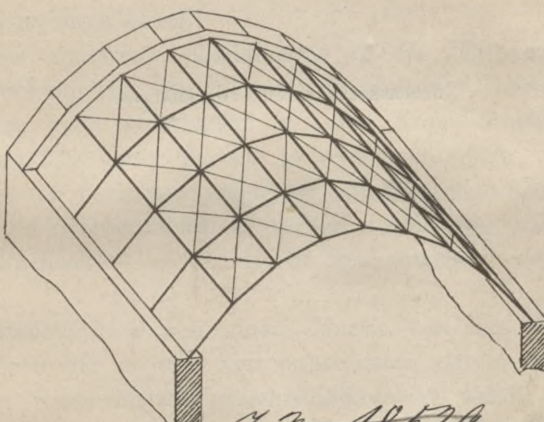
DAS

FACHWERK IM RAUME.

VON

DR. PHIL. AUGUST FÖPPL,
INGENIEUR IN LEIPZIG.

MIT ZAHLREICHEN IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN
UND 2 LITHOGR. TAFELN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1892.

Vorwort.

Als im Jahre 1881 in der „Eisenbahn“ meine erste Abhandlung über das räumliche Fachwerk erschienen war, schrieb mir Prof. E. Winkler: *„Die weitere Ausbildung wird jedenfalls eine recht dankbare Arbeit sein, namentlich hinsichtlich der Kuppelconstructionen, die bis jetzt nur eine oberflächliche Behandlung erfahren haben.“*

Meine späteren Abhandlungen in der „Eisenbahn“ und ihrer Nachfolgerin, der „Schweiz. Bauzeitung“, beschäftigten sich dann auch vorwiegend mit den Kuppelconstructionen. Es gelang mir, deren Theorie so weit auszubilden, dass man sich über ihr Verhalten gegenüber beliebig vertheilten Lasten ebenso gut Rechenschaft zu geben vermochte, wie in der ebenen Fachwerkstheorie über die Spannungen in den ebenen Trägern.

Trotzdem aber von einem Manne von der Bedeutung Winkler's, der zu jener Zeit unbestritten als die erste Autorität der Eisenconstructionslehre betrachtet wurde, das Bedürfniss nach einer strengeren Berechnung der Fachwerkkuppeln so unumwunden ausgesprochen worden war, blieben meine Arbeiten für längere Zeit nur wenig beachtet. Selbst bis in die jüngste Zeit hinein erschienen einzelne Werke, die auf eine wissenschaftliche Bedeutung Anspruch machen, sich dabei aber mit jener „oberflächlichen Behandlung“ der Kuppeln begnügen, ohne irgendwie auf die von mir begründete strengere Theorie einzugehen. Dass die in der Praxis thätigen Ingenieure unter solchen Umständen mit ganz vereinzelten

Ausnahmen achtlos an dieser Theorie vorübergingen und in der Mehrzahl der Fälle von ihrem Vorhandensein gar keine Kenntniss erhielten, kann nicht überraschen.

Man wird es begreiflich finden, dass ich hierdurch etwas entmuthigt wurde. Ueberdies wurde ich durch andere Arbeiten abgelenkt, und ich liess daher meine Studien auf diesem Gebiete einige Jahre hindurch vollständig ruhen.

Allmählich wuchs jedoch das Interesse für meine Arbeiten über das räumliche Fachwerk, wie ich aus den mir von verschiedenen Seiten zugehenden Anfragen ersah, die vielfach mit der Bitte verbunden waren, meine Untersuchungen zusammenhängend in Buchform herauszugeben. Dazu kam, dass ich selbst Gelegenheit fand, von diesen Untersuchungen Gebrauch in der praktischen Anwendung zu machen. Ausserdem war mir in Herrn Baurath Hacker ein eifriger Mitarbeiter erstanden, der meine Untersuchungen in einer Reihe gründlicher Arbeiten weiterführte und ergänzte und hierdurch zugleich die Aufmerksamkeit auf das neu erschlossene Gebiet in höherem Masse hinlenkte.

Immer noch zögerte ich aber mit der Bearbeitung eines selbständigen Werkes, im Hinblicke auf die früher gemachten Erfahrungen. — Theils hoffte ich, inzwischen selbst noch Manches zur weiteren Durcharbeitung der Theorie beitragen zu können, theils wünschte ich die Zeit abzuwarten, in der ich auf eine gute Aufnahme des Buches in weiteren Kreisen hoffen durfte, nachdem sich das Bedürfniss nach einer derartigen Arbeit immer mehr fühlbar gemacht haben würde.

Den Anstoss zur Inangriffnahme der Arbeit gab schliesslich die Behandlung, die der Einsturz der Birsbrücke bei Mönchenstein in den Fachblättern erfuhr. Es schien mir, dass der erhebliche Mangel dieser Construction, dass sie ein im Raume labiles Fachwerk bildete, längst nicht hinreichend gewürdigt würde. Ich konnte mir dies nur daraus erklären, dass sich, von einer kleinen Minderzahl abgesehen, bisher noch Niemand ernstlicher mit dem Verhalten von Stabverbänden im Raume beschäftigt hatte. Ich glaubte daher nicht länger zögern zu dürfen, mit einer systematischen Theorie des räumlichen Fachwerks vor die Oeffentlichkeit zu treten, um von meiner Seite Alles zu thun, was zum weiteren Bekanntwerden dieser Lehre beitragen könnte.

Dieses Buch entstand unter dem frischen Eindrucke jener Katastrophe. Nachdem ich einmal damit begonnen hatte, schrieb ich es in einem Zuge zu Ende. Ich war bestrebt, es so abzufassen, dass dem Leser das Verständniss möglichst erleichtert würde. Namentlich kam mir darauf an, einen klaren Ueberblick über das ganze Gebiet zu geben. Auch der sich mit der Theorie sonst wenig beschäftigende Praktiker sollte schon beim erstmaligen flüchtigen Durchlesen einen Gewinn davon haben.

Aus diesem Grunde habe ich mich mit der ausführlichen Durchrechnung nirgends lange aufgehalten, Rechnungen überhaupt so viel als möglich vermieden. An manchen Stellen, namentlich im ersten Abschnitte war dies zwar nicht möglich. Bei der ersten Durchsicht kann man diese Rechnungen und Einzelausführungen aber überschlagen, ohne desshalb den Zusammenhang zu verlieren.

Wer sich in ein mathematisches Werk einarbeiten will, thut gut, sich von vornherein damit vertraut zu machen, dass er es mehrmals durchlesen muss, um es ganz zu verstehen. Es gibt Werke genug, die auch der fähige Leser acht bis zehn Mal durchgehen muss, um dem Verfasser genau folgen zu können. So hoch sind die Ansprüche nicht, die ich an die Geduld meiner Leser stellen muss; wenigstens habe ich mich redlich bemüht, sie so weit als irgend thunlich herabzusetzen.

Allerdings habe ich dafür auf die eingehende Behandlung vieler Einzelheiten verzichten müssen. Man findet meistens nur die allgemeine Darlegung des Rechnungsganges, keine specielle Anweisung für die Durchführung. In dieser Hinsicht bleibt dem selbständigen Denken bei der Anwendung der vorgetragenen Lehren auf einen vorliegenden Specialfall Vieles überlassen. Ich glaube aber, dass man dies getrost thun kann, wenn man es nur erreicht, über alle principiellen Fragen volle Klarheit zu verbreiten.

Durch den Buchdruckerausstand wurde die Fertigstellung des Druckes um einige Monate verzögert. Einige während dessen erschienene Arbeiten, die mit dem vorgetragenen Gegenstande zusammenhängen, habe ich in einem Nachtrage erwähnt.

Ich bin mir wohl bewusst, dass diese erste zusammenhängende Darstellung der Lehre vom Fachwerk im Raume keine vollkommene Leistung ist. Sie wird zweifellos von späteren Arbeiten, hoffentlich schon in recht naher Zeit, übertroffen werden. Der Leser aber, der in späterer Zeit dies Buch in die Hand nimmt, möge, um zu einem gerechten Urtheile darüber zu gelangen, erwägen, dass hier, wie überall, der Anfang schwer war. Wenn er dabei die besondere Absicht beachtet, in der dies Buch geschrieben war, der räumlichen Fachwerkslehre erst einen Boden in den weiten Fach kreisen zu bereiten, wird er wohl leichter über manche Mängel hinwegsehen und, wie ich zuversichtlich hoffe, kein ungünstiges Urtheil über meine Arbeit fällen. — Mit Zuversicht sehe ich auch der Aufnahme meines Buches bei jenen meiner Zeitgenossen entgegen, die sich auf diesem Specialgebiete selbst schon versucht haben.

Allen, die mich bei der Herausgabe unterstützten, besonders Herrn Ing. Waldner, dem Herausgeber der „Schweiz. Bauzeitung“, spreche ich für die Ueberlassung zahlreicher Clichés, Herrn Techniker Preil für die Anfertigung der Zeichnungen und der Verlagshandlung für ihr bereitwilliges Eingehen auf meine Wünsche meinen besten Dank aus.

Leipzig, im Februar 1892.

A. Föppl.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Theorie des räumlichen Fachwerks.

Erstes Capitel.

Einleitung.

§ 1.

Unter der grossen Zahl von Arbeiten, welche sich mit der Theorie des Fachwerks beschäftigen, gibt es nur wenige, die die Fachwerke als räumliche Gebilde behandeln. Jedenfalls fehlt bis zu diesem Augenblicke jede zusammenhängende Darstellung der Theorie des räumlichen Fachwerks. Ich werde auf den folgenden Seiten den Versuch machen, eine solche zu geben, obschon ich mir der Schwierigkeit eines derartigen Unternehmens voll bewusst bin. Bis vor wenigen Jahren war diese Aufgabe in der That noch gar nicht in Angriff genommen und die geringe Zahl von Bearbeitungen, welche sie seitdem erfahren hat, hat nur eben hingereicht, um das Bedürfniss nach einer weiteren Ausführung erst recht fühlbar zu machen. Unter diesen Umständen darf man nicht hoffen, eine in jeder Hinsicht befriedigende Darstellung der Theorie des räumlichen Fachwerks geben zu können. Man wird sich damit zufrieden geben müssen, das bisher bruchstückweise Erreichte in geordneter Weise zusammenzustellen, auf die praktischen Anwendungen hinzuweisen und so weit als möglich die Wege zu ebenen, auf denen weitere Fortschritte zu erhoffen sind.

Die Lehren vom ebenen und vom räumlichen Fachwerke stehen sich in derselben Weise gegenüber wie die ebene und die räumliche Geometrie. Jene wird stets als die Vorstufe zur letzteren anzusehen sein. Sie bildet mit voller Berechtigung einen in sich abgeschlossenen Abschnitt, der ohne jede Bezugnahme auf die räumliche Theorie abgehandelt werden kann. Die grössere Zahl der in der Baupraxis vorkommenden Aufgaben kann mit ihrer Hülfe vollständig gelöst werden und auch dort, wo sie allein nicht ausreicht, wird man stets nach Möglichkeit suchen, die verwickelteren Aufgaben der räumlichen Theorie auf die in der ebenen Theorie behandelten einfacheren zurückzuführen.

Nur so weit sollte man nicht gehen, die Lehre vom Fachwerke mit der ebenen Fachwerkstheorie als im Wesentlichen erschöpft anzusehen. Kein Ingenieur, der mit irgend einem wesentlich ebenen Fachwerke zu thun bekommt, sollte es unterlassen, sich die Frage zu stellen, welche Gestalt seine Aufgabe annimmt, wenn er das Fachwerk als ein räumliches ansieht. Erst dann, wenn er sich überzeugt hat, dass die Aufgabe im Raume in der That völlig auf die von ihm in Aussicht genommene Behandlung nach der ebenen Theorie zurückgeführt werden kann, darf er diese mit voller Zuversicht in Anwendung bringen.

§ 2.

Vor 12 Jahren habe ich eine Definition des Fachwerks gegeben*), welche ich noch jetzt jeder anderen vorziehen zu sollen glaube. Hiernach ist ein Fachwerk „ein System, das aus materiellen Punkten und gewissen Verbindungslinien derselben so zusammengesetzt ist, dass keine relative Bewegung der Theile des Systems gegen einander möglich ist, ohne dass die Länge dieser Verbindungslinien geändert würde. Für einige Untersuchungen reicht diese Definition vollkommen aus, für die übrigen muss noch eine nähere Angabe bezüglich der eine Formänderung des Systems be-

*) A. Föppl, Theorie des Fachwerks. Leipzig 1880.

gleitenden Umstände gemacht werden. Ich setze zu diesem Zwecke voraus, dass die Längen der Verbindungslinien elastisch veränderlich seien, während behufs der Aenderung der von je 2 Stäben gebildeten Winkel kein Widerstand elastischer oder sonstiger Art überwunden werden muss.“

Zur Klarstellung des Unterschiedes dieser Definition gegenüber den sonst gebräuchlichen führe ich die von Herrn Professor W. Ritter*) gegebene an: „Ein Fachwerk ist ein starres, aus gradlinigen Stäben zusammengesetztes und zum Tragen von Lasten bestimmtes Bauwerk.“

Wie man sieht ist der Unterschied ein sehr erheblicher. Für Herrn Ritter ist ein Fachwerk bereits ein Bauwerk, für mich ist es ein rein ideelles Gebilde, das in seinem Verhalten einem Bauwerke zwar gleichen kann, ohne sich aber völlig mit ihm zu decken. Zur Vertheidigung meiner Auffassung erinnere ich daran, dass keine physikalische Theorie das Verhalten der in der Natur vorkommenden Körper genau und vollständig darzustellen vermag. Um die wesentlichsten Erscheinungen wiedergeben zu können, hat man ideelle Körper definirt, denen man gewisse grundlegende Eigenschaften zuschrieb, aus denen sich durch mathematische Schlussfolgerungen die Gesetze der einzelnen Erscheinungen ableiten liessen. Auf diese Weise entstanden z. B. die Begriffe des starren Körpers, des vollkommenen Gases, der gravitirenden Materie, der Elektricität, bezw. des Aethers, und andere, welche sich durchaus nicht in jeder Hinsicht mit ihren realen Urbildern decken. Erst die Erfahrung kann lehren, bis zu welchem Grade eine Uebereinstimmung zwischen dem Verhalten der Naturkörper und jenen ideellen Körpern stattfindet.

Setzt man sich nun von vornherein die Aufgabe, das Verhalten der Naturkörper, also hier der Bauwerke zu beschreiben, so muss man sofort hinzufügen, dass eine strenge Lösung derselben überhaupt nicht möglich ist, sondern nur eine annähernde. Da scheint es mir doch viel richtiger zu sein, bei der Behandlung der Theorie zur genauen Umschreibung ihrer Tragweite nur jene ideellen Systeme ins Auge zu fassen, für welche sie wirklich streng gültig ist. Jedenfalls kann ich für diese Ansicht anführen, dass sie sich in Uebereinstimmung mit der Behandlungsweise aller übrigen Gebiete der Mechanik befindet.

---

*) W. Ritter, Das Fachwerk. Zürich 1890.

So wie die reine Mechanik ein blosses Hirngespinnst wäre, wenn ihr die experimentelle Bestätigung fehlte, bedürfen auch die Ergebnisse der Fachwerkstheorie einer fortwährenden Prüfung durch Versuche. Herr Prof. Fränkel*) hat darauf in den letzten Jahren sehr nachdrücklich und mit grossem Rechte hingewiesen. Die in der letzten der citirten Arbeiten von ihm erhaltenen Ergebnisse beweisen das Letztere am besten. Es wäre zu wünschen, dass alle bedeutenderen Eisenbauwerke nach seiner Methode untersucht würden.

§ 3.

Die oben angegebene Definition hatte in erster Linie ebene Fachwerke im Auge, sie kann aber auch für räumliche Fachwerke ohne Aenderung beibehalten werden. Nur in einer Beziehung erscheint eine Erweiterung des Begriffes erwünscht.

Als Bestandtheile eines räumlichen Fachwerks sollen nämlich auch starre Körper zugelassen werden. Diejenigen Punkte der letzteren, von denen Fachwerkstäbe ausgehen, werde ich als die „festen“ Knotenpunkte des Fachwerks bezeichnen im Gegensatze zu den übrigen, welche ich als „freie“ bezeichne.

So weit mir bekannt ist, wird an dieser Stelle ein starrer Körper zum ersten Male als Fachwerksbestandtheil eingeführt. Indessen fehlte es schon seither nicht an dem entsprechenden Begriffe (den Scheiben) in der ebenen Fachwerkstheorie. Durch die Einführung der „Scheiben“ sind manche Betrachtungen der letzteren sehr schön und übersichtlich abgerundet worden, z. B. in dem bekannten Buche von Prof. Müller-Breslau**).

Der Nutzen der „Scheiben“ besteht vorwiegend darin, dass man grössere zusammenhängende Stabgruppen bei gewissen Untersuchungen unter einem einzigen Begriffe zusammenfassen kann. Sobald diese Stabgruppen unter sich zu einem stabilen Fachwerke vereinigt sind, bleibt es gleichgültig, wie die Stäbe zu diesem Zwecke speciell geführt sind. Man ent-

*) W. Fränkel, Civilingenieur. 1882. 1884. 1887.

**) Müller-Breslau, Graphische Statik, 2. Aufl. Bd. I. Leipz. 1887.

fernt daher nur Nebensächliches aus der Betrachtung, wenn man sich das stabile Fachwerk durch eine „Scheibe“, d. h. durch eine starre ebene Figur ersetzt denkt.

Aehnliche Dienste wie die Scheibe vermag in der räumlichen Fachwerkstheorie der starre Körper zu leisten. Was mich indessen ganz besonders dazu bewogen hat, den letzteren als Fachwerk-Element einzuführen, hängt mit jenem Ersatze einer stabilen Stabgruppe durch den einfacheren Begriff des starren Körpers nicht unmittelbar zusammen. Es war vielmehr die Möglichkeit, die ganze Erde als Fachwerksbestandtheil mit einzuführen.

Durch diese Wendung vereinfacht man in den meisten Fällen jene Untersuchungen, welche sich auf die Unterscheidung zwischen Fachwerk und Fachwerkträger beziehen. In meiner früheren Fachwerkstheorie habe ich zwischen beiden sehr scharf unterschieden. Bei allen Fachwerkträgern, bei denen keine Gleitlager vorkommen, wird die Unterscheidung indessen sofort überflüssig, sobald man die Erde als Scheibe, oder im Raume als starren Körper in das Fachwerk selbst einbezieht.

Für solche Fälle gilt daher die Definition: Ein Fachwerkträger ist ein Fachwerk, das die Erde als starren Körper mit enthält.

Wenn im Fachwerkträger Gleitlager (mit einfacher oder doppelter Verschiebungsrichtung) vorkommen, lässt sich diese Definition zwar nicht mehr unmittelbar aufrecht erhalten. Man kann aber auch diesen Fall stets auf den früheren zurückführen, indem man die betreffenden Auflagerbedingungen durch gleichwerthige Stäbe ersetzt, wie ich dies im weiteren Verlaufe auseinanderzusetzen beabsichtige.

Zweites Capitel.

Zahl der nothwendigen Stäbe.

§ 4. a) Fachwerke mit nur freien Knotenpunkten.

Da ich voraussetze, dass die Leser dieses Buches mit der ebenen Fachwerkstheorie bereits vertraut sind, brauche ich mich nicht mit dem Nachweise dafür aufzuhalten, wie wichtig es ist, die Zahl der nothwendigen Stäbe im Fachwerke angeben zu können. Bezeichnet man die Zahl der Stäbe allgemein mit m, die der mindestens nothwendigen mit m_{min} und die Zahl der Knotenpunkte mit n, so besteht die schon lange bekannte Beziehung:

$$m_{min} = 3n - 6. \tag{1}$$

Zum Nachweise derselben bedient man sich am besten einer rein geometrischen Methode, da auch der oben definirte Begriff des Fachwerks ein wesentlich geometrischer ist. Ich lege zu diesem Zwecke ein rechtwinkliges Coordinatensystem auf dem Fachwerke fest, so dass der Ursprung mit einem bestimmten Knotenpunkte zusammenfällt, die X-Achse stets durch einen zweiten Knotenpunkt und die XY-Ebene ausserdem noch durch einen dritten beliebig gewählten Knotenpunkt hindurchgeht. Die Knotenpunkte seien nummerirt und der mit der Nummer i versehene möge die Knotenpunktscoordinaten $x_i\ y_i\ z_i$ in Bezug auf das gewählte Coordinatensystem haben.

Für den Stab ik, welcher zwei Knotenpunkte i und k mit einander verbindet, gilt dann nach dem Pythagoräischen Satze, wenn man mit l_{ik} die Stablänge bezeichnet, die Gleichung:

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 - l_{ik}^2 = 0. \tag{2}$$

Denken wir uns auch für die Stäbe eine beliebige Nummerirung durchgeführt, so kann diese Gleichung, wenn der Stab ik die Nummer g erhalten hat, zur Abkürzung in der Form

$$f_g = 0 \tag{3}$$

angeschrieben werden.

Von den $3n$ Knotenpunktscoordinaten sind durch die Wahl des Coordinatensystems 6 bekannt. Wenn das Fachwerk ein starres System bilden soll, müssen die übrigen $3n-6$ Funktionen der Stablängen sein und sich aus den Gleichungen (2) bezw. (3) berechnen lassen. Daraus folgt unmittelbar, dass mindestens $3n - 6$ Gleichungen von der Form (2) gegeben sein müssen und da jede derselben sich auf einen Fachwerksstab bezieht, dass die Zahl der Stäbe m mindestens gleich $3n - 6$ sein muss.

Die Zahl der Stäbe kann auch grösser sein als $3n - 6$. In diesem Falle sind die überschüssigen $m - (3n - 6)$ Gleichungen von den übrigen abhängig oder einige Stablängen sind Funktionen der übrigen.

§ 5. Funktionaldeterminante des Fachwerks.

Die Bedingung, welche durch Gleichung (1) ausgesprochen wird, ist zwar eine nothwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Steifigkeit des Fachwerks. Es genügen nämlich nur dann $3n-6$ Gleichungen von der Form (2) zur Berechnung der unbekannten Knotenpunkts-Coordinaten, wenn sie sämmtlich von einander unabhängig sind (bezw. sich nicht widersprechen).

Die Bedingung hierfür lässt sich mit Hülfe der Determinantentheorie ohne Schwierigkeit angeben. Die Funktionaldeterminante des Systems der Gleichungen (2) muss nämlich für diesen Fall von Null verschieden sein. Man findet diesen Satz in vielen mathematischen Lehrbüchern*) bewiesen; des Zusammenhangs wegen sei er hier kurz abgeleitet.

Man betrachte p Gleichungen zwischen irgend welchen p Unbekannten $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_p$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = 0 \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ f_p(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

*) Vgl. u. A. Schlömilch, Handb. d. Mathematik, II, p. 403. Breslau 1881.

Wenn dieselben durch die Lösungen $\xi_1', \xi_2' \ldots \xi_p'$ erfüllt werden, dürfen sie nicht mehr erfüllt werden durch die Werthe $\xi_1' + \delta\xi_1,\ \xi_2' + \delta\xi_2, \ldots, \xi_p' + \delta\xi_p$, worin die $\delta\xi$ unendlich kleine Aenderungen bedeuten. Durch Differentiation erhält man aber aus (4)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\cdot\delta\xi_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2}\cdot\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_p}\cdot\delta\xi_p = 0\\
&\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}\cdot\delta\xi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}\cdot\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_p}\cdot\delta\xi_p = 0\\
&\vdots\\
&\frac{\partial f_p}{\partial \xi_1}\cdot\delta\xi_1 + \frac{\partial f_p}{\partial \xi_2}\cdot\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_p}{\partial \xi_p}\cdot\delta\xi_p = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Nur für den Fall, dass die Determinante der Coefficienten in diesen Gleichungen gleich Null ist, lässt sich ein Werthsystem der $\delta\xi$ angeben, das mit den Gleichungen (5) verträglich ist. In jedem anderen Falle sind alle $\delta\xi$ gleich Null.

Zur Uebertragung dieses Resultates auf die Fachwerkstheorie nehme man an, dass die Gleichungen (4) von der Form der Gleichungen (2) bezw. (3) seien, dass also unter den Unbekannten $\xi_1\ \xi_2 \ldots$ die unbekannten Knotenpunktscoordinaten $x_i\ y_i\ z_i$ u. s. w. zu verstehen seien. Behalten wir der Einfachheit halber diese Schreibweise auch jetzt noch bei, so ist das Fachwerk durch die geführten Stäbe zu einem starren Ganzen vereinigt, wenn die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_p}\\
\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_p}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial f_p}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_p}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial \xi_p}
\end{vmatrix} \tag{6}$$

von Null verschieden ist; p ist hierbei $= 3n - 6$.

In jeder der Gleichungen $f = 0$ kommen höchstens 6 Unbekannte vor. Die Mehrzahl der partiellen Differentialquotienten, welche die Elemente der Determinante $\varDelta$ bilden, ist daher gleich Null. Die wirkliche Ausrechnung von $\varDelta$ vereinfacht sich dadurch erheblich, bleibt aber unter allen Umständen eine sehr mühsame Arbeit. Das gefundene Kriterium würde dadurch praktisch ziemlich werthlos werden, wenn es nicht die Ableitung eines sehr wichtigen Satzes (vgl. § 20) gestattete.

§ 6.

Von einiger Wichtigkeit ist noch die Bemerkung, dass die Determinante $\varDelta$ auf zwei verschiedene Arten zu Null werden kann, entweder nämlich identisch, und zwar dann, wenn die Stäbe in ungeeigneter Weise zwischen den Punkten vertheilt sind oder zweitens durch besondere Werthe der Stablängen. Das erste findet z. B. statt, wenn ein Knotenpunkt vorkommt, von dem nur ein Stab oder nur zwei Stäbe ausgehen. Man überzeugt sich dann leicht, dass die Determinante identisch verschwindet, da sie sich auf Unterdeterminanten zurückführen lässt, in denen Colonnen vorkommen, deren sämmtliche Glieder gleich Null sind.

Anders ist es im zweiten Falle. Hier wird die Determinante nicht dadurch zu Null, dass sich ihre Glieder bei der Ausrechnung einzeln gegen einander wegheben, sondern dadurch, dass die Gesammtsumme der positiven Glieder in Folge der besonderen Werthe für die Stablängen grade gleich der Gesammtsumme der negativen Glieder ist.

Man erkennt leicht, wie sich diese beiden Fälle in geometrischer Hinsicht von einander unterscheiden. Im ersten Falle bleibt die Determinante gleich Null, auch nachdem sich die durch die $\delta\xi$ angegebenen Coordinatenänderungen vollzogen haben; die einzelnen Theile des Systems haben daher eine endliche relative Beweglichkeit gegen einander. Im zweiten Falle trifft dies nach einer unendlich kleinen Verschiebung im Allgemeinen nicht mehr ein. Das Fachwerk ist unendlich wenig verschieblich oder ein „Momentmechanismus“.

Als Beispiel für den letzten Fall erwähne ich ein ebenes

Viereck mit seinen beiden Diagonalen. Betrachtet man dasselbe als räumliches Fachwerk, so hat es die erforderliche Zahl von Stäben ($3 . 4 - 6 = 6$), ist aber trotzdem nicht starr verbunden. Der vierte Knotenpunkt vermag nämlich aus der Ebene der drei übrigen um ein unendlich kleines Stück herauszutreten, ohne dass sich die Stablängen um mehr als unendlich kleine Grössen 2^{ter} Ordnung änderten. Die Determinante Δ ist gleich Null, wird aber von Null verschieden, sobald die besprochene relative Bewegung ausgeführt ist.

§ 7. b) **Fachwerke mit einem starren Körper.**

Das einfachste Fachwerk dieser Art besteht aus einem starren Körper mit 3 festen Knotenpunkten, einem freien Knotenpunkte und 3 Verbindungsstäben.

Bezeichnet man allgemein die Zahl der festen Knotenpunkte mit n_a, die Zahl der freien mit n_f und die Stabzahl, wie früher, mit m, so erhält man die der Gleichung (1) entsprechende Beziehung

$$m_{min} = 3\, n_f. \tag{7}$$

Wegen des Beweises kann einfach auf § 4 verwiesen werden. Man legt hier das Coordinatensystem natürlich auf dem starren Körper fest und hat dann $3\, n_f$ unbekannte Knotenpunktscoordinaten, zu deren Berechnung ebenso viele Gleichungen erforderlich sind. — Ebenso erkennt man sofort, dass die Betrachtungen über die Funktionaldeterminante sich auch auf den vorliegenden Fall ohne jede Aenderung übertragen lassen.

§ 8. c) **Fachwerke mit mehreren starren Körpern.**

Man erhält das einfachste Fachwerk dieser Art, wenn man zwei starre Körper durch Stäbe verbindet und gar keine freien Knotenpunkte dazunimmt. Offenbar sind hierzu 6 Stäbe erforderlich; denn so gross ist auch die Zahl der Coordinaten, durch welche der eine starre Körper gegen den anderen festgelegt wird. Von diesen Stäben dürfen nicht mehr als drei in derselben Ebene liegen und nicht mehr als drei sich in demselben Punkte schneiden.

Bezeichnet man allgemein die Zahl der starren Körper mit r und behält im Uebrigen die früheren Bezeichnungen bei, so ist

$$m_{min} = 6r + 3n_f - 6. \tag{8}$$

Die früheren Formeln (1) und (7) sind in (8) als Specialfälle enthalten. Man erhält (1) wenn man $r = 0$ und (7) wenn man $r = 1$ setzt. — Auf die Zahl der festen Knotenpunkte kommt es, wie man sieht, nicht an.

Drittes Capitel.

Auflagerbedingungen.

§ 9.

Bei den bis jetzt betrachteten Stabgebilden war der Zusammenhang zwischen den Knotenpunkten ausschliesslich durch die zwischen ihnen geführten Stäbe aufrecht erhalten. Man kann aber dasselbe Ziel auch dadurch erreichen, dass man auf irgend einem anderen Wege einzelne Knotenpunkte einem Zwange unterwirft, der sie nöthigt, auf einer gegebenen Fläche oder Linie zu bleiben.

Ich werde im Folgenden stets voraussetzen, dass eine Fläche dieser Art mit der Erde in fester Verbindung ist und dass ihre Krümmungshalbmesser gross sind im Vergleiche zu den kleinen Verrückungen, welche die Knotenpunkte bei der elastischen Formänderung (oder in Folge von Temperaturänderungen) erfahren. Man kann dann an die Stelle der Fläche die sie an dem betreffenden Knotenpunkte berührende Ebene setzen. Von einem Knotenpunkte, der durch irgend ein Mittel genöthigt wird, auf einer solchen Ebene zu bleiben, werde ich sagen, dass ihm eine Auflagerbedingung vorgeschrieben sei. Einem Knotenpunkte, der genöthigt wird, auf einer Geraden zu bleiben, müssen dann zwei, und einem vollständig festgehaltenen (d. h. mit der Erde verbundenen) Knotenpunkte 3 Auflagerbedingungen zugeschrieben werden.

Zwei Auflagerbedingungen werden z. B. einem Knotenpunkte dann vorgeschrieben, wenn man ihn auf ein Walzen- oder Gleitlager setzt, das gegen seitliche Verschiebungen (und auch gegen ein Abheben) gestützt ist. Eine Auflagerbedingung könnte man dadurch vorschreiben, dass man zwei über einander liegende Walzenlager mit schief oder rechtwinklig zu einander gestellten Verschiebungsrichtungen unter dem Knotenpunkte anbrächte oder auch durch ein Gleitlager, das Verschiebungen nach allen Seiten gestattete.

Das einfachste Mittel zur Verwirklichung der Auflagerbedingungen besteht indessen in der Anbringung geeignet geführter Stäbe. Um z. B. einen Knotenpunkt zu nöthigen, auf einer wagerechten Ebene zu bleiben, befestige man einen in senkrechter Richtung gehenden, hinreichend langen Stab an ihm, dessen anderes Ende an der Erde festgemacht ist. Zunächst wird der Knotenpunkt hierdurch genöthigt, auf einer Kugelfläche zu bleiben, für die aber nach dem eben Bemerkten auch die wagerechte Berührungsebene gesetzt werden kann.

Offenbar kann man in derselben Weise durch zwei geeignet geführte Stäbe den Knotenpunkt nöthigen, auf irgend einer gegebenen Linie zu bleiben, und ihn durch drei Stäbe vollständig festhalten. Es liegt daher keine unbedingte Nöthigung vor, Fachwerke mit besonderen Auflagerbedingungen zu betrachten. Ersetzt man die letzteren durch die ihnen gleichwerthigen Stäbe und sieht die Erde als Bestandtheil des Fachwerks im Sinne der Ausführungen in § 3 an, so geht der Fall in die früher behandelten ohne Auflagerbedingungen über. Diese Bemerkung trägt viel zur Vereinfachung der Betrachtungen bei; sie erspart die Aufstellung besonderer Steifigkeitsbedingungen für alle einzelnen Fälle, da die früher ermittelten auch hierfür ohne Weiteres benutzt werden können.

Trotzdem würde es sich nicht empfehlen, die Auflagerbedingungen ganz aus der Fachwerkstheorie zu streichen, blos aus dem Grunde, weil sie entbehrlich sind. Die allgemeine Mechanik hat von jeher die Gesetze für das Gleichgewicht und die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen Flächen oder Bahnen eingehend behandelt und schon darum empfiehlt es sich, diesen Begriff, der sich in der geschichtlichen Entwickelung der Wissenschaft bewährt hat, nicht bei Seite zu setzen. Ausserdem spricht die constructive Durchbildung, welche die verschieblich gelagerten Knotenpunkte erhalten haben, entschieden dagegen. Ich werde daher Fachwerke mit Auflagerbedingungen ebenfalls zum Gegenstande meiner Untersuchungen machen, mir aber dabei stets vorbehalten, an deren Stelle mit dem gleichen Rechte die ihnen nach den vorstehenden Ausführungen gleichwerthigen Fachwerke ohne Auflagerbedingungen mit der Erde als Fachwerkbestandtheil setzen zu dürfen.

§ 10. Das ebene Fachwerk.

Wenn man die Ergebnisse der ebenen Fachwerkstheorie auf die Berechnung und Construction von Bauwerken anwenden will, muss man sich darüber Rechenschaft geben, wie sich ein ebener Träger verhält, wenn man ihn als räumliches Fachwerk betrachtet. Denn die Voraussetzung, welche der ebenen Fachwerkstheorie zu Grunde liegt, dass sich alle Vorgänge in einem zweidimensionalen Raume abspielen, ist bei den Dach- und Brückenträgern keineswegs erfüllt. Man hat sich allerdings in diese bequeme Vorstellung allmählich hineingewöhnt. Der Einsturz der Mönchensteiner Brücke, welcher zum grossen Theile wenigstens auf die Nichtbeachtung dieses Umstandes zurückzuführen ist, dürfte aber für die Folge zur besseren Berücksichtigung desselben führen.

Ein ebener statisch bestimmter Balkenträger mit n Knotenpunkten hat bekanntlich $2n - 3$ Stäbe und 3 Auflagerbedingungen, von denen 2 auf den festen, 1 auf den verschieblich gelagerten Auflagerknotenpunkt entfallen. Im dreifach ausgedehnten Raume ist er natürlich keineswegs starr. Er kann aber sofort zu einem räumlichen steifen Gebilde durch die Hinzufügung einer Auflagerbedingung zu jedem Knotenpunkte gemacht werden. Diese Auflagerbedingung bestehe in dem Zwange, der auf den Knotenpunkt ausgeübt wird, in der ursprünglichen Constructionsebene zu bleiben.

Die Gesammtzahl der Auflagerbedingungen beträgt jetzt $n + 3$. Ich denke mir dieselben durch passend gewählte Stäbe ersetzt und erhalte damit ein Fachwerk mit einem starren Körper (der Erde), n freien Knotenpunkten und $3n$ Stäben, für das demnach die in Gleichung (7) ausgesprochene Bedingung erfüllt ist.

§ 11. **Stützung.**

In meinem früheren Buche habe ich die ersten Fäden zwischen der Fachwerkslehre und der Kinematik gezogen. Seitdem ist besonders durch die Arbeiten der Herren Professor Grübler, Land und Professor Müller-Breslau ein engerer Zusammenschluss beider Wissensgebiete angebahnt worden, der das erstere noch weiter zu befruchten verspricht. Der Lehre vom räumlichen Fachwerke ist diese Anknüpfung bisher kaum zu Gute gekommen. Ich vermuthe indessen, dass sie noch viel Nutzen aus derselben wird ziehen können. An dieser Stelle kann ich mich an die Kinematik anlehnen, indem ich mich auf die Betrachtungen über die hinreichende Stützung der Maschinenglieder beziehe. — Nicht immer ist es nöthig, den Zwang zwischen zwei Maschinengliedern durch einen vollen Paarschluss aufrecht zu erhalten. So genügt es bei einem Stehlager wohl auch, den Deckel wegzulassen und nur die untere Lagerschaale auszuführen, wenn nur Kräfte wirken, welche nach abwärts gehen. An die Stelle des reinen Paarschlusses tritt als Ersatz der Kraftschluss ein.

Aehnlich sieht es auch bei den ebenen Fachwerken aus. Wenn Kräfte, welche senkrecht zur Constructionsebene gehen, nur in ganz geringen Beträgen vorkommen, kann man von der vollen Ausbildung der Auflagereinrichtungen, welche den ebenen Träger zu einem räumlich steifen Ganzen machen würden, absehen, sobald man dafür sorgt, dass auf anderem

Wege die Auflagerbedingungen hinreichend gewahrt werden. Die Steifigkeit der Knotenpunkte und der Stäbe wird in vielen Fällen genügen, eine hinreichende Stützung des Trägers gegen Ausbiegen aus der Constructionsebene herbeizuführen.

Wie ich schon bei einer anderen Gelegenheit hervorhob*), muss man bei der Beurtheilung des Trägers in dieser Beziehung besonders die Knotenpunkte der gedrückten Gurtung im Auge behalten. Wenn diese ein wenig aus der Constructionsebene herausgetreten sind, wirken nicht nur die elastischen Kräfte ein, welche ein Zurückführen in die frühere Lage anstreben, sondern es tritt auch ein Moment auf, das die Ausbiegung zu vergrössern sucht. Es verhält sich damit genau wie bei der Knickfestigkeit.

An der Hand von Abbildung 1 und 1b, welche ich der angegebenen Abhandlung entnommen habe, lässt sich dies leicht erklären. Der Fachwerkbalken in Abb. 1 sei für sich allein aufgestellt und vor allen wagerechten Belastungen geschützt. Die Berechnung soll in der gewöhnlichen Weise vorgenommen und der Träger in üblicher Weise mit steifen Knotenpunkten ausgeführt sein, wobei die Druckstäbe einen hinreichend gespreizten Querschnitt erhalten haben sollen, um ein Ausknicken derselben nach jeder Richtung grade zu verhüten.

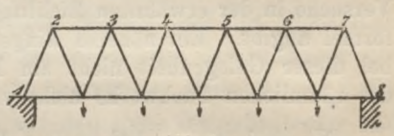


Abb. 1.

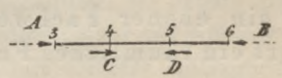


Abb. 1b.

Wer sich ganz daran gewöhnt hat, das Verhalten des Fachwerks ausschliesslich im zweidimensionalen Raum zu verfolgen, kann sicher nicht argwöhnen, dass der Träger trotz der nach allen Regeln der Kunst erfolgten Durchbildung in Gefahr sei. Und doch ist es so. Fasst man nämlich ein grösseres Stück des Obergurts ins Auge, wie in Abb. 1b das zwischen den Knotenpunkten 3 und 6 gelegene, und ersetzt die von den übrigen Stäben herrührenden Wirkungen durch äussere Kräfte (*A* und *B* an den Enden, *C* und *D* an den dazwischen liegenden Knotenpunkten), so erkennt man ohne Weiteres, dass der Gesammtstab 3—6 sehr wohl seitlich ausknicken kann (aus der Constructionsebene heraus),

*) Deutsche Bauzeitung 1891. S. 333.

wenn auch die einzelnen Stäbe für sich genommen steif genug construirt sind, um ein Ausknicken jedes derselben für sich zu verhüten. Wenn auch die Kräfte A und B etwas geringer sind als die Stabspannungen, für die man den mittelsten Stab 4—5 auf Zerknicken berechnet hat, so ist doch andererseits die Länge auf das 3-fache (oder allgemein n-fache) angewachsen und die Knickgefahr wächst bekanntlich mit dem Quadrate der Länge.

Bei dieser Betrachtung ist allerdings keine Rücksicht darauf genommen, dass auch die von den Wandgliedern herrührenden elastischen Kräfte das Zurückgehen des Stabes 3—6 in die grade Lage unterstützen. Allgemein lässt sich hierüber auch nichts aussagen, da es von dem Verhältnisse zwischen den Trägheitsmomenten der einzelnen Stäbe abhängt, wie gross der Einfluss dieses Umstandes ist. Er lässt sich übrigens ohne Schwierigkeit rechnerisch in derselben Weise verfolgen, wie der gewöhnliche Knickfestigkeitsfall nach Euler. Auf jeden Fall wirkt die Steifigkeit der Wandglieder so, als wenn das Trägheitsmoment der Gurtstäbe erhöht wäre. — Auch auf Träger mit gekrümmtem Obergurt lässt sich die gleiche Betrachtung ohne jede Aenderung übertragen. Es sei noch darauf hingewiesen, dass Herr Gerber*) seiner Zeit Versuche in der erwähnten Richtung anstellte und eine Näherungsformel angibt. Ein näheres Eingehen auf diese Frage erscheint bei dieser Gelegenheit nicht am Platze, da sie mit der Theorie des räumlichen Fachwerks nicht viel zu thun hat**).

Nach den vorstehenden Aussagen kann man sagen, dass ein ebener Fachwerkträger von der üblichen Bauart ein räumliches Fachwerk mit unvollkommener Stützung ist.

§ 12. Das lineare Fachwerk.

Die einfachste Stufe des Fachwerks bildet das lineare oder eindimensionale Fachwerk. Man denke sich n Knotenpunkte, welche auf irgend eine Weise gezwungen sind, auf gegebenen Bahnen zu bleiben. Durch $n-1$ Stäbe lassen sich dieselben

*) Deutsche Bauzeitung 1891. S. 349.

**) Vergl. hierzu die nach der Niederschrift dieser Bemerkungen erschienene Abhandlung von R. F. Mayer, Wochenschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1891. S. 285. Daselbst ist auf die Zerstörung einer Strassenbrücke aus dem fraglichen Grunde hingewiesen.

zu einem steifen Ganzen oder zu einem linearen Fachwerke vereinigen.

Das einfachste Beispiel für ein lineares Fachwerk bildet eine gewöhnliche Gelenkkette. Das ebene Fachwerk kann aus solchen Gelenkketten abgeleitet werden, indem man nämlich zwei Gelenkketten als Gurtungen annimmt und die erforderliche Zahl von Verbindungsstäben zwischen ihnen anordnet. Die letzteren bilden die Füllungstheile oder Wandglieder des ebenen Fachwerks.

Diese Auffassung ist deshalb von Nutzen, weil sie in unmittelbarem Zusammenhange mit der Ableitung räumlicher aus den ebenen Fachwerken steht, wie aus dem später Folgenden hervorgehen wird.

Ein zweiter Weg zur Ableitung des ebenen Fachwerks aus dem linearen besteht darin, dass man das letztere mit einer gewissen Zahl überzähliger Stäbe versieht und dann eine entsprechende Zahl von Auflagerbedingungen fortlässt. Fügt man zu den $n - 1$ nothwendigen Stäben und der einen Auflagerbedingung, welche erforderlich ist, um das lineare Fachwerk festzuhalten, noch $n - 2$ überzählige und entfernt dafür von allen Knotenpunkten bis auf den ganz festgehaltenen und einen zweiten je eine Auflagerbedingung, so erhält man den gewöhnlichen Balkenträger oder allgemeiner den von mir früher in Vorschlag gebrachten Träger mit schiefer Auflagerung.

Auch dieser zweite Weg kann in gleicher Weise zur Ableitung räumlicher Fachwerke aus ebenen oder allgemeiner aus zweidimensionalen verwendet werden.

Viertes Capitel.

Zusammensetzung und Zerlegung der Fachwerke.

§ 13.

Die Fachwerke, welche im Bauwesen vorkommen, zeigen oft einen sehr verwickelten Aufbau. Es ist daher zur Gewinnung besserer Uebersicht wünschenswerth, sich über die

Gesetze, nach denen mehrere selbständige Theile zu einem steifen Ganzen verbunden werden können, nähere Rechenschaft zu geben. Man erlangt dadurch zugleich die Möglichkeit, in manchen Fällen umgekehrt complicirtere Gebilde in eine Vereinigung einfacherer auflösen und die Aufgabe damit erleichtern zu können.

Um zu einer vereinfachten Darstellung zu gelangen, werde ich in den jetzt folgenden Ausführungen von Auflagerbedingungen absehen, indem ich mir dieselben dort, wo sie etwa vorkommen sollten, durch Stäbe nach § 9 ersetzt denke.

Der einfachste Sonderfall des räumlichen Fachwerks ist ein Dreieck, in dem die Ecken Knotenpunkte und die Seiten Stäbe bilden. Vom Dreiecke aus kann man auf verschiedene Art zu verwickelteren Systemen aufsteigen. Man kann erstens einen vierten Knotenpunkt mit Hülfe von drei neuen Stäben an das Dreieck anschliessen. Indessen muss dann die Bedingung erfüllt sein, dass der vierte Knotenpunkt nicht in der Ebene der drei übrigen liegt. In diesem Falle würde nämlich die Funktionaldeterminante des Fachwerks zu Null werden und daher eine ∞ kleine relative Beweglichkeit zurückbleiben.

Am einfachsten erkennt man dies aus der folgenden Ueberlegung. Die Knotenpunkte seien nummerirt und die Stablängen in der früheren Weise (§ 4) bezeichnet. Wenn l_{14} und l_{24} gewählt sind, kann l_{34} nicht ganz beliebig angenommen werden; es muss vielmehr zwischen einem Maximal- und einem Minimalwerthe liegen. Einer dieser beiden Fälle tritt aber dann ein, wenn der vierte Knotenpunkt (mit Beibehaltung von l_{14} und l_{24}) in die Ebene 1 2 3 gelegt wird. Bei einer kleinen Drehung des Dreiecks 1 2 4 gegen das Dreieck 1 2 3 ändert sich daher die Länge l_{34} nur um eine kleine Grösse zweiter Ordnung, woraus die Behauptung folgt*).

In gleicher Weise lassen sich dann auch noch weitere Knotenpunkte durch je drei Stäbe anschliessen. Die Fachwerke, zu denen man auf diesem Wege gelangt, zeigen einen besonders einfachen Aufbau. Die Berechnung der in ihnen auftretenden Stabspannungen macht, wie sich zeigen wird,

*) Vgl. Mohr, Civilingenieur 1885.

gar keine Schwierigkeiten, während diese bei anders gestalteten Fachwerken oft sehr erheblich sind.

In den eben besprochenen Fachwerken sind diejenigen enthalten, welche durch ein Zusammenlegen von Tetraedern entstehen. Herr W. Ritter*) hat dieselben als regelmässige räumliche Fachwerke bezeichnet. Ich bin indessen nicht sehr geneigt, ihnen eine so auszeichnende Benennung zuzugestehen, da der allgemeinere Fall, den ich besprach, dieselben einfachen Eigenschaften zeigt. So lange nur 5 Knotenpunkte vorhanden sind, kann man sich das Fachwerk zwar stets aus einem Zusammenlegen von zwei Tetraedern hervorgegangen denken. Sobald ein sechster Knotenpunkt hinzukommt, gilt dies aber nicht mehr.

Wenn man einen besonderen Namen für diejenigen Fachwerke, welche die leichteste Berechnung gestatten, haben will, dürfte es sich empfehlen, alle diejenigen Fachwerke als einfache zu bezeichnen, welche wenigstens einen Knotenpunkt besitzen, von dem nur 3 Stäbe ausgehen und welche nach dessen Wegnahme dieselbe Eigenschaft beibehalten, also alle diejenigen Fachwerke, welche sich durch fortgesetzte Abtrennung von Knotenpunkten mit je 3 Stäben auf Dreiecke zurückführen lassen.

§ 14.

Ein zweiter Weg zur Erlangung verwickelterer Systeme aus dem Dreiecke besteht in der Vereinigung eines Dreiecks mit einem bereits durch einen Stab verbundenen Paar von zwei neuen Knotenpunkten. Dazu sind 5 Stäbe erforderlich, von denen also 3 zu einem der beiden neuen Knotenpunkte geführt werden müssen. Man erkennt daraus, dass dieser Fall in dem vorhergehenden bereits mit enthalten ist.

§ 15.

Ein dritter Weg besteht in der Vereinigung von zwei Dreiecken. Aus Gleichung (1) folgt sofort, dass hierzu 6 Stäbe

*) W. Ritter, Das Fachwerk. S. 209.

nöthig sind. Diese können auf verschiedene Weise vertheilt werden. Vertheilt man dieselben gleichmässig auf die drei Knotenpunkte, so dass also von einem Dreiecke nach jeder Ecke des anzuschliessenden je 2 Stäbe geführt werden, so erhält man ein System von weniger einfacher Art als das oben betrachtete. Bei diesem beginnen bereits die dem räumlichen Fachwerke eigenthümlichen Schwierigkeiten der Berechnung.

Da es das wenigst verwickelte Beispiel für die nicht einfachen Fachwerke (im Sinne der oben gegebenen Definition) bildet, verdient es eine besondere Beachtung. Ein regelmässiges Oktaeder ist ein Gebilde dieser Art. Besondere Kunstgriffe zur Berechnung desselben sind indessen nicht erforderlich, da es durch einen Schnitt in zwei Theile zerlegt werden kann, der nur 6 Stäbe trifft. Die 6 Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen den Stabspannungen und den an dem einen Theile wirkenden äusseren Kräften genügen daher stets zur Ermittelung der ersteren.

Einfacher lässt sich die Berechnung indessen durch eine geschickte Verwendung der graphischen Methoden gestalten. Ich habe bisher keine Zeit zur weiteren Ausarbeitung der Theorie des Oktaeders gefunden, möchte mir aber erlauben, dieselbe strebsamen Jüngern unserer Wissenschaft als ein dankbares Arbeitsfeld zu empfehlen, auf dem sie mehr zur Förderung unseres Wissens beitragen können, als durch die Aufsuchung immer neuer Wege zur Berechnung der ebenen Fachwerke. — Bis zu einem gewissen Grade ist übrigens diese Theorie bereits in der Lehre von der Netzwerkkuppel, welche im zweiten Abschnitt besprochen werden wird, enthalten.

Die andere mögliche Vertheilung der Stäbe zwischen den zu verbindenden Dreiecken besteht darin, dass man nach einem Knotenpunkte des anzuschliessenden Dreiecks drei, nach einem zweiten zwei und nach dem dritten einen Stab führt. Das so entstehende Gebilde ist aber, wie man leicht erkennt, ein „einfaches“ Fachwerk und durch das Vorausgegangene bereits erledigt.

§ 15.

Auch das bei der Oktaederbildung beobachtete Verfahren lässt sich wiederholt anwenden. Man gelangt dadurch zu Fachwerken von einer besonderen Eigenthümlichkeit. Bei ihnen kommt mindestens ein Dreieck vor, das mit dem Reste durch nur 6 Stäbe verbunden ist. Beseitigt man dasselbe, so bleibt ein Reststück, das dieselbe Eigenschaft besitzt und so weiter, bis schliesslich ein Oktaeder, bezw. nach abermaliger Abtrennung eines Dreiecks ein einzelnes Dreieck übrig bleibt. Die in dieser Weise zusammengesetzten Fachwerke sind zwar nicht mehr von so einfacher Art wie die in § 13 behandelten. Sie zeichnen sich aber dadurch aus, dass man ebenfalls einen verhältnissmässig einfachen Weg zu ihrer Berechnung kennt. Man kann heute keineswegs voraussehen, ob sie nicht späterhin für die Anwendung eine grössere Bedeutung erlangen. Für diesen Fall würde es erwünscht sein, eine besondere Benennung für sie zu besitzen. Man könnte sie etwa „Fachwerke zweiter Stufe“ nennen, im Gegensatz zu den einfachen Fachwerken, welche auch als solche erster Stufe bezeichnet werden könnten.

§ 16. **Fachwerke mit starren Körpern.**

Ebenso wie vom Dreieck kann man auch von einem starren Körper zur Erlangung von Fachwerken ausgehen. Alles, was bisher gesagt war, lässt sich auf diesen Fall unmittelbar anwenden, wenn man nur an die Stelle des Grund-Dreiecks einen starren Körper setzt. Ist der letztere die Erde, so erhält man Fachwerkträger, die in allen bisher behandelten Fällen 3 feste Knotenpunkte besitzen.

Auf jeden Fall müssen von jedem starren Körper, der in einem stabilen Fachwerke vorkommt, mindestens 6 Stäbe ausgehen, die sich auf drei, aber auch auf mehr Knotenpunkte vertheilen können. Wesentlich ist dabei nur die Bedingung, dass sich die Richtungslinien von nicht mehr als drei dieser Stäbe in einem Punkte schneiden und nicht mehr als drei in einer Ebene liegen dürfen. Entfernt man den starren Körper und die von ihm ausgehenden 6 Stäbe, so muss der Rest wieder ein stabiles Fachwerk bilden.

Wenn von einem starren Körper im Fachwerke mehr als 6 Stäbe ausgehen, ist das Reststück, falls das Fachwerk mit der geringsten Zahl von Stäben ausgestattet war, nicht mehr steif. Es fehlen ihm dann so viele Stäbe, als vom starren Körper über die Zahl 6 hinaus ausgingen. Man gelangt daher zu Fachwerkträgern, wenn man aus einem steifen Fachwerke x Stäbe wegnimmt und nach der Erde $x + 6$ Stäbe zieht.

Zwei starre Körper werden durch 6, drei durch 12 Stäbe zu einem Fachwerke ohne freie Knotenpunkte vereinigt, u. s. w. Von einigem Interesse ist der Fall, dass bei drei starren Körpern von jedem nach den beiden anderen je 4 Stäbe hinführen. Eine eingehendere Behandlung desselben kann ebenso wie die des Oktaeders empfohlen werden. — Einzelne dieser starren Körper können auch selbst wieder durch irgend wie gestaltete Fachwerke, unter anderen auch durch Dreiecke oder durch Tetraeder ersetzt werden.

§ 17. **Aufbau aus ebenen Fachwerken.**

Von besonderem Interesse ist die Erzeugung räumlicher Fachwerke unter Zugrundelegung ebener, weil dieses Verfahren das in der Baupraxis vorwiegend geübte ist. Im Wesentlichen läuft dasselbe darauf hinaus, dass man die Auflagerbedingungen, durch welche das ebene Fachwerk erst zu einem räumlich stabilen Gebilde wird, durch die Führung von Stäben ersetzt.

Der einfachste Fall ist folgender. Man wähle ausserhalb der Ebene des ebenen Fachwerks einen neuen Knotenpunkt aus und verbinde denselben mit allen früheren Knotenpunkten durch Stäbe. Von diesen Stäben dienen die drei ersten zur Festlegung des neuen Knotenpunktes, die $n - 3$ übrigen zum Ersatz der Auflagerbedingung an den betreffenden Knotenpunkten. Drei Auflagerbedingungen bleiben demnach aufrecht erhalten. Beseitigt man auch diese, so erhält man ein vollständig freies räumliches Fachwerk, das stabil ist, wenn das ebene stabil war. War das ebene Fachwerk ein regelmässiges, d. h. ein durch Aneinanderreihung von Dreiecken entstandenes, so ist das entstandene räumliche Fachwerk ebenfalls ein „einfaches“ und gestattet eine leichte Berechnung der Stabspannungen.

Mit anderen Worten: Eine Pyramide, deren Grundfläche durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt ist, bildet ein einfaches räumliches Fachwerk.

Wichtiger als dieser Fall ist der andere, dass zwei ebene Fachwerke (deren Ebenen gewöhnlich parallel zu einander sind) zu einem räumlichen Fachwerke vereinigt werden sollen. Wenn jedes derselben n Knotenpunkte und $2n - 3$ Stäbe besitzt, sind dazu, wie aus Gleichung (1) hervorgeht, $2n$ Stäbe erforderlich. Es genügt daher, von jedem Knotenpunkte zwei Stäbe nach dem jenseitigen Fachwerke zu führen. Dabei muss nur darauf geachtet werden, dass auch die Funktionaldeterminante nicht zu Null wird. Im dritten Abschnitte wird dieser Fall eingehender behandelt werden.

Schreibt man dem aus der Vereinigung der beiden ebenen Fachwerke hervorgehenden Gebilde mehr als 6 Auflagerbedingungen vor (oder führt mehr als 6 Stäbe von der Erde aus nach demselben), so kann eine entsprechende Zahl von Stäben weggelassen werden.

§ 18.

Vereinigung von Fachwerken mit gemeinsamen Bestandtheilen.

Aus der Theorie des ebenen Fachwerks kennt man die „mehrfachen“ oder „mehrtheiligen“ Systeme. Man denkt sich dieselben durch eine Uebereinanderlagerung von zwei oder mehr Fachwerken mit gemeinsamen Gurtungen entstanden und zerlegt sie auch zum Zwecke der Berechnung in der angegebenen Weise.

Ganz streng ist dieses Verfahren natürlich nicht. Wenn eine Last an einem Knotenpunkte aufgebracht wird, der zu einem der den mehrtheiligen Balken zusammensetzenden Systeme gehört, verursacht dieselbe Formänderungen, durch welche auch alle Stäbe der übrigen Systeme in Mitleidenschaft gezogen werden, was mit der dem angedeuteten Verfahren zu Grunde liegenden Voraussetzung nicht in Uebereinstimmung ist. Das Verfahren ist indessen hinreichend genau für den praktischen Gebrauch, weil alle einzelnen Balken, aus deren Vereinigung man sich das mehrtheilige System hervorgegangen denkt, durch die gefährlichste Lastzusammenstellung, für welche man die Berechnung durchführt, ungefähr in derselben Weise beeinflusst werden, so dass die Formänderungsbedingungen im einen Systeme nicht merklich durch das Hinzukommen der anderen Systeme abgeändert werden.

Ein ähnliches Verfahren wird auch auf dem Gebiete des räumlichen Fachwerks zuweilen anwendbar sein. Man wird die Berechnung zuweilen dadurch vereinfachen können (ohne sich von der Wahrheit allzuweit zu entfernen), dass man ein Fachwerk mit überzähligen Stäben in zwei Fachwerke ohne solche zerlegt, welche gemeinsame Bestandtheile besitzen. Voraussetzung ist dafür natürlich, dass bei den in Betracht kommenden Belastungen (so wie es oben erläutert wurde) die Formänderungen des einen Systems im Allgemeinen gleichartig sind mit jenen des anderen.

§ 19.

Abgesehen von der soeben betrachteten Zerlegung, welche in gewisser Hinsicht willkürlich ist und nur mit Vorsicht angewendet werden darf, gibt es noch andere Zerlegungen von Fachwerken mit gemeinsamen Bestandtheilen, welche in aller Strenge zulässig sind und der genauen Berechnung der Stabspannungen zu Grunde gelegt werden können.

Zunächst kann man zwei Fachwerke so zusammenlegen, dass sie einen gemeinsamen Knotenpunkt erhalten. Um sie vollständig mit einander zu verbinden, muss man dann noch 3 Stäbe hinzufügen. — Zwei Fachwerke, welche zwei Knotenpunkte gemeinsam haben, werden durch einen Stab zu einem steifen Ganzen verbunden. Hier sind indessen zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn nämlich die Fachwerke ausser den gemeinsamen Knotenpunkten auch einen zwischen ihnen verlaufenden gemeinsamen Stab besitzen, hat das aus ihrer Vereinigung hervorgehende Fachwerk nach Einschiebung des Verbindungsstabes grade die nothwendige Stabzahl, wenn dies hinsichtlich der Theile zutraf. Im anderen Falle ist ein überzähliger Stab vorhanden.

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass zwei Fachwerke mit einander vereinigt werden sollen, die zwei unter sich congruente ebene Fachwerke als Bestandtheile enthalten. Man kann dann das eine Fachwerk so auf das andere legen, dass sich die congruenten Bestandtheile decken. Ich nehme an, dass sowohl die räumlichen als die erwähnten ebenen Fachwerke nur je die nothwendige Stabzahl enthalten und dass bei den letzteren alle Knotenpunkte auf den Gurtungen liegen. Unter diesen Umständen gilt der Satz: Das durch Aufeinanderdecken der congruenten ebenen Bestandtheile erhaltene Fachwerk ist statisch bestimmt (d. h. hat die nothwendige Stabzahl und ist steif), wenn es die beiden Theile waren, sobald man die zur Deckung gebrachten Füllungstheile entfernt.

Zum Beweise nehme man an, dass die congruenten ebenen Bestandtheile je n Knotenpunkte, die Theilstücke im Ganzen $x + n$ und $y + n$ Knotenpunkte hatten. Nach der Vereinigung hat man dann $x + y + n$ Knotenpunkte, ferner $3(x + n) - 6 + 3(y + n) - 6$ Stäbe minus der Zahl derjenigen, welche zum Fortfall kommen. Die Zahl der Füllungsstäbe im ebenen Fachwerke ist aber $n - 3$ und da diese doppelt zu rechnen sind, bleiben $3(x + n) - 6 + 3(y + n) - 6 - 2(n - 3) = 3(x + y + n) - 6 + n$ Stäbe zurück. Bei dieser Auffassung sind aber die zur Deckung gelangten n Gurtungsstäbe des ebenen Fachwerks doppelt zur Anrechnung gelangt. Wir haben daher noch n fortzunehmen und erhalten damit in der That die für $x + y + n$ Knotenpunkte erforderliche Stabzahl.

Der soeben bewiesene Lehrsatz vermag bei Betrachtungen über die Bildung räumlicher Fachwerke, besonders bei Ableitungen eines Systems aus anderen verwandten die besten Dienste zu leisten. Durch ihn bin ich zuerst auf die Flechtwerke aufmerksam geworden. Offenbar kann man mit seiner Hülfe leicht erkennen, dass jedes „Flechtwerk" im Allgemeinen ein statisch bestimmtes Fachwerk ist. Mit Rücksicht auf die besondere Behandlung, welche die Flechtwerke im zweiten Abschnitt erfahren sollen, kann hier von einem Eingehen darauf abgesehen werden.

Ein besonderer Fall ist noch der, dass zwei Fachwerke mit 2 congruenten Dreiecken auf einander gelegt werden. Das entstehende Ganze ist dann ein statisch bestimmtes Fachwerk ohne Hinzuthun oder Wegnahme von Theilen.

Selbstverständlich kann in derselben Weise wie soeben die Zusammensetzung auch die Zerlegung eines Fachwerks in Theilstücke behandelt werden. Unter anderem folgt daher:

Legt man durch ein Fachwerk einen Schnitt, der eine gewisse Anzahl von Knotenpunkten und ebenso viele zwischen denselben verlaufende Stäbe enthält, andere Stäbe aber nicht trifft, so wird durch Einschieben von Diagonalen in der Schnittfläche jedes Theilstück wieder ein stabiles Fachwerk.

Es scheint mir, dass in manchen schwierigen Fällen nicht nur die klare Erfassung des ganzen Trägerbildes, sondern auch die Berechnung der Spannungen durch die weitere Verfolgung dieser Beziehungen sehr gefördert werden kann. Für jetzt muss ich mich indessen auf diese Andeutung beschränken.

Für Fachwerke mit starren Körpern gilt dies Alles auch. Man kann noch hinzufügen: 1) Zwei Fachwerke, welche einen starren Körper gemein haben, bilden vereint ein Fachwerk mit der nothwendigen Stabzahl; 2) Zwei Fachwerke, welche zwei starre Körper gemeinsam zugewiesen erhalten, bilden zusammen ein Fachwerk mit 6 überzähligen Stäben.

Fünftes Capitel.

Berechnung der statisch bestimmten Fachwerke.

§ 20. Allgemeine Methode.

Die Stabspannungen von Fachwerken, welche die nothwendige Stabzahl enthalten und steif sind, können, wie ich streng beweisen werde, stets aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Statik ohne Zuhülfenahme der Elasticitätsgesetze abgeleitet werden — und umgekehrt. Die Bezeichnung „statisch bestimmt" ist daher in jeder Hinsicht gleichwerthig mit jener anderen Festsetzung.

Der allgemeine Weg, welcher stets zur Lösung dieser Aufgabe führt, ist allerdings sehr mühsam und für die praktischen Anwendungen daher nicht geeignet. Man muss sich daher nach anderen umsehen, die leichter zum Ziele führen. In einigen Fällen kann man ohne Schwierigkeit die Aufgabe auf die Berechnung ebener Fachwerkbalken zurückführen und in einigen anderen ist es mir gelungen, ein vereinfachtes Verfahren anderer Art aufzufinden. Ebenso hat Herr Baurath Hacker*) gezeigt, dass man unter sonst sehr verwickelten Bedingungen die Berechnung durch eine geschickte Anordnung wenigstens sehr erleichtern kann.

Man darf hoffen, dass bei der weiteren Durcharbeitung unseres Gebietes die Zahl der möglichst einfach zum Ziele führenden Wege sich noch beträchtlich erweitern wird. Es wird daher kaum jemals Jemand in die Lage kommen, die jetzt zu besprechende allgemeine Methode wirklich zur Durchführung einer Berechnung in Anwendung bringen zu müssen.

Darum bleibt es natürlich nicht minder wichtig, zu wissen, dass ein auf alle statisch bestimmten Fälle anwendbares Verfahren vorhanden ist. Für uns ist nur der Fall von Wichtigkeit, dass die Kräfte, welche auf das Fachwerk einwirken, unter sich im Gleichgewichte stehen und ausschliesslich an

*) Zeitschr. f. Bauwesen 1888.

den Knotenpunkten und starren Körpern, nicht aber an den Stäben angreifen. Bei der Berechnung eines Fachwerkträgers, also eines Fachwerks, das die Erde als starren Körper enthält, kann man die an den freien Knotenpunkten wirkenden Kräfte beliebig wählen und zu jeder an der Erde eine entgegengesetzt gleiche annehmen, wodurch das Gleichgewicht hergestellt wird.

Zunächst werde ich wieder annehmen, dass es sich um die Berechnung eines Fachwerks ohne starre Körper handle. Ich lege dann ein Coordinatensystem auf demselben fest in derselben Weise, wie es in § 4 geschehen war. Die an irgend einem Knotenpunkte i angreifende äussere Kraft zerlege ich in ihre Componenten parallel zu den Coordinaten-Achsen $X_0^i\ Y_0^i\ Z_0^i$. Ebenso ersetze ich die Spannung S_g irgend eines Stabes g, der am Knotenpunkte i angreift, durch ihre Componenten $X_g^i\ Y_g^i\ Z_g^i$. Wenn man Zugspannungen positiv rechnet, ist

$$X_g^i = - S_g \cdot \frac{x_i - x_k}{l_g} \tag{9}$$

Hierbei bedeutet k die Ordnungsnummer des Knotenpunktes, mit welchem das andere Ende des Stabes g verbunden ist, während die Bezeichnungen im Uebrigen so wie im zweiten Capitel gewählt sind. Die Componente der am Knotenpunkte k angreifenden Spannung des Stabes g kann, wie man ebenfalls sofort einsieht,

$$X_g^k = - S_g \cdot \frac{x_k - x_i}{l_g} \tag{10}$$

gesetzt werden. Für die Componenten in den Richtungen der Y- und Z-Achse gelten entsprechende Ausdrücke.

Das Gleichgewicht der Kräfte an jedem Knotenpunkte erfordert nun, dass die Componenten-Summe für jede Achsenrichtung zu Null wird. Man hat daher z. B. für die X-Componenten am Punkte i die Gleichung

$$\sum S_g \frac{x_i - x_k}{l_g} = X_0^i. \tag{11}$$

Im Ganzen können wir $3n$ Gleichungen dieser Art anschreiben. Von diesen sind indessen 6 nothwendige Folgen der übrigen. Wir haben nämlich vorausgesetzt, dass die äusseren Kräfte im Gleichgewichte mit einander stehen sollen. Diese Bedingung können wir uns dadurch erfüllt denken, dass wir alle übrigen Componenten der äusseren Kräfte willkürlich wählen, dagegen die drei Componenten des mit dem Coordinatenursprunge zusammenfallenden, sowie die Y- und Z-Componente des Punktes, durch den wir die X-Achse, und schliesslich die Z-Componente des Punktes, durch den wir die XY-Ebene führten, dem entsprechend wählen. Die betreffenden 6 Componentengleichungen werden dann für diese Punkte identisch erfüllt, sobald man sich die aus den übrigen Gleichungen berechneten Stabspannungen eingesetzt denkt.

Für die Berechnung der letzteren bleiben demnach $3n - 6$ Gleichungen übrig. Ebenso gross ist aber nach § 4 die Zahl der Stäbe, also der Unbekannten. Die Gleichungen (11) sind in Bezug auf die Unbekannten S_g vom ersten Grade und geben daher eine eindeutige Lösung, sobald sie von einander unabhängig sind. Ob sie dies sind, erkennt man aus der Determinante der Coefficienten.

Zu diesem Zwecke beachte man, dass nach Gleichung (2) bezw. (3)

$$x_i - x_k = \frac{1}{2}\frac{\partial f_g}{\partial x_i} \tag{12}$$

und daher

$$X_g^i = -\frac{1}{2}\frac{S_g}{l_g}\frac{\partial f_g}{\partial x_i} \tag{13}$$

gesetzt werden kann. Gleichung (11) lässt sich daher schreiben

$$\frac{S_1}{2\,l_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{S_2}{2\,l_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \frac{S_3}{2\,l_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_i} + \cdots = X_0^i. \tag{14}$$

Während die Summirung in Gleichung (11) sich nur auf diejenigen Stäbe bezog, welche vom Knotenpunkte i ausgingen, können wir uns in Gleichung (14) sämmtliche Stabspannungen eingesetzt denken, da bei einem Stabe, der nicht von i ausgeht, der partielle Differentialquotient, welcher als Coefficient von $S/2l$ auftritt, verschwindet. Wir haben dann auf der linken Seite von (14) $3n - 6$ Glieder, von denen je eines sich auf jede der Unbekannten bezieht. Damit man die $3n - 6$ Gleichungen (14) nach den Unbekannten $S/2l$ eindeutig auflösen könne, muss die Determinante

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_p}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_p}{\partial \xi_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi_p} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_p} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_p}{\partial \xi_p} \end{vmatrix} \tag{15}$$

von Null verschieden sein. In derselben bedeuten die ξ wieder diejenigen $3n - 6$ Knotenpunktscoordinaten, welche bereits in § 5 damit bezeichnet wurden.

Die Determinante $\varDelta'$ unterscheidet sich aber von der Determinante $\varDelta$ in § 5 nur dadurch, dass die Reihen und Colonnen mit einander vertauscht sind, ist ihr also nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie identisch gleich. Wir sind damit zu dem für die Fachwerkstheorie höchst bedeutungsvollen Satze gelangt:

Ein Fachwerk, das nur die nothwendige Zahl von Stäben besitzt und stabil ist, ist auch statisch bestimmt und umgekehrt es ist stabil, wenn es für alle vorkommenden Belastungen statisch bestimmt ist.

Ich habe diesen vorher unbekannten Satz, abgesehen von der zuletzt darin vorkommenden Bestimmung, schon in meinem früheren Buche über das Fachwerk (zunächst für ebene Fachwerke) gegeben. Den Beweis habe ich dort allerdings nur andeutungsweise geführt, weil ich kein besonderes Gewicht auf denselben legen zu sollen glaubte. Gerade für das räumliche Fachwerk bildet er aber, wie aus dem Inhalte der beiden letzten Abschnitte dieses Buches deutlich genug hervorgeht, ein wichtiges Hülfsmittel zur Beurtheilung der Steifigkeitsbedingungen.

Eine Bemerkung von Herrn Prof. Lang*) veranlasste mich dann zu einer eingehenderen Darlegung des Beweises**). Später führte Herr Prof. Grübler***) den Beweis, dass ein nicht stabiles Fachwerk unter gewissen Umständen statisch bestimmt sein kann, nämlich dann, wenn die an ihm wirkenden äusseren Kräfte gewisse Bedingungen erfüllen. Er kommt so zu dem Resultate, dass der Schluss auf die Stabilität eines Fachwerks aus der statischen Bestimmtheit desselben unzuverlässig sei. Ich muss dies insofern anerkennen, als die Stabilität nicht damit nachgewiesen ist, dass man für irgend ein bestimmt gewähltes Kräftesystem die Stabspannungen auf statischem Wege berechnen kann. Jedenfalls bleibt aber der von mir gegebene Beweis des Satzes unanfechtbar, wenn man nachweisen kann, dass für jedes Kräftesystem, das nur an die allgemeinen 6 Gleichgewichtsbedingungen am starren Körper gebunden ist, die Stabspannungen sich auf statischem Wege berechnen lassen. In vielen Fällen der Anwendung, z. B. bei der Berechnung der Flechtwerke, geht dies aus dem Rechnungsgange sofort unzweifelhaft hervor. Man kann aber dann nicht auf den so wichtigen Schluss verzichten, dass das betreffende System stabil ist, blos deshalb, weil bei unvorsichtiger Anwendung desselben ein Irrthum unterlaufen kann. In meinen früheren Veröffentlichungen habe ich mir unter statisch bestimmten Fachwerken immer nur solche vorgestellt, die für jede Belastung statisch bestimmt sind. Im Uebrigen kann ich es nur als ein Verdienst der Herren Lang und Grübler bezeichnen, auf diesen Punkt hingewiesen und ihn in ein helles Licht gesetzt zu haben. Um allen berechtigten Einwendungen zu entgehen, habe ich in den Wortlaut des Satzes den Zusatz „für alle möglichen Belastungen“ aufgenommen.

Die erwähnten Einwendungen gegen meine Beweisführung gipfeln darin, dass die Gleichungen (14) bestimmte endliche Lösungen auch dann ergeben können, wenn die Determinante $\varDelta'$ ver-

---

*) Rigasche Industrie-Zeit. 1886. S. 268.

**) Schweiz. Bauzeitung 1887.

***) Rigasche Industrie-Zeit. 1888. S. 277.

schwindet. Um z. B. S_1 zu berechnen, bilde man die Determinante Δ_1'

$$\Delta_1' = \begin{vmatrix} \Xi_0^1 & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial \xi_1} \\ \Xi_0^2 & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial \xi_2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \Xi_0^p & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_p} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial \xi_p} \end{vmatrix} \tag{16}$$

welche sich von Δ' nur dadurch unterscheidet, dass die Glieder der ersten Colonne durch die willkürlich gegebenen Componenten der äusseren Kräfte ersetzt sind, welche so wie vorher die zugehörigen Knotenpunktscoordinaten durch ξ jetzt durch die Ξ bezeichnet sind. Man hat dann

$$S_1 = 2 l_1 \cdot \frac{\Delta_1'}{\Delta'} \tag{17}$$

und entsprechend für alle übrigen Spannungen. Nun kann es allerdings, worauf Hr. Grübler hingewiesen hat, vorkommen, dass für eine bestimmte Wahl des Lastensystems Ξ die Determinanten $\Delta_1', \Delta_2' \ldots \Delta_p'$ ebenfalls sämmtlich gleich Null werden, so dass sie durch Δ' dividirt einen bestimmten endlichen Werth annehmen können. Das Fachwerk ist dann, weil die Determinante $\Delta = 0$ ist, nach § 4 labil, gleichzeitig lassen sich aber für die betreffende Lastzusammenstellung sämmtliche Stabspannungen auf rein statischem Wege berechnen, bezw. lässt sich durch ein System von Stabspannungen Gleichgewicht an jedem Knotenpunkte herstellen.

Einem solchen Fachwerke kann ich indessen die Bezeichnung statisch bestimmt nicht zugestehen. Dazu verlange ich, dass sich für jedes beliebige Lastensystem ein Gleichgewichtssystem der Stabspannungen auf rein statischem Wege angeben lässt. Dabei ist wohl zu beachten, dass die Ξ in der Determinante Δ_1' vollständig von einander unabhängig sind, indem gar keine Gleichgewichtsbedingungen zwischen ihnen zu erfüllen sind.

Wenn man die Benennung statisch bestimmt nur in diesem Sinne gebraucht, fallen die Einwendungen des Herrn Grübler, wie sich aus der Discussion dieser Ausnahmefälle in der Lehre von den Determinanten ergibt*), vollständig fort und der von mir auf-

---

*) Von befreundeter Seite wurde ich auf die sehr klare Darstellung dieser Beziehungen der Determinantentheorie in den von Kerschensteiner

gestellte Satz hat die strengste Gültigkeit. Jene Einwendungen sind daher widerlegt oder auf ihr berechtigtes Mass zurückgeführt, sobald man dem Begriffe des „statisch bestimmten“ Fachwerks den angegebenen Sinn unterlegt.

Als Beispiel betrachte ich noch das ebene Viereck mit zwei Diagonalen, das als Ausnahmefall des Tetraeders angesehen werden kann. Die Funktionaldeterminante wird zu Null und dem entsprechend bleibt eine unendlich kleine relative Beweglichkeit des Stabsystems im Raume zurück. So lange allerdings alle Kräfte, die an den Knotenpunkten angreifen, in der Vierecksebene bleiben, ist jene ∞ kleine Formänderung nicht zu befürchten. Man könnte dann das Viereck als ein statisch unbestimmtes und stabiles ebenes Fachwerk ansehen. Der Widerspruch wird indessen dadurch gehoben, dass man im letzteren Falle vier Auflagerbedingungen stillschweigend hinzufügt, von denen drei zum Festhalten in der Ebene und eine zur Erhöhung des Zwanges im Stabgebilde selbst dienen. Durch diese letztere wird aus dem vorher (bei beliebiger Kraftrichtung) labilen Systeme ein stabiles und statisch unbestimmtes mit einem überzähligen Stabe.

§ 21.

Wichtiger als der bisher behandelte Fall des Fachwerks mit nur freien Knotenpunkten ist der des Fachwerkträgers. Ich habe jenen, da er in gewisser Hinsicht einfacher ist (und auch dem Herkommen zu Liebe), vorangestellt; man übersieht aber sehr bald, dass für ein Fachwerk mit einem starren Körper alle früheren Schlüsse ohne jede Aenderung gültig bleiben, sobald man das Coordinatensystem auf den starren Körper legt und die Componentengleichungen nur für die freien Knotenpunkte anschreibt. Von diesen $3n_f$ Gleichungen, welche die Stelle der Gleichungen (14) einnehmen, wodurch indessen an der Form der letzteren gar nichts geändert wird, gilt dann alles oben Gesagte ohne jede Einschränkung. Besonders hebe ich noch hervor, dass ein Fachwerkträger stabil ist, wenn sich die Stabspannungen desselben für jedes mögliche Lastensystem berechnen lassen.

---

herausgegebenen Vorlesungen Gordans über Invariantentheorie Bd. I, S. 118, Leipzig 1885 aufmerksam gemacht, aus der sich dies aufs Unzweideutigste ergibt.

Wenn zwei oder mehr starre Körper im Fachwerke vorkommen, ändern sich die früheren Betrachtungen etwas ab, weil noch das Gleichgewicht der Kräfte an denjenigen starren Körpern in Betracht zu ziehen ist, welche nicht als Träger des Coordinatensystems dienen. Da dieser Fall vorläufig kein besonderes Interesse für uns hat, soll von einem weiteren Eingehen auf denselben abgesehen werden.

§ 22.

In der Folge werde ich stets voraussetzen, dass die Funktionaldeterminante $\varDelta$ bezw. $\varDelta'$ von Null verschieden, das Fachwerk also statisch bestimmt ist. — Die Lösungen der Gleichungen (11) oder (14) sind in Bezug auf die Lastcomponenten X_0^i u. s. w. linear. Daraus folgt, dass die Spannung in jedem Stabe bei irgend einer zusammengesetzten Belastung gleich der algebraischen Summe der durch die Einzelbelastungen hervorgebrachten Spannungen ist.

Auch auf den Fall, dass nicht nur an den Knotenpunkten, sondern zugleich auch an den Stäben Lasten angreifen, lässt sich die vorausgehende Betrachtung ohne Schwierigkeit übertragen.

§ 23. **Graphische Methode.**

Wie bereits bemerkt wurde, lässt sich die Berechnung der Stabspannungen in mehreren praktisch wichtigen Fällen nach einem einfacheren Verfahren ausführen. Am schönsten gestaltet sich dasselbe, wenn man im Stande ist, einen Kräfteplan zu zeichnen.

Wenn ein Knotenpunkt vorhanden ist, von dem nur drei Stäbe ausgehen, die nicht alle in derselben Ebene liegen dürfen, kann man für jede gegebene Belastung dieses Knotenpunktes die drei Stabspannungen durch Construction eines windschiefen Kräftevierecks ermitteln. Das letztere muss in zwei Projectionen gezeichnet werden. Die Stabspannungen ergeben sich dann durch die Ermittelung der wahren Längen der Polygonseiten.

Die Ausführung der Zeichnung kann in verschiedener Weise erfolgen. In der Mehrzahl der Fälle wird das folgende

Verfahren am schnellsten zum Ziele führen. Man lege durch zwei der Stäbe, etwa durch *a* und *b* (Abb. 2) eine Ebene und suche die Spur derselben *ab* in einer der Projectionsebenen auf, ebenso die Spur *cp* der Ebene, welche durch die Richtung der äusseren Kraft *P* und den Stab *c* gelegt werden kann. Dann verbindet man den Knotenpunkt mit dem Schnittpunkte

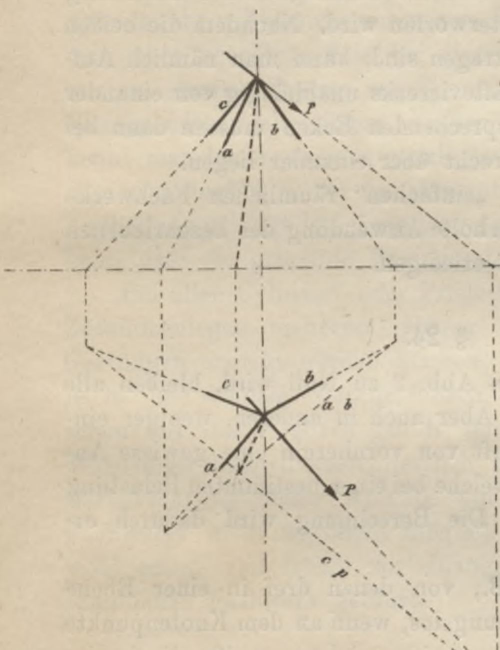


Abb. 2.

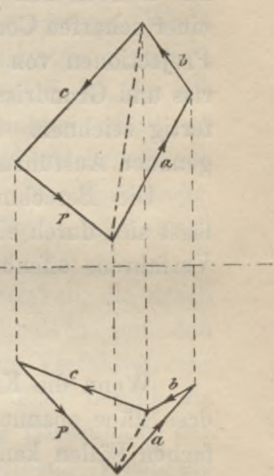


Abb. 2a.

der Spuren *ab* und *cp*. Die Verbindungslinie ist die Schnittlinie der beiden Ebenen und in Aufriss und Grundriss einzutragen. Wenn die Stabkräfte *A*, *B*, *C* mit der äusseren Kraft *P* im Gleichgewichte stehen sollen, muss die Resultirende von *A* und *B* gleich und entgegengesetzt gerichtet sein mit derjenigen aus *C* und *P*. Jede dieser beiden Resultirenden muss daher auf die vorhin construirte Schnittlinie der betreffenden Ebenen fallen. Man erhält jetzt das Kräfteviereck in sehr einfacher Weise, indem man zuerst das Dreieck für *P*, *C* und deren Resultirende zeichnet und daran das Dreieck für *A*, *B* und deren Resultirende mit der gleichen Seite reiht, wie dies in Abb. 2a ausgeführt ist.

Dieses Verfahren ist zwar umständlicher als die Lösung der entsprechenden Aufgabe in der Ebene, welche nur das Aufzeichnen eines einzigen Kräftedreiecks erfordert; bei einiger Uebung führt es aber doch ziemlich schnell zum Ziele. Dabei hat es noch den Vorzug, dass die Genauigkeit der Zeichnung einer scharfen Controle unterworfen wird. Nachdem die beiden Projectionen von P aufgetragen sind, kann man nämlich Aufriss und Grundriss des Kräftevierecks unabhängig von einander fertig zeichnen. Die entsprechenden Ecken müssen dann bei genauer Ausführung senkrecht über einander liegen.

Die Berechnung der „einfachen" räumlichen Fachwerke lässt sich durch eine wiederholte Anwendung des beschriebenen Verfahrens offenbar leicht erledigen.

§ 24.

Wenn die Kraft P in Abb. 2 zu Null wird, bleiben alle drei Stäbe spannungslos. Aber auch in anderen, weniger einfachen Fällen kann man oft von vornherein eine gewisse Anzahl von Stäben angeben, welche bei einer bestimmten Belastung ohne Spannung bleiben. Die Berechnung wird dadurch erheblich vereinfacht.

Bei vier Stäben z. B., von denen drei in einer Ebene liegen, ist der vierte spannungslos, wenn an dem Knotenpunkte keine äussere Kraft oder nur eine solche angreift, die in der Ebene der drei Stäbe liegt. Selbstverständlich gilt derselbe Schluss auch, wenn ausser jenen vier Stäben von demselben Knotenpunkte noch andere ausgehen, von denen aber bereits (etwa durch die vorhergehende Anwendung derselben Schlussweise) bekannt ist, dass sie keine Spannung aufnehmen.

§ 25.

Von grossem Vortheile ist zuweilen ein Vorgehen von etwas abgeänderter Art. Sobald man sich überzeugt hat, dass das Fachwerk oder der Träger nach der Zahl der Stäbe und Auflagerbedingungen statisch bestimmt ist, versucht man, ob sich für alle vorkommenden Lasten (bezw. für diejenigen Belastungen, aus denen sich alle mannigfaltiger gestalteten zusammensetzen lassen) Spannungen angeben lassen, durch welche Gleichgewicht an jedem Knotenpunkte herbeigeführt wird.

Auf den ersten Blick kann eine Kräftezerlegung dieser Art oft sehr willkürlich und ungerechtfertigt erscheinen. Wenn man aber beachtet, dass bei statisch bestimmten Systemen nur ein einziges System von Spannungen möglich ist, das die Gleichgewichtsbedingungen an allen Knotenpunkten erfüllt, erkennt man leicht, dass es gleichgültig ist, auf welchem Wege man ursprünglich zu der Annahme über die Art der Spannungsvertheilung gelangt ist, wenn man nur nachträglich nachweisen kann, dass die genannte Bedingung zutrifft.

Bei allen Cylinder- oder Prismen-Flechtwerken, die durch Zusammenlegen mehrerer ebener Fachwerkbalken mit den Gurtungen erzeugt werden können, ist dieses Verfahren sehr leicht und bequem durchzuführen. In der That beruht die schon seit vielen Jahren geübte, gewöhnliche Berechnung der Windverstrebungen ausschliesslich auf demselben. Wenn die Zurückführung dieser Aufgabe auf die Theorie des ebenen Fachwerks nicht so leicht möglich gewesen wäre, hätte sie wohl schon viel früher zur Inangriffnahme der Lehre vom räumlichen Fachwerk geführt.

Sechstes Capitel.

Gegendiagonalen.

§ 26.

Eine Mittelstellung zwischen den statisch bestimmten und den unbestimmten Fachwerken nehmen diejenigen Fachwerke mit Gegendiagonalen ein, welche durch Ersatz von je zwei zusammengehörigen Gegendiagonalen durch eine einzige steife

Diagonale statisch bestimmt werden. Obschon der Begriff der Gegendiagonalen, der vom ebenen Fachwerke her bekannt ist, beim Fachwerke im Raume einer Erweiterung fähig ist, werde ich mich hier damit begnügen, ihn in jener einfachsten Fassung zu verwenden. Ich setze also voraus, dass vier benachbarte, in einer Ebene liegende Knotenpunkte zunächst durch vier gegen alle vorkommenden Zug- und Druckspannungen widerstandsfähige Stäbe, welche die Umrisse des „Faches“ bilden und dann noch durch zwei schlaffe Diagonalstäbe mit einander verbunden sind.

Im Allgemeinen haben wir es dann mit einem statisch unbestimmten Systeme zu thun. Die statische Unbestimmtheit ist aber insofern von besonderer Art, als sie nur auf die das Fach zusammensetzenden Stäbe sich bezieht und auf alle übrigen Theile des Fachwerkes ohne Einfluss bleibt. Denken wir uns nämlich nur in einem Fache Gegendiagonalen und diese beiden nachträglich durchschnitten, so bildet der Rest einen Mechanismus, der sich so bewegen kann, dass die eine Diagonale sich verkürzt und die andere sich gleichzeitig verlängert. Daraus geht hervor, dass eine Zugspannung, die wir in einem Diagonalstab etwa dadurch hervorbringen, dass wir ihn bei höherer Temperatur einsetzen und ihn sich dann abkühlen lassen, auch die andere Diagonale in Zug versetzt, im Uebrigen aber nur die den Umriss des Faches bildenden Stäbe in Spannung versetzt.

Setzen wir nun voraus, dass beide Gegendiagonalen nach Entfernung aller Lasten spannungslos sind (also keine „Montirungsspannung“ haben), so lässt sich die Berechnung auf rein statischem Wege in der Weise durchführen, dass man zunächst nur eine Diagonale annimmt und schliesslich bei denjenigen Belastungen, die in dieser eine Druckspannung hervorrufen würden, durch blosse Umrechnung innerhalb des einzelnen Faches die Druckspannung durch eine Zugspannung in der anderen Diagonale ersetzt. Bei symmetrisch gestalteten Fächern sind beide von gleicher Grösse; indessen muss auch in diesen Fällen auf die Aenderung, welche die Spannungen in den Umrissstäben des Faches erfahren, gehörig geachtet werden.

Bei der Ausführung einer solchen Berechnung ist es gleichgültig, welche der beiden Gegendiagonalen eines Faches man zunächst als allein vorhanden in Betracht zieht. Durch eine geschickte Wahl in dieser Hinsicht kann man die Arbeit oft sehr vereinfachen. So hat Herr Hacker auf diesem Wege die Berechnung einer Schwedler'schen Kuppel gegenüber der von mir ursprünglich angegebenen beträchtlich übersichtlicher gestaltet und sie dadurch sehr erleichtert.

§ 27. Endlich kleine Beweglichkeit von Fachwerken mit Gegendiagonalen.

Bis dahin hatte ich im Wesentlichen nur zu wiederholen, was aus der Lehre vom ebenen Fachwerke bereits bekannt war. In einer sehr wichtigen Beziehung, die (wie gewiss noch viel andere) bisher der Beachtung entgangen war, zeigt das räumliche Fachwerk mit Gegendiagonalen indessen ein ganz besonderes Verhalten.

Betrachten wir z. B. eine symmetrisch gestaltete und auch symmetrisch belastete parabolische Schwedler'sche Kuppel. In dieser erfahren nur die Sparren- und Ringstäbe Druckspannungen, die schlaffen Diagonalen bleiben, wenn keine Montirungsspannungen vorhanden waren, spannungslos. Durch jene Druckspannungen werden aber die Umrissstäbe jedes einzelnen Faches verkürzt. Es müssen daher auch die Längen der Diagonalen sich verkürzen und beide Diagonalstäbe müssen um einen entsprechenden Betrag seitlich ausknicken.

Offenbar verhält sich, so lange nur kleine Bewegungen vorkommen, eine Kuppel in diesem Zustande gegen ein Moment, das eine Drehung um die senkrechte Kuppelachse hervorzubringen sucht, so, als wenn überhaupt keine Diagonalstäbe vorhanden wären. Erst nachdem die Verdrehung in allen einzelnen Stockwerken so weit vorgeschritten ist, bis je eine Diagonale in jedem Fache ihre ursprüngliche Länge

(d. h. die dem spannungslosen Zustande entsprechende) wieder angenommen hat, während die andere weiter ausknickte, beginnt sich ein merklicher Widerstand gegen eine Weiterdrehung geltend zu machen.

Man stelle sich nun vor, dass ein ganz kleines Moment der bezeichneten Art, das periodisch die Richtung wechselt, auf eine beliebig stark construirte Kuppel einwirke. Wenn die Dauer der Periode zufälligerweise mit der Schwingungsdauer der Kuppel um ihre senkrechte Achse zusammenfällt, werden sich, wie man leicht übersieht, die Schwingungen so erheblich steigern können, dass dadurch schliesslich der Bruch herbeigeführt werden kann.

Aus diesem Grunde muss man der durch die Anwendung schlaffer Gegendiagonalen hervorgerufenen kleinen Beweglichkeit bei räumlichen Fachwerken eingehende Beachtung schenken. Ich habe dieselbe eine „endlich kleine“ Beweglichkeit (oder Labilität) genannt im Gegensatze zu der „unendlich kleinen“ Beweglichkeit in solchen Fachwerken, bei denen der bekannte Ausnahmefall $\Delta = 0$ vorliegt. Die letztere ist weit gefährlicher, als die erstere, weil sie im Allgemeinen zu unendlich grossen Stabspannungen führt, aber auch diese kann, wie man sieht, unter Umständen Gefahr bringen.

Uebrigens ist ein Moment zur Hervorbringung der Drehung um die Kuppelachse nicht einmal erforderlich. Sobald nach dem Aufbringen der senkrechten Lasten die endlich kleine Beweglichkeit der Kuppel zu Stande gekommen ist, wird ein Ausweichen nach derjenigen der beiden möglichen Richtungen erfolgen, für welche durch zufällige Umstände die güustigeren Bedingungen vorliegen. Ein Schwingen aus der einen Grenzlage in die andere mit bedeutender Verstärkung der Schwingungsbewegungen kann daher auch durch periodisch wechselnde oder stossweise einwirkende senkrechte Lasten unter ungünstigen Umständen hervorgerufen werden.

Für die Schwedler'schen Kuppeln sind diese Bemerkungen unter gewöhnlichen Umständen nicht gerade von ernster Bedeutung. Es fehlt hier an einem Anlasse, der die endlich kleine Beweglichkeit zur Geltung kommen liesse. Ausserdem wird dieselbe durch die Dachschalung entweder ganz beseitigt oder mindestens sehr abgeschwächt. Dass indessen bei allen Dächern über kreisförmigem Grundriss die Bewegungen um die vertikale Hauptachse volle Aufmerksamkeit verdienen, zeigt u. A. der Einsturz eines Gasbehälterdaches, den Herr Schwedler erwähnt*) und auf eine Bewegung der angegebenen Art zurückführt. (Die Dachconstruction bestand übrigens in diesem Falle nicht aus einer Schwedler'schen Kuppel, sondern bildete ein Kegeldach älterer Art.)

§ 28.

Von grösserer praktischer Bedeutung ist die endlich kleine Beweglichkeit der zu Brückenbauten verwendeten räumlichen Fachwerke. Abb. 3 stelle den Obertheil einer aus zwei Parallelbalken und dazwischen liegenden Windverstrebungen hergestellten Brücken-Construction im Grundrisse dar. Zunächst sei angenommen, dass in dem Fache $ABCD$, in welchem BC und AD Obergurtstäbe der Hauptträger und AB und CD sog. „Querriegel" oder (bei oben liegender Fahrbahn) Querträger sind, nur eine Diagonale AC vorkomme. Alle Stäbe seien zunächst spannungslos. Beim Aufbringen einer Belastung auf die Brücke erfahren die Stäbe BC und AD Druckspannungen, während die übrigen Stäbe des Faches ohne Spannung bleiben. Die elastische Verkürzung der Rechteckseiten BC und AD hat auch eine Verkürzung der Diagonale AC zur Folge. Wenn diese spannungslos bleiben soll, muss sie entweder (falls sie schlaff construirt ist), seitlich ausknicken oder eine Verschie-

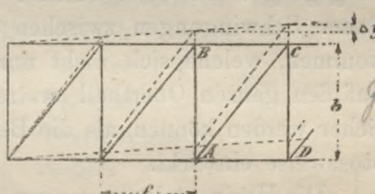


Abb. 3.

*) Schwedler, Construction der Kuppeldächer. 2. Aufl. Berlin 1877. S. 16.

bung des Faches herbeiführen, so wie es in Abb. 3 durch punktirte Linien angegeben ist.

Die mit $\varDelta y$ bezeichnete Strecke, also der Unterschied der Horizontalbewegungen der Knotenpunkte B und C lässt sich leicht berechnen, wenn die specifische Druckspannung s der Obergurtstäbe BC und AD gegeben ist. Man erhält

$\frac{\Delta y}{\Delta f} = \frac{f}{b}$ $\Delta f = \frac{fs}{E}$

$$\varDelta y = \frac{s}{E} \cdot \frac{f^2}{b} \tag{18}$$

wenn unter E der Elasticitätsmodul, unter f die Fachlänge AD und unter b die Entfernung der beiden Haupttragwände von einander (oder die Breite der Brücke) verstanden wird.

Falls nun doppelte schlaffe Diagonalen angebracht sind, erstreckt sich die endlich kleine Beweglichkeit nicht nur von der ursprünglichen Lage aus bis zu der durch die punktirten Linien angegebenen, sondern um ebenso viel auch auf die entgegengesetzte Seite hinaus. Im Brückenobertheile können daher Schwingungen zwischen diesen beiden Grenzlagen vorkommen, welche sich nicht nur auf das eine Fach, sondern auf den ganzen Obertheil erstrecken und hier um so gefährlicher werden können, als die Belastung einer Eisenbahnbrücke stossweise einwirkt.

Die Horizontalbewegungen, um die es sich hierbei handelt, sind allerdings zunächst, d. h. so lange keine Verstärkung derselben durch taktweises Zusammentreffen der einzelnen Antriebe eingetreten ist, nur gering. Mit $s = 500$ Kg/cm², $E = 2\,000\,000$ Kg/cm² und $f = b$ wird z. B. $\varDelta$ y nur gleich $^1/_{4000} f$, also gleich 1 mm, wenn $f = 4$ m ist. Man muss indessen beachten, dass sich diese relativen Verschiebungen für eine Reihe von Fächern zu einander addiren und dass ferner auch geringe seitliche Bewegungen unter Umständen zu grossen Spannungserhöhungen in einzelnen Stäben führen können.

Durch Seitenschwankungen dieser Art ist der Einsturz der Birsbrücke bei Mönchenstein zum grossen Theile verschuldet worden, wie ich s. Zt. nachgewiesen habe*). Wenn dabei auch

*) Deutsche Bauzeitung 1891. S. 333. Vgl. auch den Nachtrag.

noch andere Ursachen mitgewirkt haben, kann man doch soviel mit Bestimmtheit behaupten, dass jene Schwankungen zu dem unglücklichen Ereignisse erheblich beigetragen haben.

Allerdings lagen dort die Verhältnisse für die Ausbildung grösserer Schwingungen ungewöhnlich günstig, weil die Construction kein stabiles räumliches Fachwerk bildete und weil zugleich die Steifigkeit der Wandglieder so gering war, dass dieser Mangel durch dieselbe nicht hinreichend ausgeglichen werden konnte. Aber auch bei einem stabilen räumlichen Fachwerke ist, wie sich schon oben bei der Betrachtung der Schwedler'schen Kuppeln zeigte, ein Entstehen von Schwingungen in Folge der endlich kleinen Labilität möglich. Hier sind denselben jedoch viel engere Grenzen gezogen, so dass in der Mehrzahl der Fälle eine ernstere Gefahr nicht zu besorgen ist.

§ 29.

In ähnlicher Weise wie bei dem oberen Windbalken kann sich die endlich kleine Beweglichkeit auch bei solchen Brücken bemerklich machen, die aus zwei Parallelträgern mit oben liegender Fahrbahn hergestellt und durch schlaffe Querdiagonalen (zwischen linker unterer und rechter oberer Gurtung und umgekehrt) zu einem räumlich stabilen Systeme verbunden sind. Ein Blick auf Abbildung 4, welche einen Querschnitt durch die Brücke darstellt, lässt dies sofort erkennen.

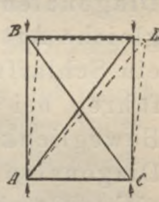


Abb. 4.

Nehmen wir zunächst an, dass nur über den Pfeilern Querdiagonalen angeordnet sind (was, wie sich später zeigen wird, vollständig ausreicht), so werden die Endvertikalen AB und CD verkürzt. Das Endquerfach $ABCD$ kann sich daher so, wie es durch punktirte Linien angedeutet ist, verschieben, bis die verkürzte Diagonale AD ihre ursprüngliche Länge wieder erreicht hat und die entsprechende Formänderung kann auch nach der anderen Seite hin eintreten. Die Zufügung weiterer Diagonalkreuze zwischen den beiden Brückenenden ändert daran nichts, da diese sich in derselben Lage befinden.

Es scheint mir, dass die Seitenschwankungen, welche die Herren Fränkel und Krüger*) am Weidaer Viadukte feststellen konnten, auf diese Art entstanden sind. — Ich möchte bei dieser Gelegenheit recht eindringlich auf die wichtigen Ergebnisse jener mustergültigen Experimentaluntersuchung hinweisen. Sie zeigen deutlich den grossen Einfluss, welchen die seitlichen Bewegungen selbst bei den stabilsten Brücken erlangen können, und lassen es durchaus erklärlich erscheinen, dass diese unter ungünstigeren Umständen bis zum Bruche führen können. Speciell beziehen sich die oben gemachten Bemerkungen auf das am angeführten Orte S. 468 Gesagte.

Wegen der Wichtigkeit dieser Betrachtungen für den ausübenden Ingenieur fasse ich dieselben nochmals zu dem folgenden Ausspruche zusammen:

Fachwerke mit schlaffen Gegendiagonalen gleichen zwar im Allgemeinen den mit einfachen steifen Diagonalen versehenen und lassen sich auf die gleiche Art berechnen. Solche Belastungsarten, die ein Schlaffwerden beider Diagonalen hervorbringen, führen bei ihnen indessen zu einer endlich kleinen Beweglichkeit des ganzen Systems. Doppelte schlaffe Diagonalen sind daher nicht als ein in jeder Hinsicht gleichwerthiger Ersatz der steifen Diagonalen anzusehen; man wird vielmehr im einzelnen Falle zu erwägen haben, ob sie zugelassen werden können.

In dieser letzten Hinsicht bemerke ich noch, dass z. B. eine symmetrisch belastete Schwedler'sche Kuppel, welche nur steife Diagonalen besitzt, die alle in gleicher Richtung gehen, bei gleichmässiger Belastung zwar ebenfalls eine kleine Drehung um die vertikale Kuppelachse ausführt. Diese ist aber eine rein elastische Formänderung von genau bestimmter Art, welche nur mit der Belastung sich ändert und nicht durch verhältnissmässig sehr kleine Kräfte wieder rückgängig gemacht werden kann. Schwingungen sind zwar auch dann noch möglich; dieselben sind aber rein elastische oder mit anderen Worten Schallschwingungen, die

*) Civil-Ingenieur 1887.

ganz anderen Gesetzen unterworfen sind als die oben besprochenen und keineswegs zu so grossen Ausweichungen und Beanspruchungen führen können. Fachwerke mit steifen Diagonalen, die an sich stabil sind, sind daher von dem Mangel der endlich kleinen Beweglichkeit in der hier erörterten Bedeutung dieses Wortes unbedingt frei.

Dieselben Bemerkungen gelten natürlich auch für die anderen oben betrachteten Fälle. — Es bedarf übrigens kaum eines besonderen Hinweises, dass die endlich kleine Beweglichkeit auch durch zwei Gegendiagonalen vermieden wird, die entweder beide steif sind oder auch bei flachem Querschnitte von vornherein eine hinreichende Montirungsspannung besassen.

Siebentes Capitel.

Elastische Formänderung der Fachwerke und Berechnung der statisch unbestimmten Fachwerke.

§ 30.

Elastische Formänderung statisch bestimmter Fachwerke.

Hinsichtlich der Behandlung der Fachwerke auf Grund des Elasticitätsgesetzes macht es nur einen geringen Unterschied, ob es sich dabei um ebene oder räumliche Fachwerke handelt. Wenn auch wegen des verwickelteren Zusammenhanges und der (gewöhnlich) grösseren Anzahl von Stäben die Aufgabe im letzteren Falle beträchtlich mehr Mühe verursachen kann, bleibt sich doch in seinen Grundzügen das Verfahren in beiden Fällen vollständig gleich. Ich kann mich daher hier kurz fassen, indem ich auf die ebene Fachwerkstheorie verweise. Die nachfolgenden Betrachtungen schliessen sich aufs Engste an die von Herrn Mohr gegebene elegante Darstellung*) an.

Wenn ein statisch bestimmtes Fachwerk auf irgend eine Art belastet wird, entstehen Formänderungen in demselben dadurch, dass sich zunächst die Stablängen ändern und in Folge dessen auch die freien Knotenpunkte sich verschieben.

*) Civil-Ingenieur 1885.

Verlangt wird die Ermittelung der Verschiebung, welche irgend ein Knotenpunkt bei der betreffenden Belastung erfährt.

Nach der Mohr'schen Methode löst man diese Aufgabe dadurch, dass man zunächst die Spannungen S berechnet, welche in den einzelnen Stäben bei der gegebenen Belastung entstehen und ferner diejenigen Spannungen T, welche durch eine Einzellast P an dem Knotenpunkte, dessen Verschiebung zu bestimmen ist, in allen Stäben hervorgerufen werden. Man wendet dann den Satz der virtuellen Geschwindigkeiten auf das Gleichgewicht der Kräfte an jedem Knotenpunkte und zwar für den durch P hervorgerufenen Spannungszustand an. Dabei steht es frei, beliebige virtuelle Verschiebungen der Knotenpunkte zu Grunde zu legen. Das Eigenthümliche der Mohr'schen Methode besteht nun darin, dass man das Gleichgewicht der Kräfte P und T betrachtet, dabei aber als virtuelle Verschiebungen der Knotenpunkte diejenigen wählt, welche durch das andere System der Spannungen S hervorgebracht werden.

Die Längenänderung irgend eines Stabes i in Folge der Spannung S_i beträgt

$$\frac{S_i l_i}{f_i E} \text{ oder } S_i r_i$$

wenn mit r_i zur Abkürzung der für jeden Stab constante Ausdruck $l_i/f_i E$, wo l_i die Länge, f_i der Querschnitt und E der Elasticitätsmodul ist, bezeichnet wird. Hinsichtlich der Vorzeichen setzen wir fest, dass eine Zugspannung und ebenso eine Verlängerung positiv gerechnet werden. Bei der Addition der Arbeitsgleichungen, welche das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für sämmtliche Knotenpunkte liefert, vereinigen sich die beiden mit T_i behafteten Glieder zu $-T_i S_i r_i$. Bezeichnet man die Verschiebung des Knotenpunktes, an dem die Einzellast P angreift, mit x, so erhält man daher durch Addition aller Arbeitsgleichungen

$$Px = \Sigma\, T_i S_i r_i$$

oder

$$x = \Sigma \frac{T_i}{P} \cdot S_i r_i \tag{19}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung sind sämmtliche Glieder bekannt. Man findet daher ohne Weiteres die Verschiebung des ins Auge gefassten Knotenpunktes nach der willkürlich angenommenen Richtung der Kraft P. Durch eine Wiederholung des Rechnungsganges für zwei andere Richtungen von P kann auch die Gesammtverschiebung bestimmt werden. Auf die Grösse von P kommt dabei nichts an, nur die Verhältnisse T_i/P kommen in Betracht.

Aus Gleichung (19) folgt unmittelbar der Maxwell'sche Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen. Versteht man nämlich unter S_i die Spannungen, welche durch eine Kraft von der Grösse P in der Richtung α am Knotenpunkte m hervorgerufen werden, und unter T_i wie bisher die Spannungen, welche durch P in der Richtung β am Knotenpunkte n entstehen, so erhält man zunächst durch unmittelbare Anwendung von Gleichung (19) die Verschiebung x, welche das erste P an n in der Richtung β hervorruft. Andererseits kann aber (19) auch geschrieben werden

$$x = \Sigma \frac{S_i}{P} \cdot T_i r_i \tag{19a}$$

und in dieser Form bestimmt sie umgekehrt diejenige Verschiebung des Knotenpunktes m in der Richtung α, welche durch die gleich grosse Kraft P am Knotenpunkte n in der Richtung β hervorgerufen wird. Beide Verschiebungen sind daher von gleicher Grösse.

Von Interesse ist der Zusammenhang der hier behandelten Aufgabe mit der Aufgabe der Elektricitätslehre, die Stromvertheilung in einem beliebig verzweigten Netze linearer Leiter zu bestimmen, auf den Herr Ulbricht*) hingewiesen hat. Die Verwandtschaft beider Aufgaben beruht im Wesentlichen darauf, dass der Ausdruck $l_i/f_i E$ unmittelbar denjenigen für den elektrischen Widerstand angibt, wenn man sich an Stelle von E die elektrische Leitungsfähigkeit gesetzt denkt. Wegen der Folgerungen, die sich aus diesem Zusammenhange ziehen lassen, verweise ich auf die angegebene Quelle.

---

*) Civil-Ingenieur 1888. S. 177.

An dem Beweisgange ändert sich übrigens nichts, wenn man an die Stelle der einzelnen Kraft P zwei Kräfte P_1 und P_2 setzt, welche an zwei beliebigen Knotenpunkten angreifen, gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind und beide auf die Verbindungslinie dieser Knotenpunkte fallen. Nennen wir den Verein dieser beiden Kräfte des kürzeren Ausdrucks wegen eine Doppelkraft, so können wir sagen: eine Doppelkraft zwischen zwei Punkten a und b bringt eine Entfernungsänderung zwischen irgend zwei anderen Knotenpunkten c und d zu Stande, welche ebenso gross ist, als die Entfernungsänderung zwischen a und b, welche durch eine Doppelkraft von derselben Grösse zwischen c und d bewirkt wird. Man erkennt leicht, wie die Vorzeichen hierbei zu wählen sind.

§. 31. **Fachwerke mit einem überzähligen Stabe.**

Man hat im Allgemeinen die Wahl, welchen Stab man aus dem ganzen Fachwerke als den überzähligen betrachten will. Nur diejenigen Stäbe, welche zu einem in sich statisch bestimmten Theile des im Ganzen unbestimmten Fachwerkes gehören (also z. B. die drei Stäbe, mit welchen etwa ein einzelner Knotenpunkt oder die sechs Stäbe, mit denen ein Tetraeder oder dgl. etwa angeschlossen ist), sind hiervon ausgenommen.

Zunächst seien keine Lasten vorhanden und alle Stäbe seien spannungslos. Dann denke ich mir den Stab, welcher als überzähliger ausgewählt wurde, abgekühlt, während die übrigen ihre Temperatur beibehalten. Der ausgewählte Stab erfährt dann eine Zugspannung, weil er durch den Zusammenhang mit dem auch ohne ihn steifen Reste an der Zusammenziehung gehindert wird. Zugleich werden alle übrigen Stäbe, die ebenfalls als überzählige angesehen werden konnten, in Spannung versetzt.

Da über den Grad der Abkühlung nichts vorgeschrieben war, kann man sich denselben so gross denken, dass in dem überzähligen Stabe die Zugspannung gerade einen bestimmten, beliebig gewählten Werth annimmt. Die Spannungen aller übrigen Stäbe lassen sich dann berechnen, da der Rest nach Voraussetzung ein statisch bestimmtes Fachwerk bildet. Dabei kommt es auch wieder nicht auf die Absolutwerthe der Spannungen, sondern nur auf das Verhältniss derselben zu der beliebig gewählten Spannung in dem überzähligen Stabe an. Dieses Verhältniss sei mit u_i für den Stab i bezeichnet; es ist natürlich positiv zu setzen, wenn eine Zugspannung im überzähligen Stabe auch im Stabe i eine Zugspannung hervorruft.

Zur näheren Erläuterung der Bedeutung des Verhältnisses u_i denke man sich aus dem Fachwerke den überzähligen Stab und den Stab i entfernt. Es entsteht dann ein Mechanismus, an dem sich Kräfte in der Richtung der weggeschnittenen Stäbe im Gleichgewichte halten können; u_i ist das Verhältniss der beiden Kräfte oder, wie man auch sagen kann, das Uebersetzungsverhältniss des Mechanismus. Es lässt sich auch auf kinematischem Wege bestimmen, obschon bei dem gegenwärtigen Stande unseres Wissens für das räumliche Fachwerk die Durchführung bedeutende Schwierigkeiten machen würde.

Nachdem die Verhältnisse u_i ermittelt sind, kann man mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten die Berechnung der Stabspannungen für irgend eine Belastung ohne Schwierigkeit durchführen. Man berechne nämlich zunächst diejenigen Spannungen, welche die Belastung in dem statisch bestimmten Reste erzeugen würde, wenn der überzählige Stab entfernt wäre. Bezeichnen wir diese für den Stab i mit S_i, ferner die im überzähligen Stabe thatsächlich auftretende Spannung mit X und die in dem Stabe i thatsächlich eintretende mit A_i, so hat man

$$A_i = S_i + u_i X \tag{20}$$

Ich wende jetzt nach Mohr das genannte Princip auf den Fall an, dass die Spannungen u_i (oder auch $u_i X$ oder $u_i Y$ u. s. w.) bestehen, während zugleich als virtuelle Verrückungen diejenigen angesehen werden, welche durch die gewählte Belastung thatsächlich zu Stande kommen. Eine äussere Kraft kommt bei dem zu betrachtenden Spannungsbilde nicht vor; nach Addition der Arbeitsgleichungen für sämmtliche Knotenpunkte erhält man daher

$$\Sigma u_i (S_i + u_i X) r_i = 0 \tag{21}$$

woraus

$$X = -\frac{\Sigma u_i S_i r_i}{\Sigma u_i^2 r_i} \tag{22}$$

Durch Einsetzen von X in Gleichung (20) erhält man schliesslich für die Spannung eines beliebigen Stabes n

$$A_n = \frac{\Sigma u_i r_i (u_i S_n - u_n S_i)}{\Sigma u_i^2 r_i} \tag{23}$$

Die Summirungen sind in allen diesen Formeln nach i auszuführen und über alle Stäbe mit Einschluss des überzähligen zu erstrecken. Für den letzteren ist dabei S_i gleich Null und u_i gleich 1 zu setzen.

Von Interesse ist derjenige Belastungsfall, bei dem nur eine Doppelkraft in dem oben (§ 30) erläuterten Sinne an zwei durch einen Stab verbundenen Knotenpunkten angreift. Bei einem statisch bestimmten Fachwerke wird dadurch nur der betreffende Stab in Spannung versetzt und dasselbe gilt auch, wenn das Fachwerk zwar statisch unbestimmt ist, der betreffende Stab aber nicht zu denjenigen gehört, welche als überzählige angesehen werden können.

Sehen wir andernfalls den Stab als den überzähligen an und rechnen die Doppelkraft P positiv, wenn sie den Stab zu verlängern sucht, so erhalten wir für S_i überall $-Pu_i$, mit Ausnahme des überzähligen Stabes, für den S_i gleich Null zu setzen ist. Für X erhält man daher

$$X = P - P \frac{r_0}{\Sigma u_i^2 r_i},$$

wenn mit r_0 das r des überzähligen Stabes bezeichnet wird. — Hatte man die u_i so berechnet, dass ursprünglich irgend ein anderer Stab als überzähliger aufgefasst worden war und gibt man jetzt dem Stabe, an dessen Enden die Doppelkraft angreift, die Nummer m, so erhält man allgemeiner

$$X = P - P \frac{u_m^2 \cdot r_m}{\Sigma u_i^2 r_i} = P(1 - \alpha_m),$$

wenn man mit α_m den vorausgehenden Bruch bezeichnet. Dieses α_m ist stets ein ächter Bruch (da alle Glieder der im Nenner stehenden Summe positiv sind und der Zähler sich unter ihnen befindet) und bildet eine für jeden Stab des Fachwerks bedeutsame Grösse. Es gibt nämlich unmittelbar denjenigen Bruchtheil einer an den Enden des Stabes wirksamen Doppelkraft an, welche vom ganzen übrigen Fachwerke aufgenommen wird, während der Rest der Doppelkraft allein auf den Stab selbst kommt.

Man kann sagen, dass der betreffende Stab und der Rest des Fachwerks in Bezug auf die an den Enden des Stabes wirkende Doppelkraft parallel zu einander geschaltet sind in demjenigen Sinne, den man mit diesem Ausdrucke in der Elektricitätslehre verbindet.

Schliesslich lässt sich aus Gleichung (23) noch eine Folgerung ziehen, die unter Umständen mit Nutzen verwerthet werden kann. Man nehme nämlich an, dass bei gleich bleibender Belastung der Querschnitt irgend eines Stabes k eine Veränderung erfahre, so dass sich r_k um δr_k ändere, während alles Uebrige ungeändert bleibt. Durch Differentiation erhält man aus Gleichung (23) nach Durchführung aller erforderlichen Umrechnungen

$$\delta A_n = - A_k \frac{u_k u_n}{\Sigma u_i^2 r_i} \delta r_k$$

Man erkennt daraus, ob die Spannung des Stabes n in einem gegebenen Falle eine Erhöhung oder Erniedrigung erfährt, wenn man den Querschnitt des Stabes k vermindert. Zugleich ergibt sich in Verbindung mit dem oben Besprochenen, dass die Aenderung δr_k für alle übrigen Stäbe des Fachwerks gleichwerthig ist mit der Anbringung einer Doppelkraft δP an den Enden des Stabes k von der Grösse

$$\delta P = \frac{A_k}{r_k} \cdot \delta r_k$$

Die Vorzeichen sind entsprechend den früheren Festsetzungen einzuführen. Die Anwendung dieser Beziehung lässt den Einfluss, welchen die Aenderung eines einzelnen Stabquerschnittes auf die übrigen Stäbe ausübt, aufs Deutlichste hervortreten. Von Wichtigkeit ist dabei namentlich die Bemerkung, dass die Verstärkung irgend eines Stabes in anderen Stäben vergrösserte Spannungen zur Folge haben kann. Es kann daher vorkommen, dass in einem Fachwerke mit einem überzähligen Stabe über das zulässige Mass hinausgehende Spannungen auftreten, während durch Beseitigung eines überzähligen Stabes die dadurch bedingte Gefahr gehoben wird. Nicht immer ist also die vermeintliche Verstärkung, welche man durch Zufügung eines überzähligen Stabes in das an sich schon hinreichend feste Netz herbeizuführen glaubt, in Wahrheit eine solche; es kann dadurch vielmehr sogar die Sicherheit des Ganzen vermindert werden.

Eine Zeit lang schien es mir, als ob sich allgemein behaupten liesse, dass ein Fachwerk, welches bei Annahme einer gewissen Gruppe nothwendiger Stäbe hinreichend fest sei, unter allen Umständen auch noch hinreichend fest bleiben müsse, wenn man nachträglich noch irgend welche überzähligen Stäbe zufügte. In der Regel wird diese nahe liegende Vermuthung zwar zu keinen praktisch unzulässigen Ergebnissen führen; es ist aber nothwendig, sich daran zu erinnern, dass sie keineswegs durch die Elasticitätstheorie gerechtfertigt ist.

§ 32. **Fachwerke mit mehreren überzähligen Stäben.**

Für diese bleibt dasselbe Verfahren gleichfalls anwendbar; die Durchführung der Berechnung wird nur mit dem Anwachsen der Zahl der überzähligen Stäbe beträchtlich umständlicher.

Man entfernt so viele überzählige Stäbe, bis der Rest des Fachwerks statisch bestimmt ist, und ermittelt hierauf für alle Stäbe i desselben die Verhältnisse u_i, v_i u. s. w. zwischen den Spannungen, welche durch eine Zugspannung im ersten, zweiten u. s. w. überzähligen Stabe hervorgerufen werden, und der Grösse dieser letzteren Spannungen selbst. Werden die in den überzähligen Stäben bei der gegebenen Belastung thatsächlich zu Stande kommenden Spannungen X, $Y \ldots$ genannt, so tritt hier an Stelle von Gleichung (20) die allgemeinere

$$A_i = S_i + u_i X + v_i Y + \ldots\ldots \tag{24}$$

und an Stelle der Gleichung (21) der Verein der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, u_i\,(S_i + u_i X + v_i Y + \cdots\cdots)\, r_i = 0 \\ \Sigma\, v_i\,(S_i + u_i X + v_i Y + \cdots\cdots)\, r_i = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}\right\} \tag{25}$$

deren Zahl gleich der der überzähligen Stäbe ist. Durch

Auflösen erhält man die Unbekannten $X, Y \ldots$ und durch Einsetzen in (24) alle übrigen Stabspannungen.

Nach diesem Verfahren können z. B. die Stabspannungen einer Schwedler'schen Kuppel mit einer Spitze, welche ein statisch unbestimmtes System bildet, für eine beliebige Belastung berechnet werden. Die Durchführung der Zahlenrechnungen kann zwar durch tabellarische Zusammenstellungen mit Benutzung der etwa vorliegenden Symmetrien erleichtert werden, bildet aber unter allen Umständen eine höchst umständliche Arbeit. — Weniger umständlich ist der Rechnungsgang für eine vierseitige Kuppel mit Spitze, die nur einen überzähligen Stab besitzt. Bei dieser können die einfacheren Formeln des vorigen Paragraphen ohne Weiteres benützt werden.

§ 33. Nebenspannungen.

Ein genaues Verfahren für die Berechnung der Sekundär- oder Nebenspannungen ist für das ebene Fachwerk erst seit etwa zehn Jahren durch die Arbeiten Manderla's, denen bald eine grössere Zahl tüchtiger Arbeiten anderer Verfasser nachfolgte, bekannt. Der gleiche Gedankengang vermag auch beim räumlichen Fachwerke zum Ziele zu führen. Freilich wird die Durchführung desselben, von den einfachsten Fällen abgesehen, so umständlich, dass man wohl oder übel vorläufig darauf wird verzichten müssen.

So weit mir bekannt, liegt bis jetzt nur eine einzige Untersuchung vor, welche sich mit den Nebenspannungen in einem räumlichen Fachwerke beschäftigt. Dieselbe bezieht sich auf eine regelmässig gestaltete und regelmässig belastete Schwedler'sche Kuppel und rührt von Herrn Hacker*) her. Bei diesem Beispiele vereinfacht sich die Untersuchung beträchtlich wegen der vorliegenden Symmetrien. Die Nebenspannungen ergaben sich bei dem zur Untersuchung ausgewählten Falle bis zu etwa 30% der Grundspannungen. Man

*) Zeitschr. d. Hannöverschen Ing.- u. Arch.-Ver. 1888. Heft 3.

darf aus diesem Ergebnisse schliessen, dass sich die räumlichen Fachwerke den Nebenspannungen gegenüber im grossen Ganzen ähnlich verhalten wie die ebenen, was übrigens von vornherein wegen der Gleichartigkeit der Grundbedingungen zu vermuthen war. (Vgl. übrigens § 45.)

Wie mir scheint, kann unter diesen Umständen auf eine Bearbeitung der Nebenspannungen im räumlichen Fachwerke bis auf Weiteres vollständig verzichtet werden; so lange wenigstens, als noch eine so grosse Zahl grundlegender Fragen über die wesentlichsten Eigenschaften dieser Gebilde unerledigt ist, wie gegenwärtig. Erst muss das Haus im Rohbau fertig gestellt sein, ehe man an die Ausschmückung der einzelnen Räume herantreten kann.

Zweiter Abschnitt.

Das Flechtwerk.

Erstes Capitel.

Allgemeines.

§ 34.

Ein späterer Geschichtsschreiber der Ingenieurwissenschaften wird sich vielleicht verwundert fragen, wie es möglich gewesen ist, dass der einfache allgemeine Begriff des Flechtwerks bis zu diesem Jahre 1891 vollständig unbekannt bleiben konnte, obschon eine so grosse Zahl von Bauwerken seit langen Jahren ausgeführt wurde, welche thatsächlich unter jenen Begriff fallen. Für ihn schreibe ich hier die Versicherung nieder, dass meines Wissens vorher Niemand diese Idee auch nur streifte und dass sie auch mir selbst sich nicht etwa plötzlich in voller Klarheit entschleierte, sondern mir erst nach einer Reihe von Umwegen allmählich deutlicher entgegentrat. Freilich bildet dieser Fall nur ein neues Beispiel für die schon oft gemachte Erfahrung, dass gerade die einfachsten Gesetzmässigkeiten sich am hartnäckigsten der Erkenntniss entziehen, wenn sie in dem bereits vorhandenen Ideenvorrath nicht schon enthalten sind. Es ist ungemein viel leichter, auf gegebener, wohl vertrauter Grundlage weiterzuarbeiten und dabei zu Ergebnissen zu gelangen, welche wegen der Schwierigkeit der Entwicklung vielleicht die staunende Bewunderung des Lesers herausfordern, als aus der Menge der Erscheinungen einen einfachen Begriff herauszuschälen, der zunächst fremdartig und vielleicht unbedeutend, bei einer späteren Stufe der Entwicklung aber so selbstverständlich und naheliegend erscheint, dass man dem Urheber kaum ein besonderes Verdienst anzurechnen geneigt ist, auch wenn sich die Fruchtbarkeit seiner Idee längst erwiesen hat*). — Eine Stellung dieser Art nimmt, wie ich glaube, der Begriff des Flechtwerks ein.

Unter einem Flechtwerke verstehe ich**) ein stabiles räumliches Fachwerk, dessen Knotenpunkte und Stäbe sämmtlich auf einem Mantel enthalten sind, welcher einen inneren Raum vollständig umschliesst.

---

*) Früher als ich bei der Niederschrift der oben stehenden Zeilen annahm, erfuhr diese Vermuthung durch eine in mehrfacher Hinsicht lehrreiche Entscheidung des Patentamtes eine mir freilich nicht sehr willkommene Bestätigung. Auf mein Gesuch um Patentirung der Tonnenflechtwerkdächer wurde ich belehrt, dass Tonnenflechtwerke bereits verschiedentlich bei vertikalen Constructionen verwendet würden, u. A. bei den Führungsgerüsten freistehender Gasbehälter. Dann heisst es weiter: „Der Umstand, dass die angeführten Constructionen vertikal stehen und in der Mantelfläche eines ganzen Cylinders liegen, während bei der vorliegenden Construction es sich um eine horizontal liegende halbe Tonne handelt, ist unwesentlich und rechtfertigt die Ertheilung eines Erfindungspatentes nicht."

Jene Führungsgerüste der Gasbehälter sind nichts anderes als Flechtwerkpfeiler. Diese sind allerdings längst bekannt und man hätte vielleicht mit demselben Rechte die Tonnenflechtwerkdächer auch als unwesentliche Abänderungen der Schwedler'schen Kuppeln ansehen können. Aus dieser Entscheidung geht, wie mir scheint, die siegreiche Kraft des allgemeinen Flechtwerkbegriffs auf das Deutlichste hervor, da er gleich bei seinem ersten Auftreten zwei sich äusserlich gewiss nicht in hohem Grade gleichende Constructionen als nahezu identische erkennen lässt. — Der unbefangene Leser wird sich freilich vielleicht zu der Frage gedrängt fühlen, warum der Urheber dieser Entscheidung den ihm jetzt unbedeutend und daher jedenfalls auch sehr naheliegend erscheinenden Schritt vom Flechtwerkpfeiler zum Tonnenflechtwerkdach nicht schon längst selbst gethan hat. Die richtige Antwort auf diese Frage dürfte in den oben stehenden und schon lange vorher niedergeschriebenen Ausführungen des Textes enthalten sein.

**) Vgl. Schweiz. Bauztg. 1891. S. 95.

Ein Flechtwerkträger ist demnach ein die Erde als starren Körper enthaltendes stabiles räumliches Fachwerk, dessen Stäbe und Knotenpunkte auf einem Mantel liegen, der bis zur Erde fortgesetzt gemeinsam mit der Erde einen inneren Raum vollständig umschliesst.

Ich habe es bei diesen Definitionen unbestimmt gelassen, ob das als Flechtwerk zu bezeichnende räumliche Fachwerk statisch bestimmt sein soll oder nicht. Indessen werde ich, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, stets das Erstere voraussetzen. — Bei der weiteren Ausbildung des räumlichen Fachwerks wird man vermuthlich wegen der schwierigen und unsicheren Berechnung die statisch unbestimmten Stabverbände vermeiden oder sie durch geeignete Umänderungen in statisch bestimmte umwandeln. Die Flechtwerke werden daher nur soweit als sie statisch bestimmt sind das Interesse des Ingenieurs in höherem Masse fesseln. Es empfiehlt sich darum des kürzeren Ausdrucks wegen, diese Eigenschaft in den Begriff des Flechtwerks in der Regel einzuschliessen, dabei aber doch, weil sich die gelegentliche Erörterung statisch unbestimmter Stabverbände, welche im Uebrigen alle Eigenschaften des Flechtwerks besitzen, im Zusammenhange mit diesem öfters nöthig macht, auch statisch unbestimmte Flechtwerke (welche ausdrücklich als solche bezeichnet werden müssen) zuzulassen.

Nur nebenbei sei hier darauf aufmerksam gemacht, dass eine Eintheilung der Flechtwerke je nach dem Zusammenhangsgrade des umschlossenen Raums möglich ist. Ein Flechtwerkdach über einem ringförmigen Grundrisse z. B. umschliesst einen zweifach zusammenhängenden Raum (in demjenigen Sinne, welcher damit in verschiedenen Gebieten der Physik und Mechanik verbunden wird), während der von einem Kuppel- oder Tonnenflechtwerk überdeckte Raum einfach zusammenhängend ist. Man weiss, wie wichtig diese Unterscheidung des Zusammenhangsgrades in vielen Fällen ist, und es lässt sich vermuthen, dass sie auch für die Flechtwerklehre von grosser Bedeutung werden wird, sobald diese auch mehrfach zusammenhängende Räume in den Kreis ihrer Betrachtungen zieht. Fürs Erste verzichte ich indessen darauf, betrachte also ausschliesslich solche Flechtwerke, welche einen einfach zusammenhängenden Raum umschliessen.

Nicht unerwähnt will ich übrigens lassen, dass man mit Hülfe des ringförmigen Daches, von dem oben die Rede war, einen unmittelbaren Uebergang vom Kuppel- zum Tonnenflechtwerk angeben kann. Dadurch, dass man die Kuppel mit offenem Nabelring in der Mitte einstülpt und einen geeigneten Austausch von Stäben vornimmt, erhält man das ringförmige Dach und aus diesem das Tonnenflechtwerk als endliches Stück eines solchen von unendlich grossem Halbmesser.

§ 35.

Offenbar ist das Flechtwerk die einfachste Form, welche man einem räumlichen Fachwerke geben kann. Allerdings zählt es im Allgemeinen nicht zu den in § 13 als „einfache" bezeichneten Fachwerken, die diesen Namen wegen der leichten Berechnung, die sie zulassen, erhielten. Es ist auch keineswegs eine Form, welche dem im Baue ebener Träger wohlerfahrenen Ingenieur irgendwie naheliegt, wenn er einmal einen räumlichen Stabverband aufzustellen hat. Im Gegentheile wird er, wie die geschichtliche Entwicklung deutlich zeigt, immer erst auf Umwegen beim Flechtwerke anlangen. Wenigstens war dies bisher so; ein mit der allgemeinen Flechtwerkidee, wie sie hier dargelegt werden soll, wohlvertrauter Constructeur wird einer solchen Aufgabe natürlich ganz anders gerüstet gegenüber stehen. Die Erweiterung seines Wissens und seines Anschauungskreises wird sich aufs Deutlichste in den von ihm geschaffenen Bauwerken ausprägen.

Das Flechtwerk lag unserer Auffassung deshalb so fern, weil in der bis vor nicht langer Zeit allein bekannten Theorie des ebenen Fachwerks nichts vorkommt, was sich diesem Begriffe an die Seite stellen liesse. Er ist dem räumlichen Fachwerke allein eigenthümlich. Der Versuch, aus ebenen Trägern Bauwerke im Raume herzustellen, konnte wohl in einzelnen Fällen zu Flechtwerken führen. Allerdings geschah dies regelmässig nur, nachdem weit umständlichere Verbände für die Lösung derselben Aufgabe schon vorher angewendet worden waren. Zur Erkenntniss der allgemeinen Gesetzmässigkeit, nach der die Flechtwerke gebildet werden können, vermochten indessen alle diese auf der ebenen Fachwerkstheorie fussenden Arbeiten nicht zu führen.

Am nächsten kommen der Flechtwerkidee noch diejenigen Betrachtungen, welche das Verständniss der Kuppeldächer durch den Vergleich mit einer „elastischen Fläche“ zu erleichtern suchten. Die einzelnen Stäbe der Kuppel sollten die in der Richtung der Hauptspannungen der elastischen Fläche stehen gebliebenen Theile der letzteren vorstellen, während der übrige Theil der Fläche (in den Fächern zwischen den Stäben) als überflüssig beseitigt war. Wie man sieht, wird bei solchen Ausführungen bereits (unbewusst) vorausgesetzt, dass man wirklich solche elastische Flächen angeben könne, welche bei sehr (oder unendlich) kleiner Dicke trotzdem einen merklichen Widerstand gegen Verbiegungen ausüben können. Von da bis zur wirklichen Erkenntniss des Flechtwerkprincips blieb natürlich noch ein weiter Weg, der bis zur Erlangung dieses Zieles überhaupt nicht beschritten wurde, da dasselbe schon vorher auf anderem Wege erreicht wurde.

Recht lehrreich ist diese Art der Entwicklung immerhin. Aus dem gebogenen vollwandigen Balken entstand allmählich das ebene Fachwerk. Als man nun das Bedürfniss empfand, räumliche, in ähnlicher Weise gegliederte (oder in Stäbe aufgelöste) Tragconstructionen zusammenzustellen, standen zwei Wege offen, die nach einander beide beschritten wurden. Einmal konnte man nämlich durch Vereinigung ebener Balken, die bereits gut bekannt waren, die Aufgabe lösen und dies war fast stets der zunächst beschrittene Weg. Oder man konnte zweitens, nachdem die vorher erhaltenen Gebilde nicht recht befriedigten, denselben Weg noch einmal für das räumliche Fachwerk zurücklegen, der vorher zum ebenen geführt hatte. So wie das ebene Fachwerk aus dem vollwandigen Balken oder Bogen, konnte das räumliche, zunächst so weit es sich um kreisförmige Grundrisse handelte, aus dem Kuppelgewölbe abgeleitet werden. Eine besondere Beobachtung musste sich allerdings mit diesen Anschauungen verbinden, um z. B. zu den Schwedler'schen Kuppeln zu führen. Man musste nämlich darauf aufmerksam werden, dass beim Uebergange vom Kuppelgewölbe zur gegliederten Kuppel eine Entwicklung nach der Richtung der Dicke (der Gewölbestärke) nicht erforderlich war, dass das Kuppelgewölbe zu diesem Zwecke vielmehr zu der vorerwähnten elastischen Fläche idealisirt werden durfte. Diese Erkenntniss war offenbar nicht leicht zu gewinnen. Hr. Schwedler hat dieselbe, wie aus seinen Veröffentlichungen hervorzugehen scheint, aus dem Vergleiche mit den aus ebenen Trägern aufgebauten Systemen geschöpft. Für ihn ergab sich die nach ihm benannte Kuppel als eine Abänderung der aus ebenen Balken gebildeten Construction, indem er die Zugstangen durch Ringe und die Füllungstheile durch Diagonalen in der Kuppelfläche ersetzte. Geleitet wurde er hierbei durch die aus dem Kuppelgewölbe herstammende Abstraction der elastischen Fläche, bewiesen wurde ihm aber die Zulässigkeit der Abänderung erst sicher durch den unmittelbaren Vergleich mit der Wirkungsweise der früheren Construction.

Obschon aber, wie aus alledem hervorgeht, das Flechtwerk dem Entwerfer von Bauten durchaus nicht sehr nahe lag und daher erst auf einer vorgeschrittenen Stufe der Entwicklung allgemein erkannt werden konnte, muss es doch zweifellos als das einfachst gestaltete räumliche Fachwerk bezeichnet werden. Wegen dieser Einfachheit des Aufbaues dürfte es mit der Zeit und in dem Masse, als die theoretische Beherrschung desselben weiter vorschreitet, noch eine beträchtlich gesteigerte Wichtigkeit für die praktische Anwendung erlangen, als die ist, welche ihm schon jetzt zukommt.

§ 36. **Lehrsatz.**

Jede Mantelfläche, welche einen einfach zusammenhängenden Raum vollständig umschliesst und aus Dreiecken zusammengesetzt ist, die alle in verschiedenen Ebenen liegen, ergibt im Allgemeinen ein Flechtwerk, wenn man die Ecken als Knotenpunkte und die Kanten als Stäbe betrachtet.

Dasselbe gilt auch, wenn mehrere zusammenhängende Dreiecke des Mantels in eine Ebene fallen, falls alle Knotenpunkte des von ihnen gebildeten ebenen Fachwerks auf der Gurtung des letzteren enthalten sind.

Kürzer könnte man anstatt dessen auch sagen: Jedes aus Dreiecken zusammengesetzte Euler'sche Polyeder bildet im Allgemeinen ein Flechtwerk. Unter einem Euler'schen Polyeder ist dabei ein solches zu verstehen, für das der bekannte Euler'sche Satz über die Zahl der Seitenflächen, Kanten und Ecken zutrifft. Für die in der ausführlicheren Aussprache des Satzes näher bezeichneten Polyeder gilt derselbe stets.

Aus diesem Euler'schen Satze geht auch der Beweis für die aufgestellte Behauptung hervor. Bezeichnen wir wie früher die Zahl der Stäbe mit m, die der Knotenpunkte mit n, so muss, damit letztere starr mit einander verbunden seien, m mindestens gleich $3n - 6$ sein (§ 4) und das Fachwerk ist, falls m grade gleich dieser Minimalzahl ist, statisch bestimmt. Nun ist aber die Zahl der auf der Mantelfläche vorkommenden Dreiecke offenbar gleich $\frac{2m}{3}$, da an jedem Stabe zwei Dreiecke zusammenstossen und zugleich zu jedem Dreiecke des Mantels je drei Stäbe gehören. Nach dem Euler'schen Satze ist aber die Zahl der Kanten gleich der Zahl der Seitenflächen plus der Zahl der Ecken minus 2; also

$$m = \frac{2m}{3} + n - 2,$$

woraus in der That $m = 3n - 6$ folgt.

Allerdings ist damit zunächst nur bewiesen, dass die Zahl der Stäbe zur starren Verbindung der Knotenpunkte grade ausreicht. Um zu beweisen, dass diese letztere auch wirklich damit erreicht wird, wäre noch der Nachweis zu führen, dass die Funktionaldeterminante nicht verschwindet. Dass dies nicht identisch (ohne Rücksicht auf die gewählten Stablängen) geschehen kann, wird sich allgemein mit Hülfe der Determinantentheorie beweisen lassen. Ausnahmsweise (bei geeigneter Wahl der Stablängen) kann sie aber jedenfalls verschwinden.

Wegen der Umständlichkeit der Beweisführung auf Grund der Determinantentheorie habe ich mich auf Untersuchungen dieser Art bisher nicht eingelassen. Ich ziehe vor, in jedem einzelnen Falle den Nachweis dadurch zu führen, dass ich die statische Bestimmtheit für alle Belastungsfälle nachweise. Im Uebrigen vermag der in § 19 abgeleitete Satz eine werthvolle Handhabe für die Durchführung von Untersuchungen nach der fraglichen Richtung hin zu bilden.

Der Rücksicht auf die hiernach möglichen Ausnahmefälle trägt die in den Wortlaut des Satzes aufgenommene Beschränkung („im Allgemeinen“) Rechnung.

Es liegt nahe, den besprochenen Lehrsatz mit einem sehr bekannten Satze der Theorie des ebenen Fachwerks in Parallele zu stellen. Nach diesem erhält man ein statisch bestimmtes ebenes Fachwerk, wenn man Dreiecke so aneinander reiht, dass jedes neu hinzukommende Dreieck in einer Dreieckseite mit einem der bereits vorhandenen Dreiecke zusammenfällt. Der jetzt abgeleitete gibt diesem von früher bekannten und so häufig mit grossem Nutzen verwendeten Satze an Wichtigkeit nichts nach.

§ 37. Besondere Formen des Flechtwerks.

Der oben bewiesene Lehrsatz hat uns einen grossen Formenreichthum des Flechtwerks erschlossen. Das einfachste Flechtwerk ist wieder ein Tetraeder. Ebenso zählt dazu das bereits in § 14 als statisch bestimmtes Fachwerk erkannte Oktaeder und die in § 17 besprochene Pyramide, deren Grundfläche durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt ist.

Auch das Ikosaeder ist ein Flechtwerk. Der Würfel oder das Hexaeder und das Dodekaeder lassen sich in Flechtwerke umwandeln, wenn man bei jenem auf jeder Seitenfläche je eine und bei diesem je zwei Diagonalen einfügt.

Von besonderem Interesse ist ferner das Kugelflechtwerk. Man denke sich nämlich auf einer Kugel ein System von Meridian- und Parallelkreisen gezogen, betrachte alle Schnittpunkte als Knotenpunkte, die zu den einzelnen Kreisabschnitten gehörigen Sehnen als Stäbe und schiebe in alle hierbei entstehenden vierseitigen Fächer entweder je eine steife oder zwei schlaffe Diagonalen ein. Das entstehende Stabgebilde ist dann ein Flechtwerk. An Stelle der Kugel kann natürlich auch ein Ellipsoid oder überhaupt irgend eine geschlossene Fläche treten.

Ebenso kann eine Kugelhaube, z. B. eine Halbkugel als Grundlage eines Flechtwerks angenommen werden, wenn man das entstehende Basisvieleck durch Diagonalen in Dreiecke theilt oder auch eine Kugelzone, wenn man bei dieser mit beiden Basisflächen in gleicher Weise verfährt.

Ferner ist als ein wichtiger Specialfall das Cylinder- oder Prismenflechtwerk zu erwähnen. Bei diesem bilden die einzelnen Seitenflächen durch Aneinanderlegen von Dreiecken entstandene ebene Fachwerke, von denen je zwei aneinandergrenzende die Knotenpunkte und die Gurtstäbe gemeinsam haben. Ebenso sind die Grundflächen statisch bestimmte ebene Fachwerke. (Vgl. Abb. 5.)

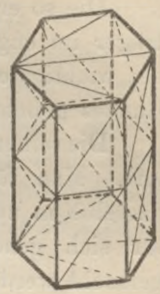


Abb. 5.

An die Stelle des Cylinders oder Prismas kann natürlich auch ein abgestumpfter oder voller Kegel bezw. eine Pyramide treten.

§ 38. **Flechtwerkträger.**

Nachdem einmal erkannt ist, dass das auf einem geschlossenen Mantel durch Aneinanderreihen von Dreiecken erhaltene Stabgebilde ein räumlich stabiles Fachwerk zu bilden vermag, kann man daraus leicht Flechtwerkträger, also Fachwerke mit der Erde als starrem Körper ableiten. Das nächstliegende Mittel besteht darin, einem solchen Flechtwerke sechs Auflagerbedingungen vorzuschreiben. Als Beispiel für einen Träger dieser Art führe ich hier den in meiner Abhandlung über das Flechtwerk in der „Schweiz. Bauzeitung“ veröffentlichten Träger (Abb. 6) an. Er besteht aus einem Kugelflechtwerke, von dem drei Knotenpunkte durch Pendelpfeiler gewöhnlicher Construction (d. h. solche, welche um eine horizontale Achse drehbar gelagert sind) unterstützt sind. Anstatt dessen kann man übrigens auch (unter gänzlicher Ausserachtlassung

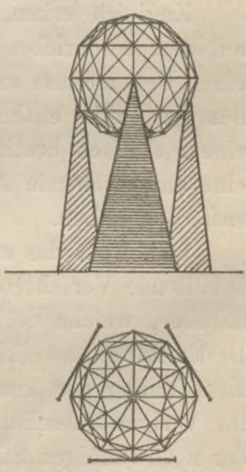


Abb. 6.

von Auflagerbedingungen) sagen, dass das Kugelflechtwerk durch 6 Stäbe mit der Erde verbunden ist.

Die so erhaltenen Träger sind indessen nicht Flechtwerkträger im engeren Sinne. Sie enthalten zwar ein Flechtwerk als wichtigsten Bestandtheil, bilden aber mit der Erde als Ganzes genommen kein reines Flechtwerk mehr.

Die reinen Flechtwerkträger entstehen vielmehr auf folgende Art. Man führe durch ein Flechtwerk einen Schnitt, der dasselbe in zwei Theile trennt. Jeder dieser Theile ist dann für sich genommen labil. Er könnte leicht wieder stabil gemacht werden, wenn man die Schnittfläche durch Einschalten von Querstäben zu einem Dreiecksnetze ergänzte. Anstatt dessen verbinde man aber die vom Schnitte getroffenen Stäbe mit der Erde. Das erhaltene Gebilde ist dann zweifellos stabil, denn schon der Zusammenhang mit dem weggeschnittenen an sich labilen Theile des Flechtwerks reichte zur Aussteifung des Ganzen hin. Um so mehr muss eine vollständige Aussteifung durch die Verbindung mit der an sich schon starren Erde herbeigeführt werden.

Zugleich erkennt man aus dieser Betrachtung, dass der auf dem beschriebenen Wege erhaltene Träger im Allgemeinen einen Ueberschuss an Stabilität, d. h. eine gewisse Zahl überflüssiger Stäbe enthalten muss. Um den Flechtwerkträger zu einem statisch bestimmten zu machen, wird man daher noch eine entsprechende Anzahl von Stäben aus dem Geflechte zu entfernen haben.

Damit ist das zur Auffindung von Flechtwerkträgern einzuhaltende Verfahren genau umschrieben. — Die Entscheidung darüber, welche Stäbe man zur Herbeiführung der statischen Bestimmtheit zweckmässiger Weise entfernen soll, sowie die Ermittelung der Anzahl derselben kann unter Hinweis auf die im vorigen Abschnitte besprochenen Lehren über die Zahl der nothwendigen Stäbe der Behandlung des Einzelfalles überlassen werden.

Vielleicht wird man sich auch in manchen Fällen aus besonderen Gründen dazu entschliessen, die statische Bestimmtheit nicht durch Fortlassung der überzähligen Stäbe herbeizuführen, den Flechtwerkträger also als statisch unbestimmten auszuführen. Als zweckmässig vermag ich dies allerdings nicht anzuerkennen. Ich glaube vielmehr, dass es unser Bestreben sein sollte, diejenigen Vortheile, welche etwa die Beibehaltung der überzähligen Stäbe mit sich bringen könnte (wie dies z. B. bei den Stäben der Kuppelspitze nach Herrn Hacker zutrifft) auf anderem Wege in einwurfsfreier Weise zu erreichen. Die weitere Ausbildung der Theorie wird hierfür, wie ich annehme, die Mittel an die Hand geben.

Zweites Capitel.

Die Schwedler'schen Kuppeln.

§ 39.

Unter den bisher zur Ausführung gekommenen Flechtwerkträgern nehmen die Schwedler'schen Kuppeln die erste Stelle ein. Sie bilden Flechtwerke über regelmässigen Vielecken, welche nach Art der Kugelflechtwerke aus Meridian- oder Sparrenstäben, aus Parallelkreis- oder Ringstäben und aus doppelten schlaffen Diagonalen in den vierseitigen Fächern bestehen.

Die Gestalt des Meridianschnittes oder Sparrenpolygons ist nicht von grundlegender Bedeutung. Herr Schwedler selbst empfiehlt in erster Linie dafür eine cubische Parabel, weil nach seinen Untersuchungen in diesem Falle der Materialaufwand zu einem Minimum wird. Die Behandlung der Aufgabe ist indessen von solchen besonderen Annahmen ganz unabhängig. Ich werde daher auch einen geradlinigen Meridianschnitt zulassen, d. h. die Kegeldächer mit zu den Kuppeln rechnen.

Ferner macht es keinen grossen Unterschied aus, wie gross die Seitenzahl des als Grundriss dienenden regelmässigen Vielecks ist. Bei den Schwedler'schen Kuppeln im engeren

Sinne, welche besonders über Gasbehältern und Locomotivschuppen zur Ausführung gelangten, ist diese Seitenzahl gewöhnlich ziemlich gross, so dass das Grundvieleck nur wenig von einem Kreise abweicht. Ohne das Wesen der Sache irgendwie zu stören, kann man indessen die Seitenzahl beliebig verkleinern. Das Minimum für dieselbe wäre drei; für die Praxis ist dieser Fall jedoch ohne Interesse, während Kuppeln über vierseitigen Grundrissen ziemlich häufig, theils als eigentliche Kuppeln mit gekrümmtem, theils als Zeltdächer (Kirchthurmdächer u. s. w.) mit geradem Meridianschnitte vorkommen.

Alle die genannten Formen, welche sich vom Standpunkte der Fachwerkslehre aus nur in unbedeutenden Einzelheiten unterscheiden und daher eine gemeinsame Behandlung zulassen, sollen hier unter der Bezeichnung der Schwedler'schen Kuppeln zusammengefasst werden. Als den einfachsten Fall werde ich dabei stets die vierseitige Kuppel betrachten.

§ 40.

Von Wichtigkeit ist die Art der Auflagerung eines Flechtwerkträgers. So viel mir bekannt ist, sind Gleitlager oder Rollenlager bisher bei Schwedler'schen Kuppeln nirgends zur Ausführung gelangt. Alle Lagerungen müssen vielmehr nach den mir bekannt gewordenen Constructionseinzelheiten als feste (mit drei Auflagerbahnen) bezeichnet werden. Gewöhnlich werden die Auflagerknotenpunkte unter sich durch einen Mauerring verbunden, der mit den auf die Mauer geschraubten Auflagerplatten im Zusammenhange steht.

Bei dieser Art der Ausführung ist der Mauerring nicht als Bestandtheil des Stabgeflechtes anzusehen. Er dient vielmehr nur zur Verbindung fester Punkte der Erde, hilft also die Starrheit der letzteren herbeiführen. Wenn die Mauern stark genug sind, um dem Seitenschube zu widerstehen, kann er beseitigt werden, ohne dass sich dadurch in dem statischen Zusammenhange zwischen Stabgeflecht und Erde das Geringste änderte. Ich werde daher den Mauerring in der Folge nur als Bestandtheil der Mauer (d. h. der Erde) und nicht als Bestandtheil des Stabgeflechtes betrachten.

Herr Hacker hat auch Schwedler'sche Kuppeln mit Gleitlagern betrachtet; ich glaube ihm aber aus den angegebenen Gründen auf diesem Wege nicht folgen zu sollen. — Selbst wenn man etwa aus Gründen der Materialersparniss, die vielleicht durch derartige Anordnungen herbeigeführt werden könnte, Kuppeln mit Gleitlagern den Vorzug geben wollte, würde es sich immer noch mehr empfehlen, die Auflagerbedingungen nach § 9 durch Stäbe zu ersetzen. Man würde dadurch zu einer im Uebrigen völlig gleichwerthigen Construction gelangen, welche sich in ihrem wirklichen Verhalten aber weit enger an die Voraussetzungen der Berechnung anschliessen würde als bei der Ausführung der Gleitlager. Es genügt daher vollständig, sich auf die Betrachtung von Flechtwerkträgern mit ganz festgehaltenen Auflagerpunkten zu beschränken.

§ 41.

In den meisten Fällen der Ausführung bleibt die Kuppelspitze fort. Die Kuppel endet nach der Mitte zu in einen Ring aus, welcher als „Nabelring“ bezeichnet zu werden pflegt. Ueber diesem erhebt sich dann noch ein sogenannter Laternenaufsatz, der nur den ihm zugewiesenen engen Raum für sich überdeckt und sich auf die Hauptconstruction stützt, ohne einen Bestandtheil der letzteren zu bilden.

Zulässig ist die Fortlassung der Kuppelspitze aus den in § 38 angegebenen Gründen. Der Rest bleibt steif, zugleich wird er aber statisch bestimmt, wie sich leicht einerseits durch Abzählen der Knotenpunkte und Stäbe und andererseits daraus erkennen lässt, dass man für jede vorkommende Belastung die Stabspannungen finden kann.

Eine Kuppel mit Spitze über x-seitigem Grundrisse hat $x - 3$ überzählige Stäbe. Die Berechnung kann nach dem in § 32 besprochenen Verfahren durchgeführt werden. Bisher ist dies aber noch in keinem einzigen Falle geschehen. Es wäre ohne Zweifel sehr wünschenswerth, wenn sich Jemand der Mühe unterzöge, eine solche Kuppel für die verschiedenen möglichen Belastungen durchzurechnen, um ein Urtheil über die Vertheilung der Spannungen in derselben zu gewinnen. Für die unmittelbare Anwendung in der Praxis eignet sich dieses Verfahren aber nicht.

Anstatt die Spitze wegzulassen, kann man die statische Bestimmtheit auch dadurch herbeiführen, dass man im untersten Stockwerke alle Diagonalen bis auf drei derselben beseitigt. Eine Kuppel dieser Art entspricht der im vorigen Paragraphen erwähnten Kuppel mit Gleitlagern, welche Herr Hacker behandelte. Der Fall ist nur insofern allgemeiner, als die Sparrenstäbe des untersten Stockwerks nicht, wie es jenem entsprechen würde, senkrecht zu stehen brauchen. Man darf hoffen, dass Herr Hacker seine Untersuchungen auch auf diesen Fall ausdehnen, bezw. dieselben noch veröffentlichen wird.

§ 42. **Berechnung der Kuppel mit offenem Nabelring.**

Bei regelmässig vertheilter Belastung ist die Berechnung der Kuppel ohne Spitze sehr einfach und schon längst von Herrn Schwedler angegeben worden. Die Diagonalen sind ohne Spannung, sämmtliche Stäbe eines Ringes und ebenso alle Sparrenstäbe desselben Stockwerks haben übereinstimmende Spannungen.

Abb. 7 stelle einen Sparren vor. Die Spannungen der einzelnen Sparrenstäbe sind mit $S_1 S_2 \ldots$, die Lasten an den Knotenpunkten mit P_1 $P_2 \ldots$ bezeichnet. Die Spannungen der dem Nabelring angehörigen beiden Stäbe des obersten Knotenpunktes denke man sich zu einer Resultirenden R_1 zusammengesetzt, welche der vorausgesetzten Symmetrie wegen in der Meridianebene liegt und in derselben horizontal gerichtet ist.

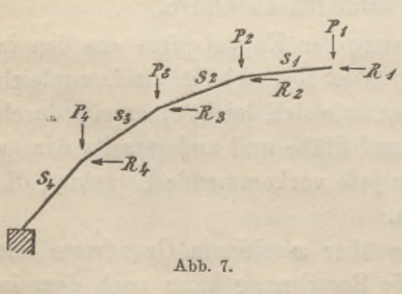


Abb. 7.

In gleicher Weise lassen sich an jedem anderen Knotenpunkte die daselbst angreifenden Ringspannungen durch eine vorläufig unbekannte, horizontal gerichtete Kraft R_2, R_3 ... ersetzen.

Die Unbekannten S und R findet man dann sofort durch Verzeichnung des Kräfteplanes Abb. 7b, der ohne weitere Erklärung verständlich ist. Die Pfeile der R sind sämmtlich nach links gerichtet angenommen. Es entspricht dies Druckspannungen in den Ringstäben. Führt der Kräfteplan auf rechts gerichtete R, so erfahren die Stäbe des betreffenden Ringes Zugspannungen. Wenn die Leitlinie der Kuppel eine cubische Parabel ist, werden die R zu Null. Man sieht leicht ein, dass man, nachdem die R gefunden sind, die zugehörigen Ringspannungen durch Construction je eines Kräftedreiecks im Grundrisse erhält.

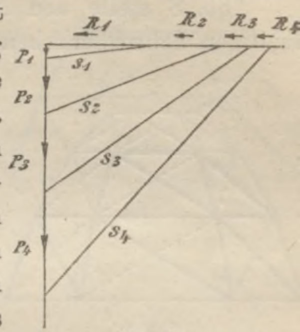


Abb. 7b.

An Stelle der Zeichnung kann man natürlich auch die Rechnung unter Einführung der Richtungscosinusse der Sparrenstäbe treten lassen, wie es Herr Schwedler gethan hat; ich gebe indessen dem graphischen Verfahren den Vorzug.

Beträchtlich verwickelter wird die Aufgabe, wenn die Lasten unregelmässig vertheilt sind. Bei Dachconstructionen sind es namentlich die durch den Wind hervorgebrachten Belastungen, welche hierbei in Betracht kommen. Aber auch die Schneebelastung kann leicht unsymmetrisch über die Dachfläche vertheilt sein.

Um die Spannungen für solche unsymmetrische oder „schiefe" Belastungen ermitteln zu können, beginne man damit, die Belastung eines einzelnen Knotenpunktes durch eine irgendwie gerichtete Kraft ins Auge zu fassen. Man kann dann stets eine Reihe von Stäben angeben, die bei der Belastung dieses Knotenpunktes ohne Spannung bleiben. Der verbleibende Rest stellt dann ein für sich genommen labiles System dar, das indessen für alle an jenem einen Knotenpunkte angreifenden Lasten statisch bestimmt ist (und, wenn man will, auch für solche Lasten stabil genannt werden kann).

Abb. 8 stelle den Aufriss und 8b den Grundriss einer 6seitigen Schwedler'schen Kuppel dar, von der nur der durch einen kleinen Kreis hervorgehobene Knotenpunkt eine beliebig gerichtete Last tragen soll. Man kann dann ohne Schwierigkeit erkennen, dass bei dem angenommenen Belastungsfalle nur die in der Abbildung durch starke Striche hervorgehobenen Stäbe in Spannung versetzt werden, alle übrigen aber spannungslos bleiben. Betrachtet man nämlich das Gleichgewicht der Kräfte am Knotenpunkte A, so erkennt man sofort, dass der Stab AB spannungslos sein muss. Von den vier Stäben des Knotenpunktes A liegen nämlich die drei übrigen in einer Ebene und eine äussere Kraft wirkt (nach Voraussetzung) nicht auf den Knotenpunkt ein. Daraus folgt die Behauptung mit Rücksicht auf § 24.

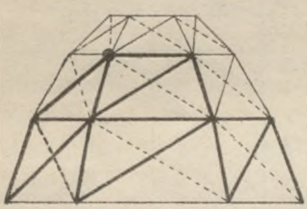


Abb. 8.

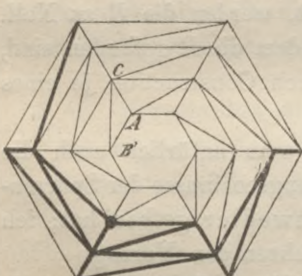


Abb. 8b.

Derselbe Schluss lässt sich für alle übrigen Knotenpunkte des Nabelringes wiederholen. Wenn aber die Spannungen aller Ringstäbe Null sind, muss dies auch von den Sparren- und Diagonalstäben des obersten Stockwerks der Kuppel zutreffen, da von diesen nur je zwei Stäbe an jedem Nabelringknotenpunkt befestigt sind. Damit ist zunächst bewiesen, dass durch die Belastung eines beliebigen Knotenpunktes alle von demselben aus nach Innen hin gelegenen Stäbe der Kuppel nicht in Mitleidenschaft gezogen werden.

Hierauf betrachte man einen Knotenpunkt C, welcher mit dem belasteten Knotenpunkte auf demselben Ringe liegt. Nach dem vorher Bewiesenen sind die von oben her kommenden Stäbe dieses Knotenpunktes ohne Spannung. Es bleiben demnach vier Stäbe übrig, von denen abermals drei in derselben Ebene enthalten sind. Der vierte muss daher spannungslos sein. Wenn man in derselben Weise weiter schliesst, bleiben schliesslich nur die durch starke Striche hervorgehobenen Stäbe als solche übrig, welche sich an der Uebertragung der fraglichen Last auf die Mauer betheiligen.

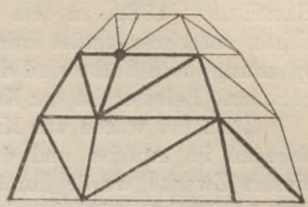


Abb. 9.

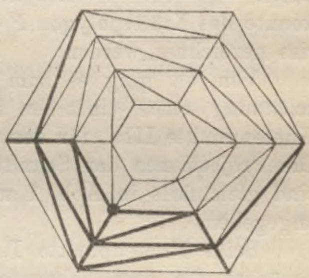


Abb. 9 b.

In Abb. 8 waren von den Gegendiagonalen in allen Fächern die in gleicher Richtung gehenden angenommen. Nach der Bemerkung am Schlusse von § 26 können wir die Gegendiagonalen auch so auswählen, dass der an der Uebertragung der Last betheiligte Kuppeltheil symmetrisch gestaltet ist. Dies ist in Abb. 9 geschehen, welche sich auf denselben Fall bezieht wie Abb. 8.

§ 43.

Nach diesen Vorarbeiten führt die wiederholte Anwendung des in § 23 beschriebenen Verfahrens ohne Weiteres zum Ziele. Nachdem die spannungslosen Stäbe ausgeschieden sind, gehen nämlich von dem Knotenpunkte, der die Last aufnimmt, nur noch drei Stäbe aus und nachdem deren Spannungen durch Zeichnen eines Kräftevierecks in zwei Projectionen bestimmt sind, gelangt man immer weiter zu anderen Knotenpunkten, an denen gleichfalls nur je drei unbekannte, nicht in derselben Ebene liegende Kräfte angreifen. Das Verfahren ist daher in jeder Hinsicht in Uebereinstimmung mit dem allbekannten Verfahren bei der graphischen Berechnung der ebenen Träger.

Auf Tafel I, welche ich meinem Aufsatze in der „Schweiz. Bauzeitung“ 1882, in dem ich dieses Verfahren zuerst veröffentlichte, entnehme, findet man die Constructionen durchgeführt. Die spannungslosen Stäbe sind durch Beisetzung rother Striche hervorgehoben. Belastet ist der Knotenpunkt IIb durch eine Einzellast P.

Zunächst wurde das Kräftepolygon für den Knotenpunkt IIb nebenan im Aufriss und darunter im Grundriss gezeichnet. Zu diesem Zwecke wurde durch P und 4b einerseits und durch 6a und 5b andererseits je eine Ebene gelegt und die Schnittlinie beider Ebenen ermittelt, deren Projectionen in Abb. 1 und 2 durch — · — · — · — irte Linien angegeben sind. Mit deren Hülfe konnte das Kräftepolygon P 4b, 5b, 6a sofort in Aufriss und Grundriss gezeichnet werden.

Von da ging es zum Knotenpunkte IIc, für den die Verzeichnung eines einfachen Kräftedreiecks genügte. Hierauf zum Knotenpunkte IIIa, für den sich das vorige Verfahren wiederholte. Die Projectionen der Schnittlinie der Ebenen 6a, 7a und 8a, 9h sind gleichfalls in Abb. 1 und 2 durch — · — · — · — irte Linien angegeben.

Beim Knotenpunkte IIIb, zu dem wir nun gelangen, sind zunächst die drei bekannten Spannungen 7a, 5b, 6b zu einer Resultirenden zu vereinigen, deren Projectionen in Abb. 1 und 2 durch — · · · — · · · — · · · — irte Linien angegeben sind. Durch diese Resultirende und 7b einerseits und durch 8b und 9a andererseits lege man Ebenen und ermittle die Projectionen der Schnittlinien der beiden, welche wie die gleichartigen früheren Linien auf der Tafel — · — · — · — irt sind. Nach dieser Vorbereitung kann das Kräftesechseck für den Knotenpunkt IIIb leicht fertig gezeichnet werden.

Dasselbe Verfahren wiederholt sich beim Knotenpunkte IIIc, während endlich beim Knotenpunkte IIId ein einfaches Kräftedreieck genügt. — Aus dem Kräfteplane ergibt sich leicht, welche Stäbe gezogen und welche gedrückt sind; die Grösse der Spannungen findet man durch Ermittelung der wahren Längen der betreffenden Strecken des Kräfteplanes unter Bezugnahme auf den gewählten Kräftemassstab.

§ 44.

Auf Grund des Vorausgegangenen kann die Durchrechnung einer praktisch vorliegenden Aufgabe leicht erfolgen. In der Regel wird es sich dabei nur einerseits um die Eigenlast (vermehrt um die gleichmässig vertheilt angenommene Schneebelastung) und andererseits um den Winddruck handeln. Von welcher Seite der Wind kommt, ist der Symmetrie wegen natürlich gleichgültig. Wir brauchen daher nur eine Windrichtung in Betracht zu ziehen und haben dann für jede Stabgattung (d. h. für alle Stäbe, welche auf Tafel I sich nur durch die beigesetzten Buchstaben unterscheiden, aber in der Ziffer übereinstimmen) als Grenzspannungen überall diejenigen anzunehmen, welche sich bei den nach der positiven und negativen Seite am meisten beanspruchten Stäben derselben Gattung bei der angenommenen Windrichtung ergeben.

Um diese zu finden, müssen wir die Constructionen der Tafel I für sämmtliche freie Knotenpunkte eines Sparrens (also auf der Tafel noch für Ib und IIIb) wiederholen. Daraus lässt sich dann durch einfache algebraische Summirung der ganze Spannungszustand der Kuppel ableiten, denn auch diejenigen Winddruckkräfte, welche z. B. am Knotenpunkt IIc oder IIIc u. s. w. wirken, bringen genau gleichartige Spannungsbilder hervor, wie die zuerst behandelten. Sie unterscheiden sich nur durch einen Proportionalitätsfaktor und dadurch von einander, dass die Spannung, welche sich z. B. erst auf Stab 7a bezog, nun auf Stab 7b sich bezieht u. s. w., d. h. dass an die Stelle jedes Buchstabens der nächstfolgende tritt.

Eine wichtige Bemerkung tritt uns bei näherer Betrachtung der Tafel I entgegen. Wir finden nämlich, dass die Stäbe derselben Gattung bei der Einzelbelastung eines Knotenpunktes der Reihe nach abwechselnd gezogen und gedrückt sind. So folgt auf das gezogene 9h das gedrückte 9a, dann das gezogene 9b und schliesslich das gedrückte 9c. Eine Abwechselung dieser Art hinsichtlich des Spannungsvorzeichens bildet hier nicht etwa eine Ausnahme, sondern ist bei Schwedler'schen Kuppeln die Regel. Daraus folgt, dass die ungünstigste Lastvertheilung für einen gegebenen Stab eine streifenartige ist, so nämlich, dass abwechselnd ein Sparren möglichst viel, der nächste möglichst wenig, der dritte wieder möglichst viel belastet wird u. s. w.

Das wirkliche Eintreten einer so ungünstig zusammengesetzten Belastung ist natürlich kaum zu erwarten. Namentlich der Winddruck kann in einer solchen Vertheilung niemals auftreten; eher könnte schon eine Vertheilung der Schneelast oder z. B. bei Dachreparaturen auch der Eigenlast in der angegebenen Weise vorkommen. Man wird daher bei der Berechnung der Windspannungen jedenfalls von einem solchen Heraussuchen der ungünstigsten Lastvertheilung absehen können. Die Beanspruchungen, welche durch die Belastung des einen Knotenpunktes in einem gegebenen Stabe hervorgerufen werden, werden dann durch die von der Belastung des Nachbarknotens herrührenden zum grösseren Theile wieder aufgehoben. Nur dadurch, sowie zum Theil aus den in § 45 besprochenen Erscheinungen, dürfte es sich erklären, dass die Schwedler'schen Kuppeln gewöhnlicher Art sich in der Praxis vollkommen bewährten, trotzdem nach der Rechnung des Herrn Hacker bei einseitiger Belastung in einzelnen Stäben Spannungen auftreten, welche die Festigkeit der Stäbe weit übersteigen. Der Belastungsfall, auf den sich die Rechnung gründet, kommt in so ungünstiger Zusammenstellung in der Wirklichkeit nicht vor.

Uebrigens ist es nicht nöthig, zur Ermittelung der Windspannungen von der Betrachtung des Belastungsfalles durch eine Einzellast auszugehen. Man kann auch z. B. von vornherein alle Knotenpunkte eines Sparrens durch normal zur Dachfläche stehende Kräfte, wie sie den Winddruckkräften entsprechen, belasten und alles Uebrige freilassen oder man kann auch von vornherein alle Knotenpunkte als belastet voraussetzen. In dieser Weise hat Herr W. Ritter*) ein Beispiel durchgeführt. Beachtenswerth ist dabei die Zerlegung des ganzen Kräfteplanes in eine Anzahl solcher, von denen je einer einem Stockwerke der Kuppel entspricht. Der Verfasser geht vom obersten Stockwerke aus und führt dann bei der Behandlung jedes weiter nach unten folgenden Stockwerks die Spannungen der von oben kommenden Stäbe als äussere

*) W. Ritter, Das Fachwerk. Tafel 6.

Kräfte ein. Die Zerlegung nach Stockwerken trägt zweifellos zur besseren Uebersichtlichkeit erheblich bei.

Wenn dieses Verfahren auch kürzer ist, kann es die Behandlung der Belastung mit Einzellasten doch nicht entbehrlich machen, da diese allein den ganzen Hergang der Lastübertragung auf die Widerlager und die Rolle, welche den einzelnen Stäben dabei zufällt, deutlich erkennen lässt.

§ 45. Kuppeln über Grundrissen von grosser Seitenzahl.

Durch die Steifigkeit der Knotenpunkte gestaltet sich die Vertheilung der Kräfte in Wirklichkeit anders, als es die vorausgehenden Betrachtungen lehren. Einerseits wird durch die Nebenspannungen, die hierdurch entstehen, die Beanspruchung der Stäbe erhöht, andererseits werden aber dadurch, dass sich auch noch andere Stäbe, die bei gelenkförmigen Knotenpunkten spannungslos bleiben, jetzt an der Aufnahme der Last betheiligen, die zunächst betroffenen Stäbe wieder entlastet. So lange die Seitenzahl des Grundrisses und damit die Zahl der in Frage kommenden Knotenpunkte gering ist, bleiben diese Einflüsse in geringen Grenzen. Anders ist es bei einer grossen Seitenzahl des Grundrisses.

Je mehr nämlich diese Seitenzahl ansteigt und je grösser zugleich die Zahl der Ringe bei gegebener Leitlinie der Kuppelfläche wird, desto flacher stossen die Stäbe an jedem Knotenpunkte zusammen (d. h. um so kleiner werden die Winkel, welche die Stäbe mit der Tangentialebene der Kuppelfläche bilden). In demselben Masse wachsen die Stabspannungen, welche durch eine Einzellast hervorgebracht werden und zugleich der Einfluss, den die durch die Verbiegungen der Stäbe hervorgerufenen Momente auf die Gleichgewichtsbedingungen ausüben.

Bei einem achteckigen Grundrisse macht sich dies, wie aus den von Herrn Ritter und mir behandelten Beispielen hervorgeht, noch nicht sehr bemerklich; anders schon bei einem zwölfeckigen Grundrisse, wie aus den Berechnungen des Herrn Hacker folgt. Bei einem 30-eckigen Grundrisse, wie er bei

Schwedler'schen Kuppeln nicht selten vorkommt, wird dagegen das Spannungsbild durch die Steifigkeit der Knotenpunkte vollständig verschoben. Eine getreue Wiedergabe der wahren Verhältnisse wäre hier nur unter genauer Berücksichtigung der Stabverbiegungen zu erlangen.

Der praktische Werth der vorhergehenden Betrachtungen wird durch diesen Umstand sehr beeinträchtigt, sobald es sich um Kuppeln von grosser Seitenzahl, wie sie seither meistens gebaut wurden, handelt. Man ist bei diesen nach wie vor auf eine mehr schätzungsweise Bestimmung der Kräfte angewiesen. Die Erfahrung hat gelehrt, dass die nach den Schwedler'schen Formeln berechneten Kuppeln allen bei ihnen thatsächlich vorkommenden Belastungen zu widerstehen vermögen. Man kann daher unbesorgt jene Näherungsformeln auch weiterhin für die Berechnung verwenden, so lange wenigstens als nicht ganz ungewöhnliche Fälle, für die bisher keine Erprobung vorliegt, in Betracht kommen.

Unter diesen Umständen kann man nur lebhaft wünschen, dass für eine Kuppel der fraglichen Art einmal eine Experimentaluntersuchung mit ähnlicher Sorgfalt für den Fall der Belastung eines einzelnen Knotenpunktes durchgeführt würde, wie seiner Zeit für den Weidaer Viadukt. Aus den Ergebnissen einer solchen Untersuchung, welche sich zweckmässiger Weise an die oben beschriebene Berechnung für gelenkförmige Knoten anzulehnen und die durch die Steifigkeit der Knoten herbeigeführten Aenderungen in der Spannungsvertheilung zu ermitteln hätte, liessen sich weit sicherere und für die Anwendung werthvollere Folgerungen ableiten, als aus der Auflösung der Gleichungen der Theorie der Nebenspannungen.

Mit Rücksicht darauf, dass die für gelenkförmige Knoten berechneten Spannungen eine Norm abgeben, an die sich die Ermittelung auf dem Versuchswege anlehnen kann, glaube ich, dass auch für Kuppeln von grosser Seitenzahl die von mir angegebene Berechnungsmethode in Zukunft noch eine wichtige Rolle spielen wird.

Auf der anderen Seite scheint es mir, dass die Ergebnisse der vorhergehenden Betrachtungen zu der Erwägung einladen, ob es für die Anwendungen sich nicht mehr empfehlen würde, Kuppeln mit grosser Seitenzahl zu vermeiden und an ihrer Stelle etwa 6- oder 8-seitige Kuppeln auszuführen. Der Einwand, dass die Maschenweite dann zu gross würde, lässt sich leicht durch den Hinweis auf die in dem folgenden Capitel zu besprechenden Füllungen widerlegen. Auch in anderer Weise, als es dort besprochen werden wird, lassen sich übrigens Sekundärconstructionen über je einem solchen grossen Fache anbringen, wie man leicht erkennt.

Mir (und wohl vielen Fachgenossen mit mir) widerstrebt es, einen Fachwerkträger auszuführen, der vermöge seiner Grundspannungen nicht im Stande ist, die an ihm wirkenden Lasten mit Sicherheit zu tragen, und mich dabei auf die nicht genau verfolgbaren Wirkungen zu verlassen, welche durch die Steifigkeit der Knotenpunkte herbeigeführt werden. Es ist ja zweifellos, dass die Entlastungen, welche durch letztere veranlasst werden, einen Einsturz, der sonst vielleicht unvermeidlich wäre, verhüten können. So lange diese Verhältnisse nicht näher durchforscht sind, fühle ich mich aber auf so unsicherem Grunde nicht wohl. Die Möglichkeit, einen klaren und zuverlässigen Ueberblick über das Verhalten eines Bauwerks bei allen einzelnen Belastungsfällen zu gewinnen, ist die erste Forderung, die ich an eine Construction stellen möchte.

Nach meiner Schätzung können sich die Ausführungskosten einer Kuppel von geringerer Seitenzahl nicht höher stellen als die einer solchen von grösserer Seitenzahl; ich glaube vielmehr, dass der Vortheil ganz auf Seite der ersteren ist. Vor allem spricht für sie die kleinere Anzahl der auf Druck beanspruchten Hauptconstructionstheile und die vereinfachte Arbeit an den einzelnen ebenen Fächern. Den Fachgenossen, welche häufiger in die Lage kommen, Kuppeln auszuführen, möchte ich daher einen Versuch mit einer etwa 8-seitigen Kuppel und Netzwerktheilung in den ebenen Feldern, wie sie im folgenden Capitel besprochen werden wird, lebhaft empfehlen, und zwar für einen Fall, in dem sie seither Kuppeln mit grosser Seitenzahl zu verwenden pflegten, damit sich ein genaues Urtheil über die beiderseitigen Herstellungskosten gewinnen lässt.

§ 46. Zeltdächer und Pfeiler.

Bei geradlinigem Meridianschnitte gehen die Kuppeln in die Kegel- oder Zeltdächer oder bei sehr steilem Anstiege der Wandflächen und zugleich bei der Bestimmung zur Aufnahme der Hauptlast am Nabelringe in die Flechtwerkpfeiler über. Für die Berechnung derselben gilt das vorher Gesagte ohne jede Aenderung, da diese Constructionen ja nur einen besonderen Fall der allgemeinen Kuppelconstruction ausmachen.

Indessen lässt sich die Berechnung dieser ebenflächigen Gebilde erheblich dadurch vereinfachen, dass man sie als eine Vereinigung ebener Fachwerke auffassen kann. Eine beliebig gerichtete Last, welche an irgend einem Knotenpunkte auftritt, kann stets in drei Componenten zerlegt werden, von denen die erste mit der Sparrenrichtung zusammenfällt und vom Sparren unmittelbar auf die Mauer übertragen wird. Die beiden anderen fallen in die Ebenen der sich beiderseits anschliessenden Seitenflächen und stehen in denselben senkrecht zur Sparrenrichtung. Durch sie werden die Stäbe der ebenen Fachwerke auf diesen Seitenflächen in Spannung versetzt. Man ermittelt diese Spannungen durch Zeichnen eines ebenen Kräfteplans für jede der beiden Seitenflächen; alle nicht zu diesen gehörigen Stäbe des ganzen Flechtwerkträgers bleiben ohne Spannung.

Nachdem diese Kräftezerlegungen ausgeführt sind, hat man ein Spannungsbild vor sich, das an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herbeiführt. Da der Träger (unter Voraussetzung eines offenen Nabelringes) statisch bestimmt ist, also nur ein einziges Gleichgewichtssystem der Spannungen zulässt, muss das gefundene mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Auf Grund dieser Bemerkungen lässt sich die Berechnung der Pyramiden-Flechtwerkträger mit offenem Nabelring, wie man sie zusammenfassend nennen kann, in höchst einfacher Weise durchführen.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man den Fachwerkpfeilern oder Gerüstpfeilern über rechteckigem (häufig quadratischem) Grundrisse vielfach noch eine Versteifung durch doppelte Diagonalen zwischen je vier in derselben wagrechten Ebene liegenden Knotenpunkten verleiht*). Diese Diagonalen bilden überzählige Stäbe, sind für die Aussteifung daher überflüssig. Trotzdem lässt sich ihre Anwendung vollständig rechtfertigen, falls die Fächer auf der Flechtwerkoberfläche mit doppelten schlaffen Diagonalen versehen sind. Bei einer Belastung des Gerüstpfeilers treten nämlich in diesem Falle die Erscheinungen der endlich kleinen Beweglichkeit auf, welche durch die von den senkrechten Lasten nicht beeinflussten wagrechten Diagonalkreuze eingeschränkt werden.

§ 47. Einfluss einzelner Stäbe auf Verschiebungen der Knotenpunkte.

Aus dem Maxwell'schen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen folgt unmittelbar, dass auf die Verschiebungen, welche ein Knotenpunkt bei einer Formänderung des Fachwerks erleidet, nur die Längenänderungen derjenigen Stäbe von Einfluss sind, welche bei einer Belastung des betreffenden Knotenpunktes in Spannung versetzt werden. Alle in den Abbildungen 8 und 9 (S. 70 u. 71) mit schwachen Linien angegebenen Stäbe haben daher gar keinen Einfluss auf die Verschiebungen des dort durch einen kleinen Kreis hervorgehobenen Knotenpunktes.

Uebrigens lässt sich dies leicht noch dadurch deutlicher erkennbar machen, dass man für die Diagonalen, die man der Betrachtung zu Grunde legt, eine etwas abgeänderte Auswahl unter den Gegendiagonalen trifft. In Abb. 8 waren alle Diagonalen im gleichen Sinne gehend angenommen. Diese Auswahl empfiehlt sich wegen der Möglichkeit, die Ergebnisse der Berechnung, welche bei einem Knotenpunkte gefunden wurden, ohne Umschweife auf alle anderen in demselben Ringe liegenden übertragen zu können.

---

*) Vgl. z. B. den Gerüstpfeilerviadukt Mittweida, Civ.-Ing. 1891. S. 305.

In Abb. 9 waren dagegen diejenigen ausgewählt, welche bei dem fraglichen Belastungsfalle Zugspannungen erfahren, also bei demselben thatsächlich zur Wirkung gelangen. Diese Auswahl hat also den Vorzug, sofort das wirkliche Spannungsbild zu ergeben, das symmetrisch ist und daher auch nur die Verzeichnung der Hälfte des ganzen Kräfteplans erfordert.

Durch die allgemeinen Betrachtungen über Gegendiagonalen sind wir indessen berechtigt, auch jede beliebige andere Auswahl unter denselben zu treffen, wenn sich dies zur Klarstellung des Verhaltens des gesammten Fachwerkes empfiehlt. Bei der in Abb. 10 getroffenen Auswahl bilden, wie man leicht erkennt, die an der Aufnahme der Last betheiligten Stäbe, welche wie früher durch starke Striche hervorgehoben wurden, von dem übrigen Stabverbande losgelöst mit der Erde zusammen einen e i n f a c h e n stabilen und statisch bestimmten Fachwerkträger.

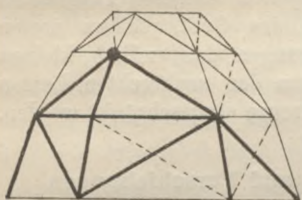


Abb. 10.

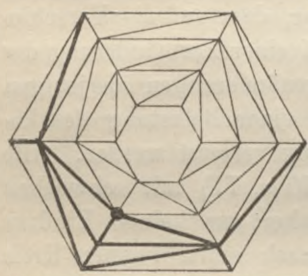


Abb. 10b.

Diese Bemerkung für sich allein genügt schon, um erstens zu beweisen, dass alle übrigen Stäbe spannungslos sein müssen. Man kann nämlich, wie aus derselben hervorgeht, eine Kräftezerlegung vornehmen, welche alle anderen Stäbe ohne Spannung lässt und dabei an allen Knotenpunkten Gleichgewicht herstellt. Da der ganze Träger statisch bestimmt ist, also nur ein einziges Gleichgewichtssystem der Spannungen zulässt, muss dieses das wirklich eintretende sein. — Zweitens folgt aber auch unmittelbar aus derselben, dass beliebige Längenänderungen der übrigen Stäbe keine Verschiebung des ins Auge gefassten Knotenpunktes herbeiführen können, denn so lange die stark hervorgehobenen Stäbe ihre Längen nicht ändern, ist der Knotenpunkt durch dieselben starr mit der Erde verbunden.

Durch Betrachtungen dieser Art über die Formänderung der Flechtwerkträger wird man vermuthlich noch zu manchen werthvollen Aufschlüssen über die Eigenschaften dieser letzteren gelangen. Namentlich scheint mir, dass die Berechnung der statisch unbestimmten Systeme (z. B. der Kuppeln mit Spitze) daraus Vortheil ziehen kann.

§ 48. Kuppeln mit mehrtheiligem Flechtwerk.

Bei geringer Anzahl der Seitenflächen, aber nicht zugleich kleiner Anzahl der Ringe werden die vierseitigen Felder der Kuppel sehr lang gestreckt. In diesem Falle kann man aus ähnlichen Gründen wie bei ebenen Trägern ein mehrtheiliges Flechtwerk anordnen. Abb. 11 gibt einen Theil eines Kuppelgrundrisses dieser Art an. Die betreffende Kuppel ist als eine Uebereinanderlagerung von zwei einfachen Schwedler-schen Kuppeln aufzufassen (§ 18).

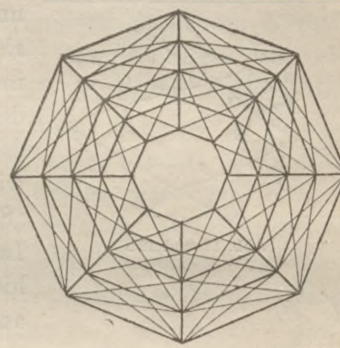


Abb. 11.

Mehr als diese Anordnung dürfte sich freilich für solche Fälle die Untertheilung der lang gestreckten Fächer durch eine Netzwerkfüllung (§ 53) empfehlen.

Drittes Capitel.

Kuppeln mit Netzwerktheilung.

§ 49. Einzelnes Geschoss einer Netzwerkkuppel.

Von den Schwedler'schen Geflechten unterscheiden sich die Netzwerkgeflechte dadurch, dass bei jenen je zwei Dreiecke der Mantelfläche in eine Ebene fallen und dadurch ein vierseitiges, ebenes, durch schlaffe Gegendiagonalen ausgesteiftes Fach bilden, während bei den Netzwerken jedes Dreieck der Mantelfläche unabhängig von den beiden Nachbardreiecken desselben Geschosses ist. Die Sparrenstäbe und

Gegendiagonalen fallen bei diesen fort und werden beide durch eine Netzwerkfüllung zwischen den Ringen ersetzt.

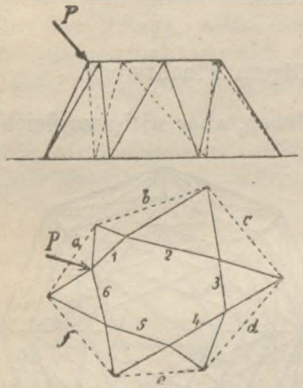


Abb. 12 und 12b

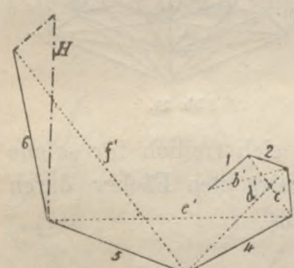


Abb. 12c.

Des klareren Ueberblickes wegen werde ich zunächst nur ein einzelnes Geschoss oder Stockwerk der ganzen Kuppel betrachten. Abbildung 12 stellt ein solches über unregelmässig sechsseitigem Grundrisse in der Ansicht und Abb. 12b im Grundrisse dar. Die Berechnung der Stabspannungen für den Fall, dass irgend eine Einzellast P einwirkt, habe ich zuerst in der „Schweiz. Bauzeitung“*) dargelegt. Im Wesentlichen werde ich mich hier der dort gegebenen Darstellung anschliessen.

Zunächst betrachte man den Knotenpunkt des inneren Ringes, von dem die Stäbe 1 und 2 ausgehen. Von den vier Stabkräften, die an ihm wirken, ist zunächst keine bekannt; man weiss aber, dass die Resultirende der 1 und 2 Gleichgewicht halten muss mit der Resultirenden der beiden anderen. Sie muss daher mit der Richtung der Schnittlinie der wagrechten Ringebene mit der Ebene der Netzwerkstäbe zusammenfallen, also parallel zur Grundrissseite b gehen.

Daraus folgt zunächst, dass die Spannungen der Ringstäbe 1 und 2 entgegengesetztes Vorzeichen haben müssen, und derselbe Schluss lässt sich für alle übrigen unbelasteten Knotenpunkte des inneren Ringes wiederholen. Bei grader Seitenzahl des Grundrisses (wie in der Abbildung) ist demnach von den beiden Ringstäben, die von dem belasteten

*) Bd. 11. 1888. S. 115.

Knotenpunkte ausgehen, nothwendig der eine gezogen und der andere gedrückt. Bei ungrader Seitenzahl haben dagegen beide Spannungen gleiches Vorzeichen.

Aus diesen Bemerkungen ergibt sich bereits ein sehr einfaches Verfahren für die Berechnung der Stabspannungen bei regelmässigem Grundrisse mit ungrader Seitenzahl, wenn (wie es bei den Anwendungen stets der Fall sein wird) die Richtung der Last P in einer Symmetrie-Ebene der Kuppel enthalten ist. Die Resultirende der Ringstäbe an dem belasteten Knotenpunkte fällt dann mit der Halbirungslinie des von ihnen gebildeten Winkels zusammen und wird durch eine Kräftezerlegung einfachster Art gefunden. Damit erhält man auch durch Zeichnen eines weiteren Kräftedreiecks alle übrigen Stabspannungen. Die Stäbe einer Gattung sind (abgesehen von denjenigen, die an dem belasteten Knotenpunkte angreifen) alle abwechselnd gezogen und gedrückt und der Absolutbetrag der Spannung ist bei allen derselbe.

Wie bei den Schwedler'schen werden daher auch bei den Netzwerkkuppeln die grössten Spannungen durch eine streifenartige Vertheilung der Belastung hervorgebracht. Dagegen unterscheiden sich die letzteren von den erstgenannten sehr erheblich dadurch, dass bei ihnen stets sämmtliche Stäbe in Spannung gerathen, während bei diesen die meisten Stäbe bei der Einzelbelastung eines Knotenpunktes ohne Spannung blieben.

Um die Berechnung der Stabspannungen auch für einen unregelmässigen Kuppelgrundriss durchführen zu können, verzeichne man den in Abb. 12c angegebenen Kräfteplan. Man beginne mit der Ringspannung 1. Die Grösse derselben ist vorläufig unbekannt; wir können dieselbe indessen durch eine Strecke von beliebiger Länge zur Darstellung bringen, wenn wir uns vorbehalten, den Kräftemassstab nachträglich so zu wählen, dass die Spannung 1 dadurch richtig wiedergegeben wird. An 1 lässt sich das Dreieck 1 2 b' anreihen, worin b' die Resultirende von 1 und 2 angibt, die, wie oben erkannt wurde, parallel zur Grundrissseite b geht. An die Seite 2 schliesst sich ebenso das Dreieck 2 3 c′ für den folgenden Knotenpunkt an u. s. w. Bei grader Seitenzahl des Grundrisses sind die Spannungen 1 und 6 von entgegengesetztem Vorzeichen. Um die Resultirende H derselben an dem belasteten Knotenpunkte zu finden, müssen wir daher 1′ parallel und gleich 1 so an 6 anreihen, wie es die Abbildung zeigt. Bei ungrader Seitenzahl wäre 1′ in entgegengesetzter Richtung an das Ende von 6 anzutragen.

Nachdem die Resultirende H auf diesem Wege der Richtung nach bekannt wurde, kann man leicht auch ihre Grösse bestimmen, da an dem belasteten Knotenpunkte ausser ihr nur noch zwei unbekannte Stabkräfte angreifen. Sobald dies geschehen ist (§ 23), lässt sich der Massstab feststellen, in dem der Kräfteplan Abb. 12c gezeichnet ist. Man kennt damit alle Ringspannungen und findet sofort auch die Spannungen aller übrigen Stäbe.

§ 50. **Labile Netzwerkkuppeln.**

Nur in einem Falle führt die besprochene Kräftezerlegung nicht zum Ziele, wenn nämlich die Richtungslinie der in Abb. 12c construirten Resultirenden H parallel zur Grundrissseite a in Abb. 12b geht. Es liegt dann eine unendlich kleine Verschieblichkeit der Kuppel vor und bei beliebig gerichteter Last P treten im Allgemeinen unendlich grosse Stabkräfte auf. Eine Netzwerkkuppel dieser Art muss daher unbedingt vermieden werden.

Man erkennt leicht, dass dieser Fall bei allen Netzwerkkuppeln über einem regelmässigen Grundrisse von grader Seitenzahl eintritt. Diese Kuppeln sind daher stets labil und dürfen nicht ausgeführt werden; als Grundriss einer symmetrisch gestalteten Netzwerkkuppel muss vielmehr stets ein Vieleck von ungrader Seitenzahl gewählt werden.

Bei den Kuppeln über regelmässigem Grundrisse von grader Seitenzahl geht die unendlich kleine Verschieblichkeit sogar in eine endliche Verschieblichkeit über. Das Ganze bildet einen übergeschlossenen Mechanismus, bei dem sich der überschüssige Zwang mit dem übrigen Kettenschlusse verträgt.

Man erkennt dies leicht aus der Betrachtung der Abb. 13, welche ein Netzwerkkuppelgeschoss über quadratischem Grundrisse darstellt. Wenn sich das in der Abbildung schraffirte Dreieck *A* dreht, so dass sich die Spitze desselben senkt, muss sich das gleichfalls schraffirte Dreieck *B* um so viel heben, dass der zwischen beiden liegende Ringstab seine Länge unverändert beibehält. Das zwischen *A* und *B* liegende Dreieck der Mantelfläche dreht sich hierbei um die Schnittlinie der Ebenen *A* und *B*. Das ganze Stabgebilde vermag nach Drehungen von endlicher Grösse dann in die durch punktirte Linien angegebene Lage überzugehen, ohne dass sich die Länge irgend eines Stabes geändert hätte. — Endliche Formänderungen derselben Art sind bei jedem regelmässigen Grundrisse von grader Seitenzahl möglich. Eine Netzwerkkuppel über ungrader Seitenzahl ist dagegen vollkommen stabil.

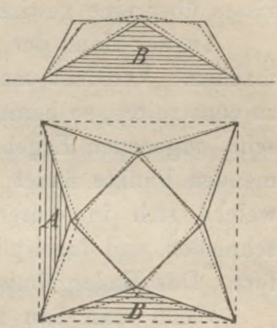


Abb. 13 und 13 b.

§ 51.

Je grösser die Seitenzahl des Grundrisses wird, desto weniger Unterschied kann es ausmachen, ob wir dieselbe um eine vergrössern oder verkleinern. Eine Kuppel über einem regelmässigen 30-Eck kann sich von einer 31-eckigen nicht allzuviel unterscheiden. So lange zwar die Knotenpunkte wirklich gelenkförmig sind, ist die erste verschieblich und die zweite steif; aber auch in dieser letzteren treten bei einseitiger Belastung ganz bedeutende Spannungen auf, weil die Last sich nach Richtungen hin zerlegt, welche an jedem Knotenpunkte nahezu in derselben Ebene liegen, in der aber die Last selbst nicht enthalten ist. Mit Berücksichtigung der begrenzten Festigkeit des Materials kann man daher sagen, dass eine 31-seitige Kuppel nahezu ebenso durch eine einseitige Belastung gefährdet wird, wie eine 30-seitige. Eine ganz geringe Reibung in den Gelenken genügt bereits, das Verhalten beider in fast volle Uebereinstimmung zu bringen.

Bei einer Kuppel mit steifen Knoten dagegen weicht das wahre Spannungsbild, wie bereits bei den Schwedler'schen Kuppeln auseinander gesetzt wurde, ganz bedeutend von dem theoretisch gefundenen ab, sobald die Seitenzahl des Grundrisses über eine gewisse Grösse hinausgeht.

An der Hand der Abb. 12c lässt sich dies leicht deutlich machen. Versucht man dieselbe für eine vielseitige Kuppel zu construiren, so bemerkt man sofort, dass man nur zu einem sehr ungenauen Ergebnisse gelangen kann. Die hinzukommenden Punkte findet man nämlich als Schnitte von Linien, welche sich in diesem Falle unter sehr spitzen Winkeln schneiden, und dabei pflanzen sich alle Fehler bis zum Schlusse fort. Das Endergebniss ist daher ein sehr unsicheres.

Wenn man dem zeichnerischen Verfahren hieraus einen Vorwurf machen wollte, wäre man sehr ungerecht. Im Gegentheile muss man es als einen Vorzug desselben bezeichnen, wenn es uns in solchen Fällen davor warnt, die Rechnungsergebnisse als zuverlässig zu betrachten. In Folge der steifen Knoten fallen nämlich die Richtungslinien der Stabspannungen nicht mit der geometrischen Stabachse zusammen; es entstehen Winkelabweichungen zwischen beiden Linien von ähnlicher Art wie die unvermeidlichen Zeichenfehler beim Ziehen der Parallelen. Wenn nun das zeichnerische Verfahren uns darauf hinweist, dass die unvermeidlichen Zeichenfehler das Resultat stark zu beeinflussen vermögen, so lässt sich daraus sofort schliessen, dass die dem Betrage nach im Allgemeinen noch grösseren Richtungsunterschiede zwischen der vermeintlichen und der wahren Lage der Stabspannungen einen noch weit beträchtlicheren Einfluss auf das wahre Schlussresultat auszuüben vermögen. — Bei Grundrissen von kleiner Seitenzahl kann dagegen, wie man aus dieser Betrachtung zugleich erkennt, der Einfluss der steifen Knoten auf die Vertheilung der Grundspannungen nicht von grossem Belang sein.

Das wirkliche Verhalten einer 30-seitigen und einer 31-seitigen Kuppel mit steifen Knoten beim Aufbringen einer

Einzellast wird demnach fast völlig übereinstimmen. Die beiden Ringstäbe, welche von dem belasteten Knotenpunkte ausgehen, erfahren in beiden Fällen (bei senkrechter Lastrichtung) zweifellos Druckspannungen von gleicher Grösse. Die auf diese dann beiderseits folgenden Ringstäbe werden beide gezogen, wie es bei der 31-seitigen Kuppel mit reibungsfreien Knotenpunkten der Fall wäre. Nur in der Grösse dieser Zugspannung findet eine bedeutende Abweichung statt. Bei reibungsfreien Knotenpunkten müsste sie gleich der Druckspannung des vorhergehenden Ringstabes sein, bei der Kuppel mit steifen Knoten ist sie geringer als diese und bei einigermassen grosser Seitenzahl ist sie vielleicht nur halb so gross, ja vielleicht beträgt sie (bei sehr grosser Seitenzahl) nur ein Zehntel derselben.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergibt sich leicht daraus, dass die Zugspannung im folgenden Ringstabe nur erforderlich ist, um die zur Ebene der beiden Schrägstäbe (das sind die Füllungsstäbe zwischen zwei Ringen) senkrechte Componente der Druckspannung des vorhergehenden Ringstabes aufzuheben. Je grösser die Seitenzahl des Grundrisses ist, einen desto kleineren Bruchtheil bildet diese Componente von der gesammten Druckspannung und desto eher kann sie durch die Biegungsspannungen der Schrägstäbe aufgenommen, bezw. durch die Steifigkeit der Knotenpunkte noch weiter abgeschwächt werden.

Dieselben Verhältnisse liegen bei jedem folgenden Knotenpunkte gleichfalls vor. Die bei reibungsfreien Knotenpunkten dem Absolutbetrag nach einander durchweg gleichen Ringspannungen nehmen bei steifen Knoten in geometrischer Progression nach beiden Seiten hin ab und sinken bei grosser Seitenzahl des Grundrisses schon in geringer Entfernung von dem belasteten Knotenpunkte auf einen ganz unmerklichen Werth herab. Der jenseitige Kuppeltheil bleibt dann thatsächlich auch nahezu spannungslos, wie bei der Schwedler'schen Kuppel.

Durch Einführung einer „Abschwächungsziffer“, welche das Verhältniss zwischen einer vorhergehenden Ringspannung und der folgenden bei einer Einzelbelastung angibt, liesse sich die Berechnung einer Netzwerkkuppel über grosser Seitenzahl sehr leicht übersichtlich durchführen. Die Abschwächungsziffer selbst könnte ohne Schwierigkeit aus Betrachtungen über die elastische Formänderung berechnet werden, allerdings erst nachdem die Stabquerschnitte bereits bekannt sind. Für den Augenblick muss ich mich damit begnügen, auf diesen Weg hinzuweisen, der mir sehr gangbar erscheint und wahrscheinlich zu recht befriedigenden Ergebnissen führt. Mit Rücksicht darauf, dass die Netzwerkkuppeln den Schwedler'schen Kuppeln in Bezug auf die Einfachheit des ganzen Aufbaues zweifellos überlegen sind, wäre eine befriedigende Berechnungsmethode derselben, so weit eine grosse Seitenzahl in Betracht kommt, sehr erwünscht.

Mehr freilich möchte ich auch an dieser Stelle wieder empfehlen, auf eine Herabminderung der Seitenzahl des Grundrisses Bedacht zu nehmen. Damit die auf reibungsfreie Knotenpunkte gegründete Berechnung sich von der Wahrheit nicht allzuweit entferne, sollte man über ein Neuneck nicht leicht hinausgehen; mehr noch empfiehlt sich ein Fünfeck oder Siebeneck. Die Abweichung der Mantelfläche von der gekrümmten Fläche, welche die Dachoberfläche bilden soll, wird hier allerdings zuweilen störend ins Gewicht fallen. Man muss jedoch beachten, dass eine Netzwerkkuppel sich an die durch die Knotenpunkte gelegte gekrümmte Fläche weit enger anschliesst als eine Schwedler'sche Kuppel bei gleicher Seitenzahl des Grundrisses.

§ 52. **Mehrgeschossige Kuppel.**

Den vorhergehenden Erörterungen lag immer nur die Betrachtung eines einzelnen Geschosses zu Grunde. Man sieht leicht ein, dass man durch Uebereinandersetzen mehrerer stabilen Geschosse auch eine stabile mehrgeschossige Netzwerkkuppel erhält, dass ferner bei der Belastung eines Knotenpunktes alle von demselben nach oben hin liegenden Geschosse unbeeinflusst bleiben und dass schliesslich die Berechnung dadurch ausgeführt werden kann, dass man sie zunächst für ein einzelnes Geschoss oder Stockwerk durchführt und dann für das nach unten folgende die gefundenen Stabspannungen als äussere Kräfte betrachtet.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens entnehme ich meiner oben citirten Abhandlung in der „Schweiz. Bauzeitg." folgende Stelle:

„Am Knotenpunkte Ia des innersten Ringes (Abb. 14) soll die Einzellast P angreifen; es handelt sich um die Ermittelung der durch diese in sämmtlichen Stäben hervorgerufenen Spannungen. Zunächst ergibt sich aus dem früher Bewiesenen, dass die Ringstäbe 1a, 3a, 5a, 7a Druck-, die 2a, 4a, 6a Zugspannungen erleiden, welche dem Absolutwerthe nach unter einander gleich sind. Die Resultirenden von 1a und 7a wie von 8a und 21a am Knotenpunkte Ia müssen demnach im Meridianschnitte liegen und mit P im Gleichgewichte stehen. Man kann also in Abb. 15 ein Kräftedreieck zeichnen, das sich sofort mit Zuhülfenahme des Grundrisses (Abbildg. 15b) zu einem räumlichen Kräftefünfeck erweitern lässt.

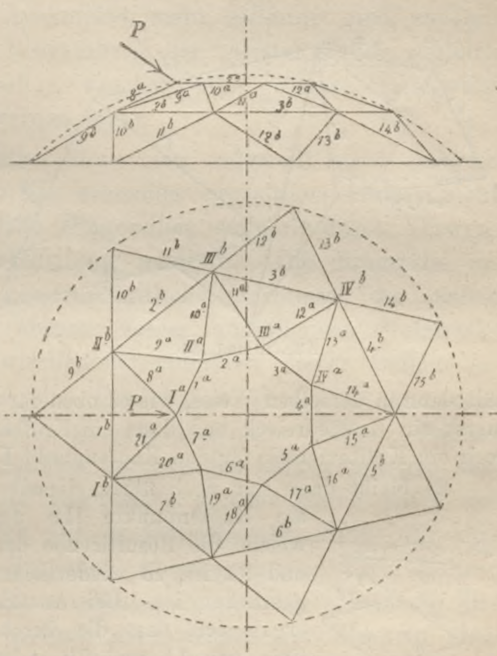


Abb. 14 und 14b.

Dann gehe man zum Knotenpunkte IIa über und setze 1a und 2a zu einer Resultirenden zusammen, die in Abb. 15b durch eine gestrichelte Linie angegeben ist. Durch Ziehen von Parallelen erhält man die Projectionen der Stabspannungen 9a und 10a. Alle Diagonalstäbe der ersten Ringzone mit Ausnahme von

8 a und 2 1 a erfahren Spannungen von gleichem Absolutwerthe und zwar sind 9 a, 12 a, 13 a, 16 a, 17 a, 20 a gezogen, alle übrigen gedrückt.

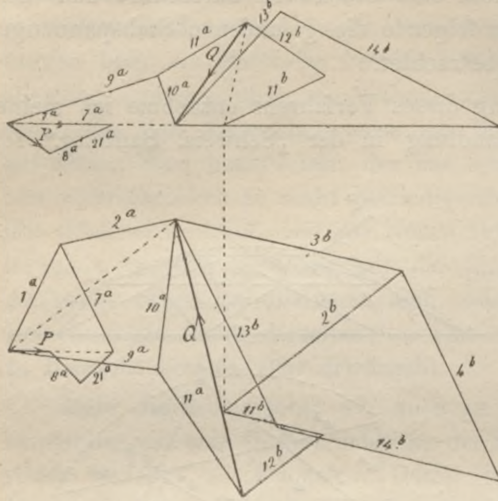


Abb. 15 und 15 b.

Die Spannungen in dem obersten Stockwerke sind nun sämmtlich bekannt; zur Ermittelung der im zweiten auftretenden Kräfte setzt man 10 a und 11 a zu einer in Abb. 15 mit Q bezeichneten Resultirenden zusammen und nehme vorläufig an, dass die obere Zone ganz entfernt sei und an der unteren ausschliesslich am Knotenpunkte III b die äussere Kraft Q angreife. Man erhält dann in derselben Weise, wie es oben für P beschrieben wurde, zuerst ein Kräftedreieck und dann ein Kräftefünfeck, an das dann noch ein Kräfteviereck für den Knotenpunkt IV b angeschlossen ist.

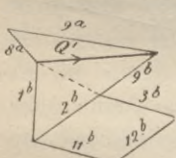


Abb. 16.

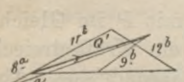


Abb. 16 b.

Es bleibt dann nur noch übrig, dieselbe Construction für die am Knotenpunkte II b augreifende Kraft Q', welche die Resultirende der Stabspannungen 8 a und 9 a ist, zu wiederholen, wie es in Abb. 16 geschehen ist. Bei Ausführung der Zeichnung ergab sich, dass die durch Q' und die Mittellinie von 1 b und 2 b gelegte Ebene die durch 9 b und 10 b gelegte in 9 b schneidet. Es wurde daher (zufälliger Weise) die Spannung von 10 b zu Null. Ausserdem enthält Abb. 16 noch ein Kräfteviereck für den Knotenpunkt III b.

Nach Ausführung dieser Constructionen ergeben sich alle Spannungen der Stäbe in der unteren Ringzone in leicht ersichtlicher Weise durch blosse Additionen und Subtractionen. Dabei ist nur zu beachten, dass die an den Knotenpunkten IV b und VI b angreifenden Kräfte Q einen nach Innen zu gekehrten Pfeil besitzen, worauf bei Feststellung der Vorzeichen zu achten ist.

§ 53. Kuppeln mit Sparren und Netzwerkfüllung.

Bei der Behandlung der Schwedler'schen Kuppeln machte ich auf die Vortheile aufmerksam, welche man durch die Verminderung der Seitenzahl des Grundrisses erlangen kann. Diesen steht indessen in erster Linie der Nachtheil gegenüber, dass die Ringstäbe alsdann sehr lang werden. Ein Nachtheil ist dies nicht nur desshalb, weil die auf Druck beanspruchten Stäbe in Bezug auf Ausknicken mehr gefährdet sind, sondern namentlich weil die Ringstäbe in den meisten Fällen zugleich als Pfetten dienen sollen, wesshalb eine grössere Spannweite derselben verhütet werden muss.

Diesen Nachtheilen kann man indessen leicht dadurch begegnen, dass man die schmalen vierseitigen Fächer nicht durch doppelte schlaffe Diagonalen, sondern durch Verwendung einer Netzwerktheilung aussteift. Die Ringstäbe erscheinen dann als gemeinschaftliche Gurtungen der beiden die anschliessenden ebenen Felder ausfüllenden Netzwerkbalken. In den Zwischenknotenpunkten dieser Balken erfahren die Ringstäbe eine Theilung in Abschnitte von angemessener Länge, welche einzeln als Pfetten dienen. Die an den Zwischenknotenpunkten auftretenden Lasten zerlegen sich in zwei Componenten, von denen je eine durch einen der beiden Netzwerkbalken auf die Hauptknotenpunkte (das sind die auf den Sparren liegenden) übertragen wird. Durch diese Anordnung werden die erwähnten Nachtheile vollständig beseitigt, ohne dass desshalb die Vorzüge der Kuppeln über Grundrissen kleinerer Seitenzahl (kleinere Stabspannungen, Materialersparniss, zuverlässigere Berechnung) irgendwie beeinträchtigt würden.

Auch die Kuppeln dieser Art habe ich zuerst in der „Schweiz. Bauztg."*) beschrieben, nachdem ich beim Entwurfe der Eisenconstructionen für die Leipziger Markthalle auf die Vorzüge der Netzwerktheilung in Verbindung mit Sparren

*) Schweiz. Bauztg. 1891. Bd. XVII. S. 77.

aufmerksam geworden und letztere zur Ausführung gebracht hatte*).

Ein einfaches Kuppelgeschoss mit Netzwerkfüllung über vierseitigem Grundrisse zeigt Abb. 17. Die beiden Netzwerkstäbe *a* und *b* erfüllen hier nur den Zweck, die Diagonalen der gewöhnlichen Schwedler-schen Anordnung zu ersetzen. Führt man sie steif aus, dann ist der Träger statisch unbestimmt; bei Ausführung mit flachem Querschnitte ist der Träger indessen statisch bestimmt in demselben Sinne, wie ein Träger mit Gegendiagonalen. Man kann die Netzwerkstäbe *a* und *b* gradezu als solche (in einem erweiterten Sinne, vgl. § 26) bezeichnen.

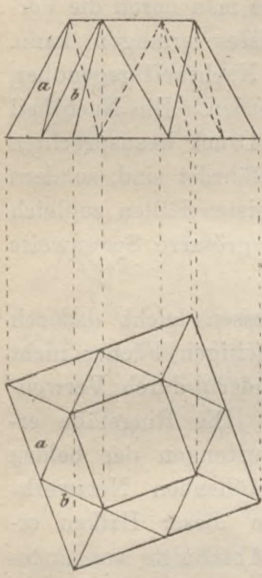


Abb. 17 und 17b.

Der Träger in Abb. 17 verhält sich im Wesentlichen ebenso wie ein gewöhnliches Schwedler'sches Kuppelstockwerk und besitzt gegenüber diesem nur den Vorzug, dass die langen Diagonalen durch weit kürzere Stäbe ersetzt sind. Die Berechnung macht, wenn man die über die Gegendiagonalen gegebenen Bemerkungen beachtet, gar keine Schwierigkeiten. Sie bildet ein hübsches Uebungsbeispiel für den mit der Zerlegung der Kräfte im Raume noch weniger Vertrauten, braucht aber hier nicht besprochen zu werden.

Die inneren Ringstäbe eines einzelnen Geschosses dürfen durch die Netzwerkfüllung niemals in Abschnitte getheilt werden, weil dann an den Theilpunkten alle Stäbe in einer Ebene liegen würden. Die eigentlichen Vorzüge der Sparrenkuppeln mit Netzwerkfüllung können daher erst hervortreten, wenn man eine aus mindestens zwei Stockwerken bestehende Kuppel betrachtet.

*) Civil-Ing. 1891.

Eine solche zeigt Abb. 18 und zwar gibt diese das bei dem oben genannten Bauwerke angewendete System an. Das untere Stockwerk ist hier allerdings nicht nach der einfachen Netzwerktheilung gegliedert. Wollte man die consequente Durchführung der letzteren zur Bedingung machen, so müsste die Kuppel Abb. 19 an die Stelle der früheren treten. Bei

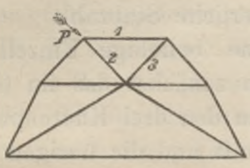


Abb. 18.

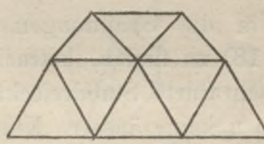


Abb. 19.

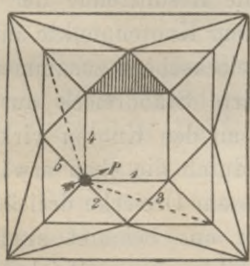


Abb. 18b.

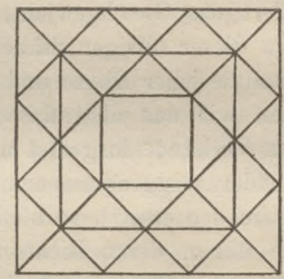


Abb. 19b.

der Leipziger Markthalle war dies indessen nicht durchführbar, weil sich die dort vorkommende Kuppel nicht auf eine zusammenhängende Mauer, sondern auf einzelne Pfeiler an den Ecken der Grundrissfigur stützte. — Der mit der allgemeinen Flechtwerkidee vertraute Leser übersieht übrigens leicht, dass man aus dem einen Systeme unmittelbar auf das andere übergehen kann. Er wird seine Träger leicht den Bedingungen jedes einzelnen Falles anzupassen verstehen, ohne desshalb werthvolle Eigenschaften derselben Preis zu geben.

§ 54. **Berechnung der Leipziger Kuppel.**

Das obere Stockwerk der Leipziger Kuppel Abb. 18 stimmt völlig überein mit dem einfachen Kuppelgeschosse in Abb. 17. Während indessen dort die Stäbe *a* und *b* der

Netzwerkfüllung sich wie Gegendiagonalen zu einander verhielten, bilden sie beide in Abb. 18 nothwendige Stäbe des ganzen Trägers, sind also beide steif auszuführen. Der Grund dafür liegt darin, dass das untere Geschoss für sich genommen nicht stabil ist. Der gesammte Träger besitzt dagegen (bei 12 freien Knotenpunkten und 36 Stäben) die zur Stabilität und statischen Bestimmtheit erforderliche Stabzahl.

Um die Spannungen für eine beliebige Einzellast P (Abb. 18) zu finden, betrachte man zunächst das im Grundrisse schraffirte Stabdreieck. Da an den drei Knotenpunkten desselben keine äussere Kraft angreift und die übrigen Stäbe an jedem dieser Knotenpunkte je in derselben Ebene liegen, erfordert das Gleichgewicht, dass die Resultirende der Spannungen dieser übrigen Stäbe an jedem Knotenpunkte mit der Schnittlinie jener Ebene und der Dreiecksebene zusammenfällt. Denken wir uns also das schraffirte Stabdreieck aus dem ganzen Verbande losgelöst und die an den Knoten wirkenden Kräfte der weggenommenen Stäbe durch die eben erwähnten Resultirenden ersetzt, so bleiben uns am Dreiecke drei äussere Kräfte übrig, deren Richtungslinien uns bekannt sind. Da diese auch ein Dreieck mit einander bilden, kann Gleichgewicht nur bestehen, wenn alle drei Resultirenden und daher auch die Spannungen der das schraffirte Dreieck zusammensetzenden Stäbe gleich Null sind. — Durch eine Wiederholung dieser Schlüsse für das in der Abb. nach rechts hin liegende gleichartige Stabdreieck und nach einer Betrachtung des Gleichgewichts der Kräfte an den sich anschliessenden Knotenpunkten erkennt man zunächst leicht, welche Stäbe bei dem vorliegenden Belastungsfalle ohne Spannung bleiben. Der besseren Uebersicht wegen sind in Abb. 20 im Grundrisse die in Mitleidenschaft gezogenen Stäbe durch starke, die spannungslosen durch schwache Striche kenntlich gemacht.

Durch eine Ueberlegung der gleichen Art erkennt man ferner, dass die Resultirende der Stabspannungen 1 und 2 des an den belasteten Knotenpunkt sich anschliessenden Stabdreiseits 1 2 3 (Abb. 18) die in der Abb. gestrichelt angegebene Richtung annehmen muss, und dasselbe gilt auch für die nach der anderen Seite hin liegenden Stäbe 4 und 5. An dem belasteten Knotenpunkte kommen daher neben der Last P zunächst nur drei der Grösse nach unbekannte, der Richtung nach bekannte Kräfte in Betracht, welche mit jener Gleichgewicht halten müssen, nämlich die Spannung des Sparrenstabes, die Resultirende aus 1 und 2 und die Resultirende aus 4 und 5. Man kann nach diesen Vorerwägungen den Kräfteplan in Aufriss und Grundriss ohne Schwierigkeit construiren.

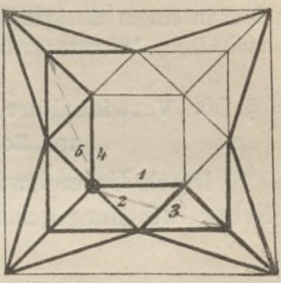


Abb. 20.

Die vorstehenden Betrachtungen haben uns den richtigen Weg zur Zerlegung der Kraft P gewiesen. Nachdem dieser einmal gefunden ist, sind sie aber zum Beweise für die Richtigkeit des Verfahrens gar nicht einmal erforderlich, da eine Spannungsvertheilung, welche an allen Knotenpunkten Gleichgewicht herstellt, bei einem statisch bestimmten Systeme nothwendig die wirklich eintretende sein muss.

Die thatsächlich zur Ausführung gebrachte Leipziger Kuppel weicht von der bisher besprochenen einfachsten Form des betreffenden Kuppelsystems etwas ab. Der Grundriss bildet nämlich ein Fünfeck, von dem indessen eine Seite so klein ist, dass sich das Ganze nicht viel von einem Vierecke unterscheidet. Die auf der Schmalseite entstehenden viereckigen Fächer sind wie bei den Schwedler'schen Kuppeln durch schlaffe Gegendiagonalen ausgesteift. Das unterste Kuppelstockwerk hat senkrechte Wände erhalten, da es Fensterflächen aufnehmen sollte. Ueber dem zweiten Stockwerke erhebt sich noch eine Spitze, welche bei der Berechnung als sekundäre Construction aufgefasst wurde, die nur den engeren Raum überdecken sollte, ohne zur Uebertragung der Last im Hauptgerippe etwas beizutragen.

Tafel II gibt einige bei der Berechnung benützte Kräftepläne wieder, welche nach dem Vorhergegangenen leicht verständlich sein dürften. Die Maximalspannung jedes einzelnen Stabes wurde dadurch ermittelt, dass man aus den als möglich in Betracht gezogenen Windbelastungen (für Ostwind, Südwestwind u. s. w.) den aus den Kräfteplänen als ungünstigsten sich ergebenden Fall mit der Eigen- und Schneelast combinirte. Die damit verbundene Arbeit war nicht unbeträchtlich (mit der Berechnung des Zeltdaches hatte ich nahezu zwei Wochen zu thun), was indessen an der vollständigen Unregelmässigkeit des Grundrisses lag, welche die Uebertragung eines Resultates auf andere Stäbe nicht in einem einzigen Falle gestattete. Eine regelmässige Kuppel nach Abb. 18 verursacht kaum den zehnten Theil der Mühe.

§ 55. **Verwickeltere Formen. Zurückführung derselben auf Schwedler'sche Kuppeln.**

Durch Uebereinanderlagerung mehrerer Stockwerke mit Netzwerktheilung gelangt man leicht zu dem in Abb. 21 angegebenen System. Als Grundriss ist hier ein Rechteck gewählt; man sieht indessen leicht ein, dass auch jede andere Grundrissform hierfür geeignet ist.

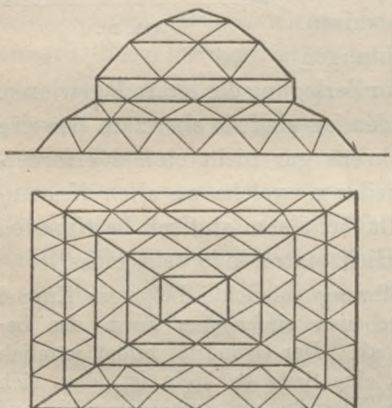


Abb. 21.

Je weiter wir nach unten gehen, desto grösser wird die Zahl der Abschnitte, in welche jeder einzelne Ringstab zerlegt ist, wie es den Anforderungen an die Pfettenlängen entspricht. Ueber dem Nabelring ist zwar noch eine Spitze angegeben; ich nehme aber an, dass das ganze übrige System tragfähig für sich construirt ist, sodass die Spitze nur als ein untergeordnetes Beiwerk zu betrachten ist.

Bei weiterer Verbreitung der Flechtwerklehre werden die nach Abbildung 21 construirten Kuppeln meiner Ansicht nach noch eine grosse Rolle im Bauwesen zu spielen berufen sein.

Eines der darin vorkommenden Stockwerke ist senkrecht gestellt und eignet sich zur Aufnahme einer Fensterwand. Es würde übrigens nichts im Wege stehen, auch unmittelbar unterhalb der Spitze noch ein senkrechtes Stockwerk oder einen sog. „Laternenaufsatz“ einzuschalten. Ueberhaupt sind die Neigungswinkel der einzelnen Stockwerke ganz beliebige; es dürfen nur je zwei aufeinanderfolgende nicht in derselben Ebene liegen. Um das Auftreten grösserer Spannungen zu vermeiden, ist es zweckmässig, den Unterschied der Neigungswinkel aufeinanderfolgender Geschosse nicht zu klein zu machen. Schon aus diesem Grunde empfiehlt sich bei grösseren Kuppeln die Einschaltung senkrechter Stockwerke.

Beim Abzählen der Knotenpunkte und Stäbe ergibt sich, dass die Kuppel Abb. 21 auch nach Weglassung der Spitze nicht statisch bestimmt ist; sie hat nämlich 60 freie Knotenpunkte und 200 Stäbe, also von den letzteren 20 zu viel. Trotzdem macht die Berechnung derselben gar keine Schwierigkeiten.

Um dies zu zeigen, gehe ich zunächst auf Abb. 17 (S. 92) zurück. Wir erkannten dort bereits, dass die mit *a* und *b* bezeichneten beiden Stäbe im Verhältnisse von Gegendiagonalen zu einander stehen. In Abb. 19 (S. 93) sind die Stäbe der gleichen Art im oberen Geschosse beide nothwendige Stäbe und steif auszuführen, dagegen trifft nun die frühere Bemerkung für die Schrägstäbe des unteren Geschosses zu. Auch dieser Träger hat zu viel Stäbe, um statisch bestimmt zu sein. Er lässt sich aber sofort als ein solcher berechnen, wenn man alle vier Schrägstäbe jeder Seite des unteren Geschosses schlaff ausführt. Allerdings dürften Lasten dann nur an den Hauptknotenpunkten angreifen. Diese Beschränkung fällt aber fort, wenn man z. B. die beiden äusseren Stäbe ganz beseitigt und die inneren steif ausführt, womit man auf die nothwendige Stabzahl kommt.

Grade so sieht es nun auch mit der Kuppel in Abb. 21 aus. Die überzähligen Stäbe sind allein im untersten Kuppelgeschosse zu suchen. Auf jeder Seitenfläche desselben kommen zehn Schrägstäbe vor (die Sparrenstäbe sind natürlich unter die „Schrägstäbe“ nicht mit einzurechnen), oder fünf zu viel. Wir können nun entweder sämmtliche Schrägstäbe des unteren

Kuppelgeschosses schlaff ausführen, in welchem Falle je zwei derselben im Verhältnisse von Gegendiagonalen zu einander stehen, oder wir können, unter Verlassung der Netzwerktheilung im unteren Geschosse die Schrägstäbe durch fünf steife Stäbe ersetzen in ähnlicher Weise, wie es bei den Tonnenflechtwerken geschieht.

Aber auch, wenn wir sämmtliche Schrägstäbe des unteren Stockwerks steif ausführen, steht einer zuverlässigen Berechnung der Kuppel nichts im Wege. Wenn ein Zwischenknotenpunkt des unteren Geschosses belastet ist, sind wir berechtigt, die nach der Mauer überzuleitende Componente auf die beiden von dem Knotenpunkte ausgehenden Schrägstäbe gleichmässig zu vertheilen, und für Belastungen anderer Art können die fraglichen Schrägstäbe sämmtlich als Gegendiagonalen aufgefasst werden. Zu dieser Auffassung sind wir durch die Bemerkungen über mehrtheilige Systeme (§ 18) berechtigt. Die Berechnung der Stabspannungen der oberen Geschosse wird hierdurch nicht beeinflusst.

Die wirkliche Durchführung der Berechnung gestaltet sich nun sehr einfach durch den Hinweis, dass jede Kuppel mit Sparren und Netzwerktheilung auf eine Schwedler'sche Kuppel zurückgeführt werden kann. Um dies zu erkennen, erinnere man sich der Betrachtungen, welche zur Berechnung der Leipziger Kuppel (§ 54) führten. Die Kräftezerlegung gestaltete sich dort von Anfang an genau so, als wenn die obere Kuppelzone in Abb. 18 an Stelle der Netzwerktheilung die punktirt angegebenen Diagonalen wie eine Schwedler'sche Kuppel besessen hätte. Um also die Spannungen zu finden, welche von einer Last hervorgerufen werden, die an einem Hauptknotenpunkte (d. s. solche auf den Sparren) angreift, denke man sich zunächst die Netzwerktheilung in allen Fächern durch Diagonalen ersetzt und berechne die damit entstehende Schwedler'sche Kuppel. Die Spannungen der Diagonalen sind dann, wie es im § 54 bezw. Abb. 18 geschehen war, weiter in die Netzwerkspannungen zu zerlegen.

Handelt es sich dagegen um die Belastung eines Zwischenknotenpunktes, so haben wir die Last in drei Componenten zu zerlegen, von denen eine mit der Richtung der Ringstäbe zusammenfällt und von diesen auf die Hauptknotenpunkte unmittelbar übergeleitet wird (eine Componente in dieser Richtung wird nur selten in Betracht kommen). Von den beiden anderen Componenten liegt je eine in der Ebene der oberen und unteren Kuppelgeschossseite und steht senkrecht zur Richtung der Ringstäbe. Jede Kuppelgeschossseite bildet aber einen ebenen Netzwerkbalken und leitet die auf ihn treffende Componente nach bekannten Gesetzen auf die Hauptknotenpunkte über.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass sich bei jeder beliebigen Belastung zwei Spannungsbilder über einander lagern. Das eine System von Spannungen betrifft die Netzwerkstäbe in ihrer Eigenschaft als Bestandtheile sekundärer Träger und bewirkt die Lastenübertragung von den Zwischenknotenpunkten auf die Hauptknotenpunkte. Nachdem diese Ueberleitung bewirkt ist, haben wir es nur noch mit Lasten an den Hauptknotenpunkten selbst zu thun. Gegen diese verhält sich aber die Kuppel wie eine Schwedler'sche und das hierbei entstehende Spannungsbild unterscheidet sich von dem für die letztere gültigen nur dadurch, dass die Spannungen der Diagonalen durch eine Aufeinanderfolge von Spannungen in den Netzwerkseiten ersetzt sind. Eine statische Unbestimmtheit entsteht nur bei dem untersten Kuppelgeschosse, wenn alle Stäbe steif ausgeführt sind. Dieselbe lässt sich aber, wie bemerkt, leicht heben oder auch durch eine zulässige vereinfachende Annahme unschädlich machen.

Diese Darlegungen enthalten die vollständige Anweisung für die Berechnung einer Kuppel nach Abb. 21 und ich glaube, dass jeder mit der Statik hinreichend vertraute Ingenieur gar keine Schwierigkeit haben wird, dieselbe danach durchzuführen. In manchen Fällen wird die Berechnung freilich etwas weitläufig werden; bei regelmässigen Grundrissen gestaltet sie sich aber offenbar ganz einfach.

Man kann sagen, dass die hier besprochenen Kuppeln aus den Schwedler'schen dadurch hervorgehen, dass man zwischen die weit auseinander liegenden Knotenpunkte dieser letzteren (bei kleiner Seitenzahl des Grundrisses) eine Sekundärconstruction nach Art des Tonnenflechtwerks einschaltet, welche zunächst nach den für das letztere geltenden Gesetzen die zwischen diesen Hauptknotenpunkten liegenden Spannweiten überbrückt, zugleich aber die Diagonalen ersetzt. Mit Rücksicht auf diese Verwandtschaft mit dem Tonnenflechtwerke empfiehlt es sich, vor dem Herangehen an eine Aufgabe dieser Art die Lehren des folgenden Capitels in Betracht zu ziehen.

Ueber die Gestalt, welche man dem Sparrenprofile zweckmässiger Weise ertheilt, um zu einem geringen Materialaufwande zu gelangen, gibt das folgende Capitel gleichfalls einen Wink. Beim gegenwärtigen Zustande der Theorie kann zwar darüber noch nichts Bestimmtes gesagt werden. Ich glaube jedoch, dass es dem erfahrenen Ingenieur nach der vorausgegangenen Lehre nicht schwer werden wird, schon beim ersten Griffe ein Profil zu wählen (wenn ihm die Bedingungen der Aufgabe überhaupt eine Wahl lassen), das die Bedingungen der Materialsparsamkeit in praktisch hinreichender Weise erfüllt.

Viertes Capitel.

Die Tonnenflechtwerkdächer.

§ 56. Das eintheilige Tonnenflechtwerk.

So wie die Schwedler'schen Kuppeln aus dem Kugelflechtwerke, gehen die Tonnenflechtwerkdächer aus dem Cylinderflechtwerke hervor. Man denke sich ein Cylinderflechtwerk längs zweier Erzeugenden aufgeschnitten und verbinde die eine Hälfte mit der Erde, so dass die erwähnten Erzeugenden horizontal liegen und mit den beiden „Widerlagsmauern" zusammenfallen, während die Basisflächen des Cylinders durch „Stirnmauern" ersetzt werden. Der durch das Flechtwerk überdeckte Raum ist ein Rechteck.

Zunächst ist das auf diesem Wege erhaltene Stabgebilde statisch unbestimmt. Es wird statisch bestimmt, wenn man in den untersten Stockwerken jeder Dachseite die Diagonalen fortlässt und zugleich auf einer der Stirnmauern die Knotenpunkte verschieblich in der Richtung der Erzeugenden auflagert. Die letztere Massregel ist bei langen Dächern mit sehr stabilen Stirnmauern schon desshalb nothwendig, um eine Ausdehnung der Eisenconstruction in der Längsrichtung bei Temperaturunterschieden zu ermöglichen.

Bei dieser Anwendung übt das Tonnendach auf die Widerlagsmauern einen Schub aus, wie jedes andere Bogendach. Man kann denselben vermeiden, wenn man die beiden untersten Stockwerke senkrecht stellt. — In vielen Fällen werden indessen die Widerlagsmauern so schwach sein, dass sie nicht nur keinen Schub aufzunehmen vermögen, sondern selbst gegen horizontale Kräfte (des Winddruckes) gestützt werden müssen. In diesen Fällen muss das unterste Stockwerk vollständig als ebener Balken ausgebildet und so berechnet werden, dass es die erwähnten Kräfte aufzunehmen vermag.

Abb. 22 zeigt ein Dach dieser Art, das man sich nach vorn hin gleichfalls bis zu einer Stirnmauer (oder einem gleichwerthigen gewöhnlichen Binder) fortgesetzt zu denken hat. In der Abbildung ist vorausgesetzt, dass die Widerlagsmauern befähigt sind, einen Schub aufzunehmen, d. h. die Diagonalen sind in dem untersten Stockwerke jeder Seite fortgelassen.

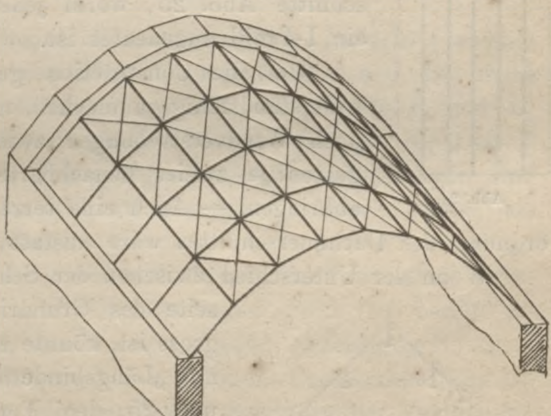


Abb. 22.

Die Theorie dieser Stabgebilde ist so einfach wie irgend möglich und auch dem nur mit der ebenen Fachwerkstheorie Vertrauten sofort verständlich, weil sich das Ganze als eine Vereinigung ebener Fachwerkbalken ansehen lässt. Um dies möglichst deutlich nachzuweisen, gebe ich eine Ableitung der Tonnenflechtdächer aus der herkömmlichen Ueberdeckungsweise mit Bindern.

Wenn es sich um die Ueberdachung eines rechteckigen Raumes handelt, ist man gewohnt, eine Anzahl von Bindern parallel zur Schmalseite des Grundrisses und in der Richtung der Langseite mehrere Reihen von Pfetten anzuordnen, wie es im Grundrisse Abb. 23 angedeutet ist. Die Binder sind daselbst durch stärkere, die Pfetten durch schwächere Striche hervorgehoben.


Abb. 23.

Offenbar liegt aber nichts im Wege, die Binder selbst parallel zur Langseite, also parallel zur Firstlinie des Satteldaches zu legen, wie in Abb. 24, so dass sie zugleich als Pfetten und als Hauptträger dienen. Der Neigung des Daches entsprechend müssen die horizontalen Obergurten alsdann in verschiedenen Höhen liegen, wie in dem Querschnitte Abb. 25, worin jeder Binder durch ein I-Profil angedeutet ist.

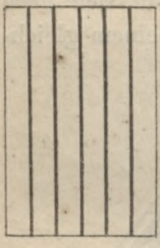


Abb. 24.

Um die Construction gegen Winddruck widerstandsfähig zu machen, müsste man dann noch Windverstrebungen zwischen den Obergurten je zweier benachbarter „Längsbinder" anbringen. — Auch eine terrassenförmige Anordnung des Dachquerschnittes wäre anstatt dessen möglich.

Wenn der Unterschied zwischen der Schmal- und Langseite des Grundrisses nicht sehr gross ist, könnte eine Construction mit „Längsbindern" nach Abb. 24 und 25 den Vergleich mit der „Querbinder"-Construction Abb. 23 unter Umständen wohl aushalten und wir finden sie auch in der That bei manchen kleineren Dächern ausgeführt.


Abb. 25.

Das Tonnenflechtwerkdach geht nun aus dem Längsbinderdache Abb. 24 und 25 dadurch hervor, dass die Binder nicht mehr in einer vertikalen Ebene liegen, sondern in die gekrümmte Dachfläche fallen, so dass der Obergurt des unteren mit dem Untergurte des nach oben hin folgenden Binders zusammenfällt. In Abb. 26 sind die Querschnitte von zwei solchen ebenen Fachwerkbalken, welche aus den Bindern der Abb. 25 durch Schrägstellung derselben hervorgegangen zu denken sind, durch die Strecken AB und BC schematisch dargestellt; B ist der erwähnte gemeinsame Gurt.

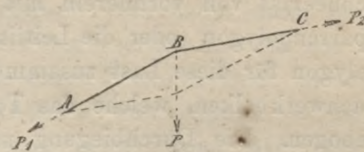


Abb. 26.

Eine Last P, welche an irgend einem Knotenpunkte des gemeinsamen Gurtes B angreift, überträgt sich dann nicht mehr, wie im Falle der Abb. 25 auf einen einzigen Längsbinder, sondern auf die beiden ebenen Fachwerkbalken AB und BC. Sie zerlegt sich nämlich in die beiden Componenten P_1 und P_2, welche in die Ebenen dieser Balken fallen.

Zunächst erkennt man sofort, dass in den praktisch möglichen Fällen der Winkel zwischen AB und BC nicht viel von 180^0 abweichen kann und dass daher P_1 und P_2 in der Regel mehrfach grösser sein werden, als die Last P selbst. Die durch P hervorgerufenen Beanspruchungen sind daher im Falle der Abb. 26 ebenfalls mehrfach grösser als beim Längsbinderdache.

Dieser augenscheinliche Nachtheil des Tonnenflechtwerkdaches wird aber reichlich aufgewogen durch den bereits erwähnten Umstand, dass ein Gurt immer gleichzeitig Obergurt des einen und Untergurt des anderen Fachwerkbalkens ist. Bei gleichförmiger oder annähernd gleichförmiger Vertheilung der Belastung erfährt er aus dem einen Grunde Druck-, aus dem anderen Zugspannungen, die sich gegenseitig zum grösseren Theile aufheben, so dass thatsächlich nur eine geringe Beanspruchung übrig bleibt.

§ 57. Ausführung der Berechnung.

Zunächst betrachte man den Einfluss der bleibenden Belastung, in die man vielleicht eine gleichförmig vertheilte Schneelast von vornherein mit einrechnen wird. Wenn das Sparrenpolygon (oder die Leitlinie der Tonne) mit einem Seilpolygon für diese Last zusammenfällt, wird keiner der ebenen Fachwerkbalken, welche das Tonnengeflecht zusammensetzen, gebogen. Die Durchbiegung nach rechts oben hin, welche der Balken BC in Abb. 26 durch die am Gurt B angreifenden Lasten P_2 erfährt, wird nämlich genau aufgehoben durch diejenige in entgegengesetzter Richtung, welche von den am Gurte C angreifenden Lasten herrührt.

Gerade darin besteht der grosse Vorzug des Flechtwerkdaches gegenüber dem Längsbinderdache, dass die gleichförmig vertheilten Lasten, welche ihrer Grösse nach von überwiegender Bedeutung sind, gar keine Biegungsspannungen in den einzelnen Balken hervorrufen. Die einzigen Stäbe, welche dadurch beansprucht werden, sind die Sparren, die zuletzt den Schub auf die Mauer übertragen.

Anders ist es, wenn die Mauer gegen horizontale Kräfte nicht widerstandsfähig ist. Wie bereits oben besprochen, muss in diesem Falle auch das unterste Stockwerk als vollständiger ebener Fachwerkbalken durchgebildet werden. Dieser erfährt dann eine Durchbiegung nach abwärts bezw. aussen. Zur Berechnung derselben muss man sich an jedem Knotenpunkte des ebenen Balkens eine Belastung angebracht denken von der Grösse des Sparrendruckes, d. h. von der Grösse der letzten Spannung im Seilpolygon für die bleibenden Lasten.

Von Interesse ist in diesem Falle die Kräftevertheilung an einer Stirnmauer. So lange die Widerlagsmauern den Schub der Sparren aufnehmen, erfahren die Stirnmauern gar keine Inanspruchnahme. In unserem Falle wird dagegen die ganze Dachlast auf sie übertragen. Zunächst nämlich ist es nur der Balken, welcher auf jeder Seite von dem untersten Stockwerke gebildet wird, der seinen schräg gerichteten Auflagerdruck auf die Stirnmauer überträgt. Nun bilden aber die Endstäbe (bei aufrechter Stellung der Balken würde man sie die Endvertikalen nennen) aller Balken auf jeder Stirnmauer ein Sparrenpolygon, dessen unterste Seiten die soeben erwähnten Auflagerkräfte aufnehmen. Man findet dann leicht die Spannungen aller übrigen Polygonseiten und die auf die Mauer ausgeübten Druckkräfte durch Zeichnen eines mit dem Sparrenpolygone zusammenfallenden Seilpolygons. — Aus dieser Betrachtung erkennt man, dass die Beanspruchung der Stirnmauer ausschliesslich durch senkrechte Kräfte erfolgt und dass diese sich in genau derselben Lage befindet, als wenn das Flechtwerkdach durch ein Längsbinderdach ersetzt wäre.

§ 58.

Nicht immer empfiehlt es sich jedoch, das Sparrenpolygon mit dem Seilpolygon für die bleibende Last zusammenfallen zu lassen. Namentlich dann nicht immer, wenn die Widerlagsmauern keinen Schub aufnehmen können, im untersten Stockwerke also ohnehin Biegungsspannungen auftreten. Durch eine Abänderung des Sparrenpolygons kann man dann bewirken, dass auch die weiter nach oben zu gelegenen Stockwerke an dieser Biegung nach abwärts Theil nehmen. Es findet dadurch eine Entlastung des Obergurtes des untersten Stockwerkes auf Kosten der höher gelegenen Gurten statt. Eine solche Anordnung ist desshalb von Vortheil, weil bei ihr durch die bleibende Last Spannungen in das System kommen, welche von entgegengesetztem Vorzeichen sind, wie diejenigen, welche durch den Winddruck hervorgerufen werden, so dass durch die Berücksichtigung des letzteren gar kein merklicher Materialaufwand hervorgerufen wird.

Um in diesem Falle die Spannungen durch die bleibende Last zu ermitteln, construire man den Kräfteplan Abb. 27b zu dem in Abb. 27 dargestellten Dachquerschnitte. Die auf die einzelnen Knotenpunkte des Sparrenpolygons wirkenden

Lasten P_1 P_2 ... sind so an einander getragen, als wenn es sich um den Kräfteplan eines Seilpolygons handelte. Durch

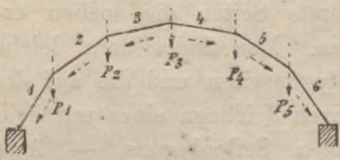


Abb. 27.

die Endpunkte sind die Parallelen 1, 2, ... zu den Sparrenseiten gezogen. Die Strecken *ab, bc, cd* im Kräfteplane geben alsdann diejenigen Lasten an, durch welche die Balken 1, 2, 3 auf Biegung beansprucht werden. Die Richtung dieser Durchbiegung ist in Abb. 27 durch beigesetzte Pfeile ersichtlich gemacht. — Im Falle

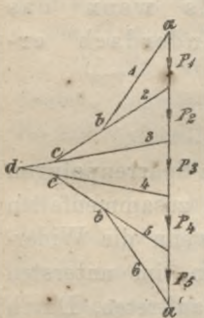


Abb. 27 b.

einer gegen Schub widerstandsfähigen Widerlagsmauer wird die durch *ab* dargestellte Kraft unmittelbar auf diese übertragen.

Zur weiteren Ermittelung der Stabspannungen zeichnet man am besten jeden einzelnen Balken, welcher zum Geflecht gehört, für sich heraus und berechnet denselben so, wie es aus der Theorie des ebenen Fachwerks bekannt ist. So gibt Abb. 28 den Balken 2 an; die auf denselben einwirkenden Lasten sind durch die Strecke *bc* im Kräfteplane Abb. 27 b bekannt, alle Spannungen lassen sich daher sofort in einfachster Weise bereehnen. Bei der

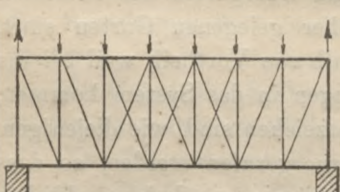


Abb. 28.

Zusammenstellung der Ergebnisse hat man nachträglich nur zu beachten, dass jeder Gurt zwei Balken gemeinsam angehört. Die in diesen beiden gefundenen Einzelspannungen sind daher für jeden Gurtstab algebraisch zu summiren. Trotz der erfolgenden Durchbiegungen können daher einzelne Gurten sogar vollständig spannungslos bleiben.

§ 59.

Veränderliche Belastung, a) durch Wind.

Um die Windspannungen zu finden, stelle man zunächst fest, wie gross der Winddruck ist, welcher auf jeden Knotenpunkt übertragen wird. In der Längsrichtung des Daches ändert sich derselbe für die aufeinanderfolgenden Knotenpunkte nicht; in der Querrichtung ist er dagegen für die weiter nach abwärts liegenden Dachtheile, wie man leicht sieht, beträchtlich grösser, als für die oberen. Bei einer gegen horizontale Kräfte nicht genügend widerstandsfähigen Widerlagsmauer ist auch der Winddruck auf die Auflagerknotenpunkte in Betracht zu ziehen, in den unter Umständen ein grösserer Betrag von dem auf die Mauer selbst kommenden Winddrucke einzurechnen ist. In Abb. 29, welche im übrigen Abb. 27 nachgebildet ist, wurde dieser Fall vorausgesetzt.

Abb. 29.

Der Kräfteplan Abb. 29b wird genau wie der für die bleibenden Lasten erhalten und wie früher in Abb. 27b geben hier die Strecken *ab*, *bc*, *cd* die auf die einzelnen Balken übertragenen Kräfte an, welche die Durchbiegung hervorrufen. Die Richtung, in welcher diese erfolgt, ist in Abb. 29 durch Pfeile hervorgehoben und man erkennt beim Vergleiche mit Abb. 27 sofort, dass diese Pfeile den dort für die Wirkung der Eigenlast gefundenen entgegengesetzt gerichtet sind. Dadurch erhalten die über die günstige Gestalt des Sparrenpolygons daselbst gemachten Bemerkungen ihre Rechtfertigung.

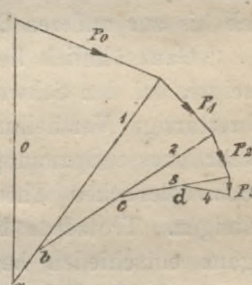


Abb. 29b.

Die im Kräfteplane mit *o* bezeichnete Strecke gibt den Druck an, welcher auf die nur in vertikaler Richtung widerstandsfähige Mauer ausgeübt wird.

b) **Einzellasten oder ungleichförmig vertheilte Schneelasten.**

Schon aus der am Schlusse von § 56 angestellten Betrachtung geht hervor, dass das Tonnenflechtwerkdach gegen concentrirte Einzellasten und daher überhaupt gegen unregelmässig vertheilte Lasten empfindlicher, d. h. unter gleichen Umständen weniger widerstandsfähig ist, als ein Binderdach. Die grösste Beanspruchung eines Gurtes auf Druck durch die veränderliche Belastung tritt z. B. ein, wenn alle Knotenpunkte dieses Gurtes möglichst viel und alle Knotenpunkte der beiden Nachbargurten möglichst wenig belastet sind. Darauf, wie die Lasten sich im Uebrigen über die Dachfläche vertheilen, kommt es dabei gar nicht an. Die grösste Beanspruchung eines Füllungsstabes (Sparren oder Diagonale) wird erhalten, wenn dieselbe ungleichmässige Vertheilung von einer Stirnmauer bis zu dem betreffenden Fache obwaltet und von da ab bis zur anderen Stirnmauer das Verhältniss sich umkehrt.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse, wie es sich früher zeigte, bei den Schwedler'schen Kuppeln. Durch eine schachbrettartige Vertheilung der Lasten werden auch bei diesen sehr grosse Spannungen hervorgerufen, welche die nach der Schwedler'schen Theorie berechneten ganz bedeutend übersteigen. Trotzdem haben sich die Schwedler'schen Kuppeln ganz entschieden bewährt. Offenbar liegt dies an den folgenden beiden Umständen. Erstens nämlich kommen beträchtliche Belastungsunterschiede zwischen nahe benachbarten Knotenpunkten überhaupt nicht vor. Es mag wohl sein, dass z. B. die eine Hälfte eines Daches eine schwere Schneedecke trägt, während die andere davon nahezu entblösst ist. Zwischen zwei unmittelbar benachbarten Knotenpunkten ist ein so beträchtlicher Unterschied in der Belastung aber niemals zu erwarten. Auch an der Uebergangsstelle von der meist belasteten zur minder belasteten Seite wird der Uebergang niemals plötzlich, sondern allmählich erfolgen, so dass die Belastungsdifferenzen aufeinanderfolgender Knotenpunkte, auf welche es allein ankommt, nur in engen Grenzen bleiben.

Zweitens aber wirkt hier die Steifigkeit der Sparren- bezw. Ringstäbe in günstiger Weise ein. Dieselbe hilft nämlich, wenn wirklich einmal grössere Belastungsunterschiede aufeinanderfolgender Knotenpunkte vorkommen sollten, die grösste Last auf die Nachbarknotenpunkte mit vertheilen, so dass die dem Bestande der Construction gefährlichen Unterschiede dadurch zum weitaus grösseren Theile ausgeglichen werden.

Diese selben günstigen Umstände, denen die Schwedler-schen Kuppeln ihre Stabilität verdanken, sind aber in demselben Masse auch für die Tonnenflechtwerkdächer in Anspruch zu nehmen. In der That erkennt man sofort, dass bei concentrirter Belastung eines einzelnen Gurtes die durchlaufend construirten Sparrenstäbe in Folge der geringen elastischen Senkung dieses Gurtes sofort einen Theil der Last auf die beiden Nachbargurten übertragen. Dieser Vorgang ist wichtiger, als es vielleicht auf den ersten Blick erscheint. Er bedeutet nämlich nicht nur eine unmittelbare Entlastung des betreffenden Gurtes um den Betrag der auf die Nachbargurten übertragenen Last, sondern dadurch, dass diese nun gleichfalls belastet sind, wird auch die durch die Restbelastung in dem Gurte hervorgerufene Druckbeanspruchung zum grösseren Theile neutralisirt. Denn, wie man sofort erkennt, haben die Belastungen der Nachbargurten Zugspannungen in dem dazwischen liegenden zur Folge, welche die durch die verbleibende Last in ihm hervorgerufenen Druckspannungen zum grösseren Theile, wie es gesagt war, aufheben. — Dieselbe Schlussfolgerung gilt, wie für die Gurten, so auch für die Füllungstheile der einzelnen Balken.

Es liegt auf der Hand, dass man nicht darauf zu verzichten braucht und mit Rücksicht auf die erforderliche Materialersparniss auch nicht darauf verzichten kann, diese der Stabilität günstigen Umstände, auf deren Eintritt mit aller Sicherheit gerechnet werden kann, bei der Projectirung eines Tonnenflechtwerkdaches in Berücksichtigung zu ziehen; umsomehr als die günstigen Erfahrungen mit den Kuppelflechtwerken für die Richtigkeit dieser Betrachtungen den unmittelbaren experimentellen Nachweis liefern, wenn ein solcher angesichts dieser zwingenden Beweisführung noch erforderlich scheinen sollte.

Man könnte der theilweisen Uebertragung der gefährlichsten Einzellast auf die Nachbarknotenpunkte durch eine Berechnung der elastischen Formänderung der Sparrenstäbe und der dadurch bewirkten Lastausgleichung leicht Rechnung tragen. Da man indessen ohnehin im Zweifel ist, wie gross man die höchstenfalls zu erwartende unmittelbare Lastendifferenz zwischen aufeinanderfolgenden Knotenpunkten annehmen muss, erscheint es mir richtiger, diese günstigen Umstände bei der wirklichen Ausführung der Berechnung unmittelbar gar nicht in Ansatz zu bringen, dafür aber von vornherein nur eine entsprechend niedrige Annahme für die Lastenunterschiede zu machen.

Setzt man z. B. die grösste Schneebelastung eines Daches zu 60 kgr pro qm, so würde man vielleicht sagen können, dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten ein unmittelbarer Belastungsunterschied von höchstens 30 kgr zu erwarten ist, der mit Rücksicht auf die Ausgleichung durch die Biegungsfestigkeit der Sparren weiter auf 15 kgr pro qm herabzumindern wäre. Diese Annahme würde im Vergleiche zu der Maximallast durch Schnee von 60 kgr schon recht ungünstig sein.

An dieser Stelle drängt sich ein Vergleich des Tonnenflechtwerkdaches mit den gewöhnlichen Binderdächern mit Bogenträgern auf. Man kann z. B. die obere Gurtung der Bogenträger so gestalten, dass sie gleichfalls mit einem Seilpolygon für die gleichförmig vertheilte Last zusammenfällt (Parabelbogen). In diesem Falle befindet sich zunächst dieser Obergurt in genau derselben Lage wie eine Sparrenpolygon des Flechtwerkdaches; alle übrigen Stäbe des Bogenträgers sind (bei geeigneter Construction) spannungslos, grade so wie bei diesem Belastungsfalle alle übrigen Stäbe des Flechtwerkdaches. Die übrigen Stäbe haben dann nur die Aufgabe, Widerstand gegen Winddruck und gegen ungleichmässige Belastung zu leisten. Die ungleichförmige Belastung, welche die grössten Spannungen hervorruft, ist aber beim Bogenträger von ganz anderer Zusammensetzung als beim Flechtwerk-dache. Bei letzterem kommt es, wie gezeigt wurde, nur auf Belastungsunterschiede zwischen unmittelbar benachbarten Knotenpunkten an, die aus den angeführten Gründen nicht sehr erheblich sein können und durch eine ganz geringfügige Beanspruchung der Sparrensteifigkeit noch zum grösseren Theile ausgeglichen werden. Beim Bogendache dagegen handelt es sich um Belastungsunterschiede ganzer Dachhälften, die naturgemäss viel grösser sein können und bei denen auf einen auch nur theilweisen Ausgleich durch die Steifigkeit des Obergurtes gar nicht zu rechnen ist. Dazu kommt, dass das Flechtwerkdach gegen Winddruck (und namentlich auch gegen die durch die Reibung an der Dachfläche hervorgerufenen tangentialen Componenten desselben, auf welche man gewöhnlich allerdings keine Rücksicht nimmt) leicht widerstandsfähiger eingerichtet werden kann (s. o.), dass es eine weit geringere Zahl von Stäben besitzt, indem es die in der Dachfläche liegende Querconstruction, welche ohnehin (wenn auch in schwächeren Abmessungen) erforderlich ist, zur vollen Ausnützung heranzieht und dass es das Innere des Dachraumes vollständig frei hält. Diese Umstände schaffen ihm eine Ueberlegenheit über das Bogendach, welche bewirken werden, dass man ihm in Zukunft in vielen Fällen den Vorzug geben wird.

§ 60. Günstigste Formen für die Ausführung.

Die Tonnenflechtwerkdächer lassen sich mit wirklichem Vortheile nur über solchen Grundrissen zur Ausführung bringen, deren Langseite die Schmalseite nicht allzusehr übersteigt. Schon aus der in § 56 gegebenen Ableitung aus dem Längsbinderdache geht dies deutlich genug hervor. Jedenfalls darf die Langseite nicht mehr als das Doppelte der Schmalseite betragen; günstiger ist das Verhältniss 1 : 1,3 bis 1,6, das z. B. bei den Dächern über grossen Sälen gewöhnlich vorliegt.

Wenn es sich um langgestreckte Hallen handelt, kann man das Flechtwerk zwar auch zur Ueberdeckung benützen, indem man den langausgedehnten Raum zunächst durch eine Anzahl von Bindern in Abschnitte von geeigneter Länge theilt und diese einzeln durch Flechtwerkdächer überdeckt. Dabei geht indessen der Hauptvortheil verloren, dass der ganze innere Dachraum frei bleibt; ausserdem erfordert die Herstellung der Zwischenbinder einen Materialaufwand, der bei geeigneteren Grundrissformen wegfällt und der die sonst erzielte Materialersparniss hier mehr als aufwiegen kann.

Nach der Grundrissgestalt kommt es zunächst darauf an, ob die Widerlagsmauern einen Schub aufnehmen können. Selbstverständlich lässt sich in diesem Falle die ganze Dachconstruction viel leichter herstellen, als wenn die Uebertragung horizontaler Kräfte auf die Widerlagsmauern unzulässig ist.

Bei widerstandsfähigen Widerlagsmauern und nicht sehr grosser Pfeilhöhe des Daches wird man das Sparrenpolygon mit einem Seilpolygon für die bleibende Last zusammenfallen lassen. Bei gleichförmiger Vertheilung der letzteren über den Grundriss, die man in diesem Falle gewöhnlich annehmen darf, wähle man daher zur Leitlinie der Tonne einen Parabelbogen. Der Winddruck ist bei flachen Dächern nicht bedeutend und die geringen Belastungsdifferenzen, welche nach § 59 in Anrechnung zu bringen sind, werden durch die Längsbalken leicht aufgenommen.

Allzu klein darf man die Pfeilhöhe des Daches übrigens nicht wählen, weil sonst die Winkel zwischen den Ebenen aufeinanderfolgender Balken sich zu sehr Gestreckten nähern würden, was eine Erhöhung der Kräfte P_1 P_2 (Abb. 26, S. 103) herbeiführen müsste. Jedenfalls sollte der Pfeil nicht leicht unter $1/_5$ der Spannweite herabsinken.

Bei Dächern mit grösserem Pfeile (etwa $1/_2$ der Spannweite) kann sich eine Abweichung vom Parabelprofile (bezw. vom Seilpolygone für die bleibende Last) empfehlen, nicht nur weil in diesem Falle die Schneebelastung nach unten hin geringer anzunehmen ist, sondern vor Allem mit Rücksicht auf den Winddruck. Die Art der Beanspruchung durch letzteren ist aus Abb. 29 (S. 107) zu entnehmen. Wenn er verhältnissmässig gross wird, kann es sich empfehlen, das Dachprofil so zu wählen, dass schon durch die Eigenlast eine Beanspruchung im entgegengesetzten Sinne hervorgerufen wird, welche beim Eintritte eines Sturmes die Wirkung dieses letzteren zum Theil aufhebt. Die Beanspruchung der Balken durch die Schneelast biegt dieselben in solchen Fällen ohnehin in entgegengesetzter Richtung wie der Winddruck.

Mehr noch als bei den Dächern, welche sich gegen schubfeste Widerlagsmauern stützen, ist eine Abweichung vom Parabelprofile bei den Dächern von Vortheil, welche keinen Schub auf die Widerlagsmauern ausüben können, sondern denselben vollständig auf die Stirnmauern überleiten müssen. Bei ihnen ist der unterste Balken jeder Seite sehr stark durch die Eigenlast beansprucht. Er muss einen verhältnissmässig sehr kräftigen Untergurt und starke Füllungstheile erhalten, von denen bei schubfesten Widerlagern der erste ganz und von den letzteren die Diagonalen in Wegfall kommen. Auch der Obergurt muss stärker construirt werden, als in diesem Falle; man erkennt daher leicht, dass die Construction unter diesen Umständen beträchtlich schwerer ausfällt. Indessen kann sie auch in diesem Falle, wie sich aus der Durchrechnung von Beispielen ergibt, mit einer Ueberdachung durch gewöhnliche Dachbinder hinsichtlich des Gewichtes vollständig concurriren.

In dem soeben besprochenen Falle habe ich ein Profil am zweckmässigsten gefunden, das etwa in der Mitte zwischen dem Parabelbogen und einem Kreisbogen von derselben Pfeilhöhe liegt. Genauere Angaben vermag ich in dieser Hinsicht zur Zeit nicht zu machen; ich bemerke nur, dass dasselbe durch die Eigenlast nach Art der Abb. 27 (S. 106) und durch Winddruck nach Art der Abb. 29 (S. 107) beansprucht wird, womit die bereits in § 58 besprochenen Vortheile erreicht werden.

§ 61. **Projectirung eines Flechtwerkdaches.**

Nachdem man sich auf Grund der vorstehenden Bemerkungen für ein bestimmtes Profil entschieden hat, trage man in die gewählte Curve das Sparrenpolygon ein (die Sparren als Sehnen), so dass die Anzahl der Sparren zwischen etwa 6 und 10 (höchstens) beträgt. Man sucht hierbei zu erreichen, dass das Verhältniss zwischen der Sparrenlänge und der Dachlangseite gleich dem aus der Theorie der ebenen Parallelbalken bekannten günstigsten Verhältnisse wird (etwa 1 : 10).

Die Abstände von zwei Sparren in der Längsrichtung sucht man etwa gleich der Sparrenlänge zu machen, damit die Feldertheilung der einzelnen Balken nicht zu erheblich von der quadratischen abweicht.

Man nehme z. B. an, dass die Spannweite 24 m, die Dachlänge 32 m betrage. Ich wähle dann acht Sparren in jedem Querschnitte und erhalte damit sieben Gurten, welche zugleich Pfetten sind. (Dazu kommen bei nicht schubfesten Widerlagsmauern noch die beiden auf diesen Mauern aufsitzenden Untergurten.) Der Abstand zwischen zwei Gurten beträgt im Grundrisse gemessen 3 m, in der Ebene der Balken etwas mehr. Die Länge der Balken beträgt 32 m; man wird daher eine Eintheilung derselben in zehn Felder vornehmen oder je zwei Sparren um 3,20 m von einander abstehen lassen. — Hätte das Dach anstatt 32 m eine Länge von 40 m gehabt, so könnte man anstatt acht Sparren nur sieben (der mittelste horizontal) oder auch nur sechs annehmen, um zu einem günstigen Verhältnisse zwischen Höhe und Länge der einzelnen Balken zu gelangen. Die Sparrenabstände würden sich dann entsprechend vergrössern.

Nachdem auf diese Weise eine allgemeine Eintheilung vorgenommen ist, stelle man die äusseren Kräfte fest und berechne die durch die Eigenlast (in die man bei flachen Dächern die Schneelast sofort mit einrechnen kann) hervorgerufenen Spannungen. Daran schliesst sich die Ermittelung der durch Winddruck hervorgerufenen Spannungen und schliesslich derjenigen, welche durch eine beliebig (und möglichst ungünstig) vertheilte besondere mobile Belastung (welche aus den in § 59 entwickelten Gründen nur gering anzurechnen ist) hervorgerufen werden. Durch Zusammenfügung der Einzelresultate erhält man die Maximalspannungen, welche der Querschnittsbestimmung zu Grunde zu legen sind. Bei den Gurten hat man dann nachträglich noch diejenigen Verstärkungen vorzunehmen, welche erforderlich sind wegen ihrer Funktion als Pfetten. Diese Verstärkungen sind indessen gewöhnlich sehr unbedeutend (es handelt sich um Aufnieten einer Platte auf einem der beiden Gurten des etwa als I Träger construirten Hauptgurtes), so dass in der That behauptet werden kann, dass bei den Flechtwerkdächern die

Querconstruction nahezu vollständig erspart, bezw. durch die Hauptconstruction ohne besonderen Materialaufwand mit ersetzt wird.

§ 62. **Mehrtheilige Systeme.**

Bei sehr grossen Spannweiten (z. B. von 50 oder 60 m) reicht die oben besprochene Feldertheilung nicht mehr aus. Sie würde zu Felderlängen führen, welche durch die die Dachhaut bildende Sekundärconstruction nicht mehr ohne Anstand überdeckt werden könnten. Man befindet sich dann in genau derselben Lage wie bei einer Parallelbalkenbrücke über einer sehr grossen Spannweite. In diesem Falle hilft man sich, um zu einer passenden Länge für die sekundären Längsträger zu gelangen, bekanntlich durch eine mehrtheilige Anordnung der Wandglieder.

Auf eine ganz ähnliche Art lässt sich dieselbe Schwierigkeit auch bei den Flechtwerkdächern umgehen. Man ordne in diesem Falle zwei (oder mehr) selbständige Geflechte an, welche beide auf derselben Tonnenfläche enthalten sind, so dass die in der Richtung der Spannweite auf einander folgenden Knotenpunkte abwechselnd zum einen und anderen Geflechte gehören. Abb. 30 deutet dies im Querschnitte an. Der durch ausgezogene Linien angegebene Sparrenzug gehört dem einen, der punktirt angegebene dem anderen Geflechte an.

Abb. 30.

Neben dieser Zweitheilung des ganzen Geflechtes kann dann, wenn es erforderlich erscheint, eine Zweitheilung in dem Fachwerke der einzelnen Balken einhergehen (Abb. 31). Da die letztere aus der Theorie der ebenen Balken bereits allgemein bekannt ist, erfordert sie keine weitere Beschreibung.

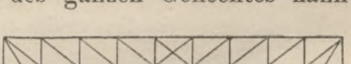


Abb. 31.

Ebenso erkennt man leicht, wie sich die Lasten auf die beiden im Querschnitte neben einander hergehenden Geflechte vertheilen. Allerdings muss betont werden, dass die ausgleichende Wirkung der Sparrensteifigkeit gegenüber concentrirten Lasten hier nicht in demselben Masse zur Geltung gelangt, wie bei eintheiligen Systemen. Man ist daher genöthigt, bei der Berechnung etwas grössere Werthe für die mobile Last anzunehmen. Aus diesem Grunde eignet sich das Tonnenflechtwerkdach besser für solche Spannweiten, bei denen man mit einem eintheiligen Systeme auskommen kann. Wenigstens werden in diesem Falle die Vorzüge desselben, soweit es sich um die Materialersparniss handelt, deutlicher hervortreten.

Zum Schlusse mache ich noch darauf aufmerksam, dass in constructiver Hinsicht natürlich noch manche Abänderungen möglich sind, welche das eigentliche Wesen der Sache, also namentlich die Art der Kräfteübertragung nicht berühren. So kann man in den einzelnen Balken des Geflechts natürlich auch eine Netzwerktheilung zur Anwendung bringen und es mag sein, dass diese Einzelausbildung gegenüber der hier beschriebenen einfacheren manche Vorzüge hat. Ebenso kann man bei kleineren Dächern die Füllungstheile ganz durch eine in Monier-Construction ausgeführte geschlossene Wand ersetzen. Die weitere Entwickelung der Sache nach dieser Richtung hin muss der Zukunft überlassen bleiben.

Dritter Abschnitt.

Die Windverstrebungen.

Erstes Capitel.

Die Parallelbalken-Brücken.

§ 63. Flechtwerkbrücken.

Auch im Brückenbau macht sich der geringe Ausbildungsgrad der Lehre vom räumlichen Fachwerke noch recht fühlbar, wenn auch die dringendsten Erfordernisse der Praxis durch die bisherigen Arbeiten auf diesem Gebiete befriedigt sind. Die beste Verhütung von Missgriffen kann jedoch auch hier nur eine systematische Schulung des Constructeurs in den Grundbegriffen und Grundanschauungen der Theorie des räumlichen Fachwerks bilden. Durch diese Schulung wird er befähigt, den Zusammenhang von Dingen mit einem Blicke und mit sicherem Urtheile zu überschauen, über die er sich andernfalls nur bruchstückweise und soweit die unmittelbare Nöthigung durch die Erfordernisse eines Einzelfalles an ihn herantritt, Rechenschaft gibt. Dass im letzteren Falle gelegentlich Fehler mit unterlaufen, kann nicht überraschen.

Für den Brückenbau handelt es sich hier um die Aufgabe, zwei mit aller Sorgfalt gegen die vorkommenden senkrechten Lasten berechnete Hauptträger durch die Windverstrebungen zu einem im Raume widerstandsfähigen Fachwerke zu vereinigen. Zu diesem Zwecke müssen die Windverstrebungen zwei verschiedenen Aufgaben gerecht werden. Zunächst müssen sie die durch den Winddruck hervorgerufenen horizontalen Belastungen auf die feste Erde hinüberleiten. Vielfach hat man darin ihre einzige Aufgabe, aus der die herkömmliche Benennung derselben herstammt, erblickt. Neben dieser liegt ihnen aber auch noch ob, allgemein dafür zu sorgen, dass die Voraussetzung, auf der die Berechnung der Hauptträger beruht, dass nämlich ihre Knotenpunkte gegen ein Heraustreten aus der Constructionsebene gestützt sind, wirklich erfüllt bleibt. Im ersten Abschnitte (§ 11 und § 28) ist auf die Wichtigkeit dieser Forderung bereits hinreichend hingewiesen.

Der Begriff des Flechtwerkes gestattet uns auch hier die beste Uebersicht über die Bedingungen für die Erfüllung dieser doppelten Aufgabe der Windverstrebungen. Wir erhalten nämlich ein Flechtwerk, also ein räumlich stabiles Stabgebilde, wenn wir nach Art der Abb. 32 je zwei gleichbezeichnete Knotenpunkte der beiden Hauptträger durch Querriegel mit einander verbinden und die dabei entstehenden vierseitigen Fächer durch Diagonalen aussteifen. Von Wichtigkeit ist dabei die Bemerkung, dass sich diese Aussteifung durch Diagonalen nicht auf die zwischen je zwei Gurten gleicher Höhenlage gebildeten wagrecht liegenden Fächer beschränken darf, sondern auch auf die an den Brückenenden entstehenden beiden senkrechten Fächer erstrecken muss. Weitere Diagonalen zwischen dem Obergurt des einen und dem Untergurt des anderen Hauptträgers durch den vom Flechtwerkmantel umschlossenen Raum hindurch sind dagegen völlig entbehrlich und, da sie nur die Klarheit der Kräfteübertragung stören würden, im Allgemeinen zu verwerfen.

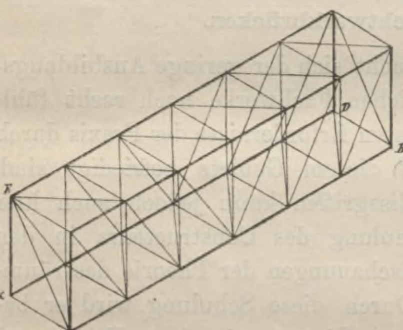


Abb. 32.

Das Stabgebilde der Abb. 32 ist für sich betrachtet stabil und statisch bestimmt. Die letztere Eigenschaft behält es aber bei derjenigen Auflagerung, welche bei der Berechnung der Hauptträger vorausgesetzt wird, nicht mehr bei. Offenbar müssen wir, um mit dieser in Uebereinstimmung zu bleiben, mindestens einen Knotenpunkt (etwa A) fest auflagern, einem zweiten (etwa B) zwei und den beiden anderen Auflagerknotenpunkten je eine Auflagerbedingung (Stützung auf einer horizontalen Ebene) vorschreiben. Diese Auflagerungen genügen, sind aber auch nothwendig, um diejenige Art der Kräfteübertragung zu ermöglichen, welche bei der Berechnung der Hauptträger vorausgesetzt wird.

Die Zahl dieser Auflagerbedingungen beträgt sieben, wir haben also einen überzähligen Stab, bezw. eine überzählige Auflagerbedingung im Systeme. Welcher (bezw. welche) dies ist, lässt sich leicht nachweisen. Man erkennt nämlich leicht, dass bei der beschriebenen Art der Auflagerung der Stab CE, also die Endvertikale des einen Hauptträgers entfernt werden könnte, ohne dass dadurch die Stabilität aufgehoben würde. Auf den ersten Blick mag dieser Ausspruch dem nur in der ebenen Theorie bewanderten Fachmanne freilich befremdlich erscheinen. Und in der That würde die Beseitigung dieses Stabes das gewohnte Kräftebild bei senkrechten Lasten vollständig verschieben. Man überzeugt sich aber bei näherer Betrachtung sofort, dass der Druck, den sonst die Endvertikale auf das Auflager C überträgt, jetzt durch die Diagonale EA im Endquerfache aufgenommen wird und dass die Horizontalcomponente der Stabkraft EA am Knotenpunkte E zur Entstehung eines verwickelten Spannungsbildes Veranlassung gibt, das bis ans andere Trägerende hin nahezu sämmtliche Stäbe in sich begreift.

Fast genau denselben Erfolg würde es haben, wenn man an Stelle des Stabes CE die Auflagerbedingung bei C beseitigen wollte. Der Träger wäre dann nur noch an drei Punkten aufgelagert. Man sieht unmittelbar ein, wie man für eine beliebige Belastung zunächst die Auflagerkräfte und aus diesen durch fortschreitende Zerlegungen die Stabspannungen ermitteln könnte.

Dieser Betrachtung lege ich einen nicht geringen Werth bei, weil sie deutlich zeigt, wie bei der besprochenen Art der Ausführung des Trägers über das legitime Spannungsbild in Folge von Ausführungsfehlern (z. B. in Folge einer geringen Senkung des Unterstützungspunktes C) ein zweites ganz unerwartetes und fremdartiges sich überlagern kann, das eine abgeschwächte Wiedergabe des oben erörterten darstellt. Aus diesem Grunde halte ich es auch für eine nützliche Uebung, den Spannungszustand des Trägers unter jener Voraussetzung, dass die Stütze bei C fehlt, näher zu verfolgen. Um nicht zu weitläufig zu werden, verzichte ich darauf jetzt, betone aber nochmals, dass diese Erscheinungen schon bei ausschliesslicher Einwirkung senkrechter Lasten hervortreten, also bei einem Falle, der von der ebenen Fachwerkstheorie als ihre eigentliche Domäne angesehen wird.

§ 64.

Allerdings lässt sich auch die Diagonale EA (Abb. 32) als überzähliger Stab ansehen und eventuell beseitigen. In diesem Falle verschwinden alle Zweifel über die Art der Kräfteübertragung bei senkrechter Belastung und zwar gestaltet sich dieselbe genau so, wie es in der Theorie des ebenen Fachwerks gelehrt wird. Dafür tritt aber eine ähnlich verwickelte Kräfteübertragung wie die im vorigen Paragraphen beschriebene, jetzt bei horizontaler Belastung (durch Winddruck) ein. Eine quer zum Balken gerichtete Horizontalkraft, welche am Knotenpunkte E angreift, wird bei fehlender Diagonale EA erst beim Knotenpunkte B am jenseitigen Trägerende auf die feste Erde übertragen; nachdem sie zuvor nicht nur die Stäbe des „oberen Windbalkens“, sondern auch diejenigen der beiden Hauptträger in Spannung versetzt hat.

Die beiden Fälle unterscheiden sich desshalb in der That nicht viel von einander; bei beiden entstehen beträchtliche Beanspruchungen der Stäbe, welche als unzulässig zu bezeichnen sind, in einem Falle für die senkrechten, im anderen für die wagrechten Belastungen. Ich habe den ersten Fall

(Beseitigung von EC) hier vorangestellt, weil man gewohnt ist, sein Augenmerk mehr auf die senkrechten Lasten zu richten; mit dem zweiten Falle ist es aber gar nicht anders, sobald die wagrechten Kräfte irgendwie ins Gewicht fallen. Man muss daher beide Anordnungen (Beseitigung von EC oder von EA) vermeiden und auf die Herbeiführung der statischen Bestimmtheit damit Verzicht leisten.

Die statische Unbestimmtheit, welche in Folge dessen zurückbleibt, ist indessen nicht sehr störend. Es handelt sich offenbar um die Frage, wie bei senkrechten Lasten bei E (bezw. dem anderen ähnlich gelegenen Punkte) der Anflagerdruck sich auf die beiden gleichzeitig vorhandenen Stäbe EC und EA vertheilt. Nun erhält aber in den praktisch vorliegenden Fällen EC stets einen viel grösseren Querschnitt als EA. Ausserdem ist EC kürzer als EA und schliesslich weicht E beim Auftreten einer Spannung in EA in Folge der elastischen Formänderungen der zum oberen Windbalken gehörigen Stäbe etwas seitlich aus, wodurch eine theilweise Entlastung von EA herbeigeführt wird. Aus allen diesen Gründen folgt, dass von der bei E auftretenden senkrechten Kraft weitaus der grössere Theil von der Endverticalen EC aufgenommen wird, also jener Spannungszustand thatsächlich eintritt, welcher bei der gewöhnlichen Berechnung angenommen wird. — Ganz besonders gilt dies, wenn an Stelle der einen steifen Diagonalen EA, wie es gewöhnlich geschieht, zwei schlaffe Gegendiagonalen gesetzt werden.

Allerdings gelten diese Schlüsse alle nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung genauer Ausführung. Wie bei allen statisch unbestimmten Constructionen kann auch im vorliegenden Falle durch gröbere Mängel in der Ausführung ein System von Eigenspannungen (welche bei Entfernung aller Lasten zurückbleiben) und weiterhin eine beträchtliche Abweichung von der erwarteten Art der Kräftevertheilung hervorgerufen werden. Weiter oben wurde schon darauf hingewiesen, dass besonders von einem ungenauen Einhalten der

Höhenlage eines Stützpunktes (etwa C) ein bedeutender Einfluss auf das ganze Verhalten des Trägers zu erwarten ist.

§ 65.

Unter der Voraussetzung, dass solche Ausführungsmängel vermieden sind, lehren die vorausgehenden Betrachtungen, wie die Berechnung einer Flechtwerkbrücke nach Abb. 32 mit den beschriebenen sieben Auflagerbedingungen erfolgen kann. Die vier Langseiten des Mantels bilden vier Fachwerkbalken, von denen die lothrecht stehenden als Hauptträger bezeichnet werden. In ihnen findet die Kräftezerlegung und Fortleitung der Lasten zum Widerlager bei senkrechter Belastung ausschliesslich statt und zwar nach den von der ebenen Fachwerkstheorie seit langer Zeit aufgestellten Regeln. Die beiden wagrechten Fachwerkbalken bezeichnet man als Windbalken. Sie haben die Gurten mit den Hauptträgern gemeinsam und leiten alle horizontalen Belastungen zur festen Erde hinüber. Beim unteren Windbalken geschieht dies ohne jedes Zwischenglied und gleichfalls nach den Regeln der ebenen Fachwerkstheorie für einfache Balken, während zwischen dem oberen Windbalken und der Erde noch die Endquerfächer eingeschaltet sind. Der horizontal gerichtete Auflagerdruck des oberen Windbalkens zerlegt sich bei E in zwei Componenten, von denen die eine auf EA, die andere auf EC übergeht.

Diese Bemerkungen enthalten die vollständige Anweisung für die Ausführung dieser schon seit langer Zeit angewendeten und allgemein bekannten Berechnungsart.

Der aufmerksame Leser wird bei der Vertheilung des horizontalen Auflagerdrucks bei E auf die Stäbe EC und EA vielleicht im Stillen die Frage aufgeworfen haben, wie sich das Verhältniss gestaltet, wenn einer dieser Stäbe als überzählig beseitigt ist. Welche Folgen die Beseitigung von EA hätte, ist schon in § 64 besprochen worden. Bei der Beseitigung von EC wird durch die Horizontalkraft in E die von E ausgehende Diagonale des Hauptbalkens (gleichzeitig mit EA) in Spannung versetzt. Dadurch wird dann weiterhin das Spannungsbild über den ganzen Balken hin vollständig umgeändert, wie sich ohne Schwierigkeit verfolgen lässt. — Auch diese Betrachtung ist namentlich desshalb nicht ohne Werth, weil sie uns zeigt, dass neben der einfachsten und nächstliegenden Art der Kräfteübertragung noch eine zweite möglich ist, welche sich mit jener, gewöhnlich allein in Betracht gezogenen je nach den besonderen Nebenumständen mehr oder weniger zu vermengen vermag.

Dass die einfache, unmittelbare Art der Kraftübertragung unter normalen Umständen (besonders also beim Fehlen gröberer Ausführungsmängel) die weitaus überwiegende ist, folgt übrigens (wie in § 64) daraus, dass eine sich über den ganzen Balken hinweg erstreckende Spannungsvertheilung zu verhältnissmässig beträchtlichen elastischen Ausweichungen Veranlassung gibt, während diese bei einer Uebertragung auf dem direkten Wege viel geringer sind, woraus die Behauptung folgt.

§ 66.

Bisher war angenommen, dass nur sieben Auflagerbedingungen vorgeschrieben seien. In der Regel schreibt man indessen zehn vor. Ausser dem Knotenpunkte A (Abb. 32, S. 118) hält man auch C völlig fest und lagert die beiden andern Knotenpunkte B und D längsverschieblich auf. Dafür werden indessen die Stäbe AC und BD ohne Weiteres überflüssig. Selbst wenn man sie beibehält, dienen sie nur dazu, die Starrheit der Erde aufrecht zu erhalten und sind daher in das Stabgebilde nicht mit einzurechnen. Mit Berücksichtigung dessen hat man bei zehn Auflagerbedingungen noch zwei überzählige Stäbe. Gegenüber dem vorher behandelten Falle ist daher noch ein zweiter dazu gekommen.

Wie vorher, könnte man auch jetzt wieder durch Hinwegnehmen von zwei geeignet ausgewählten Stäben den Träger statisch bestimmt machen, womit man aber zu ganz anderen und weit ungünstigeren Spannungsvertheilungen gelangen würde, als diejenige ist, welche man herbeizuführen beabsichtigt. Man sieht daher davon ab und berechnet den Träger so wie es in § 65 auseinander gesetzt wurde. Gerechtfertigt wird dieses Verfahren wiederum durch den Umstand, dass jene anderen neben dem Hauptsystem möglichen Spannungsbilder bei ihrem Auftreten sofort zu grösseren elastischen Ausweichungen führen würden, welche sich mit dem Hauptsysteme nicht vertragen, so dass dieses bei exakter Ausführung weitaus überwiegt.

Die Hinzufügung der wesentlich neuen Auflagerbedingung gegenüber dem vorher behandelten Fall, nämlich die Stützung des Knotenpunktes C (Abb. 32) gegen Längsverschiebungen, lässt sich übrigens dahin deuten, dass nunmehr der untere Windbalken am einen Ende (nämlich bei AC) eingespannt ist. Man kann daher die in der wagrechten Ebene dieses Balkens beim Auftreten horizontaler Lasten entstehenden Auflagerdrücke nach den bekannten Formeln für die am einen Ende eingespannten und am anderen frei verschieblichen Balken berechnen. Nachdem diese Auflagerdrücke, zu denen ein aus zwei in der Längsrichtung an A und C wirkenden Kräften bestehendes Kräftepaar gehört, ermittelt sind, ergeben sich die Spannungen der Stäbe auf rein statischem Wege. Das Moment des erwähnten Kräftepaares entspricht dem Momente an der Einmauerungsstelle des eingemauerten Balkens.

Durch eine Betrachtung dieser Art wird die durch die neu hinzugekommene Auflagerbedingung eingeführte Unbestimmtheit gehoben und eine schärfere Berechnung der Spannungen als sie in § 65 angegeben war, ermöglicht. An der Wirkungsweise des oberen Windbalkens wird hierdurch nichts geändert.

Eine Berechnung auf dieser Grundlage hat Winkler*) empfohlen. Es ist mir nicht bekannt, ob dieselbe in die Praxis Eingang gefunden hat. Ohne Zweifel ist sie der in § 65 angegebenen vorzuziehen; andererseits lässt sich aber auch gegen letztere nicht viel einwenden, da die auftretenden Windkräfte ohnehin nicht genau bekannt sind, so dass eine gar zu sorgfältige Ermittelung der durch sie hervorgerufenen Spannungen nicht erforderlich erscheint. In der That werden ja auch gewöhnliche Balken mit einer Einmauerung am einen Ende gar häufig ohne Berücksichtigung dieses letzteren Umstandes berechnet.

Die ganze Aufgabe der Spannungsermittelung in diesem statisch unbestimmten Systeme lässt sich auch noch unter einem abweichenden Gesichtspunkte auffassen, welcher die Eigenthümlichkeit des Systems in mancher Hinsicht noch klarer hervortreten lässt. Der Stabverband der Abb. 32 ist

*) Civ.-Ing. 1884.

nämlich, wie schon wiederholt hervorgehoben wurde, für sich genommen statisch bestimmt. Es ist also nur eine einzige Spannungsvertheilung und zwar diejenige möglich, welche in § 65 beschrieben wurde, wenn die Auflagerkräfte auf die vier Stützen sich so vertheilen, wie es gewöhnlich angenommen wird (und unter normalen Verhältnissen mit Recht angenommen werden darf). Man kann daher sagen, dass die Störungen, von denen oben die Rede war, die durch die statische Unbestimmtheit herbeigeführt werden, sich in erster Linie auf die Art der Vertheilung der Auflagerkräfte beziehen. In der That sieht man von diesem Standpunkte aus leicht ein, dass ein Fehler in der Höhenlage eines der Stützpunkte (da der gestützte Flechtwerkbalken für sich genommen starr ist), eine Abweichung von der vorausgesetzten Art der Vertheilung der Auflagerkräfte herbeiführen muss, welche dann natürlich auch eine abweichende Vertheilung aller Spannungen zur Folge haben muss. Man kann daher, wenn es sich um die Beurtheilung der Folgen handelt, welche ein geringes Nachgeben eines der Stützpunkte nach sich zieht, so verfahren, dass man zunächst die dadurch herbeigeführte Aenderung in der Vertheilung der Auflagerkräfte auf Grund der Elasticitätslehre berechnet und dann auf rein statischem Wege die Aenderung in der Spannungsvertheilung bestimmt.

Nicht unwesentlich ist schliesslich noch die Bemerkung, dass man nicht etwa die Diagonalen in den Endquerfächern des Flechtwerks (EA und die gegenüberliegende am anderen Brückenende) beide zugleich als die beiden überzähligen Stäbe des Trägers ansehen darf. Die Beseitigung derselben würde den Träger vielmehr labil machen, wie man leicht erkennt. Eine liesse sich zwar, wie oben gezeigt wurde, beseitigen. Dies hätte aber eine sehr ungünstige und von der gewöhnlich vorausgesetzten völlig abweichende Spannungsvertheilung bei Einwirkung horizontaler Lasten zur Folge. Man muss daher beide Diagonalen als unentbehrliche Stäbe bezeichnen.

§ 67. Brücken mit unvollständiger Stützung.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen ergibt sich, dass unter gewöhnlichen Umständen die nicht zu den Haupttragwänden gehörigen Stäbe des Flechtwerks nur durch horizontale Lasten in Spannung versetzt werden. Wenn nun der Winddruck nicht sehr ins Gewicht fällt, kann es genügen, diese Stäbe ganz zu beseitigen und dafür Sorge zu tragen, dass durch die Biegungsfestigkeit der übrigen Stäbe in Verbindung mit der Steifigkeit der Knotenpunkte deren Aufgabe mit übernommen wird.

Sehr häufig werden z. B. Brücken nach Abb. 33 zur Ausführung gebracht. Diese geht aus Abb. 32 dadurch hervor, dass alle Füllungstheile des oberen Windbalkens und die Diagonalen in den Endquerfächern zum Wegfall gebracht sind. Eine Windkraft H an einem Obergurtknotenpunkte wird dann zunächst durch die Biegungsfestigkeit der Wandglieder des Hauptträgers nach abwärts geleitet und lässt sich dort durch die gleich grosse Horizontalkraft H' und ein Kräftepaar $V\,V'$ ersetzen.

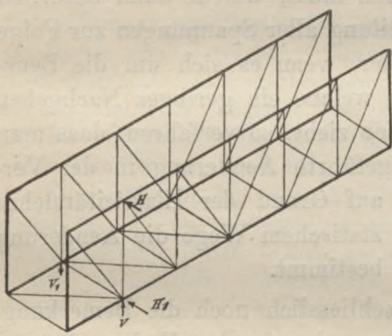


Abb. 33.

Die Belastungen H' werden von dem erhalten gebliebenen unteren Windbalken aufgenommen und die Kräfte V und V' bringen Zusatzspannungen in den Haupttragwänden hervor. Man erkennt sofort, dass $V = V' = H.\,h/b$ ist, wenn h die Trägerhöhe und b die Brückenbreite bedeutet. Die Durchführung der Berechnung auf dieser Grundlage ist nun leicht ersichtlich und bedarf keiner weiteren Beschreibung.

Nicht ausser Acht zu lassen ist aber die zweite Aufgabe, welche den Windverstrebungen obliegt und hier gleichfalls durch die Steifigkeit der Wandglieder und der Knotenpunkte mit übernommen werden muss. Diese muss nämlich hinreichen, ein Ausknicken grösserer Stücke des Obergurts zu verhüten. Unter Hinweis auf § 11 und die daselbst citirten Arbeiten enthalte ich mich hier eines näheren Eingehens auf diesen Punkt.

Wenn, wie es bei oben liegender Fahrbahn gleichfalls zuweilen geschieht, der obere Windbalken erhalten bleibt und der untere weggelassen wird, ist die letztere Bemerkung von geringerer Bedeutung, da an den Knotenpunkten der Zuggurtung keine Tendenz zu seitlichen Ausweichungen besteht. Dafür ist aber bei diesen Brücken um so mehr Werth auf die Beibehaltung der Diagonalen in den Endquerfächern zu legen, da auch bei Fernhaltung aller horizontalen Lasten, aber gelenkförmigen Knotenpunkten ohne diese Diagonalen nur ein labiler Gleichgewichtszustand zu Stande käme.

Mehr zu empfehlen ist es indessen jederzeit, hier, wo kein praktisches Hinderniss entgegensteht, den Brückenträger als vollständiges Flechtwerk auszubilden.

Bei Brücken mit unten liegender Fahrbahn, aber genügender Höhe, steht nichts im Wege, alle Stäbe des oberen Horizontalbalkens des Flechtwerks zur Ausführung zu bringen. Dagegen müssen wegen der erforderlichen Freihaltung der Einfahrtsöffnung die Diagonalen in den Endquerfächern weggelassen werden.

Man ist in diesem Falle nicht mehr berechtigt, den oberen Horizontalbalken als einen Windbalken zu bezeichnen. Da ihm die Stützung an den Trägerenden fehlt, vermag er nämlich die auf ihn entfallenden Horizontalkräfte nicht mehr auf die Widerlagsmauern zu übertragen. Die Uebertragung dieser Kräfte findet vielmehr genau so statt, als wenn, wie in Abb. 32 alle Füllungstheile des oberen Horizontalbalkens nicht vorhanden wären, d. h. durch die Biegungsfestigkeit der einzelnen Wandglieder der Hauptträger. Einen Zweck erfüllen daher die Füllungstheile des oberen Horizontalbalkens, wenn sie nicht in Verbindung mit Diagonalen in den Endquerfächern stehen, nur insofern, als sie ein Ausknicken grösserer Stäbe des Obergurts verhüten.

Hierbei darf indessen nicht vergessen werden, dass die Abstützung der beiden Obergurten gegen einander auch bei völliger Fernhaltung horizontaler Lasten noch keineswegs hinreicht, den Träger stabil zu machen. Der aus den Obergurten und den Windkreuzen gebildete obere Horizontalbalken vermag sich immer noch als Ganzes in seiner horizontalen Ebene zu verschieben, ohne daran durch andere Widerstände als durch die Biegungsfestigkeit der Wandglieder der Hauptträger gehindert zu werden. Wenn auch die letztere genügt, um grössere Ausweichungen zu verhindern, setzt sie doch schwingenden Bewegungen des gesammten oberen Horizontalbalkens bei den praktisch vorliegenden Stärkeverhältnissen häufig keinen ausreichenden Widerstand entgegen.

Berücksichtigt man in Verbindung hiermit die Betrachtungen über die endlich kleine Beweglichkeit in § 28, so erkennt man, dass auch ein unmittelbarer Anlass zum Entstehen solcher Schwingungen vorhanden ist. Bei schwach construirten Wandgliedern wird man daher zu besorgen haben, dass beim Ueberfahren einer Last ein System solcher Schwingungen der oberen Horizontalbalkenmasse aufzutreten vermag, das beim zufälligen Zusammentreffen der einzelnen Bewegungsantriebe sich (durch Resonanzwirkung) leicht beträchtlich über den zuerst zu erwartenden Ausschlag hinaus verstärken kann. Dem vergrösserten Ausschlage entsprechen dann auch grössere Beanspruchungen des Materials, welche zu den Hauptspannungen hinzutreten und leicht verderbliche Folgen herbeiführen können. — Dies Alles bezieht sich auf den Fall, dass gar keine Beanspruchung durch Winddruck vorliegt; wenn dieser noch hinzu kommt, treten natürlich weitere Beanspruchungen auf, welche die etwa schon vorhandene Gefahr noch vergrössern.

Die Gefährdung, welche eine Brücke ohne Diagonalen in den Endquerfächern und mit leicht construirten, langen Wandgliedern (wie die Mönchensteiner Birsbrücke) durch diese Schwingungen erfährt, ist in unmittelbaren Vergleich zu stellen mit derjenigen einer Hängebrücke durch taktmässiges Marschiren. Ein wesentlicher Unterschied besteht nur insofern, als die Schwingungsdauer der in Bewegung gesetzten Masse im ersteren Falle immer nur geringe Bruchtheile einer Sekunde ausmachen wird, während sie bei der Hängebrücke ziemlich viel grösser ist. Was indessen das taktmässige Marschiren einer Truppenabtheilung für die Hängebrücke, das kann für eine Brücke nach dem Muster der Birsbrücke das Hinüberfahren eines Eisenbahnzuges mit grösserer Geschwindigkeit sein, wenn die Zeit, welche verstreicht, bis das unmittelbar folgende Rad die Stelle des vorhergehenden erreicht hat, in demselben Verhältnisse zur Schwingungsdauer steht, wie das Marschtempo zu derjenigen der Hängebrücke.

§ 68. **Portale und Windjoche.**

Die bei unten liegender Fahrbahn unumgängliche Beseitigung der Diagonalen in den Endquerfächern führt demnach zwei schwer wiegende Nachtheile herbei. Zunächst wird für die Uebertragung der am Obergurt wirkenden Windkräfte die Biegungsfestigkeit der Wandglieder in unerwünschter Weise in Anspruch genommen und dann führt sie die unmittelbar vorher beschriebenen Gefahren mit sich. Eine Abhülfe gegen diese Uebelstände erscheint daher sehr erwünscht. Wir wollen sehen, was die Praxis bisher in dieser Richtung geleistet hat.

Das beliebteste Aushülfemittel zur Erzielung einer grösseren Seitensteifigkeit besteht in der Anordnung möglichst steifer Rahmen im Brückenquerschnitte. Der obere Querriegel erhält eine ziemlich grosse Höhe, so dass er sich nur wenig verbiegen kann, und wird mit den Wandgliedern starr vernietet und auch noch durch ein schräg verlaufendes Winkeleisen verbunden (Abb. 34). Durch einen möglichst steifen Querriegel vermag man die Widerstandsfähigkeit der Wandglieder gegen Biegung durch die Windkräfte nahezu auf das Doppelte zu erhöhen*). Das schräge Winkeleisen hat dann weiterhin noch den Erfolg, die für

Abb. 34.

*) Vgl. A. Föppl, Windverstrebungen einfacher eiserner Balkenbrücken. Civil-Ing. 1889.

die Biegung in Betracht kommende freie Länge des Wandstabes um ein kleines Stück zu vermindern.

Der Erfolg, welcher durch diese Anordnung erzielt wird, ist demnach im Vergleiche zu dem Materialaufwande, den sie hervorruft, nicht grade sehr erheblich. Die früheren Mängel bleiben in abgeschwächter Form weiter bestehen. Man fühlt sich in der That beim Anblicke solcher Constructionen oft veranlasst, zu fragen, ob derselbe Materialaufwand nicht besser zu einer unmittelbaren Verstärkung der einzelnen Wandglieder aufgewendet worden wäre.

Ein wirklicher Ersatz für die fehlenden Diagonalen der Endquerfächer wird dagegen durch die Herstellung widerstandsfähiger Portale an den beiden Brückenenden herbeigeführt. Diese können von zweierlei Art sein. Entweder stellt man gemauerte Einfahrten her, die also Bestandtheile der festen Erde bilden, gegen welche sich die Enden des oberen Windbalkens anlehnen. Man fügt also mit anderen Worten an Stelle der Diagonalen weitere Auflagerbedingungen für die oberen Endknotenpunkte hinzu. Eigentlich würde an jedem Brückenende je eine vertikale Auflagerebene, in welcher der zugehörige Knotenpunkt nach jeder der beiden Normalenrichtungen gestützt wäre, genügen. Grade so, wie aber an die Stelle einer gegen Zug und Druck widerstandsfähigen Diagonale in der Regel zwei schlaffe Diagonalen treten, kann auch die eine, nach beiden Normalenrichtungen widerstandsfähige Auflagerung durch zwei nur in der Richtung nach aussen hin widerstehende Auflagerungen ersetzt werden. Der Verein der beiden Stützungen der oberen Endknotenpunkte an jedem Trägerende gegen Bewegungen nach aussen hin bildet einen Ersatz für eine einzige Auflagerung mit vollständiger Stützung und damit auch einen Ersatz für eine steife bezw. zwei schlaffe Diagonalen.

So wie an der festen Erde kann man die Portale aber zweitens auch an dem Trägerkörper selbst unterbringen. Ein solches Portal wird durch einen besonders steif hergestellten Endrahmen gebildet, dessen Seiten widerstandsfähig genug sind, um den gesammten vom Winddrucke auf die obere Brückenhälfte herrührenden horizontalen Auflagerdruck des Windbalkens durch ihre Biegungsfestigkeit auf die feste Erde hinüberzuleiten. Die kräftige Querschnittsausbildung, welche dadurch bedingt wird, verhindert dann zugleich merkliche Verschiebungen der Endpunkte des oberen Windbalkens. Dieser befindet sich dann in derselben Lage, als wenn er an den Enden durch gemauerte Portale oder anstatt deren durch Endquerfach-Diagonalen gegen die Erde abgestützt wäre, vermag also die vorher besprochenen Schwingungen nicht auszuführen.

Die Berechnung der Brücken mit Portalen der einen oder anderen Art stimmt genau mit der in § 65 angegebenen überein.

An die Stelle der Portale können auch Windjoche treten, welche aus diesen dadurch hervorgehen, dass man die auf Biegung beanspruchten Ständer in bekannter Weise durch

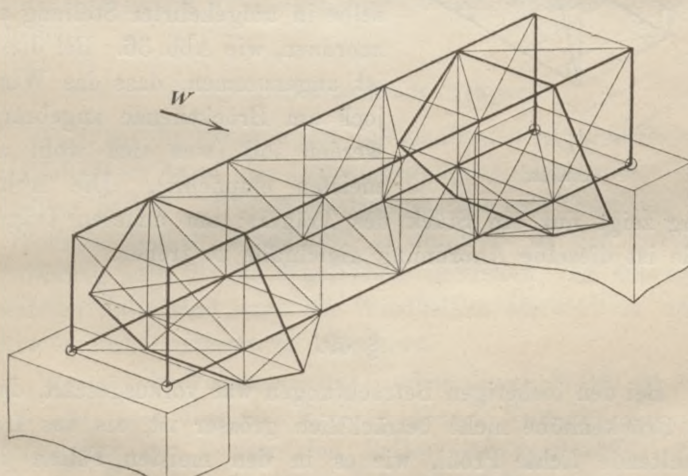


Abb. 35.

Stabdreiecke ersetzt. — Es ist nicht unbedingt nöthig, diese Windjoche unmittelbar am Brückenende anzubringen; man kann dazu auch zwei mehr nach Innen gelegene Knotenpunkte auswählen, wie in Abb. 35, welche ich meiner oben angeführten Abhandlung im Civil-Ingenieur entnehme. Wie die Berechnung in diesem Falle zu erfolgen hat, ist leicht ersichtlich. Der obere Windbalken verhält sich gegen horizontale Kräfte wie ein an den Ausgangspunkten der Windjoche aufgelagerter ebener Balken und der untere erfährt ausser den Spannungen, welche die an ihm wirkenden Windkräfte herbeiführen, noch die durch den vom oberen Balken auf ihn übertragenen horizontalen Auflagerdruck erzeugten. Durch die senkrechten Kräfte V und V', welche wie in Abb. 33 auftreten, ändern sich zugleich die Spannungen der Hauptträger.

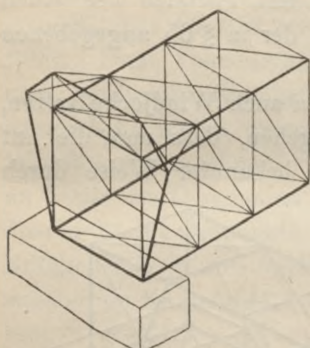


Abb. 36.

Hier möchte ich meinem früheren Vorschlage noch hinzufügen, dass dort, wo etwa die Constructionshöhe zur Anbringung eines Windjoches nach Abb. 35 fehlt, nichts im Wege steht, dasselbe in umgekehrter Stellung anzuordnen, wie Abb. 36. Bei dieser ist angenommen, dass das Windjoch am Brückenende angebracht werden soll (was sich wohl am meisten empfiehlt). Die Abbildung zeigt nur ein Stück des Trägers; am anderen Trägerende ist dieselbe Anordnung gleichfalls zu treffen.

§ 69.

Bei den bisherigen Betrachtungen war vorausgesetzt, dass die Brückenhöhe nicht beträchtlich grösser ist, als das freizuhaltende lichte Profil, wie es in den meisten Fällen der Anwendung zutrifft. Im entgegengesetzten Falle wird man drei Windbalken über einander anordnen, von denen der mittlere die Rolle des jetzt allein betrachteten oberen Windbalkens spielt, während der oberste in der Höhe der Obergurten durchgeführt wird. In dem Endquerfache zwischen dem mittleren und dem obersten Windbalken können die versteifenden Diagonalen zur Abwärtsleitung des horizontalen Auflagerdruckes angebracht werden, womit dann der Fall auf den früheren zurückgeführt ist. Weitere Querdiagonalen zwischen den Knotenpunkten des mittleren Windbalkens und den jenseitig liegenden des oberen sind dann nicht erforderlich.

Dagegen braucht man bei dieser Anordnung besondere Gurten für den mittleren Windbalken. Anstatt dessen kann man auch auf die Durchbildung des letzteren ganz verzichten, indem man an jedem Knotenpunkte durch Querdiagonalen die Horizontalkräfte auf den obersten Windbalken überleitet und am Brückenende die Horizontalkräfte von oben her gemeinsam nach abwärts führt. Bis zur Höhe des mittleren Windbalkens kann dies durch die Endquerfach-Diagonalen geschehen und von da durch Portale oder Windjoche. — Eine ausführlichere Besprechung dieser Fälle, welche gegenüber dem Vorhergegangenen nichts wesentlich Neues bieten, erscheint hier entbehrlich.

§ 70. **Durchlaufende Träger.**

Auch auf die Brücken mit durchlaufenden (continuirlichen) Parallelbalken kann das Vorhergegangene sinngemässe Anwendung finden. Werden die Hauptbalken mit Gelenken (als Gerber'sche Balken) ausgeführt, so empfiehlt es sich, dieselbe Anordnung auch für die Windbalken zu treffen. Im entgegengesetzten Falle sind auch die Windbalken als statisch unbestimmte ebene Systeme zu berechnen.

Wesentliche Voraussetzung in allen diesen Fällen ist aber auch hier, dass über den Pfeilern überall Vorsorge zur Abwärtsleitung der horizontalen Auflagerkräfte getroffen wird, sei es durch Endquerfach-Diagonalen, durch Portale oder durch Windjoche.

Zweites Capitel.

Brücken mit gekrümmten Gurtungen.

§ 71.

Auf den ersten Blick erscheint die Berechnung der Windverstrebungen von Brücken aus Hauptträgern mit gekrümmten Gurtungen erheblich schwieriger, als diejenige der Parallelbalkenbrücke. Man kann diesen Fall indessen leicht auf den früher behandelten zurückführen, wenn man von dem Begriffe des zweidimensionalen, nicht ebenen Fachwerks Gebrauch macht.

In Abb. 37 stellen AB und CD die gekrümmten Ober- oder Untergurtungen der beiden Hauptträger (in axonometrischer Projection) dar. Zwischen denselben ist eine Windverstrebung in der üblichen Weise angeordnet. Der gesammte dadurch gebildete und in der Zeichnung wiedergegebene Stabverband kann als ein statisch bestimmtes zweidimensionales Cylinderfachwerk angesehen werden. Die Stäbe, welche in Wirklichkeit von den Knotenpunkten dieses Stabverbandes nach den anderen Gurtungen der Hauptträger hingehen, sind in der Zeichnung weggelassen. Dieselben verhüten, dass die Knotenpunkte des zweidimensionalen Fachwerks $ABCD$ aus ihrer Mantelfläche heraustreten. Wenn wir sie fortlassen, müssen wir uns daher jedem Knotenpunkte eine Auflagerbedingung vorgeschrieben denken, welche diesen Zwang ersetzt, also die Auflagerbedingung, auf der Mantelfläche zu bleiben.

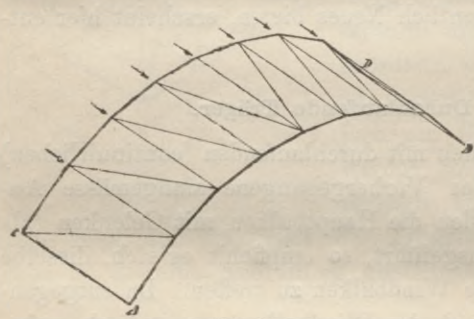


Abb. 37.

Offenbar entspricht diese Isolirung des Cylinderfachwerks *ABCD* aus dem gesammten Stabverbande der Brücke genau dem herkömmlichen Verfahren, einen Windbalken aus dem Verbande einer Parallelbalkenbrücke loszulösen und das Gleichgewicht der Kräfte in demselben gesondert zu betrachten. Wie in § 10 nachgewiesen wurde, ist ein ebenes Fachwerk erst durch die jedem Knotenpunkte vorgeschriebene Bedingung, in der betreffenden Ebene zu bleiben, stabil. Genau dasselbe gilt aber auch von jedem anderen zweidimensionalen Fachwerke, welches auch die Gestalt des Mantels sein möge.

Nur in einer Hinsicht unterscheidet sich das ebene von den übrigen zweidimensionalen Fachwerken*). So lange nämlich die auf das Fachwerk einwirkenden Kräfte sämmtlich in der Mantelfläche liegen, treten beim ebenen Fachwerke keine Auflagerkräfte zwischen den einzelnen Knotenpunkten und ihrer gemeinsamen Auflagerebene auf. Die Auflagerbedingung, welche jedem Knotenpunkte ohne Ausnahme vorgeschrieben ist, tritt also erst dann in Wirksamkeit, wenn Kräfte rechtwinklig zur Ebene des Fachwerks vorkommen. Anders ist es dagegen bei dem zweidimensionalen Cylinderfachwerk der Abb. 37. Hier treten Auflagerkräfte gegen den Cylindermantel bei jedem Knotenpunkte schon bei Lasten auf, die sämmtlich in der Mantelfläche enthalten sind. Dadurch wird das ganze Spannungsbild etwas verwickelter als bei ebenen Windbalken. Indessen kann man leicht nachträglich die in den Hauptträgern durch die genannten Auflagerkräfte hervorgerufenen Spannungen ermitteln, indem man dieselben als Lasten ansieht, die an den Hauptträgern angreifen.

---

*) Ausdrücklich sei hier noch darauf hingewiesen, dass man selbst aus einem ebenen Dreiecksnetze ein nicht ebenes zweidimensionales Fachwerk machen kann, indem man nämlich den Knotenpunkten Auflagerbedingungen vorschreibt, deren Ebenen nicht sämmtlich mit der Netzebene zusammenfallen.

§ 72.

Es sei jetzt angenommen, dass an den Knotenpunkten des zweidimensionalen Cylinderfachwerks die in Abb. 37 angedeuteten, durch den Wind hervorgerufenen Lasten einwirken, deren Richtungslinien sämmtlich auf dem Cylindermantel enthalten sind. Die Spannungsvertheilung in den Stäben dieses Windverbandes hängt dann von der Art der Auflagerung der Knotenpunkte A, B, C, D innerhalb des Cylindermantels (also von denjenigen Auflagerbedingungen, welche zu dem Zwange, auf dem Cylindermantel zu bleiben, noch hinzukommen) ab. Wenn der Windverband statisch bestimmt sein sollte, dürften nur drei Auflagerbedingungen dieser Art vorkommen. Beim Weglassen der Stäbe AC und BD (wie es früher beim ebenen Windbalken besprochen wurde) könnte die Zahl derselben auf fünf steigen. In der Regel haben wir es aber (soweit der von den Auflagerpunkten des räumlichen Trägers ausgehende Windverband in Betracht kommt) mit mindestens sechs Auflagerbedingungen der bezeichneten Art zu thun. Wenn der Windverband einer Balkenbrücke angehört, sind etwa A und C völlig festgehalten (gibt vier Auflagerbedingungen) und B und D längsverschieblich gelagert. Bei einer Bogenbrücke sind auch B und D völlig festgehalten und die Zahl der Auflagerbedingungen steigt dann auf acht.

Zunächst will ich indessen annehmen, dass nur fünf Auflagerbedingungen vorkommen, indem auch C wie B und D nur längsverschieblich aufgelagert sind; die Stäbe AC und BD, welche überflüssig sind, denke ich mir entfernt. Dann ist der Cylinderfachwerkträger statisch bestimmt und man kann leicht den Kräfteplan desselben angeben. Der letztere ist in zwei Projectionen zu zeichnen, von denen der Grundriss völlig mit dem Kräfteplane eines Balkenträgers (oder eines ebenen Windbalkens) übereinstimmt, während aus dem Aufrisse sich die Auflagerkräfte gegen den Cylindermantel,

d. h. die Lasten, welche, von dem Winddruck herrührend, an den Knotenpunkten der Hauptträger anzubringen sind, ergeben.

Man erkennt hieraus, dass die Art der Kraftübertragung bei einem gebogenen Windverbande sich nur durch die Abgabe von Kraftcomponenten an die Hauptträger von der bei einem ebenen Windbalken zu Stande kommenden unterscheidet. In seiner schon früher erwähnten Abhandlung über die Windverstrebungen*) hat dies Winkler in dem Satze ausgesprochen: „Die Horizontalcomponenten der Spannungen der Windstreben sind dieselben, wie die Spannungen, welche in den Horizontalprojectionen der Windverstrebungen entstehen würden, wenn auf dieselben die horizontalen Knotenkräfte wirkten.“

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich nun auch leicht, wie sich die Kraftübertragung gestaltet, wenn die Zahl der Auflagerbedingungen grösser ist, als fünf. Wird, wie bei Balkenträgerbrücken ausser A auch C festgehalten, so verhält sich der Windverband wie ein am linken Ende eingemauerter Balken und er verhält sich wie ein beiderseits eingemauerter, wenn auch die Knotenpunkte B und D völlig festgehalten sind, wie dies bei Bogenbrücken der Fall ist. Man wird also in diesen Fällen vom Grundrisse des Kräfteplanes ausgehen, indem man dabei eine solche Vertheilung der Auflagerkräfte voraussetzt, wie sie aus der Lehre von den eingespannten Balken bekannt ist. Auf Grund derselben lässt sich der Grundriss ohne jede Schwierigkeit zeichnen und aus ihm der Aufriss ableiten, der die auf die Hauptträger übergeleiteten Componenten kennen lehrt.

Wie es beim ebenen Windbalken üblich ist, wird man auch beim gebogenen Windverbande von der Berücksichtigung der Einspannung an einem oder an beiden Enden bei der Spannungsermittelung häufig absehen, den Grundriss des Kräfteplans also so wie denjenigen eines gewöhnlichen Parallel-

*) Civil-Ing. 1884.

balkens zeichnen können. Die ganze Spannungsermittelung wird dann ungemein einfach.

Von Wichtigkeit ist dabei die Bemerkung, dass die soeben erwähnte vereinfachte Berechnung mit demselben Rechte auf den Windverband einer Bogenbrücke als auf denjenigen einer Balkenbrücke angewendet werden kann.

§ 73.

Auf Grund des Vorhergehenden gestaltet sich die Behandlung der aus Brückenträgern mit gebogenen Gurtungen gebildeten räumlichen Fachwerke sehr einfach. Zunächst muss stets die Frage entschieden werden, ob ein solches räumliches Fachwerk stabil ist, ob es also erstens die erforderliche Zahl von Stäben und Auflagerbedingungen besitzt und ob zweitens bei jeder vorkommenden Belastung sich ein System von Stabspannungen angeben lässt, so dass an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht hergestellt wird. Dazu kommt dann noch bei dem statisch unbestimmten Systeme die weitere Frage, welche von den möglichen Kraftvertheilungen wirklich auftritt.

Die erste Frage lässt sich in der Regel leicht entscheiden, indem man prüft, ob das Stabgebilde ein Flechtwerk ausmacht, bezw. welche Stäbe daran fehlen und ob dieselben durch die Auflagerbedingungen ersetzt sind. Dabei ist nöthigenfalls in Erwägung zu ziehen, ob eine etwa fehlende Stabgruppe weggelassen werden konnte, weil mit Rücksicht auf die Kleinheit der Kräfte, denen sie zu widerstehen hat, eine hinreichende Stützung bereits durch die Steifigkeit der Knotenpunkte und Wandglieder herbeigeführt wird.

So ziemlich in allen praktisch vorkommenden Fällen wird sich bei dieser Prüfung herausstellen, dass der räumliche Träger statisch unbestimmt ist, auch wenn die ebenen Hauptträger desselben für sich betrachtet statisch bestimmt sind. Man wird sich dann die Frage vorzulegen haben, welche Stäbe etwa weggelassen werden können, ohne die Stabilität zu beeinträchtigen, und welchen Einfluss die Entfernung derselben auf die Art der Spannungsvertheilung ausübt. Daraus erlangt man dann ein Urtheil über diejenigen Verzerrungen des normalen Spannungsbildes, welche durch Ungenauigkeiten in der Ausführung (oder durch theilweise Temperaturänderungen) herbeigeführt werden können.

Alle diese Betrachtungen sind für die Parallelbalkenbrücken eingehend durchgeführt worden und in ähnlicher Weise lassen sich dieselben unter Zugrundelegung jenes Musters auch für die hier in Frage kommenden Fälle anstellen. Besonders erinnere ich daran, dass die statische Unbestimmtheit sich gewöhnlich nur auf die Vertheilung der Auflagerkräfte bezieht und dass durch vereinfachende Annahmen über diese die bestehende Ungewissheit zuweilen leicht beseitigt werden kann.

Als normale Spannungsvertheilung ist dabei, wie aus den bei der Betrachtung der Parallelbalkenbrücken dargelegten Gründen hervorgeht, stets diejenige anzusehen, welche aus der Zuweisung der vertikalen Lasten auf die Hauptträger und der horizontalen auf die Windverbände sich ergibt. Dass diese Art der Vertheilung bei statisch unbestimmten Systemen nicht die einzig mögliche ist, hat sich schon an jener früheren Stelle gezeigt. Zugleich ergab sich aber dort, dass sie vor allen anderen vorwiegen muss, weil sie nur geringe elastische Formänderungen hervorruft, während ein stärkeres Hervortreten der anderen nur bei weit grösseren Knotenpunktsverschiebungen zu Stande kommen könnte.

§ 74.

Zwischen den Windverstrebungen der Bogenbrücken und jenen der Balkenbrücken besteht, wie sich zeigte, kein wesentlicher Unterschied. Wichtig ist nur die Unterscheidung zwischen einem ebenen und einem gebogenen Windverbande; dabei ist es aber ziemlich gleichgültig, ob der letztere zur gekrümmten Gurtung eines Balkenträgers oder zu jener eines Bogenträgers gehört. Denn ob wir den Windverband am einen oder an beiden Enden als eingespannt zu betrachten haben, das macht keinen grossen Unterschied, umsomehr als man in den meisten Fällen der Anwendung darauf verzichten darf, auf die Einspannung Rücksicht zu nehmen, so dass der Windverband für die Berechnung auf beiden Seiten als freiaufliegend vorausgesetzt werden kann.

Eine besondere Besprechung erfordert nur noch der Windverband bei solchen Brücken, die aus Hauptträgern mit Mittelgelenken aufgebaut sind. Das wichtigste Beispiel hierfür bilden die Dreigelenkbogenbrücken. Ich werde mich hier auf die nähere Betrachtung einer Bogenbrücke mit versteiften Zwickeln und Mittelgelenk beschränken, wie sie in Abb. 38 dargestellt ist.

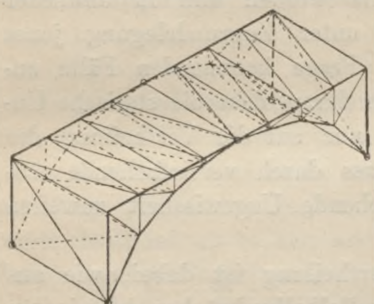


Abb. 38.

Merkwürdigerweise ist der Windverband einer solchen Brücke in höherem Grade statisch unbestimmt als derjenige einer Bogenbrücke gleicher Art ohne Mittelgelenk. Der Grund dafür lässt sich an der Hand der Abbildung 39 leicht nachweisen. Diese stellt eine solche Bogenbrücke ohne Mittelgelenk dar. Vorausgesetzt wird, dass der ganze Stabverband als Flechtwerk ausgebildet ist, dass also keine Querdiagonalen durch den inneren Brückenraum hindurchgehen, wie sich dies aus den bei der Betrachtung der Parallelbalkenbrücken dargelegten Gründen empfiehlt.

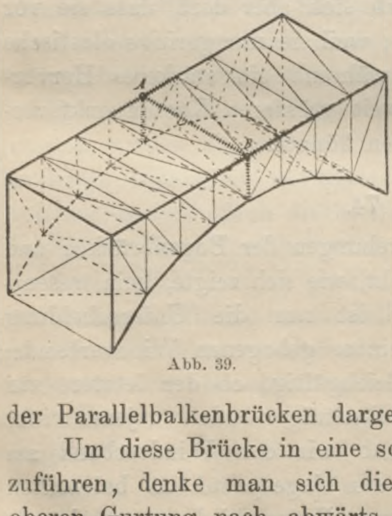


Abb. 39.

Um diese Brücke in eine solche mit Mittelgelenken überzuführen, denke man sich die Knotenpunkte A und B der oberen Gurtung nach abwärts gerückt, bis sie mit den darunter liegenden Knotenpunkten des Untergurts zusammenfallen. Dadurch fallen die genannten beiden Knotenpunkte und die in der Abbildung durch kurze Querstriche hervorgehobenen sieben Stäbe fort. Die zugehörigen Diagonalen des oberen Windbalkens fallen dagegen nicht fort, sondern wechseln nur ihre Richtung.

Der Fortfall von zwei Knotenpunkten und sieben Stäben hat zur Folge, dass in dem räumlichen Stabgebilde ein überzähliger Stab weniger übrig bleibt, als in dem vorhergehenden. Zugleich aber ist jeder der beiden Hauptträger für sich als ebener Träger aufgefasst, statisch bestimmt geworden. Es sind also für die beiden Hauptträger zusammen zwei überzählige Stäbe beseitigt worden, also einer mehr, als für das räumliche Stabgebilde, wenn es als Ganzes aufgefasst wird. Dies ist auf Kosten der statischen Unbestimmtheit des Windverbandes geschehen.

Bei der Brücke ohne Mittelgelenke nach Abb. 39 können wir nicht im Zweifel sein, wie die horizontalen Lasten auf die feste Erde hinübergeleitet werden. Der Winddruck vertheilt sich in leicht ersichtlicher Weise auf den oberen ebenen und den unteren gebogenen Windverband und jeder Theil wird von diesen beiden Verbänden unabhängig von dem anderen nach den früher besprochenen Gesetzen auf die feste Erde übertragen.

Anders ist es bei der Brücke mit Mittelgelenken. Hier sind die beiden Windverbände in der Mitte mit einander verwachsen, so dass der eine durch den anderen gestützt werden kann. Dadurch wird gegenüber dem vorigen Falle eine völlig neue statische Unbestimmtheit in das System hineingetragen. Statisch wäre es offenbar ebenso gut möglich, dass jeder Windverband unabhängig von dem anderen (wie im vorhergehenden Falle) seine Horizontallasten zur Erde hinüberführte, als dass z. B. der untere Windverband in zwei Theile zerfiele, von denen sich jeder einerseits auf das Widerlager, andererseits gegen die Mitte des oberen Windbalkens stützte. In diesem Falle würde der obere Windbalken nicht nur die auf ihn unmittelbar entfallenden Horizontallasten, sondern zugleich noch die in seiner Mitte auf ihn übertragenen Auflagerdrücke der unteren Windverbandtheile auf die Erde übertragen müssen.

Wie in allen Fällen der statischen Unbestimmtheit kann auch hier nur eine Betrachtung der elastischen Formänderungen über die wirklich eintretende Spannungsvertheilung Aufschluss geben. Diese gestaltet sich hier übrigens sehr einfach und lehrt sofort, dass die zuletzt erwähnte Art der Vertheilung nicht eintreten kann. Unter dem Einflusse der horizontalen Lasten erfolgt nämlich eine horizontale Verschiebung der Verwachsungsstelle beider Windverbände, also eine Durchbiegung im Sinne der wirkenden Kräfte, welche für beide Windverbände von gleicher Grösse ist. Da nun beide Windverbände im grossen Ganzen gegen Durchbiegungen in horizontaler Richtung gleich widerstandsfähig construirt sein werden, ergibt sich ohne jede Rechnung, dass auch jeder von ihnen zu annähernd gleichen Theilen bei der Uebertragung der Horizontalkräfte nach der festen Erde zur Wirksamkeit kommt.

Als normale Vertheilung der vom Winddrucke hervorgerufenen Spannungen haben wir demnach auch bei der Mittelgelenkbrücke diejenige anzusehen, welche bei der Brücke ohne Mittelgelenke zweifellos eintritt, nämlich die Ueberleitung der von jedem Windverbande unmittelbar aufgenommenen Horizontallasten auf die feste Erde, unabhängig vom anderen Windverbande. Selbstverständlich können aber Abweichungen von dieser normalen Vertheilung durch Ausführungsfehler oder durch Temperaturverschiedenheiten herbeigeführt werden.

Wenn die oben gemachte Voraussetzung, dass der obere und untere Windverband annähernd gleich widerstandsfähig gegen Durchbiegungen im horizontalen Sinne seien, nicht genau genug zutreffen sollte, kann man (wenigstens für eine symmetrische Windbelastung, die ja vorwiegend in Frage kommt) der Wahrheit dadurch näher kommen, dass man die rechte Hälfte des oberen Windbalkens als die Fortsetzung der linken Hälfte des unteren ansieht und umgekehrt, also zwei an der Verwachsungsstelle sich durchkreuzende Windverbände, bestehend je aus einem ebenen und einem gebogenen Stück, ins Auge fasst. Diese beiden sind dann offenbar völlig gleich und müssen daher bei symmetrischer Lastvertheilung zu genau gleichen Theilen an der Lastübertragung participiren.

Aus unserer Untersuchung folgt demnach erstens, dass bei Mittelgelenkbrücken an der Stelle des Mittelgelenks keine Stetigkeitsunterbrechung der Windverbände anzunehmen ist, dass diese vielmehr durchlaufende Verbände bilden, so als wenn das Mittelgelenk nicht vorhanden wäre und zweitens, dass die Einführung des Mittelgelenkes nicht etwa, wie es hinsichtlich der senkrechten Lasten zutrifft, eine Herabminderung, sondern im Gegentheil eine Erhöhung der statischen Unbestimmtheit der Windverbände herbeiführt, die allerdings nicht von grossem Belange ist.

§ 75.

Schliesslich erübrigt noch die nähere Besprechung der so häufig vorkommenden Balkenbrücken mit gradem Unter- und gekrümmtem Obergurt. Als Flechtwerkbrücken lassen sich dieselben nicht ausführen, weil die Durchführung des oberen Windverbandes bis zum Auflager das Durchfahrtsprofil versperren würde. Andererseits empfiehlt es sich bei einigermassen grosser Höhe in der Trägermitte nicht, die Herabführung der Windkräfte auf den unteren Windbalken und die Versteifung des Obergurts gegen seitliche Ausweichungen ausschliesslich der Steifigkeit der in der Trägermitte verhältnissmässig sehr langen Wandglieder zu überlassen.

Grade bei der constructiven Durchbildung von Brücken dieser Art bemerkt man öfters die Unsicherheit des Constructeurs in der Behandlung des räumlichen Fachwerks. Soweit es das Durchfahrtsprofil erlaubt, findet man in der Regel eine kräftige Verstrebung zwischen den Obergurten; an den Enden dieses Mittelstücks fehlt aber jede Vorkehrung zur Herabführung der horizontalen Auflagerkräfte dieses oberen Windverbandes auf den unteren. Der obere Windverband verliert dadurch vollständig die Fähigkeit, seinem Hauptzwecke zu dienen. Es verhält sich damit genau so, wie mit den Parallelbalkenbrücken ohne Endquerfach-Diagonalen.

Die rationelle Anordnung von Brücken dieser Art besteht darin, die Mittelstücke der Obergurten in der üblichen Weise zu einem Windverbande zusammenzufassen, an den Enden des letzteren aber Windjoche, etwa nach Art der Abb. 35 oder 36 (S. 131 bezw. 132) anzubringen. Die Berechnung von Brücken in dieser Anordnung ergibt sich aus dem Vorhergehenden ohne Weiteres.

Drittes Capitel.

Systeme mit mehr als zwei Bindern.

§ 76.

Während bei Brückenbauten in der Mehrzahl der Fälle nur je zwei Hauptträger oder Binder als Bestandtheile in das räumliche Fachwerk eintreten, wird das letztere bei Dachconstructionen der üblichen Art aus einer grösseren Zahl parallel aufgestellter Binder mit Hülfe der zwischen denselben angeordneten Querverbindungen gebildet. In vereinzelten Fällen, namentlich bei breiten Strassenbrücken, kommt diese Anordnung auch im Brückenbau vor. Im Allgemeinen wird sie jedoch hier vermieden. So wird z. B. bei zweigleisigen Eisenbahnbrücken mit Vorliebe für jedes Geleis eine vom anderen völlig unabhängige Eisenconstruction hergestellt. Man scheut sich hier offenbar, Verbindungen zwischen dem einen Tragwandpaar und dem anderen herzustellen, über deren Wirksamkeit man sich kein klares Urtheil zu verschaffen vermag. Denn in anderer Hinsicht hat ja z. B. bei einer zweigeleisigen Brücke die Anordnung von drei Hauptträgern (ein doppelt starker Mittel- und zwei Seitenträger) manche ganz zweifellose Vorzüge.

Ich glaube, dass diese Bevorzugung der getrennten Ausbildung der Brückenträger für beide Geleise (soweit sie nicht durch Zeitunterschiede zwischen der Ausführung beider Geleise bedingt war) auf die bewusste Absicht, möglichst einfach gestaltete und klar zu übersehende Stabverbände herzustellen und damit zugleich auf das unbewusste Streben nach flechtwerkartigen Aufbauten zurückzuführen ist.

Auch bei Dachconstructionen macht sich ein solches Streben häufig bemerklich, indem die ganze Binderreihe in Paare zerlegt wird, deren Glieder unter sich durch Windkreuze mit einander verbunden sind, während zwischen den einzelnen Paaren solche Diagonalstäbe nicht geführt werden. Die aufeinanderfolgenden Felder zwischen je zwei Bindern sind daher abwechselnd mit Windkreuzen versehen und frei von solchen.

Bei weiterer Durchbildung dieses Verfahrens käme man schliesslich bei Dächern und überhaupt bei Ueberbrückungen, welche eine grosse Ausdehnung in der Querrichtung besitzen, auf eine Untertheilung des ganzen Traggerippes in einzelne selbständige, aus je zwei Bindern aufgebaute Flechtwerkträger, zwischen denen durch Pfetten oder überhaupt durch sekundäre Träger eine Ueberdeckung herbeigeführt würde. In diesem Falle wären für jeden einzelnen dieser selbständigen Flechtwerkträger die in den vorhergehenden Capiteln dargelegten Lehren anwendbar, ohne dass etwas Neues hinzu zu kommen hätte.

Eine solche Behandlung wäre indessen nur statthaft, wenn die Pfetten (oder die sekundären Träger überhaupt) zwischen je zwei solchen Flechtwerkträgern in der That auch so construirt wären, dass sie nur eine Ueberdeckung zwischen denselben herbeiführten und nicht auch zu einer Uebertragung von Kräften zwischen ihnen geeignet wären. Diese Zwischenpfetten müssten also (im Gegensatze zu den in die einzelnen Flechtwerkverbände als Glieder eintretenden Pfetten) am einen Ende verschieblich aufgelagert sein.

Durch diese letzte Massregel liesse sich allerdings ein Dachverband thatsächlich in eine Anzahl von Flechtwerkträgern auflösen, die völlig unabhängig neben einander beständen. Dieses Verfahren kann aber durchaus nicht empfohlen werden. Wenn man alle Pfetten in gewöhnlicher Weise mit den Binderknotenpunkten fest verbindet, bilden sie zugleich Stäbe, welche die Steifigkeit des räumlichen Gebildes herstellen helfen. Es wäre nur ein Verlust, wenn man durch eine verschiebliche Auflagerung des einen Pfettenendes auf diese Leistung der Pfetten absichtlich verzichten wollte. Viel richtiger ist es vielmehr, wenn überzählige Stäbe vorhanden sind, diejenigen zu beseitigen, welche wirklich entbehrlich sind, anstatt die thatsächlich nothwendigen Pfetten durch eine verschiebliche Auflagerung aus dem eigentlichen Stabverbande hinauszuweisen.

Ganz besonders kommt aber bei Dachconstructionen noch der Umstand in Betracht, dass die sogenannten Windverstrebungen in der Regel durch den Winddruck selbst überhaupt gar nicht beansprucht werden. Die Windkräfte werden vielmehr bei den gewöhnlichen Sattel- oder Bogendächern zwischen festen Stirnmauern ausschliesslich von den Bindern bezw. von den Stirnmauern aufgenommen. Nur wenn diese letzteren nicht an sich stabil genug sind, um dem auf sie kommenden Winddrucke zu widerstehen, findet durch den Winddruck auf den Giebel eine wirkliche Beanspruchung der Querverstrebungen durch den Winddruck statt. Aber auch diese erstreckt sich dann nur auf die unmittelbare Nachbarschaft des betreffenden Giebels. — Bei einer solchen Paartheilung in selbständige Flechtwerkträger, wie sie oben besprochen wurde, sind in der That die Windverbände der nicht unmittelbar an den Giebel angrenzenden Flechtwerkträger gegen eine Beanspruchung durch Winddruck völlig geschützt.

Die Aufgabe, dem Winddrucke zu widerstehen, welche bei Brücken von grösster Bedeutung für die Windverbände ist, fällt demnach bei Dachverbänden in erster Linie den Bindern zu, so dass für die Windverbände nur noch die andere übrig bleibt, die Knotenpunkte der Binder gegen ein zufälliges Heraustreten aus den betreffenden Constructionsebenen zu schützen. Aus den Betrachtungen im ersten Abschnitte folgt, dass es sich dabei namentlich um eine Stützung der Knotenpunkte der gedrückten Gurtung handelt. Die Kräfte, welche aufgewendet werden müssen, um diese Stützung herbeizuführen, sind übrigens sehr gering; sie können daher von Stäben, die wie die Pfetten ohnehin einen reichlichen Querschnitt und hinreichende Steifigkeit besitzen, mit übernommen werden, ohne dass sich dafür irgend eine Verstärkung nöthig machte.

Dieser Umstand weist ganz besonders darauf hin, die Pfetten als Glieder des räumlichen Fachwerks sämmtlich nutzbar zu machen und sie nicht, so wie es oben besprochen war, zum Theile dieser Aufgabe zu entziehen. Eine Untertheilung der Systeme mit vielen Bindern in kleinere Systeme mit je zwei Bindern kann daher, so weit es sich um Dachconstructionen handelt, nicht empfohlen werden. Hier muss vielmehr, falls Binder beibehalten werden sollen und nicht etwa ein einheitliches Tonnenflechtwerkdach an ihre Stelle gesetzt werden kann, eine besondere Erwägung über die einfachste und beste Art des ganzen Aufbaues Platz greifen.

§ 77.

Die einfachste Lösung der Aufgabe, eine ganze Binderreihe zu einem räumlich stabilen Systeme zu vereinigen, ergibt sich aus der folgenden Erwägung. Man nehme an, dass einige der Binder durch passende Querverbindungen bereits zu einem räumlichen stabilen Fachwerke vereinigt seien. Es handle sich darum, einen neuen Binder an dieses System anzuschliessen. Dieser Binder sei ein statisch bestimmter Balkenträger von n Knotenpunkten und daher $2n-3$ Stäben.

Die erforderliche Stabzahl zum Anschlusse von n Knotenpunkten an ein räumliches Fachwerk beträgt $3n$ weniger der Zahl der diesen Knotenpunkten vorgeschriebenen Auflagerbedingungen, hier also $3n-5$. Von diesen $3n-5$ Stäben sind bereits $2n-3$ Stäbe zwischen den anzuschliessenden Knotenpunkten als Bestandtheile des Binders vorhanden. Zur Herbeiführung eines stabilen Anschlusses müssen also zwischen dem Binder und dem bereits vorhandenen Fachwerke noch $3n-5-(2n-3)$ oder $n-2$ Stäbe eingefügt werden. So gross ist aber grade die Anzahl der Knotenpunkte des Binders nach Abzug der Auflagerknoten. Es genügt also im Allgemeinen, von jedem freien Knotenpunkte des anzuschliessenden Binders einen Stab nach dem bereits vorhandenen Fachwerke zu führen. Am nächsten liegt es, alle diese $n-2$ Stäbe in der Richtung der Dachachse, also senkrecht zur Binderebene oder in der Richtung der Pfetten zu führen.

Der Anschluss ist stabil, wenn er statisch bestimmt ist, d. h. wenn sich für *jede beliebige* Vertheilung der Lasten ein Gleichgewichtssystem der Stabspannungen angeben lässt. Das letztere trifft aber hier offenbar zu. Jede an irgend einem Knotenpunkte des angeschlossenen Binders angreifende, beliebig gerichtete Last lässt sich in zwei Componenten zerlegen, von denen eine in die Binderebene fällt und die andere zu ihr senkrecht steht. Die letztere wird von dem Anschlussstabe aufgenommen und auf das nach Voraussetzung schon vor dem Anschlusse stabile Grundfachwerk übertragen. Für die in die Binderebene fallenden Componenten kann man aber nach der Voraussetzung, dass der angeschlossene Binder, als ebener Träger betrachtet, stabil ist, stets ein Gleichgewichtssystem von Spannungen der Binderstäbe angeben. Damit ist bewiesen, dass durch die angegebenen $n-2$ Anschlussstäbe der Anschluss in stabiler Weise erfolgt.

Abb. 40 erläutert dies näher. Die beiden hintersten Binder sind durch Pfetten und Diagonalen zu einem räumlich stabilen System vereinigt; der dritte nach vorn hin liegende Binder ist an dieses nur durch Stäbe, welche parallel zur Längsrichtung des Daches laufen, stabil angeschlossen. Jeder fernere Binder lässt sich in genau derselben Weise weiter anschliessen. *Windkreuze sind daher für eine ganz beliebig lange Reihe von Bindern nur zwi-*

schen einem einzigen Paare benachbarter Binder erforderlich.

Die zur Dachrichtung parallel gehenden Anschlussstäbe, welche von den Knotenpunkten der oberen Gurtung ausgehen, sind in den Pfetten bereits als jederzeit vorhanden anzusehen, fehlen also niemals. Dagegen werden die Stäbe gleicher Art, welche von den Knotenpunkten der unteren Gurtung ausgehen, in der Regel nicht ausgeführt. (In der Zeichnung handelt es sich nur um einen Stab dieser Art.) Man könnte nun denken, dass die auch zwischen den weiterhin folgenden Bindern etwa angeordneten Windkreuze einen Ersatz dafür bildeten. Das ist aber nicht so. Man sieht vielmehr leicht ein, dass beim Fortlassen aller Querstäbe von den Knotenpunkten der unteren Gurtung das System gegen Querkräfte, die an diesen Knotenpunkten angreifen, nicht stabil ist, mag auch die Anordnung im Uebrigen sein, welche sie will.

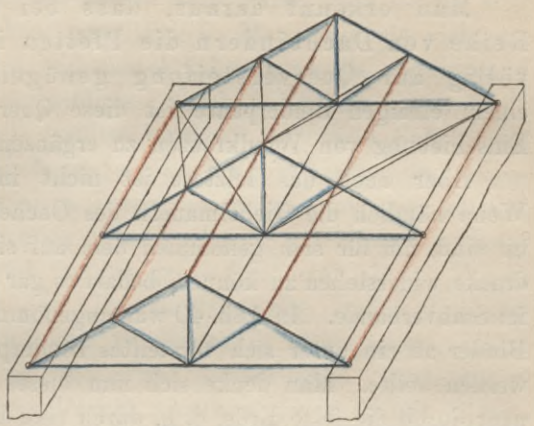


Abb. 40.

Trotzdem steht aber in der Regel der Beseitigung der zwischen den Knotenpunkten der Untergurten verlaufenden Querstäbe kein Bedenken entgegen, weil Kräfte der bezeichneten Art bei Dachbindern gar nicht oder nur in so geringem Betrage zu erwarten sind, dass die Steifigkeit der Knotenpunkte und Stäbe gegen dieselben eine vollständig hinreichende Stützung gewährt. Zugleich besteht für die Untergurtung, da sie aus gezogenen Stäben gebildet wird, nicht die Gefahr des Ausknickens, welche eine besondere Stützung erforderlich machen könnte. Man darf daher den Träger in dieser Beziehung mit unvollständiger Stützung ausführen. — Die Windkreuze sind aber dann (abgesehen von dem einen Binderpaare, zwischen dem sie angebracht werden müssen) vollständig zwecklos.

Man erkennt daraus, dass bei einer längeren Reihe von Dachbindern die Pfetten im Allgemeinen völlig zur Querversteifung genügen. Nur zwischen einem einzigen Binderpaare ist diese Querversteifung durch Einschiebung von Windkreuzen zu ergänzen.

Aber auch das letztere ist nicht immer erforderlich. Wenn nämlich die Giebelmauern des Daches hinreichend stabil sind, um für sich genommen dem auf sie fallenden Winddrucke widerstehen zu können, bedarf es gar keiner Windkreuze im Stabverbande. In Abb. 40 war angenommen, dass der dritte Binder an ein unter sich versteiftes Binderpaar angeschlossen werden sollte. Man denke sich nun dieses versteifte Binderpaar durch die feste Erde, d. h. durch eine hinreichend stabile Giebelmauer ersetzt. Der vorher dritte Binder wird jetzt der Anfangsbinder der Dachconstruction und die früheren Betrachtungen gelten für seinen Anschluss an die starre Giebelmauer ebenso wie vorher für den Anschluss an das starre Fachwerk. Dieser Anschluss wird also durch die Pfetten bereits, ohne Zufügung von Windkreuzen, stabil bewirkt.

Geht man so von der einen Giebelmauer aus und schliesst nach einander die folgenden Binder durch fest verbundene Pfetten an, so braucht der letzte Binder vor der anderen Giebelmauer mit dieser nicht mehr durch Stäbe verbunden zu werden. Die bereits vorhandenen Stäbe genügen bereits völlig zur Versteifung auch der anderen Giebelmauer, die ebenfalls ein Stück der festen Erde ausmacht mit dem vor ihr stehenden letzten Binder. Man kann daher die letzte Lage der Pfetten auf dieser Giebelmauer verschieblich auflagern, so dass diese nicht in den Stabverband mit aufgenommen werden, sondern nur eine die verbliebene Lücke überbrückende Sekundärconstruction bilden. Die ganze Construction bleibt dann statisch bestimmt und das Auftreten von Spannungen in Folge von Temperaturunterschieden wird vermieden, da den Pfettenreihen eine freie Ausdehnung nach der einen Seite hin gestattet ist.

In der Regel wird man allerdings vorziehen, die Giebelmauern nicht in solcher Stärke aufzuführen, dass sie für sich genommen hinreichend stabil sind. Man wird sie vielmehr schwächer aufführen und eine Anlehnung an die angrenzende Dachconstruction herbeiführen, durch welche sie gegen horizontale Bewegungen gestützt werden. In diesem Falle muss zwischen einem Binderpaare eine Diagonalverstrebung angeordnet werden, die so zu berechnen ist, dass sie dem auf die Giebelmauer kommenden Winddrucke zu widerstehen vermag. — Eigentlich genügt für das ganze Dach eine einzige Windverstrebung dieser Art; bei einigermassen langen Dächern wird man aber vielleicht vorziehen, in unmittelbarer Nähe jeder Giebelmauer je eine solche anzubringen. Irgendwo in der Mitte des ganzen Daches zwischen diesen beiden Windverbänden kann dann eine ganze Pfettenlage (zwischen zwei Bindern) entfernt werden, ohne dass dadurch die verbliebenen beiden Dachhälften labil würden. Man kann daher die Pfetten dieser Lage, so wie es oben wiederholt besprochen war, als Sekundärträger ausbilden, d. h. sie an einem Ende verschieblich (mit Hülfe länglicher Löcher für die Verbindungsbolzen) auflagern. Dadurch wird dann gleichfalls wieder dem Auftreten von Temperaturspannungen vorgebeugt.

Nach diesen Grundsätzen ist die Querverstrebung in dem von dem Verfasser entworfenen Dache für die Leipziger Markthalle durchgeführt worden*).

§ 78.

Bei den vorausgehenden Erörterungen sprach ich stets von Dächern, deren Binder als Balkenträger ausgebildet sind. Für Bogenträger gelangt man indessen genau zu denselben

*) Civil-Ing. 1891.

Schlüssen. Haben wir z. B. Bogenträger mit drei Gelenken, so entsprechen den n Knotenpunkten $2n - 4$ Stäbe. Um $n - 2$ freie Knotenpunkte anzuschliessen, bedarf es hier im Ganzen $3n - 6$ Stäbe, wovon nach Abzug der schon im Binder vorhandenen $2n - 4$ noch $n - 2$ für die Querverstrebung übrig bleiben, also grade so viele wie beim Balkenträger.

Bei Bogenträgern mit 2 Gelenken (z. B. den für Dächer öfters verwendeten Sichelträgern) gehören zu den n Knotenpunkten allerdings $2n - 3$ Stäbe und für die Querverstrebung bleiben scheinbar nur $n - 3$ Stäbe übrig. Man sieht indessen sofort, dass diese thatsächlich nicht zu einem stabilen Anschlusse genügen, da von jedem freien Knotenpunkte mindestens ein Stab ausgehen muss, der nicht in der Binderebene enthalten ist. Wir müssen daher auch hier $n - 2$ Stäbe zur Querverstrebung anbringen und erhalten dann einen überzähligen Stab. Der letztere ist aber nicht durch die Art des Anschlusses hinzugekommen, sondern war schon durch den Binder vorweg genommen.

Demnach wird auch bei Bogenbinderdächern eine beliebig lange Binderreihe an einen starren Körper ausschliesslich durch die Pfetten stabil angeschlossen.

Nachtrag.

Mit der Abfassung des vorstehenden Werkes habe ich am 21. Juli 1891 begonnen und sie am 22. September desselben Jahres beendet. Die Fertigstellung des Druckes wurde aus dem im Vorworte erwähnten Grunde verzögert. — Nach dem Abschlusse meiner Arbeit erschienen noch mehrere Veröffentlichungen über den Einsturz der Mönchensteiner Birsbrücke, von dem im Texte wiederholt die Rede ist. Ich habe es absichtlich vermieden, nachträglich noch eine Aenderung mit Rücksicht auf diese neueren Besprechungen jener Katastrophe in dem Texte vorzunehmen, zog es vielmehr vor, in einem Nachtrage auf sie zurückzukommen.

Es waren zwei Gründe, die mich hierzu bewogen. Zunächst ist nämlich meine Ueberzeugung, dass jener Zusammenbruch durch den von mir gerügten Mangel der Stabilität im Raume entweder wirklich hervorgebracht wurde oder doch hervorgebracht werden konnte, durch jene ferneren Veröffentlichungen nicht erschüttert worden. Ausserdem lag mir aber daran, meine Arbeit möglichst so zu veröffentlichen, wie sie mir unmittelbar aus der Feder floss, ohne irgend etwas daran zu feilen. Ich weiss wohl, dass man sich bei einem solchen Verfahren leicht einmal eine Blösse gibt. Aber ich weiss auch, dass es der sicherste Weg ist, sich möglichst verständlich auszudrücken. Nur hierdurch kann es (wenn überhaupt) gelingen, durch eine Schrift einen so unmittelbaren und nachhaltigen Eindruck hervorzurufen, wie durch einen mündlichen Vortrag. Mein Hauptzweck bei dieser Arbeit war aber, einen solchen Eindruck hervorzurufen und dadurch die weiteren Kreise der Fachgenossen, denen die Theorie des räumlichen Fachwerkes seither kaum dem Namen nach bekannt war, für diese zu gewinnen.

Zur Sache selbst erwähne ich, dass die Eisenconstruction der Birsbrücke, wie sich später herausstellte, neben dem von mir hervorgehobenen noch mehrere andere Mängel hatte, die schon für sich genommen ziemlich hinreichten, den Einsturz herbeizuführen. In den späteren Arbeiten, zu denen namentlich die beiden officiellen Gutachten gehören, ist auf diese das Hauptgewicht gelegt worden. Dass man sich nicht leicht für meine Erklärung des Vorganges entscheiden würde, wenn sich noch eine andere als möglich ergab, war zu erwarten. Denn die Betrachtung der Vorgänge im dreifach ausgedehnten Raume ist seither stets vernachlässigt worden und liegt daher dem Beurtheiler ferner, als die Beachtung der Verhältnisse in dem ebenen Balken.

Von einer Seite ist meine Erklärung unmittelbar angegriffen worden mit der Begründung, die Schwingungsdauer der endlich kleinen Beweglichkeit der Obergurtmasse wäre zu gross gewesen, um eine beträchtliche Verstärkung der Ausschläge während der kurzen Zeit, die zur Verfügung stand, zuzulassen. Ich habe dies ausführlich in einem Vortrage widerlegt, den ich am 6. December 1891 in der Hauptversammlung des Sächs. Ingenieur- u. Architekten-Vereins hielt und der etwa gleichzeitig mit diesem Buche im „Civil-Ingenieur“ im Drucke erscheinen wird.

Jene späteren Arbeiten, die ich im Uebrigen als durchaus verdienstvolle anerkenne, haben daher meine Stellung zu dieser Frage nur insofern verändern können, als sie darlegten, dass nicht ausschliesslich die Seitenschwankungen für den Einsturz verantwortlich zu machen sind. Es bleibt daher jetzt für mich die Frage offen, wie gross der Antheil der einzelnen möglichen Ursachen an dem Gesammtergebnisse war.

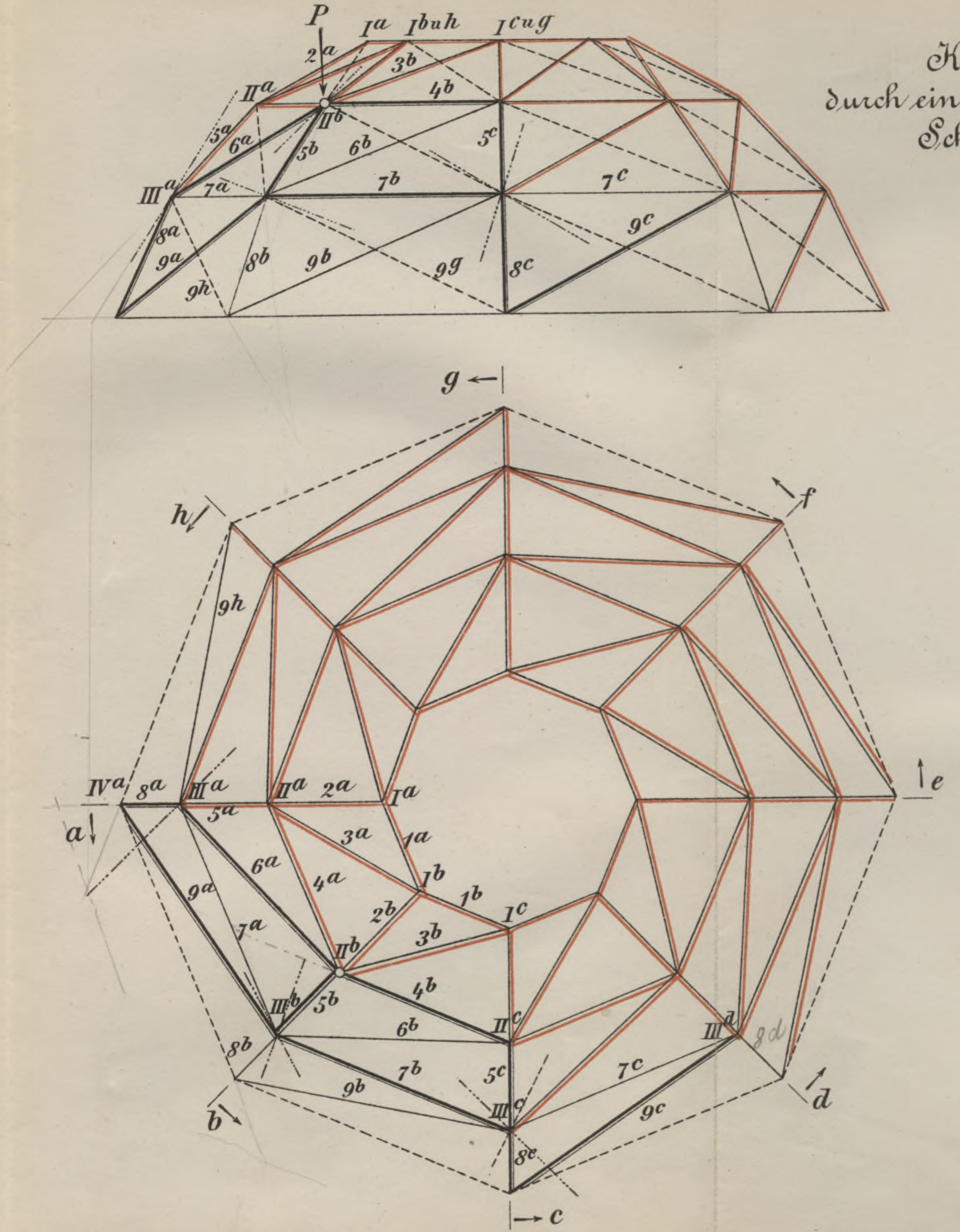
Mein Gegner in dieser Angelegenheit, Herr Professor Engesser in Carlsruhe, hat allerdings in seiner letzten Entgegnung in der „Deutschen Bauzeitung“, mit der diese Zeitschrift die Akten über den Einsturz schliessen zu sollen glaubte, die Sache so dargestellt, als wenn ich nur noch formale Einwendungen gegen seine Anschauung vorzubringen hätte. Es ist allerdings richtig, dass ich mich damit begnügte, eine formale Richtigstellung zur Verhütung einer missverständlichen Auslegung meiner früheren Bemerkungen zu geben, aber keineswegs weil ich mich in irgend einem Punkte für widerlegt hielt, sondern nur weil die genannte Zeitschrift sich einer Fortsetzung der Discussion schon vorher wenig geneigt erwiesen hatte und weil ich das Urtheil über die Streitfrage selbst daher den Lesern überlassen zu sollen glaubte. Meine anfängliche Behauptung, dass die Seitenschwankungen zweifellos in erster Linie den Einsturz herbeigeführt hätten, gründete sich auf die ausdrückliche Voraussetzung, dass andere erhebliche Mängel nicht vorgelegen hätten. Als es sich zeigte, dass diese Voraussetzung nicht erfüllt war, trat ich sofort selbst davon zurück, blieb aber dabei, dass die Seitenschwankungen zu den möglichen Ursachen des Einsturzes gehörten, dass sie ihn verschulden oder doch erheblich dazu beitragen konnten.

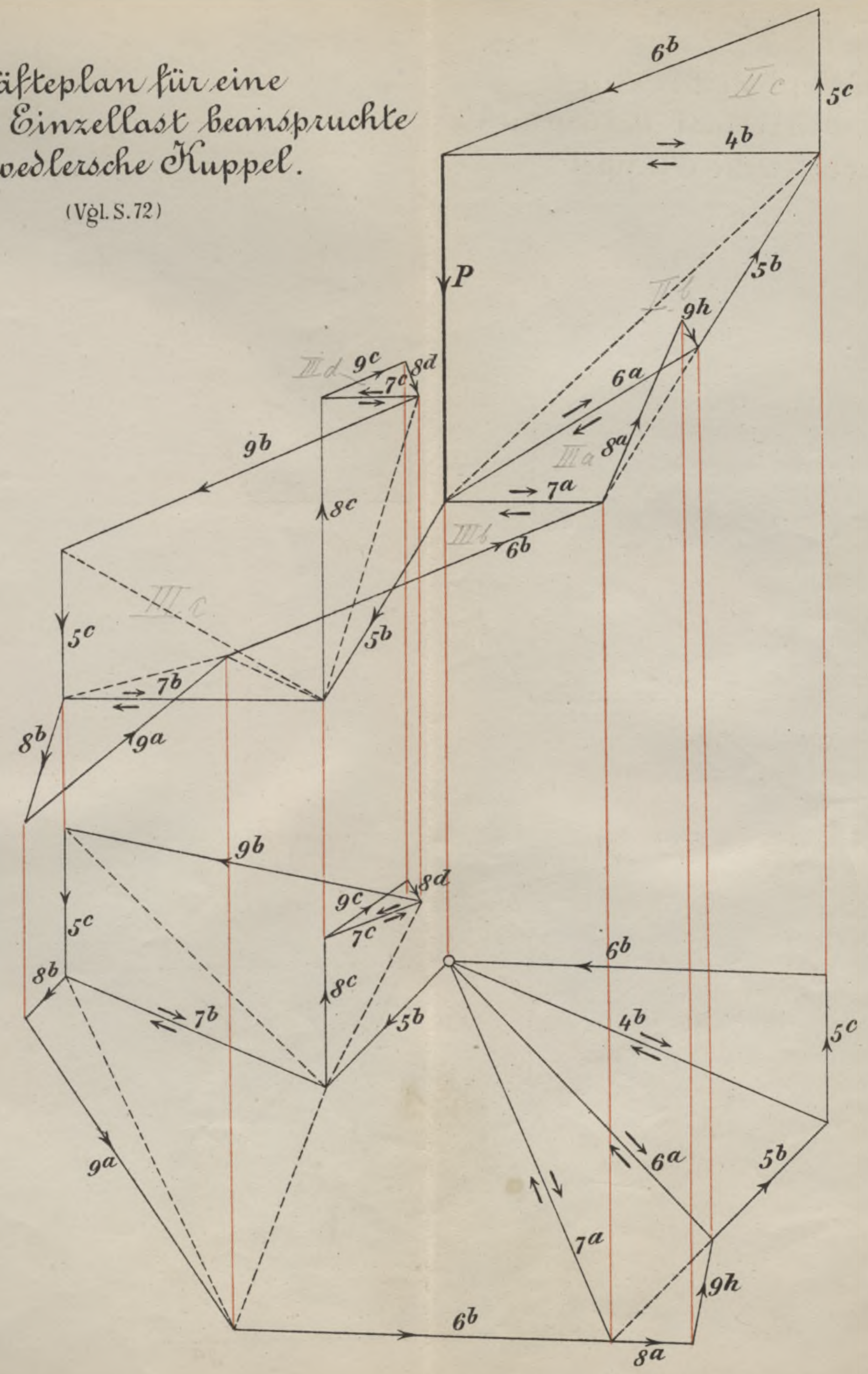
Dies ist nicht widerlegt worden und lässt sich auch nicht widerlegen. Denn erstens haben Seitenschwankungen, wie schon aus früheren Beobachtungen hervorgeht, bei der Birsbrücke stattgefunden und zweitens bringen Seitenschwankungen Zusatzspannungen in der Construction hervor, die die Gefahr erhöhen und damit den Ausschlag für den Eintritt des Ereignisses geben können. Ich wüsste nicht, gegen welchen dieser beiden Sätze auch nur der leiseste Einwand möglich wäre.

In letzter Linie ist es übrigens gleichgültig, wie gross der Antheil der einzelnen Schwächen an dem erfolgten Einsturze im concreten Falle war. Wichtig ist nur, dass man alle möglichen Ursachen erkennt und würdigt, um einer Wiederholung eines solchen Vorganges mit Sicherheit vorbeugen zu können. Dass die endlich kleine Labilität bei wenig steifen Wandgliedern zu diesen möglichen Einsturzursachen zu rechnen ist, glaube ich in dieser Schrift und in dem erwähnten Vortrage unwiderleglich nachgewiesen zu haben.

Kräfteplan für eine durch eine Einzellast beanspruchte Schwedlersche Kuppel.

(Vgl. S. 72)



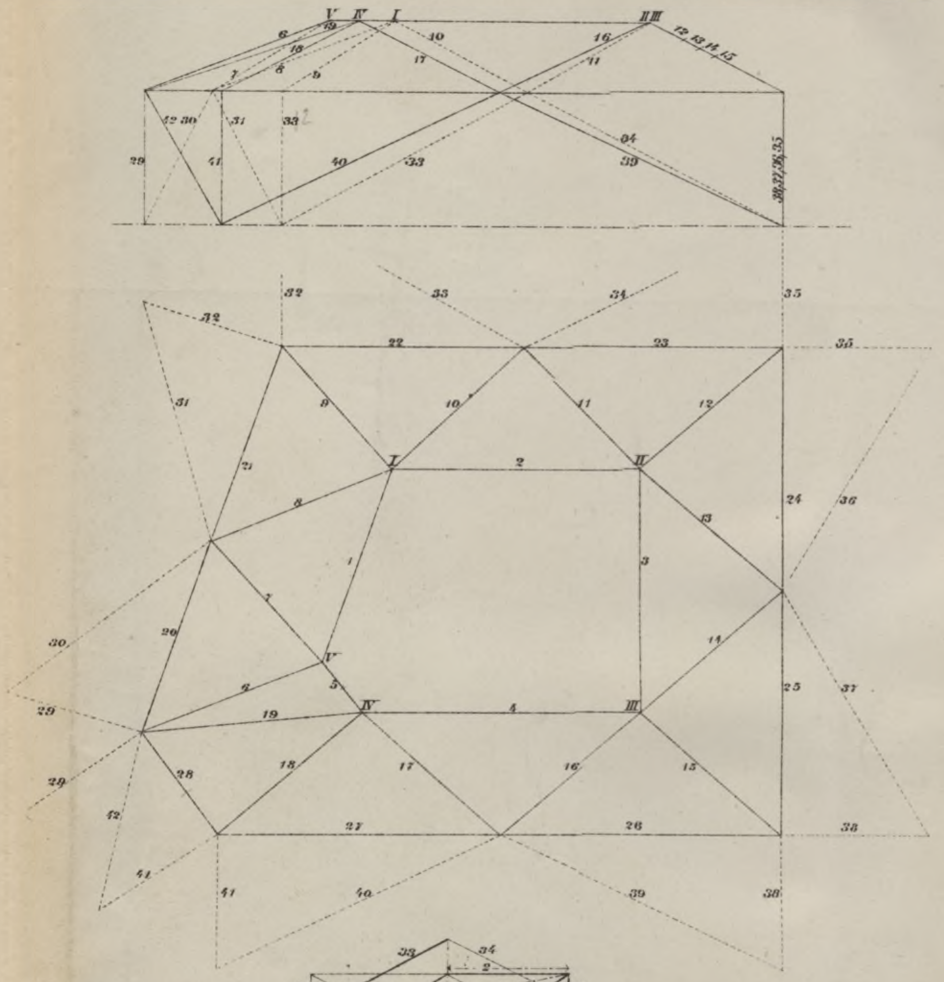


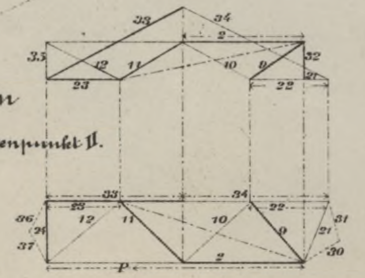
Eschebach & Schaefer, Leipzig.

T. 95.

Eisenconstruction der Markthalle zu Leipzig.

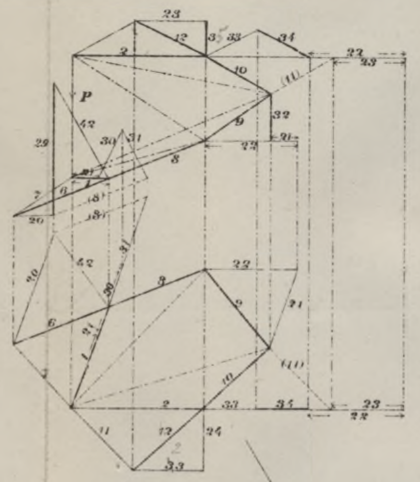
Maßstab der Längen 1:250.



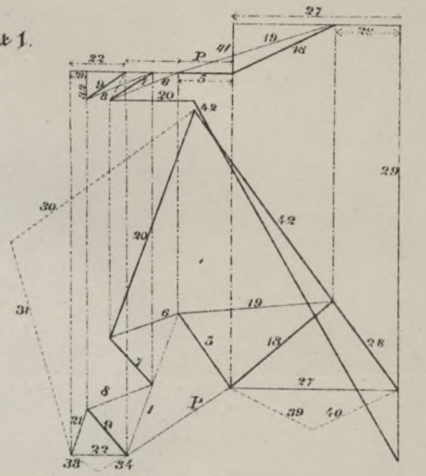


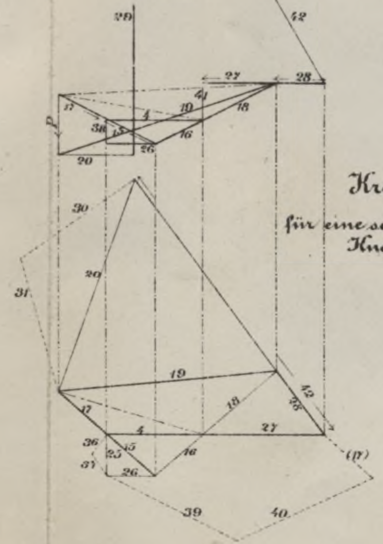
Kräfteplan für Ostwind am Knotenpunkt II.

Kräfteplan für eine senkrechte Last am Knotenpunkt I.



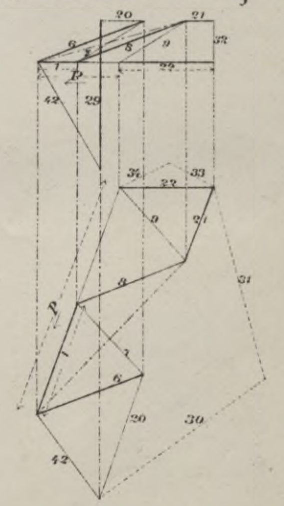
Kräfteplan für Südwestwind am Knotenpunkt V.





Kräfteplan für eine senkrechte Last am Knotenpunkt IV.

Kräfteplan für Nordwind am Knotenpunkt I.



Graphische Berechnung des Zeltdaches.