

XII

53,232,45

14

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299593

x  
2,177.



# DIE LEHRE

von der

# ELASTICITÄT

und

# FESTIGKEIT

mit

besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik,

für

polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure,  
Maschinenbauer, Architekten, etc.

Von

Dr. E. Winkler,

ord. Professor der Ingenieurbaukunde am Polytechnicum in Prag.

Invent. D. I. No 295.

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten und lithographirten Tafeln.

1. Theil.



PRAG, 1867.

Verlag von H. Dominicus.

VIII 13  
49

X  
2178



II 7868



Dr. E. Winkler

Journal. D. I. No. 29.



PRAG, 1867

Druck von Heincr. Mercy in Prag.

Akc. Nr. 114/51

## V o r r e d e.

Die Herausgabe des vorliegenden Werkes wurde hauptsächlich durch den Wunsch veranlasst, für die zahlreichen Untersuchungen aus dem Gebiete der Elasticitäts- und Festigkeitslehre, welche in meinen Vorträgen über Ingenieurbaukunde nöthig werden, eine feste theoretische Grundlage zu besitzen. Da hierbei der bei Weitem grösste Theil dieser Lehre Anwendung findet, so entschloss ich mich, das Werk zu einem allgemeinen Lehrbuche der Elasticitäts- und Festigkeitslehre für Techniker zu gestalten. Jedoch hielt ich es für angemessen, das Werk in zwei Theile zu trennen, von denen der vorliegende erste Theil die für die Baukunde im engeren Sinne, insbesondere für den Brückenbau, wichtigsten Lehren enthält. Er enthält nämlich die allgemeine Elasticitätslehre, die Normalelasticität (Zug- und Druckelasticität), die Schubelasticität und die Biegungselasticität gerader und gekrümmter Stäbe. Da diese Theile für das Verständniss der Bauconstructionen allenfalls ausreichen, so kann dieser Theil als ein abgeschlossenes Ganze angesehen werden. Der zweite Theil soll die übrigen für die Technik wichtigen Lehren enthalten, nämlich die Torsionselasticität gerader Stäbe, die Elasticität doppelt gekrümmter Stäbe, der Rotationskörper, der ebenen und gekrümmten Platten, die Dy-

namik der Elasticität und schliesslich die Geschichte und Literatur der Elasticitätslehre.

Dieses beabsichtigten letzten Abschnittes wegen habe ich auch vermieden, den Text durch Quellenangaben und geschichtliche Notizen zu unterbrechen. Dieser Abschnitt wird zugleich Gelegenheit bieten, mancher Arbeiten zu gedenken, welche im Texte übergangen werden mussten, um das Werk nicht zu voluminös zu machen. Ueberhaupt soll dasselbe nur so viel enthalten, als der Techniker unbedingt zu wissen nöthig hat. Ebenso habe ich weitläufigere Untersuchungen, welche nur Anwendung in speziellen Zweigen der Technik finden, übergangen, z. B. die Bestimmung der ungünstigsten Belastung der Brückenträger, die Theorie zusammengesetzter Constructionen, wie der Dächer, Sprengwerke, Gitterträger u. s. w., welche viel Raum beansprucht haben würden. Derartige Untersuchungen passen besser in die Vorträge über die einzelnen Zweige der Technik, als in ein allgemeines Lehrbuch der Elasticität und Festigkeit.

Als mathematische Bildung wird nur diejenige vorausgesetzt, die jetzt an allen polytechnischen Schulen geboten wird. Das Studium des Werkes kann bereits beginnen, wenn die Differenzialrechnung und die Elemente der Integralrechnung vorgetragen worden sind. Einzelne Parthien können beim ersten Studium übergangen werden, wenn hierzu die nöthige Zeit fehlen sollte. Dieselben sind am Schlusse dieses Theiles näher bezeichnet.

Beispiele sind nur da gegeben worden, wo es für das Verständniss unbedingt nöthig schien. Eine grössere Anzahl von Beispielen würde zwar Manchem das Studium erleichtern; dieselben würden aber den Preis des Werkes zu sehr erhöht haben. Jedoch habe ich das Verständniss durch Aufnahme vieler Tabellen und graphischer Darstellungen zu erleichtern gesucht. Auch ist in kleiner Schrift vielfach auf praktische Anwendungen hingedeutet worden.

An einem Werke, welches alle Lehren der Elasticität und Festigkeit in gleichem Maasse behandelt, fehlte es bis jetzt noch, selbst in der reichen französischen Literatur. Selbst das treffliche Werk von Grashof hat diesem Mangel nicht ganz abgeholfen, da dieses Werk insbesondere das Bedürfniss des Maschinenbaues berücksichtigt und auch manche für diesen wichtige Lehre nicht enthält oder zu kurz behandelt. Da die Lehren der Elasticität und Festigkeit, welche der Maschinenbauer, der Ingenieur und der Hochbauer bedarf, ganz dieselben sind; nur dass der eine diesen, der andere jenen Theil in ausgedehnterem Maasse bedarf, so wird ein Werk, welches alle Lehren der Elasticität und Festigkeit in gleichem Maasse behandelt, nicht überflüssig erscheinen. Ein solches zu schaffen, war das Streben, welches mich bei der Abfassung des vorliegenden Werkes leitete.

Der von mir gewählte Gang ist insofern von dem von Grashof gewählten Gange abweichend, dass letzterer die allgemeinen Untersuchungen den speciellen folgen lässt, wofür er allerdings seinen guten Grund hat, während ich die allgemeinen Untersuchungen voran schicke. Hierdurch entsteht allerdings der Nachtheil, dass mancher vom Studium zurückgeschreckt wird, weil gerade das Studium der allgemeinen Lehren etwas mehr geistige Anstrengung erfordert, als viele der folgenden Lehren. Jedoch setze ich von den Studirenden, für welche das Werk bestimmt ist, eine solche mathematische Bildung voraus, dass sie diese kleine Schwierigkeit leicht überwinden werden. Das Studium der übrigen Theile wird aber bedeutend erleichtert, wenn man sich erst diesen kurzen allgemeinen Theil zu eigen gemacht hat — und dies ist ein nicht unwesentlicher Vortheil.

Die vorhandenen Werke und Abhandlungen aus dem Gebiete der Elasticitäts- und Festigkeitslehre habe ich natürlich benutzt. Jedoch wird man auch manche mir eigenthümliche Untersuchungen finden. Als solche erlaube ich mir zu erwähnen: Die allgemeinen Sätze vom Maximum

der Schubspannungen, die Einführung der idealen Hauptspannungen, allgemeine Bestimmungen der Schubspannungen  $T_2$  bei der Biegungselasticität, die Sätze von den proportionalen Querschnitten, Versuch einer Ausdehnung der innerhalb der Elasticitätsgrenze gültigen Regeln auf den Bruch, mehrfache Resultate über continuirliche Träger, Erweiterung der Regeln für eine gleichzeitige Belastung durch Axial- und Transversalkräfte, Erweiterung der Theorie der Träger mit I-förmigem Querschnitte, Ergänzung der allgemeinen Theorie gekrümmter Stäbe, Einführung der Kernlinien, Einführung der Kämpferdrucklinien und Kämpferdruckumhüllungslinien und Bestimmung derselben in den verschiedenen Fällen, Theorie der Bogen ohne Gelenk, allgemeine Theorie des Einflusses der Temperatur auf Bogenträger.

Den Technikern übergebe ich das Buch mit dem Wunsche, dass sie von dem Studium der Elasticitäts- und Festigkeitslehre, welche für die Technik eine unbestreitbare Wichtigkeit hat, nicht durch eingebildete Schwierigkeiten zurückschrecken mögen, und die Mathematiker bitte ich um eine nachsichtige Beurtheilung.

Prag, im Juli 1868.

Der Verfasser.

# I n h a l t.

Einleitung . . . . .	Seite 1
----------------------	------------

## I. Abschnitt.

### *Allgemeine Theorie der Elasticität.*

I. Kapitel.	Die inneren Kräfte . . . . .	3
II.	Die Formänderungen . . . . .	13
III.	Beziehungen zwischen den Spannungen und der Formänderung . . . . .	17
IV.	Moleculartheorie . . . . .	24
V.	Allgemeine Festigkeitslehre . . . . .	30

## II. Abschnitt.

### *Normal- und Schub-Elasticität.*

VI.	" Normalelasticität gerader Stäbe . . . . .	37
VII.	" Schubelasticität . . . . .	45

## III. Abschnitt.

### *Biegungselasticität gerader Stäbe im Allgemeinen.*

VIII.	" Bestimmung der Spannungen . . . . .	47
IX.	" Formänderung . . . . .	62
X.	" Bruchfestigkeit . . . . .	69

## IV. Abschnitt.

### *Belastung der Transversalkräfte.*

XI.	" Bestimmte Belastung . . . . .	79
XII.	" Bestimmte Belastung bei Stäben mit einem Felde . . . . .	94
XIII.	" Prismatischer continuirlicher Stab mit gleich hohen Stützen im Allgemeinen . . . . .	112
XIV.	" Prismatischer continuirlicher Stab mit gleich hohen Feldern und gleich hohen Stützen . . . . .	120
XV.	" Prismatischer Stab mit ungleichen Feldern und gleich hohen Stützen . . . . .	130
XVI.	" Prismatischer continuirlicher Stab mit ungleich hohen Stützen . . . . .	143
XVII.	" Continuirllicher Stab mit veränderlichem Querschnitte . . . . .	150

**V. Abschnitt.***Belastung durch Kräfte, unter welchen Axialkräfte sind.*

XXVIII. Kapitel.	Belastung durch centriscb wirkende Axialkräfte . . . . .	158
XIX.	„ Belastung durch excentrisch wirkende Axialkräfte . . . . .	166
XX.	„ Gleichzeitige Belastung durch Axial- und Transversalkräfte . . . . .	171

**VI. Abschnitt.***Verschiedene Querschnittsformen.*

XXI. Kapitel.	Der rechteckige Querschnitt . . . . .	185
XXII.	„ Der elliptische Querschnitt . . . . .	192
XXIII.	„ Verschiedene Querschnittsformen . . . . .	199
XXIV.	„ Idealer I-förmiger Querschnitt . . . . .	210
XXV.	„ Symmetrischer I-förmiger Querschnitt . . . . .	213
XXVI.	„ Unsymmetrischer I-förmiger Querschnitt . . . . .	225
XXVII.	„ T-förmiger Querschnitt . . . . .	232

**VII. Abschnitt.***Genauere Biegungstheorie gerader Stäbe.*

XXVIII.	„ Allgemeine Theorie . . . . .	235
XXIX.	„ Anwendung auf bestimmte Querschnittsformen . . . . .	242

**VIII. Abschnitt.***Normalelasticität einfach gekrümmter Stäbe.*

XXX.	„ Allgemeine Theorie . . . . .	253
XXXI.	„ Anwendung auf verschiedene Belastungsweisen und Körperformen . . . . .	257

**IX. Abschnitt.***Biegungselasticität einfach gekrümmter Stäbe.*

XXXII.	„ Allgemeine Theorie . . . . .	268
XXXIII.	„ Anwendung auf einige Querschnittsformen . . . . .	276
XXXIV.	„ Beispiele für bestimmte Belastung . . . . .	285
XXXV.	„ Bogenträger mit Kämpfergelenken im Allgemeinen . . . . .	293
XXXVI.	„ Bogen mit Kämpfer- und Scheitelgelenken . . . . .	298
XXXVII.	„ Bogen mit Kämpfergelenken, aber ohne Scheitelgelenk . . . . .	309
XXXVIII.	„ Bogen ohne Gelenk und mit eingespannten Kämpfern . . . . .	323
XXXIX.	„ Einfluss der Temperatur . . . . .	358
XL.	„ Ringförmige Körper . . . . .	369

Anhang . . . . .		380
------------------	--	-----

# Einleitung.

**§. 1. Die Elasticität fester Körper.** Wenn auf einen festen Körper äussere Kräfte, d. s. Kräfte, welche von einem zweiten Körper ausgehen, wirken, so nimmt der Körper eine andere Form an, oder genauer, die einzelnen Punkte des Körpers nehmen eine andere gegenseitige Lage an. Der Körper nimmt aber seine frühere Form mehr oder weniger wieder an, wenn die Einwirkung der äusseren Kräfte wieder aufhört. Man nennt diese Eigenschaft der festen Körper ihre Elasticität.

**§. 2. Unvollkommene Elasticität.** Gewöhnlich nennt man einen Körper mehr oder weniger elastisch, je nachdem er mehr oder weniger in seine frühere Form zurückgeht, wenn die Wirkung der äusseren Kräfte aufhört. Einen Körper, welcher seine frühere Form ganz wieder annimmt, oder einen vollkommen elastischen Körper, giebt es nicht; ebenso wenig giebt es einen festen Körper, welcher die ihm von den äusseren Kräften ertheilte Form ganz beibehält, oder einen vollkommen unelastischen Körper.

Die gesammte Formänderung lässt sich in zwei Theile zerlegen, nämlich einen Theil, welcher nach Beseitigung der äusseren Kräfte wieder verschwindet oder die elastische Formänderung, und einen Theil, welcher verbleibt, oder die bleibende Formänderung.

Je kleiner die äusseren Kräfte sind, desto kleiner ist auch die Formänderung und desto vollkommener wird die Form wieder hergestellt und desto kleiner ist die bleibende Formänderung. Bis zu einer gewissen Grenze ist die bleibende Formänderung kaum merkbar oder, praktisch zu sprechen, nicht vorhanden. Man nennt diese Grenze die Elasticitätsgrenze. Sie ist allerdings sehr unbestimmt und richtet sich hauptsächlich nach der Genauigkeit, mit welcher man die Formänderung zu messen im Stande ist.

**§. 3. Bewegung bei der Formänderung.** Wenn die äusseren Kräfte von Null an ganz allmählig wachsen, so wächst auch die Formänderung ganz allmählig und der Körper verbleibt in seiner neuen Form, wenn die äusseren Kräfte nicht mehr wachsen. Wir können dann die Form des Körpers die den äusseren Kräften entsprechende Ruheform nennen. Wenn aber die äusseren Kräfte in bestimmter Grösse plötzlich auf den Körper wirken, so entstehen Schwingungen um die Ruheform

die allmählig abnehmen, bis der Körper in der Ruheform verbleibt. Werden die äusseren Kräfte plötzlich beseitigt, so entstehen abermals Schwingungen um die anfängliche Form des Körpers, die nach und nach abnehmen, bis der Körper in seiner anfänglichen Form verbleibt.

Hat der Körper seine Ruheform angenommen, so nimmt die Formänderung dennoch äusserst wenig und ganz allmählig, zuweilen ununterbrochen, zu, indem sich die innere Beschaffenheit des Körpers ganz allmählig verändert. Wir nennen diese Formänderung die elastische Nachwirkung. Sie geht um so schneller vor sich, je grösser die Formänderung vorher war. Eine mathematische Theorie der elastischen Nachwirkung ist zur Zeit noch nicht möglich; wir werden daher auch in der Folge die elastische Nachwirkung nicht weiter in Betracht ziehen.

**§. 4. Festigkeit.** Bei zunehmender Formänderung tritt endlich eine Trennung des Körpers in mehrere Theile ein, was wir allgemein das Zerbrechen des Körpers nennen. Die Grösse der zum Zerbrechen nöthigen äusseren Kräfte nennen wir die Festigkeit des Körpers.

Je nachdem nach dem Ueberschreiten der Elasticitätsgrenze noch eine grosse oder nur eine kleine bleibende Formänderung eintritt, ehe der Körper zerbricht, nennen wir denselben zähe oder spröde.

**§. 5. Elasticitätslehre.** Die Lehre von der Elasticität hat zwei Aufgaben zu lösen:

I. Die Ermittlung der Beziehungen zwischen den äusseren Kräften und der Formänderung.

II. Die Ermittlung der Bedingungen, unter welchen die Körper gegen bleibende Formänderungen oder gegen Zerbrechen eine für die Praxis genügende Sicherheit bieten. Wir nennen dieselben die Festigkeits-Bedingungen.

Oft hängen beide Aufgaben innig zusammen.

Die Elasticitätslehre oder die Mechanik der Formänderungen lässt sich in die Statik der Formänderungen und die Dynamik der Formänderungen trennen. Die erstere betrachtet die Körper nur in der Ruheform, während die letztere namentlich die Bewegungsgesetze während der Formänderung untersucht.

Die Dynamik der Formänderungen bietet gerade in vielen Fällen, welche grosse praktische Wichtigkeit haben, zur Zeit unüberwindliche analytische Schwierigkeiten, so dass man sich genöthigt sieht, sie in mehr praktischer Weise auf die Statik der Formänderungen zurückzuführen. Wir werden uns daher auch am meisten mit dieser zu beschäftigen haben.

# I. Abschnitt.

## Allgemeine Theorie der Elasticität.

### I. Kapitel.

#### Die inneren Kräfte.

**§. 6. Die inneren Kräfte.** Wir denken uns im Innern eines Körpers eine beliebige kleine ebene Fläche  $f$ . Zwischen den auf beiden Seiten dieser Fläche liegenden Theilen des Körpers wird sich, sobald der Körper seine Form ändert, eine wechselseitig wirkende Kraft  $r$  äussern, welche über die ganze Fläche stetig vertheilt ist. Man nennt diese Kraft innere Kraft im Gegensatze zu den äusseren Kräften, welche die Formänderung des Körpers erzeugen. Die in Rede stehende Fläche  $f$  nennen wir die von der betreffenden inneren Kraft afficirte Fläche.

Dividiren wir die innere Kraft  $r$ , welche die Fläche  $f$  afficirt, durch  $f$ , so erhält man die auf die Flächeneinheit bezogene innere Kraft  $R$ . Wir nennen dieselbe die die Fläche  $f$  afficirende Spannung.

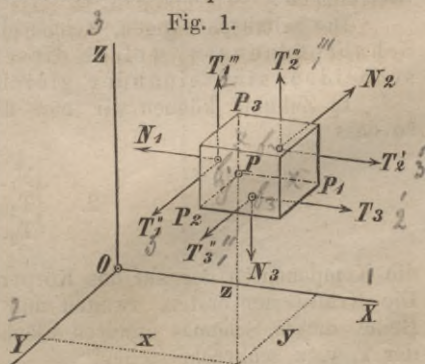
Die Spannung  $R$  lässt sich in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine  $N$  senkrecht auf die Fläche  $f$ , die andere  $T$  in der Fläche  $f$  selbst wirkt. Die senkrecht wirkende Komponente  $N$  nennen wir Normalspannung. Sie ist entweder ein Zug oder ein Druck, je nachdem sie die auf beiden Seiten von  $f$  befindlichen Theile von einander zu entfernen oder einander zu nähern strebt. Einen Zug ziehen wir als positive, einen Druck als negative Spannung in Rechnung.

Die in der Fläche  $f$  selbst wirkende Komponente  $T$  strebt die auf beiden Seiten der Fläche liegenden Theile über einander zu verschieben; wir nennen sie daher Schubspannung.

**§. 7. Spannungen, welche auf ein elementares Parallelepiped wirken.** Wir denken uns im Innern des Körpers ein unendlich kleines Parallelepiped (Fig. 1), dessen Kanten  $PP_1 = dx$ ,  $PP_2 = dy$ ,  $PP_3 = dz$  den Axen eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems parallel sind. Es bezeichne nun:

$f_1, f_2, f_3$  die drei in  $P$  zusammenstossenden Seitenflächen  $P_2P_3$ ,  $P_3P_1$ ,  $P_1P_2$ , wobei die Indices angeben, auf welcher Axe die Fläche senkrecht steht, wenn 1, 2, 3 bezüglich dem  $x, y, z$  entspricht;

$v$  das Volumen  $dx dy dz$  des Elementes;



$R_1, R_2, R_3$  die Spannungen, welche die Seitenflächen  $f_1, f_2, f_3$  afficiren;  
 $N_1, N_2, N_3$  die Normalspannungen, welche bezüglich den  $x, y, z$  parallel sind;

$T_3''', T_2''''$  die Komponenten von  $R_1$  nach Richtung der  $y, z, T_1''', T_3''$  die Komponenten von  $R_2$  nach Richtung der  $z, x$  und  $T_2', T_1''$  die Komponenten von  $R_3$  nach der  $x, y$ . Diese Komponenten sind Schubspannungen. Der untere Index giebt die Kante an, welche von der Richtung der betreffenden Kraft geschnitten wird, und der obere Index die Axe, welcher die Kraft parallel ist. Der fehlende Index entspricht dem Index des afficirten Flächenelementes.

$X_0, Y_0, Z_0$  die Komponenten der auf die Volumeneinheit des Körperelementes wirkenden Kraft (z. B. der Schwere).

Die Spannungen, welche die den Flächen  $f_1, f_2, f_3$  gegenüberliegenden Flächen afficiren, bezeichnen wir ebenso, schalten aber diese Bezeichnung in eine Parenthese, z. B.  $(N_1), (T_2'''')$ . Alle Spannungen sind hierbei, um es nochmals zu erwähnen, auf die Flächeneinheit bezogen. Die auf die Flächen des Elementes selbst wirkenden inneren Kräfte sind daher  $N_1 f_1, N_2 f_2, N_3 f_3, T_2'''' f_1, T_3' f_2$  u. s. w.

**§. 8. Gleichgewicht gegen Drehung.** Damit das Körperelement in Gleichgewichte gegen Drehung ist, muss die Summe der Momente für drei beliebige Axen Null sein. Legen wir die Momentenaxe durch den Schwerpunkt des Elementes parallel zur Axe des  $x$ , so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{1}{2} [(T_1''') + T_1'''] f_2 dy - \frac{1}{2} [(T_1'') + T_1''] f_3 dz = 0.$$

Da aber  $(T_1''')$  von  $T_1''''$  und  $(T_1'')$  von  $T_1''$  nur unendlich wenig verschieden sein kann, so ist

$$T_1'''' f_2 dy - T_1'' f_3 dz = 0.$$

Die Division mit  $v = f_2 dy = f_3 dz$  giebt die erste der drei folgenden Gleichungen.

$$1. \begin{cases} T_1'''' = T_1''', \\ T_2' = T_2''', \\ T_3'' = T_3'. \end{cases}$$

Die beiden anderen Gleichungen entsprechen dem Gleichgewichte gegen Drehung um Axen, welche den  $y, z$  parallel sind. In Worten sagen diese Gleichungen:

Die Schubspannungen, welche gleichen unteren Index haben, oder die Schubspannungen, welche dieselbe Kante des Körperelementes schneiden, sind einander gleich.

In Zukunft können wir nun die oberen Indices der  $T$  weglassen, so dass

$$2. \begin{cases} N_1, T_3, T_2, \\ T_3, N_2, T_1, \\ T_2, T_1, N_3 \end{cases}$$

die Komponenten der auf das Körperelement wirkenden Spannungen sind. Die Kräfte der ersten, zweiten und dritten horizontalen oder vertikalen Reihe dieses Schemas afficiren Flächen, welche bezüglich auf den Axen der  $x, y, z$  senkrecht stehen.

**§. 9. Gleichgewicht gegen Verschiebung.** Damit das Körperelement im Gleichgewichte gegen Verschiebung ist, muss die Summe der Komponenten in Richtung dreier Axen Null sein. Für die Richtung der  $x$  ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung:

$$[(N_1) - N_1]f_1 + [(T_3') - T_3]f_2 + [(T_2') - T_2]f_3 + X_0v = 0.$$

$(N_1') - N_1$  ist die Aenderung von  $N_1$ , wenn sich das afficirte Flächenelement  $f_1$  nur nach Richtung der  $x$  um  $dx$  verschiebt, ohne dass sich  $y$  und  $z$  ändern. Wir müssen daher diese Aenderung mit  $\frac{\partial N_1}{\partial x} dx$  bezeichnen, wenn wir totale Differentiale mit  $d$ , partielle mit  $\partial$  bezeichnen.

Ebenso ist nun  $(T_3') - T_3 = \frac{\partial T_3'}{\partial y} dy$  und  $(T_2') - T_2 = \frac{\partial T_2'}{\partial z} dz$ .

Demnach geht die obige Gleichung, wenn wir nach dem vorigen Paragraph nur  $T_3$  für  $T_3'$ ,  $T_2$  für  $T_2'$  setzen, über in die erste der folgenden drei Gleichungen:

$$3. \quad \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + X_0 = 0, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + Y_0 = 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + Z_0 = 0. \end{cases}$$

Die beiden anderen Gleichungen entsprechen dem Gleichgewichte gegen Verschiebung in Richtung der  $y$  und  $z$ .

### §. 10. Spannung für ein beliebiges Flächenelement.

Wir setzen voraus, dass die Spannungen  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$  für ein rechtwinkliges Coordinatensystem bekannt seien. Wie man sie findet, wird später gezeigt werden. Es kommt nun darauf an, die Spannung  $R$  kennen zu lernen, welches auf ein Flächenelement  $f$  von beliebiger Lage wirkt. Zu dem Ende denken wir uns ein unendlich kleines Tetraeder (Fig. 2), dessen Kanten  $PP_1 = dx, PP_2 = dy, PP_3 = dz$  den Axen der  $x, y, z$  parallel sind. Die Spannungen, welche die drei auf einander senkrechten Flächen  $f_1, f_2, f_3$  afficiren, behalten die frühere Bezeichnung. Ausserdem bezeichne:

$\alpha, \beta, \gamma$  die Stellungswinkel der Fläche

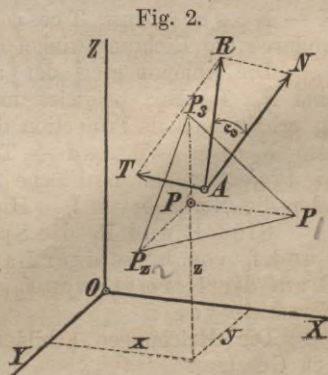
$P_1P_2P_3 = f$  von beliebiger Lage, d. h. die Winkel, welche die Normale  $AN$  dieser Flächen mit den Axen der  $x, y, z$  einschliesst;

$R$  die Spannung, welche die Fläche  $f$  afficirt;

$N, T$  die Normal- und Schubkomponente von  $R$ ;

$X, Y, Z$  die Komponenten von  $R$  nach Richtung der  $x, y, z$ ;

$\varphi, \psi, \nu$  die Richtungswinkel von  $R$ , d. h. die Winkel, welche  $R$  mit den Axen der  $x, y, z$  einschliesst;



$\omega$  den Winkel zwischen R und der Normale AN;

$\varphi_1, \psi_1, \nu_1$  die Richtungswinkel von T.

Das Gleichgewicht des Körperelementes gegen Verschiebung in Richtung der x fordert die Erfüllung der Gleichung:

$$N_1 f_1 + T_3 f_2 + T_2 f_3 - X f - \frac{1}{3} X_0 f_1 dx = 0.$$

Bekanntlich aber ist  $f_1 = f \cos \alpha$ ,  $f_2 = f \cos \beta$ ,  $f_3 = f \cos \gamma$ ; das letzte Glied  $\frac{1}{3} X_0 f_1 dx$  verschwindet gegen die übrigen. Man erhält daher die erste der Gleichungen:

$$4. \begin{cases} X = N_1 \cos \alpha + T_3 \cos \beta + T_2 \cos \gamma, \\ Y = T_3 \cos \alpha + N_2 \cos \beta + T_1 \cos \gamma, \\ Z = T_2 \cos \alpha + T_1 \cos \beta + N_3 \cos \gamma. \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen drücken das Gleichgewicht gegen Verschiebung in Richtung der Y und Z aus.

Somit sind die Komponenten der auf die Fläche f von beliebiger Lage wirkenden Spannungen bestimmt. Diese Spannung selbst ist nun

$$5. R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Die Richtungswinkel von R sind bestimmt durch:

$$6. \cos \varphi = \frac{X}{R}, \cos \psi = \frac{Y}{R}, \cos \nu = \frac{Z}{R}.$$

Nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie des Raumes ist:

$$\cos \omega = \cos \alpha \cos \varphi + \cos \beta \cos \psi + \cos \gamma \cos \nu,$$

d. i.

$$7. \cos \omega = \frac{X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma}{R}.$$

Ferner ist  $N = R \cos \omega$ ,  $T = R \sin \omega$ , d. i.:

$$8. N = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma.$$

$$9. T = \sqrt{R^2 - N^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 - (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma)^2}.$$

Endlich ist  $T \cos \varphi_1 + N \cos \alpha = R \cos \varphi = X$ , also  $T \cos \varphi_1 = X - N \cos \alpha$ ; ebenso  $T \cos \psi = Y - N \cos \beta$ ,  $T \cos \nu_1 = Z - N \cos \gamma$ , wodurch die Richtungswinkel  $\varphi_1, \psi_1, \nu_1$  bestimmt sind.

Die Komponenten der auf die Fläche  $f_1$  wirkenden Spannung  $R_1$  sind  $N_1, T_3, N_2$ ; projectirt man diese Kraft  $R_1$  auf die Normale von  $f_1$ , so erhält man als Projection die Summe der Projectionen von  $N_1, T_3, N_2$ , also  $N_1 \cos \alpha + T_3 \cos \beta + T_2 \cos \gamma$ . Ebenso gross ist nach 4 aber auch die Projection der die Fläche f afficirenden Spannung R auf die Axe der x oder die Normale von  $f_1$ . Hieraus folgt der Satz:

Sind R und  $R_1$  die Spannungen, welche die beiden Flächen f und  $f_1$  von beliebiger Lage afficiren, so ist die Projection von R auf die Normale von  $f_1$  gleich der Projection von  $R_1$  auf die Normale von f.

Die Gleichungen 1 bilden nur einen speciellen Fall dieses allgemeinen Gesetzes.

§. 11. **Das Spannungsellipsoid.** Von dem Gesetze, welchem die eine Fläche  $f$  afficirende Spannung  $R$  bei veränderlicher Lage dieser Fläche folgt, erhält man die klarste Vorstellung, wenn man  $R$  für jede mögliche Lage von  $f$  durch eine von dem betreffenden Punkte  $P$  ausgehende Gerade darstellt. Die Endpunkte aller dieser Geraden liegen sodann auf einer Fläche, deren Gestalt im Folgenden untersucht werden soll.

Die Komponenten der auf  $f_1, f_2, f_3$  wirkenden Spannungen  $R_1, R_2, R_3$  nach Richtung der  $x, y, z$  sind bezüglich:  $N_1, T_3, T_2$ ;  $T_3, N_2, T_1$ ;  $T_2, T_1, N_3$ . Daher ist, wenn man die Richtungswinkel von  $R_1, R_2, R_3$  mit  $\varphi_1, \psi, \nu_1$ ;  $\varphi_2, \psi_2, \nu_2$  und  $\varphi_3, \psi_3, \nu_3$  bezeichnet:

$$10. \begin{cases} \cos \varphi_1 = \frac{N_1}{R_1}, & \cos \psi_1 = \frac{T_3}{R_1}, & \cos \nu_1 = \frac{T_2}{R_1}, \\ \cos \varphi_2 = \frac{T_3}{R_2}, & \cos \psi_2 = \frac{N_2}{R_2}, & \cos \nu_2 = \frac{T_1}{R_2}, \\ \cos \varphi_3 = \frac{T_2}{R_3}, & \cos \psi_3 = \frac{T_1}{R_3}, & \cos \nu_3 = \frac{N_3}{R_3}. \end{cases}$$

Wir wählen nun die Richtungen von  $R_1, R_2, R_3$ , welche durch die oben aufgestellten Gleichungen bestimmt sind, als Axen eines neuen schiefwinkligen Coordinatensystems und bezeichnen die Komponenten einer ein beliebiges Flächenelement  $f$  afficirenden Spannung  $R$  nach Richtung dieser Axen mit  $X', Y', Z'$ . Alsdann ist offenbar, da  $X, Y, Z$  die Komponenten von  $R$  nach Richtung der ursprünglichen Axen sind,

$$X = X' \cos \varphi_1 + Y' \cos \varphi_2 + Z' \cos \varphi_3$$

d. i. nach 10:

$$11. X = \frac{X'}{R_1} N_1 + \frac{Y'}{R_2} T_3 + \frac{Z'}{R_3} T_2.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten der Gleichungen 4, so ergeben sich folgende Relationen:

$$12. \cos \alpha = \frac{X'}{R_1}, \quad \cos \beta = \frac{Y'}{R_2}, \quad \cos \gamma = \frac{Z'}{R_3}.$$

Dieselben Relationen würden sich durch Aufstellung der entsprechenden Ausdrücke für  $Y$  und  $Z$  ergeben. Bekanntlich aber ist  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , mithin

$$13. \left(\frac{X'}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{Y'}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{Z'}{R_3}\right)^2 = 1$$

und dies ist die Gleichung der anfangs erwähnten Fläche, wenn  $X', Y', Z'$ , die Coordinaten eines Punktes desselben für das neue Coordinatensystem, dessen Axen die Richtungen von  $R_1, R_2, R_3$  sind, bedeuten. Hiernach ist diese Fläche ein Ellipsoid, von welchem  $R_1, R_2, R_3$  nach Richtung und Grösse conjugirte Halbmesser sind:

Stellt man also die Spannung, welche ein Flächenelement afficirt, für alle mögliche Lagen desselben nach Richtung und Grösse durch eine von demselben ausgehende Gerade dar, so liegen die Endpunkte dieser Geraden auf einem Ellipsoide. Wir nennen dieses Ellipsoid das Spannungsellipsoid.

Die Spannungen, welche drei auf einander senkrechte Flächen afficiren, sind conjugirte Halbmesser des Spannungsellipsoides.

Da nun durch Veränderung der Lage der drei auf einander senkrechten Flächen jedes mögliche System von conjugirten Halbmessern erzeugen kann, jeder Spannung aber im Allgemeinen nur eine von ihr afficirte Fläche entspricht, so stehen umgekehrt auch die Flächen, welche von drei durch conjugirte Halbmesser dargestellte Spannungen afficirt werden, auf einander senkrecht.

**§. 12. Die Hauptspannungen.** Diejenigen Spannungen, welche die drei Halbaxen des Spannungsellipsoides darstellen, nennen wir die Hauptspannungen. Wir bezeichnen sie mit A, B, C, eine beliebige derselben mit H.

Da die drei Halbaxen des Ellipsoides auch conjugirte Halbmesser sind, so stehen die von ihnen afficirten Flächen auf einander senkrecht. Es kommt nun aber noch darauf an, die Lage der Hauptspannungen gegen die von ihnen afficirten Flächen zu ermitteln. Wählen wir die Richtungen der Hauptspannungen als Axen eines neuen Coordinatensystems, so ist nach 10:

$$14. \quad \begin{cases} \cos \varphi_1 = \frac{N_1}{A}, & \cos \psi_1 = \frac{T_3}{A}, & \cos \nu_1 = \frac{T_2}{A}, \\ \cos \varphi_2 = \frac{T_3}{B}, & \cos \psi_2 = \frac{N_2}{B}, & \cos \nu_2 = \frac{T_1}{B}, \\ \cos \varphi_3 = \frac{T_2}{C}, & \cos \psi_3 = \frac{T_1}{C}, & \cos \nu_3 = \frac{N_3}{C}. \end{cases}$$

Da die Hauptspannungen auf einander senkrecht stehen, so ist:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 &= 1, \\ \cos^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_2 + \cos^2 \psi_3 &= 1; \end{aligned}$$

die Subtraction dieser beiden Gleichungen giebt:

$$\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \psi_1 + \cos^2 \varphi_3 - \cos^2 \nu_1 = 0.$$

Aus 14 folgt aber  $T_3 = A \cos \psi_1$ ,  $T_3 = B \cos \varphi_2$ , daher  $\cos \varphi_2 = \frac{A}{B} \cos \psi_1$ .

Ebenso ergibt sich durch Gleichsetzung der beiden Werthe von  $T_2$   $\cos \varphi_3 = \frac{A}{C} \cos \nu_1$ . Dies in die vorige Gleichung gesetzt, giebt die erste der Gleichungen:

$$15. \quad \begin{cases} \left( \frac{A^2}{B^2} - 1 \right) \cos^2 \psi_1 + \left( \frac{A^2}{C^2} - 1 \right) \cos^2 \nu_1 = 0, \\ \left( \frac{B^2}{C^2} - 1 \right) \cos^2 \nu_2 + \left( \frac{B^2}{A^2} - 1 \right) \cos^2 \varphi_2 = 0, \\ \left( \frac{C^2}{A^2} - 1 \right) \cos^2 \varphi_3 + \left( \frac{C^2}{B^2} - 1 \right) \cos^2 \psi_3 = 0. \end{cases}$$

Die beiden anderen Gleichungen ergeben sich in gleicher Weise durch die Gleichungen  $\cos^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_2 + \cos^2 \psi_3 = 1$ ,  $\cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \psi_2 + \cos^2 \nu_2 = 1$  und  $\cos^2 \nu_1 + \cos^2 \nu_2 + \cos^2 \nu_3 = 1$ ,  $\cos^2 \varphi_3 + \cos^2 \psi_3 + \cos^2 \nu_3 = 1$ .

Welche Reihenfolge auch A, B, C in ihrer Grösse befolgen mögen, so haben doch immer die Glieder von zweien der Gleichungen 15 dieselben, die der dritten entgegengesetzte Vorzeichen. Die beiden ersten können daher nur erfüllt werden, wenn jedes einzelne Glied Null ist, d. h. wenn der betreffende Cosinus = 0 ist. Diess tritt ein, wenn zwei der Hauptspannungen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Da alle drei Hauptspannungen auf einander senkrecht stehen, so muss auch die dritte Hauptspannung mit einer Hauptaxe zusammenfallen. Die Coordinatenaxen aber sind die Senkrechten der von den Hauptspannungen afficirten Flächen. Also:

Die Richtungen der Hauptspannungen stehen auf den von ihnen afficirten Flächen senkrecht, die Hauptspannungen sind also zugleich Normalspannungen.

**§. 13. Grösse und Richtung der Hauptspannungen.** Wir nehmen wiederum das ursprüngliche Coordinatensystem an. Die Richtungswinkel einer Hauptspannung H seien  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Die Componenten von H nach Richtung der Coordinatenaxen sind  $H \cos \alpha$ ,  $H \cos \beta$ ,  $H \cos \gamma$ . Da H auf der afficirten Fläche senkrecht steht, so sind  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  zugleich die Stellungswinkel dieser Fläche.

Nach 4 (§. 5) wird daher:

$$16. \quad \begin{cases} (N_1 - H) \cos \alpha + T_3 \cos \beta + T_2 \cos \gamma = 0, \\ T_3 \cos \alpha + (N_2 - H) \cos \beta + T_1 \cos \gamma = 0, \\ T_4 \cos \alpha + T_1 \cos \beta + (N_3 - H) \cos \gamma = 0. \end{cases}$$

Ausserdem ist

$$16 a. \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Durch diese vier Gleichungen ist sowohl H als auch  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bestimmt. Eliminirt man aus den drei ersten Gleichungen  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  auf gewöhnliche Weise, so ergibt sich zur Bestimmung von H folgende cubische Gleichung:

$$17. \quad (N_1 - H)(N_2 - H)(N_3 - H) - (N_1 - H)T_1^2 - (N_2 - H)T_2^2 - (N_3 - H)T_3^2 + 2T_1T_2T_3 = 0$$

oder nach Potenzen von H geordnet:

$$17 a. \quad H^3 - (N_1 + N_2 + N_3)H^2 + (N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2)H - (N_1N_2N_3 - N_1T_1^2 - N_2T_2^2 - N_3T_3^2 + 2T_1T_2T_3) = 0.$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind die drei Hauptspannungen.

Nach einer bekannten Eigenschaft der cubischen Gleichung ist

$$18. \quad A + B + C = N_1 + N_2 + N_3.$$

Die Summe der drei auf einander senkrechte Flächen afficirenden Normalspannungen ist also für alle Lagen der Flächen constant. Ebenso folgen aus der Lehre von den cubischen Gleichungen die weniger wichtigen Gleichungen:

$$19. \quad \begin{cases} BC + CA + AB = N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2, \\ \{ABC = N_1N_2N_3 - N_1T_1^2 - N_2T_2^2 - N_3T_3^2. \end{cases}$$

Reducirt man jede der Gleichungen 16 auf  $(N_1 - H) \cos \alpha$ ,  $(N_2 - H) \cos \beta$ ,  $(N_3 - H) \cos \gamma$  und bildet die Produkte je zweier dieser Grössen, so findet man, wenn man zur Abkürzung  $K = T_2 T_3 \cos \alpha + T_3 T_1 \cos \beta + T_1 T_2 \cos \gamma$  setzt,

$$\begin{aligned} [(N_2 - H)(N_3 - H) - T_1^2] \cos \beta \cos \gamma &= K \cos \alpha, \\ [(N_3 - H)(N_1 - H) - T_2^2] \cos \gamma \cos \alpha &= K \cos \beta, \\ [(N_1 - H)(N_2 - H) - T_3^2] \cos \alpha \cos \beta &= K \cos \gamma. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus je zwei Gleichungen  $K$  durch Division, reducirt auf  $\cos^2 \alpha$  und setzt die Ausdrücke in die Gleichung 16 a, so ergibt sich die erste der Gleichungen:

$$20. \quad \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{\frac{(N_2 - H)(N_3 - H) - T_1^2}{V}}, \\ \cos \beta = \sqrt{\frac{(N_3 - H)(N_1 - H) - T_2^2}{V}}, \\ \cos \gamma = \sqrt{\frac{(N_1 - H)(N_2 - H) - T_3^2}{V}}, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung

$$V = (N_2 - H)(N_3 - H) + \frac{(N_3 - H)(N_1 - H) + (N_1 - H)(N_2 - H)}{-T_1^2 - T_2^2 - T_3^2}$$

setzt. Die beiden letzten Gleichungen ergeben sich in gleicher Weise. Hierdurch sind nun auch die Richtungen der Hauptspannungen bestimmt.

#### §. 14. Wahl der Hauptspannungen als Coordinatenaxen.

Wir wollen in der Folge die Richtungen der Hauptspannungen als Coordinatenaxen wählen. Alsdann ist in den Ausdrücken des §. 10 für die Spannung, welche ein beliebiges Flächenelement afficirt,  $N_1 = A$ ,  $N_2 = B$ ,  $N_3 = C$  und  $T_1 = T_2 = T_3 = 0$  zu setzen, letzteres, weil in den von den Hauptspannungen afficirten Flächen keine Schubspannungen wirken. Daher wird:

$$21. \quad X = A \cos \alpha, \quad Y = B \cos \beta, \quad Z = C \cos \gamma.$$

$$22. \quad R = \sqrt{A^2 \cos^2 \alpha + B^2 \cos^2 \beta + C^2 \cos^2 \gamma}.$$

$$23. \quad \cos \varphi = \frac{A}{R} \cos \alpha, \quad \cos \psi = \frac{B}{R} \cos \beta, \quad \cos \gamma = \frac{C}{R} \cos \gamma.$$

$$24. \quad N = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

**§. 15. Die Stellungsflächen.** Die Gleichung der von der Spannung  $R$  afficirten Fläche mit den Stellungswinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ist:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0.$$

Setzen wir für  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  die sich aus 21, (§. 14) ergebenden Werthe, so erhalten wir:

$$25. \quad \frac{X x}{A} + \frac{Y y}{B} + \frac{Z z}{C} = 0,$$

Nach einer bekannten Regel der analytischen Geometrie des Raumes ist dies die Gleichung einer durch Coordinatenanfang gehenden Ebene, welche parallel der Tangentialebene der Fläche

$$26. \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = K^2 \quad \bullet$$

ist und zwar in einem Punkte, dessen Coordinaten den X, Y, Z proportional sind; K bedeutet dabei eine beliebige Zahl.

Wir nennen diese Fläche die Stellungsfläche, weil sich mit Hilfe derselben die Stellung der von einer gegebenen Spannung R afficirten Fläche angeben lässt. Hierzu legt man im Durchschnittspunkte F (Taf. I. Fig. 1) der gegebenen Spannung R mit der Stellungsfläche an dieselbe eine Tangentialebene und diese Ebene ist der von R afficirten Fläche parallel.

Umgekehrt kann man mit Hilfe dieser Fläche auch die Spannung finden, welche eine gegebene Ebene afficirt. Man legt zu dieser Ebene eine die Stellungsfläche tangirende Parallelebene und zieht durch den Berührungspunkt innerhalb des Spannungselipsoides einen Radiusvector, so giebt derselbe nach Grösse und Richtung die gesuchte Spannung.

Haben alle drei Hauptspannungen dasselbe Vorzeichen, so ist die Stellungsfläche ein Ellipsoid, dessen Axen proportional den Quadratwurzeln von A, B, C sind (Taf. I. Fig. 1.). Haben aber die Hauptspannungen verschiedene Vorzeichen, so besteht die Stellungsfläche aus einem einfachen und einem doppelten Hyperboloide (Taf. I. Fig. 2.), welche beide den gemeinschaftlichen Asymptotenkegel

$$27. \frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = \pm K^2$$

haben. Die Halbaxen OA', OB', des einfachen Hyperboloides sind den Quadratwurzeln aus den beiden Hauptspannungen mit gleichen Vorzeichen, die Halbaxe OC' des doppelten Hyperboloides der Quadratwurzel aus der dritten Hauptspannung proportional. Die Spannungen, welche die Tangentialebenen dieses Asymptotenkegels afficiren, fallen ganz in die afficirte Fläche, sind also Schubspannungen. Man nennt daher diesen Kegel auch den Gleitungskegel.

**§. 16. Die Schubspannungen.** Nach 9 (§. 10) ist mit Berücksichtigung der Werthe 21 von X, Y, Z

$$28. T^2 = A^2 \cos^2 \alpha + B^2 \cos^2 \beta + C^2 \cos^2 \gamma - (A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma)^2.$$

Eliminirt man hieraus  $\cos^2 \gamma$  mittels der Relation  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , so ergibt sich

$$29. T^2 = (A - C)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + (B - C)^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta - 2(A - C)(B - C) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta.$$

T wird zum Maximum, wenn  $\frac{\partial T^2}{\partial \alpha} = 0$  und  $\frac{\partial T^2}{\partial \beta} = 0$  wird.

Man erhält hiernach durch Bildung der Differenzial-Quotienten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} [(A - C) \cos 2\alpha + 2(B - C) \cos^2 \beta] \sin 2\alpha &= 0 \\ [(B - C) \cos 2\beta + 2(A - C) \cos^2 \alpha] \sin 2\beta &= 0 \end{aligned}$$

Ist  $\sin 2\alpha = 0$ , also  $\alpha = 90^\circ$ , so kann nicht auch  $\sin 2\alpha = 0$  sein, da  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$  die Richtung der Axe der  $z$  bestimmt; für welche nach dem Obigen  $T = 0$  ist. Ist daher  $\sin 2\alpha = 0$ ,  $\alpha = 90^\circ$ , so muss

$$(B - C) \cos 2\beta + 2(A - C) \cos \alpha = 0;$$

d. i. da  $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$  ist,  $(B - C) \cos 2\beta = 0$  oder, wenn wir Ungleichheit von  $A, B, C$  voraussetzen,  $\cos 2\beta = 0$ , also  $\beta = \pm 45^\circ$ . In gleicher Weise ergibt sich, dass  $T$  überhaupt zum Maximum wird für

$$30. \quad \begin{cases} \alpha = 90^\circ, & \beta = \pm 45^\circ, & \gamma = \pm 45^\circ \\ \alpha = \pm 45^\circ, & \beta = 90^\circ, & \gamma = \pm 45^\circ \\ \alpha = \pm 45^\circ, & \beta = \pm 45^\circ, & \gamma = 90^\circ \end{cases}$$

d. i. die Schubspannung  $T$  wird zum Maximum für sechs Ebenen, von denen jede durch eine Axe des Spannungsellipsoides geht und den von den beiden andern Axen gebildeten Winkel halbiert (Taf. I. Fig. 3).

Für die beiden Ebenen, welche durch die Axen  $A$  gehen, ergibt sich nach 26 beidemal  $T = \frac{1}{2}(B - C)$ ; die Schubspannungen, welche die beiden durch dieselbe Axe gehenden Ebenen afficirt, sind also einander gleich, so dass es in der That nur drei verschiedene Maxima der Schubspannung giebt. Wir nennen dieselben Hauptschubspannungen und bezeichnen sie, je nach dem die afficirte Fläche durch  $A, B$  oder  $C$  geht, mit  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ , (eine beliebige derselben mit  $\mathfrak{D}$ ; nach 26 wird alsdann

$$31. \quad \mathfrak{A} = \pm \frac{B-C}{2}, \quad \mathfrak{B} = \pm \frac{C-A}{2}, \quad \mathfrak{C} = \pm \frac{A-B}{2}.$$

**§. 17. Fall, wo eine der Hauptspannungen Null ist.** Dieser Fall tritt ein, wenn in der cubischen Gleichung 18 a (§. 13) das constante Glied wegfällt, also

$$N_1 N_2 N_3 - N_1 T^2 - N_2 T^2 - N_3 T^2 + T_1 T_2 T_3 = 0$$

ist. Diese Bedingung wird z. B. erfüllt, wenn  $N_3 = 0$ ,  $T_1 = 0$ ,  $T_2 = 0$  oder wenn  $N_2 = 0$ ,  $N_3 = 0$ ,  $T_1 = 0$  (bei der Bruchfestigkeit) ist. Die cubische Gleichung reducirt sich alsdann, wenn man die Wurzel  $H = 0$  ausschliesst, auf die quadratische Gleichung:

$$32. \quad H^2 - (N_1 + N_2 + N_3)H + (N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) = 0$$

Das Spannungsellipsoid erscheint hier zu einer Ebene zusammengedrückt, so dass alle Spannungen in einer Ebene thätig sind.

Betrachtet man nur die Spannungen, welche die durch die Richtung der Hauptspannung  $H = 0$  gehenden Ebenen afficiren, so tritt an die Stelle des Spannungsellipsoides eine Spannungsellipse und an die Stelle der Stellungsfläche eine Stellungslinie. Die letzere ist bei gleichen Vorzeichen der Hauptspannungen eine Ellipse (Taf. I. Fig. 4); bei ungleichen Vorzeichen besteht sie aus zwei Hyperbeln mit gemeinschaftlichen Asymptoten (Taf. I. Fig. 5). Die Halbaxen der Ellipse und der Hyperbeln sind den Wurzeln aus den beiden Hauptspannungen proportional. Die Asymptoten schliessen, wenn  $C = 0$  ist, mit der Richtung von  $A$  einen

Winkel ein, dessen Tangente  $= \sqrt{-\frac{A}{B}}$  ist.

Mit Hilfe der Spannungsellipse und der Stellungslinie ist es leicht, die

Curven zu construiren, welche die Normalspannung  $N$  und die Schubspannung  $T$  repräsentiren, da  $N$  und  $T$  Componenten von  $R$  sind. (Siehe Taf. I. Fig. 4 und 5.)

**§. 18. Fall, wo zwei Hauptspannungen Null sind.** Dieser Fall tritt ein, wenn in der cubischen Gleichung 18 a (§. 13) das constante Glied und der Coefficient von  $H$  Null sind, also

$$N_1 N_2 N_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2 - 2T_1 T_2 T_3 = 0,$$

$$N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2 = 0,$$

also z. B. wenn  $N_2 = 0, N_3 = 0, T_1 = 0, T_2 = 0, T_3 = 0$  ist (Zug- und Druckfestigkeit). Alsdann ist

$$33. H = N_1 + N_2 + N_3,$$

$$34. R = H \cos \alpha,$$

$$35. N = H \cos^2 \alpha,$$

$$36. T = \frac{1}{2} H \sin 2\alpha,$$

$$37. \phi = \frac{1}{2} H,$$

wonach sich  $R, N, T$  leicht graphisch darstellen lassen (Taf. I. Fig. 6). Das Spannungsellipsoid erscheint als eine Gerade, so dass hier alle Spannungen in einer Geraden wirken. Ebenen, welche durch diese Geraden gehen, werden gar nicht afficirt.

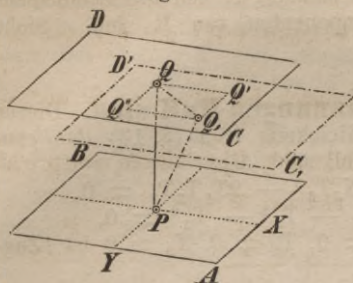
## II. Kapitel.

### Die Formänderungen.

**§. 19. Längenänderung.** Denken wir uns im Innern des Körpers eine unendlich kleine Linie  $s$ , so ändert dieselbe bei der Formänderung des Körpers offenbar ihre Länge, und zwar tritt entweder eine Verlängerung oder eine Verkürzung ein, die wir bezüglich als positive oder negative Längenänderung in Rechnung ziehen wollen. Das Verhältniss  $\frac{\Delta s}{s}$  der Längenänderung  $\Delta s$  zur ursprünglichen Länge  $s$  nennt man die relative Längenänderung. Wir wollen dieselbe mit  $\sigma$  bezeichnen und stets als sehr klein voraussetzen.

**§. 20. Gleitung.** Denken wir uns im Innern des Körpers eine unendlich kleine Fläche  $AB = f$  (Fig. 3), auf welcher die unendlich kleine Gerade  $PQ = s$  senkrecht steht, so wird nach der Formänderung im Allgemeinen  $s$  nicht mehr auf  $f$  senkrecht stehen. Eine zweite durch  $Q$  gehende und zu  $AB$  parallele Fläche  $CD$  wird sich daher gegen die Fläche  $AB$  verschieben. Man nennt daher diese Erscheinung das Gleiten. Verschiebt sich der Punkt  $Q$ , die Ebene  $AB$  als fest betrachtet, nach  $Q_1$ , so nennt man das Verhältniss der Verschiebung  $QQ_1$  zur Länge der Geraden  $PQ$  die Gleitung der Geraden  $PQ$ . Ist dieselbe  $= \tau$ , so ist  $\tau = \tan \angle Q_1 P Q$ , oder, da wir  $\tau$  als nur sehr klein voraussetzen,  $\tau = \angle Q_1 P Q$ , so dass wir

Fig. 3.



als Gleitung auch den Winkel betrachten können, welchen die Gerade PQ nach der Formänderung mit der Normalen zur Fläche AB einschliesst.

Ist  $PQ'$  die Projektion von  $PQ_1$  auf die durch PQ und durch die Gerade PX der Ebene AB gelegte Ebene, so nennen wir den Winkel  $Q'PQ$  die Gleitung der Geraden PQ nach der Richtung von PX.

Kennt man die Gleitungen  $\angle Q'PQ = \tau_1$ ,  $\angle Q''PQ = \tau_2$  der Geraden PQ nach Richtung der aufeinander senkrechten

Geraden PX, PY, so lässt sich leicht die wirkliche Gleitung  $Q_1PQ = \tau$  finden. Es ist  $(Q_1PQ)^2 = (Q'PQ)^2 + (Q''PQ)^2$ , d. i.  $(g\tau)^2 = (g\tau_1)^2 + (g\tau_2)^2$ , also

$$38. \quad \tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}.$$

**§. 21. Formänderung eines unendlich kleinen Parallelepipeds.** Wir nehmen an, dass die Verrückungen sämtlicher Punkte des Körpers nach Richtung der Coordinatenachsen bekannt seien, setzen dieselben aber als sehr klein voraus. Wir suchen nun die Formänderung eines unendlich kleinen Parallelepipeds im Innern des Körpers durch die Verrückungen der Punkte auszudrücken. Offenbar ist diese Formänderung bestimmt durch die Aenderungen der Kanten und Winkel des Parallelepipeds.

Das unendlich kleine Parallelepiped  $PP_1P_2P_3$  (Fig. 1), dessen Kanten  $PP_1 = dx$ ,  $PP_2 = dy$ ,  $PP_3 = dz$  den Coordinatenachsen parallel sind, gehe bei der Formänderung in das Parallelepiped  $P'P_1'P_2'P_3'$  über und es bezeichne

$\xi, \eta, \zeta$  die Verrückungen des Punktes P mit den Coordinaten  $x, y, z$  nach Richtung der Coordinatenachsen,

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  die relativen Längenänderungen der Kanten  $dx, dy, dz$ ,

$\tau_1, \tau_2, \tau_3$  die Aenderungen der Winkel  $P_2PP_3, P_3PP_1$  und  $P_1PP_2$ .

Die Länge von  $P'P_1'$  ist  $dx(1 + \sigma_1)$ . Die Projection von  $P'P_1'$  auf die Axe der  $x$  ist  $(x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx) - (x + \xi) = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ . Da die Projection von der wirklichen Länge nur sehr

wenig abweicht, so ist sehr nahe  $dx(1 + \sigma_1) = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ , also

$\sigma_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Allgemein ist demnach

$$39. \quad \sigma_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \sigma_2 = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \sigma_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Der Winkel  $P_1'P'P_2'$  ist  $90^\circ + \tau_3$ ; derselbe ist sehr nahe gleich seiner Projection auf die Ebene der  $xy$ , weil wir voraussetzen, dass sich die Richtungen der Kanten  $dx, dy, dz$  nur sehr wenig ändern. Der Win-

kel, welchen die Projection von  $P'P_1'$  mit der Axe der  $x$  einschliesst, ist sehr nahe  $= \frac{\partial \eta}{\partial x}$ , und der Winkel, welchen  $P'P_2'$  mit der Axe der  $y$  einschliesst, sehr nahe  $= \frac{\partial \xi}{\partial y}$ . Demnach ist  $90 + \tau_3 = 90^\circ - \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}$ , was der dritten der folgenden Gleichungen entspricht. Die beiden ersteren ergeben sich in ganz gleicher Weise:

$$40. \quad \begin{cases} -\tau_1 = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y}, \\ -\tau_2 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\ -\tau_3 = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}. \end{cases}$$

Die genauere Ermittlung von  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ , welche leicht auszuführen ist, zeigt, dass diese Näherungswerte von den wahren Werthen nur durch zu vernachlässigende höhere Potenzen der Differenzialquotienten von  $\xi, \eta, \zeta$  abweichen.

## §. 22. Formänderung einer unendlich kleinen Kugel.

Wir denken uns im Innern des Körpers eine unendlich kleine Kugel  $ABC$  (Fig. 4), deren Radius vor der Formänderung  $ds$  ist. Es fragt sich, welche Gestalt  $A'B'C'$  dieselbe bei der Formänderung annimmt. Die relativen Längenänderungen der Radien  $PA, PB, PC$  in Richtung der Coordinatenachsen seien  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , die Änderungen der Winkel zwischen diesen Radien  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ . Die Coordinaten eines Punktes  $Q$  der Oberfläche sind  $(PA, PB, PC$  als Coordinatenachsen angenommen)  $dx, dy, dz$ . Nach der Formänderung sind diese Coordinaten die Coordinaten  $dx', dy', dz'$  von  $Q'$  geworden, wenn man  $P'A', P'B', P'C'$  als Axen eines schiefwinkligen Systemes annimmt. Demnach ist

$$dx' = dx(1 + \sigma_1), \quad dy' = dy(1 + \sigma_2), \quad dz' = dz(1 + \sigma_3).$$

Sind  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungswinkel von  $PQ$  vor der Formänderung, so ist  $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \cos \gamma = \frac{dz}{ds}$ , oder wenn man für  $dx, dy, dz$  die Ausdrücke aus den eben aufgestellten Gleichungen einsetzt,

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds(1 + \sigma_1)}, \quad \cos \beta = \frac{dy'}{ds(1 + \sigma_2)}, \quad \cos \gamma = \frac{dz'}{ds(1 + \sigma_3)}.$$

Dies in die bekannte Gleichung  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  gesetzt, giebt

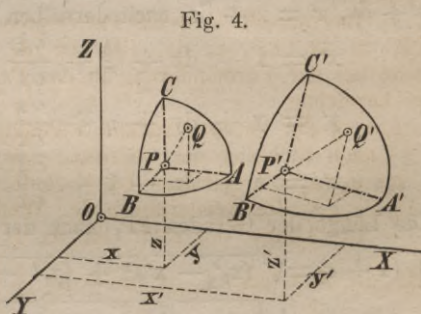


Fig. 4.

$$41. \left[ \frac{dx'}{ds(1+\sigma_1)} \right]^2 + \left[ \frac{dy'}{ds(1+\sigma_2)} \right]^2 + \left[ \frac{dz}{ds(1+\sigma_3)} \right]^2 = 1.$$

Dies ist die Gleichung der deformirten Oberfläche der Kugel in Beziehung auf das schiefwinklige Coordinatensystem  $P'A', P'B', P'C'$ . Hieraus folgt:

Eine unendlich kleine Kugel geht bei der Formänderung in ein Ellipsoid über. Drei vor der Formänderung auf einander senkrechte Gerade bilden nach derselben conjugirte Halbmesser dieses Ellipsoides.

Wir nennen dieses Ellipsoid das Deformationsellipsoid. Die Längenänderungen der Axen desselben sind die Maxima der Längenänderung; wir nennen sie Hauptlängenänderungen.

Diese drei auf einander senkrechten Axen sind conjugirte Halbmesser; sie standen also auch vor der Formänderung auf einander senkrecht, oder: Es giebt drei aufeinander senkrechte Gerade, welche auch nach der Formänderung auf einander senkrecht stehen oder nicht gleiten.

Die Bestimmung der Lage und Grösse der Hauptänderungen ist in ähnlicher Weise möglich, wie die der Hauptspannungen. Es ergeben sich dieselben Ausdrücke, wie in §. 13, wenn man für  $N, T$  bezüglich  $\sigma, \tau$  setzt.

### §. 23. Längenänderung in einer beliebigen Richtung.

Wir setzen voraus, dass man die Verrückungen  $\xi, \eta, \zeta$  aller Punkte kenne. Es kommt darauf an, die relative Längenänderung  $\sigma$  einer unendlich kleinen Geraden  $PP' = ds$  von beliebiger Richtung zu bestimmen. Die Coordinaten des Punktes  $P$  sind vor der Formänderung  $x' = x + dx, y' = y + dy, z' = z + dz$ , nach derselben aber

$$x' = x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz,$$

$$y' = y + dy + \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz,$$

$$z' = z + dz + \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz.$$

Die Länge der Geraden  $PP_1$  nach der Formänderung ist:

$$\begin{aligned} ds(1+\sigma) &= \sqrt{(x_1' - x')^2 + (y_1' - y')^2 + (z_1' - z')^2} \\ &= \sqrt{\left( dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz \right)^2 + \left( dy + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz \right)^2 + \left( dz + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz \right)^2}. \end{aligned}$$

Wir entwickeln die Quadrate, bringen  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  vor das Wurzelzeichen und lösen sodann die Wurzel in eine unendliche Reihe auf, wobei wir die Glieder von der zweiten Potenz der Differenzialquotienten von  $\xi, \eta, \zeta$  an vernachlässigen. Wir bezeichnen dabei ferner die Richtungswinkel von  $ds$  mit  $\alpha, \beta, \gamma$ , so dass  $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \frac{dz}{ds} = \cos \gamma$  ist. Hierdurch ergibt sich

$$42. \quad \sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cos^2 \alpha + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos^2 \beta + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cos^2 \gamma + \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \cos \beta \cos \gamma \\ + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \cos \gamma \cos \alpha + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cos \alpha \cos \beta,$$

oder mit Berücksichtigung des vorigen Paragraphen

$$42 \text{ a.} \quad \sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma \\ - \tau_1 \cos \beta \cos \gamma - \tau_2 \cos \gamma \cos \alpha - \tau_3 \cos \alpha \cos \beta.$$

Nehmen wir als Coordinatenaxen die Axen des Deformationsellipsoides an, so ist  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ , mithin einfacher

$$43. \quad \sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma.$$

Der Ausdruck 44 für  $\sigma$  stimmt mit dem Ausdrucke 24 für  $N$  überein, wenn man  $N_1, N_2, N_3$  für  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  setzt. Es lässt sich zeigen, dass auch der Ausdruck für die Gleitung  $\tau$  einer beliebigen Geraden mit dem Ausdrucke 28 oder 29 für die Schubspannung  $T$  übereinstimmt, woraus nach § 16 folgt, dass die Gleitung für sechs Ebenen, welche durch je eine Achse des Deformationsellipsoides gehen und die Winkel zwischen den beiden andern Axen halbiren, zum Maximum wird. Diese Hauptgleitungen sind analog den Hauptschubspannungen nach 31 =  $\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1), \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ . Der geringeren Wichtigkeit wegen übergehen wir den Beweis.

**§. 24. Volumenänderung.** Bezeichnen wir die relative Aenderung des Volumens  $dx \, dy \, dz$  des Körperelementes mit  $\Theta$ , so ist

$$\Theta = \frac{dx(1 + \sigma_1) \, dy(1 + \sigma_2) \, dz(1 + \sigma_3) - dx \, dy \, dz}{dx, \, dy \, dz} \\ = (1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)(1 + \sigma_3) - 1.$$

Entwickelt man das Product und vernachlässigt die Glieder, welche vom zweiten und dritten Grade sind, so ergibt sich

$$44. \quad \Theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Die relative Volumenänderung ist also gleich der Summe der relativen Längenänderungen in drei auf einander senkrechten Richtungen.

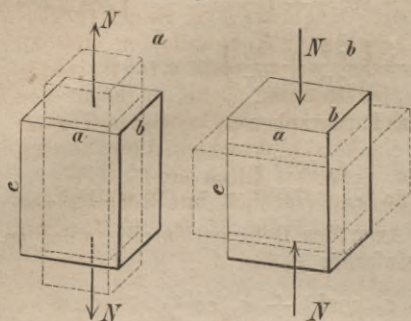
### III. Kapitel.

#### Beziehungen zwischen den Spannungen und der Formänderung.

**§. 25. Grundprincip.** Um zu einer genauen Kenntniss der Beziehungen zwischen den Spannungen und den durch sie hervorgebrachten Formänderungen zu gelangen, würde eine genaue Kenntniss über das Wesen der Materie nöthig sein. Da wir diese aber zur Zeit noch nicht besitzen, gehen wir direkt von den durch Versuche gewonnenen Erfahrungen aus.

Auf ein homogenes rechtwinkliges Prisma mit den Kanten  $a, b, c$  (Fig. 5 a und 5 b) wirke parallel zu den Kanten  $c$  auf jede von den beiden

Fig. 5.



gegenüberstehenden Flächen eine auf die ganze Fläche gleichmässig vertheilte Kraft. Hierdurch geht das Parallelepiped in ein anderes Parallelepiped über und zwar nach dem Gesetze:

Wenn die Kraft ziehend wirkt, so wird  $c$  verlängert,  $a$  und  $b$  dagegen werden verkürzt (Fig. 5 a). Wenn die Kraft drückend wirkt, so wird  $c$  verkürzt,  $a$  und  $b$  dagegen werden verlängert (Fig. 5 b).

Die Längenänderung der Kante  $c$ , also in Richtung der Kraft, nennen wir die longitudinale Längenänderung oder Längenänderung schlechthin; die Längenänderung jeder der andern Kanten dagegen die transversale Längenänderung. Die Erfahrung hat gelehrt:

Sowohl die relative longitudinale, als transversale Längenänderung ist sehr nahe proportional der auf die Flächeneinheit wirkenden Kraft  $N$ , sobald diese gewisse Grenzen nicht überschreitet.

Bezeichnen wir mit  $E$ ,  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  Erfahrungskoeffizienten und mit  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta c$  die Längenänderungen der Kanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , so können wir daher setzen

$$45. \quad \frac{\Delta c}{c} = \frac{N}{E}, \quad \frac{\Delta a}{a} = -\frac{N}{\mathcal{E}_1}, \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{N}{\mathcal{E}_2}.$$

Man nennt  $E$  den Elasticitätscoefficienten oder den Elasticitätsmodul,  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  nennen wir die Coefficienten für Transversalelasticität.

Eine allgemeine Giltigkeit kann das aufgestellte Elasticitätsgesetz nicht haben; so wird z. B. für  $N = -E \frac{\Delta c}{c} = -1$ ,  $\Delta c = -c$ , d. h. das Prisma wird zu Nichts zusammengedrückt, was unmöglich ist. Für sehr kleine Formänderungen, welche in der Praxis noch zulässig sind, kann es aber als vollkommen richtig gelten.

Für manche Stoffe, z. B. Schmiedeeisen, Holz, hat sich gezeigt, dass die Elasticitätscoefficienten für Zug und Druck fast gleich sind, während sie bei andern Stoffen, z. B. Gusseisen etwas verschieden sind. Wir werden jedoch allgemein voraussetzen, dass die Elasticitätscoefficienten für Zug und Druck gleich gross sind, da wir ohne diese Annahme auf zu grosse Schwierigkeiten stossen würden.

**§. 26. Textur der Körper.** Die Elasticität kann entweder nach allen Richtungen gleich gross oder verschieden sein, d. h., wenn man das Parallelepiped des vorigen Paragraphen in verschiedenen Richtungen aus dem Körper schneidet, so können die Coefficienten  $E$ ,  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  entweder denselben oder verschiedenen Werth haben. Im ersten Falle nennen wir den Körper einen Körper von constanter Elasticität oder einen isotropen Körper, im letzteren dagegen einen anisotropen Körper.

Stellt man  $E$ ,  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  für die verschiedenen Richtungen durch Gerade dar, welche von einem Punkte ausgehen, so liegen alle Endpunkte auf

einer Fläche, welche man Elasticitätsfläche nennen kann. Bei Körpern von constanter Elasticität ist diese Fläche eine Kugel (gegosene Körper etc.) Bei Körpern von regelmässiger Textur lassen sich an der Elasticitätsfläche gewisse Axen erkennen, welche man Elasticitätsaxen nennt. Ist die Elasticitätsfläche eine Rotationsfläche, so heisst der Körper einaxig (Schmiedeseisen, überhaupt Metalle von sehmiger Textur, annähernd Holz). Körper mit drei auf einander senkrechten Axen heissen dreiaxig (Holz in schwächeren Stücken, gewalztes Blech etc.).

Wir wollen uns in diesem Kapitel hauptsächlich mit Körpern von constanter Elasticität beschäftigen. In diesem Falle ist  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ ; wir setzen  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \frac{1}{m} E$ , so dass

$$46. \quad \frac{\Delta c}{c} = \frac{N}{E}, \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{m} \frac{\Delta c}{c}.$$

Auch lässt sich in diesem Falle behaupten, dass das rechtwinklige Parallelepiped bei der Formänderung rechtwinklig bleibt, was bei den ein- und dreiaxigen Körpern nur der Fall ist, wenn die Richtung der Kraft mit einer Elasticitätsaxe zusammenfällt.

E lässt sich nur durch Versuche, m jedoch auch theoretisch unter Annahme eines Gesetzes über die Wirkung zwischen den Moleculen entwickeln, was im folgenden Kapitel geschehen soll.

Die Moleculartheorie liefert für isotrope Körper für m den Werth:

$$47. \quad m = 4,$$

so dass die transversale Längenänderung  $\frac{1}{4}$  der longitudinalen Längenänderung ist. Angestellte Versuche von Werthheim u. A. stimmen aber mit diesem Resultate nicht ganz überein. Sie geben m nicht ganz constant, jedoch nahezu = 3. Jedenfalls können wir für alle isotrope Körper

$$48. \quad m = 3 \text{ bis } 4$$

annehmen.

**§. 27. Formveränderung des rechtwinkligen Parallepipedes durch Normalspannungen.** Auf ein rechtwinkliges Parallelepiped aus einem isotropen Körper mit den Kanten a, b, c mögen die Normalspannungen  $N_1, N_2, N_3$  wirken. Die relativen Längenänderungen der Kanten seien  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Die relative Längenänderung der Kante a ist in Folge der Kraft  $N_1 = \frac{N_1}{E}$ , in Folge der Kräfte  $N_2, N_3 = -\frac{N_2}{mE}$  und  $-\frac{N_3}{mE}$ , also im Ganzen  $\frac{1}{E} \left( N_1 - \frac{N_2 + N_3}{m} \right)$ . Allgemein ist demnach:

$$49. \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{E} \left( N_1 - \frac{N_2 + N_3}{m} \right), \\ \sigma_2 = \frac{1}{E} \left( N_2 - \frac{N_3 + N_1}{m} \right), \\ \sigma_3 = \frac{1}{E} \left( N_3 - \frac{N_1 + N_2}{m} \right). \end{cases}$$

Durch Reduction auf  $N_1, N_2, N_3$  ergibt sich:

$$50. \quad \begin{cases} N_1 = \varepsilon [\sigma_2 + \sigma_3 + (m-1)\sigma_1], \\ N_2 = \varepsilon [\sigma_3 + \sigma_1 + (m-1)\sigma_2], \\ N_3 = \varepsilon [\sigma_1 + \sigma_2 + (m-1)\sigma_3], \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung

$$51. \quad \varepsilon = \frac{E m}{(m+1)(m+2)}$$

setzt. Für  $m = 3$  und  $m = 4$  wird  $\varepsilon = \frac{3}{4} E = 0,75 E$  und  $\varepsilon = \frac{2}{5} E = 0,40 E$ .

Die relative Volumenänderung  $\Theta$  ist nach 44 (§. 24):

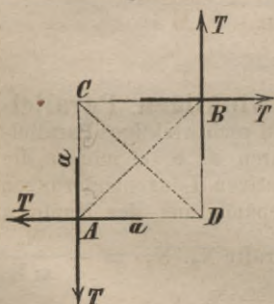
$$52. \quad \Theta = \frac{m-2}{E} (N_1 + N_2 + N_3).$$

Früher nahm man an, dass in transversaler Richtung keine Längenänderung eintrete. Dies würde für  $m = \infty$  eintreten. Dann würde allerdings einfacher

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N_1}{E}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{E}, \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{E}, \\ N_1 &= E \sigma_1, \quad N_2 = E \sigma_2, \quad N_3 = E \sigma_3, \\ \Theta &= \frac{N_1 + N_2 + N_3}{E}. \end{aligned}$$

## §. 28. Formänderung eines rechtwinkligen Parallelepipeds durch Schubspannungen.

Fig. 6.



Wir denken uns in einem isotropen Körper ein rechtwinkliges Parallelepiped ACBD (Fig. 6), von welchem zwei Kanten  $AD = CB$  und  $AC = DB$  einander gleich und zwar  $= a$  sind. Auf die Flächen, welche die dritte Kante enthalten, wirke parallel zu den Kanten  $a$  die Schubspannungen  $T$ , ausser diesen aber keine weitere Spannung. In den Gleichungen 16 (§. 13) zur Bestimmung der Hauptspannungen ist  $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ ,  $T_2 = T_3 = 0$ ,  $T_1 = T$  zu setzen. Daher wird

$$\begin{cases} H \cos \alpha = 0, \\ H \cos \beta = T \cos \gamma, \\ H \cos \gamma = T \cos \beta. \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen geben  $H^2 = T^2$ , also

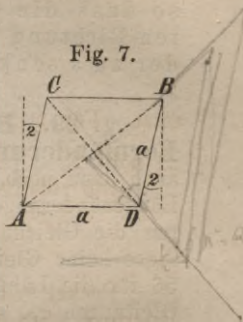
$$H = \pm T.$$

und die erste  $H = 0$  oder  $\cos \alpha = 0$ . Die zweite Gleichung giebt  $\cos \beta = \pm \cos \gamma$ ; mithin ist, da  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  ist,  $\cos^2 \gamma = \frac{1}{2}$  oder  $\gamma = \pm 45^\circ$ , d. h. die Hauptspannungen haben die Richtung der Diagonalen  $AB$  und  $CD$ ; in Richtung von  $AB$  wirkt  $+T$ , in Richtung von  $CD$  aber  $-T$ .

Dasselbe ergibt sich auch leicht direkt. Denkt man sich durch die

diagonale Ebene CD den Theil CDB weggeschnitten, so muss auf CD eine Kraft wirken, welche den in AC und AD wirkenden Schubspannungen das Gleichgewicht hält. Diese Kraft muss zu CD senkrecht wirken, ist daher eine Hauptspannung. Ist sie = A, so ist  $A \cdot \overline{CD} = 2T \cdot \overline{AC} \cdot \cos 45^\circ$  d. i.  $2Aa \cos 45^\circ = 2Ta \cos 45^\circ$  oder  $A = + T$ . In gleicher Weise ergibt sich für die in Richtung von CD wirkende Hauptspannung  $B = - T$ .

Da in Richtung von AB ein Zug, in Richtung von CD ein Druck wirkt, so wird AB verlängert, CD verkürzt; beide Diagonalen bleiben aber auf einander senkrecht, so dass das Quadrat in einen Rhombus übergeht (Fig. 7). Wir bezeichnen die Aenderungen der Winkel des Quadrats oder die Gleitungen mit  $\tau$ , die Diagonalen AB und CD mit  $\partial$  und ihre Längenänderungen mit  $\Delta_1, \Delta_2$ . Als-



$$\tan \frac{1}{2} \angle BDA = \frac{AB}{CD} \text{ d. i. } \tan \left( 45^\circ + \frac{\tau}{2} \right) = \frac{\partial + \Delta_1}{\partial + \Delta_2}$$

Nun aber ist  $\tan \left( 45^\circ + \frac{\tau}{2} \right) = \sec \tau + \tan \tau = 1 + \tau$ , weil  $\tau$  sehr klein ist. Ferner ist sehr nahe  $\frac{\partial + \Delta_1}{\partial + \Delta_2} = \left( 1 + \frac{\Delta_1}{\partial} \right) \left( 1 - \frac{\Delta_2}{\partial} \right)$

$$= 1 + \frac{\Delta_1}{\partial} - \frac{\Delta_2}{\partial}, \text{ mithin } \tau = \frac{\Delta_1}{\partial} - \frac{\Delta_2}{\partial}.$$

Nach 49 (§. 27) aber ist

$$\frac{\Delta_1}{\partial} = \frac{1}{E} \left( A - \frac{B}{m} \right) = + \frac{m+1}{m} \frac{T}{E},$$

$$\frac{\Delta_2}{\partial} = \frac{1}{E} \left( B - \frac{A}{m} \right) = - \frac{m+1}{m} \frac{F}{E},$$

mithin ist

$$53. \quad \tau = 2 \frac{m+1}{m} \frac{T}{E}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$54. \quad G = \frac{m}{2(m+1)} E,$$

so wird

$$55. \quad \tau = \frac{T}{G}.$$

Hiernach ist die Gleitung der entsprechenden Schubspannung proportional.

Man nennt G den Gleitungscoefficienten (oder Torsionscoefficienten). Für  $m = 3$  und  $m = 4$  wird  $G = \frac{3}{8} E = 0,375 E$  und  $G = \frac{2}{5} E = 0,400 E$ . (Für  $m = \infty$  würde  $G = \frac{1}{2} E = 0,500 E$ .)

Wirken auf sämtliche Flächen des Parallelepipedes Schubspannungen  $T_1, T_2, T_3$ , welche die Aenderungen  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  in den Winkeln zwischen den Kanten oder Flächen (vergleiche §. 21) hervorbringen, so ist

$$56. \quad \tau_1 = \frac{T_1}{G}, \quad \tau_2 = \frac{T_2}{G}, \quad \tau_3 = \frac{T_3}{G},$$

so dass die Gleitung einer Geraden  $s$  nach einer bestimmten Richtung proportional ist der Schubspannung, welche in der zu  $s$  senkrechten Ebene nach dieser Richtung wirkt.

**§. 29. Beziehungen zwischen den Spannungen und der Formänderung für isotrope Körper.** Die Gleichungen 50 gelten auch dann noch, wenn Schubspannungen vorhanden sind, weil diese keine Längenänderungen der Kanten des Parallelepipedes erzeugen. Ebenso gelten die Gleichungen 56, wenn Normalspannungen vorhanden sind, weil diese keine Gleitungen erzeugen. Substituirt man in die Formeln 50 und 56 für die Längenänderungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , die Ausdrücke 39 und für die Gleitungen  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , die Ausdrücke 40, so ergeben sich als Beziehungen zwischen den Spannungen und den Verrückungen der Punkte für isotrope Körper:

$$57. \quad \begin{cases} N_1 = \varepsilon \Theta + 2G \frac{\partial \xi}{\partial x} = \varepsilon \left[ (m-1) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right], \\ N_2 = \varepsilon \Theta + 2G \frac{\partial \eta}{\partial y} = \varepsilon \left[ (m-1) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right], \\ N_3 = \varepsilon \Theta + 2G \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \varepsilon \left[ (m-1) \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]; \end{cases}$$

$$58. \quad \begin{cases} T_1 = G \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \\ T_2 = G \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \\ T_3 = G \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \end{cases}$$

wobei

$$\Theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

Nach §. 24 ist  $\Theta$  die relative Volumenänderung.

### §. 30. Lage des Spannungs- und Deformationsellipsoides.

Auf ein Parallelepipед, dessen Kanten die Richtungen der Hauptspannungen haben, wirken keine Schubspannungen; dasselbe bleibt also bei einem isotropen Körper rechtwinklig. Mit Rücksicht auf §. 11 folgt hieraus, dass die Richtungen der Hauptspannungen mit den Richtungen der Hauptlängenänderungen oder dass die Axen des Spannungsellipsoides mit denen des Deformationsellipsoides zusammenfallen.

Nach §. 28 und 16 müssen nun auch die Ebenen, für welche die

grössten Gleitungen stattfinden, mit den Ebenen, in welchen die grössten Schubspannungen wirken, zusammenfallen.

### §. 31. Differenzialgleichungen für die Formänderung.

Substituiert man diese Ausdrücke 57 u. 58 für  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$  in die Gleichgewichtsbedingungen 3 (§. 9) der Spannungen, so ergeben sich für die Formänderung folgende partielle Differenzialgleichungen:

$$59. \begin{cases} (\varepsilon + G) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + X_0 = 0, \\ (\varepsilon + G) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + G \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + Y_0 = 0, \\ (\varepsilon + G) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + G \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) + Z_0 = 0. \end{cases}$$

Eine allgemeine Integration dieser Gleichungen und somit eine allgemeine Auflösung der Aufgabe der Elasticitätslehre ist nicht möglich. Ja selbst in den meisten speziellen Fällen glückt die Integration nicht oder macht wenigstens viel Schwierigkeiten.

### §. 32. Beziehungen zwischen den Spannungen und der Formänderung für anisotrope Körper.

Die Ausdrücke 57, 58 beruhen auf der Voraussetzung, dass das Parallelepiped rechtwinklig bleibt, wenn nur Normalkräfte wirken und dass sich die Längen seiner Kanten nicht ändern, wenn nur Schubspannungen wirken, so dass die Längenänderungen der Kanten nur von den Normalspannungen, die Gleitungen dagegen nur von den Schubspannungen abhängen. Für isotrope Körper ist dies unbedingt richtig; im Allgemeinen aber offenbar nicht für anisotrope Körper. Hier wird demnach der Ausdruck für jede Spannung sämtliche relative Längenänderungen und sämtliche Gleitungen enthalten. Wir können demnach bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung setzen

$$60. \begin{cases} N_1 = A_1' \sigma_1 + A_2' \sigma_2 + A_3' \sigma_3 + C_1' \tau_1 + C_2' \tau_2 + C_3' \tau_3, \\ N_2 = A_1'' \sigma_1 + A_2'' \sigma_2 + A_3'' \sigma_3 + C_1'' \tau_1 + C_2'' \tau_2 + C_3'' \tau_3, \\ N_3 = A_1''' \sigma_1 + A_2''' \sigma_2 + A_3''' \sigma_3 + C_1''' \tau_1 + C_2''' \tau_2 + C_3''' \tau_3, \\ T_1 = B_1' \sigma_1 + B_2' \sigma_2 + B_3' \sigma_3 + D_1' \tau_1 + D_2' \tau_2 + D_3' \tau_3, \\ T_2 = B_1'' \sigma_1 + B_2'' \sigma_2 + B_3'' \sigma_3 + D_1'' \tau_1 + D_2'' \tau_2 + D_3'' \tau_3, \\ T_3 = B_1''' \sigma_1 + B_2''' \sigma_2 + B_3''' \sigma_3 + D_1''' \tau_1 + D_2''' \tau_2 + D_3''' \tau_3. \end{cases}$$

Demnach würden hier sechsunddreissig Coefficienten auftreten, welche sich indessen, wie wir sehen werden, auf fünfzehn reduzieren lassen.

Bei dreiaxigen Körpern werden die Gleichungen bedeutend einfacher, da sich hier behaupten lässt, dass, wenn die Elasticitätsachsen den Kanten des Parallelepipedes parallel sind, die Längenänderungen nur von den Normalspannungen, die Gleitungen nur von den Schubspannungen abhängen. Hier können wir, wenn die Elasticitätsachsen den Coordinatenachsen parallel sind, setzen:

$$61. \begin{cases} N_1 = A_1' \sigma_1 + A_2' \sigma_2 + A_3' \sigma_3, & T_1 = G_1 \tau_1, \\ N_2 = A_1'' \sigma_1 + A_2'' \sigma_2 + A_3'' \sigma_3, & T_2 = G_2 \tau_2, \\ N_3 = A_1''' \sigma_1 + A_2''' \sigma_2 + A_3''' \sigma_3, & T_3 = G_3 \tau_3, \end{cases}$$

so dass hier zwölf Coefficienten auftreten, welche sich indessen auf sechs reduciren lassen.

**§. 33. Elasticitätscoefficienten.** In folgender Tabelle sind die Mittelwerthe der Elasticitätscoefficienten in Kilogrammen pro Quadratcentimeter zusammengestellt.

Material	E	Material	E
Kalkstein . . . . .	108000	Messing . . . . .	1020000
Holz (Fasserrichtung)	120000	Schiefer . . . . .	1100000
Marmor . . . . .	175000	Argentan . . . . .	1110000
Blei . . . . .	200000	Kupfer . . . . .	1160000
Zinn . . . . .	423000	Platin . . . . .	1580000
Gold . . . . .	734000	Schmiedeeisen . . . .	2040000
Silber . . . . .	753000	Gewöhnlicher Stahl . .	2200000
Zink . . . . .	900000	Gussstahl . . . . .	2500000
Gusseisen . . . . .	1010000		

Beim Holze ist für eine zur Fasserrichtung senkrechte Richtung ungefähr:

	radial	tangential
Nadelholz E =	9610,	E = 3140,
Eichenholz E =	18900,	E = 13000.

Hierbei bezieht sich die Bezeichnung radial und tangential auf die Jahrringe.

Für die Gleitung einer in der Fasserrichtung liegenden Geraden ist ungefähr

$$G = \frac{1}{18} E.$$

Für die Steine ist der Elasticitätscoefficient noch äusserst unsicher bestimmt.

## IV. Kapitel. Moleculartheorie.

**§. 34. Princip.** Die Moleculartheorie setzt voraus, dass die Körper aus äusserst kleinen Körperchen, sogenannten Molecülen, bestehen, deren Entfernung von einander zwar ebenfalls äusserst klein, aber doch gross gegen die Dimensionen der Molecüle sind. Diese Molecüle üben auf einander zwei entgegengesetzte Wirkungen aus, eine Anziehung oder Attraction und eine Abstossung oder Repulsion. Die Differenz dieser beiden Wirkungen ist die wirkliche Wirkung, welche wir mit  $p$  bezeichnen. Im natürlichen Zustande ist  $p = 0$ ; wenn sich aber die Molecüle von einander entfernen, so wird die Anziehung überwiegend, wenn sich die Molecüle nähern, so wird die Abstossung überwiegend, also im ersten Falle  $p$  negativ, im letzten  $p$  positiv. Die Kraft  $p$  ist proportional dem Produkt  $mm'$  aus den Massen  $m, m'$  der

beiden Molecüle, proportional der Veränderung  $\Delta q$  ihrer Entfernung  $q$  und proportional einer Funktion  $f(q)$  der Entfernung  $q$ , so dass also

$$62. p = mm'f(q)\Delta q$$

gesetzt werden kann. Diese Kraft äussert sich nur, wenn die Entfernung  $q$  äusserst klein ist, so dass  $f(q)$  rapid abnehmen muss, wenn  $q$  wächst. Die Form der Funktion  $f(q)$  ist noch unbekannt. Jedenfalls hat  $f(q)$  bei gleichem  $q$  in verschiedenen Körpern, bei anisotropen Körpern auch nach verschiedenen Richtungen einen verschiedenen Werth.

### §. 35. Allgemeine Beziehungen zwischen den Spannungen und der Formänderung.

Durch einen beliebigen Punkt P des Körpers (Fig. 8) legen wir parallel zur Ebene der  $xy$  eine Ebene MN und bestimmen die Componenten  $T_2, T_1, N_3$  der diese Ebene in P afficirenden Spannung. Offenbar ist die auf MN ausgeübte innere Kraft die Resultante aller Kräfte, welche die auf der einen Seite von MN befindlichen Molecüle auf die auf der andern Seite befindlichen ausüben. Auf eine kleine Fläche  $f$  in P kommt dann offenbar die Resultante der Kräfte, welche die in einer, etwa auf der untern Seite von MN senkrecht zu MN liegenden Cylinder von der Grundfläche  $f$  auf die über MN liegenden Molecüle ausübt.

$P_2$  sei ein im Cylinder liegendes Molecül mit der Masse  $m'$ ,  $P_2'$  ein über MN liegendes Molecül mit der Masse  $m$ , welches von  $P_2$  die Entfernung  $s$  hat. Ist  $\Delta s$  die Längenänderung von  $s$  in Folge der Formänderung des Körpers, so ist die Wirkung zwischen beiden Molecülen nach 62

$$mm'f(s)\Delta s,$$

wobei aber  $f(s)$  nicht allein von  $s$ , sondern auch von der Richtung von  $P_2P_2'$  abhängt.

$P_1'$  sei der Fusspunkt einer von  $P_2'$  auf MN gefällten Senkrechten und ferner sei  $PP' \perp P_2P_2'$ ,  $P_1P_1' \perp P_2P_2'$ . In der Richtung von  $PP'$  können offenbar nur die Wirkungen von den zwischen P und  $P_1$  liegenden Molecülen auf die zwischen  $P'$  und  $P_1'$  liegenden Molecüle eine Kraft auf die Ebene MN ausüben. Sind in der Länge  $PP_1$  des Cylinders  $n$  Molecüle enthalten, so ist daher die Summe aller Wirkungen in der Richtung von  $PP'$  zwischen den um  $s$  entfernten Molecülen =  $nmm'f(s)\Delta s$ . Bezeichnen wir die Masse der Volumeneinheit mit  $\mu$ , die Richtungswinkel von  $PP'$  mit  $\alpha, \beta, \gamma$ , so ist  $nm'$  als ganze in der Länge  $PP_1$  des Cylinders enthaltene Masse =  $\mu fs \cos \gamma$ , also die Summe der Wirkungen in der Richtung von  $PP'$

$$\mu fmsf(s)\Delta s \cos \gamma,$$

mithin pro Flächeneinheit

$$\mu msf(s)\Delta s \cos \gamma.$$

Die Wirkung in der Richtung von  $PP_1$  ist demnach dieselbe, als wenn sich in P eine Masse  $\mu s \cos \gamma$  befände, welche auf das in  $P'$  befindliche Molecül mit der Masse  $m$  wirkt. Die Componenten dieser Kraft nach

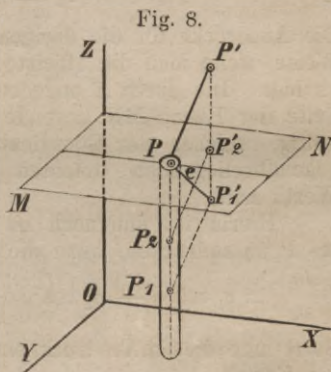


Fig. 8.

Richtung der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  erhält man durch Multiplication dieses Ausdruckes mit  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ .

Um die Gesamtwirkung zu erhalten, muss man diese Wirkung für sämtliche über MN liegende Molecüle bestimmen und alle Componenten nach Richtung der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  summiren. Man erhält hierdurch für  $T_2$ ,  $T_1$ ,  $N_3$  den dritten, fünften und vierten der folgenden Ausdrücke:

$$63. \quad \begin{cases} N_1 = \mu \Sigma ms f(s) \mathcal{A}s \cos^2 \alpha, \\ N_2 = \mu \Sigma ms f(s) \mathcal{A}s \cos^2 \beta, \\ N_3 = \mu \Sigma ms f(s) \mathcal{A}s \cos^2 \gamma, \\ T_1 = \mu \Sigma ms f(s) \mathcal{A}s \cos \beta \cos \gamma, \\ T_2 = \mu \Sigma ms f(s) \mathcal{A}s \cos \gamma \cos \alpha, \\ T_3 = \mu \Sigma ms f(s) \mathcal{A}s \cos \alpha \cos \beta. \end{cases}$$

Die Ausdrücke für die übrigen Spannungen ergeben sich in ganz gleicher Weise, wenn man die afficirte Ebene MN parallel der Ebene des  $xz$  und  $yz$  legt. Die durch  $\Sigma$  angedeutete Summirung ist über vier auf derselben Seite der Ebene MN liegende Octanten zu erstrecken; es ist aber gleichgültig, welcher der Coordinatenebenen MN parallel ist, da in je zwei gegenüberliegenden Octanten  $f(s)$  bei gleicher Lage von  $s$  denselben Werth hat.

Hierin ist nun noch  $\mathcal{A}s$  durch die Verrückungen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  des Punktes P auszudrücken, wozu die Formel 42 dient. Hiernach ist

$$\frac{\mathcal{A}s}{s} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma - \tau_1 \cos \beta \cos \gamma - \tau_2 \cos \gamma \cos \alpha - \tau_3 \cos \alpha \cos \beta$$

Setzt man diesen Ausdruck ein, so erhalten die Ausdrücke für  $N_1$ ,  $T_1$ , . . . die Form

$$64. \quad \begin{cases} N_1 = A_1 \sigma_1 + G_3 \sigma_2 + G_2 \sigma_3 - J_1 \tau_1 - B_2' \tau_2 - B_3' \tau_3, \\ N_2 = G_3 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + G_1 \sigma_3 - B_1'' \tau_1 - J_2 \tau_2 - B_3'' \tau_3, \\ N_3 = G_2 \sigma_1 + G_1 \sigma_2 + A_3 \sigma_3 - B_1''' \tau_1 - B_2''' \tau_2 - J_3 \tau_3, \\ T_1 = J_1 \sigma_1 + B_1'' \sigma_2 + B_1''' \sigma_3 - G_1 \tau_1 - J_3 \tau_2 - J_2 \tau_3, \\ T_2 = B_2' \sigma_1 + J_2 \sigma_2 + B_2''' \sigma_3 - J_3 \tau_1 - G_2 \tau_2 - J_1 \tau_3, \\ T_3 = B_3' \sigma_1 + B_3'' \sigma_2 + J_3 \sigma_3 - J_2 \tau_1 - J_1 \tau_2 - G_3 \tau_3. \end{cases}$$

Hierin entsprechen die  $A$  den Gliedern, welche die 4ten Potenzen, die  $B$  den Gliedern, welche eine 3te und eine 1ste Potenz, die  $G$  den Gliedern, welche zwei 2te Potenzen und die  $J$  den Gliedern, welche eine 2te und zwei 1ste Potenzen der Cosinus enthalten, z. B.  $A_2 = \mu \Sigma ms^2 f(s) \cos^4 \beta$ ,  $B_2''' = \mu \Sigma ms^2 f(s) \cos \alpha \cos^3 \gamma$  u. s. f.

Hiernach treten fünfzehn verschiedene Coefficienten auf.

**§. 36. Körper mit drei auf einander senkrechten Elasticitätsaxen.** Die Coordinatenaxen legen wir parallel zu den Elasticitätsaxen. Alsdann hat  $f(s)$  in den acht Octanten bei entsprechender Lage von  $s$  denselben Werth. Bei der durch  $\Sigma$  angedeuteten Summirung, welche über vier auf derselben Seite einer Ebene liegende Octanten zu erstrecken ist, werden daher alle diejenigen Glieder zu Null, bei welchen die vorkommenden Producte der Cosinus in zwei Octanten positiv und in zwei Octanten negativ sind. Dies tritt bei allen denjenigen Gliedern ein, welche einen der zwei Cosinus von ungerader Potenz enthalten. Diesen

Gliedern entsprechen im vorigen Paragraph sämtliche mit B und J bezeichneten Coefficienten. Sonach wird:

$$65. \quad \begin{cases} N_1 = A_1 \sigma_1 + G_3 \sigma_2 + G_2 \sigma_3, & T_1 = -G_1 \tau_1, \\ N_2 = G_3 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + G_1 \sigma_3, & T_2 = -G_2 \tau_2, \\ N_3 = G_2 \sigma_1 + G_1 \sigma_2 + A_3 \sigma_3, & T_3 = -G_3 \tau_3. \end{cases}$$

Sonach treten hier nur sechs Coefficienten auf.

Reduzirt man auf  $\sigma_1, \tau_1, \dots$ , so ergibt sich

$$66. \quad \begin{cases} \sigma_1 = + \frac{N_1}{E_1} - \frac{N_2}{\mathcal{E}_3} - \frac{N_3}{\mathcal{E}_2}, & \tau_1 = - \frac{T_1}{G_1}, \\ \sigma_2 = - \frac{N_1}{\mathcal{E}_3} + \frac{N_2}{E_2} - \frac{N_3}{\mathcal{E}_1}, & \tau_2 = - \frac{T_2}{G_2}, \\ \sigma_3 = - \frac{N_1}{\mathcal{E}_2} - \frac{N_2}{\mathcal{E}_1} + \frac{N_3}{E_3}, & \tau_3 = - \frac{T_3}{G_3}, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$66 \text{ a.} \quad \begin{cases} K = A_1 A_2 A_3 - 2G_1 G_2 G_3 - A_1 G_1^2 - A_2 G_2^2 - A_3 G_3^2, \\ E_1 = \frac{K}{A_2 A_3 - G_1^2}, \quad \mathcal{E}_1 = \frac{K}{A_1 G_1 - G_2 G_3} \text{ u. s. f.} \end{cases}$$

Um den Elasticitäts-Coefficienten E für irgend eine beliebige Richtung, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bildet, zu erhalten, nehmen wir an, dass auf ein Parallelepiped, dessen eine Kante diese Richtung hat, nur eine Normalspannung N in der Richtung dieser Kante wirke. Dieselbe ist dann zugleich die einzige Hauptspannung. Die Componenten X, Y, Z der Spannung  $R_1$ , welche ein zur Ebene yz paralleles Flächenelement afficirt, nach Richtung der N und zwei hierzu senkrechten Richtungen sind nach 4 (§. 10) (weil N für  $N_1$ , 0 für  $N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$  zu setzen ist)  $X = N \cos \alpha, Y = 0, Z = 0$ . Die Componente von  $R_1$  nach Richtung der x ist  $N_1$ , also ist (weil die Projection einer Kraft auf eine Gerade gleich der Summe der Projectionen ihrer Componenten ist)  $N_1 = X \cos \alpha + 0 + 0 = N \cos^2 \alpha$ . Ebenso ergibt sich:

$$\begin{aligned} N_1 &= N \cos^2 \alpha, & T_1 &= N \cos \beta \cos \gamma, \\ N_2 &= N \cos^2 \beta, & T_2 &= N \cos \gamma \cos \alpha, \\ N_3 &= N \cos^2 \gamma, & T_3 &= N \cos \alpha \cos \beta, \end{aligned}$$

mithin nach 66

$$\sigma_1 = N \left( + \frac{\cos^2 \alpha}{E_1} - \frac{\cos^2 \beta}{\mathcal{E}_3} - \frac{\cos^2 \gamma}{\mathcal{E}_2} \right), \quad \tau_1 = - \frac{N \cos \beta \cos \gamma}{G_1}, \text{ u. s. f.}$$

Setzt man diese Ausdrücke für  $\sigma_1, \tau_1, \dots$  in den Ausdruck 42 (§. 23) für die relative Längenänderung in beliebiger Richtung und  $\frac{N}{E}$  für  $\sigma$ , so ergibt sich

$$67. \quad \frac{1}{E} = \frac{\cos^4 \alpha}{E_1} + \frac{\cos^4 \beta}{E_2} + \frac{\cos^4 \gamma}{E_3} + \left( \frac{1}{G_1} - \frac{2}{\mathcal{E}_1} \right) \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \\ + \left( \frac{1}{G_2} - \frac{2}{\mathcal{E}_2} \right) \cos^2 \gamma \cos^2 \alpha + \left( \frac{1}{G_3} - \frac{2}{\mathcal{E}_3} \right) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta.$$

Für einen isotropen Körper wird  $E_1 = E_2 = E_3 = E, \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}$ .

=  $\mathfrak{G}_3 = mE$ ,  $G_1 = G_2 = G_3 = \frac{Em}{2(m+1)}$ , daher  $\frac{1}{G_1} - \frac{2}{\mathfrak{G}_1} = \dots = \frac{2(m+1)}{Em} - \frac{2}{Em} = \frac{2}{E}$ . Nach De Saint-Venant soll entsprechend allgemein  $\frac{1}{G_1} - \frac{2}{\mathfrak{G}_2} = \frac{2}{\sqrt{E_2 E_3}}$  etc. sein. Alsdann steht in 67 rechts ein vollständiges Quadrat und es wird einfacher

$$68. \quad \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{E_1}} + \frac{\cos^2 \beta}{\sqrt{E_2}} + \frac{\cos^2 \gamma}{\sqrt{E_3}}.$$

Stellt man  $\frac{1}{\sqrt{E}}$  für alle möglichen Richtungen nach Grösse und Richtung durch Gerade dar, so liegen hiernach die Endpunkte derselben auf einem Ellipsoide.

**§. 37. Körper mit einer Elasticitätsaxe.** Wählen wir die Elasticitätsaxe als Axe der x, so ist offenbar in 68  $A_2 = A_3$ ,  $G_2 = G_3$ . Daher wird

$$69. \quad \begin{cases} N_1 = A_1 \sigma_1 + G_2 \sigma_2 + G_2 \sigma_3, & T_1 = -G_1 \tau_1, \\ N_2 = G_2 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + G_1 \sigma_3, & T_2 = -G_2 \tau_2, \\ N_3 = G_2 \sigma_1 + G_1 \sigma_2 + A_2 \sigma_3, & T_3 = -G_2 \tau_3, \end{cases}$$

so dass hier nur vier Coefficienten auftreten.

Die Reduction auf  $\sigma_1, \tau_1, \dots$  giebt

$$70. \quad \begin{cases} \sigma_1 = + \frac{N_1}{E_1} - \frac{N_2}{\mathfrak{G}_1} - \frac{N_3}{\mathfrak{G}_2}, & \tau_1 = - \frac{T_1}{G_1}, \\ \sigma_2 = - \frac{N_1}{\mathfrak{G}_1} + \frac{N_2}{E_2} - \frac{N_3}{\mathfrak{G}_2}, & \tau_2 = - \frac{T_2}{G_2}, \\ \sigma_3 = - \frac{N_1}{\mathfrak{G}_1} - \frac{N_2}{\mathfrak{G}_2} + \frac{N_3}{E_2}, & \tau_3 = - \frac{T_3}{G_2}. \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$70 \text{ a.} \quad \begin{cases} K = A_1 A_2^2 - 2 G_1 G_2^2 - A_1 G_1^2 - 2 A_2 G_2^2, \\ E_1 = \frac{K}{A_2^2 - G_1^2}, & \mathfrak{G}_1 = \frac{K}{A_1 G_1 - G_2^2}, \\ E_2 = \frac{K}{A_1 A_2 - G_2^2}, & \mathfrak{G}_2 = \frac{K}{A_2 G_2 - G_1 G_2}. \end{cases}$$

Für den Elasticitäts-Coefficienten für eine Richtung, welche mit der Elasticitätsaxe den Winkel  $\alpha$  bildet und in der Ebene der xy liegt, ist nach 67, da  $\cos \alpha = \sin \beta$ ,  $\cos \gamma = 0$  ist,

$$71. \quad \frac{1}{E} = \frac{\cos^4 \alpha}{E_1} + \frac{\sin^4 \alpha}{E_2} + \left( \frac{1}{G_2} - \frac{2}{\mathfrak{G}_1} \right) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$$

und diesen Werth hat  $\frac{1}{E}$  offenbar für jede Richtung, welche mit der Elasticitätsaxe den Winkel  $\alpha$  bildet.

Nach der De Saint-Venant'schen Annahme ist  $\frac{1}{G_2} - \frac{2}{G_1} = \frac{2}{\sqrt{E_1 E_2}}$   
und daher einfacher

$$72. \quad \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{E_1}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{E_2}},$$

wonach auf Taf. I in Fig. 8 E graphisch dargestellt ist.

Nach Versuchen von Hagen soll für Holz

$$\frac{1}{E} = \frac{\cos^2 \alpha}{E_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{E_2}$$

sein, was indessen unbedingt falsch ist, da hiernach für isotrope Körper E nicht constant werden würde.

**§. 38. Isotrope Körper.** Hier ist offenbar  $A_1 = A_2 = A_3, G_1 = G_2 = G_3$ , so dass hier nur zwei Coefficienten A und G auftreten. Die in 63 angedeutete Summirung lässt sich hier aber, weil f(s) von der Richtung der Geraden s unabhängig ist, zum Theil ausführen und so noch eine Beziehung zwischen A und G ermitteln.

Bezeichnen wir in Fig. 8 den Winkel, welchen die durch PP' gehende, auf der Ebene MN senkrechte Ebene mit der Ebene der xz einschliesst, mit  $\varphi$ , so ist  $\cos \alpha = \sin \gamma \cos \varphi$ ,  $\cos \beta = \sin \gamma \sin \varphi$ , folglich

$$A = \mu \Sigma m s^2 f(s) \cos^4 \gamma,$$

$$G = \mu \Sigma m s^2 f(s) \sin^4 \gamma \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Wir denken uns ein dem gewählten Coordinatensystem entsprechendes Volumenelement, welches begrenzt wird von zwei concentrischen Kugelflächen aus P mit den Radien s,  $s = ds$ , ferner von zwei Kegelflächen, deren Spitze in P liegen und deren Erzeugenden mit PP<sub>1</sub> die Winkel  $\gamma, \gamma + d\gamma$  einschliessen und von zwei durch PP<sub>1</sub> gehenden Meridianebenen, welche mit der Ebene der xz die Winkel  $\varphi, \varphi + d\varphi$  einschliessen. Die Masse dieses Elementes ist  $\mu s^2 \sin \gamma ds d\gamma d\varphi$ . Dieser Ausdruck ist für m einzusetzen und statt der Summirung eine dreifache Integration nach s,  $\gamma, \varphi$  anzuwenden. Da f(s) mit wachsendem s rapid abnimmt, so wird man keinen merklichen Fehler begehen, wenn man nach s zwischen den Grenzen 0 und  $\infty$  integrirt. Nach  $\gamma$  ist zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$ , nach  $\varphi$  zwischen 0 und  $2\pi$  zu integriren. Demnach wird

$$A = \mu^2 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} s^4 f(s) \cos^4 \gamma \sin \gamma ds d\gamma d\varphi,$$

$$G = \mu^2 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} s^4 f(s) \sin^5 \gamma \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi ds d\gamma d\varphi.$$

Es ist aber

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \gamma \sin \gamma d\gamma = \frac{1}{5}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \gamma d\gamma = \frac{8}{15},$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

folglich ist

$$A = \frac{2\pi\mu^2}{5} \int_0^{\infty} s^4 f(s) ds, \quad G = \frac{2\pi\mu^2}{15} \int_0^{\infty} s^4 f(s) ds$$

und hieraus folgt die interessante Beziehung

$$73. \quad A = 3G.$$

Demnach wird nun

$$74. \quad \begin{cases} N_1 = G(3\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), & T_1 = -G\tau_1, \\ N_2 = G(\sigma_1 + 3\sigma_2 + \sigma_3), & T_2 = -G\tau_2, \\ N_3 = G(\sigma_1 + \sigma_2 + 3\sigma_3), & T_3 = -G\tau_3. \end{cases}$$

Umgekehrt ergibt sich hieraus

$$75. \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{2}{5G} \left( N_1 - \frac{N_2 + N_3}{4} \right), & \tau_1 = -\frac{T_1}{G}, \\ \sigma_2 = \frac{2}{5G} \left( N_2 - \frac{N_3 + N_1}{4} \right), & \tau_2 = -\frac{T_2}{G}, \\ \sigma_3 = \frac{2}{5G} \left( N_3 - \frac{N_1 + N_2}{4} \right), & \tau_3 = -\frac{T_3}{G}. \end{cases}$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den entsprechenden Formeln 49 (§. 27) giebt für  $m$  den Werth

$$m = 4,$$

so dass

$$\mathbb{E} = 4E, \quad G = \epsilon = \frac{2}{5} E$$

ist (Vergl. §. 26).

## V. Kapitel.

### Allgemeine Festigkeitslehre.

**§. 39. Elasticitätsgrenze.** Die äussere Belastung eines Körpers, bei deren Ueberschreitung eine bleibende Formänderung eintritt, oder welche der Elasticitätsgrenze entspricht, nennen wir die Grenzbelastung. Wirkt auf ein rechtwinkliges Parallelepiped nur eine Normalspannung, so nennen wir diejenige Grösse derselben, welche der Elasticitätsgrenze entspricht, den Grenzcoefficienten.

Ausserhalb der Elasticitätsgrenze gilt auch das in §. 25 aufgestellte Gesetz, welches die Proportionalität zwischen Längenänderung und Kraft ausspricht, nicht mehr, wenn es sich um die totale Formänderung handelt. Für den elastischen Theil der Formänderung (vergl. §. 2) gilt es aber nahezu allgemein.

Statt des Wortes Grenzcoefficient wird häufig das Wort Tragmodul oder Tragcoefficient gewählt. Die von uns zuerst gewählte Benennung ist aber bezeichnender.

**§. 40. Bruch.** Die äussere Belastung, bei welcher ein Bruch des Körpers eintritt, nennen wir die Bruchbelastung.

Wirkt auf ein rechtwinkliges Parallelepipid nur eine Normalspannung  $N$ , so nennen wir diejenige Grösse dieser Spannung, bei welcher ein Bruch erfolgt, den Festigkeitscoefficient und zwar für Zug oder Druck, je nachdem  $N$  ziehend oder drückend wirkt.

Wirkt auf das rechtwinklige Parallelepipid eine Schubspannung, so kann ebenfalls eine Trennung erfolgen. Diejenige Spannung, bei welcher die Trennung erfolgt, nennen wir den Festigkeitscoefficient für Schub.

Statt des Wortes Festigkeitscoefficient wird häufig das Wort Bruchcoefficient oder Bruchmodul gebraucht.

**§. 41. Sicherheit.** Wenn es darauf ankommt, dauerhafte Constructionen herzustellen, so darf die Belastung die Bruchbelastung nicht erreichen. Die noch zulässige Belastung nennen wir die Tragkraft. Das Verhältniss der Bruchbelastung zur Tragkraft nennen wir die Bruchsicherheit, und das Verhältniss der Grenzbelastung zur Tragkraft die Grenzsicherheit.

Wirkt auf ein rechtwinkliges Parallelepipid nur eine Spannung, sei es eine Normal- oder Schubspannung, so nennt man die noch zulässige Spannung den Sicherheitscoefficienten und zwar bezüglich für Zug, Druck oder Schub. Wir bezeichnen dieselben mit  $K$ ,  $\mathfrak{K}$ ,  $K_1$ . Die entsprechende relative Ausdehnung, Zusammendrückung und Gleitung ist alsdann  $\frac{K}{E}$ ,  $\frac{\mathfrak{K}}{E}$ ,  $\frac{K_1}{G}$ .

**§. 42. Festigkeitsbedingungen.** Eine Trennung tritt jedenfalls bei isotropen Körpern dann ein, wenn die grösste Längenänderung um einen Punkt herum eine gewisse Grenze überschreitet. Die grösste zulässige Ausdehnung und Zusammendrückung ist nach dem vorigen Paragraph  $\frac{K}{E}$  und  $\frac{\mathfrak{K}}{E}$ . Bedeutet  $\max(+\sigma)$  und  $\max(-\sigma)$  die grösste positive und negative relative Längenänderung, so sind daher die Festigkeitsbedingungen  $\max(+\sigma) = \frac{E}{K}$ ,  $\max(-\sigma) = \frac{\mathfrak{K}}{E}$  oder

$$E \max(+\sigma) = K, \quad E \max(-\sigma) = \mathfrak{K}.$$

Diejenige Spannung, welche die Längenänderung  $\sigma$  hervorbringen würde, wenn sie in der Richtung von  $\sigma$  wirkte und in anderen Richtungen keine Spannungen wirkten, nennen wir ideale Spannung und bezeichnen sie mit  $S$ . Die den Hauptlängenänderungen entsprechenden idealen Spannungen nennen wir ideale Hauptspannungen und bezeichnen sie mit  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . Alsdann ist  $E \max(+\sigma) = \max(+S)$ ,  $E \max(-\sigma) = \max(-S)$ , also die Festigkeitsbedingungen

$$76. \quad \max(+S) = K, \quad \max(-S) = \mathfrak{K}.$$

Von diesen Gleichungen ist entweder die erste oder die zweite zu wählen, je nachdem

$$\frac{\max(+S)}{\max(-S)} < \frac{K}{\mathfrak{K}}$$

ist; denn im ersten Falle ( $>$ ) würde, wenn  $\max(+S) = K$  ist,  $\max(-S) < \mathfrak{K}$  sein, also kein Bruch durch Druck eintreten können; im letzten Falle

( $\angle$ ) dagegen würde, wenn  $\max(-S) = \mathfrak{K}$  ist,  $\max(+S) < K$  sein, also kein Bruch durch Zug eintreten können.

Offenbar ist  $\max(+S)$ , sowie  $\max(-S)$  eine der drei idealen Hauptspannungen  $S_1, S_2, S_3$  und diese sind nach:

$$77. \quad \begin{cases} S_1 = A - \frac{B+C}{m}, \\ S_2 = B - \frac{C+A}{m}, \\ S_3 = C - \frac{A+B}{m}. \end{cases}$$

Für  $m$  wird man der Sicherheit wegen unter den Zahlen 3 und 4 (siehe §. 28) diejenige wählen, welche den grössten Werth von  $\max(+S)$  oder  $\max(-S)$  erzeugt.

Die Festigkeitsbedingung für Schub, d. h. die Bedingung, dass die grösste zulässige Gleitung nicht überschritten wird, ist  $\max(g) = \frac{K}{G}$ , oder  $G \max(\tau) = K_1$ , oder weil  $G \max(\tau) = \max T$  ist,

$$78. \quad \max T = K_1,$$

worin  $\max T$  die grösste der drei Hauptschubspannungen (§. 16) bezeichnet.

Diese drei Festigkeitsbedingungen lassen sich auch schreiben:

$$79. \quad \frac{\max(+S)}{K} = 1, \quad \frac{\max(-S)}{\mathfrak{K}} = 1, \quad \frac{\max T}{K_1} = 1,$$

und von diesen drei Gleichungen ist diejenige massgebend, für welche der Werth auf der linken Seite am grössten ist.

**§. 43. Grenz- und Festigkeitscoefficienten.** In Folgendem sollen die Grenz- und Festigkeitscoefficienten in Kilogrammen pro Quadratcentimeter zusammengestellt werden.

a) Holz. Die Mittelwerthe für verschiedene Holzgattungen weichen nicht viel von einander ab. Man kann etwa annehmen:

Richtung	Grenzcoefficient für		Festigkeitscoefficient für		
	Zug	Druck	Zug	Druck	Schub
Fasserrichtung . . . . .	240	190	810	530	70
Radial und tangential . . . . .	—	—	120	270	100

Der Grenzcoefficient für Druck ist ungefähr  $\frac{4}{5}$  von dem für Zug. Der Festigkeitscoefficient für Druck ist ungefähr  $\frac{2}{3}$  von dem für Zug.

b) Eisen.

Eisenart	Grenzcoefficient für		Festigkeitscoefficient für		
	Zug	Druck	Zug	Druck	Schub
Schmiedeeisen . . . . .	1560	1560	4150	3630	3230
Gewöhnlicher Stahl . . . . .	3000	3000	8000	7000	6220
Gussstahl . . . . .	5000	—	10000	—	7780
Gusseisen . . . . .	660	1650	1320	7920	1060

Der Grenzcocoefficient für Druck ist beim Schmiedeeisen und Stahl nahe gleich dem für Zug, beim Gusseisen etwa  $2\frac{1}{2}$  von dem für Zug. Der Festigkeitscoefficient für Druck ist beim Schmiedeeisen und Stahl ungefähr  $\frac{7}{8}$  von dem für Zug, beim Gusseisen aber etwa 6mal so gross, als der für Zug. Der Grenzcocoefficient ist beim Schmiedeeisen und Stahl für Zug  $\frac{1}{3}$ , für Druck  $\frac{2}{5}$ , beim Gusseisen für Zug  $\frac{1}{2}$ , für Druck  $\frac{1}{5}$  vom Festigkeitscoefficienten.

c) Andere Metalle. Für andere Metalle ist der geringeren Wichtigkeit wegen meist nur der Festigkeitscoefficient für den Zug bestimmt. Derselbe ist:

Metall	Festigkeits-Coefficient für Zug	Metall	Festigkeits-Coefficient für Zug
Blei, gegossen . . . . .	95	Aluminium . . . . .	1540
Blei, gewalzt . . . . .	130	Kupfer, gegossen . . . . .	1960
Zink, gegossen . . . . .	200	Bronze, „ . . . . .	2300
Zinn, „ . . . . .	320	Kupfer, gewalzt . . . . .	2330
Silber, „ . . . . .	750	Platin, Blech . . . . .	2570
Gold, „ . . . . .	750	Aluminiumbronze, gegossen	5330
Messing, gegossen . . . . .	1260	„ gehämm. . . . .	7000
Zink, gewalzt . . . . .	1350		

Der Festigkeitscoefficient für Druck ist beim Kupfer etwa  $2\frac{1}{2}$ , beim Messing etwa 8mal so gross, als der für Zug. Der Grenzcocoefficient für Zug ist beim Kupfer etwa  $\frac{1}{3}$ , beim Messing etwa  $\frac{1}{3}$ , beim Blei etwa  $\frac{4}{5}$  von dem Festigkeitscoefficient für Zug.

d) Steine. Für die Steine sind hauptsächlich nur die Festigkeits-Coefficienten für Druck bestimmt, weil die Zugfestigkeit so klein ist, dass man ihr Auftreten in Steinconstructions vermeidet. Die Werthe sind selbst bei derselben Art so schwankend, dass die folgenden Zahlen nur rohe Mittelwerthe darstellen.

Steinart	Festigkeits-Coefficient für Druck	Steinart	Festigkeits-Coefficient für Druck
Gewöhnliche Ziegel . . . . .	830	Glimmerschiefer . . . . .	80
Kalkstein . . . . .	840	Serpentin . . . . .	500
Dolomit . . . . .	870	Gneiss . . . . .	610
Rogenstein . . . . .	880	Dolerit . . . . .	660
Sandstein . . . . .	890	Diorit . . . . .	700
Grauwacke . . . . .	900	Granit . . . . .	730
Porphyr . . . . .	1000	Syenit . . . . .	740
Kieselschiefer . . . . .	1200	Basalt . . . . .	740
Hornblende . . . . .	1200	Hornstein . . . . .	740
Chlorytgestein . . . . .	1300	Quarzfels . . . . .	760

Der Festigkeitscoefficient für Zug ist nur ungefähr  $\frac{1}{5}$  von dem für Druck.

**§. 44. Wahl des Sicherheitscoefficienten.** Als Sicherheitscoefficienten wählt man in der Praxis auf Grund von Erfahrungen entweder einen bestimmten Theil des Festigkeitscoefficienten oder einen Theil des Grenzcoefficienten. Es ist dies nicht gleichgiltig. Soll die Tragkraft  $\frac{1}{m}$  die Grenzbelastung sein, so dass m-fache Grenzsicherheit stattfindet, so muss auch die grösste Längenänderung  $\frac{1}{m}$  von der Längenänderung an der Elasticitätsgrenze, also der Sicherheitscoefficient  $\frac{1}{m}$  des Grenzcoefficienten sein, weil innerhalb der Elasticitätsgrenze die Längenänderung proportional der Spannung ist. Soll aber die Tragkraft  $\frac{1}{n}$  der Bruchbelastung sein, so dass n-fache Bruchsicherheit stattfindet, so wird im Allgemeinen der Sicherheitscoefficient nicht  $\frac{1}{n}$  des Festigkeitscoefficienten sein, weil die Proportionalität zwischen Längenänderung und Spannung in der Nähe des Bruches nicht mehr stattfindet. Ja es wird, wenn man für alle Belastungsweisen eine bestimmte Bruchsicherheit wählt, der Sicherheitscoefficient gar nicht für alle Belastungsweisen und Körperformen constant sein. Die genaue Bestimmung des Sicherheitscoefficienten würde eine Bestimmung der Formänderung beim Bruche nöthig machen, was zur Zeit noch nicht allgemein möglich ist. Dieses Uebelstandes ist man allerdings enthoben, wenn man eine bestimmte Grenzsicherheit wählt. Diese Annahme hat aber wiederum den Uebelstand, dass die Elasticitätsgrenze überhaupt sehr unsicher ist, ja selbst nicht immer eine bleibende Formänderung einen Nachtheil hat, während ein Bruch unter keinen Umständen eintreten darf. Es erscheint deshalb doch gerathen, eine bestimmte Bruchsicherheit anzunehmen und den entsprechenden Sicherheitscoefficient durch Zuhilfenahme der Empirie zu bestimmen, wie wir später zeigen werden. Eine genaue Bestimmung ist zum Glück wegen der Verschiedenheit desselben Materials und der Unbestimmtheit in der Wahl des Sicherheitsgrades nicht nöthig.

**§. 45. Form der Körper.** Wir stehen hiermit am Ende der allgemeinen Theorie der Elasticität und gehen nun dazu über, die für die Praxis wichtigen speciellen Fälle zu behandeln.

Wir unterscheiden fünf Klassen von Körperformen, nämlich: 1) linienförmige Körper mit äusserst geringer Dicke und Breite, 2) flächenförmige Körper mit äusserst geringer Dicke, 3) stabförmige Körper oder Stäbe mit geringer Dicke und Breite, 4) plattenförmige Körper oder Platten mit geringer Dicke und 5) Körper, welche nach allen drei Dimensionen nahe gleich ausgedehnt sind. Die meiste Aufmerksamkeit werden wir den Stäben schenken, da diese für die Praxis am wichtigsten sind.

Wir denken uns einen Stab, entstanden durch die Bewegung einer ebenen Fläche und zwar dergestalt, dass sich der Schwerpunkt derselben auf einer gegebenen Linie, der sogenannten Axe oder Leitcurve bewegt und die Ebene der Figur stets senkrecht auf dieser Linie steht,

während sich die Gestalt der Figur beliebig ändern kann. Die bewegliche Figur nennen wir in irgend einer Lage den Querschnitt des Körpers. Eine beliebige materielle Linie, welche parallel zur Axe ist, nennen wir eine Fasser und den zwischen zwei sehr nahen Querschnitten enthaltenen Theil eine Scheibe.

Wir unterscheiden Stäbe mit gerader, einfach gekrümmter und doppelt gekrümmter Axe.

**§. 46. Die äusseren Kräfte.** Die auf einen Stab wirkenden äusseren Kräfte greifen entweder an einzelnen Punkten an und wir nennen sie dann isolirte Kräfte oder sie sind über die Oberfläche stetig vertheilt. Für die Einführung der Kräfte, welche auf einen beliebigen durch einen Querschnitt  $O$  getrennten Theil  $OA$  (Fig. 9) des Körpers wirken, wählen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem  $OU, OV, OW$  und zwar so, dass zwei Axen  $OV, OW$  im Querschnitte liegen und durch dessen Schwerpunkt gehen, die dritte  $OU$  also die Leitcurve in  $O$  tangirt.

Alle äusseren Kräfte, welche auf den Theil  $OA$  wirken, zerlegen wir nach Richtung dieser drei Axen und führen folgende Bezeichnungen ein:

Die Summe aller in Richtung der Tangente  $OU$  wirkenden Componenten nennen wir die Axialkraft und bezeichnen sie mit  $P$ .

Die Summe aller parallel zum Querschnitte in Richtung von  $OV, OW$  wirkenden Componenten nennen wir Transversalkräfte, weil sie transversal zur Axe  $OA$  des Körpers wirken, und bezeichnen sie mit  $Q_1, Q_2$ .

Die Summe der Momente der äusseren Kräfte in Beziehung auf die Axen  $OV, OW$  nennen wir Biegemomente oder kurz Momente und bezeichnen sie mit  $M_1, M_2$ , die Summe der Momente in Beziehung auf die Tangente  $OU$  aber das Torsionsmoment und bezeichnen dasselbe mit  $M$ .

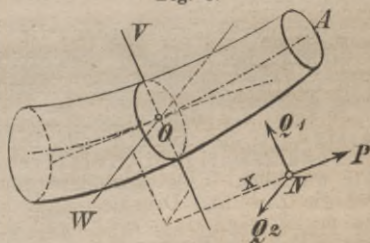
Welchen der auf beiden Seiten des Querschnittes  $O$  liegenden Theile  $OA, OB$  man betrachtet, ist gleichgiltig, da das Gleichgewicht des ganzen Körpers fordert, dass die Resultanten der auf beide Theile wirkenden Kräfte gleich, obwohl der Richtung nach entgegengesetzt sind.

**§. 47. Beanspruchungsweise.** Es lassen sich folgende Arten der Formänderung der Stäbe unterscheiden:

1. Zwei sehr nahe Querschnitte entfernen oder nähern sich, ohne sich gegenseitig zu verschieben oder zu verdrehen. Dies tritt ein, wenn nur  $P$  vorhanden, aber  $Q_1 = Q_2 = 0, M = 0, M_1 = M_2 = 0$  ist. Wir nennen diesen Fall Normalelasticität, Normalfestigkeit und unterscheiden Zugelasticität, Zugfestigkeit und Druckelasticität, Druckfestigkeit. Die Trennung heisst Zerreißen oder Zerdrücken.

2. Beide Querschnitte verschieben sich gegenseitig, ohne ihre Entfernung zu ändern und ohne sich gegenseitig zu drehen. Dies tritt ein, wenn nur  $Q_1, Q_2$  vorhanden, also  $P = 0, M = 0, M_1 = M_2 = 0$  ist.

Fig. 9.



Wir nennen diesen Fall Schub- oder Gleitungselasticität, Schub- oder Schubfestigkeit, die Trennung des Körpers Abschieben oder Abscheeren.

3. Der eine Querschnitt dreht sich gegen den andern um eine in seiner Ebene liegende und durch seinen Schwerpunkt gehende Axe. Dies tritt ein, wenn nur  $M_1$ ,  $M_2$  vorhanden, also  $P = 0$ ,  $Q_1 = Q_2 = 0$ ,  $M = 0$  ist. Wir nennen diesen Fall Biegungselasticität, Biegungsfestigkeit, die Formänderung das Biegen, die Trennung des Körpers Zerschneiden.

4. Der eine Querschnitt dreht sich gegen den andern in seiner Ebene um seinen Schwerpunkt. Dies tritt ein, wenn nur  $M$  vorhanden, also  $P = 0$ ,  $Q_1 = Q_2 = 0$ ,  $M_1 = M_2 = 0$  ist. Wir nennen diesen Fall Torsionselasticität, Torsionsfestigkeit, die Formänderung das Verdrehen, die Trennung das Abdrehen, Abwürgen.

Treten mehrere dieser genannten einfachen Bewegungen der Querschnitte ein, so sprechen wir von zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit.

In der Folge werden wir unter Biegungselasticität auch den Fall verstehen, bei welchem gleichzeitig Normalelasticität und Gleitungselasticität eintritt, da die reine Biegungselasticität zu wenig vorkommt.

Statt der Benennungen Zugfestigkeit, Druckfestigkeit, Bruchfestigkeit sind vielfach die Benennungen absolute Festigkeit, rückwirkende Festigkeit, relative oder respective Festigkeit in Gebrauch. Wir wünschen, dass man diese unpassenden Benennungen als veraltet ansieht. Für die Zug- und Druckfestigkeit haben wir die gemeinschaftliche Benennung Normalfestigkeit gewählt, weil sie gleichen Gesetzen folgen und für den wichtigsten Fall, die Biegungsfestigkeit, als „Norm“ dienen.

## II. Abschnitt.

# Normal- und Schub-Elasticität.

### V. Kapitel.

#### Normalelasticität gerader Stäbe.

**§. 48. Bedingungen.** Die Normalelasticität tritt nach §. 47 dann ein, wenn sich zwei benachbarte Querschnitte gegenseitig in der Richtung der Axe des Stabes bewegen und zwar so, dass sie parallel bleiben. Die Axe des Stabes, welche wir als gerade voraussetzen, bleibt hierbei gerade. Diese Formänderung tritt nur dann ein, wenn die Resultante aller auf einen Theil AC (Fig. 10) des Stabes wirkenden Kräfte durch den Schwerpunkt C des betreffenden Querschnittes DE geht und in der Richtung der Axe des Stabes wirkt. Ist das Gewicht des Stabes als wirksame Kraft gegen andere äussere Kräfte nicht zu vernachlässigen, so muss die Axe natürlich eine verticale Lage haben.

Wir setzen voraus, dass ausser dem Gewichte des Körpers nur auf die Endflächen A und B äussere Kräfte wirken und bezeichnen mit

- $\mathfrak{P}$  die auf das Ende A wirkende äussere Kraft;
- P die Axialkraft, d. i. die Summe aller auf den Theil AC des Körpers wirkenden Kräfte;
- g das Gewicht der Volumeneinheit des Stabes;
- F den Flächeninhalt des Querschnittes C;
- x die Entfernung AC;
- l die Länge AB des Stabes.

$\Delta l$  die Längenänderung des ganzen Stabes.

Hierbei nehmen wir die Kräfte  $\mathfrak{P}$ , P positiv oder negativ, je nachdem sie ziehend oder drückend auf den Stab, bezüglich auf das Stück CB wirken.

Die Kraft, welche im Zustande des Gleichgewichtes auf das Ende B wirken muss, ist  $\mathfrak{P} \pm$  Gewicht des ganzen Stabes =  $\mathfrak{P} \pm g \int_0^l F dx$ . Die Axialkraft P ist  $\mathfrak{P} \pm$  Gewicht des Stückes AC, d. i.

$$1. \quad P = \mathfrak{P} \pm g \int_0^x F dx,$$

wobei + oder - zu wählen ist, je nachdem das Ende A, an welchem die Kraft  $\mathfrak{P}$  wirkt, das untere oder das obere ist.

Fig. 10.



**§. 49. Spannungen.** Wenn der Stab prismatisch und die an jedem Ende wirkende Kraft gleichmässig über den Endquerschnitt vertheilt ist, so ist die Längenänderung aller Fässern an einem Querschnitte gleich gross und die Fässern bleiben parallel. Die Fässern üben hierbei auf einander keinen Druck aus und haben auch kein Bestreben, sich gegenseitig zu verschieben. Die Querschnitte werden daher auch eben bleiben. Auf ein im Körper gedachtes Parallelepipid, dessen eine Kante parallel der Axe des Stabes ist, wirken daher gar keine Schubspannungen und nur eine Normalspannung in der Richtung der Axe des Stabes.

Wenn der Stab nicht prismatisch ist oder wenn die äusseren Kräfte nicht gleichmässig über die Endquerschnitte vertheilt sind, so ist das Gesagte nicht mehr ganz richtig. Wir wollen es indessen auch für diesen Fall als richtig annehmen, da die genaue Theorie mit grossen Schwierigkeiten verknüpft ist und die Abweichungen in praktischen Fällen nur gering sind.

Wir bezeichnen, entsprechend der früheren Bezeichnung, die in einem beliebigen Querschnitte in der Richtung der Axe wirkende Normalspannung mit  $N_1$ . Weil die relativen Längenänderungen aller Fässern in einem Querschnitte gleich gross sind, so hat  $N_1$  an allen Stellen des Querschnittes denselben Werth. Die Summe aller auf den Stabtheil AC wirkenden Spannungen ist daher  $N_1 F$ . Für das Gleichgewicht des Theiles AC ist daher  $N_1 F = P$  oder

$$2. N_1 = \frac{P}{F} = \frac{y}{F} \pm \frac{g}{F} \int_0^x F dx.$$

Die Gleichung 18 (§. 13) zur Bestimmung der Hauptspannungen wird, weil von sechs Spannungen  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$  nur  $N_1$  vorhanden ist,

$$3. H^2(H - N_1) = 0.$$

Die drei Hauptspannungen sind daher 0, 0 und  $N_1$ , so dass also die Spannung  $N_1$  zugleich die einzige Hauptspannung ist. Das Spannungselipsoid wird eine Gerade, so dass alle Spannungen in Richtung der Axe des Stabes wirken. Schliesst die Normale eines Flächenelementes mit der Axe den Winkel  $\alpha$  ein, so wird nach 34, 35, 36 (§. 18):

$$4. R = N_1 \cos \alpha, N = N_1 \cos^2 \alpha, T = \frac{1}{2} N_1 \sin 2\alpha.$$

Die Schubspannung T wird zum Maximum für jede Ebene, welche gegen die Axe unter  $45^\circ$  geneigt ist. Die Hauptschubspannung ist nach 37 (§. 18):

$$5. \phi = \frac{1}{2} N_1.$$

**§. 50. Formänderung.** Die relative Längenänderung einer Fasser ist nach §. 26:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N_1}{E} = \frac{P}{EF},$$

daher ist die Aenderung des x:

$$6. \Delta x = \frac{1}{E} \int_0^x \frac{P}{F} dx$$

und demnach die Längenänderung des ganzen Stabes:

$$7. \Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{P}{F} dx.$$

Die relative Längenänderung einer zur Axe senkrechten Geraden ist  $-\frac{1}{m} \frac{\Delta dx}{dx}$  und die relative Volumenänderung  $\Theta = \left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{\Delta dx}{dx}$ . Für  $m = 3$  und  $4$  wird  $\Theta = \frac{1}{3} \frac{\Delta dx}{dx}$  und  $\frac{1}{2} \frac{\Delta dx}{dx}$ , d. h. die relative Volumenänderung ist  $\frac{1}{3}$  bis  $\frac{1}{2}$  der relativen axialen Längenänderung.

**§. 51. Festigkeit.** Da nur eine Hauptspannung wirkt, so ist die Festigkeitsbedingung, je nachdem der Stab auf Zug oder Druck beansprucht wird,

$$\max(+N_1) = K, \quad -\max(-N_1) = \mathfrak{K},$$

d. i.

$$8. \max \frac{P}{F} = K, \quad -\max \frac{P}{F} = \mathfrak{K}.$$

Ist das Gewicht des Körpers zu vernachlässigen, so wird  $N_1$  zum Maximum am kleinsten Querschnitte. Ist derselbe  $F_0$ , so ist die Festigkeitsbedingung

$$9. \mathfrak{P} = K F_0, \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{K} F_0.$$

Als kleinster Querschnitt bei gegebener Tragkraft folgt hieraus:

$$10. F_0 = \frac{\mathfrak{P}}{K} \text{ oder } = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{K}}.$$

Es lässt sich allerdings nicht gut denken, dass ein Bruch durch Druck, welcher eine Annäherung der Moleculé veranlasst, erfolgen sollte. Es ist viel wahrscheinlicher, dass eine Trennung durch schiefes Abschieben erfolge, worauf auch die Versuche hindeuten. Die Hauptschubspannung ist nach 37 (§. 18)  $= \frac{1}{2} N_1$ . Ist daher  $K_1$  der Sicherheitscoefficient für Schubfestigkeit, so ist  $-\max(-\frac{1}{2} N_1) = K_1$  oder  $-\max(-N_1) = 2 K_1$ , oder

$$-\max \frac{P}{F} = 2 K_1.$$

Demnach wäre

$$11. \mathfrak{K} = 2 K_1, \quad K_1 = \frac{1}{2} \mathfrak{K}.$$

Für Schmiedeeisen ist z. B. für 1fache Sicherheit  $K = 4150$ ,  $\mathfrak{K} = 3630$ ,  $K_1 = 3230$  Klgr. pro  $\square$ Cent., so dass hier die eben aufgestellte Beziehung nicht bewahrheitet wird.

Wenn ein Bruch durch Zerreißen in Folge der seitlichen Ausdehnung entstehen sollte, so müsste bei isotropen Körpern  $K_1 = \frac{1}{3} K$  sein, was von der Erfahrung noch viel mehr abweicht. Jedenfalls bleibt es vor der Hand am zweckmässigsten, die durch direkte Druckversuche gefundenen Coefficienten der Druckfestigkeit in Anwendung zu bringen.

**§. 52. Prismatischer Stab.** Der Stab sei prismatisch, d. h. der

Querschnitt sei constant. Wenn wir das Eigengewicht vernachlässigen, so ist

$$12. N_1 = \frac{P}{F},$$

$$13. \Delta l = \frac{Pl}{EF},$$

$$14. P = KF \text{ oder } = \mathfrak{R} F.$$

Hiernach ist der Querschnitt bei gegebener Tragkraft

$$15. F = \frac{P}{K} \text{ oder } F = \frac{P}{\mathfrak{R}}.$$

b) Wenn nur das Eigengewicht wirkt, so ist  $P = Fgx$ ,  $\Delta x =$

$$Fg \int_0^x x dx = \frac{1}{2} Fgx^2, \text{ also}$$

$$16. \Delta l = \frac{1}{2} Fgl^2 = \frac{1}{2} Fgl. l.$$

Die Längenänderung ist hiernach halb so gross, als wenn die Hälfte des Gewichtes des Stabes an jedem Ende wirkte.

**§. 53. Beliebig begrenzter Stab.** Es kommen zuweilen unregelmässig begrenzte Stäbe vor, bei denen sich  $F$  nicht als Function von  $x$  ausdrücken lässt, um die zur Bestimmung der Längenänderung nöthige Integration vornehmen zu können. Alsdann berechnet man dieselbe am besten nach der Simpson'schen Regel. Hierzu sei der Stab in eine gerade Anzahl gleicher Theile getheilt und die einzelnen Querschnitte seien  $F_0, F_1, F_2 \dots F_n$ .

Ist  $F$  der Querschnitt eines prismatischen Stabes von gleicher Länge und gleicher Längenänderung, so ist bei Vernachlässigung des Eigengewichtes  $\Delta l = \frac{Pl}{EF}$ , also nach 7

$$\frac{Pl}{EF} = \frac{P}{E} \int_0^l \frac{dx}{F}, \text{ mithin}$$

$$17. \frac{1}{F} = \frac{1}{3n} \left[ \frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_n} + 4 \left( \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_3} + \dots \right) + 2 \left( \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} + \dots \right) \right].$$

Sind z. B. nur zwei Theile angenommen und sind ausserdem die beiden Endquerschnitte gleich, so wird

$$18. \frac{1}{F} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{F_0} + \frac{2}{F_1} \right), \quad F = \frac{3F_0F_1}{2F_0 + F_1}.$$

Bei wenig von einander abweichenden Querschnitten lässt sich die Regel vereinfachen. Es ist nämlich  $\frac{1}{F_m} = \frac{1}{F + (F_m - F)}$ , d. i. nahezu, weil  $F_m - F$  gegen  $F$  sehr klein ist,  $= \frac{1}{F} \left( 1 - \frac{F_m - F}{F} \right) = \frac{1}{F} \left( 2 - \frac{F_m}{F} \right)$ . Durch Einsetzung dieses für  $F_0, F_1, F_2, \dots$  angewendeten Ausdruckes ergibt sich leicht

$$19. F = \frac{1}{3n} \left[ F_0 + F_n + 4(F_1 + F_3 + \dots) + 2(F_2 + F_4 + \dots) \right].$$

Statt der Formel 18 würde sich hiernach ergeben:

$$20. \quad F = \frac{1}{3} (F_0 + 2F_1).$$

**§. 54. Körper von constanter Festigkeit.** Ist  $G$  das Gewicht des Körpertheiles  $AC$  (Fig. 10), so ist  $P = \mathfrak{P} + G$ ,  $N = \frac{\mathfrak{P} + G}{F}$ . Damit der Körper in allen Querschnitten gleich leicht zerrissen oder zerdrückt werde, muss für jeden Querschnitt

$$K = \frac{\mathfrak{P} + G}{F}, \quad FK = P + G$$

sein. Die Differenziation giebt

$$K dF = dG.$$

Nun aber ist offenbar  $dG = F g dx$ , mithin

$$K dF = F g dx, \quad dx = \frac{K}{g} \frac{dF}{F},$$

$$x = \frac{K}{g} \int \frac{dF}{F} = \frac{K}{g} (\lognat F + \text{Const}).$$

Für  $x = 0$  werde  $F = F_0$ , also  $\text{Const} = -\lognat F_0$ ; alsdann wird

$$21. \quad x = \frac{K}{g} \lognat \frac{F}{F_0},$$

$$22. \quad F = F_0 e^{\frac{xg}{K}}$$

wenn  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Da  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$  ist, so ist

$$23. \quad F = F_0 \left( 1 + \frac{g}{K} x + \frac{g^2}{2K^2} x^2 + \dots \right).$$

Anwendung bei Brückenfeilern, Schachtgestängen u. s. w.

**§. 55. Drähte.** Bei den Drähten wird durch das Ziehen das Metall mehr auf der Oberfläche, als im Innern verdichtet, so dass sich auf der Oberfläche eine Kruste bildet, welche fester ist, als der Kern. Die Gesamtdicke sei  $= \partial$ , die Dicke der Kruste  $= \delta$ , der Gesamtquerschnitt  $= F$ , der Querschnitt des Kernes und der Kruste bezüglich  $= F', F''$ . Ist ferner  $N', N''$  die Spannung im Kern und in der Kruste,  $E', E''$  der Elasticitätscoefficient für Kern und Kruste, so ist  $\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N_1'}{E'} = \frac{N''}{E''}$ ,  $\mathfrak{P} = N'F' + N''F''$ . Aus der ersten Gleichung folgt  $N':N'' = E':E''$ , daher nach der zweiten Gleichung

$$N' = \frac{E' \mathfrak{P}}{E'F' + E''F''}, \quad N'' = \frac{E'' \mathfrak{P}}{E'F' + E''F''}.$$

Da der Kern eine kleinere Festigkeit hat, als die Kruste, so ist die Festigkeitsbedingung  $N' = K$ . Denken wir den Festigkeitscoefficient im ganzen Querschnitte constant  $= K$ , so würde  $\mathfrak{P} = K'F$  sein. Demnach wird

$$K = \frac{K'E'F}{E'F' + E''F''}, \quad K' = K \frac{E'F' + E''F''}{E'F}.$$

Nun aber ist  $F = \frac{\pi}{4} \delta^2$ ,  $F' = \frac{\pi}{4} (\delta - \delta)^2$ ,  $F'' = \frac{\pi}{4} [\delta^2 - (\delta - \delta)^2]$   
 $= \frac{\pi}{4} (2\delta - \delta) \delta$ , mithin

$$24. \quad K' = \frac{E' \delta^2 + 2(E'' - E') \delta \delta + (E'' - E') \delta^2}{E' \delta^2}$$

oder, wenn wir  $\delta^2$  gegen  $\delta \delta$  vernachlässigen und die Constante  $2K \frac{E'' - E'}{E'} \delta = A$  setzen

$$25. \quad K' = K + \frac{A}{\delta}.$$

Es wird nun  $\mathfrak{P} = K \frac{\pi}{4} \delta$ , d. i.

$$26. \quad \mathfrak{P} = \frac{\pi}{4} \delta (K \delta + A),$$

$$27. \quad \delta = \frac{A}{K} + \sqrt{\frac{A^2}{K} + \frac{4\mathfrak{P}}{\pi K}}.$$

In folgender Tabelle sind die Werthe für  $K$  und  $A$  zusammengestellt:

Metall	nicht gegläht		gegläht	
	K	A	K	A
Argentän . . . . .	5480	270	5480	44
Blei . . . . .	170	0	—	—
Eisen, beste Drähte . . . . .	5780	160	3000	38
„ gewöhnliche Drähte . . . . .	4160	230	2600	64
„ Claviersaiten . . . . .	5780	230	5090	64
Gold, fein . . . . .	2260	64	1380	20
Kupfer . . . . .	3400	95	2360	—
Messing, gewöhnliches . . . . .	5480	100	2870	70
„ Claviersaiten . . . . .	5030	70	3500	25
Platin . . . . .	2840	120	2210	95
Silber, fein . . . . .	2670	95	1640	20
„ 12 löthig . . . . .	4830	210	3250	100
Stahl . . . . .	8000	270	7200	38
Zink . . . . .	1350	22	—	—

### §. 56. Festigkeit zweier sich drückender runder Körper.

Zwei Körper mit krummer Oberfläche mögen mit einer Kraft  $\mathfrak{P}$  gegen einander gedrückt werden und sich dabei im Punkte C berühren. Bekanntlich stehen die beiden Normalebene einer Fläche in einem beliebigen Punkte, für welche der Krümmungsradius ein Maximum und Minimum wird, auf einander senkrecht. Die beiden Körper mögen eine solche Lage haben, dass diese beiden Ebenen in beiden Körpern zusammenfallen. Die Krümmungsradien für dieselben seien in einem Körper  $r_1$ ,  $r_2$ , im andern  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ . Ist  $r$ ,  $\rho$  der Krümmungsradius für eine Ebene OD

(Fig. 11), welche mit der ersten der beiden Ebenen den Winkel  $\varphi$  bildet, so ist

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2 \varphi}{r_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{r_2}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_2}.$$

Ist  $z_1, z_2$  der Abstand eines Punktes  $P_1, P_2$  der Oberfläche jedes Körpers in der Ebene CD von der gemeinschaftlichen Berührungsebene,  $s$  der gemeinschaftliche Abstand dieser Punkte von der gemeinschaftlichen Normale beider Körper, so ist sehr nahe  $\delta^2 = 2rz_1$ ,  $s^2 = 2\rho z_2$ , also

$$z_1 = \frac{s^2}{2r}, \quad z_2 = \frac{s^2}{2\rho}.$$

Nach der Zusammendrückung werden sich beide Körper in einer Fläche berühren. Die Zusammendrückung an den Punkten  $P_1, P_2$  sei alsdann  $\nu_1, \nu_2$  und der Normaldruck in diesen Punkten, welche jetzt zusammenfallen,  $N$ . Annähernd wird alsdann, wenn  $A_1, A_2$  Erfahrungswerthe bedeuten,

$$\nu_1 = A_1 N, \quad \nu_2 = A_2 N$$

sein. Bezeichnet noch  $\nu$  die Summe  $C_1 C_2$

der Verrückungen beider Körper, so ist  $\nu - (\nu_1 + \nu_2) = z_1 + z_2$ , d. i.

$$\nu - (A_1 + A_2) N = \frac{s^2}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Setzen wir zur Abkürzung  $A_1 + A_2 = A$ ,  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} \right) = k$ , so giebt die Reduction auf  $N$

$$28. \quad N = \frac{\nu - k s^2}{A}.$$

Im Umfange der Berührungsfläche ist  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ , also  $N = 0$ . Ist für einen Punkt im Umfange der Berührungsfläche  $s = \sigma$ , so ist  $0 = \nu - k \sigma^2$ , also

$$\nu = k \sigma^2.$$

Nach dem Obigen wird  $\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\rho_1} \right) \cos^2 \varphi + \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{\rho_2} \right) \sin^2 \varphi$ ,

oder, wenn wir  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\rho_1} = k_1$ ,  $\frac{1}{r_2} + \frac{1}{\rho_2} = k_2$  setzen,  $k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$ , mithin

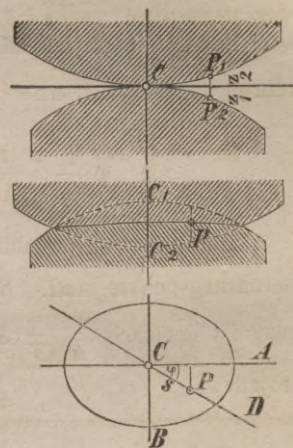
$$\nu = \sigma^2 (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi),$$

woraus leicht folgt: die Berührungsfläche ist eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a = \sqrt{\frac{\nu}{k_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{\nu}{k_2}}.$$

Die Summe aller Normaldrücke zwischen beiden Körpern ist gleich der wirksamen Kraft  $\mathcal{P}$ . Demnach ist, da das Flächendifferenzial für die gewählten Polarcoordinaten  $s d\varphi ds$  ist,

Fig. 11.



$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \int_0^{2\pi} \int_0^b N s \, d\varphi \, ds = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^b (\nu - ks^2) s \, d\varphi \, ds \\ &= \frac{1}{2\Lambda} \int_0^{2\pi} \left( \nu - \frac{1}{2} k \sigma^2 \right) \sigma^2 \, d\varphi = \frac{\nu}{2\Lambda} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sigma^2 \, d\varphi. \end{aligned}$$

Das Integral aber ist offenbar der Flächeninhalt der elliptischen Berührungsfäche, d. i.  $ab\pi = \frac{\nu\pi}{\sqrt{k_1 k_2}}$ , mithin

$$29. \quad \mathfrak{P} = \frac{\pi\nu^2}{2\Lambda\sqrt{k_1 k_2}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{2\Lambda\mathfrak{P}}{\pi}\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Der grösste Normaldruck findet für  $s = 0$ , d. i. im anfänglichen Berührungspunkte statt. Nach 28 ist derselbe  $\frac{\nu}{\Lambda}$ . Die Festigkeitsbedingung ist demnach  $\frac{\nu}{\Lambda} = \mathfrak{R}$ , d. i.

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \sqrt{\frac{2\mathfrak{P}}{\Lambda\pi}\sqrt{k_1 k_2}}, \\ \mathfrak{P} &= \frac{\Lambda\pi\mathfrak{R}^2}{2\sqrt{k_1 k_2}}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die vom Materiale abhängige Constante  $\frac{1}{2}\Lambda\pi\mathfrak{R}^2 = \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)\pi\mathfrak{R}^2$  mit  $C$  und führen für  $k_1, k_2$  wieder ihre Werthe ein, so wird

$$30. \quad \mathfrak{P} = \frac{C}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{\varrho_2}\right)}}.$$

Ist der eine Körper eine Kugel mit dem Radius  $r$ , welche eine ebene Fläche des andern berührt, so ist  $r_1 = \varrho_1 = r, r_2 = \varrho_2 = \infty$  also

$$31. \quad \mathfrak{P} = \frac{1}{2}C\sqrt{2r}.$$

Berühren sich zwei Cylinder mit den Radien  $r$  und  $\varrho$ , deren Axen sich rechtwinklig kreuzen, so wird

$$32. \quad \mathfrak{P} = C\sqrt{r\varrho}.$$

Für zwei sich berührende Cylinder mit parallelen Axen gilt die Formel nicht mehr. Es ergibt sich für diesen Fall in gleicher Weise, jedoch einfacher, weil sich die Betrachtungen in der Ebene, nämlich in einem Normalschnitte führen lassen,

$$33. \quad \mathfrak{P} = \frac{C_1 l}{\sqrt{\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}}}$$

wenn  $r$ ,  $\rho$  die beiden Krümmungsradien,  $l$  die Länge des kürzeren Cylinders,  $C_1$  einen Erfahrungscoefficient bedeuten. Zwischen  $C$  und  $C_1$  besteht die Beziehung

$$C_1^2 = C \frac{8R}{32\pi}.$$

Ist statt des einen Cylinders eine ebene Platte vorhanden, so wird

$$34. \quad \Phi = C_1 l \sqrt{r}.$$

Die Formel 32 findet z. B. Anwendung bei der Bestimmung der Beanspruchung von Eisenbahnschienen durch die Wagenräder, die Formel 34 bei den Walzenlagern eiserner Brücken u. s. w.

## VII. Kapitel.

### Schubelasticität.

**§. 57. Bedingungen.** Damit ein Körper nur auf Schubfestigkeit beansprucht werde, ist nöthig, dass auf ihn zwei Kräfte  $Q$  auf beiden Seiten einer durch denselben gelegten Ebene  $AB$  (Fig. 12) dicht neben dieser Ebene und parallel zu derselben nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Die Kräfte streben dann den Körper in dieser Ebene zu trennen.

Dieser Fall tritt besonders bei Nietverbindungen ein.

**§. 58. Spannungen.** In der Trennungsebene  $AB$  des Körpers entstehen offenbar Schubspannungen  $T$  in der Richtung der Kräfte  $Q$ . Bezeichnen wir den Flächeninhalt der Trennungsfäche mit  $F$ , so ist  $FT = Q$ , also

$$35. \quad T = \frac{Q}{F}.$$

Wir legen die Axe der  $x$  und  $y$  in die Trennungsebene und zwar die Axe der  $x$  parallel zur Richtung der Kräfte  $Q$ . Normalspannungen in Richtung dieser Axen existiren nicht. Von den Schubspannungen existirt nur diejenige, welche in der Ebene der  $xy$  parallel zur Axe der  $x$  wirkt, und die dieser gleiche Schubspannung, welche in einer zur Ebene der  $yz$  parallelen Ebene parallel zur Axe der  $z$  wirkt. Daher ist in der allgemeinen Theorie  $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ ,  $T_1 = T_2 = 0$ ,  $T_3 = T$  zu setzen. Die Gleichung 17 §. 13 zur Bestimmung der Hauptspannungen geht daher über in:

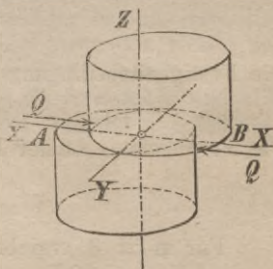
$$H(H^2 - T^2) = 0.$$

Hieraus ergeben sich als Hauptspannungen

$$36. \quad A = +T = +\frac{Q}{F}, \quad B = -T = -\frac{Q}{F}$$

und  $C = 0$ ; es existiren also zwei gleiche Hauptspannungen, von denen die eine ein Zug, die andere ein Druck ist.

Fig. 12.



Die Richtung der Hauptspannungen ist durch die Gleichungen 16 §. 13 zu bestimmen. Diese gehen über in  $H \cos \beta = 0$ ,  $H \cos \alpha = T \cos \gamma$ ; nach der ersteren ist  $\cos \beta = 0$ ,  $\beta = 90^\circ$ , so dass die Hauptspannung in der Ebene der  $xz$  wirkt. Demnach ist  $\gamma = 90^\circ - \alpha$ ,  $\cos \gamma = \sin \alpha$ , also geht die zweite Gleichung über in  $H \cos \alpha = T \sin \alpha$ ,  $\tan \alpha = \frac{H}{T}$ , d. i. weil  $H = -T$  ist,  $\tan \alpha = \pm 1$ , also

$$37. \quad \alpha = \pm 45^\circ,$$

d. h. die beiden Hauptspannungen wirken in einer auf der Trennungsebene senkrechten und auf der Richtung der Kräfte  $Q$  parallelen Ebene unter einem Winkel von  $45^\circ$  gegen die Trennungsebene.

Das Spannungsellipsoid ist hier ein Kreiscylinder. (Taf. I. Fig. 7).

**§. 59. Festigkeit.** Die idealen Hauptspannungen sind nach §. 42 bei isotropen Körpern.

$$38. \quad S_1 = +\frac{m+1}{m} T, \quad S_2 = -\frac{m+1}{m} T, \quad S_3 = 0.$$

Demnach gehen die Festigkeitsbedingungen, wenn man nur einen Bruch durch Zerreißen annimmt, über in

$$39. \quad \frac{m+1}{m} \frac{Q}{F} = K.$$

Die Festigkeitsbedingung für Abschieben ist nach §. 42  $T = K_1$ , also

$$40. \quad Q = F K_1.$$

Die Vergleichung beider Formeln giebt

$$41. \quad K_1 = \frac{m}{m+1} K.$$

Für  $m = 3$  ergibt sich  $K_1 = \frac{3}{4} K = 0,75 K$ , für  $m = 4$  aber  $K_1 = \frac{4}{5} K = 0,80 K$ , so dass  $K$  zwischen  $0,75 K$  und  $0,80 K$  liegen müsste. Für Schmiedeeisen haben Versuche in der That ergeben, dass beim Bruche (oder für einfache Sicherheit) sehr nahe

$$42. \quad K_1 = 0,8 K$$

ist. Für andere isotrope Materialien fehlt es noch an genügenden Versuchen. Für Holz sind die durch Schubversuche bestimmten Festigkeitscoefficienten für Schub in §. 43 zusammengestellt.

### III. Abschnitt.

## Biegungselasticität gerader Stäbe im Allgemeinen.

### VIII. Kapitel.

#### Bestimmung der Spannungen.

**§. 60. Die äusseren Kräfte.** Ein Körper wird nach §. 47 auf Biegungselasticität allein beansprucht, wenn nur eine Transversalkraft und ein Biegemoment, aber keine Axialkraft vorhanden ist. Wir wollen indessen in der allgemeinen Theorie voraussetzen, dass auch diese letztere vorhanden sei, so dass wir es eigentlich mit zusammengesetzter Normal- und Biegungselasticität zu thun haben.

Wir setzen voraus, dass alle äusseren Kräfte oder besser, dass die Resultanten der auf die einzelnen Scheiben (§. 45) wirkenden Kräfte in einer durch die Axe des Stabes gehenden Ebene, der Kraftebene, wirken.

Wir wählen die anfängliche Axe des Körpers als Axe der  $x$  und als Anfang der  $x$  einen beliebigen Punkt derselben. Die Axe der  $y$  legen wir in die Kraftebene, die der  $z$  also senkrecht zur Kraftebene (Fig. 13). In einem beliebigen Querschnitte (bei  $C$ ) nehmen wir die bereits in §. 47 erwähnten Axen der  $v$  und  $w$  so an, dass die Axe der  $v$  in der Kraftebene liegt, die Axe der  $w$  also auf der Kraftebene senkrecht steht.  $A$  sei dasjenige Ende des Stabes, welches von  $C$  oder vom andern Ende aus nach der Richtung der  $x$  entgegengesetzten Richtung liegt (in den Figuren stets das linke Ende, während die  $x$  nach rechts gerechnet werden). Wir führen folgende Bezeichnung ein:

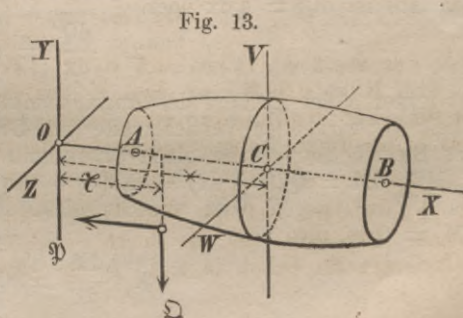


Fig. 13.

$\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  die Componenten einer der äussern isolirten Kräfte, für deren Angriffspunkt  $x = x$ ,  $y = y$  ist, nach Richtung der  $x$  und  $y$ .

$q$  eine über den Körper stetig vertheilte, in Richtung der  $y$  wirkende Kraft, pro Längeneinheit der Axe, im Punkte  $C$  (eine stetig vertheilte Last nach axialer Richtung setzen wir nicht voraus);

$P$  die Axialkraft, d. i. die Summe der Componenten der auf den Körpertheil  $AC$  wirkenden äussern Kräfte nach Richtung der Tangente der deformirten Axe in  $C$ ;

$Q$  die Transversalkraft, d. i. die Summe der Componenten dieser Kräfte nach Richtung der Axe der  $v$ ;

$M$  das Biegemoment, d. i. die Summe der Momente dieser Kräfte in Beziehung auf die Axe der  $w$ .

Was das Vorzeichen anlangt, so betrachten wir als positiv diejenigen  $\mathcal{P}$ ,  $P$ , welche der Richtung der  $x$  entgegenwirken; ferner bei Belastungen durch Gewichte nach oben gerichtete  $y$ ,  $v$ , nach unten gerichtete  $\mathcal{Q}$ ,  $Q$ ,  $q$  und den Körpertheil  $AC$  nach unten drehende oder nach oben convex krümmende Momente  $M$ .

Vor der Formänderung ist alsdann

$$1. \quad \begin{cases} P = \Sigma \mathcal{P}, & Q = \Sigma \mathcal{Q} + \int q \, dx, \\ M = \Sigma \mathcal{Q} (x - r) - \Sigma \mathcal{P} y + \int q (x - r) \, dx, \end{cases}$$

wobei die durch  $\Sigma$  und  $\int$  angedeutete Summirung auf den ganzen Körpertheil  $AC$  zu erstrecken ist.

Wenn sich der Körper durch Wirkung der äusseren Kräfte deformirt, so nehmen  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  allerdings etwas andere Werthe an; ja es kann sogar eine in Richtung der Axe der  $u$  wirkende Transversalkraft  $Q'$ , ein Biegemoment  $M'$  in Beziehung auf die Axe der  $v$  und ein Torsionsmoment  $M''$  entstehen. Wir setzen aber voraus, dass die Formänderung so klein sei, dass man die Werthe von  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  nach der Formänderung eben so gross annehmen könne, als vor derselben und dass die erwähnten neuen Grössen  $Q'$ ,  $M'$ ,  $M''$  zu vernachlässigen sind. Diejenigen Fälle, in welchen dies nicht zulässig ist, werden wir besonders behandeln.

**§. 61. Beziehungen zwischen  $q$ ,  $Q$ ,  $M$ .** Für einen Querschnitt mit der Abscisse  $x + dx$  ist die Transversalkraft nach 1:

$$Q + dQ = \Sigma \mathcal{Q} + \int q \, dx + q \, dx = Q + q \, dx,$$

demnach ist  $dQ = q \, dx$  oder

$$2. \quad \frac{dQ}{dx} = q.$$

Ist ferner  $a$  der Abstand des Angriffspunktes der Mittelkraft aller auf den Theil  $AC$  wirkenden Verticalkräfte von  $C$ , so ist  $M = Qa - \Sigma \mathcal{P} y$  und das Biegemoment für einen Querschnitt mit der Abscisse  $x + dx$

$$M + dM = Q(a + dx) - \Sigma \mathcal{P} y + \frac{1}{2} q \, dx^2 = M + Q \, dx + \frac{1}{2} q \, dx^2.$$

Da  $\frac{1}{2} q \, dx^2$  gegen  $Q \, dx$  verschwindet, so ist  $M + dM = M + Q \, dx$ ,  $dM = Q \, dx$ , also

$$3. \quad \frac{dM}{dx} = Q,$$

$$4. \quad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q.$$

Demnach ist der Differenzialquotient der Transversalkraft gleich der Last pro Längeneinheit und der Differenzialquotient des Biegemomentes gleich der Transversalkraft.

Aus 3 folgt, dass  $M$  für denjenigen Querschnitt zum Maximum wird, für welchen  $Q = 0$  wird.

Sind nur isolirte Lasten vorhanden, so ist  $q = 0$ . Nach 4 wird daher, wenn  $a$  und  $b$  Constante bezeichnen,

$$Q = a, \quad M = ax + b.$$

$Q$  ist also constant und  $M$  in Beziehung auf  $x$  linear. An jedem Querschnitte, in welchem eine isolirte Last wirkt, ändert sich natürlich der Ausdruck für  $Q$  und  $M$ .

Ist ausser den isolirten Lasten eine stetig vertheilte constante Last  $q$  oder, wie wir uns in der Folge ausdrücken wollen, eine gleichmässige vertheilte Last  $q$  vorhanden, so wird nach 4:

$$Q = qx + a, \quad M = \frac{1}{2}qx^2 + ax + b.$$

Hier ist also in Beziehung auf  $x$   $Q$  linear und  $M$  vom zweiten Grade. In der graphischen Darstellung würde  $Q$  durch eine Gerade,  $M$  durch eine Parabel repräsentirt.

**§. 62. Spannungen.** Von den Normalspannungen  $N_1, N_2, N_3$  wirkt  $N_1$  in der Richtung der Axe oder der Fasern des Körpers, wir nennen daher  $N_1$  die Faserspannung.  $N_1$  entsteht durch die Längenänderung der Fasern in Folge der Kraft  $P$  und der durch das Biegemoment erzeugten Krümmung des Stabes. Die Normalspannung  $N_2$  aber entsteht durch direkte Zusammendrückung des Stabes in der Querrichtung durch die auf ihm ruhende Last. Es ist hier nach leicht einzusehen und wir werden es später genauer nachweisen, dass  $N_2$  gegen  $N_1$  nur klein sein kann. Da seitliche oder in Richtung der  $z$  wirkende äussere Kräfte nicht vorhanden sind, so wird nahezu  $N_2 = 0$  sein. Wir werden daher von den Normalspannungen nur die Faserspannung  $N_1$  berücksichtigen und darum  $N$  für  $N_1$  setzen.

Von den Schubspannungen wirken  $T_2, T_3$  in der Ebene des Querschnittes parallel zu den Axen der  $u$  und  $v$  und in Ebenen, welche parallel den Ebenen der  $xy$  und  $xz$  sind, parallel zur Axe der  $x$  (Fig. 14).  $T_1$  wirkt in den Ebenen, welche parallel zu den Ebenen der  $xz$  und  $xy$  sind, bezüglich parallel der Axe der  $z$  und  $y$ . Die letztere Schubspannung strebt den Körper in einer zur Ebene der  $xy$  parallelen Ebene zu trennen und die beiden Theile in Richtung der  $y$  über einander zu verschieben. Jedenfalls aber ist die Tendenz zu dieser Trennung nicht vorhanden oder doch so gering, dass wir auch  $T_1$  vernachlässigen können.

Wir haben es daher nur mit den Spannungen

$$N, T_3, T_2$$

zu thun.

### §. 63. Gleichgewicht der inneren und äusseren Kräfte.

Denken wir uns den Körper durch den Querschnitt  $C$  (Fig. 13) getrennt, so wirken auf das Stück  $AC$  am Querschnitte die Spannungen  $N, T_3, T_2$  und an andern Stellen die Kräfte  $P, Q$ . Wenn der Körper seine Ruheform angenommen hat, so befinden sich diese Kräfte im Gleichgewichte. Die Gleichgewichtsbedingungen sind, wenn  $df$  das Flächendifferenzial  $du dv$  bedeutet (Fig. 15):

$$5. \int N df = P, \quad \int T_3 df = Q, \quad \int T_2 df = 0,$$

$$6. \int N v df = M, \quad \int N w df = 0,$$

Fig. 14.

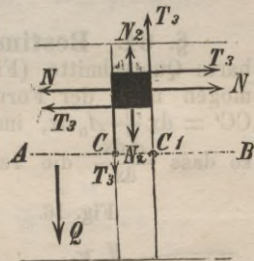
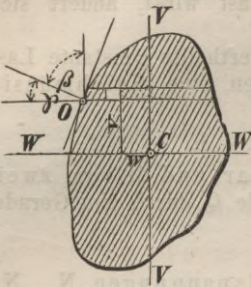


Fig. 15.



wobei die Integration über die Ausdehnung des ganzen Querschnittes zu erstrecken ist.

Bezeichnen wir den Druck, welcher im beliebigen Punkte O der Oberfläche senkrecht zur Oberfläche stattfindet, mit R, die Richtungswinkel der Normale der Oberfläche in O mit  $\alpha, \beta, \gamma$  und die in O wirksamen Spannungen mit  $N', T_3', T_2'$ , so ist nach der ersten der Gleichungen 4 (§. 10):

$$R \cos \alpha = N' \cos \alpha + T_3' \cos \beta + T_2' \cos \gamma.$$

Ändert sich der Querschnitt nur sehr wenig mit x, so ist nahezu  $\alpha = 90^\circ$ , also nahezu  $\cos \alpha = 0$ , folglich

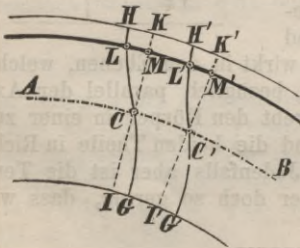
$$7. T_3' \cos \beta = - T_2' \cos \gamma.$$

Die zweite und dritte der Gleichungen 4 (§. 10) geben wegen der Vernachlässigung von  $N_2, N_3, T_1$  Ungereimtes.

Früher vernachlässigte man die Schubspannungen  $T_3, T_2$ . Die zweite der Gleichungen 5, welche streng richtig ist, zeigt, dass  $T_3$  existiren müsse und nach 7 muss dann auch  $T_2$  existiren.

**§. 64. Bestimmung der Faserspannung N.** Zwei benachbarte Querschnitte (Fig. 16), welche anfänglich den Abstand dx haben, mögen nach der Formänderung in der Axe des Körpers den Abstand  $CC' = dx + \Delta dx$ , im Punkte vw den Abstand  $LL' = dx + \Delta dx$  haben, so dass  $\frac{\Delta dx}{dx}$  die relative Längenänderung einer beliebigen Faser ist,

Fig. 16.



welche durch den Punkt vw des Querschnittes geht.

Bei der Formänderung bleiben die Querschnitte im Allgemeinen nicht eben; sie mögen die Form GCH, G'C'H' annehmen. Es seien ferner IK, I'K' Ebenen, welche durch die Schwerpunkte C, C' der beiden Querschnitte gehen und auf der deformirten Axe AB senkrecht stehen. Wenn N, M' die Durchschnitte dieser Ebenen mit der fraglichen Faser sind, so ist

$$LL' = MM' + LM - L'M'.$$

Die Abstände LM, L'M' der Querschnitte von den Normalebene sind, wie wir später noch genauer nachweisen werden, so wenig von einander verschieden, dass wir sie als gleich annehmen können. Daher ist sehr nahe

$$dx + \Delta dx = LL' = MM',$$

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{MM'}{dx} - 1.$$

Die Faserspannung N ist daher

$$N = E \frac{\Delta dx}{dx} = E \left( \frac{MM'}{dx} - 1 \right).$$

MM' ändert sich mit v und w; da MM' der Abstand zweier Ebenen

ist, so ist  $MM'$  in Beziehung auf  $u$  und  $v$  vom ersten Grade. Dasselbe gilt also auch von  $M$ . Wir können daher setzen:

$$8. N = a + bv + cw,$$

wenn  $a, b, c$  noch näher zu bestimmende Constanten bedeuten. Die Substitution dieses Ausdruckes in die erste der Gleichungen 5 und in die Gleichungen 6 giebt

$$\begin{cases} a \int df + b \int v df + c \int w df = P, \\ a \int v df + b \int v^2 df + c \int v w df = M, \\ a \int w df + b \int v w df + c \int w^2 df = 0. \end{cases}$$

Da die Axen der  $u$  und  $v$  durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen, so ist

$$\int v df = 0, \quad \int w df = 0.$$

Das Integral  $\int df$  ist die Gesamtfläche des Querschnittes, welche wir mit  $F$  bezeichnen. Die Integrale  $\int v^2 df$ ,  $\int w^2 df$  sind die Trägheitsmomente des Querschnittes in Beziehung auf die Axen der  $w$  und  $v$ , welche wir mit  $W, W'$  bezeichnen. Das Integral  $\int v w df$  bezeichnen wir mit  $V$ . Sonach ist

$$9. F = \int f df, \quad W = \int v^2 df, \quad W' = \int w^2 df, \quad V = \int v w df.$$

Die obigen Gleichungen gehen dadurch über in

$$\begin{cases} aF = P, \\ bW + cV = M, \\ bV + cW' = 0. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

$$10. a = \frac{P}{F}, \quad b = \frac{W'M}{W W' - V^2}, \quad c = -\frac{V M}{W W' - V^2}$$

und folglich nach 8

$$11. N = \frac{P}{F} + \frac{M(W'v - Vw)}{W W' - V^2}.$$

Hiernach besteht die Fassungsspannung  $N$  aus zwei Theilen, von denen der eine der Axialkraft  $P$ , der andere dem Biegemomente  $M$  proportional ist.

### §. 65. Allgemeine Eigenschaften der Grössen $W, W', V$ .

Bevor wir in der Theorie der Spannungen weiter gehen, wird es nöthig, einige Eigenschaften der Querschnittsgrössen  $W, W', V$  zu entwickeln, wozu zunächst eine Transformation nöthig wird. Bezeichnen wir für ein Coordinatensystem  $v, w$  mit demselben Centrum die Werthe von  $W, W', V$  mit  $W_1, W_1', V_1$ , so ist

$$W_1 = \int v_1^2 df, \quad W_1' = \int w_1^2 df, \quad V_1 = \int v_1 w_1 df.$$

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die Axen der  $v_1, w_1$  mit den Axen der  $v, w$  bilden, mit  $\alpha$ , so ist

$$\begin{aligned} v_1 &= v \cos \alpha - w \sin \alpha, \\ w_1 &= v \sin \alpha + w \cos \alpha, \end{aligned}$$

daher wird

$$\begin{aligned} W_1 &= \int (v^2 \cos^2 \alpha - 2vw \sin \alpha \cos \alpha + w^2 \sin^2 \alpha) df, \\ W_1' &= \int (v^2 \sin^2 \alpha + 2vw \sin \alpha \cos \alpha + w^2 \cos^2 \alpha) df, \\ V_1 &= \int (v^2 \sin 2\alpha + 2vw \cos 2\alpha - w^2 \sin 2\alpha) df. \end{aligned}$$

d. i.

$$12. \begin{cases} W_1 = W \cos^2 \alpha - V \sin 2\alpha + W' \sin^2 \alpha, \\ W_1' = W \sin^2 \alpha + V \sin 2\alpha + W' \cos^2 \alpha, \\ V_1 = \frac{1}{2} (W - W') \sin 2\alpha + V \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Hauptaxen. Die Differentiation von  $W_1$  nach  $\alpha$  giebt

$$13. \frac{dW_1}{d\alpha} = (W' - W) \sin 2\alpha - 2V \cos 2\alpha$$

und hiernach wird  $W_1$  zum Maximum oder Minimum, wenn  $(W' - W) \sin 2\alpha = 2V \cos \alpha$  oder

$$14. \tan 2\alpha = \frac{2V}{W' - W}$$

ist. Dieser Gleichung entsprechen zwei Werthe von  $\alpha$ , welche um  $90^\circ$  von einander abweichen. Die nochmalige Differentiation giebt

$$\frac{d^2W_1}{d\alpha^2} = 2(W' - W) \cos 2\alpha + 4V \sin 2\alpha;$$

setzt man  $90^\circ + \alpha$  für  $\alpha$ , so wird

$$\frac{d^2W_1}{d\alpha^2} = -2(W' - W) \cos 2\alpha - 4V \sin 2\alpha.$$

Die zweiten Differenzialquotienten, welche den beiden Werthen von  $\alpha$  entsprechen, haben also entgegengesetzte Vorzeichen, dem einem Werthe von  $\alpha$  entspricht also ein Maximum, dem anderen ein Minimum. Hieraus folgt:

Bei jedem Querschnitte existiren zwei auf einander senkrechte Schweraxen, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum und ein Minimum wird.

Man nennt diese Axen die Hauptaxen des Querschnittes und die entsprechenden Trägheitsmomente die Hauptträgheitsmomente.

Aus 12 und 13 folgt:

$$15. V_1 = -\frac{1}{2} \frac{dW_1}{d\alpha}.$$

Hiernach wird  $V_1 = 0$ , wenn  $W_1$  zum Maximum oder Minimum wird, d. h. für die Hauptaxen des Querschnittes ist  $V = 0$ .

Umgekehrt folgt aus 15, dass  $W_1$  zum Maximum oder Minimum wird, wenn  $V = 0$  ist, d. h. Axen, für welche  $V = 0$  ist, sind Hauptaxen. Ist eine der Axen der  $v$  und  $w$  Symmetrieaxe, so ist offenbar  $V = 0$ . Jede Symmetrieaxe ist also Hauptaxe.

Nehmen wir die Hauptaxen des Querschnittes als Axen der  $v$  und  $w$  an und bezeichnen die Hauptträgheitsmomente mit  $W_0, W_0'$ , so ist nach 12:

$$16. \begin{cases} W_1 = W_0 \cos^2 \alpha + W_0' \sin^2 \alpha, \\ W_1' = W_0 \sin^2 \alpha + W_0' \cos^2 \alpha, \\ V_1 = \frac{1}{2} (W_0 - W_0') \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Die Addition der beiden ersten Gleichungen giebt  $W_1 + W_1' = W_0 + W_0'$ , die Summe der Trägheitsmomente für zwei auf einander senkrechte Axen ist also constant.

$V$  wird zum Maximum, wenn  $\sin 2\alpha = 1$ , also  $\alpha = 45^\circ$  oder  $135^\circ$  ist, d. h.  $V$  wird zum Maximum für zwei Axen, welche den Win-

kel zwischen den Hauptaxen halbiren. Das Maximum  $V_0$  von  $V_1$  ist:

$$17. V_0 = \frac{1}{2}(W_0 - W_0').$$

Ist  $W_0 = W_0'$ , so wird für jede Lage der Axe  $V_1 = 0$  und  $W_1 = W_1'$ , d. h. Sind die Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ist für alle Lagen der Axe  $V = 0$  und das Trägheitsmoment constant.

In dem Ausdrücke 11 für die Faserspannung kommt der Werth  $WW' - V^2$  vor; aus 16 ergibt sich  $W_1W_1' - V_1^2 = (W_0 \cos^2\alpha + W_0' \sin^2\alpha)(W_0 \sin^2\alpha + W_0' \cos^2\alpha) - (W_0 - W_0') \sin^2\alpha \cos^2\alpha$ , d. i.

$$18. W_1W_1' - V_1^2 = W_0W_0'.$$

Demnach ist  $WW' - V^2$  für alle Lagen der Axen constant.

Ist für irgend eine Lage der Axe  $W_1 = W_0$ , so wird nach 16  $W_0 = W_0 \cos^2\alpha + W_0' \sin^2\alpha$ , d. i.  $W_0 \sin^2\alpha = W_0' \sin^2\alpha$ , also  $W_0 = W_0'$ , mithin  $W_1$  constant, d. h. Ist für zwei Axen, von denen nur die eine Hauptaxe ist, das Trägheitsmoment gleich gross, so ist dasselbe überhaupt für alle Axen gleich gross.

Hiernach würde das Trägheitsmoment bei allen Querschnitten, welche in Beziehung auf zwei beliebige recht- oder schiefwinklige Axen congruente Symmetrie besitzen, z. B. bei allen regelmässigen Vielecken, regelmässigen sternförmigen Figuren u. s. w. constant sein.

Graphische Darstellung. Auf allen durch das Centrum gehenden Axen tragen wir vom Centrum aus die reciproken Quadratwurzeln der diesen Axen entsprechenden Trägheitsmomente, also  $\frac{1}{\sqrt{W_1}}$  auf und verbinden die so erhaltenen Punkte durch eine Curve. Bezeichnen wir die Coordinaten eines Punktes derselben in Beziehung auf die Hauptaxen mit  $x, y$  und setzen  $\frac{1}{\sqrt{W_1}} = r$ ,  $\frac{1}{\sqrt{W_0}} = m$ ,  $\frac{1}{\sqrt{W_0'}} = n$ , so ist nach 16, da  $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ ,  $\sin\alpha = \frac{y}{r}$  ist,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{t}{m^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{n^2} \frac{y^2}{r^2}$$

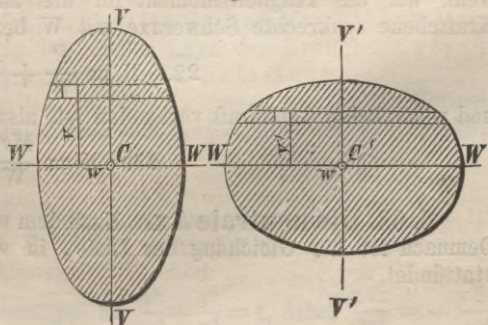
d. i.

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1.$$

Diese Curve ist also eine Ellipse mit den Halbaxen  $m, n$ . Man nennt dieselbe Centraellipse oder Trägheitsellipse.

**§. 66. Proportionale Querschnitte.** Unter zwei proportionalen Querschnitten verstehen wir solche, bei welchen sowohl die Abscissen, als die Ordinaten entsprechender Punkte des Umfanges in beiden Querschnitten dasselbe Verhältniss haben, wobei jedoch das Verhältniss zwischen den Ordinaten ein anderes sein kann, als das zwischen den Abscissen (Fig. 17). So sind z. B. alle Rechtecke, alle gleichschenklige Dreiecke, alle Ellipsen etc. proportionale Querschnitte. Aehnliche Querschnitte sind zugleich proportional.

Fig. 17.



Bezeichnen wir die Abscissen und Ordinaten zweier proportionalen Querschnitte mit  $v, w$  und  $v_1, w_1$ , und die Breiten und Höhen oder irgend zwei entsprechende Dimensionen in Richtung der  $u$  und  $v$  mit  $b, h$  und

$b_1, h_1$ , so ist  $v_1 = \frac{h_1}{h} v, w_1 = \frac{b_1}{b} w$ , mithin

$$F = \iint dv dw, \quad F_1 = \iint dv_1 dw_1 = \frac{b_1 h_1}{bh} \iint dv dw,$$

$$W = \iint v^2 dv dw, \quad W_1 = \iint v_1^2 dv_1 dw_1 = \frac{b_1 h_1^3}{b h^3} \iint v^2 dv dw,$$

mithin

$$19. \quad \frac{F_1}{F} = \frac{b_1 h_1}{b h}, \quad \frac{W_1}{W} = \frac{b_1 h_1^3}{b h^3},$$

d. h. Bei proportionalen Querschnitten verhalten sich die Flächen, wie die Produkte aus Breite und Höhe und die Trägheitsmomente, wie die Produkte aus Breite und dritter Potenz der Höhe.

**§. 67. Wahl der Hauptaxen als Axen der  $v, w$ .** Jede äussere Kraft lässt sich in zwei Componenten zerlegen, welche in Richtung der Hauptaxen wirken. Ist  $\alpha$  der Neigungswinkel der Kraftebene mit der einen Hauptaxe, die wir als Axe der  $v$  wählen, so erhält man die Componenten durch Multiplication der äusseren Kraft mit  $\cos \alpha, \sin \alpha$ . Ist daher wie früher,  $M$  das Moment der äusseren Kräfte in Beziehung auf die zur Kraftebene senkrechte Schweraxe des Querschnittes, so sind die Momente  $M_1, M_2$  in Beziehung auf die Hauptaxen des Querschnittes

$$20. \quad M_1 = M \cos \alpha, \quad M_2 = M \sin \alpha.$$

Wie in §. 64 können wir  $N = a + bv + cw$  setzen. Die Constanten  $a, b, c$  sind durch die Bedingungen zu bestimmen, dass die Summe der Spannungen in axialer Richtung  $= P$  und die Summe der Momente der Spannungen in Beziehung auf die Axen der  $v, w = M_1, M_2$  ist. Wie in §. 64 ergibt sich, wenn man  $M_1$  für  $M, M_2$  für  $0$  setzt und beachtet, dass  $\int v^2 df = W_0, \int w^2 df = W_0', \int v w df = 0$  ist,

$$a = \frac{P}{F}, \quad b = \frac{M_1}{W_0} = \frac{M}{W_0} \cos \alpha, \quad c = \frac{M_2}{W_0'} = \frac{M}{W_0'} \sin \alpha,$$

also

$$21. \quad N = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{W_0} \cos \alpha + \frac{Mw}{W_0'} \sin \alpha.$$

In den meisten Fällen der Praxis liegt eine Hauptaxe des Querschnittes in der Kraftebene. Alsdann ist  $\cos \alpha = 1, \sin \alpha = 0$ , mithin, wenn wir das Trägheitsmoment für die andere, oder für die auf der Kraftebene senkrechte Schweraxe mit  $W$  bezeichnen,

$$22. \quad N = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{W}$$

und wenn keine Axialkraft vorhanden ist, also für reine Biegungselasticität,

$$23. \quad N = \frac{Mv}{W}$$

**§. 68. Die neutrale Axe.** Nach dem vorigen §. ist  $N = a + bv + cw$ . Demnach ist die Gleichung der Linie, in welcher keine Faserspannung stattfindet,

$$a + bv + cw = 0.$$

Man nennt diese Gerade die neutrale Axe und die Fläche, welche die neutralen Axen aller Querschnitte enthält, die neutrale Schicht. Auf der einen Seite derselben finden positive, auf der andern negative Spannungen statt oder die Fasern werden auf der einen Seite der neutralen Axe ausgedehnt, auf der andern zusammengedrückt. In einer Geraden, welche der neutralen Axe parallel ist, ist die Spannung  $N$  constant; dieselbe ändert sich proportional der Entfernung von der neutralen Axe. Die grösste Faserspannung findet daher in den Punkten statt, in welchen der Querschnitt von zwei zur neutralen Axe parallelen Geraden berührt wird.

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die neutrale Axe mit der Axe der  $w$  bildet, mit  $\varphi$  und den Abstand derselben vom Schwerpunkte mit  $d$ , so ist die Gleichung der neutralen Axe  $d - v \cos \varphi + w \sin \varphi = 0$ . Die Vergleichung mit der Gleichung  $a + bv + cw = 0$  giebt  $\frac{\sin \varphi}{d} = \frac{c}{a}$ ,  $\frac{\cos \varphi}{d} = -\frac{a}{b}$  und hieraus folgt  $\tan \varphi = -\frac{c}{b}$ ,  $d = \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ , d. i.

nach §. 67.

$$23 \text{ a. } \tan \varphi = -\frac{M_2 W_0}{M_1 W_0'} = \frac{W_0}{W_0'} \tan \alpha, \quad d = \frac{P}{F \sqrt{\frac{M_1^2}{W_0'^2} + \frac{M_2^2}{W_0^2}}}$$

Ist  $P = 0$ , so wird  $d = 0$ , d. h. Wenn keine Axialkraft vorhanden, so geht die neutrale Axe durch den Schwerpunkt des Querschnittes.

Die Krümmungsebene einer Curve im Raume steht bekanntlich senkrecht auf der Durchschnittslinie zweier unendlich nahen Normalebene. Nun aber ist die Durchschnittslinie zweier unendlich nahen Normalebene der deformirten Axe eine von jenen parallelen Linien, in welchen der Abstand der Normalebene constant ist, zu denen auch die neutrale Axe gehört. Die Krümmungsebene der deformirten Axe steht demnach auf der neutralen Axe senkrecht.

Wenn die Axe des Stabes bei der Formänderung in der Kraftebene bleiben soll, oder, was dasselbe ist, wenn die Krümmungsebene der deformirten Axe mit der Kraftebene zusammenfallen soll, so muss die neutrale Axe auf der Kraftebene senkrecht stehen, oder es muss  $\varphi = 0$  sein. Dies tritt nach 23 a. nur ein, wenn  $\alpha = 0$  ist, d. h. Die Axe des Stabes bleibt bei der Formänderung nur in der Kraftebene, wenn eine Hauptaxe sämmtlicher Querschnitte in der Kraftebene liegt.

Wir nennen die Belastung bei dieser Lage der Kraftebene gerade Belastung; jede andere Belastung schiefe Belastung.

Bei gerader Belastung gelten für die Faserspannung  $N$  die Formeln 22, 23. Der Abstand der neutralen Axe vom Schwerpunkte wird nach 23a:

$$23 \text{ b. } d = \frac{P W}{M F}.$$

In der Folge werden wir, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist, stets voraussetzen, dass gerade Belastung vorhanden sei, weil gerade dieser Fall in der Praxis fast ausschliesslich vorkommt.

Die Gleichung der Trägheitsellipse ist  $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ , daher  $\frac{x dx}{m^2} = -\frac{y dy}{n^2}$

oder  $\frac{dy}{dx} = -\frac{n^2 x}{m^2 y}$ . Für den Punkt der Trägheitsellipse, in welchem derselbe von der Kraftebene geschnitten wird, ist  $\frac{x}{y} = \tan \varphi$ , also  $\frac{dy}{dx} = -\frac{n^2}{m^2} \tan \varphi = -\frac{W_0}{W_1} \tan \alpha = \tan \varphi$ . Die Tangente an die Trägheitsellipse im Durchschnittspunkte derselben mit der Kraftebene ist also der neutralen Axe parallel oder die neutrale Axe und die Durchschnittslinie des Querschnittes mit der Kraftebene sind conjugirte Durchmesser der Trägheitsellipse.

**§. 69. Schubspannung in irgend einer zur Axe des Körpers parallelen Ebene.** Die genaue allgemeine Bestimmung der Schubspannungen ist mit grossen Schwierigkeiten verknüpft. Die Bestimmung gelingt aber, wenn man die Annahme macht, dass die in einer Ebene  $ABB'A'$ , welche durch eine Sehne  $AB$  (Fig. 18) des Querschnittes parallel zur Axe des Stabes gelegt wird, parallel zur Axe des Stabes wirkende Schubspannung in der ganzen Länge der Sehne  $AB$  constant ist. Unter gewissen Umständen, die wir noch näher bezeichnen werden, ist diese Annahme erlaubt.

Es bezeichne nun:  $T_3'$  die in der Ebene  $ABB'A'$  parallel zur Axe der  $x$  wirkende Schubspannung;  $b$  die Länge der Sehne  $AB$ .

Die Ebene  $ABB'A'$  schneidet von der zwischen zwei Querschnitten erhaltenen Scheibe von der Dicke  $dx$  ein Stück  $AEB A'E'B'$  ab, auf welches in Richtung der  $x$  folgende Kräfte wirken:

1. Die Summe der in der Fläche  $ABB'A'$  wirkenden Schubspannungen  $= -T_3' b dx$ .

2. Auf die Fläche  $AEB$  wirkt die Kraft  $\int N df$ , wobei sich das Integral auf die Ausdehnung der Fläche  $AEB$  bezieht. Setzen wir für  $N$  den Ausdruck 22 (§. 67), so wird diese Kraft

$$\frac{P}{F} \int df + \frac{M}{W} \int v df = \frac{P\Theta}{F} + \frac{M\Omega}{W},$$

wenn wir den Flächeninhalt  $\int df$  des Abschnittes  $AEB$  mit  $\Theta$  und das statische Moment  $\int v df$  desselben in Beziehung auf die Axe der  $u$  mit  $\Omega$  bezeichnen. Die Resultante der auf die beiden Flächen  $AEB$  und  $A'E'B'$  wirkenden Kräfte, d. i. die Differenz dieser Kräfte ist

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{P\Theta}{F} dx + \frac{\partial}{\partial x} \frac{M\Omega}{W} dx.$$

3. Es kann ausserdem noch eine Kraft auf die Masse des abgeschnittenen Stückes wirken. Die Kraft, welche auf die ganze Scheibe in Richtung der  $x$  wirkt, ist  $-dP$  (—, wegen des in §. 60 angegebenen Vorzeichens von  $P$ ). Setzen wir eine gleichmässige Vertheilung dieser Kraft über die ganze Scheibe voraus, so wirkt auf das abgeschnittene Stück die Kraft  $-\frac{\Theta}{F} dP$ .

Setzt man die Summe aller dieser Kräfte der Null gleich, so ergibt sich

$$T_3' b = \frac{\partial}{\partial x} \frac{P\Theta}{F} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{M\Omega}{W} - \frac{\Theta}{F} \frac{dP}{dx}.$$

Beachtet man, dass

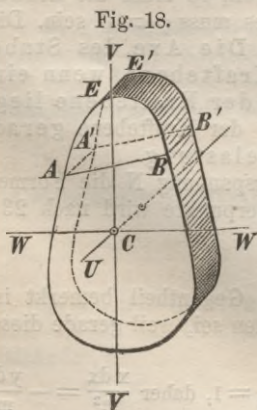


Fig. 18.



$$- \left[ \frac{Q}{W} v_0 (w - \omega) - \frac{\omega}{w} \frac{\partial w}{\partial v} T_3 \right] dv dx.$$

3. Auf die Fläche HBGI wirkt die Kraft  $dv \int_{\omega}^w N d\omega$ . Bezeichnen wir den Winkel, welchen AB mit der Axe der  $w$  bildet, mit  $\alpha$ , so ist nach 22 (§. 67)  $N = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{W} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} (v_0 + \omega \sin \alpha)$ , mithin

$$dv \int_{\omega}^w N d\omega = \left( \frac{P}{F} + \frac{M v_0}{W} \right) (w - \omega) + \frac{M}{2W} (w^2 - \omega^2) \sin \alpha.$$

Demnach ergibt sich als Resultante der auf die Flächen HBGI und H'B'G'T' wirkenden Kräfte, d. i. als Differenz dieser Kräfte, durch Differentiation nach  $x$  unter der Voraussetzung, dass sich der Querschnitt mit  $x$  nur wenig ändert und mit Beachtung von 3 (§. 61):

$$\left[ \left( \frac{1}{F} \frac{dP}{dx} + \frac{Q v_0}{W} \right) (w - \omega) + \frac{Q}{2W} (w^2 - \omega^2) \sin \alpha \right] dv dx.$$

4. Als Kraft, welche auf die Masse des Elementes wirkt, ergibt sich, wie im vorigen Paragraph,  $-\frac{(w - \omega) dv}{F} dP$ .

Setzt man die Summe dieser vier Kräfte der Null gleich, so heben sich mehrere Glieder und es ergibt sich

$$26. T_2' = T_3' \frac{\omega}{w} \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{Q}{2W} (w^2 - \omega^2) \sin \alpha.$$

Aus 25 und 26 folgt, dass die Schubspannungen der Transversalkraft  $Q$  proportional sind.

**§. 71. Schubspannungen für das ursprüngliche Coordinatensystem.** Wenn die Sehne AB in §. 69 und 70 parallel zur Axe der  $w$  gelegt wird oder wenn  $\alpha = 0$  ist, so wird nach 25 und 26, da jetzt  $T_3$  für  $T_3'$ ,  $T_2$  für  $T_2'$  und  $v$ ,  $w$  für  $v$ ,  $\omega$  zu setzen ist,

$$27. T_3 = \frac{Q\Omega}{Wb}, \quad T_2 = T_3 \frac{w}{b} \frac{\partial b}{\partial v},$$

und zwar unter der Annahme, dass  $T_3$  für alle Punkte der Sehne AB gleich gross ist. Beim rechteckigen Querschnitte ist diese Annahme offenbar fast ganz richtig. Hier ist  $\frac{\partial b}{\partial v} = 0$ , also auch  $T_2 = 0$ . Ändert sich aber  $b$  mit  $v$  sehr schnell, oder ist  $\frac{\partial b}{\partial v}$  sehr gross, so würde  $T_2$  gegen  $T_3$  sehr gross sein und für  $\frac{\partial b}{\partial v} = \infty$  würde auch  $T_2 = \infty$  werden, was aber unnatürlich ist. Es lässt sich daher erwarten, dass die gemachte Annahme um so richtiger ist, je weniger sich  $b$  mit  $v$  ändert oder je kleiner  $\frac{\partial b}{\partial v}$  ist.

Für das grösste positive  $v$  verschwindet der Abschnitt AEB; hier ist also  $\Omega = 0$ , mithin  $T_3 = 0$ . Für das grösste negative  $v$  geht der Abschnitt AEB in den ganzen Querschnitt über; das statische Moment  $\Omega$  desselben für die Axe der  $w$  ist aber ebenfalls Null, also ist auch hier  $T_3 = 0$ .

$T_2$  ist in der Mitte der Sehne AB Null und nimmt von hier aus nach den Enden der Sehne hin zu. An letzteren oder am Umfange des

Querschnittes ist  $T_2 = \frac{1}{2} T_3 \frac{\partial b}{\partial v}$ , was auch der Gleichgewichtsbedingung 7 (§. 63) entspricht.

**§. 72. Fortsetzung.** Manche Querschnitte haben seitliche Ansätze, deren Breite in Richtung der Axe der  $v$  sehr gering ist, wie der I und Tförmige Querschnitt, der der Eisenbahnschienen u. s. w. Hier lässt sich annehmen, dass  $T_2$  in einer zur Axe der  $v$  parallelen Sehne AB (Fig. 20) nahezu constant sein wird. In diesem Falle ist in Formel 25 und 26  $T_3' = T_2$ ,  $T_2' = T_3$ ,  $\sin \alpha = 1$ ,  $v = w$  zu setzen. Demnach wird

$$T_2 = \frac{Q \Omega}{W b}, \quad T_3 = T_2 \frac{\omega}{b} \frac{\partial b}{\partial w} + \frac{Q (w^2 - \omega^2)}{2 W}$$

oder, weil  $\omega = v - v_0$ ,  $w = \frac{1}{2} b$  ist,

$$28. \quad T_2 = \frac{Q \Omega}{W b}, \quad T_3 = T_2 \frac{v - v_0}{b} \frac{\partial b}{\partial w} + \frac{Q [b^2 - 4 (v - v_0)^2]}{8 W}$$

Hier wird  $T_2$  für das grösste positive und negative  $w$  gleich Null.

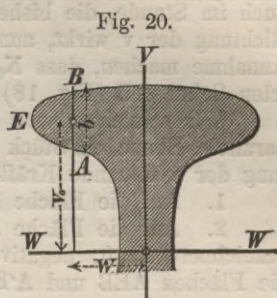


Fig. 20.

**§. 73. Summe der Schubspannungen in einem Querschnitte.** Von Wichtigkeit für die Folge ist es, die Summe der in Richtung der  $v$  auf einen Abschnitt AEB (Fig. 18) wirkenden Schubspannungen  $T_3$  kennen zu lernen. Wir legen hierbei die Sehne AB der Axe der  $w$  parallel und bezeichnen die Summe der in AEB wirkenden  $T_3$  mit  $\Sigma T_3$ . Die auf ein Flächenelement von der Breite  $dv$  wirkende Kraft ist  $T_3 b dv$ , d. i. nach 27  $= \frac{Q \Omega}{W} dv$ , mithin ist

$$\Sigma T_3 = \frac{Q}{W} \int_v^{\max v} \Omega dv$$

Bekanntlich aber ist  $\int_a^b f(x) dx = x f(x) - \int x df(x)$ , also

$$\int_a^b f(x) dx = b f(b) - a f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} x df(x)$$

Setzen wir  $x = v$ ,  $f(x) = \Omega$ ,  $a = v$ ,  $b = \max v$ , so wird, indem wir beachten, dass für  $v = \max v$   $\Omega = 0$  wird, also  $f(a) = \Omega$ ,  $f(b) = 0$  ist,

$$\int_v^{\max v} \Omega dv = -v \Omega - \int_{\Omega}^0 v d\Omega$$

Nun aber ist  $d\Omega = -b v dv$  (vergl. §. 70), mithin

$$\int_v^{\max v} \Omega dv = -v \Omega + \int_v^{\max v} b v^2 dv$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite ist das Trägheitsmoment des Flächenabschnittes AEB in Beziehung auf die Axe der  $w$ . Bezeichnen wir dasselbe mit  $\mathfrak{B}$ , so wird die rechte Seite  $\mathfrak{B} - \Omega v$ , mithin

$$29. \quad \Sigma T_3 = \frac{Q}{W} (\mathfrak{B} - \Omega v)$$

Handelt es sich um die Summe der im ganzen Querschnitte wirkenden Schubspannungen  $T_3$ , so ist  $\Omega = 0$ ,  $\mathfrak{B} = W$ , mithin  $\Sigma T_3 = Q$ , was der zweiten der Gleichgewichts-Bedingungen 5 (§. 63) entspricht.

**§. 74. Transversale Normalspannung  $N_2$ .** Wir sind jetzt auch im Stande, die bisher vernachlässigte Normalspannung  $N_2$ , welche in Richtung der  $v$  wirkt, annähernd zu bestimmen, wenn wir auch hier die Annahme machen, dass  $N_2$  in allen Punkten einer zur Axe der  $w$  parallelen Sehne AB (Fig. 18) gleich gross ist.

Wir schneiden von einer Scheibe durch eine zur Axe des Stabes parallele Ebene ein Stück AEBA'E'B' weg. Auf dasselbe wirken in Richtung der  $v$  folgende Kräfte:

1. Auf die Fläche ABB'A' wirkt die Kraft  $- N_2 b dx$ .

2. Auf die Fläche AEB wirkt die im vorigen Paragraph mit  $\Sigma T_3$  bezeichnete Kraft, negativ genommen. Daher ist die Resultante der auf die Flächen AEB und A'E'B' wirkenden Kräfte, d. i. die Differenz dieser Kräfte,  $\frac{\partial \Sigma T_3}{\partial x} dx$ , d. i. nach 29 unter der Annahme, dass sich die Querschnitte mit  $x$  nur wenig ändern,

$$\frac{q}{W} (\mathfrak{B} - \Omega v),$$

weil nach 4 (§. 61)  $dQ = q dx$  ist.

3. Auf die in der Oberfläche des Körpers liegende Fläche AA'E'B'AE und auf die Masse des abgeschnittenen Stückes wirkt ein Theil der über die Länge des Stabes stetig vertheilten Last  $q$ . Ist derselbe pro Längeneinheit der Axe des Stabes  $q'$ , so ist die fragliche Kraft  $- q' dx$ .

Setzen wir die Summe dieser Kräfte der Null gleich, so ergibt sich

$$30. N_2 = - \frac{q'}{b} + \frac{q (\mathfrak{B} - \Omega v)}{W b}.$$

Wirkt z. B. nur das Eigengewicht, so ist  $q' dx$  das Gewicht des abgeschnittenen Stückes, d. i., wenn wir den Flächeninhalt des Abschnittes AEB mit  $\Theta$  und das Gewicht der Volumeneinheit mit  $g$  bezeichnen,  $= \Theta g dx$ . Ebenso ist  $q = Fg$ , mithin

$$31. N_2 = \frac{g}{b} \left[ F \frac{(\mathfrak{B} - \Omega v)}{W} - \Theta \right].$$

**§. 75. Verhältniss der Spannungen.** Wir bezeichnen eine äussere Kraft mit  $R$ , die Grösse, welche durch Division einer äusseren Kraft durch die Querschnittsfläche  $F$  entsteht oder eine von dieser Grösse wenig abweichende Grösse mit  $A$  mit beliebigem Index und eine Breiten-, Höhen- und Längendimension des Stabes bezüglich mit  $b$ ,  $h$ ,  $l$ .

In den Formeln 22, 27, 30 für  $N$ ,  $T_3$ ,  $T_2$ ,  $N_2$  können wir  $v$  proportional dem  $h$ ,  $F$  proportional dem  $bh$ ,  $\Omega$  proportional dem  $Fh = bh^2$ ,  $W$  und  $\mathfrak{B}$  proportional dem  $Fh^3 = bh^3$ ,  $M$  proportional dem  $Rl$  und  $q$ ,  $q'$  proportional dem  $\frac{R}{l}$  annehmen. Hieraus ergibt sich leicht, dass die Ausdrücke für  $N$ ,  $T_3$ ,  $T_2$ ,  $N_2$  dargestellt werden können durch

$$N = A + A_1 \frac{l}{h}, \quad T_3, T_2 = A_2, \quad N_2 = A_3 \frac{h}{l}.$$

In der Regel sind die Querschnittsdimensionen  $b$ ,  $h$  gegen die Länge  $l$  nur klein. Demnach ist in  $N$  das erste Glied gegen das zweite nur klein.

Ist eine Axialkraft nicht vorhanden, so ist  $A = 0$  und es verhält sich alsdann

$$N : T_3, T_2 : N_2 = A_1 : A_2 \frac{h}{l} : A_3 \left( \frac{h}{l} \right)^2,$$

woraus folgt, dass die Schubspannungen  $T_3, T_2$  gegen die Fassungsspannung  $N$  nur klein, die transversale Normalspannung  $N_2$  aber gegen die Fassungsspannung  $N$  sehr klein ist, wodurch sich die Vernachlässigung von  $N_2$  rechtfertigt. Man wird aber auch meist  $T_3, T_2$  vernachlässigen können.

Dies gilt freilich nur so lange, als die Breitendimensionen der Querschnitte nahe gleich sind. Kommt aber eine sehr kleine Breite  $b_1$  vor, so ergibt sich, wenn wir in den Ausdrücken für  $T_3, T_2, N_2$   $b_1$  für  $b$  setzen, dass  $N, T_3, T_2, N_2$  dargestellt werden können durch

$$N = A + A_1 \frac{l}{h}, \quad T_3, T_2 = A_2 \frac{b}{b_1}, \quad N_2 = A_3 \frac{h}{l} \frac{b}{b_1}.$$

Für  $A = 0$  verhält sich

$$N : T_3, T_2 : N_2 = A_1 : A_2 \frac{h b}{l b_1} : A_3 \frac{h^2 b}{l^2 b_1}.$$

Da  $h$  gegen  $l$  und der Voraussetzung zufolge  $b_1$  gegen  $b$  klein ist, so wird  $T_3, T_2$  nicht mehr klein gegen  $N$ , aber  $N_2$  immer noch klein gegen  $N$  sein. Hier wird man allenfalls  $N_2$ , nicht aber  $T_3, T_2$  vernachlässigen können.

In extremen Fällen können allerdings Abweichungen eintreten. So wird z. B. in der Nähe des Querschnittes, für welchen  $Q = 0$  ist,  $T_3, T_2$  stets gegen  $N$  sehr klein. In der Nähe des Querschnittes, für welchen  $M = 0$  ist, ist dagegen stets  $T_3, T_2$  gross gegen  $N$  u. s. f.

**§. 76. Hauptspannungen.** Da wir voraussetzen, dass  $N_2 = 0, N_3 = 0, T_1 = 0$  ist, so geht die Gleichung-17 a (§. 13) zur Bestimmung der Hauptspannungen über in

$$32. \quad H [H^2 - NH - (T_2^2 + T_3^2)] = 0.$$

Die Hauptspannungen sind demnach

$$33. \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}N + \sqrt{\frac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2}, \\ B = \frac{1}{2}N - \sqrt{\frac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2} \end{cases}$$

und  $C = 0$ . Wir haben es hier also mit dem in §. 17 erörterten Falle zu thun, wo eine Hauptspannung Null ist. Hiernach ist stets  $A$  positiv,  $B$  negativ, welches Vorzeichen auch  $N$  haben mag. Es existirt also stets ein Hauptzug und ein Hauptdruck.

Die Gleichungen 16 (§. 13) gehen über in

$$\begin{cases} (N - H) \cos \alpha + T_3 \cos \beta + T_2 \cos \gamma = 0, \\ T_3 \cos \alpha - H \cos \beta = 0, \quad T_2 \cos \alpha - H \cos \gamma = 0 \end{cases}$$

und hieraus ergibt sich leicht

$$34. \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{T_2^2 + T_3^2}}{H}, \quad \tan \beta = \frac{\sqrt{H^2 + T_2^2}}{T_2}, \quad \tan \gamma = \frac{\sqrt{H^2 + T_3^2}}{T_3}.$$

wodurch die Richtungen der Hauptspannungen bestimmt sind.

Sehr häufig lässt sich  $T_2$  gegen  $T_3$  vernachlässigen, nämlich in dem Falle, wo die Breite des Querschnittes nahe constant ist. In diesem Falle wird einfacher

$$35. \quad \tan \alpha = \cos \beta = \frac{T_3}{H}, \quad \gamma = 90^\circ,$$

so dass die beiden Hauptspannungen in einer zur Kräfteebene parallelen Ebene wirken.

In der Axe der  $w$  oder für  $v = 0$  wird, wenn die Axialkraft  $P$  nicht vorhanden ist,  $N = 0$ , mithin

$$H = \pm \sqrt{T_2^2 + T_3^2},$$

$$\alpha = 45^\circ, \quad \tan \beta = \sqrt{2 + \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^2}, \quad \tan \gamma = \sqrt{2 + \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^2}.$$

Für das grösste positive und negative  $v$  dagegen wird  $T_2 = T_3 = 0$ , also

$$H = N, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \gamma = 90^\circ,$$

so dass hier nur eine Hauptspannung existirt, welche die Fasserspannung  $N$  selbst ist.

**§. 77. Hauptschubspannungen.** Die Hauptschubspannungen sind nach 31 (§. 16)

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} B, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{2} A, \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{2} (A - B),$$

d. i., wenn man für  $A, B$  die obigen Ausdrücke setzt,

$$36. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{B} \end{array} \right\} = \frac{1}{4} N \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} N^2 + T_2^2 + T_3^2},$$

$$\mathfrak{C} = \sqrt{\frac{1}{4} N^2 + T_2^2 + T_3^2}.$$

Man ersieht hieraus leicht, dass  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , absolut genommen, stets kleiner, als  $\frac{1}{2} \mathfrak{C}$  sind.  $\mathfrak{C}$  ist demnach das wirkliche Maximum der Schubspannungen. Bezeichnen wir dasselbe mit  $\mathfrak{H}$ , so wird

$$37. \quad \mathfrak{H} = \sqrt{\frac{1}{4} N^2 + T_2^2 + T_3^2}.$$

Nach 33 ergibt sich

$$38. \quad A = -\frac{1}{2} N + \mathfrak{H}, \quad B = -\frac{1}{2} N - \mathfrak{H},$$

wobei stets  $\mathfrak{H} > \frac{1}{2} N$  ist. Ist  $N$  positiv, so wird  $A < \mathfrak{H}$ ,  $B > -\mathfrak{H}$ ; ist  $N$  negativ, so wird  $A > \mathfrak{H}$ ,  $B < -\mathfrak{H}$ . Demnach ist stets  $\mathfrak{H}$  kleiner als die eine und grösser als die andere der Hauptspannungen.

## IX. Kapitel.

### Formänderung des Stabes.

**§. 78. Formänderung der Axe.** Wir bestimmen zunächst die Gestalt der Axe des Stabes nach der Formänderung oder der sogenannten elastischen Linie, und zwar zuerst unter der Voraussetzung, dass alle Punkte der Axe bei der Formänderung in der Kräfteebene verbleiben (siehe §. 68). Wir bezeichnen hierzu (Fig. 21) mit

$\xi, \eta$  die Verrückung eines beliebigen Punktes  $C$  der Axe, dessen Abscisse  $x$  ist, nach den den  $x$  und  $y$  entgegengesetzten Richtungen (also  $\eta$  nach unten als positiv);

$\rho$  den Krümmungsradius  $MC$  der deformirten Axe in  $C$ , wobei wir  $\rho$

als positiv nehmen, wenn  $\varrho$  von M aus die Richtung der positiven Seite der Axe der  $v$  hat;  
 $\tau$  den Winkel, welchen die Tangente an die deformirte Axe in C mit der Axe der  $x$  bildet;  
 $d\tau$  den Winkel, welchen zwei Normalebenebenen der deformirten Axe in C und C', welche anfangs den Abstand  $dx$  hatten, mit einander bilden;

$\sigma$  die absolute Längenänderung der Axe des Stabes von einem beliebigen festen Punkte A aus bis C.

Ist  $PP'$  der Abstand der Normalebenebenen in der Entfernung  $v$  von der Axe der  $w$ , so ist  $PP' = CC' + v d\tau$ ; aber  $CC' = AC' - AC = (s + \sigma + dx + d\sigma) - (s + \sigma) = dx + d\sigma$  also  $PP' = dx + d\sigma + v d\tau$ . Die relative Aenderung des Abstandes der Normalebenebenen ist demnach  $\frac{d\sigma}{dx} + \frac{d\tau}{dx} v$  und mithin die Faserspannung  $N$ :

$$N = E \frac{d\sigma}{dx} + E \frac{d\tau}{dx} v.$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem entsprechenden Ausdrucke 22 (§. 68) giebt die Beziehungen:

$$39. \quad \frac{d\sigma}{dx} = \frac{P}{EF}, \quad \frac{d\tau}{dx} = \frac{M}{EW}.$$

Das Weitere lässt sich entweder genau oder nur angenähert durchführen.

**§. 79. Näherungsbestimmung.** Da wir nur sehr kleine Verrückungen voraussetzen, so ist der Winkel  $\tau$  sehr klein. Sind  $N, N'$  (Fig. 21), die Projectionen von C, C' auf die Axe der  $x$ , so ist demnach sehr nahe  $CC' = NN'$ , oder, weil  $CC' = dx + d\sigma$ ,  $NN' = ON' - ON = (x + dx + \xi + d\xi) - (x + \xi) = dx + d\xi$  ist,  $d\sigma = d\xi$ , mithin nach 39:

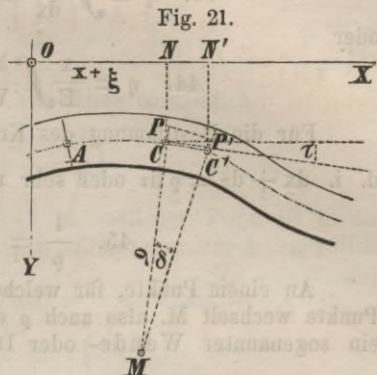
$$40. \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{P}{EF}, \quad \xi = \frac{1}{E} \int \frac{P}{F} dx.$$

Ferner ist  $\tau = \frac{NP' - NP}{NN'} = \frac{d\eta}{dx + d\xi}$ , d. i. sehr nahe  $\tau = \frac{d\eta}{dx}$ , also  $\frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2\eta}{dx^2}$ , mithin nach 39:

$$41. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{EW},$$

$$42. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan \tau = \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{E} \int \frac{M}{W} dx, \\ \eta = \frac{1}{E} \iint \frac{M}{W} dx^2. \end{array} \right.$$

Das letzte Doppelintegral lässt sich leicht in zwei einfache zerlegen, Bekanntlich ist  $\int f(x) dx = x f(x) - \int x df(x)$ , mithin



$$43. \quad \eta = \int \frac{d\eta}{dx} dx = x \frac{d\eta}{dx} - \int x \frac{d^2\eta}{dx^2} dx$$

oder

$$44. \quad \eta = \frac{x}{E} \int \frac{M}{W} dx - \frac{1}{E} \int \frac{Mx}{W} dx.$$

Für die Bestimmung des Krümmungsradius  $\rho$  hat man:  $CC' = \rho dr$ ,  
d. i.  $dx + d\xi = \rho dr$  oder sehr nahe  $dx = \rho dr$ ,  $\frac{1}{\rho} = \frac{dr}{dx}$ , d. i.

$$45. \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{EW}.$$

An einem Punkte, für welchen  $M = 0$  ist, wird  $\rho = \infty$ . An diesem Punkte wechselt  $M$ , also auch  $\rho$  das Vorzeichen, es ist dieser Punkt also ein sogenannter Wende- oder Inflexionspunkt der elastischen Linie.

In derselben Weise wie in §. 75 ergibt sich, dass sich  $\frac{d\xi}{dx} = \frac{A}{E}$ ,  
 $\xi = \frac{A l}{E}$ , ferner  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{A_1 l}{E h^2}$ ,  $\eta = \frac{A_1 l^3}{E h^2}$  setzen lässt, so dass sich

$$\xi : \eta = A : A_1 \left(\frac{l}{h}\right)^2$$

verhält, woraus folgt, dass  $\xi$  gegen  $\eta$  sehr klein ist.

Wenn der Querschnitt des Stabes, also auch  $W$  constant ist, so giebt die Differenziation von 41 mit Rücksicht auf 4 (§. 61) die Gleichungen:

$$46. \quad \frac{d^3\eta}{dx^3} = \frac{Q}{EW}, \quad \frac{d^4\eta}{dx^4} = \frac{q}{EW}.$$

**§. 80. Genauere Bestimmung der Formänderung.** Es ist  
 $NN'^2 + (N'C' - NC)^2 = CC'^2$  d. i.

$$a. \quad (dx + d\xi)^2 + d\eta^2 = (dx + d\sigma)^2.$$

Ferner ist

$$\tan \tau = \frac{d\eta}{dx + d\xi}, \quad \tau = \text{Arctan} \frac{d\eta}{dx + d\xi},$$

d. i., mit Berücksichtigung von a:

$$\tau = \text{Arctan} \frac{d\eta}{\sqrt{(dx + d\sigma)^2 - d\eta^2}}.$$

Mit Berücksichtigung der Differenzialformel  $d \text{Arctan} x = \frac{dx}{1+x^2}$  er-  
giebt sich

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{\frac{d^2\eta}{dx^2} \left(1 + \frac{d\sigma}{dx}\right) - \frac{d\eta}{dx} \frac{d^2\sigma}{dx^2}}{\left(1 + \frac{d\sigma}{dx}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{d\sigma}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}}.$$

Reducirt man auf  $\frac{d^2\eta}{dx^2}$  und setzt für  $\frac{d\sigma}{dx}$  und  $\frac{d\tau}{dx}$  die Ausdrücke 39, so er-  
giebt sich als Differenzialgleichung für  $\eta$ :

$$47. \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E W} \sqrt{\left(1 + \frac{P}{E F}\right)^2 - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2} + \frac{d\eta}{dx} \frac{\frac{d}{dx} \frac{P}{E F}}{\left(1 + \frac{P}{E F}\right)}$$

Ist  $\eta$  bestimmt, so folgt  $\xi$  aus der Gleichung a, nämlich

$$48. \frac{d\xi}{dx} = -1 + \sqrt{\left(1 + \frac{P}{E F}\right)^2 - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}$$

An die Integration der Gleichung 47 in endlicher Form ist in den meisten Fällen nicht zu denken, so dass man dieselbe durch unendliche Reihen bewerkstelligen muss.

Ist eine Axialkraft  $P$  nicht vorhanden, so wird einfacher

$$49. \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E W} \sqrt{1 - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2},$$

und  $\frac{d\xi}{dx} = -1 + \sqrt{1 - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}$ , d. i. sehr nahe

$$50. \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2$$

Wir werden in der Folge nur die im vorigen §. entwickelten Näherungsformeln benutzen, welche für die Praxis stets genügen.

**§. 81. Formänderung der Querschnitte:** a) Wir bezeichnen die Verrückungen eines Punktes  $vw$  irgend eines Querschnittes nach Richtung der Axen der  $v$  und  $w$  mit  $\nu$  und  $\omega$ . Die Verrückung des Schwerpunktes des Querschnittes nach Richtung der  $y$  ist  $\eta$ , mithin sind die Verrückungen  $\eta'$ ,  $\xi'$  des Punktes  $vw$  nach Richtung der  $y$ ,  $z$ :  $\eta' = -\eta + \nu$ ,  $\xi' = \omega$ . Nach den Gleichungen 49 (§. 27) wird, wenn wir  $N_2 = N_3 = 0$ ,  $N_1 = N$  setzen,  $\frac{d\eta'}{d\nu} = -\frac{N}{E m}$ ,  $\frac{d\xi'}{d\omega} = -\frac{N}{E m}$ , d. i.

$$\frac{d\nu}{d\eta'} = -\frac{N}{E m}, \quad \frac{d\omega}{d\xi'} = -\frac{N}{E m}.$$

Die Integration giebt, wenn man berücksichtigt, dass für  $\nu = 0$   $\eta' = 0$  und für  $w = v$   $\omega = 0$  wird,

$$51. \nu = -\frac{N}{E m} \eta', \quad \omega = -\frac{N}{E m} \xi'.$$

Setzen wir für den Fall, dass keine Axialkraft  $P$  vorhanden ist, für  $N$  den Ausdruck 23 (§. 68), so ergiebt sich

$$52. \nu = -\frac{M}{m E W} v^2, \quad \omega = -\frac{M}{M E W} v \omega.$$

Wie in §. 75 ergibt sich leicht, dass sich  $\nu$ ,  $\omega$ :  $\eta = A: A_1 m \frac{l^2}{h^2}$  verhält, so dass  $\nu$ ,  $\omega$  gegen  $\eta$  sehr klein sind.

b) Für die Gleitungen wird nach 58 (§. 29), wenn wir  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\xi'$  für  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ ;  $v$ ,  $w$  für  $y$ ,  $z$  setzen, und beachten, dass  $\eta' = -\eta + \nu$ ,  $\xi' = \omega$  ist,

$$\frac{d\xi'}{d\nu} + \frac{d\nu}{d\xi} - \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{T_3}{G}, \quad \frac{d\omega}{d\xi} + \frac{d\xi'}{d\omega} = \frac{T_2}{G}$$



der Axe des Stabes senkrecht, während man diesem widersprechend nachträglich die Schubspannungen bestimmt. Denn wäre dieser Satz richtig, so würden keine Gleitungen, also auch keine Schubspannungen entstehen; ohne diese aber könnte ein Körpertheil mit der Transversalkraft  $Q$  unmöglich im Gleichgewichte sein.

### §. 82. Formänderung der Axe bei schiefer Belastung.

Wir setzen jetzt voraus, dass die Hauptaxen der Querschnitte nicht in der Kraftebene liegen, so dass die Axe bei der Formänderung aus der Kraftebene heraustritt.

Es seien  $CF$ ,  $CG$  und  $C'F$ ,  $C'G$  Gerade, welche in den Normalebenebenen der deformirten Axe in den unendlich nahen Punkten  $C$  und  $C'$  liegen und bezüglich den Ebenen der  $xy$  und  $xz$  parallel sind;  $F$ ,  $G$  seien die Durchschnitte dieser Geraden, also  $FG$  die Durchschnittslinie der Normalebenebenen.  $M$ ,  $M'$ ,  $F'$  seien die Projectionen von  $C$ ,  $C'$ ,  $F$  auf die Ebene der  $xy$  und  $N$ ,  $N'$ ,  $G'$  die Projectionen von  $C$ ,  $C'$ ,  $G$  auf die Ebene der  $xz$ .

Da  $CF$  auf der Tangente der deformirten Axe senkrecht steht und parallel der Ebene der  $xy$  ist, so steht auch, wie leicht nachzuweisen,  $MF'$  auf der Projection dieser Tangente oder auf der Tangente der Projection der deformirten Axe senkrecht. Dasselbe gilt von  $M'F'$ ,  $NG'$ ,  $N'G'$ .  $F'$ ,  $G'$  sind demnach die Krümmungsmittelpunkte der Projectionen der deformirten Axe.

Es bezeichne nun  $\tau$ ,  $\tau'$  die Winkel, welche die Tangenten der Projectionen der deformirten Axe mit der Axe der  $x$  bilden und  $\sigma$  die Längenänderung der Axe des Stabes. Alsdann ist, wie in §. 78,  $CC' = dx + d\sigma$ . Der Abstand der Geraden  $CF$ ,  $C'F$  in der Entfernung  $v$  von  $C$  ist  $CC' + v \tan \angle CFC' = dx + d\sigma + v d\tau$ , weil sehr nahe  $\angle CFC' = \angle MF'M' = d\tau$  ist. Die relative Aenderung der Entfernung der Normalebenebenen in diesem Punkte ist daher  $\frac{d\sigma}{dx} + v \frac{d\tau}{dx}$ , also die Normalspannung in diesem Punkte

$$N = E \left( \frac{d\sigma}{dx} + v \frac{d\tau}{dx} \right).$$

Nach 11 (§. 64) wird aber für  $w = 0$  oder in der Axe der  $v$ :

$$N = \frac{P}{F} + \frac{W'M}{W W' - V^2} v.$$

Die Vergleichung beider Ausdrücke giebt in beiden ersten der folgenden Beziehungen:

$$55. \quad \frac{d\sigma}{dx} = \frac{P}{E F'}, \quad \frac{d\tau}{dx} = \frac{W' M}{E (W W' - V^2)}, \quad \frac{d\tau'}{dx} = \frac{V M}{E (W W' - V^2)}.$$

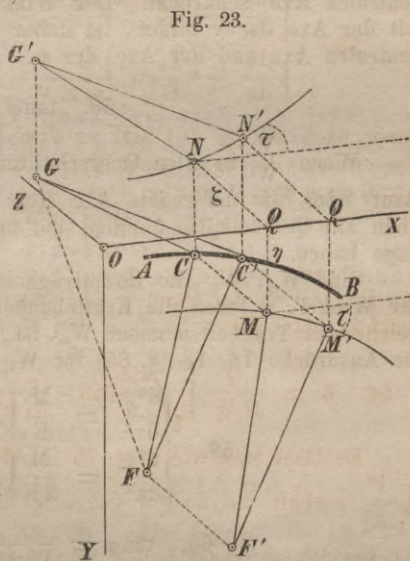


Fig. 23.

Die erste und dritte Gleichung ergibt sich in gleicher Weise durch Aufstellung zweier Ausdrücke für die Faserspannung in der Axe der  $w$ .

Bezeichnen wir nun weiter die Verrückungen eines Punktes der Axe in Richtung der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mit  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , so ergibt sich, wie in §. 79, leicht, dass sehr nahe

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{d\xi}{dx}, \quad \frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2\eta}{dx^2}, \quad \frac{d\tau'}{dx} = \frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

ist. Demnach wird

$$56. \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{P}{EF},$$

$$57. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{W'M}{E(WW' - V^2)}, \quad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{VM}{E(WW' - V^2)}.$$

Nach §. 68 steht die Krümmungsebene der deformirten Axe auf der neutralen Axe senkrecht. Der Winkel, welchen diese Krümmungsebene mit der Axe der  $v$  bildet, ist daher gleich dem Winkel  $\varphi$  zwischen der neutralen Axe und der Axe der  $w$ . Nach 20 (§. 67) ist

$$58. \quad \tan \varphi = \frac{V}{W'}.$$

Wenn  $\frac{V}{W'}$  in allen Querschnitten denselben Werth hat, so ist  $\varphi$  constant oder die deformirte Axe liegt in einer Ebene. Dies findet statt, wenn alle Querschnitte ähnlich sind und gegen die Kraftebene eine gleiche Lage haben.

Sind  $W_0$ ,  $W_0'$  die Hauptträgheitsmomente des Querschnittes und  $\alpha$  der Winkel, welchen die Kraftebene mit derjenigen Hauptaxe bildet, für welche das Trägheitsmoment  $W_0'$  ist, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Ausdrücke 16, 18 (§. 65) für  $W$ ,  $W'$ ,  $V$  und  $WW' - V^2$

$$59. \quad \begin{cases} \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E} \left( \frac{\cos^2\alpha}{W_0} + \frac{\sin^2\alpha}{W_0'} \right), \\ \frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{M}{2E} \left( \frac{1}{W_0'} - \frac{1}{W_0} \right) \sin 2\alpha; \end{cases}$$

$$60. \quad \tan \varphi = \frac{W_0 - W_0'}{W_0 \tan \alpha + W_0' \cot \alpha}.$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die Biegungsebene mit derjenigen Hauptaxe bildet, für welche das Trägheitsmoment  $W_0'$  ist, mit  $\psi$ , so ist  $\psi = \alpha + \varphi$ ,  $\tan \psi = \frac{\tan \alpha + \tan \varphi}{1 - \tan \alpha \tan \varphi}$ . Setzt man für  $\tan \varphi$  den eben aufgestellten Ausdruck, so ergibt sich

$$61. \quad \tan \psi = \frac{W_0}{W_0'} \tan \alpha.$$

Hiernach wird  $\varphi$  bei veränderlichem  $\alpha$  zu einem Maximum oder die Biegungsebene weicht von der Kraftebene am meisten ab, wenn der Differenzialquotient von  $W_0 \tan \alpha + W_0' \cot \alpha$  gleich Null ist, d. i. für  $W_0 \sin^2 \alpha - W_0' \cos^2 \alpha = 0$  oder

$$62. \quad \tan \alpha = \sqrt{\frac{W_0'}{W_0}}.$$

Diesem Werthe von  $\alpha$  entspricht

$$63. \quad \tan \varphi = \frac{W_0 - W_0'}{2\sqrt{W_0 W_0'}}, \quad \tan \psi = \sqrt{\frac{W_0}{W_0'}}.$$

Hiernach ist  $\tan(90^\circ - \psi) = \tan \alpha$ , d. h. die Winkel, welche die Biegeebene mit der einen Hauptaxe, und die Kraftebene mit der anderen Hauptaxe bilden, sind gleich. Die neutrale Axe und die Kraftebene bilden hiernach mit jeder Hauptaxe gleiche Winkel.

Aus 59 ergibt sich, wenn man zur Abkürzung  $\iint \frac{M}{EW_0} dx^2 = a$ ,  $\iint \frac{M}{EW_0'} dx^2 = b$  setzt,

$$64. \quad \eta = a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha, \quad \xi = \frac{1}{2}(b - a) \sin 2\alpha.$$

Die Elimination von  $\alpha$  giebt

$$(a - \eta)(b - \eta) + \xi^2 = 0,$$

oder auch

$$65. \quad \left(\eta - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \xi^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

woraus folgt: Wenn sich der Stab, ohne dass sich die Belastung ändert, dreht, so beschreibt jeder Punkt der Axe einen Kreis mit dem Radius  $\frac{1}{2}(a-b)$ , dessen Mittelpunkt in der Kraftebene liegt und von der Axe der  $x$  um  $\frac{1}{2}(a+b)$  entfernt ist.

Aus der zweiten der Gleichungen 64 folgt, dass die grösste Abweichung von der Kraftebene stattfindet, wenn  $\alpha = 45^\circ$  ist, d. h. wenn die Kraftebene den Winkel zwischen den Hauptaxen halbirt.

## X. Kapitel.

### Bruchfestigkeit der Stäbe.

§. 83. **Festigkeitsbedingungen.** Als sogenannte ideale Hauptspannungen ergeben sich nach 77 (§. 42), wenn man für die Hauptspannungen  $A, B, C$  die Ausdrücke 36 (§. 77) setzt:

$$66. \quad \begin{cases} S_1 = \frac{m-1}{2m} N + \frac{m+1}{m} \sqrt{\frac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2}, \\ S_2 = \frac{m-1}{2m} N - \frac{m+1}{m} \sqrt{\frac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2}, \\ S_3 = -\frac{1}{m} N. \end{cases}$$

Hiernach ist stets  $S_1$  positiv,  $S_2$  negativ.  $S_3$  können wir, da es stets kleiner als  $S_1$  und  $S_2$  ist, unbeachtet lassen. Für  $m = 3$  und  $m = 4$  wird, wenn wir entsprechend  $S', S''$  für  $S$  setzen:

$$\begin{aligned} m = 3: \quad S' &= \frac{1}{3} N \pm \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2}, \\ m = 4: \quad S'' &= \frac{3}{8} N \pm \frac{5}{4} \sqrt{\frac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2}. \end{aligned}$$

Ist  $N$  positiv, so wird  $S_1' > S_1''$ ,  $S_2' < S_2''$ , ist  $N$  negativ, aber  $S_1' < S_1''$ ,  $S_2' > S_2''$ . Nun aber ist bei positiven  $N$   $S_1 > -S_2$ , bei negativen  $N$  aber  $-S_2 > S_1$ . Für die Festigkeit wird demnach in der Regel  $S_1$  bei positiven  $N$ ,  $S_2$  bei negativen  $N$  massgebend sein und in beiden Fällen ergibt sich für das massgebende  $S$   $S' > S''$ . Der Sicherheit wegen wird man daher wohl thun, den Werth  $m = 3$  anzunehmen. Für diesen aber wird

$$67. \quad \begin{cases} S_1 = \frac{1}{3} N + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{4} N^2 + T_2^2 + T_3^2}, \\ S_2 = \frac{1}{3} N - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{4} N^2 + T_2^2 + T_3^2}. \end{cases}$$

Da  $S_1$  stets positiv,  $S_2$  stets negativ ist, so sind nun die Festigkeitsbedingungen

$$68. \quad \max S_1 = K, \quad \max(-S_2) = \mathfrak{K},$$

wobei entweder die erste oder die zweite Gleichung massgebend ist, je nachdem

$$68a. \quad \begin{matrix} \max S_1 > \frac{K}{\mathfrak{K}}, \\ \max(-S_2) < \frac{K}{\mathfrak{K}}, \end{matrix} \quad \text{d. i.} \quad N \begin{matrix} > \frac{K - \mathfrak{K}}{\sqrt{K \mathfrak{K}}} \sqrt{T_2^2 + T_3^2} \\ < \frac{K - \mathfrak{K}}{\sqrt{K \mathfrak{K}}} \sqrt{T_2^2 + T_3^2} \end{matrix}$$

ist. Ist  $K = \mathfrak{K}$  oder  $T_2 = T_3 = 0$ , so wird diese Bedingung  $N \geq 0$ , d. h. es ist die erste oder zweite Gleichung in Anwendung zu bringen, je nachdem  $N$  positiv oder negativ ist.

Die Hauptschubspannung ist nach 37 (§. 77):

$$69. \quad \mathfrak{S} = \sqrt{\frac{1}{4} N^2 + T_2^2 + T_3^2}.$$

Die Vergleichung mit 67 zeigt, dass  $\mathfrak{S}$  stets kleiner als  $\frac{3}{4}$  einer der idealen Hauptspannungen ist. Beim Schmiede- und Gusseisen ist aber der Sicherheitscoefficient für Abscheeren grösser, als  $\frac{3}{4}$  des kleinsten der Coefficienten  $K, \mathfrak{K}$ , so dass hier ein Abscheeren nicht eintreten kann.

Das Gesagte gilt allerdings nur für isotrope, annähernd auch für nahezu isotrope Körper, z. B. Schmiedeeisen.

**§. 84. Gewöhnlicher Fall.** Bei Querschnitten, deren Breitendimensionen nicht sehr verschieden sind, sind nach §. 75  $T_2, T_3$  gegen  $N$  nur klein. Alsdann wird für jedes  $m$  nahezu  $S_1 = N, S_2 = -\frac{1}{m} N$ , so dass nur  $S_1$  in Frage kommt. Die Festigkeitsbedingungen sind daher

$$70. \quad \max(+N) = K, \quad \max(-N) = \mathfrak{K}.$$

$N$  erreicht in einem Querschnitte das Maximum bei gerader Belastung für den grössten positiven und negativen Werth von  $v$  oder in den von der neutralen Axe am weitesten entfernten Fasern. Bezeichnen wir die grössten Werthe von  $v$  für die ausgedehnte und zusammengedrückte Seite mit  $a$  und  $\alpha$ , so ist  $\max(+N) = \frac{P}{F} + \frac{Ma}{W}$ ,  $\max(-N) = -\frac{P}{F} + \frac{Ma}{W}$ ; mithin sind die Festigkeitsbedingungen

$$71. \quad \begin{cases} \frac{Ma}{W} + \frac{P}{F} = K, \\ \frac{Ma}{W} - \frac{P}{F} = \mathfrak{K}. \end{cases}$$

Ist, wie in den meisten Fällen, eine Axialkraft P nicht vorhanden, so wird einfacher

$$72. \quad \frac{Ma}{W} = K, \quad \frac{M\alpha}{W} = \mathfrak{K},$$

welche Formeln als die Hauptgrundformeln für die Bruchfestigkeit anzusehen sind. Hierbei ist die erste oder zweite Gleichung massgebend, je nachdem

$$72 a. \quad \frac{K}{a} < \frac{\mathfrak{K}}{\alpha}$$

ist. Ist  $a = \alpha$ , so ist der kleinere der Coefficienten K,  $\mathfrak{K}$  massgebend; ist derselbe  $K'$ , so wird die Festigkeitsbedingung

$$73. \quad \frac{Ma}{W} = K',$$

Der allgemeine Ausdruck für N gilt auch für anisotrope Körper; demnach gelten auch die jetzt aufgestellten Festigkeitsbedingungen für anisotrope Körper. Beim Holze ist die Festigkeit gegen Schub in Richtung der Fasern äusserst gering. Hier kann deshalb noch die Festigkeitsbedingung für Schub in Richtung der Fasern in Frage kommen. Für eine der Axe des Stabes parallele Ebene ist in Beziehung auf die Stellungswinkel  $\alpha, \beta, \gamma$   $\cos \alpha = 0$ ,  $\cos \gamma = \sin \beta$ , daher wird nach 4 (§. 10)  $X = T_3 \cos \beta + T_2 \sin \beta$ ,  $Y = Z = 0$ , daher nach 9 (§. 10)  $T = X = T_3 \cos \beta + T_2 \sin \beta$ . Hiernach wird T zum Maximum für

$$74. \quad \tan \beta = \frac{T_2}{T_3}$$

und zwar ergibt sich leicht  $\max T = \sqrt{T_2^2 + T_3^2}$ , so dass die Festigkeitsbedingung für Schub

$$75. \quad \sqrt{T_2^2 + T_3^2} = K_1$$

würde, wenn  $K_1$  den Sicherheitscoefficient für Abschieben in Richtung der Fasern bezeichnet.

**§. 85. Gefährlicher Querschnitt.** Der Bruch tritt jedenfalls in demjenigen Querschnitte ein, für welchen die ideale Hauptspannung S das Maximum erreicht. Man nennt diesen Querschnitt den gefährlichen Querschnitt. Seine Lage ist zu ermitteln und für ihn sind sodann die Festigkeitsbedingungen aufzustellen.

Bei prismatischen Stäben ist in den gewöhnlichen Fällen (§. 84) der gefährliche Querschnitt derjenige, für welchen M zum Maximum wird. Sind mehrere Maxima von M vorhanden, die zum Theil positiv, zum Theil negativ sind, so ist der gefährliche Querschnitt derjenige, für welchen  $\frac{Ma}{K}$ , bezüglich  $\frac{Ma}{\mathfrak{K}}$  am grössten ist.

**§. 86. Körper von constanter Festigkeit.** Wenn in allen Querschnitten das Maximum der idealen Hauptspannung S gleich gross ist, wenn also der Körper in allen Querschnitten gleich leicht brechen kann, so nennt man den Körper einen Körper von constanter Festigkeit. Die Form derselben hängt natürlich von der Querschnittsform und der Unterstützungs- und Belastungsweise ab.

Wenn sämtliche Querschnitte proportional und die Festigkeitsbedingungen 72 (§. 84) massgebend sind, so ist für zwei Querschnitte mit den Breiten  $b, b'$ , den Höhen  $h, h'$  und den Momenten  $M, M'$  etc.:

$$\begin{aligned} \text{a. } K &= \frac{M a}{W}, & \mathfrak{K} &= \frac{M a}{W}, \\ K &= \frac{M' a'}{W'}, & \mathfrak{K} &= \frac{M' a'}{W'} \end{aligned}$$

also

$$\frac{M}{M'} = \frac{W a'}{W' a} = \frac{W a'}{W' a}.$$

Nun aber ist nach §. 66  $\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} = \frac{h}{h'}, \frac{W}{W'} = \frac{b h^2}{b' h'^2}$ , mithin

$$76. \quad \frac{b h^2}{b' h'^2} = \frac{M}{M'},$$

wodurch die Form bei gegebener Belastungsweise im Allgemeinen bestimmt ist.

Setzen wir  $\frac{b' h'^2}{M'} = A$ , so wird  $b h^2 = A M$ . Sind nur isolirte Lasten vorhanden, so wird nach §. 61  $M = \alpha + \beta x$ , also  $b h^2 = A(\alpha + \beta x)$ . Bei constanter Höhe  $h$  ist hiernach der Grundriss des Stabes geradlinig begrenzt; bei constanter Breite  $b$  ist der Aufriss parabolisch begrenzt. Ist eine gleichmässige Last vorhanden, so wird  $M = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ , also  $b h^2 = A(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$ . Bei constanter Höhe  $h$  ist hiernach der Grundriss parabolisch begrenzt; bei constanter Breite  $b$  ist der Aufriss elliptisch oder hyperbolisch begrenzt.

Für den Krümmungsradius der deformirten Axe ist nach 45 (§. 79)  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E W}$ ; nach a aber ist  $\frac{M}{W} = \frac{K}{a} = \frac{\mathfrak{K}}{a}$ , mithin

$$77. \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{K}{E a} \text{ oder } = \frac{\mathfrak{K}}{E a}.$$

Ist die Höhe  $h$ , mithin auch  $a, \alpha$ , constant, so wird auch  $\rho$  constant, d. h. ein Körper von constanter Festigkeit mit constanter Höhe biegt sich kreisförmig.

**§. 87. Bruchbelastung.** Die aufgestellten Festigkeitsbedingungen gründen sich auf das Elasticitätsgesetz, nach welchem die relative Längenänderung proportional der Spannung ist. Sie sind daher nur innerhalb der Elasticitätsgrenze richtig. Sie gelten aber nicht mehr im Augenblicke des Bruches, weil das Elasticitätsgesetz ausserhalb der Elasticitätsgrenze ein ganz anderes wird.

Nach den aufgestellten Festigkeitsbedingungen ergeben sich bei demselben Körper die äusseren Kräfte als proportional dem Sicherheitscoefficienten  $K, \mathfrak{K}$ . Wählt man daher  $m$ -fache Grenzsicherheit, d. h. die Belastung  $\frac{1}{m}$  der Grenzbelastung, so muss man als Sicherheitscoefficient  $\frac{1}{m}$  des Grenzcoefficienten wählen. Wählt man dagegen  $n$ -fache Bruchsicherheit, d. h. die Belastung  $\frac{1}{n}$  der Bruchbelastung, so kann man nicht

mehr als Sicherheitscoefficient  $\frac{1}{n}$  des Festigkeitscoefficienten wählen; es wird vielmehr zur Wahl von  $K, \mathfrak{K}$  die Kenntniss der Bruchbelastung selbst nöthig. Im Folgenden wollen wir versuchen, dieselbe annähernd zu ermitteln.

Am besten benutzt man die Festigkeitsbedingungen 71 (§. 84) auch für den Bruch, wählt dabei aber statt der Coefficienten  $K, \mathfrak{K}$  andere Coefficienten  $B, \mathfrak{B}$ , welche nicht constant sind, sondern abhängig von der Querschnittsform und Belastungsweise so gewählt werden, dass diese Gleichungen für den Bruch richtig werden. Wir nennen diese Coefficienten  $B, \mathfrak{B}$  Bruchcoefficienten. Die Einführung derselben giebt als Bruchbedingungen:

$$78. \quad \begin{cases} \frac{M a}{W} + \frac{P}{F} = B, \\ \frac{M a}{W} - \frac{P}{F} = \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Abhängigkeit der Bruchcoefficienten von der Querschnittsform und Belastungsweise ist die Kenntniss des allgemeinen Elasticitätsgesetzes nöthig. Jedoch lassen sich auch ohne diese Kenntniss einige allgemeine Regeln entwickeln.

**§. 88. Proportionale Querschnitte.** Die relative Ausdehnung  $\sigma$  einer Faser oder nach §. 64 nahezu die relative Aenderung der Entfernung der Normalebenen der Axe des Stabes in der Entfernung  $v$  von der Axe der  $w$  lässt sich bei gerader Belastung ausdrücken durch  $\sigma = m + n v$ . Die Faserspannung  $N$  ist eine Funktion von  $\sigma$  und wir setzen

$$79. \quad N = \varphi(\sigma) = \varphi(m + n v).$$

Die ersten der Gleichgewichtsbedingungen 5 und 6 (§. 63) gehen daher, wenn eine Axialkraft  $P$  nicht vorhanden ist, über in folgende:

$$80. \quad 0 = \int_{-a}^a \varphi(m + n v) \beta \, dv, \quad M = \int_{-a}^a \varphi(m + n v) \beta v \, dv,$$

worin die Breite des Querschnittes im Abstände  $v$  von der Axe der  $w$  mit  $\beta$  bezeichnet ist. Die grösste Spannung findet für das grösste positive und negative  $v$ , d. i. für  $v = a, v = -a$  statt. Bezeichnen wir die Festigkeitscoefficienten für Zug und Druck mit  $C$  und  $\mathfrak{C}$ , so sind demnach die Bruchbedingungen

$$81. \quad C = \varphi(m + n a), \quad \mathfrak{C} = \varphi(m - n a).$$

Für einen zweiten Körper aus demselben Materiale, dessen Querschnitt dem des vorigen Körpers proportional ist, bezeichnen wir Alles durch den Index 1. Alsdann wird

$$0 = \int_{-a_1}^{a_1} \varphi(m_1 + n_1 v_1) \beta_1 \, dv_1, \quad M_1 = \int_{-a_1}^{a_1} \varphi(m_1 + n_1 v_1) \beta_1 v_1 \, dv_1$$

$$\varphi(m_1 + n_1 a_1) = C, \quad \varphi(m_1 - n_1 a_1) = \mathfrak{C}.$$

Wir setzen vorläufig nur die erste der Bruchbedingungen als massgebend voraus. Die Vergleichung derselben giebt

$$a. \quad m_1 + n_1 a_1 = m + n a.$$

Setzen wir  $a - v = y, a_1 - v_1 = y_1$ , so gehen die beiden ersten

der Gleichgewichtsbedingungen mit Beachtung der vorigen Gleichung über in

$$0 = \int_0^{a+a} \varphi (m + n a + n y) \beta dy, \quad 0 = \int_0^{a_1+a_1} \varphi (m + n a + n_1 y_1) \beta_1 dy.$$

Nun aber wegen der Proportionalität der Querschnittsmitte  $v_1 = \frac{h_1}{h} v$ ,  $\beta_1 = \frac{b_1}{b} \beta$ ,  $a_1 = \frac{h_1}{h} a$ ,  $a_1 = \frac{h_1}{h} a$ ,  $y_1 = a_1 - v_1 = \frac{h}{h} (a - v) = \frac{h_1}{h} y$ . Die zweite der vorigen Gleichungen geht hierdurch über in

$$0 = \int_0^{a+a} \varphi (m + n a + \frac{n_1 h_1}{h} y) \beta dy.$$

Dieser Ausdruck und der erste der vorigen Ausdrücke können aber offenbar nur gleichzeitig Null sein, wenn  $\frac{n_1 h_1}{h} = n$  ist. Demnach ist  $n_1 = \frac{h}{h_1} n$ . Dies in die Gleichung  $a$  gesetzt, giebt  $m_1 = m$ .

Der obige Ausdruck für  $M_1$  wird nun

$$M_1 = \frac{b_1 h_1^2}{b h^2} \int_{-a}^a \varphi (m + n v) \beta v dv = \frac{b_1 h_1^2}{b h^2} M$$

oder

$$82. \quad \frac{M_1}{M} = \frac{b_1 h_1^2}{b h^2} = \frac{F_1 h_1}{F h}$$

d. h. Bei Körpern mit proportionalen Querschnitten verhalten sich die Momente, welche den Bruch veranlassen, bei jedwedem Elasticitätsgesetze wie die Produkte aus Breite und Quadrat der Höhe.

Die Bruchbedingungen 78 gehen nun über in

$$B = \frac{M a}{W}, \quad \mathfrak{B} = \frac{M a}{W},$$

$$B_1 = \frac{M_1 a_1}{W_1}, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{M_1 a_1}{W_1}.$$

Es ist aber  $a_1 = \frac{h_1}{h} a$ ,  $a_1 = \frac{h_1}{h} a$ ,  $W_1 = \frac{b_1 h_1^3}{b h^3} W$ ,  $M_1 = \frac{b_1 h_1^2}{b h^2} M$ . Substituirt man dies in die Ausdrücke für  $B_1$ ,  $\mathfrak{B}_1$ , so ergeben sich dieselben Ausdrücke, wie für  $B$ ,  $\mathfrak{B}$ ; es ist also

$$83. \quad B_1 = B, \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}.$$

d. h. für Körper mit proportionalen Querschnitten sind die Bruchcoefficienten constant.

Hat man z. B. den Bruchcoefficienten für einen Stab mit rechteckigem Querschnitte bestimmt, so gilt derselbe Coefficient bei demselben Materiale für alle übrigen rechteckigen Querschnitte.

### §. 89. Bruchcoefficient für symmetrische Querschnitte.

Als allgemeines Elasticitätsgesetz kann man annehmen

$$N = \alpha \sigma + \beta \sigma^2 + \gamma \sigma^3 + \dots$$

Wir machen die Annahme, dass  $N$  für gleiche positive und negative  $\sigma$  gleich gross sei, was allerdings nicht streng richtig ist. Alsdann müssen alle Glieder mit geraden Potenzexponenten verschwinden. Gehen wir ausserdem nicht über das Glied vom dritten Grade hinaus, so wird

$$84. \quad N = \alpha \sigma + \gamma \sigma^3.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen 80 gehen dadurch über in

$$0 = \int [\alpha(m + n v) + \gamma(m + n v)^2] \beta \, dv,$$

$$M = \int [\alpha(m + n v) + \gamma(m + n v)^3] \beta \, dv.$$

Nun aber wird, wenn wir die dritte Potenz entwickeln,  $\int \beta \, dv = F$ ,  $\int \beta v \, dv = 0$ ,  $\int \beta v^2 \, dv = W$ . Wir setzen voraus, dass der Querschnitt in Beziehung auf die Axe der  $w$  symmetrisch ist; alsdann wird  $\int \beta v^3 \, dv = 0$ . Ferner setzen wir

$$85. \quad U = \int \beta v^4 \, dv.$$

Somit wird nun

$$0 = m(\alpha F + \gamma m^2 F + 3 \gamma n^2 W),$$

$$M = n(\alpha W + 3 \gamma m^2 W + \gamma n^2 U).$$

Die erste Gleichung giebt  $m = 0$ . Für  $v = 0$  wird daher  $N = 0$ , d. h. die neutrale Axe geht durch den Schwerpunkt. Die zweite Gleichung wird nun

$$a. \quad M = \alpha n W + \gamma n^3 U.$$

Da  $m = 0$  ist, so wird  $\sigma = n v$ , also

$$b. \quad N = \alpha n v + \gamma n^3 v^3.$$

Der grösste positive und negative Werth von  $N$  ist  $\alpha n a + \gamma n^3 a^3$  und  $\alpha n a + \gamma n^3 a^3$ . Bezeichnen wir daher wieder die Festigkeitscoefficienten für Zug und Druck mit  $C$ ,  $\mathcal{C}$ , so sind die Bruchbedingungen

$$c. \quad C = \alpha' n a + \gamma n^3 a^3, \quad \mathcal{C} = \alpha n a + \gamma n^3 a^3.$$

Nach 78 wird, wenn wir vorläufig nur den Bruch durch Zerreißen der ausgedehntesten Fasern in's Auge fassen,

$$d. \quad B = \frac{M a}{W} = \alpha n a + \gamma n^3 a \frac{U}{W}$$

$$= \alpha n a + \gamma n^3 a^3 \frac{U}{W a^2}.$$

Reducirt man die Gleichung  $c$  auf  $n a$ , so findet man  $n a$  nur abhängig von  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ , also unabhängig von der Querschnittsform. Daher ist auch  $\alpha n a$  und  $\gamma n^3 a^3$  von der Querschnittsform unabhängig. Bezeichnet man diese letzteren Grössen mit  $\alpha_1$  und  $\gamma_1$ , so wird nach  $d$  und  $c$ :

$$86. \quad B = \alpha_1 + \gamma_1 \frac{U}{W a^2},$$

$$87. \quad C_1 = \alpha_1 + \gamma_1.$$

$C$  ist durch directe Zerreißungsversuche bekannt. Bestimmt man noch  $B$  für eine specielle Querschnittsform durch Bruchversuche, so lässt sich aus diesen beiden Gleichungen  $\alpha_1$  und  $\gamma_1$  ermitteln und man kann dann nach 86 den Bruchcoefficienten  $B$  für jeden anderen Querschnitt bestimmen. Am bequemsten ist, für die Bruchversuche einen rechtwinkligen Querschnitt anzuwenden, und wir wollen für denselben den Bruchcoefficienten mit  $B_0$  bezeichnen. Für den rechteckigen Querschnitt von der Breite  $b$  und Höhe  $h$  ergibt sich leicht  $W = \frac{1}{12} b h^3$ ,  $U = \frac{1}{48} b h^5$ , also  $\frac{U}{W a^2} = \frac{3}{5}$ , mithin nach 86  $B_0 = \alpha_1 + \frac{3}{5} \beta_1$ . Aus dieser und der Gleichung 87 folgt  $\alpha_1 = \frac{5}{2} B_0 - \frac{3}{2} C$ ,  $\beta_1 = \frac{5}{2} (C - B_0)$ . Die Gleichung 86 geht daher über in die erste der Gleichungen:

$$88. \quad \left\{ \begin{array}{l} B = \frac{1}{2} (5 B_0 - 3 C) + \frac{5}{2} (C - B_0) \frac{U}{W a^2}, \\ \mathfrak{B} = \frac{1}{2} (5 B_0 - 3 \mathcal{C}) + \frac{5}{2} (\mathcal{C} - B_0) \frac{U}{W a^2}. \end{array} \right.$$

Die zweite Gleichung ergibt sich in ganz gleicher Weise für den Fall, dass ein Bruch durch Zerdrücken der am meisten zusammengedrückten Fasern eintritt.

Für einen elliptischen Querschnitt mit den Axen  $b$ ,  $h$  ergibt sich leicht  $W = \frac{\pi}{61} bh^3$ ,  $U = \frac{\pi}{512} bh^5$ , also  $\frac{U}{Wa^3} = \frac{1}{2}$ , folglich  $B = \frac{1}{2} (5 B_0 = 3 C) + \frac{5}{4} (C - B_0)$  oder

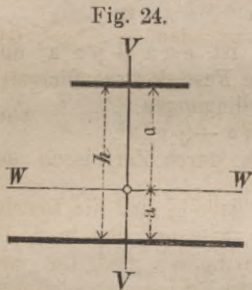
$$B = \frac{5}{4} B_0 - \frac{1}{4} C.$$

Für einen rhombischen Querschnitt mit horizontaler und verticaler Diagonale  $b$ ,  $h$  wird  $W = \frac{1}{48} bh^3$ ,  $U = \frac{1}{480} bh^5$ , also  $\frac{U}{Wa^3} = \frac{2}{5}$ , folglich  $B = \frac{1}{2} (5 B_0 - 3 C) + (C - B_0)$  oder

$$B = \frac{3}{2} B_0 - \frac{1}{2} C.$$

### §. 90. Bruchcoefficient für unsymmetrische Querschnitte.

In derselben Weise lässt sich auch für unsymmetrische Querschnitte der Bruchcoefficient bestimmen, jedoch werden die Ausdrücke ziemlich complicirt. Wir wählen daher hier einen andern Weg.



Wenn der Querschnitt nur aus zwei unendlich schmalen, der Axe der  $w$  parallelen Flächen  $f_1$ ,  $f_2$  besteht (Fig. 24), so werden die Gleichgewichtsbedingungen, wenn wir die Spannungen in diesen Flächen mit  $N_1$ ,  $N_2$  bezeichnen und eine Axialkraft nicht vorhanden ist,

$$0 = N_1 f_1 + N_2 f_2, \quad M = N_1 f_1 a - N_2 f_2 a.$$

Hieraus folgt, wenn wir  $a + a = h$  setzen,

$$N_1 = \frac{M}{f_1 h}, \quad N_2 = \frac{M}{f_2 h}.$$

Die Bruchbedingungen sind daher

$$C = \frac{M}{f_1 h}, \quad \mathcal{C} = \frac{M}{f_2 h}.$$

Nun aber ist  $f_1 a = f_2 a$ ,  $W = f_1 a^2 + f_2 a^2 = f_1 h a = f_2 h a$ , also  $f_1 h = \frac{W}{a}$ ,  $f_2 h = \frac{W}{a}$ , folglich

$$C = \frac{M a}{W}, \quad \mathcal{C} = \frac{M a}{W}.$$

Die Vergleichung mit den Gleichungen 78 giebt, da  $P = 0$  ist,

$$89. \quad B = C, \quad \mathfrak{B} = \mathcal{C}$$

d. h. die Bruchcoefficienten sind gleich den Festigkeitscoefficienten für Zug und Druck.

Dasselbe würden auch die Formeln 88 geben, wenn anstatt des Ausdruckes  $\frac{U}{Wa^2}$  der Ausdruck  $\frac{U(a+a)}{W(a^3+a^3)}$  gesetzt würde. Alsdann würde, wenn wir zur Abkürzung

$$90. \quad \frac{U(a+a)}{W(a^3+a^3)} = x$$

setzen,

$$91. \quad \begin{cases} B = \frac{1}{2} (5 B_0 - 3 C) + \frac{5}{2} (C - B_0) x, \\ \mathfrak{B} = \frac{1}{2} (5 B_0 - 3 \mathcal{C}) + \frac{5}{2} (\mathcal{C} - B_0) x. \end{cases}$$

Denn es wird  $W = f_1 h a = f_1 a (a + a)$ ,  $U = f_1 a^4 + f_2 a^4 = f_1 a (a^3 + a^3)$

also  $\alpha = 1$ , mithin  $B = C$ ,  $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ . Für symmetrische Querschnitte gilt dieser Ausdruck aber auch, weil hier  $a = a$  ist, also  $\alpha = \frac{U}{W a^2}$  wird. Da nun der symmetrische Querschnitt und der Querschnitt Fig. 24 gleichsam die äussersten Grenzen der in der Praxis vorkommenden Querschnittsformen bilden, so kann man den Ausdruck 91 als Näherungsausdruck für alle Querschnittsformen ansehen. Man kann dies umso mehr thun, als auch der Ausdruck 88 auf einem nicht streng richtigen Elasticitätsgesetze beruht.

Für den rechteckigen Querschnitt, sowie für den idealen Querschnitt Fig. 24 ist der Ausdruck 91 streng richtig. Für andere Querschnitte bildet er gleichsam eine Interpolationsformel, die um so genauere Resultate geben wird, je mehr sich der Querschnitt einem dieser beiden Querschnitte nähert.

Von den beiden Coefficienten  $B$ ,  $\mathfrak{B}$  ist offenbar derjenige massgebend, für welchen sich das kleinste  $M$  ergibt, d. i. nach 78 derjenige, für welchen  $\frac{B}{a}$ ,  $\frac{\mathfrak{B}}{a}$  den kleinsten Werth hat, also  $B$  oder  $\mathfrak{B}$ , je nachdem  $\frac{B}{\mathfrak{B}} < \frac{a}{a}$  ist.

Für den dreieckigen Querschnitt ( $\triangle$ ) mit der Breite  $b$  und Höhe  $h$  ergibt sich z. B.  $a = \frac{2}{3} h$ ,  $a = \frac{1}{3} h$ ,  $W = \frac{1}{36} b h^3$ ,  $U = \frac{1}{270} b h^5$ , also  $\alpha = \frac{2}{5}$ , mithin

$$B = \frac{3}{2} B_0 - \frac{1}{2} C.$$

**§. 91. Erfahrungswerthe.** In folgender Tabelle sind die Bruchcoefficienten für den idealen Querschnitt Fig. 24, welche mit den in §. 43 angegebenen Festigkeitscoefficienten  $C$ ,  $\mathfrak{C}$  übereinstimmen und für den rechteckigen Querschnitt, sowie die hieraus nach dem Vorigen abgeleiteten Bruchcoefficienten für den rhombischen, elliptischen und dreieckigen Querschnitt zusammengestellt.

Material	Fig. 24		Rechteck		Rhombus		Ellipse		Dreieck $\triangle$		Dreieck $\nabla$	
	C	$\mathfrak{C}$	B	$\mathfrak{B}$	B	$\mathfrak{B}$	B	$\mathfrak{B}$	B	$\mathfrak{B}$	B	$\mathfrak{B}$
Holz . . . . .	810	530	—	670	—	740	—	700	—	740	600	—
Schmiedeeisen . .	4160	3640	—	5200	5840	—	—	5590	—	5980	5840	—
Gusseisen . . .	1320	7920	2860	—	3630	—	3245	—	3630	—	6710	—

Für einen beliebigen Querschnitt ergibt sich:

$$\text{Holz . . . . . } B = 450 + 360 \alpha, \quad \mathfrak{B} = 890 - 360 \alpha;$$

$$\text{Schmiedeeisen . . } B = 6760 - 2600 \alpha, \quad \mathfrak{B} = 7540 - 3900 \alpha;$$

$$\text{Gusseisen . . . . } B = 5170 - 3850 \alpha, \quad \mathfrak{B} = 16500 \alpha - 4730.$$

**§. 92. Anwendung.** Wir gehen nun dazu über, die entwickelten allgemeinen Formeln der Biegungselasticität auf bestimmte, praktisch wichtige, Fälle anzuwenden. Hierbei sind verschiedene Arten der Belastungsweise und verschiedene Arten der Querschnittsform zu unterscheiden.

Wir unterscheiden eine bestimmte und eine bedingte Belastung. Unter der ersteren verstehen wir eine solche, bei welcher alle äusseren Kräfte direkt gegeben sind, unter der letzteren dagegen eine solche, bei welcher nur ein Theil der äusseren Kräfte direkt gegeben ist, während der andere durch die Elasticität des Stabes bedingt wird. Zu der ersteren

gehören die Fälle, wo der Stab an einem Ende eingespannt, am anderen frei ist und wo der Stab mit beiden Enden auf Stützen liegt; zu der letzteren die Fälle, wo ein Ende eingespannt, das andere unterstützt ist, wo beide Enden eingespannt sind und wo der Stab auf mehr als zwei Stützen liegt. Bei der bestimmten Belastung lassen sich die Festigkeitsbedingungen aufstellen, ohne auf die Formänderung einzugehen; nicht aber bei der bedingten Belastung.

Wir unterscheiden ausserdem die drei Fälle, wo nur Transversalkräfte oder nur Axialkräfte oder gleichzeitig Transversal- und Axialkräfte vorhanden sind.

Wir beginnen zunächst mit der Belastung durch Transversalkräfte und setzen bei der Aufstellung der Festigkeitsbedingungen zunächst nur den gewöhnlichen Fall §. 84 voraus, bei welchem die Schubspannungen nicht in Frage kommen, da sich die allgemeinen Festigkeitsbedingungen ohne Specialisirung der Querschnittsform nicht ausbeuten lassen.

## IV. Abschnitt.

# Belastung durch Transversalkräfte.

## XI. Kapitel.

### Bestimmte Belastung.

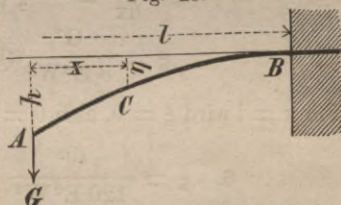
A. Stab, welcher an einem Ende eingespannt, am andern frei ist.

#### §. 93. Stab, welcher nur am freien Ende belastet ist.

Wir nehmen das freie Ende A (Fig. 25) als Anfang der  $x$  an und bezeichnen mit

- $l$  die Länge AB des Stabes,
- $G$  die am Ende A wirkende Last,
- $y$  die Senkung des Endes A.

Fig. 25.



Für einen beliebigen Querschnitt ist alsdann

$$1. \quad Q = G, \quad M = Gx.$$

Taf. I. Fig. 1 ist  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt.

Hiernach ist  $Q$  constant.  $M$  ist am freien Ende = 0 und erreicht das Maximum am eingespannten Ende B. Bei constantem Querschnitte wird demnach auch die ideale Hauptspannung bei B das Maximum erreichen; der gefährliche Querschnitt liegt also bei constantem Querschnitte am eingespannten Ende. Die Festigkeitsbedingung

$$\text{ist demnach } K = \frac{G l a}{W}, \quad \mathfrak{K} = \frac{G l a}{W} \text{ oder}$$

$$2. \quad G = \frac{K W}{l a} = \frac{\mathfrak{K} W}{l a}.$$

Anwendung bei Zapfen, Hebeln, Radzähnen etc.

#### §. 94. Formänderung. Nach 41 (§. 79) ist

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{G x}{E W},$$

also bei constantem Querschnitte

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{G x^2}{2 E W} + \text{Const.}$$

Am eingespannten Ende, also für  $x = l$ , ist  $\frac{d\eta}{dx} = 0$ , mithin  $0 = \frac{G l^2}{2 E W} + \text{Const.}$ , folglich

$$\frac{d\eta}{dx} = - \frac{G (l^2 - x^2)}{2 E W}.$$

Die nochmalige Integration giebt

$$\eta = -\frac{G(3l^2x - x^3)}{6EW} + \text{Const.}$$

Für  $x = l$  wird  $\eta = 0$ , also  $0 = -\frac{Gl^3}{3EW} + \text{Const.}$ , mithin

$$3. \quad \eta = \frac{G}{6EW}(2l^3 - 3l^2x + x^3) = \frac{G}{6EW}(2l + x)(l - x)^2.$$

Die Senkung  $\psi$  des freien Endes ( $x = 0$ ) wird demnach

$$4. \quad \psi = \frac{Gl^3}{3EW}.$$

Ist der Stab mit der grössten zulässigen Last, welche durch 2 bestimmt ist, belastet, so wird

$$5. \quad \psi = \frac{Kl^3}{3Ea} = \frac{\mathfrak{K}l^3}{3Ea}.$$

Für die Verrückung  $\xi$  eines Punktes in axialer Richtung wird nach 50 (§. 80)

$$\frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = -\frac{G^2(l^2 - x^2)^2}{8E^2W^2},$$

$$\xi = \frac{G^2}{8E^2W^2}(l^4x - \frac{2}{3}l^2x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \text{Const.})$$

Für  $x = l$  wird  $\xi = 0$ , also  $0 = -\frac{G^2}{8E^2W^2}(l^5 + \text{Const.})$ , mithin

$$6. \quad \xi = \frac{G^2}{120E^2W^2}(8l^5 - 15l^4x + 10l^2x^3 - 3x^5).$$

Die Verrückung  $r$  des freien Endes ( $x = 0$ ) wird demnach

$$7. \quad r = \frac{G^2l^5}{15E^2W^2} = \frac{3}{5}\left(\frac{\psi}{l}\right)^2 l.$$

In der Folge werden wir  $\xi$  der geringeren Wichtigkeit wegen nicht ermitteln.

**§. 95. Körper von constanter Festigkeit.** Bezeichnen wir das Moment für das eingespannte Ende mit  $M_1$ , die Breite und Höhe des Querschnittes daselbst mit  $b_1, h_1$ , so ist für Körper mit proportionalen Querschnitten nach 76 (§. 86):

$$8. \quad \frac{bh^2}{b_1h_1^2} = \frac{M}{M_1} = \frac{x}{l}.$$

Hieraus folgen als specielle Formen (Taf. III. Fig. 1—3):

$$9. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a. Höhe constant (Fig. 1):} \dots b = b_1 \frac{x}{l}, \\ \text{b. Breite constant (Fig. 2):} \dots h = h_1 \sqrt[3]{\frac{x}{l}}, \\ \text{c. Querschn. constant (Fig. 3):} \dots h = h_1 \sqrt{\frac{x}{l}}. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir die Volumina der Körper in diesen drei Fällen mit  $V_1, V_2, V_3$ , das Volumen eines prismatischen Stabes mit gleich grosser Festigkeit mit  $V$ , so ergibt sich leicht

$$V_1 = \frac{1}{2} V, \quad V_2 = \frac{2}{3} V, \quad V_3 = \frac{3}{5} V, \\ V : V_2 : V_3 : V_1 = 30 : 20 : 18 : 15.$$

Für die Formänderung ist nach 77 (§. 86)  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{K}{Ea} = \frac{\frac{8}{3} \eta}{Ea}$ . Bezeichnen wir die Senkung des freien Endes eines prismatischen Stabes mit gleich grosser Festigkeit mit  $\eta_1$ , so ist nach 5  $\eta_1 = \frac{Kl^2}{3Ea} = \frac{\frac{8}{3} l^2}{3Ea}$ , folglich  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\frac{3}{2} \eta_1 a_1}{l^2 a} = \frac{3 \eta_1 a_1}{l^2 a}$ , oder

$$10. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{3 \eta_1 h_1}{l^2 h}.$$

Ist die Höhe constant, so wird  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{3 \eta_1}{l^2}$ ,  $\frac{d\eta}{dx} = -\frac{3 \eta_1}{l^2} (1-x)$  und

$$11. \quad \eta = \frac{3}{2} \eta_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2.$$

Ist die Breite constant, so ist  $h = h_1 \sqrt{\frac{x}{l}}$ , also  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{3 \eta_1}{l^2} \sqrt{\frac{l}{x}}$ ,  $\frac{d\eta}{dx} = \frac{6 \eta_1}{l} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{l}}\right)$  und

$$12. \quad \eta = 2 \eta_1 \left[1 - 3 \frac{x}{l} + 2 \sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^3}\right].$$

Sind endlich die Querschnitte ähnlich, so ist  $h = h_1 \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ , also  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{3 \eta_1}{l^2} \sqrt[3]{\frac{l}{x}}$ ,  $\frac{d\eta}{dx} = \frac{9 \eta_1}{l} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}\right)$  und

$$13. \quad \eta = \frac{9}{5} \eta_1 \left[1 - \frac{5}{2} \frac{x}{l} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{x}{l}\right)^5}\right].$$

Die Senkung  $\eta$  des freien Endes wird in diesen drei Fällen

$$14. \quad a. \eta = \frac{3}{2} \eta_1, \quad b. \eta = 2 \eta_1, \quad c. \eta = \frac{9}{5} \eta_1.$$

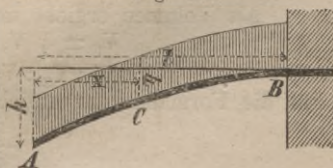
Das Verhältniss dieser Senkungen ist 15 : 20 : 18, also genau dasselbe, wie das der Volumina.

Anwendung bei Consolen, Wellen, Hebeln etc.

**§. 96. Stab mit gleichmässiger Belastung.** Als Anfang der  $x$  wählen wir wieder das freie Ende A (Fig. 26), behalten die vorigen Bezeichnungen bei und bezeichnen ausserdem mit  $q$  die Last pro Längeneinheit.  $Q$  ist die Last des Theiles AC, d. i.  $qx$  und  $M$  das Moment dieser Last in Beziehung auf C, d. i.  $qx \cdot \frac{1}{2} x$ . Also ist

$$15. \quad Q = qx, \quad M = \frac{1}{2} qx^2.$$

Fig. 26.



Taf. II. Fig. 2 ist  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt.  $Q$  und  $M$  erreichen das Maximum am eingespannten Ende B, hier wird also bei constantem Querschnitte auch  $S$  zum Maximum oder: der gefährliche Querschnitt liegt bei einem prismatischen Stabe am eingespannten Ende. Für denselben ist  $M = \frac{1}{2}ql^2$ , mithin die Festigkeitsbedingung  $K = \frac{ql^2a}{2W}$ ,  $R = \frac{ql^2a}{2W}$ , also die Tragkraft

$$16. \quad ql = \frac{2KW}{la} = \frac{2RW}{la}.$$

Anwendung bei Consolen, Drehbrücken etc.

**§. 97. Formänderung.** Nach 41 (§. 79) ist

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{qx^2}{28W}.$$

Die zweimalige Integration giebt, wenn man die Constanten durch die Bedingungen bestimmt, dass für  $x=1$   $\frac{d\eta}{dx} = 0$  und  $\eta = 0$  werden muss,

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{q(1^3-x^3)}{6EW},$$

$$17. \quad \eta = \frac{q}{24EW} (3l^4 - 4l^3x + x^4).$$

Die Senkung  $y$  des freien Endes ( $x = 0$ ) ist demnach

$$18. \quad y = \frac{ql^4}{8EW}.$$

Wenn der Stab mit der grössten zulässigen, durch 16 bestimmten Last belastet ist, so ist die Senkung

$$19. \quad y = \frac{Kl^2}{4Ea} = \frac{Rl^2}{4Ea}.$$

**§. 98. Körper von constanter Festigkeit.** Nach 76 (§. 86) wird

$$20. \quad \frac{bh^2}{b_1h_1^2} = \frac{M}{M_1} = \left(\frac{x}{l}\right)^2.$$

Hieraus folgen als specielle Formen (Taf. IV. Fig. 1–3):

$$21. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a. Höhe constant (Fig. 1):} \dots b = b_1 \left(\frac{x}{l}\right)^2, \\ \text{b. Breite constant (Fig. 2):} \dots h = h_1 \frac{x}{l}, \\ \text{c. Querschn. ähnlich (Fig. 3):} \dots h = h_1 \sqrt[3]{\left(\frac{x}{l}\right)^2}. \end{array} \right.$$

Als Volumen ergibt sich in diesem Falle

$$V_1 = \frac{1}{3}V, \quad V_2 = \frac{1}{2}V, \quad V_3 = \frac{3}{7}V, \\ V : V_2 : V_3 : V_1 = 42 : 21 : 18 : 14.$$

Für die Formänderung ergibt sich in gleicher Weise, wie in §. 95:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{4y_1h_1}{l^2h}.$$

Hieraus folgt nun mit Berücksichtigung von 21 leicht:

$$22. \begin{cases} \text{a. Höhe constant: } \eta = 2 \nu_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2, \\ \text{b. Breite constant: } \eta = 4 \nu_1 \left(1 - \frac{x}{l} + \frac{x}{l} \log \text{nat} \frac{x}{l}\right), \\ \text{c. Querschn. ähnlich: } \eta = 3 \nu_1 \left(1 - 4 \frac{x}{l} + 3 \frac{x}{l} \sqrt[3]{\frac{x}{l}}\right) \end{cases}$$

und hiernach ist die Senkung  $\nu$  des freien Endes:

$$23. \text{ a. } \nu = 2 \nu_1, \quad \text{b. } \nu = 4 \nu_1, \quad \text{c. } \nu = 3 \nu_1.$$

Anwendung bei Consolen.

### §. 99. Stab mit isolirter und gleichmässiger Belastung.

Wenn der Stab am freien Ende mit einer Last  $G$  und ausserdem gleichmässig mit einer Last  $q$  pro Längeneinheit belastet ist, so sind die Ausdrücke für  $Q$ ,  $M$ ,  $\eta$  die Summen der entsprechenden Ausdrücke der beiden vorigen Fälle. So wird

$$24. Q = G + q x, \quad M = G x + \frac{1}{2} q x^2,$$

wonach Taf. II. Fig. 3.  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt ist.

Für den Körper von constanter Festigkeit ergibt sich

$$25. \frac{b h^2}{b_1 h_1^2} = \frac{M}{M_1} = \frac{2 G x + q x^2}{2 G l + q l^2}.$$

Die sich hiernach ergebenden Formen bei constanter Höhe und constanter Breite sind Taf. IV. Fig. 4 und 5 dargestellt. Im ersten Falle wird der Grundriss von zwei Parabeln begrenzt, deren Scheitel vom freien Ende die Entfernung  $\frac{G}{q}$  hat. Im zweiten Falle wird der Aufriss von einer Hyperbel begrenzt,

deren Centrum vom freien Ende ebenfalls die Entfernung  $\frac{G}{q}$  hat.

B. Stab, welcher mit beiden Enden auf Stützen liegt.

§. 100. Belastung durch eine feste isolirte Last. Als Anfang der  $x$  wählen wir den einen Stützpunkt  $A$  (Fig. 27) und bezeichnen mit

$G$  die in einem beliebigen Punkte

$C$  wirkende Last;

$D_1$ ,  $D_2$  die Drücke auf die Stützen  $A$ ,  $B$  oder die denselben gleichen Kräfte, welche die Stützen auf den Stab ausüben;

$l$  die Entfernung  $AB$  der Stützen;

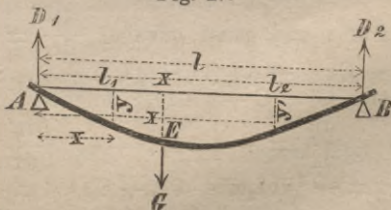
$l_1$ ,  $l_2$  die Entfernung der Last von den Stützen;

$\nu$  die grösste vorkommende Senkung.

Das Gleichgewicht des ganzen Stabes fordert die Erfüllung der Bedingungen  $D_1 + D_2 = G$ ,  $D_1 l = G l_2$  oder  $D_2 l = G l_1$ , mithin ist

$$26. D_1 = G \frac{l_2}{l}, \quad D_2 = G \frac{l_1}{l}.$$

Fig. 27.



Daher ist nun, wenn wir in der Strecke CB Alles durch einen Apostroph bezeichnen,  $Q = D_1$ ,  $Q' = D_1 - G = -D_2$ ,  $M = -D_1 x$ ,  $M' = -D_1 x + G(x-l_1) = -D_2(1-x)$ , d. i.

$$27. \quad \begin{cases} Q = G \frac{l_2}{l}, & Q' = -G \frac{l_1}{l}, \\ M = -G \frac{l_2 x}{l}, & M' = -G \frac{l_1(1-x)}{l}. \end{cases}$$

Taf. II. Fig. 4 ist  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt. Das Moment  $M$  erreicht das Maximum am Angriffspunkte der Last. Da  $Q$  innerhalb jeder Strecke constant ist, so liegt auch der gefährliche Querschnitt am Angriffspunkte der Last. Das Maximum von  $M$  wird

$$28. \quad \max M = -\frac{G l_1 l_2}{l}.$$

Die Festigkeitsbedingung ist daher  $K = \frac{G l_1 l_2 a}{l W}$ ,  $\mathfrak{K} = \frac{G l_1 l_2 a}{l W}$  oder

$$29. \quad G = \frac{K W l}{l_1 l_2 a} = \frac{\mathfrak{K} W l}{l_1 l_2 a}.$$

Liegt die Last in der Mitte des Stabes, so wird

$$30. \quad \max M = -\frac{1}{4} G l,$$

$$31. \quad G = \frac{4 K W}{l a} = \frac{4 \mathfrak{K} W}{l a}.$$

Anwendung bei Wellen, Querträgern von Brücken, Balken etc. Ausserdem zur Bestimmung der Bruchcoefficienten; nach 31 wird nämlich, wenn  $G$  die Last bedeutet, welche den Bruch veranlasst, mit Rücksicht auf §. 87

$$B = \frac{G l a}{4 W}, \quad \mathfrak{B} = \frac{G l a}{4 W}.$$

**§. 101. Formänderung.** Setzen wir zur Abkürzung  $\frac{G}{E W l} = A$  so wird

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = -A l_2 x, \quad \frac{d^2 \eta'}{dx^2} = -A l_1 (1-x),$$

mithin bei prismatischem Stabe

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{1}{2} A l_2 x^2 + C, \quad \frac{d\eta'}{dx} = -A l_1 (1-x) + C'.$$

Für  $x = l_1$  muss offenbar  $\frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta'}{dx}$  werden. Mithin ist  $-\frac{1}{2} A l_2 l_1^2 + C = -A l_1 (1-l_1 - \frac{1}{2} l_1^2) + C'$ . Setzt man hierin  $l_2 = l - l_1$ , so ergibt sich  $C' = C + \frac{1}{2} A l_1 l_1^2$ , folglich

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{1}{2} A l_2 x^2 + C, \quad \frac{d\eta'}{dx} = -\frac{1}{2} A l_1 (2lx - x^2 - ll_1) + C.$$

$\eta = -\frac{1}{6} A l_2 x^3 + Cx + C_1$ ,  $\eta' = -\frac{1}{2} A l_1 (lx^2 - \frac{1}{2} x^3 - ll_1 x) + Cx + C_1'$ . Für  $x = l_1$  muss  $\eta = \eta'$  werden; ausserdem muss für  $x = 0$   $\eta = 0$  und für  $x = l$   $\eta' = 0$  werden. Die Bedingung  $\eta = 0$  für  $x = 0$  giebt zunächst  $C_1 = 0$ . Die Bedingung  $\eta = \eta'$  für  $x = l_1$  giebt  $-C_1' = \frac{1}{6} A l_1 l_1^3$  und nun giebt die Bedingung  $\eta' = 0$  für  $x = l$   $C = \frac{1}{6} A l_1 l_2 (2l - l_1)$ . Daher wird nun nach gehöriger Reduction

$$32. \quad \begin{cases} \eta = \frac{1}{6} A l_2 x (2 l_1 - l_1^2 - x^2), \\ \eta' = \frac{1}{6} A l_1 (1 - x) (-l_1^2 + 2 l_1 x - x^2). \end{cases}$$

Als Senkung  $\eta_0$  des Angriffspunktes C der Last ( $x = l_1$ ) ergibt sich hiernach

$$33. \quad \eta_0 = \frac{1}{3} A l_1^2 l_2^2.$$

Die Differenziation von  $\eta$  giebt  $\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{6} A l_2 (2 l_1 - l_1^2 - 3 x^2)$ .

Daher wird  $\eta$  zum Maximum für  $2 l_1 - l_1^2 - 3 x^2 = 0$  oder für

$$34. \quad x = \sqrt{\frac{1}{3} (2 l_1 - l_1^2) l_1}.$$

Dieser Ausdruck gilt aber nur, wenn  $x < l_1$ , d. i.  $l_1 > \frac{1}{2} l$  ist. Setzt man diesen Werth für  $x$  in den Ausdruck für  $\eta$ , so ergibt sich als grösste Senkung

$$35. \quad \eta = \frac{1}{27} \frac{G l_1 l_2}{E W l} (2 l_1 - l_1) \sqrt{3 l_1 (2 l_1 - l_1)}.$$

Liegt die Last in der Mitte des Stabes, so wird

$$36. \quad \eta = \frac{1}{27} \frac{G}{E W} x (3 l^2 - x^2),$$

$$37. \quad \eta = \frac{G l^3}{48 E W}.$$

Bezeichnet man die grösste Abweichung für diesen letzteren Fall mit  $\eta$ , so wird für eine andere Lage der Last nach 35 und 34:

$$l_1 = 0,1 l, \quad \eta = 0,230 \eta, \quad x = 0,252 l,$$

$$l_1 = 0,2 l, \quad \eta = 0,532 \eta, \quad x = 0,346 l,$$

$$l_1 = 0,3 l, \quad \eta = 0,785 \eta, \quad x = 0,412 l,$$

$$l_1 = 0,4 l, \quad \eta = 0,946 \eta, \quad x = 0,462 l,$$

$$l_1 = 0,5 l, \quad \eta = 1,000 \eta, \quad x = 0,500 l.$$

Anwendung zur Bestimmung der Elasticitätscoefficienten durch Biegeversuche. Nach 37 wird nämlich

$$E = \frac{G l^3}{48 W \eta}.$$

## §. 102. Belastung durch eine bewegliche isolirte Last.

Wenn die Last jede mögliche Lage annehmen kann, so kommt es hauptsächlich darauf an, diejenige Lage zu bestimmen, bei welcher die Beanspruchung für einen beliebigen Querschnitt am grössten ist.

Liegt die Last zwischen B und dem betreffenden Querschnitte C, so ist  $Q = -\frac{G l_2}{l}$ ,  $M = -\frac{G l_2 x}{l}$ ;  $Q$  und  $M$  wachsen demnach mit  $l_2$ , werden also am grössten für  $l_2 = l - x$ . Liegt dagegen die Last zwischen A und C, so ist  $Q = +\frac{G l_1}{l}$ ,  $M = \frac{G l_1 (l - x)}{l}$ ;  $Q$  und  $M$  wachsen also mit  $l_1$ , werden mithin am grössten für  $l_1 = x$ . Hieraus folgt:

$Q$  und  $M$  werden für einen beliebigen Querschnitt am grössten, wenn die Last an diesem Querschnitte liegt.

Für diese Lage der Last wird, wenn die Last dicht rechts neben dem Querschnitte liegt,  $Q = -D_1 = -G \frac{l_2}{l}$ , also negativ, und wenn die Last dicht links neben dem Querschnitte liegt,  $Q = -D_1 + G$

$= + D_2 = + G \frac{l_1}{1}$ , also positiv. Ferner wird  $M = - D_1 l_1 = - G \frac{l_1 l_2}{1}$  oder, da  $l_1 = x$ ,  $l_2 = 1-x$  ist,

$$38. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max(-Q) = -G \left(1 - \frac{x}{1}\right), \quad \max(+Q) = G \frac{x}{1}, \\ \max M = G l \frac{x}{1} \left(1 - \frac{x}{1}\right). \end{array} \right.$$

Taf. II. Fig. 5 ist  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt. Das absolute Maximum erreicht  $Q$  für  $x = 0$  oder  $x = 1$ ,  $M$  für  $x = \frac{1}{2} l$  und zwar ist  $\max Q = \pm G$ ,  $\max M = -\frac{1}{4} Gl$ .

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die grösste Senkung in der Mitte eintritt, wenn auch die Last in der Mitte liegt.

Anwendung bei kleinen Balkenbrücken aus Holz und Eisen.

**§. 103. Körper von constanter Festigkeit.** a) Wenn die Last eine feste Lage hat, so gelten auch hier die in §. 95 für einen an einem Ende eingespannten, am andern belasteten Stab ermittelten Formen, weil der Stützendruck auf den Stab in derselben Weise wirkt, wie die Last am Ende des Stabes. Der Stab besteht natürlich aus zwei besonderen, am Angriffspunkte der Last zusammenstossenden Formen. Taf. III. Fig. 4—6 sind die Formen für den Fall, dass die Last in der Mitte liegt, dargestellt.

b) Wenn aber die Last jede beliebige Lage annehmen kann, so muss jeder Querschnitt für die gefährlichste Lage der Last bestimmt werden. Bezeichnen wir für die Mitte Alles mit dem Index 1, so ist nach 38  $M = G x \left(1 - \frac{x}{1}\right)$ ,  $M_1 = \frac{1}{4} Gl$ , mithin nach 76 (§. 85):

$$39. \quad \frac{b h^2}{b_1 h_1^2} = \frac{M}{M_1} = 4 \frac{x}{1} \left(1 - \frac{x}{1}\right).$$

Hieraus ergeben sich als besondere Formen (Taf. III. Fig. 7 und 8):

$$40. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a. Höhe constant (Fig. 7):} \quad \dots b = 4 b_1 \frac{x}{1} \left(1 - \frac{x}{1}\right), \\ \text{b. Breite constant (Fig. 8):} \quad \dots h = 2 h_1 \sqrt{\frac{x}{1} \left(1 - \frac{x}{1}\right)}, \\ \text{c. Querschnitte ähnlich:} \quad \dots h = h_1 \sqrt{4 \frac{x}{1} \left(1 - \frac{x}{1}\right)}. \end{array} \right.$$

Im ersten Falle wird der Grundriss von Parabeln, im zweiten der Aufriss von einer Ellipse begrenzt. Für die Volumina ergiebt sich:

$$V_1 = \frac{2}{3} V = 0,667 V; \quad V_2 = \frac{\pi}{4} V = 0,785 V; \quad V_3 = 0,735 V.$$

Anwendung a. bei Axen, Wellen etc., b. bei kleinen Brücken aus Guss-eisen, älteren gusseisernen Eisenbahnschienen etc.

**§. 104. Belastung durch zwei isolirte Lasten.** Der Stab sei durch zwei gleich grosse Lasten  $G$  belastet, welche von den Stützen die gleiche Entfernung  $a$  haben (Fig. 28). Jeder Stützendruck  $D$  ist  $= G$ .

Nehmen wir die eine Stütze A als Anfang der  $x$  an, so ist innerhalb der äusseren Strecke AE

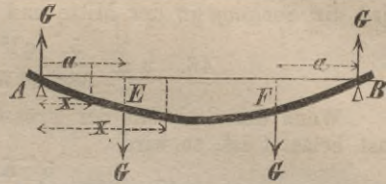
$Q = -D = -G$ ,  $M = -Dx = Gx$  und innerhalb der mittleren Strecke EF  $Q = -D + G$ ,  $M = -Dx + G(x - a)$ , d. i.

$$41. \quad Q = 0, \quad M = Ga.$$

Innerhalb der mittleren Strecke ist also  $M$  constant und von der Entfernung AB der Stützen unabhängig. Taf. II. Fig. 6 ist  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt.

Anwendung bei Querträgern von Brücken etc.

Fig. 28.



### §. 105. Gleichmässige Belastung.

Als Anfang der  $x$  wählen wir wieder die eine Stütze A (Fig. 29) und bezeichnen mit  $l$  die Entfernung der Stützen und mit  $q$  die Last pro Längeneinheit. Der Stützendruck  $D$  ist gleich der halben Last, also  $= \frac{1}{2}ql$ . Daher wird für einen beliebigen Querschnitt C:  $Q = -D + qx$  und  $M = -Dx + \frac{1}{2}qx^2$ , d. i.

Fig. 29.



$$42. \quad Q = -\frac{1}{2}q(1 - 2x), \quad M = -\frac{1}{2}qx(1 - x).$$

Taf. II. Fig 7 ist  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt.  $Q$  ist in der Mitte  $= 0$  und wird an den Enden am grössten.  $M$  dagegen ist an den Enden  $= 0$  und wird in der Mitte am grössten. In dem gewöhnlichen Falle (§. 84) liegt daher der gefährliche Querschnitt in der Mitte. Es wird

$$43. \quad \max Q = \frac{1}{2}ql, \quad \max M = \frac{1}{8}ql^2,$$

mithin ist die Festigkeitsbedingung  $K = \frac{ql^2a}{8W}$ ,  $\mathfrak{K} = \frac{ql^2a}{8W}$  oder

$$44. \quad ql = \frac{8KW}{la} = \frac{8\mathfrak{K}W}{la}.$$

Vielfache Anwendung bei Balkenbrücken aus Holz und Eisen, Balken in Gebäuden etc.

### §. 106. Formänderung.

Nach 41 (§. 79) wird

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{qx(1-x)}{2EW}.$$

Bei der Integration sind die Constanten durch die Bedingungen zu bestimmen, dass für  $x = 0$  und  $x = 1$   $\eta = 0$  werden muss. Bei prismatischem Stabe kann man die Constanten auch durch die Bedingungen bestimmen, dass für  $x = \frac{1}{2}$   $\frac{d\eta}{dx} = 0$  und für  $x = 0$   $\eta = 0$  wird. Es ergibt sich so

$$45. \quad \eta = \frac{q}{24EW} (l^3 - 2lx^2 + x^3)x.$$

Taf. VII. Fig. 2 (stark) ist die elastische Linie dargestellt. Am grössten wird die Senkung in der Mitte und zwar ist dieselbe

$$46. \quad \psi = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E W} = 0,01302 \frac{q l^4}{E W}.$$

Wenn der Stab mit der grössten zulässigen, durch 44 bestimmten Last belastet ist, so wird

$$47. \quad \psi = \frac{5}{48} \frac{K l^2}{E a} = \frac{5}{48} \frac{\mathfrak{K} l^2}{E a}.$$

Anwendung bei Brücken etc. und zur Bestimmung der grössten Spannung (K,  $\mathfrak{K}$ ) durch Versuche.

**§. 107. Körper von constanter Festigkeit.** Bezeichnen wir für die Mitte Alles durch den Index 1, so wird nach 76 (§. 86):

$$48. \quad \frac{b h^2}{b_1 h_1^2} = \frac{M}{M_1} = 4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Hiernach erhält der Stab dieselbe Form, wie für eine bewegliche isolirte Last (§. 103 b). (Taf. III Fig. 9 und 10).

Für die Formänderung wird nach 77 (§. 86)  $\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{K}{Ee}$ . Bezeichnen wir die Senkung in der Mitte eines Stabes von gleicher Festigkeit, d. h. mit gleichem mittleren Querschnitte, mit  $\psi_1$ , so wird nach 47  $\frac{K}{E} = \frac{48 \psi_1 a_1}{5 l^2}$ , mithin  $\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{48 \psi_1 a_1}{5 l^2 a}$  oder

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{48 \psi_1 h_1}{5 l^2 h}.$$

Bei constanter Höhe  $h$  ergibt sich leicht

$$49. \quad \eta = \frac{24 \psi_1}{5 l^2} x (1 - x),$$

$$50. \quad \psi = \frac{6}{5} \psi_1 = 1,200 \psi_1.$$

Taf. VII. Fig. 2 (schwach) ist die elastische Linie dargestellt.

Bei constanter Breite wird  $h = 2 h_1 \sqrt{\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}$ , oder, wenn man die Entfernung des variablen Querschnittes von der Mitte mit  $x_1$  bezeichnet, also  $x = \frac{1}{2} l - x_1$  setzt,  $h = h_1 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{l^2}}$ , folglich

$$\frac{d^2 \eta}{dx_1^2} = \frac{48 \psi_1}{5 l \sqrt{1 - 4 \frac{x_1^2}{l^2}}},$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{24 \psi_1}{5 l} \operatorname{Arcsin} 2 \frac{x_1}{l},$$

$$51. \quad \eta = \frac{6}{5} \psi_1 \left[ \pi - 4 \frac{x_1}{l} \operatorname{Arcsin} 2 \frac{x_1}{l} - 2 \sqrt{1 - 4 \frac{x_1^2}{l^2}} \right].$$

Die Senkung in der Mitte ( $x_1 = 0$ ) ist

$$52. \quad \psi = \frac{6(\pi - 2)}{5} \psi_1 = 1,370 \psi_1.$$

Bei ähnlichen Querschnitten wird  $h = h_1 \sqrt[3]{4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}$ , daher

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{48 \eta_1}{5 l \sqrt[3]{4 l x (1-x)}}$$

Nach 43 (§. 79) wird aber

$$\eta = x \frac{d\eta}{dx} - \int x \frac{d^2 \eta}{dx^2} dx,$$

mithin, da für  $x = 0$   $\eta = 0$  und für  $x = \frac{1}{2} l$   $\frac{d\eta}{dx} = 0$ ,  $\eta = \psi$  wird,

$$\begin{aligned} \psi &= \int_0^{\frac{1}{2} l} x \frac{d^2 \eta}{dx^2} dx = \frac{48 \eta_1}{5 l} \int_0^{\frac{1}{2} l} \frac{x dx}{\sqrt[3]{4 l x (1-x)}} \\ &= \frac{48}{5} \eta_1 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{x}{l} d\frac{x}{l}}{\sqrt[3]{4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}} \end{aligned}$$

Das bestimmte Integral ergibt sich durch Berechnung nach der Simpson'schen Regel zu 0,136 und daher wird

$$53. \quad \psi = 1,303 \eta_1.$$

**§. 108. Stab mit überragenden Enden.** Der in seiner ganzen Länge gleichmässig belastete Stab rage über jede Stütze um ein gleiches Stück hinaus (Fig. 30). Als Koordinatenanfang wählen wir die Mitte des Stabes und bezeichnen mit

$L$  die ganze Länge  $DE$  des Stabes,

$l$  die Entfernung  $AB$  der Stützen,

$\eta$  die Senkung in der Mitte,

$\eta_1$  die Senkung an den Enden.

In den ausserhalb der Stützen liegenden Theilen bezeichnen wir Alles durch einen Apostroph.

Der Druck auf jede Stütze ist  $D = \frac{1}{2} q L$ . Ferner wird  $Q = -D + q \left(\frac{1}{2} L - x\right)$ ,  $Q' = q \left(\frac{1}{2} L - x\right)$ , d. i. nach Einsetzung des Werthes von  $D$

$$54. \quad Q = -q x, \quad Q' = \frac{1}{2} q (L - 2x).$$

Ferner wird  $M = -D \left(\frac{1}{2} l - x\right) + \frac{1}{2} q \left(\frac{1}{2} L - x\right)^2$ ,  $M' = \frac{1}{2} q \left(\frac{1}{2} L - x\right)^2$ , d. i. nach Einsetzung des Werthes von  $D$

$$55. \quad M = \frac{1}{8} q (L^2 - 2 L l + 4 x^2), \quad M' = \frac{1}{8} q (2 L - x)^2.$$

Das Maximum erreicht  $M$  für  $x = 0$  oder  $x = \frac{1}{2} l$ , d. i. in der Mitte oder an den Stützen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe von  $M$  mit  $M_0$  und  $M_1$ , so ist

$$56. \quad M_0 = \frac{1}{8} q L (L - 2l), \quad M_1 = \frac{1}{8} q (L - l)^2.$$

$M_1$  ist stets positiv,  $M_0$  dagegen ist positiv, wenn  $l < \frac{1}{2} L$ , negativ, wenn

Fig. 30.



$l > \frac{1}{2}L$  ist. Ist  $l < \frac{1}{2}L$ , so ist  $M_0$  und  $M_1$  positiv und stets  $M_1 > M_0$ . Ist  $l > \frac{1}{2}L$ , so ist  $-M_0 = M_1$ , wenn  $l = (2 - \sqrt{2})L = 0,5858L$  ist. Ist  $l$  kleiner, so ist  $-M_0 < M_1$ , ist  $l$  grösser, so ist  $-M_0 > M_1$ .

Als Gleichungen der elastischen Linie ergeben sich leicht, wenn man beachtet, dass für  $x = 0$   $\frac{d\eta}{dx} = 0$  und für  $x = \frac{1}{2}l$   $\frac{d\eta'}{dx} = \frac{d\eta}{dx}$ ,  $\eta' = \eta = 0$  werden muss,

$$57. \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{1}{384} \frac{q}{E W} [-l^2(6L^2 - 12Ll + l^2) + 24L^2x^2 - 48Llx^2 + 16x^4], \\ \eta' = \frac{1}{384} \frac{q}{E W} [-l^2(6L^2 - 16Ll + l^2) - 24Ll^2x + 24L^2x^2 - 32Lx^3 + 16x^4]. \end{array} \right.$$

Daher wird die Senkung in der Mitte und an den Enden

$$58. \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = -\frac{1}{384} \frac{ql^2}{E W} (6L^2 - 12Ll + l^2), \\ \eta_1 = +\frac{1}{384} \frac{q}{E W} (3L^4 - 18L^2l^2 + 16Ll^3 - l^4). \end{array} \right.$$

Für  $l = (6 - \sqrt{30})L = 0,523L$  wird  $\eta_0 = 0$  und für  $l = 0,597L$  wird  $\eta_1 = 0$ . Für  $l = 0,584L$  wird  $\eta_0 = \eta_1$ .

Nicht ohne Wichtigkeit ist in diesem Falle die horizontale Verrückung  $\xi$  eines Punktes. Nach 50 (§. 80) wird

$$\frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{2} \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2, \quad \frac{d\xi'}{dx} = -\frac{1}{2} \left( \frac{d\eta'}{dx} \right)^2, \text{ d. i.}$$

$$\frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{4608} \left( \frac{q}{E W} \right)^2 [36L^2(L - 2l)^2 + 96L(L - 2l)x^2 + 64x^4] x^2,$$

$$\frac{d\xi'}{dx} = -\frac{1}{4608} \left( \frac{q}{E W} \right)^2 [9L^2l^4 - 36L^3l^2x + 36L^2(L^2 + 2l^2)x^2 - 48L(3L^2 + l^2)x^3 + 240L^2x^4 - 192L^2x^5 + 64x^6].$$

Die einmalige Integration, bei welcher zu beachten ist, dass für  $x = 0$   $\xi = 0$  und für  $x = \frac{1}{2}l$   $\xi' = \xi$  werden muss, giebt die Ausdrücke für  $\xi$ ,  $\xi'$ . Bezeichnet man die Summe der Verrückungen beider Enden oder die Längenänderung der Horizontalprojection des Stabes mit  $\lambda$ , so ergibt sich  $\lambda$ , indem man im Ausdrucke für  $\xi'$   $x = \frac{1}{2}L$  setzt. Es ergibt sich, wenn man das Verhältniss  $\frac{1}{L}$  mit  $n$  bezeichnet,

$$59. \quad \lambda = \frac{1}{322560} \frac{q^2 L^7}{E^2 W^2} (45 - 315n^2 + 735n^4 - 336n^5 + 7n^6).$$

Die sich hiernach ergebenden Werthe für  $\lambda$  bei verschiedener Lage der Stützen sind Taf. VII Fig. 4 als Ordinaten dargestellt. Am grössten wird hiernach  $\lambda$ , wenn der Stab an seinen Enden unterstützt ist. Für diesen Fall wird  $\lambda = 0,000422 \frac{q^2 L^7}{E^2 W^2}$ . Wenn der Stab in der Mitte unterstützt so wird  $\lambda = 0,000139 \frac{q^2 L^7}{E^2 W^2}$ . Am kleinsten wird  $\lambda$  für  $\frac{d\lambda}{dn} = 0$ , d. i. für

$$60. \quad \left\{ \begin{array}{l} n^4 - 40n^3 + 70n^2 - 15 = 0, \\ n = 0,5594, \end{array} \right.$$

und zwar wird  $\min \lambda = 0,00000067 \frac{q^2 L^7}{E^2 W^2}$ . Die Theile des Stabes verhalten sich in diesem Falle wie 0,22 : 0,56 : 0,22 oder nahezu wie 2 : 5 : 2.

Anwendung bei Bestimmung der zweckmässigsten Lage der Unterstützungspunkte von Messstäben für Basismessungen.

### §. 109. Belastung durch eine ungleichmässig vertheilte

**Last.** Um die Behandlung dieses Falles zu zeigen, wählen wir folgendes Beispiel: Der Stab sei durch eine stetig vertheilte Last belastet, welche an einer Stütze Null ist und nach der anderen Stütze hin gleichmässig zunimmt (Fig. 31). Die erstere Stütze nehmen wir als Anfang der  $x$  an und bezeichnen die mittlere Last oder die Last in der Mitte pro Längeneinheit mit  $q$ . Alsdann können wir setzen

$$q = 2q \frac{x}{l}.$$

Nach 2 und 3 (§. 61) wird nun

$$Q = \int q dx = \frac{2q}{l} \int x dx = \frac{q x^2}{l} + C,$$

$$M = \int Q dx = \frac{q x^3}{3l} + Cx + C_1.$$

Für  $x = 0$  wird  $M = 0$ , daher  $C_1 = 0$ ; für  $x = l$  wird ebenfalls  $M = 0$ , daher  $0 = \frac{1}{3} q l^2 + C l$ ,  $C = -\frac{1}{3} q l$ , mithin

$$61. \quad Q = -\frac{1}{3} q l \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2}\right), \quad M = -\frac{1}{3} q l x \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Taf. II Fig. 8 ist  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt.  $Q$  ist für  $x = 0$  und  $x = l = -\frac{1}{3} q l$  und  $+\frac{2}{3} q l$ ; diese Transversalkräfte sind, positiv genommen, zugleich die Stützendrücke. Für  $x = l \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577 l$  wird  $Q = 0$ . Für diese Stelle wird gleichzeitig  $M$  zum Maximum; dasselbe ist  $\max M = \frac{1}{3} q l^2 \sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\right)$  oder

$$62. \quad \max M = \frac{2\sqrt{3}}{27} q l^2 = 0,1283 q l^2,$$

während bei gleichmässiger Belastung  $\max M = \frac{1}{8} q l^2 = 0,1250 q l^2$  wird, so dass beide Momente bei gleicher Gesamtlast nur wenig von einander abweichen.

Für die Formänderung wird bei constantem Querschnitte

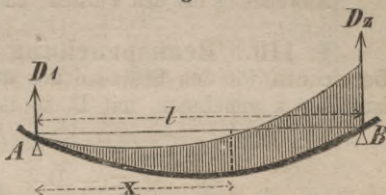
$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{q}{3 E W l} x (l^2 - x^2).$$

Die zweimalige Integration giebt, wenn man die Constanten durch die Bedingung bestimmt, dass für  $x = 0$  und  $x = l$   $\eta = 0$  wird,

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{q}{180 E W l} (7 l^4 - 30 l^2 x^2 + 15 x^4),$$

$$63. \quad \eta = \frac{q}{180 E W l} x (7 l^4 - 10 l^2 x^2 + 3 x^4).$$

Fig. 31.



Demnach wird  $\eta$  zum Maximum für  $71^4 - 301^2x^2 + 15x^4 = 0$  oder

$$64. \quad x = 1 \sqrt{1 - \sqrt{\frac{8}{15}}} = 0,51931$$

und zwar ergibt sich als grösste Senkung

$$65. \quad y = 0,01304 \frac{ql^3}{EW},$$

d. i. fast genau ebenso gross, als bei gleich grosser gleichmässig vertheilter Last nach 46 (§. 106).

Anwendung bei den Pfosten von Senkkasten oder Caissons etc.

### §. 110. Beanspruchung bei unregelmässiger Belastung.

Bezeichnen wir den Stützdruck auf die linke Stütze, welche wir als Anfang der  $x$  annehmen, mit  $D$ , so ist

$$66. \quad Q = -D + \int_0^x q \, dx = -D + f(x).$$

wenn wir  $\int q \, dx = f(x)$  setzen. Mit Rücksicht darauf, dass für  $x = 0$   $M = 0$  ist, wird

$$67. \quad M = \int_0^x Q \, dx = -Dx + \int_0^x f(x) \, dx = -Dx + \varphi(x),$$

wenn wir  $\int f(x) \, dx = \varphi(x)$  setzen. Diese Funktionen  $f(x)$  und  $\varphi(x)$  lassen sich, wenn  $q$  für jeden Punkt gegeben ist, durch direkte Summirung, entweder durch Rechnung oder graphisch, genauer aber noch durch die Simpson'sche Regel bestimmen. Für  $x = 1$  wird auch  $M = 0$ , daher  $0 = -D1 + \varphi(1)$ , also  $D = \frac{\varphi(1)}{1}$ , womit  $D$  und somit auch  $Q$ ,  $M$  für alle Stellen bestimmt ist.

Wenn die Last symmetrisch in Beziehung auf die Mitte vertheilt ist, so ist jeder Stützdruck gleich der halben Last, also

$$68. \quad D = \frac{1}{2} \int_0^1 q \, dx.$$

Man berechnet daher am besten zunächst  $D$  und sodann  $Q$  und  $M$  nach 66 und 67.

Beispiel. Es sei  $l = 12^m$ ; diese ganze Länge sei in 10 gleiche Theile von  $1,2^m$  Länge getheilt und für jeden Theilpunkt  $q$  durch folgende Tabelle bestimmt. Colonne 3 enthält die in jedem Theile liegende Last, z. B. zwischen  $x = 0,21$  und  $x = 0,31$   $\frac{1,6 + 1,9}{2} \cdot 1,2 = 2,10$ . Durch successive Addition dieser Zahlen erhält man  $f(x)$ , z. B. für  $x = 0,31$   $f(x) = 1,32 + 1,74 + 2,10 = 5,16$ . Colonne 5 enthält  $\int f(x) \, dx$  für die Ausdehnung eines jeden Theiles, z. B. zwischen  $x = 0,31$  und  $0,41$   $\frac{3,06 + 5,16}{2} \cdot 1,2 = 4,93$ . Durch successive Addition dieser Zahlen erhält man  $\varphi(x)$ , z. B. für  $x = 0,31$   $\varphi(x) = 0,79 + 2,63 + 4,93 = 8,35$ . Für  $x = 1$  ist  $\varphi(1) = 133,08$ , also  $D = \frac{133,08}{12} = 11,09$ . Daher ist nun  $Q = -11,09 + f(x)$ , z. B. für  $x = 0,31$   $Q = -11,09 + 5,16 = -5,93$ .

Columnne 8 enthält  $\int Q dx$  für die Ausdehnung eines Theiles, z. B. zwischen  $x = 0,31$  und  $x = 0,41$   $\frac{8,03 + 5,93}{2} \cdot 1,2 = 8,37$ . Durch successive Addition dieser Zahlen erhält man M, z. B. für  $x = 0,31$   $M = -12,51 - 10,67 - 8,37 = -31,55$ , oder auch  $M = -Dx + \varphi(x) = -11,09 \cdot 3,6 + 8,35 = -31,55$ .

$\frac{x}{l}$	q		f(x)		$\varphi(x)$	Q		M
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,9		0		0	-11,09		0
0,1	1,3	1,32	1,32	0,79	0,79	-9,77	-12,51	12,51
0,2	1,6	1,74	3,06	2,63	3,42	-8,03	-10,67	23,18
0,3	1,9	2,10	5,16	4,93	8,35	-5,93	-8,37	31,55
.	.	.	.	.	.	.	.	.
0,9	2,3		22,08		105,04	+10,99		14,74
1	2,0	2,58	24,66	28,04	133,08	+13,57	+14,74	0

Für  $x = 0,41, 0,51, 0,61$  wird  $M = 37,19, 39,69, 38,93$ . Nach der in der Anmerkung\*) gegebenen Regel wird daher M zum Maximum für  $x = 0,5271$  und zwar ist  $\max M = 39,81$ .

Anwendung bei Blech- und Gitterbrücken.

### §. 111. Formänderung bei unregelmässiger Begrenzung und beliebiger Belastung. Es ist

$$69. \quad E \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{M}{W} = f(x),$$

$$70. \quad E \frac{d\eta}{dx} = \int_0^x f(x) dx + C = \varphi(x) + C,$$

$$71. \quad E \eta = \int_0^x \varphi(x) dx + Cx = \psi(x) + Cx.$$

Für  $x = l$  wird  $\eta = 0$ , daher  $0 = \psi(l) + Cl$ ,  $C = -\frac{\psi(l)}{l}$ . Hiernach kann die Rechnung in derselben Weise geführt werden, wie im vorigen Paragraph.

Wenn der Körper und die Belastung in Beziehung auf die Mitte symmetrisch sind, was meist der Fall ist, so kann man zur Berechnung der Senkung  $\eta$  in der Mitte ein einfacheres Verfahren anwenden. Es ist nämlich nach 43 (§. 79)

$$\eta = x \frac{d\eta}{dx} - \int x \frac{d^2 \eta}{dx^2} dx + C.$$

\*) Anmerk. Wenn  $y$  eine Funktion von  $x$  ist und für  $x = x_2 - c$ ,  $x = x_2$ ,  $x = x_2 + c$  die Werthe  $y_1, y_2, y_3$  hat, so wird annähernd  $y$  zum Maximum für

$$x = x_2 + \frac{c}{2} \frac{y_1 - y_3}{y_1 - 2y_2 + y_3}$$

und zwar ist

$$\max y = y_2 - \frac{1}{8} \frac{(y_1 - y_3)^2}{y_1 - 2y_2 + y_3}.$$

Genau ist dies richtig, wenn  $y$  von der Form  $y = a + bx + cx^2$  ist.

Für  $x = 0$  wird  $\eta = 0$  und in der Mitte oder für  $x = \frac{1}{2} l$  wird  $\frac{d\eta}{dx} = 0$ , mithin ist

$$0 = 0 - \int_0^{\frac{1}{2}l} x \frac{d^2\eta}{dx^2} dx + C_1,$$

$$y = 0 - \int_{\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} x \frac{d^2\eta}{dx^2} dx + C,$$

daher

$$72. \quad y = \int_0^{\frac{1}{2}l} x \frac{d^2\eta}{dx^2} dx = \frac{1}{E} \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{M x dx}{W}.$$

Ist die Hälfte des Trägers in eine gerade Anzahl, nämlich  $n$ , gleicher Theile getheilt und sind für die Theilpunkte die Momente  $M_0, M_1, M_2, \dots$ , die Trägheitsmomente  $W_0, W_1, W_2, \dots$ , so wird nach der Simpson'schen Regel

$$73. \quad y = \frac{2l}{3E} \left[ 2 \left( 1 \frac{M_1}{W_1} + 3 \frac{M_3}{W_3} + 5 \frac{M_5}{W_5} + \dots \right) + \left( 2 \frac{M_2}{W_2} + 4 \frac{M_4}{W_4} + \dots \right) \right].$$

Beispiel. Für das Beispiel des vorigen §. habe der Querschnitt das in der folgenden Tabelle angegebene Trägheitsmoment. Die in der Tabelle zusammengestellte Rechnung wird aus der im vorigen §. gegebenen Erläuterung leicht verständlich werden.

$\frac{x}{l}$	M	W	f(x)		$\varphi(x)$		$\psi(x)$	E $\eta$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,13	0	33,8	0	20,3	0	0
0,1	12,51	0,28	56,4	62,0	33,8	77,8	20,3	260,7
0,2	23,18	0,49	47,0	54,2	95,8	147,5	98,1	464,0
0,3	31,55	0,73	43,3	.	150,0	.	245,6	597,5
.	.	.	.	.	.	.	.	.
0,9	14,74	0,43	34,4	20,6	443,8	544,9	2266,0	263,4
1	0	0,21	0		464,4		2810,9	0

$$C = \frac{2810,9}{12} = 234,2, \quad E\eta = 234,2 x + \psi(x).$$

Anwendung bei Blech- und Gitterbrücken.

## XII. Kapitel.

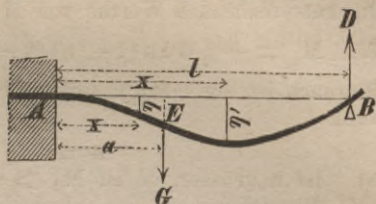
### Bedingte Belastung bei Stäben mit einem Felde.

A. Prismatischer Stab, welcher an einem Ende eingespannt, am anderen unterstützt ist.

§. 112. **Belastung durch eine isolirte Last.** Der Stab sei in einem beliebigen Punkte E (Fig. 32) belastet und die Stütze B habe eine solche Höhe, dass sie den unbelasteten Stab berührt. Als Anfang

der  $x$  wählen wir das eingespannte Ende A und bezeichnen mit  $l$  die Länge AB des Stabes, mit  $G$  die Last, mit  $a$  den Abstand AE derselben vom eingespannten Ende, mit  $n$  das Verhältniss  $\frac{a}{l}$  und mit  $D$  den Druck auf die Stütze B. Innerhalb der Strecke BE bezeichnen wir Alles durch einen Apostroph. Alsdann ist

Fig. 32.



$$\text{a. } Q = D - G, \quad Q' = D,$$

$$\text{b. } M = -D(1-x) + G(a-x), \quad M' = -D(1-x).$$

Setzt man  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = M$ ,  $\frac{d^2\eta'}{dx^2} = M'$  und integriert, wobei man die Constanten durch die Bedingungen bestimmt, dass für  $x = 0$   $\frac{d\eta}{dx} = 0$  und für  $x = a$   $\frac{d\eta'}{dx} = \frac{d\eta}{dx}$  wird, so ergibt sich

$$\text{c. } \begin{cases} \frac{d\eta}{dx} = \frac{x}{2EW} [D(2l-x) - G(2a-x)], \\ \frac{d\eta'}{dx} = \frac{1}{2EW} [Dx(2l-x) - Ga^2]. \end{cases}$$

Die abermalige Integration giebt, wenn man die Constanten durch die Bedingung bestimmt, dass für  $x = 0$   $\eta = 0$  und für  $x = a$   $\eta' = \eta$  wird,

$$\text{d. } \begin{cases} \eta = \frac{x^2}{6EW} [D(3l-x) - G(3a-x)], \\ \eta' = \frac{1}{6EW} [Dx^2(3l-x) - Ga^2(3x-a)]. \end{cases}$$

Für  $x = l$  muss  $\eta' = 0$  werden, mithin  $2Dl^3 - Ga^2(3l-a) = 0$  und hieraus ergibt sich als Stützendruck

$$74. \quad D = G \frac{a^2(3l-a)}{2l^3} = \frac{1}{2} G n^2(3-n).$$

Liegt die Last in der Mitte des Stabes, so wird  $D = \frac{1}{2} G \frac{1}{4} (3 - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16} G$ .

**§. 113. Beanspruchung.** Setzen wir den Ausdruck von  $D$  in Ausdrücke a und b für  $Q$  und  $M$ , so ergibt sich

$$75. \quad \begin{cases} Q = -\frac{1}{2} G [2 - n^2(3-n)], \quad Q' = \frac{1}{2} G n^2(3-n), \\ M = \frac{1}{2} G l(1-n) [n(2-n) - (2+2n+n^2)\frac{x}{l}], \\ M' = \frac{1}{2} G l n^2(3-n) (1 - \frac{x}{l}). \end{cases}$$

Taf. II Fig. 9 ist  $Q$  und  $M$  für  $n = \frac{1}{2}$  graphisch dargestellt. Das Ma-

ximum kann M nur für  $x = 0$  oder  $x = a$  erreichen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe von M mit  $M_0, M_1$ , so ist

$$76. \quad M_0 = +\frac{1}{2} G l n (1 - n) (2 - n), \quad M_1 = -\frac{1}{2} G l n^2 (1 - n) (3 - n).$$

Hiernach ist stets  $M_0$  positiv,  $M_1$  negativ. Beide Momente werden gleich, wenn

$$n = 2 - \sqrt{2} = 0,5858$$

ist. Ist  $n$  grösser, so ist  $M_0 > M_1$ , ist  $n$  kleiner, so ist  $M_0 < M_1$ .

Bezeichnen wir den Abstand der obersten und untersten Faser von der neutralen Axe mit  $a_1, a_2$ , so ist in der Festigkeitsbedingung  $K = \frac{Ma}{W}$ .

$\mathfrak{K} = \frac{Ma}{W}$  für A  $a = a_1$ ,  $a = a_2$  und für E  $a = a_2$ ,  $a = a_1$  zu setzen, weil in A die oberen Fasern, in E aber die unteren Fasern ausgedehnt werden. Demnach wird für den Bruch

$$77. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{in A, durch Zug} \quad G = \frac{2 K W}{n (1 - n) (2 - n) l a_1} \\ \text{„ A, „ Druck} \quad G = \frac{2 \mathfrak{K} W}{n (1 - n) (2 - n) l a_2} \\ \text{„ E, „ Zug} \quad G = \frac{2 K W}{n^2 (1 - n) (3 - n) l a_2} \\ \text{„ E, „ Druck} \quad G = \frac{2 \mathfrak{K} W}{n^2 (1 - n) (3 - n) l a_1} \end{array} \right.$$

Von diesen vier Werthen ist nur der kleinste beizubehalten.

Beispiel. Ist z. B. der Querschnitt ein Dreieck mit nach oben gekehrter Spitze ( $\Delta$ ), so ist  $a_1 = 2 a_2$ . Das Verhältniss der vier Werthe von G wird daher

$$\frac{K}{2(2-n)}, \quad \frac{\mathfrak{K}}{2-n}, \quad \frac{K}{n(3-n)}, \quad \frac{\mathfrak{K}}{2n(3-n)}$$

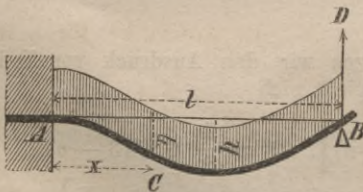
Ist  $K < 2 \mathfrak{K}$ , wie bei fast allen Materialien, so wird der Stab in A durch Zug oder in E durch Druck brechen, je nachdem  $n(3-n) > 2-n$  oder  $n > 2 - \sqrt{2}$  ist.

Anwendung bei Brücken-Querträgern mit drei Stützpunkten.

**§. 114. Belastung durch eine gleichmässige Last.** Die

Stütze B (Fig. 33) habe wiederum eine solche Lage, dass sie den unbelasteten Stab berührt. Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Falles bei und bezeichnen ausserdem die

Fig. 33.



Last pro Längeneinheit mit  $q$ , so wird

$$Q = D - q (1 - x),$$

$$M = -D (1 - x) + \frac{1}{2} q (1 - x)^2.$$

Setzen wir  $\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{M}{E W}$  und integrieren zweimal, wo wir die Constanten durch die Bedingungen bestimmen, dass für

$x = 0 \quad \frac{d\eta}{dx} = 0$  und  $\eta = 0$  wird, so ergibt sich

$$\eta = \frac{x^2}{24 E W} \left[ 4 D (3 l - x) - q (6 l^2 - 4 l x + x^2) \right].$$

Für  $x = 1$  muss ebenfalls  $\eta = 0$  werden, daher  $0 = 8 D l - 3 q l^2$  und hieraus ergibt sich als Stützdruck

$$78. D = \frac{3}{8} q l.$$

§. 115. **Beanspruchung.** Substituirt man diesen Werth für  $D$  in die Ausdrücke für  $Q$  und  $M$ , so ergibt sich

$$79. \quad \left. \begin{aligned} Q &= \frac{1}{8} q (5 l - 8 x), \\ M &= \frac{1}{8} q (1 - x) (1 - 4 x). \end{aligned} \right\}$$

Taf. II. Fig. 10 sind  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt.  $M$  wird für  $x = 0$  und  $x = \frac{1}{4} l$  Null und ist für  $x < \frac{1}{4} l$  positiv, für  $x > \frac{1}{4} l$  aber negativ. Das positive Maximum erreicht  $M$  für  $x = 0$ , das negative für  $Q = 0$ , d. i. für  $x = AE = \frac{5}{8} l$ . Bezeichnen wir diese Maxima von  $M$  mit  $M_0, M_1$ , so wird

$$80. M_0 = + \frac{1}{8} q l^2, \quad M_1 = - \frac{9}{128} q l^2 = - \frac{9}{16} M_0.$$

Den grössten absoluten Werth erreicht also  $M$  am eingespannten Ende; ist  $a = a$  oder  $K = \mathfrak{K}$ , so liegt also der gefährliche Querschnitt am eingespannten Ende. Im Allgemeinen ergibt sich als Tragkraft wie im vorigen Falle für den Bruch

$$81. \quad \left\{ \begin{aligned} \text{in A durch Zug} \quad q l &= \frac{8 K W}{l a_1}, \\ \text{„ A „ Druck} \quad q l &= \frac{8 \mathfrak{K} W}{l a_2}, \\ \text{„ E „ Zug} \quad q l &= \frac{128 K W}{q l a_2}, \\ \text{„ E „ Druck} \quad q l &= \frac{128 \mathfrak{K} W}{q l a_1}. \end{aligned} \right.$$

Beispiel. Ist z. B. der Querschnitt ein Dreieck mit unten liegender Spitze ( $\nabla$ ), so ist  $a_2 = 2a_1$ ; die Verhältnisse der Werthe von  $q l$  werden daher

$$18 K, 9 \mathfrak{K}, 16 K, 32 \mathfrak{K}.$$

Es kann also nur der zweite oder dritte Werth Gültigkeit haben, d. h. es kann nur ein Bruch in A durch Druck oder in E durch Zug entstehen. Beim Guss-eisen ist nahe  $K = \frac{1}{6} \mathfrak{K}$ , also  $16 K < 9 \mathfrak{K}$ ; hier wird also ein Bruch in E durch Zug entstehen. Beim Holze und Schmiedeeisen ist  $\mathfrak{K} < K$ , also auch  $9 \mathfrak{K} < 16 K$ ; hier wird also nur ein Bruch in A durch Druck entstehen können.

Anwendung bei Balkenbrücken und Balken in Gebäuden mit zwei gleichen Feldern.

§. 116. **Formänderung.** Setzen wir im Ausdrucke für  $\eta$  in §. 114  $D = \frac{3}{8} q l$ , so ergibt sich

$$82. \quad \eta = \frac{q x^2}{38 E W} (1 - x) (3 l - 2 x),$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{q x}{48 E W} (6 l^2 - 15 l x + 8 x^2).$$

Taf. VII Fig. 5 ist die elastische Linie dargestellt. Für  $x = \frac{1}{4} l$  wird  $M = 0$ , hier liegt also ein Wendepunkt der Curve. Das Maximum erreicht  $\eta$  für  $\frac{d\eta}{dx} = 0$ , also für  $6 l^2 - 15 l x + 8 x^2 = 0$  oder für

$$83. \quad x = \frac{15 - \sqrt{33}}{16} l = 0,5785 l.$$

Als Maximum  $\eta$  von  $\eta$  selbst ergibt sich

$$84. \quad \eta = \frac{39 + 55\sqrt{33}}{16^4} \frac{q l^4}{E W} = 0,0054 \frac{q l^4}{E W}.$$

B. Prismatischer Stab, welcher an beiden Enden horizontal eingespannt ist.

**§. 117. Allgemeines.** Durch die Einspannung werden bei einer Belastung des Stabes auf die eingespannten Theile gewisse Drücke erzeugt. Dieselben müssen zum Theil nach oben, zum Theil nach unten gerichtet sein; denn wären sie sämmtlich nach derselben Seite gerichtet, so könnten sie, wie leicht einzusehen, mit der Belastung des Stabes nicht gleichzeitig gegen Verschiebung in verticaler Richtung und gegen Drehung im Gleichgewichte sein.

Wir bezeichnen die Summe der nach oben gerichteten Drücke an beiden Enden mit  $D_1', D_2'$ , die Summe der unten gerichteten Drücke mit  $D_1'', D_2''$  und die Abstände der Resultanten dieser Drücke von den Enden A, B (Fig. 34) des freien Stabtheiles bezüglich mit  $a_1', a_2', a_1'', a_2''$ ; ferner die Transversalkräfte für die Punkte A, B mit  $Q_1, Q_2$  und die Biegemomente für dieselben mit  $M_1, M_2$ . Alsdann ist

$$Q_1 = -D_1' + D_1'', \quad Q_2 = D_2' - D_2'';$$

$$M_1 = -D_1' a_1' + D_1'' a_1'', \quad M_2 = -D_2' a_2' + D_2'' a_2''.$$

Als Anfang der  $x$  wählen wir das eine (linke) Ende A des freien Stabtheiles.

**§. 118. Belastung durch eine isolirte Last.** Ist der Stab an einer beliebigen Stelle E (Fig. 34) durch eine isolirte Last  $G$  belastet, welche von den beiden Stützen die Entfernung  $l_1, l_2$  hat, so fordert zunächst das Gleichgewicht des ganzen Stabes die Erfüllung der Bedingungen  $D_1' + D_2' - D_1'' - D_2'' = G$ ,  $D_1'(l_1 + a_1') - D_1''(l_1 + a_1'') = D_2'(l_2 + a_2') - D_2''(l_2 + a_2'')$  oder einfacher

$$a. \quad -Q_1 + Q_2 = G, \quad M_1 + Q_1 l_1 = M_2 - Q_2 l_2.$$

Innerhalb der Strecke AE ist  $M = -D_1'(a_1' + x) + D_1''(a_1'' + x)$  oder

$$b. \quad M = M_1 + Q_1 x.$$

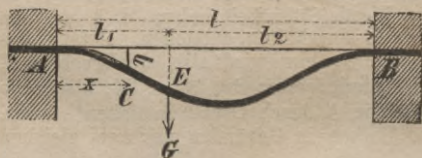
Setzen wir  $\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{M}{E W}$  und integriren zweimal, wobei die Constanten

Null werden, weil für  $x = 0$   $\frac{d\eta}{dx} = 0$  und  $\eta = 0$  wird, so ergibt sich

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{2 E W} (2 M_1 + Q_1 x) x,$$

$$c. \quad \eta = \frac{1}{6 E W} (3 M_1 + Q_1 x) x^2.$$

Fig. 34.



Für die Strecke BE würden sich gleiche Ausdrücke ergeben, wenn man B als Anfang der x annimmt, nur würde  $-Q_2, M_2$  für  $Q_1, M_1$  zu setzen sein. Im Punkte E müssen  $\frac{d\eta}{dx}$  und  $\eta$  in beiden Strecken denselben Werth annehmen,  $\frac{d\eta}{dx}$  jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Daher wird

$$\text{d. } \begin{cases} (2M_1 + Q_1 l_1) l_1 = -(2M_2 - Q_2 l_2) l_2, \\ (3M_1 + Q_1 l_1) l_1^2 = (3M_2 - Q_2 l_2) l_2^2. \end{cases}$$

Durch die vier Gleichungen a und d ist  $Q_1, Q_2, M_1, M_2$  bestimmt. Aus a folgt

$$\text{e. } Q_1 l = M_1 - M_2 - G l_2, \quad Q_2 l = M_1 - M_2 + G l_1;$$

dies in die Gleichungen d gesetzt, giebt

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2) l &= G l_1 l_2, \\ M_1 l (2 l_1 - l_2) - M_2 l (2 l_2 - l_1) &= G l_1 l_2 (l_1 - l_2) \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich

$$85. \quad M_1 = G \frac{l_1 l_2^2}{l^2}, \quad M_2 = G \frac{l_1^2 l_2}{l^2}$$

und nun nach e:

$$86. \quad Q_1 = -G \frac{l_2^2 (3 l_1 + l_2)}{l^3}, \quad Q_2 = +G \frac{l_1^2 (l_1 + 3 l_2)}{l^3}.$$

Taf. VI Fig. 1 ist  $Q_1, Q_2$  und  $M_1, M_2$  für eine veränderliche Lage der Last graphisch dargestellt.

**§. 119. Beanspruchung.** Bezeichnen wir innerhalb der Strecke BE Alles durch einen Apostroph, so wird

$$87. \quad \begin{cases} Q = Q_1, & Q' = Q_1 + G = Q_2, \\ M = M_1 + Q_1 x, & M' = M_2 - Q_2 (l - x). \end{cases}$$

Taf. VI Fig. 2 ist hiernach  $Q$  und  $M$  für den Fall, dass die Last in der Mitte liegt, graphisch dargestellt.

a) Es fragt sich zunächst, für welche Lage der Last  $Q$  für irgend einen Querschnitt C am grössten wird. Liegt die Last links vom fraglichen Querschnitte, so ist  $Q = Q_2, Q_2$  aber wird, wenn die Last nach rechts rückt, grösser (Taf. V Fig. 1). Liegt die Last rechts vom fraglichen Querschnitte, so ist  $Q = Q_1, Q_1$  aber wird, wenn die Last nach links rückt, grösser. Demnach wird  $Q$  bei veränderlicher Lage der Last für irgend einen Querschnitt am grössten, wenn die Last über demselben liegt. Setzen wir  $x$  für  $l_1, l - x$  für  $l_2$ , so wird nach 87 und 86 (vergl. §. 102):

$$88. \quad \max(-Q) = -G \frac{(l-x)^2 (l+2x)}{l^3}, \quad \max(+Q) = G \frac{x^2 (3l-x)}{l^3}.$$

Taf. VI Fig. 1 ist  $\max Q$  graphisch dargestellt.

b) Da das Moment  $M$  in Beziehung auf  $x$  vom ersten Grade ist, so kann es nur für die Punkte A, B oder E zum Maximum werden. Die Momente in A, B sind  $M_1, M_2$ ; bezeichnen wir noch das Moment für E mit  $M_0$ , so ist  $M_0 = M_1 - Q_1 l_1$ , d. i.

$$89. \quad M_0 = -2G \frac{l_1^2 l_2^2}{l^3}, \quad M_1 = +G \frac{l_1 l_2^2}{l^2}, \quad M_2 = +G \frac{l_1^2 l_2}{l^2}.$$

Taf. VI Fig. 1 ist  $M_0, M_1, M_2$  für eine veränderliche Lage der Last

graphisch dargestellt. Ist  $l_2 > l_1$ , so ist  $M_1 > M_2$ ; ist  $l_1 > l_2$ , so ist  $M_1 < M_2$ , d. h. von den beiden Momenten an den Enden ist das Moment für das der Last am nächsten liegende Ende am grössten. Ist  $l_2 > l_1$ , so ist also  $M_1 > M_2$  und  $-M_0 < M_1$ ,  $M_0$  kann daher nicht absolutes Maximum sein. Das absolut grösste Moment findet also an dem der Last am nächsten liegenden Ende statt. Nur wenn die Last in der Mitte liegt, wird

$$90. \quad -M_0 = M_1 = M_2 = \frac{1}{8} G l.$$

Es ist nun leicht, die Festigkeitsbedingungen aufzustellen. Ist  $a = \alpha$ , der  $K = \mathfrak{K}$ , so ist, wenn  $l_1 < l_2$ ,  $M_1$  für die Festigkeitsbedingung massgebend. Wenn ausserdem die Last in der Mitte liegt, so bricht der Stab in A, B und E gleich leicht. In diesem Falle wird  $K' = \frac{M_1 a}{W} = \frac{G l a}{8 W}$  oder

$$91. \quad G = \frac{8 K' W}{l a}.$$

Setzen wir im Ausdrucke 89 von  $M_1$   $l - l_1$  für  $l_2$ , so wird

$$M_1 = G \frac{l_1 (l - l_1)^2}{l^2}$$

und hiernach wird  $M_1$  zum Maximum für

$$92. \quad l_1 = \frac{1}{3} l.$$

Ist  $a = \alpha$  oder  $K = \mathfrak{K}$ , so ist die Beanspruchung also am grössten, wenn die Last um  $\frac{1}{3}$  der Stablänge von einem Ende entfernt ist. Für diese ungünstigste Belastungsweise wird

$$93. \quad M_1 = \frac{4}{27} G l$$

und als Tragkraft ergibt sich

$$94. \quad G = \frac{27 K' W}{4 l a},$$

so dass die Last nur  $\frac{27}{4.8} = \frac{27}{32} = 0,844$  von derjenigen Last ist, welche der Stab in seiner Mitte tragen kann.

**§. 120. Formänderung.** Substituiren wir in den Ausdruck  $e$  für  $\eta$  in §. 118 für  $Q_1$  und  $M_1$  ihre Werthe, so ergibt sich für die Strecke AE

$$95. \quad \eta = \frac{G l_2^2 x^2}{6 E W l^3} (3 l l_1 - (3 l_1 + l_2) x),$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{G l_2^2 x}{2 E W l^3} [2 l l_1 - (3 l_1 + l_2) x].$$

$\frac{d\eta}{dx}$  wird innerhalb AE nur zu Null, wenn  $l_1 > \frac{1}{2} l$  ist, so dass  $\eta$  sein Maximum in der grösseren der beiden Strecken AE und BE erreicht, und zwar wird  $\eta$  zum Maximum für

$$96. \quad x = \frac{2 l l_1}{3 l_1 + l_2} = \frac{2 l l_1}{1 + 2 l_1}.$$

Durch Substitution dieses Werthes ergibt sich als grösste Senkung  $\eta$

$$97. \quad \eta = \frac{2 G l_1^3 l_2^2}{3 E W (3 l_1 + l_2)^2}$$

Setzt man hierin  $l_2 = l - l_1$  und differenziert nach  $l_1$ , so ergibt sich, dass  $\eta$  zum Maximum wird für  $l_1 = \frac{1}{2}l$ , wenn also die Last in der Mitte liegt und zwar wird alsdann

$$98. \quad \eta = \frac{G l^3}{192 E W}$$

**§. 121. Körper von constanter Festigkeit.** Wir wollen hier nur den Fall behandeln, wo die Last in der Mitte liegt. Bezeichnen wir Breite und Höhe an den Enden mit  $b_1, h_1$ , so wird nach 76 (§. 86)

$$\frac{b h^2}{b_1 h_1^2} = \frac{M}{M_1}$$

Es wird nun, da hier  $Q_2 = -Q_1$ , also nach a §. 118  $Q_1 = \frac{1}{2}G$  wird,  $M = M_1 - \frac{1}{2}G x$ .

$M$  ist an den Enden positiv, in der Mitte negativ, an zwei Stellen D, E (Fig. 35) muss also  $M = 0$  werden. Dies sei der Fall für  $x = x_0$ ; alsdann ist  $0 = M_1 - \frac{1}{2}G x_0$ , folglich

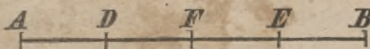
$$M = \frac{1}{2}G (x_0 - x).$$

Demnach folgt  $M$  in den äusseren Theilen AD, BD demselben Gesetze, als wenn dieselben in A, B eingespannt und bei D, E mit  $\frac{1}{2}G$  belastet wären und im mittleren Theile DE, als wenn derselbe in D, E unterstützt und in der Mitte F mit  $G$  belastet wäre. Diese drei Stücke erhalten also auch eine dem entsprechende in §. 95 und §. 107 ermittelte Form (Taf. IV. Fig. 6, 7, 8). Die Axen der Theile

AD, FD müssen nach der Formänderung in D eine gemeinschaftliche Tangente haben, was aber, weil in gleichen Abständen von D das Moment  $M$  und das Trägheitsmoment  $W$  denselben Werth hat, nur möglich ist, wenn D in der Mitte von AF liegt, es ist also  $x_0 = AD = BE = \frac{1}{4}l$ , mithin  $M = \frac{1}{8}G (l - 4x)$ ,  $M_1 = \frac{1}{8}G l$ , also

$$99. \quad \frac{b h^2}{b_1 h_1^2} = 1 - 4 \frac{x}{l}$$

Fig. 35.



**§. 122. Gleichmässige Belastung** (Fig. 36). Hier ist offenbar der Symmetrie wegen  $Q_1 = -Q_2$ ,  $M_1 = M_2$ . Ist die Last

pro Längeneinheit =  $q$ , so wird  $D_1' - D_2' + D_2'' - D_2''' = q l$  oder  $-Q_1 + Q_2 = q l$ , also

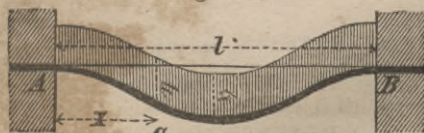
$$Q_1 = -Q_2 = -\frac{1}{2}q l.$$

Ferner wird  $M = -D_1'(a_1' + x) + D_2''(a_1'' + x) + \frac{1}{2}q x^2$  oder

$$a. \quad M = M_1 + Q_1 x + \frac{1}{2}q x^2 = M_1 - \frac{1}{2}q x (1 - x).$$

Setzen wir  $\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{M}{E W}$  und integrieren zweimal, wobei keine Constanten auftreten, weil für  $x = 0$   $\frac{d \eta}{dx} = 0$  und  $\eta = 0$  werden muss, so ergibt sich

Fig. 36.



$$b. \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{x^2}{12 E W} \left[ 12 M_1 + q x (3l - 2x) \right],$$

$$c. \quad \eta = \frac{x^3}{24 E W} \left[ 12 M_1 + q x (2l - x) \right].$$

Für  $x = l$  muss ebenfalls  $\frac{d\eta}{dx} = 0$  und  $\eta = 0$  werden. Jede dieser Bedingungen giebt

$$100. \quad M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q l^2.$$

**§. 123. Beanspruchung.** Zunächst wird  $Q = Q_1 + q x = -\frac{1}{2} q (l - 2x)$ , wonach  $Q$  demselben Gesetze folgt, wie bei einem auf zwei Stützen liegenden Stabe (§. 105). Ferner erhalten wir, wenn wir in der Gleichung  $a$  für  $M_1$  seinen Werth setzen,

$$101. \quad M = \frac{1}{12} q [l^2 - 6(l - x)x].$$

Taf. VI Fig. 3 ist  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt.  $M$  wird  $= 0$  für

$$x = \frac{1}{6} (3 \mp \sqrt{3}) l = 0,2113 l \text{ und } 0,7887 l.$$

Das positive Maximum erreicht  $M$  an den Enden, das negative in der Mitte. Bezeichnen wir das letztere mit  $M_0$ , so wird

$$102. \quad M_0 = -\frac{1}{24} q l^2, \quad M_1 = +\frac{1}{12} q l^2.$$

Ist  $a = a$  oder  $K = \mathfrak{K}$ , so liegt demnach der gefährliche Querschnitt an den Enden des Stabes und als Tragkraft ergiebt sich in diesem Falle

$$103. \quad ql = \frac{12 K' W}{l a}.$$

Im Allgemeinen aber kann der gefährliche Querschnitt entweder an den Enden oder in der Mitte  $E$  liegen. Ist der Abstand der obersten und untersten Faser von der neutralen Axe  $a_1, a_2$ , so ergiebt sich für den Bruch

$$104. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{in A durch Zug} \quad ql = 12 \frac{K W}{l a_1}, \\ \text{„ A „ Druck} \quad ql = 12 \frac{\mathfrak{K} W}{l a_2}, \\ \text{„ E „ Zug} \quad ql = 24 \frac{K W}{l a_2}, \\ \text{„ E „ Druck} \quad ql = 24 \frac{\mathfrak{K} W}{l a_1}. \end{array} \right.$$

Beispiel. Ist der Querschnitt ein Dreieck mit unten liegender Spitze ( $\nabla$ ), so ist  $a_2 = 2 a_1$ ; die Verhältnisse der vier Werthe von  $ql$  werden daher

$$2K, \mathfrak{K}, 2K, 4\mathfrak{K}.$$

Es kann also nur ein Bruch in A oder E durch Zug oder in A durch Druck entstehen. Beim Holze und Schmiedeeisen ist  $2K > \mathfrak{K}$ , hier entsteht also nur ein Bruch in A durch Druck; beim Gusseisen ist  $2K < \mathfrak{K}$ , hier entsteht also ein Bruch in A oder E durch Zug.

Anwendung bei den wenig üblichen Balkenbrücken mit eingespannten Enden.

**§. 124. Formänderung.** Setzen wir in dem Ausdrucke  $c$  (§. 122) für  $M_1$  seinen Werth, so ergiebt sich

$$105. \quad \eta = \frac{q x^2 (1-x)^2}{24 E W}$$

An den Stellen, wo  $M = 0$  wird, nämlich bei  $x = \frac{1}{6} (3 \mp \sqrt{3}) l = 0,21131$  und  $0,78871$  liegen Wendepunkte der Curve. Die grösste Senkung tritt in der Mitte ein; dieselbe ist

$$106. \quad \eta = \frac{q l^2}{384 E W}$$

Taf. VII Fig. 3 ist die elastische Linie dargestellt.

**§. 125. Körper von constanter Festigkeit.** Nach der Gleichung a §. 123 wird

$$M = M_1 - \frac{1}{2} q x (1-x).$$

In den Punkten D und E (Fig. 35) werde  $M = 0$  und es sei  $AD = BE = x_0$ . Alsdann ist  $0 = M_1 - \frac{1}{2} q x_0 (1-x_0)$ , daher auch

$$M = \frac{1}{2} q [x_0 (1-x_0) - x (1-x)].$$

Es lässt sich hierdurch leicht nachweisen, dass  $M$  in den Stücken AD, BE demselben Gesetze folgt, als wenn dieselben in A, B eingespannt, gleichmässig mit  $q$  und ausserdem in D, E mit der Last, welche in der Strecke DF liegt, nämlich mit  $\frac{1}{2} q (1-2x_0)$  belastet wären. Im mittleren Theile DE folgt  $M$  demselben Gesetze, als wenn derselbe in D und E unterstützt wäre. Diese drei Stücke erhalten demnach auch eine dem entsprechende, in §. 99 und §. 107 ermittelte Form (Taf. IV Fig. 9 und 10). Die Punkte D, E bestimmen sich durch die Bedingung, dass die Theile der Axe nach der Formänderung in D und E dieselbe Tangente haben müssen.

Nimmt man die Mitte F als Coordinatenanfang an, bezeichnet die Entfernung des Querschnittes von der Mitte mit  $\xi$  und setzt  $FD = FE = \xi_0$ , so wird  $x = \frac{1}{2} - \xi$ ,  $x_0 = \frac{1}{2} - \xi_0$ , mithin werden die absoluten Werthe von  $M$ :

$$\text{äussere Theile: } M = \frac{1}{2} q (\xi^2 - \xi_0^2), \quad M_1 = \frac{1}{2} q (l^2 - 4 \xi_0^2);$$

$$\text{mittlerer Theil: } M = \frac{1}{2} q (\xi_0^2 - \xi^2), \quad M_0 = \frac{1}{2} q \xi_0^2,$$

daher wird

$$\text{äuss. Th. } \frac{b h^2}{b_0 h_0^2} = \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 - 1, \quad \text{mittl. Th. } \frac{b h^2}{b_0 h_0^2} = 1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2.$$

Ist die Höhe constant, so besteht die deformirte Axe aus drei Kreisbögen, welche in D und E nur dann dieselbe Tangente haben können, wenn  $AD = FD$ , also  $x_0 = \xi_0 = \frac{1}{4} l$  ist. Daher wird

$$107. \quad M_0 = \frac{1}{32} q l^2, \quad M_1 = \frac{3}{32} q l^2, \quad b_1 = 3 b_0;$$

$$108. \quad \text{äuss. Th. } b = \frac{1}{3} b_1 \left(16 \frac{\xi^2}{l^2} - 1\right), \quad \text{mittl. Th. } b = b_0 \left(1 - 16 \frac{\xi^2}{l^2}\right).$$

Schwieriger ist der Fall zu behandeln, in welchem die Breite constant ist. Hier wird, wenn sich das obere und untere Vorzeichen bezüglich auf den äusseren und inneren Theil bezieht,

$$\frac{h}{h_0} = \frac{\sqrt{\pm (\xi_0^2 - \xi^2)}}{\xi_0},$$

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{2 K'}{E h} = \frac{2 K'}{E h_0} \frac{\xi_0}{\sqrt{\pm (\xi_0^2 - \xi^2)}}.$$

Integrirt man einmal, wobei man beachtet, dass für  $x = 0$  und  $x = \frac{1}{2}l$   $\frac{d\eta}{dx} = 0$  wird, und setzt die entgegengesetzten Werthe von  $\frac{d\eta}{dx}$  für  $\xi = \xi_0$  einander gleich, so ergibt sich

$$\int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0^2 - \xi^2}} = - \int_{\xi_0}^{\frac{1}{2}l} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - \xi_0^2}}.$$

Durch Anwendung der Integralformeln

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{Arcsin} \frac{x}{a}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{lognat} (x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

ergibt sich

$$\frac{\pi}{2} = \text{lognat} \frac{2\xi_0}{1 - \sqrt{1^2 - 4\xi_0^2}}$$

oder

$$\frac{2\xi_0}{1 - \sqrt{1^2 - 4\xi_0^2}} = e^{\frac{\pi}{2}},$$

wenn  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen = 2,7183 bezeichnet. Durch Reduction auf  $\xi_0$  ergibt sich

$$109. \quad \xi_0 = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{\pi}} l = 0,1993 l.$$

Daher wird nun

$$110. \quad M_0 = 0,0198 q l^2, \quad M_1 = 0,1051 q l^2, \quad h_1 = 2,304 h_0;$$

$$111. \quad h = 5,0183 h_0 \sqrt{\pm \left(0,0397 - \frac{\xi_0^2}{l^2}\right)}.$$

Im Aufrisse bildet der mittlere Theil eine Ellipse, die äusseren Theile die Aeste ein und derselben Hyperbel.

**§. 126. Vergleichung der Hauptfälle.** Wir vergleichen in Beziehung auf die Unterstützungsweise folgende Fälle:

I. Der Stab ist an einem Ende eingespannt, am anderen frei (Fig. 25 u. 26);

II. Der Stab liegt mit den Enden auf Stützen (Fig. 27 u. 29);

III. Der Stab ist an einem Ende eingespannt, am anderen unterstützt (Fig. 32 u. 33);

IV. Der Stab ist mit beiden Enden eingespannt (Fig. 34 u. 36).

In Beziehung auf die Belastung vergleichen wir folgende Fälle:

a. Belastung durch eine isolirte Last  $G$  an der gefährlichsten Stelle (bei I. am Ende, bei II. in der Mitte, bei III. für die Tragkraft bei  $x = 0,428 l$ , für die Senkung bei  $x = 0,586 l$ , bei IV. für die Tragkraft bei  $x = \frac{1}{3} l$ , für die Senkung in der Mitte);

b. Belastung durch eine gleichmässig vertheilte Last, wobei die Gesamtlast  $q l = G$  sei.

Das grösste Moment in diesen acht Fällen ist:

$$\begin{array}{llll} \text{I a.} & G l, & \text{II a.} & \frac{1}{4} G l, & \text{III a.} & 0,193 G l, & \text{IV a.} & \frac{4}{27} G l, \\ \text{I b.} & \frac{1}{2} G l, & \text{II b.} & \frac{1}{8} G l, & \text{III b.} & \frac{1}{8} G l, & \text{IV b.} & \frac{1}{12} G l. \end{array}$$

Die Tragkraft ist diesen Momenten umgekehrt proportional; nehmen wir die Tragkraft im Falle I a als Einheit an, so ergibt sich als Tragkraft bei gleichen Dimensionen:

$$\begin{array}{llll} \text{I a. } \mathbf{1}, & \text{II a. } \mathbf{4}, & \text{III a. } \mathbf{5,2}, & \text{IV a. } \mathbf{6,75}, \\ \text{I b. } \mathbf{2}, & \text{II b. } \mathbf{8}, & \text{III b. } \mathbf{8}, & \text{IV b. } \mathbf{12}. \end{array}$$

Die grösste Senkung ist, wenn wir  $\frac{G l^3}{E W} = A$  setzen,

$$\begin{array}{llll} \text{I a. } \frac{1}{3} A, & \text{II a. } \frac{1}{4} A, & \text{III a. } 0,00981 A, & \text{IV a. } \frac{1}{192} A, \\ \text{I b. } \frac{1}{8} A, & \text{II b. } \frac{1}{384} A, & \text{III b. } 0,00540 A, & \text{IV b. } \frac{1}{384} A. \end{array}$$

Setzt man die Senkung im Falle I a = 100, so ist die Senkung bei gleichen Dimensionen:

$$\begin{array}{llll} \text{I a. } \mathbf{100,00}, & \text{II a. } \mathbf{6,25}, & \text{III a. } \mathbf{2,94}, & \text{IV a. } \mathbf{1,56}, \\ \text{I b. } \mathbf{37,50}, & \text{II b. } \mathbf{3,91}, & \text{III b. } \mathbf{1,62}, & \text{IV b. } \mathbf{0,78}. \end{array}$$

Man sieht, dass die Tragkraft vom Falle I a bis zum Falle IV b bis zum 12fachen zunimmt, während die Senkung bis zum 128sten Theile abnimmt.

### C. Prismatischer Stab mit schiefer Einspannung.

**§. 127. Unbelasteter Stab.** Die Enden des Stabes seien so eingespannt, dass sie mit der Horizontalen die Winkel  $\tau_1, \tau_2$  bilden und das eine Ende B (Fig. 37)

um  $s$  unter der durch das Ende A gehenden Horizontalen liegt. Wir setzen voraus, dass der Stab gar nicht belastet ist. Als Anfang der  $x$  wählen wir das Ende A. Im Uebrigen behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Falles B bei.

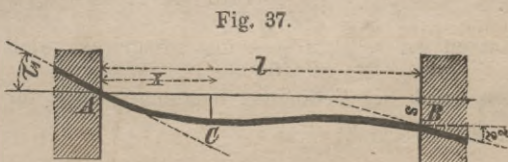


Fig. 37.

Als Gleichgewichtsbedingungen für den ganzen Stab ergeben sich leicht, wie in §. 118:

$$-Q_1 + Q_2 = 0, \quad M_1 - M_2 + Q_1 l = 0.$$

Daher ist

$$112. \quad Q_1 = -\frac{M_1 - M_2}{l}, \quad Q_2 = +\frac{M_1 - M_2}{l}.$$

Ferner ist nun

$$113. \quad M = M_1 + Q_1 x = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} x.$$

Setzt man  $\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{M}{E W}$  und integrirt zweimal, wobei man die Constanten durch die Bedingungen bestimmt, dass für  $x = 0$   $\frac{d\eta}{dx} = \tau_1$  und  $\eta = 0$  werden muss, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} &= \tau_1 + \frac{x}{2 E W} \left[ 2 M_1 - (M_1 - M_2) \frac{x}{l} \right], \\ 114. \quad \eta &= \tau_1 x + \frac{x^2}{6 E W} \left[ 3 M_1 - (M_1 - M_2) \frac{x}{l} \right]. \end{aligned}$$

Für  $x = l$  muss  $\frac{d\eta}{dx} = \tau_2$ ,  $\eta = s$  werden; daher ergeben sich zur Bestimmung von  $M_1$  und  $M_2$  folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2 EW (\tau_2 - \tau_1) &= (M_1 + M_2) l, \\ 6 EW (s - l \tau_1) &= (2 M_1 + M_2) l^2 \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich

$$115. \quad \begin{cases} M_1 = -\frac{2 EW}{l^2} \left[ l(2\tau_1 + \tau_2) - 3s \right], \\ M_2 = +\frac{2 EW}{l^2} \left[ l(\tau_1 + 2\tau_2) - 3s \right]. \end{cases}$$

Daher wird nun

$$116. \quad M = -\frac{2 EW}{l^2} \left[ l\tau_1 \left( 2 - 3\frac{x}{l} \right) + l\tau_2 \left( 1 - 3\frac{x}{l} \right) - 3s \left( 1 - 2\frac{x}{l} \right) \right],$$

$$117. \quad \eta = x \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \left[ \tau_1 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) - \tau_2 \frac{x}{l} \right] + \frac{sx^2}{l^2} \left( 3 - 2\frac{x}{l} \right).$$

**§. 128. Beliebige Belastung.** Der Stab sei nun ganz beliebig belastet. Das Moment für einen beliebigen Querschnitt C, welches nur durch die zwischen A und C liegende Last erzeugt wird, sei X. Also dann ist

$$118. \quad M = M_1 + Q_1 x + X,$$

Setzen wir  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{EW}$  und integrieren zweimal, wobei wir die Constanten durch die Bedingung bestimmen, dass für  $x = 0$   $\frac{d\eta}{dx} = \tau_1$ ,  $\eta = 0$  wird, so ergibt sich

$$EW \frac{d\eta}{dx} = \tau_1 + M_1 x + \frac{1}{2} Q_1 x^2 + \int_0^x X dx,$$

$$119. \quad EW \eta = \tau_1 x + \frac{1}{2} M_1 x^2 + \frac{1}{6} Q_1 x^3 + \int_0^x dx \int_0^x X dx.$$

Für  $x = l$  muss  $\frac{d\eta}{dx} = \tau_2$ ,  $\eta = s$  werden, wodurch sich zur Bestimmung von  $Q_1$  und  $M_1$  zwei Gleichungen ergeben. Die Reduction derselben auf  $Q_1$ ,  $M_1$  giebt:

$$Q_1 = +\frac{6 EW}{l^3} \left[ l(\tau_1 + \tau_2) - 2s \right] - \frac{6}{l^3} \left[ l \int_0^l X dx - 2 \int_0^l dx \int_0^x X dx \right],$$

$$M_1 = -\frac{2 EW}{l^3} \left[ l(2\tau_1 + \tau_2) - 3s \right] + \frac{2}{l^2} \left[ l \int_0^l X dx - 3 \int_0^l dx \int_0^x X dx \right].$$

Bei horizontaler Einspannung verschwindet der erste Theil, so dass der zweite Theil den Werth von  $Q_1$ ,  $M_1$  bei horizontaler Einspannung bedeutet, während der erste Theil den Werth von  $Q_1$ ,  $M_1$  im unbelasteten Zustande bedeutet. Dasselbe ergibt sich auch für  $Q_2$ ,  $M_2$ . Bezeichnen wir daher für die horizontale Einspannung die Momente an den Enden mit  $\mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_2$ , so wird

$$120. \quad \begin{cases} M_1 = \mathfrak{M}_1 - 2 E W \frac{1(2\tau_1 + \tau_2) - 3s}{l^2}, \\ M_2 = \mathfrak{M}_2 + 2 E W \frac{1(\tau_1 + 2\tau_2) - 3s}{l^2}. \end{cases}$$

Die Reduction auf  $\tau_1, \tau_2$  bei gegebenem  $M_1, M_2$  ergibt

$$121. \quad \begin{cases} \tau_1 = -\frac{1}{6 E W} (2 M_1 + M_2 - 2 \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2) + \frac{s}{l}, \\ \tau_2 = +\frac{1}{6 E W} (M_1 + 2 M_2 - \mathfrak{M}_1 - 2 \mathfrak{M}_2) + \frac{s}{l}. \end{cases}$$

Substituiren wir die Werthe für  $Q_1, M_1$  in die Ausdrücke für  $Q, M, \eta$ , so ergibt sich, dass auch diese Grössen aus zwei Theilen bestehen, von denen der eine nur von  $\tau_1, \tau_2, s$  abhängt, also dem unbelasteten Zustande entspricht und der andere der horizontalen Einspannung entspricht. Für  $\eta$  ergibt sich, wenn wir den Werth von  $\eta$  für horizontale Einspannung mit  $v$  bezeichnen, mit Rücksicht auf 117 im vorigen Paragraph:

$$122. \quad \eta = v + x \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[\tau_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \tau_2 \frac{x}{l}\right] + \frac{s x^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{x}{l}\right).$$

Für eine gleichmässige Belastung ist nach 105 (§. 124)  $24 E W v = q x^2 (1-x)^2$ , nach 100 (§. 122)  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \frac{1}{2} q l^2$ ; daher nach 120:  $\tau_1 = -\frac{1}{6 E W} (2 M_1 + M_2 - \frac{1}{4} q l^2) + \frac{s}{l}$ ,  $\tau_2 = +\frac{1}{6 E W} (M_1 + 2 M_2 - \frac{1}{4} q l^2) + \frac{s}{l}$ . Dies in die vorige Gleichung eingesetzt, giebt

$$123. \quad \eta = \frac{x(1-x)}{24 E W} \left[ q l^2 + x(1-x) \left\{ -4(2 M_1 + M_2) + 4(M_1 - M_2) \frac{x}{l} \right\} \right] + s \frac{x}{l}.$$

Anwendung bei continuirlichen Trägern im nächsten Kapitel.

#### D. Stab mit variablem Querschnitte.

**§. 129. Stab mit horizontal eingespannten Enden.** Wir bezeichnen wieder das Moment, welches durch die zwischen A und dem fraglichen Querschnitte C liegenden Last in Beziehung auf C erzeugt wird, mit X. Alsdann ist wie im vorigen Paragraph:

$$M = M_1 + Q_1 x + X.$$

Ist die Last pro Längeneinheit im Abstände  $\xi$  von A =  $q$ , so ist  $dX = q d\xi (x - \xi)$ , also

$$X = \int_0^x q (x - \xi) d\xi.$$

Bei gleichmässiger Belastung wird  $X = \frac{1}{2} q x^2$ .

Wir setzen  $\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{M}{E W}$  und integriren einmal. Da für  $x = 0$  und

$x = l$   $\frac{d\eta}{dx} = 0$  werden muss, so ergibt sich

$$0 = \int_0^l \frac{M}{W} dx = M_1 \int_0^l \frac{dx}{W} + Q_1 \int_0^l \frac{x dx}{W} + \int_0^l \frac{X dx}{W}.$$

Ferner wird nach 43 (§. 79)  $\eta = x \frac{d\eta}{dx} - \frac{1}{E} \int \frac{M x dx}{W}$ , mithin, da für  $x = 0$  und  $x = 1$   $\eta = 0$  und für  $x = 1$   $\frac{d\eta}{dx} = 0$  werden muss,

$$0 = \int_0^1 \frac{M x}{W} dx = M_1 \int_0^1 \frac{x dx}{W} + Q_1 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{W} - \int_0^1 \frac{X x dx}{W}$$

Wir bezeichnen das mittlere Trägheitsmoment der Querschnitte mit  $\mathfrak{B}$  und eine mittlere, gleichmässig vertheilte Last pro Längeneinheit mit  $q$  und setzen zur Abkürzung

$$124. \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\mathfrak{B}}{1} \int_0^1 \frac{dx}{W}, & B &= \frac{2 \mathfrak{B}}{1^2} \int_0^1 \frac{x dx}{W}, & C &= \frac{3 \mathfrak{B}}{1^3} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{W}, \\ H &= \frac{6 \mathfrak{B}}{q 1^3} \int_0^1 \frac{X dx}{W}, & I &= \frac{8 \mathfrak{B}}{q 1^3} \int_0^1 \frac{X x dx}{W}. \end{aligned} \right.$$

Alle diese Ausdrücke sind so eingerichtet, dass sie = 1 werden, wenn der Querschnitt constant und die Last gleichmässig vertheilt ist. In Wirklichkeit werden diese Werthe immer wenig von 1 abweichen. Führen wir diese Bezeichnungen in den beiden vorigen Gleichungen ein, so gehen dieselben über in

$$a. \quad \begin{cases} 0 = \frac{A}{1} M_1 + \frac{1}{2} B Q_1 + \frac{1}{6} H q 1^3, \\ 0 = \frac{1}{2} B M_1 + \frac{1}{3} C Q_1 + \frac{1}{8} I q 1^3, \end{cases}$$

und hieraus ergibt sich

$$125. \quad \begin{cases} Q_1 = - \frac{1}{2} \frac{3 A I - 2 B H}{4 A C - 3 B^2} q 1, \\ M_1 = + \frac{1}{12} \frac{9 B I - 8 C H}{4 A C - 3 B^2} q 1^2. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den Werth von  $X$  für  $x = 1$  mit  $X_1$  und die gesammte auf dem Stabe liegende Last mit  $G_1$ , so wird

$$126. \quad \begin{cases} Q_2 = Q_1 + G_1, \\ M_2 = M_1 + Q_1 1 + X_1, \end{cases}$$

womit nun  $Q_1, Q_2, M_1, M_2$  bestimmt sind.

Die Werthe  $A, B, C, H, I$  berechnet man bei stetiger Aenderung des Querschnittes am besten nach der Simpson'schen Regel. In vielen praktischen Fällen ändert sich der Querschnitt aber sprungweise; alsdann kann man diese Werthe auch genau durch Zerlegung in mehrere Integrale berechnen. Bezeichnen wir in diesem Falle die Trägheitsmomente der einzelnen Theile mit  $W_1, W_2, W_3, \dots$ , die Abstände der Theilpunkte vom Anfange der  $x$  mit  $l_1, l_2, l_3, \dots$ , die Last pro Längeneinheit in den einzelnen Theilen mit  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , so ergibt sich

$$127. \quad \begin{cases} A = \frac{\mathfrak{B}}{1} \left[ \frac{l_1}{W_1} + \frac{l_2 - l_1}{W_2} + \frac{l_3 - l_2}{W_3} + \dots \right], \\ B = \frac{\mathfrak{B}}{1^2} \left[ \frac{l_1^2}{W_1} + \frac{l_2^2 - l_1^2}{W_2} + \frac{l_3^2 - l_2^2}{W_3} + \dots \right], \\ C = \frac{\mathfrak{B}}{1^3} \left[ \frac{l_1^3}{W_1} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{W_2} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{W_3} + \dots \right], \end{cases}$$

$$127. \quad \begin{cases} H = \frac{E\mathfrak{B}}{q l^3} \left[ \frac{q_1 l_1^3}{W_1} + \frac{q_2 (l_2^3 - l_1^3)}{W_2} + \frac{q_3 (l_3^3 - l_2^3)}{W_3} + \dots \right], \\ I = \frac{E\mathfrak{B}}{q l^4} \left[ \frac{q_1 l_1^4}{W_1} + \frac{q_2 (l_2^4 - l_1^4)}{W_2} + \frac{q_3 (l_3^4 - l_2^4)}{W_3} + \dots \right]; \\ G_1 = q_1 l_1 + q_2 (l_2 - l_1) + q_3 (l_3 - l_2) + \dots, \\ X_1 = G l - \frac{1}{2} [q_1 l_1^2 + q_2 (l_2^2 - l_1^2) + q_3 (l_3^2 - l_2^2) + \dots]. \end{cases}$$

Bei gleichmässiger Belastung wird  $H = C$ ,  $G_1 = q l$ ,  $X_1 = \frac{1}{2} q l^2$ .

### §. 130. Unbelasteter Stab mit schiefer Einspannung.

Wir behalten die in §. 127 eingeführten Bezeichnungen bei. Alsdann wird wie dort

$$M = M_1 + Q_1 x.$$

Wir verfahren genau wie im vorigen Paragraph. Eine Aenderung tritt nur in sofern ein, als für  $x = 0$   $\frac{d\eta}{dx} = \tau_1$  und für  $x = l$   $\frac{d\eta}{dx} = \tau_2$ ,  $\eta = s$  werden muss und dass das Glied mit  $X$  wegfällt, weil keine Belastung vorhanden ist. Statt der Gleichungen a erhalten wir die Gleichungen

$$E\mathfrak{B} (\tau_2 - \tau_1) = A M_1 l + \frac{1}{2} B Q_1 l^2,$$

$$E\mathfrak{B} (l \tau_2 - s) = \frac{1}{2} B M_1 l^2 + \frac{1}{3} C Q_1 l^3,$$

woraus sich  $Q_1$ ,  $M_1$  bestimmen lassen. Das Gleichgewicht des ganzen Stabes fordert die Erfüllung der Bedingungen  $-Q_1 + Q_2 = 0$ ,  $M_1 - M_2 + Q_1 l = 0$ , so dass  $Q_2 = -Q_1$  und  $M_2 = M_1 + Q_1 l$  wird, wodurch nun auch  $Q_2$ ,  $M_2$  bestimmt sind. Durch Ausführung der Rechnung ergeben sich für  $M_1$ ,  $M_2$  die Ausdrücke

$$128. \quad \begin{cases} M_1 = -\frac{2 E\mathfrak{B}}{\varkappa l^2} \left[ l (2\alpha \tau_1 + \beta \tau_2) - 3\delta s \right], \\ M_2 = +\frac{2 E\mathfrak{B}}{\varkappa l^2} \left[ l (\beta \tau_1 + 2\gamma \tau_2) - 3\varepsilon s \right], \end{cases}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$129. \quad \begin{cases} \alpha = C, & \beta = 3B - 2C, & \gamma = 3A - 3B + C, \\ \delta = B, & \varepsilon = 2A - B, & \varkappa = 4AC - 3B^2. \end{cases}$$

Bei constantem Querschnitte und gleichmässiger Belastung wird jeder dieser sechs Coefficienten = 1.

### §. 131. Beliebig belasteter Stab mit schief eingespannten Enden.

Die in §. 128 entwickelte Regel, dass die Ausdrücke für  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  und  $Q$ ,  $M$  aus zwei Theilen bestehen, von denen der eine die Werthe dieser Grössen bei horizontaler Einspannung, der andere aber die Werthe dieser Grössen für den unbelasteten Zustand bei schiefer Einspannung bedeutet, gilt auch hier, da man leicht übersieht, dass die dort für einen constanten Querschnitt gemachte Entwicklung sich auch auf einen variablen Querschnitt anwenden lässt.

Daher wird, wenn wir wieder die nach §. 129 zu bestimmenden Werthe von  $M_1$ ,  $M_2$  für horizontale Einspannung mit  $\mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_2$  bezeichnen

$$130. \quad \begin{cases} M_1 = \mathfrak{M}_1 - 2 \frac{E\mathfrak{B}}{\varkappa l^2} \left[ l (2\alpha \tau_1 + \beta \tau_2) - 3\delta s \right], \\ M_2 = \mathfrak{M}_2 + 2 \frac{E\mathfrak{B}}{\varkappa l^2} \left[ l (\beta \tau_1 + 2\gamma \tau_2) - 3\varepsilon s \right]. \end{cases}$$

Reducirt man diese Gleichungen auf  $\tau_1, \tau_2$ , so erscheinen in den gefundenen Ausdrücken die Werthe  $4\alpha\gamma - \beta^2, 2\gamma\delta - \beta\varepsilon$  und  $2\alpha\varepsilon - \beta\delta$ . Durch Einsetzung der Werthe von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  findet man, dass  $4\alpha\gamma - \beta^2 = 3\kappa, 2\gamma\delta - \beta\varepsilon = 2\alpha\varepsilon - \beta\delta = \kappa^2$  wird und die für  $\tau_1, \tau_2$  erhaltenen Ausdrücke gehen dadurch über in

$$131. \quad \begin{cases} \tau_1 = -\frac{1}{6 E \mathfrak{B}} \left[ 2\gamma (M_1 - \mathfrak{M}_1) + \beta (M_2 - \mathfrak{M}_2) \right] + \kappa \frac{s}{l}, \\ \tau_2 = +\frac{1}{6 E \mathfrak{B}} \left[ \beta (M_1 - \mathfrak{M}_1) + 2\alpha (M_2 - \mathfrak{M}_2) \right] + \kappa \frac{s}{l}. \end{cases}$$

Ist  $M_1$  und  $M_2$  bestimmt, so ergeben sich leicht alle übrigen Grössen. Bezeichnen wir nämlich wiederum die zwischen A und dem beliebigen Querschnitte C liegende Last mit G, das Moment derselben in Beziehung auf C mit X und die Werthe von G, X für  $x = l$  mit  $G_1, X_1$ , so wird, wie in 129,  $Q_2 = Q_1 + G_1, M_2 = M_1 + Q_1 l + X_1$  und hieraus

$$132. \quad Q_1 = -\frac{M_1 - M_2}{l} - \frac{X_1}{l}, \quad Q_2 = G_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} - \frac{X_1}{l}$$

und endlich

$$133. \quad Q = Q_1 + G, \quad M = M_1 + Q_1 x + X.$$

Für gleichmässige Belastung wird einfach  $Q = qx, Q_1 = ql, X = \frac{1}{2} qx^2, X_1 = \frac{1}{2} ql^2$ .

**§. 132. Körper von constanter Festigkeit.** Wir wollen nur den einfachsten und wichtigsten Fall behandeln, nämlich den Fall, dass die Höhe des Körpers constant und die Belastung gleichmässig ist. Dann tritt nach §. 86, wie auch der Querschnitt gestaltet sein möge, eine kreisförmige Biegung ein. Der Stab theilt sich in drei Theile, von denen die äusseren AD, BE (Fig. 38) nach oben convex, der mittlere DE nach unten convex sind. Alle drei Theile haben denselben Radius  $r$  und zwar ist nach 77' (§. 86)

$$134. \quad r = \frac{Ea}{K} = \frac{Ea}{\mathfrak{K}}.$$

Bezeichnen wir die Senkung innerhalb AD, DE, EB bezüglich mit  $\eta, \eta', \eta''$  und die Längen AD, AE mit  $x_1, x_2$ , so ist

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{1}{r}, \quad \frac{d^2\eta'}{dx^2} = -\frac{1}{r}, \quad \frac{d^2\eta''}{dx^2} = \frac{1}{r}.$$

Die zweimalige Integration giebt mit Rücksicht darauf, dass für  $x = 0$   $\frac{d\eta}{dx} = \tau_1, \eta = 0$  und für  $x = l$   $\frac{d\eta}{dx} = \tau_2, \eta = s$  wird,

$$\frac{d\eta}{dx} = \tau_1 + \frac{x}{r}, \quad \frac{d\eta'}{dx} = C - \frac{x}{r}, \quad \frac{d\eta''}{dx} = \tau_2 - \frac{l}{r} + \frac{x}{r},$$

$$\eta = \tau_1 x + \frac{x^2}{2r}, \quad \eta' = C_1 + Cx - \frac{x^2}{2r}, \quad \eta'' = s - \tau_2 l + \frac{l^2}{2r} + \tau_2 x - \frac{lx}{r} + \frac{x^2}{2r}.$$

Für  $x = x_1$  muss  $\frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta'}{dx}$ ,  $\eta = \eta'$  werden, welche Bedingungen  $C = \tau_1 + \frac{2x_1}{r}$ ,  $C_1 = -\frac{x_1^2}{r}$  geben. Für  $x = x_2$  endlich muss  $\frac{d\eta'}{dx} = \frac{d\eta''}{dx}$ ,  $\eta' = \eta''$  werden, d. i. nach Einsetzung von  $C$  und  $C_1$

$$\frac{2(x_2 - x_1)}{r} - \frac{l}{r} = \tau_1 - \tau_2,$$

$$\frac{(x_2 - x_1)^2}{r} - \frac{lx_2}{r} + \frac{l^2}{2r} = (\tau_1 - \tau_2)x_2 + \tau_2 l - c.$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir zur Abkürzung  $l = \lambda r$ ,  $s = \sigma r$  setzen,

$$135. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\sigma + \lambda^2 - 2(\tau_1 + \tau_2)\lambda - (\tau_1 - \tau_2)^2}{4(\tau_1 - \tau_2 + \lambda)} r, \\ x_2 = \frac{\sigma + 3\lambda^2 + 2(\tau_1 - 3\tau_2)\lambda + (\tau_1 - \tau_2)^2}{4(\tau_1 - \tau_2 + \lambda)} r. \end{cases}$$

Es ist nun ferner

$$M = M_1 + Q_1 x + \frac{1}{2} q x^2.$$

Für die Punkte D und E wird  $M = 0$ , mithin

$$0 = M_1 + Q_1 x_1 + \frac{1}{2} q x_1^2, \quad 0 = M_1 + Q_1 x_2 + \frac{1}{2} q x_2^2.$$

Hieraus ergibt sich durch Reduction auf  $Q_1$ ,  $M_1$ :

$$136. \quad Q_1 = \frac{1}{2} q (x_1 + x_2), \quad M_1 = -\frac{1}{2} q x_1 x_2.$$

Setzen wir für  $x_1, x_2$  obige Ausdrücke ein, so ergibt sich die erste der folgenden Gleichungen

$$137. \quad \begin{cases} M_1 = \frac{[-\sigma - \lambda^2 + 2(\tau_1 + \tau_2)\lambda + (\tau_1 - \tau_2)^2][\sigma + 3\lambda^2 + 2(\tau_1 - 3\tau_2)\lambda + (\tau_1 - \tau_2)^2]}{32(\tau_1 - \tau_2 + \lambda)^2} q r^2, \\ M_2 = \frac{[\sigma - \lambda^2 - 2(\tau_1 + \tau_2)\lambda + (\tau_1 - \tau_2)^2][-\sigma + 3\lambda^2 + 2(3\tau_1 - \tau_2)\lambda + (\tau_1 - \tau_2)^2]}{32(\tau_1 - \tau_2 + \lambda)^2} q r^2. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung ergibt sich aus der ersten durch Vertauschung von  $\tau_1, \tau_2$ ,  $s$  bezüglich mit  $-\tau_2, -\tau_1, -s$ .

Diese Gleichungen lassen sich auch auf  $\tau_1, \tau_2$  reduciren. Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen ergibt sich zunächst nach gehöriger Reduction

$$a. \quad \left[ -\frac{16(M_1 + M_2)}{q r^2} - 3\lambda^2 + 2\lambda(\tau_1 - \tau_2) + (\tau_1 - \tau_2)^2 \right] (\lambda + \tau_1 - \tau_2)^2 = [2\lambda(\tau_1 + \tau_2) - \sigma]^2,$$

$$b. \quad \frac{4(M_1 - M_2)}{q^2 r^2} (\lambda + \tau_1 - \tau_2) = [2\lambda(\tau_1 + \tau_2) - \sigma] \lambda.$$

Die Gleichsetzung der sich aus diesen Gleichungen für  $[2\lambda(\tau_1 + \tau_2) - \sigma]^2$  ergebenden Werthe giebt

$$(\tau_1 - \tau_2)^2 + 2\lambda^2(\tau_1 - \tau_2) = \frac{16(M_1 - M_2)^2}{q r^2} - \frac{16(M_1 - M_2)^2}{\lambda^2 q^2 r^4} - 3\lambda^2.$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir wieder  $\frac{l}{r}$  für  $\lambda$  setzen,

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{l}{r} \left[ -1 \pm 2 \sqrt{1 + \frac{4(M_1 + M_2)}{q l^2} + \frac{4(M_1 - M_2)^2}{q^2 l^4}} \right].$$

Für einen an beiden Enden auf Stützen liegenden Stab ist  $M_1 = M_2 = 0$ , also  $\tau_1 - \tau_2 = \frac{1}{r} (-1 \pm 2)$ . Es ergibt sich aber für diesen Fall leicht  $\tau_1 = -\tau_2 = \frac{1}{2r}$ ,  $\tau_1 - \tau_2 = \frac{1}{r}$ , so dass nur das obere Zeichen + Gültigkeit haben kann.

Nach der Gleichung b wird nun

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{s}{2l} + \frac{1}{r} \frac{4(M_1 - M_2)}{ql^2} \sqrt{1 + \frac{4(M_1 + M_2)}{ql^2} + \frac{4(M_1 - M_2)^2}{q^2 l^4}}$$

Die Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen giebt nun endlich

$$138. \begin{cases} \tau_1 = \frac{s}{4l} + \frac{1}{2r} \left[ -1 + 2 \left( 1 + 2 \frac{M_1 - M_2}{ql^2} \right) \sqrt{1 + \frac{4(M_1 + M_2)}{ql^2} + \frac{4(M_1 - M_2)^2}{q^2 l^4}} \right], \\ \tau_2 = \frac{s}{4l} + \frac{1}{2r} \left[ +1 - 2 \left( 1 + 2 \frac{M_1 - M_2}{ql^2} \right) \sqrt{1 + \frac{4(M_1 + M_2)}{ql^2} + \frac{4(M_1 - M_2)^2}{q^2 l^4}} \right]. \end{cases}$$

Die für Stäbe mit eingespannten Enden entwickelten Regeln finden direkt wenig Anwendung; sie bilden aber die Grundlage für die in den nächsten Kapiteln zu behandelnde Theorie der continuirlichen Träger.

### XIII. Kapitel.

#### Prismatischer continuirlicher Stab mit gleich hohen Stützen im Allgemeinen.

##### A. Beliebige Belastung.

**§. 133. Bezeichnungen.** Unter einem continuirlichen Stabe verstehen wir einen auf mehr als zwei Stützen ruhenden Stab. Die einzelnen Abtheilungen, in welche der Stab durch die Stützen getheilt wird, nennen wir Felder.

Jedes einzelne Feld befindet sich in demselben Zustande, wie ein an den Enden schiefe eingespannter Stab, so dass die Untersuchungen des vorigen Kapitels hier zur Anwendung kommen können.

Die Untersuchung lässt sich am leichtesten in der Weise führen, dass wir zunächst die Momente für die über den Stützen liegenden Querschnitte bestimmen. Wir nennen dieselben die Normalmomente. Hieraus ergibt sich dann leicht alles Uebrige, nämlich die Stützendrücke, Transversalkräfte und Momente für die übrigen Querschnitte und die Formänderung. Wir führen hierbei die folgenden Bezeichnungen ein:

$n$  die Anzahl aller Felder, also  $n + 1$  die Anzahl der Stützen,

$0, 1, 2, 3, \dots, n$  die Indices der Stützen,

$l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  die Längen der Felder,

$D_0, D_1, D_2, \dots, D_n$  die Stützendrücke,

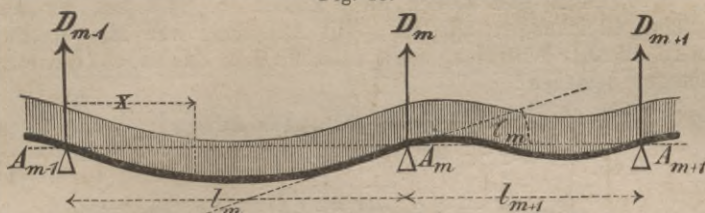
$M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  die Normalmomente,

$\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  die Tangenten der Winkel, welche die deformirte Axe über den Stützen mit der Horizontalen bildet.

Wir setzen in diesem Kapitel voraus, dass der Querschnitt des Stabes constant ist und sämmtliche Stützen in einer Horizontalen liegen.

**§. 134. Normalgleichungen.** Nach den Gleichungen 121 (§. 128) ergibt sich für den Winkel  $\tau_m$  an der  $m^{\text{ten}}$  Stütze, indem man einmal diesen Winkel als  $\tau_2$  für das  $m^{\text{te}}$  Feld, sodann als  $\tau_1$  für das  $(m+1)^{\text{ste}}$  Feld betrachtet (Fig. 39):

Fig. 39.



$$139. \begin{cases} 6 E W \tau_m = + l_m (M_{m-1} + 2 M_m - \mathfrak{M}'_m - \mathfrak{M}''_m), \\ 6 E W \tau_m = - l_{m+1} (M_m + 2 M_{m+1} - 2 \mathfrak{M}'_{m+1} - \mathfrak{M}''_{m+1}). \end{cases}$$

Hierin bedeutet  $\mathfrak{M}'_m, \mathfrak{M}''_m$  die Momente an den Enden des  $m^{\text{ten}}$  Feldes, wenn die Enden desselben horizontal eingespannt wären, welche sich also unabhängig von den übrigen Feldern nach den im vorigen Kapitel, A, entwickelten Regeln bestimmen lassen. Die Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke für  $6 E W \tau_m$  giebt, wenn wir zur Abkürzung

$$140. \quad 2 \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' = \mathfrak{N}', \quad \mathfrak{M}' + 2 \mathfrak{M}'' = \mathfrak{N}''$$

setzen,

$$141. \quad M_m l_m + 2 M_m (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} = \mathfrak{N}''_m l_m + \mathfrak{N}'_{m+1} l_{m+1}.$$

Wenden wir diese Gleichung für sämtliche Verbindungen von drei auf einander folgenden Stützen an, so ergeben sich mit Berücksichtigung des Umstandes, dass für die äussersten Stützen die Momente Null sind, folgende Gleichungen:

$$142. \quad \begin{cases} \begin{array}{l} M_1 l_2 \\ M_2 l_3 \end{array} + \begin{array}{l} 2 M_1 (l_1 + l_2) \\ 2 M_2 (l_2 + l_3) \end{array} + \begin{array}{l} M_2 l_2 \\ M_3 l_3 \end{array} = \begin{array}{l} \mathfrak{N}''_1 l_1 \\ \mathfrak{N}''_2 l_2 \\ \mathfrak{N}''_3 l_3 \end{array} + \begin{array}{l} \mathfrak{N}'_2 l_2 \\ \mathfrak{N}'_3 l_3 \\ \mathfrak{N}'_4 l_4 \end{array}, \\ \begin{array}{l} M_{n-3} l_{n-2} + 2 M_{n-2} (l_{n-2} + l_{n-1}) + M_{n-1} l_{n-1} \\ M_{n-2} l_{n-1} + 2 M_{n-1} (l_{n-1} + l_n) \end{array} = \begin{array}{l} \mathfrak{N}''_{n-2} l_{n-2} + \mathfrak{N}'_{n-1} l_{n-1} \\ \mathfrak{N}''_{n-1} l_{n-1} + \mathfrak{N}'_n l_n \end{array}. \end{cases}$$

Wir wollen diese  $n-1$  Gleichungen, welche zur Bestimmung der  $n-1$  Normalmomente ausreichen, die Normalgleichungen nennen.

Für die Werthe  $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \mathfrak{N}', \mathfrak{N}''$  ergibt sich, wenn nur eine isolirte Last  $G$  vorhanden ist, welche von der linken und rechten Stütze des Feldes um  $\xi, \xi_1$  entfernt ist, nach 85 (§. 118):

$$143. \quad \begin{cases} \mathfrak{M}' = G \frac{\xi \xi_1^2}{l^2}, & \mathfrak{M}'' = G \frac{\xi^2 \xi_1}{l^2}; \\ \mathfrak{N}' = G \frac{\xi \xi_1 (2l - \xi)}{l^2} = G \frac{\xi_1 (l^2 - \xi_1^2)}{l^2}, \\ \mathfrak{N}'' = G \frac{\xi \xi_1 (1 + \xi)}{l^2} = G \frac{\xi (l^2 - \xi^2)}{l^2}. \end{cases}$$

Ist das Feld gleichmässig mit  $q$  pro Längeneinheit belastet, so wird nach 100 (§. 122)

$$144. \quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \frac{1}{2} q l^2, \quad \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'' = \frac{1}{4} q l^2.$$

**§. 135. Auflösung der Normalgleichungen.** Bei einer geringen Anzahl von Feldern ist die Auflösung der Normalgleichungen leicht nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra auszuführen. Bei einer größeren Anzahl von Feldern empfiehlt sich aber ein besonderes Verfahren. Wir multipliciren die Gleichungen, mit der letzten beginnend, mit Zahlen  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}$  und wählen diese Zahlen so, dass bei der Addition sämtlicher Gleichungen alle  $M_m$ , mit Ausnahme von  $M_1$  verschwinden. Dies wird offenbar eintreten, wenn zwischen den Zahlen  $e_m$  die folgenden Beziehungen bestehen:

$$145. \begin{cases} 2 e_1 (l_{n-1} + l_n) + e_2 l_{n-1} = 0, \\ e_1 l_{n-1} + 2 e_2 (l_{n-2} + l_{n-1}) + e_3 l_{n-2} = 0, \\ e_{n-3} l_3 + 2 e_{n-2} (l_2 + l_3) + e_{n-1} l_2 = 0. \end{cases}$$

Die erste Zahl  $e_1$  kann beliebig gewählt werden, am besten  $= \pm 1$  und dann ergeben sich die übrigen Zahlen successive aus den einzelnen Gleichungen.

Ist hiernach  $M_1$  bestimmt, so ergeben sich die übrigen Normalmomente successive aus den Normalgleichungen.

**§. 136. Bestimmung der übrigen Grössen.** Die beiden Transversalkräfte für die Enden eines Feldes bezeichnen wir mit  $Q', Q''$ . Nach §. 131 wird alsdann

$$146. Q' = -\frac{M_1 - M_2}{1} - \frac{X_1}{1}, \quad Q'' = Q' + G_1 = G_1 - \frac{M_1 - M_2}{1} - \frac{X_1}{1};$$

$$147. Q = Q' + G;$$

$$148. M = M_1 + Q'x + X,$$

wobei  $M_1, M_2$  die Normalmomente für die Enden des fraglichen Feldes bedeuten und  $G, G_1, X, X_1$  die in §. 131 angegebene Bedeutung haben.

Bei gleichmässiger Belastung ist  $G = qx$ ,  $G_1 = ql$ ,  $X = \frac{1}{2} qx^2$ ,  $X_1 = \frac{1}{2} ql^2$ , mithin

$$149. Q' = -\frac{1}{2} ql - \frac{M_1 - M_2}{1}, \quad Q'' = Q' + ql = +\frac{1}{2} ql - \frac{M_1 - M_2}{1};$$

$$150. Q = Q' + qx.$$

Da hiernach  $Q'' = Q' + ql$  wird, so ist  $q = \frac{Q'' - Q'}{1}$ , mithin auch

$$151. Q = Q' - (Q' - Q'') \frac{x}{1}.$$

Ferner wird

$$152. M = M_1 + Q'x + \frac{1}{2} qx^2 = M_1 - (M_1 - M_2) \frac{x}{1} - \frac{1}{2} qx(1-x).$$

Hiernach wird  $M$  zum Maximum für  $x = \frac{Q'}{q}$  und zwar wird

$$153. \max M = M_1 - \frac{Q'^2}{2q} = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) - \frac{(M_1 - M_2)^2}{ql^2} - \frac{1}{8} ql^2.$$

Nehmen wir die nach oben gerichteten Stützendrucke als positiv, so ist für irgend eine Stütze  $Q''_{m+1} = Q''_m - D_m$ , mithin

$$154. D_m = Q''_m - Q'_{m+1}.$$

Für die äussersten Stützen wird  $D_0 = +Q'_1$ ,  $D_n = -Q''_n$ . Beim Vorhandensein eines negativen Stützendruckes würde sich der Stab von der betreffenden Stütze abheben. Damit eine Entfernung von der Stütze nicht eintreten kann, müsste die Stütze oberhalb des Stabes angebracht werden.

Die Formänderung ist durch 119 und 121 (§. 128) bestimmt. Wir wollen aber bei Bestimmung der Formänderung nur eine totale gleichmässige Belastung voraussetzen. Für diese wird nach 123 (§. 128)

$$155. \eta = \frac{x(1-x)}{24 E W} \left[ q l^2 + x(1-x) \left\{ -4(2M_1 + M_2) + 4M_1 - M_2 \right\} \frac{x}{l} \right].$$

Zum Maximum wird  $\eta$  für

$$x^3 + \frac{3}{4} \left( \frac{M_1 - M_2}{q l} - 21 \right) x^2 + \frac{3}{2} \frac{M_1}{q} x - \left( \frac{2M_1 + M_2}{q} + 1 \right) l = 0.$$

Hiernach ist es nun leicht, bestimmte Fälle zu behandeln.

**§. 137. Fall einer Belastung durch isolirte Lasten.** Die Behandlung dieses Falles wird durch das folgende Beispiel deutlich.

Der Stab habe vier Felder mit den Längen 10, 6, 4, 5 (Taf. V Fig. 1) und trage im I. Felde eine Last 8 im Abstand 4 von der Stütze 0 und im II. Felde eine Last 3 im Abstände 2 von der Stütze 1. Hier ist für das I. Feld nach 143

$$\mathfrak{M}' = 8 \cdot \frac{4 \cdot 6^2}{10^2} = 11,52, \quad \mathfrak{M}'' = 8 \cdot \frac{4^2 \cdot 6}{10^2} = 7,68, \quad \text{also } \mathfrak{M}' = 2 \cdot 11,52 + 7,68 = 30,72, \\ \mathfrak{M}'' = 11,52 + 2 \cdot 7,68 = 26,88. \quad \text{Ebenso ergibt sich für das II. Feld } \mathfrak{M}' = 6,67, \\ \mathfrak{M}'' = 5,33. \quad \text{Daher sind die Normalgleichungen}$$

$$\begin{aligned} 32 M_1 + 6 M_2 &= 26,88 \cdot 10 + 6,67 \cdot 6 \\ 6 M_1 + 20 M_2 + 4 M_3 &= 5,33 \cdot 6 \\ 4 M_2 + 18 M_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt

$$M_1 = +10,582; \quad M_2 = -4,971; \quad M_3 = +1,105.$$

Transversalkräfte. Für das I. Feld wird nach 146:  $Q' = -\frac{0-10,582}{10} -$

$$\frac{8 \cdot 6}{10} = -3,742, \quad Q'' = -3,742 + 8 = +4,258. \quad \text{Im III. Felde wird } Q' = \\ -\frac{-4,971 - 1,105}{4} = +1,519, \quad Q'' = Q' \text{ u. s. f. Sonach wird:}$$

$$Q_1' = -3,742, \quad Q_1'' = +4,258; \quad Q_2' = -4,592, \quad Q_2'' = -1,592; \\ Q_3' = Q_3'' = +1,519, \quad Q_4' = Q_4'' = -0,221.$$

Innerhalb der einzelnen Strecken ist  $Q$  constant.

Stützendrucke. Nach 154 ist  $D_0 = -Q_1' = +3,742$ ,  $D_1 = Q_1'' - Q_2' = 4,258 + 4,592 = +8,852$  u. s. w. Sonach wird:

$$D_0 = +3,742, \quad D_1 = +8,852, \quad D_2 = -3,111, \quad D_3 = +1,740, \quad D_4 = -0,221.$$

Momente. Nach 148 wird im I. Felde in der ersten Strecke  $M = 0 - 3,742x + 0 = -3,742x$ , in der zweiten Strecke  $M = 0 - 3,742x + 8(x-4) = -32 + 4,258x$ . Im III. Felde wird  $M = -4,971 + 1,519x$  u. s. f. Sonach wird:

$$\begin{aligned} \text{I. Feld. 1ste Strecke. } M &= -3,742x, & \text{2'e Strecke. } M &= -32 + 4,258x; \\ \text{II. Feld. } M &= 10,522 - 4,592x, & \text{III. Feld. } M &= -4,971 + 1,519x; \\ \text{IV. Feld. } M &= 1,105 - 0,221x. \end{aligned}$$

Am Angriffspunkte der Last im I. Felde wird  $M = -3,742 \cdot 4 = -14,968$  und am Angriffspunkte der Last im II. Felde  $M = 10,522 - 4,592 \cdot 2 = +1,398$ . Das grösste Moment kann nur an einem Angriffspunkte einer isolirten Kraft, also an den Stützen oder an den Angriffspunkten der Lasten stattfinden. Der Vergleich zeigt, dass das grösste Moment am Angriffspunkte der Last im I. Felde stattfindet.

Taf. V Fig. 2 sind hiernach  $Q$  und  $M$  graphisch dargestellt.

**§. 138. Fall einer gleichmässigen Belastung.** Für die Behandlung dieses Falles diene das folgende Beispiel.

Der Stab habe 5 Felder mit den Längen 5, 8, 9, 7, 3 (Taf. V Fig. 3). Die Last pro Längeneinheit sei 8; alsdann ist  $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'' = \frac{1}{4} q l^2$ , d. i. für die einzelnen Felder  $\mathfrak{R}_1 = 50$ ,  $\mathfrak{R}_2 = 128$ ,  $\mathfrak{R}_3 = 162$ ,  $\mathfrak{R}_4 = 98$ ,  $\mathfrak{R}_5 = 18$ . Demnach werden die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 26 M_1 + 8 M_2 &= 1274, \\ 8 M_1 + 34 M_2 + 9 M_3 &= 2482, \\ 9 M_2 + 32 M_3 + 7 M_4 &= 2144, \\ 7 M_3 + 20 M_4 &= 740. \end{aligned}$$

Die Auflösung giebt

$$M_1 = +32,80, \quad M_2 = +52,65, \quad M_3 = +47,76, \quad M_4 = +20,29.$$

Transversalkräfte. Nach 149 wird für das I. Feld  $Q' = -\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 - \frac{0-32,80}{5} = -13,44$ ,  $Q'' = -13,44 + 8 \cdot 5 = +26,56$ ,  $Q = -13,44 + 8x$ . Im II. Felde wird  $Q' = -\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 - \frac{32,80-52,65}{8} = -29,52$ ,  $Q'' = -29,52 + 8 \cdot 8 = +34,48$ ,  $Q = -29,52 + 8x$  u. s. f. also

$$Q_1' = -13,44, \quad Q_1'' = +26,56, \quad Q = -13,44 + 8x,$$

$$Q_2' = -29,52, \quad Q_2'' = +34,48, \quad Q = -29,52 + 8x,$$

$$Q_3' = -36,54, \quad Q_3'' = +35,46, \quad Q = -36,54 + 8x,$$

$$Q_4' = -31,64, \quad Q_4'' = +24,36, \quad Q = -31,64 + 8x,$$

$$Q_5' = -18,76, \quad Q_5'' = +5,26, \quad Q = -18,76 + 8x.$$

Stützendrücke. Nach 154 wird  $D_0 = -Q_1' = +13,44$ ,  $D_1 = Q_1'' - Q_2' = 26,56 + 29,52 = +56,08$  u. s. f. Also

$$D_0 = +13,44, \quad D_1 = +56,08, \quad D_2 = +71,02,$$

$$D_3 = +67,10, \quad D_4 = +43,12, \quad D_5 = +5,26.$$

Momente. Im I. Felde wird nach 152  $M = -13,44x + 4x^2$ ;  $M$  wird zum Maximum für  $x = \frac{13,44}{8} = 1,680$  und zwar ist  $\max M = -\frac{13,44^2}{2 \cdot 8} = -11,29$ . Im II. Felde wird  $M = 32,80 - 29,52x + 4x^2$ ;  $M$  wird zum Maximum für  $x = \frac{29,52}{8} = 3,69$  und zwar ist  $\max M = 32,80 - \frac{29,52^2}{2 \cdot 8} = -21,66$  u. s. f. In Folgendem ist das  $x$ , für welches  $M$  zum Maximum wird, mit  $x'$  und das Maximum von  $M$  mit  $M'$  bezeichnet.

$$\text{I. Feld. } M = -13,44x + 4x^2, \quad x' = 1,68, \quad M' = -11,29,$$

$$\text{II. } M = 32,80 - 29,52x + 4x^2, \quad x' = 3,69, \quad M' = -21,66,$$

$$\text{III. } M = 52,65 - 36,54x + 4x^2, \quad x' = 4,57, \quad M' = -30,82,$$

$$\text{IV. } M = 47,76 - 31,64x + 4x^2, \quad x' = 3,96, \quad M' = -14,81,$$

$$\text{V. } M = 20,29 - 18,76x + 4x^2, \quad x' = 2,35, \quad M' = -1,72.$$

Das absolut grösste Maximum ist hiernach  $M_2$ .

Formänderung. Nach 155 wird für das dritte Feld  $24EW\eta = x(9-x) \left[ 8 \int 9^2 + x(9-x) - 4(2 \cdot 52,65 + 47,76) + 4(52,65 - 47,76) \frac{x}{9} \right]$  oder  $EW\eta = +13,43x + 26,32x^2 - 6,09x^3 + \frac{1}{3}x^4$  u. s. f. Hiernach wird, wenn wir  $EW = 1$  setzen,

$$\text{I. Feld. } \eta = +14,31x - 2,24x^3 + \frac{1}{3}x^4,$$

$$\text{II. } \eta = +13,00x + 16,40x^2 - 4,92x^3 + \frac{1}{3}x^4,$$

$$\text{III. } \eta = +13,43x + 26,32x^2 - 6,09x^3 + \frac{1}{3}x^4,$$

$$\text{IV. } \eta = +20,76x + 23,88x^2 - 5,31x^3 + \frac{1}{3}x^4,$$

$$\text{V. } \eta = -11,29x + 10,14x^2 - 3,13x^3 + \frac{1}{3}x^4.$$

Taf. V Fig. 4 giebt die graphische Darstellung von  $Q$  und  $M$  und Fig. 5 die Darstellung der elastischen Linie.

## B. Belastung eines einzigen Feldes.

**§. 139. Normalmomente.** Für die Folge, namentlich für die Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise ist es nöthig, den Einfluss der Belastung eines einzigen Feldes kennen zu lernen. Es sei das  $r^{\text{te}}$  Feld beliebig belastet. Alsdann sind die Normalgleichungen

$$156. \begin{cases} M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_2 = 0, \\ M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 = 0, \\ M_{r-2} l_{r-1} + 2 M_{r-1} (l_{r-1} + l_r) + M_r l_r = \mathfrak{N}' l_r, \\ M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = \mathfrak{N}'' l_r, \\ M_{n-3} l_{n-2} + 2 M_{n-2} (l_{n-2} + l_{n-1}) + M_{n-1} l_{n-1} = 0, \\ M_{n-2} l_{n-1} + 2 M_{n-1} (l_{n-1} + l_n) + M_n l_n = 0. \end{cases}$$

Hiernach ist zunächst  $M_2 = -M_1 \left(2 + 2 \frac{l_1}{l_2}\right)$ ; demnach haben  $M_1$  und  $M_2$  entgegengesetzte Vorzeichen und dem absoluten Werthe nach ist  $M_2 > 2 M_1$ . Ferner ist  $M_3 = -M_2 \left(2 + 2 \frac{l_2}{l_3}\right) - M_1 \frac{l_2}{l_3} = -M_2 \left[2 + \frac{l_1}{l_3} \left(2 + \frac{M_1}{M_2}\right)\right]$ ;  $\frac{M_1}{M_2}$  ist negativ, aber  $< \frac{1}{2}$ , also  $2 + \frac{M_1}{M_2}$  positiv und  $> \frac{3}{2}$ ; demnach haben auch  $M_2$  und  $M_3$  entgegengesetzte Vorzeichen und dem absoluten Werthe nach ist  $M_3 > 2 M_2$  oder sogar  $M_3 > M_2 \left(2 + \frac{3}{2} \frac{l_2}{l_1}\right)$ . Die Fortsetzung dieser Schlüsse liefert das Resultat:

Die Normalmomente sind abwechselnd positiv und negativ und nehmen von den Enden nach dem belasteten Felde hin zu, wobei jedes Normalmoment grösser ist, als das Doppelte des vorhergehenden, oder sogar

$$157. M_{m+1} > M_m \left(2 + \frac{3}{2} \frac{l_m}{l_{m+1}}\right).$$

Wir setzen  $M_{r-2} = -a_1 M_{r-1}$ ,  $M_{r+1} = -a_2 M_r$ , wobei nach dem eben Gesagten  $a_1$  und  $a_2$  positive Zahlen und kleiner als  $\frac{1}{2}$  sind. Die beiden mittleren Normalgleichungen werden alsdann

$$a. \begin{cases} M_{r-1} [2 l_r + (2 - a_1) l_{r-1}] + M_r l_r = \mathfrak{N}' l_r, \\ M_{r-1} l_r + M_r [2 l_r + (2 - a_2) l_{r-1}] = \mathfrak{N}'' l_r. \end{cases}$$

Die Auflösung giebt

$$M_r = \frac{\mathfrak{N}'' l_r [2 l_r + (2 - a_1) l_{r-1}] - \mathfrak{N}' l_r^2}{[2 l_r + (2 - a_1) l_{r-1}] [2 l_r + (2 - a_2) l_{r+1}] - l_r^2}.$$

Setzt man  $\mathfrak{N}' = 2 \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}''$ ,  $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{N}' + 2 \mathfrak{N}''$ , so wird

$$158. M_r = \frac{\mathfrak{N}' (2 - a_1) \frac{l_{r-1}}{l_r} + \mathfrak{N}'' \left[3 + (2 - a_1) \frac{l_{r-1}}{l_r}\right]}{\left[2 + (2 - a_1) \frac{l_{r-1}}{l_r}\right] \left[2 + (2 - a_2) \frac{l_{r+1}}{l_r}\right] - 1}.$$

$\mathfrak{N}'$  und  $\mathfrak{N}''$  sind für vertical abwärts wirkende Lasten stets positiv. Dies folgt bestimmt aus 143; es ist aber auch nicht denkbar, dass sich ein an den Enden horizontal eingespannter Stab, wie er auch belastet sein möge, sich an den Enden nach oben krümme. Da  $a_1$ ,  $a_2$  positiv und  $< \frac{1}{2}$  sind, so sind die Coefficienten von  $\mathfrak{N}'$ ,  $\mathfrak{N}''$  positiv; ebenso ist der Nenner positiv. Demnach ist  $M_r$ , diesem analog natürlich auch  $M_{r+1}$  positiv, d. h.

Die Normalmomente an den Enden des belasteten Feldes sind stets positiv.

In Verbindung mit dem Vorigen ist es nun leicht, das Vorzeichen irgend eines Normalmomentes zu bestimmen.

Da  $(2 - a_1)l_{r-1}$  positiv ist, so ist  $2l_r + (2 - a_1)l_{r-1} > 2l_r$ ; ebenso ist  $2l_r + (2 - a_2)l_{r-1} > 2l_r$ . Demnach ist nach den Gleichungen a

$$2M_{r-1} + M_r < \mathfrak{N}', \quad M_{r-1} + 2M_r < \mathfrak{N}'',$$

$$3(M_{r-1} + M_r) < \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'',$$

oder weil  $\mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'' = 3(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'')$  ist,

$$159. \quad M_{r-1} + M_r < \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''.$$

### §. 140. Transversalkräfte, Stützendrücke und Momente

Nach 145 (§. 136) wird für das  $m^{\text{te}}$  unbelastete Feld (wobei  $m < r$ ):

$$160. \quad Q_m = - \frac{M_{m-1} - M_m}{l_m}.$$

Da  $M_{m-1}$  und  $M_m$  entgegengesetzte Vorzeichen haben, so hat  $Q_m$  dasselbe Vorzeichen wie  $M_m$ , ist also ebenfalls abwechselnd positiv und negativ. Ebenso ist  $Q_{m+1}l_{m+1} = -M_m + M_{m+1}$ , mithin

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_m} = \frac{1 - \frac{M_{m+1}}{M_m}}{\frac{M_{m-1}}{M_m} - 1} \frac{l_m}{l_{m+1}}.$$

Nach dem vorigen Paragraph ist  $\frac{M_{m+1}}{M_m}$  negativ und  $> 2$ , also im vorigen Ausdrucke der Zähler positiv und  $> 3$ . Ferner ist  $\frac{M_{m-1}}{M_m}$  negativ und  $< \frac{1}{2}$ , also der Nenner negativ und  $< \frac{3}{2}$ . Demnach ist  $\frac{Q_{m+1}}{Q_m}$  negativ und  $> 2 \frac{l_m}{l_{m+1}}$ , d. h.

Die Transversalkräfte sind abwechselnd positiv und negativ und nehmen (wenn nicht  $2l_m < l_{m+1}$  ist) nach dem belasteten Felde hin zu und zwar ist

$$161. \quad - \frac{Q_{m+1}}{Q_m} > 2 \frac{l_m}{l_{m+1}}.$$

Ferner ist nach 154 (§. 136) der Stützendruck an einer beliebigen Stütze  $D_m = Q''_m - Q'_{m+1}$ .  $Q''_m$  und  $Q'_{m+1}$  haben entgegengesetzte Vorzeichen, so dass  $D_m$  dasselbe Vorzeichen hat, wie  $Q''_m$ .  $D_m$  ist also ebenfalls abwechselnd positiv und negativ. Ferner ist  $D_{m+1} = Q''_{m+1} - Q_{m+2}$ , mithin

$$\frac{D_{m+1}}{D_m} = \frac{1 - \frac{Q_{m+2}}{Q_{m+1}}}{\frac{Q_m}{Q_{m+1}} - 1}.$$

Nach dem Vorigen ist  $\frac{Q_{m+2}}{Q_{m+1}}$  negativ und  $> 2 \frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}$ ; ebenso ist  $\frac{Q_m}{Q_{m+1}}$  negativ und  $< \frac{1}{2} \frac{l_{m+1}}{l_m}$ . Demnach ist der Zähler positiv und der Nenner negativ, also der Bruch negativ und zwar

$$162. \quad - \frac{D_{m+1}}{D_m} > \frac{1 + 2 \frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}}{1 + \frac{1}{2} \frac{l_{m+1}}{l_m}}.$$

Hiernach sind die Stützendrücke abwechselnd positiv und negativ und nehmen (wenn nicht  $4 l_m < l_{m+1}$  ist), nach dem belasteten Felde hin zu.

Für einen beliebigen Querschnitt im  $m^{\text{ten}}$  Felde ist nach 152:  $M = M_{m-1} + Q'_m x = M_{m-1} - (M_{m-1} - M_m) \frac{x}{l}$  oder

$$163. \quad M = M_{m-1} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_m \frac{x}{l}.$$

Da  $M_{m-1}$  und  $M_m$  nach dem belasteten Felde hin zunehmen, so nimmt für dasselbe  $\frac{x}{l}$  auch  $M$  nach dem belasteten Felde hin zu.

Auf Taf. V ist in Fig. 6 Q und in Fig. 7 M graphisch dargestellt.

**§. 141. Formänderung.** Nach 139 (§. 134) wird für ein unbelastetes Feld

$$164. \quad \tau_m = + \frac{l_m}{6 E W} (M_{m-1} + 2 M_m) = - \frac{l_{m+1}}{6 E W} (M_{m+1} + 2 M).$$

Da  $M_{m-1}$  und  $M_m$  entgegengesetztes Vorzeichen haben und  $2 M_m > M_{m-1}$  ist, so hat  $M_{m-1} + 2 M_m$  also auch  $\tau_m$  dasselbe Vorzeichen, wie  $M_m$ ,  $\tau_m$  ist daher wie  $M_m$  abwechselnd positiv und negativ. Da  $M_m > 2 M_{m-1}$  ist, so ist  $M_{m-1} + 2 M_m > 3 M_{m-1}$ , also  $2 E W \tau_m > M_{m-1} l_m$  und  $M_{m-1} + 2 M_m < \frac{3}{2} M_m$ , also  $4 E W \tau_m < M_m l_m$ . Ebenso ist auch  $2 E W \tau_{m+1} > M_m l_{m+1}$ , folglich  $\frac{2 E W \tau_{m+1}}{2 E W \tau_m} > \frac{M_m l_{m+1}}{M_m l_m}$ , d. i.

$$165. \quad \frac{\tau_{m+1}}{\tau_m} > 2 \frac{l_{m+1}}{l_m}.$$

Der Winkel  $\tau_m$  ist daher abwechselnd positiv und negativ und nimmt (wenn nicht  $2 l_{m+1} < l_m$  ist) nach dem belasteten Felde hin zu.

Nach 122 (§. 128) wird ferner

$$166. \quad \frac{\eta_m}{l} = \frac{x}{l} \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left[ \tau_{m-1} \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \tau_m \frac{x}{l} \right].$$

Da  $\tau_{m-1}$  und  $\tau_m$  entgegengesetztes Vorzeichen haben, so hat  $\eta_m$  dasselbe Vorzeichen wie  $\tau_{m-1}$ . Da ferner  $\tau_{m-1}$  und  $\tau_m$  nach dem belasteten Felde hin zunehmen, so muss dies auch mit  $\frac{\eta_m}{l}$  für dasselbe  $\frac{x}{l}$  der Fall sein. Die Abweichung erfolgt also abwechselnd nach unten und oben und nimmt nach dem belasteten Felde hin zu. (Taf. V Fig. 8).

Im Allgemeinen lässt sich also behaupten, dass der Einfluss eines belasteten Feldes von diesem Felde aus nach den Enden des Stabes hin abnimmt.

## XIV. Kapitel.

### Prismatischer continuirlicher Stab mit gleichen Feldern und gleich hohen Stützen.

#### A. Beliebige Belastung.

**§. 142. Normalmomente.** Bei gleicher Länge der Felder gehen die allgemeinen Normalgleichungen 142 (§. 134) über in folgende

$$167. \quad \begin{cases} 4 M_1 + M_2 = \mathfrak{R}_1'' + \mathfrak{R}_2', \\ M_1 + 4 M_2 + M_3 = \mathfrak{R}_2'' + \mathfrak{R}_3', \\ M_2 + 4 M_3 + M_4 = \mathfrak{R}_3'' + \mathfrak{R}_4', \\ \dots \\ M_{n-3} + 4 M_{n-2} + M_{n-1} = \mathfrak{R}_{n-2}'' + \mathfrak{R}_{n-1}', \\ M_{n-2} + 4 M_{n-1} = \mathfrak{R}_{n-1}'' + \mathfrak{R}_n'. \end{cases}$$

Die in §. 135 angegebene Auflösungsweise führt hier schnell zum Ziele. Wir bezeichnen für diesen Fall, mit welchen die Gleichungen multiplicirt werden müssen, damit bei der Addition auf der linken Seite nur  $M_1$  oder  $M_{n-1}$  übrig bleibt, je nachdem die letzte oder erste Gleichung mit der ersten Zahl multiplicirt, mit  $c_1, c_2, c_3, \dots$ . Alsdann besteht zwischen drei auf einander folgenden Zahlen die Beziehung

$$168. \quad c_{m-1} + 4 c_m + c_{m+1} = 0.$$

Wählt man die erste Zahl  $c_1 = -1$ , und nimmt die noch vor dieser stehende Zahl  $c_0 = 0$  an, so ergeben sich für die einzelnen Zahlen folgende Werthe:

$$\begin{aligned} c_1 &= -1, & c_5 &= -209, & c_9 &= -40545, \\ c_2 &= +4, & c_6 &= +780, & c_{10} &= -151316, \\ c_3 &= -15, & c_7 &= -2911, & c_{11} &= -564719, \\ c_4 &= +56, & c_8 &= +10864, & & \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Wir nennen diese Zahlen die Clapeyron'schen Zahlen, weil Clapeyron dieses Verfahren zuerst angegeben hat.

Hat man in dieser Weise  $M_1$  bestimmt, so erhält man die übrigen Normalmomente successive unmittelbar aus den Normalgleichungen. Man kann indessen jedes Normalmoment auch direkt erhalten. Hierzu multiplicire man die Normalgleichungen, mit der ersten beginnend, bis zu derjenigen, welche das gesuchte Normalmoment  $M_m$  als mittleres Glied enthält, mit den Clapeyron'schen Zahlen und addire alle diese Gleichungen; ebenso multiplicire man die übrigen Gleichungen, mit der letzten beginnend, mit den Clapeyron'schen Zahlen und addire sie ebenfalls. Hierbei haben sich sämtliche  $M$ , mit Ausnahme von  $M_m$  und  $M_{m+1}$ , welche man aus den zwei durch die Addition erhaltenen Gleichungen bestimmen kann.

**§. 143. Die Clapeyron'schen Zahlen.** Zunächst wollen wir uns mit einigen für die Folge wichtigen Eigenschaften dieser Zahlen bekannt machen.

1. Verhältniss zweier Zahlen. Nach Gleichung 168 ist das Verhältniss von zwei auf einander folgenden Clapeyron'schen Zahlen

$$\frac{c_m}{c_{m+1}} = -\frac{c_m}{4 c_m + c_{m-1}} = -\frac{1}{4 + \frac{c_{m-1}}{c_m}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung  $\frac{c_m}{c_{m+1}} = k_m$ , so ist demnach

$$169. \quad k_1 = \frac{1}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{4 - k_1}, \quad k_3 = \frac{1}{4 - k_2}, \quad \dots$$

Da  $k_1$  positiv und  $< 4$  ist, so ist  $4 - k_1$ , also auch  $k_2$  positiv; weil  $4 - k_1 < 4$  ist, so ist  $k_2 > \frac{1}{4}$  oder  $k_2 > k_1$  und weil  $k_1 < 1$ , also  $4 - k_1 > 3$  ist, so ist  $k_2 < \frac{1}{3}$ . — Da nun ferner  $k_2$  positiv und  $< 4$  ist, so ist  $4 - k_2$ , also auch  $k_3$  positiv; weil  $k_2 > k_1$ , also  $4 - k_2 < 4 - k_1$  ist, so ist  $k_3 > k_2$  und weil  $k_2 < 1$ , also  $4 - k_2 > 3$  ist, so ist  $k_3 < \frac{1}{3}$  u. s. f. Demnach sind sämtliche  $k$  positiv und wachsen fortwährend, ohne  $\frac{1}{3}$  zu erreichen.

Bei wachsendem  $m$  nähert sich  $k_m$  immer mehr der Grenze

$$k = \frac{1}{4 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4 - \dots}}}}$$

Hiernach ist  $k = \frac{1}{4 - k}$  oder

$$k^2 - 4k + 1 = 0,$$

$$170. \quad k = 2 - \sqrt{3} = 0,267949192,$$

so dass demnach  $k_m$  stets zwischen den engen Grenzen 0,25 und 0,26795 enthalten ist. Die wirkliche Division je zweier auf einander folgender Zahlen giebt

$$\begin{array}{ll} k_1 = 0,25, & k_4 = 0,2679426, \\ k_2 = 0,2666667, & k_5 = 0,2679487, \\ k_3 = 0,2678571, & \text{u. s. w.} \end{array}$$

2. Summe der Zahlen. Es ist

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = -1, \\ 4c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 0, \\ \dots \\ c_n + 4c_{n+1} + c_{n+2} = 0. \end{array} \right.$$

Addiren wir sämtliche Gleichungen und bezeichnen die Summe der  $n$  ersten Clapeyron'schen Zahlen mit  $S_n$ , so ergibt sich  $6S_n + 5c_{n+1} + c_{n+2} = -1$ , oder, weil  $c_{n+2} = -4c_{n+1} - c_n$  ist,

$$171. \quad S_n = \frac{1}{6}(c_n - c_{n+1} - 1).$$

Es ist ferner

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = -1, \\ c_1 + c_3 = -4c_2, \\ c_3 + c_5 = -4c_4, \\ \dots \\ c_{n-2} + c_n = -4c_{n-1}. \end{array} \right.$$

Addiren wir sämtliche Gleichungen und bezeichnen dabei die Summe der Zahlen mit geradem Index bis  $c_n$  mit  $S'_n$ , die der Zahlen mit ungeradem Index bis  $c_n$  mit  $S''_n$ , so ergibt sich  $2S'_n = c_n - 1 - 4S'_{n-1}$ . Ausserdem ist  $S'_{n-1} + S''_n = S_n$ . Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich  $S'_{n-1} = \frac{1}{2}(c_{n-1} - 1) - S_n$ ,  $S''_n = -\frac{1}{2}(c_{n-1} - 1) + 2S_n$ , d. i.

$$S'_{n-1} = + \frac{1}{6} (2 c_n + c_{n+1} - 2), \quad S'_n = - \frac{1}{6} (c_n + 2 c_{n+1} - 1)$$

oder

$$172. \quad \begin{cases} S'_n = + \frac{1}{6} (-c_n - 2 c_{n+1} - 2) \\ S''_n = - \frac{1}{6} (c_n + 2 c_{n+1} - 1). \end{cases}$$

3. Summe der Zahlen  $c_{n+1} + k c_n$ . Da nach 1  $k c_n$  von  $-c_{n-1}$  nicht viel abweicht, so wird die Zahl  $c_{n-1} + k c_n$  sehr klein sein und mit wachsendem  $n$  immer mehr abnehmen. So ergibt sich

$$\begin{aligned} k c_1 &= -0,26795, & k_3 + k c_4 &= +0,00515, \\ k_1 + k c_2 &= +0,07180, & k_4 + k c_5 &= -0,00138 \\ k_2 + k c_3 &= -0,01924, & & \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Da  $k c_n$ , absolut genommen,  $> c_{n-1}$  ist, so hat  $c_{n+1} + k c_n$  dasselbe Vorzeichen, wie  $c_n$ , ist also abwechselnd positiv und negativ. Bezeichnen wir die Summe der positiven Zahlen bis zu  $c_{n-1} + k c_n$  mit  $\Sigma'_n$  und die Summe der negativen Zahlen bis zu  $c_{n-1} + k c_n$  mit  $\Sigma''_n$ , so ist

$$173. \quad \begin{cases} \Sigma'_n = S''_{n-1} + k S'_n = \frac{1}{6} [-(c_{n-1} + 2 c_n - 1) + k (-c_n - 2 c_{n+1} - 2)], \\ \Sigma''_n = S'_{n-1} + k S''_n = \frac{1}{6} [-(c_{n-1} + 2 c_n - 2) - k (c_n + 2 c_{n+1} - 1)]. \end{cases}$$

Denken wir uns die Zahlen  $c_{n-1} + k c_n$  bis in's Unendliche fortgesetzt, so ist  $k c_n = -c_{n-1}$ ,  $k c_{n+1} = -c_n$  zu setzen. Hierdurch heben sich in jedem Ausdrucke zweimal je zwei Glieder und es ergibt sich

$$174. \quad \begin{cases} \Sigma'_\infty = + \frac{1}{6} (1 - 2k) = + \frac{1}{6} (2\sqrt{3} - 3) = +0,0773503, \\ \Sigma''_\infty = - \frac{1}{6} (2 - k) = - \frac{1}{6} \sqrt{3} = -0,2886751. \end{cases}$$

Die Summe sämmtlicher positiver und negativer Zahlen, d. i.  $\Sigma'_\infty + \Sigma''_\infty$  ist daher

$$175. \quad \Sigma_\infty = - \frac{1}{6} (1 + k) = - \frac{1}{6} (3 - \sqrt{3}) = -0,2113248.$$

4. Beziehung zwischen zwei Zahlen. Setzen wir in dem Ausdrucke  $A = c_{n-1}^2 + 4 c_{n-1} c_n + c_n^2$ ,  $c_n = -(4 c_{n-1} + c_{n-2})$ , so ergibt sich  $A = c_{n-2}^2 + 4 c_{n-2} c_{n-1} + c_{n-1}^2$ . Setzen wir hierin wieder  $c_{n-1} = -(4 c_{n-2} + c_{n-3})$ , u. s. f., so ergibt sich schliesslich  $A = c_1^2 + 4 c_1 c_2 + c_2^2 = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 + 4^2 = 1$ . Demnach ist für jedes  $n$

$$176. \quad c_{n-1}^2 + 4 c_{n-1} c_n + c_n^2 = 1.$$

wonach es möglich ist, jede Zahl aus der vorhergehenden allein zu berechnen.

## B. Belastung eines einzigen Feldes.

**§. 144. Normalmomente.** Wenn nur ein Feld, und zwar das  $r^{\text{te}}$  belastet ist, so werden die Normalgleichungen

$$177. \quad \begin{cases} 4 M_1 + M_2 = 0, \\ M_1 + 4 M_2 + M_3 = 0, \\ M_{r-2} + 4 M_{r-1} + M_r = \mathfrak{N}', \\ M_{r-1} + 4 M_r + M_{r+1} = \mathfrak{N}'', \\ M_{n-3} + 4 M_{n-2} + M_{n-1} = 0, \\ M_{n-2} + 4 M_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Durch das in §. 142 angegebene Verfahren zur Bestimmung von  $M_1$  und  $M_{n-1}$  ergibt sich

$$178. \quad M_1 = \frac{\mathfrak{N}' c_{n-r+1} + \mathfrak{N}'' c_{n-r}}{c_n}, \quad M_{n-1} = - \frac{\mathfrak{N}' c_{r-1} + \mathfrak{N}'' c_r}{c_n}.$$

Nun wird  $M_2 = -4 M_1$ ,  $M_3 = -4 M_2 - M_1 = +15 M_1$ ,  $M_4 = -4 M_3 - M_2 = -56 M_1$  u. s. w., allgemein also

$$179. M_m = -c_m M_1 \quad (m \leq r-1) \quad M_m = -c_{n-m} M_{n-1} \quad (m \geq r).$$

Die auf einander folgenden Momente verhalten sich also wie die Clapeyron'schen Zahlen.

Dieses Verfahren bedarf einer Modification, wenn eine unendlich grosse Anzahl von Feldern vorhanden ist. Für diesen Fall ergibt sich für ein  $m$ , welches  $> r$  ist, leicht

$$\frac{M_{m+1}}{M_m} = -\frac{1}{4 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4 - \dots}}}$$

d. i. nach der Bezeichnung des vorigen Paragraphen

$$180. \frac{M_{m+1}}{M_m} = -k = -2 + \sqrt{3}.$$

Demnach wird auch  $M_{r+1} = -k M_r$ . Nach dem Obigen ist ferner  $M_{r-1} = -c_{r-1} M_1$ ,  $M_{r-2} = -c_{r-2} M_1$ . Substituiren wir diese Werthe in die beiden mittleren der Gleichungen 177, beachten dabei, dass  $c_{r-2} + 4 c_{r-1} = -c_r$  ist und reduciren auf  $M_1$  und  $M_r$ , so ergibt sich, den Werth für  $k$  eingesetzt,

$$M_1 = \frac{(2 + \sqrt{3}) \mathfrak{N}' - \mathfrak{N}''}{(2 + \sqrt{3}) c_r + c_{r-1}}, \quad M_r = \frac{c_{r-1} \mathfrak{N}' + c_r \mathfrak{N}''}{(2 + \sqrt{3}) c_r + c_{r-1}}.$$

Multiplirciren wir, um einen rationalen Nenner zu erhalten, Zähler und Nenner mit  $2 c_r + c_{r-1} - c_r \sqrt{3}$ , so wird der Nenner  $c^2_{r-1} + 4 c_{r-1} c_r + c^2_r$ , d. i. nach 176 (vor. §.) = 1, mithin wird

$$181. \begin{cases} M_1 = [(2 - \sqrt{3}) c_r + c_{r-1}] [(2 + \sqrt{3}) \mathfrak{N}' - \mathfrak{N}''], \\ M_r = [(2 - \sqrt{3}) c_r + c_{r-1}] [c_{r-1} \mathfrak{N}' + c_r \mathfrak{N}'']. \end{cases}$$

Ist hiernach  $M_1$ ,  $M_r$  bestimmt, so ist

$$182. M_m = -c_m M_1, \quad (m < r), \quad M_m = (2 - \sqrt{3})^{m-r} M_r \quad (m \geq r).$$

Die letztere Gleichung ergibt sich leicht durch fortgesetzte Anwendung der Gleichung 180.

Ist ein mittleres Feld belastet, also  $r = \infty$ , so wird  $M_{r+1} = -k M_r$ ,  $M_{r-2} = -k M_{r-1}$ . Dies in die mittleren der Gleichungen 177 gesetzt, giebt, wenn man gleichzeitig  $\mathfrak{N}' = 2 \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ ,  $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}' + 2 \mathfrak{M}''$  setzt,

$$183. \begin{cases} M_{r-1} = \frac{1}{2} (\mathfrak{M}' + k \mathfrak{M}''), \\ M_r = \frac{1}{2} (\mathfrak{M}'' + k \mathfrak{M}'). \end{cases}$$

Alsdann wird  $M_{r-2} = -k M_{r-1}$ ,  $M_{r-3} = k^2 M_{r-1}$  u. s. f. und  $M_{r+1} = -k M_r$ ,  $M_{r+2} = k^2 M_r$  u. s. f.

Beispiel. Sind z. B. 5 Felder vorhanden, von denen das IV. belastet ist, so ist nach 178  $M_1 = -\frac{\mathfrak{N}' c_2 + \mathfrak{N}'' c_1}{c_2 + \mathfrak{N}'' c_1} = -\frac{4 \mathfrak{N}' - \mathfrak{N}''}{-209} = \frac{2 \mathfrak{N}' + 7 \mathfrak{N}''}{209}$ ,  $M_4 = -\frac{\mathfrak{N}' c_5 + \mathfrak{N}'' c_4}{c_5 + \mathfrak{N}'' c_4} = -\frac{15 \mathfrak{N}' + 56 \mathfrak{N}''}{-209} = \frac{26 \mathfrak{N}' + 97 \mathfrak{N}''}{209}$ . Nach 179 wird nun  $M_2 = -4 M_1$ ,  $M_3 = +15 M_1$ . Ist hierbei das IV. Feld gleichmässig belastet, so ist  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \frac{1}{12} q l^2$ , mithin

$$M_1 = + \frac{3}{836} q l^2, \quad M_2 = - \frac{12}{836} q l^2, \quad M_3 = + \frac{45}{836} q l^2, \quad M_4 = + \frac{41}{836} q l^2.$$

In gleicher Weise sind beispielsweise die Normalmomente für einen Stab mit 7 Feldern berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt.

Belast. Feld	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$M_6$
I.	+ 780	- 209	+ 56	- 15	+ 4	- 1
II.	+ 571	+ 627	- 168	+ 45	- 12	+ 3
III.	- 153	+ 612	+ 616	- 165	+ 44	- 11
IV.	+ 41	- 164	+ 615	+ 615	- 164	+ 41
V.	+ 1	+ 44	- 165	+ 616	+ 612	- 153
VI.	+ 3	- 12	+ 45	- 168	+ 627	+ 571
VII.	- 1	+ 4	- 15	+ 56	- 209	+ 780

$q l^2$   
1644

Ist ferner z. B. bei unendlich vielen Feldern das IV. Feld gleichmässig belastet, so ist nach 181 und 182:  $M_1 = [(2 - \sqrt{3})c_4 - c_3](2 + \sqrt{3} - 1) \frac{1}{4} q l^2 = [(2 - \sqrt{3})56 - 15](1 + \sqrt{3}) \frac{1}{4} q l^2 = + 0,003517 q l^2$ ,  $M_2 = - 4 M_1 = - 0,0141 q l^2$ ,  $M_3 = + 15 M_1 = + 0,0528 q l^2$ ,  $M_4 = [(2 - \sqrt{3})c_4 - c_3](c_3 + c_4) \frac{1}{4} q l^2 = [(2 - \sqrt{3})56 - 15](- 15 + 56) \frac{1}{4} q l^2 = + 0,0528 q l^2$ ,  $M_5 = - (2 - \sqrt{3}) M_4 = - 0,0141 q l^2$ ,  $M_6 = (2 - \sqrt{3})^2 M_4 = + 0,0038 q l^2$ ,  $M_7 = - (2 - \sqrt{3})^2 M_4 = - 0,0010 q l^2$  u. s. f.

Ist ein mittleres Feld gleichmässig belastet, so wird nach 188

$$M_{r-1} = M_r = + \frac{3 - \sqrt{3}}{24} q l^2 = + 0,05283 q l^2,$$

$$M_{r-2} = M_{r+1} = - \frac{9 - 5\sqrt{3}}{24} q l^2 = - 0,01416 q l^2 \text{ u. s. f.}$$

### §. 145. Die übrigen Grössen.

a. Transversalkräfte. Für einen beliebigen Querschnitt des  $m^{\text{ten}}$  unbelasteten Feldes ist nach 160 (§. 140):

$$184. Q_m = - \frac{M_{m-1} - M_m}{l} = (c_{m-1} - c_m) \frac{M_1}{l}.$$

Hiernach wird  $Q_1 = + 1 \frac{M_1}{l}$ ,  $Q_2 = - (1 - 4) \frac{M_1}{l} = 5 \frac{M_1}{l}$ ,  $Q_3 = (15 + 4) \frac{M_1}{l} = + 19 \frac{M_1}{l}$  u. s. f. Die Transversalkräfte verhalten sich hiernach wie

$$+ 1 : - 5 : + 19 : - 71 : + 265 : + 989 : \dots$$

Hiernach wird

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_m} = \frac{c_m - c_{m+1}}{c_{m-1} - c_m} = \frac{1 - \frac{c_{m+1}}{c_m}}{\frac{c_{m-1}}{c_m} - 1},$$

so dass sich dieses Verhältniss bei wachsendem  $m$  mit Rücksicht auf §. 143 dem Werthe

$$\frac{1 + \frac{1}{k}}{-k - 1} = - \frac{1}{k} = - (2 + \sqrt{3}) = - 3,7321$$

nähert.

b. Stützendrucke. Der Druck auf die Stütze  $m$  ist nach 154 (§. 136)  $D_m = Q'_m - Q'_{m+1}$ , d. i.

$$\begin{aligned} D_m l &= -(M_{m-1} - M_m) + (M_m + M_{m+1}) \\ &= -M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1} \\ &= (c_{m-1} - 2c_m + c_{m+1}) M_1 \end{aligned}$$

oder, weil  $c_{m-1} + 4c_m + c_{m+1} = 0$  ist,

$$185. \quad D_m = -6c_m \frac{M_1}{l} = 6 \frac{M_m}{l}.$$

Die Stützendrücke sind also dem entsprechenden Normalmomente proportional.

Für die äussere Stütze wird  $D_0 l = -Q_1 l = (0 - M_1) = -M_1$ ; ferner wird  $D_1 l = +6M_1$ ,  $D_2 l = 6M_2 = -24M_1$ ,  $D_3 l = 6M_3 = +90M_1$  u. s. f.

c. Formänderung. Nach 155 (§. 137) wird in einem unbelasteten Felde

$$186. \quad \eta = \frac{x(1-x)}{6EW} \left[ 2c_{m-1} + c_m - (c_{m-1} - c_m) \frac{x}{l} \right] M_1.$$

Im I. Felde wird  $6EWl\eta = -x(1-x^2)M_1$ ;  $\eta$  wird zum Maximum für  $x = 1\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,57741$  und zwar ist  $EW \max \eta = 0,0642 M_1 l^2$ . In den übrigen Feldern wird  $\eta$  zum Maximum für  $x = 0,62281$  bis  $x = 0,61961$  und es liegt  $EW \max \eta$  zwischen  $0,0562 M_m l^2$  und  $0,0491 M_m l^2$ , so dass  $\max \eta$  nahezu dem  $M_m$  proportional ist.

### C. Gleiche Belastung aller Felder.

**§. 146. Normalmomente.** Die Felder seien beliebig, aber symmetrisch in Beziehung auf ihre Mitte und sämtliche Felder seien in ganz gleicher Weise belastet. Alsdann wird  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}''$ ;  $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}''$ ; die allgemeine Beziehung zwischen drei auf einander folgenden Normalmomenten wird demnach

$$187. \quad M_{m-1} + 4M_m + M_{m+1} = 2\mathfrak{R} = 6\mathfrak{M}.$$

Wären diese drei Momente gleich, so wäre jedes =  $\mathfrak{M}$ . Wir wollen daher allgemein

$$188. \quad M_m = (1 + \mathcal{A}_m) \mathfrak{M}$$

setzen; alsdann wird

$$189. \quad \mathcal{A}_{m-1} + 4\mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{m+1} = 0.$$

Die erste Normalgleichung wird  $4M_1 + M_6 = 6M$  oder  $4(1 + \mathcal{A}_1)\mathfrak{M} + (1 + \mathcal{A}_2)\mathfrak{M} = 6\mathfrak{M}$ , d. i.  $4\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 1$ . Daher gehen die Normalgleichungen über in

$$190. \quad \begin{cases} 4\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 1, \\ \mathcal{A}_1 + 4\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = 0, \\ \mathcal{A}_2 + 4\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \mathcal{A}_{n-3} + 4\mathcal{A}_{n-2} + \mathcal{A}_{n-1} = 0, \\ \mathcal{A}_{n-2} + 4\mathcal{A}_{n-1} = 1. \end{cases}$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, multipliciren wir dieselben, mit der letzten beginnend, mit den Clapeyron'schen Zahlen und addiren sie sodann. Hierbei ergibt sich  $\mathcal{A}_1(c_{n-2} + 4c_{n-1}) = -1 + c_{n-1}$  oder  $-c_n \mathcal{A}_1 = -1 + c_{n-1}$ . Um nun ein beliebiges  $\mathcal{A}_m$  zu bestimmen, multipliciren wir die  $(m-1)$  ersten Gleichungen, mit der letzten beginnend, mit den Clapeyron'schen Zahlen

und addiren sie sodann. Hierbei ergibt sich  $\Delta_1(c_{m-2} + 4c_{m-1}) - \Delta_m = c_{m-1}$  oder  $c_m \Delta_1 - \Delta_m = c_{m-1}$ . Sonach ist

$$191. \Delta_1 = \frac{1 - c_{n-1}}{c_n}, \Delta_m = -c_{m-1} - c_m \Delta_1.$$

Beispielsweise ist für fünf Felder  $\Delta_1 = \frac{1-c_4}{c_5} = \frac{1-56}{-209} = +\frac{5}{19}$   
 $\Delta_2 = -c_1 - c_2 \Delta_1 = 1 - 4 \cdot \frac{5}{19} = -\frac{1}{19}$ ,  $\Delta_3 = -c_2 - c_3 \Delta_1 = -4 + 15 \cdot \frac{5}{19} = -\frac{1}{19}$ ,  $c_4 = -c_3 - c_4 \Delta_1 = -15 + 56 \cdot \frac{5}{19} = +\frac{5}{19}$ .

Das Verhältniss zweier auf einander folgender  $\Delta$  ist

$$\frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} = \frac{-4\Delta_m - \Delta_{m+1}}{\Delta_m} = -\left(4 + \frac{\Delta_{m+1}}{\Delta_m}\right),$$

oder, wenn wir zur Abkürzung  $\frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} = v_m$  setzen,

$$v_m = -\left(4 + \frac{1}{v_{m+1}}\right).$$

Hat der Stab eine ungerade Anzahl von Feldern, so sind offenbar die Momente für die beiden mittleren Stützen einander gleich; sind  $i, i+1$  die Indices dieser Stützen, so ist also  $\Delta_i = \Delta_{i+1}$ , mithin

$$v_{i+1} = 1, v_i = -\left(4 + \frac{1}{1}\right) = -5.$$

Hat der Stab aber eine gerade Anzahl von Feldern und ist  $i$  der Index der mittleren Stütze, so ist  $\Delta_{i-1} = \Delta_{i+1}$ , und da  $\Delta_{i-1} + 4\Delta_i + \Delta_{i+1} = 0$  ist,  $2\Delta_{i+1} + 4\Delta_i = 0$ , also

$$v_{i+1} = -2, v_i = -\left(4 + \frac{1}{-2}\right) = -3\frac{1}{2}.$$

Weiter ist nun

$$v_{i-1} = -\left(4 - \frac{1}{v_i}\right), v_{i-2} = -\left(4 - \frac{1}{v_{i-1}}\right), \dots$$

Da in beiden Fällen  $v_i$  negativ und  $> 3$  ist, so ist  $v_{i-1}$  ebenfalls negativ und  $> 4 - \frac{1}{3}$ , d. i.  $> 3\frac{2}{3}$ . — Da also  $v_{i-1}$  negativ und  $> 3$  ist, so ist  $v_{i-2}$  ebenfalls negativ und  $> 4 - \frac{1}{3}$ , d. i.  $> 3\frac{2}{3}$  u. s. f. Es ist also jedes  $v$  negativ und grösser als 3. Die  $\Delta_m$  sind daher abwechselnd positiv und negativ und werden von der Mitte nach den Enden hin immer grösser oder:

Die Normalmomente sind abwechselnd grösser und kleiner, als  $\mathfrak{M}$  und nähern sich diesem Werthe von den Enden nach der Mitte hin immer mehr und mehr.

Bei unendlich vielen Feldern ergibt sich ebenso wie bei den Clapeyron'schen Zahlen in §. 149

$$192. \frac{\Delta_{m+1}}{\Delta_m} = -k = -(2 - \sqrt{3}) = -0,267949.$$

Demnach wird  $\Delta_2 = -k \Delta_1$ ,  $\Delta_3 = k^2 \Delta_1, \dots$  Setzen wir in der ersten der Gleichungen 190  $\Delta_2 = -k \Delta_1$ , so wird  $\Delta_1 = \frac{1}{4-k} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$   
 $= 2 - \sqrt{3}$  oder

$$193. \Delta_1 = +k, \Delta_2 = -k^2, \Delta_3 = +k^3, \dots \Delta_m = (-k)^m.$$

Die hiernach berechneten Werthe von  $\Delta_m$  sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

n	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$	$\Delta_7$
2	+ 0,5000						
3	+ 0,2000	+ 0,2000					
4	+ 0,2857	- 0,1429	+ 0,2857				
5	+ 0,2632	- 0,0526	- 0,0526	+ 0,2632			
6	+ 0,2692	- 0,0769	+ 0,0385	- 0,0769	+ 0,2692		
7	+ 0,2676	- 0,0704	+ 0,0141	+ 0,0141	- 0,0704	+ 0,2676	
$\infty$	+ 0,2680	- 0,0716	+ 0,0191	- 0,0051	+ 0,0014	- 0,0005	+ 0,0001

Für die äusseren Stützen ist  $M_0 = M_n = 0$ ; für diese ist also  $\Delta_0 = \Delta_n = -1$  zu setzen.

**§. 147. Transversalkräfte.** In den Formeln 146 (§. 136) für  $Q'$ ,  $Q''$  ist  $X_1 = \frac{1}{2} Gl$  zu setzen, wenn  $G$  die Gesamtlast eines Feldes bedeutet. Daher wird

$$194. \quad Q'_m = -\frac{1}{2} G - (\Delta_{m-1} - \Delta_m) \frac{\mathfrak{M}}{l}, \quad Q''_m = +\frac{1}{2} G - (\Delta_{m-1} - \Delta_m) \frac{\mathfrak{M}}{l},$$

wonach sich  $Q'$ ,  $Q''$  leicht berechnen lassen. Es ist

$$\Delta_{m-1} - \Delta_m = \left( \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} - 1 \right) \Delta_m = -(-v_m + 1) \Delta_m.$$

Nach dem vorigen Paragraph ist  $v_m$  negativ und  $> 3$ , also  $-v_m + 1$  positiv und  $> 4$ , mithin hat  $\Delta_{m-1} - \Delta_m$  das entgegengesetzte Vorzeichen, als  $\Delta_m$ , ist also ebenfalls positiv und negativ. Da sich  $\Delta_{m-1}$  und  $\Delta_m$  nach der Mitte zu immer mehr der Null nähern, so ist dies auch mit  $\Delta_{m-1} - \Delta_m$  der Fall. Hieraus folgt:

Jede der Transversalkräfte  $Q'$ ,  $Q''$  ist abwechselnd grösser und kleiner als  $\frac{1}{2} G$  und nähert sich diesem Werthe nach der Mitte hin immer mehr und mehr.

Bei gleichmässiger Belastung ist  $G = ql$ ,  $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} ql$  zu setzen. Für diesen Fall ist folgende Tabelle berechnet:

n	$Q_1'$	$Q_1''$	$Q_2'$	$Q_2''$	$Q_3'$	$Q_3''$	$Q_4'$	$Q_4''$	$Q_5'$	$Q_5''$	$Q_6'$	$Q_6''$
	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
2	0,750	1,250	1,250	0,750								
3	0,800	1,200	1,000	1,000	1,200	0,800						
4	0,786	1,214	1,071	0,929	0,929	1,071	1,214	0,786				
5	0,790	1,211	1,053	0,947	1,000	1,000	0,947	1,053	1,211	0,790		
6	0,789	1,212	1,058	0,942	0,981	1,019	1,019	0,981	0,942	1,058	1,212	0,789
$\infty$	0,789	1,211	1,059	0,943	0,985	1,015	1,004	0,996	0,999	1,000	1,000	1,000

$\cdot \frac{1}{2} ql.$

Bei gleichmässiger Belastung ist für eine beliebige Stelle

$$Q = Q' - qx.$$

Für  $x = \frac{Q'}{q}$  wird  $Q = 0$ . Da  $Q'$  abwechselnd grösser und kleiner ist als  $\frac{1}{2} ql$ , so ist dieses  $x$  abwechselnd grösser und kleiner als  $\frac{1}{2} l$ , d. h. der Querschnitt, für welchen die Transversalkraft  $Q = 0$  oder das Moment  $M$  zu einem Maximum wird, liegt abwechselnd links

und rechts von der Mitte des Feldes. In allen Fällen liegt dieses  $x$  zwischen 0,375  $l$  und 0,625  $l$ . Das absolut grösste  $Q$  ist stets  $Q_1$ .

Taf. VI Fig. 4, 6, 10 ist  $Q$  für 2, 3, 4 Felder graphisch dargestellt.

**§. 148. Stützendrücke.** Der Druck auf die  $m^{\text{te}}$  Stütze ist  $D_m = Q''_m - Q'_{m+1}$ , d. i. nach dem vorigen Paragraph  $D_{m1} = G l - (\mathcal{A}_{m-1} - 2 \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{m+1}) \mathfrak{M}$ , oder, weil  $\mathcal{A}_{m-1} + 4 \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{m+1} = 0$  ist,

$$195. D_m = G + 6 \mathcal{A}_m \frac{\mathfrak{M}}{l}.$$

Hieraus folgt: Die Stützendrücke sind abwechselnd grösser und kleiner als die ganze Last  $G$  eines Feldes und nähern sich diesem Werthe von den Enden nach der Mitte zu immer mehr und mehr.

Für den Druck auf die äussere Stütze ist  $D_0 = -Q'_1 = \frac{1}{2} G - \frac{M_1}{l}$  oder

$$196. D_0 = \frac{1}{2} G - (1 + \mathcal{A}_1) \frac{\mathfrak{M}}{l}.$$

Bei gleichmässiger Belastung ist  $G = q l$ ,  $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} q l^2$ , mithin

$$197. D_0 = \frac{5 - \mathcal{A}_1}{12} q l, \quad D_m = (1 + \frac{1}{2} \mathcal{A}_m) q l.$$

Wirkt dagegen eine isolirte Last  $G$  in der Mitte, so ist  $\mathfrak{M} = \frac{1}{8} G l$  mithin

$$198. D_0 = \frac{3 - \mathcal{A}_1}{8} G, \quad D_m = (1 + \frac{3}{4} \mathcal{A}_m) G.$$

Die hiernach für eine gleichmässige Belastung berechneten Stützendrücke sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

n	$D_0$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$	$D_6$
2	0,3750	1,2500	0,3750				
3	0,4000	1,1000	1,1000	0,4000			
4	0,3928	1,1429	0,9285	1,1429	0,3928		
5	0,3947	1,1316	0,9737	0,9737	1,1316	0,3947	
6	0,3942	1,1346	0,9514	1,0192	0,9514	1,1346	0,3942
$\infty$	0,3942	1,1340	0,9641	1,0096	0,9974	1,0007	0,9998
	$q l$						

Nach 195 wird  $D_{m-1} + 4 D_m + D_{m+1} = 6 G + 6 (\mathcal{A}_{m-1} + 4 \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{m+1}) \frac{M}{l}$ , d. i. nach 182

$$199. D_{m-1} + 4 D_m + D_{m+1} = 6 G,$$

so dass zwischen den Drücken auf drei benachbarte Stützen eine gleiche Beziehung besteht, wie zwischen den Momenten an diesen Stützen. Hiernach würde man die Stützendrücke auch direct, d. h. unabhängig von den Normalmomenten berechnen können.

**§. 149. Momente.** Bei gleichmässiger Belastung ist für einen beliebigen Querschnitt durch 152 (§. 136) bestimmt.  $M$  wird zum analy-

tischen Maximum an derselben Stelle, für welche  $Q = 0$  wird, nämlich für

$$x = \frac{Q'}{q} = \frac{1}{2} l \left( 1 + \frac{\Delta_{m-1} - \Delta_m}{6} \right)$$

und zwar ist, wenn wir das analytische Maximum von  $M$  mit  $M'$  bezeichnen,

$$200. \quad M'_m = M_{m-1} - \frac{Q'_m}{2q} = -\frac{1}{24} \left[ 1 - (\Delta_{m-1} - \Delta_m) + \frac{1}{12} (\Delta_{m-1} - \Delta_m)^2 \right] q l^2.$$

Da  $\Delta_m$  stets  $\frac{1}{2}$  ist, so ist  $\Delta_{m-1} - \Delta_m$  ein echter Bruch, also  $\frac{1}{12} (\Delta_{m-1} - \Delta_m)^2 < (\Delta_{m-1} - \Delta_m)$ ;  $\Delta_{m-1} - \Delta_m$  ist nach §. 147 abwechselnd positiv und negativ und nähert sich nach der Mitte hin der Grenze 0 immer mehr. Aus beiden folgt: Das analytische Maximum  $M'$  der Momente ist negativ und abwechselnd grösser und kleiner, als  $\frac{1}{24} q l^2$  und nähert sich diesem Werthe nach der Mitte hin immer mehr und mehr.

Die hiernach berechneten Werthe von  $M'$  sind nebst den Normalmomenten in folgender Tabelle zusammengestellt.

n	$M'_1$ —	$M_1$ +	$M'_2$ —	$M_2$ +	$M'_3$ —	$M_3$ +	$M'_4$ —	$M_4$ +	$M'_5$ —	$M_5$ +	$M'_6$ —
2	0,844	1,500	0,844								
3	0,960	1,200	0,300	1,200	0,960						
4	0,926	1,286	0,436	0,857	0,436	1,286	0,926				
5	0,935	1,263	0,399	0,947	0,553	0,947	0,399	1,263	0,935		
6	0,933	1,269	0,430	0,923	0,520	1,038	0,520	0,923	0,430	1,269	0,933
$\infty$	0,934	1,268	0,401	0,939	0,527	1,019	0,493	0,995	0,502	1,002	0,499
	$\cdot \frac{1}{12} q l^2$ .										

Das absolute positive Maximum erreicht  $M$  über den neben den Endstützen liegenden Stützen, das absolute negative Maximum im ersten Felde. Das erstere ist das grössere. Bei zwei Feldern ist das grösste Moment eben so gross, als bei einem auf zwei Stützen liegenden Stabe, nämlich  $\frac{1}{8} q l^2$ . Bei sehr vielen Stützen wird das grösste Moment nur  $0,845 \cdot \frac{1}{8} q l^2$ , also bei gleichen Dimensionen die Tragkraft  $\frac{1}{0,845} = 1,183$ mal grösser, als bei einem auf zwei Stützen liegenden Stabe. Das grösste negative Moment ist bei sehr vielen Feldern nur  $0,737$  vom grössten positiven Momente.

Taf. VI Fig. 4, 6, 10 ist  $M$  für 2, 3, 4 Felder graphisch dargestellt.

**§. 150. Formänderung.** Die Lage der Tangente über einer Stütze ist nach 139 (§. 134) bestimmt durch  $6 E W \tau_m = l [(1 + \Delta_{m-1}) \mathfrak{M} + 2(1 + \Delta_m) \mathfrak{M} - 3 \mathfrak{M}]$ , d. i.

$$201. \quad 6 E W \tau_m = (2 \Delta_m + \Delta_{m-1}) \mathfrak{M} l.$$

Da innerhalb der ersten Hälfte  $\Delta_{n-1} > 2 \Delta_n$  ist und  $\Delta_m, \Delta_{m-1}$  verschiedene Vorzeichen haben, so hat  $\tau_m$  dasselbe Vorzeichen wie  $\Delta_{m-1}$ , ist also abwechselnd positiv und negativ. Da  $\Delta_m, \Delta_{m-1}$  nach der Mitte hin immer kleiner werden, so ist dies auch mit  $\tau_m$  der Fall. Die Tangente über den Stützen ist also abwechselnd nach rechts und

links geneigt und nähert sich nach der Mitte hin der horizontalen Lage immer mehr.

Die Abweichung bei gleichmässiger Belastung wird nach 155 (§. 136)

$$202. \quad \eta = - \frac{q x (1-x)}{72 E W} \left[ (2 \mathcal{A}_{m-1} + \mathcal{A}_m) l^2 - (3 + \mathcal{A}_{m-1} - \mathcal{A}_m) l x + 3 x^2 \right].$$

Das Maximum erreicht  $\eta$  im ersten Felde für  $n = 2$  bei  $x = 0,422 l$ , für  $n = 3$  bei  $x = 0,446 l$ , für  $n = \infty$  bei  $x = 0,442 l$ . Nach der Mitte zu nähert sich dieses  $x$  dem  $0,5 l$  immer mehr und mehr. Das Maximum von  $\eta$  wird im ersten Felde bei 2 Feldern = 2,078, bei 3 Feldern = 2,649, bei unendlich vielen Feldern = 2,514, wenn man die Senkung  $\frac{q l^4}{384 E W}$  bei horizontaler Einspannung = 1 setzt. Nach der Mitte zu nähert sich  $\max \eta$  diesem Werthe immer mehr, so dass die grösste Senkung im ersten Felde stattfindet.

Die Abweichung in der Mitte der Felder, welche von der grössten Abweichung nur wenig verschieden ist, ist ( $x = \frac{1}{2} l$ ):

$$203. \quad \eta' = \frac{q l^4}{384 E W} \left[ 1 - 2 (\mathcal{A}_{m-1} + \mathcal{A}_m) \right],$$

wonach  $\eta'$  abwechselnd grösser und kleiner ist, als  $\frac{q l^4}{384 E W}$  und sich diesem Werthe nach der Mitte zu immer mehr nähert. In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von  $\eta'$  zusammengestellt.

n	$\eta'_1$	$\eta'_2$	$\eta'_3$	$\eta'_4$	$\eta'_5$	$\eta'_6$
1	5,000					
2	2,000	2,000				
3	2,600	0,200	2,600			
4	2,429	0,714	0,714	2,429		
5	2,474	0,579	1,211	0,579	2,474	
6	2,462	0,615	1,077	1,077	0,615	2,462
$\infty$	2,464	0,608	1,105	0,972	1,008	0,998
				$\frac{q l^4}{384 E W}$		

Taf. VII ist in Fig. 7, 9, 13, 15 die elastische Linie für 2, 3, 4 und unendlich viele Felder dargestellt.

## XV. Kapitel.

### Prismatischer Stab mit ungleichen Feldern bei gleich hohen Stützen.

#### A. Gleichmässige Belastung.

**§. 151. Allgemeines.** Wir setzen in diesem Kapitel voraus, dass die beiden äusseren Felder gleich lang und dass alle übrigen Felder oder

die innern Felder gleich lang seien. Ausserdem setzen wir zunächst eine constante gleichmässige Belastung aller Felder voraus.

Wir bezeichnen mit

$l$  die Länge der innern Felder,

$l_1$  die Länge der äusseren Felder,

$\varepsilon$  das Verhältniss  $\frac{l_1}{l}$ ,

$\alpha$  das Verhältniss  $\frac{l}{l_1} = \frac{1}{\varepsilon}$ .

Alsdann ist  $\mathfrak{M}_1'' = \mathfrak{M}'_n = \frac{1}{4} q l_1^2 = \frac{1}{4} \varepsilon^2 q l^2$ ,  $\mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_2'' = \mathfrak{M}_3' = \dots = \frac{1}{4} q l^2$ . Die Normalgleichungen werden daher

$$204. \quad \begin{cases} 2(1 + \varepsilon) M_1 + M_2 = \frac{1}{4} (1 + \varepsilon^3) q l^2, \\ M_1 + 4 M_2 + M_3 = \frac{1}{2} q l^2, \\ M_2 + 4 M_3 + M_4 = \frac{1}{2} q l^2, \\ \dots \end{cases}$$

Wir setzen wiederum, wie in §. 146.

$$205. \quad M_m = (1 + \mathcal{A}_m) \cdot \frac{1}{2} q l^2.$$

Alsdann werden die Normalgleichungen

$$206. \quad \begin{cases} 2(1 + \varepsilon) \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \varepsilon (3 \varepsilon^2 - 2), \\ \mathcal{A}_1 + 4 \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = 0, \\ \mathcal{A}_2 + 4 \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 = 0, \\ \dots \\ \mathcal{A}_{n-3} + 4 \mathcal{A}_{n-2} + \mathcal{A}_{n-1} = 0, \\ \mathcal{A}_{n-2} + 2(1 + \varepsilon) \mathcal{A}_{n-1} = \varepsilon (3 \varepsilon^2 - 2). \end{cases}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen, mit der ersten beginnend, mit den Clapeyron'schen Zahlen und addiren sie sodann, so ergibt sich

$$2(1 - \varepsilon) \mathcal{A}_1 + [c_{n-2} + 2(1 + \varepsilon) c_{n-1}] \mathcal{A}_{n-1} = (c_{n-1} - 1) \varepsilon (3 \varepsilon^2 - 2).$$

Nun aber ist der Symmetrie wegen  $\mathcal{A}_{n-1} = \mathcal{A}_1$ . Ausserdem ist  $c_{n-2} = 4 c_{n-1} - c_n$ ; mithin wird

$$\mathcal{A}_1 [2(1 - \varepsilon)(1 - c_{n-1}) - c_n] = (c_{n-1} - 1) \varepsilon (3 \varepsilon^2 - 2),$$

also

$$207. \quad \mathcal{A}_1 = \frac{(c_{n-1} - 1) \varepsilon (3 \varepsilon^2 - 2)}{2(1 - \varepsilon)(1 - c_{n-1}) - c_n}.$$

Um  $\mathcal{A}_m$  zu erhalten, multipliciren wir die  $m-1$  ersten Gleichungen, mit der letzten beginnend, mit den Clapeyron'schen Zahlen und addiren sie sodann. Es ergibt sich  $\mathcal{A}_1 [c_{m-2} + 2(1 + \varepsilon) c_{m-1}] - \mathcal{A}_m = c_{m-1} \varepsilon (3 \varepsilon^2 - 2)$  oder  $\mathcal{A}_1 [2(1 - \varepsilon) c_{m-1} + c_m] - \mathcal{A}_m = c_{m-1} \varepsilon (3 \varepsilon^2 - 2)$ , also

$$208. \quad \mathcal{A}_m = -c_{m-1} \varepsilon (3 \varepsilon^2 - 2) - [2(1 - \varepsilon) c_{m-1} + c_m] \mathcal{A}_1.$$

Schneller jedoch erhält man die  $\mathcal{A}_m$  nach Berechnung von  $\mathcal{A}_1$  successive aus den Gleichungen 206.

Ueber das Verhältniss zweier auf einander folgender  $\mathcal{A}_m$  gilt dasselbe, wie bei gleichen Feldern (§. 146). Es lässt sich daher auch hier folgern: Die Normalmomente sind abwechselnd grösser und kleiner, als  $\mathfrak{M}$  oder  $\frac{1}{2} q l^2$  und nähern sich diesem Werthe nach der Mitte hin immer mehr und mehr.

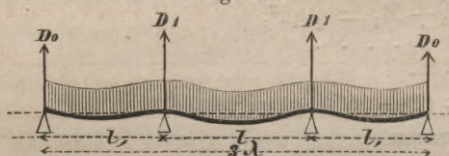
Bei wenig Feldern, wie 3, 4 und 5, bestimmt man die Normalmomente am besten durch direkte Auflösung der Normalgleichungen, wobei zu beachten ist, dass die Normalmomente für gleich weit von beiden Enden abstehende Stützen gleich gross sind.

Die Bestimmung der übrigen Grössen erfolgt in der früher angegebenen Weise. Es ergibt sich auch hier das Resultat, dass sich die Werthe von Q, D, M und  $\eta$  nach der Mitte hin denen für horizontale Einspannung immer mehr und mehr nähern.

Beispielsweise ergibt sich für fünf Felder und für  $\varepsilon = 0,7$   $\mathcal{A}_1 = \frac{(56-1) \cdot 0,7 \cdot (3 \cdot 0,49 - 2)}{2(1-0,7)(1-56)+209} = \frac{-20,405}{+176} = -0,11594$ . Weiter wird nun nach 206  $\mathcal{A}_2 = \varepsilon(3\varepsilon^2 - 2) - 2(1 + \varepsilon) \mathcal{A}_1 = 0,7(3 \cdot 0,49 - 2) + 2 \cdot (1 + 0,7) \cdot 0,11894 = +0,02319$ ;  $\mathcal{A}_3 = -\mathcal{A}_1 - 4 \mathcal{A}_2 = +0,11594 - 4 \cdot 0,02319 = +0,02319$ ;  $\mathcal{A}_4 = -\mathcal{A}_2 - 4 \mathcal{A}_3 = -0,02319 - 4 \cdot 0,02319 = -0,11594$ . Demnach ist  $M_1 = M_4 = 0,8841 \cdot \frac{1}{2} q l^2$ ,  $M_2 = M_3 = 1,0232 \cdot \frac{1}{2} q l^2$ .

### §. 152. Stab mit drei Feldern (Fig. 40). Hier haben wir es

Fig. 40.



nur mit zwei Normalgleichungen, und weil offenbar  $M_1 = M_2$  ist, sogar nur mit einer Normalgleichung zu thun, nämlich  $2M_1(l_1 + 1) + M_1 l = \mathfrak{N}_1 l^3 + \mathfrak{N}_2 l^3$ . Da  $\mathfrak{N}_1 = \frac{1}{4} q l_1^3$ ,  $\mathfrak{N}_2 = \frac{1}{4} q l^3$  ist, so ergibt sich

$$209. \quad M_1 = \frac{q(l_1^3 + l^3)}{4(2l_1 + 3l)} = \frac{1 + \alpha^3}{4(2 + 3\alpha)} q l^2.$$

Da in der Regel die Gesamtlänge  $2l_1 + l$  gegeben ist, so empfiehlt es sich, diese Länge oder den dritten Theil derselben einzuführen. Bezeichnen wir den letzteren mit  $\lambda$ , so wird

$$210. \quad \lambda = \frac{2 + \alpha}{3} l_1 = \frac{2 + \alpha}{3\alpha} l, \quad l_1 = \frac{3}{2 + \alpha} \lambda, \quad l = \frac{3\alpha}{2 + \alpha} \lambda,$$

mithin

$$211. \quad M_1 = \frac{9(1 + \alpha^3)}{4(2 + 3\alpha)(2 + \alpha)^2} q \lambda^2 = k q \lambda^2,$$

wobei k einen nur von  $\alpha$  abhängenden Coefficienten bedeutet, dessen Werth aus der Formel hervorgeht. In folgender Tabelle ist k für verschiedene  $\alpha$  zusammengestellt.

$\alpha$	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
k	0,09862	0,09842	0,10000	0,10297	0,10704	0,11196

Transversalkräfte. Im ersten Felde ist  $Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1$ ,

$Q_1'' = -\frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} q l_1$ , oder, wenn wir die Werthe für  $M_1$  und  $l_1$  einsetzen,

$$212. \quad Q_1' = +\frac{3(3 + 6\alpha - \alpha^3)}{4(2 + \alpha)(2 + 3\alpha)} q \lambda, \quad Q_1'' = -\frac{3(5 + 6\alpha + \alpha^3)}{4(2 + \alpha)(2 + 3\alpha)} q \lambda$$

und für eine beliebige Stelle nach 151 (Seite 114)

$$213. \quad Q = Q_1' - (Q_1' - Q_1'') \frac{x}{l_1}.$$

Für das zweite Feld wird, da hier  $M_{m-1} = M_m$  ist,

$$214. Q_2' = + \frac{1}{2} q l = \frac{3\alpha}{2(2+\alpha)} q \lambda, \quad Q_2'' = - Q_2';$$

$$215. Q = Q_2' \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von  $Q_1'$ ,  $Q_1''$ ,  $Q_2'$  und das  $x$  im ersten Felde, für welches  $Q = 0$  oder  $M$  zu einem Maximum wird ( $x = x_0$ ), für verschiedene  $\alpha$  zusammengestellt. Im zweiten Felde wird  $Q = 0$  für  $x = \frac{1}{2} l$ .

$\alpha$	0,8	0,859	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$Q_1'$	0,4437	0,4310	0,4221	0,4000	0,3775	0,3546	0,3314	· $q \lambda$
$- Q_1''$	0,6278	0,6183	0,6124	0,6000	0,5903	0,5829	0,5777	
$Q_2' = - Q_2''$	0,4286	0,4507	0,4655	0,5000	0,5323	0,5625	0,5909	
$x_0$	0,4141	0,4109	0,4080	0,4000	0,3901	0,3782	0,3645	· $l_1$

Der grösste absolute Werth von  $Q$  ist, wenn  $\alpha < 1,261$  ist,  $Q_1'$  und wenn  $\alpha > 1,261$  ist,  $Q_2'$ . Da mit wachsendem  $\alpha$   $Q_1''$  abnimmt, während  $Q_2'$  wächst, so wird zugleich für  $\alpha = 1,261$  das absolute Maximum von  $Q$  am kleinsten.

Stützendrücke. Zunächst ist der Druck auf eine äussere Stütze  $D_0 = Q_1'$ . Die Summe aller Stützendrücke, nämlich  $2(D_0 + D_1)$  ist gleich der ganzen Last  $q(2l_1 + l) = 3q\lambda$ , mithin  $D_1 = \frac{3}{2}q\lambda - D_0 = \frac{3}{2}q\lambda - Q_1'$ , oder auch nach 154 (§. 136)  $D_1 = -Q_1'' + Q_2'$ . Nach obigem Werthe für  $Q_1'$  wird daher

$$216. \begin{cases} D_0 = \frac{3(3 + 6\alpha - \alpha^3)}{4(2 + \alpha)(2 + 3\alpha)} q \lambda, \\ D_1 = \frac{3(5 + 10\alpha + 6\alpha^2 + \alpha^3)}{4(2 + \alpha)(2 + 3\alpha)} q \lambda. \end{cases}$$

Nach Berechnung der Transversalkräfte berechnet man natürlich  $D_1$  schneller nach der Formel  $D_1 = \frac{3}{2}q\lambda - Q_1'$ , oder  $D_1 = -Q_1'' + Q_2'$ . In folgender Tabelle sind die Werthe für  $D_0$  und  $D_1$  bei verschiedenen  $\alpha$  zusammengestellt.

$\alpha$	0,8	0,859	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$D_0$	0,4437	0,4310	0,4221	0,4000	0,3775	0,3546	0,3314	· $q \lambda$
$D_1$	1,0563	1,0690	1,0779	1,1000	1,1225	1,1454	1,1686	· $q \lambda$

Momente. Im ersten Felde ist  $M = -Q'x + \frac{1}{2}qx^2$  oder, um für einen bestimmten Werth von  $\frac{x}{l_1}$   $M$  als Theil von  $q\lambda^2$  zu erhalten,  $M = -Q_1' l_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1^2 \left(\frac{x}{l_1}\right)^2$  oder nach Einsetzung des Werthes von  $l_1$

$$217. M = - \frac{3}{2 + \alpha} \left[ Q' \frac{x}{l_1} = \frac{3}{2(2 + \alpha)} \left(\frac{x}{l_1}\right)^2 q \lambda \right] \lambda.$$

$M$  wird zum analytischen Maximum für dasselbe  $x$ , für welches  $Q = 0$  wird. Bezeichnen wir dieses Maximum mit  $M_1'$  so wird

$$218. M_1' = -\frac{Q_1^2}{2q} = -\frac{9(3+6\alpha-\alpha^3)}{16(2+\alpha)^2(2+3\alpha)^2} q \lambda^2.$$

Im zweiten Felde wird  $M = M_1 - Q_2'x + \frac{1}{2}qx^2 = M_1 - Q_2'1\frac{x}{1} + \frac{1}{2}q1^2\left(\frac{x}{1}\right)^2$   
 $= M_1 - \frac{1}{2}q1^2\frac{x}{1} + \frac{1}{2}q1^2\left(\frac{x}{1}\right)^2$ , d. i. nach Einsetzung des Werthes von  $M_1$  und 1

$$219. M = \left[ k - \frac{9\alpha^2}{2(2+\alpha)^2} \left( \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1^2} \right) \right] q \lambda^2.$$

M wird zum Maximum für  $x = \frac{1}{2}1$ ; bezeichnen wir dasselbe mit  $M_2'$ , so ist

$$220. M_2' = -\left[ \frac{9\alpha^2}{8(2+\alpha)^2} - k \right] q \lambda^2 = -\frac{9(2\alpha^2 + \alpha^3 - 2)}{8(2+\alpha)^2(2+3\alpha)} q \lambda^2.$$

In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von  $M_1'$ ,  $M_2'$  nebst den Werthen von  $M_1$  für verschiedene  $\alpha$  zusammengestellt; ebenso auch die Werthe von  $x$ , für welche  $M = 0$  wird, wobei das betreffende  $x$  im ersten Felde mit  $x_1$ , im zweiten mit  $x_2$  bezeichnet ist.

$\alpha$	0,8	0,859	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$M_1'$	-0,0984	-0,0929	-0,0891	-0,0800	-0,0713	-0,0629	-0,0549	· $q \lambda^2$
$M_1$	+0,0986	+0,0983	+0,0984	+0,1000	+0,1030	+0,1072	+0,1120	
$M_2'$	+0,0068	-0,0003	-0,0099	-0,0250	-0,0387	-0,0512	-0,0626	
$x_1$	0,8282	0,8218	0,8161	0,8000	0,7802	0,7565	0,7291	. $1_1$
$x_2$	—	0,4094	0,3487	0,2491	0,2387	0,2157	0,2006	. 1

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich, dass stets  $M_1$  das absolut grösste Moment ist. Dasselbe wird am kleinsten für das durch  $\frac{dM_1}{d\alpha} = 0$  bestimmte Verhältniss der Felderlängen, d. i. für  $3\alpha^2(2+3\alpha)(2+\alpha)^3 = (1+\alpha^3)(20+32\alpha+15\alpha^2)$  oder

$$221. \begin{cases} 15\alpha^5 + 23\alpha^4 - 4\alpha^3 + 3\alpha^2 + 32\alpha + 20 = 0, \\ \alpha = 0,8590 \end{cases}$$

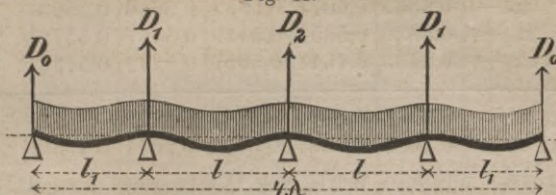
Das mittlere Feld muss also etwas kleiner sein, als die äusseren. Annähernd ist  $1_1 : 1 = 7 : 6$ . Für dieses Verhältniss würden sich, wenn für die Festigkeit die Formel  $KW = Ma$  massgebend ist, bei gegebener Gesamtlänge und bei gegebener Belastung die kleinsten Querschnittsdimensionen ergeben, so dass dieses Verhältniss das zweckmässigste ist. Bei gleichem Querschnitte würde hier die Tragkraft  $\frac{12500}{9825} = 1,272$ mal so gross werden, als bei drei getrennten gleich langen Stäben.

Auf Taf. VI ist in Fig. 6 Q und M (stark) für gleich lange Felder ( $\alpha = 1$ ) und in Fig. 7 Q und M für das zweckmässigste Verhältniss  $\alpha = 0,858$  dargestellt. Auf Taf. VII ist in Fig. 9 und 10 für diese beiden Verhältnisse die elastische Linie dargestellt.

**§. 153. Stab mit vier Feldern.** (Fig. 41). Die Normalgleichungen werden mit Rücksicht auf den Umstand, dass in Folge der Symmetrie  $M_3 = M_1$  ist,

$$\begin{aligned} 2 M_1 (l_1 + 1) + M_2 l &= \frac{1}{4} q (l_1^3 + 1^3), \\ 2 M_1 l + 4 M_2 l &= \frac{1}{2} q l^3. \end{aligned}$$

Fig. 41.



Die dritte Normalgleichung würde mit der ersten übereinstimmen. Die Auflösung giebt

$$222. \quad M_1 = \frac{q (2 l_1^3 + 1^3)}{4 (4 l_1 + 3 l)}, \quad M_2 = \frac{q (l^3 + 2 l^2 l_1 - l_1^3)}{4 (4 l_1 + 3 l)}.$$

Wir setzen wiederum  $l = \alpha l_1$  und bezeichnen den vierten Theil der Gesammtlänge mit  $\lambda$ . Alsdann ist

$$223. \quad \lambda = \frac{1 + \alpha}{2} l_1 = \frac{1 + \alpha}{2 \alpha} l, \quad l_1 = \frac{2}{1 + \alpha} \lambda, \quad l = \frac{2 \alpha}{1 + \alpha} \lambda.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$224. \quad k_1 = \frac{\alpha^3 + 2}{(3 \alpha + 4) (\alpha + 1)^2}, \quad k_2 = \frac{\alpha^3 + 2 \alpha^2 - 1}{(3 \alpha + 4) (\alpha + 1)^2},$$

so wird

$$224 a. \quad M_1 = k_1 q \lambda^2, \quad M_2 = k_2 q \lambda^2.$$

In folgender Tabelle sind die Werthe von  $k_1$  und  $k_2$  für verschiedene  $\alpha$  zusammengestellt:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$k_1$	0,11283	0,10714	0,10447	0,10135	0,10043
$k_2$	0,05577	0,07143	0,08549	0,10076	0,10955

Transversalkräfte. Im ersten Felde ist  $Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1$ ,

$$Q_1'' = -\frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} q l_1, \text{ d. i., wenn man } l_1 = \frac{2}{1 + \alpha} \lambda, \quad M_1 = k_1 q \lambda \text{ setzt,}$$

$$225. \quad Q_1' = +\frac{1}{2} q \lambda \left[ \frac{2}{1 + \alpha} - (1 + \alpha) k_1 \right], \quad Q_1'' = -\frac{1}{2} q \lambda \left[ \frac{2}{1 + \alpha} + (1 + \alpha) k_1 \right].$$

Im zweiten Felde ist  $Q_2' = \frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{1}{2} q l$ ,  $Q_2'' = \frac{M_1 - M_2}{l} - \frac{1}{2} q l$ , d. i.

$$226. \quad \begin{cases} Q_2' = +\frac{1}{2} q \lambda \left[ \frac{2 \alpha}{1 + \alpha} + \frac{1 + \alpha}{\alpha} (k_1 - k_2) \right], \\ Q_2'' = -\frac{1}{2} q \lambda \left[ \frac{2 \alpha}{1 + \alpha} - \frac{1 + \alpha}{\alpha} (k_1 - k_2) \right]. \end{cases}$$

Für einen beliebigen Querschnitt ist im ersten und zweiten Felde bezüglich

$$227. \quad Q = Q_1' - (Q_1' - Q_1'') \frac{x}{l_1}, \quad Q = Q_2' - (Q_2' - Q_2'') \frac{x}{l}.$$

In folgender Tabelle sind die Werthe von  $Q_1'$ ,  $Q_1''$ ,  $Q_2'$ ,  $Q_2''$ , so wie die mit  $x_1$ ,  $x_2$  bezeichneten Werthe von  $x$ , für welche  $Q$  im I. und II. Felde Null wird, zusammengestellt.

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$Q_1' = +$	0,4161	0,3929	0,3665	0,3431	0,3193	· q $\lambda$
$Q_1'' = -$	0,6365	0,6071	0,5859	0,5660	0,5503	
$Q_2' = +$	0,5339	0,5357	0,5419	0,5467	0,5572	
$Q_2'' = -$	0,4135	0,4643	0,5057	0,5442	0,5733	
$x_1 =$	0,3953	0,3929	0,3849	0,3773	0,3672	· $l_1$
$x_2 =$	0,5635	0,5357	0,5173	0,5011	0,4930	· 1

Der grösste absolute Werth von Q ist, wenn  $\alpha < 1,249$  ist,  $Q_1''$  und wenn  $\alpha > 1,249$  ist,  $Q_2''$ . Für diesen Werth von  $\alpha$  wird das absolute Maximum von Q am kleinsten.

Stützendrücke. Nach §. 136 ist  $D_0 = Q_1'$ ,  $D_1 = -Q_1'' + Q_2'$  und  $D_2 = -Q_2'' + Q_3'$  oder, weil  $Q_3' = -Q_2''$  ist,  $D_2 = -2Q_2''$ . Setzt man obige Ausdrücke für Q ein und substituirt sodann für  $k_1$ ,  $k_2$  die Ausdrücke 224, so ergibt sich

$$228. \quad \begin{cases} D_0 = \frac{6 + 6\alpha - \alpha^3}{2(1+\alpha)(4+3\alpha)} q \lambda, \\ D_1 = \frac{3 + 10\alpha + 12\alpha^2 + 6\alpha^3 + \alpha^4}{2\alpha(1+\alpha)(4+3\alpha)} q \lambda, \\ D_2 = \frac{-3 + 16\alpha^2 + 6\alpha^3}{2\alpha(1+\alpha)(4+3\alpha)} q \lambda. \end{cases}$$

In folgender Tabelle sind die Werthe der Stützendrücke zusammengestellt:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$D_0$	0,4161	0,3929	0,3665	0,3431	0,3193	· q $\lambda$
$D_1$	1,1704	1,1428	1,1278	1,1127	1,1075	
$D_2$	0,8270	0,9286	1,0114	1,0884	1,1466	

Momente. Im ersten Felde ist  $M = -Q_1' x + \frac{1}{2} q x^2 = -Q_1' l_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1^2 \left(\frac{x}{l_1}\right)^2$  oder

$$229. \quad M = -\frac{2}{1+\alpha} \left[ Q_1' \frac{x}{l_1} - \frac{1}{1+\alpha} q \lambda \left(\frac{x}{l_1}\right)^2 \right] \lambda$$

und im zweiten Felde  $M = M_1 - Q_2' x + \frac{1}{2} q x^2 = M_1 - Q_2' l_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1^2 \left(\frac{x}{l_1}\right)^2$  oder

$$230. \quad M = M_1 - \frac{2\alpha}{1+\alpha} \left[ Q_2' \frac{x}{l_1} - \frac{\alpha}{1+\alpha} q \lambda \left(\frac{x}{l_1}\right)^2 \right] \lambda.$$

M wird zum Maximum für dasselbe x, für welches Q = 0 wird. Bezeichnen wir die Maxima im I. und II. Felde mit  $M_1'$ ,  $M_2'$ , so ist

$$231. \quad M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2q}, \quad M_2' = M_1 - \frac{Q_2'^2}{2q}.$$

In der folgenden Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von  $M_1'$ ,  $M_2'$  nebst den Normalmomenten  $M_1$ ,  $M_2$ , so wie die mit  $x_1''$ ,  $x_2'$ ,  $x_2''$  bezeichneten Werthe von x, für welche M = 0 wird, zusammengestellt:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,225	1,3	
$M_1' = -$	0,08657	0,07718	0,06716	0,05886	0,05687	0,05098	· $q \lambda^2$
$M_1 = +$	0,11283	0,10714	0,10447	0,10135	0,10110	0,10043	
$M_2' = -$	0,02969	0,03635	0,04236	0,04809	0,05055	0,05486	
$M_2 = +$	0,05577	0,07143	0,08549	0,10076	0,10110	0,10955	
$x_1''$	0,7906	0,7857	0,7698	0,7549	0,7500	0,7342	. 1
$x_2'$	0,3063	0,2700	0,2438	0,2197	0,2113	0,2001	. 1
$x_3''$	0,8208	0,8045	0,7942	0,7902	0,7887	0,7833	. 1

Das absolute Maximum von  $M$  ist stets eines der Normalmomente  $M_1$  und  $M_2$ . Bei wachsendem  $\alpha$  nimmt  $M_1$  ab, während  $M_2$  wächst. Das Maximum von  $M$  wird daher am kleinsten, wenn  $M_1 = M_2$  ist, d. i. für  $\alpha^3 + 2 = \alpha^3 + 2\alpha - 1$  oder  $2\alpha^3 = 3$ , also

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 1,2248 = \text{circa } \frac{11}{9}$$

Bei gegebener Gesamtlänge ist dieses Verhältniss der Längen der Felder das zweckmässigste. Das entsprechende grösste Moment ist

$$M_1 = M_2 = (5 - 2\sqrt{6}) q \lambda^2 = 0,1010 q \lambda^2.$$

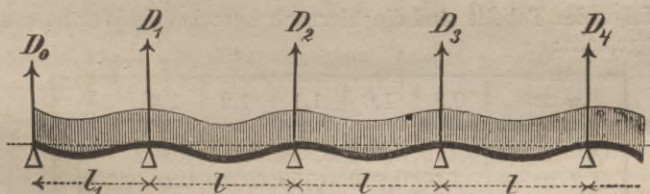
Die Tragkraft ist in diesem Falle bei gleichem Querschnitte 1,237mal grösser, als bei vier getrennten gleich langen Stäben.

$Q$  und  $M$  sind Taf. VI Fig. 10 für  $\alpha = 1$  und Fig. 11 für  $\alpha = 1,2248$  graphisch dargestellt. Die elastische Linie ist in Taf. VII Fig. 13 für  $\alpha = 1$ , Fig. 14 für  $\alpha = 1,2248$  dargestellt.

**§. 154. Stab mit unendlich vielen Feldern.** Bei unendlich vielen Feldern (Fig. 42) ergibt sich das Verhältniss zweier aufeinander folgender  $\mathcal{A}$  nach 192 (§. 146)

$$232. \quad \frac{\mathcal{A}_{m+1}}{\mathcal{A}_m} = -k = -(2 - \sqrt{3}) = -0,267949.$$

Fig. 42.



Demnach wird

$$233. \quad \mathcal{A}_2 = -k \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_2 = +k^2 \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_3 = -k^3 \mathcal{A}_1, \dots \\ \dots \mathcal{A}_m = (-k)^{m-1} \mathcal{A}_1.$$

Setzen wir in der ersten der Gleichungen 206  $\mathcal{A}_2 = -k \mathcal{A}_1$ , so wird  $2(1 + \varepsilon) \mathcal{A}_1 - k \mathcal{A}_1 = \varepsilon(3\varepsilon^2 - 2)$ , mithin nach Einsetzung des Werthes von  $k$

$$234. \quad \mathcal{A}_1 = \frac{\varepsilon(3\varepsilon^2 - 2)}{2\varepsilon + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 2\varepsilon)\varepsilon(3\varepsilon^2 - 2)}{3 - 4\varepsilon^2}$$

Setzen wir, wie in den beiden vorigen Paragraphen,  $l = \alpha l_1$ , so ist  $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$  also auch

$$234 \text{ a. } \mathcal{A}_1 = \frac{\varepsilon - 2\alpha^2}{\alpha^2(2 + \varepsilon\sqrt{3})} = \frac{(\alpha\sqrt{3} - 2)(3 - 2\alpha^2)}{\alpha^2(3\alpha^2 - 4)}$$

In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von  $\mathcal{A}$  für verschiedene  $\alpha$  zusammengestellt:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\varepsilon =$	1,1111	1,0000	0,9091	0,8333	0,7692
$\mathcal{A}_1$	+ 0,4787	+ 0,2680	+ 0,1227	+ 0,0206	- 0,0529
$\mathcal{A}_2$	- 0,1283	- 0,0718	- 0,0329	- 0,0055	+ 0,0142
$\mathcal{A}_3$	+ 0,0344	+ 0,0192	+ 0,0088	+ 0,0015	- 0,0038
$\mathcal{A}_4$	- 0,0092	- 0,0052	- 0,0024	- 0,0004	+ 0,0010
$\mathcal{A}_5$	+ 0,0025	+ 0,0014	+ 0,0006	+ 0,0001	- 0,0003
$\mathcal{A}_6$	- 0,0007	- 0,0004	- 0,0002	- 0,0000	+ 0,0001

Transversalkräfte. Im I Felde ist  $Q_1' = -\frac{M_1}{l} + \frac{1}{2}ql_1$ ,

$Q_1'' = -\frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2}ql_1$ , oder weil  $l_1 = \frac{1}{\alpha}l$  ist,

$$235. \quad \begin{cases} Q_1' = -\alpha \frac{M_1}{l} + \frac{1}{2\alpha} ql = +\frac{1}{2} ql \left[ \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{6} (1 + \mathcal{A}_1) \right], \\ Q_1'' = -\alpha \frac{M_1}{l} + \frac{1}{2\alpha} ql = -\frac{1}{2} ql \left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{6} (1 + \mathcal{A}_1) \right]. \end{cases}$$

In einem beliebigen anderen Felde wird

$$236. \quad \begin{cases} Q_m' = \frac{M_{m-1} - M_m}{l} + \frac{1}{2} ql = +\frac{1}{2} ql \left[ \frac{1}{6} (\mathcal{A}_{m-1} - \mathcal{A}_m) + 1 \right], \\ Q_m'' = \frac{M_{m-1} - M_m}{l} - \frac{1}{2} ql = -\frac{1}{2} ql \left[ -\frac{1}{6} (\mathcal{A}_{m-1} - \mathcal{A}_m) + 1 \right]. \end{cases}$$

In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von  $Q'$ ,  $Q''$  zusammengestellt:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$Q_1' = +$	0,445	0,394	0,352	0,315	0,282	· ql
$Q_1'' = -$	0,667	0,606	0,558	0,519	0,487	
$Q_2' = +$	0,542	0,528	0,513	0,502	0,494	· ql
$Q_2'' = -$	0,458	0,472	0,487	0,498	0,506	
$Q_3' = +$	0,486	0,492	0,497	0,499	0,502	· ql
$Q_3'' = -$	0,514	0,508	0,504	0,501	0,499	
$Q_4' = +$	0,504	0,502	0,501	0,500	0,500	· ql
$Q_4'' = -$	0,496	0,498	0,499	0,500	0,500	

Das absolute Maximum von  $M$  ist, wenn  $\alpha < 1,251$  ist,  $Q_1''$ , wenn  $\alpha > 1,253$  ist,  $Q_2''$ . Für diesen Werth von  $\alpha$  wird das absolute Maximum von  $Q$  am kleinsten und zwar  $= 0,502 q l$ .

Stützendrücke. Nach 154 (§. 136) ist  $D_m = Q''_m + Q'_{m+1}$ , d. i. nach 236

$$D_m = q l \left[ 1 - \frac{1}{2} (\Delta_{m-1} - 2 \Delta_m + \Delta_{m+1}) \right],$$

oder, weil  $\Delta_{m-1} + \Delta_{m+1} = -4 \Delta_m$  ist,

$$237. \quad D_m = q l \left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_m \right).$$

Für die Drücke auf die Stützen 0 und 1 gilt diese Formel nicht. Für diese ergibt sich

$$D_0 = Q_1', \quad D_1 = -Q_1'' + Q_2'.$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$D_0$	0,445	0,394	0,352	0,315	0,282	. q l
$D_1$	1,209	1,134	1,071	1,021	0,982	
$D_2$	0,936	0,964	0,984	0,997	1,007	
$D_3$	1,017	1,010	1,004	1,001	0,998	
$D_4$	0,995	0,997	0,999	1,000	1,001	

Momente. Im ersten Felde ist  $M = -Q_1' x + \frac{1}{2} q x^2 = -Q_1' l_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1^2 \left( \frac{x}{l_1} \right)^2$  oder

$$238. \quad M = -\frac{1}{\alpha} \left[ Q_1' \frac{x}{l_1} - \frac{1}{2} q l_1^2 \left( \frac{x}{l_1} \right)^2 \right] l$$

und in einem der übrigen Felder

$$239. \quad M_m = M_{m-1} - Q'_m x + \frac{1}{2} q x^2.$$

Das Maximum von  $M$  ist im ersten Felde  $M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2q}$  und in einem der übrigen Felder  $M'_m = M_{m-1} - \frac{Q'^2_m}{2q}$ . Die hiernach berechneten Werthe dieser Maxima sind nebst den Normalmomenten in folgender Tabelle zusammengestellt:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$M_1' = -$	0,0989	0,0777	0,0618	0,0495	0,0397	. q l
$M_1 = +$	0,1232	0,1057	0,0936	0,0851	0,0756	
$M_2' = -$	0,0238	0,0339	0,0380	0,0411	0,0466	
$M_2 = +$	0,0726	0,0774	0,0806	0,0829	0,0845	
$M_3' = -$	0,0456	0,0439	0,0427	0,0418	0,0412	
$M_3 = +$	0,0862	0,0849	0,0841	0,0835	0,0830	
$M_4' = -$	0,0406	0,0411	0,0414	0,0416	0,0418	
$M_4 = +$	0,0826	0,0829	0,0831	0,0833	0,0834	
$M'_\infty = -$	0,0417	0,0417	0,0417	0,0417	0,0417	
$M''_\infty = +$	0,0833	0,0433	0,0833	0,0833	0,0833	

**§. 155. Zweckmässigstes Verhältniss der Längen der Felder.** Wir haben gesehen, dass bei vier und unendlich vielen Feldern das absolute Maximum von  $M$  entweder  $M_1$  oder  $M_2$  ist und zwar  $M_1$  für kleinere  $\alpha$ ,  $M_2$  für grössere  $\alpha$ . Mit zunehmendem  $\alpha$  nimmt  $M_1$  ab, während  $M_2$  wächst, vorausgesetzt, dass die Gesamtlänge des Stabes dieselbe bleibt. Dasselbe wird auch stattfinden, wenn  $n$  zwischen 4 und  $\infty$  liegt.

Hiernach muss offenbar das grössere der beiden Momente  $M_1$ ,  $M_2$  am kleinsten werden, wenn  $M_1 = M_2$  ist. Das Verhältniss, für welche diese Bedingung erfüllt wird, wird demnach bei gegebener Gesamtlänge und gegebener Belastung die kleinsten Dimensionen bedingen, also das zweckmässigste sein. Es wird aber  $M_1 = M_2$ , wenn  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$  ist, nach 206 (§. 151) also für  $2(1 + \varepsilon)\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1 = \varepsilon(3\varepsilon^2 - 2)$  oder

$$(3 + 2\varepsilon)\mathcal{A}_1 = \varepsilon(3\varepsilon^2 - 2).$$

Setzt man für  $\mathcal{A}_1$  den Ausdruck 207, so kommt  $\varepsilon$  ganz in Wegfall. Es lässt sich demnach die Bedingung  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$  nur erfüllen, wenn man  $3\varepsilon^2 - 2 = 0$  macht, denn alsdann wird  $\mathcal{A}_1 = 0$ , mithin nach der ersten der Gleichungen 206 auch  $\mathcal{A}_2 = 0$ . Das zweckmässigste Verhältniss ist demnach bei beliebiger Anzahl der Felder

$$240. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8165 = \text{circa } \frac{9}{11}, \\ \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,2248 = \text{circa } \frac{11}{9}. \end{array} \right.$$

Alsdann wird auch jedes andere  $\mathcal{A}_m = 0$ , mithin allgemein

$$241. \quad M_m = \frac{1}{12} q l^2.$$

Die Tangente an die Axe des Stabes über den Stützen bleibt horizontal, so dass sich alle Felder in demselben Zustande befinden, wie ein an den Enden horizontal eingespannter Stab (§. 122—124).

Nur für drei Felder ist dieses Verhältniss nach §. 152 nicht das zweckmässigste.

## B. Belastung durch eine isolirte Last.

**§. 156. Belastung durch eine isolirte Last.** Wie man bei einer bestimmt gegebenen Lage der isolirten Lasten zu verfahren habe, ist in §. 137 gezeigt worden. Hier wollen wir unter der Voraussetzung, dass nur eine isolirte Last vorhanden sei, die gefährlichste Lage dieser Last ermitteln, d. h. diejenige, für welche das absolute Maximum des Momentes am grössten wird. Wir bezeichnen die Last mit  $G$  und ihre Entfernung von der linken und rechten benachbarten Stütze mit  $\xi$ ,  $\xi_1$ . Wir setzen gleichzeitig voraus, dass die Anzahl der Felder unendlich gross sei; sehr nahe werden dann die gefundenen Regeln auch für eine endliche, aber grosse Anzahl von Feldern gelten.

Belastung des ersten Feldes. Da alle Felder, ausser dem ersten, unbelastet sind, so ergibt sich, wie in §. 144  $M_1 = -kM_2$ , wenn  $k = 2 - \sqrt{3}$  ist. Daher wird die erste Normalgleichung

$$[2(1 + \varepsilon) - k]M_1 = \varepsilon \mathcal{N}''$$

d. i.  $(2\varepsilon + \sqrt{3})M_1 = \varepsilon \mathcal{N}''$ , also mit Rücksicht auf 143 (§. 134)

$$242. \quad M_1 = \frac{\varepsilon \mathcal{N}''}{2\varepsilon + \sqrt{3}} = \frac{\varepsilon G \xi (1_1^2 - \xi^2)}{(2\varepsilon + \sqrt{3})l_1^2}$$

Hiernach wird  $M_1$  zum Maximum für

$$243. \quad \xi = \frac{1}{3} \sqrt{3} l_1 = 0,5774 l_1$$

und zwar wird

$$244. \quad \max M_1 = \frac{2 \varepsilon}{3 (2 \varepsilon \sqrt{3} + 3)} G l_1.$$

Als Stützdruck auf die äussere Stütze ergibt sich  $D_0 = G \frac{\xi_1}{l_1} - \frac{M_1}{l_1}$ .

Daher ist das Moment  $M_1'$  am Angriffspunkte der isolirten Last

$$M_1' = -D_0 \xi = + \frac{M_1 \xi}{l_1} - G \frac{\xi \xi_1}{l_1}.$$

Die Einsetzung obigen Werthes für  $M_1$  giebt

$$245. \quad M_1' = -G \frac{\xi \xi_1 [(2 \varepsilon + \sqrt{3}) l_1^2 - \varepsilon l_1 \xi - \varepsilon \xi^2]}{(2 \varepsilon + \sqrt{3}) l_1^2}.$$

Setzt man hierin noch  $\xi_1 = l_1 - \xi$ , so ergibt sich, dass  $M_1'$  zum Maximum wird für

$$246. \quad 3 \varepsilon \xi^2 - 2 (2 \varepsilon + \sqrt{3}) l_1 \xi + (\varepsilon + \sqrt{3}) l_1^2 = 0.$$

Für  $\varepsilon = 0,7 \ 0,8 \ 0,9 \ 1,0$  wird  $\frac{\xi}{l_1} = 0,441 \ 0,437 \ 0,433 \ 0,429$ . Berechnet man nun  $M_1'$  nach 245, und  $M_1$  nach 244, so ergibt sich, dass  $M_1' > M_1$  ist, sodass  $M_1'$  das absolute Maximum von  $M$  ist.

Belastung des zweiten Feldes. Wie in §. 144 ergibt sich, da alle Felder ausser dem II. unbelastet sind,  $M_3 = -k M_2$ . Daher werden die beiden ersten Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 2 (1 + \varepsilon) M_1 + M_2 &= \mathfrak{R}', \\ M_1 + (4 - k) M_2 &= \mathfrak{R}''. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$247. \quad \begin{cases} M_1 = \frac{(2 + \sqrt{3}) \mathfrak{R}' - \mathfrak{R}''}{2 (1 + \varepsilon) (2 + \sqrt{3}) - 1 - \mathfrak{R}' + 2 (1 + \varepsilon) \mathfrak{R}''}, \\ M_2 = \frac{\mathfrak{R}''}{2 (1 + \varepsilon) (2 + \sqrt{3}) - 1}. \end{cases}$$

Es wird nun  $Q_2' = \frac{M_2 - M_1}{l_1} - G \frac{\xi_1}{l_1}$ , daher das Moment am Angriffspunkte der isolirten Last

$$M_2' = M_1 + Q_2' \xi = M_1 \left(1 - \frac{\xi}{l_1}\right) + M_2 \frac{\xi}{l_1} - G \xi \left(1 - \frac{\xi}{l_1}\right).$$

Setzt man obige Ausdrücke für  $M_1$ ,  $M_2$  ein und sodann für  $\mathfrak{R}'$ ,  $\mathfrak{R}''$  die Ausdrücke 143 (§. 134), so ergibt sich nach gehöriger Reduction

$$\begin{aligned} 248. \quad [2 (1 + \varepsilon) (2 + \sqrt{3}) - 1] M_1' \\ = 2 (2 + \sqrt{3}) \varepsilon + [6 (1 - \varepsilon) + (3 - 2 \varepsilon) \sqrt{3}] \frac{\xi}{l_1} \\ - 4 (3 + \sqrt{3}) \left(\frac{\xi}{l_1}\right)^2 + (6 + 2 \varepsilon + \sqrt{3}) \left(\frac{\xi}{l_1}\right)^3. \end{aligned}$$

Hiernach wird  $M_1'$  zum Maximum für

$$\begin{aligned} 249. \quad 4 (6 + 2 \varepsilon + \sqrt{3}) \left(\frac{\xi}{l_1}\right)^3 - 12 (3 + \sqrt{3}) \left(\frac{\xi}{l_1}\right)^2 \\ + 2 [6 (1 - \varepsilon) + (3 - 2 \varepsilon) \sqrt{3}] \frac{\xi}{l_1} + 2 (2 + \sqrt{3}) \varepsilon = 0, \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon = 0,7 \ 0,8 \ 0,9 \ 1,0$  ergibt sich  $\frac{\xi_1}{l} = 0,508 \ 0,503 \ 0,499 \ 0,494$ .

Berechnet man die Werthe von  $M_1$ ,  $M_2$  für die leicht zu bestimmen den Werthe von  $\xi$ , für welche sie zum Maximum werden, und sodann  $M_1'$  ebenfalls für den Werth von  $\xi$ , für welchen es zum Maximum wird, so ergibt sich auch hier, dass das Maximum von  $M_1'$  grösser ist, als die Maxima von  $M_1$  und  $M_2$ .

Dasselbe ergibt sich auch für die übrigen Felder. Wir behandeln jedoch nur noch die

Belastung eines mittleren Feldes. Ist das  $m^{\text{te}}$  Feld belastet, wobei  $m = \infty$ , so werden die Normalgleichungen für das belastete und die anstossenden Felder  $M_{m-2} + 4 M_{m-1} + M_m = \mathfrak{R}'$ ,  $M_{m-1} + 4 M_m + M_{m+1} = \mathfrak{R}''$ . Nun aber ist  $M_{m-1} = -4 k M_{m-2}$ ,  $M_m = -k M_{m+1}$ , daher

$$\left. \begin{aligned} (4 - k) M_{m-1} + M_m &= \mathfrak{R}', \\ M_{m-1} + (4 - k) M_m &= \mathfrak{R}'' \end{aligned} \right\}$$

Wie im II Felde wird mit Rücksicht auf 143 (§. 134.)

$$M_{m-1} = \frac{(2 + \sqrt{3}) \mathfrak{R}' - \mathfrak{R}''}{2(3 + 2\sqrt{3})} = \frac{1}{6} [\sqrt{3} \mathfrak{R}' - (2\sqrt{3} - 3) \mathfrak{R}'']$$

oder

$$250. \quad M_{m-1} = \frac{G \xi \xi_1}{2 l^2} [1 - (\sqrt{3} - 1) \xi].$$

Zum Maximum wird hiernach  $M_{m-1}$  für

$$251. \quad \xi = \frac{3 + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{6} l = 0,3804 l$$

und zwar ist

$$252. \quad \max M_{m-1} = \frac{3 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}}{36} G l = 0,08503 G l.$$

Ferner wird das Moment am Angriffspunkte der Last wie im II Felde

$$M'_m = M_{m-1} \frac{\xi_1}{l} + M_m \frac{\xi}{l} - G \frac{\xi \xi_1}{l}.$$

Der Ausdruck für  $M_m$  ergibt sich, wenn man im Ausdrucke für  $M_{m-1}$   $\xi$  mit  $\xi_1$  vertauscht. Setzt man alsdann die Ausdrücke für  $M_{m-1}$  und  $M_m$  ein, so ergibt sich

$$253. \quad M'_m = -\frac{G \xi \xi_1}{2 l^3} [l^2 + 2(\sqrt{3} - 1)l(1 - \xi)].$$

Hiernach wird  $M'_m$  zum Maximum für  $\xi = \frac{1}{2} l$  und zwar ist

$$254. \quad \max M'_m = -\frac{1 + \sqrt{3}}{16} G l = -0,1708 G l.$$

In folgender Tabelle sind die Maxima der Momente an dem Angriffspunkte der Last in den einzelnen Feldern zusammengestellt.

$\varepsilon =$	0,7	0,8	0,9	1,0	
$M_1' =$	0,2115	0,2089	0,2067	0,2647	$\cdot G l_1$
$=$	0,1481	0,1671	0,1860	0,2047	$\cdot G l$
$M_2' =$	0,1676	0,1696	0,1713	0,1729	$\cdot G l$
$M_3' =$	0,1706	0,1707	0,1708	0,1709	$\cdot G l$
$M_\infty' =$	0,1708	0,1708	0,1708	0,1708	$\cdot G l$

Die grössten Momente an den Stützen ergeben sich ungefähr nur halb so gross.

Hieraus folgt: Das Maximum erreicht das Moment stets am Angriffspunkte der isolirten Last und zwar wenn  $\varepsilon > 0,82$  ist, im ersten Felde, wenn  $\varepsilon < 0,82$  ist, in einem mittleren Felde ( $m = \infty$ ).

Für  $\varepsilon = 0,82$  wird das absolute Maximum von  $M$  am kleinsten, so dass dieses Verhältniss das zweckmässigste ist. Für dasselbe wird  
 $\max M = - 0,1708 \text{ Gl.}$

Anwendung bei Eisenbahnschienen u. s. w. Eine weitere Ausdehnung dieser Theorie würde zu viel Raum beanspruchen.

## XVI. Kapitel.

### Prismatischer continuirlicher Stab mit ungleich hohen Stützen.

§. 157. Allgemeines. Wir behalten ganz die im XIII. Kapitel gewählten Bezeichnungen bei, bezeichnen aber ausserdem mit  $s_0, s_1, s_2, \dots$  die Entfernungen der einzelnen Stützen von einer über denselben liegenden Horizontalen. Nach 121 (§. 128) wird alsdann

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_m = + \frac{l_m}{6 E W} (M_{m-1} + 2 M_m - \mathfrak{M}'_m - 2 \mathfrak{M}''_m) + \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m}, \\ \tau_m = - \frac{l_m}{6 E W} (2 M_{m-1} + M_m - 2 \mathfrak{M}'_{m+1} - \mathfrak{M}''_{m+1}) - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}}. \end{array} \right.$$

Die Gleichsetzung beider Werthe von  $\tau_m$  giebt

$$\begin{aligned} 255. \quad & M_{m-1} l_m + 2 M_m (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} \\ & = \mathfrak{M}''_m l_m + \mathfrak{M}'_{m+1} l_{m+1} - 6 E W \left( \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}} \right). \end{aligned}$$

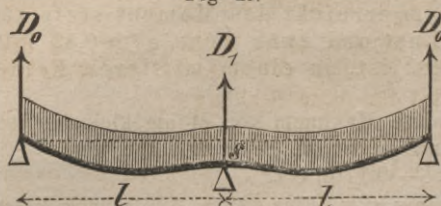
Hieraus geht hervor, dass sich die Normalmomente und mit ihnen alle übrigen Grössen aus zwei Theilen zusammensetzen werden, von denen der erste Theil ebenso gross ist, als wenn eine gleiche Höhenlage der Stützen vorhanden wäre, der andere aber der vorhandenen Höhenlage der Stützen bei unbelastetem Stabe entspricht. Da wir den ersten Theil bereits in den vorigen Kapiteln ermittelt haben, so haben wir jetzt nur noch nöthig, den zweiten Theil zu ermitteln. Für den unbelasteten Zustand aber wird

$$\begin{aligned} 256. \quad & M_{m-1} l_m + 2 M_m (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} \\ & = - 6 E W \left( \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}} \right) \end{aligned}$$

Die Auflösung der einzelnen nach diesem Schema gebildeten Normalgleichungen ist dieselbe, wie im XIII. Kapitel.

§. 158. **Stab mit zwei Feldern.** Die beiden äusseren Stützen

Fig. 43.



mögen gleich hoch liegen, die mittlere Stütze aber um  $s$  unter der durch die äusseren Stützen gehenden Horizontalen (Fig. 43). Die einzige Normalgleichung ist alsdann  $4 M_1 l^2 = -12 E W s$ , mithin

$$257. \quad M_1 = -3 \frac{E W s}{l^2}.$$

Es ist nun  $M_1 = -D_0 l$ , also  $D_0 = -\frac{M_1}{l}$  und  $2 D_0 + D_1 = 0$ , also  $D_1 = -2 D_0$ , d. i.

$$258. \quad D_0 = +3 \frac{E W s}{l^3}, \quad D_1 = -6 \frac{E W s}{l^3}.$$

Endlich ist  $Q = D_0$ ,  $M = -D_0 x$ .

Ist der Stab gleichmässig belastet und haben die Stützen gleiche Höhe, so ist nach §. 149  $M_1 = \frac{1}{8} q l^2$ , nach §. 148  $D_0 = \frac{3}{8} q l$ ,  $D_1 = \frac{10}{8} q l$ . Mithin ist bei gleichmässiger Belastung und gesenkter Mittelstütze

$$259. \quad M_1 = \frac{1}{8} q l^2 - 3 \frac{E W s}{l^2},$$

$$260. \quad D_0 = \frac{3}{8} q l + 3 \frac{E W s}{l^3}, \quad D_1 = \frac{10}{8} q l - 6 \frac{E W s}{l^3}.$$

Ferner wird nun  $Q = D_0 - q x$ ,  $M = -D_0 x + \frac{1}{2} q x^2$ , d. i.

$$261. \quad Q = 3 \frac{E W s}{l^2} + \frac{1}{8} q (3 l - 8 x),$$

$$262. \quad M = -3 \frac{E W s}{l^2} x - \frac{1}{8} q x (3 l - 4 x).$$

$M$  wird zum Maximum für  $x = l$  oder für  $x = \frac{D_0}{q}$ . Bezeichnen wir das letztere Maximum mit  $M'$ , so ist  $M' = -\frac{D_0^2}{2q}$ , d. i.

$$263. \quad M' = -\frac{1}{2q} \left( \frac{3}{8} q l + 3 \frac{E W s}{l^3} \right)^2.$$

Wenn  $s$  wächst, so nimmt  $M_1$  ab, dagegen der absolute Werth von  $M'$  zu. Das absolut grösste  $M$  wird daher am kleinsten werden, wenn  $M_1 = M'$  ist. Diese Bedingung giebt für die vortheilhafteste Senkung der Mittelstütze die Gleichung

$$\frac{1}{8} q l^2 - 3 \frac{E W s}{l} = \frac{1}{2q} \left( \frac{3}{8} q l + 3 \frac{E W s}{l^3} \right)^2,$$

$$s^2 + \frac{11}{12} \frac{q l^4}{E W} s - \frac{7}{576} \frac{q^2 l^8}{E^2 W^2}$$

und hieraus

$$264. \quad s = \frac{8\sqrt{2}-11}{24} \frac{q l^4}{E W} = 0,01307 \frac{q l^4}{E W}.$$

Die Einsetzung dieses Werthes von  $s$  giebt

$$265. M_1 = M' = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} q l^2 = 0,08579 q l^2,$$

während ohne Senkung das grösste Moment  $M_1 = 0,125 q l^2$  ist, so dass bei gesenkter Mittelstütze und bei gleichen Dimensionen die Tragkraft 1,457mal so gross ist. Ferner wird für diese Senkung

$$266. \begin{cases} D_0 = (\sqrt{2} - 1) q l = 0,4142 q l, \\ D_1 = \frac{33 - 16\sqrt{2}}{8} q l = 1,2966 q l; \end{cases}$$

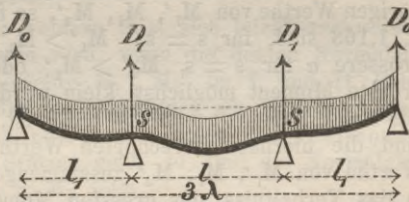
$$267. Q' = D_0 = 0,4142 q l, \quad Q'' = D_0 - q l = 0,5858 q l,$$

während ohne Senkung  $D_0 = Q' = 0,375 q l$ ,  $D_1 = 1,375 q l$ ,  $Q'' = 0,625 q l$  ist, so dass durch die Senkung  $D_1$ ,  $Q''$  verkleinert wird.

Taf. VI. Fig. 5 giebt die graphische Darstellung von  $Q$ ,  $M$ , Taf. VII. Fig. 8 die Darstellung der elastischen Linie.

**§. 159. Stab mit drei Feldern.** Die beiden äusseren Stützen mögen in gleicher Höhe und jede der beiden mittleren Stützen um  $s$  unter der durch die äusseren Stützen gehenden Horizontalen liegen (Fig. 44). Die Länge der äusseren Felder sei  $= l_1$ , die des inneren  $= l$ , die ganze Länge  $3\lambda$  und  $l = \alpha l_1$ . Da hier  $M_1 = M_2$  ist, so ist nur eine Normalgleichung nöthig. Diese ist

Fig. 44.



$$2 M_1 (l_1 + l) + M_1 l = -6 E W \frac{s}{l_1}.$$

$$268. M_1 = -\frac{6 E W s}{l_1 (2 l_1 + 3 l)} = -\frac{2 (2 + \alpha)^2 E W s}{3 (2 + 3 \alpha) \lambda^2}.$$

Bei gleichmässiger Belastung und gleicher Höhenlage der Stützen ist  $M_1$  durch die Formel 121 (§. 152) bestimmt. Daher ist bei gleichmässiger Belastung und gesenkten Mittelstützen

$$269. M_1 = \frac{q (l_1^3 + l^3)}{4 (2 l_1 + 3 l)} - \frac{6 E W s}{l_1 (2 l_1 + 3 l)} \\ = \frac{9 (1 + \alpha^3)}{4 (2 + 3 \alpha) (2 + \alpha)^2} q \lambda^2 - \frac{2 (2 + \alpha)^2 E W s}{3 (2 + 3 \alpha) \lambda^2}.$$

Es wird nun ferner

$$Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1, \quad Q_1'' = -\frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} q l_1; \\ Q_2' = +\frac{1}{2} q l, \quad Q_2'' = -Q_2'.$$

Im ersten Felde wird  $M = -Q_1' x - \frac{1}{2} q x^2$ ,  $\max M = M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2 q}$  und im zweiten Felde  $M = M_1 - Q_2' x + \frac{1}{2} q x^2 = M_1 - \frac{1}{2} q x (1 - x)$ ,  $\max M = M_2' = M_1 - \frac{Q_2'^2}{2 q} = M_1 - \frac{1}{8} q l^2$ . Das absolute Maximum von  $M$  ist entweder  $M_1$ ,  $M_1'$  oder  $M_2'$ . Durch Senkung der Mittelstütze wird

$M_1$  verkleinert, somit aber  $Q_1'$ , also auch  $M_1'$  und  $M_2'$  vergrössert. Das absolut grösste Moment wird dennoch am kleinsten werden, wenn entweder  $M_1 = M_1'$  oder  $M_1 = M_2'$  ist. Wir wollen die entsprechenden Senkungen mit  $s_1, s_2$  bezeichnen. Alsdann ist

$$s = s_1: M_1 = -M_1' - \frac{Q_1'^2}{2q}, \text{ d. i. } M_1 = \frac{1}{2q} \left( -\frac{M_1}{1} + \frac{1}{2} q l_1 \right)^2,$$

$$s = s_2: M_1 = -M_2' = -M_1 + \frac{1}{8} q l^2 \text{ oder } 2 M_1 = \frac{1}{8} q l^2.$$

Setzen wir den Ausdruck für  $M_1$  ein und ordnen nach Potenzen von  $s$ , so ergibt sich

$$270. \left\{ \begin{aligned} s_1^2 + \frac{27(11 + 18\alpha - \alpha^3) q \lambda^4}{4(2 + \alpha)^4} \frac{EW}{EW} s_1 \\ - \frac{729(7 - 12\alpha - 36\alpha^2 + 22\alpha^3 + 36\alpha^4 - \alpha^6) q^2 \lambda^8}{64(2 + \alpha)^8} \frac{q^2 \lambda^8}{E^2 W^2} = 0 \\ s_2 = \frac{27(4 - 2\alpha^2 + \alpha^3) q \lambda^4}{32(2 + \alpha)^4} \frac{q \lambda^4}{EW} \end{aligned} \right.$$

Berechnet man hiernach  $s_1, s_2$  für verschiedene  $\alpha$ , sowie auch die zugehörigen Werthe von  $M_1', M_1, M_2'$ , so findet man, dass für solche  $\alpha$ , welche  $< 1,163$  sind, für  $s = s_2$   $M_1' > M_1$  oder  $M_1' > M_2'$  ist, während für grössere  $\alpha$  für  $s = s_1$   $M_2' > M_1'$  oder  $M_2' > M_1$  ist. Damit nun das grösste Moment möglichst klein werde, muss demnach, wenn  $\alpha < 1,163$  ist,  $s = s_1$ , und wenn  $\alpha > 1,163$  ist,  $s = s_2$  sein. In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von  $s$ , sowie die entsprechenden Werthe von  $M_1', M_1, M_2'$  zusammengestellt. Zugleich ist durch die Zahlen  $m$  das Verhältniss des grössten Momentes bei gleich hohen Stützen zum grössten Momente bei gesenkten Mittelstützen angegeben.

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,163	1,2	1,3	
$s =$	0,0055	0,0118	0,0214	0,0243	0,0229	0,0200	$\frac{q \lambda^4}{EW}$
$M_1' = -$	0,09186	0,08580	0,07710	0,07607	0,07387	0,06427	$\cdot q \lambda^2$
$M_1 = +$	0,09186	0,08580	0,07710	0,07607	0,07910	0,08730	
$M_2' = -$	0,01649	0,03924	0,05817	0,07607	0,07910	0,08730	
$m =$	1,071	1,166	1,336	1,387	1,353	1,283	

Bis zu  $\alpha = 1,163$  ist  $M_2' < M_1'$  und  $< M_1$ ;  $M_1', M_1$  nehmen mit wachsendem  $\alpha$  ab. Von  $\alpha = 1,163$  an aber ist  $M_1' < M_1$  und  $< M_2'$ ;  $M_1, M_2'$  nehmen mit wachsendem  $\alpha$  zu. Demnach muss für  $\alpha = 1,163$  das grösste Moment am kleinsten sein, so dass

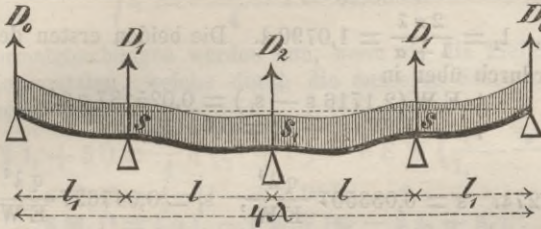
$$271. \alpha = 1,163 = \text{circa } \frac{7}{6}$$

das zweckmässigste Verhältniss der Längen der Felder ist. Für dasselbe werden alle drei Maximalmomente gleich gross. Bei gleichen Dimensionen ist dann die Tragkraft  $\frac{9828}{7607} = 1,292$  mal grösser, als bei gleich hohen Stützen und dem zweckmässigsten Verhältnisse der Felderlängen, und  $\frac{12500}{7607} = 1,643$  mal grösser, als bei drei gleich langen einzelnen Stäben.

Für das Verhältniss  $\alpha = 1,163$  ist Taf. VI Fig. 8 Q und M und Taf. VII Fig. 11 die elastische Linie dargestellt.

**§. 160. Stab mit vier Feldern.** In gleicher Weise ist der Stab mit vier Feldern zu behandeln, nur wird hier die allgemeine Untersuchung insofern etwas schwieriger, als, Symmetrie vorausgesetzt, drei verschiedene Höhenlagen der Stützen in Frage kommen (Fig. 45). Die allgemeine Untersuchung wollen wir nicht führen, sondern die zweckmässigste Senkung und das zweckmässigste Verhältniss der Felder direkt zu bestimmen suchen.

Fig. 45.



Wie bei dem Stabe mit drei Feldern lässt sich leicht nachweisen, dass das grösste Moment am kleinsten wird, wenn die beiden Normalmomente  $M_1$ ,  $M_2$  und die Maximalmomente  $M_1'$ ,  $M_2'$  im I. und II. Felde gleich sind. Nehmen wir an, dass die den Endstützen am nächsten liegenden Stützen um  $s$ , die Mittelstütze aber um  $s_1$  unter der Horizontalen liegen, welche durch die äusseren Stützen geht, so sind die Normalgleichungen, wenn man darin sofort  $M_1 = M_2$  setzt,

$$2 M_1 (l_1 + 1) + M_1 l = \frac{1}{4} q (l_1^3 + l^3) - 6 E W \left( \frac{s}{l_1} - \frac{s_1 - s}{l} \right),$$

$$2 M_1 l + 4 M_1 l = \frac{1}{2} q l^3 - 6 E W \left( \frac{s_1 - s}{l} - \frac{s - s_1}{l} \right)$$

oder

$$\text{a. } \begin{cases} M_1 (2 l_1 + 3 l) l_1 = \frac{1}{4} q (l_1^3 + l^3) l_1 - 6 E W [s (l_1 + 1) - s_1 l_1], \\ 6 M_1 l^2 = \frac{1}{2} q l^4 - 12 E W (s_1 - s). \end{cases}$$

Ferner ist  $M_1 = -Q_1' l_1 + \frac{1}{2} q l_1^2$ , also  $Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1$ ,  $M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2q}$ ;

$M_2 = M_2 - Q_2' l + \frac{1}{2} q l^2$ , also  $Q_2' = \frac{1}{2} q l$ ,  $M_2' = M_1 - \frac{Q_2'^2}{2q}$ . Es soll nun  $M_1 = M_1'$  und  $M_1 = -M_2'$  sein, also

$$M_1 = \frac{Q_1'^2}{2q}, \quad M_1 = -M_1 + \frac{Q_2'^2}{2q}$$

d. i., wenn man die Ausdrücke für  $Q_1'$  und  $Q_2'$  einsetzt,

$$\text{b. } \begin{cases} 4 M_1^2 - 12 M_1 q l_1^2 + q^2 l_1^4 = 0, \\ 16 M_1 = q l^2. \end{cases}$$

Durch die letzte Gleichung ist  $M_1$  direkt bestimmt, nämlich

$$272. \quad M_1 = \frac{1}{16} q l^2.$$

Setzt man diesen Werth für  $M_1$  in die übrigen der Gleichungen a, b, so ergibt sich

$$c. \quad \left\{ \begin{array}{l} q l_1 (4 l_1^3 - 2 l^2 l_1 + l^3) = 96 E W [s (l_1 + l) - s_1 l_1], \\ q l^4 = 96 E W (s_l - s), \\ l^4 - 48 l^2 l_1^2 + 64 l_1^4 = 0. \end{array} \right.$$

Setzt man in der letzten Gleichung  $l = \alpha l_1$ , so wird

$$\alpha^4 - 48 \alpha^2 + 64 = 0.$$

$$273. \quad \alpha = \sqrt{8(3 - \sqrt{8})} = 4 - 2\sqrt{2} \\ = 1,1715 = \text{circa } \frac{7}{6}.$$

Setzt man die Gesamtlänge  $= 4 \lambda$ , so wird wie in §. 153  $l_1 = \frac{2 \lambda}{1 + \alpha}$

$= 0,9210 \lambda$ ,  $l_2 = \frac{2 \alpha \lambda}{1 + \alpha} = 1,0790 \lambda$ . Die beiden ersten der Gleichungen c gehen hierdurch über in

$$\left\{ \begin{array}{l} E W (2,1716 s - s_l) = 0,025137 q \lambda^4, \\ E W (s_l - s) = 0,014120 q \lambda^4 \end{array} \right.$$

und hieraus

$$274. \quad s = 0,033507 \frac{q \lambda^4}{E W}, \quad s_l = 0,047627 \frac{q \lambda^4}{E W}.$$

Es wird nun

$$275. \quad -M_1' = +M_1 = -M_2' = +M_2 = \frac{1}{16} q l^2 = 0,07276 q \lambda^2.$$

Hiernach wird die Tragkraft bei gleichem Querschnitte  $\frac{1,010}{7,280} = 1,387$ mal so gross, als bei gleich hohen Stützen und beim günstigsten Verhältniss der Felder und  $\frac{1,250}{7,280} = 1,717$ mal so gross, als bei 4 getrennten gleich langen Stäben.

Es wird nun ferner  $Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1 = +0,3633 q \lambda$ ;  $Q_1'' = Q_1' - q l_1 = -0,5577 q \lambda$ ;  $Q_2' = \frac{1}{2} q l = +0,5395 q \lambda$ ;  $Q_2'' = Q_2' - q l = -0,5395 q \lambda$ . Ferner wird  $D_0 = Q_1' = 0,3633 q \lambda$ ;  $D_1 = -Q_1'' + Q_2' = 1,0972 q \lambda$ ;  $D_2 = -2 Q_2'' = 1,0790 q \lambda$ .

**§. 161. Stab mit beliebig vielen Feldern.** Eine ganz analoge Untersuchung lässt sich leicht für eine beliebige Anzahl von Feldern anstellen. Wir bestimmen also wiederum die Senkung der Stützen und das zweckmässigste Verhältniss der Längen der Felder durch die Bedingung, dass die sämtlichen Normalmomente und die Maximalmomente in den einzelnen Feldern einander gleich seien.

Zunächst ist  $M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2q}$  und  $Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1$ , also, da  $-M_1' = M_1$  sein soll,  $2 M_1 q = \left(-\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1\right)^2$  oder

$$a. \quad 4 M_1^2 - 12 M_1 q l_1^2 + q^2 l_1^4.$$

Ferner ist für ein beliebiges mittleres Feld  $M_m' = M_{m-1} - \frac{Q_m'^2}{2q}$  und  $Q_m' = \frac{M_{m-1} - M_m}{l_m} + \frac{1}{2} q l_m$ , oder, da  $M_{m-1} = M_m$  soll,  $Q_m' = \frac{1}{2} q l_m$ , mithin  $M_m' = -M_{m-1} + \frac{1}{8} q l_m^2$  oder

$$b. \quad M_m' = -M_1 + \frac{1}{8} q l_m^2.$$

Sollen nun sämtliche  $M_m'$  einander gleich sein, so ist dies nur

möglich, wenn sämtliche  $l_m$  gleich sind, d. h. wenn alle Mittelfelder gleich lang sind. Wir bezeichnen die Länge jedes Mittelfeldes mit  $l$ . Alsdann wird nach b:  $M_1 = -M_1 + \frac{1}{8} q l^2$ , also

$$275. \quad M_1 = \frac{1}{16} q l^2.$$

Die Gleichung a geht dadurch über in

$$l^4 - 48 l^2 l_1^2 + 64 l_1^4 = 0,$$

also

$$276. \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 2(2 - \sqrt{2}) l_1 = 1,1716 l_1, \\ l_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} l = 0,8535 l. \end{array} \right.$$

Die Normalgleichungen werden nun, wenn wir die Tiefen der Stützen unter der Horizontalen, welche durch die äusseren Stützen geht, mit  $s_1, s_2, s_3, \dots$  bezeichnen,

$$\begin{aligned} M_1(2l_1 + 3l) &= \frac{1}{4} q (l_1^3 + l^3) - 6EW \left( \frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2 - s_1}{l} \right), \\ 6M_1 l^2 &= \frac{1}{2} q l^4 - 6EW (s_1 - 2s_2 + s_3) \\ 6M_1 l^2 &= \frac{1}{2} q l^4 - 6EW (s_2 - 2s_3 + s_4). \end{aligned}$$

Setzen wir hierin  $M_1 = \frac{1}{16} q l^2$ ,  $l_1 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})l$ , so wird

$$a. \quad \left\{ \begin{array}{l} 48EW [-(5 - 2\sqrt{2})s_1 + s_2] = -\frac{1}{16}(10 + 3\sqrt{2})ql^4, \\ 48EW (s_1 - 2s_2 + s_3) = -ql^4, \\ 48EW (s_2 - 2s_3 + s_4) = -ql^4, \\ \dots \dots \dots \\ 48EW (s_{n-1} - 2s_{n-2} + s_{n-3}) = -ql^4, \\ 48EW [-(5 - 2\sqrt{2})s_{n-1} + s_{n-2}] = -\frac{1}{16}(10 + 3\sqrt{2})ql^4. \end{array} \right.$$

Die Addition aller Gleichungen giebt, wenn man beachtet, dass  $s_1 = s_{n-1}$  ist, den Werth von  $s_1$ . Die übrigen  $s$  ergeben sich sodann successive aus den einzelnen Gleichungen, nämlich

$$277. \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 = (0,008891n - 0,010845) \frac{ql^4}{EW}, \\ s_2 = (0,019307n - 0,042096) \frac{ql^4}{EW}, \\ s_3 = (0,029723n - 0,094180) \frac{ql^4}{EW}, \\ s_4 = (0,040139n - 0,167097) \frac{ql^4}{EW}. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir das arithmetische Mittel der Längen sämtlicher Felder mit  $\lambda$ , so ist  $n\lambda = 2l_1 + (n-2)l = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} + n - 2\right)l$   
 $= \left(n - \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)l = (n - 0,2929)l$ , also

$$l = \frac{n\lambda}{n - 0,2929}.$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

n	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	s <sub>4</sub>	s <sub>5</sub>	M <sub>1</sub>
2	0,01307					0,08579
3	0,02430	0,02430				0,07607
4	0,03351	0,04763	0,03351			0,07276
5	0,04281	0,06931	0,06931	0,04281		0,07052
6	0,05192	0,09010	0,10281	0,09010	0,05192	0,06908
$\frac{2 \lambda^4}{E W}$						· q λ <sup>2</sup>

Verbindet man die Stützen  $m-1$  und  $m+1$  welche neben der Stütze  $m$  liegen, durch eine Gerade, so ist die Entfernung der Stütze  $m$  von dieser Geraden offenbar  $s_m - \frac{1}{2}(s_{m-1} + s_{m+1}) = -\frac{1}{2}(s_{m-1} - 2s_m + s_{m+1})$ . Nach den Gleichungen a ist diese Entfernung constant, nämlich  $= \frac{1}{96} \frac{q \lambda^4}{E W}$ . Hieraus lässt sich leicht der Schluss ziehen: Sämmtliche Stützen, mit Ausnahme der Endstützen, sollen in einem Kreise mit dem Radius  $\frac{48 E W}{l^2}$  liegen.

## XVII. Kapitel.

### Continuirlicher Stab mit veränderlichem Querschnitte.

§. 162. Allgemeines. Die Untersuchung des continuirlichen Stabes mit variablem Querschnitte kann in derselben Weise erfolgen, wie die des prismatischen continuirlichen Stabes. Nur sind für die Neigung der Axe des Stabes über einer Stütze nicht die Formeln 121 (S. 107), sondern die allgemeineren Formeln 131 (S. 110) in Anwendung zu bringen. Behalten wir die früheren Bezeichnungen bei, so wird hiernach

$$\tau_m = \kappa_m \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \frac{l_m}{6 E \mathfrak{B}} (\beta_m M_{m-1} + 2 \alpha_m M_m - \beta_m \mathfrak{M}'_m - 2 \alpha_m \mathfrak{M}''_m),$$

$$\tau_m = \kappa_m \frac{s_{m+1} - s_m}{l_m} + \frac{l_{m+1}}{6 E \mathfrak{B}} (2 \gamma_{m+1} M_m + \beta_{m+1} M_{m+1} - 2 \gamma_{m+1} \mathfrak{M}'_{m+1} - \beta_{m+1} \mathfrak{M}''_{m+1}).$$

Die Gleichsetzung beider Ausdrücke für  $\tau_m$  giebt

$$\begin{aligned} 278. \quad & \beta_m l_m M_{m-1} + 2 (\alpha_m l_m + \gamma_{m+1} l_{m+1}) M_m + \beta_{m+1} l_{m+1} M_{m+1} \\ & = \beta_m l_m \mathfrak{M}'_m + 2 \alpha_m l_m \mathfrak{M}''_m + 2 \gamma_{m+1} l_{m+1} \mathfrak{M}'_{m+1} + \beta_{m+1} l_{m+1} \mathfrak{M}''_{m+1} \\ & + \kappa_m \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \kappa_{m-1} \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}}. \end{aligned}$$

Hierin bedeuten, wie früher,  $\mathfrak{M}'$ ,  $\mathfrak{M}''$  die Momente am linken und

rechten Ende des betreffenden Feldes für den Fall, dass die Enden dieses Feldes horizontal eingespannt wären. Nach §. 129 wird

$$279. \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= + \frac{1}{1^2} \frac{9 B J - 8 C H}{4 A C - 3 B^2} \eta^2, \\ \mathfrak{M}'' &= - \frac{1}{12} \frac{9(2 A - B) J - 4(3 B - 2 C) H}{4 A C - 3 B^2} \eta^2 + X_1, \end{aligned} \right.$$

wenn  $\eta$  die mittlere Last pro Längeneinheit,  $X_1$  das Moment der Last für das rechte Ende bedeutet. Die Coefficienten  $A, B, C, H, J, \alpha, \beta, \gamma, \varkappa$  haben für irgend ein Feld, um es hier nochmals zu wiederholen, die folgende Bedeutung, worin  $X$  das Moment der zwischen  $x = 0$  und dem fraglichen Querschnitte liegenden Last für diesen Querschnitt,  $\mathfrak{B}$  das mittlere Trägheitsmoment bezeichnet,

$$280. \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\mathfrak{B}}{1} \int_0^1 \frac{dx}{W}, & B &= \frac{2 \mathfrak{B}}{1^2} \int_0^1 \frac{x dx}{W}, & C &= \frac{3 \mathfrak{B}}{1^3} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{W}; \\ H &= \frac{6 \mathfrak{B}}{\eta^2} \int_0^1 \frac{X dx}{W}, & J &= \frac{8 \mathfrak{B}}{\eta^3} \int_0^1 \frac{X x dx}{W}; \\ \alpha &= C, & \beta &= 3 B - 2 C, & \gamma &= 3 A - 3 B + C, \\ & & \varkappa &= 4 A C - 3 B^2. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet man die Werthe von  $A, B, C, \dots$ , wenn man nicht das linke, sondern das rechte Ende als Anfang der  $x$  wählt, mit  $A', B', C', \dots$ , so ist

$$A' = \frac{\mathfrak{B}}{1} \int_0^1 \frac{d(1-x)}{W} = A, \quad B' = \frac{2 \mathfrak{B}}{1^2} \int_0^1 \frac{(1-x) d(1-x)}{W} = 2 A - B,$$

$$C' = \frac{3 \mathfrak{B}}{1^3} \int_0^1 \frac{(1-x)^2 d(1-x)}{W} = 3 A - 3 B + C.$$

$$\alpha' = C' = 3 A - B + C, \quad \beta' = 3 B' - 2 C' = 3 B - 2 C, \\ \gamma' = 3 A' - 3 B' + C' = C, \quad \text{d. i.}$$

$$281. \quad \alpha' = \gamma, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \alpha.$$

Bei stetig veränderlichem Querschnitte sind  $A, B, C, H, J, X$  nach der Simpson'schen Regel, bei sprungweiser Aenderung aber nach 127 (§. 129) zu berechnen.

Die Gleichung 278 ist für alle Combinationen von je zwei benachbarten Feldern anzuwenden und die so entstandenen Normalgleichungen sind in derselben Weise aufzulösen, wie bei constantem Querschnitte. Auch die Regeln zur Bestimmung der übrigen Grössen bleiben dieselben.

**§. 163. Stab mit zwei Feldern.** Die beiden Felder mögen gleiche Länge, die drei Stützen gleiche Höhe haben und der Stab und die Belastung mögen in Beziehung auf die Mittelstütze symmetrisch sein. Die Gleichung 278 geht dann, wenn wir  $M_{m-1} = M_{m+1} = 0$ ,  $M_m = M_1$  setzen, über in

$$2(\alpha_1 + \gamma_2) M_1 = \beta_1 \mathfrak{M}'_1 + 2 \alpha_1 \mathfrak{M}''_1 + 2 \gamma_2 \mathfrak{M}'_2 + \beta_2 \mathfrak{M}''_2.$$

Nun aber ist der Symmetrie wegen  $\beta_2 = \beta_1'$ ,  $\gamma_2 = \gamma_1'$ , d. i. nach

281  $\beta_2 = \beta_1, \gamma_2 = \alpha_1$ . Ausserdem ist  $\mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_1'', \mathfrak{M}_2'' = \mathfrak{M}_1'$ , mithin, wenn wir jetzt den Index 1 weglassen,

$$2 \alpha M_1 = \beta \mathfrak{M}' + 2 \alpha \mathfrak{M}''.$$

$$282. M_1 = \frac{\beta}{2 \alpha} \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' = \left( \frac{3 B}{2 C} - 1 \right) \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''.$$

Beispiel. Das Trägheitsmoment des Querschnittes verändere sich in der Taf. V. Fig. 9 angegebenen Weise. Alsdann ist zunächst das mittlere Trägheitsmoment

$$\mathfrak{B} = 0,15 \cdot 2,1 + 0,50 \cdot 3,3 + 0,19 \cdot 2,1 + 0,09 \cdot 3,6 + 0,07 \cdot 5,1 = 3,045.$$

Hiernach ergeben sich für  $\frac{w}{\mathfrak{B}}$  die auf der rechten Seite der Figur angegebenen Werthe. Es wird nun nach 127 (§. 129)

$$A = \frac{0,15}{0,7} + \frac{0,50}{1,1} + \frac{0,19}{0,7} + \frac{0,09}{1,2} + \frac{0,07}{1,7} = 1,0565,$$

$$B = \frac{0,15^2}{0,7} + \frac{0,65^2 - 0,15^2}{1,1} + \frac{0,84^2 - 0,65^2}{0,7} + \frac{0,93^2 - 0,84^2}{1,2} + \frac{1^2 - 0,93^2}{1,7} = 1,0122,$$

$$C = \frac{0,15^3}{0,7} + \frac{0,65^3 - 0,15^3}{1,1} + \frac{0,84^3 - 0,65^3}{0,7} + \frac{0,93^3 - 0,84^3}{1,2} + \frac{1^3 - 0,93^3}{1,7} = 0,9973,$$

und bei gleichmässiger Belastung  $H = C$  und

$$J = \frac{0,15^4}{0,7} + \frac{0,65^4 - 0,15^4}{1,1} + \frac{0,84^4 - 0,65^4}{0,7} + \frac{0,93^4 - 0,84^4}{1,2} + \frac{1^4 - 0,93^4}{1,7} = 0,9755.$$

Daher wird nach 279:

$$\mathfrak{M}' = - \frac{1 \cdot 9 \cdot 1,0122 \cdot 0,9755 - 8 \cdot 0,9973^2}{12 \cdot 4 \cdot 1,0565 \cdot 0,9973 - 3 \cdot 1,0122^2} \cdot q l^2 = 0,8149 \frac{q l^2}{12},$$

$$\mathfrak{M}'' = - \frac{1 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 1,0565 - 1,0122) \cdot 0,9755 - 4 \cdot (3 \cdot 1,0122 - 2 \cdot 0,9973) \cdot 0,9973}{12 \cdot 4 \cdot 1,0565 \cdot 0,9973 - 3 \cdot 1,0122^2} q l^2 + \frac{1}{2} q l^2$$

$$= - 4,8275 \frac{q l^2}{12} + \frac{1}{2} q l^2 = 1,1725 \frac{q l^2}{12}.$$

Demnach wird nun nach 282:

$$M_1 = \left[ \left( \frac{3 \cdot 1,0122}{2 \cdot 0,9973} - 1 \right) 0,8149 + 1,1725 \right] \frac{q l^2}{12} = 1,5982 \frac{q l^2}{12} = 0,1332 q l^2,$$

während bei constantem Querschnitte  $M_1 = 0,125 q l^2$  ist, so dass eine Abweichung von nur 6,6 Procent stattfindet. Es wird nun  $Q_1' = - \frac{M_1}{l} + \frac{1}{2} q l = + 0,3668 q l$ ,  $Q_1'' = Q_1' - q l = - 0,6332 q l$ ;  $D_0 = Q_1' = 0,3668 q l$ ,  $D_1 = - 2 Q_1' = 1,2664 q l$ , während bei constantem Querschnitte  $Q_1' = + 0,375 q l$ ,  $Q_1'' = - 0,625 q l$ ,  $D_0 = 0,375 q l$ ,  $D_1 = 1,250 q l$  ist. Ferner wird  $M = - Q_1' x + \frac{1}{2} q x^2$ ,  $\max M =$

$-\frac{Q_1'^2}{2 q} = - \frac{0,3668^2}{2} q l^2 = 0,06727 q l^2$ , während bei constantem Querschnitte  $\max M = 0,07031 q l^2$  ist.

**§. 164. Stab mit drei und vier Feldern.** Wir setzen eine symmetrische Anordnung des Stabes und der Belastung, sowie gleich hohe Stützen voraus.

Bei drei Feldern wird die Normalgleichung

$$283. (2 \alpha_1 l_1 + \beta_2 l_2 + 2 \gamma_2 l_2) M_1 = \beta_1 l_1 \mathfrak{M}_1' + 2 \alpha_1 l_1 \mathfrak{M}_1'' + (2 \gamma_2 + \beta_2) l_2 \mathfrak{M}_2',$$

wodurch  $M_1$  bestimmt ist.

Bei vier Feldern werden die beiden Normalgleichungen

$$284. \left\{ \begin{array}{l} 2 (\alpha_1 l_1 + \gamma_2 l_2) M_1 + \beta_2 l_2 M_2 \\ \quad = \beta_1 l_1 \mathfrak{M}_1' + 2 \alpha_1 l_1 \mathfrak{M}_1'' + 2 \gamma_2 l_2 \mathfrak{M}_2' + \beta_2 l_2 \mathfrak{M}_2'' \\ \beta_2 l_2 M_1 + 2 \alpha_2 l_2 M_2 = \beta_2 l_2 \mathfrak{M}_2' + 2 \alpha_2 l_2 \mathfrak{M}_2'' \end{array} \right.$$

Allgemein wollen wir die Untersuchung nicht weiter führen, sondern nur den wichtigsten Fall, den Stab von constanter Festigkeit, behandeln.

**§. 165. Stab von constanter Festigkeit.** Wir setzen einen Stab von constanter Höhe voraus, so dass die deformirte Axe aus einzelnen, entgegengesetzt gekrümmten, kreisförmigen Stäben mit gleichem Radius ( $r$ ) besteht. Ausserdem setzen wir eine gleichmässige Belastung voraus. Nach 138 (§. 132) ergibt sich für den Winkel  $\tau_m$  ein Ausdruck aus dem  $m$ ten Felde und ein Ausdruck aus dem  $(m+1)$ sten Felde. Die Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke giebt zwischen den drei Normalmomenten  $M_{m-1}$ ,  $M_m$ ,  $M_{m+1}$  folgende Beziehung:

$$285. \left\{ \begin{aligned} & \frac{r(s_m - s_{m-1})}{2 l_m} - \frac{r(s_{m-1} - s_m)}{2 l_{m+1}} = \\ & -l_m \left[ +1 - 2 \left( 1 + 2 \frac{M_{m-1} - M_m}{q l_m^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4(M_{m-1} + M_m)}{q l_m^2} + \frac{4(M_{m-1} - M_m)^2}{q^2 l_m^4}} \right] \\ & + l_{m+1} \left[ -1 + 2 \left( 1 + 2 \frac{M_m - M_{m+1}}{q l_{m+1}^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4(M_m + M_{m+1})}{q l_{m+1}^2} + \frac{4(M_m - M_{m+1})^2}{q^2 l_{m+1}^4}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Es ist leicht zu ersehen, dass die nach diesem Schema für je drei benachbarte Stützen aufgestellten Normalgleichungen im Allgemeinen nicht leicht aufzulösen sind. Wir wollen uns daher auch nur auf diejenigen Fälle beschränken, in welchen nur ein Normalmoment zu bestimmen ist, was nur bei zwei und drei Feldern eintritt. Es lassen sich auch noch diejenigen Fälle, in welchen zwei Normalmomente zu bestimmen sind, nämlich bei vier und fünf Feldern, ohne grosse Schwierigkeit lösen.

**§. 166. Stab mit zwei Feldern.** Wenn die Stützen gleiche Höhe haben, so ergibt sich als Normalgleichung, da die Momente an den äusseren Stützen Null sind,

$$1 - 2 \left( 1 - \frac{2 M_1}{q l^2} \right) \sqrt{\left( 1 - \frac{4 M_1}{q l^2} + \frac{4 M_1^2}{q^2 l^4} \right)} = 0$$

oder

$$2 \left( 1 - \frac{2 M_1}{q l^2} \right)^2 = 1,$$

$$286. M_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} q l^2 = 0,1464 q l^2,$$

während bei constantem Querschnitte  $M_1 = 0,125 q l^2$ , also um 17,1 Procent kleiner ist. Es wird nun  $Q_1' = -\frac{M_1}{l} + \frac{1}{2} q l$ ,  $Q_1'' = Q_1' - q l$ ,  $D_0 = Q_1'$ ,  $D_1 = 2 Q_1''$ , d. i.

$$287. Q_1' = \frac{\sqrt{2}}{4} q l = +0,3536 q l, \quad Q_1'' = \frac{4 - \sqrt{2}}{4} q l = -0,6464 q l;$$

$$288. D_0 = 0,3536 q l, \quad D_1 = 1,2929 q l,$$

während bei constantem Querschnitte  $Q_1' = 0,375 q l$ ,  $Q_1'' = 0,625 q l$ ,  $D_0 = 0,375 q l$ ,  $D_1 = 1,250 q l$  ist. Ferner wird  $M = -Q_1' x + \frac{1}{2} q x^2$ , d. i.

$$M = -(0,3536 - 0,5 x) q x.$$

Für  $x = 0,70721$  wird  $M = 0$ ; für  $x = 0,35361$  wird  $M$  zum Maximum und zwar ist  $\max M = \frac{Q_1'^2}{2q}$ , d. i.

$$289. \max M = \frac{1}{16} q l^2 = 0,0625 q l^2,$$

während bei constantem Querschnitte  $\max M = 0,07031 q l^2$  ist.

Hat die Mittelstütze eine Senkung  $s$ , so ergibt sich leicht

$$290. M_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{rs}{4l^2}} \right) q l^2.$$

Es wird nun  $Q_1' = -\frac{M_1}{l} + \frac{1}{2} q l = +\frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{2} + \frac{rs}{4l^2} \right)} q l$ ,  $\max M = M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2q}$ , d. i.

$$291. M_1' = -\frac{1}{8} \left( \frac{1}{2} + \frac{rs}{4l^2} \right) q l^2.$$

Demnach wird durch die Senkung  $M_1$  vermindert,  $M_1'$  vergrößert, wie bei constantem Querschnitte. Die absoluten Werthe beider Momente werden gleich für

$$\left( \frac{rs}{l^2} \right)^2 - 92 \frac{rs}{l} + 68 = 0,$$

$$292. \frac{rs}{l} = 46 - 32\sqrt{2} = 0,74515.$$

Alsdann wird

$$293. M_1 = M_1' = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} q l^2 = 0,08579 q l^2.$$

d. i. genau so gross, wie bei constantem Querschnitte (§. 158).

Es bezeichne  $V$  das Volumen des Stabes in einem Felde,  $\mathfrak{B}$  das Volumen eines prismatischen Stabes von gleicher Festigkeit bei derselben Länge,  $F_0$  den grössten Querschnitt innerhalb des Feldes,  $F_1$  den Querschnitt an der Mittelstütze,  $\mathfrak{F}$  den Querschnitt des prismatischen Stabes,  $\xi$  das  $x$ , für welches  $M = 0$  wird. Alsdann ergibt sich leicht:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{F} l, \quad V = \frac{2}{3} F_0 (2\xi - 1) + \frac{1}{6} F_1 (2l - \xi).$$

Bei constanter Höhe ist nach §. 86 der Querschnitt dem Momente proportional, also  $F_0 : \mathfrak{F} = M_1' : \frac{1}{8} q l^2$ ,  $F_1 : \mathfrak{F} = M_1 : \frac{1}{8} q l^2$  oder  $F_0 = \frac{8M_1'}{q l^2} \mathfrak{F}$ ,  $F_1 = \frac{8M_1}{q l^2} \mathfrak{F}$ , d. i.

$$F_0 = \left( \frac{1}{2} + \frac{rs}{4l^2} \right) \mathfrak{F}, \quad F_1 = 4 \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{rs}{4l^2}} \right) \mathfrak{F}.$$

Ferner ist  $M = -Q_1' x + \frac{1}{2} q x^2$ , also ist  $\xi = \frac{2Q_1'}{q} = l \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{rs}{4l^2}}$ . Setzen wir zur Abkürzung  $\frac{1}{2} + \frac{rs}{4l^2} = a$ , so wird  $F_0 = a \mathfrak{F}$ ,  $F_1 = 4(1 - \sqrt{a}) \mathfrak{F}$ ,  $\xi = l\sqrt{a}$ , folglich

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{2}{3} \left[ a(2\sqrt{a}-1) + (1-\sqrt{a})(2-\sqrt{a}) \right] \mathfrak{B} \\
 &= \frac{2}{3} [2 - (3-2a)\sqrt{a}] \mathfrak{B} \\
 &= \frac{2}{3} \left[ 2 - \left( 2 - \frac{rs}{2l^2} \right) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{rs}{4l^2}} \right] \mathfrak{B}.
 \end{aligned}$$

Für  $s = 0$  wird  $V = \frac{4}{3} (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) \mathfrak{B} = 0,3907 \mathfrak{B}$ , also ist die Ersparniss gegenüber dem prismatischen Stabe sehr gross. Die zweckmässigste Senkung ist diejenige, für welche  $V$  zum Minimum wird, also für

$$0 = \frac{dV}{ds} = - \frac{2 \mathfrak{B} s}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{rs}{4l^2}}}$$

d. i. für

$$s = 0.$$

Eine Senkung der Mittelstütze bietet also keinen Vortheil, wohl aber einen Nachtheil.

Taf. VI. Fig. 4 (punktirt) stellt  $Q$  und  $M$ , Taf. VII. Fig. 7 (schwache Linie) die elastische Linie für  $s = 0$  dar.

**§. 167. Stab mit drei Feldern.** Bei symmetrischer Anordnung und gleich hohen Stützen ergibt sich als Normalgleichung

$$l_1 \left[ 1 - 2 \left( 1 - 2 \frac{M_1}{q l_1^2} \right)^2 \right] = l_2 \left[ -1 + 2 \sqrt{1 - 8 \frac{M_1}{q l_2^2}} \right].$$

Schafft man die Wurzel hinweg und ordnet nach Potenzen von  $M_1$ , so ergibt sich, wenn man zur Abkürzung  $\frac{M_1}{q l_1^2} = z$  und wie früher  $\frac{l_1}{l_2} = \alpha$  setzt, folgende Gleichung vierten Grades:

$$294. \quad 64z^4 - 128z^3 + 16(5 - \alpha z^2) + 16(1 + \alpha)z - (1 + \alpha)(3\alpha - 1) = 0.$$

Hiernach ergibt sich

$$\begin{cases} \alpha = 0,9 & 1,0 & 1,1 & 1,2 & 1,3 \\ z = 0,0903 & 0,1069 & 0,1225 & 0,1384 & 0,1546 \end{cases}$$

Es ist nun  $M_1 = z q l_1^2$ . Im ersten Felde wird  $Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1^2$ ,

$M = -Q_1' x + \frac{1}{2} q x^2$ ,  $\max M = M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2q}$ ;  $M$  wird  $= 0$  für  $x = \xi_1 = \frac{2Q_1'}{q}$  und zum Maximum für  $x = \frac{1}{2} \xi_1$ . Im zweiten Felde wird  $Q_2' = \frac{1}{2} q l_1$ ,  $M = M_1 - \frac{1}{2} q l_2 x + \frac{1}{2} q x^2$ ,  $\max M = M_2' = M_1 - \frac{1}{8} q l_2^2$ ; wird  $M = 0$  für  $x = \xi_2$ , so ist  $\xi_2^2 - l_2 \xi_2 + \frac{2M_1}{q} = 0$ ; zum Maximum wird  $M$  für  $x = \frac{1}{2} l_2$ . Die hiernach berechneten Werthe von  $M_1'$ ,  $M_1$ ,  $M_2'$ , sowie von  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  sind in folgender Tabelle zusammengestellt. Bei den Momenten ist der Coefficient von  $q l^2$  angegeben, wenn  $l$  die mittlere Länge der Felder bedeutet, so dass  $l_1 = \frac{3\lambda}{2+\alpha}$ ,  $l_2 = \frac{3\alpha\lambda}{2+\alpha}$  ist.

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$M_1' = -$	0,0898	0,0773	0,0652	0,0575	0,0493	· $q \lambda^2$
$M_1 = +$	0,0966	0,1068	0,1147	0,1216	0,1278	
$M_2' = -$	0,0117	0,0182	0,0269	0,0366	0,0468	
$\xi_1 =$	0,8194	0,7864	0,7500	0,7232	0,6907	$\cdot l_1$
$\xi_2 =$	0,3356	0,3092	0,2820	0,2597	0,2412	$\cdot l_2$

Bezeichnen wir das Volumen des Stabes mit  $V$ , das Volumen dreier einzelner prismatischer Stäbe von gleicher Gesamtlänge und gleicher Tragkraft mit  $\mathfrak{B}$ , die Querschnitte, welche den Momenten  $M_1'$ ,  $M_2$ ,  $M_2'$  entsprechen, mit  $F_1'$ ,  $F_1$ ,  $F_2'$ , den Querschnitt des prismatischen Stabes, entsprechend dem Momente  $\frac{1}{3} q \lambda^2$ , mit  $\mathfrak{F}$ , so ergibt sich leicht  $\mathfrak{B} = 3 \mathfrak{F} \lambda$  und

$$V = \frac{3}{4} F_1' (2 \xi_1 - l_1) + \frac{1}{3} F_1 (2 l_1 + l_2 - \xi_1) - \frac{2}{3} F_2' (4 \xi_2 - l_1) \\ = \frac{8}{9} \mathfrak{B} \left[ 4 \frac{M_1'}{q \lambda^2} \frac{\xi_1 - l_1}{\lambda} + \frac{M_1}{q \lambda^2} \left( 3 - \frac{\xi_1}{\lambda} \right) - 2 \frac{M_2'}{q \lambda^2} \frac{4 \xi_2 - l_1}{\lambda} \right],$$

wonach folgende Tabelle berechnet ist:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,232	1,3	
$V =$	0,3822	0,3610	0,3413	0,3393	0,3392	0,3398	· $\mathfrak{B}$

Das vortheilhafteste Verhältniss der Längen der Felder ist hiernach  $\alpha = 1,232 = \text{circa } \frac{1}{3}$ . Hier muss also das innere Feld länger sein, als die äusseren, während bei constantem Querschnitte das innere Feld kürzer sein muss (§. 159).

Die übrigen Grössen sind nun leicht zu bestimmen. Für  $\alpha = 1,232$  ergibt sich  $M_1' = -0,0548 q \lambda^2$ ,  $M_1 = +0,1258 q \lambda^2$ ,  $M_2' = -0,0399 q \lambda^2$ ,  $Q_1' = +0,331 q \lambda$ ,  $Q_1'' = -0,597 q \lambda$ ,  $Q_2' = -0,572 q \lambda$ , während bei constantem Querschnitte für dasselbe Verhältniss  $M_1' = -0,0603 q \lambda^2$ ,  $M_1 = +0,1086 q \lambda^2$ ,  $M_1' = 0,0590 q \lambda^2$ ,  $Q_1' = +0,347 q \lambda$ ,  $Q_1'' = 0,581 q \lambda$ ,  $Q_2' = -0,572 q \lambda$  wird.

Sind die Mittelstützen um  $s$  gesenkt, so ergibt sich als Normalgleichung, wenn wir zur Abkürzung  $\frac{rs}{2l_1^2} = \beta$  setzen,

$$295. \quad 64 z^4 - 128 z^3 + 16 (5 - \alpha - \beta) z \\ + 16 (1 + \alpha + \beta) z - (1 + \alpha + \beta) (3\alpha - 1 + \beta) = 0.$$

Einen beachtenswerthen Vortheil bietet aber auch hier die Senkung nicht.

Taf. VI. Fig. 9 stellt  $Q$  und  $M$ , Taf. VII. Fig. 12 die elastische Linie für das Verhältniss  $\alpha = 1,232$  dar.

Die in diesen und den vorigen Kapiteln entwickelten Regeln für continuirliche Träger finden ihre hauptsächlichste Anwendung im Brückenbaue. Eine direkte Anwendung aber lässt sich dabei nicht machen, weil wir nur eine totale gleichmässige Belastung vorausgesetzt haben, während die Beanspruchung der Brücken durch eine partielle Belastung grösser ausfallen kann. Die Behandlung dieses Falles gehört aber mehr in den Brückenbau, als in die allgemeine Elasticitätslehre und würde den Umfang dieses Werkes zu sehr vergrössern.

## V. Abschnitt.

### Belastung durch Kräfte, unter welchen Axialkräfte sind.

**§. 168. Einleitung.** Wenn unter den äusseren Kräften solche sind, welche parallel zur Axe des Körpers wirken und welche wir äussere Axialkräfte nennen, deren Abstand von der Axe gegen die Querschnittsdimensionen nicht sehr gross ist, so darf man im Allgemeinen bei Aufstellung der Biegemomente die Formänderung des Körpers nicht mehr vernachlässigen, wie wir dies bei der Untersuchung der Wirkung von äusseren Transversalkräften im vorigen Abschnitte und bei Aufstellung der Werthe für  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  in §. 60 gethan haben. Denn die Aenderungen der Hebelsarme der äusseren Axialkräfte in Folge der Formänderung sind alsdann gegen die ohnehin kleinen Hebelsarme vor der Formänderung nicht mehr sehr klein. Hierdurch wird die Rechnung allerdings weniger einfach, als im vorigen Abschnitte.

Wir setzen stets voraus, dass nur auf jede Endfläche des Stabes eine äussere Axialkraft wirke, da dies der fast einzig wichtige Fall ist. Das Eigengewicht des Körpers, wenigstens die axial wirkende Componente desselben, vernachlässigen wir. Die auf beide Endflächen wirkenden Axialkräfte müssen alsdann gleich und entgegengesetzt gerichtet sein. Für jeden Querschnitt ist sodann die Axialkraft  $P$  (siehe §. 60) gleich dieser äusseren Axialkraft und wir werden daher die letztere ebenfalls mit  $P$  bezeichnen.

Wir setzen ferner voraus, dass die eine Hauptaxe eines jeden Querschnittes, und zwar die Axe der  $w$ , mit den äusseren Transversalkräften in einer Ebene liege, welche wir als Ebene der  $xy$  annehmen. Die anfängliche Axe des Stabes nehmen wir als Axe der  $x$  an. Es bezeichnen nun (vergl. Fig. 13, S. 47):

- $\eta$ ,  $\xi$  die Abweichung eines Punktes  $C$  der Axe des Stabes mit der Abscisse  $x$  von den Ebenen der  $xz$  und  $xy$ ;
- $\eta_0$ ,  $\xi_0$  die Abweichungen des Endes  $A$  des Stabes;
- $f$ ,  $g$  die Entfernung des Angriffspunktes der einen äusseren Axialkraft  $P$  von den Axen der  $v$  und  $w$  der entsprechenden Endfläche;
- $M$  das Moment der auf den einen Körpertheil  $AC$  wirkenden äusseren Transversalkräfte für die Axe der  $w$  des Querschnittes  $C$ ;
- $M$ ,  $M_1$  die Biegemomente für die Axen der  $w$  und  $v$  dieses Querschnittes.

Alsdann ist

$$1. \quad \begin{cases} M = \mathfrak{M} \mp P (f + \eta_0 - \eta), \\ M_1 = \mp P (g + \xi_0 - \xi). \end{cases}$$

Hier ist  $M, M_1$  positiv genommen, wenn die Drehung des Körpertheiles  $AC$  nach denjenigen Seiten der Ebenen der  $xz$  und  $xy$  erfolgt, für welche  $f, g$  und  $\eta, \xi$  als positiv gelten. Das obere oder untere Vorzeichen von  $P$  ist zu wählen, je nachdem  $P$  ziehend oder drückend, d. h. nach dem Aeusseren oder nach dem Innern des Körpers zu wirkt.

Wenn die Biegung in der Ebene der  $xy$  vor sich geht, so ist die Gleichung 47 (§. 80) für  $\eta$  massgebend. Es lässt sich aber, wie in §. 82, durch Aufstellung zweier Gleichgewichtsbedingungen für die Drehung um die Axen der  $w$  und  $v$  leicht zeigen, dass diese Gleichung bei Vertauschung von  $M, W, \eta$  mit  $M_1, W_1, \xi$  auch für  $\xi$  massgebend ist. Demnach ist, wenn wir in 47 (§. 80) die Glieder mit  $\frac{d\eta}{dx}$  vernachlässigen:

$$2. \quad \begin{cases} \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E W} \left(1 + \frac{P}{E F}\right), \\ \frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{M_1}{E W_1} \left(1 + \frac{P}{E F}\right). \end{cases}$$

Wir wählen hier die genauere Gleichung, weil sich diese bei constantem Querschnitte ebenso leicht behandeln lässt, wie die Näherungsgleichung 41 (§. 79). Jedoch wird man in der Regel das zweite Glied in der Parenthese vernachlässigen können, da dasselbe die durch  $P$  erzeugte relative Längenänderung, welche gegen 1 sehr klein ist, darstellt.

Den Fall, in welchem nur äussere Axialkräfte vorhanden sind, welche drückend wirken, nennt man Knick-Elasticität und Knick-Festigkeit und die Trennung des Körpers das Zerknicken.

## XVIII. Kapitel.

### Belastung durch centriscch wirkende Axialkräfte.

**§. 169. Formänderung im Allgemeinen.** Wir behandeln in diesem Kapitel den Fall, dass nur äussere Axialkräfte vorhanden sind, welche in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen. In diesem Falle kann eine Biegung nur eintreten, wenn die Kräfte drückend wirken; bei ziehenden Kräften würden wir es nur mit reiner Normalelasticität zu thun haben. Hier wird nach 1:

$$3. \quad M = P (\eta_0 - \eta), \quad M_1 = P (\xi_0 - \xi).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$4 a. \quad k^2 = \frac{P}{E W} \left(1 - \frac{P}{E F}\right), \quad k_1^2 = \frac{P}{E W_1} \left(1 - \frac{P}{E F}\right)$$

oder sehr nahe

$$4 b. \quad k^2 = \frac{P}{E W}, \quad k_1^2 = \frac{P}{E W_1},$$

so wird nach 2:

$$5. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = k^2(\eta_0 - \eta), \quad \frac{d^2\xi}{dx^2} = k_1^2(\xi_0 - \xi).$$

Es zeigt sich hier eine merkwürdige Eigenthümlichkeit. Sind die Gleichungen 5 für eine bestimmte Form der elastischen Linie erfüllt, so sind sie auch noch erfüllt, wenn man sämtliche  $\eta$  proportional und sämtliche  $\xi$  proportional wachsen lässt, wenn man also z. B.  $m\eta$  für  $\eta$ ,  $n\xi$  für  $\xi$  setzt. Die Grösse der Durchbiegung ist demnach unbestimmt.

Da die beiden Gleichungen 5 dieselbe Form haben, so werden wir vorläufig voraussetzen, dass die Formänderung in der Ebene der  $xy$  vor sich gehe, so dass nur die erste dieser beiden Gleichungen in Anwendung kommt.

**§. 170. Formänderung eines prismatischen Stabes.** Nach dem vorigen §. wird

$$6. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = k^2(\eta_0 - \eta),$$

worin in unserem Falle  $k$  constant ist. Das Integral dieser Differenzialgleichung ist bekanntlich

$$7. \quad \eta = \eta_0 + A \sin kx + B \cos kx,$$

worin  $A$  und  $B$  Constante bedeuten. Die deformirte Axe bildet hiernach eine Wellenlinie, da sich derselbe Werth von  $\eta$  wiederholt, wenn  $kx$  um einen vollen Winkel oder um  $2\pi$  wächst. Ist  $\lambda$  die Wellenlänge, so ist demnach  $k\lambda = 2\pi$  oder

$$8. \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{EW}{P}}.$$

Für die Bäuche oder für die Punkte, für welche  $\eta$  zum Maximum oder Minimum wird, ist  $\frac{d\eta}{dx} = 0$ , d. i.  $0 = A \cos kx - B \sin kx$ , also

$$\tan kx = \frac{A}{B}.$$

Setzt man die sich hieraus für  $\sin kx$  und  $\cos kx$  ergebenden Werthe in 7 ein und bezeichnet die grösste oder kleinste Abweichung mit  $\psi$ , so ergibt sich

$$9. \quad \psi = \eta_0 \pm \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Durch 8 ist die Wellenlänge  $\lambda$  bei gegebener Belastung bestimmt. Wird der Stab in einzelnen Punkten, welche gleich weit von einander abstehen, festgehalten, so ist hierdurch die Wellenlänge  $\lambda$  gegeben und alsdann ist durch 8 die Last  $P$  bestimmt, für welche Gleichgewicht stattfindet, nämlich

$$\frac{P}{EW} \left(1 - \frac{P}{EF}\right) = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}.$$

Setzen wir  $\frac{1}{1 + \frac{P}{EF}}$  für  $1 - \frac{P}{EF}$ , was sehr nahe richtig ist, so ergibt sich durch Reduction auf  $P$

$$10. P = \frac{4 E W \pi^2}{\lambda^2 - 4 \pi^2} \frac{W}{F}$$

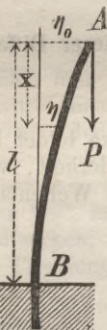
oder sehr nahe und in allen praktischen Fällen hinreichend genau

$$11. P = \frac{4 \pi^2 E W}{\lambda^2}$$

Ist  $P$  kleiner, so kann überhaupt keine Biegung eintreten. Ist  $P$  genau so gross, so kann eine Biegung eintreten, welche aber nach dem vorigen §. jede beliebige Grösse annehmen kann. Der Stab kann sich also auch so stark durchbiegen, dass er zerbricht. Ist  $P$  grösser, als 11 giebt, so kann kein Gleichgewicht eintreten; die Durchbiegung nimmt so lange zu, bis der Stab bricht. Die Gleichung 11 bestimmt demnach die Tragkraft des Stabes.

### §. 171. Stab, welcher an einem Ende eingespannt ist.

Fig. 46.



Als Anfang der  $x$  wählen wir das freie Ende  $A$  (Fig. 46). Für  $x = 0$  muss alsdann  $\eta = \eta_0$  werden, also nach 7  $\eta_0 = \eta_0 + B$ , d. i.  $B = 0$ , also  $\eta = \eta_0 + A \sin kx$ . Für  $x = l$  muss  $\frac{d\eta}{dx} = 0$  werden, d. i.

$$\cos kl = 0.$$

Hiernach muss  $kl$  ein ungerades Vielfaches des rechten Winkels oder von  $\frac{1}{2} \pi$  sein,  $kl$  muss also einen der Werthe  $\frac{1}{2} \pi$ ,  $\frac{3}{2} \pi$ ,  $\frac{5}{2} \pi$ , ... haben. Allgemein ist, wenn  $n$  eine beliebige ganze Zahl bezeichnet,

$$12. kl = \frac{2n+1}{2} \pi.$$

Da bei der Wellenlänge  $\lambda$  nach 8  $kl = 2\pi$  ist, so ist

$$13. \lambda = \frac{4l}{2n+1}.$$

Für  $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  wird  $\lambda = 4l, \frac{4}{3}l, \frac{4}{5}l, \frac{4}{7}l, \frac{4}{9}l, \dots$ . Die elastische Linie hat  $n+1$  Wendepunkte und  $n+1$  Bäuche.

Für  $x = l$  wird  $\eta = 0$ , mithin  $0 = \eta_0 + A \sin kl = \eta_0 \pm A$ , weil  $\cos kl = 0$ , also  $\sin kl = \pm 1$  ist; mithin ist  $A = \mp \eta_0$ , also

$$14. \eta = \eta_0 (1 \mp \sin kx),$$

wobei  $-$  für gerade,  $+$  für ungerade  $n$  gilt. Hiernach wird nach 9  $\eta = 0$  und  $= 2\eta_0$ . Auf Taf. VIII sind in Fig. 1 die Fälle  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  dargestellt.

Wenn kein Punkt des Stabes festgehalten wird, so nimmt er die einfache in Fig. 1 a dargestellte Biegung ( $n = 0$ ) an. Für diesen Fall ist  $\lambda = 4l$ , mithin nach 11 die Tragkraft:

$$15. P = \frac{\pi^2 E W}{4l^2} = 2,467 \frac{E W}{l^2}.$$

### §. 172. Stab, welcher an beiden Enden frei ist. Als An-

fang der  $x$  wählen wir das eine Ende  $A$ . Hier ist  $\eta_0 = 0$ . Für  $x = 0$  wird  $\eta = 0$ , also nach 7  $B = 0$ ,  $\eta = A \sin kx$ . Nach 9 wird  $\eta = \pm A$ , wir können daher auch

$$16. \quad \eta = \pm \eta \sin kx$$

setzen. Da auch für  $x = l$   $\eta = 0$  wird, so wird

$$\sin kl = 0,$$

wonach  $kl$  ein beliebiges Vielfaches des gestreckten Winkels oder von  $\pi$  sein muss; es muss also  $kl$  einen der Werthe  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  haben. Allgemein ist, wenn  $n$  eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$17. \quad kl = n\pi.$$

Da bei der Wellenlänge  $\lambda$  nach 8  $kl = 2\pi$  ist, so ist

$$18. \quad \lambda = \frac{2l}{n}.$$

Für  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  wird  $\lambda = 2l, l, \frac{2}{3}l, \frac{1}{2}l, \dots$ . Die Curve hat  $n + 1$  Wendepunkte und  $n$  Bäuche. Auf Taf. VIII sind in Fig. 2 die Fälle  $n = 1, 2, 3$  dargestellt.

Wenn kein Punkt des Stabes festgehalten wird, so nimmt der Stab die in Fig. 2 a Taf. VIII dargestellte einfache Biegung ( $n = 1$ ) an. Für diese ist  $\lambda = 2l$ , mithin nach 11 die Tragkraft

$$19. \quad P = \frac{\pi^2 E W}{l^2} = 9,870 \frac{E W}{l^2}.$$

**§. 173. Stab mit eingespannten Enden.** Wenn auf ein Stabende, welches wir als Anfang der  $x$  annehmen, ein Kräftepaar mit dem Momente  $M_0$  wirkt und der Angriffspunkt der Kraft  $P$  im Schwerpunkte der Endfläche liegt, so ist  $M = M_0 - P\eta$ , wie auch die Kräfte des Paares gerichtet sein mögen. Dieser Ausdruck stimmt mit 3 (§. 169) überein, wenn man  $\eta_0 = \frac{M_0}{P}$  setzt.

Ist der Stab an diesem Ende eingespannt, so wird das Moment  $M_0$  durch die Reactionen der Masse erzeugt, welche das Stabende umgibt. Dass diese Kräfte ein Paar bilden müssen, folgt daraus, dass ihre Summen für das Gleichgewicht des Stabes Null sein müssen.

Nach 7 (§. 170) wird

$$\eta = \frac{M_0}{P} + A \sin kx + B \cos kx.$$

Für  $x = 0$  muss  $\frac{d\eta}{dx} = 0$  werden, daher  $A = 0$ . Für  $x = 0$  muss auch

$\eta = 0$  werden, daher  $B = -\frac{M_0}{P}$ , also

$$\eta = \frac{M_0}{P} (1 - \cos kx).$$

Für  $x = l$  muss  $\eta = 0$  und  $\frac{d\eta}{dx} = 0$  werden, mithin

$$\cos kl = 1, \quad \sin kl = 0.$$

Also muss  $kl$  einen der Werthe  $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$  oder allgemein den Werth

$$20. \quad kl = 2n\pi$$

haben, wenn  $n$  eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Die Wellenlänge  $\lambda$  ist

$$21. \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{n},$$

also  $\lambda = 1, \frac{1}{2}l, \frac{1}{3}l, \dots$ . Die elastische Linie hat  $2n$  Wendepunkte und  $2n + 1$  Bäuche. Die grösste Abweichung  $\eta$  tritt für  $\cos kx = -1$  ein, daher ist  $\eta = \frac{2M_0}{P}$ , daher auch

$$22. \quad \eta = \frac{1}{2} \eta (1 - \cos kx).$$

Auf Taf. VIII sind in Fig. 3 die Fälle  $n = 1, 2$  dargestellt.

Setzt man für die einfache Durchbiegung ( $n = 1$ ) in 20 für  $k$  seinen Werth ein, so ergibt sich

$$23. \quad P = \frac{4\pi^2 E W}{l^2} = 39,478 \frac{E W}{l^2}.$$

Demnach verhalten sich die Tragkräfte, wenn ein Ende eingespannt ist, wenn beide Enden frei und wenn beide Enden eingespannt sind, wie **1 : 4 : 16**.

**§. 174. Parabolisch begrenzter Stab.** Um die Behandlung des Falles eines variablen Querschnittes zu zeigen, nehmen wir an, dass die Längsschnitte des Stabes Parabeln seien und dass der an den Enden freie Stab in Beziehung auf den Querschnitt in der Mitte symmetrisch sei. (Taf. VIII Fig. 4). Ausserdem sei aber die Aenderung der Querschnitte nur sehr gering. Nehmen wir die Mitte des Stabes als Anfang der  $x$  an und bezeichnen wir den Querschnitt in der Mitte und an den Enden bezüglich mit  $W_0, W_1$ , so können wir annähernd setzen:

$$W = W_0 (1 - cx^2)$$

wobei

$$c = 4 \frac{W_0 - W_1}{W_0 l^2},$$

da hiernach in der That für  $x = 0$   $W = W_0$  und für  $x = \frac{1}{2}l$   $W = W_1$  wird. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$k_0^2 = \frac{P}{E W_0},$$

so wird nach 5 (§. 169), da hier  $\eta_0 = 0$  ist,

$$a. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} (1 - cx^2) + k_0^2 \eta = 0.$$

Wir setzen

$$\eta = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

$$\frac{d\eta}{dx} = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + \dots$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = 1.2 A_2 + 2.3 A_3 x + 3.4 A_4 x^2 + 4.5 A_5 x^3 + \dots$$

Dies in die Gleichung a eingesetzt, giebt

$$0 = 2 A_2 + k_0^2 A + (2.3 A_3 + k_0^2 A_1) x + (3.4 A_4 - 1.2 c A_2 + k_0^2 A_2) x^2 + (4.5 A_5 - 2.3 c A_3 + k_0^2 A_3) x^3 + \dots$$

Hieraus ergeben sich leicht die Coefficienten  $A_2, A_3, \dots$  wenn man die Coefficienten jeder einzelnen Potenz von  $x = 0$  setzt, wobei aber  $A, A_1$

unbestimmt bleiben. Setzt man diese Ausdrücke in obige Reihe für  $\eta$  ein, so bestimmen sich  $A, A_1$  durch die Bedingung, dass sowohl für  $x = +\frac{1}{2}l$ , als für  $x = -\frac{1}{2}l$   $\eta = 0$  werden muss. Es ergibt sich, dass beide Bedingungen nur erfüllt werden können, wenn entweder  $A = 0$ , oder  $A_1 = 0$  ist. Bei der einfachen Durchbiegung, welche hier allein wichtig ist, muss  $\eta$  für gleiche positive und negative  $x$  gleichen Werth haben, was nur möglich ist, wenn  $A_1 = A_3 = A_5 = \dots = 0$  ist. Für diesen Fall wird

$$24. \quad \eta = A \left[ 1 - \frac{k_0^2 x^2}{2} + \frac{k_0^4 x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left( 1 - 1.2 \frac{c}{k_0^2} \right) - \frac{k_0^6 x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left( 1 - 1.2 \frac{c}{k_0^2} \right) \left( 1 - 3.4 \frac{c}{k_0^2} \right) + \dots \right].$$

Da  $\frac{c}{k_0^2}$  nur klein ist, so ist annähernd  $\left( 1 - a \frac{c}{k^2} \right) \left( 1 - b \frac{c}{k^2} \right) \dots = 1 - (a + b + \dots) \frac{c}{k^2}$ . Dies auf die Coefficienten der Reihe für  $\eta$  im vorigen Ausdrucke angewendet, giebt

$$\eta = A \left[ 1 - \frac{k_0^2 x^2}{2} + \frac{k_0^4 x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots + \dots \right] - A c k_0^2 x^4 \left[ \frac{1.2}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1.2 + 3.4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} k^2 x^2 + \frac{1.2 + 3.4 + 5.6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} k^4 x^4 - \dots + \dots \right]$$

oder

$$25. \quad \eta = A \cos k_0 x - \frac{1}{12} A c k_0^2 x^4 \left( 1 - \frac{7}{30} k_0^2 x^2 + \frac{11}{840} k_0^4 x^4 - \dots \right).$$

Für  $x = \frac{1}{2}l$  muss  $\eta = 0$  werden, daher

$$26. \quad \cos \frac{1}{2} k_0 l = \frac{1}{192} c k_0^2 l^4 \left( 1 - \frac{7}{120} k_0^2 l^2 + \frac{11}{13440} k_0^4 l^4 - \dots \right),$$

durch welche Gleichung bei gegebenem  $c$   $k_0 l$  bestimmt ist. In endlicher Form lässt sich natürlich  $k_0 l$  nicht darstellen. Reducirt man auf  $c l^2$  und berechnet  $c l^2$  für verschiedene  $k_0 l$ , so ergibt sich, dass für kleine  $c$  sehr nahe ist

$$c l^2 = 28,92 - 2,93 (k_0 l)^2.$$

Setzt man für  $c$  und  $k_0$  die obigen Ausdrücke ein und reducirt auf  $P$ , so ergibt sich als Näherungsformel für die Tragkraft

$$27. \quad P = \frac{E (8,50 W_0 + 1,37 W_1)}{l^2}.$$

Für  $W_0 = W_1$  ergibt sich hiernach für  $P$  derselbe Werth, als nach 19.

**§. 175. Körper von constanter Festigkeit.** Wir wollen noch untersuchen, welche Form man dem an beiden Enden freien Stabe geben müsse, damit er in allen Querschnitten gleich leicht breche oder damit die grösste Spannung für alle Querschnitte constant sei. Hier ist

$$M = -P \eta, \text{ also die grösste Spannung nach §. 84 } K = -\frac{M a}{W} = \frac{P \eta a}{W},$$

woraus

$$28. \quad \eta = \frac{K W}{P a} = \frac{K z}{P},$$

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{K}{P} \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{a \eta}{W} \cdot \frac{d^2 z}{dx^2},$$

wenn wir zur Abkürzung  $\frac{W}{a} = z$  setzen. Nach 5 aber ist  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{P\eta}{EW}$ . Dies in die vorige Gleichung eingesetzt, gibt

$$29. \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{P}{Ea}.$$

Wir können  $\frac{1}{a}$  als eine Funktion von  $\frac{W}{a}$  oder von  $z$  ansehen. Alsdann gibt die Integration dieser Differenzialgleichung

$$30. \quad x = \sqrt{\frac{E}{P}} \int \frac{dz}{\sqrt{\Lambda - 2 \int \frac{dz}{a}}}$$

Wir wollen dies auf einige Fälle anwenden, wobei wir das eine Ende als Anfang der  $x$  wählen.

a. Die Höhe sei constant, wobei wir unter Höhe die Dimension in Richtung der Durchbiegung verstehen. Alsdann ist auch  $a$  constant, also nach 25, wenn wir darin  $z = \frac{W}{a}$  setzen,

$$\frac{d^2W}{dx^2} = -\frac{P}{E}.$$

Die zweimalige Integration gibt mit Beachtung des Umstandes, dass für  $x = 0$  und  $x = l$   $M = 0$ , also auch  $W = 0$  wird,

$$31. \quad W = \frac{Px(1-x)}{2E} = 4W_0 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

wenn man den mittleren Querschnitt durch den Index 0 bezeichnet. Bei proportionalen Querschnitten wird  $W:W_0 = b:b_0$ , also

$$32. \quad b = 4b_0 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

wonach der Aufriss von zwei Parabeln begrenzt wird (Taf. VIII. Fig. 5). Für den mittleren Querschnitt wird nach 31  $8EW_0 = Pl^2$  oder

$$33. \quad P = \frac{8EW_0}{l^2},$$

was auch mit 23 (vor. §.) für  $W_1 = 0$  nahe übereinstimmt.

b. Die Breite  $b$  sei constant. Bei proportionalen Querschnitten ist  $W:W_0 = h^3:h_0^3$ ,  $a:a_0 = h:h_0$ , daher

$$z = \frac{W}{a} = \frac{W_0}{a_0 h_0^2} h^2, \quad \frac{1}{a} = \frac{h_0}{a_0} \frac{1}{h}.$$

Dies in 26 eingesetzt, gibt

$$x = \int \frac{h dh}{\sqrt{C - Bh}},$$

wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{APa_0^2 h_0^4}{4EW_0^2} = C, \quad \frac{Ph_0^3}{EW_0} = B$$

setzen. Setzen wir  $\sqrt{C - Bh} = y$ ,  $h = \frac{C - y^2}{B}$ ,  $dh = -\frac{2y dy}{B}$ , so wird

$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{2}{B^2} \int (C - y^2) dy \\
 &= -\frac{2}{B^2} (C - \frac{1}{3} y^2) y + C_1 \\
 &= -\frac{2}{3B^2} (2C + Bh) \sqrt{C - Bh} + C_1.
 \end{aligned}$$

Da sich für jedes  $h$  zwei verschiedene  $x$  ergeben müssen, welche von  $\frac{1}{2}l$  gleich viel abweichen, so ist die Wurzel für  $x < \frac{1}{2}l$  positiv, für  $x > \frac{1}{2}l$  negativ und  $C_1 = \frac{1}{2}l$  zu nehmen. Für  $x = 0$  muss  $h = 0$  werden, woraus  $C = \sqrt[3]{\frac{9}{64} B^4 l^2}$  folgt. Daher wird, wenn man auch den Werth für  $B$  einsetzt,

$$x = \frac{1}{2}l \left[ 1 \mp \left( 1 + \frac{h}{h_0} \sqrt[3]{\frac{8EW_0}{9Pl^2}} \right) \sqrt{1 - \frac{h}{h_0} \sqrt[3]{\frac{64EW_0}{9Pl^2}}} \right].$$

Für  $x = \frac{1}{2}l$  muss  $h = h_0$  werden; hierdurch ergibt sich

$$34. \quad P = \frac{64EW_0}{9l^2}.$$

Setzt man diesen Werth für  $P$  in die vorige Gleichung ein, so ergibt sich

$$35. \quad x = \frac{1}{2}l \left[ 1 \mp \left( 1 + \frac{h}{2h_0} \right) \sqrt{1 - \frac{h}{h_0}} \right],$$

wonach der Körper auf Taf. VIII in Fig. 6 dargestellt ist.

c. Die Querschnitte seien ähnlich. In ganz ähnlicher Weise, wie im vorigen Falle ergibt sich, wenn wir  $B = \frac{Ph_0^4}{3EW_0}$  setzen,

$$\begin{aligned}
 x &= \int \frac{h^2 dh}{\sqrt{C - Bh^2}} \\
 &= -\frac{h}{2B} \sqrt{C - Bh^2} + \frac{C}{2B\sqrt{B}} \operatorname{Arcsin} \left( h \sqrt{\frac{B}{C}} \right) + C_1.
 \end{aligned}$$

Für  $x = 0$  muss  $h = 0$  werden, daher  $0_1 = 0$ . Für  $h = 0$  wird aber auch  $\operatorname{Arcsin} \left( h \sqrt{\frac{B}{C}} \right) = \pi$ , mithin, da für  $h = 0$  auch  $x = l$  werden muss,

$$C = \frac{21B\sqrt{B}}{\pi}.$$

Ist  $h = \sqrt{\frac{C}{B}}$ , so wird  $x = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcsin} 1 = \frac{b}{2}$ , daher ist  $\sqrt{\frac{C}{B}}$  die Höhe  $h_0$  in der Mitte des Stabes. Dies eingesetzt giebt

$$36. \quad x = \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{Arcsin} \frac{h}{h_0} - \frac{h}{h_0} \sqrt{1 - \frac{h^2}{h_0^2}} \right].$$

Am bequemsten geschieht die Berechnung durch Einführung eines Halfwinkels. Setzt man nämlich  $\sin \varphi = \frac{h}{h_0}$ , so wird  $\sqrt{1 - \frac{h^2}{h_0^2}} = \cos \varphi$ ,  $\operatorname{Arcsin} \frac{h}{h_0} = \varphi$ , mithin

$$37. \quad x = \frac{1}{\pi} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) = l \frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{2\pi},$$

wonach der Körper auf Taf. VIII in Fig. 7 dargestellt ist.

Nach dem Obigen wird  $h_0^2 = \frac{C}{B} - \frac{2l\sqrt{B}}{\pi}$ , oder wenn man den Werth für B einsetzt,

$$38. \quad P = \frac{3\pi^2 E W_0}{4l^2} = 7,402 \frac{E W_0}{l^2}.$$

Bezeichnet man das Volumen in diesen drei Fällen bezüglich mit  $V_1, V_2, V_3$ , den mittleren Querschnitt mit  $F_1, F_2, F_3$  und das Volumen eines prismatischen Körpers von gleicher Tragkraft mit  $V$ , so ergibt sich leicht

$$V_1 = \frac{2}{3} F_1 l, \quad V_2 = \frac{4}{5} F_2 l, \quad V_3 = \frac{3}{4} F_3 l.$$

$$V_1 = \frac{\pi^2}{12} V, \quad V_2 = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} V, \quad V_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} V$$

oder

$$V_1 = 0,823 V, \quad V_2 = 0,892 V, \quad V_3 = 0,866 V.$$

**§. 176. Doppelte Durchbiegung.** Nach §. 168 wird bei einer Durchbiegung in zwei Ebenen die Durchbiegung in jeder Ebene oder besser die Projection der deformirten Axe auf jede dieser Ebenen den entwickelten Gesetzen folgen. Hierbei kann die Projection auf die eine Ebene eine andere sein, d. h. eine andere Anzahl und Lage der Knoten- oder Wendepunkte haben, als die Projection auf die andere Ebene. Für die einfache Durchbiegung in beiden Ebenen ergibt sich die kleinste Tragkraft für die Durchbiegung, welche senkrecht zu derjenigen Hauptaxe des Querschnittes stattfindet, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum ist. In dieser Richtung wird daher der Stab am leichtesten durchbiegen.

## XIX. Kapitel.

### Belastung durch excentrisch wirkende Axialkräfte.

**§. 177. Gedrückter Stab, welcher an einem Ende eingespannt ist.** Wir wollen in diesem Kapitel nur einen constanten Querschnitt voraussetzen. Als Anfang der  $x$  wählen wir das freie Ende A (Fig. 47) des Stabes. Nach 1 (§. 168) wird das Biegemoment

$$39. \quad M = P(f + \eta_0 - \eta), \quad M_1 = P(g + \xi_0 - \xi).$$

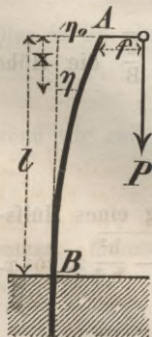
Für die Durchbiegung in der Ebene der  $xy$  wird daher nach 2 (§. 168)

$$40. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{P}{E W} (a + \eta_0 - \eta) = k^2 (a + \eta_0 - \eta),$$

wenn  $k$  denselben Werth hat, wie im vorigen Kapitel. Die Integration giebt

$$\eta = a + \eta_0 + A \sin kx + B \cos kx.$$

Die Bedingung, dass für  $x = 0$   $\eta = \eta_0$  wird, giebt



$B = -a$ . Die Bedingung, dass für  $x = 1$   $\frac{d\eta}{dx} = 0$  wird, giebt  $A = B \operatorname{tank} l = -a \operatorname{tank} l$ . Endlich giebt die Bedingung, dass für  $x = 1$   $\eta = 0$  wird,  $\eta_0 = -a - A \operatorname{sink} l - B \operatorname{cosk} l$ , d. i.

$$41. \quad \eta_0 = a \frac{1 - \operatorname{cosk} l}{\operatorname{cosk} l}.$$

Dies eingesetzt, giebt

$$42. \quad \eta = a \frac{1 - \operatorname{cosk}(1-x)}{\operatorname{cosk} l}.$$

Auch hier bildet die deformirte Axe eine Wellenlinie mit derselben Wellenlänge  $\frac{2\pi}{k}$ , wie im vorigen Kapitel. Setzt man in 37 für  $k$  seinen Werth und reducirt auf  $P$ , so er giebt sich

$$43. \quad P = \frac{E W}{l^2} \operatorname{Arccos}^2 \frac{f}{f + \eta_0},$$

wonach sich für dasselbe  $\eta_0$  verschiedene  $P$  ergeben. So wird z. B. für  $\eta_0 = a$   $P = \frac{E W}{l^2} \operatorname{Arccos}^2 \frac{1}{2} = 1,10 \frac{E W}{l^2}$ ,  $27,42 \frac{E W}{l^2}$ ,  $53,73 \frac{E W}{l^2}$  u. s. f. Die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi l}{\operatorname{Arccos} \frac{a}{a + \eta_0}}.$$

Für  $\eta_0 = a$  würde sich z. B.  $\lambda = 6,14 l$ ,  $1,20 l$ ,  $0,86 l$  u. s. f. ergeben.

**§. 178. Beanspruchung.** Substituirt man die Werthe für  $\eta_0$ ,  $\eta$  in den Ausdruck für  $M$ , so er giebt sich

$$44. \quad M = P f \frac{\operatorname{cosk}(1-x)}{\operatorname{cosk} l},$$

wonach  $M$  zum Maximum für  $x = 1$  wird und zwar ist

$$45. \quad \max M = \frac{P f}{\operatorname{cosk} l}.$$

Die Schubspannungen sind hier gegen die Normalspannungen äusserst klein, weil nach §. 60 hier die Transversalkraft  $Q$  äusserst klein ist. Demnach sind hier die Festigkeitsbedingungen 71 (§. 84) anzuwenden. Hiernach wird, wenn die Biegung in der Ebene der  $xy$  stattfindet oder wenn  $g = 0$  ist,

$$46. \quad \begin{cases} K = P \left( \frac{f a}{W \operatorname{cosk} l} - \frac{1}{F} \right), \\ \mathfrak{R} = P \left( \frac{f a}{W \operatorname{cosk} l} + \frac{1}{F} \right), \end{cases}$$

wobei diejenige Gleichung maassgebend ist, welche das kleinste  $P$  giebt.

Wenn  $g$  nicht  $= 0$  ist, so dass also die Biegung nicht in der Ebene der  $xy$  stattfinden kann, so ist die Normalspannung  $N$  im Punkte  $v$  des Querschnittes in Folge der Axialkraft und der beiden Biegemomente bezüglich  $-\frac{P}{F}$ ,  $\frac{M v}{W}$ ,  $\frac{M_1 w}{W_1}$ , also in Wirklichkeit  $N = -\frac{P}{F} + \frac{M v}{W} + \frac{M_1 w}{W_1}$ .

Am grössten wird hiernach  $N$  für einen Punkt des Umfanges, für welchen wir  $v = \nu$ ,  $w = \omega$  setzen wollen. Die Festigkeitsbedingungen sind alsdann

$$47. \quad \begin{cases} K = P \left( \frac{f \nu}{W \cos kl} + \frac{g \omega}{W_1 \cos k_1 l} - \frac{1}{F} \right), \\ \mathfrak{R} = P \left( \frac{f \nu}{W \cos kl} + \frac{g \omega}{W_1 \cos k_1 l} + \frac{1}{F} \right). \end{cases}$$

Es lässt sich wie im §. 67 leicht nachweisen, dass die neutrale Axe mit der Axe der  $w$  einen Winkel  $\varphi$  bildet, für welchen

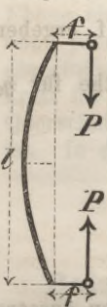
$$\tan \varphi = \frac{W g \cos kl}{W_1 f \cos k_1 l}$$

ist. Da nach §. 67 die Spannung in einer Parallelen zur neutralen Axe constant ist und die Spannung proportional der Entfernung von der neutralen Axe zunimmt, so wird die grösste Spannung in dem Punkte eintreten, in welchem eine Parallele zur neutralen Axe den Umfang des Querschnittes berührt. Beim Rechtecke ist dieser Punkt stets eine Ecke.

Diese Festigkeitsformeln haben den Nachtheil, dass sie sich nach Substitution der Werthe von  $k$ ,  $k_1$  weder auf die Tragkraft  $P$ , noch auf die Querschnittsdimensionen reduciren lassen, so dass man zur Auflösung eine der bekannten Näherungsmethoden anwenden muss.

Näherungsformeln. Bei kurzen Stäben oder wenn  $f$ ,  $g$  gegen die Querschnittsdimensionen gross ist, kann man bei Bestimmung der Momente die Durchbiegung vernachlässigen, also  $M = P f$ ,  $M_1 = P g$  setzen, was auf dasselbe hinausläuft, als wenn man  $kl = 0$ ,  $k_1 l = 0$  also  $\cos kl = \cos k_1 l = 1$  setzt. Die Festigkeitsbedingungen werden alsdann einfacher

Fig. 48.



$$48. \quad \begin{cases} K = P \left( \frac{f \nu}{W} + \frac{g \omega}{W_1} + \frac{1}{F} \right), \\ \mathfrak{R} = P \left( \frac{f \nu}{W} + \frac{g \omega}{W_1} - \frac{1}{F} \right). \end{cases}$$

Die hier entwickelten Formeln lassen sich auch bei einfacher Durchbiegung auf den Fall eines an beiden Enden freien Stabes (Fig. 48) anwenden, indem man  $\frac{1}{2} l$  für  $l$  setzt.

Beispiel: Beim Rechteck mit den Seiten  $b$ ,  $h$  wird, wenn  $b$ ,  $h$  bezüglich die Richtung der  $v$ ,  $w$  haben,  $W = \frac{1}{12} b h^3$ ,  $W_1 = \frac{1}{12} b^3 h$ ,  $F = b h$ ,  $\nu = \frac{1}{2} h$ ,  $\omega = \frac{1}{2} b$ , mithin nach den Näherungsformeln

$$K, \mathfrak{R} = \frac{P}{F} \left( b \frac{f}{h} + b \frac{g}{b} \mp 1 \right).$$

Für  $g = 0$ ,  $f = \frac{1}{2} h$ , wenn also  $P$  in der Mitte der Seite  $b$  wirkt, wird  $P = \frac{1}{2} K F$  oder  $P = \frac{1}{4} \mathfrak{R} F$ , also die Tragkraft nur bezüglich  $\frac{1}{2}$  oder  $\frac{1}{4}$  der Zug- oder Druckfestigkeit. Wenn  $f = \frac{1}{2} h$ ,  $g = \frac{1}{2} b$  ist, wenn also  $P$  in einer Ecke wirkt, so wird sogar  $P = \frac{1}{5} K F$  oder  $P = \frac{1}{7} \mathfrak{R} F$ .

Beim Kreise mit dem Durchmesser  $d$  ist  $W = \frac{\pi}{64} d^4$ ,  $F = \frac{\pi}{4} d^2$ , also, wenn wir hier  $g=0$  setzen,

$$K, \mathfrak{K} = \frac{P}{F} \left( 8 \frac{f}{d} + 1 \right).$$

Für  $f = \frac{1}{2} d$  wird  $P = \frac{1}{3} KF$  oder  $P = \frac{1}{5} \mathfrak{K} F$ . In Wirklichkeit ist der Durchbiegung wegen  $P$  noch kleiner, so dass die Excentricität der Kraft einen nicht unbedeutenden Einfluss auf die Beanspruchung ausübt.

### §. 179. Empirische Formeln für die Knickfestigkeit.

Die entwickelten Formeln für die Knickfestigkeit sind natürlich nur dann anwendbar, wenn man die Lage des Angriffspunktes der Kraft genau kennt. In der Praxis ist dies aber nicht immer der Fall, weil sich die Lage des Angriffspunktes bei der Durchbiegung ändert, wobei seine Lage durch die meist nicht in Rechnung zu bringenden Verdrückungen der Stabenden und der anstossenden Theile, gegen welche sich der Stab stemmt, richtet. Man hat daher meist lieber empirische Formeln angewendet. Eine solche lässt sich in folgender Weise aufstellen.

Bei sehr langen Stäben ist die Excentricität  $f$  gegen die Abweichung  $\eta_0$  nur klein, also in 43 (§. 177)  $\frac{f}{f + \eta_0}$  so klein, dass wir für einen an beiden Enden freien Stab  $P = \frac{4EW}{l^2} \text{Arccos}^2 0 = \frac{EW\pi^2}{l^2}$  oder allgemein bei  $n$  facher Sicherheit  $P = \frac{1}{n} A \frac{EW}{l^2} = A \mathfrak{K} F \cdot \frac{EW}{l^2 \mathfrak{C} F}$  setzen können, worin  $\mathfrak{C}$  den Festigkeitscoefficient,  $\mathfrak{K}$  den Sicherheitscoefficient für Druck bedeutet und  $A$  ein von der Befestigung der Enden abhängender Coefficient ist. Bei sehr kurzen Stäben dagegen ist, vorausgesetzt, dass der Druck auf die Endfläche gleichmässig vertheilt wird,  $P = \mathfrak{K} F$ . Beide Formeln enthält aber der Ausdruck

$$49. P = \mathfrak{K} F \frac{A E W}{\mathfrak{C} F l^2 + A E W},$$

da sich hiernach  $P$  dem Werthe  $\mathfrak{K} F$  um so mehr nähert, je kleiner  $l$  ist, und dem Werthe  $A \frac{EW}{l^2}$  um so mehr, je grösser  $l$  ist.  $A$  ist hierbei durch Versuche zu bestimmen. Hiernach erscheint  $P$  als ein gewisser Theil der Druckfestigkeit  $\mathfrak{K} F$ , der um so kleiner ist, je grösser die Länge  $l$  gegen die Querschnittsdimensionen ist.

Solche Versuche sind besonders, obwohl in noch ungenügendem Maasse, von Hodgkinson angestellt. Nach diesen Versuchen ist sehr nahe  $A = 20$ , wenn ebene Endflächen vorhanden sind. Die von Hodgkinson angegebenen empirischen Formeln sind nicht ganz rationell gebildet und weniger allgemein. Die Versuchsergebnisse stimmen aber mit der Formel 49 gut überein.

Das Verhältniss  $\frac{E}{\mathfrak{C}}$  ist für Holz = 230, für Schmiedeeisen = 560 und für Gusseisen = 130 zu setzen.

Hiernach wird z. B. für eine quadratische hölzerne Säule mit der Dicke  $h$ , da  $F = h^2$ ,  $W = \frac{1}{12} h^4$  ist,

$$P = \mathfrak{F} F \frac{383 h^2}{l^2 + 383 h^2},$$

wonach sich für einige Verhältnisse von  $\frac{l}{h}$  ergibt:

$$l = 0 \quad 10 \quad 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 100 \text{ . h.}$$

$$P = 1,000 \quad 0,793 \quad 0,489 \quad 0,299 \quad 0,193 \quad 0,133 \quad 0,037 \text{ . } \mathfrak{F} F.$$

**§. 180. Gezogener Stab, welcher an einem Ende eingespannt ist.** Als Anfang der  $x$  wählen wir wieder das freie Ende A (Fig. 49). Nach 1 (§. 168) wird das Biegemoment

$$\text{Fig. 49.} \quad 50. \quad M = -P(f + \eta_0 - \eta), \quad M_1 = P(g + \xi_0 - \xi).$$

Für die Durchbiegung in der Ebene der  $xy$  wird daher nach 2 (§. 168)

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = -k^2(a + \eta_0 - \eta).$$

Die Integration giebt:

$$\eta = f + \eta_0 + A e^{kx} + B e^{-kx},$$

wenn  $l$  die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Für  $x = 0$  wird  $\eta = \eta_0$ , daher  $0 = f + A + B$ . Für  $x = l$  wird  $\eta = 0$ , also  $0 = f + \eta_0 + A e^{kl} + B e^{-kl}$  und  $\frac{d\eta}{dx} = 0$ , mithin  $0 = A e^{kl} - B e^{-kl}$ . Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$A = -\frac{f e^{-kl}}{e^{kl} + e^{-kl}}, \quad B = -\frac{f e^{kl}}{e^{kl} + e^{-kl}},$$

$$51. \quad \eta_0 = -f \frac{e^{kl} + e^{-kl} - 2}{e^{kl} + e^{-kl}},$$

daher wird

$$52. \quad \eta = -f \frac{e^{k(1-x)} + e^{-k(1-x)} - 2}{e^{kl} + e^{-kl}}.$$

Bei wachsendem  $P$  nähert sich  $e^{kl}$  der Grenze  $\infty$ ,  $e^{-kl}$  der Grenze  $0$ , daher  $\eta_0$  der Grenze  $-f$ , so dass stets  $\eta_0 < -f$  ist. Die Gleichung 51 gestattet eine Reduction auf  $P$ . Multiplicirt man nämlich mit  $e^{kl} + e^{-kl}$  und sodann noch mit  $e^{kl}$ , so ergibt sich

$$e^{2kl} - \frac{2f}{f + \eta_0} e^{kl} + 1 = 0,$$

$$e^{kl} = \frac{f + \sqrt{-\eta_0(2f + \eta_0)}}{f + \eta_0}.$$

Für die Wurzel ist das Zeichen  $+$  zu wählen, da sich sonst für  $f = 0$   $e^{kl} = -1$  ergeben würde, während sich  $kl = 0$ , also  $e^{kl} = +1$  ergeben muss. Reducirt man auf  $kl$  und setzt für  $k$  seinen Werth, so ergibt sich

$$53. \quad P = \frac{E W}{l^2} \left( \lognat \frac{f + \sqrt{-\eta_0(2f + \eta_0)}}{a + \eta_0} \right)^2.$$

Verwandelt man die Exponentialgrößen in 51 in Reihen, so ergibt sich, wenn man für  $k$  seinen Werth setzt,

$$54. \quad \eta_0 = -\frac{P l^2 f}{2 E W} \left[ 1 - \frac{5 P l^2}{12 E W} + \frac{61}{360} \left( \frac{P l^2}{E W} \right)^2 - \dots \right].$$

Wenn  $P$  senkrecht zur Axe des Stabes wirkte, so würde die Abweichung  $\eta$  nach 4 (§. 94)  $\eta = \frac{P l^3}{3 E W}$ , mithin ist annähernd für kleine  $P$   $\eta_0 : \eta = 3 f : 2 l$ .

**§. 181. Beanspruchung.** Substituirt man die Ausdrücke für  $\eta_0$  und  $\eta$  in den Ausdruck 50 für  $M$ , so ergibt sich

$$55. \quad M = -P f \frac{e^{k(1-x)} + e^{-k(1-x)}}{e^{k1} + e^{-k1}}.$$

Ein analytisches Maximum hat  $M$  für  $x$ , welche zwischen 0 und 1 liegen, nicht. In Wirklichkeit wird  $M$  am grössten für  $x = 0$ , so dass  $\max M = -P f$  ist. Daher ist die Festigkeitsbedingung

$$56. \quad \begin{cases} K = P \left( \frac{f a}{W} + \frac{1}{F} \right), \\ \mathfrak{K} = P \left( \frac{f a}{W} + \frac{1}{F} \right). \end{cases}$$

Wenn  $g$  nicht  $= 0$  ist, so wird die Festigkeitsbedingung nach dem in §. 178 Gesagten:

$$57. \quad \begin{cases} K = P \left( \frac{f v}{W} + \frac{g \omega}{W_1} + \frac{1}{F} \right), \\ \mathfrak{K} = P \left( \frac{f v}{W} + \frac{g \omega}{W_1} - \frac{1}{F} \right). \end{cases}$$

Als Beispiele können die in §. 178 angeführten Beispiele dienen, wenn man  $K$  und  $\mathfrak{K}$  vertauscht. Anwendung bei Hängesäulen, Hängestangen u. s. w.

## XX. Kapitel.

### Gleichzeitige Belastung durch Axial- und Transversalkräfte.

**§. 182. Formänderung im Allgemeinen.** Wir wollen hier voraussetzen, dass die äusseren Axial- und Transversalkräfte in einer und derselben Ebene wirken, so dass in §. 168  $g = 0$  zu setzen ist. Ausserdem wollen wir die Rechnung nur für den Fall eines constanten Querschnittes durchführen. Die Differenzialgleichung der deformirten Axe ist alsdann

$$58. \quad \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{M}{E W} \left( 1 \pm \frac{P}{E F} \right) = \frac{\mathfrak{M} \mp P(f + \eta_0 - \eta)}{E W} \left( 1 \pm \frac{P}{E F} \right),$$

worin, um es nochmals zu erwähnen,  $\mathfrak{M}$  das von den äusseren Transversalkräften erzeugte Moment bedeutet. Setzen wir zur Abkürzung

$$59. \quad k^2 = \frac{P}{E W} \left( 1 \pm \frac{P}{E F} \right),$$

$$60. \quad f(x) = \frac{\mathfrak{M} \mp P(f + \eta_0)}{E W} \left( 1 \pm \frac{P}{E F} \right),$$

worin  $k$  eine Constante und  $f(x)$  eine bekannte Function von  $x$  ist, so wird

$$61. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} \mp k^2\eta = f(x).$$

Wenn  $P$  ziehend wirkt, so gilt das Vorzeichen  $-$  und das Integral ist alsdann bekanntlich

$$62. \quad \eta = A e^{kx} + B e^{-kx} + \frac{1}{2k} e^{kx} \int f(x) e^{-kx} dx - \frac{1}{2k} e^{-kx} \int f(x) e^{kx} dx.$$

Wenn dagegen  $P$  drückend wirkt, so gilt das Vorzeichen  $+$  und das Integral ist alsdann

$$63. \quad \eta = A \cos kx + B \sin kx \\ - \frac{\cos kx}{k} \int f(x) \sin kx dx + \frac{\sin kx}{k} \int f(x) \cos kx dx.$$

Die eine dieser beiden Formeln geht in die andere über, wenn man  $k\sqrt{-1}$  für  $k$  setzt und sodann die bekannten Formeln zur Umwandlung der Exponentialgrößen und trigonometrischen Functionen mit imaginären Variablen, nämlich  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$  und  $\sin iy = -\frac{1}{2}i(e^y - e^{-y})$ ,  $\cos iy = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ , worin  $i = \sqrt{-1}$ , anwendet.

Ist gleichmässige oder partielle Belastung vorhanden, so kann man einfacher zum Ziele gelangen. Nach 58 und 59 ist nämlich

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{k^2}{P} [\mathfrak{M} \mp P(f + \eta_0 - \eta)].$$

Die noch zweimalige Differenziation giebt, wenn wir  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = z$  setzen und beachten, dass nach 3 (§. 61)  $\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2} = q$ , d. i. gleich der gleichmässigen Last pro Längeneinheit, ist,

$$64. \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{k^2q}{P} \pm k^2z.$$

Wirkt  $P$  ziehend, so ist das Integral dieser Differenzialgleichung

$$z = A k^2 e^{kx} + B k^2 e^{-kx} - \frac{q}{P}.$$

Wirkt dagegen  $P$  drückend, so ist

$$z = A k^2 \sin kx + B k^2 \cos kx + \frac{q}{P}.$$

Setzen wir hierin  $\frac{k^2}{P} [\mathfrak{M} \mp P(f + \eta_0 - \eta)]$  für  $z$  und reduciren auf  $\eta$ , so ergibt sich, wenn  $P$  ziehend wirkt

$$65. \quad \eta = f + \eta_0 + A e^{kx} + B e^{-kx} - \frac{k^2\mathfrak{M} + q}{k^2P},$$

und wenn  $P$  drückend wirkt,

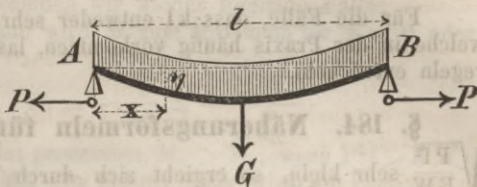
$$66. \quad \eta = f + \eta_0 - A \sin kx - B \cos kx + \frac{k^2\mathfrak{M} - q}{k^2P}.$$

A. Die äussere Axialkraft wirkt ziehend.

§. 183. Der Stab liegt mit beiden Enden auf Stützen und ist in der Mitte und ausserdem gleichmässig belastet.

Fig. 50. Als Anfang der  $x$  wählen wir das eine Ende A. Die in der Mitte wirkende Last sei =  $G$ , der Stützen-  
druck also  $D = \frac{1}{2} G + \frac{1}{2} q l$   
und  $\mathcal{M} = \frac{1}{2} q x^2 - D x$   
 $= -\frac{1}{2} G x - \frac{1}{2} q x (1 - x)$ .  
Daher wird nach 65 (vö-  
riger §.), wenn man  $\eta_0 = 0$   
setzt,

Fig. 50.



$$\eta = f + A e^{kx} + B e^{-kx} + \frac{Gx + qx(1-x)}{2P} - \frac{EWq}{P^2}.$$

Für  $x = 0$  wird  $\eta = 0$  und für  $x = \frac{1}{2} l$  wird  $\frac{d\eta}{dx} = 0$ . Bestimmt man durch diese Bedingungen A und B und setzt die erhaltenen Werthe in die vorige Gleichung ein, so ergibt sich

$$67. \quad \eta = \left( f - \frac{EWq}{P^2} \right) \left( 1 - \frac{e^{\frac{1}{2}k(1-2x)} + e^{-\frac{1}{2}k(1-2x)}}{e^{\frac{1}{2}kl} + e^{-\frac{1}{2}kl}} \right) - \frac{G}{2kP} \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{e^{\frac{1}{2}kl} + e^{-\frac{1}{2}kl}} + \frac{Gx + qx(1-x)}{2P}.$$

Die Senkung  $y$  in der Mitte ist hiernach

$$68. \quad y = \left( f - \frac{EWq}{P^2} \right) \frac{e^{\frac{1}{2}kl} + e^{-\frac{1}{2}kl} - 2}{e^{\frac{1}{2}kl} + e^{-\frac{1}{2}kl}} - \frac{G}{2kP} \frac{e^{kl} - 1}{e^{kl} + 1} + \frac{2Gl + ql^2}{8P}.$$

Als Moment ergibt sich durch die Gleichung  $M = EW \frac{d^2\eta}{dx^2}$ :

$$69. \quad M = \left( \frac{q}{k^2} - Pf \right) \frac{e^{\frac{1}{2}k(1-2x)} + e^{-\frac{1}{2}k(1-2x)}}{e^{\frac{1}{2}kl} + e^{-\frac{1}{2}kl}} - \frac{G}{2k} \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{e^{\frac{1}{2}kl} + e^{-\frac{1}{2}kl}} - \frac{q}{k^2}.$$

Hiernach wird  $M$  zum analytischen Maximum, d. i.  $\frac{dM}{dx} = 0$  für

$$70. \quad x = \frac{1}{2k} \lognat \frac{2(Pfk^2 - q)e^{\frac{1}{2}kl} - Gk}{2(Pfk^2 - q)e^{-\frac{1}{2}kl} - Gk}.$$

Wenn  $G = 0$  ist, so wird hiernach  $M$  zum analytischen Maximum für  $x = \frac{1}{2k} \lognat e^{kl} = \frac{1}{2k} \cdot kl = \frac{1}{2} l$ . Zum wirklichen Maximum kann  $M$  natürlich auch für  $x = 0$  werden. Wenn nicht  $G = 0$  ist, so wird  $M$  zum analytischen Maximum für einen zwischen 0 und  $\frac{1}{2} l$  liegenden Werth von  $x$  oder für einen imaginären Werth von  $x$ . Zum wirklichen Maximum kann, wenn nicht  $G = 0$  ist, auch für  $x = 0$  oder  $x = \frac{1}{2} l$  werden.

Bezeichnen wir die Werthe von  $M$  für  $x = 0$  und  $x = \frac{1}{2}l$  bezüglich mit  $M_0$  und  $M_1$ , so ergibt sich

$$71. \quad \begin{cases} M_0 = -Pf, \\ M_1 = -\frac{G}{2k} \cdot \frac{e^{kl} - 1}{e^{kl} + 1} + \left(\frac{q}{k^2} - Pf\right) \frac{2}{e^{\frac{1}{2}kl} + e^{-\frac{1}{2}kl}} - \frac{q}{k^2}. \end{cases}$$

Für die Fälle, dass  $kl$  entweder sehr klein oder sehr gross ist, und welche in der Praxis häufig vorkommen, lassen sich einfachere Näherungsregeln entwickeln.

#### §. 184. Näherungsformeln für kleine $kl$ . Ist $kl$ d. i.

$\sqrt{\frac{Pl^2}{EW}}$  sehr klein, so ergibt sich durch Verwandlung der Exponentialgrössen der Formel 68 in unendliche Reihen leicht

$$72. \quad \eta = \frac{Gl^3}{48EW} \left(1 - \frac{1}{10} \frac{Pl^2}{EW} + \dots\right) + \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EW} \left(1 - \frac{61}{600} \frac{Pl^2}{EW} + \dots\right) - \frac{Pfl^2}{8EW} \left(1 - \frac{5}{12} \frac{Pl^2}{EW} + \dots\right).$$

Für die Aufstellung der Festigkeitsregeln unterscheiden wir folgende beiden Fälle:

a) Es sei  $G = 0$ . Alsdann wird  $M$  zum Maximum für  $x = 0$  oder  $x = \frac{1}{2}l$  und zwar wird nach 71:

$$73. \quad \begin{cases} M_0 = -Pf, \\ M_1 = -\frac{1}{8} q l^2 \left(1 - \frac{5}{48} \frac{Pl^2}{EW} + \dots\right) - Pf \left(1 - \frac{1}{8} \frac{Pl^2}{EW} + \dots\right). \end{cases}$$

Ist  $f$  positiv, d. h. liegt der Angriffspunkt von  $P$  unter dem Schwerpunkte der Endfläche, so ist der absolute Werth von  $M_1$  grösser, als der von  $M_0$ . Wenn aber  $f$  negativ ist, so kann auch der absolute Werth von  $M_0$  grösser werden, als der von  $M_1$  und zwar nahezu, wenn  $16Pf > ql^2$  ist. Die Festigkeitsgleichungen sind hiernach leicht aufzustellen.

b) Es sei  $q = 0$ . Das  $x$ , für welches  $M$  zum Maximum wird, ist nach 70  $< 0$ , wenn  $Pfk(e^{\frac{1}{2}kl} - e^{-\frac{1}{2}kl}) < G$  ist, oder, da für kleine  $kl$  sehr nahe  $e^{\frac{1}{2}kl} - e^{-\frac{1}{2}kl} = kl$  ist,  $Pfk^2l < G$ , d. i. nach Einsetzung des Werthes von  $k^2$   $P^2fl < GEW$  oder  $\frac{Gl}{Pf} > \frac{Pl^2}{EW}$  oder  $> k^2l^2$ . Da wir  $kl$  als sehr klein voraussetzen, so wird diese Bedingung stets erfüllt sein.  $M$  wird daher nur für  $x = 0$  und  $x = \frac{1}{2}l$  zum Maximum und zwar wird nach 72

$$74. \quad \begin{cases} M_0 = -Pf, \\ M_1 = -\frac{1}{4} Gl \left(1 - \frac{1}{12} \frac{Pl^2}{EW} + \dots\right) - Pf \left(1 - \frac{1}{8} \frac{Pl^2}{EW} + \dots\right). \end{cases}$$

Der absolute Werth von  $M_0$  wird nur grösser, als der von  $M_1$ , wenn  $f$  negativ und ausserdem nahezu  $8Pf > Gl$  ist.

Anwendung bei Anker, Balken, die einem Zuge ausgesetzt sind, Gitterstäben u. s. w.

§. 185. **Näherungsformeln für grosse  $kl$ .** Ist  $kl$  sehr gross, so können wir  $e^{-\frac{1}{2}kl}$  und  $e^{-kl} = 0$  setzen. Alsdann aber wird nach 68:

$$75. \quad \eta = f + \frac{G}{4P} \left(1 - 2\sqrt{\frac{EW}{P}}\right) + \frac{q}{8P} \left(1^2 - 8\frac{EW}{P}\right).$$

Für die Festigkeit unterscheiden wir wieder folgende Fälle:

a) Es sei  $G = 0$ . Alsdann wird  $M$  zum Maximum für  $x = 0$  oder  $x = \frac{1}{2}l$  und zwar ist nach 71:

$$76. \quad M_0 = -Pf, \quad M_1 = -\frac{q}{k^2} = -\frac{EWq}{P}.$$

Hiernach wird,  $M_0$  und  $M_1$  absolut genommen,  $M_0 > M_1$ , wenn  $P^2 f > EWq$  ist. Bei kleinem  $f$  wird  $M_1 > M_0$ . In diesem Falle wird die Festigkeitsbedingung, wenn wir nur eine Trennung durch Zerreißen voraussetzen, was wegen des grossen  $P$  stets eintreten wird,

$$77. \quad K = \frac{Eq a}{P} + \frac{P}{F},$$

$$78. \quad q = P \cdot \frac{KF - P}{EF a}.$$

Die Länge des Stabes ist also ganz ohne Einfluss. Bei variablem  $P$  wird  $q$  zum Maximum, wenn

$$P = \frac{1}{2}KF,$$

d. h. wenn die Axialkraft die Hälfte der Zugfestigkeit ist.

b) Es sei  $q = 0$ . Nach 70 wird  $M$  zum analytischen Maximum annähernd für

$$79. \quad x = \frac{1}{2k} \operatorname{lognat} \frac{2Pfk - G}{G} e^{\frac{1}{2}kl}.$$

Für kleine  $f$  wird  $x$  imaginär, also  $M$  zum Maximum für  $x = 0$  und  $x = \frac{1}{2}l$  und zwar ist nach 72:

$$80. \quad M_0 = -Pf, \quad M_1 = -\frac{G}{2k} = -\frac{G}{2}\sqrt{\frac{EW}{P}}.$$

Es wird,  $M_0$  und  $M_1$  absolut genommen,  $M_0 > M_1$ , wenn  $4P^3 f^2 > EWG^2$ . Bei kleinem  $f$  wird  $M_1 > M_0$  und alsdann wird die Festigkeitsbedingung, wiederum nur eine Trennung durch Zerreißen vorausgesetzt,

$$81. \quad K = \frac{Ga}{2}\sqrt{\frac{E}{PW}} + \frac{P}{F},$$

$$82. \quad G = 2\sqrt{\frac{PW}{P}} \frac{KF - P}{Fa}.$$

Bei variablem  $P$  wird  $G$  zum Maximum für

$$P = \frac{1}{3}KF.$$

Die Länge des Stabes ist auch hier ohne Einfluss.

Anwendung vorzüglich bei Zug- oder Spannstäben, Ankern, Schliessen etc. Setzen wir z. B. eine Spannstange mit kreisförmigem Querschnitte voraus und

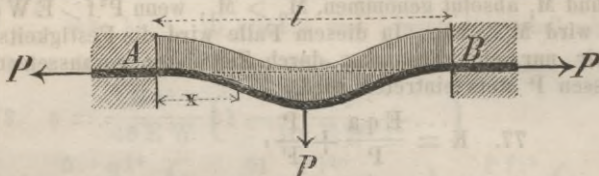
bezeichnen die Dicke mit  $d$ , das Eigengewicht der Volumeneinheit mit  $\gamma$ , so ist  $F = \frac{\pi}{4} d^2$ ,  $W = \frac{\pi}{64} d^4$ ,  $q = F \gamma = \frac{\pi}{4} \gamma d^2$ , mithin nach 78:

$$\frac{E \gamma \pi}{8 P} d^5 - K d^2 - \frac{4 P}{\pi} = 0;$$

aus welcher Gleichung sich  $d$  durch eine der bekannten Näherungsregeln bestimmen lässt.

### §. 186. Stab mit eingespannten Enden, welcher in der Mitte und ausserdem gleichmässig belastet ist. (Fig. 51).

Fig. 51.



Wir denken uns den Stab in einem Querschnitte dicht an der Einspannung durchschnitten und bringen für das abgeschnittene in der Einspannung steckende

Stück die auf die Schnittfläche wirkenden Spannungen an. Die horizontale Resultante derselben ist gleich der Axialkraft  $P$ ; der Abstand der Resultante von der Axe der  $x$  sei  $f$ . Die Verticalcomponente dieser Spannungen ist  $= \frac{1}{2} (g + q l)$ . Wir können daher die für den vorigen Fall entwickelten Formeln direkt anwenden, wenn wir nur  $f$  so bestimmen, dass für  $x = 0$  und  $x = l$   $\frac{d\eta}{dx} = 0$  wird, eine horizontale Einspannung vorausgesetzt. Nach Gleichung 67 (§. 183) ergibt sich, wenn wir  $\frac{d\eta}{dx} = 0$  für  $x = 0$  setzen und auf  $f$  reduciren,

$$83. \quad f = \frac{E W q}{P^2} - \frac{G}{2 K P} \frac{e^{\frac{1}{2} k l} - 1}{e^{\frac{1}{2} k l} + 1} - \frac{q l}{2 K P} \frac{e^{k l} + 1}{e^{k l} - 1}.$$

Dies in 68 eingesetzt, giebt nach gehöriger Reduction als Abweichung in der Mitte des Stabes

$$84. \quad y = \frac{2 G + q l}{2 K P} \left( \frac{k l}{4} - \frac{e^{\frac{1}{2} k l} - 1}{e^{\frac{1}{2} k l} + 1} \right).$$

Hiernach erzeugt eine in der Mitte wirkende isolirte Last eine doppelt so grosse Senkung, als eine gleich grosse gleichmässige Belastung.

Setzt man den Werth für  $f$  in den Ausdruck 69, so ergibt sich als Moment nach gehöriger Reduction:

$$85. \quad M = \frac{G}{2 k} \frac{e^{\frac{1}{2} k (1-2x)} - e^{kx}}{e^{\frac{1}{2} k l} + 1} + \frac{q l}{2 k} \frac{e^{\frac{1}{2} k (1-2x)} + e^{-\frac{1}{2} k (1-2x)}}{e^{\frac{1}{2} k l} - e^{-\frac{1}{2} k l}} - \frac{q}{k^2}.$$

Differenziirt man nach  $x$  und setzt den Differenzialquotienten gleich Null, so ergibt sich nach gehöriger Reduction, dass  $M$  zum Maximum wird für

$$86. \quad x = \frac{1}{2 k} \log \text{nat} \frac{q l e^{k l} - G e^{\frac{1}{2} k l} (e^{\frac{1}{2} k l} - 1)}{q l + G (e^{\frac{1}{2} k l} - 1)}.$$

Wenn  $G = 0$  ist, so wird hiernach  $x = \frac{1}{2k} \log \operatorname{nat} e^{kl} = \frac{1}{2k} kl = \frac{1}{2} l$ .

Wenn  $q = 0$  ist, so wird  $x = \frac{1}{2k} \log \operatorname{nat} (-e^{\frac{1}{2}kl}) = \frac{1}{4} l + \log \operatorname{nat} \sqrt{-1}$ , d. i. imaginär. Zum wirklichen Maximum wird daher  $M$  in jedem dieser beiden Fälle für  $x = 0$  und  $x = l$ . Bezeichnen wir die betreffenden Werthe von  $M$  wieder mit  $M_0, M_1$ , so wird

$$87. \quad \begin{cases} M_0 = \frac{G e^{\frac{1}{2}kl} - 1}{2k e^{\frac{1}{2}kl} + 1} - \frac{ql e^{kl} + 1}{2k e^{kl} - 1} - \frac{q}{k^2}, \\ M_1 = -\frac{G e^{\frac{1}{2}kl} - 1}{2k e^{\frac{1}{2}kl} + 1} + \frac{ql}{2k e^{\frac{1}{2}kl} + e^{-\frac{1}{2}kl}} - \frac{q}{k^2}. \end{cases}$$

Wenn keine gleichmässige Belastung vorhanden ist, so wird hiernach  $M_0 = -M_1$ .

Wir wollen nun wiederum für die beiden Fälle, dass  $kl$  entweder klein oder gross ist, Näherungsformeln ermitteln.

**§. 187. Näherungsformeln für kleine  $kl$ .** Durch Reihenverwandlung des Ausdruckes 84 ergibt sich als Senkung in der Mitte

$$88. \quad \eta = \frac{(2G + ql)^3}{384 EW} \left( 1 - \frac{Pl^2}{40 EW} + \frac{17 P^2 l^4}{26880 EW} - \dots \right).$$

Die Reihenverwandlung von 87 gibt als grösste Momente

$$89. \quad \begin{cases} M_0 = +\frac{Gl}{8} \left( 1 - \frac{Pl^2}{16 EW} + \dots \right) + \frac{ql^2}{12} \left( 1 - \frac{Pl^2}{60 EW} + \dots \right), \\ M_1 = -\frac{Gl}{8} \left( 1 - \frac{Pl^2}{16 EW} + \dots \right) - \frac{ql^2}{24} \left( 1 - \frac{7Pl^2}{240 EW} + \dots \right), \end{cases}$$

wonach sich nun leicht die Festigkeitsbedingungen aufstellen lassen. Im Allgemeinen ist stets  $M_0 > -M_1$ ; nur wenn  $q = 0$  ist, so wird  $M_0 = -M_1$ .

**§. 188. Näherungsformeln für grosse  $kl$ .** Für sehr grosse  $kl$  wird sehr nahe  $e^{\frac{1}{2}kl} - 1 = e^{\frac{1}{2}kl} + 1$ , daher ist nach 84 die Senkung in der Mitte annähernd

$$\eta = \frac{2G + ql}{2KP} \left( \frac{kl}{4} - 1 \right),$$

oder nach Einsetzung des Werthes von  $k$

$$90. \quad \eta = \frac{(2G + ql)l}{8P} \left( 1 - 4 \sqrt{\frac{EW}{Pl^2}} \right).$$

Als grösste Momente ergeben sich nach 87 annähernd

$$91. \quad \begin{cases} M_0 = \frac{G + ql}{2k} - \frac{q}{k^2} = \frac{G + ql}{2} \sqrt{\frac{EW}{P}} - \frac{EWq}{P}, \\ M_1 = -\frac{G}{2k} - \frac{q}{k^2} = -\frac{G}{2} \sqrt{\frac{EW}{P}} - \frac{EWq}{P}. \end{cases}$$

Ist nur eine isolirte Last vorhanden, so wird

$$92. M_0 = -M_1 = \frac{G_1}{2} \sqrt{\frac{E W}{P}}$$

Eben so gross ergab sich in 80 (§. 185) das grösste Moment für einen an den Enden nur auf Stützen ruhenden Stab, so dass hier durch die Einspannung nichts gewonnen wird.

Wenn eine isolirte Last nicht vorhanden ist, so wird

$$93. M_0 = \frac{q l}{2} \sqrt{\frac{E W}{P}} - \frac{E W q}{P}, \quad M_1 = -\frac{E W q}{P}$$

Hiernach wird  $M_0 > -M_1$ , wenn  $P l^2 > 4 E W$  oder  $k^2 l^2 > 4$ , d. i.  $kl > 2$  ist. Da wir aber  $kl$  als sehr gross voraussetzen, so ist diese Bedingung erfüllt, also  $M_0 > -M_1$ . Nach 80 (§. 185) ist  $M_1$  ebenso gross, als das grösste Moment, wenn keine Einspannung vorhanden ist (für kleine  $f$ ). Daher ist das grösste Moment bei eingespannten Enden grösser, als bei nicht eingespannten.

### §. 189. Continuirlicher Stab mit zwei gleichen Feldern.

Die in §. 183 entwickelten Formeln behalten auch ihre Gültigkeit, wenn



Fig. 52.

der gleichmässig belastete Stab auf drei gleich weit von einander abstehenden Stützen liegt (Figur 52), nur ist alsdann für  $G$  der negative Stützendruck  $D_1$  auf die mittlere Stütze

und für  $l$  die Entfernung  $2l$  der äusseren Stützen zu setzen. Der Stützendruck  $D_1$  bestimmt sich dabei durch die Bedingung, dass  $y = 0$  wird, wenn wir eine gleiche Höhenlage aller drei Stützen voraussetzen. Wenn wir nur den Fall voraussetzen, dass  $f = 0$  ist, so ergibt sich aus 68 (§. 183), wenn wir  $f = 0$ ,  $y = 0$ ,  $G = -D_1$  und  $2l$  für  $l$  setzen,

$$94. D_1 = \frac{q \cdot 2 (e^{kl} + e^{-kl} - 2) - k^2 l^2 (e^{kl} + e^{-kl})}{k (e^{kl} - e^{-kl} - kl (e^{kl} + e^{-kl}))}$$

Für kleine  $kl$  ergibt sich durch Reihenverwandlung

$$95. D_1 = \frac{5}{4} q l \left( 1 - \frac{P l^2}{150 E W} + \dots \right)$$

und für grosse  $kl$ , wenn wir annähernd  $e^{-kl} = 0$  setzen, und 2 gegen  $e^{kl}$  vernachlässigen,

$$96. D_1 = \frac{q k^2 l^2 - 2}{k (kl - 1)} = \frac{q}{P} \frac{P l^2 - 2 E W}{\sqrt{P l^2} - \sqrt{E W}}$$

Eine weitere Behandlung ist nach §. 183—184 leicht möglich.

### B. Die Axialkraft wirkt drückend.

**§. 190. Allgemeines.** Die unter A entwickelten Formeln gelten natürlich auch für eine drückend wirkende Axialkraft, wenn man  $-P$  für  $P$ , also  $k \sqrt{-1}$  für  $k$  setzt. Die Exponentialgrössen mit imaginären

Variablen sind alsdann nach §. 182 in trigonometrische Funktionen mit reellen Variablen zu verwandeln. Die Näherungsregeln für ein kleines  $kl$  können hier bei Vertauschung von  $P$  mit  $-P$  direkt angewendet werden. Die Näherungsformeln für ein grosses  $kl$  haben aber hier keine Giltigkeit, da für kleinere  $P$ , als dasjenige, welches ein Zerknicken herbeiführt,  $kl$  nicht als sehr gross angenommen werden kann.

**§. 191. Stab, welcher gleichmässig und ausserdem in der Mitte belastet ist und mit den Enden auf Stützen liegt.** (Fig. 53). Setzen wir in dem Ausdrucke 67 (§. 183)  $ik$  für  $k$  (wobei  $i = \sqrt{-1}$ ) und sodann  $e^{iy} + e^{-iy} = 2 \cos y$ ,  $e^{iy} - e^{-iy} = 2i \sin y$ , so ergibt sich als Abweichung

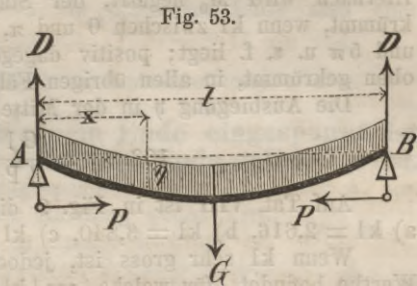


Fig. 53.

$$97. \quad \eta = \left( \frac{E W q}{P^2} - f \right) \left( \frac{\cos k \left( \frac{1}{2} l - x \right)}{\cos \frac{1}{2} kl} - 1 \right) + \frac{G}{2 k P} \frac{\sin kx}{\cos \frac{1}{2} kl} - \frac{Gx + qx(1-x)}{2P}.$$

Hiernach ist die Senkung  $\eta$  in der Mitte

$$98. \quad \eta = \left( \frac{E W q}{P^2} - f \right) \left( \sec \frac{1}{2} kl - 1 \right) + \frac{G}{2 k P} \tan \frac{1}{2} kl - \frac{(2G + ql)l}{8P}.$$

Als Moment ergibt sich

$$99. \quad M = E W \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \left( P f - \frac{q}{k^2} \right) \frac{\cos k \left( \frac{1}{2} l - x \right)}{\cos \frac{1}{2} kl} - \frac{G \sin kx}{2 k \cos \frac{1}{2} kl} + \frac{q}{k^2}.$$

Ist  $kl = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ , so wird  $\eta = \infty$ ,  $M = \infty$ . Alsdann kann kein Gleichgewicht bestehen, d. h. der Stab zerbricht.

Unter der Voraussetzung, dass  $f = 0$  ist, wollen wir folgende spezielle Fälle untersuchen.

**§. 192. Belastung durch eine isolirte Last.** Wenn nur die isolirte Last  $G$  vorhanden, also  $q = 0$  ist, so wird nach 97 und 99:

$$100. \quad \eta = \frac{G l}{2 P} \left( \frac{\sin kx}{kl \cos \frac{1}{2} kl} - \frac{x}{l} \right),$$

$$101. \quad M = - \frac{G}{2 k} \frac{\sin kx}{\cos \frac{1}{2} kl}.$$

Wendepunkte finden statt für  $M = 0$ , d. i.  $\sin kx = 0$  oder  $kx = n\pi$ , wenn  $n$  eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet. Da  $x < \frac{1}{2} l$  sein muss, so finden auf der einen Seite 1, 2, 3, ... im Ganzen also 2, 4, 6, ... Wendepunkte statt, je nachdem  $kl$  bezüglich zwischen 0 und  $2\pi$ ,  $2\pi$  und  $4\pi$ ,  $4\pi$  und  $6\pi$  u. s. w. liegt.

$M$  wird zum Maximum für  $\cos kx = 0$ , also für  $kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ . Ausserdem kann  $M$  noch zum Maximum für  $x = \frac{1}{2} l$  werden, da sich hier

das Gesetz von  $M$  ändert. Ist  $kl < \pi$ , so wird schon für  $kx = \frac{\pi}{2}$   $x > \frac{1}{2}l$ , so dass in diesem Falle  $M$  nur für  $x = \frac{1}{2}l$  zum Maximum wird. Für  $x = \frac{1}{2}l$  aber wird das Moment

$$102. M_0 = -\frac{G}{2k} \tan \frac{1}{2}kl.$$

Hiernach wird  $M_0$  negativ, der Stab in der Mitte also nach unten gekrümmt, wenn  $kl$  zwischen  $0$  und  $\pi$ , zwischen  $2\pi$  und  $3\pi$ , zwischen  $4\pi$  und  $5\pi$  u. s. f. liegt; positiv dagegen, der Stab in der Mitte also nach oben gekrümmt, in allen übrigen Fällen.

Die Ausbiegung  $y$  in der Mitte wird nach 98:

$$103. y = \frac{Gl}{4P} \left( \frac{\tan \frac{1}{2}kl}{\frac{1}{2}kl} - 1 \right).$$

Auf Taf. VIII ist in Fig. 9 die elastische Linie für die vier Fälle a)  $kl = 2,616$ , b)  $kl = 3,840$ , c)  $kl = 9,250$ , d)  $kl = 9,600$  dargestellt.

Wenn  $kl$  sehr gross ist, jedoch sich nicht in der Nähe derjenigen Werthe befindet, für welche  $\cos \frac{1}{2}kl = 0$  wird, so ist in 100 das erste Glied gegen das zweite sehr klein, also nahezu  $\eta = -\frac{Gx}{2P}$ , die elastische Linie also eine Gerade (Taf. VIII Fig. 9, e).

**§. 193. Gleichmässige Belastung.** Wenn nur die gleichmässige Belastung vorhanden ist (Fig. 54), so wird nach 97 und 99:

$$104. \eta = \frac{q}{k^2 P} \left[ \frac{\cos k(\frac{1}{2}l - x)}{\cos \frac{1}{2}kl} - 1 \right] - \frac{qx(1-x)}{2P},$$

$$105. M = \frac{q}{k^2} \left[ 1 - \frac{\cos k(\frac{1}{2}l - x)}{\cos \frac{1}{2}kl} \right].$$

Fig. 54.



Wendepunkte finden statt für  $\cos \frac{1}{2}kl = \cos k(\frac{1}{2}l - x)$ , d. i. für  $k(\frac{1}{2}l - x) = \frac{1}{2}kl - 2n\pi$  oder  $k(\frac{1}{2}l - x) = -\frac{1}{2}kl + 2(n+1)\pi$ , wenn  $n$  eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, d. i. für

$kx = 2n\pi$  und  $kx = kl - 2(n+1)\pi$ , worin  $n$  nur positiv zu nehmen ist,

da  $kx$  nicht negativ und nicht  $> kl$  sein kann. Es ergeben sich zwei Wendepunkte (für  $x = 0$  und  $x = l$ ), wenn  $kl < 2\pi$ , 4 Wendepunkte ( $x = 0$ ,  $x = \frac{2\pi}{k}$ ,  $x = l - \frac{2\pi}{k}$ ,  $x = l$ ), wenn  $2\pi < kl < 4\pi$  ist u. s. f.

Zum Maximum wird  $M$  für  $\sin k(\frac{1}{2}l - x) = 0$ , d. i. für  $k(\frac{1}{2}l - x) = n\pi$  oder  $kx = \frac{1}{2}kl - n\pi$ , wobei  $n$  positiv oder negativ zu nehmen ist. Ist  $kl < 2\pi$ , so wird  $M$  nur für  $x = \frac{1}{2}l$  zum Maximum. Für  $x = \frac{1}{2}l$  wird aber das Moment

$$106. M_0 = -\frac{q}{k^2} (\sec \frac{1}{2}kl - 1).$$

$M_0$  ist negativ, wenn  $kl$  zwischen  $0$  und  $\pi$ , zwischen  $3\pi$  und  $5\pi$ , zwischen  $7\pi$  und  $9\pi$  liegt u. s. f., positiv in allen übrigen Fällen.

Die Ausbiegung  $y$  in der Mitte wird nach 98

$$107. \quad \eta = \frac{q}{k^2 P} (\sec \frac{1}{2} kl - 1 - \frac{1}{8} k^2 l^2).$$

Auf Taf. VIII ist in Fig. 10 die elastische Linie für die Fälle a)  $kl = 2,616$ , b)  $kl = 4,364$ , c)  $kl = 9,250$ , d)  $kl = 9,494$  dargestellt.

Wenn  $kl$  sehr gross ist, jedoch sich nicht in der Nähe der Werthe befindet, für welche  $\cos \frac{1}{2} kl = 0$  ist, so ist in 104 das erste Glied sehr klein, also sehr nahe  $\eta = -\frac{q x (l-x)}{2P}$ , die elastische Linie also eine Parabel (Taf. VIII Fig. 10, e).

Anwendung bei Berechnung der Riegel von Schleusenthoren u. s. w.

### §. 194. Stab, welcher an einem Ende eingespannt ist und dessen anderes nur axial belastetes Ende geführt wird.

(Fig. 55). Das eine Ende B sei eingespannt; das andere Ende A, auf welches nur eine Kraft P in axialer Richtung geübt wird, könne sich zwischen Führungen nur in axialer Richtung bewegen. Da das Ende A in Folge der Kraft P das Bestreben hat, sich in transversaler Richtung zu verrücken, so üben die Führungen auf dieses Ende einen Druck D in transversaler Richtung aus. Wir setzen voraus, dass P im Schwerpunkte der Endfläche A wirke, dass also  $f = 0$  sei.

Nach 66 (§. 182) wird, da hier das Moment  $\mathfrak{M}$  der äusseren Transversalkräfte  $= Dx$  zu setzen ist,  $\eta = -A \sin kx - B \cos kx + \frac{D}{P} x$ . Da für  $x = 0$  auch  $\eta = 0$  werden muss, so ist  $B = 0$ , also

$$\eta = -A \sin kx + \frac{D}{P} x.$$

Für  $x = l$  wird ebenfalls  $\eta = 0$ ; daher wird  $A = \frac{Dl}{P \sin kl}$ , mithin

$$108. \quad \eta = \frac{Dl}{P} \left( \frac{x}{l} - \frac{\sin kx}{\sin kl} \right),$$

$$109. \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{D}{P} \left( \frac{kl \cos kx}{\sin kl} - 1 \right).$$

Für  $x = l$  muss  $\frac{d\eta}{dx} = 0$  werden, mithin

$$110. \quad \tan kl = kl.$$

Hieraus ergibt sich durch Auflösung nach einer der bekannten Näherungsmethoden für transcendente Gleichungen

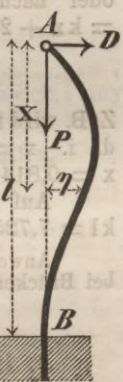
$$kl = 0, \quad kl = 257^\circ 27' 12'' = 4,4934$$

$$kl = 442^\circ 37' 28'' = 7,7252$$

$$kl = 624^\circ 45' 37'' = 10,9042 \text{ u. s. w.}$$

Hat P nicht einen der hierdurch bestimmten Werthe, so ist Gleichgewicht nicht möglich. Das Verhältniss  $\frac{D}{P}$  bleibt ganz unbestimmt; es wird nur bestimmt, wenn man für ein bestimmtes  $x$  einen bestimmten Werth von  $\eta$  annimmt. Daher kann  $\eta$  jede mögliche Grösse annehmen und also auch so gross werden, dass der Stab zerbricht. Durch die Gleichung 110 ist

Fig. 55.



daher die Tragkraft bestimmt. Für den einfachsten Fall (ausser  $kl = 0$ ) ist  $kl = 4,4934$  oder, wenn wir  $k^2 = \frac{P}{EW}$  setzen,

$$111. P = 20,191 \frac{EW}{l^2}.$$

Hiernach ist die Tragkraft 8,183mal so gross, als wenn das obere Ende A ganz frei ist (§. 171).

Für die Wendepunkte der deformirten Axe wird  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0$ , d. i.  $\text{sink}x = 0$ , also

$$112. x = \frac{n\pi}{k}.$$

Hiernach wird für  $kl = 4,439$   $x = 0,708 n l$ , also  $x = 0$ ,  $x = 0,708 l$ ; für  $kl = 7,725$   $x = 0,407 n l$ , also  $x = 0$ ,  $x = 0,407 l$ ,  $x = 0,814 l$  u. s. f.

Für die Maximal- und Minimalpunkte wird nach 111  $kl \cos kx = \text{sink}l$  oder nach 112  $\text{tank}l \cos kx = \text{sink}l$ , d. i.  $\cos kx = \cos kl$ , mithin  $kl = kx + 2n\pi$  oder  $kl = 2(n+1)\pi - kx$  also

$$113. x = l - \frac{2n\pi}{k} \quad \text{und} \quad x = \frac{2(n+1)\pi}{k} - l.$$

Z. B. wird für  $kl = 4,493$   $x = l - 1,416 n l$  und  $x = 1,416(n+1)l - l$ , d. i.  $x = 0,416 l$  und  $x = l$ ; für  $kl = 7,725$   $x = l - 0,814 n l$  und  $x = 0,814(n+1)l - l$ , d. i.  $x = 0,186 l$ ,  $x = 0,628 l$  und  $x = l$  u. s. f.

Auf Taf. VIII ist in Fig. 8 die elastische Linie für  $kl = 4,439$ ,  $kl = 7,725$ ,  $kl = 10,904$  dargestellt.

Anwendung bei eingerammten Pfählen, welche oben festgehalten sind, z. B. bei Brückenjochen, u. s. w.

### C. Anhang.

**§. 195. Stetige Belastung, welche proportional der Abweichung  $\eta$  ist.** Wegen der Aehnlichkeit in der Behandlungsweise behandeln wir hier noch einen Fall, bei welchem nur äussere Transversalkräfte auftreten, welche aber durch die Formänderung bedingt sind. Ein prismatischer Stab ruhe nämlich auf einer elastischen horizontalen Unterlage und sei an einzelnen Punkten durch isolirte Lasten belastet. Die Eindrückung  $\eta$  an einem beliebigen Punkte D (Fig. 56) sei dem hier wirksamen Drucke  $q$  pro Längeneinheit proportional, so dass wir

$$q = * \eta$$

setzen können. Der Druck, welchen der Stab in D von der Unterlage pro Längeneinheit empfängt, ist  $-q$ , wenn wir, wie früher, abwärts gerichtete Kräfte als positiv ansehen. Nach 46 (Seite 64) ist daher die Differenzialgleichung der deformirten Axe

$$EW \frac{d^4\eta}{dx^4} = -q = -*\eta,$$

oder

$$114. \frac{d^4\eta}{dx^4} = -4k^4\eta,$$

wenn wir zur Abkürzung  $k = \sqrt[4]{\frac{*}{4EW}}$  setzen. Das Integral dieser Differenzialgleichung ist

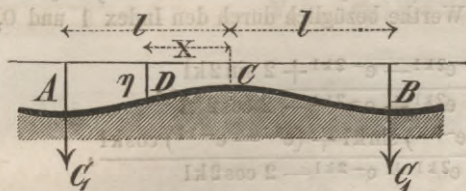
$$115. \eta = A e^{kx} + B e^{bx} + C e^{cx} + D e^{dx}$$

wenn  $a, b, c, d$  die Wurzeln der biquadratischen Gleichung  $x^4 = -4k^4$  bedeuten. Dieselben sind aber, wenn wir zur Abkürzung  $\sqrt{-1} = i$  setzen,

$$\begin{aligned} a &= k(1+i), & c &= -k(1+i) = -a, \\ b &= k(1-i), & d &= -k(1-i) = -b. \end{aligned}$$

Wir wollen nun beispielsweise voraussetzen, dass alle isolirte Lasten

Fig. 56.



gleich gross und zwar  $= G$  seien und einen gleichen Abstand  $2l$  haben. Die elastische Linie muss alsdann in Beziehung auf den Punkt C, welcher in der Mitte zwischen zwei Lasten liegt, symmetrisch sein. Wir wählen diesen Punkt C als Anfang der  $x$ . Für gleiche positive und negative Werthe von  $x$  muss alsdann  $\eta$  denselben Werth erhalten, was nur möglich ist, wenn  $A = C, B = D$  ist. Daher wird

$$\eta = A(e^{ax} + e^{-ax}) + B(e^{bx} + e^{-bx}).$$

Setzen wir für  $a, b$  obige Werthe, beachten, dass  $e^{x \pm iy} = e^x (\cos y \pm i \sin y)$  ist und setzen  $A + B = U, i(A - B) = V$ , so ergibt sich

$$116. \quad \eta = U(e^{kx} + e^{-kx}) \cos kx + V(e^{kx} + e^{-kx}) \sin kx.$$

Für  $x = l$  muss  $\frac{d\eta}{dx} = 0$  werden, d. i.

$$a. \quad 0 = (U + V)(e^{kl} - e^{-kl}) \cos kl - (U - V)e^{kl} + (e^{-kl}) \sin kl.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} G &= \int_{-1}^{+1} q \, dx = 2 \int_0^1 q \, dx = 2\pi \int_0^1 \eta \, dx \\ &= -\frac{\pi}{2k^4} \int_0^1 \frac{d^4 \eta}{dx^4} \, dx = -\frac{\pi}{2k^4} \frac{d^3 \eta}{dx^3} \text{ (für } x = 1), \text{ d. i.} \end{aligned}$$

$$b. \quad \frac{Gk}{\pi} = (U - V)(e^{kl} - e^{-kl}) \cos kl + (U + V)(e^{kl} + e^{-kl}) \sin kl.$$

Setzen wir zur Abkürzung  $(e^{kl} + e^{-kl}) \sin kl = s, (e^{kl} - e^{-kl}) \cos kl = \partial$ , so wird nach a. und b:

$$\begin{cases} (U + V)\partial - (U - V)s = 0, \\ (U + V)s + (U - V)\partial = \frac{Gk}{\pi}. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich leicht

$$117. \quad U = \frac{Gk}{2\pi} \frac{s + \partial}{s^2 + \partial^2}, \quad V = \frac{Gk}{2\pi} \frac{s - \partial}{s^2 + \partial^2},$$

wobei nach obigen Werthen von  $s$  und  $\partial$   $s^2 + \partial^2 = e^{2kl} + e^{-2kl} - 2 \cos 2kl$  wird. Setzt man die Werthe von  $U$  und  $V$  in den Ausdruck von  $\eta$  ein, so lässt sich der erhaltene Ausdruck leicht auf folgende Form bringen, worin  $AI = 1 - x = \xi, BI = 1 + x = \zeta$  gesetzt ist: 118:

$$\eta = \frac{Gk}{2\pi} \frac{e^{k\xi} + e^{-k\xi} \sin k\xi + (e^{k\xi} + e^{-k\xi}) \sin k\xi + (e^{k\xi} - e^{-k\xi}) \cos k\xi + (e^{k\xi} - e^{-k\xi}) \cos k\xi}{e^{2kl} + e^{-2kl} - 2 \cos 2kl}$$

Als Biegemoment  $M$  ergibt sich nach der Formel  $M = EW \frac{d^2\eta}{dx^2}$

+  $\frac{\varkappa}{k^4} \frac{d^2\eta}{dx^2}$ : 119:

$$M = \frac{G}{k} \frac{(e^{k\xi} + e^{-k\xi}) \operatorname{sink}\xi + (e^{k\zeta} + e^{-k\zeta}) \operatorname{sink}\zeta - (e^{k\xi} - e^{-k\xi}) \operatorname{cosk}\xi - (e^{k\zeta} - e^{-k\zeta}) \operatorname{cosk}\zeta}{e^{2k1} + e^{-2k1} - 2 \cos 2k1}$$

Am grössten wird  $\eta$ , also auch  $q$  und ebenso  $M$  für  $x = 1$  oder für  $\xi = 0, \zeta = 21$ . Am kleinsten wird  $\eta$  und  $q$  für  $x = 0$  oder für  $\xi = \zeta = 1$ . Bezeichnen wir die betreffenden Werthe bezüglich durch den Index 1 und 0, so ergibt sich

$$120. \quad q_1 = \frac{Gk}{2} \frac{e^{2k1} - e^{-2k1} + 2 \sin 2k1}{e^{2k1} + e^{-2k1} - 2 \cos 2k1},$$

$$121. \quad q_0 = Gk \frac{(e^{k1} + e^{-k1}) \operatorname{sink}1 + (e^{k1} - e^{-k1}) \operatorname{cosk}1}{e^{2k1} + e^{-2k1} - 2 \cos 2k1},$$

$$122. \quad M_1 = -\frac{G}{k} \frac{e^{2k1} - e^{-2k1} - 2 \sin 2k1}{e^{2k1} + e^{-2k1} - 2 \cos 2k1}.$$

Näherungsformeln. Für kleine Werthe von  $k1$  ergibt sich durch Verwandlung der Ausdrücke 121 und 123 in Reihen:

$$123. \quad q_1 = \frac{G}{21} \left( 1 + \frac{1}{720} \frac{\varkappa 1^4}{EW} + \dots \right),$$

$$124. \quad M_1 = \frac{2}{3} G1 \left( 1 - \frac{1}{2520} \frac{\varkappa 1^4}{EW} + \dots \right),$$

so dass sich mit zunehmendem  $W$   $q_1, M_1$  den Grenzen  $\frac{G}{21}, \frac{2}{3} G1$  nähern.

Für grosse Werthe von  $k1$  ergibt sich, wenn man in 118 und 119 Zähler und Nenner mit  $e^{2k1}$  dividirt und sodann die Glieder mit den Faktoren  $e^{-2k1}, e^{-4k1}$  vernachlässigt,

$$125. \quad q = \frac{1}{2} Gk e^{-k\xi} (\operatorname{sink}\xi + \operatorname{cosk}\xi),$$

$$126. \quad M = \frac{G}{k} e^{-k\xi} (\operatorname{sink}\xi - \operatorname{cosk}\xi).$$

Hiernach wird für  $\xi = 0$  und  $\xi = 1$ :

$$127. \quad q_1 = \frac{1}{2} Gk = \frac{1}{2} G \sqrt[4]{\frac{\varkappa}{4EW}},$$

$$128. \quad q_0 = \frac{1}{2} Gk e^{-k1} (\operatorname{sink}1 + \operatorname{cosk}1),$$

$$129. \quad M_1 = -\frac{G}{k} = G \sqrt[4]{\frac{4EW}{\varkappa}}.$$

Wenn  $\operatorname{sink}1 = -\operatorname{cosk}1$ , d. i.  $k1 = \frac{3}{4}\pi = 2,356$  ist, so wird  $q_0 = 0$ . Für  $k1 = 2,356$  wird  $q_1 = 1,178 \frac{G}{1}, M_1 = -0,424 G1$ . Ist  $k1 > 2,356$ ,

so wird  $q$  zum Theil negativ; dann aber gilt unsere Entwicklung, wenn der Stab mit der Unterlage nicht fest verbunden ist, nicht mehr, da sich dann der Stab zum Theil von der Unterlage abhebt, das Gesetz  $q = \varkappa \eta$  also nicht allgemein Giltigkeit hat. Wir wollen auf diesen Fall indessen nicht eingehen.

Anwendung beim Langschwellsystem der Eisenbahnen u. s. w.

## VI. Abschnitt.

# Verschiedene Querschnittsformen.

## XXI. Kapitel.

### Der rechteckige Querschnitt.

**§. 196. Spannungen.** Da der rechteckige Querschnitt vielfache Anwendung findet, so wollen wir die Rechnung für denselben vollständig durchführen.

Die Hauptachsen des Rechtecks sind den Seiten parallel (Fig. 57). Bezeichnen wir die Breite des Rechtecks, d. i. die auf der Kräfteebene senkrechte Seite mit  $b$ , und die Höhe, d. i. die der Kräfteebene parallele Seite, mit  $h$ , so ist  $F = bh$  und das statische Moment  $\Omega$  (siehe §. 69), sowie das Trägheitsmoment  $W$  (siehe §. 64):

$$\Omega = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} v \, dv, \quad W = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} v^2 \, dv$$

d. i.

$$1. \quad \Omega = \frac{1}{8} b (h^2 - 4v^2),$$

$$2. \quad W = \frac{1}{12} b h^3.$$

Die Normal- und Schubspannungen werden daher nach 23 (Seite 55) und 27 (Seite 58), wenn wir voraussetzen, dass keine Axialkraft vorhanden sei,

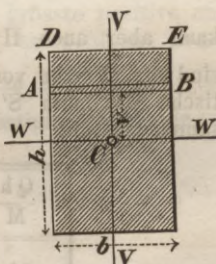
$$3. \quad N = \frac{12 M v}{b h^3}, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = \frac{3 (h^2 - 4v^2) Q}{2 b h^3}.$$

$N$  wird, wie stets, zum Maximum für  $v = \pm \frac{1}{2} h$ ,  $T_3$  dagegen für  $v = 0$  und zwar ist

$$4. \quad \max N = \frac{6 M}{b h^2}, \quad \max T_3 = \frac{3 Q}{2 b h}.$$

Diese Formeln lassen sich leicht auf die verschiedenen Belastungsweisen anwenden. Wir wollen dies nur beispielsweise für einen an den Enden auf Stützen ruhenden und gleichmässig belasteten Stab thun. Für

Fig. 57.



denselben ist nach §. 105:  $Q = \frac{1}{2} q (1 - 2x)$ ,  $M = \frac{1}{2} q x (1 - x)$ , also

$$N = \frac{6 q v x (1 - x)}{b h^3}, \quad T_3 = \frac{3 q (h^2 - 4 v^2) (1 - 2x)}{4 b h^3}.$$

Hiernach ist Taf. IX, Fig. 1.  $N$  und  $T_3$  für  $\frac{x}{l} = 0, 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5$  graphisch dargestellt.

**§. 197. Hauptspannungen.** Als Hauptspannung  $H$  und ideale Hauptspannung  $S$  ergibt sich nach 33 (§. 76) und nach 67 (§. 83) durch Einsetzung der Ausdrücke für  $N, T_2, T_3$ :

$$5. H = \frac{6 M}{b h^3} \left[ v \pm \sqrt{v^2 + \frac{Q^2}{16 M^2} (h^2 - 4 v^2)^2} \right],$$

$$6. S = \frac{4 M}{b h^3} \left[ v \pm 2 \sqrt{v^2 + \frac{Q^2}{16 M^2} (h^2 - 4 v^2)^2} \right].$$

Hiernach wir  $H$  zum analytischen Maximum für

$$7. 64 \mu v^6 + 16 (3 - 2 \mu) h^2 v^4 - 4 (2 - \mu) h^4 v^2 + h^6 = 0$$

und  $S$  zum analytischen Maximum für

$$8. 256 \mu^2 v^6 + 16 \mu (15 - 8 \mu) h^2 v^4 + 8 (6 - 7 \mu + 2 \mu^2) h^4 v^2 - \mu h^6 = 0,$$

worin zur Abkürzung  $\frac{Q^2 h^2}{M^2} = \mu$  gesetzt ist. Zum wirklichen Maximum kann aber auch  $H$  und  $S$  für  $v = \pm \frac{h}{2}$  werden. In folgender Tabelle sind die Werthe von  $S_0, S_1$  von  $S$  für  $v = 0, v = \frac{1}{2} h$  und das analytische Maximum  $S'$  (für  $v = v'$ ) bei verschiedenen Werthen von  $\mu$  zusammengestellt.

$\frac{Q h}{M}$	$S_0$	$S'$	$S_1$	$v'$
$\infty$	2	2,000	0	0
10	2	2,001	0,600	0,025
9	2	2,006	0,667	0,028
8	2	2,008	0,750	0,032
7	2	2,010	0,857	0,037
6	2	2,014	1,000	0,044
5	2	2,022	1,200	0,054
4	2	2,035	1,500	0,073
3	2	2,073	2,000	0,113
2,883	2	2,081	2,081	0,121
2	2	—	3,000	—
1	2	—	6,000	—
	$\frac{Q}{F}$	$\frac{Q}{F}$	$\frac{Q}{F}$	$h$

Hieraus geht hervor, dass, wenn  $Q h < 2,883 M$  ist, stets  $S'$  das Maximum von  $M$  ist. Zugleich zeigt die Tabelle, dass, wenn  $Q h > 2,883 M$

ist, das wirkliche Maximum  $S'$  von dem Werthe  $S_0$  nur sehr wenig abweicht, so dass man für die Praxis annehmen kann:  $S$  wird zum Maximum für  $v = 0$  oder  $v = \pm \frac{1}{2} h$  und zwar ist:

$$9. \quad \begin{cases} v = 0. & S_0 = \pm 2 \frac{Q}{b h}, \\ v = \pm \frac{h}{2}, & S_t = \pm 6 \frac{M}{b h^2}. \end{cases}$$

Ebenso ergibt sich, dass, wenn  $Q h < 3,678$  ist, das  $H$  für  $v = \pm \frac{1}{2} h$  grösser ist, als das analytische Maximum von  $H$ .

Für das im vorigen §. gewählte Beispiel sind auf Taf. IX in Fig. 2  $H$  und  $S$  graphisch dargestellt.

Nach §. 76 wird, wenn  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungswinkel der einen Hauptspannung bezeichnen,  $\tan \beta = \infty$ ,  $\beta = 90^\circ$ , d. h. die Hauptspannungen wirken in einer zur Kräfteebene parallelen Ebene. Ferner wird

$$10. \quad \tan \alpha = \frac{T_3}{H}.$$

Für  $v = 0$  wird  $H = T_3$ , also  $\alpha = 45^\circ$ ; für  $v = \pm \frac{1}{2} h$  wird  $T_3 = 0$ , also  $\alpha = 0$ .

Auf Taf. IX sind in Fig. 3 die Ellipsen der Elasticität graphisch dargestellt.

**§. 198. Festigkeitsbedingungen.** Da die grösste positive und negative ideale Hauptspannung einander gleich sind, so wird ein Bruch durch Zerreißen oder Zerdrücken eintreten, je nachdem  $K \lesseqgtr \mathfrak{R}$  ist. Ist  $K'$  der kleinste der Coefficienten  $K, \mathfrak{R}$ , so ist die Festigkeitsbedingung

$$11 a. \quad Q h < 2,88 M: \quad K' = \frac{6 M}{b h^2},$$

$$11 b. \quad Q h > 2,88 M: \quad K' = \frac{2 Q}{b h}.$$

Für einen Körper von constanter Festigkeit müsste hiernach, wenn  $Q h > 2,88 M$  ist,

$$12. \quad b h = \frac{2 Q}{K'}$$

sein. Der Körper wird demnach stets aus zwei verschiedenen Formen zusammensetzen sein, von denen die eine durch 12 bestimmte Form für denjenigen Theil gilt, in welchem  $Q h > 2,88 M$ ; die andere durch 11 a bestimmte Form aber für denjenigen Theil, in welchem  $Q h < 2,88 M$  ist. Bei den auf Taf. III und IV enthaltenen Formen sind beide Theile dargestellt. Der letztere Theil ist im IV. Abschnitte bestimmt; der erstere ergibt sich leicht, wenn man in 12 die im IV. Abschnitte ermittelten Ausdrücke für  $Q$  einsetzt.

Bei prismatischen Körpern giebt, wenn die Länge gegen die Höhe gross ist, stets die Gleichung 11 a grössere Dimensionen, als die Gleichung 11 b, so dass die letztere meist nicht zu beachten ist.

Liegt z. B. der gleichmässig belastete Stab mit den Enden auf Stützen, so ist  $\max Q = \frac{1}{2} q l$ ,  $\max M = \frac{1}{8} q l^2$ , daher nach 8

$$\max S_0 = \frac{q l}{b h}, \quad \max S_1 = \frac{3 q l^2}{4 b h^2},$$

so dass nur  $\max S_0 > \max S_1$  wird, wenn  $l < \frac{4}{3} h$  ist. Ist, wie gewöhnlich,  $l > \frac{4}{3} h$ , so ist  $S_1$  das Maximum von  $S$  und daher nur die Gleichung 11a für die Festigkeit maassgebend. Diese giebt

$$4 K' b h^2 = 3 q l^2.$$

Nimmt man das Verhältniss  $\frac{b}{h}$  an und zwar  $= n$ , so wird, wenn es auf die Berechnung der Dimensionen ankommt,

$$h = \sqrt[3]{\frac{3 q l^2}{4 n K'}}.$$

Anwendung bei Balken in Gebäuden, hölzernen Balkenbrücken u. s. w.

**§. 199. Das Rechteck im Kreise.** Wenn ein Balken mit rechteckigem Querschnitte aus einem runden Stamme gezimmert wird, so ist es meist zweckmässig, die Seiten des Rechtecks so zu wählen, dass der Durchmesser des Stammes möglichst klein wird, oder, was auf dasselbe hinausläuft, dass die Tragkraft des aus einem gegebenen Stamme gezimmerten Balkens möglichst gross ausfällt.

Ist  $d$  der Durchmesser des dem Rechtecke umschriebenen Kreises,  $n$  das Verhältniss  $\frac{b}{h}$ , so ist  $d^2 = b^2 + h^2 = (n^2 + 1) h^2$ , also

$$h = \frac{d}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad b = \frac{n d}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Daher wird nach 11a:

$$6 M = K' \frac{n d^3}{(n^2 + 1) \sqrt{n^2 + 1}}$$

oder

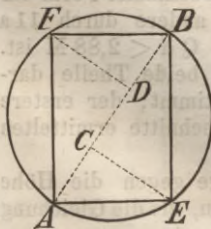
$$M = \frac{K' n d^3}{6 \sqrt{(n^2 + 1)^3}},$$

$$\frac{dM}{dn} = \frac{K' d^3 (1 - 2n^2)}{6 \sqrt{(n^2 + 1)^5}}.$$

Demnach wird  $M$  bei gegebenem  $d$  zum Maximum oder  $d$  bei gegebenem  $M$  zum Minimum, wenn  $2n^2 = 1$  oder

Fig. 58.

$$13. \quad n = \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,707$$



ist, so dass sich nahezu  $b : h = 7 : 10$  verhält. Hier-nach ergibt sich leicht eine einfache Construction (Fig. 58): Man theile einen Durchmesser  $AB$  in drei gleiche Theile und errichte auf denselben in den Theil-punkten  $C, D$  nach entgegengesetzten Seiten Senkrechten. Die Verbindung der so im Kreise bestimmten Punkte  $E, F$  mit den Enden des Durchmessers giebt das ge-wünschte Rechteck.

Die Einsetzung des Werthes von  $n$  giebt

$$14. \quad M = \frac{\sqrt{3}}{27} K' d^3 = 0,0641 K' d^3.$$

Die Durchbiegung des Balkens wird ein Minimum, wenn das Trägheitsmoment ein Maximum wird. Es ergibt sich leicht, dass dies für das Verhältniss  $n = \frac{1}{3} \sqrt{3} = 0,577$  eintritt. Die Construction kann in einer der obigen ähnlichen Weise erfolgen; nur ist hier der Durchmesser nicht in drei, sondern in vier gleiche Theile zu theilen.

**§. 200. Geneigte Lage.** Die eine Hauptaxe, welche der Seite  $h$  parallel ist, schliesse mit der Kraftebene den Winkel  $\alpha$  ein (Fig. 59). Wählen wir wieder die beiden Hauptaxen als Axen der  $v, w$ , so ist die Faserspannung nach 21 §. 67 allgemein

$$N = M \left( \frac{v}{W} \cos \alpha + \frac{w}{W'} \sin \alpha \right),$$

wobei diejenigen Seiten der Hauptaxen als positiv zu nehmen sind, nach welchen zu die Kraft nicht wirkt (in der Figur links und oben). Nun aber ist für den rechteckigen Querschnitt  $W = \frac{1}{12} b^3 h^3$ ,  $W' = \frac{1}{12} b^3 h$ , mithin

$$15. \quad N = \frac{12 M}{b h} \left( \frac{v}{h^2} \cos \alpha + \frac{w}{b^2} \sin \alpha \right).$$

Das Maximum erreicht  $N$  für  $v = \pm \frac{1}{2} h$ ,  $w = \pm \frac{1}{2} b$ , also in einer Ecke, und zwar ist

$$16. \quad \max N = \pm \frac{6 M}{b^2 h^2} (h \sin \alpha + b \cos \alpha).$$

Setzen wir nun als Festigkeitsbedingung  $\max N = K'$ , so ergibt sich

$$17. \quad M = \frac{K' b^2 h^2}{6 (h \sin \alpha + b \cos \alpha)}.$$

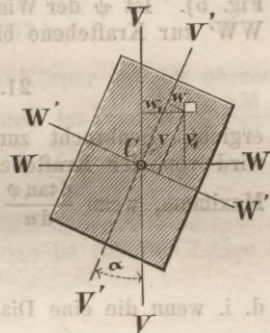
Hiernach lassen sich  $\max N$  und  $M$  leicht durch eine geometrische Construction graphisch darstellen (Taf. IX Fig. 4), wobei man  $\max N$  und  $M$  am besten vom Centrum aus auf der Axe der  $v$  aufträgt. Es lässt sich leicht nachweisen, dass alsdann die Linie für  $\max N$  ein Kreis (für dessen Mittelpunkt  $\tan \alpha = \frac{h}{b}$  ist) und die Linie für  $M$  eine Gerade ist.

Am kleinsten wird  $M$  für  $\tan \alpha = \frac{h}{b}$  oder, wenn die eine Diagonale auf der Kraftebene senkrecht steht. Am grössten dagegen wird  $M$ , wenn die grösste der Seiten  $bh$  (wir nehmen  $h$  als diese Seite an) der Kraftebene parallel ist.

Bezeichnen wir die Diagonale mit  $d$ , so ist für die kleinste Tragkraft  $\sin \alpha = \frac{h}{d}$ ,  $\cos \alpha = \frac{b}{d}$  und für die grösste  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 90^\circ$ , daher wird

$$18. \quad \max M = \frac{K' b h^2}{6}, \quad \min M = \frac{K' b^2 h^2}{6 d},$$

Fig. 59.



$$19. \max M : \min M = d : b.$$

Die Gleichung der neutralen Axe in Beziehung auf die Hauptaxen ist nach 12:

$$\frac{v}{h^2} \cos \alpha + \frac{w}{b^2} \sin \alpha = 0, \quad \frac{v}{w} = -\frac{h^2}{b^2} \tan \alpha.$$

Ist  $\varphi$  der Winkel zwischen der neutralen Axe und der Axe der  $w$ , so ist  $\tan \varphi = \frac{v}{w}$ , also

$$20. \tan \varphi = -\frac{h^2}{b^2} \tan \alpha,$$

wonach sich die Lage der neutralen Axe leicht construiren lässt (Taf. IX Fig. 5). Ist  $\psi$  der Winkel, welchen die neutrale Axe mit der Senkrechten  $WW'$  zur Kraftebene bildet, so ist  $\psi = \alpha + \varphi$ , woraus sich leicht

$$21. \tan \psi = \frac{b^2 - h^2}{b^2 \cot \alpha + h^2 \tan \alpha}$$

ergiebt. Senkrecht zur neutralen Axe liegt die Biegungsebene. Diese wird von der Kraftebene am meisten abweichen oder  $\psi$  wird zu einem Maximum, wenn  $\frac{d \tan \psi}{d \alpha} = 0$ , d. i.

$$22. \tan \alpha = \frac{b}{h},$$

d. i. wenn die eine Diagonale vertical steht. In diesem Falle wird

$$23. \tan \varphi = \frac{h}{b}.$$

Die Biegungsebene erhält also die geneigteste Lage, wenn die eine Diagonale vertical steht; die andere Diagonale ist alsdann die neutrale Axe, auf welcher die Biegungsebene senkrecht steht.

**§ 201. Transversale Normalspannungen.** Die Normalspannung  $N_2$ , welche in Richtung der Seite  $h$  wirkt, ist nach 30 (§. 74):

$$N_2 = -\frac{q'}{b} + \frac{q(\mathfrak{B} - \Omega v)}{W b},$$

wobei  $\Omega$ ,  $\mathfrak{B}$  das statische und Trägheitsmoment der Fläche ADEB (Fig. 57) und  $q'$  den oberhalb AB wirkenden Theil von  $q$  bezeichnet. Nun aber ist

nach 1 (§. 195)  $\Omega = \frac{1}{8} b (h^2 - 4v^2)$  und ausserdem  $\mathfrak{B} = b \int_0^{\frac{1}{2}h} v^2 dv = \frac{1}{24} b (h^3 - 8v^3)$ . Daher wird

$$24. N_2 = \frac{q}{2b} \left( 1 - 3 \frac{v}{h} + 4 \frac{v^3}{h^3} \right) - \frac{q'}{b}$$

a) Die Last liege nur auf der oberen Fläche. Abstrahiren wir vom Gewichte des Körpers, so ist  $q' = q$ , mithin

$$25. N_2 = -\frac{q}{2b} \left( 1 + 3 \frac{v}{h} - 4 \frac{v^3}{h^3} \right),$$

wonach Taf. IX Fig. 6 (a)  $N_2$  graphisch dargestellt ist. Hiernach nimmt  $N_2$  nahezu gleichmässig von der oberen zur unteren Fläche ab.

b) Der Stab sei nur durch sein Eigengewicht belastet. Alsdann ist, wenn  $\gamma$  das Gewicht der Volumeneinheit bezeichnet,  $q = b h \gamma$ ,  $q' = \gamma \times \text{Fläche ADEB} = \frac{1}{2} b (h - 2v) \gamma$ . Daher wird

$$26. N_2 = \frac{1}{2} \gamma v \left( 1 - 4 \frac{v^2}{h^2} \right),$$

wonach Taf. IX Fig. 6 (b)  $N_2$  graphisch dargestellt ist. Hiernach findet auf der oberen Seite ein verticaler Druck, auf der unteren ein verticaler Zug statt; für  $v = 0$  ist  $N_2 = 0$ . Zum Maximum wird  $N_2$  für  $v = \pm \frac{1}{6} \sqrt{3} h = \pm 0,5777 \cdot \frac{1}{2} h$  und zwar ist

$$27. \max N_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{18} h \gamma = 0,0963 h \gamma.$$

Berücksichtigt man nur die Last, welche der Körper auf der oberen Fläche zu tragen hat, so ist  $\max N_2 = \frac{q}{b}$ . Dagegen ist  $\max N = \frac{6M}{b h^2}$  mithin

$$\frac{\max N_2}{\max N} = \frac{q h^2}{6 M}.$$

Ist z. B. der Stab an einem Ende eingespannt, so ist bei der Länge  $l$  des Stabes,  $\max M = \frac{1}{2} q l^2$ , mithin

$$\frac{\max N_2}{\max N} = \frac{1}{3} \left( \frac{h}{l} \right)^2,$$

wonach in den gewöhnlichen Fällen der Praxis  $\max N_2$  gegen  $\max N$  sehr klein ist, so dass die bisherige Vernachlässigung von  $N_2$  für den rechteckigen Querschnitt gerechtfertigt erscheint.

## §. 202. Formänderung der Querschnitte. Nach 54 (§. 81)

wird, wenn  $\delta$  den Abstand LM (Fig. 60) des deformirten Querschnittes von der Normalebene IK zur deformirten Axe bezeichnet,

da hier  $\frac{db}{dv} = 0$ , und  $\Omega = \frac{1}{8} b (h^2 - 4v^2)$

ist,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{12 Q}{G b h^3} \left[ \frac{1}{8} \int_0^v (h^2 - 4v^2) dv \right. \\ &\quad \left. + \frac{v(2v^2 + 3w^2)}{12(m+1)} \right] \\ &= \frac{Q v}{2 G b h^3} \left[ 3h^2 - 4v^2 + \frac{2}{m+1} (2v^2 + 3w^2) \right]. \end{aligned}$$

Nach 38 ist für  $m = 4$   $G = \frac{2}{5} E$ , daher

28.  $\delta = \frac{5 Q v}{4 E b h^3} (3h^2 - 3,2v^2 + 1,2w^2)$ .  
Am grössten ist  $\delta$  für  $v = \pm \frac{1}{2} h$ . Bezeichnen wir diesen Werth von  $\delta$

Fig. 60.



mit  $\delta_1$ , so ist, wenn wir das Glied mit  $w$  vernachlässigen,

$$29. \delta_1 = \frac{11 Q}{8 E b}.$$

Für einen an den Enden gestützten, gleichmässig belasteten Stab ist z. B.  $Q = \frac{1}{2} q (1 - 2x)$ , mithin

$$\delta_1 = \frac{11 q (1 - 2x)}{16 E b},$$

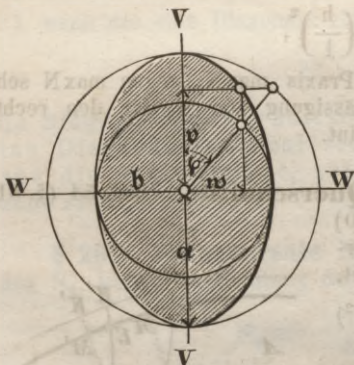
wonach Taf. IX Fig. 7 die Formänderung der Querschnitte dargestellt ist. An den Enden, wo  $\delta_1$  am grössten ist, ist  $\delta_1 = \frac{11 q l}{16 E b} = \frac{22}{5} \psi \left(\frac{h}{l}\right)^3$ , wenn  $\psi$  die Durchbiegung in der Mitte (nach §. 106) bezeichnet.

## XXII. Kapitel.

### Der elliptische Querschnitt.

#### §. 203. Spannungen.

Fig. 61.



Wir bezeichnen die beiden Halbachsen der Ellipse mit  $a$ ,  $b$  und setzen voraus, dass die Halbaxe  $a$  in die Kräfteebene falle. Bezeichnet man mit  $\varphi$  einen Hilfswinkel, so kann man die Koordinaten  $v$ ,  $w$  eines Punktes des Umfangs setzen

$$v = a \cos \varphi, \quad w = b \sin \varphi,$$

woraus die bekannte Construction der Ellipse mit Hilfe des um- und eingeschriebenen Kreises folgt (Fig. 61). Daher wird, da  $dv = -a \sin \varphi \cdot d\varphi$  ist und für  $v = 0$   $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , für  $v = a$   $\varphi = 0$  wird,

$$\Omega = \int_v^a 2 w v \, dv = 2 a^2 b \int_0^{\varphi} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$W = 2 \int_0^a 2 w v^2 \, dv = 4 a^3 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi,$$

d. i.

$$30. \Omega = \frac{2}{3} a^2 b \sin^3 \varphi,$$

$$31. W = \frac{\pi}{4} a^3 b.$$

Demnach werden die Spannungen nach 23 (§. 68), 27 (§. 71), da hier  $2 w$  für  $b$  und  $dv = 2 dw = 2 b \cos \varphi \, d\varphi$ ,  $dv = dv = -a \sin \varphi \, d\varphi$  zu setzen ist,

$$32. \quad N = \frac{4 M v}{\pi a^3 b}$$

$$33. \quad T_3 = \frac{4 Q}{3 \pi a b} \sin^2 \varphi, \quad T_2 = \frac{4 Q w}{3 \pi a^2 b} \cos \varphi.$$

Den grössten Werth erreicht  $N$  für  $v = \pm a$ ,  $T_3$  für  $v = 0$  oder  $\varphi = 90^\circ$  und zwar ist

$$34. \quad \max N = \frac{4 M}{\pi a^2 b}, \quad \max T_3 = \frac{4 Q}{3 \pi a b} = \frac{4 Q}{3 F}.$$

$T_2$  wird für ein gegebenes  $v$  am grössten für  $w = w$ , d. i. an der Oberfläche des Körpers und zwar ist hier

$$35. \quad T_2 = \frac{2 Q}{3 \pi a^2} \sin 2 \varphi.$$

Am grössten wird demnach  $T_2$  für  $\varphi = 45^\circ$  und zwar ist

$$36. \quad \max T_2 = \frac{2 Q}{3 \pi a^2} = \frac{2 Q}{3 F} \cdot \frac{b}{a}.$$

Hier kann also  $T_2$  gegen  $T_3$  eine beträchtliche Grösse erreichen, während beim rechteckigen Querschnitte  $T_2 = 0$  war.

Diese Formeln lassen sich sofort auf den kreisförmigen Querschnitt anwenden, wenn man  $a = b =$  dem Radius  $r$  setzt. Wir heben besonders nur den Ausdruck für das Trägheitsmoment, nämlich

$$37. \quad W = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

hervor, worin  $d$  den Durchmesser  $2r$  bedeutet.

Auf Taf. IX sind in Fig. 8,  $N$ ,  $T_3$ ,  $T_2$  (für  $w = w$ ) für den kreisförmigen Querschnitt graphisch dargestellt.

**§. 204. Hauptspannungen.** In einer Parallelen zur Axe der  $w$  ist  $N$  und  $T_3$  constant,  $T_2$  aber wird an den Enden derselben, also am Umfange am grössten. Hier wird daher auch die Hauptspannung  $H$  und ideale Hauptspannung  $S$  am grössten. Für einen Punkt des Umfanges aber ergibt sich nach 33 (§. 76) und 67 (§. 83):

$$38. \quad H = \frac{2 M}{\pi a^3 b} \left[ v \pm \sqrt{v^2 + \frac{4 Q^2 a^2}{9 M^2} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi} \right],$$

$$39. \quad S = \frac{4 M}{3 \pi a^3 b} \left[ v \pm 2 \sqrt{v^2 + \frac{4 Q^2 a^2}{9 M^2} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi} \right].$$

Für das Maximum von  $H$  und  $S$  ergibt sich in Beziehung auf  $v^2$  eine cubische Gleichung. Wir wollen indess die Rechnung nur für einen kreisförmigen Querschnitt durchführen, für welchen sich dieselbe bedeutend vereinfacht. Setzen wir  $a = b = r$ , so wird, da  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  ist,

$$40. \quad H = \frac{2 M}{\pi r^4} \left[ v \pm \sqrt{v^2 + n^2 (r^2 - v^2)} \right],$$

$$41. \quad S = \frac{4 M}{3 \pi r^4} \left[ v \pm 2 \sqrt{v^2 + n^2 (r^2 - v^2)} \right],$$

wenn wir zur Abkürzung

$$n = \frac{2 Q r}{3 M}$$

setzen. Hiernach wird H zum analytischen Maximum für

$$42. \quad v^2 = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

Ist  $n < 1$ , also  $Q^2 r^2 < \frac{3}{2} M^2$  oder  $Q r < 2,121 M$ , so ist  $v$  imaginär. Alsdann wird H zum wirklichen Maximum für  $v = \pm r$ . Das Maximum von H selbst ist

$$43. \quad \left\{ \begin{array}{l} n > 1: \max H = \pm \frac{2 n^3}{\sqrt{n^2 - 1}} \frac{M}{\pi r^3} = \frac{4 n Q v}{3 F r} \\ n < 1: \max H = \frac{4 M}{\pi r^3} \end{array} \right.$$

S dagegen wird zum analytischen Maximum für

$$44. \quad v = \pm \frac{n r}{\sqrt{3 - 7 n^2 + 4 n^4}}$$

Ist  $n^2 < \frac{3}{2}$ , also  $Q r < \frac{3}{4} \sqrt{6} M$ , d. i.  $< 1,837 M$ , so wird  $v > r$ , also für uns ohne Bedeutung. Alsdann wird S für  $v = \pm r$  zum wirklichen Maximum.

Bezeichnen wir den Werth von S für  $v = 0$ ,  $v = \pm r$  mit  $S_0, S_1$ , das analytische Maximum von S mit  $S'$ , so ergibt sich

$$45. \quad \left\{ \begin{array}{l} S_0 = \frac{16 Q}{9 \pi r^2}, \quad S_1 = \frac{4 M}{\pi r^3}, \\ S' = \frac{16 (4 n^2 - 3)}{27 n \sqrt{3 - 7 n^2 + 4 n^4}} \frac{Q}{F} \end{array} \right.$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

$\frac{1}{n}$	$\frac{Q r}{M}$	$S_0$	$S'$	$S_1$	$v$
0	$\infty$	1,778	1,778	0	0
0,1	15	1,778	1,780	0,267	0,050
0,2	7,5	1,778	1,791	0,533	0,104
0,3	5	1,778	1,800	0,800	0,163
0,4	3,75	1,778	1,820	1,067	0,233
0,5	3	1,778	1,850	1,333	0,320
0,6	2,5	1,778	1,899	1,600	0,439
0,7	2,143	1,778	1,980	1,867	0,616
0,8	1,875	1,778	2,137	2,133	0,924
0,817	1,837	1,778	2,177	2,177	1
0,9	1,667	1,778	—	2,4	—
		$\frac{Q}{F}$	$\frac{Q}{F}$	$\frac{Q}{F}$	$r$

Innerhalb der Grenzen, zwischen welchen das analytische Maximum von  $S$  das wirkliche ist, schwankt dasselbe also zwischen den engen Grenzen  $1,778 \frac{Q}{F}$  und  $2,177 \frac{Q}{F}$ , so dass man annähernd für alle Fälle

$$46. S' = 2 \frac{Q}{F}$$

setzen kann.

**§. 205. Festigkeitsbedingungen.** Wenn beim kreisförmigen Querschnitte  $Qr < 1,837 M$  ist, so wird  $S'$  für  $v = \pm r$  zum Maximum und alsdann ist  $K' = \frac{4M}{\pi r^3}$  zu setzen, also

$$47. M = \frac{\pi K' r^3}{4}$$

Wenn dagegen  $Qr > 1,837 M$  ist, so ist  $S'$  das Maximum von  $S$  und alsdann ergibt sich als Festigkeitsbedingung, wenn man für  $n$  seinen Werth einsetzt,

$$48. K' = \frac{M}{\pi r^3} \frac{8(16 Q^2 r^2 - 27 M^2)}{9\sqrt{243 M^4 - 63 M^2 Q^2 r^2 + 64 Q^4 r^4}}$$

Bedeutend einfacher und in den meisten Fällen auch genau genug wird die Festigkeitsbedingung, wenn man annähernd  $S' = 2 \frac{Q}{F}$  setzt, nämlich

$$49. 2Q = K' \pi r^2$$

Für einen Körper von constanter Festigkeit wird daher annähernd

$$50. r = \sqrt{\frac{2Q}{\pi K'}}$$

Taf. III Fig. 3, 6 und Taf. IV Fig. 8 stellen Fälle dar, bei welchen  $Q$ , also auch  $r$  constant ist. Die Form des übrigen Theiles, für welchen  $Qr < 1,837 M$  ist, wurde bereits früher bestimmt.

Genauer ergibt sich für den Fall, dass eine Kraft auf das Ende des Stabes ( $x = 0$ ) wirkt, wenn der Radius am Ende  $r_0$  ist,  $r_0 = 0,752 \sqrt{\frac{Q}{K}}$ , und für  $x = 0$  0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6  $r_0$  bezüglich  $r = 1,000$  1,003 1,006 1,016 1,031 1,055 1,111  $r_0$ .

Bei prismatischen Körpern kann man in den gewöhnlichen Fällen die Festigkeitsbedingung 47 als maassgebend ansehen.

Ist z. B. der prismatische Stab an einem Ende eingespannt, am anderen mit  $G$  belastet, so ist  $Q = G$ ,  $M = Gx$ . Da  $Q$  constant ist und  $M$  für  $x = 1$  zum Maximum wird, so wird auch  $S$  für  $x = 1$  zum Maximum und zwar ist

$$\max S_1 = \frac{4G l}{\pi r^3}, \quad \max S' = \frac{4G l}{\pi r^3} \frac{2(16r^2 - 27l^2)}{9\sqrt{243l^4 - 63l^2r^2 + 64r^4}}$$

Es wird nur  $\max S' > \max S_1$ , wenn  $l < 0,544 r$  ist, welche Bedingung aber in den gewöhnlichen Fällen der Praxis nicht erfüllt ist.

**§. 206. Schiefe Lage.** Wenn die Halbaxe  $a$  gegen die Kraftebene unter dem Winkel  $\alpha$  geneigt ist, so ergibt sich nach §. 67, da hier

$$W = \frac{\pi}{4} a^3 b, \quad W' = \frac{\pi}{4} a b^3$$

zu setzen ist, als Faserspannung

$$51. N = \frac{4M}{\pi a b} \left( \frac{v}{a^2} \cos \alpha + \frac{w}{b^2} \sin \alpha \right),$$

also für einen Punkt des Umfanges, wenn wir  $v = a \cos \varphi$ ,  $w = b \sin \varphi$  setzen,

$$52. N = \frac{4M}{\pi a b} \left( \frac{\cos \alpha \cos \varphi}{a} + \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{b} \right).$$

Am grössten wird hiernach  $N$  für

$$53. \tan \varphi = \frac{a}{b} \tan \alpha$$

und zwar ergibt sich, indem wir in 52  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  durch  $\tan \varphi$  ausdrücken und  $\tan \varphi$  aus 53 einsetzen,

$$\max N = \frac{4M \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}{\pi a^2 b^2}.$$

Setzen wir  $\max N = K'$ , so ergibt sich

$$54. M = \frac{\pi K' a^2 b^2}{4 \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Auf Taf. IX ist in Fig. 9  $\max N$  und  $M$  für ein variables  $\alpha$  graphisch dargestellt. Hiernach wird, abweichend von rechteckigem Querschnitte,  $M$  zum Maximum und Minimum, je nachdem die grössere oder kleinere Axe der Ellipse in der Kraftebene liegt. Es wird  $4 \max M = \pi K' a^2 b$ ,  $4 \min M = \pi K' a b^4$ , also  $\max M : \min M = a : b$ .

Die Halbaxen  $m$ ,  $n$  der Trägheitsellipse verhalten sich nach §. 65 wie  $a : b$ . Aus §. 68 folgt daher, dass die Durchschnitlinie der Kraftebene mit dem Querschnitte und die neutrale Axe conjugirte Durchmesser sind, wonach sich die letztere leicht construiren lässt.

**§. 207. Elliptischer Ring.** (Fig. 62). Die Axe des Ringes sei eine Ellipse mit den Halbaxen  $a$ ,  $b$  und die Breite  $\delta$  des Ringes, senkrecht zu seiner Axe, constant und sehr klein. Der äussere und innere Umfang sind dann sehr nahe Ellipsen mit den Halbaxen  $a + \frac{1}{2} \delta$ ,  $b + \frac{1}{2} \delta$ ,  $a - \frac{1}{2} \delta$ ,  $b - \frac{1}{2} \delta$ .

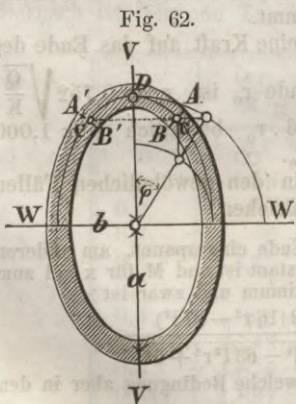
Als Trägheitsmoment ergibt sich zunächst nach 31 (§. 203):

$$W = \frac{\pi}{4} \left[ (a + \frac{1}{2} \delta)^3 (b + \frac{1}{2} \delta) - (a - \frac{1}{2} \delta)^3 (b - \frac{1}{2} \delta) \right] \\ = \frac{\pi}{4} \delta \left[ a^2 (a + 3b) + \frac{1}{4} (3a + b) \delta^2 \right].$$

Vernachlässigen wir das zweite Glied in der Parenthese wegen der Kleinheit von  $\delta$ , so wird

$$55. W = \frac{\pi}{4} a^2 (a + 3b) \delta.$$

Unter  $\Omega$  verstehen wir hier das statische Moment des Flächenstückes  $ABB'A'$ , welches durch die symmetrisch zur Axe der  $v$  gelegenen Senkrechten  $AB$ ,  $A'B'$  zur Mittellinie des Ringes abgeschnitten wird. Dasselbe ist sehr nahe gleich dem statischen Momente des durch die Sehne  $CC'$



abgeschnittenen Flächenstückes. Bezeichnen wir die statischen Momente der durch  $CC'$  von der mittleren, äusseren und inneren Ellipse abgeschnittenen Flächenstücke mit  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ , so ist  $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$  und nach 30 (§. 203), wenn sich  $\varphi$  auf die Punkte C, C' bezieht,

$$\Omega_0 = \frac{2}{3} a^2 b \sin^3 \varphi = \frac{2}{3} a^2 b \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^3}.$$

Differenziirt man nach a, b, während man v constant lässt, so ergibt sich

$$d\Omega_0 = \frac{2}{3 a^2} \left[ b (2 a^2 + v^2) \partial a + a (a^2 - v^2) \partial b \right] \sqrt{a^2 - v^2}.$$

Dieser Ausdruck für  $d\Omega_0$  gilt sehr nahe auch für  $\Omega_1 - \Omega_0$  und für  $\Omega_0 - \Omega_2$ , wenn man  $\delta$  für  $\partial a$  und  $\partial b$  setzt. Daher ist  $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 = 2 (\Omega_1 - \Omega_0)$ , d. i.

$$\Omega = \frac{2 \delta}{3 a^2} \left[ b (2 a^2 + v^2) + a (a^2 - v^2) \right] \sqrt{a^2 - v^2}$$

oder

$$\begin{aligned} 56. \quad \Omega &= \frac{2 \delta}{3 a^2} \left[ (a + 2 b) a^3 - (a - b) v^2 \right] \sqrt{a^2 - v^2} \\ &= \frac{2}{3} a \delta \left[ 3 b + (a - b) \sin^2 \varphi \right] \sin \varphi. \end{aligned}$$

Demnach wird nun, wenn  $T_3'$  die zur Axe des Stabes parallel und in der durch AB gehenden, zur Axe des Stabes parallelen, Ebene wirkenden Schubspannung bezeichnet, nach 23 (§. 67) und 25 (§. 69), wobei in letzterer Formel  $2 \delta$  für b zu setzen ist,

$$57. \quad N = \frac{4 M v}{\pi a^2 (a + 3 b) \delta},$$

$$58. \quad T_3' = \frac{4 Q [3 b + (a - b) \sin^2 \varphi] \sin \varphi}{\pi a (a + 3 b) \delta}.$$

Die Schubspannung  $T_2'$  (siehe §. 70) ist, da  $\delta$  constant ist, Null.  $T_3'$  wird zum Maximum für  $\varphi = 90^\circ$ , d. i. in der Axe der w und zwar ist

$$59. \quad \begin{cases} \max N = \frac{8 M}{\pi a (a + 3 b) \delta} \\ \max T_3' = \frac{4 Q (a + 2 b)}{\pi a (a + 3 b) \delta}. \end{cases}$$

Für den Kreisring ergibt sich, wenn wir  $a = b = r$  setzen,

$$60. \quad N = \frac{M v}{\pi r^3 \delta}, \quad T_3' = \frac{3 Q \sin \varphi}{\pi r \delta}.$$

$$61. \quad \max N = \frac{M}{\pi r^2 \delta}, \quad \max T_3' = \frac{3 Q}{\pi r \delta} = \frac{6 Q}{F}.$$

Während sich beim vollen elliptischen Querschnitte  $\frac{\max T_3}{\max N} = \frac{Q a}{3 M}$  ergab, ergibt sich hier  $\frac{\max T_3}{\max N} = \frac{Q (a + 2 b)}{M}$ , so dass hier die Schubspannung verhältnissmässig viel grösser werden kann.

**§. 208. Hauptspannungen.** Als ideale Hauptspannung ergibt sich für den Kreisring nach 67 (§. 83)

$$62. S = \frac{M}{3 \pi r^3 \delta} \left[ v \pm 2 \sqrt{v^2 + n^2 (r^2 - v^2)} \right],$$

wenn wir zur Abkürzung  $n = \frac{6 Q r}{M}$  setzen. Der von  $v$  abhängige Ausdruck in der Parenthese ist derselbe, wie beim vollen elliptischen Querschnitte nach 41 (§. 204). Wir können daher sofort folgern, dass  $S$  zum analytischen Maximum wird für

$$63. v = \pm \frac{n r}{\sqrt{3 - 7 n^2 + 4 n^4}},$$

dass das wirkliche Maximum von  $S$  aber für  $v = \pm r$  eintritt, wenn  $n^2 < \frac{1}{2}$ , d. i.  $Q r < \frac{\sqrt{6}}{12} M$ , d. i.  $Q r < 0,204 M$  ist.

Sind  $S_0, S_1$  die Werthe von  $S$  für  $v = 0, v = \pm r$  und  $S'$  das analytische Maximum, so ist

$$64. \begin{cases} S_0 = \frac{4 Q}{\pi r \delta} = \frac{8 Q}{F}, & S_1 = \frac{M}{\pi r^2 \delta}, \\ S' = \frac{8 (4 n^2 - 3)}{3 n \sqrt{3 - 7 n^2 + 4 n^4}} \frac{Q}{F}. \end{cases}$$

Die Tabelle in §. 204 gilt auch hier, nur sind die dort angegebenen Werthe von  $S_0, S', S_1$  noch mit  $\frac{9}{2}$  zu multipliciren. Daher liegt  $S'$  zwischen den Grenzen  $\frac{9}{2} \cdot 1,778 \frac{Q}{F} = 8 \frac{Q}{F}$  und  $\frac{9}{2} \cdot 2,177 \frac{Q}{F} = 9,796 \frac{Q}{F}$ , so dass man in allen Fällen annähernd

$$65. S' = 9 \frac{Q}{F} = \frac{9 Q}{2 r \pi \delta}$$

setzen kann.

Die Festigkeitsbedingungen sind hiernach leicht aufzustellen. Für den gewöhnlichen Fall, dass  $S$  für  $v = \pm r$  zum Maximum wird, ist  $K' = S$ , also

$$66. K' \pi r^2 \delta = M$$

zu setzen.

Ist z. B. der an beiden Enden unterstützte Körper gleichmässig belastet, so ist  $\max Q = \frac{1}{2} q l$ ,  $\max M = \frac{1}{8} q l^2$ , daher  $S_1 = \frac{q l^2}{8 \pi r^2 \delta}$  und annähernd  $S' = \frac{9 q l}{2 F} = \frac{9 q l}{4 \pi r \delta}$ , daher wird nur  $S' > S_1$ , wenn

$$l < 18 r$$

ist, welche Bedingung allerdings in einzelnen Fällen der Praxis erfüllt werden kann. Daher ist als Festigkeitsbedingung

$$l > 18 r: \quad q l = \frac{8 K' \pi r^2 \delta}{1},$$

$$l < 18 r: \quad q l = \frac{4}{9} K' \pi r \delta$$

zu setzen.

## XXIII. Kapitel.

## Verschiedene Querschnittsformen.

§. 209. **Bestimmung der Querschnittsgrößen.** Wir wollen in diesem Kapitel verschiedene Querschnitte untersuchen, bei welchen es nicht nöthig wird, auf die Schubspannungen Rücksicht zu nehmen.

Zunächst kommt es dabei auf die Bestimmung des Schwerpunktes an, welche nach bekannten Regeln der Mechanik auszuführen ist. Am besten bestimmt man, wenn er nicht schon durch Symmetrieaxen etc. bestimmt ist, seine Entfernung von zwei Axen, indem man für diese Axen das statische Moment des Querschnittes bestimmt und dieses durch den Flächeninhalt dividirt.

Das Trägheitsmoment bestimmt man entweder direkt für die Schweraxe, oder, was zuweilen vorzuziehen ist, erst für irgend eine andere zu dieser parallele Axe. Ist das letztere Trägheitsmoment  $W'$ , der Abstand der beiden Axen  $e$  und der Abstand eines Punktes von der Schweraxe und der zu dieser parallelen Axe bezüglich  $v, v_1$ , so ist  $v_1 = v + e$ , also  $W_1 = \int df v_1^2 = \int df (v + e)^2 = \int df v^2 + 2e \int df v + e^2 \int df = W + 0 + F e^2$ , also

$$67. \quad W = W_1 - F e^2.$$

In gleicher Weise ergibt sich, wenn  $\Omega, \Omega_1$  das statische Moment für die Schweraxe und die zu dieser parallele Axe bezeichnet,

$$68. \quad \Omega = \Omega_1 - F e.$$

Bei zusammengesetzten Querschnitten ist das Trägheitsmoment gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Theile.

## A. Geradlinige Figuren.

§. 210. **Das Parallelogramm.** Die eine Seite des recht- oder schiefwinkligen Parallelogrammes sei  $b$ , die zugehörige Höhe  $h$ . Alsdann ist in Beziehung auf eine der Seiten  $b$

$$\Omega = b \int_0^h y \, dy, \quad W = b \int_0^h y^2 \, dy, \quad \text{d. i.}$$

$$69. \quad \Omega = \frac{1}{2} b h^2; \quad W = \frac{1}{3} b h^3.$$

Hat die Axe von den beiden Seiten  $b$  des Parallelogrammes die Abstände  $h_1, h_2$ , (Fig. 63) so ergibt sich in gleicher Weise

$$70. \quad \Omega = \frac{1}{2} b (h_1^2 - h_2^2) = \frac{1}{2} F (h_1 + h_2),$$

$$71. \quad W = \frac{1}{3} b (h_1^3 - h_2^3) = \frac{1}{3} F (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2).$$

Die wichtigsten aus Rechtecken zusammengesetzten Formen sind der I und T förmige Querschnitt, die wir in den nächsten Kapiteln ausführlicher behandeln wollen. Hier wollen wir nur auf den kreuzförmigen Querschnitt eingehen.

§. 211. **Kreuzförmiger Querschnitt.** Der Querschnitt sei in Beziehung auf zwei senkrechte Axen symmetrisch und habe die in

Fig. 63.

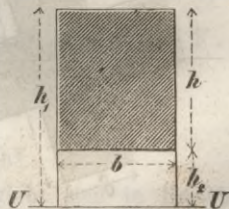


Fig. 64.

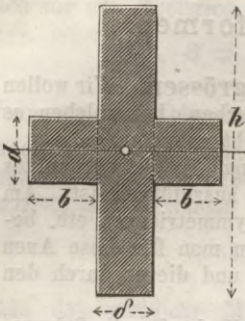


Fig. 64 angegebenen Dimensionen, wobei die Kraftebene vertical angenommen ist. Alsdann ist

$$72. \quad \begin{cases} F = h \delta + 2 b \delta, \\ W = \frac{1}{12} (\delta h^3 + 2 b \delta^3), \end{cases}$$

also die Festigkeitsbedingung  $K' W = M a$ , wenn  $K'$  der kleinste der Coefficienten  $K$ ,  $\mathfrak{K}$  ist,

$$73. \quad K' (\delta h^3 + 2 b \delta^3) = 6 M h.$$

Sind beispielsweise die Verhältnisse  $\frac{b}{h} = m$ ,  $\frac{\delta}{h} = n$ ,

$\frac{\partial}{h} = n_1$ , gegeben, so wird  $K' (n + 2 m n_1^3) h^3 = 6 M$ , also

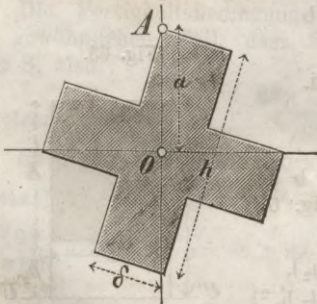
$$74. \quad h = \sqrt[3]{\frac{6 M}{K (n + 2 m n_1^3)}}.$$

Dieser Querschnitt findet besonders Anwendung bei Wellen und Stäben, die auf Knickfestigkeit beansprucht werden. In beiden Fällen ist eine congruente Symmetrie in Beziehung auf beide Axen am zweckmässigsten. Alsdann wird  $b = \frac{1}{2} (h - \delta)$ ,  $\partial = \delta$ , mithin, wenn wir  $\frac{\delta}{h} = n$  setzen,

$$75. \quad \begin{cases} F = 2 h \delta - \delta^2 = n (2 - n) h^2, \\ W = \frac{1}{12} (h^3 \delta + h \delta^3 - \delta^4) = \frac{n}{12} (1 + n^2 - n^3) h^4. \end{cases}$$

Das Trägheitsmoment ist für alle Schweraxen constant.

Fig. 65.



Die Faserspannung  $N$  wird bei sich drehenden Wellen am grössten, wenn  $a$  am grössten ist, und dies tritt ein, wenn eine Ecke  $A$  (Fig. 65) in die Kraftebene fällt. Alsdann ist  $a = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + d^2} = \frac{1}{2} h \sqrt{1 + n^2}$ . Die Festigkeitsbedingung  $K' W = M a$  wird demnach

$$76. \quad \begin{cases} K' (h^3 \delta + h \delta^3 - \delta^4) \\ \quad = 5 M \sqrt{h^2 + d^2}, \\ h = \frac{6 M \sqrt{1 + n^2}}{K' n (1 + n^2 - n^3)}, \\ F = \frac{36 (2 - n) (1 + n^2) M^2}{K'^2 n (1 + n^2 - n^3)^2}. \end{cases}$$

Hiernach ergibt sich z. B. für  $n = 0, 0,2 \quad 0,4 \quad 0,6 \quad 0,8 \quad 1$  bezüglich  $F = 316, 139, 87, 70, 72 \cdot \frac{M^2}{K'^2}$ . Am kleinsten wird  $F$  für  $n = 0,877$ .

Wenn der Körper auf Knickfestigkeit beansprucht wird, so ist in dem Falle, dass die Enden frei sind, und eine Kraft  $P$  im Schwerpunkte jeder Endfläche wirkt, bei constantem Querschnitte nach 19 (§. 172):

$$77. \begin{cases} P = \frac{\pi^2 E}{12 l^2} (h^3 \delta + h \delta^3 - \delta^4), \\ h = \sqrt[4]{\frac{12 P l^2}{\pi^2 E n (1 + n^2 - n^3)}}, \\ F = \sqrt{\frac{12 n (2 - n)^2 P l^2}{\pi^2 E (1 + n^2 - n^3)}}. \end{cases}$$

Für  $n = 0 \quad 0,2 \quad 0,4 \quad 0,6 \quad 0,8 \quad 1$  ergibt sich bezüglich  $F = 0 \quad 0,87 \quad 1,07 \quad 1,12 \quad 1,11 \quad 1,10 \sqrt{\frac{Pl^2}{E}}$ .  $F$  wird am grössten für  $n = 0,69$ , am kleinsten für  $n = 0$ , so dass es zweckmässig ist,  $\delta$  möglichst klein anzunehmen.

**§. 212. Das Dreieck.** Die eine Seite  $AB$  des Dreiecks (Fig. 66) sei  $= b$  und die zugehörige Höhe  $= h$ . Wir legen zunächst die Axe  $DE$  durch die Spitze  $C$  parallel zu  $AB$ . Ist  $b'$  die Länge eines zu  $AB$  parallelen Streifens im Abstände  $y$  von  $C$ , so ist  $\Omega_1 = \int_0^h b' y dy$ ,  $W_1 = \int_0^h b' y^2 dy$ .

Nun aber ist  $b' = b \frac{y}{h}$ , mithin

$$\Omega_1 = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 dy, \quad W_1 = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy,$$

d. i.

$$78. \quad \Omega_1 = \frac{1}{3} b h^2 = \frac{2}{3} F h,$$

$$79. \quad W_1 = \frac{1}{4} b h^3 = \frac{1}{2} F h^2.$$

Da der Abstand des Schwerpunktes von  $DE = \frac{2}{3} h$  ist, so ist für die zu  $AB$  parallele Schweraxe  $W = W_1 - F \left(\frac{2}{3} h\right)^2 = \frac{1}{2} F h^2 - \frac{4}{9} F h^2$  oder

$$80. \quad W = \frac{1}{36} b h^3 = \frac{1}{18} F h^2.$$

Für die Seite  $AB$  ergibt sich nun nach 65 und 64  $\Omega_2 = 0 + F \cdot \frac{1}{3} h$ ,  $W_2 = W + F \left(\frac{1}{3} h\right)^2$ , d. i.

$$81. \quad \Omega_2 = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{3} F h,$$

$$82. \quad W_2 = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{6} F h^2.$$

Ist das Dreieck gleichschenkelig, so ergibt sich in Beziehung auf die Symmetrieaxe nach 82:  $W' = 2 \cdot \frac{1}{12} b \left(\frac{h}{2}\right)^3$ , d. i.

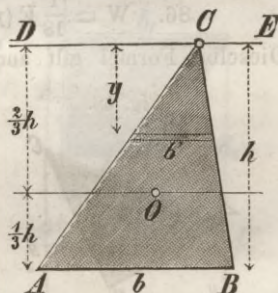
$$83. \quad W' = \frac{1}{48} b^3 h.$$

Für einen Rhombus mit den Diagonalen  $b, h$  würde sich nach 83 für die beiden Diagonalen  $W = 2 \cdot \frac{1}{48} h^2 \frac{b}{2}$ ,  $W' = 2 \cdot \frac{1}{48} b^2 \frac{h}{2}$ , d. i.

$$W = \frac{1}{48} b h^3, \quad W' = \frac{1}{48} b^3 h$$

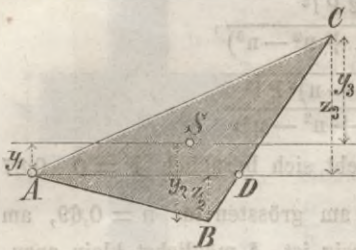
ergeben.

Fig. 66.



§. 213. Fortsetzung.

Fig. 67.



Wir legen die Axe in beliebiger Richtung durch eine Ecke A (Fig. 67); die Axe schneide die gegenüberliegende Seite in D. Bezeichnen wir die Länge von AD mit  $b$ , den Abstand der Ecken B und C von der Axe mit  $z_1, z_2$ , so ergibt sich nach 81, 82  $\Omega = \frac{1}{6} b (z_1^2 - z_2^2)$ ,  $W = \frac{1}{12} b (z_3^2 + z_2^2)$ . Nun aber ist  $F = \frac{1}{2} b (z_2 + z_3)$ , daher  $\Omega = \frac{1}{3} F \frac{z_3^2 - z_2^2}{z_3 + z_2}$ ,  $W = \frac{1}{6} F \frac{z_3^3 + z_2^3}{z_3 + z_2}$ .

d. i.  $84. \Omega = \frac{1}{3} F (z_3 - z_2).$

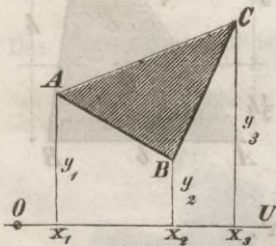
$85. W = \frac{1}{6} F (z_2^2 - z_2 z_3 + z_3^2).$

Der Abstand des Schwerpunktes von AD ist hiernach  $\frac{1}{3} (z_3 - z_2)$ . Demnach ergibt sich für eine zu AD parallele Schweraxe, wenn  $y_1, y_2, y_3$  die Abstände der Ecken A, B, C von derselben sind, nach 67,  $W = \frac{1}{6} F (z_1^2 - z_2 z_3 + z_3^2) - \frac{1}{9} F (z_3 - z_2)^2 = \frac{1}{18} F (z_2^2 + z_2 z_3 + z_3^2)$ . Nun aber ist  $z_2 = -(y_2 - y_1)$ ,  $z_3 = y_3 - y_1$ , wenn wir  $y_1, y_2, y_3$  auf der einen Seite als positiv, auf der andern als negativ einführen. Dies eingesetzt, giebt

$86. W = \frac{1}{18} F (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_2 y_3 - y_3 y_1 - y_1 y_2).$

Dieselbe Formel gilt auch noch für das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Schweraxe, wenn  $y_1, y_2, y_3$  die Abstände von einer andern zur Schweraxe parallelen Axe bedeuten, da auch dann noch  $z_2 = -(y_2 - y_1)$ ,  $z_3 = y_3 - y_1$  ist.

Fig. 68.



Für eine ganz beliebige Axe OU (Fig. 68) ergibt sich nun, wenn  $y_1, y_2, y_3$  die Abstände der drei Ecken von dieser Axe sind, da alsdann der Abstand des Schwerpunktes von dieser Axe  $= \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3)$  ist,  $\Omega = \frac{1}{3} F (y_1 + y_2 + y_3)$ ,  $W = \frac{1}{18} F (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_2 y_3 - y_3 y_1 - y_1 y_2) - \frac{1}{9} F (y_1 + y_2 + y_3)^2$ .

d. i.  $87. \Omega = \frac{1}{3} F (y_1 + y_2 + y_3),$

$88. W = \frac{1}{6} F (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2).$

Bezeichnen wir den Abstand der Ecken A, B, C von einer andern zu OU senkrechten Axe mit  $x_1, x_2, x_3$ , so ist  $F = \frac{1}{2} [(x_3 - x_1)(y_3 + y_1) - (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - (x_3 - x_2)(y_3 + y_2)]$  oder

$89. F = \frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)].$

Hiernach würde es nun auch möglich sein, das statische und Trägheitsmoment für ein beliebiges Vieleck zu bestimmen.

§. 214. Das Trapez.

a) Wir bestimmen zunächst das statische und Trägheits-Moment für

eine der nicht parallelen Seiten AB (Fig. 69). Die Länge dieser Seite sei  $= b$  und die Abstände der anderen Ecken C, D von derselben  $= h_1, h_2$ . Indem wir uns das Trapez parallel zu den parallelen Seiten in streifenförmige Elemente von der Höhe  $h$  zerlegt denken, ergibt sich nach 69 (§. 210), die Winkel bei A und B mögen rechte oder schiefe sein,

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_0^h h^2 dx, \quad W = \frac{1}{3} \int_0^h h^3 dx.$$

Nun aber ist  $h = h_1 + (h_2 - h_1) \frac{x}{b}$ . Die Einsetzung und Integration giebt

$$90. \quad \Omega = \frac{1}{6} b (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)$$

$$91. \quad W = \frac{1}{12} b (h_1^3 + h_1^2 h_2 + h_1 h_2^2 + h_2^3) = \frac{1}{6} F (h_1^2 + h_2^2).$$

b) Wir legen jetzt die Axe parallel zu den beiden parallelen Seiten  $b_1, b_2$  (Fig. 70) und bezeichnen die Abstände derselben von der Axe mit  $h_1, h_2$ , die Höhe des Trapezes mit  $h$ . Wir denken uns das Trapez in zwei Dreiecke mit den Flächen  $\frac{1}{2} b_1 h$  und  $\frac{1}{2} b_2 h$  zerlegt. Die Anwendung der Formeln 87 und 88 giebt alsdann

$$92. \quad \Omega = \frac{1}{6} h [b_1 (2 h_1 + h_2) + b_2 (h_1 + 2 h_2)],$$

$$W = \frac{1}{12} h [b_1 (2 h_1^2 + h_2^2 + h_1^2 + 2 h_1 h_2) + b_2 (h_1^2 + 2 h_2^2 + 2 h_1 h_2 + h_2^2)]$$

oder

$$93. \quad W = \frac{1}{12} h [b_1 (3 h_1^2 + 2 h_1 h_2 + h_2^2) + b_2 (h_1^2 + 2 h_1 h_2 + 3 h_2^2)] \\ = \frac{1}{12} h [b_1 + b_2] (h_1 + h_2)^2 + 2 b_1 h_1^2 + 2 b_2 h_2^2.$$

c) Hiernach ist nun auch leicht, das Trägheitsmoment für eine zu den parallelen Seiten  $b_1, b_2$  parallele Schweraxe UU (Fig. 71) zu bestimmen. Das statische Moment in Beziehung auf die Seiten  $b_1, b_2$  ist bei der Gesamthöhe  $h$  nach 92 bezüglich  $\frac{1}{6} h^2 (2 b_1 + b_2)$ ,  $\frac{1}{6} h^2 (b_1 + 2 b_2)$ . Der Flächeninhalt ist  $\frac{1}{2} h (b_1 + b_2)$ . Demnach ist der Abstand der Schweraxe von den Seiten  $b_1, b_2$ :

$$a = \frac{2 b_1 + b_2}{3 (b_1 + b_2)} h, \quad a = \frac{b_1 + 2 b_2}{3 (b_1 + b_2)} h.$$

Das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Seite  $b_1$  ist nach 93  $\frac{1}{12} h [(b_1 + b_2) h^2 + 4 b_1 h^2] = \frac{1}{12} (3 b_1 + b_2) h^3$ ; daher ist nach 64:

Fig. 69.

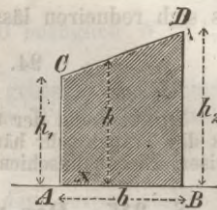


Fig. 70.

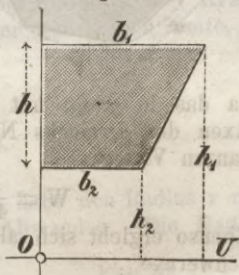
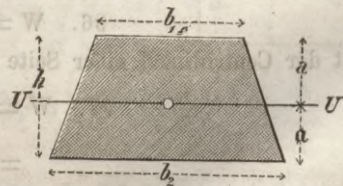


Fig. 71.



$$W = \frac{1}{12} (3 b_1 + b_2) h^3 - \frac{1}{2} (b_1 + b_2) h \left( \frac{2 b_1 + b_2}{3 (b_1 + b_2)} h \right)^2,$$

was sich reduciren lässt auf

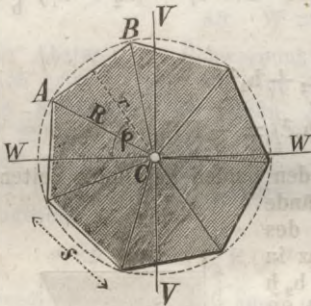
$$94. \quad W = \frac{1}{36} \frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2} h^3.$$

Direkt findet der trapezförmige Querschnitt wenig Anwendung. Wohl aber tritt das Trapez sehr häufig in zusammengesetzten Formen auf, wie Winkeleisen, T-eisen, Eisenbahnschienen u. s. w.

**§. 215. Das regelmässige Vieleck.**

Es bezeichne  $n$  die Anzahl der Seiten,  $s$  die Seite,  $r$  den Radius des eingeschriebenen,  $R$  den Radius des umschriebenen Kreises. Wir denken uns das Vieleck durch Verbindung der Ecken mit dem Mittelpunkte  $C$  (Fig. 72) in Dreiecke zerlegt. Die Symmetrieaxe eines solchen Dreiecks  $ABC$  bilde mit der Axe  $WW$  den Winkel  $\varphi$ . Das Trägheitsmoment des Dreiecks für die durch  $C$  gehende Symmetrieaxe ist nach 83 (§. 212)  $= \frac{1}{48} s^3 r$  und für eine zur Symmetrieaxe senkrechte Axe nach 79 (§. 212)  $= \frac{1}{4} s r^2$ . Daher ist das Trägheitsmoment des Dreiecks für die Axe  $WW$  nach 16 (§. 65)  $= \frac{1}{48} s^3 r \cos^2 \varphi + \frac{1}{4} s r^3 \sin^2 \varphi$ ,

Fig. 72.



da das in §. 65 mit  $V$  bezeichnete Integral für die beiden genannten Axen des Dreiecks Null wird. Demnach ist das Trägheitsmoment des ganzen Vielecks

$$W = \frac{1}{48} s r [s^2 \Sigma \cos^2 \varphi + 12 r^2 \Sigma \sin^2 \varphi].$$

Ebenso ergibt sich als Trägheitsmoment  $W'$  für die zu  $WW$  senkrechte Schweraxe

$$W' = \frac{1}{48} s r [s^2 \Sigma \sin^2 \varphi + 12 r^2 \Sigma \cos^2 \varphi].$$

Addirt man diese beiden Gleichungen und beachtet, dass nach §. 65 für das regelmässige Vieleck  $W' = W$  und dass  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  und  $\Sigma 1 = n$  ist, so ergibt sich

$$95. \quad W = \frac{n}{96} s r (s^2 + 12 r^2).$$

Da  $s^2 = 4 (R^2 - r^2)$  und die Fläche  $F$  des Vielecks  $= \frac{1}{2} n s r$  ist, so ergibt sich auch

$$96. \quad W = \frac{1}{12} F (R^2 + 2 r^2).$$

Ist der Centriwinkel einer Seite  $= \alpha$ , so ist  $r = R \cos \frac{1}{2} \alpha$ , mithin auch

$$97. \quad W = \frac{1}{12} F R^2 (2 + \cos \alpha) \\ = \frac{1}{6} F^2 \frac{2 + \cos \alpha}{n \sin \alpha}.$$

Ist  $W_1$  das Trägheitsmoment eines Kreises mit gleichem Flächeninhalte, so ist bei dem Radius  $r_1$   $W_1 = \frac{\pi}{4} r_1^4 = \frac{F^2}{4 \pi}$ , mithin

$$98. \quad W = \frac{2\pi(2 + \cos\alpha)}{3n \sin\alpha} W_1.$$

Hiernach ergibt sich z. B. für  $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$  bezüglich  $W = 1,209, 1,047, 1,016, 1,008, 1,003, 1,001 \cdot W_1$ .

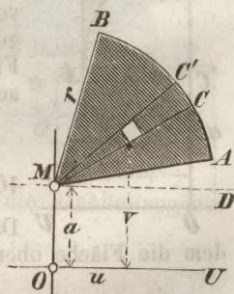
Bei gerader Seitenzahl ist die Tragkraft am grössten und kleinsten, je nachdem der kleine Radius  $r$  oder grosse Radius  $R$  in der Kräfteebene liegt, also ist  $\max M = \frac{K' W}{r}$ ,  $\min M = \frac{K' W}{R}$ .

Bei ungerader Seitenzahl ist der Abstand der gespanntesten und gedrücktesten Faser verschieden. Die Tragkraft wird am kleinsten, wenn der grosse Radius  $R$  entweder auf der ausgedehnten, oder auf der zusammengedrückten Seite in die Kräfteebene fällt. Bei beliebiger Lage ist  $M = \frac{K W}{a}$  oder  $M = \frac{K' W}{a}$  und von diesen Werthen ist der kleinere maassgebend. Wenn sich das Vieleck dreht, so nimmt der eine der Werthe  $a, a'$  zu, während der andere abnimmt.  $M$  wird daher am grössten, wenn  $\frac{K}{a} = \frac{K'}{a}$  oder  $\frac{a}{a'} = \frac{K}{K'}$  ist, wenn diese Lage überhaupt möglich ist. Ist z. B.  $K = K'$ , so tritt diese Lage ein, wenn ein grosser und ein kleiner Radius senkrecht auf der Kräfteebene steht. Ist diese Lage nicht möglich, so wird die Tragkraft am grössten, wenn ein kleiner Radius in der Kräfteebene liegt, und zwar auf der ausgedehnten oder gedrückten Seite, je nachdem  $K < K'$  ist.

## B. Krummlinige Figuren.

**§. 216. Der Kreisabschnitt.** Der Kreis habe den Radius  $r$  und der Mittelpunkt von der Axe  $OU$  (Fig. 73) den Abstand  $a$ . Die Radien  $MA, MB$ , welche den in Rede stehenden Kreisabschnitt begrenzen, mögen mit der Axe  $OU$  oder einer Parallelen  $MD$  zu dieser die Winkel  $\alpha, \beta$  einschliessen. Ein beliebiger Radius  $MC$  bilde mit  $MD$  den Winkel  $\varphi$ . Ist  $\rho$  der Abstand eines beliebigen Punktes in  $MC$  von  $M$ , so ist für ein dreieckiges Element  $MCC'$

Fig. 73.



$$d\Omega = d\varphi \int_0^r \rho v d\rho, \quad dW = d\varphi \int_0^r \rho v^2 d\rho.$$

Nun aber ist  $v = a + \rho \sin\varphi$ , mithin

$$d\Omega = d\varphi \int_0^r \rho (a + \rho \sin\varphi) d\rho = \frac{1}{6} r^2 d\varphi (3a + 2r \sin\varphi)$$

$$dW = d\varphi \int_0^r \rho (a + \rho \sin\varphi)^2 d\rho = \frac{1}{12} r^2 d\varphi (3a^2 + 8ar \sin\varphi + 3r^2 \sin^2\varphi).$$

Demnach ist nun für den ganzen Kreisabschnitt

$$\Omega = \frac{1}{6} r^2 \int_{\alpha}^{\beta} (3a + 2r \sin \varphi) d\varphi$$

$$W = \frac{1}{12} r^2 \int_{\alpha}^{\beta} (6a^2 + 8ar \sin \varphi + 3r^2 \sin^2 \varphi) d\varphi,$$

d. i.

$$99. \quad \Omega = \frac{1}{6} r^2 [3a(\beta - \alpha) + 2r(\cos \alpha - \cos \beta)],$$

$$100. \quad W = \frac{1}{48} r^2 [6(4a^2 + r^2)(\beta - \alpha) + 32ar(\cos \alpha - \cos \beta) - 3r^2(\sin 2\beta - \sin 2\alpha)].$$

Bezeichnen wir die Abstände der Punkte A, B von der Axe OU mit  $y_1, y_2$ , von dem zu OU senkrechten Durchmesser mit  $x_1, x_2$ , so ist  $r \cos \alpha = x_1, r \cos \beta = x_2, r \sin \alpha = y_1 - a, r \sin \beta = y_2 - a$ . Daher wird auch

$$101. \quad \Omega = \frac{1}{6} r^2 [3a(\beta - \alpha) + 2(x_1 - x_2)],$$

$$102. \quad W = \frac{1}{24} r^2 [3(4a^2 + r^2)(\beta - \alpha) + 19a(x_1 - x_2) - 6(x_1 y_1 - x_2 y_2)].$$

Sollen diese Formeln allgemeine Giltigkeit haben, so muss man für MA den am weitesten nach rechts gedrehten Radius nehmen (wenn man die rechte Seite von OM als die positive annimmt).

Für den Viertelkreis wird, je nachdem derselbe oberhalb oder unterhalb MD liegt,  $\alpha = 0$  oder  $-90^\circ, \beta = 90^\circ$  oder  $0$ , daher

Fig. 74.

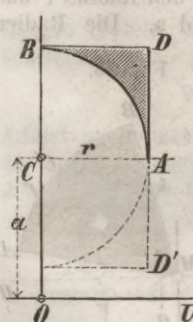
$$103. \quad \Omega = \frac{1}{12} r^2 (3\pi a \pm 4r),$$

$$104. \quad W = \frac{1}{48} r^2 [3\pi(4a^2 + r^2) \pm 32ar].$$

Hiernach ergibt sich leicht für eine Fläche, welche von einem Viertelkreise AB (Fig. 74) und den Tangenten AD, BD eingeschlossen wird, indem man diese Fläche als Differenz eines Quadrates und eines Kreisabschnittes ansieht,

$$105. \quad \Omega = \frac{1}{12} r^2 [3(4 - \pi)a \pm 2r],$$

$$106. \quad W = \frac{1}{48} r^2 [12(4 - \pi)a^2 \pm 16ar + (16 - 3\pi)r^2].$$



Das obere oder untere Zeichen ist zu wählen, je nachdem die Fläche oberhalb oder unterhalb des Radius AC liegt.

**§. 217. Kreisabschnitt.** Der Kreisabschnitt (Fig. 75) habe den Radius  $r$ , und den halben Centriwinkel  $\alpha$ .

a) Die Axe UU sei der Sehne AB parallel. Wir betrachten den Kreisabschnitt als Differenz des Kreisabschnittes MACB und des Dreiecks MAB. Für den ersteren ergibt sich nach 99 u. 100, wenn wir dort  $90^\circ - \alpha$  für  $\alpha$  und  $\beta = 90^\circ + \alpha$  setzen,  $\Omega = \frac{1}{3} r^2 (3a\alpha + 2r \sin \alpha)$ ,  $W = \frac{1}{24} r^2 [6(4a^2 + r^2)\alpha + 32ar \sin \alpha - 3r^2 \sin 2\alpha]$ . Für das Dreieck wird

nach 87 und 88, wenn wir dort  $F = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha$ ,  
 $y_1 = a$ ,  $y_2 = y_3 = a + r \cos \alpha$  setzen,  $\Omega = \frac{1}{2} r^2$   
 $(3a + 2r \cos \alpha) \sin 2\alpha$ ,  $W = \frac{1}{2} r^2 (6a^2 +$   
 $8ar \cos \alpha + 3r^2 \cos^2 \alpha) \sin 2\alpha$ . Daher ergibt  
 sich für den Kreisabschnitt

$$107. \Omega = \frac{1}{3} r^2 [3a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \pm 2r \sin^3 \alpha].$$

$$108. W = \frac{1}{24} r^2 [3(4a^2 + r^2)(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \pm 2r \sin \alpha (8a \sin^2 \alpha \mp 3r \cos^3 \alpha)].$$

Für den Fall, dass, wie in der Figur, der Kreisabschnitt oberhalb M liegt, ergibt sich das obere Vorzeichen. Das untere ergibt sich in gleicher Weise für den Fall, dass der Kreisabschnitt unterhalb M liegt.

Der Flächeninhalt des Kreisabschnittes ist  $F = r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$ .

b) Für die Symmetrieaxe OC ist das Trägheitsmoment des Kreisabschnittes nach 100, indem wir dort  $a = 0$ ,  $-\alpha$  für  $\alpha$  und  $\alpha$  für  $\beta$  setzen,  $W = \frac{1}{8} r^4 (2\alpha - \sin 2\alpha)$  und das des Dreiecks nach 80  $\frac{1}{6} r^4 \sin^3 \alpha \cos \alpha$ . Mithin ist das Trägheitsmoment des Kreisabschnittes

$$109. W' = \frac{1}{24} r^4 (6\alpha - 3 \sin 2\alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha).$$

Für eine beliebige Lage der Axe ist das Trägheitsmoment nun nach 16 (§. 65) zu bestimmen.

**§. 218. Die Parabel.** Wir wollen uns bei der Parabel nur auf das wichtigste Flächenstück beschränken, nämlich auf einen durch eine Senkrechte AB (Fig. 76) zur Axe getrennten Abschnitt ABC.

Ist die Länge einer Sehne im Abstände  $x$  vom Scheitel  $C = y$ , so ist  $y = A \sqrt{x}$ . Bezeichnen wir die Sehne AB mit  $b$ , die Höhe CD mit  $h$ , so ist  $b = A \sqrt{h}$ , also  $A = \frac{b}{\sqrt{h}}$ ,

mithin

$$y = b \sqrt{\frac{x}{h}}.$$

a) Wir bestimmen zunächst die Momente für die Scheiteltangente  $V'V'$ . Für dieselbe ist

$$\Omega = \int_0^h y x dx = \frac{b}{\sqrt{h}} \int_0^h x^{\frac{3}{2}} dx,$$

$$W = \int_0^h y x^2 dx = \frac{b}{\sqrt{h}} \int_0^h x^{\frac{5}{2}} dx,$$

das ist

$$\Omega = \frac{2}{5} b h^2 \quad W = \frac{2}{7} b h^3.$$

Fig. 75.

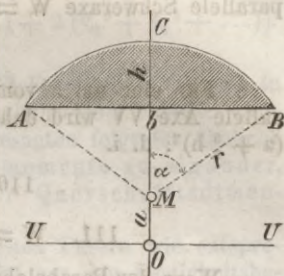
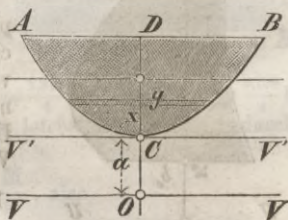


Fig. 76.



Da der Flächeninhalt  $F = \frac{3}{5} b h$  ist, so ergibt sich als Abstand des Schwerpunktes vom Scheitel  $\frac{3}{5} h$ . Daher ist für die zur Scheiteltangente parallele Schweraxe  $W = \frac{2}{7} b h^3 - \frac{2}{3} b h (\frac{3}{5} h)^2$ , d. i.

$$W = \frac{8}{175} b h^3.$$

Für eine um  $a$  vom Scheitel entfernte und der Scheiteltangente parallele Axe  $VV$  wird daher  $\Omega = \frac{2}{3} b h (a + \frac{3}{5} h)$ ,  $W = \frac{1}{175} b h^3 + \frac{2}{3} b h (a + \frac{3}{5} h)^2$ , d. i.

$$110. \quad \Omega = \frac{2}{15} b h (5 a + 3 h),$$

$$111. \quad W = \frac{2}{105} b h (35 a^2 + 42 a h + 15 h^2).$$

Wenn der Parabelabschnitt zwischen dem Scheitel  $C$  und der Axe  $VV$  liegt, so ist das zweite Glied in beiden Parenthesen negativ zu nehmen.

b) Als Trägheitsmoment  $W'$  für die Axe  $CD$  der Parabel ergibt sich nach 2 §. 196

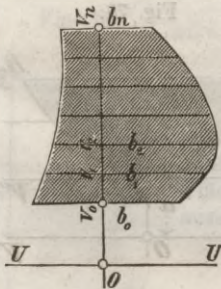
$$W = \frac{1}{12} \int_0^h y^3 dx = \frac{b^3}{12 \sqrt{h^3}} \int_0^h x^{\frac{3}{2}} dx, \text{ d. i.}$$

$$112. \quad W = \frac{1}{30} b^3 h.$$

Diese Formeln können auch zuweilen als Näherungsformeln für flache Kreisabschnitte angewendet werden.

**§. 219. Simpson'sche Regel.** Bei unregelmässig begrenzten Flächen benutzt man am besten die bekannte Simpson'sche Regel zur Bestimmung des statischen und Trägheitsmomentes.

Fig. 77.

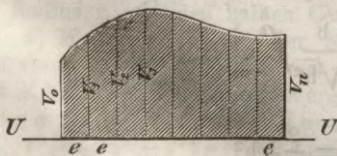


a) Theilt man die Fläche durch zur Axe parallele Sehnen, welche von einander einen gleichen Abstand  $e$  haben, in eine gerade Anzahl von Theilen (Fig. 77), so ist, wenn wir die Sehnen mit  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ , ihre Abstände von  $UU$  mit  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$  bezeichnen,  $\Omega = \int b v dv$ ,  $W = \int b v^2 dv$ , d. i.

$$113. \quad \Omega = \frac{1}{3} e [b_0 v_0 + b_n v_n + 4 (b_1 v_1 + b_3 v_3 + \dots) + 2 (b_2 v_2 + b_4 v_4 + \dots)],$$

$$114. \quad W = \frac{1}{3} e [b_0 v_0^2 + b_n v_n^2 + 4 (b_1 v_1^2 + b_3 v_3^2 + \dots) + 2 (b_2 v_2^2 + b_4 v_4^2 + \dots)].$$

Fig. 78.



b) Theilt man die von der Geraden  $UU$  (Fig. 78) begrenzte Fläche durch zu  $UU$  senkrechte Ordinaten, welche von einander einen gleichen Abstand  $e$  haben, in eine gerade Anzahl Theile, so ist, wenn man die Ordinaten mit  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$  bezeichnet, in Beziehung auf die Axe  $UU$   $\Omega = \frac{1}{2} \int v^2 dx$ ,  $W = \frac{1}{3} \int v^3 dx$ , d. i.

$$115. \quad \Omega = \frac{1}{6} e [v_0^2 + v_n^2 + 4(v_1 + v_n + \dots) + 2(v_2 + v_4 + \dots)]$$

$$116. \quad W = \frac{1}{9} e [v_0^3 + v_n^3 + 4(v_1^3 + v_n^3 + \dots) + 2(v_2^3 + v_4^3 + \dots)].$$

**§. 220. Aehnliche Querschnitte.** Nicht selten wählt man in der Praxis für bestimmte Constructionstheile ähnliche Querschnitte. Aus dem in §. 66 über proportionale Querschnitte Gesagten folgt für ähnliche Querschnitte sofort, dass sich die Trägheitsmomente zu einander, wie die vierten Potenzen entsprechender Querschnittsdimensionen verhalten.

Da sich die Abstände  $a$ ,  $\alpha$  der gespanntesten Fasern wie entsprechende Querschnittsdimensionen verhalten, so folgt aus den Festigkeitsbedingungen  $K = \frac{M a}{W}$ ,  $\mathfrak{K} = \frac{M \alpha}{W}$ , dass sich bei gleichen Dimensionen die Tragkräfte zu einander, wie die dritten Potenzen entsprechender Querschnittsdimensionen verhalten.

Beispiel. Der Querschnitt habe die in Fig. 79 angegebenen Dimensionen. Der Flächeninhalt ist  $F = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1,2 + 2 \cdot \left(0,8^2 - \frac{\pi}{4} \cdot 0,8^2\right) = 9,078$ . Das statische Moment in Beziehung auf AB ist nach 67 und 100  $\Omega = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,2^2 + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,8^2 [3(4 - \pi) \cdot 2 - 2 \cdot 0,8] = 11,258$ . Daher ist der Abstand des Schwerpunktes von AB  $= \frac{11,258}{9,078} = 1,241$ . Das Trägheitsmoment in Beziehung auf AB wird nach 66 und 103  $= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 4^3 + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 1,2^3 + 2 \cdot \frac{1}{48} \cdot 0,8^2 [12(4 - \pi)^2 - 16 \cdot 2 \cdot 0,8 + (16 - 3\pi)0,8^2] = 24,17$ . Also ist für eine zu AB parallele Schweraxe  $W = 24,17 - 9,078 \cdot 1,241^2 = 24,17 - 13,98 = 10,19$ .

Für Querschnitte mit denselben Verhältnissen wird daher bei der Höhe  $h$   $W : 10,19 = h^4 : 4^4$  oder

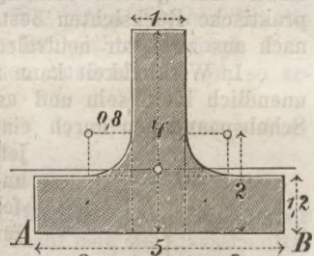
$$W = 0,0398 h^4.$$

Ist die obere Seite die gedrückte, so ist  $a = 1,241$ ,  $\alpha = 4 - 1,241 = 2,759$ , also allgemein  $a = \frac{1,241}{4} h = 0,310 h$ ,  $\alpha = \frac{2,759}{4} h = 0,690 h$ . Handelt es sich um Gusseisen, so tritt am leichtesten ein Bruch durch Zerrissen ein, also ist zu setzen

$$K = \frac{M a}{W} = \frac{M \cdot 0,310 h}{0,0398 h^4} = 7,79 \frac{M}{h^3}, \text{ also}$$

$$M = 0,128 K h^3; \quad h = 1,983 \sqrt[3]{\frac{M}{K}}.$$

Fig. 79.



**§. 221. Aehnliche Körper.** Wir denken uns zwei ähnliche Körper A, A<sub>1</sub> aus demselben Materiale, deren entsprechende Dimensionen sich wie 1 : n verhalten. Die Kräfte mögen auf beide Körper auf gleiche Weise vertheilt sein und die zulässigen Gesamtlasten mögen sich wie 1 : m verhalten. Alsdann ist

$$K = \frac{P}{F} + \frac{M a}{W} = \frac{P_1}{F_1} + \frac{M_1 a_1}{W_1}.$$

Nun aber ist  $a_1 = n a$ ,  $F_1 = n^2 F$ ,  $W_1 = n^4 W$ ,  $P_1 = m P$ ,  $M_1 = m n M$ , mithin

$$\frac{P}{F} + \frac{M a}{W} = \frac{m P}{n^2 F} + \frac{m M}{n^2 W}$$

oder

$$m = n^2,$$

d. h. die Lasten, welche zwei ähnliche Körper aufnehmen können, sind dem Quadrate entsprechender Dimensionen proportional.

Anwendung bei Belastungsproben mit Modellen.

## XXIV. Kapitel.

### Idealer I-förmiger Querschnitt.

§. 222. **Beste Querschnittsform.** Nach den Festigkeitsbedingungen  $KW = Ma$ ,  $RW = Ma$  ergibt sich, wenn sich die Lage des Körpers gegen die Kräfteebene nicht ändern kann, die kleinste Querschnittsfläche, wenn man das Material möglichst weit von der neutralen Axe entfernt. Die grösste zulässige Höhe des Körpers ist in der Regel durch praktische Rücksichten bestimmt. Der beste ideale Querschnitt wird demnach aus zwei zur neutralen Axe parallelen Geraden bestehen (Fig. 80).

In Wirklichkeit kann natürlich die Höhe dieser beiden Flächen nicht unendlich klein sein und ausserdem müssen dieselben zur Aufnahme der Schubspannungen durch eine Fläche verbunden sein. Wir wollen indess jetzt voraussetzen, dass diese Höhe der Flächen unendlich klein sei und dass eine Verbindung fehle, da wir dadurch wenigstens Näherungswerte für die nöthige Grösse der Flächen erhalten.

Die beiden Theile, aus welchen der Körper besteht, nennen wir Gurte.

Wir bezeichnen mit

$h$  die Gesamthöhe des Querschnittes,

$f_1, f_2$  den Flächeninhalt der Querschnitte beider Gurte,

$a_1, a_2$  den Abstand derselben vom Schwerpunkte,

$\varphi$  das Verhältniss  $\frac{f_1}{f_2}$ .

Der eine Gurt hat einen Zug, der andere einen Druck aufzunehmen. Der Index 1 entspreche dem gezogenen, der Index 2 dem gedrückten Gurte.

§. 223. **Festigkeitsbedingungen.** Es ist  $(f_1 + f_2) a_1 = f_2 h$ ,  $(f_1 + f_2) a_2 = f_1 h$ , mithin

$$117. \quad a_1 = \frac{f_2 h}{f_1 + f_2} = \frac{h}{1 + \varphi}, \quad a_2 = \frac{f_1 h}{f_1 + f_2} = \frac{\varphi h}{1 + \varphi}.$$

Demnach ist das Trägheitsmoment

$$W = f_1 a^2 + f_2 a_2^2 = \frac{f_1 f_2^2 + f_2 f_1^2}{(f_1 + f_2)^2} h^2,$$

d. i.

$$118. \quad W = \frac{f_1 f_2 h^2}{f_1 + f_2}.$$

Die Festigkeitsbedingungen  $K = \frac{M a}{W}$ ,  $\mathfrak{K} = \frac{M a}{W}$  gehen nun über in

$$K = \frac{M}{f_1 h}, \quad \mathfrak{K} = \frac{M}{f_2 h}$$

oder

$$119. \quad f_1 = \frac{M}{K h}, \quad f_2 = \frac{M}{\mathfrak{K} h};$$

$$f_1 : f_2 = \mathfrak{K} : K,$$

d. h. die Querschnitte der Gurte sollen sich umgekehrt verhalten, wie die entsprechenden Sicherheitscoefficienten für Zug und Druck.

Somit ergeben sich für Holz und Schmiedeeisen nahe gleiche Gurte, während beim Gusseisen der gedrückte Gurt viel schwächer ausfällt, als der gezogene.

Beide Gurte werden um so schwächer, je grösser  $h$  ist. Der Körper soll daher möglichst hoch sein. Wie schon erwähnt, ist die grösste zulässige Höhe meist durch praktische Rücksichten bedingt.

Setzt man die Werthe für  $f_1$ ,  $f_2$ , in den Ausdruck für  $W$ , so ergibt sich

$$120. \quad W = \frac{M h}{K + \mathfrak{K}}.$$

**§. 224. Träger von constanter Festigkeit bei constanter Höhe und gleichmässiger Belastung.** Macht man die Querschnittsfläche an jeder Stelle nicht grösser, als es die Festigkeit verlangt, so folgt aus 116, dass der Querschnitt der Gurte dem Momente proportional sein müsse.

Liegt der Träger mit beiden Enden auf Stützen und ist derselbe gleichmässig belastet, so ist nach §. 105  $M = \frac{1}{2} q x (1 - x)$ , mithin

$$f_1 = \frac{q x (1 - x)}{2 K h}, \quad f_2 = \frac{q x (1 - x)}{2 \mathfrak{K} h},$$

oder, wenn man den Querschnitt in der Mitte mit  $f_1'$ ,  $f_2'$  bezeichnet, wo-

bei  $f_1' = \frac{q l^2}{8 K h}$ ,  $f_2' = \frac{q l^2}{8 \mathfrak{K} h}$  ist,

$$121. \quad f_1 = 4 f_1' \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad f_2 = 4 f_2' \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Der Querschnitt ändert sich ganz in derselben Weise, wie die Breite bei gleich hohen proportionalen Querschnitten. Auch krümmt sich hier die Axe kreisförmig. Die früher für Körper mit proportionalen, gleich hohen Querschnitten entwickelten Regeln in Bezug auf Breite, Volumen und Formänderung können daher hier direkt angewendet werden.

Liegt der Träger mit beiden Enden auf Stützen, so ist nach §. 107

und 103 das Volumen  $\frac{2}{3}$  von dem Volumen bei constantem Querschnitte. Die Senkung  $y_1$  in der Mitte bei constantem Querschnitte ist nach 46 (§. 106)  $y_1 = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E W}$ , daher ist die Gleichung der deformirten Axe nach 49 (§. 107)

$$122. \quad \eta = \frac{24 y_1}{5 l^2} x (1-x) = \frac{q x (1-x) l^2}{16 E W'}$$

wenn  $W'$  das Trägheitsmoment des Querschnittes in der Mitte bedeutet. Die grösste Senkung  $y$  ( $x = \frac{1}{2} l$ ) wird daher

$$123. \quad y = \frac{6}{5} y_1 = \frac{q l^4}{64 E W'}$$

oder, da nach 120  $W' = \frac{q l^2 h}{8(K + \mathfrak{K})}$  ist,

$$124. \quad y = \frac{(K + \mathfrak{K}) l^2}{8 E h}$$

Bei continuirlichen Trägern gelten die in §. 165, 166, 167 entwickelten Regeln genau. Es folgt daher, dass eine verschiedene Höhenlage der Stützen kein geringeres Volumen ergiebt, als eine gleiche Höhenlage. Die daselbst entwickelten Gesetze für die Transversalkraft, Stützendrücke, Momente, für das Volumen und für das zweckmässigste Verhältniss der Längen der Felder sind direkt anzuwenden.

Anwendung bei Gitterträgern.

**§. 225. Träger von constanter Festigkeit bei constantem Querschnitte.** Nach 119 ergiebt sich als Höhe des Trägers

$$125. \quad h = \frac{M}{K f_1} = \frac{M}{\mathfrak{K} f_2}$$

Bei constantem Querschnitte muss also die Höhe des Trägers dem Momente proportional sein.

Wir bezeichnen das grösste Moment mit  $M_0$ , die entsprechende Höhe mit  $h_0$ . Alsdann wird  $h : h_0 = M : M_0$ , also

$$125 a. \quad h = \frac{M}{M_0} h_0$$

Liegt der Träger mit den Enden auf Stützen und ist derselbe in der Mitte mit  $G$  belastet, so ist  $M = \frac{1}{2} G x$ ,  $M_0 = \frac{1}{4} G l$ , also

$$126. \quad h = 2 h_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

so dass der Träger eine rhombische Gestalt hat.

Liegt der Träger mit den Enden auf Stützen und ist derselbe gleichmässig belastet, so ist  $M = \frac{1}{2} q x (1-x)$ ,  $M_0 = \frac{1}{8} q l^2$ , mithin

$$127. \quad h = 4 h_0 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Hiernach hat der Träger eine parabolische Gestalt, wesshalb man derartige Träger auch Parabelträger nennt.

Für die Formänderung der Axe haben wir mit Rücksicht auf 120 (§. 223):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E W} = - \frac{K + \mathfrak{K}}{E h}$$

Bei gleichmässiger Belastung wird daher

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = - \frac{(K + \mathfrak{K}) l^2}{4 E h_0 x (1-x)}$$

Ist  $\eta_0$  die Senkung in der Mitte bei der constanten Höhe  $h_0$ , so ist

$$\eta_0 = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E W_0} = \frac{5}{48} \frac{(K + \mathfrak{K}) l^2}{E h_0}; \text{ daher können wir auch setzen}$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = - \frac{12}{5} \frac{\eta_0}{x(1-x)},$$

$$\frac{d\eta}{dx} = - \frac{12 \eta_0}{5} \int \frac{dx}{x(1-x)} = - \frac{12 \eta_0}{5 l} \left( C - \log \text{nat} \frac{1-x}{x} \right).$$

Für  $x = \frac{1}{2} l$  muss  $\frac{d\eta}{dx} = 0$  werden, also  $C = \log \text{nat} 1 = 0$ . Daher wird nun weiter

$$\eta = \frac{12 \eta_0}{5 l} \int dx \log \text{nat} \frac{1-x}{x}, \text{ d. i.}$$

$$128. \quad \eta = - \frac{12}{5} \eta_0 \left[ \frac{x}{l} \log \text{nat} \frac{x}{l} + \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \log \text{nat} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right].$$

Für  $x = 0$  wird hiernach  $\eta = \frac{12}{5} \eta_0 [0 \cdot \log \text{nat} 0 + \log \text{nat} 1] = \frac{12}{5} \eta_0 \cdot (-\infty)$ . Nun aber ist nach der bekannten Bestimmungsweise des vieldeutigen Symbols  $\frac{\infty}{\infty} \cdot 0 \cdot \log \text{nat} 0 = \frac{\log \text{nat} y}{y-1} = - \frac{d \log \text{nat} y}{d y - 1} = \frac{y-1}{y-2} = y$  (für  $y = 0$ ), d. i.  $= 0$ ; mithin ist  $\eta = 0$ . Da für  $x = 0$  in der That  $\eta = 0$  werden muss, so ist eine Constante nicht hinzuzufügen.

Die Senkung  $\eta$  in der Mitte wird  $\eta = - \frac{12}{5} \eta_0 \log \text{nat} \frac{1}{2}$  oder

$$129. \quad \eta = \frac{12 \log \text{nat} 2}{5} \eta_0 = 1,664 \eta_0 = 0,1733 \frac{(K + \mathfrak{K}) l^2}{E h_0}.$$

Anwendung bei Parabelträgerbrücken.

## XXV. Kapitel.

### Symmetrischer I-förmiger Querschnitt.

**§. 226. Bezeichnungen.** Wenn die Festigkeit gegen Zug und Druck gleich gross ist, so ist ein symmetrischer Querschnitt am vorteilhaftesten, wenn nur äussere Transversalkräfte vorhanden sind. Derselbe wird daher vorzugsweise beim Schmiedeeisen Anwendung finden. Für denselben bezeichne (Fig. 81)

$h$  die ganze Höhe,

$h_1$  den Abstand der Schwerpunkte der beiden Gurt-Querschnitte,

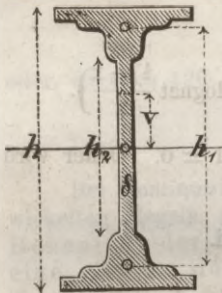
$h_2$  die Höhe der zwischen den Gurten befindlichen Blechwand,

f den Flächeninhalt jedes Gurt-Querschnittes,  
 w das Trägheitsmoment desselben in Beziehung auf seine horizontale  
 Schweraxe,  
 $\delta$  die Dicke der Blechwand.

Die Form der Gurte nehmen wir vorläufig als unbestimmt an, setzen  
 aber voraus, dass dieselben so dick sind, dass die in ihnen auftretenden  
 Schubspannungen unberücksichtigt bleiben können.

### §. 227. Spannungen.

Fig. 81.



Das statische Moment eines Theiles, welches durch eine um  $v$  von der horizontalen Schweraxe entfernte Parallele zu dieser getrennt wird, ergibt sich zu

$$130. \quad \Omega = \frac{1}{2} f h_1 + \frac{1}{8} \delta (h_2^2 - 4v^2).$$

Das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes ist nach 2 (S. 193) und 64 (S. 199):

$$131. \quad W = \frac{1}{2} f h_1^2 + \frac{1}{12} \delta h_2^3 + 2w,$$

und die gesammte Querschnittsfläche

$$132. \quad F = 2f + h_2 \delta.$$

Die Normalspannung  $N$  in einem beliebigen Punkte der Blechwand oder der Gurte und die Schubspannung  $T_3$  in einem beliebigen Punkte der Blechwand ist

$$133. \quad N = \frac{Mv}{W}, \quad T_3 = \frac{Q}{W} \left[ \frac{1}{2} \frac{f h_1}{\delta} + \frac{1}{8} (h_2^2 - 4v^2) \right].$$

Die Schubspannung  $T_2$  in der Blechwand ist  $= 0$ .

Die ideale Hauptspannung  $S$  in den Gurten ist  $N$  und erreicht ihr Maximum für  $v = \pm \frac{1}{2} h$ . Die ideale Hauptspannung in der Blechwand ist nach 67 (Seite 70)

$$134. \quad S = \frac{M}{3W} \left[ v \pm 2 \sqrt{v^2 + \frac{Q^2}{M^2} \left\{ \frac{f h_1}{\delta} + \frac{1}{4} (h_2^2 - 4v^2) \right\}^2} \right].$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{f h_1}{\delta h^2} + \frac{1}{4} \frac{h_2^2}{h^2} = \alpha, \quad \frac{Q^2 h^2}{M^2} = \beta,$$

so wird

$$S = \frac{M}{3W} \left[ v \pm 2 \sqrt{v^2 + \beta h^2 \left( \alpha - \frac{v^2}{h^2} \right)^2} \right],$$

$$\frac{dS}{dv} = \frac{M}{3W} \left[ 1 \pm 2 \frac{1 - 2\beta \left( \alpha - \frac{v^2}{h^2} \right)}{\sqrt{1 + \beta \frac{h^2}{v^2} \left( \alpha - \frac{v^2}{h^2} \right)^2}} \right].$$

Hiernach wird  $S$  zu einem Maximum oder Minimum für

$$16 \beta^2 \left( \frac{v}{h} \right)^6 - (32 \alpha \beta - 15) \beta \left( \frac{v}{h} \right)^4 + (16 \alpha^2 \beta^2 - 14 \alpha \beta + 3) \left( \frac{v}{h} \right)^2 - \alpha^2 \beta = 0.$$

Das sich hieraus ergebende  $v$  wird  $> \frac{1}{2} h$ , also für uns ohne Bedeutung,

wenn  $\beta$  kleiner ist, als die Wurzel der Gleichung

$$(64 \alpha^2 - 32 \alpha + 4) \beta^2 - (16 \alpha^2 + 56 \alpha - 15) \beta + 12 = 0.$$

Nun liegt  $\alpha$  zwischen den Grenzen  $\frac{1}{4}$  und  $\infty$ , demnach  $\beta$  zwischen den Grenzen 8,3 und  $\frac{1}{4}$ , so dass in Wirklichkeit ein analytisches Maximum in keinem Falle eintritt, wenn  $\beta < \frac{1}{4}$  oder  $\frac{Qh}{M} < \frac{1}{2}$ , oder

$$M > 2 Q h$$

ist. Ein analytisches Maximum kann daher nur in der unmittelbaren Nähe der Enden des Trägers stattfinden. Im übrigen Theile wird  $S$  zum Maximum für  $v = \pm \frac{1}{2} h$  oder  $v = \pm \frac{1}{2} h_2$ . In der Nähe der Enden aber wird  $S$  zum Maximum für einen zwischen 0 und  $\pm \frac{1}{2} h_2$  liegenden Werthe von  $v$ . Am Ende selbst, wo  $M = 0$  ist, wird  $S$  zum Maximum für  $v = 0$ .

Berechnet man  $S$  für verschiedene  $\alpha, \beta, v$ , so findet man, dass in allen Fällen, wo  $S$  ein analytisches Maximum hat, dasselbe nur wenig abweicht von einem der Werthe von  $S$  für  $v = 0$  oder  $v = \pm \frac{1}{2} h$ . So z. B.

wird für  $\alpha = 1$  und  $\beta = 10, 4, 2$   $\max S = 2,12 \quad 1,36 \quad 0,98 \cdot \frac{Mh}{W}$  (für  $v = 0,08 \quad 0,14 \quad 0,25 \cdot h_2$ ), während für  $v = 0$  bezüglich  $S = 2,11 \quad 1,33 \quad 0,94 \cdot \frac{Mh}{W}$  und für  $v = \frac{1}{2} h$  bezüglich  $S = 1,78 \quad 1,22 \quad 0,95 \cdot \frac{Mh}{W}$  wird.

Wir wollen daher in der Folge annehmen, dass an den Enden des Trägers  $S$  zum Maximum für  $v = 0$  oder für  $v = \pm \frac{1}{2} h$  wird, wodurch die Rechnung bedeutend vereinfacht wird, ohne dass Fehler entstehen, welche für die Praxis von Bedeutung sind. Im übrigen Theile wird  $S$  zum Maximum für  $v = \pm \frac{1}{2} h_2$  oder  $v = \pm \frac{1}{2} h$ .

Wir wollen die Werthe von  $S$  für  $v = 0$ ,  $v = \pm \frac{1}{2} h_2$  und  $v = \frac{1}{2} h$  mit  $S_0, S_1, S_2$  bezeichnen. Alsdann ist

$$135. \quad \begin{cases} S_0 = \frac{2Q}{3W} \left( \frac{f h_1}{\delta} + \frac{1}{4} h_2^2 \right), \\ S_1 = \frac{M h_2}{6W} \left[ 1 + 2 \sqrt{1 + \left( \frac{2Q f h_1}{M \delta h_2} \right)^2} \right], \\ S_2 = \frac{M h}{2W}. \end{cases}$$

Es ergibt sich hiernach leicht, dass

$$136. \quad \begin{cases} S_0 > S_1, \text{ wenn } \frac{M}{Q h_2} < -\frac{1}{3} \left( \frac{4 f h_1}{\delta h_2^2} + 1 \right) \pm \sqrt{\frac{4 f^2 h_1^2}{\delta^2 h_2^4} + \frac{8 f h_1}{\delta h_2^2} + 1}, \\ S_0 > S_2, \text{ wenn } \frac{M}{Q h_2} < \frac{1}{3} \left( \frac{4 f h_1}{\delta h h_2} + \frac{h_2}{h} \right), \\ S_1 > S_2, \text{ wenn } \frac{M}{Q h_2} < \frac{4 f h_1}{h_2 \delta \sqrt{3} (h - h_2) (3 h + h_2)}. \end{cases}$$

Für die hiernach auszuführende Bestimmung der Querschnittsdimensionen wollen wir beispielsweise die folgenden Fälle behandeln.

**§. 228. Träger mit constantem Querschnitte, welcher in der Mitte belastet ist.** Das eigene Gewicht des Trägers vernach-

lässigen wir; die in der Mitte ruhende Last sei =  $G$ .  $Q$  ist constant und zwar =  $\frac{1}{2} G$ .  $M$  wird in der Mitte zum Maximum und zwar ist dasselbe =  $\frac{1}{4} G l$ . Daher ist  $S_0$  constant und  $S_1, S_2$  müssen in der Mitte zum Maximum werden. Für dieselbe ist

$$137. \quad \begin{cases} S_0 = \frac{G}{3W} \left( \frac{f h_1}{\delta} + \frac{1}{4} h_2^2 \right), \\ S_1 = \frac{G h_2}{24W} \left[ 1 + 2 \sqrt{1^2 + \left( \frac{4 f h_1}{\delta h_2} \right)^2} \right], \\ S_2 = \frac{G l h}{8W}. \end{cases}$$

Es ergibt sich leicht, dass  $S_0 > S_1$  ist, wenn

$$\frac{2f}{h_2 \delta} < - \frac{3l^2 + 4lh_2 - 4h_2^2}{8h_1(1 - 2h_2)}.$$

Die rechte Seite ist stets negativ, daher kann diese Bedingung nicht erfüllt werden;  $S_0$  kann also nicht das Maximum von  $S$  sein. Ferner wird  $S_1 > S_2$ , wenn

$$\frac{2f}{h_2 \delta} > \frac{1}{4h_1} \sqrt{3 \left( 3 \frac{h^2}{h_2^2} - 2 \frac{h}{h_2} - 1 \right)}.$$

Die Gleichung  $S_2 = K$  giebt, wenn wir für  $W$  den Ausdruck 131 setzen, und das entsprechende  $f$  mit  $f_2$  bezeichnen,

$$138. \quad f_2 = \frac{3Ghl - 2K(h_2^3 \delta + 24w)}{12Kh_1^2}.$$

Dagegen giebt die Gleichung  $S_1 = K$ , wenn wir das entsprechende  $f$  mit  $f_1$  bezeichnen, wobei wir  $w$  seiner Kleinheit wegen vernachlässigen,

$$139. \quad f_1^2 + \frac{3Kh_2\delta^2(2Kh_2^2\delta - Gl)}{2(9K^2h_1^2\delta^2 - 4G^2)} f_1 = \frac{(2Kh_2^2\delta + Gl)(3Gl - 2Kh_2^2\delta)h_2^2\delta^2}{16(9K^2h_1^2\delta^2 - 4G^2)h_1^2}.$$

Setzen wir zur Abkürzung  $\frac{Kh^2}{G} = \varepsilon$ ,  $\frac{l}{h} = m$ ,  $\frac{\delta}{h} = n$ , so wird annähernd für  $h = h_1 = h_2$ :

$$138a. \quad f_2 = \frac{3m - 2\varepsilon n}{12\varepsilon} h^2,$$

$$139a. \quad f_1^2 + \frac{3\varepsilon n^2(2\varepsilon - 1)}{2(9\varepsilon^2 n^2 - 4)} h f_1 = \frac{2n^2(m + 2\varepsilon n)(3m - 2\varepsilon n)}{2(9\varepsilon^2 n^2 - 4)} h^4.$$

Hat man hiernach  $f_1, f_2$  berechnet, so ist  $F_1 = 2f_1 + h_2\delta$ ,  $F_2 = 2f_2 + h_2\delta$ . Auf Taf. IX ist in Fig. 11 und 12  $F_1$  und  $F_2$  für verschiedene  $\delta$  graphisch dargestellt.

Hat man ein bestimmtes  $\delta$  gewählt, so ist von den beiden Werthen von  $F$  der grössere zu wählen, weil sich leicht nachweisen lässt, dass bei constantem  $\delta$   $S_1$  und  $S_2$  mit abnehmendem  $f$  oder  $F$  grösser werden. Wäre z. B.  $F_1 > F_2$  und man wollte  $F_2$  wählen, so wäre  $S_2 = K$ , aber  $S_1 > K$ , was unzulässig ist.

Offenbar ist nun dasjenige  $\delta$  das zweckmässigste, für welches  $F$  ein Minimum wird. Dasjenige  $\delta$ , für welches  $F_1 = F_2$  wird, sei  $\delta_1$ , dasjenige  $\delta$  aber, für welches  $F$  zum Minimum wird,  $= \delta_2$ . Ist nun  $\delta_1 < \delta_2$  (Fig. 12), so ist offenbar  $\delta_1$  der zweckmässigste Werth für  $\delta$ , denn für  $\delta = \delta_2$  würde ja nicht  $F_2$ , sondern  $F_1$  maassgebend sein. Ist dagegen  $\delta_1 > \delta_2$  (Fig. 11), so ist  $\delta_2$  der zweckmässigste Werth für  $\delta$ . Um zu entscheiden, ob  $\delta_1 < \delta_2$  ist, muss man allerdings  $F_1$  und  $F_2$  für einige Werthe von  $\delta$  berechnen.

Ist  $\delta_1$  der zweckmässigste Werth von  $\delta$ , so ergibt sich  $\delta$  und  $f$  aus den Gleichungen  $S_1 = K$ ,  $S_2 = K$  oder  $S_1 = S_2$ ,  $S_2 = K$  und zwar

$$140. \quad \begin{cases} \delta = \frac{6 G l h h_1}{K h_2^3 (3 l R + 4 h_1)}, \\ f = \frac{h_2 l \delta R}{8 h_1} = \frac{3 G h l^2 R}{4 K h_2 (3 l h_1 R + 4 h_2^2)}, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$R = \sqrt{3 \left( 3 \frac{h^2}{h_2^2} - 2 \frac{h}{h_2} - 1 \right)}.$$

In der Regel ist  $h$  direkt gegeben; die Werthe von  $h_1$  und  $h_2$  muss man vorläufig annehmen; sodann berechnet man  $\delta$ ,  $f$  und construirt den Querschnitt, wodurch man  $h_1$ ,  $h_2$  genauer erhält, so dass man nun  $\delta$ ,  $f$  noch einmal genauer berechnen kann.

In vielen Fällen ist die so berechnete Blechdicke für die praktische Ausführung zu klein. Wählt man alsdann  $\delta$  ohne Berechnung, so ist nur  $f$  nach 138 und 139 zu berechnen und der grössere der erhaltenen Werthe beizubehalten.

Beispiel. Es sei  $l = 100^\circ$ ,  $h = 25^\circ$ ,  $G = 6980$  Kilogr.,  $K = 630$  Kil. pro  $\square$  Centim. Wir nehmen vorläufig  $h_1 = 23^\circ$ ,  $h_2 = 21^\circ$  an. Nach 138, 139 ergibt sich

$\delta$	Gleichung	$f_1$	$F_1$	$f_2$	$F_2$
0,32	— —	$\infty$	$\infty$	12,16	31,04
0,50	$f_1^2 - 15,022 f_1 = 133,39$	21,29	53,08	11,63	33,76
0,75	$f_1^2 - 7,234 f_1 = 100,77$	14,29	44,43	10,90	37,55
1,00	$f_1^2 - 3,334 f_1 = 94,87$	11,55	44,10	10,17	41,34
1,25	$f_1^2 - 0,077 f_1 = 92,05$	9,63	45,51	9,44	45,13
1,50	$f_1^2 + 2,983 f_1 = 89,26$	8,07	47,64	8,71	48,92
				$f_2 = 13,09 - 2,918 \delta$	

Hiernach ist  $F_1$ ,  $F_2$  auf Taf. IX in Fig. 11 graphisch dargestellt. Man sieht, dass  $\delta_2 < \delta_1$  ist, so dass  $\delta_2$  der zweckmässigste Werth von  $\delta$  ist. Durch Interpolation nach der Anmerkung auf Seite 93 findet man

$$\delta_1 = 0,922^\circ, \quad f = 12,33 \square^\circ, \quad F = 44,02 \square^\circ.$$

Anwendung bei Blechquerträgern eiserner Brücken u. s. w.

**§. 229. Träger mit constantem Querschnitte, welcher durch eine isolirte Last von veränderlicher Lage belastet ist.** In diesem Falle ist nach §. 102, wenn wir zur Abkürzung  $\frac{x}{l} = n$  setzen,

$$Q = G(1 - n), \quad M = G \ln(1 - n).$$

Hiernach wird, wenn wir noch  $\frac{2fh_1}{\delta l h_2} = A$ ,  $\frac{G l h_2}{6W} = B$  setzen,

$$141. \quad S_1 = B(1 - n) [n + 2\sqrt{A^2 + n^2}].$$

$S_1$  wird hiernach zum Maximum für

$$(1 - n) [2n + \sqrt{A^2 + n^2}] = 2(A^2 + n^2) + n\sqrt{A^2 + n^2} \text{ oder}$$

$$A^2 = \frac{1}{3} [1 + 4n + 12n^2 + (1 - 2n)\sqrt{1 + 12n(1 - n)}].$$

Die Reduction auf  $n$  bei gegebenem  $A$  würde eine Gleichung vierten Grades geben. Für  $n = 0 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5$  wird bezüglich  $A = 0,5 \quad 0,5516 \quad 0,5414 \quad 0,4835 \quad 0,3660 \quad 0$ . Durch Interpolation findet man hieraus für  $A = 0 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5$  bezüglich  $n = 0,500 \quad 0,481 \quad 0,462 \quad 0,433 \quad 0,371 \quad 0,272 \quad 0,133$ . Für noch grössere Werthe von  $A$  wird  $S_1$  stets für  $x = 0$  zum Maximum. Die entsprechenden Werthe von  $S_1$ , sowie auch die Werthe von  $S_1$  für  $n = 0,5$  und  $n = 0$  sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

A	n	max $S_1$	$S_1$ für $n = 0,5$	$S_1$ für $n = 0$
0	0,500	0,750	0,750	0
0,1	0,493	0,760	0,760	0,2
0,2	0,462	0,790	0,789	0,4
0,3	0,433	0,843	0,833	0,6
0,4	0,371	0,920	0,890	0,8
0,5	0,272	1,027	0,957	1,0
0,555	0,133	1,105	0,997	1,111
		. B	. B	. B

Hieraus geht hervor, dass das Maximum von  $S_1$  nur sehr wenig abweicht von dem Werthe von  $S_1$  für  $n = 0,5$  oder  $n = 0$ . Wir können demnach annehmen, dass  $S_1$  für  $x = 0$  oder  $x = 0,5$  zum Maximum wird, wodurch sich die Rechnung wesentlich vereinfacht. Für  $x = 0$  ist nach §. 227  $S_0 > S_1$ , so dass  $S_1$  für  $x = 0$  nicht weiter zu beachten ist. Da  $S_0$  dem  $Q$ ,  $S_2$  dem  $M$  direkt proportional ist, so wird  $S_0$  für  $x = 0$  und  $S_2$  für  $x = 0,5$  zum Maximum. Für  $x = 0$  wird  $Q = G$ ,  $M = 0$ , für  $x = 0,5$  aber  $Q = \frac{1}{2} G$ ,  $M = \frac{1}{4} G l$ . Demnach werden die Maxima von  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  für  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{2} l$ ,  $x = \frac{1}{2} l$

$$142. \quad \begin{cases} S_0 = \frac{2G}{3W} \left( \frac{fh_1}{\delta} + \frac{1}{4} h_2^2 \right), \\ S_1 = \frac{G h_2}{24W} \left[ 1 + 2\sqrt{1^2 + \left( \frac{4fh_1}{\delta h_2} \right)^2} \right], \\ S_2 = \frac{G h l}{8W}. \end{cases}$$

Wenn  $S_0 > S_1$  ist, so geben die Festigkeitsbedingungen  $S_0 = K$ ,  $S_2 = K$  oder  $S_0 = S_2$ ,  $S_2 = K$  folgende Werthe für  $\delta$  und  $f$ :

$$143. \left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{12 G l h}{K (9 l h h_1 - 12 h_1 h_2^2 + 8 h_2^3)}, \\ f &= \frac{(3 l h - 4 h_2^2) \delta}{16 h_1} = \frac{3 G l h (3 l h_1 - 4 h_2^2)}{4 K h_1 (9 l h h_1 - 12 h_1 h_2^2 + 8 h_2^3)}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man  $h_1 = h_2 = h$ , so wird annähernd

$$144. \delta = \frac{12 G l}{K h (9 l - 4 h)}, \quad f = \frac{(3 l - 4 h) \delta}{16} = \frac{3 G l (3 l - 4 h)}{4 K h (9 l - 4 h)}.$$

Hat man in dieser Weise  $\delta$  und  $f$  berechnet, so berechnet man nach 142 noch  $S_1$ . Ergiebt sich hierbei  $S_1 > K$ , so ist  $S_1 > S_0$  und die Berechnung müsste dann durch die Gleichungen  $S_1 = K$ ,  $S_2 = K$  genau wie im vorigen §. erfolgen.

Anwendung bei kleinen Blechbrücken und Nebenlängsträgern grösserer Brücken.

**§. 230. Träger mit constantem Querschnitte bei gleichmässiger Belastung.** Bei totaler gleichmässiger Belastung ist nach

§. 105, wenn wir wieder  $\frac{x}{l} = n$  setzen,

$$Q = \frac{1}{2} q l (1 - 2n), \quad M = \frac{1}{2} q l^2 n (1 - n).$$

Setzen wir ausserdem  $\frac{2 f h_1}{\delta l h_2} = A$ ,  $\frac{q l^2 h_2}{12 W} = B$ , so wird zunächst

$$145. S_1 = B [n (1 - n) + 2 \sqrt{n^2 (1 - n)^2 + A^2 (1 - 2n)^2}].$$

Auf Taf. IX ist in Fig. 10 hiernach  $S_1$  für verschiedene  $A$  und  $n$  graphisch dargestellt. Man sieht, dass  $S_1$  für jeden Werth von  $A$  nur entweder für  $x = 0$  oder  $x = \frac{1}{2} l$  zum Maximum wird. Nun aber ist für  $x = 0$   $M = 0$ , also nach §. 227  $S_0 > S_1$  und für  $x = \frac{1}{2} l$   $Q = 0$ , also nach §. 227  $S_2 > S_1$ , so dass  $S_1$  in keinem Querschnitte zum Maximum werden kann. Das Maximum von  $S$  ist daher  $S_0$  für  $x = 0$  ( $Q = \frac{1}{2} q l$ ,  $M = 0$ ) oder  $S_2$  für  $x = \frac{1}{2} l$  ( $Q = 0$ ,  $M = \frac{1}{8} q l^2$ ), und zwar ist

$$146. S_0 = \frac{q l}{3 W} \left( \frac{f h_1}{\delta} + \frac{1}{4} h_2^2 \right), \quad S_2 = \frac{q l^2 h}{16 W}.$$

Die Festigkeitsbedingungen  $S_0 = K$ ,  $S_1 = K$  geben nun nach Einsetzung des Werthes von  $W$  (mit Vernachlässigung von  $w$ ) für  $\delta$  und  $f$ :

$$147. \left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{6 q l^2 h}{K (9 l h h_1 - 12 h_1 h_2^2 + 8 h_2^3)}, \\ f &= \frac{(3 l h - 4 h_2^2) \delta}{16 h_1} = \frac{3 q l^2 h (3 l h - 4 h_2^2)}{8 K h_1 (9 l h h_1 - 12 h_1 h_2^2 + 8 h_2^3)}. \end{aligned} \right.$$

Annähernd wird, wenn wir  $h_1 = h_2 = h$  setzen,

$$148. \left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{6 q l^2}{K h (9 l - 4 h)}, \\ f &= \frac{(3 l - 4 h) \delta}{16} = \frac{3 q l^2 (3 l - 4 h)}{8 K h (9 l - 4 h)}. \end{aligned} \right.$$

Wenn, wie gewöhnlich,  $h$  gegen  $l$  nur klein ist, so ist mit noch geringerer Annäherung

$$149. \quad \delta = \frac{2 q l}{3 K h}, \quad f = \frac{3}{16} l \delta = \frac{1}{8} \frac{q l^2}{K h}.$$

Die ganze Querschnittsfläche ist annähernd, wenn wir für  $\delta$  und  $f$  die Ausdrücke 149 setzen,

$$150. \quad F = 2 f + h \delta = \frac{3}{4} \frac{q l^2}{K h} \cdot \frac{3 l + 4 h}{9 l - 4 h}.$$

Hiernach wird  $F$  zum Minimum für  $\frac{h}{l} = \frac{9}{20} = 0,45$ , welches Verhältniss, obwohl theoretisch das zweckmässigste, in den meisten Fällen aus praktischen Gründen zu gross ist.

Ergibt sich  $\delta$  für die praktische Ausführung zu klein, so dass man also  $\delta$  grösser wählen muss, so ist  $S_0 < K$  und es muss  $f$  durch die Bedingung  $S_2 = K$  bestimmt werden. Alsdann wird

$$151. \quad f = \frac{3 q l^2 h - 4 K \delta h^2}{24 K h_1^2}.$$

Für  $h_1 = h_2 = h$  wird annähernd

$$152. \quad f = \frac{3 q l^2 - 4 K \delta h^2}{24 K h}, \quad F = \frac{3 q l^2 + 8 K \delta h^2}{12 K h}.$$

Zum Minimum wird  $F$  für

$$153. \quad \frac{h}{l} = \sqrt{\frac{3 q}{8 K \delta}}.$$

Anwendung bei Blechträgern für Gebäude und Brücken.

**§. 231. Träger von constanter Festigkeit.** Wir setzen voraus, dass für jeden Querschnitt  $Q$  und  $M$  gegeben seien. Die zweckmässigsten Werthe von  $\delta$  und  $f$  sind dann folgendermaassen zu bestimmen. Man reducirt die Festigkeitsbedingungen  $S_0 = K$ ,  $S_1 = K$ ,  $S_2 = K$ , worin für  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  die Ausdrücke 135 (§. 227) zu setzen sind, auf  $f$  und bestimmt  $f$  für verschiedene  $\delta$ . Das grösste der so erhaltenen drei Werthe von  $f$  ist beizubehalten. Sodann berechnet man für die verschiedenen angenommenen Werthe von  $\delta$  die Werthe von  $F$  nach der Formel  $F = 2 f + h_2 \delta$ . Offenbar ist nun dasjenige  $\delta$  das zweckmässigste, für welches  $F$  ein Minimum ist.

Bezeichnen wir die drei Werthe von  $f$  bezüglich mit  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ , so ergibt sich

$$154. \quad \left\{ \begin{aligned} f_0 &= \frac{(2 Q - K h_2 \delta) h_2^2 \delta}{2 (3 K h_1 \delta - 4 Q) h_1} \\ f_1^2 + \frac{3 K h_2 \delta^2 (K_2 h_2^2 \delta - 2 M)}{9 K^2 h_1^2 \delta^2 - 16 Q^2} f_1 &= \frac{(2 M + K h_2^2 \delta) (6 M - K h_2^2 \delta) \delta^2 h_2^2}{4 (9 K^2 h_1^2 \delta^2 - 16 Q^2)} \\ f_2 &= \frac{6 M h - K h_2^3 \delta}{6 K h_1^2} \end{aligned} \right.$$

An den Enden, wo  $M = 0$  ist, ist nur  $f_0$  zu berechnen. Es ergibt sich leicht, dass hier annähernd (für  $h = h_1 = h_2$ )  $F$  zum Minimum wird für

$$\delta = \frac{4 - \sqrt{12}}{3} \frac{Q}{K h} = 0,1786 \frac{Q}{K h}.$$

Die Berechnung ist hiernach allerdings ziemlich umständlich. Man kann indes mit Rücksicht darauf, dass man die Blechdicke oft grösser nehmen muss, als sie sich ergibt, zur Umgehung der umständlichen Berechnung von  $f_1$  folgenden Weg einschlagen. Man nimmt die Blechdicke an und berechnet  $f_2$  nach 154. Nach 136 (§. 227) lässt sich nun leicht entscheiden, ob etwa  $S_0 > S_2$ , oder  $S_1 > S_2$  wird. In diesem Falle, der selten eintreten wird, müsste man allerdings noch  $f_0$  und  $f_1$  berechnen.

Beispiel. Träger mit gleichmässiger Belastung. Es sei  $l = 2000^c$ ,  $h = 200^c$ ,  $h_1 = 195$ ,  $h_2 = 180$ ,  $q = 4000$  Klgr. pro Meter = 40 Klgr. pro Centim.,  $K = 700$  Klgr. pro  $\square$ Centim.

a) Ende oder  $x = 0$ .  $Q = \frac{1}{2} q l = 40000$ ,  $M = 0$ . Nach 154 ergibt sich

$$f_0 = 179 \frac{(0,635 - \delta) \delta}{\delta - 2,74}$$

Für  $\delta = 0,64^c$  wird  $f_0 = 0$  und für noch grössere  $\delta$  wird  $f_0$  negativ. Wir wählen  $\delta = 1^c$ .

b) Für  $x = 0,25 l$  wird  $Q = 20000$ ,  $M = 15000000$ , daher nach 154 für  $\delta = 1$   $f_2 = 87 \square^c$ . Nach 136 wird  $S_0 < S_2$ , wenn  $4,167 > 0,93$  und  $S_1 < S_2$ , wenn  $4,17 > 1,74$ . Da beide Bedingungen erfüllt sind, so ist  $S_2$  das Maximum von  $S$ , der berechnete Werth  $f = 120 \square^c$  also der richtige.

c) In der Mitte oder für  $x = \frac{1}{2} l$  wird  $Q = 0$ ,  $M = 20000000$ . Hier ist  $S_2$  das Maximum von  $S$ . Nach 154 ergibt sich  $f_2 = 162 \square^c$ .

### §. 232. Träger mit reinem I-förmigem Querschnitte. Wir

setzen jetzt einen aus Rechtecken zusammengesetzten I-förmigen Querschnitt voraus, welcher gewöhnlich bei gewalzten und gegossenen Trägern gewählt wird. Wir führen ausser den bisher angewendeten Bezeichnungen noch die folgenden ein (Fig. 82).

$b$  die Breite jeder horizontalen Rippe,

$\delta$  die Dicke derselben.

Alsdann ist

$$155. W = \frac{1}{2} \delta h^2 + \frac{1}{3} b \delta (3 h^2 - 6 h \delta + 4 \delta^2).$$

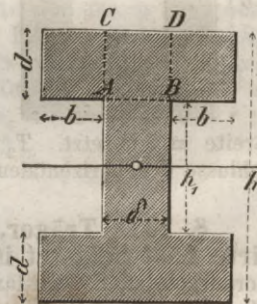
In der verticalen oder Mittelrippe behalten die Spannungen die in den vorigen Paragraphen ermittelten Werthe. Die bisher vernachlässigten Schubspannungen in den Seitenrippen sind aber jetzt nicht mehr zu vernachlässigen. Das statische Moment eines von den Seitenrippen durch eine Verticale, welche von der Axe der  $v$  um  $w$  absteht, abgeschnittenen Stückes ist  $\Omega = \frac{1}{4} \delta (2 b + \delta - 2 w) h_1$ . Mithin ist nach 23 (§. 68) und 28 (§. 72):

$$N = \frac{M v}{W}, \quad T_2 = \frac{Q (2 b + \delta - 2 w) h_1}{4 W}, \quad T_3 = \frac{Q [\delta^2 - (2 v - h_1)^2]}{8 W}.$$

$N$  wird zum Maximum für  $v = \frac{1}{2} h$ .  $T_2$  wird zum Maximum für  $w = \frac{1}{2} \delta$ , d. i. an der Wurzel  $AC, BD$  der seitlichen Rippen. Hier ist  $T_2 = \frac{Q b h_1}{2 W}$ .

$T_2$  wird zum Maximum für  $v = \frac{1}{2} h_1$  und zwar ist  $\max T_3 = \frac{Q \delta^2}{8 W}$ . Da  $\frac{1}{4} \delta^2$  gegen  $b h_1$  sehr klein ist, so können wir  $T_3$  gegen  $T_2$  vernachlässigen und also setzen

Fig. 82.



$$156. \quad N = \frac{M h}{2 W}, \quad T_2 = \frac{Q b h_1}{2 W}, \quad T_3 = 0.$$

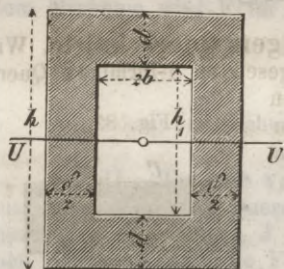
Die ideale Hauptspannung muss hiernach in den Seitenrippen für  $v = \pm \frac{1}{2} h$ ,  $w = \pm \frac{1}{2} \delta$ , d. i. an den äusseren Enden C, D der Wurzeln der Seitenrippen zum Maximum werden. Wir bezeichnen dasselbe wieder mit  $S_2$ . Die Ausdrücke für  $S_0$ ,  $S_1$  sind nach §. 227 beizubehalten, nur setzen wir  $2 b \delta$  für  $f$ . Daher wird

$$157. \quad \left\{ \begin{aligned} S_0 &= \frac{2 Q}{3 W} \left[ \frac{(2 b + \delta) \partial h_1}{\delta} + \frac{1}{4} h_2^2 \right], \\ S_1 &= \frac{M h_2}{6 W} \left[ 1 + 2 \sqrt{1 + \left( \frac{2 Q (2 b + \delta) \partial h_1}{M \delta h_2} \right)^2} \right], \\ S_2 &= \frac{M h}{6 W} \left[ 1 + 2 \sqrt{1 + \left( \frac{2 Q b h_1}{M h} \right)^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Hiernach wird annähernd  $S_1 = S_2$ , wenn  $(2 b + \delta) \frac{\partial}{\delta} = b$  oder

Fig. 83.

$$158. \quad \partial = \frac{b \delta}{2 b + \delta}$$



ist. Da  $\delta$  gegen  $2 b$  nur klein ist, so ist mit noch geringerer Näherung  $\partial = \frac{1}{2} \delta$ , die Seitenrippe also halb so dick, als die Mittelrippe. Ist  $\partial$  noch kleiner, so ist  $S_2 > S_1$ , ist  $\partial$  grösser, so ist  $S_1 > S_2$ . Gewöhnlich wird man aus praktischen Rücksichten  $\partial > \frac{1}{2} \delta$  machen müssen, so dass meist  $S_1 > S_2$  sein wird.

Alles dies gilt auch für Röhrenträger mit dem Querschnitte Fig. 83, wenn man die Dicke der verticalen Rippen  $\frac{1}{2} \delta$ , die lichte Breite  $= 2 b$  setzt.  $T_2$  wird hier in der Axe der  $v = 0$  und am Anschlusse der horizontalen Theile an die verticalen am grössten.

### §. 233. Träger, welcher in der Mitte durch eine isorirte Last belastet ist.

Nach §. 228 ist, einen prismatischen Träger vorausgesetzt,  $S_0$  constant und  $S_1$ ,  $S_2$  werden in der Mitte, wo  $Q = \frac{1}{2} G$ ,  $M = \frac{1}{4} G l$  ist, zum Maximum. Nach §. 228 ist aber  $S_0 < S_1$ , so dass nur die Bedingungen  $S_1 = K$  oder  $S_2 = K$  zu erfüllen sind. Durch die Gleichung  $S_1 = K$  ergibt sich für  $f = (2 b + \delta) \partial$  die Gleichung 139 und es ist nun, wie dort,  $\delta$  so zu wählen, dass  $F$  ein Minimum wird. Bei gegebener Höhe des Trägers ändert sich mit  $\partial$  allerdings auch  $h_2$ , jedoch ist  $\partial$  nur von geringem Einflusse, so dass man  $\partial$  vorläufig nach Gutdünken annehmen kann. Jedoch ergibt sich  $F$  um so kleiner, je kleiner man  $\partial$  wählt oder je weiter man das Material von der neutralen Axe entfernt. Das kleinste  $\partial$ , was man wählen kann, ist dasjenige, für welches  $S_2 = K$  wird, d. i. nach 158 nahezu  $\partial = \frac{b \delta}{2 b + \delta}$ . Setzt man hierin

$b = \frac{1}{2} \left( \frac{f}{\partial} - \delta \right)$  und reducirt auf  $\partial$ , so ergibt sich, nachdem  $f$  und  $\delta$  bestimmt ist,

$$159. \quad \partial = \frac{f \delta}{2f + \delta^2}, \quad b = \frac{f}{\delta}.$$

Es ist jedoch nicht nöthig, sich streng an diesen Werth von  $\partial$  zu binden, weil sich die nöthige Gesamtmfläche  $F$  nur wenig ändert, wenn sich das Verhältniss  $\partial : b$  ändert.

Beispiel. Es sei, wie im Beispiele zu §. 228  $l = 100^{\circ}$ ,  $h = 25^{\circ}$ ,  $G = 6980$  Kgr.,  $K = 630$  Kilogr. pro  $\square$ Centim. Nehmen wir vorläufig  $h_1 = h_2 = h = 25$  an, so ergibt sich  $F$  nach der Gleichung  $S_2 = K$  am kleinsten, für  $\delta = 0,56$ ,  $f = 9,3$ ; es wird  $F = 32,6$ . Daher wird nach 159  $\partial = \frac{9,3 \cdot 0,56}{2 \cdot 9,3 + 0,56^2} = 0,28$ ,  $b = \frac{9,3}{0,56} = 16,6$ . Genauer wird nun  $h_1 = 25 - 0,28 = 24,7$ ,  $h_2 = 25 - 2 \cdot 0,28 = 24,4$ . Jetzt ergibt sich  $F$  am kleinsten für  $\delta = 0,61$ ,  $f = 9,7$ . Es wird  $F = 31,4$ ,  $\partial = \frac{9,7 \cdot 0,61}{2 \cdot 9,7 + 0,61^2} = 0,30$ ,  $b = \frac{9,7}{0,61} = 15,9$ ,  $h_1 = 24,7$ ,  $h_2 = 24,4$ .

### §. 234. Träger mit gleichmässiger Belastung. Hier ist

$Q = \frac{1}{2} q l (1 - 2n)$ ,  $M = \frac{1}{2} q l^2 n (1 - n)$ , wenn  $n = \frac{x}{l}$  ist. Nach 157 wird, wenn wir zur Abkürzung  $\frac{2fh_1}{\delta l h_2} = A$ ,  $\frac{q l^2 h_2}{12W} = B$ ,  $\frac{2bh_1}{lh} = A_1$ ,  $\frac{q l^2 h}{12W} = B_1$  setzen,

$$S_1 = B [n(1-n) + 2\sqrt{n^2(1-n)^2 + A^2(1-2n)^2}],$$

$$S_2 = B_1 [n(1-n) + 2\sqrt{n^2(1-n)^2 + A_1^2(1-2n)^2}].$$

Nach §. 230 wird hiernach sowohl  $S_1$ , als  $S_2$  entweder für  $n = 0$  oder  $n = \frac{1}{2}$ , d. i.  $x = 0$  oder  $x = \frac{1}{2} l$  zum Maximum. Für  $x = 0$  ist  $S_0 > S_1$ . Für  $n = \frac{1}{2}$  wird  $S_1 : S_2 = B : B_1 = h_2 : h$ , also  $S_2 > S_1$ , so dass  $S_1$  in keinem Querschnitte zum Maximum werden kann. Das Maximum von  $S$  ist also entweder  $S_0$  für  $x = 0$ ,  $S_2$  für  $x = 0$  oder  $S_2$  für  $x = \frac{1}{2} l$ , d. i.

$$160. \quad \begin{cases} x = 0. & S_0 = \frac{q l}{3W} \left[ \frac{(2b + \delta) \partial h_1}{\delta} + \frac{1}{4} h_2^2 \right], \\ x = 0. & S_2' = \frac{q l b h_1}{3W}, \\ x = \frac{1}{2} l. & S_2'' = \frac{q l^2 h}{16W}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen drei Gleichungen  $K$  für  $S$ , so hat man die Gleichungen zur Bestimmung von  $b$ ,  $\delta$ ,  $\partial$ .

Zunächst giebt die Gleichung  $S_2' = S_2''$  die Beziehung

$$161. \quad b = \frac{3}{16} \frac{h}{h_1} l.$$

Setzt man ferner  $S_0 = S_2''$ , substituirt in diese Gleichung für  $b$  den eben aufgestellten Werth und setzt ausserdem  $h_1 = h - \partial$ ,  $h_2 = h - 2\partial$ , so ergibt sich  $6l\partial + 4h\delta = 3l\delta$ , oder

$$162. \quad \partial = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4h}{3l} \right) \delta.$$

Annähernd ist also wiederum  $\partial = \frac{1}{2} l$ . Setzt man nun in 161  $h_1 = h - \partial$

$= h - \frac{1}{2} \delta + \frac{2}{3} \frac{h}{1} \delta$ , d. i. sehr nahe  $h_1 = h - \frac{1}{2} \delta$ , und annähernd  $\frac{h}{h_1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\delta}{h}$ , so wird

$$163. \quad b = \frac{3}{16} \left( 1 + \frac{\delta}{2h} \right) l.$$

Substituirt man diese Ausdrücke für  $\partial$  und  $b$  in die Gleichung  $S_2'' = K$ , nachdem man für  $W$  seinen Werth 155 gesetzt hat, so ergibt sich eine Gleichung, welche nur noch  $\delta$  als Unbekannte enthält. Annähernd ist

$$W = \frac{1}{12} h^3 \delta + b h^2 \partial = \frac{1}{12} h^3 \delta + \frac{3}{32} l h^2 d \left( 1 - \frac{4h}{3l} \right) = \frac{3}{32} l h^2 \delta - \frac{1}{24} h^3 \delta.$$

Die Gleichung  $S_2'' = K$  giebt  $16 K W = q l^3 h$ , d. i.  $K h \delta (9l - 4h) = 6 q l^2$ , also

$$164. \quad \delta = \frac{6 q l^2}{K h (9l - 4h)},$$

oder annähernd, da  $h$  gegen  $l$  klein ist,

$$164a. \quad \delta = \frac{2 q l}{3 K h}.$$

Beispiel. Es sei  $q = 40$  Klgr. pro Cent.,  $l = 400$  Cent.  $h = 40$  Cent.  $K = 600$  Klgr. pro  $\square$ Cent. Zunächst wird  $\delta = \frac{6 \cdot 40 \cdot 400^2}{600 \cdot 40 (9 \cdot 400 - 4 \cdot 40)} = 0,47$ ,

$$\partial = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4 \cdot 40}{3 \cdot 400} \right) \cdot 0,47 = 0,20, \quad b = \frac{3}{16} \left( 1 + \frac{0,47}{2 \cdot 40} \right) \cdot 400 = 75,4.$$

**§. 235. Praktische Formeln.** Die zweckmässigste Höhe der Träger ergibt sich sowohl für Blech- als für gewalzte Träger in den meisten Fällen für die praktische Ausführung zu gross. Ebenso ergeben sich für die gewalzten Träger die horizontalen Rippen zu breit und zu dünn. Meist wird sich für die gewalzten Träger auch die Mittelrippe zu dünn ergeben. Man wird daher meist von den Schubspannungen absehen und die Berechnung nur nach der Bedingung  $S_2 = K$ , d. i.

$2 K W = M h$  vornehmen können. Man kann hierbei zwei Wege verfolgen.

1. Man wählt für verschiedene Träger ähnliche Querschnitte. Wir wählen beispielsweise folgende Verhältnisse:  $h = 20 \delta$ , ganze Breite  $= 0,5 h = 10 \delta$ ,  $\partial = 1,5 \delta$  (Fig. 84), welche für viele praktische Anwendungen geeignet erscheinen. Für diese Verhältnisse ergibt sich leicht nach dem vorigen Kapitel

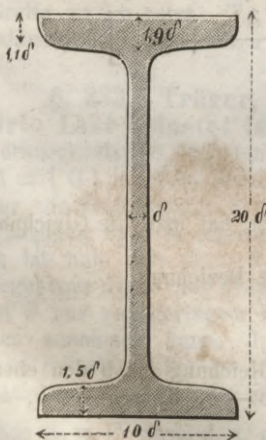
$$165. \quad F = 47 \delta^2, \quad W = 2983 \delta^4.$$

Daher wird  $2 K \cdot 2983 \delta^4 = M \cdot 20 \delta$ , also

$$166. \quad \delta = 0,150 \sqrt[3]{\frac{M}{K}}, \quad h = 3,0 \sqrt[3]{\frac{M}{K}}.$$

2. Man wählt die Höhe  $h$  und die ganze Breite  $2b + \delta$ , so wie das Verhältniss von  $\delta : \partial$ . Es sei  $2b + \delta = m h$ ,  $\partial = n \delta$ . Alsdann ist

Fig. 84.



nahezu  $W = \frac{1}{12} h^3 \delta + \frac{1}{2} m n h^2 \delta = \frac{1}{12} (1 + 6 m n) h^3 \delta$ , also  $K (1 + 6 m n) h^3 \delta = 6 M h$ , folglich

$$167. \quad \delta = \frac{6 M}{(1 + 6 m n) K h^2}.$$

Ist z. B.  $m = 0,5$ ,  $n = 1,5$ , so wird  $\delta = \frac{12 M}{11 K h^2}$ . Hat man hiernach  $\delta$  bestimmt, so kann man noch alle Verhältnisse genau fixiren, das Trägheitsmoment nach dem vorigen Kapitel genauer bestimmen und nun noch einmal  $\delta$  nach der vorigen Methode berechnen.

## XXVI. Kapitel.

### Unsymmetrischer I-förmiger Querschnitt.

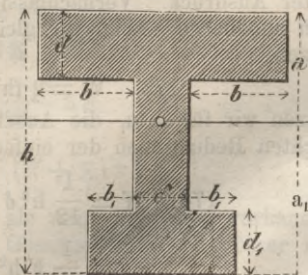
§. 236. **Einleitung.** Wir haben bei dem symmetrischen I-förmigen Querschnitte gesehen, dass sich häufig die Dicke der verticalen und horizontalen Rippen zu klein ergibt, namentlich die der horizontalen Rippen. Noch mehr, als beim Schmiedeeisen, ist dies beim Gusseisen der Fall, für welches ein unsymmetrischer Querschnitt am zweckmässigsten ist. Dann werden aber die Schubspannungen so klein, dass wir sie vernachlässigen können, wodurch die Rechnung bedeutend vereinfacht wird. Die Dicken der Rippen wird man dabei am besten so klein wählen, wie es die praktische Ausführung zulässt. Die Dicken der horizontalen Rippen wird man aber meist noch grösser wählen müssen, da sonst die Breite derselben für die praktische Ausführung zu gross wird.

Hat man hiernach die Dimensionen bestimmt, so ist es nach den allgemeinen Formeln leicht, die Normal- und Schubspannungen, sowie die idealen Hauptspannungen genau zu berechnen und sich somit nachträglich von der Zulässigkeit der angenommenen Dimensionen bestimmt zu überzeugen.

Wir bezeichnen für den unsymmetrischen I-förmigen Querschnitt (auch unsymmetrischer doppelt T-förmiger Querschnitt genannt) (Fig. 85) mit

- $h$  die gesammte Höhe,
- $b, b_1$  die Breiten der oberen und unteren Rippen,
- $\delta, \delta_1$  die Dicken derselben,
- $f, f_1$  die Querschnittsflächen der oberen und unteren Gurte, (d. i.  $b \delta$  und  $b_1 \delta_1$ ),
- $\delta$  die Dicke der verticalen Rippe oder des Steges,
- $a, a_1$  den Abstand der horizontalen Schweraxe von der oberen und unteren Kante.

Fig. 85.



**§. 237. Lage des Schwerpunktes.** Setzen wir die statischen Momente der auf beiden Seiten der Schweraxe  $W$  gelegenen Flächenstücke in Beziehung auf diese Schweraxe einander gleich, so ergibt sich  $\frac{1}{2} a^2 \delta + 2 b \partial (a - \frac{1}{2} \partial) = \frac{1}{2} a_1^2 \delta + 2 b_1 \partial_1 (a_1 - \frac{1}{2} \partial_1)$  oder

$$(a + a_1)(a - a_1)\delta + 4b\partial a - 4b_1\partial_1 a_1 = 2b\partial^2 - 2b_1\partial_1^2.$$

Nun aber ist  $a + a_1 = h$ ,  $a_1 = h - a$ . Setzt man dies ein und reducirt auf  $a$ , so ergibt sich die erste der Gleichungen:

$$168. \quad \begin{cases} a = \frac{h^2 \delta + 4 h b_1 \partial_1 + 2 b \partial^2 - 2 b_1 \partial_1^2}{2 (h \delta + 2 b \partial + 2 b_1 \partial_1)}, \\ a_1 = \frac{h^2 \delta + 4 h b \partial + 2 b_1 \partial_1^2 - 2 b \partial^2}{2 (h \delta + 2 b \partial + 2 b_1 \partial_1)}. \end{cases}$$

Der zweite Ausdruck für  $a_1$  ergibt sich aus dem ersten leicht durch Vertauschung von  $b$  und  $b_1$ ,  $\partial$  und  $\partial_1$ ,  $a$  und  $a_1$ . Der gemeinschaftliche Nenner ist  $= 2 F$ . Setzen wir im Zähler  $2 b \partial = f$ ,  $2 b_1 \partial_1 = f_1$ , so ergibt sich leicht

$$169. \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} h + \frac{(f_1 - f) h}{2 F} - \frac{f_1 \partial_1 - f \partial}{2 F}, \\ a_1 = \frac{1}{2} h - \frac{(f_1 - f) h}{2 F} + \frac{f_1 \partial_1 - f \partial}{2 F}. \end{cases}$$

Annähernd wird, wenn wir  $\partial$ ,  $\partial_1$  gegen  $h$  vernachlässigen,

$$170. \quad a = \left(1 + \frac{f_1 - f}{F}\right) \frac{h}{2}, \quad a_1 = \left(1 - \frac{f_1 - f}{F}\right) \frac{h}{2}.$$

Das Verhältniss der beiden Abstände ist hiernach annähernd

$$171. \quad \frac{a}{a_1} = \frac{F + f_1 - f}{F - f_1 + f} = \frac{2 f_1 + h \delta}{2 f + h \delta}.$$

**§. 238. Trägheitsmoment.** Als Trägheitsmoment  $W$  ergibt sich mit Berücksichtigung der Formel 66 (Seite 199):

$$W = \frac{1}{3} (a^3 + a_1^3) \delta + \frac{2}{3} b [a^3 - (a - \partial)^3] + \frac{2}{3} b_1 [a_1^3 + (a_1 - \partial_1)^3].$$

Nun aber ist  $a^3 + a_1^3 = a^3 + (h - a)^3 = h^3 - 3 h^2 a + 3 h a^2 = h^3 - 3 h a a_1$ ,  $a^3 - (a - \partial)^3 = 3 a^2 \partial - 3 a \partial^2 + \partial^3$  u. s. w.; mithin

$$172. \quad W = \frac{1}{3} [(h^2 - 3 a a_1) h \delta + 2 b \partial (3 a^2 - 3 a \partial + \partial^2) + 2 b_1 \partial_1 (3 a_1^2 - 3 a_1 \partial_1 + \partial_1^2)].$$

Durch Einsetzung der Ausdrücke für  $a$ ,  $a_1$  ergibt sich ein zu complicirter Ausdruck. Vernachlässigen wir aber  $\partial$ ,  $\partial_1$  gegen  $a$ ,  $a_1$ , so ergibt sich annähernd, wenn wir gleichzeitig wiederum  $2 b \partial = f$ ,  $2 b_1 \partial_1 = f_1$  setzen,

$$173. \quad W = \frac{1}{3} (h^2 - 3 a a_1) h \delta + f a^2 + f_1 a_1^2.$$

Setzen wir für  $a$ ,  $a_1$  die Ausdrücke 170 ein, so ergibt sich nach einigen leichten Reductionen der einfache Ausdruck

$$174. \quad W = \frac{1}{12} h^3 \delta + \frac{1}{4} (f + f_1) h^2 - \frac{(f - f_1)^2 h^2}{4 F_1} \\ = \frac{1}{4} F h^2 - \frac{1}{6} h^3 \delta - \frac{(f - f_1)^2 h^2}{4 F}.$$

§. 239. **Querschnittsdimensionen bei angenommener Dicke und Höhe.** Die beiden Festigkeitsbedingungen sind, wenn wir annehmen, dass auf derjenigen Seite, für welche der Index 1 eingeführt ist, Druck, auf der andern Zug eintritt,

$$K = \frac{M a}{W}, \quad \mathfrak{R} = \frac{M a_1}{W},$$

also

$$a : a_1 = K : \mathfrak{R}.$$

Die Abstände der am meisten ausgedehnten und zusammengedrückten Faser von der horizontalen Schweraxe sollen sich also zu einander verhalten, wie die Sicherheitsefficienten für Zug und Druck. Setzen wir für  $a : a_1$  den Näherungsausdruck 170, so ergibt sich

$$175. \quad \frac{2 f_1 + h \delta}{2 f + h \delta} = \frac{K}{\mathfrak{R}}.$$

Die Reduction auf  $f_1$  giebt

$$f_1 = \frac{2 K f + (\mathfrak{R} - K) h \delta}{2 \mathfrak{R}},$$

daher

$$f + f_1 = \frac{2 (\mathfrak{R} + K) f - (\mathfrak{R} - K) h \delta}{2 \mathfrak{R}},$$

$$f - f_1 = \frac{(\mathfrak{R} - K) (2 f + h \delta)}{2 \mathfrak{R}},$$

$$F = f + f_1 + h \delta = \frac{(\mathfrak{R} + K) (2 f + h \delta)}{2 \mathfrak{R}}.$$

Dies in den Ausdruck 174 für  $W$  eingesetzt, giebt nach gehöriger Reduction

$$W = \frac{K}{\mathfrak{R} + K} f h^2 - \frac{\mathfrak{R} - 2 K}{6 (\mathfrak{R} + K)} h^3 \delta.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Festigkeitsbedingung  $K W = M a$  und beachtet dabei, dass  $a = \frac{K}{\mathfrak{R} + K} h$  wird, so ergibt sich die erste der Gleichungen

$$176. \quad \begin{cases} K f h - \frac{1}{6} (\mathfrak{R} - 2 K) h^2 \delta = M, \\ \mathfrak{R} f_1 h - \frac{1}{6} (2 \mathfrak{R} - K) h^2 \delta = M. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung für  $f_1$  ergibt sich leicht aus der ersten durch Vertauschung von  $f$  und  $f_1$ ,  $K$  und  $\mathfrak{R}$ . Daher wird nun

$$177. \quad \begin{cases} f = \frac{M}{K h} + \frac{\mathfrak{R} - 2 K}{6 K} h \delta, \\ f_1 = \frac{M}{\mathfrak{R} h} - \frac{2 \mathfrak{R} - K}{6 \mathfrak{R}} h \delta, \end{cases}$$

$$178. \quad F = \frac{\mathfrak{R} + K}{\mathfrak{R} K} \left[ \frac{M}{h} + \frac{1}{6} (\mathfrak{R} + K) h \delta \right].$$

Ist  $\mathfrak{R} > 2 K$ , so wird  $f$  grösser,  $f_1$  kleiner, als wenn kein Steg vorhanden ist. Der Ausdruck für  $F$  zeigt, dass die Gesamtfläche  $F$  grösser ist, als wenn kein Steg vorhanden ist.

Hiernach ist es nun leicht,  $f$ ,  $f_1$  zu bestimmen, wenn man die kleinste

zulässige Dicke  $\delta$ , sowie die Höhe  $h$  annimmt. Durch Annahme der Dicken  $\partial$ ,  $\partial_1$  der Rippen ergibt sich sodann auch deren Breite. Genaue lässt sich die Rechnung in folgender Weise führen.

Es ist, da  $a : a_1 = K : \mathfrak{R}$  und  $a + a_1 = h$  sein soll,  $a = \frac{K}{\mathfrak{R} + K} h$ ,

$a_1 = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R} + K} h$ . Somit sind, wenn man  $h$ ,  $\delta$ ,  $\partial$ ,  $\partial_1$  angenommen hat, im Ausdrucke 172 für  $W$  nur  $b$  und  $b_1$  unbekannt. Setzt man  $KW = Ma$  oder  $\mathfrak{R}W = Ma_1$ , so hat man eine Gleichung für  $b$  und  $b_1$ . Aus 168 folgt

$$\frac{a}{a_1} = \frac{h^2 \delta + 4 h b_1 \partial + 2 b \partial^2 - 2 b_1 \partial_1^2}{h^2 \delta + 4 h b \partial + 2 b_1 \partial_1^2 - 2 b \partial^2} = \frac{K}{\mathfrak{R}}$$

und dies ist eine zweite Gleichung für  $b$  und  $b_1$ . Beide Gleichungen sind vom ersten Grade, also leicht aufzulösen.

Beispiel. Es sei ein Träger von 200° Spannweite mit 20 Kilogr. pro Cent. belastet. Alsdann ist das grösste Moment  $M = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} \cdot 20 \cdot 200^2 = 100000$ . Wir nehmen an:  $h = 17$ ,  $\delta = 1,5$ ,  $\partial = 3$ ,  $\partial_1 = 1,8$ ,  $K = 212$ ,  $\mathfrak{R} = 530 = 2,5 K$ . Da  $K : \mathfrak{R} = 2 : 5$  ist, so wird  $a = \frac{2}{7} \cdot 17 = 4,9$ ,  $a_1 = \frac{5}{7} \cdot 17 = 12,1$ , daher nach 172 :

$$W = \frac{1}{8} [(17^2 - 3 \cdot 12,1 \cdot 4,9) 17 \cdot 1,5 + 2 \cdot 3 \cdot b (3 \cdot 4,9^2 - 3 \cdot 4,9 \cdot 3 + 3^2) + 2 \cdot 1,8 \cdot b_1 (3 \cdot 12,1^2 - 3 \cdot 12,1 \cdot 1,8 + 1,8^2)]$$

$$= 945 + 74 b + 453 b_1.$$

Die Gleichung  $\mathfrak{R}W = Ma_1$  oder  $\frac{W}{a_1} = \frac{M}{\mathfrak{R}}$  wird daher  $78 + 6 b + 37 b_1 = 189$  oder

$$I. \quad 6 b + 37 b_1 = 111.$$

Ferner ist nun nach 168:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{17^2 \cdot 1,5 + 4 \cdot 17 \cdot 1,8 b_1 + 2 \cdot 3^2 b - 2 \cdot 1,8^2 b_1}{17^2 \cdot 1,5 + 4 \cdot 17 \cdot 3 b + 2 \cdot 1,8^2 b_1 - 2 \cdot 3^2 b}$$

$$= \frac{434 + 18 b + 116 b_1}{434 + 186 b + 6 b_1} = \frac{2}{5} \text{ oder}$$

$$II. \quad 141 b - 283 b_1 = 650.$$

Die gewöhnliche Auflösung der Gleichungen I. und II. giebt

$$b = 8,0, \quad b_1 = 1,7.$$

Nach den Näherungsformeln 127 erhält man

$$f = \frac{100000}{212 \cdot 17} + \frac{530 - 2 \cdot 212}{6 \cdot 530} 17 \cdot 1,5 = 38,4 + 2,1 = 40,5.$$

Ebenso ergibt sich  $f_1 = 15,4 - 6,8 = 8,6$ , mithin ist  $b = \frac{40,5}{2,3} = 17,6$ ,  $b_1 = \frac{8,6}{2,1,8} = 3,9$ .

**§. 240. Anwendung auf Gusseisen.** Der unsymmetrisch I-förmige Querschnitt findet insbesondere beim Gusseisen Anwendung. Hier kommt es zunächst hauptsächlich auf die Feststellung des Verhältnisses der Coefficienten  $K$ ,  $\mathfrak{R}$  an.

Die Bruchcoefficienten  $B$ ,  $\mathfrak{B}$  für Zug und Druck kann man annähernd nach Formel 91 (Seite 76) berechnen. Die Festigkeitscoefficienten  $C$ ,  $\mathfrak{C}$  für Zug und Druck und der Bruchcoefficient  $B_0$  für den rechteckigen Querschnitt sind nach §. 91 ungefähr in Kilogr. pro □Centimeter.

$$C = 1320, \quad \mathfrak{C} = 7920, \quad B_0 = 2860.$$

Der von der Querschnittsform abhängende Coefficient  $\kappa$  ergab sich nach 90 (Seite 76) für einige in Anwendung gekommene Querschnittsformen zu 0,75 bis 0,83, erstere Zahl für verhältnissmässige dicke, letztere für

verhältnissmässig dünne Rippen. Für diese Werthe von  $\alpha$  wird nach 91 (Seite 76):

$$\alpha = 0,75, \quad B = 2283, \quad \mathfrak{B} = 4757 = 2,1 B,$$

$$\alpha = 0,83, \quad B = 1975, \quad \mathfrak{B} = 5770 = 2,9 B,$$

so dass hiernach  $\frac{\mathfrak{B}}{B}$  ungefähr zwischen 2,1 und 2,9 liegen würde. Die Resultate direkter Bruchversuche stimmen hiermit nahe überein. Der zweckmässige Werth des Verhältnisses  $\frac{a_1}{a}$  würde demnach ebenfalls zwischen 2,1 und 2,9 liegen.

Hodgkinson fand durch direkte Bruchversuche, bei welchen das Verhältniss der Gurtquerschnitte successive geändert wurde, als zweckmässigstes Verhältniss  $\frac{a_1}{a} = 2,9$ . Die Rippen waren hierbei in der That verhältnissmässig dünn.

Nimmt man eine bestimmte Grenzsicherheit an, so würde nach §. 43 der zweckmässigste Werth von  $\frac{a_1}{a}$  ungefähr 2,5 sein. Manche Autoren geben 2 als den zweckmässigsten Werth an.

Hiernach dürfte ungefähr das Verhältniss

$$179. \quad \frac{a_1}{a} = \frac{\mathfrak{B}}{B} = 2,5$$

im Allgemeinen das zweckmässigste sein. Die entsprechenden Bruchcoefficienten sind ungefähr in Kilogr. pro □Centim.

$$B = 2120, \quad \mathfrak{B} = 5300.$$

Demnach würde nach 177

$$f = \frac{M}{K h} + \frac{1}{12} h \delta, \quad f_1 = \frac{M}{\mathfrak{K} h} - \frac{4}{15} h \delta.$$

**§. 241. Zweckmässigste Höhe.** Nach 178 ergibt sich, dass  $F$  in Beziehung auf  $h$  zum Minimum, also  $\frac{dF}{dh} = 0$  wird für  $(\mathfrak{K} + K) h^2 \delta = M$  oder

$$180. \quad h = \sqrt{\frac{6 M}{(\mathfrak{K} + K) \delta}}.$$

Bei gleichmässiger Belastung ist, wenn  $l$  die Spannweite bezeichnet,  $M = \frac{1}{8} q l^2$  zu setzen; daher wird

$$h = l \sqrt{\frac{3 q}{4(K + \mathfrak{K}) \delta}}.$$

In praktischen Fällen ist  $q$  ungefähr 3,5 bis 30 Kilogr. pro Centim.,  $K + \mathfrak{K}$  bei 10facher Sicherheit = 742 und  $\delta$  etwa 0,7 bis 2 Centim. Demnach ergibt sich  $h = 0,071$  bis  $0,12 l$ , im Mittel also etwa  $h = \frac{1}{10} l$ .

Die Einsetzung dieses Werthes für  $h$  in den Ausdruck 178 für  $F$  giebt

$$181. \quad F = \frac{2 \sqrt{(\mathfrak{K} + K)^3}}{\mathfrak{K} K \sqrt{6}} \sqrt{M \delta} = \frac{(\mathfrak{K} + K)^2}{3 \mathfrak{K} K} h \delta,$$

d. i. genau doppelt so gross, als sich bei gleicher Höhe ergeben würde, wenn kein Steg vorhanden wäre. Für  $\mathfrak{R} = 1.K, 2.K, 3.K$  wird  $F = 1,33 h \delta, 1,50 h \delta, 1,78 h \delta$ , so dass die Querschnittsfläche  $h \delta$  des Steges stets den grössten Theil (75 bis 56 %) der ganzen Fläche ausmacht.

Als Flächen der Gurte ergeben sich nach 177 durch Einsetzung des Werthes von  $h$

$$182. f = \frac{2\mathfrak{R} - K}{K\sqrt{6(\mathfrak{R} + K)}} \sqrt{M\delta}, \quad f_1 = \frac{2K - \mathfrak{R}}{\mathfrak{R}\sqrt{6(\mathfrak{R} + K)}} \sqrt{M\delta}.$$

Für  $\mathfrak{R} = 2,5 K$  wird hiernach  $f_1$  negativ, so dass sich diese Querschnittsform bei Anwendung der der Dicke  $\delta$  entsprechenden zweckmässigen Höhe nicht realisiren lässt.

In vielen Fällen hat man aber bei der Wahl der Höhe noch andere Rücksichten zu nehmen.

**§. 242. Aehnliche Querschnittsformen.** Je grösser die Höhe ist, desto grösser muss für das Gelingen des Gusses auch die Dicke sein, so dass man etwa zwischen  $h$  und  $\delta$  ein constantes Verhältniss wählen kann. Wir setzen  $h = m\delta$ . Setzt man dies in den Ausdruck 178 für  $F$  ein, so ergibt sich, dass  $F$  zu einem Minimum, also  $\frac{dF}{d\delta} = 0$  wird für

$$183. \delta = \sqrt[3]{\frac{3M}{m^2(\mathfrak{R} + K)}}, \quad h = m\delta.$$

Hieraus folgt  $M = \frac{1}{3} m^2 (\mathfrak{R} + K) \delta^3$ . Dies in die Ausdrücke 177, 178 für  $f, f_1, F$  eingesetzt, giebt

$$184. f = \frac{\mathfrak{R}}{2K} h \delta, \quad f_1 = \frac{K}{2\mathfrak{R}} h \delta, \quad F = \frac{(\mathfrak{R} + K)^2}{2\mathfrak{R}K} h \delta.$$

Hiernach verhält sich

$$185. f : f_1 = \mathfrak{R}^2 : K^2.$$

Für  $\mathfrak{R} = 2,5 K$  verhält sich  $f : f_1 = 6,25 : 1$  d. i. nahezu wie der Festigkeitscoefficient für Druck zu dem für Zug. Es wird für dieses Verhältniss

$$f = \frac{5}{4} h \delta, \quad f_1 = \frac{1}{5} h \delta, \quad F = 2,45 h \delta.$$

Für das Gelingen des Gusses ist es ferner erforderlich, dass auch die Dicken der Seitenrippen zu der der Mittelrippe in einem gewissen Verhältnisse stehen. Wir setzen  $\partial = n\delta, \partial_1 = n_1\delta$ . Alsdann ist  $b = \frac{f}{2\partial}, b_1 = \frac{f_1}{2\partial_1}$ , d. i. nach 184

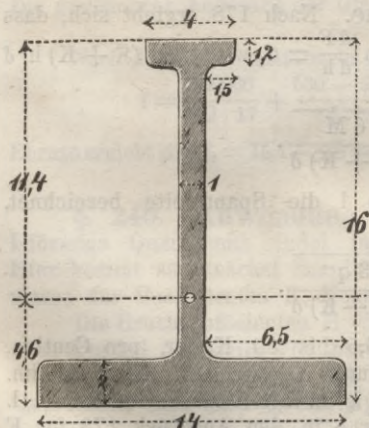
$$186. b = \frac{\mathfrak{R}}{4nK} h, \quad b_1 = \frac{K}{4n_1\mathfrak{R}} h$$

und für  $\mathfrak{R} = 2,5 K : b = \frac{5}{8n} h, \quad b_1 = \frac{1}{10n_1} h.$

Geeignete Verhältnisse sind ungefähr

$$m = 16, \quad n = 2,0 \quad n_1 = 1,2.$$

Fig. 86.



Alsdann wird  $b = \frac{5}{1.6} h = 5 \delta$ ,  $b_1 = \frac{1}{1.2} h = \frac{4}{3} \delta$ . Das sind jedoch nur Näherungsergebnisse. Genauer ergibt sich, damit sich genau  $a_1 : a = 2,5 : 1$  verhält,  $b = 6,2 \delta$ ,  $b_1 = \frac{4}{3} \delta$  oder

$$b = 6,5 \delta, \quad b_1 = 1,5 \delta.$$

Für diese Verhältnisse (Fig. 86) ergibt sich genau

$$187. \quad W = 1289 \delta^4.$$

$$188. \quad \delta = 0,207 \sqrt[3]{\frac{M}{R}} = 0,153 \sqrt[3]{\frac{M}{R}}.$$

$$189. \quad F = 45,6 \delta^2 = 1,95 \sqrt[3]{\left(\frac{M}{R}\right)^2} = 1,07 \sqrt[3]{\left(\frac{M}{K}\right)^2}.$$

Nach der Näherungsformel 174 würde sich, da  $f = 3,6 \delta^2$ ,  $f_1 = 26 \delta^2$ ,  $F = 45,6 \delta^2$  ist,  $W = 1470 \delta^4$  ergeben.

**§. 243. Träger von constanter Festigkeit.** Wir setzen voraus, dass man aus praktischen Rücksichten für die verticalen und horizontalen Rippen eine constante Dicke anwende. Am zweckmässigsten würde es alsdann sein, für jeden einzelnen Querschnitt die zweckmässigste Höhe und die entsprechenden Flächen der Gurte nach §. 241 zu bestimmen. Da sich aber, wie wir gesehen haben, diese Querschnitte nicht realisiren lassen, so erscheint es passender, für den höchsten Querschnitt die Verhältnisse passend nach §. 242 anzunehmen, und die Höhe nach dem Gesetze 180 (§. 241) zu ändern. Die grösste Höhe sei  $h'$ , das entsprechende Moment  $M'$ ; alsdann ist nach 180  $h : h' = \sqrt{M} : \sqrt{M'}$  also

$$190. \quad h = h' \sqrt{\frac{M}{M'}}.$$

Der Aufriss ist demnach derselbe, wie bei einem Stabe mit proportionalem Querschnitte und constanter Breite (vergl. Taf. III Fig. 2, 5, 8, 10, Taf. IV Fig. 2, 5, 7, 10).

Setzt man diesen Ausdruck für  $h$  in 177 (§. 239) ein, so ergibt sich, dass auch  $f = b \delta$ ,  $f_1 = b_1 \delta_1$  dem  $\sqrt{M}$  proportional sind, so dass wir auch

$$191. \quad b = b' \sqrt{\frac{M}{M'}}, \quad b_1 = b_1' \sqrt{\frac{M}{M'}}$$

setzen können, wenn  $b'$ ,  $b_1'$  die Breiten der horizontalen Rippen am höchsten Querschnitte bezeichnen. Dies ist natürlich nur annähernd richtig. Will man einen Querschnitt genauer berechnen, so kann dies leicht in der in §. 239 gezeigten Weise geschehen.

Wenn auch die Breite  $b$ ,  $b_1$  der Seitenrippen constant bleiben soll, so ist nur  $h$  zu berechnen. Man hat dann zunächst zu entscheiden, ob ein Bruch durch Zug oder Druck eintreten kann, d. h. ob  $\frac{a}{a_1} > \frac{K}{R}$  ist, da jetzt im allgemeinen nicht mehr  $\frac{a}{a_1} = \frac{K}{R}$  sein wird. Man berechnet alsdann am besten  $a$ ,  $a_1$  nach 168 oder 170 und  $W$  nach 172 oder 173 für

zwei angenommene Werthe von  $h$ . Durch Interpolation bestimmt man sodann  $h$  so, dass  $\frac{W}{a} = \frac{M}{K}$  oder  $\frac{W}{a_1} = \frac{M}{K}$  wird.

Beispiel. Ein Träger von  $400^\circ$  Spannweite sei in der Mitte mit 2000 Kgr. belastet. Es sei  $K=212$ ,  $K=530$ . Für die Mitte ist  $M = \frac{1}{4} G l = \frac{1}{4} \cdot 2000 \cdot 400 = 200000$ , daher wird nach 188:

$$\delta = 0,207 \sqrt[3]{\frac{200000}{530}} = 1,5.$$

Nach dem Profile Fig. 86 wird nun  $h = 16 \cdot 1,5 = 24$ ,  $b = 6,5 \cdot 1,5 = 9,8$ ,  $b_1 = 1,5 \cdot 1,5 = 2,3$ ,  $\partial = 2 \cdot 1,5 = 3$ ,  $\partial_1 = 1,2 \cdot 1,5 = 1,8$ . Nimmt man das eine Ende als Anfang der  $x$  an, so ist  $M = \frac{1}{2} G x$ ,  $M' = \frac{1}{4} G l$ , daher

$$h = h' \sqrt{\frac{2x}{l}} = 34 \sqrt{\frac{x}{l}}$$

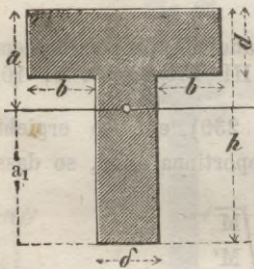
und annähernd auch  $b = 14 \sqrt{\frac{x}{l}}$ ,  $b_1 = 3,25 \sqrt{\frac{x}{l}}$ . So z. B. für  $x = \frac{1}{4} l$   $h = 34 \sqrt{\frac{1}{4}} = 17$ ,  $b = 14 \sqrt{\frac{1}{4}} = 7$ ,  $b_1 = 3,25 \sqrt{\frac{1}{4}} = 1,6$ . Genauer ergibt sich (vergl. das Beispiel zu §. 239) für  $x = \frac{1}{4} l$   $b = 8,0$ ,  $b_1 = 1,7$ .

## XXVII. Kapitel.

### T-förmiger Querschnitt.

§. 244. Querschnittsgrößen. Aus §. 241 ist zu ersehen, dass für das Gusseisen unter Umständen auch der T-förmige Querschnitt von Vortheil sein könne. Die für den unsymmetrisch I-förmigen Querschnitt genommenen Resultate lassen sich zum Theil auf den T-förmigen anwenden, indem man die Fläche  $f_1$  des einen Gurtes zu Null annimmt. Alle für den I-förmigen Querschnitt gebrauchten Bezeichnungen (Fig. 87) behalten wir bei.

Fig. 87.



Als Abstand der am meisten ausgedehnten und zusammengedrückten Fasern von der horizontalen Schweraxe (bei verticaler Mittelrippe) ergibt sich zunächst aus 168 (§. 237)

$$192. \begin{cases} a = \frac{h^2 \delta + 2 b \partial^2}{2 (h \delta + 2 b \partial)}, \\ a_1 = \frac{h^2 \delta + 4 h b \partial - 2 b \partial^2}{2 (h \delta + 2 b \partial)}, \end{cases}$$

oder auch nach 169:

$$193. a = \frac{1}{2} h - \frac{f(h - \partial)}{2 F}, \quad a_1 = \frac{1}{2} h + \frac{f(h - \partial)}{2 F}.$$

Vernachlässigt man  $\partial$  gegen  $h$ , so ist das Verhältniss zwischen  $a$  und  $a_1$

$$194. \frac{a}{a_1} = \frac{F - f}{F + f} = \frac{h \delta}{2 f + h \delta}.$$

Das Trägheitsmoment wird nach 172 genau

$$195. \quad W = \frac{1}{3} [(h^2 - 3 a a_1) h \delta + 2 b \delta (3 a^2 - 3 a \delta + \delta^2)],$$

und nach 174 annähernd, wenn man  $\delta$  gegen  $h$  vernachlässigt,

$$196. \quad W = \frac{1}{2} h^3 \delta + \frac{1}{4} f h^2 - \frac{f^2 h^2}{4 F}.$$

**§. 245. Querschnittsdimensionen bei angenommener Dicke.** Die Gleichung  $a : a_1 = K : \mathfrak{K}$  giebt mit Berücksichtigung der Ausdrücke 192:

$$197. \quad \frac{h^2 \delta + 2 b \delta^2}{h^3 \delta + 4 h b \delta - 2 b \delta^2} = \frac{K}{\mathfrak{K}}.$$

Die Reduction auf  $b$  giebt

$$198. \quad b = \frac{(\mathfrak{K} - K) h^2 \delta}{2 (2 K h - \mathfrak{K} \delta - K \delta)}.$$

Annähernd wird

$$199. \quad f = 2 b \delta = \frac{\mathfrak{K} - K}{2 K} h \delta.$$

Für  $\mathfrak{K} = 2,5 K$  wird hiernach  $f = \frac{3}{4} h \delta$ , so dass sich die Flächen der horizontalen und verticalen Rippe nahe wie 3:4 verhalten. Die Einsetzung des Ausdruckes für  $b$  in die Formel 195 giebt, wenn man gleichzeitig berücksichtigt, dass  $a = \frac{K}{\mathfrak{K} + K} h$ ,  $a_1 = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K} + K} h$  ist, nach gehöriger Reduction

$$W = \frac{K (2 \mathfrak{K} - K) h^2 - (\mathfrak{K}^2 + 2 \mathfrak{K} K - 2 K^2) h \delta + (\mathfrak{K}^2 - K^2) \delta^2}{3 (\mathfrak{K} + K) (2 K h - \mathfrak{K} \delta - K \delta)} h^2 \delta.$$

Für  $\mathfrak{K} = 2,5 K$  wird hiernach

$$W = \frac{16 h^2 - 37 h \delta + 21 \delta^2}{21 (4 h - 7 \delta)} h^2 \delta.$$

Annähernd wird

$$W = \frac{2 \mathfrak{K} - K}{6 (\mathfrak{K} + K)} h^3 \delta.$$

Für  $\mathfrak{K} = 2,5 K$  wird hiernach annähernd  $W = \frac{1}{21} h^3 \delta = 0,19 h^3 \delta$ . Setzt man diesen Ausdruck für  $W$  in eine der Festigkeitsbedingungen  $K W = M a$ ,  $\mathfrak{K} W = M a_1$  und beachtet dabei, dass  $a = \frac{K h}{\mathfrak{K} + K}$ ,  $a_1 = \frac{K h}{\mathfrak{K} + K}$  ist, so ergibt sich zur Bestimmung von  $h$  folgende cubische Gleichung

$$200. \quad [K (2 \mathfrak{K} - K) h^2 - (\mathfrak{K}^2 + 2 \mathfrak{K} K - 2 K^2) h \delta + (\mathfrak{K}^2 - K^2) \delta^2] h \delta = 3 M (2 K h - \mathfrak{K} \delta - K \delta).$$

Annähernd ist  $K (2 \mathfrak{K} - K) h^3 \delta = 6 K M h$ , also

$$201. \quad h = \sqrt{\frac{6 M}{(2 \mathfrak{K} - K) \delta}}.$$

Hat man hiernach  $h$  annähernd bestimmt, so würde man aus der vorigen cubischen Gleichung leicht  $h$  genauer berechnen können.

Für  $\mathfrak{K} = 2,5 K$  wird hiernach  $h$  nur  $\sqrt{0,875} = 0,935$ mal so gross,

als beim **I**-förmigen Querschnitte (§. 241), also bei gleichmässiger Belastung ungefähr 0,0651 bis 0,111, im Mittel also etwa  $h = \frac{1}{11} l$ .

Bezeichnet man die gesammte Querschnittsfläche beim **I**- und **T**-förmigen Querschnitte mit  $F$  und  $F_0$ , so ergibt sich nach diesem §. und nach §. 241.

$$F_0 = \frac{\mathfrak{K} + K}{2K\sqrt{2\mathfrak{K} - K}} \sqrt{6M\delta}, \quad F = \frac{\sqrt{(\mathfrak{K} + K)^3}}{3\mathfrak{K}K} \sqrt{6M\delta};$$

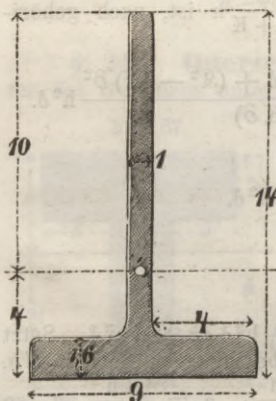
$$\frac{F}{F_0} = \frac{2\sqrt{(\mathfrak{K} + K)(2\mathfrak{K} - K)}}{3\mathfrak{K}}$$

Für  $\mathfrak{K} = 2,5K$  wird hiernach  $F = 0,998 F_0$ , so dass für beide Querschnittsformen fast genau dieselbe Fläche nöthig ist.

**§. 246. Aehnliche Querschnittsformen.** Wir nehmen wiederum an, dass man zwischen der Höhe  $h$  und der Dicke  $\delta$  ein constantes Verhältniss anwende und setzen daher  $h = m\delta$ . Nach 199 wird alsdann  $f = \frac{\mathfrak{K} - K}{2K} m\delta^2$ . Nehmen wir ferner auch ein constantes Verhältniss zwischen den Dicken der verticalen und horizontalen Rippe an, indem wir  $\partial = n\delta$  setzen, so wird  $b = \frac{f}{2\partial} = \frac{f}{2n\delta}$ , d. i.

Fig. 88.

$$202. \quad b = \frac{m(\mathfrak{K} - K)}{4nK} \delta,$$



so dass jetzt auch ein constantes Verhältniss zwischen der Breite  $b$  und der Dicke  $\delta$  eintritt, sonach alle Querschnitte ähnlich ausfallen.

Genauer wird, wenn man die Gleichung 197 auf  $b$  reducirt,

$$203. \quad b = \frac{m^2(\mathfrak{K} - K)}{2n(2mK - nK - n\mathfrak{K})} \delta.$$

Passende Verhältnisse sind ungefähr  $m = 14$ ,  $n = 1,6$ . Alsdann wird für  $\mathfrak{K} = 2,5K$  nach 202 annähernd  $b = 3,3\delta$  und nach 203 genauer  $b = 4\delta$ . Für diese Verhältnisse (Fig. 88) ergibt sich genau

$$204. \quad W = 489 \delta^4,$$

$$205. \quad \delta = 0,274 \sqrt[3]{\frac{M}{\mathfrak{K}}} = 0,202 \sqrt[3]{\frac{M}{K}},$$

$$206. \quad F = 26,8 \delta^2 = 2,00 \sqrt[3]{\left(\frac{M}{\mathfrak{K}}\right)^2} = 1,09 \sqrt[3]{\left(\frac{M}{K}\right)^2}.$$

Die Vergleichung mit 189 (Seite 231) zeigt, dass die Gesammtfläche  $F$  nur 2 bis 3% grösser ist, als beim **I**-förmigen Querschnitte.

## VII. Abschnitt.

### Genauere Biegungstheorie gerader Stäbe.

#### XXVIII. Kapitel.

##### Allgemeine Theorie.

**§. 247. Fixirung der Aufgabe.** Eine ganz allgemeine, genaue Bestimmung der Spannungen und der Formänderung bei gegebener Form des Körpers und gegebener Belastungsweise ist zur Zeit noch nicht glücklich. Wir müssen daher auch hier solche Voraussetzungen über die Form und Belastungsweise machen, welche eine genaue Theorie zulassen.

Wir machen zunächst die Annahme, dass die äusseren Kräfte nur auf die Endquerschnitte, nicht aber auf die Mantelfläche und das Innere des Körpers wirken und dass die Mittelkraft der auf eine Endfläche wirkenden Kräfte durch den Schwerpunkt derselben gehe.

Ferner machen wir die Annahme, dass auf eine zur Axe des Körpers parallele Ebene keine andere Spannung wirke, als eine zur Axe des Körpers parallele Schubspannung, dass also die einzelnen Fasern auf einander keinen Druck, sondern nur einen Schub in der Längsrichtung ausüben. Für eine solche Ebene ist nach dem in §. 60 gewählten Coordinatensysteme  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\cos \alpha = 0$ ; für die auf die Ebene wirkende Spannung muss  $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$  (siehe §. 10), also  $R = K$ , nach 5 (§. 10) also  $Y = 0$ ,  $Z = 0$  sein. Dies tritt nach 4 nur ein, wenn

$$1. N_2 = 0, N_3 = 0, T_1 = 0$$

ist. Dies wäre unmöglich, wenn äussere Kräfte auf die Mantelfläche des Körpers wirkten.

Endlich setzen wir voraus, dass der Körper prismatisch und symmetrisch in Beziehung auf eine Ebene sei, in welcher die Mittelkräfte der auf die Endflächen wirkenden Kräfte liegen, und aus einer isotropen Masse bestehe. Indess lässt sich die Theorie in gleicher Weise auch für einen Körper mit drei Elasticitätsachsen durchführen.

Die zu entwickelnde strenge Theorie ist unter dem Namen „De Saint-Venant'sches Problem“ bekannt.

**§. 248. Gleichgewichtsbedingungen.** Die anfängliche Axe des Körpers nehmen wir als Axe der  $x$  und eine auf der deformirten Axe senkrechte, durch ein Ende der Axe gehende Ebene als Ebene der  $yz$  an; die Kräfteebene sei die Ebene der  $y$ .

Damit die auf einen Querschnitt wirkenden Spannungen mit den äusseren Kräften im Gleichgewichte sind, müssen die Bedingungen 5, 6 (§. 63) erfüllt sein, nämlich

$$2. \int N df = P; \quad \int T_3 df = Q, \quad \int T_2 df = 0;$$

$$3. \int N y df = 0, \quad \int N z df = 0.$$

Für die Spannungen an der Mantelfläche des Körpers gilt die Gleichung 7 (§. 63), nämlich, wenn wir beachten, dass  $\cos \gamma = \sin \beta$  ist,

$$4. T_3' \cos \beta + T_2' \sin \beta = 0,$$

wobei  $\beta$  der Winkel zwischen der Normale der Querschnittsperipherie und der Axe der  $y$  ist.

Für die Spannungen in einem beliebigen Punkte gelten die Beziehungen 3 (§. 9); setzen wir  $N_2 = N_3 = 0$ ,  $T_1 = 0$ ,  $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$ , so gehen dieselben über in

$$5. \begin{cases} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

**§. 249. Verrückungen der Punkte.** Da  $N_2 = N_3 = 0$  ist, so ist nach 49 (§. 27)  $\sigma_1 = \frac{N}{E}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{1}{m} \sigma_1$  oder

$$6. \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{N}{E},$$

$$7. \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{m} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{1}{m} \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Die dritte der Gleichungen 1 und die beiden letzten der Gleichungen 5 geben, wenn man für  $T_1, T_2, T_3$  die Ausdrücke 58 (§. 29) setzt,

$$8. \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0,$$

$$9. \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} = 0.$$

Die erste der Gleichungen 5 giebt mit Berücksichtigung der Ausdrücke 58 (§. 29) und wenn man für  $N$  den Ausdruck aus 6 einsetzt,

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + G \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) + G \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Nun aber ist nach 7  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ . Setzen wir ausserdem nach 54 (§. 28)  $E - \frac{2}{m} G = \frac{2(m+1)}{m} G - \frac{2}{m} G = 2G$ , so geht die vorige Gleichung über in

$$10. 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0.$$

Endlich giebt die Gleichung 4 für einen Punkt der Mantelfläche

$$11. \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \sin \beta = 0.$$

Wegen der Symmetrie des Körpers gegen die Kraftebene muss für jeden Punkt in der Kraftebene oder für jeden Punkt, dessen  $z = 0$  ist,

$$12. \xi = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$$

sein. Für den Punkt, welcher im Koordinatenanfange liegt, wird ausserdem nach der Fixirung des Coordinatensystems

$$13. \xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} = 0.$$

**§. 250. Umgestaltung der Gleichungen.** Die Hauptgleichungen 9 und 10 lassen eine für die weitere Benützung bequeme Umgestaltung zu. Differenzieren wir die erste, zweite, dritte dieser Gleichungen bezüglich nach  $y$ ,  $z$ ,  $x$ , so ergibt sich:

$$a. \begin{cases} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = 0, \\ 2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = 0. \end{cases}$$

Die Subtraction der beiden ersten Gleichungen von der letzten giebt

$$2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial z} = 0.$$

Nach 7 aber wird  $\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}$ ,  $\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial z} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}$ , mithin wird

$$14. \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0.$$

Differenziert man ferner die Gleichungen 9 bezüglich nach  $z$  und  $y$ , und addirt sie sodann, so ergibt sich

$$2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

Nach 8 aber ist die Summe der beiden letzten Glieder  $= 0$ , mithin

$$15. \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

Nach 7 wird  $\frac{\partial^3 \eta}{x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial z} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0$ , daher wird nach den beiden ersten der Gleichungen a

$$16. \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = 0.$$

Bezeichnen wir wie früher die relative Längenänderung  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  einer Faser mit  $\sigma$ , so lassen sich die Gleichungen 14, 15, 16 auch schreiben:

$$17. \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} = 0.$$

**§. 251. Integration.** Drücken wir  $\sigma$  durch eine Summe von Gliedern aus, welche beliebige Potenzen und Produkte der Variablen  $x, y, z$  enthalten, so darf zur Erfüllung der drei ersten der Gleichungen 17 keine höhere Potenz von  $x, y, z$  vorkommen, als die erste; zur Erfüllung der vierten Gleichung darf auch das Produkt  $yz$  nicht vorkommen. Der Symmetrie wegen muss  $\sigma$  für dasselbe  $x$  und  $y$  und für gleiche positive und negative  $z$  gleich gross sein, was nur möglich ist, wenn  $z$  gar nicht vorkommt. Demnach ist

$$\sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} = a + b y + x (a_1 + c y).$$

Die Faserspannung wird  $N = E \sigma = E [a + b y + x (a_1 + c y)]$ . Die erste der Gleichgewichtsbedingungen 2 gibt daher  $P = E [(a + a_1 x) \int df + (b + c x) \int y df] = E F (a + a_1 x)$ . Da aber der über die Belastung gemachten Annahme zufolge  $P$  nach  $x$  constant ist, so kann diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn  $a_1 = 0$  ist. Demnach ist nun

$$18. \quad \sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} = a + b y + c x y.$$

Nach 7 wird nun

$$19. \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{1}{m} (a + b y) - \frac{c}{m} x y.$$

Die Integration nach  $x, y, z$  gibt

$$20. \quad \xi = x (a + b y) + \frac{1}{2} c x^2 y + f(y, z),$$

$$21. \quad \begin{cases} \eta = -\frac{1}{m} y (a + \frac{1}{2} b y) - \frac{c}{2m} x y^2 + \varphi(x, z), \\ \xi = -\frac{1}{m} z (a + b y) - \frac{c}{m} x y z, \end{cases}$$

wobei  $f, \varphi$  vor der Hand noch unbekannte Funktionen der eingeklammerten Variablen bezeichnen. Zum Ausdrucke von  $\xi$  ist keine Funktion von  $x, y$  hinzuzufügen, weil nach 12 für  $z = 0$  auch  $\xi = 0$  sein muss.

Nach 9 wird

$$22. \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\frac{\partial \sigma}{\partial y} = -b - c x, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Die einmalige Integration giebt

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -b x - \frac{1}{2} c x^2 - \varphi'(y, z), \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \psi'(y, z)$$

und die nochmalige Integration

$$\begin{cases} \eta = -\frac{1}{2} b x^2 - \frac{1}{6} c x^3 + \varphi'(y, z) + \varphi''(y, z), \\ \xi = x \psi'(y, z) + \psi''(y, z). \end{cases}$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den Ausdrücken 21 zeigt, dass  $\varphi''(y, z) = -\frac{1}{m} y (a + \frac{1}{2} b y) +$  einer in  $\varphi(x, z)$  enthaltenen Funktion

von  $z$ ,  $\varphi'(y, z) = -\frac{c}{2m}y^2 +$  einer in  $\varphi(x, z)$  enthaltenen Funktion von  $z$ ,  $\psi''(y, z) = -\frac{1}{m}z(a + by)$  und endlich  $\psi'(y, z) = -\frac{c}{m}yz$  ist. Demnach wird

$$23. \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = -\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{6}cx^3 - \frac{1}{m}y(a + \frac{1}{2}by) \\ \quad - \frac{c}{2m}xy^2 + \varphi_1(z) + x\varphi_2(z), \\ \xi = -\frac{1}{m}z(a + by) - \frac{c}{m}xyz. \end{array} \right.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung 8 gibt

$$\frac{d\varphi_1(z)}{dz} + x \frac{d\varphi_2(z)}{dz} - \frac{bz}{m} - \frac{cxz}{m} = 0.$$

Diese Gleichung kann für jedes  $z$  nur erfüllt werden, wenn folgende Beziehungen bestehen:

$$\frac{d\varphi_1(z)}{dz} = \frac{b}{m}z, \quad \frac{d\varphi_2(z)}{dz} = \frac{c}{m}z.$$

Die Integration dieser Gleichungen gibt

$$\varphi_1(z) = b' + \frac{b}{2m}z^2, \quad \varphi_2(z) = c' + \frac{c}{2m}z^2.$$

Da für  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  nach 13 auch  $\eta = 0$  und  $\frac{d\eta}{dx} = 0$  werden muss, so giebt die Einsetzung von  $\varphi_1(z)$  und  $\varphi_2(z)$  in 23, dass  $b' = 0$ ,  $c' = 0$  ist. Demnach wird nun nach 23 endlich:

$$24. \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = -\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{6}cx^3 \\ \quad - \frac{1}{m}[ay + \frac{1}{2}b(y^2 - z^2)] - \frac{c}{2m}x(y^2 - z^2), \\ \xi = -\frac{1}{m}z(a + by) - \frac{c}{m}xyz. \end{array} \right.$$

Die vorkommenden Constanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sind durch die noch unberücksichtigten Gleichgewichtsbedingungen 2, 3 zu bestimmen.

**§. 252. Bestimmung von  $f(y, z)$ .** Für den Ausdruck von  $\xi$  bleibt noch  $f(y, z)$  zu bestimmen übrig, was mit Hilfe der noch unberücksichtigten Gleichung 10 geschehen kann. Nach 20 wird

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = cy, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial z^2},$$

daher nach 10:

$$2cy + \frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial z^2} = 0.$$

Wir setzen, um diese Gleichung bequemer zu gestalten,

$$f(y, z) = -cyz^2 + c\theta,$$

worin  $\theta$  eine neue Funktion von  $y$  und  $z$  bedeutet. Alsdann wird

$$\frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial y^2} = c \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial z^2} = -2 c y + c \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2},$$

mithin wird

$$25. \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0.$$

Der Ausdruck 20 für  $\xi$  geht nun über in:

$$26. \quad \xi = x(a + b y) + \frac{1}{2} c x^2 y - c y z^2 + c \Theta.$$

Die nur für Punkte in der Mantelfläche gültige Gleichung 11 geht durch Einführung der Ausdrücke für  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  über in

$$27. \quad \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{y^2 + (2m - 1)z^2}{2m} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{2m + 1}{m} y z \right) \sin \beta = 0.$$

Für  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  muss  $\xi = 0$  und für jeden Punkt, dessen  $z = 0$  ist,  $\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$  werden. Dies giebt noch für  $\Theta$  die Bedingungen

$$28. \quad \Theta_{y=0, z=0} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z_{z=0}} = 0.$$

Durch die Gleichungen 25, 27 und 28 ist die Funktion  $\Theta$  vollständig bestimmt. Wie man sieht, ist  $\Theta$  nur von der Form des Querschnittes abhängig und lässt sich sonach nur nach Fixirung der Querschnittsform bestimmen.

**§. 253. Spannungen.** Als Spannungen ergeben sich nun nach der Formel  $N = E \sigma$  und den Ausdrücken 58 (§. 29) für  $T_3$ ,  $T_2$ :

$$29. \quad \begin{cases} N = E(a + b y + c x y), \\ T_3 = G c \left[ \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{y^2 + (2m - 1)z^2}{2m} \right], \\ T_2 = G c \left[ \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{2m + 1}{m} y z \right]. \end{cases}$$

Um den vorausgesetzten Zustand, nach welchem  $N_2 = N_3 = 0$ ,  $T_1 = 0$  ist, vollständig herbeizuführen, müssen die äusseren Kräfte genau nach diesem Gesetze über die Endquerschnitte vertheilt sein, was natürlich in Wirklichkeit nie der Fall sein wird.

Die ersten der Gleichgewichtsbedingungen 2, 3 geben, wenn man beachtet, dass  $\int df = F$ ,  $\int y df = 0$ ,  $\int y^2 df = W$  ist,

$$30. \quad E F a = P, \quad E W (b + c x) = M.$$

Daher wird die Faserspannung

$$31. \quad N = \frac{P}{F} + \frac{M y}{W},$$

was genau der Gleichung 22 (§. 67) entspricht. Ferner wird nach der zweiten der Gleichungen 30:  $E W c = \frac{dM}{dx} = Q$ , also  $c = \frac{Q}{E W}$ , mithin nach 29:

$$32. \quad \begin{cases} T_3 = \frac{G Q}{E W} \left[ \frac{y^2 + (2m - 1)z^2}{2m} - \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right] \\ T_2 = \frac{G Q}{E W} \left[ \frac{2m + 1}{m} y z - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right], \end{cases}$$

so dass  $T_2, T_3$ , entsprechend dem früher gefundenen Resultate, nur von  $Q$ , nicht von  $P$  und  $M$  abhängen.

**§. 254. Formänderung.** Die Verrückungen eines Punktes der Axe nach Richtung der  $x, y$  seien  $\xi_0, \eta_0$ . Nach 24 (§. 251) wird

$$33. \quad \eta_0 = -\frac{1}{2} b x^2 - \frac{1}{6} c x^3.$$

Demnach ist die Krümmung der deformirten Axe sehr nahe

$$34. \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} = -b - c x = -\frac{M}{E W}.$$

was mit dem früher gefundenen Ausdrücke (45, §. 79) übereinstimmt.

Bezeichnen wir den Abstand des deformirten Querschnittes im Punkte  $y$  z von der Normalebene der deformirten Axe mit  $\delta$ , so ist

$$\begin{aligned} \delta &= \xi - \xi_0 + y \frac{d\eta_0}{dx} \\ &= x(a + b y) + \frac{1}{2} c x^2 y - c y z^2 + c \Theta \\ &\quad - a x - c \Theta_0 - x y (b + \frac{1}{2} c x) \\ &= -c y z^2 + c \Theta - c \Theta_0, \end{aligned}$$

d. i., da nach 28  $\Theta_0 = 0$  ist,

$$35. \quad \delta = -c y z^2 + c \Theta = \frac{Q(\Theta - y z^2)}{E W}.$$

Bezeichnen wir die Verrückungen eines Punktes des Querschnittes nach Richtung der Axen der  $v, w$ , die letzteren als fest gedacht, mit  $\nu, \omega$ , so ist  $\nu = \eta - \eta_0$ ,  $\omega = \zeta$ , d. i. nach 25 und 33

$$36. \quad \left\{ \begin{aligned} \nu &= -\frac{P y}{m E F} - \frac{M(y^2 - z^2)}{2 m E W}, \\ \omega &= -\frac{P z}{m E F} - \frac{M y z}{m E W}. \end{aligned} \right.$$

Für  $P = 0$  wird

$$36 a. \quad \nu = -\frac{M(y^2 - z^2)}{2 m E W}, \quad \omega = -\frac{M y z}{m E W}.$$

Hiernach bleiben Parallele zur Axe der  $v$  gerade; bezeichnet man den Abstand ihres Durchschnittes mit der Axe der  $v$  mit  $a$ , so ist  $\frac{z}{a} = \frac{d\xi}{dy}$

$= \frac{M z}{m E W}$ , also  $a = \frac{m E W}{M}$ . Parallele zur Axe der  $w$  gehen in Parabeln oder Kreise über, für deren Krümmungsradius  $r$  die Beziehung gilt:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{M}{m E W}, \quad \text{also } r = \frac{m E W}{M} = a.$$

Die Parallelen zu den Axen der  $v, w$  schneiden sich hiernach nach wie vor der Formänderung unter rechtem Winkel (Taf. X Fig. 1), wie es in der That sein muss, da die Schubspannungen  $T_1$ , welche ein Schiefstellen veranlassen würden, nicht vorhanden sind.

**§. 255. Anwendung auf beliebige Belastung.** Die entwickelten Regeln gelten auch noch bei beliebiger Belastung, jedoch nur für ein zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten liegendes Stück,

wenn wir die Annahme machen, dass die Belastung der Mantelfläche und das Eigengewicht dieses Stückes keinen Einfluss ausübt. Als die Kräfte, welche auf die Endflächen des Körpers wirken, treten hier die zwischen dem Körperelemente und den angrenzenden Körpertheilen wirkenden Spannungen auf.

Nehmen wir als Coordinatenanfang den Schwerpunkt des einen der beiden benachbarten Querschnitte an, so ist in den Ausdrücken 29 für die Spannungen  $x = 0$  zu setzen. Die Coefficienten  $a, b, c$  sind allerdings nur innerhalb des betrachteten Körperelementes constant, im Allgemeinen also mit  $x$  variabel. Bestimmt man diese Coefficienten nach den Gleichgewichtsbedingungen 2, 3 (§. 248), so ergeben sich für  $N, T_3, T_2$  genau die Ausdrücke 31, 32; nur ist hier  $P, Q, M$  als mit  $x$  variabel anzunehmen und stets für den fraglichen Querschnitt zu bestimmen.

Auch der Ausdruck 34 für die Krümmung, sowie der Ausdruck 35 für die Formänderung des Querschnittes behalten ihre Giltigkeit.

Die gleichförmige Belastung erzeugt insbesondere eine transversale Normalspannung, welche bewirkt, dass die entwickelten Regeln nicht ganz genau werden. Die grösste Normalspannung, welche hierdurch entstehen kann, ist bei der Last  $q$  pro Längeneinheit und der Breitendimension  $b = \frac{q}{b} \frac{dx}{dx} = \frac{q}{b}$ . Wie in §. 75 lässt sich zeigen, dass diese Spannung gegen die Faserspannung in Beziehung auf das Verhältniss  $\frac{h}{l}$  der Höhe zur Länge des Stabes von der zweiten Ordnung, also zu vernachlässigen ist.

## XXIX. Kapitel.

### Anwendung auf bestimmte Querschnittsformen.

#### §. 256. Bestimmung der Funktion $\Theta$ im Allgemeinen.

Die Funktion  $\Theta$  ergibt sich durch Integration der Gleichung 25. Derselben wird genügt durch die Funktion

$$37. \quad \Theta = \varphi(y + iz) + \psi(y - iz),$$

wobei  $i = \sqrt{-1}$  und  $\varphi$  und  $\psi$  beliebige Funktionen bedeuten. Nehmen wir  $\varphi$  und  $\psi$  als Summe von Potenzen von  $y + iz$  und  $y - iz$ , multiplicirt mit beliebigen Coefficienten an, so wird

$$\begin{aligned} \Theta = & \alpha + \alpha_1 y + \beta z + \alpha_2 (y^2 - z^2) + \beta_2 y z \\ & + \alpha_3 (y^2 - 3z^2) y + \beta_3 (3y^2 - z^2) z \\ & + \alpha_4 (y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + \beta_4 (y^2 - z^3) y z + \dots \end{aligned}$$

Die Coefficienten sind durch die Gleichungen 27 und 28 bestimmt. Nach 28 wird für  $y = 0, z = 0$   $\Theta = 0$ , mithin  $\alpha = 0$ . Da für dasselbe  $y$  und gleiche positive und negative  $z$   $\Theta$  gleich gross werden muss, so können ungerade Potenzen von  $z$  nicht vorkommen. Bildet man  $\frac{\partial \Theta}{\partial y}$  und  $\frac{\partial \Theta}{\partial z}$ , setzt die erhaltenen Ausdrücke in 27 ein und beachtet, dass

wegen der Symmetrie in Beziehung auf die Axe der  $z$  für gleiche positive und negative  $y$ ,  $\cos\beta$  und  $\sin\beta$  gleichen absoluten Werth,  $\cos\beta$  dasselbe Vorzeichen,  $\sin\beta$  aber entgegengesetztes Vorzeichen hat, so ergibt sich, dass die geraden Potenzen von  $y$  in  $\Theta$  verschwinden müssen; daher ist  $\alpha_2 = \alpha_4 = \dots = 0$ . Demnach wird nun einfacher

$$38. \quad \Theta = Ay + B(y^2 - 3z^2)y + C(y^4 - 10y^2z^2 + 5z^4)y + \dots$$

Die Anwendung auf Punkte des Umfanges mit Berücksichtigung von 27 giebt die Constanten.

**§. 257. Elliptischer Querschnitt.** Die Halbaxen seien  $a, b$ , die Gleichung der Ellipse also

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{y_1 dy_1}{a^2} + \frac{z_1 dz_1}{b^2} = 0,$$

$$\tan\beta = -\frac{dy_1}{dz_1} = \frac{a^2 z_1}{b^2 y_1}.$$

Die Gleichung 27 wird daher

$$\left[ \frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{y_1^2 + (2m-1)z_1^2}{2m} \right] \frac{y_1}{a^2} + \left[ \frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{2m+1}{m} y_1 z_1 \right] \frac{z_1}{b^2} = 0.$$

Setzt man für  $\Theta$  den Ausdruck 38 ein, so ergibt sich, dass die Coefficienten aller Glieder von der vierten Ordnung an verschwinden müssen. Demnach wird nun einfacher

$$\Theta = Ay + B(y^2 - 3z^2)y,$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial y} = A + 3B(y^2 - z^2), \quad \frac{\partial\Theta}{\partial z} = -6Byz.$$

Setzt man diese Ausdrücke für  $\frac{\partial\Theta}{\partial y}$  und  $\frac{\partial\Theta}{\partial z}$  in die vorige Gleichung ein und multiplicirt dabei, um die Gleichung homogen zu machen,  $A$  mit  $\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2}$ , was ja = 1 ist, so ergibt sich

$$\left[ A \left( \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} \right) + 3B(y_1^2 - z_1^2) - \frac{y_1^2 + (2m-1)z_1^2}{2m} \right] \frac{y_1}{a^2} - \left[ 6B + \frac{2m+1}{m} \right] \frac{y_1 z_1^2}{b^2} = 0.$$

Hieraus ergeben sich, indem man die Coefficienten von  $y_1^3$  und  $y_1 z_1^2 = 0$  setzt, die folgenden zwei einzelnen Gleichungen

$$\left( \frac{A}{a^2} + 3B - \frac{1}{2m} \right) \frac{1}{a^2} = 0,$$

$$\left( \frac{A}{b^2} - 3B - \frac{2m-1}{m} \right) \frac{1}{a^2} - \left( 6B + \frac{m+1}{m} \right) \frac{1}{b^2} = 0$$

und hieraus

$$A = \frac{a^2 [2(m+1)a^2 + mb^2]}{m(3a^2 + b^2)},$$

$$B = -\frac{(4m+1)a^2 + (2m-1)b^2}{6m(3a^2 + b^2)}.$$

Somit wird nun

$$39. \quad \Theta = \frac{6 a^2 [2 (m+1) a^2 + m b^2] - [(4m+1) a^2 + (2m-1) b^2] (y^2 - 3 z^2)}{6 m (3 a^2 + b^2)} y.$$

Für einen Kreis mit dem Radius  $r$  wird einfacher

$$40. \quad \Theta = \frac{3 m + 2}{4 m} r^2 y - \frac{1}{4} (y^2 - 3 z^2) y.$$

Nach 32 ergibt sich nun leicht mit Berücksichtigung des Werthes 54 (§. 28) von  $G$ :

$$41. \quad \left\{ \begin{array}{l} T_3 = -\frac{Q}{2(m+1)W} \left[ \frac{2(m+1)a^2 + mb^2}{3a^2 + b^2} (a^2 - y^2) - \frac{(m-2)a^2}{3a^2 + b^2} z^2 \right], \\ T_2 = \frac{Q}{(m+1)W} \frac{(m+1)a^2 + b^2}{3a^2 + b^2} yz. \end{array} \right.$$

Setzen wir  $m = 4$ , so wird

$$\left\{ \begin{array}{l} T_3 = -\frac{Q}{3W} \left[ \frac{3a^2 + 1,2b^2}{3a^2 + b^2} (a^2 - y^2) - \frac{3a^2}{5(3a^2 + b^2)} z^2 \right], \\ T_2 = \frac{Q}{3W} \frac{3a^2 + 0,6b^2}{3a^2 + b^2} yz. \end{array} \right.$$

d. i. nahezu

$$T_3 = -\frac{Q}{3W} (a^2 - y^2), \quad T_2 = \frac{Q}{3W} yz,$$

was aber mit den Näherungsausdrücken 33 (§. 202) genau übereinstimmt. Dort wurde  $T_3$  nach  $z$  constant angenommen; man sieht, dass dies nicht ganz richtig ist, jedoch ist das Glied mit  $z$  gegen die übrigen nur klein.

Für den kreisförmigen Querschnitt wird für  $m = 4$

$$T_3 = -\frac{Q}{3W} [1,05 (r^2 - y^2) - 0,15 z^2], \quad T_2 = \frac{Q}{3W} \cdot 0,90 \cdot yz.$$

Die Punkte, in welchen  $T_3$  constant ist, liegen in Ellipsen, welche mit der gegebenen concentrisch sind und deren Axen nach Richtung der  $y$  und  $z$  sich wie

$$\sqrt{(m-2)a^2} : \sqrt{2(m+1)a^2 + mb^2}$$

verhalten; beim Kreise ist das Verhältniss  $\sqrt{m-2} : \sqrt{3m+2}$ , oder

$1 : \sqrt{\frac{3m+2}{m-2}}$ , d. i. 1:2,65 bis 1:3,32. Die Punkte, in welchen  $T_2$  constant ist, liegen in gleichseitigen Hyperbeln, welche die Axen der gegebenen Ellipse zu Asymptoten haben. (Taf. X Fig. 4).

Die Formänderung der Querschnitte lässt sich nach 35 leicht bestimmen.

### §. 258. Querschnitt für eine gegebene Form von $\Theta$ .

Nimmt man die Form der Funktion  $\Theta$  an, so bildet die Gleichung 27 (§. 252), wenn man darin  $-\frac{dy}{dz}$  für  $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$  setzt, die Differenzialgleichung der Peripherie des entsprechenden Querschnittes. Wir wollen annehmen, dass  $\Theta$  durch die einfache Form

$$42. \quad \Theta = A y + B (y^2 - 3 z^2) y$$

dargestellt werde. Die Gleichung 27 giebt als Differenzialgleichung der Peripherie, wenn  $y_1, z_1$  die Coordinaten eines Punktes der Peripherie bedeuten,

$$\left[ A + 3 B (y_1^2 - z_1^2) - \frac{y_1^2 + (2m - 1) z_1^2}{2m} \right] dz_1 + \left( 6B + \frac{2m + 1}{m} \right) y_1 z_1 dy_1 = 0.$$

Wir setzen zur Integration

$$\frac{2m A}{6mB - 1} + y_1^2 = u, \quad 2y_1 dy_1 = du; \quad z_1^2 = v, \quad 2z_1 dz_1 = dv.$$

Die vorige Gleichung geht hierdurch über in

$$[(6mB - 1)u - (6mB + 2m - 1)v] dv + 2(6mB + 2m + 1)v du = 0.$$

Um die Variablen sondern zu können, setzen wir  $u = vw$ , worin  $w$  eine neue Variable bezeichnet. Dadurch wird

$$[(6mB - 1)w - (6mB + 2m - 1)] dv + 2(6mB + 2m + 1) du = 0$$

oder, weil  $du = v dw + w dv$  ist, nach Sonderung der Variablen

$$\frac{dv}{v} = \frac{c dw}{a - bw},$$

wenn wir zur Abkürzung setzen  $6mB + 2m - 1 = a$ ,  $18mB + 4m + 1 = b$ ,  $2(6mB + 2m + 1) = c$ . Die Integration giebt, wenn  $C$  eine willkürliche Constante bezeichnet,  $\text{lognat } Cv = -\frac{c}{b} \text{lognat}(a - bw)$  oder

$$\text{lognat } Cv^{-\frac{b}{c}} = \text{lognat}(a - bw), \text{ also } Cv^{-\frac{b}{c}} = a - bw = a - b \frac{u}{v} \text{ oder}$$

$$Cv^{\frac{c-b}{c}} = av - bu,$$

d. i. wenn wir für  $u, v, a, b, c$  ihre Werthe einsetzen,

$$C z_1^{\frac{1-6mB}{1+2m+6mB}} + (18mB + 4m + 1) y_1^2 - (6mB + 2m - 1) z_1^2 + \frac{2m A (18mB + 4m + 1)}{6mB - 1} = 0.$$

Wenn man  $C = 0$  setzt, so entspricht dieser Gleichung eine Ellipse. Bezeichnen wir die von der Curve auf der Axe der  $y$  und  $z$  abgeschnittenen Stücke oder die Halbaxen des Querschnittes mit  $a, b$ , so muss  $y = a$  für  $z = 0$  und  $z = b$  für  $y = 0$  werden. Diese beiden Gleichungen geben

$$a. \quad \left\{ \begin{aligned} A &= -\frac{6mB - 1}{2m} a^2, \\ C b^{\frac{1-6mB}{1+2m+6mB}} &= (6mB + 2m - 1) b^2 - \frac{2m A (18mB + 4m + 1)}{6mB - 1}. \end{aligned} \right.$$

Hierdurch lässt sich die Gleichung der Curve leicht auf folgende Form bringen:

$$43. \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + J \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 + (1 - J) \left(\frac{z_1}{b}\right)^n = 1,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$b. \quad n = \frac{1 - 6mB}{1 + 2m + 6mB}, \quad J = \frac{(6mB + 2m - 1)b^2}{(18mB + 4m + 1)a^2}.$$

Hierbei ist  $\left(\frac{z_1}{b}\right)^n$  stets positiv zu nehmen, da sonst das obige lognat  $v^{-\frac{b}{c}}$  imaginär würde. Sieht man  $n$  als gegeben an, so giebt die erste der Gleichungen  $a$  und die beiden Gleichungen  $b$  folgende Werthe für  $A, B, J$ :

$$44. \quad A = \frac{n(1+m)}{m(1+n)} a^2, \quad B = \frac{1-n(1+2m)}{6m(1+n)},$$

$$45. \quad J = \frac{(n-m)b^2}{(1+m)(2-n)a^2}.$$

Für  $m = 4$  wird

$$A = \frac{5n}{4(n+1)} a^2, \quad B = -\frac{9n-1}{24(n+1)}, \quad J = \frac{(n-4)b^2}{5(2-n)a^2}.$$

In der Folge wollen wir in der Regel voraussetzen, dass  $m = 4$  sei.

**§. 259. Discussion dieser Linie.** Durch Aenderung des Werthes von  $n$  kann man Querschnittsformen von verschiedenem Charakter erzeugen. Ganz beliebig kann indess  $n$  nicht gewählt werden. Offenbar muss sich für ein  $z$ , was kleiner als  $b$  ist, ein reelles  $y$  ergeben, wenn die Curve einen anwendbaren Querschnitt repräsentiren soll. Setzen wir daher  $\frac{z_1}{b} = 1 - \alpha$ , wobei  $\alpha$  einen sehr kleinen positiven echten Bruch bezeichnet, so wird  $\left(\frac{z_1}{b}\right)^2 = 1 - 2\alpha$ ,  $\left(\frac{z_1}{b}\right)^n = 1 - n\alpha$ . Dies in die Gleichung 43 eingesetzt, giebt, wenn man auch den Ausdruck für  $J$  einführt,

$$\frac{y_1}{a} = \sqrt{\alpha \frac{(m+1)na^2 - (m-n)b^2}{(m+1)a^2}}.$$

Damit  $y_1$  reell wird, muss  $(m+1)na^2 > (m-n)b^2$  sein, oder

$$46. \quad n > \frac{mb^2}{(m+1)a^2 + b^2}, \quad \text{d. i.} > \frac{4b^2}{5a^2 + b^2}.$$

Jedenfalls muss also  $n$  positiv sein.

1. Hat  $n$  genau diesen Grenzwert, so wird  $J = -\frac{2b^2}{5a^2 + b^2}$  und die Gleichung der Curve

$$47. \quad \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \frac{2b^2}{5a^2 + b^2} \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 + \frac{5a^2 + 3b^2}{5a^2 + b^2} \left(\frac{z_1}{b}\right)^{\frac{4b^2}{5a^2 + b^2}} = 1.$$

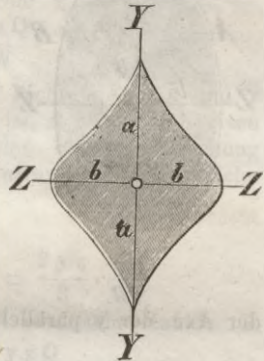
Auf Taf. X ist in Fig. 2 diese Curve für  $\frac{a}{b} = 0,5 \quad 1 \quad 1,5$  dargestellt. Diesem entspricht  $n = \frac{16}{9}, \frac{2}{3}, \frac{16}{49}$ .

2. Der Exponent  $n = \frac{1}{2}$  ist nur möglich, wenn  $\frac{a}{b} > \sqrt{\frac{9}{5}}$ , d. i.  $> 1,342$  ist. Es wird  $J = -\frac{7b^2}{12a^2}$  und die Gleichung der Curve

$$48. \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \frac{7b^2}{15a^2} \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 + \frac{15a^2 + 7b^2}{15a^2} \sqrt{\frac{z_1}{b}} = 1.$$

Der Querschnitt weicht in diesem Falle wenig vom Rhombus ab (Fig. 89 für  $m = 4$ ,  $a = 1,5b$ ) und kann für diesen substituirt werden, da sich die Funktion  $\Theta$  für den Rhombus nur in complicirter transcendenten Form darstellen lässt.

Fig. 89.



3. Der Exponent  $n = 1$  ist nur möglich, wenn  $\frac{a}{b} > \sqrt{\frac{3}{5}}$ , d. i.  $> 0,775$  ist. Es wird  $J = -\frac{3b^2}{5a^2}$  und die Gleichung der Curve

$$49. \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \frac{3b^2}{5a^2} \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 + \frac{5a^2 + 3b^2}{5a^2} \frac{z_1}{b} = 1.$$

Der Querschnitt wird von zwei Hyperbeln eingeschlossen, deren Scheitel in den Enden der Axen  $b$  liegen (Taf. X Fig. 2, c). Die reelle Axe einer Hyperbel wird  $\frac{5a^2 - 3b^2}{6b}$ . Wenn  $\frac{a}{b}$  den kleinst möglichen Werth, d. i.  $\sqrt{\frac{3}{5}}$  hat, so wird diese reelle Axe 0; die Hyperbel geht in ihre Asymptoten über und der Querschnitt bildet genau einen Rhombus. Für diesen Fall ist also die genaue Behandlung des Rhombus leicht möglich.

4. Für  $n = 2$  wird  $J = \infty$ , wesshalb hier eine besondere Untersuchung nöthig wird. Wir setzen  $n = 2 + \alpha$ , wobei  $\alpha$  eine sehr kleine Zahl bedeutet. Alsdann wird  $J = \frac{(2-\alpha)b^2}{5\alpha a^2}$  und die Gleichung der Curve

$$\left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{b}\right)^{2+\alpha} - \frac{(2-\alpha)b^2}{5\alpha a^2} \left[ \left(\frac{z_1}{b}\right)^{2+\alpha} - \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 \right] = 1.$$

Nun aber ist  $a^x + \alpha - a^x = \frac{\alpha}{dx} da^x = \alpha a^x \lognat a$ , also

$$\left(\frac{z_1}{b}\right)^{2+\alpha} - \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 = \alpha \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 \lognat \left(\frac{z_1}{b}\right).$$

Setzt man dies ein und setzt sodann nachträglich  $\alpha = 0$ , so ergibt sich

$$50. \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 - \frac{2b^2}{5a^2} \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 \lognat \left(\frac{z_1}{b}\right) = 1.$$

Die Curve (Taf. X Fig. 2, d) weicht von der Ellipse wenig ab.

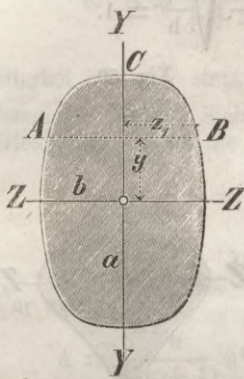
5. Setzt man  $J = 1$ , so wird

$$51. n = 2 \frac{5a^2 + 2b^2}{5a^2 + b^2}.$$

Für  $\frac{a}{b} = 0,5 \ 1 \ 1,5 \ 2 \ 3$  wird bezüglich  $n = 4,33 \ 2,80 \ 2,16 \ 2,09 \ 2,04$ . Dieser Werth von  $n$  ist stets grösser, als der kleinste zulässige Werth von  $n$ . Die Curve bildet in diesem Falle eine reine Ellipse (Taf. X Fig. 2, e).

6. Setzt man  $n = m$ , also  $n = 4$ , so wird  $J = 0$ , folglich die Gleichung der Curve

Fig. 90.



$$52. \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{b}\right)^4 = 1.$$

Man nennt diese Curve auch wohl eine falsche Ellipse (Fig. 90). Sie liegt ganz ausserhalb der reinen Ellipse mit denselben Halbaxen.

7. Wählt man  $n$  unendlich gross, so wird

$$J = -\frac{b^2}{5a^2} \text{ also die Gleichung der Curve}$$

$$53. \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{5a^2} \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 + \frac{5a^2 + b^2}{5a^2} \left(\frac{z_1}{b}\right)^\infty = 1.$$

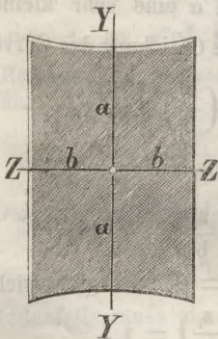
Für  $\frac{z_1}{b} = \pm 1$  wird  $\left(\frac{z_1}{b}\right)^\infty$  unbestimmt, da  $(\pm 1)^\infty$  jeden Werth zwischen  $-1$  und  $+1$  annehmen kann. Daher wird auch  $\frac{y_1}{a}$  unbestimmt.

Die Curve hat also zwei gerade Theile, welche der Axe der  $y$  parallel sind. Ist  $\frac{z}{b} < 1$ , so wird  $\left(\frac{z_1}{b}\right)^\infty = 0$ , mithin

$$54. \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{z_1}{a}\right)^2 = 1.$$

Dieser Gleichung entspricht eine Hyperbel mit der reellen Halbaxe  $a$  und der imaginären Axe  $a\sqrt{5}$ . Als Krümmungsradius im Scheitel ergibt sich leicht  $5a$ . Sonach bildet der Querschnitt eine Art Rechteck mit zwei geraden und zwei concav gekrümmten Seiten (Fig. 91 für  $a = 1,5b$ ).

Fig. 91.



Wählt man  $n$  nicht  $= \infty$ , aber sehr gross, so erhält man Curven, welche vom Rechteck wenig verschieden sind. Für  $n = 10$  ergibt sich z. B. die Curve Taf. X Fig. 2, g. Je kleiner  $n$  wird, desto mehr nähert sich die Curve der Ellipse.

Für den genau rechteckigen Querschnitt lässt sich  $\Theta$  nicht durch eine algebraische Funktion ausdrücken, weil die Anwendung der Gleichung 27 (Seite 240) auf die beiden Paare der parallelen Seiten auf zwei zwar nahezu gleiche, aber sich doch widersprechende Werthe von  $B$  führt. Die genaue Behandlung, die nur durch complicirte transcendenten

Funktionen möglich ist, übergehen wir. Mit hinreichender Genauigkeit können wir aber für das Rechteck die Curve substituiren, welche sich für  $n = \infty$  ergibt.

**§. 260. Schubspannungen.** Da die genaue Theorie für die Normalspannungen denselben Ausdruck giebt, wie die früher entwickelte Näherungstheorie, so gehen wir hier nur auf die Schubspannungen ein. Die Ausdrücke 32 für dieselben gehen durch Einführung der Werthe für  $A$  und  $B$  in die Funktion  $\Theta$  über in:

$$55. \quad \begin{cases} T_3 = -\frac{n(m+1)(a^2 - y^2) - (n-m)z^2}{2(m+1)(n+1)} \frac{Q}{W}, \\ T_2 = \frac{yz}{n+1} \frac{Q}{W}. \end{cases}$$

Hat  $n$  den kleinst möglichen Werth 46, so wird

$$56. \quad \begin{cases} T_3 = \frac{m(a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2) Q}{2(m+1)(a^2 + b^2) W}, \\ T_2 = \frac{[(m+1)a^2 + b^2] y z Q}{(m+1)(a^2 + b^2) W}. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass  $T_3$  in Ellipsen, deren Axen in Richtung der  $y$  und  $z$  sich wie  $a : b$  verhalten, constant ist. Wenn  $a = b$  ist, so ist  $T_3$  in Kreisen constant (Taf. X Fig. 3). Dies ist allerdings eine starke Abweichung von der Näherungstheorie, welche  $T_3$  in Geraden constant annimmt, welche der Axe der  $z$  parallel sind.

Für  $n = \frac{1}{2}$  (Rhombus) wird für  $m = 4$

$$57. \quad T_3 = \frac{5(a^2 - y^2) + 7z^2}{30} \frac{Q}{W}, \quad T_2 = \frac{2yz}{3} \frac{Q}{W}.$$

Für die falsche Ellipse, d. i. für  $n = m = 4$  wird sehr einfach

$$58. \quad T_3 = \frac{2(a^2 - y^2) Q}{5W}, \quad T_2 = \frac{yz Q}{5W},$$

so dass  $T_3$  von  $z$  unabhängig, also in Parallelen zur Axe der  $z$  constant ist (Taf. X Fig. 5). Für diesen Querschnitt stimmt demnach die genaue Theorie genau mit der Näherungstheorie überein.

$T_3$  wird, wenn  $n < m$  ist, in concentrischen Ellipsen mit demselben Axenverhältniss, wenn  $n > m$  ist, in concentrischen Hyperbeln mit demselben Axenverhältniss oder mit denselben Asymptoten constant.  $T_2$  wird stets in gleichseitigen Hyperbeln, welche die Axen der  $y, z$  zu Asymptoten haben, constant. (Taf. X Fig. 3—6.)

$T_3$  wird, wenn  $n > m$  ist, zum Maximum für  $y = 0, z = 0$ , also im Schwerpunkte; wenn aber  $n < m$  ist, für  $y = 0, z = \pm b$ , also an den Enden der Halbaxen  $b$ .  $T_2$  wird am grössten in denjenigen Punkten der Peripherie, in welchen dieselbe von den, die Winkel zwischen den Coordinatenaxen halbirenden, Geraden geschnitten wird. Es ist für  $n > m$ :

$$\max T_3 = -\frac{n a^2 Q}{2(n+1)W}.$$

Für sehr grosse  $n$  (Rechteck) wird

$$59. \quad T_3 = \left( a^2 - y^2 - \frac{1}{m+1} z^2 \right) \frac{Q}{2W}, \quad T_2 = 0.$$

Die reelle und imaginäre Axe der Hyperbeln, in welchen  $T_3$  constant ist, verhalten sich zu einander wie  $1 : \sqrt{2(m+1)}$ , d. i. wie  $1 : 3,2$ . Die Hyperbeln weichen innerhalb des Querschnittes wenig von Geraden ab.

**261. Vergleich mit der Näherungstheorie.** Nach 27 (Seite 58) ist annähernd

$$T_3 = \frac{Q \Omega}{2W z_1}, \quad T_2 = T_3 \frac{z}{z_1} \frac{dz_1}{dy}.$$

Nun aber ergibt sich durch Zerlegung des Abschnittes  $\Lambda C B$  (Fig. 90), dessen statisches Moment  $\Omega$  in Frage kommt, in Elemente, welche der Axe der  $y$  parallel sind,

$$\begin{aligned}\Omega &= 2 \int_0^{z_1} (y_1 - y) dz \frac{y_1 + y}{2} = \int_0^{z_1} (y_1^2 - y^2) dz. \\ &= \int_0^{z_1} \left[ a^2 - J \frac{a^2}{b^2} z_1^2 - \frac{(1 - J) a^2}{b^n} z_1^n - y^2 \right] dz_1.\end{aligned}$$

Integrirt man, wobei  $y$  als constant anzusehen ist, und setzt sodann  $\frac{z_1^n}{b^n}$  aus der Gleichung des Umfanges, sowie für  $J$  seinen Werth 45 ein, so wird

$$\Omega = \frac{n}{n+1} (a^2 - y^2) z_1 - \frac{n-m}{3(m+1)(n+1)} z_1^3.$$

Daher wird

$$\text{a. } T_3 = \frac{n(m+1)(a^2 - y^2) + \frac{1}{3}(n-m)z_1^2 \cdot Q}{2(m+1)(n+1)} \cdot \frac{Q}{W}.$$

Nach der Gleichung 43 ist, wenn man nach der Differentiation für  $(1 - J) \frac{z_1^n}{b^n}$  den Ausdruck aus der Gleichung 43 setzt, und für  $J$  seinen Werth einführt,

$$\frac{dz_1}{dy} = \frac{2(m+1)yz_1}{n(m+1)(a^2 - y^2) + (n-m)z_1^2}.$$

Setzt man dies und ausserdem den Ausdruck  $a$  für  $T_3$  in den Näherungsausdruck für  $T_2$  ein, so ergibt sich

$$\text{b. } T_2 = \frac{n(m+1)(a^2 - y^2) + \frac{1}{3}(n-m)z_1^2 \cdot \frac{yz_1}{n+1} \cdot \frac{Q}{W}}{n(m+1)(a^2 - y^2) + (n-m)z_1^2}.$$

Die Vergleichung dieser Näherungsausdrücke für  $T_3$  und  $T_2$  mit den genauen zeigt eine grosse Aehnlichkeit. Der genaue Ausdruck für  $T_3$  enthält das Glied  $(n-m)z^2$ , wobei  $z$  die Abscisse eines beliebigen Punktes des Querschnittes bedeutet; der Näherungsausdruck enthält dafür das Glied  $\frac{1}{3}(n-m)z_1^2$ , wobei  $z_1$  aber die Abscisse des der Ordinate  $y$  entsprechenden Punktes des Umfanges bedeutet. Der Ausdruck für  $T_2$  stimmt mit dem genauen Ausdrucke nur wegen der Verschiedenheit der Glieder  $\frac{1}{3}(n-m)z_1^2$  und  $(n-m)z_1^2$  in Zähler und Nenner nicht ganz überein.

Je kleiner die Axe  $b$ , je kleiner also auch  $z$  und  $z_1$  ist, desto genauer sind die Näherungsausdrücke.

Wenn  $n = m$  ist, so verschwinden die Glieder mit  $z$  und  $z_1$  und die Näherungsausdrücke stimmen mit den genauen ganz überein.

**§. 262. Formänderung der Querschnitte.** Setzt man den Ausdruck 42 von  $\Theta$  mit Berücksichtigung der Werthe von  $A$  und  $B$  in den Ausdruck 35, so ergibt sich als Abweichung des deformirten Querschnittes von der Normalebene zur deformirten Axe des Körpers:

$$60. \delta = \frac{6n(m+1)a^2 - (2mn + n - 1)y^2 - 3(2m - n + 1)z^2}{6m(n+1)} \cdot \frac{Qy}{EW}.$$

Es ist zunächst bemerkenswerth, dass in diesem Ausdrucke die Axe  $b$

nicht vorkommt. Demnach werden die deformirten Querschnitte verschiedener Körper mit gleicher Axe a, oder verschiedener Axe b, congruent sein, vorausgesetzt, dass n, sowie  $\frac{Q}{W}$  für beide Körper denselben Werth hat.

Die Schnitte, welche parallel der xz Ebene sind, bilden gemeine Parabeln und die Schnitte, welche parallel der xy Ebene sind, Parabeln dritten Grades. Die Axe der z bleibt gerade, weil für  $y = 0$  auch  $\delta = 0$  wird. Die Schnitte, welche parallel zur Normalebene der deformirten Axe des Körpers sind, oder die Linien, in welchen  $\delta$  constant ist, sind Linien dritten Grades. In einer Linie zweiten Grades (Ellipse, wenn  $n < 9$ , Hyperbel, wenn  $n > 9$  ist) wird ebenfalls  $\delta = 0$ .

Wenn  $2m - n + 1 = 0$ , also

$$61. \quad n = 2m + 1 = 9$$

ist, so verschwindet das Glied mit z, d. h. die Abweichung  $\delta$  ist in Parallelen zur Axe der z constant.

Für  $n = \infty$  (Rechteck) wird für  $m = 4$

$$62. \quad \delta = \frac{(10a^2 - 3y^2 + z^2)yQ}{8EW}.$$

Die Näherungstheorie giebt nach 28 (Seite 191), wenn man 2a, 2b, y, z für h, b, v, w setzt, genau denselben Ausdruck.

Als Beispiel sei noch der Kreis erwähnt. Für denselben wird nach 51  $n = \frac{7}{3}$ , mithin

$$63. \quad \delta = \frac{7a^2 - 2(y^2 + z^2)}{8} \cdot \frac{Qy}{EW}.$$

Für Punkte des Umfanges ist  $y^2 + z^2 = a^2$ , mithin

$$64. \quad \delta = \frac{5}{8} \frac{Qa^2y}{EW},$$

woraus folgt, dass der Umfang des Querschnittes eben bleibt. Ebenso bleiben auch alle concentrischen Kreise des Querschnittes eben.

Auf Taf. X ist Fig. 7—9 für verschiedene Fälle die Deformation des Querschnittes dargestellt.

**§. 263. I-förmiger Querschnitt.** Für jede Seitenfläche der Mittelrippe giebt die Gleichung 27 (Seite 240), wenn  $\delta$  die Dicke der Mittelrippe bedeutet

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{z=\pm\frac{1}{2}\delta} \mp \frac{2m+1}{2m} \delta y = 0.$$

Setzt man für  $\theta$  den Ausdruck 38 (Seite 243), so ergibt sich

$$\pm 3By\delta \pm 10C(y^2 - \frac{1}{4}\delta^2)y\delta \pm \dots \mp \frac{2m+1}{2m} \delta y = 0.$$

Hieraus ergibt sich, dass die Coefficienten von C an Null sein müssen und als Werth für den Coefficient B

$$B = \frac{2m+1}{6m} = \frac{3}{8}.$$

Also wird

$$65. \quad \Theta = \Lambda y + \frac{2m+1}{6m} (y^2 - 3z^2) y,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \Lambda + \frac{2m+1}{2m} (y^2 - z^2), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{2m+1}{m} y z.$$

Als Schubspannungen in der Mittelrippe ergeben sich daher nach 32 (Seite 240)  $T_2 = 0$  und, wenn wir  $z$  als sehr klein gegen  $y$  vernachlässigen,

$$T_3 = -\frac{mQ}{2(m+1)W} (\Lambda + y^2).$$

Die Gurte setzen wir als so niedrig voraus, dass wir die Faserspannung in derselben als constant annehmen können. Diese Spannung  $N$  ist bei dem Abstände  $h$  der Gurte nach 31 (Seite 240)

$$N = \frac{P}{F} + \frac{Mh}{2W}.$$

Die Summe aller Spannungen in einem Gurtquerschnitte ist  $Nf$ , wenn  $f$  den Flächeninhalt desselben bedeutet. Daher ist der Unterschied in der Spannung auf die Länge  $dx = f dN$ , also die Schubspannung  $T_3'$  am Uebergange der Mittelrippe in die Gurte  $= \frac{f dN}{\delta dx}$ , d. i. wenn  $P$  constant ist, da  $\frac{dN}{dx} = Q$  ist,

$$T_3' = \frac{Q f h}{2W \delta}.$$

Nach dem obigen Ausdrucke für  $T_3$  aber ist

$$T_3' = -\frac{mQ}{2(m+1)W} (\Lambda + \frac{1}{4} h^2).$$

Die Vergleichung beider Ausdrücke giebt  $\Lambda = -\frac{1}{4} h^2 - \frac{m+1}{m} \frac{fh}{\delta}$ , mithin

$$66. \quad T_3 = \frac{Q}{W} \left[ \frac{fh}{2\delta} + \frac{m}{8(m+1)} (h^2 - 4y^2) \right],$$

was mit dem Näherungsausdrucke 133 (Seite 214) nahe übereinstimmt.

Für die Formänderung der Querschnitte ergibt sich nach 35 (Seite 241) für  $m = 4$ :

$$67. \quad \delta = -\frac{Qy}{8EW} \left( 10 \frac{fh}{\delta} + 2h^2 - 3y^2 \right).$$

Bei kleiner Dicke der Mittelrippe und grossem Querschnitte ist annähernd, wenn wir  $W = \frac{1}{2} f h^2$ , setzen,

$$68. \quad \delta = -\frac{5Qy}{2Eh\delta},$$

so dass die Querschnitte nahezu eben bleiben, jedoch nicht senkrecht auf der Axe.

## VIII. Abschnitt.

# Normalelasticität einfach gekrümmter Stäbe.

## XXX. Kapitel.

### Allgemeine Theorie.

§. 264. **Einleitung.** Die reine Normalelasticität tritt nach §. 47 nur dann ein, wenn sich die Entfernung zweier benachbarter Querschnitte an allen Stellen derselben relativ um gleich viel ändert, ohne dass sich die Querschnitte gegenseitig verschieben oder verdrehen. Die relative Längenänderung der Fasern, sowie die zum Querschnitte senkrechte Spannung, die wir auch hier Faserspannung nennen, sind alsdann an allen Punkten desselben Querschnittes gleich gross. Eine Aenderung der Krümmung der Axe findet nicht statt.

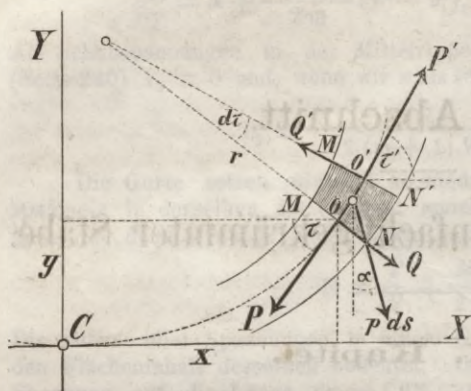
Diese Beanspruchung tritt ein, wenn die Richtung der auf einen Körpertheil wirkenden Kraft durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und auf diesem senkrecht steht. Wir wollen indess annehmen, dass die Kraft nicht unbedingt senkrecht zum Querschnitte wirkt, wohl aber in der Krümmungsebene der Axe des Körpers, die wir als einfach gekrümmt voraussetzen. Wir haben es alsdann eigentlich mit zusammengesetzter Normal- und Schubelasticität zu thun. Von den Kräften  $P$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  und Momenten  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  (§. 46) existirt nur  $P$ , d. i. die sogenannte Axialkraft oder die in Richtung der Tangente der Axe fallende Componente und  $Q_1$ , d. i. die sogenannte Transversalkraft, oder die senkrecht zur Tangente wirkende Componente der äussern Kräfte. Für letztere werden wir  $Q$  setzen.

Es ist klar, dass zur blossen Beanspruchung auf Normalelasticität eine gewisse Beziehung zwischen der Form der Axe des Körpers und der Belastung existiren müsse. Die Axe nennt man in diesem Falle häufig die Stützlinie. Schlaffe Körper, wie Ketten, Seile u. s. w. nehmen die Form dieser Linie von selbst an, wesshalb man dieselbe auch Kettenlinie nennt.

§. 265. **Gleichgewichtsbedingungen.** Wir denken uns zwei unendlich nahe Querschnitte  $MN$  und  $M'N'$ , (Fig. 92). Die Axialkraft und Transversalkraft für beide Querschnitte sei bezüglich  $P$ ,  $Q$ ,  $P'$ ,  $Q'$ .

Diese Kräfte für beide Querschnitte entgegengesetzt genommen, sind die auf das Körperelement  $MN, M'N'$ , von den anstossenden Körpertheilen ausgeübten Kräfte. Auf den Körper wirke die gleichförmig vertheilte Kraft  $p$  pro Längeneinheit der Axe des Körpers und zwar unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Verticale oder gegen die Axe der  $y$ . Der Winkel, welchen die Tangente mit der Horizontalen oder der Axe der  $x$  bildet, sei  $\tau$ .

Fig. 92.



Damit das Körperelement gegen Drehung im Gleichgewichte ist, muss  $Q \cdot \frac{1}{2} ds + Q' \cdot \frac{1}{2} ds = 0$ , d. i.  $Q + Q' = 0$ , mithin, da  $Q'$  von  $Q$

nur um  $dQ$  verschieden ist,  $Q = 0$  sein, d. h. Transversalkräfte dürfen nicht existiren.

Hierbei wurde allerdings stillschweigend vorausgesetzt, dass der Angriffspunkt der gleichmässig vertheilten Last im Schwerpunkte des Elementes liege. Wirkt aber  $p$  auf die Oberfläche des Körpers, so ist die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung, wenn  $\partial$  die normale Höhe des Körpers bezeichnet,  $Q \cdot \frac{1}{2} ds + Q' \cdot \frac{1}{2} ds + p ds \cdot \frac{1}{2} \partial \sin(\tau - \alpha)$ , also, da  $Q' = Q$  zu setzen ist

$$1. \quad Q = \frac{1}{2} p \partial \sin(\tau - \alpha).$$

Wir setzen voraus, dass die Höhe des Körpers gegen seine Längenausdehnung nur klein sei. Dann aber wird  $\frac{1}{2} p \partial$  gegen die gesammte Belastung sehr klein. Aus der Aufstellung der Bedingung für das Gleichgewicht eines endlichen Körpertheiles geht aber sofort hervor, dass die Axialkraft  $P$  der Gesamtlast proportional ist, so dass wir  $Q$  gegen  $P$  vernachlässigen können.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht des Elementes  $MNM'N'$  gegen Verschiebung in horizontaler und verticaler Richtung sind alsdann  $P \cos \tau - P' \cos \tau' - p ds \sin \alpha = 0$  und  $P \sin \tau - P' \sin \tau' + p ds \cos \alpha = 0$  oder

$$2. \quad d(P \cos \tau) = -p ds \sin \alpha.$$

$$3. \quad d(P \sin \tau) = p ds \cos \alpha.$$

Die Integration giebt

$$P \cos \tau = - \int p ds \sin \alpha, \quad P \sin \tau = \int p ds \cos \alpha.$$

Die Division beider Gleichungen giebt

$$4. \quad \tan \tau = - \frac{\int p ds \cos \alpha}{\int p ds \sin \alpha}.$$

Wenn man die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschiebung in Richtung des Radius für die Mitte des Elementes aufstellt, so ergibt sich  $P \sin(\frac{1}{2} d\tau) + P' \sin(\frac{1}{2} d\tau) - p ds \cos(\tau - \alpha) = 0$ . Da  $\sin(\frac{1}{2} d\tau) = \frac{1}{2} d\tau$  zu setzen ist, so wird

$$5. P d\tau = p ds \cos(\tau - \alpha).$$

Ist  $r$  der Krümmungsradius der Axe des Körpers, so ist  $ds = r d\tau$ , daher nach 5

$$6. P = pr \cos(\tau - \alpha).$$

Ebenso ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung für Verschiebung in Richtung der Tangente für die Mitte des Elementes  $P \cos \frac{1}{2} d\tau - P' \cos \frac{1}{2} d\tau + p ds \sin(\tau - \alpha) = 0$ , d. i.

$$7. dP = p ds \sin(\tau - \alpha).$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht auch aus 2 und 3 ableiten, indem man  $d(P \sin \tau)$  und  $d(P \cos \tau)$  auflöst.

**§. 266. Belastung durch Vertikalkräfte.** Für den Fall, dass die gleichförmig vertheilte Last nur in verticaler Richtung wirkt, bezeichnen wir die Last pro Längeneinheit für die Horizontalprojection mit  $q$ . Alsdann ist  $p ds = q dx$ . Da ausserdem  $\alpha = 0$  ist, so wird nach 2 und 3

$$8. d(P \cos \tau) = 0, \quad d(P \sin \tau) = q dx.$$

Die Integration der ersten Gleichung giebt  $P \cos \tau = \text{Const.}$  Nennen wir  $P \cos \alpha$  die Horizontalkraft, so sagt diese Gleichung, dass die Horizontalkraft constant sei. Wir wollen dieselbe mit  $H$  bezeichnen, also

$$9. P \cos \tau = H$$

setzen. Demnach wird  $P \sin \tau = \frac{H \sin \tau}{\cos \tau} = H \tan \tau = H \frac{dy}{dx}$ , also  $d(P \sin \tau) = d\left(H \frac{dy}{dx}\right) = H \frac{d^2y}{dx^2} dx$ , folglich nach der zweiten der Gleichungen 8,

$$10. H \frac{d^2y}{dx^2} = q.$$

Die Gleichung 7 giebt

$$11. P = qr \cos \tau.$$

Die Axialkraft  $P$  ist ein Zug oder Druck, je nachdem die Axe des Körpers nach oben zu concav ( $\smile$ ) oder convex ( $\frown$ ) gekrümmt ist, so dass  $r$  im ersten Falle als positiv, im letzten als negativ einzuführen ist.

Wir nehmen in der Folge in der Regel den tiefsten oder höchsten Punkt  $C$  (Fig. 92), für welchen die Tangente eine horizontale Lage hat, den sogenannten Scheitel, als Coordinatenanfang an. Im Scheitel ist  $P = H$ . Ist der Radius und die Last pro Längeneinheit im Scheitel  $r_0, q_0$ , so wird nach 10, da  $\tau = 0$  ist,

$$12. H = q_0 r_0.$$

Die einmalige Integration von 10 giebt mit Rücksicht darauf, dass für  $x = 0$   $\frac{dy}{dx} = 0$  werden muss,  $H \frac{dy}{dx} = \int_0^x q dx$ ; das Integral ist die Last, welche auf den ganzen Theil  $CO$  (Fig. 92) wirkt. Bezeichnen wir diese mit  $V$ , so ist also

$$13. \tan \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H}.$$

Diese Bedingung ergibt sich auch sofort durch die Aufstellung der Bedingung für das Gleichgewicht des Körpertheiles CO.

**§. 267. Belastung durch Normalkräfte.** Wenn die gleichförmig vertheilte Last senkrecht auf die Axe des Körpers wirkt, so ist  $\alpha = \tau$  oder  $\alpha - \tau = 0$ , mithin ergibt sich nach 6 die sehr einfache Beziehung

$$14. \quad P = q r.$$

Die Gleichung 7 gibt  $dP = 0$ , also

$$P = \text{Const.}$$

Die Axialkraft ist also constant und gleich dem Produkte aus der Last pro Längeneinheit der Axe und dem Krümmungsradius.

**§. 268. Einfluss isolirter Lasten.** In irgend einem Punkte wirke eine isolirte Last R unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Verticale. Die Axialkräfte in den anstossenden Körpertheilen seien P, P' und die Tangentialwinkel dieser Körpertheile  $\tau$ ,  $\tau'$ . Alsdann sind die Gleichgewichtsbedingungen für ein Körperelement

$$15. \quad \begin{cases} P \cos \tau - P' \cos \tau' + R \sin \alpha = 0, \\ P \sin \tau - P' \sin \tau' - R \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

Wenn  $\tau = \tau'$  wäre, so würden sich beide Gleichungen widersprechen. Am Angriffspunkte einer isolirten Last muss daher die Axe des Körpers stets eine Ecke bilden.

Sind nur verticale isolirte Lasten  $G_1, G_2, G_3, \dots$  vorhanden, so sind die Gleichgewichtsbedingungen, wenn die Axialkräfte in den einzelnen Theilen  $P_1, P_2, P_3, \dots$  sind,

$$\begin{aligned} P_1 \cos \tau_1 - P_2 \cos \tau_2 &= 0, & P_1 \sin \tau_1 - P_2 \sin \tau_2 &= G_1, \\ P_2 \cos \tau_2 - P_3 \cos \tau_3 &= 0, & P_2 \sin \tau_2 - P_3 \sin \tau_3 &= G_2, \\ P_3 \cos \tau_3 - P_4 \cos \tau_4 &= 0, & P_3 \sin \tau_3 - P_4 \sin \tau_4 &= G_3, \\ & & \dots & \dots \end{aligned}$$

Nach den ersten Gleichungen ist  $P_1 \cos \tau_1 = P_2 \cos \tau_2 = P_3 \cos \tau_3 = \dots$ , also  $P \cos \tau$  constant. Setzen wir  $P \cos \tau = H$ , so wird  $P_1 \sin \tau_1 = H \tan \tau_1$ ,  $P_2 \sin \tau_2 = H \tan \tau_2, \dots$ , mithin

$$16. \quad \begin{cases} H (\tan \tau_1 - \tan \tau_2) = G_1, \\ H (\tan \tau_2 - \tan \tau_3) = G_2, \\ H (\tan \tau_3 - \tan \tau_4) = G_3, \\ \dots \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lässt sich entweder ein Winkel aus dem benachbarten bestimmen, oder aus einem beliebigen anderen, indem man die zwischenliegenden Winkel durch Addition der betreffenden Gleichungen eliminiert.

**§. 269. Formänderung.** Wir bezeichnen die Länge der Axe, von einem beliebigen Punkte aus gerechnet, mit s und die Längenänderung eines Bogenelementes ds mit  $\Delta ds$ . Alsdann ist

$$17. \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{P}{EF}$$

Ist  $s_1$  der Werth von  $s$  nach der Formänderung, so ist  $\Delta ds = ds_1 - ds = d(s_1 - s) = d \Delta s$ , also auch  $\frac{d \Delta s}{ds} = \frac{P}{EF}$ , mithin

$$18. \quad \Delta s = \frac{1}{E} \int \frac{P}{F} ds.$$

Bei Belastung durch Verticalkräfte ist nach 9:  $P = H \sec \tau$ ; ausserdem ist  $ds = dx \sec \tau$ , also  $P ds = H dx \sec^2 \tau$ , mithin ist auch

$$19. \quad \Delta s = \frac{H}{E} \int \frac{dx}{F} \sec^2 \tau.$$

Hat der Körper constante Festigkeit, so ist  $\frac{P}{F}$  constant, nämlich  $= K$ ; daher wird  $\Delta s = \frac{K}{E} \int ds$ , d. i.

$$20. \quad \Delta s = \frac{K s}{E} = \frac{P s}{E F}.$$

Hiernach ist es nun leicht, die Verrückung  $\Delta h$  des Scheitels zu bestimmen. Es ist nämlich  $s$  eine Funktion von  $a$  und  $h$  und zwar sei  $s = f(a, h)$ ; alsdann ist  $ds = \frac{\partial f(a, h)}{\partial h} dh$ , also auch annähernd  $\Delta s = \frac{\partial f(a, h)}{\partial h} \Delta h = \frac{\partial s}{\partial h} \Delta h$ , mithin

$$21. \quad \Delta h = \frac{\partial h}{\partial s} \Delta s.$$

## XXXI. Kapitel.

### Anwendung auf verschiedene Belastungsweisen und Körperformen.

#### A. Belastung durch Verticalkräfte.

**§. 270. Gleichmässige Belastung.** Wir nehmen jetzt an, dass die verticale Last  $q$  pro horizontale Längeneinheit constant sei. Nach 9 (§. 266) ist  $H \frac{d^2 y}{dx^2} = q$ . Die zweimalige Integration giebt

$$H \frac{dy}{dx} = q x + A,$$

$$H y = \frac{1}{2} q x^2 + A x + B.$$

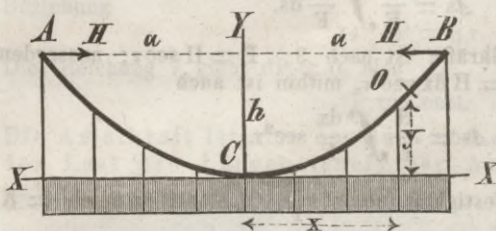
Als Anfang der  $x$  nehmen wir den Scheitel C an (Fig. 93). Alsdann ist für  $x = 0$  auch  $\frac{dy}{dx} = 0$ , mithin  $A = 0$  und für  $x = 0$  auch  $y = 0$ , also  $B = 0$ , mithin

$$a. \quad y = \frac{q x^2}{2H}$$

Die Axe bildet also eine Parabel.

Die halbe Bogensehne oder Spannweite bezeichnen wir mit  $a$ , die Pfeil- oder Stichhöhe mit  $h$ .

Fig. 93.



Alsdann muss für  $x = a$ ,  $y = h$  werden, also  $h = \frac{q a^2}{2H}$ , mithin die Horizontalkraft

$$22. \quad H = \frac{q a^2}{2h},$$

folglich nach a:

$$23. \quad y = \frac{h x^2}{a^2}.$$

Die Axialkraft ist nach 9:

$$P = H \sec \tau = H \sqrt{1 + \tan^2 \tau}, \quad \text{d. i.}$$

$$24. \quad P = H \sqrt{1 + 4 \left( \frac{h x}{a^2} \right)^2},$$

so dass  $H$  vom Scheitel aus nach den Kämpfern hin zunimmt. Je nachdem die Curve nach unten oder nach oben convex ist, ist  $H$  und  $P$  positiv oder negativ, d. h. ein Zug oder ein Druck.

Die Axialkraft im Scheitel, d. i.  $H$ , ist  $\frac{1}{2} \frac{q a^2}{h}$ , d. i. ebenso gross als die grösste Gesamtspannung der Gurte eines Trägers mit zwei horizontalen Gurten mit derselben Spannweite und derselben Höhe.

Anwendung bei Kettenbrücken, Gewölben, hölzernen und eisernen Bögen.

**§. 271. Formänderung.** Die Längenänderung  $\Delta s$  des Bogens und Verrückung  $\Delta h$  des Scheitels lässt sich nach §. 269 genau in endlicher Form ausführen. Wir begnügen uns indessen zum Theil mit einer leichter anwendbaren Näherungsbestimmung. Es ist  $\tan \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{2hx}{a^2}$ ,  $\sec^2 \tau = 1 + \frac{4h^2 x^2}{a^4}$ , daher nach 19, wenn der Querschnitt constant ist, die Längenänderung des halben Bogens:

$$\Delta s = \frac{H}{E F} \int_0^a \left( 1 + \frac{4h^2 x^2}{a^4} \right) dx,$$

d. i. wenn wir für  $H$  den Werth 22 einsetzen und die Integration ausführen,

$$25. \quad \Delta s = \frac{q a^3}{2 E F h} \left( 1 + \frac{4h^2}{3 a^2} \right).$$

Die halbe Bogenlänge ist  $s = \int dx \sec \tau = \int dx \sqrt{1 + \frac{4h^2 x^2}{a^4}}$   
 $= \int dx \left( 1 + \frac{2h^2 x^2}{a^4} - \frac{2h^4 x^4}{a^8} + \dots \right)$ , d. i.

$$a. \quad s = a \left( 1 + \frac{2h^2}{3a^2} - \frac{2h^4}{5a^4} + \dots \right).$$

Daher ist die Längenänderung bei constanter Festigkeit nach 20:

$$26. \quad \Delta s = \frac{K a}{E} \left( 1 + \frac{2h^2}{3a^2} - \dots \right).$$

Nach  $a$  wird  $\frac{\partial s}{\partial h} = \frac{4h}{3a} \left( 1 - \frac{6h^2}{5a^2} + \dots \right)$ , daher nach 21  $\Delta h$   
 $= \frac{3a}{4h} \Delta s \left( 1 + \frac{6h^2}{5a^2} + \dots \right)$ , d. i. bei constantem Querschnitte

$$27. \quad \frac{\Delta h}{h} = \frac{3 q a^4}{8 E F h^3} \left( 1 + \frac{38 h^2}{15 a^2} - \dots \right)$$

und bei constanter Festigkeit

$$28. \quad \frac{\Delta h}{h} = \frac{3 K a^2}{4 E h^2} \left( 1 + \frac{28 h^2}{15 a^2} - \dots \right).$$

**§. 272. Körper mit kreisförmiger Axe.** Ist  $r$  der Radius der Axe und nehmen wir wiederum den Scheitel  $C$  (Fig. 94) als Coordinatenanfang an, so wird  $x = r \sin \tau$ ,  $y = r(1 - \cos \tau)$ . Nach 10 (Seite 255) wird

$$q = H \frac{d \tan \tau}{dx} = H \sec^2 \tau \frac{d \tau}{dx},$$

d. i. da  $dx = r \cos \tau d\tau$ ,

also  $\frac{d \tau}{dx} = \frac{1}{r} \sec \tau$  ist,

$$q = \frac{H}{r} \sec^3 \tau.$$

Ist die Last im Scheitel  
 $= q_0$ , so ist  $q_0 = \frac{H}{r}$ ,  
 mithin auch

$$29. \quad q = q_0 \sec^3 \tau,$$

wonach sich auch leicht  
 $q$  construiren lässt  
 (Taf. XI Fig. 1). Ist  
 $a$ ,  $h$  die halbe Spannweite und Bogenhöhe,

so ist  $a^2 = h(2r - h)$ ,  $r = \frac{a^2}{2h} + \frac{h}{2}$ , daher

$$30. \quad H = q_0 r = q_0 \left( \frac{a^2}{2h} + \frac{h}{2} \right).$$

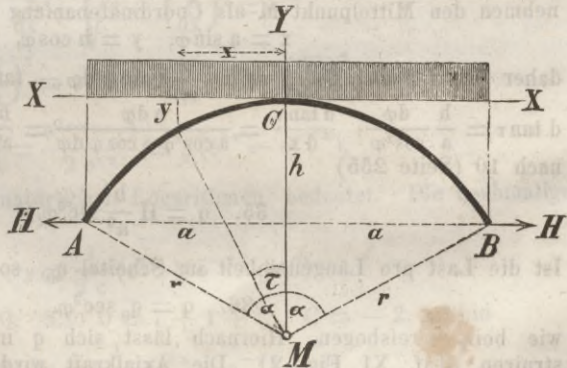
Die Axialkraft ist nach 9 und 30:

$$31. \quad P = q_0 r \sec \tau,$$

wonach sich auch  $P$  leicht construiren lässt (Taf. XI Fig. 1).

Anwendung bei Gewölben.

Fig. 94.



**§. 273. Formänderung.** Nach 19 (Seite 257) wird, da  $dx = r \cos \tau dr$  ist, bei constantem Querschnitte  $\Delta s = \frac{Hr}{EF} \int_0^\alpha \sec \tau d\tau = \frac{Hr}{EF} [\text{lognattan}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha) - \text{lognattan} \frac{1}{4}\pi]$ , d. i. da  $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$ ,  $\text{lognat} 1 = 0$ ,  $H = q_0 r$  ist,

$$32. \Delta s = \frac{q_0 r^2}{EF} \text{lognat} \tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha).$$

Da  $s = r\alpha$  ist, so wird bei constanter Festigkeit nach 20

$$33. \Delta s = \frac{K r \alpha}{E}.$$

Ferner ist  $r(1 - \cos \alpha) = h$ ,  $r \sin \alpha = a$ ,  $r\alpha = s$ . Die Differentiation nach  $r$ ,  $\alpha$ ,  $h$ ,  $s$  giebt  $(1 - \cos \alpha) dr + r \sin \alpha d\alpha = dh$ ,  $r \cos \alpha d\alpha + \sin \alpha dr = 0$ ,  $r d\alpha + \alpha dr = ds$ . Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen  $dr$  und  $d\alpha$ , so ergibt sich

$$\frac{ds}{dh} = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Daher wird nach 21:

$$34. \Delta h = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha} \Delta s.$$

**§. 274. Körper mit elliptischer Axe.** Die horizontale und verticale Halbaxe sei  $a$  und  $h$ . Zur Construction der Ellipse schlagen wir aus dem Mittelpunkte  $M$  (Taf. XI Fig. 2) zwei Kreise mit den Radien  $a$ ,  $h$ , ziehen einen Radius, welcher die Kreise in  $D$ ,  $E$  schneidet und legen durch  $D$  und  $E$  Parallelen zu den Axen. Der Durchschnittspunkt  $F$  derselben ist ein Punkt der Ellipse. Setzen wir  $\angle DMC = \varphi$ , und nehmen den Mittelpunkt  $M$  als Coordinatenanfang an, so ist

$$x = a \sin \varphi, \quad y = h \cos \varphi,$$

daher  $dx = a \cos \varphi d\varphi$ ,  $dy = -h \sin \varphi d\varphi$ ,  $\tan \tau = -\frac{dy}{dx} = \frac{h}{a} \tan \varphi$ ,

$d \tan \tau = \frac{h}{a} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$ ,  $\frac{d \tan \tau}{d x} = \frac{h d\varphi}{a \cos^2 \varphi a \cos \varphi d\varphi} = \frac{h}{a^2} \sec^3 \varphi$ . Demnach wird nach 10 (Seite 255)

$$35. q = H \frac{h}{a^2} \sec^3 \varphi.$$

Ist die Last pro Längeneinheit im Scheitel  $q_0$ , so ist  $q_0 = H \frac{h}{a^2}$ , mithin

$$36. q = q_0 \sec^3 \varphi,$$

wie beim Kreisbogen. Hiernach lässt sich  $q$  in gleicher Weise construiren (Taf. XI Fig. 2). Die Axialkraft wird nach 9  $P = H \sec \tau$

$= H \sqrt{1 + \tan^2 \tau} = H \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2} \tan^2 \varphi}$  oder

$$37. P = \frac{H \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + h^2 \sin^2 \varphi}}{a \cos \varphi},$$

wonach sich auch  $P$  leicht construiren lässt (Taf. XI Fig. 2).

**§. 275. Die gemeine Kettenlinie.** Wir setzen voraus, der Körper habe einen constanten Querschnitt und sei nur durch sein eigenes

Gewicht belastet. In diesem Falle befindet sich ein gewöhnliches Seil oder eine Kette, wesshalb man diese Stützlinie auch eine gemeine Kettenlinie nennt.

Als Coordinatenanfang wählen wir den Scheitel, d. i. den tiefsten oder höchsten Punkt. Ist  $g$  das Gewicht für die Längeneinheit der Axe des Körpers, so ist  $q dx = g ds$ ,  $q = g \frac{ds}{dx} = g \sec \tau$ . Daher wird nach 10 (Seite 255)

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = g \sec \tau = g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Setzt man  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx}$  und reducirt auf  $dx$ , so wird

$$dx = \frac{H}{p} \frac{d \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Die Integration giebt, wenn wir  $\frac{H}{g}$ , d. i. den sogenannten Parameter der Kettenlinie,  $= \frac{1}{c}$  setzen,

$$x = \frac{1}{c} \operatorname{lognat} \left[ \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right].$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für  $x = 0$  auch  $\frac{dy}{dx} = 0$  werden muss. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} &= e^{cx}, \\ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= e^{2cx} - 2 \frac{dy}{dx} e^{cx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \text{ also} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{2cx} - 1}{2 e^{cx}} = \frac{1}{2} (e^{cx} - e^{-cx}), \end{aligned}$$

wenn  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Die nochmalige Integration giebt

$$y = \frac{1}{2c} (e^{cx} + e^{-cx} + C)$$

Für  $x = 0$  wird  $y = 0$ , also  $0 = 1 + 1 + C$ ,  $C = -2$ , mithin

$$38. \quad y = \frac{1}{2c} (e^{cx} + e^{-cx} - 2).$$

Diese Gleichung lässt sich auch leicht auf  $x$  reduciren. Es ist  $2(cy + 1) = e^{cx} + e^{-cx}$ ; die Multiplication mit  $e^{cx}$  giebt  $(e^{cx})^2 - 2(cy + 1)e^{cx} + 1 = 0$  also  $e^{cx} = cy + 1 \pm \sqrt{c^2 y^2 + 2cy}$ . Da  $cy + 1 - \sqrt{c^2 y^2 + 2cy} < 1$  ist,  $e^{cx}$  also negativ,  $x$  also imaginär werden würde, so kann nur das Zeichen  $+$  genommen werden. Demnach ist

$$39. \quad x = \frac{1}{c} \operatorname{lognat} (1 + cy + \sqrt{2cy + c^2 y^2}).$$

Wichtig ist noch die Kenntniss der Bogenlänge. Nach 13 ist, da das Gewicht  $V$  des Theiles  $CO = g s$  ist,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g s}{H} = c s, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{c s},$$

Da  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  ist, so wird

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{1}{c^2 s^2}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{c s}{\sqrt{1 + c^2 s^2}}$$

$$y = \int \frac{c s ds}{\sqrt{1 + c^2 s^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + c^2 s^2} + C.$$

Für  $y = 0$  wird  $s = 0$ , mithin  $0 = \frac{1}{c} + C$ , folglich

$$40. \quad y = \frac{1}{c} (\sqrt{1 + c^2 s^2} - 1).$$

Die Reduction auf  $s$  giebt

$$41. \quad s = \frac{1}{c} \sqrt{2 c y + c^2 y^2}.$$

Da nach dem Obigen  $dy = c s dx$  ist, so liesse sich auch hieraus leicht die Gleichung der Kettenlinie ableiten. Setzen wir in 40 nach dem Obigen  $c s = \tan \tau$ , so wird  $c y = \sqrt{1 + \tan^2 \tau} - 1$ , d. i.

$$42. \quad c y = \sec \tau - 1.$$

Die Axialkraft ist nach 9 (Seite 255)  $P = H \sec \tau = H (1 + c y)$ , d. i.

$$43. \quad P = H + g y,$$

d. i. gleich der Spannung im Scheitel plus dem Gewichte eines Kettenstückes von der Länge  $y$ .

Für die Anwendung ist noch folgende Umformung von Nutzen. Nach 39 wird mit Rücksicht auf 41

$$x = \frac{1}{c} \operatorname{lognat} [1 + c (y + s)].$$

Nach 41 wird  $c s^2 = 2 y + c y^2$ , daher  $c = \frac{2 y}{s^2 - y^2} = \frac{2 y}{(s + y)(s - y)}$ , mit-

hin  $x = \frac{1}{c} \operatorname{lognat} \left(1 + \frac{2 y}{s - y}\right)$  oder

$$44. \quad x = \frac{1}{c} \operatorname{lognat} \frac{s + y}{s - y}.$$

Nach dem Obigen ist  $c s = \tan \tau$ ,  $c y = \sec \tau - 1$ , mithin

$$c x = \operatorname{lognat} \frac{\tan \tau + \sec \tau - 1}{\tan \tau - \sec \tau + 1}$$

$$= \operatorname{lognat} \frac{\sin \tau + 1 - \cos \tau}{\sin \tau - 1 + \cos \tau}.$$

Durch Multiplication des Zählers und Nenners mit  $\sin \tau + 1 - \cos \tau$  er-  
giebt sich leicht folgender Ausdruck

$$45. \quad c x = \operatorname{lognat} \frac{1 + \sin \tau}{\cos \tau}.$$

Bei einer numerischen Berechnung würde man am besten für verschiedene  $y$  nach 41 die zugehörigen  $s$  und sodann nach 44 die zugehörigen  $x$  oder für verschiedene  $\tau$  nach 45, 42 und nach der Formel  $c s = \tan \tau$  die zugehörigen  $x, y, s$  berechnen. Für den letzten Zweck sind Tabellen vorhanden; einen Auszug derselben enthält die folgende Tabelle:

$\tau$ Grad	$c x$	$c y$	$c s$	$\frac{s}{x}$	$\tau$ Grad	$c x$	$c y$	$c s$	$\frac{s}{x}$
0	0	0	0	1,000	45	0,88	0,41	1,00	1,13
5	0,087	0,004	0,088	1,001	50	1,01	0,56	1,19	1,18
10	0,175	0,015	0,176	1,005	55	1,15	0,74	1,43	1,24
15	0,265	0,035	0,268	1,012	60	1,32	1,00	1,73	1,31
20	0,356	0,064	0,364	1,021	65	1,51	1,36	2,14	1,42
25	0,451	0,103	0,466	1,034	70	1,74	1,92	2,75	1,58
30	0,549	0,155	0,577	1,051	75	2,03	2,86	3,73	1,84
55	0,653	0,221	0,700	1,073	80	2,44	4,76	5,67	2,33
40	0,763	0,305	0,839	1,100	85	3,13	10,47	11,43	3,65

Beispiel. Die Spannweite  $L$  sei = 100, die Kettenlänge  $S = 104$ . Es wird  $\frac{s}{L} = 1,04$ . Nach der Tabelle ist für  $\tau = 25^\circ$   $\frac{s}{x} = 1,034$ , für  $\tau = 30^\circ$   $\frac{s}{x} = 1,051$ . Durch Interpolation findet man, dass für  $\tau = 26,76^\circ = 26^\circ 46'$   $\frac{s}{x} = 1,04$  wird. Der Tangentenwinkel am Ende ist daher  $26^\circ 46'$ . Für  $\tau = 26,76^\circ$  ergibt sich durch Interpolation  $c x = 0,485$ , d. i. da  $x = 50$  ist,  $50 \cdot c = 0,485$ ,  $c = \frac{0,485}{50} = 0,0097$ ,  $\frac{1}{c} = 103,1$ . Es kann nun nach der Tabelle für beliebige  $\tau$  das zugehörige  $x, y, s$  berechnet werden; z. B. für  $\tau = 15^\circ$   $x = \frac{0,265}{c} = 0,265 \cdot 103,1 = 27,3$ ;  $y = \frac{0,035}{c} = 0,035 \cdot 103,1 = 3,61$ ;  $s = \frac{0,268}{c} = 0,268 \cdot 103,1 = 27,6$ . Die Pfeilhöhe, d. i.  $y$  für  $\tau = 26,76^\circ$  wird  $= \frac{0,126}{c} = 0,121 \cdot 103,1 = 12,48$ .

**§. 276. Die Kettenbrückenlinie.** Wir machen jetzt die Voraussetzung, dass die Kette ausser ihrem eigenen Gewicht noch eine auf die Horizontalprojection gleichmässig vertheilte Last zu tragen habe. Das Eigengewicht pro Längeneinheit der Kette sei  $g$ , die angehangene Last pro horizontale Längeneinheit =  $p$ . Alsdann ist  $q dx = g ds + p dx$ , mithin  $q = g \frac{ds}{dx} + p = g \sec \tau + p$ , also nach 9, §. 266

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = p + g \sec \tau = p + g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Wir wollen hier nur denjenigen Fall näher untersuchen, in welchem der Querschnitt der Kette an jeder Stelle der hier wirkenden Axialkraft proportional ist. Ist  $f$  der Querschnitt der Kette,  $K$  der Sicherheitscoefficient,  $\gamma$  das Gewicht der Volumeneinheit, so ist  $f = \frac{P}{K} = \frac{H \sec \tau}{K}$ ,  $g = f \gamma = \frac{H \gamma}{K} \sec \tau$ , mithin

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = p + \frac{H\gamma}{K} \sec^2\tau$$

oder, wenn wir  $\frac{p}{H} = c$ ,  $\frac{\gamma}{K} = m$ ,  $\sec^2\tau = 1 + \tan^2\tau = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ,  
 $\frac{dy}{dx} = y'$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}$  setzen,

$$\frac{dy'}{dx} = m + c + m y'^2$$

$$dx = -\frac{dy'}{m + c + m y'^2}$$

Die Integration nach der bekannten Regel  $\int \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{Arctan} \frac{\beta}{\alpha} x$   
gibt mit Rücksicht auf den Umstand, dass für  $y' = 0$  auch  $x = 0$  werden muss

$$x = \frac{1}{\sqrt{m(m+c)}} \operatorname{Arctan} y' \sqrt{\frac{m}{m+c}},$$

oder, wenn man auf  $y'$  reducirt,

$$46. \quad y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{m+c}{m}} \tan \left[ x \sqrt{m(m+c)} \right].$$

Die nochmalige Integration giebt nach der bekannten Formel  $\int \tan mx \, dx = -\frac{1}{m} \operatorname{lognat} \cos mx = \frac{1}{m} \operatorname{lognat} \sec mx$

$$47. \quad y = \frac{1}{m} \operatorname{lognat} \sec \left[ x \sqrt{m(m+c)} \right].$$

Ist  $h$  die Pfeilhöhe,  $a$  die halbe Spannweite, so ist

$$48. \quad mh = \operatorname{lognat} \sec \left[ a \sqrt{m(m+c)} \right]$$

durch welche Gleichung  $c$  und somit  $H$  bestimmt ist. Zur numerischen Berechnung von  $c$  setzen wir, wenn  $\varphi$  einen Hilfwinkel bezeichnet,

$$49. \quad \operatorname{lognat} \sec \varphi = m h.$$

Alsdann wird

$\operatorname{lognat} \sec \varphi = \operatorname{lognat} \sec \left[ a \sqrt{m(m+c)} \right]$ , d. i.  $\varphi = a \sqrt{m(m+c)}$ ,  
mithin

$$50. \quad c = \frac{\varphi^2 - a^2 m^2}{a^2 m}, \quad H = \frac{p}{c} = \frac{p a^2 m}{\varphi^2 - a^2 m^2}.$$

Die Gleichung für  $y$  und  $y'$  geht hierdurch gleichzeitig über in

$$51. \quad y = \frac{1}{m} \operatorname{lognat} \sec \frac{\varphi x}{a},$$

$$52. \quad \tan \tau = y' = \frac{\varphi}{a m} \tan \frac{\varphi x}{a}.$$

Die Axialkraft und der nöthige Querschnitt sind endlich, nachdem man  $\tau$  berechnet hat,  $P = H \sec \tau$ ,  $f = \frac{P}{K}$ .

Zur Erleichterung der Rechnung existiren Tabellen. Einen Auszug bildet die folgende:

z	lognat secz	tan z	z	lognat secz	tan z
0,01	0,00015	0,00000	0,11	0,00606	0,11044
0,02	0,00020	0,00000	0,12	0,00722	0,12058
0,03	0,00045	0,03001	0,13	0,00847	0,13074
0,04	0,00080	0,04002	0,14	0,00983	0,14092
0,05	0,00125	0,05004	0,15	0,01129	0,15114
0,06	0,00180	0,06007	0,16	0,01286	0,16137
0,07	0,00245	0,07011	0,17	0,01452	0,17166
0,08	0,00320	0,08017	0,18	0,01629	0,18196
0,09	0,00406	0,09025	0,19	0,01816	0,19232
0,10	0,00501	0,10034	0,20	0,02014	0,20271

Beispiel. Es sei  $p = 5$  Tonnen pro Meter,  $a = 60$  Met.,  $h = \frac{1}{6} a = 10$  Met.,  $K = 13000$  Tonnen pro  $\square$  Met.,  $\gamma = 7,7$  Tonnen pro Cubikmet., also  $m = \frac{7,7}{13000} = \frac{1}{1688}$ ,  $\lognat \sec \varphi = \frac{10}{1688} = 0,005924$ . Der Modulus der gemeinen Logarithmen ist  $0,43429$ , mithin ist  $\log \sec \varphi = 0,43429 \cdot 0,005924 = 0,002573$ ,  $\log \cos \varphi = -0,002573 = 0,997427 - 1$ ,  $\varphi = 6^\circ 14' = 0,1088$ ,  $H = \frac{5 \cdot 60^2 \cdot 1688}{0,1088^2 \cdot 1688^2 - 60^2} = 1008$ ,  $\frac{\varphi}{a} = \frac{0,1088}{60} = 0,001813$ , mithin

$$y = 1688 \cdot \lognat \sec(0,001813 \cdot x),$$

$$\tan \tau = 3,060 \cdot \tan(0,001813 \cdot x).$$

Z. B. wird für  $x = 30$ ,  $y = 1688 \cdot \lognat \sec 0,054 = 1688 \cdot 0,00147 = 2,49$ ,  $\tan \tau = 3,060 \cdot 0,05405 = 0,1654$ ,  $\tau = 9^\circ 24'$ ,  $P = 1008 \cdot \sec 9^\circ 24' = 1021$ ,  $f = \frac{1021}{13000} = 0,0785 \square \text{Met.} = 785 \square \text{Cent.}$

§. 277. Kettenlinie für eine beliebige Belastung. Nach 13 Seite 255

$$53. \quad y = \frac{1}{H} \int_0^x V \, dx,$$

worin  $V$  die Last vom Scheitel bis zu dem beliebigen Punkte  $xy$  bezeichnet. Hierbei ist

$$54. \quad V = \int_0^x q \, dx.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt, für einen Kämpfer angewendet,

$$55. \quad H = \frac{1}{h} \int_0^a V \, dx.$$

Ist kein bestimmtes einfaches Gesetz für die Abhängigkeit von  $q$  und  $x$  bekannt, so können die Integrale leicht durch eine Näherungsregel, am

besten durch die Simpson'sche Regel berechnet oder graphisch construiert werden.

Beispiel. Es sei  $a = 6^m$ ,  $h = 3^m$ . Die halbe Spannweite sei in 10 gleiche Theile getheilt;  $q$  sei für jeden Theilpunkt durch die Rubrik 2 gegeben

$x$ 1	$q$ 2	$V$ 3	$y$ 4	$y$ 5
0	2,0	0	0	0
0,1	2,0	1,20	0,36	0,02
0,2	2,1	2,42	1,44	0,10
0,3	2,3	3,74	3,28	0,22
0,4	2,5	5,18	5,96	0,40
0,5	2,7	6,74	9,53	0,65
0,6	3,0	8,44	14,07	0,88
0,7	3,4	9,91	19,52	1,33
0,8	3,8	12,52	26,18	1,78
0,9	4,3	14,92	34,39	2,34
1,0	5,0	17,72	44,18	3,00
$\cdot a$	Klgr. pro M.	Klgr.	$\frac{1}{H}$	Met.

Für  $x = 0,4 a$  z. B. ergibt sich nach der Simpson'schen Regel  $V = \frac{0,6}{3} [2,0 + 2,5 + 4(2,0 + 2,3) + 2 \cdot 2,1] = 5,18$ . Für  $x = 0,6 a$  ist daher  $V = 5,18 + \frac{0,6}{3} (2,5 + 4 \cdot 2,7 + 3,0) = 5,18 + 3,26 = 8,44$  und für  $x = 0,5 a$   $V = 5,18 + \frac{0,6}{12} (5 \cdot 2,5 + 8 \cdot 2,7 - 3,0) = 5,18 + 1,56 = 6,74$  u. s. f. Ferner wird für  $x = 0,4 a$   $H y = \frac{0,6}{3} [0 + 5,18 + 4(1,20 + 3,74) + 2 \cdot 2,42] = 5,96$  u. s. f. Hiernach wird für den Kämpfer  $3 = 44,18 \cdot \frac{1}{H}$ , also  $H = \frac{44,18}{3} = 14,73$ ,  $\frac{1}{H} = 0,0679$ . Für  $x = 0,4 a$  z. B. ist daher  $y = 6,96 \cdot 0,0679 = 0,405$ .

Anwendung bei Gewölben und Kettenbrücken.

## B. Normale Belastung.

**§. 278. Kreisring.** Wenn bei normaler Belastung die Axe eine kreisförmige Gestalt hat, so muss die Belastung  $q$  pro Längeneinheit der Axe constant sein, da nach §. 267 das Produkt  $q r$  constant ist. Die Axialkraft ist nach demselben §  $P = q r$ , mithin die nöthige Querschnittsfläche  $F$

$$56. F = \frac{q r}{K}.$$

Die vorzüglichste Anwendung findet diese Formel zur Berechnung der Dicke von Röhren, die einem inneren Drucke ausgesetzt sind. Ist der Druck pro Flächeneinheit  $= g$  und betrachten wir ein Röhrenstück, welches von zwei zur Axe der Röhre senkrechten Ebenen, deren Entfernung  $= 1$  ist, begrenzt wird, so ist  $q = g$ , und, wenn  $\delta$  die Wanddicke der Röhre ist,  $F = 1 \cdot \delta = \delta$  zu setzen. Daher wird

$$57. \delta = \frac{g r}{K},$$

so dass bei constantem  $g$  die Dicke  $\delta$  dem Radius  $r$  proportional sein muss.

Anwendung bei Wasserröhren, Schwungringen etc.

**§. 279. Röhren mit geschlossenen Enden.** Ist die Röhre wie gewöhnlich an den Enden geschlossen, so findet auch eine Spannung in Richtung der Axe der Röhre statt. Die Gesamtkraft in Richtung der Axe ist  $g r^2 \pi$ ; der Flächeninhalt des Querschnittes der Röhre ist  $2 r \pi \delta$ , also die Normalspannung  $N_2$  in Richtung der Röhrenaxe  $\frac{g r^2 \pi}{2 r \pi \delta} = \frac{g r}{2 \delta}$ . Die Normalspannung  $N_1$  in Richtung der Tangente des Querschnittes der Röhre ist nach dem Vorigen  $\frac{P}{F} = \frac{g r}{\delta}$ . Also

$$58. N_1 = \frac{g r}{\delta}, \quad N_2 = \frac{g r}{2 \delta} = \frac{1}{2} N_1.$$

Die Normalspannung  $N_3$  in Richtung des Radius ist im Maximum  $= g$ ; da aber  $g$  gegen  $\frac{g r}{\delta}$  nur klein ist, so können wir  $N_3$  vernachlässigen. Schubspannungen wirken in den von  $N_1, N_2, N_3$  afficirten Ebenen nicht. Daher sind  $N_1, N_2, N_3$  zugleich Hauptspannungen. Die grösste ideale Hauptspannung wird nach 77 (Seite 32)  $S = N_1 - \frac{1}{m} N_2$ , d. i. für  $m = 4$ :

$$S = \frac{7}{8} \frac{g r}{\delta}.$$

Die Festigkeitsbedingung ist  $S = K$ , also wird

$$59. \delta = \frac{7 g r}{8 K}.$$

Anwendung bei Wasser-, Gas- und Dampföhren, sowie Dampfkesseln. — Eine genaue Theorie folgt im II. Theile.

§. 281. Die äusseren Kräfte.



## IX. Abschnitt.

# Biegungselasticität einfach gekrümmter Stäbe.

## XXXII. Kapitel.

### Allgemeine Theorie.

**§. 280. Annahmen.** Wir setzen wiederum einen Stab mit einfach gekrümmter Axe voraus, in dessen Krümmungsebene auch die äusseren Kräfte (besser die Resultanten der auf die einzelnen Scheiben wirkenden Kräfte) thätig sind. Diese Ebene nehmen wir als Ebene der  $xy$  an, wobei wir unter  $x, y$  die Coordinaten eines Punktes  $O$  der Axe des Stabes verstehen.

Wir setzen ferner voraus, dass eine Hauptaxe jedes Querschnittes in der Kraftebene liege.

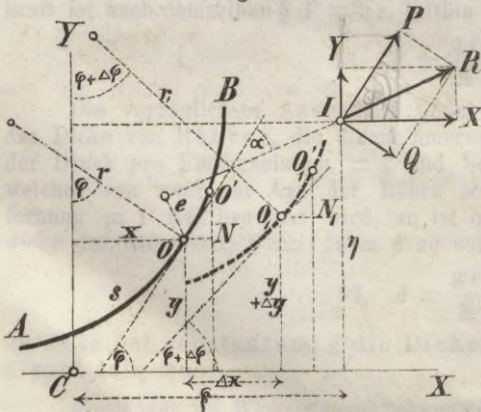
Wir bezeichnen mit

- $r$  den Krümmungsradius der Axe des Stabes im beliebigen Punkte  $x, y$ ,
- $\varphi$  den Winkel, welchen der Radius mit der Axe der  $y$  oder die Tangente mit der Axe der  $x$  bildet,
- $s$  die Länge der Axe, von irgend einem Punkte an gerechnet.

**§. 281. Die äusseren Kräfte.** Es bezeichne

- $R$  die Resultante der äusseren Kräfte, welche auf den durch  $O$  getrennten Stabtheil  $OB$  wirken (Fig. 95).
- $P, Q$  die in Richtung der Tangente und des Radius von  $O$  wirkenden Componenten von  $R$  oder die sogenannte Axialkraft und Transversalkraft;
- $M$  das statische Moment von  $R$  in Beziehung auf die durch  $O$  gehende Normale zur Kraftebene oder das sog. Biegemoment;
- $X, Y$  die Componenten von  $R$  nach Richtung der  $x, y$ ;

Fig. 95.



$\xi, \eta$  die Coordinaten des Angriffspunktes von R;  
 p, q die in O nach Richtung der Tangente und des Radius wirkende gleichförmig vertheilte Kraft pro Längeneinheit der Axe.  
 Alsdann ist offenbar

$$1. \begin{cases} P = X \cos \varphi + Y \sin \varphi, \\ Q = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi, \\ M = X (\eta - y) - Y (\xi - x). \end{cases}$$

Verrückt man den Punkt O um ds, so sind hiernach die Aenderungen von P, Q und M

$$\begin{cases} dP = -X \sin \varphi d\varphi + Y \cos \varphi d\varphi - p ds, \\ dQ = -X \cos \varphi d\varphi - Y \sin \varphi d\varphi - q ds, \\ dM = -X dy + Y dx - \frac{1}{2} q ds^2. \end{cases}$$

Setzt man hierin  $dx = ds \cos \varphi$ ,  $dy = ds \sin \varphi$ ,  $d\varphi = \frac{ds}{r}$  und  $ds^2$  (gegen dx, dy) = 0, so ergibt sich mit Beachtung der Ausdrücke 1 für P, Q, M:

$$2. \frac{dP}{ds} = \frac{Q}{r} - p, \quad \frac{dQ}{ds} = -\frac{P}{r} - q,$$

$$3. \frac{dM}{ds} = Q.$$

**§. 282 Die Spannungen.** Das in §. 62 und 63 über die Spannungen in Stäben mit gerader Axe Gesagte ist hier direct anzuwenden. Alle dort gemachten Bezeichnungen behalten wir bei. Es behalten dann auch die Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen den inneren und äusseren Kräften, d. i. die Gleichungen 5, 6, 7 ihre volle Gültigkeit.

**§ 283 Bestimmung der Faserspannung N.** Wir gehen auch hier genau in der Weise vor, wie in §. 64 für Stäbe mit gerader Axe. Bezeichnet  $ds_v$  die Länge einer Faser zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten vor der Formänderung,  $\Delta ds_v$  die Längenänderung derselben, so ist die Länge derselben nach der Formänderung  $LL'$  (Fig. 96) =  $ds_v + \Delta ds_v$ . Machen wir auch hier die Annahme, dass die Abweichungen LM, L'M' der Querschnitte von den Normalebene IK, I'K' der Axe des Stabes gleich gross seien, so ist  $LL' = MM'$ , so dass wir in Beziehung auf die Längenänderung der Fasern statt der deformirten Querschnitte die Normalebene zur deformirten Axe des Stabes setzen können.

Vor der Formänderung ist, da der Winkel zwischen beiden Querschnitten  $d\varphi$  ist,

$$ds_v = ds + v d\varphi.$$

Bei der Formänderung gehe ds in  $ds + \Delta ds$ ,  $d\varphi$  in  $d\varphi + \Delta d\varphi$  über; die geringe Aenderung von v vernachlässigen wir. Wir setzen voraus, dass die Axe des Körpers in ihrer anfänglichen Krümmungsebene bleibe; unter

Fig. 96.



welcher Bedingung dies eintritt, werden wir nachher untersuchen. Als-  
dann ist

$$ds_v + \Delta ds_v = ds + \Delta ds + v (d\varphi + \Delta d\varphi).$$

Die Subtraction dieser beiden letzten Gleichungen giebt

$$\Delta ds_v = \Delta ds + v \Delta d\varphi.$$

Daher ist die relative Längenänderung der Faser

$$\frac{\Delta ds_v}{ds_v} = \frac{\Delta ds + v \Delta d\varphi}{ds + v d\varphi}.$$

Da  $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}$  ist, so können wir auch setzen

$$4. \quad \frac{\Delta ds_v}{ds_v} = \left( \frac{\Delta ds}{ds} + v \frac{\Delta d\varphi}{ds} \right) \frac{r}{r + v},$$

also ist die Faserspannung N:

$$5. \quad N = E \left( \frac{\Delta ds}{ds} + v \frac{\Delta d\varphi}{ds} \right) \frac{r}{r + v}.$$

Die ersten der Gleichgewichtsbedingungen 5 und 6 (Seite 50) geben

$$\frac{P}{E} = r \frac{\Delta ds}{ds} \int \frac{df}{r + v} + r \frac{\Delta d\varphi}{ds} \int \frac{v df}{r + v},$$

$$\frac{M}{E} = r \left( \frac{\Delta ds}{ds} \int \frac{v df}{r + v} + r \frac{\Delta d\varphi}{ds} \int \frac{v^2 df}{r + v} \right).$$

Bezeichnen wir die Querschnittsfläche  $\int df$  mit F und setzen das Integra

$$6. \quad \int \frac{r v^2 df}{r + v} = \mathfrak{B},$$

so wird

$$r \int \frac{df}{r + v} = \int df - \int \frac{v df}{r + v}$$

$$= \int df - \frac{1}{r} \int v df + \frac{1}{r} \int \frac{v^2 df}{r + v} = F + \frac{\mathfrak{B}}{r^2},$$

$$r \int \frac{v df}{r + v} = \int v df - \int \frac{v^2 df}{r + v} = -\frac{\mathfrak{B}}{r},$$

$$r \int \frac{v^2 df}{r + v} = \mathfrak{B}.$$

Daher geben die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{E} = \frac{\Delta ds}{ds} F - \left( \frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{\Delta ds}{r ds} \right) \frac{\mathfrak{B}}{r}, \\ \frac{M}{E r} = \left( \frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{\Delta ds}{r ds} \right) \frac{\mathfrak{B}}{r}. \end{array} \right.$$

Hieraus findet sich leicht

$$7. \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{P}{E F} + \frac{M}{E F r},$$

$$8. \quad \frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{E \mathfrak{B}} + \frac{M}{E F r^2} + \frac{P}{E F r}.$$

Dies in 5 eingesetzt, giebt als Faserspannung

$$9. \quad N = \frac{P}{F} + \frac{M}{F r} + \frac{M r v}{\mathfrak{B} (r + v)}$$

**§. 284. Interpretation.** Wenn man  $r = \infty$  setzt, so geht dieser Ausdruck in den für gerade Stäbe giltigen Ausdruck 22 (Seite 55) über. Genau genommen ist jetzt  $N$  nicht mehr linear in Beziehung auf  $v$ . Stellt man  $N$  graphisch dar (Taf. IX Fig. 13), so bildet die Curve eine Hyperbel, deren eine Asymptote durch den Krümmungsmittelpunkt geht.  $N$  wird 0 für

$$10. \quad v = - \frac{\frac{P}{F} + \frac{M}{F r}}{\frac{P}{F} + \frac{M}{F r} + \frac{M r}{\mathfrak{B}}}$$

und, wenn  $P = 0$  ist, für

$$11. \quad v = - \frac{\mathfrak{B} r}{\mathfrak{B} + F r^2}$$

Hier geht also die neutrale Axe nicht genau durch den Schwerpunkt des Querschnittes.

Verwandeln wir  $\frac{r}{r+v}$  in eine unendliche Reihe, so ergibt sich  $\mathfrak{B} = \int \left( v^2 - \frac{v^3}{r} + \frac{v^4}{r^2} - \dots + \dots \right) df$  oder, wenn wie früher  $W$  das Trägheitsmoment  $\int v^2 df$  des Querschnittes in Beziehung auf die Axe der  $w$  bezeichnet,

$$12. \quad \mathfrak{B} = W - \frac{1}{r} \int v^3 \left( 1 - \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} - \dots + \dots \right) df.$$

Ist der Querschnitt in Beziehung auf die Axe der  $w$  symmetrisch, so verschwinden die Glieder mit  $v^3, v^5, \dots$ , also wird

$$13. \quad \mathfrak{B} = W + \frac{1}{r^2} \int v^4 \left( 1 - \frac{v^2}{r^2} + \frac{v^4}{r^4} - \dots + \dots \right) df.$$

Man kann aber ausser  $W$  alle Glieder vernachlässigen, wenn der Radius gegen die Höhe des Querschnittes sehr gross ist. Die wichtigste Anwendung findet diese Theorie bei den Bogenträgern. Hier aber ist  $r$  gegen  $v$  so gross, dass wir stets für  $\mathfrak{B}$  das Trägheitsmoment  $W$  setzen können.

Die Ausdrücke 7, 8 und 9 nehmen in dem Falle, in welchem  $r$  gegen  $v$  sehr gross ist, die für gerade Stäbe streng richtige Form

$$14. \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{P}{E F}, \quad 15. \quad \frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{E W}$$

$$16. \quad N = \frac{P}{F} + \frac{M v}{W}$$

an. Indess kommen wohl auch Fälle vor, in welchen die genaueren Formeln anzuwenden sind.

**§. 285. Bedingungen für das Verbleiben in der Kraftebene.** Der Ausdruck 5 für  $N$  setzt speciell voraus, dass die Axe des Körpers bei der Formänderung in ihrer anfänglichen Krümmungsebene

oder in der Kraftebene verbleibe. Dies wird eintreten, wenn auch noch die zweite der Gleichgewichtsbedingungen 6 (Seite 50) realisiert wird. Diese giebt

$$\frac{\Delta ds}{ds} \int w \frac{df}{r+v} + \frac{\Delta d\varphi}{ds} \int \frac{v w df}{r+v} = 0.$$

Nun aber ist  $\int \frac{w df}{r+v} = \frac{1}{r} \int w df - \frac{1}{r} \int \frac{v w df}{r+v} = 0 - \frac{1}{r} \int \frac{v w df}{r+v}$ .

Hierdurch geht die vorige Bedingung über in

$$17. \int \frac{v w df}{r+v} = 0.$$

Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn der Querschnitt in Beziehung auf die Axe der  $v$  symmetrisch ist. Ist  $r$  gegen  $v$  sehr gross, so geht diese Bedingung über in  $\int v w df = 0$ , d. h. nach §. 65: Die Axe der  $v$  muss eine Hauptaxe sein.

Ist die Axe der  $v$ , wie wir vorausgesetzt haben, eine Hauptaxe, so wird die Bedingung 17 allgemein wenigstens sehr nahe erfüllt, auch wenn  $r$  gegen  $v$  nicht sehr gross ist.

**§. 286. Schubspannungen.** Die Schubspannungen  $T_3$  und  $T_2$  lassen sich genau in derselben Weise ermitteln, wie wir dies für gerade Stäbe gethan haben. Die dort ermittelten Ausdrücke 27, 28 (Seite 58, 59) lassen sich hier als Näherungsformeln direct anwenden, wenn der Krümmungsradius gegen die Höhe des Querschnittes sehr gross ist.

Bei den Bogenträgern wird die Transversalkraft  $Q$  gegen die Axialkraft  $P$  stets so klein, dass wir die Schubspannungen ganz vernachlässigen können. In andern praktischen Fällen ist dagegen die Querschnittsform eine solche, dass die Schubspannungen gegen die Faserspannung sehr klein ausfallen. Aus diesen Gründen wollen wir auch auf eine genauere Bestimmung derselben nicht eingehen, obwohl dieselbe mit keinen Schwierigkeiten verbunden ist.

Eine genaue Theorie, entsprechend dem De Saint-Venant'schen Probleme, folgt im zweiten Theile als Anwendung der Theorie der Rotationskörper.

**§. 287. Festigkeitsbedingungen.** In den Fällen, in welchen die Schubspannungen nicht zu vernachlässigen sind, sind die in §. 83 aufgestellten Festigkeitsbedingungen maassgebend. In den meisten Fällen aber können nach dem vorigen §. die Schubspannungen vernachlässigt werden. In diesem Falle ist die ideale Hauptspannung  $S$  gleich der Faserspannung  $N$ , also die Festigkeitsbedingung  $\max(+N) = K$ ,  $\max(-N) = K$ .  $N$  erreicht das Maximum in den am weitesten von der Axe der  $w$  entfernten Fasern. Sind dieselben für die ausgedehnte und zusammenge-drückte Seite bezüglich  $a$  und  $a$ , so sind die Festigkeitsbedingungen nach 9:

$$18. \begin{cases} K = \frac{P}{F} + \frac{M}{Fr} + \frac{Mra}{\mathfrak{B}(r+a)}, \\ \mathfrak{K} = \frac{P}{F} + \frac{M}{Fr} + \frac{Mra}{\mathfrak{B}(r+a)}, \end{cases}$$

wobei natürlich die rechten Seiten absolut zu nehmen sind. Kommt im ganzen Querschnitte entweder nur Zug, oder nur Druck vor, so ist in beiden Gleichungen bezüglich  $K$  oder  $\mathfrak{R}$  einzuführen. Allgemeiner werden die Festigkeitsbedingungen, wenn wir die Sicherheitscoefficienten  $K_1$ ,  $K_2$  einführen und für diese entweder  $K$  oder  $\mathfrak{R}$  wählen, je nachdem auf der betreffenden Seite Zug oder Druck stattfindet. Die entsprechenden Abstände der gespanntesten Fasern von der Schweraxe bezeichnen wir mit  $a_1$ ,  $a_2$ . Alsdann werden die Festigkeitsbedingungen, wenn  $r$  gegen  $a_1$ ,  $a_2$  und  $Pr$  gegen  $M$  sehr gross ist,

$$19. \quad \begin{cases} K_1 = \frac{P}{F} + \frac{M a_1}{W}, \\ K_2 = \frac{P}{F} - \frac{M a_2}{W}. \end{cases}$$

Bezeichnet man (Fig. 97) den Winkel, welchen die Kraft  $R$  (§. 281) mit der Tangente bildet, mit  $\alpha$  und den Abstand des Durchschnittspunktes  $D$  der Richtung der Kraft  $R$  mit dem Querschnitte vom Schwerpunkte des Querschnittes mit  $e$ , so ist  $P = R \cos \alpha$ ,  $M = R e \cos \alpha = P e$ ; mithin können wir statt der vorigen Gleichungen auch setzen:

$$20. \quad \begin{cases} K_1 = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{F a_1 e}{W} \right), \\ K_2 = \frac{P}{F} \left( 1 - \frac{F a_2 e}{W} \right). \end{cases}$$

**§. 288. Stützlinie.** Verbindet man die Punkte  $D$  aller Querschnitte, in welchen die Richtung der Kraft  $R$  den betreffenden Querschnitt schneidet (Fig. 97), so erhält man eine Linie, welche man häufig die Stützlinie nennt.

Bei den nur auf Normalfestigkeit beanspruchten Körpern fällt die Stützlinie mit der Mittellinie oder mit der Axe des Körpers zusammen.

Die Stützlinie erhält in so fern eine Bedeutung, als ihre Entfernung  $e$  von der Axe von grossem Einflusse auf die Grösse der Spannungen ist.

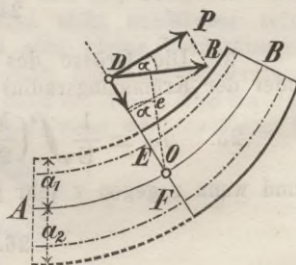
Die grössten Spannungen, welche in den von der Schweraxe am weitesten entfernten Fasern entstehen, sind nach dem vorigen §.:

$$\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{F a_1 e}{W} \right), \quad \frac{P}{F} \left( 1 - \frac{F a_2 e}{W} \right).$$

Haben diese beiden Spannungen gleiche Vorzeichen, so haben überhaupt alle Spannungen dasselbe Vorzeichen. Hiernach sind, falls  $R \cos \alpha$  positiv ist, alle Spannungen positiv, und, falls  $R \cos \alpha$  negativ ist, alle Spannungen negativ, wenn  $1 + \frac{F a_1 e}{W} > 0$ ,  $1 - \frac{F a_2 e}{W} > 0$ , oder

$$e > -\frac{W}{F a_1}, \quad e < \frac{W}{F a_2}$$

Fig. 97.



ist. Wir nennen die Fläche der Kraftebene, welche von zwei Linien (Fig. 97) begrenzt wird, die von der Axe den Abstand  $OE = k_1$ ,  $OF = k_2$  haben, wobei

$$21. \quad k_1 = \frac{W}{F a_2}, \quad k_2 = \frac{W}{F a_1}$$

ist, den Kern. Die beiden Begrenzungslinien nennen wir die Kernlinien. Alsdann können wir das eben erhaltene Resultat auch folgendermassen ausdrücken:

Sämmtliche Spannungen für einen Querschnitt haben dasselbe Vorzeichen, wenn für diesen Querschnitt die Stützlinie innerhalb des Kernes liegt.

Liegt die Stützlinie ausserhalb des Kernes, so findet gleichzeitig Zug und Druck statt.

Bezeichnet man die Abstände  $DE$  und  $DF$  der Stützlinie von den Grenzen des Kernes mit  $e_1$  und  $e_2$ , so wird  $e_1 = e - \frac{W}{F a_2}$ ,  $e_2 = e + \frac{W}{F a_1}$ , wodurch die Ausdrücke 20 für die grössten Spannungen oder die Festigkeitsbedingungen in folgende einfachere übergehen:

$$22. \quad K_1 = \frac{P a_1 e_2}{W}, \quad K_2 = \frac{P a_2 e_1}{W}.$$

**§. 289. Aenderung der Länge, Lage und Krümmung der Axe.** 1. Nach 7 ist die Längenänderung  $\Delta s$  der Axe des Stabes

$$23. \quad \Delta s = \frac{1}{E} \int \left( \frac{P}{F} + \frac{M}{F r} \right) ds,$$

und wenn  $r$  gegen  $v$  sehr gross ist,

$$24. \quad \Delta s = \frac{1}{E} \int \frac{P}{F} ds.$$

2. Die Grösse des Winkels  $\Delta \varphi$ , um welchen sich die Tangente oder der Krümmungsradius der Axe verdreht, ist nach 8:

$$25. \quad \Delta \varphi = \frac{1}{E} \int \left( \frac{M}{\mathfrak{B}} + \frac{M}{F r^2} + \frac{P}{F r} \right) ds = \frac{1}{E} \int \frac{M}{\mathfrak{B}} ds + \frac{\Delta s}{r}$$

und wenn  $r$  gegen  $v$  sehr gross ist,

$$26. \quad \Delta \varphi = \frac{1}{E} \int \frac{M}{\mathfrak{B}} ds.$$

3. Ist  $r_1$  der Krümmungsradius der Axe nach der Formänderung, so ist

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds + \Delta ds},$$

daher ist die Aenderung der Krümmung

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds + \Delta ds} - \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{1}{r} \frac{\Delta ds}{ds}}{1 + \frac{\Delta ds}{ds}},$$

d. i. sehr nahe

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{1}{r} \frac{\Delta ds}{ds},$$

d. i. nach Einsetzung der Ausdrücke 7 und 8:

$$27. \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{M}{E W}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich leicht auch aus der Theorie gerader Stäbe ableiten. Das Moment  $M_0$ , welches nöthig ist, um den Stab gerade zu biegen, ist nahe eben so gross, als um einem geraden Stab den Krümmungsradius  $r$  zu geben, d. i.  $M_0 = \frac{E W}{r}$ . Um nun diesem gerade gebogenen

Stab den Krümmungsradius  $r_1$  zu geben, ist abermals ein Moment  $M_1 = \frac{E W}{r_1}$  anzuwenden. Das resultirende Moment  $M$  ist daher  $M_0 - M_1 = E W \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)$ , was mit dem vorigen Ausdrucke übereinstimmt, wenn man  $W$  für  $\mathfrak{B}$  setzen kann.

**§. 290. Verrückungen der Punkte für ein rechtwinkliges Coordinatensystem.** Wir bezeichnen die Verrückungen eines beliebigen Punktes  $O$  der Axe, dessen Coordinaten  $x, y$  sind, nach Richtung der  $x$  und  $y$  mit  $\Delta x, \Delta y$  (Fig. 95). Die Aenderungen von  $dx, dy, ds$  seien entsprechend  $\Delta dx, \Delta dy, \Delta ds$ . Alsdann ist  $O_1 N_1 = dx + \Delta dx = (ds + \Delta ds) \cos(\varphi + \Delta\varphi)$ ,  $O_1' N_1 = dy + \Delta dy = (ds + \Delta ds) \sin(\varphi + \Delta\varphi)$ , mithin, da  $\Delta dx = d\Delta x$ ,  $\Delta dy = d\Delta y$  ist,

$$28. \quad \begin{cases} d\Delta x = (ds + \Delta ds) \cos(\varphi + \Delta\varphi) - dx, \\ d\Delta y = (ds + \Delta ds) \sin(\varphi + \Delta\varphi) - dy. \end{cases}$$

Substituirt man für  $\Delta ds$  und  $\Delta\varphi$  die Ausdrücke 7 und 25 und integrirt sodann die rechte Seite, so ist hierdurch  $\Delta x$  und  $\Delta y$  bestimmt. Die Integration wird freilich in den meisten Fällen nicht ausführbar sein. Für den Fall jedoch, dass es sich nur um sehr kleine Verrückungen handelt, kann man mit hinreichender Genauigkeit folgendes Näherungsverfahren anwenden. Es ist  $\cos(\varphi + \Delta\varphi) = \cos\varphi \cos\Delta\varphi - \sin\varphi \sin\Delta\varphi$ ,  $\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi \cos\Delta\varphi + \cos\varphi \sin\Delta\varphi$  oder, wenn wir  $\cos\Delta\varphi = 1$ ,  $\sin\Delta\varphi = \Delta\varphi$ ,  $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$ ,  $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$  setzen,

$$\cos(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{dx}{ds} - \Delta\varphi \frac{dy}{ds},$$

$$\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{dy}{ds} + \Delta\varphi \frac{dx}{ds}.$$

Dies in die Gleichungen 28 eingesetzt, giebt

$$d\Delta x = (dx - \Delta\varphi dy) \left( 1 + \frac{\Delta ds}{ds} \right) - dx,$$

$$d\Delta y = (dy + \Delta\varphi dx) \left( 1 + \frac{\Delta ds}{ds} \right) - dy,$$

oder, wenn wir die Parenthesen auflösen und Glieder, welche in Beziehung auf  $\Delta\varphi$  und  $\frac{\Delta ds}{ds}$  vom zweiten Grade sind, vernachlässigen

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Delta x = -\Delta\varphi dy + \frac{\Delta ds}{ds} dx, \\ d\Delta y = +\Delta\varphi dx + \frac{\Delta ds}{ds} dy. \end{array} \right.$$

mithin

$$29. \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = -\int \Delta\varphi dy + \int \frac{\Delta ds}{ds} dx, \\ \Delta y = +\int \Delta\varphi dx + \int \frac{\Delta ds}{ds} dy. \end{array} \right.$$

Für  $\Delta\varphi$  und  $\frac{\Delta ds}{ds}$  sind die Ausdrücke 25 oder 26 und 7 zu substituieren. Die dadurch entstehenden Doppelintegrale lassen sich durch partielle Integration in einfache zerlegen. Bekanntlich ist nämlich:

$$\int f(x) dx = x f(x) - \int x df(x).$$

Dies auf die Gleichungen 29 angewendet, giebt

$$30. \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = -y \Delta\varphi + \int y d\Delta\varphi + \int \frac{\Delta ds}{ds} dx, \\ \Delta y = +x \Delta\varphi - \int x d\Delta\varphi + \int \frac{\Delta ds}{ds} dy. \end{array} \right.$$

Wenn der Krümmungsradius  $r$  gegen die Höhe des Körpers sehr gross ist, und wir ausserdem die relative Längenänderung  $\frac{\Delta ds}{ds}$  der Axe vernachlässigen, so ergibt sich sehr einfach

$$31. \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = -\int \Delta\varphi dy = -\frac{1}{E} \iint \frac{M}{W} ds dy, \\ \Delta y = +\int \Delta\varphi dx = +\frac{1}{E} \iint \frac{M}{W} ds dx, \end{array} \right.$$

oder

$$32. \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = -y \Delta\varphi + \int y d\Delta\varphi = -\frac{y}{E} \int \frac{M}{W} ds + \frac{1}{E} \int \frac{M}{W} y ds, \\ \Delta y = +x \Delta\varphi - \int x d\Delta\varphi = +\frac{x}{E} \int \frac{M}{W} ds - \frac{1}{E} \int \frac{M}{W} x ds. \end{array} \right.$$

Noch mehr vereinfachen sich diese Gleichungen bei constantem Querschnitte, da alsdann  $W$  vor das Integralzeichen genommen werden kann.

### XXXIII. Kapitel.

#### Anwendung auf einige Querschnittsformen.

§. 291. Der rechteckige Querschnitt. Bezeichnen wir (Fig. 98) die Breite mit  $b$ , die Höhe mit  $h$ , so ist

$$\mathfrak{B} = b r \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \frac{v^2 dv}{r+v} = b r \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \left( v - r + \frac{r^2}{r+v} \right) dv$$

d. i.

$$33. \quad \mathfrak{B} = b r^2 \left( r \operatorname{lognat} \frac{2r+h}{2r-h} - h \right).$$

Die Verwandlung des Logarithmus in eine unendliche Reihe giebt

$$34. \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{12} b h^3 \left( 1 + \frac{3 h^2}{20 r^2} + \frac{3 h^4}{112 r^4} + \dots \right).$$

Sobald die Höhe  $h$  nur einigermaßen klein gegen den Radius ist, kann man hiernach  $\mathfrak{B} = W = \frac{1}{12} b h^3$  setzen. So wird z. B. für  $r = b, 2b, 3b, 4b, 5b$ :  $\mathfrak{B} = 1,153 \quad 1,038 \quad 1,017 \quad 1,009 \quad 1,006 \cdot W$ .

Der Abstand der Kernlinien von der Axe wird nach 21 (§. 288), da  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}h$ ,  $F = bh$ ,  $W = \frac{1}{12} b h^3$  ist,  $k_1 = k_2 = \frac{1}{6}h$ , so dass der Kern das mittlere Drittheil der Querschnittshöhe einnimmt.

Die Festigkeitsbedingungen werden nach 18 (§. 287), wenn man die dabei auftretenden Divisionen mit  $r - \frac{1}{2}h$  in Reihen ausführt,

$$35. \quad (K_1, K_2) b h = P \left[ 1 \pm 6 \frac{e}{h} - 2 \frac{e}{r} \pm \dots \right].$$

Anwendung bei hölzernen Bogenbrücken etc.

**§. 292. Gewölbe.** Der rechteckige Querschnitt findet ausser bei den hölzernen Bogenträgern insbesondere bei den steinernen Gewölben Anwendung. Hier wirkt, wie bei allen nach oben gekrümmten Bögen,  $P$  drückend.

Liegt der Durchschnittspunkt  $D$  (Fig. 97) der Kraft  $R$  mit dem Querschnitte ausserhalb des letzteren, so muss hier, wenn die Fugen nicht mit Mörtel ausgefüllt sind oder wenn die Zugfestigkeit des Mörtels vernachlässigt wird, eine Drehung des einen Gewölbtheiles um die der Kraft  $R$  am nächsten liegende Kante des Querschnittes eintreten. Das Gewölbe ist daher nur stabil, wenn die Stützzlinie ganz innerhalb des Gewölbes liegt.

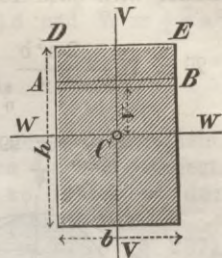
Druck findet an allen Stellen eines Querschnittes oder einer Fuge nur statt, wenn die Stützzlinie durch das mittlere Drittheil der Höhe geht. Ist dies nicht der Fall, so tritt, wenn kein Mörtel vorhanden ist, ein Oeffnen der Fugen auf der einen Seite ein, so dass sich die Steine nicht an allen Stellen der Fuge berühren. Ist Mörtel vorhanden, so kann derselbe wegen seiner geringen Zugfestigkeit zerrissen werden, daher ist hier die Annahme gerechtfertigt, dass die Stützzlinie ganz innerhalb des mittleren Drittheils der Gewölbhöhe liegen soll.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so würde das Gesetz 9 oder 16 für die Spannung  $N$  nicht mehr richtig sein.

Auf weitere Erörterungen verzichten wir in diesem Werke.

**§. 293. Elliptischer Querschnitt.** Entsprechend der in §. 203 gemachten Entwicklung wird für die Coordinaten  $v, w$  des Umfanges

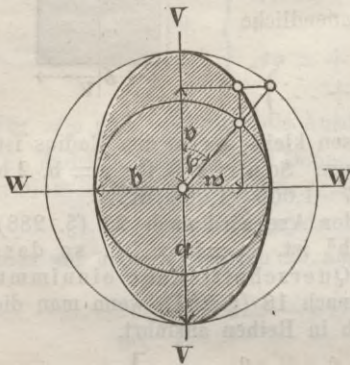
Fig. 98.



(Fig. 99)  $v = a \cos \varphi$ ,  $w = b \sin \varphi$  und  $dF = 2 w dv = -2 a b \sin^2 \varphi d\varphi$ .  
Daher wird nach 13 (Seite 271):

$$\mathfrak{B} = W - \frac{2 a^5 b}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \varphi + \frac{a^4}{r^4} \cos^4 \varphi - \dots \right) d\varphi.$$

Fig. 99.



Wenn m eine gerade Zahl ist, so ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^m \varphi d\varphi = \frac{1.3.5\dots(m-1)}{2.4.6\dots(m+2)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ausserdem ist nach 31 (Seite 192)  $W = \frac{1}{4} \pi a^3 b$ ; mithin wird

$$36. \mathfrak{B} = \frac{\pi}{4} a^3 b \left( 1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{5a^4}{16r^4} + \dots \right).$$

Der Abstand der Kernlinien von der Axe wird nach 21 (§. 288), da  $a_1 = a_2 = a$ ,  $F = \pi ab$ ,  $W = \frac{1}{4} \pi a^3 b$  ist,  $k_1 = k_2 = \frac{1}{4} a$ , so dass der Kern das mittlere Viertheil der Querschnittshöhe einnimmt.

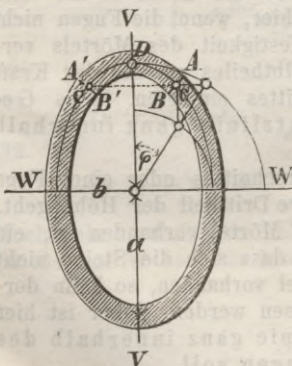
Die Festigkeitsbedingungen werden nach 18 (§. 287), wenn wir auch hier die Divisionen mit  $r - a$  in Reihen ausführen,

$$37. (K_1, K_2) \pi a b = P \left( 1 \pm 4 \frac{e}{a} - 3 \frac{e}{r} \pm \dots \right).$$

Anwendung bei Kettenhaken, Kettenringen u. s. w.

**§. 294. Elliptischer Ringquerschnitt.** (Fig. 100). Die Dicke

Fig. 100.



des Ringes sei constant und zwar  $= \delta$ . Der äussere und innere Umfang sind alsdann nahezu Ellipsen mit den Halbachsen  $a + \frac{1}{2} \delta$ ,  $b + \frac{1}{2} \delta$ ,  $a - \frac{1}{2} \delta$ ,  $b - \frac{1}{2} \delta$ , wenn  $a, b$  die mittleren Halbachsen bezeichnen (vergl. §. 207). Differenzieren wir den Ausdruck 36 für das  $\mathfrak{B}$  der vollen Ellipse nach  $a$  und  $b$ , so ergibt sich

$$d\mathfrak{B} = \frac{\pi}{4} a^2 \left[ a db + 3 b da + \frac{a^3 db + 5 a^2 b da}{2 r^2} + \frac{5 (a^5 db + 7 a^4 b da)}{16 r^4} + \dots \right].$$

Dieser Ausdruck für  $d\mathfrak{B}$  gilt annähernd auch für das  $\mathfrak{B}$  des elliptischen Ringes, wenn wir  $\delta$  für  $da$  und  $db$  setzen. Daher ist sehr nahe

$$38. \mathfrak{B} = \frac{\pi}{4} a^2 (a + 3 b) \delta \left[ 1 + \frac{(a + 5 b) a^2}{2 (a + 3 b) r^2} + \frac{5 (a + 7 b) a^4}{16 (a + 3 b) r^4} + \dots \right].$$

Für einen Kreisring mit dem mittleren Radius  $a$  wird daher

$$39. \mathfrak{B} = \pi a^3 \delta \left( 1 + \frac{3 a^2}{4 r^2} + \frac{5 a^4}{8 r^4} + \dots \right).$$

Der Abstand der Kernlinien von der Axe wird nach 21 (§. 288), da  $a_1 = a_2 = a + \frac{1}{2} \delta$ , d. i. sehr nahe  $= a$ ,  $F = \pi (a + \frac{1}{2} \delta) (b + \frac{1}{2} \delta) - \pi (a - \frac{1}{2} \delta) (b - \frac{1}{2} \delta)$ , d. i. sehr nahe  $= \pi (a + b) \delta$  und  $W = \frac{1}{4} \pi a^2 (a + 3b) \delta$  ist,

$$40. \quad k_1 = k_2 = \frac{a(a + 3b)}{4(a + b)}.$$

Ist  $b$  gegen  $a$  sehr gross, so wird  $k = \frac{3}{4} a$ . Ist  $b$  gegen  $a$  sehr klein, so wird  $k = \frac{1}{4} a$ , so dass  $k$  immer zwischen den Ganzen  $\frac{3}{4} a$  und  $\frac{1}{4} a$  liegt. Für  $a = b$ , d. i. für den Kreisring, wird  $k = \frac{1}{2} a$ , so dass hier der Kern die mittlere Hälfte der Querschnittshöhe einnimmt.

Als genaue Festigkeitsbedingungen ergeben sich nach 18 (§. 287), wenn wir die dabei auftretenden Divisionen wieder in Reihen ausführen,

$$41. \quad (K_1, K_2) \pi (a + b) \delta = P \left[ 1 \pm \frac{4(a + b) e}{a + 3b} \frac{e}{a} - \frac{3a + b}{a + 3b} \frac{e}{r} \pm \dots \right]$$

und für den Kreisring

$$42. \quad (K_1, K_2) \pi r \delta = P \left[ 1 \pm 2 \frac{e}{a} - \frac{e}{r} \pm \dots \right].$$

Anwendung bei Röhren-Bogenbrücken.

**§. 295. Idealer I-förmiger Querschnitt.** (Fig. 80, Seite 210). Wir bezeichnen, wie in §. 222 die beiden Gurte mit  $f_1, f_2$ . Alsdann wird nach 6 (Seite 270):

$$\mathfrak{B} = \frac{r a_1^2 f_1}{r + a_1} + \frac{r a_2^2 f_2}{r - a_2}.$$

Setzt man für  $a_1$  und  $a_2$  die Ausdrücke 117 (§. 222), nämlich  $a_1 = \frac{f_2 h}{F}$ ,  $a_2 = \frac{f_1 h}{F}$ , so ergibt sich leicht:

$$43. \quad \mathfrak{B} = \frac{f_1 f_2 h^2}{F} \frac{F^2 r^2}{(F r - f_1 h) (F r + f_2 h)}.$$

Der Nenner des zweiten Factors ist auch  $= F^2 r^2 \left( 1 - \frac{f_1 h}{F r} \right) \left( 1 + \frac{f_2 h}{F r} \right) = F^2 r^2 \left( 1 - \frac{f_1 - f_2}{F} \frac{h}{r} - \frac{f_1 f_2 h^2}{F^2 r^2} \right)$ . Führt man nun die Division in einer Reihe aus, so ergibt sich der einfache Ausdruck:

$$44. \quad \mathfrak{B} = \frac{f_1 f_2 h^2}{F} \left[ 1 + \frac{f_1 - f_2}{F} \frac{h}{r} + \dots \right].$$

Als Abstand der Kernlinien von der Axe ergibt sich nach 21 (Seite 274), da nach 118 mit Berücksichtigung von 117 in §. 223  $W = F a_1 a_2$  ist,

$$k_1 = a_1, \quad k_2 = a_2.$$

Der Kern nimmt also hier die ganze Höhe des Querschnittes ein. Aus §. 288 folgt daher:

Die Spannungen beider Gurte haben nur dasselbe Vorzeichen, wenn die Stütlinie innerhalb der Gurte liegt.

Sind  $e_1, e_2$  die Abstände der Stütlinie von den beiden Gurten  $f_1, f_2$ , so sind die Spannungen in beiden Gurten nach 22 (Seite 274)  $= \frac{P a_1 e_2}{W}$

und  $-\frac{P a_2 e_1}{W}$ , oder, da  $W = F a_1 a_2 = f_1 a_1 h = f_2 a_2 h$  ist,  $\frac{P e_2}{f_1 h}$  und  $-\frac{P e_1}{f_2 h}$ . Bezeichnen wir die Gesamtspannungen in beiden Gurten, welche man durch Multiplication der vorstehenden Spannungen pro Flächeneinheit mit  $f_1, f_2$  erhält, mit  $S_1, S_2$ , so wird

$$45. \quad S_1 = P \frac{e_2}{h}, \quad S_2 = -P \frac{e_1}{h}.$$

Die Spannungen verhalten sich also umgekehrt, wie die Abstände der Stützlinie von den Gurten.

Dies lässt sich auch in ganz elementarer Weise nachweisen. Die Kraft  $R$ , welche wir nach dem Punkte  $D$  des Querschnittes (Fig. 97) verlegen, zerlegen wir dort in die Componenten  $P$  und  $Q$ .  $Q$  überträgt sich unmittelbar auf die Gurte und erzeugt in diesen Schubspannungen.  $P$  lässt sich in zwei in den Gurten wirkende Componenten  $S_1, S_2$  zerlegen, welche sich nach dem Hebelgesetze wie  $e_2 : e_1$  verhalten.  $S_1$  und  $S_2$  selbst ergeben sich leicht durch die zweite Bedingung, dass  $S_1 + S_2 = P$  sein muss oder direkt, indem man für jeden Gurt als Momentenaxe die Summe der Momente gleich Null setzt.

Die Festigkeitsbedingungen sind nun  $K_1 f_1 = S_1, K_2 f_2 = S_2$  oder

$$46. \quad K_1 f_1 h = P e_2, \quad K_2 f_2 h = P e_1,$$

wodurch bei gegebener Belastung die Grösse der Querschnitte  $f_1, f_2$  bestimmt ist.

In Beziehung auf die Anwendung dieser Gleichungen können wir folgende Hauptfälle unterscheiden.

1. Die Stützlinie liegt zwischen den Gurten und hat eine constante Form. In diesem Falle ist  $K_1 = K_2$ . Ist  $K$  der Sicherheitscoefficient, so wird

$$47. \quad f_1 = \frac{P e_2}{K h}, \quad f_2 = \frac{P e_1}{K h}, \quad F = \frac{P(e_1 + e_2)}{K h} = \frac{P}{K},$$

so dass in diesem Falle die Lage der Stützlinie auf die Gesamtfläche ohne Einfluss ist. Es verhält sich  $f_1 : f_2 = e_2 : e_1 = a_2 : a_1$ . Da  $e_2 + e_1 = a_2 + a_1 = h$  ist, so muss  $e_1 = a_1, e_2 = a_2$  sein, d. h. Die Stützlinie soll mit der Axe des Körpers zusammenfallen.

2. Die Stützlinie liegt ausserhalb der Gurte und hat eine constante Form. Alsdann wird

$$48. \quad f_1 = \frac{P e_2}{K_1 h}, \quad f_2 = \frac{P e_1}{K_2 h}, \quad F = \frac{P}{h} \left( \frac{e_2}{K_1} + \frac{e_1}{K_2} \right),$$

wobei einer der Coefficienten  $K_1, K_2 = K$ , der andere  $= \mathfrak{K}$  ist. Je weiter die Stützlinie vom Körper entfernt ist, desto grösser wird (bei constantem  $P$ )  $f_1$  und  $f_2$ , also auch  $F$ . Ist  $K = \mathfrak{K}$ , so wird  $f_1 : f_2 = e_2 : e_1$ . Da auch  $f_1 : f_2 = a_2 : a_1$  ist, so wird

$$a_1 : a_2 = e_1 : e_2.$$

3. Die Stützlinie liegt innerhalb der Gurte, hat aber eine veränderliche Lage. Dieser Fall tritt stets bei veränderlicher Belastung ein. Die vorige Bedingung ist dann nicht für jede Belastung zu erfüllen. Alsdann sind natürlich  $f_1, f_2$  für diejenigen Belastungen zu berechnen, für welche bezüglich die Momente  $P e_2, P e_1$  den grössten

Werth haben. Sind diese Momente  $P'e_2'$ ,  $P''e_1''$ , so wird

$$49. \quad f_1 = \frac{P'e_2'}{Kh}, \quad f_2 = \frac{P''e_1''}{Kh}, \quad F = \frac{P'e_2' + P''e_1''}{Kh}.$$

4. Die Stützlinie liegt ausserhalb der Gurte und hat eine veränderliche Form. Bei derselben Belastung, bei welcher  $Pe_1$  seinen grössten Werth hat, hat auch  $Pe_2$  seinen grössten Werth, vorausgesetzt, dass die Stützlinie nur auf der einen Seite des Körpers liegen kann. Sind nun die grössten Werthe von  $Pe_1$ ,  $Pe_2$ , wenn die Stützlinien auf der einen Seite A liegt,  $P'e_1'$ ,  $P'e_2'$ , und wenn sie auf der andern Seite B liegt, wobei das Vorzeichen der Spannungen wechselt,  $P''e_1''$ ,  $P''e_2''$ , so wird

$$50. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für A: } f_1 = \frac{P'e_2'}{K_1}, \quad f_2 = \frac{P'e_1'}{K_2}, \\ \text{für B: } f_1 = \frac{P''e_2''}{K_2}, \quad f_2 = \frac{P''e_1''}{K_1}. \end{array} \right.$$

Der grösste der sich für  $f_1$  und  $f_2$  ergebenden beiden Werthe ist beizubehalten.

In praktischen Fällen weiss man oft in Voraus, ob die grösste Beanspruchung durch Zug oder Druck eintreten wird; tritt z. B., wie fast stets bei Bogenträgern, die grösste Beanspruchung durch Druck ein, so ist jeder Gurt nur für dasjenige Moment zu berechnen, welches in ihm den grössten Druck erzeugt. Dann aber stimmen die Ausdrücke in diesem und im vorigen Falle genau überein.

Anwendung bei Bogen-Gitterträgern.

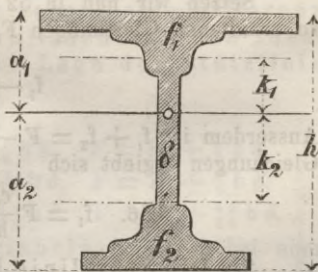
**§. 296. I-förmiger Querschnitt.** Da im Allgemeinen, selbst bei gleicher Zug- und Druckfestigkeit, ein unsymmetrischer Querschnitt zweckmässiger ist, als ein symmetrischer, so setzen wir sogleich einen unsymmetrischen I-förmigen Querschnitt voraus. Wir bezeichnen die gesammte Höhe mit  $h$  (Fig. 101), den Flächeninhalt des Ober- und Untergurtes mit  $f_1$ ,  $f_2$  und die Dicke der verticalen Wand oder des Steges mit  $\delta$ .

In den Fällen, in welchen dieser Querschnitt zur Anwendung kommt, namentlich bei Bogenträgern, wird es in der Regel nicht nöthig sein,  $\mathfrak{B}$  von  $W$  verschieden anzunehmen, obwohl sich  $\mathfrak{B}$  nach 12 (Seite 271) leicht bestimmen lässt. Wir setzen daher  $\mathfrak{B} = W$ . Nach 174 (§. 238) und 170 (§. 237) wird, wenn die Höhe der Gurte gegen die gesammte Höhe klein ist, sehr nahe:

$$51. \quad W = \frac{1}{4} F h^2 - \frac{1}{6} h^3 \delta - \frac{(f_1 - f_2)^2 h^2}{4 F},$$

$$52. \quad a_1 = \frac{F - (f_1 - f_2)}{2 F} h, \quad a_2 = \frac{F + (f_1 - f_2)}{2 F} h.$$

Fig. 101.



Hiernach ist  $a_1 a_2 = \frac{F^2 - (f_1 - f_2)}{F^2} h^2$ , wesshalb der Ausdruck für  $W$  auch folgendermaassen geschrieben werden kann:

$$53. \quad W = F a_1 a_2 - \frac{1}{6} h^3 \delta.$$

Als Abstände der Kernlinien von der Schweraxe ergeben sich nach 21 (Seite 274),

$$54. \quad k_1 = a_1 - \frac{h^3 \delta}{6 F a_2}, \quad k_2 = a_2 - \frac{h^3 \delta}{6 F a_1},$$

oder, wenn man in den zweiten Gliedern für  $a_1, a_2$  obige Ausdrücke setzt,

$$54 a. \quad k_1 = a_1 - \frac{h^2 \delta}{3 [F - (f_1 - f_2)]}, \quad k_2 = a_2 - \frac{h^2 \delta}{3 [F + (f_1 - f_2)]}.$$

Wenn kein Steg vorhanden oder  $\delta = 0$  ist, so wird  $k_1 = a_1, k_2 = a_2$ . Sind dagegen keine Gurte vorhanden, so dass der Querschnitt ein Rechteck bildet, so ist  $F = h \delta, a_1 = a_2 = \frac{1}{2} h$ , daher  $k_1 = k_2 = \frac{1}{6} h = \frac{1}{3} a$ . So-nach liegt stets  $k_1$  zwischen  $\frac{1}{3} a_1$  und  $a_1, k_2$  zwischen  $\frac{1}{3} a_2$  und  $a_2$ .

Für die Berechnung des Querschnittes ist es in praktischen Fällen bequemer, den Abstand der Krafrichtung von den Gurten, anstatt von den Kernlinien einzuführen, weil die Lage der Gurte direkt gegeben ist, während sich die Lage der Kernlinien nach der sich ergebenden Querschnittsform richtet. Wir bezeichnen den Abstand der Stützlinie von den Gurten mit  $c_1, c_2$  und unterscheiden folgende Fälle:

1. Die Stützlinie liegt innerhalb des Kernes und hat eine constante Form. Der Sicherheitscoefficient sei  $K$ . Da die Spannung an den am weitesten von der Schweraxe entfernten Fasern gleich gross, nämlich  $= K$  sein soll, so ist die Spannung im ganzen Querschnitte constant. Dies aber ist nur möglich, wenn die Kraft  $R$  durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht, oder wenn die Stützlinie mit der Axe zusammenfällt. Die nöthige Grösse der Gesamtfäche ist

$$55. \quad F = \frac{P}{K}.$$

Setzen wir nun in 52  $c_1$  für  $a_1, c_2$  für  $a_2$  und eliminiren aus den so erhaltenen Gleichungen  $F$ , so ergibt sich

$$f_1 - f_2 = - \frac{F (c_1 - c_2)}{h}.$$

Ausserdem ist  $f_1 + f_2 = F - h \delta = F - (c_2 - c_1) \delta$ . Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$56. \quad f_1 = F \frac{c_2}{h} - \frac{1}{2} h \delta, \quad f_2 = F \frac{c_1}{h} - \frac{1}{2} h \delta.$$

2. Die Stützlinie liegt ausserhalb des Kernes und hat eine constante Lage. Alsdann muss, wenn  $K_1 = K, K_2 = \mathfrak{K}$  ist,

$$K W = P a_1 e_2, \quad \mathfrak{K} W = P a_2 e_1$$

sein. Nun aber ist  $e_1 = c_1 + (a_2 - k_1), e_2 = c_2 - (a_2 - k_2)$ , d. i. nach 54:

$$e_1 = c_1 + \frac{h^3 \delta}{6 F a_2}, \quad e_2 = c_2 - \frac{h^3 \delta}{6 F a_1}.$$

Dies eingesetzt giebt

$$57. \quad K W = P a_1 c_2 - \frac{P h^3 \delta}{6 F}, \quad \mathfrak{K} W = P a_2 c_1 + \frac{P h^3 \delta}{6 F}.$$

Reducirt man auf  $W$  und setzt beide Ausdrücke für  $W$  einander gleich, so ergibt sich nach Einsetzung der Ausdrücke 52 für  $a_1, a_2$ :

$$a. \quad f_1 - f_2 = -\frac{K c_1 - \mathfrak{K} c_2}{K c_1 + \mathfrak{K} c_2} F - \frac{(K + \mathfrak{K}) h}{3 (K c_1 + \mathfrak{K} c_2)} h \delta.$$

Dies in den Ausdruck für  $W$  gesetzt, giebt nach gehöriger Reduction:

$$W = \frac{K \mathfrak{K} h^2 c_1 c_2}{(K c_1 + \mathfrak{K} c_2)^2} \left[ F + \frac{h^2}{6 c_1 c_2} h \delta \right] \left[ F - \frac{(K + \mathfrak{K})^2}{6 K \mathfrak{K}} h \delta \right].$$

Die Addition der Gleichungen 57 giebt  $(K + \mathfrak{K}) W = P (a_1 c_2 + a_2 c_1)$ . Setzt man hierin für  $a_1, a_2$  die Ausdrücke 52 und dabei für  $f_1 - f_2$  den Ausdruck a, so wird

$$(K + \mathfrak{K}) W = \frac{P (K + \mathfrak{K}) c_1 c_2}{2 F (K c_1 + \mathfrak{K} c_2)} \left[ F + \frac{h^2}{6 c_1 c_2} h \delta \right].$$

Setzt man für  $W$  den vorigen Ausdruck, so hebt sich ein Faktor und die Reduction auf  $F$  giebt alsdann den sehr einfachen Ausdruck

$$58. \quad F = F_0 + \frac{(K + \mathfrak{K})^2}{6 K \mathfrak{K}} h \delta,$$

worin zur Abkürzung  $F_0$  gleich der Gesamtfläche für den idealen **I**-förmigen Querschnitt, d. i.  $F_0 = \frac{P (K c_1 + \mathfrak{K} c_2)}{K \mathfrak{K} h}$  gesetzt ist;  $f_1$  und  $f_2$  ergeben sich nun leicht aus der Gleichung a und der Gleichung  $f_1 - f_2 = F - h \delta$ . Es ergibt sich nämlich:

$$59. \quad f_1 = f_{01} - \frac{2 K - \mathfrak{K}}{6 K} h \delta, \quad f_2 = f_{02} - \frac{2 \mathfrak{K} - K}{6 \mathfrak{K}} h \delta,$$

wenn wir auch hier  $f_{01}, f_{02}$  gleich den nöthigen Gurtquerschnitten für den idealen **I**-förmigen Querschnitt, d. i.  $f_{01} = \frac{P c_2}{K h}$ ,  $f_{02} = \frac{P c_1}{\mathfrak{K} h}$  setzen. Hieraus folgt, dass die durch den Steg veranlasste Differenz der Querschnitte zwischen den wirklichen und den idealen **I**-förmigen Querschnitt von der Lage der Stützlinie unabhängig ist.

Hiernach wird z. B. für

$$\mathfrak{K} = K: \quad f_1 = f_{01} - \frac{1}{6} h \delta, \quad f_2 = f_{02} - \frac{1}{6} h \delta, \quad F = F_0 + \frac{2}{3} h \delta.$$

$$\mathfrak{K} = 3 K: \quad f_1 = f_{01} + \frac{1}{6} h \delta, \quad f_2 = f_{02} - \frac{5}{18} h \delta, \quad F = F_0 + \frac{8}{9} h \delta.$$

$$\mathfrak{K} = 6 K: \quad f_1 = f_{01} + \frac{2}{3} h \delta, \quad f_2 = f_{02} - \frac{1}{36} h \delta, \quad F = F_0 + \frac{49}{36} h \delta.$$

3. Die Stützlinie hat eine variable Lage, wobei aber die grösste Beanspruchung beider Gurte nur entweder durch Zug oder durch Druck eintreten kann. Wir setzen beispielsweise eine Beanspruchung durch Druck voraus. Der grösste Werth von  $P e_2$  und  $P e_1$  sei bezüglich  $P' e_2'$  und  $P'' e_1''$ . Die entsprechenden Werthe von  $c_2, c_1$  seien  $c_2', c_1''$ . Der obere Gurt  $f_1$  wird nur auf Druck beansprucht, wenn die Kraft  $R$  den Querschnitt oberhalb der unteren Kernlinie schneidet, er mag zwischen oder ausserhalb der Kernlinie liegen; alsdann ist  $e_2 = c_2 - (a_2 - k_2)$ . Ebenso wird der Gurt  $f_2$  nur auf Druck beansprucht, wenn

die Kraft  $\mathfrak{K}$  den Querschnitt unterhalb der oberen Kernlinie schneidet; alsdann ist  $e_1 = c_1 - (a_1 - k_1)$ . Die Festigkeitsbedingungen  $\mathfrak{K}W = P'e_2'a_1$  und  $\mathfrak{K}W = P''e_1''a_2$  geben hiernach analog dem vorigen Falle

$$60. \quad \mathfrak{K}W = P'c_2a_1 - \frac{P'h^3\delta}{6F}, \quad \mathfrak{K}W = P''c_1''a_2 - \frac{P''h^3\delta}{6F}.$$

Hiernach ist  $6FP'e_2'a_1 - P'h^3\delta = 6FP''c_1''a_2 - P''h^3\delta$ ; die Einsetzung der Ausdrücke 52 für  $a_1, a_2$  giebt

$$b. \quad f_1 - f_2 = \frac{P'c_2' - P''c_1''}{P'c_2' + P''c_1''} F - \frac{(P' - P'')h}{3(P'c_2' + P''c_1'')} h\delta.$$

Addirt man die Gleichungen 60 und substituirt man für  $W, a_1, a_2$  die Ausdrücke 51, 52, für  $f_1 - f_2$  den Ausdruck b, so ergibt sich:

$$61. \quad F^2 - F \cdot h\delta \frac{(P'c_2' + P''c_1'')^2 - (P'c_2' - P''c_1'')(P' - P'')h}{6P'P''c_2'c_1''} - (h\delta)^2 \frac{(P' - P'')^2 h^2}{36P'P''c_2'c_1''} = F F_0 - F_0 h\delta \frac{(P' + P'')(P'c_2' + P''c_1'')h}{12P'P''c_2'c_1''},$$

wenn wir wieder  $F_0$  gleich der ganzen Querschnittsfläche für den idealen I-förmigen Querschnitt, d. i.  $F_0 = \frac{P'c_2' + P''c_1''}{\mathfrak{K}h}$  setzen;  $f_1$  und  $f_2$  ergeben sich aus der Gleichung b und der Gleichung  $f_1 + f_2 = F - h\delta$ . Wenn  $P' = P''$ ,  $c_2' = c_1''$  ist (was bei flachen Bogenbrücken nahezu der Fall ist), so wird einfacher:

$$62. \quad F^2 - \frac{2}{3} F \cdot h\delta = F \cdot F_0 - \frac{h}{3c_1} F_0 \cdot h\delta$$

und nach b  $f_1 - f_2 = 0$ , also  $F = 2f_1 + h\delta$ ,  $f_1 = f_2 = \frac{1}{2} F - \frac{1}{2} h\delta$ . Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

$\frac{c_1}{h}$	$h\delta = 0$		$h\delta = 0,5 F_0$		$h\delta = F_0$	
	$F = F_0 +$	$f = f_0 -$	$F = F_0 +$	$f = f_0 -$	$F = F_0 +$	$f = f_0 -$
0,5	0	0,500	0	0,500	0	0,500
0,75	0,222	0,389	0,276	0,362	0,333	0,333
1	0,333	0,333	0,387	0,306	0,434	0,283
1,5	0,444	0,278	0,488	0,256	0,521	0,240
2	0,500	0,250	0,535	0,232	0,560	0,220
5	0,600	0,200	0,616	0,192	0,626	0,187
10	0,633	0,183	0,641	0,179	0,646	0,177
$\infty$	0,667	0,167	0,667	0,167	0,667	0,167
	. $h\delta$		. $h\delta$		. $h\delta$	

Die Tabelle giebt unmittelbar den Unterschied zwischen der nöthigen Fläche beim wirklichen und dem idealen I-förmigen Querschnitt, so dass man nach der leichten Berechnung des idealen Querschnittes auch leicht den wirklichen berechnen kann. Der Unterschied ist für die ganze Fläche 0 bis  $\frac{2}{3} h\delta$  und für einen Gurtquerschnitt  $\frac{1}{2} h\delta$  bis  $\frac{1}{6} h\delta$ . Wenn  $h\delta$  gegen  $F_0$  sehr klein ist, so wird sehr nahe:

$$63. \quad F = F_0 + \frac{1}{3} \left( 2 - \frac{h}{c_1} \right) h \delta, \quad f = f_0 - \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{h}{c_1} \right) h \delta.$$

Anwendung bei Blech-Bogenträgern und gusseisernen Bogenträgern, Blech-Krahnen u. s. w.

**§. 297. Belastungsweise.** Wir unterscheiden auch hier, wie bei den geraden Stäben (vergl. §. 92) eine bestimmte und eine bedingte Belastung. Bei ersterer sind alle äusseren Kräfte direkt gegeben, während sie bei letzterer zum Theil durch die Elasticität des Stabes bedingt sind, also durch die Ermittlung der Formänderung erst bestimmt werden müssen.

Die bestimmte Belastung kommt bei den gekrümmten Stäben in der Praxis nicht viel vor; Beispiele bieten gekrümmten Federn, Spiralfedern, Kettenhaken, Krahne, Bogenträger mit drei Gelenken etc. Viel häufiger tritt aber die bedingte Belastung auf, insbesondere bei Bogenträgern, Kettenringen u. s. w. Wir geben daher zunächst nur einige Beispiele für die bestimmte Belastung, um alsdann ausführlicher auf die bedingte Belastung einzugehen.

## XXXIV. Kapitel.

### Beispiele für bestimmte Belastung.

**§. 298. Stab, welcher an einem Ende horizontal eingespannt, am andern vertical belastet ist.** Wir nehmen den Stab

nach oben gekrümmt und das eingespannte Ende A (Fig. 102) als Coordinatenanfang an. Die Länge der Horizontal- und Verticalprojection sei l, h,

der Centriwinkel AMB bei kreisförmiger Krümmung =  $\alpha$  und das am freien Ende B wirkende Gewicht = G. Alsdann ist

$$64. \quad \begin{cases} P = -G \sin \varphi, & Q = -G \cos \varphi, \\ M = G l (1 - x) = G r (\sin \alpha - \sin \varphi). \end{cases}$$

P ist in A = 0, in B am grössten; Q ist in A am grössten, nämlich = G, und in B am kleinsten, nämlich =  $-G \cos \alpha$ .

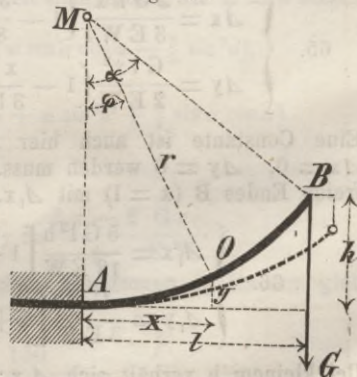
M ist in A am grössten, nämlich = G l = G r sin  $\alpha$ . Sowohl P, als M, mithin auch die Faserspannung werden zum analytischen Maximum für  $\cos \varphi = 0$ , d. i.  $\varphi = 90^\circ$ . Ist nun, wie wir voraussetzen,

$\alpha < 90^\circ$ , so kann die Faserspannung nur für  $\varphi = 0$  oder  $\varphi = \alpha$  zum Maximum werden; der gefährliche Querschnitt liegt also in A und B. In

A ist  $N = \frac{G l (a_1, a_2)}{W}$ , in B dagegen  $N = -\frac{G \sin \alpha}{F}$ . Daher kann die Faser-

spannung nur das Maximum in B erreichen, wenn  $l < \frac{W \sin \alpha}{F (a_1, a_2)}$  ist.

Fig. 102.



**§. 299. Formänderung eines parabolisch gekrümmten Stabes.** Wir setzen  $y = Ax^2$ ; da für  $x=1$   $y=h$  werden muss, so ist  $A = \frac{h}{1^2}$ , also  $y = h \frac{x^2}{1^2}$ ,  $dy = 2 \frac{hx}{1^2} dx$ . Ferner wird ds

$$= dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + 4 \frac{h^2 x^2}{1^4}}.$$
 Die Reihenverwandlung giebt

$$ds = dx \left( 1 + 2 \frac{h^2 x^2}{1^4} - 2 \frac{h^4 x^4}{1^8} + \dots \right).$$

Unter der Voraussetzung eines constanten Querschnittes ergibt sich zunächst als Lagenänderung der Tangente nach 26 (§. 289):

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{G l}{E W} \int \left( 1 - \frac{x}{1} \right) \left( 1 + 2 \frac{h^2 x^2}{1^4} - 2 \frac{h^4 x^4}{1^8} + \dots \right) dx \\ &= \frac{G l}{E W} \int \left( 1 - \frac{x}{1} + 2 \frac{h^2 x^2}{1^4} - 2 \frac{h^2 x^3}{1^5} - 2 \frac{h^4 x^4}{1^8} + \dots \right) dx \\ &= \frac{G l x}{E W} \left( 1 - \frac{x}{2 \cdot 1} + \frac{2 h^2 x^2}{3 \cdot 1^4} - \frac{2 h^2 x^3}{3 \cdot 1^5} - \frac{2 h^4 x^4}{6 \cdot 1^8} + \dots \right). \end{aligned}$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für  $x=0$  auch  $\Delta \varphi = 0$  werden muss. Als Verrückungen eines beliebigen Punktes ergibt sich nun nach 31 (§. 290), wenn wir dieselben in der positiven Richtung der  $x$  und nach unten als positiv nehmen,

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{2 G h}{E W l} \int x^2 \left( 1 - \frac{x}{2 \cdot 1} + \dots \right) dx, \\ \Delta y = \frac{G l}{E W} \int x \left( 1 - \frac{x}{2 \cdot 1} + \dots \right) dx. \end{cases}$$

Die Ausführung der Integration giebt:

$$65. \quad \begin{cases} \Delta x = \frac{2 G h x^3}{3 E W l} \left( 1 - \frac{3 x}{8 \cdot 1} + \frac{2 h^2 x^2}{5 \cdot 1^4} - \frac{h^2 x^2}{3 \cdot 1^5} - \frac{6 h^4 x^4}{35 \cdot 1^8} + \dots \right), \\ \Delta y = \frac{G l x^2}{2 E W} \left( 1 - \frac{x}{3 \cdot 1} + \frac{h^2 x^2}{3 \cdot 1^4} - \frac{4 h^2 x^3}{15 \cdot 1^5} - \frac{2 h^4 x^4}{15 \cdot 1^8} + \dots \right). \end{cases}$$

Eine Constante ist auch hier nicht hinzuzufügen, weil für  $x=0$  auch  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y = 0$  werden muss. Bezeichnen wir die Verrückungen des freien Endes B ( $x=1$ ) mit  $\Delta_1 x$ ,  $\Delta_1 y$ , so wird

$$66. \quad \begin{cases} \Delta_1 x = \frac{5 G l^2 h}{12 E W} \left[ 1 + \frac{8}{75} \left( \frac{h}{1} \right)^2 - \frac{13}{175} \left( \frac{h}{1} \right)^4 + \dots \right], \\ \Delta_1 y = \frac{G l^3}{3 E W} \left[ 1 + \frac{1}{10} \left( \frac{h}{1} \right)^2 - \frac{2}{35} \left( \frac{h}{1} \right)^4 + \dots \right]. \end{cases}$$

Bei kleinem  $h$  verhält sich  $\Delta_1 x : \Delta_1 y = 5 h : 4 l$ .

**§. 300. Formänderung eines kreisförmig gekrümmten Stabes.** Den Querschnitt nehmen wir wieder als constant an. Als Lagenänderung der Tangente in einem beliebigen Punkte ergibt sich nach 26 (§. 289), da  $ds = r d\varphi$  ist,

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{G r^2}{E W} \int (\sin\alpha - \sin\varphi) d\varphi \\ &= \frac{G r^2}{E W} (\varphi \sin\alpha + \cos\varphi + C).\end{aligned}$$

Für  $\varphi = 0$  muss der festen Einspannung wegen  $\Delta\varphi = 0$  werden; mithin  $1 + C = 0$ , also

$$\Delta\varphi = \frac{G r^2}{E W} (\varphi \sin\alpha + \cos\varphi - 1).$$

Nach 31 (§. 290) wird nun, da  $x = r \sin\varphi$ ,  $y = r(1 - \cos\varphi)$ ,  $dx = r \cos\varphi d\varphi$ ,  $dy = r \sin\varphi d\varphi$  ist,

$$\left\{ \begin{aligned}\Delta x &= \frac{G r^3}{E W} \int (\varphi \sin\alpha + \cos\varphi - 1) \sin\varphi d\varphi, \\ \Delta y &= \frac{G r^3}{E W} \int (\varphi \sin\alpha + \cos\varphi - 1) \cos\varphi d\varphi,\end{aligned}\right.$$

d. i.

$$\left\{ \begin{aligned}\Delta x &= \frac{G r^3}{E W} \left[ \sin\alpha (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi) + \frac{1}{2} \sin^2\varphi + \cos\varphi + C_1 \right], \\ \Delta y &= \frac{G r^3}{E W} \left[ \sin\alpha (\cos\varphi + \varphi \sin\varphi) + \frac{1}{2} (\varphi + \sin\varphi \cos\varphi) - \sin\varphi + C_2 \right].\end{aligned}\right.$$

Für  $\varphi = 0$  muss  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y = 0$  werden, daher  $0 = 1 + C_1$ ,  $0 = \sin\alpha + C_2$ , mithin

$$67. \left\{ \begin{aligned}\Delta x &= \frac{G r^3}{E W} \left[ \sin\alpha (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi) + \frac{1}{2} \sin^2\varphi + \cos\varphi - 1 \right], \\ \Delta y &= \frac{G r^3}{E W} \left[ \sin\alpha (\cos\varphi + \varphi \sin\varphi - 1) + \frac{1}{2} (\varphi + \sin\varphi \cos\varphi) - \sin\varphi \right].\end{aligned}\right.$$

Als Verrückungen des freien Endes B ergeben sich, indem wir  $\varphi = \alpha$  setzen,

$$68. \left\{ \begin{aligned}\Delta_1 x &= \frac{G r^3}{E W} (1 - \cos\alpha + \alpha \sin\alpha \cos\alpha - \frac{3}{2} \sin^2\alpha), \\ \Delta_1 y &= \frac{G r^3}{E W} (\frac{1}{2} \alpha - 2 \sin\alpha + \alpha \sin^2\alpha + \frac{3}{2} \sin\alpha \cos\alpha).\end{aligned}\right.$$

Für den Viertelkreis ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) wird

$$69. \Delta x = \frac{1}{2} \frac{G r^3}{E W}, \quad \Delta y = \frac{3\pi - 8}{4} \frac{G r}{E W}.$$

Die Verwandlung der goniometrischen Funktionen in Reihen giebt

$$70. \left\{ \begin{aligned}\Delta_1 x &= \frac{5 G r^3 \alpha^4}{24 E W} \left( 1 - \frac{40}{150} \alpha^2 + \dots \right), \\ \Delta_1 y &= \frac{G r^3 \alpha^3}{3 E W} \left( 1 - \frac{9}{20} \alpha^2 + \frac{13}{168} \alpha^4 - \dots \right).\end{aligned}\right.$$

Setzen wir  $r^3 = \frac{l^3}{\sin^3\alpha}$ , multipliciren ausserdem den Ausdruck für  $\Delta_1 x$  mit  $\frac{h}{h} = \frac{h}{l \tan^2\alpha}$ , so ergibt sich durch abermalige Reihenverwandlung

$$71. \begin{cases} \Delta_1 x = \frac{5 G l^2 h}{12 E W} \left( 1 + \frac{77}{300} \alpha^2 + \dots \right), \\ \Delta_1 y = \frac{G l^3}{3 E W} \left( 1 + \frac{1}{20} \alpha^2 - \frac{1}{168} \alpha^4 - \dots \right). \end{cases}$$

Für  $\alpha = 0, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  ergibt sich genau  $E W \Delta_1 x = 0,4167 \quad 0,4270$   
 $0,4573 \quad 0,5000 \cdot G l^2 h$  und  $E W \Delta_1 y = 0,3333 \quad 0,3376 \quad 0,3486 \quad 0,3562 \cdot G l^3$ ,  
 so dass man für alle Winkel zwischen 0 und 90 sehr nahe

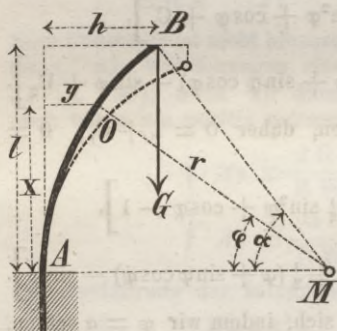
$$72. \Delta_1 x = \frac{5 G l^2 h}{12 E W}, \quad \Delta_1 y = \frac{G l^3}{3 E W}$$

setzen kann.

Anwendung bei Federn etc.

**§. 301. Stab, welcher an einem Ende vertical eingespannt, am anderen vertical belastet ist.** Wir nehmen das eingespannte Ende A (Fig. 103) als Koordinatenanfang an und legen die Axe der x vertical, die der y horizontal. Die Länge der Vertical- und Horizontalprojection sei l und h, der Centriwinkel AMB bei kreisförmiger Krümmung =  $\alpha$  und das am freien Ende B wirkende Gewicht = G. Alsdann ist

Fig. 103.



73.  $\begin{cases} P = -G \cos \varphi, & Q = G \sin \varphi; \\ M = G(h - y) = G r(\cos \varphi - \cos \alpha). \end{cases}$

P ist am grössten in A, nämlich =  $-G$ , am kleinsten in B; Q dagegen ist am grössten in B, nämlich =  $G \sin \alpha$  und in A gleich Null. M ist ebenfalls in A am grössten, nämlich =  $G h = G r(1 - \cos \alpha)$ .

Daher wird auch die Faserspannung in A am grössten sein oder der gefährliche Querschnitt in A liegen.

**§. 302. Formänderung eines parabolisch gekrümmten Stabes.** Wir setzen, wie in §. 299  $y = h \frac{x^2}{l^2}$ ,  $dy = 2 \frac{h x}{l^2} dx$  und ds

$$= dx \left( 1 + 2 \frac{h^2 x^2}{l^4} - 2 \frac{h^4 x^4}{l^8} + \dots \right).$$

Unter der Voraussetzung eines constanten Querschnittes ergibt sich als Lagenänderung der Tangente nach 26 (§. 289), wenn wir darin

$$M = G h \left( 1 - \frac{y}{h} \right) = G h \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \text{ setzen,}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{G h}{E W} \int \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \left( 1 + 2 \frac{h^2 x^2}{l^4} - 2 \frac{h^4 x^4}{l^8} + \dots \right) dx \\ &= \frac{G h}{E W} \int \left[ 1 - \left( 1 - 2 \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{x^2}{l^2} - 2 \left( 1 + \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{h^2 x^4}{l^6} + \dots \right] dx \\ &= \frac{G h x}{E W} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( 1 - 2 \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{x^2}{l^2} - \frac{2}{5} \left( 1 + \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{h^2 x^4}{l^6} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für  $x = 0$  auch  $\Delta\varphi = 0$  werden muss. Als Verrückungen eines beliebigen Punktes ergeben sich jetzt nach 31 (§. 290), wenn wir dieselben nach unten und in der positiven Richtung der  $y$  als positiv nehmen,

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta x &= \frac{2 G h^2}{E W l^2} \int x^2 \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( 1 - 2 \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{x^2}{l^2} + \dots \right] dx, \\ \Delta y &= \frac{G h}{E W} \int x \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( 1 - 2 \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{x^2}{l^2} + \dots \right] dx. \end{aligned} \right.$$

Die Ausführung der Integration giebt

$$74. \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= \frac{2 G h^2 x^3}{3 E W l^2} \left[ 1 - \frac{1}{5} \left( 1 - 2 \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{x^2}{l^2} - \frac{6}{35} \left( 1 + \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{h^2 x^2}{l^6} + \dots \right], \\ \Delta y &= \frac{G h x^2}{2 E W} \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( 1 - 2 \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{x^2}{l^2} - \frac{2}{15} \left( 1 + \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{h^2 x^4}{l^6} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Hiernach sind die Verrückungen  $\Delta_1 x$  und  $\Delta_1 y$  des freien Endes ( $x = l$ ):

$$75. \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 x &= \frac{8 G l h^2}{15 E W} \left[ 1 + \frac{2}{7} \left( \frac{h}{l} \right)^2 + \frac{13}{21} \left( \frac{h}{l} \right)^4 + \dots \right], \\ \Delta_1 y &= \frac{5 G l^2 h}{12 E W} \left[ 1 + \frac{6}{25} \left( \frac{h}{l} \right)^2 + \frac{11}{25} \left( \frac{h}{l} \right)^4 + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Bei kleinem  $h$  verhält sich  $\Delta_1 x : \Delta_1 y = 32 h : 25 l$ , d. i. ebenfalls sehr nahe wie  $5 h : 4 l$ , wie im vorigen Falle.

**§. 303. Formänderung eines kreisförmig gekrümmten Stabes.** Unter der Annahme eines constanten Querschnittes wird zunächst nach 26 (§. 289), da  $ds = r d\varphi$  ist,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{G r^2}{E W} \int (\cos\varphi - \cos\alpha) d\varphi \\ &= \frac{G r^2}{E W} (\sin\varphi - \varphi \cos\alpha). \end{aligned}$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für  $\varphi = 0$  auch  $\Delta\varphi = 0$  werden muss. Da  $x = r \sin\varphi$ ,  $y = r(1 - \cos\varphi)$ ,  $dx = r \cos\varphi d\varphi$ ,  $dy = r \sin\varphi d\varphi$  ist, so wird nun nach 31 (§. 290):

$$76. \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= \frac{G r^3}{E W} \int (\sin\varphi - \varphi \cos\alpha) \sin\varphi d\varphi, \\ \Delta y &= \frac{G r^3}{E W} \int (\sin\varphi - \varphi \cos\alpha) \cos\varphi d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Die Ausführung der Integration giebt:

$$77. \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= \frac{G r^3}{2 E W} [\varphi - \sin\varphi \cos\varphi - 2 \cos\alpha (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi)], \\ \Delta y &= \frac{G r^3}{2 E W} [\sin^2\varphi - 2 \cos\alpha (\cos\varphi + \varphi \sin\varphi - 1)]. \end{aligned} \right.$$

Hierbei sind die Constanten bereits so bestimmt, dass für  $\varphi = 0$  auch  $\Delta x = 0$  und  $\Delta y = 0$  wird. Für  $\Delta x$  wird die Constante = 0, für  $\Delta y$

aber  $= \cos \alpha$ . Die Verrückungen  $\Delta_1 x$ ,  $\Delta_1 y$  des freien Endes ( $\varphi = \alpha$ ) werden hiernach:

$$78. \quad \begin{cases} \Delta_1 x = \frac{G r^3}{2 E W} (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha), \\ \Delta_1 y = \frac{G r^3}{2 E W} (2 \cos \alpha + 3 \sin^2 \alpha - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2). \end{cases}$$

Für den Viertelkreis ( $\alpha = \frac{1}{2} \pi$ ) wird

$$79. \quad \Delta_1 x = \frac{\pi G r^3}{4 E W}, \quad \Delta_1 y = \frac{1}{2} \frac{G r^3}{E W}.$$

Die Reihenverwandlung giebt:

$$80. \quad \begin{cases} \Delta_1 x = \frac{2 G r^3 \alpha^5}{15 E W} \left(1 - \frac{4}{21} \alpha^2 + \dots\right), \\ \Delta_1 y = \frac{5 G r^3 \alpha^4}{24 E W} \left(1 - \frac{49}{150} \alpha^2 + \frac{107}{560} \alpha^4 - \dots\right). \end{cases}$$

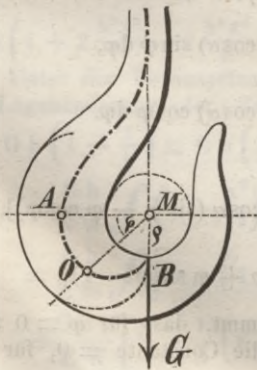
Setzt man in der ersten dieser Formeln  $r^3 = r \cdot r^2 = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{h}{\sin \alpha \cdot \tan \frac{1}{2} \alpha}\right)^2$   
 $= \frac{1 h^2}{\sin^3 \alpha \tan^2 \frac{1}{2} \alpha} = \frac{41 h^2}{\alpha^5} \left(1 + \frac{1}{3} \alpha^2 + \frac{1}{16} \alpha^4 + \dots\right)$ , und in der zweiten  $r^3$   
 $= r^2 \cdot r = \left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2 \cdot \frac{h}{\sin \alpha \tan \alpha \frac{1}{2} \alpha} = \frac{1^2 h}{\sin^3 \alpha \tan \frac{1}{2} \alpha} = \frac{2 \cdot 1^2 h}{\alpha^4} \left(1 + \frac{5}{12} \alpha^2 + \frac{71}{720} \alpha^4$   
 $+ \dots\right)$ , so ergibt sich

$$81. \quad \begin{cases} \Delta_1 x = \frac{8 G 1 h^2}{15 E W} \left(1 + \frac{1}{7} \alpha^2 + \dots\right), \\ \Delta_1 y = \frac{5 G 1^2 h}{12 E W} \left(1 + \frac{9}{100} \alpha^2 + \frac{43}{280} \alpha^4 + \dots\right). \end{cases}$$

Für  $\alpha = 0, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  ergibt sich genau  $E W \Delta_1 x = 0,5333, 0,5548, 0,6278, 0,7854 \cdot G 1 h^2$  und  $E W \Delta_1 y = 0,4167, 0,4370, 0,4573, 0,5000 \cdot G 1^2 h$ , so dass wir für alle Winkel zwischen  $0$  und  $90^\circ$  sehr nahe setzen können:

Fig. 104.

$$82. \quad \Delta_1 x = \frac{8 G 1 h^2}{15 E W}, \quad \Delta_1 y = \frac{5 G 1^2 h}{12 E W}.$$



**§. 304. Haken.** Die Querschnitte des Hakens seien ähnliche Ellipsen mit der Breite  $b$  und der Höhe  $h$ . Die innere Begrenzung sei ein Kreis mit dem Radius  $\rho$  (Fig. 104). Nahezu werden alle Querschnitte durch den Mittelpunkt  $M$  dieses Kreises gehen, was indess nur für den senkrecht zur Richtung der Kraft  $G$  stehenden Querschnitt  $A$  streng richtig ist. Setzen wir  $\angle OMA = \varphi$ , so ist

$$P = G \cos \varphi, \quad M = -G \left(\rho + \frac{1}{2} h\right) \cos \varphi.$$

Die Festigkeitsbedingung ist nun nach 37 (Seite 278), da hier  $a = \frac{1}{2} h$ ,  $e = -\left(\rho + \frac{1}{2} h\right)$  ist:

$$\frac{1}{4} (K_1, K_2) \pi b h = G \cos \varphi \left[ 1 \mp 8 \frac{2 \varrho + h}{2 \partial} + \frac{3}{2} \frac{2 \varrho + h}{2 r} \right],$$

wobei  $r$  der Krümmungsradius der Axe des Hakens ist,  $K_1$  und das obere Zeichen gelten für die äusseren,  $K_2$  und das untere Zeichen für die inneren Fasern. Der rechten Seite zufolge hat die Spannung auf der inneren Seite den grösseren absoluten Werth und zwar findet hier Zug statt. Ist  $K = \mathfrak{R}$ , so wird daher

$$83. \quad K \pi b h = 2 G \cos \varphi \frac{16 r \varrho + 10 r h + 6 \varrho h + 3 h^2}{r h}.$$

Vorläufig kann man  $r = \varrho + \frac{1}{2} h$  setzen. Alsdann wird

$$K b h^2 = 32 G \cos \varphi \frac{2 \varrho^2 + 3 \varrho h + h^2}{2 \varrho + h} = 32 G (\varrho + h) \cos \varphi.$$

Bezeichnen wir die Breite und Höhe in A mit  $b_0, h_0$ , so ist

$$84. \quad \pi K b_0 h_0^2 = 32 G (\varrho + h_0),$$

wonach bei gegebenem Verhältniss zwischen  $b_0$  und  $h_0$  die Höhe  $h_0$  zu bestimmen ist. Die Division der vorigen beiden Gleichungen giebt nun:

$$85. \quad \cos \varphi = \frac{b h^2 (\varrho + h_0)}{b_0 h_0^2 (\varrho + h)},$$

wonach man am besten für angenehme  $h$  die zugehörigen  $\varphi$  bestimmt. Construiert man hiernach den Haken, so kann man aus der Figur  $r$  genauer entnehmen und nun die Rechnung nach 83 noch einmal genauer führen.

Ist  $\partial$  die Dicke eines der Kraft  $G$  ausgesetzten und auf Zug beanspruchten Stabes mit kreisförmigem Querschnitte, so ist  $\frac{1}{4} K \pi \partial^2 = G$ ; die Division mit dieser Gleichung in die Gleichung 84 giebt

$$86. \quad b_0 h_0^2 = 8 (\varrho + h_0) \partial^2.$$

Im Querschnitte in B entstehen nur Schubspannungen. Nach 34 (Seite 193) wird für diesen Querschnitt, wenn wir dessen Höhe und Breite mit  $b_1, h_1$  bezeichnen,  $3 \pi K b_1 h_1 = 16 G$ . Die Division mit der Gleichung  $K \pi \partial^2 = 4 G$  giebt:

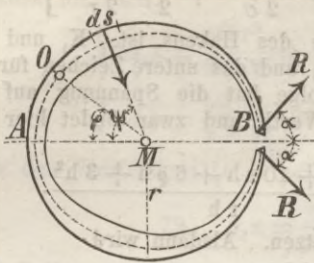
$$87. \quad 3 b_1 h_1 = 4 \partial^2.$$

Setzt man z. B.  $b = \frac{2}{3} h, h_0 = 2 \varrho$ , so wird nach 84  $\pi K h_0^3 = 72 G h_0$  oder  $h_0 = \sqrt{\frac{72 G}{\pi K}} = 4,787 \sqrt{\frac{G}{K}}$  oder nach 87  $h_1 = \partial \sqrt{2} = 1,414 \partial = \frac{1}{3} h_0$  und endlich nach 85  $\cos \varphi = \frac{3 h^2}{h_0^2 (h_0 + 2 h)}$ . Für  $h = 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 0,9, 1, h$  ergibt sich  $\varphi = 90^\circ, 89^\circ 1', 83^\circ 54', 72^\circ 53', 54^\circ 20', 38^\circ 38', 0^\circ$ ;  $r$  wird nahezu  $0,83 h_0$  anstatt  $\varrho + \frac{1}{2} h$ .

Anwendung bei Seil- und Kettenhaken etc.

**§. 305. Kolbenring.** Ein Ring mit rechteckigem Querschnitte (Fig. 105), dessen äussere Fläche einen Kreiscylinder bildet, sei in B aufgeschnitten; hier wirke auf jeden Theil eine Kraft  $R$  unter dem Winkel  $\alpha$  gegen den Durchmesser AB. Ausserdem wirke auf die äussere Fläche des Ringes senkrecht auf dieselbe ein Druck  $p$  pro Flächeneinheit des Ringes. Die Breite  $b$  des Ringes, senkrecht zur Ringebene, sei constant.

Fig. 105.



Wir stellen uns die Aufgabe, die Dicke  $\delta$  des Ringes in einem beliebigen Querschnitt O so zu bestimmen, dass die äussere Fläche des Ringes ein Kreiscylinder bleibt.

Der äussere Radius vor der Formänderung sei  $r$  und der Winkel  $\text{OMA} = \varphi$ .

Das Moment von  $R$  in Beziehung auf O ist  $-R \cos \alpha \cdot (r - \frac{1}{2} \delta) \sin \varphi - R \sin \alpha (r - \frac{1}{2} \delta) (1 + \cos \varphi) = -R (r - \frac{1}{2} \delta) [\sin \alpha + \sin(\alpha + \varphi)]$ . Auf die Bogenlänge  $ds = r d\psi$  wirkt die Kraft  $b p ds$

mit dem Momente  $b p r d\psi \cdot (r - \frac{1}{2} \delta) \sin(\psi - \varphi)$ ; daher ist die Summe der Momente der auf OB wirkenden Normalkräfte

$$= b p r \int_{\varphi}^{\pi} (r - \frac{1}{2} \delta) \sin(\psi - \varphi) d\psi, \text{ d. i. wenn wir } \frac{1}{2} \delta \text{ gegen } r \text{ als constant annehmen, } b p r (r - \frac{1}{2} \delta) (1 - \cos \varphi).$$

Demnach ist für den Punkt O, wenn wir  $\frac{1}{2} \delta$  gegen  $r$  vernachlässigen,

$$M = -R r [\sin \alpha + \sin(\alpha + \varphi)] + b p r^2 (1 + \cos \varphi).$$

Ist nun  $\varrho$  der Radius nach der Formänderung, so ist nach 27 (Seite 275):

$$E W \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} \right) = -R r [\sin \alpha + \sin(\alpha + \varphi)] + b p r^2 (1 + \cos \varphi).$$

Setzen wir hierin  $W = \frac{1}{12} b \delta^3$  und reduciren auf  $\delta$ , so ergibt sich

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{12 r \varrho}{E (r - \varrho)} [R r (\sin \alpha + \sin(\alpha + \varphi)) - b p r^2 (1 + \cos \varphi)]}.$$

Setzen wir für  $\varphi = 0$   $\delta = \delta_0$ , so wird

$$88. \quad \delta_0 = \sqrt[3]{\frac{24 r \varrho}{E (r - \varrho)} [R r \sin \alpha - b p r^2]},$$

also

$$89. \quad \frac{\delta}{\delta_0} = \sqrt[3]{\frac{R [\sin \alpha - \sin(\alpha + \varphi)] - b p r (1 + \cos \varphi)}{2 (R \sin \alpha - b p r)}}.$$

Anwendung bei Kolbenliederungsringen.

§. 306. **Spiralfeder.** Die Spiralfeder sei mit einem um seine

Fig. 106.



Axle drehbaren Cylinder A (Fig. 106) verbunden und am äusseren Ende B beliebig befestigt. Auf den Cylinder A mögen in Richtung der durch seine Mitte gelegten Coordinatenaxen die Kräfte X, Y und ein Kräftepaar mit dem Momente  $M_0$  wirken. Alsdann ist das Moment in Beziehung auf den beliebigen Punkt O der Spirale:

$$M = M_0 + X y - Y x.$$

Nach 26 (Seite 274) wird bei constantem Querschnitte die Aenderung des Winkels der Normalen in O mit der Axe der x:

$$E W \Delta \varphi = \int (M_0 + X y - Y x) ds.$$

Wir setzen sehr dichte Windungen voraus; alsdann können wir vor wie nach der Formänderung die Normale mit dem Radius vector OA zusammenfallend annehmen. Bezeichnen wir die Anomalie OAX mit  $\psi$ , ihre Aenderung mit  $\Delta\psi$ , so ist demnach  $\psi = \varphi$ ,  $\Delta\psi = \Delta\varphi$ , mithin auch für die Verdrehung des Radius vector AO:

$$E W \Delta\psi = \int (M_0 + X y - Y x) ds.$$

Bezeichnen wir ferner die Bogenlänge des Spiralstückes von A bis O mit  $s$ , die Coordinaten des Schwerpunktes dieses Stückes mit  $\xi$ ,  $\eta$ , so ist  $\int ds = s$ ,  $\int x ds = s \xi$ ,  $\int y ds = s \eta$ , mithin

$$E W \Delta\psi = (M_0 + X \eta - Y \xi) s + C.$$

Die ganze Länge der Feder sei  $b$ , die Coordinaten des Schwerpunktes derselben  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ . Für  $s = l$  muss  $\Delta\psi = 0$  werden, daher  $0 = (M_0 + X \eta_1 - Y \xi_1) l + C$ , mithin

$$90. \Delta\psi = - \frac{M_0(l-s) + X(\eta_1 l - \eta s) - Y(\xi_1 l - \xi s)}{E W}.$$

Ist  $\Delta_0\psi$  die Verdrehung des Cylinders A ( $s = 0$ ), so wird

$$91. \Delta_0\psi = - \frac{M_0 + X \eta_1 - Y \xi_1}{E W} l.$$

Da wir sehr dichte Windungen voraussetzen, so fällt der Schwerpunkt der ganzen Spirale fast genau in das Centrum A; es ist also sehr nahe  $\xi_1 = 0$ ,  $\eta_1 = 0$ , mithin sehr einfach:

$$92. \Delta_0\psi = - \frac{M_0 l}{E W}.$$

Die Verdrehung ist hiernach proportional dem verdrehenden Momente und der Länge der Spirale.

Anwendung bei Spiralfedern für Schwungradhemmungen und als Uhrmotoren.

## XXXV. Kapitel.

### Bogenträger mit Kämpfergelenken im Allgemeinen.

**§. 307. Einleitung.** Wir setzen in diesem Kapitel voraus, dass die Bogenenden oder die Kämpfer um Gelenke oder Charniere drehbar seien, deren Axe durch die Schwerpunkte der Endquerschnitte gehen. Alsdann gehen auch die Drücke, welche die Widerlager auf den Bogen ausüben, und welche wir Kämpferdrücke nennen, durch die Schwerpunkte der Endquerschnitte. Als äussere Kräfte treten die Lasten und die Kämpferdrücke auf; die ersteren setzen wir als vertical wirkend voraus. Die Horizontalcomponenten der Kämpferdrücke müssen alsdann, damit der ganze Bogen im Gleichgewichte ist, gleich sein; wir nennen diese Horizontalcomponenten den Horizontalschub.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

D, D' die in den Enden A, B (Fig. 107) wirkenden Kämpferdrücke;

V, V' die Verticalcomponenten derselben;

H die Horizontalcomponente derselben oder den Horizontalschub;

a die halbe Spannweite;

h die Bogen- oder Stichhöhe;

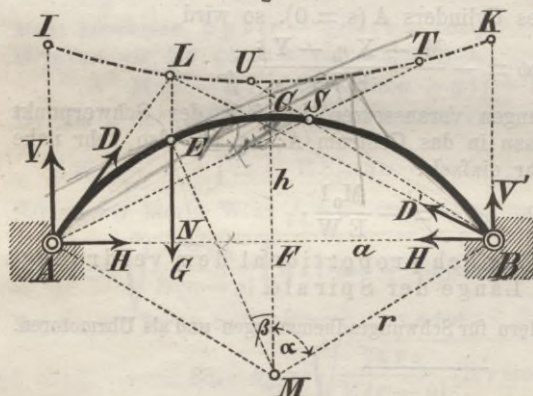
$\alpha$  den halben Centriwinkel des Bogens, falls derselbe kreisförmig ist. Den Koordinatenanfang legen wir durch den obersten Punkt oder den Scheitel und zwar die Axe der x horizontal, die der y vertical. Der Winkel, welchen die Tangente im beliebigen Punkte O mit der Axe der x oder der Krümmungsradius mit der Axe der y bildet, sei  $\varphi$ .

Anwendung findet die zu gebende Theorie bei allen Bogenträgern im Hoch- und Brückenbaue.

### A. Einfluss einer isolirten Last.

**§. 308. Die äusseren Kräfte im Allgemeinen.** Wir setzen jetzt voraus, dass eine einzige isolirte Last G im beliebigen Punkte E (Fig.

Fig. 107.



107) wirksam sei. Der Horizontalabstand FN der Last vom Scheitel sei  $= \xi$ , der entsprechende Centriwinkel CME  $= \beta$ . Die Gleichgewichtsbedingungen für den ganzen Bogen sind alsdann:

$$\begin{aligned} V + V' &= G, \\ Va - V'a - G\xi &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$93. \quad \begin{cases} V = G \frac{a + \xi}{2a}, \\ V' = G \frac{a - \xi}{2a} \end{cases}$$

und im Falle eines kreisförmigen Bogens, da alsdann  $a = r \sin \alpha$ ,  $\xi = r \sin \beta$  ist

$$94. \quad V = G \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2 \sin \alpha}, \quad V' = G \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2 \sin \alpha}.$$

Wir bezeichnen innerhalb der Strecke AE Alles ohne Apostroph, innerhalb der Strecke BE Alles mit Apostroph, z. B. P, P'; M, M' etc. Für einen beliebigen Punkt O ergibt sich leicht, je nachdem derselbe innerhalb der Strecke AE oder BE liegt:

$$95. \quad \begin{cases} P = -H \cos \varphi - V \sin \varphi, & P' = -H \cos \varphi + V' \sin \varphi, \\ Q = -H \sin \varphi + V \cos \varphi, & Q' = -H \sin \varphi - V' \cos \varphi; \end{cases}$$

$$96. \quad M = H(h - y) - V(a - x), \quad M' = H(h - y) - V'(a + x).$$

Im Falle eines kreisförmigen Bogens wird auch, da  $a = r \sin \alpha$ ,  $h = r(1 - \cos \alpha)$ ,  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = r(1 - \cos \varphi)$  ist,

$$97. \quad \begin{cases} M = Hr(\cos \varphi - \cos \alpha) - Vr(\sin \alpha - \sin \varphi), \\ M' = Hr(\cos \varphi - \cos \alpha) - V'r(\sin \alpha + \sin \varphi). \end{cases}$$

Mit Benutzung der Figur erhält man  $P, Q$  am besten durch Zerlegung von  $D$  oder  $D'$  nach Richtung der Tangente und des Radius, sowie das Moment  $M$  durch numerische oder graphische Multiplication von  $D$  oder  $D'$  mit dem Abstände dieser Kämpferdrücke von dem betreffenden Punkte. Innerhalb der Strecke  $AE$  ist  $D$ , innerhalb der Strecke  $BE$  dagegen  $D'$  zu benutzen. In den Punkten, in welchen die Bogenaxe von den Richtungen der Kämpferdrücke geschnitten wird, ist  $M = 0$ .

Hat man auch noch die Kernlinien (siehe §. 288) construirt, so ist es leicht, nach 22 (§. 288) die Spannung in den gespanntesten Fasern zu bestimmen. Als Kraft  $R$  tritt hier für Querschnitte innerhalb  $AE$  die Kraft  $D$ , für Querschnitte innerhalb  $BE$  die Kraft  $D'$  auf.

**§. 309. Kämpferdrucklinie.** Die Richtungen der Kämpferdrücke  $D, D'$  und der Last  $G$  schneiden sich in ein und demselben Punkte  $L$  (Fig. 107), da sonst der Bogen, auf welchen nur die drei Kräfte  $D, D', G$  wirken, nicht im Gleichgewicht wäre.

Bei veränderlicher Lage der Last  $G$  beschreibt der Durchschnittspunkt  $L$  eine Linie  $JLK$ , welche wir die Kämpferdrucklinie nennen und deren Gestalt in der Folge bestimmt werden soll. Ist dieselbe construirt, so ist es leicht, für eine gegebene Lage der Last  $G$  die Kämpferdrücke  $D, D'$  zu construiren, indem man die Richtung von  $G$  bis zum Durchschnitt  $L$  mit der Kämpferdrucklinie verlängert,  $G$  nach  $L$  verlegt und hier nach Richtung von  $LA$  und  $LB$  in zwei Componenten zerlegt, welche die gewünschten Kämpferdrücke sind.

Mit Hilfe der Kämpferdrucklinie ist es ferner sehr leicht, das Vorzeichen des Momentes zu bestimmen, was in manchen Fällen, namentlich zur Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise, von Wichtigkeit ist. Handelt es sich z. B. um den Querschnitt  $S$ , so ziehe man durch  $S$  eine Gerade nach den Kämpfern  $A, B$ , deren Verlängerung die Kämpferdrucklinie in  $T$  und  $U$  schneide. Liegt die Last  $G$  nun zwischen  $T$  und  $S$ , so geht  $D$  links bei  $S$  vorbei,  $M$  krümmt also den Bogen nach aussen; liegt  $G$  zwischen  $S$  und  $U$ , so geht  $D'$  rechts bei  $S$  vorbei, krümmt also den Bogen ebenfalls nach aussen. Liegt dagegen die Last links von  $T$ , so geht  $D$  rechts bei  $S$  vorbei, krümmt also den Bogen nach innen etc. Nehmen wir nach aussen und innen krümmende Momente bezüglich als positiv und negativ, so erzeugen hiernach alle Lasten, welche zwischen  $U$  und  $T$  liegen, in  $S$  ein positives Moment; alle innerhalb  $JU$  und  $TK$  liegenden Lasten dagegen in  $S$  ein negatives Moment.

Sind die Kernlinien vorhanden, so kann man in gleicher Weise leicht bestimmen, ob die Spannung der gespanntesten Fasern ein Zug oder Druck ist. Handelt es sich z. B. um die obere Fasern, so zieht man durch den Durchschnittspunkt  $S_2$  des Querschnittes in  $S$  mit der untern Kernlinie oder durch den untern Kernpunkt nach  $A$  und  $B$  Gerade, welche die Kämpferdrucklinie in  $T_2, U_2$  schneiden mögen. Wie vorhin lässt sich leicht nachweisen, dass jede Last, welche innerhalb  $U_2T_2$  liegt, in den oberen Fasern einen Druck, jede Last, welche innerhalb  $JU_2$  oder  $T_2K$  liegt, in den oberen Fasern einen Zug erzeugt.

Für die untern Fasern zieht man durch den oberen Kernpunkt  $S_1$  nach  $A$  und  $B$  Gerade, welche die Kämpferdrucklinie in  $T_1, U_1$  schneiden mögen. Alle Lasten, welche innerhalb  $U_1T_1$  liegen, erzeugen in den

untern Fasern einen Zug, alle Lasten, welche innerhalb  $JU_1$ ,  $T_1K$  liegen, einen Druck.

Hiernach ist es sehr leicht, die gefährlichste Lage der Last bei Belastung einer Brücke durch Eisenbahnzüge etc. zu bestimmen. Die Spannung wird offenbar am grössten, wenn nur alle diejenigen Stellen belastet sind, deren Belastung in dem betreffenden Querschnitte auf der fraglichen Seite desselben entweder einen Druck oder Zug (bei den Brücken fast stets einen Druck) erzeugt. Man kann aber auch leicht die grössten Spannungen selbst construiren. Weitere Erörterungen gehören mehr in den Brückenbau.

**§. 310. Beanspruchung durch eine isolirte Last.** P wird zum Maximum in denjenigen Punkten des Bogens, für welche die Tangente parallel zu den Kämpferdrücken ist. Für diese Punkte wird aber auch gleichzeitig M zum analytischen Maximum; hier muss also auch die Spannung der gespanntesten Faser ein analytisches Maximum werden. Zum wirklichen Maximum kann aber die Spannung der gespanntesten Faser auch für den Angriffspunkt E der Last werden, da sich hier das Gesetz für P und M ändert. Der gefährliche Querschnitt liegt also bei constantem Querschnitte entweder in den Punkten, für welche die Tangente parallel zu AC, BC ist, oder in E. Wir bezeichnen für diese drei Punkte Alles bezüglich durch den Index 1, 2, 3. P hat für einen Querschnitt, welcher dicht links und rechts neben E liegt, einen andern Werth; derselbe sei bezüglich  $P_3$ ,  $P'_3$ . Alsdann wird

$$\tan \varphi_1 = \frac{V}{H}, \quad \tan \varphi_2 = \frac{V'}{H}, \quad \varphi_3 = \beta.$$

Ist die Axe des Bogens eine Parabel, deren Scheitel im Scheitel des Bogens liegt, so ist  $y = \frac{h}{a^2} x^2$ ,  $\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{2h}{a^2} x$ . Dies in die vorigen Gleichungen eingesetzt, giebt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{V a^2}{2 H h}, & x_2 &= -\frac{V' a^2}{2 H h}, & x_3 &= \xi; \\ y_1 &= \frac{V^2 a^2}{4 H^2 h}, & y_2 &= \frac{V'^2 a^2}{4 H^2 h}, & y_3 &= \frac{h \xi^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Nach 95 und 96 wird nun,

$$98. \quad \left\{ \begin{aligned} P_1 &= -\sqrt{V^2 + H^2}, & P_2 &= -\sqrt{V'^2 + H^2}, \\ P_3 &= -V \sin \beta - H \cos \beta = -\frac{H a^2 + 2 V h \xi}{\sqrt{a^4 + 4 h^2 \xi^2}}, \\ P'_3 &= -V' \sin \beta + H \cos \beta = -\frac{H a^2 - 2 V' h \xi}{\sqrt{a^4 + 4 h^2 \xi^2}}. \end{aligned} \right.$$

$$99. \quad \left\{ \begin{aligned} M_1 &= r \sqrt{V^2 + H^2} + V r \sin \alpha - H r \cos \alpha = \frac{V^2 a^2}{4 H h} - V a + H h, \\ M_2 &= r \sqrt{V'^2 + H^2} - V' r \sin \alpha - H r \cos \alpha = \frac{V'^2 a^2}{4 H h} - V' a + H h, \\ M_3 &= H r (\cos \beta - \cos \alpha) - V r (\sin \alpha - \sin \beta) = H h \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right) - V (a - \xi). \end{aligned} \right.$$

Die Ausdrücke für  $P_1$ ,  $P_2$  und die ersten Ausdrücke für  $P_3$  gelten allge-

mein, die ersten Ausdrücke für  $M$  nur für den Kreisbogen; die zweiten Ausdrücke für  $P_3$  und  $M$  aber nur für die Parabel.

Liegt, wie wir voraussetzen, die Last auf der linken Bogenhälfte, so ist  $V > V'$ , also  $P_1 > P_2$ ; ausserdem ist  $P_3 > P'_3$ , wenn wir nur den absoluten Werth im Auge haben.  $M_1$  und  $M_2$  ergeben sich stets positiv oder den Bogen nach einwärts krümmend;  $M_3$  dagegen negativ oder den Bogen nach auswärts krümmend. Unter Umständen kann aber  $x_1 > a$  ausfallen, so dass alsdann  $P_1$  und  $M_1$  keine Bedeutung haben.

**§. 311. Einfluss einer gleichmässigen Belastung.** Wir wollen im Folgenden die beiden Fälle in Betracht ziehen, dass die Last

gleichmässig über der Horizontalprojection und gleichmässig über die Bogenlänge vertheilt sei. Die Last pro Längeneinheit sei bezüglich  $q$  und  $g$ .

a) Die Last ist gleichmässig über die Horizontalprojection vertheilt. Die Last zwischen  $A$  und einem beliebigen Punkte  $O$  (Fig. 108) ist  $= q(a-x)$ , daher ist  $P = -H \cos \varphi - V \sin \varphi + q(a-x) \sin \varphi$ ,  $Q = -H \sin \varphi + V \cos \varphi$

$- q(a-x) \cos \varphi$ ,  $M = H(h-y) - V(a-x) + \frac{1}{2} q(a-x)^2$ . Hier ist  $V$  gleich der halben Last, also  $V = q a$ . Daher wird

$$100. \quad \begin{cases} P = -H \cos \varphi - q x \sin \varphi, \\ Q = -H \sin \varphi + q x \cos \varphi, \\ M = H(h-y) - \frac{1}{2} q(a^2 - x^2). \end{cases}$$

Für den Kreisbogen wird  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = r(1 - \cos \varphi)$ ,  $a = r \sin \alpha$ ,  $h = r(1 - \cos \alpha)$ , mithin

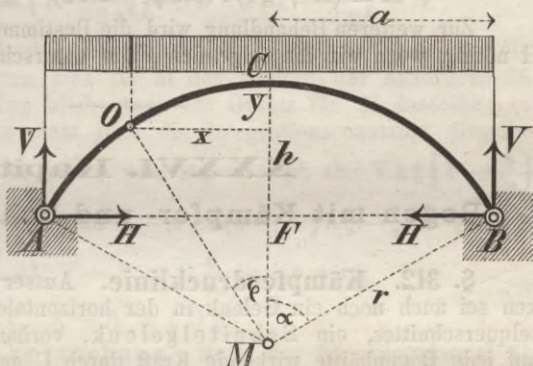
$$101. \quad \begin{cases} P = -H \cos \varphi - q r \sin^2 \varphi, \\ Q = -H \sin \varphi + q r \sin \varphi \cos \varphi, \\ M = H(\cos \varphi - \cos \alpha) - \frac{1}{2} q r^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi). \end{cases}$$

Nach 3 (Seite 269) wird  $M$  zum Maximum, wenn  $Q = 0$  ist, also für  $\varphi = 0$  oder für  $\cos \varphi = \frac{H}{qr}$  und zwar wird, wenn wir die entsprechenden  $M$  mit  $M_0$  und  $M_1$  bezeichnen,

$$102. \quad \begin{cases} M_0 = H(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} q r^2 \sin^2 \alpha, \\ M_1 = \frac{H^2}{2q} - H r \cos \alpha + \frac{1}{2} q r^2 \cos^2 \alpha. \end{cases}$$

$P$  dagegen wird für  $\cos \varphi = \frac{H}{2qr}$  zum analytischen Maximum, zum wirklichen aber meist für  $\varphi = \alpha$ , da für flache Bögen das  $\varphi$ , welches die vorige Gleichung giebt,  $> \alpha$  ist.

Fig. 108.



b) Die Last ist gleichmässig über den Bogen vertheilt. Die Last zwischen A und einem beliebigen Punkte O ist  $g \cdot AO$ , d. i. für den Kreisbogen  $= gr(\alpha - \varphi)$ . Daher ist  $P = -H \cos \varphi - V \sin \varphi + gr(\alpha - \varphi) \cos \varphi$ . Auf ein Bogenelement mit dem Centriwinkel  $d\psi$  wirkt die Last  $gr d\psi$ , daher ist das Moment der zwischen A und O liegenden

Last in Beziehung auf O  $= \int^{\psi} gr d\psi \cdot r (\sin \psi - \sin \varphi) = -gr^2[(\alpha - \varphi) \sin \varphi + \cos \alpha - \cos \varphi]$ , also  $M = H(h - y) - V(a - x) - gr^2[(\alpha - \varphi) \sin \varphi + \cos \alpha - \cos \varphi]$ . Daher wird, wenn wir noch  $V = gr\alpha$  setzen,

$$103. \quad \begin{cases} P = -H \cos \varphi - gr\varphi \sin \varphi, \\ Q = -H \sin \varphi + gr\varphi \cos \varphi, \\ M = (H + gr)r(\cos \varphi - \cos \alpha) - gr^2(\alpha \sin \alpha - \varphi \sin \varphi). \end{cases}$$

Zur weiteren Behandlung wird die Bestimmung des Horizontalschubes H nöthig, wozu wir die folgenden Fälle unterscheiden wollen.

## XXXVI. Kapitel.

### Bogen mit Kämpfer- und Scheitelgelenken.

§. 312. **Kämpferdrucklinie.** Ausser den beiden Kämpfergelenken sei auch noch ein Gelenk in der horizontalen Schweraxe C des Scheitelquerschnittes, ein Scheitelgelenk, vorhanden. Alsdann muss die auf jede Bogenhälfte wirkende Kraft durch C gehen. Setzen wir in Formel 96 das Moment  $M'$  für den Scheitel ( $x = 0, y = 0$ ) gleich Null, indem wir voraussetzen, dass die Last G in der linken Bogenhälfte AC liege, so giebt die Reduction auf H:  $H = V' \frac{a}{h}$ , oder, wenn wir für  $V'$  den Werth 93 einsetzen,

$$104. \quad H = G \frac{a - \xi}{2h}.$$

Liegt die Last links von C, so wirkt auf die rechte Bogenhälfte nur der Kämpferdruck  $D'$ , dessen Richtung nach dem Gesagten durch C gehen muss. Der Durchschnittspunkt L der Kämpferdrücke liegt also in der Verlängerung von BC. Hieraus folgt: dass die Kämpferdrucklinie aus zwei Geraden besteht, welche durch den Scheitel und durch die Kämpfer gehen (Tafel XII. Fig. 1).

Ferner lässt sich leicht nachweisen, dass die Endpunkte der den Stützendruck repräsentirenden Geraden bei veränderlicher Lage der Last auf zwei zu AC und BC parallelen Geraden liegen (Taf. XII. Fig. 2). Hiernach wird die Construction äusserst einfach.

§. 313. **Formänderung eines parabolischen Bogens durch eine isolirte Last.** Wir setzen

$$y = \frac{h}{a^2} x^2, \quad dy = \frac{2h}{a^2} x dx$$

und annähernd  $ds = dx$ .

a) Lagenänderung der Tangente. Nach der Näherungsformel 26 (Seite 274) wird für einen Punkt innerhalb der Strecke AE, wenn wir für M den ersten der Ausdrücke 96 einsetzen,

$$E W \Delta \varphi = \int \left[ H h \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - V (a - x) \right] dx.$$

Die Ausführung der Integration giebt die erste der folgenden Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} E W \Delta \varphi = H h x \left( 1 - \frac{x^2}{3 a^2} \right) - V a x \left( 1 - \frac{x}{2 a} \right) + A, \\ E W \Delta \varphi' = H h x \left( 1 - \frac{x^2}{3 a^2} \right) - V' a x \left( 1 + \frac{x}{2 a} \right) + A', \\ E W \Delta \varphi'' = H h x \left( 1 - \frac{x^2}{3 a^2} \right) - V' a x \left( 1 + \frac{x}{2 a} \right) + A''. \end{array} \right.$$

Die zweite und dritte Gleichung ergeben sich in gleicher Weise für die Strecken EC und CB, wenn man für M den zweiten der Ausdrücke 96 einsetzt. In beiden Strecken bleibt zwar das Gesetz für M dasselbe; es liegt indess kein Grund vor, dass auch die Integrationsconstante dieselbe sei. Für den Punkt E, also für  $x = \xi$ , wird  $\Delta \varphi = \Delta \varphi'$ , also  $V a \xi \left( 1 - \frac{\xi}{2a} \right) + A = V' a \xi \left( 1 + \frac{\xi}{2a} \right) + A'$ , mithin  $A - A' = (V - V') a \xi - \frac{1}{2} (V + V') \xi$ .

Da  $V + V' = G$  und nach 93  $V - V' = G \frac{\xi}{a}$  ist, so wird:

$$I. \quad A - A' = \frac{1}{2} G \xi^2.$$

b) Horizontale Verrückung. Nach der Näherungsformel 31 (Seite 276) wird nun für einen Punkt innerhalb der Strecke AC:

$$E W \Delta x = - \frac{2 h}{a^2} \int \left[ H h x \left( 1 - \frac{x^2}{3 a^2} \right) - V a x \left( 1 - \frac{x}{2 a} \right) + A \right] x dx.$$

Die Ausführung der Integration giebt die erste der Gleichungen:

$$105. \quad \left\{ \begin{array}{l} E W \Delta x = - \frac{2 h}{a^2} \left[ \frac{1}{3} H h x^3 \left( 1 - \frac{x^2}{5 a^2} \right) - \frac{1}{3} V a x^3 \left( 1 - \frac{3 x}{8 a} \right) + \frac{1}{2} A x^2 + B \right], \\ E W \Delta x' = - \frac{2 h}{a^2} \left[ \frac{1}{3} H h x^3 \left( 1 - \frac{x^2}{5 a^2} \right) - \frac{1}{3} V' a x^3 \left( 1 + \frac{3 x}{8 a} \right) + \frac{1}{2} A' x^2 + B' \right], \\ E W \Delta x'' = - \frac{2 h}{a^2} \left[ \frac{1}{3} H h x^3 \left( 1 - \frac{x^2}{5 a^2} \right) - \frac{1}{3} V' a x^3 \left( 1 + \frac{3 x}{8 a} \right) + \frac{1}{2} A'' x^2 + B'' \right]. \end{array} \right.$$

Die zweite und dritte Gleichung ergeben sich in gleicher Weise für die Strecken EC und CB. Für  $x = \xi$  wird  $\Delta x = \Delta x'$ , mithin  $B - B' = \frac{1}{3} (V - V') a \xi^3 - \frac{1}{8} (V + V') \xi^4 - \frac{1}{2} (A - A') \xi^2$ , d. i.

$$II. \quad B - B' = - \frac{1}{24} G \xi^4.$$

Für den Scheitel, also für  $x = 0$ , wird  $\Delta x' = \Delta x''$ , also

$$III. \quad B' = B''.$$

Für den Kämpfer A, also für  $x = a$  wird  $\Delta x = 0$  und für den Kämpfer B, also für  $x = -a$  wird  $\Delta x'' = 0$ , mithin, wenn wir  $B'$  für  $B''$  setzen,

$$\begin{aligned} \frac{4}{15} H a^3 h - \frac{5}{24} V a^4 + \frac{1}{2} A a^2 + B &= 0, \\ - \frac{4}{15} H a^3 h + \frac{5}{24} V' a^4 + \frac{1}{2} A' a^2 + B' &= 0. \end{aligned}$$

Die Addition und Subtraction dieser Gleichungen giebt, wenn man  $V + V' = G$ ,  $(V - V')a = G\xi$  setzt,

$$\text{IV. } \frac{5}{24} G a^3 \xi - \frac{1}{2} (A + A'') a^2 - (B + B') = 0.$$

$$\text{V. } \frac{8}{15} H a^3 h - \frac{1}{24} G (5 a^4 + \xi^4) + \frac{1}{2} (A - A'') a^2 = 0.$$

c) Verticale Verrückung. Nach der Näherungsformel 31 (Seite 276) wird ferner für einen Punkt innerhalb der Strecke AC

$$E W \Delta y = \int \left[ H h x \left( 1 - \frac{x^2}{3 a^2} \right) - V a x \left( 1 - \frac{x}{2 a} \right) + A \right] dx.$$

Die Ausführung der Integration giebt die erste der folgenden Gleichungen:

$$106. \begin{cases} E W \Delta y = \frac{1}{2} H h x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{6 a^2} \right) - \frac{1}{2} V a x^2 \left( 1 - \frac{x}{3 a} \right) + A x + C, \\ E W \Delta y' = \frac{1}{2} H h x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{6 a^2} \right) - \frac{1}{2} V' a x^2 \left( 1 + \frac{x}{3 a} \right) + A' x + C', \\ E W \Delta y'' = \frac{1}{2} H h x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{6 a^2} \right) - \frac{1}{2} V'' a x^2 \left( 1 + \frac{x}{3 a} \right) + A'' x + C''. \end{cases}$$

Für  $x = \xi$  wird  $\Delta y = \Delta y'$ , daher  $C - C' = \frac{1}{2} (V - V') a \xi^2 - \frac{1}{6} (V + V') \xi^2 - (A - A') \xi$ , d. i.

$$\text{VI. } C - C' = -\frac{1}{6} G \xi^3.$$

Für  $x = 0$  muss  $\Delta y' = \Delta y''$  werden, mithin

$$\text{VII. } C' = C''.$$

Endlich wird für  $x = a$   $\Delta y = 0$  und für  $x = -a$   $\Delta y'' = 0$ , mithin

$$\frac{5}{12} H a^2 h - \frac{1}{3} V a^3 + A a + C = 0,$$

$$\frac{5}{12} H a^2 h - \frac{1}{3} V' a^3 - A'' a + C' = 0.$$

Die Addition und Subtraction dieser Gleichungen giebt:

$$\text{VIII. } \frac{5}{6} H a^2 h - \frac{1}{3} G a^3 + (A - A'') a + (C + C') = 0,$$

$$\text{IX. } \frac{1}{6} G \xi (2 a^2 + \xi^2) - (A + A'') a = 0.$$

d) Bestimmung der Constanten. Durch die neun Gleichungen I bis IX sind die neun Constanten  $A, A', A'', B, B', B'', C, C', C''$  bestimmt. Zunächst ergibt sich aus Gleichung V und IX

$$a. \begin{cases} A = -\frac{8}{15} H a h + \frac{1}{24} G \frac{5 a^4 + 4 a^3 \xi + 2 a \xi^3 + \xi^4}{a^2}, \\ A'' = +\frac{8}{15} H a h - \frac{1}{24} G \frac{5 a^4 - 4 a^3 \xi - 2 a \xi^3 + \xi^4}{a^2}, \end{cases}$$

d. i. nach Einsetzung des Ausdrucks 104 für H

$$107. \begin{cases} A = -G \frac{7 a^4 - 52 a^3 \xi - 10 a \xi^3 - 5 \xi^4}{120 a^2}, \\ A'' = +G \frac{7 a^4 - 12 a^3 \xi + 10 a \xi^3 - 5 \xi^4}{120 a^2}. \end{cases}$$

Nach I wird nun

$$A' = -G \frac{7 a^4 - 52 a^3 \xi + 60 a^2 \xi^2 - 10 a \xi^3 - 5 \xi^4}{120 a^2}.$$

Aus II, IV, IX und III folgt ferner leicht

$$108. \quad \begin{cases} B = \frac{1}{48} G \xi (a^3 - 2 a \xi^2 - \xi^3), \\ B' = B'' = \frac{1}{48} G \xi (a^3 - 2 a \xi^2 + \xi^3). \end{cases}$$

Endlich geben die Gleichungen VI, VIII, VII und V

$$b. \quad \begin{cases} C = \frac{7}{60} H a^2 h - \frac{G}{24 a} (a^4 + 2 a \xi^3 + \xi^4), \\ C' = C'' = \frac{7}{60} H a^2 h - \frac{G}{24 a} (a^4 + 2 a \xi^3 + \xi^4), \end{cases}$$

d. i. nach Einsetzung des Ausdruckes von H:

$$109. \quad \begin{cases} C = G \frac{2 a^4 - 7 a^3 \xi - 10 a \xi^3 - 5 \xi^4}{120 a}, \\ C' = C'' = G \frac{2 a^4 - 7 a^3 \xi + 10 a \xi^3 - 5 \xi^4}{120 a}. \end{cases}$$

Somit ist nun die Formänderung vollständig bestimmt. Wir wollen diese Formeln speciell auf die Verrückung des Scheitels anwenden.

e) Verrückung des Scheitels. Als Verrückungen  $\Delta_0 x$ ,  $\Delta_0 y$  des Scheitels ergeben sich, wenn wir in den Ausdrücken für  $\Delta x'$ ,  $\Delta y'$   $x = 0$  setzen,  $\Delta_0 x = -\frac{2 B' h}{a^2}$ ,  $\Delta_0 y = C'$ , d. i.

$$110. \quad \begin{cases} \Delta_0 x = -\frac{1}{24} \frac{G}{E W} \frac{h \xi (a^3 - 2 a \xi^2 + \xi^3)}{a^2}, \\ \Delta_0 y = +\frac{1}{120} \frac{G}{E W} \frac{2 a^4 - 7 a^3 \xi + 10 a \xi^3 - 5 \xi^4}{a}. \end{cases}$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

$\xi$	$\Delta_0 x$	$\Delta_0 y$	$\xi$	$\Delta_0 x$	$\Delta_0 y$
0	0	0,01667	0,5	0,01302	-0,00469
0,1	0,00409	+0,01091	0,6	0,01240	-0,00573
0,2	0,00773	+0,00560	0,7	0,01059	-0,00559
0,3	0,01059	+0,00108	0,8	0,00773	-0,00440
0,328	0,01121	0	0,9	0,00409	-0,00242
0,4	0,01240	-0,00240	1,0	0	0
$\cdot a$	$\frac{G a^2 h}{E W}$	$\frac{G a^3}{E W}$	$\cdot a$	$\frac{G a^2 h}{E W}$	$\frac{G a^3}{E W}$

Die grösste verticale Verrückung tritt ein, wenn die Last im Scheitel liegt. Die grösste horizontale Verrückung tritt ein für  $\xi = \frac{1}{2} a$ . Die Maxima selbst sind

$$111. \quad \max \Delta_0 x = -\frac{5 G a^2 h}{384 E W}, \quad \max \Delta_0 y = \frac{G a^3}{60 E W}.$$

Die Vergleichung mit 37 (Seite 85) zeigt, dass die grösste Senkung  $\frac{1}{10}$  von der Senkung eines gleich starken geraden Stabes ist, welcher an den Enden auf Stützen ruht und in der Mitte belastet ist.

Alle Lasten, welche zwischen  $x = 0,328 a$  und  $x = -0,328 a$  liegen,

erzeugen eine Senkung des Scheitels; Lasten, welche an anderen Stellen liegen, aber eine Hebung desselben.

Hiernach ist es leicht, die für die Verrückung ungünstigste Belastungsweise bei Brücken zu bestimmen.

### §. 314. Formänderung eines kreisförmigen Bogens durch eine isolirte Last.

a) Längenänderung. Nach 7 Seite 270 wird, wenn wir für P, M die Ausdrücke 95 und 97 setzen

$$112. \quad \begin{cases} E F \frac{\Delta ds}{ds} = -H \cos \alpha - V \sin \alpha, \\ E F \frac{\Delta ds'}{ds} = -H \cos \alpha - V' \sin \alpha. \end{cases}$$

Die relative Längenänderung ist also innerhalb jedes der Theile AE, BE constant. Setzen wir für H, V, V' die Ausdrücke 104 und 94, so ergibt sich:

$$113. \quad \begin{cases} E F \frac{\Delta ds}{ds} = -G \frac{\sin \alpha + \sin \beta - 2 \cos \alpha \sin \beta}{2(1 - \cos \alpha)}, \\ E F \frac{\Delta ds'}{ds} = -G \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2(1 - \cos \alpha)}. \end{cases}$$

b) Lagenänderung der Tangente. Nach 25 (Seite 274) wird, wenn wir  $\mathfrak{B} = W$  und mit Rücksicht darauf, dass  $\Delta ds$  constant ist,

$$\Delta s = \int d \Delta s = \int \frac{\Delta ds}{ds} ds = \frac{\Delta ds}{ds} s = \frac{\Delta ds}{ds} r \varphi \text{ setzen,}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{r^2}{E W} \int \left[ H (\cos \varphi - \cos \alpha) - V (\sin \alpha - \sin \varphi) \right] d\varphi + \frac{\Delta ds}{ds} \varphi \\ &= \frac{r^2}{E W} \left[ H (\sin \varphi - \varphi \cos \alpha) - V (\varphi \sin \alpha + \cos \varphi) \right] - \frac{1}{E F} (H \cos \alpha + V \sin \alpha) \varphi + A. \end{aligned}$$

Die Ausführung der Integration giebt, wenn wir zur Abkürzung  $\frac{W}{F r^2} = \kappa$  setzen, die erste der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} E W \Delta \varphi &= r^2 [H (\sin \varphi - \varphi \cos \alpha) - V (\varphi \sin \alpha + \cos \varphi)] - \kappa r^2 (H \cos \alpha + V \sin \alpha) \varphi + A, \\ E W \Delta \varphi' &= r^2 [H (\sin \varphi - \varphi \cos \alpha) - V' (\varphi \sin \alpha - \cos \varphi)] - \kappa r^2 (H \cos \alpha + V' \sin \alpha) \varphi + A', \\ E W \Delta \varphi'' &= r^2 [H (\sin \varphi - \varphi \cos \alpha) - V' (\varphi \sin \alpha - \cos \varphi)] - \kappa r^2 (H \cos \alpha + V' \sin \alpha) \varphi + A''. \end{aligned}$$

Die zweite und dritte Gleichung ergibt sich in gleicher Weise für die Strecken EC und CB. Für den Punkt E, d. i. für  $\varphi = \beta$ , wird  $\Delta \varphi = \Delta \varphi'$ , also  $-V r^2 (\beta \sin \alpha + \cos \beta) - \kappa V r^2 \beta \sin \alpha + A = -V' r^2 (\beta \sin \alpha - \cos \beta) - \kappa V' r^2 \beta \sin \alpha + A'$ , also  $A - A' = (V - V') r^2 \beta \sin \alpha + (V + V') r^2 \cos \beta + \kappa (V - V') r^2 \beta \sin \alpha$ . Nun aber ist  $V + V' = G$  und nach 94  $V - V' = G \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ , mithin wird

$$I. \quad A - A' = G r^2 [\cos \beta + (1 + \kappa) \beta \sin \beta].$$

c) Horizontale Verrückung. Nach 29 (Seite 276) wird nun, da  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = r (1 - \cos \varphi)$ ,  $dx = r \cos \varphi d\varphi$ ,  $dy = r \sin \varphi d\varphi$  ist,

$$E W \Delta x = -r \int [H r^2 (\sin \varphi - \varphi \cos \alpha) - V r^2 (\varphi \sin \alpha + \cos \varphi) - \kappa r^2 (H \cos \alpha + V \sin \alpha) \varphi + A] \sin \varphi d\varphi - \kappa r^2 \int (H \cos \alpha + V \sin \alpha) \cos \varphi d\varphi.$$

Die Ausführung der Integration giebt die erste der folgenden Gleichungen:

$$114. \left\{ \begin{aligned} E W \Delta x &= -r^3 \left[ H \left( \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi + \varphi \cos \alpha \cos \varphi \right) \right. \\ &\quad \left. - V (\sin \alpha \sin \varphi - \varphi \sin \alpha \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi) \right] \\ &\quad - \kappa r^3 (H \cos \alpha + V \sin \alpha) \varphi \cos \varphi - A r (1 - \cos \varphi) + B, \\ E W \Delta x' &= -r^3 \left[ H \left( \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi + \varphi \cos \alpha \cos \varphi \right) \right. \\ &\quad \left. - V' (\sin \alpha \sin \varphi - \varphi \sin \alpha \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi) \right] \\ &\quad - \kappa r^3 (H \cos \alpha + V' \sin \alpha) \varphi \cos \varphi - A' r (1 - \cos \varphi) + B', \\ E W \Delta x'' &= -r^3 \left[ H \left( \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi + \varphi \cos \alpha \cos \varphi \right) \right. \\ &\quad \left. - V'' (\sin \alpha \sin \varphi - \varphi \sin \alpha \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi) \right] \\ &\quad - \kappa r^3 (H \cos \alpha + V'' \sin \alpha) \varphi \cos \varphi - A'' r (1 - \cos \varphi) + B''. \end{aligned} \right.$$

Als Constanten sind hierbei  $-A r + B$  etc. angenommen, damit  $B$  etc. den Werth von  $E W \Delta x$  etc. für  $\varphi = 0$  bedeuten.

Für  $\varphi = \beta$  muss  $\Delta x = \Delta x'$  werden. Daher  $V r^2 (\sin \alpha \sin \beta - \beta \sin \alpha \cos \beta + \frac{1}{2} \sin^2 \beta) - A r (1 - \cos \beta) + B - \kappa r^3 V \beta \sin \alpha \cos \beta = V' r^2 (\sin \alpha \sin \beta - \beta \sin \alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \sin^2 \beta) - A' r (1 - \cos \beta) + B' - \kappa r^3 V' \beta \sin \alpha \cos \beta$ , also  $B - B' = - (V - V') r^3 \sin \alpha (\sin \beta - \beta \cos \beta) - \frac{1}{2} (V + V') r^3 \sin^2 \beta + \kappa (V - V') r^3 \beta \sin \alpha \cos \beta + (A - A') r (1 - \cos \beta)$ , d. i.

$$\text{II. } B - B' = -\frac{1}{2} G r^3 (2 + \sin^2 \beta - 2 \cos \beta - 2 \beta \sin \beta) + \kappa G r^3 \beta \sin \beta.$$

Für den Scheitel, also für  $\varphi = 0$ , wird  $\Delta x' = \Delta x''$ , mithin

$$\text{III. } B' = B''.$$

Für den Kämpfer  $A$  oder für  $\varphi = \alpha$  wird  $\Delta x = 0$  und für den Kämpfer  $B$  oder für  $\varphi = -\alpha$  wird  $\Delta x'' = 0$ , d. i.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} H r^3 (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} V r^3 (3 \sin^2 \alpha - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha) \\ - \kappa r^3 (H \cos \alpha + V \sin \alpha) \alpha \cos \alpha - A r (1 - \cos \alpha) + B = 0, \\ +\frac{1}{2} H r^3 (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha) - \frac{1}{2} V' r^3 (3 \sin^2 \alpha - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha) \\ + \kappa r^3 (H \cos \alpha + V' \sin \alpha) \alpha \cos \alpha - A'' r (1 - \cos \alpha) + B'' = 0. \end{aligned}$$

Die Subtraction und Addition dieser Gleichungen giebt, wenn man  $V + V' = G$  und  $(V - V') \sin \alpha = G \sin \beta$  setzt,

$$\text{IV. } H r^2 (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha) - \frac{1}{2} G r^2 (3 \sin^2 \alpha - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 - \sin^2 \beta) \\ + 2 \cos \beta + 2 \beta \sin \beta + \kappa r^2 [2 H \alpha \cos^2 \alpha + G (\alpha \sin \alpha \cos \alpha - \beta \sin \beta)] \\ + (A - A'') (1 - \cos \alpha) = 0,$$

$$\text{V. } \frac{1}{2} G r^3 \sin \beta (3 \sin \alpha - 2 \alpha \cos \alpha) - (A + A'') r (1 - \cos \alpha) - \kappa G r^3 \alpha \cos \alpha \sin \beta \\ + B + B' = 0.$$

d) Verticale Verrückung. Nach 29 (Seite 276) wird

$$E W \Delta y = r \int [H r^2 (\sin \varphi - \varphi \cos \alpha) - V r^2 (\varphi \sin \alpha + \cos \varphi) - \kappa r^2 (H \cos \alpha + V \sin \alpha) \varphi + A] \cos \varphi d\varphi - \kappa r^2 \int (H \cos \alpha + V \sin \alpha) \sin \varphi d\varphi.$$

Die Ausführung der Integration giebt die erste der folgenden Gleichungen:

$$115. \left\{ \begin{aligned} E W \Delta y &= r^3 \left[ H \left( \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \cos \alpha - \cos \alpha \cos \varphi - \varphi \cos \alpha \sin \varphi \right) \right. \\ &\quad \left. - V (\sin \alpha \cos \varphi - \sin \alpha + \varphi \sin \alpha \sin \varphi + \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi) \right] \\ &\quad - \kappa r^3 (H \cos \alpha + V \sin \alpha) \varphi \sin \varphi + A r \sin \varphi + C, \end{aligned} \right.$$

$$115. \left\{ \begin{array}{l} \text{E W } \Delta y' = r^3 \left[ H \left( \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \cos \alpha - \cos \alpha \cos \varphi - \varphi \cos \alpha \sin \varphi \right) \right. \\ \quad \left. - V' (\sin \alpha \cos \varphi - \sin \alpha + \varphi \sin \alpha \sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi) \right] \\ \quad - \kappa r^3 (H \cos \alpha + V' \sin \alpha) \varphi \sin \varphi + \Lambda' r \sin \varphi + C', \\ \text{E W } \Delta y'' = r^3 \left[ H \left( \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \cos \alpha - \cos \alpha \cos \varphi - \varphi \cos \alpha \sin \varphi \right) \right. \\ \quad \left. - V' (\sin \alpha \cos \varphi - \sin \alpha + \varphi \sin \alpha \sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi) \right] \\ \quad - \kappa r^3 (H \cos \alpha + V' \sin \alpha) \varphi \sin \varphi + \Lambda'' r \sin \varphi + C''. \end{array} \right.$$

Die Constanten sind zu  $H r^3 \cos \alpha + V r^3 \sin \alpha + C$  etc. angenommen, damit  $C$  etc. die Werthe von  $\text{E W } \Delta y$  etc. für  $\varphi = 0$  bedeuten.

Für  $\varphi = \beta$  muss  $\Delta y = \Delta y'$  werden, also  $-V r^3 (\sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha + \beta \sin \alpha \sin \beta + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta) - \kappa V r^3 \beta \sin \alpha \sin \beta + \Lambda r \sin \beta + C = -V' r^3 (\sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha + \beta \sin \alpha \sin \beta - \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta) - \kappa V' r^3 \beta \sin \alpha \sin \beta + \Lambda' r \sin \beta + C'$ , mithin  $C - C' = (V - V') r^3 \sin \alpha (1 - \cos \beta - \beta \sin \beta) + \frac{1}{2} (V + V') r^3 (\beta + \sin \beta \cos \beta) + \kappa (V - V') r^3 \beta \sin \alpha \sin \beta - (\Lambda - \Lambda') r \sin \beta$ , d. i.

$$\text{VI. } C - C' = \frac{1}{2} G r^3 (\beta + \sin \beta \cos \beta - 2 \sin \beta).$$

Für  $\varphi = 0$  wird  $\Delta y' = \Delta y''$ , daher

$$\text{VII. } C' = C''.$$

Endlich wird für  $\varphi = \alpha$   $\Delta y = 0$  und für  $\varphi = -\alpha$   $\Delta y'' = 0$ , daher

$$\frac{1}{2} H r^3 (3 \sin^2 \alpha - 2 + 2 \cos \alpha - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha) - \frac{1}{2} V r^3 (\alpha - 2 \sin \alpha + 2 \alpha \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha) - \kappa r^3 (H \cos \alpha + V \sin \alpha) \alpha \sin \alpha + \Lambda r \sin \alpha + C = 0,$$

$$\frac{1}{2} H r^3 (3 \sin^2 \alpha - 2 + 2 \cos \alpha - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha) - \frac{1}{2} V' r^3 (\alpha - 2 \sin \alpha + 2 \alpha \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha) - \kappa r^3 (H \cos \alpha + V' \sin \alpha) \alpha \sin \alpha - \Lambda'' r \sin \alpha + C'' = 0.$$

Die Addition und Subtraction dieser Gleichungen giebt:

$$\text{VIII. } H r^3 (3 \sin^2 \alpha - 2 + 2 \cos \alpha - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha) - \frac{1}{2} G r^3 (\alpha - 2 \sin \alpha + 2 \alpha \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha) - \kappa r^3 (2 H \cos \alpha + G \sin \alpha) \alpha \sin \alpha + (\Lambda - \Lambda'') r \sin \alpha + C + C'' = 0.$$

$$\text{IX. } (\Lambda + \Lambda'') \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} G r^3 [\alpha \sin \beta - \beta \sin \alpha + \sin \alpha \sin \beta (2 \alpha \sin \alpha + 3 \cos \alpha - \cos \beta)] + \kappa G r^2 \alpha \sin^2 \alpha \sin \beta.$$

Die neun Constanten lassen sich genau in derselben Weise bestimmen, wie im vorigen §. Wir begnügen uns hier, die Verrückungen des Scheitels zu specialisiren. Für denselben ergibt sich  $\text{E W } \Delta_0 x = B'$ ,  $\text{E W } \Delta_0 y = C'$ , d. i. nach gehöriger Reduction

$$116. \left\{ \begin{array}{l} \Delta_0 x = \frac{G r^3 (1 - \cos \alpha)}{4 \text{E W } \sin^2 \alpha} \left[ 2 (1 + \cos \alpha) (\alpha - \beta) \sin \beta + (\alpha \sin \beta - \beta \sin \alpha) \right. \\ \quad \left. + 2 [1 + \cos \alpha - \cos \beta - \cos (\alpha - \beta)] \right. \\ \quad \left. - \left\{ \sin \alpha - \sin \beta + \sin (\alpha - \beta) \right\} \sin \beta \right] + \frac{\kappa G r^3}{2 \text{E W}} (\alpha - \beta) \sin \beta, \\ \Delta_0 y = \frac{H r^3}{2 \text{E W} (1 - \cos \alpha)} \left[ 4 - 4 \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 5 \sin^2 \alpha + 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha \right] \\ \quad - \frac{G r^3}{4 \text{E W} (1 - \cos \alpha)} \left[ (1 - \cos \alpha) (2 \sin \alpha - 2 \sin \beta - \alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) \cos \beta \right. \\ \quad \left. - \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta - 2 \sin \alpha (\cos \alpha - \cos \beta + \alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta) \right] \\ \quad + \frac{\kappa r^3 \sin \alpha}{2 \text{E W} (1 - \cos \alpha)} \left[ 2 H \alpha \cos \alpha + G (\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta) \right]. \end{array} \right.$$

Wenn die Last im Scheitel liegt ( $\beta = 0$ ), so ergibt sich durch Einsetzung des Ausdruckes für H nach 104

$$117. \Delta_0 y = \frac{G r^3 (2\alpha + \alpha \cos \alpha - 3 \sin \alpha)}{2 E W (1 - \cos \alpha)} + \frac{z G r^3 \alpha \sin^2 \alpha}{2 E W (1 - \cos \alpha)^2}.$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet.

$\beta$	$\Delta_0 x$				$\Delta_0 y$			
	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
0	0	0	0	0	+ 0,01667	+ 0,01933	+ 0,02528	+ 0,07080
0,2	0,0077	0,0086	0,0120	0,0212	+ 0,00560	+ 0,00649	+ 0,01142	+ 0,02903
0,4	0,0124	0,0138	0,0183	0,0271	- 0,00240	- 0,00237	- 0,00195	+ 0,00206
0,6	0,0124	0,0133	0,0172	0,0197	- 0,00573	- 0,00568	- 0,00687	- 0,00614
0,8	0,0077	0,0082	0,0092	0,0065	- 0,00440	- 0,00457	- 0,00485	- 0,00302
1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\cdot \alpha$	$\frac{G a^2 h}{E W}$				$\frac{G a^3}{E W}$			

Für  $\alpha = 0, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  wird  $\Delta_0 y = 0$  bezüglich für  $\beta = 0,33, 0,35, 0,38, 0,45 \cdot \alpha$ . Die Glieder mit  $z$ , welche sich in jedem speciellen Falle leicht berechnen lassen, sind in der Tabelle vernachlässigt.

Die gemeinschaftlichen Factoren der Coefficienten der in der Folge aufgestellten Tabellen sind immer so gewählt, dass die Coefficienten bei verschiedenen Centriwinkeln möglichst gleich ausfallen, um eine Interpolation für andere Centriwinkel möglich zu machen; z. B. hier  $\frac{G a^2 h}{E W}$  statt  $\frac{G r^3}{E W}$ .

### §. 315. Gleichmässige Belastung.

a) Gleichmässig über die Horizontalprojection vertheilte Belastung. Im Scheitel ist das Moment Null; setzen wir daher in dem Ausdrucke 100 (Seite 297) für  $x = 0$  und  $y = 0$  auch  $M = 0$ , so ergibt sich

$$118. H = \frac{q a^2}{2 h} = \frac{1}{2} q r (1 + \cos \alpha) = q r \cos^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Für kleine Winkel ist also nahezu  $H = q r$ . Die Einsetzung in die Ausdrücke 101 (Seite 297) giebt:

$$119. \begin{cases} P = -q r (\cos^2 \frac{1}{2} \alpha \cos \varphi + \sin^2 \varphi), \\ Q = -q r (\cos^2 \frac{1}{2} \alpha - \cos \varphi) \sin \varphi; \end{cases}$$

$$120. M = \frac{1}{2} q r^2 (1 - \cos \varphi) (\cos \varphi - \cos \alpha) \\ = 2 q r^2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \varphi) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \varphi) \sin^2 \frac{1}{2} \varphi.$$

Auf Tafel XI ist in Fig. 3 P, Q, M für  $\alpha = 60^\circ$  dargestellt. Die Verwandlung in Reihen giebt als Näherungsformeln für kleine Winkel:

$$121. \begin{cases} P = -q r (1 - \frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 + \dots), \\ Q = + \frac{1}{4} q r \varphi (\alpha^2 - 2 \varphi^2 + \frac{1}{12} \alpha^4 - \frac{1}{6} \varphi^4 + \dots); \end{cases}$$

$$122. M = \frac{1}{8} q r^2 (\alpha^2 - \varphi^2) \varphi^2 (1 - \frac{1}{12} \alpha^2 + \dots).$$

P ist nahezu constant. Am kleinsten ist P im Scheitel. Es wird zum analytischen Maximum für  $\cos\varphi = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$  und zwar ist

$$123. \max P = -q r \left(1 + \frac{1}{4} \cos^4 \frac{1}{2} \alpha\right).$$

Wenn aber  $\cos \alpha > \frac{1}{3}$  oder  $\alpha > 70^\circ 32'$  ist, so wird das entsprechende  $\varphi$  grösser als  $\alpha$ , so dass das analytische Maximum keine Bedeutung hat. Alsdann wird P zum Maximum für  $\varphi = \alpha$  und zwar ist

$$124. \max P = -\frac{1}{2} q r (2 + \cos \alpha - \cos^2 \alpha).$$

Q ist im Scheitel = 0; es wird zum analytischen Maximum für  $\cos\varphi = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha + \sqrt{\frac{1}{2} + \cos^4 \frac{1}{2} \alpha}$ , bei kleinen Winkeln für  $\varphi = \sqrt{\frac{1}{6}} \alpha = 0,408 \alpha$ ; zum wirklichen Maximum indess stets am Kämpfer und zwar ist

$$125. \max Q = -2 q r \sin^3 \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha = -2 q a \frac{h^2}{a^2 + h^2}.$$

M ist stets positiv, d. h. der Bogen wird einwärts gekrümmt. Zum Maximum wird M, wenn Q = 0 wird, d. i. für  $\cos\varphi = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$  und zwar ist

$$126. \max M = \frac{1}{2} q r^2 \sin^4 \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{8} q h^2.$$

Das grösste Moment ist also ebenso gross, wie bei einem geraden, an den Enden auf Stützen ruhenden und gleichmässig belasteten Stabe, dessen Länge gleich der Bogenhöhe h ist. Für diesen Querschnitt wird genau  $P = -q r$ .

Der Abstand e der Stützzlinie von der Axe ist nach §. 287  $e = \frac{M}{P}$ .

Der Winkel, für welchen e zum Maximum wird, ist durch eine cubische Gleichung bestimmt. Da aber P nahezu constant ist, so wird e nahezu gleichzeitig mit M zum Maximum. Da hier  $M = \frac{1}{2} q r^2 \sin^4 \frac{1}{2} \alpha$ ,  $P = -q r$  ist, so wird nahezu

$$127. \max e = \frac{1}{2} r \sin^4 \frac{1}{2} \alpha = \frac{h^3}{4(a^2 + h^2)}.$$

Auf Taf. XI ist in Fig. 4 die Stützzlinie für  $\alpha = 90^\circ$  dargestellt. Die folgende Tabelle enthält die hauptsächlichsten Grössen für  $\alpha = 0, 30^\circ, 60^\circ$  und  $90^\circ$ .

$\alpha$	H	max P	max Q	max M	$\varphi$ für Q = 0	max e
0	1,0000	1,0000	1,0000	0,125	0,707	0,250
30	0,9330	1,0580	0,9330	0,125	0,703	0,233
60	0,7500	1,1250	0,7500	0,125	0,690	0,188
90	0,5000	1,0625	0,5000	0,125	0,667	0,125
Gr.	$\cdot q r$	$\cdot -q r$	$\cdot q \frac{h^2}{a}$	$\cdot q h^2$	$\cdot \alpha$	$\cdot \frac{h^3}{a^2}$

b) Gleichmässig über die Bogenaxe vertheilte Last. Setzen wir in dem Ausdrucke 103 (Seite 298) für den Scheitel oder für  $\varphi = 0$   $M = 0$ , so ergibt sich als Horizontalschub

$$128. H = g r \left( \frac{\alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 \right) = g r \left( \alpha \cot \frac{1}{2} \alpha - 1 \right).$$

Die Einsetzung in die Ausdrücke 103 giebt

$$129. \quad \begin{cases} P = -gr(\alpha \cot \frac{1}{2}\alpha \cos \varphi - \cos \varphi + \varphi \sin \varphi), \\ Q = -gr(\alpha \cot \frac{1}{2}\alpha \sin \varphi - \sin \varphi - \varphi \cos \varphi); \end{cases}$$

$$130. \quad M = \frac{gr^2}{1 - \cos \alpha} (\alpha \sin \alpha \cos \varphi - \varphi \cos \alpha \sin \varphi - \alpha \sin \alpha + \varphi \sin \varphi).$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsformeln:

$$131. \quad \begin{cases} P = -gr(1 - \frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \dots), \\ Q = +\frac{1}{6}gr\varphi(\alpha^2 - 2\varphi^2 + \frac{1}{60}\alpha^4 - \frac{1}{6}\alpha^2\varphi^2 + \frac{1}{5}\varphi^4 + \dots); \end{cases}$$

$$132. \quad M = \frac{1}{12}gr^2\varphi^2(\alpha^2 - \varphi^2)(1 + \frac{1}{60}\alpha^2 - \frac{1}{15}\varphi^2 + \dots).$$

P ist stets im Scheitel am kleinsten, an den Kämpfern am grössten und zwar ist

$$133. \quad \max P = -\frac{gr}{1 - \cos \alpha} (\alpha \sin \alpha - \cos \alpha + \cos^2 \alpha).$$

Q ist im Scheitel = 0; es wird stets zum wirklichen Maximum in den Kämpfern; dasselbe ist

$$134. \quad \max Q = -gr(\alpha - \sin \alpha).$$

M ist auch hier an allen Stellen positiv; es wird zum Maximum oder Q wird = 0 für  $\alpha \sin \alpha \sin \varphi = (1 - \cos \alpha)(\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)$ ; bei kleinen Winkeln annähernd für  $\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707\alpha$  und es ist in diesem Falle  $\max M = \frac{1}{48}gr^2\alpha^4 = \frac{1}{12}gh^2$ , so dass sich die grössten Momente im vorigen und in diesem Falle unter gleichen Umständen wie 3:2 verhalten.

Die wichtigsten Grössen sind für  $\alpha = 0, 30^\circ, 60^\circ$  und  $90^\circ$  in folgender Tabelle zusammengestellt.

$\alpha$	H	maxP	maxQ	maxM	$\varphi$ für Q=0	maxe
0	1,0000	1,0000	0,6667	0,0833	0,707	0,167
30	0,9541	1,0881	0,6574	0,0868	0,703	0,158
60	0,8141	1,3138	0,6276	0,0992	0,700	0,136
90	0,5708	1,5708	0,5708	0,1221	0,692	0,100
Gr.	. gr	. -gr	. $g \frac{h^2}{a}$	. $g h^2$	. $\alpha$	. $\frac{h^3}{a^2}$

### §. 316. Formänderung bei gleichmässiger Belastung.

Die Formänderung lässt sich leicht in der in §. 314 befolgten Weise ermitteln. Hier treten aber nur drei Constante auf, nämlich je eine bei Bestimmung von  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta x$  und  $\Delta y$ . Diese Constanten lassen sich leicht durch die Bedingungen bestimmen, dass im Scheitel der Symmetrie wegen  $\Delta x = 0$  und an den Kämpfern sowohl  $\Delta x = 0$ , als  $\Delta y = 0$  werden muss. Wir begnügen uns hier, die für die Senkung  $\Delta_0 y$  des Scheitels erhaltenen Resultate anzuführen.

a) Gleichmässig über die Horizontalprojection vertheilte Last.

$$135. \Delta_{0y} = \frac{q r^4}{12 E W} \left[ 3 \alpha \cot \frac{1}{2} \alpha (2 + 3 \cos \alpha) - (11 + 19 \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha) \right] \\ + \frac{q r^2}{4 E F} \cot \frac{1}{2} \alpha (3 \alpha + 2 \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha).$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungs Ausdruck für kleine Winkel:

$$136. \Delta_{0y} = \frac{11}{3360} \frac{q r^4 \alpha^6}{E W} + \frac{2}{E F} \frac{q r^2}{h^2} \\ = \frac{11}{840} \frac{q a^2 h^2}{E W} + \frac{q a^4}{2 E F h^2}.$$

b) Gleichmässig über die Bogenlänge vertheilte Belastung.

$$137. \Delta_{0y} = \frac{g r^4}{4 E W (1 - \cos \alpha)} \left[ (7 + 5 \cos \alpha) \alpha^2 - 3 \sin^2 \alpha - 9 \alpha \sin \alpha \right] \\ + \frac{g r^2}{E F (1 - \cos \alpha)} \left[ (1 + \cos \alpha) \alpha^2 - \sin^2 \alpha \right].$$

Für kleine Winkel giebt die Reihenverwandlung als Näherungs-  
ausdruck

$$138. \Delta_{0y} = \frac{3}{1120} \frac{g r^4 \alpha^6}{E W} + \frac{2}{E F} \frac{g r^2}{h^2} \\ = \frac{3}{280} \frac{g a^2 h^2}{E W} + \frac{g a^4}{2 E F h^2}.$$

Die Senkungen im vorigen und in diesem Falle verhalten sich unter gleichen Umständen wie 11:9. Bei gleicher Spannweite nimmt mit wachsender Stichhöhe  $h$  das erste Glied zu, das zweite dagegen ab.

Nach den Formeln 135 und 137 ist die folgende Tabelle für  $\Delta_{0y}$  berechnet.

$\alpha$	Gleichmässige Belastung der Horizontalprojection		Gleichmässige Belastung der Bogenlänge	
	I. Glied	II. Glied	I. Glied	II. Glied
	0	0,01310	0,500	0,01071
10	0,01330	0,506	0,01074	0,507
20	0,01392	0,521	0,01085	0,526
30	0,01458	0,548	0,01102	0,561
40	0,01571	0,588	0,01126	0,613
50	0,01750	0,645	0,01223	0,689
60	0,01993	0,723	0,01552	0,796
90	0,03540	0,178	0,03366	1,468
Gr.	$\frac{q a^2 h^2}{E W}$	$\frac{q a^4}{E F h^2}$	$\frac{g a^2 h^2}{E W}$	$\frac{g a^4}{E F h^2}$

Das Verhältniss des ersten zum zweiten Gliede ist im Mittel aus beiden Fällen  $F h^4 : 42 W a^2$ . Beim idealen I-förmigen Querschnitt mit gleichen Gurtquerschnitten  $f$  und der Höhe  $n a$  ist  $F = 2f$ ,  $W = \frac{1}{2} f n^2 a^2$ , also das Verhältniss  $h^4 : 10 n^2 a^4 = (1 - \cos \alpha)^4 : 10 n^2 \sin^4 \alpha = 1 : 10 n^2 \cot^4 \frac{1}{2} \alpha$ . Das zweite Glied, welches

von der Längenänderung der Axe herrührt, wird also verhältnissmässig um so grösser, je kleiner der Centriwinkel oder je kleiner bei derselben Spannweite die Stichhöhe und je grösser die Höhe des Querschnittes ist. Für  $n = \frac{1}{2}$  wird das Verhältniss  $1 : 0,025 \cot^4 \frac{1}{2} \alpha$ . Bei den in der Tabelle enthaltenen Winkeln ist das zweite Glied  $= \infty$ , 427 25,8 4,85 1,39 0,53 0,23 0,03 des ersten Gliedes, so dass die Längenänderung der Axe bei kleinen Winkeln einen nicht unbedeutenden Einfluss hat.

### XXXVII. Kapitel.

## Bogen mit Kämpfergelenken, aber ohne Scheitелgelenk.

### A. Isolirte Last, flacher Parabelbogen und constanter Querschnitt.

§. 317. **Horizontalschub.** Direkt findet man den Horizontalschub, indem man  $H$  als vorläufig unbestimmt einführt, wie in §. 313, und die Ausdrücke für  $\Delta \varphi$  und  $\Delta x$  aufstellt. Für  $x = FN = \xi$  (Figur 109) wird  $\Delta \varphi = \Delta \varphi'$ ,  $\Delta x = \Delta x'$ , wodurch die Differenz  $A - A'$ ,  $B - B'$  der Constanten bestimmt ist. Für  $x = a$  wird  $\Delta x = 0$  und für  $x = -a$  wird  $\Delta x' = 0$ ; subtrahirt man diese beiden Gleichungen, so kommen die Constanten nur noch in den Differenzen  $A - A'$ ,  $B - B'$  vor, deren Einsetzung aus den vorigen Gleichungen eine Gleichung für  $H$  liefert.

Die in §. 313 gewonnenen Resultate lassen sich aber auch hier direkt anwenden; nur ist hier  $A' = A''$ ,  $B' = B''$ ,  $C' = C''$  zu setzen. Setzen wir in der Gleichung V. für  $A - A'$  den Werth I. ein, so ergibt sich  $\frac{8}{15} H a^3 h - \frac{1}{24} G (5 a^4 - 6 a^2 \xi^2 + \xi^4) = 0$ , also

$$139. H = \frac{5}{64} G \frac{5 a^4 - 6 a^2 \xi^2 + \xi^4}{a^3 h} = \frac{5}{64} G \frac{(5 a^2 - \xi^2)(a^2 - \xi^2)}{a^3 h}.$$

$H$  wird am grössten, wenn die Last im Scheitel liegt, und zwar ist alsdann  $H = \frac{25}{64} G \frac{a}{h}$ .

§. 318. **Kämpferdrucklinie.** Die Ordinate  $NL$  (Fig. 109) der Kämpferdrucklinie bezeichnen wir mit  $\eta$ . Alsdann ist  $\eta = AN \tan \angle DAH$

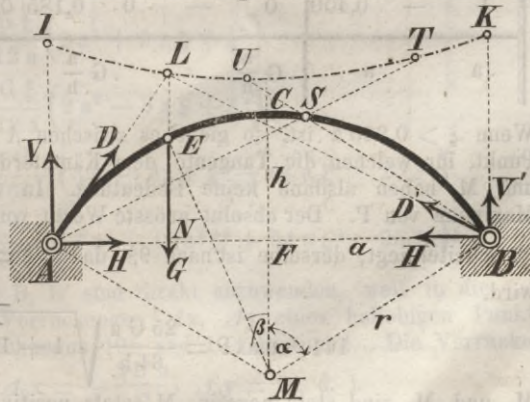
$= (a - \xi) \frac{V}{H}$ . Setzen wir

$V$  nach 93 (Seite 294)

$= G \frac{a + \xi}{2a}$  und für  $H$  den eben entwickelten Ausdruck, so ergibt sich

$$140. \eta = \frac{32 a^2 h}{5(5 a^2 - \xi^2)}.$$

In folgender Tabelle sind die Werthe von  $H$  und  $\eta$  für einige  $\xi$  zusammengestellt. Auf Tafel XII ist hiernach in Fig. 3 die Form der Kämpferdrucklinie construirt.



$\xi$	H	$\eta$	$\xi$	H	$\eta$
0	0,3906	1,280	0,5	0,2783	1,347
0,1	0,3859	1,283	0,6	0,2320	1,379
0,2	0,3706	1,290	0,7	0,1797	1,415
0,3	0,3490	1,304	0,8	0,1226	1,468
0,4	0,3176	1,322	0,9	0,0622	1,527
0,5	0,2783	1,347	1,0	0	1,620
. a	$\cdot G \frac{a}{h}$	. h	. a	$\cdot G \frac{a}{h}$	. h

**§. 319. Beanspruchung durch eine isolirte Last.** Nach §. 310 liegt der gefährliche Querschnitt entweder in den Punkten  $R_1, R_2$ , in welchen die Tangente den Kämpferdrücken  $D, D'$  parallel ist oder im Angriffspunkte  $E$  der Last (Fig. 109). Die diesen Stellen entsprechenden Werthe  $P_1, P_2, P_3, M_1, M_2, M_3$  sind durch die Formeln 98, 99 bestimmt und nebst den Werthen  $P_4$  von  $P$  im Kämpfer  $A$  für einige Werthe von  $\xi$ , sowie für  $\frac{h}{a} = 0$  und  $\frac{h}{a} = \frac{1}{3}$  in folgender Tabelle zusammengestellt;  $x_1, x_2$  sind hierbei die Abscissen der Punkte  $R_1, R_2$ .

$\xi$	$x_1$	$x_2$	$h = 0 \cdot a$		$h = \frac{1}{3} a$				$h$ beliebig		
			$P = H$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	
0	+	—	—	—	—	—	—	—	+	+	—
0,2	0,806	0,540	0,372	0,422	0,395	0,395	0,420	0,014	0,079	0,124	
0,340	1	0,492	0,339	0,406	0,389	0,380	0,406	0	0,085	0,144	
0,4	—	0,472	0,318	—	0,333	0,367	0,394	—	0,089	0,153	
0,6	—	0,431	0,232	—	0,241	0,314	0,341	—	0,075	0,172	
0,8	—	0,408	0,123	—	0,127	0,249	0,268	—	0,043	0,136	
1	—	0,400	0	—	0	0,185	0,186	—	0	0	
. a	. a	$\cdot G \frac{a}{h}$	$\cdot G \frac{a}{h}$				$\cdot G a$				

Wenn  $\xi > 0,340 a$  ist, so giebt es zwischen  $A$  und  $E$  (Fig. 109) keinen Punkt, für welchen die Tangente dem Kämpferdrucke  $D$  parallel ist;  $P_1$  und  $M_1$  haben alsdann keine Bedeutung. In diesem Falle ist  $P_4$  das Maximum von  $P$ . Der absolut grösste Werth von  $P$  ist  $P_1$ , wenn die Last im Scheitel liegt; derselbe ist nach 98, da für  $\xi = 0$   $V = \frac{1}{2} G$ ,  $H = \frac{25 G a}{64 h}$  wird,

$$141. \max P = \frac{25 G a}{64 h} \sqrt{1 + 1,639 \frac{h^2}{a^2}}$$

$M_1$  und  $M_2$  sind stets negativ,  $M_3$  stets positiv;  $M_2$  ist  $> M_1$  und  $M_3$

absolut genommen,  $> M_2$ . Zum Maximum wird  $M_3$  bei  $x = 0,59 a$  für  $\xi = 0,59 a$  und  $M_2$  bei  $x = -0,48 a$  für  $\xi = 0,38 a$  und zwar ist

$$142. \quad \max(+M) = 0,1716 G a, \quad \max(-M) = 0,0886 G a,$$

also das positive Maximum fast doppelt so gross, als das negative.

Bei constanter Lage der Last ist bei kleinem  $h$   $P$  fast constant, nämlich  $= H$ . Daher wird die Spannung der gespanntesten Faser nahezu in denjenigen Querschnitten zum Maximum, für welche  $M$  zum Maximum wird. Da der von  $M$  abhängige Theil der Spannung meist viel grösser ist, als der von  $P$  abhängige, so wird die Spannung nahezu für diejenige Lage der Last zum Maximum, für welche  $M$  zum Maximum wird. Für  $\xi = 0,59 a$  aber wird  $H = 0,237 G \frac{a}{h}$  und für  $\xi = 0,38 a$  wird  $H = 0,324 G \frac{a}{h}$ . Daher sind die Festigkeitsbedingungen annähernd, vorausgesetzt, dass nur ein Bruch durch Zerdrücken eintreten könne,

$$143. \quad \begin{cases} \mathfrak{R} = 0,1716 G \frac{a e_2}{W} + 0,237 G \frac{a}{F h}, \\ \mathfrak{R} = 0,0886 G \frac{a e_1}{W} + 0,324 G \frac{a}{F h}, \end{cases}$$

wobei  $e_1, e_2$  den Abstand der obersten und untersten Faser von der horizontalen Schweraxe des Querschnittes bedeutet.

Beispielsweise wird für den rechteckigen Querschnitt mit der Breite  $b$  und der Höhe  $c$   $F = b c$ ,  $W = \frac{1}{12} b c^3$ ,  $e_1 = e_2 = \frac{1}{2} c$ , mithin

$$\mathfrak{R} b c^2 h = (1,0296 h + 0,237 c) G a,$$

$$\mathfrak{R} b c^2 h = (0,5316 h + 0,324 c) G a.$$

Die zweite Gleichung kann nur maassgebend sein, wenn  $0,5316 h + 0,324 c > 1,0296 h + 0,237 c$  oder wenn  $h < 0,177 c$  ist, was aber nie eintritt, so dass hier stets die erste Gleichung maassgebend ist.

### §. 320. Formänderung durch eine isolirte Last.

Die in §. 313 gemachte Entwicklung lässt sich hier direkt anwenden, wenn wir  $A' = A''$ ,  $B' = B''$ ,  $C' = C''$  setzen. Die Formeln  $a, b$  für die Constanten, in welchen  $H$  noch unbestimmt gelassen ist, behalten ihre Gültigkeit; für  $H$  ist in denselben der Ausdruck 139 zu setzen. Es ergeben sich so

$$144. \quad \begin{cases} A = \frac{G \xi}{12 a} (2 a^2 + 3 a \xi + \xi^2), \\ A' = \frac{G \xi}{12 a} (2 a^2 - 3 a \xi + \xi^2); \\ C = \frac{G}{768 a} (3 a^4 - 42 a^2 \xi^2 - 64 a \xi^3 - 25 \xi^4), \\ C' = \frac{G}{768 a} (3 a^4 - 42 a^2 \xi^2 + 64 a \xi^3 - 25 \xi^4). \end{cases}$$

Die Ausdrücke 108 für  $B, B'$  sind direkt anzuwenden, weil in diesen  $H$  nicht vorkommt. Die Verrückungen  $\Delta x, \Delta y$  eines beliebigen Punktes sind nun durch die Gleichungen 105 und 106 bestimmt. Die Verrückungen des Scheitels sind  $\Delta_0 x = -\frac{2 B' h}{a^2}$ ,  $\Delta_0 y = C'$ , d. i.

$$145. \begin{cases} \Delta_0 x = -\frac{1}{24} \frac{G}{E W} \frac{h \xi (a^3 - 2 a \xi^2 + \xi^3)}{a^2}, \\ \Delta_0 y = +\frac{1}{768} \frac{G}{E W} \frac{3 a^4 - 42 a^2 \xi^2 - 64 a \xi^3 - 25 \xi^4}{a}. \end{cases}$$

Für  $\Delta_0 y$  ist die folgende Tabelle berechnet.

$\xi$	$\Delta_0 y$	$\xi$	$\Delta_0 y$	$\xi$	$\Delta_0 y$
0	+ 0,00391	0,376	0	0,7	- 0,00212
0,1	+ 0,00341	0,4	- 0,00034	0,8	- 0,00176
0,2	+ 0,00235	0,5	- 0,00138	0,9	- 0,00143
0,3	+ 0,00110	0,6	- 0,00200	1	0
$\cdot a$	$\frac{G a^3}{E W}$	$\cdot a$	$\frac{G a^3}{E W}$	$\cdot a$	$\frac{G a^3}{E W}$

Für  $\Delta_0 x$  gelten die Werthe der Tabelle zu §. 313, da  $\Delta_0 x$  in beiden Fällen denselben Werth hat. Die Senkung ist durchschnittlich nur 0,34 so gross, als bei drei Gelenken.

### B. Isolierte Last, Kreisbogen, constanter Querschnitt.

**§. 321. Horizontalschub.** Direkt ist der Horizontalschub nach dem in §. 317 Gesagten zu bestimmen. Mit Anwendung der in §. 314 gewonnenen Resultate ergibt sich derselbe folgendermaassen. Hier ist  $A' = A''$ ,  $B' = B''$ ,  $C' = C''$ . Setzt man nun in Gleichung IV für  $A - A'' = A - A'$  den Werth I ein, so ergibt sich eine Gleichung zur Bestimmung von H. Die Reduction auf H giebt

$$146. H = G \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha (\cos \beta - \cos \alpha) - 2 (1 + \kappa) \cos \alpha (\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta)}{2 [\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 (1 + \kappa) \alpha \cos^2 \alpha]}.$$

Für den Halbkreis wird äusserst einfach:

$$147. H = G \frac{\cos^2 \beta}{\pi},$$

so dass hier die von der Längenänderung der Axe herrührenden Glieder ganz in Wegfall kommen. In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe des Horizontalschubes mit Vernachlässigung von  $\kappa$  zusammengestellt.

$\beta$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
0	0,391	0,391	0,388	0,385	0,380	0,373	0,364	0,318
0,2	0,372	0,372	0,369	0,365	0,359	0,352	0,342	0,288
0,4	0,318	0,317	0,315	0,309	0,301	0,292	0,278	0,208
0,6	0,232	0,231	0,228	0,222	0,213	0,202	0,187	0,110
0,8	0,123	0,122	0,119	0,115	0,108	0,099	0,086	0,030
1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\cdot \alpha$	$\cdot G \frac{a}{h}$							

Bezeichnet man den Horizontalschub ohne Rücksicht auf die Glieder mit  $x$  mit  $H_0$ , so kann man nach 146 allgemein

$$148. \quad H = H_0 \frac{1 - A x}{1 + B x}$$

setzen, worin der Factor von  $H_0$  als ein Correctionscoefficient auftritt. Setzen wir ferner

$$A_1 = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha (\cos \beta - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha + \beta \sin \beta),$$

$$A_2 = 2 \cos \alpha (\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta),$$

$$B_1 = 2 (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha),$$

$$B_2 = 2 \alpha \cos^2 \alpha,$$

so wird  $A = \frac{A_2}{A_1}$  und  $B = \frac{B_2}{B_1}$ . Die Reihenverwandlung giebt

$$A_1 = \frac{1}{12} (\alpha^2 - \beta^2) [(5 \alpha^2 - \beta^2) - \frac{1}{30} (49 \alpha^4 + 34 \alpha^2 \beta^2 - 11 \beta^4) + \dots],$$

$$A_2 = 2 (\alpha^2 - \beta^2) [1 - \frac{1}{6} (4 \alpha^2 + \beta^2) + \dots],$$

$$B_1 = \frac{8}{15} \alpha^5 (1 - \frac{4}{21} \alpha^2 + \dots), \quad B_2 = 2 \alpha (1 - \alpha^2 + \dots).$$

Annähernd wird hiernach

$$149. \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{24}{5 \alpha^2 - \beta^2} = \frac{6 a^2}{5 h^2 \left[ 1 - \frac{1}{5} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right]}, \\ B = \frac{15}{4 \alpha^4} = \frac{15 a^4}{64 h^4}. \end{array} \right.$$

Die genaueren Werthe von A und B sind in folgender Tabelle enthalten.

	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$	
A	0	1,20	1,19	1,17	1,14	1,08	1,00	0,88	0	$\frac{a^2}{h^2}$
	0,2	1,21	1,20	1,18	1,15	1,10	1,01	0,90	0	
	0,4	1,24	1,24	1,21	1,18	1,13	1,05	0,94	0	
	0,6	1,29	1,29	1,27	1,24	1,20	1,13	1,02	0	
	0,8	1,38	1,38	1,36	1,34	1,30	1,24	1,18	0	
	1	1,50	1,50	1,49	1,47	1,45	1,41	1,36	0	
B		0,234	0,233	0,221	0,203	0,178	0,146	0,107	0	$\frac{a^4}{h^4}$

Hiernach ist der Correctionscoefficient von der Lage der Last fast unabhängig. Nahezu verhält sich  $A : B = 5 h^2 : a^2$ , so dass bei kleiner Stichhöhe der Coefficient B viel grösser ist, als A. Bei kleinen Stichhöhen wird daher sehr nahe, wenn wir  $r = \frac{a^2}{2h}$ ,  $x = \frac{W}{F r^2} = \frac{4 W h^2}{F a^4}$ ,  $A = 0$ ,

$$B = \frac{15 a^4}{64 h^4} \cdot \frac{4 W h^2}{F a^4} = \frac{15 W}{16 F h^2} \text{ setzen,}$$

$$150. \quad H = \frac{H_0}{1 + \frac{15 W}{16 F h^2}}$$

Der Einfluss der Correction wird also um so grösser, je kleiner die Stichhöhe ist.

In praktischen Fällen ist  $\kappa$  höchstens = 0,00015, daher der Einfluss der Correction bei  $\alpha = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  höchstens 55 7,1 1,5 0,5 0,3 0,1 0 Procent, so dass die Correction bei kleinen Centriwinkeln allerdings nöthig, bei grösseren aber meist nicht nöthig wird.

Das Verhältniss  $\frac{h}{a}$  der Stichhöhe zur halben Spannweite ist bei gegebenem Centriwinkel  $= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \frac{1}{2} \alpha$ , wodurch auch bei gegebenem  $\frac{h}{a}$  der Centriwinkel  $\alpha$  bestimmt ist.

**§. 322. Kämpferdrucklinie.** Bezeichnen wir, wie in §. 318 die Ordinate NL (Fig. 109) der Kämpferdrucklinie mit  $\eta$ , so ist  $\eta = AN \tan \angle DAH = (a - \xi) \frac{V}{H}$ , d. i., da  $r = \sin \alpha$ ,  $\xi = r \sin \beta$ ,  $V = G \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2 \sin \alpha}$  ist,

$$151. \quad \eta = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{2 \sin \alpha} \frac{G}{H} r.$$

Für  $\beta = \alpha$  nimmt dieser Ausdruck die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  an. Bekanntlich behält in diesem Falle der Bruch seinen Werth, wenn man Zähler und Nenner nach  $\beta$  differenziert. Geschieht dies nach Einsetzung des Ausdruckes für H, so ergibt sich

$$151 a. \quad \eta = r \frac{\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2(1 + \kappa) \alpha \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \kappa (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha)}.$$

Für den Halbkreis wird  $\eta = \frac{1}{2} \frac{G}{H} r \cos^2 \beta$ , d. i., wenn man für H den Ausdruck 147 setzt,

$$152. \quad \eta = \frac{1}{2} \pi r = 1,5708 r.$$

Beim Halbkreise bildet also die Kämpferdrucklinie eine horizontale Gerade.

Hiernach ist für  $\eta$  die folgende Tabelle berechnet und dabei  $\kappa = 0$  gesetzt.

$\beta$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
0	1,280	1,282	1,288	1,300	1,316	1,340	1,375	1,571
0,2	1,290	1,292	1,298	1,309	1,327	1,348	1,380	1,571
0,4	1,322	1,324	1,329	1,340	1,354	1,374	1,403	1,571
0,6	1,379	1,380	1,385	1,393	1,405	1,421	1,443	1,571
0,8	1,468	1,469	1,471	1,476	1,483	1,490	1,504	1,571
1	1,600	1,600	1,599	1,597	1,594	1,591	1,588	1,571

$\cdot \alpha$   $\cdot h$

Ist  $\eta_0$  die Ordinate ohne Rücksicht auf die Glieder mit  $\kappa$ , so ist  $\eta : \eta_0 = \frac{1}{H} : \frac{1}{H_0}$ , also  $\eta = \eta_0 \frac{H_0}{H}$ , d. i.

$$153. \quad \eta = \frac{1 + B \kappa}{1 - A \kappa} \eta_0.$$

Die Werthe von A und B sind im vorigen §. besprochen und tabellarisch zusammengestellt.

Auf Taf. XII ist in Fig. 3 und 4, die Kämpferdrucklinie für  $\alpha = 60^\circ$  und  $90^\circ$  dargestellt.

**§. 323. Formänderung.** Die in §. 314 entwickelten Formeln sind auch hier anzuwenden. Die erste der Formeln 116 giebt die horizontale Verschiebung  $\Delta_0 x$  des Scheitels direkt, weil in dem Ausdrücke für  $\Delta_0 x$  der Horizontalschub H nicht vorkommt. In der zweiten der Formeln 116 für  $\Delta_0 y$  ist für H der Ausdruck 146 zu setzen. Die hiernach für  $\Delta_0 y$  berechneten Werthe sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

$\beta$	$\Delta_0 y$			
	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
0	+ 0,003907	+ 0,004633	+ 0,007724	+ 0,01894
0,2	+ 0,002354	+ 0,002849	+ 0,004851	+ 0,01261
0,4	- 0,000344	- 0,000245	+ 0,000208	+ 0,00268
0,6	- 0,002000	- 0,001733	- 0,002394	- 0,00201
0,8	- 0,001760	- 0,001847	- 0,002007	- 0,00132
1	0	0	0	0
$\alpha$	$\frac{G a^3}{E W}$			

Für die horizontale Verrückung  $\Delta_0 x$  gelten die Werthe der Tabelle zu §. 314 auch hier.

Bezeichnet man die Verrückung des Scheitels ohne Rücksicht auf  $\kappa$  mit  $\Delta_0 x'$ ,  $\Delta_0 y'$ , so ist nach 116:

$$154. \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_0 x &= \Delta_0 x' + \frac{\kappa G r^3}{2 E W} (\alpha - \beta) \sin \beta, \\ \Delta_0 y &= \Delta_0 y' - \frac{(H_0 - H) r^3}{E W} \frac{4 - 4 \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 5 \sin^2 \alpha + 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} \\ &\quad + \frac{\kappa r^3}{2 E W} \left[ 2 H \alpha \cos \alpha + G (\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta) \right] \cot \frac{1}{2} \alpha. \end{aligned} \right.$$

Der Factor von  $\frac{(H_0 - H) r^3}{E W}$  ergibt sich für  $\alpha = 0, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  bezüglich zu 0,1017 0,1283 0,1705 0,2854  $a^2 h$ .

Für einen kleinen Centriwinkel ergibt sich als Näherungsformel durch Reihenverwandlung und Einsetzung der Ausdrücke 139 und 149 für  $H_0$  und H und des Werthes von  $\kappa$ :

$$155. \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_0 x &= \Delta_0 x' + \frac{G (a - \xi) \xi h}{E F a^2}, \\ \Delta_0 y &= \Delta_0 y' + \frac{G (a^2 - \xi^2)}{E F a} \left[ 1 + \frac{755 F (5 a^2 - \xi^2)}{1024 (15 W + 16 F h^2)} \right]. \end{aligned} \right.$$

C. Gleichmässige Belastung der Horizontalen, Kreisbogen, constanter Querschnitt.

§. 324. Formänderung und Horizontalschub. Nach den Gleichungen 101 Seite 297 wird  $P + \frac{M}{r} = -H \cos \alpha - \frac{1}{2} q r (\sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi)$  und  $M = H r (\cos \varphi - \cos \alpha) - \frac{1}{2} q r^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi)$ . Daher ergibt sich zunächst für die Längenänderung der Axe nach 7 (Seite 270):

$$\frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{1}{E F} \left[ H \cos \alpha + \frac{1}{2} q r (\sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi) \right],$$

$$\Delta s = -\frac{1}{E F} \left[ H \varphi \cos \alpha + \frac{1}{2} q r (2 \varphi \sin^2 \alpha + \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \right].$$

Für die Lagenänderung der Tangente ergibt sich nun nach 25 (Seite 274) nach Ausführung der Integration:

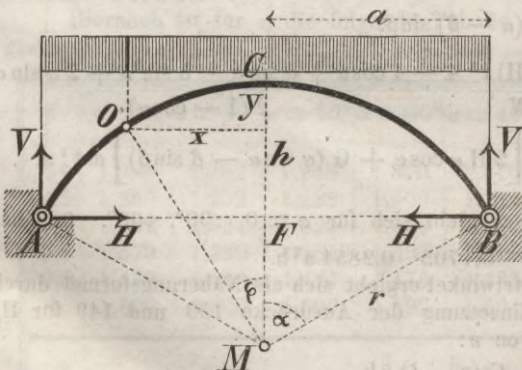
$$E W \Delta \varphi = r^2 \left[ H (\sin \varphi - \varphi \cos \alpha) - \frac{1}{4} q r (2 \varphi \sin^2 \alpha - \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \right] \\ - \kappa r^2 \left[ H \varphi \cos \alpha + \frac{1}{4} q r (2 \varphi \sin^2 \alpha + \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \right].$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für  $\varphi = 0$  auch  $\Delta \varphi = 0$  werden muss. Als Verrückungen eines beliebigen Punktes ergeben sich nun nach 30 (Seite 276) nach Ausführung der Integration

$$E W \Delta x = -\frac{1}{2} H r^3 (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi + 2 \varphi \cos \alpha \cos \varphi - 2 \cos \alpha \sin \varphi) \\ + \frac{1}{12} q r^4 \left[ \sin^3 \varphi - 3 (1 - 2 \sin^2 \alpha) (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \right] \\ - \kappa r^3 \left[ H \varphi \cos \alpha \cos \varphi - \frac{1}{4} q r (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi - 2 \varphi \sin^2 \alpha \cos \varphi - \sin^3 \varphi) \right],$$

$$E W \Delta y = +\frac{1}{2} H r^3 (\sin^2 \varphi - 2 \varphi \cos \alpha \sin \varphi - 2 \cos \alpha \cos \varphi) + C \\ + \frac{1}{12} q r^4 \left[ \cos^3 \varphi + 3 (1 - 2 \sin^2 \alpha) (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) \right] \\ - \kappa r^3 \left[ H \varphi \cos \alpha + \frac{1}{4} q r (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi + 2 \varphi \sin^2 \alpha) \right] \sin \varphi.$$

Fig. 110.



Im Ausdrucke für  $\Delta x$  ist eine Constante nicht hinzuzufügen, weil für  $\varphi = 0$  auch  $\Delta x = 0$  werden muss, was schon ohne Constante eintritt. Für die verticale Verrückung  $\Delta y$  bestimmt sich die Constante C durch die Bedingung, dass an den Kämpfern, also für  $\varphi = \alpha$  die Verrückung  $\Delta y = 0$  werden muss. Dies giebt

$$C = -\frac{1}{2} H r^3 (3 \sin^2 \alpha - 2 - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha) \\ - \frac{1}{12} q r^4 \left[ \cos^3 \alpha + 3 (1 - 2 \sin^2 \alpha) (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha) \right] \\ + \kappa r^3 \left[ H \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4} q r (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \sin^2 \alpha) \right] \sin \alpha.$$

Der Horizontalschub H ergibt sich durch die Bedingung, dass für  $\varphi = \alpha$ ,  $\Delta x = 0$  werden muss. Dies giebt:

$$H = \frac{1}{6} q r \frac{\sin^3 \alpha - 3(1 - 2 \sin^2 \alpha)(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - 3 \alpha \cos \alpha (\alpha + 2 \alpha \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}{\alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \alpha \cos^2 \alpha}$$

Mit Benutzung des für eine isolirte Last gewonnenen Ausdruckes 146 (Seite 312) ergibt sich H einfacher dadurch, dass man in demselben  $\varphi$  für  $\beta$  und  $q dx = r \cos \varphi d\varphi$  für G setzt und nun zwischen den Grenzen  $\varphi = +\alpha$  und  $\varphi = -\alpha$  integrirt.

$$\text{Für den Halbkreis wird } H = \frac{4}{3\pi} q r = 0,424 q r.$$

Bezeichnen wir den Horizontalschub ohne Berücksichtigung von  $\alpha$  mit  $H_0$ , so können wir wie in §. 321

$$158. H = H_0 \frac{1 - A \alpha}{1 + B \alpha}$$

setzen. Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke für kleine Centriwinkel

$$159. H_0 = q r \left(1 - \frac{2}{7} \alpha^2 + \dots\right) = \frac{q a^2}{2 h} \left(1 - \frac{8 h^2}{7 a^2} + \dots\right),$$

$$A = \frac{5}{\alpha^2} = \frac{5 a^2}{4 h^2}, \quad B = \frac{15}{2 \alpha^2} = \frac{15 a^4}{32 h^4}.$$

Daher verhält sich  $A : B = 8 h^2 : 3 a^2$ , so dass B viel grösser als A ist. Annähernd ist daher, wenn wir  $\alpha = \frac{W}{F r^2} = \frac{4 W h^2}{F a^4}$  setzen,

$$160. H_0 = \frac{q a^2}{2 h} \frac{8 F h^2}{15 W + 8 F h^2}.$$

Nach der genauen Formel 157 ist folgende Tabelle berechnet.

$\alpha$	$H_0$	A	B	$\alpha$	$H_0$	A	B
0	1,0000	1,25	0,234	40	0,8661	1,14	0,178
10	0,9945	1,24	0,233	50	0,7954	1,06	0,146
20	0,9655	1,23	0,221	60	0,7134	0,94	0,107
30	0,9234	1,19	0,203	90	0,4244	0	
Gr.	$\cdot q r$	$\frac{a^2}{h^2}$	$\frac{a^4}{h^4}$	Gr.	$\cdot q r$	$\frac{a^2}{h^2}$	$\frac{a^4}{h^4}$

**§. 325. Beanspruchung.** Die Grössen P, Q und M sind, nachdem H berechnet ist, durch die Gleichungen 101 (Seite 297) bestimmt. Hiernach ist auch die graphische Construction leicht. Auf Tafel XI ist in Fig. 5 P, Q und M für  $\alpha = 60^\circ$  und in Fig. 6 die Stützzlinie für  $\alpha = 90^\circ$  dargestellt.

Die Reihenwandlung giebt nach Einsetzung des Werthes 159 von H als Näherungsausdrücke

$$161. \begin{cases} P = -q r \left(1 - \frac{2}{7} \alpha^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 + \dots\right), \\ Q = \frac{1}{14} q r \varphi \left(4 \alpha^2 - 7 \varphi^2 + \dots\right), \\ M = -\frac{1}{56} q r^2 (\alpha^2 - \varphi^2) (\alpha^2 - 7 \varphi^2 + \dots). \end{cases}$$

P ist stets negativ, ändert sich nur wenig und hat an den Kämpfern seinen grössten Werth. Daher ist  $\max P = -H \cos \alpha - q r \sin^2 \alpha$ , annähernd  $= -q r (1 + \frac{3}{4} \alpha^2)$ . Q und M sind theils positiv, theils negativ. Q wird 0 und M wird zum Maximum für  $\varphi = 0$  oder für  $\cos \varphi = \frac{H}{q r}$ ; bezeichnen wir die bezüglichen Werthe von M mit  $M_0$  und  $M_1$ , so ist

$$162. \quad \begin{cases} M_0 = H r (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} q r^2 \sin^2 \alpha, \\ M_1 = \frac{H^2}{2 q} - H r \cos \alpha + \frac{1}{2} q r^2 \cos^2 \alpha. \end{cases}$$

Die Reihenverwandlung und Einsetzung von H giebt als Näherungsausdrücke für kleine Winkel

$$163. \quad \begin{cases} M_0 = -\frac{1}{56} q r^2 \alpha^2 = -\frac{1}{14} q h^2, \\ M_1 = -\frac{9}{392} q r^2 \alpha^4 = +\frac{8}{98} q h^2, \end{cases}$$

also  $M_0 : M_1 = 7 : 9$ . Dieses Verhältniss gilt fast selbst noch für den Halbkreis. Annähernd wird die Gleichung  $\cos \varphi = \frac{H}{q r}$ , wenn wir für H den Ausdruck 159 setzen,  $1 - \frac{1}{2} \varphi^2 = 1 - \frac{2}{7} \alpha^2$ , also  $\varphi = \alpha \sqrt{\frac{7}{7}} = 0,756 \alpha$ . Auch diese Formel gilt fast noch für den Halbkreis.

Der Abstand e der Stützzlinie von der Axe ist  $\frac{M}{P}$ . Annähernd wird für kleine Winkel

$$164. \quad e = \frac{1}{56} r (\alpha^2 - \varphi^2) (\alpha^2 - 7 \varphi^2) \\ = \frac{1}{7} h \left( \frac{h}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left( 1 - 7 \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Am grössten wird e annähernd für  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 0,756 \alpha$  und zwar ist entsprechend  $e_0 = \frac{1}{4} h$ ,  $e_1 = -\frac{9}{8} h$ .

In folgender Tabelle sind die wichtigsten Grössen für  $\varphi = 0, 30^\circ, 60^\circ$  und  $90^\circ$  zusammengestellt.

$\alpha$	max P	$M_0$	$M_1$	$\varphi$ für $M_1$	$e_0$	$e_1$
0	—	—	+		+	—
0	1,000	0,0714	0,0918	0,756	0,143	0,184
30	1,050	0,0718	0,0917	0,752	0,145	0,174
60	1,106	0,0733	0,0910	0,747	0,154	0,150
90	1,041	0,0756	0,0901	0,721	0,178	0,090
	$\cdot q r$	$\cdot q h^2$	$\cdot q h^2$	$\cdot \alpha$	$\frac{h^3}{a^2}$	$\frac{h^3}{a^2}$

§. 326. **Verrückungen des Scheitels.** Wir wollen noch die Verrückung  $\Delta_0 x$ ,  $\Delta_0 y$  des Scheitels spezificiren. Natürlich ist der Symmetrie wegen  $\Delta_0 x = 0$ . Nach 156 wird ferner  $E W \Delta_0 y = -H r^3 \cos \alpha + \frac{1}{6} q r^4 (2 - 3 \sin^2 \alpha) - \frac{1}{2} q r^4 (2 + 3 \sin^2 \alpha) + C$ , d. i.

$$165. \quad E W \Delta_0 y = -\frac{1}{12} H r^3 \left[ 3 \sin^2 \alpha - 2 + 2 \cos \alpha - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha \right] \\ - \frac{1}{12} q r^4 \left[ 3 (1 - 2 \sin^2 \alpha) (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1) - 1 + \cos^3 \alpha \right] \\ + \frac{1}{12} \kappa r^3 \left[ 12 H \alpha \sin \alpha \cos \alpha + q r (3 \alpha \sin \alpha - 2 + 2 \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha \right. \\ \left. + \sin^2 \alpha \cos \alpha + 6 \alpha \sin^3 \alpha) \right].$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsformel für kleine Winkel:

$$E W \Delta_0 y = -\frac{5}{24} H r^3 \alpha^4 \left( 1 - \frac{49}{150} \alpha^2 \right) + \frac{5}{24} q r^4 \alpha^4 \left( 1 - \frac{91}{150} \alpha^2 \right) \\ + \kappa H r^3 \alpha^2 + \frac{23}{48} \kappa q r^4 \alpha^4.$$

Wenn man  $\kappa$  vernachlässigt und  $H = q r (1 - \frac{2}{3} \alpha^2)$  setzt, so wird  $E W \Delta_0 y = \frac{5}{840} q r^4 \alpha^6 = \frac{1}{210} q a^2 h^2$ . Genauer aber wird, wenn man  $\kappa = \frac{W}{F r^2}$  und für  $H$  den Ausdruck 159 setzt, mit Vernachlässigung relativ kleiner Glieder:

$$166. \quad \Delta_0 y = \frac{q a^2}{840 E W} \frac{32 F h^4 + 2625 W a^2}{8 F h^2 + 15 W},$$

und wenn  $15 W$  gegen  $8 F h^2$  klein ist,

$$166 a. \quad \Delta_0 y = \frac{q a^2 h^2}{210 E W} + \frac{175}{448} \frac{q a^4}{E F h^2}.$$

Für den Halbkreis wird genau:

$$167. \quad \Delta_0 y = \frac{3 \pi^2 - 4 \pi - 16}{24 \pi} \frac{q r^4}{E W} + \frac{9 \pi - 10}{24} \frac{q r^4}{E F} \\ = 0,013826 \frac{q r^4}{E W} + 0,7614 \frac{q r^4}{E F}.$$

#### D. Gleichmässige Belastung der Axe; Kreisbogen; constanter Querschnitt.

##### §. 327. Formänderung und Horizontalschub.

Nach den Gleichungen 103 (Seite 298) wird  $P + \frac{M}{r} = -H \cos \alpha - g r (\cos \alpha - \cos \varphi + \alpha \sin \alpha)$  und  $M = (H + g r) r (\cos \varphi - \cos \alpha) - g r^2 (\alpha \sin \alpha - \varphi \sin \varphi)$ . Wie in §. 324 ergibt sich hieraus nach 7, 25 und 30:

$$168. \quad \left. \begin{aligned} E W \Delta x &= -\frac{1}{3} (H + g r) r^3 (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi - 2 \cos \alpha \sin \varphi + \varphi \cos \alpha \cos \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{4} g r^4 (4 \alpha \sin \alpha \sin \varphi - 4 \alpha \varphi \sin \alpha \cos \varphi - 2 \varphi + 3 \sin \varphi \cos \varphi - \varphi \cos 2 \varphi) \\ &\quad - \kappa r^3 [H \varphi \cos \alpha \cos \varphi + g r \cos \varphi (\varphi \cos \varphi + \alpha \varphi \sin \alpha - \sin \varphi)], \\ E W \Delta y &= +\frac{1}{2} (H + g r) r^3 (\sin^2 \varphi - 2 \cos \alpha \cos \varphi - 2 \varphi \cos \alpha \sin \varphi) + C \\ &\quad - \frac{1}{4} g r^4 (\varphi^2 - 3 \sin^2 \varphi + 4 \alpha \sin \alpha \cos \varphi + 4 \alpha \varphi \sin \alpha \sin \varphi + 2 \varphi \sin \varphi \cos \varphi) \\ &\quad - \kappa r^3 [H \varphi \cos \alpha \sin \varphi + g r \sin \varphi (\varphi \cos \alpha - \sin \varphi + \alpha \varphi \sin \alpha)]. \end{aligned} \right\}$$

Für  $\varphi = \alpha$  muss  $\Delta x = 0$  werden. Diese Bedingung giebt als Ausdruck für den Horizontalschub:

$$169. \quad H = g r \frac{\alpha + 9 \sin \alpha \cos \alpha - 10 \alpha \cos^2 \alpha - 4 \alpha^2 \sin \alpha \cos \alpha - 4 \kappa \cos \alpha (\alpha \cos \alpha + \alpha^2 \sin \alpha - \sin \alpha)}{2 (\alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha) + 4 \kappa \alpha \cos^2 \alpha}$$

Der Horizontalschub beim Halbkreise wird hiernach genau

$$170. H = \frac{1}{2} g r.$$

Auch hier können wir wieder, wenn  $H_0$  den Horizontalschub ohne Rücksicht auf  $\alpha$  bezeichnet,

$$171. H = H_0 \frac{1 - A \alpha}{1 + B \alpha}$$

setzen. Als Näherungsausdrücke für kleine Winkel ergeben sich

$$172. H_0 = g r \left( 1 - \frac{4}{21} \alpha^2 + \dots \right) = \frac{g a^2}{2 h} \left( 1 - \frac{16 h^2}{21 a^2} + \dots \right);$$

$$A = \frac{5}{\alpha^2} \left( 1 - \frac{61}{210} \alpha^2 + \dots \right), \quad B = \frac{15}{2 \alpha^4} \left( 1 - \frac{17}{21} \alpha^2 + \dots \right).$$

Da A gegen B nur klein ist, so wird annähernd nach Einsetzung von  $H_0$  und B:

$$173. H = \frac{g a^2}{2 h} \frac{8 F h^2}{15 W + 8 F h^2},$$

was mit dem Näherungsausdrücke für gleichmässige Belastung der Horizontalen genau übereinstimmt.

Nach der genauen Formel ist folgende Tabelle berechnet.

$\alpha$	$H_0$	A	B	$\alpha$	$H_0$	A	B
0	1,0000	1,250	0,469	40	0,9061	1,142	0,357
10	0,9942	1,239	0,463	50	0,8523	1,064	0,292
20	0,9767	1,226	0,441	60	0,7855	0,949	0,226
30	0,9474	1,194	0,407	90	0,5000	0	0
Gr.	. g r	$\frac{a^2}{h^2}$	$\frac{a^4}{h^4}$	Gr.	. g r	$\frac{a^2}{h^2}$	$\frac{a^4}{h^4}$

**§. 328. Beanspruchung.** Die Grössen P, Q, M sind nach der Berechnung von H durch die Gleichungen 103 (Seite 298) bestimmt.

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke, wenn man  $H_0$  für H setzt, also  $\alpha$  vernachlässigt,

$$174. \begin{cases} P = -g r \left( 1 - \frac{4}{21} \alpha^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 + \dots \right), \\ Q = \frac{1}{21} g r \varphi \left( 4 \alpha^2 - 7 \varphi^2 + \dots \right), \\ M = -\frac{1}{84} (\alpha^2 - \varphi^2) (\alpha^2 - 7 \varphi^2 + \dots). \end{cases}$$

P ist stets negativ und hat an den Kämpfern seinen grössten Werth. Q wird Null und M zum Maximum für  $H \sin \varphi = g r \varphi \cos \varphi$ , d. i. für  $\varphi = 0$  und einen durch fortgesetzte Näherung zu bestimmenden Werth von  $\varphi$ ; bei kleinen Centriwinkeln für  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \alpha \sqrt{\frac{4}{7}} = 0,7559 \alpha$ . Die entsprechenden Näherungswerthe  $M_0, M_1$  der Maxima von M sind

$$175. \begin{cases} M_0 = -\frac{1}{84} g r^2 \alpha^4 = -\frac{1}{21} g h^2, \\ M_1 = +\frac{8}{196} g r^2 \alpha^4 = +\frac{3}{49} g h^2. \end{cases}$$

Bei kleinen Centriwinkeln ist in allen Querschnitten  $M = \frac{9}{14} = 0,643$  von dem Momente bei gleichmässiger Belastung der Horizontalen, vorausgesetzt, dass  $g = q$  ist.

Der Abstand  $e$  der Stützlinie von der Axe wird bei kleinen Centriwinkeln

$$176. \quad e = \frac{9}{84} r (\alpha^2 - \varphi^2) (\alpha^2 - 7 \varphi^2),$$

also ist  $e$  ebenfalls  $\frac{9}{14} = 0,643$  von dem Werthe von  $e$  für gleichmässige Belastung der Horizontalen.

Die wichtigsten Grössen sind für  $\alpha = 0, 30^\circ, 60^\circ$  und  $90^\circ$  in folgender Tabelle zusammengestellt.

$\alpha$	max P	$M_0$	$M_1$	$\varphi$ für $Q = 0$	$e_0$	$e_1$
	—	—	+		—	+
0	1,000	0,0476	0,0612	0,756	0,095	0,122
30	1,144	0,0496	0,0663	0,753	0,098	0,115
60	1,300	0,0568	0,0752	0,746	0,109	0,101
90	1,571	0,0708	0,0945	0,733	0,142	0,075
Gr.	$\cdot g r$	$\cdot g h^2$	$\cdot g h^2$	$\cdot \alpha$	$\frac{h^3}{a^2}$	$\frac{h^3}{a^2}$

**§. 329. Verrückung des Scheitels.** Setzt man in der Gleichung 168 für  $\varphi = \alpha$  die Verrückung  $\Delta y = 0$ , so ergibt sich für die Constante C der Werth

$$177. \quad C = -\frac{1}{2} (H + g r) r^3 (3 \sin^2 \alpha - 2 - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha) \\ + \frac{1}{4} g r^4 (\alpha^2 - 3 \sin^2 \alpha + 6 \alpha \sin \alpha \cos \alpha + 4 \alpha^2 \sin^2 \alpha) \\ + \kappa r^3 [H \alpha \sin \alpha \cos \alpha + g r \sin \alpha (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha + \alpha^2 \sin \alpha)].$$

Für die Verrückung  $\Delta_0 y$  des Scheitels wird nun  $E W \Delta_0 y = C - (H + g r) r^3 \cos \alpha - g r^4 \alpha \sin \alpha$ , d. i.

$$E W \Delta_0 y = -\frac{1}{2} H (2 \cos \alpha - 2 + 3 \sin^2 \alpha - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha) \\ + \frac{1}{4} g r (4 - 4 \cos \alpha - 9 \sin^2 \alpha - 4 \alpha \sin \alpha + 10 \alpha \sin \alpha \cos \alpha + \alpha^2 + 4 \alpha^2 \sin^2 \alpha) \\ + \kappa [H \alpha \sin \alpha \cos \alpha + g r \sin \alpha (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha + \alpha^2 \sin \alpha)].$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdruck für kleine Centriwinkel

$$179. \quad E W \Delta_0 y = -\frac{5}{24} H r^3 \alpha^4 \left(1 - \frac{49}{150} \alpha^2\right) + \frac{5}{24} g r^4 \alpha^4 \left(1 - \frac{77}{150} \alpha^2\right) \\ + \kappa H r^3 \alpha^2 + \frac{2}{3} \kappa g r^4 \alpha^4.$$

Vernachlässigt man  $\kappa$  und setzt  $H = g r (1 - \frac{4}{21} \alpha^2)$ , so wird  $E W \Delta_0 y = \frac{1}{12} g r^4 \alpha^6 = \frac{1}{315} g a^2 h^2$ , also  $\frac{2}{3}$  so gross, als im vorigen Falle. Genauer aber wird, wenn man für H den Ausdruck 171, dabei  $H_0 = g r (1 - \frac{4}{21} \alpha^2)$ ,

$A = 0$ ,  $B = \frac{15}{2 \alpha^4}$ ,  $\kappa = \frac{W}{F r^2}$  setzt und relativ kleine Glieder vernachlässigt,

$$180. \quad \Delta_0 y = \frac{g a^2}{2520 E W} \frac{64 F h^4 + 7875 W a^2}{8 F h^2 + 15 W}$$

und wenn  $15 W$  gegen  $8 F h^2$  klein ist,

$$181. \Delta_0 y = \frac{g a^2 h^2}{315 E W} + \frac{175}{448} \frac{g a^4}{E F h^2}.$$

Für den Halbkreis wird genau

$$182. \Delta_0 y = \frac{5 \pi^2 - 8 \pi - 24}{16} \frac{g r^4}{E W} + \frac{\pi^2 - 4}{4} \frac{g r^2}{E F} \\ = 0,013455 \frac{g r^4}{E W} + 1,4674 \frac{g r^2}{E F}.$$

#### D. Beliebige Belastung, beliebige Form der Axe und variabler Querschnitt.

**§. 330. Horizontalschub und Formänderung.** Für die beiden Verticaldrücke  $V, V'$  gelten stets die durch das Gleichgewicht des ganzen Bogens bestimmten Gleichungen 93 (Seite 294). Zur Bestimmung des Horizontalschubes und der Formänderung wendet man hier am besten die Gleichungen 30 (Seite 276), welche nur einfache Integrale enthalten, an. Wir setzen zur Abkürzung

$$183. \frac{P}{E F} + \frac{M}{E F r} = \mathfrak{P}, \quad \frac{M}{E W} + \frac{\mathfrak{P}}{r} = \frac{M}{E W} + \frac{P}{E F r} + \frac{M}{E F r^2} = \mathfrak{M}.$$

Alsdann wird nach 7, 8 (Seite 270), 23, 25 (Seite 274) und 30 (Seite 276):

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \mathfrak{P}, \quad \frac{\Delta d\varphi}{ds} = \mathfrak{M},$$

$$\Delta s = \int \mathfrak{P} ds, \quad \Delta \varphi = \int \mathfrak{M} ds;$$

$$184. \begin{cases} \Delta x = -y \int \mathfrak{M} ds + \int y \mathfrak{M} ds + \int \mathfrak{P} dx, \\ \Delta y = +x \int \mathfrak{M} ds - \int y \mathfrak{M} ds + \int \mathfrak{P} dy. \end{cases}$$

Sondern wir in den letzten Gleichungen die Constanten ab, so wird

$$a. \begin{cases} \Delta x = -y \left( \int^s \mathfrak{M} ds + A \right) + \int^s y \mathfrak{M} ds + \int^x \mathfrak{P} dx + B, \\ \Delta y = +x \left( \int^s \mathfrak{M} ds + A \right) - \int^s x \mathfrak{M} ds + \int^y \mathfrak{P} dy + C. \end{cases}$$

Die Anwendung dieser Gleichungen auf die beiden Kämpfer giebt, wenn wir die halbe Länge des ganzen Bogens  $= b$  und die Ordinaten für die beiden Kämpfer zur Unterscheidung  $= h_1, h_2$  setzen ( $x = a, y = h_1, s = b$  und  $x = -a, y = h_2, s = -b$ ):

$$b. \begin{cases} 0 = -h \left( \int^b \mathfrak{M} ds + A \right) + \int^b y \mathfrak{M} ds + \int^a \mathfrak{P} dx + B, \\ 0 = -h \left( \int^{-b} \mathfrak{M} ds + A \right) + \int^{-b} y \mathfrak{M} ds + \int^{-a} \mathfrak{P} dx + B, \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} 0 = +a \left( \int_{+b}^b \mathfrak{M} ds + A \right) - \int_{+b}^b x \mathfrak{M} ds + \int_{h_1}^{h_2} \mathfrak{P} dy + C, \\ 0 = -a \left( \int_{+b}^b \mathfrak{M} ds + A \right) - \int_{+b}^{-b} x \mathfrak{M} ds + \int_{h_1}^{h_2} \mathfrak{P} dy + C. \end{cases}$$

Zunächst giebt die Subtraction der beiden ersten dieser Gleichungen mit Rücksicht auf den Begriff der bestimmten Integrale

$$185. \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M} (h - y) ds - \int_{+a}^{-a} \mathfrak{P} dx = 0.$$

Durch diese Gleichung ist nach Einsetzung der Ausdrücke für  $M$ ,  $P$  und nach Ausführung der Integration der Horizontalschub  $H$  bestimmt. Die Subtraction und Addition der beiden Gleichungen  $c$  geben die Werthe für  $A$  und  $C$ . Setzt man diesen Werth für  $A$  in eine der beiden Gleichungen  $b$ , so erhält man den Werth von  $B$ . Setzt man nun die so erhaltenen Werthe von  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in die Gleichungen  $a$ , so ergiebt sich mit gehöriger Berücksichtigung des Begriffs der bestimmten Integrale:

$$186. \begin{cases} \Delta x = -\frac{1}{2} h \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M} ds - \frac{1}{2} y \left[ \int_b^s \mathfrak{M} ds - \int_s^{-b} \mathfrak{M} ds \right] \\ \quad - \frac{h-y}{2a} \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M} x ds + \int_b^s \mathfrak{M} y ds + \int_a^x \mathfrak{P} dx + \frac{h-y}{2a} \int_{h_1}^{h_2} \mathfrak{P} dy, \\ \Delta y = +\frac{1}{2} a \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M} ds + \frac{1}{2} x \left[ \int_b^s \mathfrak{M} ds - \int_s^{-b} \mathfrak{M} ds \right] \\ \quad - \frac{1}{2} \left[ \int_b^s \mathfrak{M} x ds - \int_s^{-b} \mathfrak{M} x ds \right] - \frac{x}{2a} \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M} x ds \\ \quad + \frac{x}{2a} \int_{h_1}^{h_2} \mathfrak{P} dy + \frac{1}{2} \int_{h_1}^y \mathfrak{P} dy - \frac{1}{2} \int_y^{h_2} \mathfrak{P} dy. \end{cases}$$

Für den Scheitel vereinfachen sich diese Gleichungen, weil vor den Integralzeichen  $x = 0$ ,  $y = 0$  zu setzen ist. Noch mehr vereinfachen sich die Gleichungen bei symmetrischer Form und Belastung. Alsdann ist nämlich

$$\begin{aligned} \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M} ds &= -2 \int_0^b \mathfrak{M} ds, & \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M} x ds &= 0, & \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M} y ds &= -2 \int_0^b \mathfrak{M} y ds, \\ \int_b^s \mathfrak{M} ds - \int_s^{-b} \mathfrak{M} ds &= 2 \int_0^s \mathfrak{M} ds, \\ \int_b^s \mathfrak{M} x ds - \int_s^{-b} \mathfrak{M} x ds &= -2 \int_s^b \mathfrak{M} x ds. \end{aligned}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \mathfrak{P} dy = 0, \quad \int_{h_1}^0 \mathfrak{P} dy = - \int_0^{h_2} \mathfrak{P} dy,$$

$$\int_{h_1}^y \mathfrak{P} dy - \int_y^{h_2} \mathfrak{P} dy = - 2 \int_y^{h_1} \mathfrak{P} dy.$$

Hierdurch ergibt sich als Gleichung zur Bestimmung des Horizontalschubes

$$187. \quad \int_0^b \mathfrak{M} (h - y) ds - \int_0^a \mathfrak{P} dx = 0,$$

als Verrückungen eines beliebigen Punktes

$$188. \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= + h \int_0^b \mathfrak{M} ds - y \int_0^s \mathfrak{M} ds - \int_s^b \mathfrak{M} y ds - \int_x^a \mathfrak{P} dx, \\ \Delta y &= - a \int_0^b \mathfrak{M} ds + x \int_0^s \mathfrak{M} ds + \int_s^b \mathfrak{M} x ds - \int_y^{h_1} \mathfrak{P} dy, \end{aligned} \right.$$

und als Verrückungen des Scheitels  $\Delta_0 x = 0$  und

$$189. \quad \Delta_0 y = - a \int_0^b \mathfrak{M} ds + \int_0^b \mathfrak{M} x ds - \int_0^{h_1} \mathfrak{P} dy.$$

Die Gleichungen lassen sich auch vortheilhaft in den bereits behandelten Fällen anwenden, in welchen der Querschnitt constant ist. Wir haben dies aus pädagogischen Rücksichten nicht gethan.

Im Folgenden wollen wir nur auf Bestimmung des Horizontalschubes eingehen, da es gewöhnlich genügt, die Formänderung, welche von geringerer Wichtigkeit ist, unter der Annahme eines constanten Querschnittes zu ermitteln. Der hierbei entstehende Fehler ist in der That sehr klein.

**§. 331. Isolirte Last bei kreisförmiger Axe.** Für P und M sind die Ausdrücke 95, 97 (Seite 294) zu setzen. Es wird für die beiden Bogentheile AE und BE:

$$\mathfrak{P} = - \frac{1}{EF} (H \cos \varphi + V \sin \varphi), \quad \mathfrak{P}' = - \frac{1}{EF} (H \cos \varphi + V' \sin \varphi),$$

$$\mathfrak{M} = \frac{Hr}{EW} (\cos \varphi - \cos \alpha) - \frac{Vr}{EW} (\sin \alpha - \sin \varphi) - \frac{1}{EFr} (H \cos \varphi + V \sin \varphi),$$

$$\mathfrak{M}' = \frac{Hr}{EW} (\cos \varphi - \cos \alpha) - \frac{V'r}{EW} (\sin \alpha + \sin \varphi) - \frac{1}{EFr} (H \cos \varphi + V \sin \varphi).$$

Die Gleichung 185 zur Bestimmung des Horizontalschubes geht, wenn wir  $b = r\alpha$ ,  $ds = r d\varphi$ ,  $h - y = r(\cos \varphi - \cos \alpha)$  setzen, und die auf die ganze Bogenlänge AB bezüglichen Integrale in zwei auf die Bogentheile

AE und EB auszudehnende Integrale zerlegen, also  $\int_{+\alpha}^{-\alpha} = \int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{-\alpha}$  setzen,

$$\begin{aligned}
0 = & H r^2 \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{(\cos \varphi - \cos \alpha)^2}{W} d\varphi - V r^3 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\sin \alpha - \sin \varphi)(\cos \varphi - \cos \alpha)}{W} d\varphi \\
& - V' r^3 \int_{\beta}^{-\alpha} \frac{(\sin \alpha - \sin \varphi)(\cos \varphi - \cos \alpha)}{W} d\varphi + H r \cos \alpha \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{\cos \varphi}{F} d\varphi \\
& + V r \cos \alpha \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin \varphi}{F} d\varphi + V' r \cos \alpha \int_{\beta}^{-\alpha} \frac{\sin \varphi}{F} d\varphi.
\end{aligned}$$

In Folge der symmetrischen Form des Bogens lassen sich noch folgende Vereinfachungen erzielen. Ist  $f(x)$  eine Funktion von  $x$ , welche für gleiche positive und negative  $x$  gleiche Werthe hat, und zwar 1. mit gleichem Vorzeichen, so ist

$$\begin{aligned}
\int_a^{-a} f(x) dx &= -2 \int_0^a f(x) dx, \quad \int_a^{\xi} f(x) dx - \int_{\xi}^{-a} f(x) dx \\
&= \int_a^{\xi} f(x) dx - \left[ 2 \int_{\xi}^0 f(x) dx + \int_a^{\xi} f(x) dx \right] = +2 \int_0^{\xi} f(x) dx
\end{aligned}$$

und 2. mit ungleichem Vorzeichen, so ist

$$\begin{aligned}
\int_a^{-a} f(x) dx &= 0, \quad \int_a^{\xi} f(x) dx - \int_{\xi}^{-a} f(x) dx = \int_a^{\xi} f(x) dx \\
- \left[ \int_{\xi}^0 f(x) dx - \int_{\xi}^0 f(x) dx - \int_a^{\xi} f(x) dx \right] &= 2 \int_a^{\xi} f(x) dx.
\end{aligned}$$

Setzen wir in obiger Gleichung  $V = G \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2 \sin \alpha}$ ,  $V' = G \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2 \sin \alpha}$ , lösen die Parenthesen, ausser  $(\cos \varphi - \cos \alpha)$  auf und wenden die oben entwickelten allgemeinen Formeln an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
190. \quad 2 A H r^2 - G r^2 (A_1 \sin \alpha - A_2 \sin \beta - A_3) + 2 B H \cos \alpha \\
+ B_1 G \cot \alpha \sin \beta = 0,
\end{aligned}$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$191. \quad \left\{ \begin{aligned}
A &= \int_0^{\alpha} \frac{(\cos \varphi - \cos \alpha)^2}{W} d\varphi, & A_1 &= \int_0^{\alpha} \frac{\cos \varphi - \cos \alpha}{W} d\varphi, \\
A_2 &= \int_0^{\beta} \frac{\cos \varphi - \cos \alpha}{W} d\varphi, & A_3 &= \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\sin \varphi (\cos \varphi - \cos \alpha)}{W} d\varphi, \\
B &= \int_0^{\alpha} \frac{\cos \varphi}{F} d\varphi, & B_1 &= \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\sin \varphi}{F} d\varphi.
\end{aligned} \right.$$

Die Integrale berechnet man am besten nach der Simpson'schen Regel oder einer anderen Methode zur Berechnung des Flächeninhaltes krummliniger Figuren. Die Genauigkeit wird erhöht, wenn man  $\frac{1}{W} = \frac{1}{W_0}(1 + \varepsilon)$ ,  $\frac{1}{F} = \frac{1}{F_0}(1 + \delta)$  setzt, wobei  $W_0$ ,  $F_0$  das mittlere Trägheitsmoment und die mittlere Querschnittsfläche bezeichnen. Somit besteht nun  $\frac{1}{W}$  und  $\frac{1}{F}$  aus einem constanten und einem variablen Theile und für den ersten Theil, welcher für gewöhnlich den Haupttheil ausmacht, kann man die Integration genau ausführen. Es ergibt sich nämlich

192. 
$$A W_0 = \frac{1}{2} (\alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha) + \int_0^\alpha \varepsilon (\cos \varphi - \cos \alpha)^2 d\varphi,$$

$$A_1 W_0 = \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \int_0^\alpha \varepsilon (\cos \varphi - \cos \alpha) d\varphi,$$

$$A_2 W_0 = \sin \beta - \beta \cos \alpha + \int_0^\beta \varepsilon (\cos \varphi - \cos \alpha) d\varphi,$$

$$A_3 W_0 = \frac{1}{2} [\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta - 2 \cos \alpha (\cos \beta - \cos \alpha)] + \int_\beta^\alpha \varepsilon \sin \varphi (\cos \varphi - \cos \alpha) d\varphi,$$

$$B F_0 = \sin \alpha + \int_0^\alpha \delta \cos \varphi d\varphi, \quad B_1 F_0 = \cos \beta - \cos \alpha + \int_\beta^\alpha \delta \sin \varphi d\varphi.$$

Beispiel. Es sei  $\alpha = 30^\circ$ ,  $r = 50^m = 50^{dc}$ . Die Flächeninhalte und Trägheitsmomente der Querschnitte seien durch folgende Tabelle bestimmt.

$\varphi$	F	W	$\frac{1}{F}$	$\frac{1}{W}$	$\delta$	$\varepsilon$
0	7,7	297	0,130	0,00337	+ 0,012	+ 0,00031
0,2	8,4	324	0,119	0,00309	+ 0,001	+ 0,00003
0,4	9,9	385	0,101	0,00360	- 0,017	- 0,00046
0,6	10,2	393	0,098	0,00255	- 0,020	- 0,00051
0,8	8,6	335	0,116	0,00299	- 0,002	- 0,00007
1	5,4	210	0,185	0,00476	+ 0,067	- 0,00170
$\cdot \alpha$	$\square$ Decim.	Decim. Mittel	0,118	0,00306		

Also ist  $F_0 = 8,5 \square$  Decim.,  $W_0 = 328$  Decim.

Wenden wir zur Berechnung der Integrale die bekannte Trapezialformel an, bei welcher man sich die in Rede stehende Fläche in Trapeze zerlegt denkt, so ist

$$\int^e y dx = e \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right),$$

wenn  $y_0, y_1, y_2, \dots$  die Werthe von  $y$  für gleichviel, nämlich um  $e$ , von einander verschiedene Werthe von  $x$  bezeichnen. Hiernach wird

$$\begin{aligned}
 A W_0 &= \frac{1}{2} (\text{Arc } 30^\circ + 2 \text{ Arc } 30^\circ \cos^2 30^\circ - 3 \sin 30^\circ \cos 30^\circ) \\
 &+ \frac{\text{Arc } 30^\circ}{5} \left[ \frac{1}{2} 0,00031 (\cos 0^\circ - \cos 30^\circ)^2 + 0,00003 (\cos 6^\circ - \cos 30^\circ)^2 - 0,00046 (\cos 12^\circ - \cos 30^\circ)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 0,00051 (\cos 18^\circ - \cos 30^\circ)^2 - 0,00007 (\cos 24^\circ - \cos 30^\circ)^2 + \frac{1}{5} 0,00170 (\cos 30^\circ - \cos 30^\circ)^2 \right] \\
 &= 0,0049793 + 0,1047 (0,0000028 + 0,0000005 - 0,0000058 - 0,0000029 - 0,0000002 + 0) \\
 &= 0,0049793 - 0,0000006 = 0,0049787.
 \end{aligned}$$

In ganz gleicher Weise ergibt sich (beispielsweise für  $\beta = 0,4 \cdot \alpha = 12^\circ$ ):

$$\begin{aligned}
 A_1 W_0 &= 0,0465502 - 0,0000072 = 0,0465425, \\
 A_2 W_0 &= 0,0265318 - 0,0000001 = 0,0265317, \\
 A_3 W_0 &= 0,0062857 - 0,0000018 = 0,0062839, \\
 B F_0 &= 0,5090000 - 0,000155 = 0,499845, \\
 B_1 F_0 &= 0,112122 + 0,000662 = 0,112784.
 \end{aligned}$$

Dies in die Gleichung 189 eingesetzt, giebt

$$\begin{aligned}
 0,0099574 \frac{H r^2}{W_0} - 0,0114711 \frac{G r^2}{W_0} + 0,86576 \frac{H}{F_0} + 0,04062 \frac{G}{F_0} &= 0, \\
 H &= \frac{0,0114711 - 0,04062 \kappa_0}{0,0099574 + 0,86576 \kappa_0} G.
 \end{aligned}$$

Nun, aber ist  $\kappa_0 = \frac{W_0}{F_0 r^2} = \frac{327}{8,5 \cdot 500^2} = 0,000154$ , daher

$$H = \frac{0,0114648}{0,0100937} G = 1,13584 G.$$

Bei constantem Querschnitte würde

$$H = \frac{0,0114732 - 0,04038 \kappa_0}{0,0099586 + 0,86603 \kappa_0} G = 1,13625 G.$$

Ohne Rücksicht auf  $\kappa$  würde

$$H = \frac{0,0114711}{0,0099574} G = 1,15202 G,$$

also nur 1,4 Procent zu gross. Das Beispiel zeigt, dass man bei Annahme eines constanten Querschnittes, wenn die Veränderung des Querschnittes nicht bedeutend ist, nur einen sehr kleinen Fehler begeht.

### §. 332. Gleichmässige Belastung der Horizontalen. Nach

183 wird mit Berücksichtigung der Ausdrücke 101 (Seite 297) für P und M:

$$\mathfrak{P} = -\frac{1}{E F} \left[ H \cos \alpha + \frac{1}{2} q r (\sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi) \right],$$

$$\mathfrak{M} = \frac{r}{E W} \left[ H (\cos \varphi - \cos \alpha) - \frac{1}{2} q r (\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha) \right]$$

$$-\frac{1}{E F r} \left[ H \cos \alpha + \frac{1}{2} q r (\sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi) \right].$$

Setzt man dies in 187 ein und ausserdem  $dx = r \cos \varphi d\varphi$ ,  $h - y = r (\cos \varphi - \cos \alpha)$ , so ergibt sich nach Reduction auf H:

$$193. H = \frac{1}{2} q r \frac{\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{W} (\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha) (\cos \varphi - \cos \alpha) - \frac{\cos \alpha}{r^2} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi)}{\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{W} (\cos \varphi - \cos \alpha)^2 + \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F}}$$

Die Integrale sind in gleicher Weise, wie im vorigen §. zu berechnen.

Beispiel. Für das im vorigen §. behandelte Beispiel ergibt sich

$$H = \frac{0,0091952 - 0,17645 \alpha_0}{0,0099574 + 0,86576 \alpha_0} q r \\ = \frac{0,0091680}{0,0100907} q r = 0,90856 q r.$$

Bei constantem Querschnitte würde sich

$$H = \frac{0,0091958 - 0,17619 \alpha_0}{0,0099586 + 0,86603 \alpha_0} = 0,90850 q r$$

ergeben.

Eine gleichmässige Belastung der Bogenaxe tritt in der Wirklichkeit nur durch das Eigengewicht des Bogens ein und setzt dann einen constanten Querschnitt voraus. Dieser Fall hat also hier, wo es sich um einen variablen Querschnitt handelt, keinen Sinn, so dass wir ihn übergehen.

## XXXVIII. Kapitel.

### Bogen ohne Gelenk und mit eingespannten Kämpfern.

**§. 333. Einleitung.** Bei den Bogenträgern mit Kämpfergelenken gehen die Kämpferdrücke durch ganz bestimmte Punkte, nämlich durch die Axen der Gelenke. Wenn aber die Bogenenden in der Widerlagsmasse eingespannt sind oder wenn sie sich so gegen das Widerlager stemmen, dass eine Drehung der Kämpferquerschnitte unmöglich ist, so gehen die Kämpferdrücke nicht mehr durch bestimmte Punkte. Bei den Bogenträgern mit Kämpfergelenken waren die Momente an den Kämpfern Null; hier dagegen existiren auch für die Kämpferquerschnitte gewisse Momente  $M_1, M_2$ , die als neue Unbekannte hinzukommen. Zu ihrer Bestimmung kommen aber auch zwei neue Bedingungen hinzu, nämlich die, dass sich die Richtung der Tangente an den Kämpfern nicht ändert oder dass für die Kämpfer  $\Delta\varphi = 0$  ist.

Bei den Bogenträgern mit Kämpfergelenken haben wir immer den zwischen einem Bogenende und einem beliebigen Querschnitte liegenden Körpertheil in Betracht gezogen. Hier dagegen wollen wir immer einen Körpertheil, welcher zwischen dem Scheitelquerschnitte und einem beliebigen Querschnitte liegt, in Betracht ziehen. Beide Wege führen natürlich zu demselben Ziele; der hier gewählte Weg ist aber im vorliegenden Falle etwas einfacher, als der vorige.

Demgemäss denken wir uns den Bogen im Scheitelquerschnitte durchschnitten. Die von der einen Bogenhälfte auf die andere ausgeübte Kraft zerlegen wir in eine in der Ebene des Querschnittes wirkende Verticalkraft  $V$  und eine Horizontalkraft  $H$ , den sogenannten Horizontalschub. Der Abstand der letzteren von der horizontalen Schweraxe des Querschnittes sei  $e_0$  und das Moment  $-H e_0$  für den Scheitelquerschnitt  $= M_0$ .

#### A. Isolirte Last.

**§. 334. Allgemeines.** Wir setzen zunächst voraus, dass nur eine isolirte Last  $G$  (Fig. 111) vorhanden sei. Wir bezeichnen, wie früher

für Querschnitte, welche zwischen dem Kämpfer A und dem Angriffspunkte E der Last liegen, Alles ohne Apostroph; für Querschnitte aber, welche zwischen E und dem anderen Kämpfer B liegen, Alles mit Apostrophh. Alsdann ergibt sich leicht

$$194. \quad \begin{cases} P = -H \cos \varphi - (G - V) \sin \varphi, & P' = -H \cos \varphi + V \sin \varphi; \\ Q = -H \sin \varphi + (G - V) \cos \varphi, & Q' = -H \sin \varphi - V \sin \varphi, \end{cases}$$

und  $M = -H(e_0 + y) - Vx + G(x - \xi)$ ,  $M' = -H(e_0 + y) - Vx$ , d. i., weil  $-H e_0 = M_0$  ist.

$$195. \quad M = M_0 - Hy - Vx + G(x - \xi), \quad M' = M_0 - Hy - Vx.$$

Die beiden von den Widerlagern auf den Bogen ausgeübten Reactionen, die wir Kämpferdrücke nennen und auch hier mit D, D' bezeichnen, schneiden sich wiederum in einem Punkte L, welcher in der Richtung der Last g liegt, da sonst die drei auf den Bogen wirkenden Kräfte D, D', G nicht im Gleichgewichte sein könnten. Wir nennen auch hier die Linie JK, welche der Punkt E bei variabler Lage der Last G beschreibt, die Kämpferdrucklinie. Die Gleichung derselben lässt sich, wenn V, H, M<sub>0</sub> bekannt sind, leicht bestimmen. Die auf den Bogentheil BE wirkende Kraft D' ist die Resultante aus V und H. Setzen wir daher NL = η,

und ist O der Durchschnitt der Richtung, LΨ des Kämpferdruckes D' mit der Verlängerung von MC, so ist  $\eta = CO + CN \cot \angle L\Psi K = e_0 + \xi \frac{V}{H}$ , oder, weil  $e_0 = -\frac{M_0}{H}$  ist,

$$196. \quad \eta = \frac{V \xi - M_0}{H}.$$

Die Richtung der Kämpferdrücke lässt sich in bequemer Weise auf doppelte Art angeben. Zunächst durch Bestimmung der Durchschnittspunkte Φ und Ψ der Kämpferdrücke mit den Verticalen, welche durch die Schwerpunkte A, B der Kämpferquerschnitte gehen. Setzt man AΦ = c<sub>1</sub>, BΨ = c<sub>2</sub> und nimmt c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub> nach oben als positiv an, so wird  $M_1 = +H c_1$ ,  $M_2 = -H c_2$ , also

Fig. 111.

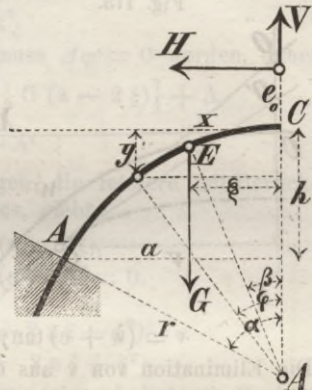
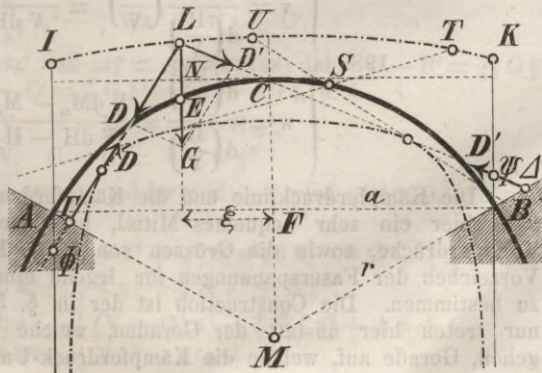


Fig. 112.

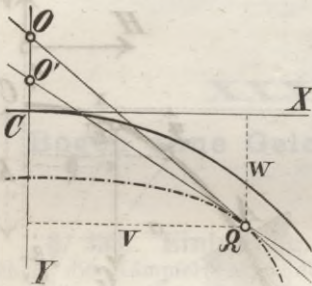


$$197. \quad c_1 = -\frac{M_1}{H}, \quad c_2 = -\frac{M_2}{H}.$$

Ist  $c_1, c_2$  der Abstand der Durchschnitte der Kämpferdrücke mit den Endquerschnitten von der Axe,  $P_1, P_2$  die Axialkraft an den Kämpfern, so ist  $e_1 = \frac{M_1}{P_1}, e_2 = \frac{M_2}{P_2}$ , wodurch ebenfalls die Richtung der Kämpferdrücke bestimmt ist. Jedoch ist die Berechnung von  $c_1, c_2$  bequemer, als die von  $e_1, e_2$ .

Unter Umständen kann aber die Bestimmung durch diejenige Linie, welche von allen Kämpferdrücken berührt oder welche von den Kämpferdrücken umhüllt wird, bequemer sein. Wir nennen diese Linie die Kämpferdruck-Umhüllungslinie. Die Gleichung derselben lässt sich in folgender Weise ermitteln (Fig. 113).

Fig. 113.



Wir bezeichnen den horizontalen und verticalen Abstand eines beliebigen Punktes  $\Omega$  der Kämpferdruck-Umhüllungslinie vom Scheitel mit  $v, w$ .  $\Omega$  lässt sich als Durchschnittpunkt der Richtungen der Kämpferdrücke ansehen, welche einer unendlich kleinen Verrückung der Last entsprechen. Sind nun  $c, c + dc$  die Abstände der Durchschnitte  $O, O'$  die Kämpferdrücke mit den durch  $C$  gehenden Verticalen von  $C, \gamma, \gamma + d\gamma$  die Winkel zwischen den Kämpferdrücken und der Verticalen, so ist

$$v = (w + c) \tan \gamma, \quad v = (w + c + dc) \tan(\gamma + d\gamma).$$

Die Elimination von  $v$  aus diesen beiden Gleichungen giebt

$$w = -\frac{(c + dc) \tan(\gamma + d\gamma) - c \tan \gamma}{\tan(\gamma + d\gamma) - \tan \gamma} = -\frac{d(c \tan \gamma)}{d \tan \gamma}.$$

Die erste der beiden Gleichungen giebt nun

$$v = -\frac{dc}{d \tan \gamma} \tan^2 \gamma.$$

Nun aber ist  $\tan \gamma = \frac{H}{V}, \quad c = -\frac{M_0}{H}, \quad c \tan \gamma = -\frac{M_0}{V}$ , daher

$$198. \quad \left\{ \begin{aligned} v &= \frac{d\left(\frac{M_0}{H}\right)}{d\left(\frac{H}{V}\right)} \left(\frac{H}{V}\right)^2 = \frac{H dM_0 - M_0 dH}{V dH - H dV}, \\ w &= \frac{d\left(\frac{M_0}{V}\right)}{d\left(\frac{H}{V}\right)} = \frac{V dM_0 - M_0 dV}{V dH - H dV}. \end{aligned} \right.$$

Die Kämpferdrucklinie und die Kämpferdruck-Umhüllungslinie bieten auch hier ein sehr bequemes Mittel, bei gegebener Lage der Last die Kämpferdrücke, sowie die Grössen von  $P, Q, M$  zu construiren und das Vorzeichen der Faserspannungen für irgend einen beliebigen Querschnitt zu bestimmen. Die Construction ist der in §. 309 besprochenen gleich; nur treten hier anstatt der Geraden, welche durch die Kämpferpunkte gehen, Gerade auf, welche die Kämpferdruck-Umhüllungslinie tangiren.

a) Flacher Parabelbogen mit constantem Querschnitte.

§. 335. Bestimmung der Fundamentalgrößen. Wir setzen  $y = h \frac{x^2}{a^2}$ ,  $dy = 2 \frac{hx}{a^2} dx$ ,  $ds = dx$ . Mit Berücksichtigung der Ausdrücke 195 für  $M$ ,  $M'$  wird nach 26 (Seite 274), wenn man für  $y$  und  $ds$  die eben aufgestellten Ausdrücke setzt und die Integration ausführt,

$$\left\{ \begin{aligned} EW \Delta\varphi &= x \left[ M_0 - \frac{1}{3} \frac{Hh}{a^2} x^2 - \frac{1}{2} Vx + \frac{1}{2} G(x - 2\xi) \right] + A, \\ EW \Delta\varphi' &= x \left[ M_0 - \frac{1}{3} \frac{Hh}{a^2} x^2 - \frac{1}{2} Vx \right] + A'. \end{aligned} \right.$$

Für  $x = \xi$  muss  $\Delta\varphi = \Delta\varphi'$  werden, daher  $\frac{1}{2} G(\xi - 2\xi)\xi + A = A'$ , oder  
I.  $A - A' = \frac{1}{2} G \xi^2$ .

Für  $x = a$  muss  $\Delta\varphi = 0$  und für  $x = -a$  muss  $\Delta\varphi' = 0$  werden, daher

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= +a \left[ M_0 - \frac{1}{3} Hh - \frac{1}{2} Va + \frac{1}{2} G(a - 2\xi) \right] + A, \\ 0 &= -a \left[ M_0 - \frac{1}{3} Hh + \frac{1}{2} Va \right] + A'. \end{aligned} \right.$$

Die Addition und Subtraction dieser Gleichungen, die letztere mit Berücksichtigung des für  $A - A'$  gefundenen Werthes, giebt

$$\text{II. } A + A' = Va^2 - \frac{1}{2} Ga(a - 2\xi),$$

$$\text{III. } 2M_0a - \frac{2}{3} Hah + \frac{1}{2} G(a - \xi)^2 = 0.$$

Aus I und II folgt nun

$$\text{a. } \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} Va^2 - \frac{1}{4} G(a^2 - 2a\xi - \xi^2), \\ A' &= \frac{1}{2} Va^2 - \frac{1}{4} G(a^2 - 2a\xi + \xi^2). \end{aligned} \right.$$

Als horizontale und verticale Verrückung eines beliebigen Punktes ergibt sich nun nach 31 (Seite 276) nach Ausführung der Integration:

$$199. \left\{ \begin{aligned} EW \Delta x &= -\frac{2h}{a^2} \left[ \frac{1}{3} M_0 x^3 - \frac{Hh}{15 a^2} x^5 - \frac{1}{8} Vx^4 + \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} \xi x^3 \right) + \frac{1}{2} A x^2 + B \right], \\ EW \Delta x' &= -\frac{2h}{a^2} \left[ \frac{1}{3} M_0 x^3 - \frac{Hh}{15 a^2} x^5 - \frac{1}{8} Vx^4 + \frac{1}{2} A' x^2 + B' \right]; \\ EW \Delta y &= \frac{1}{2} M_0 x^2 - \frac{Hh}{12 a^2} x^4 - \frac{1}{6} (V - G) x^3 - \frac{1}{2} G \xi x^2 + Ax + C, \\ EW \Delta y' &= \frac{1}{2} M_0 x^2 - \frac{Hh}{12 a^2} x^4 - \frac{1}{6} Vx^3 + A'x + C'. \end{aligned} \right.$$

Für  $x = \xi$  muss  $\Delta x = \Delta x'$  und  $\Delta y = \Delta y'$  werden; daher  $B - B' = \frac{5}{24} G \xi^4 - \frac{1}{2} (A - A') \xi^2$  und  $C - C' = \frac{1}{3} G \xi^3 - (A - A') \xi$ , d. i.

$$\text{IV. } B - B' = -\frac{1}{24} G \xi^4,$$

$$\text{V. } C - C' = -\frac{1}{6} G \xi^3.$$

Für  $x = a$  wird  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y = 0$  und für  $x = -a$  wird  $\Delta x' = 0$ ,  $\Delta y' = 0$ , daher

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= +\frac{1}{3} M_0 a^3 - \frac{1}{15} Hh a^3 - \frac{1}{8} Va^4 + \frac{1}{24} Ga^3(3a - 8\xi) + \frac{1}{2} Aa^2 + B, \\ 0 &= -\frac{1}{3} M_0 a^4 + \frac{1}{15} Hh a^3 - \frac{1}{8} Va^4 + \frac{1}{2} A'a^2 + B'; \\ 0 &= +\frac{1}{2} M_0 a^2 - \frac{1}{12} Hh a^2 - \frac{1}{6} (V - G)a^3 - \frac{1}{2} G \xi a^2 + Aa + C, \\ 0 &= +\frac{1}{2} M_0 a^2 - \frac{1}{12} Hh a^2 + \frac{1}{6} Va^3 - A'a + C'. \end{aligned} \right.$$

Die Addition und Subtraction der beiden ersten und der beiden letzten Gleichungen giebt, wenn man hierbei für  $A + A'$ ,  $A - A'$ ,  $B - B'$ ,  $C - C'$  die bereits gefundenen Werthe einführt:

$$\text{VI. } B + B' = -\frac{1}{4} V a^4 + \frac{1}{24} G a^3 (3 a - 4 \xi),$$

$$\text{VII. } 2 M_0 a^3 - \frac{2}{5} H h a^3 + \frac{1}{5} G (3 a^4 - 8 a^3 \xi + 6 a^2 \xi^2 - \xi^4);$$

$$\text{VIII. } C + C' = -M_0 a^2 + \frac{1}{6} H h a^2 - \frac{1}{6} G a (a^2 - 3 a \xi + 3 \xi^2),$$

$$\text{IX. } \frac{2}{3} V a^3 - \frac{1}{6} G (2 a^3 - 3 a^2 \xi + \xi^3).$$

Die Gleichungen III und VII enthalten als Unbekannte nur H und  $M_0$ ; die Auflösung giebt

$$200. \quad H = \frac{15}{32} G \frac{(a^2 - \xi^2)^2}{a^3 h},$$

$$201. \quad M_0 = -\frac{1}{32} G \frac{(a - \xi)^2 (3 a^2 - 10 a \xi - 5 \xi^2)}{a^3}.$$

Die Gleichung IX bestimmt V direkt; sie giebt

$$202. \quad V = \frac{1}{4} G \frac{2 a^3 - 3 a^2 \xi + \xi^3}{a^3} = \frac{1}{4} G \frac{(a - \xi)^2 (2 a + \xi)}{a^3}.$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

$\xi$	H	V	$M_0$	$\xi$	H	V	$M_0$
0	0,4688	0,5000	-0,09375	0,5	0,2637	0,1563	+0,02539
0,1	0,4594	0,4252	-0,04936	0,6	0,1920	0,1040	+0,02400
0,2	0,4320	0,3520	-0,01606	0,7	0,1219	0,0607	+0,01814
0,3	0,3882	0,2818	+0,00689	0,8	0,0607	0,0280	+0,01025
0,4	0,3308	0,2160	+0,02025	0,9	0,0169	0,0073	+0,00314
0,5	0,2637	0,1562	+0,02539	1,0	0	0	0
$\cdot a$	$\cdot G \frac{a}{h}$	$\cdot G$	$\cdot G a$	$\cdot a$	$\cdot G \frac{a}{h}$	$\cdot G$	$\cdot G a$

### §. 336. Construction.

a) Kämpferdrucklinie. Nach 196 (Seite 329) wird

$$H \eta = V \xi - M_0,$$

$$= \frac{G (a - \xi)^2}{32 a^3} [8 (2 a + \xi) \xi + 3 a^2 - 10 a \xi - 5 \xi^2]$$

$$= \frac{3}{32} \frac{G (a - \xi)^2}{a^3} (a + \xi)^2 = \frac{1}{5} H h,$$

mithin ist

$$203. \quad \eta = \frac{1}{5} h.$$

Die Kämpferdrucklinie ist also eine horizontale Gerade, welche um  $\frac{1}{5}$  der Stichoöhe über dem Scheitel liegt.

b) Kämpferdruck-Umhüllungslinie. Nach 200, 202 und 201 wird

$$\frac{dH}{d\xi} = - \frac{15 G (a^2 - \xi^2) \xi}{8 a^3 h}$$

$$\frac{dV}{d\xi} = - \frac{3 G (a^2 - \xi^2)}{4 a^3}$$

$$\frac{dM_u}{d\xi} = + \frac{G (a - \xi) (4 a^2 - 5 a \xi - 5 \xi^2)}{8 a^3}$$

Dies in 198 eingesetzt, giebt als Coordinaten für die Kämpferdruck-Umhüllungslinie nach gehöriger Reduction:

$$204. \quad \begin{cases} v = \frac{2 a^2}{3 a + \xi} \\ w = \frac{(23 a^2 + 20 a \xi + 5 \xi^2) h}{15 (a + \xi) (3 a + \xi)} \end{cases}$$

Für  $\xi = 0$  wird  $v = \frac{2}{3} a$ ,  $w = \frac{23}{15} h$ . Für  $\xi = a$  wird  $v = \frac{1}{2} a$ ,  $w = \frac{2}{5} h$  und für  $\xi = -a$  wird  $v = a$ ,  $w = -\infty$ . Die Elimination von  $\xi$  aus beiden Gleichungen giebt

$$205. \quad w = \frac{5 a^2 - 5 a v + 2 v^2}{15 a (a - v)} h.$$

Hieraus ergibt sich leicht, dass für die Kämpferdrücke auf jeder Seite die Umhüllungslinie eine Hyperbel ist, welche die Verticale durch den betreffenden Kämpfer und ausserdem eine geneigte Gerade zur Asymptote hat. Die letztere schneidet die Symmetrieaxe  $\frac{1}{5} h$  unter dem Scheitel, die Scheiteltangente in der Entfernung  $\frac{3}{2} a$  vom Scheitel und die Sehne in der Entfernung  $-6 a$  von der Sehnenmitte. Das Centrum der Hyperbel liegt  $\frac{1}{5} h$  unter der Horizontalen durch den Scheitel.

Die für verschiedene  $\xi$  berechneten Coordinaten sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$\xi$	$v$	$w$	$\xi$	$v$	$w$
—	+	+	+	+	+
1	1,0000	$\infty$	0	0,6667	0,5111
0,9	0,9524	2,7721	0,1	0,6452	0,4897
0,8	0,9091	1,5455	0,2	0,6249	0,4722
0,7	0,8695	1,1065	0,3	0,6061	0,4577
0,6	0,8334	0,9999	0,4	0,5882	0,4463
0,5	0,8000	0,7600	0,5	0,5714	0,4349
0,4	0,7693	0,6756	0,6	0,5555	0,4258
0,3	0,7407	0,6155	0,7	0,5405	0,4160
0,2	0,7144	0,5714	0,8	0,5263	0,4102
0,1	0,6897	0,5377	0,9	0,5128	0,4053
0	0,6667	0,5111	1	0,5000	0,4000
. a	. a	. h	. a	. a	. h

Hiernach ist auf Taf. XII in Fig. 5 und 6 die graphische Darstellung erfolgt.

**§. 337. Beanspruchung.** P ergibt sich in allen Querschnitten als negativ; M dagegen ist zum Theil positiv, zum Theil negativ.

Zum analytischen Maximum wird sowohl die Axialkraft P, als auch das Moment M, mithin auch die Spannung der gespanntesten Faser in denjenigen Punkten  $R_1, R_2$ , des Bogens, in welchen die Tangente den Kämpferdrücken parallel ist. Zum wirklichen Maximum kann die Spannung der gespanntesten Faser aber auch an den Kämpfern A, B und am Angriffspunkte E der Last werden. Für die Punkte  $R_1, R_2$  wird  $\frac{dM}{dx} = 0$ ,  $\frac{dM'}{dx} = 0$ , d. i. nach 195, wenn wir die betreffenden  $x$  mit  $x', x''$  bezeichnen,

$$206. \quad x' = + \frac{(G - V) a^2}{2 H h}, \quad x'' = - \frac{V a^2}{2 H h}.$$

Die analytischen Maxima von M bezeichnen wir mit  $M', M''$ , die Momente an den Kämpfern A, B mit  $M_1, M_2$  und das Moment am Angriffspunkte E der Last mit  $M_3$ . Nach 195 ergibt sich leicht:

$$207. \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = - \frac{G (a^2 - \xi^2) (a + \xi) (a - 5 \xi)}{16 a^3}, \\ M_2 = - \frac{G (a^2 - \xi^2) (a - \xi) (a + 5 \xi)}{16 a^3}, \\ M_3 = - \frac{3 G (a^2 - \xi^2)^2 (a^2 + 5 \xi^2)}{32 a^5}; \end{array} \right.$$

$$208. \quad \left\{ \begin{array}{l} M' = \frac{G (a + \xi)^2 (19 a^4 - 124 a^3 \xi + 346 a^2 \xi^2 - 300 a \xi^3 + 75 \xi^4)}{480 a^3 (a - \xi)^2}, \\ M'' = \frac{G (a - \xi)^2 (19 a^4 + 124 a^3 \xi + 346 a^2 \xi^2 + 300 a \xi^3 + 75 \xi^4)}{480 a^3 (a + \xi)^2}. \end{array} \right.$$

Zum absoluten Maximum wird  $M_1$  für  $5 \xi^3 + 3 a \xi^2 - 3 a^2 \xi - a^3 = 0$ , d. i. für  $\xi = 0,690 a$ ;  $M_2$  für  $5 \xi^3 - 3 a \xi^2 - 3 a^2 \xi + a^3 = 0$ , d. i. für  $\xi = 0,290 a$  und  $M_3$  für  $\xi^2 = \frac{1}{5} a^2$  oder  $\xi = 0,447 a$  und zwar ist  $\max M_1 = + 0,1356 G a$ ,  $\max M_2 = - 0,0996 G a$  und  $\max M_3 = - 0,1200 G a$ . Endlich wird  $M'$  zum wirklichen Maximum für  $\xi = 0$ ,  $M''$  zum wirklichen und analytischen Maximum für  $\xi = 0,299 a$  und zwar ist  $\max M' = + 0,0396 G a$ ,  $\max M'' = + 0,0580 G a$ . Demnach ist  $\max M_1$  das absolute positive,  $\max M_3$  das absolute negative Maximum von M oder M wird zum absoluten positiven Maximum für  $\xi = 0,690 a$ ,  $x = + a$ , zum absoluten negativen Maximum für  $x = \xi = 0,447 a$  und zwar ist

$$209. \quad \max(+M) = 0,1356 G a, \quad \max(-M) = 0,1200 G a;$$

$\max(+M)$  ist kleiner,  $\max(-M)$  grösser, als beim Bogen mit Kämpfergelenken (Formel 142, Seite 311).

Die Axialkraft P ist bei kleinen Stichhöhen, welche wir hier voraussetzen, fast constant = H.

In folgender Tabelle sind die Hauptgrössen für verschiedene Lagen der Last zusammengestellt.

$\xi$	$x'$	$x''$	$P = H$	$M_1$	$M'$	$M_3$	$M''$	$M_2$
0	+	-	-	-	+	-	+	-
0,2	0,533	0,533	0,4688	0,0625	0,0396	0,0938	0,0396	0,0625
	0,750	0,407	0,4320	0,0001	0,0269	0,1037	0,0556	0,0961

$\xi$	$x'$	$x''$	$P = H$	$M_1$	$M'$	$M_3$	$M''$	$M_2$
	+	-	-	+	+	-	+	-
0,329	1,000	0,352	0,3728	0,0478	0	0,1145	0,0573	0,0989
0,4	-	0,327	0,3308	0,0735	-	0,1191	0,0555	0,0946
0,6	-	0,271	0,1920	0,1280	-	0,1075	0,0381	0,0640
0,8	-	0,231	0,0608	0,1215	-	0,0510	0,0135	0,0225
1	-	0,200	0	0	-	0	0	0
. a	. a	. a	. $G \frac{a}{h}$	. G a	. G a	. G a	. G a	. G a

Da  $P$  in allen Querschnitten nahezu  $= H$  ist, so wird die Spannung der gespanntesten Fasern in denselben Querschnitten zum Maximum, wie die Momente, also für  $x = +a$  oder  $x = 0,447 a$ . Bezeichnen wir die betreffenden Spannungen mit  $N_1, N_3$  und die Abstände der obersten und untersten Fasern von der horizontalen Schweraxe mit  $e_1, e_2$ , so ist, wenn wir nur einen Bruch durch Zerdrücken voraussetzen:

$$N_1 = - \frac{3 G (a^2 - \xi^2)}{32 a^3} \left[ \frac{5 (a^2 - \xi^2)}{F h} - \frac{2 (a^2 - 4 a \xi - 5 \xi^2) e_2}{W} \right],$$

$$N_3 = - \frac{3 G (a^2 - \xi^2)^2}{32 a^3} \left[ \frac{5}{F h} + \frac{(a^2 + 5 \xi^2) e_1}{W a^2} \right].$$

Zum absoluten Maximum wird

$$N_1 \text{ für } 5 \xi^3 + 3 a \xi^2 - 3 a^2 \xi - a^3 = - \frac{5 W (a^2 - \xi^2) \xi}{2 F h e_2},$$

$$N_2 \text{ für } 5 a \xi^2 - a^2 = - \frac{10 W a^3}{3 F h e_1}.$$

In speciellen Fällen sind diese Gleichungen leicht aufzulösen. In der Regel aber ist die rechte Seite gegen  $a^3$  so klein, dass die Wurzeln der Gleichungen fast dieselben sind, als wenn die rechte Seite  $= 0$  wäre.  $N_1, N_3$  werden also fast für dasselbe  $\xi$  zum Maximum, wie  $M_1, M_3$ . Für  $\xi = 0,690 a$  wird  $H = 0,1286 G \frac{a}{h}$  und für  $\xi = 0,447 a$  wird  $H = 0,3001 G \frac{a}{h}$ . Daher sind die Festigkeitsbedingungen für eine veränderliche Lage der Last annähernd:

$$210. \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R} = 0,1356 G \frac{a e_2}{W} + 0,1286 G \frac{a}{F h}, \\ \mathfrak{R} = 0,1200 G \frac{a e_1}{W} + 0,3001 G \frac{a}{F h}. \end{array} \right.$$

Beispiel. Es sei  $a = 200^c$ ,  $h = 100^c$ ,  $G = 6000$  Klgr.,  $\mathfrak{R} = 800$  Klgr. pro  $\square^c$  (für Gusseisen). Der Querschnitt sei symmetrisch I-förmig mit der Höhe  $c$ , die Breite  $0,5 c$ , der Stegdicke  $0,1 c$  und der Gurtdicke  $0,15 c$ . Es wird alsdann  $e_1 = e_2 = 0,5 c$ ,  $F = 0,22 c^2$ ,  $W = 0,03023 c^4$ . Dies in die vorigen Gleichungen eingesetzt, giebt nach Wegschaffung der Brüche

$$c^3 = 3366 + 8,77 c,$$

$$c^3 = 2978 + 20,46 c.$$

Vernachlässigt man die zweiten Glieder der rechten Seite, so ergibt sich  $c = 14,94$ ,  $c = 14,38$ . Daher wird nun genauer  $c = 15,18$ ,  $c = 14,86$ .

Die rechten Seiten der Gleichungen 210 werden nun  $-0,689 \cdot \frac{c}{h} (a^2 - \xi^2) \xi$   
 $= -0,1046 (a^2 - \xi^2) \xi$  und  $-0,917 \frac{c}{h} a^3 = -0,1363 a^3$ . Die Auflösung dieser Gleichungen giebt nun  $\xi = 0,684 a$ ,  $\xi = 0,416 a$ , während  $M_1, M_3$  für  $\xi = 0,690 a$ ,  $\xi = 0,447 a$  zum Maximum werden. Die hiernach für  $c$  berechneten Werthe weichen von den obigen nur in der zweiten Decimalstelle um 2 Einheiten ab.

**§. 338. Formänderung.** Für §. 335 erübrigt noch die Bestimmung der Constanten  $B, B', C, C'$ . Dieselben ergeben sich leicht durch Addition und Subtraction der Gleichungen IV und VI, V und VIII. Das Resultat ist nach Einsetzung der Werthe für  $H, V$  und  $M_0$ :

$$B = \frac{1}{96} G (a^3 - 3 a \xi^2 - 2 \xi^3) \xi,$$

$$B' = \frac{1}{96} G (a^3 - 3 a \xi^2 + 2 \xi^3) \xi;$$

$$C = \frac{1}{192} \frac{G}{a} (a^4 - 18 a^2 \xi^2 - 32 a \xi^3 - 15 \xi^4),$$

$$C' = \frac{1}{192} \frac{G}{a} (a^4 - 18 a^2 \xi^2 + 32 a \xi^3 - 15 \xi^4).$$

Da auch die Constanten  $A, A'$  durch die Ausdrücke  $a$  (§. 335) bestimmt sind, so ist nun in den Ausdrücken 199 für die Formänderung Alles bekannt. Die Verrückungen  $\Delta_0 x, \Delta_0 y$  des Scheitels sind  $\Delta_0 x = -\frac{2 B' h}{E W a^2}$ ,

$$\Delta_0 y = \frac{C'}{E W}, \text{ d. i.}$$

$$\text{211. } \begin{cases} \Delta_0 x = -\frac{G h}{48 E W a^2} \xi (a - \xi)^2 (a + 2 \xi), \\ \Delta_0 y = \frac{G}{192 E W a} (a - \xi)^2 (a - 3 \xi) (a + 5 \xi), \end{cases}$$

wonach die folgende Tabelle berechnet ist.

$\xi$	$\Delta_0 x$	$\Delta_0 y$	$\xi$	$\Delta_0 x$	$\Delta_0 y$
0	0	+ 0,00521	0,5	0,00521	- 0,00228
0,1	0,00203	+ 0,00443	<b>0,6</b>	0,00440	- <b>0,00251</b>
0,2	0,00373	+ 0,00267	0,7	0,00315	- 0,00232
0,3	0,00490	+ 0,00064	0,8	0,00173	- 0,00146
<b>0,333</b>	0,00514	0	0,9	0,00053	- 0,00049
0,4	0,00540	- 0,00113	1	0	0
<b>0,421</b>	<b>0,00542</b>	- 0,00143			
$\cdot a$	$-\frac{G a^2 h}{E W}$	$\frac{G a^3}{E W}$	$\cdot a$	$-\frac{G a^2 h}{E W}$	$\frac{G a^3}{E W}$

Alle Lasten, welche im mittleren Drittheile liegen, erzeugen eine Senkung,

alle Lasten, welche in den äusseren Drittheilen liegen, eine Hebung des Scheitels. Die grösste Senkung ist  $\frac{4}{3}$ , das grösste Steigen 1,173 und die grösste horizontale Verrückung 0,416 so gross, als beim Bogen mit Kämpfergelenken.

b) Kreisbogen mit constantem Querschnitte.

**§. 339. Aufstellung der Fundamentalgleichungen.** Die Ausdrücke 195 für das Moment gehen, wenn wir  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = r(1 - \cos \varphi)$ ,  $\xi = r \sin \beta$  setzen, über in

$$212. \quad \begin{cases} M = M_0 - H r (1 - \cos \varphi) + (G - V) r \sin \varphi - G r \sin \beta, \\ M' = M_0 - H r (1 - \cos \varphi) - V r \sin \varphi. \end{cases}$$

Die Ausdrücke 194 für P sind direkt anwendbar.

a) Längenänderung. Nach 7 (Seite 270) wird

$$213. \quad \begin{cases} E F \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{M_0}{r} - H - G \sin \beta, \\ E F \frac{\Delta ds'}{ds} = \frac{M_0}{r} - H. \end{cases}$$

b) Lagenänderung der Tangente. Da  $\frac{\Delta ds}{ds}$  constant ist, so

wird  $\Delta s = \int d \Delta s = \int \frac{\Delta ds}{ds} ds = \frac{\Delta ds}{ds} s = \frac{\Delta ds}{ds} r \varphi$ ; mithin nach 25 (Seite 274)

$$\Delta \varphi = \frac{r}{E W} \int \left[ M_0 - H r (1 - \cos \varphi) + (G - V) r \sin \varphi - G r \sin \beta \right] d\varphi + \frac{\Delta ds}{ds} \varphi,$$

$$\Delta \varphi' = \frac{r}{E W} \int \left[ M_0 - H r (1 - \cos \varphi) - V r \sin \varphi \right] d\varphi + \frac{\Delta ds'}{ds} \varphi.$$

Die Ausführung der Integration giebt, wenn wir wieder  $\frac{W}{F r^2} = \kappa$  setzen,

$$E W \Delta \varphi = r \left[ M_0 \varphi - H r (\varphi - \sin \varphi) - (G - V) r \cos \varphi - G r \varphi \sin \beta \right] + \kappa r (M_0 - H r - G r \sin \beta) \varphi + A,$$

$$E W \Delta \varphi' = r \left[ M_0 \varphi - H r (\varphi - \sin \varphi) + V r \cos \varphi \right] + \kappa r (M_0 - H r) \varphi + A'.$$

Für  $\varphi = \beta$  muss  $\Delta \varphi = \Delta \varphi'$  werden, daher  $-G r^2 \cos \beta - G r^2 \beta \sin \beta - \kappa G r^2 \beta \sin \beta + A = A'$  oder

$$I. \quad A - A' = G r^2 [\cos \beta + (1 + \kappa) \beta \sin \beta].$$

Für  $\varphi = +\alpha$  wird  $\Delta \varphi = 0$  und für  $\varphi = -\alpha$  wird  $\Delta \varphi' = 0$ ; die Addition und Subtraction der so erhaltenen Gleichungen giebt mit Berücksichtigung des für  $A - A'$  gefundenen Werthes

$$II. \quad A + A' = G r^2 [\cos \alpha + (1 + \kappa) \alpha \sin \beta] - 2 V r^2 \cos \alpha,$$

$$III. \quad 2 M_0 \alpha - 2 H r (\alpha - \sin \alpha) - G r [\cos \alpha - \cos \beta + (\alpha - \beta) \sin \beta] + \kappa [2 M_0 \alpha - 2 H r \alpha - G r (\alpha - \beta) \sin \beta] = 0.$$

c) Horizontale Verrückung. Nach 29 (Seite 276) wird für die horizontale Verrückung  $\Delta x$ , wenn wir die hierzu nöthige Integration ausführen,

$$214. \left\{ \begin{aligned} \text{E W } \Delta x &= -M_0 r^2 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{1}{2} H r^3 (2 \sin \varphi - 2 \varphi \cos \varphi - \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \\ &\quad - \frac{1}{2} V r^3 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} G r^3 (\sin^2 \varphi + 2 \sin \beta \sin \varphi - 2 \varphi \sin \beta \cos \varphi) \\ &\quad + \kappa r^2 (M_0 - H r - G r \sin \beta) \varphi \cos \varphi + A r \cos \varphi + B, \end{aligned} \right.$$

$$\text{E W } \Delta x' = -M_0 r^2 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{1}{2} H r^3 (2 \sin \varphi - 2 \varphi \cos \varphi - \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \\ - \frac{1}{2} V r^3 \sin^2 \varphi + \kappa r^2 (M_0 - H r) \varphi \cos \varphi + A' r \cos \varphi + B'.$$

Für  $\varphi = \beta$  wird  $\Delta x = \Delta x'$ , daher

$$\text{IV. } B - B' = -\frac{1}{2} G r (2 + \sin^2 \beta).$$

Ferner wird für  $\varphi = \alpha$ ,  $\Delta x = 0$  und für  $\varphi = -\alpha$ ,  $\Delta x' = 0$ . Addirt und subtrahirt man diese so erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich

$$\text{V. } B + B' = V r (2 - \sin^2 \alpha) - \frac{1}{2} G r (2 - \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta).$$

$$\text{VI. } 2 M_0 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - H r (2 \sin \alpha - 2 \alpha \cos \alpha - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \\ + \frac{1}{2} G r [2 - \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \cos(\alpha - \beta) + 2(\alpha - \beta) \cos \alpha \sin \beta] \\ - \kappa [2(M_0 - H r \alpha \cos \alpha - G r(\alpha - \beta) \cos \alpha \sin \beta)] = 0.$$

Eine einfache Beziehung, welche  $\kappa$  nicht enthält, ergibt sich noch, wenn man die Gleichungen III und VI combinirt, indem man die mit  $\cos \alpha$  multiplicirte Gleichung III zur Gleichung VI addirt. Es ergibt sich

$$\text{VII. } 2 M_0 \sin \alpha - H r (2 \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \alpha) + \frac{1}{2} G r (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 0.$$

d) Verticale Verrückung. In gleicher Weise ergibt sich für die verticale Verrückung nach 29 (Seite 276):

$$215. \left\{ \begin{aligned} \text{E W } \Delta y &= M_0 r^2 (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) - \frac{1}{2} H r^3 (2 \cos \varphi + 2 \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{2} V r^3 (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) - \frac{1}{2} G r^3 (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi + 2 \sin \beta \cos \varphi \\ &\quad + 2 \varphi \sin \beta \sin \varphi) + \kappa r^2 (M_0 - H r - G r \sin \beta) \varphi \sin \varphi + A r \sin \varphi + C, \\ \text{E W } \Delta y' &= M_0 r^2 (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) - \frac{1}{2} H r^3 (2 \cos \varphi + 2 \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{2} V r^3 (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + \kappa r^2 (M_0 - H r) \varphi \sin \varphi + A' r \sin \varphi + C'. \end{aligned} \right.$$

Für  $\varphi = \beta$  wird  $\Delta y = \Delta y'$ , daher

$$\text{VIII. } C - C' = \frac{1}{2} G r^3 (\beta + \sin \beta \cos \beta).$$

Endlich wird für  $\varphi = +\alpha$ ,  $\Delta y = 0$  und für  $\varphi = -\alpha$ ,  $\Delta y' = 0$ . Die Addition und Subtraction der so gebildeten Gleichungen giebt:

$$\text{IX. } C + C' = -2 M_0 r^2 (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) + H r^3 (2 \cos \alpha + 2 \alpha \sin \alpha - \sin^2 \alpha) \\ + \frac{1}{2} G r^3 [\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin(\alpha - \beta) + 2(\alpha - \beta) \sin \alpha \sin \beta] \\ - 2 H r^2 (M_0 - H r) \alpha \sin \alpha + \kappa G r^3 (\alpha - \beta) \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\text{X. } V r (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \\ = \frac{1}{2} G r (\alpha - \beta - \sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta + 2 \cos \alpha \sin \beta).$$

§. 340. Vertikalkraft V. Die Vertikalkraft V ergibt sich direct durch die Gleichung IX, nämlich

$$216. \quad V = G \frac{\alpha - \beta - \sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta + 2 \cos \alpha \sin \beta}{2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}.$$

Glieder mit dem Coefficienten  $\kappa$  kommen in diesem Ausdrücke nicht vor. Die Reihenverwandlung giebt:

$$217. \quad V = \frac{G}{4 \alpha^3} \left[ 2 \alpha^3 - 3 \alpha^2 \beta + \beta^3 - \frac{7}{20} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \beta + \dots \right].$$

Für den Halbkreis wird

$$218. V = G \frac{\pi - 2\beta - 2\sin\beta \cos\beta}{2\pi}$$

Nach dem Ausdrucke 216 ist folgende Tabelle berechnet:

$\beta$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,2	0,3520	0,3515	0,3500	0,3475	0,3439	0,3392	0,3332	0,3065
0,4	0,2160	0,2152	0,2130	0,2092	0,2037	0,1966	0,1876	0,1486
0,6	0,1040	0,1033	0,1014	0,0981	0,0934	0,0874	0,0799	0,0486
0,8	0,0280	0,0277	0,0269	0,0255	0,0238	0,0211	0,0182	0,0065
1	0	0	0	0	0	0	0	0

$\alpha$  . G

**§. 341. Horizontalschub.** Die Gleichungen III und VI enthalten als Unbekannte nur  $M_0$  und H. Die Elimination von  $M_0$  giebt als Ausdruck für den Horizontalschub nach gehöriger Reduction:

$$219. H = G \frac{2 \sin \alpha [\cos \beta - \cos \alpha + (1 + \kappa) \beta \sin \beta] - (1 + \kappa) \alpha (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)}{2 [(1 + \kappa) \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha]}$$

Bezeichnet man den Werth von H bei Vernachlässigungen von  $\kappa$  mit  $H_0$ , so wird

$$220. H = H_0 \frac{1 - A \kappa}{1 - B \kappa},$$

wobei

$$\begin{cases} A = \frac{\alpha (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2 \beta \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha (\cos \beta - \cos \alpha + \beta \sin \beta) - \alpha (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)}, \\ B = \frac{\alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)}{\alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha}. \end{cases}$$

Die Reihenverwandlung giebt:

$$221. H_0 = \frac{15 G (\alpha^2 - \beta^2)^2}{16 \alpha^5} \left( 1 - \frac{10}{210} \alpha^2 - \frac{11}{30} \beta^2 + \dots \right);$$

$$222. \begin{cases} A = \frac{12}{\alpha^2 - \beta^2} \left( 1 - \frac{1}{10} \alpha^2 + \frac{11}{30} \beta^2 + \dots \right), \\ B = \frac{45}{\alpha^4} \left( 1 - \frac{4}{21} \alpha^2 + \dots \right). \end{cases}$$

Nach den genauen Formeln sind die folgenden Tabellen berechnet.

Horizontalschub ohne Correction.

$\beta$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0	0,4688	0,4687	0,4683	0,4678	0,4671	0,4661	0,4610	0,4592
0,2	0,4320	0,4317	0,4309	0,4291	0,4272	0,4243	0,4173	0,4017
0,4	0,3308	0,3301	0,3281	0,3244	0,3196	0,3128	0,3012	0,2601

$\beta$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0,6	0,1920	0,1912	0,1887	0,1845	0,1784	0,1703	0,1578	0,1087
0,8	0,0608	0,0603	0,0590	0,0566	0,0534	0,0490	0,0421	0,0181
1	0	0	0	0	0	0	0	0

$$- \alpha \quad \cdot \quad G \frac{a}{h}$$

Correctionscoefficienten.

$\frac{\beta}{\alpha}$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0	3,00	3,01	3,02	3,06	3,10	3,16	3,25	3,66
0,2	3,12	3,15	3,16	3,19	3,26	3,34	3,45	4,07
0,4	3,57	3,58	3,63	3,70	3,81	3,79	4,20	5,65
0,6	4,69	4,70	4,81	4,96	5,20	5,57	6,14	10,57
0,8	8,33	8,42	8,67	9,10	9,78	10,87	12,93	35,62
1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2$

B	2,813	2,825	2,861	2,931	3,039	3,198	3,417	5,279
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^4$

Bei kleinen Centriwinkeln ist B viel grösser als A, da sich nahezu  $A : B = h^2 : a^2$  verhält. Je kleiner der Centriwinkel ist, desto grösser werden die Correctionscoefficienten.

**§. 342. Moment im Scheitel.** Aus der Gleichung VII ergibt sich

$$223. \quad M_0 = \frac{1}{2} H r \left( 2 - \cos \alpha - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) - \frac{1}{4} G r \frac{(\sin \alpha - \sin \beta)^2}{\sin \alpha}.$$

Durch Substitution des Ausdruckes 218 für H oder durch direkte Elimination von H aus den Gleichungen III und VI ergibt sich

$$224. \quad 2 M_0 [(1 + \kappa) \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha] \\ = G r [\sin \alpha \{ 1 - \cos(\alpha - \beta) + 2(\cos \beta - \cos \alpha) - (\sin \alpha - \sin \beta) \sin \beta \} \\ - \alpha (\cos \beta - \cos \alpha) - (1 + \kappa) \{ \alpha (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2 \beta \sin \alpha \sin \beta \} \\ + (1 + \kappa) (\alpha - \beta) (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \sin \beta].$$

Ist H bereits berechnet, so wendet man zur numerischen Berechnung von  $M_0$  am besten die Gleichung 223 an. Bezeichnet  $M_{00}$  den Werth von  $M_0$  ohne Rücksicht auf  $\kappa$ , so können wir wiederum

$$225. \quad M_0 = M_{00} \frac{1 - C \kappa}{1 + B \kappa}$$

setzen; B hat hierbei denselben Werth, wie für den Horizontalschub H.

Die Reihenverwandlung giebt:

$$226. \quad M_{00} = - \frac{1}{32} G r \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha^2} \left[ 3 \alpha^2 - 10 \alpha \beta - 3 \beta^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{84} (3 \alpha^4 + 6 \alpha^3 \beta + 45 \alpha^2 \beta^2 + 308 \alpha \beta^3 + 154 \beta^4) + \dots \right];$$

$$227. C = \frac{360}{\alpha^2(3\alpha^2 - 10\alpha\beta - 5\beta^2)} + \dots$$

Nach der genauen Formel sind die folgenden Tabellen berechnet.

Moment im Scheitel ohne Correction.

$\beta$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0	—	—	—	—	—	—	—	—
0,2	0,09375	0,09426	0,09582	0,09849	0,10241	0,10777	0,11613	0,15108
0,4	0,01606	0,01615	0,01658	0,01742	0,01846	0,02063	0,02280	0,03083
0,6	+	+	+	+	+	+	+	+
0,8	0,02025	0,02021	0,02008	0,01973	0,01942	0,01888	0,01719	0,01441
1	0,02400	0,02393	0,02369	0,02326	0,02267	0,02181	0,02001	0,01454
1	0,01025	0,01019	0,00999	0,00962	0,00917	0,00850	0,00716	0,00332
1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\cdot \alpha$	$\cdot G a$							

Correctionscoefficienten.

$\frac{\beta}{\alpha}$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$	
0	+	+	+	+	+	+	+	+	
0,2	7,50	7,52	7,57	7,78	7,94	8,52	8,61	11,12	
0,4	28,13	28,09	27,99	28,14	28,43	27,99	27,76	31,81	
0,6	—	—	—	—	—	—	—	—	$\left(\frac{a}{h}\right)^4$
0,8	12,50	12,61	13,05	14,08	15,40	17,35	21,11	37,47	
1	4,69	4,77	5,00	5,51	6,24	7,31	9,10	20,27	
1	2,74	2,85	3,20	3,89	4,94	6,61	9,77	42,53	
1	1,88	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	
B	+ 2,81	+ 2,83	+ 2,86	+ 2,93	+ 3,04	+ 3,20	+ 3,42	+ 5,28	$\left(\frac{a}{h}\right)^4$

### §. 343. Construction.

a) Kämpferdrucklinie. Nach 196 (Seite 329) wird die Ordinate der Kämpferdrucklinie

$$\eta = \frac{V r \sin \beta - M_0}{H}$$

Setzen wir, um die mitgetheilten Tabellen benutzen zu können,  $V = v G$ ,  $H = \xi G \frac{a}{h}$ ,  $M_0 = \mu G a$ , so wird  $\eta = \frac{v \sin \beta - \mu \sin \alpha}{\xi \sin \alpha} h$ . Mit Berücksichtigung der Correction berechnet man  $\eta$  am besten durch directe Einführung der bereits corrigirten Werthe von  $V$ ,  $M_0$ ,  $H$  oder  $v$ ,  $\mu$ ,  $\xi$  in die eben aufgestellten Formeln.

Für  $\beta = \alpha$  nimmt  $\eta$  die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  an. Die einmalige Differenziation des Zählers und Nenners giebt bei Berücksichtigung der

Correction, wobei überhaupt nur die Correctionsglieder übrig bleiben,

$$228. \quad \eta = \frac{2 \sin \alpha - \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha} r.$$

Ohne Berücksichtigung der Correction ergibt die zweimalige Differenziation des Zählers und Nenners

$$229. \quad \eta = \frac{2 \sin^2 \alpha (\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha) - (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) [\sin \alpha (2 + \cos \alpha) - \alpha (1 + 2 \cos \alpha)]}{2 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} r.$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdruck für kleine Centriwinkel:

$$230. \quad \eta = \frac{r \alpha^2}{10} \left[ 1 - \frac{120 (\alpha^2 - 2 \alpha \beta - \beta^2)}{\alpha^4 (\alpha + \beta)^2} \kappa \right] \\ = \frac{1}{5} h \left[ 1 - 30 \frac{a^2 - 2 a \xi - \xi^2}{(a + \xi)^2} \frac{W}{F h^2} \right].$$

Nach der genauen Formel ist für  $\eta$  die folgende Tabelle berechnet.

$\beta$	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
0	0,200	0,211	0,252	0,329
0,2	0,200	0,210	0,246	0,312
0,4	0,200	0,207	0,236	0,280
0,6	0,200	0,202	0,217	0,228
0,8	0,200	0,197	0,200	0,158
1	0,200	0,188	0,151	0,082
$\cdot \alpha$			$\cdot h$	

Hier ist die Curve nach oben convex, während sie bei Kämpfergelenken nach oben concav ist. Hier nähert sie sich der Geraden um so mehr, je kleiner der Centriwinkel ist, während sie sich bei Kämpfergelenken der Geraden um so mehr nähert, je grösser der Centriwinkel (bis zu  $90^\circ$ ) ist.

b) Kämpferdruck-Umhüllungslinie. Nach 198 (Seite 330) wird, wenn wir die Differenzialquotienten von  $V$ ,  $H$ ,  $M_0$  nach  $\beta$  mit  $V'$ ,  $H'$ ,  $M_0'$  bezeichnen,

$$v = \frac{H M_0' - H' M_0}{V H' - V' H}, \quad w = \frac{V M_0' - V' M_0}{V H' - V' H}.$$

Nach den Gleichungen 216, 218 und 223 aber ergibt sich

$$231. \quad \left\{ \begin{array}{l} V' = -G \frac{\cos \beta (\cos \beta - \cos \alpha)}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}, \\ H' = G \frac{\sin \alpha [\beta \cos \beta + \kappa (\sin \beta + \beta \cos \beta)] - (1 + \kappa) \alpha \sin \beta \cos \beta}{(1 + \kappa) \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha}, \\ M' = H' \frac{(1 + \kappa) \alpha - \sin \alpha}{(1 + \kappa) \alpha} + G r \frac{(1 + \kappa) (\alpha - \beta) \cos \beta - \kappa \sin \beta}{2 (1 + \kappa) \alpha}. \end{array} \right.$$

Hiernach wird man am besten  $V'$ ,  $H'$ ,  $M_0'$  numerisch berechnen und nebst den numerischen Werthen von  $V$ ,  $H$ ,  $M_0$  in die Ausdrücke für  $v$ ,  $w$  ein-

führen. Hierbei ist zu bemerken, dass  $v$  und  $w$  für sämtliche positive und negative  $\beta$  zu berechnen sind. Bezeichnet man die Werthe von  $V$ ,  $H$ ,  $M_0$ ,  $V'$ ,  $H'$ ,  $M_0'$  für gleiche positive und negative  $\beta$  ohne und mit Klammer, so ergibt sich leicht:

$$\begin{aligned} (V) &= G - V, & (V') &= V', \\ (H) &= H, & (H') &= -H', \\ (M_0) &= M_0 - Gr \sin \beta, & (M_0') &= -M_0' + Gr \cos \beta, \end{aligned}$$

so dass sich aus den Werthen für positive  $\beta$  leicht diejenigen für negative  $\beta$  berechnen lassen. Für negative  $\beta$ , d. h. wenn die Last rechts vom Scheitel liegt, hat aber  $V$ ,  $M_0$  nicht mehr die Bedeutung der Verticalkraft und des Biegemomentes im Scheitel, sondern der Verticalcomponente und des Momentes für den Scheitel von dem rechten Stützendrucke  $D'$ .

Für  $\beta = \alpha$  wird  $V = 0$ ,  $H = 0$ ,  $M_0 = 0$ , wesshalb  $v$  und  $w$  die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  annehmen. Auch die einmalige Differenziation von Zähler und Nenner giebt kein bestimmtes Resultat. Die zweimalige Differenziation giebt, wenn man die zweiten Differenzialquotienten durch zwei Apostrophe bezeichnet und beachtet, dass für  $\beta = \alpha$  auch  $V' = 0$  ist,

$$v = \frac{M_0' H'' - M_0'' H'}{V'' H'}, \quad w = \frac{M_0'}{H}$$

Nimmt man aber auf  $\alpha$  keine Rücksicht, so wird für  $\beta = \alpha$  auch  $H' = 0$ ,  $M_0' = 0$  und dann giebt erst die viermalige Differenziation, wenn man den dritten Differenzialquotienten mit drei Apostrophen bezeichnet,

$$v = \frac{H'' M_0'''' - H'''' M_0''}{V'' H'''' - V'''' H''}, \quad w = \frac{V'' M_0'''' - V'''' M_0''}{V'' H'''' - V'''' H''}$$

Dies giebt mit Berücksichtigung von  $\alpha$

$$232. \quad v = \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} r, \quad w = \frac{2 \alpha \sin \alpha - \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2 \alpha \sin \alpha} r$$

und ohne Berücksichtigung von  $\alpha$

$$233. \quad v = \frac{1}{2} r \sin \alpha, \quad w = \left[ 1 - \frac{\sin \alpha + \sin^3 \alpha - \alpha \cos \alpha}{2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \right] r.$$

Wie man sieht, hat  $\alpha$ , auch wenn es klein ist, in der Nähe dieser Grenzpunkte einen grossen Einfluss, selbst bei grossem Centriwinkel. Im letztern Falle weichen jedoch in geringer Entfernung von diesem Punkte die Werthe von  $v$ ,  $w$  ohne Berücksichtigung von  $\alpha$  nur äusserst wenig von den genauen Werthen ab. Eine weniger grosse Genauigkeit in der Nähe dieses Punktes schadet aber für die Berechnung der Beanspruchung nichts, weil hier die Stützendrucke in Null übergehen.

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsformeln für kleine Centriwinkel

$$v = v_0, \quad w = w_0 \left[ 1 + \frac{90 W a^2}{F h^2 (23 a^2 + 20 a \xi + 5 \xi^2)} \right],$$

wenn  $v_0$ ,  $w_0$  die in §. 336 entwickelten Werthe von  $v$ ,  $w$  ohne Berücksichtigung von  $\alpha$  bezeichnen. Nimmt man  $\beta > \alpha$  an, was allerdings keine reelle Bedeutung hat, so nähert sich mit wachsendem  $\beta$   $v$  der Grenze 0 und  $w$  einer Grenze, welche sich ergibt, wenn man in den Ausdrücken

für  $V, H, M_0, V', H', M_0'$  nur diejenigen Glieder beibehält, welche  $\beta$  als Bogen enthalten, und nun  $\beta = \infty$  setzt. In dieser Weise ergibt sich leicht

$$w = \frac{1}{2} r \left( 2 - \frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha \right).$$

Nach den genauen Formeln ist ohne Rücksicht auf  $\alpha$  folgende Tabelle berechnet.

$\beta$	$\alpha = 0$		$\alpha = 30^\circ$		$\alpha = 60^\circ$		$\alpha = 90^\circ$	
	v	w	v	w	v	w	v	w
$\infty$	0	0,333	0	0,324	0	0,291	0	0,215
+ 1	0,500	0,400	0,500	0,396	0,500	0,385	0,500	0,363
+ 0,8	0,526	0,410	0,531	0,310	0,539	0,387	0,577	0,390
+ 0,6	0,556	0,426	0,560	0,424	0,578	0,409	0,646	0,423
+ 0,4	0,588	0,446	0,595	0,444	0,616	0,451	0,864	0,446
+ 0,2	0,625	0,472	0,633	0,472	0,661	0,473	0,733	0,482
0	0,667	0,501	0,676	0,512	0,709	0,517	0,786	0,526
- 0,2	0,714	0,571	0,725	0,574	0,773	0,605	0,843	0,609
- 0,4	0,769	0,675	0,780	0,681	0,818	0,704	0,899	0,739
- 0,6	0,833	0,889	0,843	0,899	0,877	0,937	0,932	0,868
- 0,8	0,909	1,546	0,916	1,567	0,937	1,644	0,978	1,361
- 1	1	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$
	. a	. h	. a	. h	. a	. h	. a	. h

Einfacher als die Berechnung der Coordinaten der Kämpferdruck-Umhüllungslinie wird allerdings die Bestimmung der Durchschnittspunkte  $\Phi, \Psi$  der Kämpferdrücke mit den durch die Kämpfer gehenden Verticalen, nach 197 (Seite 330). Hierbei wird  $M_1 = M_0 - H h + (G - V) a - G \xi$ ,  $M_2 = M_1 - H h + V a$ . Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke für kleine Centriwinkel:

$$234. \quad c_1 = -\frac{2h}{15(a+\xi)} \left[ a - 5\xi - \frac{45Wa}{Fh^2} \right], \quad c_2 = -\frac{2h}{15(a+\xi)} \left[ a + 5\xi - \frac{45Wa}{Fh^2} \right].$$

**§. 344. Formänderung.** Zur Bestimmung der Formänderung erübrigt noch die Feststellung der Constanten  $A, A', B, B', C, C'$ .  $A$  und  $A'$  sind durch die Gleichungen I und II,  $B$  und  $B'$  durch die Gleichungen IV und V, endlich  $C$  und  $C'$  durch die Gleichungen VIII und IX in §. 339 bestimmt. Es ergibt sich

$$235. \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} G r^2 [\cos \alpha + \cos \beta + (1 + \kappa)(\alpha + \beta) \sin \beta] - V r^2 \cos \alpha, \\ A' = \frac{1}{2} G r^2 [\cos \alpha - \cos \beta + (1 + \kappa)(\alpha - \beta) \sin \beta] - V r^2 \cos \alpha; \\ B = -\frac{1}{4} G r (4 - \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta) + \frac{1}{2} V r (2 - \sin^2 \alpha), \\ B' = +\frac{1}{4} G r (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + \frac{1}{2} V r (2 - \sin^2 \alpha); \\ C = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{4} G r^3 [\alpha \pm \beta + \sin \alpha \cos \alpha \pm \sin \beta \cos \beta - 2 \sin(\alpha - \beta) + 2(\alpha - \beta) \sin \alpha \sin \beta] \\ - M_0 r^2 [\cos \alpha + \alpha \sin \alpha] + \frac{1}{2} H r^3 (2 \cos \alpha + 2 \alpha \sin \alpha - \sin^2 \alpha) \end{array} \right. \\ C' = \left\{ \begin{array}{l} - \kappa (M_0 - H r) r^2 \alpha \sin \alpha + \frac{1}{2} \kappa G r^3 (\alpha - \beta) \sin \alpha \sin \beta, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Für die Verrückungen  $\Delta_0 x$ ,  $\Delta_0 y$  des Scheitels ergibt sich, wenn man in den Ausdrücken 214, 215 für  $\Delta x'$ ,  $\Delta y'$   $\varphi = 0$  setzt:

$$E W \Delta_0 x = A' + B', \quad E W \Delta_0 y = M_0 r^2 - H r^3 + C',$$

d. i.

$$236. \left\{ \begin{aligned} E W \Delta_0 x &= +\frac{1}{2} V r^3 (2 - \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha) \\ &\quad - \frac{1}{4} G r^3 [2 (\cos \beta - \cos \alpha) - (\sin \alpha - \sin \beta)^2 - 2 (1 + \kappa) (\alpha - \beta) \sin \beta]. \\ E W \Delta_0 y &= -\frac{1}{2} H r^3 (2 - 2 \cos \alpha - 2 \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha) + M_0 r^2 (1 - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{4} G r^3 [\alpha - \beta + \sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta - 2 \sin (\alpha - \beta) + 2 (\alpha - \beta) \sin \alpha \sin \beta] \\ &\quad - \kappa (M_0 - H r) r^2 \alpha \sin \alpha + \frac{1}{2} \kappa G r^3 (\alpha - \beta) \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned} \right.$$

Annähernd ergibt sich durch Reihenverwandlung für kleine Centriwinkel, wenn man die entsprechenden Werthe ohne Rücksicht auf  $\kappa$  nach 211 (Seite 340) mit  $\Delta_0 x'$ ,  $\Delta_0 y'$  bezeichnet,

$$237. \left\{ \begin{aligned} \Delta_0 x &= \Delta_0 x' = \frac{G h \xi (a - \xi)}{2 E F a^2}, \\ \Delta_0 y &= \Delta_0 y' + \frac{225 G (a^2 - \xi^2)^2}{128 E (4 F h^2 + 45 W) a}. \end{aligned} \right.$$

Nach der genauen Formel ist ohne Rücksicht auf  $\kappa$  folgende Tabelle berechnet.

$\beta$	$\Delta_0 x$				$\Delta_0 y$			
	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
0	0	0	0	0	+ 0,00521	+ 0,00590	+ 0,00797	+ 0,011143
0,2	0,00373	0,00411	0,00589	0,00882	+ 0,00267	+ 0,00291	+ 0,00362	+ 0,00480
0,4	0,00540	0,00587	0,00748	0,01073	- 0,00113	- 0,00107	- 0,00089	- 0,00060
0,6	0,00440	0,00535	0,00550	0,00630	- 0,00251	- 0,00250	- 0,00247	- 0,00242
0,8	0,00173	0,00179	0,00186	0,00134	- 0,00146	- 0,00139	- 0,00117	- 0,00080
1	0	0	0	0	0		0	0
$\cdot \alpha$	$-\frac{G a^2 h}{E W}$				$\frac{G a^3}{E W}$			

## B. Gleichmässige Belastung bei constantem Querschnitte.

### a) Gleichmässige Belastung der Horizontalen.

**§. 345. Grundgleichungen.** Der im Scheitelquerschnitte zwischen beiden Bogenhälften wirkende Druck ist der Symmetrie wegen horizontal, daher ist seine Verticalcomponente  $V = 0$ . Mithin wird

$$238. P = -H \cos \varphi - q r \sin^2 \varphi, \quad Q = H \sin \varphi - q r \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$239. M = M_0 - H r (1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} q r^2 \sin^2 \varphi.$$

Daher wird  $P + \frac{M}{r} = \frac{M_0}{r} - H - \frac{1}{2} q r \sin^2 \varphi$ . In der bekannten Weise ergibt sich hiernach leicht

$$E W \Delta \varphi = (1 + \kappa) M_0 r \varphi - H r^2 [(1 + \kappa) \varphi - \sin \varphi] + \frac{1}{4} (1 - \kappa) q r^3 (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi);$$

$$240. \begin{cases} E W \Delta x = -M_0 r^2 [\sin \varphi - (1 + \kappa) \varphi \cos \varphi] + \frac{1}{2} H r^3 [2 \sin \varphi - 2(1 + \kappa) \varphi \cos \varphi - \varphi + \sin \varphi \cos \varphi] \\ \quad - \frac{1}{4} q r^4 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi) - \frac{1}{4} \kappa q r^4 \cos \varphi (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi), \\ E W \Delta y = +M_0 r^2 [\cos \varphi + (1 + \kappa) \varphi \sin \varphi] - \frac{1}{2} H r^3 [2 \cos \varphi + 2(1 + \kappa) \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi] \\ \quad + \frac{1}{4} q r^4 (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi) - \frac{1}{4} \kappa q r^4 \sin \varphi (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + C. \end{cases}$$

Die Grössen  $M_0$ ,  $H$ ,  $C$  bestimmen sich durch die Bedingungen, dass für  $\varphi = \alpha$   $\Delta \varphi = 0$ ,  $\Delta x = 0$  und  $\Delta y = 0$  wird. Zunächst ergibt sich als Horizontalschub

$$241. H = \frac{1}{6} q r \sin \alpha \frac{3\alpha - 2\alpha \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha - \kappa (3\alpha + 2\alpha \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha)}{(1 + \kappa) \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha}.$$

Die Reihenverwandlung giebt

$$H = q r \left( 1 - \frac{3}{14} \alpha^2 + \dots \right) \frac{1 - \frac{15\kappa}{\alpha^2} \left( 1 - \frac{8}{105} \alpha^2 + \dots \right)}{1 + \frac{45\kappa}{\alpha^4} \left( 1 - \frac{4}{21} \alpha^2 + \dots \right)}.$$

Für kleine Winkel wird hiernach annähernd, wenn wir  $\kappa = \frac{W}{F r^2} = \frac{4 W h^2}{F a^4}$ ,  
 $\alpha = \frac{2h}{a}$  setzen,

$$242. H = \frac{q a^2}{2h} \frac{4 F h^2}{45 W + 4 F h^2}.$$

Ferner ergibt sich als Moment im Scheitel

$$243. M_0 = H r \frac{(1 + \kappa) \alpha - \sin \alpha}{(1 + \kappa) \alpha} - \frac{1}{4} q r^2 \frac{(1 - \kappa) (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}{(1 + \kappa) \alpha},$$

$$= \frac{3 \sin^2 \alpha - 6 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin^4 \alpha + 6 \alpha \sin \alpha - 4 \alpha \sin^3 \alpha - 3 \alpha^2 - J \kappa}{12 [(1 + \kappa) \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha]},$$

worin zur Abkürzung

$$J = 3 \sin^2 \alpha - 6 \sin^2 \alpha \cos \alpha - 3 \sin^4 \alpha + 6 \alpha \sin \alpha + 4 \alpha \sin^3 \alpha - 3 \alpha^2$$

gesetzt ist. Die Reihenverwandlung giebt

$$M_0 = -\frac{3}{280} q r^2 \alpha^4 \frac{1 + \frac{700\kappa}{\alpha^6}}{1 + \frac{45\kappa}{\alpha^4}}.$$

Vernachlässigt man  $\frac{45\kappa}{\alpha^4}$  gegen  $\frac{700\kappa}{\alpha^6}$  und setzt wie oben  $\kappa = \frac{4 W h^2}{F a^4}$ ,  
 $\alpha = \frac{2h}{a}$ , so wird

$$244. M_0 = -\frac{3}{70} q h^2 \frac{4 F h^4 + 175 W a^2}{4 F h^4}.$$

Wie früher kann man allgemein  $H = H_0 \frac{1 - A \kappa}{1 + B \kappa}$ ,  $M_0 = M_{00} \frac{1 + C \kappa}{1 + B \kappa}$  setzen. Die für  $H_0$ ,  $M_{00}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nach den genannten Formeln berechneten Werthe sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

$\alpha$	$H_0$	$M_{00}$	A	B	C
0	1,0000	0,04286	3,750	2,813	10,94
30	0,9420	0,04324	3,847	2,931	12,63
60	0,7831	0,04460	4,186	3,440	17,69
90	0,5601	0,04647	5,000	5,278	31,87
Gr.	. q r	. — g h <sup>2</sup>	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2$	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^4$	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^6$

**§. 346. Beanspruchung.** P, Q und M sind nun nach Ermittlung von  $M_0$  und H durch die Gleichungen 238 und 239 bestimmt. Auf Taf. XI ist in Fig. 7 P, Q, M für  $\alpha = 60^\circ$  dargestellt.

Für kleine Winkel ergibt sich durch Reihenverwandlung

$$245. \left\{ \begin{aligned} P &= -q r \left(1 - \frac{3}{14} \alpha^2 + \frac{1}{2} \varphi^2\right) + \frac{45 \kappa q r}{\alpha^4 + 45 \kappa} \left(1 + \frac{5}{42} \alpha^2 - \frac{1}{2} \varphi^2\right), \\ Q &= -\frac{1}{14} q r \varphi \left(3 \alpha^2 - 7 \varphi^2\right) - \frac{45 \kappa q r \varphi}{\alpha^4 + 45 \kappa}, \\ M &= -\frac{1}{280} q r^2 \left(3 \alpha^4 - 30 \alpha^2 \varphi^2 + 35 \varphi^4\right) - \frac{15 \kappa q r^2 (\alpha^2 - 3 \varphi^2)}{2 \alpha^4 + 90 \kappa}. \end{aligned} \right.$$

Die Glieder mit  $\kappa$  können hier, besonders bei den Grössen Q und M unter Umständen einen sehr grossen Einfluss haben. P ist stets negativ und wird zum analytischen Maximum für  $\cos \varphi = \frac{H}{2 q r}$  und zwar ist

$$\max P = \frac{H^2 + 4 q^2 r^2}{4 q r}.$$

Wenn aber  $\alpha > 74^\circ$  ist, so wird das entsprechende  $\varphi > \alpha$ , das analytische Maximum also ohne Bedeutung. Alsdann wird P an den Kämpfern zum Maximum. Q wird Null, also M zum analytischen Maximum für  $\varphi = 0$  und für  $\cos \varphi = \frac{H}{q r}$ , d. i. bei kleinen Centriwinkeln ohne Rücksicht auf

$\kappa$  für  $\varphi = \sqrt{\frac{3}{7}} \alpha = 0,655 \alpha$ . Ausserdem kann aber M zum wirklichen Maximum auch für  $\varphi = \alpha$  werden. Bezeichnen wir die Werthe von M für  $\varphi = \alpha$  und für  $q r \cos \varphi = H$  bezüglich mit  $M_1, M_3$ , so ergibt sich

$$M_1 = M_0 - H r (1 - \cos \alpha) + \frac{1}{2} q r^2 \sin^2 \alpha, \quad M_3 = M_0 - H r + \frac{H^2}{2 q} + \frac{1}{2} q r^2.$$

Annähernd wird für kleine Winkel ohne Correction:

$$246. \left\{ \begin{aligned} M_0 &= -\frac{3}{280} q r^2 \alpha^4 = -\frac{3}{70} q h^2, \\ M_1 &= -\frac{1}{35} q r^2 \alpha^4 = -\frac{4}{35} q h^2, \\ M_3 &= +\frac{3}{245} q r^2 \alpha^4 = +\frac{12}{245} q h^2, \end{aligned} \right.$$

also  $-M_0 : -M_1 : M_3 = 21 : 56 : 24$ , so dass das absolut grösste Moment am Kämpfer stattfindet.

Der Abstand  $e$  der Stützlinie von der Axe ist  $\frac{M}{P}$ , d. i. bei kleinen Centriwinkeln

$$247. \quad e = \frac{1}{280} r (3 \alpha^4 - 30 \alpha^2 \varphi^2 + 35 \varphi^4) + \frac{15 \kappa r (\alpha^2 - 3 \varphi^2)}{2 \alpha^4 + 90 \kappa}$$

$$= \frac{1}{35} h \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left[ 3 - 30 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 35 \left(\frac{x}{a}\right)^4 \right] + \frac{15 W h (a^2 - 3 x^2)}{a^2 (4 F a^2 + 45 W)}$$

Für  $x = 0$ ,  $x = 0,655 a$ ,  $x = a$  wird  $e$  zum Maximum, für  $x = 0,166 a$ ,  $x = 0,729 a$  aber zu Null.

Die wichtigsten Grössen ohne Correction sind für  $\alpha = 0, 30^\circ, 60^\circ$  und  $90^\circ$  in folgender Tabelle zusammengestellt.

$\alpha$	max P	$M_0$	$M_3$	$M_1$	$e_0$	$e_3$	$e_1$	$\varphi$ für	
								$M_3$	$e_3$
0	1,000	0,0429	+	0,1142	+	0,0980	+	0,655	0,655
30	1,066	0,0432	0,0491	0,1134	0,0856	0,0916	0,1985	0,651	0,645
60	1,142	0,0444	0,0495	0,1111	0,0851	0,0724	0,1459	0,641	0,625
90	1,078	0,0465	0,0528	0,1066	0,0830	0,0507	0,1066	0,622	0,597
Gr.	. q r		. q h <sup>2</sup>			. $\frac{h^3}{a^2}$			. $\alpha$

**§. 347. Formänderung.** Für die verticale Verrückung des Scheitels ergibt sich nach 240:  $E W \Delta_0 y = M_0 r^2 - H r^3 + \frac{1}{3} q r^4 + C$ , d. i.

$$248. \quad E W \Delta_0 y = M_0 r^2 [1 - \cos \alpha - (1 + \kappa) \alpha \sin \alpha]$$

$$+ \frac{1}{3} H r^3 [2 (1 + \kappa) \alpha \sin \alpha - 2 (1 - \cos \alpha) - \sin^2 \alpha]$$

$$- \frac{1}{12} q r^4 [-4 + 3 \cos \alpha + 3 \alpha \sin \alpha + \cos^3 \alpha] + \frac{1}{4} \kappa q r^4 \sin \alpha (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).$$

Umgekehrt ist  $C = E W \Delta_0 y - M_0 r^2 + H r^3 - \frac{1}{3} q r^4$ , so dass man hier nach Berechnung von  $\Delta_0 y$  die Constante  $C$  und somit nach 240 die Verrückung eines beliebigen Punktes bestimmen kann.

Die Reihenverwandlung und Einsetzung der Werthe von  $M_0$ ,  $H$  giebt ohne Rücksicht auf  $\kappa$   $E W \Delta_0 y = \frac{1}{1680} q r^4 \alpha^6 = \frac{1}{420} q a^2 h^2$ , wonach  $\Delta_0 y$  halb so gross ist, als beim Bogen mit Kämpfergelenken (Seite 319). Genaue aber wird

$$249. \quad \Delta_0 y = \frac{q a^2}{840 E W} \frac{8 F h^4 + 1575 W a^2}{4 F h^2 + 45 W}$$

und wenn  $45 W$  gegen  $4 F h^2$  klein ist,

$$250. \quad \Delta_0 y = \frac{q a^2 h^2}{420 E W} + \frac{15 q a^4}{32 E F h^2}.$$

b) Gleichmässige Belastung der Axe.

**§. 348. Grundgleichungen.** Wenn die Last für die Längeneinheit des Bogens constant und zwar  $= g$  ist, so ist die Last zwischen dem Scheitel und dem fraglichen Querschnitte  $= g r \varphi$  und das Moment

derselben für den fraglichen Querschnitt  $= \int_0^\varphi g r d\psi \cdot r (\sin \varphi - \sin \psi)$   
 $= g r^2 (\varphi \sin \varphi - 1 + \cos \varphi)$ . Mithin wird

$$251. P = -H \cos \varphi - g r \varphi \sin \varphi, \quad Q = H \sin \varphi - g r \varphi \cos \varphi;$$

$$252. M = M_0 - H r (1 - \cos \varphi) + g r^2 (\varphi \sin \varphi - 1 + \cos \varphi).$$

Daher wird nun  $P + \frac{M}{r} = \frac{M_0}{r} - H - g r (1 - \cos \varphi)$ . In bekannter Weise ergibt sich hiernach

$$E W \Delta \varphi = (1 + \kappa) M_0 r \varphi - H r^2 [(1 + \kappa) \varphi - \sin \varphi] \\ + g r^3 [2 \sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \varphi - \kappa (\varphi - \sin \varphi)].$$

$$253. \left\{ \begin{aligned} E W \Delta x &= -M_0 r^2 [\sin \varphi - (1 + \kappa) \varphi \cos \varphi] + \frac{1}{2} H r^3 [2 \sin \varphi - 2 (1 + \kappa) \varphi \cos \varphi - \varphi + \sin \varphi \cos \varphi] \\ &\quad - \frac{1}{4} g r^4 (5 \varphi - 4 \sin \varphi - 5 \sin \varphi \cos \varphi + 4 \varphi \cos \varphi - 2 \varphi \sin^2 \varphi) - \kappa g r^4 \cos \varphi (\varphi - \sin \varphi), \\ E W \Delta y &= +M_0 r^2 [\cos \varphi + (1 + \kappa) \varphi \sin \varphi] - \frac{1}{2} H r^3 [2 \cos \varphi + 2 (1 + \kappa) \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi] \\ &\quad - \frac{1}{2} g r^4 (\varphi^2 - 3 \sin^2 \varphi + 2 \cos \varphi + 2 \varphi \sin \varphi + 2 \varphi \sin \varphi \cos \varphi) - \kappa g r^4 \sin \varphi (\varphi - \sin \varphi) + C. \end{aligned} \right.$$

Die Grössen  $M_0$ ,  $H$ ,  $C$  bestimmen sich wiederum durch die Bedingungen, dass für  $\varphi = \alpha$  oder an den Kämpfern  $\Delta \varphi = 0$ ,  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y = 0$  werden muss. Zunächst ergibt sich für den Horizontalschub der Ausdruck

$$254. H = g r \frac{8 \sin^2 \alpha - 7 \alpha \sin \alpha \cos \alpha - \alpha^2 - 2 \alpha^2 \sin^2 \alpha - \kappa (\alpha^2 + 3 \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 2 \alpha^2 \sin^2 \alpha)}{2 [(1 + \kappa) \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha]}.$$

Die Reihenverwandlung giebt

$$H = g r \left( 1 - \frac{1}{7} \alpha^2 + \dots \right) \frac{1 - \frac{15 \kappa}{\alpha^2} \left( 1 - \frac{26}{105} \alpha^2 + \dots \right)}{1 + \frac{45 \kappa}{\alpha^4} \left( 1 - \frac{4}{21} \alpha^2 + \dots \right)}.$$

Der Näherungsausdruck 242 (Seite 346) gilt auch hier, wenn man  $g$  für  $q$  setzt. Ferner ergibt sich für das Moment  $M_0$  im Scheitel

$$255. M_0 = H r \frac{(1 + \kappa) \alpha - \sin \alpha}{(1 + \kappa) \alpha} - g r^2 \frac{2 \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \alpha - \kappa (\alpha - \sin \alpha)}{(1 + \kappa) \alpha} \\ = -g r^2 \frac{-4 \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha + \alpha \sin \alpha + 5 \alpha \sin \alpha \cos \alpha - \alpha^2 - 2 \alpha^2 \cos \alpha + 2 \alpha^2 \sin^2 \alpha + J \kappa}{2 [(1 + \kappa) \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha]},$$

wenn man zur Abkürzung

$$J = -2 \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 + \alpha^2 \sin^2 \alpha$$

setzt. Die Reihenverwandlung giebt

$$M_0 = -\frac{1}{140} g r^2 \alpha^4 \frac{1 + \frac{525 \kappa}{\alpha^6}}{1 + \frac{45 \kappa}{\alpha^4}},$$

d. i., wenn man  $\frac{45}{\alpha^4}$  gegen  $\frac{525}{\alpha^6}$  vernachlässigt und  $\kappa = \frac{4 W h^2}{F a^4}$ ,  $\alpha = \frac{2 h}{a}$  setzt,

$$256. M_0 = -\frac{1}{35} g h^2 \frac{16 F h^4 + 525 W a^2}{16 F h^4}.$$

Wir setzen wiederum  $H = H_0 \frac{1 - A \kappa}{1 + B \kappa}$ ,  $M_0 = M_{00} \frac{1 + C \kappa}{1 + B \kappa}$ . Die Werthe von  $H_0$ ,  $M_{00}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , welche sich nach den genauen Formeln ergeben, sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

$\alpha$	$H_0$	$M_{00}$	A	B	C
0	1,0000	0,02857	3,750	2,813	8,20
30	0,9585	0,02979	3,886	2,931	9,28
60	0,8417	0,03344	4,358	3,440	12,51
90	0,6395	0,04086	5,692	5,278	21,06
Gr.	. g r	. — g h <sup>2</sup>	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2$	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^4$	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^6$

**§. 349. Beanspruchung.** Nach Berechnung von H und  $M_0$  sind P, Q und M durch die Gleichungen 251 und 252 bestimmt. Für kleine Winkel wird annähernd

$$257. \quad \begin{cases} P = -g r \left(1 - \frac{1}{7} \alpha^2 + \frac{1}{2} \varphi^2\right) + \frac{45 \kappa g r}{\alpha^4 + 45 \kappa} \left(1 + \frac{4}{21} \alpha^2 - \frac{1}{2} \varphi^2\right), \\ Q = -\frac{1}{21} g r \varphi \left(3 \alpha^2 - 7 \varphi^2\right) - \frac{45 \kappa g r \varphi}{\alpha^4 + 45 \kappa}, \\ M = -\frac{1}{420} g r^2 \left(3 \alpha^4 - 30 \alpha^2 \varphi^2 + 35 \varphi^4\right) - \frac{15 \kappa g r^2 (\alpha^2 - 6 \varphi^2)}{4 (\alpha^4 + 45 \kappa)}. \end{cases}$$

Die Transversalkraft Q und das Moment M sind hiernach nur  $\frac{2}{3}$  so gross, als bei gleichmässiger Belastung der Horizontalen. P ist stets negativ und wird zum wirklichen Maximum für  $\varphi = \alpha$  und zwar ist

$$\max P = -H \cos \alpha - g r \alpha \sin \alpha,$$

das ist annähernd für kleine Winkel bei Vernachlässigung von  $\kappa = -g r \left(1 + \frac{5}{14} \alpha^2\right)$ . Q wird Null, also M zum Maximum für  $\varphi = 0$  und für  $g r \varphi \cos \varphi = H \sin \varphi$ , d. i. bei kleinen Centriwinkeln für  $\varphi = \sqrt[3]{\frac{3}{7}} \alpha = 0,655 \alpha$ . Für kleine Winkel ergibt sich ohne Rücksicht auf  $\kappa$ , wenn  $M_1, M_3$  dieselbe Bedeutung haben, wie im vorigen Falle

$$258. \quad \begin{cases} M_0 = -\frac{1}{140} g r^2 \alpha^4 = -\frac{1}{35} g h^2, \\ M_1 = -\frac{2}{105} g r^2 \alpha^4 = -\frac{8}{105} g h^2, \\ M_3 = +\frac{2}{245} g r^2 \alpha^4 = +\frac{8}{245} g h^2. \end{cases}$$

Als Abstand der Stützlinie von der Axe ergibt sich für kleine Winkel annähernd:

$$259. \quad e = \frac{1}{420} \left(3 \alpha^4 - 30 \alpha^2 \varphi^2 + 35 \varphi^4\right) + \frac{15 \kappa r (\alpha^2 - 6 \varphi^2)}{4 (\alpha^4 + 45 \kappa)} \\ = \frac{2}{105} h \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left[3 - 30 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 35 \left(\frac{x}{a}\right)^4\right] + \frac{15 W h (a^2 - 6 x^2)}{2 a^2 (4 F a^2 + 45 W)}.$$

Die wichtigsten Grössen für  $\alpha = 0, 30^\circ, 60^\circ$  und  $90^\circ$  ohne Correction sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

$\alpha$	max P	$M_0$	$M_3$	$M_1$	$e_0$	$e_3$	$e_1$	$\varphi$ für	
								$M_3$	$e_3$
0	1,000	0,0286	+	0,0762	+	0,0653	+	0,655	0,655
30	1,1919	0,0298	0,0341	0,0795	0,0578	0,0623	0,1395	0,653	0,648
60	1,3278	0,0334	0,0383	0,0893	0,0596	0,0534	0,1009	0,648	0,629
90	1,5708	0,0409	0,0469	0,1096	0,0639	0,403	0,0698	0,639	0,604
Gr.	. g r		. g h <sup>2</sup>			$\frac{h^3}{a^2}$			. $\alpha$

**§. 350. Formänderung.** Für die verticale Verrückung des Scheitels ergibt sich nach 253 (Seite 349)  $E W \Delta_0 y = M_0 r^2 - H r^3 - g r^4 + C$ , d. i.

$$260. E W \Delta_0 y = M_0 r^2 [1 - \cos \alpha - (1 + \kappa) \alpha \sin \alpha] + \frac{1}{2} H r^3 [2(1 + \kappa) \alpha \sin \alpha - 2(1 - \cos \alpha) - \sin^2 \alpha] - \frac{1}{4} g r^4 [4 - 4 \cos \alpha + 5 \sin^2 \alpha - 4 \alpha \sin \alpha - 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha - \alpha^2] + \kappa g r^4 \sin \alpha (\alpha - \sin \alpha).$$

Die Reihenverwandlung und Einsetzung der Werthe von  $M_0$ ,  $H$  giebt ohne Rücksicht auf  $\kappa$   $E W \Delta_0 y = \frac{g}{2} \frac{1}{5,20} g r^4 \alpha^6$ , so dass unter sonst gleichen Umständen  $\Delta_0 y$  nur  $\frac{2}{3}$  so gross ist, als bei gleichmässiger Belastung der Horizontalen. Genauer aber wird mit Rücksicht auf  $\kappa$  für kleine Winkel

$$261. \Delta_0 y = \frac{g a^2}{2520 E W} \frac{16 F h^4 + 4725 W a^2}{4 F h^2 + 45 W}$$

und wenn  $45 W$  gegen  $4 F h^2$  klein ist,

$$262. \Delta_0 y = \frac{g a^2 h^2}{630 E W} + \frac{15 g a^4}{32 E F h^2}.$$

C. Beliebige Belastung bei beliebiger Form der Axe und variablem Querschnitte.

**§. 351. Grundgleichungen.** Wir setzen, wie in §. 330, zur Abkürzung

$$263. \frac{P}{E F} + \frac{M}{E F r} = \mathfrak{P}, \quad \frac{M}{E W} + \frac{\mathfrak{P}}{r} = \frac{M}{E W} + \frac{P}{E F r} + \frac{M}{E F r^2} = \mathfrak{M}.$$

Wie in §. 330 ergibt sich nun nach Sonderung der Constanten:

$$\begin{aligned} \text{a. } \Delta \varphi &= \int^s \mathfrak{M} ds + A, \\ \text{b. } \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= -y \left( \int^s \mathfrak{M} ds + A \right) + \int^s y \mathfrak{M} ds + \int^x \mathfrak{P} dx + B, \\ \Delta y &= +x \left( \int^s \mathfrak{M} ds + A \right) - \int^s y \mathfrak{M} ds + \int^y \mathfrak{P} dy + C. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Die Anwendung dieser drei Gleichungen auf die Kämpfer, für welche  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta x$  und  $\Delta y$  Null werden muss, liefert die Constanten und die Unbekannten  $V$ ,  $H$  und  $M_0$ . Wir bezeichnen hierbei die halbe Bogenlänge

mit  $b$  und die Ordinaten der beiden Kämpfer, obwohl dieselben gleich sind, dennoch zur Unterscheidung mit  $h_1$  und  $h_2$ . Setzen wir zunächst für  $s = +b$  und  $s = -b$   $\Delta\varphi = 0$ , so ergibt sich

$$c. \quad 0 = \int_{-b}^{+b} \mathfrak{M} ds + A, \quad 0 = \int_{-b}^{-b} \mathfrak{M} ds + A.$$

Die Gleichungen, welche sich ergeben, wenn man für die Kämpfer  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y = 0$  setzt, stimmen genau mit den Gleichungen b, c (Seite 322, 323) überein. Die Subtraction der Gleichungen c giebt

$$264. \quad \int_{-b}^{+b} \mathfrak{M} ds = 0.$$

Die Subtraction der Gleichungen b (Seite 322) giebt mit Rücksicht auf die eben aufgestellte Gleichung

$$265. \quad \int_{-b}^{+b} \mathfrak{M} y ds + \int_{-a}^{+a} \mathfrak{P} dx = 0.$$

Ferner giebt die Addition der Gleichungen c (Seite 352) und die Subtraction der Gleichungen c (Seite 323):

$$0 = \int_{-b}^{+b} \mathfrak{M} ds + \int_{-b}^{-b} \mathfrak{M} ds + 2A,$$

$$0 = a \int_{-b}^{+b} \mathfrak{M} ds + a \int_{-b}^{-b} \mathfrak{M} ds + 2A a - \int_{-b}^{+b} \mathfrak{M} x ds - \int_{h_1}^{h_2} \mathfrak{P} dy.$$

Die Elimination von  $A$  aus diesen beiden Gleichungen giebt

$$266. \quad \int_{-b}^{+b} \mathfrak{M} x ds + \int_{h_1}^{h_2} \mathfrak{P} dy = 0.$$

Durch diese drei Gleichungen 264, 265 und 266 aber ist  $V$ ,  $H$  und  $M_0$  bestimmt.

Die Gleichungen 186 (Seite 323) für die Formänderung behalten auch hier ihre Gültigkeit. Nur vereinfachen sich dieselben mit Rücksicht auf die Gleichungen 264 und 266. Somit ergibt sich

$$267. \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= -\frac{1}{2} y \left[ \int_b^s \mathfrak{M} ds - \int_s^{-b} \mathfrak{M} ds \right] + \int_b^s \mathfrak{M} y ds + \int_a^x \mathfrak{P} dx, \\ \Delta y &= +\frac{1}{2} x \left[ \int_b^s \mathfrak{M} ds - \int_s^{-b} \mathfrak{M} ds \right] - \frac{1}{2} \left[ \int_b^s \mathfrak{M} x ds - \int_s^{-b} \mathfrak{M} x ds \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{h_1}^y \mathfrak{P} dy - \frac{1}{2} \int_y^{h_2} \mathfrak{P} dy. \end{aligned} \right.$$

Für die Verrückungen des Scheitels kommen die Glieder, welche  $x$ ,  $y$  als Factoren vor dem Integralzeichen haben, in Wegfall.

**§. 352. Kreisförmige Axe.** Setzen wir in den Gleichungen 264–266  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = r(1 - \cos \varphi)$ ,  $dx = r \cos \varphi d\varphi$ ,  $dy = r \sin \varphi d\varphi$ , und für  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{P}$  die Ausdrücke 263, so ergeben sich, indem sich in den zwei letzten Gleichungen Glieder gegenseitig heben, folgende einfache Gleichungen:

$$268. \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left( \frac{M}{W} + \frac{P}{F r} + \frac{M}{F r^2} \right) d\varphi = 0, \\ \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{M}{W} \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{M}{W} \sin \varphi d\varphi = 0. \end{array} \right.$$

Bei constantem Querschnitte würde man die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} (1 + \kappa) \int M d\varphi + \kappa r \int P d\varphi &= 0, \\ \int M \cos \varphi d\varphi &= 0, \quad \int M \sin \varphi d\varphi = 0 \end{aligned}$$

erhalten. Handelt es sich nur um die Bestimmung der Kräfte, nicht um die Formänderung, so führen diese Gleichungen schneller zum Ziele, als die in §. 339 bis §. 350 angewendete Methode.

**§. 353. Symmetrische Form und Belastung.** Bei symmetrischer Form der Axe und bei gleichzeitiger symmetrischer Belastung lassen sich die Formeln des §. 351 noch vereinfachen, wenn man von den in §. 330 zu diesem Zwecke aufgestellten Beziehungen Gebrauch macht. Die Gleichungen 264 und 265 gehen über in

$$269. \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^b M ds = 0, \\ \int_0^b \mathfrak{M} y ds + \int_0^a \mathfrak{P} dx = 0. \end{array} \right.$$

Die Gleichung 266 kommt in Wegfall, dafür aber auch die Bestimmung von  $V$ , weil hier offenbar der Druck im Scheitel horizontal wirkt, also  $V = 0$  ist.

Als Verrückungen eines beliebigen Punktes ergeben sich nach 267 oder nach 188 (Seite 324):

$$270. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = -y \int_0^s \mathfrak{M} ds - \int_s^b \mathfrak{M} y ds - \int_x^a \mathfrak{P} dx, \\ \Delta y = +x \int_0^s \mathfrak{M} ds + \int_s^b \mathfrak{M} x ds - \int_y^h \mathfrak{P} dy, \end{array} \right.$$

und somit als Verrückungen des Scheitels  $\Delta_0 x = 0$  und

$$271. \quad \Delta_0 y = \int_0^b \mathfrak{M} x ds - \int_0^{h_1} \mathfrak{P} dy.$$

§. 354. **Isolirte Belastung bei kreisförmiger Axe.** Bezeichnen wir links von der Last  $G$  Alles ohne, rechts von derselben Alles mit Apostroph, so wird nach §. 334

$$272. \begin{cases} P = -H \cos \varphi + V \sin \varphi - G \sin \varphi, & P' = -H \cos \varphi + V \sin \varphi; \\ M = M_0 - H r (1 - \cos \varphi) - V r \sin \varphi + G r (\sin \varphi - \sin \beta), \\ M' = M_0 - H r (1 - \cos \varphi) - V r \sin \varphi. \end{cases}$$

Dies in die Gleichungen 268 eingesetzt, giebt

$$0 = M_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{d\varphi}{W} - H r \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} - V r \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin \varphi d\varphi}{W} + G r \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\sin \varphi - \sin \beta) d\varphi}{W} \\ + \frac{M_0 - H r}{r^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{d\varphi}{F} - \frac{G \sin \beta}{r} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\varphi}{F}.$$

$$0 = M_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos \varphi d\varphi}{W} - H r \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{(1 - \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi}{W} - V r \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{W} \\ + G r \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\sin \varphi - \sin \beta) \cos \varphi d\varphi}{W},$$

$$0 = M_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin \varphi d\varphi}{W} - H r \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{(1 - \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi}{W} - V r \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{W} \\ + G r \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\sin \varphi - \sin \beta) \sin \varphi d\varphi}{W} = 0.$$

Wenden wir die in §. 331 zur Vereinfachung aufgestellten Relationen an, so ergibt sich

$$0 = 2 M_0 \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{W} - 2 H r \int_0^{\alpha} \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} + G r \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\sin \varphi - \sin \beta) d\varphi}{W} \\ + \frac{2(M_0 - H r)}{r^2} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{F} - \frac{G \sin \beta}{r} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\varphi}{F},$$

$$0 = 2 M_0 \int_0^{\alpha} \frac{\cos \varphi d\varphi}{W} - 2 H r \int_0^{\alpha} \frac{(1 - \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi}{W} + G r \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\sin \varphi - \sin \beta) \cos \varphi d\varphi}{W},$$

$$0 = -2 V r \int_0^{\alpha} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{W} + G r \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\sin \varphi - \sin \beta) \sin \varphi d\varphi}{W}.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$273. \left\{ \begin{aligned} A &= \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{W}, \quad A_1 = \int_0^\alpha \frac{\sin \varphi d\varphi}{W}, \quad A_2 = \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi d\varphi}{W}, \\ A_3 &= \int_0^\alpha \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{W}, \quad A_4 = \int_0^\alpha \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{W}, \quad A_5 = \int_0^\alpha \frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{W}, \\ B &= \int_0^\beta \frac{d\varphi}{W}, \quad B_1 = \int_0^\beta \frac{\sin \varphi d\varphi}{W} \text{ u. s. w.} \\ \mathfrak{A} &= \frac{1}{r^2} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F}, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{r^2} \int_0^\beta \frac{d\varphi}{F}. \end{aligned} \right.$$

Hiernach gehen die vorigen Gleichungen über in

$$274. \left\{ \begin{aligned} 2 A M_0 - 2 (A - A_2) H r + [A_1 - B_1 - (A - B) \sin \beta] G r \\ \quad + 2 \mathfrak{A} ((M_0 - H r) - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) G r \sin \beta) = 0, \\ 2 A_2 M_0 - 2 (A_2 - A_4) H r + [A_5 - B_5 - (A_2 - B_2) \sin \beta] G r = 0, \\ 2 A_3 V - [A_3 - B_3 - (A_1 - B_1) \sin \beta] G = 0. \end{aligned} \right.$$

Hieraus ergibt sich

$$275. V = \frac{A_3 - B_3 - (A_1 - B_1) \sin \beta}{2 A_3}$$

$$276. H = \frac{(A_1 - B_1) A_2 - (A - B + \mathfrak{A} - \mathfrak{B}) A_2 \sin \beta - (A + \mathfrak{A}) [A_5 - B_5 - (A_2 - B_2) \sin \beta]}{2 (A A_4 - A_2^2 - A_4 \mathfrak{A})}$$

$$277. M_0 = \frac{A_2 - A_4}{A_2} H r - \frac{A_5 - B_5 - (A_2 - B_2) \sin \beta}{2 A_2} G r.$$

Die einzelnen Integrale berechnet man am besten in der in §. 331 gezeigten Weise. Haben  $\varepsilon$  und  $\delta$  dieselbe Bedeutung wie dort, so wird

$$278. \left\{ \begin{aligned} B W_0 &= \beta + \int_0^\beta \varepsilon d\varphi, \quad \mathfrak{B} F_0 r^2 = \beta + \int_0^\beta \delta d\varphi. \\ B_1 W_0 &= 1 - \cos \beta + \int_0^\beta \varepsilon \sin \varphi d\varphi, \\ B_2 W_0 &= \sin \beta + \int_0^\beta \varepsilon \cos \varphi d\varphi, \\ B_3 W_0 &= \frac{1}{2} (\beta - \sin \beta \cos \beta) + \int_0^\beta \varepsilon \sin^2 \varphi d\varphi, \\ B_4 W_0 &= \frac{1}{2} (\beta + \sin \beta \cos \beta) + \int_0^\beta \varepsilon \cos^2 \varphi d\varphi, \\ B_5 W_0 &= \frac{1}{2} \sin^2 \beta + \int_0^\beta \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Die Ausdrücke für die  $A_n$  ergeben sich, wenn man  $\alpha$  für  $\beta$  setzt. Durch successive Berechnung der Werthe der  $B_n$  für die verschiedenen angenommenen  $\beta$  ergeben sich auch diejenigen der  $A_n$  mit.

**§. 355. Construction.** Nach der Berechnung der Werthe von  $V$ ,  $H$ ,  $M$  für die verschiedenen angenommenen  $\beta$  ergeben sich die entsprechenden Ordinaten  $\eta$  der Kämpferdrucklinie leicht nach der Formel 196 (Seite 329). Setzen wir  $\xi = r \sin \beta$ , so wird

$$279. \quad \eta = \frac{V r \sin \beta - M}{H}.$$

Die Durchschnittspunkte  $\Phi$ ,  $\Psi$  der Kämpferdrücke mit den durch  $A$ ,  $B$  gehenden Verticalen (Fig. 112, Seite 329) sind durch die Formeln 197, nämlich

$$c_1 = -\frac{M_1}{H}, \quad c_2 = -\frac{M_2}{H}$$

bestimmt, wobei  $M_1 = M_0 - H r (1 - \cos \alpha) - V r \sin \alpha + G r (\sin \alpha - \sin \beta)$ ,  $M_2 = M_0 - H r (1 - \cos \alpha) + V r \sin \alpha$  ist. Umständlicher ist allerdings die Berechnung der Coordinaten der Kämpferdruck-Umhüllungslinie nach 198 (Seite 330). Setzt man in den Ausdrücken für  $V$ ,  $H$ ,  $M_0$  die Werthe

für die  $B_n$  ein, differenziirt nach  $\beta$  und beachtet, dass  $\frac{1}{d\beta} \int_0^\beta f(\varphi) d\varphi = f(\beta)$  ist, so ergibt sich nach gehöriger Reduction

$$280. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{d\beta} = -\frac{(A_1 - B_1) \cos \beta}{2 A_3}, \\ \frac{dH}{d\beta} = \frac{A_1 A_2 + [A_2 (B + \mathfrak{B}) - B_2 (A + \mathfrak{A}) \cos \beta + \frac{A_2}{F r^2} \sin \beta]}{2 (A A_4 - A_2^2 - A_4 \mathfrak{A})}, \\ \frac{dM_0}{d\beta} = \frac{(A_2 - A_4) r}{A_2} \frac{dH}{d\beta} + \frac{A_2 - B_2}{2 A_2} \cos \beta. \end{array} \right.$$

**§. 356. Stetige, symmetrische Belastung bei kreisförmiger Axe.** Die Last pro horizontale Längeneinheit in einem beliebigen Punkte sei  $q$ , die Gesamtlast vom Scheitel bis zum fraglichen Querschnitte =  $G$  und das Moment derselben für die horizontale Schweraxe des fraglichen Querschnittes =  $N$ . Alsdann wird

$$281. \quad \left\{ \begin{array}{l} P = -H \cos \varphi - G \sin \varphi, \\ M = M_0 - H r (1 - \cos \varphi) + N. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen 268 gehen im vorliegenden Falle über in

$$\int_0^\alpha \left( \frac{M}{W} + \frac{P r + M}{F r^2} \right) d\varphi = 0, \quad \int_0^\alpha \frac{M \cos \varphi}{W} d\varphi = 0,$$

d. i. nach Einsetzung der vorstehenden Ausdrücke für  $P$  und  $M$ :

$$282. \left\{ \begin{aligned} M_0 \int \frac{d\varphi}{W} - H r \int \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} + \int \frac{N d\varphi}{W} \\ + \frac{M_0}{r^2} \int \frac{d\varphi}{F} - \frac{H}{r} \int \frac{d\varphi}{F} + \frac{1}{r^2} \int \frac{N d\varphi}{F} - \frac{1}{r} \int \frac{G \sin \varphi d\varphi}{F} = 0, \\ M_0 \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{W} - H r \int \frac{(1 - \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi}{W} + \int \frac{N \cos \varphi d\varphi}{W} = 0, \end{aligned} \right.$$

wobei die Integrale zwischen den Grenzen 0 und  $\alpha$  zu nehmen sind. Die Grössen  $G$  und  $N$  berechnen sich leicht, wenn  $q$  für verschiedene Querschnitte bekannt ist. Es ist nämlich

$$G = \int_0^x q dx = r \int_0^\varphi q \cos \varphi d\varphi,$$

$$N = \int_0^x G dx = \int_0^\varphi G \cos \varphi d\varphi.$$

**Beispiel.** Wir nehmen als Beispiel ein Gewölbe von 10 Mtr. mittlerer Spannweite und 60 Grad halben Centriwinkel an, was einem mittleren Radius von 5,774 Meter entspricht. Der Einfachheit wegen denken wir uns das Gewölbe mit Steinmaterial überschüttet, welches dasselbe spezifische Gewicht, wie der Bogen selbst hat, und oben horizontal abgegrenzt ist. Ist an einer beliebigen Stelle die Gewölbs-Dicke  $\partial$ , die Ueberschüttungshöhe  $u$ , das Gewicht des Cubikmeters  $= \gamma$ , die Last pro einen horizontalen Meter  $= q$ , so ist  $q = u\gamma + \partial \gamma \sec \varphi$ . Wir nehmen  $\gamma = 1$  an. In folgender Tabelle sind die Werthe von  $\partial$ ,  $u$ ,  $q$ ,  $F$ ,  $W$ ,  $\frac{1}{F}$ ,  $\frac{1}{W}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\delta$  und die hiernach berechneten Werthe von  $G$ ,  $H$ ,  $\frac{N}{W}$ ,  $\frac{N}{F}$ ,  $\frac{G}{F}$  zusammengestellt.

$\varphi$	$\partial$	$u$	$q$	$F$	$W$	$\frac{1}{F}$	$\frac{1}{W}$	$\delta$	$\varepsilon$	$G$	$N$	$\frac{N}{W}$	$\frac{N}{F}$	$\frac{G}{F}$
0	0,70	1,30	2,00	0,70	0,0286	1,43	35,0	+ 0,23	+ 14,0	0	0	0	0	0
12	0,72	1,43	2,17	0,72	0,0311	1,39	32,2	+ 0,19	+ 11,2	2,488	1,488	47,9	2,07	3,46
24	0,76	1,81	2,64	0,76	0,0366	1,32	27,3	+ 0,12	+ 6,3	5,226	5,877	160,4	7,76	6,90
36	0,84	2,43	3,47	0,84	0,0494	1,19	20,2	- 0,01	- 0,8	8,389	12,945	261,5	15,40	9,98
48	0,96	3,26	4,70	0,96	0,0737	1,04	13,6	- 0,16	- 7,4	12,027	22,069	300,1	22,95	12,51
60	1,10	4,26	6,46	1,10	0,1109	0,91	9,0	- 0,29	- 12,0	15,935	31,969	287,7	29,09	14,50
Gr.	Mittel			0,83	0,0476	1,20	21,0							

Hiernach wird z. B., da  $W_0 = 0,0476$ ,  $\frac{1}{W_0} = 21,0$  ist, nach der im Anhange gegebenen Regel zur Berechnung einer Fläche aus 6 Ordinaten:  $\int \frac{\cos \varphi d\varphi}{W} = 21,0 \cdot \sin 60^\circ$   
 $+ \frac{\text{Arc } 60^\circ}{288} [19 \cdot 14,0 \cdot \cos 0 + 75 \cdot 11,2 \cdot \cos 120 + 50 \cdot 6,3 \cdot \cos 24^\circ - 50 \cdot 0,8 \cdot \cos 36^\circ$   
 $- 75 \cdot 7,4 \cdot \cos 48^\circ - 19 \cdot 12,0 \cdot \cos 60^\circ] = 21,0 \cdot 0,86603 + \frac{1,04720}{288} [266,0 + 821,6 + 287,8$   
 $- 32,36 - 371,4 - 114,0] = 18,1865 + 3,1184 = 21,3049.$

In dieser Weise ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{d\varphi}{W} &= 21,9911 + 2,1740 = 24,1651, \\ \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{W} &= 18,1865 + 3,1184 = 21,3049, \\ \int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{W} &= 15,5422 + 3,7074 = 19,2496, \\ \int \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} &= 24,1651 - 21,3049 = 2,8602, \\ \int \frac{(1 - \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi}{W} &= 21,3049 - 19,2496 = 2,0553, \\ \int \frac{d\varphi}{F} &= 1,2566 + 0,0240 = 1,2806, \\ \int \frac{N d\varphi}{W} &= 191,482, \quad \int \frac{N \cos \varphi d\varphi}{W} = 142,579, \\ \int \frac{N d\varphi}{F} &= 13,044, \quad \int \frac{G \sin \varphi d\varphi}{F} = 5,176. \end{aligned}$$

Daher wird nun nach 282:

$$24,1267 M_0 - 16,2931 H + 190,997 = 0,$$

$$21,3049 M_0 - 11,8673 H + 142,579 = 0$$

und hieraus ergibt sich

$$H = 10,348, \quad M_0 = -0,9281.$$

Nach 281 wird nun

$$P = -10,348 \cos \varphi - G \sin \varphi, \quad M = -60,677 + 59,749 \cos \varphi + N.$$

Die hiernach für P, M und  $e = \frac{M}{P}$  berechneten Werthe sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

$\varphi$	P	M	e	$\varphi$	P	M	e
0	-10,348	-0,928	+0,0897	36°	-13,303	+0,606	-0,0456
12°	-10,639	-0,745	+0,0700	48°	-17,903	+1,372	-0,0766
24°	-11,587	-0,215	+0,0186	60°	-18,974	+1,167	-0,0615

Bei constantem Querschnitte würde sich für die vorausgesetzte Belastung für den Scheitel  $H = 10,674 M_0 = 0,7486$ ,  $e = 0,702$  und für den Kämpfer  $P = 19,192$ ,  $M = 1,7017$ ,  $e = 0,887$  ergeben.

## XXXIX. Kapitel.

### Einfluss der Temperatur.

§. 357. **Allgemeines.** Wenn sich die Temperatur eines allseitig freien Körpers, welcher in allen Punkten nach parallelen Richtungen dieselben Elasticitäts- und Ausdehnungcoefficienten besitzt, in allen Punkten um gleichviel ändert, so entstehen durch die Temperaturänderung keine Spannungen. Denn entstünden Spannungen, so müssten dieselben in allen Punkten eines ebenen Schnittes constant sein; dann aber könnten, da keine äusseren Kräfte existiren, die beiden durch den Schnitt getrennten Theile nicht im Gleichgewichte sein.

Sind die genannten Bedingungen nicht erfüllt, ändert sich also z. B. die Temperatur nicht in allen Punkten um gleich viel oder ist der Körper nicht frei, so dass die Möglichkeit zur Entstehung äusserer Kräfte geboten ist, so können allerdings Spannungen in Folge der Temperaturänderung entstehen.

Wir wollen im Folgenden immer voraussetzen, dass die Temperaturänderung in allen Punkten gleich gross, dass aber der Körper nicht frei sei.

Wir setzen voraus, dass eine Temperatur  $t_0$  existire, bei welcher keine Spannungen vorhanden sind und nennen diese Temperatur die mittlere. Die Abweichung einer beliebigen Temperatur von der mittleren bezeichnen wir mit  $t$  und den Längenausdehnungscoefficienten (für einen Grad) mit  $\varepsilon$ .

Sehr einfach gestaltet sich die Bestimmung der Spannungen bei einem an den Enden festgehaltenen, geraden Stabe. Wäre der Stab, welcher die Länge  $l$  haben möge, frei, so würde seine relative Längenänderung  $\varepsilon t$  sein. Da er aber keine Längenänderung annehmen kann, so ist die entstehende Normalspannung  $N$  eben so gross, wie bei einer durch eine äussere Kraft erzeugten relativen Längenänderung von  $\varepsilon t$ , nämlich

$$283. \quad N = - E \varepsilon t,$$

wenn man beachtet, dass bei einer Temperaturerhöhung ein Druck, bei einer Temperaturerniedrigung ein Zug entsteht.

Ist die Querschnittsfläche  $F$ , so würde diese Spannung einer äusseren, an jedem Ende wirkenden, Kraft von  $N F = E F \varepsilon t$  entsprechen.

In folgender Tabelle sind die Werthe von  $E$ ,  $\varepsilon$  (für 1 Grad Celsius), sowie von  $E \varepsilon$  für einige Materialien zusammengestellt ( $E$  in Kilogrammen pro □Centim.):

Material	E	$\varepsilon$	$E \varepsilon$
Holz . . . . .	120000	0,0000038	0,46
Stein . . . . .	130000	0,0000070	0,91
Gusseisen . . . . .	1010000	0,0000112	11,31
Messing . . . . .	1020000	0,0000187	19,07
Kupfer . . . . .	1160000	0,0000172	19,95
Schmiedeeisen . . . . .	2040000	0,0000118	24,07
Stahl . . . . .	2350000	0,0000115	27,03

Für die Steine ist natürlich  $E$  und  $\varepsilon$  je nach der Gattung verschieden; wir haben indess nur einen Mittelwerth angegeben, da die Werthe für die einzelnen Gesteinsgattungen noch lange nicht genügend bekannt sind.

**§. 358. Einfluss der Temperatur bei Bogenträgern.** Da sich bei der Temperaturänderung die Länge eines Bogenträgers ändert, während die Spannweite wegen der Festhaltung der Bogenenden unveränderlich ist, so muss sich im Allgemeinen die Krümmung der Axe ändern, was natürlich die Entstehung von äusseren Kräften und Spannungen zur Folge hat. In der Folge wollen wir uns hauptsächlich mit der Bestimmung dieser äusseren Kräfte und Spannungen, sowie der entstehenden Formänderung beschäftigen.

Die relative Längenänderung, welche durch die aus der Temperaturänderung entspringenen äusseren Kräfte entsteht, ist nach 7 (Seite 270)  $= \frac{1}{E F} \left( P + \frac{M}{r} \right)$ . Direct entsteht durch die Temperaturänderung die relative Längenänderung  $\varepsilon t$ . Die gesammte relative Längenänderung ist daher

$$284. \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{P r + M}{E F r} + \varepsilon t.$$

Daher ist die Längenänderung der Axe

$$285. \quad \Delta s = \frac{1}{E r} \int_0^s \frac{P r + M}{F} ds + \varepsilon t s.$$

Die Aenderung des Winkels zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten und die wirkliche Verdrehung eines Querschnittes ist nach 8 (Seite 270) und 25 (Seite 274) bestimmt durch

$$286. \quad \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{E W} + \frac{P r + M}{E F r},$$

$$287. \quad \Delta \varphi = \frac{1}{E} \int \frac{M}{W} ds + \frac{1}{E r} \int \frac{P r + M}{F} ds.$$

Endlich ist die Verrückung eines Punktes nach 30 (Seite 276) bestimmt durch

$$288. \quad \begin{cases} \Delta x = -y \Delta \varphi + \int y d\varphi + \int \frac{\Delta ds}{ds} dx, \\ \Delta y = +x \Delta \varphi - \int x d\varphi + \int \frac{\Delta ds}{ds} dy. \end{cases}$$

In der Folge wollen wir stets eine kreisförmige Krümmung der Axe voraussetzen.

### A. Variabler Querschnitt.

§. 359. **Grundgleichungen im Allgemeinen.** Unter der Annahme einer kreisförmigen Axe wird allgemein

$$289. \quad \begin{cases} P = + H \cos \varphi, & Q = H \sin \varphi, \\ M = M_0 + H r (1 - \cos \varphi), \\ P r + M = H r + M_0. \end{cases}$$

Daher wird nach den vorigen Gleichungen

$$290. \quad \Delta s = \frac{H r + M_0}{E} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F} + r \varepsilon t \varphi,$$

$$291. \quad \Delta \varphi = \frac{M_0 r}{E} \int \frac{d\varphi}{W} + \frac{H r^2}{E} \int \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} + \frac{H r + M_0}{E r} \int \frac{d\varphi}{F} + \Delta.$$

$$292. \quad \begin{cases} \Delta x = -r \Delta \varphi (1 - \cos \varphi) + \frac{r^2}{E} \int \frac{M}{W} (1 - \cos \varphi) d\varphi + \frac{H r + M_0}{E} \int \frac{d\varphi}{F} + r \varepsilon t \sin \varphi + B, \\ \Delta y = +r \Delta \varphi \sin \varphi - \frac{r^2}{E} \int \frac{M}{W} \sin \varphi d\varphi - r \varepsilon t \cos \varphi + C, \end{cases}$$

oder nach Einsetzung des Ausdruckes für M und  $\Delta\varphi$ :

$$293. \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= \frac{M_0 r^2}{E} \left[ \int \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} - (1 - \cos \varphi) \int \frac{d\varphi}{W} \right] \\ &\quad + \frac{H r^3}{E} \left[ \int \frac{(1 - \cos \varphi)^2 d\varphi}{W} - (1 - \cos \varphi) \int \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} \right] \\ &\quad + \frac{H r + M_0}{E} \cos \varphi \int \frac{d\varphi}{F} + r \varepsilon t \sin \varphi - A r (1 - \cos \varphi) + B. \\ \Delta y &= \frac{M_0 r^2}{E} \left[ \sin \varphi \int \frac{d\varphi}{W} - \int \frac{\sin \varphi d\varphi}{W} \right] \\ &\quad + \frac{H r^3}{E} \left[ \sin \varphi \int \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} - \int \frac{\sin \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} \right] \\ &\quad + \frac{H r + M_0}{E} \sin \varphi \int \frac{d\varphi}{F} - r \varepsilon t \cos \varphi + A r \sin \varphi + C. \end{aligned} \right.$$

Wir unterscheiden nun die bekannten drei Fälle, in welchen drei Gelenke, zwei Gelenke oder kein Gelenk vorhanden sind.

**§. 360. Bogen mit drei Gelenken.** Des Scheitelgelenkes wegen ist  $M_0 = 0$ , also  $M = H r (1 - \cos \varphi)$ . Am Kämpfer ist wegen des Kämpfergelenkes  $M = 0$ , mithin  $0 = H r (1 - \cos \alpha)$ , folglich  $H = 0$ . Demnach ist für jeden Querschnitt  $P = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $M = 0$ , d. h.

Bei einem Bogen mit drei Gelenken entstehen durch die Temperaturänderung keine äusseren Kräfte, also auch keine Spannungen.

Es wird nun  $\Delta\varphi = A$ ,  $\Delta x = r \varepsilon t \sin \varphi - A r (1 - \cos \varphi) + B$ ,  $\Delta y = -r \varepsilon t \cos \varphi + A r \sin \varphi + C$ . Für  $\varphi = 0$  wird  $\Delta x = 0$ , daher  $B = 0$ . Für  $\varphi = \alpha$  wird  $\Delta x = 0$ , daher  $A = \frac{\varepsilon t \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$  und endlich für  $\varphi = \alpha$  wird  $\Delta y = 0$ , daher  $C = r \varepsilon t \cos \alpha - A r \sin \alpha = -r \varepsilon t$ . Dies eingesetzt giebt

$$294. \left\{ \begin{aligned} \Delta\varphi &= \varepsilon t \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \varepsilon t \cot \frac{1}{2} \alpha, \\ \Delta x &= r \varepsilon t \frac{\sin(\alpha - \varphi) - \sin \alpha + \sin \varphi}{1 - \cos \alpha}, \\ \Delta y &= -r \varepsilon t \frac{1 - \cos \alpha + \cos \varphi - \cos(\alpha - \varphi)}{1 - \cos \alpha}. \end{aligned} \right.$$

Die verticale Verrückung des Scheitels wird hiernach einfach

$$295. \Delta_0 y = -2 r \varepsilon t.$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsformeln

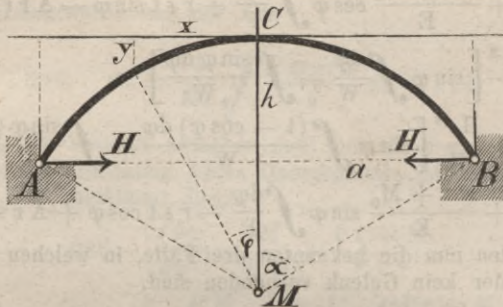
$$296. \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= r \varepsilon t \frac{\varphi(\alpha - \varphi)}{\alpha} = \varepsilon t \frac{x(a - x)}{a}, \\ \Delta y &= -2 r \varepsilon t \frac{(\alpha - \varphi)}{\alpha} = -\varepsilon t \frac{a(a - x)}{h}. \end{aligned} \right.$$

Hiernach verhält sich  $\Delta x : \Delta y = x h : a^2$ , so dass im Allgemeinen  $\Delta x$  gegen  $\Delta y$  nur klein ist.

§. 361. Bogen mit Kämpfergelenken (Fig. 114). Am Kämpfer ist  $M = 0$ , daher  $0 = M_0 + H r (1 - \cos \alpha)$ , folglich

$$297. \begin{cases} M_0 = -H r (1 - \cos \alpha), \\ M = -H r (\cos \varphi - \cos \alpha), \\ P r + M = +H r \cos \alpha. \end{cases}$$

Fig. 114.



Nach 291 wird, wenn man beachtet, dass für  $\varphi = 0$ ,  $\Delta\varphi = 0$  werden muss,

$$298. \Delta\varphi = -\frac{H r^2}{E} \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi - \cos \alpha}{W} d\varphi + \frac{H \cos \alpha}{E} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F}.$$

Aus der ersten der Gleichungen 292 folgt, wenn man beachtet, dass für  $\varphi = 0$ :  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta\varphi = 0$  wird, nach Einsetzung des Ausdruckes für  $\Delta\varphi$ :

$$299. \Delta x = \frac{H r^3}{E} \left[ (1 - \cos \varphi) \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi - \cos \alpha}{W} d\varphi - \int_0^\varphi \frac{(1 - \cos \varphi)(\cos \varphi - \cos \alpha)}{W} d\varphi \right] \\ + \frac{H r \cos \alpha \cos \varphi}{E} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F} + r \varepsilon t \sin \varphi.$$

Aus der zweiten der Gleichungen 293 folgt, wenn man beachtet, dass für  $\varphi = \alpha$ :  $\Delta y = 0$  wird und  $\Delta\varphi$  einen durch 298 bestimmten Werth annimmt:

$$300. \Delta y = \frac{H r^3}{E} \left[ \sin \alpha \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi - \cos \alpha}{W} d\varphi - \sin \varphi \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi - \cos \alpha}{W} d\varphi \right. \\ \left. - \int_\varphi^\alpha \frac{(\cos \varphi - \cos \alpha) \sin \varphi}{W} d\varphi \right] \\ + \frac{H r \cos \alpha}{E} \left[ \sin \varphi \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F} - \sin \alpha \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F} \right] - r \varepsilon t (\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Für  $\varphi = \alpha$  muss  $\Delta x = 0$  werden. Aus dieser Bedingung ergibt sich als Ausdruck für den Horizontalschub:

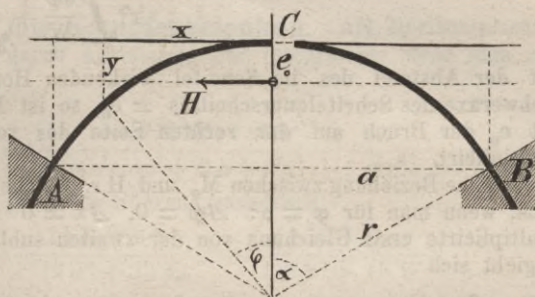
$$301. H = - \frac{E \varepsilon t \sin \alpha}{r^2 \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi (\cos \varphi - \cos \alpha)}{W} d\varphi - r^2 \cos \alpha \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi - \cos \alpha}{W} d\varphi + \cos^2 \alpha \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F}}$$

### §. 362. Bogen ohne Gelenk.

(Fig. 114.) Hier sind für P, Q, M, Pr + M die allgemeinen Ausdrücke 289 beizubehalten.

Ebenso ist der Ausdruck 290 für  $\Delta s$  direkt anzuwenden. Nach 291 ergibt sich, wenn man beachtet, dass für  $\varphi = 0$ ,  $\Delta \varphi = 0$  werden muss,

Fig. 115.



$$302. \Delta \varphi = \frac{M_0 r}{E} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{W} + \frac{H r^2}{E} \int_0^\varphi \frac{(1 - \cos \varphi)}{W} d\varphi + \frac{H r + M_0}{E r} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F}$$

Aus der ersten der Gleichungen 292 folgt mit Beachtung des Umstandes, dass für  $\varphi = 0$ :  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta \varphi = 0$  werden muss und nach Einsetzung des Ausdrucks für  $\Delta \varphi$ :

$$303. \Delta x = \frac{M_0 r^2}{E} \left[ \cos \varphi \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{W} - \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi d\varphi}{W} \right] - \frac{H r^3}{E} \left[ (1 - \cos \varphi) \int_0^\varphi \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} - \int_0^\varphi \frac{(1 - \cos \varphi)^2 d\varphi}{W} \right] + \frac{H r + M_0}{E} \cos \varphi \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F} + r \varepsilon t \sin \varphi$$

Aus der zweiten der Gleichungen 292 folgt, wenn man beachtet, dass für  $\varphi = \alpha$ :  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta \varphi = 0$  werden muss

$$304. \Delta y = \frac{M_0 r^2}{E} \left[ \sin \varphi \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{W} + \int_\varphi^\alpha \frac{\sin \varphi d\varphi}{W} \right] + \frac{H r^3}{E} \left[ \sin \varphi \int_0^\varphi \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} + \int_\varphi^\alpha \frac{\sin \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} \right] + \frac{H r + M_0}{E} \sin \varphi \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F} - r \varepsilon t (\cos \varphi - \cos \alpha)$$

Für  $\varphi = \alpha$  muss  $\Delta\varphi = 0$  werden. Diese Bedingung giebt als Beziehung zwischen  $H$  und  $M_0$ :

$$305. \quad M_0 = -Hr \frac{r^2 \int_0^\alpha \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} + \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F}}{r^2 \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{W} + \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F}}$$

Ist der Abstand des im Scheitel wirkenden Horizontaldruckes von der Schweraxe des Scheitelquerschnittes  $= e_0$ , so ist  $M_0 = -H e_0$ . Demnach ist  $e_0$  der Bruch auf der rechten Seite des vorigen Ausdruckes, mit  $r$  multiplicirt.

Eine Beziehung zwischen  $M_0$  und  $Hr$ , welche  $F$  nicht enthält, er giebt sich, wenn man für  $\varphi = \alpha$ :  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\Delta x = 0$  setzt und die mit  $r \cos \alpha$  multiplicirte erste Gleichung von der zweiten subtrahirt. In dieser Weise er giebt sich

$$306. \quad \frac{M_0 r}{E} \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi d\varphi}{W} + \frac{H r^2}{E} \left[ \int_0^\alpha \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} - \int_0^\alpha \frac{(1 - \cos \varphi)^2 d\varphi}{W} \right] = \varepsilon t \sin \alpha.$$

Wir setzen  $M_0 = -\mu Hr$ , worin  $\mu$  den Bruch auf der rechten Seite der Gleichung 305 bezeichnet. Dies in die vorige Gleichung eingesetzt und auf  $H$  reducirt, giebt

$$307. \quad H = \frac{E \varepsilon t \sin \alpha}{r^2 \int_0^\alpha \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{W} - r^2 \int_0^\alpha \frac{(1 - \cos \varphi)^2 d\varphi}{W} - \mu r^2 \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi d\varphi}{W}}$$

**§. 363. Beanspruchung.** Die durch die Temperaturänderung eintretende Spannung ist durch 9 (Seite 271) oder 22 (Seite 274) bestimmt. Meist gestatten die letzteren Gleichungen eine bequemere Anwendung. Nach diesen ist die Spannung  $N_1$  in dem obersten und die Spannung  $N_2$  in den untersten Fasern

$$308. \quad N_1 = \frac{H a_1 e_2}{W}, \quad N_2 = \frac{H a_2 e_1}{W},$$

worin  $a_1, a_2$  den Abstand der obersten und untersten Fasern von der Axe und  $e_1, e_2$  den Abstand des Kernpunktes des betreffenden Querschnittes (siehe §. 288) von der Richtung des Horizontaldruckes  $H$  bedeutet. Bei Bogenträgern mit Kämpfergelenken wirkt  $H$  in der Richtung der Sehne, bei Bogen ohne Gelenk in einer Horizontalen, welche um  $e_0$  unter dem Scheitel liegt.

Besteht der Träger aus zwei unendlich niedrigen Gurten mit den Querschnitten  $f_1, f_2$  und dem Abstände oder der Trägerhöhe  $b$ , so wird nach 45 (Seite 280)

$$N_1 = \frac{H e_2}{h f_1}, \quad N_2 = \frac{H e_1}{h f_2}.$$

Hiernach ist es nicht schwer, für specielle Querschnittsformen den

Ausdruck zur Berechnung der Querschnittsdimensionen mit Rücksicht auf die Temperatur aufzustellen, indem man zum Ausdruck für die durch die Belastung erzeugte Spannung den Ausdruck für die durch die Temperaturänderung erzeugte Spannung hinzufügt und die Summe dem Sicherheitscoefficienten gleich setzt.

### B. Constanter Querschnitt.

§. 364. **Bogen mit Kämpfergelenken.** Als Horizontalschub ergibt sich nach 301 durch Ausführung der Integration, wenn man zur Abkürzung  $\frac{W}{F r^2} = \kappa$  setzt,

$$309. H = - \frac{2 E W \varepsilon t \sin \alpha}{r^2 (\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha) + 2 \kappa r^2 \alpha \cos^2 \alpha}.$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdruck

$$310. H = - \frac{15 E W \varepsilon t}{r^2 (2 \alpha^4 + 15 \kappa)} = - \frac{15 E W F \varepsilon t}{8 F h^2 + 15 W}.$$

Je kleiner die Stichhöhe  $h$  ist, desto grösser ist bei sonst gleichen Dimensionen  $H$ ; für  $h = 0$  wird entsprechend dem geraden Stabe  $H = E F \varepsilon t$ .

Die Formeln 298, 299, 300 geben durch Ausführung der Integration unter Annahme eines constanten  $F$  und  $W$ :

$$311. \left\{ \begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{H r^2}{E W} (\varphi \cos \alpha - \sin \varphi) + \frac{H}{E F} \varphi \cos \alpha, \\ \Delta x &= \frac{H r^3}{2 E W} (\varphi - 2 \cos \alpha \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi + 2 \varphi \cos \alpha \cos \varphi) \\ &\quad + \frac{H r}{E F} \varphi \cos \alpha \cos \varphi + r \varepsilon t \sin \varphi, \\ \Delta y &= \frac{H r^3}{2 E W} \left[ \sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi - 2 \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi + \alpha \sin \alpha - \varphi \sin \varphi) \right] \\ &\quad - \frac{H r}{E F} (\alpha \sin \alpha - \varphi \sin \varphi) - r \varepsilon t (\cos \varphi - \cos \alpha). \end{aligned} \right.$$

Die verticale Verrückung des Scheitels ist hiernach

$$312. \Delta_0 y = - \frac{H r^3}{2 E W} (2 - 2 \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha + 2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha) \\ - \frac{H r}{E F} \alpha \sin \alpha - r \varepsilon t (1 - \cos \alpha).$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke nach Einsetzung des Ausdrucks für  $H$ :

$$313. \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\varphi (\alpha^2 - \varphi^2) (4 \alpha^2 - \varphi^2)}{2 (2 \alpha^4 + 15 \kappa)} r \varepsilon t, \\ \Delta y &= - \frac{5 (5 \alpha^4 - 6 \alpha^2 \varphi^2 + \varphi^4)}{8 (2 \alpha^4 + 15 \kappa)} r \varepsilon t, \\ \Delta_0 y &= \frac{25 \alpha^4}{8 (2 \alpha^4 + 15 \kappa)} r \varepsilon t = - \frac{25 F a^2 h \varepsilon t}{32 F h^2 + 60 W}. \end{aligned} \right.$$

In folgender Tabelle sind die genauen Werthe von  $H$  und  $\Delta_{0y}$  zusammengestellt. Dabei ist  $H = \frac{H_0 F h^2}{F h^2 + A W}$  gesetzt, wenn  $H_0$  den Horizontalschub ohne Rücksicht auf  $\varkappa$  bedeutet. Bei den Werthen für  $\Delta_{0y}$  ist  $\varkappa$  vernachlässigt.

$\alpha$	$H_0$		$A$	$\Delta_{0y}$
0	$\infty$	1,875	1,875	1,563
10	8089	1,867	1,854	1,564
20	506,7	1,843	1,767	1,566
30	100,4	1,802	1,635	1,570
40	31,92	1,747	1,453	1,576
50	13,14	1,677	1,245	1,583
60	6,372	1,593	0,963	1,593
90	1,273	1,273	0	1,637
Gr.	$\frac{E W \varepsilon t}{r^2}$	$\frac{E W \varepsilon t}{h^2}$		$\cdot - r \varepsilon t$

Setzt man  $H = \frac{H_0}{1 + B \varkappa}$ , so stimmen die Werthe von  $B$  mit den in der Tabelle auf Seite 313 enthaltenen überein.

**§. 365. Bogen ohne Gelenk.** Nach 305 ergibt sich zunächst als Beziehung zwischen  $M_0$  und  $H r$ :

$$314. \quad M_0 = -H r \frac{(1 + \varkappa) \alpha - \sin \alpha}{(1 + \varkappa) \alpha}.$$

Nach 306 wird

$$M_0 r \sin \alpha - \frac{1}{2} H r^2 (\alpha - 2 \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) = E W \varepsilon t \sin \alpha.$$

Setzt man für  $M_0$  den vorigen Ausdruck, so ergibt sich

$$315. \quad \begin{cases} H = -\frac{2 E W \varepsilon t (1 + \varkappa) \alpha \sin \alpha}{r^2 [(1 + \varkappa) (\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha]}, \\ M_0 = \frac{2 E W \varepsilon t \sin \alpha [(1 + \varkappa) \alpha - \sin \alpha]}{r [(1 + \varkappa) (\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha]}. \end{cases}$$

Der Abstand  $e_0$  des Horizontaldruckes im Scheitel von der Axe des Scheitelquerschnittes ist

$$316. \quad e_0 = -\frac{(1 + \varkappa) \alpha - \sin \alpha}{(1 + \varkappa) \alpha} r.$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke, wenn man nur  $\varkappa$  gegen  $\alpha^4$ ,  $\alpha^2$ , nicht aber gegen 1 berücksichtigt,

$$317. \quad e_0 = \frac{\alpha^2 + 6 \varkappa}{6} r = \frac{(F a^2 + 6 W) h}{3 F a^2}.$$

Ohne Rücksicht auf  $\varkappa$  wird  $e_0 = \frac{1}{3} h$ . Ferner wird

$$318. \quad \begin{cases} H = -\frac{45 E W \varepsilon t}{r^2(\alpha^4 + 45 \kappa)} = -\frac{45 E W F \varepsilon t}{4 F h^2 + 45 W}, \\ M_0 = \frac{15 E W \varepsilon t (\alpha^2 + 6 \kappa)}{2 r (\alpha^4 + 45 \kappa)} = \frac{15 E W \varepsilon t (F a^2 + 6 W) h}{(4 F h^2 + 45 W) a^2}. \end{cases}$$

Nach 302, 303 und 304 ergibt sich

$$\Delta \varphi = \frac{M_0 r}{E W} \varphi + \frac{H r^2}{E W} (\varphi - \sin \varphi) + \frac{H r + M_0}{E F r} \varphi,$$

$$319. \quad \begin{cases} \Delta x = \frac{M_0 r^2}{E W} (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{H r^3}{2 E W} (2 \sin \varphi - 2 \varphi \cos \varphi - \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \\ \quad + \frac{H r + M_0}{E F} \varphi \cos \varphi + r \varepsilon t \sin \varphi, \\ \Delta y = \frac{M_0 r^2}{E W} (\varphi \sin \varphi - \cos \alpha + \cos \varphi) \\ \quad + \frac{H r^3}{2 E W} \left[ 2 (\cos \varphi - \cos \alpha - \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi) - (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi) \right] \\ \quad + \frac{H r + M_0}{E F} \varphi \sin \varphi - r \varepsilon t (\cos \varphi - \cos \alpha). \end{cases}$$

Hierbei ist  $H r + M_0 = H r \frac{\sin \alpha}{(1 + \kappa) \alpha}$ . Die verticale Verrückung des Scheitels wird

$$320. \quad \Delta_{0y} = \frac{M_0 r^2}{E W} (1 - \cos \alpha) + \frac{H r^3}{2 E W} (1 - \cos \alpha)^2 - r \varepsilon t (1 - \cos \alpha).$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke:

$$321. \quad \begin{cases} \Delta x = \frac{\varphi (2 \alpha^2 - 3 \varphi^2) (\alpha^2 - \varphi^2) - 30 \kappa \varphi^3}{2 (\alpha^4 + 45 \kappa)} r \varepsilon t, \\ \Delta y = -\frac{15 (\alpha^2 - \varphi^2)^2}{8 (\alpha^4 + 45 \kappa)} r \varepsilon t. \\ \Delta_{0y} = -\frac{15 \alpha^4}{8 (\alpha^4 + 45 \kappa)} r \varepsilon t = -\frac{15 F a^2 h \varepsilon t}{16 F h^2 + 180 W}. \end{cases}$$

Nach den genauen Formeln ist folgende Tabelle berechnet. Dabei ist

$$H = \frac{H_0 F h^2}{F h^2 + A W}, \quad M_0 = \frac{M_{00} (F h^2 + B W)}{F h^2 + A W} \text{ gesetzt.}$$

$\alpha$	$H_0$		$M_0$		$e_0$	A	B	$\Delta_{0y}$
0	$\infty$	11,250	$\infty$	3,750	0,333	11,25	6,00	1,875
10	48500	11,194	245,9	3,735	0,333	11,13	5,95	1,875
20	3031	11,024	61,18	3,690	0,335	10,76	5,80	1,876
30	594,7	10,674	26,80	3,591	0,336	10,21	5,55	1,879
40	187,0	10,236	14,82	3,467	0,339	9,48	5,21	1,883
50	75,97	9,694	9,282	3,316	0,342	8,63	4,80	1,888
60	36,08	9,020	6,241	3,121	0,346	7,69	4,34	1,895
90	6,722	6,722	2,499	2,499	0,363	5,28	2,75	1,918
Gr.	$-\frac{E W \varepsilon t}{r^2}$	$-\frac{E W \varepsilon t}{h^2}$	$\frac{E W \varepsilon t}{r}$	$\frac{E W \varepsilon t}{h}$	$-\frac{h}{h}$			$-\frac{r \varepsilon t}{r \varepsilon t}$

Bei kleinen Stichhöhen ist unter sonst gleichen Umständen der Horizontalschub 6mal so gross, als beim Bogenträger mit zwei Gelenken.

**§. 366. Beanspruchung.** Die Spannungen in Folge der Temperaturänderung lassen sich leicht nach §. 363 bestimmen. Wir wollen sie hier nur unter der Voraussetzung ermitteln, dass die Höhe des Trägers gegen die Stichhöhe klein sei, so dass wir nach 308 (Seite 364).

$$N = \frac{H e a}{W} = \frac{M a}{W}$$

setzen können, worin  $e$  den Abstand der Axe des betreffenden Querschnittes von der Richtung des Horizontalschubes  $H$ ,  $a$  den Abstand der gespanntesten Fasern von der Axe des Querschnittes bedeuten. Nach 309 und 315 können wir allgemein  $H = k \frac{E W \varepsilon t}{h^2}$  setzen, wenn  $k$  einen nur vom Centriwinkel abhängigen Coefficienten bedeutet; daher ist

$$N = k E \varepsilon t \frac{e a}{h^2}.$$

Bei einem Bogenträger mit Kämpfergelenken ist der grösste Werth von  $e = h$ ; die im Scheitel eintretende grösste Spannung ist daher

$$N_0 = k E \varepsilon t \frac{a}{h}.$$

Bei einem Bogenträger ohne Gelenk kann  $N$  im Scheitel oder an den Kämpfern zum Maximum werden. Bezeichnen wir den Abstand der Richtung des Horizontalschubes vom Scheitel  $C$  und von der Sehne  $AB$  mit  $e_0, e_1$ , so sind die betreffenden Spannungen

$$N_0 = k E \varepsilon t \frac{e_0 a}{h^2}, \quad N_1 = k E \varepsilon t \frac{e_1 a}{h^2}.$$

Die absolut grösste Spannung ist  $N_1$ , da  $e_1 > e_0$  ist. In folgender Tabelle sind diese Werthe von  $N_0, N_1$  (ohne Correction) zusammengestellt.

$\alpha$	2 Gelenke	Kein Gelenk	
	$N_0$	$N_0$	$N_1$
0	1,875	3,750	7,500
10	1,867	3,735	7,459
20	1,843	3,690	7,334
30	1,802	3,591	7,083
40	1,747	3,467	6,769
50	1,677	3,316	6,378
60	1,593	3,121	5,899
90	1,273	2,499	4,223
Gr.	$E \varepsilon t \frac{a}{h}$		

Unter sonst gleichen Umständen verhalten sich also die Spannungen bei zwei Gelenken und bei keinem Gelenke bei flachen Bögen wie 1 : 4, beim Halbkreise wie 1 : 3,32.

Da die Werthe von  $k$  für verschiedene  $\alpha$  fast gleich sind, so ist die Spannung fast nur von  $\frac{a}{h}$  oder von dem Verhältnisse der Trägerhöhe zur Stichhöhe abhängig und diesem proportional.

Nimmt man als kleinsten Centriwinkel etwa  $20^\circ$ , für welchen  $h = 0,0882$  von der Spannweite ist und  $a$  zu  $\frac{1}{40}$  der Spannweite an, so ist  $\frac{a}{h} = 0,2883$ . Für Schmiedeeisen und  $t = 30^\circ$  wird  $E \varepsilon t \frac{a}{h} = 24.30 \cdot 0,2833 = 204$ , also bei zwei Gelenken  $N_0 = 383$ , bei keinem Gelenke  $N_1 = 1530$  Kilogr. pro  $\square$ Cent. d. i. bei einem Festigkeitscoefficienten von 4000 bezüglich 0,090 und 0,382 des Festigkeitscoefficienten. Beim Guss-eisen würde sich  $N$  nur bezüglich 0,023 und 0,090 und beim Holze sogar nur 0,012 und 0,049 des Festigkeitscoefficienten ergeben. Hiernach ist bei kleinen Centriwinkeln, besonders bei Bogenträgern ohne Gelenk, der Temperatureinfluss ziemlich bedeutend, namentlich beim Schmiedeeisen.

Bei constanter Spannweite, constanter Trägerhöhe, aber verschiedener Stichhöhe oder verschiedenem Centriwinkel ist das Verhältniss der grössten Spannung folgendes:

$\alpha = 90^\circ$	60,	50,	40,	30,	20,	10,	Grad:
	1	2,3	3,3	4,4	6,3	9,8	20,0.

In gleicher Weise wie die Bogenträger mit zwei Gelenken und keinem Gelenke lassen sich auch die Bogenträger, welche nur ein Scheitelgelenk haben, behandeln, sowohl in Beziehung auf Belastung, als auf Temperaturänderung. Wir bemerken hier nur der Vollständigkeit wegen, dass diese Träger in Beziehung auf den Temperatureinfluss zwischen denen mit zwei Gelenken und keinem Gelenke liegen. Bei flachen Bögen verhalten sich bei 3, 2, 1 und keinem Gelenke die Horizontalschübe wie 0:3:8:18, die grössten Spannungen wie 0:3:8:12 und die Verrückungen des Scheitels nahe wie 10:7:12:9.

## XL. Kapitel.

### Ringförmige Körper.

**§. 367. Ringförmige Körper im Allgemeinen.** Um für jeden beliebigen Querschnitt die Ausdrücke für die äusseren Kräfte aufstellen zu können, denkt man sich den Ring in irgend einem Querschnitt durchschnitten und bringt nun, um das Gleichgewicht nicht zu stören, die als Unbekannte auftretenden Spannungen in diesem Querschnitte als äussere, auf die beiden so erhaltenen Endflächen wirkende Kräfte an.

Wir setzen den fast einzigen wichtigen Fall voraus, dass die Axe des Ringes, sowie die Belastung in Beziehung auf eine Axe, die Axe der  $y$ , symmetrisch sei. In dem einen in dieser Axe liegenden Querschnitte  $B$  denken wir uns den Ring durchschnitten und bezeichnen die in der Ebene des Schnittes oder in Richtung der Axe der  $y$  wirkende Kraft mit  $V$ , die senkrecht hierzu wirkende Kraft mit  $H$ , den Abstand des Mittelpunktes aller in dem Schnitte thätigen Spannungen von der Axe mit  $e_0$  und das Moment  $H e_0$  mit  $M_0$ . Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Axe

seien  $x$ ,  $y$  und der Winkel zwischen der Normalen zur Axe und der Axe der  $y = \varphi$ . Die Bogenlänge von B aus gerechnet, sei  $s$ .

Wir machen ferner die fast immer erfüllte Annahme, dass der Querschnitt constant sei. Unter dieser Annahme wird nach 23 und 25 (Seite 274), wenn man beachtet, dass in Folge der Symmetrie für  $\varphi = 0$ ,  $\Delta\varphi = 0$  wird,

$$322. \left\{ \begin{aligned} \Delta s &= \frac{1}{E F} \int_0^s \left( P + \frac{M}{r} \right) ds \\ \Delta\varphi &= \frac{1}{E W} \int_0^s M ds + \frac{1}{E F r^2} \int_0^s \left( \frac{P}{r} + \frac{M}{r^2} \right) ds. \end{aligned} \right.$$

Ferner wird nach 32 (Seite 276), wobei hier  $-\Delta\varphi$  für  $\Delta\varphi$  zu setzen ist, wenn man beachtet, dass für  $\varphi = 0$   $\Delta x = 0$  werden muss und wenn man das  $y$  des Punktes  $B = b$  und die Verrückung des Punktes B in Richtung der Axe der  $y = \Delta_0 y$  setzt

$$323. \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= +y \Delta\varphi - \frac{1}{E W} \int_0^s M y ds - \frac{1}{E F} \int_0^s \left( \frac{P}{r} + \frac{M}{r^2} \right) y ds + \frac{1}{E F} \int_0^x \left( P + \frac{M}{r} \right) dx \\ \Delta y - \Delta_0 y &= -x \Delta\varphi + \frac{1}{E W} \int_0^s M x ds + \frac{1}{E F} \int_0^s \left( \frac{P}{r} + \frac{M}{r^2} \right) x ds + \frac{1}{E F} \int_b^y \left( P + \frac{M}{r} \right) dy \end{aligned} \right.$$

In dem dem Punkte B gegenüberliegenden Punkte  $B_1$  oder für  $\varphi = \pi$  muss wiederum  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\Delta x = 0$  werden; die so gebildeten Gleichungen, sowie die Bedingung für das Gleichgewicht der auf die beiden Endflächen des aufgeschnittenen Ringes wirkenden Kräfte V und H mit den äusseren Kräften bestimmen die Unbekannten.

**§. 368. Kettenringe im Allgemeinen.** Bei den Kettenringen wirken in Richtung der Axe der  $y$  zwei entgegengesetzte Kräfte als Zug; derselbe sei  $= G$ . Der Ring ist ausser in Beziehung auf die Axe der  $y$  auch noch auf eine hierzu senkrechte Axe, die Axe der  $x$ , symmetrisch. Die Kraft V ist offenbar  $= \frac{1}{2} G$ , weil sich G zu gleichen Theilen auf die beiden Theile, in welche der Schnitt in B den Ring trennt, zerlegt, so dass also nur noch H und  $M_0$  unbekannt sind. Demnach wird

$$324. P = H \cos \varphi + \frac{1}{2} G \sin \varphi, \quad M = M_0 + H(b - y) - \frac{1}{2} G x.$$

Zerschneiden wir den Ring in den Querschnitten B und  $B_1$ , so sind die in beiden Schnitten wirkenden, zur Axe der  $y$  parallelen Kräfte wegen der Symmetrie in Beziehung auf die Axe der  $x$  einander gleich. Ist nun ausser dem eigentlichen Ringe kein weiterer Theil vorhanden, so ist jeder der beiden Ringtheile nur im Gleichgewichte, wenn  $H = 0$  ist. Ist aber ein Steg AA, (Fig. 116) eingeschaltet, dessen Axe mit der Axe der  $x$  zusammenfällt, so wird auf diesen Steg vom Ringe ein Druck ausgeübt, weil der Zug G eine Verkleinerung der in der Richtung des Steges fallenden Ringweite anstrebt. Umgekehrt übt der Steg auf den Ring einen Druck aus, welcher, wenn jeder Ringtheil im Gleichgewicht sein soll,  $= 2 H$  sein muss. Hier ist also H nicht mehr Null.

Im Punkte A muss  $\Delta\varphi = 0$  werden. Nach der zweiten der Gleichungen 322 wird daher, wenn wir die Bogenlänge  $BA = s_1$  setzen,

$$325. \quad 0 = \frac{1}{W} \int_0^{s_1} M ds + \frac{1}{F} \int_0^{s_1} \left( \frac{P}{r} + \frac{M}{r^2} \right) ds.$$

Bei einem Ringe ohne Steg giebt diese Gleichung die Unbekannte  $M_0$ . Bezeichnen wir die Halbaxen OA und OB mit a und b und ihre Veränderungen mit  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ , so ergibt sich zunächst  $\Delta a$ , wenn wir in 323 für  $s = s_1$ ,  $\Delta x = \Delta a$ ,  $\Delta\varphi = 0$ ,  $x = a$  setzen, nämlich

$$326. \quad \Delta a = -\frac{1}{E W} \int_0^{s_1} M y ds - \frac{1}{E F} \int_0^{s_1} \left( \frac{P}{r} + \frac{M}{r^2} \right) y ds + \frac{1}{E F} \int_0^a \left( P + \frac{M}{r} \right) dx.$$

Bei einem Ringe mit Steg wird  $\Delta a = 0$ , wenn der Steg absolut steif ist. Genauer aber ist, wenn f den mittleren Querschnitt des Steges,  $E_1$  seinen Elasticitätscoefficienten bedeutet,  $\Delta a = \frac{2H}{E_1 f} a$ , weil der Druck auf den Steg  $= 2H$  ist. Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so bestimmen diese und die Gleichung 325 die Unbekannten H und  $M_0$ .

Die Veränderung  $\Delta b$  der Axe b ergibt sich aus 323, wenn man  $\Delta_0 y = \Delta b$  und für  $s = s_1$ :  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\Delta y = 0$ ,  $y = 0$  setzt; nämlich

$$327. \quad \Delta b = -\frac{1}{E W} \int_0^{s_1} M x ds - \frac{1}{E F} \int_0^{s_1} \left( \frac{P}{r} + \frac{M}{r^2} \right) x ds + \frac{1}{E F} \int_0^b \left( P + \frac{M}{r} \right) dy.$$

Wir wollen nun diese Regeln auf die wichtigsten Formen anwenden.

### §. 369. Kreisförmiger Ring ohne Steg. (Fig. 116.)

Hier ist  $H = 0$ ,  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = r \cos \varphi$ ,  $dx = r \cos \varphi d\varphi$ ,  $dy = -r \sin \varphi d\varphi$ ,  $ds = r d\varphi$ , daher

$$328. \quad P = \frac{1}{2} G \sin \varphi, \quad M = M_0 - \frac{1}{2} G r \sin \varphi, \quad P r + M = M_0.$$

Die Gleichung 325 giebt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{M_0 r}{W} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi - \frac{G r^2}{2 W} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \varphi d\varphi - \frac{M_0}{F r} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi, \text{ d. i.} \\ &= \frac{M_0 r \pi}{2 W} - \frac{G r}{2 W} + \frac{M_0 \pi}{2 F r} \end{aligned}$$

mithin

$$329. \quad M_0 = \frac{G F r^3}{\pi (F r^2 + W)}.$$

Ohne Rücksicht auf F würde  $M_0 = \frac{1}{\pi} G r = 0,3183 G r$ . Das Moment  $M_1$  in A und A<sub>1</sub> ist  $M_1 = M_0 - \frac{1}{2} G r$ , d. i.

$$330. \quad M_1 = -\frac{G r [(\pi - 2) F r^2 + \pi W]}{2 \pi (F r^2 + W)}.$$

Ohne Rücksicht auf F wird  $M_1 = -\frac{\pi - 2}{2 \pi} G r = -0,1817 G r$ .  $M_0$  und  $M_1$  sind die Maxima von M;  $M_0$  ist also das absolute Maximum.



Fig. 116.

Die Spannung der gespanntesten Fasern wird nach 9 (Seite 271), wenn wir mit  $e$  den Abstand der äusseren Fasern von der Schweraxe des Querschnittes (einen symmetrischen Querschnitt vorausgesetzt) bezeichnen,

$$N = \frac{M_0}{F r} \pm \frac{M r e}{\mathfrak{B} (r \pm e)}$$

Da nur das zweite Glied variabel ist, so wird  $N$  in demselben Querschnitte am grössten, in welchem  $M$  zum absoluten Maximum wird, also in  $B$  oder  $B_1$ . Die absolut grösste Spannung  $N_0$  ist daher

$$331. N_0 = \frac{G r^2 (\mathfrak{B} r \pm \mathfrak{B} e \pm F r^2 e)}{\pi (F r^2 + \mathfrak{B}) \mathfrak{B} (r \pm e)}$$

Beim kreisförmigen Querschnitte mit dem Durchmesser  $\partial$  ist  $e = \frac{1}{2} \partial$ ,  $F = \frac{1}{4} \partial^2$  und  $\mathfrak{B} = \frac{1}{64} \pi \partial^4 \left(1 + \frac{\partial^2}{8 r^2}\right)$ . Dies eingesetzt giebt

$$332. N_0 = \pm \frac{32 G r}{\pi^2 \partial^3} \frac{16 \pm \frac{\partial}{r} \left(1 \pm \frac{\partial}{2 r}\right) \left(1 + \frac{\partial^2}{8 r^2}\right)}{\left[16 + \frac{\partial^2}{r^2} \left(1 + \frac{\partial^2}{8 r^2}\right)\right] \left(1 \pm \frac{\partial}{2 r}\right) \left(1 + \frac{\partial^2}{8 r^2}\right)}$$

$$= \pm \frac{32 G r}{\pi^2 \partial^3} \left[1 \mp \frac{3 \partial}{8 r} + \frac{\partial^2}{16 r^2} \mp \frac{3 \partial^3}{128 r^3} + \dots\right]$$

Bezeichnet man die grösste positive Spannung, welche in den äussern Fasern stattfindet, mit  $N_0'$ , die grösste negative Spannung, welche in den innern Fasern stattfindet, mit  $N_0''$ , so ergibt sich beispielsweise für

	$r =$	1	2	3	5	10	$\partial$ ,
$+ N_0'$	$\pi^2 \partial^3 =$	0,676	0,825	0,902	0,927	0,963	$\cdot 32 G r$ ,
$- N_0''$	$\pi^2 \partial^3 =$	1,723	1,334	1,134	1,078	1,038	$\cdot 32 G r$ .

Am grössten ist hiernach die negative Spannung, so dass die Festigkeitsbedingung für Schmiedeeisen  $-N_0'' = \mathfrak{R}$  zu setzen ist. Ist das Verhältniss  $\frac{\partial}{r}$  gegeben, so ergibt sich, wenn man  $1 + \frac{3 \partial}{8 r} + \frac{\partial^2}{16 r^2} + \dots = \mu$  setzt,

$$333. \partial = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{32 \mu G r}{\mathfrak{R} \partial}}$$

}	$\frac{r}{\partial} =$	1	2	3	5	10	
	$\partial =$	2,364	2,941	3,321	4,180	5,800	$\cdot \sqrt{\frac{G}{\mathfrak{R}}}$ .

Ist dagegen  $r$  gegeben, so ergibt sich, wenn man in dem zweiten der Ausdrücke 332 die Glieder bis zum dritten Grade berücksichtigt

$$334. \left(\frac{\mathfrak{R} \pi^2}{32 G r} - \frac{3}{128 r^3}\right) \partial^3 - \frac{\partial^2}{16 r^2} - \frac{3 \partial}{8 r} = 1.$$

Als ersten Näherungswert kann man annehmen:

$$\partial = \sqrt[3]{\frac{32 G r}{\pi^2 \mathfrak{R}}} = 1,480 \sqrt[3]{\frac{G}{\mathfrak{R}}}$$

Als Veränderungen der beiden Axen ergeben sich nach 327 und 328, wobei sich die beiden Glieder mit  $Pr + M$  heben,

$$\Delta a = -\frac{M_0 r^2}{E W} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \varphi \, d\varphi + \frac{G r^3}{2 E W} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$\Delta b = -\frac{M_0 r^2}{E W} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \varphi \, d\varphi + \frac{G r}{2 E W} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi, \text{ d. i.}$$

$$335. \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta a &= -\frac{r^2}{E W} \left( M_0 - \frac{1}{4} G r \right) = -\frac{G r^3 (4 - \pi) F r^2 - \pi W}{E W \cdot 4 \pi (F r^2 + W)}, \\ \Delta b &= +\frac{r^2}{E W} \left( \frac{\pi}{8} G r - M_0 \right) = -\frac{G r^3 (\pi^2 - 8) F r^2 + \pi^2 W}{E W \cdot 8 \pi (F r^2 + W)}. \end{aligned} \right.$$

Für den kreisförmigen Querschnitt wird beispielsweise für

$$\begin{array}{cccccc} r = & 1 & 2 & 3 & 5 & \infty & \cdot \hat{\vartheta} \\ \Delta a = & -0,0498 & 0,0634 & 0,0661 & 0,0675 & 0,0683 & \left. \begin{array}{l} G r^3 \\ E W \end{array} \right\} \\ \Delta b = & +0,0931 & 0,0793 & 0,0766 & 0,0752 & 0,0744 & \left. \begin{array}{l} G r^3 \\ E W \end{array} \right\} \end{array}$$

### §. 370. Ovaler Ring. (Fig. 117.)

Wir setzen die Axe als eine Korblinie aus vier Mittelpunkten voraus, und bezeichnen die Radien der Bogen BC und CA mit  $r$ ,  $r_1$  den Winkel BDC mit  $\alpha$ . Den Querschnitt nehmen wir als Kreis mit dem Durchmesser  $\hat{\vartheta}$  an. Die Korblinie schliesst sich an eine Ellipse am besten an, wenn man bei gegebenen  $a$  und  $b$  die Radien  $r$  und  $r_1$  so bestimmt, dass das Verhältniss  $\frac{r}{r_1}$  ein Maximum wird. Hierdurch ergibt sich

$$r = \frac{a^2 + b^2 - (b - a) \sqrt{a^2 + b^2}}{2b},$$

$$r_1 = \frac{a^2 + b^2 + (b - a) \sqrt{a^2 + b^2}}{2a},$$

woraus sich die bekannte Construction ableiten lässt, bei welcher  $AF = b - a$ ,  $FJ = BJ$ ,  $JE \perp AB$  ist. Hierbei wird

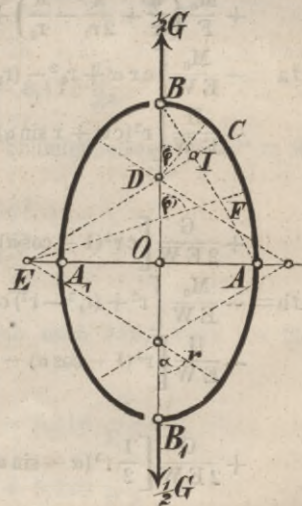
$$\tan \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Damit kein Klemmen der einzelnen Ringe eintrete, muss  $r \geq \hat{\vartheta}$  sein. Setzt man den Ausdruck für  $r$  ein, so ergibt sich als Bedingung

$$(a - 2\hat{\vartheta})(a^2 + b^2) + 2b\hat{\vartheta}^2 \geq 0.$$

Wir wollen das Verhältniss  $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$  wählen. Alsdann wird  $\tan \alpha = 0,8321$ ,  $\alpha = 39^\circ 45' 44''$  und  $b^2 - 3b\hat{\vartheta} + 2,07692\hat{\vartheta}^2 \geq 0$  oder  $b \geq 1,916\hat{\vartheta}$ ,

Fig. 117.



$a \approx 1,284 \partial$ . Wir wählen  $b = 2 \partial$ ,  $a = \frac{5}{4} \partial$ . Alsdann wird

$$r = 1,0438 \partial, \quad r_1 = 2,7676 \partial.$$

Wir bezeichnen innerhalb der Strecke BC Alles ohne, innerhalb der Strecke CA Alles mit Apostroph und setzen  $OD = c$ ,  $OE = c_1$ , wobei  $c = b - r$ ,  $c_1 = r_1 - a$  ist. Alsdann wird  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = c + r \cos \varphi$ ,  $x' = r_1 \sin \varphi - c_1$ ,  $y' = r_1 \cos \varphi$ ,  $dx = r \cos \varphi d\varphi$ ,  $dy = -r \sin \varphi d\varphi$ ,  $dx' = r_1 \cos \varphi d\varphi$ ,  $dy' = -r_1 \sin \varphi d\varphi$ ,  $ds = r d\varphi$ ,  $ds' = r_1 d\varphi$ . Sonach wird:

$$336. \left\{ \begin{array}{l} P = H \cos \varphi + \frac{1}{2} G \sin \varphi, \quad M = M_0 + H r (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} G r \sin \varphi, \\ P' = H \cos \varphi + \frac{1}{2} G \sin \varphi, \quad M' = M_0 + H (b - r_1 \cos \varphi) - \frac{1}{2} G (r_1 \sin \varphi - c_1), \\ P r + M = M_0 + H r, \quad P' r + M' = M_0 + H b + \frac{1}{2} G c_1. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen 326—328 geben nun, wenn man die Integrale in zwei Integrale zwischen den Grenzen  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \alpha$  und  $\varphi = \alpha$  bis  $\varphi = \frac{1}{2} \pi$  zerlegt und die Integration ausführt:

$$0 = \frac{M_0}{W} \left[ \frac{1}{2} r_1 \pi - (r_1 - r) \alpha \right] + \frac{H}{W} \left[ \frac{1}{2} b r_1 \pi + (b r_1 - r^2) \alpha - r_1^2 + (r_1^2 - r^2) \sin \alpha \right] \\ - \frac{G}{E W} \left[ r^2 + (r_1^2 - r^2) \cos \alpha - c_1 r_1 \left( \frac{1}{2} \pi - \alpha \right) \right] \\ + \frac{M_0}{F} \left( \frac{\alpha}{r} + \frac{\pi}{2 r_1} - \frac{\alpha}{r_1} \right) + \frac{H}{F} \left[ \alpha + \frac{6(\pi - 2\alpha)}{2r} \right] + \frac{G c_1 (\pi - 2\alpha)}{4 r_1}, \\ \Delta a = - \frac{M_0}{E W} \left[ c r \alpha + r_1^2 - (r_1^2 - r^2) \sin \alpha \right] \\ - \frac{H}{E W} \left[ r^2 (c \alpha + r \sin \alpha) - \frac{1}{2} r^3 (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \right. \\ \left. + b r_1^2 (1 - \sin \alpha) - \frac{1}{4} r_1^3 (\pi - 2\alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha) \right] \\ + \frac{G}{2 E W} \left[ c r^2 (1 - \cos \alpha) + \frac{1}{2} r^3 \sin \alpha + \frac{1}{2} r_1^3 \cos^2 \alpha - c_1 r_1^2 (1 - \sin \alpha) \right] - \frac{M_0 + H r}{E F r} c \alpha, \\ \Delta b = - \frac{M_0}{E W} \left[ r^2 + (r_1^2 - r^2) \cos \alpha - \frac{1}{2} c_1 r_1 (\pi - 2\alpha) \right] \\ - \frac{H}{E W} \left[ r^3 (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} r^3 \sin^2 \alpha + b r_1^2 \cos \alpha \right. \\ \left. - \frac{1}{2} r_1^3 \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} b c_1 r_1 (\pi - 2\alpha) + c_1 r_1^2 (1 - \sin \alpha) \right] \\ + \frac{G}{2 E W} \left[ \frac{1}{2} r^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - 2 c_1 r_1^2 \cos \alpha \right. \\ \left. + \frac{1}{4} r_1^3 (\pi - 2\alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha) + \frac{1}{2} c_1^2 r_1 (\pi - 2\alpha) \right]$$

Setzt man  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $c_1$ ,  $r$ ,  $r_1$ , nach dem Obigen als Vielfache von  $\partial$ , sowie  $\alpha$  ein und ausserdem  $\frac{W}{F} = \frac{\partial^2}{16}$ , so ergibt sich

$$338. \left\{ \begin{array}{l} 0 = M_0 + 0,6958 H \partial - 0,4095 G \partial, \\ E W \Delta a = -4,1898 M_0 \partial^2 - 2,2565 H \partial^3 + 1,3887 G \partial^3, \\ E W \Delta b = -2,6491 M_0 \partial^2 - 2,5209 H \partial^3 + 1,3684 G \partial^3. \end{array} \right.$$

Für das Weitere ist zu unterscheiden, ob der Ring einen Steg hat oder nicht.

§. 371. **Ovaler Kettenring ohne Steg.** (Fig. 118.) Hier ist  $H = 0$ , daher wird nach der ersten der Gleichungen 338:

$$339. M_0 = 0,4095 G \partial.$$

Wählen wir für die Punkte B und A bezüglich die Indices 0 und 1, so wird nach 336:

$$\begin{aligned} P_0 &= 0, & M_0 &= +0,4095 G \partial, \\ P_0 r + M_0 &= +0,4095 G \partial; \\ P_1 &= +0,5 G, & M_1 &= -0,2572 G \partial, \\ P_1 r_1 + M_1 &= +1,1267 G \partial. \end{aligned}$$

Die grösste Spannung findet im Querschnitte B statt. Dieselbe ist nach 9 (Seite 271):

$$N_0 = \frac{M_0}{F r} \pm \frac{M_0 r e}{\mathfrak{B} (r \pm e)}.$$

Setzen wir  $M_0 = 0,4095 G \partial$ ,  $F = \frac{\pi}{4} \partial^2$ ,

$\mathfrak{B} = \frac{\pi}{64} \partial^4 \left(1 + \frac{\partial^2}{8 r^2} + \frac{5 \partial^4}{256 r^4} + \dots\right) = 1,136 \frac{\pi}{64} \partial^4$ ,  
 $r = 1,0438 \partial$ ,  $e = \frac{1}{2} \partial$ , so ergibt sich als grösster Zug  $N_0'$  und als grösster Druck  $N_0''$ :

$$N_0' = +2,976 \frac{G}{\partial^2}, \quad N_0'' = -8,115 \frac{G}{\partial^2}.$$

Die Festigkeitsbedingung ist demnach beim Schmiedeeisen  $-N_0'' = \mathfrak{R}$ , d. i.  $\mathfrak{R} \partial^2 = 8,115 G$  oder

$$340. \begin{cases} G = 0,1232 \mathfrak{R} \partial^2, \\ \partial = 2,849 \sqrt{\frac{G}{\mathfrak{R}}}. \end{cases}$$

Als Veränderung der beiden Axen ergibt sich nach 338, wenn wir für  $M_0$  seinen Werth einsetzen:

$$341. \begin{cases} \Delta a = -0,3270 \frac{G \partial^3}{E W} = -6,616 \frac{G}{E \partial}, \\ \Delta b = +0,2836 \frac{G \partial^3}{E W} = +5,738 \frac{G}{E \partial}. \end{cases}$$

Die Bruchbelastung ergibt sich in Wirklichkeit allerdings grösser, als sie sich nach 340 ergeben würde, wenn man für  $\mathfrak{R}$  den Bruchfestigkeitscoefficienten setzt, weil sich die kleine Axe, und mit ihr  $M_0$  durch die Streckung merklich vermindert und sich der Ring in der Nähe der Punkte A,  $A_1$  auf die durch ihn hindurch gehenden Ringe so auflegt, dass daselbst eine weitere Vergrösserung der Krümmung unmöglich wird.

§. 372. **Ovaler Kettenring mit Quersteg.** (Fig. 119.) Wir setzen beispielsweise den Quersteg von Gusseisen und den mittleren Querschnitt zu  $0,52 \partial^2$  voraus. Für Gusseisen ist  $E_1 = 1010000$ , für Schmiedeeisen

Fig. 118.

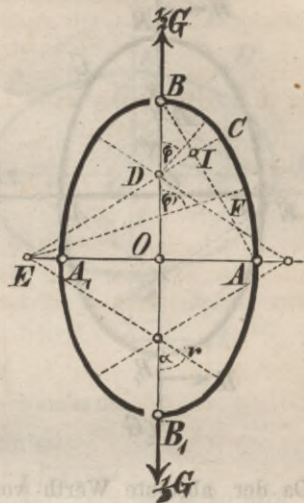
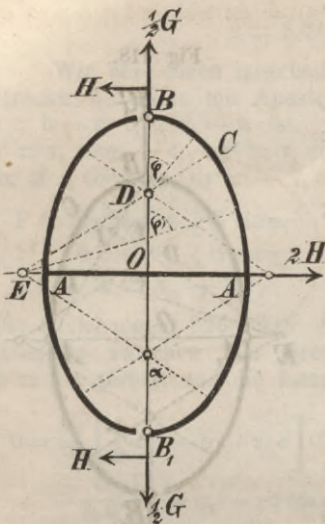


Fig. 119.



eisen  $E = 2040000$ , also  $E_1 = \frac{1}{2} E$ , folglich  $\Delta a = -\frac{2 H a}{\frac{1}{2} E 0,52 \partial^2} = 10,257 \frac{H}{E \partial}$ ,

und wenn man  $W = \frac{\pi}{64} \partial^2$  setzt,

$$342. \quad E W \Delta a = -0,5070 H \partial^3.$$

Setzt man dies in die zweite der Gleichungen 338 ein, so ergibt sich aus dieser Gleichung und der ersten der Gleichungen 338

$$343. \quad H = +0,2806 G, \quad M_0 = +0,2142 G \partial.$$

M wird zum analytischen Maximum für  $\tan \varphi = \frac{G}{2H} = 1,7819$ ,  $\varphi = 60^\circ 44' 56''$ .

Bezeichnen wir das analytische Maximum von M mit  $M_2$ , während  $M_0, M_1$  die Bedeutung, wie im vorigen §. haben, so wird

$$M_0 = +0,2142 G \partial,$$

$$M_2 = -0,0943 G \partial,$$

$$M_1 = +0,1087 G \partial.$$

Da der absolute Werth von  $M_0$  bedeutend grösser ist, als der von  $M_1$  und  $M_2$ , so wird auch die Spannung in B zum Maximum und zwar ist  $N_0$  nach 9 (Seite 271):

$$N_0 = \frac{M_0 + H r}{F r} \pm \frac{M_0 r e}{2B(r \pm e)}.$$

Die Einsetzung der betreffenden Werthe giebt

$$N_0' = +1,914 G \partial^2, \quad N_0'' = -3,887 G \partial^2.$$

Auch hier ist für Schmiedeeisen die Festigkeitsbedingung  $-N_0' = R$ , d. i.  $R \partial^2 = 3,887 G$  oder

$$344. \quad \begin{cases} G = 0,2573 R \partial^2, \\ \partial = 1,972 \sqrt{\frac{G}{R}}. \end{cases}$$

Bei gleichen Dimensionen ist demnach die Tragkraft des Kettenringes mit Steg 2,088mal so gross, als die des Kettenringes ohne Steg.

Als Veränderungen der Axen ergeben sich nach 342 und nach der dritten der Gleichungen 338:

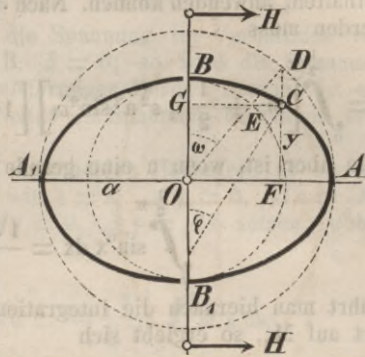
$$345. \quad \begin{cases} \Delta a = -0,1423 \frac{G \partial^3}{E W} = -2,878 \frac{G}{E \partial}, \\ \Delta b = +0,0936 \frac{G \partial^3}{E W} = +1,894 \frac{G}{E \partial}. \end{cases}$$

Auch hier ergibt sich die Bruchbelastung in Wirklichkeit grösser, als nach 344, weil der Ring durch das Strecken sich mehr der Form eines Rhombus nähert, wodurch  $M_0$  vermindert wird und weil auch hier der Vergrößerung der Krümmung in B durch die hindurch gesteckten Ringe und in A durch den Steg eine Grenze gesetzt wird.

### §. 373. Elliptischer Ring mit constanter Normalbelastung.

(Fig. 120.) Auf einen elliptischen Ring wirke normal auf die Axe eine gleichmässig vertheilte Last  $q$  pro Längeneinheit der Axe; also etwa eine elliptische Röhre, auf welche von aussen oder innen Wasser- oder Dampfdruck wirkt. Die grosse (horizontale) Halbachse sei  $= a$ , die kleine Halbachse  $= b$ . Wir schlagen aus dem Mittelpunkte  $O$  mit  $OA = a$  und  $OB = b$  Kreise, ziehen einen Radius, welcher die Kreise in  $D$  und  $E$  schneidet, und ziehen sodann durch  $D$  und  $E$  Parallelen  $DF$  und  $CG$  zu den Axen, welche sich in  $C$  schneiden, so ist bekanntlich  $C$  ein Punkt der Ellipse. Bezeichnen wir den Winkel  $DOB$  mit  $\omega$ , so wird

Fig. 120.



$$\begin{aligned}x &= a \sin \omega, & y &= b \cos \omega, \\dx &= a \cos \omega \, d\omega, & dy &= -b \sin \omega \, d\omega, \\ds &= d\omega \sqrt{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega}.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die numerische Excentricität  $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$  mit  $\varepsilon$ , so wird

$$ds = a \, d\omega \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \omega} = a \, d\omega \left[ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \omega - \frac{1}{8} \varepsilon^4 \sin^4 \omega + \dots \right].$$

Ist wie früher  $\varphi$  der Winkel zwischen der Normalen  $CJ$  und der Axe der  $y$ , so ist  $\tan \varphi = -\frac{dy}{dx}$ , d. i.

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \tan \omega.$$

Wir denken uns nun den Ring wiederum in  $B$  und  $B_1$  durchschnitten und bezeichnen den zwischen beiden Ringtheilen in jedem Querschnitte senkrecht zu demselben wirkenden Druck mit  $H$ , den Abstand desselben von den Axen der Querschnitte mit  $e_0$  und das Moment  $H e_0$  für die Querschnitte  $B, B_1$  mit  $M_0$ . Alsdann kann jeder Ringtheil nur im Gleichgewichte sein, wenn  $2 H$  gleich der Summe aller Horizontalcomponenten der auf den Bogen  $BAB_1$  wirkenden äusseren Drücke, d. i.  $= q \cdot 2 b$  ist, demnach ist

$$346. \quad H = q b.$$

Die Summe der Horizontal- und Verticalcomponenten der zwischen  $A$  und  $C$  wirkenden äusseren Drücke ist  $q \cdot BG = q(b - y)$  und  $q \cdot CG = q x$ . Demnach ist die Axial- und Transversalkraft in  $C$ :  $P = -H \cos \varphi + q(b - y) \cos \varphi - q x \sin \varphi$ ,  $Q = -H \sin \varphi + q(b - y) \sin \varphi + q x \cos \varphi$ , oder, wenn wir  $H = q b$  und für  $x, y$  obige Ausdrücke setzen,

$$347. \quad \begin{cases} P = -q b (1 - \cos \varphi) - q a \sin \varphi \sin \omega - q b \cos \varphi \cos \omega, \\ Q = +q a \cos \varphi \sin \omega - q b \sin \varphi \cos \omega. \end{cases}$$

Als Moment für den Punkt  $C$  ergibt sich  $M = -H(e_0 + b - y) + q(b - y) \cdot \frac{1}{2}(b - y) + q x \cdot \frac{1}{2} x = M_0 - q b(b - y) + \frac{1}{2} q(b - y)^2 + \frac{1}{2} q x^2 = M_0 - \frac{1}{2} q(b^2 - y^2) + \frac{1}{2} q x^2$ , oder

$$348. \quad M = M_0 + \frac{1}{2} q (a^2 - b^2) \sin^2 \omega = M_0 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 q a^2 \sin^2 \omega.$$

Die Dicke des Ringes wollen wir als sehr klein voraussetzen, so dass wir für die Formänderung die Näherungsformeln, welche Glieder mit  $F$  nicht enthalten, anwenden können. Nach 322 wird zunächst, da in  $A, A_1: \Delta \varphi = 0$  werden muss

$$0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[ M_0 + \frac{1}{2} q \varepsilon^2 a^2 \sin^2 \omega \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \omega - \frac{1}{8} \varepsilon^4 \sin^4 \omega + \dots \right] d\omega.$$

Nun aber ist, wenn  $n$  eine gerade Zahl bedeutet,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n}.$$

Führt man hiernach die Integration in der vorigen Formel aus und reducirt auf  $M_0$ , so ergibt sich

$$349. \quad M_0 = -\frac{1}{2} q \varepsilon^2 a^2 \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 - \dots}$$

$$= -\frac{1}{4} q \varepsilon^2 a^2 \left( 1 + \frac{1}{8} \varepsilon^2 - \frac{1}{16} \varepsilon^4 + \frac{37}{1024} \varepsilon^6 - \dots \right).$$

Bei kleiner Excentricität ist demnach nahezu

$$350. \quad \begin{cases} M_0 = -\frac{1}{4} q \varepsilon^2 a^2 = -\frac{1}{4} q (a^2 - b^2), \\ M = -\frac{1}{4} q (a^2 - b^2) (1 - 2 \sin^2 \omega) = -q (a^2 - b^2) \cos 2\omega. \end{cases}$$

Für  $2\omega = 90^\circ$  also  $\omega = 45^\circ$  wird  $M = 0$ . Zum Maximum wird  $M$  für  $\omega = 0$  oder  $\omega = 90^\circ$ . Bezeichnen wir den Werth von  $M$  für  $\omega = 90^\circ$  mit  $M_1$ , so wird

$$-M_0 = M_1 = \frac{1}{4} q \varepsilon^2 a^2 = \frac{1}{4} q (a^2 - b^2),$$

so dass also beide Momente dem absoluten Werthe nach gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt sind. Für  $\varphi = 0$  wird  $P = -q b$ ,  $r = \frac{a^2}{b}$ , für  $\varphi = 90^\circ$  aber  $P = -q a$ ,  $r = \frac{b^2}{a}$ , wobei  $r$  den Krümmungsradius bezeichnet. Die grössten Spannungen in  $B$  und  $A$ , welche wir mit  $N_0, N_1$  bezeichnen, werden daher nach 9 (Seite 271), wenn wir einen rechteckigen Querschnitt von der Breite  $c$  und der Höhe  $\partial$  annehmen, also  $F = c \partial$ ,  $W = \frac{1}{12} c \partial^3$ ,  $v = \pm \frac{1}{2} \partial$  setzen,

$$351. \quad \begin{cases} N_0 = -\frac{q b}{4 c \partial} \left[ \frac{5 a^2 - b^2}{a^2} \mp \frac{6 (a^2 - b^2)}{b \partial} \right], \\ N_1 = -\frac{q a}{4 c \partial} \left[ \frac{5 b^2 - a^2}{b^2} \mp \frac{6 (a^2 - b^2)}{a \partial} \right]. \end{cases}$$

Bei einigermaassen grosser Excentricität und kleiner Dicke ist das erste Glied gegen das zweite klein. Setzen wir für eine sehr kleine Excen-

tricität  $\frac{1}{2}(a+b) = r$ ,  $a = r + \delta$ ,  $b = r - \delta$ , so wird  $a^2 - b^2 = 4r\delta$  und daher sehr nahe

$$352. \quad N_0 = -\frac{qr}{c\partial} \left(1 \pm 6 \frac{\delta}{\partial}\right), \quad N_t = -\frac{qr}{c\partial} \left(1 \mp 6 \frac{\delta}{\partial}\right),$$

so dass also durch die Excentricität die Spannung im Verhältniss von  $\partial : \partial + 6\delta$  vergrössert wird. Ist z. B.  $\delta = \partial$ , so wird die Spannung 7mal so gross, als bei vollständig kreisförmiger Form. Hieraus ist ersichtlich, dass schon eine kleine Excentricität die Spannung bedeutend vermehren kann.

Sind  $\Delta a$ ,  $\Delta b$  die Aenderungen der beiden Halbaxen, so ergibt sich nach 326 (Seite 371)  $\Delta a$ , wenn wir  $s = s_1$ ,  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\Delta x = \Delta a$ , und  $\Delta b$ , wenn wir  $s = s_1$ ,  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta_0 y = \Delta b$  setzen, wobei  $s_1$  den Bogen AB bezeichnet, also

$$\Delta a = -\frac{1}{EW} \int_0^{s_1} M y \, ds, \quad \Delta b = -\frac{1}{EW} \int_0^{s_1} M x \, ds.$$

Wir setzen hierin  $x = a \sin \omega$ ,  $y = b \cos \omega$  und annähernd für eine kleine Excentricität  $M = -\frac{1}{4} q (a^2 - b^2) (1 - 2 \sin^2 \omega)$ ,  $ds = r d\omega$ . Alsdann wird

$$EW \Delta a = \frac{1}{4} q b r (a^2 - b^2) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - 2 \sin^2 \omega) \cos \omega \, d\omega$$

$$EW \Delta b = \frac{1}{4} q a r (a^2 - b^2) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - 2 \sin^2 \omega) \sin \omega \, d\omega$$

d. i.

$$353. \quad \begin{cases} EW \Delta a = +\frac{1}{12} q b r (a^2 - b^2), \\ EW \Delta b = -\frac{1}{12} q a r (a^2 - b^2). \end{cases}$$

Setzen wir auch hier  $\frac{1}{2}(a+b) = r$ ,  $a = r + \delta$ ,  $b = r - \delta$ , so wird sehr nahe

$$354. \quad \Delta a = -\Delta b = \frac{qr^3\delta}{3EW} = \frac{4qr^3\delta}{Ec\partial^3}.$$

## Anhang.

**I. Integralformeln.** Die in der Theorie der gekrümmten Stäbe sehr häufig vorkommenden Integralformeln sind in Folgendem zusammengestellt

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x,$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \cos x, \quad \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x \cos x,$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x,$$

$$\int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \cos x (2 + \sin^2 x), \quad \int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \sin x (2 + \cos^2 x),$$

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x, \quad \int \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x,$$

$$\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x, \quad \int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x,$$

$$\int x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} \sin^2 x - \frac{1}{2} x \sin x \cos x,$$

$$\int x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \sin^2 x + \frac{1}{2} x \sin x \cos x,$$

$$\int x \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{8} (\sin 2x - 2x \cos 2x) = \frac{1}{4} (2x \sin^2 x - x + \sin x \cos x).$$

**II. Reihen.** Die in der Theorie der gekrümmten Stäbe ebenfalls häufig nöthigen Formeln zur Verwandlung goniometrischer Functionen in unendliche Potenzenreihen sind im Folgenden (allerdings ohne Angabe des Bildungsgesetzes der Coefficienten) zusammengestellt.

$$\sin x = x \left( 1 - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{120} x^4 - \frac{1}{5040} x^6 + \frac{1}{362880} x^8 - \frac{1}{39916800} x^{10} + \dots \right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \frac{1}{40320} x^8 - \frac{1}{3628800} x^{10} + \dots$$

$$\sin^2 x = x^2 \left( 1 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{45} x^4 - \frac{1}{315} x^6 + \frac{2}{14175} x^8 - \frac{2}{467775} x^{10} + \dots \right)$$

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{1}{3} x^4 - \frac{2}{45} x^6 + \frac{1}{315} x^8 - \frac{2}{14175} x^{10} + \dots$$

$$\sin x \cos x = x \left( 1 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{2}{15} x^4 - \frac{4}{315} x^6 + \frac{2}{2835} x^8 - \frac{4}{155925} x^{10} + \dots \right)$$

$$\sin^3 x = x^3 \left( 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{13}{120} x^4 - \frac{41}{3024} x^6 + \frac{671}{604800} x^8 - \frac{511}{7983360} x^{10} + \dots \right)$$

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{7}{8} x^4 - \frac{61}{240} x^6 + \frac{547}{13440} x^8 - \frac{703}{172800} x^{10} + \dots$$

$$\tan x = x \left( 1 + \frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{15} x^4 + \frac{17}{315} x^6 + \frac{62}{2835} x^8 + \frac{1382}{155925} x^{10} + \dots \right)$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} \left( 1 + \frac{1}{15} x^2 + \frac{2}{315} x^4 + \frac{1}{1575} x^6 + \frac{2}{31185} x^8 + \dots \right),$$

$$\sin x \sin y = x y \left[ 1 - \frac{1}{6} (x^2 + y^2) + \frac{1}{360} (3 x^4 + 10 x^2 y^2 + 3 y^4) - \frac{1}{5040} (x^6 + 7 x^4 y^2 + 7 x^2 y^4 + y^6) + \frac{1}{1814400} (5 x^8 + 60 x^6 y^2 + 126 x^4 y^4 + 60 x^2 y^6 + 5 y^8) - \dots \right],$$

$$\cos x \cos y = 1 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{24} (x^4 + 6 x^2 y^2 + y^4) - \frac{1}{720} (x^6 + 15 x^4 y^2 + 15 x^2 y^4 + y^6) + \frac{1}{40320} (x^8 + 28 x^6 y^2 + 70 x^4 y^4 + 28 x^2 y^6 + y^8) - \dots,$$

$$\sin x \cos y = x \left[ 1 - \frac{1}{6} (x^2 + 3 y^2) + \frac{1}{120} (x^4 + 10 x^2 y^2 + 5 y^4) - \frac{1}{5040} (x^6 + 21 x^4 y^2 + 35 x^2 y^4 + 7 y^6) + \frac{1}{362880} (x^8 + 36 x^6 y^2 + 126 x^4 y^4 + 84 x^2 y^6 + 9 y^8) - \dots \right].$$

### III. Berechnung bestimmter Integrale. Die Berechnung

des Integrals  $\int_{x_1}^{x_2} y \, dx$  kommt überein mit der Berechnung einer Fläche,

bei welcher der Abscisse  $x$  die Ordinate  $y$  entspricht. In dem Falle, dass sich die Abhängigkeit zwischen  $y$  und  $x$  nicht in ein bestimmtes Gesetz oder nur in ein sehr complicirtes Gesetz bringen lässt, was in der Elasticitätstheorie häufig vorkommt, sind die folgenden Methoden zur Integration anzuwenden. Die Ordinaten in den gleichen Abständen  $e$  mögen  $y_0, y_1, y_2 \dots y_n$ , die zwischen den einzelnen Ordinaten liegenden Flächen  $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$ , und die gesammte Fläche zwischen der ersten und letzten Ordinate  $F$  sein.

1. Nimmt man  $y$  in Beziehung auf  $x$  vom zweiten Grade an, so wird nach der Simpson'schen Regel:

$$f_1 = \frac{e}{12} (5 y_0 + 8 y_1 - y_2),$$

$$f_2 = \frac{e}{12} (5 y_1 + 8 y_2 + y_3) \text{ oder } \frac{e}{12} (5 y_2 + 8 y_1 - y_0) \text{ u. s. w.}$$

$$F = \frac{1}{3} \left[ (y_0 + y_n) + 4 (y_1 + y_3 + \dots) + 2 (y_2 + y_4 + \dots) \right].$$

2. Nimmt man  $y$  in Beziehung auf  $x$  vom dritten Grade an, so wird

$$f_1 = \frac{e}{24} (9 y_0 + 19 y_1 - 5 y_2 + y_3),$$

$$f_2 = \frac{e}{24} (-y_0 + 13 y_1 + 13 y_2 - y_3) \text{ u. s. w.}$$

$$\begin{aligned} \text{Bei 3 Theilen:} & \quad F = \frac{3e}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3), \\ \text{Bei 4 Theilen:} & \quad F = \frac{e}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4), \\ \text{Bei 5 Theilen:} & \quad F = \frac{e}{24} (8y_0 + 31y_1 + 21y_2 + 21y_3 + 31y_4 + 8y_5), \\ \text{Bei 6 Theilen:} & \quad F = \frac{e}{24} (8y_0 + 31y_1 + 20y_2 + 26y_3 + 20y_4 \\ & \quad \quad \quad + 31y_5 + 8y_6), \\ \text{Bei 6 u. mehr Theilen:} & \quad F = \frac{e}{24} \left[ 8(y_0 + y_n) + 31(y_1 - y_{n-1}) \right. \\ & \quad \quad \quad \left. + 20(y_2 + y_{n-2}) + 25(y_3 + y_{n-3}) + 24(y_4 + y_5 + \dots) \right]. \end{aligned}$$

3. Nimmt man  $y$  in Beziehung auf  $x$  vom vierten Grade an, so wird

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{e}{720} (251y_0 + 646y_1 - 264y_2 + 106y_3 - 19y_4), \\ f_2 &= \frac{e}{720} (-19y_0 + 346y_1 + 456y_2 - 74y_3 + 11y_4) \text{ u. s. w.} \\ F &= \frac{2}{45} e (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4). \end{aligned}$$

4. Nimmt man endlich  $y$  in Beziehung auf  $x$  vom fünften Grade an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{e}{1440} (+475y_0 + 1427y_1 - 798y_2 + 482y_3 - 173y_4 + 27y_5) \\ f_2 &= \frac{e}{1440} (-27y_0 + 637y_1 + 1022y_2 - 258y_3 + 77y_4 - 11y_5) \\ f_3 &= \frac{e}{1440} (+11y_0 - 93y_1 + 802y_2 + 802y_3 - 93y_4 + 11y_5) \\ F &= \frac{5}{288} e (19y_0 + 75y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 75y_4 + 19y_5). \end{aligned}$$

Die Formeln für die ganze Fläche unter 2, 3 und 4 wurden zuerst von Schaffer aufgestellt.

**IV. Goniometrische Tabellen.** Die Berechnung der in der Theorie der Bogenträger vorkommenden Ausdrücke wird sehr umständlich, wenn man die vorkommenden goniometrischen Funktionen, wie  $\sin^2\alpha$ ,  $\alpha \cos^2\alpha$  u. s. w. in jedem speciellen Falle besonders berechnen muss. Die folgenden Tabellen werden diese Rechnungen bedeutend erleichtern. Dieselben enthalten allerdings nur die Funktionen für ganze Grade; jedoch wird man bei Bogenträgern immer leicht eine solche Anordnung treffen können, dass man es nur mit ganzen Graden zu thun hat. Bei kleinen Winkeln, in einigen Fällen schon bei  $25^\circ$ , in andern erst bei  $20^\circ$  bis  $10^\circ$  genügen indess die 7stelligen Zahlen der Tabelle nicht mehr. In solchen Fällen wird man den Ausdruck am besten in eine Reihe verwandeln und die numerische Berechnung nach dieser vornehmen.

Es sei bemerkt, dass beim ersten Studium folgende Theile ohne Nachtheil für das Weitere übergangen werden können:

II. Kapitel §. 21 bis 24. — III. Kap. §. 29, 31, 32. — IV. Kap. — V. Kap. §. 55, 56. — X. Kap. §. 87 bis 91. — XI. Kap. §. 108, 109. — XX. Kap. §. 195. — XXVIII. Kap. und XXIX. Kap.

x	arc x	arc x	log arc x	arc x - 1	(arc a) <sup>2</sup>	arc x	z
0	0	1,5707963	-∞	0,1961199	0	2,4674012	90
1	0,0174533	1,5533430	0,2418776-2	0,1912673	0,0003046	2,4128739	89
2	0,0349066	1,5358897	0,5429075-2	0,1863600	0,0012185	2,3589571	88
3	0,0523599	1,5184364	0,7189988-2	0,1813966	0,0027416	2,3056489	87
4	0,0698132	1,5009832	0,8439375-2	0,1763759	0,0048739	2,2529513	86
5	0,0872665	1,4835299	0,9408476-2	0,1712964	0,0076154	2,2008619	85
6	0,1047198	1,4660766	0,0200276-1	0,1661567	0,0109662	2,1493812	84
7	0,1221730	1,4486233	0,0869752-1	0,1609555	0,0149263	2,0985097	83
8	0,1396263	1,4311700	0,1449700-1	0,1556912	0,0194953	2,0482472	82
9	0,1570796	1,4137167	0,1961198-1	0,1503624	0,0246740	1,9985949	81
10	0,1745329	1,3962634	0,2418773-1	0,1449673	0,0304617	1,9495511	80
11	0,1919862	1,3788101	0,2832700-1	0,1395044	0,0368588	1,9011167	79
12	0,2094395	1,3613568	0,3210585-1	0,1339719	0,0438649	1,8532919	78
13	0,2268928	1,3439035	0,3558207-1	0,1283681	0,0514803	1,8060780	77
14	0,2443461	1,3264502	0,3880054-1	0,1226910	0,0597050	1,7594705	76
15	0,2617994	1,3089969	0,4179687-1	0,1169386	0,0685389	1,7134727	75
16	0,2792527	1,2915436	0,4459974-1	0,1111091	0,0779821	1,6680851	74
17	0,2967060	1,2740904	0,4723263-1	0,1052002	0,0880344	1,6233060	73
18	0,3141593	1,2566371	0,4971499-1	0,0992099	0,0986961	1,5791371	72
19	0,3316126	1,2391838	0,5206310-1	0,0931357	0,1099669	1,5355763	71
20	0,3490659	1,2217305	0,5429074-1	0,0869754	0,1218476	1,4925254	70
21	0,3665191	1,2042772	0,5640966-1	0,0807265	0,1343361	1,4502840	69
22	0,3839724	1,1868239	0,5843000-1	0,0743865	0,1474348	1,4085523	68
23	0,4014257	1,1693706	0,6036052-1	0,0679521	0,1611426	1,3674271	67
24	0,4188790	1,1519173	0,6220886-1	0,0614213	0,1754597	1,3269135	66
25	0,4363323	1,1344640	0,6398174-1	0,0547914	0,1903859	1,2870124	65
26	0,4537856	1,1170107	0,6568506-1	0,0480574	0,2059213	1,2477132	64
27	0,4712389	1,0995574	0,6732401-1	0,0411170	0,2220651	1,2084648	63
28	0,4886922	1,0821041	0,6890355-1	0,0342690	0,2388202	1,1709491	62
29	0,5061455	1,0646508	0,7042754-1	0,0272072	0,2561833	1,1334815	61
30	0,5235988	1,0471976	0,7189986-1	0,0200286	0,2741556	1,0966227	60
31	0,5410521	1,0297443	0,7332391-1	0,0127294	0,2927374	1,0603734	59
32	0,5585054	1,0122910	0,7470274-1	0,0053062	0,3119283	1,0247370	58
33	0,5759587	0,9948377	0,7603913-1	0,9977522-1	0,3317284	0,9897018	57
34	0,5934119	0,9773844	0,7733563-1	0,9900654-1	0,3521378	0,9552802	56
35	0,6108652	0,9599311	0,7859454-1	0,9822402-1	0,3731563	0,9214683	55
36	0,6283185	0,9424778	0,7981798-1	0,9742711-1	0,3947841	0,8882643	54
37	0,6457718	0,9250245	0,8100791-1	0,9661532-1	0,4170212	0,8556702	53
38	0,6632251	0,9075712	0,8216610-1	0,9578807-1	0,4398677	0,8236855	52
39	0,6806784	0,8901179	0,8329420-1	0,9494476-1	0,4633232	0,7923102	51
40	0,6981317	0,8726646	0,8439373-1	0,9408474-1	0,4873877	0,7615437	50
41	0,7155850	0,8552113	0,8546613-1	0,9320735-1	0,5120620	0,7313866	49
42	0,7330383	0,8377580	0,8651267-1	0,9231186-1	0,5373452	0,7018386	48
43	0,7504916	0,8203047	0,8753458-1	0,9139752-1	0,5632376	0,6728998	47
44	0,7679449	0,8028515	0,8853300-1	0,9046352-1	0,5897392	0,6445704	46
45	0,7853982	0,7853982	0,8950899-1	0,8950899-1	0,6168503	0,6168503	45
		arc x		log arc x		(arc x) <sup>2</sup>	

x	sin x	cos x	1 - cos x	log(1 - cos x)		
0	0	1	0	0	-∞	0
1	0,0174524	0,9998475	0,0001525	0,9825476	0,1827138-4	0,9923536-1
2	0,0348995	0,9993910	0,0006090	0,9651005	0,7847406-4	0,9845725-1
3	0,0523359	0,9986293	0,0013707	0,9476641	0,1368680-3	0,9766544-1
4	0,0697565	0,9975640	0,0024360	0,9302435	0,3866684-3	0,9685966-1
5	0,0871547	0,9961947	0,0038053	0,9128453	0,5793892-3	0,9603972-1
6	0,1045287	0,9945218	0,0054782	0,8954713	0,7386304-3	0,9520516-1
7	0,1218694	0,9925462	0,0074538	0,8781306	0,8723806-3	0,9435591-1
8	0,1391731	0,9902682	0,0097318	0,8608269	0,9881990-3	0,9349158-1
9	0,1564345	0,9876882	0,0123118	0,8435655	0,0903166-2	0,9261188-1
10	0,1736482	0,9848079	0,0151921	0,8263518	0,1816220-2	0,9171650-1
11	0,1908090	0,9816273	0,0183727	0,8091910	0,2641758-2	0,9080510-1
12	0,2079117	0,9781476	0,0218524	0,7920883	0,3394992-2	0,8987736-1
13	0,2249510	0,9743700	0,0256300	0,7750490	0,4087476-2	0,8893291-1
14	0,2419219	0,9702957	0,0297043	0,7580781	0,4728190-2	0,8797139-1
15	0,2588190	0,9659258	0,0340742	0,7411810	0,5324254-2	0,8699243-1
16	0,2756374	0,9612614	0,0387386	0,7243626	0,5881406-2	0,8599560-1
17	0,2923717	0,9563046	0,0436954	0,7076283	0,6404342-2	0,8498052-1
18	0,3091070	0,9510565	0,0489435	0,6908930	0,6896948-2	0,8394108-1
19	0,3255681	0,9455187	0,0544813	0,6744319	0,7362484-2	0,8289381-1
20	0,3420202	0,9396926	0,0603074	0,6579798	0,7803704-2	0,8182126-1
21	0,3583680	0,9335804	0,0664196	0,6416310	0,8222960-2	0,8072854-1
22	0,3746066	0,9271839	0,0728161	0,6253934	0,8622276-2	0,7961533-1
23	0,3907311	0,9205049	0,0794951	0,6092689	0,9003406-2	0,7848090-1
24	0,4067366	0,9135455	0,0864545	0,5932634	0,9367878-2	0,7732476-1
25	0,4226183	0,9063077	0,0936923	0,5773817	0,9717036-2	0,7614630-1
26	0,4383712	0,8987941	0,1012059	0,5616288	0,0052060-1	0,7494494-1
27	0,4539905	0,8910065	0,1089935	0,5460095	0,0374006-1	0,7372002-1
28	0,4694717	0,8829476	0,1170524	0,5305283	0,0683804-1	0,7247085-1
29	0,4848096	0,8746198	0,1253802	0,5151904	0,0982292-1	0,7119677-1
30	0,5000000	0,8660254	0,1339746	0,5000000	0,1270224-1	0,6989700-1
31	0,5150380	0,8571673	0,1428327	0,4849620	0,1548276-1	0,6857076-1
32	0,5299192	0,8480480	0,1519520	0,4700808	0,1817062-1	0,6721725-1
33	0,5446391	0,8386706	0,1613294	0,4553609	0,2077136-1	0,6583358-1
34	0,5591929	0,8290375	0,1709625	0,4408071	0,2329006-1	0,6442486-1
35	0,5735764	0,8191521	0,1808479	0,4264236	0,2573136-1	0,6298413-1
36	0,5877853	0,8090169	0,1909831	0,4122147	0,2809948-1	0,6151235-1
37	0,6018150	0,7986355	0,2013645	0,3981850	0,3039828-1	0,6000849-1
38	0,6156615	0,7880108	0,2119892	0,3843385	0,3263138-1	0,5847139-1
39	0,6293204	0,7771459	0,2228541	0,3706796	0,3480206-1	0,5689987-1
40	0,6427876	0,7660446	0,2339554	0,3572124	0,3691334-1	0,5529265-1
41	0,6560589	0,7547096	0,2452904	0,3439411	0,3896806-1	0,5364840-1
42	0,6691306	0,7431449	0,2568551	0,3308694	0,4096894-1	0,5196566-1
43	0,6819983	0,7313537	0,2686463	0,3180017	0,4291808-1	0,5024294-1
44	0,6946584	0,7193398	0,2806602	0,3053416	0,4481808-1	0,4847860-1
45	0,7071068	0,7071068	0,2928932	0,2928932	0,4667094-1	0,4667094-1
	cos x	sin x	1 - cos x	log(1 - cos x)		

x	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\sin x \cos x$	$\sin^3 x$	$\cos^3 x$	
0	0	1	0	0	1	90
1	0,0003046	0,9996953	0,0174498	0,0000053	0,9995428	89
2	0,0012180	0,9987822	0,0348782	0,0000425	0,9981739	88
3	0,0027391	0,9972609	0,0522644	0,0001437	0,9958942	87
4	0,0048660	0,9951340	0,0695866	0,0003394	0,9927100	86
5	0,0075961	0,9924037	0,0868241	0,0006620	0,9886273	85
6	0,0109262	0,9890738	0,1039539	0,0011421	0,9836552	84
7	0,0148521	0,9851477	0,1209609	0,0018100	0,9778047	83
8	0,0193692	0,9806310	0,1378187	0,0026957	0,9710876	82
9	0,0244717	0,9755283	0,1545085	0,0038282	0,9635178	81
10	0,0301537	0,9698463	0,1710101	0,0052361	0,9551124	80
11	0,0364080	0,9635920	0,1873033	0,0069470	0,9458883	79
12	0,0432273	0,9567727	0,2033683	0,0089875	0,9358650	78
13	0,0506030	0,9493969	0,2191856	0,0113832	0,9250638	77
14	0,0585262	0,9414737	0,2347358	0,0141588	0,9135079	76
15	0,0669873	0,9330127	0,2500000	0,0173376	0,9012213	75
16	0,0759760	0,9240239	0,2649596	0,0209418	0,8882288	74
17	0,0854812	0,9145187	0,2795964	0,0249923	0,8745788	73
18	0,0954915	0,9045085	0,2938927	0,0295085	0,8602386	72
19	0,1059947	0,8940055	0,3078308	0,0345085	0,8452989	71
20	0,1169778	0,8830222	0,3213938	0,0400088	0,8297694	70
21	0,1284274	0,8715726	0,3345653	0,0465573	0,8136828	69
22	0,1403301	0,8596700	0,3473292	0,0525686	0,7970722	68
23	0,1526708	0,8473292	0,3596699	0,0596532	0,7799707	67
24	0,1654347	0,8345653	0,3715724	0,0672884	0,7624135	66
25	0,1786062	0,8213938	0,3830222	0,0754823	0,7444355	65
26	0,1921693	0,8078308	0,3940055	0,0842415	0,7260735	64
27	0,2061079	0,7938921	0,4045084	0,0935708	0,7073636	63
28	0,2204036	0,7795964	0,4145188	0,1034732	0,6883427	62
29	0,2350403	0,7649599	0,4240241	0,1139498	0,6690480	61
30	0,2500000	0,7500000	0,4330127	0,1250000	0,6495189	60
31	0,2652642	0,7347358	0,4417483	0,1366211	0,6297915	59
32	0,2808144	0,7191857	0,4493971	0,1488090	0,6099040	58
33	0,2966310	0,7033684	0,4567727	0,1615573	0,5898943	57
34	0,3126968	0,6873033	0,463920	0,1748579	0,5698003	56
35	0,3289899	0,6710101	0,4698463	0,1887009	0,5496592	55
36	0,3454915	0,6545085	0,4755282	0,2030748	0,5295083	54
37	0,3621813	0,6378187	0,4806307	0,2179661	0,5093846	53
38	0,3790391	0,6209609	0,4851478	0,2333598	0,4893237	52
39	0,3960442	0,6039558	0,4890738	0,2492387	0,4693619	51
40	0,4131759	0,5868241	0,4924039	0,2655844	0,4495335	50
41	0,4304134	0,5695866	0,4951341	0,2823766	0,4298726	49
42	0,4477358	0,5522642	0,4972610	0,2995937	0,4104124	48
43	0,4651217	0,5348782	0,4987821	0,3172122	0,3911853	47
44	0,4825503	0,5174497	0,4996955	0,3352075	0,3722223	46
45	0,5000000	0,5000000	0,5000000	0,3535534	0,3535534	45
	$\cos^2 x$	$\sin^2 x$	$\sin x \cos x$	$\cos^3 x$	$\sin^3 x$	x

x	x sin x		x cos x		$\frac{\sin x}{x}$		
0	0	1,5707963	0	0	1	0,6366197	90
1	0,0003046	1,5531061	0,0174506	0,0271096	0,9999486	0,6436748	89
2	0,0012182	1,5349541	0,0348853	0,0536018	0,9997967	0,6506919	88
3	0,0027404	1,5163554	0,0522881	0,0794688	0,9995428	0,6576697	87
4	0,0048699	1,4973273	0,0696431	0,1047033	0,9991875	0,6646070	86
5	0,0076058	1,4778850	0,0869344	0,1292982	0,9987307	0,6715028	85
6	0,0109462	1,4580453	0,1041458	0,1532468	0,9981757	0,6783559	84
7	0,0148892	1,4378255	0,1212623	0,1765428	0,9975147	0,6851651	83
8	0,0194324	1,4172388	0,1382684	0,1991804	0,9967479	0,6919290	82
9	0,0245727	1,3963116	0,1551457	0,2211540	0,9958928	0,6986465	81
10	0,0303073	1,3750509	0,1718814	0,2424585	0,9949309	0,7053168	80
11	0,0366327	1,3534774	0,1884589	0,2630893	0,9938682	0,7119380	79
12	0,0435449	1,3316077	0,2048627	0,2830419	0,9927055	0,7185100	78
13	0,0510398	1,3094594	0,2210775	0,3023125	0,9914420	0,7250297	77
14	0,0591126	1,2870480	0,2370880	0,3208974	0,9900789	0,7314980	76
15	0,0677587	1,2643939	0,2528788	0,3387933	0,9886157	0,7379131	75
16	0,0769725	1,2415131	0,2684355	0,3559977	0,9870534	0,7442735	74
17	0,0867484	1,2184185	0,2837413	0,3725079	0,9853918	0,7505785	73
18	0,0970806	1,1951320	0,2987832	0,3883223	0,9833316	0,7568267	72
19	0,1079625	1,1716702	0,3135459	0,4034387	0,9817725	0,7630174	71
20	0,1193876	1,1480497	0,3280146	0,4178564	0,9798155	0,7691489	70
21	0,1313487	1,1242896	0,3421750	0,4315745	0,9777607	0,7752204	69
22	0,1438386	1,1004046	0,3560130	0,4445923	0,9756082	0,7812309	68
23	0,1568495	1,0764112	0,3695144	0,4569094	0,9733584	0,7871798	67
24	0,1703731	1,0523289	0,3826650	0,4685270	0,9710122	0,7930653	66
25	0,1844020	1,0281752	0,3954514	0,4794460	0,9685698	0,7989851	65
26	0,1989265	1,0039628	0,4078597	0,4896654	0,9660318	0,8046422	64
27	0,2139380	0,9797109	0,4198760	0,4990726	0,9634002	0,8105204	63
28	0,2294272	0,9554411	0,4314897	0,5080171	0,9606691	0,8159544	62
29	0,2453842	0,9311647	0,4426849	0,5161530	0,9578462	0,8215086	61
30	0,2617994	0,9068996	0,4534498	0,5235988	0,9549298	0,8269933	60
31	0,2786605	0,8826632	0,4637722	0,5303574	0,9519194	0,8324079	59
32	0,2959628	0,8584731	0,4736395	0,5364335	0,9488167	0,8377498	58
33	0,3136896	0,8343410	0,4830396	0,5418275	0,9456220	0,8432167	57
34	0,3318318	0,8102883	0,4919608	0,5465465	0,9424352	0,8482206	56
35	0,3503779	0,7863297	0,5003915	0,5505941	0,9389574	0,8533443	55
36	0,3693163	0,7624804	0,5083202	0,5539746	0,9354896	0,8583937	54
37	0,3886352	0,7387573	0,5157363	0,5566936	0,9319313	0,8633671	53
38	0,4083222	0,7151757	0,5226286	0,5587567	0,9282843	0,8682632	52
39	0,4283649	0,6917516	0,5289864	0,5601695	0,9245487	0,8730820	51
40	0,4487501	0,6685000	0,5347999	0,5609380	0,9207255	0,8778223	50
41	0,4694661	0,6454363	0,5400590	0,5610692	0,9168148	0,8824831	49
42	0,4904986	0,6225756	0,5447538	0,5605695	0,9128181	0,8870639	48
43	0,5118340	0,5999330	0,5488748	0,5594464	0,9087354	0,8915636	47
44	0,5334592	0,5775230	0,5524133	0,5577075	0,9045682	0,8959812	46
45	0,5553604	0,5553604	0,5553604	0,5553604	0,9003163	0,9003163	45
		$x \sin x$		$x \cos x$		$\frac{\sin x}{x}$	$x$

x	$x \sin^2 x$		$x \cos^2 x$		$x \sin x \cos x$		
0	0	1,5707963	0	0	0	0	90
1	0,0000053	1,5528336	0,0174480	0,0004731	0,0003046	0,0271055	89
2	0,0000425	1,5340191	0,0348641	0,0018707	0,0012175	0,0535691	88
3	0,0001434	1,5142774	0,0522165	0,0041591	0,0027366	0,0793599	87
4	0,0003397	1,4936797	0,0694735	0,0073037	0,0048580	0,1044483	86
5	0,0006629	1,4722610	0,0866036	0,0112691	0,0075768	0,1288061	85
6	0,0011445	1,4500577	0,1035753	0,0160187	0,0108862	0,1524072	84
7	0,0018145	1,4271082	0,1203585	0,0215152	0,0147782	0,1752269	83
8	0,0027036	1,4034495	0,1369227	0,0277206	0,0192432	0,1967883	82
9	0,0038440	1,3759486	0,1532356	0,0345961	0,0242696	0,2184312	81
10	0,0052628	1,3541611	0,1692701	0,0421025	0,0298469	0,2387751	80
11	0,0069898	1,3286104	0,1849964	0,0501998	0,0359597	0,2582557	79
12	0,0090536	1,3025090	0,2003859	0,0588477	0,0426032	0,2768568	78
13	0,0114814	1,2758979	0,2154113	0,0669182	0,0497316	0,2898545	77
14	0,0143007	1,2545824	0,2300454	0,0776321	0,0573578	0,3113654	76
15	0,0175372	1,2213107	0,2442622	0,0876861	0,0654498	0,3272492	75
16	0,0212165	1,1934174	0,2580362	0,0981263	0,0739907	0,3422069	74
17	0,0253628	1,1651794	0,2713432	0,1089108	0,0829579	0,3562311	73
18	0,0299996	1,1366392	0,2841597	0,1199979	0,0923291	0,3684670	72
19	0,0351491	1,1078370	0,2964635	0,1313468	0,1020806	0,3814589	71
20	0,0408330	1,0788151	0,3082329	0,1429154	0,1121876	0,3926566	70
21	0,0470712	1,0496147	0,3194479	0,1546625	0,1225963	0,4029094	69
22	0,0538829	1,0202775	0,3300896	0,1665472	0,1333648	0,4122188	68
23	0,0612860	0,9908418	0,3401397	0,1785287	0,1443808	0,4205874	67
24	0,0692976	0,9613504	0,3495819	0,1905671	0,1556439	0,4280207	66
25	0,0779317	0,9318432	0,3584015	0,2026227	0,1671250	0,4345256	65
26	0,0872036	0,9023558	0,3665819	0,2146552	0,1787939	0,4401084	64
27	0,0971256	0,8727278	0,3741122	0,2265743	0,1906197	0,4446770	63
28	0,1077095	0,8436043	0,3809827	0,2384996	0,2025721	0,4485524	62
29	0,1189646	0,8144150	0,3871810	0,2502359	0,2146179	0,4514376	61
30	0,1308998	0,7853982	0,3926990	0,2617994	0,2267254	0,4534498	60
31	0,1435218	0,7565900	0,3975304	0,2731543	0,2388603	0,4546051	59
32	0,1568363	0,7280265	0,4016691	0,2842664	0,2509907	0,4549215	58
33	0,1708476	0,6997373	0,4051110	0,2951004	0,2630822	0,4544147	57
34	0,1855580	0,6717595	0,4078540	0,3056249	0,2751010	0,4531075	56
35	0,2009685	0,6441236	0,4098967	0,3165358	0,2870128	0,4510202	55
36	0,2170789	0,6168597	0,4112396	0,3256181	0,2987832	0,4481748	54
37	0,2338865	0,5899977	0,4118853	0,3350265	0,3103779	0,4445962	53
38	0,2513883	0,5635661	0,4118369	0,3440050	0,3217622	0,4403062	52
39	0,2695787	0,5375920	0,4110997	0,3525260	0,3329020	0,4353334	51
40	0,2884511	0,5121006	0,4096806	0,3605640	0,3437628	0,4297035	50
41	0,3079975	0,4871170	0,4075877	0,3680945	0,3543106	0,4234443	49
42	0,3282075	0,4626638	0,4048309	0,3750942	0,3645114	0,4165892	48
43	0,3490699	0,4387632	0,4014216	0,3815415	0,3747317	0,4091532	47
44	0,3705725	0,4154354	0,3973728	0,3874163	0,3837385	0,4011812	46
45	0,3926991	0,3926991	0,3926991	0,3926991	0,3926991	0,3926991	45
	$x \sin^2 x$		$x \cos^2 x$		$x \sin x \cos x$		x

## Berichtigungen.

- Seite 5, Fig. 2:  $P_1, P_2$  statt  $P, P_z$ .
- " 6, Zeile 11 v. unten:  $N_1, T_3, T_2$  statt  $N_1, T_3, N_2$  und  $f$  statt  $f_1$ .
- " 9, Formel 16:  $T_2$  statt  $T_4$ ; Zeile 20 v. oben: Nach 4 (§. 10) statt Nach 4 (§. 5); Zeile 1 v. unten ist noch  $+ 2 T_1 T_2 T_3$  hinzuzufügen.
- " 12, Zeile 1 v. oben:  $\sin 2\beta$  statt  $\sin 2\alpha$ ; Zeile 16 u. 21 v. oben: 28 statt 26. Zeile 19 v. unten:  $-N_1 T_1^2 - N_2 T_2$  statt  $-N_1 T^2 - N_2 T^2$ .
- " 17, Zeile 9 v. oben: 43 statt 44.
- " 19, Zeile 6 v. oben: sehniger statt sehmiger.
- " 20, Formel 52:  $mE$  statt  $E$ .
- " 24, 32, 35, 51 und 61: Faser statt Fasser.
- " 31, Zeile 15 v. unten:  $\frac{K}{E}$  statt  $\frac{E}{K}$ .
- " 32, Zeile 4 v. oben ist hinzuzufügen: Formel 49 (§. 27); Zeile 12 v. oben  $\max(\tau)$  statt  $\max g$ .
- " 36, Zeile 2 v. oben: Gleitungsfestigkeit statt Schubfestigkeit.
- " 42, Formel 27 unter der Wurzel  $\frac{A^2}{K^2}$  statt  $\frac{A^2}{K}$ .
- " 43, Zeile 21 v. unten und Seite 54, Zeile 3 v. oben:  $\nu$  und  $\omega$  statt  $u$  und  $v$ .
- " 49, Zeile 4 v. unten:  $d\nu d\omega$  statt  $du dv$ .
- " 51, Zeile 2 v. oben:  $N$  statt  $M$  und Gleich. 9:  $\int' df$  statt  $\int f df$ .
- " 55, Zeile 1 v. unten:  $\frac{y dy}{n^2}$  statt  $\frac{y dx}{m^2}$ .
- " 56, Zeile 2 v. oben: zweimal  $\tan \alpha$  statt  $\tan \phi$ .
- " 65. Zu den Gleichungen Zeile 12 v. unten kommt nach 58 (Seite 22), da  $T_1 = 0$  ist, noch hinzu:  $\frac{\partial \nu}{\partial w} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0$  Nach Einsetzung des Ausdruckes für  $N$  giebt die Integration statt der Gleichungen 52:
- $$52. \nu = -\frac{M(v^2 - w^2)}{2mEW}, \quad \omega = -\frac{Mvw}{mEW}.$$
- " 66, Formel 53:  $\frac{v^2 - w^2}{2m}$  statt  $\frac{v^2}{m}$ ; Formel 54: 12 statt 6; Zeile 15 von unten  $\delta$  statt  $b$ .
- " 67, Fig. 23. Statt des rechten  $Q$  soll  $Q'$  stehen.
- " 77, Zeile 10 v. unten: 12650 statt 16500.
- " 99, Zeile 14 v. unten: Taf. VI. statt Taf. V.
- " 106, Zeile 7 v. oben:  $1(\tau_1 + 2\tau_2)$  statt  $1(\tau_1 + 2\tau_a)$ ; Zeile 7 von unten:  $M_1 = -\frac{2EW}{l^2} \left[ 1(\dots) \text{ statt } M_1 = -\frac{2EW}{l^2} \left[ 1(\dots \right.$
- " 119, Formel 141:  $M_m - 1 l_m + 2 M_m (l_m + \dots$  statt  $M_m l_m + 2 M_m (l_m + \dots$
- " 142, Zeile 5 v. unten: 0,2047 statt 0,2697.
- " 183, Fig. 56:  $G$  statt  $C$ .
- " 191, Zeile 4 und 5 v. unten:  $\nu^2$  statt  $2\nu^2$ ; Zeile 2 v. unten: 3,6 statt 3,2.
- " 192, Zeile 2 v. oben:  $\frac{21}{16}$  statt  $\frac{11}{8}$ ; Zeile 5 v. oben:  $\frac{21}{32}$  statt  $\frac{11}{16}$ .
- " 205, Zeile 2 v. unten: 6 statt  $b$ .
- " 206, Formel 102:  $13a(x_1 - x_2) + 6$  etc. statt  $19a(x_1 - x_2) - 6$  etc.
- " 271, Formel 10. Rechts fehlt der Factor  $r$ .
- " 274. Zu Formel 25 ist zu bemerken, dass der zweite Ausdruck für  $\Delta\phi$  nur bei constantem  $r$  gilt.
- " 284, Zeile 1 v. oben:  $R$  statt  $\mathfrak{R}$ .
- " 317, Formel 160:  $H$  statt  $H_0$ ; Zeile 14 v. oben:  $\frac{15}{2\alpha^4}$  statt  $\frac{15}{2\alpha^2}$ .
- " 318, Zeile 10 v. oben:  $\alpha^4$  statt  $\alpha^2$ .
- " 319, Zeile 14 v. oben:  $\frac{25}{64}$  statt  $\frac{175}{448}$ .
- " 320, Zeile 8 v. unten: Rechts fehlt der Factor  $g r^2$ .
- " 322, Formel 184:  $\Delta y = -\int x \mathfrak{M} ds + \dots$  statt  $\Delta y = -\int y \mathfrak{M} ds + \dots$
- " 325, Zeile 8 v. unten: eben statt oben.
- " 332, Zeile 5 u. 7 v. oben fehlt rechts:  $= 0$ .

Spannungen im Allgemeinen.

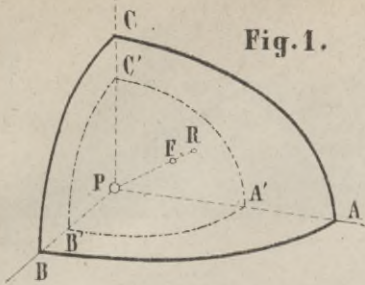


Fig. 1.

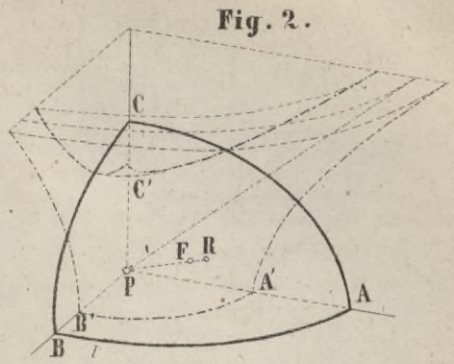


Fig. 2.

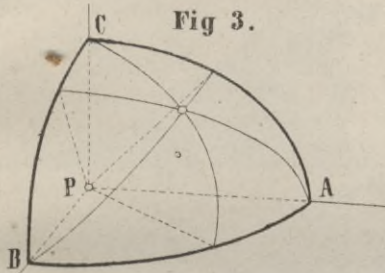


Fig. 3.

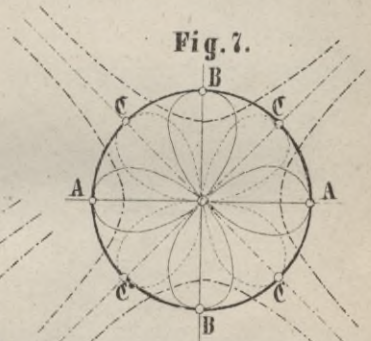


Fig. 7.

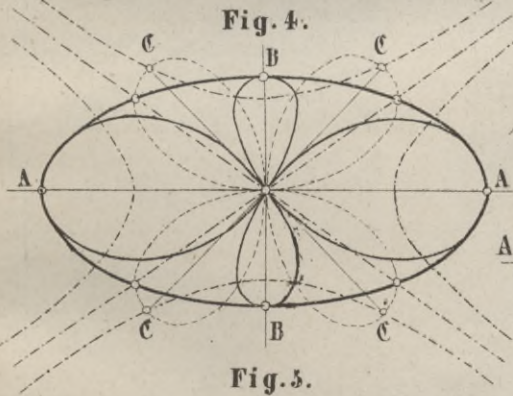


Fig. 4.

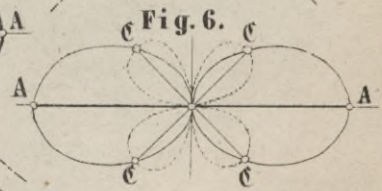


Fig. 6.

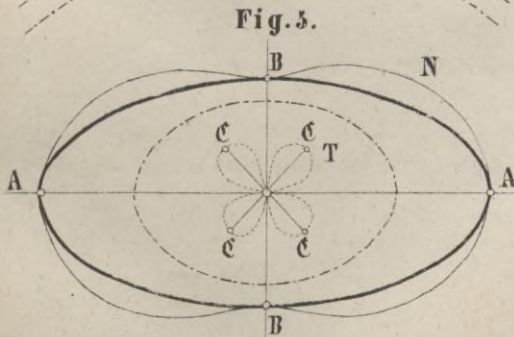


Fig. 5.

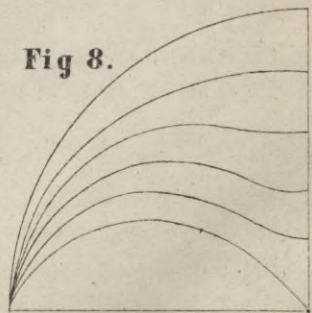
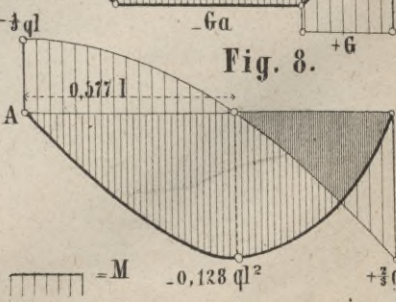
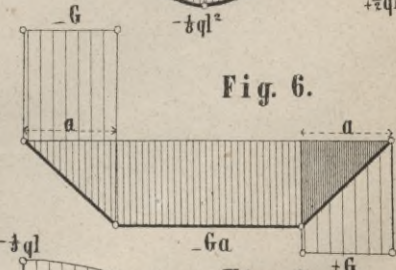
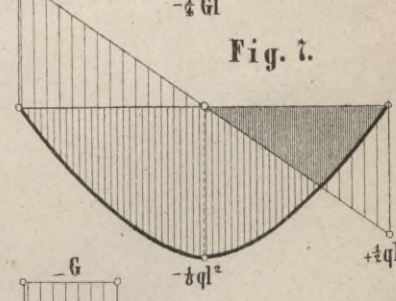
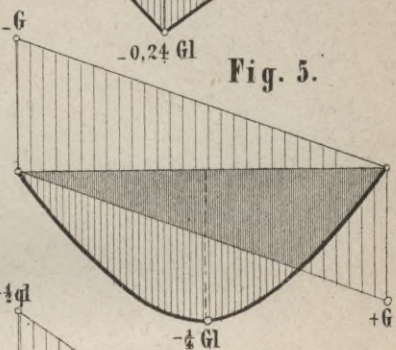
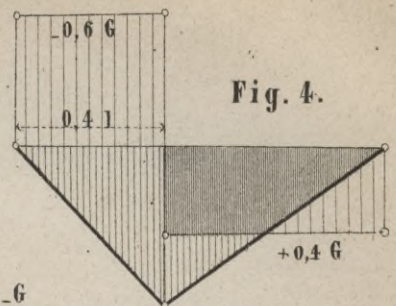
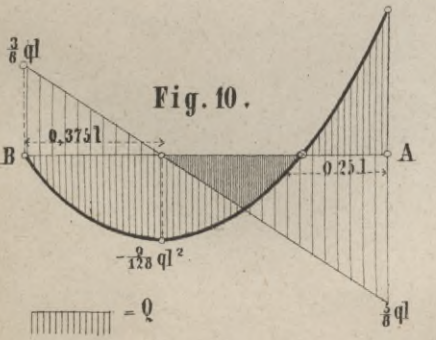
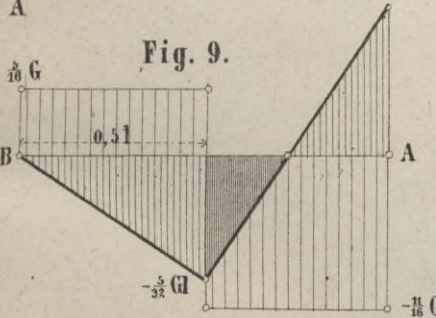
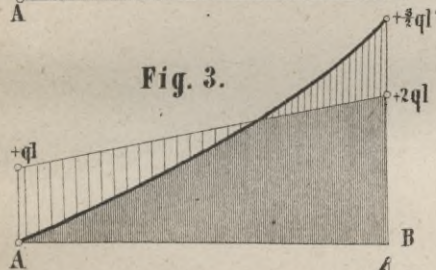
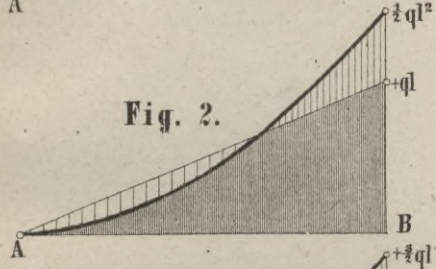
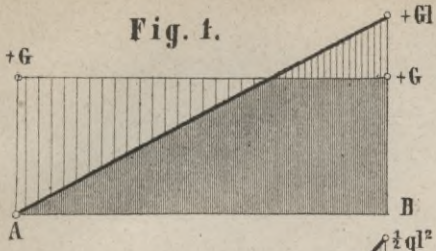


Fig. 8.

Spannungsellipsoid, 
  Normalspannung N, 
  Schubspannung T, 
  Stellungsfläche.



Transversalkräfte und Momente gerader Stäbe.





Körper von constanter Festigkeit.

Fig. 1.

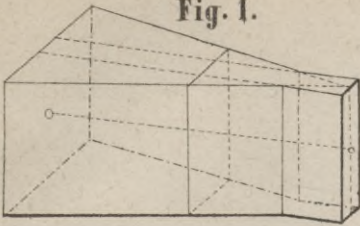


Fig. 4.

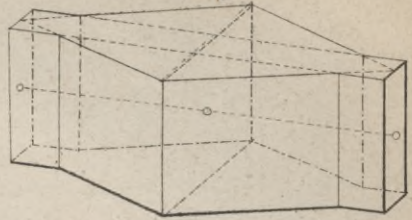


Fig. 2.

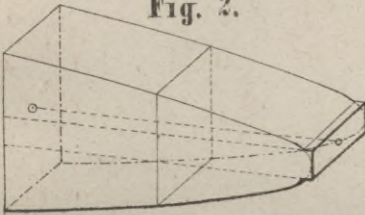


Fig. 5.

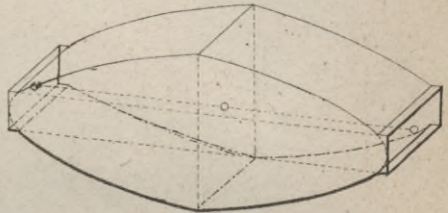


Fig. 3.

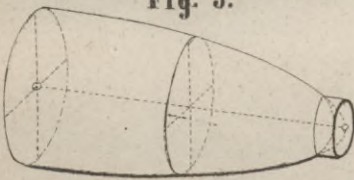


Fig. 6.

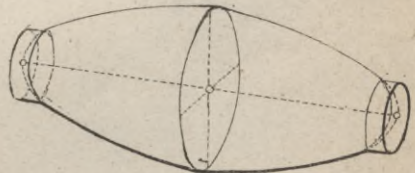


Fig. 7.

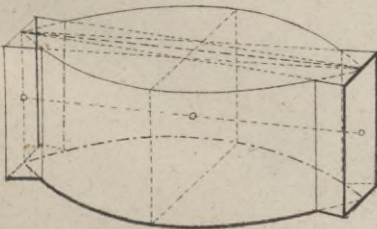


Fig. 9.

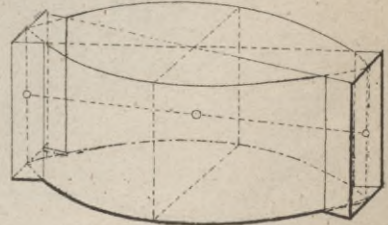


Fig. 8.

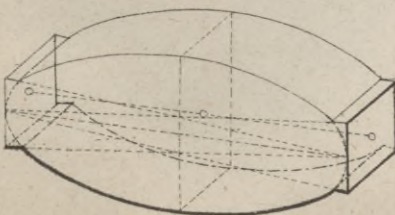


Fig. 10.





Körpervon constanter Festigkeit.

Fig. 1.

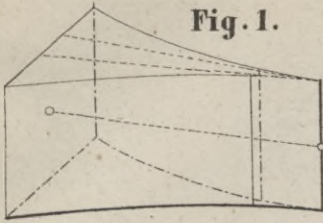


Fig. 6.

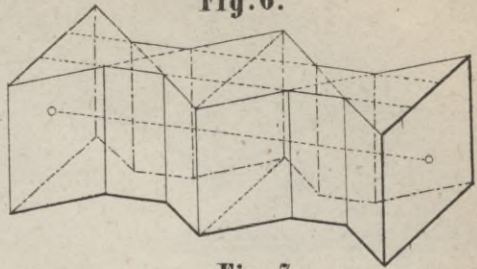


Fig. 2.

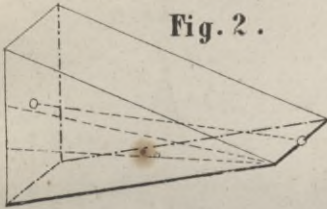


Fig. 7.

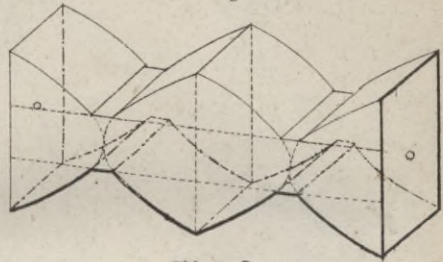


Fig. 3.

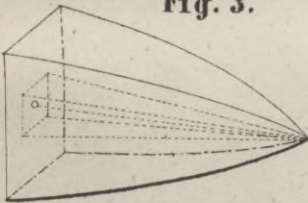


Fig. 8.

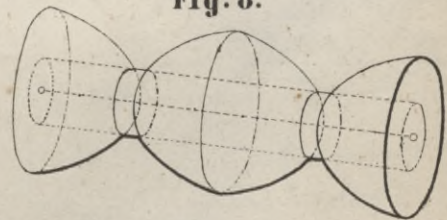


Fig. 4.

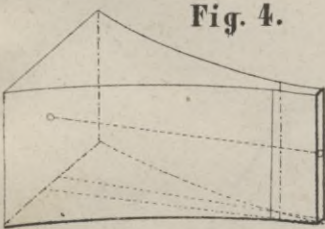


Fig. 9.

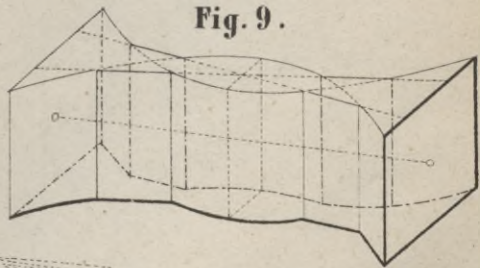


Fig. 5.

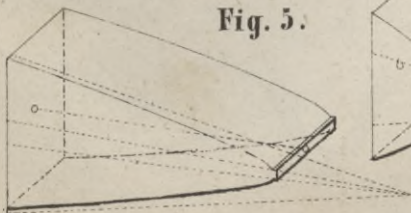
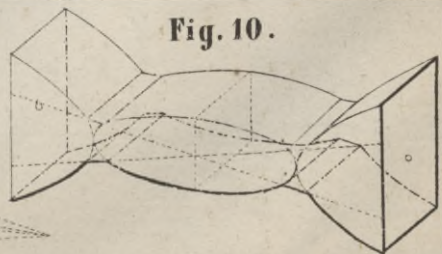
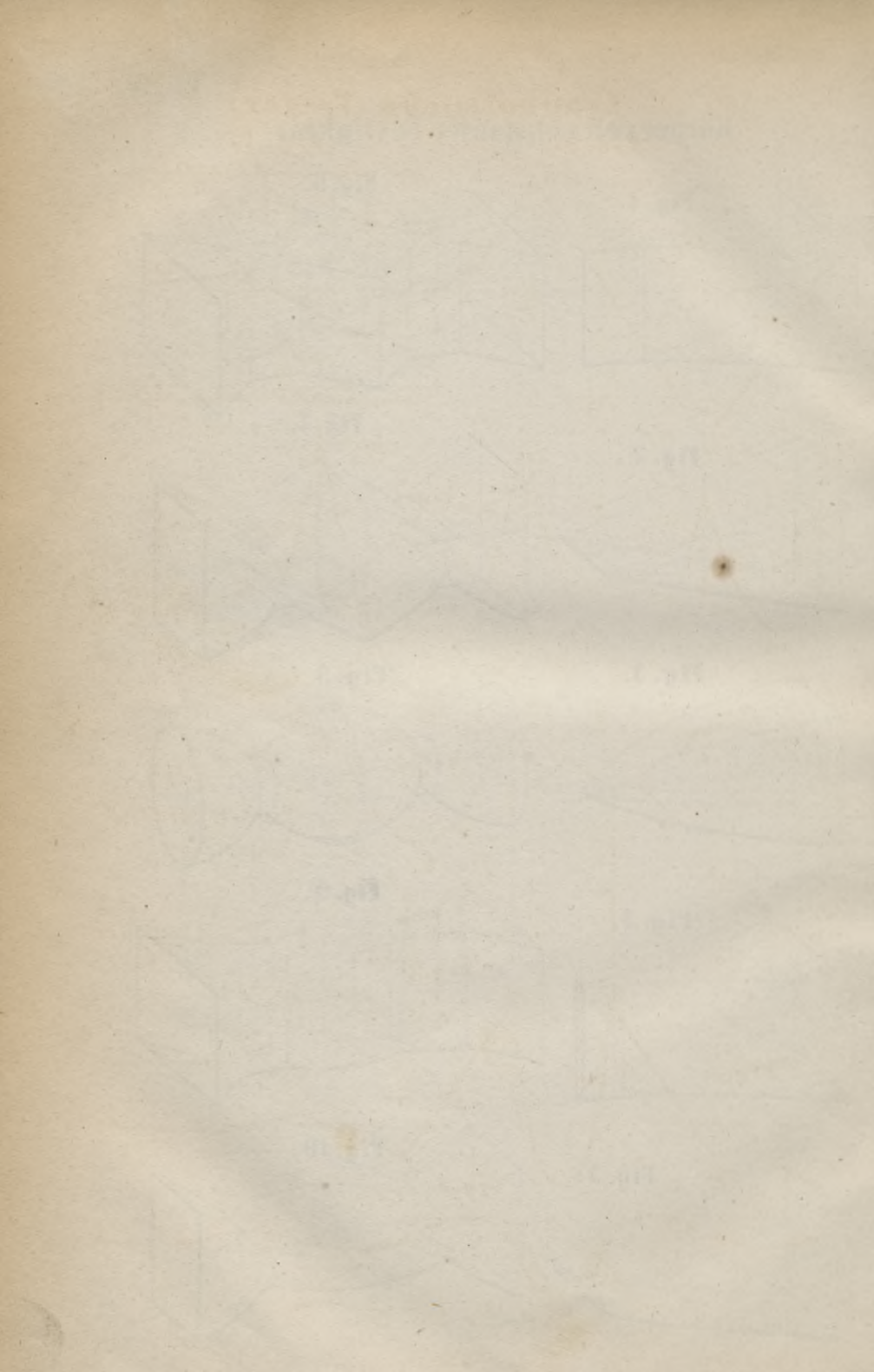


Fig. 10.





Continuirliche Träger.

Fig. 2.

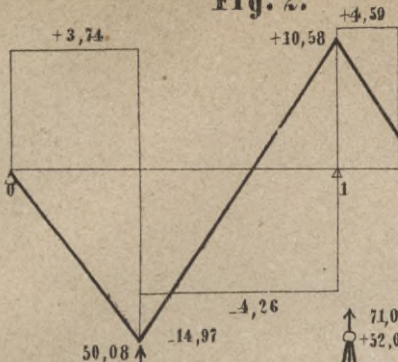


Fig. 1.

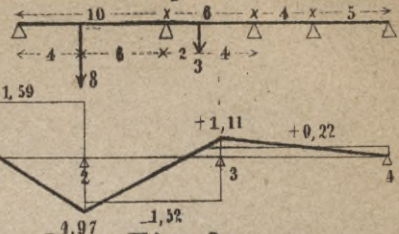


Fig. 3.

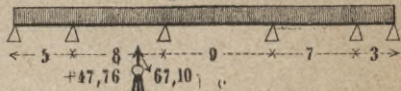


Fig. 4.

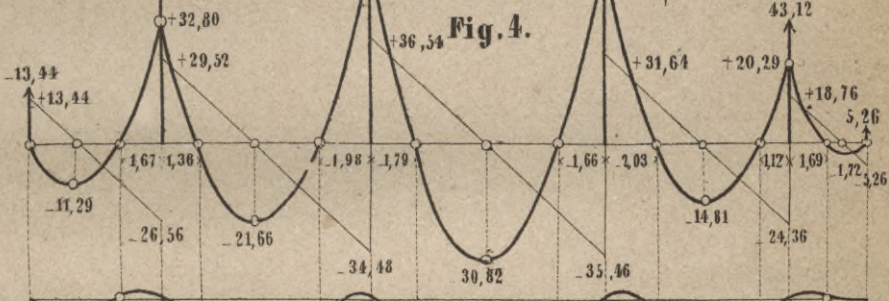


Fig. 5.

— Transversalkräfte  $Q$   
 — Momente  $M$

Fig. 6.

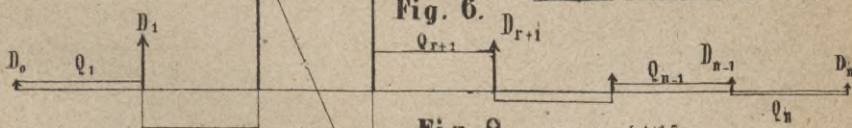


Fig. 9.

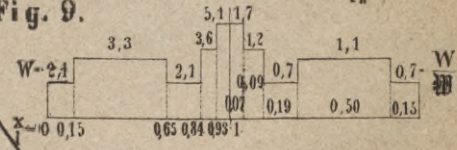


Fig. 7.

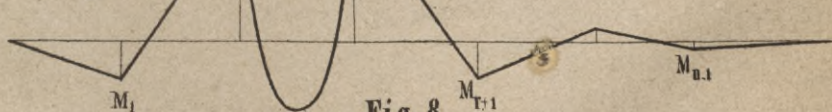
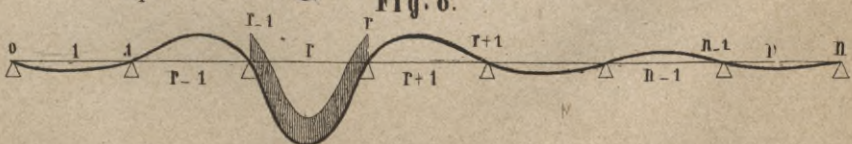


Fig. 8.









Formänderung gerader Stäbe.

Fig. 7.



Fig. 8.

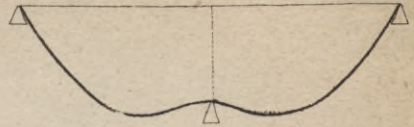


Fig. 1.



Fig. 9.



Fig. 2.

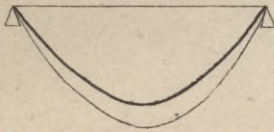


Fig. 10.

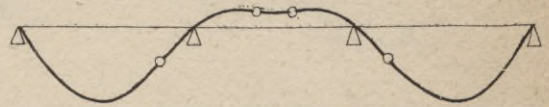


Fig. 5.

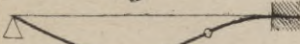


Fig. 12.

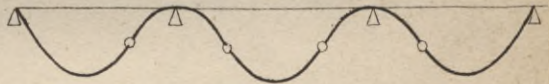


Fig. 6.

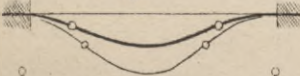


Fig. 11.



Fig. 4.

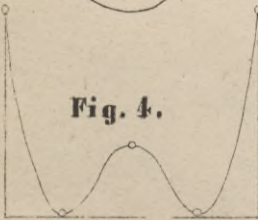


Fig. 13.

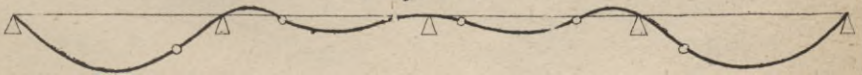


Fig. 14.

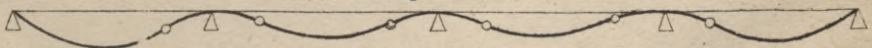
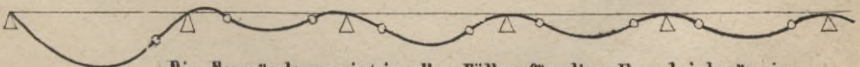


Fig. 15.



Die Formänderung ist in allen Fällen für dieselbe gleichmässige Belastung bei gleicher Querschnittshöhe, bei gleicher Festigkeit und bei gleicher mittlerer Spannweite dargestellt.



Knickfestigkeit.

Fig. 1.

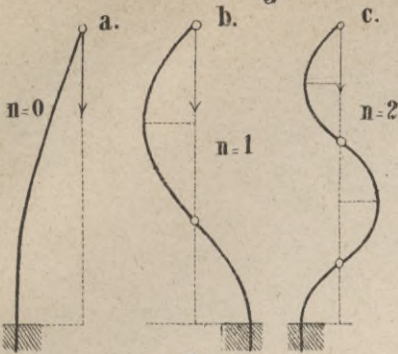


Fig. 3.

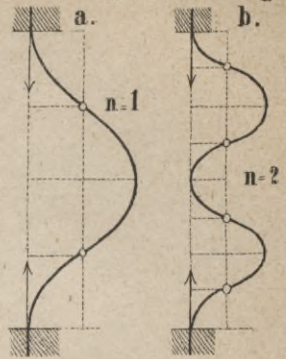


Fig. 2.

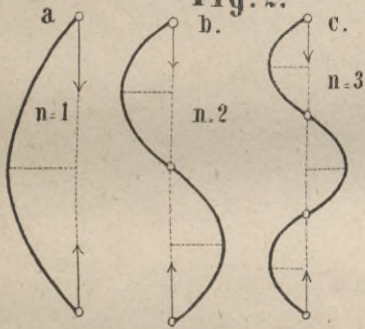


Fig. 8.

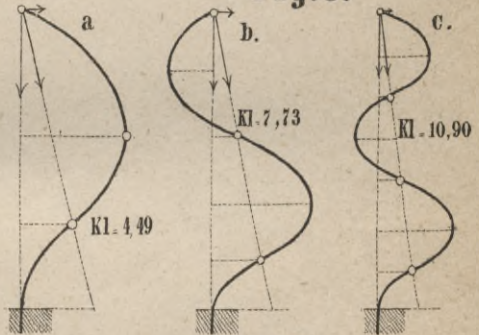


Fig. 9.

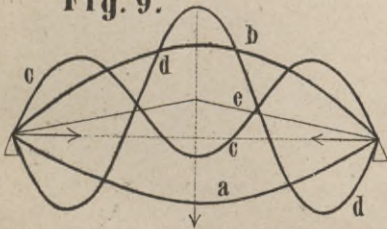


Fig. 10.

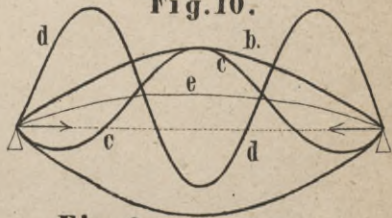


Fig. 4.

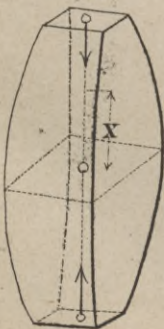


Fig. 5.

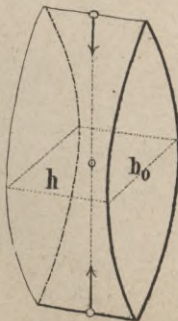


Fig. 6.

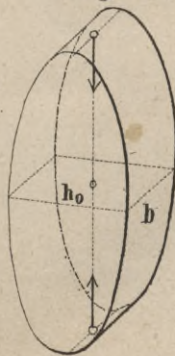
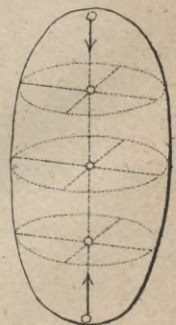


Fig. 7.





# Spannungen für verschiedene Querschnittsformen.

Fig.1 u.2.

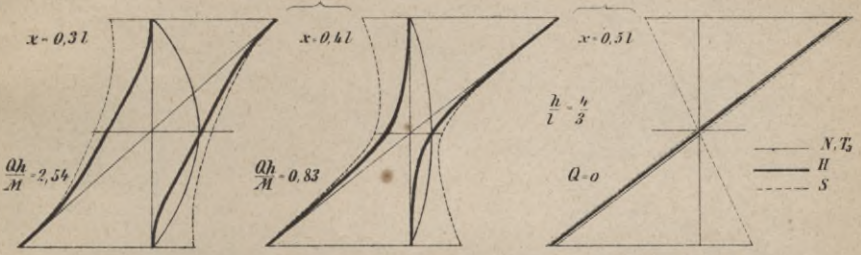
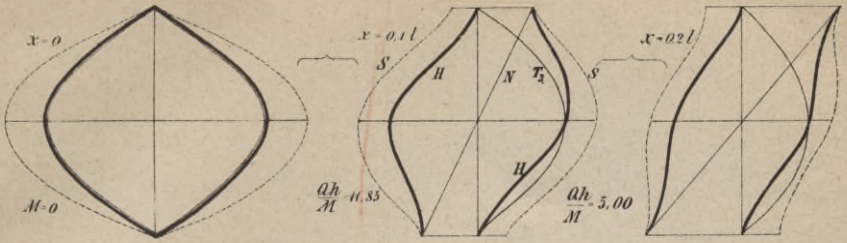


Fig. 3.

Fig. 5.

Fig. 9.

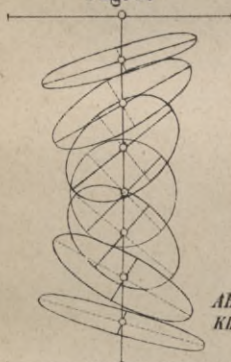


Fig. 6.

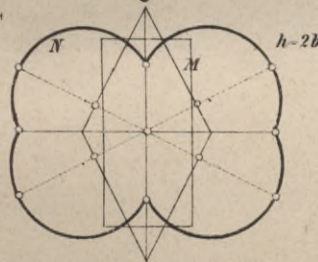


Fig. 4.

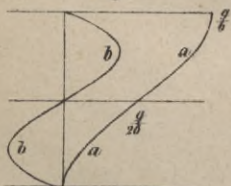
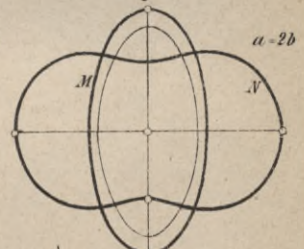


Fig. 7.

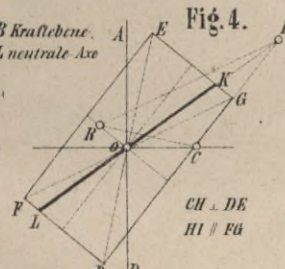


Fig. 8.



Fig. 11.

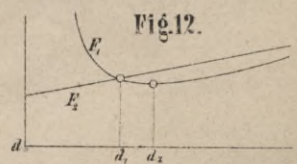


Fig. 12.

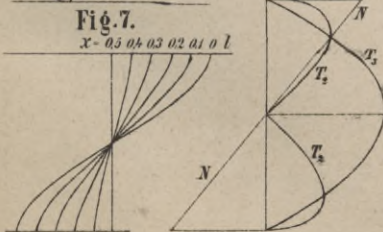


Fig. 10.

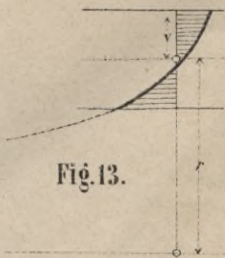


Fig. 13.



Fig. 2.

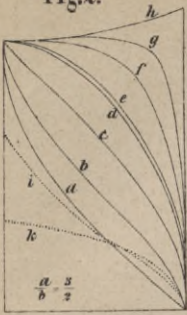


Fig. 1.

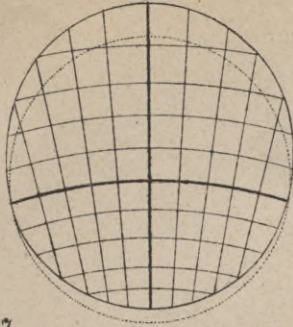


Fig. 3.

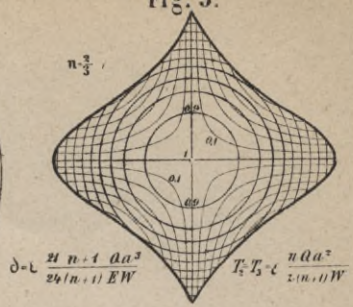


Fig. 7.

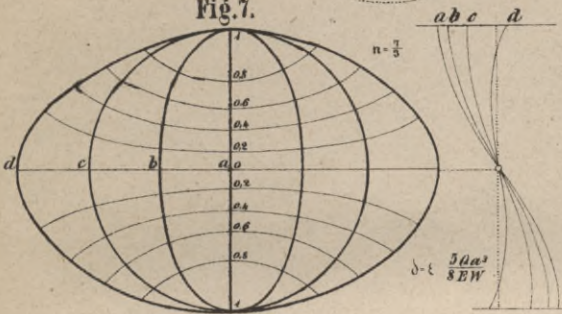


Fig. 4.

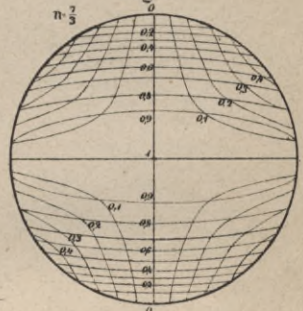


Fig. 8.

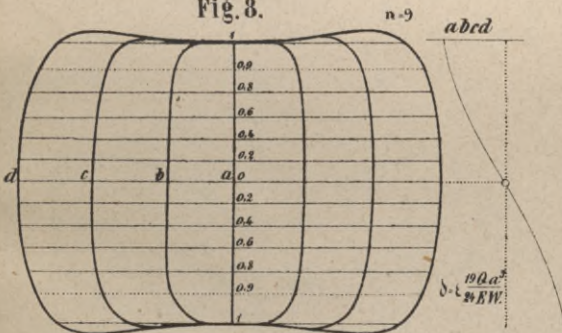


Fig. 5.

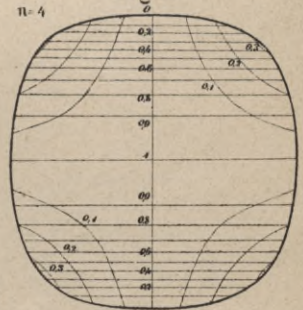


Fig. 9.

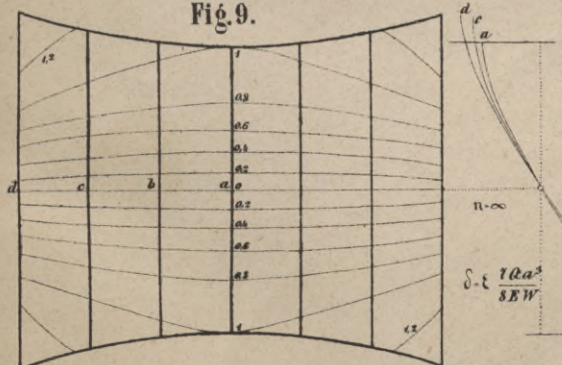
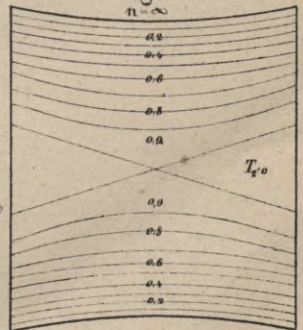


Fig. 6.



Zu Fig. 2: a)  $n = \frac{1}{3}$ , b)  $n = \frac{1}{2}$ , c)  $n = 1$ , d)  $n = 2$ , e)  $n = 3$ , f)  $n = 4$ , g)  $n = 10$ , h)  $n = \infty$ , i)  $n = \frac{1}{3}$ , k)  $n = \frac{1}{2}$ .  
 $\epsilon$  bedeutet die an den Curven stehende Zahl.



# Bogenträger

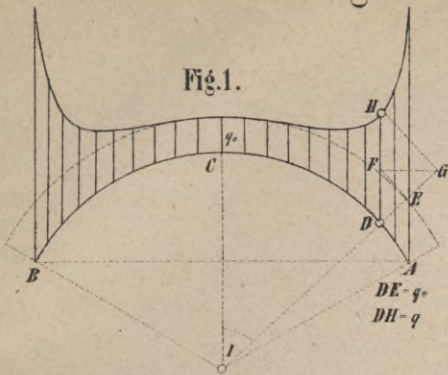


Fig. 1.

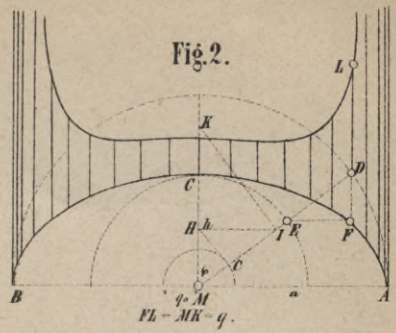


Fig. 2.

— Axialkraft  $P$ ,  
 - - - - - Transversalkraft  $Q$ ,  
 ———— Moment  $M$ .

Fig. 3.

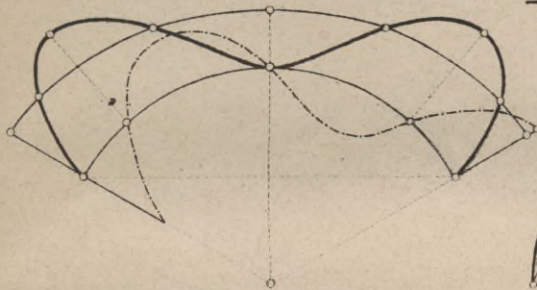


Fig. 5.

Fig. 4.



Fig. 6.

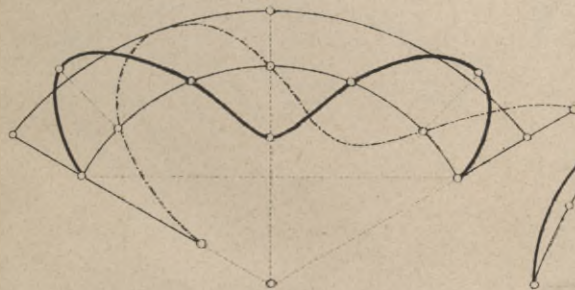


Fig. 7.

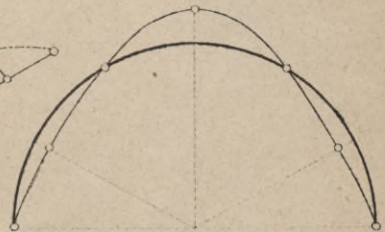
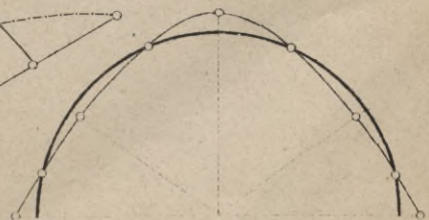
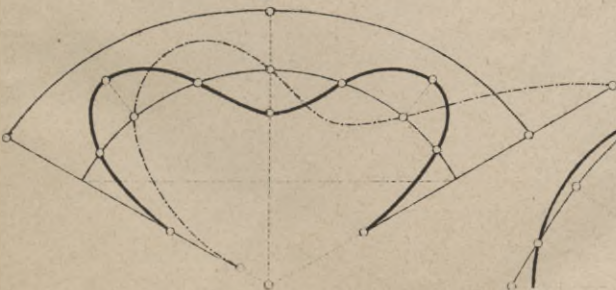


Fig. 8.





# Boğenträger.

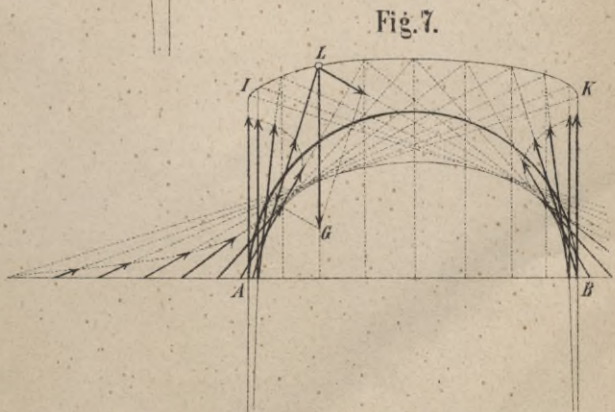
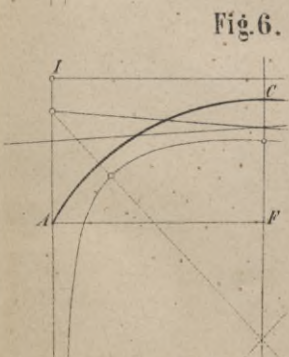
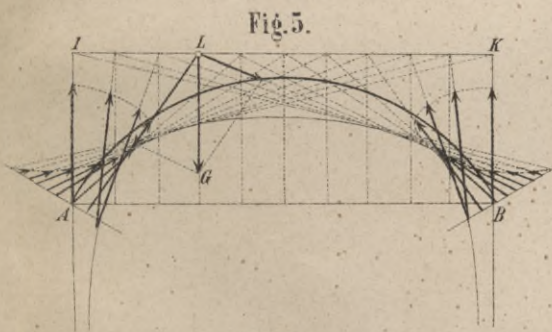
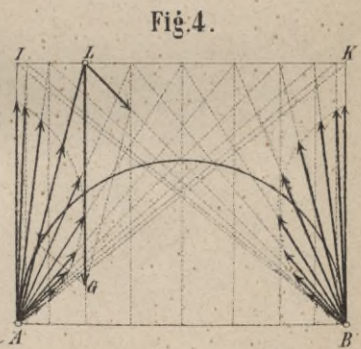
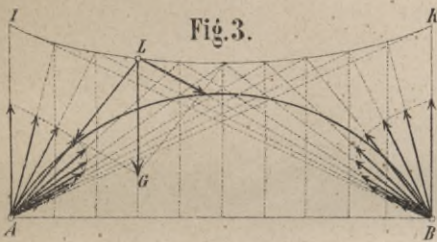
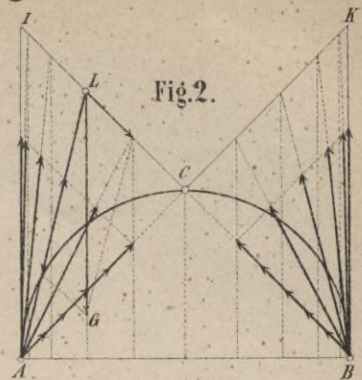
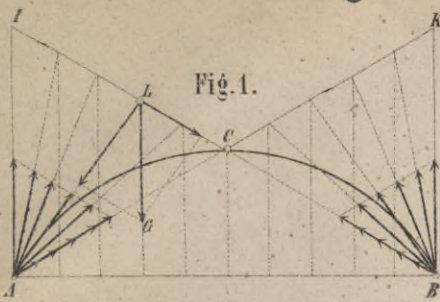


Fig. 1 u. 2. 3 Gelenke, Fig. 3 u. 4. 2 Gelenke, Fig. 5-7 kein Gelenk.





S. 61



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

7868

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299593