punkte durchschnitten und von zwei gleichen, aber entgegengesetzt wirkenden Kräften angegriffen denken, die in den drei Trägerteilen dieselben Spannungsverhältnisse wie vor der Trennung hervorrufen, so dass also im Spannungszustande des Trägers nichts geändert ist; dabei können die beiden nach aufwärts wirkenden Kräfte $+X$ und $+Y$ auch durch Reaktionen von Stützen, die in den Wendepunkten angebracht sind und welche das Mittelstück tragen, ersetzt werden.



Seien nun $\pm X$ und $\pm Y$ diese Kräfte, x_0 und y_0 die Entfernung der Wendepunkte von A bezw. B, s_A und s_B die Tiefe der Wendepunkte unter AB, s_I und s_{I_1} die Tiefe des Angriffspunktes C der Last P unter I bezw. I_1, weiter α_I und α_{I_1} die Winkel der Tangente an die elastische Linie in I bezw. I_1 und endlich α_0 der Winkel der Tangente in C mit AB, so folgt für die Stücke AI und BI_1, sowie CI und CI_1 der elastischen Linie nach Formeln (89 und 91):

$$s_A = \frac{X x_0^3}{3EI}, \; s_B = \frac{Y y_0^3}{3EI},$$

$$s_I = \frac{X(a - x_0)^3}{3EI} - \alpha_0 (a - x_0), \; s_{I_1} = \frac{Y(b - y_0)^3}{3EI} + \alpha_0 (b - y_0),$$

$$\alpha_I = \frac{X x_0^2}{2EI} = \frac{X(a - x_0)^2}{2EI} - \alpha_0, \; \alpha_{I_1} = \frac{Y y_0^2}{2EI} = \frac{Y(b - y_0)^2}{2EI} + \alpha_0.$$

Es ist aber:

$$s_A + s_I = s_B + s_{I_1},$$

also auch:

$$\frac{X x_0^3}{3EI} + \frac{X(a-x_0)^3}{3EI} - \alpha_0 (a - x_0) = \frac{Y y_0^3}{3EI} + \frac{Y(b - y_0)^3}{3EI} + \alpha_0 (b-y_0).$$

Führt man in diese Gleichung den aus obigem sich ergebenden Wert

$$\alpha_0 = \frac{X(a - x_0)^2}{2EI} - \frac{X x_0^2}{2EI}$$

ein, so folgt nach einiger Reduktion:

$$\alpha) \; \frac{X}{Y} = \frac{2b(b^2 + 3y_0^2 - 3by_0)}{a(2a^2 - 3al - 3ax_0 + 3ay_0 + 6lx_0 - 6x_0y_0)}.$$

Aus den Werten von α_I und α_{I_1} erhält man durch Addition:

$$\beta) \; \frac{X}{Y} = \frac{b(b - 2y_0)}{a(2x_0 - a)}.$$

Diese beiden letzten Beziehungen α) und β) geben nun:

1. $abl = bx_0(2l + a) + ay_0(2l + b) - 6lx_0y_0$.

Unter Berücksichtigung der Beziehungen:

$$X = \frac{P(b - y_0)}{l - x_0 - y_0}$$

und:

$$Y = \frac{P(a - x_0)}{l - x_0 - y_0}$$

folglich auch:

$$\frac{X}{Y} = \frac{b - y_0}{a - x_0}.$$

Diesen Wert in Verbindung gebracht mit obigem β) gibt:

$$\frac{b - y_0}{a - x_0} = \frac{b(b - 2y_0)}{a(2x_0 - a)}$$

und hieraus auch:

2. $a\,b\,l = b\,x_0\,(l + a) + a\,y_0\,(l + b) - 2\,l\,x_0\,y_0$.

Diese Gleichung mit 3 multipliziert und dann Gleichung 1 abgezogen, ergibt:

$$y_0 = \frac{2\,a\,b - b\,x_0\,(l + 2\,a)}{a\,(l + 2\,b)}.$$

Letzteren Wert nun in 2 eingesetzt, liefert endlich:

$$x_0 = \frac{a\,(3\,l + 2\,a) \pm a\,(l - 2\,a)}{4\,(l + 2\,a)}.$$

Von den beiden sich ergebenden Werten ist nur

(279) $$x_0 = \frac{a\,l}{l + 2\,a}$$

zulässig, da dieser Wert auch von b, mithin l abhängig sein muss.

Ganz in derselben Weise, sowie auch durch einfache Vertauschung von a mit b findet man:

(280) $$y_0 = \frac{b\,l}{l + 2\,b}.$$

Man erhält nun, wenn man diese Werte in obige Ausdrücke für X und Y einsetzt:

$$X = P \cdot \frac{b^2\,(l + 2\,a)}{l^3}$$

und:

$$Y = P \cdot \frac{a^2\,(l + 2\,b)}{l^3}$$

und also die **drei relativen Maximalmomente** in A, B und C:

$$M\,m_A = -P \cdot \frac{b^2\,(l + 2\,a)}{l^3} \cdot \frac{a\,l}{l + 2\,a}.$$

$$M\,m_B = -P \cdot \frac{a^2\,(l + 2\,b)}{l^3} \cdot \frac{b\,l}{l + 2\,b},$$

$$M\,m_C = P \cdot \frac{b^2\,(l + 2\,a)}{l^3} \cdot \left(a - \frac{a\,l}{l + 2\,a}\right)$$

oder:

(281) $$M\,m_A = -P \cdot \frac{a\,b^2}{l^2},$$

(282) $$M\,m_B = -P \cdot \frac{a^2\,b}{l^2},$$

(283) $$M\,m_C = 2\,P \cdot \frac{a^2\,b^2}{l^3}.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$M\,m_A : M\,m_B : M\,m_C = \frac{1}{2\,a} : \frac{1}{2\,b} : \frac{1}{l}.$$

Ist hierbei:

$a > b$, so ist $M\,m_B$ das absolute **Maximalmoment** und also die Tragfähigkeit zu bestimmen nach:

(284) $$P = \frac{W\,S\,l^2}{a^2\,b};$$

dagegen für:

$a < b$ ist $M\,m_A$ das absolute **Maximalmoment** und demnach die Tragfähigkeit gegeben durch:

(285) $$P = \frac{W\,S\,l^2}{a\,b^2};$$

ist endlich:

$a = b = \frac{l}{2}$, so sind obige drei Werte einander gleich; das der Rechnung zu Grunde zu legende Moment hat dann den absoluten Wert:

(286) $$M\,m = P\,\frac{l}{8}$$

und daher die Tragfähigkeit:

(287) $$P = \frac{8\,W\,S}{l}.$$

Das Tragvermögen ist folglich doppelt so gross gegen das der freien Auflage in den Endpunkten.

Die Lage der beiden Wendepunkte ist hier bestimmt durch:

(287a) $$x_0 = y_0 = \frac{l}{4}.$$

Man erhält allgemein die Momentenfläche, wenn man $A\,D = M\,m_A$, $B\,E = M\,m_B$ und $C\,F = M\,m_C$ macht und dann F mit D und E verbindet.

Für den Spezialfall, dass die Last in der Mitte angreift, ist $A\,D = B\,E = C\,F$.

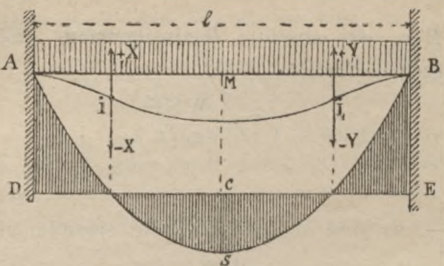
Da für letzteren Fall $X = \frac{P}{2}$ und $x_0 = \frac{l}{4}$ ist, so folgt als Senkung in der Mitte:

(288) $$s = s_A + s_I = \frac{P\,l^3}{192\,E\,I}.$$

b) Der Träger sei durch eine gleichmässig verteilte Last Q beansprucht.

Die Krümmungsverhältnisse in beiden Teilen AM und BM der elastischen Linie, Fig. 115, müssen wegen der symmetrischen Belastung hier dieselben sein, unter M die Mitte des Trägers verstanden. Demnach liegen die beiden Wendepunkte gleich tief unter AB und haben dieselbe Entfernung von A und B. Denken wir uns nun wieder den Träger in den Wendepunkten durchschnitten und hier zwei gleiche, aber entgegengesetzt wirkende Kräfte angebracht unter denselben Verhältnissen wie bei a), so ist, wenn α_{I} der Winkel der Tangente in I an die elastische Linie mit AB ist, nach Formel (108):

Fig. 115.



$$\alpha_{\mathrm{I}} = \frac{x_0^2}{2\,E\,I}\left\{X + \frac{Q\,x_0}{3\,l}\right\} = \frac{\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^2}{2\,E\,I}\left\{X - \frac{Q}{3\,l}\left(\frac{l}{2} - x_0\right)\right\},$$

da AI gleichmässig mit $+\frac{Q\,x_0}{l}$ und MI gleichmässig mit $-\frac{Q}{l}\left(\frac{l}{2} - x_0\right)$ belastet ist und ausserdem beide Teile durch die zentrierte Last $\pm X$ angegriffen sind.

Aus dieser Beziehung folgt:

$$X\,l\left(\frac{l}{4} - x_0\right) = \frac{Q}{3\,l}\left(\frac{l^3}{8} - \frac{3}{4}\,l^2\,x_0 + \frac{3}{2}\,x_0^2\right).$$

Es ist aber:

$$X = \frac{Q}{2\,l}(l - 2\,x_0);$$

diesen Wert eingeführt, gibt:

$$x_0 = \frac{l}{2}\cdot\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \tag{289}$$

das untere Zeichen gilt für die Entfernung des linken Wendepunktes I von A und das obere für die des rechten I_1 von demselben Punkte; auch ist $\frac{l}{2\sqrt{3}}$ die Entfernung jedes Wendepunktes von der Trägermitte.

Für X findet sich nun:

$$X = \frac{Q}{2\sqrt{3}}$$

und also das Moment in A und B:

$$M\,m_A = M\,m_B = -\frac{Q}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{Q}{2\,l}\left\{\frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}^2,$$

woraus:

(290) $$M\,m_A = M\,m_B = -\frac{Q\,l}{12}.$$

Das zweite relative **Maximalmoment** liegt in M und hat den Wert:

$$M\,m_M = \frac{Q}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{l}{2\sqrt{3}} - \frac{Q}{2\,l}\left(\frac{l}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

oder:

(291) $$M\,m_M = \frac{Q\,l}{24}.$$

Die Querschnitte in A und B sind mithin die gefährlichen, daher die Tragfähigkeit zu bestimmen aus:

(292) $$Q = \frac{12\,W\,S}{l},$$

also $1\frac{1}{2}$ mal grösser als in dem Falle, wo der Träger an den Enden aufliegt.

Zur Feststellung der Momentenfläche konstruiere man zunächst die Momentenfläche A S B für den Fall, wo der Träger an den Enden unterstützt und gleichmässig belastet ist. Nun ist aber für unseren Fall:

$$M\,m_M = \frac{Q\,l}{24} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q\,l}{8} = \frac{1}{3}\,M\,S$$

und:

$$M\,m_A = M\,m_B = \frac{Q\,l}{12} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Q\,l}{8} = \frac{2}{3}\,M\,S.$$

Man mache daher $M\,C = \frac{2}{3}\,M\,S$ und ziehe D E durch C parallel A B, so gibt die schraffierte Fläche die gesuchte Momentenfläche.

Die Durchbiegung in der Trägermitte ergibt sich nach Formel (106) zu:

$$s = \frac{\left\{\frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}^3}{E\,I}\left[\frac{Q}{3 \cdot 2\sqrt{3}} + \frac{Q}{8\,l} \cdot \frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$+ \frac{\left(\frac{l}{2\sqrt{3}}\right)^3}{E\,I}\left[\frac{Q}{3 \cdot 2\sqrt{3}} - \frac{Q}{8\,l} \cdot \frac{l}{2\sqrt{3}}\right]$$

und hieraus:

(293) $$s = \frac{Q\,l^3}{384\,E\,I}.$$

Beispiele.

1. Zum Entwurf eines Speichers seien Balken aus Tannenholz von $h = 315$ mm zur Verfügung. Die Entfernung der Balken von Mitte zu Mitte sei $4\,b$; die Bohlen seien 52 mm stark. Balken und Bohlen haben ein Gewicht von 560 kg den Kubikmeter, und die Belastung betrage 1000 kg auf den Quadratmeter. An den Enden seien die Balken eingemauert und in der Mitte durch einen Unterzug unterstützt.

Welche Weite darf der Raum erhalten?

Nehmen wir an, dass die Stütze mit der Einmauerungsstelle in gleicher Höhe liegt, so ist die Formel (276)

$$\frac{Q\,l}{8} = W\,S$$

der Rechnung zu Grunde zu legen. Die Belastung auf den laufenden Meter des Balkens besteht aus $\{0{,}315 \cdot 0{,}001\,b + 0{,}052 \cdot 0{,}001 \cdot 4\,b\}560 = 0{,}23688\,b$ kg als Eigengewicht, dazu $0{,}001 \cdot 4\,b \cdot 1000 = 4\,b$ kg als Belastung, gibt zusammen $4{,}23688\,b$ kg, also auf den laufenden Millimeter $0{,}00423688\,b\,\text{kg} = \frac{Q}{l} = q$; daher auch:

$$\frac{0{,}00423688\,b\,l^2}{8} = \frac{b \cdot 315^2}{6} \cdot 0{,}44$$

und mithin:

$$l = \sqrt[2]{\frac{99225 \cdot 0{,}44 \cdot 8}{6 \cdot 0{,}00423688}} = 3712 \text{ mm.}$$

Die ganze Weite des Raumes ist folglich;

$$2\,l = 7{,}424 \text{ m.}$$

2. Zur Ueberdeckung eines im Lichten 3 m weiten Schaufensters soll ein aus 10 mm starkem Blech gefertigter hohler Träger von rechteckigem Querschnitt, dessen äussere Breite 200 mm beträgt, angewendet werden. Die auf dem Träger oberhalb ruhende Mauermasse entspreche einer Belastung von 6000 kg auf den laufenden Meter.

Wie gross muss die Höhe h des Querschnittes genommen werden, wenn die höchstens zulässige Spannung des Trägers zu 6 kg vorausgesetzt wird, und wie weit muss mindestens der Träger in die Mauer hineintreten?

Unter Zugrundelegung der Formel (290) ist, da $Q = 3 \cdot 6000 = 18000$ kg und $W = \frac{200\,h^3 - 180\,(h - 20)^3}{6\,h}$ ist:

$$\frac{18000 \cdot 3000}{12} = \frac{200\,h^3 - 180\,(h - 20)^3}{6\,h} \cdot 6,$$

daraus:

$$235800 = h^2 + 540\,h - \frac{72000}{h}$$

und also:

$$h = 286 \text{ mm}.$$

Ist x die Länge, um welche der Träger in die Mauer hineinreichen muss, so muss, damit das eingemauerte Stück niedergehalten wird,

$$\frac{6000}{1000} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{3 \cdot 6000 \cdot 3000}{12}$$

sein, also:

$$x \doteq 1225 \text{ mm}.$$

Anmerkung: Würde x unter dieser Länge bleiben, so wäre das Moment der auf x wirkenden Belastung kleiner als das für den Einklemmungspunkt auftretende äussere Kraftmoment $\frac{Q\,l}{12} = 4500000$, das Trägerende würde sich daher heben, d. h. der Träger würde sich hier gegen den Stützpunkt neigen und das Verhalten des Trägers um so mehr dem eines auf zwei Stützen frei aufliegenden Trägers ähnlich werden, je kleiner x wäre. Für die Praxis dürfte es in vielen Fällen wegen der Ungewissheit, die bezüglich der Lage der Auflagerpunkte herrscht, ratsam sein, diesen ungünstigeren Fall der Rechnung zu Grunde zu legen.

3. In welcher Entfernung sind die Querschwellen für die Schienen einer Eisenbahn anzuordnen?

Die Entfernung zwischen zwei Schwellen ist so gering, dass man annehmen kann, es sei immer nur ein Rad zwischen den Unterstützungspunkten. Das Gewicht einer Lokomotive werde zu 36 Tonnen vorausgesetzt, welche Last so verteilt sei, dass jede der drei vorhandenen Achsen mit 12 Tonnen und demnach jedes Rad mit 6 Tonnen belastet sei.

Die Schienen werden auf den Querschwellen mit Nägeln befestigt; daher können wir jedes Schienenstück als einen mit seinen Enden eingespannten Träger ansehen. Deshalb dient zur Feststellung obiger Entfernung l die Formel:

$$\frac{P\,l}{8} = W\,S.$$

Es ist:

$P = 6000$ kg, $W = 120065$ für das Profil § 7, Beisp. 3 und $S = 7$, mithin:

$$\frac{6000\,l}{8} = 120065 \cdot 7,$$

woraus:

$$l = 1121 \text{ mm}.$$

4. Ein hohler Balken aus Gusseisen, welcher mit beiden Enden eingemauert ist, hat eine Länge von 20 m und einen rechteckigen Quer-

schnitt von 350 mm äusserer Breite und 550 mm äusserer Höhe und soll in der Mitte eine Last von 24000 kg tragen.

Welche Dicke ist dem Träger überall zu geben bei einer zulässigen Spannung von 4 kg?

$$\frac{Pl}{8} = WS.$$

$$P = 24000,\ l = 20000,\ W = \frac{350 \cdot 550^3 - (350-2x)(550-2x)^3}{6 \cdot 550}$$

und $S = 4$, also:

$$\frac{24000 \cdot 20000}{8} = \frac{350 \cdot 550^3 - (350-2x)(550-2x)^3}{6 \cdot 550} \cdot 4$$

und mithin:

$$8731250000 = (350 - 2x)(550 - 2x)^3,$$

$$x = 89{,}5 \text{ mm}.$$

5. Die an beiden Enden eingemauerten Balken eines Getreidemagazins sollen eine Länge von 9 m erhalten und von Mitte zu Mitte 750 mm voneinander entfernt sein. Die Höhe der Aufschüttung betrage im höchsten Falle 900 mm.

Welche Dimensionen erfordern die Balken, wenn die Breite zur Höhe wie 5 : 7 gemacht und das spez. Gewicht des Getreides zu 0,776 angenommen wird?

Die gleichmässige Belastung ist $Q = 7{,}5 \cdot 9 \cdot 90 \cdot 0{,}776 = 4714{,}2$ kg und also

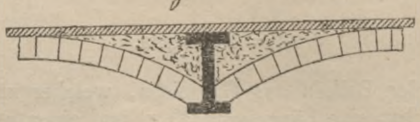
$$\frac{4714{,}2 \cdot 9000}{12} = \frac{5h^3}{42} 0{,}44,$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{4714{,}2 \cdot 9000 \cdot 42}{12 \cdot 5 \cdot 0{,}44}} = 407{,}5 \text{ mm},$$

$$b = \frac{5}{7} \cdot 407{,}5 = 291 \text{ mm}.$$

6. Es soll eine feuersichere Decke in einem Gebäude mit schmiedeeisernen Doppel-T-Trägern und zwischengesetzten Kappengewölben gebildet werden, so zwar, dass die Träger die ganze Tiefe des zu deckenden Raumes überspannen, die Enden also in den beiderseitigen Umfassungswänden vermauert werden, Fig. 116. Die Länge der Träger betrage 6 m, ihr Abstand 2 m, das Gewicht des Gewölbes samt Ausmauerung

Fig. 116



und Pflaster durchschnittlich 500 kg auf den Quadratmeter Bodenfläche, die höchste zulässige Belastung der Decke für dieselbe Bodenflächeneinheit ebenfalls 500 kg.

Welches Trägerprofil ist zu nehmen?

Wir setzen voraus, die Träger seien durch Bolzen untereinander verbunden, so dass der durch etwaige ungleichmässige Belastung der Gewölbe auftretende Horizontalschub, welcher eine Biegung der Träger hervorbringen könnte, auf eine grössere Anzahl von Trägern übertragen wird. Es sind demnach bei Feststellung der Trägerverhältnisse nur die vertikalen Kräfte zu berücksichtigen.

Schätzen wir nun das Gewicht des Trägers zu 450 kg, so ist die totale Belastung $6 \cdot 2 \cdot 1000 + 450 = 12450$ kg, demnach:

$$W = \frac{Q\,l}{12\,S} = \frac{12450 \cdot 600}{12 \cdot 700} = 889{,}3.$$

Profil Tab. Va, Nr. 27a ist hinreichend.

Aufgaben.

1. Es soll ein Balkon gebaut werden, welcher eine Ausladung von 2,5 m, eine Breite von 5 m hat und eine Last von 400 kg auf den Quadratmeter tragen kann.

Man wählt 3 doppel-T-förmige Träger, die einerseits eingemauert und an den anderen Enden durch Säulen unterstützt werden.

Welches Profil hat man für die Träger zu nehmen?

Profil Tab. Va, Nr. 7a genügt.

2. Ein prismatischer Träger mit horizontaler Achse von der Länge $2\,l$ ist an einem Ende eingemauert, am anderen unterstützt und in der Entfernung $n\,l$ von ersterem Ende mit $2\,P$ belastet.

Welchen Wert hat das absolute Maximalmoment?

Wenn $n > 1{,}172$, so ist:

$$M\,m_M = \frac{P\,l}{8}\,n^2\,(2 - n)\,(6 - n).$$

Ist aber $n < 1{,}172$, so ist:

$$M\,m_M = \frac{P\,l}{4}\,n\,(2 - n)\,(4 - n).$$

3. Ein prismatischer Träger mit horizontaler Achse von der Länge $2\,l$ ist an beiden Enden eingespannt und trägt im Abstand $n\,l$ von einem Ende die Last $2\,P$.

Wie gross ist das absolute Maximalmoment?

Unter der Voraussetzung $n > 1$ ist:

$$M\,m_M = \frac{P\,l}{2}\,n^2\,(2 - n).$$

4. Ein Balken aus Tannenholz von 4,5 m Länge und rechteckigem Querschnitt, dessen Breite zur Höhe sich wie 5 : 7 verhalten soll, ist mit beiden Enden in horizontaler Lage eingemauert und soll mit 8000 kg gleichmässig belastet werden.

Welches sind die Durchschnittsdimensionen?

$$h = 385{,}5 \text{ mm}$$
$$b = 275{,}5 \text{ „}$$

5. Ein Fruchtspeicher hat Balken aus Tannenholz von 5 m Länge, 270 mm Breite und 320 mm Höhe. Die Mitten je zweier Balken sind 1 m voneinander entfernt.

Welche Höhe kann die zu tragende gleichmässig verteilte Getreideaufschüttung erhalten, wenn 1 Kubikmeter Getreidemasse 776 kg wiegt?

$$x = 1{,}044 \text{ m.}$$

§ 14.

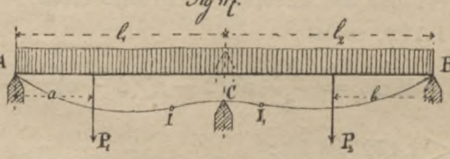
Kontinuierliche Träger.

Kontinuierliche Träger sind solche, welche auf mehr als 2 Stützen aufruhen.

I. Träger mit 3 Stützen.

Seien A und B, Fig. 117, die beiden äusseren Stützen, C die mittlere Stütze, welche um s über oder unter der Horizontalen AB liegt und um l_1 von A und l_2 von B absteht. Der Träger sei ausser durch eine gleichmässig verteilte Last Q noch durch die Einzellasten P_1 und P_2 beansprucht, welche von A und B die bezüglichen Entfernungen a und b haben.

Fig 117.



Wäre die Stütze C nicht vorhanden, so wäre die Senkung in C nach Formeln (156) und (173):

$$s_c = \frac{P_1 a^2 (l_1 + l_2 - a)^2}{6 E I (l_1 + l_2)} \left[\frac{l_2}{a} + \frac{2 l_2}{l_1 + l_2 - a} - \frac{l_2^3}{a (l_1 + l_2 - a)^2}\right]$$
$$+ \frac{P_2 b^2 (l_1 + l_2 - b)^2}{6 E I (l_1 + l_2)} \left[\frac{l_1}{b} + \frac{2 l_1}{l_1 + l_2 - b} - \frac{l_1^3}{b (l_1 + l_2 - b)^2}\right]$$
$$+ \frac{Q (l_1 + l_2)^3}{24 E I} \left[\frac{l_1}{l_1 + l_2} - \frac{2 l_1^3}{(l_1 + l_2)^3} + \frac{l_1^4}{(l_1 + l_2)^4}\right].$$

Nimmt man nun im Punkte C des Trägers eine nach oben gerichtete Kraft C von der Grösse an, dass sie eine Durchbiegung $s_c \pm s$ zu erzeugen vermag, so ist nach Formel (160):

$$s_c \pm s = C \frac{l_1^2 l_2^2}{3 E I (l_1 + l_2)}.$$

Führt man obigen Wert von s_c in diese Formel ein, so ergibt sich für C, welche den Stützendruck in C darstellt:

$$(294)\quad C = \frac{1}{2 l_1^2 l_2^2}\Big\{P_1 a^2 (l_1 + l_2 - a)^2 \left[\frac{l_2}{a} + \frac{2 l_2}{l_1 + l_2 - a} - \frac{l_2^3}{a(l_1 + l_2 - a)^2}\right]$$
$$+ P_2 b^2 (l_1 + l_2 - b)^2 \left[\frac{l_1}{b} + \frac{2 l_1}{l_1 + l_2 - b} - \frac{l_1^3}{b (l_1 + l_2 - b)^2}\right]$$
$$+ \frac{Q}{4} (l_1 + l_2)^4 \left[\frac{l_1}{l_1 + l_2} - \frac{2 l_1^3}{(l_1 + l_2)^3} + \frac{l_1^4}{(l_1 + l_2)^4}\right]\Big\} \pm \frac{3 E I (l_1 + l_2) s}{l_1^2 l_2^2}.$$

Der Stützendruck in A folgt nun aus:

$$A (l_1 + l_2) + C l_2 = P_1 (l_1 + l_2 - a) + P_2 b + Q \frac{l_1 + l_2}{2},$$

mithin:

$$(295)\qquad A = \frac{P_1 (l_1 + l_2 - a) + P_2 b - C l_2}{l_1 + l_2} + \frac{Q}{2}$$

und demnach auch gegeben:

$$(296)\qquad B = P_1 + P_2 + Q - A - C.$$

Mit Hilfe der so bestimmten Stützendrucke lässt sich nun nach Formel (196) für jeden Trägerpunkt das wirkende Kraftmoment aufstellen; dabei werden sich für die beiden Felder drei Maximalmomente feststellen lassen, eins über C und je eins zwischen A C und B C, von denen in jedem besonderen Falle wieder das absolut grösste zu ermitteln ist.

a) Auf den Träger von der Länge 2 l wirke in jedem der beiden gleichen Feldern nur eine Einzellast P im Abstande $\frac{l}{2}$ von jeder Stütze.

Da also hier $P_1 = P_2 = P$, $l_1 = l_2 = l$ und $a = b = \frac{l}{2}$, sowie $Q = 0$ ist, so erhält man für den Druck auf die drei Stützen:

$$(297)\qquad \begin{cases} C = \frac{11}{8} P \pm \frac{6 E I s}{l^3}, \\ A = B = \frac{5}{16} P \mp \frac{3 E I s}{l^3}. \end{cases}$$

Das Moment für die Trägermitte C ist:

$$M m_c = A l - \frac{P l}{2}$$

oder nach Einsetzung des Wertes von A:

$$\text{(298)} \qquad M\,m_c = -\left(\frac{3}{16}P\,l \pm \frac{3\,E\,I\,s}{l^2}\right).$$

Die beiden relativen **Maximalmomente** für die Angriffspunkte der Einzellasten haben den Wert:

$$M\,m = A\,\frac{l}{2}$$

oder auch:

$$\text{(299)} \qquad M\,m = \frac{5}{32}P\,l \mp \frac{3\,E\,I\,s}{2\,l^2}.$$

Bei einer Erhöhung der Mittelstütze, für welche in den Ausdrücken, die s als Faktor enthalten, das obere Zeichen zu nehmen ist, muss gemäss dem Werte von A und B

$$s < \frac{5}{48}\,\frac{P\,l^3}{E\,I}$$

sein, wofern der Träger noch einen Druck auf die Aussenstützen ausüben soll.

Das Moment für die Mittelstütze

$$\text{(300)} \qquad M\,m_c = -\left(\frac{3}{16}P\,l + \frac{3\,E\,I\,s}{l^2}\right)$$

ist demnach für vorliegenden Fall das absolute Maximalmoment.

Auch folgt für diesen Fall aus letzterem Wert: eine Erhöhung der Mittelstütze vergrössert genanntes Moment, bedingt folglich für dieselbe Last einen grösseren Materialaufwand, ein Fall also, der in der Praxis zu vermeiden ist.

Liegt dagegen die Mittelstütze tiefer als die Aussenstützen, so gelten in obigen Formeln die unteren Zeichen bei den s enthaltenden Ausdrücken, und es muss dann nach dem Werte von C

$$s < \frac{11}{48}\,\frac{P\,l^3}{E\,I}$$

sein, wenn die Mittelstütze noch belastet sein soll.

Das Mittelstützenmoment erleidet durch die Senkung eine Verkleinerung.

Ueber welcher Stütze in diesem Falle das **absolute** Maximalmoment auftritt, das hängt natürlich wiederum von s ab.

Der Fall

$$\frac{3}{16}P\,l - \frac{3\,E\,I\,s}{l^2} \gtrless \frac{5}{32}P\,l + \frac{3\,E\,I\,s}{2\,l^2}$$

oder

$$\frac{9\,E\,I\,s}{2\,l^2} \lessgtr \frac{P\,l}{32}$$

tritt ein, wenn

$$s \lesseqgtr \frac{P l^3}{144 E I}$$

ist.

Das absolute **Maximalmoment** ist daher im ersten Falle:

(301) $$M m_c - \frac{3}{16} P l = \frac{3 E I s}{l^2}$$

und im zweiten Falle:

(302) $$M m = \frac{5}{32} P l + \frac{3 E I s}{2 l^2}.$$

Die Tragfähigkeit erreicht ihr Maximum für:

$$M m_c = M m$$

d. i. für:

(303) $$s = \frac{P l^3}{144 E I},$$

und dann hat das absolute **Maximalmoment** den Wert:

(304) $$M m = \frac{P l}{6},$$

die Tragfähigkeit daher:

(305) $$P = \frac{6 W S}{l},$$

d. h. dreimal grösser als in dem Falle, wo die Mittelstütze fehlt, da dann die Trägfähigkeit $\frac{2 W S}{l}$ ist.

Der zu beiden Seiten der Mittelstütze auftretende Wendepunkt ist bestimmt durch:

$$A x_0 - P \left(x_0 - \frac{l}{2}\right) = 0$$

oder:

$$\left(\frac{5}{16} P + \frac{3 E I s}{l^3}\right) x_0 - P \left(x_0 - \frac{l}{2}\right) = 0,$$

woraus sich für jedes Feld als Entfernung des Wendepunktes von der betreffenden Aussenstütze

(306) $$x_0 = \frac{8 P l^4}{11 P l^3 - 48 E I s}$$

ergibt.

Wird der dem Maximum der Tragfähigkeit entsprechende Wert von s eingesetzt, so folgt:

$$x_0 = \frac{3}{4} l. \tag{307}$$

Die Mittelstütze befinde sich in gleicher Höhe mit den Aussenstützen, also $s = 0$. Alsdann erreicht das Kraftmoment den grössten Wert über der Mittelstütze und zwar:

$$M m_c = -\frac{3}{16} P l. \tag{308}$$

Durch Anbringung der Mittelstütze hat sich demnach die Tragfähigkeit um das $2^2/_3$ fache vergrössert.

Die Wendepunkte haben von den Aussenstützen den Abstand:

$$x_0 = \frac{8}{11} l. \tag{309}$$

b) Auf den Träger von der Länge 2 l wirke nur die gleichmässig verteilte Last $Q = q \cdot 2 l$ und die Stütze C liege in der Mitte des Trägers.

Die drei Stützendrucke haben dann den Wert:

$$\left\{\begin{array}{l} C = \frac{5}{8} Q \pm \frac{6 E I s}{l^3}, \\ A = B = \frac{3}{16} Q \mp \frac{3 E I s}{l^3}. \end{array}\right. \tag{310}$$

Für die Trägermitte C folgt als Moment:

$$M m_c = A l - \frac{Q}{2 l} \cdot \frac{l^2}{2}$$

oder:

$$M m_c = -\left(\frac{Q l}{16} \pm \frac{3 E I s}{l^2}\right). \tag{311}$$

Ausser diesem Maximalmoment gibt es noch eins in jedem Felde, dessen Abstand von den Aussenstützen bestimmt ist durch:

$$V = \frac{3}{16} Q \mp \frac{3 E I s}{l^3} - \frac{Q}{2 l} x_m = 0,$$

also:

$$x_m = \frac{3}{8} l \mp \frac{6 E I s}{Q l^2}. \tag{312}$$

Das Moment hat also den Wert:

$$M m = A x_m - \frac{Q}{2 l} \cdot \frac{x^2_m}{2}$$

und hieraus nach Einsetzung der bezüglichen Werte:

$$\text{(313)} \qquad M\,m = \frac{9}{256}\,Q\,l \mp \frac{9}{8}\,\frac{E\,I\,s}{l^2} + \frac{8\,E^2\,I^2\,s^2}{Q\,l^5}.$$

Aus den äusseren Stützendrucken folgt, dass bei einer Erhöhung der Mittelstütze über die Aussenstützen

$$s < \frac{Q\,l^3}{16\,E\,I}$$

sein muss, wofern die letzteren Stützen noch tragen sollen.

Für die Mittelstütze herrscht dann das Moment:

$$\text{(314)} \qquad M\,m_c = \frac{Q\,l}{16} + \frac{3\,E\,I\,s}{l^2},$$

und dies ist das absolute **Maximalmoment.**

Eine Erhöhung der Mittelstütze bewirkt demnach auch hier, wie vorauszusehen war, eine Vergrösserung des Bruchmomentes.

Für eine Senkung der Mittelstütze erhält man aus dem Werte von C, dass

$$s < \frac{5}{48}\,\frac{Q\,l^3}{E\,I}$$

sein muss, wenn die Mittelstütze noch gedrückt werden soll.

Wo in diesem Falle der Bruchquerschnitt liegt, ob in C oder in dem Abstande

$$\text{(315)} \qquad x_m = \frac{3}{8}\,l + \frac{6\,E\,I\,s}{Q\,l^2}$$

von den Aussenstützen, das wird durch die Grösse von s bedingt.

Befindet er sich in C, so ist

$$\text{(316)} \qquad M\,m_c = -\left(\frac{Q\,l}{16} - \frac{3\,E\,I\,s}{l^2}\right)$$

das absolute **Maximalmoment**; ist er dagegen innerhalb der beiden Felder, dann ist

$$\text{(317)} \qquad M\,m = \frac{9}{256}\,Q\,l + \frac{9\,E\,I\,s}{8\,l^2} + \frac{9\,E^2\,I^2\,s^2}{Q\,l^5}$$

als **absolutes Maximalmoment** der Rechnung zu Grunde zu legen.

Für das Maximum der Tragfähigkeit muss wieder

$$M\,m_c = M\,m$$

sein oder:

$$\frac{Q\,l}{16} - \frac{3\,E\,I\,s}{l^2} = \frac{9}{256}\,Q\,l + \frac{9\,E\,I\,s}{8\,l^2} + \frac{9\,E^2\,I^2\,s^2}{Q\,l^5}$$

und daraus:

$$\text{(318)} \qquad s = 0{,}006535\,\frac{Q\,l^3}{E\,I}.$$

Das **Maximalmoment** hat den Wert:

(319) $$Mm = 0{,}042895\, Q\, l,$$

mithin die Tragfähigkeit:

(320) $$Q = 23{,}315 \frac{W\, S}{l},$$

folglich fast sechsmal grösser, als wenn keine Mittelstütze sich vorfindet, in welchem Falle nämlich die Tragfähigkeit $\frac{8\, W\, S}{2\, l} = \frac{4\, W\, S}{l}$ ist.

Der Abstand x_0 der für diese Belastung ebenfalls auftretenden beiden Wendepunkten von den Aussenstützen ist in vorliegendem Falle zu bestimmen aus:

$$A\, x_0 = \frac{Q}{2\, l} \frac{x_0^2}{2} = 0,$$

woraus:

(321) $$x_0 = \frac{3}{4} l + \frac{12\, E\, I\, s}{Q\, l^2} = 2\, x_m.$$

Führen wir in diese Formel den Wert von s aus Formel (318) ein, so ergibt sich auch für den Fall der grössten Tragfähigkeit:

(322) $$x_0 = 0{,}82842\, l.$$

Seien endlich die drei Stützen in **gleicher** Höhe. Der gefährliche Querschnitt liegt alsdann über der Mittelstütze, und das **absolute Maximalmoment** lautet:

(323) $$M\, m_c = -\frac{Q\, l}{16},$$

mithin das Vierfache der Tragfähigkeit, die der Träger bei gleicher Länge ohne Mittelstütze besitzen würde.

Jedoch muss hier bemerkt werden, dass die Tragfähigkeit ganz dieselbe wäre, wenn der Träger aus zwei gesonderten Stücken A C und B C bestände, die nur bei C zusammenstossen; denn das **Maximalmoment** für jedes Stück wäre dann auch $\frac{1}{8} \frac{Q}{2} l = \frac{Q\, l}{16}$.

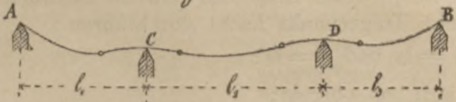
Die beiden Wendepunkte besitzen von den Aussenstützen nun den Abstand:

(324) $$x_0 = \frac{3}{4} l.$$

II. Träger mit 4 Stützen.

Die Innenstützen C und D liegen um s bezw. s_1 über oder unter der Horizontalen A B, und die drei Felder haben die Oeffnungen l_1, l_2 und l_3, Fig. 118; ferner sei der Träger gleichmässig mit Q belastet.

Fig. 118.



Würden die Stützen C und D fehlen, so ergäbe sich nach Formel (173) in C und D eine Senkung:

$$s_c = \frac{Q(l_1 + l_2 + l_3)^3}{24\,E\,I} \left\{ \frac{l_1}{l_1 + l_2 + l_3} - \frac{2\,l_1^3}{(l_1 + l_2 + l_3)^3} + \frac{l_1^4}{(l_1 + l_2 + l_3)^4} \right\}$$

und:

$$s_D = \frac{Q(l_1 + l_2 + l_3)^3}{24\,E\,I} \left\{ \frac{l_3}{l_1 + l_2 + l_3} - \frac{2\,l_3^3}{(l_1 + l_2 + l_3)^3} + \frac{l_3^4}{(l_1 + l_2 + l_3)^4} \right\}.$$

Jetzt setze man wie vorher in C und D eine nach oben gerichtete Kraft C bezw. D von der Grösse voraus, dass sie die Durchbiegung $s_c \pm s$ bezw. $s_D \pm s_1$ hervorbringe, so folgt nach Formel (156) u. (160):

$$s_c \pm s = \frac{D(l_1 + l_2)^2 l_3^2}{6\,E\,I(l_1 + l_2 + l_3)} \left\{ \frac{2\,l_1}{l_1 + l_2} + \frac{l_1}{l_3} - \frac{l_1^3}{(l_1 + l_2)^2 l_3} \right\} + \frac{C\,l_1^2\,(l_2 + l_3)^2}{3\,E\,I\,(l_1 + l_2 + l_3)}$$

und:

$$s_D \pm s_1 = \frac{C(l_2 + l_3)^2 l_1^2}{6\,E\,I(l_1 + l_2 + l_3)} \left\{ \frac{2\,l_3}{l_2 + l_3} + \frac{l_3}{l_1} - \frac{l_3^3}{(l_2 + l_3)^2 l_1} \right\} + \frac{D\,(l_1 + l_2)^2 \cdot l_3^2}{3\,E\,I(l_1 + l_2 + l_3)}.$$

Die oben gefundenen Werte für s_c und s_D eingesetzt, gibt:

$$(325) \qquad 2\,C\,l_1^2\,(l_2 + l_3)^2 + D\,(l_1 + l_2)^2\,l_3^2 \left\{ \frac{2\,l_1}{l_1 + l_2} + \frac{l_1}{l_3} - \frac{l_1^3}{(l_1 + l_2)^2 l_3} \right\}$$
$$= \frac{Q}{4}\,(l_1 + l_2 + l_3)^4 \left\{ \frac{l_1}{l_1 + l_2 + l_3} - \frac{2\,l_1^3}{(l_1 + l_2 + l_3)^3} + \frac{l_1^4}{(l_1 + l_2 + l_3)^4} \right\}$$
$$\pm 6\,E\,I\,(l_1 + l_2 + l_3)\,s$$

und:

$$(326) \qquad 2\,D\,(l_1 + l_2)^2\,l_3^2 + C\,(l_2 + l_3)^2\,l_1^2 \left\{ \frac{2\,l_3}{l_2 + l_3} + \frac{l_3}{l_1} - \frac{l_3^3}{(l_2 + l_3)^2 l_1} \right\}$$
$$= \frac{Q}{4}\,(l_1 + l_2 + l_3)^4 \left\{ \frac{l_3}{l_1 + l_2 + l_3} - \frac{2\,l_3}{(l_1 + l_2 + l_3)^3} + \frac{l_3^4}{(l_1 + l_2 + l_3)^4} \right\}$$
$$\pm 6\,E\,I\,(l_1 + l_2 + l_3)\,s_1,$$

aus welchen beiden Beziehungen sich die Stützendrucke C und D bestimmen lassen.

Es folgt jetzt der Stützendruck

$$(327) \qquad A = \frac{Q}{2} - \frac{C\,(l_2 + l_3) + D\,l_3}{l_1 + l_2 + l_3}$$

und demnach der Stützendruck

(328) $$B = Q - A - C - D.$$

Auf Grund dieser Werte lässt sich nun die Bestimmung der Kraftmomente für jeden Trägerpunkt leicht durchführen.

Sei $l_1 = l_2 = l_3$ und $s = s_1$;

alsdann ergibt sich aus obigem:

(329) $$\begin{cases} C = D = \dfrac{11}{30} Q \pm \dfrac{6\,E\,I\,s}{5\,l^3}, \\ A = B = \dfrac{2}{15} Q \mp \dfrac{6\,E\,I\,s}{5\,l^3}. \end{cases}$$

Nunmehr folgt für das Moment in der Trägermitte:

$$M\,m_M = A \cdot \frac{3}{2} l + C \cdot \frac{l}{2} - \frac{Q}{3\,l} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} l\right)^2}{2}$$

oder:

(330) $$M\,m_M = \frac{Q\,l}{120} \mp \frac{6\,E\,I\,s}{5\,l^2};$$

für das Moment in C und D:

$$M\,m_c = M\,m_D = A\,l - \frac{Q}{3\,l} \frac{l^2}{2}$$

oder:

(331) $$M\,m_c = M\,m_D = -\left(\frac{Q\,l}{30} \pm \frac{6\,E\,I\,s}{5\,l^2}\right)$$

und endlich für das grösste Moment zwischen A und C, sowie B und D, welches in dem Abstand

(332) $$x_m = \frac{A}{q} = \frac{2}{5} l \mp \frac{18\,E\,I\,s}{5\,Q\,l^2}$$

von A bezw. B auftritt:

$$M\,m = A\,x_m - \frac{Q}{3\,l} \cdot \frac{x_m^{\,2}}{2},$$

oder auch nach Einsetzung der bezüglichen Werte:

(333) $$M\,m = \frac{2}{75} Q\,l \mp \frac{12}{25} \frac{E\,I\,s}{l^2} + \frac{54}{25} \frac{E^2\,I^2\,s^2}{Q\,l^5}.$$

Liegen nun die mittleren Stützen höher als die Aussenstützen, so muss

$$s < \frac{Q\,l^3}{9\,E\,I}$$

sein, wenn die letzteren Stützen noch von Wirksamkeit sein sollen. Auf die Punkte über den Innenstützen wirkt dann das **absolut grösste Biegungsmoment:**

(334) $$M\,m_c = M\,m_D = \frac{Q\,l}{30} + \frac{6\,E\,I\,s}{5\,l^2}.$$

Jede Erhöhung der Mittelstützen verursacht also auch hier eine Vermehrung des Bruchmomentes.

Liegen dagegen die Innenstützen **tiefer**, so folgt, dass

$$s < \frac{11\,Q\,l^3}{36\,E\,I}$$

sein muss, wenn diese Stützen noch gedrückt werden sollen.

Der Bruchquerschnitt liegt entweder zwischen A und C, sowie B und D oder über den Mittelstützen.

Im ersteren Falle ist sein Abstand bestimmt durch:

(335) $$x_m = \frac{2}{5}\,l + \frac{18\,E\,I\,s}{5\,Q\,l^2},$$

und das **Maximalmoment** hat dann den Wert:

(336) $$M\,m = \frac{2}{75}\,Q\,l + \frac{12}{25}\,\frac{E\,I\,s}{l^2} + \frac{54}{25}\,\frac{E^2\,I^2\,s^2}{Q\,l^5}.$$

Im letzteren Falle heisst das **absolute Maximalmoment:**

(337) $$M\,m_c = M\,m_D = \frac{Q\,l}{30} - \frac{6\,E\,I\,s}{5\,l^2}.$$

Die maximale Tragfähigkeit erzielt man für:

$$-M\,m_c = M\,m,$$

also für:

$$\frac{Q\,l}{30} - \frac{6\,E\,I\,s}{5\,l^2} = \frac{2}{75}\,Q\,l + \frac{12}{25}\,\frac{E\,I\,s}{l^2} + \frac{54}{25}\,\frac{E^2\,I^2\,s^2}{Q\,l^5};$$

daraus:

(338) $$s = 0{,}02312\,\frac{Q\,l^3}{E\,I}.$$

Das **Maximalmoment** ist dann:

(339) $$M\,m = 0{,}005611\,Q\,l$$

und die Tragfähigkeit:

(340) $$Q = 178{,}221\,\frac{W\,S}{l}.$$

In der Strecke AC und BD ist ein Wendepunkt, dessen Entfernung x_0 von A bezw. B aus

$$A x_0 - \frac{Q}{3l}\frac{x_0^2}{2} = 0$$

folgt zu:

(341) $$x_0 = \frac{4}{5} l + \frac{36 E I s}{5 Q l^2}.$$

Einen anderen Wendepunkt zeigt die elastische Linie zwischen C und der Trägermitte und zwar im Abstand x_0^1 von A, der sich aus der Gleichung

$$A x_0^1 + C(x_0^1 - l) - \frac{Q}{3l}\frac{{x_0^1}^2}{2} = 0$$

ergibt zu:

(342) $$x_0^1 = \frac{3}{2} l \pm \sqrt{\frac{l^2}{20} + \frac{36 E I s}{5 Q l}}.$$

Setzen wir in Formel (340) und (341) den Wert von s aus Formel (338) ein, so folgt für das Maximum der Tragfähigkeit:

(343) $$x_0 = 0{,}966464\, l$$

und:

(344) $$x_0^1 = 1{,}5\, l \pm 0{,}465\, l.$$

Die Wendepunkte der Strecke CD liegen also um 0,465 l von der Trägermitte entfernt.

Liegen die 4 Stützen in gleicher Höhe, so befindet sich der Bruchpunkt über den Innenstützen C und D, und das **absolute** Maximalmoment ist:

(345) $$M m_c = M m_D = \frac{Q l}{30},$$

daher das Tragvermögen stark elfmal grösser als ohne Innenstützen. Die obigen Werte x_0 und x_0^1 für die Abstände der Wendepunkte in den Feldern A C und B D, sowie im Felde C D von den Aussenstützen gehen dann über in:

(346) $$x_0 = \frac{4}{5} l$$

und:

(347) $$x_0^1 = 1{,}5\, l \pm 0{,}2236\, l.$$

Anmerkung: Auch bei mehr als 4 Stützen kann man denselben Weg zur Bestimmung der Auflagerreaktionen einschlagen.

Jedoch ist zu bemerken, die ganze Entwickelung fusst auf der Annahme, dass die Unterstützung jedesmal nur in einem Punkte stattfindet, was wohl in den seltensten Fällen und bei Hochbauten nie eintritt. Weiter ist zu beachten, dass die gegenseitige Höhenlage der einzelnen Stützen von grossem Einfluss auf die Grösse des Maximalmomentes ist in der Weise, dass die geringste Erhöhung der Innenstützen über die Aussenstützen, wie dies ja leicht auch trotz der peinlichsten Sorgfalt bei Fondierungen durch ungleiches Setzen der Stützmauern eintreten kann, ein bedeutendes Anwachsen des Momentes bedingt, wodurch das Tragvermögen der ganzen Konstruktion sehr in Frage gestellt werden kann.

Daher dürften kontinuierliche Träger besonders im Hochbau nicht zu empfehlen sein.

Beispiele.

1. Ein Balken aus Eichenholz von 20 cm Breite und 26 cm Höhe ruhe auf 3 Stützen, welche je 3 m voneinander entfernt sind.

Wie gross kann die totale gleichmässige Belastung werden

a) bei gleich hoher Stützenlage?

Das Widerstandsmoment ist

$$W = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{200 \cdot 260^2}{6} = 2253333{,}3.$$

Die totale gleichmässige Belastung ist demnach nach Formel (323):

$$Q = \frac{16\,W\,S}{6} = \frac{16 \cdot 2253333{,}3 \cdot 0{,}66}{3000} = 7931{,}733 \text{ kg};$$

b) wenn die mittlere Stütze um den der maximalen Tragfähigkeit entsprechenden Betrag tiefer liegt?

Alsdann ist nach Formel (320):

$$Q_1 = 23{,}15\,\frac{W\,S}{l} = \frac{23{,}15}{16} \cdot 7931{,}733 = 11476{,}226 \text{ kg};$$

die Senkung beträgt dabei nach Formel (318):

$$s = \frac{0{,}006535 \cdot 11476{,}226 \cdot 3000^3}{1200 \cdot \frac{200 \cdot 260^3}{12}} = 5{,}8 \text{ mm};$$

c) wenn die mittlere Stütze um letzteren Betrag von s höher gelegt wird?

Dann ist nach Formel (314) und (318):

$$M\,m_c = \frac{Q\,l}{16} + \frac{3\,E\,I}{l} \cdot 0{,}006535\,\frac{Q\,l^3}{E\,I} = 0{,}082105\,Q\,l,$$

also:

$$Q_2 = \frac{W\,S}{0{,}082105\,l} = \frac{2253333{,}3 \cdot 0{,}66}{0{,}082105 \cdot 3000} = 6037{,}797 \text{ kg}.$$

2. Auf einen kontinuierlich auf 3 gleich hohen Stützen liegenden Träger von 10 m Länge, dessen Innenstütze von der Aussenstütze A um 6 m entfernt ist, wirken ausser der gleichmässig verteilten Last Q = 12000 kg noch in den Entfernungen 2,5 m von A und 3 m von der zweiten Aussenstütze B die Einzellasten 8000 kg und 5000 kg.

Welches sind die Stützendrucke, sowie die Werte der 3 Maximalmomente?

Nach Formel (294) ist der Stützendruck C auf die Innenstütze:

$$C = \frac{1}{2 \cdot 6^2 \cdot 4^2} \Big\{ 8000 \cdot 2{,}5^2 (10-2{,}5)^2 \left[\frac{4}{2{,}5} + \frac{8}{10-2{,}5} - \frac{4^3}{2{,}5(10-2{,}5)^2}\right]$$
$$+ 5000 \cdot 3^2 (10-3)^2 \left[\frac{6}{3} + \frac{12}{10-3} - \frac{6^3}{3(10-3)^2}\right]$$
$$+ \frac{12000}{4} \cdot 10^4 \left[\frac{6}{10} - \frac{2 \cdot 6^3}{10^3} + \frac{6^4}{10^4}\right] \Big\} = 16410{,}99 \text{ kg};$$

demnach nach Formel (295):

$$A = \frac{8000(10-2{,}5) + 5000 \cdot 3 - 16410{,}99 \cdot 4}{10} + 6000 = 6935{,}460 \text{ kg},$$

und also nach Formel (296):

$$B = 8000 + 5000 + 12000 - 16410{,}99 - 6935{,}604 = 1653{,}406 \text{ kg}.$$

Das Moment für den Querschnitt über der Innenstütze C ist nun:

$$M\,m_c = 6935{,}604 \cdot 6 - 8000 \cdot 3{,}5 - \frac{12000}{10} \cdot \frac{6^2}{2} = -\,7986{,}376 \text{ kgm}.$$

Die Scherkraft unmittelbar vor dem Angriffspunkt der Einzellast $P_1 = 8000$ kg, von Stütze A ausgehend, ist:

$$V = 6935{,}604 - \frac{12000}{10} \cdot 2{,}5 = +\,3935{,}604 \text{ kg}$$

und unmittelbar hinter genanntem Angriffspunkt:

$$V_1 = 3935{,}604 - 8000 = -\,4064{,}396 \text{ kg}.$$

Für das erste Feld A C liegt mithin der gefährliche Querschnitt im Angriffspunkt der Einzellast 8000 kg und daher das zweite Maximalmoment:

$$M\,m_1 = 6935{,}604 \cdot 2{,}5 - \frac{12000}{10} \cdot \frac{2{,}5^2}{2} = 13589{,}01 \text{ kgm}.$$

Die Lage des gefährlichen Querschnittes im zweiten Felde, von Stütze B aus, ist bestimmt durch:

$$1653{,}406 - \frac{12000}{10} \cdot y_m = 0,$$

daraus:

$$y_m = 1{,}378 \text{ m}$$

und also das Maximalmoment im zweiten Felde:

$$M\,m_2 = 1653{,}406 \cdot 1{,}378 - \frac{12000}{10} \cdot \frac{1{,}378^2}{2} = 1139{,}063 \text{ kgm.}$$

Es ist daher $M\,m_1$ das grösste Maximalmoment, folglich, wenn ein gewalzter Träger und $S = 700$ kg auf den Quadratzentimeter vorausgesetzt wird:

$$W = \frac{1358901}{700} = 1941.$$

Die zu beiden Seiten der Mittelstütze auftretenden Wendepunkte ergeben sich aus:

$$6935{,}604 \cdot x_0 - 8000\,(\cdot x_0 - 2{,}5) - \frac{12000}{10} \cdot \frac{x_0^2}{2} = 0$$

und:

$$6935{,}604\, x_0^1 + 16410{,}99\,(x_0^1 - 6) - 8000\,(x_0^1 - 2{,}5) - \frac{12000}{10} \frac{x_0^{1\,2}}{2} = 0,$$

woraus:

$$x_0 = 4{,}954 \text{ m}$$

und:

$$x_0^1 = 7{,}064 \text{ m}$$

als Entfernung der Wendepunkte von Stütze A.

3. Ein kontinuierlicher Träger ruht auf 4 gleich hoch liegenden Stützen, welche eine Entfernung von 3,5 m voneinander haben. Der Träger ist mit 24000 kg gleichmässig belastet.

Welches sind die Stützendrucke und das erforderliche Widerstandsmoment für Walzeisen?

Es ist nach Formel (329) der Stützendruck:

$$A = B = 8800 \text{ kg},$$
$$C = D = 3200 \text{ „}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt über den Innenstützen, und das Bruchmoment hat den Wert:

$$M\,m_c = M\,m_D = \frac{24000}{30}\,3{,}5 = 2800 \text{ kgm},$$

also:

$$W = \frac{280000}{700} = 400,$$

bezogen auf Zentimeter.

Aufgaben.

1. Ein 7,5 m langer Dachsparren aus Walzeisen von doppel-T-förmigen Querschnitt ruht auf 3 gleich weit entfernt liegenden Stützen und ist mit 400 kg auf den laufenden Meter gleichmässig belastet.

Welches Profil ist anzuwenden bei einer zulässigen Spannung von 6 kg auf den Quadratmillimeter?

Profil Tab. Va, Nr. 11a genügt.

2. Ein Träger vom Profil Tab. Va, Nr. 28c lagert auf 4 Stützen, welche je 3 m Abstand haben.

Welche Grösse kann die totale gleichmässige Belastung erreichen für $S = 6{,}5$ kg auf den Quadratmillimeter

a) bei gleich hoher Stützenlage?

$$Q = 79053{,}455 \text{ kg};$$

b) wenn die beiden Innenstützen um den dem maximalen Tragvermögen entsprechenden Betrag von s tiefer als die beiden Aussenstützen liegen?

$$Q_1 = 469632{,}83 \text{ kg},$$

dabei ist:

$$s = 2{,}5 \text{ mm}.$$

c) wenn die Innenstützen um diesen Wert von s höher als die Aussenstützen sind?

$$Q_2 = 43144{,}146 \text{ kg}.$$

§ 15.

Schubspannung bei einem auf Biegung beanspruchten Träger.

Bei einem auf Biegung in Anspruch genommenen Träger tritt, wie bereits in § 11 vermerkt, in jedem Querschnitt im allgemeinen eine Kraft auf, welche ein Verschieben des Querschnitts in vertikaler Richtung anstrebt. Diese mit V bezeichnete vertikale Schubkraft, die Resultante aller auf den betrachteten Querschnitt wirkenden äusseren Kräfte, bedingt nun einen vertikalen Widerstand der Fasern, der behufs Gleichgewicht ein Abscheren des Querschnitts in vertikaler Richtung zu verhindern sucht.

Wir wollen nun den Wert dieser bisher vernachlässigten Beanspruchung etwas näher in Betracht ziehen.

Für den Freiträger in § 9 I ist die grösste Biegungsspannung in den äussersten Fasern bei einem Querschnitt in der Entfernung x vom freien Ende:

$$S^1 = \frac{P\,x}{W};$$

dagegen ist die auf die Flächeneinheit wirkende zulässige Schubspannung (s. Schubfestigkeit):

$$S_2 = \frac{P}{F}.$$

Hieraus:

$$\frac{S^1}{S_2} = \frac{F\,x}{W}.$$

Bei einem rechteckigen Träger von den Querschnittsdimensionen b und h ist mithin:

$$\text{a)} \quad \frac{S^1}{S_2} = \frac{x}{\frac{h}{6}}.$$

Ist dieser Freiträger dagegen rund, so folgt:

$$\text{b)} \quad \frac{S^1}{S_2} = \frac{x}{\frac{d}{8}}.$$

Im Falle § 9 II ergibt sich ebenso bei rechteckigem Querschnitt:

$$\text{c)} \quad \frac{S^1}{S_2} = \frac{x}{\frac{h}{3}}$$

und bei rundem Querschnitt:

$$\text{d)} \quad \frac{S^1}{S_2} = \frac{x}{\frac{d}{4}}.$$

Die Beziehungen a bis d zeigen nun, dass schon eine geringe Balkenlänge genügt, damit die Biegungsspannung grösser wird als die im betrachteten Querschnitt herrschende vertikale Schubspannung und dass letztere nur in den Querschnitten zu berücksichtigen ist, die sehr nahe dem Angriffspunkte der biegenden Kraft liegen.

Sehr kurze Träger sind daher auf Schub zu berechnen.

Bei Freiträgern gleicher Festigkeit, sowie unterstützten Trägern u. s. w. ergeben sich ähnliche Beziehungen zwischen der in einem Querschnitt herrschenden grössten Biegungsspannung und der daselbst auftretenden Schubspannung.

§ 16.

Berechnung der Blechträger.

Bei grösseren Konstruktionen, wie solche vornehmlich im Brückenbau auftreten, erreicht das Widerstandsmoment meistens eine solche Höhe, dass hierfür in einem Stück gewalzte Träger nicht mehr herzustellen sind. Man greift dann zu den sogen. Blechträgern, die, aus Blech und Winkeleisen auf verschiedene Art zusammengenietet, als Grundform sämtlich das doppelte T haben.

Beispiele solcher zusammengesetzter Träger sind:

a) Der einfache Blechträger, Fig. 119, dessen vertikale Wand aus einem Blech, Stehblech oder Steg, besteht, an das Winkeleisen angenietet sind, die eine den Flantsch bildende horizontale Deckplatte, das Kopfblech oder die Lamelle, tragen. Letztere Platte in Verbindung mit den beiden zugehörigen Winkeleisen heisst die Gurtung, wobei man obere und untere Gurtung unterscheidet.

b) Der Kastenträger, Fig. 120; er besteht aus zwei Stehblechen, wodurch die gedrückte Flantsche breiter ausfällt, und so ein seitliches Ausweichen derselben besser verhütet wird.

Da wegen des beschränkten inneren Raumes nur an den äusseren Seiten Winkeleisen angebracht werden können, so werden häufig die beiden zu einander parallelen Wände durch Stehbolzen gegeneinander abgesteift.

c) Bei grossen Ausführungen werden, wie Fig. 121 zeigt, die Flantschen aus mehreren Gurtungsplatten gebildet. Bestehen dabei wegen der Länge des Trägers diese Platten aus mehreren Stücken, so ordnet man die Fugen treppenförmig gegeneinander und legt schliesslich eine Lasche darüber, die alle Stossfugen überdeckt.

Fig. 119

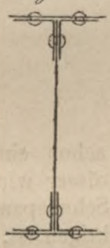


Fig. 120

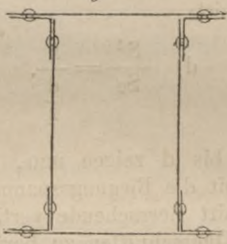
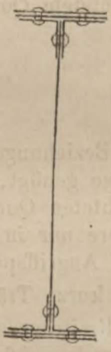


Fig. 121



Die vertikale Wand wird bei grossen Höhen aus mit der Längendimension aufrecht gerichteten Blechen hergestellt, wobei die an der Stossfuge notwendigen Stossbleche anstatt aus einfachen Blechen vielfach aus T-Rippen gebildet werden.

Bei der Ausführung der Blechträger ist darauf zu achten, dass die Stösse der verschiedenen Stücke, aus denen der Balken zusammengefügt wird, stets miteinander abwechseln.

Für die Stärke der jedesmaligen Stossplatte gilt dabei die Regel:

> Der Querschnitt der Stossplatte muss gleich dem Querschnitt der gestossenen Platte sein.

Die Gurtungsbleche nimmt man zweckmässig 6 bis 15 mm stark.

Die Winkeleisen haben im Hochbau eine Schenkellänge von 60 bis 130 mm und eine Dicke von 6 bis 22 mm.

Ihre Normallänge, also ohne Preiszuschlag, reicht bis 8 m, die Maximallänge ist 12 m. Als Stossplatten gebraucht man bei denselben entweder Flacheisen oder besser eine für diesen Zweck gewalzte Winkellasche.

Die Dicke des Stehbleches geht bis etwa 20 mm, niemals hier unter 6 mm mit Rücksicht auf das leichtere Ausbiegen und das Rosten; die Länge der einzelnen Stösse beträgt höchstens 4 m, da lange Bleche im Preise sehr hoch stehen.

Behufs Erzielung einer grösseren Steifigkeit versieht man die Stehbleche auch zwischen je zwei Stossfugen mit einfachen vertikalen Blechlaschen oder T-Rippen.

In Bezug auf die Vernietung ist folgende Regel zu beachten:

> Die Summe der Querschnitte der zu jeder Seite des Stosses angebrachten Nieten muss ebenso gross sein, als der ganze bezw. halbe Querschnitt des durch die erste Nietreihe verschwächten Bleches, je nachdem die Nieten ein- oder doppelschnittig sind (s. Schubfestigkeit).

Ist für den Stoss zweier Stehbleche e die Entfernung zweier Nieten voneinander (Nietteilung) und e_1 die Entfernung der Nieten vom Blechrande, so nehme man für δ als Stärke der zu vernietenden Bleche:

$$(348) \qquad \begin{cases} e = 10\,\delta, \\ e_1 = \ \ 5\,\delta. \end{cases}$$

Bei der Vernietung des Kopf- und Stehbleches mit dem Winkeleisen dagegen nehme man, um eine feste Verbindung der einzelnen Teile zu erreichen:

$$(349) \qquad \begin{cases} e = 6\,\delta \\ e_1 = 5\,\delta, \end{cases}$$

dabei ist zu beachten, dass die vertikal eingesetzten Nieten mit den horizontalen wechseln müssen.

Was nun zunächst die Berechnung des Stehbleches anbetrifft, so beachte man, dass dasselbe hauptsächlich den Zweck erfüllen muss, die beiden Gurtungen in konstanter Entfernung voneinander zu halten, und in vielen Fällen ist es hinreichend genau anzunehmen, die Scherspannung V in jedem Querschnitt werde gänzlich durch das Stehblech aufgenommen und sei durchaus gleichförmig über dessen Querschnitt verteilt.

Ist daher δ die Dicke und h die ganze Höhe des Trägers, auch angenähert die Höhe des besagten Bleches, so muss (s. Schubfestigkeit):

$$\delta\,h = \frac{V}{\frac{4}{5} \cdot S}$$

und also:

$$(350) \qquad \delta = \frac{5}{4}\,\frac{V}{h\,S}$$

sein, welche Stärke man mit Rücksicht auf die Verschwächung durch Nieten $\frac{4}{3}$ mal grösser nehmen muss; dabei nimmt man wohl in der Praxis das Verhältnis der Trägerhöhe h zur Stützenweite l zu:

(351) $$\frac{h}{l} = \tfrac{1}{15} \text{ bis } \tfrac{1}{10}.$$

Zur Bestimmung der Dimensionen der beiden Gurtungen sehen wir vom Stehblech ab und setzen voraus, die durch die äusseren Kräfte in einem jeden Gurtungsquerschnitt hervorgerufenen Zug- und Druckspannungen seien über den Querschnitt gleichmässig verteilt.

Die Resultante Z bezw. D dieser Spannungen muss demnach in den Gurtungsschwerpunkten angreifen, deren Entfernung voneinander wir ebenfalls näherungsweise gleich der ganzen Trägerhöhe annehmen wollen.

Das Moment der Spannungen für die neutrale Achse als Drehachse ist mithin:

$$Z\frac{h}{2} + D\frac{h}{2} = (Z + D)\frac{h}{2}.$$

Ist nun wie früher M m das Moment der äusseren Kräfte für den betrachteten Querschnitt, so muss behufs Gleichgewicht

$$M\,m = (Z + D)\frac{h}{2}$$

sein.

Die obere gedrückte Gurtung erleidet durch die Nietlöcher keine Schwächung, die Dimensionen derselben können demnach kleiner genommen werden, als die der durch die Nietlöcher in ihrer Widerstandsfähigkeit herabgedrückten unteren gezogenen Gurtung.

Nehmen wir aber, wie dies gewöhnlich geschieht, den oberen Gurtungsquerschnitt gleich dem nach Abzug der Nietlöcher verbleibenden nutzbaren Querschnitt F der unteren Gurtung, so ist:

$$Z = F\,S \text{ und } D = F\,S_1$$

und also:

$$Z + D = F(S + S_1) = 2\,F\,S,$$

da für Walzeisen $S = S_1$ zu setzen ist; daher auch

(352) $$M\,m = F\,h\,S.$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich dann der erforderliche Gurtungsquerschnitt zu:

(353) $$F = \frac{M\,m}{h\,S}.$$

Die Breite der Deckplatten bestimme man aus:

(354) $$b = 0{,}5\,l + 15 \text{ cm},$$

wobei l in Metern einzuführen ist.

Beispiel.

Für eine Deckenkonstruktion sollen Blechträger in 2 m Entfernung voneinander gebraucht werden, wobei die Spannweite 10 m beträgt. Die gleichmässige Belastung sei 750 kg auf den Quadratmeter.

Welche Verhältnisse sind jedem Träger zu geben?

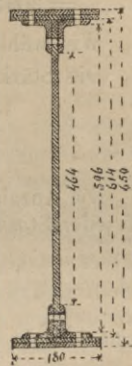
Jeder Träger hat zu tragen:

$$Q = 2 \cdot 10 \cdot 750 = 15000 \text{ kg},$$

daher die Auflagerdrucke:

$$A = B = \frac{Q}{2} = 7500 \text{ kg}.$$

Fig. 122.



Die grösste Scherkraft tritt in den Stützpunkten auf und hat den Wert der hier herrschenden Drucke, mithin die Stärke des Stehbleches bei einer Höhe des Trägers, Fig. 122, von $h = 650$ mm,

$$\delta = \frac{5\,V}{4\,h\,S} = \frac{5 \cdot 7500}{4 \cdot 65 \cdot 700} = 0{,}21 \text{ cm}.$$

Wir nehmen:

$$\delta = 6 \text{ mm}.$$

Für jeden nutzbaren Gurtungsquerschnitt folgt:

$$F = \frac{M\,m}{h\,S} = \frac{Q\,l}{8\,h\,S} = \frac{15000 \cdot 1000}{8 \cdot 65 \cdot 700} = 41{,}2 \text{ qcm}.$$

Nehmen wir Winkeleisen von 75 mm Schenkellänge und 9 mm Dicke (Profilheft Stiring-Wendel), so erhält man mit Rücksicht auf die 2 horizontalen und 2 vertikalen Nietlöcher, wenn der Nietdurchmesser zu 18 mm genommen wird, als nutzbaren Winkeleisenquerschnitt:

$$2\,(7{,}5 + 6{,}6 - 2 \cdot 1{,}8)\,0{,}9 = 18{,}9 \text{ qcm}.$$

Hat die Gurtungsplatte eine Breite $b = 180$ mm und eine Stärke $\delta_1 = 9$ mm, so ist der nutzbare Querschnitt für 2 Platten:

$$2\,(18 - 2 \cdot 1{,}8)\,0{,}9 = 25{,}92 \text{ qcm};$$

demnach der totale nutzbare Querschnitt:

$$18{,}9 + 25{,}92 = 44{,}82 \text{ qcm},$$

daher völlig hinreichend.

Zur Kontrolle vergleichen wir noch das erforderliche Widerstandsmoment für die Gurtungen mit dem aus dem angenommenen Profil sich ergebenden.

Das erstere Widerstandsmoment ist:

$$W = \frac{Q\,l}{8\,S} = \frac{15000 \cdot 1000}{8 \cdot 700} = 2678.$$

Das letztere ist, wenn wir von den beiden horizontalen Niet löchern absehen:

$$W = \frac{1}{6 \cdot 65} \{(18 - 2 \cdot 1{,}8)\,65^3 - (18 - 2 \cdot 7{,}5 - 0{,}6)\,61{,}4^3$$

$$- 2\,(7{,}5 - 0{,}9 - 1{,}8)\,59{,}6^3 - 2 \cdot 0{,}9 \cdot 46{,}4^3\}$$

$$= 3043.$$

Wir wählen 2 Stösse für das Stehblech, also 3 Blechlängen. Die Stärke des doppelten Stossbleches ist nach obiger Regel:

$$\delta_2 = \frac{6 \cdot 614}{2 \cdot 464} = 4 \text{ mm}.$$

Die Anzahl der doppelschnittigen Nieten von $2 \cdot 6 = 12$ mm Stärke auf jeder Stossseite ergibt sich nach der zweiten vermerkten Regel aus:

$$n \cdot \frac{\pi\, 12^2}{4} = \frac{6\,(614 - 2 \cdot 18)}{2},$$

woraus rund:

$$n = 15,$$

also im ganzen 30 Nieten. Nehmen wir nun in jeder Horizontalreihe 10 Nieten, so folgt als Länge der Stossplatten für die Stehbleche nach Formel (348):

$$8 \cdot 10 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = 600 \text{ mm}.$$

Die beiden Gurtungsbleche bestehen aus zwei Stücken. Die Stärke des Stossbleches ist die des Gurtungsbleches, also hier 9 mm.

Die Anzahl der dreischnittigen Nieten auf jeder Stossseite findet man bei einer Nietstärke von 18 mm aus:

$$n \cdot \frac{\pi\, 18^2}{4} = \frac{(180 - 2 \cdot 18)\, 2 \cdot 9}{3};$$

daraus rund:

$$n = 4.$$

Bei einer Nietteilung von $e = 6\,\delta$ ergibt sich daher als Länge der Stossplatte, wenn die beiden Fugen der Deckplatten um $2 \cdot 5\,\delta = 10\,\delta$ voneinander entfernt sind, welche Strecke mit 2 Nieten in Richtung der Stossplattenbreite versehen werde:

$$2 \cdot 6 \cdot 18 + 6 \cdot 5 \cdot 18 = 756 \text{ mm}.$$

Die beiden Stücke jedes Gurtungsbleches haben die Länge:

$$5 \text{ m} + 5\,\delta = 5 \text{ m} + 90 \text{ mm}.$$

Zur Versteifung des Stehbleches sind 3 Aussteifungen nötig; wir wählen dazu das ⊥ Eisen, Tab. VII c, Profil Nr. 35.

3. Schubfestigkeit.

§ 17.

Berechnung von Nieten und Gelenken.

Die zur Verbindung zweier Metallplatten dienenden Nieten und Schraubenbolzen, sowie Gelenkbolzen und Verbindungskeile sind hauptsächlich die Maschinenelemente, welche bei dieser Inanspruchnahme in Betracht kommen. Dabei sind die Nieten vorherrschend, die Schraubenbolzen nur ausnahmsweise und die Gelenkbolzen, sowie die Keile nur dann auf Abscheren zu berechnen, wenn, wie in dem gewöhnlichen Falle, der Bolzen oder Keil von dem einen der in Verbindung gebrachten Teile gabelförmig an zwei zur gemeinschaftlichen Längenachse der letzteren symmetrisch liegenden Stellen gefasst wird und wenn die Länge der Anlagefläche an dem den Bolzen oder Keil in der Mitte umfassenden Teile gleich oder kleiner als der halbe Bolzendurchmesser bezw. die halbe Keilhöhe ist.

Die Einfahrung zeigt nun, dass, wie auch zu vermuten, der Widerstand des Abscherens, gleich dem des Zerreissens oder Zerdrückens, mit der Grösse der beanspruchten Trennungsfläche wächst.

Ist demnach

P die auf Schub wirkende Kraft,
F der beanspruchte Querschnitt,
S_2 die zulässige Schubspannung,

so folgt wie bei Zug und Druck die Beziehung

$$P = F\,S_2, \tag{355}$$

dabei kann man S_2 gleich $\frac{1}{2}$ bis $\frac{4}{5}$ der Zug- bezw. Druckspannung und zwar der kleineren von beiden setzen. Auch nimmt man wohl auf Grund von Versuchen für S_2 bei Metallen $\frac{1}{6}$, bei Holz $\frac{1}{10}$ und bei Steinen $\frac{1}{20}$ des bezüglichen Bruchmoduls.

Führt man statt S_2 den Tragmodul T_2 oder Bruchmodul K_2 ein, so erhält man aus Formel (355) die Beanspruchung bei der Schub-Elastizitätsgrenze bezw. die Kraft, wodurch ein Abscheren bewirkt wird, welche Aufgabe z. B. beim Lochen der Kesselbleche mittels Stanzmaschinen auftritt; hier ist für den Bruchmodul K_2 der Wert 44 kg auf den Quadratmillimeter zu nehmen.

a) Berechnung von Vernietungen.

Zu den auf Abscheren beanspruchten Nieten nimmt man im allgemeinen ein gutes, zähes und möglichst homogenes Material, dessen Festigkeit grösser als die des Bleches und des gewöhnliches Stabeisens ist; daher kann man nach den besten Fachmännern für Nieteisen den Sicherheitsmodul $S_2 = 7$ kg auf den Quadratmillimeter setzen.

Mit Bezug auf die Art und Weise der Vernietung unterscheidet man zunächst die ein-, zwei- und mehrschnittige Nietnaht, je nachdem jeder Niet in einem Querschnitt, in zwei oder mehr Querschnitten auf Abscheren beansprucht wird.

Sämtliche Nieten einer Naht können dabei nun in einer Reihe, in zwei oder mehr Reihen parallel zum Blechrande liegen, und so spricht man weiter von einer ein-, zwei- und mehrreihigen Nietverbindung.

Endlich zerfallen die Nietungen je nach der äusseren Beanspruchung in nur feste (wie bei Eisenkonstruktionen) und in zugleich feste und dichte Verbindungen (wie bei Dampfkesseln). Die Vernietungen, welche nur geringen äusseren Kräften ausgesetzt sind und nur dicht zu halten haben (wie bei Schornsteinen) bleiben hier ausser Betracht.

Damit die Bleche durch die Lochung möglichst wenig geschwächt werden, sind thunlichst wenig, aber starke Nieten anzuwenden; zugleich wird hierdurch eine recht feste Pressung der Bleche gegeneinander, sowie eine möglichste Herabminderung der heute noch meistens angewandten Handarbeit beim Einziehen der Nieten erzielt. Allein einmal ist eine obere Grenze für den Nietdurchmesser gegeben durch das Anstauchen des Schliesskopfes von Hand, welche Arbeit mit der Grösse des Kopfes schnell wächst, so dass man mit dem die Grösse des letzteren bedingenden Nietdurchmesser nicht leicht über 25 mm hinausgeht. Dann aber auch ist die Nietstärke abhängig von dem zulässigen grössten Druck zwischen Niet und Lochwandung.

Setzen wir letzteren gleich 12 kg auf den Quadratmillimeter, so folgt, wenn d der Nietdurchmesser und δ die Blechstärke ist:

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot 7 \leqq 12 \, d \, \delta,$$

woraus:

$$d \leqq 2{,}2 \, \delta \tag{356}$$

d. h. der Nietdurchmesser soll höchstens das 2,2 fache der Blechdicke δ sein.

Grashof gibt für das Verhältnis $\frac{d}{\delta}$ den Maximalwert 2,5 an und Rankine den Wert 2 bei Blechstärken bis zu 12,5 mm, aber 1,5 bei grösseren Blechdicken.

Zweckmässige Werte für den Nietdurchmesser ergeben sich nach Bach aus der Formel:

$$d = \sqrt{50 \, \delta} - 4 \text{ mm}; \tag{357}$$

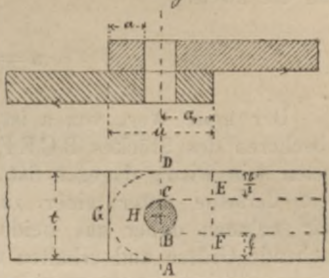
dabei sind d und δ in Millimeter zu nehmen.

Nach Bestimmung der Nietstärke resultieren die übrigen Verhältnisse einer Nietnaht in folgender Weise.

1. Feste oder Kraftnietungen.

Gehen wir von dem denkbar einfachsten Falle, der sog. Ueberblattungsvernietung aus, wie ihn Fig. 123 zeigt, wo zwei übereinander gelegte Flacheisen mittels eines Nietes miteinander verbunden werden sollen. Jeder Stab wird im Querschnitt A B und C D auf Zug beansprucht. Sollen nun die Stäbe gleichen Widerstand leisten, wie der auf Abscheren beanspruchte Niet, so muss unter der Annahme einer gleichen zulässigen Belastung von Stab und Niet und bei Vernachlässigung der für den Bestand der Verbindung günstigen Reibung zwischen den beiden Platten und zwischen den Platten und dem Nietkopf, hervorgerufen durch die, infolge der Erkaltung des weissglühend eingezogenen Nietbolzens, eintretende Zusammenziehung des letzteren und daher starke Pressung der Platten gegeneinander

Fig. 123.



$$\frac{\pi\, d^2}{4} = b\,\delta,$$

also:

$$(358) \qquad b = \frac{\frac{\pi\, d^2}{4}}{\delta} = \frac{\text{Nietquerschnitt}}{\text{Stabstärke}}$$

und die ganze Stabbreite an der Nietstelle

$$(359) \qquad t = b + d$$

sein.

Die Entfernung a des Stab- und Lochrandes ergibt sich, wenn man beachtet, dass eine Zerstörung eintreten kann sowohl durch Herausschieben des Streifens B C E F, wie auch durch Brechen des Stabstreifens zwischen Stab- und Lochrand an der schwächsten Stelle G H. Sehen wir für den letzteren Fall das Stück B C E F als einen mit $7 \cdot \frac{\pi\, d^2}{4}$ kg gleichmässig belasteten und an den Enden frei aufliegenden Balken an, dessen Länge d und dessen Querschnitt die Höhe a und die Basis δ hat, so erhält man die Beziehungen:

$$\frac{\pi\, d^2}{4} \cdot 7 = 2\, a\, \delta \cdot 7,$$

wofern wir die Abscherungsfestigkeit des Bleches gleich der absoluten Festigkeit desselben setzen, was in diesem Falle insofern angängig ist, als der Bruch in der Linie G H früher eintritt als das Herausschieben des Blechstreifens, die Scherfestigkeit des Bleches mithin hier durchaus nicht in Frage kommt, und weiter:

$$\frac{\pi\, d^2}{4} \cdot 7 \cdot \frac{d}{8} = \frac{\delta\, a^2}{6} \cdot 7.$$

Die erste Gleichung gibt:

$$a = 0{,}4\,\frac{d^2}{\delta}$$

und die zweite:

$$a = 0{,}8\,d\sqrt{\frac{d}{\delta}}.$$

Der erste Wert von a ist entschieden zu klein, da ja vor dem Abscheren des Stückes B C E F bereits der Bruch des letzteren eingetreten sein wird; dagegen ist der zweite Wert offenbar zu gross, indem derselbe unter einer zu ungünstigen Annahme entstanden ist. Wir nehmen daher aus beiden das arithmetische Mittel als die zu suchende Grösse und erhalten demnach:

(360) $$a = 0{,}2\,d\sqrt{\frac{d}{\delta}}\left\{2 + \sqrt{\frac{d}{\delta}}\right\},$$

wobei wir noch mit Rücksicht auf den Nietkopf die Bedingung haben:

(361) $$a \geqq d.$$

Die Entfernung der Nietmitte vom Stabrande ist nun:

(362) $$a_1 = a + \frac{d}{2},$$

die Grösse der Ueberlappung demnach:

(363) $$u = 2\,a + d.$$

Bezeichnet φ das Verhältnis zwischen der Festigkeit des gelochten und ungelochten Stabes, so ist:

(364) $$\varphi = \frac{b}{t} = \frac{b}{b + d}.$$

Erfordert die Konstruktion zwei und mehr Nieten, so wende man die Schwedlersche Methode (s. Wochenblatt d. Archt. Ver., Jahrg. I) an, nach welcher sich die Ermittelung der Dimensionen recht anschaulich und leicht durch Zeichnung ergibt. Diese Methode fusst auf der Vorstellung, dass man sich jeden Niet von einem gleiche Festigkeit darbietenden Streifen Flacheisen wie von einem Seile umfasst denkt, dessen Breite demnach, senkrecht zur Kraftrichtung, gleich $\frac{b}{2}$, dagegen in Richtung der Kraft gleich a zu nehmen ist.

Die Fig. 124 a bis f veranschaulichen dies Verfahren für verschiedene Konstruktionen. Bei der in Fig. 124 f vorgeführten einfachen Laschenvernietung ist die aufgelegte Lasche natürlich von derselben Stärke wie die zu verbindenden Flacheisen zu nehmen, wofern gleiche Materialqualität vorausgesetzt wird.

Wird die Doppellaschen- oder Kettennietung angewandt, so sind die beiden Laschen als eine gespaltene einfache Lasche zu betrachten; daher muss die Dicke jeder der beiden Verbindungsplatten gleich der halben Stärke der wie vorher stumpf aneinander stossenden Flacheisen genommen werden.

Fig. 124a.

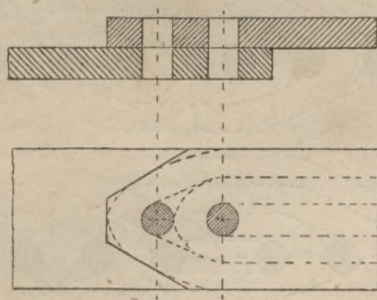


Fig. 124b.

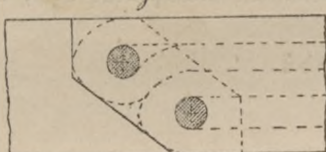


Fig. 124c.

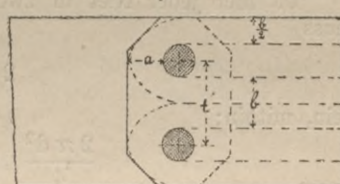


Fig. 124d.

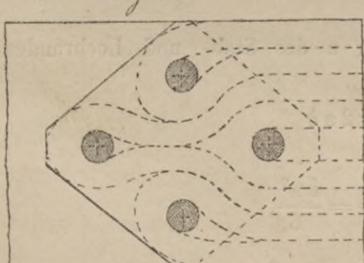


Fig. 124e.

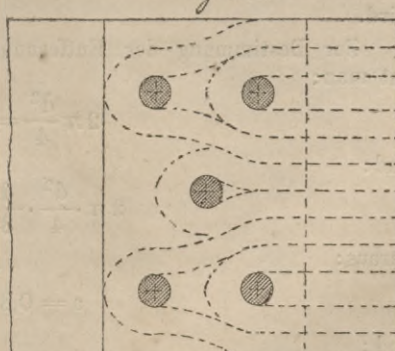
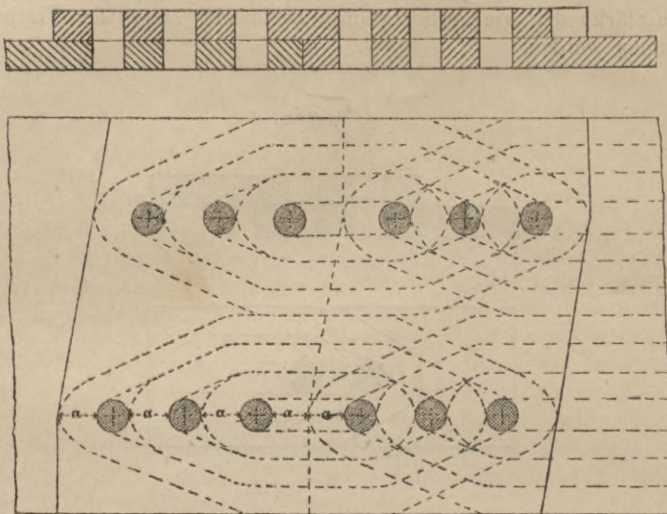


Fig. 124f



Da hier jeder Niet in zwei Querschnitten beansprucht wird, so muss

$$2\,\frac{\pi\,d^2}{4} = b\,\delta$$

sein, mithin:

$$(365) \qquad b = \frac{\frac{2\,\pi\,d^2}{4}}{\delta} = 2\,\frac{\text{Nietquerschnitt}}{\text{Stabstärke}},$$

wobei die Nietteilung

$$(366) \qquad t = b + d$$

wird.

Zur Bestimmung der Entfernung a des Stab- und Lochrandes hat man:

$$2\,\pi\,\frac{d^2}{4} = 2\,a\,\delta$$

und:

$$2\,\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \frac{d}{8} = \frac{\delta\,a^2}{6},$$

daraus:

$$a = 0{,}8\,\frac{d^2}{\delta}$$

und:

$$a = 1{,}1\,d\,\sqrt{\frac{d}{\delta}}.$$

Aus beiden Werten wie oben das arithmetische Mittel genommen, gibt die Regel:

(367) $$a = d\sqrt{\frac{d}{\delta}}\left\{0{,}55 + 0{,}4\sqrt{\frac{d}{\delta}}\right\},$$

dabei besteht die Bedingung:

(368) $$a \geqq d.$$

Die Entfernung der Nietmitte vom Blechrande ist natürlich:

(369) $$a_1 = a + \frac{d}{2},$$

und die Festigkeit der Nietnaht ist wiederum:

(370) $$\varphi = \frac{b}{t} = \frac{b}{b+d}.$$

Der Wert von φ lässt sich auch schreiben:

$$\varphi = 1 - \frac{d}{b+d} = 1 - \frac{d}{2\,\frac{\pi\, d^2}{4\,\delta} + d} = 1 - \frac{2\,\delta}{\pi\, d + 2\, d}.$$

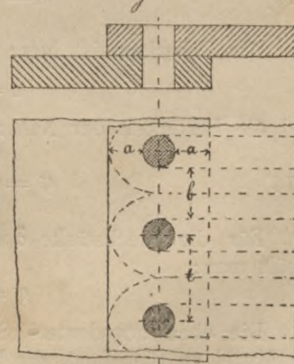
Aus dieser Gleichung ergibt sich φ um so grösser, die Verschwächung der Flacheisen durch das Lochen demnach um so geringer, je stärker die Nieten genommen werden.

Weit auseinander stehende und dicke Nieten geben daher eine festere Verbindung als eng stehende dünne, welche Regel bei allen Nietungen zu beachten ist.

2. Dampfkesselnietungen.

Für die einschnittig einreihige Nietnaht, welche Fig. 125 als Ueberblattungsnietung zeigt und die bei Dampfkesseln als Quernaht in Anwendung ist, haben wir, wenn wir die Verminderung der Blechstärke durch Abrosten dadurch berücksichtigen, dass wir statt δ nur $\frac{4}{5}\,\delta$ in Rechnung ziehen:

Fig. 125.



$$\frac{\pi\, d^2}{4} = \frac{4}{5}\, b\, \delta,$$

demnach hier

(371) $$b = \frac{5}{4}\,\frac{\frac{\pi\, d^2}{4}}{\delta} = \frac{5}{4}\,\frac{\text{Nietquerschnit}}{\text{Blechstärke}}.$$

Im weiteren gelten die Formeln (360 bis 364).

Bei der nach denselben Formeln zu behandelndem Nietverbindung Fig. 126 mit einfacher Lasche ist darauf zu achten, dass die Lasche nach aussen zu liegen

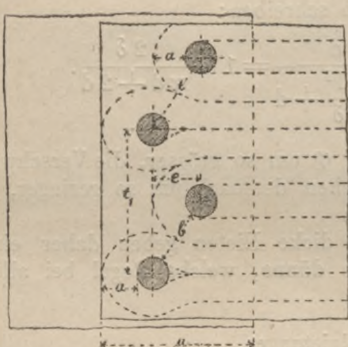
Fig. 126

kommt, um ein Aufbrechen der Naht durch den Dampfdruck zu verhindern. Jedoch wird diese Verbindung schon wegen des Umstandes, dass jede Naht nun aus zwei Reihen Nieten besteht, bei Dampfkesseln wenig benutzt.

Setzen wir in Formel (357) für δ die beiden bei Kesselblechen gebräuchlichen Grenzwerte 5 mm und 13 mm ein, so folgt für einschnittig einreihige Vernietung das Festigkeitsverhältnis nach Formel (371 und 364):

$$\varphi = 0{,}7 - 0{,}62. \text{ —}$$

Fig. 127



Zur Herstellung der Längsnaht bei cylindrischen Dampfkesseln wendet man die einschnittig zweireihige Nietnaht, Fig. 127, an behufs Erzielung einer steiferen und festeren Verbindung, da ja bekanntlich ein cylindrisches Rohr in den Längsnähten durch den inneren Druck stärker beansprucht wird als in den vorerwähnten Quernähten. Der Wert von t, a und a_1 gilt ohne Weiteres auch hier; nur ist unter t die Entfernung zweier benachbarten Nietmitten nicht derselben Reihe, sondern der beiden Reihen zu verstehen. Die Entfernung der Nietmitten derselben Reihe nehme man, um das Maximum der Festigkeit der Nietnaht zu erzielen:

$$t_1 = 2\,b + d; \tag{372}$$

dabei ist dann die Entfernung der beiden Nietreihen:

$$e = \sqrt{t^2 - \left(\frac{t_1}{2}\right)^2} \tag{373}$$

Der Ueberlapp ist hier:

$$u = 2\,a + e + d$$

und die Festigkeit der Naht:

$$\varphi = \frac{2\,b}{t} = \frac{2\,b}{2\,b + d}. \tag{374}$$

Für die Blechstärke δ die Werte 5 mm bis 13 mm genommen, erhält man:

$$\varphi = 0{,}82 - 0{,}76.$$

Die oben angedeutete Schwedlersche Methode gibt auch hier ein Mittel an die Hand, die Verhältnisse der Nietnaht durch Zeichnung recht anschaulich festzustellen.

Obschon man durch die Doppellaschennaht eine vollständig genaue Cylinderform erreicht, so wird diese Naht bei Dampfkesseln doch fast gar nicht angewendet, indem hier vier Stemmfugen bearbeitet und gedichtet werden müssen, diese Naht also viel Arbeit erfordert.

Anmerkung. Nach Armengaud werden in der Fabrik von Lemaître in Paris die Dampfkesselnietungen auf Grund folgender Normen durchgeführt, die sich in der Praxis bewährt haben und daher vielfach innegehalten werden:

1. Ueberblattung mit einfaher Naht:

$$d = 1{,}5\,d + 4\text{ mm},$$
$$a_1 = 1{,}5\,d,$$
$$t = 2\,d + 10\text{ mm};$$

2. Ueberblattung mit doppelter Naht:

$$d = 1{,}5\,d + 4\text{ mm},$$
$$a_1 = 1{,}5\,d,$$
$$t = 2\,d + 10\text{ mm},$$
$$t_1 = 3\,d + 20\text{ mm}.$$

Nach den oben entwickelten Formeln für Dampfkesselvernietung ist nun folgende Tabelle zusammengestellt, wobei immer eine abgerundete ganze Zahl Millimeter genommen wurde.

Tabelle IX.

a) für einschnittig einreihige Vernietung.

Blechstärke δ	Nietdurchmesser d	Abstand a_1	Teilung t	Ueberlapp u	Festigkeit φ
5	12	19	40	38	0,70
6	13	20	41	40	0,68
7	15	23	47	46	0,67
8	16	24	48	48	0,65
9	17	26	49	52	0,64
10	18	27	50	54	0,64
11	19	29	51	58	0,63
12	20	30	53	60	0,62
13	21	32	54	64	0,62
14	22	33	56	66	0,61
15	23	35	58	70	0,60

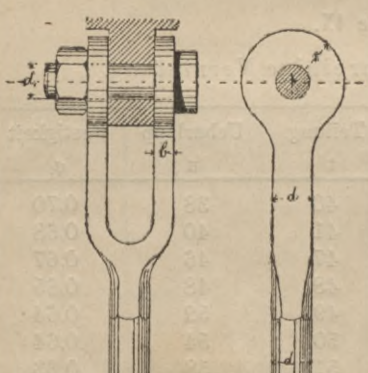
b) für einschnittig zweireihige Vernietung.

Blechstärke δ	Nietdurchmesser d	Abstand a_1	Teilung t	Teilung t_1	Abstand e	Ueberlapp u	Festigkeit φ
5	12	19	40	68	21	59	0,82
6	13	20	41	69	22	62	0,80
7	15	23	47	78	25	71	0,80
8	16	24	48	79	27	75	0,80
9	17	26	49	80	28	80	0,79
10	18	27	50	82	29	83	0,78
11	19	29	51	84	29	87	0,77
12	20	30	53	86	31	91	0,76
13	21	32	54	88	32	96	0,76
14	22	33	56	90	34	100	0,75
15	23	35	58	92	36	106	0,75

b) Berechnung von Gelenken.

Die Fig. 128 zeigt ein einfaches Gelenk; die Stange ist gabelförmig geformt behufs Befestigung an einem plattenförmigen Körper durch einen Bolzen.

Fig. 128.



Ist P die auf Zug wirkende Kraft, so folgt für Schmiedeeisen

1. der Durchmesser d der Stange aus:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 7,$$

(375) $$d = 0{,}43 \sqrt{P};$$

2. der Durchmesser d_1 des Gabelbolzens, da letzterer zweischnittig ist, aus:

$$P = \frac{2 \pi d_1^2}{4} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot 7 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 7,$$

(376) $$d_1 = 0{,}8\, d;$$

3. die Breite b eines Gabelarmes, wenn die beiden Arme und die Stange gleichen Widerstand leisten sollen, aus:

$$2\, b\, d = \frac{\pi d^2}{4},$$

(377) $$b = 0{,}4\, d;$$

4. die Verbreiterung am Ende der Gabel, das Gabelrohr, erhält zweckmässig einen Radius:

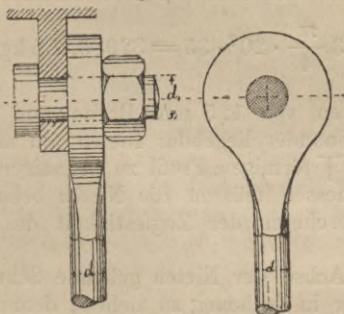
(378) $$r = 1{,}5\, d_1.$$

Ist die Zugstange nur mit einem Auge versehen, wie Fig. 129 angibt, so findet man für den Bolzen, da derselbe einschnittig ist:

$$\tfrac{4}{5}\pi\frac{d_1^2}{4} = \frac{\pi d^2}{4},$$

(379) $$d_1 = 1{,}12\,d.$$

Fig. 129.



Die Gelenke finden vornehmlich Anwendung bei eisernen Dach- und Brückenkonstruktionen, wobei, wie Fig. 130 anzeigt, die Zugstangen in den Knotenpunkten untereinander durch Kuppelplatten verbunden werden. Die letzteren erhalten an den Enden eine Verbreiterung, welcher nach W i n k l e r folgende Verhältnisse zu geben sind (Fig. 131):

(380) $$\begin{cases} a = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{2}{3}d, \\ c = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{3}d. \end{cases}$$

Fig. 130.

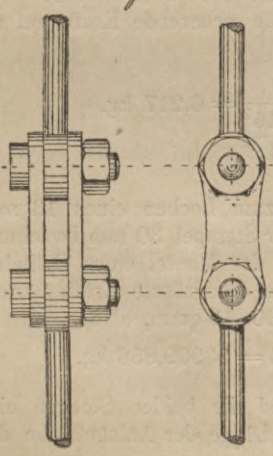


Fig. 131.

Beispiele.

1. Zwei übereinander gelegte Flacheisen sind durch 3 Nieten von je 20 mm Durchmesser, in Richtung der Breite der Flacheisen gelegen, miteinander verbunden.

Welche Kraft ist erforderlich, um diese Verbindung durch Abscheren zu zerstören, wofern eine gleichmässige Verteilung der scherenden Kraft auf die drei Nieten vorausgesetzt werden darf?

Da jeder der drei vorhandenen Nieten einschnittig ist, so folgt:

$$P = 3 \frac{\pi}{4} \cdot 20^2 \cdot 35 = 32986{,}695 \text{ kg}.$$

2. Ein Flacheisen von 125 mm Breite und 15 mm Dicke ist mittels dreier nebeneinander liegender Nieten am mittleren Steg eines Balkens von einfach ⊤ förmigem Profil zu befestigen.

Welchen Durchmesser müssen die Nieten bekommen, wenn ihr Widerstand gegen Abscheren der Zugfestigkeit des Flacheisens gleich sein soll?

Der durch die Achse der Nieten gehende Schnitt ist als gefährlicher Querschnitt hier in Rechnung zu ziehen; demnach, wenn wir die Scherfestigkeit der Nieten gleich der absoluten Festigkeit des Bleches setzen:

$$(125 - 3\,d) \cdot 15 = 3 \frac{\pi\, d^2}{4},$$

woraus angenähert:

$$d = 21 \text{ mm}.$$

3. Bei einer Doppellaschennietung zweier Bleche befinden sich zu beiden Seiten der Stossfuge 4 Nieten von je 16 mm Durchmesser, und es wirkt eine Scherkraft von 10000 kg.

Welcher Beanspruchung ist jeder Niet unterworfen?

In jedem Niet verteilt sich die scherende Kraft auf zwei Querschnitte, daher:

$$S_2 = \frac{10000}{2 \cdot 4 \cdot \frac{\pi\, 16^2}{4}} = 6{,}217 \text{ kg}.$$

4. Welches ist der grösste zum Lochen eines 13 mm starken Eisenblechs nötige Druck, wenn der Stempel 30 mm Durchmesser hat?

Die abzuscherende Fläche ist der Mantel eines Cylinders, dessen Inhalt in dem Moment, in welchem die grösste Kraftanstrengung entwickelt werden muss, gleich ist $\pi\, 30 \cdot 13$ qmm, also:

$$P = \pi \cdot 30 \cdot 13 \cdot 44 = 53909{,}856 \text{ kg}.$$

5. Bei einem Gabelbolzen sind die beiden Stangen einem Zuge von 8500 kg unterworfen, und die Länge der Anlagefläche des Bolzens beträgt 15 mm.

Welchen Durchmesser hat man dem Bolzen zu geben?

Nehmen wir eine zulässige Spannung von 5 kg auf den Quadratmillimeter an, so folgt, da ein Abscherungsbestreben in zwei Querschnitten vorhanden ist:

$$2\,\frac{\pi\, d^2}{4} = \frac{8500}{5};$$

demnach:

$$d = 33 \text{ mm}.$$

Da nun die Länge der Anlagefläche des Bolzens nicht grösser als $\frac{33}{2} = 16{,}5$ mm, so ist der Bolzen vorherrschend auf Abscheren beansprucht, daher obiger Bolzendurchmesser in Anwendung zu bringen.

6. Zwei 25 mm starke Flacheisen, auf welche ein Zug von 48000 kg wirkt, sind durch Kettennietung zu verbinden.

Sei n die Anzahl der auf jeder Seite der Stossfuge befindlichen Nieten, so ist, da jeder Niet zweischnittig ist:

$$2\,n\,\frac{\pi\, d^2}{4} = \frac{48000}{7}.$$

Ist nun $d = 45$ mm, so folgt:

$$n = 2{,}15.$$

Nimmt man $n = 2$, so ergibt sich schliesslich:

$$d = 47 \text{ mm}.$$

Die Entfernung der Nietmitte von der Stossfuge erhält man aus Formel:

$$a_1 = a + \frac{d}{2} = d\sqrt{\frac{d}{\delta}}\left\{0{,}55 + 0{,}4\sqrt{\frac{d}{\delta}}\right\} + \frac{d}{2}$$

$$= 47\sqrt{\frac{47}{25}}\left\{0{,}55 + 0{,}4\sqrt{\frac{47}{25}}\right\} + \frac{47}{2} = 94 \text{ mm}.$$

Da dieser Wert grösser als 1,5 d ist, so genügt derselbe.

Ist y die Breite des Flacheisens unter Abzug der beiden Nietlöcher, so ist:

$$25\,y = \frac{48000}{7};$$

demnach:

$$y = 274 \text{ mm};$$

daher die totale Breite:

$$b = 274 + 2 \cdot 47 = 368 \text{ mm}.$$

7. Ein einfacher Walzenkessel von 1 m Durchmesser ist einem inneren Ueberdruck von 4 Atmosphären unterworfen.

Welches sind die notwendige Blechstärke und die Abmessungen der Vernietung?

Nach der einfachen Mariotteschen Formel 17k folgt:

$$\delta = 0{,}001722 \cdot 4 \cdot 1000 + 2 = 9 \text{ mm}.$$

Die Nietstärke findet man aus der Bachschen Formel:

$$d = \sqrt{50 \cdot 9} - 4 = 17 \text{ mm}.$$

Die Nietteilung für die einschnittig einreihige Quernaht ist:

$$t = b + d = \frac{5}{4} \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\delta} + d = \frac{5}{4} \frac{\frac{\pi 17^2}{4}}{9} + 17 = 49 \text{ mm}.$$

Die Entfernung der Nietmitte vom Blechrande ergibt sich aus:

$$a_1 = a + \frac{d}{2} = 0{,}2\, d \sqrt{\frac{d}{\delta}} \left\{2 + \sqrt{\frac{d}{\delta}}\right\} + \frac{d}{2}.$$

Setzt man die Werte von d und δ ein, so findet man:

$$a_1 = 24{,}3 \text{ mm},$$

welche Entfernung wir jedoch mit Rücksicht auf die Beziehung $a_1 \overset{=}{>} 1{,}5\, d$ auf 26 mm erhöhen wollen.

Zur Herstellung der Längsnaht werde eine zweireihige Nietnaht angewandt; die Werte d und a_1 bleiben dann unverändert; die Entfernung der Nietmitten in den einzelnen Reihen ist:

$$t_1 = 2\, b + d = 2 \cdot \frac{\frac{5}{4} \frac{\pi d^2}{4}}{\delta} + d = 2 \cdot \frac{\frac{5}{4} \frac{\pi 17^2}{4}}{9} + 17 = 80 \text{ mm}$$

und die Entfernung der beiden Nietreihen:

$$e = \sqrt{t^2 - \frac{t_1^2}{4}} = \sqrt{48{,}5^2 - \frac{80^2}{4}} = 28 \text{ mm}.$$

8. Ein Dachsparren AB von 130 mm Breite ist mit dem horizontalen Balken AC durch eine Versatzung verbunden und übe gegen den Balken in seiner Richtung einen Druck von 2000 kg aus.

Welche Entfernung x vom Ende des Balkens AC muss der Zapfen des Sparrens AB erhalten?

Ist H der Horizontalschub, so verhält sich nach Fig. 132:

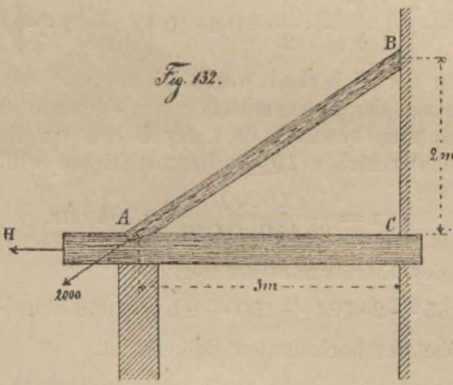
$$H : 2000 = AC : AB,$$

daraus:

$$H = \frac{2000\, AC}{AB} = \frac{2000 \cdot AC}{\sqrt{AC^2 + BC^2}} = \frac{2000 \cdot 3}{\sqrt{9 + 4}} = 1664 \text{ kg};$$

demnach, da für Tannenholz $S_2 = 0{,}042$ kg gesetzt werden kann:

$$x = \frac{1664}{130 \cdot 0{,}042} = 305 \text{ mm}.$$



9. Die bei einer Dachkonstruktion angebrachte hölzerne Hängesäule, welche mit dem 150 mm breiten horizontalen Balken durch ein Eisenband und einen Bolzen verbunden werden soll, ist einem Zuge von 10000 kg unterworfen.

Welche Stärke hat man dieser Verbindung zu geben?

Für die Stärke der Hängesäule, Fig. 133, findet man, wenn dieselbe aus Tannenholz ist:

$$x = \frac{10000}{150 \cdot 0,7} = 95 \text{ mm.}$$

Der Bolzen ist zweischnittig, daher:

$$2\pi \frac{d^2}{4} = \frac{10000}{\frac{4}{5} \cdot 7},$$

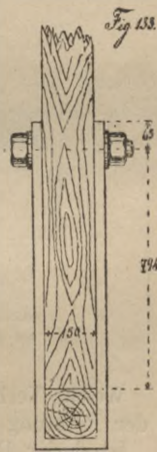
woraus:

$$d = 34 \text{ mm,}$$

wofür wir jedoch mit Rücksicht auf die Länge des Bolzens 40 mm einführen wollen.

Die ganze Stärke der Hängesäule ist mithin:

$$s = 95 + 40 = 135 \text{ mm.}$$



Hat das Eisenband eine Stärke von 20 mm, so erhält man für die Breite desselben unter Abzug des Loches:

$$y = \frac{10000}{2 \cdot 20 \cdot 7} = 36 \text{ mm,}$$

folglich die ganze Breite:

$$b = 36 + 40 = 76 \text{ mm.}$$

Die Entfernung des Lochmittels vom Ende des Eisenbandes muss mindestens

$$0{,}2\,d\sqrt{\frac{d}{\delta}}\left\{2+\sqrt{\frac{d}{\delta}}\right\}+\frac{d}{2}=0{,}2\cdot 40\sqrt{\frac{40}{20}}\left\{2+\sqrt{\frac{40}{20}}\right\}=59\text{ mm}$$

sein; wir nehmen der Sicherheit wegen 65 mm.

Die Entfernung des Bolzenmittels vom Fussende der Hängesäule ergibt sich, wenn man beachtet, dass der Bolzen ein Balkenstück von den beiden Trennungsflächen $150\cdot z$ herausschieben will, also:

$$z=\frac{10000}{2\cdot 150\cdot 0{,}042}=794\text{ mm.}$$

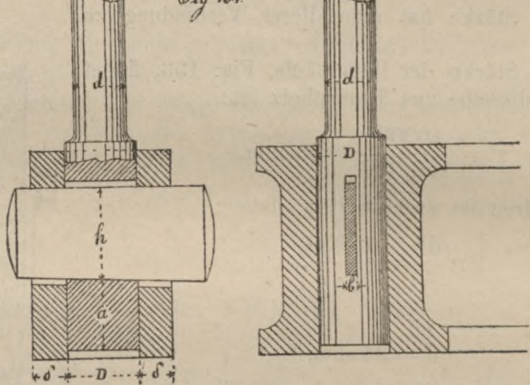
Die Länge des Eisenbandes ist folglich:

$$l=2\cdot 65+2\cdot 794+150+2\,h=1868\text{ mm}+2\,h,$$

wobei h die Höhe des horizontalen Balkens ist.

10. Bei einer hydraulischen Presse sind die vier Säulen zur Führung des Presstisches in einer Hülse der Fussplatte, Fig. 134, mittels eines Keiles befestigt.

Fig 134



Welche Verhältnisse sind dieser Keilverbindung bei einem Zuge P in der Richtung der Achse jeder Säule zu geben?

Ist d der Durchmesser der ungeschwächten Stange, so ist:

$$P=\frac{\pi d^2}{4}\cdot S.$$

Bei 8facher Sicherheit, also $S=5$ kg auf den Quadratmillimeter, ergibt sich hieraus:

$$d=0{,}5\sqrt{P}.$$

Ist weiter D der Durchmesser einer jeden Säule da, wo das Keilloch angebracht ist, und b die Breite des Keiles, so folgt:

$$\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi D^2}{4}-b\,D.$$

Setzen wir nun, wie gebräuchlich:

$$b = \frac{D}{4},$$

so finden wir aus letzterer Gleichung:

$$D = 1{,}25\,d$$

angenähert.

Die Pressung S_1, welche nach diesem für die Sitzfläche des Keiles auftritt, resultiert aus:

$$\frac{\pi d^2}{4} S = b\,D\,S_1 = \frac{D^2}{4} S_1 = \frac{(1{,}25\,d)^2}{4} S_1,$$

demnach:

$$S_1 = 1{,}61\,S.$$

Lässt man diesen Druck auch für die die Stange umschliessende Hülse zu, so hat man zur Bestimmung der Wandstärke δ der letzteren:

$$2\,b\,\delta\,S_1 = b\,D\,S_1,$$

woraus:

$$\delta = \frac{D}{2}.$$

Die Keile sind durchgehends aus Stahl, weil solche sich beim Antreiben weniger stauchen. Obschon nun Stahl gegen Abscheren widerstandsfähiger ist als Schmiedeeisen gegen Zug, so wollen wir doch für Keil und Stange eine gleiche Inanspruchnahme voraussetzen, und daher, wenn h die mittlere Höhe des Keiles ist:

$$2\,b\,h = 2\,\frac{D}{4}\,h = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{D^2}{4},$$

da ja der Keil zweischnittig ist, also nahezu:

$$h = 1{,}1\,D.$$

Die Keilsteigung nehme man gleich $\frac{1}{30} - \frac{1}{20}$.

Die Dimension a folgt aus:

$$b\,D\,S_1 = 2\,D\,a\,S_2.$$

Aber $S_1 = 1{,}61\,S$, $b = \frac{D}{4}$ und $S_2 = \frac{4}{5}\,S$, mithin:

$$1{,}61\,\frac{D^2}{4}\,S = \frac{8}{5}\,D\,a\,S,$$

folglich:

$$a = 0{,}25\,D.$$

Nach den Versuchen von Bauschinger ist aber die Scherfestigkeit von Schmiedeeisen in der Walzrichtung sehr gering; ausserdem fällt dieselbe wegen der möglichen Längsrisse höchst verschieden aus, und endlich wird diese Festigkeit durch das Antreiben des Keiles sehr stark beansprucht. Wir nehmen daher a viel grösser und zwar:

$$a = D.$$

Aufgaben.

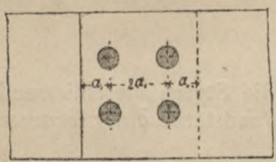
1. Zwei 12 mm starke Eisenbleche sollen mittels 4 Nieten, zu je zwei in einer Reihe, zusammengenietet werden, so dass die Verbindung einen Zug von 1400 kg aushalten kann, Fig. 135.

a) Wie stark müssen die Nieten werden?

Der Durchmesser ergibt sich zu:

$$d = 25 \text{ mm}.$$

Fig. 135.



b) Welches ist die Entfernung der Nietmitten vom Blechrande?

$$a_1 = 38 \text{ mm}.$$

Die zweite Nietreihe ist von der ersten bei der gewählten Anordnung gewöhnlich um $2\,a_1$ entfernt.

c) Wie gross ist die Breite der Bleche?

$$b = 217 \text{ mm}.$$

d) Welches wären die Konstruktionsverhältnisse bei Anwendung einer Lasche?

2. Ein Gelenkbolzen wird durch eine Kraft von 9000 kg auf Abscheren in Anspruch genommen.

Welchen Durchmesser muss derselbe bei einer Schubspannung von 4 kg auf den Quadratmillimeter bekommen?

$$d = 36{,}5 \text{ mm}.$$

3. Welche Kraft ist im Maximum erforderlich zum Lochen eines 7 mm starken Eisenbleches bei 14 mm Lochdurchmesser?

$$P = 13546{,}456 \text{ kg}.$$

4. Wie weit muss bei einem Sparren das Loch des Zapfens, das 4,5 cm breit und 7 cm tief ist, vom Balkenende abstehen, damit der auftretende Horizontalschub von 1200 kg nicht ein Herausschieben des stehengebliebenen Holzes bewirke?

$$x = 154{,}5 \text{ mm}.$$

5. Ein Dampfkessel von 90 cm Durchmesser ist einer Dampfspannung von 3 Atmosphären Ueberdruck ausgesetzt.

Welche Stärke muss das Blech erhalten, und welches sind die Dimensionen der Vernietung?

Man findet

für die Blechstärke:

$$\delta = 7 \text{ mm};$$

für den Nietdurchmesser:

$$d = 15 \text{ mm};$$

für die Nietteilung der Quernaht:

$$t = 47 \text{ mm};$$

für die Nietteilung der Längsnaht:

$$t_1 = 78 \text{ mm};$$

für die Entfernung beider Nietreihen:

$$e = 26 \text{ mm};$$

für die Entfernung der Nietmitte vom Blechrande:

$$a_1 = 23 \text{ mm}.$$

6. Zwei runde schmiedeeiserne Stangen, Fig. 136, sollen mittels Muffe und Keil miteinander verbunden werden, dabei ist die Verbindung einem Zuge von 11000 kg ausgesetzt.

Welches sind die Konstruktionsverhältnisse einer solchen Verbindung?

Der Durchmesser einer jeden Stange ausserhalb der Muffe ist:

$$d = 32 \text{ mm}.$$

In der Muffe muss dagegen die Stärke werden:

$$D = 40 \text{ mm}.$$

Die Breite des Keiles, also auch des Keilloches ergibt sich zu

$$b = 10 \text{ mm}$$

angenähert.

Die Wandstärke der Muffe muss

$$\delta = 20 \text{ mm}$$

werden, wenn die Muffe aus Gusseisen ist; für Schmiedeeisen kann man

$$\delta = \frac{D}{3} = 13 \text{ mm}$$

nehmen.

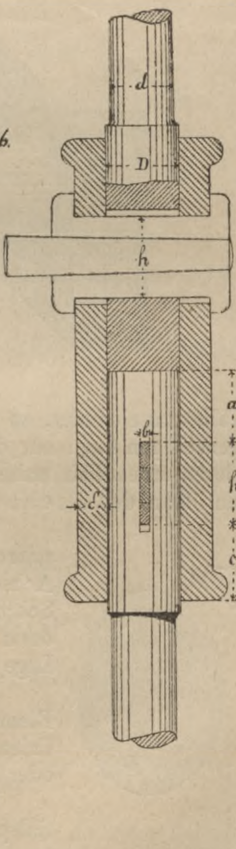
Die totale Höhe des eigentlichen Keiles und der beiden Zulagen ist:

$$h = 44 \text{ mm}.$$

Weiter nehme man:

$$a = c = 40 \text{ mm}.$$

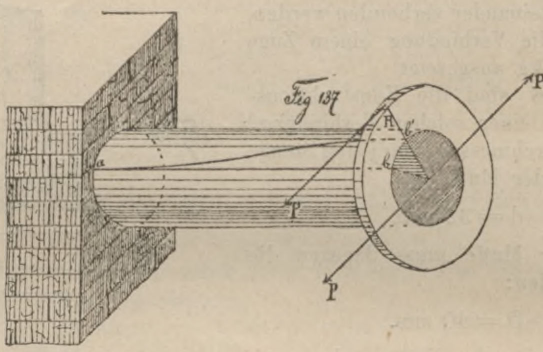
Fig. 136.



4. Torsionsfestigkeit.

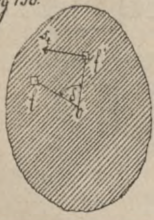
§ 18.

Jede einen stabförmigen Körper rechtwinkelig und windschief beanspruchende Kraft P, Fig. 137, können wir ersetzen durch eine in der Achse des Körpers selbst angreifende Kraft P und ein Kräftepaar Mm_t. Erstere nimmt den irgendwie festgehaltenen, am freien Drehen gehinderten Körper auf relative Festigkeit in Anspruch und letzteres auf Torsion. Unter Vernachlässigung der Biegung wollen wir hier nur die Torsion näher in Betracht ziehen und hierzu voraussetzen, die einzelnen Querschnitte des Körpers bleiben auch bei der Torsion eben und von derselben Grösse und Form, wie in unverändertem Abstande



parallel zu einander, so dass die Veränderung der Querschnitte in ihrer gegenseitigen Lage nur darin besteht, dass jeder Querschnitt gegen den anderen unendlich nahen um einen Punkt verdreht wird. Letzteren nennt man den Drehungspunkt oder Torsionsmittelpunkt.

Fig 138.



Infolge der Einwirkung des drehenden Kräftepaares wird jede Längsfaser des Körpers um die Achse des letzteren als Drehachse in Form von Schraubengewinden gewunden, und dabei kommt dann irgend ein Element f eines Querschnitts in die Lage f^1 Fig. 138.

Verbindet man den Drehungspunkt mit diesen Elementen f und f^1, so schliessen die Verbindungslinien einen Winkel δ ein, den man den Drehungs- oder Torsionswinkel nennt.

Die durch die Torsion hervorgerufene Tangentialspannung s_t hat das Bestreben, das Element in die alte Lage zurückzuführen, den früheren Gleichgewichtszustand wieder herzustellen, und wir dürfen annehmen, dass die Spannung proportional der Entfernung des Elements vom Torsionsmittelpunkt wächst.

Ist daher r die Entfernung des betrachteten Elements f von letzterem Punkte und a diejenige des am weitesten entfernten Punktes von demselben Punkte, so besteht die Beziehung:

$$s_t : S_t = r : a,$$

woraus:

$$s_t = S_t \frac{r}{a}.$$

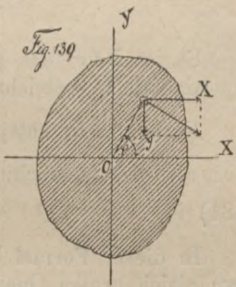
Die totale Tangentialspannung oder Schubkraft in dem Flächenelement f ist nun:

$$s_t f = S_t \frac{r}{a} f,$$

welche in der Ebene des Querschnitts liegen und senkrecht zum Radius r stehen muss.

Nehmen wir den Torsionsmittelpunkt als Anfangspunkt eines rechtwinkeligen, in der Querschnittsebene gelegenen Koordinatensystems und zerlegen wir letztere Spannung in die Komponenten X und Y in Richtung dieser Achsen, so folgt, wenn φ den Winkel von r mit der X Achse angibt, Fig. 139:

Fig. 139



$$X = S_t \frac{r}{a} f \sin \varphi,$$

$$Y = S_t \frac{r}{a} f \cos \varphi.$$

Sind x und y die Koordinaten des betrachteten Flächenelements, alsdann ist:

$$r \sin \varphi = y \quad \text{und} \quad r \cos \varphi = x$$

und daher auch:

$$X = S_t \frac{y}{a} f,$$

$$Y = S_t \frac{x}{a} f.$$

Diese Beziehungen auf alle Flächenelemente des Querschnitts ausgedehnt, liefert:

$$\Sigma X = \frac{S_t}{a} \Sigma f y,$$

$$\Sigma Y = \frac{S_t}{a} \Sigma f x.$$

Weil aber nur drehende Kräfte vorhanden sind, so kann kein Bestreben auftreten, den Querschnitt in Richtung der beiden Achsen zu verschieben, mithin müssen obige algebraische Summen Null sein, also:

$$\Sigma X = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma Y = 0,$$

was nur möglich ist für:

$$\Sigma f y = 0 \text{ und } \Sigma f x = 0,$$

d. h.:

Der Torsionsmittelpunkt ist der Schwerpunkt des Querschnitts, also die Torsionsachse die geometrische Achse des Körpers.

Das Moment der am Arme r wirkenden Schubspannung ist aber in Bezug auf den Schwerpunkt 0:

$$s_t f r = \frac{S_t}{a} f r^2,$$

und da die Summe der Momente der inneren Spannungen behufs Gleichgewicht gleich dem Moment der äusseren Drehkräfte sein muss, so folgt die Gleichgewichtsbedingung:

$$M m_t = \frac{S_t}{a} \Sigma f r^2.$$

Es ist $\Sigma f r^2$ das polare Trägheitsmoment des Querschnitts, das wir mit I_p bezeichnet haben.

Nennen wir entsprechend $\frac{I_p}{a} = W_p$ polares Widerstandsmoment des Querschnitts, dann findet sich auch:

(381) $$M m_t = W_p S_t.$$

In dieser Formel kommt die Länge der verdrehten Strecke nicht vor; gleich grosse Querschnitte dieser Strecke müssen daher auch von gleich grosser Torsionsfestigkeit sein, da eben dann die Schubspannung sich als konstant ergibt.

Für die tangentiale Schubspannung S_t nehme man $\frac{1}{2}$ bis $\frac{4}{5}$ der kleineren der beiden zulässigen Werte bei Inanspruchnahme desselben Materials auf Zug und Druck. Bei Stosswirkungen oder wenn das Torsionsmoment vermöge grosser Schwungmassen sehr gross werden kann, geht man mit S_t noch unter genannten Wert.

Was nun den Wert des polaren Trägheits- und Widerstandsmoments anbetrifft, so hat man auf Grund der Formel (34 α):

für den kreisförmigen Querschnitt:

(382) $$I_p = 2 \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32}$$

und also:

(383) $$W_p = \frac{\pi d^3}{16};$$

für den kreisringförmigen Querschnitt:

(384) $$I_p = \frac{\pi (d_1^4 - d_2^4)}{32}$$

und mithin:

(385) $$W_p = \frac{\pi (d_1^4 - d_2^4)}{16 d_1};$$

für den quadratischen Querschnitt:

(386)
$$I_p = \frac{b^4}{6}$$

und daher:

(387)
$$W_p = \frac{b^4}{6\,\frac{b\sqrt{2}}{2}} = \frac{b^3}{3\sqrt{2}};$$

für den kreuzförmigen Querschnitt mit gleichen Flügeln von der Dicke b und der Höhe h:

(388)
$$I_p = \frac{b\,h^3 + (h - b)\,b^3}{6}$$

und demnach:

$$W_p = \frac{b\,h^3 + (h - b)\,b^3}{3\,h};$$

für den rechteckigen Querschnitt von der Basis b und der Höhe h mit Rücksicht auf das Windschiefwerden des Querschnitts und auf Grund einer höheren Rechnungsmethode:

(389)
$$I_p = \frac{b^3\,h^3}{3\,(b^2 + h^2)}$$

und:

(390)
$$W_p = \frac{b^2\,h^2}{3\sqrt{b^2 + h^2}}.$$

Gehen wir jetzt zur Bestimmung des Verdrehungswinkels über.

Der Bogen, den ein Flächenelement f bei der Verdrehung zurücklegt, wächst offenbar mit der Entfernung des Elements von der Torsionsachse, also nach dem Umfange hin und erreicht den grössten Wert im Sitze des Gesamtmomentes $M\,m_t$.

Entsprechend dem in § 1 angeführten Satze über die Verlängerung eines prismatischen Stabes gilt hier innerhalb der Elastizitätsgrenze das Erfahrungsgesetz:

> Die grösste Verdrehung eines Elementes f ist der Länge des verdrehten Körperstückes und der Grösse der Schubspannung direkt proportional.

Ist daher δ der Verdrehungswinkel in Bogenlänge und l das verdrehte Körperstück, gerechnet vom festgehaltenen Ende bis zur Ebene des Gesamtmomentes der verdrehenden Kräfte, so folgt als Grösse der Verdrehung:

$$a\,\delta = \frac{S_t \cdot l}{E_2},$$

wobei E_2 ein Erfahrungskoeffizient ist, der wie der Elastizitätsmodul E des Materials durch Versuche zu bestimmen ist und Schubelastizitäts- oder Torsionsmodul genannt wird.

Hieraus:

(391)
$$\delta = \frac{S_t l}{a E_2} = \frac{M m_t l}{I_p \cdot E_2}$$

Gibt man den Torsionswinkel in Graden an, setzt man also:

$$\delta = \frac{\pi \delta^0}{180^0},$$

so erhält man auch:

(392)
$$\delta^0 = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{S_t l}{a E_2} = \frac{180^0}{\pi} \frac{M m_t \cdot l}{I_p E_2}.$$

Nach Redtenbacher ist es ratsam, bei Wellen eine Verdrehung von nur $\frac{1}{4}$ Grad auf den laufenden Meter Länge zuzulassen, was besonders bei langen Wellen zu beachten ist, sowie leichten Wellen, welche bei einer grossen Anzahl von Umdrehungen nur geringe Drucke zu übertragen haben. Zweckmässig ist es, die Stärke solcher Wellen mit Rücksicht auf die zulässsige Verdrehung zu bestimmen.

Der Schubelastizitätsmodul E_2 ist gleich $\frac{2}{5}$ E zu setzen; der Wert desselben findet sich für die verschiedenen Materialien in Tabelle I.

Anmerkung. Bezüglich des Wertes von a in den beiden letzten Formeln ist zu vermerken, dass derselbe für die oben angeführten Querschnittsformen bezw. $\frac{d}{2}$, $\frac{d_1}{2}$, $\frac{b}{2}\sqrt{2}$, $\frac{h}{2}$ und $\frac{b h}{\sqrt{b^2 + h^2}}$ ist.

Beispiele.

1. Es ist eine Welle zu berechnen, welche vornehmlich auf Torsion beansprucht wird.

Zunächst sei hier bemerkt, dass man unter Welle einen solchen Maschinenteil versteht, welchem hauptsächlich die Funktion obliegt, neben einer Drehung auch eine Kraft fortzupflanzen, also ein drehendes Kraftmoment zu übertragen.

Sie sind demnach neben Biegung bei horizontaler und Druck bei vertikaler Lage besonders auf Drehung beansprucht. Zu diesen Wellen gehören viele Transmissionswellen, die Vorlegewellen und die meisten der an Arbeitsmaschinen auftretenden Wellen.

Wir unterscheiden leichte und schwere Torsionswellen.

Zu ersteren sind alle die Wellen zu rechnen, welche keine schweren Räder zu tragen haben und keinen Erschütterungen ausgesetzt sind, wie die Vorlegewellen, die Wellen der Arbeitsmaschinen und die von Menschen und Tierkräften bewegten Windwerkswellen. Für solche Wellen nehme man nun die zulässige Belastung S_t gleich 4 kg bei Schmiedeeisen, 2 kg bei Gusseisen und 6 kg bei Gussstahl.

Die schweren Torsionswellen umfassen die Wellen, welche Stössen und Massenwirkungen unterworfen sind, sowie die Wellen, die unmittelbar von den Kraftmaschinen getrieben werden (Kurbelwellen bei Dampfmaschinen) und die grösseren Transmissionswellen. Bei solchen Wellen setze man S_t gleich der Hälfte der obigen Werte für das betreffende Material. Dabei ist noch zu bemerken, dass man bei Wellen, auf die bedeutende Stösse einwirken, Gusseisen vermeidet.

Bei eichenen Torsionswellen ist $S_t = 0{,}53$ kg in die Rechnung einzuführen.

Ist P die verdrehende Kraft in Kilogrammen, R der Hebelarm, an dem sie wirkt, und l die Länge des verdrehten Wellstückes, beides in Millimeter, N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken und n die Zahl der Umdrehungen in der Minute, so folgt nun auf Grund der Formeln (381 bis 392), sowie unter Berücksichtigung der Beziehung:

$$PR = \frac{60 \cdot 75 \cdot 1000}{2\pi} \cdot \frac{N}{n} = 716200 \frac{N}{n}$$

und bei Einführung der vermerkten zweckmässigen Grösse des Verdrehungswinkels von $\frac{1}{4}$ Grad auf den laufenden Meter, also von $\delta^0 = \frac{1^0}{4000}$ für die Länge l in Millimeter:

1. leichte Wellen:

a) bei blosser Rücksicht auf die Festigkeit

für Schmiedeeisen:

$$d = 1{,}08 \sqrt[3]{PR} = 97 \sqrt[3]{\frac{N}{n}},$$

$$b = 1{,}02 \sqrt[3]{PR} = 91{,}24 \sqrt[3]{\frac{N}{n}};$$

für Gusseisen:

$$d = 1{,}36 \sqrt[3]{PR} = 122{,}20 \sqrt[3]{\frac{N}{n}},$$

$$b = 1{,}30 \sqrt[3]{PR} = 115 \sqrt[3]{\frac{N}{n}};$$

bei hohlen gusseisernen Wellen berechnet man zunächst für denselben Fall eine Welle mit vollem Kreisquerschnitt, wählt sodann das Höhlungsverhältnis, vielfach 0,6, und bestimmt nun mit Hilfe der in § 9, Beispiel 11 angegebenen Tabelle den äusseren Durchmesser d_1;

für Gussstahl:

$$d = 0{,}95 \sqrt[3]{PR} = 85 \sqrt[3]{\frac{N}{n}},$$

$$b = 0{,}89 \sqrt[3]{PR} = 80 \sqrt[3]{\frac{N}{n}};$$

b) bei blosser Rücksicht auf die Verdrehung

für Schmiedeeisen:

$$d = 4{,}13 \sqrt[4]{PR} = 120{,}23 \sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

$$b = 3{,}62 \sqrt[4]{PR} = 105{,}33 \sqrt[4]{\frac{N}{n}};$$

für Gusseisen:

$$d = 5 \sqrt[4]{PR} = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

$$b = 4{,}31 \sqrt[4]{PR} = 125{,}26 \sqrt[4]{\frac{N}{n}};$$

für Gussstahl:

$$d = 4{,}06 \sqrt[4]{PR} = 118{,}08 \sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

$$b = 3{,}56 \sqrt[4]{PR} = 103{,}45 \sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

wenn wir den Torsionsmodul für Gussstahlachsen gleich 8600 annehmen.

2. schwere Wellen:

Für diese erhält man den Durchmesser d der cylindrischen und die Seite b der quadratischen nur auf ihre Festigkeit bestimmten Welle, wenn man die obigen Werte unter a mit $\sqrt[3]{2} = 1{,}26$ (angenähert) multipliziert.

Unter blosser Berücksichtigung der Verdrehung ergeben sich natürlich hier dieselben Werte wie oben unter b.

3. eichene Wellen:

a) bei blosser Rücksicht auf die Festigkeit:

$$b = 2 \sqrt[3]{PR} = 179 \sqrt[3]{\frac{N}{n}};$$

b) bei blosser Rücksicht auf die Verdrehung:

$$b = 12 \sqrt[4]{PR} = 342 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$

Die obigen Formeln zeigen uns, dass unter gleichen Umständen eine Welle einen um so kleineren Durchmesser erhalten wird, je grösser ihre Umdrehungszahl n ist.

2. Eine Kurbel ist mittels einer gehörig gelagerten Welle mit einem kleinen Zahnrad A in Verbindung.

Letzteres greift in ein grösseres Rad B ein, welches auf einer zweiten Welle sitzt und mit dieser ebenso wie die Trommel C verkeilt ist. Ueber diese letztere ist nun ein Seil gewickelt, durch das eine Last Q = 300 kg gehoben werden soll, indem an der Kurbel ein mittelstarker Mann mit einem Drucke von 10 kg wirkt.

Die Grösse des Kurbelarmes sei 400 mm und der Radius der Trommel gleich 120 mm.

Welche Dicke müssen die beiden Wellen dieser einfachen Bauwinde erhalten?

Das Drehungsmoment der Welle A ist $PR = 10 \cdot 400 = 4000$ kgmm, daher für Schmiedeeisen:

$$d = 1{,}08 \sqrt[3]{4000} = 17{,}5 \text{ mm}.$$

Für die Trommelwelle ist das Torsionsmoment $PR = 300 \cdot 120 = 36000$ kgmm, demnach der Durchmesser dieser Welle:

$$d_1 = 1{,}08 \sqrt[3]{36000} = 36 \text{ mm}.$$

3. Bei einer vierkantigen Welle aus Eichenholz wirkt eine Kraft gleich 300 kg an einem Hebelarme von 5 m, während eine Last Q an einem Hebelarme von 1 m in einer axialen Entfernung gleich 2 m von P zieht.

Wie dick ist die Welle zu machen, und welches ist die Verdrehung?

Es ist:

$$b = 2 \sqrt[3]{300 \cdot 5000} = 229 \text{ mm}$$

und:

$$\delta^0 = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{0{,}53 \cdot 2000}{\frac{229}{2} \cdot 72} = 0{,}737^0.$$

Soll aber nur die zulässige Verdrehung von $\frac{1}{4}^0$ auf den laufenden Meter eintreten, so ist zu nehmen:

$$b = 12 \sqrt[4]{300 \cdot 5000} = 420 \text{ mm}.$$

4. Die gussstählerne Schraubenwelle eines grossen Kriegsdampfers wird durch zwei Dampfkolben von je 80000 kg Druck an rechtwinkelig stehenden Kurbeln von 550 mm Armlänge umgetrieben und hat zwischen Krummachse und Schiffsschraube eine Länge von 22 m.

Welche Stärke ist derselben zu geben, und welche Verdrehung erleidet dieselbe?

Solche Wellen haben einen ruhigen Gang; man kann daher nehmen:

$$d = 0{,}95 \sqrt[3]{PR}.$$

Hier ist:

$$PR = \sqrt{2 \cdot (80000 \cdot 550)^2} = 80000 \cdot 550 \sqrt{2} = 62224800 \text{ kgmm, also:}$$

$$d = 0{,}95 \sqrt[3]{62224800} = 376{,}5 \text{ mm}$$

und mithin:

$$\delta^0 = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{6 \cdot 22000}{\frac{376{,}5}{2} \cdot 8600} = 4{,}671^0.$$

5. In der Spinnerei zu Logelbach (Elsass) überträgt eine gusseiserne Welle bei 27 Umdrehungen in der Minute 140 Pferdestärken.

Welche Wellstärke wäre anzuwenden?

Die Festigkeitsformel liefert:

$$d = 122{,}2 \sqrt[3]{\frac{140}{27}} = 211{,}5 \text{ mm},$$

während die Verdrehungsformel gibt:

$$d^1 = 143 \sqrt[4]{\frac{140}{27}} = 216 \text{ mm}.$$

In Wirklichkeit hat die Welle eine Stärke von:

$$d'' = 210 \text{ mm}.$$

6. Auf einer schmiedeeisernen Transmissionswelle sitzen der Reihe nach das treibende Rad A und die beiden getriebenen Räder B und C. Die Durchmesser der letzteren seien bezw. 600 mm und 500 mm und die Widerstände, welche bei einer Drehung der Räder die Zähne derselben zu überwinden haben, 1200 kg und 900 kg.

Welche Durchmesser erhalten die beiden Wellstücke A B und B C, wenn die im Maximum zulässige Spannung zu 2 kg angenommen wird?

Für das Wellstück B C ist das auf Verdrehen wirkende Moment $900 \cdot 250 = 225000$ kgmm und daher mit Rücksicht auf die Festigkeit der Durchmesser:

$$d = 1{,}26 \cdot 1{,}08 \sqrt[3]{225000} = 83 \text{ mm}$$

und mit Rücksicht auf die zulässige Verdrehung:

$$d^1 = 4{,}13 \sqrt[4]{225000} = 90 \text{ mm}.$$

Für das Wellstück A B sind 1200 kg und 900 kg die verdrehenden Kräfte; daher das resultierende Torsionsmoment $1200 \cdot 300 + 900 \cdot 250 = 585000$ kgmm und also mit blosser Rücksicht auf die Festigkeit:

$$d_1 = 1{,}26 \cdot 1{,}08 \sqrt[3]{585000} = 114 \text{ mm}$$

und bei blosser Rücksicht auf die Verdrehung:

$$d_1^1 = 4{,}13 \sqrt[4]{585000} = 114{,}5 \text{ mm}.$$

7. Welche Durchmesser erhalten die beiden Wellstücke bei derselben Grösse der zulässigen Spannung, wenn die Welle in der Minute 90 mal umläuft und die durch die Räder B und C in Bewegung zu setzenden Arbeitsmaschinen bezw. 14 und 18 Pferdestärken zu ihrem Betriebe erfordern; ferner wie gross sind die Torsionswinkel, wenn A B = 8 m und B C = 14 m ist?

Die Wellstücke A B und B C übertragen bezw. $14 + 18 = 32$ und 18 Pferdestärken, daher für das Wellstück B C mit blosser Rücksicht auf die Festigkeit:

$$d = 1{,}26 \cdot 97 \sqrt{\frac{18}{90}} = 71{,}5 \text{ mm}$$

und mit blosser Rücksicht auf die zulässige Verdrehung:

$$d^1 = 120{,}23 \sqrt[4]{\frac{18}{90}} = 81 \text{ mm}.$$

Für das Wellstück A B folgt bezw.:

$$d_1 = 1{,}26 \cdot 97 \sqrt[3]{\frac{32}{90}} = 86{,}5 \text{ mm}$$

und:

$$d_1^{\,1} = 120{,}23 \sqrt[4]{\frac{32}{90}} = 93 \text{ mm}.$$

Entsprechend ergeben sich die Verdrehungswinkel bei Berücksichtigung der Werte d und d_1:

$$\delta^0 = \frac{180^0}{\pi} \cdot 716200 \frac{18}{90} \cdot \frac{14000}{\pi \frac{71{,}5^4}{32} \cdot 8000} = 5{,}6^0$$

und:

$$\delta_1^{\,0} = \frac{180^0}{\pi} \cdot 716200 \frac{32}{90} \cdot \frac{8000}{\pi \frac{86{,}5^4}{32} \cdot 8000} = 2{,}65^0,$$

demnach der Torsionswinkel der ganzen Welle A C:

$$\triangle = 8{,}25^0.$$

8. In dem Walzwerk am Rheinfall überträgt eine schmiedeeiserne 68 m lange Welle 120 Pferdestärken von einer Turbine zu den Walzenstrassen. Die Umlaufszahl ist 95.

Welchen Durchmesser hätte man der Triebwelle zu geben?

Bei blosser Berücksichtigung der Festigkeit folgt:

$$d = 97 \sqrt[3]{\frac{120}{95}} = 105 \text{ mm}.$$

Nach der Verdrehungsformel müsste genommen werden:

$$d^1 = 120{,}23 \sqrt[4]{\frac{120}{95}} = 127{,}5 \text{ mm}.$$

Die Ausführung zeigt nur 96 mm in den 32 Lagerhälsen und 100 mm in den Schäften, was einer Spannung von 5,2 kg für erstere und 4,6 kg für letztere entspricht.

9. Es ist die Verdrehung für letzteres Beispiel anzugeben, wenn die Wellenhälse 100 mm lang sind?

Die Welle gibt unterwegs keine Kraft ab, verändert sich aber in den 32 Lagerhälsen mehr als in den Schäften, und es ergibt sich als Gesamtverdrehung:

$$\delta^0 = \frac{180^0 \cdot 2}{\pi \cdot 8000} \left\{ \frac{32 \cdot 100 \cdot 5{,}2}{96} + \frac{(68000 - 32 \cdot 100)\, 4{,}6}{100} \right\} = 45{,}104^0,$$

eine Verdrehung, welche bei ungleicher Kraftabgabe sehr bemerkbar werden muss und bei einem feinen Fabrikationszweig wohl nicht zulässig sein dürfte.

10. Durch einen 50 m langen schmiedeeisernen Wellenstrang von konstanter Dicke sollen 70 Pferdestärken bei 100 Umdrehungen an Maschinen abgegeben werden, welche eine ungefähr gleichmässig über die Welle verteilte Kraftabgabe veranlassen.

Welche Wellenstärke ist zu nehmen, und wie hoch beläuft sich die Verdrehung?

Der Durchmesser ergibt sich zu:

$$d = 1{,}26 \cdot 97 \sqrt[3]{\frac{70}{100}} = 108{,}5 \text{ mm.}$$

Zur Feststellung der Verdrehung hat man hier für l die halbe Wellenlänge einzuführen, mithin:

$$\delta^0 = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 25000}{\frac{108{,}5}{2} \cdot 8000} = 6{,}6^0,$$

also auf den laufenden Meter weniges über die zulässige von $\frac{1}{4}^0$.

Aufgaben.

1. An einer quadratischen Bohrstange arbeiten an Hebeln von 1 m Länge 2 Mann mit zusammen 35 kg Druck.

Wie stark muss das Schmiedeeisen genommen werden, damit die Stange mit 10facher Bruchsicherheit widersteht?

Es ist:

$$b = 35 \text{ mm.}$$

2. An einer Kurbelwelle wirken zwei Arbeiter, jeder mit 15 kg Druck. Die Kurbel ist 400 mm lang.

Welchen Durchmesser muss man dem Zapfen geben für $S_t = 4{,}2$ kg?

$$d = 24{,}5 \text{ mm.}$$

3. Ein cylindrischer schmiedeeiserner Stab von 1,2 m Länge und $d = 100$ mm Dicke sei an einem Ende festgehalten und werde am andern Ende von einer Kraft gleich 450 kg an einem Hebelarm von 600 mm ergriffen.

Welchen Wert hat die Spannung und der Verdrehungswinkel?

$$S_t = 1{,}38 \text{ kg,}$$

$$\delta^0 = 0{,}237^0.$$

4. Welches Torsionsmoment kann ein quadratischer Schaft aus Schmiedeeisen von 5 m Länge und 100 mm Stärke aufnehmen, ohne eine Torsion über $\frac{1}{4}^0$ zu erleiden?

$$M\,m_t = 116{,}355 \text{ kgm.}$$

5. Bei einer 60 Umdrehungen in der Minute machenden Transmissionswelle werde die Kraft am einen Ende A durch eine Riemenscheibe eingeleitet und durch drei Riemenscheiben B, C und D, die bezw. um 5, 12 und 16 m von der treibenden Riemenscheibe entfernt sind, abgegeben. Die nötigen Betriebskräfte für die von diesen 3 Riemenscheiben zu treibenden Arbeitsmaschinen seien bezw. 4, 3 und 2 Pferdestärken.

Welche Durchmesser erhalten die 3 Stücke der Welle, deren jedes durch 2 aufeinander folgende Riemenscheiben begrenzt ist, wenn diese Stücke vorherrschend auf Torsion beansprucht werden und die Spannung $S_t = 2$ kg auf den Quadratmillimeter angenommen wird, und wie gross sind die Torsionswinkel für jedes einzelne Wellenstück, sowie für die ganze Welle?

Von A aus gerechnet, ist:

$$d = 65 \text{ mm},$$

$$d_1 = 53{,}5 \text{ „}$$

$$d_2 = 39{,}5 \text{ „}$$

Ebenso ergibt sich entsprechend:

$$\delta^0 = 2{,}195^0,$$

$$\delta_1{}^0 = 3{,}720^0,$$

$$\delta_2 = 2{,}860^0$$

und also:

$$\triangle = 8{,}775^0.$$

6. Eine Krahnkette von 2700 kg Belastung wirkt an einer Kettentrommel von 180 mm, gemessen bis zur Kettenmitte.

Wie dick ist die schmiedeeiserne Achse der Trommel zu nehmen für $S_t = 4$ kg?

$$d = 85 \text{ mm}.$$

7. Eine hohle cylindrische Welle aus Gusseisen von 2 m Länge wird durch eine Kraft gleich 800 kg, welche an einem Hebelarm von 500 mm wirkt, auf Verdrehung in Anspruch genommen.

Welchen äusseren und inneren Durchmesser sind der Welle bei 0,6 Höhlungsverhältnis und $S_t = 1$ kg zu geben, und wie gross ist die Verdrehung?

$$d_1 = 133 \text{ mm},$$

$$d_2 = 80 \text{ „}$$

$$\delta^0 = 0{,}431^0.$$

8. Bei einer schweren Transmission für eine Werkstätte werden durch eine horizontale Welle 20 Pferdestärken mit 40 Umdrehungen in der Minute eingeleitet und sollen mittels Kegelräder auf eine vertikale Welle derart übertragen werden, dass die letztere 60 Umdrehungen in der Minute vollendet.

Welche Wellendurchmesser sind zu nehmen?

Für die horizontale Welle:

$$d = 97 \text{ mm}$$

und für die vertikale Welle:

$$d = 85 \text{ mm}.$$

9. Die gusseiserne stehende Welle einer Turbine von quadratischem Querschnitt und einer Länge von 3 m hat im Umfange eines darauf befindlichen Zahnrades von 31 cm Radius einen Druck von 1500 kg auszuhalten.

Wie stark ist die Welle und welche Grösse erreicht der Verdrehungswinkel bei einer Spannung $S_t = 1$ kg?

$$b = 133 \text{ mm},$$

$$\delta^0 = 0{,}646^0.$$

II. Die zusammengesetzte Elastizität und Festigkeit.

In der Praxis wird oft ein und derselbe Körper gleichzeitig auf verschiedene Arten, wie schon früher angedeutet, beansprucht, so z. B. auf Druck oder Zug und Biegung, auf Drehung und Biegung u. s. w.

Wir wollen nun im Folgenden einige der am häufigsten vorkommenden Fälle dieser zusammengesetzten Inanspruchnahme näher untersuchen.

1. Zerknickungsfestigkeit.

§ 19.

Tragkraft langer Stäbe.

Wirkt eine Kraft P stets genau in der Richtung der Achse eines prismatischen Körpers gegen das festgehaltene oder unterstützte Ende hin, so muss der Körper notwendig auf Druck beansprucht werden. Bei langen und verhältnismässig dünnen Stäben ist für diesen Fall jedoch der Stab nur in labilem Gleichgewicht, d. h. jeder noch so kleine äussere Einfluss, wie Erschütterungen, wird genügen, um die Last P aus der geradlinig vorausgesetzten Achsrichtung herauszubringen, wodurch so ausserdem noch eine Biegung des Körpers bedingt wird.

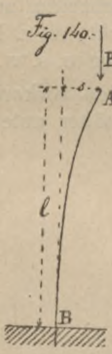
Aber auch abgesehen von diesen äusseren Ursachen für die bei stabförmigen Körpern durch die Erfahrung bestätigte letztere Formänderung wird dieselbe auch wohl darin zu suchen sein, dass mathematisch genau wohl niemals Kraft- und Achsrichtung zusammenfallen werden, wie auch die zweite Voraussetzung: die Achse ist geradlinig, bei den zur Verwendung kommenden, nicht absolut homogenen Körpern eben nie eintreten dürfte.

Infolge der relativ rückwirkenden Beanspruchung des Stabes tritt auf der konvexen Seite neben der relativen Spannung $S' = \frac{M\,m}{W}$ noch die Druckspannung $S'' = \frac{P}{F}$ auf, so dass auf dieser Seite die totale Spannung $S = S' - S''$ ist, während auf der konkaven Seite beide Spannungen dieselbe Richtung haben, daher hier die totale Spannung ausgedrückt ist durch $S = S' + S''$.

Bei einer noch so geringen Biegung des Stabes zeigt nun erfahrungsmässig das durch P bedingte Moment das Bestreben, die Durchbiegung zu vergrössern, so dass, wenn auch die Druckspannung S'' noch weit unter ihrem Bruchwerte liegt, doch die Gefahr des Abbrechens, des Zerknickens vorliegt.

Es ist demnach die Grenze festzustellen, welche die äussere Kraft nicht überschreiten darf, damit die infolge der Elastizität des Materials wirksam werdenden inneren Spannungen ein Gegenmoment erzeugen können, gross genug, eine etwa eingetretene geringe Biegung sofort wieder zu beseitigen.

Die Art, wie der Stab festgehalten wird, ist aber für die folgende Untersuchung von Wichtigkeit, und wir unterscheiden demnach:

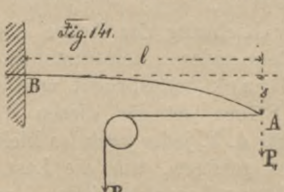


I. Fall: Ein vertikaler Stab AB von der Länge l, Fig. 140, ist am unteren Ende B eingeklemmt und durch eine am oberen Ende A angreifende vertikale Kraft P beansprucht.

Würde nun derselbe Stab nach Fall § 9 I durch eine Kraft P_1, Fig. 141, angegriffen, so ergäbe sich nach Formel (89) für die Senkung am freien Ende:

$$s = \frac{P_1\, l^3}{3\, E\, I}.$$

Soll die Kraft P der letzteren Figur, welche an einem Seile wirkt, das über eine Rolle gelegt ist, oder auch dieselbe Kraft P, Fig. 140, die gleiche Wirkung erzielen, so muss offenbar



$$P\, s = P_1\, l$$

sein, woraus als Grenzwert behufs Erhaltung des Gleichgewichts

$$P = \frac{3\, E\, I}{l^2}$$

folgt.

In dieser Formel fehlt der Wert s, was anzeigt, dass bei zunehmender Durchbiegung, etwa infolge von Erschütterungen, dieselbe Kraft P den Stab auch in dieser neuen Lage zu erhalten vermag, bis endlich bei stets wachsendem Werte von s der Bruch in B, dem gefährlichen Querschnitt, eintreten muss.

Da die Biegung im allgemeinen nach der Seite erfolgen wird, welche am wenigsten widerstandsfähig ist, so ist das Trägheitsmoment des

Stabquerschnittes auf die neutrale Achse zu beziehen, für welche dasselbe den kleinsten Wert annimmt.

Ist der Querschnitt ein regelmässiges Polygon, so kann die Ausbiegung nach jeder Seite erfolgen; nur bei einem schräg angebrachten Stabe, z. B. bei einem Krahnausleger, wird die Biegung infolge des Eigengewichts stets in der Vertikalebene stattfinden müssen.

Der oben eingeschlagene Weg zur Herleitung des Wertes P kann nur einen Näherungswert liefern.

Unter Zuhilfenahme die Gleichung der elastischen Linie des gebogenen Stabes, die sich aber nur mittels höherer Mathematik herleiten lässt, erhält man als genaueren Wert für die Zerknickungskraft P in vorliegendem Falle:

$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E\,I}{l^2}.$$

Nimmt man annähernd $\pi^2 = 10$, so ist auch:

$$P = 2{,}5\,\frac{E\,I}{l^2},$$

welcher Wert sich von dem obigen, näherungsweise gefundenen nur durch den Koeffizienten unterscheidet.

Zur Erlangung des Tragvermögens des Stabes darf man natürlich von letzterer Grenzbelastung nur einen bestimmten Teil in Rechnung einführen, man muss also setzen:

$$P = 2{,}5\,\frac{E\,I}{m\,l^2}, \tag{393}$$

wobei dann m P als diejenige Kraft anzusehen ist, welche die Zerknickung herbeiführt.

Die Grösse des Sicherheitskoeffizienten m wähle man wie folgt:

bei Schmiedeeisen und Gussstahl: m = 4 bis 5,
„ Gusseisen . . . . m = 5 „ 6,
„ Holz . . . . m = 10 „ 12.

Die zweckmässigste Querschnittsform für relativ rückwirkende Beanspruchung wird jedenfalls die sein, bei welcher ein bestimmtes verlangtes Trägheitsmoment mit dem kleinst möglichen Flächeninhalt verbunden ist, weiter aber auch die Gefahr des Ausbiegens nach allen Richtungen hin dieselbe bleibt und endlich die Möglichkeit geboten wird, das Material soweit als thunlich von der neutralen Achse entfernen zu können.

All diesen Anforderungen entspricht am vollkommensten der kreisringförmige Querschnitt, nächstdem der Kreis, das regelmässige Vieleck und der kreuzförmige Querschnitt.

Soll der Stab von gleicher Zerknickungsfestigkeit, die Maximalspannung also in allen Querschnitten dieselbe sein, so müssen die letzteren von dem befestigten nach dem freien Ende hin allmählich abnehmen. Man gewinnt hierdurch bekanntlich sowohl an Material, als auch die Form des Stabes eine schönere wird. Jedoch bietet die strenge Durchführung dieser Aufgabe manche Schwierigkeit, und für die Fälle der Praxis genügt folgende gute Annäherung:

Ist der Stab **kreisförmig**, so berechne man den Durchmesser an der Befestigungsstelle nach letzterer Formel, dagegen die Stärke am freien Ende nach der Formel auf Zerdrücken. Die so erhaltenen Profilpunkte verbinde man nun durch einen Kreisbogen oder sonst eine flach gekrümmte Kurve, welche im Fusspunkte tangential zur geraden Achse des Stabes gerichtet ist.

Hat aber der Stabquerschnitt eine andere Form, so konstruiere man für denselben Fall zunächst wieder einen runden Stab, wie vermerkt, und leite dann aus diesem Stab einen solchen von verlangtem Querschnitt ab unter der Bedingung gleicher Widerstandsfähigkeit mit Hilfe der Methode der Querschnittsverwandlung.

Ein irgendwie geformter Stab hat mit einem runden vom selben Material und von derselben Länge gleiche relativ rückwirkende Festigkeit, wenn für jeden Querschnitt des ersteren Stabes das kleinste Trägheitsmoment gleich ist dem Trägheitsmoment des runden Querschnitts an derselben Stelle.

Ist daher der Stab rechteckig und dabei die Breite b kleiner als die Höhe h, so muss, wenn d der Durchmesser des entsprechenden runden Querschnitts ist,

$$\frac{h\,b^3}{12} = \frac{\pi\,d^4}{64}$$

sein, woraus zur Umwandlung eines runden Stabes in einen rechteckigen folgt bei gegebener Höhe h:

$$\frac{b}{d} = \sqrt[3]{\frac{3\,\pi}{16} \cdot \frac{d}{h}} = 0{,}84\sqrt[3]{\frac{d}{h}}, \tag{394}$$

bei gegebener Breite b:

$$\frac{h}{d} = \frac{3\,\pi}{16}\left(\frac{d}{b}\right)^3 = 0{,}59\left(\frac{d}{b}\right)^3 \tag{395}$$

und bei gegebenem Verhältnis $\frac{b}{h}$:

$$\frac{b}{d} = \sqrt[4]{\frac{3\,\pi}{16}\,\frac{b}{h}} = 0{,}88\sqrt[4]{\frac{b}{h}}. \tag{396}$$

Die folgende Zusammenstellung gibt eine Anzahl von aus diesen Formeln abgeleiteten Werten nach Reuleaux:

$\frac{h}{d}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{h}{d}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{b}{d}$
1,0	0,84	0,50	4,72	1,00	0,88
1,1	0,81	0,53	3,98	1,25	0,83
1,2	0,79	0,56	3,38	1,50	0,79
1,3	0,77	0,60	2,75	1,75	0,76

$\frac{h}{d}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{h}{d}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{b}{d}$
1,4	0,75	0,63	2,37	2,0	0,74
1,5	0,73	0,66	2,07	2,5	0,70
1,6	0,72	0,70	1,73	3,0	0,67
1,7	0,70	0,75	1,39	3,5	0,64
1,8	0,69	0,80	1,15	4,0	0,62
2,0	0,67	0,84	1,00	4,5	0,60

Soll der Stab einen kreuzförmigen Querschnitt mit gleichen Flügeln von der Höhe h und der Stärke b erhalten, so ist (siehe Formel 72):

$$\frac{b\,h^3 + (h - b)\,b^3}{12} = \frac{\pi\,d^4}{64}$$

zu setzen; hieraus ergibt sich:

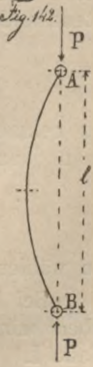
$$\frac{d}{h} = \frac{b}{h}\sqrt[4]{\frac{16}{3\pi}} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{h}{b}\right)^3 + \frac{h}{b} - 1}, \tag{397}$$

welche Formel folgende Reihe von Werten liefert, behufs Herleitung des Flügelstabes aus dem runden Stabe:

$\frac{d}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{d}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{d}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{d}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{d}{h}$	$\frac{b}{h}$
0,643	0,10	0,700	0,14	0,748	0,18	0,816	0,25	0,901	0,36
0,653	0,11	0,714	0,15	0,758	0,19	0,831	0,27	0,928	0,40
0,673	0,12	0,724	0,16	0,768	0,20	0,855	0,30	0,958	0,45
0,690	0,13	0,736	0,17	0,789	0,22	0,872	0,33	0,987	0,50

II. Fall. Der durch die Kraft P auf Zerknicken beanspruchte Stab A B, Fig. 142, von der Länge l ist gezwungen, mit seinen sonst beweglichen Enden A und B in Richtung der ursprünglichen geraden Stabachse zu bleiben.

Fig. 142.



In diesem Falle ist die elastische Linie symmetrisch in Bezug auf die Mitte derselben, und die Tangente an die elastische Linie im letzteren Punkte ist parallel A B. Man kann demnach den Stab so auffassen, als wäre er in der Mitte fest eingespannt und an seinen Enden wie im vorigen Falle mit P belastet. Führen wir daher in Formel (393) für l die Länge $\frac{l}{2}$ ein, so resultiert für vorliegenden Fall das Tragvermögen:

$$P = 10\,\frac{E\,I}{m\,l^2}. \tag{398}$$

In diesem Zustande befindet sich unter anderem die Schub- oder Kurbelstange einer Dampfmaschine, sowie die Kuppelstange der Lokomotiven.

Das Material derselben besteht aus Schmiedeeisen und Gussstahl, selten Gusseisen; bei Sägegattern findet man wohl noch Holz („Esche") in Anwendung.

Bei Landdampfmaschinen von mittlerer Geschwindigkeit (1,5 m bis 2 m) setzt man den Sicherheitskoeffizienten m gleich 15 bis 25, im Mittel 20; bei Schiffsmaschinen ist die Sicherheit vielfach sehr hoch gegriffen, bis zu $m = 70$.

Schubstangen für grössere Geschwindigkeiten, wie die bei Lokomotiven, sollen mit Rücksicht auf die infolge der Beschleunigung ihrer Massenelemente eintretende Biegungsbeanspruchung möglichst leicht hergestellt werden, und man nimmt daher hier $n = 3$ bis 6. Dieselbe Sicherheit gebraucht man für die Kuppelstangen.

Bezüglich des Querschnitts ist zu bemerken, dass bei Landdampfmaschinen der massiv kreisförmige Querschnitt und bei Lokomotiven fast allein der rechteckige Schaft in Gebrauch ist, wobei die grössere Abmessung parallel der Kurbelebene gestellt wird. Bei den grossen Balanciermaschinen findet man den Schubstangenschaft vielfach mit einem kreuzförmigen Querschnitt versehen, für welche Form Gusseisen als Stangenmaterial besonders gut geeignet ist.

Was das Längenprofil des Schaftes anbetrifft, so mache man bei rundem Querschnitt behufs Verjüngung von der Mitte aus den Durchmesser am Kreuzkopfende:

$$d_1 = 0{,}7\,D$$

und am Kurbelzapfenende:

$$d_2 = 0{,}8\,D,$$

wenn D der erforderliche Durchmesser in der Mitte ist.

Soll der Querschnitt rechteckig werden, so verzeichne man, wie im Falle I angedeutet, zunächst einen ideellen runden Schaft für denselben Fall und führe dann mit Hilfe der ersten Tabelle diesen konoidischen Schaft in einen kantigen über unter Annahme des Höhenprofils oder indem man durchgängig die Breite gleich der halben zugehörigen Höhe setzt u. s. w. Am zweckmässigsten ist jedoch, die Breite konstant und zwar

$$b = \frac{H}{2}$$

zu nehmen, wenn H die berechnete Höhe in der Mitte ist; dabei pflegt man dann wohl an den beiden Enden die Höhe bezw.

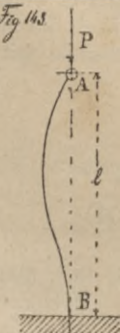
$$h_1 = 0{,}8\,H,$$
$$h_2 = 1{,}2\,H$$

zu wählen.

Bei Konstruktion eines kreuzförmigen Schaftes verfahre man wie oben beim vierkantigen unter Beachtung der zweiten Tabelle im vorigen Falle I.

III. Fall. Das eine Ende B des durch die Kraft P auf Zerknicken in Anspruch genommenen Stabes A B, Fig. 143, von der Länge l ist festgeklemmt, das andere Ende A ist zwar beweglich, wird aber in der ursprünglichen Stabachse geführt.

Fig 143



Es lässt sich dieser Fall nicht direkt auf den ersten Fall zurückführen, sondern er macht eine besondere Untersuchung nötig, durch welche sich dann ergibt, dass man für l in Formel (393) hier $\frac{l}{2\sqrt{2}}$ einzusetzen hat, um die Tragkraft

$$(399) \qquad P = 20 \frac{E\,I}{m\,l^2}$$

zu erhalten.

Auf Zerknickungsfestigkeit wird eine Kolbenstange und zwar am stärksten beansprucht, wenn sie ganz ausgeschoben ist, wobei sie dann in der Stopfbüchse als festgehalten angesehen werden muss, während das andere Ende der Stange durch den Kreuzkopf in der Stabachse gehalten wird. Beim Herausziehen aus dem Cylinder dagegen ist die Stange auf Zug in Anspruch genommen. Man stellt daher die Dimensionen nach jeder Beanspruchsweise fest und wählt die stärkere.

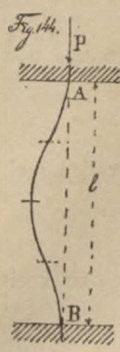
Das Material der Kolbenstange ist für massive Stangen Schmiedeeisen, besser Gussstahl („weil man bei diesem eine sauberere Oberfläche bei der Bearbeitung erzielen kann"), für hohle Gusseisen, oder auch Schmiedeeisen.

Ist die Kolbenstange nur auf Zerknickung beansprucht, wie solches bei einfach wirkenden Maschinen vorliegen kann, so genügt auch mit Rücksicht auf Abnutzung und Temperaturwechsel für Formel (399) $m = 10$. Bei doppeltwirkenden Maschinen aber gehe man in anbetracht der verschiedenen Beanspruchung, der dann eine Kolbenstange unterworfen ist, bis $m = 20$ und 25.

Die Form der Kolbenstange ist natürlich die eines Cylinders, wofern die Stange durch eine Stopfbüchse gehen muss, sonst wird sie auch wohl vierkantig prismatisch genommen.

IV. Fall. Der durch P belastete Stab A B, Fig. 144, von der Länge l ist an beiden Enden eingeklemmt, so dass bei eintretender Ausbiegung die Gerade A B tangential zum Stab in A und B ist.

Fig 144.



Eine Vergleichung mit Fig. 140 ergibt, dass man den vorliegenden Stab als aus 4 Stäben, jeden von der Länge $\frac{l}{4}$ bestehend, ansehen darf. Es ist daher für diesen Fall nach Formel (393) die zulässige Belastung:

$$(400) \qquad P = 40 \frac{E\,I}{m\,l^2}.$$

Die gefährlichen Querschnitte befinden sich an den Enden und in der Mitte. Flach aufstehende, mit Kopfund Fussplatte versehene Säulen entsprechen, wie Versuche gezeigt, dieser Beanspruchungsweise.

Als vorteilhafteste Querschnittsform für gusseiserne Säulen empfiehlt sich der kreisringförmige und kreuzförmige Querschnitt. Bei letzterer Form bestimme man nach gewählter Höhe h die Stärke b der Flügel durch Querschnittsverwandlung aus der gleichwertigen runden Vollsäule mit Hilfe der Beziehung:

$$\frac{b\,h^3}{12} = \frac{\pi\,d^4}{54},$$

woraus:

$$\frac{b}{d} = \frac{3}{16}\pi\left(\frac{d}{h}\right)^3 = 0{,}59\left(\frac{d}{h}\right)^3, \tag{401}$$

was eine genügende Annäherung liefert.

Hölzerne Säulen haben einen quadratischen Querschnitt.

Schmiedeeiserne Säulen sind im allgemeinen zusammengesetzt aus vier Winkeleisen oder aus zwei $\top$ Eisen, die Rücken an Rücken zusammengenietet wurden, haben daher die Form einer Flügelsäule.

Ziegelpfeiler sind meistens rund und erhalten häufig einen Eisenkern, bestehend aus mehreren Stäben, die entweder parallel zu einander liegen oder aber einen Rhombus bilden.

Der Sicherheitskoeffizient m ist zwischen 10 und 20 zu wählen.

Sind Säulen, wie vielfach in Maschinengestellen, noch biegenden oder Zugkräften unterworfen oder Erschütterungen ausgesetzt, so in Mühlen die das Mühlengebiet tragenden Säulen, dann greift man mit m wohl noch höher.

Es ist nun noch von grosser Wichtigkeit, die verhältnismässige Länge eines Stabes zu kennen, unterhalb welcher der Stab auf Zerdrücken und oberhalb welcher derselbe auf Zerknicken zu berechnen ist.

Eine allerdings rohe Feststellung dieser Grenze ergibt sich nun, wenn man davon ausgeht, dass für diesen Grenzfall die Formeln für Druck und Zerknicken gleiche Bruchbelastung liefern müssen.

Bei dem obigen Normalfall muss folglich für den Grenzwert

$$F\,K_1 = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{E\,I}{l^2}$$

sein und also:

$$l = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{I}{F}\cdot\frac{E}{K_1}}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt ist:

$$\frac{I}{F} = \frac{h\,b^3}{12\,h\,b} = \frac{b^2}{12},$$

für den kreisförmigen:

$$\frac{I}{F} = \frac{\frac{1}{64}\pi\,d^4}{\frac{1}{4}\pi\,d^2} = \frac{d^2}{16}$$

und für den ringförmigen:

$$\frac{I}{F} = \frac{\frac{1}{64}\pi(d_1^4 - d_2^4)}{\frac{1}{4}\pi(d_1^2 - d_2)} = \frac{d_1^2 + d_2^2}{16} = \frac{(1+\alpha^2)d_1^2}{16}.$$

Weiter ist für Gusseisen: $\frac{E}{K_1} = \frac{10000}{75} = 133{,}3;$

„ „ „ Schmiedeeisen: $\frac{E}{K_1} = \frac{20000}{38} = 526{,}3;$

„ „ „ Gussstahl: $\frac{E}{K_1} = \frac{27500}{120} = 229{,}2;$

„ „ „ Eichenholz: $\frac{E}{K_1} = \frac{1200}{5{,}8} = 206{,}9.$

Führt man nun diese Werte in obigen Ausdruck von l ein, so ergeben sich folgende Grenzverhältnisse:

Material	$\frac{l}{b}$	$\frac{l}{d}$	$\frac{l}{d_1}$
Gusseisen	5,23	4,53	$4{,}53\sqrt{1+\alpha^2}$
Schmiedeeisen	10,40	9,01	$9{,}01\sqrt{1+\alpha^2}$
Gussstahl	6,86	5,94	
Eichenholz	6,52	5,65	

Für die anderen 3 Fälle erhält man nun das Grenzverhältnis aus dieser Zusammenstellung, wenn man die betreffenden Werte bezw. mit $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{8} = 2{,}8$ und $\sqrt{16} = 4$ multipliziert.

Beispiele.

1. Für eine Schraubenschiffsmaschine ist eine runde gussstählerne Schubstange zu konstruieren, deren Länge 1515 mm und die einem Drucke von 43000 kg ausgesetzt ist.

Welches ist die Stärke des Mittelschnittes für eine fünfzigfache Sicherheit?

In diesem Falle muss

$$43000 = \frac{10 \cdot 27500\,\pi\,D^4}{50 \cdot 1515^2 \cdot 64},$$

also

$$D = \sqrt[4]{\frac{43000 \cdot 50 \cdot 1515^2 \cdot 64}{10 \cdot 27500 \cdot \pi}} = 138{,}5 \text{ mm}$$

sein.

2. Eine schmiedeeiserne Pleuelstange von 2100 mm Länge hat einen Druck von 12000 kg zu übertragen.

Welche Dimensionen erhält der Schaft in der Mitte bei achtzehnfacher Sicherheit.

a) für einen runden Querschnitt?

$$12000 = \frac{10 \cdot 20000 \cdot \pi D^4}{18 \cdot 2100^2 \cdot 64},$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{12000 \cdot 18 \cdot 2100^2 \cdot 64}{10 \cdot 20000 \cdot \pi}} = 100 \text{ mm};$$

b) für einen rechteckigen Querschnitt?

$$12000 = \frac{10 \cdot 20000 \cdot H B^3}{18 \cdot 2100^2 \cdot 12}.$$

Nimmt man $B = \frac{H}{2}$, so folgt:

$$H = \sqrt[4]{\frac{12000 \cdot 18 \cdot 2100^2 \cdot 96}{10 \cdot 2000}} = 147 \text{ mm}$$

und also:

$$B = 73{,}5 \text{ mm}.$$

3. Welche Dimensionen ergeben sich für letztere Pleuelstange, wenn dieselbe aus Gusseisen mit kreuzförmigem Querschnitt für dieselbe Sicherheit hergestellt werden soll?

Wir berechnen zunächst eine ideelle runde Stange vom selbigen Material. Da nun der Elastizitätsmodul für Gusseisen gleich $\frac{1}{2}$ dem von Schmiedeeisen ist, so ergibt sich der Durchmesser dieser Stange zu:

$$D = 100 \sqrt[4]{2} = 119 \text{ mm}.$$

Nun zeichne man das Profil der gerippten Stange nach dem Geschmack auf; es sei in der Mitte $H = 172{,}5$ mm, alsdann ist $\frac{D}{H} = \frac{119}{172{,}5} = 0{,}69$ und also laut der bei Fall I vermerkten Tabelle:

$$B = 0{,}13\, H = 0{,}13 \cdot 172{,}5 = 22{,}5 \text{ mm}.$$

Ebenso bestimmt man für eine andere Stelle das Verhältnis $\frac{d}{h}$ des Durchmessers der ideellen konoidischen Stange zur Höhe des eingezeichneten Profils der gerippten an dieser Stelle und erhält dann in derselben Weise mittels genannter Tabelle die hier geforderte Rippenstärke b u. s. w.

4. Bei einer Güterzuglokomotive ist die Cylinderweite 440 mm, die Länge der Pleuelstange 1550 mm und der oben und unten abgedrehte Querschnitt in der Mitte 90 mm hoch, sowie 40 mm breit.

Wie gross ist die Sicherheit der Stange, wenn der grösste wirksame Dampfdruck zu 8 Atm. anzunehmen ist?

Es ist der Kolbendruck

$$Q = \frac{\pi\, 440^2}{4} \cdot 8 \cdot 0{,}010334 \text{ kg} = 12570{,}528 \text{ kg},$$

mithin der Maximaldruck in Richtung der Pleuelstange angenähert:

$$P = 12570{,}528\,(1 + \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}2^2) = 12822 \text{ kg},$$

wofern das Verhältnis des Kurbelradius r zur Länge l der Pleuelstange zu $\lambda = \frac{r}{l} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ angenommen wird.

Es ist daher zu setzen:

$$12822 = \frac{10 \cdot 20000 \cdot 90 \cdot 40^3}{m\, 1550^2 \cdot 12},$$

woraus als Sicherheitsgrad

$$m = \frac{10 \cdot 20000 \cdot 90 \cdot 40^3}{12822 \cdot 1550^2 \cdot 12} = 3{,}12$$

folgt.

5. Bei der in dem vorigen Beispiel angeführten Lokomotive ist das in der Mitte liegende Triebrad mit den Hinter- und Vorderrädern gekuppelt. Die längere der beiden Kuppelstangen, die vordere, ist 1,85 m lang und hat in der Mitte einen rechteckigen Querschnitt von 75 mm Höhe und 33 mm Breite.

Wie gross ist die Sicherheit dieser Kuppelstange?

Wir haben als wirksame Druckkraft:

$$P = \frac{12822}{3} = 4274 \text{ kg}$$

und folglich:

$$4274 = \frac{10 \cdot 20000 \cdot 75 \cdot 33^3}{m\, 1850^2 \cdot 12};$$

demnach:

$$m = \frac{10 \cdot 20000 \cdot 75 \cdot 33^3}{4274 \cdot 1850^2 \cdot 12} = 3{,}07.$$

Pleuel- und Kuppelstange weisen also ziemlich gleichen Sicherheitsgrad auf.

6. Ein Dampfcylinder von 400 mm Weite und 1000 mm Hublänge habe 4 Atm. Ueberdruck auf den Kolben.

Welche Stärke erfordert die gussstählerne Kolbenstange bei 20-facher Sicherheit?

Berechnen wir zunächst die Kolbenstange auf Zerknicken. Es ist, da

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot 400^2 \cdot 4 \cdot 0{,}010334 = 5195 \text{ kg}$$

sich ergibt:

$$5195 = \frac{20 \cdot 27500 \cdot \pi D^4}{20 \cdot 1000^2 \cdot 64},$$

mithin:

$$D = \sqrt[4]{\frac{5195 \cdot 1000^2 \cdot 64}{27500 \cdot \pi}} = 44,5 \text{ mm}.$$

Bei Berechnung auf Zug hat man für dieselbe Sicherheit:

$$5195 = \frac{\pi D_1{}^2}{4} \cdot \frac{100}{20},$$

woraus:

$$D_1 = 36,5 \text{ mm},$$

die erstere Abmessung von 44,5 mm also hinreichend.

7. Für ein 3 Stock hohes Gebäude werden hohle gusseiserne Säulen in der Weise zum Tragen der Decken gebraucht, dass die einzelnen Säulen übereinander liegen. Der Abstand je zweier Säulen in der Längsrichtung des Gebäudes ist 4 m und nach der Tiefe 7,5 m; ferner ist das Eigengewicht und die Belastung jeder Decke zu 1500 kg auf den Quadratmeter angenommen.

Welche Wandstärke hat man den Säulen bei 20facher Sicherheit im Erdgeschoss zu geben, wenn dieselben 5 m hoch werden und einen äusseren Durchmesser gleich 265 mm erhalten sollen?

Man hat:

$$P = 4 \cdot 7,5 \cdot 3 \cdot 1500 = 135000 \text{ kg}$$

und daher:

$$135000 = \frac{40 \cdot 10000\, \pi\, (d_1{}^4 - d_2{}^4)}{20 \cdot 5000^2 \cdot 64},$$

folglich:

$$d_1{}^4 - d_2{}^4 = \frac{135000 \cdot 20 \cdot 5000^2 \cdot 64}{40 \cdot 10000 \cdot \pi} = \frac{10800000000}{\pi}$$

und:

$$d_2 = \sqrt[4]{265^4 - \frac{10800000000}{\pi}} = 197 \text{ mm}.$$

Die gesuchte Wandstärke ist daher:

$$\delta = \frac{265 - 197}{2} = 34 \text{ mm}.$$

8. In einem Fabrikgebäude werden die Decken durchweg von Flügelsäulen getragen, welche 2 m hoch und im Erdgeschoss 360 mm und 50 mm in den Flügeln stark sind.

Welche Belastung wäre zulässig bei 30facher Sicherheit?

$$P = \frac{40 \cdot 10000 \left\{50 \cdot 360^3 + (360 - 50)\, 50^3\right\}}{30 \cdot 2000^2 \cdot 12} = 658764 \text{ kg}.$$

Bei einer Druckspannung von 6 kg wäre dieselbe nur:

$$P_1 = (2 \cdot 360 \cdot 50 - 50^2) \cdot 6 = 201000 \text{ kg}.$$

Die wirkliche Belastung beträgt jedoch nicht mehr als 120000 kg, so dass die herrschende Druckspannung

$$S = \frac{120000}{2 \cdot 360 \cdot 50 - 50^2} = 3{,}5 \text{ kg}$$

ist.

9. Eine gewalzte 2,5 m lange Strebe Profil Tabelle VIIa Nr. 30 ist an beiden Enden festgehalten, angenietet.

Welche Belastung darf dieselbe tragen?

Das Trägheitsmoment, bezogen auf die zum Steg senkrechte Schwerachse, ist hier das kleinere und zwar für Zentimeter:

$$I = 347{,}5924.$$

Daher bei 20facher Sicherheit:

$$P = \frac{40 \cdot 2000000 \cdot 347{,}5924}{20 \cdot 250^2} = 22246 \text{ kg}.$$

Die Tragfähigkeit gegen blossen Druck ist:

$$P_1 = 40{,}4 \cdot 700 = 28280 \text{ kg}.$$

Man darf daher die Strebe mit 22246 kg belasten.

Aufgaben.

1. Eine Stange aus Eichenholz von 2,5 m Länge und quadratischem Querschnitt ist an einem Ende festgehalten und in Richtung der Achse mit 4000 kg belastet.

Wie stark muss die Stange bei 10facher Sicherheit werden?

$$b = 178 \text{ mm}.$$

2. Eine schmiedeeiserne Schubstange für eine Schiffsmaschine hat in der Mitte einen Durchmesser von 132 mm bei einer Länge von 1580 mm.

Auf welche Sicherheit ist dieselbe berechnet, wenn sie einen Druck von 28000 kg auszuhalten hat?

$$m = 42{,}6.$$

3. Die hölzerne Pleuelstange bei einem Horizontalgatter hat einem Drucke von 550 kg zu widerstehen.

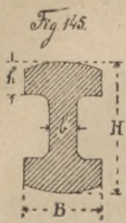
Wenn nun die Stange bei 3,2 m Länge 16fache Sicherheit bieten soll, wie gross sind dann Breite und Höhe des rechteckigen Querschnitts zu nehmen?

Für $E = 985$ und $b = 0{,}4\,h$ folgt:

$$h = 203{,}5 \text{ mm}$$

und also:

$$b = 81{,}5 \text{ mm}.$$



4. Eine bewährte gerippte Kuppelstange einer Lokomotive (Krauss & Komp. in München) von dem Querschnitt Fig. 145 hat im Mittelschnitt die Abmessungen $H = 80$ mm, $B = 47$ mm, $h = 15$ mm und $b = 10$ mm, sowie $l = 2450$ mm und $P = 4950$ kg.

Welches ist der angewandte Sicherheitsgrad?

$$m = 10{,}9.$$

5. Der Kolben einer Dampfmaschine habe einen Durchmesser von 360 mm und auf denselben wirke ein Ueberdruck von 5 Atmosphären.

Welchen Durchmesser erfordert die 1600 mm lange gussstählerne Kolbenstange bei 25facher Sicherheit?

$$D = 60 \text{ mm}.$$

6. Der Kolben einer Dampfmaschiue hat 500 mm Durchmesser, und es ist der grösste Dampfdruck 0,04 kg auf jeden Quadratmillimeter.

Wie stark muss die schmiedeeiserne Kolbenstange gemacht werden, wenn deren Länge 1,2 m beträgt, und welche Stärke hat man der runden schmiedeeisernen Kurbelstange von 2 m Länge in der Mitte zu geben, beides Mal bei 20facher Sicherheit?

Für die Kolbenstange ergibt sich:

$$D = 58{,}5 \text{ mm}$$

und für die Treibstange bei einem Verhältnis $\lambda = \frac{r}{l} = \frac{1}{6}$:

$$D_1 = 90 \text{ mm}.$$

7. Die in Fig. 38 verzeichnete Gusswand von 3 m Höhe sei am Fusse verstrebt.

Welche Belastung ist zulässig bei 10facher Sicherheit, wenn die vermerkten Masse Millimeter sind?

$$P = 29094{,}4 \text{ kg}.$$

8. Eine Säule aus Eichenholz in einem Fabrikgebäude soll einen Druck von 50000 kg bei 4,5 m Länge aushalten.

Wie stark ist dieselbe bei 25facher Sicherheit zu wählen?

$$b = 282 \text{ mm}.$$

9. In welchem Verhältnis steht die Tragkraft einer vollen zu der einer hohlen gusseisernen Säule bei gleichem Querschnitt und gleicher Länge, d. h. bei gleichem Materialaufwand?

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1^2 + d_2^2}.$$

10. In einer Kaserne sind hohle Säulen von 3600 mm Höhe anzubringen, welche einem Drucke von 17000 kg ausgesetzt sind. Welche Verhältnisse sind den Säulen bei 15facher Sicherheit zu geben.

Nimmt man ein Höhlungsverhältnis 0,7, so folgt:

$$d_1 = 122 \text{ mm},$$
$$d_2 = 85{,}5 \text{ „}$$

und also:

$$\delta = 18{,}5 \text{ „}$$

11. Es ist eine kreuzförmige Säule von 4000 mm Höhe für eine Belastung von 15000 kg zu berechnen bei 20facher Sicherheit.

Welche Abmessungen erhalten Rippenhöhe und Rippendicke, wofern man erstere gleich 1,5 des Durchmessers der zugehörigen ideellen runden Vollsäule wählt?

$$h = 187{,}5 \text{ mm},$$
$$b = 22 \text{ „}$$

Anmerkung. Bei hohlen gusseisernen Säulen ist die Feststellung des für eine gegebene Höhe und Belastung notwendigen Querschnitts ziemlich zeitraubend. Hat man es nun mit einer nicht zu dickwandigen Säule zu thun, so lässt sich für das Trägheitsmoment eine Näherungsformel aufstellen, die für die Rechnung sehr handlich und in den meisten Fällen der Praxis vollständig hinreichend ist.

Es ist, wenn δ die Wandstärke bedeutet:

$$d_1^4 - d_2^4 = d_1^4 - (d_1 - 2\,\delta)^4 = 8\,\delta\left\{d_1^3 - 3\,\delta\,d_1^2 + 4\,\delta^2 d_1 - 2\,\delta^3\right\}$$
$$= 8\,\delta\left\{(d_1 - \delta)^3 + \delta^2 (d_1 - \delta)\right\} = 8\,\delta\,(d_1 - \delta)\left\{(d_1 - \delta)^2 + \delta^2\right\}.$$

Der zu einem Kreisring zugehörige mittlere Durchmesser ist aber $d_m = d_1 - \delta$; letzteren Wert eingeführt und δ^2 vernachlässigt, gibt:

$$d_1^4 - d_2^4 = 8\,\delta\,d_m^3.$$

Demnach ist das Trägheitsmoment eines Kreisringes, bezogen auf einen Durchmesser, angenähert:

$$\text{(401)} \qquad I = \frac{\pi}{8}\,\delta\,d_m^3 = 0{,}3927\,\delta\,d_m^3,$$

und für den Flächeninhalt lässt sich näherungsweise schreiben:

$$\text{(402)} \qquad F = \pi\,d_m\,\delta.$$

Betrachten wir das obige Beispiel 7. Nach Formel (401) wäre:

$$135000 = \frac{40 \cdot 10000 \cdot 0{,}3927 \cdot \delta\,d_m^3}{20 \cdot 5000^2}$$

und also, wenn wir die im angeführten Beispiel gefundene Wandstärke von 34 mm beibehalten, der mittlere Durchmesser der Säule:

$$d_m = \sqrt[3]{\frac{135000 \cdot 20 \cdot 25000000}{40 \cdot 10000 \cdot 0{,}3927 \cdot 34}} = 233 \text{ mm};$$

mithin der äussere Durchmesser derselben:

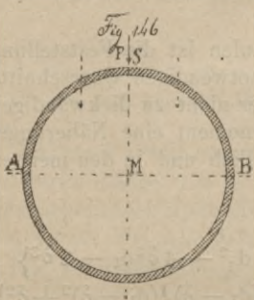
$$d_1 = 233 + 34 = 267 \text{ mm}$$

d. h. nur um 2 mm grösser als der angenommene Wert von 265 mm.

§ 20.

Stärke der Gefässwände mit äusserem Ueberdruck.

Röhren, welche einem äusseren Ueberdruck ausgesetzt sind, wie z. B. die Siederohre der Lokomotiv- und Schiffskessel, die Feuerrohre der kornischen Kessel und solche Röhren, welche luftleer erhalten werden sollen, werden bei zu geringer Wandstärke unter Einfluss dieses Druckes nachgeben und zusammenklappen, wobei der Querschnitt zunächst eine elliptische Gestalt annimmt, und schliesslich wird ein Zerknicken der Röhre eintreten müssen.



Sei P eine im Scheitel S einer solchen Röhre wirkende Kraft, die unter Umständen ein Abknicken in A und B, Fig. 146, hervorrufen wird. Dabei lassen sich nun die Teile A S und B S als in A und B festgeklemmte Stäbe ansehen, und im Falle einer Zerquetschung besteht für beide Teile nach Formel (393) die Beziehung:

$$\frac{P}{2} = 2{,}5 \frac{E\,I}{l^2}.$$

Hier ist näherungsweise die Länge l des Stabes gleich $\frac{D}{2}$, wenn D der innere Durchmesser der Röhre ist. Gibt weiter δ die Wandstärke und l die Länge der Röhre an, so ist bekanntlich das Trägheitsmoment $I = \frac{l\,\delta^3}{12}$, daher auch die Zerknickungskraft:

$$P = 2 \cdot 2{,}5 \cdot \frac{E}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} \cdot \frac{l\,\delta^3}{12} = \tfrac{5}{3}\,\frac{E\,l\,\delta^3}{D^2}.$$

Sei nun p der äussere Ueberdruck auf die Flächeneinheit, so ist der totale Druck auf jeden Teil A S und B S, dessen Richtung man durch die Mitte von A M gehend annehmen kann, gleich $p\frac{D}{2}l$ zu setzen. Dieser Pressung entspricht im Scheitel S ein Druck $p\,\frac{D}{2}\cdot l\,\frac{\frac{D}{4}}{\frac{D}{2}} = p\,\frac{D}{4}\,l$ für jeden Teil, zusammen also $p\,\frac{D}{2}\,l$. Setzt man diesen Wert gleich obigem P, so folgt der die Zerstörung hervorrufende äussere Druck auf die Flächeneinheit:

$$p = \frac{E}{0{,}3}\left(\frac{\delta}{D}\right)^3. \qquad (403)$$

Begnügen wir uns bei Bestimmung der Wandstärke δ, welche einem äusseren Ueberdruck p hinreichend Widerstand leisten kann, mit einer vierfachen Sicherheit in anbetracht der durch die praktische Ausführung schon bedingten Konstanten δ_0, dann erhält man nach letzter Formel die gute Resultate liefernde Beziehung:

$$(404) \qquad \delta = D\sqrt[3]{1{,}2\,\frac{p}{E}} + \delta_0 = D\sqrt[3]{0{,}0124\,\frac{n}{E}} + \delta_0,$$

wenn n den Ueberdruck in Atmosphären angibt; demnach für Röhren aus

a) Eisenblech:

$$\delta = 0{,}04\,D\sqrt[3]{p} + 2\text{ mm} = 0{,}009\,D\sqrt[3]{n} + 2\text{ mm};$$

b) Messingblech:

$$\delta = 0{,}057\,D\sqrt[3]{p} + 1\text{ mm} = 0{,}0124\,D\sqrt[3]{n} + 1\text{ mm}.$$

Ueber Röhren mit äusserem Ueberdruck hat vornehmlich Fairbairn Versuche angestellt, und er fand für dünnwandige Röhren, dass die Grösse des die Zerstörung herbeiführenden Ueberdruckes umgekehrt mit der Länge der Röhre und dem Durchmesser derselben und direkt nahezu mit dem Quadrat der Dicke der Röhre wächst. Die für Röhren aus Eisenblech aufgestellte, aus den Versuchsresultaten abgeleitete Formel lautet für mm und kg:

$$(405) \qquad p = 367937\,\frac{\delta^{2{,}19}}{l\,D},$$

woraus die Hütte folgende Umformung („siehe Reuleaux, Konstrukteur) herleitete:

$$(406) \qquad p = 376721\,\frac{\delta^2}{l\,D} + 116\,\frac{\delta^2}{D} - 93\,\frac{\delta}{D},$$

welche Formel zur Bestimmung des Druckes Anwendung findet, bei welchem ein Rohr mit äusserem Ueberdruck zerstört wird.

Beispiele.

1. Die zwei Rauchrohre einer Kesselanlage sollen eine Weite von 423 mm erhalten und für Dampf von 4 Atmosphären totaler Spannung berechnet werden.

Welche Blechstärke ist denselben zu geben?

$$\delta = 0{,}009 \cdot 423\sqrt[3]{3} + 2 = 7{,}5\text{ mm}.$$

2. Die Siederohre eines Lokomotivkessels, welcher Dampf von 10 kg Spannung für den Quadratzentimeter liefern soll, haben eine Weite von 50 mm.

Welche Stärke ist diesen Röhren zu geben, wenn man als Material nimmt

a) Eisenblech?

$$\delta = 0{,}04 \cdot 50 \sqrt[3]{10} + 2 = 3 \text{ mm};$$

b) Messingblech?

$$\delta = 0{,}057 \cdot 50 \sqrt[3]{10} + 1 = 2{,}5 \text{ mm}.$$

3. Bei einem kornischen Kessel, der für $2\frac{1}{2}$ Atmosphären Ueberdruck bestimmt ist, hat das Feuerrohr eine Länge = 7845 mm, eine Weite = 601 mm und eine Wandstärke = 6,5 mm.

Bei welchem Atmosphärendruck muss das Rohr zerquetscht werden?

$$n = 376721 \frac{6{,}5^2}{7845 \cdot 601} + 116 \frac{6{,}5^2}{601} - 93 \frac{6{,}5}{601} = 10{,}5 \text{ Atm.}$$

---

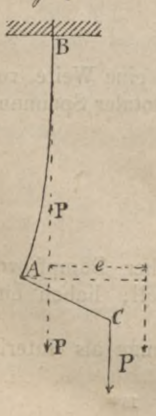
2. Exzentrische Belastung.

§ 21.

a. Ein Stangenende ist frei beweglich.

Eine prismatische, an einem Ende B in vertikaler Lage befestigte Stange A B werde am anderen Ende A durch eine Kraft P beansprucht, die in einer Entfernung e von der geometrischen Achse A B parallel der letzteren angreift. Es tritt dann eine zweifache Beanspruchung des Körpers auf. Die exzentrische Kraft P lässt sich nämlich durch eine Achsenkraft P und ein Kräftepaar ersetzen, dessen Arm gleich ist dem Abstande e der gerade vorausgesetzten Körperachse von der Richtungslinie der Kraft P, dessen Moment demnach die Grösse P e hat.

Fig 147.



Wir unterscheiden:

I. Fall: Die Belastung wirke ziehend, Fig. 147.

Nehmen wir die Achsenkraft P gleichmässig verteilt über den Körperquerschnitt an, so erzeugt dieselbe in allen Fasern die gleiche Zugspannung $\frac{P}{F}$.

Setzen wir weiter voraus, die Ausbiegung der Stange, welche in der Symmetrieebene B A C erfolgt, sei sehr klein selbst im Vergleich mit der Exzentrizität e der belastenden Kraft P, alsdann wird für alle Querschnitte ein gleich grosses Spannungsmoment hervorgerufen, und nach Formel (30) ist die durch das Moment P e bedingte grösste Zug- und Druckspannung in allen Querschnitten ausgedrückt durch bezw. $\frac{P e}{W}$ und $\frac{P e}{W_1}$.

Die resultierende Zug- und Druckspannung für die konvexe bezw. konkave Seite ist mithin:

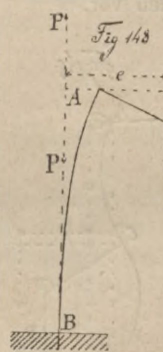
$$(407)\qquad \begin{cases} S = P\left(\dfrac{e}{W} + \dfrac{1}{F}\right), \\ S_1 = P\left(\dfrac{e}{W_1} - \dfrac{1}{F}\right), \end{cases}$$

welche Werte bei der Wahl eines Profils die vorgeschriebenen Grenzen nicht überschreiten dürfen.

Ist die Grösse der Ausbiegung des Stabes zu beachten, wenigstens nicht klein gegen e, was bei grosser Länge der Fall sein kann, so wird allerdings das Moment für die einzelnen Querschnitte eine merkliche Verschiedenheit aufweisen, aber den Maximalwert in B und zwar angenähert gleich P e erreichen.

Bei konstantem Querschnitt von der Grösse an der Befestigungsstelle hat daher obige Formel (407) auch für diesen Fall ihre Gültigkeit.

II. Fall. Die Belastung wirke drückend. Fig. 148.



Dann ergibt sich, wenn von der Vergrösserung, wie oben von der Verkleinerung des Hebelarmes durch die Biegung vom freien nach dem befestigten Ende hin abgesehen wird, in allen Querschnitten auf der konvexen und konkaven Seite die Spannung bezw. Pressung:

$$(408)\qquad \begin{cases} S = P\left(\dfrac{e}{W} - \dfrac{1}{F}\right), \\ S_1 = P\left(\dfrac{e}{W_1} + \dfrac{1}{F}\right). \end{cases}$$

Natürlich dürfen auch hier diese Spannungen nicht grösser werden als die bezüglichen zulässigen Werte.

Unter Berücksichtigung der Zunahme des Hebelarmes von A nach B für die exzentrische Druckbelastung P sind jedoch, wie sich auf dem Wege höherer Rechnung feststellen lässt, die grössten Spannungen und Pressungen in den äussersten Punkten des befestigten Querschnittes bestimmt durch:

$$(409)\qquad \begin{cases} S = P\left(\dfrac{e}{W \cos\left\{l\sqrt{\dfrac{P}{EI}}\right\}} - \dfrac{1}{F}\right), \\ S_1 = P\left(\dfrac{e}{W_1 \cos\left\{l\sqrt{\dfrac{P}{EI}}\right\}} + \dfrac{1}{F}\right), \end{cases}$$

wobei l die Länge der Stange ist.

Sollen nun bei gegebenem P und l die Abmessungen des gewählten Profils angegeben werden, so nimmt man vorerst nach Gutdünken die Querschnittsverhältnisse an und sieht dann zu, ob diese der Formel (409) genügen.

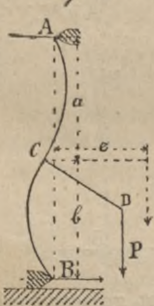
Ist dagegen bei gegebenen Abmessungen die Tragkraft P zu bestimmen, alsdann führt man die Rechnung zunächst mit Hilfe der Formel (408) durch und korrigiert hierauf diesen Wert durch Formel (409), indem man für W bezw. W_1 den Wert $W \cos \left\{ l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right\}$ bezw. $W_1 \cos \left\{ l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right\}$ in die Rechnung eingeführt, wobei das P unter dem Wurzelzeichen der eben gefundene Näherungswert ist.

Sind beide Werte von P, der erste Näherungswert und der zuletzt durch die Korrektur gefundene, sehr verschieden, so unterwirft man das P einer zweiten Korrektur u. s. w.

b. Die Stange ist oben und unten um Zapfen drehbar.

Ein solcher Fall liegt bei den um zwei Endzapfen drehbaren Krahnsäulen vor.

Fig. 149.



Die beiden Lager kann man sich ersetzt denken durch zwei Stützen A und B, Fig. 149, und die der Stangenachsen A B parallele exzentrische Belastung P erzeugt hier die beiden Reaktionen A und B. Behufs Gleichgewicht gegen horizontale Verschiebung, sowie Drehung muss

$$A + B = 0$$

und

$$P e - A l = 0$$

sein, demnach:

$$A = -B = P \frac{e}{l}. \tag{410}$$

Das Moment für einen Querschnitt E zwischen A und C in der Entfernung x von A ist, wenn wir die Drehrichtung des Kräftepaares P e wie früher als positiv ansehen:

$$M m_E = -A x = -P \frac{e}{l} x. \tag{411}$$

und für einen Querschnitt F zwischen C und B in der Entfernung y von B und x_1 von A:

$$M m_F = -B y = P \frac{e}{l} (l - x_1). \tag{412}$$

Die elastische Linie muss wegen des Zeichenwechsels der Momente einen Wendepunkt in C aufweisen.

Für $x = a$ und $y = b$ erreicht $M m_E$ bezw. $M m_F$, absolut genommen, den Maximalwert d. h. unmittelbar oberhalb und unterhalb C liegt ein Bruchquerschnitt.

Für den gefährlichen Querschnitt über C des Stangenstückes A C ist daher das Maximum der Zug- und Druckspannung:

$$(413)\qquad \begin{cases} S = P\,\dfrac{e}{l}\cdot\dfrac{a}{W}, \\ S_1 = P\,\dfrac{e}{l}\cdot\dfrac{a}{W_1}; \end{cases}$$

dagegen für den gefährlichen Querschnitt unter C des Stückes B C ist, wenn man noch die durch die Achsenkraft P bedingte Druckspannung dieses Teiles in Betracht zieht, dies Maximum:

$$(414)\qquad \begin{cases} S = P\left(\dfrac{e}{l}\cdot\dfrac{b}{W} - \dfrac{1}{F}\right), \\ S_1 = P\left(\dfrac{e}{l}\cdot\dfrac{b}{W_1} + \dfrac{1}{F}\right). \end{cases}$$

Von diesen 4 Spannungen sind die absolut grössten festzustellen und bei konstantem Querschnitt der Rechnung zu Grunde zu legen unter Beachtung des bezüglichen zulässigen Grenzwertes.

Beispiele.

1. Es sollen die Querschnittsabmessungen eines Seil- und Kettenhakens bestimmt werden.

Das Material solcher Haken ist wegen der starken Beanspruchung auf zusammengesetzte Festigkeit gutes Schmiedeeisen. Da nun für dieses die zulässige Zugbelastung gleich der auf Druck gesetzt werden kann, so wird ein solcher Haken am rationellsten konstruiert sein, wenn nach Formel (407)

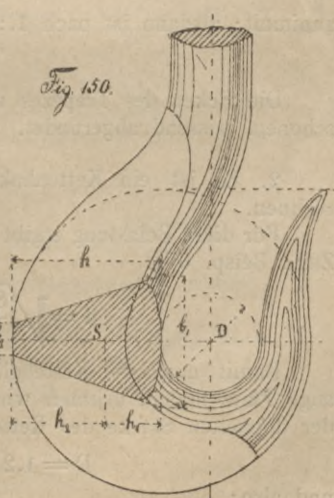
$$\frac{e}{W} + \frac{1}{F} = \frac{e}{W_1} - \frac{1}{F}$$

oder

$$\alpha)\qquad \frac{eF}{2} = \frac{W \cdot W_1}{W - W_1}$$

ist. Querschnitte, für welche $W = W_1$ ist, wie der häufig bei Haken gebrauchte kreisförmige und elliptische, sind demnach entschieden zu verwerfen.

Fig. 150.



Wir nehmen, wie die Skizze Fig. 150 andeutet, als sehr passend einen trapezförmigen Querschnitt, wodurch auch eine breite Auflagefläche für das Seil und die Kette erzielt werden kann.

Für einen Haken mit einem solchen Querschnitt ist nun:

$$e = \frac{D}{2} + h_1, \quad F = \frac{b_1 + b_2}{2} h,$$

$$h_1 = \frac{b_1 + 2 b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}, \quad h_2 = \frac{2 b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3},$$

$$I = \frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h^3}{36},$$

also:

$$W = \frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + 2 b_2} \cdot \frac{h^2}{12},$$

$$W_1 = \frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{2 b_1 + b_2} \cdot \frac{h^2}{12}.$$

Diese Werte in α) eingeführt, gibt unter der Bedingung, dass die grösste Zug- und Druckspannung einander gleich sind, die einfache Beziehung:

$$1. \quad h = \frac{D}{2} \cdot \frac{b_1 - b_2}{b_2}.$$

Setzt man weiter die Werte von e, W bezw. W_1 und F in Formel (407) ein, so folgt als zweite Beziehung:

$$2. \quad S = S_1 = \frac{12 P b_2}{D (b_1 - b_2)^2} = \frac{6 P}{h (b_1 - b_2)}.$$

Gute Verhältnisse ergeben sich, wenn man unter Voraussetzung einer ruhenden Belastung und vorzüglichen Materials die grösste zulässige Spannung im Hakenauge zu 10 kg auf den Quadratmillimeter und weiter

$$h = 1{,}5\,D$$

annimmt; alsdann ist nach 1.:

$$b_1 = 4\,b_2.$$

Die Ecken des Trapezes werden, um Seil und Kette möglichst zu schonen, passend abgerundet.

2. Es ist ein Kettenhaken für 8500 kg Tragfähigkeit zu berechnen.

Für diese Belastung ergibt sich als Stärke des Ketteneisens („siehe Zug., Beisp. 6"):

$$d = \sqrt{\frac{8500}{10}} = 29 \text{ mm}.$$

Damit nun zwei Kettenglieder zugleich mit Spielraum im Hakenauge Platz finden, nehmen wir den Durchmesser dieses Auges 1,2 mal der doppelten Stärke des Ketteneisens; demnach:

$$D = 1{,}2 \cdot 2 \cdot 2{,}29 = 70 \text{ mm}$$

und also:

$$h = 1{,}5 \cdot 70 = 105 \text{ mm}.$$

Nach Gleichung 2. des vorigen Beispiels hat man folglich:

$$b_1 = 65 \text{ mm}$$

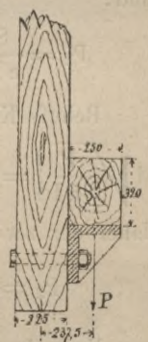
und daher:

$$b_2 = \frac{b_1}{4} = 16 \text{ mm}.$$

Die Stärke des Hakenschaftes ist auf blosse Zugfestigkeit zu bestimmen, wofern nur dieser Schaft mit etwas Spielraum im Querstück sitzt.

3. Ein mit 9000 kg gleichmässig belasteter Träger aus Eichenholz von 2,5 m Länge soll in der durch Fig. 151 angegebenen Weise mittels zweier Hängesäulen vom selben Material getragen werden.

Fig. 151



Welche Abmessungen müssen Träger und Hängesäulen erhalten?

Für $S = 0{,}66$ kg auf den Quadratmillimeter ergibt sich als Widerstandsmoment des Trägers:

$$W = \frac{9000 \cdot 2500}{8 \cdot 0{,}66} = 4261364.$$

Die Höhe des Trägers zu 320 mm vorausgesetzt, folgt für die Breite desselben:

$$b = \frac{6 \cdot 4261364}{320^2} = 250 \text{ mm}.$$

Die Kraft P, mit welcher jede der beiden Hängesäulen exzentrisch auf Zug beansprucht wird, ist 4500 kg. Nehmen wir nun die in der Biegungsebene liegende Abmessung jeder Säule zu

$$h_1 = 225 \text{ mm},$$

so ergibt sich nach Formel (407):

$$b_1 = \frac{4500}{1{,}1}\left(\frac{6 \cdot 237{,}5}{225^2} + \frac{1}{225}\right) = 133 \text{ mm}$$

und:

$$b_1^1 = \frac{4500}{0{,}66}\left(\frac{6 \cdot 237{,}5}{225^2} - \frac{1}{225}\right) = 162 \text{ mm}.$$

Letzterer Wert ist als Breite der Hängesäule zu wählen.

4. Eine hohle gusseiserne Säule habe 300 mm äusseren und 250 mm inneren Durchmesser, sowie 5,5 m Höhe.

Welche exzentrische Drucklast am Hebelarm 0,4 m kann die Säule tragen?

Es ist das Trägheitsmoment:

$$I = \frac{\pi}{64}(300^4 - 250^4) = 205860703;$$

demnach das Widerstandsmoment:

$$W = W_1 = \frac{I}{150} = 1372404.$$

Der Querschnitt ist:

$$F = \frac{\pi}{4}(300^2 - 250^2) = 21598{,}4.$$

Nach Formel (408) ist daher die erste Annäherung:

$$P = \frac{S F W}{e F - W} = \frac{2{,}5 \cdot 21598{,}4 \cdot 1372404}{400 \cdot 21598{,}4 - 1372404} = 10260 \text{ kg}$$

und:

$$P_1 = \frac{S_1 F W}{e F + W} = \frac{5 \cdot 21598{,}4 \cdot 1372404}{400 \cdot 21598{,}4 + 1372404} = 14795 \text{ kg}.$$

Behufs Korrektur des ersten Wertes P bestimmen wir:

$$\cos\left\{l\sqrt{\frac{P}{E I}}\right\} = \cos\left\{5500\sqrt{\frac{10260}{10000 \cdot 205860703}}\right\} = \cos 0{,}38891 = 0{,}92532;$$

daher der zweite Näherungswert nach Formel (409):

$$P_2 = \frac{2{,}5 \cdot 21598{,}4 \cdot 1372404 \cdot 0{,}92532}{400 \cdot 21598{,}4 - 1372404 \cdot 0{,}92532} = 9305 \text{ kg}.$$

Von einer weiteren Korrektur absehend, können wir die Tragfähigkeit der Säule zu etwa

$$P_3 = 9000 \text{ kg}$$

annehmen.

5. Bei welcher Länge des Hebelarmes e wird die für Gusseisen möglichst zu vermeidende Zugspannung im vorigen Beispiel gleich Null, und wie gross ist dann die zulässige exzentrische Belastung?

Für S gleich Null folgt aus Formel (408) der angenäherte Wert von e zu

$$e = \frac{W}{F} = \frac{1372404}{21598{,}4} = 63{,}5 \text{ mm}.$$

In erster Annäherung wäre mithin nun:

$$P_1 = \frac{5 \cdot 21598{,}4 \cdot 1372404}{63{,}5 \cdot 21598{,}4 + 1372404} = 53996 \text{ kg}.$$

Es ist hier:

$$\cos\left\{l\sqrt{\frac{P}{E I}}\right\} = \cos\left\{5500\sqrt{\frac{53996}{10000 \cdot 205860703}}\right\} = \cos 0{,}886475 = 0{,}64167.$$

Die zweite Annäherung lautet also:

$$P_2 = \frac{5 \cdot 21598{,}4 \cdot 1372404 \cdot 0{,}64167}{63{,}5 \cdot 21598{,}4 + 1372404 \cdot 0{,}64167} = 43196 \text{ kg.}$$

Eine dritte Annäherung ergibt sich durch

$$\cos\left\{l\sqrt{\frac{P}{EI}}\right\} = \cos\left\{5500\sqrt{\frac{43196}{10000 \cdot 205860703}}\right\} = \cos 0{,}797027 = 0{,}69883$$

zu:

$$P_3 = \frac{5 \cdot 21598{,}4 \cdot 1372404 \cdot 0{,}69883}{63{,}5 \cdot 21598{,}4 + 1372404 \cdot 0{,}69883} = 44426 \text{ kg.}$$

Zur Feststellung einer vierten hat man:

$$\cos\left\{l\sqrt{\frac{P}{EI}}\right\} = \cos\left\{5500\sqrt{\frac{44426}{10000 \cdot 205860703}}\right\} = \cos 0{,}8064595 = 0{,}68804,$$

also;

$$P_4 = \frac{5 \cdot 21598{,}4 \cdot 1372404 \cdot 0{,}68804}{63{,}5 \cdot 21598{,}4 + 1372404 \cdot 0{,}68804} = 44019 \text{ kg.}$$

Wir können daher für diesen Fall

$$P_5 = 44000 \text{ kg}$$

als Tragfähigkeit nehmen.

6. Ein Ausleger A C, Fig. 152, welcher mit seiner in B befestigten Stütze noch durch ein Winkelband (Strebe) D E verbunden ist, trägt am Ende die Last 2000 kg.

Welche Abmessungen sind für Ausleger, Stütze und Strebe zu wählen, wenn Eichenholz genommen wird und $AC = 2$ m, $AB = 4$ m, $DE = 3{,}2$ m und $EC = 0{,}5$ m ist?

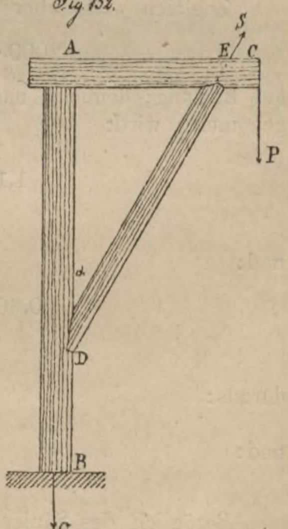
Das Stück E C des Auslegers wird durch P auf Biegung beansprucht, und für den gefährlichen Querschnitt in E ist:

$$2000 \cdot 500 = \frac{b\,h^2}{b} \cdot 0{,}66.$$

Für $b = \frac{5}{7} h$ folgt daraus:

$$h = 234 \text{ mm},$$
$$b = 167 \text{ „}$$

Fig. 152.



Die Strebe D E können wir uns ersetzt denken durch eine Kraft S, deren Grösse sich durch die Gleichgewichtsbedingung

$$S \cos\alpha \cdot 1500 = 2000 \cdot 2000$$

zu

$$S = 3015 \text{ kg}$$

ergibt.

Das Stück A E des Auslegers ist nun durch S sin α auf Zug beansprucht; doch geben wir dem Ausleger überall die für Querschnitt E gefundenen Abmessungen, die für A E mehr als hinreichend sind.

Durch die Kraft S = 3015 kg ist die Strebe auf Zerknicken eigentlich nach Fall IV in Anspruch genommen. Der grösseren Sicherheit wegen führt man aber allgemein die Rechnung nach Fall II durch.

Bei 10facher Sicherheit hat man nun nach Formel (398):

$$3015 = \frac{1200 \cdot b^3 h}{3200^2 \cdot 12}.$$

Wird $b = \frac{2}{3} h$ gesetzt, alsdann ist:

$$h = 180 \text{ mm},$$
$$b = 120 \text{ „}$$

Das Stück A D der Säule wird zunächst durch eine Kraft Q auf Zug belastet, deren Grösse sich ergibt durch die dem Gleichgewichtszustand entsprechende Beziehung:

$$Q \cdot 1500 = 2000 \cdot 500,$$

also:

$$Q = \frac{2000}{3} \text{ kg}.$$

Zugleich wirkt aber auf dasselbe Säulenstück das Moment

$$2000 \cdot 2000 = 4000000 \text{ kgmm}$$

auf Biegung; demnach nach Formel (407), wenn die Säule quadratisch genommen wird:

$$1{,}1 = \frac{4000000}{\frac{b^3}{6}} + \frac{2000}{3\,b^2}$$

und:

$$0{,}66 = \frac{4000000}{\frac{b_1^3}{6}} - \frac{2000}{3\,b_1^2};$$

daraus:

$$b = 87 \text{ mm}$$

und:

$$b_1 = 97 \text{ „}$$

Bezüglich des Säulenstückes B D ist zu bemerken, dass dasselbe, indem wir uns P nach A verlegen, von letzterer Kraft auf Druck und von

$$2000 \cdot 2000 = 4000000 \text{ kgmm}$$

auf Biegung beansprucht wird.

Es kommt daher für diesen Teil der Säule die Formel (408) zur Anwendung und also:

$$1{,}1 = 2000 \left\{ \frac{2000}{\frac{b_2^3}{6}} - \frac{1}{b_2^2} \right\}$$

und:

$$0{,}66 = 2000 \left\{ \frac{2000}{\frac{b_3^3}{6}} + \frac{1}{b_3^2} \right\};$$

hieraus:

$$b_2 = 220 \text{ mm}$$

und:

$$b_3 = 267 \text{ „}$$

Wir nehmen daher für die ganze Säule 267 mm im Quadrat.

7. Es ist das Gestell eines Giessereikrahns von 7500 kg Tragkraft zu konstruieren.

Die Probebelastung, welcher der Krahn von Zeit zu Zeit unterworfen wird, betrage $\frac{5}{4} \cdot 7500 = 9375$ kg; dazu das Gewicht der Laufkatze gibt ungefähr $P = 10000$ kg als Maximalbelastung des Krahngestells, das wir aus schmiedeeisernen Blechträgern herstellen.

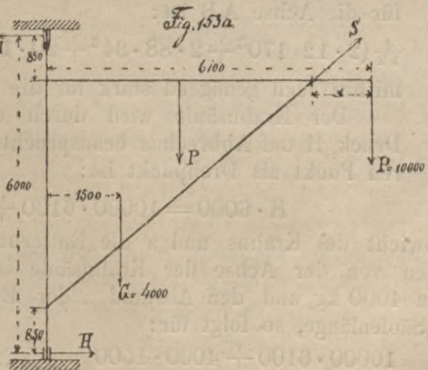
Der Ausleger bekomme eine Länge von 7000 mm; die Mittellinie der Last kann jedoch nur bis 6100 mm vorrücken.

Bezüglich der Lage der Strebe, Fig. 153a, wird gefordert, dass auf beiden Seiten des Stützpunktes, den die Strebe dem Ausleger bietet, gleiche Maximalbiegungsmomente auftreten. Nimmt man die Last P als in der Mittellinie der Laufkatze vereinigt, so hat man also die Beziehung:

$$P\,x = P\,\frac{l - x}{4},$$

mithin:

$$x = \frac{6100}{5} = 1220 \text{ mm.}$$



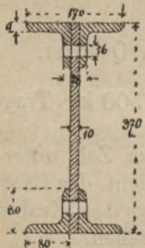
Das Maximalmoment ist folglich, wenn von dem Eigengewicht abgesehen wird:

$$10000 \cdot 1220 = 12200000 \text{ kgmm.}$$

Bei Anwendung von 2 Blechträgern ist daher der geforderte Gurtungsquerschnitt eines jeden Zwillingsträgers von 370 mm Höhe (siehe Blechträger § 16):

$$F = \frac{12200000}{2 \cdot 370 \cdot 7} = 2355 \text{ qmm.}$$

Fig. 153 b.



Nehmen wir Winkeleisen von 80 mm Schenkellänge und 9 mm Dicke, so folgt unter Berücksichtigung der zwei 16 mm starken Nietlöcher, Fig. 153 b, als nutzbarer Gurtungsquerschnitt:

$$2 \cdot 9\,(80 + 71 - 16) = 2430 \text{ qmm,}$$

also völlig hinreichend für den Ausleger.

Die in der Strebeachse wirkende Kraft S ist bestimmt durch:

$$S \cos \alpha\,(6100 - 1220) = 10000 \cdot 6100,$$

$$S = \frac{61000000}{4880 \cdot \frac{4300}{\sqrt{4300^2 + 4880^2}}} = 18907 \text{ kg.}$$

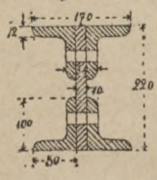
Jeder der hier zur Verwendung kommenden zwei Blechträger hat daher nur 9453,5 kg Belastung auszuhalten, die auf Zerknicken wirksam ist. Bei 5facher Sicherheit hat man:

$$9453{,}5 = \frac{10\,E\,I}{5\,l^2} = \frac{2 \cdot 20000\,I}{4300^2 + 4880^2},$$

woraus das Trägheitsmoment:

$$I = 9998116.$$

Fig. 153 c.



Die Strebe kann sich nach zwei zu einander senkrechten Richtungen ausbiegen; das kleinere Trägheitsmoment des gewählten Querschnitts, Fig. 153 c, für die Achse A B ist:

$$\tfrac{1}{12}\,(2 \cdot 12 \cdot 170^3 + 2 \cdot 88 \cdot 34^3 + 20 \cdot 10^3) = 10404125,$$

mithin auch genügend stark für die Strebe.

Der Krahnsäule wird durch den horizontalen Druck H auf Abbrechen beansprucht. Für den unteren Punkt als Drehpunkt ist:

$$H \cdot 6000 = 10000 \cdot 6100 + G \cdot a,$$

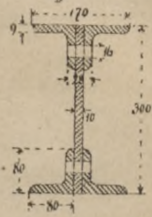
wenn G das Gewicht des Krahns und a die Entfernung des Schwerpunktes desselben von der Achse der Krahnsäule ist. Nimmt man ersteres zu etwa 4000 kg und den Abstand a der Erfahrung gemäss zu etwa $\frac{1}{4}$ der Säulenlänge, so folgt für:

$$H = \frac{10000 \cdot 6100 + 4000 \cdot 1500}{6000} = 11167 \text{ kg.}$$

Das Biegungsmoment ist demnach:

$$11167 \cdot 850 = 9491950 \text{ kgmm}$$

Fig. 153d.



und daher der notwendige Querschnitt bei 300 mm Profilhöhe:

$$F = \frac{9491950}{2 \cdot 300 \cdot 7} = 2260 \text{ qmm.}$$

Dieser Forderung entspricht das Profil, Fig. 153d, da der Gurtungsquerschnitt derselbe ist wie der des Auslegers.

Der obere Drehzapfen erhält einen seitlichen Druck von H = 11167 kg; nach § 9, Beispiel 11 ergibt sich für den Durchmesser dieses Zapfens, wenn das Material Gussstahl ist:

$$d = 1{,}06 \sqrt{11167} = 112 \text{ mm}$$

und also die Länge desselben:

$$l = 1{,}78 \cdot 112 = 200 \text{ mm.}$$

Der untere Stützzapfen ist demselben horizontalen Druck ausgesetzt, so dass hierfür 112 mm Durchmesser genügten; aber der Zapfen ist ausserdem noch einem vertikalen Drucke unterworfen, welcher gleich der Krahnbelastung 10000 kg + dem Eigengewicht 4000 kg, zusammen 14000 kg ist. Nehmen wir daher den Durchmesser dieses Zapfens zu 150 mm, so ergibt sich als Flächendruck:

$$\frac{14000}{\pi \frac{150^2}{4}} = 0{,}8 \text{ kg,}$$

was nicht zu hoch ist mit Rücksicht darauf, dass sich ein Krahn nur wenig dreht.

Die Enden der Krahnsäule nehmen gusseiserne Schuhe auf, und die Eckverbindungen des ganzen Gestells bestehen aus Blechwinkeln.

Aufgaben.

1. In welchem Verhältnis stehen die Tragkräfte einer rechteckigen und runden Hängesäule, wenn die Last einmal in Richtung der Achse, dann am Umfange der Säule auf Zug wirkt?

Der exzentrische Zug gibt nur $\frac{1}{4}$ bezw. $\frac{1}{5}$ der Tragkraft beim zentrischen Zuge.

2. Welches ist die Materialspannung im gefährlichen Querschnitt AB des in Fig. 154 skizzierten Fraimes einer Stanzmaschine, wenn die Stosskraft zu 6000 kg angenommen wird?

$$S = 1{,}08 \text{ kg,}$$

$$S_1 = 0{,}9 \text{ „}$$

Fig 154.

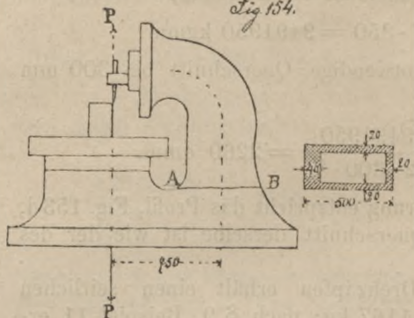
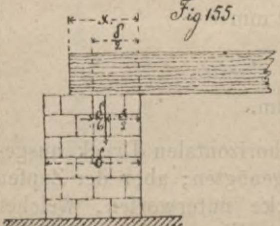


Fig 155.



3. Wie gross darf die Auflagerlänge eines Balkens auf einer Mauer, Fig. 155, höchstens sein, damit durch den exzentrischen Druck keine Zugspannung in der Mauer erzeugt wird unter der Voraussetzung, dass der Auflagerdruck des Balkens in der Mitte der Auflagerlänge konzentriert gedacht wird?

Ist δ die Mauerdicke, so muss die Auflagerlänge

$$x = \tfrac{2}{3}\,\delta$$

sein.

3. Schiefer Zug oder Druck.

§ 22.

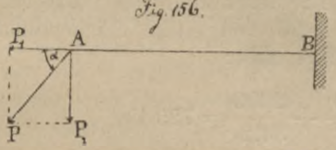
Auf einen an dem Ende B festgehaltenen Träger AB, Fig. 156, von der Länge l und dem Querschnitt F wirke eine Zugkraft P unter dem spitzen Winkel α gegen die Achse. Die Komponente $P_1 = P\cos\alpha$ der Kraft P beansprucht den Träger auf Zug und erzeugt in allen Querschnitten daher die Zugspannung: $\frac{P\cos\alpha}{F}$, während die Komponente $P_2 = P\sin\alpha$ derselben Kraft P biegend auf den Träger einwirkt, mithin die grösste Zug- und Druckspannung $\frac{P\,l\sin\alpha}{W}$ bezw. $\frac{P\,l\sin\alpha}{W_1}$ hervorbringt.

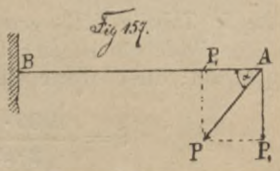
Die totale zulässige Zug- und Druckspannung ist demnach:

$$(415)\qquad \begin{cases} S = P\left(\dfrac{l\sin\alpha}{W} + \dfrac{\cos\alpha}{F}\right), \\[2ex] S_1 = P\left(\dfrac{l\sin\alpha}{W_1} - \dfrac{\cos\alpha}{F}\right). \end{cases}$$

Ist die Kraft P eine schiefe Druckkraft, Fig. 157, so folgt in gleicher Weise als grösste Zug- und Druckspannung:

$$
(416) \qquad \begin{cases} S = P\left(\dfrac{l \sin\alpha}{W} - \dfrac{\cos\alpha}{F}\right), \\[2ex] S_1 = P\left(\dfrac{l \sin\alpha}{W_1} + \dfrac{\cos\alpha}{F}\right). \end{cases}
$$



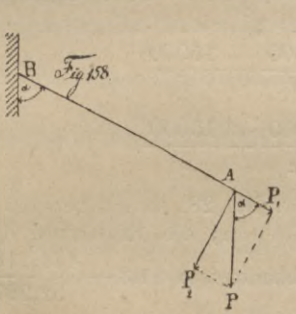


Aus beiden Formeln lässt sich auch das Tragvermögen P bei gegebenem Profil leicht herleiten.

Sind die Abmessungen des letzteren festzustellen, so nimmt man wohl nach Gutdünken den Querschnitt F vorläufig an und überzeugt sich nun, ob die zulässige Spannung für die gewählten Werte nicht überschritten ist.

Die Formeln (415 und 416) finden auch Anwendung für den Fall, wenn der Träger schief befestigt und am freien Ende durch ein Gewicht belastet ist, siehe die Fig. 158 bezw. 159.

Tritt die Biegungskraft als gleichmässige Belastung auf oder ist der Träger anderweitig gehalten, so hat man natürlich auch hier das Maximalbiegungsmoment in obige Beziehungen einzuführen.



Beispiele.

1. Zu einem Freiträger von 1,2 m Länge, welcher einer Zugkraft von 2000 kg und einer gleichmässigen Belastung von 1000 kg ausgesetzt ist, soll eine Eisenbahnschiene gewählt werden.

Welche Profilhöhe ist zu nehmen?

Durch die Zugkraft werden sämtliche Querschnitte gleich stark beansprucht; der gefährliche Querschnitt für die zusammengesetzte Beanspruchung wird daher mit dem gefährlichen Querschnitt für die Inanspruchnahme auf Biegung zusammenfallen.

Die zum Fuss parallele Schwerachse der Schiene geht fast genau durch die Mitte der Höhe; demnach hat man nur die grösste Zugspannung im Querschnitt in Betracht zu ziehen, und diese hat den Wert:

$$S = \frac{1000 \cdot 120}{2\,W} + \frac{2000}{F}.$$

Das in Tabelle VIII vermerkte Schienenprofil von 10,46 cm Höhe weist ein Widerstandsmoment von 90 und einen Flächeninhalt von 34,2 qcm auf; diese Werte eingeführt, gibt:

$$S = \frac{1000 \cdot 120}{2 \cdot 90} + \frac{2000}{34{,}2} = 725 \text{ kg},$$

daher genannte Schiene hier zu verwenden.

Die beiden anderen in der Tabelle angegebenen Profile würden eine zu geringe Spannung liefern, also das Material nicht genügend ausgenutzt werden.

2. Ein Träger von 2 m Länge ruhe auf zwei Stützen und sei einem Drucke von 15000 kg und einer gleichmässig verteilten Biegungskraft von 2000 kg unterworfen.

Welche Abmessungen sind dem Träger zu geben, wenn das Profil ein $\perp$ Eisen ist, dessen Flantsch oben liegt?

Für die grösste Zug- und Druckspannung besteht die Beziehung, da das wirkende Kraftmoment $\frac{2000 \cdot 200}{8} = 50000$ kgcm beträgt:

$$S = \frac{50000}{W} - \frac{15000}{F},$$

$$S_1 = \frac{50000}{W_1} + \frac{15000}{F}.$$

Nehmen wir das Profil VII a, Nr. 28, so ist, bezogen auf Zentimeter: $W = 52{,}997$ und $F = 47{,}4$ qcm; die Entfernung der Schwerachse von der äusseren Flantschkante ist: $11{,}3 - \frac{444{,}2188}{52{,}997} = 2{,}9$, daher $W_1 = \frac{444{,}2188}{2{,}9} = 153{,}178$ und also für genanntes Profil:

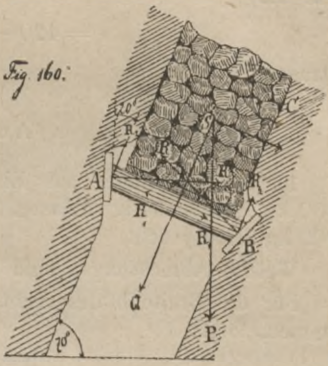
$$S = \frac{50000}{52{,}997} - \frac{15000}{47{,}4} = 627 \text{ kg},$$

$$S_1 = \frac{50000}{153{,}178} + \frac{15000}{47{,}4} = 643 \text{ kg}.$$

Das Eisen hat mithin recht günstige Verhältnisse für die vermerkte Beanspruchung.

3. In welcher Entfernung voneinander sind die 350 mm starken und an den Enden unter 20^0 gegen die Achse abgeschrägten Tragstempel A B eines Förstenbaues A B C, Fig. 160, zu legen, wenn derselbe 1,255 m weit und sich 15 m hoch auf einem 70^0 fallenden Gange in die Höhe zieht, dabei vorausgesetzt, dass das Gewicht eines Kubikmeters Berge (Gesteinstücke) 1000 kg beträgt und von der Reibung des Gesteins gegen die Seitenwand (das Liegende) abgesehen wird?

Fig. 160.



Für x als gesuchte Entfernung der Stempel ist das auf jedem der letzteren ruhende Gewicht:

$$P = 1{,}255 \cdot 15 \cdot 1000 \cdot x = 18825\,x \text{ kg}$$

und daher der Stempeldruck:

$$Q = P \sin 70^0 = 18825 \cdot 0{,}93969\,x = 17690\,x \text{ kg.}$$

Dieser Druck erzeugt für die beiden Seitenwände die Reaktionen R, deren Wert gegeben ist durch die Beziehung:

$$Q = 2\,R \sin 20^0,$$

also:

$$R = \frac{Q}{2 \sin 20^0}.$$

Die komponierende Druckkraft ist nun:

$$R_1 = R \cos 20^0 = \frac{Q}{2} \operatorname{cotg} 20^0$$

und die komponierende Biegungskraft:

$$R_2 = R \sin 20^0 = \frac{Q}{2}.$$

Es ist demnach für Buchenholz die hier nur in Betracht kommende grösste zulässige Druckspannung:

$$1000000 \cdot 0{,}66 = R_2 \cdot \frac{\frac{1}{2} l}{W} + \frac{R_1}{F} = \frac{Q}{2 \cdot \frac{\pi\, d^2}{4}} \left(\frac{4\,l}{d} + \operatorname{cotg} 20^0\right)$$

$$= \frac{17690\,x}{2 \cdot \pi \frac{0{,}350^2}{4}} \left(\frac{4 \cdot 1{,}255}{0{,}350} + 2{,}74748\right),$$

woraus:

$$x = \frac{660000 \cdot 2 \cdot 0{,}0962113}{17690\,(14{,}34286 + 2{,}74748)} = 0{,}420 \text{ m.}$$

Es darf mithin der Zwischenraum zwischen zwei Stempeln nicht mehr als

$$e = 420 - 350 = 70 \text{ mm}$$

betragen.

Aufgaben.

1. Ein Freiträger aus Eichenholz von 1 m Länge werde durch 1500 kg gleichmässig belastet und ausserdem durch die Zugkraft 2000 kg beansprucht.

Welche Abmessungen sind zu wählen?

Für die Breite b des rechteckigen Querschnitts $\frac{5}{7}$ der Höhe h genommen, folgt:

$$h = 206 \text{ mm},$$
$$b = 147 \text{ „}$$

2. Welche Abmessungen muss man einem schiefliegenden Balken aus Tannenholz geben, welcher eine Länge von 2,5 m, sowie eine Neigung von 60^0 gegen den Horizont hat und am Ende eine Last $P = 3000$ kg trägt?

$$h = 410 \text{ mm},$$
$$b = 295 \text{ „}$$

---

4. Biegung und Torsion.

§ 23.

Einer solchen zusammengesetzten Beanspruchung sind unter anderem die sogen. belasteten horizontal gelagerten Wellen unterworfen, auf denen schwere Räder sitzen, die also neben drehenden auch grossen biegenden Kräften ausgesetzt sind, wie die meisten Wellen der Motoren.

Sei M_m das biegende Moment für den in Betracht gezogenen Querschnitt, alsdann ist die senkrecht zum Querschnitt wirkende grösste Längs- oder Normalspannung nach früherem: $\frac{M_m}{W}$.

Ist weiter M_{m_t} das für denselben Querschnitt auftretende Torsionsmoment, so ergibt sich die grösste Tangentialspannung in demselben Punkte als: $\frac{M_{m_t}}{W_p}$.

Beide Spannungen geben, da sie rechtwinkelig aufeinander stehen, als grösste zulässige Gesamtspannung angenähert:

$$S = \sqrt{\left(\frac{M_m}{W}\right)^2 + \left(\frac{M_{m_t}}{W_p}\right)^2}. \tag{417}$$

Diese Formel liefert nach dem Ponceletschen Theorem mit einem Fehler von 4 Prozent,

wenn
$$\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{W}} > \frac{\mathrm{M\,m_t}}{\mathrm{W_p}}:$$

(417 α) $$S = 0{,}96\,\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{W}} + 0{,}4\,\frac{\mathrm{M\,m_t}}{\mathrm{W_p}}$$

und wenn
$$\frac{\mathrm{M\,m_t}}{\mathrm{W_p}} > \frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{W}}:$$

(417 β) $$S = 0{,}4\,\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{W}} + 0{,}96\,\frac{\mathrm{M\,m_t}}{\mathrm{W_p}}.$$

Eine den auftretenden Formänderungen Rechnung tragende ganz allgemeine Behandlung des vorliegenden Falles, wie solche namentlich von Grashof gegeben ist, führt zu der weit schärferen Formel:

(418) $$S = \frac{3}{8}\,\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{W}} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{W}}\right)^2 + 4\left(\frac{\mathrm{M\,m_t}}{\mathrm{W_p}}\right)^2}.$$

Nach dem obigen Theorem erhält man aus letzterer Formel,

wenn
$$\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{W}} > \frac{\mathrm{M\,m_t}}{\mathrm{W_p}}:$$

(418 α) $$S = 0{,}975\,\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{W}} + 0{,}5\,\frac{\mathrm{M\,m_t}}{\mathrm{W_p}}$$

und wenn
$$\frac{\mathrm{M\,m_t}}{\mathrm{W_p}} > \frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{W}}:$$

(418 β) $$S = 0{,}625\,\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{W}} + 1{,}2\,\frac{\mathrm{M\,m_t}}{\mathrm{W_p}}.$$

Die Ebene des Biegungsmomentes M m hat eine feste Lage im Raume. Bei der Drehung wird mithin ein Querschnittselement diese Ebene schneiden, und die in diesem Element stattfindende Spannung $\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{W}}$ am grössten sein, wenn das Element durch genannte Ebene geht, da dann der Abstand desselben von der neutralen Achse des Querschnitts am grössten ist. Bei Anwendung obiger Formeln, in welche man die Werte der Normal- und Tangentialspannung eines Punktes einzuführen hat, für welche die r chte Seite ihren Maximalwert erreicht, hat man daher den grössten möglichen Wert für die Entfernung der äussersten Fasern von der neutralen Achse gleich dem grössten Abstand derselben von der Drehachse zu setzen.

In den in der Praxis vorkommenden Fällen vorliegender zusammengesetzter Inanspruchnahme treten durchgehends Körper auf, welche für zwei zu einander senkrecht stehende Achsen gleiches Trägheitsmoment aufweisen, für welche also

$$\mathrm{I_p} = 2\,\mathrm{I}$$

ist, so dass folglich auch hier

$$\mathrm{W_p} = 2\,\mathrm{W}$$

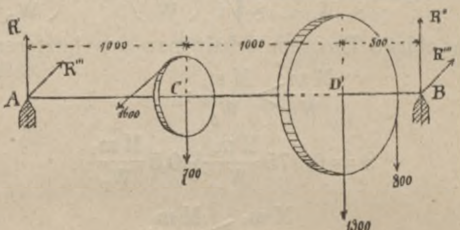
sich ergibt.

Beispiele.

1. Eine an ihren Enden gelagerte gusseiserne Welle von 2,5 m Länge trage 2 Räder. Das kleinere, in 1 m Entfernung vom Ende A, Fig. 161, hat einen Halbmesser gleich 0,75 m und 700 kg Gewicht; es greife in ein darüber liegendes Zahnrad ein, so dass in horizontaler Richtung dies Rad einen Teilrissdruck von 1600 kg auszuhalten habe.

In 0,5 m Abstand vom Lager B befinde sich das grössere Rad von 1,5 m Halbmesser und 1300 kg Gewicht; es sei in Eingriff mit einem horizontal daneben liegenden Rade und also einem vertikalen Teilrissdruck von 800 kg unterworfen.

Fig. 161.



Welchen Durchmesser hat man der vollen Welle zu geben, damit die höchstens zulässige Spannung 2,5 kg auf den Quadratmillimeter nicht übersteigt?

Die in den Zapfenlagern vertikal aufwärts auftretenden Drucke lauten in A und B:

$$R' = \frac{700 \cdot 1,5 + (1300 + 800) \cdot 0,5}{2,5} = 840 \text{ kg},$$

$$R'' = 700 + 2100 - 840 = 1960 \text{ kg}.$$

Die Kraft 1600 kg ruft in A und B in horizontaler Richtung die Auflagerdrucke

$$R''' = \frac{1600 \cdot 1,5}{2,5} = 960 \text{ kg},$$

$$R'''' = 1600 - 960 = 640 \text{ „}$$

hervor.

Das Stück CD der Welle wird auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen sein, und somit wird zwischen C und D der Bruchquerschnitt liegen; weshalb wir die Dimensionen des Querschnitts zwischen genannten Punkten zu ermitteln suchen, für den das Moment den grössten Wert erreicht.

Bezeichnen wir den Abstand eines Punktes O zwischen C und D von B mit x, so ist für den betreffenden Querschnitt das in der Vertikalebene drehende Biegungsmoment:

$$M\,m' = 2100\,(x - 500) - 1960\,x = 140\,x - 1050000.$$

Das für diesen Punkt in der Horizontalebene drehende Moment ist:

$$M\,m'' = 640\,x.$$

Diese beiden Momente liefern nun das resultierende Biegungsmoment:

$$M\,m = \sqrt{(140\,x - 1050000)^2 + (640\,x)^2}.$$

Letzteres Moment erreicht den Maximalwert für x = Maximum, also in C; demnach:

$$M\,m_m = \sqrt{(140 \cdot 1500 - 1050000)^2 + (640 \cdot 1500)^2} = 1275618 \text{ kgmm}.$$

Das für den betrachteten Querschnitt auftretende Torsionsmoment hat die Grösse:

$$M\,m_t = 1600 \cdot 750 = 1200000 \text{ kgmm}.$$

Es ist folglich nach Formel (418):

$$2{,}5 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1275618}{W} = \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{1275618}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{1200000}{2\,W}\right)^2}$$

und also:

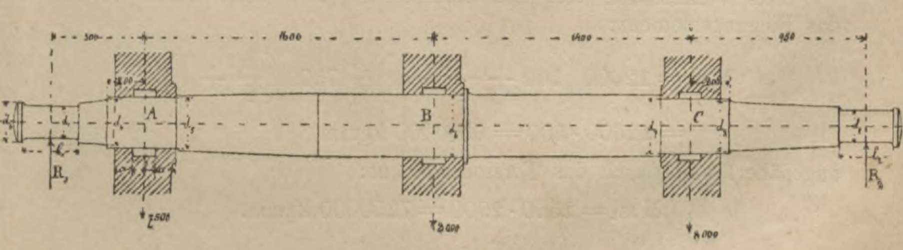
$$W = \frac{\pi\, d^3}{32} = \frac{1}{2{,}5}\left\{\frac{3}{8} \cdot 1275618 + \frac{5}{8}\sqrt{1275618^2 + 1200000^2}\right\},$$

woraus:

$$d = 186 \text{ mm}.$$

2. Bei den Punkten B und C, Fig. 162, der schmiedeeisernen Welle eines Kropfwasserrades setzen sich die beiden Armsysteme des Wasserrades auf die Welle, bei A ist das Stirnrad befestigt, dessen Durchmesser 5,8 m beträgt und welches einen vertikal abwärts gerichteten Zahndruck von 2500 kg empfängt. Von dem Eigengewicht der Welle werde die angenähert zulässige Annahme gemacht, dass es in den an den Punkten A, B und C angreifenden Kräften enthalten sei. Diese schliessen dann in sich das Eigengewicht des ganzen Rades, das Gewicht des im Rade enthaltenen Wassers und den Zahndruck.

Fig. 162.



Welche Durchmesser sind der Welle zu geben?

Die Auflagerdrucke sind:

$$R_1 = \frac{7500\,(1{,}6 + 1{,}4 + 0{,}95) + 8000\,(1{,}4 + 0{,}95) + 8000 \cdot 0{,}95}{0{,}5 + 1{,}6 + 1{,}4 + 0{,}95}$$

$$= 12600 \text{ kg},$$

$$R_2 = 7500 + 2 \cdot 8000 - 12600 = 10900 \text{ kg}$$

abgerundet.

Bei einer zulässigen Pressung von 0,25 kg auf den Quadratmillimeter zwischen Zapfen und Bronzelager (s. § 9, Beispiel 11) besteht die Beziehung, wenn wir einem Sicherheitsmodul $S = 5$ kg nehmen:

$$12600 = 0{,}25\, l_1\, d_1$$

und:

$$12600 \frac{l_1}{2} = \frac{\pi\, d_1^3}{32} \cdot 5,$$

daraus zunächst:

$$l_1 = 1{,}98\, d_1.$$

Diesen Wert in die erste Gleichung eingeführt, liefert:

$$12600 = 0{,}25 \cdot 1{,}98\, d_1^2,$$

mithin:

$$d_1 = \sqrt{\frac{12600}{0{,}25 \cdot 1{,}98}} = 160 \text{ mm}$$

und also:

$$l_1 = 1{,}98 \cdot 160 = 317 \text{ mm}.$$

Der Zapfen rechts würde wegen des geringeren Auflagerdruckes etwas schwächer ausfallen; bequemer und weniger kostspielig ist aber, beiden Lagern gleiche Grösse zu geben, daher setzen wir auch hier:

$$d_2 = 160 \text{ mm},$$

$$l_2 = 317 \text{ „}$$

Wählen wir für die Höhe des Anlaufes $e = 3 \text{ mm} + 0{,}1\, d_1 = 20 \text{mm}$, so folgt:

$$d_3 = 160 + 2 \cdot 20 = 200 \text{ mm}.$$

Die Anlaufbreite wähle man:

$$b = 1{,}5\, e = 30 \text{ mm}.$$

Das Wellenstück vom Durchmesser d_5 wird beansprucht durch das Biegungsmoment:

$$M\,m = 12600 \left(500 + \frac{b}{2} + a\right) - 7500 \left(\frac{b}{2} + a\right)$$

$$= 12600 \cdot 500 = 6300000 \text{ kgmm}$$

angenähert und durch das Torsionsmoment:

$$M\,m_t = 2500 \cdot 2900 = 7250000 \text{ kgmm}.$$

Daher ist nach Formel (418) bei einer zulässigen Gesamtspannung von $S = 4$ kg auf den Quadratmillimeter:

$$4 = \frac{3}{8} \cdot \frac{6300000}{W} + \frac{5}{8} \sqrt{\left(\frac{6300000}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{7250000}{2\,W}\right)^2},$$

daraus:

$$W = \frac{\pi\, d_5^3}{32} = \frac{1}{32}(3 \cdot 6300000 + 5 \sqrt{6300000^2 + 7250000^2})$$

und:

$$d_5 = 277 \text{ mm.}$$

Zur Bestimmung von d_4 hat man:

$$12600\,(500 - 200) = \frac{\pi\, d_4^3}{32} \cdot 4,$$

$$d_4 = 213 \text{ mm,}$$

wofür wir aber, um eine zu starke, die Festigkeit schädigende Querschnittsverminderung zu umgehen, nehmen:

$$d_4 = 245 \text{ mm.}$$

Das Wellenstück vom Durchmesser d_6 wird beansprucht durch:

$$M\,m = 12600 \cdot 2100 - 7500 \cdot 1600 = 14460000 \text{ kgmm}$$

und:

$$M\,m_t = 2500 \cdot 2900 = 7250000 \text{ kgmm};$$

demnach unter Zugrundelegung der Formel (418 α):

$$4 = 0{,}975 \cdot \frac{14460000}{W} + 0{,}5\, \frac{7250000}{2\,W},$$

also:

$$W = \frac{\pi\, d_6^3}{32} = 0{,}975 \cdot \frac{14460000}{4} + 0{,}5 \cdot \frac{7250000}{8}$$

und:

$$d_6 = 344 \text{ mm.}$$

Um bei der Montage die Wasserwage bequem auflegen zu können, ist es ratsam, diesen Teil der Welle nicht zu kurz zu nehmen.

Das Wellenstück vom Durchmesser d_7 wird beansprucht durch:

$$M\,m = 10900 \cdot 950 = 10355000 \text{ kgmm,}$$

$$M\,m_t = 2500 \cdot 2900 = 7250000 \quad \text{„}$$

folglich nach Formel (418 α):

$$4 = 0{,}975 \cdot \frac{10355000}{W} + 0{,}5 \cdot \frac{7250000}{2\,W},$$

mithin:

$$W = \frac{\pi\, d_7^3}{32} = 0{,}975 \cdot \frac{10355000}{4} + 0{,}5 \cdot \frac{7250000}{8}$$

und:

$$d_7 = 312 \text{ mm.}$$

Der Durchmesser d_8 bestimmt sich aus:

$$10900\,(950 - 200) = \frac{\pi\, d_8^{\,3}}{32} \cdot 4$$

$$d_8 = 276 \text{ mm.}$$

Aufgaben.

1. Die schmiedeeiserne Welle einer Mahlmühle ist 1,6 m zwischen den Lagern lang und trägt in ihrer Mitte ein Stirnrad von 0,75 m Halbmesser, an dessen Umfang eine Kraft von 1000 kg wirksam ist.

Wie gross ist die grösste Faserspannung, wenn die Welle eine Stärke von 0,16 m hat?

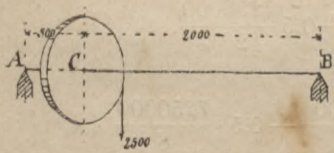
Es liefert auf den Quadratmillimeter Formel (417):

$$S = 1{,}363 \text{ kg}$$

und Formel (418):

$$S = 1{,}751 \text{ kg.}$$

Fig. 163.



2. Die stählerne Welle A B C, Fig. 163, trägt bei C ein Stirnrad von 0,3 m Halbmesser, an dessen Umfang die Kraft 2500 kg tangential angreift.

Welche Abmessungen sind der Welle zu geben?

Bei einem Sicherheitsmodul S = 6 kg auf den Quadratmillimeter erhält nach Formel (418 α) der Achsenkopf bei C eine Stärke:

$$d = 126 \text{ mm.}$$

Der Stirnzapfen A bekommt die Abmessungen:

$$d_1 = 48 \text{ mm,}$$
$$l_1 = 86 \text{ „}$$

Für den Wellenhals bei B ist zu nehmen:

$$d_2 = 86 \text{ mm,}$$
$$l_2 = 33 \text{ „}$$

Anhang.

Arithmetische Tabellen.

I. Tabelle der Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln, Kreisumfänge und Inhalte.

n = 1 bis n = 1000.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
1	1	1	1,0000	1,0000	3,14	0,78
2	4	8	1,4142	1,2599	6,28	3,14
3	9	27	1,7321	1,4422	9,42	7,07
4	16	64	2,0000	1,5874	12,57	12,57
5	25	125	2,2361	1,7100	15,71	19,63
6	36	216	2,4495	1,8171	18,85	28,27
7	49	343	2,6458	1,9129	21,99	38,48
8	64	512	2,8284	2,0000	25,13	50,27
9	81	729	3,0000	2,0801	28,27	63,62
10	100	1000	3,1623	2,1544	31,41	78,54
11	121	1331	3,3166	2,2240	34,56	95,03
12	144	1728	3,4641	2,2894	37,70	113,10
13	169	2197	3,6056	2,3513	40,84	132,73
14	196	2744	3,7417	2,4101	43,98	153,94
15	225	3375	3,8730	2,4662	47,12	173,71
16	256	4096	4,0000	2,5198	50,26	201,06
17	289	4913	4,1231	2,5713	53,41	226,98
18	324	5832	4,2426	2,6207	56,55	254,47
19	361	6859	4,3589	2,6684	59,69	283,53
20	400	8000	4,4721	2,7144	62,83	314,16
21	441	9261	4,5826	2,7589	65,97	346,36
22	484	10648	4,6904	2,8020	69,11	380,13
23	529	12167	4,7958	2,8439	72,26	415,48
24	576	13824	4,8990	2,8845	75,40	452,39
25	625	15625	5,0000	2,9240	78,54	490,87
26	676	17576	5,0990	2,9625	81,68	530,93
27	729	19683	5,1962	3,0000	84,82	572,55
28	784	21952	5,2915	3,0366	87,96	615,75
29	841	24389	5,3852	3,0723	91,11	660,52
30	900	27000	5,4772	3,1072	94,25	706,86

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
31	961	29791	5,5678	3,1414	97,39	754,77
32	1024	32768	5,6569	3,1748	101,53	804,25
33	1089	35937	5,7446	3,2075	103,67	855,30
34	1156	39304	5,8310	3,2396	106,81	907,92
35	1225	42875	5,9161	3,2711	109,96	962,11
36	1296	46656	6,0000	3,3019	113,10	1017,88
37	1369	50653	6,0828	3,3322	116,24	1075,21
38	1444	54872	6,1644	3,3620	119,38	1134,11
39	1521	59319	6,2450	3,3912	122,52	1194,59
40	1600	64000	6,3246	3,4200	125,66	1256,64
41	1681	68921	6,4031	3,4482	128,81	1320,25
42	1764	74088	6,4807	3,4760	131,95	1385,44
43	1849	79507	6,5574	3,5034	135,09	1452,20
44	1936	85184	6,6332	3,5303	138,23	1520,53
45	2025	91125	6,7082	3,5569	141,37	1590,43
46	2116	97336	6,7823	3,5830	144,51	1661,90
47	2209	103823	6,8557	3,6088	147.65	1734,94
48	2304	110592	6,9282	3,6342	150,80	1809,56
49	2401	117649	7,0000	3,6593	153,94	1885,74
50	2500	125000	7,0711	3,6840	157,08	1963,50
51	2601	132651	7,1414	3,7084	160,22	2042,82
52	2704	140608	7,2111	3,7325	163,36	2123,72
53	2809	148877	7,2801	3,7563	166,50	2206,18
54	2916	157464	7,3485	3,7798	169,65	2290,22
55	3025	166375	7,4162	3,8030	172,79	2375,83
56	3136	175616	7,4833	3,8259	175,93	2463,01
57	3249	185193	7,5498	3,8485	179,07	2551,76
58	3364	195112	7,6158	3,8709	182,21	2642,08
59	3481	205379	7,6811	3,8930	185,35	2733,97
60	3600	216000	7,7460	3,9149	188,50	2827,43
61	3721	226981	7,8102	3,9365	191,64	2922,47
62	3844	238328	7,8740	3,9579	194,78	3019,07
63	3969	250047	7,9373	3,9791	197,92	3117,25
64	4096	262144	8,0000	4,0000	201,06	3216,99
65	4225	274625	8,0623	4,0207	204,20	3318,31
66	4356	287496	8,1240	4,0412	207,35	3421,19
67	4489	300763	8,1854	4,0615	210,49	3525,65
68	4624	314432	8,2462	4,0817	213,63	3631,68
69	4761	328509	8,3066	4,1016	216,77	3739,28
70	4900	343000	8;3666	4,1213	219,91	3848,45
71	5041	357911	8,4261	4,1408	223,05	3959,19
72	5184	373248	8,4853	4,1602	226,19	4071,50
73	5329	389017	8,5440	4,1793	229,34	4185,39
74	5476	405224	8,6023	4,1983	232,48	4300,84
75	5625	421875	8,6603	4,2172	235,62	4417,86
76	5776	438976	8,7178	4,2358	238,76	4536,46
77	5929	456533	8,7750	4,2543	241,90	4656,63
78	6084	474552	8,8318	4.2727	245,04	4778,36
79	6241	493039	8,8882	4,2908	248,19	4901,67
80	6400	512000	8,9443	4,3089	251,33	5026,55
81	6561	531441	9,0000	4,3267	254,47	5153,00
82	6724	551368	9,0554	4,3445	257,61	5281,02
83	6889	571787	9,1104	4,3621	260,75	5410,61

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
84	7056	592704	9,1652	4,3795	263,89	5541,77
85	7225	614125	9,2195	4,3968	267,04	5674,50
86	7396	636056	9,2736	4,4140	270,18	5808,80
87	7569	658503	9,3274	4,4310	273,32	5944,68
88	7744	681472	9,3808	4,4480	276,46	6082,12
89	7921	704969	9,4340	4,4647	279,60	6221,14
90	8100	729000	9,4868	4,4814	282,74	6361,73
91	8281	753571	9,5394	4,4979	285,88	6503,88
92	8464	778688	9,5917	4,5144	289,03	6647,61
93	8649	804357	9,6437	4,5307	292,17	6792,91
94	8836	830584	9,6954	4,5468	295,31	6939,78
95	9025	857375	9,7468	4,5629	298,45	7088,22
96	9216	884736	9,7980	4,5789	301,59	7238,23
97	9409	912673	9,8489	4,5947	304,73	7389,81
98	9604	941192	9,8995	4,6104	307,88	7542,96
99	9801	970299	9,9499	4,6261	311,02	7697,69
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	314,16	7853,98
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	317,30	8011,85
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	320,44	8171,28
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	323,58	8332,29
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	326,73	8494,87
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	329,87	8659,01
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	333,01	8824,73
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	336,15	8992,02
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	339,29	9160,88
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	342,43	9331,32
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	345,58	9503,32
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	348,72	9676,89
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	351,86	9852,03
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	355,00	10028,77
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	358,14	10207,05
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	361,28	10386,91
116	13156	1560896	10,7703	4,8770	364,42	10568,34
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	367,56	10751,34
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	370,70	10935,90
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	373,81	11122,04
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	376,99	11309,76
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	380,13	11499,04
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	389,27	11689,89
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	386,42	11882,31
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	389,56	12076,31
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	392,70	12271,87
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	395,84	12469,01
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	398,98	12667,71
128	16384	2097152	11,3137	5.0397	402,12	12867,99
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	405,26	13069,84
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	408,10	13273,26
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	411,54	13478,24
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	414,69	13694,80
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	417,83	13892,94
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	420,97	14102,64
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	424,11	14313,91
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	427,25	14526,75

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	430,39	14741,17
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	433,54	14957,15
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	436,68	15174,71
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	439,82	15393,84
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	442,96	15614,53
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	446,10	15836,80
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	449,24	16060,64
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	452,39	16286,05
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	455,53	16513,03
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	458,67	16741,58
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	461,81	16971,70
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	464,95	17203,40
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	468,09	17436,66
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	471,24	17671,50
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	474,38	17907,90
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	477,52	18145,88
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	480,66	18385,42
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	483,80	18626,54
155	24025	3723 75	12,4499	5,3717	486,94	18869,23
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	490,08	19113,49
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	493,23	19359,32
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	496,37	19606,72
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	499,51	19855,69
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	502,65	20106,24
161	25921	4173281	12,6886	5,4401	505,79	20358,35
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	508,93	20612,03
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	512,08	20867,20
164	26896	4410944	12,8062	5,4737	515,22	21124,11
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	518,36	21382,51
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	521,50	21642,48
167	27889	4657463	12,9228	5,5069	524,64	21904,02
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	527,78	22167,12
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	530,93	22431,80
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	534,07	22698,06
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	537,31	22965,88
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	540,35	23235,27
173	29929	5177717	13,1529	5,5721	543,49	23506,23
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	546,03	23778,77
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	549,78	24052,87
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	552,92	24328,55
177	31329	5545233	13,3041	5,6147	556,06	24605,79
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	559,20	24884,61
179	32041	5735339	13,3791	5,6357	562,34	25165,00
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	565,48	25446,96
181	32761	5929741	13,4536	5,6567	568,62	25730,48
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	571,77	26015,58
183	33489	6128487	13,5277	5,6774	574,91	26302,26
184	33856	6229504	13,5647	5,6877	578,05	26590,50
185	34225	6331625	13,6015	5,6980	581,19	26880,31
186	34596	6434856	13,6382	5,7083	584,33	27171,69
187	34969	6539203	13,6748	5,7185	587,47	27464,65
188	35344	6644672	13,7113	5,7287	590,62	27759,17
189	35721	6751269	13,7477	5,7388	593,76	28055,27
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	596,90	28352,94

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	600,04	28652,17
192	36864	7077888	13,8564	5,7690	603,18	28952,98
193	37249	7189057	13,8924	5,7790	606,32	29255,36
194	37636	7301384	13,9284	5,7890	609,47	29559,31
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	612,61	29864,83
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	615,75	30171,92
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	618,89	30480,60
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	622,03	30790,82
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	625,17	31102,52
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	628,32	31416,00
201	40401	8120601	14,1774	5,8578	631,46	31730,94
202	40804	8242408	14,2127	5,8675	634,60	32047,46
203	41209	8365427	14,2478	5,8771	637,74	32365,54
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	640,88	32685,20
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	644,02	33006,43
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	647,16	33329,23
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	650,31	33653,60
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	653,45	33979,54
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	656,59	34307,05
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	659,73	34636,14
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	662,87	34966,79
212	44944	9528128	44,5602	5,9627	666,01	35299,01
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	669,16	35632,81
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	672,30	35968,17
215	46225	9938375	14,6629	5,9907	675,44	36305,11
216	46656	10077696	14,6969	6,0000	678,58	36643,62
217	47089	10218313	14,7309	6,0092	681,72	36983,70
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	684,86	37325,34
219	47961	10503459	14,7986	6,0277	688,01	37668,56
220	48400	10648000	14,8324	6,0368	691,15	38013,36
221	48841	10793861	14,8661	6,0459	694,29	38359,72
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	697,43	38707,65
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	700,57	39057,51
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	703,71	39408,23
225	50625	11390625	15,0000	6,0822	706,86	39760,87
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	710,00	40115,09
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	713,14	40470,87
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	716,28	40828,23
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	719,42	41187,16
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	722,56	41547,66
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	725,70	41909,72
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	728,85	42273,36
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	731,99	42638,58
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	735,13	43005,36
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	738,27	43373,71
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	741,41	43743,63
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	744,55	44115,11
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	747,68	44488,19
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	750,88	44862,83
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	753,98	45239,04
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	757,12	45616,81
242	58564	14172488	15,5563	6,2317	760,26	45996,16
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	763,40	46377,08

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
244	59536	14526784	15,6205	6,2488	766,52	46759,57
245	60025	14706125	15,6525	6,2573	769,92	47143,63
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	772,83	47529,25
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	775,97	47916,46
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	779,11	48305,24
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	782,25	48695,58
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	785,40	49087,50
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	788,54	49480,98
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	791,68	49876,04
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	794,82	50272,66
254	64516	16387064	15,9374	6,3330	797,96	50670,86
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	801,11	51070,63
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	804,25	51471,96
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	807,39	51874,88
258	66564	17173512	16,0624	6,3661	810,53	52279,36
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	813,67	52685,41
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	816,81	53093,04
261	68121	17779581	16,1555	6,3907	819,97	53502,23
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	823,09	53912,99
263	69169	18191447	16,2173	6,4070	826,24	54325,33
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	829,38	54739,23
265	70225	18609625	16,2788	6,4232	832,52	55154,71
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	835,66	55571,76
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	838,80	55990,38
268	71824	19248832	16,3707	6,4473	841,94	56410,56
269	72361	19465109	16,4012	6,4553	845,09	56832,32
270	72900	19683000	16,4317	6,4633	848,23	57255,66
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	851,37	57680,56
272	73984	20123648	16,4924	6,4792	854,51	58107,03
273	74529	20346417	16,5227	6,4872	857,65	58535,07
274	75076	20570824	16,5529	6,4951	860,79	58964,69
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	863,94	59393,87
276	76176	21024576	16,6132	6,5108	867,08	59828,63
277	76729	21253933	16,6433	6,5187	870,22	60262,95
278	77284	21484952	16,6733	6,5265	873,36	60698,85
279	77841	21717639	16,7033	6,5343	876,50	61136,32
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	879,64	61573,36
281	78961	22188041	16,7631	6,5499	882,78	62015,96
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	885,93	62458,14
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	889,07	62901,90
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	892,21	63347,22
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	895,35	63794,11
286	81796	23393656	16,9115	6,5885	898,49	64242,57
287	82369	23639903	16,9411	6,5962	901,63	64692,61
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	904,78	65144,21
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	907,92	65597,39
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	911,06	66052,14
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	914,20	66508,45
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	917,34	66966,34
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	920,48	67425,80
294	86436	25412184	17,1464	6,6494	923,63	67886,83
295	87025	25672375	17,1756	6,6569	926,77	68349,43
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	929,91	68813,60

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	933,05	69279,34
298	88804	26463592	17,2627	6,6794	936,19	69746,66
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	939,33	70215,54
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	942,48	70686,00
301	90601	27270901	17,3494	6,7018	945,62	71158,02
302	91204	27543608	17,3781	6,7092	948,76	71631,62
303	91809	27818127	17,4069	6,7166	951,90	72106,78
304	92416	28094464	17,4356	6,7240	955,04	72583,52
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	958,18	73061,83
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	961,32	73541,71
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	964,47	74023,16
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	967,61	74506,18
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	970,75	74990,77
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	973,89	75476,94
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	977,04	75964,67
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	980,17	76453,93
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	983,32	76944,85
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	986,45	77437,29
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	989,60	77931,31
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	992,74	78426,89
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	995,88	78924,06
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	999,02	79422,78
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	1002,17	79923,08
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	1005,31	80424,96
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	1008,45	80928,40
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	1011,59	81433,41
323	104329	33698267	17,9722	6,8612	1014,73	81939,99
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	1017,87	82448,15
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	1021,02	82957,87
326	106276	34645976	18,0555	6,8824	1024,16	83469,17
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	1027,30	83982,60
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	1030,44	84496,47
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	1033,58	85012,48
330	108900	35937000	18,1659	6,9104	1036,72	85530,06
331	109561	36264691	18,1934	6,9174	1039,86	86049,20
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	1043,01	86569,92
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	1046,15	87092,22
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	1049,29	87616,08
335	112225	37595375	18,3030	6,9451	1052,43	88141,51
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	1055,57	88668,51
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	1058,71	89197,09
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	1061,86	89727,23
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	1065,00	90258,95
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	1068,14	90792,24
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	1071,28	91327,09
342	116964	40001688	18,4932	6,9932	1074,42	91863,52
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	1077,56	92401,15
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	1080,71	92941,09
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	1083,85	93482,23
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	1086,99	94024,94
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	1090,13	94569,22
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	1093,27	95115,08
349	121801	42508549	18,6815	7,0406	1096,41	95662,50
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	1099,56	96211,50

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	1102,70	96762,06
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	1105,84	97314,20
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	1108,98	97867,90
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	1112,12	98423,18
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	1115,26	98980,03
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	1118,40	99538,45
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	1121,55	100098,43
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	1124,69	100660,00
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	1127,83	101223,13
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	1130,97	101787,84
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	1134,11	102354,11
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	1137,25	102921,95
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	1140,40	103491,31
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	1143,54	104062,35
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	1146,68	104634,91
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	1149,82	105209,04
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	1152,96	105784,74
368	135424	49836032	19,1833	7,1661	1156,10	106362,00
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	1159,25	106940,84
370	136900	50653000	19,2354	7,1791	1162,39	107521,26
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	1165,53	108103,22
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	1168,67	108686,79
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	1171,81	109271,91
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	1174,95	109858,62
375	140625	52734375	19,3649	7,2112	1178,10	110446,87
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	1181,24	111036,71
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	1184,38	111628,11
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	1187,52	112221,09
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	1190,66	112815,64
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	1193,80	113411,76
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	1196,94	114009,46
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	1200,09	114608,70
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	1203,23	115209,54
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	1206,37	115811,94
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	1209,51	116415,91
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	1212,65	117021,45
387	149769	57960603	19,6723	7,2874	1215,79	117628,57
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	1218,94	118237,25
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	1222,08	118846,51
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	1225,22	119453,94
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	1228,36	120072,73
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	1231,50	120687,70
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	1234,64	121304,24
394	155236	61162984	19,8494	7,3310	1237,79	121922,43
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	1240,93	122542,03
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	1244,07	123163,28
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	1247,21	123786,10
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	1250,35	124412,10
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	1253,49	125036,46
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	1256,64	125664,00
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	1259,78	126293,10
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	1262,92	126923,88
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	1266,06	127556,02

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
404	163216	65939264	20,0998	7,3925	1269,20	128189,84
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	1272,34	128825,23
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	1275,48	129462,19
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	1278,63	130100,71
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	1281,77	130740,82
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	1284,91	131382,49
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	1288,05	132025,74
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	1291,19	132670,55
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	1294,32	133316,93
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	1297,48	133964,89
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	1300,62	134614,41
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	1303,76	135265,51
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	1306,90	135918,18
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	1310,04	136572,42
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	1313,18	137228,22
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	1316,32	137885,69
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	1319,47	138544,56
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	1322,61	139205,08
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	1325,75	139867,17
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	1328,89	140530,83
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	1332,03	141196,07
425	180625	76765625	20,6155	7,5185	1335,18	141862,87
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	1338,32	142531,25
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	1341,46	143201,19
428	183184	78402752	20,6882	7,5361	1344,60	143872,71
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	1347,74	144545,80
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	1350,88	145220,46
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	1354,02	145696,68
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	1357,17	146574,48
433	187489	81182737	20,8087	7,5654	1360,33	147253,85
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	1363,45	147934,80
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	1366,59	148617,31
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	1369,73	149301,39
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	1372,87	149987,05
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	1376,02	150674,27
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	1379,16	151362,87
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	1382,30	152053,44
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	1385,44	152745,37
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	1388,58	153438,88
443	196249	86938307	21,0476	7,6232	1391,72	154133,96
444	197136	87528384	21,0713	7,6289	1394,87	154830,61
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	1398,01	155528,83
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	1401,15	156228,62
447	199809	89314623	21,1424	7,6460	1404,29	156929,98
448	200704	89915392	21,1660	7,6517	1407,43	157632,92
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	1410,57	158337,42
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	1413,72	159043,50
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	1416,86	159751,14
452	204304	92345408	21,2603	7,6744	1420,00	160460,36
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	1423,14	161171,14
454	206116	93576664	21,3073	7,6857	1426,28	161883,50
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	1429,42	162597,43
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	1432,56	163312,93

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	1435,71	164030,20
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	1438,85	164748,64
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	1441,99	165468,85
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	1445,13	166190,64
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	1448,27	166913,99
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	1451,41	167638,91
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	1454,56	168365,41
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	1457,70	169093,47
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	1460,84	169823,11
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	1463,98	170554,32
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	1467,12	171287,10
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	1470,26	172021,44
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	1473,41	172757,36
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	1476,55	173494,86
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	1479,69	174233,92
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	1482,83	174974,55
473	223729	105823817	21,7486	7,7915	1485,97	175716,75
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	1489,11	176460,45
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	1492,26	177205,87
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	1495,40	177952,79
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	1498,54	178701,27
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	1501,68	179451,33
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	1504,82	180202,96
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	1507,96	180956,16
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	1511,10	181712,92
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	1514,25	182467,26
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	1517,39	183225,18
484	234256	113379904	22,0000	7,8514	1520,53	183984,66
485	235225	114084125	22,0227	7,8568	1523,67	184745,71
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	1526,81	185508,33
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	1529,95	186272,53
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	1533,09	187038,29
489	239121	116930169	22,1133	7,8784	1536,24	187805,63
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	1539,38	188574,54
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	1542,52	189345,01
492	242064	119095488	22,1811	7,8944	1545,66	190117,06
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	1548,80	190890,68
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	1551,95	191665,87
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	1555,09	192442,63
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	1558,23	193220,96
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	1561,37	194000,86
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	1564,51	194782,34
499	249001	124251499	22,3383	7,9317	1567,65	195565,38
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	1570,80	196350,00
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	1573,94	197136,18
502	252004	126506008	22,4054	7,9476	1577,08	197923,94
503	253009	127263527	22,4277	7,9528	1580,22	198713,26
504	254016	128024064	22,4499	7,9581	1583,36	199504,16
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	1586,50	200296,63
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	1589,64	201090,67
507	257049	130323843	22,5167	7,9739	1592,79	201886,28
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	1595,93	202683,46
509	259081	131872229	22,5610	7,9843	1599,07	203487,70
510	260100	132651000	22,5832	7,9896	1602,21	204282,54

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	1605,35	205084,43
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	1608,49	205887,84
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	1611,64	206692,93
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	1614,78	207499,53
515	265225	136590875	22,6936	8,0156	1617,92	208307,71
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	1621,06	209117,46
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	1624,20	209928,78
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	1627,34	210741,66
519	269361	139798359	22,7816	8,0363	1630,49	211556,12
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	1633,63	212372,16
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	1636,77	213189,76
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	1639,91	214008,93
523	273529	143055667	22,8692	8,0569	1643,05	214829,67
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	1646,19	215651,99
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	1649,34	216475,87
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	1652,48	217301,33
527	277729	146363183	22,9565	8,0774	1655,62	218128,35
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	1658,76	218956,95
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	1661,90	219787,12
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	1665,04	220618,86
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	1668,18	221452,16
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	1671,33	222287,04
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	1674,47	223123,50
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	1677,61	223961,52
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	1680,75	224801,11
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	1683,89	225642,27
537	288369	154854153	23,1733	8,1281	1687,04	226487,01
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	1690,18	227329,31
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	1693,32	228175,19
540	291600	157464000	23,2379	8,1433	1696,46	229022,64
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	1699,60	229871,65
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	1702,74	230722,24
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	1705,88	231574,40
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	1709,03	232428,13
545	297025	161878625	23,3452	8,1683	1712,17	233283,43
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	1715,31	234140,30
547	299209	163667323	23,3880	8,1783	1718,45	234998,74
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	1721,59	235858,76
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	1724,73	236720,34
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	1727,88	237583,50
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	1731,02	238448,22
552	304704	168196608	23,4947	8,2031	1734,16	239314,52
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	1737,30	240182,38
554	306916	170031464	23,5372	8,2130	1740,44	241051,82
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	1743,58	241922,83
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	1746,72	242795,41
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	1749,87	243669,56
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	1753,01	244545,28
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	1756,15	245422,57
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	1759,29	246301,44
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	1762,43	247181,87
562	315844	177504328	23,7065	8,2524	1765,57	248063,87
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	1768,72	248947,45

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
564	318096	179406144	23,7487	8,2621	1771,86	249832,59
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	1775,00	250719,31
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	1778,14	251607,60
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	1781,28	252497,36
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	1784,42	253388,88
569	323761	184220009	23,8537	8,2865	1787,57	254281,88
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	1790,71	255176,64
571	326041	186169411	23,8956	8,2962	1793,85	256072,60
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	1796,99	256970,31
573	328329	188132517	23,9374	8,3059	1800,13	257869,59
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	1803,27	258770,45
575	330625	190109375	23,9792	8,3155	1806,42	259672,87
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	1809,56	260576,87
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	1812,70	261482,43
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	1815,84	262388,57
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	1818,98	263298,28
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	1822,12	264208,56
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	1825,26	265120,46
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	1828,41	266033,82
583	339889	198155287	24,1454	8,3539	1831,55	266948,82
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	1834,69	267865,38
585	342225	200201625	24,1868	8,3634	1837,83	268783,57
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	1840,97	269703,21
587	344569	202262003	24,2281	8,3730	1844,11	270624,49
588	345744	203297472	24,2487	8,3777	1847,26	271547,33
589	346921	204336469	24,2693	8,3825	1850,40	272471,75
590	348100	205379000	24,2899	8,3872	1853,54	273397,74
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	1856,68	274325,29
592	350464	207474688	24,3311	8,3967	1859,82	275254,42
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	1862,96	276185,12
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	1866,11	277117,39
595	354025	210644875	24,3926	8,4108	1869,25	278051,23
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	1872,39	278986,64
597	356409	212776173	24,4336	8,4202	1875,53	279923,62
598	357604	213847192	24,4540	8,4249	1878,67	280862,18
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	1881,81	281802,30
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	1884,96	282744,00
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	1888,10	283687,26
602	362404	218167208	24,5357	8,4137	1891,24	284632,10
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	1894,38	285578,50
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	1897,52	286526,48
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	1900,66	287476,03
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	1903,80	288426,15
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	1906,95	289379,84
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	1910,09	290334,10
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	1913,23	291289,93
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	1916,37	292247,34
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	1919,51	293206,31
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	1922,65	294166,85
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	1925,80	295128,97
614	376996	231475544	24,7790	8,4994	1928,94	296092,65
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	1932,08	297057,91
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	1935,22	298024,74

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
617	380689	234885113	24,8395	8,5132	1938,36	298993,14
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	1941,50	299963,00
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	1944,65	300934,64
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	1947,79	301907,76
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	1950,93	302882,44
622	386884	240641848	24,9399	8,5362	1954,07	303858,69
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	1957,21	304836,51
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	1960,35	305815,91
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	1963,50	306796,87
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	1966,64	307779,41
627	393129	246491883	25,0400	8,5590	1969,78	308763,41
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	1972,92	309749,19
629	395641	248858189	25,0799	8,5681	1976,06	310736,44
630	396900	250047000	25,0998	8,5726	1979,20	311725,26
631	398161	251239591	25,1197	8,5772	1982,34	312715,64
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	1985,49	313707,58
633	400689	253636137	25,1595	8,5862	1988,63	314701,14
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	1991,77	315696,64
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	1994,91	316692,91
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	1998,05	317691,15
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	2001,19	318690,97
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	2004,34	319692,35
639	408321	260917119	25,2784	8,6132	2007,48	320695,31
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	2010,62	321699,84
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	2013,76	322705,93
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	2016,90	323713,60
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	2020,04	324722,84
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	2023,19	325733,65
645	416025	268336125	25,3969	8,6401	2026,33	326746,03
646	417316	269586136	25,4165	8,6446	2029,47	327759,98
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	2032,61	328775,50
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	2035,76	329792,60
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	2038,89	330811,26
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	2042,04	331831,50
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	2045,18	332853,40
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	2048,32	333876,68
653	426409	278445077	25,5539	8,6757	2051,46	334901,62
654	427716	279726264	25,5734	8,6801	2054,60	335928,14
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	2057,74	336956,23
656	430336	282300416	25,6125	8,6890	2060,88	337985,89
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	2064,03	339017,12
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	2067,17	340049,92
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	2070,31	341084,29
660	435600	287496000	25,6905	8,7066	2073,45	342120,24
661	436921	288804781	25,7099	8,7110	2076,59	343157,75
662	438244	290117528	25,7294	8,7154	2079,73	344196,33
663	439569	291434247	25,7488	8,7198	2082,88	345237,49
664	440896	292754944	25,7682	8,7241	2086,02	346278,71
665	442225	294079625	25,7876	8,7285	2089,16	347323,51
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	2092,30	348368,88
667	444889	296740963	25,8263	8,7373	2095,44	349416,40
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	2098,58	350464,32
669	447561	299418309	25,8650	8,7460	2101,73	351514,30
670	448900	300763000	25,8844	8,7503	2104,87	352566,06

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	2108,01	353619,28
672	451584	303464448	25,9230	8,7590	2111,15	354674,07
673	452929	304821217	25,9422	8,7634	2114,29	355730,43
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	2117,43	356788,37
675	455625	307546875	25,9808	8,7721	2120,58	357847,87
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	2123,72	358908,95
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	2126,86	359971,59
678	459684	311665752	26,0384	8,7850	2130,00	361035,81
679	461041	313046839	26,0576	8,7893	2133,14	362101,60
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	2136,28	363168,96
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	2139,42	364237,88
682	465124	317214568	26,1151	8,8023	2142,57	365308,38
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	2145,71	366380,40
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	2148,85	367454,10
685	469225	321419125	26,1725	8,8152	2151,99	368529,31
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	2155,13	369600,60
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	2158,27	370684,45
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	2161,42	371764,37
689	474721	327082769	26,2488	8,8323	2164,56	372845,87
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	2167,70	373928,94
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	2170,84	375013,57
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	2173,98	376099,78
693	480249	332812557	26,3249	8,8493	2177,12	377187,56
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	2180,27	378276,91
695	483025	335702375	26,3629	8,8578	2183,41	379367,83
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	2186,55	380460,32
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	2189,69	381554,38
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	2192,83	382650,02
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	2195,97	383747,22
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	2199,12	384846,00
701	491401	344472101	26,4764	8,8833	2202,26	385949,52
702	492804	345948408	26,4953	8,8875	2205,40	387048,26
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	2208,54	388151,74
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	2211,68	389256,80
705	497025	350402625	26,5518	8,9001	2214,82	390363,43
706	498436	351895816	26,5707	8,9043	2217,96	391471,63
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	2221,11	392581,40
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	2224,25	393692,74
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	2227,39	394805,65
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	2230,53	395920,14
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	2233,67	397036,19
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	2236,81	398151,81
713	508369	362467097	26,7021	8,9337	2239,96	399273,01
714	509796	363994344	26,7208	8,9378	2243,10	400393,73
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	2246,24	401516,11
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	2249,38	402640,02
717	514089	368601813	26,7769	8,9503	2252,52	403765,50
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	2255,66	404892,54
719	516961	371694959	26,8142	8,9587	2258,81	406021,16
720	518400	373248000	26,8328	8,9628	2261,95	407151,36
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	2265,09	408283,32
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	2268,23	409416,45
723	522729	377933067	26,8887	8,9752	2271,37	410551,25

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
724	524176	379503424	26,9072	8,9794	2274,51	411687,93
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	2277,66	412825,87
726	527076	382657176	26,9444	8,9876	2280,80	413965,24
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	2283,94	415106,06
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	2287,08	416249,43
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	2290,22	417393,76
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	2293,36	418539,66
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	2296,50	419687,12
732	535824	392223168	27,0555	9,0123	2299,65	420836,14
733	537289	393832837	27,0740	9,0164	2302,79	421986,78
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	2305,93	423138,96
735	540225	397065375	27,1109	9,0246	2309,07	424292,71
736	541696	398688256	27,1293	9,0287	2312,21	425442,03
737	543169	400315553	27,1477	9,0328	2315,35	426604,93
738	544644	401947272	27,1662	9.0369	2318,50	427763,39
739	546121	403583419	27,1846	9,0410	2321,64	428923,43
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	2324,78	430085,04
741	549081	406869021	27,2213	9,0491	2327,92	431248,21
742	550564	408518488	27,2397	9,0532	2331,06	432412,96
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	2334,20	433579,28
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	2337,35	434747,17
745	555025	413493625	27,2947	9,0654	2340,49	435916,63
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	2343,63	437087,66
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	2346,77	438260,26
748	559504	418508992	27.3496	9,0775	2349,91	439434,48
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	2353,05	440610,18
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	2356,20	441787,50
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	2359,34	442966,38
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	2362,48	444146,84
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	2365,62	445328,86
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	2368,76	446512,46
755	570025	430368875	27,4773	9,1057	2371,90	447697,63
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	2375,04	448884,37
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	2378,19	450072,68
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	2381,33	451262,56
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	2384,47	452454,01
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	2387,61	453647,04
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	2390,75	454841,63
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	2393,89	456037,87
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	2397,04	457235,38
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	2400,18	458434,38
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	2403,32	459635,71
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	2406,46	460838,16
767	588289	451217663	27,6948	9,1537	2409,60	462042,18
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	2412,74	463247,76
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	2415,88	464454,92
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	2419,03	465663,66
771	594441	458314011	27,7669	9,1696	2422,17	466873,96
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	2425,31	468085,83
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	2428,45	469299,27
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	2431,59	470514,29
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	2434,74	471730,87
776	602176	467288576	27,8568	9,1894	2437,88	472949,03

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	2441,02	474168,75
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	2444,16	475396,05
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	2447,30	476612,92
780	608400	474552000	27,9285	9,2052	2450,44	477837,36
781	609961	476379541	27,9464	9,2091	2453,58	479063,36
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	2456,73	480290,94
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	2459,87	481520,10
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	2463,01	482750,82
785	616225	483736625	28,0179	9,2248	2466,15	483983,11
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	2469,29	485216,97
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	2472,43	486452,41
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	2475,57	487689,73
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	2478,72	488927,99
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	2481,86	490168,14
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	2485,00	491409,85
792	627264	496793088	28,1425	9,2521	2488,14	492653,14
793	628849	498677257	28,1603	9,2560	2491,28	493898,20
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	2494,43	495144,43
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	2497,57	496392,43
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	2500,71	497648,40
797	635209	506261573	28,2312	9,2716	2503,85	498893,14
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	2506,99	500145,86
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	2510,13	501400,14
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	2513,28	502656,00
801	641601	513922401	28,3019	9,2870	2516,42	503913,42
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	2519,56	505172,43
803	644809	517781627	28,3373	9,2948	2522,70	506432,98
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	2525,84	507655,52
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	2528,98	508958,83
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	2532,12	510224,11
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	2535,27	511490,96
808	652864	527514112	28,4253	9,3140	2538,41	512759,38
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	2541,55	514029,37
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	2544,69	515300,94
811	657721	533411731	28,4781	9,3255	2547,83	516574,07
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	2550,97	517848,77
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	2554,12	519125,05
814	662596	539353144	28,5307	9,3370	2557,26	520402,85
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	2560,40	521682,31
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	2563,54	522663,30
817	667489	545338513	28,5832	9,3485	2566,68	524245,86
818	669124	547343432	28,6007	9,3523	2569,82	525529,98
819	670761	549353259	28,6182	9,3561	2572,97	526815,69
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	2576,11	528102,96
821	674041	553387661	28,6531	9,3637	2579,25	529391,80
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	2582,39	530682,21
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	2585,53	531974,39
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	2588,64	533267,75
825	680625	561515625	28,7228	9,3789	2591,82	534562,87
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	2594,96	535859,57
827	683929	565609283	28,7576	9,3865	2598,10	537159,83
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	2601,24	538457,62
829	687241	569722789	28,7924	9,3940	2604,38	539759,08
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	2607,52	541062,06

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	2610,66	542366,60
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	2613,80	543672,72
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	2616,95	544980,52
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	2620,09	546289,68
835	697225	582182875	28,8964	9,4166	2623,23	547600,51
836	698896	584277056	28,9137	9.4204	2626,37	548912,91
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	2629,51	550226,89
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	2632,64	551542,43
839	703921	590589719	28,9655	9,4316	3635,80	552859,58
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	2638,94	554178,24
841	707281	594823321	29,0000	9,4391	2642,08	555498,49
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	2645,22	556820,32
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	2648,36	558143,72
844	712336	601211584	29,0517	9,4503	2651,51	559468,69
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	2654.65	560795,23
846	715716	605495736	29,0861	9,4578	2657,79	562123,34
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	2660,93	563456,82
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	2664,07	564784,28
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	2667,21	566117,10
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	2670,36	567451,59
851	724201	616295051	29.1719	9,4764	2673,50	568787,46
852	725904	618470208	29.1890	9,4801	2676.64	570125,00
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	2679,78	571464,10
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	2682,92	572804,78
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	2686,06	574147,03
856	732736	627222016	25,2575	9,4949	2689,20	575490,85
857	734449	629422793	29,2746	9,4986	2692,35	576833,86
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	2695,49	578183,20
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	2698,63	579531,73
860	739600	636056000	29,3258	9,5097	2701,77	580881,84
861	741321	638277381	29,3428	9,5134	2704,91	582233,51
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	2708,05	583586,75
863	744769	642735647	29,3769	9,5207	2711,20	584941,57
864	746496	644972544	29,3939	9,5244	2714,34	586297,95
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	2717,48	587655,91
866	749956	649461896	29,4279	9,5317	2720,62	589015,41
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	2723,76	590376,54
868	753424	653972032	29,4618	9,5391	2726,90	591739,20
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	2730,05	593103,44
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	2733,19	594469,26
871	758641	660776311	29.5127	9,5501	2736,33	595836,44
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	2739,47	597205,59
873	762129	665338617	29,5466	9,5574	2742,61	598576,91
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	2745,75	599948,21
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	2748,90	601321,87
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	2752,04	602697,11
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	2755,18	604073,91
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	2758,32	605451,49
879	772641	679151439	29,6479	9,5792	2761,46	606832,24
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	2764,60	608213,76
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	2767,74	609596,84
882	777924	686128968	29,6985	9,5901	2770,89	610981,50
883	779689	688465387	29,7153	9,5937	2774,03	612367,74

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
884	781456	690807104	29,7321	9,5973	2777,17	613755,54
885	783225	693154125	29,7489	9,6010	2780,31	615144,91
886	784996	695506456	29,7658	9,6046	2783,45	616535,85
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	2786,59	617928,37
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	2789,73	619322,45
889	790321	702595369	29,8161	9,6154	2792,88	620718,11
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	2796,02	622115,34
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	2799,16	623514,13
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	2802,30	624914,50
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	2805,44	626316,44
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	2808,59	627719,95
895	801025	716917375	29,9166	9,6370	2811,73	629120,35
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	2814,87	630531,68
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	2818,01	631939,90
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	2821,15	633349,70
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	2824,29	634768,13
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	2827,44	636174,00
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	2830,58	637588,50
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	2833,72	639004,58
903	815409	736314327	30,0500	9,6656	2836,86	640422,22
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	2840,00	641841,44
905	819025	741217625	30,0832	9,6727	2843,14	643262,23
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	2846,28	644684,74
907	822649	746142643	30,1164	9,6799	2849,43	646108,52
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	2852,57	647534,02
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	2855,71	648961,09
910	828000	753571000	30,1662	9,6905	2858,85	650389,74
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	2861,99	651819,95
912	831744	758550528	30,1993	9,6976	2865,13	653251,73
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	2868,27	654689,09
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	2871,42	656120,81
915	837225	766060875	30,2490	9,7082	2874,56	657556,51
916	839056	768575296	30,2655	9,7118	2877,70	658994,58
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	2880,84	660432,22
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	2883,98	661875,42
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	2887,13	663318,20
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	2890,27	664762,56
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	2893,41	666208,48
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	2896,55	667655,97
923	851929	786330467	30,3809	9,7364	2899,69	669101,61
924	853776	788889024	30,3974	9,7400	2902,83	670555,67
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	2905,98	672007,87
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	2909,12	673461,65
927	859329	796597983	30,4467	9,7505	2912,26	674916,99
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	2915,40	676373,91
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	2918,54	677832,40
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	2921,68	679292,46
931	866761	806954491	30,5123	9,7645	2924,82	680754,08
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	2927,97	682217,30
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	2931,11	683682,06
934	872356	814780504	30,5614	9,7750	2934,25	685148,40
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	2937,39	686616,31
936	876096	820025856	30,5941	9,7819	2940,53	688085,79

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	2943,67	689556,85
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	2946,82	691029,47
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	2949,96	692503,67
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	2953,10	693979,44
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	2956,24	695456,77
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	2959,38	696935,68
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	2962,52	698416,14
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	2965,67	699898,21
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	2968,81	701381,83
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	2971,95	702867,02
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	2975,09	704350,25
948	898704	851971392	30,7896	9,8236	2978,23	705841,80
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	2981,37	707332,02
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	2984,52	708023,50
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	2987,66	710316,54
952	906304	862801408	30,8545	9,8374	2990,79	711811,16
953	908209	865523177	30,8707	9,8408	2993,94	713307,34
954	910116	868250664	30 8869	9,8443	2997,08	714805,10
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	3000,22	716304,43
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	3003,36	717805,33
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	3006,51	719307,80
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	3009,65	720811,84
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	3012,79	722317,45
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	3015,93	723824,64
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	3019,07	725333,39
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	3022,21	726843,71
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	3025,36	728355,61
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	3028,50	729869,07
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	3031,64	731384,11
966	933156	901428696	31,0805	9,8854	3034,78	732900,72
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	3037,92	734418,90
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	3041,06	735938,64
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	3044,21	737459,96
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	3047,35	738982,86
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	3050,49	740507,32
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	3053,63	742033,35
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	3056,77	743560,95
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	3059,91	745090,13
975	950625	926859375	31,2250	9,9160	3063,06	746620,87
976	952576	929714176	31,2410	9,9194	3066,20	748153,19
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	3069,33	749687,07
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	3072,48	751222,53
979	958441	938313739	31,2890	9,9295	3075,62	752759,56
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	3078,76	754298,16
981	962361	944076141	31,3209	9,9363	3081,90	755838,32
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	3085,05	757380,06
983	966289	949862087	31,3528	9,9430	3088,19	758923,38
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	3091,33	760468,26
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	3094,47	762014,71
986	972196	958585256	31,4006	9,9531	3097,61	763562,73
987	974169	961504803	31,4166	9,9565	3100,75	765119,33
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	3103,89	766662,56
989	978121	967361669	31,4484	9,9632	3107,04	768216,23
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	3110,18	769770,54

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\pi \frac{n^2}{4}$
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	3113,32	771326,41
992	984064	976191488	31,4960	9,9733	3116,46	772883,86
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	3119,60	774442,88
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	3122,75	776003,47
995	990025	985074875	31,5436	9,9833	3125,89	777565,63
996	992016	988047936	31,5595	9,9866	3129,03	779129,36
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	3132,17	780694,66
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	3135,31	782261,54
999	998001	997002999	31,6070	9,9967	3138,45	783829,98
1000	1000000	1000000000	31,6228	10,0000	3141,60	785400,00

II. Tabelle der vierten Potenzen der Zahlen 1 bis 500.

n	n^4	n	n^4	n	n^4
1	1	41	2825761	81	43046721
2	16	42	3111696	82	45212176
3	81	43	3419001	83	47458321
4	256	44	3748096	84	49787136
5	625	45	4100625	85	52200625
6	1296	46	4477456	86	54700816
7	2401	47	4879681	87	57289761
8	4096	48	5308416	88	59969536
9	6561	49	5764801	89	62742241
10	10000	50	6250000	90	65610000
11	14641	51	6765201	91	68574961
12	20736	52	7311616	92	71639296
13	28561	53	7890481	93	74805201
14	38416	54	8503076	94	78074896
15	50625	55	9150625	95	81450625
16	65536	56	9834496	96	84934656
17	83521	57	10556001	97	88529281
18	104976	58	11316496	98	92236816
19	130321	59	12117261	99	96059601
20	160000	60	12960000	100	100000000
21	194481	61	13845841	101	104060401
22	234256	62	14776336	102	108243216
23	279841	63	15752961	103	112550881
24	331776	64	16777216	104	116985856
25	390625	65	17850625	105	121550625
26	456976	66	18974736	106	126247696
27	531441	67	20151121	107	131079601
28	614656	68	21381376	108	136048896
29	707281	69	22667121	109	141158161
30	810000	70	24010000	110	146410000
31	923521	71	25411681	111	151807041
32	1048576	72	26873856	112	157351936
33	1185921	73	28398241	113	163047361
34	1336336	74	29986576	114	168896016
35	1500625	75	31640625	115	174900625
36	1679616	76	33362176	116	181063936
37	1874161	77	35153041	117	187388721
38	2085136	78	37015056	118	193877776
39	2313441	79	38950081	119	200533921
40	2560000	80	40960000	120	207360000

n	n^4	n	n^4	n	n^4
121	214358881	171	855036081	221	2385443281
122	221533456	172	875213056	222	2428912656
123	228886641	173	895745041	223	2472973441
124	236421376	174	916636176	224	2517630976
125	244140625	175	937890625	225	2562890625
126	252047376	176	959512576	226	2608757776
127	260144641	177	981506241	227	2655237841
128	268435456	178	1003875856	228	2702336256
129	276922881	179	1026625681	229	2750058481
130	285610000	180	1049760000	230	2798410000
131	294499921	181	1073283121	231	2847396321
132	303595776	182	1097199376	232	2897022976
133	312900721	183	1119513121	233	2947295521
134	322417936	184	1146228736	234	2998219536
135	332150625	185	1171350625	235	3049800625
136	342102016	186	1196883216	236	3102044416
137	354275361	187	1222830961	237	3154956561
138	362673936	188	1249198336	238	3208542736
139	373301041	189	1275989841	239	3262808641
140	384160000	190	1303210000	240	3317760000
141	395254161	191	1330863361	241	3373402561
142	406586796	192	1358954496	242	3429742096
143	418161601	193	1387488001	243	3486794401
144	429981696	194	1416468496	244	3544535296
145	442050625	195	1445900625	245	3603000625
146	454371856	196	1475789056	246	3662186256
147	466948881	197	1506138481	247	3722098081
148	479785216	198	1536953616	248	3782742016
149	492874401	199	1568239201	249	3844124001
150	506250000	200	1600000000	250	3906250000
151	519885601	201	1632240801	251	3969126001
152	533794816	202	1664966416	252	4032758016
153	547981281	203	1698181681	253	4097152081
154	562448656	204	1731891456	254	4162314256
155	577200625	205	1766100625	255	4228250625
156	592240896	206	1800814096	256	4294972296
157	607573201	207	1836036801	257	4362470501
158	623201296	208	1871773696	258	4430766096
159	639128961	209	1908029761	259	4499860561
160	655360000	210	1944810000	260	4569760000
161	671898241	211	1982119441	261	4610470641
162	688747536	212	2019963136	262	4711998736
163	705911761	213	2058346161	263	4784350561
164	723394816	214	2097273616	264	4857532416
165	741200625	215	2136750625	265	4931550625
166	759333136	216	2176782336	266	5006411536
167	777796321	217	2217373921	267	5082121521
168	796594176	218	2258530576	268	5158686976
169	815730721	219	2300257521	269	5236118321
170	835210000	220	2342560000	270	5314410000

n	n⁴	n	n⁴	n	n⁴
271	5393580481	321	10617447681	371	18945044881
272	5473632256	322	10750371856	372	19150131456
273	5554571841	323	10884540241	373	19355878641
274	5636405776	324	11019960576	374	19565295376
275	5719140625	325	11156640625	375	19775390625
276	5802782976	326	11294588176	376	19987173376
277	5887339441	327	11433811041	377	20200652641
278	5972816656	328	11574317056	378	20415837456
279	6059221281	329	11716114081	379	20632736881
280	6146560000	330	11859210000	380	20851360000
281	6234839521	331	12003612721	381	21071715921
282	6324066576	332	12149330176	382	21293813776
283	6414247921	333	12296370321	383	21517662721
284	6505390336	334	12444741136	384	21743271936
285	6597500625	335	12594450625	385	21970650625
286	6690585616	336	12745506816	386	22199808016
287	6784652161	337	12897917761	387	22410753361
288	6878607136	338	13051691536	388	22663499536
289	6975757441	339	13206836241	389	22898045041
290	7072810000	340	13363360000	390	23134410000
291	7170871761	341	13521270961	391	23372600161
292	7269949696	342	13680577296	392	23612624896
293	7370050801	343	13841287201	393	23854493601
294	7471182096	344	14003408896	394	24098215696
295	7573350625	345	14166950625	395	24343800625
296	7676563456	346	14331920656	396	24591257856
297	7780827681	347	14498327281	397	24840596881
298	7886150416	348	14666178816	398	25091827216
299	7992538801	349	14835483601	399	25344958401
300	8100000000	350	15006250000	400	25600000000
301	8208541201	351	15178486401	401	25856961601
302	8318169616	352	15352201216	402	26115852816
303	8428892481	353	15527402881	403	26376683281
304	8540717056	354	15704099856	404	26639462656
305	8653650625	355	15882300625	405	26904200625
306	8767700496	356	16062013696	406	27170908896
307	8882874001	357	16243247601	407	27439591201
308	8999178496	358	16426010896	408	27710263296
309	9116621396	359	16610312161	409	27982932961
310	9235210000	360	16796160000	410	28257610000
311	9354951841	361	16983563041	411	28534304241
312	9475854336	362	17172539936	412	28813025536
313	9597924961	363	17363069361	413	29093783761
314	9721171216	364	17555190016	414	29376588816
315	9845600625	365	17748900625	415	29661450625
316	9971220736	366	17944209936	416	29948379136
317	10098039121	367	18141126721	417	30237384321
318	10226063366	368	18339658776	418	30528570176
319	10355301121	369	18539817921	419	30821664721
320	10485760000	370	18741610000	420	31116960000

n	n^4	n	n^4	n	n^4
421	31414372081	451	41371966801	481	53527912321
422	31713911056	452	41740124416	482	53974440976
423	32015587041	453	42110733681	483	54423757521
424	32319410176	454	42483807456	484	54875875536
425	32625390625	455	42859350625	485	55330800625
426	32933538576	456	43237380096	486	55788550416
427	33243864241	457	43617904801	487	56249134561
428	33556377856	458	44000935696	488	56712564736
429	33871089631	459	44386483761	489	57178852641
430	34190010000	460	44774560000	490	57648010000
431	34567149121	461	45165175441	491	58120048561
432	34828517376	462	45558341136	492	58594980096
433	35152125121	463	45954068161	493	59072816401
434	35477982736	464	46352367616	494	59553569296
435	35806100625	465	46753250625	495	60037250625
436	36137489216	466	47156728336	496	60523872256
437	36469158961	467	47560411921	497	61013446081
438	36804110336	468	47971512576	498	61505984016
439	37141383841	469	48382841481	499	62001498001
440	37480960000	470	48796810000	500	62500000000
441	37822859361	471	49213429281		
442	38167092496	472	49632710656		
443	38513670001	473	50054665441		
444	38862602496	474	50479304976		
445	39213900625	475	50906640625		
446	39567575056	476	51336683776		
447	39923636481	477	51769445841		
448	40282095616	478	52204938256		
449	40642963201	479	52643172441		
450	41006250000	480	53084160000		

III. Konstantentabelle.

$$\pi = 3{,}14159 = \frac{355}{113} = \frac{22}{7};\quad \pi^2 = 9{,}86960;\quad \pi^3 = 31{,}00628;\quad \sqrt{\pi} = 1{,}77245;$$

$$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}46459;\quad \frac{1}{\pi} = 0{,}31831;\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}56419;\quad \frac{1}{\pi^2} = 0{,}10132;$$

$$\frac{\pi}{32} = 0{,}098175;\quad \frac{\pi}{16} = 0{,}19635;\quad \frac{\pi}{4} = 0{,}78540.$$

Druck der Voigtschen Buchdruckerei in Weimar.