



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299589



Neue
Theorie des Erddruckes

nebst einer

Geschichte der Theorie des Erddruckes

und der

hierüber angestellten Versuche

von

Dr. E. Winkler,

Professor des Eisenbahn- und Brückenbaues am k. k. Polytechnikum in Wien.

Mit 47 Holzschnitten.

Königl. Bibliothek
der
öffentlichen Arbeiten

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen bleibt vorbehalten.

Journ. Litt. D. I. № 395.

WIEN 1872.

Verlag von R. v. Waldheim.



II 7823



Dr. E. Winkler

Handwritten signature in cursive script, possibly reading "E. Winkler"

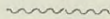
WIEN 1872

INHALT.

	Seite
Vorwort	1
I. Abschnitt. Neue Theorie des Erddruckes.	
I. Kapitel. Allgemeine Beziehungen zwischen den Drücken	3
II. Kapitel. Einführung der Reibung und Cohäsion	15
III. Kapitel. Anwendungen	22
IV. Kapitel. Allgemeine Theorie unter der Annahme einer ebenen Gleitfläche	38
II. Abschnitt. Kurze Geschichte der Theorie des Erddruckes.	
I. Kapitel. Aeltere Theorien	58
II. Kapitel. Theorien unter Berücksichtigung der Reibung an der Wand	78
III. Kapitel. Theorien, welche vom Gleichgewichte der Elemente ausgehen	98
III. Abschnitt. Versuche über den Erddruck.	117

Der I. und III. Abschnitt sind Separatabdrücke aus der Zeitschrift
des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins, Jahrgang 1871.

Namen-Register.



	Seite		Seite
Antony, d'	63, 117	Mohr	97, 107, 115
Audé	129	Montlong	60
Audoy	70	Moseley	75
Belidor	62	Navier	68
Blaveau	60	Ortmann	98
Bullet	59	Ott, v.	86
Considère	105	Persy	70, 76
Coulomb	63	Poncelet	71, 72, 78
Couplet	59	Prony	65
Culmann	90	Rankine	102
Français	66	Rebhann	93, 94
Gadroy	62, 117	Rondelet	60, 118
Gauthey	63, 117	Saint-Guilhem	86
Guilhem, Saint	86	Saint-Venant	115
Hagen	74, 77, 126	Sallonier	60
Hoffmann	61	Scheffler	76, 78, 84, 100
Holzhey	83	Tersac de Montlong	60
Köszegh	121	Trincaux	62
Lafont, de	114	Vauban	59
Levi	104	Venant, Saint	2, 115
Martony de Köszegh	121	Winkler	3, 102, 115, 138
Maschek	61	Woltmann	118
Mayniel	66, 119		

VORWORT.

Es ist bekannt, dass es bis jetzt noch nicht geglückt ist, eine allgemeine genaue Theorie des Erddruckes aufzustellen. Obwohl sich sehr viele Männer, selbst sehr tüchtige Mathematiker, mit diesem Theile der angewandten Mechanik befaßt haben, so laufen doch alle Theorien auf die Annahme eines sich in ebener Fläche lösenden Prismas hinaus, während nachgewiesen ist, dass die Trennungsfläche im Allgemeinen keine Ebene sein kann.

In ganz ähnlicher Lage befindet sich die Elasticitäts- und Festigkeitslehre; denn bekanntlich sind die gewöhnlich angewendeten Formeln, z. B. der Bruchfestigkeit, nur Näherungsformeln. Erst durch Aufstellung der exacten Beziehungen zwischen den Kräften, welche auf ein Körperelement wirken, und den hiedurch hervorgerufenen Formänderungen desselben, durch Cauchy, gelang es, klare Einsicht zu gewinnen. Ich kam auf die Idee, ob sich nicht in ähnlicher Weise auch eine klarere Einsicht betreffs des Erddruckes gewinnen lasse, wenn man das Elasticitätsgesetz durch das Gesetz der Reibung und Cohäsion er-

setze, und hatte die Freude, wirkliche Erfolge zu erzielen, wenn es mir auch nicht gelungen ist, eine ganz allgemeine exacte Auflösung des Problems zu gewinnen.

Ich habe diese Theorie in einer Dissertation niedergelegt, welche ich im Jahre 1860 der Universität Leipzig bei Gelegenheit meiner Bewerbung um die Doctorwürde einreichte. Mehrerlei Umstände haben mich bisher abgehalten, diese Theorie zu veröffentlichen. Da aber in jüngster Zeit auch von anderer Seite ähnliche Ideen aufgetaucht sind, so erlaube ich mir zur Sicherung der Priorität, diese Theorie im Folgenden darzustellen, obwohl ich nicht zweifle, dass dieselbe noch einer weiteren Ausbildung fähig sein wird.

Im Anschlusse hieran werde ich zur weiteren Beleuchtung des Gegenstandes eine kurze Geschichte der Theorie des Erddruckes und der hierüber angestellten Versuche darstellen.

Wien, im März 1871.

E. Winkler.

I. Abschnitt.

Neue Theorie des Erddruckes.

I. Kapitel. Allgemeine Beziehungen zwischen den Drücken.

§. 1. Der Erddruck. Auf irgend welche kleine Fläche im Innern einer Erdmasse, sei dieselbe nun ein Theil der Fläche einer Wand, welche die Erdmasse stützt, oder sei es ein Theil der Oberfläche eines im Innern der Erdmasse gedachten kleinen Erdkörpers, wird von der angrenzenden Erdmasse ein Druck ausgeübt, den wir Erddruck nennen. Derselbe wird gegen die Fläche, auf welche er wirkt, im Allgemeinen eine geneigte Lage haben. Indeß kann derselbe mit der Normalen zur Fläche, falls nur Reibung, nicht aber Cohäsion vorhanden ist, keinen Winkel einschließen, welcher größer ist als der Reibungswinkel.

Der Erddruck läßt sich in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine senkrecht zur Fläche, die andere in der Fläche selbst wirkt. Die erstere nennen wir Normaldruck, die andere Schub oder Tangentialdruck.

Die allgemeine Theorie des Erddruckes ist, insoweit das Gesetz der Reibung und Cohäsion nicht in Frage

kommt, dieselbe, als für feste Körper. Sie wurde zuerst von Cauchy begründet und später von Lamé weiter ausgebildet. Wir werden diese Theorie im Folgenden nur in denjenigen Theilen darstellen, welche für den vorliegenden Fall eine Bedeutung haben, indem wir in Betreff weiteren Studiums auf folgende Werke verweisen: Cauchy, *exercices des mathématiques*, 1826—29; — Lamé, *leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1852; — Holzmann, *Lehrbuch der theoretischen Mechanik*, 1861; — Clebsch, *Theorie der Elasticität fester Körper*, 1862; — Grashof, *die Festigkeitslehre*, 1866; — E. Winkler, *die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*, 1867.

Wir werden indeß im Folgenden nicht den ganz allgemeinen Fall behandeln, sondern im Interesse einer klaren Uebersicht nur denjenigen, welcher für die Praxis die hauptsächlichste Bedeutung hat, nämlich den Fall, dass der Erdkörper oben und auf einer Seite durch eine Cylinderfläche (zu denen natürlich auch die Ebenen gehören) begrenzt wird, deren Erzeugende eine horizontale Lage haben. Das anzuwendende rechtwinklige Coordinatensystem legen wir so, dass die Achse der z den eben genannten Erzeugenden parallel ist, die Ebene der xy also einen Querschnitt bildet; die Achse der x und der y mögen vor der Hand eine beliebige Lage haben; die Achse der x schließe mit der Horizontalen und die Achse der y mit der Verticalen den Winkel ϵ ein.

§. 2. Gleichgewicht des unendlich kleinen Parallelo-pipedes. Der auf eine zur Achse der x parallele Fläche wirkende Normaldruck sei per Flächeneinheit = V , der auf eine zur Achse der y parallele Ebene wirkende Normal-

druck per Flächeneinheit $= H$. Ferner sei der in diesen Flächen wirkende Schub per Flächeneinheit bezüglich T und T_1 .

Wir denken uns nun ein unendlich dünnes Prisma mit horizontalen und verticalen Flächen (Fig. 1), dessen Kanten der Achse der z parallel sind, mit der Breite dx und der Höhe dy . Die in den Seitenflächen auf die Längeneinheit wirkenden Schübe sind bezüglich $T dx$ und $T_1 dy$. Damit nun Gleichgewicht gegen Drehung um eine durch die Mitte des Querschnittes gehende zur Achse der z parallele Achse ist, muß $2 \cdot T dx \cdot \frac{dy}{2} = 2 \cdot T_1 dy \cdot \frac{dx}{2}$, d. i.

$$1) \quad T_1 = T$$

sein, d. h. die in zwei zu einander senkrechten Flächen wirkenden Schübe sind einander gleich.

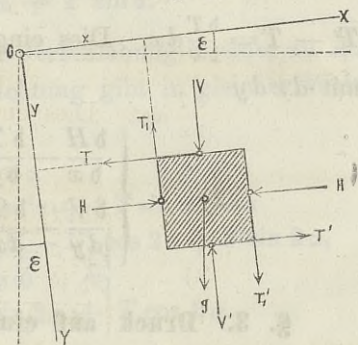
Sind die auf die gegenüberstehenden Flächen wirkenden Kräfte bezüglich V und V' , H und H' , T und T' und das Gewicht der Volumeneinheit des Erdmaterials $= g$, so fordert das Gleichgewicht gegen Verschiebung in Richtung der x der Erfüllung der Bedingung

$$H dy - H' dy - T dx + T' dx = g dx dy \sin \epsilon,$$

gegen Verschiebung in Richtung der y

$$V dx - V' dx - T dy + T' dy = -g dx dy \cos \epsilon.$$

Fig. 1.



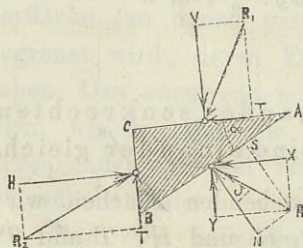
Nun aber ist $H' - H$ das Differentiale von H für eine Aenderung von x , d. i. $= \frac{\delta H}{\delta x} dx$, ebenso $V' - V = \frac{\delta V}{\delta y} dy$, und in der ersten Gleichung $T' - T = \frac{\delta T}{\delta y}$, in der zweiten $T' - T = \frac{\delta T}{\delta x} dx$. Dies eingesetzt, gibt nach der Division mit $dx dy$

$$2) \quad \begin{cases} \frac{\delta H}{\delta x} - \frac{\delta T}{\delta y} = -g \sin \varepsilon, \\ \frac{\delta V}{\delta y} - \frac{\delta T}{\delta x} = +g \cos \varepsilon. \end{cases}$$

§. 3. Druck auf ein beliebiges Flächenelement.

Um unter der Voraussetzung, dass H , V und T bekannt sind, den Druck auf ein beliebiges, zur Achse der z

Fig. 2.



paralleles Flächenelement kennen zu lernen, betrachten wir das Gleichgewicht eines dreieckigen Prismas ABC (Fig. 2) mit zwei zur Achse der x und y parallelen Flächen und einer geneigten Fläche. Auf die letztere wirke per Flächeneinheit der Druck R mit der Normalcomponente N und

der Tangential- oder Schubcomponente L , sowie der Componente X und Y in der Richtung der x und y . Die Neigung der Fläche AB gegen die Achse der x sei α . Das Gleichgewicht gegen Verschiebung in Richtung der x und y erfordert nun, wenn wir $AC = dx$, $BC = dy$, $AB = ds$ setzen, die Erfüllung der Bedingung

$$Hdy + Tdx - Xds = 0,$$

$$Vdx + Tdy - Yds = 0,$$

oder, weil $dx = ds \cos \alpha$, $dy = ds \sin \alpha$ ist,

$$3) \quad \begin{cases} X = H \sin \alpha + T \cos \alpha, \\ Y = V \cos \alpha + T \sin \alpha. \end{cases}$$

Das Gleichgewicht gegen Verschiebung in einer zu AB senkrechten und parallelen Richtung gibt in gleicher Weise folgende Gleichungen:

$$4) \quad \begin{cases} N = X \sin \alpha + Y \cos \alpha \\ \quad = H \sin^2 \alpha + V \cos^2 \alpha + 2T \sin \alpha \cos \alpha \\ \quad = \frac{1}{2}(H + V) - \frac{1}{2}(H - V) \cos 2\alpha + T \sin 2\alpha, \\ S = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ \quad = -\frac{1}{2}(V - H) \sin 2\alpha + T \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Der Druck R selbst ist nun

$$5) \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{N^2 + S^2} \\ = \sqrt{H^2 \sin^2 \alpha + V^2 \cos^2 \alpha + T^2 + (H + V) T \sin 2\alpha},$$

womit nun der Druck auf ein beliebiges Flächenelement, sowie dessen Componenten bestimmt sind.

Projicirt man den auf die Fläche BC wirkenden Druck, dessen Componenten H und T sind, auf die Normale der Fläche AB , so erhält man als Projection $H \sin \alpha + T \cos \alpha$. Ebenso groß ist X , d. i. die Projection des auf AB wirkenden Druckes R auf die Normale von BC . Hieraus folgt der wichtige Satz:

Wenn zwei Flächen f_1 und f_2 in demselben Punkt von den Drücken R_1 und R_2 afficirt werden, so ist die Projection von R_1 auf die Normale von f_2 gleich der Projection von R_2 auf die Normale von f_1 .

§. 4. Die Druckellipse. Es seien nun die Componenten des auf die Fläche AB wirkenden Druckes nach Richtung von R_1 und $R_2 = X'$ und Y' . Alsdann erfordert das Gleichgewicht der drei auf das dreiseitige Prisma wirkenden Drücke $R ds$, $R_1 dx$ und $R_2 dy$ die Erfüllung der Bedingung $R_1 dx = X' ds$ und $R_2 dy = Y' ds$, oder, da $dx = ds \cos \alpha$, $dy = ds \sin \alpha$ ist, $R_1 \cos \alpha = X'$ und $R_2 \sin \alpha = Y'$, mithin

$$\cos \alpha = \frac{X'}{R_1}, \quad \sin \alpha = \frac{Y'}{R_2}.$$

Da nun aber bekanntlich $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ist, so wird

$$6) \quad \left(\frac{X'}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{Y'}{R_2}\right)^2 = 1.$$

Stellt man den Druck R nach Größe und Richtung durch eine vom betreffenden Punkte des Erdkörpers ausgehende Gerade dar, so sind X' und Y' die Coordinaten des Endpunktes derselben, wenn man die Richtungen von R_1 und R_2 als Coordinatenachsen wählt. Die eben erhaltene Gleichung liefert daher den Satz:

Stellt man den Druck auf eine beliebige, zur Achse der z parallele Fläche für alle möglichen Lagen derselben für ein und denselben Punkt des Erdkörpers nach Größe und Richtung durch eine von demselben Punkte ausgehende Gerade dar, so liegen die Endpunkte aller Geraden auf einer Ellipse.

Wir erhalten durch diese Ellipse, welche wir Druckellipse nennen, eine klare Vorstellung von dem Gesetze, nach welchem sich der Erddruck mit Aenderung der Lage der Fläche ändert. Wenn wir jede mögliche Lage des Flächenelementes in Betracht ziehen, so würde sich, entspre-

chend dem Spannungsellipsoide der festen Körper, ein Ellipsoid ergeben, dessen eine Achse der Achse der z parallel ist.

Die beiden von den Achsen der Druckellipse dargestellten Drücke nennen wir Hauptdrücke. Der eine derselben stellt das Maximum, der andere das Minimum des Druckes dar; der Maximal- und der Minimaldruck stehen also auf einander senkrecht.

Die Fläche, welche von einem Hauptdrucke afficirt wird, muß jedenfalls gegen die Richtung desselben eine symmetrische Lage haben, d. h. auf derselben senkrecht stehen. Die Hauptdrücke sind also zugleich Normaldrücke oder die beiden von den Normaldrücken afficirten und auf einander senkrecht stehenden Flächen werden nicht von Schüben afficirt.

Die Gleichung 6 bedeutet eine Ellipse, wenn R_1, R_2 , d. i. die auf die Flächen AC und BC wirkenden Drücke, conjugirte Halbmesser sind; es läßt sich also behaupten, dass die Drücke, welche zwei beliebige auf einander senkrechte Flächen afficiren, conjugirte Halbmesser der Druckellipse sind.

§. 5. Bestimmung der Hauptdrücke. Es ist nun wichtig, die Größen und Richtungen der Hauptdrücke unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass man die Größen H, V, T kennt. Der eine der beiden Hauptdrücke sei D und der von ihm^m mit der Achse x eingeschlossene Winkel $= \gamma$, seine Componenten also $D \cos \gamma, D \sin \gamma$. Der Winkel, welcher die von D afficirte Fläche mit der Achse der x einschließt, ist $90^\circ - \gamma$. Daher wird nach den Gleichungen 3

$$a) \quad \begin{cases} (D - H) \cos \gamma = T \sin \gamma. \\ (D - V) \sin \gamma = T \cos \gamma. \end{cases}$$

Bestimmt man aus beiden Gleichungen $\tan \gamma$ und setzt beide Werte gleich, so ergibt sich $\frac{D-H}{T} = \frac{T}{D-V}$ oder $(D-H)(D-V) = T^2$, oder

$$7) \quad D^2 - (H + V)D + HV - T^2 = 0.$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind die beiden Hauptdrücke. Bezeichnen wir dieselben mit A und B , so gibt die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$8) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}(H + V) + \frac{1}{2}\sqrt{(H - V)^2 - 4T^2}, \\ B = \frac{1}{2}(H + V) - \frac{1}{2}\sqrt{(H - V)^2 - 4T^2}. \end{cases}$$

Bemerkenswert ist die Relation

$$9) \quad A + B = H + V.$$

Da sich dieselbe Relation offenbar auch für jedes andere rechtwinklige Coordinatensystem ergibt, so läßt sich folgern, dass die Summe der Normaldrücke, welche zwei auf einander senkrechte Flächen afficiren, constant ist.

Werden die Gleichungen a bezüglich durch $\cos \gamma$ und $\sin \gamma$ dividirt und sodann subtrahirt, so ergibt sich $T \frac{\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma}{\sin \gamma \cos \gamma} = H - V$ oder $2T \cot 2\gamma = H - V$, mithin

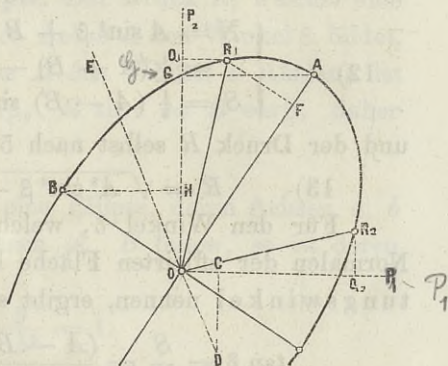
$$10) \quad \tan 2\gamma = -\frac{2T}{V - H}$$

Hieraus ergeben sich für γ zwei Werte, welche um 90° von einander verschieden sind.

Nach Gleichung 10 läßt sich, wenn die auf zwei

auf einander senkrechte Flächen OP_1 , OP_2 (Fig. 3) wirkenden Drücke $OR_1 = R_1$, $OR_2 = R_2$ gegeben sind, die Richtung der Hauptdrücke leicht construiren. Fällt man von R_1 und R_2 auf OP_2 und OP_1 die Senkrechten R_1Q_1 , R_2Q_2 , macht $OC = OQ_1 - OQ_2$, CD senkrecht auf OP_1 und $CD = 2 \cdot Q_1R_1 = 2 \cdot Q_2R_2$, so ist $\tan \angle DOP_1 = -\tan 2\gamma$. Ist OE die Verlängerung von OD , so halbiren jetzt die Richtungen von A und B die Winkel EOP_1 und DOP_1 .

Fig. 3.



Die Größe von A und B läßt sich am einfachsten nach dem in §. 3 aufgestellten Reciprocitätsgesetze construiren. Fällt man von A eine Senkrechte AG auf OP_2 , von B eine Senkrechte BH auf OP_1 und von R_1 eine Senkrechte R_1F auf OA , so ist nach diesem Satze $OF = OG$ und $R_1F = OH$, woraus sich die Construction der Punkte A und B , vorausgesetzt, dass die Richtungen der Hauptdrücke bereits construirt sind, sofort ergibt.

§. 6. Wahl der Hauptdrücke als Coordinatenachsen.

Wir wollen nun zur Bestimmung des Druckes, welcher auf eine beliebige Fläche wirkt, die Richtungen der Hauptdrücke als Coordinatenachsen wählen. Der Winkel, welchen die beliebige Fläche mit der Richtung des Hauptdruckes A bildet, sei β . Wir erhalten alsdann die betreffenden Gleichungen, wenn wir in denen des §. 3, A, B

für H , V , sowie $T = 0$ und $\alpha = \beta$ setzen. Die Componenten des Druckes R nach Richtung von A und B sind nach 3:

$$11) \quad X = A \sin \beta, \quad Y = B \cos \beta.$$

Die Normal- und Tangentialcomponente von R sind nach 4:

$$12) \quad \begin{cases} N = A \sin^2 \beta + B \cos^2 \beta \\ \quad = \frac{1}{2} (A + B) - \frac{1}{2} (A - B) \cos 2\beta, \\ S = \frac{1}{2} (A - B) \sin 2\beta, \end{cases}$$

und der Druck R selbst nach 5:

$$13) \quad R = \sqrt{A^2 \sin^2 \beta + B^2 \cos^2 \beta}.$$

Für den Winkel δ , welchen der Druck R mit der Normalen der afficirten Fläche bildet, welchen wir Richtungswinkel nennen, ergibt sich:

$$\tan \delta = \frac{S}{N} = \frac{(A - B) \cos \beta \sin \beta}{A \sin^2 \beta + B \cos^2 \beta}, \text{ oder}$$

$$14) \quad \tan \delta = \frac{(A - B) \tan \beta}{A \tan^2 \beta + B}.$$

Für $\beta = 0$ und $\beta = 90^\circ$ wird $\delta = 0$; für irgend einen zwischenliegenden Wert von β muß also δ zu einem Maximum werden. Differenziren wir den Ausdruck für $\tan \delta$ nach $\tan \beta$ und setzen den Differenzialquotienten $= 0$, so ergibt sich, dass $\tan \delta$ oder δ zum Maximum wird für

$$15) \quad \tan \beta = \sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Die Einsetzung gibt

$$16) \quad \max \tan \delta = \frac{A - B}{2\sqrt{AB}}.$$

Hieraus ergibt sich leicht $\sin^2 \beta = \frac{B}{A + B}$, $\cos^2 \beta = \frac{A}{A + B}$.

Dies in 12 und 13 eingesetzt, gibt für den Druck auf die Fläche, für welche $\tan \delta$ ein Maximum ist:

$$17) \quad \begin{cases} N = \frac{2AB}{A+B}, & T = -\frac{(A-B)\sqrt{AB}}{A+B}, \\ R = \sqrt{AB}. \end{cases}$$

§. 7. Die Stellungsellipse. Der Druck R , welcher eine beliebige Fläche, die mit der Achse A den Winkel β bildet, afficirt, bilde mit der Achse A den Winkel ε . Alsdann ist nach 11: $R \cos \varepsilon = A \sin \beta$, $R \sin \varepsilon = B \cos \beta$, daher $\tan \beta = \frac{B}{A} \cot \varepsilon$.

Denken wir uns nun eine Ellipse, deren Achsen a , b in die Richtungen der Achsen A , B fallen, so ist deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hieraus folgt $\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} = 0$, oder

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}.$$

Macht der Radius vector und die Tangente an der Ellipse am Ende dieses Radius vector mit der Achse A bezüglich den Winkel ε und β' , so ist $\tan \beta' = -\frac{dy}{dx}$, $\cot \varepsilon = \frac{x}{y}$, daher

$$\tan \beta' = \frac{b^2}{a^2} \cot \varepsilon.$$

Die Vergleichung mit der Gleichung $\tan \beta = \frac{B}{A} \cot \varepsilon$ zeigt, dass $\beta' = \beta$ wird, wenn

$$18) \quad \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

ist. Hieraus folgt: Die von einem beliebigen Drucke R afficirte Fläche ist parallel der Tangente CC

CC

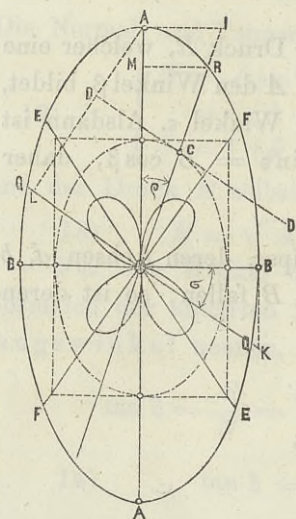
$$a = \sqrt{a}$$

$$b = \sqrt{b}$$

den Auffang des Druckes an

einer Ellipse, deren Achsen parallel den Quadratwurzeln aus den Hauptdrücken sind, im

Fig. 4.



Durchschnittspunkte R die Ellipse mit der Richtung des Druckes R oder die Richtung einer Fläche und des dieselbe afficirenden Druckes sind conjugirte Durchmesser dieser Ellipse.

Wir nennen diese Ellipse, weil sie die Stellung der von einem Drucke afficirten Fläche angibt, die Stellungselipse.

Sind die Druckellipse und die Stellungselipse construiert, so ist es leicht, für eine gegebene Fläche den entsprechenden Druck, sowie für einen gegebenen Druck die

entsprechende Lage der afficirten Fläche zu construiren.

In Fig. 4 ist noch die Tangente des Richtungswinkels δ grafisch dargestellt.

§. 8. Construction des eine gegebene Fläche afficirenden Druckes. Durch die Druckellipse und die Stellungselipse ist zwar das Mittel geboten, für jede gegebene Fläche die Richtung und Größe des auf dieselbe wirkenden Druckes zu bestimmen. Jedoch läßt sich auch leicht eine directe Construction angeben. Zu diesem Zwecke seien in Fig. 4 AO und OB die Hauptdrücke A, B , OR die Kraft R , welche eine beliebige Fläche QQ afficirt. RR mache mit AA den Winkel ρ , QQ mit BB den Winkel σ . Alsdann ist nach dem bekannten Reciprocitäts-

gesetze die Projection von A auf die Normale von $Q Q$ gleich der Projection von R auf die Normale von $B B$, d. i. $A \cos \sigma = R \cos \rho$. Ebenso ist die Projection von R auf die Normale von $A A$ gleich der Projection von B auf die Normale von $Q Q$, d. i. $R \sin \sigma = B \sin \rho$. Die Multiplication beider Gleichungen gibt $A \sin \rho \cos \rho = B \cos \rho \sin \sigma$, oder $A \tan \rho = B \tan \sigma$.

Errichtet man daher in B auf $O B$ eine Senkrechte, welche die gegebene Fläche $Q Q$ in K schneidet; errichtet sodann ferner in A auf $O A$ eine Senkrechte und macht auf derselben $A J = B K$, so ist $O J$ die Richtung des die Fläche $Q Q$ afficirenden Druckes R .

Fällt man von A eine Senkrechte $A L$ auf $Q Q$, von R eine Senkrechte $R M$ auf $A A$, so ist nach dem citirten Reciprocitätssatze $A L = O M$, was ohne Weiteres ein Mittel abgibt, den Punkt R zu construiren, nachdem man die Richtung von $O R$ construirt hat.

II. Kapitel. Einführung der Reibung und Cohäsion.

§. 9. Gesetz der Reibung und Cohäsion. Bei der Lösung der Frage in Betreff des Erddruckes kommt es zunächst auf die Bestimmung der drei Größen V, H, T an, für welche wir aber bisher nur die zwei Gleichungen 2 (Seite 80) aufgestellt haben. Eine dritte Gleichung wird sich für feste Körper durch das Elasticitätsgesetz gewinnen lassen; hier, wo es sich um lose Massen handelt, wird uns das Gesetz der Reibung und Cohäsion eine neue Gleichung liefern.

Eine Trennung der Theile kann hier nämlich nur durch Verschieben eintreten; diesem Verschieben setzen

sich zwei Widerstände entgegen, die Reibung und die Cohäsion, welche verschiedenen Gesetzen folgen. Die Reibung ist proportional dem Normaldrucke N , aber von der Trennungsfläche unabhängig; die Cohäsion dagegen ist proportional der Trennungsfläche, aber vom Normaldrucke unabhängig. Den Reibungscoefficienten, d. i. die Reibung für den Normaldruck 1, bezeichnen wir mit f ; den Reibungswinkel, d. i. der Winkel, dessen Tangente $= f$ ist, mit φ . Den Cohäsions-Coefficienten, d. i. die Cohäsion für die Trennungsfläche 1, bezeichnen wir mit c . Der gesammte, sich der Trennung entgegengesetzte Widerstand ist alsdann pr. Flächeneinheit $fN + c$.

Gegen die Anwendung des Cohäsionsgesetzes in Verbindung mit dem Reibungsgesetze lassen sich allerdings wohl Einwände erheben, auf die wir im geschichtlichen Theile zurückkommen.

§. 10. Lage der Gleitflächen. Damit in allen Theilen des Erdkörpers Gleichgewicht stattfinde, d. h. kein Verschieben eintrete, muß für jedes Flächenelement

$$\pm S \leq fN + c$$

sein, wobei $\pm S$ den absoluten Wert von S bedeuten soll. Nun aber handelt es sich bei der Bestimmung des Erddruckes stets um Constructionen, wie Futtermauern u. s. w., welche eine Bewegung im Erdkörper verhindern sollen. Wir werden daher immer denjenigen Gleichgewichtszustand in's Auge zu fassen haben, welcher bei der geringsten Verminderung des Widerstandes, welchen das Bauwerk bietet, gestört wird. Diese Gleichgewichtsgrenze aber ist vorhanden, wenn in jedem Punkte für irgend ein Flächenelement genau

$$19) \quad \pm S = fN + c$$

ist. Wir nennen dasjenige Flächenelement, für welches diese Bedingung erfüllt ist, die Gleitfläche.

Für jedes andere Flächenelement muß natürlich

$$S < fN + c, \text{ oder } \frac{fN + c}{S} > 1$$

sein; wir können daher behaupten, dass die Gleitfläche diejenige aller Flächenelemente in irgend einem Punkte ist, für welche

$$\frac{fN + c}{S}$$

zu einem Minimum wird. Nun aber wird dieser Ausdruck zu einem Minimum für $Sd(fN + c) = (fN + c) dS$, d. i. $Sf.dN = (fN + c) dS$, oder, weil ja $fN + c = \pm S$ ist, für $Sf.dN = SdS$, d. i. für

$$20) \quad \frac{dS}{dN} = \pm f.$$

Hiernach hat die Cohäsion keinen Einfluß auf die Lage der Gleitfläche gegen die Hauptdrücke.

Wäre keine Cohäsion vorhanden, so würde $\frac{N}{S}$ zu einem Minimum oder $\frac{S}{N} = \tan \delta$ zu einem Maximum werden müssen; die Gleitfläche würde daher hier durch die Gleichung 15 bestimmt sein.

Nach den Gleichungen 12) wird nun $dS = (A - B) \cos 2\beta . d\beta$, $dN = 2A \sin \beta \cos \beta - 2B \cos \beta \sin \beta = (A - B) \sin 2\beta$, folglich nach Gleichung 20 sehr einfach $\tan 2\beta = \pm \frac{1}{f} = \pm \cot \varphi$ oder

$$\tan 2\beta = \pm \tan(90^\circ - \varphi),$$

d. i. $2\beta = \pm (90^\circ - \varphi)$, oder

$$21) \quad \beta = \pm (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi).$$

Hiernach existiren zwei Gleitflächen, welche miteinander den Winkel $90^\circ - \varphi$ bilden, welcher von dem größeren Hauptdrucke A halbirt wird.

Wenn keine Cohäsion existirt, so sind, wie bereits bemerkt, die Gleitflächen durch Formel 15 bestimmt, welche ebenfalls zwei Winkel gibt, da die Quadratwurzel positiv und negativ genommen werden kann. Sind a und b die Halbachsen der Stellungsellipse, so ist

$$\tan \beta = \sqrt{\frac{B}{A}} = \frac{b}{a}, \text{ d. h. :}$$

Wenn keine Cohäsion stattfindet, so sind die Gleitflächen bestimmt durch die Diagonalen des der Stellungsellipse umschriebenen Rechteckes, oder, was dasselbe ist, durch die zwei gleichen conjugirten Durchmesser derselben.

§. 11. Verhältnis zwischen den Hauptdrücken. Die Gleichungen 12 geben nun für die Gleitflächen oder für $2\beta = \pm (90^\circ - \varphi)$

$$\{ N = \frac{1}{2} (A + B) - \frac{1}{2} (A - B) \sin \varphi,$$

$$\{ S = \pm \frac{1}{2} (A - B) \cos \varphi.$$

Dies in die Gleichung $N \tan \varphi + c = \pm S$ gesetzt, gibt

$$22) \quad (A + B) \sin \varphi - (A - B) + c \cos \varphi = 0.$$

Hieraus ergibt sich leicht, wenn man berücksichtigt, dass $\frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)$, $\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan^2(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)$ ist,

$$23) \quad B = [A \tan(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) - 2c] \tan(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi),$$

und, wenn keine Cohäsion vorhanden ist,

$$24) \quad B = A \tan^2(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi).$$

Das Verhältniß der Achsen der Stellungsellipse ist für diesen Fall

$$25) \quad b = a \tan (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi).$$

Hiernach ist auch die Construction von B und b für ein gegebenes A und a leicht auszuführen.

Die Ausdrücke für R , N , S , in Beziehung auf eine Gleitfläche, gehen für den Fall, dass keine Cohäsion vorhanden ist, über in folgende einfache Ausdrücke, wobei wir indeß speciell für den Druck auf eine Gleitfläche E für R setzen:

$$26) \quad \begin{cases} E = A \tan (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi), \\ N = R \cos \varphi, \quad S = R \sin \varphi. \end{cases}$$

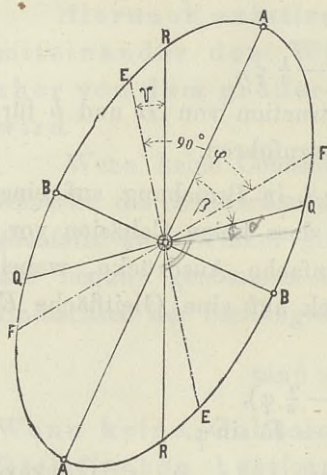
R wird in Fig. 4 dargestellt durch die Linien OE und OF .

Für einige Werte von φ ergibt die Rechnung folgende Verhältnisse:

$\varphi =$	$B =$	$E =$	$b =$
0	1,0000	1,0000	
20	0,4900	0,7002	
25	0,4058	0,6371	
30	0,3333	0,5774	
35	0,2710	0,5206	
40	0,2174	0,4663	
45	0,1716	0,4142	
Grad	. A	. A	. a

§. 12. Lage der unter gegebenem Winkel afficirten Flächen. Es sei in Fig. 5 OR die Richtung der Kraft R ,

Fig. 5.



welche die beliebige Fläche QQ afficirt, also RR und QQ conjugirte Durchmesser der Stellungsellipse. R bilde mit der Normalen von QQ den Winkel δ . Ferner seien EE und FF die beiden Gleitflächen; auf jede wirke die Kraft E , und zwar wirkt die Kraft auf FF in der Richtung von OE , die Kraft auf EE in der Richtung von OF . EE bilde mit RR den Winkel ν . Der Winkel EOF ist bekanntlich $90^\circ - \varphi$. Nach dem in §. 3 nachgewiesenen Reciprocitätsgesetze

ist die Projection der Kraft R auf die Normale von FF gleich der Projection der Kraft $OE = E$ auf die Normale von QQ , d. i.

$$R \cos (\nu + \varphi) = E \cos (\nu - \delta).$$

Ebenso ist die Projection der Kraft $OF = E$ auf die Normale von QQ gleich der Projection der Kraft R auf die Normale von EE , d. i.

$$E \sin (\nu + \varphi - \delta) = R \sin \nu.$$

Die Multiplication beider Gleichungen gibt

$$\cos (\nu + \varphi) \sin (\nu + \varphi - \delta) = \sin \nu \cos (\nu - \delta).$$

Löst man $\cos (\nu + \varphi)$ und $\sin (\nu + \varphi - \delta)$ nach den Regeln für den Sinus und Cosinus der Summe und Differenz zweier Winkel auf, wobei man ν , φ und $\nu - \delta$ als einfache Winkel betrachtet, so ergibt sich nach gehöriger Reduction: $\sin \delta = \sin \varphi \cos (2\nu + \varphi - \delta)$ oder

$$27) \quad \cos (2\nu + \varphi - \delta) = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}.$$

Hiedurch sind nun, da $2\nu + \varphi - \delta$ positiv und negativ genommen werden kann, zwei Werte des Winkels ν bestimmt, welcher die Kraft R , die eine Fläche unter gegebenem Winkel δ afficirt, mit einer Gleitfläche bildet.

Ist der Winkel, welchen die afficirte Fläche QQ mit der Hauptachse bildet, $= \beta$, so ist $90^\circ + \gamma = 45^\circ + \frac{1}{2}\varphi + \beta + \delta$, oder $\nu = \beta + \delta + \frac{1}{2}\varphi - 45^\circ$, $2\gamma + \varphi - \delta = 2\beta + \delta - 90^\circ$, daher

$$28) \quad \sin(2\beta + \delta) = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}.$$

Hiernach wird auch die Construction der Flächen, welche unter einem gegebenen Winkel afficirt werden, leicht durchzuführen sein, ohne dass man die Stellungselipse selbst construirt.

Der Druck R auf die fragliche Fläche ist durch eine der obigen Gleichungen $R \cos(\gamma + \varphi) = E \cos(\gamma - \delta)$ oder $R \sin \gamma = E \sin(\gamma + \varphi - \delta)$ bestimmt, wenn man E kennt. Macht aber ein beliebiger bekannter Druck Q mit der Normalen der von ihm afficirten Fläche den Winkel ε und mit der vom unbekanntem Drucke afficirten Fläche den Winkel μ , so ergibt sich aus dem Reciprocitätsgesetze sofort $Q \sin \mu = R \sin(\mu - \varepsilon + \delta)$, also

$$29) \quad R = \frac{Q \sin \mu}{\sin(\mu - \varepsilon + \delta)}.$$

§. 13. Dritte Gleichung zwischen V , H und T . Setzen wir in der Gleichung 22 nach 9 und 8 $A + B = H + V$ und $A - B = \sqrt{(H + V)^2 + 4T^2}$, so ergibt sich

$$(H + V) \sin \varphi + c \cos \varphi = \sqrt{(H - V)^2 + 4T^2}.$$

Die Beseitigung der Wurzel durch beiderseitige Quadratur gibt

$$30) \quad (H + V)^2 \cos^2 \varphi - 4HV + 4T^2 \\ - 2(H + V)c \sin 2\varphi - 4c^2 \cos^2 \varphi = 0.$$

Ist keine Cohäsion vorhanden, so wird einfacher

$$31) \quad (H + V)^2 \cos^2 \varphi + 4HV + 4T^2 = 0.$$

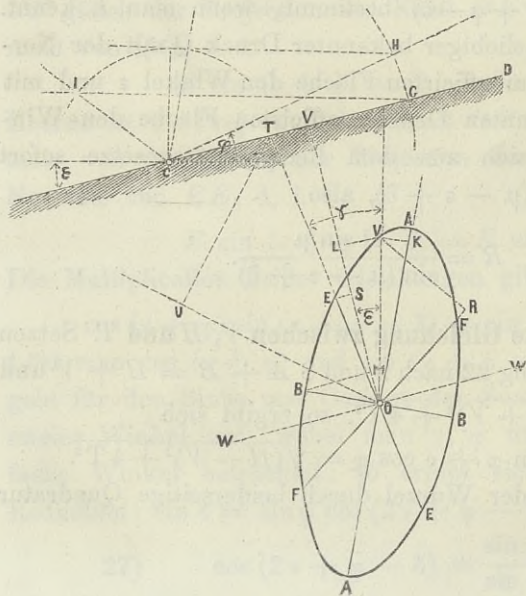
Die drei Gleichungen 2 und 29 oder 30 bestimmen nun vollständig die drei Größen V , H und T .

III. Kapitel. Anwendungen.

§. 14. Erdkörper, welcher oben durch eine Ebene, sonst unbegrenzt ist. Wir setzen jetzt einen Erdkörper voraus, welcher oben durch eine gegen den Horizont unter dem beliebigen Winkel ε geneigte Ebene, sonst aber nach allen Richtungen unbegrenzt ist.

Die Achse der x legen wir in die Terrainfläche. Die Differenzialgleichungen 2 werden hierdurch ungemein

Fig. 6.



einfach. Denn

offenbar sind die Drücke für die Punkte, welche in einer zur Terrainfläche

parallelen Ebene liegen, in derselben Lage des Flächenelementes constant;

darnach ist H , V , T von x unabhängig, also

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

folglich

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial V = g \partial y \cos \varepsilon, \\ \partial T = g \partial y \sin \varepsilon. \end{array} \right.$$

Die Drücke an der Terrainfläche sind, falls wir keine Belastung derselben voraussetzen, = 0. Mit Rücksicht hierauf gibt die Integration dieser Gleichungen sofort

$$32) \quad \begin{cases} V = gy \cos \varepsilon, \\ T = gy \sin \varepsilon. \end{cases}$$

Hiernach ist die Tangente des Winkels δ , welchen der Druck auf eine zur Terrainfläche parallele Ebene bildet,

$$\tan \delta = \frac{T}{V} = \tan \varepsilon, \text{ oder } \delta = \varepsilon,$$

der Druck hat also eine verticale Lage, was auch sofort aus der Betrachtung des Gleichgewichtes einer durch eine solche Ebene getrennten Erdkörpers folgen würde. Der Druck auf diese Fläche selbst ist

$$\sqrt{V^2 + T^2} = gy.$$

Cohäsion wollen wir nicht voraussetzen, obwohl die Durchführung der Theorie auch bei der Annahme einer Cohäsion keine Schwierigkeiten bieten würde. Unter dieser Voraussetzung gibt die Einsetzung dieser Ausdrücke für V und T in der Gleichung 28:

$$(H + gy \cos \varepsilon)^2 \cos^2 \varphi - 4Hgy \cos \varepsilon + 4g^2y^2 \sin^2 \varepsilon = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung gibt nach gehöriger Ordnung

$$33) \quad H = \frac{gy}{\cos^2 \varphi} \left[\cos \varepsilon (2 - \cos^2 \varphi) - 2 \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varphi} \right].$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$34) \quad k = \frac{\cos \varepsilon - \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi},$$

so wird

$$34 a) \quad H = gy \left(\frac{2k}{\cos \varphi} - \cos \varepsilon \right) = gy \frac{k^2 + \sin^2 \varepsilon}{\cos \varepsilon}.$$

Diese Gleichungen werden in zwei Fällen besonders einfach; nämlich, wenn entweder die Terrainfläche horizontal oder unter dem Reibungswinkel geneigt ist.

a) Ist die Terrainfläche horizontal, also $\varepsilon = 0$, $\sin \varepsilon = 0$, $\cos \varepsilon = 1$, so wird

$$35) \quad \begin{cases} V = gy; & T = 0, \\ H = gy \tan^2 (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi). \end{cases}$$

Uebrigens ist hier ohnehin klar, dass der Verticaldruck auf eine horizontale Fläche gleich dem Gewichte des über der Fläche stehenden Erdprismas sein muß. Aus der nothwendigen Symmetrie gegen eine Verticale folgt sofort, dass auf eine horizontale Fläche nur ein Verticaldruck wirken kann, dass also $T = 0$ sein muß. Demnach müssen V und H Hauptdrücke sein, so dass der Ausdruck für H ohne Weiteres aus der Gleichung 24 folgen würde.

b) Wenn die Terrainfläche unter dem Reibungswinkel geneigt, ε also $= \varphi$ ist, so wird

$$36) \quad \begin{cases} V = gy \cos \varphi, & T = gy \sin \varphi, \\ H = \frac{gy (2 - \cos^2 \varphi)}{\cos \varphi}. \end{cases}$$

Ein noch größerer Böschungswinkel ist ohne Cohäsion nicht möglich. Auch würde sich nach Gleichung 32 H imaginär ergeben, wenn $\varepsilon > \varphi$ wäre.

§. 15. Druck auf ein beliebiges Flächenelement.

Der Normal- und Tangentendruck auf eine beliebige Fläche, welche mit der Achse der x oder mit der Terrainfläche den Winkel α bildet, ergibt sich leicht nach Gleichung 4. Nach 31 und 32 a wird zunächst $H + V = gy (1 + k^2) \sec \varepsilon$
 $H - V = gy (k^2 - \operatorname{cosec} \varepsilon) \sec \varepsilon$, $T = gy \sin \varepsilon$.

Bezeichnet man die verticale Tiefe des betreffenden Punktes unter der Terrainfläche, d. i. $y \sec \varepsilon$ mit y' , so wird $H + V = gy' (1 + k^2)$, $H - V = gy' (k^2 - \cos 2\varepsilon)$, $T = \frac{1}{2} gy' \sin 2\varepsilon$. Dies eingesetzt gibt

$$N = \frac{1}{2} gy' [1 + k^2 - (k^2 - \cos 2\varepsilon) \cos 2\alpha + \sin 2\varepsilon \sin 2\alpha],$$

$$T = \frac{1}{2} gy' [(k^2 - \cos 2\varepsilon) \sin 2\alpha + \sin 2\varepsilon \cos 2\alpha].$$

Diese Ausdrücke lassen sich aber leicht auf folgende Form bringen:

$$37) \quad \mathcal{S} \begin{cases} N = gy' [\cos^2 (\varepsilon - \alpha) + k^2 \sin^2 \alpha], \\ T = \frac{1}{2} gy' [\sin 2 (\varepsilon - \alpha) - k^2 \sin 2\alpha]. \end{cases}$$

a) Ist die Terrainfläche horizontal oder $\varepsilon = 0$, so wird

$$\begin{cases} k = \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi), \\ k^2 = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan^2 (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi). \end{cases}$$

Hiernach ergibt sich

$$38) \quad \mathcal{S} \begin{cases} N = \frac{gy (1 + \sin \varphi \cos 2\alpha)}{1 + \sin \varphi}, \\ T = - \frac{gy \sin 2\alpha}{1 + \sin \varphi}. \end{cases}$$

b) Ist die Terrainfläche unter dem Reibungswinkel geneigt, also $\varepsilon = \varphi$, so wird $k = 1$, daher,

$$39) \quad \begin{cases} N = gy' [\sin^2 \alpha + \cos^2 (\varphi - \alpha)], \\ S = \frac{1}{2} gy' [\sin 2 (\varphi - \alpha) - \sin 2\alpha] \\ \quad = gy' \cos \varphi \sin (\varphi - 2\alpha). \end{cases}$$

Bezeichnen wir den Normaldruck auf ein horizontales Flächenelement mit V' , den Normaldruck auf ein verticale Flächenelement mit H' , und den Schub auf ein horizontales oder verticaleles Flächenelement mit T' , so ergibt

sich V' aus dem Ausdrucke für N , wenn wir $\alpha = \varepsilon$, H' aus dem Ausdrucke für N , wenn wir $\alpha = 90^\circ \mp \varepsilon$, und endlich T' aus dem Ausdrucke für S , wenn wir $\alpha = \varepsilon$ oder $\alpha = 90^\circ \mp \varepsilon$ setzen. Hierdurch ergibt sich

$$40) \quad \begin{cases} V' = gy' (1 \mp k^2 \sin^2 \varepsilon), \\ H' = gy' k^2 \cos^2 \varepsilon, \\ T' = \frac{1}{2} gy' k^2 \sin 2\varepsilon. \end{cases}$$

Ist die Terrainfläche unter dem Reibungswinkel φ geneigt, so wird $k = 1$, demnach

$$41) \quad \begin{cases} V' = gy' (1 \mp \sin^2 \varphi), \\ H' = gy' \cos^2 \varphi, \\ T' = \frac{1}{2} gy' \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

Die Ausdrücke für V' , H' und T' würde man auch erhalten, indem man von vornherein die Achse der x horizontal, die der y vertical annimmt.

§. 16. Lage der Hauptdrücke und Gleitflächen.

Der Druck auf eine zur Terrainfläche parallele Fläche hat nach §. 14 eine verticale Richtung. Nach dem in §. 7 aufgestellten Satze sind daher eine Verticale und eine zur Terrainfläche parallele Gerade conjugirte Durchmesser der Stellungsellipse.

Es sei nun ν der Winkel, welchen die eine Gleitfläche mit der Verticalen bildet. Der Winkel, welchen ein verticaler Druck mit der Normalen des von ihm afficirten Flächenelementes bildet, ist nach dem eben aufgestellten Satze $= \varepsilon$. Demnach ist nach Gleichung 27:

$$42) \quad \cos (2\nu \mp \varphi - \varepsilon) = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi}.$$

Ist ferner der Winkel, welchen die Hauptachse A mit der Terrainfläche bildet, β , so ist nach Gleichung 28:

$$43) \quad \sin(2\beta + \varepsilon) = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi}.$$

Hieraus folgt, dass die Hauptdrücke und Gleitflächen an allen Punkten des Erdkörpers dieselbe Lage haben.

Nach der eben aufgestellten Gleichung ist die Construction dieser Lagen leicht durchzuführen. Man mache in Fig. 6 auf der Terrainfläche und der natürlichen Böschungsfäche $CG = CH$, ziehe durch G und H Horizontale und schlage aus C einen Kreisbogen, welcher die durch H gezogene Horizontale tangirt; derselbe schneide die andere Horizontale in J . Halbirt man jetzt den Winkel JCG , so bestimmt die Halbierungslinie die Richtung des Hauptdruckes A , wie aus Gleichung 43 sofort folgt. Trägt man an die Halbierungslinie nach beiden Seiten den Winkel $\frac{1}{2}(90^\circ - \varphi)$, so erhält man die Lage der Gleitflächen.

a) Ist die Terrainfläche horizontal, so hat die Hauptachse A eine verticale, die Hauptachse B eine horizontale Lage (Fig. 7). Die Gleitflächen halbiren den Winkel zwischen der Verticalen und einer unter dem natürlichen Böschungswinkel geneigten Geraden.

b) Ist die Terrainfläche unter dem natürlichen Böschungswinkel geneigt, also $\varepsilon = \varphi$, so wird $\cos 2\beta = 1$, also $\beta = 0$. Hiernach hat die eine Gleitfläche eine verticale Lage, während die andere der Böschungsfäche parallel ist (Fig. 8). Die Richtung der Hauptachse A halbirt den Winkel zwischen diesen beiden Geraden.

§. 17. Grösse der Hauptdrücke. Setzen wir in Gleichung 8

$$H + V = \frac{2gyk}{\cos \varphi}, \quad H - V = 2gy \left(\frac{k}{\cos \varphi} - \cos \varepsilon \right),$$

$$T = gy \sin \varepsilon,$$

so ergibt sich als Hauptdruck:

$$D = \frac{gy}{\cos \varphi} (k \pm \sqrt{k^2 - 2k \cos \varepsilon \cos \varphi + \cos^2 \varphi}).$$

Aus der Formel 33 folgt aber leicht $2k \cos \varepsilon = (1 + k^2) \cos \varphi$; dies unter der Wurzel eingesetzt, gibt sofort die einfache Beziehung:

$$42 a) \quad D = \frac{gyk (1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi}.$$

oder auch

$$44) \quad \begin{cases} A = gyk \cot (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi), \\ B = gyk \cot (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi). \end{cases}$$

Ein anderer einfacher Ausdruck läßt sich nach dem in §. 3 aufgestellten Reciprocitätsgesetze ableiten. Wie wir wissen, wird eine zur Terrainfläche parallele Fläche WW (Fig. 6) von einem verticalwirkenden Drucke $OV = gy$ afficirt; der Hauptdruck OA afficirt die zu OA senkrechte Fläche BB . Daher ist die Projection AD von OA auf die Normale von WW gleich der Projection OC von OV auf die Normale von BB . Ist Winkel $AOW = \beta$, also $\sphericalangle OOA = 90^\circ - \varepsilon - \beta$, so ist $AO \sin \beta = OV \cos (90^\circ - \varepsilon - \beta)$, oder

$$45) \quad A = \frac{gy \sin(\varepsilon + \beta)}{\sin \beta}.$$

Der Winkel β aber ist durch die Gleichung 43 bestimmt. In ganz gleicher Weise ergibt sich aus der Gleichheit der Projection BE von OB auf die Normale von

WW und der Projection VC von OV auf die Normale von AA :

$$45 a) \quad B = \frac{gy \cos(\varepsilon + \beta)}{\cos \beta}.$$

Aus den Gleichheiten der bezeichneten Projectionen ergibt sich unter der Voraussetzung, dass nach dem vorigen Paragraph die Richtungen der Hauptdrücke construiert sind, eine einfache Construction der Größen der Hauptdrücke, welche bereits in §. 5 gezeigt wurde. Ist nämlich in Fig. 6 OV vertical und $= gy$, so fälle man von V auf die Richtung von A eine Senkrechte VK . Auf der zur Terrainfläche senkrechten Geraden mache man $OL = OK$, $OM = VK$, und lege durch L und M Parallele zur Terrainfläche, welche in den Richtungen der Hauptdrücke der Punkte A und B bestimmen.

a) Hat die Terrainfläche eine horizontale Lage, so wird

$$46) \quad A = V = gy; \quad B = H = gy \tan^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi).$$

b) Ist die Terrainfläche unter dem Reibungswinkel φ geneigt, so wird $k = 1$, daher

$$47) \quad \begin{cases} A = gy \cot(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = gy'(1 + \sin \varphi), \\ B = gy \cot(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) = gy'(1 - \sin \varphi). \end{cases}$$

§. 18. Druck auf die Gleitflächen. Der Druck auf eine Gleitfläche ist gegen die Normale derselben unter dem Reibungswinkel geneigt, oder wirkt in der Richtung der anderen Gleitfläche. Wir bezeichnen diesen Druck mit E . Nach Formel 17 wird, wenn wir E für R setzen,

$$E = \sqrt{AB} = \frac{gyk}{\cos \varphi} \sqrt{(1 + \sin \varphi)(1 - \sin \varphi)},$$

d. i. sehr einfach

$$48) \quad E = gyk.$$

Eine andere Beziehung ergibt sich auch hier durch den in §. 3 aufgestellten Reciprocitätssatz. Hiernach ist nämlich, wenn VV vertical, WW parallel zur Terrainfläche ist, und OE , OF die Drücke auf die Gleitflächen und gleichzeitig die Richtungen der Gleitflächen darstellen, die Projection OS von OE auf die Normale zu WW gleich der Projection VR von OV auf die Normale zu FF . Ist Winkel $EOV = \nu$, so wird $\sphericalangle SOE = \nu - \varepsilon$, $\sphericalangle VOR = 90^\circ - \varphi - \nu$, $OE \cos(\nu - \varepsilon) = OV \sin(90^\circ - \varphi - \nu)$, oder

$$49) \quad E = gy \frac{\cos(\nu + \varphi)}{\cos(\nu - \varepsilon)}.$$

Verlängern wir OE bis zum Durchschnitte T mit der Terrainfläche und bezeichnen OT mit z , so ist $z = y \sec(\nu - \varepsilon)$; daher wird auch

$$50) \quad E = gz \cos(\nu + \varphi).$$

Zieht man von O aus eine Gerade, welche gegen die Horizontale unter dem Reibungswinkel geneigt ist und fällt auf dieselbe von T eine Senkrechte TU , so ist $TU = z \sin(90^\circ - \varphi - \nu) = z \cos(\nu + \varphi)$, also $E = g \cdot TU$, so dass sich hiernach E leicht durch Construction bestimmen läßt.

Der Vergleich beider Formeln zeigt, dass $yk = TU$ ist; k ist demnach das Verhältniß der Geraden TU zur Geraden OV .

a) Für eine horizontale Terrainfläche ist $k = \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$, daher

$$51) \quad E = gy \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi).$$

b) Wenn die Terrainfläche unter dem Reibungswinkel φ geneigt ist, so wird $k = 1$, daher sehr einfach

$$52) \quad E = gy = gy' \cos \varphi.$$

§. 19. Erdkörper, welcher durch eine Wand begrenzt ist. Wenn die Wand, welche eine Erdmasse begrenzt, dem Drucke nachgibt, sei es durch Umkanten oder durch Gleiten, so gleitet die Erde längs der Wand; demnach muß bei der Gleichgewichtsgrenze der Druck auf die Wand mit der Normalen zu derselben einen Winkel einschließen, welcher gleich dem Reibungswinkel φ_1 zwischen der Erde und der Wand ist. Ist aber $\varphi_1 > \varphi$, so wird ein Gleiten auf einer der Wand unendlich benachbarten Ebene im Innern der Erdmasse eher eintreten, als ein Gleiten an der Wand, so dass in diesem Falle der Druck mit der Normalen zur Wand den Winkel φ bilden wird.

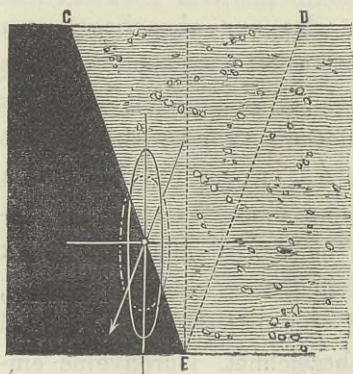
Denken wir uns nun zunächst einen oben durch eine Ebene, sonst aber unbegrenzten Erdkörper, wie wir in den Untersuchungen der vorigen Paragraphe vorausgesetzt haben. Denken wir uns ferner den Erdkörper durch eine Ebene, gegen deren Normale der Druck unter dem Winkel φ_1 gerichtet ist, in zwei Theile zerlegt und den einen Theil durch eine feste Wand ersetzt, so wird offenbar von dem Gleichgewichtszustande des verbliebenen Theiles nichts geändert. Ist die Lage der Terrainfläche gegeben, so sind hierdurch die Druckverhältnisse des nur oben begrenzten Erdkörpers vollständig bestimmt; somit wird auch die Lage der Wand, für welche am Gleichgewichtszustande nichts geändert wird, bestimmt sein. Hat die Wand wirklich diese Lage, so können die aufgestellten Formeln für den Druck auf eine beliebig gelegene Fläche ohne Weiteres in Anwendung gebracht werden. Allgemein wird man den Druck auf die Wand pro Flächeneinheit $R = Cz$ setzen können, wenn man mit z den Abstand des betreffenden Punktes vom obern Rande der Wand bezeichnet. Durch eine ein-

fache Integration ergibt sich hieraus leicht als der Gesamtdruck auf eine Wand mit der Höhe $z = \frac{1}{2} Cz^2$, und als Abstand des Mittelpunktes des Erddruckes vom obern Rande $= \frac{2}{3} z$.

Da im vorliegenden Falle die Lage der Gleitflächen an allen Punkten des Erdkörpers dieselbe ist, so können wir uns von einem bestimmten Punkte der Wand eine bis zur Terrainfläche reichende Ebene ausgehend denken, welche in allen ihren Punkten mit der einen Fläche zusammenfällt. Wir werden daher für den Druck auf der Wand dasselbe Resultat erhalten, wir mögen von den Elementen des Erdkörpers ausgehen, wie wir es im Vorstehenden factisch gethan haben, oder wir mögen den über der genannten Ebene liegenden Erdkörper im Ganzen untersuchen. Die von uns gegebene exacte Theorie wird also im vorliegenden Falle mit der gewöhnlichen Theorie, welche eine ebene Gleitfläche annimmt und die Reibung an der Wand berücksichtigt, in voller Uebereinstimmung sein.

Somit ist nachgewiesen, dass es für jede gegebene Neigung der Terrainfläche eine gewisse Neigung der Wand

Fig. 7.



gibt, für welche die gewöhnliche Theorie, welche die Reibung an der Wand berücksichtigt, richtige Resultate liefert. Es hat somit die exacte Theorie in der Theorie des Erddruckes eine ähnliche Bedeutung wie das Saint-Venant'sche Problem in der Elasticitätslehre.

Ist die Reibung an der Wand gleich oder größer als

die Reibung der Erde unter sich, so muß die Wand mit einer Gleitfläche zusammenfallen, jedoch so, dass die andere Gleitfläche nicht durch die Wand beseitigt, sondern dem Erdkörper erhalten bleibt. Bei horizontaler Terrainfläche muß die Wand mit der Verticalen den Winkel $45^\circ - \frac{1}{2} \varphi$ bilden (Fig. 7), allerdings eine Lage, die kaum vorkommen wird. Wenn die Terrainfläche unter dem Reibungswinkel φ geneigt ist, so muß die Wand eine verticale Lage haben (Fig. 8). Allgemein ist der Winkel ν der Wand gegen die Verticale bei dem Neigungswinkel ε der Terrainfläche bestimmt durch die Gleichung 44, nämlich

$$42) \quad 53) \quad \cos(2\nu - \varepsilon + \varphi) = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi}.$$

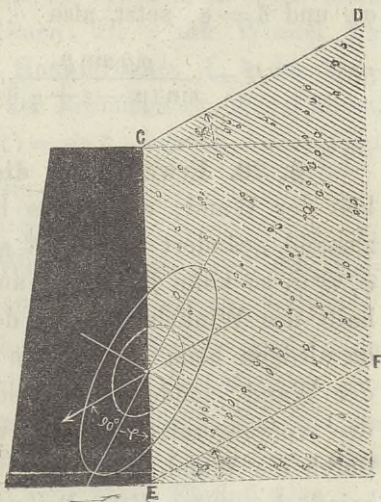
Der Druck E gegen die Wand ist bestimmt durch die Gleichungen 48 bis 50; derselbe ist hiernach pro Flächeneinheit

$$54) \quad E = gyk = gz \cos(\varphi + \nu),$$

wobei z die Tiefe des betreffenden Punktes unter der Terrainfläche, auf der Wand gemessen, bedeutet.

Ist die Reibung an der Wand kleiner als zwischen den Erdtheilchen unter sich, so muß die Wand noch mehr nach dem Erdkörper hin geneigt sein. Bei absolut glatter Wand würde dieselbe bei horizontaler Terrainfläche verticale Lage haben müssen. Ist die Terrainfläche unter dem Reibungswinkel

Fig. 8.



geneigt, so müßte die Wand unter dem Winkel $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ gegen die Verticale nach hinten geneigt sein. Allgemein ist der Winkel ν_1 , welchen die Wand mit der Gleitfläche bilden muß, bestimmt durch die Gleichung 27, nämlich

$$55) \quad \cos(2\nu_1 + \varphi - \varphi_1) = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi},$$

und zwar muß die Wand innerhalb des Winkels $90^\circ - \varphi$ der beiden Gleitflächen liegen, für welche Lage nur der positive Wert von $2\nu_1 + \varphi - \varphi_1$ Giltigkeit hat, so dass also durch die Wand die eine Gleitfläche beseitigt wird, weil sonst statt des Gleitens an der Wand ein Gleiten auf der Gleitfläche eintreten würde. Der Winkel μ der Wand mit der Verticalen ist nun

$$\mu = \nu - \nu_1.$$

Der Druck R auf die Wand ist bestimmt durch die Gleichung 29, wenn man darin für Q den verticalen Druck gy und $\delta = \varphi_1$ setzt, also

$$56) \quad R = \frac{gy \sin \mu}{\sin(\mu - \varepsilon + \varphi_1)} = \frac{gz \sin \mu \cos(\varepsilon - \mu)}{\sin(\mu - \varepsilon + \varphi_1)}.$$

§. 20. Erweiterung dieser Theorie. Die Zulässigkeit der Wand, ohne dass hierdurch der Gleichgewichtszustand geändert wird, läßt sich aber noch erweitern. Ist $\varphi_1 = \varphi$, so kann die Wand auch jede beliebige Lage außerhalb des Winkels $90^\circ - \varphi$ der beiden Gleitflächen haben, da alsdann beim Ausweichen der Wand kein Gleiten an der Wand, sondern auf beiden Gleitflächen eintritt, also der vorausgesetzte Gleichgewichtszustand der Erdmasse durch die Wand nicht gestört wird. Wenn z. B. die Terrainfläche unter dem Reibungswinkel φ geneigt ist, so

könnte die Wand jede beliebige nach vorn hängende Lage bis zur verticalen Lage haben.

Ist dagegen $\varphi_1 < \varphi$, so kann die Wand außerhalb des Winkels $90^\circ - \varphi$ der beiden Gleitflächen jede beliebige Lage haben, für welche der Winkel δ zwischen der Richtung des Druckes und der Normalen der afficirten Fläche $\leq \varphi_1$ ist. Durch die Gleichung 55, nämlich

$$\cos(2\nu_1 + \varphi - \varphi_1) = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi},$$

sind für ν_1 zwei Werte bestimmt; hier ist derjenige Wert giltig, für welchen $2\nu_1 + \varphi - \varphi_1$ negativ ist.

Der Druck auf die Wand, welcher hier unter nicht direct bekanntem Winkel erfolgt, ist durch die Gleichungen 37 bestimmt. Kommen verschiedene Lagen der Wand in Betracht, wie z. B. bei dem Drucke auf ein Gewölbe, so ist es am besten, die Druckellipse und Stellungsellipse nach den entwickelten Regeln zu construiren. Auch kann man in folgender Weise rechnen: Ist β der Winkel der Wand mit der Richtung des Hauptdruckes A , δ der Winkel, welchen der Druck mit der Normalen zur Wand bildet, so ist nach 28: $\sin \varphi (2\beta + \delta) = \sin \delta$, woraus leicht folgt

$$57) \quad \cot \delta = \frac{1 - \sin \varphi \cos 2\beta}{\sin \varphi \sin 2\beta}.$$

Der Druck R auf die Wand ist nun durch die Gleichung 56 bestimmt, wenn man δ für φ_1 setzt.

Die aufgestellte Theorie behält offenbar auch dann noch Giltigkeit, wenn die Erdmasse von zwei Wänden eingeschlossen, welche beide gegen die Gleitflächen die im Vorstehenden näher bezeichneten Lagen haben, ohne dass hierbei die Entfernung der Wände einen Einfluß übt.

Beispiel. Der Reibungswinkel der Erde unter sich und gegen die Wand sei $\varphi = \varphi_1 = 30$, und der Neigungswinkel der Terrainfläche $\varepsilon = 10^\circ$. Nach 53 wird $\log \cos(2\nu - \varepsilon + \varphi) = \log \sin 10^\circ - \log \sin 30^\circ = 0,54070 - 1$, $2\nu - \varepsilon + \varphi = 69^\circ 41'$, also $\nu = \frac{69^\circ 41' + 10^\circ - 30^\circ}{2} = 24^\circ 50'$, $\tan \nu = 0,4628$. Der Druck auf die Wand ist nach 54: $E = gz \cos(30^\circ + 24^\circ 50') = gz \cos 54^\circ 50' = 0,5759 gz$, oder bei der verticalen Höhe h unter der oberen Kante der Wand, da $z = h \sec(24^\circ 50') = 1,1016 h$ ist, $E = 0,6347 gh$. Der Druck auf die ganze Fläche von der Höhe h würde $= \frac{1}{2} \cdot 0,6347 gh^2 = 0,3174 gh^2$ sein.

Die Theorie gilt auch noch, wenn die Wand mit der Verticalen einen Winkel bildet, welcher $> 24^\circ 50'$ ist. Der Winkel, welchen die Achse A mit der Verticalen bildet, ist $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi - \nu = 45^\circ - 15^\circ - 24^\circ 50' = 5^\circ 10'$. Bildet nun z. B. die Wand mit der Verticalen den Winkel 40° , also mit der Achse den Winkel $45^\circ 10'$, so würde nach 57:

$$\cot \delta = \frac{1 - \sin 30^\circ \cos 90^\circ 20'}{\sin 30^\circ \sin 90^\circ 20'} = \frac{1 + 0,00291}{0,5000} = 2,0058.$$

$$\delta = 26^\circ 30'.$$

Nach 56 wird nun

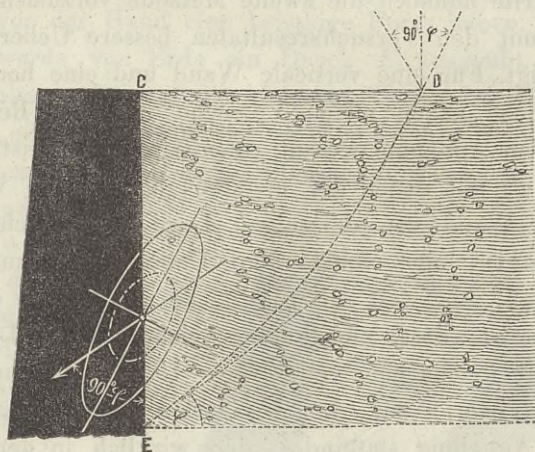
$$R = \frac{gz \sin 40^\circ \cos(10^\circ - 40^\circ)}{\sin(40^\circ - 10^\circ + 26^\circ 30')} = 0,6675 gz,$$

oder, weil $z = h \sec 40^\circ = 1,3054 h$ ist, $R = 0,8715 gh$. Der Druck auf die ganze Fläche von der Höhe h würde also $= \frac{1}{2} \cdot 0,8715 gh^2 = 0,4358 gh^2$ sein.

§. 21. Behandlung anderer Fälle. Hat die Wand eine Lage, welche den in den beiden vorigen Paragraphen behandelten Fällen nicht entspricht, so bietet die exacte Behandlung größere Schwierigkeiten, weil die Differenzialgleichungen 2 in Verbindung mit der Gleichung 31 im Allgemeinen nicht integrirbar sind. Die Hauptachsen werden an der Wand jedenfalls eine solche Lage haben, dass die Wand einer Fläche entspricht, mit deren Normalen der entsprechende Druck den Winkel φ_1 bildet. Ist $\varphi_1 = \varphi$, so wird die Wand eine Gleitfläche sein, die andere Gleitfläche also mit der Wand den Winkel $90^\circ - \varphi$ bilden (Fig. 9). In der Nähe der Terrainfläche dagegen werden die Haupt-

achsen nahezu diejenige Lage haben, welche der seitlich unbegrenzten Erdmasse entspricht. Die Gleitfläche kann daher hier auf keinen Fall eben sein, so dass die gewöhnliche Theorie falsche Resultate geben muß. Bei verticaler Wand und horizontaler Terrainfläche (Fig. 9) würde für

Fig. 9.



$\varphi_1 = \varphi$ die Gleitfläche mit der Horizontalen am unteren Ende den Winkel φ , am oberen Ende den Winkel $45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$ bilden. Wir müssen daher in diesem Falle vor der Hand mit einer Näherungstheorie vorlieb nehmen, die nach folgenden Principien durchgeführt werden könnte:

1. Man nimmt die Theorie des unbegrenzten Erdkörpers auch als richtig an, wenn eine Wand vorhanden ist, sieht also von der Bedingung, welche die Richtung des Druckes an der Wand erfüllen muß, ab. Der Winkel, welchen der Druck auf die Wand mit der Normalen zu derselben bildet, liegt hierbei zwischen 0 und φ .

2. Man verläßt diese Theorie ganz und bleibt bei der gewöhnlichen Theorie, welche eine ebene Gleitfläche annimmt und voraussetzt, dass der Druck auf die Wand mit der Normalen derselben den Winkel φ_1 bildet.

Die erste Annahme ist allerdings sehr verführerisch, weil sie gegenüber der zweiten sehr einfache Resultate gibt. Indeß dürfte dennoch die zweite Methode vorzuziehen sein, weil sie mit den Versuchsergebnissen bessere Uebereinstimmung zeigt. Für eine verticale Wand und eine horizontale Terrainfläche haben meine Versuche mit den Resultaten der zweiten Annahme wesentlich bessere Uebereinstimmung gezeigt, als mit denen der ersteren, obwohl die verticale Lage der Wand von derjenigen Lage, bei welcher nach dem Gesagten eine vollständige Uebereinstimmung stattfinden muß, sehr weit entfernt ist. Je steiler aber die Terrainfläche ist, desto mehr nähert sich diejenige Lage der Wand, für welche eine vollständige Uebereinstimmung der genauen Theorie mit der genäherten Theorie nach der zweiten Annahme stattfindet, den wirklich in der Praxis üblichen Lagen der Wand. Man kann daher überzeugt sein, dass diese Theorie in allen Fällen eine vollständig genügende Genauigkeit gewähren wird. Natürlich würde diese Theorie auch bei gebrochener oder gekrümmter Terrainfläche in Anwendung zu bringen sein.

IV. Kapitel. Allgemeine Theorie unter der Annahme einer ebenen Gleitfläche.

§. 21. Princip. Wir haben am Schlusse des vorigen Kapitels gesehen, dass der Schwierigkeit wegen, welche die Integration der Differenzialgleichungen des Erddruckes im

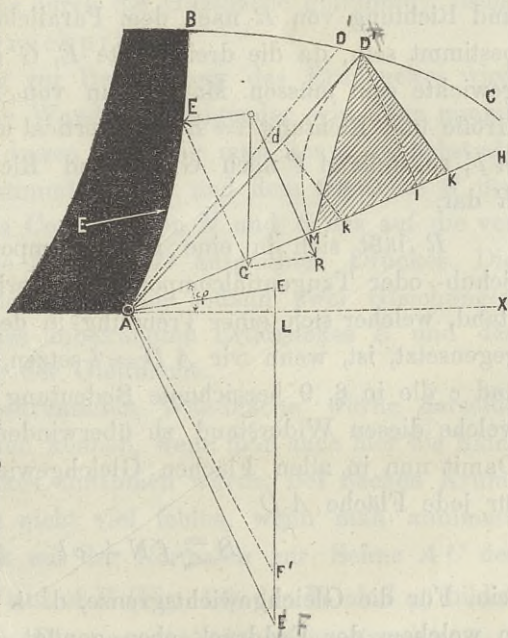
Allgemeinen bieten, nichts übrig bleibt, als zur Hypothese einer ebenen Gleitfläche zu greifen. Es kommt nun zunächst auf die Aufstellung des hierbei zu befolgenden Principes an. Wir gehen hierbei ganz in Uebereinstimmung mit den für die exacte Theorie befolgten Principien vor.

Die Erdmasse sei seitlich durch eine Wand AB (Fig. 10), und oben durch die Terrainfläche BC begrenzt; beide mögen vor der Hand eine beliebige Form haben. Auf die Wand werde von Erde ein Druck E ausgeübt, welcher als Resultante der auf die kleinsten Theile der Wand ausgeübten oder der Elementardrücke anzusehen ist. In Uebereinstimmung mit dem in §. 19 Gesagten wirken die Elementardrücke

auf die Wand gegen die Normale derselben unter dem Reibungswinkel φ_1 zwischen der Erde und der Wand; nur in dem Falle, dass dieser

Reibungswinkel größer sein sollte, als der Reibungswinkel φ zwischen Erde und Erde, ist $\varphi_1 = \varphi$ anzunehmen. Bei ebener Wand wird natürlich auch der Gesamt-

Fig. 10.



druck E unter diesem Winkel φ_1 gegen die Normale der Wand wirken, so dass hier seine Richtung als direct gegeben angesehen werden kann.

Wir denken uns nun vom Erdkörper von einem beliebigen Punkte A der Wand aus ein Prisma ABD unter ebener Fläche AD getrennt. Auf dieses Prisma wirken drei Kräfte: Der dem Erddruck E gleiche, von der Wand ausgeübte Druck, das Gewicht G des Prismas und der von der unterhalb der Fläche AD liegenden Erdmasse ausgeübte Druck R . Bei veränderlicher Lage von AD bleibt E constant, während sich G und R verändern. Wird die Fläche AD angenommen, so ist hierdurch G bestimmt; bei gegebenem E würde hierdurch also auch die Größe und Richtung von R nach dem Parallelogramm der Kräfte bestimmt sein, da die drei Kräfte E , G und R im Gleichgewichte sein müssen. Macht man von A aus AE nach Größe und Richtung $= E$, EF vertical und $= G$ und zieht AF , so stellt AF nach Größe und Richtung den Druck R dar.

R läßt sich in eine Normalcomponente N und eine Schub- oder Tangentialcomponente S zerlegen. Der Widerstand, welcher sich einer Trennung in der Fläche AD entgegensetzt, ist, wenn wir $AD = l$ setzen, $fN + cl$, wenn f und c die in §. 9 bezeichnete Bedeutung haben; die Kraft, welche diesen Widerstand zu überwinden strebt, ist $= S$. Damit nun in allen Flächen Gleichgewicht stattfindet, muß für jede Fläche AD

$$S \overline{=} fN + cl$$

sein. Für die Gleichgewichtsgrenze, d. i. für den Zustand, in welchem der Erddruck eben genügt, dem Widerstand,

welchen die Wand bietet, das Gleichgewicht zu halten, muß für irgend eine Fläche offenbar $S = fN + cl$ oder

$$58) \quad \frac{fN + cl}{S} = 1$$

sein. Wir nennen die Fläche, für welche diese Bedingung erfüllt ist, wie früher, die Gleitfläche.

Für jede andere Fläche mit Ausnahme der Wandfläche, muß alsdann natürlich $S < fN + cl$ oder $\frac{fN + cl}{S} > 1$ sein. Da aber für die Gleitfläche $\frac{fN + cl}{S} = 1$ sei, so folgt, dass für die Gleitfläche

$$59) \quad \frac{fN + cl}{S} \text{ zu einem Minimum}$$

werden muß. Das durch die Gleitfläche getrennte Prisma nennen wir das Druckprisma.

Der Vorgang zur Bestimmung des Erddruckes wird nun für eine ebene Wandfläche folgender sein. Man nimmt den Erddruck E , dessen Richtung man kennt, zunächst als unbekannt an, bestimmt aus E und dem Gewichte G des Prismas ABD die Componenten N und S des auf die vor der Hand beliebige Fläche AD ausgeübten Druckes. Die Bedingungen 59 und 58 geben sodann zwei Gleichungen zur Bestimmung des unbekanntes Erddruckes E und der unbekanntes Lage der Gleitfläche.

Bei einer gekrümmten Wandfläche würde derselbe Weg befolgt werden können, wenn man auch hier die Richtung des Erddruckes annehmen würde. Bei flachen Krümmungen wird man nicht viel fehlen, wenn man annimmt, dass der Erddruck mit der Normalen zur Sehne AC des unteren $\frac{2}{3}$ der Wand AB (Fig. 13) den Winkel φ_1 bildet. Auf den genaueren Weg werden wir später eingehen.

§. 22. Anwendung auf den Fall, dass keine Cohäsion vorhanden ist. Einer speciellen Behandlung wollen wir nur den Fall unterziehen, dass keine Cohäsion vorhanden oder $c = 0$ ist. Alsdann wird $\frac{fN + cl}{S} = f \frac{N}{S}$. Bezeichnen wir den Winkel, welchen der Druck R mit der Normalen zur Fläche AD bildet, mit δ , so ist $\frac{N}{S} = \cot \delta$. Die Bedingungen 59 und 58 gehen daher jetzt über in

$$60) \quad \delta \text{ zu einem Maximum.}$$

$$61) \quad \delta = \varphi.$$

Die weitere Durchführung kann nun in analytischer oder in rein geometrischer Form oder in einer combinirten Form erfolgen. Wir wollen hier nur auf die rein geometrische Behandlung eingehen, da diese im vorliegenden Falle in der einfachsten Weise zum Ziele führt.

§. 23. Lage der Gleitfläche. Wir drehen nun die Fläche AD (Fig. 10) um A in die unendlich benachbarte Lage AD' und machen auf der durch E gehenden Verticalen FF' gleich dem Gewichte des unendlich kleinen Prisma's ADD' . Die Richtung der Normalen von AD ändert sich hierbei um den Winkel DAD' , die Richtung des Druckes um den Winkel δ zwischen dem Drucke und der Normalen also um den Winkel $FAF' - DAD'$. Da aber dieser Winkel nach 60 zu einem Maximum werden soll, so muß die Aenderung Null sein; demnach ist

$$\sphericalangle FAF' = \sphericalangle DAD'.$$

Nun aber ist nach der Construction

$$\text{Fläche } ABD : \triangle ADD' = EF : FF'.$$

Ferner verhält sich aber auch

$$\triangle AEF : \triangle AFF' = EF : FF';$$

demnach verhält sich auch

$$\text{Fläche } ABD : \triangle AEF = \triangle ADD' : \triangle AFF'.$$

Wählen wir den Kräftemaßstab so, dass $AF = AD$ wird, so ist $\triangle ADD' = \triangle AFF'$, weil ja $\sphericalangle DAD' = \sphericalangle FAF'$ ist; nach der vorigen Proportion muß daher sein:

$$\text{Fläche } ABD = \triangle AEF.$$

Nach der Bedingung 61 muß nun ferner der Winkel zwischen AF und der Normalen von $AD = \varphi$ oder $\sphericalangle FAD = 90^\circ + \varphi$ sein. Zieht man nun eine Gerade AH , welche gegen die Horizontale AK unter dem Reibungswinkel φ geneigt ist, so ist $\sphericalangle DAH + \sphericalangle FAX = \sphericalangle FAD - \varphi = (90^\circ + \varphi) - \varphi = 90^\circ$, also $\sphericalangle FAX = 90^\circ - \sphericalangle DAH$. Da aber auch $\sphericalangle AFE = 90^\circ - \sphericalangle DAH$ ist, so ist

$$\sphericalangle AFE = \sphericalangle DAH.$$

Fällt man von D auf AH eine Senkrechte DJ , so ist, da $AD = AF$, $\sphericalangle DAJ = \sphericalangle AFL$ ist, $\triangle ADJ \cong \triangle FAL$, also $DJ = AL$. Macht man nun ferner $\sphericalangle JDK = \sphericalangle EAX$, so wird auch $\triangle DJK \cong \triangle AEL$, somit auch $\triangle ADK \cong \triangle FAE$, also auch

$$\text{Fläche } ABD = \triangle ADK,$$

woraus sofort folgender wichtige Satz folgt:

Ist AD die Gleitfläche und zieht man von D aus bis zur natürlichen Böschungsfläche AH eine Gerade DK , welche gegen die Normale DJ von AH unter demselben Winkel geneigt ist, wie der Erddruck gegen die Horizontale, so ist die Querschnittsfläche ABD des Druckprisma's

gleich der Fläche des Dreieckes ADK oder die Gleitfläche AD halbirt die Fläche $ABDK$.

Dieser interessante Satz wurde zuerst auf analytischem Wege vom Professor Dr. G. Rebhann gefunden.

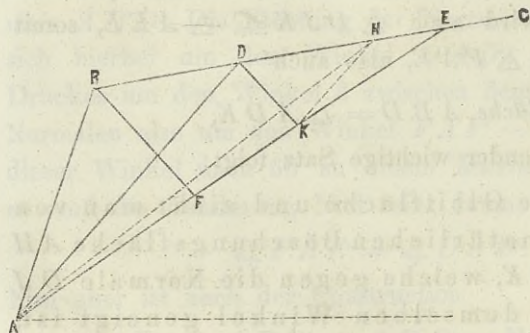
Durch diesen Satz ist die Lage der Gleitfläche oder des Druckprisma's in jedem Falle in sehr einfacher Weise bestimmt.

Ist die Wand eben und unter dem Winkel β gegen die Verticale geneigt, so ergibt sich leicht, dass $\sphericalangle EAX = \sphericalangle JDK = \varphi_1 - \beta$ ist.

Für bestimmte Fälle der Form der Terrainfläche lassen sich nun aus diesem Lehrsatz für die Lage der Gleitfläche analytische Ausdrücke, sowie geometrische Constructionen ableiten.

§. 24. Fall einer ebenen Wand und einer ebenen Terrainfläche. Wir setzen jetzt voraus, dass die Wand AB

Fig. 11.



eben und die Erdmasse oben durch eine ebene Fläche BC begrenzt sei (Fig. 11). Wir ziehen zu DK eine Parallele BF und zu AD eine Parallele KH . Als-

dann ist $\triangle ADH = \triangle ADK$. Da nun nach dem im vorigen §. aufgestellten Satze $\triangle ADK = \triangle ABD$ ist,

so ist auch $\triangle ADH = \triangle ABD$, also $BD = DH$. Nun verhält sich

$$AK : AE = DH : DE,$$

oder, weil $DH = BD$ ist

$$AK : AE = BD : DE.$$

Nun aber verhält sich ferner

$$BD : DE = FK : KE,$$

also auch

$$AK : AE = FK : KE.$$

Setzt man $FK = AK - AF$, $KE = AE - AK$, so wird

$$AK : AE = AK - AF : AE - AK.$$

Die Gleichsetzung des Productes der äußeren und inneren Glieder gibt $AK \cdot AE - AK^2 = AK \cdot AE - AF \cdot AE$ oder

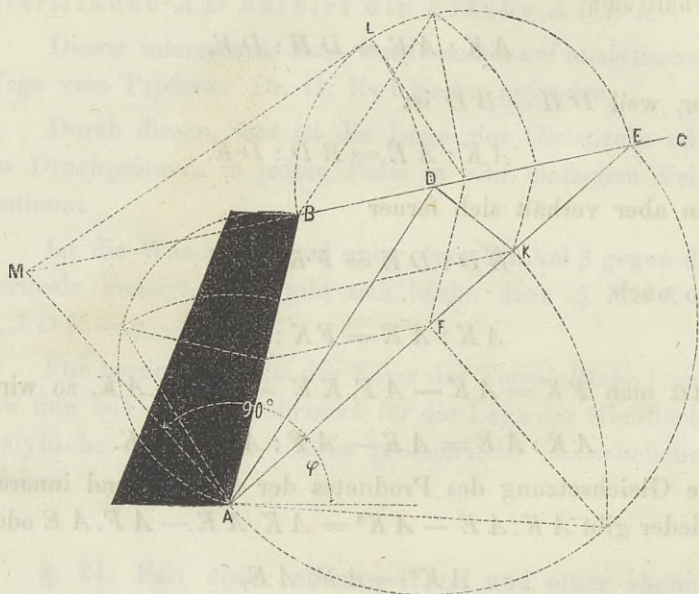
$$AK^2 = AF \cdot AE,$$

d. h. die Strecke AK ist die mittlere Proportionale zwischen den Strecken AF und AE .

Aus diesem Satze ergeben sich leicht verschiedene Constructionen der Gleitfläche, auf deren Besprechung wir nicht näher eingehen wollen. Wir haben aber in Figur 12 vier verschiedene von Poncelet und Rebhann angegebene Constructionen dargestellt.

Die Constructionen lassen sich leicht auch auf den Fall ausdehnen, wenn die obere Begrenzung eine gebrochene Gerade ist; man hat alsdann zunächst nur nach bekannten geometrischen Constructionen die Fläche ABD in ein Dreieck mit Beibehaltung der Seite AD zu verwandeln, jedoch so, dass die obere Seite dieses Dreiecks in die Richtung der

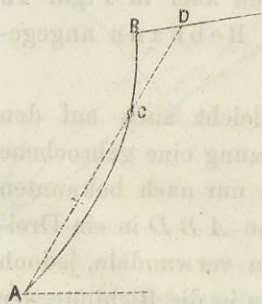
Fig. 12.



Polygonseite fällt, in welcher (muthmaßlich) der Punkt D liegt.

Eine flache Curve AB (Fig. 13) wird durch eine Gerade AD ausgeglichen, welche durch einen Punkt C der Curve geht, der um $\frac{1}{3}$ der Curvenlänge von B entfernt ist.

Fig. 13.



Die Constructionen, welche sich auf bestimmte Begrenzungen beziehen, kommen wir noch im geschichtlichen Theile zu sprechen.

§. 25. Grösse des Erddruckes. In Fig. 10 repräsentirt EF das Gewicht des Druckprisma's, AE den Erddruck oder es verhält sich

$$\begin{aligned} E : G &= AE : EF \\ &= DK : AK. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Fläche ABD oder ADK mit F , so würde $G = gF$ sein, also

$$E = gF \frac{DK}{AK}.$$

Würde man $Ak = gF$ machen und durch k eine Parallele kd zu KD ziehen, so würde $\frac{dk}{Ak} = \frac{DK}{AK}$, also $E = dk$.

Macht man $KM = KD$, so verhält sich $\triangle KDM : \triangle ADK = KM : AK = DK : AK = E : G$, also

$$E = G \frac{\triangle KDM}{\triangle ADK}$$

oder, da $G = g \cdot \triangle ADK$ ist,

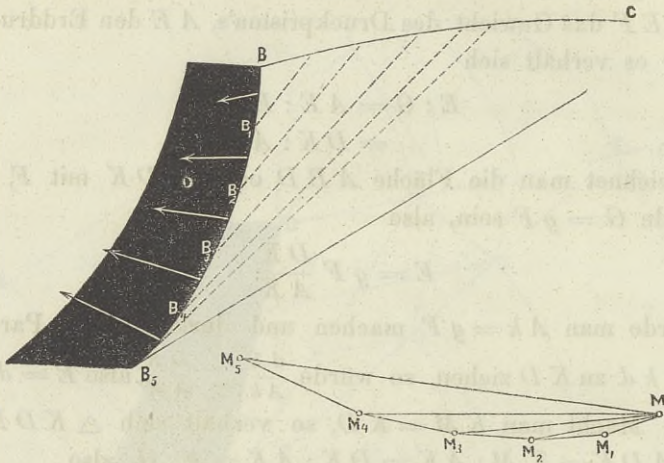
$$E = g \cdot \triangle KDM.$$

Durch diese Construction, welche ebenfalls zuerst von Rebhann angegeben wurde, gelangt namentlich das Verhältniß des Erddruckes zum Gewichte des Druckprisma's in einfacher Weise zur klaren Anschauung.

§. 26. Druck auf eine gekrümmte Wand. Bei gekrümmten Wänden bleibt nichts übrig, als die Drücke auf die Wandelemente in Betracht zu ziehen, da man nur von diesen die Richtung kennt, indem man weiss, dass sie unter dem Reibungswinkel gegen die Normale der Wand wirken müssen.

Stellt man die auf die Elemente $BB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$ (Fig. 14) wirkenden Drücke nach Grösse und Richtung

Fig. 14.



durch aneinander gereihete Geraden MM_1 , M_1M_2 , M_2M_3 , ... dar, so stellen die von M ausgehenden Strahlen MM_1 , MM_2 , MM_3 , ... offenbar die auf die Gesamtfächen BB_1 , BB_2 , BB_3 , ... wirkenden Drücke nach Größe und Richtung dar. Für diese gilt aber die im Vorstehenden gegebene Theorie.

Leider aber läßt sich hier nur ein Näherungsverfahren in Anwendung bringen. Gesetzt, man habe den auf die Fläche BB_3 wirkenden Druck MM_3 bereits bestimmt und wolle nun den auf die kleine Fläche B_3B_4 wirkenden Druck M_3M_4 , sowie den auf die Gesamtfäche BB_4 wirkenden Druck MM_4 bestimmen, so ist zunächst die Richtung von M_3M_4 bekannt, welche mit der Normalen von B_3B_4 den Reibungswinkel φ_1 bildet. Man nimmt sich nun zunächst die Länge von M_3M_4 (nach Maaßgabe der vorhergehenden Längen) an und erhält hierdurch auch die Richtung von MM_4 . Jetzt kann man ganz nach §. 23 bis 25

die dem Punkte B_4 entsprechende Gleitfläche, sowie die Größe des auf $B B_4$ wirkenden Druckes $M M_4$ bestimmen. Da man jetzt den Punkt M_4 , so wie auch die Richtung von $M M_4$ genauer kennt, so kann man nöthigenfalls eine nochmalige Construction vornehmen.

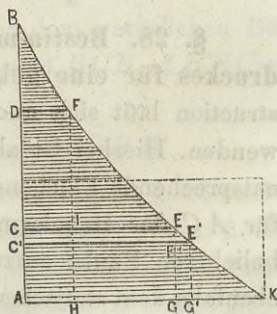
Theilt man die Wand in mehrere einzelne Theile, die man als gerade ansehen kann, so kann man in dieser Weise successive die auf die einzelnen Theile wirkenden Drücke bestimmen.

Eine analytische Behandlung würde nach demselben Principe in allgemeinen Ausdrücken leicht durchzuführen sein; sie führt aber zu nicht einfachen Gleichungen, die ebenfalls nur durch eine Näherungsmethode aufzulösen sind, so dass der gezeigte grafische Weg vorzuziehen ist.

§. 27. Bestimmung des Angriffspunktes des Erddruckes bei ebener Wand. Der auf eine beliebige Fläche wirkende Erddruck ist als Resultante der auf die einzelnen Elemente der Fläche wirkenden Drücke zu betrachten. Es kommt nur darauf an, den Mittelpunkt dieser Elementardrücke oder den Angriffspunkt der Resultante zu bestimmen

Wir tragen zu diesem Zwecke den Druck auf eine beliebige Fläche BC (Fig. 15) als Ordinate CE senkrecht zur Wandfläche auf. Ist DF ebenso der Druck auf die Fläche BD , so ist der auf die Fläche CD wirkende Druck offenbar $= CE - DF = EJ$. Ebenso ist der auf den unendlich schmalen Flächenstreifen CC' wirkende Druck die Differenz $C'E' - CE = E'E''$. Das Moment dieses Druckes in Beziehung auf A ist also $E'E'' \cdot AC \cos \varphi' = \text{Fläche } E'E'G'G \cdot \cos \varphi'$.

Fig. 15.



Hieraus folgt nun sofort, dass das statische Moment des auf die Fläche CD wirkenden Druckes in Beziehung auf A gleich $\text{Fläche } EFHG \cdot \cos \varphi'$ ist. Die Division durch den Normaldruck selbst, d. i. durch $GH \cos \varphi'$, gibt den Abstand des Angriffspunktes von A . Hieraus folgt, dass, wenn man die Fläche EFJ in ein Rechteck mit der Basis EJ verwandelt, die Höhe desselben gleich dem Abstände des Angriffspunktes von C ist.

Der Abstand des Angriffspunktes des auf die ganze Fläche AB wirkenden Druckes von A ist sonach gleich der Höhe eines Rechteckes, dessen Basis $= AK$ und dessen Fläche gleich der Fläche $ABFEK$ ist.

Ist die Terrainfläche eine von B ausgehende Ebene, so ist der Erddruck auf eine Fläche BC proportional dem Quadrate von BC , also die Curve $BFEK$ eine Parabel, deren Scheitel in B liegt. Demnach ist $\text{Fläche } ABFEK = \frac{1}{3} \cdot AK \cdot AB$, also nach dem Vorstehenden der Abstand des Angriffspunktes von $A = \frac{1}{3} AB$.

Die angegebene Methode wurde, soviel uns bekannt, zuerst von Poncelet angewendet.

§. 28. Bestimmung des Angriffspunktes des Erddruckes für eine gekrümmte Wand. Eine gleiche Construction läßt sich auch bei einer gekrümmten Wand anwenden. Hierbei ist aber für $E'E''$ (Fig. 15) der auf das entsprechende Flächenelement wirkende Elementardruck und für AC der Hebelarm desselben in Beziehung auf einen beliebigen Punkt aufzutragen. Die Fläche würde alsdann ebenfalls dem statischen Momente des gesammten Erddruckes

oder die Höhe des flächengleichen Rechtecks, dessen Basis gleich dem Gesamtdrucke

(hier allerdings nicht = AK), den Hebelsarm des Erddruckes in Beziehung auf den gewählten Momentenpunkt darstellen.

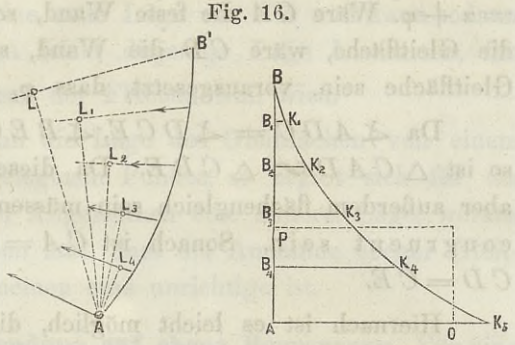


Fig. 16.

Man mache also in Fig. 16 AB, AB_1, AB_2, \dots bezüglich gleich den Hebelsarmen $AL, AL_1, AL_2, \dots, B_1K_1, B_2K_2, B_3K_3, \dots$ gleich den Bogenlängen $MM_1, MM_1M_2, MM_1M_2M_3, \dots$ (Fig. 14) und endlich $AO = MM_5$ Verwandelt man jetzt die Figur ABK_5 in ein Rechteck mit der Basis AO , so ist die Höhe AP desselben gleich dem Hebelsarme des auf $A'B'$ wirkenden Druckes.

§. 29. Gleitflächen in einem unbegrenzten Erdkörper. Es ist immer möglich, von einem Punkte C eines nur oben begrenzten, sonst aber allseitig unbegrenzten Erdkörpers zwei Ebenen CA und CB (Fig. 17) derart zu legen, dass, wenn CD und CE unter dem natürlichen Böschungswinkel geneigt und $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCE, \sphericalangle BEC = \sphericalangle ACD$ gemacht wird,

$$\triangle CAD = \text{Fläche } CAB = \triangle CBE$$

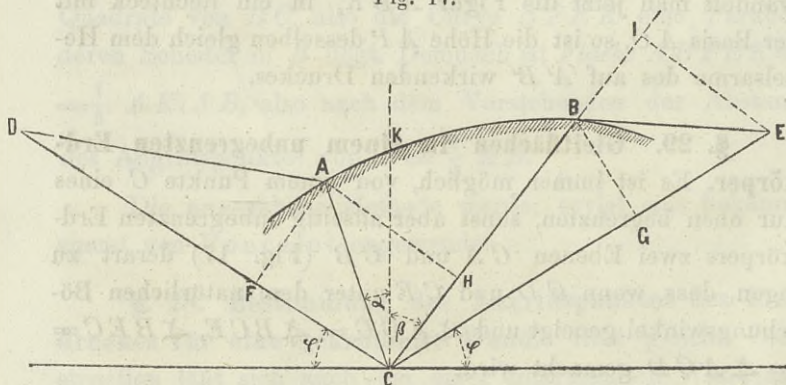
wird. Alsdann stellen CA und CB nach dem im §. 23 nachgewiesenen Satze zwei Gleitflächen dar. Denn sind α, β die Winkel, welche CA, CB mit der Verticalen bilden und ist AF und BG senkrecht auf bezüglich CD und CE , so

ist $\sphericalangle DAF = 90^\circ - \sphericalangle ADF = \beta + \varphi$, ebenso $\sphericalangle EBG = \alpha + \varphi$. Wäre CA die feste Wand, so würde also CB die Gleitfläche, wäre CB die Wand, so würde CA die Gleitfläche sein, vorausgesetzt, dass $\varphi_1 = \varphi$ zu setzen ist.

Da $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DCE$, $\sphericalangle BEC = \sphericalangle ACD$ ist, so ist $\triangle CAD \simeq \triangle CBE$. Da diese beiden Dreiecke aber außerdem flächengleich sein müssen, so müssen sie congruent sein. Sonach ist $CA = BE$, $CB = AD$, $CD = CE$.

Hiernach ist es leicht möglich, die Lage der Gleitflächen durch Näherung zu construiren. Man nimmt nämlich CA nach Gutdünken an, trägt an CE in einem beliebigen Punkte den Winkel ACD an, trägt auf dem so erhaltenen Schenkel eine Strecke auf, welche $= CA$ ist und zieht

Fig. 17.



durch den so erhaltenen Punkt eine Parallele zu CE , wodurch sich in der Terrainfläche der Punkt B ergibt; somit sind nun auch die beiden congruenten Dreiecke CAD und CBE bestimmt. Man bestimmt den Flächeninhalt derselben, sowie den Flächeninhalt der Fläche CAD und die

sein. Fällt man von A und E auf CB die Senkrechten AH und EJ , so muß demnach $AH = EJ$ sein; da aber auch $CA = BE$ ist, so ist $\triangle CAH \cong \triangle BEJ$, also $\sphericalangle ACB = \sphericalangle JBJ$, d. i. als Außenwinkel des Dreiecks $CBE = \sphericalangle BCA + \sphericalangle BEC$ oder

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCE + \sphericalangle ACE.$$

Da die Summe aller dreier Winkel $= 180^\circ - 2\varphi$ ist, so ist

$$\sphericalangle ACB = 90^\circ - \varphi,$$

oder die beiden Gleitflächen schließen mit einander einen Winkel ein, welcher das Complement des Reibungswinkels ist.

Nach §. 24 ist $AB : BN = CE : CN$ und $AB : AM = CD : CM$, woraus, da $CE = CD$ ist, sofort folgt

$$AM : BN = CM : CN.$$

Da $\sphericalangle MCK = \sphericalangle NCK$ ist, so läßt sich sofort nachweisen, dass sich auch

$$KM : KN = CM : CN$$

verhält. Demnach verhält sich auch $AM : BN = KM : KN$ oder

$$AM : KM = BN : KN.$$

Hieraus aber folgt sofort, dass, wenn man zu AC und BC bezüglich durch M und N Parallelen zieht, dieselben die Verlängerung von CK in ein und demselben Punkte P schneiden müssen. Der Winkel MPN ist $= 90^\circ - \varphi$. Legt man durch die Punkte M, N, P einen Kreis, so ist der Centriwinkel $MON = 2(90^\circ - \varphi) = 180^\circ - 2\varphi$, also $\sphericalangle NMO = \sphericalangle MNO = \varphi$. Hieraus ergibt sich sofort folgende Construction: Man trage an MN in M und N den

Winkel φ an; aus dem Durchschnittspunkte O der beiden erhaltenen Schenkel schlage man durch die Punkte M, N einen Kreis, welcher die durch C gehende Verticale in P schneidet. Alsdann sind die Gleitflächen den Geraden PM und PN parallel.

Bezeichnet man die Winkel, welche CA und CB mit der Verticalen bilden, mit α und β , den Neigungswinkel der Terrainfläche gegen die Horizontale mit ε , so läßt sich nach dem Vorigen leicht die Gleichung ableiten: $\sin \alpha \cos(\alpha + \varepsilon) = \sin \beta \cos(\beta + \varepsilon)$. Setzt man darin $\beta = 90^\circ - (\varphi + \alpha)$, so ergibt sich leicht, entsprechend dem §. 12:

$$\begin{cases} \cos(2\alpha + \varphi - \varepsilon) = + \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi}, \\ \cos(2\beta + \varphi + \varepsilon) = - \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi}, \end{cases}$$

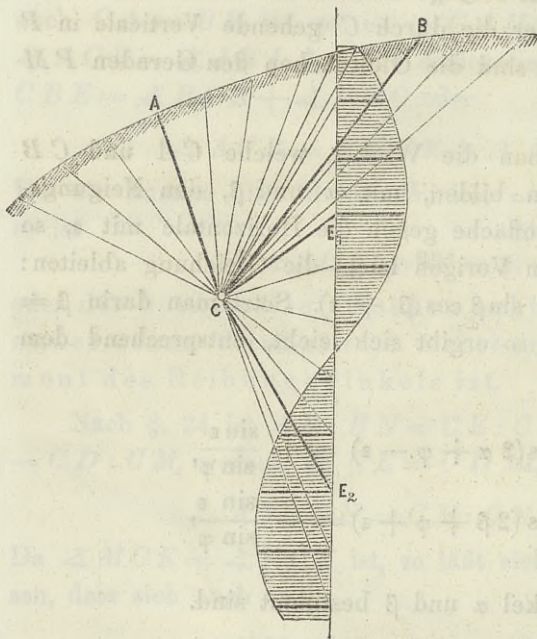
wodurch die Winkel α und β bestimmt sind.

§. 31. Druck auf eine beliebige Fläche im unbegrenzten Erdkörper. Ist nun F die Fläche ABC (Figur 17), so ist nach dem Früheren der Druck E_1 auf die Fläche $CA = Fg \frac{BE}{CE} = Fg \frac{CA}{CD}$ und der Druck E_2 auf die Fläche $CB = Fg \frac{AD}{CD} = Fg \frac{CB}{CE}$, oder wenn wir $CA = a$, $CB = b$, $CE = CD = c$ setzen,

$$E_1 = Fg \frac{a}{c}, \quad E_2 = Fg \frac{b}{c},$$

also $E_1 : E_2 = a : b$. Stellen nun in Fig. 19 CE_1 und CE_2

Fig. 19.



nach Größe und Richtung diese beiden Drücke dar, so entspricht $E_1 E_2$ dem Gewichte des Prisma's ABC . Nimmt man jetzt verschiedene Ebenen an, und nimmt auf $E_1 E_2$ eine der Theilung der Fläche ACB durch die angenommenen Ebenen proportionale Theilung vor, so stellen die von C nach den Theilpunkten gehenden

Strahlen nach Größe und Richtung die Drücke auf diese Ebenen dar. Hiedurch erfährt man auch den Winkel δ , unter welchem eine beliebige Ebene afficirt wird; in der Figur ist die Tangente dieses Winkels durch eine zu $E_1 E_2$ senkrechte Ordinate grafisch dargestellt.

§. 32. Grenzen der Giltigkeit der in §. 21 bis 25 entwickelten Theorie. Die in §. 29 bis 31 angestellte Untersuchung hatte hauptsächlich den Zweck, zu ermitteln, ob die in §. 21 bis 25 aufgestellte Theorie eine allgemeine Giltigkeit habe oder nicht. Es läßt sich nämlich genau, wie in §. 19 und 20 schließen, dass eine Ebene innerhalb beider

Gleitflächen durch eine Wand ersetzt werden kann, für welche der Reibungswinkel φ_1 gleich ist dem Winkel δ , welchen der diese Ebene afficirende Druck mit der Normalen derselben bildet. Der Druck ergibt sich alsdann in voller Uebereinstimmung mit der in §. 21 bis 25 aufgestellten Theorie.

Es kann aber auch, ohne dass am statischen Zustande etwas geändert wird, die Wand jede Lage außerhalb beider Gleitflächen haben, für welche der Winkel δ gleich ist dem Reibungswinkel φ_1 , oder kleiner als derselbe. Ein Gleiten an der Wand tritt im letzteren Falle nicht mehr ein, sondern nur ein Gleiten auf den beiden innerhalb des Erdkörpers gelegenen Gleitflächen. Der Druck auf die Wand kann dann nicht mehr nach §. 21 bis 25 bestimmt werden, weil jetzt der Winkel, unter welchem der Druck gegen die Wand wirkt, nicht mehr direct gegeben ist. Es muß vielmehr die Bestimmung des Druckes nach §. 31 erfolgen.

Bei den Futtermauern tritt dieser Fall allerdings kaum ein, weil hier die hintere Fläche nur wenig von der Verticalen abweicht; (wohl aber kann er bei den Gewölben in Frage kommen).

II. Abschnitt.

Kurze Geschichte der Theorie des Erddruckes.

§. 33. Einleitung. In der Theorie des Druckes der Erde auf eine dieselbe begrenzende Wand kann man zwei verschiedene Methoden befolgen; nach der einen nimmt man beim Nachgeben des Hindernisses ein Abrutschen eines endlichen Erdprismas an, nach der anderen geht man von den Gleichgewichtsbedingungen der Erdelemente aus und gelangt zum Gesamtdrucke durch eine Integration. Die erste Methode ist die bisher allein befolgte; allgemein ist hiebei die Gleitfläche als Ebene vorausgesetzt. Diese Methode läßt sich hinsichtlich der speciellen Behandlung in zwei Methoden theilen: Die I. Methode nimmt die Lage der Gleitfläche à priori an, gewöhnlich unter dem natürlichen Böschungswinkel. Die II. Methode dagegen bestimmt die Gleitfläche derart, dass entweder der Erddruck ein Maximum wird oder das Abrutschen möglichst leicht erfolgt. Während man hierbei früher den Druck meistentheils senkrecht zur Wand annahm, ist man jetzt zu der Ueberzeugung gelangt, dass der Druck im Allgemeinen nicht senkrecht zur Wand wirkt.

I. Kapitel. Aeltere Theorien.

§. 34. Theorie unter Annahme eines Abrutschens auf der natürlichen Böschung; Zerlegung des Gewichtes

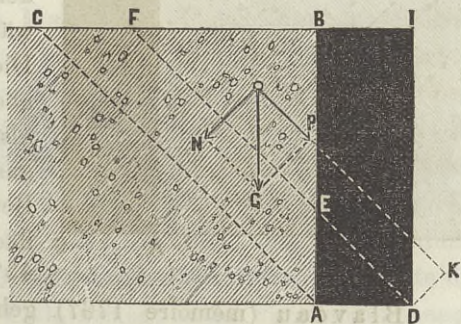
in eine Parallel- und Normalcomponente ohne Berücksichtigung der Reibung, begründet durch Bullet.

Die ersten Regeln über die Stärke der Futtermauern hat wohl der französische General Vauban (gegen 1687) gegeben (*Traité de la défense des places*). Es ist indeß fraglich, ob sich Vauban hierbei durch theoretische Betrachtungen leiten ließ; wenigstens sind dieselben nicht bekannt geworden.

Eine primitive Theorie gibt Bullet (*Traité d'architecture pratique*, 1691). Er nimmt an, dass sich ein Prisma in einer ebenen, unter 45° geneigten Fläche löse und zerlegt das Gewicht derselben in eine der Gleitfläche parallele und eine hierzu normale Componente. Er glaubt, dass die Parallelcomponente direct von der Mauer aufzunehmen sei. Die Division derselben durch die Höhe gibt ihm ohne Weiteres die Dicke der Mauer.

Couplet legt in seiner zweiten Theorie (1727)^{ff} die Trennungsebene durch die vordere Unterkante D (Fig. 20) der Mauer, indem er glaubt, dass die Erdschichte $A E F C$ von dem Mauerstücke $A D E$ gestützt wird. Er zerlegt nun das Gewicht G des Prismas EBF in eine Parallel- und Normalcomponente und setzt nun sofort das Moment $P, D K$ der ersteren gleich dem Momente des Mauerkörpers $DEB E$ in Beziehung auf D . Hierbei nimmt

Fig. 20.

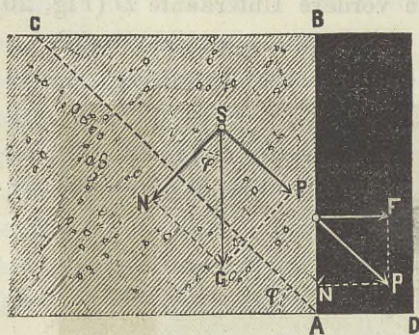


er die Neigung der Trennungsebene EF gleich der sich bei einem regelmäßig aufgesetzten Kugelhaufen bildenden Böschung an, d. i. so, dass die Tangente des Neigungswinkels $= \sqrt{8} = 2,83$ ist. (Mayniel, traité de la poussée des terres. — Mémoire publiée dans l'histoire de l'academie des sciences, 1728).

Sallonnyer (mémoire de 1767) und Rondelet (art de batir) zerlegen, wie Couplet, das Gewicht des auf der natürlichen Böschungsfäche abrutschenden Prismas in eine zur Gleitfläche parallele und in eine hierzu senkrechte Componente und nehmen die erstere unmittelbar als die auf die Mauer wirkende Kraft nach Größe und Richtung an. Nur legen sie abweichend die Gleitfläche nicht durch die vordere, sondern durch die hintere Mauerkante A (Fig. 20).

Tersac de Montlong (mémoire de 1774) folgt ganz derselben Ansicht. Er sagt zwar, dass das abrutschende Prisma in zwei Theile $A L F C$ und $L B F$ (Fig. 20) zu

Fig. 21.



zerlegen sei, von denen der erstere die Mauer nach rückwärts, der andere die Mauer nach vorwärts zu drehen strebe. Die Gesamtwirkung ist aber natürlich dieselbe, als wenn man nur das ganze Prisma $A B C$ in Betracht zieht. Die Gleitfläche nimmt er unter 45° geneigt an.

Blaveau (mémoire 1767) geht in gleicher Weise vor; nur zlegt er die Parallelcomponente abermals in eine horizontale und verticale Componente (Fig. 21) und nimmt

die erstere E als Druck auf die Mauer an. Die Gleitfläche nimmt er als natürliche Böschungfläche an. Nach dieser Regel ergibt sich leicht als Erddruck E , wenn G das Gewicht des rutschenden Prismas und φ den Reibungswinkel bedeutet,

$$E = \cancel{H} \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} h^2 \gamma \cos^2 \varphi.$$

Dass die von diesen Autoren angewendete Kräftezerlegung eine falsche ist, liegt auf der Hand. Die Parallelcomponente ist allerdings die Kraft, mit welcher das Prisma auf der schiefen Ebene abzugleiten streben würde, wenn keine Wand vorhanden wäre; allein diese Kraft wirkt der Reibung entgegen und diese ergibt sich, falls man die natürliche Böschung als Gleitfläche annimmt, eben so groß als die Parallelcomponente, so dass gar keine bewegende Kraft übrig bleiben würde.

Obwohl schon im Jahre 1774 von Coulomb eine wesentlich rationellere Theorie unter Annahme eines Prismas von größtem Drucke aufgestellt und von Anderen weiter ausgebildet wurde, so finden wir dennoch diese alte Theorie in neuerer Zeit durch Maschek (Theorie der menschlichen und thierischen Kräfte, mit einem Anhang über den Erddruck und die Strebepfeiler, 1842) und Hoffmann (Zeitschrift des österreichischen Ingenieurvereines, 1858) als die allein richtige hingestellt. Hoffmann verwirft das Prisma vom größten Drucke, ohne Gründe dafür anzugeben. Die Gleitfläche legt er für das Umkanten der Mauer durch die vordere, für das Gleiten durch die hintere Unterkante der Mauer; im letzteren Falle zerlegt er die Parallelcomponente noch in eine Horizontal- und Verticalcomponente, so dass seine Theorie zum Theil mit der von Couplet, zum Theil mit

der von Blaveau übereinstimmt. Der einzige Unterschied besteht darin, dass sich Hoffmann das Prisma in unendlich dünne Schichten zerlegt denkt, was indeß auf dasselbe hinauskommt, da sich sowohl unter dieser Annahme, als unter der Annahme eines festen Prismas der Angriffspunkt des Druckes in $\frac{1}{3}$ der Höhe ergibt. Schade um die Zeit, die von Hoffmann auf die Berechnung vieler Tabellen verwendet wurde.

§. 35. Theorie unter Annahme eines Abrutschens auf der natürlichen Böschung unter Berücksichtigung der Reibung, begründet durch Belidor.

Der Architekt Belidor gibt zuerst eine etwas rationellere Theorie (*La science des Ingenieurs*, Liv. I. 1729). Er nimmt an, dass die Erde in eine große Anzahl dünner Schichten gespaltet ist, welche sämtlich unter 45° geneigt sind. Er sagt nun, dass der auf die verticale Wand geübte Normaldruck nach der Lehre von der schiefen Ebene gleich dem Gewichte des abrutschenden Prismas sein würde, wenn keine Reibung zwischen den Schichten stattfände. Die letztere aber consumire die Hälfte des Gewichtes, so dass der auf die Wand geübte Druck nur die Hälfte des Gewichtes der Schicht sei. Hieraus folgt nun leicht, dass der Gesamtdruck P bei der Höhe h der Wand und dem Gewichte γ des Erdmaterials pro Volumeneinheit

$$2) \quad P = \frac{1}{4} h^2 \gamma$$

ist, und dass der Angriffspunkt desselben oder der Mittelpunkt der von den einzelnen Schichten geübten Drücke in $\frac{1}{3}$ der Höhe liegt.

Ganz in gleicher Weise wird hierauf der Gegenstand behandelt von G adroy (*Mémoire publiée de 1745*), Trin-

caux (1768) und D'Antony. Die beiden Letzteren glaubten indeß, dass der Angriffspunkt des horizontalen Erddruckes in der Höhe des Schwerpunktes des abrutschenden Prismas, d. i. in der Höhe $\frac{2}{3} h$ anzunehmen sei.

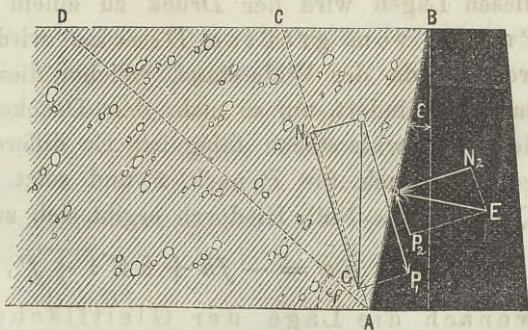
Die Theorie von Gauthey stimmt mit der im vorigen Paragraph gezeigten Theorie des Blaveau überein; nur zieht er von der Parallelcomponente $\frac{1}{3}$ derselben für die Reibung ab, was ihm sodann nach Zerlegung des Restes in eine horizontale und verticale Componente unter Annahme eines Neigungswinkels der Gleitfläche von 45° als horizontal wirkenden Erddruck gibt:

$$3) \quad E = \frac{1}{6} h^2 \gamma.$$

§. 36. Theorie unter Annahme eines Prismas vom grössten Drucke und eines normal gerichteten Erddruckes, begründet von Coulomb.

Nach der Ansicht des französischen Physikers Coulomb (Mémoires des avants étrangers, 1773) löst sich von der Erde in ebener Trennungsfläche ein Prisma ab, welches auf derselben herabzugleiten strebt. Den von Prisma auf die Wand, welche er nur als vertical voraussetzt, geübten Druck

nimmt er normal zu derselben an. Er zerlegt nun das Eigengewicht des rutschenden Prismas und die von der Wand auf das Prisma ge-



übte horizontale Reaction der Wand in zwei Componenten, von denen die eine parallel, die andere senkrecht zur Gleitfläche wirkt (Fig. 22) und setzt nun die Differenz der (entgegengesetzt gerichteten) Parallelcomponenten gleich dem sich dem Abrutschen entgegensetzenden Widerstande. Der letztere aber besteht aus der Reibung, welche dem Normaldrucke auf die Gleitfläche proportional und von der Größe der Trennungsfläche unabhängig ist, und aus der Cohäsion, welche der Trennungsfläche proportional, dagegen vom Normaldrucke unabhängig ist. Setzt man den Reibungscoefficienten $= f$ (Coulomb setzt ihn $= \frac{1}{f}$), den Cohäsionscoefficienten, d. i. die Cohäsion für die Fläche $I = c$ und die obere Breite des abrutschenden Prismas unter der Annahme einer horizontalen Terrainfläche (nur eine solche betrachtet Coulomb) $= x$, so ergibt sich als Druck auf die Wand

$$4) \quad P = \frac{\gamma h x (h - fx) - 2c (h^2 + x^2)}{2(x + fh)}$$

Coulomb schließt nun in nicht vollständiger klarer Weise weiter: Mit einer Veränderung der Lage der Gleitfläche ändert sich auch der Druck gegen die Wand. Für eine von diesen Lagen wird der Druck zu einem Maximum. Das Prisma vom größten Drucke wird sich jedenfalls trennen, da der Widerstand, welcher dieses Prisma abzurutschen hindert, um so mehr dem Drucke eines jeden anderen zu widerstehen fähig ist. Er differenzirt daher obigen Ausdruck für P nach x und setzt den Differential-Quotienten $=$ Null. Hiedurch ergibt sich zunächst

$$5) \quad x = -fh + h\sqrt{1 + f^2},$$

wonach die Lage der Gleitfläche ganz unab-

hängig von der Cohäsion ist. Der entsprechende Druck ergibt sich zu

$$6) \quad P = Ah^2 - Bch,$$

wenn man zur Abkürzung

$$6a) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \gamma (-f + \sqrt{1 + f^2}), \\ B = 2 (-f + \sqrt{1 + f^2}) \end{cases}$$

setzt (Coulomb's Ausdrücke sind indeß complicirter).

Um den Mittelpunkt des Druckes zu bestimmen, nimmt Coulomb den Druck auf einen horizontalen Flächenstreifen von der Höhe dz in der Tiefe z als die Zunahme von P an, wenn die Wandhöhe von der Höhe z auf die Höhe $z + dz$ wächst und setzt nun das Moment des Gesamtdruckes gleich der Summe oder dem Integrale der Momente der Elementardrucke in Beziehung auf die untere Kante der Wand. Hiernach ergibt sich als Höhe η dieses Angriffspunktes über der unteren Kante der Wand:

$$7) \quad \eta = \frac{h}{3} - \frac{1}{6} \frac{Bch}{Ah - Bc}.$$

Ist keine Cohäsion vorhanden, so wird hiernach $\eta = \frac{1}{3} h$.

§. 37. Ausbildung der Coulomb'schen Theorie durch Prony, Mayniel, Français und Navier.

Die Coulomb'sche Theorie, welche allerdings wesentlich rationeller ist als die älteren Theorien, fand vielen Beifall. In vielen späteren Arbeiten über den Erddruck hat man die Coulomb'schen Principien zu Grunde gelegt und hat dabei nur eine elegantere Darstellung und Verallgemeinerung angestrebt.

Prony (Recherches sur la poussée des terres, 1802) behandelt denselben Fall wie Coulomb, nämlich den einer

verticalen Wand und einer horizontalen Terrainfläche. Indem er aber statt des Reibungscoëfficienten f die Tangente des natürlichen Böschungswinkels φ und statt des Cohäsionscoëfficienten c die Höhe h_0 einführt, auf welche sich die Erde vertical abstechen läßt, erhält er einfachere Formeln, nämlich, wenn α das Complement des Reibungswinkels φ bedeutet,

$$8) \quad E = \frac{1}{2} \gamma h^2 \tan^2 \frac{1}{2} \alpha - \underline{2ch} \tan \frac{1}{2} \alpha.$$

Prony dehnt diese Theorie auch auf den Fall einer nicht verticalen Wand aus; jedoch beging er hier den Irrthum, dass er den Druck auf dieselbe als horizontal und die Neigung der Gleitfläche von der Neigung der Wand unabhängig annahm.

Den Angriffspunkt des Erddruckes bestimmte Prony in derselben Weise, wie nachher bei Français angegeben werden soll.

Mayniel (Traité experimental analytique et pratique de la poussée des terres, Paris 1808) behandelt auch den Fall einer geneigten Wand richtiger, jedoch in etwas schwerfälliger Form. Mayniel gibt auch im genannten Werke eine ausführliche Uebersicht der bisher aufgestellten Theorien.

Français (Mémorial de l'officier du genie, 1820, unter dem Titel: „Untersuchungen über den Druck der Erde, die Gestalt und die Dicken der Futtermauern, sowie über den Böschungswinkel der Erdaushebungen“) gibt unter der Annahme einer horizontalen Terrainfläche eine elegantere Lösung. Er zerlegt sowohl das Gewicht G des rutschenden Prismas, als den von der Mauer auf das Prisma ausgeübten und senkrecht zur Wandfläche AB (Fig. 22) gerichteten Druck E in eine zur Gleitfläche AC parallele und in eine hierzu senkrechte Componente und setzt die Summe

der Parallelcomponenten gleich der Summe aus dem Reibungswiderstand, welcher dem Normaldrucke proportional ist und dem Cohäsionswiderstande, welcher der Länge $A\bar{E}$ proportional ist. Er erhält, wenn ε den Winkel, welchen die Wandfläche mit der Verticalen macht, w den Winkel CAB und α das Complement des Reibungswinkels $\varphi = 90^\circ - \varphi$ bedeutet, nach einigen Reductionen

$$E = \left(\frac{1}{2} h^2 + c h \tan \alpha\right) \tan (w - \varepsilon) \tan (\alpha - w)$$

+ $\left[\left(\frac{1}{2} \gamma h^2 \tan \varepsilon - c h\right) \tan \alpha\right] [1 - \tan \varepsilon \tan (\alpha - \varepsilon)] \cos \varepsilon$,
wobei ε positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem der Winkel BAX größer oder kleiner ist als 90° . Indem er noch w differenzirt und den Differenzialquotienten $= 0$ setzt, erhält er

$$9) \quad w = \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon),$$

d. h. die Gleitfläche halbirt den Winkel zwischen der Wand und der natürlichen Böschungsfäche, so dass also die Lage der Gleitfläche auch hier von der Cohäsion der Erde unabhängig ist. Die Einsetzung dieses Werthes für w gibt

$$10) \quad E = \left[\frac{1}{2} \gamma h^2 \left\{ \tan \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon) + \tan \varepsilon \right\}^2 - 2 c h \left\{ 1 + \tan \varepsilon \cot (\alpha - \varepsilon) \right\} \tan \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)\right] \cos \varepsilon.$$

Français setzt in dem Ausdrücke 8, welcher sich für eine verticale Wand ergibt, $E = 0$, und erhält dadurch die Höhe h_0 , auf welcher sich die Erde vertical erhält ohne dass eine Stützung nöthig ist, nämlich

$$11) \quad h_0 = \frac{4c}{\gamma} \cot \frac{1}{2} \alpha,$$

so dass umgekehrt $c = \frac{1}{4} \gamma h_0 \tan \frac{1}{2} \alpha$ ist. Indem er nun ferner auch in der Gleichung 10) $E = 0$ setzt, erhält er die Höhe h_1 , auf welcher sich die Erde unter dem Winkel ε gegen die Verticale frei erhält, nämlich nach Einsetzung des Werthes für c

$$12) \quad h_1 = h_0 \frac{\cos \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\sin^2 \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)}.$$

Dies in den Ausdruck für E eingesetzt, gibt ihm die einfache Formel:

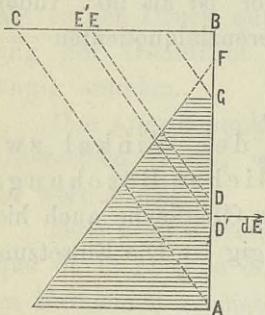
$$13) \quad E = \frac{1}{2} \gamma h (h - h_1) \cos \varepsilon [\tan \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon) + \tan \varepsilon].$$

Setzen wir $A = \frac{1}{2} \gamma \cos \varepsilon [\tan \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon) + \tan \varepsilon]$, so wird

$$14) \quad E = A h (h - h_1).$$

Für ein Stück BD von der Höhe z (Fig. 23) ist $E = A z (z - h_1)$.

Fig. 23.



Daher ist der Druck auf ein Flächenstück DD' von der Höhe dz

$$dE = A (2z - h_1) dz.$$

Ist nun η die Höhe des Angriffspunktes der Mittelkraft über A , so setzt Français mit Berücksichtigung des Umstandes, dass auf das obere Stück BG der Mauer von der Höhe h_1 kein Druck stattfindet,

$$E (h - \eta) = \int_{h_1}^h dE \cdot z,$$

und erhält hiedurch

$$15) \quad \eta = \frac{(h - h_1)(h + \frac{1}{2} h_1)}{3h} = \frac{1}{3} h - \frac{h_1 (h + h_1)}{6h}.$$

Navier (Résumé des leçons sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. I. 1826. Deutsch von Westphal unter dem Titel „Mechanik der Baukunst“ 1851) gibt dieselbe Theorie wie Français. Nur bei der Bestimmung des Angriffspunktes integriert er nicht wie Prony und Français zwischen den Grenzen h_1 und h , sondern wie Coulomb zwischen den Grenzen 0 und h , und erhält hiedurch statt der Formel 15:

$$16) \quad \eta = \frac{1}{3} h \frac{2h - 3h_1}{2(h - h_1)}.$$

Gegen beide Auffassungen lassen sich Einwände erheben. Die Integration zwischen h_1 und h kann deshalb nicht richtig sein, weil für $z = h_1$ bereits dE positiv ist und weil zur Bestimmung von E und dem Momente von E die Differentiale dE und $dE \cdot z$ doch jedenfalls zwischen denselben Grenzen integriert werden müßten; die Integration von dE zwischen h_1 und h gibt aber nicht mehr den Ausdruck 14 von E . Bei der Bestimmung von η bezieht sich also die eingeführte Kraft und das eingeführte Moment nicht auf dieselbe Strecke der Wand. Nach der Coulomb'schen und Navier'schen Auffassung sind bei der Integration negative Drücke in Betracht gezogen, die in Wirklichkeit gar nicht stattfinden, was zu folgendem Paradoxon führt: Es ergibt sich als Moment für den Punkt A : $E \eta \sec \varepsilon = \frac{1}{6} A h^2 (2h - 3h_1) \sec \varepsilon$, so dass sich für Höhen zwischen h_1 und $1,5 h_1$ das Moment negativ ergeben würde, was offenbar nicht sein kann. Die erstere Auffassung dürfte wohl, da sie größere Werte für $E \eta$ gibt, als die letztere, von beiden die empfehlenswerteste sein.

Unserer Meinung nach ist auf beiden Seiten ein Irrthum in der Anwendung des Cohäsionsgesetzes gemacht worden, worüber wir später noch weiter sprechen werden.

Navier behandelt noch den Fall, wo die horizontale Terrainfläche durch eine gleichmäßig vertheilte Last belastet ist. Er erhält das Resultat, dass bei der Last p pro Flächeneinheit in der Formel für den Erddruck $\frac{1}{2} \gamma h^2 + p h$ statt $\frac{1}{2} \gamma h^2$ zu setzen ist, so dass also, wenn keine Cohäsion vorhanden ist,

$$17) \quad E = \frac{1}{2} \gamma h (h + 2p) \cos \varepsilon \left[\tan \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon) + \tan \varepsilon \right]$$

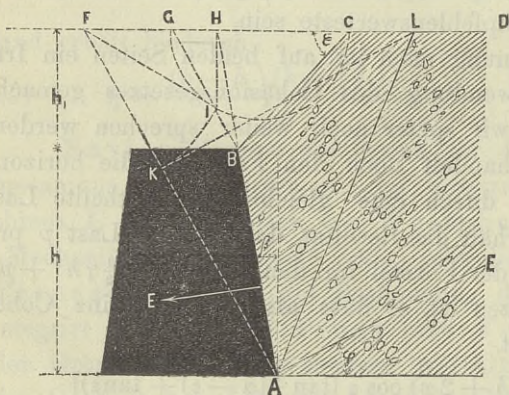
wird und außerdem

$$18) \quad \eta = \frac{1}{3} h \frac{\gamma h + 3p}{\gamma h + 2p}.$$

Bei der Berechnung der Mauerstärke will Navier die Reibung der Mauern an der Erde und die Cohäsion des Steinmaterials berücksichtigt wissen; in der weiteren Ausführung setzt er aber beide Widerstände = 0.

§. 38. Druck einer überhöhten Erdmasse, behandelt von Audoy und Poncelet. Audoy behandelt im *Mémorial de l'officier du genie* Nr. 1 zunächst den Fall einer horizontalen Terrainfläche unter Annahme einer veränderlichen Dichtigkeit, Reibung und Cohäsion, die indessen ohne besonderen praktischen Wert ist, da das Gesetz der Veränderlichkeit dieser Größen mit der Tiefe nicht genau bekannt oder selbst sehr veränderlich ist. Persy vereinfacht diese Formeln durch Substitution der Summen der Sinus und der Cosinus statt der Producte derselben. Besonders bemerkenswert aber ist die Behandlung des Falles, wo der Erdkörper über die Mauer überhöht ist (Fig. 24)

Fig. 24.



durch Audoy. Eine Vereinfachung durch Einführung der trigonometrischen Functionen, wie im vorigen Falle, war hier nicht mehr möglich, so dass die zuerst von Coulomb gebrauchte Auflösungsmethode

in Anwendung kommen mußte. Audoy nahm eine verticale

Wand an. Der Druck wird hierbei senkrecht auf die Wand angenommen. Es ergibt sich, wenn (Fig. 24) h die Höhe der Wand, h_1 die der Ueberhöhung, ε den Neigungswinkel der Fläche BC , welcher gleich oder größer als der natürliche Böschungswinkel φ angenommen ist, bedeutet, zunächst für eine verticale Wand, als Erddruck,

$$19) \quad E = \frac{\gamma}{2 \cos^2 \varphi} [h - \sin \varphi \sqrt{h^2 + h_1^2 \cot \varepsilon \cot \varphi}]^2,$$

und als Moment desselben in Beziehung auf den Punkt A :

$$20) \quad M = \frac{1}{6} \gamma h^3 \left[(1 + 2f^2) (1 - 3u^2 + 2u^3) \right. \\ \left. - \frac{2 \sqrt{1 + f^2}}{f^2} (f^2 + fu^2 \cot \varepsilon)^{\frac{3}{2}} \right. \\ \left. + 2 \sqrt{1 + f^2} \sqrt{f^2 + f \cot \varepsilon} (3u^2 - 2u^3 - u^3 \frac{\cot \varepsilon}{f}) \right],$$

worin zur Abkürzung $u = \frac{h_1}{h}$ gesetzt ist, und endlich für den Neigungswinkel der Gleitfläche AC :

$$21) \quad \cot w = - \tan \varphi + \frac{1}{h \cos \varphi} \sqrt{h^2 + h_1^2 \cot \varepsilon \cot \varphi}.$$

Poncelet dehnt diese Theorie auch auf den Fall einer geneigten Wand aus (Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations, à Mémoires de l'officier du génie, Nr. 13, 1840. — Deutsch von Lahmeyer unter dem Titel: Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente, 1844). Er erhält, wenn β den Neigungswinkel der Wand gegen die Verticale bedeutet,

$$22) \quad E = \frac{1}{2} \gamma \cos \beta \left[\frac{h}{\cos(\varphi + \beta)} \right. \\ \left. - \frac{1}{\cos \beta} \sqrt{\frac{h^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2(\varphi + \beta)} + \frac{h_1^2 \cos(\varepsilon - \beta) \sin \varphi}{\sin \varepsilon \cos(\varphi + \beta)}} \right]^2$$

und

$$23) \quad \cot w = - \tan (\varphi + \beta) \\
\frac{1}{h \sin \varphi} \sqrt{\frac{h^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 (\varphi + \beta)} + \frac{h_1^2 \cos (\varepsilon - \beta) \sin \varphi}{\sin \varepsilon \cos (\varphi + \beta)}}$$

Den analytischen Ausdruck des Momentes hat Poncelet nicht aufgestellt.

§. 39. Poncelet's geometrische Construction. Poncelet hat aus den Ausdrücken 22 und 23 für den Erd- druck und die Lage der Gleitfläche einfache geometrische Constructionen abgeleitet, die wesentlich schneller zum Ziele führen, als die Rechnung. Man errichte auf der natürlichen Böschung AE (Fig. 25) in A eine Senkrechte, welche die Verlängerung der Horizontalen CD in F schneidet, ziehe durch B eine Parallele zu AF , welche CF in G schneidet und schlage über CG einen Halbkreis. Im Durch- schnittspunkte H der Verlängerung von AB mit DF errichte man auf DF im Halbkreise eine Senkrechte HJ . Schlägt man jetzt aus F einen Kreisbogen durch J , welcher AF in K schneidet, so ist

$$E = \frac{1}{2} \gamma AK^2 \cos \beta.$$

Zieht man durch K eine Parallele zu AE , welche CD in L schneidet, so ist AL die Gleitfläche.

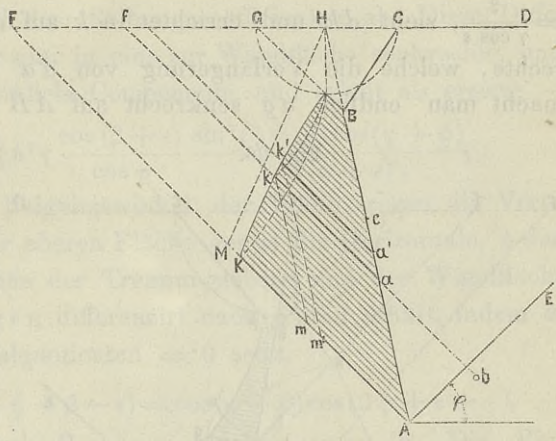
In dem Falle, wo BC unter dem natürlichen Bö- schungswinkel geneigt ist, ist $\sphericalangle CBG$ ein rechter, so dass der Kreis durch B geht. Ist außerdem die Wand AB vertical, so fällt J mit B zusammen, so dass hier die Con- struction äußerst einfach wird.

Für die Bestimmung des Mittelpunktes des Druckes gibt Poncelet zwei Constructionen.

1. Construiert man für verschiedene Punkte a der Wandfläche den Punkt k in gleicher Weise wie den Punkt K

für den Punkt A , so liegt der Punkt k auf einer gleichseitigen Hyperbel KkJ , welche durch K und J geht und deren Centrum in H liegt. Macht man $FM = FH$, so ist HM eine Asymp-

Fig. 25.



tote der Hyperbel. Der Druck auf Ba ist $= \frac{1}{2} \gamma a k^2 \cos \beta$, und wenn $a a'$ unendlich klein ist, der Druck auf $a a' = dE = \frac{1}{2} \gamma \cos \beta \cdot 2 a k \cdot da k = \gamma \cdot a k \cdot k' k'' \cdot \cos \beta$, also $dE \cdot A a = \gamma \cdot a k \cdot k m \cdot k' k'' \cdot \cos \beta$. Nun aber ist, wenn y den normalen Abstand des Punktes k von AH bedeutet, $a k = \frac{y}{\sin(\varphi - \beta)}$,

also $k m \cdot k' k'' = \frac{\text{Fläche } k m m' k''}{\sin(\varphi - \beta)}$, also

$$dE \cdot A a = y \text{ Fläche } k m m' k'' \frac{\gamma \cos \beta}{\sin^2(\varphi - \beta)}$$

also das Moment des gesammten Erddruckes

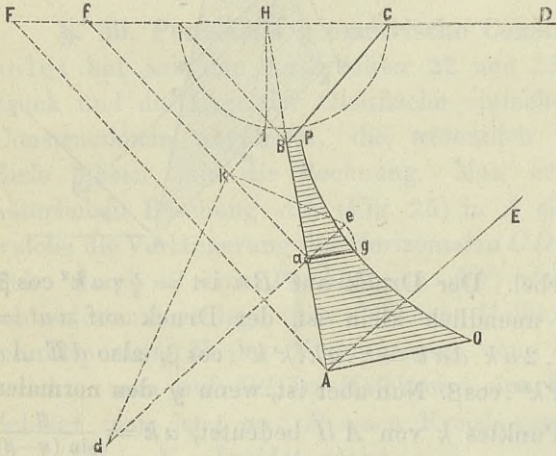
$$M = \mathfrak{M} \cdot \frac{\gamma \cos \beta}{\sin^2(\varphi - \beta)}$$

wenn \mathfrak{M} das Moment des gemischtlinigen Trapezes $AKJB$ in Beziehung auf AB bedeutet.

Poncelet betrachtet das Hyperbelstück Kk als Gerade, und findet alsdann, dass, wenn er ka über a hinaus um $ab = ak$ verlängert und durch k zu Kb eine Parallele zieht, welche AB in c schneidet, der Mittelpunkt des Druckes auf die Fläche Aa in $\frac{1}{3}$ der Höhe Ac liegt.

2. Macht man ad (Fig. 26) senkrecht auf AF und $= \frac{2}{\gamma \cos \varepsilon}$, zieht dk und errichtet in k auf dk eine Senkrechte, welche die Verlängerung von da in e scheidet; macht man endlich ag senkrecht auf AB und $= ae$, so

Fig. 26.



ist $ae : ak = ak : ad$, also $ad = \frac{ak^2}{ae} = \frac{1}{2} \gamma$

$ak^2 \cos \varepsilon =$ dem

Drucke auf die Fläche BA .

Die Anwendung der so erhaltenen Curve zur Bestimmung des Angriffspunktes

wurde bereits in §. 27 gezeigt.

wurde bereits in §. 27 gezeigt.

wurde bereits in §. 27 gezeigt.

Die weiteren Arbeiten Poncelet's werden wir später kennen lernen.

§. 40. Hagen's Theorie. Diesen nach richtigen Principien (mit Ausnahme der normalen Richtung des Erddruckes) entwickelten Theorien gegenüber gibt der preußische Oberbaurath Hagen in seinem berühmten Werke: „Handbuch der Wasserbaukunst, II. Theil, I. Bd. 1853“ wiederum eine Theorie, welcher dieselben unrichtigen Principien zu Grunde liegen, wie den in §. 34 und 35 geschilderten Theorien. Hagen zerlegt nämlich das Gewicht eines Prismas in eine zur Trennungsfläche parallele und eine hierzu normale Componente (Fig. 20); von der ersten

ren zieht er die Reibung, d. i. das Product aus dem Normaldrucke und dem Reibungscoefficienten ab. Diese Differenz zerlegt er nun in eine zur Wandfläche senkrechte, und eine hierzu parallele Componente, und erhält als erstere

$$24) \quad E = \frac{1}{2} h^2 \gamma \frac{\cos(\beta + \varepsilon) \sin^2(\psi - \beta) \cos(\varphi + \psi)}{\cos \varphi \cos(\psi + \varepsilon)},$$

wenn β den Neigungswinkel der Wand gegen die Verticale ε den der oberen Fläche gegen die Horizontale, ψ den Winkel zwischen der Trennungsebene und der Wandfläche bedeutet. Hagen differenzirt nach ψ und erhält, indem er den Differenzialquotienten = 0 setzt,

$$25) \quad \cos(\varphi + \psi - \beta - \varepsilon) = \cos(\psi - \beta) \cos(2\psi + \varepsilon + \varphi),$$

wonach ψ durch Probieren zu bestimmen ist. Die Einsetzung dieses Wertes von ψ in die vorige Gleichung gibt ihm den Erddruck. Da die Richtung der zur Trennungsfläche parallel wirkenden Componente die Wand in $\frac{1}{3}$ der Höhe schneidet, so nimmt Hagen diesen Punkt ohne Weiteres als den Angriffspunkt des Erddruckes an.

Die Hagen'sche Theorie unterscheidet sich daher von den älteren Theorien nur durch die Annahme des Principes vom größten Drucke.

Gegenüber der Coulomb'schen Theorie gibt die Hagen'sche bei verticaler Wand und horizontaler Terrainfläche den Erddruck um 34 bis 37 Procent zu klein.

§. 41. Von zwei Wänden begrenzte Erdmasse. In dem von Scheffler in's Deutsche übersetzten Werke Moseley's: „Die mechanischen Principien der Ingenieurkunst und Architektur“ sind die Fälle einer verticalen Wand mit horizontaler und überhöhter Terrainfläche nach der Coulomb'schen Theorie behandelt. Wir finden darin

aber auch von Scheffler den Fall behandelt, wo eine Erdmasse mit horizontaler Oberfläche von zwei verticalen Wänden eingeschlossen ist. Bei einer nur oben durch eine horizontale Terrainfläche begrenzten Erdmasse müsse der Druck auf eine verticale Fläche horizontal wirken; es sei dies der Druck, welchen die auf den beiden Seiten dieser Fläche liegenden Erdmassen aufeinander ausüben. Werde nun eine dieser Erdmassen plötzlich fest, oder verwandle sie sich in eine feste Wand, so könne hierdurch der Gleichgewichtszustand nicht geändert werden. Dasselbe gelte auch von einer zweiten festen Wand. Demnach müsse der Druck, welchen eine zwischen zwei verticalen Wänden befindliche Erdmasse mit horizontaler Oberfläche auf die Wände ausübe, derselbe sein, als wenn nur eine Wand vorhanden sei, wie groß auch die Entfernung der Wände sein möge.

Diese Schlüsse sind natürlich nur insolange richtig, als vollkommene Ruhe stattfindet; sie gelten aber nicht mehr, wenn es sich um den Druck während des Nachgebens der einen Wand handelt. Diesen von Scheffler aufgestellten Satz hatte bereits früher Hagen in weniger einfacher Weise bewiesen.

§. 42. Form der Gleitfläche. Obwohl sämtliche Autoren die Gleitfläche als Ebene annehmen, so haben doch mehrere geahnt oder bestimmt behauptet, dass dies im Allgemeinen nicht vollkommen richtig sei.

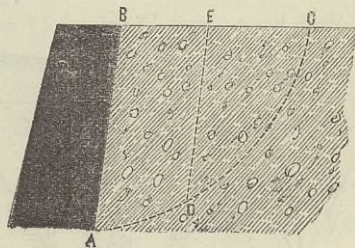
Persy weist (*Cours de stabilité des constructions*) nach, dass die Gleitfläche nur dann eine Ebene sei, wenn die Wand bei horizontaler Terrainfläche absolut glatt

sonst aber beliebig geneigt sei und wenn die Erde keine Cohäsion habe. Jedoch hat bereits Scheffler (Crelle's Journal für die Baukunst, 1851) richtig nachgewiesen, dass Persy's Beweis auf irrigen Annahmen beruhe.

Hagen sagt in seinem Handbuche der Wasserbaukunst, II. Theil, I. 1853: „Wenn man von dem Gesichtspunkte ausgeht, dass jedesmal diejenige Bewegung eintritt, wobei der Schwerpunkt der ganzen getrennten Masse sich am tiefsten senkt, so ist es wahrscheinlich, dass bei einer Belastung, die unfern der Grenze der Bruchfläche liegt, die letztere abwärts gekrümmt sein wird, und sie wird aufwärts gekrümmt sein, wenn die Belastung nahe an der Wand angebracht ist. Finden dagegen solche partielle Belastungen nicht statt, so scheint es, dass die Bruchfläche eine Ebene sein muß.“ Der unklare Beweis für die letztere Behauptung ist in etwas anderer Form folgender:

„Das Druckprisma habe die Form $ABCD$; parallel zu AB denke man sich eine Fläche DE . Die Flächen ADC und DC sind durch die Bedingung bestimmt, dass die Normaldrücke auf AB und DE zu einem Maximum werden. Dies aber ist, falls keine Cohäsion stattfindet, nur möglich, wenn die Flächen $ABCD$ und DEC ähnlich sind. Diese Bedingung aber wird nur erfüllt, wenn die Fläche ADC eine Ebene ist.“

Fig. 27.



Dieser Beweis würde vollständig richtig sein, wenn sich nachweisen liesse, dass der Druck auf AB und DE

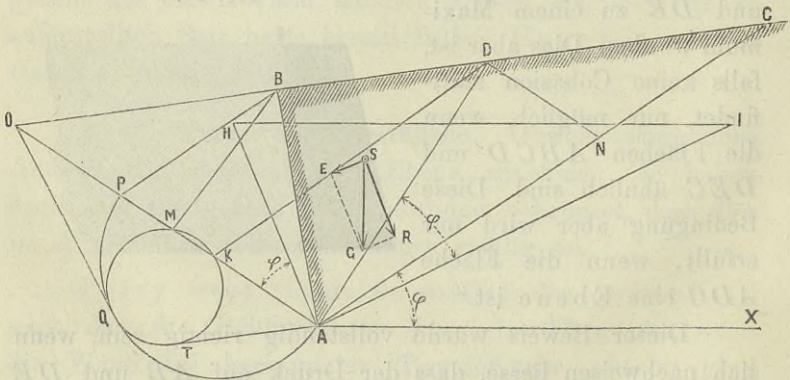
dieselbe Richtung hätte, was Hagen allerdings voraussetzt, da er ja diesen Druck als horizontal annimmt. Allgemein aber lässt sich dies durchaus nicht behaupten.

Scheffler gibt zum ersten Male den richtigen Beweis, dass die Gleitfläche eine Ebene, falls die Wand vertical und absolut glatt und die Terrainfläche horizontal ist (Crelle's Journal der Baukunst, 1851). Er liefert den Beweis ziemlich umständlich unter Anwendung der Variationsrechnung, während der Hagen'sche Beweis, welcher in diesem Falle anwendbar ist, viel einfacher zum Ziele führt. In diesem Falle lässt sich nämlich behaupten, dass der Druck auf die Flächen AB und DE dieselbe Richtung habe, nämlich horizontal gerichtet sei.

II. Kapitel. Theorien unter Berücksichtigung der Reibung an der Wand.

§. 43. Poncelet's Theorie. Die erste Theorie unter Annahme eines schief gegen die Wand gerichteten Erd-

Fig. 28.



druckes hat Poncelet in seinem bereits im §. 38 citirten Werke gegeben (was von mehreren späteren Autoren, welche Poncelet erwähnen, übersehen wurde). Er gibt die Theorie in rein geometrischer Form. In möglichst vereinfachter Form ist diese Theorie die folgende (Fig. 28):

SG sei das Gewicht G des Prismas ABD , SR und SE die unter den Reibungswinkeln φ und φ_1 gegen die Normale der Fläche AD und gegen die Normale der Wand AB gerichteten Componenten R und E des Gewichtes G . Macht man AH senkrecht auf SE , AJ senkrecht auf SR und HJ horizontal, so ist $\triangle AHJ \sim \triangle SGR$, daher:

$$G : E : R = HJ : AH : AJ.$$

Der Winkel JAD ist $= \varphi$. Macht man auch $\sphericalangle HAK = \varphi$ und den Winkel zwischen DK und $HJ = \varphi_1$, also KD parallel der natürlichen Böschung AC , so ist $\triangle AKD \sim \triangle AHJ$, also auch:

$$G : E : R = DK : AK : AD.$$

Unter der Voraussetzung einer ebenen Terrainfläche sei DK parallel AC , BM parallel AD und DN parallel AK . Alsdann ist $\triangle MAN = \triangle MAD = \triangle ADB$. Ist nun das Gewicht der Volumeneinheit $= \gamma$, so ist $G = \gamma \cdot \triangle ADB = \gamma \cdot \triangle MAN$, mithin nach der vorigen Proportion:

$$E = G \frac{AK}{DK} = \gamma \cdot \triangle MAN \frac{AK}{DK}.$$

Ist der Winkel, welchen die Wand mit der Verticalen bildet, $= \beta$, und der Winkel, welchen AH mit der Verticalen bildet, $= \beta_1$, so ist $\sphericalangle MAN \sphericalangle HAX = 90^\circ + \beta_1$, also $\triangle MAN = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cos \beta_1 = \frac{1}{2} AM \cdot DK \cdot \cos \beta_1$, mithin

$$E = \frac{1}{2} \gamma \cdot AM \cdot AK \cdot \cos \beta_1.$$

Man mache, wenn AX horizontal ist, $\sphericalangle XAN = \varphi$, $\sphericalangle OAB = \varphi + \varphi_1$, verlängere die Terrainfläche bis zum Durchschnitte O mit AO und ziehe BP parallel zu AN . Ueber AP schlage man einen Halbkreis und lege an denselben von O aus eine Tangente OQ . Macht man jetzt $OU = OQ$, so ist

$$26) \quad E = \frac{1}{2} \gamma AU^2 \cos \beta_1.$$

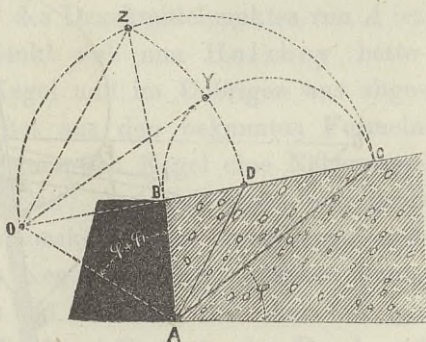
Zieht man noch UD parallel zu AN , so ist AD die Gleitfläche.

Hierbei ist $\beta_1 = \beta + \varphi_1$. Wir fügen noch hinzu, dass, wenn man auf AN die Strecke $AU_1 = AU$ macht, $\triangle AUU_1 = AU \cdot AU \cos \beta_1$, also $E = \gamma \cdot \triangle AUU_1$ ist.

Die angegebene Construction beruht darauf, dass OU die mittlere Proportionale zwischen OP und OA ist; diese aber läßt sich auch noch in anderer Weise construiren.

(Man kann über OA einen Halbkreis schlagen, in P eine Senkrechte PW auf OA errichten und $OU = OW$ machen.) Poncelet zeigt noch, dass auch OD die mittlere Proportionale zwischen OB und OC ist, und gibt hiernach noch folgende

Fig. 30.



Construction (Fig. 30): Man schlage über BC einen Halbkreis, lege an denselben von O aus eine Tangente OY und mache $OD = OY$. (Statt dessen kann man auch über OC

(Figur 31) aus der Poncelet'schen Construction gibt Professor Holzhey (Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens, 1871; auch separat). Für die Construction des Angriffspunktes ist es wichtig zu wissen, ob das ganze Druckprisma einen drei- oder vier-eckigen Querschnitt hat, und im letzteren Falle die Gleitfläche CG für den Bruchpunkt C zu bestimmen. Holzhey gibt folgende Construction: Man ziehe AN unter dem natürlichen Böschungswinkel, trage an $A\hat{B}$ einen Winkel $OAB = \varphi + \varphi_1$ an und ziehe CD parallel AN , CE parallel AO . Ueber DE schlage man einen Halbkreis, errichte in demselben in B auf AB eine Senkrechte BF und mache $DG = DF$, so ist GC die gesuchte Gleitfläche.

Denkt man sich in Fig. 25 die Geraden ak senkrecht zu AB aufgetragen und die so entstehende Fläche um AB gedreht, so entsteht ein Rotationskörper, dessen Volumen gleich ist dem eines Cylinders, welcher zur Grundfläche einen Kreis mit dem Radius AK , und dessen Höhe gleich dem Abstände AP des Druckmittelpunktes von A ist. Diesen Rotationskörper denkt sich nun Holzhey bestehend aus einem oberen Kegel und im Uebrigen aus abgestumpften Kegeln und leitet aus den bekannten Formeln zur Berechnung der abgestumpften Kegel eine Näherungsconstruction ab. Für den Fall, dass AG nicht sehr groß ist, so dass man den Rotationskörper aus einem Kegel und nur einem abgestumpften Kegel bestehend ansehen kann, construirt man nach 39) die Geraden AK und GJ (so dass der Druck auf $AB = \frac{1}{2}\gamma AK^2 \cos \beta$, der Druck auf $BG = \frac{1}{2}\gamma GJ^2 \cos \beta$ wird), ziehe durch J eine Parallele zu KB , welche AE in H schneidet und durch J eine Parallele zu KH , welche AE in L schneidet, so ist $AP = \frac{1}{3}AL$.

Man kann hierbei auch zur Erhöhung der Genauigkeit AK und GJ vervielfachen.

§. 44. Scheffler's Theorie. In analytischer Form wurde die Theorie unter Annahme eines gegen die Wand geneigten Druckes zuerst vom Baurath Dr. Scheffler (Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, 1857) behandelt, und zwar ebenfalls unter Annahme eines Prismas vom größten Drucke. Der von Scheffler eingeschlagene Weg ist derselbe wie der in §. 37 gezeigte Weg von Français. Er findet für den Fall einer horizontalen Terrainfläche als Erddruck:

$$27) E = \frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{\sin \varphi}{\cos^2(\varphi + \varphi_1 \pm \beta)} \left[\sqrt{\frac{\cos(\varphi_1 \pm \beta)}{\sin \varphi}} - \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi_1)}{\cos \beta}} \right]^2$$

und für die Neigung der Gleitfläche:

$$28) \cot w = -\tan(\varphi + \varphi_1 \pm \beta)$$

$$+ \sqrt{[\tan(\varphi + \varphi_1 \pm \beta) + \tan \beta][\tan(\varphi + \varphi_1 \pm \beta) + \cot \varphi]}.$$

Hierbei ist das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem die Wand nach vorn oder hinten geneigt ist. Aus der letzten Formel leitet er die in Fig. 30 dargestellte einfache Construction der Gleitfläche mittels des Kreises OZC ab.

2. Scheffler weist nach, dass der Winkel δ , welchen der Druck E mit der Normalen der Wand macht $= \varphi$ genommen werden müsse, wenn $\varphi_1 > \varphi$ sei; denn wäre dieser Winkel $> \varphi$, so würde ein Gleiten im Innern der Erdmasse eintreten.

3. Scheffler weist ferner in allerdings nicht ganz klarer Weise nach, dass auch in dem Falle, wo $\varphi_1 \geq \varphi$ ist, der Druck mit der Wandfläche nur den Winkel φ ein-

schliesse, und dass die vorigen Formeln nur Giltigkeit haben, wenn die Wandfläche nach hinten geneigt oder nach vorn geneigt, im letzten Falle aber $\beta < 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$ ist. Dies ist in Uebereinstimmung mit §. 30. Ist β größer, so ist die Horizontalcomponente des Erddruckes gleich dem horizontal gerichteten Drucke auf die verticale Fläche AN , nämlich:

$$29) \quad H = \frac{1}{2} \gamma h^2 \tan^2 (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)$$

und die Verticalcomponente des Erddruckes gleich dem Gewichte des Prismas ABN , d. i.

$$30) \quad V = \frac{1}{2} \gamma h^2 \tan \beta.$$

Der Erddruck selbst ist nun $E = \sqrt{H^2 + V^2}$. Ferner ist

$$\tan (\beta + \delta) = \frac{V}{H}, \text{ d. i.}$$

$$31) \quad \tan (\beta + \delta) = \tan \beta \tan^2 (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi).$$

Ist aber $\varphi_1 < \varphi$, so gelten die Formeln 27) und 28) auch noch, wenn $\beta > 45^\circ - \frac{1}{2} \varphi$ ist, jedoch nur so lange, als nach der eben aufgestellten Gleichung $\beta < \varphi_1$ wird. Der Grenzwert von β ergibt sich aus vorstehender Gleichung, wenn man $\delta = \varphi_1$ setzt; es ergibt sich

$$32) \quad \sin (2\beta + \varphi_1) = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi}.$$

Für $\varphi_1 = 0$ wird $\sin 2\beta = 0$ oder $2\beta = 180^\circ$, $\beta = 90^\circ$, so dass in diesem Falle die Formeln 27) und 28) für jede beliebige Lage der Wand gelten.

Die Poncelet'sche Theorie, welche Scheffler kritisiert, wird von ihm zum Theile falsch beurtheilt.

4. Den Fall, wo die Terrainfläche aus einer geneigten und einer horizontalen Fläche besteht, findet Scheff-

ler im Allgemeinen für zu complicirt, und er macht daher Annahmen, welche die Theorie vereinfachen. Wenn nämlich die Ueberhöhung nur gering ist, so nimmt er die geneigte Fläche parallel der tiefsten Gleitfläche an, so dass der Querschnitt des Druckprismas ein Trapez wird; alle Gleitflächen ergeben sich unter dieser Annahme parallel. Wenn aber die Ueberhöhung groß ist, so nimmt er an, dass die geneigte Fläche sich bis zum Durchschnitte mit der tiefsten Gleitfläche fortsetze, so dass der Querschnitt des Druckprismas ein Dreieck wird. In beiden Fällen erhält er den Druck etwas zu groß.

Professor v. Ott hat in seinen „Vorträgen über Baumechanik, I. Theil, Prag, 1870“ den Fall des überhöhten Erdkörpers genauer durchgeführt, jedoch ebenfalls nur unter der beschränkenden Annahme, dass die geneigte Terrainfläche unter dem Reibungswinkel geböscht ist, in welchem Falle jedes Druckprisma vierseitig ausfällt.

§. 45. Theorie von Guilhem. Der französische Ingenieur Saint-Guilhem gibt, auf Poncelet's Anschauungen fußend, eine allgemeine analytisch-grafische Theorie (Annales des ponts et chaussées, 1858: mémoire sur la poussée des terres avec ou sans surcharge). Er findet, entsprechend der Poncelet'schen Theorie (§. 43, Fig. 28):

$$E = G \cdot \frac{AK}{DK}$$

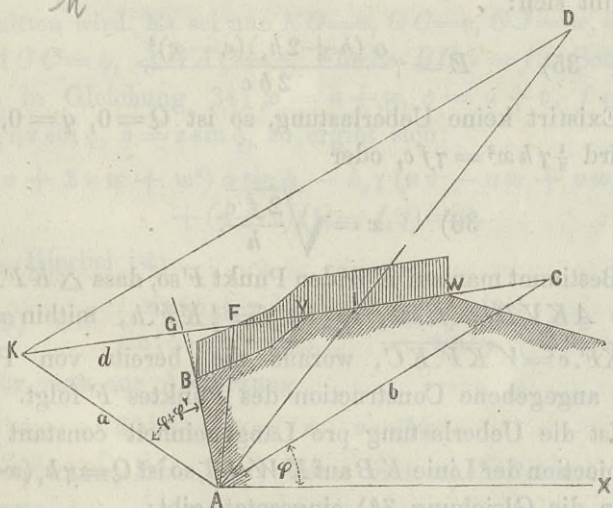
Das Dreieck AKD (Fig. 28), welches dem Dreiecke AHJ ähnlich, gegen dieses aber um den Winkel φ verdreht ist, kann man auch so wählen, dass der Punkt K in die Verlängerung der Ebene VW der Terrainfläche trifft, welche

von der Gleitfläche geschnitten wird (Fig. 32). Alsdann ist $\triangle KJD \sim \triangle AJC$, mithin:

$$E = G \frac{AK}{DK} = G \frac{AK}{AC} \frac{AC}{DK} = G \frac{AK}{AC} \cdot \frac{CJ}{KJ}$$

1. Es seien nun a, b, c die drei Seiten AK, AC und KC, y die Höhe des Dreiecks AKC , senkrecht auf KC ,

Fig. 32.



x die Länge von KJ, f die Fläche $AKVB, Q$ die etwa vorhandene Ueberlastung des Erdreiches von B bis J . Alsdann ist

$$G = Q + \frac{1}{2} \gamma h x - \gamma f, \text{ mithin}$$

$$33) \quad E = \frac{a}{b} [Q + \frac{1}{2} \gamma h x - \gamma f] \frac{c - x}{x}.$$

Differenziert man nach x , indem man beachtet, dass dQ die Ueberlastung auf die Länge dx , also bei der Last h, γ pro Längeneinheit, $dQ = h, \gamma dx$ ist, und setzt den Differenzialquotienten $= 0$, so ergibt sich:

$$c [Q + \frac{1}{2} \gamma h x - \gamma f] = \frac{1}{2} \gamma (h + 2h_1) x (c - x),$$

oder, nach Potenzen von x geordnet:

$$34) \quad \frac{1}{2} \gamma (h + 2h_1) x^2 - q c x + (Q - \gamma f) c = 0,$$

wodurch die Lage der Gleitfläche bestimmt ist. Setzt man

im Ausdrucke für E nun $Q + \frac{1}{2} \gamma h x - \gamma f = \frac{1}{2} \gamma (h + 2h_1) \frac{x(c-x)}{c}$,

so ergibt sich:

$$35) \quad E = \gamma \frac{a (h + 2h_1) (c - x)^2}{2 b c}.$$

Existirt keine Ueberlastung, so ist $Q = 0$, $q = 0$, daher wird $\frac{1}{2} \gamma h x^2 = \gamma f c$, oder

$$36) \quad x = \sqrt{\frac{2 f c}{h}}.$$

Bestimmt man auf KW den Punkt F so, dass $\triangle KFA =$ Fläche $AKVB = f$ ist, so ist $f = \frac{1}{2} KF \cdot h$, mithin $x = \sqrt{KF \cdot c} = \sqrt{KF \cdot KC}$, woraus die bereits von Poncelet angegebene Construction des Punktes F folgt.

Ist die Ueberlastung pro Längeneinheit constant und die Projection der Linie KB auf $KW = d$, so ist $Q = \gamma h_1 (x - d)$. Dies in die Gleichung 34) eingesetzt, gibt:

$$37) \quad x = \sqrt{\frac{2 (h_1 d + f) c}{h + 2h_1}}.$$

Ist in diesem Falle die Terrainfläche eine Ebene, so ist $f = \frac{1}{2} d h$; dies eingesetzt, gibt:

$$38) \quad x = \sqrt{c \cdot d},$$

so dass in diesem Falle die Ueberlastung auf die Lage der Gleitfläche keinen Einfluß hat. Die Gleichung 35) zeigt außerdem, dass der Erddruck durch die Ueberlastung im Verhältnisse von $h : h + 2h_1$ erhöht wird.

2. Die Gleichung 34) dient zur Bestimmung der Gleitfläche, wenn der Punkt der Wand, von welchem sie ausgeht, gegeben ist. Man muß hierbei diejenige Ebene der Terrainfläche kennen, welche von der Gleitfläche geschnitten wird. Um nun umgekehrt für einen gegebenen Punkt der Terrainfläche die Gleitfläche zu finden, sei G der Punkt, in welchem die Wand von der Verlängerung von VW geschnitten wird. Es sei nun $KG=u$, $GC=v$, $GJ=w$, $GA=z$, $\sphericalangle AGC=\phi$, $\sphericalangle GAC=\varphi$, Fläche $BGV=f_1$. Setzt man nun in Gleichung 34) $x = u + w$, $c = u + v$, $f = f_1 + \frac{1}{2}uz \sin \phi$, $h = z \sin \phi$, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2}(uv + 2uw + w^2) z \sin \phi - h_1 \gamma (uv - uw + vw - w^2) + (u + v)(Q - f_1 \gamma) = 0.$$

Hierbei ist:

$$39) \quad u = \frac{\sin(\varphi + \varphi_1)}{\sin(\phi - \varphi - \varphi_1)} z, \quad v = \frac{\sin \phi}{\sin(\varphi + \phi)} z$$

wofür man zur Abkürzung

$$39 a) \quad u = iz, \quad v = kz$$

setzen kann. Dies gibt, wenn man nach Potenzen von z ordnet:

$$40) \quad \frac{1}{2}ik \sin \phi \cdot z^3 + (kh_1 - w \sin \phi) i \cdot z^2 - \left[h_1 w (i - k) + \frac{1}{2} w^2 \sin \phi + (i + k) \left(\frac{Q}{\gamma} - f_1 \right) \right] z - h_1 w^2 = 0.$$

Durch diese Gleichung ist für jeden beliebigen Fall z bestimmt. Sie ist auch auf eine gekrümmte Terrainfläche anwendbar. Der entsprechende Erddruck ergibt sich zu:

$$41) \quad E = \frac{(2h_1 + z \sin \phi)(kz - w)^2 \cdot \sin^2(\phi + \varphi)}{2z \sin \phi \sin(\varphi + \varphi + \varphi_1)}$$

Wenn keine Ueberlastung vorhanden, also $Q = 0$,

$h_1 = 0$ ist, so reducirt sich die cubische Gleichung 40) auf eine quadratische, nämlich:

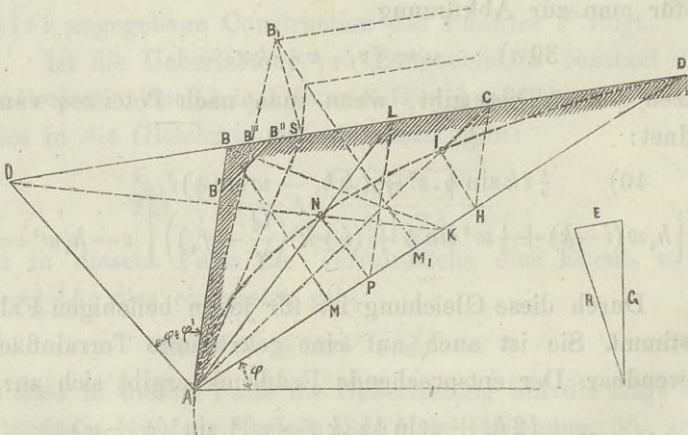
$$42) \quad z^2 - \frac{2w}{k}z + \frac{2(i+k)f_1 - w^2 \sin \psi}{i/k \sin \psi} = 0.$$

Für die praktische Anwendung schlägt Guilhem vor, den Winkel $\varphi_1 = 0$ anzunehmen, obwohl er zugibt, dass hieraus ein etwas zu großer Erddruck resultire.

§. 46. Culmann's Theorie. Die von Professor Culmann in seiner „graphischen Statik, 1866“ gegebene Theorie ist rein grafischer Natur. Die Schlüsse sind für den Fall eines Erdkörpers ohne Ueberlastung und ohne Cohäsion die folgenden:

Wenn man das Gewicht G des durch den beliebigen Schnitt AC (Fig 33) getrennten Prismas in zwei Compo-

Fig. 33.



nenten E und R zerlegt, welche unter den Winkeln φ_1 und φ gegen die Normale zur Wand AB und zur Schnitt-

fläche AC wirken, so lassen sich G , E und R zu einem Dreiecke zusammensetzen. Dreht man dasselbe um den Winkel $90^\circ - \varphi$, so fällt G in die Richtung der natürlichen Böschung AD und R in die Richtung der Schnittfläche AC , während E parallel zu einer Geraden AO wird, welche mit der Wand AB den Winkel $\varphi + \varphi_1$ einschließt.

Durch C ziehe man zu AB eine Parallele, welche AD in H schneide. Alsdann ist $G = \gamma \cdot \triangle ABC = \gamma \triangle ABH = \frac{1}{2} \gamma \cdot AH \cdot BM$, wenn BM senkrecht auf AD ist. Setzt man $\frac{1}{2} \gamma \cdot BM = 1$, so wird $G = AH$. Zieht man durch H eine Parallele zu AO , welche AC in J schneidet, so ist nach dem Gesagten $E = HJ$.

Culmann weist nun unter Zuhilfenahme der neueren Geometrie nach, dass der Punkt J bei variabler Lage von AC auf einer Hyperbel liegt, welche durch A und D geht und für welche AD und die Verbindungslinie KO der Mitte von AD mit O conjugirte Durchmesser sind. Er leitet hieraus ferner her, dass JH zu einem Maximum wird, wenn OC die mittlere Proportionale zwischen OB und OD ist, wodurch er zur folgenden Construction gelangt:

Man bestimme in OD den Punkt L so, dass OL die mittlere Proportionale zwischen OB und OD ist, so ist AL die Gleitfläche. Man verbinde ferner die Mitte K von AD mit O und ziehe durch den Durchschnittspunkt N der Geraden AL und OK eine Parallele NP zu AO , so ist

$$43) \quad E = \frac{1}{2} \gamma \cdot BM \cdot NP.$$

Ist eine von einem beliebigen Punkte S beginnende gleichmäßige Ueberlastung vorhanden, so bestimme man in einer Parallelen zu OD , welche der doppelten Ueberlastungshöhe entspricht, einen Punkt B_1 derart, dass

$\triangle A B_1 S = \text{Fläche } A' B'' S$ ist, wenn $B' B'' D$ die Terrainfläche bedeutet. Alsdann ist für einen beliebigen Schnitt $A C: \triangle A C B_1$ gleich $\text{Fläche } A' B' S C +$ der über $S C$ liegenden Ueberlastungsfläche, also $G = \gamma \cdot \triangle A C B_1$. Hieraus folgt nun, wenn B''' der Durchschnittspunkt zwischen $A B_1$ und der Verlängerung von $S C$ ist, dass die vorige Construction auch hier anzuwenden ist, wenn man $O L$ gleich der mittleren Proportionale zwischen $O B'''$ und $O D$ macht und wenn man statt der Normalen $B M$ die Normale $B_1 M_1$ setzt, so dass

$$44) \quad E = \frac{1}{2} \gamma B_1 M_1 \cdot N P$$

wird. Culmann berücksichtigt auch noch die Cohäsion.

Für die Bestimmung des Mittelpunktes des Druckes gibt er das im §. 27 gezeigte Verfahren oder die Anwendung des Seilpolygons nach den bekannten Lehren der grafischen Statik. Er findet, dass bei überhöhten Erdkörpern die Höhe dieses Punktes nicht größer als $0,375 h$ werden kann. Mit Rücksicht darauf, dass die Cohäsion diese Höhe etwas vermindert, schlägt er vor, diese Höhe in der Berechnung von Futtermauern durchgängig zu $\frac{1}{3} h$ anzunehmen.

§. 47. Unrichtigkeit des Principes des Prismas vom grössten Drucke. Alle bisher erwähnten Schriftsteller von Coulomb an, legen das Prisma vom grössten Drucke zu Grunde. Gegen dasselbe lassen sich aber Bedenken erheben. Man zerlegt nämlich bei Anwendung dieses Principes das Gewicht G eines beliebigen Prismas $A B C$, welches durch einen ebenen Schnitt $A C$ getrennt wird, in zwei auf die Wand $A B$ und den Schnitt $A C$ wirkende Componenten E und R , von denen R der in der Ebene $A C$ auftretenden Reibung und Cohäsion das Gleichgewicht hält. Durch diese

Bedingung ist E bei Annahme der Ebene AC bestimmt, E ändert sich also mit der Lage von AC . Man bestimmt nun die Lage von AC so, dass E ein Maximum wird.

Hierin liegen drei Mängel: 1. Es läßt sich nicht ohne Weiteres einsehen, warum der wirkliche Erddruck gerade das Maximum aller den verschiedenen Lagen von AO entsprechenden Werte von E sein soll; ein strenger Beweis ist von keinem Autor geliefert. 2. Die Kraft R hält in der That beim Nachgeben der Wand nur in der Gleitfläche AD den Widerständen das Gleichgewicht, während in jeder anderen Ebene R kleiner ist, als zum Gleichgewichte mit den Widerständen erforderlich wäre. 3. E ist mit der Lage des angenommenen Schnittes AC variabel, während sich doch nur ein ganz bestimmter, von der Lage des Schnittes AC unabhängiger Druck äußern kann.

Auf die letzten Umstände machte zuerst Rebhann (Theorie des Erddruckes und der Futtermauern, 1871) aufmerksam. Er führt statt dessen folgende Betrachtungsweise ein: Die auf die Schnittfläche AC wirkende Componente R wird in eine senkrechte und eine parallele zu AC wirkende Componente N und P zerlegt; die letztere wird wieder in zwei Theile r und C zerlegt, von denen die eine r im Allgemeinen kleiner als die Reibung, die andere C im Allgemeinen kleiner als die Cohäsion ist. Rebhann setzt nun, wenn l die Länge von AC , φ den Reibungswinkel, c den Cohäsionscoefficienten bedeutet, $r = N \tan \varphi'$, $C = c' l$, wenn $\varphi' < \varphi$, $c' < c$ ist, also $P = N \tan \varphi' + c' l$. Durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich für E ein Ausdruck, in welchem φ' und c' auftreten, so dass $E = f(\varphi', c')$ gesetzt werden kann. Wird in diesem Ausdrucke φ und c statt φ' und c' gesetzt, so ergibt sich statt

E offenbar ein Wert $E' = f(\varphi, c)$, welcher $< E$ ist, weil jetzt angenommen wird, dass sich die ganzen Widerstände in AC der Bewegung entgegensetzen, während in Wirklichkeit doch nur ein Theil derselben sich der Bewegung entgegensetzt. Demnach muß E das Maximum von E' oder $E = \max E'$ sein.

Obwohl diese Schlussfolgerungen richtig sind, so kommt das ganze Verfahren im Grunde ganz auf die Anwendung des Principes vom Prisma des größten Druckes hinaus.

Wir glauben, dass der in §. 21 von uns eingeschlagene Weg der correcteste ist.

§. 48. Rebhann's Theorie. Am vollständigsten wurde bis jetzt der Erddruck von Prof. Re b h a n n (Theorie des Erddruckes und der Futtermauern, 1871) behandelt. Die Behandlung ist im Allgemeinen eine analytische; jedoch leitet Re b h a n n aus den erhaltenen Formeln geometrische Constructionen ab. Nach allgemeinen Erörterungen entwickelt er die Theorie im ersten Theile unter Annahme eines normal, im zweiten Theile unter Annahme eines schief (unter dem Reibungswinkel φ_1 gegen die Normale) gegen die Wand gerichteten Erddruckes. Im ersten Theile berücksichtigt er die Cohäsion, im zweiten jedoch nicht.

Unter Annahme einer variablen Schnittfläche AC , welche unter dem Winkel w geneigt ist, ergibt sich, wenn F den Inhalt der Fläche ABC , β die Neigung der Wand gegen die Verticale bedeutet, in der im vorigen Paragraph angegebenen Weise:

$$45) \quad E = \gamma \max \frac{F \sin(w - \varphi)}{\cos(\beta + w - \varphi - \varphi_1)}$$

Indem man nach w differenziert und den Differenzialquotienten $= 0$ setzt, ergibt sich:

$$\left[F \cos(w - \varphi) + \frac{dF}{dw} \sin(w - \varphi) \right] \cos(\beta + w - \varphi - \varphi_1) \\ + F \sin(w - \varphi) \sin(\beta + w - \varphi - \varphi_1) = 0,$$

oder auch:

$$46) \quad F \cos(\beta - \varphi_1) + \frac{dF}{dw} \sin(w - \varphi) \cos(\beta + w - \varphi - \varphi_1) = 0.$$

Nun aber ist, wenn man die Länge $AC = l$ setzt, $dF = -\frac{1}{2} \cdot l \cdot dw \cdot l = -\frac{1}{2} l^2 dw$; mithin wird:

$$47) \quad F = \frac{l^2 \sin(w - \varphi) \cos(\beta + w - \varphi - \varphi_1)}{2 \cos(\beta - \varphi_1)}.$$

Dies eingesetzt, gibt:

$$48) \quad E = \frac{1}{2} l^2 \gamma \frac{\sin^2(w - \varphi)}{\cos(\beta - \varphi_1)}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen leitet nun Rebhann die in §. 23 und 25 auf geometrischem Wege erhaltenen interessanten geometrischen Sätze in Betreff der Lage der Gleitfläche und der Größe des Erddruckes ab.

Er findet hieraus leicht, dass unter Berücksichtigung der Reibung an der Wand im Allgemeinen die Gleitfläche eine weniger steile Lage erhält und der Normaldruck gegen die Wand kleiner ausfällt, also ohne Berücksichtigung dieser Reibung.

Rebhann wendet nun diese allgemeinen Sätze auf folgende specielle Fälle an: I. Horizontale Terrainfläche. Er findet:

$$49) \quad E = \frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi + \varphi_1 - \beta)} \left[\sqrt{\cot \varphi + \tan(\varphi + \varphi_1 - \beta)} \right. \\ \left. - \sqrt{\tan \beta + \tan(\varphi + \varphi_1 - \beta)} \right]^2 \\ = \frac{\gamma h^2}{2 \cos \beta} \left[\frac{\sqrt{\cos \beta \cos(\beta - \varphi_1)} - \sqrt{\sin \varphi \sin(\varphi + \varphi_1)}}{\cos(\varphi + \varphi_1 - \beta)} \right]^2.$$

II. Terrainfläche, welche unter dem natürlichen Böschungswinkel φ geneigt ist. Aus dem Satze über die Lage der Gleitfläche folgt sofort, dass dieselbe in diesem Falle der Terrainfläche parallel ist. Als Größe des Erddruckes ergibt sich einfach:

$$50) \quad E = \frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \varphi_1 \cos \beta}.$$

Der normale Erddruck ist hier derselbe, wie ohne Berücksichtigung der Reibung an der Wand.

III. Beliebige geneigte ebene Terrainfläche. Außer den etwas complicirten ~~analytischen~~ Ausdrücken wird die grafische Construction abgeleitet. Er gelangt zu den in §. 24, Fig. 12 dargestellten drei Constructionen, welche darauf beruhen, dass AK die mittlere Proportionale zwischen AE und AF ist. Er gibt außerdem für eine verticale Wand eine ausführliche Tabelle.

IV. Fall, wo sich an eine geneigte Fläche eine horizontale Fläche anschließt. Hier gibt er zunächst die auf den vorigen Fall durch Verwandlung des vierseitigen Druckprismas in ein gleichgroßes dreiseitiges zurückgeführte Construction und leitet hieraus Formeln ab. Für den Fall, dass die geneigte Fläche unter dem Reibungswinkel geneigt ist und für eine verticale Wand gibt er eine ausführliche Tabelle.

Zur Bestimmung des Angriffspunktes des Erddruckes gibt Rebhann die in §. 27 gezeigte Methode. Für den IV. Fall, in welchem dieser Punkt nicht in $\frac{1}{3}$ der Höhe liegt, entwickelt er Formeln, jedoch nur ohne Rücksicht auf die Reibung an der Wand. Er findet, dass die Höhe des Angriffspunktes immer zwischen den Grenzen $\frac{1}{3}h$

und $\frac{3}{8}h$ oder zwischen $0.333h$ und $0.375h$ liegt, so dass es zulässig erscheint, diese Höhe durchschnittlich zu $0.35h$ anzunehmen. Nahezu soll dieser Punkt in einer durch den Schwerpunkt des Druckprismas zur Gleitfläche gezogenen Parallelen liegen.

In ähnlicher Weise behandelt Rebhann auch den passiven Erddruck.

§. 49. Rückblick. Aus dem Mitgetheilten ist zu ersehen, dass die analytischen Ausdrücke für den Erddruck, den Hebelsarm desselben und für die Lage der Gleitfläche so complicirt sind, dass das grafische Verfahren im Allgemeinen vorzuziehen ist. Wir glauben, dass unter den mitgetheilten grafischen Entwicklungen die von uns in §. 21 bis 23 gegebene die einfachste ist.

Sämmtliche Theorien basiren auf der Annahme einer ebenen Gleitfläche. Dass diese Annahme im Allgemeinen zu falschen Resultaten führen muß, geht aus der im I. Abschnitte entwickelten exacten Theorie hervor. Mohr (Beitrag zur Theorie des Erddruckes; Zeitschr. des hannov. Arch.- u. Ing.-Vereines, 1871) bemerkt, dass dies schon daraus hervorgehe, dass sich die drei Kräfte, welche auf das durch eine Ebene getrennte Druckprisma wirken, nicht in einem Punkte schneiden, was nothwendig der Fall sein muß, wenn auch in den kleinsten Theilen Gleichgewicht stattfindet. Diese Behauptung ist indeß nicht richtig, weil sie darauf beruht, dass der Druck auf die Gleitfläche (bei ebener Terrainfläche) in $\frac{1}{3}$ der Höhe wirke, was sich aber im Allgemeinen nicht nachweisen läßt.

Ein genauerer Aufschluss ist nur möglich, wenn man

von einer Untersuchung des Gleichgewichtes der Elemente ausgeht.

Alle Autoren, welche den Druck schief gegen die Wand gerichtet annehmen, mit Ausnahme Culmann's, haben die Cohäsion vernachlässigt. Wir sind der Meinung, dass eine gleichzeitige Wirkung der Reibung und Cohäsion überhaupt nicht eintreten kann, glauben vielmehr, dass die Reibung erst in Wirksamkeit tritt, wenn die Cohäsion gelöst ist. Hiernach müsste bei cohärenter Erde der obere Theil, soweit sich derselbe cohärent erhält, als vollkommen fester Körper, der untere Theil dagegen als cohäsionslos angesehen werden, ein Zustand, der natürlich erst eintritt, wenn die Wand zu weichen beginnt. Der obere feste Theil wird an seinem unteren Punkte einen concentrirten Druck ausüben. Auf eine nähere Untersuchung dieses Falles einzugehen, verzichten wir an dieser Stelle.

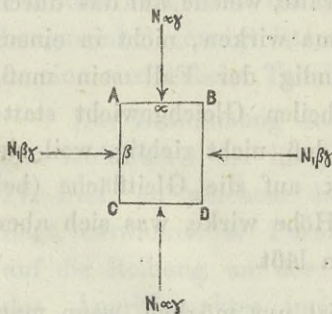
III. Kapitel. Theorien, welche vom Gleichgewichte der Elemente ausgehen.

§. 50. Ortman's Theorie. Den ersten Versuch, vom Gleichgewichte eines unendlich kleinen Paralleloipedes

auszugehen, machte wohl der Architekt Ortman. (Die Statik des Sandes, als Wissenschaft begründet und bearbeitet, 1847.) Er schließt folgendermaßen:

Auf die eine Fläche AB (Fig. 34) eines rechtwinkligen Paralleloipedes $ABCD$ mit Kanten α , β , γ wirke pro Flächeneinheit die Kraft N .

Fig. 34.



Ortmann glaubt, dass auf jede der übrigen Flächen ein gleich großer Druck N_1 pro Flächeneinheit wirken müsse, um das Gleichgewicht zu erhalten (als Hauptgrund führt er an, dass kein Grund vorhanden sei, das Gegentheil anzunehmen). Vorausgesetzt, dass sich bei einer Verschiebung des Elementes die an die Flächen $\alpha\beta$ anstoßenden Sandkörner mitbewegen, ist $N_1\alpha\gamma$ gleich $N\alpha\gamma$ weniger den an den zwei Seiten $\beta\gamma$ wirkenden Reibungen, also $N_1\alpha\gamma = N\alpha\gamma - 2fN_1\beta\gamma$, oder

$$N_1 = \frac{N}{1 + 2f\frac{\beta}{\alpha}}$$

Wirkt der Druck N auf eine der Flächen $\beta\gamma$, so ergibt sich in ganz gleicher Weise:

$$N_1 = \frac{N}{1 + 2f\frac{\alpha}{\beta}}$$

Da sich aber nach beiden Formeln derselbe Wert von N_1 ergeben muß, so setzt Ortmann $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$, also $\alpha = \beta$, oder

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} = 1, \text{ mithin}$$

$$N_1 = \frac{N}{1 + 2f}$$

Ortmann behandelt auf dieser Grundlage in seinem sehr gelehrte aussehenden Werke eine Menge von Fragen (Druck auf Flächen von verschiedener Lage, Tiefe des Einsinkens von Körpern u. s. w.) mit derselben Leichtigkeit, wie dies in der Hydrostatik möglich ist. Nach der gegebenen Probe geistreicher Schlüsse wird man indeß wohl nicht nach näheren Mittheilungen Verlangen tragen.

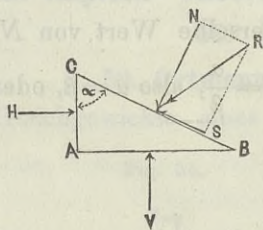
§. 51. Theorie von Scheffler. Von richtigen Gesichtspunkten, indeß nur in eingeschränkter Weise, behandelt Scheffler den Erddruck (Crelle's Journal für die Baukunst, 1851. — Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, 1857). Er behandelt nur den Fall einer oben und unten durch horizontale Ebenen, sonst aber allseitig unbegrenzten Erdmasse. Für diesen Fall sind Scheffler's Schlüsse in Kürze folgende:

1. Der Druck auf ein horizontales Flächenelement muß aus Rücksicht auf die Symmetrie vertical gerichtet sein.

2. Der Druck auf ein verticales Flächenelement muß ebenfalls aus Rücksicht auf die Symmetrie senkrecht zum Flächenelemente gerichtet sein.

3. Um zum Drucke auf ein beliebiges Flächenelement zu gelangen, betrachtet Scheffler ein dreiseitig prismatisches Element ABC (Fig. 35) mit einer horizontalen Fläche AB

Fig. 35.



und einer verticalen Fläche AC . Auf die erstere wirke der Verticaldruck V , auf die letztere der Horizontaldruck H und auf die geneigte Fläche BC der Druck R , alle drei Drücke auf die Flächeneinheit bezogen. Die Normal- und Parallelcomponente von R sei N und S und der Neigungswinkel von

BC gegen die Verticale = α . Alsdann erfordert das Gleichgewicht die Erfüllung der Bedingungen:

$$V \cdot AB \sin \alpha + H \cdot AC \cos \alpha = N \cdot BC,$$

$$V \cdot AB \cos \alpha + H \cdot AC \sin \alpha = S \cdot BC,$$

oder weil $AB = BC \sin \alpha$, $AC = BC \cos \alpha$ ist,

$$51) \quad \begin{cases} N = V \sin^2 \alpha + H \cos^2 \alpha, \\ S = (V - H) \sin \alpha \cos \alpha. \end{cases}$$

4. Der Horizontaldruck H muß groß genug sein, um für jede Lage der Fläche BC ein Verschieben zu verhindern. Der Verticaldruck V beansprucht zunächst die ganze Reibung und Cohäsion in der Fläche BC , und wenn diese nicht zur Erhaltung des Gleichgewichtes genügt, so wird die fehlende Kraft durch den Horizontaldruck H ersetzt. Es muß demnach $S = N \tan \varphi + c$ sein. Setzt man dies in die vorigen Gleichungen ein und eliminirt N , so ergibt sich:

$$52) \quad H = \frac{V \tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi)} - \frac{c \cos \varphi}{\cos \alpha \sin(\alpha + \varphi)}$$

$$= \frac{V[\sin(2\alpha + \varphi) - \sin \varphi] - 2c \cos \varphi}{\sin(2\alpha + \varphi) \sin \varphi}$$

Der Winkel α muß so bestimmt werden, dass H zu einem Maximum wird, weil in dieser Fläche das Erdprisma das meiste Bestreben zum Gleiten hat. Differenzirt man nach α und setzt den Differenzialquotienten $= 0$, so ergibt sich:

$$\alpha = 45^\circ - \frac{1}{2} \varphi, \text{ daher}$$

$$53) \quad H = V \tan^2(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) - \frac{c \cos \varphi}{\cos^2(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)}$$

5. Ist z die Tiefe der Fläche AB unter der oberen Fläche des Erdkörpers, so ist offenbar $V = z \gamma$.

6. Die Componenten des auf eine beliebige Fläche gerichteten Druckes sind nun durch die Gleichungen 51) bestimmt. Der wirkliche Druck R ist sodann $= \sqrt{N^2 + S^2}$.

Scheffler bestimmt nun hiernach den Gesamtdruck auf eine gegebene verticale Figur, und weist nach, dass diese Formeln auch für den Druck gegen eine verticale Wand giltig bleiben, wenn dieselbe als völlig glatt betrachtet werden kann.

Man mache OC senkrecht auf QQ und $= \frac{1}{2}(AO + OB) = \frac{1}{2}(A + B)$, mache ferner $CD = CE = CO$ und sodann auf der Geraden ECD die Strecke $CR = \frac{1}{2}(A - B)$, so gibt OR die Größe und Richtung des auf QQ wirkenden Druckes. Der Winkel COR ist der Winkel δ , welchen dieser Druck mit der Normalen zu QQ bildet. Da OC und CR constant sind, so wird dieser Winkel zum Maximum, wenn OR auf CR senkrecht steht. Daher ist

$$\max \sin \delta = \frac{A - B}{A + B}.$$

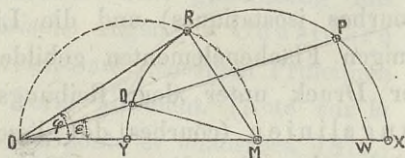
Da nun aber das Maximum von $\delta = \varphi$ ist, so ist $\frac{A - B}{A + B} = \sin \varphi$, mithin

$$54) \quad \frac{B}{A} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi).$$

Rankine zeigt nun, dass eine zur Terrainfläche parallele Fläche einen verticalen Druck V , eine verticale Fläche einen zur Terrainfläche parallelen Druck P empfängt (entsprechend dem §. 16),

und gibt zur Bestimmung dieser Drücke folgende Construction (Fig. 37): Man lege durch O eine Horizontale OX ,

Fig. 37.



unter dem natürlichen Böschungswinkel geneigte Gerade OR und eine zur Terrainfläche parallele Gerade OP , mache MR senkrecht auf OR und schlage aus M mit MR einen Kreis, welcher die Gerade OP in P und Q schneidet, so ist $V : P = OP : OQ$. Macht man PW senkrecht auf OP und $OW = \gamma y'$, wenn y' die verticale Tiefe des fraglichen Punktes unter der Terrainfläche bedeutet, so ist

$$A = OX, \quad B = OY, \quad V = OP, \quad P = OQ.$$

Die Hauptachse A halbirt den Winkel QMX , woraus Rankine auch die der Lage der Hauptdrücke bestimmende Formel 43) (S. 27) ableitet.

Dementsprechend nimmt nun Rankine auch den Druck auf eine verticale Wand parallel zur Terrainfläche an, und bestimmt die Größe desselben durch die eben gezeigte Construction.

§. 54. Theorie Levy's. Der französische Ingenieur M. Levy legte der Pariser Akademie der Wissenschaften im Jahre 1867 eine Arbeit vor, welche den Gegenstand fast in gleicher Weise behandelt, wie in der Arbeit des Verfassers. Ein Referat dieser Arbeit von De Saint-Venant findet sich in „Comptes rendus LXX, 1870“, wozu wir nur einige Abweichungen von der im I. Abschnitte dargestellten Theorie zu erwähnen haben.

Levy nennt die Linien, welche von den Flächenelementen gebildet werden, mit welcher die Hauptdrücke (pressions principales) wirken, isostatische Linien (courbes isostatiques) und die Linien, welche von denjenigen Flächenelementen gebildet werden, gegen welche der Druck unter dem Reibungswinkel φ wirkt, Gleitungslinien (courbes de glissement). Saint-Venant glaubt, dass für die erste Classe von Linien der Name orthostatische Linien passender sei.

Statt der Gleichung 31) (S. 22) zwischen N , H , T und φ gibt Levy folgende Gleichung:

$$55) (H + V)^2 \sin^2 \varphi - (H - V)^2 - 4T^2 = 0.$$

Den Gleichungen 2) (S. 6) entsprechen, wenn man $\epsilon = 0$ annimmt, also die Coordinatenachsen horizontal und vertical legt, die Ausdrücke:

$$56) \quad V = \frac{d^2 \phi}{dx^2}, \quad H = \frac{d^2 \phi}{dy^2}, \quad T = \frac{d^2 \phi}{dx dy},$$

wenn ϕ eine Function von x und y bedeutet. Die Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gleichung 55) gibt eine einzige Differenzialgleichung zweiter Ordnung für ϕ , die indeß im Allgemeinen nicht integrabel ist. Levy wendet daher seine Theorie ebenfalls nur auf den Fall einer oben durch eine Ebene, sonst aber unbegrenzten Erdmasse an, und glaubt, dass dieser Fall mit der Begrenzung durch eine feste Wand identisch sei, wenn die Wand die Richtung einer Fläche der unbegrenzten Erdmasse habe, gegen deren Normale der Druck unter dem Reibungswinkel φ_1 gerichtet ist. Wir haben in §. 20 gezeigt, dass die Theorie der unbegrenzten Erdmasse auch noch in anderen, allerdings weniger wichtigen Fällen auf die Begrenzung durch eine Wand anwendbar sei.

§. 55. Theorie Considère's. Fast gleichzeitig mit Levy hat auch der französische Ingenieur Considère eine Theorie veröffentlicht, welche auf denselben Principien beruht, obwohl sie in der Form abweicht. (Note sur la poussée des terres. Annales de ponts et chaussées. 1870.) Nachdem Considère gezeigt, dass es zwei aufeinander senkrechte Flächenelemente gibt, auf welche keine Schübe wirken, bezeichnet er das Verhältniß der auf diese Flächen wirkenden Drücke (d. i. nach unserer Bezeichnung $\frac{B}{A}$) mit k . Durch die Betrachtung des Gleichgewichtes eines dreiseitigen Prismas findet er, dass, wenn δ den Winkel bedeutet, unter welchem der Druck auf eine beliebige Fläche gegen die Normale derselben wirkt,

$$57) \quad \max \tan \delta = \frac{k-1}{2\sqrt{k}}$$

ist. Indem er nun $\max \tan \delta = \tan \varphi$ setzt, findet er:

$$58) \quad k = \cot^2 (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi).$$

Nachdem er gezeigt hat, dass δ in jedem Punkte für irgend eine Ebene das Maximum φ erreichen müsse, weist er mit Hilfe der aus dem Gleichgewichte des dreiseitigen Prismas abgeleiteten Formeln nach, dass die Gleitflächen (éléments à frottement maximum oder surfaces de glissement) den Winkel zwischen den Hauptachsen in die Theile $45^\circ - \frac{1}{2} \varphi$ und $45^\circ + \frac{1}{2} \varphi$ theilen.

Nachdem noch gezeigt ist, dass die Lage der Flächen, für welche der Winkel δ constant ist, ebenfalls für alle Punkte des nur oben durch eine Ebene begrenzten Erdkörpers constant ist, wird für die Fälle, dass die Oberfläche horizontal unter dem Böschungswinkel geneigt, und beliebig geneigt ist, die Bestimmung der Richtung und der Größe des Druckes für eine beliebige Lage der Fläche vorgenommen. Die Ausdrücke sind ziemlich complicirt. Auf geometrische Anschauungen geht Considère nicht ein.

Considère ist der Meinung, dass im Gleichgewichtszustande des unbegrenzten Erdkörpers nichts geändert wird, wenn der Erdkörper auf der einen Seite durch eine beliebige Wand begrenzt wird. Für die Bestimmung des Druckes auf diese Wand gibt es außer den Formeln folgende, allerdings nicht bequeme Construction: Ist ε der Neigungswinkel der Terrainfläche, γ der Winkel des Hauptdruckes A mit der Verticalen, so ergibt sich

$$59) \quad \tan \gamma \tan (\varepsilon - \gamma) = \frac{1}{k} = a^2,$$

woraus man leicht

$$60) \quad \tan \gamma + \tan (\varepsilon - \gamma) = \tan \varepsilon \left(1 - \frac{1}{k} \right) = b$$

ableitet. Die Größen a und b sind bekannt. Construirt man einen Halbkreis mit dem Durchmesser b und zieht darin senkrecht zum Durchmesser eine Senkrechte von der Länge a , so sind die beiden Theile des Durchmessers $\tan \gamma$ und $\tan (\varepsilon - \gamma)$. Hiermit ist also $\tan \gamma$ bekannt und es läßt sich somit die Richtung der Hauptachse A und somit auch die der Gleitflächen verzeichnen.

Man construire nun hiernach für den untersten Punkt A der Wand AB die Gleitfläche AC , ziehe durch einen Punkt D von AC , welche von A um $\frac{1}{3} AC$ entfernt ist, eine Gerade, welche mit AC den Winkel $90^\circ - \varphi$ bildet (Richtung des Druckes R), und bestimme den Durchschnitt F derselben mit der durch den Schwerpunkt des Dreieckes ABC gehenden Verticalen. Verbindet man jetzt F mit einem Punkte H der Wand, welcher um $\frac{1}{3} AB$ von A absteht, so gibt die Gerade FH die Richtung des Erddruckes E . Die Zerlegung des Gewichtes des Prismas ABC nach Richtung von FD und FH gibt nun auch die Größe des Erddruckes.

§. 56. Theorie von Mohr. Soeben hat Prof. Mohr eine beachtenswerte grafische Theorie des Erddruckes veröffentlicht (Beiträge zur Theorie des Erddruckes, Zeitschrift des hannov. Arch.- u. Ing.-Vereins, 1871), wobei er sich allerdings des Vortheiles, welchen die Einführung der Ellipse auf die Anschauung gewährt, begibt. Er nimmt von vornherein die obere Fläche des zunächst sonst unbegrenzten Erdkörpers als Ebene an, und vernachlässiget die Cohäsion. Seine Hauptresultate sind folgende:

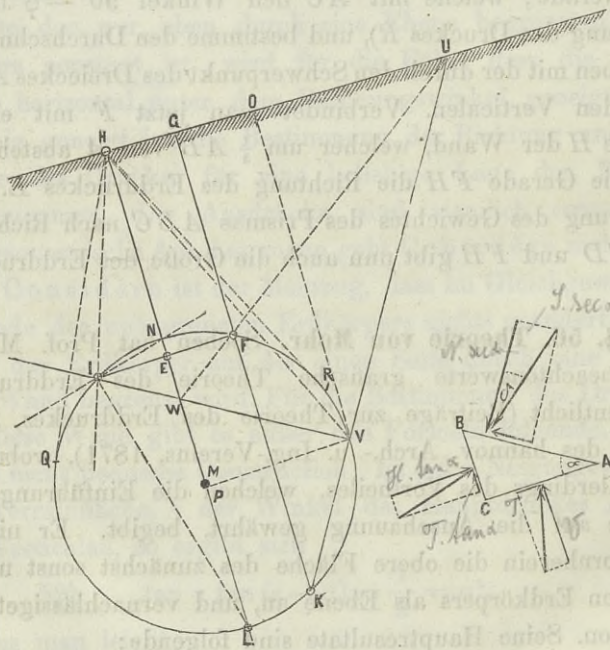
1. Der Druck auf eine zur Terrainfläche parallele Fläche ist vertical und $= \gamma y$, wenn y den normalen Abstand von der Oberfläche bezeichnet. (Uebereinstimmend mit S. 23.)

2. Der Druck auf eine verticale (der Achse der z parallele) Fläche ist der Terrainfläche parallel (übereinstimmend mit §. 16). Beide Sätze ergeben sich sofort aus der Betrachtung des Gleichgewichtes eines Prismas mit verticalen und der Terrainfläche parallelen Seiten.

3. Gleichheit der Schübe, welche auf zu einander senkrechte Flächen wirken (Seite 5).

4. Auf das elementare Prisma ABC (Fig. 38), in welchem AC parallel der Oberfläche und constant $= 1$

Fig. 38.



(indeß unendlich klein) angenommen wird, BC senkrecht auf AC und $\sphericalangle CAB = \alpha$ beliebig angenommen ist, wirken die sechs Kräfte:

$$V, T, H \tan \alpha, T \tan \alpha, N \sec \alpha, S \sec \alpha$$

(vergl. Fig. 2, S. 6). Diese sechs Kräfte müssen sich zu einem geschlossenen Polygone $EF GUVW$ zusammensetzen lassen, wobei

$$V = FG, T = EF, H \tan \alpha = GU,$$

$$T \tan \alpha = EW, N \sec \alpha = UV, S \sec \alpha = VW$$

ist. Sind J und K die Durchschnittspunkte der Verlängerungen von EF und WV , FG und VU , so ist $EJ = EW \cot \alpha = T$, $GK = GU \cot \alpha = H$; somit sind die Punkte:

$$E, F, G, J \text{ und } K$$

fest, d. h. von der Lage der Fläche AB oder vom Winkel α unabhängig.

GE oder HJ ist der Druck auf die Fläche AC , somit ist GE und HJ vertical und $= \gamma y$. Da $\sphericalangle JFK = \sphericalangle JVK = 90^\circ$ ist, so läßt sich durch die Punkte J, F, V und K ein Kreis mit dem Durchmesser JK legen.

Ist VO und VP parallel zu FG und FE , so ist $VO = UV \cos \alpha = N$, $VP = VW \cos \alpha = S$. Sonach läßt sich, falls man den genannten Kreis construirt hat, die Größe von N und S für eine beliebige Lage von AB oder für ein beliebiges α sofort angeben. Die Diagonale HV stellt den auf AB wirkenden Druck selbst dar. Der Winkel VHP ist der Winkel δ , unter welchem R gegen die Normale von AB wirkt. (In §. 3 analytisch entwickelt.)

5. Die Geraden HL und HN stellen das Maximum und Minimum von N dar. Die entsprechenden Richtungen

sind JN und JL ; dieselben stehen hiernach aufeinander senkrecht. Die entsprechenden T werden nach der Figur = Null (HL und HN entsprechen also unseren Hauptdrücken, §. 4 und 5).

6. Die Gleichungen 12, welche die Größen von N und S bei gegebenen Hauptdrücken darstellen, ergeben sich aus der Figur sofort, wenn man beachtet, dass $\sphericalangle NMV = 2 \sphericalangle NJV = 2\beta$, $HM = \frac{1}{2}(A + B)$ und $ML = \frac{1}{2}(A - B)$ ist.

7. Der Winkel $VHP = \delta$ zwischen dem Drucke R und der Normalen zur afficirten Fläche AB kann zwischen 0 und dem Winkel $BHM = QHM$ variiren, falls HR und HQ Tangenten an den Kreis sind. Hieraus folgt leicht

$$\max \sin \delta = \frac{A - B}{A + B}$$

(Statt dessen haben wir die Gleichung 16 für $\max \tan \delta$.)

8. Der Winkel $FHM = \max \delta$ muß im Allgemeinen $< \varphi$ sein; für den Grenzzustand ist $\max \delta = \varphi$. Es sind zwei Grenzzustände möglich; der eine tritt ein, wenn der kleinere Hauptdruck B sich vermindern, der andere, wenn der größere Hauptdruck A sich vergrößern würde. Diese beiden, von Mohr bezüglich unterer und oberer Grenzzustand genannt, kommen bezüglich beim activen und passiven Erddruck in Frage. Durch die Punkte J und F lassen sich zwei Kreise legen (Fig. 39), welche die Geraden, die mit der Normalen zur Oberfläche den Winkel φ bilden, tangiren, und welche beiden Gleichgewichtszuständen entsprechen, die durch die Indices 1 und 2 unterschieden sind. A hat die Richtung JN und die Größe HL , B die Rich-

tung JL und die Größe HN (mit dem entsprechenden Index). Die Gleitflächen, für welche δ seinen Maximalwert φ erreicht, haben die Richtungen JQ und JR .

Aus der grafischen Darstellung (Fig. 39) leitet nun Mohr zur Vervollständigung der Uebersicht über die Abhängigkeit der Größen Formeln ab, welche

insbesondere unseren Formeln 24), 43) und 44) entsprechen.

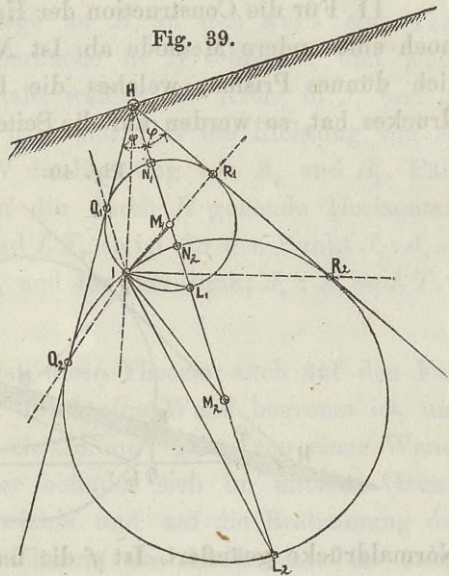
9. Der zu den Bögen Q_1R_1 , Q_2R_2 gehörige Centriwinkel ist $= 180^\circ - \sphericalangle QHR = 180^\circ - 2\varphi$, also ist der Winkel zwischen beiden Gleitflächen:

$$\sphericalangle Q_1JR_1 = 90^\circ - \varphi, \quad \sphericalangle Q_2JR_2 = 90^\circ + \varphi.$$

Der Druck E_1 und E_2 auf die Gleitflächen wird durch $HQ_1 = HR_1$ und $HQ_2 = HR_2$ dargestellt. Aus der Figur folgt leicht, dass $E = \sqrt{AB}$ ist.

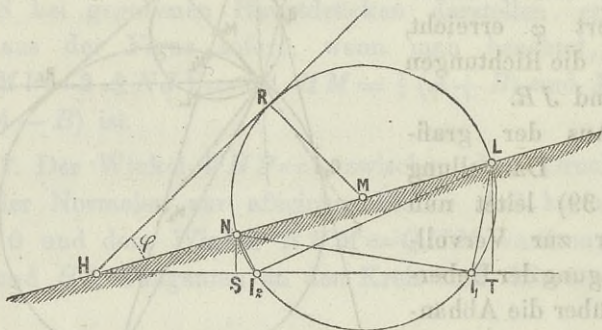
10. Mohr wendet jetzt seine Construction auf den Fall einer horizontalen Terrainfläche (in welchen $JF = 0$ wird, beide Kreise sich also berühren) und auf den Fall an, dass die Terrainfläche die natürliche Böschung habe (in welchem $\sphericalangle JHM = \varphi$ wird, die Tangente HQ also mit HJ zusammenfällt, so dass jetzt nur ein einziger Grenz-zustand möglich ist).

Fig. 39.



11. Für die Construction der Hauptdrücke leitet Mohr noch eine andere Methode ab. Ist NJ (Fig. 40) ein unendlich dünnes Prisma, welches die Richtung eines Hauptdruckes hat, so werden auf die Seitenflächen desselben nur

Fig. 40.



Normaldrücke geäußert. Ist f die unendlich kleine Grundfläche bei J , D der bei J in Richtung von JN wirkende Hauptdruck, das Gewicht des Prismas also $JNf\gamma$, und ist JS horizontal, NS vertical, so fordert das Gleichgewicht gegen Verschiebung in Richtung von JN : $Df = JNf\gamma \sin \sphericalangle NJS = NSf\gamma$, also:

$$D = NS \gamma.$$

Ist nun JL und JN die Richtung von A und B , NS , LT vertical und SJT horizontal, so ist ebenso

$$A = LT, \quad B = NS.$$

Hieraus leitet Mohr mit Berücksichtigung der Gleichung $\frac{B}{A} = \tan^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ die folgende einfache Construction ab:

Man schlage aus einem Punkte M der Oberfläche einen Kreis, welcher die letztere in N und L schneidet, mache

$\sphericalangle NMR = 90^\circ - \varphi$, lege an R an den Kreis eine Tangente, welche die Oberfläche in H schneidet und ziehe durch H eine Horizontale, welche den Kreis in J_1 und J_2 schneidet. Alsdann ist J_1L und J_1N die Richtung von A_1 und B_1 , J_2L und J_2N die Richtung von A_2 und B_2 . Fällt man von N und L auf die durch H gehende Horizontale die Senkrechten NS und LT , so ist für den Punkt J_1 : $A_1 = LT \cdot \gamma$, $B_1 = NS \cdot \gamma$, und für den Punkt J_2 : $A_2 = LT \cdot \gamma$, $B_2 = NS \cdot \gamma$.

12. Mohr wendet diese Theorie auch auf den Fall an, wo der Erdkörper durch eine Wand begrenzt ist, und zwar in folgender Beschränkung: „Ein von einer Wandfläche gestützter Körper befindet sich im unteren Grenzstate des Gleichgewichts und auf die Bestimmung des Erddruckes darf die Theorie des Erddruckes im unbegrenzten Erdkörper angewendet werden, wenn die Gerade, welche nach jener Theorie die Richtung des größeren Hauptdruckes gegen den Fußpunkt der Wandfläche angibt, innerhalb des gestützten Erdkörpers liegt.“ Hiernach bildet also die Richtung des Druckes mit der Normalen zur Wand einen zwischen 0 und φ liegenden Winkel.

Er gibt für diesen Fall zwei unmittelbar aus der eben dargestellten Theorie hervorgehende Constructionen für die Richtung und Größe des Erddruckes.

Wenn die genannte Bedingung nicht erfüllt ist (z. B. bei verticaler Wand mit nach hinten abfallender Terrainfläche), so hält es Mohr für angemessen, die alte Theorie anzuwenden, wobei aber der Erddruck senkrecht zur Wandfläche gerichtet anzunehmen ist, um an der Grenze beider Fälle eine Uebereinstimmung herbeizuführen.

§. 57. Anwendbarkeit der Theorie der unbegrenzten Erdmasse auf die Begrenzung durch eine Wand.

In Betreff dieser Anwendbarkeit sind die Meinungen verschieden. Rankine, Saint-Venant (Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée des terres. Comptes rendus, LXX. 1870), Considère und Mohr sind der Meinung, dass die Gesetze für den unbegrenzten Erdkörper bei jeder Lage der Wand giltig bleiben, nur macht Mohr die im vorigen Paragraphe angegebene Beschränkung. Levi und der Verfasser dagegen sind der Meinung, dass eine Anwendung nur dann zulässig ist, wenn der Druck mit der Normalen der Wand den Reibungswinkel φ_1 einschließt.

Wir erwähnen hier noch eine dritte Ansicht. Der französische Ingenieur M. de Lafont (Mémoire sur la poussée des terres. Annales des ponts et chaussées, 1866) meint, dass nicht allgemein $\tan \delta = \tan \varphi_1$ gesetzt werden könne, sondern $\tan \delta = \cos \alpha \tan \varphi_1$, wenn α den Winkel zwischen der Wand und der bei einer Bewegung eintretenden Bewegungsrichtung des betreffenden Elementes bedeutet. Für eine horizontale Verschiebung einer verticalen Wand würde hiernach $\delta = 0$ werden; bei einer Drehung einer Mauer um die äußere Kante würde δ für die verschiedenen Punkte der Wand variabel.

Denken wir uns in einem nur oben begrenzten, sonst aber unbegrenzten Erdkörper den einen Theil desselben plötzlich fest werdend, also in eine feste Wand übergehend, so wird allerdings am Gleichgewichtszustande nichts geändert. Der Winkel, welchen der Druck mit der Normalen zur Wand bildet, sei δ_1 . Wird eine Mauer mit Erde hinterfüllt, so ist der Gleichgewichtszustand, speciell die Rich-

tung des Druckes gegen die Wand, keine vollständig bestimmte. Denken wir uns nun, die Mauer habe eben die nöthige Stärke, um diesem Erddrucke Widerstand zu leisten. Verschwächen wir die Mauer etwas, so wird sie eine äußerst kleine Bewegung annehmen; hiermit aber wird die Richtung des Druckes geändert; δ nähert sich mehr dem Winkel φ_1 . Die Wand läßt sich, ohne dass eine stärkere Bewegung eintritt, so weit verschwächen, bis der Winkel $\delta = \varphi_1$ geworden ist; bei noch größerer Verschwächung tritt eine starke Bewegung oder der Umsturz derselben ein. Vorher sind die Bewegungen, wie die Versuche des Verfassers zeigten, äußerst gering.

Somit kann es sich offenbar zum Zwecke der Bestimmung der Stärke der Futtermauern nicht darum handeln, den ersten Zustand des Gleichgewichtes zu kennen, sondern den letzten, bei welchem eine schädliche Bewegung der Mauer eintritt.

Mohr sagt, dass die Ingenieure zu dieser Annahme kein volles Zutrauen haben, indem sie $\delta = 0$ oder $< \varphi_1$ annehmen. Wir glauben indeß, dass die Mohr'sche Annahme noch weniger Vertrauen verdient, 1. weil sie nach dem eben Gesagten dem wirklichen Sachverhalte weniger entspricht; 2. weil von jener Grenze an, wo Mohr die Anwendung der Theorie des unbegrenzten Erdkörpers für unzulässig hält, plötzlich eine Aenderung in der Bestimmung des Erddruckes eintritt, indem jetzt constant $\delta = 0$ genommen und das alte Verfahren angewendet wird; 3. weil ein Nachweis der Mohr'schen Annahmen durch den Versuch gar nicht möglich ist, und 4. weil sich nach seiner Annahme Mauerstärken ergeben, welche dem praktischen Gefühle ganz widersprechen. Für eine verticale,

rechteckige Wand ergibt sich als Mauerdicke b für den Fall, dass der Neigungswinkel ε der Terrainfläche $= 0$ und $= \varphi$ ist, bei dem Sicherheitsgrade s :

	$\varphi =$	20	25	30	35	Grad
$s = 1$	$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = v \\ \varepsilon = \varphi \end{array} \right.$	$b = 0.330$	0.300	0.272	0.245	$. h$
		$b = 0.349$	0.318	0.289	0.265	$. h$
$s = 2$	$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \\ \varepsilon = \varphi \end{array} \right.$	$b = 0.467$	0.424	0.385	0.347	$. h$
		$b = 0.448$	0.400	0.357	0.316	$. h$
$s = 3$	$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \\ \varepsilon = \varphi \end{array} \right.$	$b = 0.572$	0.520	0.471	0.425	$. h$
		$b = 0.511$	0.478	0.396	0.348	$. h$

Hiernach ergibt sich also die Mauer mit unter dem natürlichen Böschungswinkel ansteigender Terrainfläche bei zweifacher Sicherheit 4 bis 9%, bei dreifacher Sicherheit 10 bis 18% schwächer als die Mauer mit horizontaler Terrainfläche.

Mohr meint, dass die neue Theorie bei der von uns angenommenen Beschränkung einen außerordentlich geringen praktischen Wert haben würde. Der Verfasser ist von diesem geringen praktischen Werte wirklich auch überzeugt; er legt der neuen Theorie hauptsächlich auch nur einen wissenschaftlichen Wert bei.

III. Abschnitt.

Versuche über den Erddruck.

§. 58. **Aeltere Versuche.** Die ersten Versuche hat wohl Gadroy angestellt (Denkschrift von 1746); indessen haben seine nur mit Sand, welcher sich in einer kleinen Schachtel von 27 Centim. Länge, 8 Centim. Breite und Höhe befand, gemachten Versuche keine Bedeutung. Weitere primitive Versuche stellte der Italiener Papacini d'Antony an; er fand, dass der Erddruck $\frac{1}{4}$ vom Gewichte des abgleitenden Prismas war.

Vollständigere Versuche stellte Gauthey (Denkschrift von 1784 und 1785) mit einem Kasten von 32 Centim. Breite, 80 Centim. Höhe und 80 Centim. Länge an, welcher oben offen und vorn durch eine Wand verschlossen war, die sich an der unteren Kante um Charniere drehen konnte. In $\frac{1}{3}$ der Höhe waren Schnüre an der Wand angebracht, welche, nachdem sie über Rollen geführt waren, Waagschalen trugen. Er fand als normalen Erddruck 16 Klgr., während das Gewicht der abfallenden Sandmasse 145 Klgr. betrug. Da Gauthey bemerkte, dass der Sand sehr leicht ausriesele, machte er Versuche mit Schrot, und zwar mittelst eines Kastens von 20 Centim. Länge, 20 Centim. Höhe und nur 8 Centim. Breite; anstatt der umklappenden Wand wendete er hohle Holzprismen an, welche er mit

Bleistücken und Schrot derart füllte, dass sich ihr spezifisches Gewicht zu dem des Schrotes ebenso verhielt, wie das des Mauerwerkes zu dem der Erde. Indess haben diese Versuche keinen sonderlichen Wert. Gauthey veränderte auch die Höhenlage der Drehungsachse der verticalen Wand und fand, dass die Wand nur in Ruhe blieb, wenn die Drehungsachse in $\frac{1}{3}$ der Höhe lag, dass also in dieser Höhe auch der Angriffspunkt des Erddruckes liegen mußte.

Rondelet (Art de bâtir, tome III) stellte Versuche mit einem Kasten von 43 Centim. Länge, 32 Centim. Breite, 45 Centim. Höhe an, dessen eine Wand behufs der Messung des natürlichen Böschungswinkels zum Wegnehmen eingerichtet war. Diese Wand ersetzte R o n d e l e t durch eine Steinplatte, deren Dicke so gewählt war, dass die Platte dem Erddrucke das Gleichgewicht hielt.

§. 59. Versuche von Woltmann. Der bekannte Hydrauliker W o l t m a n n (siehe: Beiträge zur hydraulischen Architektur, 1791—1799) wendete einen Kasten von 1·72 Mtr. Länge, 1·15 Meter Breite und 1·15 Meter Höhe an, dessen eine schmale Wand um eine horizontale Achse drehbar war. Die Drehungsachse fiel entweder mit dem unteren oder oberen Rande zusammen. Vom anderen Rande ging eine Schnur nach rückwärts über eine Rolle und trug am herabhängenden Ende eine Waagschale. Es zeigte sich, dass sich die Momente, welche dem Erddrucke das Gleichgewicht halten, für den Fall, dass die Achse unten oder oben liegt, wie 1 : 2 verhalten, so dass der Angriffspunkt des Erddruckes in $\frac{1}{3}$ der Höhe liegen muß. Die gefundenen Zahlenresultate sind folgende:

Material	Gew. v. 1 C.-Mtr. γ	Nat. Böschungsw. ϱ	Beobachteter Horizontaldr. H'	Corrigirter Horizontaldr. H	Berechnetes H nach		
					Coulomb	Hagen	der neuen Theorie
Trockener							
Flugsand . . .	1555	32	0·071 bis 0·082	0·076 bis 0·092	0·154	0·090	0·120
Kiesel . . .	1627	36	0·039 „ 0·052	0·042 „ 0·053	0·130	0·082	0·101
Feuchte							
Ackererde . .	1277	45	0·048 „ 0·060	0·050 „ 0·066	0·086	0·053	0·065
Rappssaat und Roggen . . .	708	25	0·080 „ 0·106	0·084 „ 0·112	0·203	0·134	0·164
	Klgr.	Gr.	$\cdot h^2 \gamma$	$\cdot h^2 \gamma$	$\cdot h^2 \gamma$	$\cdot h^2 \gamma$	$\cdot h^2 \gamma$

Die Correction wegen der Reibung an den Seitenwänden ist nach einer später anzugebenden Näherungsregel berechnet. Für die Reibung der Erde an der Wand ist $\varphi_1 = 0\cdot9 \varphi$ angenommen. Man sieht, dass eine sehr schlechte Uebereinstimmung mit jeder der Theorien stattfindet; nur das Versuchsergebnis für feuchte Ackererde passt mit der neuen Theorie ziemlich gut, obwohl es gerade hier der stattgehabten Cohäsion wegen nicht zu erwarten wäre.

§. 60. Versuche von Mayniel. Von einiger Bedeutung sind die im Jahre 1805 bis 1807 in Alexandrien ausgeführten Versuche (Traité expérimental, analytique et pratique de la poussée des terres et des murs de revêtement, par M. Mayniel. Paris 1808). Als Versuchsapparat (vergl. Fig. 41) diente ein Kasten von 1·5 Meter Breite, 1·5 Meter Höhe und 3·0 Meter Länge, der gehörig versteift war. Die vordere stark verstrebt Wand AB war unten durch drei Charniere A am Kasten befestigt, welche so angebracht

waren, dass sich die Wand genau um die Durchschnitts-
linie der Bodenfläche und der inneren Wandfläche drehen
mußte.

An der Wand AB konnte in beliebiger Höhe eine
Schubstange CD drehbar befestigt werden; das andere
Ende derselben stemmte sich gegen eine Blechbüchse E ,
welche auf einem Tische gleitete; diese Büchse war mit
Wasser gefüllt und außerdem mit Gewichten beschwert.
Mittelst eines Hahnes liess man das Wasser langsam aus-
laufen, wodurch sich endlich das Gewicht der Büchse soweit
vermindern mußte, dass der Erddruck das Uebergewicht
gewann, also die Wand umschlug. Jetzt wurde an der
Büchse ein Strick befestigt, der sich über eine Rolle legte
und am verticalen Ende eine Waagschale H trug, welche
so stark mit Gewichten beschwert wurde, bis die Büchse
wieder in's Gleiten kam; die Gewichte mußten sodann
natürlich die vorher auf die Büchse geübte Kraft angeben.

Die Versuche wurden theils mit trockener Dammerde,
theils mit Sand gemacht und theils ohne, theils mit Ueber-
höhung. Indess sind die Erhebungen, namentlich die des
natürlichen Böschungswinkels zu ungenau, als dass daraus
bestimmte Folgerungen gezogen werden könnten. Beispiels-
weise ergaben sich folgende Resultate.

Versuch Nr.	Gewicht von 1 C.-Meter γ	Natürlicher Böschungswinkel φ	Gemessener Horizontal- druck H'	Corrigirter Horizontal- druck H
2	1078	39° 40'	0.052	0.056
6	1078	39° 40'	0.078	0.084
9	1078	39° 40'	0.087	0.094
19	1166	39° 40'	0.069	0.074
	Klgr.		$.h^2 \gamma$	$.h^2 \gamma$

Als Rechnungsergebnis ergibt sich:

nach Coulomb $H = 0.110 h^2 \gamma$

nach Hagen $H = 0.069$ „

nach der neuen Theorie . $H = 0.084$ „

Bei der Correction wegen der Reibung an den Seitenwänden (nach der später mitzutheilenden Näherungsregel) und zur Berechnung von H nach der neuen Theorie wurde für die Reibung der Erde an den Wänden $\varphi_1 = 0.9 \varphi$, $= 35^\circ 40'$ angenommen. Hiernach stimmen die Versuchsergebnisse im Allgemeinen am besten mit der neuen Theorie.

Auf eine Angabe der übrigen Versuche, welche theils mit Ueberhöhung (als Pyramiden), theils mit gestampfter Erde durchgeführt sind, verzichten wir. Wir bemerken nur noch, dass mit gestampfter Dammerde drei Versuche ohne, drei Versuche mit Ueberhöhung gemacht wurden und dabei der Erddruck $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{6}$ von demjenigen, welchen lockere Erde ausübt, gefunden wurde.

Außerdem wurde bei einer Reihe von Versuchen die Wand durch eine Mauer ersetzt und dieselbe durch allmähliche Ueberhöhung der Erde zum Bewegen gebracht. Jedoch sind diese Versuche nicht geeignet, die genaue Größe des Erddruckes kennen zu lernen, namentlich wegen der Unbestimmtheit der Lage der Drehungsachse.

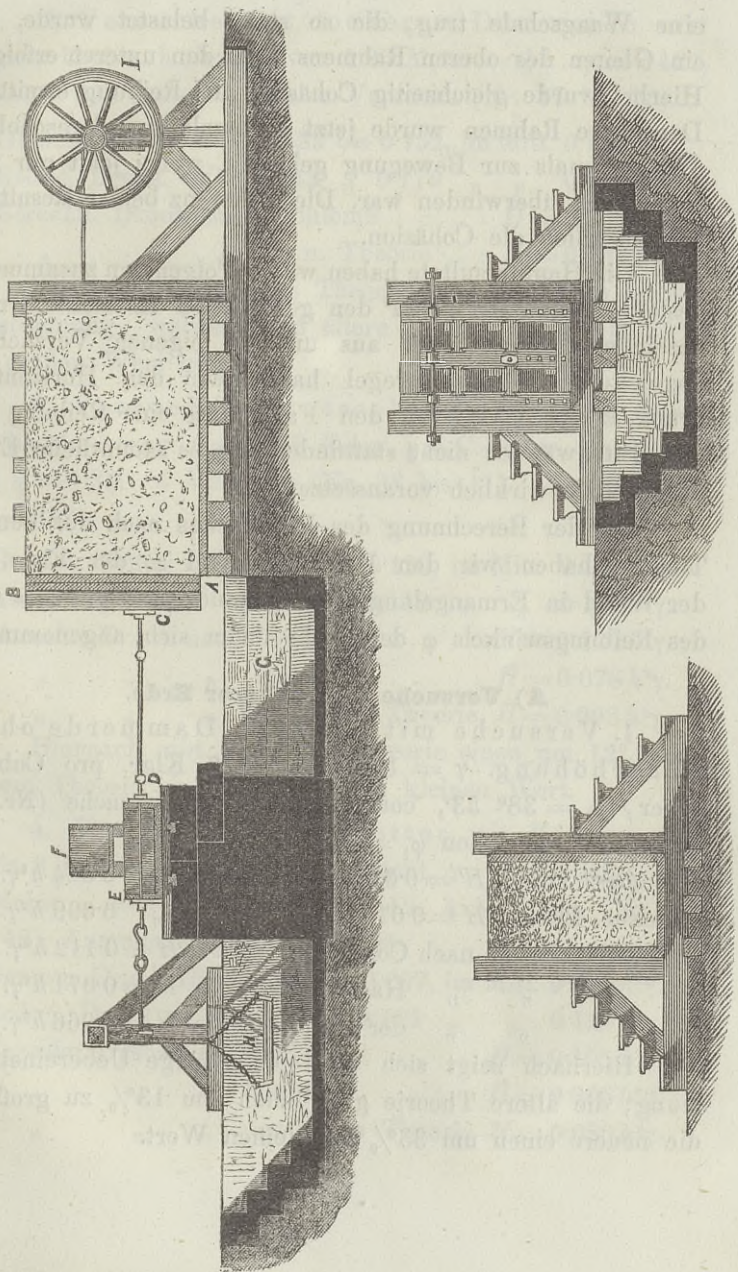
§. 61. Versuche von Martony de Köszezh. In ähnlicher Weise, jedoch in ausgedehnterem Maaße und mit sorgfältigeren Erhebungen wurden Versuche von Martony de Köszezh im Jahre 1827 in Wien angestellt. (Versuche über den Seitendruck der Erde, verbunden mit einer theoretischen Abhandlung über diesen Gegenstand nach Coulomb und François, nebst einer Nachweisung älterer Versuche

dieser Art, von C. Martony de Köszezh, Major. Wien, 1828.) Der in Fig. 41 dargestellte Apparat hat eine ähnliche Construction wie der Mayniel'sche; jedoch ist er dauerhafter und bequemer. Der Kasten ist im Lichten 1.90 Mtr. hoch, 0.95 Meter breit, 2.85 Meter lang.

Das Niederlassen und Schliessen des Thores geschah durch 2 Seile, welche sich auf eine hinter dem Kasten befindliche und mit zwei Handrädern *J* versehene Welle wickelten. Auf dem mit Bleistücken beschwerten Kasten *E*, welcher auf einer Holzunterlage gleitete und mit der beweglichen Wand *AB* in $\frac{1}{3}$ der Höhe derselben durch eine eiserne Schubstange *CD* verbunden war, ruhte im zweiten Kasten *F*, welcher mit feinem Schrote gefüllt wurde, welches aus einer Seitenöffnung langsam auslief. Die abstürzende Erde fiel in die ausgemauerte Grube *G*. Die Größe des von der Wand auf den Kasten *E* geübten Druckes wurde in derselben Weise wie bei Mayniel, durch eine allmähliche Belastung der mit dem Kasten durch ein Seil verbundenen Waagschale *H* ermittelt, wobei der Gewichtskasten *E* mit der Wand *AB* durch die Schubstange *CD* verbunden war, um gleichzeitig den Widerstand zu berücksichtigen, welchen die Bewegung der Wand bot.

Die Cohäsion wurde hauptsächlich dadurch erhoben, dass auf einem Tische ein Rahmen von 47 Centim. Länge, 32 Centim. Breite, 5 Centim. Höhe ruhte, auf welchen ein anderer gleich breiter, 40 Centim. langer, 13 Centim. hoher Rahmen gesetzt wurde. Beide Rahmen wurden mit Erde gefüllt, welche lagenweise festgerammt wurde, wobei man die Verdichtung, d. i. die Verminderung des Volumens maß. An dem oberen Rahmen wurde eine Schnur befestigt, welche sich über eine Rolle legte und am verticalen Ende

Fig. 41.

Martony de Kúszegh's Erddruck-Apparat. $\frac{1}{80}$ natürl. Gr.

eine Waagschale trug, die so stark belastet wurde, bis ein Gleiten des oberen Rahmens über den unteren erfolgte. Hierbei wurde gleichzeitig Cohäsion und Reibung ermittelt. Der obere Rahmen wurde jetzt nochmals zurückgeschoben und abermals zur Bewegung gebracht, wobei jetzt nur die Reibung zu überwinden war. Die Differenz beider Resultate gab natürlich die Cohäsion.

Die Hauptresultate haben wir in Folgendem zusammengestellt, wobei wir mit H' den gemessenen Horizontaldruck bezeichnen. Nach einer aus unseren eigenen Versuchen abgeleiteten Näherungsregel haben wir den Horizontaldruck H berechnet, für den Fall, dass eine Reibung an den Seitenwänden nicht stattfindet, wie es sämtliche Erd-druckregeln wirklich voraussetzen.

Bei der Berechnung des Erddruckes nach der neuen Theorie haben wir den Reibungswinkel φ_1 der Erde an der Wand in Ermangelung einer genaueren Angabe = 0.9 des Reibungswinkels φ der Erde unter sich angenommen.

A) Versuche mit lockerer Erde.

1. Versuche mit lockerer Dammerde ohne Ueberhöhung. $\gamma = 1369$ bis 1417 Klgr. pro Cubikmeter, $\varphi = 38^\circ 53'$, $\cot \varphi = 1.24$. 14 Versuche (Nr. 3 bis 16). Angenommen $\varphi_1 = 34^\circ$.

Gemess. Druck $H' = 0.057$ bis 0.099 , im Mitt. $0.084 h^2 \gamma$.

Reduc. Druck $H = 0.079$ „ 0.121 „ „ $0.099 h^2 \gamma$.

Berechn. Druck nach Coulomb $H = 0.112 h^2 \gamma$.

„ „ „ Hagen $H = 0.071 h^2 \gamma$.

„ „ „ der neuen Theorie $H = 0.066 h^2 \gamma$.

Hiernach zeigt sich eine nur geringe Uebereinstimmung; die ältere Theorie gibt einen um 13% zu großen, die neuere einen um 33% zu kleinen Wert.

2. Versuche mit lockerer Dammerde mit einer Ueberhöhung von 1.26 Meter $= \frac{3}{2} h$. $\gamma = 1427$, $\varphi = 38^\circ 53'$, $\cot \varphi = 1.24$. 4 Versuche (Nr. 17 bis 20).

Gemess. Druck $H' = 0.129$ bis 0.152 , im Mitt. $0.139 h^2 \gamma$.

Reduc. Druck $H = 0.142$ „ 0.179 „ „ $0.164 h^2 \gamma$.

Berechn. Druck nach Coulomb $H = 0.205 h^2 \gamma$.

„ „ „ d. n. Theorie . . $H = 0.169 h^2 \gamma$.

Hier zeigt die neue Theorie eine sehr gute Uebereinstimmung, während die ältere Theorie einen um 25% zu großen Wert gibt.

3. Versuche mit trockenem Sande ohne Ueberhöhung. $\gamma = 1748$ Kilgr. pro C.-Meter. $\varphi = 37^\circ 0'$, $\cot \varphi = 1.33$. 4 Versuche (Nr. 38 bis 41). Angenommen $\varphi_1 = 33^\circ$.

Gemess. Druck $H' = 0.108$ bis 0.128 , im Mitt. $0.121 h^2 \gamma$.

Reduc. Druck $H = 0.129$ „ 0.149 „ „ $0.142 h^2 \gamma$.

Berechn. Druck nach Coulomb $H = 0.124 h^2 \gamma$.

„ „ „ Hagen $H = 0.078 h^2 \gamma$.

„ „ „ d. neuen Theorie $H = 0.098 h^2 \gamma$.

Hiernach gibt die ältere Theorie einen um 12%, die neuere Theorie einen um 31% zu kleinen Wert.

4. Versuche mit Schotter mit Körnern von 1 bis 3 Centim. Dicke, etwas feucht. $\gamma = 1687$ Klgr. pro C.-Meter. $\varphi = 40^\circ 45'$, $\cot \varphi = 1.16$. 4 Versuche (Nr. 45 bis 48). Angenommen $\varphi_1 = 36^\circ 40'$.

Gemess. Druck $H' = 0.094$ bis 0.097 , im Mitt. $0.096 h^2 \gamma$.

Reduc. Druck $H = 0.118$ „ 0.121 „ „ $0.120 h^2 \gamma$.

Berechn. Druck nach Coulomb $H = 0.105 h^2 \gamma$.

„ „ „ Hagen $H = 0.066 h^2 \gamma$.

„ „ „ der neuen Theorie $H = 0.080 h^2 \gamma$.

Hiernach gibt die ältere Theorie einen um 12%, die neue Theorie einen um 33% zu kleinen Wert.

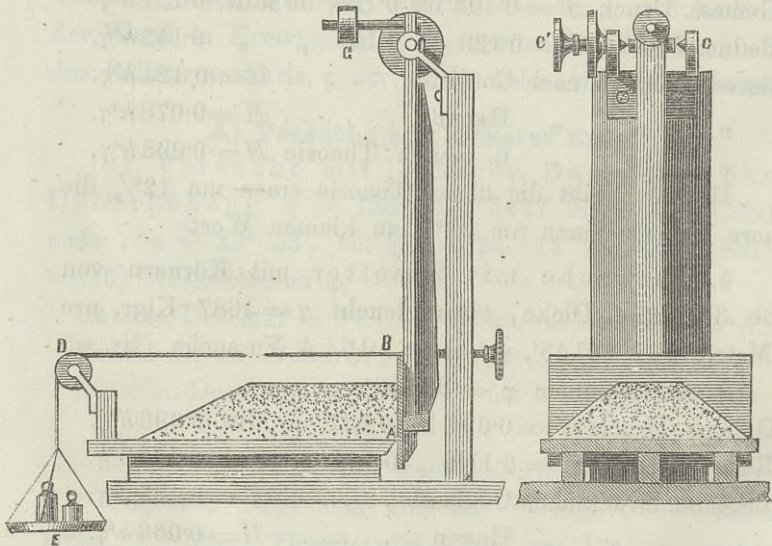
Sonach gibt die neuere Theorie gegen die Resultate der Versuche ohne Ueberhöhung stets einen um nahezu 33% zu kleinen Wert.

B) Versuche mit fester Erde.

Die Versuche mit fester Erde gestatten kaum einen Vergleich mit der Theorie, da der Widerstand an den Seitenwänden bei den Versuchen nicht berücksichtigt wurde. Wir verzichten daher auf eine Besprechung derselben.

§. 62. Versuche von Hagen. Hagen wendet einen wesentlich verschiedenen Apparat an (Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst, II. Theil, 1. Bd. 1853). Die Drehungsachse *C* (Fig. 42) der beweglichen Wand liegt hier bedeu-

Fig. 42.



Hagen's Erddruck-Apparat. $\frac{1}{40}$ natürl. Gr.

tend über der gedrückten Fläche, indem die Wand pendelartig aufgehängt ist, so dass die Bewegung der Wand nahezu einer parallelen Verschiebung gleich kommt. Von der Wand geht ein Faden über den Sand hinweg über eine Rolle und trägt am herabhängenden Ende eine Waagschale, auf welche außer Gewichten ein Gefäss mit Sand gestellt wurde, den man allmählig auslaufen liess. Der Hauptunterschied gegen frühere Versuche besteht aber darin, dass der Sand nicht durch Seitenwände begrenzt wurde, sondern seitlich abgeböscht war, so dass die gedrückte Fläche ein Trapez $ABDC$ (Fig. 43) wurde. Die Drücke auf die beiden Dreiecke ACH und BDJ ergaben sich, indem man der gedrückten Fläche die Form eines Dreieckes EFG gab, so dass der Druck auf das Rechteck $HJDC$ als Differenz der Drücke auf das Trapez $ABDC$ und das Dreieck EFG erhalten wurde. In Folge dieser Anordnung verdienen diese Versuche jedenfalls ein höheres Vertrauen als die früheren.

Fig. 43 a.

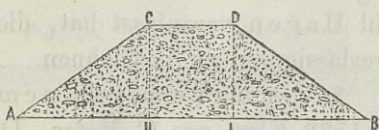
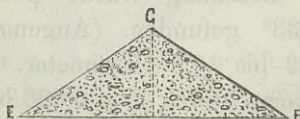


Fig. 43 b.



Der Reibungswinkel φ wurde in derselben Weise gemessen, wie von Martony die Cohäsion; der Sand im oberen Kasten wurde hierbei mit einem

Brette bedeckt, und dieses belastet, so dass man die Reibung unter verschiedenem Drucke messen konnte.

1. Versuche mit schwarzem Streusande, vollkommen trocken, $\gamma = 2304$ Klgr. pro C.-Meter, $h = 2.6$ bis 13.1 Centimeter. Durch Beobachtung des natürlichen

Böschungswinkels ergab sich $\varphi = 32^\circ 30'$, mit Hilfe der übereinander gleitenden Kasten $\varphi = 23^\circ 51'$ bis $26^\circ 25'$, im Mittel $\varphi = 25^\circ 5'$. (Angenommen wurde entsprechend $\varphi_1 = 29^\circ 15'$, $\varphi_1 = 22^\circ 34'$.) 52 Versuche.

Gemess. Druck $H = 0.123$ bis 0.131 , im Mitt. $0.126 h^2 \gamma$.

$$\varphi = 32^\circ 30', \varphi = 25^\circ 5'.$$

Berechn. Druck nach Coulomb $H = 0.150 \quad 0.202 h^2 \gamma$.

" " " Hagen $H = 0.096 \quad 0.134 h^2 \gamma$.

" " " der neuen

Theorie $H = 0.129 \quad 0.164 h^2 \gamma$.

Man sieht hieraus, dass bei Annahme des durch Bildung einer natürlichen Böschung gefundenen Wertes für φ die neuere Theorie eine sehr gute Uebereinstimmung zeigt. Bei Annahme des durch die Verschiebung der Kasten bestimmten Wertes von φ , was indess viel weniger natürlich erscheint, zeigt allerdings die Hagen'sche Theorie eine bessere Uebereinstimmung, was wohl Hagen veranlasst hat, diesen Wert von φ als den zuverlässigeren zu bezeichnen.

2. Versuche mit feinem, staubartigen Sande. $\gamma = 1522$ Klgr. pro C.-Meter. Durch Bildung einer natürlichen Böschung wurde $\varphi = 31^\circ$ bis 35° , im Mittel also $\varphi = 33^\circ$ gefunden. (Angenommen wurde $\varphi_1 = 29^\circ 42'$.) $h = 5.2$ bis 10.5 Centimeter. 14 Versuche.

Gemess. Druck $H = 0.088$ bis 0.096 , im Mitt. $0.093 h^2 \gamma$.

Berechn. Druck nach Coulomb $H = 0.147 h^2 \gamma$.

" " " Hagen $H = 0.094 h^2 \gamma$.

" " " der neuen Theorie $H = 0.115 h^2 \gamma$.

Das Resultat nach der Hagen'schen Theorie stimmt hier ziemlich gut. Wir bemerken indess, dass sich bei unseren eigenen Versuchen, bei denen φ fast genau so groß war, die Versuche $H = 0.114 h^2 \gamma$ ergaben, also bedeutend grösser, als Hagen angibt. Auffällig ist die starke Abwei-

chung gegen die vorigen Versuche, wo ja φ nach der Bildung der natürlichen Böschung nur einen um $\frac{1}{2}$ Grad geringeren Wert hatte. Jedenfalls erscheint hiernach ein Schluss aus den vorliegenden Versuchsergebnissen sehr gewagt.

3. Versuche mit Schrot von 2 Millimeter Dicke. $\gamma = 6740$ Klgr. pro C.-Meter. Natürlicher Böschungswinkel $\varphi = 27^\circ$ (angenommen $\varphi_1 = 24^\circ$); $h = 2.6$ bis 6.5 Centimeter. 13 Versuche.

Gemess. Druck $H = 0.139$ bis 0.153 , im Mitt. $0.148 h^2 \gamma$.

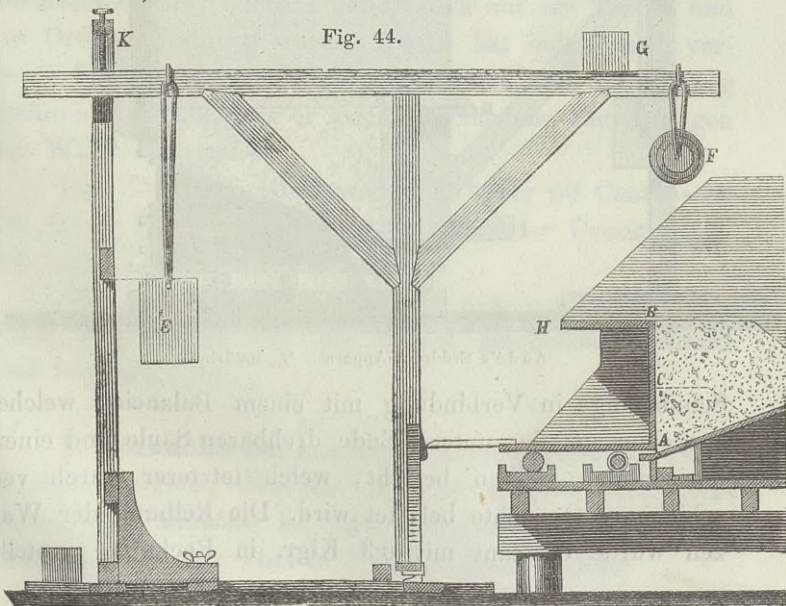
Berechn. Druck nach Coulomb $H = 0.188 h^2 \gamma$.

„ „ „ Hagen $H = 0.123 h^2 \gamma$.

„ „ „ der neuen Theorie $H = 0.151 h^2 \gamma$.

Hier zeigt die neuere Theorie eine genügende Uebereinstimmung.

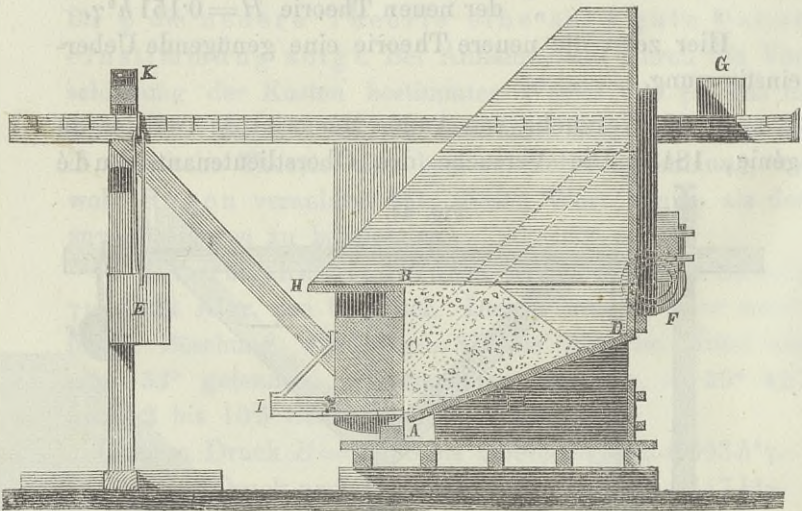
§. 63. Versuche von Audé (Mémorial de l'officier du génie, 1848). Die Versuche des Oberstlieutenant Audé



sind früher als die Hagen'schen angestellt worden; indess wohl dem Letzteren nicht bekannt gewesen. Sie beziehen sich nur auf lockere Erdmassen, sind aber in dieser Richtung jedenfalls die vollständigsten und wissenschaftlichsten aller bisher angestellten Versuche.

Zur Bestimmung des Horizontaldruckes, d. h. der Horizontalcomponente des Erddruckes, macht Audé die Wand in horizontalem Sinne verschiebbar, indem er sie auf Walzen stellte (Fig. 44). Die Wand ist durch eine

Fig. 45.

Audé's Erddruck-Apparat. $\frac{1}{30}$ natürl. Gr.

Schubstange in Verbindung mit einem Balancier, welcher aus einer um das untere Ende drehbaren Säule und einem horizontalen Balken besteht, welcher letzterer durch verschiebbare Gewichte belastet wird. Die Reibung der Walzen wurde constant mit 0.3 Klgr. in Rechnung gestellt,

während richtiger der veränderliche Verticaldruck der Erde hätte berücksichtigt werden sollen. Das Moment des Druckes wurde gemessen durch eine Wand, welche um ihre untere Kante oder um eine Achse drehbar ist, welche in einer durch die untere Kante gehenden Horizontalebene lag. (Fig. 45.) Die Wand ist ebenfalls in Verbindung mit einem horizontalen Balken, welcher durch verschiebbare Gewichte belastet wird. Indem sowohl der Horizontaldruck als das Moment des Druckes bestimmt wurde, ergab sich der Angriffspunkt des Erddruckes. Durch Bestimmung des Momentes für verschiedene Lagen der Drehungsachse ergab sich auch die Richtung des Erddruckes.

Der Einfluss der Reibungen an den Seitenwänden wurde in derselben Weise vermieden, wie von Hagen, indem die Erde seitlich geböscht und der Erddruck auf ein Rechteck als Differenz der Drücke auf ein Trapez und ein Dreieck bestimmt wurde. Audé hat indess auch verticale Seitenwände von Holz angewendet, und die Reibung dadurch ermittelt, dass er zwei verschiedene Entfernungen der Wände anwendete.

Die Wandhöhe ist entweder 25 oder 50 Centimeter. Die Breite des Rechteckes, auf welches der Druck ermittelt wurde, war 50 Centimeter.

Die Versuchsergebnisse in der von uns berechneten Form und in den von uns daraus gezogenen Schlüssen sind folgende:

I. Versuche bei horizontaler Oberfläche. Diese Versuche zeigten, dass der Druck proportional dem Quadrate der Wandhöhe ist, und dass der Angriffspunkt des Erddruckes in der That in $\frac{1}{3}$ der Wandhöhe liegt.

A. Verticale Wand.

1. Horizontaldruck.

a. Grober Sand. Körner 1·47 Centim. dick. $\gamma = 1470$ Kilogramm pro Cubik-Meter. $\varphi = 33^\circ 41'$, $\cot \varphi = 1\cdot50$ ($\varphi_1 = 27^\circ 29'$). 8 Versuchsreihen; 4 mit Seitenböschungen, 4 mit seitlicher Wandbegrenzung bei 25 Centim. und 50 Centim. Wandhöhe.

Gemess. Horizontaldr. $H = 0\cdot115$ bis $0\cdot119$, i. M. $0\cdot118 h^2 \gamma$.

Berechn. Horizontaldruck nach Coulomb $H = 0\cdot143 h^2 \gamma$.

” ” ” d. neuen

Theorie $H = 0\cdot114 h^2 \gamma$.

Hier zeigt die neuere Theorie eine fast genaue Uebereinstimmung, während die ältere einen um 21% zu grossen Wert gibt.

b. Feiner Sand. $\gamma = 1350$ Kilogr. pro C.-Meter. $\varphi = 33^\circ 41'$, $\cot \varphi = 1\cdot50$ ($\varphi_1 = 27^\circ 29'$). 4 Versuchsreihen mit Seitenböschungen bei 25 Centim. und 50 Centim. Wandhöhe.

Gemess. Horizontaldr. $H = 0\cdot126$ bis $0\cdot136$, i. M. $0\cdot129 h^2 \gamma$.

Berechn. Horizontaldruck nach Coulomb $H = 0\cdot143 h^2 \gamma$.

” ” ” d. neuen

Theorie $H = 0\cdot114 h^2 \gamma$.

Hier gibt die ältere Theorie einen um 11% zu grossen, die neuere Theorie einen um 12% zu kleinen Wert.

Der natürliche Böschungswinkel scheint leider nicht sehr genau bestimmt zu sein, da für beide Sandarten genau $\cot \varphi = 1\cdot5$ angegeben wird.

Als Nebenresultate wurden erhalten:

α . Der Druck auf eine dreieckige Fläche ist 0·34 bis 0·35 (theoretisch $\frac{1}{3}$) von dem Drucke auf ein Rechteck

von gleicher Breite und Höhe. Der Angriffspunkt des Druckes liegt hierbei in $\frac{1}{4}$ der Höhe.

β. Bei einer Begrenzung durch verticale Seitenwände mit dem Abstände b ist der gemessene Horizontaldruck für die Breite 1 mit

$$1 + 0.083 \frac{h}{b} = 1 + 0.16 \frac{h}{b} \tan \varphi_1$$

zu multipliciren, um den Horizontaldruck für die Breite 1 ohne seitliche Begrenzung zu erhalten.

2. Richtung des Druckes. Bezeichnet man für den Fall, dass die Drehungsachse in einer durch die untere Kante der Wandfläche gehenden Horizontalebene im Abstände c von der Wandfläche liegt, den Horizontaldruck und Verticaldruck mit H , V , das gemessene Moment mit M , die Höhe des Angriffspunktes des Erddruckes über der unteren Kante mit y und den Winkel, welchen die Richtung des Erddruckes mit der Normalen zur Wandfläche bildet, mit δ , so ist $M = Hy - Vc$, $V = \frac{Hy - M}{c}$,

$\tan \delta = \frac{V}{H}$, d. i.

$$\tan \delta = \frac{Hy - M}{Hc}.$$

Die Versuche wurden mit grobem Sande bei der Wandhöhe von 25 Centim. gemacht, für welche sich $H = 10.683$ ergeben hatte; hierbei ist $y = \frac{1}{3} \cdot 0.25 = 0.0833$, mithin

$$\tan \delta = \frac{0.910 - M}{10.683 c}.$$

Die Versuche ergaben:

$$\begin{aligned}
 c &= 0 \quad 0.05 \quad 0.10 \quad 0.13 \quad 0.15 \text{ Meter,} \\
 M &= 0.910 \quad 0.650 \quad 0.300 \quad 0.080 \quad - \quad 0.080 \text{ Klgr.-Met.,} \\
 \tan \delta &= \quad 0.49 \quad 0.57 \quad 0.60 \quad 0.62, \text{ i. M. } 0.57, \\
 \delta &= \quad 26^\circ 6' \quad 29^\circ 41' \quad 30^\circ 23' \quad 31^\circ 48', \text{ i. M. } 29^\circ 41',
 \end{aligned}$$

während directe Versuche für die Reibung der Erde an der Wand $\tan \varphi_1 = 0.52$, $\varphi_1 = 27^\circ 29'$ ergeben hatten. So nach ist die Richtung sehr nahe unter dem Reibungswinkel gegen die Normale der Wand gerichtet gewesen.

B. Geneigte Wand.

Zunächst wurde die Drehungsachse in der nach der Erde zu geneigten (nach hinten überhängenden) Wandfläche selbst angenommen und nur das Moment des Erddruckes ermittelt. Die Resultate sind, wenn β den Neigungswinkel der Wand gegen die Verticale, N die Normalcomponente des Erddruckes bezeichnet:

$\tan \beta$	Versuchsresultate	Rechnungsresultate
0	$N = 0.1173 \cdot h^2 \gamma$	$0.1142 \cdot h^2 \gamma$
0.2	$N = 0.0847 \cdot \text{''}$	$0.0814 \cdot \text{''}$
0.4	$N = 0.0548 \cdot \text{''}$	$0.0558 \cdot \text{''}$
0.6	$N = 0.0316 \cdot \text{''}$	$0.0360 \cdot \text{''}$
0.8	$N = 0.0154 \cdot \text{''}$	$0.0211 \cdot \text{''}$
1.0	$N = 0.0064 \cdot \text{''}$	$0.0105 \cdot \text{''}$
1.2	$N = 0.0016 \cdot \text{''}$	$0.0037 \cdot \text{''}$

Die Uebereinstimmung ist hiernach mit Ausnahme der Fälle, für welche β sehr groß ist, eine ziemlich gute. Die Richtung des Erddruckes wurde nicht ermittelt.

Größeren Wert haben die Versuche mit einer nach vorn überhängenden Wand, wobei verschiedene Drehungsachsen in einer durch die Unterkante gehenden Horizontalebene angenommen wurden. Die Wandhöhe war 0.25 Meter;

die Versuche wurden mit grobem Sande gemacht. Bezeichnen wir die Normal- und Parallelcomponenten des Erddruckes mit N und P , den Winkel, welchen die Wand mit der Verticalen bildet, mit β , den Abstand der Drehungsachse von der Unterkante der Wand mit c , so ergibt sich als Moment des Erddruckes

$$M = \frac{1}{3} N h \sec \beta - P c \cos \beta.$$

Es wurden nun für dieselbe Neigung β Versuche mit verschiedenen Werten von c gemacht, wodurch sich also mehrere Gleichungen zur Bestimmung von N und P ergeben. Für den Winkel, welchen die Richtung des Erddruckes mit der Normalen bildet, hat man alsdann $\tan \delta = \frac{P}{N}$.

Beispielsweise ergab sich für $\tan \beta = 0.2$, und für $c = 0.05 \quad 0.10 \quad 0.15 \quad 0.20$ Meter als Moment bezüglich $M = + 0.750, + 0.120, - 0.495, - 1.094$, so dass folgende 4 Gleichungen entstehen, da $\cos \beta = 0.981$, $\sec \beta = 1.020$ ist:

$$0.0850 N - 0.0491 P = + 0.750,$$

$$0.0850 N - 0.0981 P = + 0.120,$$

$$0.0850 N - 0.1472 P = - 0.495,$$

$$0.0850 N - 0.1962 P = - 1.094.$$

Die Subtraction der einzelnen Gleichungen gibt $0.0491 P = 0.630 \quad 0.615 \quad 0.699$, im Mittel also $0.0491 P = 0.648$, mithin $P = 13.21$. Die einzelnen Gleichungen geben nun $0.0850 N = 1.398 \quad 1.416 \quad 1.449 \quad 1.498$, im Mittel $0.0850 N = 1.440$, also $N = 16.94$. Wir haben also:

$$N = 16.94 = 0.184 h^2 \gamma, P = 13.21 = 0.144 h^2 \gamma, \tan \delta = 0.780,$$

$$E = \sqrt{N^2 + P^2} = 21.43 = 0.152 h^2 \gamma.$$

Die in dieser Weise von uns berechneten Resultate, sowie die entsprechenden theoretischen Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

tan β	Versuchsresultate				Rechnungsresultate			
	E	N	P	tan δ	E	N	P	tan δ
0	0·152	0·127	0·084	0·655	0·128	0·114	0·059	0·520
0·2	0·234	0·184	0·144	0·780	0·181	0·161	0·084	0·520
0·4	0·317	0·239	0·209	0·878	0·236	0·209	0·109	0·520
0·6	0·597	8·428	0·415	0·969	0·312	0·276	0·144	0·520
	$\cdot h^2\gamma$	$\cdot h^2\gamma$	$\cdot h^2\gamma$		$\cdot h^2\gamma$	$\cdot h^2\gamma$	$\cdot h^2\gamma$	

Hiernach zeigt sich für die starken Neigungen eine keineswegs befriedigende Uebereinstimmung. Es ist uns nicht begreiflich, dass sich durch die Versuche für tan δ Werte ergeben konnten, welche bedeutend größer als der durch directe Versuche gefundene Reibungs-Coëfficient 0·52 sind.

Für den Winkel $\beta = 14^\circ 25'$ oder tan $\beta = 0·257$ sollte die neuere Theorie nach §. 19 (S. 33) ganz exacte Werte haben. Aber auch für diesen Winkel ist die Uebereinstimmung mit den Versuchsresultaten eine sehr geringe.

II. Versuche bei nicht horizontaler Oberfläche. Bei diesen Versuchen ist die Wand nur vertical angenommen.

1. Die obere Fläche ist nach hinten geneigt. Der Neigungswinkel ε wurde zu $\frac{1}{8} 90^\circ$, $\frac{2}{8} 90^\circ$ u. s. w. bis $\frac{7}{8} 90^\circ$ angenommen. Bei Neigungen von $\frac{4}{8} 90^\circ$ an wurde die Böschung durch eine Wand erhalten. Die Drehungsachse bildete die untere Kante der Wand. Es wurde nur das Moment bestimmt; hieraus ergibt sich als Horizontaldruck:

$$\varepsilon = 0 \cdot \frac{90}{8} \quad \frac{2 \cdot 90}{8} \quad \frac{3 \cdot 90}{8} \text{ Grad.}$$

$$\text{Gemessenes } H = 0 \cdot 135 \quad 0 \cdot 114 \quad 0 \cdot 099 \quad 0 \cdot 091 \cdot h^2 \gamma.$$

$$\text{Berechnetes } H = 0 \cdot 116 \quad 0 \cdot 101 \quad 0 \cdot 092 \quad 0 \cdot 082 \cdot h^2 \gamma.$$

2. Die obere Fläche ist überhöht. Die Neigung der sich an die Wand anschliessenden Böschungsfäche wurde 9° , 18° , 27° , 36° und 45° gewählt und bei jeder Neigung verschiedene Ueberhöhungen h_1 untersucht. Für jede Neigung ist diejenige Ueberhöhung gesucht, bei welcher das Moment ein Maximum wird. Bei noch grösseren Ueberhöhungen ändert sich das Moment nicht. Diese Höhe sei h_2 . Das Resultat gibt folgende Tabelle:

Neigung der Oberfläche	Versuchsergebnis		Theoretisches Resultat			
	h_2 für max H	max H	h_2 für max H	max H	h_1	H .
0	0	0·129	0	0·114	0	0·114
9°	0·090	0·138	0·122	0·129	0·090	0·128
18°	0·220	0·157	0·330	0·149	0·220	0·144
27°	0·416	0·186	0·861	0·187	0·416	0·172
$43^\circ 31'$	0·598	0·213	∞	0·340	0·598	0·206
	$.h$	$.h^2 \gamma$	$.h$	$.h^2 \gamma$	$.h$	$.h^2 \gamma$

Die Uebereinstimmung in der Grösse des Horizontaldruckes bei gleichem h_1 ist hiernach eine befriedigende. In den Höhen h_2 aber, für welche H ein Maximum wird, zeigen sich starke Differenzen. Dies ist indess leicht dadurch erklärlich, dass sich H bei starken Ueberhöhungen nur wenig ändert, wenn sich h_1 ändert; so z. B. zeigt die Tabelle, dass sich bei 27° Neigung für $h_1 = 0 \cdot 861 h$ und $0 \cdot 416 h$ bezüglich $H = 0 \cdot 187 h^2 \gamma$ und $0 \cdot 172 h^2 \gamma$, also nur

wenig verschieden ergibt. Es ist deshalb kaum möglich, durch Versuche dasjenige h_1 zu ermitteln, für welches H zum Maximum wird.

§. 64. Versuche des Verfassers. Im Jahre 1863, wo mir die Versuche Audé's nicht bekannt waren, habe ich selbst einige Versuche angestellt (Civil-Ingenieur 1864). Die Erde (feiner Sand) befand sich in einem von drei verticalen Wänden begrenzten Kasten; die vierte Wand (von 25 Centim. Höhe und 40 Centim. Breite) war um eine Achse drehbar, welche in der durch die Unterkante der Wandfläche gelegten Horizontalebene liegt. Eine Schnur ging vom oberen Ende der Wand über den Kasten hinweg über eine Leitrolle und trug am herabhängenden Ende eine Waagschale, auf welche außer Gewichten eine Büchse mit Sand gesetzt wurde, den man langsam herauslaufen liess, so dass ein Augenblick eintreten mußte, in welchem der Erddruck das Uebergewicht gewann.

Um die Reibung an den Seitenwänden berücksichtigen zu können, wurde eine zweite Versuchsreihe angestellt, bei welcher in den Kasten noch eine Zwischenwand eingesetzt wurde, wodurch sich die Reibung offenbar verdoppelte, so dass man aus der Differenz der Angaben auf die Größe dieser Reibung schließen konnte.

Zunächst wurde die Drehungsachse in die Wandfläche selbst gelegt; da hierbei das Moment des Verticaldruckes Null war, so liess sich aus den Angaben sofort der Horizontaldruck ableiten. Sodann wurde die Drehungsachse um 5 Centimeter verschoben, so dass auch der Verticaldruck ein Moment erhielt. Da der Horizontaldruck

aus den vorigen Versuchen bereits bekannt war, so konnte jetzt aus den Angaben der Verticaldruck bestimmt werden.

Die Versuche wurden nur mit einer verticalen Wand bei horizontaler Begrenzung des Sandes ausgeführt.

Die Beobachtungen wurden mit möglichster Sorgfalt angestellt und alles Nöthige, wie das Gewicht der Wand, die Reibung an der Rolle etc. gehörig berücksichtigt.

Der Coëfficient der Reibung des Sandes unter sich wurde durch Messen des natürlichen Böschungswinkels, welcher sich beim Wegnehmen der Wand bildete, gemessen. Der Coëfficient der Reibung des Sandes an der Wand wurde dadurch bestimmt, dass man die Wand auf eine horizontale Sandfläche legte, mit Gewichten belastete und nun den zum Bewegen nothwendigen horizontalen Zug maß.

Die Resultate sind:

$\gamma = 1368$ bis 1451 , im Mittel 1406 Kilgr. pro Cubik-Meter.

$\varphi = 33^\circ 16'$ bis $33^\circ 54'$, im Mittel $33^\circ 35'$, $\tan \varphi = 0.665$.

$\varphi_1 = 28^\circ 40'$ bis $30^\circ 42'$, „ „ $29^\circ 41'$, $\tan \varphi_1 = 0.570$.

Gemess. Horizontaldruck $H = 0.111$ bis 0.119 , i. M. $0.115 \cdot h^2 \gamma$.

Berechneter Horizontaldruck nach Coulomb $H = 0.142 \cdot h^2 \gamma$.

„ „ „ Hagen $H = 0.086 \cdot h^2 \gamma$.

„ „ „ d. neuen

Theorie $H = 0.112 \cdot h^2 \gamma$,

wonach mit der neuern Theorie eine befriedigende Uebereinstimmung stattfindet. Die Versuche ergaben für die Richtung des Erddruckes im Mittel

$\delta = 24^\circ 39'$, $\tan \delta = 0.459$,

wonach also δ etwas kleiner als der Reibungswinkel φ_1 sein würde.

Als Nebenresultat ergab sich, dass der Erddruck, welchen man bei Anwendung von Seitenwänden erhält, mit

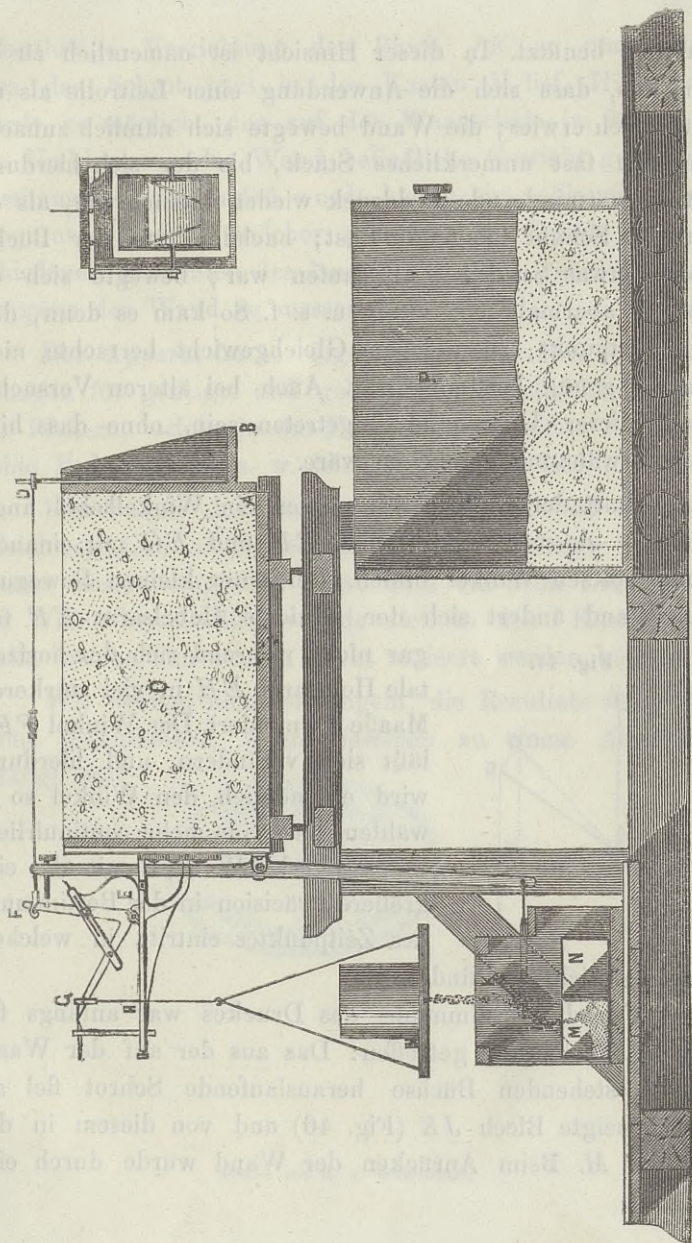
$$1 + 0.067 \frac{h}{b} = 1 + 0.116 \frac{h}{b} \tan \varphi_1$$

zu multipliciren ist, um den Erddruck einer unbegrenzten Erdmasse zu erhalten. Diese Regel weicht von der von Audé erhaltenen (Seite 133) nicht wesentlich ab.

§. 65. Neue Versuche. Aus dem Mitgetheilten geht hervor, dass zwar die neuere Erddrucktheorie, welche die Reibung der Erde an der Wand berücksichtigt, im Allgemeinen am besten mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt, dass sich aber immerhin noch so starke Abweichungen zeigen, dass die bisherigen Versuche keine genügende Beruhigung für die Verlässlichkeit dieser Theorie geben. Der Umstand, dass selbst in den Fällen, wo nach der von uns gegebenen exacten Theorie eine vollkommene Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit stattfinden sollte, die Audé'schen Versuche eine nicht ganz unwesentliche Abweichung zeigen, gibt Anlass zu der Vermuthung, dass auch die Audé'schen Versuche mit starken Fehlern behaftet seien. Es erscheint somit gewiss erwünscht, neue Versuche anzustellen, welche alle Elemente in vollkommenerer Weise berücksichtigen, als das bisher geschehen war.

Aus diesem Grunde bewilligte das hohe k. k. österreichische Unterrichts-Ministerium die Mittel zur Anstellung neuer Versuche. Fig. 46 zeigt den Apparat, welcher zu diesen Versuchen für das Polytechnicum in Wien angefertigt wurde. Der Apparat ist nach demselben Principe gebaut wie für die oben erwähnten früheren Versuche des Verfassers; indess sind die damals gemachten Erfahrungen zu Verbesse-

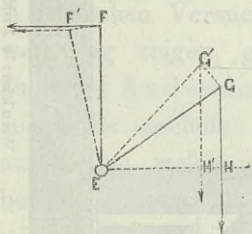
Fig. 46.

Winkler's Erddruck-Apparat. $\frac{1}{10}$ natürl. Gr.

rungen benützt. In dieser Hinsicht ist namentlich zu bemerken, dass sich die Anwendung einer Leitrolle als unpraktisch erwies; die Wand bewegte sich nämlich zunächst um ein fast unmerkliches Stück, bis der sich hierdurch etwas vermindernde Erddruck wieder kleiner war, als die an der Schnur hängende Last; nachdem aus der Büchse noch etwas Sand herausgelaufen war, bewegte sich die Wand abermals ein wenig u. s. f. So kam es denn, dass der Zeitpunkt, in welchem Gleichgewicht herrschte, nicht präcis genug bestimmt war. Auch bei älteren Versuchen muß dieser Uebelstand eingetreten sein, ohne dass hiervon Erwähnung geschehen wäre.

Statt der Rolle wurde daher ein Winkelhebel angewendet, dessen beide Arme EF und EG mit einander einen spitzen Winkel bilden. Bei einer kleinen Bewegung der Wand ändert sich der verticale Hebelarm EF fast

Fig. 47.



gar nicht, während sich der horizontale Hebelarm EH in viel stärkerem Maaße vermindert. Der Winkel FEG läßt sich verändern, und hierdurch wird es möglich, den Winkel so zu wählen, dass eine mehr continuirliche Bewegung der Wand, somit also eine größere Präcision in der Bestimmung des Zeitpunktes eintritt, in welchem

Gleichgewicht stattfindet.

Für die Bestimmung des Druckes war anfangs folgende Einrichtung getroffen: Das aus der auf der Waagschale stehenden Büchse herauslaufende Schrot fiel auf das geneigte Blech JK (Fig. 46) und von diesem in den Kasten M . Beim Anrücken der Wand wurde durch eine

selbstthätige Vorrichtung das Blech *JK* so umgestellt, dass das Schrot jetzt in den Kasten *N* lief. Hierdurch wurde es möglich, das auf der Waagschale im Momente des Umklappens der Wand befindliche Gewicht genau zu bestimmen. Später indeß wurde hierzu ein vollkommenerer Apparat construirt, welcher gestattet, den Druck in verschiedenen Momenten des langsam vor sich gehenden Umklappens der Wand zu messen.

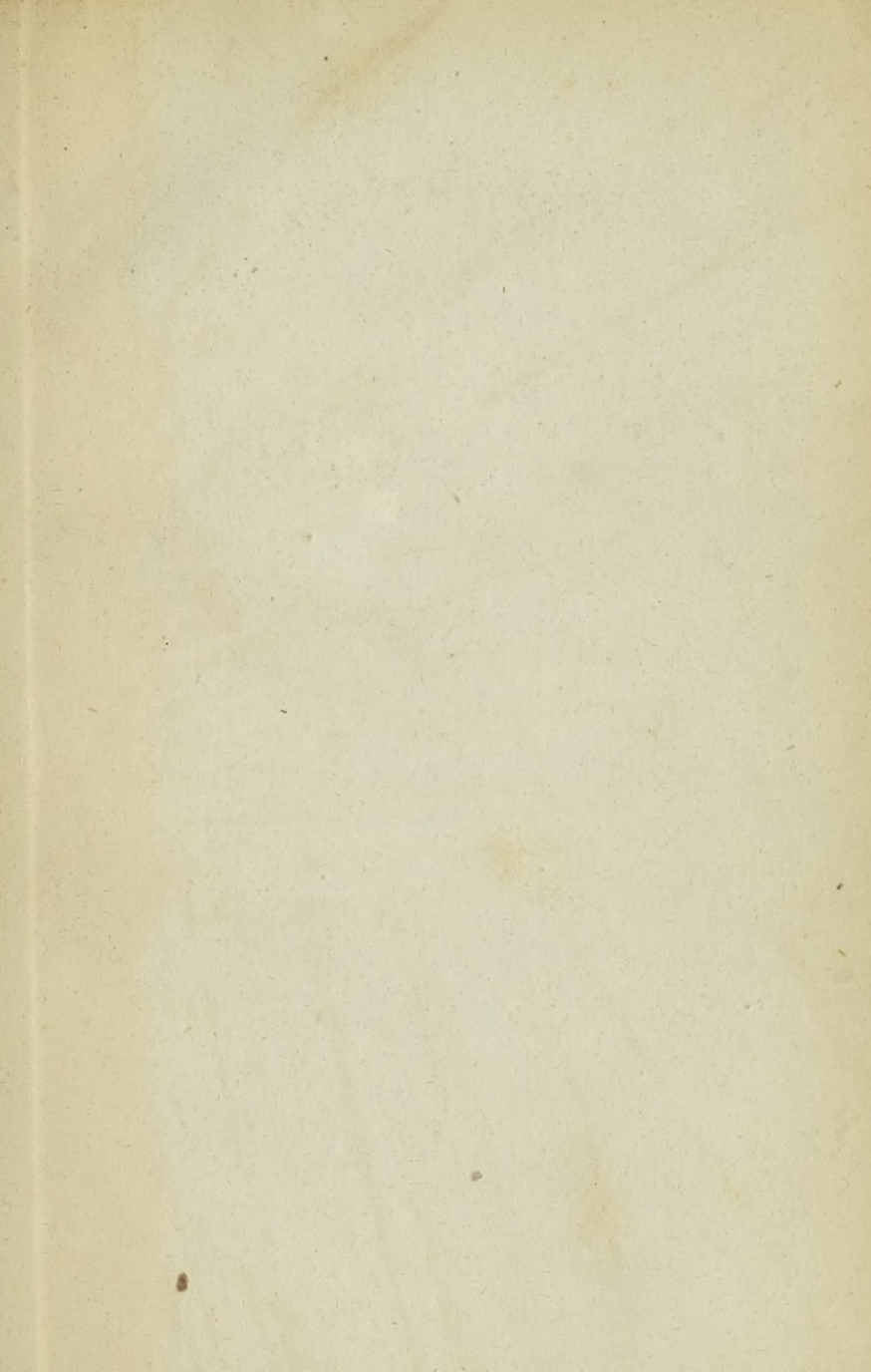
Der Apparat ist so eingerichtet, dass sich Auswechselungen für geneigte und gekrümmte Wände, für Wände mit Pfeilern, welche in die Erdmasse eingreifen, für überhöhte Erdmassen u. s. w. leicht vornehmen lassen.

Das Füllen des Kastens *O* mit Erde ist dadurch erleichtert, dass in den Sammelkasten *P* mehrere kleinere Kästen derart eingesetzt sind, dass die beim Umklappen der Wand herausfallende Erde sich in diese Kästen vertheilt, welche nun einzeln leicht entleert werden können.

Wir werden nicht ermangeln, die Resultate der Versuche mitzuthemen, wenn dieselben zu einem Abschluss gelangt sind.



S. 61



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

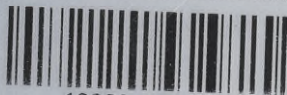


L. inw.

7823

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299589

126