

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299616

DAS GRAPHISCHE RECHNEN

UND DIE

GRAPHISCHE STATIK.

VON

KARL VON OTT,

Director der II. deutschen Staats-Oberrealschule und a. o. Professor der k. k. deutschen
techn. Hochschule in Prag.

VIERTE GÄNZLICH UMGEARBEITETE AUFLAGE.

ZWEITER THEIL :

DIE GRAPHISCHE STATIK. I. ABTHEILUNG.

PRAG, 1884.

J. G. CALVE'sche K. K. HOF- UND UNIVERS.-BUCHHANDLUNG.
(OTTOMAR BEYER.)

GRUNDZÜGE

DER

GRAPHISCHEN STATIK.

VON

KARL VON OTT,

Director der II. deutschen Staats-Oberrealschule und a. o. Professor der k. k. deutschen
techn. Hochschule in Prag.

VIERTE ERWEITERTE AUFLAGE.

I. ABTHEILUNG:

die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, sowie die Statik der gerad-
achsigen einfachen und der Fachwerk-Träger enthaltend.

MIT 156 HOLZSCHNITTEN UND 3 LITHOGR. TAFELN.



PRAG, 1884.

J. G. CALVE'sche K. K. HOF-  UND UNIVERS.-BUCHHANDLUNG.

(OTTOMAR BEYER.)

Nachtrag. 2



117839

KD 624.04: 518.4

Druck von Heint. Mercy in Prag.

Akc. Nr. 23 / 52

Vorrede zur vierten Auflage.

Der Umstand, dass meine Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik binnen wenigen Jahren vier Auflagen erlebten und von namhaften Ingenieuren in sechs Sprachen übersetzt wurden, beweist am besten, dass dieselben immer mehr Freunde gewinnen, und dass die graphische Lösung technischer Aufgaben, wegen ihrer Übersichtlichkeit und Einfachheit, von den Praktikern immer mehr gewürdigt und cultiviert wird.

Um mehrseitig geäußerten Wünschen gerecht zu werden, habe ich mich entschlossen, alle wesentlichen, in meiner Baumechanik analytisch behandelten Aufgaben der Baustatik auch graphisch zu lösen, also ein möglichst vollständiges Elementarbuch der graphischen Statik herauszugeben. Damit aber den zahlreichen Nachfragen nach der neuen Auflage der graphischen Statik, deren dritte Auflage bereits seit zwei Jahren vergriffen ist, möglichst bald Rechnung getragen werde, habe ich dieselbe in zwei Abtheilungen geschieden. Die erste Abtheilung derselben, die ich hiemit veröffentliche, enthält die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte mittels des Kräfte- und Seilpolygons, sowie die Statik der geradachsigen einfachen Balken- und Fachwerkträger. Die zweite

Abtheilung wird binnen Jahresfrist folgen und die Elemente der Festigkeitslehre, die Statik der continuierlichen Träger, der Bogenfachwerke, die graphische Bestimmung des Erddruckes und die Stabilitäts-Ermittlung der Futter- und Stützmauern, sowie der Gewölbe, enthalten.

Meine vielseitige Inanspruchnahme im Lehramte und namentlich die bedeutende Mühewaltung, welche mir die Leitung einer vollständigen Realschule verursacht, mögen mich vor dem Vorwurfe der Saumseligkeit in der verspäteten Besorgung der neuen Auflage bewahren und wie bisher nachsichtige Kritiker finden lassen.

Prag, im September 1883.

Der Verfasser.

INHALT.

Einleitung.

	Seite
Begriff der graphischen Statik	1
Bestimmung und Wirkung der Kräfte	1
Resultante und Gleichgewicht gleichartiger Kräfte	3

I. Abschnitt.

Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene.

§ 1. Zusammensetzung von Kräften, welche in derselben Geraden wirken	4
§ 2. Zusammensetzung von zwei sich schneidenden Kräften	5
§ 3. Zusammensetzung eines Kräftebüschels	8
§ 4. Resultante zerstreuter, in einer Ebene wirkender Kräfte	11
§ 5. Beziehungen zwischen dem Seil- und Kräftepolygone	14
§ 6. Zusammenhang zwischen Seilpolygonen, welche verschiedenen Polen eines und desselben Kräftesystems entsprechen	17
§ 7. Das Seilpolygon als Mittelkraftlinie	19
§ 8. Die Resultante paralleler Kräfte	18
§ 9. Das Gegen- oder Kräftepaar	22

II. Abschnitt.

Zusammensetzung der Kräfte im Raume.

§ 10. Resultante von Kräften, die von einem Punkte nach verschiedenen Richtungen des Raumes wirken	23
§ 11. Resultante paralleler, in verschiedenen Ebenen liegender Kräfte	24

III. Abschnitt.

Zerlegung der Kräfte.

§ 12. Zerlegung einer Kraft in Componenten, die mit ihr an demselben Angriffspunkte und in derselben Ebene wirken	27
--	----

	Seite
§ 13. Zerlegung einer Kraft in zwei Componenten, die mit ihr in derselben Ebene liegen, aber verschiedene Angriffspunkte haben	28
§ 14. Zerlegung einer Kraft in drei der Lage und Richtung nach gegebene Componenten	29
§ 15. Zerlegung einer Kraft in Componenten, die mit ihr denselben Angriffspunkt haben, aber in verschiedenen Ebenen liegen	30
§ 16. Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei zu ihr parallele Componenten, die in verschiedenen Ebenen liegen	32

IV. Abschnitt.

Das Drehungs- oder statische Moment einer Kraft.

§ 17. Darstellung des Drehmomentes und Reducierung desselben auf eine bestimmte Basis	34
§ 18. Drehmoment und Gleichgewicht von Kräftepaaren	36
§ 19. Anwendung des Kräftepaares zur Zerlegung und Zusammensetzung gegebener Kräfte	36
§ 20. Bestimmung des Drehmomentes gegebener Kräfte in einer Ebene mittels des Kräfte- und Seilpolygons	37

V. Abschnitt.

Bestimmung des Schwerpunktes.

§ 21. Begriff des Schwerpunktes und allgemeine Bestimmungsweise desselben	39
§ 22. Schwerpunkt materieller Linien	40
§ 23. Schwerpunkt materieller homogener Flächen	43
§ 24. Schwerpunkt homogener Körper	55

VI. Abschnitt.

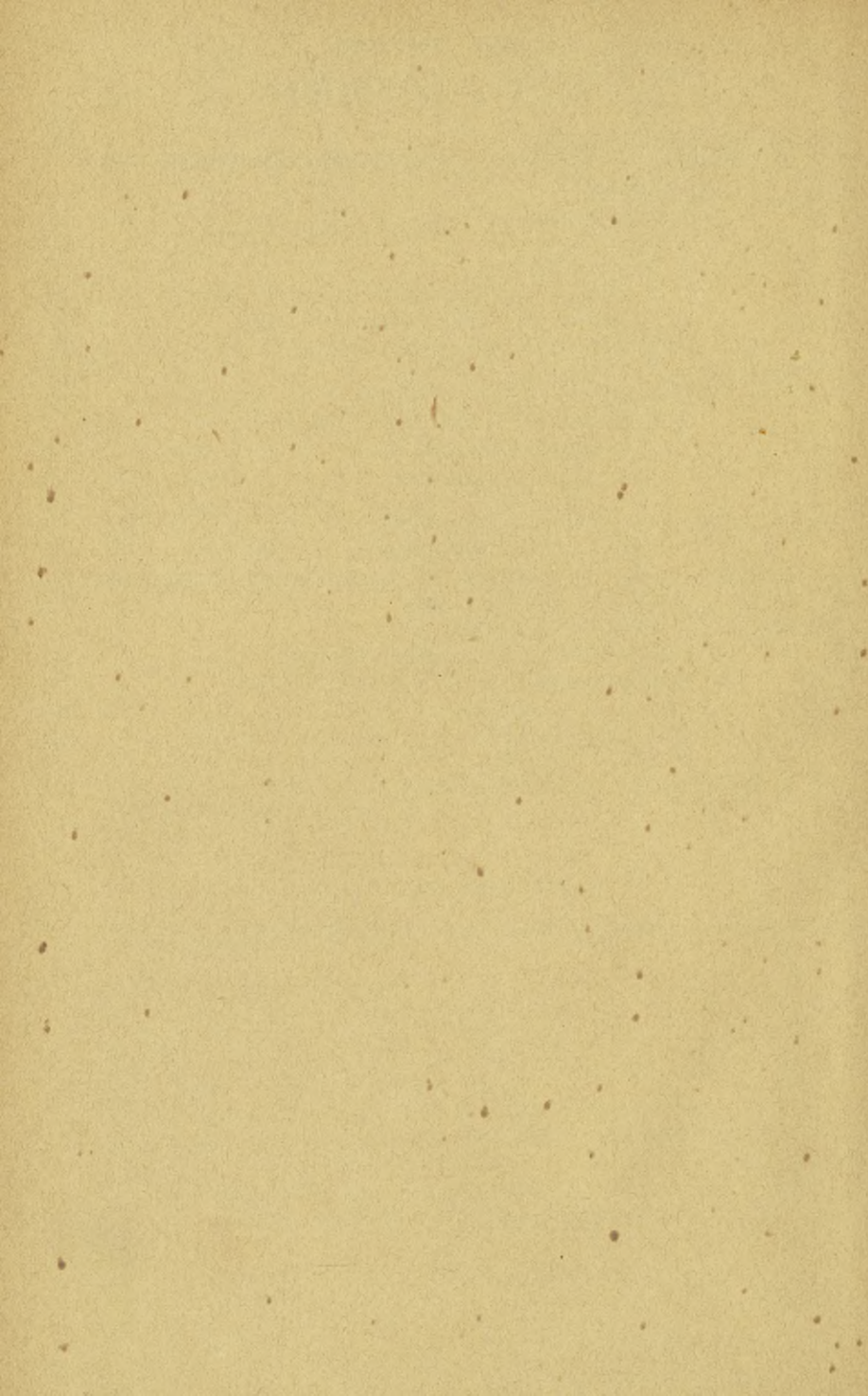
Wirkung paralleler Kräfte auf einfache Träger mit gerader Längsnachse.

§ 25. Allgemeine Bestimmungen	62
§ 26. Permanente directe Belastung der Träger	63
§ 27. Mobile directe Belastung der Träger	74
§ 28. Permanente indirecte Belastung der Träger	87
§ 29. Mobile indirecte Belastung der Träger	92
§ 30. Reduction von Einzellasten in eine gleichmässige Belastung	99
§ 31. Allgemeine Bemerkungen über Belastungen der Träger	102
I. Eigengewicht der Brücken	103
II. Mobile Brückenbelastung	104
III. Gewichte der Deckenconstructions	107

VII. Abschnitt.

Die Fachwerkbalken.

	Seite
§ 32. Allgemeine Bestimmungen	109
§ 33. Bestimmung der Spannungen in Fachwerkbalken mit constanter verticaler Belastung.	
1. Culmann's Methode	111
2. Ritter's Methode	114
3. Cremona's Methode	116
A) Kräftepläne für beiderseits frei aufliegende Träger	117
B) Kräftepläne für einseitig unterstützte Träger	130
C) Kräftepläne für Drehkrahne	134
§ 34. Statik der fachwerkartigen Dachstühle	138
I. Belastung der Dachconstructions	139
II. Kräftepläne für fachwerkartige Dachstühle :	
1. Der deutsche Dachstuhl	144
2. Der englische Dachstuhl	148
3. Der französische Dachstuhl	152
4. Der sichelförmige Dachstuhl	158
5. Fachwerkartige Holzdächer	163
§ 35. Fachwerkträger mit permanenter und mobiler Belastung (Brückenträger)	168
§ 36. Fachwerkträger für Eisenbahnbrücken	175
§ 37. Specielle Fachwerk-Brückenträger :	
I. Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen	182
II. Parabelträger	197
III. Schwedler'sche Träger	204
IV. Pauli'sche Träger	207
V. Halbparabelträger	209
§ 38. Anspruchnahme der Fachwerkpfiler	214



Elemente der graphischen Statik.

Einleitung.

1. Begriff der graphischen Statik. Die graphische oder constructive Statik entwickelt auf rein geometrischem oder constructivem Wege die Bedingungen, unter welchen ein System von Kräften im Gleichgewichte steht, oder mit anderen Worten: sie lehrt die Methoden, nach welchen die auf dem Gleichgewichte der Kräfte beruhenden Aufgaben der Baukunde mittels des Zirkels und Lineals zu lösen sind. Sie steht also zur analytischen Statik in derselben Beziehung, wie das graphische Rechnen zum arithmetischen. Es werden daher in der graphischen Statik die gegebenen äußeren Kräfte nicht durch Zahlen, sondern durch Strecken ausgedrückt und die mit denselben vorzunehmenden arithmetischen Operationen mit dem Zirkel und Lineal ausgeführt.

Selbstverständlich müssen alle bei einer und derselben Aufgabe in Betracht kommenden Kräfte nach demselben Maßstabe gemessen werden, so dass eine n mal größere Strecke auch eine n mal größere Kraft vorstellt. Die Einheit des Kräftemaßstabes bedeutet hierbei ein Kilogramm oder eine Tonne, jenachdem die Kräfte sämmtlich in Kilogramm oder Tonnen gegeben sind.*)

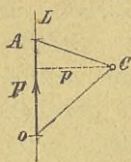
2. Bestimmung und Wirkung der Kräfte. Eine Kraft ist durch ihre Lage, Größe und ihren Sinn (Richtungspfeil) vollkommen bestimmt. Die Lage und Richtung ist durch die Gerade bestimmt, in welcher die Kraft wirkt, der Sinn durch einen Pfeil, den man auf die Richtungslinie setzt, und die Größe durch ein begrenztes Stück der Geraden, d. i. durch eine Strecke. Die durch Strecken ausgedrückten Kräfte werden gewöhnlich mit großen lateinischen

*) 1 Tonne = 1000 Kilogramm.

Buchstaben, oder auch bei einem zusammenhängenden Kräftezuge mit Ziffern bezeichnet. Im ersteren Falle setzt man den Buchstaben neben den Richtungspfeil der Kraft und hängt ihm, wenn mehrere Kräfte derselben Art vorkommen, die mit demselben Buchstaben bezeichnet sind, der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, . . . als Zeiger an; z. B. P_1, P_2, P_3 u. s. w.; im letzteren Falle, d. i. bei einem zusammenhängenden Kräftezuge wird der Anfangspunkt desselben mit A oder O und die Endpunkte der auf einander folgenden Kräfte mit 1, 2, 3, . . . beschrieben, so dass z. B. $\overline{A1}$ oder $\overline{O1}$ die erste, $\overline{12}$ die zweite und $\overline{23}$ die dritte Kraft des kontinuierlichen Kräftezuges oder Kräftepolygones bezeichnet.

Wir fassen die Kräfte als die Ursachen von Bewegungen auf und können somit sagen, dass die Wirkung einer Kraft im allgemeinen in einer Bewegung besteht. Diese Bewegung kann entweder eine fortschreitende oder eine drehende sein; so sucht z. B. die Kraft P, welche in der Geraden L, Fig. 1, wirkt und der

Fig. 1.



Größe nach durch die Strecke OA ausgedrückt ist, jeden Punkt ihrer Richtungslinie in eine fortschreitende Bewegung zu versetzen. Dieselbe Wirkung äußert sie aber auch gegen jeden mit ihrer Richtungslinie verbundenen Punkt. Das Maß dieser fortschreitenden Wirkung ist die Kraft selbst. Die fortschreitende Bewegung eines starren Systems ist dadurch charakterisiert, dass sich alle Punkte desselben in parallelen Bahnen mit gleicher Geschwindigkeit bewegen. Wirkt dagegen eine Kraft P auf ein System von miteinander fest verbundenen Punkten, das um einen festen, außerhalb der Krafrichtung gelegenen Punkt C (Achse) drehbar ist, so erfolgt eine Drehung des Punktsystems um den festen Drehpunkt C, und das Maß dieser drehenden Bewegung, d. i. das sogenannte Drehungs- oder statische Moment, ist das Product aus der Kraft P in die Senkrechte p, welche vom Drehpunkte C auf die Krafrichtung gefällt wird; wobei p der Hebelarm oder Halbmesser der Kraft P genannt wird. Graphisch ist die Größe dieses Momentes Pp durch die doppelte Dreiecksfläche COA bestimmt. Beim Drehmoment kommt auch noch der Drehungssinn in Betracht; er wird gewöhnlich, wenn die Drehung wie jene des Zeigers einer Uhr erfolgt, als der positive, somit bei entgegengesetzter Drehung als der negative bezeichnet. Sowohl die fortschreitende als auch die drehende Wirkung einer Kraft

bleibt dieselbe, wenn man den Angriffspunkt der Kraft auf der Richtungslinie derselben verlegt, aber die Größe dieser Kraft ungeändert lässt.

3. Resultante und Gleichgewicht mehrerer gleichartigen Kräfte. In Bezug auf einen Punkt, oder ein mit ihm verbundenes starres System von Punkten, äußern mehrere gleichzeitig thätige Kräfte eine gewisse fortschreitende und drehende Bewegung, und man nennt jene Kraft, welche allein wirkend, dieselbe fortschreitende und drehende Bewegung bezüglich des Punktes erzielt, die Resultante oder Mittelkraft dieser Kraft, während die Kräfte selbst die Componenten oder Seitenkräfte der Resultante heißen.

Das Aufsuchen der Resultante mehrerer gegebenen gleichartigen Kräfte nennt man das Zusammensetzen der Kräfte; während die umgekehrte Aufgabe, nämlich für eine Kraft mehrere Kräfte zu finden, die dieselbe fortschreitende und drehende Bewegung erzielen wie die Resultante, das Zerlegen der Kraft in Componenten heißt.

Sowie bereits bei der graphischen Addition der Strecken gezeigt wurde, dass die Summe von der Reihenfolge der zu addierenden Strecken unabhängig ist, so lässt sich auch hier zeigen, dass die Resultante mehrerer Kräfte von der Reihenfolge bei der Zusammensetzung dieser Kräfte unabhängig bleibt.

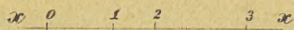
Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über das Zusammensetzen der Kräfte wollen wir im nächsten Abschnitte die graphische Zusammensetzung der Kräfte an speciellen Fällen, unter Beachtung des Grundsatzes erläutern, dass die Wirkung einer Kraft ungeändert bleibt, wenn man den Angriffspunkt derselben auf der Richtungslinie der Kraft verlegt.

Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene.

§. I. Zusammensetzen von Kräften, welche in derselben Geraden XX' wirken.

a) Die Kräfte haben gleichen Sinn. Man erhält in diesem Falle offenbar die Resultante, wenn man in der Geraden XX' Fig. 2, in welcher die Kräfte wirken, von einem beliebigen Anfangspunkte o aus die erste Kraft P_1 ihrer Größe und Richtung nach als 01 aufträgt, an ihren Endpunkt 1 ebenso die zweite Kraft P_2 als 12 anfügt und so

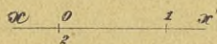
Fig. 2.



fortfährt, bis man alle Kräfte in demselben Sinne an einander gereiht hat. Hienach ist die Strecke 03 die Resultante der drei Kräfte P_1 , P_2 und P_3 .

b) Die Kräfte haben entgegengesetzten Sinn. Betrachten wir zunächst zwei gleiche Kräfte P_1 und P_2 , welche in derselben Geraden XX' , aber in entgegengesetztem Sinn, wirken, so halten sich dieselben (gleichgiltig wo ihre Angriffspunkte in dieser Geraden liegen) das Gleichgewicht; denn die Wirkung der Kraft $P_1 = 01$, Fig. 3, welche in einer fortschreitenden Bewegung der Geraden XX' in der Richtung von 0 nach 1 bestehen würde, wird durch die gleichzeitige aber gerade entgegengesetzte Wirkung der gleichen Kraft $P_2 = -P_1$ aufgehoben. Macht man

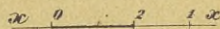
Fig. 3.



also $P_2 = -01 = 1\bar{0}$, so fällt 2 auf 0, d. h. es fällt der Endpunkt 2 des aus P_1 und P_2 gebildeten Kräftezuges mit dem Anfangspunkte 0 dieses Kräftezuges zusammen; es ist somit die Resultante aus P_1 und P_2 gleich Null.

Sind dagegen die beiden entgegengesetzten Kräfte P_1 und P_2 von ungleicher Größe, so ist ihre Resultante offenbar gleich dem Unterschiede der beiden Kräfte und hat den Sinn der größeren Kraft. Ist z. B. in Fig. 4 die positive Kraft $P_1 = 01$ größer als

Fig. 4.



die negative $P_2 = 1\bar{2}$, so gibt offenbar $0\bar{2} = P_1 - P_2$ eine positive Resultante.

Analog wie 2 Kräfte lassen sich nun auch 3 oder mehrere in einer Geraden wirkende Kräfte zusammen-

setzen, indem man zunächst zwei von diesen Kräften nach der vorigen Methode zu ihrer Resultante vereinigt, diese Resultante wieder mit einer dritten der gegebenen Kräfte zusammensetzt und so fortfährt, bis alle Kräfte zu einer einzigen Resultante zusammengesetzt sind. Wirken also in einer Geraden $x x'$ beliebig viele Kräfte ungleichen Sinnes, so wird man graphisch ihre Resultante erhalten, wenn man von einem beliebigen Punkte O dieser Geraden ausgehend die einzelnen Kräfte nach Sinn und Größe derart an einander reiht, dass sich jede folgende mit ihrem Anfangspunkte an den Endpunkt der vorangehenden anschließt. Die Strecke zwischen dem Anfangspunkte und dem Endpunkte des so gebildeten Kräftezuges bestimmt offenbar die Resultante dieser Kräfte nach Sinn und Größe, während ihre Lage bereits durch die Gerade $x x'$ gegeben ist. Hiernach bestimmt also die Strecke $\overline{O5}$, Fig. 5, die Resultante der 5 Kräfte $P_1 = \overline{01}$, $P_2 = \overline{12}$, $P_3 = \overline{23}$, $P_4 = \overline{34}$ und $P_5 = \overline{45}$. Von diesen 5 Kräften

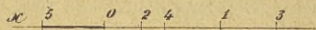


Fig. 5.

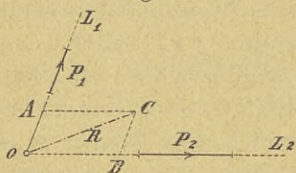
haben die Kräfte P_1 und P_3 die Richtung von x nach x' , die wir wieder als die positive bezeichnen wollen, dagegen die Kräfte P_2 , P_4 und P_5 die entgegengesetzte, somit die negative Richtung. Die Resultante $\overline{O5}$ dieser 5 Kräfte sucht also die Gerade $x x'$ in negativer Richtung mit der Intensität $\overline{O5}$ in ein efortschreitende Bewegung zu versetzen. Die gegebenen fünf Kräfte halten sich demnach nicht das Gleichgewicht. Wollte man aber das Gleichgewicht herstellen, so müsste noch eine sechste Kraft P_6 hinzugefügt werden, die mit der Resultante $\overline{O5}$ gleiche Größe und Lage aber entgegengesetzten Sinn hat, die also durch $\overline{50}$ bestimmt wäre. Es würde dann wieder der Endpunkt des aus allen 6 Kräften gebildeten Kräftezuges mit dem Anfangspunkte O desselben zusammenfallen und somit das graphische Kennzeichen des Gleichgewichtes ersichtlich werden.

§. 2. Zusammensetzung von zwei gleichartigen Kräften, die in derselben Ebene wirken, deren Richtungen aber zu einander geneigt sind.

Wirken in den Geraden L_1 und L_2 , Fig. 6, die Kräfte P_1 und P_2 in der Ebene der Zeichnungsfläche, so kann man ihren Schnittpunkt O als gemeinschaftlichen Angriffspunkt wählen und von diesem aus die Größe der beiden Kräfte auf ihren Richtungs-

linien auftragen, so dass $OA = P_1$ und $OB = P_2$ wird. Da nun zunächst die Resultante dieser zwei Kräfte bezüglich des Punktes

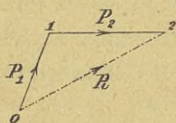
Fig. 6.



0 dasselbe Drehungsmoment haben muss wie ihre beiden Componenten; diese sich aber in 0 schneiden, somit bezüglich 0 die Momente Null geben, so muss auch das Moment der Resultante für den Punkt 0 gleich Null sein, d. h. sie muss auch durch 0

gehen. Da ferner die Strecken OA und OB die Maße für die fortschreitende Wirkung der beiden Kräfte P_1 und P_2 geben und diese Wirkungen sich nach Größe und Richtung addieren, so wird man also auch hier nach den Regeln der graphischen Addition die Resultante R der beiden Kräfte P_1 und P_2 erhalten, indem man dieselben nach Richtung und Größe aneinander reiht und den Anfangspunkt 0 mit dem Endpunkte C des so gebildeten Kräftezuges verbindet. Ist also $OA = P_1$ und $AC =$ und $\parallel P_2$, so ist OC die gesuchte Resultante nach Lage, Richtung und Größe. Offenbar stellt OC die Diagonale des Parallelogramms OACB vor, das aus den beiden gegebenen Kräften $OA = P_1$ und $OB = P_2$ construiert werden kann. Wir werden jedoch in der Folge die graphische Bestimmung der Resultante zweier Kräfte nur durch Construction des betreffenden Kräftedreieckes OAC vornehmen. Hat man demnach die Resultante R von zwei in einer Ebene wirkenden Kräften P_1 und P_2 zu bestimmen, so wird man von ihrem Schnittpunkte 0, Fig. 7, die beiden Kräfte nach Richtung

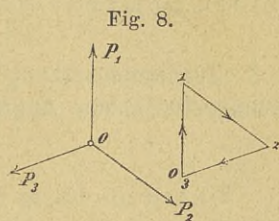
Fig. 7.



und Größe aneinander reihen, also $\overline{O1} = P_1$, $\overline{12} \parallel$ und $= P_2$ machen, und erhält durch die Strecke $\overline{O2}$ die Lage, Richtung und Größe der Resultanten R.

Der Punkt 0 würde sich, falls er beweglich wäre, unter dem Einflusse von R, oder der beiden Componenten P_1 und P_2 , in der Richtung $\overline{O2}$ in einer fortschreitenden Bewegung befinden; wollte man aber das Gleichgewicht herbeiführen, so müsste noch eine dritte Kraft P_3 hinzugefügt werden, welche die Wirkung der Resultante R (oder ihrer beiden Componenten) aufhebt, also mit R gleiche Größe aber die gerade entgegengesetzte Richtung hat, somit nach Lage, Richtung und Größe

durch die Strecke $2\bar{O}$ bestimmt wäre. — Drei in einem Punkte O , Fig. 8, angreifende und in derselben Ebene wirkende Kräfte P_1 , P_2 , P_3 halten sich somit das Gleichgewicht, wenn sie, nach Richtung und Größe aneinander gereiht, ein geschlossenes Dreieck bilden, dessen Umfang in demselben Sinn vom Richtungspfeile durchlaufen erscheint. Geht aber ein Pfeil, wie in Fig. 7, im entgegengesetzten Sinn, so ist die zugehörige Kraft die Resultante der beiden andern Kräfte.



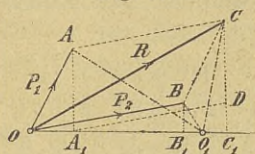
Es erübrigt uns noch nachzuweisen, dass für jeden Punkt O_1 in der Ebene zweier Kräfte P_1 und P_2 , Fig. 9, das Moment ihrer Resultante R gleich ist der Summe der Momente der beiden Componenten; oder dass $\triangle O_1 O C = \triangle O_1 O A + \triangle O_1 O B$. Da diese drei Dreiecke die gemeinschaftliche Basis OO_1 haben, so ist nur zu zeigen, dass bezüglich ihrer Höhen

$$CC_1 = AA_1 + BB_1.$$

Zieht man $A_1 D \parallel OB$, so ist $AA_1 = CD$ und, wie leicht einzusehen,

$$\triangle OBB_1 \cong \triangle OA_1D C_1,$$

somit auch $BB_1 = DC_1$; da nun $CC_1 = CD + DC_1$, so muss auch $CC_1 = AA_1 + BB_1$ w. z. b. w.

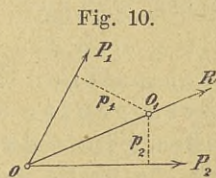


Liegt der Punkt O_1 zwischen den Componenten, so haben deren Momente entgegengesetzten Sinn und es wird daher

$$\triangle O_1 O C = \triangle O_1 O A - \triangle O_1 O B.$$

Nimmt man den Punkt O_1 , Fig. 10, auf R an, so ist das Moment von R in Bezug auf O_1 gleich Null; es muss also auch die Summe der Momente der beiden Componenten P_1 und P_2 gleich Null sein. Fällt man demnach von O_1 auf P_1 und P_2 die Senkrechten p_1 und p_2 , so muss mit Rücksicht auf den entgegengesetzten Drehungssinn von P_1 und P_2 , die Gleichung bestehen

$$P_1 p_1 - P_2 p_2 = 0 \text{ oder } P_1 p_1 = P_2 p_2.$$

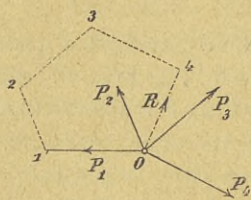


Es hat also jeder Punkt der Resultante die Eigenschaft, dass bezüglich seiner die Momente der beiden Componenten einander gleich sind.

§. 3. Zusammensetzung beliebig vieler in einer Ebene an einem gemeinschaftlichen Angriffspunkte wirkenden Kräfte, d. i. eines Kräftebüschels.

Wirken an einem und demselben Punkt O , Fig. 11, beliebig viele in der Zeichnungsebene liegende gleichartige Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ so kann man graphisch ihre Resultante

Fig. 11.



finden, indem man zunächst nach dem vorigen §. die Resultante $\overline{O2}$ aus den beiden Kräften P_1 und P_2 nach dem Kräftedreiecke bestimmt, sodann $\overline{O2}$ mit der Kraft P_3 zur Resultante $O3$ zusammensetzt und so fortfährt, bis man alle Einzelkräfte zusammengesetzt hat. In Fig. 11 stellt also $\overline{O4}$ die Resultante der 4 Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 nach Lage, Richtung und Größe vor.

Demnach findet man die Resultante von beliebig vielen auf einen Punkt in einer Ebene wirkenden Kräften, indem man die einzelnen Kräfte ihrer Richtung und Größe nach aneinander reiht. Die Verbindungslinie des Anfangspunktes mit dem Endpunkte des so entstandenen Kräftepolygones gibt die Richtung, Größe und den Sinn der gesuchten Resultante R .

Für den Gleichgewichtszustand müsste wieder $R = \text{Null}$ werden, also der Endpunkt des aus den Einzelkräften gebildeten Kräftezuges mit dem Anfangspunkte desselben zusammenfallen.

Es gilt also auch für den Gleichgewichtszustand eines Kräftebüschels der Satz: Die Kräfte eines Kräftebüschels halten sich das Gleichgewicht, wenn sie sich zu einem geschlossenen Polygone aneinander reihen lassen, dessen ganzer Umfang vom Richtungspfeile in demselben Sinne durchlaufen erscheint. Es halten sich demnach die Kräfte des fünfstrahligen Kräftebüschels, Fig. 12, das Gleichgewicht.

Ist dagegen in einem geschlossenen Kräftepolygon ein Richtungspfeil von entgegengesetztem Sinne als die andern, so stellt die betreffende Polygonecke die Richtung und Größe der Resultante aller andern Kräfte dieses Polygons vor.

Zu bemerken ist wieder, dass auch hier die Reihenfolge der Aneinanderreihung der einzelnen Kräfte gleichgültig ist; ferner dass das Gleichgewicht der Kräfte auch bestehen bleibt, wenn man den Richtungspfeil sämtlicher Kräfte umkehrt oder die Größe sämtlicher Kräfte, wie in Fig. 12, in gleichem Verhältnisse ändert.

Es wurde in §. 2 nachgewiesen, dass das Moment der Resultante zweier Kräfte gleich ist der algebraischen Summe der Momente dieser Kräfte bezüglich desselben Punktes der Kraftebene. Dieser Satz lässt sich auch auf das Moment der Resultante mehrerer in einer Ebene zerstreut liegender Kräfte, also auch auf die Resultante eines Kräftebüschels von beliebig vielen Kräften $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ausdehnen. Bezeichnet man nämlich die Abstände dieser Kräfte von dem gewählten Momenten- oder Drehpunkte O der Reihe nach mit $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, setzt zunächst zwei dieser Kräfte, z. B. P_1 und P_2 , zur Resultante R_1 zusammen und bezeichnet den Abstand der R_1 von O mit r_1 , so ist nach obigem Satze

$$R_1 r_1 = P_1 p_1 + P_2 p_2.$$

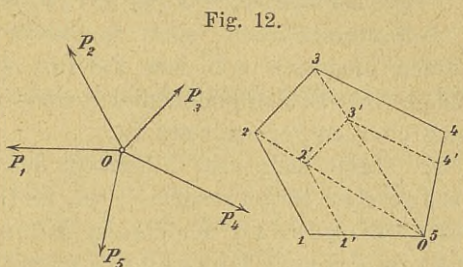
Setzt man nun R_1 mit P_3 zur Resultante R_2 zusammen und bezeichnet den Abstand der letzteren von O mit r_2 , so ist wieder $R_2 r_2 = R_1 r_1 + P_3 p_3$, oder wenn für $R_1 r_1$ der vorhergehende Wert eingesetzt wird,

$$R_2 r_2 = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3.$$

Analog ergibt sich durch Zusammensetzung von R_2 mit P_4 zur Resultante R_3 , wenn r_3 ihr Abstand von O ist, die Gleichung

$$R_3 r_3 = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + P_4 p_4,$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens für die Resultante R



aller der gegebenen Kräfte, wenn mit r ihr Abstand von O bezeichnet wird, schließlich

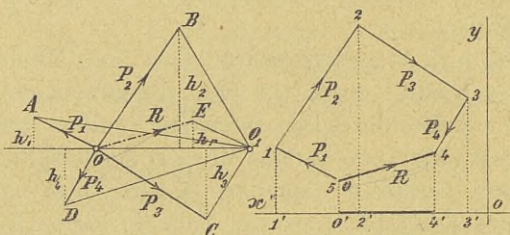
$$Rr = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \dots + P_n p_n.$$

Selbstverständlich sind in dieser Momentengleichung die einzelnen Momente mit dem Zeichen $+$ oder $-$ einzusetzen, je nachdem ihr Drehungssinn mit jenem des Uhrzeigers übereinstimmt oder entgegengesetzt ist.

Es ergibt sich also allgemein der Satz: Das Drehungsmoment der Resultante von beliebig vielen in einer Ebene wirkenden Kräften, bezüglich irgend eines Punktes dieser Ebene, ist gleich der algebraischen Summe der Drehungsmomente der einzelnen Kräfte.

Bezüglich des Momentensatzes muss nach Fig. 13, wenn $R = OE$ die Resultante der 4 Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 ist und alle

Fig. 13.



diese Kräfte auf den Drehpunkt O_1 bezogen werden, mit Rücksicht auf den Drehungssinn, die Gleichung bestehen:

$\triangle O O_1 E = \triangle O O_1 A + \triangle O O_1 B - \triangle O O_1 C - \triangle O O_1 D$,
 oder wenn man die Flächen dieser Dreiecke durch die halben Producte aus ihren Grundlinien und Höhen ausdrückt und die Gleichung alsdann mit dem gemeinschaftlichen Factor $\frac{O O_1}{2}$

dividirt,

$$h_r = h_1 + h_2 - h_3 - h_4,$$

analog ergibt sich ganz allgemein

$$h_r = \Sigma h.$$

Bezüglich des zweiten Satzes ist aus der Fig. 13 ersichtlich, dass $O' 4'$ die Resultante aus den zur OX -Achse parallelen Componenten von P_1, P_2, P_3, P_4 ist und dass deshalb

$$O' 4' = -O' 1' + 1' 2' + 2' 3' - 3' 4'.$$

Projiziert man also mehrere Kräfte, nebst ihrer Resultante, auf eine in der Ebene dieser Kräfte liegende Gerade, so ist die Projection der Resultante gleich der algebraischen Summe der Projectionen ihrer Componenten.

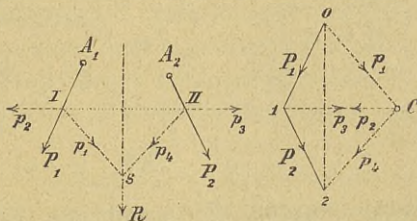
§. 4. Resultante zerstreuter, in einer Ebene wirkender Kräfte.

Wirken auf einen festen Körper beliebig viele in einer Ebene liegende gleichartige Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$, die sich nicht in einem Punkte schneiden, so kann man ihre Zusammensetzung dadurch bewerkstelligen, dass man zunächst 2 dieser Kräfte zu einer Resultante vereinigt, diese Resultante mit einer der folgenden Kräfte wieder zusammensetzt und so fortfährt, bis man alle die gegebenen Kräfte zu einer einzigen Resultante vereinigt hat. Diese Zusammensetzung der Kräfte ist aber nur dann ausführbar, wenn sich 2 der gegebenen Kräfte noch auf der Zeichnungsfläche schneiden und wenn deren Resultante wieder eine der folgenden Kräfte, mit der sie wieder zusammengesetzt werden soll, auf dem Zeichnungsblatte trifft. Um aber ein, von den Schnittpunkten der zusammensetzenden Kräfte unabhängiges Verfahren zu erhalten, denke man sich jede Kraft derart in je 2 Componenten zerlegt, dass sich dieselben mit den Componenten der beiden benachbarten Kräfte aufheben, mit diesen also gleiche Größe aber entgegengesetzte Richtung haben. Es bleiben dann offenbar nur die äußeren Componenten der ersten und letzten Kraft übrig, die nun die Resultante R des ganzen Kräftesystems vollkommen bestimmen. Es geht nämlich R durch den Schnittpunkt S dieser beiden äußeren Componenten und bildet die Schlusseite des aus diesen beiden Componenten nach Richtung und Größe gebildeten äquivalenten Kräftedreiecks.

Zur näheren Erläuterung wurde in Fig. 14 zunächst nur die Zusammensetzung von 2 Kräften P_1 und P_2 , ohne Benützung ihres Schnittpunktes, vorgenommen.

Es wurden nämlich 2 beliebige Punkte I und II auf den Richtungen der beiden Kräfte P_1 und P_2 als Angriffspunkte dieser Kräfte ange-

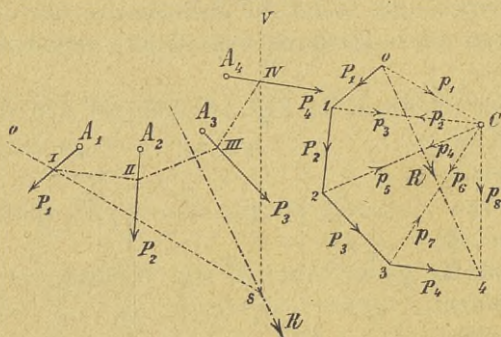
Fig. 14.



nommen und die Zerlegung dieser Kräfte in je 2 Componenten derart ausgeführt gedacht, dass die in die Verbindungslinie I II fallenden Componenten p_2 und p_3 gleiche Größe aber entgegengesetzte Richtung erhalten. Denkt man sich nun die beiden Kräfte P_1 und P_2 durch ihre Componenten ersetzt, so heben sich die Componenten p_2 und p_3 auf und es bleiben nur die beiden äußeren Componenten p_1 und p_4 thätig, deren Resultante R offenbar auch die Resultante von P_1 und P_2 ist und durch den Schnittpunkt S der beiden Componenten p_1 und p_4 geht. Um die besprochenen Zerlegungen der gegebenen Kräfte P_1 und P_2 am einfachsten zu bewerkstelligen, reiht man dieselben seitwärts von irgend einem Punkte O aus nach Richtung und Größe aneinander und führt von einem beliebigen Punkte C , der durch 1 zu I II geführten Parallelen, die Strahlen CO , $C1$ und $C2$ zu den Anfangs- und Endpunkten dieser Kräfte. Es stellen dann im Kräfte-dreiecke $CO1$ die Strecken \overline{OC} und $\overline{C1}$ die Componenten p_1 und p_2 von P_1 , und im Dreiecke $C12$ die Strecken $\overline{1C}$ und $\overline{C2}$ die Componenten p_3 und p_4 von P_2 der Größe und Richtung nach vor, wobei die Strecke $\overline{C1}$ den beiden Dreiecken gemeinschaftlich ist. Führt man nun die Parallelen IS und IIS zu den Componenten OC und $C2$ des Kräfteplanes, so gibt der Schnittpunkt S dieser Parallelen einen Punkt der Resultante, deren Richtung und Größe offenbar durch die Strecke \overline{OS} des Kräfteplanes bestimmt ist.

Analog ist in Fig. 15 die Resultante R mehrerer in der Ebene zerstreut liegender Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 mittels des

Fig. 15.



sogenannten Kräfte- und Seilpolygones konstruiert worden, wobei jede Kraft derart in zwei Componenten zerlegt wurde, dass je zwei aufeinander folgende Kräfte gleiche, aber entgegengesetzte gerichtete Componenten erhalten, die sich aufheben. Zu diesem

Zwecke wurden die gegebenen Kräfte seitwärts im Kräfteplan

nach Richtung und Größe aneinander gereiht, also das Kräftepolygon 01234 gebildet, und nun von einem beliebigen Punkt C der Kraftebene, dem sogenannten Kräftepole, zu den Eckpunkten des Kräftepolygons Strahlen gezogen, durch welche die Größe und Richtung der einzelnen Componenten derart bestimmt erscheint, dass der obigen Bedingung entsprechend, je zwei aufeinander folgende Kräfte gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Componenten erhielten. P_1 wurde nämlich in die beiden Componenten p_1 und p_2 , P_2 in p_3 und p_4 , P_3 in p_5 und p_6 und P_4 in p_7 und p_8 derart zerlegt, dass $p_2 = -p_3$, $p_4 = -p_5$ und $p_6 = -p_7$ wurde. Hierauf erfolgte von einem beliebigen Punkte I der ersten Kraft P_1 des gegebenen Kräftesystems die besprochene Zerlegung der aufeinander folgenden Kräfte parallel zu den zugehörigen Componenten oder Polstrahlen des seitwärts liegenden Kräfteplanes, d. i. die Construction des gebrochenen Linienzuges, respective Seilpolygone 0I II III IV V, in welchen 0I || 0C, II || C1, III || 2C, III IV || C 3 und IV V || C4. Denkt man sich nun die in den Eck- oder Knotenpunkten I, II, III und IV des Seilpolygons angreifenden Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 durch ihre Componenten ersetzt, so heben sich sämtliche innere Componenten oder Seilspannungen auf und es bleiben somit nur die beiden äußersten Seilspannungen 0I und IV V übrig, deren Schnittpunkt S einen Punkt der Resultierenden R des ganzen Kräftesystemes gibt, während die Richtung und Größe von R durch die Schlusslinie 04 des Kräftepolygons bestimmt wird.

Um das Gleichgewicht der in Fig. 15 wirkenden vier Kräfte herzustellen, müsste noch eine fünfte Kraft hinzugefügt werden, welche der Resultante R dieser vier Kräfte gleich aber entgegengesetzt gerichtet wäre, die also der Richtung und Größe nach durch 40 und der Lage nach durch R, oder auch schon durch den Punkt S, bestimmt sein würde. Das aus diesen fünf, im Gleichgewichte stehenden Kräften, gebildete Kräftepolygon müsste sich daher schließen, d. h. der Endpunkt 5 müsste auf 0 zu liegen kommen. Es würde sich dann auch das zugehörige Seilpolygon schließen, denn da P_5 mit R gleiche Lage hätte, so wäre im Seilpolygon IV S || C4 und SI || C0; das zugehörige Seilpolygon wäre alsdann III III IV SI.

Anmerkung. Da die Wirkung einer Kraft ungeändert bleibt, wenn nur deren Angriffspunkt auf der Richtungslinie der

Kraft verlegt wird, dagegen ihr Sinn und ihre Größe ungeändert bleibt, so kann man sich jeden festen Körper, auf welchen mehrere Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 wirken, wie in Fig. 15, durch einen gebrochenen Linienzug O I II III IV V ersetzt denken, welcher von einer Kraft zur anderen gehend ein Polygon bildet, dessen Seiten im Stande sein müssen, den in ihnen durch die äußeren Kräfte hervorgerufenen Zug- oder Druckspannungen zu widerstehen. Jedes derartige einen festen Körper stellvertretende Polygon wird Seilpolygon genannt. Man sollte es jedoch nur dann Seilpolygon nennen, wenn die Seiten desselben Zugspannungen erfahren, dagegen ihm den Namen Druckpolygon (Drucklinie) geben, wenn die Seiten desselben Druckspannungen erleiden. Die Eckpunkte dieses Seil- oder Druckpolygones heißen Knoten und die in den Polygonseiten durch die äußeren Kräfte hervorgerufenen Kräfte werden die inneren Kräfte oder Spannungen genannt.

§. 5. Beziehungen zwischen dem Seil- und Kräftepolygone.

Aus der Betrachtung und Vergleichung des Kräfte- und Seilpolygones, die einem und demselben Kräftesystem zugehören, lassen sich die folgenden wechselseitigen Beziehungen zwischen dem Kräfte- und Seilpolygone aufstellen:

1. Die Seiten des Seilpolygones laufen parallel mit den Polstrahlen des Kräftepolygones.

2. Die Seiten des Kräftepolygones sind den in den Knoten des Seilpolygones angreifenden äußeren Kräften parallel.

3. Die Größe der in irgend einer Seite des Seilpolygones auftretenden Seilspannung wird gemessen durch die Größe des zu ihr parallelen Polstrahles.

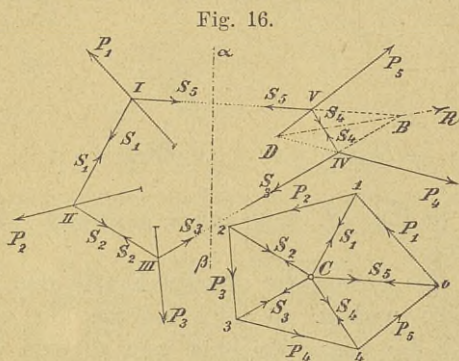
4. Da die Lage des in der Kraftebene liegenden Kräftepoles willkürlich ist, so gibt es für jedes Kräftesystem unendlich viele Seilpolygone, die jedoch, solange das Kräftesystem unverändert bleibt, stets zu demselben Resultate führen.

5. Da die Zerlegung einer Kraft des gegebenen Kräftesystems von jedem auf der betreffenden Krafrichtung gelegenen Punkt vorgenommen werden kann, so gibt es auch für einen und denselben Kräfteplan unendlich viele Seilpolygone, die aber bei unveränderlicher Lage des Kräftepoles zueinander parallel laufen.

6. Die vom Anfangspunkte zum Endpunkte des Kräftepolygones gezogene Schlusslinie bestimmt die Größe und Richtung der Resultante sämtlicher Kräfte und der Schnittpunkt s der äußersten Seiten des Seilpolygones bestimmt die Lage dieser Resultante.

7. Verlängert man irgend zwei Seiten des Seilpolygones, so geht durch den Schnittpunkt derselben die Resultante aller der auf die zwischenliegenden Knotenpunkte wirkenden Kräfte und es ist die Richtung und Größe dieser Resultante durch die Schlusslinie des aus diesen Kräften gebildeten Kräftepolygones bestimmt. Würde man z. B. in Fig. 15 die Polygonseiten III und III IV bis zu ihrem Schnittpunkte verlängern, so wäre dieser Schnittpunkt ein Punkt der Resultante aus P_2 und P_3 und ihre Größe und Richtung wäre durch die Strecke $\overline{13}$ bestimmt.

8. Wenn die am Seilpolygon, Fig. 16, wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind, so schließt sich sowohl das aus innen gebildete Kräftepolygon, als auch jedes zugehörige Seilpolygon. Es steht dann jede in einem Knotenpunkte angreifende äußere Kraft im Gleichgewichte mit den beiden von diesem Knotenpunkte ausgehenden Seilspannungen und es bilden daher die jedem Knotenpunkte zukommenden 3 Kräfte im Kräftepolygon ein geschlossenes Dreieck, dessen Umfang vom Richtungspfeil in demselben Sinne durchlaufen erscheint.



9. Denkt man sich in einem Seilpolygon, Fig. 16, zwei beliebige Polygonseiten, z. B. jene I V und III IV, durchschnitten, so müssen offenbar, damit die Gleichgewichtszustände ungestört bleiben, an den Schnittstellen beiderseits Kräfte angebracht werden, welche den in den durchschnittenen Polygonseiten herrschenden Spannungen S_5 und S_3 der Richtung und Größe nach gleich sind. Demnach ist sofort ersichtlich, dass die Resultante R der nun zu äußeren Kräften gewordenen Seilspannungen S_5 und S_3 den links oder rechts von der Schnittfläche $\alpha\beta$ am Seilpolygone wirkenden äußeren

Kräften das Gleichgewicht hält. Die Richtung und Größe von R ist durch die Diagonale $\overline{30}$ des Kräftepolygons bestimmt, denn es muss für den Gleichgewichtszustand die Resultante R mit den Kräften P_1, P_2, P_3 oder mit jenen P_4 und P_5 ein geschlossenes Polygon bilden. Übrigens gibt auch der Durchschnittspunkt B der Verlängerung der beiden durchschnittenen Polygonseiten einen Punkt von R .

Um zu erkennen, ob Zug oder Druck in einer Seite des Seilpolygones herrscht, zerlegt man die in beiden Endpunkten derselben thätigen äußeren Kräfte in Richtungen, die mit dieser und der sich unmittelbar anschließenden Polygonseite zusammenfallen. Sind dann die Richtungspfeile der beiden mit der fraglichen Polygonseite zusammenfallenden Componenten der äußeren Kraft von den Endpunkten weggewendet, also wie in Fig. 17 nach außen gerichtet, so herrscht offenbar in der betreffenden Polygonseite Zug; sind dagegen die Richtungspfeile gegen die Endpunkte, also

Fig. 17.

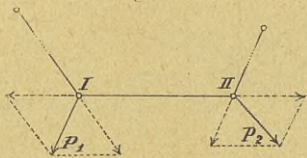
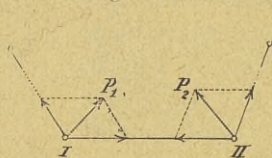


Fig. 18.



wie in Fig. 18, nach innen gerichtet, so erleidet die Polygonseite Druck.

Da ferner die inneren Kräfte den äußeren gerade entgegengesetzt wirken, so folgt hieraus zur Charakteristik der inneren Kraft der Satz: Zeichnet man zu dem von einem Knotenpunkte I einer Polygonseite auslaufenden Richtungspfeil der inneren Kraft am anderen Knotenpunkte II dieser Polygonseite einen Pfeil in entgegengesetzter Richtung, so bedeutet für die inneren Kräfte die

Fig. 19.

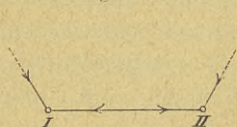
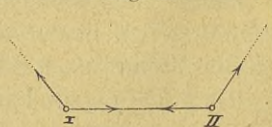


Fig. 20.

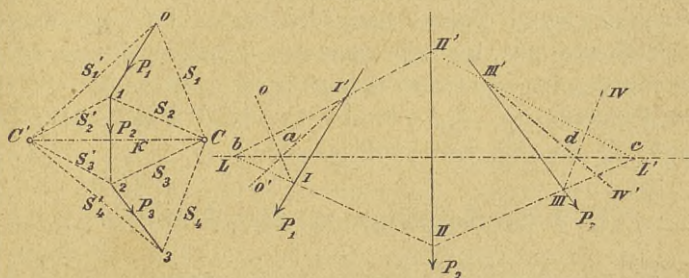


Zusammenstellung der Pfeile nach Fig. 19 Zugspannung, dagegen nach Fig. 20 Druckspannung.

§. 6. Zusammenhang zwischen den Seilpolygonen, welche verschiedenen Polen eines und desselben Kräftesystems entsprechen.

Wir haben bei der Zusammensetzung der in einer Ebene liegenden Kräfte gesehen, dass das Resultat derselben von der Lage des Kräftepoles ganz unabhängig ist und dass sich mit der Änderung des Kräftepoles nur die Lage des Seilpolygones ändert. Wir wollen nun untersuchen, in welchem Zusammenhange die beiden Seilpolygone stehen, welche demselben Kräftepolygone, aber 2 verschiedenen Kräftepolen, entsprechen. Zu diesem Behufe wurden in Fig. 21 die den beiden Polen C und C' des Kräftepolygones 0123

Fig. 21.



entsprechenden Seilpolygone 0 I II III IV und 0' I' II' III' IV' konstruiert, hierauf die gleichvielten oder gleichnamigen Seiten dieser Polygone bis zu ihren Schnittpunkten verlängert und gefunden, dass diese Schnittpunkte a, b, c, d auf einer und derselben Geraden LL' liegen, welche parallel ist zur Verbindungslinie der beiden Pole CC' des Kräftepolygones. Die Erklärung dieser Erscheinung ergibt sich einfach daraus, dass die als Kraft K gedachte Verbindungslinie CC' der beiden Pole mit je zwei gleichnamigen Spannungen S_1 und S'_1 , S_2 und S'_2 , S_3 und S'_3 des Seilpolygones ein Kräftedreieck bildet und daher wegen des Parallelseins der Polstrahlen mit den zugeordneten Seiten des Seilpolygones auch K parallel sein muss zu a b, b c und c d, d. h. dass die Schnittpunkte a, b, c und d der gleichnamigen Seiten der beiden Seilpolygone thatsächlich auf einer zu CC' Parallelen LL' liegen müssen. Diese Eigenschaft zweier demselben Kräftepolygone entsprechenden Seilpolygone kann unter anderen auch dazu benützt werden, um aus einem für ein gegebenes Kräfte-

system construierten Seilpolygone ein anderes Seilpolygon zu finden, welches einem anderen Kräftepole entspricht. Hat man z. B. das dem Pole C entsprechende Seilpolygon $O I II III IV$ construiert und will man aus demselben das dem Pole C' entsprechende erhalten, so ziehe man $O' I' \parallel CO$ und durch den Schnittpunkt a von OI mit $O' I'$ die Gerade $LL' \parallel CC'$; hierauf verlängere man II bis zum Schnittpunkte b mit LL' , verbinde b mit I' und verlängere die Verbindungslinie bis P_2 , wodurch man die nächste Polygoneite $I' II'$ erhält. Nun verlängere man III bis zum Schnittpunkte c mit LL' , verbinde c mit II' und erhält schon in dieser Verbindungslinie die nächste Polygoneite $II' III'$. Analog bestimme man die letzte Polygoneite $III' IV'$.

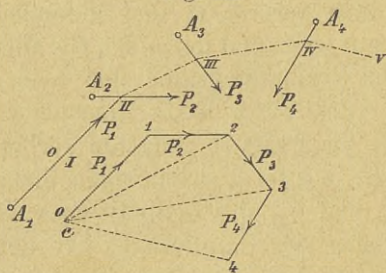
Anmerkung. Nimmt man die beiden Pole auf entgegengesetzten Seiten des Kräftepolygons, so haben die zugehörigen Seilpolygone entgegengesetzte Spannung, d. h. das eine ($O I II III IV$) enthält Zugspannung, dagegen das andere ($O' I' II' III' IV'$) Druckspannung, ist also ein Druckpolygon.

§. 7. Das Seilpolygon als Mittelkraftlinie.

Lässt man den Pol C des Kräftepolygons Fig. 22, mit dem Anfangspunkte O der ersten Kraft P_1 des Kräftepolygons $O 1 2 3 4$

eines gegebenen Kräftesystems $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$ zusammenfallen, so werden die von ihm aus zu den Endpunkten des Kräftezuges geführten Polstrahlen Diagonalen des Kräftepolygons und stellen folglich die Richtung und Größe der Resultante jener Kräfte vor, welche vom Anfangspunkte aus bis zum End-

Fig. 22.



punkte des betreffenden Polstrahles aneinander gereiht wurden, während die Lage dieser Resultante durch jene Seite des Seilpolygons bestimmt ist, welche zum entsprechenden Polstrahl parallel läuft. Da der Pol C mit dem Anfangspunkte O des Kräftepolygons zusammenfällt, so reduciert sich der erste Polstrahl CO auf einen Punkt, und weil die erste Seite $O I$ des Seilpolygons

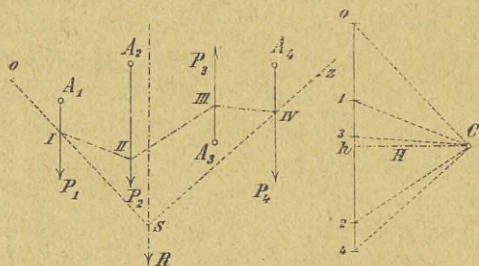
zu dem ersten Polstrahl CO parallel ist, so reduciert sich auch OI auf einen Punkt, da jedoch der Endpunkt dieser Seite auf P_1 liegen muss, so ist die erste Seilpolygonseite ein beliebiger Punkt auf P_1 . Die zweite Polygonseite II ist parallel zu $C1$ und fällt daher mit P_1 zusammen. Der Punkt II des Seilpolygons liegt somit im Schnittpunkte der Kraft P_1 mit P_2 . Durch II geht die dritte Seilpolygonseite $IIIII$ parallel zum Strahl $C2$, respective parallel zur Diagonale $\overline{O2}$, welche die Richtung und Größe der Resultante der beiden ersten Kräfte P_1 und P_2 gibt. Weil überdies die Resultierende von P_1 und P_2 auch durch den Schnittpunkt II dieser beiden Kräfte gehen muss, so fällt die Resultante der beiden ersten Kräfte mit der Polygonseite $IIIII$ zusammen. Es ist ferner $IIIIV$ parallel $C3$, respective parallel $O3$, und da mit $IIIII$ die Resultante aus P_1 und P_2 zusammenfällt, so gibt offenbar III einen Punkt der Resultante der drei ersten Kräfte, und da überdies $IIIIV \parallel O3$ und $O3$ die Größe und Richtung der Resultante der 3 ersten Kräfte bestimmt, so fällt die Polygonseite $IIIIV$ mit der Resultante der 3 ersten Kräfte zusammen. Analog lässt sich zeigen, dass die Resultante der vier ersten Kräfte mit der Seilpolygonseite IVV zusammenfällt. Fällt also der Kräftepol C mit dem Anfangspunkte O des Kräftepolygons zusammen, so fällt mit einer jeden Seite des Seilpolygons die Resultante oder Mittelkraft aus allen dieser Seite vorangehenden Kräften der Lage nach zusammen; man nennt daher ein solches Seilpolygon ganz bezeichnend die Mittelkraftlinie.

§. 8. Die Resultante paralleler Kräfte.

Die Zusammensetzung paralleler Kräfte lässt sich mit Benutzung des Kräfte- und Seilpolygons nach denselben Regeln, wie jene für nicht parallele Kräfte, vornehmen; es werden also zunächst die gegebenen parallelen Kräfte nach Richtung und Größe aneinander gereiht, wobei wie in Fig. 23, der aus den vier gegebenen Kräften gebildete Kräftezug $O1234$ eine gerade Linie, die sogenannte Kraftlinie bildet, in welcher $\overline{O1} = P_1$, $\overline{12} = P_2$, $\overline{23} = P_3$, $\overline{34} = P_4$ und somit $\overline{O4}$ die Resultante dieser vier Kräfte nach Richtung und Größe vorstellt. Hierauf wählt man einen beliebigen Kräftepol C und zieht die Polstrahlen CO , $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, welche die Componenten der einzelnen Kräfte derart bestimmen, dass je

zwei aufeinander folgende Kräfte gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Componenten haben, die sich alle das Gleichgewicht halten. Um nun das Seilpolygon zu erhalten, macht man

Fig. 23.



Resultierenden R ; ihre Richtung und Größe ist — wie schon gesagt wurde — durch die Strecke $\overline{O4}$ der Kraftlinie bestimmt. Für den Gleichgewichtszustand müsste noch eine fünfte Kraft hinzukommen, welche mit R gleiche Lage und Größe, aber entgegengesetzten Sinn hätte; sie würde dann die Größe $P_5 = \overline{4O}$ haben und es wäre ihr Endpunkt mit dem Anfangspunkte der Kraftlinie zusammenfallend; das zugehörige Seilpolygon $I II III IV S I$ wäre dann geschlossen.

Denkt man sich in Fig. 23 die einzelnen Seilspannungen in je zwei Componenten zerlegt, die zu den äußeren Kräften beziehungsweise parallel und senkrecht sind, so müssen die senkrecht zu den äußeren Kräften wirkenden Seilspannungen im Gleichgewichte sein; denn die äußeren Kräfte können nur die zu ihnen parallelen Componenten der Seilspannungen aufheben und folglich müssen sich die darauf senkrechten Componenten der Seilspannungen an und für sich das Gleichgewicht halten, was nur möglich ist, wenn sie gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung haben. Hieraus ergibt sich also allgemein der Satz: „Sind an einem Seilpolygone die äußeren Kräfte parallel, so haben die zu ihnen senkrecht gerichteten Componenten der Seilspannungen gleiche Größe.“ Wirken die äußeren Kräfte lothrecht, so nennt man die gleichen horizontalen Componenten der Seilspannungen allgemein die Horizontalspannung. Die Horizontalspannung H ist in Fig. 23 offenbar durch den normalen Abstand $C h$ des Poles C von der Kraftlinie d. i. durch die sogenannte Poldistanz bestimmt.

$O I \parallel C O$, $I II \parallel C 1$,
 $II III \parallel C 2$, $III IV \parallel C 3$
 und $IV z \parallel C 4$. Der
 Punkt S , in welchem
 sich die äußersten Poly-
 gonseiten $O I$ und $IV z$
 schneiden, ist nun ein
 Punkt der gesuchten

Anmerkung. Nach § 2 sind die statischen Momente zweier Kräfte für jeden Punkt ihrer Resultierenden einander gleich. Hat man nun zwei parallele Kräfte P_1 und P_2 , Fig. 24 und fällt man von einem beliebigen Punkt B ihrer Resultante R auf die Richtungen der Kräfte die Senkrechten BC und BD , so ist nach dem obigen Momentensatze $P_1 \cdot BC = P_2 \cdot BD$, oder $P_1 : P_2 = BD : BC$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke A_1BC und A_2BD verhält sich aber auch $BD : BC = A_2B : A_1B$, daher

$$P_1 : P_2 = A_2B : A_1B;$$

d. h. zwei parallele Kräfte, die an einer starren Geraden wirken, verhalten sich umgekehrt wie die Entfernung ihrer Angriffspunkte von dem ihrer Resultante.

Aus dieser Proportion ergibt sich zur Bestimmung des Punktes B der Resultante R die folgende, aus Fig. 25 ersichtliche, einfache Construction. Man lässt P_1 in A_2 und P_2 in A_1 angreifen, nimmt ferner die Richtung der einen Kraft, z. B. von P_2 entgegengesetzt

Fig. 24.

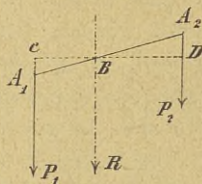


Fig. 25.

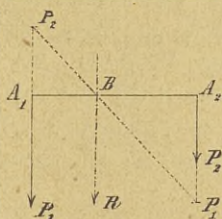
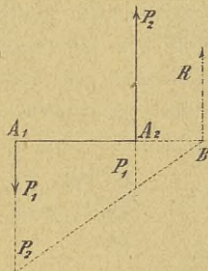


Fig. 26.



an, verbindet die Endpunkte der vertauschten Kräfte und erhält im Schnittpunkte dieser Verbindungslinie mit A_1A_2 den gesuchten Punkt B .

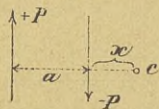
Auch in dem Falle, in welchem die beiden parallelen Kräfte P_1 und P_2 , Fig. 26, entgegengesetzten Sinn haben, also antiparallel sind, verhält sich $P_1 : P_2 = A_2B : A_1B$ und es ergibt sich hiernach die zu Fig. 25 analoge Construction des Punktes B der Resultante R , indem man wieder die Angriffspunkte der beiden Kräfte vertauscht und die Richtung der einen, z. B. der P_2 , entgegengesetzt nimmt.

Nach diesem sehr einfachen Verfahren kann man beliebig viele parallele Kräfte zusammensetzen; man sucht nämlich zunächst zu zwei der gegebenen Kräfte die Resultante, setzt diese mit einer der folgenden gegebenen Kräfte zusammen und fährt so fort, bis alle gegebenen Kräfte zu einer einzigen Resultante zusammengesetzt wurden. Sind hiebei die gegebenen Kräfte sämtlich gleich gerichtet, so ist ihre Resultante offenbar gleich der Summe dieser Kräfte und hat mit denselben gleichen Sinn; sind aber die Kräfte theilweise entgegengesetzt gerichtet, so ist die Resultante gleich dem Unterschiede aus den entgegengesetzt gerichteten Kräften und hat die Richtung der größeren der antiparallelen Kräfte.

§. 9. Das Gegen- oder Kräftepaar.

Sind die beiden antiparallelen Kräfte P_1 und P_2 , Fig. 26, einander gleich, so fällt der Angriffspunkt B ihrer Resultante R — wie dies aus Fig. 26 für $P_1 = P_2$ ohne weiters ersichtlich ist — in unendliche Entfernung und es wird $R = 0$. Man nennt zwei antiparallele Kräfte von gleicher Größe ein Kräfte- oder Gegenpaar. Dasselbe lässt sich — da seine Resultante unendlich fern liegt — nicht durch eine einzige Kraft ersetzen, bringt also auch keine fortschreitende, sondern eine drehende Bewegung hervor, wird deshalb auch ein Drehzwilling genannt. Bemerkenswert ist, dass das Moment eines Kräftepaares in Bezug auf jeden Punkt seiner Ebene constant ist, nämlich gleich dem Producte aus einer der beiden Kräfte P in den Abstand a dieser Kräfte. Wählt man z. B.

Fig. 27.



in Fig. 27 den beliebigen Punkt C als Drehpunkt, so ist das Moment M dieses Kräftepaares in Bezug auf C:

$$M = P(a + x) - Px = Pa.$$

Die Wirkung eines Kräftepaares kann offenbar durch ein Kräftepaar von gleichem aber entgegengesetztem Drehmomente aufgehoben werden.

II. Abschnitt.

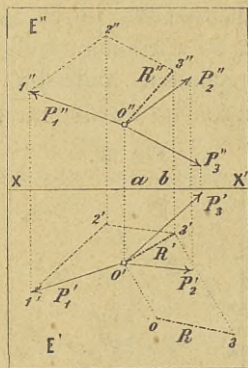
Zusammensetzung der Kräfte im Raume.

§. 10. Bestimmung der Resultante von Kräften, die an einem und demselben Angriffspunkte O nach verschiedenen Richtungen des Raumes wirken.

Da das aus diesen Kräften gebildete Kräftepolygon nicht in einer Ebene liegen kann, so müssen ebenso, wie bei der graphischen Addition der Strecken, die beliebige Richtungen im Raume haben*), zur Bestimmung der Lage und Größe dieser Kräfte und ihres Polygons, zwei Projectionen derselben gegeben sein: Man wird sich daher die beiden Projectionen der Kräfte, z. B. auf einer horizontalen und einer verticalen Ebene, verschaffen und sodann in beiden Projectionen die Kräfte nach Richtung und Größe aneinander reihen. Durch die beiden Projectionen der Schlussseite dieses Polygons ist alsdann die gesuchte Resultante vollkommen bestimmt.

Hiernach wurde in Fig. 28 die Resultante R der drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 , die nicht in einer Ebene liegen, construiert. O' und O'' sind die beiden Projectionen ihres gemeinschaftlichen Angriffspunktes, ferner $O'P'_1$ und $O''P''_1$, dann $O'P'_2$ und $O''P''_2$, endlich $O'P'_3$ und $O''P''_3$ die einander zugeordneten Projectionen der gegebenen drei Kräfte; ebenso sind $0'1'2'3'$ und $0''1''2''3''$ die beiden Projectionen des zugehörigen Kräftepolygons. Die Resultante R ist durch die Schlussseite $0\bar{3}$ dieses Kräftepolygons, respective durch die beiden Projectionen $0'3'$ und $0''3''$ derselben der Lage, Größe und Richtung nach vollkommen bestimmt. Um aus den beiden Projectionen die wahre Größe von R zu finden, denkt man sich diese räumliche Gerade um eine ihrer Projectionen, z. B. um die

Fig. 28.



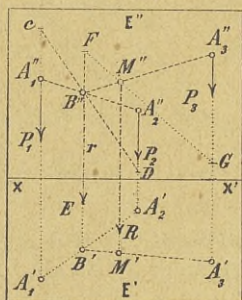
*) Vergleiche pag. 5 des I. Theiles.

horizontale $O'3'$, in die betreffende Projectionsebene umgelegt. Zu diesem Behufe errichtet man bekanntlich in den Endpunkten O' und $3'$ auf $O'3'$ Senkrechte und trägt hierauf $O'O = a0''$ und $3'3 = b3''$ auf, so ist $O3$ die wahre Größe von R .

§. II. Bestimmung der Resultante von parallelen Kräften, die nicht in einer und derselben Ebene wirken.

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir einen Satz der Projectionslehre zu Hilfe nehmen, welcher lautet: Wird eine begrenzte Gerade, respective Strecke, im bestimmten Verhältnisse getheilt und projectiert man diese Strecke sammt ihren Theilpunkten auf eine Ebene, so erscheint auch die Projection dieser Strecke durch die Projectionsstrahlen in demselben Verhältnisse getheilt. Da nun die Resultante R zweier parallelen Kräfte P_1 und P_2 , Fig. 24, jede zwischen ihnen gezogene Strecke, also auch die Verbindungslinie A_1A_2 ihrer Angriffspunkte im umgekehrten Verhältnisse der Kräfte theilt, so dass also $A_1B : BA_2 = P_2 : P_1$, so wird dieses Theilungsverhältnis auch für die Projectionen der Verbindungslinie der Angriffspunkte paralleler Kräfte gelten, und da parallele Gerade auch parallele Projectionen haben, so können wir sagen: Die Resultante aus den Projectionen paralleler Kräfte ist die Projection der Resultante dieser parallelen Kräfte. Da nun jede Strecke durch zwei ihrer Projectionen vollkommen bestimmt ist, so wird man sich die beiden Projectionen der parallelen Kräfte verschaffen und die Resultante dieser Projection construieren. Hiernach wurde in Fig. 29 die Resultante von drei lothrecht

Fig. 29.



wirkenden Kräften P_1 , P_2 und P_3 bestimmt und zwar wurde, der Einfachheit halber, die eine Projectionsebene horizontal, die andere vertical angenommen, so dass sich die Projectionen der gegebenen Kräfte auf der ersten Projectionsebene als Punkte, dagegen auf letzterer lothrecht und in wahrer Größe ergeben. Die Angriffspunkte A_1 , A_2 und A_3 sind durch ihre beiden Projectionen, nämlich durch $A'_1A''_1$, $A'_2A''_2$ und $A'_3A''_3$ gegeben. Um nun zunächst die

Projectionen des Angriffspunktes B der Resultante r aus P_1 und

P_2 zu erhalten, wurde in der verticalen Projectionsebene, nach obigem Satze, $A''_1C = P_2$ und $A''_2D = P_1$ gemacht und dann die Verbindungslinie CD gezogen, welche im Schnittpunkte B'' mit $A''_1A''_2$ die eine Projection von B gibt, während die andere Projection B' in $A'_1A'_2$ lothrecht unterhalb B'' liegt. Macht man noch $B''E = P_1 + P_2$, so stellt bereits $B''E$ die Resultante r aus P_1 und P_2 vor.

Man wird nun r mit P_3 zusammensetzen und den Angriffspunkt M der zugehörigen Resultante R in $B''A''_3$ auf dieselbe Art, wie vorhin, bestimmen. Man macht also $B''F = P_3$ und

$$A''_3G = r = P_1 + P_2$$

und zieht FG , so gibt der Schnittpunkt derselben mit $B''A''_3$ die eine Projection M'' des Angriffspunktes der Resultante R aller drei Kräfte, und es wird wieder M' in $B'A'_3$ lothrecht unterhalb M'' erhalten. Die gesuchte Resultante der drei gegebenen Kräfte P_1 , P_2 und P_3 ist nun vollkommen bestimmt, ihr Angriffspunkt M ist durch seine beiden Projectionen M' und M'' fixiert, ihre Richtung ist lothrecht und ihre Größe gleich $P_1 + P_2 + P_3$.

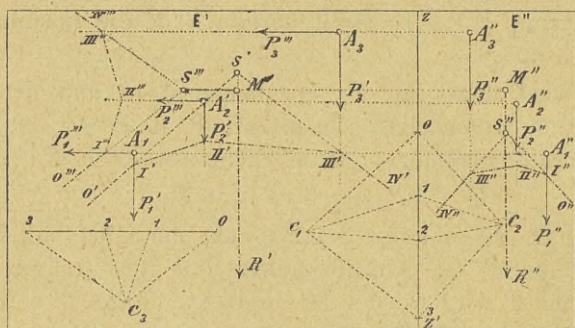
Der Punkt M , in welchem die Resultante paralleler Kräfte angreift, heißt der Mittelpunkt der parallelen Kräfte und hat die Eigenschaft, dass, wenn die parallelen Kräfte unter Beibehaltung ihrer Größe und ihres Parallelismus um ihre Angriffspunkte gleichzeitig gedreht werden, sich auch ihre Resultante, zu jenen fortwährend parallel bleibend, um ihren Angriffspunkt M dreht.

Sind sehr viele parallele Kräfte, die in verschiedenen Ebenen liegen, zusammen zu setzen, so geschieht die Bestimmung ihrer Resultante am einfachsten mit Benützung der Kräfte- und Seilpolygone, welche zu zwei zugeordneten Projectionen der parallelen Kräfte construirt werden. Der Einfachheit halber werden die beiden Projectionsebenen wieder aufeinander senkrecht und überdies beide zu den Kräften parallel angeordnet. Es sind dann die beiden Projectionen der Kräfte nicht nur unter sich und mit den gegebenen Kräften parallel, sondern sie erscheinen auch beide in wahrer Größe.

In Fig. 30 wurden hiernach auf den beiden Projectionsebenen E' und E'' die einander zugeordneten Projectionen $P'_1P''_1$, $P'_2P''_2$ und $P'_3P''_3$ der drei parallelen Kräfte P_1 , P_2 und P_3 dargestellt, hierauf wurde auf der gemeinschaftlichen Achse $z z'$ der beiden,

Projectionsebenen die Kraftlinie 0123 gebildet, nämlich $01 = P_1$, $12 = P_2$ und $23 = P_3$ gemacht, dann in E' ein beliebiger Kräftepol C_1 gewählt, die Polstrahlen $C_1 0$, $C_1 1$, $C_1 2$ und $C_1 3$ gezogen und das zugehörige den Projectionen P'_1 , P'_2 und P'_3 entsprechende

Fig. 30.



Seilpolygon $O'I'II'III'IV'$ gebildet; durch den Schnittpunkt S' seiner äußersten Seiten ist die Lage der Resultante R' von P'_1 , P'_2 und P'_3 bestimmt. Die Richtung von R' ist offenbar zu ihren Componenten parallel und ihre Größe gleich der algebraischen Summe dieser Kräfte, also im vorliegenden Falle $R' = P_1 + P_2 + P_3$. Analog wurde in der Ebene E'' , mittels des Kräftepoles C_2 , das den Projectionen P''_1 , P''_2 und P''_3 entsprechende Seilpolygon $O''I''II''III''IV''$ gebildet und durch den Schnittpunkt S'' seiner äußersten Seiten ein Punkt der Resultante R'' von P''_1 , P''_2 und P''_3 erhalten; offenbar ist auch hier die Resultante R'' zu ihren Componenten parallel und der Größe nach durch die algebraische Summe dieser Componenten bestimmt. Um nun den Mittelpunkt M der gegebenen parallelen Kräfte zu finden, dreht man die Projectionen der Kräfte in einer der beiden Projectionsebenen, z. B. in E' um ihre Angriffspunkte in demselben Sinne und um einen gleichen Winkel, z. B. um einen Rechten, und bestimmt für diese neue Lage die Projectionen P'''_1 , P'''_2 und P'''_3 der gegebenen Kräfte, mittels des beliebig gewählten Kräftepoles C_3 und des zugehörigen Kräfte- und Seilpolygones einen Punkt S''' ihrer Resultante R''' . Der Schnittpunkt M' der beiden Resultanten R' und R''' ist offenbar die eine Projection des gesuchten Mittelpunktes der gegebenen parallelen Kräfte und seine zweite Projection M'' wird in R'' durch den von M' auf $z'z''$ senkrecht gefällten Projektionsstrahl erhalten.

III. Abschnitt.

Zerlegung der Kräfte.

§. 12. Zerlegung einer Kraft in Componenten, die mit ihr an demselben Angriffspunkte und in derselben Ebene wirken.

Der gewöhnlichste Fall ist der, dass eine Kraft R in zwei Componenten P_1 und P_2 zerlegt werden soll, deren Richtungen gegeben sind. Diese Aufgabe ist offenbar die umgekehrte von jener des § 2 pag. 5 und kann entweder auf bekannte Weise durch Construction des betreffenden Kräfteparallelogrammes, nach Fig. 6, oder des entsprechenden Kräftedreiecks, nach Fig. 7, gelöst werden. Die Auflösung bleibt offenbar dieselbe, wenn die Größe der beiden Componenten oder die Größe und Richtung der einen Componente gegeben ist. Die Aufgabe wird aber ganz unbestimmt, wenn eine Kraft R ohne jede Beschränkung in zwei Componenten zerlegt werden soll, denn alle über R errichteten Dreiecke führen zum Ziel.

Soll eine Kraft R in n Componenten zerlegt werden, die mit R denselben Angriffspunkt O gemein haben, so müssen dieselben nach Richtung und Größe aneinander gereiht, zufolge § 3 pag. 8 ein geschlossenes $(n + 1)$ Eck bilden und es muss der Anfangspunkt des Componentenzuges auf den Anfangspunkt von R und dessen Endpunkt auf den Endpunkt von R zu liegen kommen. Hiernach ist in Fig. 11 oder 13 die Kraft R in die 4 Componenten P_1, P_2, P_3 und P_4 zerlegt worden.

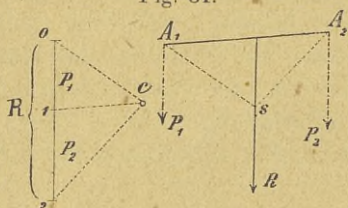
Offenbar lässt sich auf diese Art eine Kraft R in beliebig viele und beliebig gerichtete Componenten zerlegen. Soll aber eine Kraft R in mehr als 2, im allgemeinen also in n Componenten von bestimmter Richtung und Größe zerlegt werden, so dürfen nur $(n - 1)$ dieser Componenten gegeben sein; denn die n Componente muss die Schlussseite des zu R aus den $(n - 1)$ Componenten gebildeten Kräftezuges bilden. Bei der Zerlegung einer Kraft in n Componenten können auch $(n - 2)$ Componenten der Größe und Richtung nach und die beiden letzten Componenten nur der Richtung nach gegeben sein.

§. 13. Zerlegung einer Kraft R in zwei Componenten, welche mit ihr in derselben Ebene liegen, aber verschiedene Angriffspunkte haben.

Soll diese Aufgabe möglich werden, so müssen sich, dem vorhergehenden zufolge, die beiden Componenten P_1 und P_2 in demselben Punkte O ihrer Resultante R schneiden, oder sie müssen beide zu derselben parallel sein. Im ersteren Falle braucht man nur den Angriffspunkt der beiden Componenten in ihren Schnittpunkt O , Fig. 6, zu verlegen und die Größe der Componente, durch das Kräfteparallelogramm oder nach Fig. 7, pag. 6, mittels des Kräftedreieckes zu bestimmen.

Im zweiten Falle, wenn R in zwei zu R parallele Componenten P_1 und P_2 , Fig. 31, zerlegt werden soll, verbinde man die drei

Fig. 31.



der Lage und Richtung nach gegebenen Kräfte durch ein beliebiges Seilpolygon A_1SA_2 , zeichnen seitwärts $O2$ gleich und parallel R und führe, um den Kräftepol C des Kräfteplanes zu finden,

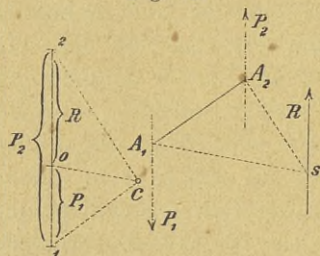
$$OC \parallel A_1S \text{ und } 2C \parallel A_2S.$$

Die durch C zur Schlussseite A_1A_2

des Seilpolygones gelegte Parallele $C1$ theilt bereits R in die beiden Componenten $\overline{O1} = P_1$ und $\overline{12} = P_2$. Die Richtigkeit der Construction folgt unmittelbar aus dem bekannten Zusammenhange zwischen Kräfte- und Seilpolygon.

In Fig. 32 wurde analog die Zerlegung der Kraft R in zwei der Lage nach gegebene Componenten von entgegengesetzter Richtung vorgenommen, wobei in

Fig. 32.



Übereinstimmung mit § 8, Fig. 26, die beiden antiparallelen Componenten auf derselben Seite von R liegen müssen. Die drei der Lage und Richtung nach gegebenen Kräfte wurden wieder durch ein beliebiges Seilpolygon A_1SA_2 verbunden, hierauf

durch die Endpunkte von $R = \overline{O2}$ die Parallelen zu den Polygonseiten A_1S und A_2S gezogen und schließlich durch den hiedurch erhaltenen Pol C zur Schlussseite

A_1, A_2 die Parallele C1 geführt, welche die beiden Componenten P_1 und P_2 von R bestimmt.

§. 14. Zerlegung einer Kraft R in drei der Lage und Richtung nach gegebene Componenten P_1, P_2 und P_3 , Fig. 33, die mit R in einer Ebene liegen.

Diese Aufgabe lässt nur dann eine bestimmte Lösung zu, wenn sich die drei Componenten in drei verschiedenen Punkten schneiden, von denen keiner auf der zu zerlegenden Kraft R liegt.

Um die Größe und den Sinn der drei Componenten zu erhalten, verlängert man eine derselben, z. B. P_1 bis zum Schnittpunkte S mit R und zerlegt zunächst R in zwei Seitenkräfte, von denen die eine die Richtung von P_1 , und die zweite die Richtung der Verbindungslinie r des Punktes s mit dem Schnittpunkte t der beiden anderen Componenten P_2 und P_3 hat.

Hierauf zerlege man r in Richtung der beiden anderen Componenten P_2 und P_3 und erhält so die Richtung und Größe der gesuchten drei Componenten. Diese Zerlegung wurde seitwärts mittels des Kräfteplanes vorgenommen und bedarf wohl keiner weiteren Erklärung. Da hiebei R die Resultante von P_1, P_2 und P_3 ist, so muss nach § 3 der Pfeil von R jenem der drei Componenten entgegengesetzt gerichtet sein. Wäre aber die Aufgabe gestellt worden, die Größe von drei der Lage nach gegebenen Kräften P_1, P_2 und P_3 zu bestimmen, welche der gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten, so müsste, nach § 3, das aus den vier Kräften R, P_1, P_2 und P_3 gebildete Kräftepolygon vom Richtungspfeil in demselben Sinne umfahren werden; die drei Kräfte würden dann die entgegengesetzte Richtung von jener in Fig. 33 erhalten.

Sind zwei von den drei Componenten, in welche R zerlegt werden soll, parallel, wie in Fig. 34, so bringe man eine der beiden Parallelen z. B. P_1 mit R zum Schnitt, verbinde den Schnittpunkt s mit jenem t der beiden anderen Componenten und zerlege nun wie-

Fig. 33.

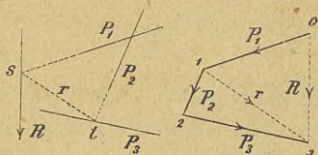
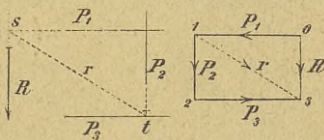


Fig. 34.



der zunächst R in Richtung von P_1 und r und dann r in Richtung von P_2 und P_3 . In Fig. 34 ist überdies die eine der drei Componenten zu R parallel.

Aus der Betrachtung des Kräftepolygones 0123, Fig. 34, ergibt sich ohne weiteres, dass jede Kraft R ersetzt werden kann durch eine ihr gleiche, parallel und gleich gerichtete Kraft P_2 und und durch ein Kräftepaar P_1, P_3 .

Anmerkung. Sollte eine Kraft R in mehr als drei, bloß der Richtung und Lage nach gegebene Componenten zerlegt werden, die nicht durch denselben Punkt gehen, so wird die Aufgabe ganz unbestimmt.

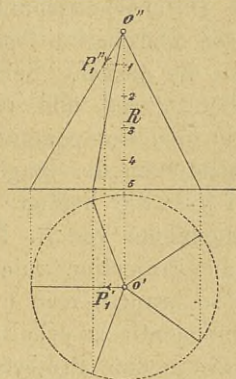
§. 15. Zerlegung einer Kraft R in Componenten, die mit ihr denselben Angriffspunkt haben, aber in verschiedenen Ebenen liegen, deren Richtungslinien somit die Kanten einer Körperecke bilden.

Wenn die gegebene Kraft R derart in Componenten zerlegt werden soll, dass dieselben zu ihr die gleiche Neigung haben und überdies mit einander gleiche Winkel einschließen, oder mit anderen Worten, wenn R die Richtung der Achse einer gleichseitigen Pyramide und ihre Componenten die Lage der zugehörigen Scheitelkanten haben sollen, so lässt sich die Zerlegung von R in beliebig viele Componenten unzweideutig ausführen. Wegen dieser gleichmäßigen Vertheilung der Componenten, um die zu zerlegende Kraft R , werden offenbar die sämtlichen Componenten gleiche Größe haben und man wird dieselben erhalten, wenn man die zu zerlegende Kraft in ebenso viele gleiche Theile als Componenten sind, also im allgemeinen in n gleiche Theile zerlegt und hierauf den ersten Theil, vom Angriffspunkte aus gezählt, in der Ebene mit einer der zu bestimmenden Componenten derart in zwei Seitenkräfte zerlegt, dass die eine dieser Seitenkräfte die Richtung der fraglichen Componente hat, während die andere auf der zu zerlegenden Kraft R senkrecht steht. Die erstere Componente bestimmt dann schon die Größe einer und somit auch die der anderen gleich großen Componenten.

Denkt man sich nämlich die besprochene Zerlegung des n^{ten} Theiles von R in der Ebene jeder der n Componenten vorgenommen, so entfällt auf jede die gleiche Größe und alle die zu R senkrechten Componenten heben sich auf, denn sie bilden, nach Richtung und

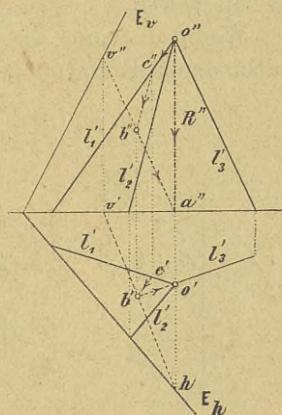
Größe aneinander gereiht, ein geschlossenes regelmäßiges n Eck. Hiernach wurde in Fig. 35 die Zerlegung von R in fünf Componenten vorgenommen, die mit R und unter sich gleiche Winkel bilden. Die beiden Projectionsebenen wurden derart angeordnet, dass R auf der einen (der horizontalen) senkrecht steht und eine der Componenten z. B. P_1 zur anderen Projectionsebene (der verticalen) parallel ist, so dass der betreffende Winkel, den R mit P_1 bildet, sowie auch R und P_1 auf dieser Projectionsebene in wahrer Größe erscheinen. Hierauf wurde R in 5 gleiche Theile getheilt und der erste Theil in zwei Componenten, nämlich senkrecht zu R und in der Richtung von P_1 , zerlegt, wodurch in P''_1 die wahre Größe von P_1 und somit auch der anderen Componenten erhalten wurde.

Fig. 35.



Ist dagegen eine Kraft R in mehrere Componenten nach verschiedenen Richtungen des Raumes zu zerlegen, die mit R und unter einander nicht gleiche Winkel einschließen sollen, so lässt sich bei gegebener Lage der Componenten die Zerlegung nur dann in bestimmter Weise durchführen, wenn R nur in drei zu R verschieden geneigte Componenten zerlegt werden soll. Um dies zu zeigen, wurde in Fig. 36 die Zerlegung der verticalen Kraft R in drei der Lage nach durch l_1 , l_2 und l_3 gegebene Componenten ausgeführt, die, wie aus den beiden Projectionen ersichtlich ist, zu R und unter sich verschiedene Neigung haben. Die durch den Anfangspunkt O von R gezogene Gerade l_1 und die durch den Endpunkt a von R zu l_3 gezogene Parallele ab , stellen schon zwei Seiten des zu konstruierenden Kräfteviereckes vor und es handelt sich nun noch darum, die Schlusslinie bc dieses Kräftepolygons zu erhalten, welche offenbar die beiden sich kreuzenden Geraden l_1 und ab

Fig. 36.



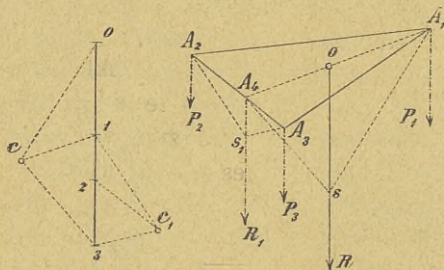
schneiden und zu l_2 parallel sein muss. Da aber zu zwei sich kreuzenden Geraden nur eine einzige Transversale parallel zu einer dritten Geraden gezogen werden kann, so lässt die obige Aufgabe auch nur eine einzige Lösung zu. Um nun diese Transversale zu erhalten, legt man durch l_1 und l_2 eine Ebene E , sucht den Durchschnittspunkt dieser Ebene mit $a b$ und führt durch diesen Durchschnittspunkt b die Parallele $b c$ zu l_2 , welche alsdann die gesuchte Schlusslinie des Kräfteviereckes bildet. Offenbar stellen $o'' c''$ und $o' c'$ die beiden Projectionen der längs l_1 wirkenden Componente vor; ebenso sind $c'' b''$ und $c' b'$ die beiden Projectionen der längs l_2 wirkenden Componente und endlich $b'' a''$ und $b' a'$ die beiden Projectionen der dritten längs l_3 wirkenden Componente von R . Da aber bekanntlich jede Strecke durch ihre beiden Projectionen der Lage und Größe nach vollkommen bestimmt ist, so braucht man nur noch, um die wahre Größe der gesuchten Componenten zu erhalten, dieselben nach der auf pag. 23 erwähnten Weise in eine Projectionsebene umzulegen.

§. 16. Zerlegung einer Kraft R in mehr als zwei zu ihr parallele Componenten, die in verschiedenen Ebenen liegen.

Soll eine Kraft R in n zu ihr parallele Componenten von gleicher Größe zerlegt werden, so liegen dieselben offenbar in den Kanten der Mantelfläche eines geraden n -seitigen Prismas mit regulärer Basis, längs dessen Achse die zu zerlegende Kraft R wirkt und es kommt offenbar auf jede der n Componenten der n^{te} Theil von R .

Wenn dagegen die zu R parallelen Componenten von R in verschiedenen Entfernungen und Ebenen liegen sollen, so lässt sich

Fig. 37.



die Zerlegung unzweideutig nur für drei Componenten durchführen. Sollen z. B. die Drücke bestimmt werden, welche ein auf einer horizontalen Platte in O liegendes Gewicht R , Fig. 37, auf die drei verticalen Stützen A_1 , A_2 und A_3 ausübt, so denke man sich

zunächst A_1 mit O verbunden und bestimme die Drücke von R auf die beiden Stützpunkte A_1 und A_4 , d. h. man zerlege R nach § 13, in die beiden parallelen, in A_1 und A_4 wirkenden Componenten P_1 und R_1 , indem man die drei Kräfte P_1 , R und R_1 durch ein beliebiges Seilpolygon $A_1 S A_4$ verbindet, hierauf seitwärts $O \bar{3}$ gleich und parallel R macht und durch die Endpunkte von $O \bar{3}$ zu den Polygonseiten $A_1 S$ und $A_4 S$ Parallele zieht, die den Kräftepol c bestimmen, durch welchen $c 1 \parallel A_1 A_4$ geführt und dadurch auf $O \bar{3}$ die Strecken $\overline{O 1} = P_1$ und $\overline{1 \bar{3}} = R_1$ abgeschnitten wurden. Nun zerlege man auf gleiche Weise die in A_4 angreifende Kraft $R_1 = \overline{1 \bar{3}}$ in die beiden zu R_1 parallelen, in A_2 und A_3 angreifenden Componenten $P_2 = \overline{1 2}$ und $P_3 = \overline{2 \bar{3}}$ mittels des Seilpolygons $A_2 S_1 A_3$ und des zugehörigen Kräftepoles c_1 .

IV. Abschnitt.

Das Drehungs- oder statische Moment einer Kraft.

§. 17. Darstellung des Drehungsmomentes und Reducierung desselben auf eine bestimmte Basis.

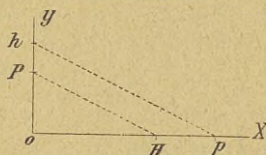
Es wurde bereits in der Einleitung bemerkt, dass man unter dem Drehungs- oder statischen Moment M einer Kraft P in Bezug auf einen festen Drehungspunkt O das Product aus dieser Kraft und ihrem senkrechten Abstand p von O versteht; dass also $M = P \cdot p$ ist. Der Drehungspunkt O heißt gewöhnlich der Momentenpunkt oder Momentenpol und sein Abstand von P der Hebelarm. Man denkt sich hiebei die Kraft P auf ein starres System wirksam, das um den festen Punkt O drehbar ist. Da die Kraft in Gewichtseinheiten und die Entfernung in Längeneinheiten ausgedrückt wird, so erhält das Drehungsmoment eine Benennung, welche aus der Bezeichnung der Gewicht- und Längeneinheit zusammengesetzt ist. Wählt man beispielsweise 1 Kilogramm (Kg.) als Gewichtseinheit, und 1 Meter (m) als Längeneinheit, so erhält das Drehungsmoment die Benennung Kilogramm-Meter oder Meter-Kilogramm, (abgekürzt Kg m oder m Kg). Die Einheit der Momente ist in diesem Falle dasjenige Drehungsmoment, welches eine Kraft von 1 Kg. an einem Hebelarm von 1 m. Länge besitzt. Das Vorzeichen des Drehungsmomentes hängt vom Drehungssinn ab, erfolgt nämlich die Drehung im Sinne des Uhrzeigers, so wird es positiv, also bei entgegengesetzter Drehung negativ angenommen.

Da nun in der graphischen Statik die Kräfte durch Strecken dargestellt werden und der Hebelarm selbst eine Strecke ist, so hat das Product $P \cdot p$ eine geometrische Bedeutung. Es ist nämlich der Inhalt desjenigen Rechteckes oder der doppelte Inhalt desjenigen Dreieckes, dessen Grundlinie die Kraft, und dessen Höhe ihr Hebelarm ist. Alle Änderungen, die man mit einem Rechtecke oder Dreiecke graphisch vornehmen kann, ohne dass hiedurch dessen Inhalt geändert wird, können daher auch in der graphischen Statik mit dem Momentenrechteck oder Momentendreieck vorgenommen werden. Um die relative Werthbestimmung der Drehungs-

momente bequem vornehmen zu können, braucht man nur die Drehungsmomente durch Strecken auszudrücken; dies geschieht ganz einfach dadurch, dass man die Rechtecke, durch welche die Drehungsmomente repräsentiert werden, in Rechtecke mit gleicher Basis verwandelt; offenbar verhalten sich dann die Flächen dieser Rechtecke und somit auch die zugehörigen Drehungsmomente, wie die Höhen. Wird überdies die gemeinschaftliche Basis der Rechtecke gleich 1 gewählt, so stellen deren Höhen bereits die Drehungsmomente selbst vor. Bezieht sich hiebei die gemeinschaftliche Basis auf den Längenmaßstab, so sind die Höhen nach dem Kräftemaßstab abzulesen; umgekehrt müssten also die Höhen nach dem Längenmaßstabe gemessen werden, wenn die Basis nach dem Kräftemaßstab aufgetragen worden wäre.

Ist das Drehungsmoment, respective das Rechteck $P.p$, auf die Basis H zu reduciren und bezeichnet man die zugehörige Höhe mit h , so muss die Gleichung bestehen $Pp = Hh$ oder $H : P = p : h$; es stellt also h die vierte geometrische Proportionale zu den drei gegebenen Strecken P , p und H vor und kann nach den Regeln des graphischen Rechnens auf verschiedene Weise construiert werden. Man trage z. B. in Fig. 38 H und p nach dem Längenmaßstabe, von o aus, auf dem einen Schenkel und P nach dem Kräftemaßstabe auf dem anderen Schenkel eines beliebigen Winkels auf, verbinde dann die Endpunkte von H und P und führe zu dieser Verbindungslinie \overline{PH} durch den Endpunkt von p die Parallele \overline{ph} , welche die gesuchte Strecke $h = oh$ bestimmt, deren numerischer Wert offenbar nach dem Kräftemaßstab abzulesen ist.

Fig. 38.

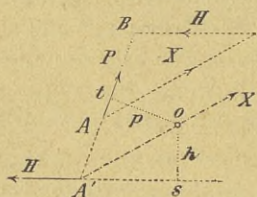


Hätte man beispielsweise $H = 100$ Einheiten des Längenmaßstabes gemacht, so würde das Drehungsmoment durch $100h$ ausgedrückt erscheinen, und es müsste bei der Bestimmung des numerischen Wertes des Drehungsmomentes das Maß von h nach dem Kräftemaßstab abgelesen werden.

Die Reduction des Drehungsmomentes $P.p$ einer Kraft P bezüglich eines Punktes O , Fig. 39, auf eine gegebene Basis H kann aber auch auf statischem Wege ausgeführt werden, indem man $AB = P$ in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine nach Richtung und Größe gleich H und somit die andere nach Richtung

und Größe gleich X ist. Nun zieht man durch O eine Parallele zu X , welche die Kraft P in A' schneidet und denkt sich jetzt P von A' aus in die Componenten H und X zerlegt, es wird dann das Moment der durch O gehenden Componente $X=0$, und daher in Bezug auf O das Moment $Pp=Hh$, wobei h die Senkrechte ist, welche von O auf die durch A' gehende Componente H gefällt wurde.

Fig. 39.

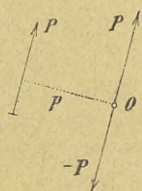


§. 18. Drehungsmoment und Gleichgewicht von Kräftepaaren.

Es wurde bereits im § 9 nachgewiesen, dass das Drehungsmoment eines Kräftepaares für jeden Punkt in der Ebene desselben constant ist, nämlich gleich dem Producte aus einer der beiden Kräfte in ihren Abstand. Es ist also das Moment des Kräftepaares gleich dem doppelten Inhalt jedes Dreieckes, dessen Basis die eine Kraft und dessen Scheitel in der anderen Kraft liegt. Da überdies der Drehungssinn des Kräftepaares von der Lage des Momentenpunktes ganz unabhängig ist, so ist ein Kräftepaar überhaupt schon bestimmt, wenn sein Flächeninhalt $P \cdot p$ und der Drehungssinn gegeben ist. Man kann also ein Kräftepaar, ohne sein Drehungsmoment zu ändern, in der Kraftebene beliebig verlegen und mit ihm überhaupt alle Veränderungen vornehmen, durch welche die Größe des Inhalts $P \cdot p$ und der Drehungssinn des Kräftepaares nicht geändert wird. Offenbar werden sich zwei Kräftepaare nur dann das Gleichgewicht halten, wenn sie dasselbe Moment, aber entgegengesetzten Drehungssinn haben.

§. 19. Anwendung des Kräftepaares zur Zerlegung und Zusammensetzung gegebener Kräfte.

Fig. 40.



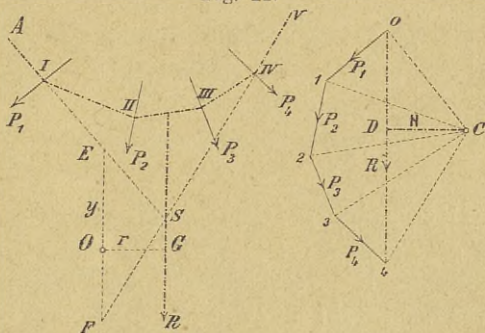
Jede gegebene Kraft P , Fig. 40, lässt sich durch eine zu ihr parallele Kraft und ein Kräftepaar ersetzen. Lässt man nämlich in einem beliebigen Punkte O die beiden gleichen, zu P parallelen, aber entgegengesetzt wirkenden Kräfte P und $-P$ angreifen, so halten sich diese Kräfte das Gleichgewicht und werden somit die Wirkungen von P

nicht beeinträchtigen. Man kann also statt der Kraft P eine zu ihr parallele, durch einen beliebigen Punkt O gehende Kraft wählen, muss aber zu der verschobenen Kraft noch ein Kräftepaar hinzugeben, dessen Drehungsmoment gleich dem Producte aus der gegebenen Kraft in ihren Abstand p von O ist und das mit P bezüglich O denselben Drehungssinn hat. Da aber das Drehungsmoment des Kräftepaares durch beliebige Verlegung des Kräftepaares nicht geändert wird, so kann man es durch jedes andere in der Kräfteebene liegende Kräftepaar ersetzen, das mit dem vorigen gleiches Drehungsmoment und gleichen Drehungssinn hat.

§. 20. Bestimmung der Drehungsmomente gegebener Kräfte in einer Ebene mittels des Kräfte- und Seilpolygones.

Da nach § 3 das Drehungsmoment beliebig vieler in einer Ebene wirkender Kräfte in Bezug auf irgend einen Punkt in der Ebene dieser Kräfte gleich ist dem Momente der Resultante dieser Kräfte, so wird man das Moment des Kräftesystems P_1, P_2, P_3 und P_4 , Fig. 41, in Bezug auf den Punkt O ermitteln, indem man die gegebenen Kräfte mittels des Kräftepolygones zur Resultante $R = \overline{O4}$ zusammensetzt, einen beliebigen Kräftepol C wählt, das demselben entsprechende Seilpolygon $A I I I I I V$

Fig. 41.



nach § 4 construiert und durch den Schnittpunkt S der äußersten Seilpolygonseiten die Resultante R parallel zu $\overline{O4}$ zeichnet. Fällt man nun von O auf R die Senkrechte $OG = r$, so ist das gesuchte Moment $M = Rr$.

Eine andere Bestimmungsweise von M , die für die Folge besonders empfehlenswert ist, ergibt sich folgendermaßen. Zieht man durch den Momentenpunkt O eine Parallele $EF = y$ zu R , welche die äußersten Polygonseiten in E und F schneidet, so sind die Dreiecke ESF und $O4C$, wegen des Parallelismus ihrer Seiten

ähnlich und es verhalten sich daher ihre Höhen, wie ihre Grundlinien, d. i.

$$r : H = y : R,$$

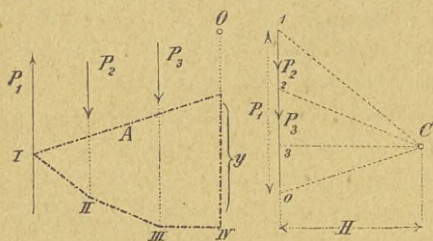
wobei H die Poldistanz CD der Kraft R und y die Strecke EF bedeutet. Aus dieser Proportion folgt:

$$Rr = Hy \text{ oder } M = Hy,$$

d. h. um das Moment eines gegebenen Kräftesystems in Bezug auf einen Punkt O zu erhalten, führe man durch O eine Parallele zur Resultante R dieses Kräftesystems und multipliziere die Strecke y , welche auf dieser Parallelen durch die dem Kräftesystem zugehörigen äußersten Seilpolygonseiten abgeschnitten wird, mit der Poldistanz H der Resultante R .

Sehr einfach wird hiernach die Bestimmung des Momentes paralleler Kräfte in einer Ebene; denn bei diesen verwandelt sich das Kräftepolygon in eine Gerade und es wird daher die Poldistanz

Fig. 42.



H constant. In Fig. 42 wurde das Moment der drei vertikalen Kräfte P_1 , P_2 und P_3 bezüglich des Punktes O bestimmt. Im Kräfteplane ist $\overline{O1} = P_1$, $\overline{12} = P_2$ und $\overline{23} = P_3$; der Kräftepol ist beliebig gewählt worden und im Seilpolygon ist $A I \parallel C O$, $I II \parallel C 1$,

$II III \parallel C 2$ und $III IV \parallel C 3$. Die äußersten Seiten des Seilpolygons sind also jene $A I$ und $III IV$; dieselben schneiden auf dem zur Resultante $R = O3$ durch den Momentenpunkt O gezogenen parallelen Strahl die Strecke y ab und es ist daher das Moment der 3 Kräfte P_1 , P_2 und P_3 bezüglich des Punktes O bestimmt durch $M = Hy$ und zwar ist es positiv, indem $R = \overline{O3}$ nach aufwärts wirkt und links vom Drehpunkt O liegt, daher im Sinne des Uhrzeigers dreht.

V. Abschnitt.

Bestimmung des Schwerpunktes.

§. 21. Begriff des Schwerpunktes und allgemeine Bestimmungsweise desselben.

Denken wir uns einen Körper in seine materiellen Elemente zerlegt und auf dieselben nur ihr Gewicht wirkend, so bilden diese Gewichte ein System von lothrechten, also parallelen Kräften, deren Resultante somit auch lothrecht und gleich der Summe ihrer Componenten, d. h. gleich dem Gewichte des ganzen Körpers sein muss. Bei jedem Körper geht diese Resultante, zufolge § 11, stets durch den nämlichen Punkt, d. i. durch den Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte, welchen man, sobald diese parallelen Kräfte die Gewichte der einzelnen Körpertheilchen vorstellen, oder diesen Gewichten proportional sind, den Schwerpunkt des Körpers nennt. Der Schwerpunkt eines Körpers kann also stets als der Angriffspunkt des Körpergewichtes angesehen werden. Das Verfahren zur Bestimmung des Schwerpunktes wird daher im allgemeinen ganz dasselbe sein wie jenes, das im § 11 zur Construction des Mittelpunktes paralleler Kräfte angewendet wurde. Haben die sämmtlichen gleich großen Aggregate, in die man sich den ganzen Körper zerlegt denkt, gleiches Gewicht, so heißt der Körper homogen. Wir werden in der Folge nur die Schwerpunkte von homogenen materiellen Gebilden bestimmen. Ist ein homogener Körper centralsymmetrisch gestaltet, so liegt sein Schwerpunkt im geometrischen Mittelpunkt M ; denn die ganze Materie eines solchen Körpers ist um den Mittelpunkt M nach allen Richtungen symmetrisch vertheilt; man kann sich daher zu jedem materiellen Punkte x des Körpers einen zu M symmetrisch liegenden materiellen Punkt x' des Körpers von gleichem Gewichte mit dem ersteren denken, so dass die Resultante dieser beiden gleichen Gewichte stets durch M gehen muss. Demnach werden regelmäßig begrenzte materielle Flächen und deren aus materiellen Punkten gebildete Grenzlinien in dem gemeinschaftlichen geometrischen Mittelpunkt ihren Schwerpunkt haben. Weiters ist es klar, dass alle Körper,

in den Schwerpunkten der Stäbe angreifenden, zur Zeichnungsfläche senkrecht gedachten Stabgewichte und daher ist das Product aus dem Gewichte jedes Stabes in den senkrechten Abstand seines Mittelpunktes von $x x'$ das Moment dieses Gewichtes in Bezug auf die Momentenachse $x x'$. Drückt man nun die Gewichte der einzelnen Stäbe durch ihre Länge a aus und bezeichnet die Abstände ihrer Mittelpunkte von $x x'$ der Reihe nach mit y_1, y_2, y_3, \dots so ist die Summe ihrer Momente

$$M = a y_1 + a y_2 + a y_3 + \dots = a (y_1 + y_2 + y_3 + \dots),$$

oder wenn man mit $\Sigma (y)$ die Summe aller y bezeichnet,

$$M = a \Sigma (y).$$

Die Resultante R aller in den Mittelpunkten der Stäbe angreifenden Stabgewichte ist offenbar gleich dem Gewichte aller Stäbe und weil hier die Stabgewichte durch die Stablängen ausgedrückt wurden, so ist

$$R = \Sigma (a) = l,$$

wobei also l gleich der Summe aller Stablängen ist. Da nun das Moment der Resultante gleich ist der Summe der Momente ihrer Componenten, so wird, wenn wir den Abstand der Resultante l von $x x'$ mit z bezeichnen, die Gleichung bestehen müssen:

$$l z = a \Sigma (y), \text{ woraus } z = \frac{a \Sigma (y)}{l}$$

Um die Summe aller y rasch zu erhalten, beachte man Folgendes: Macht man $BH \parallel x x'$, $CH \perp x x'$, fällt ferner vom Mittelpunkte M des Stabes BC die Senkrechte MN auf $x x'$ und zieht den Radius MO , so ist

$$\triangle B C H \sim \triangle M N O \text{ und daher } B C : B H = M O : M N;$$

es ist aber $BC = a$, $BH = a'$ die Projection von a auf $x x'$, ferner $MO = r$ der Halbmesser des dem Stabsysteme eingeschriebenen Kreises und $MN = y$, es ist also

$$a : a' = r : y, \text{ woraus } a y = a' r.$$

Denkt man sich für sämtliche Stäbe diese Producte gebildet, so erhält man

$$a \Sigma (y) = r \Sigma (a')$$

und da die Summe aller a' gleich der Sehne AG ist, so wird, wenn $AG = s$ gesetzt wird,

$$a \Sigma (y) = r s$$

und es geht hiefür der obige Wert von z über in

$$z = \frac{r s}{l};$$

es ist also der gesuchte Hebelarm $z = OS$ die vierte Proportionale zu den 3 Strecken l , r und s . Die Construction von z ist aus der Fig. 44 ersichtlich. Es ist nämlich $M_1 F = \frac{l}{2}$, $G K \parallel O D$ und

$K S \parallel D F$; da also $K S = \frac{s}{2}$, so verhält sich

$$\frac{l}{2} : \frac{s}{2} = r : z \text{ und}$$

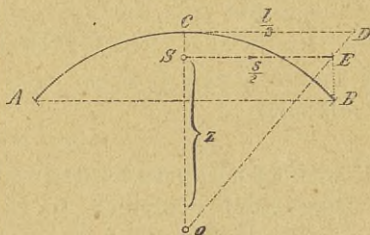
daher ist

$$z = \frac{r s}{l}$$

3. Schwerpunkt krummer materieller Linien. Um den Schwerpunkt eines einfach gekrümmten sehr dünnen homogenen Stabes zu finden, theile man selben in so kleine Abschnitte, dass man dieselben annähernd als geradlinig annehmen kann und suche hiezu den Schwerpunkt wie bei einem gebrochenen Linienzug nach dem unter 1 angegebenen Verfahren.

Ist aber die krumme Linie ein Kreisbogen AB , Fig. 45, so kann man denselben als einen Theil des Umfanges eines regelmäßigen Polygons behandeln und dessen Schwerpunkt nach der bezüglichen Constructionsweise bestimmen. Hiernach wurde in Fig. 45 CD gleich der Länge des halben Kreisbogens gemacht, O mit D verbunden, $BE \parallel OC$ und $ES \parallel CD$ geführt.

Fig. 45.

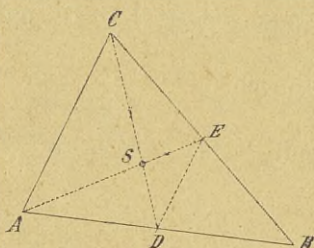


§. 23. Schwerpunkt materieller homogener Flächen.

1. Schwerpunkt einer Dreiecksfläche. Denkt man sich die ganze Dreiecksfläche ABC , Fig. 46, in zu AB parallele, sehr schmale Streifen zerlegt, so liegt der Schwerpunkt jedes dieser Elementarstreifen in seiner Mitte; verbindet man nun den Scheitel C mit dem Halbierungspunkt D der Basis AB , so geht CD durch die Mittelpunkte, respective Schwerpunkte, aller dieser

Elementarstreifen, ist also ein Durchmesser des Dreiecks und geht durch dessen Schwerpunkt. Sucht man nun noch einen Durchmesser des Dreiecks, indem man eine der beiden anderen Dreiecksseiten

Fig. 46.



z. B. die BC in E halbiert und E mit dem gegenüber liegenden Scheitelpunkte A verbindet, so wird der Schwerpunkt der Dreiecksfläche auch in dem Durchmesser A E liegen und es gibt daher der Schnittpunkt S der beiden Durchmesser den gesuchten Schwerpunkt der Dreiecksfläche. Das Dreieck hat 3 Durchmesser und sein Schwerpunkt ist daher der Durchschnittspunkt dieser drei Durchmesser.

Der Schwerpunkt theilt übrigens jeden der drei Durchmesser in zwei Abschnitte, die sich verhalten wie 2 : 1; denn da die Gerade D E die beiden Dreiecksseiten AB und BC halbiert, also in demselben Verhältnisse theilt, so ist sie parallel zu A C und überdies gleich $\frac{A C}{2}$; da ferner die Dreiecke A C S und D E S ähnlich

sind, so ergibt sich die Proportion

$$A C : D E = C S : S D,$$

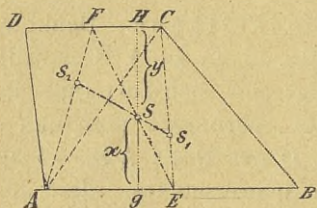
und weil $A C = 2 D E$, so muss auch $C S = 2 S D$ sein, d. h. es verhält sich

$$C S : S D = 2 : 1.$$

2. Schwerpunkt eines Parallelogramms. Zieht man die Diagonalen desselben, so halbiert jede die zur anderen parallelen Sehnen, es sind somit die beiden Diagonalen Durchmesser und daher ihr Durchschnittspunkt der Schwerpunkt des Parallelogramms.

3. Schwerpunkt eines Trapezes. Die Verbindungslinie

Fig. 47.



EF der Mittelpunkte der beiden parallelen Seiten A B und C D des Trapezes Fig. 47 ist ein Durchmesser desselben, denn sie halbiert alle in Richtung der beiden parallelen Seiten des Trapezes gezogenen Sehnen, enthält also den Schwerpunkt des Trapezes. Um nun noch

eine zweite Schwerlinie des Trapezes zu erhalten, ziehe man eine Diagonale; z. B. jene AC , bestimme die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden dadurch entstehenden Dreiecke, so ist offenbar die Verbindungslinie $S_1 S_2$ eine Schwerlinie und daher ihr Schnittpunkt S mit dem Durchmesser EF der gesuchte Schwerpunkt des Trapezes.

Eine noch einfachere Construction des Schwerpunktes eines Trapezes ergibt sich aus Folgendem. Es sei, Fig. 47, die Basis $AB = a$, jene $CD = b$, die Höhe $GH = h$, $GS = x$ und $SH = y$. Beachtet man nun, dass das Moment der ganzen Trapezfläche gleich ist der Summe der Momente der beiden Dreiecksflächen ABC und ACD in Bezug auf dieselbe Momentenachse, so erhält man, wenn man diese Momente zuerst auf die Basis AB und dann auf jene CD bezieht, die folgenden zwei Gleichungen:

$$\frac{a h}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{b h}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{(a + b) h}{2} \cdot x$$

$$\text{und } \frac{a h}{2} \cdot \frac{2}{3} h + \frac{b h}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{(a + b) h}{2} \cdot y,$$

in diesen beiden Gleichungen bedeutet $\frac{a h}{2}$ den Inhalt des Drei-

eckes ABC , $\frac{h}{3}$ den senkrechten Abstand seines Schwerpunktes

S_1 von AB und somit $\frac{2}{3} h$ den Abstand von CD ; ferner $\frac{b h}{2}$

den Inhalt des Dreieckes ACD , $\frac{2}{3} h$, respective $\frac{h}{3}$, die Abstände

seines Schwerpunktes S_2 von CD , endlich $\frac{(a + b) h}{2}$ den Inhalt

des ganzen Trapezes und x , beziehungsweise y , die Abstände seines Schwerpunktes S von AB und CD . Werden die beiden Gleichungen

durch $\frac{h}{2}$ dividiert, so erhält man:

$$\frac{a h}{3} + \frac{2}{3} b h = (a + b) x$$

$$\text{und } \frac{2}{3} a h + \frac{b h}{3} = (a + b) y;$$

$$\text{hieraus } x = \frac{a + 2 b}{a + b} \cdot \frac{h}{3} \text{ und } y = \frac{2 a + b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}.$$

Da ferner das Dreieck $E G S$ mit jenem $F H S$ ähnlich ist, so verhält sich

$$E S : S F = x : y,$$

und wenn für x und y die obigen Werte eingesetzt werden,

$$E S : S F = (a + 2b) : (2a + b),$$

oder
$$E S : S F = \left(\frac{a}{2} + b\right) : \left(a + \frac{b}{2}\right).$$

Macht man also in Fig. 48 $A J = b$ und $C K = a$ und verbindet J mit K , so wird $E J = \frac{a}{2} + b$ und $F K = a + \frac{b}{2}$; es verhält sich daher auch

$$E S : S F = E J : F K.$$

Hiernach ergibt sich zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Trapezes die folgende einfache Construction:

Man verlängere jede der beiden parallelen Seiten um die Länge der anderen, aber nach entgegengesetzten Richtungen, mache also $A J = b$ und $C K = a$, so schneidet die Verbindungslinie $J K$ den Durchmesser $E F$ im Schwerpunkte S des Trapezes.

Fig. 48.

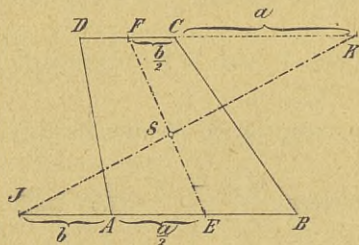
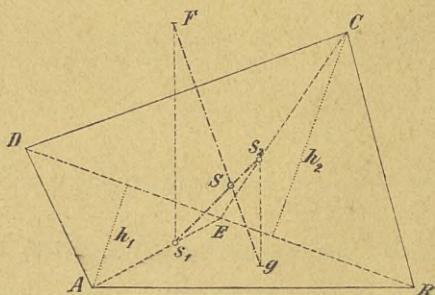


Fig. 49.

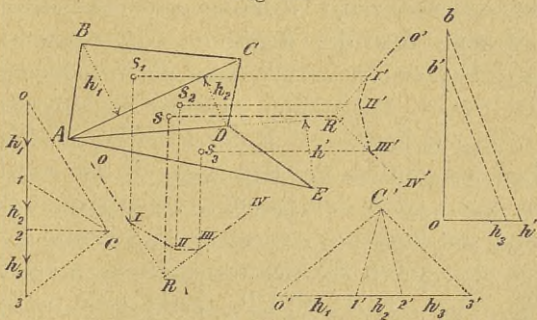


4. Schwerpunkt einer beliebigen Vierecksfläche. Man theilt das Viereck $A B C D$, Fig. 49, zunächst durch eine Diagonale $B D$ in zwei Dreiecke, sucht deren Schwerpunkte S_1 und S_2 und erhält somit in der Geraden $S_1 S_2$ eine Schwerlinie. Um nun noch eine zweite Schwerlinie zu erhalten, könnte man die andere Diagonale $A C$ ziehen, die Schwerpunkte S_3 und S_4 der beiden Dreiecke $A B C$ und $A C D$ aufsuchen und hätte dann in $S_3 S_4$ die zweite Schwerlinie und somit im Schnittpunkte S der beiden Schwerlinien den Schwerpunkt des Viereckes. Es ist aber

einfacher nur eine Schwerlinie $S_1 S_2$ zu bestimmen und diese nach dem umgekehrten Verhältnisse der Gewichte oder Inhalte der beiden Dreiecke $A B D$ und $B C D$ zu theilen. Man hat sich nämlich in S_1 und S_2 die Gewichte, respective die Inhalte, dieser Dreiecke als parallele Kräfte wirkend zu denken und braucht daher nur den Angriffspunkt S ihrer Resultante, der offenbar mit dem gesuchten Schwerpunkt des Trapezes zusammenfällt, zu bestimmen. Da aber die beiden Dreiecke $A B D$ und $B C D$ eine gemeinschaftliche Basis haben, so werden sich ihre Inhalte, wie ihre Höhen verhalten. Die in S_1 und S_2 angreifenden Dreiecksgewichte verhalten sich also wie die Dreieckshöhen h_1 und h_2 und da die Resultante zweier parallelen Kräfte h_1 und h_2 die Verbindungslinie $S_1 S_2$ ihrer Angriffspunkte im umgekehrten Verhältnisse ihrer Componenten theilt, so wurde die Verticale $S_1 F = h_2$ und die Verticale $S_2 G = h_1$ gemacht und im Schnittpunkte der Verbindungslinie $F G$ mit der Schwerlinie $S_1 S_2$ der Schwerpunkt des Trapezes erhalten.

5. Schwerpunkt einer beliebigen Vielecksfläche. Um den Schwerpunkt eines unregelmäßigen Vieleckes zu erhalten, zerlegt man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke, bestimmt hierauf die Schwerpunkte dieser Dreiecke und sucht den Mittelpunkt der in diesen Schwerpunkten angreifenden parallelen Dreiecks-

Fig. 50.



gewichte, beziehungsweise Dreiecksinhalte, nach § 11. Um jedoch die Construction zu vereinfachen, wird man die sämtlichen Dreiecke auf eine gemeinschaftliche Basis beziehen und statt der Dreiecksinhalte die der gemeinschaftlichen Basis entsprechenden Dreieckshöhen, oder bestimmte Theile dieser reducierten Dreieckshöhen, in Verwendung nehmen. In Fig. 50 wurde hiernach der

Schwerpunkt eines unregelmäßigen Fünfeckes bestimmt. Dasselbe wurde von A aus durch die Diagonalen A C und A D in drei Dreiecke zerlegt, hierauf wurden die Schwerpunkte S_1 , S_2 und S_3 derselben auf die bekannte Weise bestimmt und durch diese Schwerpunkte die Parallelen S_1 I, S_2 II, S_3 III gelegt, in welchen die den Dreiecksgewichten proportionalen Kräfte zuerst wirksam angenommen wurden. Die den beiden Dreiecken A B C und A C D gemeinschaftliche Diagonale $AC = b$ wurde als die gemeinschaftliche Basis gewählt, so dass die auf diese Basis bezogenen Dreieckshöhen h_1 und h_2 schon die in den Schwerpunkten S_1 und S_2 angreifenden parallelen Kräfte repräsentieren. Um nun auch statt der auf die Basis $AD = b'$ bezogenen Dreieckshöhe h' des dritten Dreieckes die auf die gemeinschaftliche Basis $AC = b$ reducierte Dreieckshöhe h_3 zu erhalten, hat man h_3 offenbar aus der Gleichung $b' h' = b h_3$ oder aus der Proportion

$$b : h' = b' : h_3$$

zu construieren.

Man trage nämlich vom Scheitel O eines beliebigen Winkels auf dem einen Schenkel b und b' , dann auf dem anderen h' , verbinde den Endpunkt von h' mit jenem von b und ziehe durch den Endpunkt von b' zu dieser Verbindungslinie eine Parallele, welche den Endpunkt von h_3 auf dem Schenkel von h' schneidet. Aus den auf dieselbe Basis b reducierten Dreieckshöhen h_1 , h_2 und h_3 bildet man nun die Kraftlinie $\overline{O3}$, indem man $\overline{O1} = h_1$, $\overline{12} = h_2$, $\overline{23} = h_3$ macht, wählt dann einen beliebigen Kräftepol C, construirt das den Polstrahlen parallele Seilpolygon O I II III IV und ermittelt den Schnittpunkt R der äußersten Seilpolygonseiten, durch welchen bekanntlich die Resultante R der parallelen Kräfte geht, in der aber auch der gesuchte Schwerpunkt des Vieleckes liegt. Um nun auf dieselbe Art noch eine zweite Schwerlinie zu erhalten, legt man durch die Schwerpunkte S_1 , S_2 , S_3 der Dreiecke die Parallelen S_1 I', S_2 II', S_3 III', denkt sich in denselben die Kräfte h_1 , h_2 , h_3 wirkend, bildet die zugehörige Kraftlinie $O' 3'$, wählt wieder einen beliebigen Kräftepol C' und construirt das den Polstrahlen parallele Seilpolygon O' I' II' III' IV', das den Punkt R' bestimmt, durch welchen die Schwerlinie R' geht. Im Schnittpunkt der beiden Schwerlinien erhält man also den gesuchten Schwerpunkt S.

6. Schwerpunkt einer **I** förmigen Fläche. Da diese in Fig. 51 dargestellte Fläche eine Symmetrieachse AB hat, welche durch den Schwerpunkt geht, so braucht man nur noch eine andere Schwerlinie dieser

Fläche zu construieren. Man erhält dieselbe am einfachsten durch die Bestimmung der Resultante zu den in den Schwerpunkten S_1 , S_2 , S_3 der drei Rechtecke, in welche sich die ganze Figur zerlegen lässt, angreifenden Gewichte. Da sich aber diese Gewichte wie die Inhalte der drei Rechtecke verhalten, so kann man wieder die Gewichte durch die Flächeninhalte ausdrücken. Um aber nicht diese Inhalte bestimmen zu müssen, wurden alle Rechtecke auf eine gemeinschaftliche Basis und zwar auf jene b_1 des ersten Rechteckes reduciert und alsdann statt der Inhalte die reducierten Höhen, beziehungsweise die Hälften derselben, als die in S_1 , S_2 , S_3 angreifenden parallelen Kräfte in Betracht gezogen. Ist also h_1 die Höhe des ersten Rechteckes und sind h_2 und h_3 die auf die Basis b_1 reducierten Höhen des zweiten und dritten Rechteckes, so ist im Kräfteplane

$$\overline{O1} = \frac{1}{2} h_1, \quad \overline{12} = \frac{1}{2} h_2, \quad \overline{13} = \frac{1}{2} h_3.$$

Es wird nun ein beliebiger Kräftepol C gewählt und das den Pohlstrahlen des Kräfteplanes parallele Seilpolygon O I II III IV construirt, dessen äußerste Seiten einen Punkt R der gesuchten Resultante zu den drei parallelen Kräften bestimmen; führt man also durch R die Parallele zur Krafrichtung, so gibt diese im Schnittpunkte mit AB den gesuchten Schwerpunkt S.

7. Schwerpunkt eines Kreisbogens. Denkt man sich den Kreisbogen O A C B, Fig. 52, in unendlich viele Dreiecke zerlegt, deren Scheitel sämmtlich im Mittelpunkte O des Kreisbogens liegen, während die Grundlinien derselben unendlich kleine Stücke des Bogens A C B sind, so liegen die Schwerpunkte

Fig. 51.

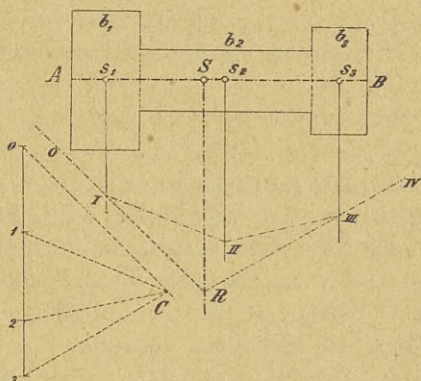
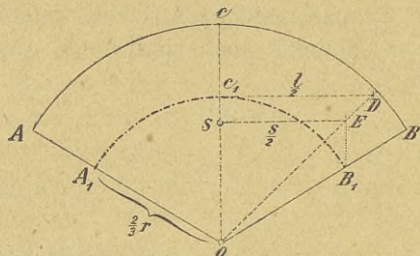


Fig. 52.

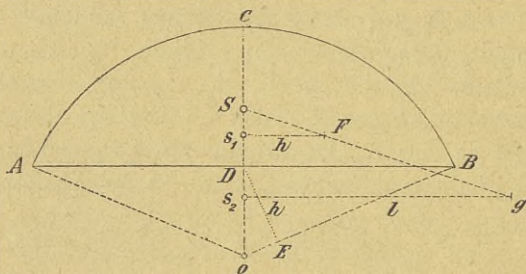


aller dieser Dreiecke im Bogen $A_1 C_1 B_1$, welcher von O aus mit $\frac{2}{3}r$ beschrieben wurde.

Der Schwerpunkt S dieses Bogens ist also der Schwerpunkt des ganzen Kreisabschnittes und wurde nach dem obigen, dem Kreisbogen geltenden Verfahren construiert.

8. Schwerpunkt eines Kreisabschnittes. Da das Gewicht des Kreisabschnittes ACB , Fig. 53, gleich ist der Differenz aus den Gewichten des Kreisabschnittes $ACBO$ und des Dreieckes ABO , so wird sich der Schwerpunkt S des Kreisabschnittes als der Angriffspunkt der Resultante aus den nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Gewichten des genannten Kreisabschnittes und des Dreieckes ergeben. Es sind also zunächst die Schwerpunkte S_1 und S_2 des Kreisabschnittes und des Dreieckes, sowie deren

Fig. 53.



Gewichte zu bestimmen und ist alsdann der Angriffspunkt der Resultante zweier antiparallelen Kräfte nach dem bekannten Verfahren aufzusuchen. Statt der in S_1 und S_2 angreifenden Gewichte können wir aber wieder die zugehörigen Flächeninhalte oder aliquote Theile derselben in Betracht ziehen. Wir lassen z. B. in S_1 nur den halben Inhalt des Kreisabschnittes und ebenso in S_2 nur den halben Inhalt des Dreiecks einwirken. Ist l die Länge des halben Bogens ACB und r sein Radius, so ist die in S_1 angreifende Kraft proportional $P_1 = l \cdot r$; nehmen wir ferner OB als Basis des Dreieckes OBD an und bezeichnen dessen Höhe DE

mit h , so ist die in S_2 angreifende Kraft proportional $P_2 = r \cdot h$; es verhält sich also $P_1 : P_2 = 1 : h$; nach §. 8 verhält sich auch

$$P_1 : P_2 = S S_2 : S S_1,$$

somit auch

$$1 : h = S S_2 : S S_1.$$

Man ziehe also durch S_1 und S_2 zwei Parallele, mache $S_1 F = h$; $S_2 G = l$ und verbinde G mit F , so schneidet diese Verbindungslinie die Symmetralachse OC in dem gesuchten Schwerpunkt S .

9. Schwerpunkt eines Kreisringstückes. Da das Ringstück $ABED$, Fig. 54, gleich ist der Differenz der beiden Kreisabschnitte OAB und ODE , so wird man den Schwerpunkt desselben im Angriffspunkte der Resultante aus den in den Schwerpunkten S_1, S_2 der beiden Kreisabschnitte nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Gewichten, respective

Flächeninhalten dieser beiden Kreisabschnitte finden. Bezeichnet man die Länge des Halbbogens BC mit l , den Radius OC desselben mit r , ferner die Länge des Halbbogens EF mit l_1 und des zugehörigen Halbmessers OF mit r_1 , so ist der Inhalt des Kreisabschnittes $OAB = l \cdot r$ und jener des Kreisabschnittes $ODE = l_1 \cdot r_1$. Es verhalten sich also die in S_1 und S_2 angreifenden nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte P_1 und P_2 wie $l \cdot r : l_1 \cdot r_1$. Setzt man aber $l_1 r_1 = r x$, so ergibt sich

$$P_1 : P_2 = 1 : x.$$

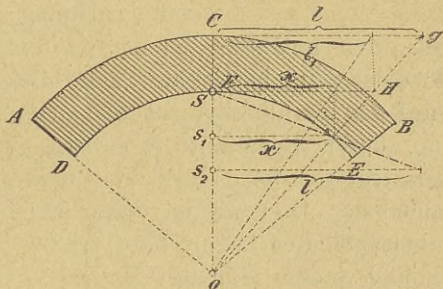
Die unbekannte Strecke x lässt sich aber aus der Gleichung $l_1 r_1 = r x$, oder aus der Proportion $r : l_1 = r_1 : x$ nach der aus der Figur ersichtlichen Weise leicht construieren. Da nun überdies nach §. 8

$$P_1 : P_2 = S S_2 : S S_1,$$

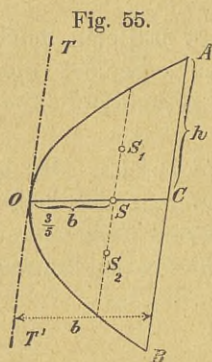
so ergibt sich zur Bestimmung von S die Proportion

$$1 : x = S S_2 : S S_1.$$

Fig. 54.



10. Schwerpunkt eines Parabelsegmentes. Um zunächst einen Durchmesser des Parabelsegmentes ABC , Fig. 55, zu erhalten, ziehe man zur Sehne AB irgend eine parallele Sehne,



halbiere dieselbe und verbinde deren Halbierungspunkt mit dem Halbierungspunkt von AB , so gibt die Verbindungslinie bereits den gesuchten Durchmesser OC , in welchem bekanntlich der Schwerpunkt der Fläche liegt. Um nun eine zweite Schwerlinie des Parabelsegmentes graphisch zu finden, könnte man das Parabelsegment in sehr viele zu AB parallele Streifen von sehr geringer aber constanter Breite zerlegen; denn man könnte die einzelnen Streifen als Trapeze in Verwendung nehmen, deren Gewichte oder Flächen-

inhalte den mittleren Sehnen der einzelnen Streifen proportional sind; diese oder bestimmte Theile dieser mittleren Sehnen würden die auf das Parabelsegment wirkenden parallelen Kräfte repräsentieren, deren Resultante R mittels des Kräfte- und Seilpolygons zu construieren wäre. Im Schnittpunkte dieser Resultante mit dem Durchmesser OC würde dann offenbar der Schwerpunkt S des Parabelsegmentes liegen. Man erhält ihn aber viel einfacher durch Rechnung, indem man das Moment des ganzen Parabelsegmentes in Bezug auf die zu AB parallele Tangente TT' gleich setzt der Summe der Momente aller der zu AB parallelen Elementarstreifen des Parabelsegmentes bezüglich derselben Momentenachse TT' . Aus dieser Gleichung ergibt sich durch weitere Rechnung, auf die

wir hier nicht eingehen wollen, dass $OS = \frac{3}{5}b$, wenn $OC = b$ ist.

Der Flächeninhalt F des Parabelsegmentes ist bekanntlich durch

$$F = \frac{4}{3} b h \text{ bestimmt, wobei } h = \frac{AB}{2}.$$

Die Schwerpunkte S_1, S_2 der beiden halben Parabelsegmente OAC und OBC liegen in der durch S zu AB parallel gezogenen

Sehne und zwar ist $SS_1 = SS_2 = \frac{3}{8}h$. Der Inhalt F_1 eines halben

Parabelsegmentes ist offenbar gleich $\frac{F}{2}$, also $F_1 = \frac{2}{3} b h$.

parallelen Strahlen gezogen, längs welcher die den Inhalten der einzelnen Streifen proportionalen Kräfte wirken, und zu diesen zwei Kräftesystemen wurde mittels der entsprechenden Kräfte- und Seilpolygone $O\ 1\ 2\ \dots\ 6$, $O\ I\ II\ \dots\ VII$ und $O'\ 1'\ 2'\ \dots\ 6$, $O'\ I'\ II'\ \dots\ VII'$ die Lage der bezüglichen Resultante durch die Schnittpunkte R und R' der äußersten Seiten der beiden Seilpolygone bestimmt. Im Schnittpunkte S der beiden Resultanten R , R' ergab sich der gesuchte Schwerpunkt der ganzen Figur.

Anmerkung. Den Schwerpunkt einer unregelmäßig begrenzten Fläche erhält man am raschesten und genauesten auf empirischem Wege, indem man sie aus Karten- oder stärkerem Zeichenpapier herstellt und zwei Schwerlinien durch Ausbalancieren auf einer Kante bestimmt. Im Schnittpunkt der beiden Schwerlinien liegt offenbar der gesuchte Schwerpunkt.

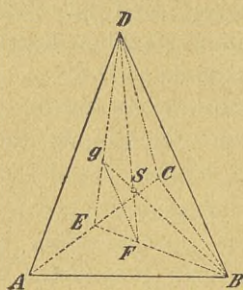
§. 24. Schwerpunkt homogener Körper.

1. Schwerpunkt eines Prismas oder eines Cylinders. Derselbe liegt im Halbierungspunkt derjenigen Linie, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet, denn man kann sich sowohl das Prisma, als auch den Cylinder in unendlich viele zu den Grundflächen parallele Scheiben von gleichem Gewicht zerlegt denken, deren Schwerpunkte in der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Grundflächen liegen, die also eine Schwerlinie ist. Da nun auf sämtliche Punkte dieser Schwerlinie gleiche und parallele Kräfte, nämlich die Gewichte der unendlich dünnen Scheiben, die als materielle Flächen aufzufassen sind, wirken, so wird der Angriffspunkt dieser Kräfte, d. i. der gesuchte Schwerpunkt S im Mittelpunkte dieser Schwerlinie liegen müssen.

2. Schwerpunkt einer Pyramide oder eines Kegels. Derselbe liegt in der Verbindungslinie des Scheitels mit dem Schwerpunkte der Basis der Pyramide und zwar in $\frac{1}{4}$ der Länge dieser Verbindungslinie von der Basis aus.

Um dies einzusehen, denke man sich zunächst eine dreiseitige Pyramide $ABCD$, Fig. 58, parallel zur Basis ABC in unendlich viele, sehr dünne Schichtchen (materielle Dreiecke) zerlegt, so liegen die Schwerpunkte aller dieser materiellen Dreiecke in der Verbindungslinie DF , welche den Scheitel D der Pyramide mit

Fig. 58.



dem Schwerpunkte F ihrer Basis verbindet; es muss daher der gesuchte Schwerpunkt S in DF liegen. Um nun noch eine zweite Schwerlinie zu erhalten, verbinde man den Schwerpunkt eines der anderen Begrenzungsdreiecke der Pyramide mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt, z. B. den Schwerpunkt G des Dreieckes ACD mit dem Endpunkte B, so geht aus demselben Grunde wie vorhin auch BG durch den Schnittpunkt S der Pyramide und er muss also im Schnittpunkt der beiden Schwerlinien DF und BG liegen. Um FS oder DS zu bestimmen, beachte man, dass $EF = \frac{1}{3} EB$ und ebenso $EG = \frac{1}{3} ED$, dass also im Dreiecke BDE, die Gerade $FG \parallel BD$ ist, indem sie die beiden Dreiecksseiten EB und ED in demselben Verhältnisse, nämlich wie 1:2 theilt. Hieraus folgt weiter, dass

$$FG = \frac{BD}{3} \text{ und } \triangle FGS \sim SBD,$$

daher $FS : SD = FG : BD = 1 : 3$.

Der Schwerpunkt S theilt also die Verbindungslinie DF in dem Verhältnisse 1:3; es ist demnach wirklich

$$FS = \frac{1}{4} DF.$$

Dieselbe Relation gilt auch für jede mehr als dreiseitige Pyramide, denn denkt man sich eine mehrseitige Pyramide dadurch in dreiseitige zerlegt, dass man durch ihren Scheitel und durch die von einem Eckpunkte ihrer Basis in der letzteren gezogenen Diagonalen Ebenen legt, so liegen die Schwerpunkte aller dieser dreiseitigen Pyramiden in jener zur Basis parallelen Ebene, welche die Entfernung der Basis vom Scheitel im Verhältnisse von 1:3 theilt. In dieser Ebene liegt daher auch der Schwerpunkt der ganzen Pyramide. Derselbe liegt aber auch in der Verbindungslinie, welche den Schwerpunkt der ganzen Basis mit dem Scheitel verbindet, weshalb für jede Pyramide und somit auch für den Kegel der Satz gilt: „Der Schwerpunkt theilt die Verbindungslinie des Schwerpunktes der Basis mit dem Scheitel der Pyramide oder

nämlich die Dreiecke $O U V$, $O W X$ und $O Y Z$ mit $O A E'$ ähnlich sind, so verhält sich

$$\begin{aligned} O U : O V &= O A : O E' \\ O W : O X &= O A : O E' \\ O Y : O Z &= O A : O E' \end{aligned}$$

und da $O V = O W$, $O X = O Y$ und $O E' = O E$ ist, so ergibt sich aus der Multiplication dieser drei Proportionen

$$O U : O Z = O A^3 : O E^3.$$

Macht man also $S_2 M = O U$, $S_1 L = O Z$ und verbindet M mit L , so schneidet diese Verbindungslinie die Schwerlinie $O J$ in dem Schwerpunkt S des Pyramidenstutzes.

4. Schwerpunkt eines beliebigen Polyeders. Man zerlege den eckigen Körper in Pyramiden, suche deren Schwerpunkte und denke sich in denselben parallele Kräfte angreifend, die den Gewichten, respective den Inhalten der einzelnen Pyramiden proportional sind, suche den Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte nach §. 11, so ist derselbe der Schwerpunkt des ganzen eckigen Körpers.

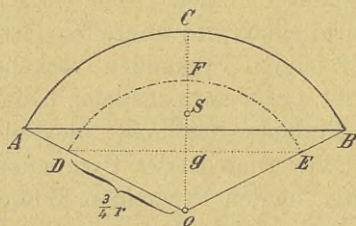
5. Schwerpunkt eines Kugelsectors. Denkt man sich den Kugelsector $O A C B$, Fig. 60, in unendlich viele kleine Pyramiden zerlegt, welche ihre Grundflächen auf der Kugelhaube $A C B$ und ihren Scheitel im Centrum O haben, so befinden sich die Schwerpunkte derselben sämtlich auf der Kugelhaube $D F E$, deren Radius

$$O D = \frac{3}{4} r,$$

wenn $r = O A$ ist. Der Schwerpunkt S dieser Kugelhaube ist also

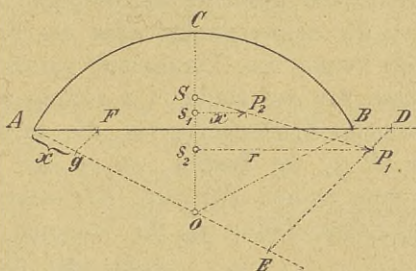
auch der Schwerpunkt des Kugelsectors und liegt offenbar im mittleren Radius $O C$. Um S zu erhalten, betrachte man die Kugelhaube als eine gleichmäßig belastete Fläche und denke sich dieselbe parallel zur Ebene $D E$ in unendlich viele Zonen von gleicher Höhe zerlegt; es sind dann bekanntlich alle diese Zonen flächengleich und ihre Schwerpunkte bilden die gleichmäßig belastete Höhe $G F$, deren Halbierung demnach den gesuchten Schwerpunkt gibt.

Fig. 60.



6. Der Schwerpunkt eines Kugelsegmentes ABC, Fig. 61, wird jedenfalls im mittleren Radius OC liegen. Um S zu erhalten, denken wir uns das Kugelsegment ACB als Differenz des Kugelsectors OACB und des Kegels OAB, bestimmen daher den Schwerpunkt S_1 des Kugelsectors und jenen S_2 des Kegels und suchen den Angriffspunkt der Resultante aus den in S_1 und S_2 angreifenden antiparallelen Kräften P_1 und P_2 , welche den Gewichten, respective den Inhalten des Kugelsectors und des Kegels proportioniert sind.

Fig. 61.



Der Inhalt des Kegelsectors ist gleich $\frac{2}{3} \pi r^2 h$, wenn r den Kugelradius und h die Höhe des Abschnittes bezeichnet, ferner der Inhalt des Kegels gleich $\frac{\pi}{3} h (2r - h) (r - h)$, es verhält sich

$$\begin{aligned} \text{also } P_1 : P_2 &= \frac{2}{3} \pi r^2 h : \frac{\pi}{3} (2r - h) (r - h), \\ &= 2 r^2 : (2r - h) (r - h) \\ &= r : \frac{(2r - h) (r - h)}{2r} \\ &= r : x, \end{aligned}$$

$$\text{wenn } x = \frac{(2r - h) (r - h)}{2r}.$$

Aus dieser Gleichung folgt die Proportion

$$2r : (2r - h) = (r - h) : x,$$

aus welcher sich x , auf die aus der Figur ersichtliche Weise, leicht construieren lässt.

Es ist nämlich $AD = 2r$, $AE = 2r - h$, $AF = r - h$, $FG \parallel DE$ und $AG = x$.

Die weitere Construction von S , d. i. des Angriffspunktes der Resultierenden der in S_1 und S_2 angreifenden antiparallelen Kräfte P_1 und P_2 ist bereits aus früherem bekannt, übrigens auch aus der Figur ohne weiteres ersichtlich.

7. Schwerpunkt eines Paraboloids. Ist AOB, Fig. 62, der Abschnitt eines Rotationsparaboloids, welches durch Rotation des Parabelastes OA und die Achse OX entstanden ist, so liegt zunächst der gesuchte Schwerpunkt S in der Achse OX, weil diese durch die Schwerpunkte aller der Schnittkreise geht, welche man erhält, wenn das Paraboloid parallel zu AB in unendlich dünne Platten von der Dicke Δx zerlegt wird. Stellt EF eine derartige materielle Kreisscheibe vor, die in der Entfernung x_1 von O liegt und ist y_1 ihr Radius, so ist ihr Volumen $v_1 = \pi y_1^2 \Delta x$, und für eine andere derartige Kreisscheibe in der Entfernung x_2 von O und dem Radius y_2 , ihr Volumen $v_2 = \pi y_2^2 \Delta x$; es verhalten sich also die Volumina beider Scheiben, daher auch die Gewichte P_1 und P_2 derselben wie $y_1^2 : y_2^2$. Da sich nun bei der Parabel bekanntlich die Abscissen wie die Quadrate der zugehörigen Ordinaten verhalten, so ergibt sich

$$P_1 : P_2 = x_1 : x_2.$$

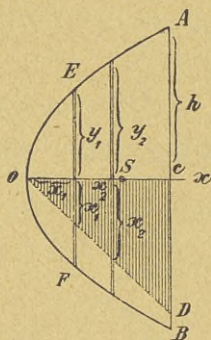
Macht man also $CD = OC$ und zieht OD, so ist die Dreiecksfläche OCD den auf OC wirkenden Schwerkraften proportional und da der Schwerpunkt dieses

Dreieckes vom Scheitel O nur $\frac{2}{3}$ der Drei-

eckshöhe OC entfernt ist, so liegt auch der Schwerpunkt des Paraboloides von O aus gezählt in $\frac{2}{3} OC$, d. h. es ist $OS = \frac{2}{3} OC$.

8. Schwerpunkt eines unregelmäßigen von krummen Flächen begrenzten Körpers. Um den Schwerpunkt eines solchen Körpers zu finden, denke man sich denselben durch parallele Ebenen in eine große Anzahl dünner Scheiben von gleicher Dicke zerlegt und die Dicke so gering gewählt, dass man die Schwerpunkte der Scheiben in den Schwerpunkten der mittleren Schnittflächen dieser Scheiben annehmen und die Volumina, also auch die Gewichte der Scheiben den mittleren Schnittflächen derselben proportional setzen kann. Denkt man sich dann in den Schwerpunkten der Scheiben parallele Kräfte angreifend, welche den Inhalten der mittleren Schnittflächen der Scheiben proportional

Fig. 62.



sind, so ist der Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte, der nach §. 11 zu bestimmen ist, der gesuchte Schwerpunkt.

Bei dieser Zerlegung des von krummen Flächen begrenzten Körpers durch parallele Ebenen werden die beiden äußersten Schichten als Kegel- oder Paraboloidabschnitte behandelt, deren Schwerpunkte nach dem in Nummer 6 oder 7 entwickelten Verfahren zu construieren sind.

Anmerkung. Den Schwerpunkt eines unregelmäßigen Körpers findet man am einfachsten auf empirischem Wege. Da nämlich ein aufgehängter, zur Ruhe gelangter Körper eine solche Lage hat, dass sein Schwerpunkt senkrecht unter dem Aufhängepunkte liegt, so braucht man nur den Körper an zwei verschiedenen Punkten desselben mit einer hinreichend festen Schnur zu verbinden und mittels derselben nach einander zweimal aufzuhängen. Der Punkt, in welchem sich dann die durch den Körper in seiner Ruhelage verlängert gedachten Aufhängeschnüre schneiden, ist offenbar der Schwerpunkt.

VI. Abschnitt.

Wirkung paralleler Kräfte auf einfache
Träger mit gerader Längsachse.

§. 25. Allgemeine Bestimmungen.

Wirken auf einen einfachen Träger oder Balken, welcher frei auf zwei Stützen ruht, beliebig viele äußere Kräfte oder Lasten, die sämmtlich senkrecht zur Längsachse gerichtet sind und mit dieser in einer Ebene — der sogenannten Kraftebene — liegen, so wird dieser Träger auf Biegungsfestigkeit beansprucht und es handelt sich hiebei zunächst darum, die durch die Belastung des Trägers hervorgerufenen Stützendrücke oder Auflagereactionen (D), sowie die in den Querschnitten des Trägers thätigen Scheer- oder Transversalkräfte (V), und endlich die auf die Querschnitte wirkenden Biegungs- oder Angriffsmomente (M) zu bestimmen. Die Belastung des Trägers, d. i. der Inbegriff der äußeren Kräfte heißt eine permanente, wenn sie stets vorhanden ist, dagegen eine temporäre oder veränderliche, wenn sie nur zeitweise wirksam wird.

Bei Brückenträgern bildet das Eigengewicht derselben, dann jenes der Fahrbahn und der Querversteifung die permanente Belastung; dagegen das Gewicht der die Brücke passierenden Verkehrs- lasten die veränderliche Belastung. Bei Dächern wird die veränderliche Belastung der Binder oder Sparren durch den Wind- und Schneedruck erzeugt, während das Eigengewicht der ganzen Dach- construction die permanente Belastung der Binder bildet.

Die äußere Belastung der Träger kann zum Theil über deren ganze Länge gleichmäßig vertheilt sein, zum Theil kann sie aus concentrirten oder Einzellasten bestehen. Die permanente Last kann man bei Brückenträgern und Dachbindern als über die Träger gleichmäßig vertheilt annehmen. Bei Brücken bilden die Raddrücke der Fahrzeuge die Einzellasten.

Wirken die Lasten direct auf die Träger, d. h. liegen sie auf den Trägern unmittelbar auf, so nennt man letztere direct belastet;

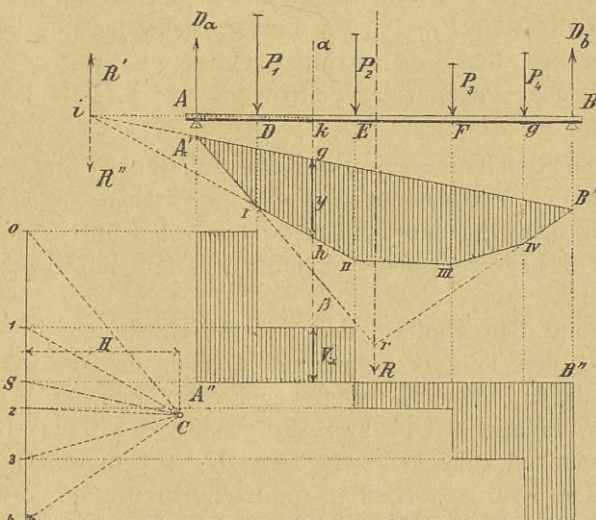
werden dagegen die Lasten durch Längenträger auf Querträger und von diesen erst auf die Hauptträger übertragen, so nennt man die letzteren indirect belastet.

I. Directe Belastung der Träger.

§. 26. Permanente Belastung.

1. Wirkung ruhender Einzellasten. Wirken auf den horizontalen Träger AB , Fig. 63, der mit den beiden Enden auf festen Stützen frei aufliegt, beliebig viele gegebene Einzellasten

Fig. 63.



P_1, P_2, P_3, \dots , so erzeugen sie zunächst in A und B verticale Auflagerdrücke, durch welche die gleichen, aber entgegengesetzt wirkenden Auflagerreaktionen D_α und D_β hervorgerufen werden. Dieselben Auflagerdrücke würden offenbar auch durch die Resultante der auf den Träger wirkenden Einzelkräfte erzeugt werden. Man wird daher die Resultante R aus den gegebenen Einzellasten bestimmen und dieselbe in zwei Componenten zerlegen, deren

lothrechte Richtungslinien durch die Stützpunkte A und B gehen. Man mache also seitwärts $\overline{01} = P_1$, $\overline{12} = P_2$, $\overline{23} = P_3$ und $\overline{34} = P_4$, ziehe von einem beliebigen Kräftepole C die Polstrahlen $C_0, C_1 \dots C_4$ und bilde nach den Regeln des §. 5 das zugehörige Seilpolygon $A' I II III IV B'$, so gibt bekanntlich der Schnittpunkt r der ersten und letzten Seite dieses Seilpolygones einen Punkt der Resultante R, die nun nach §. 13 in die beiden zu ihr parallelen in A und B angreifenden Stützendrücke zu zerlegen ist. Zu diesem Zwecke zieht man die Schlusslinie $A' B'$ des Seilpolygones und parallel zu ihr den Polstrahl $C S$, welcher die Strecke $\overline{04} = R$ in die beiden Stützendrücke $\overline{0S}$ und $\overline{S4}$ zerlegt.

Da nun diese Stützendrücke gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Auflagerreactionen hervorrufen, so muss also $4\overline{S} = Db$ und $\overline{S0} = Da$ sein. Diese Auflagerreactionen halten offenbar den gegebenen Kräften P_1, P_2, P_3 und P_4 das Gleichgewicht; denn sowohl der aus allen diesen Kräften gebildete Kräftezug $01234S0$ als auch das zugehörige Seilpolygon $A' I II III IV B'$ sind geschlossen.

Die auf den Träger einwirkenden äußeren Kräfte suchen den Träger in den Verticalebenen der Längsachse zu biegen und müssen für den Gleichgewichtszustand mit den durch die Biegung des Trägers hervorgerufenen inneren Kräften im Gleichgewichte stehen.

Um nun den Einfluss der äußeren Kräfte auf irgend einen Querschnitt des Trägers kennen zu lernen, denken wir uns den letzteren durch einen in beliebiger Entfernung von A geführten lothrechten Schnitt $\alpha \beta$ in zwei Fragmente A k und k B getheilt und untersuchen zunächst, wie sich die auf diesen Querschnitt einwirkenden Kräfte verhalten, je nachdem wir nur die auf das linke, oder nur die auf das rechte Trägerfragment thätigen Kräfte in Betracht ziehen. Auf das linke Fragment wirkt die Auflagerreaction $Da = S0$ und die Last $P_1 = \overline{01}$; die Resultante R' dieser beiden Kräfte ist der Größe und Richtung nach durch $\overline{S1}$ gegeben. Auf das rechte Trägerfragment k B wirken die Kräfte $P_2 = \overline{12}$, $P_3 = \overline{23}$, $P_4 = \overline{34}$, und die Auflagerreaction $Db = \overline{4S}$; es gibt $\overline{1S}$ die Größe und Richtung ihrer Resultante R'', deren Lage wieder durch denselben Punkt i bestimmt ist, in welchem sich die

zugehörigen Seilpolygonseiten durchschneiden. Die Resultanten R' und R'' , der beziehungsweise auf das linke oder rechte Trägerfragment wirkenden Kräfte, sind also gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen in derselben Geraden, halten sich also das Gleichgewicht. Da ferner das Moment von R' bezüglich des Querschnittes $\alpha\beta$ durch $R' \cdot \overline{ik}$ und jenes von R'' , bezüglich desselben Querschnittes, durch $-R'' \cdot \overline{ik}$ bestimmt ist, so folgt auch, dass wegen $R' = -R''$, $R' \cdot \overline{ik} - R'' \cdot \overline{ik} = 0$, oder dass

$$R' \cdot \overline{ik} = R'' \cdot \overline{ik}.$$

Aus dieser Betrachtung ergibt sich also der wichtige Schluss, dass es bei der Bestimmung der auf irgend einen Querschnitt wirkenden Transversalkräfte oder Drehungsmomente gleichgiltig ist, ob man die Resultante aller der links oder rechts vom fraglichen Querschnitte wirkenden Kräfte in Betracht zieht.

Es folgt dies auch schon aus der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung der auf den Träger einwirkenden äußeren Kräfte; denn soll sich der Träger unter dem Einflusse aller der auf ihn wirkenden äußeren Kräfte im Gleichgewichte befinden, so müssen die Kräfte, die auf den einen Theil des Trägers wirken, durch jene, welche auf den anderen Theil desselben wirken, aufgehoben werden und es muss die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte für jeden Punkt ihrer Ebene gleich Null sein, daher muss also auch das Gesamtdrehungsmoment der Kräfte die auf einen Theil des Trägers wirken, bezüglich des gemeinschaftlichen Querschnittes ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet sein als das Gesamtdrehungsmoment der auf den anderen Trägertheil wirkenden Kräfte.

Wir wollen nun mittels des Kräfte- und Seilpolygones die in beliebigen Querschnitten durch die äußeren Kräfte hervorgerufenen Transversalkräfte und Bieugungsmomente bestimmen, wobei wir im allgemeinen vom linken Auflager vorgehen wollen.

a) Bestimmung der Transversalkräfte V . Für den Querschnitt $\alpha\beta$ ist die transversale oder verticale Schubkraft V durch die Resultante R' aus allen links von $\alpha\beta$ wirkenden Kräften, also durch $D_a - P_1 = S_1$ und ihre Lage durch den Punkt i bestimmt, in welchem sich die vom Querschnitt $\alpha\beta$ getroffenen

Polygonseiten schneiden. Innerhalb der Strecke zwischen je zwei aufeinander folgenden Belastungspunkten ist die Transversalkraft constant. Bezeichnet man nämlich die innerhalb der Strecken A D, D E, E F, F G und G B herrschenden Transversalkräfte der Reihe nach mit V_0, V_1, V_2, \dots so ist

$$V_0 = D_a = \overline{S0},$$

$$V_1 = D_a - P_1 = \overline{S0} - \overline{01} = \overline{S1},$$

$$V_2 = D_a - P_1 - P_2 = \overline{S0} - \overline{01} - \overline{12} = \overline{S2}$$

u. s. w., d. h. die den aufeinander folgenden Querschnitten entsprechenden Transversalkräfte werden durch die Abstände des Punktes S von den Anfangspunkten jener Kräfte im Kräftepolygone gemessen, welche rechts von den betreffenden Querschnitten liegen. Hiernach wurden in Fig. 63 die Transversalkräfte aus dem Kräfteplane auf die Querschnittsebenen der aufeinander folgenden Belastungspunkte D, E, F . . . projiciert.

b) Bestimmung der Momente M. Das Biegungs- oder Drehmoment M für den Querschnitt $\alpha\beta$ wird offenbar durch $M = R' \cdot \overline{ik} = \overline{S1} \cdot \overline{ik}$ erhalten, wenn \overline{ik} auf dem Querschnitte $\alpha\beta$ senkrecht steht. Berücksichtigt man nun, dass die Dreiecke igh und $S1c$ ähnlich sind und dass sich in ähnlichen Dreiecken die Grundlinien wie die Höhen verhalten, so ergibt sich, wenn $\overline{gh} = y$ und $\overline{S1} = R'$ als die Grundlinien, ferner \overline{ik} und die Poldistanz H als die zugehörigen Dreieckshöhen gewählt werden, die Proportion

$$y : \overline{S1} = \overline{ik} : H, \text{ woraus } \overline{S1} \cdot \overline{ik} = H \cdot y.$$

Das Moment M für einen beliebigen Querschnitt $\alpha\beta$ ist sonach gleich dem Producte aus der Poldistanz H in die verticale Ordinate y des Seilpolygones im betreffenden Querschnitte, also

$$M = H \cdot y,$$

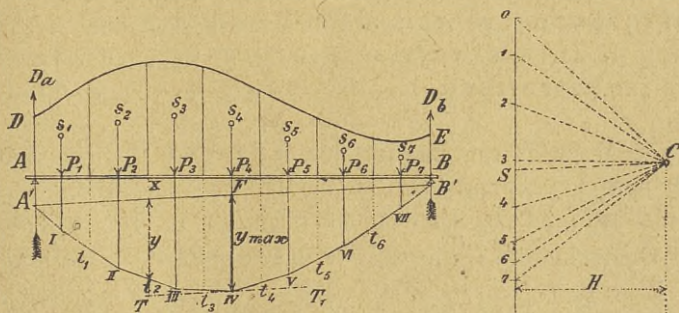
wobei die Maßzahl von H nach dem Kräftemaßstabe und jene von y nach dem Längenmaßstabe zu bestimmen ist. Wählt man überdies die willkürlich angenommene Poldistanz H als Kraft-einheit, so wird $M = y$; es lassen sich also in diesem Falle die Momente durch die Ordinaten des geschlossenen Seilpolygones direct darstellen und man nennt daher die vom Seilpolygone und seiner Schlusslinie begrenzte, in der Figur schraffierte Fläche die Momentenfläche.

Ein Blick auf das Seilpolygon belehrt uns auch, dass die größten Momente auf jene Querschnitte wirken, die durch die Belastungspunkte gehen und dass daher das absolute Maximum des Biegemomentes unter jenem Belastungspunkte liegt, für welchen y zum Maximum wird. Man nennt diesen Punkt den Maximalmomentenpunkt, derselbe wird offenbar erhalten, wenn man parallel zur Schlusslinie $A'B'$ des Seilpolygones an dasselbe eine Tangente zieht. Falls eine Polygonseite zur Schlusseite parallel sein sollte, so bleibt das Moment innerhalb der ganzen Länge dieser Seite constant. Vor dem Maximalmomentenpunkte liegt die zugehörige Transversalkraft links vom betreffenden Querschnitte und ist nach oben gerichtet, hat also einen positiven Drehungssinn. Am Auflager ist $y = 0$, also auch $M = 0$, dagegen die Transversalkraft gleich dem Stützdruck D_a .

Wir ersehen aus dem Gesagten, dass die entwickelten Eigenschaften des Seilpolygones dasselbe zur Bestimmung der Momente außerordentlich geeignet machen und haben nur noch zu erwähnen, dass die für die Transversalkräfte und Momente verticaler Kräfte entwickelte Bestimmungsweise, ebenso für parallele Kräfte überhaupt gilt; nur wird man statt der Bezeichnung „Verticalrichtung“ oder „verticaler Ordinate“ die Worte „Kraftrichtung“ und „die zur Kraftrichtung parallele Ordinate“ zu gebrauchen haben.

2. Wirkung einer continuierlichen ruhenden Belastung. Ist die Belastung des Trägers AB , Fig. 64, über seine

Fig. 64.



ganze Länge continuierlich vertheilt, so handelt es sich zunächst um die graphische Darstellung dieser Belastung. Um dieselbe zu

erhalten, wird man in jedem Punkte der Trägerachse die jeweilige Belastung p pro Längeneinheit des Trägers als Ordinate auftragen, so dass die auf ein Element der Trägerachse wirkende Belastung durch das Product aus diesem Elemente und der zugehörigen Ordinate dargestellt wird. Die Curve DE, welche die Endpunkte aller dieser Ordinaten verbindet, heißt die Belastungscurve; die zwischen ihr und dem Träger befindliche Fläche ABED stellt dann die Belastungsfläche und der Inhalt dieser Fläche die ganze Belastung des Trägers vor. Um nun die durch diese Belastung hervorgerufenen Auflagerreactionen D_a und D_b , sowie die auf beliebige Querschnitte des Trägers wirkenden Transversalkräfte und Momente bestimmen zu können, wird man wieder das zugehörige Kräfte- und Seilpolygon zu construieren haben. Zu diesem Zwecke theile man die Belastungsfläche in verticale Streifen von gleicher, aber so geringer Breite, dass man den Schwerpunkt jedes einzelnen Streifens in seiner mittleren Höhe und den Inhalt jedes Streifens dieser mittleren Höhe proportional annehmen kann. Da nun die mittleren Höhen der Streifen auch mit den durch diese Streifen dargestellten Lasten P_1, P_2, P_3, \dots in gleichem Verhältnisse stehen, so kann man, bei entsprechender Veränderung des Kräftemaßstabes, die in den Schwerpunkten s_1, s_2, s_3, \dots angreifenden Gewichte durch die mittleren Höhen, oder durch aliquote Theile derselben darstellen. In Fig. 64 wurden nur die Hälften dieser Höhen zur Darstellung der Kräfte $P_1 = \overline{01}$, $P_2 = \overline{12}$, $P_3 = \overline{23}, \dots$ benützt, so dass, wenn b die constante Breite der Streifen der Belastungsfläche ist, die Einheit des Kräftemaßstabes gleich $2b$ wird. Der Kräftepol C wurde willkürlich angenommen; $A' I II III \dots B'$ ist das demselben entsprechende Seilpolygon. Dieses Seilpolygon lässt sich nun zur Bestimmung der Transversalkräfte und Momente ebenso benützen wie im vorigen Falle.

a) Bestimmung der Transversalkräfte. Führt man durch den Pol C zur Schlussseite $A' B'$ des Seilpolygones den Parallelstrahl CS, so gibt S0 die in A hervorgerufene Auflagerreaction D_a und $\overline{7S}$ jene D_b am Auflager B. Die in dem beliebigen Querschnitte X wirkende Transversalkraft wird durch

$$V = D_a - (P_1 + P_2) = \overline{S0} - \overline{02} = \overline{S2} \text{ erhalten.}$$

b) Bestimmung der Momente. Das dem Querschnitte X zukommende Moment wird durch $M = H \cdot y$ dargestellt erscheinen wobei H die Poldistanz und y die im betreffenden Querschnitte

liegende Ordinate der Momentenfläche bezeichnet. Das Maximalmoment wird auch hier durch die an das Seilpolygon parallel zur Schlusseite $A'B'$ gezogene Tangente TT' bestimmt und ergibt sich hier unterhalb P_4 . Es ist also bei F der am meisten gefährdete Querschnitt des Trägers; es wirkt auf ihn das Maximalmoment $M_{\max} = H \cdot y_{\max}$.

Da im vorliegenden Falle die Gewichte P der einzelnen Trapeze der Belastungsfläche durch die halben mittleren Höhen dieser Trapeze dargestellt wurden, so muss man schließlich, um die wirklichen Transversalkräfte und Biegemomente zu erhalten, die durch die Construction erhaltenen Maßzahlen mit $2b$ multiplizieren, wenn b die nach dem Längenmaßstabe bestimmte Maßzahl der constanten Trapezbreite ist.

Offenbar wird die Bestimmung der Transversalkräfte und Momente um so genauer werden, in je mehr Streifen die Belastungsfläche zerlegt wurde. Denkt man sich dieselbe in unendlich viele Streifen zerlegt, so geht das zugehörige Seilpolygon in eine Seilcurve über. In Fig. 64 stellt offenbar das Seilpolygon $A'IIIII..B'$ das der Seilcurve umschriebene Polygon vor, und es liegen die Berührungspunkte der Seilcurve in den Schnittpunkten t_1, t_2, t_3, \dots der Theilungsordinaten der Belastungsfläche mit dem Seilpolygone.

3. Wirkung einer gleichmäßig über die ganze Länge des Trägers vertheilten Belastung. Bezeichnet P die Größe der über die ganze Länge $AB = l$ des Trägers, Fig. 65, gleichmäßig vertheilten Last, so kommt hievon auf die Längeneinheit des Trägers der Betrag $p = \frac{P}{l}$. Denkt man sich p über AB als constante Belastungs-Ordinate aufgetragen, so erhält man als Belastungsfläche das Rechteck $ABCD$.

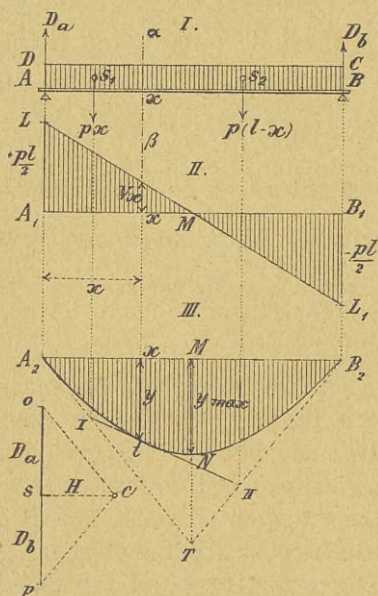
a) Bestimmung der Transversalkräfte. Da hier die ganze Last über dem Träger gleichmäßig vertheilt ist, so ist es klar, dass auf jede der beiden Stützen die Hälfte der ganzen Belastung entfällt; es ist daher $D_a = D_b = \frac{P}{2} = \frac{p \cdot l}{2}$. Die auf einen beliebigen Querschnitt X , der vom Auflager A um x absteht, wirkende Transversalkraft wird offenbar bestimmt sein durch

$$V = D_a - p x = \frac{P}{2} (l - 2x) \dots (\alpha).$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird hieraus $V = 0$; dagegen am größten für $x = 0$, nämlich $V_{\max} = \frac{p l}{2}$ und am kleinsten für $x = l$, nämlich

$$V_{\min} = -\frac{p l}{2}.$$

Fig. 65.



Offenbar repräsentiert dieser Minimalwert zugleich das negative Maximum der Transversalkraft. Da nun nach Gleichung (α) V mit der Zunahme von x abnimmt und diese Gleichung in Bezug auf x vom 1. Grade ist, so werden im vorliegenden Falle die Transversalkräfte durch eine Gerade $L L_1$ (Fig. 65, II) abgegrenzt, welche die Achse $A_1 B_1$ in der Mitte trifft und über den Endpunkten derselben die Ordinaten

$$A_1 L = B_1 L_1 = \frac{p l}{2}$$

abschneidet.

b) Bestimmung der Momente. Das auf den Querschnitt x wirkende Moment ist

$$M = D_a x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p x}{2} (l - x) \dots (\beta).$$

Für $x = 0$, oder $x = l$, wird hiernach $M = 0$; dagegen erreicht es seinen größten Wert für $x = \frac{l}{2}$, nämlich

$$M_{\max} = \frac{p l^2}{8} \dots (\gamma).$$

Die aus der Gleichung (β) für verschiedene Werte von x ermittelten und als Ordinaten aufgetragenen Momente geben in ihrer Gesamtheit im vorliegenden Falle eine Parabel $A_2 N B_2$ (Fig. 65, III) deren Scheitel N unter der Trägermitte in der Tiefe $M N = \frac{p l^2}{8}$ liegt.

Diese Momente lassen sich übrigens sehr leicht aus der dem vorliegenden Belastungsfalle entsprechenden Seilcurve bestimmen, die sich ganz einfach durch ihre Tangenten construieren lässt.

Macht man zunächst im zugehörigen Kräftepolygone

$$OP = pl = P \text{ und } CO = CP,$$

so ist, wenn A_2T und B_2T die den Polstrahlen CO und CP parallelen Endtangente der Seilcurve darstellen,

$$\triangle A_2MT \sim \triangle OCS, \text{ also } MT : OS = A_2M : CS,$$

oder
$$\overline{MT} : \frac{pl}{2} = \frac{l}{2} : H,$$

woraus allgemein
$$\overline{MT} = \frac{pl^2}{4H} \dots (\delta).$$

Macht man überdies die Poldistanz H gleich der Krafteinheit, so wird $\overline{MT} = \frac{pl^2}{4}$ und es ist somit der Mittelpunkt von MT , d. i. der Punkt N der Scheitel der Parabel; denn es ist

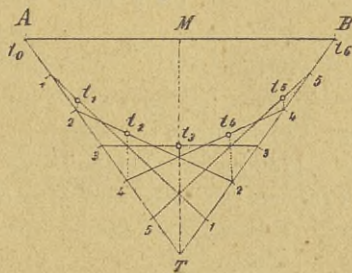
$$\overline{MN} = \frac{pl^2}{8} \text{ wie oben.}$$

Um nun zu dem unter irgend einem Querschnitte X liegenden Punkte t der Seilcurve die zugehörige Tangente zu construieren, ohne die Seilcurve zu haben, beachte man, dass die Schnittpunkte I und II der gesuchten Tangente mit A_2T und B_2T lothrecht unter den Schwerpunkten S_1 und S_2 der Belastungen von AX und BX liegen. Man wird also, um die dem Querschnitte X zukommende Moment-Ordinate y zu erhalten, die Schnittpunkte I, II der durch S_1 und S_2 geführten Lothe mit den äußersten Polygonseiten A_2T und B_2T bestimmen und erhält y als Abschnitt Xt der durch den Querschnitt X gelegten Verticalen zwischen dem Strahle III und der Schlusseite A_2B_2 des Seilpolygons $A_2III B_2$.

Es ist nun $M = H \cdot y$, oder für $H = 1$, $M = y$.

Da im vorliegenden Falle, wegen der gleichmäßigen Belastung, die Schwerpunkte der einzelnen Fragmente in der Mitte der letzteren liegen, so ergibt sich für eine Reihe von Tangenten die folgende einfache Construction. Man theile AT und BT , Fig. 66, in eine gleiche

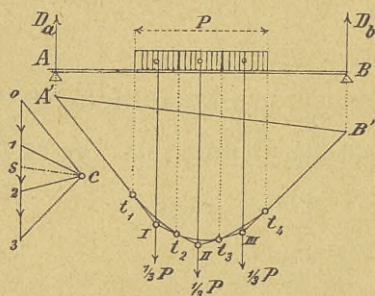
Fig. 66.



Anzahl gleicher Theile und verbinde die Theilpunkte in der aus der Figur 66 ersichtlichen Weise, so geben diese Verbindungslinien eine Schar von Tangenten der Seilcurve, an welche sich die Seilcurve umso leichter einzeichnen lässt, als hier die Tangierungspunkte t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 in der Mitte zwischen den Schnittpunkten der aufeinander folgenden Tangenten liegen.

Anmerkung. Ist die continuierliche Belastung P nicht über die ganze Länge des Trägers vertheilt, sondern bedeckt sie, wie

Fig. 67.



in Fig. 67, nur einen Theil der Trägerlänge, so denke man sich diese Belastung wieder durch Einzellasten ersetzt, construiere für dieselben das zugehörige Kräfte- und Seilpolygon und bestimme hiemit die Transversalkräfte und Biegemomente auf die bereits erläuterte Weise.

4. Gleichzeitige Beanspruchung durch concentrirte Lasten und durch eine continuierliche Belastung. Um den Einfluss der gleichzeitigen Wirkung der beiden Belastungsweisen zu ermitteln, kann man den Einfluss jeder der beiden Belastungsarten getrennt ermitteln und sodann die den einzelnen Querschnitten zukommenden Transversalkräfte und Biegemomente, mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen, addieren. Damit aber die directe Addition der Momente möglich werde, muss sich sowohl das den Einzellasten entsprechende Seilpolygon, als auch die der continuierlichen Belastung entsprechende Seilcurve, auf dieselbe Poldistanz H beziehen.

Man kann aber auch das Kräfte- und Seilpolygon für die gleichzeitige Wirkung der continuierlichen Belastung und der concentrirten Lasten construieren, indem man im Kräfteplane die concentrirten Lasten zwischen den beiderseits liegenden continuierlichen Belastungen einschaltet. Ist hiebei die continuierliche Belastung gleichmäßig vertheilt, so pflegt man, weil sich für dieselbe die Transversalkräfte und Momente, wie oben gezeigt wurde, sehr einfach bestimmen lassen, die erstere der beiden Bestimmungsarten anzuwenden.

In Fig. 68 wurde dieselbe für die über die ganze Länge l des Trägers AB gleichmäßig vertheilte Last p und für drei concentrirte Lasten P_1 , P_2 und P_3 ausgeführt. Die aus der gleichmäßigen Belastung resultierenden Transversalkräfte sind durch die Gerade LL' abgegrenzt und die durch die Einzellasten $P_1 = 01$, $P_2 = 12$ und $P_3 = 23$ hervorgerufenen Transversalkräfte S_0 , S_1 , S_2 und S_3 wurden hiezu addirt. Ihre Construction ist nach dem ersten Belastungsfall des §. 26 vorzunehmen.

Die Seilcurve $A't_1 t_2 t_3 B'$ entspricht der gleichmäßigen Belastung und das Seilpolygon $A'I II III B$ den 3 Einzellasten bei der Pol-distanz $H = \frac{l}{4}$.

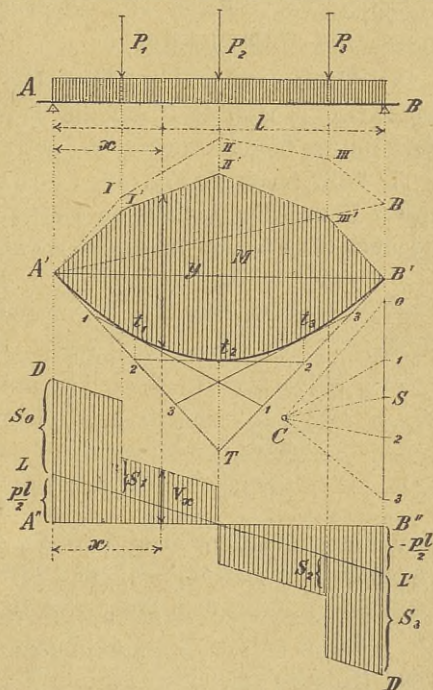
Für diesen Wert von H wird nach Gleichung (δ) pag. 71, $MT = pl$.

Damit die Addition der Momente direct vorgenommen werden könne, wurde der Seilcurve und dem Seilpolygon eine gemeinschaftliche Schlussseite $A'B'$ gegeben, d. h. es wurden die Ordinaten der Knoten I, II, III bezüglich der Schlussseite $A'B$ auf jene $A'B'$ übertragen.

Für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung x vom Auflager A ergibt sich die in demselben auftretende Transversalkraft durch V_x und das bezügliche Moment durch $M_x = H \cdot y = \frac{l \cdot y}{4}$, also als 4. Proportionale zu den Strecken l , y und 4.

Das Maximum der Transversalkraft ist durch den totalen Stützdruck $\frac{pl}{2} + S_0$ und das Maximum des Momentes durch $\frac{l}{4} y_{\max}$ bemessen.

Fig. 68.



§. 27. Mobile directe Belastung.

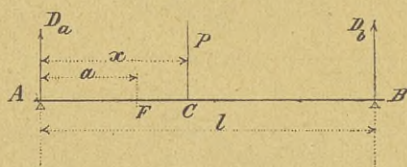
1. Belastung durch eine einzige bewegliche Last. Dieser Fall kommt am häufigsten bei kurzen Straßen- und Eisenbahnbrücken vor, deren Spannweite so gering ist, dass nicht gleichzeitig zwei aufeinander folgende Räderpaare auf der Brücke Platz finden können. Hierbei gilt für Straßenbrücken als geringster Radachsen-Abstand bei Lastwagen 2.8 m. und für Eisenbahnbrücken als geringster Abstand der Locomotivachsen 1.3 m.

Es wird nun darauf ankommen, diejenige Lage der Last zu bestimmen, bei welcher die Anspruchnahme irgend eines Querschnittes am größten wird.

a) Transversalkräfte. Um zunächst den Einfluss einer beweglichen Einzellast P auf die Transversalkraft eines beliebigen Querschnittes kennen zu lernen, betrachte man folgende zwei Fälle.

1. Fall. Liegt P , Fig. 69, rechts vom angenommenen Querschnitte F in einer beliebigen Entfernung x vom Auflager A , wobei jedoch $x > a$ sein muss, so ist auf jeden zwischen A und dem

Fig. 69.



Belastungspunkte C liegenden Querschnitt, also auch auf F , nur die in A durch P hervorgerufene Auflagerreaction D_a als Transversalkraft thätig; es ist also $V = D_a$, und zwar positiv, weil die nach oben wirkenden Kräfte als positive

angenommen wurden. Um nun D_a zu erhalten, wähle man den Stützpunkt B als Drehpunkt und erhält für diesen zur Sicherung gegen die Drehung des Trägers AB die Gleichung:

$$D_a \cdot l - P(l - x) = 0, \text{ oder } D_a \cdot l = P(l - x),$$

woraus D_a , also auch

$$V = \frac{P(l - x)}{l} \dots \dots (\alpha).$$

Demnach ist V für alle zwischen A und dem Belastungspunkte C liegende Querschnitte positiv und der numerische Wert von V umso größer, je kleiner x wird. Je näher also P an F rückt, desto größer wird V , d. h. es wird V zum positiven Maximum, wenn P unmittelbar rechts vom fraglichen Querschnitte liegt. Trägt man die den verschiedenen Werten von x entsprechenden Maximal-

werte von V als Ordinaten auf, so wird die Verbindungslinie der Endpunkte aller dieser Ordinaten, zufolge der in Bezug auf x linearen Gleichung (α), eine Gerade sein. Da aber eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, so ermittle man aus (α) zwei derselben. Für $x = l$ wird $V = 0$ und für $x = 0$, $V = P$. Ist demnach in Fig. 70, $AB = l$ die Abscissenachse und $AL = P$, so ist $LB =$ die gesuchte Gerade.

Fig. 70.

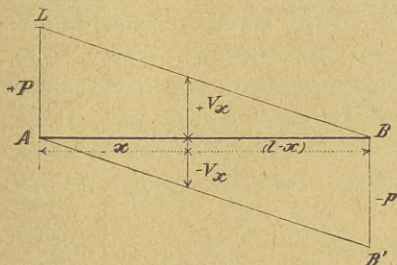
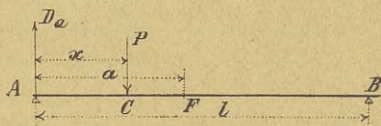


Fig. 71.



2. Fall. Liegt P , Fig. 71, links vom angenommenen Querschnitte F , ist also $x < a$, so wirkt auf F die Transversalkraft $V = D_a - P$. Es ist aber $D_a = \frac{P(l-x)}{l}$, daher

$$V = \frac{P(l-x)}{l} - P = -\frac{Px}{l} \dots (\beta),$$

also negativ.

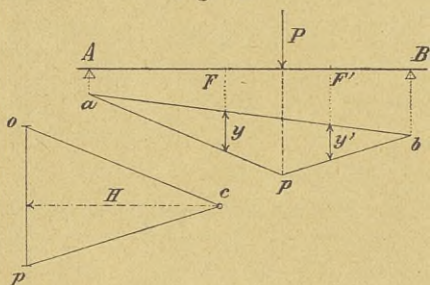
Hieraus folgt: Die Transversalkraft ist negativ, wenn die Last links vom Querschnitte liegt und erhält den größten numerischen Wert, wenn die Last unmittelbar links vom Querschnitte liegt. Nach Gleichung (β) wird $V = 0$ für $x = 0$, dagegen für $x = l$, $V = -P$. Hiernach wurde in Fig. 70 die Gerade AB' bestimmt, welche die Maxima der negativen Transversalkräfte begrenzt.

Fasst man die in den beiden besprochenen Belastungsfällen gewonnenen Resultate zusammen, so erhält man das folgende Gesetz: Jede Einzellast erzeugt in einem Querschnitte eine positive oder negative Transversalkraft, je nachdem sie auf der rechten oder linken Seite des fraglichen Querschnittes liegt und es ist die Trans-

versalkraft numerisch umso größer, je näher die Last zum Querschnitte rückt und je größer sie ist.

b) Momente. Construiert man für eine beliebige Stellung der beweglichen Last P , Fig. 72, das zugehörige Seilpolygon apb , so wird sowohl für jeden links von P befindlichen Querschnitt F , als auch für jeden rechts von P liegenden Querschnitt F' , das dem

Fig. 72.



Querschnitte entsprechende Moment durch $M = H \cdot y$ bestimmt sein, wächst also mit y und erreicht daher den größten Wert, wenn die Last unmittelbar über dem betreffenden Querschnitte steht.

2. Belastung durch ein System von beweglichen Einzellasten.

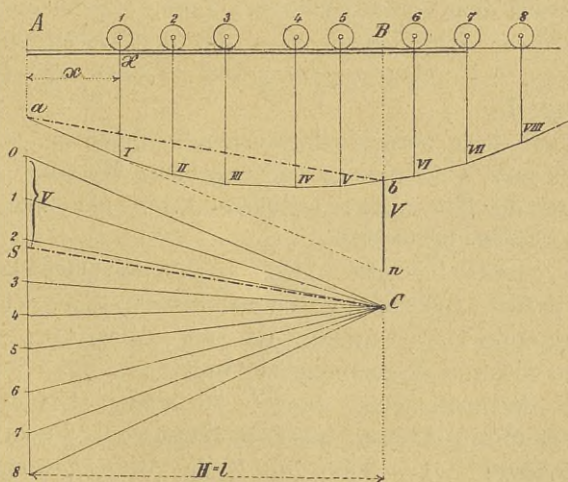
a) Bestimmung der maximalen Transversalkräfte. Es wurde in dem vorhergehenden Belastungsfalle gezeigt, dass jede rechts von einem Querschnitte liegende Last die positive und jede links befindliche Kraft die negative Transversalkraft vergrößert, und zwar umso mehr, je größer sie ist und je näher sie dem Querschnitte liegt. Hieraus ergibt sich die folgende Regel: Um in irgend einem Querschnitte des Trägers das **positive** Maximum der Transversalkraft zu erzielen, stelle man die größte der disponiblen Lasten über den Querschnitt und besetze den **rechts** von diesem Querschnitte befindlichen Trägertheil möglichst dicht mit Lasten derart, dass die größten derselben dem Querschnitte zunächst liegen. — Will man dagegen in irgend einem Querschnitte das **negative** Maximum der Transversalkraft erzielen, so stelle man wieder die schwerste der Lasten über den Querschnitt und besetze den **links** von diesem Querschnitte befindlichen Theil des Trägers möglichst dicht und derart mit Lasten, dass die größten derselben dem Querschnitte zunächst liegen.

Da für Eisenbahnbrücken die Achsendrücke der schwersten Lastzugmaschinen die größten Lasten liefern, so ergibt sich hienach

für Eisenbahnbrückenträger das folgende Belastungsgesetz: In einem beliebigen Querschnitte eines Eisenbahnbrückenträgers wird der größte numerische Wert der Transversalkraft erreicht, wenn der Lastzug schwerster Kategorie von der entfernteren Stütze kommend bis zum betreffenden Querschnitt derart vorfährt, dass die erste Locomotivradachse über dem Querschnitte liegt.

Die größtmögliche Belastung einer Eisenbahnbrücke würde offenbar durch einen Zug, der nur aus vollständig ausgerüsteten Locomotiven schwerster Art besteht, zu erzielen sein. Der in der Praxis thatsächlich vorkommende ungünstigste Belastungsfall der Eisenbahnbrücken besteht aber aus einem Lastzuge, der von drei Locomotiven schwersten Calibers geführt wird und dessen Waggon bis zum Maximum ihrer Tragfähigkeit belastet sind.

Fig. 73.



Um nun nicht für jeden Querschnitt des Brückenträgers, für welchen die entsprechende größte Transversalkraft bestimmt werden soll, die besprochene Stellung des Lastzuges zeichnen zu müssen, construirt man das Seilpolygon $a\ I\ II\ \dots\ VIII$ des betreffenden Lastzuges, Fig. 73, ein für allemal und legt, statt den Lastzug zu verschieben, die gegebene Spannweite AB des Trägers so unter

den Lastzug, dass der Querschnitt, für welchen die Transversalkraft bestimmt werden soll, unter die erste Locomotiv-Radachse zu liegen kommt. Soll z. B. die größte positive Transversalkraft für den Querschnitt X des Trägers A B ermittelt werden, so schiebe man die Spannweite A B des Trägers derart unter den Lastzug, dass das linke Fragment A X derselben unbelastet bleibt und die erste Locomotiv-Radachse 1 über X zu stehen kommt; lothe dann A und B nach a und b auf das Seilpolygon und führe zur Schlusslinie a b des Seilpolygons durch den Pol C des Kräfteplanes die Parallele C S, so ist, zufolge früherer Erläuterungen, S O die in A hervorgerufene Auflagerreaction D_a , welche zugleich das positive Maximum der dem Querschnitte X zukommenden Transversalkraft V bestimmt, denn es ist D_a die einzige Kraft, die auf das Trägerfragment A X wirkt.

Übrigens erhält man auch, wenn die Poldistanz H gleich der Spannweite l des Trägers A B gewählt wird, den gesuchten Wert von V durch den Abschnitt b_n , welchen die erste Seite des Seilpolygons auf dem von b gezogenen Lothe abschneidet.

Auf diese Weise kann man die den verschiedenen Querschnitten von A B zukommenden größten Transversalkräfte ziemlich rasch ermitteln.

Obwohl diese Methode hinreichend einfach ist, so wollen wir hier doch noch eine andere sehr einfache Methode zur directen Bestimmung der den einzelnen Querschnitten zukommenden größten Transversalkräfte besprechen.

Wie bereits bemerkt wurde, ist die im Querschnitte X auftretende größte positive Transversalkraft $+ \max V_x$ durch die Auflagerreaction D_a bestimmt, die sich ergibt, wenn der Lastzug schwerster Art von B kommend so weit nach links vorrückt, dass die erste Locomotivachse über X zu stehen kommt. Um diese Auflagerreaction zunächst durch Rechnung zu finden, wähle man B als Drehpunkt und bilde für B die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung, nämlich die Gleichung:

$$D_a \cdot l - (P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + \dots + P_5 \cdot b_5) = 0,$$

woraus
$$D_a = \frac{1}{l} (P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + \dots + P_5 \cdot b_5).$$

Trägt man nun (in Fig. 74, II) die gegenseitigen Abstände der Achsendrücke P_1, P_2, P_3, \dots , von B' aus nach links auf, so

In Fig. 74, II, wurden sowohl von B' aus längs $B'A'$, als auch von A' aus auf der Verticalen $A'A$ alle Lasten aufgetragen, welche auf der gegebenen Trägerlänge l Platz finden und durch die Ordinaten des zugehörigen Seilpolygones $O\ I\ II\ \dots\ VIII$ die positiven Maxima der den einzelnen Querschnitten entsprechenden Transversalkräfte $+ V_{\max}$ erhalten.

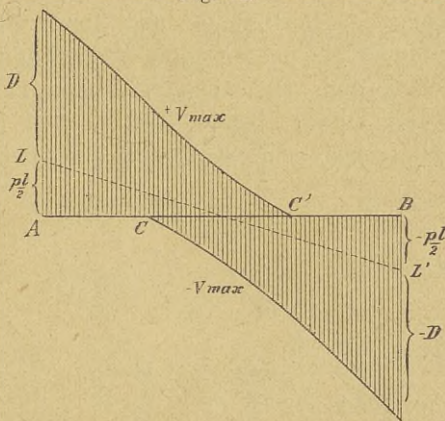
Aus den positiven Maximalwerten $+ V_{\max}$ ergeben sich auch sofort die negativen Maximalwerte der Transversalkräfte, nämlich $- V_{\max}$, indem die positiven und negativen Transversalkräfte, welche von der Trägermitte gleich weit abstehen, numerisch gleich aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sind. Man braucht also nur zum Seilpolygon $O\ I\ II\ \dots\ VIII$ das entgegengesetzte $O'I'II'\ \dots\ VIII'$ nach der aus der Figur ersichtlichen Weise zu bilden.

Das absolute Maximum der Transversalkraft würde offenbar am Auflager z. B. bei A durch die größte Auflagerreaction $D_a = A'VIII$ erreicht werden, die sich ergäbe, wenn die erste Radachse der schwersten Lastzugmaschine über dem Auflager stünde und die ganze Brückenlänge durch eine zusammenhängende Reihe von Locomotiven schwersten Calibers belastet wäre. Für die gewöhnlichen Fälle des Eisenbahnverkehrs wird aber, wie bereits gesagt wurde, das absolute Maximum der Transversalkraft für lange Brücken durch einen Lastzug erzielt werden, der von drei vollständig armierten Locomotiven schwerster Art geführt, aus Lastwagen besteht, die bis zum Maximum ihrer Tragfähigkeit belastet sind. Dieser Lastzug müsste, um die größte Auflagerreaction zu erzeugen, die ganze Brücke so bedecken, dass die erste Radachse der ersten Locomotive über dem betreffenden Auflager steht.

Außer der mobilen Belastung kommt selbstverständlich auch noch die permanente Last, welche gewöhnlich nur aus dem Eigengewicht der Brücke besteht, in Betracht. Dieses Gewicht ist nahezu gleichmäßig über die ganze Brückenlänge vertheilt. Die von demselben in den einzelnen Querschnitten hervorgerufenen Transversalkräfte müssen, mit Rücksicht auf das Vorzeichen, zu den der mobilen Belastung entsprechenden größten Transversalkräften addiert werden, wie dies in Fig. 75 geschah, in welcher die Gerade LL' jene Transversalkräfte begrenzt, die durch das über die ganze Brücken-Spannweite gleichmäßig vertheilte Eigengewicht $p \cdot l$ hervorgerufen werden. Dieselben werden zum Theil durch die

von der mobilen Belastung erzeugten Transversalkräfte, deren Größen aus Fig. 74 zu übertragen sind, vergrößert oder vermindert und stellenweise gänzlich aufgehoben, so dass innerhalb der Strecke AC nur positive, innerhalb der Strecke BC' nur negative und innerhalb des mittleren Theiles CC' sowohl positive als auch negative Transversalkräfte in Betracht kommen, wobei die auf entgegengesetzten Seiten der Trägermitte in gleicher Entfernung von derselben auftretenden positiven und negativen Transversalkräfte numerisch gleich groß sind.

Fig. 75.



b) Bestimmung der Maximalmomente. Bei der Untersuchung des Einflusses einer beweglichen Einzellast auf die Größe des Biegemomentes in irgend einem Querschnitte des durch dieselbe beanspruchten Trägers haben wir gesehen, dass jede Einzellast, sie mag rechts oder links vom fraglichen Querschnitte liegen, das Moment vergrößert, und zwar umso mehr, je größer sie ist und je näher sie zu dem Querschnitte rückt. Daraus ergibt sich für die Bestimmung des Maximalmomentes, das durch entsprechende Verschiebung eines Systems gegebener Einzellasten in irgend einem Querschnitte des betreffenden Trägers hervorgerufen wird, folgende Regel:

Um in irgend einem Querschnitte eines Trägers das größte Moment hervorzurufen, stelle man über diesen Querschnitt eine der größten Lasten des möglichen Lastsystems und ordne die übrigen Lasten so an, dass die größten derselben dem Querschnitte zunächst liegen und dass die ganze Spannweite des Trägers mit Lasten bedeckt wird.

Welche von den größten Lasten des gegebenen oder möglichen Lastsystems über dem fraglichen Querschnitte stehen müsse,

entsprechenden Seilpolygone und daher, nach § 26, pag. 66, das dem unterhalb der Last 2 liegenden Querschnitte zugehörige Moment M gleich dem Producte aus der Poldistanz H in die verticale Ordinate y des Seilpolygones im betreffenden Querschnitte also $M = H \cdot y$.

Nun untersuche man auf dieselbe Weise, ob nicht M für denselben Querschnitt größer werde, wenn die Last 3 über X zu liegen kommt. Im vorliegenden Falle wird dies nicht der Fall sein und da auch bei jeder andern Laststellung des vorliegenden Lastsystems die Ordinate y für den Querschnitt X kleiner wird, so gibt die in Fig. 76 dargestellte Laststellung für den Querschnitt X das größte Moment.

Auf diese Weise findet man durch zwei bis drei Versuche ziemlich einfach das jedem Querschnitte zukommende größte Moment. So ergibt sich z. B. für $x = \frac{l}{2}$, d. i. für die Brückenmitte, dass die Last 3 oder 7 über der Brückenmitte stehen müsste, damit für dieselbe y und somit auch M zum Maximum werde.

Bestimmt man für eine hinreichende Anzahl von Querschnitten die zugehörigen Maximalwerte von y und trägt dieselben von der Abscissenlinie $A' B'$ als Ordinaten auf, so erhält man durch die Verbindungslinie der Endpunkte aller dieser Ordinaten die sogenannte Maximal-Momentencurve $A' N B'$ der mobilen Belastung. Es ist wohl selbstverständlich, dass die zur Brückenmitte symmetrisch liegenden Querschnitte gleiche Maximalmomente haben, weshalb man die Momentencurve nur für die eine Brückenhälfte, z. B. für die linke zu ermitteln und nach rechts symmetrisch zur Brückenmitte zu übertragen haben wird.

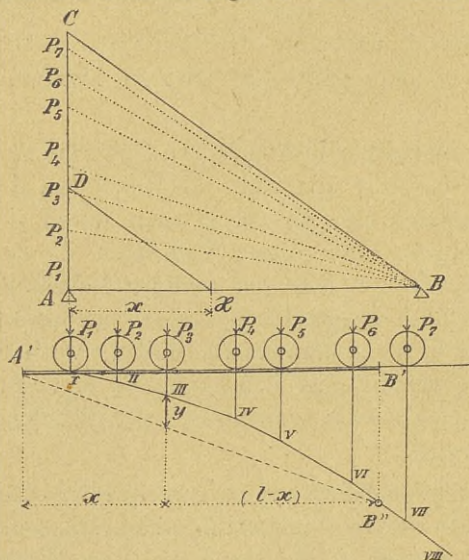
Soll man zu den der mobilen Belastung entsprechenden Ordinaten y die vom Eigengewichte der Brücke herrührenden addieren, so muss man offenbar die der mobilen Belastung und dem Eigengewichte zukommenden Kräfte- und Seilpolygone nach demselben Kräfte- beziehungsweise Längenmaßstab und mit gleicher Poldistanz construieren.

Ist p das Eigengewicht pro Längeneinheit der Brücke, so sind die durch das Eigengewicht hervorgerufenen Momente (nach dem 3. Falle des §. 26) den Ordinaten einer Parabel proportional,

deren Scheitelordinate $M S = \frac{p l^2}{8H}$. Construiert man also über $A'B'$ nach oben die entsprechende Parabel $A'SB'$, so gibt für einen beliebigen Querschnitt die zugehörige Parabelordinate y_p mit H multipliciert das diesem Querschnitte entsprechende Moment des Eigengewichtes. Ist ferner y die demselben Querschnitte entsprechende Ordinate der Maximalmomentencurve $A'NB'$ für die mobile Belastung, so ist das diesem Querschnitte zukommende Totalmoment $M_t = H(y_p + y)$.

Die besprochene Bestimmung derjenigen Last, welche über einem Querschnitte zu stehen hat, damit für denselben das der mobilen Belastung entsprechende Moment zum Maximum werde, ist keine directe, sondern versuchsweise. Obzwar dieser versuchsweise Vorgang ziemlich rasch zum Ziele führt, so wollen

Fig. 77.



wir doch noch folgende, von Prof. Dr. Weyrauch im 4. Hefte des 1875ger Jahrganges der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereines zu Hannover veröffentlichte directe Bestimmungswiese der fraglichen Last angeben und verweisen bezüglich deren Begründung auf die genannte Quelle.

Man reihe die größten Lasten P_1, P_2, \dots, P_7 , welche beim Vorrücken des Lastzuges von B nach A, Fig. 77, auf AB Platz haben, von A aus auf der Verticalen AC

aneinander und verbinde den Endpunkt C der letzten mit B .

Um nun für irgend einen Querschnitt X die Last zu bestimmen, welche über diesem Querschnitte stehen muss, damit für denselben das Moment M_x zum Maximum werde, führe man $XD \parallel BC$; die Last, welche von XD getroffen wird, ist die fragliche.

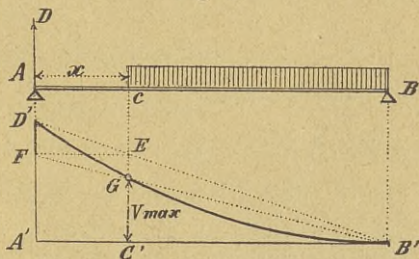
Im vorliegenden Falle müsste also P_3 über X stehen.*) Trifft XD den Grenzpunkt zweier Lasten, so ist es gleichgiltig, welche dieser beiden Lasten über X zu stehen hat.

Um auch gleich den Wert $\max M_x$ graphisch zu ermitteln, benütze man die Kraftlinie AC als Kräftepolygon, wähle B als Pol und construiere das zugehörige Seilpolygon A'III...VIII. Macht man dann $XA = x$ und $XB = (l - x)$, projiziert B' nach B'' auf das Seilpolygon und zieht die Schlusslinie A'B'', so schneidet diese unterhalb III die Ordinate y ab, welche mit der gewählten Poldistanz $H = l$ multipliziert $\max M_x$ zum Producte gibt.

3. Belastung durch eine bewegliche gleichförmige Belastung.

a) Bestimmung der größten Transversalkräfte. Da bekanntlich jede rechts vom beliebigen Querschnitte C eines Trägers AB, Fig. 78, liegende Last eine positive, dagegen jede links von C befindliche Last eine negative Transversalkraft in C erzeugt, so erhält man in C die größte positive, beziehungsweise negative

Fig. 78.



beziehungsweise negative Transversalkraft, wenn nur die Strecke BC, beziehungsweise AC gleichförmig belastet wird. Um also zunächst $+V_{\max}$ in C zu erhalten, lässt man die mobile Last von B bis C vorschreiten und es ist dann für C: $+V_{\max} = D$, d. i. gleich der Auflagerreaction bei A, welche allein auf AC einwirkt. Bezeichnet q die mobile Belastung pro Längeneinheit des Trägers und l die Spannweite AB desselben, so wirkt auf BC die mobile Belastung $q(l - x) = qx'$, wenn $(l - x)$ d. i. $BC = x'$ gesetzt wird. Um nun den von dieser Belastung in A erzeugten Stützendruck zu erhalten, bilde man für die Stütze B die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung des Trägers, nämlich $Dl - qx' \cdot \frac{x'}{2} = 0$, woraus D, respective $+V_{\max} = \frac{q \cdot x'^2}{2l}$.

*) Die Bezeichnungen der Lasten P_2, P_3, \dots, P_7 auf AC sind in der Figur zu tief gestellt; sie sollen beiläufig bis zur Mitte der bezüglichen Strecken höher gerückt werden.

Da also $+V_{\max}$ mit dem Quadrate von x' in directem Verhältnisse steht, so lassen sich die den verschiedenen Werten von $BC=x'$ entsprechenden Maximalwerte von $+V$ durch eine Parabel graphisch darstellen. Für $x'=0$ und $x'=l$ erhält man die zugehörigen Ordinaten 0 und $\frac{q l}{2}$. Macht man demnach auf der

Auflagerverticalen $A' D' = \frac{q l}{2}$, verbindet D' mit B' , zieht vom Schnittpunkte E der $B' D'$ mit der Verticalen $C' C$ die Horizontale $E F$ und verbindet schließlich F mit B' , so gibt G einen Punkt dieser Parabel, d. h. es ist $C' G = V_{\max} = \frac{q x'^2}{2 l}$.

Denn es verhält sich, wegen $C' E = A' F$,

$$A' D' : A' F = l : x' \quad \text{und} \quad A' F : C' G = l : x';$$

man erhält also durch Multiplication dieser beiden Proportionen

$$A' D' : C' G = l^2 : x'^2, \quad \text{woraus, da } A' D' = \frac{q l}{2},$$

$$C' G = \frac{q x'^2}{2 l} = V_{\max}.$$

Die negativen Maxima der Transversalkraft ergeben sich, wie bereits bemerkt wurde, bei der gerade entgegengesetzten Belastungsweise. Bei A ist $-V_{\max} = 0$ und bei B gleich $-\frac{q l}{2}$.

Außer dem Einflusse der mobilen Belastung ist auch jener des Eigengewichtes zu berücksichtigen. Man wird also zu den von der mobilen Belastung in den einzelnen Querschnitten erzeugten größten Transversalkräften die vom Eigengewichte, das über die ganze Trägerlänge gleichmäßig vertheilt angenommen wird, hervorgerufenen Transversalkräfte, mit Rücksicht auf das Vorzeichen, zu addieren haben, wie dies im vorhergehenden Falle geschehen ist.

Der vorliegende Belastungsfall kommt gewöhnlich bei Straßenbrücken zur Anwendung, bei denen die größte mobile Last durch ein Menschengedränge gebildet wird, das pro Quadrat-Meter der Brückenbahn 350 bis 420 Kilogramm Druck erzeugt. Hiernach würde also in irgend einem Querschnitte die größte Transversalkraft hervorgerufen werden, wenn das Gedränge von der entfernteren Stütze kommend bis zum fraglichen Querschnitte vorrückte.

b) Momente. Nachdem für jeden Querschnitt eines an beiden Enden unterstützten Trägers das Moment durch alle, rechts oder

links von diesem Querschnitte liegende Lasten vergrößert wird, so wird man das größte Moment erzielen, wenn die mobile gleichmäßige Belastung den ganzen Träger bedeckt. Bezeichnet also g die vom Eigengewichte und p die von der mobilen Belastung auf die Längeneinheit des Balkens entfallende Last und setzt man $g + p = q$, so hat man in den Formeln (β) und (γ) des der gleichmäßigen Belastung des ganzen Trägers geltenden 3. Falles des §. 26, pag. 70, statt p den Wert q einzusetzen und ebenso bei den bezüglichen Constructionen der Maximalmomente statt p die Größe q zu benützen.

Es wäre hier noch der Vorschrift zu erwähnen, dass beim Marschieren größerer Truppenmassen über Brücken das Schritthalten vermieden werden soll, um die durch das gleichzeitige Auftreten dieser Massen bewirkten Stöße und gefährlichen Vibrationen der Brückenträger hintan zu halten.

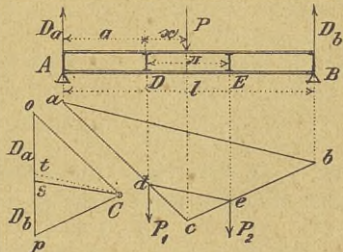
II. Indirecte Belastungen.

§. 28. Permanente Lasten.

1. Wirkung ruhender Einzellasten. Wirkt die Last P Fig. 79, nicht unmittelbar auf den Träger AB , sondern wird sie durch die beiden Querträger D und E auf AB übertragen, so äußert sie ihre Wirkung auf AB durch die beiden Componenten P_1 und P_2 , welche offenbar in A und B dieselben Auflagerreactionen D_a und D_b hervorrufen, wie ihre Resultierende P , wenn sie direct auf den Balken AB einwirken würde.)*

Es werden daher auch die Transversalkräfte und Momente für alle Querschnitte innerhalb AD und BE ebenso groß sein wie bei directer Belastung, und nur für die zwischen den Querträgern D und E liegenden Quer-

Fig. 79.



*) Setzt man nämlich $DE = \lambda$ (in der Figur irrthümlicher Weise π) und den Abstand der Last P von $D = x$, so ergeben sich zunächst die Drücke P_1 und

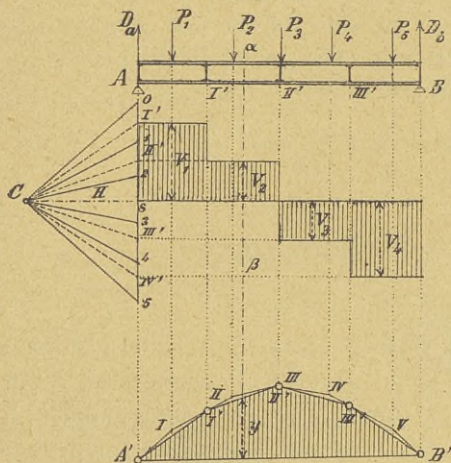
schnitte tritt eine Änderung ein, indem die der Last P entsprechende Momentenfläche acb in jene $adeb$ übergeht.

Der vom Pole C zur Schlusslinie ab des Seilpolygones gezogene Parallelstrahl CS theilt die Kraftlinie $op = P$ in die beiden Auflagerreactionen $D_a = So$ und $D_b = pS$; während der zu de gezogene Parallelstrahl Ct die Kraft $P = op$ in die beiden Componenten $P_1 = ot$ und $P_2 = tp$ zerlegt.

Da nun für die unter den Querträgern liegenden Stellen des Hauptträgers AB die Momente für directe und indirecte Belastung gleich sind, so braucht man nur, wenn Querträger vorkommen,

nach Fig. 80 das Seilpolygon $A' I II III IV V B'$ aus der directen Belastung zu construieren und in dieses das der indirecten Belastung entsprechende Seilpolygon $A' I' II' III' B'$ in der Weise einzuzichnen, dass die Eckpunkte des letzteren auf den durch die Querträger gezogenen Verticalen liegen. Die Bestimmung der Transversalkräfte und Momente wird nun mit Benützung des Kräfte- und Seilpolygones leicht vorzunehmen sein.

Fig. 80.



P_2 auf die Querträger D und E aus den Gleichgewichtsbedingungen gegen Drehung des oberen Längsstückes bezüglich der Stützpunkte E und D ; nämlich $P_1 \lambda = P (\lambda - x)$ und $P_2 \lambda = P x$, woraus $P_1 = P \frac{\lambda - x}{\lambda}$ und $P_2 = P \frac{x}{\lambda}$. Die durch

P_1 und P_2 in A hervorgerufene Auflagerreaction D_a ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung des Trägers AB um den Stützpunkt B , nämlich aus

$$D_a \cdot l = P_1 (l - a) + P_2 (l - a - \lambda);$$

woraus

$$D_a = P_1 \frac{l - a}{l} + P_2 \frac{l - a - \lambda}{l},$$

oder wenn für P_1 und P_2 die obigen Werte eingeführt werden, nach einfacher Reduction: $D_a = P \frac{l - a - x}{l}$, also ebenso groß, als wenn P direct auf A B wirken würde.

a) Bestimmung der Transversalkräfte. Um die dem beliebigen Querschnitte $\alpha\beta$ zukommende Transversalkraft zu erhalten, braucht man nur durch den Kräftepol C zu den von $\alpha\beta$ getroffenen Seilpolygonseiten $I' II'$ und $A' B'$ parallele Strahlen zu ziehen, so schneiden diese auf der Kraftlinie $O\bar{5}$ die gesuchte Transversalkraft $V = S II'$ ab. Die Transversalkraft ist positiv oder negativ, je nachdem ihr Endpunkt oberhalb oder unterhalb des Anfangspunktes S liegt, der der Schlusseite $A' B'$ des Seilpolygons entspricht.

Da die Transversalkräfte für den Träger AB innerhalb der aufeinander folgenden Querträger constant sind, so erhält man

für das erste Feld	$V_1 = S I'$,	wenn	$C I' \parallel A' I'$
„ „ zweite	„ $V_2 = S II'$,	„	$C II' \parallel I' II'$
„ „ dritte	„ $V_3 = S III'$,	„	$C III' \parallel II' III'$
„ „ vierte	„ $V_4 = S IV'$,	„	$C IV' \parallel III' B'$

Wären keine Querträger vorhanden, so würden sich die Transversalkräfte anders vertheilen; es wäre dann

von A bis P_1	die	Transversalkraft	$V_1 = S 0$
„ P_1 „ P_2	„	„	$V_2 = S 1$
„ P_2 „ P_3	„	„	$V_3 = S 2$
„ P_3 „ P_4	„	„	$V_4 = S 3$
„ P_4 „ P_5	„	„	$V_5 = S 4$
„ P_5 „ B	„	„	$V_6 = S 5$

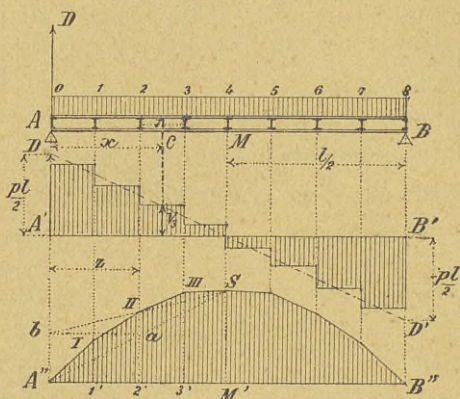
b) Momente. Um das dem beliebigen Querschnitte $\alpha\beta$ entsprechende Moment M zu erhalten, hat man bekanntlich die Ordinate y, die im Seilpolygone diesem Querschnitte zukommt, mit der Poldistanz H zu multiplicieren. Wie aus der Vergleichung der beiden Seilpolygone $A' I II III IV V B'$ und $A' I' II' III' B'$ (von denen das erstere der Belastung ohne Querträger entspricht) ersichtlich ist, werden bei Anwendung der Querträger auch die Momente zwischen den Querträgern kleiner, als wenn die Lasten unmittelbar auf den Träger AB einwirken würden.

2. Wirkung einer gleichförmigen Belastung. Bezeichnet p die auf die Längeneinheit des Trägers AB, Fig. 81, entfallende Last und l die ganze Länge des Trägers, so kommt auf jede der beiden Stützen A und B offenbar die Hälfte der ganzen Belastung pl als Stützendruck; es ist also jede Auflager-

reaction $D = \frac{p l}{2}$, oder wenn λ die Feldlänge, d. h. die Entfernung zweier benachbarten Querträger bezeichnet, wegen $\frac{l}{2} = 4 \lambda$,
 $D = 4 \lambda p$.

a) Transversalkräfte. Um die Transversalkraft in einem beliebigen Felde des Trägers, z. B. im dritten, zu erhalten, denke man sich innerhalb dieses Feldes irgend einen Querschnitt geführt, der von A um die Strecke x und von der Trägermitte um x' absteht, und beachte, dass von der Belastung $p \lambda$ dieses Feldes auf jeden der beiden Querträger 2 und 3, die dieses Feld stützen, die

Fig. 81.



Hälfte von $p \lambda$, also $\frac{p \lambda}{2}$ entfällt, dass also auf das Fragment AC die Auflagerreaction $D = 4 \lambda p$ nach aufwärts, dagegen die Lasten $2 p \lambda$ und $\frac{p \lambda}{2}$ nach abwärts wirken, dass somit für irgend einen Querschnitt innerhalb des 3. Feldes die Transversalkraft

$$V_3 = 4 \lambda p - 2 \frac{1}{2} \lambda p = 1 \frac{1}{2} \lambda p.$$

Dieser Betrag ist aber offenbar auch gleich der Belastung, die von der Mitte des 3. Feldes bis zur Trägermitte M reicht. Demnach ist V innerhalb eines Feldes constant und es ergibt sich zur Bestimmung von V die folgende einfache Construction: Man trage von den Endpunkten A', B' der Trägerlänge l die Ordinaten

$\frac{pl}{2}$ und $-\frac{pl}{2}$ auf, verbinde die Endpunkte DD' dieser Ordinaten und erhält die Transversalkraft V jedes Feldes als die unter seiner Mitte gemessene Ordinate von DD' .

b) Momente. Da für die unter den Querträgern liegenden Querschnitte des Hauptträgers die Momente für indirecte Belastung dieselben sind, wie für die directe Belastung, und bei gleichmäßiger Belastung der ganzen Trägerlänge die Momentencurve durch eine Parabel bestimmt ist, deren Scheitel S von der Trägermitte, zufolge Gleichung (γ) pag. 70, um $\frac{pl^2}{8}$ entfernt ist, so braucht man nur über der Spannweite $A''B''$ des Trägers diese Parabel mit der Scheitelordinate $M'S = \frac{pl^2}{8}$ zu construieren und derselben ein Polygon einzuschreiben, dessen Eckpunkte in den durch die Querträgermitten gehenden Verticalen liegen. Die größten Momente liegen also unter den Querträgern.

In Fig. 81 wurde ein besonderes Verfahren zur Construction der Punkte I, II, III der Momentenparabel, welches mit jenem der Parabel-Construction in Fig. 78 analog ist, angewendet.

Um z. B. den Punkt II zu erhalten, mache man $M'S = \frac{pl^2}{8}$, ziehe $A''S$ und führe durch den Punkt a , in welchem $A''S$ die Ordinate $2'2'$ des gesuchten Punktes schneidet, $ab = A''B''$. Die Gerade bS gibt dann im Schnittpunkte mit $2'2'$ den verlangten Parabelpunkt II.

Um die Richtigkeit der Construction nachzuweisen, nehme man an, dass der Querschnitt des fraglichen Punktes vom Auflager A um z abstehe. Es ist dann für diesen Querschnitt das Moment

$$M = D \cdot z - \frac{pz^2}{2},$$

oder wegen $D = \frac{pl}{2}$, $M = \frac{pz}{2}(l - z)$.

Wenn also der Parabelpunkt II richtig bestimmt sein soll, so muss $\overline{2'II} = \frac{pz}{2}(l - z)$ sein.

Es ist aber $\overline{2'II} = \overline{2'a} + \overline{aII}$, und es sind diese Strecken aus den beiden folgenden Proportionen bestimmt:

$$2' a : M' S = z : \frac{l}{2}.$$

$$a \text{ II} : (M' S - 2' a) = z : \frac{l}{2}.$$

Setzt man hierin für $M' S$ den obigen Wert $\frac{p l^2}{8}$, so ergibt sich aus der 1. Proportion $2' a = \frac{p l z}{4}$, und aus der 2. Proportion

$$\text{für diesen Wert und jenen von } M' S, a \text{ II} = \frac{p}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) z.$$

Es ist also

$$2' \text{ II} = \frac{p l z}{2} + \frac{p z}{4} (l - 2 z) = \frac{p z}{2} (l - z)$$

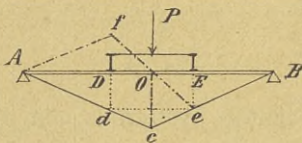
wie oben; somit die Construction richtig.

§. 29. Mobile indirecte Belastung.

1. Wirkung einer mobilen Einzellast P .

a) Transversalkräfte. Denkt man sich innerhalb zweier aufeinander folgenden Querträger D, E , Fig. 79, einen verticalen Schnitt geführt und zu den durchschnittenen Seiten $a b$ und $d e$ des geschlossenen Seilpolygones $a b e d$ durch den Pol C im Kräfteplan Parallele gezogen, so schneiden diese bekanntlich auf der Kraftlinie $o p$ die dem Querschnitte des Trägers AB zukommende Transversalkraft $V = s t$ ab. Sie ist positiv oder negativ, je nachdem die entsprechenden Polygonseiten ab und de nach links oder rechts convergieren. Sind diese Polygonseiten parallel, so ist offenbar $V = 0$. Es fragt sich nun, an welcher Stelle P zwischen den Querträgern D und E , Fig. 82, liegen müsse, damit im Felde DE die Transversalkraft V Null werde. Man nennt diese Stelle O die Belastungsscheide. Um dieselbe zu finden, ziehe man durch B eine beliebige Gerade $B c$ bis zum Schnittpunkte e mit der Verticalen $E e$ und durch e die Gerade $e d \parallel AB$

Fig. 82.



bis zur Verticalen unter D . Nun verbinde man A mit d und verlängere $A d$ bis zum Schnittpunkte c mit $B e$. In der durch c geführten Verticalen liegt dann die gesuchte Belastungsscheide O .

Noch einfacher gestaltet sich die Ermittlung derselben nach dem von Professor Stelzel angegebenen Verfahren.*) Hiernach führe man durch A und B zwei beliebige Parallele bis zu den durch D und E gehenden Verticalen und verbinde die so erhaltenen Schnittpunkte e und f, so trifft e f den Träger A B in der Belastungsscheide O.

Alle Lasten rechts von der Belastungsscheide O erzeugen innerhalb des Feldes DE eine positive; dagegen alle Lasten links von O eine negative Transversalkraft. Es wird daher für irgend einen Querschnitt innerhalb des Feldes DE das Maximum der positiven Transversalkraft erreicht, wenn der Lastzug von B kommend, bis zur Belastungsscheide aufgefahren ist; dagegen wird das negative Maximum der Transversalkraft erhalten, wenn der Lastzug von A bis zur Belastungsscheide vorgeschritten ist.

b) Momente. Da die Ecken des Seilpolygones a d e b, Fig. 79, unter den Querträgern liegen, so werden für alle Querschnitte, die sich lothrecht unter den Querträgern befinden, die Momente am größten, wenn die bewegliche Einzellast über die betreffenden Querträger zu stehen kommt.

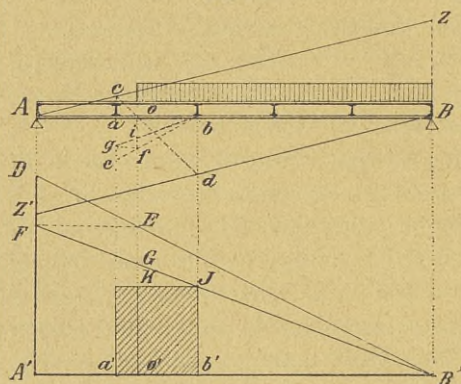
Da ferner der an den beiden Enden frei aufliegende Träger durch alle Lasten, die über ihn wegrollen, in demselben Sinne, nämlich nach unten, durchgebogen wird, und da endlich die Momente unter den Querträgern für eine beliebige Belastung genau so groß sind wie ohne Querträger, so wird man die Maximalmomente für die Querschnitte unter den Querträgern ebenso wie bei Trägern ohne Querträger zu ermitteln haben. Man suche also nach § 27 die der mobilen Belastung entsprechenden Maximalmomente für die unter den Querträgern liegenden Querschnitte, trage dieselben an den betreffenden Stellen als Ordinaten auf und verbinde die Endpunkte dieser Ordinaten der Reihe nach durch Gerade, so begrenzen diese Geraden auch die den Querschnitten zwischen den Querträgern zukommenden Maximalmomente.

*) Siehe Stelzel: Theorie der einfachen Brückenträger, Wien 1880.

2. Gleichförmige mobile Belastung. Bezüglich der Momente wird bekanntlich die größte Anspruchnahme bei totaler Belastung des ganzen Trägers erzielt und es ist daher deren Bestimmungswiese nach dem 2. Belastungsfalle des § 28 vorzunehmen. Es erübrigt also nur die Ermittlung der größten Transversalkräfte bei mobiler gleichförmiger Belastung zu zeigen.

Um für irgend ein Feld des Trägers AB , Fig. 83, z. B. für das zweite, V_{\max} zu erhalten, bestimme man zunächst nach dem vorigen Falle die Belastungsscheide O für dieses Feld; ziehe also die Gerade AZ beliebig und zu ihr durch B die Parallele BZ' , suche die Schnittpunkte c und d der beiden Parallelen mit den durch die Querträger a und b des 2. Feldes gehenden Verticalen und verbinde c mit d , so gibt cd im Schnitte O mit AB die Belastungsscheide. Die von B kommende mobile Last muss bis O reichen, um fürs 2. Feld V_{\max} zu erzeugen.

Fig. 83.



Ist $AB = l$, $OB = x'$ und q die mobile Belastung pro Längeneinheit, so ist die in A hervorgerufene Auflagerreaction $D = \frac{q x'^2}{2 l}$ und der von der Belastung des 2. Feldes auf den Querträger a entfallende Druck P , wenn λ die Feldlänge bezeichnet und $ob = z$ gesetzt wird, $P = \frac{q z^2}{2 \lambda}$, so dass innerhalb a b

$$V_{\max} = \frac{q x'^2}{2 l} - \frac{q z^2}{2 \lambda}.$$

Hiernach wird V_{\max} durch die Differenz der Ordinaten zweier Parabeln bestimmt, die nach der auf pag. 85 gezeigten Methode zu construieren sind. Man mache also $A'D = \frac{q l}{2}$ und $a e = \frac{q \lambda}{2}$

ziehe die Geraden DB' und eb , suche die Schnittpunkte E und f dieser Geraden mit der durch die Belastungsscheide O gezogenen Verticalen, lege durch E und f die Horizontalen $E f$ und $f g$ und ziehe schließlich FB' und gb . Man erhält die gesuchten Strecken

$$O'G = \frac{q x'^2}{2 l} \quad \text{und} \quad i o = \frac{q z^2}{2 \lambda},$$

so dass, wenn $GK = i o$ gemacht wird, $V_{\max} = o'k$.

Analog werden für die anderen Felder die der mobilen Belastung entsprechenden Werte von $\pm V_{\max}$ bestimmt. Die negativen Maxima ($-V_{\max}$) der Transversalkräfte werden sodann aus den positiven V_{\max} in derselben Weise ermittelt, wie dies in Fig. 74, II, bei directer Belastung geschah; es haben nämlich die symmetrisch zur Trägermitte liegenden Querschnitte gleiche aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werte von V_{\max} .

Zu den aus der mobilen Belastung sich ergebenden Werten von $\pm V_{\max}$ sind selbstverständlich noch die von der permanenten Last, beziehungsweise vom Eigengewichte, hervorgerufenen Transversalkräfte algebraisch, d. h. mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen, zu addieren.

Der vorliegende Belastungsfall findet bei Straßenbrücken Anwendung, bei denen die Belastung der Brückenbahn durch Querträger auf die Hauptträger übertragen und die mobile Maximalbelastung durch ein dichtes Menschengedränge auf der Brückenbahn erzielt wird.

3. Indirecte Belastung durch ein System beweglicher Einzellasten.

a) Momente. Dieselben sind, wie bereits nachgewiesen wurde, bei gleichen Umständen unter den Querträgern genau so groß, wie bei directer Belastung. Man wird also nach § 27, al. 2, die der mobilen Belastung entsprechenden Maximalmomente unter den Querträgern bestimmen, dieselben in den betreffenden Querschnitten über einer horizontalen Achse als verticale Ordinaten auftragen und die aufeinander folgenden Endpunkte dieser Ordinaten durch Gerade verbinden. Man erhält so ein Momenten-

polygon, dessen Ordinaten auch für die zwischen den Querträgern liegenden Querschnitte die der mobilen Belastung entsprechenden Maximalmomente darstellen.

Zur näheren Erläuterung möge das folgende Beispiel dienen.

Die freie Spannweite des Trägers $A_1 B_1$, Tafel I Fig. 1, sei 20 Meter, also gerade so groß, dass zwei mit dem Kamine einander zugekehrte Lastzugmaschinen und ein Tender auf derselben Platz finden. Die Drücke der Locomotivachsen seien je 13 Tonnen und ihre Abstände von einander je 1.3 m.; ferner sei der Abstand zwischen den ersten Radachsen der beiden einander mit den Kaminen zugekehrten Locomotiven 4 m. und ebenso zwischen jenen der Locomotive und des Tenders 4 m.; endlich seien die Abstände der Tenderachsen je 1.5 m. und deren Drücke je 9^t. Bei dieser Lastvertheilung stehen in Fig. 1 auf der linken Trägerhälfte die größeren und dichter gestellten Lasten, so dass dieselbe größere Beanspruchungen zu erleiden haben wird als die rechte. Wir werden dieselben daher nur für die linke Trägerhälfte zu ermitteln haben.

Die Fahrbahn $A'B'$, Fig. 4, liegt auf Querträgern, die von einander um je 2 m. abstehen; es wird also sowohl das Gewicht der Fahrbahn als auch jenes der mobilen Last durch die Querträger auf die Hauptträger übertragen. Da überdies der erste und letzte Querträger über den festen Auflagern liegen, so werden nur 9 Querträger innerhalb der freien Spannweite auf die Haupt-respective Längsträger einwirken können.

Es wurde in Fig. 2 zunächst der der mobilen Belastung entsprechende Kräfteplan gezeichnet, indem auf der Verticalen $A V$, die von links nach rechts folgenden Achsendrücke im Maßstabe 1 cm. = 10^t aneinander gereiht wurden. Der Kräftepol C wurde im Abstände 10 m. (1 cm. = 1 m.) von der Kraftlinie $A V$ gewählt und hierauf das den Polstrahlen $CA, C(1), C(2), \dots C(9)$ entsprechende Seilpolygon $O I I I \dots X$ nebenan construiert.

Um nun die Laststellungen zu erhalten, für welche die Maximalmomente unterhalb der Querträger erzeugt werden, wurde (nach der auf pag. 84 erwähnten Weyrauch'schen Methode) auf der in A zur Kraftlinie $A V$ errichteten Senkrechten die Trägerlänge $AB = 20$ m. abgetragen, B mit dem Endpunkte V der Kraftlinie verbunden, und zu dieser Verbindungslinie wurden durch die Punkte 1, 2, 3, welche der Stellung der Querträger auf

trägern von gleicher Spannweite AB getragen wurde, auf jeden dieser Haupt- oder Längsträger der n^{te} Theil des unter den Querträgern ermittelten Momentes entfiel. Ebenso ist es klar, dass die für die Querschnitte der einen Brückenhälfte bestimmten Maximalmomente auch für die zur Brückenmitte symmetrischen Querschnitte der anderen Brückenhälfte gelten.

b) **Transversalkräfte.** Im § 29 al. 2 wurde nachgewiesen, dass in einem Trägerfelde, d. i. zwischen zwei aufeinander folgenden Querträgern in der linken Brückenhälfte, V zum positiven Maximum wird, wenn die mobile Last von dem entfernteren Brückenaufleger B' , Fig. 4, Tafel I, kommend, bis zur Belastungsscheide des betreffenden Feldes vorrückt. Besteht jedoch die mobile Belastung aus einem Systeme von Einzellasten mit bestimmten Abständen, also wie bei Eisenbahnbrücken aus den Achsendrücken der Verkehrslasten, so erhält man gewöhnlich die den einzelnen Feldern entsprechenden Werte von $+V_{\max}$, wenn der Lastzug von B' vorschreitend mit der ersten Radachse bis über den, das betreffende Feld rechts begrenzenden Querträger kommt. Diese Laststellung soll in der Folge, behufs leichterer Orientierung, die Normalstellung heißen. Man braucht daher zunächst nur für die unterhalb der Querträger liegenden Querschnitte die der mobilen Belastung entsprechenden Werte von $+V_{\max}$ nach § 27 zu ermitteln.

Man lässt also den von 3 Lastmaschinen geführten Güterzug von B' aus bis zu den einzelnen Querträgern vorrücken und bestimmt die den Normalstellungen entsprechenden Werte von $+V$.

Zu diesem Zwecke trägt man nach § 27 auf $B_1 A_1$ von B_1 aus nach dem gewählten Kräftemaßstabe die Achsendrücke (1), (2), (3), (9) und ebenso auf der durch das linke Auflager A_1 gelegten Verticalen dieselben Achsendrücke, wie sie im Lastzuge aufeinander folgen und soweit sie auf der Spannweite $A_1 B_1$ Platz haben, der Reihe nach auf, wählt $A_1 B_1$ als Poldistanz und zeichnet das Seilpolygon $O' I' II' \dots X'$ derart, dass die Seilstrahlen desselben mit den entsprechenden Polstrahlen parallel laufen; also $O' I' \parallel B_1 A_1$, $I' II' \parallel B_1 (1)$, $II' III' \parallel B_1 (2)$ u. s. w.

Um nun beispielsweise das dem 5. Querträger auf $A'B'$ zukommende $\max V_5$ zu erhalten, denkt man sich den bezeichneten Lastzug von B' bis 5 aufzufahren und erhält durch die unterhalb

5 gemessene Ordinate V_5 des Seilpolygones das der Normalstellung entsprechende $\max V_5$. Es muss aber noch untersucht werden, ob V_5' fürs 5. Feld nicht größer wird, wenn der Lastzug soweit ins 5. Feld vorrückt, dass die zweite Achse des Lastzuges über den 5. Querträger zu stehen kommt. Bezeichnet allgemein λ die Feldlänge, e den Abstand der beiden ersten Achsen und P_1 das Gewicht der ersten Last, so übt P_1 auf den 4. Querträger den Druck $\frac{P_1 e}{\lambda}$ aus und es ist dann V_5' gleich dem Auflagerdrucke bei A' weniger dem Drucke auf den 4. Querträger. Der Auflagerdruck bei A wird aber durch die Ordinate $\overline{m n}$ unter der ersten Last gemessen, so dass $V_5' = \overline{m n} - \frac{P_1 e}{\lambda}$. Die Strecke $P_1' = \frac{P_1 e}{\lambda}$ lässt sich sehr einfach auf die aus der Figur ersichtliche Weise construieren, so dass $V_5' = \overline{m n} - \overline{m o} = \overline{o n}$ wird.

Im vorliegenden Falle ist thatsächlich $V_5 > V_5'$, also wie gewöhnlich die Normalstellung die maßgebende.

Analog lassen sich die den Querschnitten in den andern Feldern zukommenden Werte von $+ V_{\max}$ für die mobile Last bestimmen. Die negativen Maxima der Transversalkräfte ($- V_{\max}$) sind dann wieder aus den Werten von $+ V_{\max}$ nach § 27 zu ermitteln.

Zu den durch die mobile Belastung entstandenen Werten von $\pm V_{\max}$ sind noch die dem Eigengewichte entsprechenden Werte von V , die nach dem 2. Falle des § 28 zu bestimmen sind, mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen zu addieren.

§. 30. Reduction von Einzellasten auf eine gleichmäßige Belastung.

Da sich, wie gezeigt wurde, die Bestimmung der Biegemomente für die verschiedenen Querschnitte eines mit beiden Enden frei aufliegenden Trägers bei gleichmäßiger Belastung desselben sehr einfach ergibt, so pflegen die Praktiker statt der Einzellasten eine gleichmäßige Belastung in Betracht zu ziehen, welche dasselbe Maximalmoment wie die Einzellasten hervorbringt. Hat man nämlich das den Einzellasten entsprechende Maximalmoment M_{\max} für die Mitte des Trägers bestimmt, so berechnet man nun jene gleichmäßig vertheilte Last, welche in der Träger-

mitte dasselbe Maximalmoment hervorbringt wie die Einzellasten. Nach pag. 70 ist nämlich bei gleichmäßiger Belastung des Trägers das Biegemoment für die Trägermitte bestimmt durch $\frac{p l^2}{8}$, wenn p die Belastung pro Längeneinheit und l die freie Länge des Trägers bedeutet. Aus $M_{\max} = \frac{p l^2}{8}$ erhält man also

$$p = \frac{8 M_{\max}}{l^2} \dots \dots (\alpha)$$

als gleichmäßige Belastung des Trägers pro Längeneinheit.

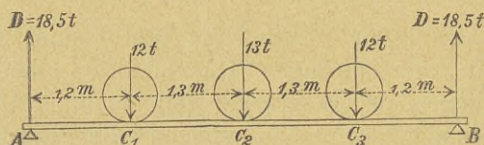
Für einen andern Querschnitt des Trägers stimmt aber das durch die Einzellasten in diesem Querschnitte hervorgebrachte M nicht mit jenem überein, das sich auf Grundlage des obigen Wertes von p bei gleichmäßiger Belastung in diesem Querschnitte ergibt.

Noch größer wird aber der Unterschied, der sich bei Bestimmung der Transversalkräfte V ergibt, wenn man statt der Einzellasten die mittels des obigen Wertes von p berechnete, stellvertretende gleichmäßige Belastung in Rechnung bringt.

Die mittels dieser idealen Belastung bestimmten Werte von M und V sind also von den wirklichen, der natürlichen Belastung entsprechenden, verschieden und zwar umsomehr, je größer der Unterschied der einzelnen Lasten und ihrer Abstände ist, und je kürzer der Träger selbst ist.

Das folgende einfache Beispiel wird dies ersichtlich machen. Fig. 83a stelle einen Brückenträger von 5 Meter Spannweite vor, der also bei der eingezeichneten Radstellung einer darauf befindlichen

Fig. 83a.



Locomotive am meisten auf Biegung in Anspruch genommen ist. Auf jede der beiden Stützen wirkt bei dieser Stellung die Hälfte des Locomotivgewichtes; jeder Stützendruck beträgt also 18,5 Tonnen.

Nach Figur 83a wird daher für die Brückenmitte C_2 :

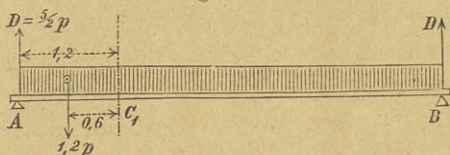
$M_{\max} = D \cdot AC_2 - 12 \times 1,3 = 30,65$ Tonnenmeter,
und somit nach Gleichung (α)

$$p = \frac{8 \times 30,65}{25} = 9,808 \text{ Tonnen.}$$

Rechnet man nun bei dieser gleichmäßigen Belastung das Moment für den Querschnitt C, welcher von A um 1,2 m. absteht, so wird hierfür, nach Fig. 83b,

$$M = 1,2 D - 1,2 p \times 0,6 = 15,13824 \text{ Tonnenmeter.}$$

Fig. 83b.



Rechnet man aber für denselben Querschnitt C, das Moment bei der gezeichneten Radstellung, Fig. 83a, so wird

$$M = 1,2 D = 22,2 \text{ Tonnenmeter,}$$

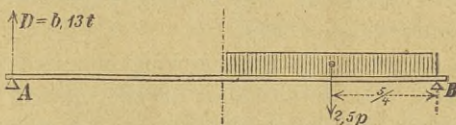
also bedeutend größer als bei gleichmäßiger Belastung.

Wir wollen nur noch die größte Transversalkraft für die Mitte des Trägers bei der idealen und bei der natürlichen Belastung bestimmen. Für diesen Fall darf der Träger (nach § 27) nur bis zur Mitte belastet sein.

Bei gleichmäßiger Belastung der Trägerhälfte, Fig. 83c, wird für die Mitte des Trägers

$$V = D = \frac{2,5 p \times \frac{5}{4}}{5} = 6,13 \text{ Tonnen.}$$

Fig. 83c.

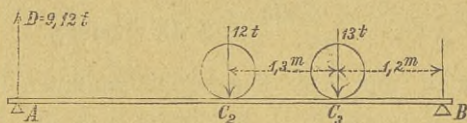


Bei der natürlichen Belastung der Trägerhälfte, Fig. 83d, wird aber

$$V = D = \frac{12 \times 2,5 + 13 \times 1,2}{5} = 9,12 \text{ Tonnen;}$$

somit ist der letztere Wert der Transversalkraft von dem vorigen bedeutend verschieden.

Fig. 83d.



Aus diesem Beispiele ersehen wir also, dass die Bestimmung der M und V für verschiedene Querschnitte mit Zuhilfenahme einer idealen, gleichmäßigen Belastung, die mittels des Wertes von p , nach Gleichung (α) gerechnet wird, unzulässig ist und dass man also bei rationellem Vorgange die wirkliche Belastung behufs der Bestimmung der Biegemomente und Transversalkräfte in Betracht ziehen, und nach den §§ 27—29 diese Bestimmung vornehmen müsse.

§. 31. Allgemeine Bemerkungen über die Belastungen der Träger.

I. Eigengewicht der Brücken.

Das Eigengewicht der Brücken ist abhängig:

- von der Größe der Verkehrsbelastung (mobilen Last),
- von der zulässigen Beanspruchung des Materiales, aus welchem die Brückenträger hergestellt sind,
- von dem Constructionssystem der Brückenträger und von der Breite der Brückenbahn.

Da nun die Größe der Verkehrslast wieder von der Spannweite l der Brücke abhängig ist, so wird das Gewicht der eigentlichen Brücken- oder Hauptträger zunächst als Function der Spannweite l darzustellen sein. Da ferner bei jedem Brückensystem das Gewicht der Brückenbahn von der Spannweite unabhängig ist, so wird in der Formel für das Eigengewicht der Brücken auch eine Constante aufzunehmen sein.

Bezeichnet daher g das Eigengewicht der Brücke pro Längeneinheit, l die freie Spannweite der Brücke, α und β gewisse Erfahrungscoefficienten, so kann man für g die allgemeine Formel aufstellen:

$$g = \alpha \cdot l + \beta.$$

Die Coefficienten α und β müssen aus einer großen Reihe rationell construirter Brücken verschiedener Systeme bestimmt werden.

A) Eigengewicht der Eisenbahnbrücken.

Nach den umfangreichen Zusammenstellungen des Eigengewichtes verschiedener Brückensysteme vom. Baurathe Schwedler, General-Inspector Heinrich Schmidt und anderen hervorragenden Ingenieuren, kann man bei eisernen Eisenbahnbrücken als größten Wert des Eigengewichtes für die Längeneinheit und ein Geleise setzen

$$g = 30 l + 800 \text{ Kilogr.};$$

dagegen für zwei Geleise

$$g = 57 l + 900 \text{ Kilogr.},$$

wenn die freie Spannweite l in Metern ausgedrückt und das Gewicht des Oberbaues mit eingerechnet wird.

Nach den Formeln von Laissle und Schübler ist für ein-geleisige Eisenbahnbrücken:

$$g = 35 l + F,$$

wenn F das Gewicht der Fahrbahn (samt Querträgern, Schwellen und Bedielung) pro laufenden Meter in Kg. bedeutet. Näheres hierüber findet man in meiner Baumechanik pag. 164, II. Theil, 2. Auflage.

B) Eigengewicht der Straßenbrücken.

Bei Straßenbrücken ist die Aufstellung einer bezüglichen, halbwegs brauchbaren allgemeinen Formel sehr problematisch, indem hiebei das Eigengewicht nicht nur von der Länge, sondern auch wesentlich von der Breite der Brücke und von der Constructionsart der Fahrbahn abhängt. Es sind hiebei insbesondere Brücken mit Beschotterung und solche ohne Beschotterung zu unterscheiden.

Im allgemeinen kann man für eiserne Straßenbrücken von 5,5 m. Fahrbahnbreite und beiderseitiger je 1 m. Fußwegbreite, also von 7,5 m. Totalbreite, pro laufenden Meter Spannweite annehmen:

a) bei Anwendung einer 0,2 m. hohen Beschotterung

$$g = 42 l + 3600 \text{ Kg. Eisengewicht}$$

und $g_1 = 42 l + 900 \text{ Kg. Eisengewicht};$

b) bei Anwendung einer doppelten Bedielung (ohne Schotter)

$$g = 28 l + 1300 \text{ Kg. Eigengewicht}$$

und $g_1 = 28 l + 600 \text{ Kg. Eisengewicht.}$

Genauere Resultate erhält man, wenn das Fahrbahngewicht F der jeweiligen Anordnung der Fahrbahn angepasst wird, also

a) für Brücken mit Beschotterung:

$$g = 42 \text{ l} + F \text{ (Kg. pro m)}$$

b) für solche ohne Beschotterung:

$$g = 28 \text{ l} + F \text{ (Kg. pro m)*]}$$

II. Mobile Brückenbelastung.

A) Eisenbahnbrücken.

In neuerer Zeit wurde von mehreren Ingenieuren als größte mobile Belastung jene angenommen, die aus einem ganzen Zuge von Locomotiven besteht, und damit motiviert, dass dieser Belastungsfall in Kriegszeiten beim schleunigen Retten des Locomotivparkes vor dem Feinde eintreten könne. Da sich jedoch diese Belastungsweise bei einiger Umsicht unter allen Umständen vermeiden lässt, so ist es jedenfalls rationeller, die Brückenberechnung auf denjenigen ungünstigsten Belastungsfall zu basieren, der thatsächlich vorkommen kann. Demnach wird bei der Bestimmung der größten Transversalkräfte — wie bereits im § 27 erwähnt wurde — ein vollständig beladener Güterzug, der von 3 vorwärts gehenden Lastzugs-Maschinen (und zwar der schwersten Art der betreffenden Bahn) gezogen wird, angenommen; dagegen bei der Ermittlung der größtmöglichen Biegemomente die ungünstigste Belastungsweise durch eine derartige Zusammenrückung zweier Güterzüge vorausgesetzt, dass die Locomotiven der beiden Züge Brust an Brust stehen und jeder der beiden Güterzüge von zwei vollständig ausgerüsteten Lastzugsmaschinen schwersten Calibers geführt wird. Gewöhnlich wird ein Normalzug gewählt, bei welchem, wie auf Tafel I, Fig. 1, die 3 Achsen einer Locomotive von einander um je 1,3 m. abstehen und Achsendrücke von je 13 t. erzeugen. Der Abstand zwischen den benachbarten Achsen zweier Locomotiven, oder zwischen jenen der Locomotive und des folgenden Tenders, beträgt hiebei 4 m., jener zwischen Tender und Lastwagen 3,2 m.; ferner der Abstand der drei Tenderachsen je 1,5 m. und endlich jener der beiden Wagenachsen 3 m. Die

*) Die Fahrbahngewichte F findet man in der 2. Auflage meiner Baumechanik für verschiedene Anordnungen berechnet.

Tenderachsen übertragen Drücke von je 9 und die Wagenachsen von je 8 t.

Auf Tafel I sind auch noch in den Fig. 5 und 6 die Radstände und Achsendrücke von sogenannten Tenderlocomotiven verzeichnet, bei welchen die Tender mit den Locomotiven vereinigt sind. Dieselben gehören zu den Lastzugmaschinen schwersten Calibers. Die in Fig. 5 dargestellte Engerth'sche Tendermaschine wird neuerer Zeit von den meisten Ingenieuren bei der Bestimmung der größten Transversalkräfte und Momente in Betracht genommen, und es geben diese Tendermaschinen, wegen ihrer geringeren Achsendistanz, offenbar größere Werte für V und M als die in Fig. 1 normierten Lastzugmaschinen mit getrennten Tendern. Man wird daher bei Bahnen, auf welchen Tendermaschinen verkehren, diese bei der Berechnung der Maximalwerte von V und M zu berücksichtigen haben.

Dem schädlichen Einflusse der Stöße, die durch die rollende Last erzeugt werden und die mit der Fahrgeschwindigkeit zunehmen, wird dadurch Rechnung getragen, dass man die spezifische Beanspruchung der Constructionstheile umso geringer wählt, je größer sich die relative Belastung derselben durch die mobile Last im Vergleich zu jener durch das Eigengewicht ergibt. Es müssen daher die Querträger, weil sie wegen ihrer geringeren Masse durch die rollende Last mehr erschüttert werden als die Hauptträger, mit größerer Sicherheit gebaut werden als die letzteren, auf welche die Belastung erst durch die Querträger übertragen wird und die wegen ihrer bedeutend größeren Masse geringeren Erschütterungen durch die Verkehrslast ausgesetzt sind. Die eigentliche Berechnungsweise der Constructionstheile wird übrigens in einem späteren Abschnitte besprochen werden.

B. Straßenbrücken.

Die größte mobile Belastung der Straßenbrücken tritt gewöhnlich bei Menschengedränge ein; dies gilt namentlich bei längeren Brücken, deren Spannweite 20 m. überschreitet. Je nach der Dichte des Gedränges gehen erfahrungsmäßig auf 1 □ m. 5 bis 6 Mann. Nimmt man nun das Gewicht eines Mannes mit 70 Kg. an, so ist die Belastung pro □ m. 350 bis 420 Kg.

Für Brücken in Landstraßen ist die kleinere Zahl, für frequente Brücken in Städten die größere Zahl maßgebend.

Bei kürzeren Brücken und bei der Berechnung der Querträger und des Brückenbelages sind jedoch auch die Achsendrücke schwerer Lastwagen in Betracht zu ziehen, wobei — je nachdem die Achsenentfernung der schwersten Fuhrwerke 2,8, 3,5 und 4,5 m. ist — ein Achsendruck von 3, 6 und 10 Tonnen vorkommen kann. Die Breite eines Wagens wird mit 2,5 m. und das Gewicht eines Paares schwerer Zugpferde mit 0,8 Tonnen angenommen.

Die obigen Achsendrücke beziehen sich der Reihe nach: a) auf zweispännige Lastwagen, b) auf vierspännige und c) auf sechsspännige Lastwagen, welche zum Transporte von Dampfkesseln, schweren Maschinen, Eisenbahnwaggons und demontierten Locomotiven bestimmt sind.

In den Figuren 83e, 83f und 83g sind die bezüglichen Lastvertheilungen angegeben, doch soll dort das Gewicht eines Pferdepaars mit 0,8 statt mit 0,6 Tonnen eingetragen sein.

Fig. 83e.

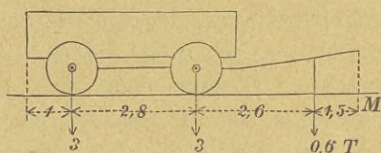


Fig. 83f.

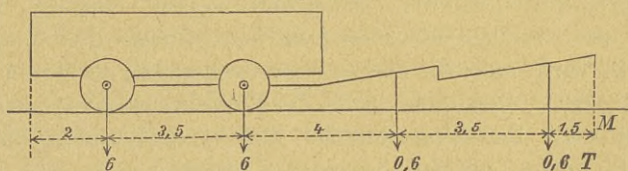
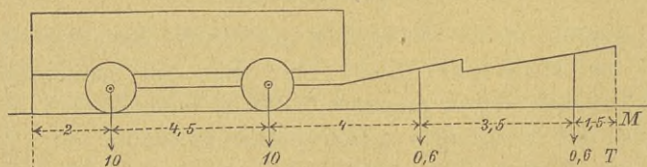


Fig. 83g.



Die erste Kategorie von Lastwagen gilt für Brücken in gewöhnlichen Landstraßen, die zweite für Brücken in Chausséen und die dritte für Brücken in Industrie-Städten.

Bei Brücken mit kleinen Spannweiten wird die größte Anspruchnahme durch die gleichzeitige Belastung mit einem Lastwagen und einem dichten Menschengedränge erzielt. Man erhält dann, nach § 28, das absolute Maximum der Transversalkraft am Auflager durch den Stützendruck, der sich ergibt, wenn die vordere Radachse des Lastwagens gerade am Auflager ruht und der übrige Theil der Brückenbahn und der Fußwege durch dichtes Menschengedränge belastet ist. Ebenso ergibt sich das absolute Maximalmoment für die Brückenmitte, wenn eine Radachse über derselben steht und außer dem Lastzuge der übrige Theil der Brückenbahn und die beiden Fußwege dicht mit Menschen besetzt gedacht werden.

Auch für andere Querschnitte wird bei Brückenträgern unter 20 m. Spannweite das Maximum der Transversalkraft oder des Momentes erreicht, wenn eine Wagenachse über dem Querschnitte steht und im ersteren Falle nur das größere Brückenfragment (nämlich vom Querschnitte bis zum entfernteren Auflager), dagegen im letzteren Falle der ganze übrige vom Fuhrwerke nicht bedeckte Theil der Brücke mit Menschen dicht besetzt ist.

III. Gewichte der Decken-Constructions (Zwischendecken), ihrer mobilen und totalen Belastung in Kilogramm pro 1 □ m.

Für die gewöhnlichen Decken-Constructions können die in der folgenden Tabelle angegebenen Zahlenwerte, die sich aufs Eigengewicht, die mobile und Totalbelastung in Kilogramm pro Quadrat-Meter beziehen, angenommen werden.

Die Tabellen über das Eigengewicht und die mobile Belastung der Dächer werden in dem den Dachconstructions geltenden Abschnitte folgen.

A. In Wohngebäuden oder in Fabriken mit leichten Maschinen
(Spinnereien u. dgl.).

Art der Decke	Eigen- gewicht	Mobile Last	Totale Last
Holzbalkendecke mit einfachem Fußboden . .	80	200	280
Holzbalkendecke mit doppeltem Fußboden od. mit einfachem Fußboden u. Deckenputz . .	100	200	300
Holzbalkendecke mit halbem Windelboden, Fußboden und Deckenputz	300	200	500
Holzbalkendecke mit ganzem Windelboden, Fußboden und Deckenputz	400	200	600
Decke aus Wellblech, Buckelplatten od. Barren- eisen mit 13 cm. dicker Betonschicht zwischen Trägern	250	200	450
Gewölbte Decken, $\frac{1}{4}$ Stein*) stark, (zwischen eisernen Trägern) für 1 bis 1,5 m. Spann- weite, mit Fußboden und Putz	300	200	500
Gewölbte Decken wie oben, $\frac{1}{2}$ Stein stark . .	400	200	600
Gewölbte Decken wie oben, 1 Stein stark für 2 bis 3 m. Spannweite	500	200	700

B. In Tanzlocalen, in Speichern und Fabriken mit schweren Maschinen.

Art der Decke	Eigen- gewicht	Mobile Last	Totale Last
Holzbalkendecke mit halbem Windelboden für Tanzlocale, Frucht- und Heuböden . . .	35	350	700
Holzbalkenlage mit Bohlenbelag in Salz- speichern	200	600	800
Holzbalkenlage mit Bohlenbelag in Kauf- mannsspeichern	250	750	1000
Decke aus Wellenblech, Buckelplatten oder Barreneisen mit 20 cm. dicker Betonschicht zwischen Trägern	350	500	850
Gewölbte Decke, $\frac{1}{2}$ Stein stark (zwischen eisernen Trägern) für 1 bis 1,5 m. Spann- weite in Fabriken oder Lagerräumen . .	450	500	950
Gewölbte Decke, 1 Stein stark, für Spann- weite von 2—3 m., sonst wie vor	650	500	1150

*) Eine Steinstärke beträgt 25 cm.

VII. Abschnitt.

Die Fachwerkbalken.**§. 32. Allgemeine Bestimmungen.**

Im § 14 wurde gezeigt, dass sich eine Kraft, deren Lage, Größe und Sinn gegeben ist, mit voller Bestimmtheit in 2 oder 3, der Richtung nach gegebene Componenten zerlegen lässt. Man soll daher die aus mehreren Stücken zusammengesetzten Träger derart construieren, dass durch parallel zur Lastrichtung geführte Schnitte nicht mehr als 3 Constructionstheile des Trägers getroffen werden; denn nur dann ist man in der Lage ohne jede Zweideutigkeit die Resultante der außerhalb des geführten Schnittes auf das Trägerfragment wirkenden Belastung in Richtung der durchschnittenen Constructionstheile zu zerlegen und hiernach die Anspruchnahme dieser Constructionstheile zu ermitteln. Sobald nun ein gerader Stab nur durch eine längs seiner Längsachse wirkende Kraft in Anspruch genommen ist, so vertheilt sich offenbar diese Zug- oder Druckkraft gleichmäßig über den ganzen Querschnitt des Stabes; es wird also das Materiale desselben vollständig ausgenützt. Wird dagegen der Stab durch die äußeren Kräfte gebogen, so vertheilen sich bekanntlich die durch die Biegung verursachten Spannungen ungleichmäßig im Innern des Stabes; es wird also das Material desselben nur unvollständig ausgenützt. Ein aus geraden Stäben zusammengesetzter Träger soll daher so construirt werden, dass seine Constructionstheile durch die äußere Belastung nur Längenspannungen erleiden; dies ist zunächst nur bei rationell gebauten Fachwerkbalken der Fall.

Ein einfacher Fachwerkbalken besteht nämlich in allgemeinsten Form aus den beiden äußeren, nach der ganzen Länge desselben sich erstreckenden geraden oder polygonalen Gurtungen (Streckbäumen oder Längsbändern), welche durch einen ununterbrochenen Zug von geraden Stäben zu einer Reihe fester Dreiecke derart verbunden sind, dass die einzelnen Glieder nur nach ihrer Längen-

richtung, also nur auf Zug oder Druck, durch die äußeren Lasten beansprucht werden können.

Diese Bedingung erfordert, dass die Stäbe in den Verbindungs- oder Knotenpunkten durch einfache Gelenkbolzen verbunden sind, welche die freie Drehung der Stäbe nicht hindern, und dass diese Knotenpunkte zugleich die Belastungspunkte sind. Es können sich dann die Stäbe den Krafrichtungen des Kräftepolygones anpassen, also das dazu gehörige Seilpolygon bilden. Bei allen folgenden Fachwerken wird daher vorausgesetzt, dass die Stäbe in ihren Knotenpunkten charnierartig verbunden sind, und dass diese Knotenpunkte ausschließlich die Belastungspunkte bilden, wie dies thatsächlich bei richtig construierten Fachwerkbalken der Fall ist, indem die äußeren Lasten durch Quer- oder Zwischenträger auf die Knotenpunkte der Hauptträger übertragen werden. Da ferner das Eigengewicht der ganzen Construction über die ganze Länge der Hauptträger nahezu gleichmäßig vertheilt ist, so wird man auch das Eigengewicht der zwischen zwei benachbarten Knotenpunkten der Gurtung liegenden Constructionstheilen zur Hälfte auf jeden der beiden genannten Knotenpunkte zu übertragen haben und von der sehr geringen Durchbiegung, welche die einzelnen Constructionstheile durch ihr Eigengewicht erleiden, absehen können. Wir werden überdies, der Einfachheit halber, annehmen, dass das ganze Eigengewicht in den Knoten derjenigen Gurtung angreife, welche die äußere Belastung direct aufzunehmen hat. Es werden zwar unter dieser Annahme etwas größere Beanspruchungen erhalten, als sie sich ergeben würden, wenn das Eigengewicht zur Hälfte auf jede der beiden Gurtungen vertheilt würde; doch ist der Unterschied zu unbedeutend, um für die Praxis maßgebend zu sein.

Nach der Belastungsweise der Fachwerkbalken unterscheidet man: a) Fachwerke mit constanter und b) mit veränderlicher Belastung, ferner nach der Form der Gurten: α) Fachwerke mit geraden Gurten, β) mit polygonalen und λ) einerseits mit geraden und andererseits mit polygonalen Gurten.

Zu den Fachwerken mit constanter Belastung rechnet man auch die verspannten Balken des Hochbaues, nämlich Sprengwerke, Hängwerke, die combinirten Häng- und Sprengwerke, sowie die als Fachwerkbalken hergestellten Dachbinder, Krähne u. dgl.

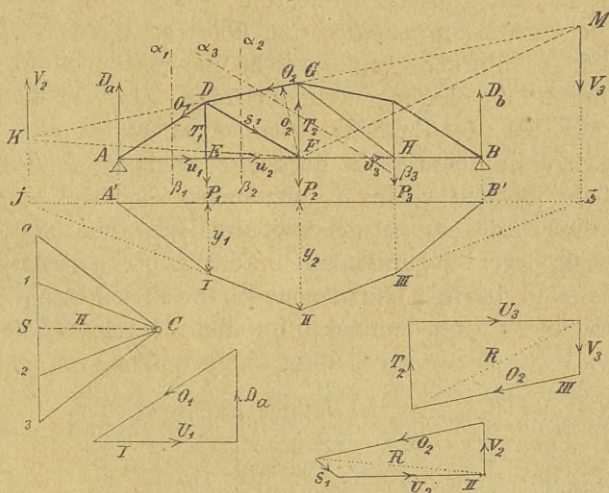
Zu den Fachwerken mit mobiler Belastung gehören zunächst die als Brückenträger dienenden Parallelträger, Parabel- und Halbparabel-Träger, die Schwedler'schen und Pauli'schen Träger, dann die Bogen-Fachwerkträger und die dem veränderlichen Winddrucke ausgesetzten Fachwerkbalken der Dachconstruktionen.

§. 33. Bestimmung der Spannungen in Fachwerkbalken mit constanter verticaler Belastung.

Die graphische Bestimmung der Inanspruchnahme der Constructionstheile eines Fachwerkbalkens mit constanter Belastung lässt sich nach verschiedenen Methoden durchführen, von welchen wir hier nur die gangbarsten, die für die Praxis geeignet sind, erläutern wollen.

1. Culmann's Methode. Dieselbe besteht der Hauptsache nach darin, dass man die Transversalkraft, die irgend einem Quer-

Fig. 84.



schnitte $\alpha \beta$ eines Fachwerkbalkens zukommt, direct in Componenten zerlegt, welche zu den vom Schnitte $\alpha \beta$ getroffenen Stäben parallel sind. Um dieses Verfahren an einem Beispiel klar zu sehen, wähle man einen beliebigen aber einfachen Fachwerkbalken A B, Fig. 84, dessen untere Knotenpunkte E, F, H der Reihe nach mit

P_1, P_2, P_3 belastet sind (worin das Eigengewicht schon inbegriffen ist) und construiere, um die den verschiedenen Querschnitten zukommenden Transversalkräfte zu erhalten, das der genannten Belastung entsprechende Kräfte- und Seilpolygon. Man mache also nach § 26 im Kräfteplane $\overline{01} = P_1, \overline{12} = P_2, \overline{23} = P_3$, wähle den Kräftepol C beliebig, ziehe die Polstrahlen $CO, C1, C2, C3$ und bilde das zugehörige Seilpolygon $A'I II III B'$ (worin $A'I \parallel OC, I II \parallel 1C, II III \parallel 2C$ und $III B' \parallel 3C$); sodann führe man zur Schlusseite $A' B'$ des Seilpolygons durch den Kräftepol C die Parallele CS und erhält schon durch $\overline{S0}$ die in A hervorgerufene Auflagerreaction D_a und durch $\overline{3S}$ jene D_b am Auflager B.

Um nun die Anspruchnahme der Constructionstheile in irgend einem Felde des Fachwerkes, z. B. im zweiten, zu erhalten, denke man sich dasselbe durch einen Querschnitt $\alpha_2 \beta_2$ durchschnitten, den rechts vom Querschnitte liegenden Theil weggenommen und an Stelle desselben die Kräfte O_2, S_1 , und u_2 in Richtung der durchschnittenen Stäbe angebracht, die den weggenommenen Trägertheil zu ersetzen haben, somit der Transversalkraft V_2 , welche dem Querschnitte $\alpha_2 \beta_2$ zukommt, das Gleichgewicht halten. V_2 ist aber die Resultante der links von $\alpha_2 \beta_2$ wirkenden äußeren Kräfte, also $V_2 = D_a - P_1$. Ihre Größe ergibt sich aus dem Kräfteplane, es ist nämlich $V_2 = \overline{S0} - \overline{01} = \overline{S1}$ und ihr Angriffspunkt J liegt bekanntlich im Schnittpunkte jener Seilpolygonseiten, die vom Schnitte $\alpha_2 \beta_2$ getroffen werden. Um nun die Zerlegung von V_2 in die drei Componenten O_2, S_1 und u_2 zu bewerkstelligen, verlängert man (nach § 14) die eine der Componentenrichtungen, z. B. jene von O_2 bis zum Schnittpunkte K mit V_2 und zerlegt (unten bei II) zunächst V_2 in zwei Componenten, von welchen die eine die Richtung von O_2 und die andere R die Richtung der Verbindungslinie KF hat, die von K zum Schnittpunkte F der beiden andern Componenten gezogen wurde. Die so erhaltene Componente R zerlegt man dann in Richtung von S_1 und u_2 und erhält so die Größe und Richtung der gesuchten drei Componenten. Ihr Sinn, respective Richtungspfeil, ist durch jenen von V_2 bestimmt. Sollen sich nämlich die vier Kräfte V_2, O_2, S_1 und U_2 das Gleichgewicht halten, so muss bekanntlich das diesen Kräften entsprechende geschlossene Kräftepolygon (Viereck) vom Richtungspfeile continuiertlich umfahren werden. Die Kräfte haben also die aus

dem (bei II) gezeichneten Kräftevierecke zu entnehmenden Richtungspfeile. Denkt man sich dieselben rechts vom Schnitte $\alpha_2 \beta_2$ auf die betreffenden Fachwerksstäbe übertragen, so erkennt man sofort, dass O_2 eine Druckspannung erzeugt, während S_1 und U_2 Zugspannungen verursachen. Diese drei Kräfte haben nämlich den rechts vom Schnitte $\alpha_2 \beta_2$ liegenden Fachwerktheil zu ersetzen; es erzeugt also O_2 , weil dessen Pfeil dem Querschnitte des linken Fragmentes zugewendet ist, eine Druckspannung, während die Kräfte S_1 und U_2 , da sie vom Querschnitte abgewendet sind, also die betreffenden Stäbe zu verlängern suchen, in denselben Zugspannungen hervorrufen.

Die Anspruchnahme O_1 und U_1 der in A aufliegenden Gurtstücke A D und A E lassen sich offenbar durch Zerlegung der in A thätigen Auflagerreaction D_a in zwei Componenten, die mit O_1 und U_1 gleiche Richtung haben, bestimmen. Diese Zerlegung wurde unten bei I vorgenommen. Durch den bekannten Richtungspfeil von D_a ist auch jener von O_1 und U_1 gegeben; denn da sich die drei auf den Knotenpunkt A wirkenden Kräfte D_1 , O_1 und U_1 das Gleichgewicht zu halten haben, so müssen sie sich zu einem geschlossenen Kräftedreieck von einerlei Sinn vereinigen lassen. Denkt man sich durch den Schnitt $\alpha_1 \beta_1$ den Träger zerschnitten, den rechts von $\alpha_1 \beta_1$ liegenden Theil weggenommen und durch die Kräfte O_1 und U_1 ersetzt, so erzeugt O_1 im Stabe AB eine Druckspannung, dagegen U_1 in AE eine Zugspannung; denn O_1 wirkt gegen den Querschnitt, sucht also den Stab zu zerdrücken, während U_1 vom Querschnitt weg gerichtet ist, somit den Stab zu zerreißen sucht.

Wollte man noch die Anspruchnahme eines der Verticalstäbe des Fachwerkes, z. B. jene von T_2 , bestimmen, so denke man sich einen Schnitt $\alpha_3 \beta_3$ derart geführt, dass von demselben, außer T_2 , nur noch zwei Stäbe getroffen werden, denke sich dann wieder den einen Trägertheil, z. B. den rechts vom Schnitte liegenden, weggenommen und an dessen Stelle die in den zerschnittenen Stäben wirkenden Inanspruchnahmen als äußere Kräfte O_2 , T_2 und U_3 thätig, die der Resultante aus der Belastung des links von $\alpha_3 \beta_3$ liegenden Fachwerks, d. i. der Transversalkraft V_3 das Gleichgewicht halten. Es ist $V_3 = D_a - (P_1 + P_2)$, daher ihre Größe und Richtung im Kräfteplan durch $\overline{S2}$ und ihre Lage

durch den Punkt L bestimmt, in welchem sich die Seilpolygonseiten des 3. Feldes schneiden. Um nun V_3 in die gesuchten drei Componenten zu zerlegen, verlängert man wieder eine derselben, z. B. O_2 , bis zum Schnittpunkte M mit V_3 , verbindet M mit F und zerlegt zunächst V_3 in zwei Componenten, welche die Richtung von O_2 und F M haben; zerlegt man sodann die letztere Componente R (siehe in Figur 84 unten bei III) in zwei Componenten, parallel zu T_2 und U_3 , so erhält man aus dem bezüglichen Kräftevierecke die Größe und die Richtungspfeile der gesuchten drei Kräfte O_2 , T_2 und U_3 , die mit V_3 das Kräfteviereck in gleichem Sinne umfahren. Denkt man sich nun wieder die Richtungspfeile dieser drei Kräfte auf die entsprechenden Stäbe aufgesetzt und den rechts vom Schnitte $\alpha_3 \beta_3$ liegenden Trägertheil durch die genannten drei Kräfte ersetzt, so erkennt man sofort, dass O_2 den zugehörigen Stab auf seine Druckfestigkeit, dagegen T_2 und U_3 die entsprechenden Stäbe auf Zugfestigkeit beanspruchen.

Analog lassen sich die Inanspruchnahmen sämmtlicher Constructionstheile einfacher Fachwerkträger bestimmen. Die besprochene Bestimmungsweise setzt aber voraus, dass die Schnittpunkte J und L der Seilpolygonseiten, welche die Lage der Transversalkräfte fixieren, noch auf der Zeichnungsfläche liegen. Wir wollen nun noch andere Methoden erläutern, die von der Lage der Transversalkräfte unabhängig sind.

2. Ritter's Methode. Dieselbe lehrt die Anspruchnahme eines beliebigen Stabes im Fachwerke, unabhängig von den benachbarten Stäben desselben, zu bestimmen. Sie besteht darin, dass man durch einen Querschnitt $\alpha \beta$, welcher außer dem fraglichen Stabe nur noch zwei Stäbe trifft, das Fachwerk in zwei Theile zerlegt, an den durchschnittenen Stäben Kräfte anbringt, die den einen der beiden Fachwerktheile zu ersetzen haben und daher mit den äußeren Kräften, welche den anderen Fachwerktheil afficieren, im Gleichgewichte gegen Drehung bleiben müssen. Um aber in der Momentengleichung, welche die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung des in Betracht gezogenen Fachwerktheiles feststellt, nur eine unbekannte Stabspannung zu erhalten, muss man den Knotenpunkt (Schnittpunkt) der beiden anderen Stäbe, die vom Querschnitte $\alpha \beta$ getroffen wurden, als Dreh- oder Momentenpunkt der Kräfte wählen. Es wird dann offenbar das Moment

dieser beiden Stabspannungen gleich Null und es bleibt somit nur eine Stabspannung in der Rechnung.

Will man z. B. die Anspruchnahme O_2 des Obergurtes im zweiten Felde des Fachwerkes Fig. 84 ermitteln, so denke man sich durch einen Schnitt $\alpha_2 \beta_2$ den rechten Theil des Fachwerkes entfernt und anstatt desselben die Kräfte O_2 , S_1 und U_2 thätig, die ihn ersetzen und somit der Resultante V_2 der auf das linke Fachwerkfragment wirkenden äußeren Kräfte D_a und P_1 das Gleichgewicht halten. Um nun S_1 und U_2 zu eliminieren, wählt man den Schnittpunkt F derselben als Drehpunkt, auf welchen man die Momente der Kräfte V_2 , O_2 , S_1 und U_2 bezieht. Fällt man also auf O_2 und V_2 von F Senkrechte und bezeichnet deren Längen beziehungsweise mit o_2 und v_2 , so wird für F die Gleichung bestehen müssen: $V_2 \cdot v_2 = O_2 \cdot o_2$, woraus

$$O_2 = \frac{V_2 \cdot v_2}{o_2}.$$

Der Richtungspfeil von O_2 ist leicht zu bestimmen; das Drehmoment von O_2 muss nämlich entgegengesetzt sein jenem von V_2 . Da aber V_2 bezüglich des Punktes F rechts drehend wirkt, so muss O_2 links drehend wirken, also gegen den Querschnitt des Stabes gerichtet sein, ihn also auf Druck beanspruchen.

Fällt nun V_2 außer die Zeichnungsfläche, so lässt sich sein Abstand v_2 von F nicht abgreifen und somit auch nicht das Moment $V_2 \cdot v_2$ direct bestimmen. In diesem Falle beachte man, dass das Moment $V_2 \cdot v_2$ für den Punkt F, zufolge § 26, auch durch das Product $H \cdot y_2$ bestimmt wird, worin $H = CS$ die Pol-distanz des Kräftepoles und y_2 die Ordinate des Seilpolygones für den Momentenpunkt F ist; dass also auch $O_2 = \frac{H \cdot y_2}{o_2}$.

Es erscheint hienach O_2 als die 4. geometrische Proportionale zu den bekannten drei Strecken H , y_2 und o_2 ; lässt sich also auf bekannte Weise sehr einfach construieren. Auf gleiche Art lassen sich auch die Inanspruchnahmen der anderen Stäbe ermitteln. Die Anspruchnahme der in A oder B aufliegenden zwei Gurtstücke ergibt sich wieder am einfachsten durch directe Zerlegung der Stützenreaction in Richtung der betreffenden Gurtstücke.

Es versteht sich wohl von selbst, dass wenn man für einen Querschnitt $\alpha_2 \beta_2$ die Anspruchnahme des einen der von ihm

getroffenen Stäbe, z. B. jene O_2 nach der Ritter'schen Methode ermittelt hat, aus O_2 und V_2 auch schon die Werte der beiden anderen Unbekannten S_1 und U_2 bestimmt sind. Man setzt nämlich V_2 mit O_2 zu einer Resultante R zusammen und zerlegt dann R in Richtung von S_1 und U_2 .

3. Cremona's Methode. Nach derselben werden die Spannungen sämtlicher Stäbe des Fachwerks — unveränderliche Belastung vorausgesetzt — in der Reihe, wie sie aufeinander folgen, durch einen einzigen Kräfteplan construiert. Dabei müssen zuerst die Auflagerreactionen ermittelt werden. Cremona's Methode beruht auf dem Satze, dass wenn die auf ein Fachwerk wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind, dies auch bezüglich der an jedem Knotenpunkte wirkenden äußeren und inneren Kräfte der Fall sein müsse; dass sich also für den Gleichgewichtszustand des Fachwerks für jeden Knotenpunkt die bezüglichen Kräfte zu einem geschlossenen Kräftepolygone vereinigen lassen müssen, das vom Richtungspfeile kontinuierlich umfahren wird. Da nun bei dem Übergange von einem Knotenpunkte zum nächst liegenden stets ein Stab den beiden benachbarten Knoten gemeinschaftlich ist, so wird dessen, aus der Gleichgewichtsbedingung des einen Knotens ermittelte Spannung beim Übergange zum anderen Knoten bereits benützt, um die Spannung der Stäbe am benachbarten Knoten zu bestimmen. Soll keine Zweideutigkeit eintreten, so muss mit der Construction des Kräfteplanes für einen Knotenpunkt begonnen werden, auf welchen eine äußere Kraft wirkt und von welchem nur zwei Stäbe ausgehen. Ferner muss man bei der Construction der Kräftepolygone stets von einem Knotenpunkte zu jenem der beiden benachbarten übergehen, an welchem nur zwei von den auf ihn einwirkenden Kräften unbekannt sind. Soll endlich jede Kraft im Kräfteplane nur einmal vorkommen, so halte man sich bei der Aneinanderreihung der Kräfte an die Regel: Die Spannkkräfte der im Fachwerk ein Dreieck bildenden Stäbe müssen im Kräfteplane durch denselben Punkt gehen.

Zur näheren Erläuterung mögen die folgenden Beispiele dienen. In den Kräfteplänen sind hierbei die Druckspannungen durch Doppel-Linien gekennzeichnet.

A) Kräftepläne für beiderseits frei aufliegende Träger.

I. Fachwerke mit horizontalem Obergurt.
(Belastung am Obergurt.)

Hiezu gehört zunächst der verspannte Balken. Die Fig. 85 stellt einen dreifach verspannten Balken AB vor, welcher in 3 Punkten durch Streben gestützt ist, deren untere Endpunkte durch zwei Zugstangen mit den Balkenenden A und B verbunden sind; überdies sind in den mittleren Feldern Diagonalstangen angeordnet. Dieser verspannte oder armierte Balken ist also ein Fachwerk mit geradlinigen, auf den Auflagern sich schneidenden Gurten, die bei totaler Belastung am meisten beansprucht werden. Da jeder der Knotenpunkte C, D und E mit der Last P belastet erscheint (wobei schon das Eigengewicht inbegriffen ist), so entfällt auf jede der beiden Stützen A und B der gleiche

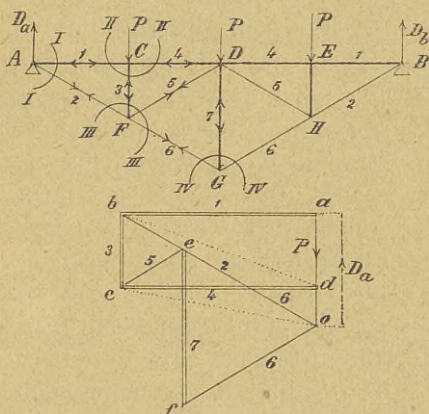
Auflagerdruck $\frac{3}{2} P$, der die gleiche Auflagerreaction $D_a = D_b = \frac{3}{2} P$ hervorruft.

Da der Träger bezüglich der mittleren Stütze DG symmetrisch angeordnet und auch symmetrisch belastet ist, so ist es klar, dass die zur Trägermitte symmetrisch liegenden

Stäbe gleiche Anspruchnahmen erfahren, weshalb die Anspruchnahmen nur für die eine Trägerhälfte, z. B. für die linke bestimmt zu werden brauchen.

An dem Auflager A beginnend, denke man sich zunächst den Knotenpunkt A des ersten Feldes durch einen beliebigen Schnitt I, I, der nur die beiden Gurtstücke AC und AF trifft, getrennt und die auf A wirkende Auflagerreaction D_a nach einem beliebigen Kräftemaßstabe im Kräfteplane $= o a$ aufgetragen und durch die Endpunkte von $o a$ Parallele zu AC und AF gezogen, wodurch

Fig. 85.



das Kräfte-dreieck oab erhalten wird, das die gesuchten Anspruch-nahmen 1 und 2 der beiden Stäbe AC und AF bestimmt. Der Umfahungssinn dieses Dreieckes ist, weil D_a nach aufwärts wirkt, oab ; es wirkt also die Kraft $ab = 1$ gegen den fest gedachten Knoten A , erzeugt daher in CA eine Druckspannung, während $bo = 2$ von A weg wirkt, somit in AF eine Zugspannung hervorrufft.

In Bezug auf den Knotenpunkt C ist die in AC herrschende Druckspannung 1 offenbar gegen C gerichtet, muss also für C mit dem entgegengesetzten Richtungspfeil als für A in Betracht gezogen werden.

Von den auf C wirkenden Kräften sind bereits zwei, nämlich $P = ad$ und $1 = ba$ bekannt; man kann daher die Resultante dieser beiden Kräfte, nämlich bd , in die beiden Componenten 3 und 4 zerlegen, welche die Spannungen der Stäbe CF und CD bestimmen. Man ziehe also im Kräfteplane $bc \parallel CF$ und $dc \parallel CD$, und erhält so $3 = cb$ und $4 = dc$. Über die Richtungspfeile dieser Kräfte kann kein Zweifel sein, indem das Kräfteviereck $adcb$ von den Richtungspfeilen in gleichem Sinne, nämlich in jenem $adcb$ umfahren werden muss. Es wirkt also sowohl 3 als auch 4 gegen C , beide erzeugen demnach Druckspannungen. Auf den Knotenpunkt F übergehend bemerkt man, dass von den auf F wirkenden vier Kräften bereits zwei, nämlich 2 und 3 bekannt sind, wobei, weil AF auf Zug beansprucht wird, der Richtungspfeil 2 von F abgewendet, dagegen, weil CF gedrückt wird, jener von 3 dem Knotenpunkte F zugewendet ist.

Um nun die Spannungen 5 und 6 in den Stäben FD und FG zu erhalten, braucht man nur die Resultante von 2 und 3, nämlich oc , in Richtung der genannten Stäbe zu zerlegen. Man mache also $ce \parallel FD$ und erhält $5 = ce$, $6 = eo$. Da sowohl 5 als auch 6 von F abgewendete Richtungspfeile haben, so werden die Stäbe FD und FG auf Zugfestigkeit beansprucht.

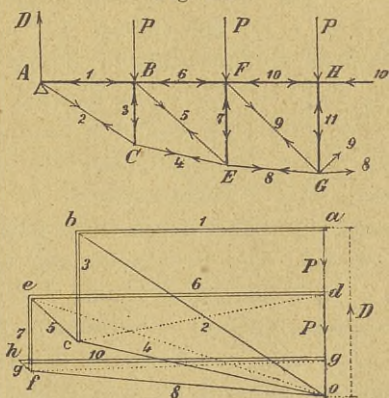
Die Anspruchnahme der mittleren Strebe DG lässt sich am einfachsten aus der Gleichgewichtsbedingung des Knotenpunktes G bestimmen; von den auf G wirkenden drei Kräften sind nämlich bereits die beiden gleichen Zugspannungen 6, 6 bekannt und müssen mit 7 ein geschlossenes, vom Richtungspfeil kontinuierlich umfahrenes Dreieck oef geben. Die Strecke ef gibt also die Druckspannung der Strebe DG .

Wäre die Belastung des Balkens A B über die ganze Länge desselben gleichmäßig vertheilt, so dass auf die Längeneinheit von A B der Betrag p entfiel, so würde auf jedes der vier Felder $A C = C D = D E = E B = \lambda$, die Last $p \lambda$ entfallen, und es wäre der hievon auf jeden der mittleren Knoten C, D und E kommende Betrag $P = p \lambda$; während auf die beiden Auflager A und B nur je $\frac{p \lambda}{2}$ als directer Druck nach abwärts entfiel, welcher der Auflagerreaction $2 p \lambda = 2 P$ entgegen wirken und dieselbe um $\frac{p \lambda}{2} = \frac{P}{2}$ verringern würde, so dass die active Auflagerreaction $D_a = \frac{3}{2} p \lambda = \frac{3}{2} P$ wäre.

In diesem Falle hätten die einzelnen Stücke des Obergurtes AB nicht nur die in ihnen durch die Belastung der Knotenpunkte C, D und E hervorgerufenen Pressungen 1 und 4, sondern auch die in ihnen durch die gleichmäßige Belastung erzeugte Biegungsspannung aufzunehmen, würden also bedeutend mehr beansprucht werden, als wenn dieselbe Belastung durch die Querträger nur auf die Knotenpunkte des Obergurtes übertragen wird. Die gleichzeitige Beanspruchung der Stäbe auf Druck und Biegung durch die äußere Belastung möchte aber dem Principe des Fachwerks widersprechen, weshalb — wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde — die äußere Belastung durch Querträger auf die Knotenpunkte des Fachwerkes übertragen werden muss.

Ebenso wie bei dem oben behandelten dreifachen Spannwerke sind die Anspruchnahmen anderer Spannwerke und aller jener Fachwerke mit horizontalem Obergurt und polygonalem Untergurt zu ermitteln, deren symmetrisch zur Fachwerkmittle liegenden Knotenpunkte des Obergurtes symmetrisch belastet sind, wie dies z. B. bei dem in Fig. 86 dargestellten Fachwerke der Fall ist, von welchem, wegen Raum-

Fig. 86.



ersparnis, nur die linke Hälfte gezeichnet wurde. Derselbe besteht im ganzen aus 6 Feldern von gleicher Länge, und jeder der inneren fünf Knotenpunkte des Obergurtes ist mit P belastet (wobei schon das Eigengewicht des ganzen Trägers mit inbegriffen ist, von dem auf jeden der inneren Knotenpunkte der sechste Theil entfällt). Die Auflagerreaction D in A ist offenbar gleich $\frac{5}{2} P$.

Um zunächst die Anspruchnahmen 1 und 2 der von A ausgehenden Gurtstücke AB und AC zu erhalten, führt man im Kräfteplane durch die Endpunkte der nach aufwärts gerichteten Auflagerreaction $D = o a$ die Parallelen zu AB und AC , wodurch das Kräftedreieck $o a b$ erhalten wird, welches vom Richtungspfeile im Sinne $o a b$ durchlaufen wird. Es gibt somit $a b$ die in AB herrschende Druckspannung 1 und $b o$ die in AC thätige Zugspannung 2. Von A muss man zu jenem der beiden benachbarten Knotenpunkte B, C übergehen, an welchem nur zwei unbekannte Kräfte vorkommen; dies ist bei C der Fall, indem vor den drei Kräften 2, 3 und 4, die auf C wirken, bereits die Zugspannung 2 bekannt ist. Die Anspruchnahmen 3 und 4 der Stäbe BC und CE ergeben sich wieder aus der Bedingung, dass für den Gleichgewichtszustand des Knotenpunktes C die auf ihn wirkenden drei Kräfte im Kräfteplane ein geschlossenes Dreieck mit continuierlichem Richtungssinn geben müssen.

Man wird also im Kräfteplane durch die Endpunkte von $o b = 2$ zu den Stäben BC und CE Parallele führen, die das Dreieck $o b c$ bestimmen, dessen Richtungssinn durch den Umstand gegeben ist, dass die Kraft 2 in AC eine Zugspannung erzeugt, somit in Bezug auf den Knotenpunkt C von diesem weggerichtet ist, daher im Kräfteplane die Richtung von o nach b hat. Demnach ist der Richtungspfeil der Kraft 3 von oben nach unten und jener der Kraft 4 von links nach rechts gerichtet; es erzeugt also 3 in BC eine Druckspannung und 4 in CE eine Zugspannung.

Auf den Knotenpunkt B übergehend, wird man sich zunächst von den fünf auf B wirkenden Kräften die drei bekannten Kräfte 3, 1, P zur Resultanten $c d$ vereinigt denken und durch die Endpunkte von $c d$ zu den Stäben BE und BF Parallele führen. Man erhält so das geschlossene Fünfeck $a d e c b$, das im Sinne des Pfeiles von P zu umfahren ist, weshalb $5 = e c$ von B abgewendet erscheint, somit im Stabe BE eine Zugspannung hervor-

ruft, während $6 = d e$ gegen B gerichtet ist, daher in B F eine Druckspannung verursacht.

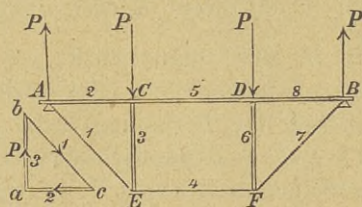
Von den auf den folgenden Knotenpunkt E wirkenden vier Kräften sind bereits zwei, nämlich die Kräfte $4 = o c$ und $5 = c e$ bekannt; man braucht daher nur durch die Endpunkte o und e ihrer Resultante o e zu den beiden andern Kräften 7 und 8, die in den Stäben E F und E G wirken, Parallele zu führen und erhält so das geschlossene Kräfteviereck o c e f, dessen Richtungspfeile durch jene von 4 und 5 gegeben sind. Die Pfeile der Kräfte 4 und 5 sind nämlich von E abgewendet; es müssen also jene von 7 und 8 mit 4 und 5 im Kräftevierecke übereinstimmend sein; daher wird 7 in der Richtung von e nach f und 8 in jener von f nach o wirken. Die Kraft 7 erzeugt also in E F eine Druckspannung, dagegen 8 in E F eine Zugspannung.

Bezüglich der auf den folgenden Knotenpunkt F thätigen fünf Kräften ist zu bemerken, dass davon bereits drei, nämlich 7, 6 und P bekannt sind, somit durch ihre Resultante f g ersetzt werden können, die mit den beiden andern Kräften 9 und 10 für den Gleichgewichtszustand des Knotenpunktes F ein geschlossenes Dreieck g f h geben muss, in welchem $f h \parallel F G$ und $g h \parallel F H$ ist. Der Richtungspfeil muss das Fünfeck f e d g h kontinuierlich umfahren und da er zunächst von P bekannt ist, so ist er auch schon für die anderen Kräfte bestimmt. Es wird demnach F H gedrückt und F G gezogen.

Die Anspruchnahme der mittleren Strebe G H ergibt sich am einfachsten aus der Bedingung des Gleichgewichtes am Knotenpunkte H. Die auf diesen Knoten wirkenden Druckkräfte 10, 10 sind gleich und entgegengesetzt, heben sich also auf, und es hat daher die Strebe H G nur den Druck P allein zu übernehmen.

Anmerkung. Obzwar das in Fig. 87 dargestellte doppelte Spannwerk kein eigentliches Fachwerk ist, indem das mittlere Feld kein Dreieckssystem aufweist, so wollen wir es hier doch als einen speciellen Fall eines Spannwerkes anreihen. Ist dasselbe zur Trägermitte symmetrisch angeordnet und sind die beiden mittleren Knoten-

Fig. 87.



punkte C, D je mit P belastet, so wird auf A und B je der Stützendruck P übertragen. Man zerlege daher im Kräfteplane die Auflagerreaction $P = ab$ in $1 \parallel AE$ und $2 \parallel AC$, so erhält man bereits durch bc die Zugspannung von AE und durch ca die Druckspannung von AC. Auf den Knotenpunkt E übergehend, hätte man die bereits bekannte Spannkraft $1 = cb$ mit den beiden anderen auf E wirkenden Kräften 3 und 4 zu einem geschlossenen Dreiecke zu vereinigen. Da aber 4 mit ac und 3 mit ab parallel ist, so bestimmt das Dreieck abc auch schon die Kräfte 3 und 4; doch sind bezüglich des Knotenpunktes E die Richtungspfeile in diesem Dreiecke sämtlich entgegengesetzt zu nehmen, indem 1 an E von E abgewendet ist und somit 3 in der Richtung von b nach a und 4 in jener von a nach c wirken muss. Da sich ferner am Knotenpunkte C für dessen Gleichgewichtszustand die entgegengesetzten Kräfte 2 und 5 aufheben müssen, so erfährt — wie bereits bekannt ist — die Strebe CE nur den Druck P. Wegen der symmetrischen Anordnung ist offenbar $1 = 7$, $2 = 8$ und $3 = 6$.

Wären die Belastungen der Knotenpunkte C und D ungleich, oder wäre bei gleicher Belastung derselben das Spannwerk unsymmetrisch gestaltet, so würde eine Verschiebung der Trapezform des Spannwerkes eintreten, und man müsste, um dies zu vermeiden, im mittleren Felde gekreuzte Zugstangen anbringen. Die Berechnungsweise derselben wird in dem der mobilen Belastung der Fachwerke geltenden Abschnitte gezeigt werden.

II. Fachwerkträger mit horizontalem Untergurt.

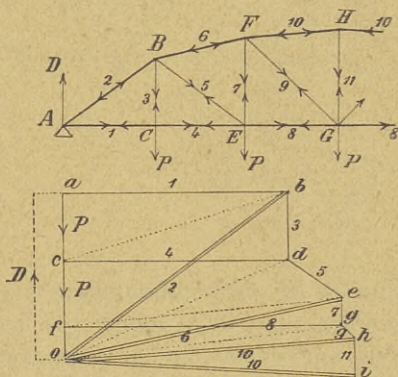
(Belastung am Untergurt.)

Die Fig. 88 stellt die Hälfte eines solchen Trägers vor, der zur Mitte symmetrisch angeordnet ist. Es wird wieder vorausgesetzt, dass jeder der innern Knotenpunkte des Untergurtes mit P belastet sei, wobei bereits der vom Eigengewichte G des ganzen Trägers auf jeden dieser Knotenpunkte entfallende Betrag $\frac{G}{6}$ inbegriffen ist. Im Kräfteplane wurde zunächst die Auflagerreaction $D = 2,5P = oa$ aufgetragen und in die beiden Componenten ab und bo zerlegt, die beziehungsweise zu den von A auslaufenden Stäben AC und AB parallel sind, somit die Anspruchnahmen 1 und 2 derselben bestimmen. Von A wurde zum Knotenpunkte C geschritten,

auf den die vier Kräfte 1, P, 3 und 4 wirken, von welchen bereits zwei, nämlich die Zugspannung $1 = ba$ und die Last $P = ac$, bekannt sind, die mit 3 und 4 ein geschlossenes Kräfteviereck bestimmen. Es wurde daher im Kräfteplane $bd \parallel BC$ und $cd \parallel CE$ gezogen, wodurch die Anspruchnahmen 3 und 4 der bezüglichen Stäbe resultierten, und zwar, mit Rücksicht auf den bekannten Richtungspfeil von P, $4 = cd$ und $3 = db$ als Zugspannungen. Von den auf den Knotenpunkt B wirkenden vier Kräften 2, 3, 5 und 6 sind bereits die zwei Kräfte 2 und 3 nach Größe und Sinn bekannt, somit ist auch das diesen vier Kräften entsprechende Kräfteviereck $obde$ bestimmt, in welchem $de \parallel BE$ und $oe \parallel BF$ die Größe der in BE und BF auftretenden Zugspannung 5, resp. die Druckspannung 6 angibt. Auf gleiche Art kann man nun aus den auf E wirkenden fünf Kräften 5, 4, P, 8 und 7, von welchen bereits die ersten drei vollständig bekannt sind, durch Construction des entsprechenden geschlossenen Kräftefünfeckes $edcfg$ die beiden andern, nämlich $8 = fg$ und $7 = ge$ ermitteln. Ebenso wird man das dem folgenden Knotenpunkte F entsprechende Kräfteviereck $oegh$, aus der nach Größe und Richtung bekannten zwei Kräften $oe = 6$ und $eg = 7$, sowie aus der gegebenen Richtung $gh \parallel FG$ und $ho \parallel FH$, sehr leicht construieren können; in welchem $gh = 9$ und $he = 10$ die Größe der fraglichen zwei Kräfte bestimmen. Die Anspruchnahme 11 der mittleren Zugstange HG ergibt sich am einfachsten aus der Gleichgewichtsbedingung des Knotenpunktes H, auf den nur drei Kräfte wirken, von denen bereits zwei, nämlich die beiden mit 10 bezeichneten, bekannt sind. Die Seite hi im Kräftedreiecke ohi gibt die bezügliche Zugspannung 11 von GH.

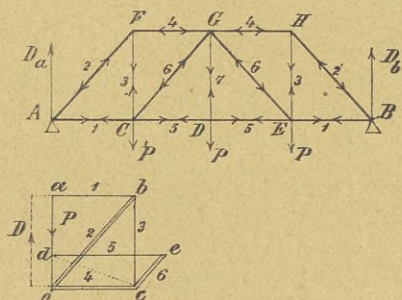
In analoger Weise, wie die Anspruchnahme der Stäbe des Fachwerks Fig. 88 bestimmt wurde, kann die Ermittlung der Spannungen in den sogenannten Hängwerken erfolgen.

Fig. 88.



Die Fig. 89 stellt ein dreifaches Hängwerk mit vier gleichen Feldern vor, bei welchem der Untergurt in den drei Knotenpunkten C, D und E mittels Zugstangen (Hängsäulen) aufgehängt und in den Fußpunkten dieser Hängsäulen belastet wird. Wegen der symmetrischen Anordnung und Belastung des Trägers erfahren die zur mittleren Hängsäule D G symmetrisch liegenden Constructionstheile gleiche Anspruchnahmen, weshalb die Bestimmung derselben im Kräfteplane nur bis zur Trägermitte nöthig ist. Im Kräfteplane wurde die Auflagerreaction $D = 1,5 P = o a$ gemacht und in Richtung der Stäbe AC und AF in die beiden Componenten a b und b o zerlegt, welche die Anspruchnahmen 1 und 2 bestimmen. Vom Knotenpunkte A weg kann man nicht sofort zur Bestimmung der am benachbarten Knotenpunkte C wirkenden 5 Kräfte schreiten, weil von denselben drei, nämlich 3, 5 und 6 unbekannt sind; man muss also zuvor die am andern

Fig. 89.



Nachbarpunkte von A, d. i. die an F wirkenden drei Kräfte ermitteln, von denen nur zwei, nämlich 3 und 4 noch unbekannt sind. Diese Ermittlung geschieht wieder im Kräfteplane, indem man durch die Endpunkte von $o b = 2$ die entsprechenden Parallelen zu FC und FG zieht, wodurch das Kräftedreieck $o b c$ gebildet wird, in welchem nach Größe und Richtung $b c = 3$ und $c o = 4$ ist. Am Knotenpunkte C sind jetzt nur noch zwei unbekannte Kräfte, nämlich 5 und 6; es lässt sich daher im Kräfteplane das den auf C wirkenden fünf Kräften entsprechende geschlossene Fünfeck $c b a d e$ construieren, in welchem $d e = 5$ und $e c = 6$. Die mittlere Hängsäule D G hat offenbar den Zug P vollständig aufzunehmen.

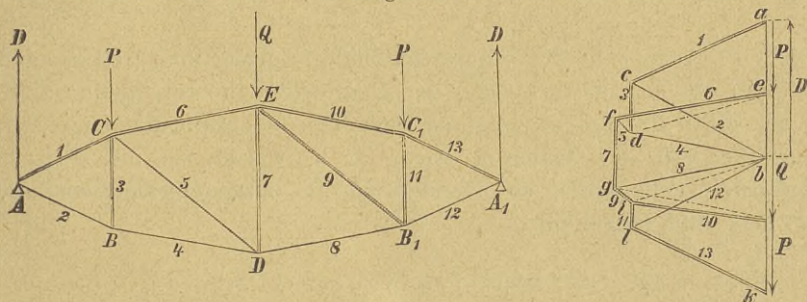
Beim doppelten Hängwerke kommen nur zwei Hängsäulen vor. Ist dasselbe zur Mitte symmetrisch angeordnet und auch symmetrisch belastet, so sind im mittleren Felde keine Streben nöthig; es stellt dann das umgekehrte, doppelte Spannwerk, Fig. 78, ein doppeltes Hängwerk vor, dessen Anspruchnahme sich ebenso einfach wie jene des genannten Spannwerkes ermitteln lässt.

III. Fachwerk allgemeiner Form. (Belastung am Obergurt.)

In Fig. 90 ist ein solcher Träger dargestellt. Um die Figur möglichst compendiös und doch recht deutlich zu erhalten, wurden nur 4 Felder angenommen.

Er besteht aus zwei polygonalen Gurtungen $ACE \dots A_1$ und $ABD \dots A_1$ und wird durch Verticalstäbe in vier ungleiche, aber zur Mittellinie ED symmetrische Felder getheilt, in denen die Diagonalen gleiche Richtung haben. Es wurde angenommen, dass nur die oberen Knotenpunkte belastet sind, und dass den zur Mitte symmetrisch gelegenen Knotenpunkten gleiche Belastungen zukommen. Die beiden Stützendrücke bei A und A_1 sind daher gleich groß, und zwar hat jeder die Größe $D = P + \frac{Q}{2}$.

Fig. 90.



Wird nun im Kräfteplane $ab = D$ gemacht und D in Richtung der Stäbe AC und AB zerlegt, so erhält man zunächst die in diesen Stäben herrschenden Spannungen 1 und 2. Auf den Knotenpunkt B übergehend, zerlege man die Spannung $2 = bc$ in $3 \parallel BC$ und $4 \parallel BD$. Hierauf schreite man zum Knotenpunkte C , vereinige zunächst 3, 1 und P zur Resultante ed und zerlege dieselbe in $5 \parallel CD$ und $6 \parallel CE$. Für den folgenden Knotenpunkt D setze man die schon bekannten Spannungen 4 und 5 zur Resultante fb zusammen und zerlege dieselbe in $7 \parallel DE$ und $8 \parallel DB_1$. Analog wie im Knotenpunkte C bestimme man für den Knoten E aus den bekannten Kräften Q , 6 und 7 die Kräfte 9 und 10, ferner für B_1 aus 8 und 9 die Spannungen 11 und 12 und berücksichtige

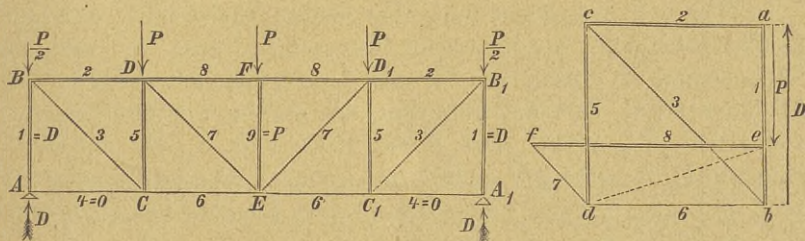
die Spannungen jedes einzelnen unter der Annahme, dass auf ihn nur die Hälfte von der Belastung des zusammengesetzten Trägers entfällt, denke sich dann die einfachen Träger wieder vereinigt und erhält schließlich die Spannungen der Gurtungsglieder und Verticalstäbe im combinirten Träger durch Addition der gleichbezahlten Spannungen in den einfachen Trägern. Auf dieselbe Art ließen sich selbstverständlich Fachwerkträger mit beliebig vielen Feldern behandeln.

V. Das Fachwerk mit parallelen Gurtungen.

Der in Fig. 93 dargestellte Träger ist zur Mittellinie $E F$ symmetrisch angeordnet und erhält pro Feld die gleichförmig vertheilte Belastung P , so dass auf die mittleren Knotenpunkte D , F und D_1 je der Druck P , dagegen auf die Endpunkte B und B_1 je der Druck $\frac{P}{2}$ thätig ist. Als activer Stützendruck bei A und A_1 ergibt sich somit

$$D = D_1 = 2 P - \frac{1}{2} P = 1,5 P.$$

Fig. 93.

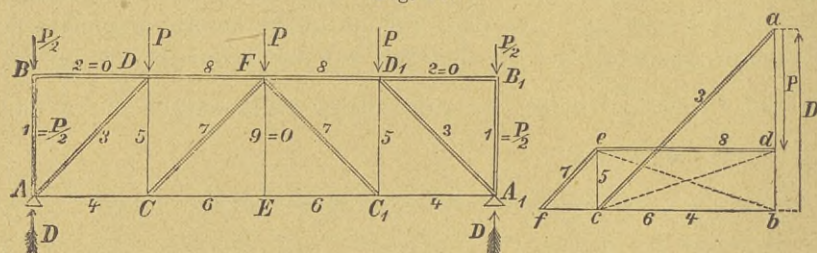


Offenbar hat der verticale Ständer AB den Stützendruck D direct aufzunehmen, weshalb der Stab AC unbelastet erscheint. Es könnte daher der Stützpunkt A , ohne Gleichgewichtsstörung, nach B verlegt werden, und ist somit die Kraftzerlegung von D erst bei B vorzunehmen. Man mache daher im Kräfteplane $ab = D$ und zerlege D in $2 \parallel BD$ und $3 \parallel BC$. Für den Knotenpunkt C zerlege man nun 3 in $5 \parallel CD$ und $6 \parallel CE$; hierauf zum Knotenpunkte D übergehend, vereinige man zunächst die schon ermittelten Kräfte 5 und 2 mit P zur Resultante ed und zerlege dieselbe in $7 \parallel DE$ und $8 \parallel DF$. Der mittlere Ständer FE hat offenbar den auf

seinen Kopfpunkt F wirksamen Druck P ganz allein aufzunehmen, es ist in ihm also die Druckspannung $9 = P$ thätig. Da ferner der Träger zur Mittellinie FE vollkommen symmetrisch geformt ist, so ist selbstverständlich die Anspruchnahme der Stäbe auf der rechten Hälfte ganz übereinstimmend mit der Anspruchnahme der gleichnamigen Stäbe auf der linken Trägerhälfte.

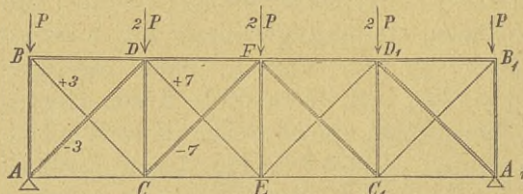
Der in Fig. 94 dargestellte Träger unterscheidet sich von dem vorigen nur durch die entgegengesetzte Lage der Diagonalstäbe, weshalb dieselben, wie aus dem beistehenden Kräfteplane erhellet, gegenüber den gleichbezahlten Diagonalen des vorhergehenden Trägers die entgegengesetzte Anspruchnahme erfahren.

Fig. 94.



Was die Anspruchnahme der beiden Endständer $A B$ und $A_1 B_1$ anbelangt, so ist leicht einzusehen, dass — weil der Stützendruck D direct von 3 und 4 aufgenommen wird — auf AB oder $A_1 B_1$ nur die Belastung des oberen Kopfpunktes, d. i. der Druck $P/2$ wirkt. Die Stäbe $B D$ und $B_1 D_1$ erscheinen unbelastet; dasselbe gilt endlich auch vom mittleren Ständer EF , denn der auf F entfallende Druck wird von den beiden Streben $F C$ und $F C_1$ aufgenommen.

Fig. 95.



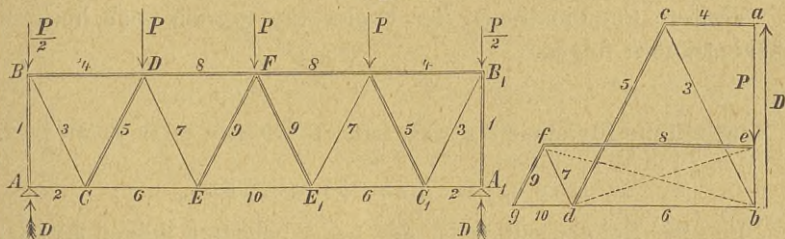
Der aus Fig. 93 und 94 kombinierte Fachwerkträger. Denkt man sich die beiden einfachen Träger Fig. 93 und 94 derart zusammengestellt und vereinigt, dass sich die gleich-

bezahlten Stücke mit Ausnahme der Diagonalen decken, so erhält man hieraus den kombinierten oder doppelten Fachwerkträger Fig. 95, dessen Spannungen man erhält, wenn man die Spannungen der sich deckenden Glieder addiert, die der Diagonalen aber unverändert lässt. Da nun die Verticalständer in den beiden einfachen Trägern, mit Ausnahme der beiden Ständer über den Auflagern, entgegengesetzte Anspruchnahme erfahren, so ergibt sich für jeden der mittleren Ständer des zusammengesetzten Trägers nur die Druckspannung P , während jeder seiner beiden Endständer den Druck $2 P$ erfährt.

VI. Fachwerke mit parallelen Gurtungen ohne Verticalstäbe.

Bei dem durch Fig. 96 versinnlichten einfachen Fachwerke sind die parallelen Gurtungen bloß durch Diagonalstäbe verbunden. Wird wieder eine gleichförmige Belastung des oberen Rahmstückes

Fig. 96.

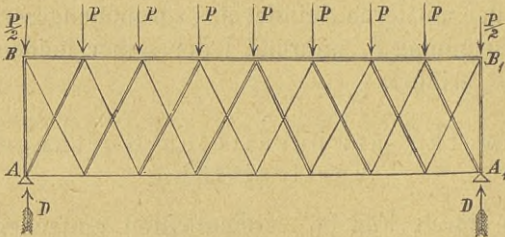


$B B_1$ vorausgesetzt, so ergibt sich, wenn die ganze Belastung des Trägers sammt seinem Eigengewichte mit $4 P$ bemessen wird, die aus der Figur ersichtliche Lastvertheilung, welcher die Auflagerreaction $D = 2 P - \frac{P}{2} = \frac{3}{2} P$ entspricht. Diese Auflagerreaction wird offenbar direct vom Ständer AB aufgenommen und auf B übertragen, weshalb AC keine Anspruchnahme erfährt.

Im Kräfteplane ist die auf den Knotenpunkt B übertragene Auflagerreaction D in die Stabspannungen $3 \parallel BC$ und $4 \parallel BD$ zerlegt worden. Hierauf wurden aus 3 die Spannungen $4 = cd$ und $6 = db$ gebildet, die Resultante de aus $5, 4$ und P in $7 = fd$ und $8 = ef$ zerlegt, sodann 6 und 7 zur Resultante fb vereinigt und fb in $9 = fg$ und $10 = gb$ zerlegt.

Wird nun mit diesem einfachen Fachwerkträger ein zweiter, der sich von ihm, bei gleicher Belastungsweise, nur durch die entgegengesetzte Lage der Diagonalstangen unterscheidet, derart vereinigt, dass sich die gleichnamigen Gurtungen decken, so erhält man den kombinierten Fachwerkträger Fig. 97, der doppelt so viel

Fig. 97.



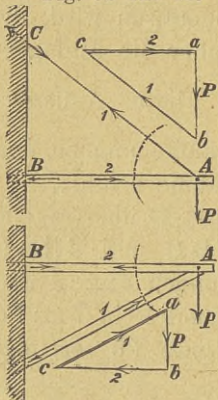
als der einfache trägt, und dessen Spannungen wieder erhalten werden, wenn man die Spannungen der sich deckenden Gurtungsglieder addiert, die der Diagonalen aber unverändert lässt.

Weitere Combinationen der Fachwerke werden noch bei den Brückenträgern folgen.

B) Kräftepläne für einseitig unterstützte Träger oder Freiträger.

I. Der einfachste Freiträger.

Fig. 98. Bei demselben ist der bei A belastete Balken mittelst der Hängestange A C aufgehängt und bei B befestigt. Hierbei zerlegt sich P direct in die Spannungen 1 und 2 und zwar bestimmt 1 eine Zugspannung, dagegen 2 eine Druckspannung.



Gerade umgekehrt gestaltet sich die Anspruchnahme in Fig. 99, wo der Balken AB von unten gestützt wird.

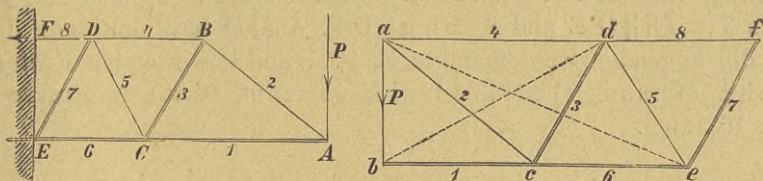
II. Der fachwerkförmige Freiträger.

II. Der fachwerkförmige Freiträger.

Fig. 100. Da hier nur die im Punkte A angehängte Last P als äußere Kraft auftritt, so mache man im Kräftepläne zunächst $ab = P$ und zerlege P, um die Spannungen 1 und 2 zu erhalten, in die Componenten $1 \parallel AC$ und

$2 \parallel AB$. Zum Knotenpunkte B übergehend, zerlege man die Spannung $2 = ac$ in die Spannungen $3 \parallel BC$ und $4 \parallel BD$; hierauf vereinige man in Betreff des Knotenpunktes C die bereits ermittelten Spannungen 1 und 3 zur Resultante bd und zerlege

Fig. 100.

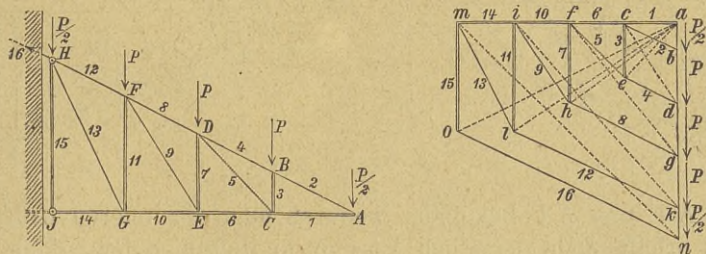


dieselbe in $5 \parallel CD$ und $6 = be \parallel CE$. Schließlich setze man bezüglich des Knotenpunktes D die Spannungen 4 und 5 zur Resultante ea zusammen, und zerlege dieselbe in $8 = af \parallel DF$ und $7 = ef \parallel DE$.

III. Das Perrondach.

Fig. 101. Dieses Dach ist offenbar auch als fachwerkförmiger Freitragler zu behandeln. Bezeichnen wir die auf jedes der vier Felder des Sparrens AH entfallende lothrechte Belastung mit P,

Fig. 101.



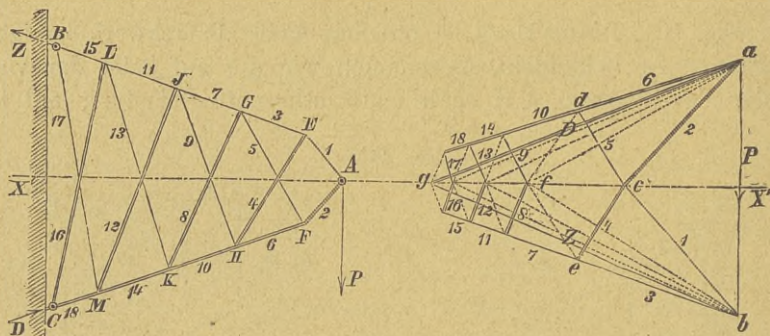
so kommt hiervon auf die äußersten Punkte A und H je der Betrag $\frac{P}{2}$ und auf jeden der Zwischenpunkte B, D und F der Betrag P. Man mache daher im Kräfteplane $ab = \frac{D}{2}$ und zerlege

zunächst $a b$ in $1 = a c \parallel A C$ und $2 = b c \parallel A B$. Nun vereinige man für B die Spannung 2 mit $P = b d$ zur Resultante $d c$ und zerlege dieselbe in $3 = c e \parallel B C$ und $4 = e d \parallel B D$; hierauf schreite man zum Knoten C , vereinige 1 mit 3 zu $e a$ und zerlege $e a$ in $6 = a f \parallel C E$ und $5 = e f \parallel C D$. Bezüglich des Knotenpunktes D vereinige man nun 5 , 4 und $P = d g$ zur Resultante $f g$ und zerlege $f g$ in $7 = f h \parallel D E$ und $8 = h g \parallel D F$. Analog bestimme man die auf die folgenden Knotenpunkte E , F , G und H wirkenden Kräfte: $9 = h i$, $10 = a i$, $11 = i l$, $12 = l k$, $13 = l m$, $14 = a m$, $15 = m o$ und $16 = o n$.

IV. Der gitterförmige Freiträger.

Fig. 102. Derselbe sei bloß bei A mit P belastet, bei B und C befestigt und in Bezug auf die Horizontale $A X$ symmetrisch gestaltet. Selbstverständlich wird man im Kräfteplane zunächst mit der Zerlegung der äußeren Kraft $P = a b$ in Richtung der

Fig. 102.



Stäbe $A E$ und $A F$ beginnen, wodurch man die inneren Kräfte 1 und 2 erhält. Jede derselben ist nun in Richtung der beiden angrenzenden Stäbe zu zerlegen und zwar: 1 in $3 \parallel E G$ und $4 \parallel E H$ sowie 2 in $5 \parallel F G$ und $6 \parallel F H$.

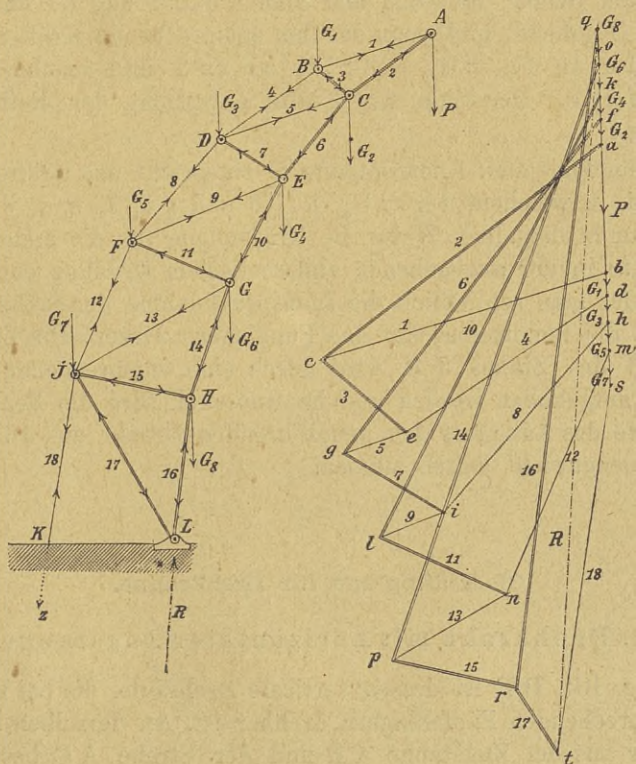
Man gelangt jetzt zum Knotenpunkte G , hat somit zunächst die schon bekannten Kräfte 3 und 5 zu vereinigen und die Resultante in die Kräfte 7 und 8 zu zerlegen. Dies geschah im Kräfteplane, indem $3 = b e$ mit $e f = 5$ zur Resultante $f b$ vereinigt und

diese in $7 \parallel GJ$ und $8 \parallel GK$ zerlegt wurde. Geht man nun analog bei der Bestimmung der Stabspannungen an den folgenden Knotenpunkten H, J, K, . . . vor, so erhält man den zur Achse XX' symmetrisch gelegenen Kräfteplan, von dem also nur die Hälfte zu construieren wäre. Es ist nämlich wegen der symmetrischen Anordnung der Stäbe in Bezug auf P und die Achse AX , $1=2$, $3=6$, $4=5$ u. s. f.; doch sind die gleichen Ansprachnahmen dem Zeichen nach gerade entgegengesetzt, d. h. die mit einfachen Linien bezeichneten Stäbe werden auf Zug, dagegen die mit doppelten Linien markierten Stäbe auf Druck beansprucht.

V. Das krahmartige Fachwerk.

Fig. 103. Auf dasselbe wirken in den einzelnen Knotenpunkten gegebene verticale Kräfte, und zwar auf den Knotenpunkt A die

Fig. 103.



angehängte Last sammt dem halben Gewichte der beiden Stäbe $A B$ und $A C$, also die Gesamtlast P , und auf die anderen Knotenpunkte das Eigenwicht der Fachwerkstäbe, wobei vorausgesetzt wird, dass das Gewicht jedes Stabes zur Hälfte auf jeden der beiden den Stab begrenzenden Knotenpunkte entfalle. Beim Knotenpunkt A beginnend erhält man wieder den Kräfteplan ohne Schwierigkeit, wenn man immer von einem Knotenpunkte zu jenem der beiden benachbarten Knotenpunkte übergeht, an welchem nur zwei unbekannte Stabspannungen vorkommen.

Das dem Knotenpunkte A entsprechende Kräftedreieck $a b c$, in welchem $a b = P$, $b c \parallel A B$ und $a c \parallel A C$, wird vom Richtungspfeile im Sinne $a b c$ durchlaufen, somit gibt $b c$ die in $A B$ hervorgerufene Zugspannung 1 und $c a$ die in $A C$ wirkende Druckspannung 2. Auf den Knotenpunkt B übergehend, reihe man an $c b = 1$ das Gewicht $G_1 = b d$ und ziehe $d e \parallel 4$, ferner $c e \parallel 3$. Es ist dann nach Größe, Richtung und Sinn $d e = 4$ und $e c = 3$. Zum Knoten C gehend, bilde man das ihm entsprechende Kräftefünfeck; reihe also an $f a = G_2$, $a c = 2$, $c e = 3$ und mache $e g \parallel 5$, ferner $f g \parallel 6$. Der Sinn der Kräfte entspricht der Reihenfolge $f a c e g f$.

Dem folgenden Knotenpunkte D entspricht das Kräftefünfeck $g e d h i$, in welchem $d h = G_3$, $h i \parallel 8$ und $g i \parallel 7$, u. s. w. Nachdem man in derselben Weise die Kräftepläne für die andern Knotenpunkte in der angegebenen alphabetischen Ordnung construiert hat, findet man schließlich die Inanspruchnahme der Stäbe 16, 17 und 18, die unmittelbar auf das Fundament wirken. Die Zugspannung 18 des Stabes $J K$ wird durch eine entsprechende Verankerung aufgehoben werden und im Knoten L wird die Reaction R von Seite des Auflagers dem resultierenden Drucke aus 16 und 17 das Gleichgewicht halten müssen.

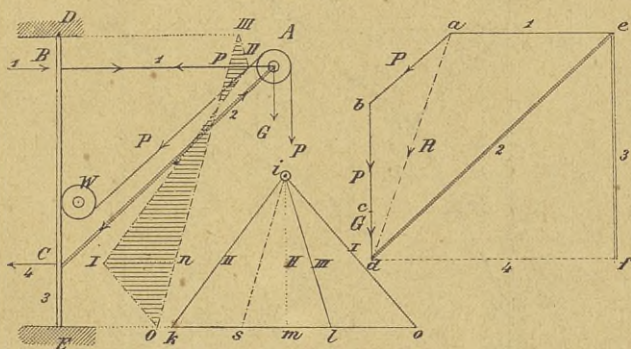
C) Kräftepläne für Drehkrane.

1. Drehkrahnen mit horizontaler Zugstange.

Fig. 104. $D E$ ist dessen verticale Drehsäule, die bei D und E in entsprechenden Zapfenlagern drehbar ist. An derselben befindet sich der aus der Zugstange $A B$ und der Strebe $A C$ bestehende

Krahnschnabel oder Ausleger A B C, an dem bei A die Last P mittels einer Rolle aufgewunden werden soll, von der die Kette parallel mit A C zur Winde (Seiltrommel) W führt. Es wirkt auf den Knotenpunkt A, außer der Last P, das Gewicht G, welches sich aus dem Gewichte der Rolle, der Kette und dem halben Gewichte der in A endigenden Stäbe A B und A C zusammensetzt, ferner der von A zur Winde W führende Zug in der Kette, welcher offenbar gleich P ist. Im Kräfteplane wurde demnach, von a aus, ab gleich dem Kettenzuge P gemacht und an ab die Last $P = b c$ und das Gewicht $G = c d$ angereiht. Es stellt somit $R = a d$ die Resultante der drei äußeren auf A wirkenden Kräfte vor, die für den Gleichgewichtszustand des Knotens A mit den Spannungen 1 und 2 der Stäbe A B und A C ein geschlossenes Dreieck a d e bilden muss, dessen Seiten d e und e a beziehungsweise zu diesen

Fig. 104.



Stäben parallel sind. Die Zugspannung 1 pflanzt sich durch A B auf den Punkt B und die Druckspannung 2 durch die Strebe A C auf den Punkt C der Säule fort. Der Druck 2 zerlegt sich in C in die beiden Componenten 3 und 4, deren Größen aus dem Kräfteplane zu entnehmen sind. Es ist nämlich $3 = e f$ und $4 = f d$.

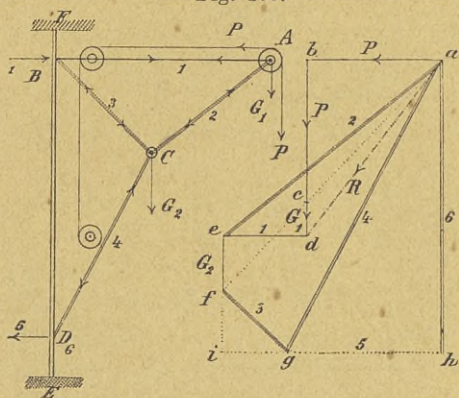
Die Drehsäule wird durch die Pressung 3, durch ihr Eigengewicht und durch jenes der Winde W in axialer Richtung, also auf Druck, ferner durch die Kräfte 1 und 4 zugleich auf Biegefestigkeit beansprucht.

Um nun auch die durch die Kräfte 1 und 4 in den Stützpunkten D und E erzeugten horizontalen Drücke, sowie die Biege-

momente für B und C zu erhalten, wurde $ok = 4$ und $kl = 1$ gemacht, ein beliebiger Kräftepol i gewählt und das den Polstrahlen io , ik und il entsprechende Seilpolygon $O I II III$ construiert. Der durch i zur Schlusslinie $O III$ des Seilpolygones gezogene Parallelstrahl is schneidet auf ok die gesuchten Drücke os und ks ab, welche beziehungsweise in den Lagern bei E und D in horizontaler Richtung wirken. Ist $H = im$ die Poldistanz, so erhält man bekanntlich die in C und B auftretenden Biegemomente durch $H \cdot \overline{In}$ und $H \cdot \overline{Ii p}$.

Analog wurden in Fig. 105 die Spannungen der Stäbe eines Drehkrahnes mit gebrochener Strebe ACD ermittelt, bei welchem die Seilspannung P parallel zu AB bis an die Drehsäule DE und dann lothrecht neben dieser auf die Seiltrommel übertragen

Fig. 105.



wird. Das Gewicht der Stäbe wurde wieder zur Hälfte auf die Endpunkte derselben übertragen. Im Kräfteplane wurde zunächst die Resultante R der auf A wirkenden äusseren Kräfte, nämlich der horizontalen Seilspannung $P = ab$, der Last $P = bc$ und dem Gewichte $G_1 = cd$ (das vom Eigengewichte der Rolle und dem halben Gewichte der von A auslaufenden Constructionstheile herrührt) ermittelt und sodann R mit den Spannungen 1 und 2 der Stäbe AB und AC zum Kräftedreieck ade vereinigt, indem $de \parallel AB$ und $ae \parallel AC$ gemacht wurde. Hierauf wurde auf bekannte Weise das den vier auf den Knotenpunkt C wirkenden Kräften entsprechende Kräfteviereck $aefg$ gebildet und schließ-

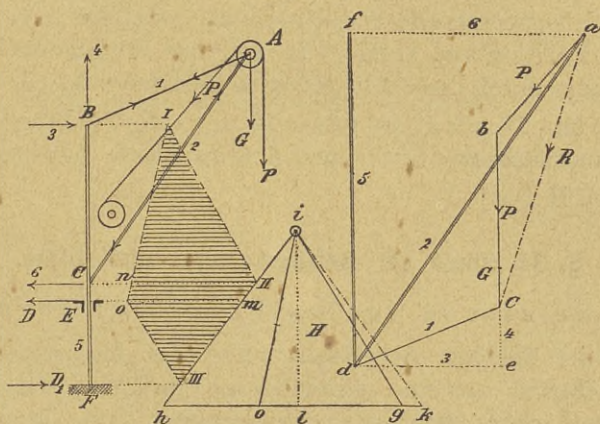
lich die durch die Streben CB und CD auf die Drehsäule übertragenen Drücke 3 und 4 in horizontale und verticale Componenten zerlegt. Es wirkt dann auf B die Horizontalkraft $d e - i g$ und auf D jene $5 = h g$; ferner auf die Drehsäule E F in axialer Richtung $a h - i f$, ihr Eigengewicht, jenes der Seiltrommel und das halbe Gewicht des Gestänges.

Die in den Punkten D und B der Drehsäule durch die horizontalen Kräfte erzeugten Biegemomente sind ebenso wie im vorigen Falle zu bestimmen.

2. Freistehender Drehkrahnen mit in das Fundament gehender Drehsäule.

Die Fig. 106 stellt die wesentlichen Constructionstheile eines solchen Kranes vor, dessen Drehsäule B F bei F ein Fußlager

Fig. 106.



und bei E ein Halslager hat, welches mit dem Fundamente fest verbunden ist.

Das über dem Fundamente liegende Stück B E der Drehsäule trägt dicht über dem Halslager E die Strebe C A, deren Ende A durch die Zugstange A B mit dem freien Ende B der Drehsäule verbunden ist. Das Seil läuft zwischen A B und A C in beliebiger Richtung auf eine Seiltrommel auf. Im Kräfteplane wurde zunächst wieder die Resultante R aus den auf A wirkenden äußeren Kräften,

nämlich der Seilspannung $P = a b$, der Last P und dem Gewichte G , das vom Eigengewicht der Rolle und dem halben Gewichte der von A auslaufenden Constructionstheile herrührt, bestimmt. Hierauf wurde $R = a c$ mit den beiden in $A B$ und $A C$ hervorgerufenen Spannungen 1, 2 zum Kräftedreieck $a c d$ vereinigt (nämlich durch $c d \parallel A B$ und $a d \parallel A C$) und die auf die Punkte B und C der Drehsäule wirkenden Kräfte 1 und 2 in horizontale und verticale Componenten zerlegt, nämlich $d c = 1$ in $d e = 3$ und $e c = 4$, ferner $a d = 2$ in $a f = 6$ und $f d = 5$. Die Drehsäule erfährt also den axialen Druck $5-4$, wozu noch das Eigengewicht der Drehsäule, der Seiltrommel und des halben Gestänges, das sich auf die Drehsäule stützt, einzurechnen wäre.

Um auch die durch die Kräfte 3 und 6 in E und F bewirkten Horizontaldrücke D, D_1 und die Biegemomente in C und E zu erhalten, wurde das entsprechende Kräfte- und Seilpolygon construirt. Es wurde nämlich $o g = 3$ und $g h = 6$ gemacht, ein beliebiger Kräftepol i angenommen und das den Polstrahlen $i o$, $i g$ und $i h$ entsprechende Seilpolygon auf bekannte Weise gebildet ($o I \parallel i o$, $I II \parallel i g$ und $II III \parallel i h$). Der zur Schlusseite $O III$ des Seilpolygons durch den Pol i gezogene Parallelstrahl $i k$ bestimmt $D_1 = \overline{o k}$ und $D = \overline{k h}$. Ist ferner $H = \overline{i l}$ die Poldistanz, so sind die Biegemomente für C und E bekanntlich bestimmt durch $H \cdot n \cdot II$ und $H \cdot O m$.

§. 34. Statik der fachwerkartigen Dachstühle.

I. Belastung der Dachconstructionen.

Bei der üblichen Berechnungsweise der Dachconstructionen wird gewöhnlich nur eine gleichförmige verticale Belastung der Dachsparren oder Dachbinder vorausgesetzt, was insofern nicht ganz richtig ist, als erfahrungsmäßig der auf die Dachfläche wirkende Winddruck von der horizontalen Richtung meist nur um circa 10 Grad abweicht und somit bei dieser Richtung unmöglich gleichmäßig auf die beiden, gewöhnlich entgegengesetzt liegenden Dachflächen in lothrechter Richtung einwirken kann.

Wir werden daher nur das Eigengewicht der ganzen Dachconstruction und den Schneedruck auf die Dachfläche gleichmäßig vertheilt annehmen und die Wirkung dieser lothrechten gleichmäßigen Belastung getrennt von jener durch den einseitigen Wind-

druck vornehmen. Selbstverständlich sind dann die in den einzelnen Constructionstheilen durch diese getrennten Belastungen erzielten Inanspruchnahmen mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen zu addieren.

Die Belastung eines Daches besteht also: 1. aus dem Eigengewichte der ganzen Dachconstruction, 2. aus dem Schneedrucke und 3. aus dem Winddrucke.

1. Eigengewicht der Dächer.

Der Berechnung der Dachbinder kann man die folgenden Angaben über das Eigengewicht der ganzen Dachconstruction, die aus dem Gewichte des Deckmaterials, der Latten- oder Bretterschalung und der Dachbinder besteht, zugrunde legen. Eine nachherige Gewichtsrechnung der Dachbinder und der Eindeckung muss angeben, ob die Annahmen genügend waren, oder ob noch eine zweite Berechnung der Dachsparren mit Benützung des ermittelten Gewichtes nothwendig sei.

A) Eigengewicht der Holzdächer in kg. pro □ m. der Dachfläche.

Art der Eindeckung	Gewicht
Einfaches Ziegeldach	110—120
Doppeltes oder Kronziegeldach	130—140
Falzziegeldach	80—90
Gewöhnliches Schieferdach	80—90
Asphaltdach mit Lehmunterlage	70—80
Theerpappdach	35—40
Zink- od. Eisenblech auf Holzschalung	50—60

B) Eigengewicht der Metalldächer in kg. pro □ m. der Dachfläche.

Art der Eindeckung	Gewicht
Schiefer auf Winkeleisen	50—60
Ebenes Eisenblech auf Winkeleisen	30—40
Gewelltes „ „ „	25—30
Zinkwellendach „ „	22

2. Schneedruck.

Die größte Höhe des Schneefalles in Mitteleuropa beträgt circa 0,6 m. Da nun die Dichte des Schnees beiläufig $\frac{1}{8}$ von jener des Wassers ist und 1 Cub. m. Wasser 1000 Kg. wiegt, so beträgt das Maximalgewicht der Schneelast pro 1 □m. der Horizontalprojection, Fig. 107, $\frac{1}{8} \cdot 0,6 \cdot 1000 = 75$ Kg.

Diese Last kommt offenbar auf die Strecke ab der Dachfläche für die Tiefe 1 m., und da $ab = \frac{1}{\cos \alpha}$, so kommt auf 1 □m der schrägen Dachfläche der Schneedruck $s = \frac{75}{ab} = 75 \cos \alpha$.

Für die verschiedenen Werte des Verhältnisses der Firsthöhe h zur ganzen Stützweite l des Daches Fig. 108, ergibt sich die folgende Tabelle.

Fig. 107.

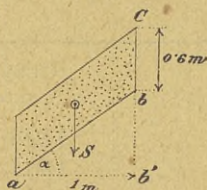
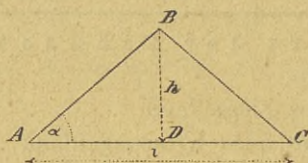


Fig. 108.



Schneedruck s pro □m schräger Dachfläche

für	$\frac{h}{l} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
	$s = 53$	62	67	70	71	72	73	73	73 Kg.

3. Winddruck.

Die Größe des Druckes, welchen der Wind auf eine zur Windrichtung normale Ebene ausübt, ist erfahrungsgemäß der Größe dieser Ebene und dem Quadrate der Geschwindigkeit des Windes proportional und erreicht nach d'Aubisson pro □m. nahezu den Wert $p = 0,1354c^2$ in Kg., wenn c die Geschwindigkeit des Windes pro Secunde in Metern ausgedrückt wird. Nimmt man fürs Flach- und Hügelland des mittleren Europa als größte

Geschwindigkeit des Windes $c = 30$ m an, so erhält man nahezu $p = 120$ Kg. pro \square m.

In Gegenden, die besonders heftigen Stürmen ausgesetzt sind, wird man p entsprechend zu vergrößern haben. Beispielsweise nehmen die Seeleute der Nordseeküsten nach der 12theiligen Scala des Admirals Beaufort, für die dort möglichen Orkane, als größten Wert des Winddruckes 240 Kg. pro \square m. an.

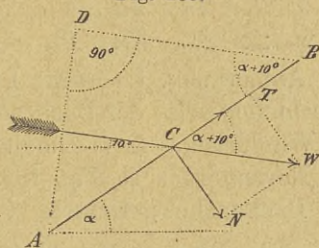
Nach neueren Versuchen, die insbesondere nach der verhängnisvollen Katastrophe der Tay-Brücke am Observatorium von Bidston angestellt wurden, steigert sich die Geschwindigkeit der Windstöße bis zu 45 m. Das in England im Jahre 1880 zur Bestimmung des Winddruckes auf Eisenbahn-Bauobjecte berufene Comité hat demnach als Maximalwinddruck 56 engl. Pfund pro engl. \square Fuss d. i. circa 270 Kg. pro \square m. festgestellt.

Da die Windrichtung mit der Horizontalen gewöhnlich den Winkel von 10° einschließt, so bildet die Windrichtung W mit einer zur Horizontalen unter dem $\sphericalangle \alpha$ geneigten Ebene AB , Fig. 109, den $\sphericalangle \alpha + 10^\circ$. Es entsteht nun die Frage, welche Componente des Winddruckes W auf die Dachconstruction zur Wirkung kommt? Um diese Frage zu beantworten, beachte man, dass der Reibungswinkel des Windes gleich Null ist, dass also nur jene Componente des Winddruckes, die zur Dachfläche normal ist, durch einen Gegendruck der Dachconstruction aufgehoben werden kann, dass also die Dachbinder nur durch die normale Componente des Winddruckes W belastet werden, indem die zur Dachfläche parallele Componente von W auf dieselben keinen Einfluss auszuüben vermag.

Macht man AD senkrecht zur Windrichtung W und BD parallel zu derselben, so würde die Fläche AD , wenn deren Tiefe senkrecht zur Bildebene gleich der Längeneinheit ist, vom Winddrucke $W = p \cdot AD$ getroffen. Es ist aber $AD = AB \cdot \sin(\alpha + 10^\circ)$ und somit $W = p \cdot AB \cdot \sin(\alpha + 10^\circ)$.

Von diesem Winddrucke W entfällt nun auf die Dachfläche AB , die Tiefe Eins vorausgesetzt, nur die zur AB normal

Fig. 109.



gerichtete Componente N von W, als active Kraft, während die längs A B gerichtete Componente T auf die Dachconstruction, respective auf die Dachbinder, keine Wirkung ausübt.

Es ist $N = W \cdot \sin(\alpha + 10^\circ)$, oder wenn für W der obige Wert eingesetzt wird,

$$N = p \cdot A B \cdot \sin^2(\alpha + 10^\circ).$$

Es ist daher der Winddruck pro Flächeneinheit der geneigten Dachfläche

$$w = \frac{N}{A B} = p \cdot \sin^2(\alpha + 10^\circ) \dots (\alpha).$$

Setzt man für p den bei uns maßgebenden Wert von 120 Kg. pro \square m. ein, so ergibt sich als normale Belastung der Dachfläche pro \square m. in Kg.:

$$w = 120 \sin^2(\alpha + 10^\circ) \dots (\beta).$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich für verschiedene Dachneigungen die folgende Tabelle, in der $\frac{h}{l}$ das Verhältniß der Firsthöhe zur ganzen Spannweite des Daches bestimmt.

Normaler Winddruck pro \square m. schräger Dachfläche.

für $\frac{h}{l} =$	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{7}$,	$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{9}$,	$\frac{1}{10}$
$w \doteq$	81,	57,	43,	34,	27,	23,	20,	80,	16 Kg.

Anmerkung. Es wurde bereits erwähnt, dass bei der üblichen Berechnungsweise der Dachconstructionen die verticale Componente des Winddruckes in Rechnung gezogen wird. Zerlegt man daher den Normaldruck N, Fig. 109, in eine verticale und in eine längs der Dachfläche gerichtete Componente, so ergibt sich für die

erstere der Wert $V = \frac{N}{\cos \alpha}$ und daher pro Flächeneinheit

der schrägen Dachfläche die verticale Componente

$$v = \frac{N}{A B \cos \alpha} = \frac{p \sin^2(\alpha + 10^\circ)}{\cos \alpha}$$

und für $p = 120$ Kg. pro \square m.,

$$v = \frac{120 \sin^2(\alpha + 10^\circ)}{\cos \alpha} \dots (\gamma).$$

Die hiernach berechneten Werte von v sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, wobei die Dachneigung wieder durch

das Verhältnis der Firsthöhe h zur ganzen Spannweite l des Daches angegeben ist.

	Verticaler Winddruck pro □m. der schrägen Dachfläche								
für	$\frac{h}{l} = \frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{7}$,	$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{9}$,	$\frac{1}{10}$
	$v = 162$,	82 ,	54 ,	40 ,	30 ,	25 ,	21 ,	19 ,	17 Kg.

4. Bestimmung der Belastung pro Dachbinder und pro Knotenpunkt.

Ist die Entfernung zweier aufeinander folgenden Dachbinder oder Sparren gleich e , ferner pro 1 □m. der Dachfläche das Eigengewicht der gesamten Dachconstruction gleich g , der Schneedruck gleich s und der Winddruck gleich w , so wirkt auf die Sparrenlänge $AB = l_1$ Fig. 108, das Eigengewicht $G_1 = g \cdot e \cdot l_1$, der Schneedruck $S_1 = s \cdot e \cdot l_1$ und der normale Winddruck $W_1 = w \cdot e \cdot l_1$.

Ist nun der Sparren in n Punkten unterstützt, sind also n Knotenpunkte vorhanden, die von einander gleich weit abstehen, so wird durch dieselben die Sparrenlänge l_1 in $n - 1$ gleiche Felder getheilt und es entfällt daher auf jedes Feld der $n - 1^{\text{te}}$ Theil der Belastung des Sparrens, also vom Eigengewichte der Betrag $\frac{G_1}{n-1}$, vom Schneedrucke jener $\frac{S_1}{n-1}$ und vom Winddrucke der Betrag $\frac{W_1}{n-1}$.

Auf den ersten Knotenpunkt A entfällt offenbar nur die Hälfte der Belastung des ersten Feldes, während auf jeden der folgenden Knotenpunkte, auf den sich die beiden benachbarten Felder stützen, von jedem die Hälfte, also im ganzen die Belastung eines Feldes wirkt.

Hiebei wird wieder (wie bei allen Fachwerkträgern) vorausgesetzt, dass die Knotenpunkte ausschließlich die Belastungspunkte der Sparren sind. Es gehen nämlich über die aufeinander folgenden Sparren, senkrecht auf deren Längen in den Knotenpunkten, Querbalken, auf welchen die Dacheindeckung befestigt wird, so dass deren Gewicht erst durch die Querbalken auf die Sparren einwirkt.

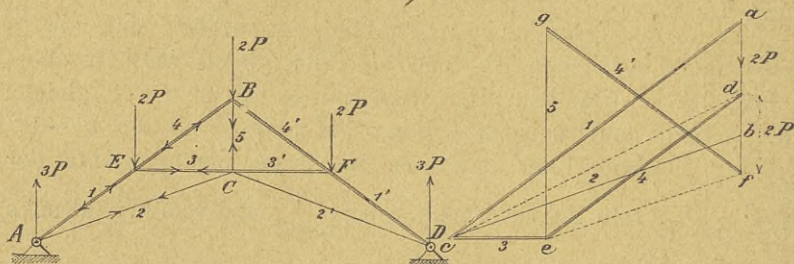
Sind die Sparren, wie bei den pyramidenförmigen Dächern nicht parallel, so ist die Belastung pro laufenden Meter der Sparrenlänge veränderlich und zwar entsprechend der Größe der veränderlichen Dachfläche, welche auf die einzelnen Sparrenfelder entfällt.

II. Kräftepläne für fachwerkartige Dachstühle.

1. Der deutsche Dachstuhl. Fig. 110.

a) Anspruchnahme durch das Eigengewicht und den Schneedruck. Die beiden Sparren AB und BD werden bei diesem Dachstuhl durch die Strebe EF in 2 gleiche Felder zerlegt und der Mittelpunkt C der Strebe ist durch Zugstangen mit den beiden Auflagerpunkten und dem gemeinschaftlichen Knotenpunkte B der beiden Sparren verbunden.

Fig. 76. 110.



Nimmt man an, dass auf jedes Feld eines Sparrens die verticale Belastung $2P$ wirkt, so entfällt hievon auf jeden Endpunkt eines Feldes die Hälfte. Auf die drei mittleren Knotenpunkte E, B, F entfällt daher, da sie zu beiden Seiten belastet sind, der Druck $2P$; dagegen auf jeden der beiden Endpunkte A und D nur der Druck P . Jeder der beiden Auflagerpunkte A, D hat aber einen Gegendruck, die Auflagerreaction zu leisten, welcher der Hälfte der totalen Belastung gleichkommt. Jede Auflagerreaction ist hier also $4P - P = 3P$, die sich als active Kraft auf die Stabverbindung äußert.

Im Kräfteplane wurde zunächst aus der bekannten Auflagerreaction $ba = 3P$ und den beiden, der Richtung nach gegebenen

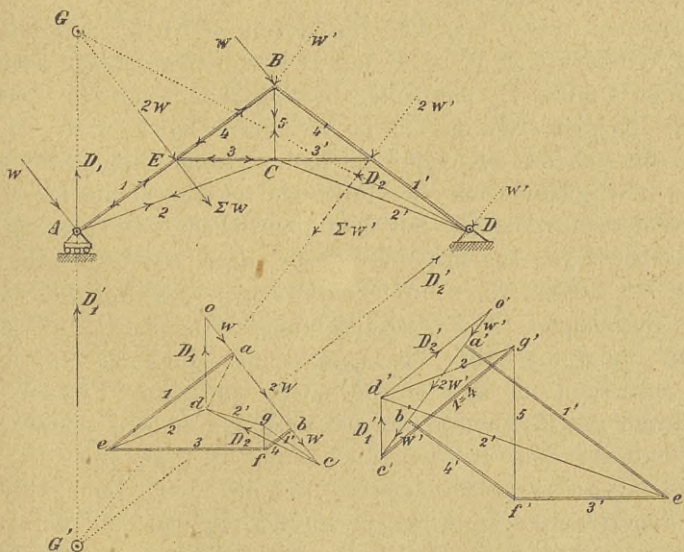
Stabspannungen 1 und 2 das Kräfte-dreieck $b a c$ gebildet und durch dieses $1 = a b$ und $2 = c b$ bestimmt. Von den auf den Knotenpunkt E wirkenden vier Kräften 1, $2 P$, 3 und 4 sind nun bereits zwei, nämlich $1 = c a$ und $2 P = a d$, bekannt, somit ergeben sich die beiden andern aus dem zugehörigen Kräfteviereck $c a d e$ nämlich $d e = 4$ und $e c = 3$.

Auf den Knotenpunkt B übergehend, vereinige man im Kräfteplane die beiden bekannten Kräfte $4 = e d$ und $2 P = d f$ mit den Richtungen der beiden andern $4'$ und 5 zum Kräftevierecke $e d f g$ und erhält $4' = f g$, $5 = g e$. Wegen der symmetrischen Anordnung der Dachconstruction und ihrer Belastung wird offenbar $4' = 4$, $3' = 3$, $2' = 2$ und $1' = 1$.

b) Anspruchnahme durch den einseitigen Winddruck.
 α) Linksseitige Windbelastung. Fig. 111.

Bezeichnet man mit $2 W$ den normalen Winddruck auf ein Feld des Sparrens $A B$, so kommt hievon auf den mittleren Kno-

Fig. 111.



tenpunkt E , auf den sich die beiden benachbarten Felder $A E$ und $C B$ stützen, der Druck $2 W$, während jede der beiden Endstützen A und B nur den Druck W erfährt. Der auf $A B$ resultierende Winddruck ΣW ist also $= 4 W$ und es entsteht die Frage, welche

Auflagerreactionen dieser einseitige Winddruck in A und D hervorruft? Wären die beiden Knotenpunkte A und D mit den Auflagern fest verbunden, so hätte man keine Bedingungen zur Bestimmung der beiden Auflagerreactionen, indem die Richtung derselben ganz unbestimmt bliebe; überdies würden sich eiserne Sparren bei Temperatursänderungen nicht frei ausdehnen, respective zusammenziehen können und es würden daher bei bedeutenden Temperatursänderungen Spannungen in der Dachconstruction entstehen, die sich schwer in Rechnung bringen ließen. Man ordnet daher bei den modernen eisernen Dachstühlen das eine Auflager, z. B. jenes bei A, als frei bewegliches Rollenlager an, welches eine freie Ausdehnung oder Zusammenziehung der Dachconstruction gestattet, während das andere Ende B mit dem Auflager fest verbunden bleibt. Wird nun von dem geringen Reibungswiderstande des horizontalen Rollenlagers abgesehen, so kann dasselbe nur einem senkrecht zur Lagerfläche gerichteten Drucke widerstehen, es kann dann also auch die Auflagerreaction bei A nur vertical gerichtet sein.

Demnach lassen sich nun die durch den bei E angreifenden totalen Winddruck ΣW in A und D hervorgerufenen Auflagerreactionen D_1 und D_2 mit voller Bestimmtheit ermitteln. Die drei auf die Dachconstruction A B D wirkenden Kräfte ΣW , D_1 und D_2 müssen sich das Gleichgewicht halten, treffen sich also in einem Punkte und geben nach Richtung und Größe aneinandergereiht ein geschlossenes Dreieck mit continuierlichem Richtungspegel. Der gemeinschaftliche Angriffspunkt dieser drei Kräfte ergibt sich offenbar im Punkte G, in welchem die verticale Auflagerreaction D_1 des Rollenlagers A den resultierenden Winddruck ΣW schneidet, und die Auflagerreaction D_2 muss also die Lage D G haben. Macht man nun im Kräfteplane $oc =$ und $\parallel \Sigma W = 4W$ und zieht durch die Endpunkte von oc Parallele zu A G und G D, so erhält man aus dem Kräftedreieck ocd , $cd = D_2$ und $do = D_1$.

Da bei dieser Belastungsweise auf die rechte Dachhälfte nur die Auflagerreaction D_2 wirkt, die direct von den Stäben D B und D C aufgenommen wird, so ist die Anspruchnahme $3'$ des Stabes $CF = 0$ und es ist überdies, weil B D von außen unbelastet ist, $1' = 4'$. Die durch D_2 erzeugten Spannungen $1'$ und $2'$ sind durch das Kräftedreieck cdg bestimmt, in welchem $dg \parallel DC$ und $cg \parallel DB$.

Um nun die Anspruchnahmen 1, 2, 3, 4, 5 der vom Winddrucke getroffenen Dachhälfte zu erhalten, wird man mit deren Bestimmung von A aus beginnen. Von den auf A wirkenden vier Kräften sind bereits zwei, nämlich D_1 und W bekannt. Man wird daher im Kräfteplane durch die Endpunkte der Resultante d a dieser beiden Kräfte Parallele zu den Stäben AE und AC führen und erhält aus dem dadurch entstandenen Kräftevierecke $doae$, die Druckspannung 1 des Sparrens gleich ae und die Zugspannung 2 der Stange AC gleich ed . Auf den Knotenpunkt E übergehend, hat man die beiden bereits bekannten Kräfte $1=ea$ und $2W=ab$ mit den zu bestimmenden Spannungen 3 und 4 zu einem geschlossenen Kräfteviereck $eabf$ zu vereinigen. Man macht also $ef \parallel EC$ und $bf \parallel EB$, und erhält $4=bf$, $3=fe$.

Am Knotenpunkte B sind von den vier auf denselben wirkenden Kräften bereits drei, nämlich 4, w und $4'=1'$ bekannt, somit ist die vierte d. i. 5 durch die Schlusseite fg des diesen Kräften entsprechenden Kräfteviereckes $fbcg$ bestimmt.

β) Rechtsseitige Windbelastung.

Für diesen Fall gelten in Fig. 111 nur die auf die rechte Dachhälfte BD in B , F und D wirkenden Winddrücke W' , $2W'$ und W' , wobei selbstverständlich der Größe nach $W'=W$ ist. Zunächst sind wieder die Auflagerreactionen D_1' und D_2' , welche durch die rechtsseitige Windbelastung hervorgerufen werden, zu bestimmen. Da D_1' am Rollenlager A lothrecht wirkt, so bringe man die Richtung von D_1' mit dem resultierenden Winddrucke $\Sigma W'$ in G' zum Schnitte und berücksichtige, dass D_2' die Richtung $G'D$ haben muss und dass sich die drei auf die Dachconstruction ABD wirkenden drei Kräfte D_1' , $\Sigma W'$ und D_2' das Gleichgewicht zu halten haben, somit im Kräfteplane ein geschlossenes Dreieck mit kontinuierlichem Richtungspfeile geben werden. Man mache also im Kräfteplane $o'c' = \Sigma W' = 4W'$ und führe durch die Endpunkte o' und c' beziehungsweise die Parallelen zu $G'D$ und $G'A$. Man erhält so die Auflagerreaction $D_1' = c'd'$ und jene $D_2' = d'o'$. Da nun die linke Seite AB unbelastet gedacht wird, so zerlegt sich die in A wirkende Auflagerreaction D_1' direct in die beiden längs AB und AC thätigen Spannungen 1 und 2; während EC unbelastet erscheint. Die Größe dieser Spannungen ergibt sich aus dem zugehörigen Kräftedreiecke $c'd'g'$, und zwar gibt $d'g'$ die Zugspannung 2 in AC und $g'c'$ die Druckspannung $1=4$ in AB .

Die Anspruchnahmen 1', 2', 3' und 4' ergeben sich, wenn vom Auflager D ausgegangen wird, auf gleiche Weise wie im vorigen Falle jene 1, 2, 3 und 4 bei rechtsseitiger Windbelastung.

Nachdem man in der besprochenen Weise für jeden einzelnen Stab der Dachconstruction die beiden Anspruchnahmen desselben durch den linksseitigen und rechtsseitigen Winddruck getrennt vorgenommen hat, wird man die größere dieser Anspruchnahmen zu jener zu addieren haben, welche sich aus der Wirkung des Eigengewichtes und des Schneedruckes in Kräfteplane Fig. 110 ergeben hat. Selbstverständlich müssen sich die Kräftepläne auf denselben Maßstab beziehen und sind bei der Addition der Spannungen die Vorzeichen derselben zu berücksichtigen.

Im vorliegenden Falle sind die durch die rechtsseitige Windbelastung hervorgerufenen Spannungen bedeutend größer als die durch den linksseitigen Winddruck erzeugten. Eine Ausnahme bildet nur die Spannung 3, indem $3 \doteq 3'$. Bei rechtsseitigem Winddrucke würde durch die von D ausgehende Auflagerreaction $D_2 = cd$ in der Zugstange CD eine Druckspannung $dg = 2'$ entstehen; da jedoch diese Druckspannung kleiner ist als die durch das Eigengewicht in CD erzeugte Zugspannung, so könnte sie nicht zur Geltung kommen. Im übrigen werden beim betrachteten Dachstuhl sämtliche Constructionstheile durch die verticale Belastung und durch den Winddruck in einerlei Sinn beansprucht, d. h. die Sparren und die Strebe EF werden nur auf Druck-, dagegen die Stangen AC, CD und BC werden nur auf Zugfestigkeit beansprucht.

Zu bemerken ist nur noch, dass der deutsche Dachstuhl nur für geringe Spannweiten geeignet ist.

2. Der englische Dachstuhl. Fig. 112.

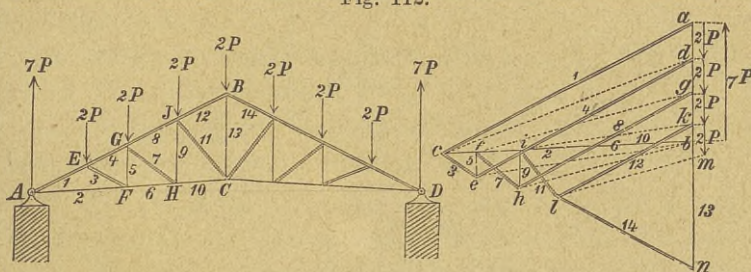
Bei demselben sind die beiden Gurtungen ABD durch Vertical- und Diagonalstangen zu einem Fachwerke vereinigt. Da hiebei die Sparren AB und BD in beliebig vielen Punkten gestützt werden können, so ist dieser Dachstuhl für bedeutende Spannweiten geeignet, und wurde thatsächlich als Eisenconstruction für Spannweiten von 30 Metern und noch mehr ausgeführt.

a) Anspruchnahme desselben durch das Eigengewicht und den Schneedruck.

Jedes der vier gleichen Felder eines Sparrens sei mit $2P$ belastet, so dass jedes der beiden Auflager A und D die Reaction $(8 - 1) P = 7P$ äußert.

Im Kräfteplane wurde zunächst die in A active Auflagerreaction $ba = 7P$ durch Parallele zu AE und AF in die Spannungen $1 = ac$ und $2 = cb$ zerlegt. Am Knotenpunkt E sind nun bereits die Kräfte 1 und $2P$ bekannt und beide müssen mit den Spannungen 2 und 4 im Kräfteplan ein geschlossenes Kräfteviereck geben. Man führe also durch die Endpunkte der Resultante cd aus 1 und $2P$ Parallele zu EF und EG und erhält aus dem Kräftevierecke $cade$ $4 = de$ und $3 = ec$. Nun schreite man zum Knotenpunkte F und bestimme auf gleiche Art aus den beiden bekannten Spannungen $2 = bc$ und $3 = ce$ jene $5 = ef$ und $6 = fb$. Für den Knotenpunkt G bilde man aus den drei bekannten Größen $5 = fe$, $4 = ed$ und $2P = dg$ die Spannkkräfte $8 = gh$ und $7 = hf$.

Fig. 112.



Für den Knotenpunkt H ergeben sich aus den zwei bekannten Spannungen $6 = bf$ und $7 = fh$ jene $9 = hi$ und $10 = ib$; ferner für J aus $9 = ih$, $8 = hg$ und $2P = gk$ die Spannungen $12 = kl$ und $11 = li$; endlich für B aus $12 = ik$ und $2P = km$ die Spannungen $13 = mn$ und $14 = nl$.

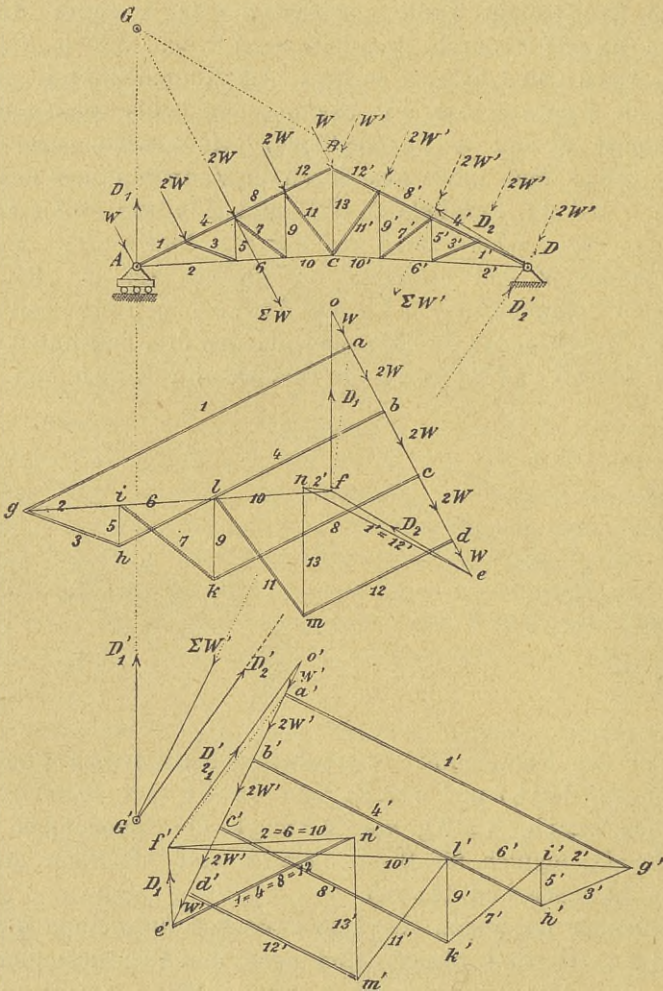
Offenbar ist wegen der symmetrischen Anordnung die Spannung $14 = 12$ und ebenso sind auch die Anspruchnahmen der anderen zur Mitte symmetrisch gelegenen Stäbe gleich.

b) Anspruchnahme durch den Winddruck.

α) Linksseitiger Winddruck. Ist nur die linke Dachhälfte AB, Fig. 113, durch den Winddruck belastet und bezeichnet

wieder $2W$ den auf ein Feld des Sparrens AB entfallenden activen Winddruck, so werden die inneren Knotenpunkte mit je $2W$ und die beiden äußersten A und B je mit W belastet.

Fig. 113.



Man bestimme zunächst nach der beim deutschen Dachstuhle erläuterten Methode die durch den ganzen auf AB wirkenden Winddruck $\Sigma W = 8W$ die in A und D hervorgerufenen Stützen-

drücke D_1 und D_2 ; bringe also die vom Rollenlager A ausgeübte verticale Reaction mit ΣW in G zum Schnitte und beachte, dass der vom festen Auflager D ausgehende Gegendruck D_2 die Richtung DG haben müsse. Man mache also im Kräfteplane $oe = 8W$ und lege durch die Endpunkte von oe Parallele zur ermittelten Richtung der Stützenreactionen; es wird dann $ef = D_2$ und $fo = D_1$. Da nun die rechte Dachhälfte BD unbelastet gedacht wird, so wird die Auflagerreaction D_2 von den beiden äußersten Stäben DB und DC direct aufgenommen und es bleiben die zwischen liegenden Constructionstheile 3', 5', 7' und 9' spannungslos.

Man zerlege also im Kräfteplane $D_2 = ef$ in die längs DC und DB auftretenden Spannungen und erhält $2' = 6' = 10' = fn$ und $1' = 4' = 8' = 12' = ne$.

Die Bestimmung der Spannungen in der belasteten Dachhälfte AB geschieht analog wie beim deutschen Dachstuhle. Von A ausgehend bilde man aus $D_1 = fo$ und $W = oa$, durch $ag \parallel AB$ und $fg \parallel AC$, die Spannungen $1 = ag$ und $2 = gf$. Ferner am nächsten Knotenpunkte aus $1 = ga$ und $2W = ab$ die Spannungen $bh = 4$ und $hi = 5$ u. s. w.

Man erhält so der Größe nach $6 = fi$, $7 = ik$, $8 = kc$, $9 = kl$, $10 = ln$, $11 = lm$, $12 = md$ und $13 = mn$.

Die mit Doppellinien bezeichneten Inanspruchnahmen bedeuten Druckspannungen, die mit einfachen Linien Zugspannungen.

β) Rechtsseitiger Winddruck. Wegen der symmetrischen Anordnung der beiden Dachhälften ist nun der auf BD wirkende Winddruck numerisch ebenso groß wie jener, der auf AB wirkte, also $W' = W$, und es ergeben sich die durch den rechtsseitig wirkenden Winddruck erzeugten Auflagerreactionen und Spannungen in analoger Weise wie im vorhergehenden Falle. Man bringe also zunächst den auf BD resultierenden Winddruck $\Sigma W'$, Fig. 113, mit der vom Rollenlager A geäußerten verticalen Auflagerreaction D'_1 in G' zum Schnitte und erhält durch die Verbindungslinie des Punktes G' mit dem Auflagerpunkte D die Lage der betreffenden Auflagerreaction D'_2 . Die Größe von D'_1 und D'_2 ergibt sich aus dem zugehörigen Kräfteplane, in welchem $\Sigma W' = o'e'$ mit den bekannten Richtungen von D'_1 und D'_2 zum Kräftedreiecke $o'e'f'$ vereinigt wurde; es ist $D'_1 = e'f'$ und $D'_2 = f'o'$. Da nun auf die linke unbelastet gedachte Dachhälfte

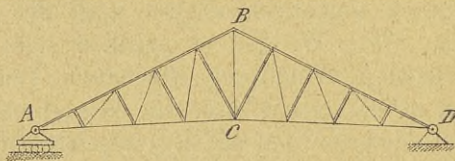
nur D'_1 in A wirkt, und D'_1 von den beiden Stäben AC und AB aufgenommen wird, so erscheinen jetzt die Zwischenstäbe 3, 5, 7 und 9 spannungslos, während in AC die constante Zugspannung $2 = 6 = 10 = f' n'$ und in AB die constante Druckspannung $1 = 4 = 8 = 12 = n' e'$ auftritt. Die Bestimmung der Spannungen $1', 2', 3' \dots$ der vom Winddrucke getroffenen Dachhälfte BD ist aus dem bezüglichen Kräfteplane ersichtlich. Beim Auflager D beginnend, suche man aus den beiden bekannten auf D wirkenden Kräften $D'_2 = f' o'$ und $W' = o' a'$ die Spannungen $1'$ und $2'$ aus dem entsprechenden Kräftevierecke $f' o' a' g'$, nämlich $1' = a' g'$ und $2' = g' f'$. Für den nächsten Knotenpunkt construiere man aus $1' = g' a'$ und $2' W' = a' b'$ die Spannungen $4' = b' h'$ und $3' = h' g'$, u. s. w.

Man erhält so, indem man von Knotenpunkt zu Knotenpunkt fortschreitet, im Kräfteplane die Größe der Inanspruchnahmen $5' = h' i'$, $6' = i' f'$, $7' = i' k'$, $8' = k' c'$, $9' = k' l'$, $10' = l' f'$, $11' = l' m'$, $12' = m' d'$ und $13' = m' n'$.

Schließlich wird man die größeren der aus den beiden einseitigen Windbelastungen sich ergebenden Anspruchnahmen der einzelnen Constructionstheile zu den Spannungen zu addieren haben, die sich in Fig. 112 aus der Wirkung des Eigengewichtes und des Schneedruckes ergeben.

In derselben Weise wie beim englischen Dachstuhl würden die Beanspruchungen der Constructionstheile bei dem in Fig. 114

Fig. 114.



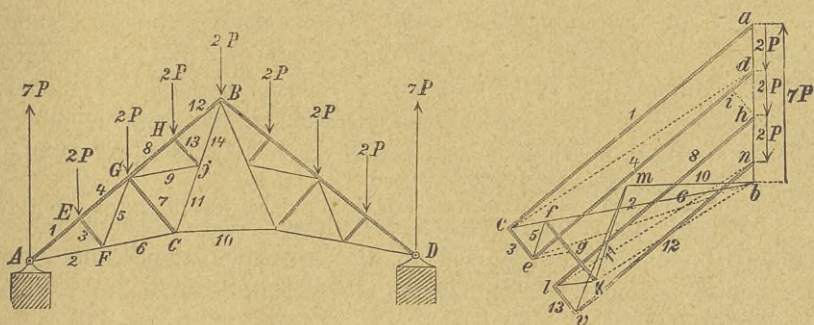
dargestellten belgischen Dachstuhle zu ermitteln sein, dessen Streben senkrecht zur Sparrenlänge gerichtet sind.

3. Der französische oder Polonceau-Dachstuhl. Fig. 115.

Dieser Dachstuhl kann als die Verbindung zweier Fachwerkträger (verspannter Balken) ABC und BDC' angesehen werden, die durch die Zugstange CC' verbunden sind, welche das Aus-

weichen der beiden Sparrenfüße verhindert. Die Streben EF, GC und HJ sind hierbei normal zur Sparrenrichtung AB gestellt und in gleichen Entfernungen angebracht, weshalb sämtliche Zugstangen im verspannten Träger ACB dieselbe Neigung zum Sparren haben, beziehungsweise symmetrisch zur mittleren Strebe GC angeordnet sind. Da statt des dreifach verspannten Sparrens AB im Spannwerk ABC ein mehrfach verspannter Sparren angewendet werden kann, so lässt sich dieser Dachstuhl, sowie der englische für größere Spannweiten zur Anwendung bringen.

Fig. 115.



a) Anspruchnahme durch das Eigengewicht und den Schneedruck. Jedes der vier Felder eines Sparrens sei wieder mit $2P$ belastet, so dass hier dieselbe Lastvertheilung vorkommt wie beim vorigen Dachstuhle. Im Kräfteplane wurde zunächst die Auflagerreaction bei A, nämlich $ab = 7P$ in die beiden Kräfte $1 = ac \parallel AE$ und $2 = cb \parallel AF$ zerlegt. Hierauf wurden für den Knotenpunkt E aus den beiden bereits bekannten Kräften $1 = ca$ und $2P = ad$ die beiden andern Kräfte 4 und 3 mittels des zugehörigen Kräfteviereckes $cade$ bestimmt, nämlich $4 = de$ und $3 = ec$. Auf den Knotenpunkt F übergehend, erhält man aus $2 = bc$ und $3 = ce$ mittels des Kräftevierecks $bcef$, in dem $ef \parallel FG$, die Spannungen $ef = 5$ und $fb = 6$. Beim Übergange auf den folgenden Knotenpunkt G hätte man nun aus den drei bekannten Kräften 4, 5 und $2P$ die drei der Richtung nach gegebenen Kräfte 7, 8 und 9 zu construieren; es erscheint mithin die Aufgabe unbestimmt. Berücksichtigt man jedoch, dass wegen der ganz symmetrischen Anordnung der Zugstangen GF und GJ

zur Strebe GC die in denselben hervorgerufenen Spannungen 5 und 9 gleich sind, so wird dadurch die Unbestimmtheit behoben. Die Pressung der Strebe GC , wird nämlich die Resultante aus den gleichen Spannungen 5 und 9, sowie die zu GC parallele Komponente von $2P$ d. i. ih , aufzunehmen haben. Man mache daher $eg=5$ und $||GJ$ und $gk=ih$, so ist $kf=7$, ferner, wenn $kl||GJ$ und $hl||GH$, $hl=8$ und $lk=11$. (Noch einfacher konnte man $kf=7$ erhalten, indem man $fk||GC$, $hl||GH$, ce bis zum Punkte l auf hl verlängert und schließlich $lk||GJ$ gemacht hätte.)

Für den Knotenpunkt C sind nun aus den bekannten Kräften 6 und 7 die Spannungen 10 und 11 der beiden andern Stäbe, dann am Knotenpunkte J aus 9 und 11 jene 13 und 14, endlich am Knotenpunkte H aus 8, 13 und $2P$ die Spannung 12 mittels der entsprechenden geschlossenen Kräftepolygone sehr leicht zu construieren. Man erhält so der Größe nach $10 = bm$, $11 = mk$, $13 = lv$, $14 = vm$ und $12 = vn$.

Wegen der symmetrischen Anordnung und Belastung der beiden Dachhälften sind wieder die Anspruchnahmen der zur Dachmitte symmetrisch gelegenen Constructionstheile in beiden Dachhälften gleich.

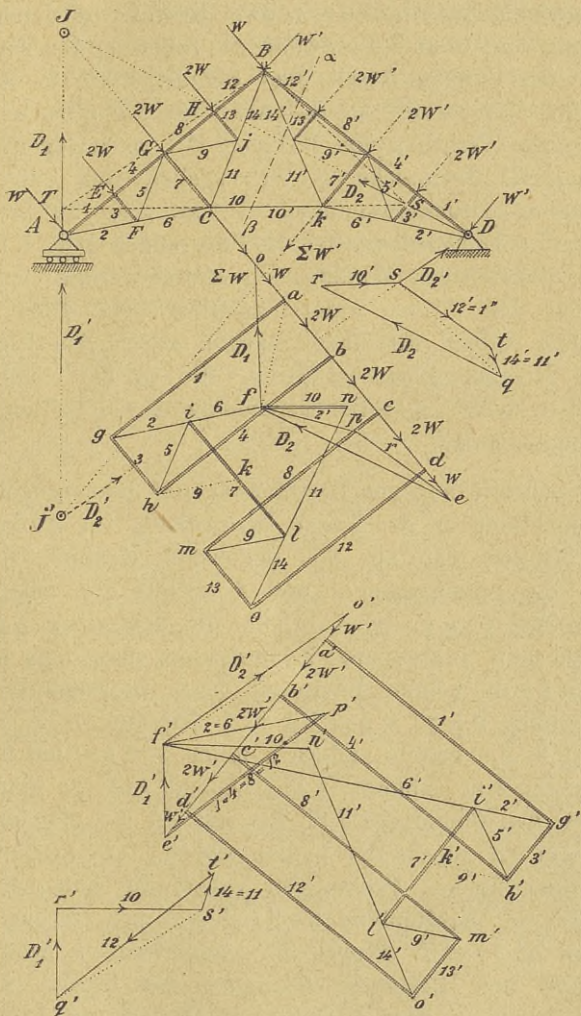
b) Anspruchnahme durch den Winddruck. Fig. 116.

α) Linksseitiger Winddruck. Die Ermittlung der Auflagerreactionen D_1 und D_2 , welche dem linksseitigen Winddrucke $\Sigma W = oe$ entsprechen, wurde ebenso wie beim englischen Dachstuhle vorgenommen. Es wurde also zunächst wieder die vom Rollenlager A ausgehende verticale Auflagerreaction mit ΣW im Punkte J zum Schnitte gebracht und dadurch die Lage DJ der von D kommenden Auflagerreaction D_2 fixiert. Die Größe und der Sinn von D_1 und D_2 wurden mittels des zugehörigen Kräfte-dreieckes oef ermittelt. Da nun die rechte Dachhälfte unbelastet gedacht wird, so wirkt auf dieselbe am Auflager D nur D_2 und wird von DB und DK aufgenommen, ohne dass dadurch die zwischenliegenden Stäbe $3'$, $5'$, $7'$, $9'$ und $13'$ beansprucht würden. Im Kräfteplane wurde also zunächst die Zerlegung von D_2 in $1'$ und $2'$ vorgenommen; es ist

$$fp=2'=6' \text{ und } pe=1'=4'=8'=12'.$$

Für das Spannwerk BDK erscheinen aber die Knotenpunkte B und K als Stützpunkte, werden also von D_2 beeinflusst, und zwar B mit dem Drucke $12' = e p$ und K mit jenem $6' = p f$.

Fig. 116.



Um nun die von K aus auf die Stäbe KC und KB übertragenen Drücke $10'$ und $11'$ zu erhalten, könnte man den Druck

p f in Richtung der Stäbe K C und K B zerlegen; es würde sich ergeben $10 = f n$ und $11' = 14' = n p$. Man kann aber auch die durch D_2 in den Stäben D B, B K und K C hervorgerufenen Inanspruchnahmen nach § 14 direct bestimmen. Man verlängere nämlich eine derselben, z. B. $10'$ bis zum Schnittpunkte S mit D_2 und zerlege zunächst $D_2 = q r$ in zwei Kräfte, von denen die eine die Richtung von $10'$ und die zweite die Richtung der Verbindungslinie S B des Punktes S mit dem Schnittpunkte B der beiden andern hat. Man erhält so das Kräftedreieck q r s und braucht nur noch s q in Richtung von B D und B K zu zerlegen. Aus dem bezüglichen Kräftevierecke q r s t ergeben sich nun die durch D_2 erzeugten Druckspannungen $10' = r s$, $12' = s t$ und $11' = 14' = t q$. Hiernach würden die Zugstangen D K, K B und K C durch den linksseitigen Winddruck gepresst werden; müssten also auch gegen den Druck widerstandsfähig sein. Dies ist jedoch nicht nöthig, indem dieselben Stangen durch das Eigengewicht constante Zugspannungen erfahren, die größer sind als die besprochenen zeitweiligen Druckspannungen, welche demnach nicht zur Geltung kommen.

Man schreite nun zur Bestimmung der Inanspruchnahme der Constructionstheile in der linken Dachhälfte. Im Auflager A beginnend, ermittle man aus den gegebenen Kräften $D_1 = f o$ und $W = o a$ die Spannungen 1 und 2 mittels des entsprechenden Kräfteviereckes f o a g; man erhält aus demselben $1 = a g$ und $2 = g f$. Für den Knotenpunkt E construere man dann aus $1 = g a$ und $2 W = a b$ die beiden andern auf diesen Knotenpunkt wirkenden Kräfte, nämlich $b h = 4$ und $h g = 3$. Hierauf für F, aus $2 = f g$ und $3 = g h$, die beiden andern nämlich $5 = h i$ und $6 = i f$. Auf den folgenden Knotenpunkt G übergehend, beachte man, dass die Strebe G C den Winddruck $2 W$, der mit ihr die gleiche Lage hat, und die auf sie durch die beiden gleich stark gespannten Zugstangen übertragenen Pressungen vollständig aufzunehmen hat; mache also im Kräfteplane h k || G J und $= 5$, ferner $k l = 2 W$, und erhält so $i l = 7$. Wegen der symmetrischen Anordnung der Construction und Belastung bezüglich der Strebe G C ist nun nicht nur $5 = 9$, sondern auch $4 = 8$, $13 = 3$ und $12 = 1$.

Am Knotenpunkte C bestimme man hierauf aus 6 und 7 die Spannungen 10 und 11, nämlich die Pressung $10 = n f$ und den

Zug $11 = 1n$; dann am Knotenpunkte J aus 9 und 11 die Druckspannung $13 = m o$ und die Zugspannung $14 = o n$.

β) Rechtsseitiger Winddruck. Man ermittle zunächst wieder die von der rechtsseitigen Windbelastung $\Sigma W'$ erzeugten Auflagerreactionen D'_1 und D'_2 ; berücksichtige nämlich, dass D'_1 vertical und D'_2 der Lage nach durch die Verbindungslinie $J' D$ bestimmt ist, welche den Schnittpunkt J' von $\Sigma W'$ und D'_1 mit dem fixen Auflagerpunkte D verbindet, und construiere aus $\Sigma W' = o'e'$ und den gegebenen Richtungen von D'_1 und D'_2 deren Größen, nämlich $D'_1 = e'f'$ und $D'_2 = f'o'$. Auf die unbelastet gedachte linke Dachhälfte wirkt nur D'_1 in A allein, wird also durch die beiden Stäbe AB und AC aufgenommen, und erzeugt in AC die Zugspannung $2 = 6 = f'p'$, dagegen in AB die Druckspannung $1 = 4 = 8 = 12 = p'e'$. Die Zwischenglieder 3, 5, 7, 9 und 13 bleiben spannungslos.

Um nun auch die durch D'_1 in den Stäben CK und CB hervorgerufenen Spannungen zu erhalten, hat man die durch AC auf den Knoten C übertragene Spannung $p'f'$ in Richtung der Stäbe CK und CB zu zerlegen; man erhält dann für CK die Zugspannung $10 = f'n'$ und für CD jene $11 = 14 = n'p'$.

In Figur 116 wurde seitwärts die directe Zerlegung von $D'_1 = q'r'$ in die Spannungen der drei Stäbe AB, BC und CK vorgenommen. Zu diesem Zwecke wurde der eine Stab, nämlich CK, bis zum Schnittpunkte T mit D'_1 verlängert, und hierauf D'_1 zunächst in zwei Componenten $r's'$ und $s'q'$ parallel zu CK und zur Verbindungslinie TB zerlegt. Die erstere gibt bereits die Zugspannung 10, und durch Zerlegung der letzteren parallel zu AB und BC erhält man die Zugspannung $11 = 14 = s't'$ und die Druckspannung $12 = t'q'$.

Um nun die Anspruchnahme der Constructionstheile auf der durch den rechtsseitigen Winddruck belasteten Dachhälfte BD zu erhalten, wurde mit der Ermittlung der Spannungen am Knotenpunkte D begonnen. Es ergaben sich der Größe nach auf bekannte Weise die Anspruchnahmen $1' = a'g'$, $2' = g'f'$, $3' = g'h'$, $4' = h'b'$, $5' = h'i'$, $6' = i'f'$, $7' = i'l'$, $8' = m'c'$, $9' = m'l'$, $10' = n'f'$, $11' = l'n'$, $12' = o'd'$, $13' = m'o'$ und $14' = o'n'$.

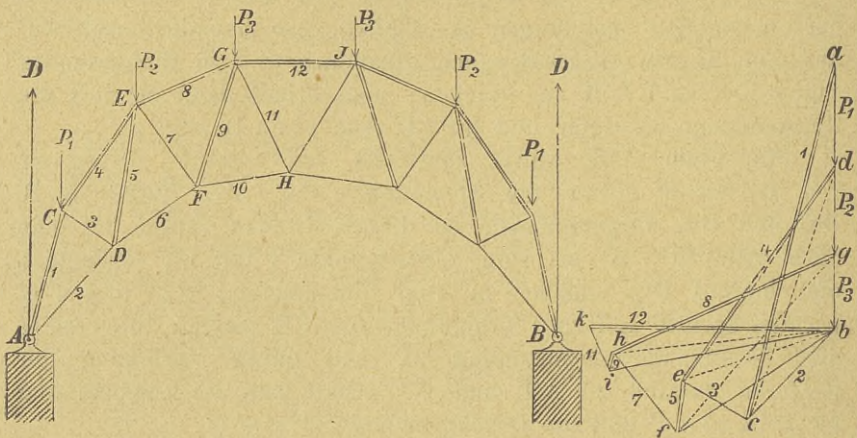
Wegen der im Spannwerk BDK bezüglich der mittleren Strebe $7'$ herrschenden symmetrischen Anordnung und Belastung ist wieder $1' = 4' = 8' = 12'$, $3' = 13'$ und $5' = 9'$.

Die gesammte Anspruchnahme der einzelnen Constructionstheile wird man schließlich erhalten, wenn man zu den Anspruchnahmen, die durch das Eigengewicht und den Schneedruck verursacht wurden, die größere der beiden Spannungen, welche von den einseitigen Windbelastungen erzeugt wurden, addiert.

4. Der sichelförmige Dachstuhl. Fig. 117.

Derselbe wird besonders zur Bedeckung hoher und weiter Räume, z. B. der Bahnhofshallen, häufig angewendet. Die beiden polygonalen Gurtungen jedes Trägers sind zur Mitte symmetrisch angeordnet und die Knotenpunkte derselben liegen in kreisförmigen oder parabelförmigen Curven, deren Achsen mit der verticalen Mittellinie des Binders zusammenfallen. Wegen der verschiedenen

Fig. 117.



Neigung der einzelnen Felder A C, C E, E G und G J kann man bei diesen Dächern keine gleichmäßige Vertheilung des Schnee- und Winddruckes annehmen. Wir werden wieder die Bestimmung der Beanspruchung der Dachconstruction durch die verticale Belastung getrennt von jenem durch die einseitige Windbelastung vornehmen und schließlich die aus beiden Belastungen sich ergebenden Anspruchnahmen mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen addieren.

a) Anspruchnahme durch das Eigengewicht und den
Schneedruck.

Wir denken uns wieder das Eigengewicht jedes Trägers in den Knotenpunkten der oberen Gurtung wirkend, die ohnehin die eigentlichen Belastungspunkte des Trägers durch das Gewicht der Eindeckung und des darauf liegenden Schnees bilden; denn der vom Eigengewicht der Träger selbst auf die unteren Knotenpunkte entfallende Betrag ist ohnehin gering und würde im allgemeinen nur zur Entlastung der Constructionstheile in geringem Maße beitragen. Wollte man aber dennoch die Vertheilung des Trägergewichtes auf die Knotenpunkte beider Gurtungen vornehmen, so würde auf die untere Gurtung circa $\frac{1}{3}$ desselben entfallen und man würde auf die Belastung sämtlicher Knotenpunkte des Trägers im Kräfteplane in derselben Weise Rücksicht zu nehmen haben, wie dies beispielsweise auf pag. 133 beim krahnartigen Fachwerkträger geschehen ist.

Bezeichnet man nun die vom Eigengewichte und vom Schneedrucke auf die drei ersten Knotenpunkte C, E, G der oberen Gurtung entfallenden Belastungen mit P_1, P_2, P_3 , so wird wegen der symmetrischen Anordnung auch der Knotenpunkt J mit P_3 , der folgende mit P_2 und der letzte mit P_1 belastet sein und die hievon in A und B hervorgerufenen gleichen Auflagerreactionen werden je die Größe $D = P_1 + P_2 + P_3$ erreichen. Um nun die Anspruchnahme der einzelnen Constructionstheile durch die bezeichnete verticale Belastung zu erhalten, mache man im Kräfteplane $ba = D$ und beginne mit der Bestimmung der Spannungen beim Auflager A. Man führe also durch die Endpunkte von a b Parallele zu AC und AD , die das Kräftedreieck bac bestimmen, in welchem ac die Druckspannung 1 und cb die Zugspannung 2 gibt.

Nun gehe man zum Knotenpunkte C und ermittle für denselben aus den bereits bekannten Kräften $1 = ca$ und $P_1 = ad$ die beiden andern 3 und 4 durch Construction des entsprechenden Kräfteviereckes $cade$, in welchem $de = 4$ und $ec = 3$; dieses Verfahren setze man in derselben Weise für die folgenden Knotenpunkte bis zur Trägermitte fort. Man erhält so $5 = ef$, $6 = fb$, $7 = hf$, $8 = gh$, $9 = hi$, $10 = ib$, $11 = ki$ und $12 = bk$.

Die Constructionstheile der rechten Trägerhälfte erfahren, wegen der symmetrischen Anordnung, offenbar dieselbe Anspruchnahme wie die gleichliegenden der rechten Trägerhälfte.

b) Anspruchnahme durch den Winddruck. Fig. 118.

α) Linksseitige Windbelastung. Man ermittle nach Gleichung (β) pag. 142 die activen, normal gegen die Dachflächen AC, CE, EG und GJ gerichteten Winddrücke W_1 , W_2 , W_3 und

Fig. 118.



W_4 und bestimme die davon auf die einzelnen Knotenpunkte A, C, E, G und J entfallenden Belastungen r_0 , r_1 , r_2 , r_3 und r_4 . Es wird offenbar $r_0 = \frac{W_1}{2}$, r_1 gleich der Resultante aus $\frac{W_1}{2}$ und $\frac{W_2}{2}$

r_2 gleich der Resultante aus $\frac{W_2}{2}$ und $\frac{W_3}{2}$, r_3 gleich der Resultante aus $\frac{W_3}{2}$ und $\frac{W_4}{2}$, endlich $r_4 = \frac{W_4}{2}$.

Man bestimme nun die Resultante $\Sigma W = 04$ der einzelnen Winddrücke W_1, W_2, W_3 und W_4 , indem man dieselben nach Richtung und Größe aneinander reiht. Um aber auch die Lage von ΣW zu erhalten, wähle man, im bezüglichen Kräfteplane einen beliebigen Pol P, ziehe die Polstrahlen P 1, P 2, P 3, P 4, construiere das denselben entsprechende Seilpolygon O I II III IV V und bringe die äußersten Seiten desselben zum Schnitte, so ist der Schnittpunkt S bekanntlich ein Punkt der Resultanten ΣW und da sie zur Schlusslinie O 4 des Kräftepolygons parallel sein muss, so ist ihre Lage durch den Punkt S vollkommen bestimmt.

Aus ΣW lassen sich die beiden Auflagerreactionen mit voller Bestimmtheit ermitteln, wenn das eine Auflager, z. B. jenes bei A ein Rollenlager, dessen Reaction D_1 vertical gerichtet ist. Die vom festen Auflager B geäußerte Reaction D_2 muss dann durch den Schnittpunkt von D_1 mit ΣW gehen, ist also der Lage nach bekannt. Die Größen von D_1 und D_2 ergeben sich nun aus dem zugehörigen Kräftedreiecke a f g in welchem, $a f = \Sigma r = \Sigma W$, $a g \parallel D_1$ und $f g \parallel D_2$.

Die Ermittlung der Anspruchnahme der Constructionstheile des Trägers erfolgt nun wieder ganz einfach nach Cremona's Methode. Man beginnt also mit der Bestimmung der Spannungen am Auflager A, indem man aus den auf A wirkenden bekannten Kräften $D_1 = ga$ und $r_0 = ab$ die beiden andern in A C und A D wirkenden Kräfte 1 und 2 mittels des zugehörigen Kräfteviereckes g a b h construiert. Es ist $b h \parallel$ und $= 1$, $h g \parallel$ und $= 2$.*) In gleicher Art lassen sich die Anspruchnahmen der von den folgenden Knotenpunkten C, D, E, F ausgehenden Stäbe aus bereits bekannten Kräften bestimmen.

Man erhält also für den Knotenpunkt C aus den bekannten Kräften 1 und r_1 die beiden andern 3 und 4 mittels des entsprechenden Kräftepolygones h b c i, nämlich $4 = c i$ und $3 = i h$.

*) In der Figur fehlt bei g h die Kraftbezeichnung 2, ebenso bei c i jene 4 und bei e f die Bezeichnung r_4 sammt dem Richtungspfeile.

Ebenso

für D aus	2	und 3	die Kräfte	5 = ik	und	6 = kg;
„ E „	5, 4	„ r ₂	„	8 = dl	„	7 = lk;
„ F „	6	„ 7	„	9 = lm	„	10 = mg;
„ G „	9, 8	„ r ₃	„	12 = en	„	11 = nm;
„ H „	10	„ 11	„	11' = no	„	10' = og;
„ J „	11', 12	„ r ₄	„	8' = fp	„	9' = po;
„ K „	10'	„ 9'	„	7' = pq	„	6' = qg;
„ L „	8'	„ 7'	„	5' = qr	„	4' = rf;
„ M „	6'	„ 5'	die Kraft	3' = rs	„	2' = sg;
endlich						
für N „	4'	„ 3'	„	1' = fs.		

Selbstverständlich hätte man auch mit der Bestimmung der Anspruchnahmen der einzelnen Constructionstheile von B aus beginnen können. Bei der gewählten Trägerform, die deshalb so steil angenommen wurde, um die Kräftepläne möglichst compendiös zu erhalten, würden durch den linksseitigen Winddruck sämtliche Stäbe des Untergurtes Druckspannungen erleiden, desgleichen die Diagonalstangen 3, 7, 11, 11', 7' und 3'. Würden nun diese Druckspannungen größer sein als die durch das Eigengewicht der ganzen Dachconstruction in den genannten Stäben erzeugten Zugspannungen, so müssten diese Stäbe sowohl gegen Zug als auch gegen Druck entsprechend widerstandsfähig gemacht werden, was durchaus nicht ökonomisch und unpraktisch wäre. Man hält daher in der Praxis die ganze Construction bedeutend flacher und wählt gewöhnlich die Knotenpunkte der beiden Gurtungen in Parabeln mit geringem Biegungspfeile, respective geringer Scheitelhöhe, und wendet als Füllungsglieder Vertical- und Diagonalstäbe an. Die Gründe hiefür werden in einem folgenden, den Parabelträgern geltenden Abschnitte erörtert werden, wobei wir nochmals auf die sichelförmigen Dachträger zurückzukommen beabsichtigen.

Die Bestimmung der Anspruchnahme des besprochenen Trägers durch den rechtsseitigen Winddruck würde analog vorzunehmen sein, wie dies bezüglich des linksseitigen Winddruckes gezeigt wurde.

Selbstverständlich müsste schließlich bei jedem Constructionstheil zu der größeren der beiden Anspruchnahmen, die sich aus den entgegengesetzten Windbelastungen ergeben, die Anspruchnahme durch die verticale Belastung mit Rücksicht auf das Vorzeichen addiert werden.

Wir haben hiemit die wichtigsten fachwerkartigen Dachträger, die bei verticaler Belastung nur verticale Auflagerreactionen äußern, also Balkenträger sind, absolviert und bemerken nur noch, dass von diesen aus Eisen hergestellten Dachträgern die schwerfälligen Holzconstructions immer mehr verdrängt werden, indem die ersteren bei rationeller Ausführung statisch vollkommen bestimmt, und trotz der Einfachheit ihrer Construction für bedeutende Spannweiten ganz geeignet sind. Es wäre nur zu wünschen, dass die eisernen Dachstühle stets als Fachwerkträger, d. h. mit Gelenken in den Knotenpunkten, ausgeführt und einerseits immer mit einem Rollenlager versehen würden, damit die Voraussetzungen, die man bei ihrer statischen Berechnung macht, vollkommen zutreffen.

Im zweiten Theile der graphischen Statik wollen wir noch die Sprengwerksdächer, sowie die Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer behandeln.

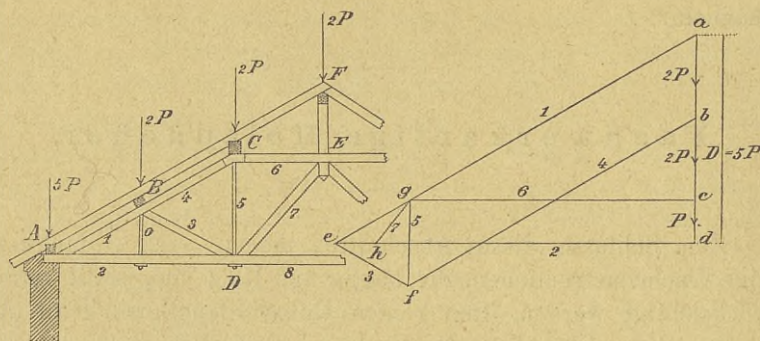
F a c h w e r k a r t i g e H o l z d ä c h e r .

Zum Schlusse dieses Abschnittes mögen noch 3 fachwerkartige Dachconstructions, die häufig aus Holz hergestellt werden, berücksichtigt werden. Den reinen Holzconstructions fehlt aber der eigentliche Charakter der Fachwerke, nämlich die Gelenke in den Knotenpunkten; es können daher die Anspruchnahmen der folgenden in Holz ausgeführten Dachträger nur annäherd richtig bestimmt werden.

Da überdies bei denselben keine Rollenlager gebräuchlich sind, so lässt sich die Anspruchnahme ihrer Constructionstheile durch die einseitige Windbelastung nicht mit Bestimmtheit ermitteln, indem über die Richtung der brügelichen Auflagerreactionen keine genügenden Anhaltspunkte gegeben sind. Man pflegt daher vom Winddrucke nur die verticale Componente in Rechnung zu nehmen und dieselbe zur Belastung durch das Eigengewicht und den Schneedruck zu addieren. Dass dieser Vorgang der tatsächlichen Windbelastung nicht entspricht, wurde bereits am Eingange dieses Abschnittes erläutert.

1. Bei dem in Fig. 119 dargestellten hängwerkartigen Dachstuhl liegt jeder Sparren auf 4 Pfetten auf, die durch ein Hängwerk getragen werden. Wird angenommen, dass auf jedes der sechs Felder des ganzen Binders die verticale Belastung $2P$ entfällt, so werden die inneren Knotenpunkte der Sparren je mit $2P$ und die beiden Auflager je mit P belastet. Jede active Auflagerreaction beträgt also $6P - P = 5P$.) Die Constructionstheile 1 und 2 des Hängwerkes haben die Auflagerreaction $D = da$ aufzunehmen. Macht man also im Kräfteplane $ae \parallel 1$ und $de \parallel 2$, so gibt im Dreiecke dae 1 die Druckspannung der Strebe 1 und 2 die Zugspannung im Hängebalken. Von den auf den Knotenpunkt B wirkenden vier Kräften sind bereits zwei, nämlich 1 und $2P$, bekannt und man kann daher mittels des zugehörigen Kräfte-

Fig. 119.



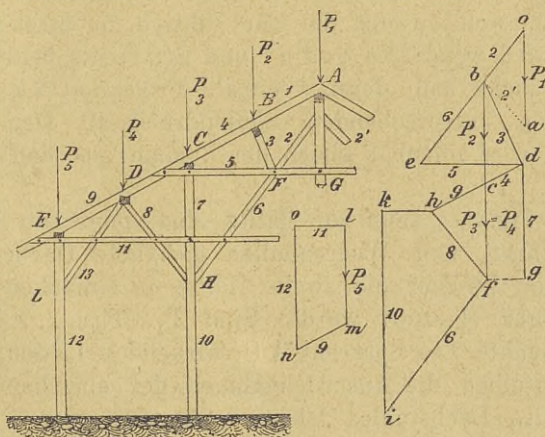
viereckes die beiden andern, nämlich die Druckspannungen $4 = bf$ und $3 = fe$ ermitteln. Die mit 0 bezeichnete Schraube erscheint daher spannungslos und hat nur den Zweck die beiden Gurtungen zusammenzuhalten. Am Knotenpunkte C wird man wieder aus den bereits bekannten zwei Kräften 4 und $2P$ die beiden andern 5 und 6 durch Construction des entsprechenden Kräfteviereckes $fbcg$ erhalten, nämlich den Druck im Spannriegel $6 = cg$ und den Zug in der Hängstange $5 = gf$. Von den auf den Knotenpunkt D wirkenden fünf Kräften sind schon drei, nämlich 2, 3 und 5 bekannt, somit gibt das zugehörige Kräftefünfeck $defgh$ die

*) Der Richtungspfeil von der Auflagerreaction in A ist verkehrt gezeichnet.

beiden andern Kräfte, d. i. den Strebendruck $7 = g h$ und die Zugspannung 8 im Hängbalken gleich $h d$.

2. Das Sprengwerkdach Fig. 120 ist zur Bedeckung von Markthallen, Waarenlagern, Locomotivremisen und dgl. geeignet und wurde dasselbe bis zu Spannweiten von 30 m. ausgeführt. Jeder Sparren liegt auf fünf Pfetten, die durch Streben gestützt sind. P_1, P_2, \dots, P_5 seien die totalen Belastungen der Knotenpunkte des Sparrens A E. Wir beginnen mit der Bestimmung der Spannungen beim Firste A. Der auf denselben ausgeübte Druck P_1 wird durch die Drucksäule A G auf die beiden Hauptstreben 2, 2' übertragen, während der Sparrentheil 1 zu beiden Seiten des Firstes spannungslos bleibt. Im Kräfteplane wurde also zunächst $P_1 = o a$ in die beiden Strebendrucke $2' = a b$ und $2 = b o$

Fig. 120.



zerlegt. Die Last P_2 am Knotenpunkte B wird von der Strebe 3 und dem Sparren 4 aufgenommen; ist also $P_2 = b c$, $c d \parallel 4$ und $b d \parallel 3$, so erhält man aus dem Kräftedreiecke $b c d$ den Sparrendruck $4 = c d$ und den Strebendruck $3 = d b$. Die Last P_3 bei C wird unmittelbar von der Säule 7 aufgenommen. Am Knotenpunkte D wird die Last P_4 entweder von den beiden Streben DH und DL oder von der Strebe DH und dem Sparrentheile DE aufgenommen. Der letztere Fall ist der maßgebende, denn die Strebe 8 wird durch die Hauptstrebe 6, die bei H angreift und nach links drückt, zur Action veranlasst. Ist also $c f = P_4$, $f h \parallel D H$ und

$c h \parallel D E$, so gibt $f h$ den Strebendruck 8 und $h c$ den Sparrendruck 9. Auf den Knotenpunkt E wirkt die Last $P_5 = l m$ und der Strebendruck $9 = m n$; die Resultante $l n$ dieser Drücke wird von der Säule $E L$ und dem horizontalen Zugbände 11 aufgenommen. Macht man also $n o$ vertical und $l o$ horizontal, so gibt $n o$ den Säulendruck 12 und $o l$ die Spannung 11 im Zugbände. Die durch die beiden Streben 2 und 3 auf den Knotenpunkt F übertragenen Drücke, respective deren Resultante $o d$, zerlegen sich weiter in die Kräfte 5 und 6. Man mache also $d e \parallel 5$ und $o e \parallel 6$, so gibt $d e$ die Spannung 5 im horizontalen Zugbände $G F$ und $e o$ die totale Druckspannung 6 in der Hauptstrebe $F H$. Die Druckspannung 7 im oberen Theil der Säule $C H$ setzt sich zusammen aus dem directen Druck der Last $P_3 = c f$ und aus der verticalen Componente des Strebendruckes $4 = c d$; es ist also $7 = d g$. Zu diesem Drucke 7 kommt unterhalb H noch der Druck hinzu, welcher auf die Säule durch die Streben 6 und 8 übertragen wird. Sind also $8 = h f$ und $6 = f i$ die beiden Strebendrucke, so suche man deren verticale Projection $i k$ und erhält hiedurch den entsprechenden Säulendruck 10. Der gesammte Säulendruck wird offenbar gleich der Summe aus den Drücken 7 und 10 sein.

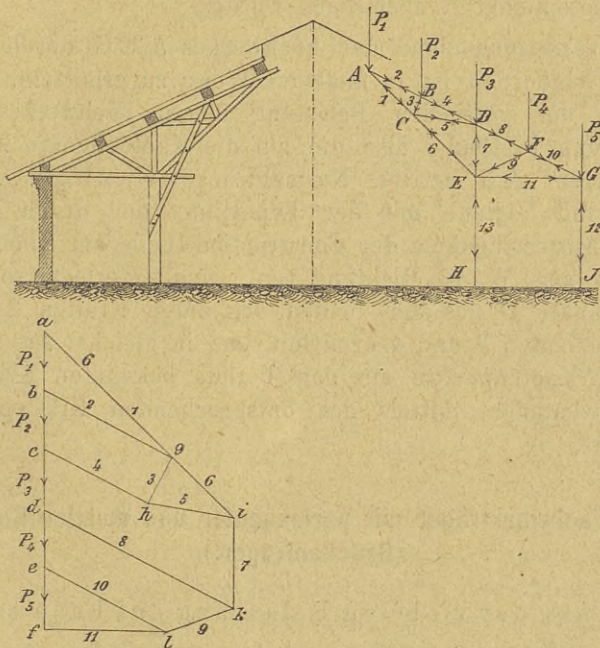
3. Die Fig. 121 zeigt zur Hälfte eine andere für Locomotiv-Remisen, Markt- und Waarenhallen geeignete Dachconstruction aus Holz, von welcher die zweite Hälfte in einfachen Linien als Fachwerkträger skizzirt wurde. Sind P_1, P_2, \dots, P_5 die auf die Knotenpunkte des Sparrens $A G$ wirkenden Lasten, so lassen sich aus denselben die Anspruhen der einzelnen Constructionstheile des Dachstuhles leicht bestimmen, wenn deren Ermittlung beim Knotenpunkte A oder G begonnen wird. Ist im Kräfteplane $a b = P_1$ und macht man $a g \parallel A C$, $b g \parallel A B$, so erhält man aus dem Kräftedreiecke $a b g$ die Druckspannung $1 = g a$ und die Zugspannung $2 = b g$. Für den nächsten Knotenpunkt B sind von den vier auf ihn wirkenden Kräften bereits zwei, nämlich $2 = g b$ und $P_2 = b c$ bekannt, man kann also die beiden andern 3 und 4 mittels des entsprechenden Kräfteviereckes $g b c h$ ermitteln, nämlich $4 = c h$ und $3 = h g$.

Ebenso ergeben sich für den folgenden Knotenpunkt C aus den bekannten Kräften $1 = a g$ und $3 = h g$ die beiden andern 5 und 6 aus dem zugehörigen Kräfteviereck $a g h i$, nämlich $5 = h i$

und $6 = ia$. Ferner für den Knotenpunkt D, aus den bekannten Kräften $5 = ih$, $4 = hc$ und $P_3 = cd$, die Unbekannten 8 und 7 mittels des zugeordneten Kräftefünfeckes $ihcdk$, nämlich $8 = dk$ und $7 = ki$. Am Knotenpunkte F aus den beiden bekannten $8 = kd$ und $P_4 = de$, die beiden unbekannt Kräfte $9 = kl$ und $10 = le$; endlich für G aus $10 = le$ und $P_5 = ef$ die Druckspannung $11 = fl$.

Um die Anspruchnahme der beiden Säulen EH und GJ zu erhalten, könnte man mittels des den Lasten P_1, P_2, \dots, P_5 entsprechenden Kräfte- und Seilpolygones die Resultante dieser Lasten nach § 26 bestimmen und in die beiden in E und G an-

Fig. 121.



greifenden Componenten zerlegen. Würde die Resultante der ganzen verticalen Belastung des Sparrens A G links von der Säule EH liegen, so würde sie eine Drehung des Fachwerks um E anstreben, und es müsste zur Vermeidung derselben, entweder G mit der Säule GJ, welche dann eine Zugspannung erleiden möchte, fest verbunden werden, oder man müsste zwischen A und

seinem symmetrisch gegenüber liegenden Punkte A' eine horizontale Strebe anbringen. Bei der in der linksseitigen Hälfte der Fig. 121 dargestellten Holzconstruction würde die bezeichnete Drehung durch Zangenhölzer vermieden werden, welche die Constructionstheile mit der Säule fest verbinden.

Bei symmetrischer Anordnung des Fachwerks A E G und seiner Belastung, würde offenbar die Resultante der Belastung mit E H zusammenfallen; es müsste dann die Säule E H den ganzen verticalen Druck $P_1 + P_2 + \dots + P_5$ aufnehmen, während die Säule G J spannungslos bliebe. Dies wäre beispielsweise in Fig. 121 der Fall, indem die Last P_5 von den Constructionstheilen 10 und 11, ferner P_4 von 10 und 9 aufgenommen und auf den festen Knotenpunkt E übertragen würde.

Die Anspruchnahme des Fachwerkes A E G durch den einseitigen Winddruck ist in analoger Weise zu ermitteln, wie dies bezüglich der verticalen Belastung dieses Fachwerkes gezeigt wurde. Man bestimme also die auf die Knotenpunkte A, B, .. G des Sparrens A G activen Normaldrücke $W_1, W_2, \dots W_5$ des Windes und beginne mit der Ermittlung der durch dieselben erzielten Anspruchnahme der Constructionstheile am Knotenpunkte A, indem man W_1 in Richtung von 1 und 2 zerlegt, sodann am Knotenpunkte B aus den beiden bekannten Kräften 2 und W_2 die unbekanntenen 3 und 4 ermittelt, und in gleicher Art an jedem folgenden Knotenpunkte aus den bereits bekannten Kräften die zwei unbekanntenen, mittels des entsprechenden Kräftepolygons, construirt.

§. 35. Fachwerkträger mit permanenter und mobiler Belastung. (Brückenträger.)

Einfluss der mobilen Belastung auf Fachwerke.

Die Brückenträger haben bekanntlich außer dem Eigengewichte, welches die permanente oder beständige Belastung bildet, auch noch die mobile oder bewegliche Belastung der ganzen Brücke zu tragen, welche durch die über die Brückenbahn fortschreitenden, größten Verkehrslasten bemessen wird. Das Eigengewicht der ganzen Brücke denkt man sich, wie bereits erwähnt wurde, auf sämtliche Brückenträger gleichförmig vertheilt

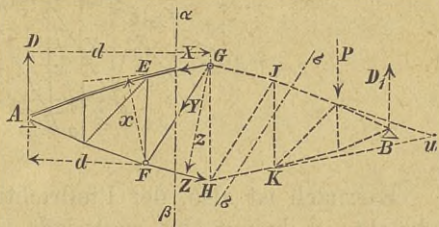
und kann daher die durch dasselbe in den einzelnen Querschnitten eines Trägers hervorgerufenen Momente und Transversalkräfte nach dem auf pag. 70 erläuterten Verfahren sehr leicht bestimmen. Anders ist es mit der Einwirkung der mobilen Belastung. Es muss zunächst untersucht werden, bei welcher Stellung der mobilen Last in den einzelnen Constructionstheilen der Brückenträger das Maximum der Anspruchnahme erreicht wird. Zu diesem Behufe wollen wir vorerst den Einfluss bestimmen, welchen eine Einzelast auf den fraglichen Constructionstheil ausübt, je nachdem sie rechts oder links von demselben angenommen wird, und hiernach die weiteren Folgerungen bilden.

I. Größte Anspruchnahme der Gurtungen.

Um z. B. den Einfluss zu bestimmen, welchen irgend eine rechts von der Schnittfläche $\alpha\beta$, Fig. 122, angebrachte Last, Einzellast P , auf das Gurtungsglied EG ausübt, d. h. ob sie in EG eine Zug- oder Druckspannung hervorbringt,

denke man sich durch den Schnitt $\alpha\beta$ den Träger in zwei Theile zerlegt und an den Schnittstellen die Kräfte X, Y, Z angebracht, welche das Gleichgewicht wieder herstellen. Auf das linke Fragment $A E F$ des

Fig. 122.



Trägers wirken nun die drei Spannungen X, Y und Z und der durch P in A hervorgerufene Stützendruck D ; sollen sich aber diese vier Kräfte das Gleichgewicht halten, so muss bekanntlich die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf einen beliebigen in der Ebene dieser Kräfte gelegenen Drehpunkt gleich Null sein.

Um aber die beiden Spannungen Y und Z zu eliminieren, wählt man den Durchschnittspunkt F dieser Krafrichtungen als Drehpunkt und erhält hiefür, wenn man die Hebelarme von D und X in Bezug auf F beziehungsweise mit d und x bezeichnet und das Moment der rechts drehenden Kraft als positiv, also der links

drehenden als negativ annimmt, die Gleichgewichtsbedingung

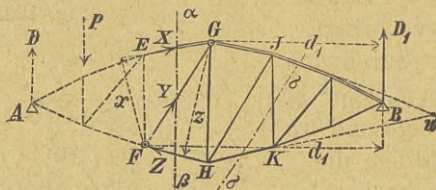
$$D \cdot d - X \cdot x = 0, \text{ woraus } X = \frac{D \cdot d}{x}.$$

Hiernach wird, der Pfeilrichtung von X entsprechend, durch P in dem oberen Gurtungsstücke EG eine Druckspannung hervorgerufen, und wir können nun folgern: dass alle rechts von der Schnittfläche $\alpha \beta$ angebrachten Belastungen in dem betreffenden Gurtstücke Druckspannungen erzeugen.*)

Den Einfluss, welchen eine links von der Schnittfläche $\alpha \beta$ angebrachte Last P auf dasselbe Gurtstück EG ausübt, kann man analog dem vorigen Falle, am einfachsten aus Fig. 123 entnehmen. Wählt man nämlich wieder F als Drehpunkt, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung des rechts vom Schnitte liegenden Fragmentes:

$$- D_1 \cdot d_1 + X \cdot x = 0, \text{ woraus } X = \frac{D_1 \cdot d_1}{x}.$$

Fig. 123.



Hiernach ist also, der Pfeilrichtung entsprechend, EG wieder gedrückt; es bringt also auch jede links von dem Gurtstücke EG angebrachte Last in EG eine Druckspannung hervor und wir können sagen:

„Die obere Gurtung ist nur auf Druck beansprucht und erreicht das Maximum der Druckspannung bei voller Belastung des Trägers.“

Analog werden wir jetzt die Maximalanspruchnahme der unteren Gurtung bestimmen. Betrachten wir nämlich das beliebige

*) Über die Richtung der inneren Kraft im fraglichen Constructionstheile kann offenbar kein Zweifel entstehen; denn dieselbe muss den entgegengesetzten Drehungssinn haben als die in Betracht genommene Stützenreaction, weil sonst kein Gleichgewicht gegen Drehung bestehen könnte.

Gurtstück F H zuerst unter dem Einflusse der rechts davon liegenden Einzellast P, Fig. 122, wählen G als Drehpunkt, und bezeichnen hierfür die Hebelarme von D und Z mit d und z , so ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung:

$$D \cdot d - Z \cdot z = 0, \text{ woraus } Z = \frac{D \cdot d}{z}.$$

Die Pfeilrichtung von Z bedingt also eine Zugspannung des Gurtungsgliedes F H. Liegt die Einzellast P, Fig. 123 links von F H, so gilt für denselben Drehpunkt D als Gleichgewichtsbedingung des rechts von der Schnittfläche $\alpha \beta$ liegenden Fragmentes:

$$- D_1 \cdot d_1 + Z \cdot z = 0, \text{ woraus } Z = \frac{D_1 \cdot d_1}{z}.$$

Die Anspruchnahme von F H ist also wieder eine Zugspannung, und wir gelangen zu der Folgerung:

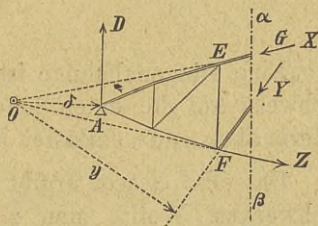
„Die untere Gurtung ist nur auf Zug beansprucht und erreicht das Maximum der Zugspannung bei voller Belastung des Trägers.“

II. Größte Anspruchnahme der Füllungsglieder.

Unter den Füllungsgliedern sind hier die Verbindungselemente, welche die obere Gurtung mit der untern vereinigen, verstanden also in Fig. 122 die Vertical- und Diagonalstangen.

Um zunächst die Anspruchnahme Y einer Diagonalstange z. B. jener F G, Fig. 122 zu erhalten, denke man sich dieselbe zuerst durch die rechts von der Schnittfläche $\alpha \beta$ liegende Einzellast P afficiert, und stelle die Gleichgewichtsbedingung für das linke Fragment, Fig. 124, des Trägers bezüglich des Drehpunktes O auf, in welchem sich die Verlängerungen der beiden durchschnittenen Gurtungsglieder E G und F H treffen. Bezeichnet man mit y den Hebelarm für Y , und mit δ jenen für den durch P hervorgerufenen Stützendruck D in Bezug auf den Drehpunkt O, so ist Gleichgewicht, wenn

Fig. 124.



$$- D \cdot \delta + Y \cdot y = 0, \text{ oder } Y = \frac{D \cdot \delta}{y}.$$

Mit Rücksicht auf die Pfeilrichtung wird also F G durch jede rechts von F G angebrachte Einzellast auf Druckfestigkeit beansprucht.

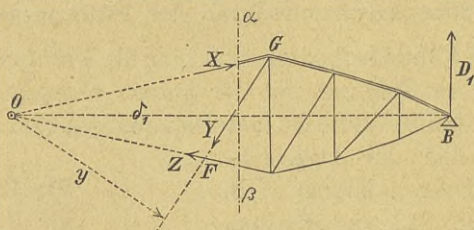
Wird nun die Last P links von der Schnittfläche $\alpha \beta$ angebracht, so ergibt sich für denselben Drehpunkt O als Gleichgewichtsbedingung des rechten Fragmentes, Fig. 125, wenn der Hebelarm des durch P hervorgerufenen Stützendruckes D_1 mit δ_1 bezeichnet wird,

$$- D_1 \cdot \delta_1 + Y \cdot y = 0.$$

Die Pfeilrichtung von Y bedingt also in G F eine Zugspannung; durch alle links von der Diagonalstange F G angebrachten Lasten wird daher dieselbe auf Zug beansprucht.

Da nun die auf entgegengesetzten Seiten der Diagonalstange liegenden Lasten diese Stange entgegengesetzt beanspruchen, so ergibt sich mit Rücksicht auf das Vorstehende die Folgerung:

Fig. 125.



„Eine Diagonalstange ist am stärksten beansprucht, wenn das Fachwerk auf der einen Seite derselben gänzlich belastet, auf der andern aber ganz entlastet ist.“

Dasselbe Gesetz ergibt sich auch für die Verticalstangen des Fachwerkes. Wollte man z. B. die größte Anspruchnahme der Stange J K, Fig. 122, ermitteln, so denke man sich den Träger durch die Ebene $\sigma \sigma$ so zerschnitten, dass nur 3 Stangen (worunter J K) getheilt werden, bringe nun wieder eine Einzellast P einmal rechts, das anderemal links von der betreffenden Stange an, und stelle beidemal die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung in Bezug auf den Schnittpunkt U der beiden andern Stangen auf. Man wird sich sofort überzeugen, dass bei dem Fachwerkträger, Fig. 122, die rechts von J K angebrachte Einzellast

in JK eine Zugspannung, dagegen die links von JK angebrachte Einzellast, Fig. 123, in JK eine Druckspannung verursacht.

Wir erhalten somit bezüglich der Füllungsglieder des Fachwerkes den allgemeinen Satz:

„Ein Füllungsglied wird am stärksten in Anspruch genommen, wenn das Fachwerk auf der einen Seite desselben ganz belastet, auf der andern Seite desselben aber ganz entlastet ist.“

Die Bestimmung der bezüglichen Transversalkraft geschieht nach dem auf pag. 98 sub b) erläuterten Verfahren.

Zusatz: Bei Fachwerkträgern mit parallelen Gurtungen lässt sich die vorhin beschriebene Bestimmungsweise der größten Anspruchnahme der einzelnen Constructionstheile ebenfalls durchführen. Zwar liegt dann bei der Bestimmung der Anspruchnahme einer Diagonalstange der Durchschnittspunkt der beiden parallelen Gurte, also der Drehpunkt für die Momentengleichung der Diagonalstange in unendlicher Entfernung, es werden somit die Hebelarme der in der Momentengleichung vorkommenden Kräfte unendlich groß, fallen jedoch gegen einander weg, und wird hierdurch jede Unbestimmtheit behoben.

Fig. 126.

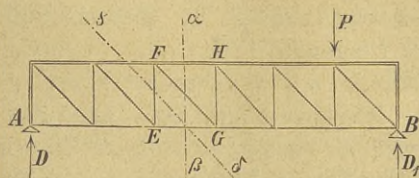
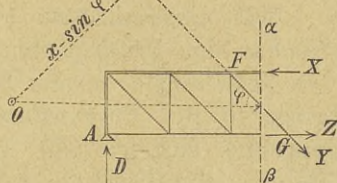


Fig. 127.



Um z. B. den Einfluss zu bestimmen, welchen eine rechts von der Schnittfläche $\alpha \beta$, Fig. 126, angebrachte Einzellast P auf die Diagonalstange FG ausübt, denke man sich zunächst wieder durch den Schnitt $\alpha \beta$ die ganze Construction in zwei Theile zerlegt, und nach Hinzufügung der Kräfte X, Y, Z für den linken Theil, Fig. 127, die Momentengleichung in Bezug auf den Durchschnittspunkt der beiden Kräfte X und Z als Drehpunkt aufgestellt. Würde der Drehpunkt O in der endlichen Entfernung x von der Schnittfläche $\alpha \beta$ liegen, so wäre der Hebelarm von Y durch $x \cdot \sin \varphi$ bestimmt. Denkt man sich aber O bis zum unendlich

fernen Durchschnittspunkte der beiden Kräfte X und Z fortgerückt, also $x = \infty$, so wird der Hebelarm von Y gleich $\infty \cdot \sin \varphi$ und jener des durch P erzeugten Stützdruckes D gleich ∞ .

Da nun für diesen unendlich fernen Durchschnittspunkt als Drehpunkt die Momente der Kräfte X und Z in Null übergehen, so ergibt sich zur Bestimmung von Y die Momentengleichung:

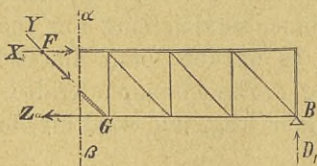
$$- D \cdot \infty + Y \infty \sin \varphi = 0,$$

woraus, mit Weglassung des gemeinschaftlichen Factors ∞ ,

$$Y = \frac{D}{\sin \varphi} \dots (\alpha).$$

Da hier Y rechts drehend wirkt, so muss offenbar, der Pfeilrichtung entsprechend, die durch P verursachte Anspruchnahme eine Zugspannung der Diagonale FG bedingen.

Fig. 128.



Auf analoge Weise erhält man für die Anspruchnahme, welche irgend eine links von der Schnittfläche $\alpha \beta$ angebrachte Einzellast in FG hervorbringt, aus Fig. 128, die Gleichgewichtsbedingung:

$$- D_1 \cdot \infty + Y \cdot \infty \cdot \sin \alpha = 0, \text{ woraus}$$

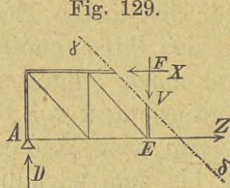
$$Y = \frac{D_1}{\sin \alpha} \dots (\alpha_1).$$

Die eingezeichnete Pfeilrichtung bedingt in diesem Falle offenbar eine Druckspannung der Diagonale FG.

Jede rechts von der Schnittfläche $\alpha \beta$ angebrachte Einzellast bringt in der durchschnittenen Diagonalstange FG eine Zugspannung, dagegen jede links von ihr angebrachte Einzellast in FG eine Druckspannung hervor. Die Diagonalstangen erfahren also auch beim Fachwerk mit parallelen Gurtungen die größte Anspruchnahme bei der größten einseitigen Belastung des Fachwerkes.

Dasselbe gilt auch für die Verticalstangen.

Fig. 129.



Um z. B. die größte Anspruchnahme der dritten Verticalstange EF, Fig. 126, zu bestimmen, führe man den Schnitt $\gamma \delta$ und untersuche zunächst den Einfluss einer rechts von $\gamma \delta$ angebrachten Einzellast P, die bei A den Stützdruck D hervorruft. Für den linken Theil, Fig. 129, ist alsdann

wenn wieder der unendlich ferne Schnittpunkt der Kräfte X und Z als Drehpunkt gewählt wird, als Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung

$$- D \cdot \infty + V \cdot \infty = 0 \text{ oder } V = D.$$

Da nun V und D entgegengesetzten Drehungssinn haben müssen, so muss offenbar V, der Pfeilrichtung zufolge, die Verticalstange EF auf Druck beanspruchen.

Liegt dagegen die Einzellast P links vom Schnitte $\gamma \delta$ und ruft sie bei B den Stützendruck D_1 hervor, so muss, damit der Theil, Fig. 130, im Gleichgewichte bleibe, wieder

$$- D_1 \cdot \infty + V \cdot \infty = 0, \text{ oder } V = D_1 \text{ sein,}$$

und die dem D_1 entgegengesetzte Pfeilrichtung von V belehrt uns, dass die links von der Schnittfläche $\gamma \delta$ angebrachte Einzellast P in EF einen Zug verursacht.

Es werden also auch die Verticalstangen durch rechts und links von ihnen liegende Lasten entgegengesetzt beansprucht, und erreichen somit ebenfalls die größte Anspruchnahme bei der größten einseitigen Belastung des Fachwerkes.

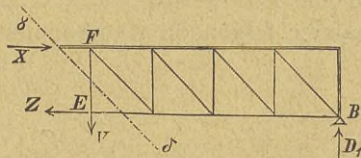
Was endlich die größte Anspruchnahme X und Z der beiden horizontalen Gurtungsglieder FH und EG, Fig. 126, anbelangt, so bietet dieser Fall zu keinen neuen Bemerkungen Veranlassung; sie werden nämlich, wie dies beim allgemeinen Fachwerke nachgewiesen wurde, am meisten beansprucht, wenn das ganze Fachwerk belastet ist. Da übrigens bei parallelen Gurtungen die Kräfte X und Z die einzigen Horizontalkräfte sind, welche auf den Theil, Fig. 127 oder 128 wirken, so muss offenbar für jeden Belastungszustand, damit keine Verschiebung in horizontaler Richtung eintreten könne,

$$- X + Z = 0 \text{ oder } X = Z \text{ sein.}$$

§. 36. Fachwerkträger für Eisenbahnbrücken.

Allgemeiner Fall. Nach den im vorigen Paragraphe gewonnenen Ergebnissen wird es nun nicht schwer fallen, die größte Anspruchnahme der einzelnen Constructionstheile eines Fachwerkträgers zu bestimmen.

Fig. 130.

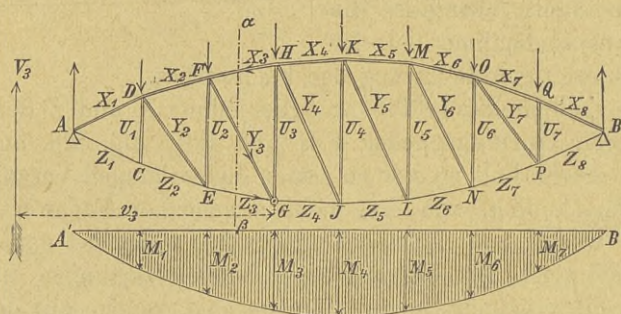


Man ermittle zunächst den vom Eigengewichte und der größten mobilen Belastung der ganzen Brücke auf einen Brückenträger entfallenden Betrag, indem man, wenn n gleich starke, einfache Fachwerkträger die gesammte Last tragen sollen, das Eigengewicht der ganzen Brücke, sowie die einzelnen Achsendrucke des schwersten, die Brückenbahn bedeckenden Lastzuges, durch n dividirt. Hierauf construirt man nach § 26 die vom Eigengewichte der Brücke und nach § 27 die von der mobilen Belastung den einzelnen Knotenpunkten eines einfachen Fachwerkträgers zukommenden größten Transversalkräfte ($\max V$) und größten Momente ($\max M$).

Hat man dies bewerkstelligt, so schreite man nun zur Bestimmung der Spannungen in den Gurtungen.

Anspruchnahme der Gurtungen. Es sei Fig. 131 der einfache Fachwerkträger und $M_1, M_2, M_3 \dots$ seien die den aufeinander folgenden Knotenpunkten entsprechenden größten Total-

Fig. 131.



momente, welche durch Addition der vom Eigengewichte und der mobilen Belastung herrührenden Werte erhalten werden. Um die Anspruchnahme irgend eines Gurtungsgliedes z. B. jene X_3 von FH zu ermitteln, denke man sich durch den Schnitt $\alpha\beta$ den Träger in zwei Theile zerlegt und den rechten Theil durch die an den Schnittflächen der durchschnittenen Stäbe thätigen inneren Kräfte X_3, Y_3, Z_3 ersetzt. Bezeichnet man die auf das linke Fragment thätige Transversalkraft der äußeren Kräfte mit V_3 , ihren Abstand von G mit v_3 , ferner den Abstand des Knotens G von X_3 mit x_3 und wählt, um X_3 allein zu erhalten, den Schnitt-

punkt G der beiden anderen Spannungen Y_3 und Z_3 als Drehpunkt, so muss zur Sicherung gegen Drehung des betrachteten Trägerfragmentes die Gleichung bestehen:

$$V_3 \cdot v_3 - X_3 \cdot x_3 = 0, \text{ woraus } X_3 = \frac{V_3 \cdot v_3}{x_3}.$$

Das Produkt $V_3 \cdot v_3$ stellt aber das Moment M_3 der äußeren auf das Fragment A α β thätigen Kräfte bezüglich des Punktes G vor; es ist also

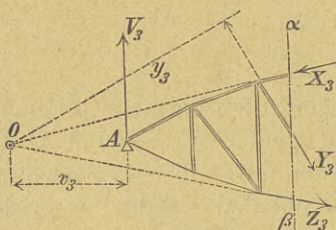
$$X_3 = \frac{M_3}{x_3} \dots (\alpha).$$

Analog lassen sich die Spannungen aller übrigen Gurtungsglieder bestimmen; jene der Gurtungsglieder A C und A D am Auflager ergeben sich aber am einfachsten durch directe Zerlegung des größten Stützendruckes, der sich offenbar ergibt, wenn der Lastzug von B bis A auffährt, so dass das erste Rad der vorderen Locomotive unmittelbar über A steht.

Anspruchnahme der Diagonalen. Die Maximalspannung der Füllungsglieder ergibt sich, dem vorigen Paragraphe zufolge, bei einseitiger mobiler Belastung des Trägers, d. h. wenn nur das größere Fragment des Trägers vom betreffenden Füllungsgliede bis zum entfernteren Stützpunkte durch die mobile Last bedeckt ist. Da aber das auf den Träger entfallende Eigengewicht der Brücke unverändert bleibt, so wird man am besten thun, zunächst die Spannungen zu bestimmen, welche die einzelnen Füllungsglieder durch dieses Eigengewicht erfahren, und dann erst zur Ermittlung der Maximalspannungen schreiten, welche durch die mobile Last in den Füllungsgliedern verursacht werden. Durch Addition der beiden Spannungen mit Rücksicht auf das Vorzeichen erhält man dann die totale Anspruchnahme der einzelnen Füllungsglieder. Was vorerst die Bestimmung der Anspruchnahme der Constructionstheile des Trägers durch das auf ihn entfallende Eigengewicht der Brücke anbelangt, so kann diese am einfachsten, wie dies bei den Fachwerkträgern mit constanter Belastung geschah, nach dem Cremona'schen Kräfteplane vorgenommen werden, weshalb wir darauf nicht weiter eingehen wollen, sondern uns gleich zur Ermittlung der Spannungen in den Füllungsgliedern durch die mobile Belastung wenden.

Um z. B. die größte Anspruchnahme Y_3 der Diagonale FG , Fig. 131, im dritten Felde durch die mobile Last zu erhalten, muss nach § 27 der Lastzug, schwerster Kategorie, von rechts kommend bis zum Schnitte $\alpha \beta$ vorgehen. Man bestimme daher nach pag. 77 die dieser Radstellung entsprechende Transversalkraft V_3 , und berücksichtige, dass V_3 , wegen der einseitigen Belastung, als Stützendruck am Auflager A wirken wird.

Fig. 132.



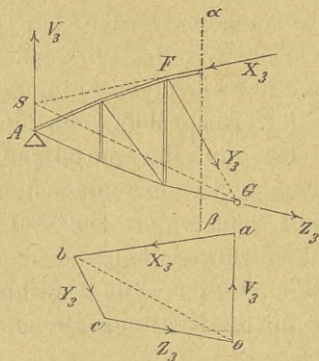
Soll sich nun das Fragment $A \alpha \beta$, Fig. 132, unter dem Einflusse der auf dasselbe thätigen Kräfte X_3, Y_3, Z_3 und V_3 im Gleichwichte befinden, so muss die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf irgend einen in der Ebene dieser Kräfte liegenden Punkt gleich Null sein. Wählen wir, um

X_3 und Z_3 zu eliminieren, den Schnittpunkt O dieser beiden Kräfte als Drehpunkt, so ergibt sich in Bezug auf O die Gleichgewichtsbedingung:

$$- V_3 \cdot v_3 + Y_3 \cdot y_3 = 0, \text{ woraus } Y_3 = \frac{V_3 \cdot v_3}{y_3} \dots (\beta).$$

Da nun V_3 links drehend wirkt, so muss offenbar Y_3 rechts drehend wirken, somit in Folge der Pfeilrichtung die größte Anspruchnahme von Y_3 in einer Zugspannung bestehen.

Fig. 133.

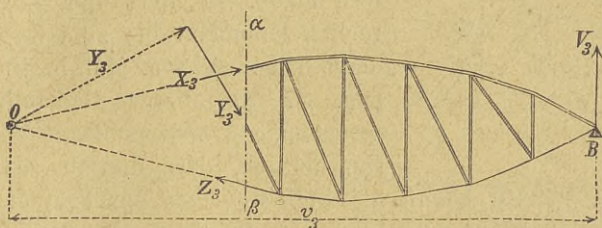


Zusatz. Fällt der Schnittpunkt O der beiden Kräfte X_3 und Z_3 über die Zeichnungsfläche hinaus, so kann man die Bestimmung von Y_3 nach § 14 vornehmen, indem man die in A , Fig. 133, angreifende Transversalkraft V_3 in Richtung der drei Kräfte X_3, Y_3 und Z_3 zerlegt. Man verlängere daher eine derselben z. B. X_3 bis zum Schnitte s mit V_3 , so muss die Resultante von V_3 und X_3 im Gleich-

gewichtszustande mit der Resultante von Y_3 und Z_3 zusammenfallen, also die Richtung $G s$ haben. Man mache daher seitwärts $o a = V_3$, führe durch die Endpunkte von V_3 Parallele zu X_3 und $G s$ und zerlege $o b$, d. i. die Resultierende von V_3 und X_3 , in die Kräfte Y_3 und Z_3 .

Wir haben vorhin gefunden, dass die Maximal-Anspruchnahme der Diagonale FG in einer Zugspannung besteht, die sich ergibt, wenn der Lastzug von rechts kommend bis zum Schnitte $\alpha \beta$ vorfährt. Nach § 35 wird somit dieselbe Diagonale die größte Druckspannung erleiden, wenn der Wagenzug von links kommend bis $\alpha \beta$ vorfährt.

Fig. 134.



Bezeichnet man die dieser Radstellung entsprechende Transversalkraft mit V_3 und betrachtet das rechts vom Schnitte $\alpha \beta$ liegende Fragment, Fig. 134, auf welches außer X_3 , Y_3 und Z_3 bloß der in B thätige Stützendruck V_3 wirkt, so erhalten wir als Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung bezüglich des Punktes O die Gleichung:

$$- V_3 \cdot v_3 + Y_3 \cdot y_3 = 0, \text{ woraus } Y_3 = \frac{V_3 \cdot v_3}{y_3} \dots \dots (\beta_1).$$

Die Diagonale FG wird demnach am stärksten auf Zug oder Druck beansprucht, je nachdem der Lastzug beziehungsweise von rechts oder links kommend bis zum Schnitte $\alpha \beta$ vorfährt. Analog verhalten sich alle Diagonalen in der linken Trägerhälfte.

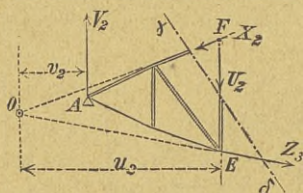
In der rechten Trägerhälfte ergibt sich dagegen, wegen der entgegengesetzten Lage der Diagonalen zur Mitte, das entgegengesetzte Verhalten in Bezug auf Zug und Druck; d. h. die Diagonalen in

der rechten Trägerhälfte werden am stärksten gezogen, wenn alle links von ihnen befindlichen Felder belastet sind, dagegen am stärksten gedrückt, wenn alle rechts von ihnen liegenden Felder belastet werden.

Wenn in irgend einem Felde, z. B. im dritten, statt der links ansteigenden Diagonale FG eine rechts ansteigende EH Fig. 131, angebracht würde, so möchte sie sich offenbar entgegengesetzt als wie FG verhalten, also mit jener MN , welche zu ihr symmetrisch liegt, gleiche Anspruchnahmen erfahren.

Anspruchnahme der Verticalen. Nach § 35 erfahren auch die Verticalen die größte Anspruchnahme bei der größten einseitigen Belastung des Fachwerkes.

Fig. 135.



Ist z. B. die Maximalanspruchnahme U_2 der zweiten Verticalen EF , Fig. 135, zu bestimmen, so muss der Lastzug von rechts kommend bis zum Kopfpunkt F derselben vorgehen. Man bestimme nach pag. 77 die dieser Radstellung entsprechende Transversalkraft V_2 und berücksichtige, dass dieselbe als Stützendruck im Punkte A auftritt.

Soll sich nun das Fragment $A \gamma \delta$ unter dem Einflusse der auf dasselbe wirkenden Kräfte X_2 , U_2 , Z_3 und V_2 im Gleichgewichte befinden, so muss in Bezug auf den Drehpunkt O die Gleichung bestehen:

$$- V_2 \cdot v_2 + U_2 \cdot u_2 = 0, \text{ woraus } U_2 = \frac{V_2 \cdot v_2}{u_2} \dots (\gamma).$$

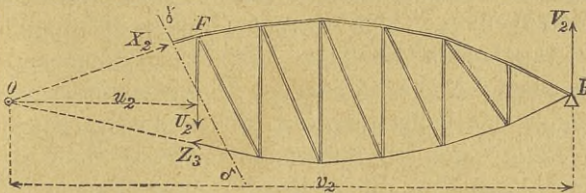
Da hier U_2 rechts drehend wirken muss, so besteht der Pfeilrichtung von U_2 entsprechend, die Maximalbeanspruchung von EF in einer Druckspannung. Fährt dagegen der Lastzug von links kommend bis zu F auf, so erfährt DF die größte Zugspannung. Nennen wir die dieser Radstellung zukommende Transversalkraft V_2 und stellen die Gleichgewichtsbedingung für das Fragment $B \gamma \delta$, Fig. 136, bezüglich des Drehpunktes O auf, so erhält man die Gleichung:

$$- V_2 \cdot v_2 + U_2 \cdot u_2 = 0, \text{ woraus } U_2 = \frac{V_2 \cdot v_2}{u_2} \dots (\gamma_1),$$

welche Anspruchnahme der Pfeilrichtung entsprechend wirklich in einer Zugspannung besteht.

Analog verhalten sich alle andern Verticalen der linken Trägerhälfte, d. h. sie werden am meisten gedrückt, wenn der Lastzug alle rechts vor ihnen liegenden Felder bedeckt und am meisten gezogen, wenn der Lastzug auf alle links von ihnen liegenden Felder auffährt.

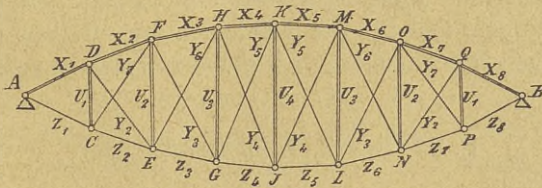
Fig. 136.



In der rechten Trägerhälfte ergibt sich dagegen, wegen der entgegengesetzten Lage der Diagonalen, auch die entgegengesetzte Anspruchnahme der Verticalen, d. h. die Verticalen in der rechten Trägerhälfte werden am stärksten gedrückt, beziehungsweise gezogen, wenn der Lastzug alle links oder rechts von ihnen liegenden Felder bedeckt.

Gekreuzte Diagonalen. Wir haben gesehen, dass alle Füllungsglieder bei dem eben vorgeführten allgemeinen Fachwerkträger abwechselnd auf Zug und Druck in Anspruch genommen werden, da aber die Herstellung und Verbindung solcher, sowohl

Fig. 137.



dem Zuge als auch dem Drucke gehörig widerstehender Füllungsglieder sehr schwierig ist, so pflegt man in allen Feldern, in welchen die Diagonalen auf Zug und Druck in Anspruch genommen werden, gekreuzte Diagonalen anzuwenden. Werden nun beide Diagonalen als Zugstangen construiert, die also eine Druckspannung aufzunehmen unfähig sind, so wird jede von beiden nur bei der-

jenigen Belastungsweise in Anspruch genommen, welche in ihr eine Zugspannung erzeugt, während die andere im spannungslosen Zustande bleibt. Es kommen also beim Doppelfachwerke, Fig. 137, nur die Maxima der in den Diagonalen des einfachen Trägers, Fig. 131, gefundenen Zugspannungen in Betracht. So kommt z. B. im dritten Felde für die Diagonale F G die Zugspannung Y_3 (max), dagegen für jene E H die Zugspannung Y_6 zur Wirkung. Auf dieselbe Art kann man in den übrigen Feldern die Spannungen der gekreuzten Diagonalen direct aus Fig. 131 bestimmen.

Wenn aber die Diagonalen des Doppelfachwerkes sämmtlich als Zugbänder construiert werden, die keine Druckspannung aufzunehmen fähig sind, so müssen selbstverständlich die Verticalständer die größten sich ergebenden Druckspannungen aufzunehmen im Stande sein; es sind daher für dieselben nur die nach Fig. 135 zu bestimmenden größten Druckspannungen U des einfachen Trägers maßgebend.

Endlich ist noch zu bemerken, dass wegen der symmetrischen Anordnung des Doppelfachwerkes zur verticalen Mittellinie, die zu ihr symmetrisch liegenden Bestandtheile gleich große Anspruchnahmen erfahren, so dass z. B.

$$\begin{aligned} X_1 &= X_8, & X_2 &= X_7, & X_3 &= X_6, & X_4 &= X_5, & \text{ferner} \\ Z_1 &= Z_8, & Z_2 &= Z_7, & Z_3 &= Z_6, & Z_4 &= Z_5 & \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

A n m e r k u n g. Werden die gekreuzten Diagonalen im Doppelfachwerk so construiert, dass sie nur Druckspannungen annehmen können, wie dies z. B. bei Holzconstructions vorkommt, so sind offenbar für die Diagonalen oder Streben nur die größten Druckspannungen und für die Verticalen zumeist nur die größten Zugspannungen des zugehörigen einfachen Trägers maßgebend.

§. 37. Specielle Fachwerkträger.

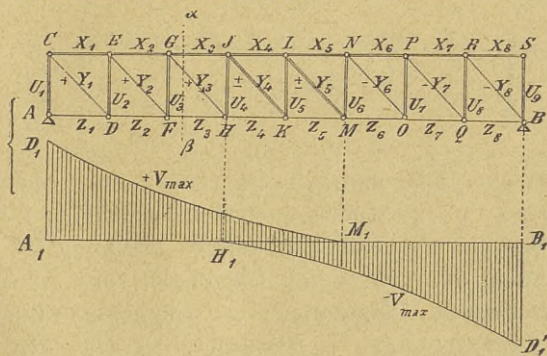
I. Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen.

a) System Mohnié. Dasselbe ist ein Parallelträger mit rechtwinkligen Dreiecken, dessen Diagonalen nur Zugspannungen erleiden sollen. Um diese Bedingung zu realisieren, bildet man zunächst nach Fig. 138 einen Parallelträger mit einfachen und durchwegs gleich geneigten Diagonalen, und bestimmt für den-

selben nach § 28, beziehungsweise 29, die aus dem Eigengewichte und der mobilen Belastung resultierenden größten positiven und negativen Transversalkräfte, nämlich $+V_{\max}$ und $-V_{\max}$. Es ergeben sich dann innerhalb einer gewissen Strecke AH nur positive, innerhalb BM = AH nur negative und innerhalb des mittleren Theiles HM sowohl positive als auch negative Transversalkräfte.

Hieraus folgt, dass bei dem einfachen Parallelträger Fig. 138 die Diagonalen in dem Theile AH nur auf Zug, in jenem BM nur auf Druck und im mittleren Theile HM abwechselnd auf Zug und Druck beansprucht würden, je nachdem die mobile Belastung von B oder von A kommend bis zu den betreffenden Diagonalen des mittleren Theiles vorrückt.

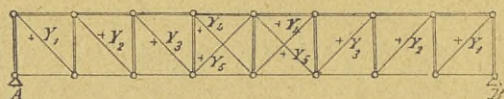
Fig. 138.



Es zeigt sich überdies, dass die Diagonalen in der rechten Trägerhälfte im Vergleich zu jenen in der linken Trägerhälfte, wegen ihrer entgegengesetzten Lage zur Trägermitte, auch die entgegengesetzte Anspruchnahme in Bezug auf Zug und Druck erfahren. Während z. B. in der linken Trägerhälfte die Diagonale Y₄ den größten Zug oder Druck erleidet, je nachdem beziehungsweise alle rechts oder links von ihr befindlichen Felder mit mobiler Last bedeckt sind, wird in der rechten Trägerhälfte die Diagonale Y₅ den größten Zug oder Druck erfahren, wenn beziehungsweise alle links oder rechts von ihr liegenden Felder mit mobiler Last bedeckt erscheinen. Wird also in irgend einem Felde die Richtung einer Diagonale in die entgegengesetzte umgewandelt, so zeigt sie nun auch das entgegengesetzte Verhalten

in Bezug auf Zug und Druck. Dieser Umstand bietet ein Mittel, die Diagonalen in jenen Feldern, in welchen sie auf Zug und Druck beansprucht würden, durch Anbringung von sich kreuzenden Diagonalen, nur in einer Art, und zwar nur auf Zug oder Druck zu belasten, je nachdem die sich kreuzenden Diagonalen als Zugbänder oder Streben angeordnet werden. Da nun beim Mohrié'schen Systeme sämtliche Diagonalen nur Zugspannungen erleiden sollen, so muss man zunächst, um den Träger Fig. 138 in einen Mohrié'schen umzuformen, den Diagonalen in der rechten Trägerhälfte die entgegengesetzte Lage geben und in den beiden mittleren Feldern doppelte, als Zugbänder construierte Diagonalen anbringen, die keiner Druckspannung fähig sind. Es wird dann der in Fig. 139 dargestellte Träger entstehen. Von den beiden

Fig. 139.



sich kreuzenden Diagonalen wird jede nur bei derjenigen Belastungsweise in Anspruch genommen, welche in ihr eine Zugspannung erzeugt, während die andere spannungslos bleibt. Es kommen dann in den gekreuzten Diagonalen nur die Maxima der in den betreffenden Diagonalen des Elementarträgers Fig. 138 gefundenen Zugspannungen in Betracht. Es wird also im vierten Felde, Fig. 139, die eine Diagonale die Maximalspannung $+Y_4$ und die andere jene $+Y_5$ des Elementarträgers erfahren. Wegen der symmetrischen Anordnung des Trägers Fig. 139, werden die zur Trägermitte symmetrisch liegenden Diagonalen selbstverständlich gleich stark beansprucht erscheinen.

Sobald aber die sämtlichen Diagonalen als Zugbänder construiert sind, die keine Druckkräfte aufzunehmen vermögen, so müssen offenbar die Verticalstäbe als Streben (Drucksäulen) angeordnet werden, welche die größten sich ergebenden Druckkräfte aufzunehmen haben; es sind dann für die Verticalstäbe zunächst nur die größten Druckspannungen der Verticalen des einfachen Trägers Fig. 138 maßgebend.

Es erübrigt uns nur noch die specielle Berechnungsweise der Parallelträger zu besprechen.

Da die Anspruchnahmen der Gurtungen den auf dieselben einwirkenden Drehungsmomenten der Trägerbelastung proportional sind, so wird man, um die größte Inanspruchnahme der Gurtstücke in den einzelnen Feldern zu erhalten, zunächst die Maximalmomente für dieselben nach § 27 zu übermitteln haben.

Bezeichnet man, vom Auflager A aus gezählt, die den Endpunkten der aufeinander folgenden Felder entsprechenden Maximalmomente der Reihe nach mit M_1, M_2, M_3, \dots , so erhält man aus Gleichung (α), pag. 177, wegen der constanten Entfernung h der Gurtungen (d. i. wegen $x = h$) die Druckspannungen im Obergurte des einfachen Trägers Fig. 138, nämlich $X_1 = \frac{-M_1}{h}$, $X_2 = \frac{-M_2}{h}$, $X_3 = \frac{-M_3}{h}$, $X_4 = \frac{-M_4}{h}$ u. s. w. endlich $X_8 = 0$; ebenso die Zugspannungen im Untergurte $Z_1 = 0$, $Z_2 = \frac{M_1}{h}$, $Z_3 = \frac{M_2}{h}$, $Z_4 = \frac{M_3}{h}, \dots, Z_8 = \frac{M_7}{h}$.

Wird aber der Träger nach Fig. 139 symmetrisch angeordnet, so wird offenbar, wenn die Vorzeichen unberücksichtigt bleiben,

$$X_1 = X_8 = \frac{M_1}{h}; X_2 = X_7 = \frac{M_2}{h}; X_3 = X_6 = \frac{M_3}{h};$$

$$X_4 = X_5 = \frac{M_4}{h}, Z_1 = Z_8 = 0, Z_2 = Z_7 = \frac{M_1}{h}, Z_3 = Z_6 = \frac{M_2}{h},$$

$$Z_4 = Z_5 = \frac{M_3}{h}.$$

Diese Bestimmungsweise der Anspruchnahme der Gurtstücke ergibt sich bekanntlich auch direct nach der Ritter'schen Methode. Will man z. B. die Anspruchnahme der Gurtung im 3. Felde des Trägers Fig. 138 bestimmen, so denke man sich denselben durch den Schnitt $\alpha \beta$ in zwei Theile zerlegt und für den linken Theil die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung zwischen den äußeren und inneren Kräften gebildet.

Um X_3 zu ermitteln, wählt man den Schnittpunkt H von Y_3 und Z_3 als Drehpunkt, und erhält, wenn das Moment der Belastung des Trägers für den Punkt H ebenso wie früher mit M_3 bezeichnet wird, $M_3 = X_3 \cdot h$, woraus $X_3 = \frac{M_3}{h}$. Um Z_3 zu finden, muss

man den Schnittpunkt G von X_3 und Y_3 als Drehpunkt wählen, für den das Moment der Belastung mit M_2 bezeichnet wurde, und erhält $M_2 = Z_3 \cdot h$ oder $Z_3 = \frac{M_2}{h}$.

Hat man bei der graphischen Bestimmung der dem Eigengewichte und der mobilen Belastung entsprechenden Maximalmomente M_1, M_2, M_3, \dots , für beide Seilpolygone dieselbe Poldistanz H gewählt, und sind der Reihe nach y_1, y_2, y_3, \dots die Summen der zugehörigen Ordinaten aus den beiden Seilpolygonen (nämlich aus dem fürs Eigengewicht und dem für die mobile Belastung), so ist bekanntlich $M_1 = H \cdot y_1$, $M_2 = H \cdot y_2$, $M_3 = H \cdot y_3$ u. s. w. Für diese Werte erhält man aus den obigen Gleichungen die folgenden:

$$X_1 = Z_2 = \frac{H \cdot y_1}{h}, \quad X_2 = Z_3 = \frac{H \cdot y_2}{h}, \quad X_3 = Z_4 = \frac{H \cdot y_3}{h} \quad \text{und}$$

$$X_4 = \frac{H \cdot y_4}{h}.$$

Hienach lassen sich die Anspruchnahmen der Gurtungen sehr leicht nach Fig. 140 construieren.

Fig. 140.

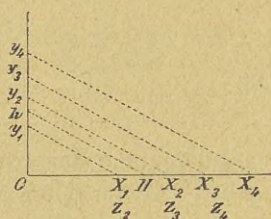
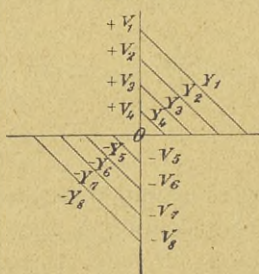


Fig. 141.



Um nun die Beanspruchung der Füllungsglieder zu erhalten, wird man zunächst die durch das gleichmäßig vertheilte Eigengewicht in den Constructionstheilen des einfachen Fachwerkes, Fig. 138, hervorgerufenen Spannungen mittels des Cremona'schen Kräfteplanes bestimmen, und hierauf die Anspruchnahme der Füllungsglieder durch die mobile Last getrennt vornehmen. Man wird nämlich nach pag. 98 die in den aufeinander folgenden Feldern durch die einseitig wirkende mobile Belastung hervor-

gerufenen größten Werte der Transversalkräfte, nämlich V_1 , V_2 , V_3 , . . . ermitteln und berücksichtigen, dass dieselben als Auflagerreactionen in A successive zur Wirkung kommen.

Man erhält dann aus der Gleichung (α) auf pag. 174 für die Diagonalstangen die Anspruchnahmen:

$$Y_1 = \frac{V_1}{\sin \varphi}, \quad Y_2 = \frac{V_2}{\sin \varphi}, \quad Y_3 = \frac{V_3}{\sin \varphi} \text{ u. s. w.}$$

Demnach lassen sich die Werte von Y aus den zugehörigen Werten von V als Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke sehr leicht construieren. Um z. B. Y_1 aus V_1 zu erhalten, zeichne man ein rechtwinkeliges Dreieck, in dem die eine Kathete gleich V_1 ist und die andere von der Hypotenuse unter dem constanten Winkel φ getroffen wird. Da übrigens die Diagonalstangen für $\varphi = 45^\circ$ den geringsten Materialaufwand erfordern, so wird man sie thatsächlich unter 45° anordnen; dann übergeht aber das rechtwinkelige Dreieck in ein rechtwinkelig gleichschenkeliges.

Werden also in Fig. 141 von O aus die den aufeinander folgenden Feldern entsprechenden Werte von V auf den Schenkeln des rechten Winkels mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen aufgetragen, so geben die Längen der zugehörigen Hypotenusen die gesuchten Anspruchnahmen der Diagonalstangen. Selbstverständlich muss man hierzu die vom Eigengewichte herrührenden Spannungen mit Rücksicht auf das Vorzeichen addieren.

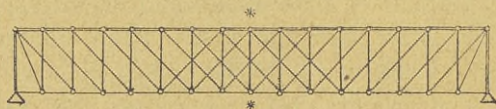
Die Verticalstäbe haben, wie bereits bemerkt wurde, die ihnen zukommenden Werte der Transversalkräfte vollständig aufzunehmen.

Der über A, Fig. 138, aufstehende Verticalständer AC müsste also dem totalen Stützdrucke widerstehen, während der das 1. Feld begrenzende Stab DE den vom Eigengewichte und den von der größten mobilen, von S bis E reichenden Belastung erzeugten Druck aufzunehmen hätte. Bei dem eben betrachteten einfachen Träger würden innerhalb AH die Verticalstäbe nur auf Druck, innerhalb BM (mit Ausnahme jenes BS) nur auf Zug und innerhalb HM auf Zug und Druck beansprucht werden. Der letzte Verticalstab BS hätte, wenn die Fahrbahn oberhalb des Trägers läge, nur den Druck von der jeweiligen über ihm liegenden Last aufzunehmen; denn die Auflagerreaction in B würde vom Untergurt und der Diagonalstange BR aufgenommen werden.

In dem Mohnié'schen Träger Fig. 139 würden dagegen sämtliche Verticalstäbe nur von den größten Druckspannungen beansprucht erscheinen.

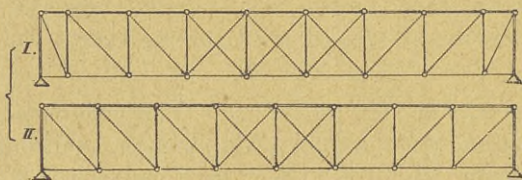
Combinirtes System Mohnié. Die Höhe h der Parallelträger wählt man bei Brücken gewöhnlich gleich $\frac{1}{10}$ der Spannweite l . Um nun mit zunehmender Höhe keine zu langen Felder zu erhalten, sowie auch um zur Anbringung der Querträger die hinreichende Anzahl von Stütz- respective Knotenpunkten zu gewinnen, wendet man Combinationen der einfachen Systeme an. So stellt z. B. der in Fig. 142 dargestellte Parallelträger eine

Fig. 142.



Combination oder Vereinigung zweier in Fig. 143 sub I und II skizzirten Mohnié'schen Träger vor. Es wird bei der Berechnung der einfachen Mohnié'schen Träger I und II angenommen, dass

Fig. 143.

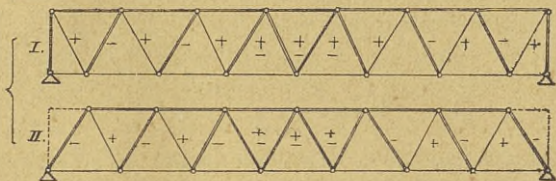


sich sowohl das Eigengewicht als auch die mobile Belastung des combinirten Trägers zur Hälfte auf die einfachen Träger vertheile. Hat man unter dieser Voraussetzung die Anspruchnahme der Constructionstheile in den einfachen Trägern I und II ermittelt, so denkt man sich beide nach Fig. 142 wieder vereinigt, addirt dann die Spannungen der sich deckenden Constructionstheile (also sämtlicher Gurtstücke und der Endständer) und lässt die der andern ungeändert.

Bei bedeutender Höhe (über 4 m.) dieser Träger kann die Fahrbahn am Untergurte angebracht und eine bequeme Quer-Verbindung der oberen Gurtungen bewerkstelligt werden. Bezüglich der Anspruchnahme der Gurtungen und Diagonalen ist es gleichgiltig, ob die Fahrbahn am Ober- oder Untergurte liegt; dagegen werden die Verticalstäbe weniger beansprucht, wenn sich die Fahrbahn am Untergurte befindet.

b) System Neville. Die einfachen Träger dieses Systems sind in I und II, Fig. 144, ersichtlich gemacht. Die Anspruchnahmen derselben werden in analoger Weise wie jene der Mohnischen Träger bestimmt. Beim Neville'schen Systeme ergibt sich als günstigster Neigungswinkel der Diagonalen jener von 60° . Die Diagonalstangen bilden dann mit den Gurtungen eine Reihe

Fig. 144.



gleichseitiger Dreiecke, in denen die Diagonalen entweder auf Zug oder Druck beansprucht sind; nur die Diagonalen in den mittleren Feldern erfahren bei entgegengesetzten einseitigen Belastungen Zug- und Druckspannungen. Um mehr Belastungspunkte für die Querträger zu erhalten, werden häufig die Scheitelpunkte der Dreiecke am unbelasteten Gurte durch Verticalstangen mit den gegenüberliegenden Gurtstücken verbunden. Liegt die Fahrbahn oben, so erscheinen dann diese Verticalen gedrückt, liegt sie dagegen am Untergurte, so werden sie auf Zugspannung beansprucht. Durch die genannten Verticalstäbe würde die Felderzahl des einfachen Trägers I verdoppelt, also von 4 auf 8 gebracht und es käme auf jede dieser inneren Verticalen der 8. Theil von der totalen Belastung des Trägers.

Combinirtes System Neville. Statt der Anbringung der Verticalstäbe erscheint es zweckmäßiger, die Zahl der Felder

durch Combination der einfachen zu einem zusammengesetzten Neville'schen Träger zu vermehren. Die Fig. 145 gibt den aus den beiden einfachen Trägern I, II (Fig. 144) entstandenen combinirten Träger, dessen Berechnungsweise ebenso erfolgt wie jene des combinirten Mohnié'schen Trägers.

Bei großen Spannweiten werden auch drei und vier einfache Neville'sche Träger zu einem Träger vereinigt. Man bekäme z. B. aus dem in Fig. 145 dargestellten zweifachen ein vierfaches System, wenn man in den Mitten zwischen den Diagonalstäben noch die punktiert gezeichneten einlegen würde. Wird hiebei vorausgesetzt, dass alle Knotenpunkte eines Gurtes zur Aufnahme der Gurträger verwendet werden, wie dies bei Fachwerkträgern stets der Fall sein soll, so ist die Ermittlung der Spannungen des combinirten Trägers eine einfache. Ist allgemein das combinirte Fachwerk ein n -faches, d. h. aus n einfachen Systemen zusammengesetztes,

Fig. 145.



so hat man jedes einzelne der n einfachen Fachwerke als durch den n -ten Theil der Belastung des n -fachen belastet anzunehmen und unter dieser Voraussetzung die Anspruchnahme der Constructionstheile desselben zu bestimmen. Man erhält so die Spannungen sämtlicher Diagonalstangen des n -fachen Neville'schen Trägers und wird, um auch die Anspruchnahmen seiner Gurtungen zu erhalten, für jeden Gurtquerschnitt desselben die Summe der Spannungen, die demselben Querschnitte in allen n einfachen Trägern zukommen, bilden müssen.

Damit die Endständer bei combinirten Trägern nicht auf Biegefestigkeit beansprucht werden, so lässt man die Diagonalstäbe (wie in Fig. 142) nur von den beiden Endpunkten des Ständers ausgehen; alsdann erhalten allerdings die ersten Diagonalen eine abnormale Lage.

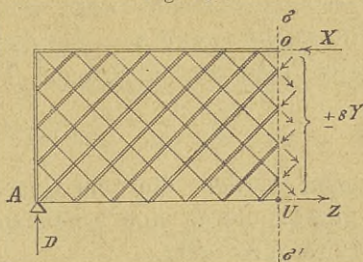
Es mag noch bemerkt werden, dass es beim Neville'schen System am zweckmäßigsten ist, die Fahrbahn am Obergurte anzubringen; es kann an den Füllungstheilen bis zu 30% Material gegenüber dem Mohnié'schen Systeme erspart werden.

Anmerkung. Der in Fig. 95, pag. 128, dargestellte 2fache Fachwerkträger kann auch als doppeltes Neville'sches System mit Verticalstäben betrachtet werden, wobei die Verticalstäbe einen Druck oder Zug aufzunehmen haben, je nachdem die Fahrbahn oben oder unten liegt. Hiebei werden die inneren Verticalstäbe so schwach construiert, dass sie nur die Belastung von einem Knotenpunkte zum andern übertragen können, erfahren also eine Spannung, welche der vollen Belastung eines Knotenpunktes durch das Eigengewicht und durch die mobile Last gleichkommt. Sind hiebei die beiden Diagonalen in jedem Felde so construiert, dass sie nur Druckspannungen aufnehmen können, wie z. B. beim Howe'schen Systeme, bei dem die hölzernen Diagonalen mit den Gurtungen nicht fest verbunden sind, sondern sich nur gegen dieselben stemmen, so müssen die Verticalstäbe so stark angespannt werden, dass die größten Zugspannungen in den Diagonalen, die bei einseitiger Belastung eintreten würden, gleich Null werden. Durch diese künstliche Anspannung der Verticalstäbe und durch den Mangel der gelenkartigen Verbindung der Stäbe in den Knotenpunkten geht aber die charakteristische Einfachheit und sichere Berechnungsweise der eigentlichen Fachwerkträger verloren, weshalb die Howe'schen Träger, ebenso wie die Schifkorn'schen und Riderschen Träger, die derselbe Vorwurf trifft, keine genauere Bestimmung ihrer Constructionstheile zulassen, daher nicht empfehlenswert sind.

c) Der Gitterträger. Da bei demselben die Füllungsglieder sowohl untereinander an ihren Kreuzungspunkten als auch mit ihren Endpunkten an den Gurtungen fest genietet werden, so können sie nicht als eigentliche Fachwerke berechnet werden; denn es fehlt ihnen der wesentliche Charakter des Fachwerkes, nämlich die Beweglichkeit der Füllungsglieder, die nur in ihren Endpunkten scharnierartig mit den Gurtungsstücken verbunden sind.

In Fig. 146 ist ein Stück eines Gitterträgers dargestellt. Die nach rechts ansteigenden Diagonalen erfahren Druckspan-

Fig. 146.



nungen, werden also als Streben construiert, während die entgegengesetzt geneigten Zugbänder sind.

Um einen Näherungswert für die Anspruchnahme der Gitterstäbe im Querschnitte $\sigma \sigma'$ zu erhalten, nimmt man an, dass sämtliche von diesem Schnitte getroffenen Stäbe die gleiche Anspruchnahme Y erfahren, dass also auf jeden dieser Stäbe von der dem Querschnitte $\sigma \sigma'$ zukommenden größten Transversalkraft V der gleiche Antheil entfalle. Bezeichnet demnach n die Anzahl dieser Stäbe und φ deren Neigungswinkel, so ist

$$Y = \pm \frac{V}{n \sin \varphi}.$$

Die Spannungen der Gitterstäbe erscheinen hienach der Transversalkraft direct und der Theilungszahl umgekehrt proportional; das eine System der sich kreuzenden Stäbe ist gezogen, das andere gedrückt.

Im vorliegenden Falle ist $n = 8$, also der Gitterträger ein 8-facher. Da man die Querschnitte der Stäbe nicht von Stab zu Stab ändern kann, so müssen alle Stäbe gleichen Calibers nach der obigen Formel aus jener Transversalkraft bestimmt werden, die demjenigen dieser Stäbe entspricht, dessen Kopf- oder Fußpunkt dem Auflager am nächsten liegt; denn die Transversalkräfte nehmen bekanntlich gegen die Auflager zu. Da man nun bei Gitterträgern gewöhnlich jenen Gitterstäben, deren Fuß- oder Kopfpunkte innerhalb der horizontalen Projection eines solchen Stabes liegen, gleichen Querschnitt zu geben pflegt, so wird man die Querschnitte der ersten Stäbe am Auflager A, deren Anfangspunkte innerhalb der horizontalen Projection des durch A gehenden Gitterstabes liegen, aus der größten Auflagerreaction D zu bestimmen haben. Dies wäre in Fig. 146 bei den ersten vier Gitterstäben derselben Lage der Fall. Die folgenden 4, respective 8 Gitterstäbe (wenn man die der entgegengesetzten Lage mitzählt) müssten also aus derjenigen Transversalkraft nach der Formel

$$Y = \pm \frac{V}{8 \sin \varphi}$$

bestimmt werden, die dem Querschnitt entspricht, welcher von A aus gezählt durch den Anfangspunkt der fünften Diagonalstange am Untergurte geht.

Um nun die Anspruchnahme eines Gurtstückes, z. B. die Druckspannung X im Obergurte zu erhalten, führt man durch die Mitte O dieses Stückes einen verticalen Schnitt $o o'$ und wählt bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung den Punkt U im Untergurte als Drehpunkt. Da nun die von $\sigma \sigma'$ durchschnittenen Diagonalstangen nahezu gleiche aber entgegengesetzte Drehungsmomente äußern, so bleibt außer O nur das Moment M der äußeren Belastung thätig, und man erhält sonach, wenn die Entfernung der beiden Gurtungen mit h bezeichnet wird, die Gleichung $M - X \cdot h = 0$ oder $X = \frac{M}{h}$. Ebenso ergibt sich, wenn O als Drehpunkt gewählt wird, die Zugspannung Z im Untergurte aus $Z = \frac{M}{h}$. Die Gurtspannungen sind also ebenso wie bei den Fachwerkträgern dem Momente direct und der Trägerhöhe indirect proportional. Selbstverständlich wird man das dem betreffenden Querschnitte $\sigma \sigma'$ zukommende Maximalmoment zu benützen haben.

Wegen der minder rationellen Constructionsweise der Gitterträger, die keine sichere Bestimmung der Spannungen zulässt, werden dieselben neuerer Zeit im Brückenbaue durch Fachwerkträger ersetzt.

Zur näheren Erläuterung der Bestimmungsweise der Anspruchnahme der Constructionstheile eines Parallelträgers möge das folgende Beispiel dienen.

Construction des Kräfteplanes eines Mohnié'schen Parallelträgers, Fig. 1, Taf. II.

Zwei derartige Parallelträger sollen zur Aufnahme einer zweigeleisigen Eisenbahnbrücke dienen, deren Spannweite $l = 20$ m. ist. Die Trägerhöhe sei $h = \frac{1}{10} = 2$ m. und die Anzahl der Felder 10.

Für diese Spannweite wird die größte mobile Belastung pro Geleis aus zwei Locomotiven schwersten Calibers und einem Tender

bestehen und da nur zwei Brückenträger angewendet werden, so entfällt auf einen die Belastung eines Geleises. Die hiedurch erzielten Maximal-Momente und größten Transversalkräfte wurden für den vorliegenden Fall auf Tafel I bestimmt und die bezügliche Erläuterung auf pag. 96 entwickelt. Das Eigengewicht dieser zweigeisigen Brücke beträgt nach pag. 103 pro laufenden Meter der Brückenlänge $g = 57l + 900$ Kg., also für $l = 20$ m., $g = 2040$ Kg., somit entfällt hievon auf einen Träger pro laufenden Meter der Betrag $p \doteq 1000$ Kg. = 1 Ton.

1. Anspruchnahme der Gurten.

Es wurden zunächst die der mobilen Belastung entsprechenden Maximalmomente M_1, M_2, M_3, \dots für die Knotenpunkte 1, 2, 3, . . . aus Tafel I, Fig. 3, auf die gleichnamige Figur der Tafel II übertragen und zwar von $A_1 B_1$ nach aufwärts; hierauf wurden hiezu die dem Eigengewichte entsprechenden Momente m_1, m_2, m_3, \dots addiert. Zu diesem Zwecke wurde der Scheitel S der bezüglichen Momentenparabel, nach pag. 91, gleich

$$0 S = \frac{g_1 l^2}{8} = \frac{1 \times 20^2}{8} = 50 \text{ tm.}$$

nach dem zugehörigen Momentenmaßstabe abgetragen und hiezu die Parabel nach der auf pag. 91 besprochenen Methode konstruiert. Mittels derselben erhält man

$$m_1 = 22,35, \quad m_2 = 31,62, \quad m_3 = 38,72, \quad m_4 = 44,71 \text{ und } m_5 = 50 \text{ tm.}$$

Werden hiezu die obigen der mobilen Belastung entsprechenden Werte $M_1 = 114, M_2 = 195,3, M_3 = 245,5, M_4 = 272,22$ und $M_5 = 287,6$ tm. addiert, so erhält man die den aufeinander folgenden Feldern zukommenden totalen Maximalmomente

$$\begin{aligned} \max M_1 &= 136,35, & \max M_2 &= 226,92, & \max M_3 &= 284,22, \\ & \max M_4 &= 316,93 & \text{ und } & \max M_5 &= 337,6 \text{ tm.} \end{aligned}$$

Es werden daher nach pag. 177 die Druckspannungen im Obergurte:

$$X_1 = X'_1 = \frac{\max M_1}{h} = - 68,18,$$

$$X_2 = X'_2 = \frac{\max M_2}{h} = - 113,46,$$

$$X_3 = X'_3 = \frac{\max M_3}{h} = - 142,11,$$

$$X_4 = X'_4 = - 158,47, \quad X_5 = X'_5 = - 168,8 \text{ tons;}$$

ferner die Zugspannungen im Untergurte:

$$Z_1 = Z'_1 = 0, \quad Z_2 = Z'_1 = \frac{\max M_1}{h} = 68,18,$$

$$Z_3 = Z'_3 = \frac{\max M_2}{h} = 113,46, \quad Z_4 = Z'_4 = \frac{\max M_3}{h} = 142,11,$$

$$Z_5 = Z'_5 = \frac{\max M_4}{h} = 158,47 \text{ tons.}$$

2. Anspruchnahme der Diagonalen.

Die größte Anspruchnahme Y der Diagonalen ergibt sich bekanntlich bei einseitiger mobiler Belastung aus $Y = \frac{V_{\max}}{\sin \varphi}$, wenn φ die Neigung der Diagonalen und V_{\max} die auf die betreffende Diagonale wirkende größte Transversalkraft bedeutet.

Die durch die mobile Belastung erzielten größten positiven und negativen Transversalkräfte wurden für die einzelnen Knotenpunkte 1, 2, 3, . . . aus der Tafel I, Fig. 4, auf die Tafel II, Fig. 2, übertragen. Die positiven Maxima von V , welche bekanntlich der von B gegen A vorschreitenden mobilen Last entsprechen, wurden von $A' B'$ nach aufwärts und die negativen Maxima, die sich bei der umgekehrten Belastungsweise ergeben, nach abwärts abgetragen. Hiebei ist selbstverständlich $+V_0 = -V_0$, $+V_1 = -V_1$, $+V_2 = -V_2$ u. s. w. Die dem Eigengewichte entsprechenden Transversalkräfte wurden zu jenen der mobilen Last addiert. Zu diesem Zwecke wurde, nach pag. 90,

$A' L = B' L' = \frac{p \cdot l}{2} = 10$ tons gemacht und die Gerade $L L'$ gezogen, deren Ordinaten in den Feldermitten gemessen, die zugehörigen Transversalkräfte v_1, v_2, v_3, \dots geben.

Aus der mobilen Belastung ergaben sich:

$$V_0 = -V'_0 = 67,2, \quad V_1 = -V'_1 = 56,7, \quad V_2 = -V'_2 = 46,3,$$

$$V_3 = -V'_3 = 37,02, \quad V_4 = -V'_4 = 28,9, \quad V_5 = -V'_5 = 21,06,$$

$$V_6 = -V'_6 = 14,04, \quad V_7 = -V'_7 = 9,17, \quad V_8 = -V'_8 = 5,27,$$

$$V_9 = -V'_9 = 1,76 \text{ tons;}$$

ferner aus dem Eigengewichte:

$$v_0 = v_1 = 9, \quad v_2 = 7, \quad v_3 = 5, \quad v_4 = 3, \quad v_5 = 1, \quad v_6 = -1, \quad v_7 = -3, \\ v_8 = -5, \quad v_9 = -7 \quad \text{und} \quad v_{10} = -9.$$

Durch Addition der zugeordneten Werte mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen erhält man nun für die positiven Maxima:

$$\begin{aligned} \max V_0 &= V_0 + v_0 = 76,2, & \max V_1 &= V_1 + v_1 = 65,7, \\ \max V_2 &= V_2 + v_2 = 53,3, & \max V_3 &= V_3 + v_3 = 42,02, \\ \max V_4 &= V_4 + v_4 = 31,9, & \max V_5 &= V_5 + v_5 = 22,06, \\ \max V_6 &= V_6 + v_6 = 13,04, & \max V_7 &= V_7 + v_7 = 6,17, \\ & & \max V_8 &= V_8 + v_8 = 0,27 \text{ tons.} \end{aligned}$$

Für die negativen Maxima, respective relativen Minima, ergeben sich, wenn von B ausgegangen wird, wegen der symmetrischen Anordnung, dieselben numerischen Werte, nämlich:

$$\begin{aligned} -\max V_0 &= V'_0 + v_{10} = -76,2, & -\max V_1 &= V'_1 + v_9 = -65,7, \\ -\max V_2 &= V'_2 + v_8 = -53,3, & -\max V_3 &= V'_3 + v_7 = -42,02, \\ -\max V_4 &= V'_4 + v_6 = -31,9, & -\max V_5 &= V'_5 + v_5 = -22,06, \\ -\max V_6 &= V'_6 + v_4 = -13,04, & -\max V_7 &= V'_7 + v_3 = -6,17, \\ & & -\max V_8 &= V'_8 + v_2 = -0,27. \end{aligned}$$

Hienach ergeben sich von A aus gezählt in den beiden ersten Feldern nur positive und in den beiden letzten Feldern nur negative Transversalkräfte, während in den sechs mittleren Feldern positive und negative Transversalkräfte auftreten. Es müssen daher in den sechs Mittelfeldern, da die Diagonalen beim Mohrié'schen Träger nur Zugspannungen erhalten sollen, doppelte Diagonalen angebracht werden, die als Zugbänder zu construieren sind. Selbstverständlich werden die zur Trägermitte symmetrisch liegenden Diagonalen gleiche Maximalspannungen erleiden, so dass $Y_1 = Y'_1$, $Y_2 = Y'_2$ u. s. w.

Die Werte der größten Diagonalspannungen lassen sich nun aus den zugehörigen Maximalwerten der Transversalkräfte sehr leicht mittels rechtwinkliger Dreiecke construieren, in welchen immer V_{\max} die verticale Componente von Y_{\max} ist. Die betreffende Construction gibt folgende Werte:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y'_1 = 92,92, & Y_2 &= Y'_2 = 75,38, & Y_3 &= Y'_3 = 59,44, \\ Y_4 &= Y'_4 = 45,11, & Y_5 &= Y'_5 = 31,10, & Y_6 &= Y'_6 = 18,44, \\ Y_7 &= Y'_7 = 8,72, & Y_8 &= Y'_8 = 0,38 \text{ tons.} \end{aligned}$$

Wegen des bei der Zeichnung gewählten kleinen Maßstabes konnte die Construction von $Y_s = Y'_s$ im Kräfteplane nicht ersichtlich gemacht werden. Um die gehörige Genauigkeit zu erzielen, muss der Kräfteplan nach einem größeren, sorgfältig ausgeführten Transversalmaßstabe construirt werden, der es ermöglicht noch Hundertel der Einheiten sicher abzulesen.

3. Anspruchnahme der Verticalstäbe.

Da die Diagonalstangen durchwegs als Zugbänder zu wirken haben, die keine Druckspannungen aufzunehmen im Stande sind, so müssen sämtliche Verticalstäbe als Drucksäulen construirt werden, welche den größten Transversalkräften der bezüglichen Knotenpunkte zu widerstehen vermögen. Die Fahrbahn wird im vorliegenden Falle am Obergurte angebracht gedacht. Es haben die Endständer bei A und B die größten Auflagerreactionen, also jeder den Druck $\max V_0 = 76,2$ tons aufzunehmen. Auf U_1 wirkt $\max V_1$, auf U_2 $\max V_2$ u. s. w. Wegen der symmetrischen Anordnung wird also:

$$U_0 = U'_0 = - 76,2, \quad U_1 = U'_1 = - 65,7, \quad U_2 = U'_2 = - 53,3, \\ U_3 = U'_3 = - 40,02, \quad U_4 = U'_4 = - 31,9, \quad U_5 = - 22,06 \text{ tons.}$$

Streng genommen wären von diesen Drücken jene Beträge abzuziehen, die vom Eigengewichte des Parallelträgers auf seine unteren Knotenpunkte entfallen, also die Verticalstäbe auf Zug in Anspruch nehmen. Da jedoch diese Beträge verhältnismäßig gering sind, so wurden sie unberücksichtigt gelassen. Eine genauere Ermittlung der Spannung ist schon deshalb unnöthig, weil sich auch die Außenkräfte nur annähernd richtig in Rechnung bringen lassen, somit alle subtilen Bestimmungsweisen für die Praxis belanglos sind.

II. Parabelträger.

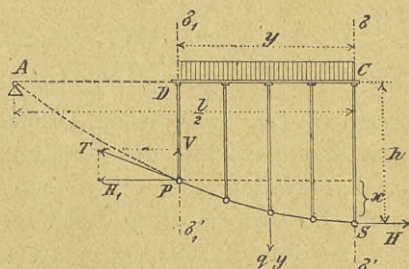
Wir haben gesehen, dass bei den Parallelträgern die Anspruchnahme der Gurtung dem Biegemomente M direct und der Trägerhöhe h indirect proportional ist. Da nun bei den Parallelträgern h in allen Querschnitten constant bleibt, so wachsen die Gurtspannungen mit den Biegemomenten; es müssen daher

die Gurtquerschnitte von den Auflagern gegen die Trägermitte fortwährend zunehmen, wenn das Materiale gehörig ausgenützt werden soll. Es erscheint aber aus constructiven Rücksichten wünschenswert, dass die Gurtquerschnitte möglichst constant bleiben, indem dann auch die Spannungen der Füllungsglieder des Fachwerkes am kleinsten werden. Da nun bei totaler gleichmäßiger Belastung des Trägers das dieser Belastung entsprechende Seilpolygon in eine Parabel übergeht, deren Scheitelordinate, nach

pag. 71, die Größe $\frac{q l^2}{8 H}$ hat, wobei q die gleichmäßige Belastung

pro Längeneinheit, l die Länge des Trägers und H die Poldistanz respective constante Horizontalspannung des Seilpolygones bedeutet, so folgt hieraus, dass bei einem Fachwerkträger, der in seinem Horizontalgurte bei gleichmäßiger Belastung eine constante Spannung H haben soll, der zweite Gurt nach einer Parabel, beziehungs-

Fig. 147.



weise nach einem Polygone geformt werden müsse, dessen Knotenpunkte in einer Parabel liegen, deren Scheitelordinate CS, Fig. 147, gleich $\frac{q l^2}{8 H}$ ist, und deren Achse in der verticalen Mittellinie

des Trägers liegt. Aus dieser Betrachtung der Trägerbegrenzung als Seilpolygon ergibt sich auch noch eine andere charakteristische Eigenschaft des Parabelträgers, nämlich die, dass bei gleichmäßiger Belastung des horizontalen Gurtes die Diagonalstäbe zwischen den beiden Gurten des Trägers spannungslos bleiben.

Denkt man sich nämlich den gleichmäßig belasteten Parabelträger durch einen Verticalschnitt, der die beiden Gurte und die zwischenliegende Diagonale trifft, in zwei Fragmente getheilt und

zieht eines der beiden Trägerfragmente in Betracht, so wirken auf dasselbe die an den drei Schnittstellen thätigen Spannungen und die Resultante V der äußeren Belastung des ganzen Trägerfragmentes, die zufolge der Eigenschaften des Seilpolygones im Schnittpunkte s der beiden vom Querschnitte getroffenen Gurtstücke angreift. Stellt man nun für diesen Punkt s die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung des betrachteten Trägerfragmentes auf, so folgt daraus — da sowohl die beiden Gurtspannungen als auch die Resultante V der Belastung durch s gehen — dass das Moment dieser drei Kräfte gleich Null ist, dass somit auch jenes der vierten Kraft, nämlich der Diagonalspannung, Null sein müsse, was nur möglich ist, wenn die Diagonalstange, die nicht durch s geht, spannungslos ist.

Bei gleichmäßiger Belastung des geraden Gurtes sind also beim Parabelträger zur Übertragung der Belastung auf die Knotenpunkte des zweiten Gurtes nur Verticalstäbe nöthig, die offenbar die ganze Belastung eines Feldes aufzunehmen haben. Die Diagonalstäbe kommen demnach nur bei einseitiger Belastung des Parabelträgers zur Geltung.

Die Form des Parabelträgers lässt sich auch sehr einfach aus der Bedingung ableiten, dass die gleichmäßige Belastung des horizontalen Gurtes nur durch die Verticalstäbe auf die andere Gurtung übertragen werde. Denkt man sich nämlich aus einem solchen Träger durch zwei verticale Schnitte, von denen der eine $\sigma \sigma'$, Fig. 147, durch die Mitte des Trägers geht, das Stück $CDPS$ herausgeschnitten und an den Schnittstellen P und S des gekrümmten Gurtes in tangentieller Richtung der Gurtstücke die Kräfte H und T angebracht, welche die an diesen Stellen im Gurte herrschenden Spannungen ersetzen, so wirkt demnach auf das Gurtstück SP außer den beiden Kräften H und T noch die durch die Verticalstäbe auf $P S$ übertragene Belastung $q \cdot y$, und es muss, wenn das Gurtstück PS unter dem Einflusse dieser drei Kräfte zunächst im Gleichgewichte gegen Drehung bleiben soll, die algebraische Summe der Drehungsmomente für jeden Punkt in der Ebene dieser Kräfte gleich Null sein. Wählt man den Punkt P als Drehpunkt, so ergibt sich für denselben die Gleichung:

$$q y \cdot \frac{y}{2} = H \cdot x,$$

woraus
$$y^2 = \frac{2H}{q} x \dots (\alpha).$$

Dies ist aber die Scheitelgleichung einer Parabel, in welcher x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes P des gekrümmten Gurtes sind, der also die Form einer Parabel haben muss, deren Scheitel in S und deren Achse in der Mittellinie SC des Trägers liegt. Für den Auflagerpunkt A wird $y = \frac{l}{2}$, d. i. gleich der halben Spannweite l des Trägers, und $x = h$, d. i. gleich der größten Trägerhöhe in seiner Mitte. Durch Substitution dieser Werte in (α) erhält man $\frac{l^2}{4} = \frac{2H}{q} h$, oder die Gurtspannung im Scheitel S , nämlich

$$H = \frac{q l^2}{8 h} \dots (\beta).$$

Zerlegt man T in eine horizontale und verticale Componente, so müssen für den Gleichgewichtszustand des Gurtstückes PS gegen horizontale und verticale Verschiebung die beiden Gleichungen bestehen: $H = H_1$ und $V = q y$.

Aus der ersten Gleichung folgt, dass die horizontale Componente der Spannung T im parabolischen Gurte überall gleich ist und daher in den Vereinigungspunkten der beiden Gurtungen, d. i. über den Auflagern, auf den horizontalen Gurt übertragen wird, der also die constante Spannung $H = \frac{q l^2}{8 h}$ erfährt.

Aus der zweiten der obigen Gleichungen, nämlich aus $V = q y$ folgt, dass die verticale Componente der Gurtspannung T gleich der Transversalkraft im betreffenden Verticalschnitte ist, somit mit y wächst und am Auflager den größten Wert, nämlich den Betrag $\frac{q l}{2}$, erreicht.

Die Größe der Gurtspannung T ergibt sich aus

$$T = \sqrt{H^2 + V^2} \dots (\gamma),$$

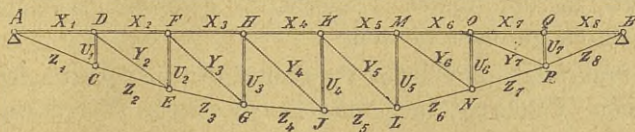
erscheint also in der graphischen Darstellung als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete durch die constante Horizontalspannung und die andere Kathete durch die dem betreffenden Felde entsprechende größte Transversalkraft $q \cdot y$ bestimmt ist.

Um nun die Anspruchnahme der Constructionstheile irgend eines Parabelträgers, Fig. 148, zu erhalten, denke man sich denselben zunächst total belastet, bestimme die dieser Maximalbelastung (mit Einschluss des Eigengewichtes) entsprechende Auflagerreaction D und zerlege dieselbe in die zwei Componenten X_1 und Z_1 parallel zu den vom Auflager A ausgehenden Gurtstücken, so gibt schon die Componente X_1 die größte Druckspannung H des geraden Gurtes, für welchen also

$$X_1 = X_2 = X_3 = \dots = X_8,$$

während die zweite Componente von D, nämlich Z_1 die größte Spannung des ersten Gurtstückes am Untergurte gibt.

Fig. 148.



Ermittelt man nun die den Knotenpunkten D, F und H bei totaler Belastung entsprechenden Transversalkräfte V_1 , V_2 und V_3 , so hat man dieselben, um die größten Spannungen Z_2 , Z_3 und Z_4 der folgenden Gurtstücke zu erhalten, mit der bereits ermittelten größten Anspruchnahme des horizontalen Gurtes zu rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzen, deren Hypotenusen, der Gleichung (γ) entsprechend, die gesuchten Spannungen Z_2 , Z_3 und Z_4 bestimmen. Da bei totaler gleichmäßiger Belastung des Trägers die Diagonalen spannungslos bleiben, so hat ihre Lage auf die Anspruchnahme der Gurtstücke keinen Einfluss und es wird daher, bei symmetrischer Anordnung der Felder bezüglich der Trägermitte, $Z_1 = Z_8$, $Z_2 = Z_7$, $Z_3 = Z_6$ und $Z_4 = Z_5$.

Es wurde bereits erwähnt, dass bei totaler gleichmäßiger Belastung des geraden Gurtes die Verticalstäbe allein die Belastung auf den zweiten Gurt zu übertragen haben, daher ihre Anspruchnahme der Belastung eines Feldes gleichkommt. Bezeichnet man die Länge eines Feldes mit λ und die größte Belastung pro Längeneinheit des geraden Gurtes (mit Einschluss des Eigengewichtes) mit q , so beziffert sich die Anspruchnahme jeder Verticalen mit $q \lambda$. Ist der gerade Gurt, wie in Fig. 148, oben

Diagonalen Y_2 , Y_3 und Y_4 in der linken Trägerhälfte die größte Zugspannung, dagegen jene Y_5 , Y_6 und Y_7 in der rechten Hälfte die größte Druckspannung erleiden. Werden nun gekreuzte als Zugbänder konstruierte Diagonalstäbe in allen Feldern angebracht, so erfahren dann die zur Mittellinie symmetrisch liegenden Diagonalen je gleiche Zugspannungen. Es erhalten also in Fig. 149

DE und QN	die Zugspannung	Y_2
FG	„ OL	„ „ Y_3
HJ	„ MJ	„ „ Y_4
CF	„ PO	„ „ Y_7
EH	„ NM	„ „ Y_6
GK	„ LK	„ „ Y_5

Diese Spannungen werden vom Eigengewichte gar nicht beeinflusst, denn dasselbe übt als gleichmäßig vertheilt gedachte Belastung beim Parabelträger auf die Diagonalen keine Wirkung.

Die Druckspannungen der Verticalstäbe sind aus den der mobilen Belastung entsprechenden Maximal-Transversalkräften nach der auf pag. 180 erläuterten Weise zu ermitteln. Die zur Trägermitte symmetrisch liegenden Verticalstäbe haben gleiche Anspruchnahmen. Es wird also $U_1 = U_7$, $U_2 = U_6$, $U_3 = U_5$.

Zu diesen von der einseitigen mobilen Belastung erzeugten Druckspannungen sind noch jene vom Eigengewichte hervorgerufenen zu addieren, und zwar per Stab der Betrag $g\lambda$, wenn g die vom Eigengewichte auf die Längeneinheit entfallende Belastung bezeichnet.

Am häufigsten sind die Parabelträger in England und Amerika, seltener in Deutschland und Österreich zur Anwendung gekommen. Die meisten sind als sogenannte Bogensehnen-träger mit geradem Unter- und parabolisch gekrümmtem Obergurte konstruiert. Der in Fig. 149 dargestellte Parabelträger wird Fischbauchträger genannt. Sind beide Gurtungen parabolisch gekrümmt und symmetrisch zur Längennachse angeordnet, so heißt der betreffende Träger Fisch- oder Linsenträger; sind dagegen die beiden parabolischen Gurtungen nach oben gekrümmt, also oberhalb der Längennachse angeordnet, so werden sie Sichelträger genannt. Die Sichelträger werden meist nur als Dachbinder ver-

wendet und bedürfen, wegen der einseitigen Winddrücke, welche die Dachconstruction von rechts oder links treffen können, gekreuzter Diagonalen, falls nämlich die Diagonalen nur einerlei Beanspruchung erfahren sollen. Bei totaler gleichmäßiger Belastung des Daches erscheinen die Diagonalen wie bei allen Parabelträgern spannungslos.

Die weitere Behandlung der Sichelträger als Dachträger ist wie bei den in § 34 behandelten bogenförmigen Trägern vorzunehmen.

Neben der einseitigen Windbelastung wäre auch eine gleichzeitige einseitige Belastung durch den Schneedruck auf der vom Winde getroffenen Seite für die Füllungsglieder am ungünstigsten.

Schließlich möge noch bemerkt werden, dass die Parabelträger auch als kombinierte Fachwerkträger analog, wie dies bei Parallelträgern gezeigt wurde, construiert werden können.

Das Verhältnis der Materialmenge der Parallelträger zu den Parabelträgern ist von der Spannweite abhängig. Bezeichnet man dieses Verhältnis mit v und die Spannweite mit s , so ist nahezu für

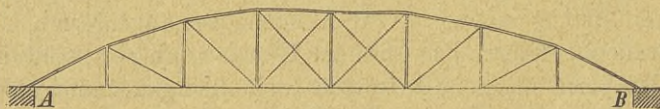
$$\begin{aligned} s &= 10, 30, 50, 100, 150 \text{ Meter} \\ v &= 1,3, 1,18, 1,14, 1,14, 1,14 \text{ Meter.} \end{aligned}$$

Hienach brauchen für kleinere Spannweiten die Parallelträger bedeutend mehr Materiale als Parabelträger. Die Parallelträger lassen sich jedoch leichter herstellen und gestatten namentlich eine bessere Querverbindung, weshalb sie bei Spannweiten über 50 Meter unbedingt den Parabelträgern vorzuziehen sind.

III. Der Schwedler'sche Träger. Fig. 150.

Der mittlere Theil dieses Trägers ist als Parallelträger mit gekreuzten Diagonalen und die beiden seitlichen Theile sind mit

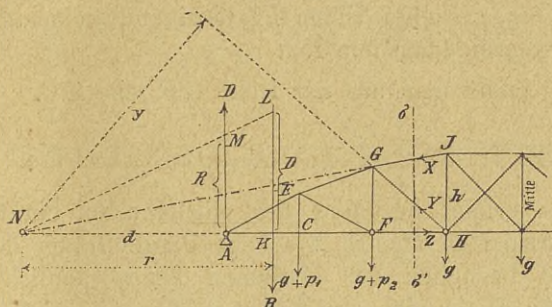
Fig. 150.



gekrümmtem Obergurte derart construiert, dass die einfachen

Diagonalen nur Zugspannungen erfahren, d. h. dass im Theile

Fig. 151.



A J H, Fig. 151, die Diagonalen bei linksseitiger Belastung keine Druckspannung erleiden sollen.

Bestimmung der Gurtform.

Wird die Höhe $HJ = h$ des mittleren als Parallelträger construierten Theiles als bekannt vorausgesetzt (gewöhnlich $\frac{1}{8}$ der ganzen Spannweite), so wird es zunächst darauf ankommen, dem Princip dieser Träger entsprechend, bei linksseitiger mobiler Belastung der Diagonale GH die Höhe GF aus h so zu bestimmen, dass hiefür die Druckspannung Y der Diagonalen GH gleich Null wird.

Bezeichnet g die vom Eigengewichte des Trägers auf jedes Feld desselben entfallende Belastung, sind ferner p_1 und p_2 die von der mobilen Belastung auf die Knotenpunkte C und F entfallenden Beträge und ist R die Resultante aus der links vom Schnitte $\sigma \sigma'$ liegenden Belastung, nämlich $R = 2g + p_1 + p_2$, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung des von A bis zum Schnitte $\sigma \sigma'$ liegenden Trägerfragmentes bezüglich des Punktes N , in dem sich die durchschnittenen Gurtstücke schneiden, die Gleichung:

$$R \cdot r - D \cdot d = Y \cdot y = 0.$$

Da nun die Druckspannung Y gleich Null sein soll, so geht die vorliegende Gleichung über in

$$R \cdot r = D \cdot d \text{ oder } R : D = d : r.$$

Trägt man also auf der Auflagerverticalen die Strecke $AM = R$ und auf jener von R die Strecke $KL = D$ ab, so muss die Verbindungslinie LM durch N gehen. Durch den Punkt N ist aber auch die gesuchte Höhe GF bestimmt, denn der Punkt G liegt in der Verbindungslinie NJ .

Analog findet man aus der Höhe GF jene EC .

Bestimmung der Anspruchnahme.

Dieselbe erfolgt bezüglich des mittleren mit parallelen Gurtungen construierten Theiles wie beim Parallelträger des Systems Mohnié und bezüglich der seitlichen Theile ähnlich wie beim Parabelträger. Die beiden Gurtungen erfahren nämlich die größte Anspruchnahme bei totaler Belastung des ganzen Trägers; dagegen die Füllungsglieder bei einseitiger Belastung, und zwar die Diagonalen, welche vom gekrümmten Gurte ausgehen, nur Zugspannungen, die aus dem positiven Maximum der Transversalkräfte der betreffenden Felder zu bestimmen sind. Auch die gekreuzten Diagonalen des mittleren Theiles sind als Zugbänder angeordnet, und zwar werden die nach rechts fallenden bei rechtsseitiger, die nach links fallenden bei linksseitiger Belastung am meisten beansprucht. Der erste und letzte Verticalstab des Trägers erfahren nur Zugspannungen, die durch die größte Belastung der Fußpunkte dieser Stäbe bestimmt sind, während die andern Verticalstäbe von den beiden einseitigen, rechts oder links liegenden Belastungen auf Zug und Druck in Anspruch genommen werden. Eine Ausnahme hievon macht jedoch der Ständer, der nur auf Druck beansprucht werden kann, indem jede Belastung seines Fußpunktes durch die beiden von demselben auslaufenden Diagonalen aufgenommen wird. Die größte Pressung wird in demselben durch die eine der beiden von seinem Kopfpunkte auslaufenden Diagonalen erzeugt, wenn dieselbe dem größten Zuge ausgesetzt ist. Wird die betreffende Diagonalspannung in eine horizontale und verticale Componente zerlegt, so gibt die letztere die Druckspannung des mittleren Ständers.

Wegen der symmetrischen Anordnung dieses Trägers wird man die Bestimmung der Anspruchnahme seiner Constructionstheile selbstverständlich nur für die eine Trägerhälfte zu ermitteln haben.

Auch der Schwedler'sche Träger kann, um die Entfernung der Knotenpunkte bei großen Spannweiten zu verringern, aus mehreren einfachen Systemen combinirt werden.

Die folgende Tabelle gibt das Verhältnis der Materialmenge des Schwedler'schen Trägers zu jener des Parallel- und Parabelträgers

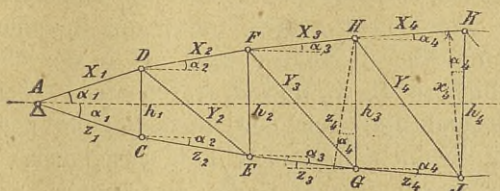
Spannweite in m.	10	30	50	100	150
Parallelträger	0,9	0,86	0,82	0,73	0,78
Parabelträger	1,17	1,00	0,93	0,83	0,90

Hienach ist der Schwedler'sche Träger für größere Spannweiten den beiden andern vorzuziehen. Die größte Spannweite der in Deutschland mehrfach ausgeführten Schwedler'schen Träger haben jene der Elbbrücke bei Tangermünde, nämlich 66 Meter.

IV. Der Paul'sche Träger. Fig. 152.

Die Form dieses Trägers ist an die Bedingung geknüpft, dass die beiden zur Längsachse des Trägers symmetrischen Gurtungen

Fig. 152.



bei totaler gleichmäßiger Belastung durchgehends gleiche Spannungen erhalten sollen.

Bestimmung der Gurtform.

Wird die Trägerhöhe $JK = h_4$ in der Mitte als bekannt vorausgesetzt ($\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{7}$ der Spannweite), so kann man aus h_4 die folgende Höhe $GH = h_3$, sodann aus h_3 jene h_2 und aus h_2 endlich jene h_1 bestimmen, indem man die Gurtspannungen in den einzelnen Feldern sucht und die gefundenen Werte einander gleicht setzt. Sind M_1, M_2, M_3 und M_4 die Maximalmomente für die 1., 2., 3. und 4. Verticale, so erhält man zunächst im 4. Felde X_4 , wenn der Punkt J als Drehpunkt gewählt wird, aus der Momentengleichung $X_4 \cdot x_4 = M_4$, nämlich $X_4 = \frac{M_4}{x_4}$, ferner Z_4 , wenn H als

Drehpunkt gilt, aus $Z_4 \cdot z_4 = M_3$, nämlich $Z_4 = \frac{M_3}{z_4}$. Es ist aber nach der beiliegenden Figur $x_4 = h_4 \cdot \cos \alpha_4$ und $z_4 = h_3 \cdot \cos \alpha_4$ somit hiefür $X_4 = \frac{M_4}{h_4 \cos \alpha_4}$ und $Z_4 = \frac{M_3}{h_3 \cos \alpha_4}$.

Durch Gleichsetzung dieser beiden Werte erhält man

$$\frac{M_4}{h_4} = \frac{M_3}{h_3} \text{ und hieraus } h_3 = \frac{M_3}{M_4} h_4.$$

Analog findet man $h_2 = \frac{M_2}{M_3} h_3$ und $h_1 = \frac{M_1}{M_2} h_2$.

Bestimmung der Anspruchnahme.

Da dem Paul'schen Princip entsprechend die Gurtspannung in sämtlichen Feldern constant sein soll, so sollte eine einzige Momentengleichung zur Bestimmung der Gurtspannungen genügen. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass die Spannungen in der unteren Gurtung überall kleiner sind als in der oberen. Denkt man sich nämlich, z. B. X_3 und Z_4 durch einen schrägen Schnitt durchschnitten und die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung des links vom Schnitte liegenden Trägerfragmentes gebildet, so ergibt sich für den Drehpunkt G die Gleichung:

$$X_3 \cdot h_3 \cdot \cos \alpha_3 = M_3,$$

und für den Drehpunkt H jene:

$$Z_4 \cdot h_3 \cos \alpha_4 = M_3.$$

Es wird also $X_3 \cos \alpha_3 = Z_4 \cdot \cos \alpha_4$ und da $\alpha_3 > \alpha_4$, so ist $\cos \alpha_3 < \cos \alpha_4$, daher $X_3 > Z_4$.

Es sind demnach die Spannungen im Untergurte thatsächlich etwas kleiner als im Obergurte, und zwar verhält sich allgemein

$$X_n : Z_{n+1} = \cos \alpha_{n+1} : \cos \alpha_n.$$

Nur am Auflager sind die beiden Gurtspannungen numerisch gleich, indem dort die Gurtungen nur die Auflagerreaction, zu der sie symmetrisch angeordnet sind, aufzunehmen haben. Die Füllungslieder werden bei einseitiger mobiler Last am meisten beansprucht. Da die einfachen Diagonalen in allen Feldern bei entgegengesetzt liegender mobiler Last entgegengesetzte Spannungen erleiden würden, so wendet Pauli in sämtlichen Feldern gekreuzte, als Zugbänder construierte Diagonalen an, deren durch die mobile Belastung erzielten Spannungen ebenso wie beim Parabelträger zu ermitteln sind. Zu diesen Spannungen sind aber auch die durch das Eigengewicht hervorgerufenen zu addieren. Die Verticalstäbe müssen als Drucksäulen functionieren und es sind ihre Anspruchnahmen analog wie beim Parabelträger zu bestimmen.

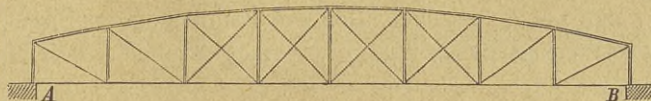
Die längsten Pauli'schen Träger sind bei der Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz zur Anwendung gekommen, deren vier größten Öffnungen je 90 m. Spannweite haben. Die größte Trägerhöhe beträgt hiebei 15 m., also $\frac{1}{6}$ der Trägerhänge. Die Fahrbahn ist mit den unteren Gurten, beziehungsweise durch Hängsäulen mit den verticalen Drucksäulen der Träger verbunden.

In Österreich sind die Pauli'schen Träger noch nicht verwendet worden. Ihr Materialaufwand ist nahezu derselbe wie jener der Parabelträger.

V. Der Halbparabelträger.

Die Figur 153 stellt einen Halbparabelträger oder bezeichnender einen abgestumpften Parabelträger vor. Der Untergurt ist

Fig. 153.



geradlinig und der Obergurt parabolisch gekrümmt. Er unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Parabelträger wesentlich dadurch, dass seine Höhe an den Enden nicht Null, sondern bei größeren Spannweiten so bedeutend ist, dass auch an den Trägerenden bei unten liegender Fahrbahn obere Querverbindungen angewendet werden können, und dass bei ihm nur in den mittleren Feldern gekreuzte Diagonalen nöthig sind.

Da die Verbindung der Gurten bei den Parabelträgern umso schwieriger wird, je kleiner der Winkel ist, unter dem sie sich am Auflager schneiden, so gewährt der Halbparabelträger gegenüber des ersteren und des Schwedler'schen Trägers eine bequemere Verbindungsweise, bedarf aber etwas mehr Materiale als die genannten Träger.

Er nähert sich umsomehr dem Mohnié'schen Parallelträger, je geringer bei ihm der Längenunterschied zwischen der mittleren Verticalen und jener am Auflager ist. Die Bestimmung der Anspruchnahme seiner Constructionstheile erfolgt nach denselben Principien wie beim Mohnié'schen Parallelträger. Zu bemerken bleibt nur noch, dass die Spannung im horizontalen Gurte bei gleichmäßiger Belastung nicht constant ist und dass auch der Halbparabelträger als combinirtes System hergestellt werden kann. Der kühnste Halbparabelträger ist jener über den Leck bei Külenburg. Er hat 150 m. Spannweite.

Außer den behandelten 5 Fachwerkssystemen, die als Brückenträger öfter ausgeführt wurden und am verbreitetsten sind, wären noch zu erwähnen: der Parallelträger mit parabolischen Enden, der Ellipsenträger mit geradem Untergurte und elliptischem Obergurte, der Trapezträger und endlich der Bogensehnenträger mit constanter Spannung im bogenförmigen Obergurte bei horizontalem Untergurte. Der letztgenannte ist nur eine Abart des Pauli'schen Trägers. — Auf die detaillirte Constructions- und Berechnungsweise dieser Träger wollen wir hier nicht weiter eingehen und bemerken nur noch, dass bei allen die Ermittlung der Spannungen ihrer Constructionstheile nach den im § 35 und 36 erläuterten Grundsätzen erfolgt.

Um aber auch ein Beispiel über die specielle Bestimmung der Anspruchnahme der für Straßenbrücken verwendeten Fachwerkträger zu geben, wollen wir die folgende Aufgabe ausführen.

Kräfteplan für einen Parabelträger. Tafel III.

Es soll eine Straßenbrücke, deren Stützweite $l = 16$ m. und deren Breite gleich 7,5 m. ist, von zwei Parabelträgern aufgenommen werden. Jeder der beiden Parabelträger soll aus acht gleich langen Feldern bestehen, die Feldlänge λ sei also 2 m., und die mittlere Höhe h sei $\frac{l}{8} = 2$ m.

Form und Belastung der Träger.

Da die Trägerhöhe h in der Mitte nur 2 m. beträgt, so wird man den Parabelträger als Fischbauchträger mit horizontalem Obergurte und parabolischem Untergurte construieren, damit die Fahrbahn durch die Querverbindungen nicht beeinträchtigt werde. Es wurden auf Tafel III, Fig. 1, zunächst die Knotenpunkte der unteren Gurtung bestimmt, indem die Spannweite AB in 8 gleiche Theile getheilt, BO gleich dem 4fachen Pfeile, also $= 4h$, gemacht und ebenfalls in 8 gleiche Theile zerlegt wurde, worauf man durch die von A zu den Theilpunkten gezogenen Strahlen auf bekannte Weise die Parabelpunkte C, E, G, J, L, N und P erhält. Das Eigengewicht der ganzen Straßenbrücke, deren Fahrbahn beschottert gedacht wird, ergibt sich nach pag. 103 pro laufenden Meter mit $g = 42 l + 3600 = 4272$ Kg.; es entfällt somit hievon auf einen Träger pro laufenden Meter der Betrag $g_1 = \frac{g}{2} = 2,136$ tons und pro Feld $g_1 \lambda = 4,272$ tons.

Die größte mobile Belastung beträgt bei Straßenbrücken pro Quadrat-Meter der Brückenbahn 420 Kg.; es kommt daher auf den laufenden Meter der Brückenlänge, weil die Brückenbreite 7,5 Meter sein soll, der Betrag $420 \times 7,5 = 3150$ Kg., also pro Meter auf einen der beiden Parabelträger die mobile Last $q = 1,575$ tons und auf ein Feld $q \lambda = 3,15$ tons.

Die aus dem Eigengewichte und der mobilen Belastung auf einen Träger entfallende Last beträgt demnach pro laufenden Meter $p = g_1 + q = 3,711$ tons und pro Feld $p \lambda = 7,422$ tons.

Spannkräfte in den Gurtungen.

Da die beiden Gurte bei voller Belastung des ganzen Trägers am stärksten beansprucht werden, die Diagonalen alsdann beim Parabelträger spannungslos bleiben, während jede der Verticalen die Druckspannung $p \lambda = 7,422$ tons erleidet, so wird man die Anspruchnahme der Gurtungen graphisch am einfachsten erhalten, indem man den größten Auflagerdruck D_{\max} bestimmt und vom Auflager A aus beginnend den Cremona'schen Kräfteplan construirt. Man macht also, Fig. 4,

$$O R = D_{\max} = \frac{p l}{2} - \frac{p \lambda}{2} = 3,5 p \lambda \doteq 25,98 \text{ tons}$$

und zerlegt D_{\max} in die beiden Gurtspannungen X_1 und Z_1 ; es wird $\max Z_1 = R T$ und die constante horizontale Gurtspannung $\max X_1 = X_2 = \dots = X_8 = T O$.

Auf den Knotenpunkt C übergehend, bestimme man aus den beiden bereits bekannten Spannungen Z_1 und U_1 mittels des zugehörigen Kräftedreieckes TRI die Zugspannung $\max Z_2 = I T$; analog für den Knotenpunkt E aus Z_2 und U_2 die Spannung $\max Z_3 = II T$ und für den Knotenpunkt G aus Z_3 und U_3 die Spannung $\max Z_4 = III T$.

Wegen der symmetrischen Anordnung ist offenbar $Z_1 = Z_8$, $Z_2 = Z_7$, $Z_3 = Z_6$ und $Z_4 = Z_5$.

Anspruchnahme der Diagonalen.

Um die größten Spannungen in denselben zu ermitteln, werden zunächst nur einfache, nach rechts fallende Diagonalen in Fig. 1 angenommen, welche sowohl Zug- und Druckkräften widerstehen können und durch die größte einseitige mobile Belastung afficiert werden. Man bestimmt also nach pag. 94, behufs der Ermittlung der positiven Maxima der Transversalkräfte, in den einzelnen mit Diagonalen versehenen Feldern vorerst die Belastungsscheiden für die von B gegen A vorrückende mobile Last. Um z. B. fürs 2. Feld, Fig. 2, die Belastungsscheide 0 zu erhalten, zieht man die Gerade $A' Z$ beliebig und zu ihr durch B' die Parallele $B' Z'$; dann sucht man die Schnittpunkte c und d dieser beiden Parallelen mit den durch die Querträger (Belastungspunkte) des betreffenden Feldes gehenden Verticalen und verbindet c mit d, so gibt c d

im Schnitte o mit $A' B'$ die Belastungsscheide. Analog bestimmt man die Belastungsscheiden in den folgenden Feldern. Um nun zunächst fürs 2. Feld $\max V_2$ zu ermitteln, macht man (Fig. 3)

$$A_1 B_1 = l, \quad A_1 S = \frac{q l}{2} = 12,6 \text{ tons.}, \quad a e = \frac{q \lambda}{2} = 1,575 \text{ tons,}$$

zieht die Geraden $S B_1$ und $e b$, sucht deren Schnittpunkte k und F mit der durch die Belastungsscheide o gehenden Verticalen, führt durch k und f die Horizontalen $k k'$ und $f g$ und zieht $k' B_1$ und $g b$; macht man endlich $l m = o i$, so gibt $o_1 m$ das dem 2. Felde entsprechende $\max V_2$.

Analog wurden für die andern mit Diagonalen versehenen Felder die Werte von $+ V_{\max}$ bestimmt, die betreffenden Hilfslinien jedoch nicht ersichtlich gemacht. Aus den gefundenen Werten von $+ V_{\max}$ hat man jetzt die Maximal-Zugspannungen der voll ausgezogenen Diagonalen zu ermitteln.

Um z. B. aus V_2 die Spannung Y_2 der Diagonalen $D E$ des 2. Feldes zu finden, hat man V_2 , das als die von der mobilen Belastung erzeugte Auflagerreaction in A wirkt, (nach pag. 29) in Richtung der 3 Stäbe X_2 , Y_2 und Z_2 zu zerlegen. Man führe also durch den einen Endpunkt von V_2 , z. B. durch m , eine Parallele zu X_2 und durch den andern Endpunkt o_1 eine Parallele zu $A E$; hierauf zerlege man $o_1 n$ in die zwei Componenten $n p \parallel Y_2$ und $o_1 p \parallel Z_2$, so gibt $n p$ nach Richtung und Größe den gesuchten Wert $+ \max Y_2$. Auf gleiche Art wurden für die andern Felder aus $+ V_{\max}$ die Spannungen $+ \max Y$ construiert.

Ebenso wie die der mobilen von B gegen A vorrückenden Belastung entsprechenden Werte von $+ V_{\max}$ wären die Werte von $- V_{\max}$, welche der von A gegen B vorrückenden mobilen Last zukommen, zu ermitteln, und es würde sich offenbar ergeben:

$$\begin{aligned} - \max V_2 &= + \max V_7, & - \max V_3 &= + \max V_6, \\ - \max V_4 &= + \max V_5 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es wird daher die Diagonale

C F	im 2. Felde	ebenso stark gespannt wie	Y_7	im 7. Felde.
E H	" 3.	" " " "	" Y_6	" 6. "
G K	" 4.	" " " "	" Y_5	" 5. "
J M	" 5.	" " " "	" Y_4	" 4. "
L O	" 6.	" " " "	" Y_3	" 3. "
N Q	" 7.	" " " "	" Y_2	" 2. Felde.

Anspruchnahme der Verticalen.

Die Verticalstäbe werden durch die mobile Last dann am meisten auf Druck beansprucht, wenn die vom oberen Knotenpunkte der Verticalen ausgehenden Diagonalen die größte Zugspannung erfahren.

Von diesem größten Zuge entfällt auf die zugehörige Verticale offenbar nur die verticale Componente, während die horizontale Componente vom Obergurte aufgenommen wird. Zu der von der Diagonale auf die Verticale übertragenen Druckspannung ist aber noch die vom Eigengewichte auf jede Verticale entfallende Pressung $g_1 \lambda = 4,272$ tons zu addieren. Die bezüglichen Constructionen sind in der Fig. 3 nicht ausgeführt worden.

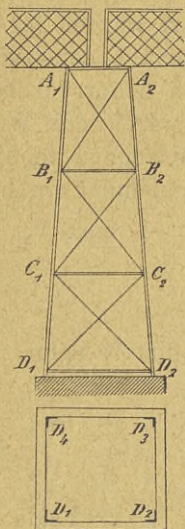
Wegen der symmetrischen Anordnung des Trägers wäre offenbar

$$U_1 = U_7, U_2 = U_6 \text{ und } U_3 = U_5.$$

Im vorliegenden Falle ergeben sich die größten Druckspannungen der Verticalstäbe bei totaler Belastung des Trägers. Es erfährt nämlich jeder Verticalstab den Druck $p \lambda = 7,422$ tons.

§. 38. Anspruchnahme eines Fachwerkpfilers.

Fig. 154.



Zum Schluss des den Fachwerkträgern geltenden Abschnittes wollen wir noch die eisernen Fachwerkpfiler besprechen, die in neuerer Zeit öfter bei hohen Thalüberbrückungen zur Anwendung kamen. Diese Pfeiler lassen sich nach der Längs- und Quer- richtung der Brücke in je zwei symmetrische Fachwerke zerlegen.

Ein solcher Pfeiler besteht nämlich im allgemeinen, nach Fig. 154, aus vier im Grundriss ersichtlichen Eckständern D_1, D_2, D_3, D_4 , die nach oben convergieren und deren oberen Endpunkte A_1, A_2, A_3, A_4 die Ecken eines rechteckigen Rahmens bilden, auf dem die Brückenträger aufliegen. Außer dem obersten Rahmen bilden noch mehrere derartige Rahmen Querverbindungen, durch welche

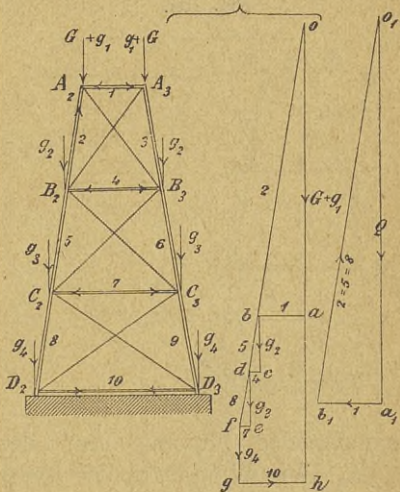
der Pfeiler in mehrere Etagen zerfällt, in deren trapezförmigen, auf den vier Seitenflächen des Pfeilers liegenden Feldern gekreuzte Diagonalen die nöthige Versteifung besorgen. Die gekreuzten Diagonalen sind als Zugbänder construiert; es wird daher von je zwei Diagonalen eines Feldes, je nach der entgegengesetzten seitlichen Belastung, abwechselnd die eine oder die andere auf Zug in Anspruch genommen werden.

Die auf den Pfeiler wirkenden Kräfte sind: 1. Das Eigengewicht des Pfeilers selbst und der vom Eigengewichte der Brücken auf denselben entfallende Stützdruck, 2. die Verkehrsbelastung und 3. der Winddruck.

1. Wirkung des Eigengewichtes.

In Fig. 155 bedeutet G den vom Eigengewicht der Brücke auf den oberen Endpunkt A_2 eines Ständers wirkenden Druck (den halben Stützdruck) und g_1, g_2, g_3, g_4 sind die vom Eigengewichte des Pfeilers auf die einzelnen Knotenpunkte des Ständers $A_2 D_2$ entfallenden Beträge. Durch diese verticale Belastung werden die Diagonalen nicht beansprucht, bleiben also jetzt außer Betracht. Auf den Knotenpunkt A_2 wirkt nun $G + g_1 = o a$ und wurde im Kräfteplane durch die zu den beiden von A_2 auslaufenden Constructionstheilen 1 und 2 gezogenen Parallelen in die Druckspannungen $a b$ und $b o$ zerlegt. Von den auf den folgenden Knotenpunkt B_2 wirkenden vier Kräften wurden die beiden bereits ermittelten $2 = o b$ und $g_2 = b c$ zur Resultante $o c$ vereinigt und diese in die Druckspannungen $4 = c d$ und $5 = d o$ zerlegt. Analog wurden aus den zwei bekannten auf den Knotenpunkt C_2 wirkenden Kräften $5 = o d$ und $g_3 = d e$ die beiden andern 7 und 8 bestimmt, nämlich die Druckspannungen $7 = e f$

Fig. 155.



und $8 = f o$. Ebenso für den Knotenpunkt D_2 aus $8 = o f$ und $g_4 = f g$ die Zugspannung $10 = g h$ und die verticale Auflagerreaction $h o$.

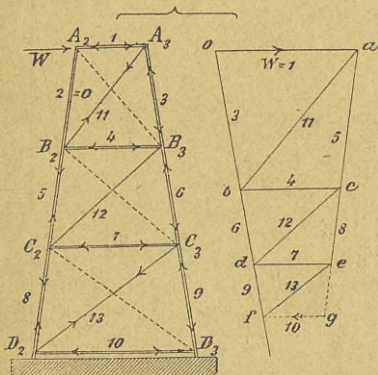
2. Wirkung der Verkehrsbelastung.

Bedeutet $Q = o_1 a_1$ (Fig. 155) den von der Verkehrsbelastung auf den Knotenpunkt A_2 entfallenden Betrag, so wird hievon nur der Ständer $A_2 D_2$ und das horizontale Rahmstück $A_2 A_3$ beansprucht. Der Ständer erfährt den Druck $b_1 o_1$ und das Rahmstück jenen $a_1 b_1$. Denkt man sich in D_2 den Druck $o_1 b_1$ in eine horizontale und verticale Componente zerlegt, so gibt die erstere, nämlich $b_1 a_1$ die in $D_2 D_3$ hervorgerufene Zugspannung und die letztere $a_1 o_1$ die vom Fundamente geäußerte Reaction.

3. Wirkung des Winddruckes.

Um den auf den Fachwerk Pfeiler wirkenden größten Winddruck zu erhalten, denkt man sich die auf dem Pfeiler aufliegenden Brücken mit Lastwagen vollständig belastet und bestimmt den gegen die gesammten Wagenflächen thätigen normalen, also horizontalen Winddruck, der nach pag. 141 im Maximum 270 Kg. per Quadratmeter beträgt. Ist W die auf den Knotenpunkt A_2 , Figur 156, entfallende Windbelastung, so werden durch dieselbe auch die Diagonalen 11, 12 und 13 beansprucht. Das von A_2 auslaufende Rahmstück 1 hat $W = o a$ vollständig aufzunehmen, während das Ständerfragment $A_2 B_2$ und die Diagonale $A_2 B_3$

Fig. 156.



spannungslos bleiben. Auf den Knotenpunkt A_3 wird durch $A_2 A_3$ der Winddruck W übertragen und zerlegt sich in die Diagonalspannung $11 = a b$ und den Ständerdruck $3 = b o$. Auf den Knotenpunkt B_2 übergehend, zerlegt man die Diagonalspannung $11 = b a$ in die beiden Spannungen $5 = a c$ und $5 = c b$. Hierauf bestimmt man für den Knotenpunkt B_3 aus

spannungslos bleiben. Auf den Knotenpunkt A_3 wird durch $A_2 A_3$ der Winddruck W übertragen und zerlegt sich in die Diagonalspannung $11 = a b$ und den Ständerdruck $3 = b o$. Auf den Knotenpunkt B_2 übergehend, zerlegt man die Diagonalspannung $11 = b a$ in die beiden Spannungen $5 = a c$ und $5 = c b$. Hierauf bestimmt man für den Knotenpunkt B_3 aus

den bereits ermittelten Spannungen 3 und 4 jene $12 = c d$ und $6 = d o$, ferner für C_2 aus 5 und 12 die Spannungen $7 = d e$ und $8 = e a$, dann für C_3 aus den Spannungen 6 und 7 jene $13 = e f$ und $9 = f o$, endlich aus 8 und 13 die Spannung $10 = g f$ und den Zug $a g$, welcher den Knotenpunkt D_2 vom Fundamente zu entfernen sucht und der von der Fundamentschraube, die den Fuß des Ständers $A_2 D_2$ mit dem Fundamente verbindet, aufgenommen werden muss.

Für die zu 2, 5, 8, 11, 12 und 13 symmetrisch liegenden Constructionstheile gelten offenbar dieselben Ansprunahmen.

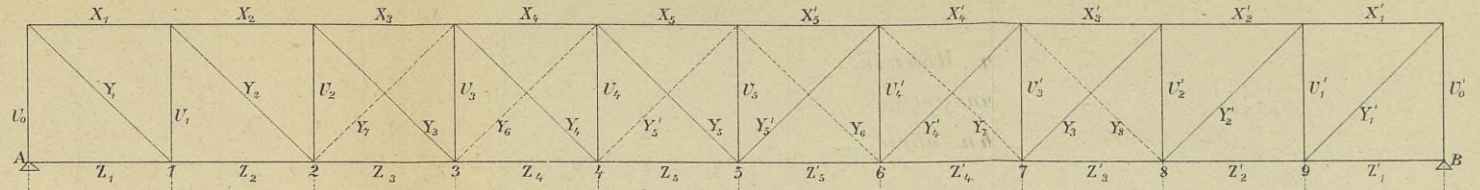
Die folgende Tabelle gibt an, bei welchen von den drei Belastungen in den Constructionstheilen die Maxima der Zug- oder Druckspannungen eintreten.

Stab-Nro.	2, 5, 8	1, 4, 7,	10	11, 12, 13
Max.-Zug	W	—	G, Q	W
Max.-Druck	G, Q, W	G, Q, W	W	—



Fig. 1.

System Mohnié.
20^m. Spannweite.
Fahrbahn oben.



Transversalkräfte.

Fig. 2.

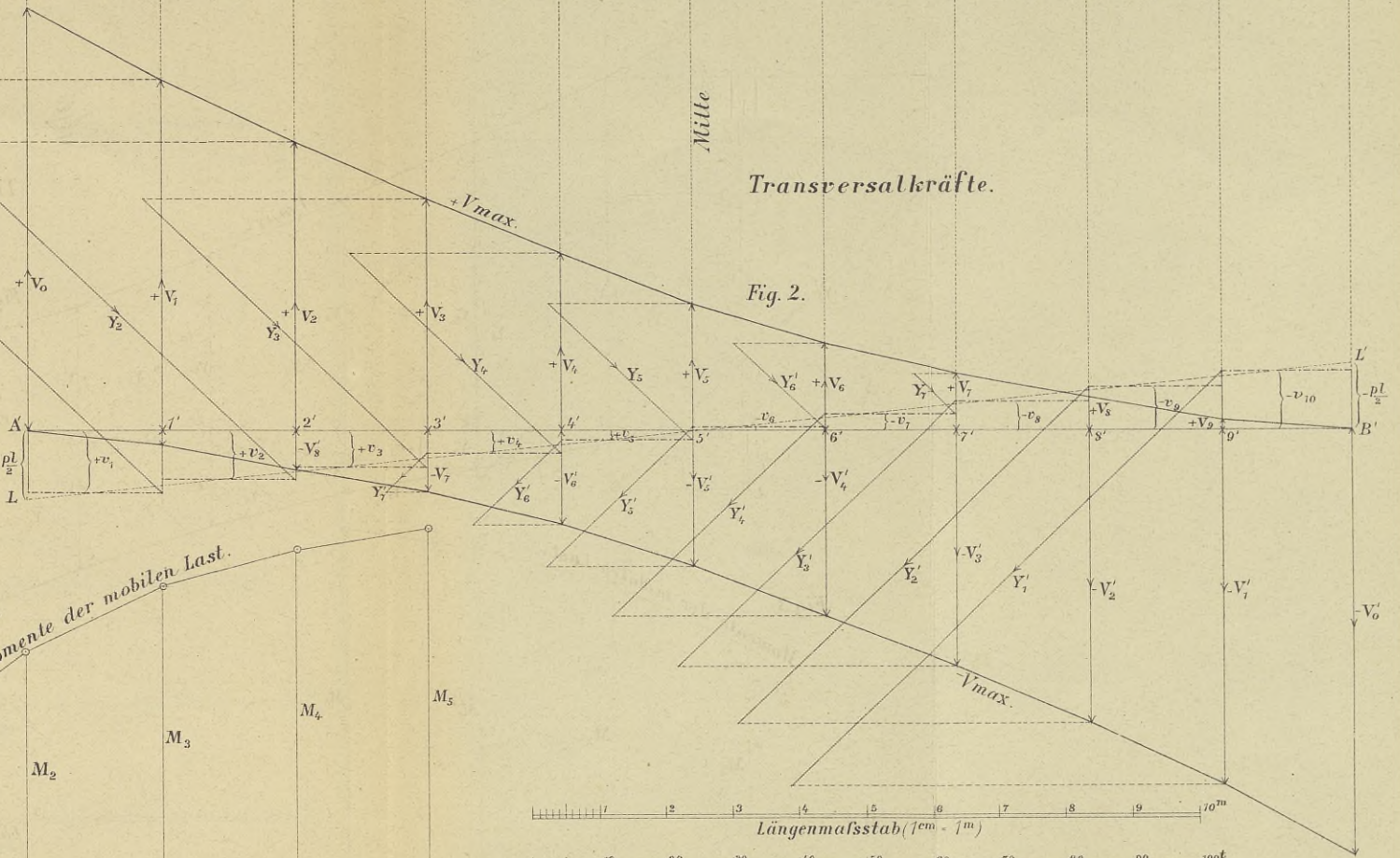
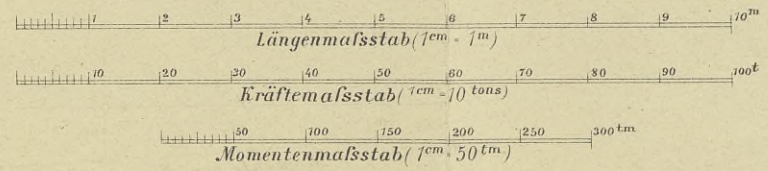
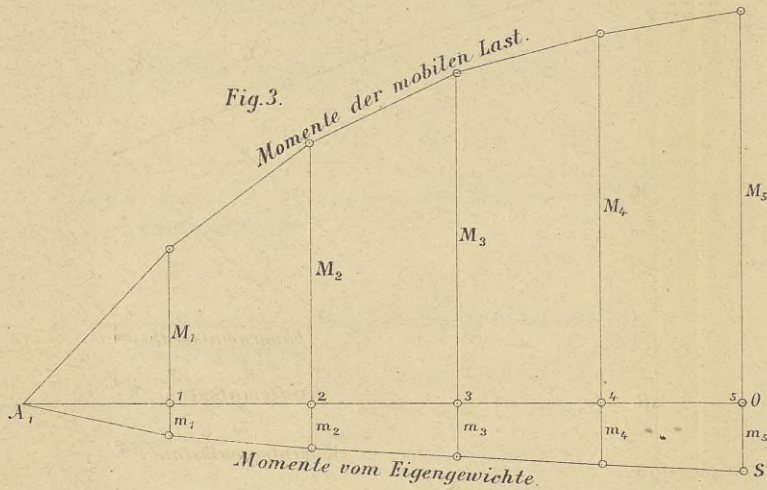


Fig. 3.

Momente der mobilen Last.



Parabel Träger
für eine
Straßenbrücke
von
16m. Spannweite.

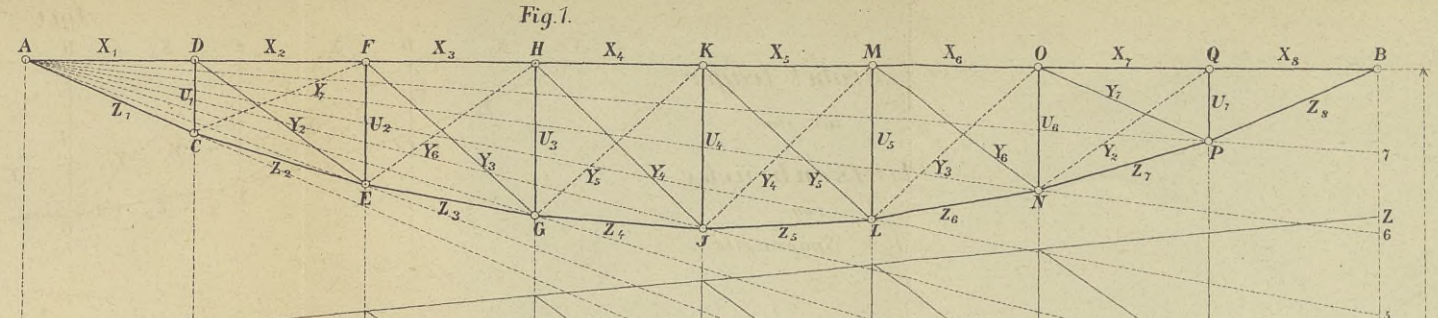


Fig. 2.

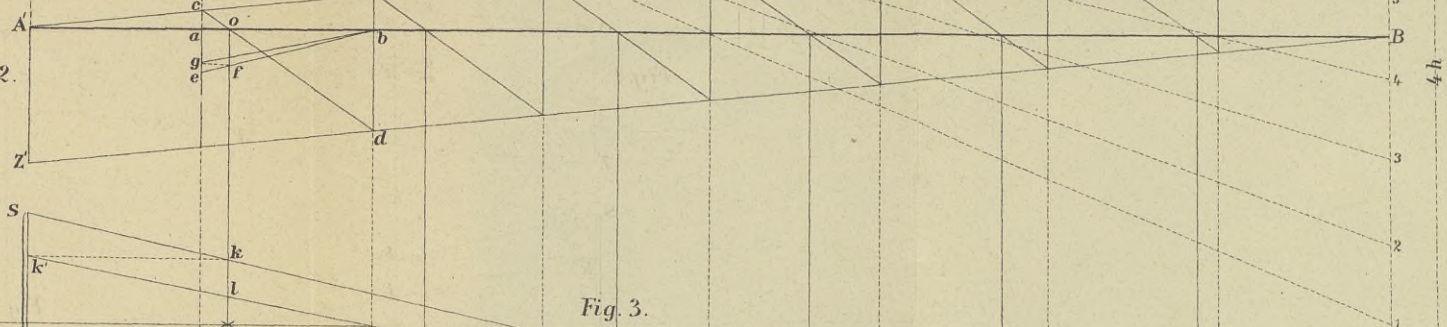
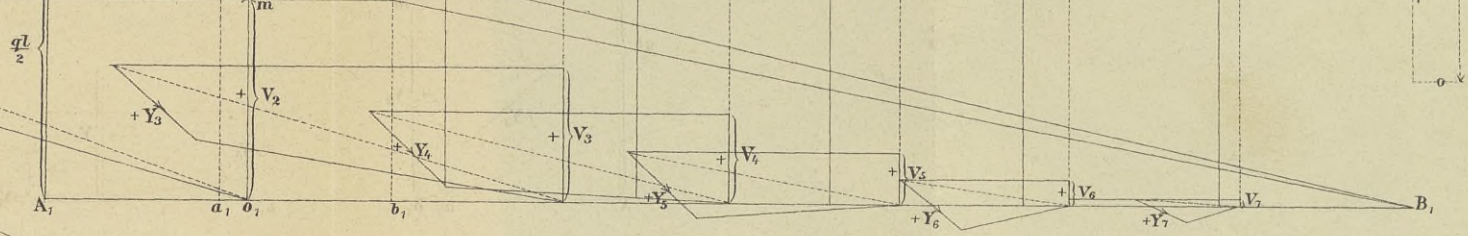


Fig. 3.



D max

$\rho l - U_1$

$\rho l - U_2$

$\rho l - U_3$

$\frac{\rho l}{2}$

$\max L_1 = \max L_8$

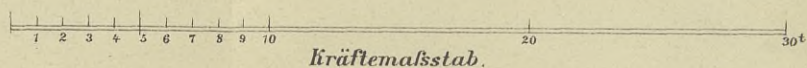
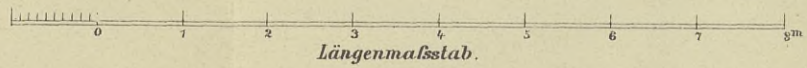
$\max L_2 = \max L_7$

$\max L_3 = \max L_6$

$\max L_4 = \max L_5$

$\max X_1 = \max X_2 = \dots = \max X_8$

Fig. 4.



S. 61

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

7839

Kdn. 524. 13. IX. 54

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299616