

**ARTUR
GANCZARSKI**



**Wybrane
zagadnienia
mechaniki
stosowanej**

Kraków 2024



Politechnika Krakowska
im. Tadeusza Kościuszki

Artur Ganczarski

Wybrane zagadnienia mechaniki stosowanej

Kraków 2024

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
Tomasz Kapecki

PRZEWODNICZĄCA KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTW DYDAKTYCZNYCH
Agata Zachariasz

REDAKTOR DYSCYPLINY
inżynieria mechaniczna
Artur Ganczarski

RECENZENCI
Łukasz Konieczny
Grzegorz Zając

SEKRETARZ SEKCJI
Agnieszka Filosek

OPRACOWANIE REDAKCYJNE
Agnieszka Filosek

SKŁAD I ŁAMANIE
Artur Ganczarski

PROJEKT OKŁADKI
Karolina Szafran

ISBN 978-83-67188-92-0

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków; tel. 12 628 37 25, fax 12 628 37 60
e-mail: wydawnictwo@pk.edu.pl □ www.wydawnictwo.pk.edu.pl
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Druk i oprawę wykonano w Dziale Poligrafii Politechniki Krakowskiej.
Ark. wyd. 8,0.

Zam. 118/2024

Nakład 25 egz.

Cena 42 zł z VAT

Spis treści

1	Siły wewnętrzne w ustrojach złożonych	1
1.1.	Kratownica	2
1.2.	Rama portalowa	4
1.3.	Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania	8
2	Belki na sprężystym podłożu	9
2.1.	Równanie belki na sprężystym podłożu	9
2.2.	Przykłady	12
2.3.	Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania	18
3	Linie wpływowe	19
3.1.	Linie wpływowe belki swobodnie podpartej	20
3.2.	Zastosowanie linii wpływowych	24
3.3.	Przykłady	27
2.4.	Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania	29
4	Transformacja naprężenia i odkształcenia, koło Mohra	31
4.1.	Transformacja naprężenia	31
4.2.	Transformacja odkształcenia	35
4.3.	Koło Mohra	36
4.4.	Przykłady	37
4.5.	Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania	39
5	Metoda sił	41
5.1.	Układ liniowo-sprężysty	41
5.2.	Twierdzenie Castigliana	43
5.3.	Energia sprężystości	44
5.4.	Metoda superpozycji w zagadnieniach hiperstatycznych	46
5.5.	Układ równań kanonicznych metody sił	47

5.6. Przykłady	50
5.7. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania	56
6 Metoda przemieszczeń	57
6.1. Wzory metody przemieszczeń	58
6.2. Przykłady	63
6.3. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania	70
7 Naprężenia i odkształcenia cieplne	73
7.1. Wstęp	73
7.2. Obciążenia termiczne w metodzie sił	75
7.3. Obciążenia termiczne w metodzie przemieszczeń	76
7.4. Przykłady	78
7.5. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania	83
8 Zagadnienia kontaktowe	85
8.1. Zagadnienie Boussinesqa	85
8.2. Zagadnienie Hertza – docisk kul	86
8.3. Docisk ciał niekulistych	92
8.4. Największe wyężenie w zagadnieniach kontaktowych	94
8.5. Przykłady	99
8.6. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania	102
9 Analiza płaskich układów prętowych metodą elementów skończonych	103
9.1. Wstęp	103
9.2. Podstawy modelowania konstrukcji	104
9.3. Podstawy MES	106
9.4. Przykłady	122
9.5. Dodatek A	143
9.5. Dodatek B	144
Bibliografia	149
Indeks	151

Wstęp

Podręcznik akademicki *Wybrane zagadnienia mechaniki stosowanej* jest adresowany do słuchaczy kursu o tej samej nazwie prowadzonego przeze mnie dla studentów kierunku Transport. Jak sam tytuł wskazuje, zawiera on wybrane zagadnienia, raczej nietypowe dla kursów prowadzonych dla studentów Wydziału Mechanicznego. Idea kursu pochodzi od prof. Haliny Egner, która jest autorką odpowiedniego sylabusu, natomiast dobór treści poszczególnych zagadnień należy do mnie. Jak wspomniałem, podręcznik zawiera dość nietypowe treści, które bardziej pasują do tematyki Mechaniki budowli, czyli przedmiotu wykładowanego zwyczajowo na Wydziale Inżynierii Lądowej. Mam tu na myśli zagadnienia związane z belkami na sprężystym podłożu, liniami wpływowymi czy metodą przemieszczeń, jednak odgrywające istotną rolę w zagadnieniach związanych z transportem kolejowym. Pod względem trudności pojęciowej zagadnienia omawiane w podręczniku można zasadniczo sklasyfikować jako niewykraczające poza mechanikę płaskich ustrojów prętowych. Jedyny wyjątek stanowi rozdział ostatni dotyczący zagadnień kontaktowych, bardzo istotnych w kolejnictwie, a zarazem trudniejszych z uwagi na trójosiowy stan naprężenia oraz zastosowanie funkcji specjalnych. Z tych też względów użyty aparat matematyczny został możliwie uproszczony, a co trudniejsze wywody ograniczone do końcowych wzorów. Ponadto przyznaję się do wprowadzenia jednej zmiany wykraczającej poza treść sylabusu – metody elementów skończonych. Wydawało mi się bowiem dość anachroniczne omawianie metody sił oraz metody przemieszczeń bez możliwości demonstracji mocy obliczeniowej, jaka stoi za metodą elementów skończonych.

Rozdział dziewiąty zawiera omówienie pojęć podstawowych, którymi operuje metoda, jak również główne wiadomości z zakresu modelowania, budowy macierzy sztywności, rozwiązywania układów równań i opracowania wyników. Podczas przygotowania podręcznika zdecydowałem się nadać mu nietypową formę pośrednią pomiędzy bardzo związłym podręcznikiem a instrukcją obsługi małego pakietu elementów skończonych. W tym celu do części zawierającej

wiadomości teoretyczne dołączyłem obszerną część poświęconą programowaniu konkretnych przykładów numerycznych, które mogą być uruchamiane przez użytkownika wraz z programem komputerowym. Program komputerowy został dołączony do skryptu w postaci kodu źródłowego. Mam nadzieję, że swobodny dostęp do kodu źródłowego pozwoli zainteresowanemu użytkownikowi nie tylko na 'bierne' posługiwanie się programem na zasadzie 'czarnej skrzynki', ale również na poznanie 'kuchni' numerycznej, a także zachęci do pisania i wprowadzenia własnych kodów.

W celu zrozumienia materiału zawartego w rozdziale dziewiątym od czytelnika wymaga się znajomości podstawowych wiadomości z zakresu statyki konstrukcji prętowych, metod numerycznych algebry liniowej oraz dodatkowo programowania w języku Python, w przypadku gdy użytkownik zechce samodzielnie modyfikować kod komputerowy.

Autor

Spis oznaczeń

Reguły ogólne

przecinek za symbolem oznacza pochodną względem x , np. $y' = \frac{dy}{dx}$
kropka nad symbolem oznacza pochodną względem czasu, np. \dot{t} jest pochodną temperatury względem czasu

symbol ∇ oznacza operator Hamiltona $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$
wielkości będące macierzami lub wektorami zapisano dwojako, tzn. w notacji indeksowej a_{ij} oraz absolutnej $[A]$

delta przed symbolem oznacza wartość przyrostu odpowiedniej wielkości, np. Δl jest przyrostem długości (wydłużeniem)

nadkreślenie odnosi się do wielkości średniej, np. $\bar{\theta}$ jest średnią zmianą temperatury

daszek nad symbolem oznacza wielkość odnoszącą się do belki fikcyjnej, np. \hat{T} jest siłą poprzeczną dla belki fikcyjnej

symbol T za wektorem lub macierzą oznacza transpozycję

a	–	promień pola zetknięcia dwóch ciał
a, b	–	półosie elipsy pola zetknięcia dwóch ciał niekulistych
A	–	pole powierzchni
A_0, A_1, A_2, A_3, A_4	–	stałe całkowania
b	–	szerokość
c_{ik}	–	macierz podatności
c_v	–	ciepło właściwe
C_1, C_2, C_3, C_4	–	stałe całkowania
d	–	średnica mniejszej z kul w zagadnieniu kontaktowym
D	–	średnica większej z kul w zagadnieniu kontaktowym
D_1, D_2	–	stałe całkowania
E	–	moduł Younga
E_1, E_2	–	moduły Younga dwóch ciał wchodzących w kontakt

f	–	strzałka ugięcia
$[\mathbf{f}_x]$	–	wektor uogólnionych sił elementu w układzie lokalnym
$[\mathbf{f}_X]$	–	wektor uogólnionych sił elementu w układzie globalnym
$[\mathbf{F}]$	–	wektor uogólnionych sił całej konstrukcji
g	–	stopień geometrycznej niewyznaczalności
G	–	moduł Kirchhoffa
h	–	wysokość, stopień statycznej niewyznaczalności
H	–	reakcja pozioma
J_0	–	biegunowy moment bezwładności
J_z, J_y	–	momenty bezwładności względem osi z oraz y
$[\mathbf{k}_x]$	–	macierz sztywności elementu w układzie lokalnym
$[\mathbf{k}_X]$	–	macierz sztywności elementu w układzie globalnym
$K_{ij}, [\mathbf{K}]$	–	macierz sztywności konstrukcji
l	–	długość pręta
L	–	energia sprężysta
m_j	–	moment zginający od obciążenia jednostkowego
M, M_g	–	moment zginający
M_s	–	moment skręcający
M_u	–	moment utwierdzenia
n_i	–	siła normalna w i -tym przecię pochodząca od obciążenia jednostkowego
N	–	siła normalna
p	–	liczba prętów kratownicy
P	–	siła skupiona
q	–	nateżenie obciążenia rozłożonego
q_0	–	wartość nacisku w środku pola zetknięcia dwóch ciał
q_i	–	uogólnione przemieszczenie w miejscu i
Q_k	–	uogólniona siła przyłożona w miejscu k
r	–	promień, promień koła Mohra
r_1, R_1	–	promienie krzywizny pierwszego ciała wchodzącego w kontakt
r_1, R_2	–	promienie krzywizny drugiego ciała wchodzącego w kontakt
R_1, R_2	–	reakcje pionowe
R	–	promień w układzie współrzędnych sferycznych, promień większej z kul w zagadnieniu kontaktowym
s	–	współrzędna naturalna
S_z	–	moment statyczny pola przekroju względem osi z

t	–	temperatura
t_0	–	temperatura początkowa
$[\mathbf{t}]$	–	macierz transformacji (lokalna)
T	–	siła poprzeczna
$[\mathbf{T}]$	–	macierz transformacji (globalna)
u, v, w	–	składowe przemieszczenia w kierunku osi x, y, z
u_i	–	wektor przemieszczenia
$[\mathbf{u}_x]$	–	wektor przemieszczenia elementu w układzie lokalnym
$[\mathbf{u}_X]$	–	wektor przemieszczenia elementu w układzie globalnym
w	–	liczba węzłów kratownicy, wypadkowa od obciążenia rozłożonego
W, W_1, W_2	–	wyznacznik główny oraz wyznaczniki pomocnicze układu równań
x, y, z	–	współrzędne układu kartezjańskiego
$[\mathbf{x}]$	–	wektor współrzędnych lokalnych
$[\mathbf{X}]$	–	wektor współrzędnych globalnych
$z = z_1 + z_2$	–	odległość dwóch punktów wchodzących w kontakt
α	–	współczynnik rozszerzalności termicznej
$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ_z}}$	–	stała uwzględniająca stosunek współczynnika oporu podłoża do sztywności giętej belki
β_i	–	kąt określający nachylenie i -tego pręta kratownicy
γ_{xy}	–	odkształcenie postaciowe
δ_{ij}, Δ_{i0}	–	współczynniki podatności układu kanonicznego metody sił
δ_{ij}^{-1}	–	współczynniki sztywności układu kanonicznego metody przemieszczeń
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	–	składowe osiowe odkształcenia
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	–	odkształcenia osiowe w kierunkach osi x, y, z
η_i	–	rzędna linii wpływowej w miejscu i
θ	–	różnica temperatury aktualnej i początkowej
ϑ	–	kąt obrotu belki
κ	–	suma krzywizn głównych dwóch ciał niekulistych
\varkappa	–	krzywizna osi belki
λ	–	współczynnik przewodnictwa cieplnego
ν	–	współczynnik Poissona
ν_1, ν_2	–	współczynniki Poissona dwóch ciał wchodzących w kontakt
ρ	–	gęstość masy

ρ, ϕ, z	–	współrzędne układu cylindrycznego
φ	–	kąt nachylenia lokalnego układu współrzędnych względem układu globalnego, kąt między płaszczyznami krzywizn głównych dwóch ciał wchodzących w kontakt
$\sigma_\rho, \sigma_\phi, \sigma_z$	–	składowe osiowe naprężenia w układzie cylindrycznym
σ_1, σ_{\max}	–	największa składowa główna naprężenia
σ_2, σ_{\min}	–	najmniejsza składowa główna naprężenia
σ_{dopB}	–	naprężenie dopuszczalne na granicy plastyczności
$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}}$	–	naprężenie zredukowane Hubera–Misesa–Hencky’ego
$\sigma_{\text{red(B)}}^{\text{HMH}}$	–	naprężenie zredukowane Hubera–Misesa–Hencky’ego w punkcie Bielajewa
$\sigma_{\text{red(H)}}^{\text{HMH}}$	–	naprężenie zredukowane Hubera–Misesa–Hencky’ego w punkcie Hertza
$\sigma_{\text{red}}^{\text{TG}}$	–	naprężenie zredukowane Tresca–Guesta
σ_x, σ_y	–	składowe osiowe naprężenia
τ_{\max}	–	ekstremalna składowa styczna naprężenia
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	–	składowe styczne naprężenia
τ_{rz}	–	składowa styczna naprężenia w układzie cylindrycznym
ψ_i	–	kąt określający nachylenie i -tego pręta kratownicy

Rozdział 1

Siły wewnętrzne w ustrojach złożonych

Pod pojęciem ustroju złożonego kryje się konstrukcja, w skład której wchodzi para lub więcej prętów odpowiednio połączonych ze sobą w punktach zwanych węzłami. Konstrukcja węzła pozwala rozróżnić dwa zasadnicze typy ustrojów prętowych: kratownice oraz ramy.

Kratownicą nazywamy zespół prętów prostych połączonych w węzłach przegubami, w których zaczepione są również siły skupione stanowiące obciążenie. Taka konstrukcja węzłów oraz sposób ich obciążenia powodują, iż pręty kratownicy przenoszą jedynie siły normalne N .

Drugim typem ustroju prętowego złożonego jest rama charakteryzująca się sztywnymi węzłami oraz dowolnym miejscem przyłożenia obciążeń. W przypadku ramy każdy pręt jest zatem zazwyczaj poddany działaniu siły normalnej N , siły poprzecznej T oraz momentu zginającego M_g .

W tym rozdziale rozpatrywane są kratownice oraz ramy płaskie najprostszego typu, tzw. statycznie wyznaczalne, czyli takie, do rozwiązania których wystarczają tylko równania równowagi. Trudniejsze w analizie ustroje prętowe statycznie niewyznaczalne zostaną omówione w kolejnych rozdziałach poświęconych metodom sił, przemieszczeń oraz elementów skończonych. Nie wchodząc zbyt głęboko w szczegóły i nie rozróżniając przypadków zewnętrznej oraz wewnętrznej statycznej niewyznaczalności, z których pierwsze pojęcie dotyczy możliwości określenia wartości reakcji podporowych, zaś drugie sił wewnętrznych, można zauważyć, co następuje:

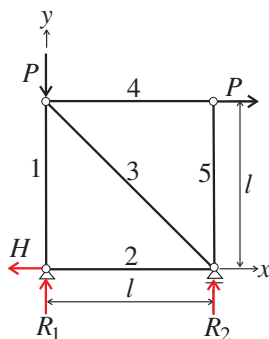
- Z punktu widzenia statyki rama reprezentuje płaski układ sił, dla którego można zapisać co najwyżej 3 równania równowagi, zatem będzie ona konstrukcją statycznie wyznaczalną, jeśli liczba reakcji podporowych nie przekroczy liczby 3.

- Z punktu widzenia statyki kratownica jako całość reprezentuje również płaski układ sił, dla którego można zapisać co najwyżej 3 równania równowagi, lecz równocześnie każdy z jej w węzłów stanowi układ sił zbieżny do punktu, wymagający spełnienia $2w$ równań równowagi wewnętrznej. Ponieważ rozwiązanie kratownicy wymaga określenia wartości siły normalnej w każdym z jej p prętów, zatem bilans niewiadomych oraz równań przedstawia się następująco

$$p = 2w - 3. \quad (1.1)$$

1.1. Kratownica

Rozpatrzmy prostą kratownicę, jak na rysunku poniżej, składającą się z 5 prętów połączonych w 4 węzłach, warunek (1.1) $5 = 2 \times 4 - 3$ jest spełniony, zatem jest to konstrukcja statycznie wyznaczalna.



Rysunek 1.1. Kratownica statycznie wyznaczalna.

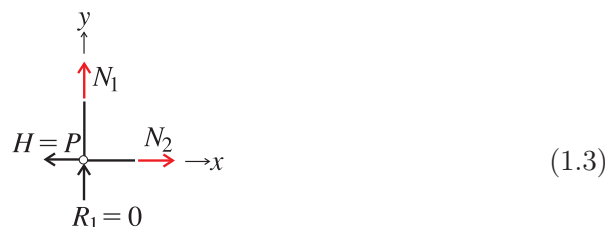
Rozwiązanie na szczeblu (\mathcal{B}) polega na zapisaniu oraz rozwiązaniu równań równowagi^{*)}

$$\begin{aligned} (x) \quad & -H + P = 0 \quad \rightarrow \quad H = P \\ (y) \quad & R_1 + R_2 - P = 0 \quad \rightarrow \quad R_1 = 0 \\ (0) \quad & Pl - R_2l = 0 \quad \rightarrow \quad R_2 = P. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Przystępując do rozwiązania na szczeblu (\mathcal{S}), posłużymy się metodą równoważenia węzłów, polegającą na zapisaniu oraz rozwiązaniu równań równowagi dla

^{*)}Wektory w kolorze czerwonym oznaczają wielkości niewiadome, natomiast wektory w kolorze czarnym oznaczają wielkości dane w zagadnieniu bądź obliczone na poprzednim szczeblu analizy.

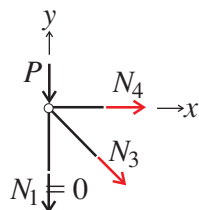
myślowych przekrojów wykonanych wokół każdego z węzłów. Ponieważ w każdym węźle mamy do dyspozycji 2 równania równowagi rzutów sił na odpowiednie osie układu współrzędnych, rozpoczynamy od węzła, w którym schodzą się nie więcej niż dwa pręty, przykładowo



(1.3)

$$\begin{aligned} (x) \quad -H + N_2 &= 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = H = P \\ (y) \quad R_1 + N_1 &= 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = -R_1 = 0. \end{aligned}$$

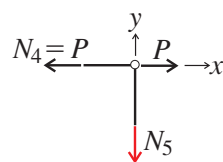
Przechodząc do kolejnych węzłów, mamy



(1.4)

$$\begin{aligned} (x) \quad N_4 + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \quad \rightarrow \quad N_4 = P \\ (y) \quad -P - N_1 - N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \quad \rightarrow \quad N_3 = -\frac{2P}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}P \end{aligned}$$

oraz

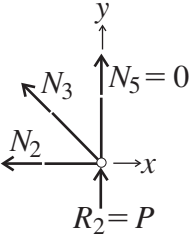


(1.5)

$$\begin{aligned} (x) \quad -N_4 + P &= 0 \quad \rightarrow \quad -P + P = 0 \quad \text{☺} \\ (y) \quad -N_5 &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ wartości sił we wszystkich prętach są już znane, warunki równowagi

ostatniego z węzłów potraktujemy jako sprawdzian poprawności obliczeń^{†)}



$$(1.6)$$

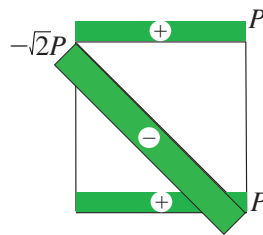
$$(x) \quad -N_2 - N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad -P - (-\sqrt{2}P) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \text{☺}$$

$$(y) \quad R_2 + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_5 = 0 \quad \rightarrow \quad P + (-\sqrt{2}P) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \text{☺}$$

Na koniec otrzymane wyniki grupujemy w tabeli 1.1 bądź przedstawiamy graficznie na wykresie 1.2.

Tablica 1.1. Wartości sił w kolejnych prętach kratownicy.

nr pręta i	długość l_i	siła N_i
1	l	0
2	l	P
3	$\sqrt{2}l$	$-\sqrt{2}P$
4	l	P
5	l	0

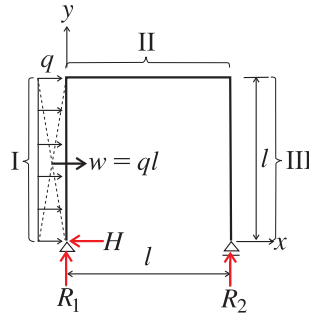


Rysunek 1.2. Wykres sił wewnętrznych w kratownicy statycznie wyznaczalnej.

^{†)}Symbol ☺ potwierdza tożsamościowe spełnienie równania.

1.2. Rama portalowa

W ramie portalowej poddanej działaniu stałego obciążenia poziomego q – parcia wiatru występują następujące siły zewnętrzne: $w = ql$ wypadkowa obciążenia ciągłego oraz reakcje podporowe H , R_1 , R_2 . Ponieważ liczba nieznanymi reakcji odpowiada liczbie 3 równań równowagi, rozpatrywana rama jest konstrukcją statycznie wyznaczalną.



Rysunek 1.3. Rama portalowa.

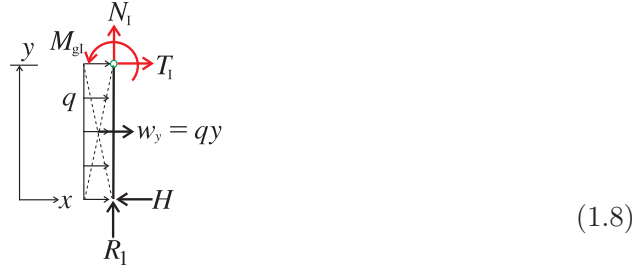
Analizę na szczeblu (\mathcal{B}) należy rozpocząć od zapisania równań równowagi oraz obliczenia wartości reakcji podporowych

$$\begin{aligned}
 (x) \quad w - H &= 0 && \rightarrow H = w = ql \\
 (y) \quad R_1 + R_2 &= 0 && \rightarrow R_1 = -R_2 = -\frac{ql}{2} \\
 (0) \quad w\frac{l}{2} - R_2l &= 0 && \rightarrow R_2 = \frac{w}{2} = \frac{ql}{2}.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Przechodząc następnie do analizy na szczeblu (\mathcal{S}), należy w ramie wyodrębnić przedziały zmienności sił wewnętrznych. Ponieważ rozpatrywana rama jest konstrukcją złożoną z trzech prętów (2 słupki + rygiel), z których żaden nie jest obciążony obciążeniem skupionym zaczepionym pomiędzy swoimi węzłami[‡]), zatem wystarczy wykonać 3 myślowe przekroje. W miejscu przekroju myślowego zastępujemy działanie odrzuconej części trójką sił wewnętrznych N, T, M_g o kierunkach i zwrotach stosowanych w teorii belek.

Wykonując myślowy przekrój w przedziale I, tzn. gdy $0 \leq y \leq l$, oraz zapisując lokalne równania równowagi z biegunem redukcji w miejscu przekroju, dostajemy

[‡])Wypadkowa obciążenia ciągłego $w = ql$ nie jest traktowana jako siła skupiona.

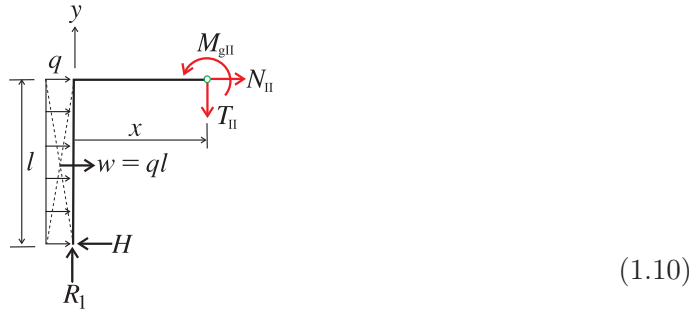


$$\begin{aligned}
 (x) \quad -H + w_y + T_I &= 0 & \rightarrow & T_I = H - w_y = q(l - y) \\
 (y) \quad R_1 + N_I &= 0 & \rightarrow & N_I = -R_1 = \frac{ql}{2} \\
 (\circ) \quad Hy - w_y \frac{y}{2} - M_{gI} &= 0 & \rightarrow & M_{gI} = qly - q \frac{y^2}{2}
 \end{aligned}$$

sprawdzamy, czy spełnione jest twierdzenie Schwedlera–Żurawskiego

$$\frac{dM_{gI}}{dy} = T_I. \quad (1.9)$$

Analogiczną procedurę powtarzamy dla myślowego przekroju w przedziale II, czyli dla $0 \leq x \leq l$

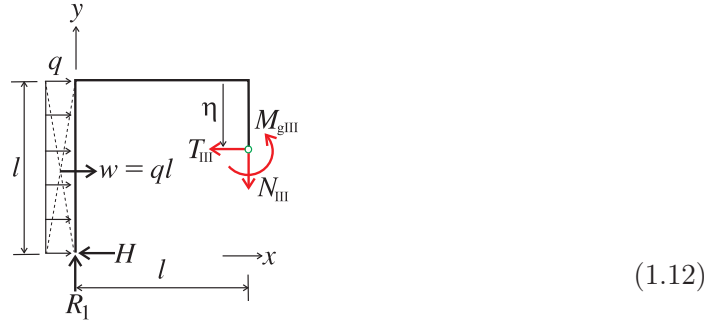


$$\begin{aligned}
 (x) \quad -H + w + N_{II} &= 0 & \rightarrow & N_{II} = H - w = ql - ql = 0 \\
 (y) \quad R_1 - T_{II} &= 0 & \rightarrow & T_{II} = R_1 = -\frac{ql}{2} \\
 (\circ) \quad R_1 x + Hl - w \frac{l}{2} - M_{gII} &= 0 & \rightarrow & M_{gII} = R_1 x + Hy - w \frac{l}{2} \\
 & & & = -q \frac{lx}{2} + ql^2 - q \frac{l^2}{2}
 \end{aligned}$$

weryfikujemy poprawność rozwiązania w świetle twierdzenia Schwedlera–Żurawskiego

$$\frac{dM_{gII}}{dx} = T_{II}. \quad (1.11)$$

Następnie dla myślowego przekroju w przedziale III, gdy $0 \leq \eta \leq l$, na potrzeby analizy której wprowadzona została nowa współrzędna η parametryzująca oś pręta

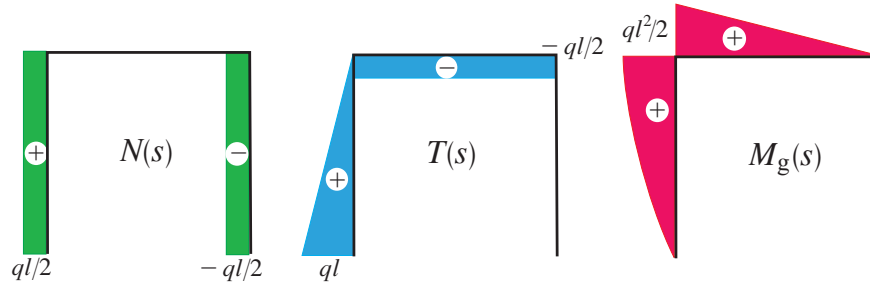


$$\begin{aligned}
 (x) \quad -H + w - T_{\text{III}} &= 0 & \rightarrow & T_{\text{III}} = -H + w = -ql + ql = 0 \\
 (y) \quad R_1 - N_{\text{III}} &= 0 & \rightarrow & N_{\text{III}} = R_1 = -\frac{ql}{2} \\
 (\circ) \quad R_1 l - H(l - \eta) & & \rightarrow & M_{g\text{III}} = R_1 l - H(l - \eta) = -q \frac{l^2}{2} \\
 -w\left(\frac{l}{2} - \eta\right) - M_{g\text{III}} &= 0 & & +ql(l - \eta) - ql\left(\frac{l}{2} - \eta\right) = 0
 \end{aligned}$$

oraz pamiętając o konieczności sprawdzenia zgodności rozwiązania z twierdzeniem Schwedlera-Żurawskiego

$$\frac{dM_{g\text{III}}}{d\eta} = T_{\text{III}}. \quad (1.13)$$

Wykresy sił wewnętrznych N, T, M_g przedstawiamy na rysunku 1.4

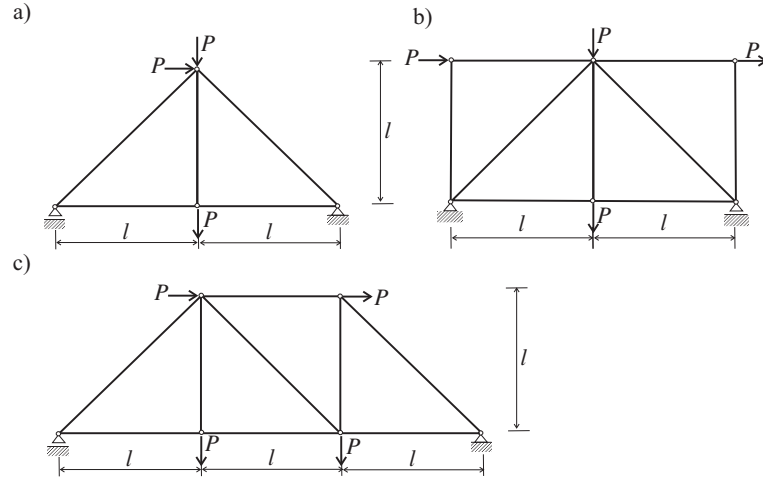


Rysunek 1.4. Rama portalowa – wykresy sił wewnętrznych.

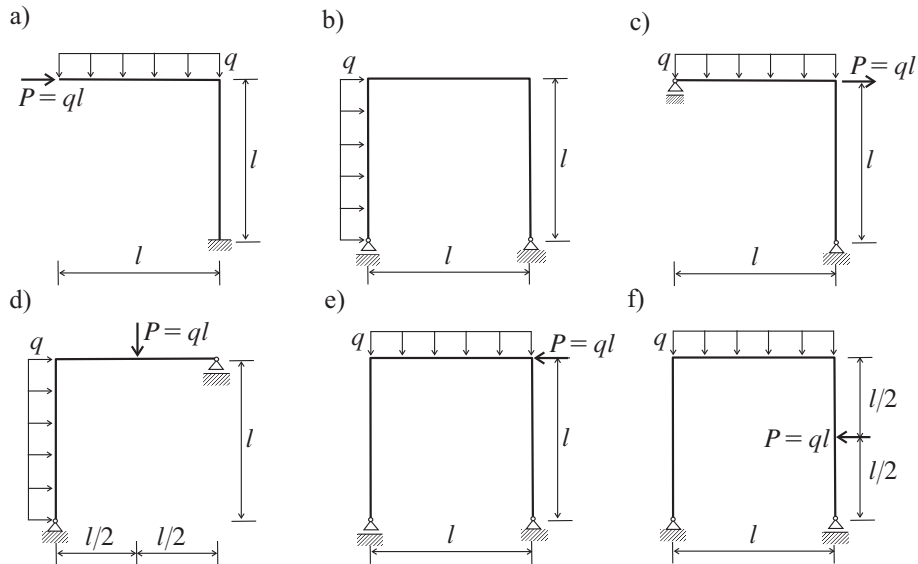
gdzie $s = y, x, \eta$ oznacza współrzędną naturalną parametryzującą kolejne przedziały ramy.

1.3. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania

Rozwiązać oraz naszkicować wykresy sił wewnętrznych N dla kratownic jak na rysunku.



Rozwiązać oraz naszkicować wykresy sił wewnętrznych N , T , M_g dla ram jak na rysunku.



Rozdział 2

Belki na sprężystym podłożu

Konstrukcje spoczywające na sprężystym podłożu znajdują zastosowanie między innymi w budownictwie oraz kolejnictwie, jako konkretne przykłady służą odpowiednio ława fundamentowa oraz szyna kolejowa oparta na podkładach.

W literaturze poświęconej temu zagadnieniu można znaleźć wiele modeli matematycznych opisujących sprężyste podłoże, przykładowo: Winklera [20], Filonienki-Borodicza [5] bądź Wieghardta [21], jednak poniżej zostanie szczegółowo omówiony jedynie najprostszy z nich – model Winklera. Głównym założeniem autora modelu jest możliwość potraktowania sprężystego podłoża jako zespołu niezależnych sprężyn, co w konsekwencji prowadzi do przyjęcia reakcji podłoża, zwanej dalej odporem podłoża, proporcjonalnej do wartości przemieszczenia spoczywającej na nim belki. Równocześnie warto pamiętać o dwóch istotnych aspektach związanych z zastosowaniem modelu Winklera:

- podłoże sprężyste przejmuje zarówno naciski, jak i ciągnięcia,
- pomijany jest wpływ tarcia pomiędzy belką a podłożem.

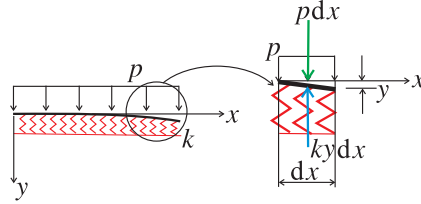
2.1. Równanie różniczkowe belki na sprężystym podłożu

Wyprowadzenie równania różniczkowego belki na sprężystym podłożu rozpocząć należy od przypomnienia znanego z kursu podstaw wytrzymałości materiałów równania różniczkowego zginanej osi belki w postaci zlinearyzowanej^{*)}

^{*)}Wzór na krzywiznę osi belki $\varkappa = \frac{-y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$ został uproszczony do postaci $\varkappa = -y''$ na mocy założenia $1 \gg (y')^2$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_g(x)}{EJ_z} \quad (2.1)$$

gdzie: $y(x)$ jest funkcją opisującą ugięcie belki, $M_g(x)$ opisuje zmianę momentu zginającego, zaś iloczyn EJ_z oznacza stałą sztywność belki na zginanie. Warto w tym miejscu zauważyć, iż z punktu widzenia klasyfikacji równań różniczkowych (2.1) przedstawia typ liniowy, drugiego rzędu o zmiennych rozdzielonych, czyli najprostszy do rozwiązania, bo pozwalający na dwukrotne całkowanie 'raz za razem'. W przypadku gdy moment zginający zmienia się zgodnie z przebiegiem wielomianu kwadratowego, co obejmuje przypadki działania na belkę momentu skupionego M , siły skupionej P oraz obciążenia rozłożonego q o stałej intensywności, funkcja ugięcia belki $y(x)$ może być co najwyżej wielomianem czwartego stopnia.



Rysunek 2.1. Model podłoża sprężystego typu Winklera.

Następnym krokiem jest przywołanie twierdzenia Schwedlera–Żurawskiego

$$\frac{dM_g(x)}{dx} = T(x) \quad \frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \quad (2.2)$$

które zostanie użyte do redukcji prawej strony formuły (2.1). Biorąc kolejne pochodne równania (2.1), przy założeniu stałej sztywności zginania $EJ_z = \text{const}$, dostajemy

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1}{EJ_z} \frac{dM_g(x)}{dx} = -\frac{T(x)}{EJ_z} \quad (2.3)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{1}{EJ_z} \frac{dT(x)}{dx} = \frac{q(x)}{EJ_z}.$$

Wprowadzenie modelu podłoża sprężystego typu Winklera wymaga podstawienia do prawej strony (2.3₂) następującej zależności

$$q(x) = p(x) - ky(x) \quad (2.4)$$

gdzie k oznacza współczynnik odporu podłoża [N/m^2]. W ten sposób intensywność obciążenia $q(x)$ można zinterpretować jako wartość obciążenia $p(x)$,

działającego bezpośrednio od góry, pomniejszoną o odpór podłoża, który jest proporcjonalny do wartości przemieszczenia i działa od dołu na belkę – patrz okno rys. 2.1. Po uwzględnieniu (2.4) w (2.3) otrzymujemy liniowe i niejednorodne równanie różniczkowe czwartego rzędu

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{1}{EJ_z} [p(x) - ky(x)] \quad (2.5)$$

lub w równoważnej postaci standardowej

$$y^{IV} + 4\alpha^4 y = \frac{p(x)}{EJ_z} \quad (2.6)$$

w której $4\alpha^4 = k/EJ_z$ [m^{-4}]. Metodyka rozwiązywania równań różniczkowych liniowych wymaga w pierwszej kolejności poszukiwania rozwiązania równania jednorodnego

$$y^{IV} + 4\alpha^4 y = 0 \quad (2.7)$$

dla którego wygodnie jest założyć rozwiązanie w postaci

$$y(x) = e^{nx}. \quad (2.8)$$

Skąd po obliczeniu kolejnych pochodnych do rzędu czwartego włącznie i podstawieniu do (2.7) otrzymywane jest równanie charakterystyczne[†])

$$n^4 + 4\alpha^4 = 0 \quad (2.9)$$

mające dwie pary pierwiastków zespolonych sprzężonych

$$n^2 = \pm 2i\alpha^2 \longrightarrow n = \pm(1 \pm i)\alpha. \quad (2.10)$$

Następnie podstawienie (2.10) do (2.8) wraz z użyciem tożsamości Eulera–de Moivre’a

$$e^{\pm(a \pm ib)x} = e^{\pm ax} (\cos bx \pm i \sin bx) \quad (2.11)$$

prowadzi do całki ogólnej równania jednorodnego (2.7) w postaci[‡])

$$y(x) = e^{-\alpha x} (C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x) + e^{\alpha x} (C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x). \quad (2.12)$$

[†]) Równanie charakterystyczne cechuje się tym, że należy do typu równań algebraicznych, w odróżnieniu od wyjściowego równania różniczkowego, które należało do typu równań funkcyjnych.

[‡]) W celu otrzymania funkcji o wartościach rzeczywistych stałe dowolne całkowania muszą być liczbami zespolonymi $y(x) = \bar{C}_1 e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + i \sin \alpha x) + \bar{C}_2 e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - i \sin \alpha x) + \bar{C}_3 e^{\alpha x} (\cos \alpha x + i \sin \alpha x) + \bar{C}_4 e^{\alpha x} (\cos \alpha x - i \sin \alpha x)$, jednak odpowiednie ich pogrupowanie pozwala na wprowadzenie nowych stałych wyrażonych wyłącznie liczbami rzeczywistymi $y(x) = e^{-\alpha x} [\underbrace{(\bar{C}_1 - \bar{C}_2)}_{C_1} i \sin \alpha x + \underbrace{(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)}_{C_2} \cos \alpha x] + e^{\alpha x} [\underbrace{(\bar{C}_3 - \bar{C}_4)}_{C_3} i \sin \alpha x + \underbrace{(\bar{C}_3 + \bar{C}_4)}_{C_4} \cos \alpha x]$.

Całkę szczególną równania niejednorodnego (2.6), dla uproszczonego przypadku, gdy $p(x) = p_0 = \text{const}$, przewidujemy w postaci

$$y_s(x) = A_0 \quad (2.13)$$

zatem po wstawieniu do (2.6) dostajemy

$$4\alpha^4 A_0 = \frac{k}{EJ_z} A_0 = \frac{p_0}{EJ_z} \longrightarrow A_0 = \frac{p_0}{k}. \quad (2.14)$$

Całka ogólna równania niejednorodnego, stanowiąca sumę całek (2.12) oraz (2.14), przyjmuje format

$$y(x) = e^{-\alpha x}(C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x) + e^{\alpha x}(C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x) + \frac{p_0}{k}. \quad (2.15)$$

Stałe całkowania C_1, C_2, C_3, C_4 należy obliczać na podstawie czterech warunków brzegowych stawianych na wartości: funkcji ugięcia $y(x)$, jej pochodnej, tzn. kąta obrotu belki $\vartheta(x)$

$$\begin{aligned} \vartheta(x) = y'(x) = & \alpha e^{-\alpha x}[-(C_1 + C_2) \sin \alpha x + (C_1 - C_2) \cos \alpha x] \\ & + \alpha e^{\alpha x}[(C_3 - C_4) \sin \alpha x + (C_3 + C_4) \cos \alpha x] \end{aligned} \quad (2.16)$$

wartości momentu zginającego $M_g(x)$

$$\begin{aligned} M_g(x) = -EJ_z y''(x) = & -EJ_z 2\alpha^2 [e^{-\alpha x}(C_2 \sin \alpha x - C_1 \cos \alpha x) \\ & + e^{\alpha x}(-C_4 \sin \alpha x + C_3 \cos \alpha x)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

oraz wartości siły poprzecznej $T(x)$

$$\begin{aligned} T(x) = -EJ_z y'''(x) = & -EJ_z 2\alpha^3 \\ & \times \{e^{-\alpha x}[(C_1 - C_2) \sin \alpha x + (C_1 + C_2) \cos \alpha x] \\ & + e^{\alpha x}[-(C_3 + C_4) \sin \alpha x + (C_3 - C_4) \cos \alpha x]\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.2. Przykłady

Przeważająca większość przypadków technicznych dotyczy belek o nieskończonej długości bądź tzw. belek długich. W obu przypadkach stałe całkowania $C_3 = C_4 = 0$ z uwagi na rosnący nieograniczenie czynnik $e^{\alpha x}$ we wzorze (2.15) oraz następnych. Należy w tym miejscu wyraźnie zaznaczyć, iż pojęcie belki długiej ma sens czysto matematyczny oraz wiąże się bezpośrednio z zachowaniem funkcji $e^{-\alpha x}$ stanowiącej czynnik 'tłumiący' dla odpowiednich

funkcji trygonometrycznych w rozwiązaniach (2.15) oraz (2.16). Rozpatrując belkę o rzeczywistej długości l , można z zadowalającą dokładnością uznać, że gdy $\alpha l \geq 5$, wtedy wartość $e^{-5} \approx 6.7379 \cdot 10^{-3}$ daje zmianę wartości na granicy dokładności obliczeń inżynierskich. W takich przypadkach można operować pojęciem belki półnieskończonej oraz uproszczonymi wzorami

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\alpha x} (C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x) + p_0/k \\ \vartheta(x) &= \alpha e^{-\alpha x} [-(C_1 + C_2) \sin \alpha x + (C_1 - C_2) \cos \alpha x] \\ M_g(x) &= -EJ_z 2\alpha^2 e^{-\alpha x} (C_2 \sin \alpha x - C_1 \cos \alpha x) \\ T(x) &= -EJ_z 2\alpha^3 e^{-\alpha x} [(C_1 - C_2) \sin \alpha x + (C_1 + C_2) \cos \alpha x]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Odmienny przypadek występuje, gdy belka ma skończoną długość oraz zaliczana jest do belek typu 'krótkiego', tzn. $\alpha l < 5$, wtedy należy stosować pełne wzory (2.15) oraz następujące, przepisane poniżej w wygodniejszej postaci

$$\begin{aligned} y(x) &= A_1 \sinh \alpha x \sin \alpha x + A_2 \sinh \alpha x \cos \alpha x \\ &+ A_3 \cosh \alpha x \sin \alpha x + A_4 \cosh \alpha x \cos \alpha x + p_0/k \end{aligned} \quad (2.20)$$

zawierającej funkcje hiperboliczne: $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ oraz $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$.

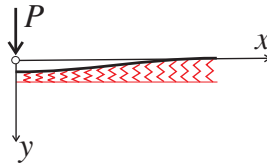
2.2.1. Przykład 1 – belka długa obciążona siłą skupioną

W przypadku belki o schemacie podanym na rys. 2.2 należy posługiwać się wzorami (2.19) oraz następującymi warunkami obciążenia, oraz warunkami brzegowymi

$$p_0 = 0, \quad \vartheta(0) = 0, \quad T(0) = -P \quad (2.21)$$

Obliczenia stałych całkowania przebiegają w poniższy sposób

$$\begin{aligned} \vartheta(0) = 0 = y' \rightarrow 0 &= (C_1 - C_2) \alpha = 0 \rightarrow C_1 = C_2 \\ T(0) = -P = -EJ_z y'''(0) &\rightarrow 4C_1 \alpha^3 = \frac{P}{EJ_z} \rightarrow C_1 = \frac{P}{4\alpha^3 EJ_z} \end{aligned} \quad (2.22)$$

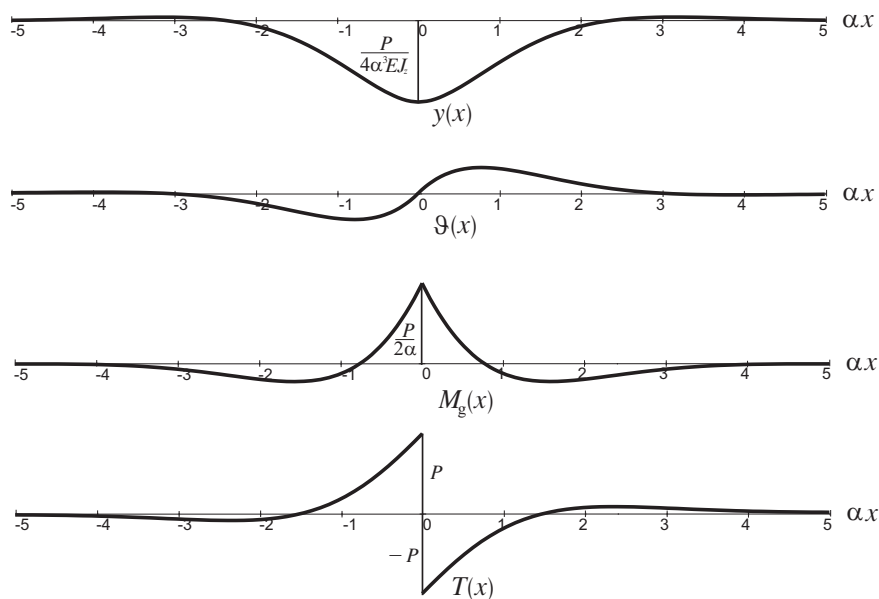


Rysunek 2.2. Belka obciążona siłą skupioną.

zatem rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{P}{4\alpha^3 EJ_z} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x) \\
 \vartheta(x) &= -\frac{P}{2\alpha^2 EJ_z} e^{-\alpha x} \sin \alpha x \\
 M_g &= \frac{P}{2\alpha} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) \\
 T(x) &= -P e^{-\alpha x} \cos \alpha x
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

co zostało zilustrowane na poniższym rysunku^{§)}.



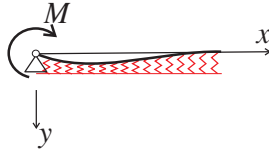
Rysunek 2.3. Wykresy $y(x)$, $\vartheta(x)$, $M_g(x)$, $T(x)$ dla belki 2.2.1.

2.2.2. Przykład 2 – belka długa obciążona momentem skupionym

Belka obciążona momentem skupionym – patrz rys. 2.4, wymaga zastosowania następujących warunków obciążenia oraz brzegowych

$$p_0 = 0, \quad y(0) = 0, \quad M_g(0) = M. \tag{2.24}$$

^{§)}Po uprzednim wykonaniu lustrzanego odbicia dla ujemnych wartości współrzędnej x .



Rysunek 2.4. Belka obciążona momentem skupionym.

Wartości stałych całkowania są obliczane z równań

$$y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

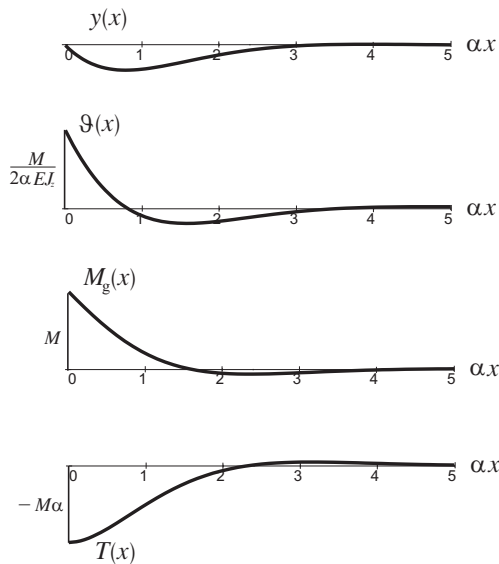
$$M_g(0) = M = -EJ_z y''(0) \rightarrow M = -EJ_z(-2C_1 \alpha^2) \rightarrow C_1 = \frac{M}{2\alpha^2 EJ_z} \quad (2.25)$$

zaś rozwiązanie wyraża się formułami

$$y(x) = \frac{M}{2\alpha^2 EJ_z} e^{-\alpha x} \sin \alpha x, \quad \vartheta(x) = \frac{M}{2\alpha EJ_z} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) \quad (2.26)$$

$$M_g(x) = M e^{-\alpha x} \cos \alpha x, \quad T(x) = -M \alpha e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x)$$

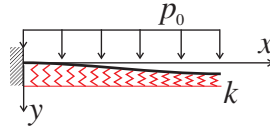
i zostało pokazane na rys. 2.5.

Rysunek 2.5. Wykresy $y(x)$, $\vartheta(x)$, $M_g(x)$, $T(x)$ dla belki 2.2.2.

2.2.3. Przykład 3 – belka długa obciążona obciążeniem stałym

Przystępując do rozwiązania belki poddanej działaniu obciążenia ciągłego – patrz rys. 2.6, należy użyć następujących warunków obciążenia oraz brzegowych

$$p(x) = p_0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (2.27)$$



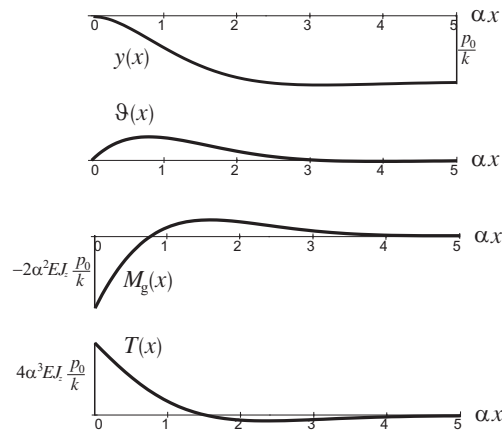
Rysunek 2.6. Belka obciążona obciążeniem stałym.

Obliczenia stałych całkowania przebiegają według poniższego schematu

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\rightarrow C_2 + \frac{p_0}{k} = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{p_0}{k} \\ y'(0) = 0 &\rightarrow (C_1 - C_2) = 0 \rightarrow C_1 = C_2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

zaś rozwiązanie wyraża się formułami

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{p_0}{k} [1 - e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x)], & \vartheta(x) &= 2 \frac{p_0}{k} \alpha e^{-\alpha x} \sin \alpha x \\ M_g(x) &= 2EJ_z \alpha^2 \frac{p_0}{k} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x), & T(x) &= 4EJ_z \alpha^3 \frac{p_0}{k} e^{-\alpha x} \cos \alpha x. \end{aligned} \quad (2.29)$$



Rysunek 2.7. Wykresy $y(x)$, $\vartheta(x)$, $M_g(x)$, $T(x)$ dla belki 2.2.3.

2.2.4. Przykład 4 – belka krótka obciążona obciążeniem stałym

Przystępując do rozwiązania belki krótkiej pokazanej na rys. 2.8 [12], należy stosować wzory (2.20), w których przyjmujemy $A_2 = A_3 = 0$ z uwagi na symetrię układu, warunki brzegowe są podane w postaci

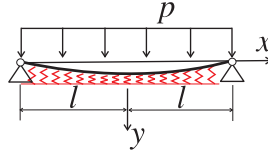
$$y(l) = 0, \quad M_g(l) = -EJ_z y''(l) = 0 \quad (2.30)$$

co prowadzi do układu równań na stałe całkowania

$$\begin{aligned} A_1 \sinh \alpha l \sin \alpha l + A_4 \cosh \alpha l \cos \alpha l + \frac{p_0}{k} &= 0 \\ -A_1 \cosh \alpha l \cos \alpha l + A_4 \sinh \alpha l \sin \alpha l &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

mającego rozwiązanie

$$A_1 = -\frac{p_0}{k} \frac{\sinh \alpha l \sin \alpha l}{\sinh^2 \alpha l + \cos^2 \alpha l}, \quad A_4 = -\frac{p_0}{k} \frac{\cosh \alpha l \cos \alpha l}{\sinh^2 \alpha l + \cos^2 \alpha l}. \quad (2.32)$$



Rysunek 2.8. Belka skończonej długości obciążona obciążeniem stałym.

Po wstawieniu stałych A_1, A_4 do (2.20) otrzymujemy końcowe rozwiązanie w postaci

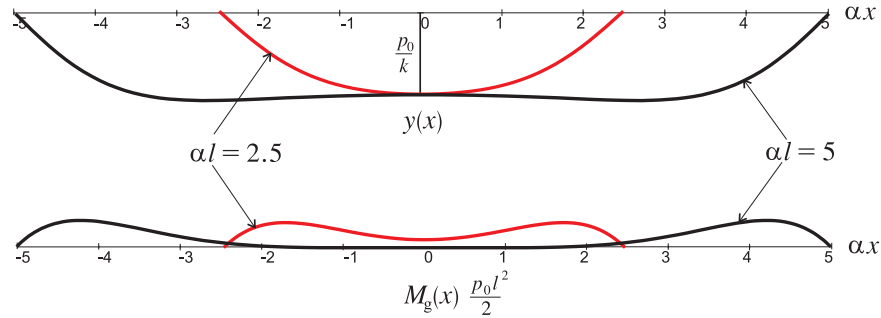
$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{p_0}{k} \left[1 - \frac{\cosh \alpha l \cos \alpha l}{\sinh^2 \alpha l + \cos^2 \alpha l} (\cosh \alpha x \cos \alpha x \right. \\ &\quad \left. + \tanh \alpha l \tan \alpha l \sinh \alpha x \sin \alpha x) \right] \\ M_g(x) &= \frac{p_0 l^2}{2} \frac{\cosh \alpha l \cos \alpha l}{\sinh^2 \alpha l + \cos^2 \alpha l} (\tanh \alpha l \tan \alpha l \cosh \alpha x \cos \alpha x \\ &\quad - \sinh \alpha x \sin \alpha x) \end{aligned} \quad (2.33)$$

przy czym największa wartość ugięcia belki występuje w środku jej rozpiętości i jest równa

$$y(0) = \frac{p_0}{k} \left(1 - \frac{\cosh \alpha l \cos \alpha l}{\sinh^2 \alpha l + \cos^2 \alpha l} \right). \quad (2.34)$$

W tym miejscu warto przeprowadzić dokładną analizę otrzymanego rozwiązania. Pomimo że wzory (2.33) obowiązują dla belki o skończonej długości $2l$,

to w zależności od wartości parametru αl można otrzymać zupełnie różne pod względem jakościowym wyniki – patrz rys. 2.9. W przypadku belki krótkiej $\alpha l = 2.5$ daje się wyraźnie zaobserwować wzajemny wpływ warunków brzegowych z obu końców. Przeciwny efekt, niezależności warunków brzegowych z obu końców, jest natomiast widoczny dla belki dłuższej $\alpha l = 5.0$.

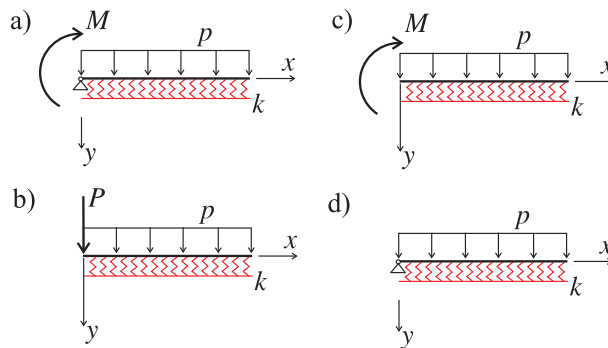


Rysunek 2.9. Porównanie wykresów $y(x)$, M_g dla belki 2.2.4, gdy $\alpha l = 2.5$ oraz $\alpha l = 5$.

W tym przypadku praktycznie cały środkowy segment belki pozostaje prawie płaski, czemu odpowiada niemal zerowa wartość momentu zginającego.

2.3. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania

Podać rozwiązanie $y(x)$, $\vartheta(x)$, $M_g(x)$, $T(x)$ dla belki półnieskończonej spoczywającej na sprężystym podłożu (sztywność belki EJ_z współczynnik oporu podłoża k).



Rozdział 3

Linie wpływowe

Linie wpływowe to pojęcia zaczerpnięte wprost z mechaniki budowli [4, 12] pozwalające ocenić zależność pewnych wielkości przekrojowych, najczęściej sił wewnętrznych, ale także przemieszczenia w określonym przekroju konstrukcji, od obciążenia ruchomego. W praktyce inżynierskiej linie wpływowe znajdują zastosowanie w konstrukcjach mostowych, estakadach oraz belkach podsuwnicowych. Podczas tworzenia linii wpływowych przyjmujemy dwa podstawowe założenia odnośnie charakteru obciążenia działającego na konstrukcję

- jest ono zredukowane do siły skupionej o wartości jednostkowej, której kierunek oraz zwrot są zgodne z kierunkiem oraz zwrotem siły ciężenia powszechnego,
- ruch obciążenia następuje w sposób quasi-statyczny, tzn. nie towarzyszą mu drgania ani dodatkowe obciążenia pochodzące od sił bezwładności.

Można podać przynajmniej dwie definicje linii wpływowej

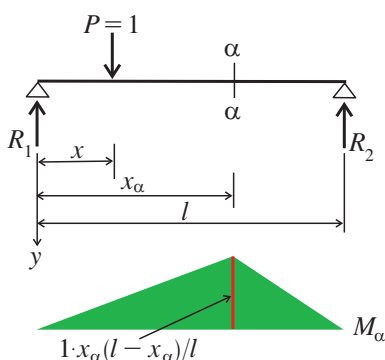
- według pierwszej, wywodzącej się z mechaniki budowli, przedstawia ona wartość pewnej wielkości (siły poprzecznej, momentu zginającego bądź przemieszczenia) w ustalonym miejscu x_α wywołanej działaniem siły skupionej P o wartości jednostkowej przyłożonej w punkcie o zmiennym położeniu x ,
- według drugiej, pochodzącej z matematyki, stanowi funkcję Greena danej wielkości.

3.1. Linie wpływowe belki swobodnie podpartej

3.1.1. Linia wpływowa momentu zginającego

Rozpatrzmy belkę swobodnie podpartą, jak pokazano na rysunku 3.1, której obciążenie stanowi siła skupiona $P = 1$ zaczepiona w punkcie x . Analizę rozpoczynamy od zapisania oraz rozwiązania równań równowagi

$$\begin{aligned} (y) \quad -R_1 + P - R_2 &= 0 \quad \rightarrow \quad R_1 = P - R_2 = 1 \cdot \frac{l-x}{l} \\ (0) \quad Px - R_2l &= 0 \quad \rightarrow \quad R_2 = P \frac{x}{l} = 1 \cdot \frac{x}{l}. \end{aligned} \quad (3.1)$$



Rysunek 3.1. Linia wpływowa momentu zginającego dla belki swobodnie podpartej.

Następnie, aby określić równania linii wpływowej momentu zginającego w przekroju $\alpha - \alpha$, należy rozpatrzyć dwa przypadki

- gdy siła $P = 1$ znajduje się po lewej stronie przekroju $\alpha - \alpha$

$$\begin{aligned} M_\alpha(x_\alpha; x) &= R_1 x_\alpha - 1 \cdot (x_\alpha - x) = 1 \cdot \frac{l-x}{l} - 1 \cdot (x_\alpha - x) \\ &= 1 \cdot \frac{l-x_\alpha}{l}, \quad \text{gdy } 0 < x < x_\alpha \end{aligned} \quad (3.2)$$

- gdy siła $P = 1$ znajduje się po prawej stronie przekroju $\alpha - \alpha$

$$M_\alpha(x_\alpha; x) = R_1 x_\alpha = 1 \cdot \frac{l-x}{l} x_\alpha, \quad \text{gdy } x_\alpha < x < l. \quad (3.3)$$

Oba wzory na moment zginający w przekroju $\alpha - \alpha$ są funkcjami dwóch argumentów x_α oraz x i reprezentują linie proste przecinające się dla wspólnej wartości $1 \cdot x_\alpha(l - x_\alpha)/l$.

3.1.2. Linia wpływowa przemieszczenia

Określenie linii wpływowej przemieszczenia jest trudniejszym zadaniem, bowiem wymaga rozwiązania równania różniczkowego linii ugięcia belki. W celu uproszczenia rachunków przytoczono poniżej metodę Maxwella–Mohra, która pomimo charakteryzujących ją trików okazuje się bardzo skutecznym narzędziem w przypadku występowania jedynie obciążeń siłami skupionymi, którym odpowiadają wykresy momentu zginającego o kształcie trójkąta.

Metoda Maxwella–Mohra

W metodzie Maxwella–Mohra wykorzystywane jest matematyczne podobieństwo między równaniem różniczkowym ugięcia belki oraz twierdzeniem Schwedlera–Żurawskiego. Przeprowadźmy równoległe dwukrotne całkowanie odpowiednich równań różniczkowych opisujących oba zagadnienia, pamiętając jednak o odróżnieniu wielkości występujących w twierdzeniu Schwedlera–Żurawskiego symbolem daszka

$$\begin{aligned}
 y'' = \vartheta' &= -\frac{M_g(x)}{EJ_z} & \longleftrightarrow & \frac{d^2\widehat{M}_g}{dx^2} = \frac{d\widehat{T}}{dx} = -\widehat{q}(x) \\
 y' = \vartheta &= -\int \frac{M_g(x)}{EJ_z} dx + C_1 & \longleftrightarrow & \frac{d\widehat{M}_g}{dx} = \widehat{T} = -\int \widehat{q}(x) dx + D_1 \\
 y &= -\int \left(\int \frac{M_g(\xi)}{EJ_z} d\xi \right) dx + C_1 x + C_2 & \longleftrightarrow & \widehat{M}_g = -\int \left(\int \widehat{q}(\xi) d\xi \right) dx + D_1 x + D_2.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

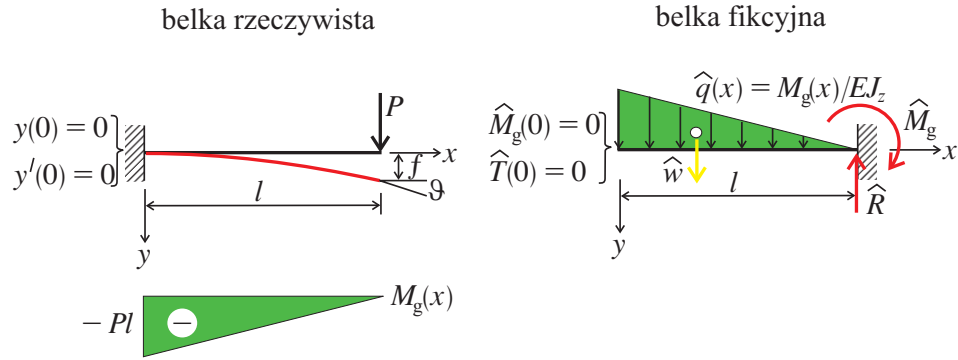
Z powyższych zależności wynika, iż rozwiązania będą identyczne, jeśli funkcje podcałkowe są równe, tzn. $q(x) = \widehat{M}_g(x)/EJ_z$, oraz stałe całkowania pozostają parami równe $C_1 = D_1$, $C_2 = D_2$. Można wówczas rozważać dwie belki, dla których zachodzi odpowiedniość pomiędzy następującymi parami wielkości.

Tablica 3.1. Schematy belek rzeczywistej oraz fikcyjnej w metodzie Maxwella–Mohra.

belka rzeczywista	← odpowiedniość →	belka fikcyjna
$y(x)$		$\widehat{M}_g(x)$
$y'(x) = \vartheta(x)$		$\widehat{T}(x)$

W celu lepszego wyjaśnienia wszystkich trików metody, poniżej zaprezentowano przykład dotyczący elementarnej belki wspornikowej – rys. 3.2.

Warto również przypomnieć kolejne kroki procedury wynikające ze wzorów (3.4) oraz tabeli 3.1:



Rysunek 3.2. Metoda Maxwella–Mohra w zastosowaniu do belki wspornikowej.

- belka fikcyjna ma taką samą długość jak rzeczywista,
- utwierdzeniu belki rzeczywistej odpowiada swobodny koniec belki fikcyjnej,
- swobodnemu końcowi belki rzeczywistej odpowiada utwierdzenie belki fikcyjnej,
- wykresowi momentu zginającego podzielonemu przez sztywność EJ_z dla belki rzeczywistej odpowiada rozkład obciążenia $\hat{q}(x)$ dla belki fikcyjnej,
- dla trójkątnego rozkładu obciążenia na belce fikcyjnej obliczamy wypadkową

$$\hat{w} = \frac{1}{2} \frac{Pl}{EJ_z} l = \frac{Pl^2}{2EJ_z}, \quad (3.5)$$

- strzałce ugięcia f dla belki rzeczywistej odpowiada moment utwierdzenia \hat{M}_u dla belki fikcyjnej

$$f = \hat{M}_u = \hat{w} \frac{2}{3} l = \frac{Pl^3}{3EJ_z}, \quad (3.6)$$

- kątowni obrotu ϑ dla belki rzeczywistej odpowiada reakcja \hat{R} dla belki fikcyjnej

$$\vartheta = \hat{R} = \hat{w} = \frac{Pl^2}{2EJ_z}. \quad (3.7)$$

Zastosowanie metody Maxwella–Mohra do obliczenia linii wpływowych przemieszczenia

Przystępując do określenia równania linii wpływowej przemieszczenia pionowego belki o schemacie podanym na rysunku 3.1, wykorzystujemy metodę Maxwella–Mohra, zapisując

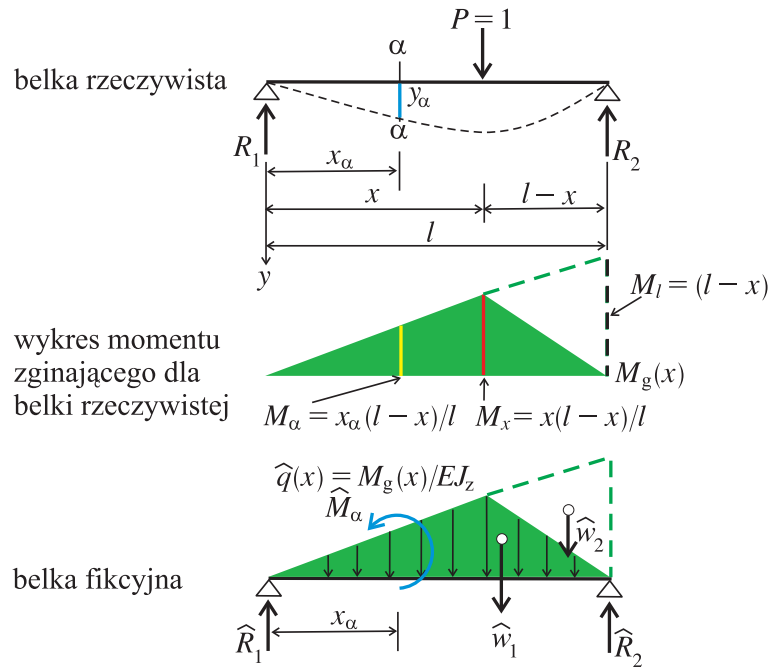
$$y_\alpha(x_\alpha; x) = \widehat{M}_\alpha(x_\alpha; x). \quad (3.8)$$

Reakcje belki są określone wzorami (3.1) i wynoszą

$$R_1 = \frac{l-x}{l}, \quad R_2 = \frac{x}{l}, \quad (3.9)$$

natomiast wartość momentu zginającego bezpośrednio w punkcie przyłożenia siły $P = 1$ jest równa

$$M_x = R_1 x = (l-x) \frac{x}{l}. \quad (3.10)$$



Rysunek 3.3. Pomocniczy schemat do określenia linii wpływowej przemieszczenia belki.

Traktując następnie wykres momentu zginającego jako obciążenie dla belki fikcyjnej, można obliczyć wartość reakcji

$$\widehat{R}_1 = \frac{1}{l} \left[\overbrace{\frac{1}{2}(l-x)l}^{\widehat{w}_1} \frac{l}{3} - \overbrace{\frac{1}{2}(l-x)^2}^{\widehat{w}_2} \frac{1}{3}(l-x) \right] \frac{1}{EJ_z} = \frac{l-x}{6lEJ_z} [l^2 - (l-x)^2] \quad (3.11)$$

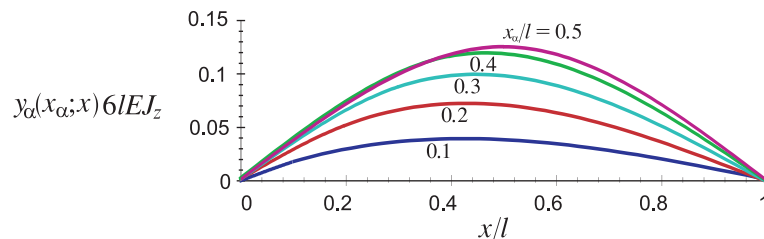
oraz wartość momentu $\widehat{M}_\alpha(x_\alpha; x)$, w przypadku gdy siła znajduje się po prawej stronie przekroju $\alpha - \alpha$

$$\widehat{M}_\alpha(x_\alpha; x) = \widehat{R}_1 x_\alpha - \frac{1}{2} M_\alpha x_\alpha \frac{x_\alpha}{3} \frac{1}{EJ_z} = \frac{(l-x)x_\alpha}{6lEJ_z} [l^2 - (l-x)^2 - x_\alpha^2] \quad (3.12)$$

jest to jednocześnie prawa gałąź linii wpływowej (3.8). Natomiast lewą gałąź można łatwo otrzymać, stosując do wzoru (3.12) zasadę wzajemności Bettiego–Maxwella^{*)}, która sprowadza się do prostej zamiany argumentów $x \leftrightarrow x_\alpha$, czyli

$$y_\alpha(x_\alpha; x) = \frac{(l-x_\alpha)x}{6lEJ_z} [l^2 - (l-x_\alpha)^2 - x^2], \quad \text{gdym} \quad x_\alpha \leq x. \quad (3.13)$$

Przykładowe przebiegi linii wpływowych zostały pokazane na rys. 3.4.



Rysunek 3.4. Linie wpływowe przemieszczenia belki swobodnie podpartej odpowiadające różnym wartościom parametru x_α/l .

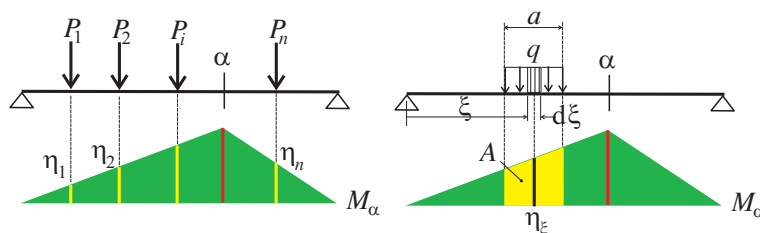
3.2. Zastosowanie linii wpływowych

Podstawowy problem związany z działaniem obciążenia ruchomego dotyczy oczywiście wskazania takiego jego położenia, aby dana wielkość statyczna osiągała ekstremalną wartość. Linie wpływowe są zatem narzędziem doskonale nadającym się do rozwiązania tego zadania.

^{*)}Zasada wzajemności Bettiego–Maxwella zostanie wyjaśniona w jednym z następnych rozdziałów dotyczących metody sił.

W przypadku gdy na belkę swobodnie podpartą działa układ n sił P_1, \dots, P_n sprzężonych (zachowujących ustalone odstęp) – przykładowo pociąg, wartość momentu zginającego w przekroju $\alpha - \alpha$ jest równa

$$M_\alpha = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + \dots + P_n\eta_n = \sum_{i=1}^n P_i\eta_i. \quad (3.14)$$



Rysunek 3.5. Zastosowanie linii wpływowych.

Bardzo podobna sytuacja zachodzi, gdy na belkę działa obciążenie odcinkowe o intensywności $q(x)$, wtedy otrzymujemy

$$M_\alpha = \int_{x-a/2}^{x+a/2} q(\xi)\eta_\xi d\xi \quad (3.15)$$

przy czym ponieważ najczęstszym rodzajem obciążenia jest obciążenie równomiernie rozłożone $q(x) = q$, całka we wzorze (3.15) przyjmuje uproszczoną postać

$$M_\alpha = q \int_{x-a/2}^{x+a/2} \eta_\xi d\xi = qA \quad (3.16)$$

gdzie A oznacza pole powierzchni zaznaczone kolorem żółtym na prawym ze schematów pokazanych na rys. 3.5. Łącząc następnie oba omawiane przypadki oraz dokonując uogólnienia dla m niezależnych obciążeń stałych, dostajemy

$$M_\alpha = \sum_{i=1}^n P_i\eta_i + \sum_{j=1}^m q_j A_j. \quad (3.17)$$

W zastosowaniach należy ustawić obciążenie na belce tak, aby moment zginający M_α przyjmował największą wartość, w tym celu pomocne są następujące zasady:

- ciężar własny działa na całą linię wpływową,
- największe co do wartości obciążenia ruchome, zarówno typu skupionego, jak i rozłożonego, należy ustawić nad największą rzędną linii wpływowej,
- gdy linia wpływowa składa się z dwóch gałęzi o różnych znakach, obciążeniami ruchomymi należy obciążyć za pierwszym razem wszystkie dodatnie jej części, zaś za drugim razem wszystkie ujemne,
- kryterium rozstrzygającym o rozmieszczeniu obciążenia jest odpowiednia wartość momentu zginającego,
- dla różnych wielkości oraz przekrojów najbardziej niekorzystne są zazwyczaj różne położenia obciążenia.

3.2.1. Najbardziej niekorzystne położenie obciążenia

Rozważając układ sił skupionych ponad linią wpływową o kształcie trójkąta, poszukiwana jest największa wartość momentu zginającego

$$M_\alpha = \sum_i P_i^{(l)} \eta_i^{(l)} + \sum_j P_j^{(p)} \eta_j^{(p)} \quad (3.18)$$

gdzie górne indeksy (l) oraz (p) odnoszą się do wielkości związanych z odpowiednio lewą bądź prawą gałęzią linii wpływowej. Dokonując różniczkowania (3.18)

$$\frac{dM_\alpha}{dx} = \sum_i P_i^{(l)} \frac{d\eta_i^{(l)}}{dx} + \sum_j P_j^{(p)} \frac{d\eta_j^{(p)}}{dx} \quad (3.19)$$

oraz wprowadzając dodatkowe oznaczenia

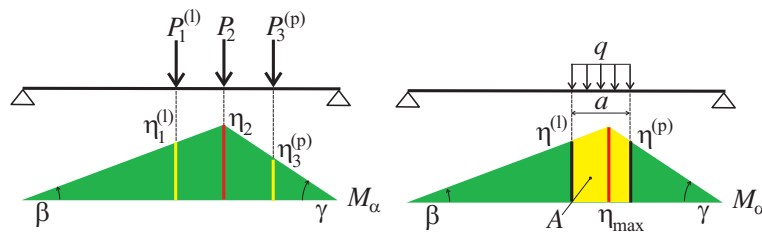
$$\frac{d\eta_i^{(l)}}{dx} = \tan \beta, \quad \frac{d\eta_j^{(p)}}{dx} = -\tan \gamma, \quad (3.20)$$

dostajemy

$$\frac{dM_\alpha}{dx} = \tan \beta \sum_i P_i^{(l)} - \tan \gamma \sum_j P_j^{(p)}. \quad (3.21)$$

Warunkiem osiągnięcia maksimum przez moment zginający M_α jest zatem zmiana znaku jego pochodnej z plusa na minus. Ponieważ w równaniu (3.21) oba składniki po prawej stronie mają stałe wartości, taka sytuacja zachodzi wyłącznie w wypadku, gdy jedna z sił przechodzi z jednej gałęzi linii wpływowej na drugą, czyli znajduje się nad wierzchołkiem linii wpływowej. W konsekwen-

cji, najniekorzystniejszemu położeniu układu sił skupionych odpowiada znajdowanie się jednej z nich, przykładowo środkowej, dokładnie nad wierzchołkiem linii wpływowej. W przypadku obciążenia belki obciążeniem odcinkowym o stałej intensywności q warunek maksimum momentu zginającego jest spełniony, gdy $\eta^{(l)} = \eta^{(p)}$, co jest równoznaczne największej wartości pola A , zaznaczonego kolorem żółtym na rys. 3.6.



Rysunek 3.6. Schematy najniekorzystniejszego położenia obciążenia ponad linią wpływową momentu zginającego.

3.3. Przykłady

Wyznaczenie linii wpływowych obu reakcji oraz siły poprzecznej dla belki omawianej w punkcie 3.1. bieżącego rozdziału przebiega następująco:

- znając wartości reakcji – patrz równania (3.1)

$$R_1 = 1 \cdot (l - x)/l \quad R_2 = 1 \cdot x/l \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.22)$$

można łatwo wykreślić ich linie wpływowe – patrz lewy rys. 3.7,

- w celu wyznaczenia linii wpływowej siły poprzecznej T_α należy rozważyć dwa przypadki:

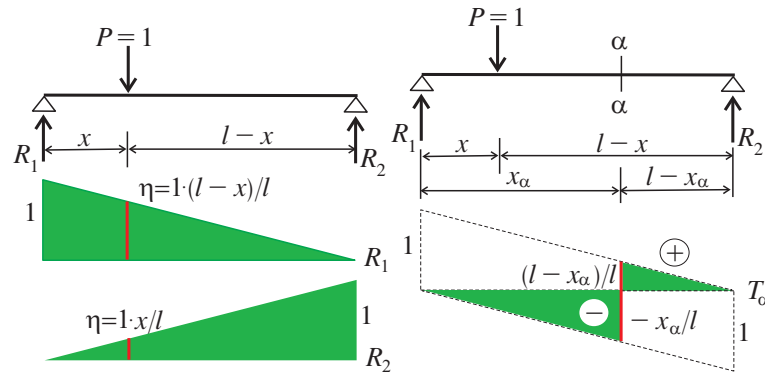
gdy siła $P = 1$ znajduje się po lewej stronie przekroju $\alpha - \alpha$, wtedy

$$T_\alpha = -R_2 = -1 \cdot x_\alpha/l \quad (3.23)$$

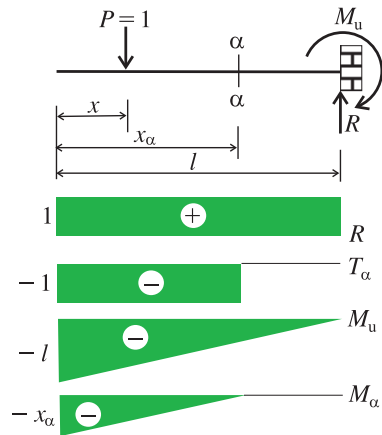
gdy siła $P = 1$ znajduje się po prawej stronie przekroju $\alpha - \alpha$, wtedy

$$T_\alpha = R_1 = 1 \cdot (l - x_\alpha)/l \quad (3.24)$$

co pozwala naszkicować prawy wykres 3.7.



Rysunek 3.7. Linie wpływu reakcji oraz siły poprzecznej belki swobodnie podpartej.



Rysunek 3.8. Linie wpływowe belki wspornikowej.

Określenie linii wpływowej belki wspornikowej pokazanej na rys. 3.8 rozpoczynamy od zapisania oraz rozwiązania równań równowagi

$$\begin{aligned}
 (y) \quad P - R &= 0 & \rightarrow & R = P = 1 \\
 (l) \quad -P(l - x) + M_u &= 0 & \rightarrow & M_u = P(l - x) = 1 \cdot (l - x)
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

zależności (3.25) stanowią poszukiwane linie wpływu reakcji oraz momentu utwierdzenia. W następnej kolejności, w celu wyznaczenia linii wpływowych siły poprzecznej T_α oraz momentu zginającego M_α , należy rozpatrzyć dwa

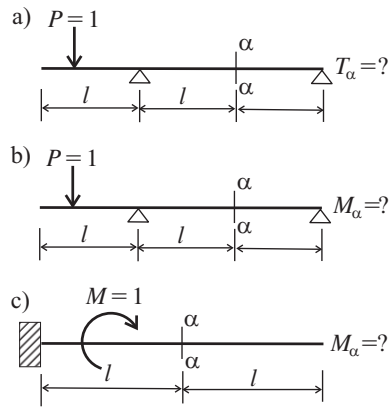
przypadki, w zależności od tego, gdy siła $P = 1$ znajduje się po lewej stronie przekroju $\alpha - \alpha$ oraz gdy znajduje się po stronie przeciwnej, otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \begin{cases} -1 & \text{gdy } x \in [0, x_\alpha] \\ 0 & \text{gdy } x \in [x_\alpha, l] \end{cases} \\ M_\alpha &= \begin{cases} -1(x_\alpha - x) & \text{gdy } x \in [0, x_\alpha] \\ 0 & \text{gdy } x \in [x_\alpha, l] \end{cases} \end{aligned} \quad (3.26)$$

co zostało zilustrowane na rys. 3.8.

3.4. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania

Wyznaczyć linie wpływowe dla belek jak na poniższym rysunku.



Rozdział 4

Transformacja naprężenia i odkształcenia, koło Mohra

Przystępując do analizy stanu naprężenia bądź odkształcenia, można skorzystać z przynajmniej dwóch podejść. W pierwszym, tradycyjnym rozpatrywana jest równowaga nieskończenie małego elementu konstrukcji na podstawie równań w postaci pełnej, w przeciwieństwie do drugiego, nowocześniejszego podejścia, bazującego na bardziej zaawansowanej notacji wskaźnikowej. W niniejszym rozdziale zdecydowano się na prezentację pierwszego ze sformułowań, ograniczonego dodatkowo do przypadku płaskiego, opatrzonego w niektórych miejscach komentarzem dotyczącym zapisu macierzowego. Koło Mohra to klasyczny sposób przedstawienia w sposób graficzny zagadnień związanych z transformacją stanu naprężenia bądź odkształcenia.

4.1. Transformacja naprężenia

Płaski stan naprężenia występuje w prostokątnym elemencie nieznaczonej grubości, którego krawędzie zorientowane zostały zgodnie z osiami układu współrzędnych x, y , poddanego działaniu składowych naprężenia osiowych σ_x, σ_y oraz stycznych τ_{xy}, τ_{yx} , tak jak pokazano na rys. 4.1. Wymienione składowe można zgrupować w kwadratowej macierzy naprężenia o wymiarze 2×2 , którą dodatkowo charakteryzuje symetria $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

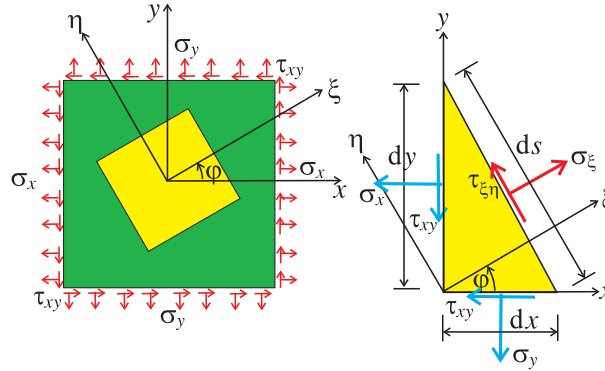
Postać macierzy naprężenia (4.1) dla płaskiego stanu naprężenia stanowi

zatem szczególny przypadek, tzw. podmacierz, ogólniejszego trójosiowego stanu naprężenia

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

w którym pominięte zostały trzeci wiersz oraz trzecia kolumna.

W celu wyprowadzenia wzorów transformacyjnych dla macierzy naprężenia przy obrocie układu współrzędnych o kąt φ należy wziąć pod uwagę inny element prostokątny (na rysunku 4.1 wypełniony kolorem żółtym) o krawędziach zgodnych z osiami obróconego układu współrzędnych ξ, η .



Rysunek 4.1. Transformacja płaskiego stanu naprężenia przez obrót.

Nieskończenie mały element służący do wyprowadzenia układu równań równowagi ma postać trójkąta o dwóch krawędziach zgodnych z osiami x, y oraz trzeciej ukośnej, czyli zgodnej z osią η , bądź, ujmując to jeszcze ściślej, o normalnej zgodnej z osią ξ . Do kolejnych krawędzi elementu trójkątnego przyłożone zostały odpowiednie składowe naprężenia. Warunkiem koniecznym równowagi takiego elementu jest oczywiście spełnienie dwóch równań równowagi dla rzutów sił przekrojowych, względem osi układu ξ, η .

Równanie równowagi rzutów wszystkich sił przekrojowych ΣP_ξ na kierunek ξ jest następujące

$$-\sigma_x dy \cos \varphi - \sigma_y dx \sin \varphi - \tau_{xy} dy \sin \varphi - \tau_{xy} dx \cos \varphi + \sigma_\xi ds = 0 \quad (4.3)$$

pomnożone obustronnie przez $\frac{1}{ds}$ daje

$$-\sigma_x \frac{dy}{ds} \cos \varphi - \sigma_y \frac{dx}{ds} \sin \varphi - \tau_{xy} \frac{dy}{ds} \sin \varphi - \tau_{xy} \frac{dx}{ds} \cos \varphi + \sigma_\xi = 0 \quad (4.4)$$

zaś uwzględnienie zależności

$$\frac{dy}{ds} = \cos \varphi \quad \frac{dx}{ds} = \sin \varphi \quad (4.5)$$

prowadzi do postaci

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ &= \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \frac{\sigma_y}{2}(1 - \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \tau_{xy} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (4.6)$$

z której po pogrupowaniu składników przy tych samych funkcjach trygonometrycznych otrzymujemy

$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi. \quad (4.7)$$

W celu otrzymania wzoru określającego składową naprężenia σ_η najprościej posłużyć się wzorem (4.7), podstawiając zamiast kąta φ kąt $\varphi + \pi/2$, dostajemy wówczas

$$\sigma_\eta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi. \quad (4.8)$$

Natomiast równanie równowagi rzutów sił przekrojowych ΣP_η na kierunek styczny przyjmuje postać

$$\sigma_x dy \sin \varphi - \sigma_y dx \cos \varphi - \tau_{xy} dy \cos \varphi - \tau_{xy} dx \sin \varphi + \tau_{\xi\eta} ds = 0 \quad (4.9)$$

która po uporządkowaniu oraz zastosowaniu funkcji trygonometrycznych podwojonego argumentu daje wzór

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi. \quad (4.10)$$

Struktura wzorów (4.7, 4.8, 4.10) wskazuje, iż wszystkie trzy składowe naprężenia $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ są liniowymi funkcjami składowych naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ oraz odpowiednich funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta φ lub równoważnie iloczynami składowych naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ oraz odpowiednich iloczynów funkcji trygonometrycznych pojedynczego kąta φ . Taka reguła transformacyjna dowodzi, że macierz naprężenia (4.1) zachowuje się w sposób tensorowy, czyli jej składowe przy obrocie podlegają zasadzie

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi & \tau_{\xi\eta} \\ \tau_{\eta\xi} & \sigma_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Z algebry macierzy/tensorów wynika, iż każdej macierzy naprężenia w postaci (4.1) odpowiada postać scharakteryzowana przez jej wartości główne, czyli

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

zatem w celu ich obliczenia przeprowadzamy klasyczny ciąg operacji matematycznych związanych z wyznaczaniem ekstremum funkcji. Rozpoczynamy od obliczenia pierwszej pochodnej składowej normalnej naprężenia σ_ξ względem kąta φ

$$\frac{d\sigma_\xi}{d\varphi} = -2\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + 2\tau_{xy} \cos 2\varphi \quad (4.13)$$

która po przyrównaniu do zera daje warunek

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi = 0 \quad (4.14)$$

który na mocy (4.1) jest równoważny

$$\tau_{\xi\eta} = 0 \quad (4.15)$$

czyli wartościom głównym naprężenia odpowiadają zerowe składowe styczne. Równocześnie warunek (4.14) pozwala obliczyć kąt określający nachylenie składowej głównej naprężenia względem osi x

$$\varphi = \varphi_0 \longrightarrow \tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4.16)$$

wykorzystując następnie znane związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi argumentu $2\varphi_0$

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} 2\varphi_0)^2}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ \sin 2\varphi_0 &= \frac{\operatorname{tg} 2\varphi_0}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} 2\varphi_0)^2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

wykonujemy podstawienie (4.17) do równań (4.7) i (4.8), doprowadzając do zależności na składowe główne (ekstremalne) naprężenia

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{\min} = \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ekstremalne wartości składowych stycznych naprężenia są wyznaczone w analogiczny sposób, tzn. poprzez przyrównanie pierwszej pochodnej składowej stycznej naprężenia $\tau_{\xi\eta}$ do zera

$$\frac{d\tau_{\xi\eta}}{d\varphi} = -2\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - 2\tau_{xy} \sin 2\varphi = 0 \quad (4.19)$$

co sprowadza się do spełnienia warunku

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi = 0 \quad (4.20)$$

czyli

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_0} = -\operatorname{ctg}\varphi_0 \quad (4.21)$$

zatem kierunki ekstremalnych składowych stycznych są obrócone o kąt $\pm 45^\circ$ względem kierunków głównych

$$\tau_{\max} = \tau_{xy}|_{\varphi=\varphi_1} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin \left[2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.22)$$

4.2. Transformacja odkształcenia

Macierz odkształcenia w przypadku płaskiego stanu przyjmuje następującą postać

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

zatem w porównaniu z macierzą naprężenia (4.1) różni się jedynie mnożnikiem 0.5 poprzedzającym składowe styczne. Konsekwencją powyższego podobieństwa pozostają wzory określające zarówno składowe odkształcenia w układzie osi obróconych

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi \\ \varepsilon_\eta &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi \\ \gamma_{\xi\eta} &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\varphi + \gamma_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (4.24)$$

jak i składowe główne odkształcenia

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \varepsilon_{\min} = \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

przy czym obie grupy wzorów wynikają odpowiednio z wzorów (4.7, 4.8, 4.10) bądź (4.18) po formalnej zamianie symboli $\sigma_x \rightarrow \varepsilon_x$, $\sigma_y \rightarrow \varepsilon_y$ oraz $\tau_{xy} \rightarrow \gamma_{xy}/2$.

4.3. Koło Mohra

Na wstępie warto przypomnieć, iż koło Mohra stanowi graficzną interpretację stanu naprężenia, w związku z tym zapisanie równania jak również reguły jego kreślenia należy poprzedzić ponownym przytoczeniem wzorów (4.7, 4.8, 4.10) przekształconych do postaci

$$\begin{aligned}\sigma_\xi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \sigma_\eta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \right) \\ \tau_{\xi\eta} &= - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.\end{aligned}\quad (4.26)$$

W celu eliminacji parametru φ w pierwszym kroku kolejne równania zostają podniesione do kwadratu

$$\begin{aligned}\left(\sigma_\xi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi\right)^2 \\ \left(\sigma_\eta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 &= \left[-\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi\right)\right]^2 \\ \tau_{\xi\eta}^2 &= \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi\right)^2.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Ponieważ dwa pierwsze z równań (4.27) mają identyczne prawe strony, korzystne jest wprowadzenie nowych oznaczeń $\sigma = \sigma_\xi = \sigma_\eta$ oraz równocześnie $\tau = \tau_{\xi\eta}$, wówczas trzy równania (4.27) można zastąpić przez następujące dwa

$$\begin{aligned}\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi\right)^2 \\ \tau^2 &= \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi\right)^2.\end{aligned}\quad (4.28)$$

Kolejne operacje matematyczne polegają kolejno na otwieraniu nawiasów prawych stron, dodawaniu stronami oraz redukcji składników podobnych, które w efekcie prowadzą do równania

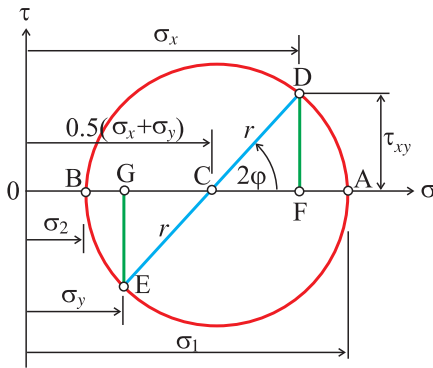
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (4.29)$$

jeszcze wyraźniej opisującego okrąg

$$(\sigma - \overline{OC})^2 + \tau^2 = r^2 \tag{4.30}$$

po wprowadzeniu dodatkowych oznaczeń dla współrzędnej środka $\overline{OC} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ oraz promienia $r = \sqrt{[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}]^2 + \tau_{xy}^2}$. Zarówno składowe naprężenia w układzie osi x, y , jak i składowe główne naprężenia uzyskują jasną interpretację geometryczną – patrz rys. 4.2

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \overline{OF} = \overline{OC} + r \cos 2\varphi \\ \sigma_y &= \overline{OG} = \overline{OC} - r \cos 2\varphi \\ \tau_{xy} &= \overline{GE} = \overline{FD} = \pm r \sin 2\varphi \\ \sigma_1 &= \overline{OA} \\ \sigma_2 &= \overline{OB}. \end{aligned} \tag{4.31}$$



Rysunek 4.2. Koło Mohra stanu naprężenia.

4.4. Przykłady

Przykład 1

Obliczenie wartości głównych naprężenia odpowiadających stanowi $\sigma_x = 60$ MPa, $\sigma_y = 0$ MPa, $\tau_{xy} = 40$ MPa można przeprowadzić na przynajmniej dwa sposoby:

- sposób I – wykorzystując wzory (4.18) prowadzące do rozwiązania w postaci

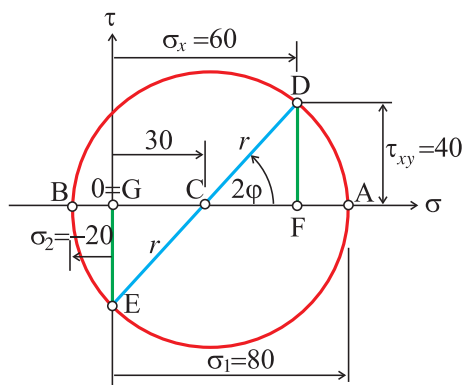
$$\sigma_{\max/\min} = \frac{60 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - 0}{2}\right)^2 + 40^2} = 30 \pm 50 = \begin{cases} 80 \\ -20 \end{cases},$$

- sposób II – korzystając z koła Mohra – ponieważ $\sigma_y = 0$, zatem $0 = G$ (początek układu zgodny z punktem G)

współrzędna środka $\overline{OC} = 0.5(60 + 0) = 30$

promień $r = \sqrt{\overline{OC}^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$

$$\sigma_{\max/\min} = \overline{OC} \pm r = 30 \pm 50 = \begin{cases} 80 \\ -20 \end{cases} .$$



Rysunek 4.3. Koło Mohra stanu naprężenia – przykład 1.

Przykład 2

Obliczenie ekstremalnej wartości składowej stycznej naprężenia odpowiadającej stanowi $\sigma_x = 50$ MPa, $\sigma_y = -50$ MPa, $\tau_{xy} = 0$ MPa również wykonamy na dwa sposoby pozwalające na wzajemną weryfikację:

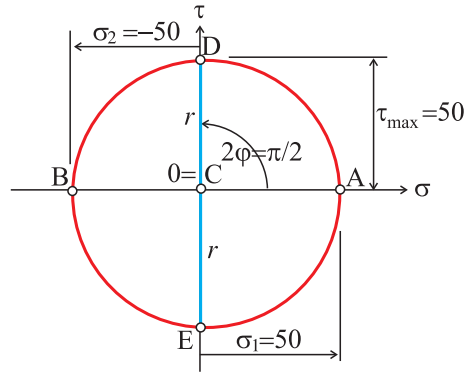
- sposób I – stosując wzór (4.22)

$$\tau_{\max} = \frac{50 - (-50)}{2} = 50$$

- sposób II – posilując się kołem Mohra – ponieważ $\sigma_x = -\sigma_y$, zatem $0 = C$ (początek układu zgodny z punktem C, tzn. ze środkiem koła), równocześnie $\tau_{xy} = 0$, a więc $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, czyli są składowymi głównymi naprężenia

promień $r = \overline{0A} = |\overline{0B}| = 50$

$$\tau_{\max} = r = 50.$$



Rysunek 4.4. Koło Mohra stanu naprężenia – przykład 2.

4.5. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania

Wykorzystując wzory transformacyjne oraz konstrukcję koła Mohra, obliczyć:

- wartości główne naprężenia odpowiadające stanowi $\sigma_x = 30$ [MPa], $\sigma_y = -30$ [MPa], $\tau_{xy} = 40$ [MPa],
- wartości główne naprężenia odpowiadające stanowi $\sigma_x = 40$ [MPa], $\sigma_y = -20$ [MPa], $\tau_{xy} = 40$ [MPa],
- ekstremalną wartość składowej stycznej naprężenia odpowiadającą stanowi $\sigma_x = 50$ [MPa], $\sigma_y = -10$ [MPa], $\tau_{xy} = 40$ [MPa],
- ekstremalną wartość składowej stycznej naprężenia odpowiadającą stanowi $\sigma_x = 40$ [MPa], $\sigma_y = -20$ [MPa], $\tau_{xy} = 40$ [MPa],
- wartości główne odkształcenia odpowiadające stanowi $\varepsilon_x = 6$ [%], $\varepsilon_y = 0$ [%], $\gamma_{xy} = 8$ [%] (uwaga: do konstrukcji koła Mohra dla składowych odkształcenia należy uwzględnić stosowny mnożnik przed składową styczną $0.5\gamma_{xy}$).

Rozdział 5

Metoda sił

W tym rozdziale zostanie omówiona metoda sił stanowiąca jedno z podstawowych narzędzi do obliczania przemieszczeń konstrukcji i równocześnie do rozwiązywania konstrukcji statycznie niewyznaczalnych, czyli takich, gdy liczba niewiadomych reakcji przewyższa liczbę równań równowagi. W stosunku do metody przemieszczeń oraz metody elementów skończonych, metodę sił charakteryzują intuicyjność oraz prostota sformułowania.

5.1. Układ liniowo-sprężysty

Zanim przejdziemy do omawiania podstaw metody sił, wskazane jest przypomnienie podstawowych założeń oraz pojęć stanowiących wprowadzenie do niej. Pierwszym z pojęć jest układ liniowo-sprężysty, inaczej zwany układem Clapeyrona, opisany poniższym równaniem

$$q_i = c_{i1}Q_1 + c_{i2}Q_2 + \dots + c_{in}Q_n \quad (5.1)$$

w którym kolejne symbole oznaczają:

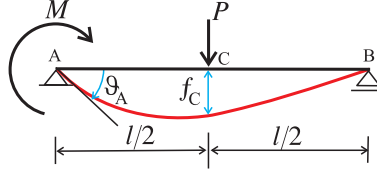
q_i – uogólnione przemieszczenie (przemieszczenie lub kąt obrotu) w miejscu i ,
 Q_k – uogólnioną siłę (siłę lub moment) przyłożoną w miejscu k ,
 c_{ik} – współczynnik podatności.

Na to aby daną konstrukcję można było uznać za układ liniowo-sprężysty, wymagane jest spełnienie przez nią szeregu następujących warunków:

- materiał jest liniowo-sprężysty, czyli podlegający prawu Hooke’a,
- układ pozostaje w równowadze,
- przemieszczenia są małe,

- brak tarcia w przegubach.

Nietrudno zauważyć, iż przeważająca większość konstrukcji rozważanych w wytrzymałości materiałów bądź mechanice konstrukcji spełnia powyższe warunki. Jedyną trudnością może okazać się wyłączenie znanych zależności pomiędzy obciążeniami a wartościami przemieszczenia w terminach użytych we wzorze (5.1). W celu wyjaśnienia tej prostej zmiany oznaczeń weźmy pod uwagę prosty przykład belki swobodnie podpartej, pokazany na rys. 5.1.



Rysunek 5.1. Belka swobodnie podparta jako układ Clapeyrona.

Wyróżnione na rysunku wartości ugięcia oraz kąta obrotu można łatwo uzyskać, rozwiązując równanie różniczkowe linii ugięcia belki, dostajemy wówczas

$$f_C = \frac{Pl^3}{48EJ_z} + \frac{Ml^2}{16EJ_z} \quad \vartheta_A = \frac{Pl^2}{16EJ_z} + \frac{Ml}{3EJ_z} \quad (5.2)$$

następnie po wprowadzeniu nowych oznaczeń

$$\frac{P}{l^3} = c_{11} \quad \frac{M}{l^2} = c_{12} \quad \frac{f_C}{l^2} = c_{21} \quad \frac{\vartheta_A}{l} = c_{22} \quad (5.3)$$

równania (5.2) można przepisać jako

$$q_1 = c_{11}Q_1 + c_{12}Q_2 \quad q_2 = c_{21}Q_1 + c_{22}Q_2 \quad (5.4)$$

uzyskując równocześnie potwierdzenie, że rozpatrywana belka stanowi układ Clapeyrona.

Następnym istotnym pojęciem jest energia sprężysta nagromadzona w układzie Clapeyrona. W najogólniejszym przypadku, gdy mamy do czynienia z układem n uogólnionych sił Q_1, Q_2, \dots, Q_n działających na układ n uogólnionych przemieszczeń q_1, q_2, \dots, q_n , wtedy elementarna energia jest równa

$$\delta L = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n \quad (5.5)$$

natomiast całkowita energia, po wykonaniu operacji całkowania, wynosi odpowiednio

$$L = \frac{1}{2}(Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \dots + Q_n q_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i q_i. \quad (5.6)$$

5.2. Twierdzenie Castigliana

W bieżącym punkcie przytoczony zostanie szkic twierdzenia Castigliana odgrywającego kluczową rolę, między innymi podczas obliczania wartości współczynników macierzy podatności c_{ik} w układach liniowo-sprężystych. Rozpoczynamy od przepisania równania Clapeyrona (5.5) do postaci zwiniętej

$$q_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} Q_k \quad (5.7)$$

analogiczną formę nadajemy wzorowi na energię (5.6)

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(Q_i \sum_{k=1}^n c_{ik} Q_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} Q_i Q_k \quad (5.8)$$

dochodząc do stwierdzenia, iż energia jest jednorodną oraz kwadratową funkcją sił uogólnionych. Taka konkluzja pozwala zastosować tożsamość Eulera w stosunku do energii sprężystej

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial Q_i} Q_i \quad (5.9)$$

ale równocześnie ze wzoru (5.6) wynika

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i Q_i \quad (5.10)$$

zatem na mocy równości kolejnych współczynników obu wielomianów występujących pod znakami sum dochodzimy do zależności

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = q_i \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i. \quad (5.11)$$

Równania (5.11) stanowią treść twierdzenia Castigliana, które można odczytywać dwojako:

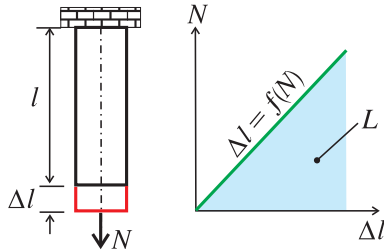
- pochodna cząstkowa energii sprężystej L liczona względem uogólnionej siły Q_i jest równa wartości uogólnionego przemieszczenia q_i ,
- pochodna cząstkowa energii sprężystej L liczona względem uogólnionego przemieszczenia q_i jest równa wartości uogólnionej siły Q_i ,

przy czym oczywiście para uogólniona siła Q_i – uogólnione przemieszczenie q_i dotyczą wielkości występujących w tym samym punkcie i oraz działających na tym samym kierunku.

5.3. Energia sprężystości

Wprowadzone w poprzednim punkcie twierdzenie Castigliana wiąże wartości uogólnionego przemieszczenia z wartością odpowiadającą mu siły uogólnionej za pomocą pochodnej energii sprężystej. Wskazane stają się zatem przypomnienie elementarnych wzorów demonstrujących sposób jej obliczania w podstawowych przypadkach wytrzymałościowych:

- rozciąganie (ściskanie)



Rysunek 5.2. Element rozciągany.

wartość wydłużenia pręta rozciąganego siłą normalną $N = \text{const}$, obliczona zgodnie z prawem Hooke'a, oraz odpowiednia wartość energii sprężystej wynoszą

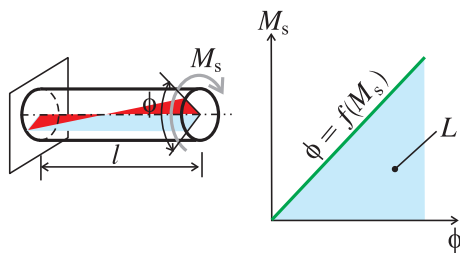
$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad \longrightarrow \quad L = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA} \quad (5.12)$$

uogólnieniem ostatniej zależności na przypadek działania siły normalnej, której wartość zależy od współrzędnej $N(x)$, jest

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2(x)}{EA} dx, \quad (5.13)$$

- skręcanie – wartość kąta skręcenia wału poddanego działaniu momentu skręcającego $M_s = \text{const}$, obliczona zgodnie z prawem Hooke'a, dla skręcania wraz z odpowiednią wartością energii sprężystej wynoszą

$$\phi = \frac{M_s l}{GJ_0} \quad \longrightarrow \quad L = \frac{1}{2} \frac{M_s^2 l}{GJ_0} \quad (5.14)$$

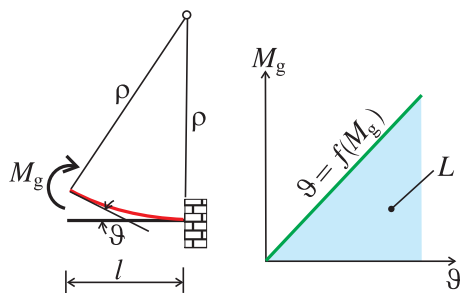


Rysunek 5.3. Element skręcany.

uogólnieniem powyższych zależności na przypadek działania momentu skręcającego zależnego od współrzędnej $M_s(x)$ jest następująca formuła

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_s^2(x)}{GJ_0} dx, \quad (5.15)$$

- zginanie – wartość kąta obrotu belki poddanej działaniu momentu zginającego $M_g = \text{const}$, obliczona zgodnie z teorią Bernoulliego, oraz odpowiednia wartość energii sprężystej są równe



Rysunek 5.4. Element zginany.

$$\vartheta = \frac{l}{\rho} = \frac{M_g}{EJ_z} \quad \longrightarrow \quad L = \frac{1}{2} \frac{M_g^2 l}{EJ_z} \quad (5.16)$$

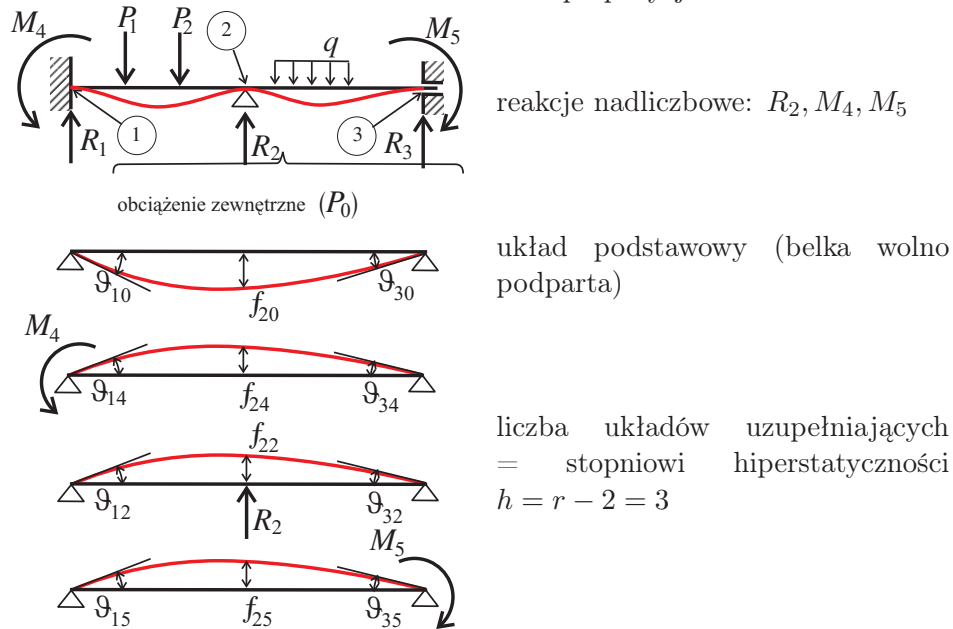
uogólnienie tej zależności na przypadek działania momentu zginającego zależnego od współrzędnej $M_g(x)$ wygląda następująco

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_g^2(x)}{EJ_z} dx. \quad (5.17)$$

5.4. Metoda superpozycji w zagadnieniach hiperstatycznych

Jedną z najbardziej naturalnych dróg do wprowadzenia metody sił prowadzi przez graficzną interpretację metody superpozycji zastosowanej do rozwiązania układu hiperstatycznego.

Tablica 5.1. Metoda superpozycji.



Rozważając przykładowo belkę pokazaną w tab. 5.1, kierujemy się następującym algorytmem:

- szacujemy stopień hiperstatyczności $h = 3$,
- wybieramy nadliczbowe hiperstatyczne w liczbie 3, np. R_2, M_4, M_5 , tak aby otrzymać belkę o schemacie statycznie wyznaczalnym stanowiącą równocześnie tzw. układ podstawowy,
- do układu podstawowego przykładamy obciążenia zewnętrzne P_0 , tzn. wszystkie siły skupione P_1, P_2 oraz obciążenie rozłożone q , lecz bez udziału nadliczbowych hiperstatycznych,
- wskazujemy układy uzupełniające w liczbie 3, odpowiadające kolejnym nadliczbowym hiperstatycznym,

- wykorzystując zasadę superpozycji, zapisujemy układ równań dla niewiadomych reakcji nadliczbowych

$$\begin{aligned} \vartheta_{10} + \vartheta_{14} + \vartheta_{12} + \vartheta_{15} &= 0 \\ f_{20} + f_{24} + f_{22} + f_{25} &= 0 \\ \vartheta_{30} + \vartheta_{31} + \vartheta_{32} + \vartheta_{35} &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.5. Układ równań kanonicznych metody sił

Układ równań (5.18) otrzymany w wyniku zastosowania metody superpozycji stanowi prototyp tzw. układu równań kanonicznych metody sił, w celu otrzymania którego wprowadzamy nowe oznaczenia

$$\begin{aligned} \vartheta_{10} &= \Delta_{10} & \vartheta_{14} &= \delta_{11}X_1 & \vartheta_{12} &= \delta_{12}X_2 & \vartheta_{15} &= \delta_{13}X_3 \\ f_{20} &= \Delta_{20} & f_{24} &= \delta_{21}X_1 & f_{22} &= \delta_{22}X_2 & f_{25} &= \delta_{23}X_3 \\ \vartheta_{30} &= \Delta_{30} & \vartheta_{31} &= \delta_{31}X_1 & \vartheta_{32} &= \delta_{32}X_3 & \vartheta_{35} &= \delta_{33}X_3 \\ M_4 &= X_1 & R_2 &= X_2 & M_5 &= x_3 \end{aligned} \quad (5.19)$$

by móc zapisać układ równań w standardowej postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.20)$$

lub stosując jeszcze ogólniejszy zapis wskaźnikowy w postaci

$$\delta_{ij}X_j + \Delta_{i0} = 0 \quad (5.21)$$

gdzie kolejne indeksy wskazują odpowiednio i – miejsce, bądź j – uogólnioną siłę.

W najogólniejszym przypadku układ kanoniczny metody sił (5.21) jest układem n równań wiążącym n niewiadomych hiperstatycznych za pomocą $n(n+1)/2$ współczynników podatności δ_{ij} oraz n współczynników podatności Δ_{i0} , zachodzi więc potrzeba wskazania skutecznej metody obliczania takich współczynników. Bardzo pomocna okazuje się w tym wypadku metoda bazująca na twierdzeniu Castigliana, w której podstawową rolę spełnia energia sprężystości

$$L = \frac{1}{2} \int \frac{N^2(x)}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M_s^2(x)}{GJ_0} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M_g^2(x)}{EJ_z} dx + \dots \quad (5.22)$$

W przypadku układów, w których dominuje zginanie (belki, ramy), funkcję podcałkową, czyli moment zginający daje się zapisać w formie sumy

$$M_g(x) = M_{g1}(x) + M_{g2}(x) + \dots + M_{gj}(x) \quad (5.23)$$

lub w równoważnej postaci

$$M_g(x) = m_1(x)X_1 + m_2(x)X_2 + \dots + m_j(x)X_j \quad (5.24)$$

gdzie $m_j(x)$ oznacza moment zginający od obciążenia jednostkowego. Podstawienie formuły na moment zginający (5.24) do wzoru definiującego energię sprężystości (5.22), a następnie zastosowanie twierdzenia Castigliana (5.11) daje wartość przemieszczenia uogólnionego

$$q_i = \frac{\partial L}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \int \frac{[m_1(x)X_1 + m_2(x)X_2 + \dots + m_j(x)X_j]^2}{2EJ_z} dx \quad (5.25)$$

ponieważ równocześnie zachodzi relacja

$$\frac{\partial M_g^2(x)}{\partial X_i} = 2m_i(x)X_i \quad (5.26)$$

zatem równanie (5.25) można zapisać w postaci

$$q_i = X_1 \underbrace{\int \frac{m_i m_1}{EJ_z} dx}_{\delta_{i1}} + X_2 \underbrace{\int \frac{m_i m_2}{EJ_z} dx}_{\delta_{i2}} + \dots + X_j \underbrace{\int \frac{m_i m_j}{EJ_z} dx}_{\delta_{ij}} \quad (5.27)$$

zawierającej w jawny sposób wyróżnione całki odpowiadające kolejnym współczynnikom podatności δ_{ij} . Ogólne wzory dla wszystkich współczynników podatności są następujące

$$\delta_{ij} = \int \frac{m_i(x)m_j(x)}{EJ_z} dx \quad \Delta_{i0} = \int \frac{m_i(x)M_g(x)}{EJ_z} dx \quad (5.28)$$

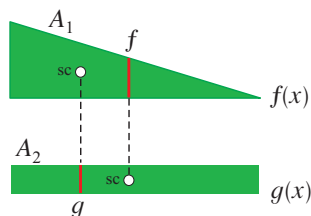
warto zatem w tym miejscu odwołać się do matematycznej reguły niezależności wartości całki od porządku funkcji tworzących iloczyn podcałkowy, z postaci wzoru (5.28₁) wynika w sposób natychmiastowy symetria współczynników macierzy podatności $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, co stanowi zarazem treść zasady Bettiego–Maxwella, wspomnianej w punkcie 3.1.2.

Na zakończenie warto omówić metodę geometrycznego całkowania iloczynu dwóch funkcji, związaną każdorazowo z obliczaniem wartości współczynników

podatności, a zaczerpniętą wprost z mechaniki budowli. Prototypem takiej operacji jest poniższy schemat

$$I = \int f(x)g(x)dx = A_1 \cdot g = A_2 \cdot f \quad (5.29)$$

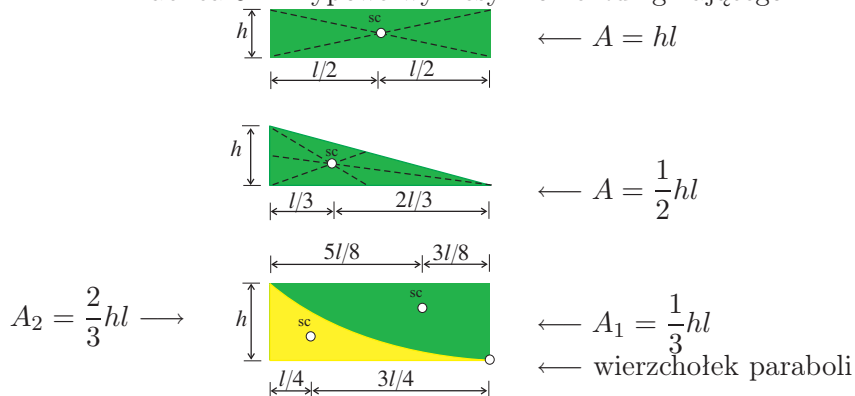
w którym jedna z funkcji podcałkowych musi być liniowa, A_i oznacza pole powierzchni pod jedną z funkcji, np. $f(x)$, natomiast g jest rzędną pod środkiem ciężkości na wykresie drugiej funkcji, np. $g(x)$.



Rysunek 5.5. Schemat całkowania geometrycznego.

W celu ułatwienia czytelnikowi posługiwania się regułą (5.29) w tab. 5.2 podano typowe wykresy przebiegu momentu zginającego wraz z zaznaczeniem wielkości pól powierzchni oraz położenia środków ciężkości. Zarazem w formie komentarza: proszę o zwrócenie szczególnej uwagi na przypadek wykresu momentu zginającego w kształcie paraboli, w którym wierzchołek paraboli musi wypadać dokładnie w jednym z naroży prostokąta opisującego wykres.

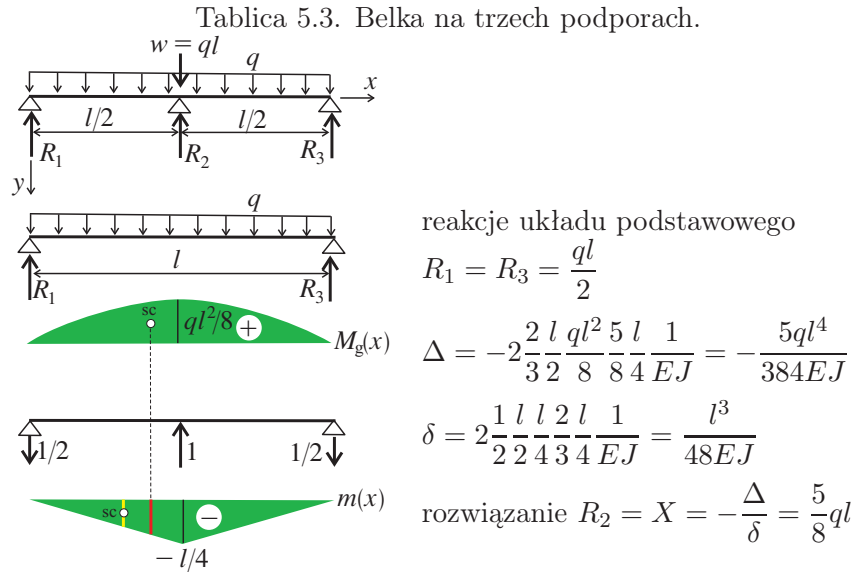
Tablica 5.2. Typowe wykresy momentu zginającego.



5.6. Przykłady

5.6.1. Belka na trzech podporach

Szczegółowy schemat rozwiązania belki na trzech podporach zademonstrowano w tab. 5.3.



Wynikową postać wykresu momentu zginającego można uzyskać przynajmniej na dwa sposoby:

- na drodze superpozycji wykresów momentu zginającego dla układu podstawowego $M_g(x)$ oraz uzupełniającego wymnożonego przez wartość nadliczbowej hiperstatycznej $m(x)X$ – patrz rys. 5.6,
- poprzez przejście tradycyjnej ścieżki obliczeniowej, tzn. rozpoczynając od wartości reakcji

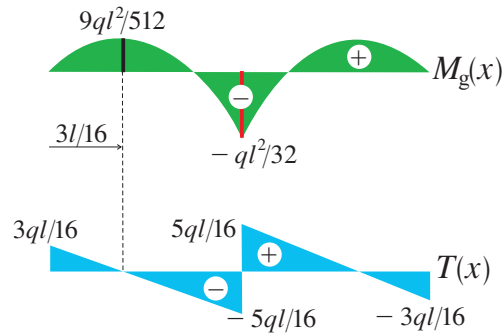
$$R_1 = R_3 = \frac{1}{2}(w - R_2) = \frac{1}{2} \left(ql - \frac{5}{8}ql \right) = \frac{3ql}{16} \quad (5.30)$$

wynikających bezpośrednio z symetrii układu oraz warunku równowagi rzutów wszystkich sił na oś y , by następnie zapisać wzór na przebieg zmienności momentu zginającego

$$M_g(x) = R_1x - \frac{qx^2}{2} = \frac{3}{16}qlx - \frac{qx^2}{2} \quad (5.31)$$

obowiązujący dla $x \in [0, l/2]$, w przedziale $l/2 \leq x \leq l$ odpowiedni wykres będzie stanowił zwierciadlane odbicie.

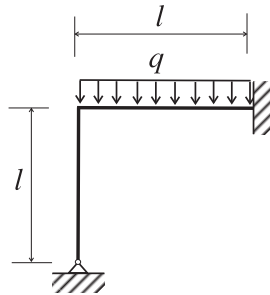
W analogiczny sposób postępujemy w przypadku szkicowania wykresu siły poprzecznej, pokazanego na rys. 5.6, który równocześnie musi stanowić wykres pochodnej w stosunku do wykresu momentu zginającego.



Rysunek 5.6. Zbiorcze wykresy momentu zginającego oraz siły poprzecznej dla belki na trzech podporach.

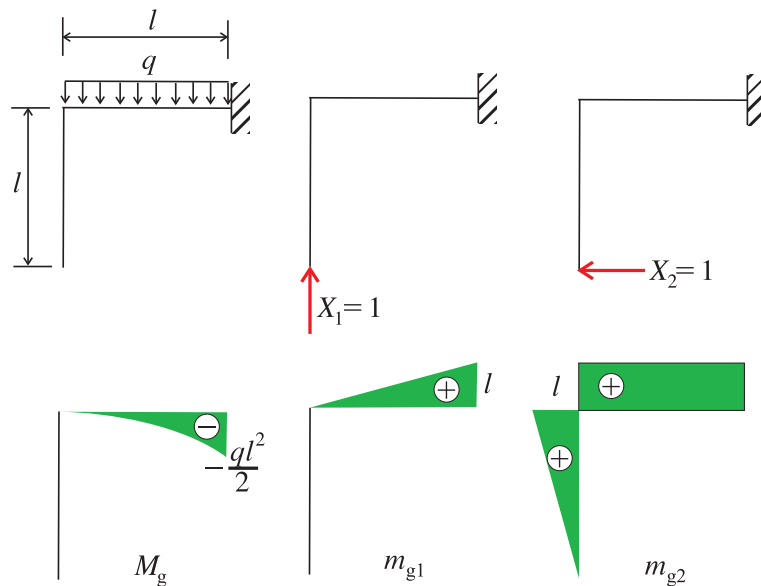
5.6.2. Rama statycznie niewyznaczalna

W celu prześledzenia metodyki rozwiązania ramy za pomocą metody sił rozważmy konstrukcję jak na poniższym rysunku.



Rysunek 5.7. Rama dwukrotnie hiperstatyczna.

Ponieważ mamy do czynienia z ramą dwukrotnie statycznie niewyznaczalną, uznanie dwóch reakcji podporowych za nadliczbowe hiperstatyczne prowadzi do układu podstawowego oraz dwóch układów uzupełniających o następujących schematach.



Rysunek 5.8. Układ podstawowy oraz uzupełniające dla ramy dwukrotnie hiperstatycznej.

Obliczając wartości kolejnych współczynników macierzy podatności

$$\delta_{11} = \frac{1}{2}l \cdot l \frac{2l}{3} \frac{1}{EJ_z} = \frac{l^3}{3EJ_z}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2}l \cdot l \cdot l \frac{1}{EJ_z} = \frac{l^3}{2EJ_z}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2}l \cdot l \frac{2l}{3} \frac{1}{EJ_z} + l \cdot l \cdot l \frac{1}{EJ_z} = \frac{4l^3}{3EJ_z} \quad (5.32)$$

$$\Delta_{10} = -\frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} l \frac{3l}{4} \frac{1}{EJ_z} = -\frac{ql^4}{8EJ_z}, \quad \Delta_{20} = -\frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} l \cdot l \frac{1}{EJ_z} = -\frac{ql^4}{6EJ_z}$$

można zapisać układ równań metody sił w postaci

$$\begin{cases} \frac{l^3}{3EJ_z} X_1 + \frac{l^3}{2EJ_z} X_2 - \frac{ql^4}{8EJ_z} = 0 \\ \frac{l^3}{2EJ_z} X_1 + \frac{4l^3}{3EJ_z} X_2 - \frac{ql^4}{6EJ_z} = 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

lub po uproszczeniu stałego mnożnika l^3/EJ_z w równoważnej formie

$$\begin{cases} \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{2}X_2 = \frac{ql}{8} \\ \frac{1}{2}X_1 + \frac{4}{3}X_2 = \frac{ql}{6} \end{cases} \quad (5.34)$$

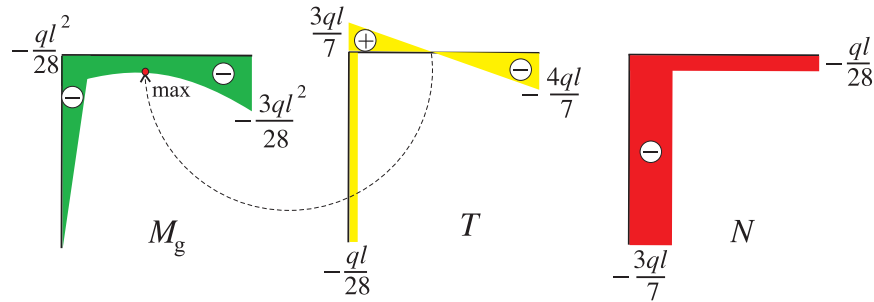
Rozwiązanie uzyskane za pomocą wyznaczników przebiega następująco

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 4/3 \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{7}{36} \\ W_1 &= \begin{vmatrix} ql/8 & 1/2 \\ ql/6 & 4/3 \end{vmatrix} = \frac{ql}{6} - \frac{ql}{12} = \frac{ql}{12} \\ W_2 &= \begin{vmatrix} 1/3 & ql/8 \\ 1/2 & ql/6 \end{vmatrix} = \frac{ql}{18} - \frac{ql}{16} = -\frac{ql}{144} \end{aligned} \quad (5.35)$$

a zatem

$$X_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{ql}{12} \frac{36}{7} = \frac{3ql}{7}, \quad X_2 = \frac{W_2}{W} = -\frac{ql}{144} \frac{36}{7} = -\frac{ql}{28}. \quad (5.36)$$

Zbiorcze wykresy momentu zginającego, siły poprzecznej oraz siły normalnej najszybciej można otrzymać, dokonując superpozycji kolejnych wielkości z układu podstawowego oraz obu układów uzupełniających przemnożonych przez odpowiednie wartości X_i , tak jak zostało to zaprezentowane w poprzednim przykładzie dotyczącym belki na trzech podporach.



Rysunek 5.9. Zbiorcze wykresy M_g , T , N dla ramy dwukrotnie hiperstatycznej.

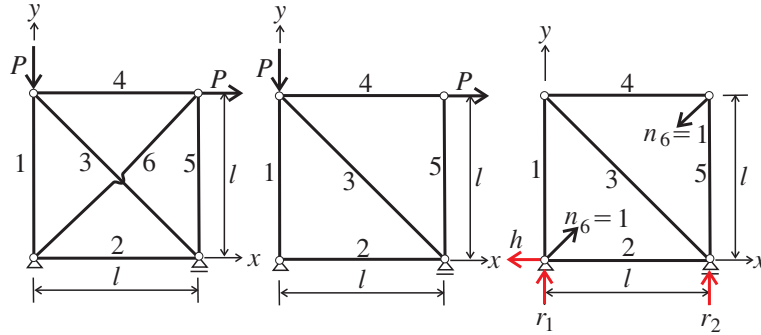
5.6.3. Kratownica statycznie niewyznaczalna

Kratownica statycznie niewyznaczalna stanowi konstrukcję szczególnie predysponowaną do rozwiązywania metodą sił, gdyż każdy jej pręt podlega działaniu

stałej co do wartości siły poosiowej, co w konsekwencji pozwala zastąpić całkowanie geometryczne zwykłym mnożeniem

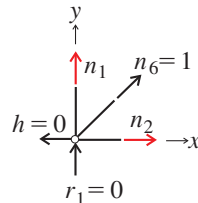
$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i n_i l_i}{EA_i} \quad \Delta_{10} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i N_i l_i}{EA_i}. \quad (5.37)$$

Jako przykład rozważmy kratownicę hiperstatyczną pokazaną po lewej stronie rys. 5.10, którą odróżnia od kratownicy rozwiązanej w punkcie 1.1 obecność dodatkowego pręta o numerze 6.



Rysunek 5.10. Kratownica hiperstatyczna wraz z układami podstawowym oraz uzupełniającym.

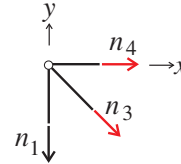
Traktując siłę w pręcie 6 jako nadliczbową hiperstatyczną, otrzymujemy układ podstawowy pokazany w środkowej części rys. 5.11, identyczny pod względem schematu z rys. 1.1, zaś pod względem rozwiązania z rys. 1.2, pozostaje zatem do rozwiązania rozkład sił w układzie uzupełniającym, którego schemat pokazano po prawej stronie rys. 5.10. Nietrudno zauważyć, iż układ uzupełniający jest samorzównoważony, tzn. towarzyszą mu zerowe reakcje $h = r_1 = r_2 = 0$, natomiast wartości sił w prętach obliczamy, stosując znaną już metodę równoważenia kolejnych węzłów kratownicy



(5.38)

$$\begin{aligned} (x) \quad -h + n_2 + n_6 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \quad \rightarrow \quad n_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (y) \quad r_1 + n_1 + n_6 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \quad \rightarrow \quad n_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

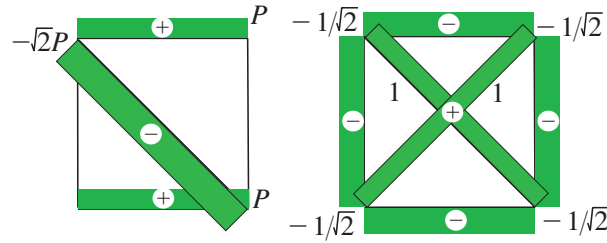
przechodząc do następnego węzła, mamy



(5.39)

$$\begin{aligned} (x) \quad n_4 + n_3 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \quad \rightarrow \quad n_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (y) \quad -n_1 - n_3 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \quad \rightarrow \quad n_3 = 1 \end{aligned}$$

natomiast wartość siły $n_5 = -\sqrt{2}/2$ wynika wprost z warunków podwójnej symetrii układu sił względem obu krzyżulcy. Rozkłady sił w poszczególnych prętach odpowiadające układom podstawowemu oraz uzupełniającemu zostały pokazane na poniższym rysunku.



Rysunek 5.11. Rozkład sił w układach podstawowym oraz uzupełniającym kratownicy.

Obliczenia wartości współczynników podatności można przeprowadzić w konwencjonalny sposób

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{i=1}^6 \frac{n_i n_i l_i}{EA} = \frac{4(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 l + 2(1)^2 l \sqrt{2}}{EA} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)l}{EA} \\ \Delta &= \sum_{i=1}^6 \frac{n_i N_i l_i}{EA} = \frac{2P(-\frac{\sqrt{2}}{2})l + 1(-\sqrt{2}P)\sqrt{2}l}{EA} = -\frac{P(\sqrt{2} + 2)l}{EA} \end{aligned} \quad (5.40)$$

bądź bardziej wygodny – tabelaryczny.

Rozwiązaniem układu (5.40) jest wartość nadliczbowej hiperstatycznej

$$N_6 = X = -\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{2} P \quad (5.41)$$

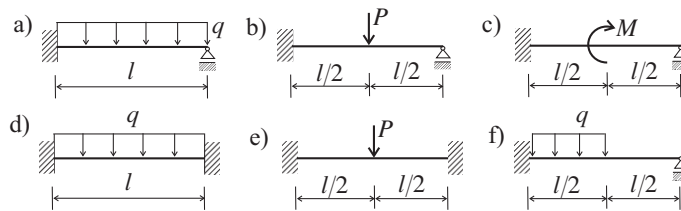
która następnie wymnożona przez n_i oraz zsumowana z N_i daje wynikową wartość siły normalnej w i -tym pręcie kratownicy.

Tablica 5.4. Wartości sił w kolejnych prętach kratownicy.

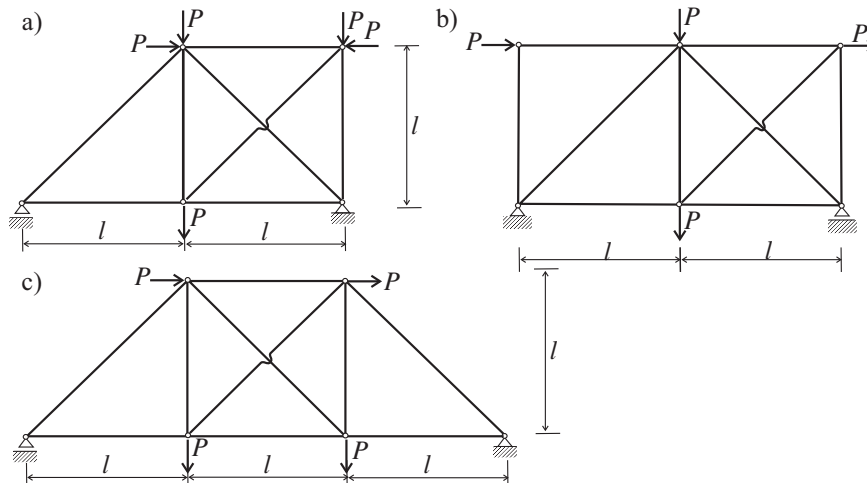
i	l_i	N_i	n_i	$(n_i)^2 l_i / EA$	$n_i N_i l_i / EA$	$N_i + n_i X$
1	l	0	$-\sqrt{2}/2$	$l/2EA$	0	$-P/2$
2	l	P	$-\sqrt{2}/2$	$l/2EA$	$-\sqrt{2}Pl/2EA$	$P/2$
3	$\sqrt{2}l$	$-\sqrt{2}P$	1	$\sqrt{2}Pl/EA$	$-2Pl/EA$	$-\sqrt{2}P/2$
4	l	P	$-\sqrt{2}/2$	$l/2EA$	$-\sqrt{2}Pl/2EA$	$P/2$
5	l	0	$-\sqrt{2}/2$	$l/2EA$	0	$-P/2$
6	$\sqrt{2}l$	—	1	$\sqrt{2}Pl/EA$	—	$\sqrt{2}P/2$
Σ				$\frac{2(\sqrt{2}+1)l}{EA}$	$-\frac{(\sqrt{2}+2)Pl}{EA}$	
				$=\delta$	$=\Delta$	

5.7. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania

Rozwiązać belkę metodą sił – naszkicować wykresy T , M_g .



Rozwiązać kratownicę metodą sił – podać tabelę wartości N_i .



Rozdział 6

Metoda przemieszczeń

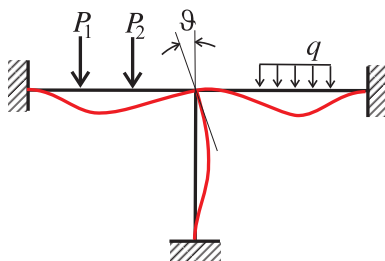
Metoda przemieszczeń stanowi, z jednej strony alternatywne w stosunku do metody sił, narzędzie służące do rozwiązywania układów charakteryzujących się wysokim stopniem hiperstatyczności ($h > 3$), a równocześnie doskonale nadaje się do roli pogładowego wstępu do metody elementów skończonych.

W metodzie przemieszczeń niewiadomymi są uogólnione przemieszczenia wewnętrznych węzłów konstrukcji, a ich liczba określa tzw. stopień geometrycznej niewyznaczalności. Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń przyjmuje zatem następującą postać

$$\delta_{ij}^{-1} q_j + Q_i = 0 \quad (6.1)$$

gdzie: δ_{ij}^{-1} – macierz sztywności (odwrotna do macierzy podatności), q_j – wektor niewiadomych przemieszczeń uogólnionych, Q_i – wektor sił uogólnionych.

Metoda przemieszczeń jest opłacalna w zastosowaniu wszędzie tam, gdzie stopień geometrycznej niewyznaczalności przewyższa stopień statycznej niewyznaczalności. Najlepiej ocenić korzyści płynące ze stosowania metody przemieszczeń na przykładzie konkretnej konstrukcji, w tym przypadku ramy niewyznaczalnej pokazanej na rys. 6.1. Z punktu widzenia metody sił przedstawioną ramę określa stopień statycznej niewyznaczalności $h = 6$, natomiast z punktu widzenia metody przemieszczeń mamy do czynienia z ramą o stopniu geometrycznej niewyznaczalności $g = 1$ (nieznany kąt obrotu ϑ). To proste porównanie stopni niewyznaczalności, a równocześnie liczby równań do rozwiązania, dobitnie wskazuje na przewagę stosowania metody przemieszczeń nad metodą sił.



Rysunek 6.1. Przykład ramy – porównanie stopni statycznej oraz geometrycznej niewyznaczalności.

6.1. Wzory metody przemieszczeń

Na wstępie wypada wyraźnie zaznaczyć, iż w najczęściej prezentowanym wariantcie metody przemieszczeń, czyli takim, jaki stosowany jest do rozwiązywania ram bądź belek, przyjmowane jest znane z metody sił założenie o pominięciu wpływu sił normalnych na deformację giętą elementów belkowych. Potraktowanie prętów jako elementów nieściśliwych znakomicie redukuje liczbę niewiadomych uogólnionych przemieszczeń. Równocześnie należy zaznaczyć, iż stosowanie metody przemieszczeń do rozwiązywania pewnych klas układów kratowych bądź kratowo-ramowych, a zatem konstrukcji wymagających uwzględnienia wpływu sił normalnych na deformację, jest ograniczone niewielką liczbą prętów oraz węzłów w kratownicach bądź nielicznymi prętami przenoszącymi jedynie siły podłużne (ściągi, wahacze) w układach kratowo-ramowych.

6.1.1. Układ belkowo-ramowy

W celu wyprowadzenia wzorów metody przemieszczeń, czyli zapisania kolejnych równań układu (6.1), rozpoczynamy od operacji dwukrotnego różniczkowania równania różniczkowego linii ugięcia belki

$$EJ_z y'' = -M_g(x) \quad \left| \frac{d^2}{dx^2} \right. \quad (6.2)$$

do prawej strony którego stosujemy twierdzenie Schwedlera-Żurawskiego, dostając

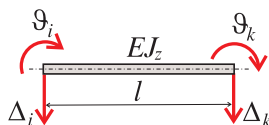
$$(EJ_z y'')'' = -M_g''(x) = q(x). \quad (6.3)$$

Jeśli sztywność zginania elementu belkowego jest stała $EJ_z = \text{const}$, to całą ogólną równania jednorodnego $y^{(iv)} = 0$ odpowiadającego równaniu (6.3) jest

wielomian trzeciego stopnia jak poniżej

$$\begin{aligned} y &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 \\ y' &= C_2 + C_3x + C_4 \end{aligned} \quad (6.4)$$

zawierający 4 stałe całkowania wymagające jednoznacznego określenia na podstawie odpowiednich warunków brzegowych. Jako pierwszy weźmy pod uwagę schemat pręta sprężysto zamocowanego pomiędzy dwoma węzłami – patrz rys. 6.2.



Rysunek 6.2. Schemat pręta sprężysto zamocowanego pomiędzy dwoma węzłami – warunki brzegowe.

Takiemu przypadkowi odpowiada następujący komplet warunków brzegowych

$$\begin{aligned} \text{dla } x = 0 \quad y &= \Delta_i \quad y' = \vartheta_i \\ \text{dla } x = l \quad y &= \Delta_k \quad y' = \vartheta_k \end{aligned} \quad (6.5)$$

który po wprowadzeniu zależności (6.4) sprowadza się do układu 4 równań na 4 niewiadome stałe całkowania

$$\begin{cases} \Delta_i = C_1 \\ \vartheta_i = C_2 \\ \Delta_k = \Delta_i + \vartheta_i l + C_3 l^2 + C_4 l^3 \\ \vartheta_k = \vartheta_i + 2C_3 l + 3C_4 l^2. \end{cases} \quad (6.6)$$

Z formatu układu równań (6.6) wyraźnie wynika, że wartości dwóch pierwszych stałych całkowania są już znane, zaś dwa ostatnie równania tworzą układ mający rozwiązanie otrzymywane na drodze eliminacji

$$\begin{aligned} \Delta_k - \Delta_i - \vartheta_i l &= C_3 l^2 + C_4 l^3 & | \left(-\frac{2}{l}\right) \\ \vartheta_k - \vartheta_i &= 2C_3 l + 3C_4 l^2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{\vartheta_i + \vartheta_k}{l^2} + 2 \frac{\Delta_i - \Delta_k}{l^3} \\ C_3 &= -\frac{2\vartheta_i + \vartheta_k}{l} + 3 \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l^2}. \end{aligned}$$

Wartości momentu zginającego oraz siły poprzecznej są określone znanymi zależnościami

$$\begin{aligned} M_g &= -EJ_z y'' = -EJ_z(2C_3 + 6C_4 x) \\ T &= -EJ_z y''' = -EJ_z 6C_4 \end{aligned} \quad (6.8)$$

zatem po wstawieniu wartości stałych C_3, C_4 dostajemy

$$\begin{aligned} M_g &= -EJ_z \left(-2\frac{2\vartheta_i + \vartheta_k}{l} + 6\frac{\Delta_k - \Delta_i}{l^2} + 6\frac{\vartheta_i + \vartheta_k}{l^2}x + 12\frac{\Delta_i - \Delta_k}{l^3}x \right) \\ T &= -EJ_z \left(6\frac{\vartheta_i + \vartheta_k}{l^2} + 12\frac{\Delta_i - \Delta_k}{l^3} \right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Wzory robocze metody przemieszczeń^{*)} wynikają wprost z podstawienia $x = 0$ bądź $x = l$ do ogólnych zależności (6.9)

$$\begin{aligned} M_{i \rightarrow k} &= M_g(x = 0) = \frac{2EJ_z}{l}(2\vartheta_i + \vartheta_k) + \frac{6EJ_z}{l^2}(\Delta_i - \Delta_k) \\ M_{k \rightarrow i} &= -M_g(x = l) = \frac{2EJ_z}{l}(\vartheta_i + 2\vartheta_k) + \frac{6EJ_z}{l^2}(\Delta_i - \Delta_k) \\ T_{i \rightarrow k} &= T_{k \rightarrow i} = -\frac{6EJ_z}{l^2}(\vartheta_i + \vartheta_k) - \frac{12EJ_z}{l^3}(\Delta_i - \Delta_k) \end{aligned} \quad (6.10)$$

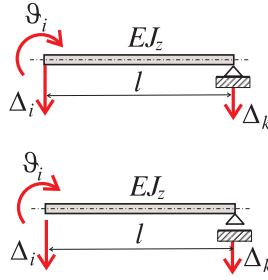
należy w tym miejscu zwrócić szczególną uwagę na odwrócenie znaku przy $M_{k \rightarrow i}$ z uwagi na obowiązywanie innej konwencji dodatnich zwrotów momentów zginających. Warto również przedstawić graficzną interpretację wzorów (6.10). Występowanie znaków plus w zależnościach definiujących wartości przywęzłowych momentów zginających wskazuje na ich zgodność pod względem zwrotu ze zwrotem kątów obrotu. Z kolei zwroty przywęzłowych sił poprzecznych wynikają bezpośrednio z twierdzenia Schwedlera–Żurawskiego.



Rysunek 6.3. Zwroty uogólnionych sił przywęzłowych dla pręta obustronnie zamocowanego sprężysto.

Innym przypadkiem wymagającym osobnego omówienia jest pręt o schemacie pokazanym na rys. 6.4, czyli o jednym węźle sprężysto zamocowanym, podczas gdy drugi węzeł pozostaje przegubowo podparty, wówczas komplet

^{*)}Zaproponowany poniżej zapis $M_{i \rightarrow k}$ oznacza wartość momentu zginającego zaczepionego w węźle i przypadającego na pręt rozciągający się w kierunku węzła k . Został on wprowadzony z uwagi na bardzo częsty dla konstrukcji ramowych przypadek zbiegania się w jednym węźle wielu prętów, a równocześnie w celu uniknięcia zapisu dwuwskaźnikowego, który mógłby wprowadzać w błąd czytelnika odnośnie co do macierzowego charakteru omawianej wielkości.



Rysunek 6.4. Schemat pręta jednym końcem przegubowo podpartego – warunki brzegowe.

warunków brzegowych przyjmuje następującą formę

$$\begin{aligned} \text{dla } x = 0 \quad y = \Delta_i \quad y' = \vartheta_i \\ \text{dla } x = l \quad y = \Delta_k \quad y'' = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

zaś po wprowadzeniu zależności (6.4) daje układ 4 równań na 4 stałe całkowania

$$\begin{cases} \Delta_i = C_1 \\ \vartheta_i = C_2 \\ \Delta_k = \Delta_i + \vartheta_i l + C_3 l^2 + C_4 l^3 \\ 0 = 2C_3 + 6C_4 l. \end{cases} \quad (6.12)$$

Analogicznie jak w poprzednim przypadku, wartości dwóch pierwszych stałych całkowania są już znane, natomiast dwa pozostałe równania tworzą układ mający rozwiązanie łatwe do uzyskania na drodze eliminacji

$$\begin{aligned} \Delta_k - \Delta_i - \vartheta_i l &= C_3 l^2 + C_4 l^3 & | \cdot (-\frac{2}{l^2}) \\ 0 &= 2C_3 + 6C_4 l \end{aligned}$$

$$C_4 = \frac{\vartheta_i}{2l^2} + \frac{\Delta_i - \Delta_k}{2l^3} \quad (6.13)$$

$$C_3 = -3\frac{\vartheta_i}{2l} + 3\frac{\Delta_k - \Delta_i}{2l^2}.$$

Po wstawieniu wartości stałych C_3 , C_4 do (6.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned} M_g &= 3EJ_z \left(\frac{\vartheta_i}{l} - \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l^2} - \frac{\vartheta_i}{l^2} x + \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l^3} x \right) \\ T &= -EJ_z \left(3\frac{\vartheta_i}{l^2} + 3\frac{\Delta_i - \Delta_k}{l^3} \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

w rezultacie wzory robocze na wartości momentu zginającego oraz siły poprzecznej uzyskujemy przez podstawienie $x = 0$ bądź $x = l$ do ogólnych zależności (6.14)

$$\begin{aligned} M_{i \rightarrow k} &= M_g(x=0) = \frac{3EJ_z}{l} \vartheta_i + \frac{3EJ_z}{l^2} (\Delta_i - \Delta_k) \\ M_{k \rightarrow i} &= -M_g(x=l) = 0 \\ T_{i \rightarrow k} &= T_{k \rightarrow i} = -\frac{3EJ_z}{l^2} \vartheta_i - \frac{3EJ_z}{l^2} (\Delta_i - \Delta_k). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Tak jak poprzednio, graficzna interpretacja wzorów (6.15) wskazuje na zgodność zwrotów przywęzłowych momentów zginających ze zwrotem kątów obrotu, podczas gdy zwroty przywęzłowych sił poprzecznych wynikają bezpośrednio z twierdzenia Schwedlera–Żurawskiego.



Rysunek 6.5. Zwroty uogólnionych sił przywęzłowych dla pręta jednym końcem przegubowo podpartego.

Na zakończenie warto przypomnieć, iż podane zależności (6.10) i (6.15) stanowią jedynie całki szczególne równania jednorodnego (6.3), a zatem wymagają uzupełnienia o człony będące całkami szczególnymi równania niejednorodnego, tzn. dodatkowymi składnikami $M_{i \rightarrow k}^0$, $M_{k \rightarrow i}^0$, $T_{i \rightarrow k}^0$ oraz $T_{k \rightarrow i}^0$. Mechanicznej interpretacji tych wielkości można łatwo się domyślić na podstawie analizowanych szczegółowo schematów. Ponieważ na potrzeby metody przemieszczeń wyróżnione zostały dwa typy prętów statycznie niewyznaczalnych, zatem wartości rozpatrywanych momentów $M_{i \rightarrow k}^0$, $M_{k \rightarrow i}^0$ odpowiadają wprost wartościom momentów utwierdzenia, zaś wartości sił poprzecznych $T_{i \rightarrow k}^0$ oraz $T_{k \rightarrow i}^0$ są odpowiednikami reakcji – pamiętając jednak cały czas o konieczności zmiany znaku momentu zginającego zaczepionego w węźle k . W ten sposób można uznać metodę sił za wstęp do metody przemieszczeń, ponieważ dostarcza ona wartości reakcji, jak również momentów utwierdzenia występujących w prętach hiperstatycznych. W celu ułatwienia czytelnikowi posługiwania się metodą przemieszczeń w tabeli zamieszczonej na końcu obecnego rozdziału zostały zebrane najczęściej spotykane przypadki obciążenia belek.

6.1.2. Układ kratowy

Wzory metody przemieszczeń wiążące wydłużenie elementu spowodowane działaniem siły okazują się wyjątkowo proste w przypadku pręta kratownicy, dla

którego prawo Hooke'a wzbogacone o efekt termiczny przyjmuje formę

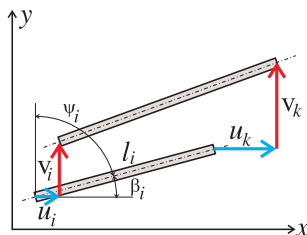
$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA_i} + \alpha l_i \Delta \theta_i \quad (6.16)$$

gdzie: α jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej, zaś $\Delta \theta_i = t_i - t_0$ oznacza równomierną zmianę temperatury względem temperatury odniesienia (zazwyczaj temperatury pokojowej) t_0 . Równocześnie wydłużenie elementu (6.16) daje się łatwo wyrazić poprzez składowe przemieszczenia węzłów kratownicy

$$\Delta l_i = (u_k - u_i) \cos \beta_i + (v_k - v_i) \cos \psi_i. \quad (6.17)$$

Obliczenie wartości siły podłużnej z (6.16) przy jednoczesnej redukcji wydłużenia elementu zależnością (6.17) daje poszukiwane równanie transformacyjne dla pręta kratownicy

$$N_{i \rightarrow k} = \frac{EA_i}{l_i} [(u_k - u_i) \cos \beta_i + (v_k - v_i) \cos \psi_i] - EA_i \alpha \Delta \theta_i. \quad (6.18)$$



Rysunek 6.6. Schemat przemieszczenia pręta kratownicy.

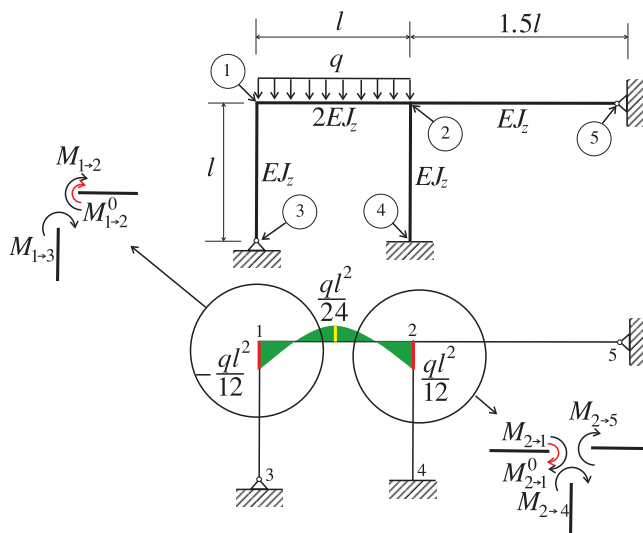
6.2. Przykłady

6.2.1. Rama o węzłach nieprzesuwnych

Ponieważ ramy o węzłach nieprzesuwnych stanowią układy, w których w sposób najbardziej dobitny ujawniają się korzyści płynące z zastosowania metody przemieszczeń, rozpatrzmy na początek ramę dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalną (nieznane kąty obrotu ϑ_1, ϑ_2), jak pokazano na rys. 6.7.

Układ równań równowagi dla wewnętrznych węzłów o numerach 1 oraz 2 jest następujący

$$\begin{cases} M_{1 \rightarrow 2} + M_{1 \rightarrow 3} = 0 \\ M_{2 \rightarrow 1} + M_{2 \rightarrow 4} + M_{2 \rightarrow 5} = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$



Rysunek 6.7. Rama o węzłach nieprzesuwnych dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalna.

natomiast występujące w nim wartości momentów przywęzłowych to kolejno

$$\begin{aligned}
 M_{1 \rightarrow 3} &= \frac{3EJ_z \vartheta_1}{l} & M_{1 \rightarrow 2} &= \underbrace{-\frac{ql^2}{12}}_{M_{1 \rightarrow 2}^0} + \frac{2E2J_z}{l} (2\vartheta_1 + \vartheta_2) \\
 M_{2 \rightarrow 1} &= \underbrace{\frac{ql^2}{12}}_{M_{2 \rightarrow 1}^0} + \frac{2E2J_z}{l} (\vartheta_1 + 2\vartheta_2) & & (6.20) \\
 M_{2 \rightarrow 4} &= \frac{2EJ_z}{l} 2\vartheta_2 & M_{2 \rightarrow 5} &= 3 \frac{EJ_z}{1.5l} \vartheta_1.
 \end{aligned}$$

Układ równań metody przemieszczeń

$$\begin{cases} \left(\frac{3EJ_z}{l} + \frac{8EJ_z}{l} \right) \vartheta_1 + \frac{4EJ_z}{l} \vartheta_2 = \frac{ql^2}{12} \\ \frac{4EJ_z}{l} \vartheta_1 + \left(\frac{8EJ_z}{l} + \frac{4EJ_z}{l} + \frac{2EJ_z}{l} \right) \vartheta_2 = -\frac{ql^2}{12} \end{cases} \quad (6.21)$$

lub po uporządkowaniu przedstawiony w zapisie macierzowym

$$\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} ql^3/12EJ_z \\ -ql^3/12EJ_z \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

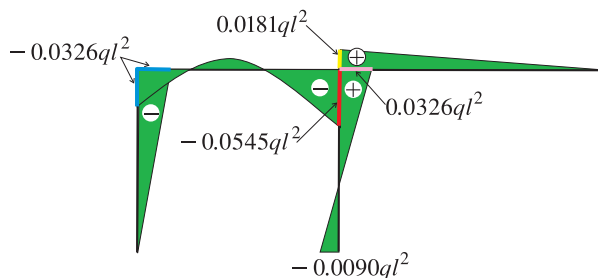
posiada następujące rozwiązanie

$$\vartheta_1 = \frac{9}{828} \frac{ql^2}{EJ_z} \quad \vartheta_2 = -\frac{5}{552} \frac{ql^2}{EJ_z}. \quad (6.23)$$

Rozwiązanie podstawione do wzorów (6.20) pozwala obliczyć wartości momentów przywęzłowych

$$\begin{aligned} M_{1 \rightarrow 3} &= 0.0326ql^2 & M_{1 \rightarrow 2} &= -0.0326ql^2 & M_{2 \rightarrow 1} &= 0.0545ql^2 \\ M_{2 \rightarrow 4} &= -0.0362ql^2 & M_{2 \rightarrow 5} &= -0.0181ql^2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

które służą następnie do wykreślenia wykresu momentu zginającego pokazanego na rys. 6.8 (uwaga na zmianę znaków wynikającą z przyjętej konwencji zwrotów momentów).



Rysunek 6.8. Wykres momentu zginającego ramy.

6.2.2. Rama o węzłach przesuwnych

Przejdźmy obecnie do analizy trudniejszego pojęciowo przykładu ramy o węzłach przesuwnych. W tym celu rozpatrzona zostanie rama dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalna, w której rolę niewiadomych pełnią kąt obrotu ϑ_2 oraz przesuw Δ_2 , tak jak pokazano na rys. 6.9. Jest oczywiste, że występowanie dwóch niezależnych obciążeń q oraz $P = ql/2$ prowadzi do obrotu węzła nr 2 o kąt ϑ_2 , któremu równocześnie towarzyszy przesuw Δ_2 . Przystępując do

budowy układu równań metody przemieszczeń, rozpoczynamy od określenia wartości momentów oraz sił przywęzłowych dla węzła nr 2

$$M_{2 \rightarrow 3} = \frac{3EJ_z}{l} \vartheta \underbrace{-ql^2/8}_{M_{2 \rightarrow 3}^0} \quad M_{2 \rightarrow 1} = \frac{2EJ_z}{l} 2\vartheta + \frac{6EJ_z}{l^2} \Delta$$

$$T_{2 \rightarrow 1} = -\frac{6EJ_z}{l^2} \vartheta - \frac{12EJ_z}{l^3} \underbrace{-ql/2}_{T_{2 \rightarrow 1}^0} \quad (6.25)$$

w których dla skrócenia zapisu pominięto indeks 2 przy symbolach ϑ oraz Δ . Należy ponadto zwrócić uwagę na fakt, iż siła skupiona P wchodzi do ostatniej z zależności jako reakcja słupa, a zatem musi być poprzedzona znakiem minus. Równania równowagi momentów zginających oraz sił poprzecznych dla węzła nr 2 mają postać następującą

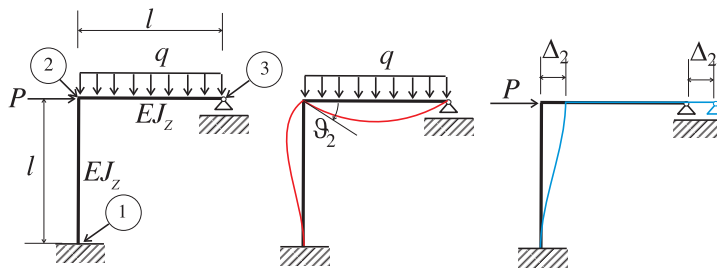
$$M_{2 \rightarrow 3} + M_{2 \rightarrow 1} = 0, \quad T_{2 \rightarrow 1} = 0 \quad (6.26)$$

zatem po wstawieniu zależności (6.25) dostajemy

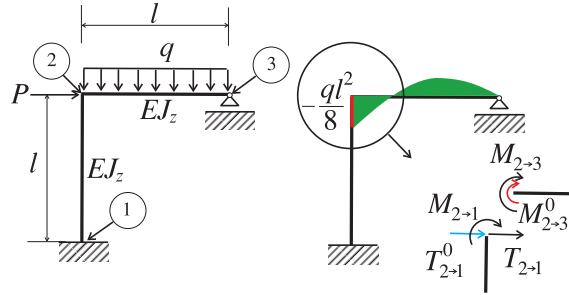
$$\begin{cases} \frac{3EJ_z}{l} \vartheta - \frac{ql^2}{8} + \frac{4EJ_z}{l} \vartheta + \frac{6EJ_z}{l^2} \Delta = 0 \\ -\frac{6EJ_z}{l^2} \vartheta - \frac{12EJ_z}{l^3} \Delta - \frac{ql}{2} = 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

natomiast po wykonaniu prostych przekształceń oraz uporządkowaniu dochodzimy do równoważnej formy standardowej

$$\begin{cases} 7l\vartheta + 6\Delta = ql^4/8EJ_z \\ 6l\vartheta + 12\Delta = -ql^4/2EJ_z. \end{cases} \quad (6.28)$$



Rysunek 6.9. Schemat oraz deformacja ramy o węzłach przesuwnych.



Rysunek 6.10. Schemat do ustalenia równań równowagi dla ramy o węzłach przesuwnych.

Rozwiązanie układu (6.28) osiągamy, obliczając wartości kolejnych wyznaczników

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{vmatrix} 7l & 6 \\ 6l & 12 \end{vmatrix} = 48l \\
 W_1 &= \begin{vmatrix} ql^4/8EJ_z & 6 \\ -ql^4/2EJ_z & 12 \end{vmatrix} = \frac{9ql^4}{2EJ_z} \\
 W_2 &= \begin{vmatrix} 7l & ql^4/8EJ_z \\ 6l & -ql^4/2EJ_z \end{vmatrix} = -\frac{17ql^5}{4EJ_z}
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

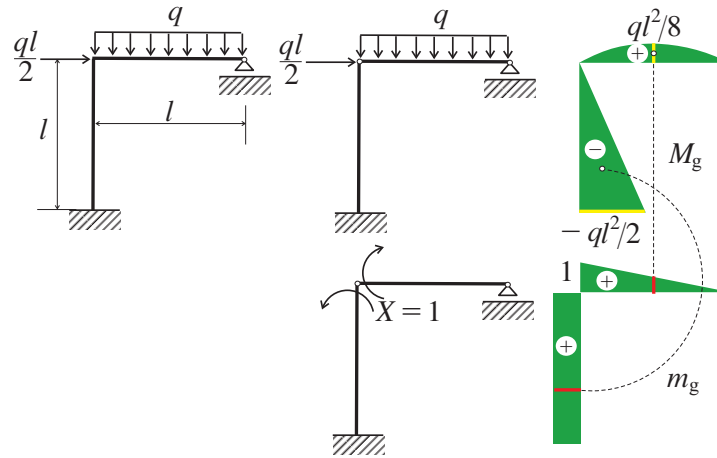
skąd już łatwo znaleźć

$$\vartheta = \frac{W_1}{W} = \frac{3ql^3}{32EJ_z}, \quad \Delta = \frac{W_2}{W} = -\frac{17ql^4}{192EJ_z}. \tag{6.30}$$

Na koniec obliczamy wartości momentów przywęzłowych

$$\begin{aligned}
 M_{2\to 3} &= \frac{3EJ_z}{l} \frac{3}{32} \frac{ql^3}{EJ_z} - \frac{ql^2}{8} = \frac{5ql^2}{32} \\
 M_{2\to 1} &= \frac{2EJ_z}{l} \frac{3}{32} \frac{ql^3}{EJ_z} + \frac{6EJ_z}{l^2} \left(-\frac{17}{192} \frac{ql^4}{EJ_z} \right) = \frac{5ql^2}{32}.
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

W tym miejscu zakończone zostały wszystkie obliczenia przewidziane dla metody przemieszczeń, jednak w ramach sprawdzianu poprawności uzyskanego rozwiązania warto przeprowadzić ponowne obliczenia za pomocą jakiejś innej metody, na przykład wcześniej zademonstrowanej metody sił. W celu bezpośredniego dotarcia do celu przyjęto układ podstawowy oraz uzupełniający metody sił jak na rysunku poniżej.



Rysunek 6.11. Schematy podstawowy oraz uzupełniający metody sił w celu weryfikacji wyników metody przemieszczeń.

Wartości współczynników podatności są następujące

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \frac{1}{2} \frac{1}{EJ_z} - \frac{1}{2} \frac{ql^2}{2} l \cdot 1 \frac{1}{EJ_z} = -\frac{5ql^4}{24EJ_z} \\ \Delta &= \frac{1}{2} 1 \cdot l \frac{2}{3} \frac{1}{EJ_z} + 1 \cdot l \cdot 1 \frac{1}{EJ_z} = \frac{4l}{3EJ_z}\end{aligned}\quad (6.32)$$

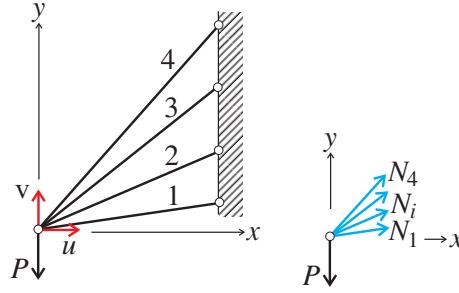
zatem rozwiązanie

$$X = -\frac{\Delta}{\delta} = \frac{5ql^2}{32} \quad \text{☺} \quad (6.33)$$

stanowi równocześnie potwierdzenie poprawności poprzedniego wyniku (6.31).

6.2.3. Układ kratowy

Przed przystąpieniem do demonstracji zastosowania metody przemieszczeń do rozwiązywania układów kratowych warto zaznaczyć, iż jedynym ograniczeniem jest rozmiar układu równań do rozwiązania, co ściśle wiąże się z liczbą prętów oraz węzłów. Oczywiście omawiane ograniczenie przestaje grać istotną rolę, w przypadku gdy decydujemy się na zastosowanie nowocześniejszego, numerycznego wariantu metody przemieszczeń, czyli metody elementów skończonych. Niemniej, na potrzeby niniejszego rozdziału rozpatrzmy najprostszy układ kratowy charakteryzujący się stopniem geometrycznej niewyznaczalności równym 2, w którym niewiadomymi są składowe przemieszczenia u , v węzła. Układ dwóch równań równowagi jest następujący



Rysunek 6.12. Schemat prostego układu kratowego do metody przemieszczeń.

$$\sum_{i=1}^4 N_i \cos \beta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^4 N_i \cos \psi_i - P = 0. \quad (6.34)$$

Przyjmując następnie, iż w żadnym z prętów nie doszło do zmiany temperatury, dostajemy ze wzorów (6.18)

$$N_i = -\frac{EA_i}{l_i}(u \cos \beta_i + v \cos \phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, 4 \quad (6.35)$$

zaś po podstawieniu do (6.34)

$$\begin{aligned} u \sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos^2 \beta_i + v \sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos \beta_i \cos \psi_i &= 0 \\ u \sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos \beta_i \cos \psi_i + v \sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos^2 \psi_i &= -P \end{aligned} \quad (6.36)$$

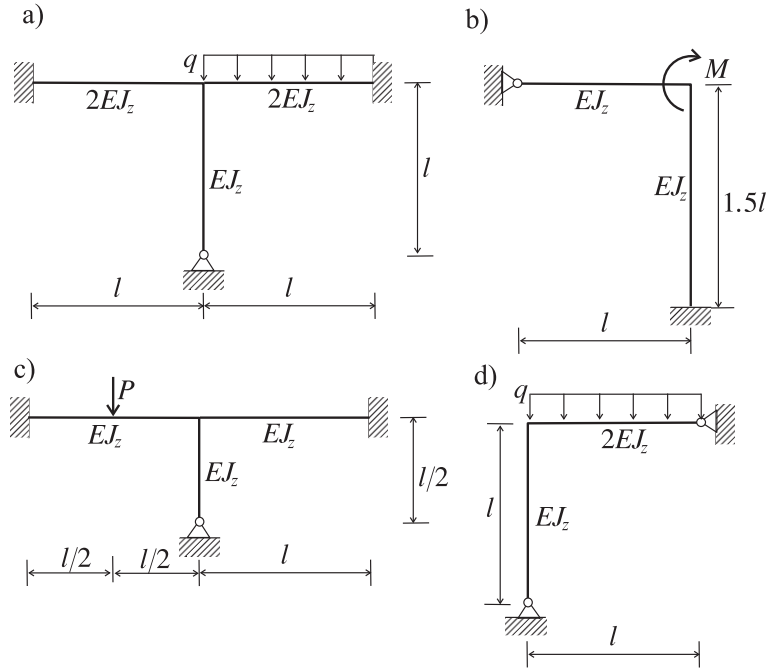
skąd wyznaczamy nieznanne wielkości

$$\begin{aligned} u &= \frac{-P \sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos \beta_i \cos \psi_i}{\left(\sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos^2 \beta_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos^2 \psi_i \right) - \left(\sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos \beta_i \cos \psi_i \right)^2} \\ v &= \frac{P \sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos^2 \beta_i}{\left(\sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos^2 \beta_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos^2 \psi_i \right) - \left(\sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos \beta_i \cos \psi_i \right)^2}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Następnie łatwo już przejść do obliczenia wartości sił w kolejnych prętach układu, wykorzystując do tego celu wzory (6.35).

6.3. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania

Rozwiązać ramę metodą przemieszczeń – naszkicować wykres M_g .



Tablica 6.1. Momenty utwierdzenia oraz reakcje podporowe belek jedno- oraz dwustronnie utwierdzonych [4].

schemat	$M_{i \rightarrow k}^0$	$M_{k \rightarrow i}^0$	$T_{i \rightarrow k}^0$	$T_{k \rightarrow i}^0$
	$-\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{8}$	$\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$
	$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$\frac{Pa^2b}{l^2}$	$\frac{Pb^2}{l^3}(3l-2b)$	$-\frac{Pa^2}{l^3}(3l-2a)$
	$-\frac{Pa}{l}(l-a)$	$\frac{Pa}{l}(l-a)$	P	$-P$
	$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
	$-\frac{ql^2}{30}$	$\frac{ql^2}{20}$	$\frac{3ql}{20}$	$-\frac{7ql}{20}$
	$\frac{Mb}{l}\left(1-3\frac{a}{l}\right)$	$\frac{Ma}{l}\left(1-3\frac{b}{l}\right)$	$\frac{6Mb}{l^3}$	$-\frac{6Ma}{l^3}$

schemat	$M_{i \rightarrow k}^0$	$M_{k \rightarrow i}^0$	$T_{i \rightarrow k}^0$	$T_{k \rightarrow i}^0$
	$-\frac{3Pl}{16}$	0	$\frac{11P}{16}$	$-\frac{5P}{16}$
	$-\frac{Pab}{2l^2}(l+b)$	0	$\frac{Pb}{2l^3}(3l^2-b^2)$	$-\frac{Pa^2}{2l^3}(2l+b)$
	$-\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{5ql}{8}$	$-\frac{3ql}{8}$
	$-\frac{7ql^2}{120}$	0	$\frac{9ql}{40}$	$-\frac{11ql}{40}$
	$-\frac{ql^2}{15}$	0	$\frac{4ql}{10}$	$-\frac{ql}{10}$
	$\frac{M}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right]$	0	$-\frac{3M}{2l} \left[1 - \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right]$	$-\frac{3M}{2l} \left[1 - \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right]$

Rozdział 7

Napężenia i odkształcenia cieplne

7.1. Wstęp

Deformacje pręta mogą być powodowane nie tylko działaniem obciążeń natury mechanicznej, tzn. obciążeń rozłożonych, sił bądź momentów skupionych, lecz także zmianą temperatury. Odpowiedni związek określa tzw. liniowe prawo rozszerzalności termicznej

$$\varepsilon = \alpha\theta \quad (7.1)$$

zawierające dodatkową stałą materiałową α – współczynnik rozszerzalności termicznej, oraz zmianę temperatury względem temperatury odniesienia $\theta = t - t_0$. Wprowadzając następnie definicję odkształcenia liniowego traktowanego jako wydłużenie względne $\varepsilon = \Delta l/l$, dostajemy

$$\Delta l = l\alpha\theta. \quad (7.2)$$

Zależność (7.2) wyraża wartość wydłużenia osiowego pręta poddanego przyrostowi temperatury i może zostać bezpośrednio użyta w metodzie przemieszczeń zastosowanej do rozwiązywania kratownic.

W tym miejscu wypada wyraźnie zaznaczyć, że w mechanice ustrojów prętowych przyjmowane jest powszechnie założenie upraszczające o liniowości rozkładu temperatury. Nie wynika on bowiem z rozwiązania odpowiedniego równania termodynamiki, tzw. równania Fouriera

$$\nabla(\lambda\nabla t) = \rho c_v \dot{t} \quad (7.3)$$

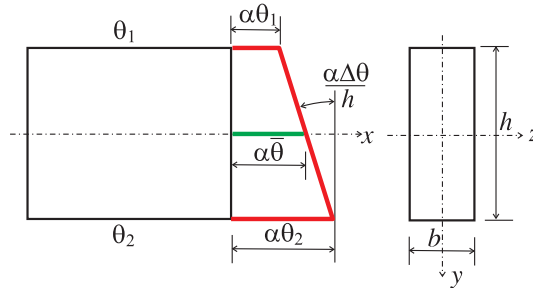
lecz jest przyjmowany arbitralnie jako rozkład stacjonarny (niezależny od czasu), stały wzdłuż długości pręta oraz co najwyżej liniowo zmienny wzdłuż

wysokości elementu typu belkowego

$$\theta(y) = \bar{\theta} + \frac{\Delta\theta}{h}y \quad (7.4)$$

gdzie: $\bar{\theta} = (\theta_1 + \theta_2)/2$ jest średnią zmianą temperatury, zaś $\Delta\theta/h = (\theta_1 - \theta_2)/h$ oznacza wartość liniowego spadku (gradientu) zmiany temperatury wzdłuż wysokości h . Po wstawieniu (7.4) do (7.1) otrzymujemy wartość odkształcenia uzależnioną od zmiany temperatury

$$\varepsilon = \alpha\bar{\theta} + \alpha\frac{\Delta\theta}{h}y. \quad (7.5)$$



Rysunek 7.1. Odkształcenie pręta wywołane nierównomierną zmianą temperatury.

Interpretacja graficzna pierwszego z członów jest oczywista, odpowiada on odkształceniu osi pręta, natomiast drugi człon nawiązuje do kąta obrotu

$$\vartheta = \alpha\frac{\Delta\theta}{h}. \quad (7.6)$$

Równomierne zmiany temperatury wywołują jedynie zmiany długości pręta w przeciwieństwie do nierównomiernych zmian temperatury, którym towarzyszą również zmiany kształtu osi pręta.

Uogólniając powyższe spostrzeżenia na przypadek ustroju prętowego, należy koniecznie rozróżnić układy statycznie wyznaczalne od statycznie niewyznaczalnych. W układach statycznie wyznaczalnych poszczególne elementy mają na ogół swobodę deformacji, a zatem zmiany temperatury nie mają istotnego wpływu na stan naprężenia. Przeciwnie, w układach statycznie niewyznaczalnych zmiany temperatury mogą stanowić źródło powstawania naprężeń o znacznych wartościach.

7.2. Obciążenia termiczne w metodzie sił

W celu uogólnienia metody sił na przypadek występowania efektów zmiany temperatury poszczególnych prętów należy po pierwsze potraktować siły normalne oraz momenty zginające wywołane zmianą temperatury jako obciążenia zewnętrzne układu podstawowego. Wymaga to oczywiście określenia na nowo wartości współczynników Δ_{i0} prawej strony układu równań metody sił. Wzory dla odpowiednich współczynników przyjmują następującą postać (5.28)

$$\Delta_{i0} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i N_i}{EA_i} l_i \quad (7.7)$$

dla kratownicy, oraz (5.37)

$$\Delta_{i0} = \int \frac{m_i(x) M_g(x)}{EJ_z} dx \quad (7.8)$$

dla elementu belkowego. W pierwszym przypadku, po przemnożeniu zależności (7.5) przez E oraz wycałkowaniu po polu powierzchni przekroju pręta A_i , otrzymujemy*)

$$N_i = EA_i \alpha \bar{\theta} \quad (7.9)$$

co po wprowadzeniu do (7.7) daje

$$\Delta_{i0} = \sum_{i=1}^n n_i l_i \alpha \bar{\theta} \quad (7.10)$$

natomiast w drugim przypadku wymnożenie (7.5) przez Ey oraz całkowanie po A prowadzi do zależności†)

$$M_g = EJ_z \frac{\alpha \Delta \theta}{h} \quad (7.11)$$

która następnie po wprowadzeniu do (7.8) daje poszukiwany wynik

$$\Delta_{i0} = \int \frac{m_i(x) \alpha \Delta \theta}{h} dx. \quad (7.12)$$

*) $N = \iint_A \sigma dA = \iint_A E \varepsilon dA = \iint_A E \alpha \bar{\theta} dA + \iint_A E \alpha \frac{\Delta \theta}{h} y dA = E \alpha \bar{\theta} \iint_A dA + E \alpha \frac{\Delta \theta}{h} \iint_A y dA = E \alpha \bar{\theta} A + E \alpha \frac{\Delta \theta}{h} S_z$, gdzie wartość momentu statycznego pola przekroju poprzecznego $S_z = 0$ dla osi przechodzącej przez środek ciężkości przekroju.

†) $M_g = \iint_A \sigma y dA = \iint_A E \varepsilon y dA = \iint_A E \alpha \bar{\theta} y dA + \iint_A E \alpha \frac{\Delta \theta}{h} y^2 dA = E \alpha \bar{\theta} \iint_A y dA + E \alpha \frac{\Delta \theta}{h} \iint_A y^2 dA = E \alpha \bar{\theta} S_z + E \alpha \frac{\Delta \theta}{h} J_z$, gdzie wartość momentu statycznego pola przekroju poprzecznego $S_z = 0$ dla osi przechodzącej przez środek ciężkości przekroju.

7.3. Obciążenia termiczne w metodzie przemieszczeń

Przemieszczenia pochodzące od zmian temperatury, czyli wielkości odgrywające kluczową rolę w metodzie przemieszczeń, można podzielić na dwa typy:

- zmiany długości pręta spowodowane średnią zmianą temperatury $\bar{\theta}$,
- ugięcia elementu belkowego na skutek działania gradientu temperatury $\Delta\theta/h$, który wywołuje różnicę wydłużeń górnych włókien względem dolnych – patrz rys. 7.1.

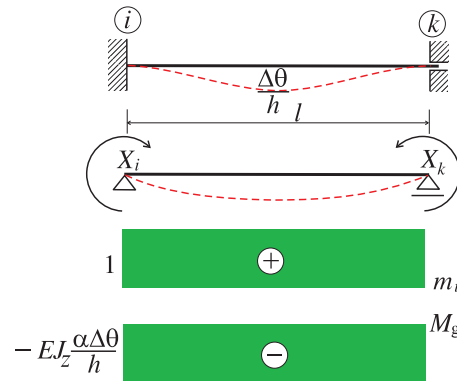
W konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych oba typy przemieszczeń natury termicznej są bezpośrednio odpowiedzialne za powstanie sił normalnych N oraz momentów zginających M_g podanych wzorami odpowiednio (7.9) oraz (7.11). Wielkości te z kolei determinują wartości reakcji podporowych oraz momentów utwierdzenia, które występują w metodzie przemieszczeń.

Na początku rozważmy pręt obustronnie utwierdzony poddany działaniu gradientu temperatury $\Delta\theta/h$ powodującemu wygięcie skierowane wypukłością do dołu – patrz rys. 7.2. Wybierając momenty utwierdzenia jako niewiadome w metodzie sił oraz wykorzystując warunki symetrii $X_i = X_k = X$, można zapisać równanie

$$\delta_{ii}X + \Delta_{i0} = 0 \quad (7.13)$$

skąd oczywiście wynika

$$X = -\frac{\Delta_{i0}}{\delta_{ii}}. \quad (7.14)$$



Rysunek 7.2. Schemat do określenia momentów utwierdzenia w belce poddanej gradientowi temperatury.

Wartość współczynnika macierzy podatności wynosi

$$\delta_{ii} = 1 \cdot l \cdot \frac{1}{EJ_z} = \frac{l}{EJ_z} \quad (7.15)$$

natomiast wartość Δ_{i0} obliczona z wzoru (7.12) jest równa

$$\Delta_{i0} = 1 \cdot l \frac{\alpha \Delta \theta}{h} = \frac{l \alpha \Delta \theta}{h} \quad (7.16)$$

zatem rozwiązanie (7.14) jest następujące

$$X_i = X_k = -EJ_z \frac{\alpha \Delta \theta}{h}. \quad (7.17)$$

Wynikowy wykres momentu zginającego został pokazany na rys. 7.2. Prętowi o rozważanym schemacie podparcia nie towarzyszą żadne reakcje, zatem

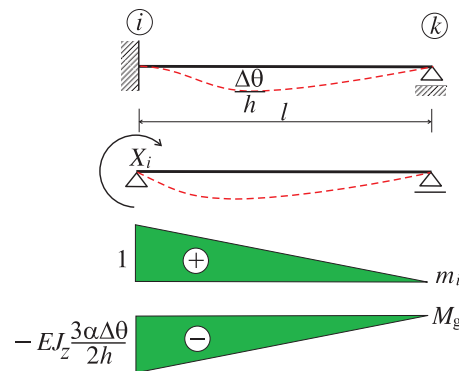
$$R_i = R_k = 0. \quad (7.18)$$

Rozważając natomiast pręt jednostronnie utwierdzony, pokazany na rys. 7.3, mamy do rozwiązania następujący układ metody sił

$$\delta_{ii} X_i + \Delta_{i0} = 0 \quad (7.19)$$

którego rozwiązaniem jest

$$X_i = -\frac{\Delta_{i0}}{\delta_{ii}}. \quad (7.20)$$



Rysunek 7.3. Schemat do określenia momentu utwierdzenia w belce poddanej gradientowi temperatury.

Wartości współczynnika podatności oraz wyrazu Δ_{i0} obliczamy w sposób analogiczny jak poprzednio

$$\delta_{ii} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \frac{2}{3} \frac{1}{EJ_z} = \frac{l}{3EJ_z} \quad \Delta_{i0} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \frac{\alpha\Delta\theta}{h} = \frac{l\alpha\Delta\theta}{2h} \quad (7.21)$$

zatem po wstawieniu do (7.20) wynik jest następujący

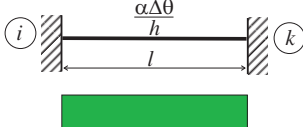
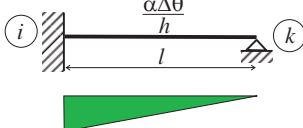
$$X_i = -\frac{3}{2} EJ_z \frac{\alpha\Delta\theta}{h}. \quad (7.22)$$

Wynikowy wykres momentu zginającego przedstawiono na rys. 7.3. Obecnemu schematowi podparcia pręta towarzyszą jednak reakcje o wartościach równych odpowiednio

$$R_i = -R_k = -\frac{X_i}{l} = -\frac{3}{2} EJ_z \frac{\alpha\Delta\theta}{hl}. \quad (7.23)$$

Na zakończenie warto dokonać uzupełnienia tab. 6.1 o następujące dwa dodatkowe schematy, pamiętając równocześnie o zmianie znaków odpowiednich wielkości zgodnie z konwencją przyjętą w metodzie przemieszczeń – patrz rys. 6.3 oraz rys. 6.5.

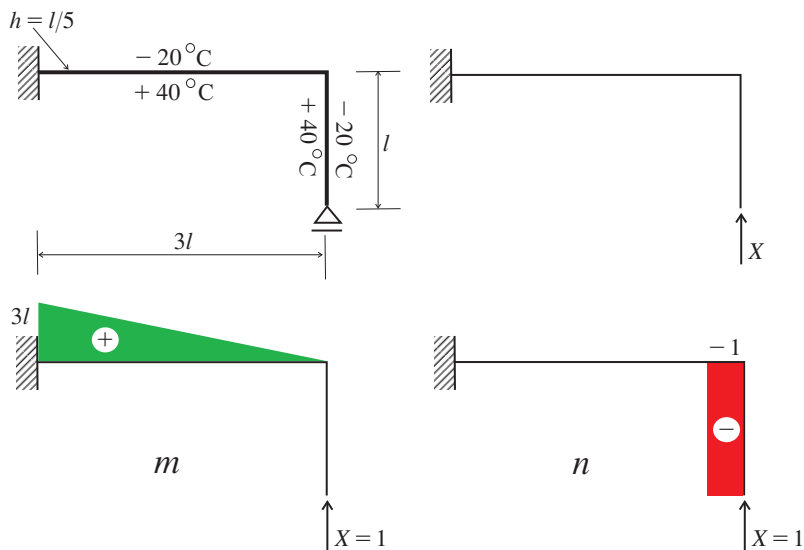
Tablica 7.1. Momenty utwierdzenia oraz reakcje podporowe belek jedno- oraz dwustronnie utwierdzonych obciążonych gradientem temperatury [4].

schemat	$M_{i \rightarrow k}^0$	$M_{k \rightarrow i}^0$	$T_{i \rightarrow k}^0$	$T_{k \rightarrow i}^0$
	$-\frac{EJ_z\alpha\Delta\theta}{h}$	$\frac{EJ_z\alpha\Delta\theta}{h}$	0	0
	$-\frac{3EJ_z\alpha\Delta\theta}{2h}$	0	$-\frac{3EJ_z\alpha\Delta\theta}{2hl}$	$-\frac{3EJ_z\alpha\Delta\theta}{2hl}$

7.4. Przykłady

7.4.1. Rama statycznie niewyznaczalna – zastosowanie metody sił [4]

Należy określić rozkłady sił wewnętrznych M_g , T oraz N w ramie poddanej zmianom temperatury pokazanym na rys. 7.4. Układ podstawowy metody



Rysunek 7.4. Schemat ramy poddanej zmianom temperatury.

został pokazany na rys. 7.4, jak również wykresy momentu zginającego m oraz siły normalnej n pochodzące od nadliczbowej hiperstycznej $X = 1$.

Rozpoczynamy od obliczenia wartości temperatury średniej oraz gradientu temperatury w ramie

$$\bar{\theta} = \frac{40 - 20}{2} = 10^\circ\text{C} \quad \frac{\Delta\theta}{h} = \frac{40 + 20}{h} = \frac{60}{h} \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}}. \quad (7.24)$$

Układ równań metody sił redukuje się do jednego równania postaci

$$\delta X + \Delta = 0 \quad (7.25)$$

w którym wartości współczynników δ oraz Δ są równe odpowiednio

$$\delta = \frac{1}{2} 3l \cdot 3l \cdot \frac{2}{3} 3l \frac{1}{EJ_z} = \frac{9l^3}{EJ_z} \quad (7.26)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} 3l \cdot 3l \cdot \frac{60}{l} \alpha - 1 \cdot l \cdot 10\alpha = 1340l\alpha$$

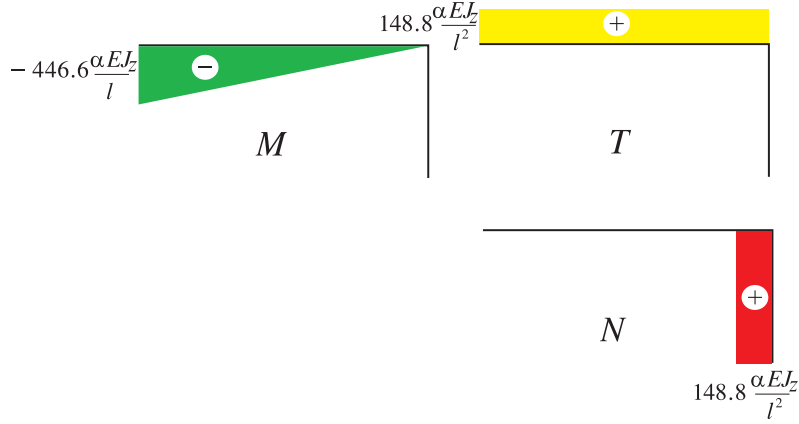
zaś rozwiązanie wynosi

$$X = -\frac{1340l\alpha}{\frac{9l^3}{EJ_z}} = -148.8 \frac{\alpha EJ_z}{l^2}. \quad (7.27)$$

Maksymalna wartość momentu zginającego jest równa

$$M_{\max} = X \cdot 3l = -148.8\alpha EJ_z \cdot 3l = -446.6 \frac{\alpha EJ_z}{l}. \quad (7.28)$$

Wykresy wszystkich sił wewnętrznych, otrzymane zgodnie z regułami metody sił, zostały zaprezentowane na rys. 7.5.



Rysunek 7.5. Wykresy M, T, N dla ramy poddanej zmianom temperatury.

7.4.2. Układ kratowy [12]

Rozpatrzmy prosty układ kratowy przedstawiony w sekcji 6.2.3., w którym każdy z prętów zmienił temperaturę. Układ dwóch równań równowagi (6.34) staje się wówczas układem jednorodnym

$$\sum_{i=1}^4 N_i \cos \beta_i = 0 \quad \sum_{i=1}^4 N_i \cos \psi_i = 0 \quad (7.29)$$

natomiast we wzorach (6.35) definiujących wartości sił w kolejnych prętach należy koniecznie uwzględnić człony termiczne (7.2)

$$N_i = -\frac{EA_i}{l_i} (u \cos \beta_i + v \cos \psi_i) - EA_i \alpha \bar{\theta}_i \quad i = 1, 2, \dots, 4 \quad (7.30)$$

które podstawione do (7.29) dają układ w postaci

$$\begin{aligned} u \sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos^2 \beta_i + v \sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos \beta_i \cos \psi_i &= - \sum_{i=1}^4 EA_i \alpha \bar{\theta}_i \cos \beta_i \\ u \sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos \beta_i \cos \psi_i + v \sum_{i=1}^4 \frac{EA_i}{l_i} \cos^2 \psi_i &= - \sum_{i=1}^4 EA_i \alpha \bar{\theta}_i \cos \psi_i. \end{aligned} \quad (7.31)$$

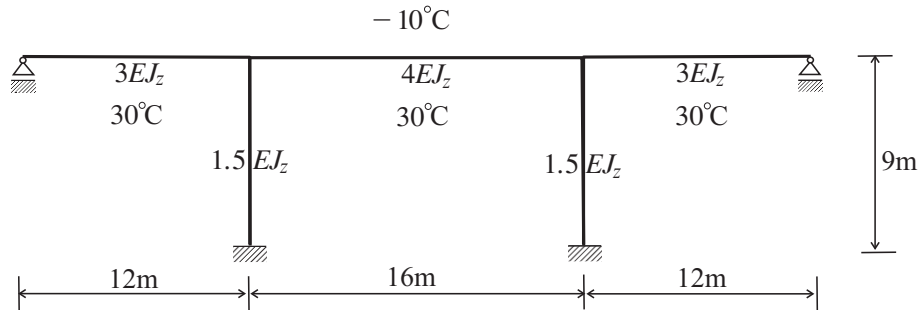
Rozwiązaniem układu równań (7.31) są składowe przemieszczenia o wartościach

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{-\sum_{i=1}^4 A_i \alpha \bar{\theta}_i \cos \beta_i \sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{l_i} \cos^2 \psi_i + \sum_{i=1}^4 A_i \alpha \bar{\theta}_i \cos \psi_i \sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{l_i} \cos \beta_i \cos \psi_i}{\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{l_i} \cos^2 \beta_i \sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{l_i} \cos^2 \psi_i - \left(\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{l_i} \cos \beta_i \cos \psi_i \right)^2} \\
 v &= \frac{-\sum_{i=1}^4 A_i \alpha \bar{\theta}_i \cos \psi_i \sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{l_i} \cos^2 \beta_i + \sum_{i=1}^4 A_i \alpha \bar{\theta}_i \cos \beta_i \sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{l_i} \cos \beta_i \cos \psi_i}{\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{l_i} \cos^2 \beta_i \sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{l_i} \cos^2 \psi_i - \left(\sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{l_i} \cos \beta_i \cos \psi_i \right)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{7.32}$$

Znając wartości składowych przemieszczenia, łatwo już obliczyć wartości sił w kolejnych prętach zdefiniowane wzorami (7.30). Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, iż zmiana temperatury o taką samą wartość $\bar{\theta}_i = \bar{\theta}$ we wszystkich prętach powoduje powstanie sił osiowych w układzie kratowym, jeśli tylko jest on statycznie niewyznaczalny.

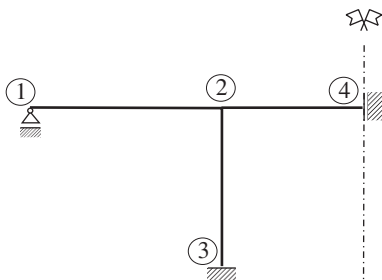
7.4.3. Rama statycznie niewyznaczalna – zastosowanie metody przemieszczeń [4]

Należy obliczyć wartości momentów zginających w ramie pokazanej na rys. 7.6 spowodowane zmianami temperatury. Wysokość poprzecznych przekrojów skrajnych pręseł $h = 1$ m, natomiast pręseła środkowego $h_1 = 1.1$ m, wartości stałych materiałowych to kolejno $\alpha = 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$, $EJ_z = 2 \cdot 10^4$ kNm².



Rysunek 7.6. Schemat ramy poddanej zmianom temperatury.

Z uwagi na symetrię ramy przyjęto układ podstawowy metody przemieszczeń wraz z numeracją węzłów ramy podany na rys. 7.7. Długość pręseła środkowego wynosi obecnie 16/2 m i w węźle nr 4 jest ono utwierdzone ze względu



Rysunek 7.7. Układ podstawowy metody przemieszczeń wraz z numeracją węzłów dla ramy poddanej zmianom temperatury.

na możliwość obrotu oraz przemieszczenia poziomego, natomiast posiada swobodę przemieszczenia w pionie. Za niewiadomą uznajemy kąt obrotu φ_2 , zatem rozpatrywana rama okazuje się układem jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalnym. Zmiany temperatury są równe

- dla rygli

$$\bar{\theta} = \frac{30 - 10}{2} = 10^\circ\text{C} \quad \Delta\theta = 30 - (-10) = 40^\circ\text{C}, \quad (7.33)$$

- dla słupów

$$\bar{\theta} = \frac{30 + 30}{2} = 30^\circ\text{C} \quad \Delta\theta = 30 - 30 = 0^\circ\text{C}. \quad (7.34)$$

Wydłużenia kolejnych prętów ramy pod wpływem równomiernych zmian temperatury, liczone według zależności (7.2), wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} \Delta_{2(\text{słup})} &= 1 \cdot 10^{-5} \cdot 9 \cdot 30 = 27 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ \Delta_{2(\text{rygiel})} &= 1 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{16}{2} \cdot 30 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned} \quad (7.35)$$

a dalej podstawione do wzorów (6.10) oraz (6.15) dają następujące wartości momentów przywęzłowych

$$\begin{aligned} M_{2 \rightarrow 1} &= 3 \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 3}{12} \left(\vartheta_2 + \frac{27 \cdot 10^{-4}}{12} \right) = \left(\frac{3}{2} \cdot 10^4 \vartheta_2 + 3.38 \right) \text{ kNm} \\ M_{2 \rightarrow 3} &= 2 \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1.5}{9} 2\vartheta_2 = \frac{4}{3} \cdot 10^4 \vartheta_2 \text{ kNm} \\ M_{2 \rightarrow 4} &= 2 \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 4}{8} \left(2\vartheta_2 + \frac{2}{9} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \right) = (10^4 \vartheta_2 + 1.78) \text{ kNm}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Nierównomierna zmiana temperatury wzdłuż wysokości przekrojów elementów wywołuje następujące momenty utwierdzenia (patrz tab. 7.1)

$$M_{2 \rightarrow 1}^0 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 40}{2 \cdot 1.0} = 36 \text{ kNm} \quad (7.37)$$

$$M_{2 \rightarrow 4}^0 = -\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \cdot 40}{1.1} = -29.1 \text{ kNm.}$$

Równanie równowagi momentów dla węzła nr 2 przyjmuje postać

$$M_{2 \rightarrow 1} + M_{2 \rightarrow 3} + M_{2 \rightarrow 4} + M_{2 \rightarrow 1}^0 + M_{2 \rightarrow 4}^0 = 0 \quad (7.38)$$

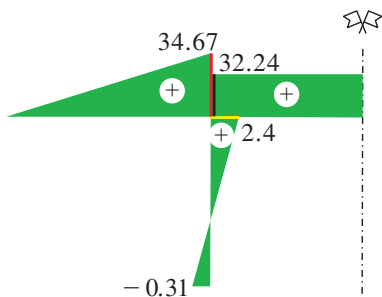
zatem po wstawieniu wielkości podanych wzorami (7.36) oraz (7.37) dostajemy równanie

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + 1\right) 10^4 \vartheta_2 + 3.38 + 1.78 + 36 - 29.1 = 0 \quad (7.39)$$

którego rozwiązaniem jest

$$\vartheta_2 = -3.14 \cdot 10^{-4}. \quad (7.40)$$

Wykres momentu zginającego podany został na rysunku 7.8.



Rysunek 7.8. Wykres momentu zginającego M w ramie poddanej zmianom temperatury.

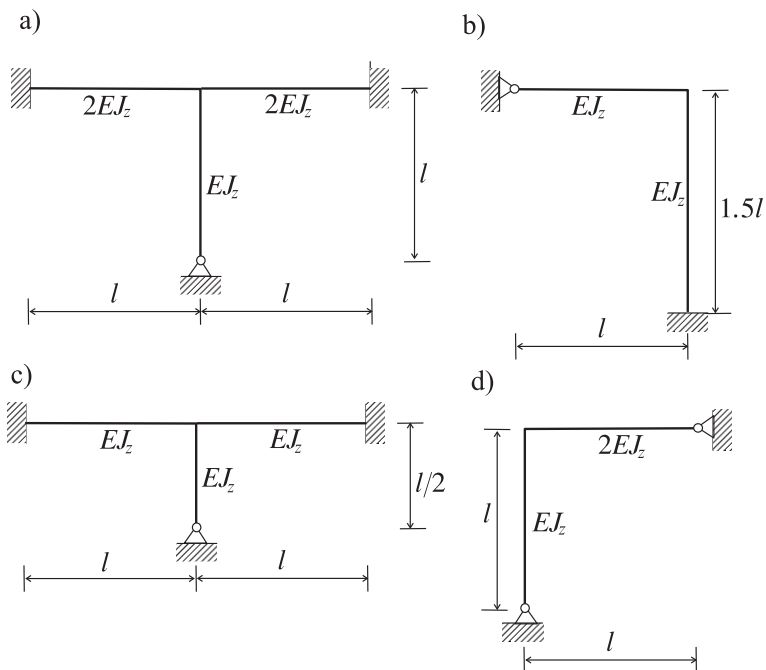
7.5. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania

Rozwiązać ramę metodą przemieszczeń – naszkicować wykres M_g . Rozważyć dwa warianty obciążenia termicznego:

- podniesienie temperatury we wszystkich prętach o stałą wartość $\bar{\theta} = 30^\circ\text{C}$,

- nierównomierny rozkład temperatury scharakteryzowany gradientem termicznym $\Delta\theta/h = 40^\circ\text{C}/\text{m}$ i odpowiadający ogrzaniu zewnętrznych włókien o $+20^\circ\text{C}$ przy równoczesnym ochłodzeniu wewnętrznych włókien o -20°C .

Do obliczeń przyjmij stałe wartości α oraz $h = l/5$ jednakowe dla wszystkich prętów.



Rozdział 8

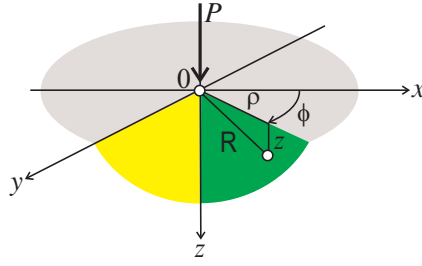
Zagadnienia kontaktowe

Napężenie kontaktowe występujące w miejscu styku dwóch dociskanych ciał odgrywa ważną rolę w trybologii przy projektowaniu łożysk, przekładni zębatych, jak również w kolejnictwie oraz budowie mostów.

Zagadnienia kontaktowe należą do trudniejszych problemów wytrzymałości materiałów, a właściwie teorii sprężystości, z uwagi na charakteryzujący je stan przestrzenny oraz zaawansowany aparat matematyczny. W celu uniknięcia podawania czytelnikowi rozwlekłych i żmudnych wyprowadzeń matematycznych – patrz [7, 8, 15, 16], oraz równocześnie uznając podawanie gotowych wzorów końcowych za zbyt uproszczenie – patrz [11, 17, 19, 23], zdecydowano się na prezentację rozwiązania w sposób hybrydowy, tzn. fragmenty teorii niewymagające wprowadzenia funkcji specjalnych podano wprost, natomiast fragmenty trudniejsze zostały omówione skrótowo przez podanie finalnych formuł oraz tabel współczynników – patrz [18, 22].

8.1. Zagadnienie Boussinesqa

Zagadnienie Boussinesqa, którego rozwiązanie podano poniżej bez wyprowadzenia, stanowi wstęp do sformułowania zagadnienia Hertza. W zagadnieniu Boussinesqa rozpatrywany jest wpływ działania siły skupionej P , zaczepionej w początku układu współrzędnych – patrz rys. 8.1, na półprzestrzeń sprężystą. W stosunku do właściwości samej półprzestrzeni sprężystej przyjmuje się założenia o jej jednorodności, izotropowości oraz liniowej sprężystości. Boussinesq podał następujące rozwiązanie zagadnienia, które w teorii sprężystości



Rysunek 8.1. Schemat zagadnienia Boussinesqa.

nosi jego nazwisko [2]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho} &= \frac{P}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{R(R+z)} - \frac{3\rho^2 z}{R^5} \right] \\
 \sigma_{\phi} &= \frac{P(1-2\nu)}{2\pi} \left[\frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)} \right] \\
 \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5} \\
 \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{\rho z^2}{R^5} \\
 u &= \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{\rho z}{R^3} - \frac{(1-2\nu)\rho}{R(R+z)} \right] \\
 w &= \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{2(1-\nu)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right]
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

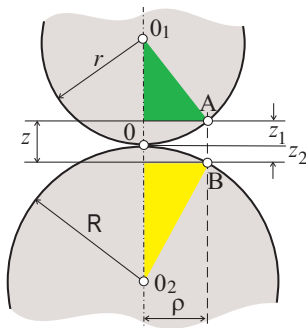
gdzie $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. W dalszych wywodach najistotniejszą rolę pełni ostatnia z zależności, czyli składowa pionowa przemieszczenia liczona w początku układu współrzędnych $z = 0$ oraz równocześnie $R = \rho$

$$w(z = 0) = \frac{(1-\nu)P}{2\pi GR} = \frac{(1-\nu^2)P}{\pi E \rho}. \tag{8.2}$$

8.2. Zagadnienie Hertza – docisk kul

W zagadnieniu Hertza [7] rozpatrywany jest kontakt dwóch kul o promieniach r oraz R , które stykają się w punkcie 0 – patrz rys. 8.2. Dwa bardzo blisko siebie położone punkty A oraz B, które wejdą ze sobą w kontakt, dzieli odległość $z = z_1 + z_2$, przy czym równocześnie zachodzą następujące zależności geometryczne

$$\begin{aligned}
 \rho^2 + (r - z_1)^2 &= r^2 \\
 \rho^2 + (R - z_2)^2 &= R^2
 \end{aligned} \tag{8.3}$$



Rysunek 8.2. Kontakt dwóch kul.

skąd oczywiście, po podniesieniu do kwadratu odpowiednich różnic zawartych w nawiasach oraz wykonaniu redukcji, dostajemy

$$\begin{aligned} \rho^2 - 2rz_1 + z_1^2 &= 0 \\ \rho^2 - 2Rz_2 + z_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Uznając następnie ostatnie wyrazy, tzn. z_1^2, z_2^2 , za wielkości małe w porównaniu z pozostałymi, dostajemy

$$z_1 = \frac{\rho^2}{2r} = \frac{\rho^2}{d} \quad z_2 = \frac{\rho^2}{2R} = \frac{\rho^2}{D} \quad (8.5)$$

gdzie d i D – średnice kul, można zatem podać odległość pomiędzy punktami A i B

$$z = z_1 + z_2 = \rho^2 \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right). \quad (8.6)$$

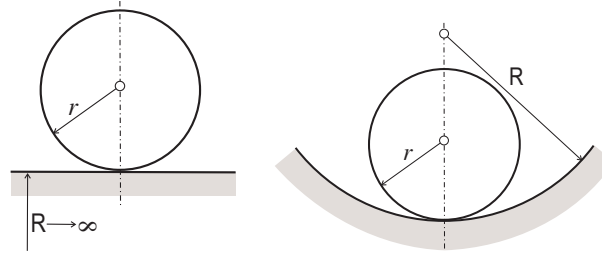
Warto w tym miejscu podać bardzo istotny wniosek natury geometrycznej wynikający z formy równania (8.6) – ponieważ przedstawia ono walec kołowy o osi z , zatem po przyłożeniu obciążenia pole zetknięcia przyjmie kształt koła.

W przypadku kontaktu kuli z płaszczyzną, przedstawionego na lewej części rys. 8.3, do wzoru (8.6) należy wstawić $R \rightarrow \infty$, czyli $1/D = 0$, a zatem

$$z = \frac{\rho^2}{d}, \quad (8.7)$$

natomiast w przypadku kontaktu kuli z powierzchnią wklęsłą, pokazanego na prawej części rys. 8.3, we wzorze (8.6) wstawiamy $D = 2R < 0$, zatem

$$z = \rho^2 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right). \quad (8.8)$$



Rysunek 8.3. Kontakt kuli z płaszczyzną oraz powierzchnią kulistą wklęsłą.

W kolejnym kroku rozważana jest deformacja spowodowana działaniem siły P zaczepionej w punkcie 0 i ściskającej obie kule. Zakładając, iż średnice obu kul d i D są bardzo duże w stosunku do średnicy pola zetknięcia, Hertz wykorzystał wzory na składowe przemieszczenia dla zagadnienia półprzestrzeni sprężystej, tzw. problemu Boussinesqa. Jeśli w_1 oznacza przemieszczenie pionowe punktu A górnej z kul, natomiast w_2 odpowiednie przemieszczenie punktu B dolnej z kul, wówczas oba punkty oddalone oryginalnie o $w_1 + w_2$ przybliżą się o α i tym samym dystans pomiędzy nimi wyniesie $\alpha - (w_1 + w_2)$. Ostatecznie, jeśli punkty A i B znajdują się w polu zetknięcia, czyli wejdą w kontakt, otrzymujemy

$$\alpha - (w_1 + w_2) = z_1 + z_2 = \xi \rho^2 \quad (8.9)$$

gdzie ξ oznacza stałą zależną od średnic d oraz D i wynoszącą odpowiednio $(\frac{1}{d} + \frac{1}{D})$, $\frac{1}{d}$ oraz $(\frac{1}{d} - \frac{1}{D})$ dla kolejnych przypadków określonych wzorami (8.6), (8.7) bądź (8.8). Z powyższych rozważań natury geometrycznej wynika zatem związek

$$w_1 + w_2 = \alpha - \xi \rho^2. \quad (8.10)$$

W następnym kroku należy powiązać wartości lokalnych przemieszczeń z wartością ciśnienia q panującego pomiędzy obiema kulami. W przypadku punktu A oddalonego od punktu przyłożenia siły P o ρ , na podstawie rozwiązania problemu Boussinesqa, dostajemy

$$w_1 = \frac{(1 - \nu_1^2)P}{\pi E_1 \rho}. \quad (8.11)$$

Adaptując powyższe rozwiązanie do przypadku obciążenia rozłożonego q na powierzchni koła o promieniu a , dostajemy [18, 22]

$$\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} q \frac{s d\psi ds}{s} = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} q d\psi ds \quad (8.12)$$

gdzie s oznacza promień w nowym układzie biegunowym o początku w punkcie $A=B$, zastępujący ρ z mianownika (8.11) i jednocześnie redukujący się z s występującym w definicji $dA = s d\psi ds$ oraz pozwalający ominąć użycie całek eliptycznych pojawiających się w klasycznych rozwiązaniach [8, 15]. Wartość ugięcia w_1 otrzymujemy przez całkowanie wzoru (8.12)

$$w_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \iint q d\psi ds \quad (8.13)$$

gdzie E_1 oraz ν_1 oznaczają odpowiednio moduł Younga oraz współczynnik Poissona górnej kuli, zaś całkowanie dotyczy całej powierzchni zetknięcia A , mającej kształt koła. Stosując analogiczny wzór dla punktu B , leżącego na dolnej kuli, otrzymujemy

$$w_1 + w_2 = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint q d\psi ds = \alpha - \xi \rho^2 \quad (8.14)$$

lub równoważnie

$$(k_1 + k_2) \iint q d\psi ds = \alpha - \xi \rho^2 \quad (8.15)$$

po wprowadzeniu oznaczeń

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}. \quad (8.16)$$

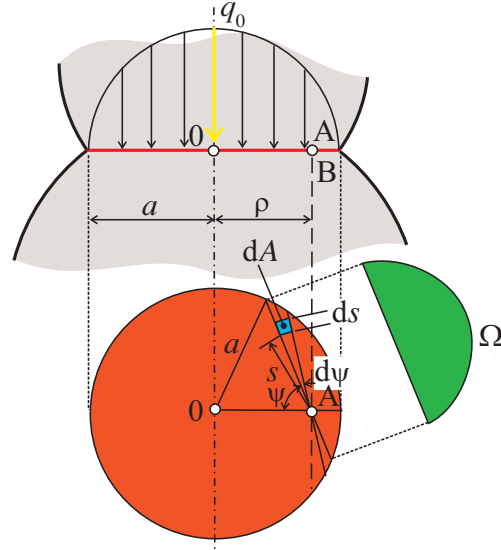
Równanie (8.15) jest równaniem całkowym, którego rozwiązanie q należy znaleźć. Na szczęście udaje się to zrobić na drodze elementarnej, zakładając, że rozkład nacisku w polu zetknięcia odpowiada półkuli o promieniu a . Jeśli q_0 jest wartością nacisku w środku, wtedy

$$q_0 = ca \quad (8.17)$$

gdzie $c = q_0/a$ jest stałym czynnikiem pozwalającym na zachowanie jednorodności wymiarowej w wyrażeniu na wartość obciążenia

$$q = \frac{q_0}{a} \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \psi} \quad (8.18)$$

gdzie $\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}$ przedstawia długość połowy cięciwy pokazanej w układzie na rys. 8.4. Całkę występującą we wzorze (8.15) obliczmy, najpierw całkując wzdłuż promienia s , a następnie wzdłuż kąta ψ . Podstawiając (8.17) do



Rysunek 8.4. Powierzchnia zetknięcia dwóch kul wraz z rozkładem nacisku q .

wewnętrznej całki liczonej wzdłuż łuku (8.15), dostajemy

$$\int q ds = \frac{q_0}{a} \Omega \quad (8.19)$$

gdzie Ω oznacza powierzchnię półkola opisanego równaniem $\pi(a^2 - \rho^2 \sin^2 \psi)$, zaś równanie (8.15) zostaje przekształcone do postaci

$$\frac{\pi(k_1 + k_2)q_0}{a} \underbrace{\int_0^{\pi/2} (a^2 - \rho^2 \sin^2 \psi) d\psi}_{=I} = \alpha - \xi \rho^2 \quad (8.20)$$

lub po obliczeniu całki I^*) przyjmuje finalną formę

$$(k_1 + k_2) \frac{q_0 \pi^2}{4a} (2a^2 - \rho^2) = \alpha - \xi \rho^2. \quad (8.21)$$

Równanie powyższe przedstawia równość dwóch wielomianów drugiego stopnia względem ρ i będzie spełnione, gdy współczynniki przy odpowiednich potęgach

*) $I = \int_0^{\pi/2} (a^2 - \rho^2 \sin^2 \psi) d\psi = (a^2 \psi - \rho^2 \frac{\psi - \sin \psi \cos \psi}{2}) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi(2a^2 - \rho^2)}{4}$.

ρ będą sobie równe

$$\alpha = (k_1 + k_2)q_0 \frac{\pi^2 a}{2}, \quad \xi = (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4a} \quad (8.22)$$

czyli gdy zachodzą następujące związki dla przemieszczenia α oraz promienia pola zetknięcia a

$$\begin{aligned} \alpha &= (k_1 + k_2)q_0 \frac{\pi^2 a}{2} \\ a &= (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4\xi}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Wartość maksymalnego nacisku q_0 wynika z warunku równości wypadkowej od nacisku działającego w polu zetknięcia i siły P

$$\frac{q_0}{a} \frac{2}{3} \pi a^3 = P \quad (8.24)$$

skąd oczywiście

$$q_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (8.25)$$

czyli maksymalna wartość nacisku stanowi 150% jego średniej wartości. Podstawienie (8.25) do równań (8.23) przy równoczesnym przyjęciu $\xi = \frac{1}{d} + \frac{1}{D} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r} + \frac{1}{R})$ daje

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} P (k_1 + k_2) \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R}}} \\ a &= \sqrt[3]{\left[\frac{3\pi}{4} P (k_1 + k_2) \right]^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

W przypadku gdy kule wykonane są z tego samego materiału, tzn. $E_1 = E_2 = E$ oraz $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, wzory (8.26) redukują się do postaci

$$\begin{aligned} \alpha &= 1.109 \sqrt[3]{\frac{P}{E \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)}} \\ a &= 1.23 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E} \right)^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)} \end{aligned} \quad (8.27)$$

zaś odpowiednia maksymalna wartość nacisku obliczona wzorem (8.25) wynosi

$$q_0 = 0.388 \sqrt[3]{P \left(\frac{E}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R}} \right)^2}. \quad (8.28)$$

8.3. Docisk ciał niekulistych

Przypadek ściskania dwóch ciał niekulistych zostanie omówiony w sposób bardziej opisowy z uwagi na swą większą złożoność matematyczną. Zgodnie z założeniem Hertza dwa ciała niekuliste stykają się na powierzchni zetknięcia będącej obecnie elipsą. Zależności analogiczne do (8.5), opisujące odległości sąsiadujących punktów od powierzchni stycznej, wynoszą obecnie

$$z_1 = A_1x^2 + A_2xy + A_3y^2 \quad z_2 = B_1x^2 + B_2xy + B_3y^2 \quad (8.29)$$

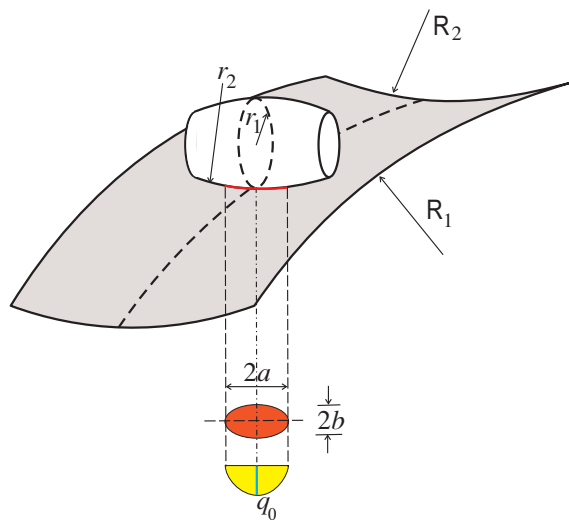
zatem całkowita odległość jest równa

$$z_1 + z_2 = (A_1 + B_1)x^2 + (A_2 + B_2)xy + (A_3 + B_3)y^2. \quad (8.30)$$

Transformacja przez obrót do kierunków głównych formy kwadratowej (8.30) pozwala na eliminację wyrazu zawierającego iloczyn mieszany xy

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 \quad (8.31)$$

gdzie A oraz B są stałymi, których wartości zależą od wielkości głównych krzywizn stykających się ciał oraz od kąta zawartego pomiędzy nimi. Przyjmując następujące oznaczenia: r_1 i r_2 – promienie krzywizny pierwszego ciała, R_1



Rysunek 8.5. Powierzchnia zetknięcia dwóch ciał niekulistych.

i R_2 – promienie krzywizny drugiego ciała, φ – kąt pomiędzy płaszczyznami krzywizn głównych $1/r_1$ oraz $1/R_1$, stałe A oraz B dają się obliczyć z równań

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \\ B - A &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \cos 2\varphi} \end{aligned} \quad (8.32)$$

przy czym obie stałe muszą być dodatnie, tak aby równanie (8.31) reprezentowało elipsę.

Jeśli wielkości α , w_1 oraz w_2 zachowują poprzedni sens, to odpowiednikiem wzoru (8.10) jest

$$w_1 + w_2 = \alpha - Ax^2 - By^2 \quad (8.33)$$

natomiast wzorowi (8.14) odpowiada

$$w_1 + w_2 = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint \frac{q dA}{r} = \alpha - Ax^2 - By^2. \quad (8.34)$$

W celu rozwiązania równania (8.34) Hertz zaproponował podstawienie zamiast q rozkładu odpowiadającego półelipsoidzie rozpiętej nad polem zetknięcia i przyjmującej największą rzędną q_0 w środku

$$q(x, y) = \frac{q_0}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2} \quad (8.35)$$

co, jak wspomniano uprzednio, prowadzi do tzw. całek eliptycznych, będących funkcjami nieelementarnymi, posługiwanie się którymi wymaga użycia tablic [13] bądź procedur numerycznych [14]. Tak jak poprzednio, wartość maksymalnego nacisku q_0 otrzymujemy z warunku równowagi wypadkowej od nacisku działającego w polu zetknięcia i siły P

$$P = \iint q dA = \frac{2}{3} \pi ab q_0 \quad (8.36)$$

skąd oczywiście

$$q_0 = \frac{3P}{2\pi ab} \quad (8.37)$$

natomiast wzory określające półosie elipsy pola zetknięcia stanowią uogólnienie (8.23₂)

$$\begin{aligned} a &= m \sqrt[3]{\frac{3\pi P(k_1 + k_2)}{4(A + B)}} \\ b &= n \sqrt[3]{\frac{3\pi P(k_1 + k_2)}{4(A + B)}} \end{aligned} \quad (8.38)$$

w których $A + B$ jest obliczane wzorem (8.32), natomiast wartości współczynników m i n podano w tabeli w zależności od kąta ω

$$\cos \omega = \frac{B - A}{A + B}. \quad (8.39)$$

Wartość zbliżenia obu ciał określa wzór

$$w = \gamma \sqrt[3]{P^2 h^2 \kappa} \quad (8.40)$$

w którym dla skrócenia zapisu użyto oznaczeń

$$\begin{aligned} \kappa &= 2(A + B) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ h &= \frac{\pi}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \end{aligned} \quad (8.41)$$

zaś wartość współczynnika γ dobieramy z poniższej tablicy 8.1.

Tablica 8.1. Wartości współczynników α , β oraz γ w zależności od kąta ω [17].

ω	m	n	γ	ω	m	n	γ
0°	∞	0.000	–	55°	1.611	0.678	0.950
10°	6.612	0.319	0.443	60°	1.486	0.717	0.975
20°	3.778	0.408	0.635	65°	1.378	0.759	0.994
30°	2.731	0.493	0.755	70°	1.284	0.802	1.010
35°	2.397	0.530	0.805	75°	1.202	0.846	1.021
40°	2.136	0.567	0.850	80°	1.128	0.893	1.031
45°	1.926	0.604	0.888	85°	1.061	0.944	1.037
50°	1.754	0.641	0.922	90°	1.000	1.000	1.040

8.4. Największe wyężenie w zagadnieniach kontaktowych

Największa wartość ciśnienia dociskowego q_0 , a co za tym idzie składowej osiowej naprężenia $\sigma_z = -q_0$, występuje w środku pola zetknięcia, tzn. w środku odpowiednio koła bądź elipsy. Jednak z uwagi na trójosiowy charakter stanu naprężenia warto przytoczyć gotowe wzory dla wszystkich niezerowych składowych naprężenia leżących na osi z , tzn. dla $\rho = 0$, oraz dotyczące przypadku

docisku dwóch kul

$$\begin{aligned}\sigma_\rho(z) = \sigma_\phi(z) &= -q_0 \left\{ (1 + \nu) \left[1 - \frac{z}{a} \arctan \frac{a}{z} - \frac{a^2}{2(a^2 + z^2)} \right] \right\} \\ \sigma_z(z) &= -q_0 \frac{a^2}{a^2 + z^2}\end{aligned}\quad (8.42)$$

które dla środka zetknięcia ($z \rightarrow 0$) redukują się do formuł

$$\sigma_\rho = \sigma_\phi = -q_0 \left[(1 + \nu) - \frac{1}{2} \right] = -q_0 \left(\frac{1}{2} + \nu \right), \quad \sigma_z = -q_0 = -\frac{3P}{2\pi a^2}.\quad (8.43)$$

Warto zwrócić w tym miejscu uwagę na fakt, iż obliczone składowe naprężenia są równocześnie składowymi głównymi i przy wartości współczynnika Poissona $\nu = 0.3$ reprezentują stan naprężenia zbliżony do hydrostatycznego

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0.8q_0, \quad \sigma_3 = -q_0.\quad (8.44)$$

W związku z powyższym wartość wyężenia w środku kołowego pola zetknięcia, w tzw. punkcie Hertza, obliczona według hipotezy Hubera–Misesa–Hencky’ego wynosi

$$\sigma_{\text{red(H)}}^{\text{MH}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = 0.2q_0\quad (8.45)$$

identyczny wynik otrzymujemy w przypadku zastosowania hipotezy Tresci–Guesta i jest to oczywiście efektem równości składowych głównych naprężenia $\sigma_1 = \sigma_2$ w zależnościach (8.44).

Bardziej szczegółowa analiza stanu wyężenia dokonana przez Bielajewa [1] ujawniła, że punkt maksymalnego wyężenia znajduje się na osi z poniżej punktu Hertza. W celu dokładnego ustalenia jego położenia należy wstawić rozkłady składowych naprężenia (8.42) do wzoru na wyężenie (8.45), by otrzymać

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{MH}} = q_0 \left[1.5 \frac{a^2}{a^2 + z^2} - (1 + \nu) \left(1 - \frac{z}{a} \arctan \frac{a}{z} \right) \right]\quad (8.46)$$

a następnie obliczyć pochodną względem z i przyrównać jej wartość do zera, dochodzimy w ten sposób do równania

$$\arctan \frac{a}{z} - \frac{\frac{z}{a}}{\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^2} \left(1 + \frac{3}{1 + \nu} + \frac{z^2}{a^2} \right) = 0\quad (8.47)$$

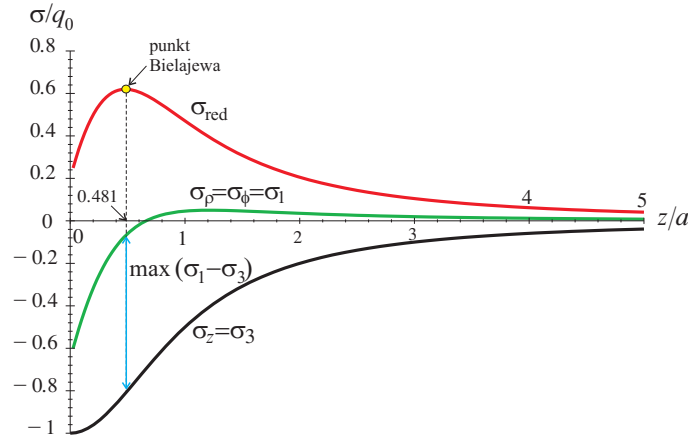
którego jedyny rzeczywisty pierwiastek to

$$z = 0.481a.\quad (8.48)$$

Wartość wyężenia w punkcie Bielajewa wynosi zatem

$$\sigma_{\text{red(B)}}^{\text{HMH}} = (0.758 - 0.460\nu)q_0 = 0.62q_0 \quad \text{dla } \nu = 0.3 \quad (8.49)$$

czyli ponad 3 razy więcej niż wartość w punkcie Hertza – porównaj (8.45). W celu lepszej interpretacji otrzymanych wyników na rysunku 8.6 przedstawiono przebiegi kolejnych składowych naprężenia $\sigma_\rho = \sigma_\phi, \sigma_z$ wraz z $\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}}$ odniesione do wartości q_0 . Ze względu na równoważność warunków wyężeniowych Hubera–Misesa–Hencky’ego oraz Tresci–Guesta ($\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$) maksimum wyężenia odpowiada punktowi największego „oddalenia” pomiędzy składowymi naprężenia σ_1 oraz σ_3 .

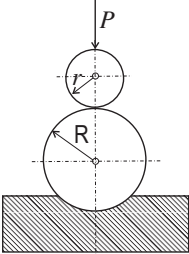
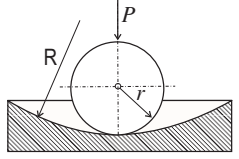
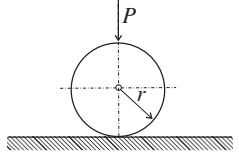
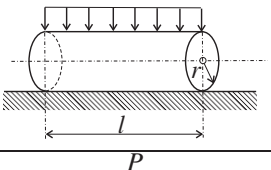
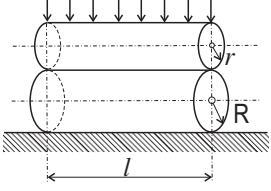


Rysunek 8.6. Graficzna interpretacja położenia punktu Bielajewa.

Przeprowadzając analogiczną analizę wyężeniową w przypadku docisku dwóch walców o osiach równoległych, można wykazać istnienie punktu o maksymalnym wyężeniu na głębokości $z = 0.78b$ i wielkości $\sigma_{\text{red}}^{\text{TG}} = 0.608q_0$ (b oznacza szerokość prostokąta stanowiącego pole docisku). Jednak w tym schemacie wyniki wyężenia liczone według hipotez Tresci–Guesta oraz Hubera–Misesa–Hencky’ego nie pokrywają się, zatem posługując się drugą z hipotez, dostajemy głębokość $z = 0.697b$ oraz wielkość wyężenia $\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = 0.567q_0$.

Poniżej w tabelicy 8.2, wzorując się na [11], zestawiono wzory określające wartości maksymalnego ciśnienia dociskowego q_0 oraz naprężenia zredukowanego w punkcie Bielajewa $\sigma_{\text{red(B)}}$ dla prostszych przypadków stykających się ciał o jednakowych wartościach modułu Younga E oraz współczynnika Poissona $\nu = 0.3$.

Tablica 8.2. Wartości maksymalnego ciśnienia dociskowego oraz naprężenia zredukowanego w punkcie Bielajewa [11].

	q_0	$\sigma_{\text{red(B)}}$
	$0.388 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)^2}$	$0.233 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)^2}$
	$0.388 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)^2}$	$0.233 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)^2}$
	$0.388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}$	$0.233 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}$
	$0.418 \sqrt{\frac{PE}{lr}}$	$0.251 \sqrt{\frac{PE}{lr}}$
	$0.418 \sqrt{\frac{PE}{l} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)}$	$0.251 \sqrt{\frac{PE}{l} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)}$

Warunek bezpieczeństwa sformułowany w punkcie Bielajewa zgodnie z zależnością (8.49) wygląda następująco

$$\sigma_{\text{red(B)}}^{\text{HMH}} = 0.62q_0 \leq \sigma_{\text{dopB}} \quad (8.50)$$

skąd

$$q_0 \leq \frac{\sigma_{\text{dopB}}}{0.62} \quad (8.51)$$

równocześnie dla przypadku kuli dociskanej do płyty (trzeci wiersz w tablicy 8.2) zachodzi

$$0.388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}} \leq \frac{\sigma_{\text{dopB}}}{0.62} \quad (8.52)$$

co pozwala oszacować wartość maksymalnej siły

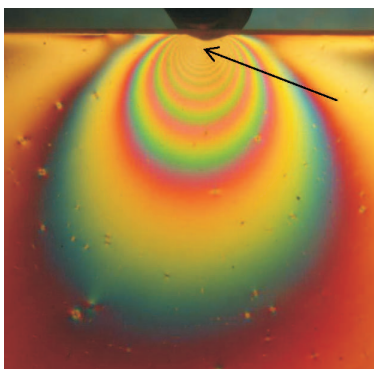
$$P \leq 17.95 \left(\frac{d}{E}\right)^2 (\sigma_{\text{dopB}})^3. \quad (8.53)$$

Przyjmując wartości $E = 212$ GPa oraz $\sigma_{\text{dopB}} = 2$ GPa (napężenie dopuszczalne na granicy plastyczności), dostajemy

$$P \leq 3.19d^2 \quad (8.54)$$

podczas gdy z eksperymentów Stribecka wynika, iż obciążenie bezpieczne dla kuli wynosi $5d^2$, co odpowiadałoby istotnie wyższej wartości, bo $\sigma_{\text{dopB}} = 2.23$ MPa.

Na zakończenie warto wspomnieć o wielu próbach doświadczalnego potwierdzenia występowania punktu Bielajewa, spośród których wyróżnia się swoją prostotą metoda elastooptyczna. Na rysunku 8.7 pokazano układ izochrom[†]) uzyskanych podczas dociskania krążka do płaszczyzny. Z układu izochrom wynika, iż izochroma najwyższego rzędu nie leży na powierzchni styku, lecz na pewnej głębokości pod nią.



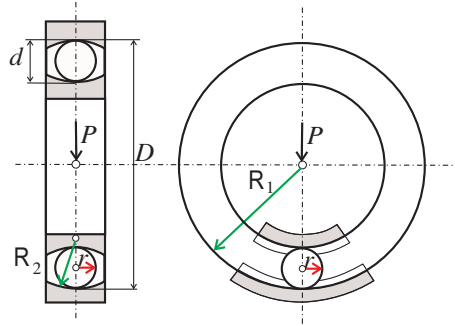
Rysunek 8.7. Układ izochrom odpowiadający dociskaniu krążka do płaszczyzny – strzałka wskazuje położenie punktu Bielajewa.

[†])Izochroma jest linią przechodzącą przez punkty o stałej różnicy składowych głównych napężenia, np. $\sigma_1 - \sigma_2 = \text{const}$.

8.5. Przykłady

8.5.1. Przykład 1 – łożysko kulkowe [19]

Obliczyć q_0 dla łożyska kulkowego jednorzędowego o wymiarach: średnica kulki $d = 0.04$ m, średnica zewnętrznego pierścienia łożyska $D = 0.2$ m, promień krzywizny poprzecznej pierścienia $R = 0.025$ m. Wartości stałych sprężystości dla materiału kulki oraz pierścienia przyjmując jak dla stali, tzn. $E = 210$ GPa oraz $\nu = 0.3$, natomiast wartość siły działającej na łożysko wynosi $P = 13$ kN.



Rysunek 8.8. Łożysko kulkowe.

Wartości krzywizn głównych kulki wynoszą

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} = \frac{2}{d} = \frac{2}{0.04} = 50.0 \text{ [m}^{-1}\text{]} \quad (8.55)$$

natomiast wartości krzywizn głównych pierścienia to odpowiednio

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= -\frac{1}{R} = -\frac{1}{0.025} = -40 \text{ [m}^{-1}\text{]}, \\ \frac{1}{R_2} &= -\frac{1}{D} = -\frac{1}{0.2} = -10 \text{ [m}^{-1}\text{]}. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Wartość kąta φ zawartego pomiędzy płaszczyznami maksymalnych krzywizn kulki oraz pierścienia wynosi $\varphi = 0$ lub $\varphi = \pi/2$, z uwagi na równość krzywizn głównych kulki obie wartości kąta dają ten sam wynik $\cos 2\varphi = 1$.

Wielkości pomocnicze liczone według wzorów (8.32) wynoszą

$$\begin{aligned} A + B &= 0.5(50.0 + 50.0 - 40.0 - 10) = 25.0 \text{ [m}^{-1}\text{]} \\ B - A &= 0.5\sqrt{(50.0 - 50.0)^2 + [(-40) - (-10)]^2} = 15.0 \text{ [m}^{-1}\text{]} \end{aligned} \quad (8.57)$$

wartość kąta podana zależnością (8.39)

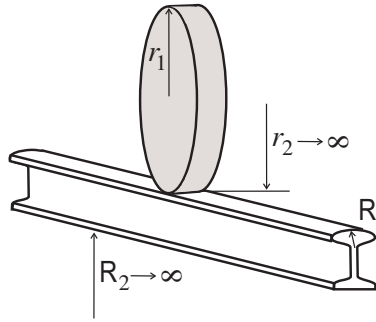
$$\frac{15.0}{25.0} = 0.6 = \cos \omega \longrightarrow \omega = 53^\circ. \quad (8.58)$$

Na podstawie tablicy 8.1 znajdujemy $m = 1.71$, $n = 0.65$, następnie po wprowadzeniu zależności określających półosie elipsy zetknięcia (8.38) do wzoru (8.37) dostajemy

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{0.388}{mn} \sqrt[3]{[E(A+B)]^2 P} \\ &= \frac{0.388}{1.71 \cdot 0.65} \sqrt[3]{(2.1 \cdot 10^5 \cdot 25.0)^2 \cdot 0.013} \approx 2480 \text{ [MPa]}. \end{aligned} \quad (8.59)$$

8.5.2. Przykład 2 – kontakt koła wagonu z szyną

Obliczyć q_0 dla styku koła wagonu z szyną: $r = 0.4 \text{ m}$, $R = 0.3 \text{ m}$, $P = 4.5 \text{ kN}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.025$ – patrz [18].



Rysunek 8.9. Kontakt koła z szyną.

Koło toczne dociskane do szyny jest traktowane jak uproszczony schemat dwóch walców o osiach wzajemnie prostopadłych $\varphi = 90^\circ \longrightarrow \cos 2\varphi = -1$ krzywizny koła wagonu

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} = \frac{1}{0.4} = 2.5 \text{ [m}^{-1}\text{]}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (8.60)$$

krzywizny główki szyny

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} = \frac{1}{0.3} = 3.33 \text{ [m}^{-1}\text{]}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (8.61)$$

wielkości pomocnicze

$$\begin{aligned} A + B &= 0.5(2.5 + 3.33) = 2.916 \text{ [m}^{-1}\text{]} \\ B - A &= 0.5\sqrt{(2.5)^2 + (3.33)^2} - 2 \cdot 2.5 \cdot 3.33 = 0.415 \text{ [m}^{-1}\text{]} \end{aligned} \quad (8.62)$$

na podstawie wzoru (8.39)

$$\frac{0.415}{2.916} = 0.142 = \cos \omega \longrightarrow \omega = 81.8^\circ \quad (8.63)$$

z tablicy 8.1 dobieramy przez interpolację

$$m = 1.104, \quad n = 0.911 \quad (8.64)$$

po podstawieniu do wzorów (8.38)

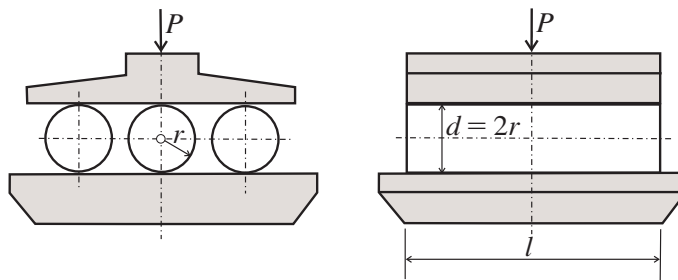
$$a = 0.0314\sqrt[3]{P}, \quad b = 0.0259\sqrt[3]{P}. \quad (8.65)$$

Dla obciążenia siłą $P = 4.5 \text{ kN}$ otrzymujemy: $a = 2.41 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ oraz $b = 1.98 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, a pole powierzchni elipsy zetknięcia $\pi ab = 1.50 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$, zatem maksymalne ciśnienie obliczone wzorem (8.37)

$$q_0 = \frac{3 \cdot 4.5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 1.50 \cdot 10^{-5}} = 450 \text{ [MPa]}. \quad (8.66)$$

8.5.3. Przykład 3 – łożysko wałowe

Obliczyć największą dopuszczalną wartość siły P dla styku wałka z płytą w łożysku trzywałowym – patrz [10], o wymiarach: $r = 0.07 \text{ m}$, $l = 0.42 \text{ m}$, wykonanym ze stali ŁH15 o module Younga $E = 208 \text{ GPa}$ oraz wartości naprężenia dopuszczalnego na docisk $\sigma_{\text{dopH}} = 2500 \text{ MPa}$ – patrz [9].



Rysunek 8.10. Schemat łożyska trzywałowego.

W obliczeniach stosujemy zmodyfikowany wzór z czwartego wiersza tablicy 8.2 dotyczący kontaktu walca z płaszczyzną

$$q_0 = 0.418 \sqrt{\frac{PE}{nlr}} \quad (8.67)$$

gdzie n oznacza liczbę wałków. Warunek bezpieczeństwa na docisk przyjmuje formę

$$q_0 \leq \sigma_{\text{dopH}} \quad (8.68)$$

zatem poszukiwana wartość siły wynosi

$$P \leq \frac{nlr}{E} \left(\frac{\sigma_{\text{dopH}}}{0.418} \right)^2 = \frac{3 \cdot 0.42 \cdot 0.07}{2.08 \cdot 10^5} \left(\frac{2.5 \cdot 10^3}{0.418} \right)^2 = 15.17 \text{ [MN]}. \quad (8.69)$$

8.6. Przykłady zadań do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć promień powierzchni zetknięcia ρ oraz wartości największego docisku q_0 oraz maksymalnego wyężenia $\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}}$ dla następujących przypadków:

- ściskanie dwóch kul o jednakowej średnicy d wykonanych z tego samego materiału o module Younga E ,
- docisk kuli o promieniu r do płaszczyzny, oba materiały mają identyczny moduł Younga E ,
- docisk kuli o średnicy d do wklęsłej powierzchni kulistej $D = 4d$, oba materiały mają ten sam moduł Younga E ,

przyjąć $E = 210 \text{ GPa}$ oraz bezpieczną wartość siły $P = 5d^2$ dla hartowanej stali łożyskowej, gdzie mnożnik 5 [MPa], zaś średnica d [m], w związku z powyższym siła P [MN].

Rozdział 9

Analiza płaskich układów prętowych metodą elementów skończonych

9.1. Wstęp

Analiza konstrukcji rzeczywistych polega na budowie, a następnie badaniu wyidealizowanych modeli fizycznych. Modele fizyczne powstają na drodze uproszczeń wprowadzonych w konstrukcjach rzeczywistych i mają na celu łatwiejszą ich analizę. Do podstawowych trudności napotykanym przy tworzeniu modeli fizycznych należą przede wszystkim znaczna złożoność konstrukcji rzeczywistych oraz zjawisk fizycznych, które w nich zachodzą. W związku z powyższym do najczęściej wprowadzanych założeń upraszczających zaliczyć należy:

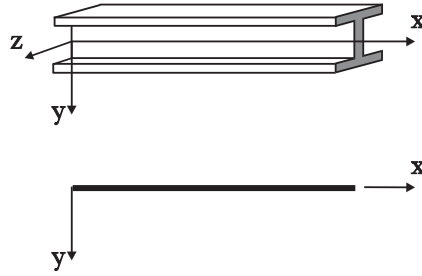
- uproszczenia kształtu konstrukcji rzeczywistej polegające na zastąpieniu złożonych brył elementami prostymi, takimi jak np. walce, prostopadłościanny itp.,
- założenie jednorodności materiału poszczególnych części konstrukcji,
- przyjęcie pewnych elementów rozpatrywanego modelu jako brył idealnie sztywnych – w konstrukcjach rzeczywistych istnieją zawsze części o sztywności wielokrotnie większej od pozostałych, które traktuje się jako nieodkształcalne,
- przyjęcie pewnych elementów modelu jako nieważkie – bardzo często wpływ ciężaru własnego jest znikomy w porównaniu do wielkości obciążeń,

- założenie liniowych charakterystyk właściwości fizycznych rozpatrywanego modelu – wszystkie charakterystyki konstrukcji rzeczywistej są mniej lub bardziej nieliniowe, jednakże w większości przypadków inżynierskich można stosować ich liniowe przybliżenia, znacznie upraszczające model matematyczny,
- pominięcie mało istotnych oddziaływań zewnętrznych między rozpatrywaną konstrukcją i otoczeniem – rzeczywista konstrukcja poddana jest działaniu wielu różnych obciążeń, z których większość może być pominięta,
- pominięcie mało istotnych oddziaływań wewnętrznych między poszczególnymi częściami rozpatrywanej konstrukcji – chodzi tu przede wszystkim o opory związane z siłami tarcia, jednak decyzja o ich pominięciu jest zwykle trudna i wymaga dużego wyczucia inżynierskiego.

9.2. Podstawy modelowania konstrukcji

9.2.1. Model dyskretny

W modelowaniu rzeczywistych konstrukcji bardzo istotnym etapem jest przyjęcie odpowiedniego modelu fizycznego. Modele fizyczne zbudowane są z elementów, których parametry rozłożone są w sposób ciągły. W związku z tym równania opisujące zachowanie się takich modeli są w najogólniejszym przypadku równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Rozwiązanie takich równań metodami analitycznymi czy komputerowymi bywa bardzo trudne, a często niemożliwe. Najczęściej więc ciągle modele fizyczne zastępowane są modelami dyskretnymi, w których parametry mają już charakter skupiony. Tak więc w procesie dyskretyzacji przechodzimy od modelu ciągłego do prostszego modelu dyskretnego, opisanego równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. W przypadku najprostszyc konstrukcji inżynierskich, jakimi są konstrukcje prętowe, można ominąć etap związany z budową modelu fizycznego, ponieważ model dyskretny może zostać otrzymany bezpośrednio na drodze dyskretyzacji konstrukcji rzeczywistej. Na rysunku 9.1 przedstawiono przykład dyskretyzacji belki pryzmatycznej. Obecnie znanych jest wiele metod dyskretyzacji konstrukcji, do najważniejszych i najczęściej stosowanych należą metoda różnic skończonych (MRS) i metoda elementów skończonych (MES).



Rysunek 9.1. Modele ciągły i dyskretny belki pryzmatycznej.

9.2.2. Model matematyczny

Modelem matematycznym nazywamy równania opisujące zachowanie modelu dyskretnego. Równania modeli dyskretnych są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, a dodatkowo stają się równaniami różniczkowymi liniowymi dla konstrukcji o liniowych charakterystykach. W przypadku belki pryzmatycznej pokazanej na rysunku 9.1 model matematyczny sprowadza się do znanego z kursu wytrzymałości materiałów równania różniczkowego linii ugięcia belki

$$EJ_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -M_g(x) \quad (9.1)$$

w którym EJ_z oznacza sztywność giętą belki, zaś $M_g(x)$ moment zginający.

W modelach matematycznych będących równaniami różniczkowymi występują niewiadome funkcje (w przypadku równania (9.1) jest to funkcja ugięcia $y(x)$). W zależności od tego, czy niewiadome funkcje odpowiadają siłom czy też przemieszczeniom, mówimy o metodzie sił bądź metodzie przemieszczeń. Bardziej ogólne metody oparte na bilansie energii nazywamy metodami energetycznymi; mogą one być zarówno metodami sił, jak i przemieszczeń.

W przypadku równania (9.1) niewiadoma funkcja odpowiada przemieszczeniu – mamy więc do czynienia z metodą przemieszczeń. Do tej właśnie metody ograniczymy nasze rozważania w dalszej części tego rozdziału.

9.2.3. Program komputerowy

Równania różniczkowe tworzące model matematyczny rozwiązywane są przy użyciu algorytmów numerycznych tworzących program komputerowy. Programy komputerowe składają się z podprogramów wyspecjalizowanych w rozwiązywaniu określonych zadań, jak:

- pre-procesory, czyli podprogramy przygotowania i wczytywania danych wejściowych,
- agregatory, czyli podprogramy budowy macierzy sztywności,
- solwery, czyli podprogramy do rozwiązywania układów równań algebraicznych,
- post-procesory, czyli podprogramy przygotowania i wyprowadzenia wyników,
- inne podprogramy.

9.2.4. Eksploatacja programów komputerowych

Eksploatacja programu komputerowego rozpoczyna się z chwilą, gdy został on już zweryfikowany. Użytkownika programu może nie interesować ani model analityczny, ani model numeryczny, ani nawet sam program, co gorsza zainteresowany użytkownik nie ma możliwości ingerencji w kod, ponieważ producenci zaawansowanych pakietów MES dostarczają zautomatyzowane narzędzia numeryczne działające jak 'czarna skrzynka'. Zadaniem użytkownika jest przygotowanie danych wejściowych zgodnie z instrukcją i następnie wprowadzenie ich do komputera, który podaje rozwiązanie, przesyłając je do urządzenia wyjściowego. Podejście powyższe jest powszechnie praktykowane zarówno przez studentów wyższych uczelni, jak i przez inżynierów z przemysłu. Stosowanie metod komputerowych bez głębszej znajomości używanego modelu, jak i metody obliczeń może prowadzić do całkowicie błędnych wyników, pomimo że od strony formalnej dane wejściowe zostały przygotowane zupełnie poprawnie. Klasycznym przykładem jest rozwiązanie zagadnienia zginania belki opisanego równaniem (9.1), w którym uzyskano strzałkę ugięcia równą 0.5 m przy całkowitej rozpiętości belki 1.0 m, ponieważ użytkownik nie uwzględnił ograniczeń teorii małych ugięć, nie mówiąc już o możliwości uplastycznienia.

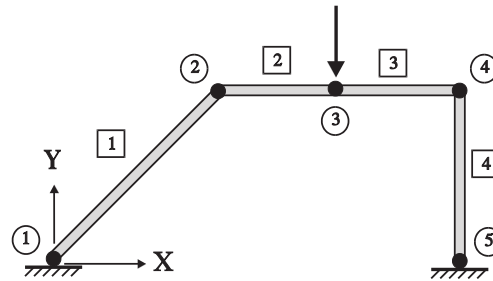
9.3. Podstawy MES

Podczas modelowania konstrukcji rzeczywistej bardzo ważnym etapem jest przejście od modelu matematycznego do dyskretnego tak, aby model dyskretny możliwie najlepiej odzwierciedlał zjawiska zachodzące w modelu fizycznym. Model dyskretny otrzymywany jest na drodze tzw. skończenie elementowej aproksymacji modelu matematycznego. Koncepcja tej aproksymacji polega na

zastąpieniu każdej wielkości opisanej funkcją ciągłą w modelu matematycznym, a więc uogólnionych przemieszczeń oraz sił, dyskretnym zbiorem innych funkcji ciągłych określonych w skończonej liczbie podobszarów, zwanych elementami skończonymi. Poszczególne funkcje ciągłe w elementach skończonych zdefiniowane są poprzez wartości, jakie te funkcje przyjmują na końcach elementów, nazywanych węzłami. W celu budowy modelu skończenie elementowego należy zatem w modelu matematycznym dokonać dyskretyzacji, czyli

- wyróżnić skończoną liczbę węzłów,
- określić w węzłach wielkości, których wartości będą aproksymowane (uogólnione przemieszczenia oraz siły),
- podzielić rozpatrywany obszar na skończoną liczbę elementów, stykających się ze sobą w węzłach,
- aproksymować wielkości fizyczne w każdym elemencie za pomocą funkcji aproksymujących, nazywanych funkcjami kształtu.

Przykładową dyskretyzację konstrukcji ramowej zaprezentowano na rysunku 9.2. Węzły w liczbie 5, oznaczone cyframi w kółkach, przyjęto w miejscach zamocowania, w miejscach połączenia słupków z poprzeczką oraz dodatkowo w miejscu przyłożenia obciążenia skupionego. Kolejne numery elementów skończonych oznaczono cyframi w kwadratach.



Rysunek 9.2. Przykład dyskretyzacji ramy.

9.3.1. Równania modelu dyskretnego

W celu wyprowadzenia równań modelu dyskretnego użyjemy formalizmu matematycznego najlepiej nadającego się do tego celu, czyli równań Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial u_j} = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9.2)$$

gdzie:

- L – energia sprężystości,
- u_j – j -te przemieszczenie uogólnione,
- f_j – j -ta siła uogólniona,
- n – liczba stopni swobody.

Energia sprężystości modelu dyskretnego jest sumą energii sprężystości wszystkich elementów skończonych modelu, z których każda jest formą kwadratową przemieszczeń uogólnionych

$$L = \sum_{el=1}^N L_{el} = \sum_{el=1}^N \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n k_{el,ij} u_i u_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n K_{ij} u_i u_j \quad (9.3)$$

gdzie globalna macierz sztywności wyrażona została przez sumę lokalnych macierzy sztywności

$$K_{ij} = \sum_{el=1}^N k_{el,ij}. \quad (9.4)$$

Podstawienie wzoru na energię (9.3) do równań Lagrange'a (9.2) prowadzi do ogólnej postaci równań modelu dyskretnego

$$\sum_{j=1}^n (K_{ij} u_j - f_j) = 0 \quad (9.5)$$

które mogą być sprowadzone do następującej postaci macierzowej

$$[\mathbf{K}] [\mathbf{U}] = [\mathbf{F}]. \quad (9.6)$$

9.3.2. Funkcje kształtu płaskiego elementu belkowego

Dokładność dyskretyzacji jest tym większa, im:

- przyjęte funkcje kształtu lepiej odwzorowują wielkości w modelu matematycznym,
- na więcej węzłów, a tym samym elementów, podzielimy obszar zajmowany przez konstrukcję.

Spełnienie pierwszego warunku, towarzyszące coraz gęstszemu podziałowi obszaru na elementy, może zbliżyć rozwiązanie skończenie elementowe do rozwiązania ścisłego. Zbliżanie jest zagwarantowane wtedy, gdy funkcje kształtu zapewniają dodatkowo:

- ciągłość przemieszczeń w węzłach,
- możliwość opisu stałych przemieszczeń elementu, odpowiadających ruchowi elementu jako bryły sztywnej,
- możliwość opisu stałych naprężeń wewnątrz elementu, występujących przy odpowiednich przemieszczeniach węzłów.

Elementy skończone, dla których funkcje kształtu spełniają pierwszy z warunków, nazywamy elementami zgodnymi lub dostosowanymi, natomiast elementy, dla których są spełnione warunki drugi i trzeci, nazywamy elementami zupełnymi.

Z drugiej strony funkcje kształtu powinny być w miarę proste tak, aby operacje na nich dały się stosunkowo łatwo algorytmizować. W związku z powyższym najczęściej stosowanymi funkcjami kształtu są wielomiany.

W przypadku zagadnienia jednowymiarowego rozciągania-ściskania (element typu kratownicowego) wszystkie podane warunki są spełnione przez funkcję kształtu określającą przemieszczenie wzdłużne w postaci wielomianu pierwszego stopnia

$$u(x) = a_1 + a_2x \quad (9.7)$$

Natomiast dla zagadnienia jednowymiarowego płaskiego zginania (element typu belkowego) najprostsza z funkcji kształtu określająca przemieszczenie poprzeczne jest wielomianem trzeciego stopnia

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (9.8)$$

Powyższa funkcja kształtu staje się rozwiązaniem ścisłym dla zagadnienia płaskiego zginania pręta prostego obciążonego na końcach obciążeniem skupionym, gdyż w takim przypadku moment zginający jest wielomianem pierwszego stopnia, a funkcja kształtu całką równania różniczkowego linii ugięcia (9.1).

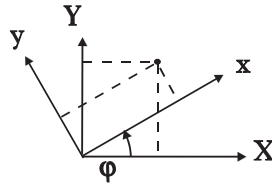
9.3.3. Układy współrzędnych

Do opisu położenia modelu dyskretnego przyjmowane są kartezjańskie układy współrzędnych. Wprowadza się zwykle dwa rodzaje takich układów:

- a) układ globalny (jeden) parametryzujący całą konstrukcję,
- b) układy lokalne (wiele) parametryzujące indywidualnie każdy element.

Osie układu globalnego oznaczmy (X, Y) . W układzie tym będziemy zapisywać uogólnione przemieszczenia i siły, a także globalną macierz sztywności. Natomiast układy lokalne, których osie oznaczamy (x, y) , będą wykorzystywane do zapisywania funkcji kształtu, lokalnych macierzy sztywności elementu itp.

W MES zachodzi wielokrotnie potrzeba transformacji pewnych wielkości wektorowych oraz macierzy z układów lokalnych do układu globalnego i na odwrót. Przypomnijmy zatem reguły transformacji przez obrót. W tym celu rozważmy dwa prostokątne układy współrzędnych (X, Y) oraz (x, y) zaczepione w tym samym punkcie i obrócone o kąt φ .



Rysunek 9.3. Transformacja współrzędnych przez obrót.

Współrzędne ustalonego punktu w układzie (x, y) wyrażają się przez jego współrzędne w układzie (X, Y) następująco

$$\begin{cases} x = X \cos \varphi + Y \sin \varphi \\ y = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi \end{cases} \quad (9.9)$$

i na odwrót, współrzędne punktu w układzie (X, Y) wyrażone przez jego współrzędne w układzie (x, y) mają postać

$$\begin{cases} X = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ Y = x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases} \quad (9.10)$$

Obie reguły transformacji współrzędnych daje się krótko zapisać w postaci macierzowej (wektor traktowany jako macierz kolumnowa $[\mathbf{x}] = [x, y]^T$, $[\mathbf{X}] = [X, Y]^T$)

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}] &= [\mathbf{t}] [\mathbf{X}] \\ [\mathbf{X}] &= [\mathbf{t}]^T [\mathbf{x}] \end{aligned} \quad (9.11)$$

gdzie macierz transformacji $[\mathbf{t}]$ jest równa

$$[\mathbf{t}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (9.12)$$

Podczas definiowania geometrii konstrukcji zostały podane współrzędne początku (X_1, Y_1) i końca (X_2, Y_2) każdego elementu skończonego w układzie globalnym, skąd łatwo obliczyć jego długość

$$l = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (9.13)$$

a następnie wartości kosinusów kierunkowych macierzy transformacji $[\mathbf{t}]$

$$\sin \varphi = (Y_2 - Y_1) / l \quad \cos \varphi = (X_2 - X_1) / l. \quad (9.14)$$

Przechodząc do określenia reguł transformacji wektorów uogólnionych przemieszczeń oraz sił, należy wyraźnie zaznaczyć, że nie będziemy tutaj mieć na myśli wektorów w sensie matematycznym, lecz mechanicznym. W mechanice wygodnie jest zgrupować w wektor pewne wielkości o zupełnie różnych wymiarach fizycznych, mające odmienne znaczenie mechaniczne i różne reguły transformacji. W MES operuje się wektorem uogólnionych przemieszczeń

$$[\mathbf{u}] = [u_1, v_1, \vartheta_1, u_2, v_2, \vartheta_2] \quad (9.15)$$

zawierającym kolejno przemieszczenie wzdłużne, przemieszczenie poprzeczne oraz kąt obrotu węzła początkowego i końcowego, a także wektorem uogólnionych sił

$$[\mathbf{f}] = [N_1, T_1, M_1, N_2, T_2, M_2] \quad (9.16)$$

zawierającym kolejno siłę normalną, siłę poprzeczną oraz moment zginający węzła początkowego i końcowego. Jest oczywiste, że w obu tych wektorach kąty obrotu i momenty zginające muszą pozostawać niezmiennicze względem obrotów na płaszczyźnie, zatem reguły transformacji są następujące

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_\mathbf{X}] &= [\mathbf{T}] [\mathbf{u}_\mathbf{x}] & [\mathbf{u}_\mathbf{x}] &= [\mathbf{T}]^T [\mathbf{u}_\mathbf{X}] \\ [\mathbf{f}_\mathbf{X}] &= [\mathbf{T}] [\mathbf{f}_\mathbf{x}] & [\mathbf{f}_\mathbf{x}] &= [\mathbf{T}]^T [\mathbf{f}_\mathbf{X}] \end{aligned} \quad (9.17)$$

gdzie macierz transformacji $[\mathbf{T}]$ jest równa

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{t}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{t}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

Dla lokalnej macierzy sztywności o wymiarach 6×6 reguły transformacji są następujące

$$[\mathbf{k}_\mathbf{X}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{k}_\mathbf{x}] [\mathbf{T}] \quad [\mathbf{k}_\mathbf{x}] = [\mathbf{T}] [\mathbf{k}_\mathbf{X}] [\mathbf{T}]^T. \quad (9.19)$$

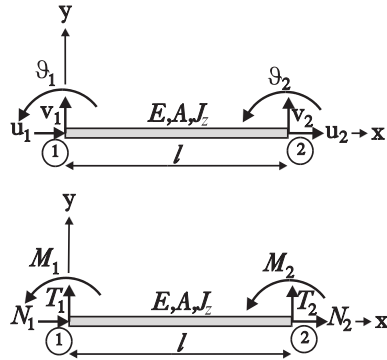
9.3.4. Macierz sztywności elementu

W modelu dyskretnym zależności pomiędzy wektorem uogólnionych sił $[\mathbf{F}]$ a wektorem uogólnionych przemieszczeń $[\mathbf{U}]$ podawane są w postaci tak zwanej globalnej macierzy sztywności $[\mathbf{K}]$ (patrz równania (9.6)). Globalna macierz sztywności tworzona jest w procesie agregacji z lokalnych macierzy sztywności poszczególnych elementów. Każda lokalna macierz sztywności podaje zależność pomiędzy wektorem uogólnionych sił $[\mathbf{f}_x] = [N_1, T_1, M_1, N_2, T_2, M_2]$ a wektorem uogólnionych przemieszczeń $[\mathbf{u}_x] = [u_1, v_1, \vartheta_1, u_2, v_2, \vartheta_2]$ w węzłach elementu.

W celu efektywnego obliczenia współczynników lokalnej macierzy sztywności $[\mathbf{k}_x]$ posługujemy się funkcjami kształtu zapisanymi w lokalnym układzie współrzędnych (x, y) związanym z elementem. Rozważmy najpierw funkcję kształtu opisującą przemieszczenie wzdłużne pręta, daną wzorem (9.7). Wartości siły podłużnej w węzłach wyrażone poprzez przemieszczenia węzłowe otrzymujemy, stosując znane zależności wytrzymałości materiałów

$$\begin{aligned} N_1 &= -EA \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=0} = \frac{EA}{l} (u_1 - u_2) \\ N_2 &= EA \left. \frac{du(l)}{dx} \right|_{x=l} = \frac{EA}{l} (-u_1 + u_2) \end{aligned} \quad (9.20)$$

znak minus w pierwszym wzorze wynika z przyjętej 'matematycznej' konwencji zwrotów siły podłużnej na rysunku 9.4.



Rysunek 9.4. Konwencja zwrotów uogólnionych przemieszczeń oraz sił w węzłach elementu skończonego.

Podobnie, biorąc funkcję kształtu (9.8) i żądając spełnienia przez nią warun-

ków kinematycznych w węzłach

$$\begin{aligned} v(0) &= v_1 & v(l) &= v_2 \\ \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=0} &= \vartheta_1 & \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=l} &= \vartheta_2 \end{aligned} \quad (9.21)$$

otrzymujemy następujące wartości współczynników wielomianu

$$\begin{aligned} a_1 &= v_1 \\ a_2 &= \vartheta_1 \\ a_3 &= 3 \frac{-v_1 + v_2}{l^2} - \frac{2\vartheta_1 + \vartheta_2}{l} \\ a_4 &= 2 \frac{v_1 - v_2}{l^3} + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{l^2}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Skąd łatwo obliczyć wartości siły poprzecznej i momentu zginającego w węzłach, wyrażone poprzez węzłowe przemieszczenia i kąty obrotu

$$\begin{aligned} M_1 &= -EJ_z \left. \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 6 \frac{EJ_z}{l^2} (v_1 - v_2) + 2 \frac{EJ_z}{l} (2\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ T_1 &= EJ_z \left. \frac{d^3v(x)}{dx^3} \right|_{x=0} = 12 \frac{EJ_z}{l^3} (v_1 - v_2) + 6 \frac{EJ_z}{l^2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ M_2 &= EJ_z \left. \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right|_{x=l} = 6 \frac{EJ_z}{l^2} (v_1 - v_2) + 2 \frac{EJ_z}{l} (\vartheta_1 + 2\vartheta_2) \\ T_2 &= -EJ_z \left. \frac{d^3v(x)}{dx^3} \right|_{x=l} = 12 \frac{EJ_z}{l^3} (-v_1 + v_2) - 6 \frac{EJ_z}{l^2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned} \quad (9.23)$$

gdzie jak poprzednio znaki plus w drugim i trzecim wzorze wynikają z przyjętej 'matematycznej' konwencji zwrotów siły poprzecznej i momentu zginającego na rysunku 9.4.

Przedstawiając otrzymane zależności (9.20 i 9.23) w postaci macierzowej analogicznej do (9.6), otrzymujemy

$$[\mathbf{k}_x] [\mathbf{u}_x] = [\mathbf{f}_x] \quad (9.24)$$

gdzie macierz sztywności elementu przyzmatycznego zdefiniowana w lokalnym układzie współrzędnych (x, y) , związanym z tym elementem, przyjmuje nastę-

pującą postać

$$[\mathbf{k}_x] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ_z}{l^3} & 6\frac{EJ_z}{l^2} & 0 & -12\frac{EJ_z}{l^3} & 6\frac{EJ_z}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EJ_z}{l^2} & 4\frac{EJ_z}{l} & 0 & -6\frac{EJ_z}{l^2} & 2\frac{EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ_z}{l^3} & -6\frac{EJ_z}{l^2} & 0 & 12\frac{EJ_z}{l^3} & -6\frac{EJ_z}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EJ_z}{l^2} & 2\frac{EJ_z}{l} & 0 & -6\frac{EJ_z}{l^2} & 4\frac{EJ_z}{l} \end{bmatrix}. \quad (9.25)$$

9.3.5. Proces agregacji

Budowa globalnej macierzy sztywności $[\mathbf{K}]$ występującej w modelu dyskretnym, zapisywanym w globalnym układzie współrzędnych (X, Y) i opisanym układem równań (9.6), następuje w procesie agregacji, czyli sumowania lokalnych macierzy sztywności zgodnie ze wzorem (9.4). Lokalna macierz sztywności elementu określona w lokalnym układzie współrzędnych (x, y) , związanym z tym elementem, przyjmuje postać (9.25). Zatem pierwszym krokiem jest jej transformacja z lokalnego $[\mathbf{k}_x]$ do globalnego układu współrzędnych $[\mathbf{k}_X]$ zgodnie z regułą transformacyjną (9.19). Na ogół w wyniku takiej transformacji macierz ulega wypełnieniu, to znaczy elementy zerowe przechodzą w inne, już niezerowe. Jednak każda transformacja przez obrót zachowuje symetrię macierzy i nie zaburza jej blokowego charakteru

$$[\mathbf{k}_X] = \left. \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overbrace{k_{11} & k_{12} & k_{13}}^i \\ \overbrace{k_{21} & k_{22} & k_{23}}^i \\ \overbrace{k_{31} & k_{32} & k_{33}}^i \\ \overbrace{k_{41} & k_{42} & k_{43}}^i \\ \overbrace{k_{51} & k_{52} & k_{53}}^i \\ \overbrace{k_{61} & k_{62} & k_{63}}^i \end{array} & \begin{array}{ccc} \overbrace{k_{14} & k_{15} & k_{16}}^j \\ \overbrace{k_{24} & k_{25} & k_{26}}^j \\ \overbrace{k_{34} & k_{35} & k_{36}}^j \\ \overbrace{k_{44} & k_{45} & k_{46}}^j \\ \overbrace{k_{54} & k_{55} & k_{56}}^j \\ \overbrace{k_{64} & k_{65} & k_{66}}^j \end{array} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}. \quad (9.26)$$

body, zatem wprowadzenie wartości $[u_0, v_0, \vartheta_0]$ do wektora $[U]$

$$\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \mathbf{K} \\ \text{---} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ u_0 \\ v_0 \\ \vartheta_0 \\ \dots \\ \dots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \mathbf{F} \\ \text{---} \end{array} \right] \left. \vphantom{\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \mathbf{K} \\ \text{---} \end{array} \right]} \right\} i \quad (9.28)$$

jest równoważne z narzuceniem więzów $u_i = u_0, v_i = v_0, \vartheta_i = \vartheta_0$. W szczególności każde z uogólnionych przemieszczeń może być zerem, co odpowiada kolejno:

- $u_i = 0$ zablokowane przemieszczenie i -tego węzła w kierunku X ,
- $v_i = 0$ zablokowane przemieszczenie i -tego węzła w kierunku Y ,
- $\vartheta_i = 0$ zablokowany obrót i -tego węzła.

Odpowiednie kombinacje tych warunków dają znane warunki podparcia konstrukcji prętowych:

- $u_i = 0, v_i = 0, \vartheta_i = 0$ pełne zamocowanie i -tego węzła,
- $v_i = 0, \vartheta_i = 0$ podparcie przegubowe nieprzesuwne i -tego węzła.

9.3.7. Modelowanie obciążeń

Uzyskanie nietrywialnego rozwiązania dla modelu matematycznego uzależnione jest od postaci prawej strony w równaniu różniczkowym. W przypadku gdy prawa strona jest dana funkcją tożsamościowo równą zeru i jednocześnie warunki na stałe całkowania są typu jednorodnego, mamy do czynienia z tzw. zagadnieniem własnym, które posiada rozwiązanie trywialne, ale może występować również rozwiązanie skwantowane. Przykładowo w modelu zginanej belki uzyskanie nietrywialnego rozwiązania równania różniczkowego (9.1) jest zależne od postaci funkcji opisującej zmienność momentu zginającego $M_g(x)$. Podobnie model skończenie elementowy wymaga zdefiniowania obciążeń.

Modelowanie obciążeń w MES polega na przykładaniu uogólnionych sił w odpowiednich węzłach. Z każdym węzłem stowarzyszony jest wektor uogól-

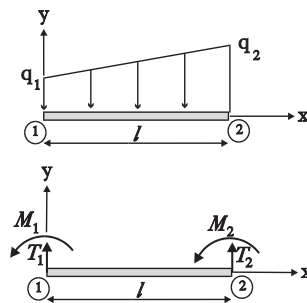
nionych sił $[N_i, T_i, M_i]$, zatem wprowadzenie wartości $[N_0, T_0, M_0]$ do wektora

$$\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \mathbf{K} \\ \text{---} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \mathbf{U} \\ \text{---} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ N_0 \\ T_0 \\ M_0 \\ \dots \\ \dots \end{array} \right] \left. \vphantom{\left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ N_0 \\ T_0 \\ M_0 \\ \dots \\ \dots \end{array} \right]} \right\} i \quad (9.29)$$

uogólnionych sił całej konstrukcji $[\mathbf{F}]$ odpowiada przyłożeniu obciążenia $N_i = N_0, T_i = T_0, M_i = M_0$ w i -tym węźle.

Przytoczony sposób modelowania obciążeń pozwala na ściśle odwzorowanie obciążenia konstrukcji w postaci skupionych sił oraz momentów zginających przyłożonych w węzłach. W przypadku obciążeń rozłożonych odwzorowanie jest tylko przybliżone (uzyskanie rozwiązania ścisłego byłoby możliwe po zastosowaniu funkcji kształtu będących wielomianami stopnia ≥ 4) i polega na wprowadzeniu odpowiednich węzłowych sił i momentów zginających, równoważnych w sensie wywoływania identycznych przemieszczeń i kątów obrotu (patrz rysunek 9.5). Odpowiednie wartości uogólnionych sił węzłowych dla elementu odpowiadającego prętowi obciążonemu obciążeniem rozłożonym w sposób liniowy wynoszą

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{l}{20} (7q_1 + 3q_2), & T_2 &= -\frac{l}{20} (7q_2 + 3q_1) \\ M_1 &= -\frac{l^2}{60} (3q_1 + 2q_2), & M_2 &= \frac{l^2}{60} (3q_2 + 2q_1). \end{aligned} \quad (9.30)$$



Rysunek 9.5. Modelowanie obciążenia rozłożonego w sposób liniowy.

9.3.8. Rozwiązanie układu równań

Metody numerycznego rozwiązywania układów równań można zakwalifikować do dwóch grup: bezpośrednich oraz iteracyjnych. Przez metodę bezpośrednią rozumiemy metodę, która przy braku błędów zaokrąglenia daje dokładne rozwiązanie po skończonej liczbie kroków. Natomiast metody iteracyjne oparte są na nieskończonym ciągu rozwiązań przybliżonych, zbieżnym do rozwiązania dokładnego, który jest urywany z chwilą osiągnięcia założonej dokładności. Nie można podać uniwersalnych kryteriów rozstrzygających, kiedy należy stosować metody bezpośrednie, a kiedy iteracyjne. Na ogół dla układów równań o pełnej macierzy sztywności $[\mathbf{K}]$ (tj. takiej, w której większość elementów nie jest zerami), której wymiar nie przekracza 30, stosowane są metody bezpośredniej eliminacji z uwagi na ich większą efektywność. Jeśli natomiast macierz sztywności $[\mathbf{K}]$ jest duża i rzadka (ma niewiele elementów niezerowych), bardziej efektywne okazują się metody iteracyjne.

Eliminacja Gaussa

Najważniejszą z metod bezpośredniego rozwiązywania dowolnych układów równań liniowych jest eliminacja Gaussa. Pomysł w niej zastosowany polega na eliminacji niewiadomych w pewien systematyczny sposób. Rozważmy układ równań liniowych

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots + \dots + \dots + \dots &= \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (9.31)$$

o nieosobliwej macierzy $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, wtedy układ $[\mathbf{A}][\mathbf{x}] = [\mathbf{B}]$ ma jednoznaczne rozwiązanie.

Zakładając, że $a_{11} \neq 0$, można wyeliminować x_1 , odejmując od i -tego równania pierwsze równanie pomnożone przez

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (9.32)$$

otrzymując tym samym układ $n-1$ równań z $n-1$ niewiadomymi x_2, x_3, \dots, x_n

$$\begin{aligned} a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \dots + \dots + \dots &= \dots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)} \end{aligned} \quad (9.33)$$

gdzie nowe współczynniki są dane wzorami

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij} - m_{i1}a_{1j} \quad (j = 2, \dots, n) \\ b_i^{(2)} &= b_i - m_{i1}b_1 \quad (i = 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (9.34)$$

Jeśli $a_{22}^{(2)} \neq 0$, to w podobny sposób można wyeliminować x_3 , otrzymując tym samym układ z $n - 2$ równań z $n - 2$ niewiadomymi x_3, \dots, x_n . Elementy $a_{11}, a_{22}^{(2)}, a_{33}^{(3)}, \dots$ występujące w eliminacji nazywamy elementami głównymi. Jeśli wszystkie one są różne od zera, to stosując uogólnienia wzorów (9.32 i 9.34)

$$\begin{aligned} m_{ik} &= \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)} \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)} \\ (i &= k + 1, k + 2, \dots, n; \quad j = k + 1, k + 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (9.35)$$

można prowadzić eliminację aż do otrzymania po $n - 1$ krokach jednego równania

$$a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \quad (9.36)$$

czyli sprowadzić wyjściowy układ równań do tzw. postaci trójkątnej górnej

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \dots + \dots &= \dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Rozwiązanie układu równań w postaci trójkątnej górnej jest szczególnie proste i przebiega zgodnie z algorytmem podstawiania wstecz, w którym wartości niewiadomych obliczane są w kolejności x_n, x_{n-1}, \dots, x_1

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_{n-1} &= \frac{b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} \\ \dots &= \dots \\ x_1 &= \frac{b_1 - a_{1n}x_n - a_{1,n-1}x_{n-1} - \dots - a_{12}x_2}{a_{11}}. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Algorytm eliminacji Gaussa zawodzi, jeśli w pewnym kroku k element główny $a_{kk}^{(k)} = 0$. Lekarstwem pozwalającym na kontynuowanie obliczeń jest tzw. wybór elementu głównego, czyli dopuszczenie przestawiania kolumn i wierszy w macierzy, ale operacja taka zmienia porządek niewiadomych i znacznie komplikuje algorytm. Istnieje jednakże pewna klasa macierzy, dla których eliminację Gaussa można przeprowadzać bez przestawiania kolumn i wierszy.

Modyfikacje metody Gaussa dla macierzy specjalnych

W praktyce macierz sztywności prawie zawsze posiada pewne specjalne właściwości pozwalające na modyfikacje algorytmu tak, aby skrócić czas obliczeń lub zmniejszyć zapotrzebowanie pamięci.

Jeśli macierz $[\mathbf{A}] = a_{ij}$ jest symetryczna, czyli

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad (9.39)$$

oraz dodatnio określona, czyli

$$\det(\mathbf{A}_m) > 0 \quad \forall m \quad (9.40)$$

gdzie $[\mathbf{A}_m]$ jest podmacierzą $m \times m$ utworzoną z przecięcia m (gdzie $m \leq n$) początkowych wierszy i kolumn macierzy $[\mathbf{A}]$ o wymiarze $n \times n$, to eliminacja Gaussa wykonywana bez przestawiania wierszy i kolumn przekształca w k -tym kroku elementy macierzy na nowe elementy, które są również symetryczne

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} \quad (k \leq i, j \leq n). \quad (9.41)$$

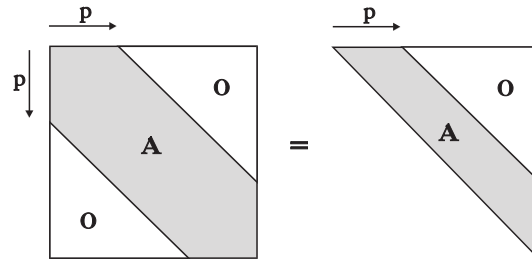
W związku z tym w trakcie eliminacji wystarczy przechowywać w pamięci i przekształcać elementy macierzy leżące na głównej przekątnej i ponad nią. W zmodyfikowanej symetrycznej eliminacji Gaussa wzory (9.35) przyjmują postać

$$m_{ik} = \frac{a_{ki}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)} \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)} \quad (9.42)$$

$$(i = k + 1, k + 2, \dots, n; \quad j = i, i + 1, \dots, n)$$

dzięki którym zarówno liczba operacji, jak i wykorzystanie pamięci zmniejsza się w przybliżeniu dwukrotnie.

Dalsza redukcja liczby operacji jest możliwa w przypadku symetrycznych układów rzadkich, w których elementy niezerowe macierzy $[\mathbf{A}]$ są zgrupowane



Rysunek 9.6. Macierz wstęgowa symetryczna.

w tzw. wstędze, położonej przy głównej przekątnej. Szerokość półwstęgi wynosi p , gdy $a_{ij} \neq 0 \Rightarrow j - i \leq p$. Układy o macierzy wstęgowej są szczególnie dobrze przystosowane do rozwiązywania za pomocą eliminacji Gaussa, gdyż zachowuje ona ich strukturę wstęgową (patrz rysunek 9.6). Modyfikacja algorytmu eliminacji Gaussa polega tutaj na ograniczeniu zakresu indeksu j we wzorach (9.42) z n do p .

9.3.9. Opracowanie wyników

W wyniku rozwiązania układu równań (9.6) otrzymywany jest wektor uogólnionych przemieszczeń $[U]$, a co za tym idzie stowarzyszony z każdym węzłem wektor uogólnionych przemieszczeń $[u_x]$ odniesiony do globalnego układu współrzędnych. Znając przemieszczenia w węzłach, dysponujemy kompletną informacją o deformacji, której ulega konstrukcja pod wpływem obciążenia. Niestety, wektor uogólnionych sił obliczony na ich podstawie również odnosi się do globalnego układu współrzędnych, a zatem jest nieprzydatny do sporządzania wykresów sił wewnętrznych, które wymagają stosowania lokalnego układu współrzędnych. W związku z powyższym pierwszym krokiem jest transformacja wektora uogólnionych przemieszczeń węzłowych $[u_x]$ z układu globalnego do układu lokalnego $[u_x]$, zgodnie z regułami (9.17). Następnie łatwo już obliczyć wektor uogólnionych sił węzłowych $[u_x] = [N_1, T_1, M_1, N_2, T_2, M_2]$, posługując się lokalną macierzą sztywności (9.24).

Graficzne opracowanie wyników oprócz sporządzania wykresów sił wewnętrznych wymaga również przedstawienia przemieszczeń konstrukcji. Przypomnijmy jeszcze raz – jako rozwiązanie układu równań (9.6) otrzymujemy wektor uogólnionych przemieszczeń $[u_x]$ dla każdego węzła konstrukcji. Zatem bezpośrednia próba jego wizualizacji musi dać wykres w postaci łamanej, jako że odwołujemy się jedynie do wartości w węzłach. Chcąc 'wygładzić' wykres

przemieszczeń, należy posłużyć się dodatkową informacją, o przemieszczeniach punktów leżących pomiędzy węzłem początkowym i końcowym, zawartą w funkcjach kształtu (9.7, 9.8) oraz (9.20, 9.23).

9.4. Przykłady

9.4.1. Oznaczenia

NE	liczba elementów
NN	liczba węzłów
NBCX	liczba węzłów, w których określone są warunki brzegowe dla przemieszczenia w kierunku X
NBCY	liczba węzłów, w których określone są warunki brzegowe dla przemieszczenia w kierunku Y
NBCR	liczba węzłów, w których określone są warunki brzegowe dla kąta obrotu
NF	liczba węzłów, w których określone są obciążenia

9.4.2. Struktura pliku danych wejściowych

NE NN

globalna numeracja węzłów

el.	węz.1	węz.2	typ (1 – kratownicowy, 2 – belkowy)
1	1	2	2
2

globalne współrzędne węzłów

węz.	X	Y
1	0.0000E+00	0.0000E+00
2

warunki zamocowania

NBCX NBCY NBCR

węz.	przem. u_0	przem. v_0	kąt obrotu ϑ_0
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
...

obciążenia

NF

węz.	siła N_0	siła T_0	moment M_0
2	0.0000E+00	-0.2000E+01	0.0000E+00
..

stałe materiałowe i parametry przekroju poprzecznego

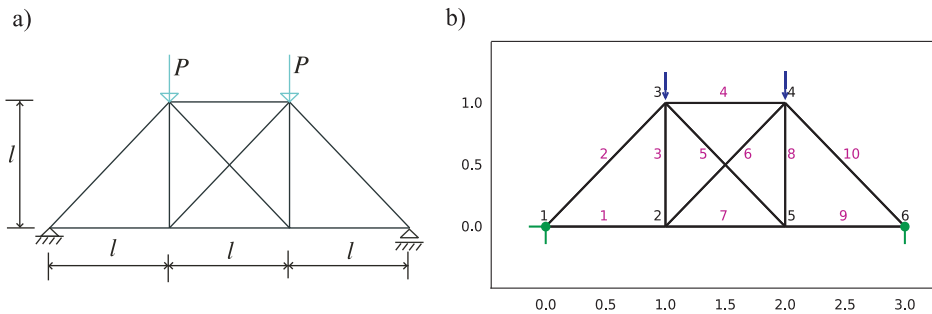
el.	E	A	J_z
1	0.2100E+05	0.1000E+00	0.1500E+01
2

Podczas przygotowywania pliku danych wejściowych należy koniecznie przestrzegać następujących zasad:

- dla zmiennych typu naturalnego (**int**) zadeklarowano długość pola równą 6,
- dla zmiennych typu rzeczywistego (**float**) zadeklarowano długość pola równą 12.

Przykład P1 – kratownica

Należy znaleźć wartości sił w prętach kratownicy obciążonej jak na rysunku 9.7a. Podział kratownicy na 10 elementów skończonych typu kratownicowego pokazano na rysunku 9.7b. Ponieważ nie zostały podane konkretne wartości wielkości l, E, A, J_z, P , będziemy rozwiązywać kratownicę w sposób symboliczny jako dane wejściowe, przyjmując jednostkowe wartości powyższych wielkości. Otrzymane wyniki rozumieć należy zatem jako odpowiednie mnożniki bądź sił wewnętrznych, bądź przemieszczeń.



Rysunek 9.7. Kratownica: schemat konstrukcji oraz podział na elementy skończone.

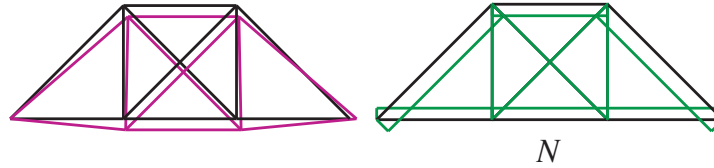
Postać pliku danych wejściowych P1.TXT jest następująca:

```

10 6
 1 1 2 1
 2 1 3 1
 3 2 3 1
 4 3 4 1
 5 3 5 1
 6 2 4 1
 7 2 5 1
 8 4 5 1
 9 5 6 1
10 4 6 1
 1 0.0000E+00 0.0000E+00
 2 0.1000E+01 0.0000E+00
 3 0.1000E+01 0.1000E+01
 4 0.2000E+01 0.1000E+01
 5 0.2000E+01 0.0000E+00
 6 0.3000E+01 0.0000E+00
 1 2 0
 1 0.0000E+00
 1 0.0000E+00
 6 0.0000E+00
 2
 3 0.0000E+00 -0.1000E+01 0.0000E+00
 4 0.0000E+00 -0.1000E+01 0.0000E+00
 1 0.1000E+01 0.1000E+01 0.1000E+01
 2 0.1000E+01 0.1000E+01 0.1000E+01
 3 0.1000E+01 0.1000E+01 0.1000E+01
 4 0.1000E+01 0.1000E+01 0.1000E+01
 5 0.1000E+01 0.1000E+01 0.1000E+01
 6 0.1000E+01 0.1000E+01 0.1000E+01
 7 0.1000E+01 0.1000E+01 0.1000E+01
 8 0.1000E+01 0.1000E+01 0.1000E+01
 9 0.1000E+01 0.1000E+01 0.1000E+01
10 0.1000E+01 0.1000E+01 0.1000E+01

```

Postać zdeformowaną kratownicy oraz wykres sił normalnych w poszczególnych jej prętach pokazano na rysunku 9.8. Wartości liczbowe wszystkich wielkości



Rysunek 9.8. Wykres przemieszczeń oraz wykres sił normalnych kratownicy.

zamieszczono w pliku z wynikami.

**** WYNIKI ****

**** Przemieszczenia ****

węz.	U_x	U_y	Θ
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	1.0000E+00	-4.8284E+00	0.0000E+00
3	2.0000E+00	-4.8284E+00	0.0000E+00
4	1.0000E+00	-4.8284E+00	0.0000E+00
5	2.0000E+00	-4.8284E+00	0.0000E+00
6	3.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

**** Siły w elementach ****

el.	węz.	siła N	siła T	moment M_g
1	1	-1.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
1	2	1.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	1	1.4142E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	3	-1.4142E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	2	-8.8818E-16	0.0000E+00	0.0000E+00
3	3	8.8818E-16	0.0000E+00	0.0000E+00
4	3	1.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
4	4	-1.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
5	3	-8.8818E-16	0.0000E+00	0.0000E+00
5	5	8.8818E-16	0.0000E+00	0.0000E+00
6	2	2.2204E-16	0.0000E+00	0.0000E+00
6	4	-2.2204E-16	0.0000E+00	0.0000E+00
7	2	-1.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
7	5	1.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
8	4	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
8	5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	5	-1.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	6	1.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00


```

10 4  1.4142E+00  0.0000E+00  0.0000E+00
10 6 -1.4142E+00  0.0000E+00  0.0000E+00

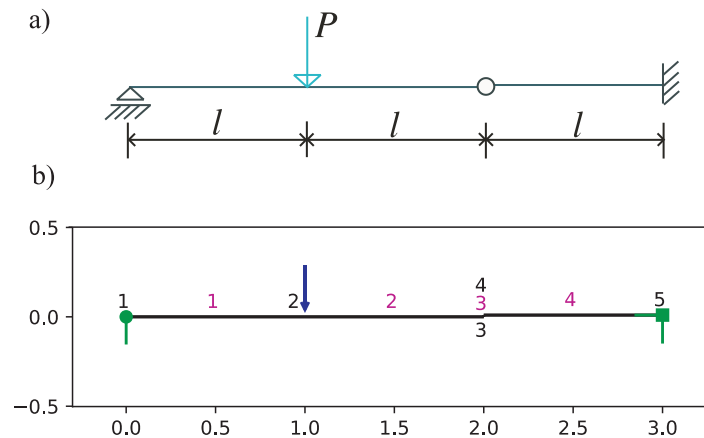
```

Porównanie wartości siły podłużnej w wybranych prętach kratownicy (elementy nr 2, 6, 7).

	wartości teoretyczne	wartości obliczone
$N(2)$	$-\sqrt{2}P$	-1.4142
$N(6)$	0	2.2204×10^{-16}
$N(7)$	P	1.0

Przykład P2 – belka przegubowa

Wyznaczyć wartości oraz naszkicować wykresy siły poprzecznej i momentu zginającego w belce przegubowej obciążonej jak na rysunku 9.9a. Podział konstrukcji na elementy skończone typu belkowego pokazano na rysunku 9.9b. Przegub wewnętrzny zamodelowano poprzez wstawienie dodatkowego krótkiego elementu typu kratownicowego. W zadaniu brak jest konkretnych wartości wielkości l, E, A, J_z, P , będziemy poszukiwać rozwiązywania symbolicznego, przyjmując jako dane wejściowe wartości jednostkowe. Otrzymane wyniki rozumieć należy zatem jako odpowiednie mnożniki bądź sił wewnętrznych, bądź przemieszczeń.



Rysunek 9.9. Belka przegubowa: schemat konstrukcji oraz podział na elementy skończone.

Plik danych wejściowych P2.TXT jest następujący:

```

4 5
1 1 2 2
2 2 3 2
3 3 4 1
4 4 5 2
1 0.0000E+00 0.0000E+00
2 0.1000E+01 0.0000E+00
3 0.2000E+01 0.0000E+00
4 0.2000E+01 0.0100E+00
5 0.3000E+01 0.0100E+00
1 2 1
5 0.0000E+00
1 0.0000E+00
5 0.0000E+00
5 0.0000E+00
1
2 0.0000E+00 -0.1000E+01 0.0000E+00
1 0.1000E+01 0.1000E+02 0.1000E+01
2 0.1000E+01 0.1000E+02 0.1000E+01
3 0.1000E+01 0.1000E+02 0.1000E+01
4 0.1000E+01 0.1000E+02 0.1000E+01
    
```

Deformację belki oraz wykresy siły poprzecznej i momentu zginającego pokazano na rysunku 9.10.



Rysunek 9.10. Wykresy przemieszczenia pionowego, siły poprzecznej i momentu zginającego belki przegubowej.

Wartości liczbowe wszystkich wielkości zamieszczono w pliku z wynikami.

```

**** WYNIKI ****
**** Przemieszczenia ****
    
```

węz.	U_x	U_y	ϑ
1	0.0000E+00	0.0000E+00	-3.3358E-01
2	0.0000E+00	-2.5025E-01	-8.3583E-02
3	0.0000E+00	-1.6717E-01	1.6642E-01
4	0.0000E+00	-1.6667E-01	2.5000E-01
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

**** Siły w elementach ****

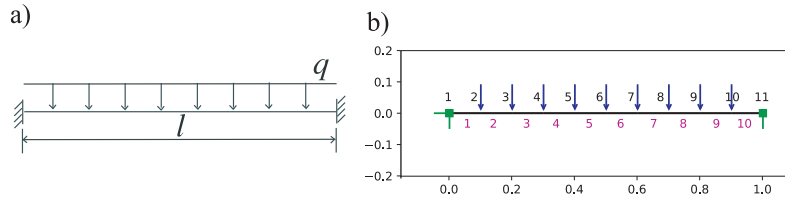
el.	węz.	siła N	siła T	moment M_g
1	1	0.0000E+00	5.0000E-01	2.5000E-11
1	2	0.0000E+00	-5.0000E-01	5.0000E-01
2	2	0.0000E+00	-5.0000E-01	-5.0000E-01
2	3	0.0000E+00	5.0000E-01	0.0000E+00
3	3	-5.0000E-01	0.0000E+00	0.0000E+00
3	4	5.0000E-01	0.0000E+00	0.0000E+00
4	4	0.0000E+00	-5.0000E-01	-5.0000E-11
4	5	0.0000E+00	5.0000E-01	-5.0000E-01

Porównanie wartości momentu zginającego i ugięcia pionowego w punkcie przyłożenia siły P (węzeł nr 2).

wartości teoretyczne	wartości obliczone
$f = -Pl^3/4EI$	$U_y(2) = -0.2502$
$M_g = Pl/2$	$M_g(2) = 0.5$

Przykład P3 – belka utwierdzona

Obliczyć wartości oraz naszkicować wykresy siły poprzecznej i momentu zginającego w belce przegubowej obciążonej jak na rysunku 9.11a. Podział belki na elementy skończone typu belkowego pokazano na rysunku 9.11b. Obciążenie ciągłe q zastąpiono równoważnym układem sił skupionych. W zadaniu nie podano konkretnych wartości wielkości l, E, A, J_z, q , będziemy poszukiwać rozwiązywania symbolicznego, przyjmując jako dane wejściowe wartości jednostkowe. Otrzymane wyniki rozumieć należy zatem jako odpowiednie mnożniki bądź sił wewnętrznych, bądź przemieszczeń. Plik danych wejściowych P3.TXT jest następujący:



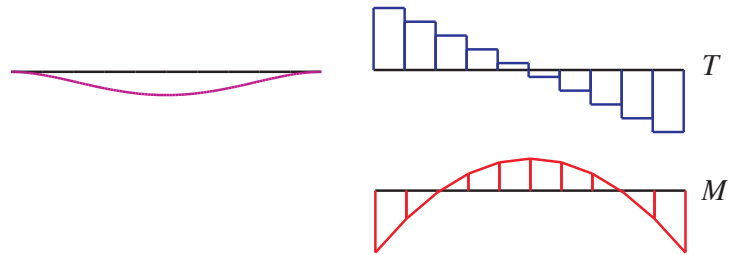
Rysunek 9.11. Belka utwierdzona: schemat konstrukcji oraz podział na elementy skończone.

```

10 11
1 1 2 2
2 2 3 2
3 3 4 2
4 4 5 2
5 5 6 2
6 6 7 2
7 7 8 2
8 8 9 2
9 9 10 2
10 10 11 2
1 0.0000E+00 0.0000E+00
2 0.1000E+00 0.0000E+00
3 0.2000E+00 0.0000E+00
4 0.3000E+00 0.0000E+00
5 0.4000E+00 0.0000E+00
6 0.5000E+00 0.0000E+00
7 0.6000E+00 0.0000E+00
8 0.7000E+00 0.0000E+00
9 0.8000E+00 0.0000E+00
10 0.9000E+00 0.0000E+00
11 0.1000E+01 0.0000E+00
1 2 2
1 0.0000E+00
1 0.0000E+00
11 0.0000E+00
1 0.0000E+00
11 0.0000E+00
9
    
```

2	0.0000E+00	-0.1000E+00	0.0000E+00
3	0.0000E+00	-0.1000E+00	0.0000E+00
4	0.0000E+00	-0.1000E+00	0.0000E+00
5	0.0000E+00	-0.1000E+00	0.0000E+00
6	0.0000E+00	-0.1000E+00	0.0000E+00
7	0.0000E+00	-0.1000E+00	0.0000E+00
8	0.0000E+00	-0.1000E+00	0.0000E+00
9	0.0000E+00	-0.1000E+00	0.0000E+00
10	0.0000E+00	-0.1000E+00	0.0000E+00
1	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01
2	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01
3	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01
4	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01
5	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01
6	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01
7	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01
8	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01
9	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01
10	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01

Wykresy deformacji belki oraz siły poprzecznej i momentu zginającego pokazano na rysunku 9.12. Wartości liczbowe wszystkich wielkości zamieszczono w pliku z wynikami.



Rysunek 9.12. Wykresy przemieszczenia pionowego oraz siły poprzecznej i momentu zginającego belki utwierdzonej.

```
**** WYNIKI ****
**** Przemieszczenia ****
```

węz.	U_x	U_y	ϑ
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0.0000E+00	-3.3750E-04	-6.0000E-03
3	0.0000E+00	-1.0667E-03	-8.0000E-03
4	0.0000E+00	-1.8375E-03	-7.0000E-03
5	0.0000E+00	-2.4000E-03	-4.0000E-03
6	0.0000E+00	-2.6042E-03	0.0000E+00
7	0.0000E+00	-2.4000E-03	4.0000E-03
8	0.0000E+00	-1.8375E-03	7.0000E-03
9	0.0000E+00	-1.0667E-03	8.0000E-03
10	0.0000E+00	-3.3750E-04	6.0000E-03
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

**** Siły w elementach ****

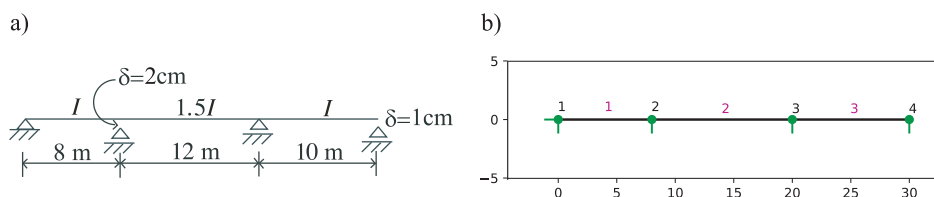
el.	węz.	siła N	siła T	moment M_g
1	1	0.0000E+00	4.5000E-01	8.2500E-02
1	2	0.0000E+00	-4.5000E-01	-3.7500E-02
2	2	0.0000E+00	3.5000E-01	3.7500E-02
2	3	0.0000E+00	-3.5000E-01	-2.5000E-03
3	3	0.0000E+00	2.5000E-01	2.5000E-03
3	4	0.0000E+00	-2.5000E-01	2.2500E-02
4	4	0.0000E+00	1.5000E-01	-2.2500E-02
4	5	0.0000E+00	-1.5000E-01	3.7500E-02
5	5	0.0000E+00	5.0000E-02	-3.7500E-02
5	6	0.0000E+00	-5.0000E-02	4.2500E-02
6	6	0.0000E+00	-5.0000E-02	-4.2500E-02
6	7	0.0000E+00	5.0000E-02	3.7500E-02
7	7	0.0000E+00	-1.5000E-01	-3.7500E-02
7	8	0.0000E+00	1.5000E-01	2.2500E-02
8	8	0.0000E+00	-2.5000E-01	-2.2500E-02
8	9	0.0000E+00	2.5000E-01	-2.5000E-03
9	9	0.0000E+00	-3.5000E-01	2.5000E-03
9	10	0.0000E+00	3.5000E-01	-3.7500E-02
10	10	0.0000E+00	-4.5000E-01	3.7500E-02
10	11	0.0000E+00	4.5000E-01	-8.2500E-02

Porównanie wartości momentu zginającego w punkcie zamocowania i w środku rozpiętości (węzły nr 1, 6) oraz maksymalnego ugięcia pionowego.

wartości teoretyczne	wartości obliczone
$f = -ql^4/384EJ_z$	$U_y(6) = -2.6042 \times 10^{-3}$
$M_g = ql^2/12$	$M_g(1) = 0.0825$
$M_g = -ql^2/24$	$M_g(6) = -0.0425$

Przykład P4 – wpływ przemieszczeń podpór belki ciągłej

Znaleźć wartości i naszkicować wykresy siły poprzecznej oraz momentu zginającego dla belki ciągłej, której podpory doznały pionowych przemieszczeń, jak pokazano na rysunku 9.13. Przekrój pręseł skrajnych jest prostokątem $30 \text{ cm} \times 90 \text{ cm}$, dla którego $A = 0.27 \text{ m}^2$, $J_z = 18.22 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, natomiast moduł sprężystości jest równy $E = 1.5 \times 10^6 \text{ T/m}^2$.



Rysunek 9.13. Belka ciągła, której podpory doznały pionowych przemieszczeń: schemat oraz podział konstrukcji na elementy skończone.

Plik danych wejściowych P4.TXT jest następujący:

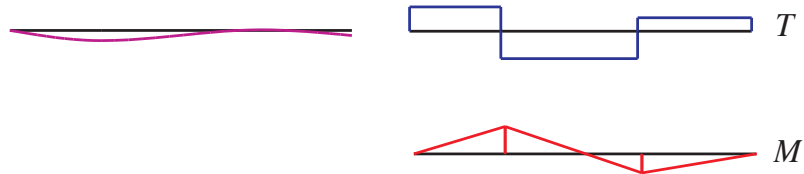
```

3 4
1 1 2 2
2 2 3 2
3 3 4 2
1 0.0000E+00 0.0000E+00
2 0.8000E+01 0.0000E+00
3 0.2000E+02 0.0000E+00
4 0.3000E+02 0.0000E+00
1 4 0
1 0.0000E+00
1 0.0000E+00
2 -0.2000E-01
3 0.0000E+00
4 -0.1000E-01
0

```

1	0.1500E+07	0.2700E+00	0.1822E-01
2	0.1500E+07	0.2700E+00	0.2733E-01
3	0.1500E+07	0.2700E+00	0.1822E-01

Wykresy przemieszczenia oraz siły poprzecznej i momentu zginającego belki na rysunku 9.14.



Rysunek 9.14. Wykresy przemieszczenia pionowego oraz siły poprzecznej i momentu zginającego belki o podporach przemieszczonych w pionie.

Wartości liczbowe wszystkich wielkości zamieszczono w pliku z wynikami P4.TXT.

**** WYNIKI ****

**** Przemieszczenia ****

węz.	U_x	U_y	ϑ
1	0.0000E+00	0.0000E+00	-3.7598E-03
2	0.0000E+00	-2.0000E-02	1.9608E-05
3	0.0000E+00	0.0000E+00	1.1814E-03
4	0.0000E+00	-1.0000E-02	-2.0907E-03

**** Siły w elementach ****

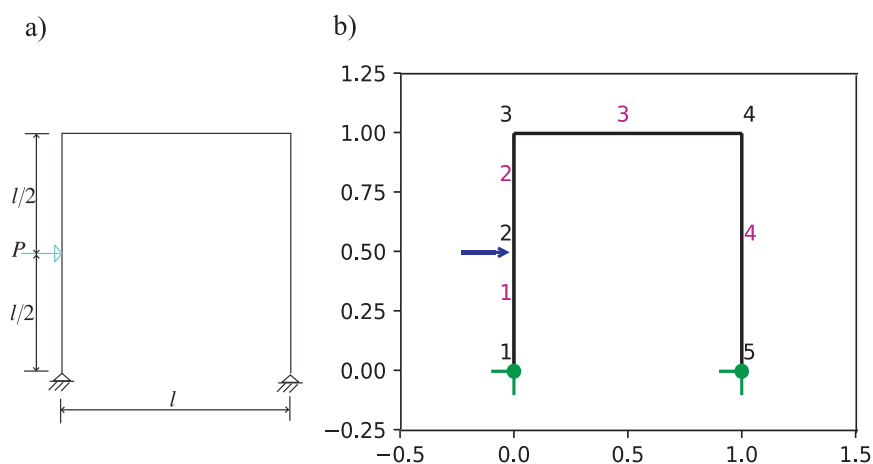
el.	węz.	siła N	siła T	moment M_g
1	1	0.0000E+00	3.2279E+00	1.2911E-09
1	2	0.0000E+00	-3.2279E+00	2.5823E+01
2	2	0.0000E+00	-3.6423E+00	-2.5823E+01
2	3	0.0000E+00	3.6423E+00	-1.7885E+01
3	3	0.0000E+00	1.7885E+00	1.7885E+01
3	4	0.0000E+00	-1.7885E+00	1.4536E-09

Porównanie wartości momentu zginającego na podporach wewnętrznych (węzły nr 2, 3).

wartości teoretyczne	wartości obliczone
$M_g = 25.82$	$M_g(2) = 25.823$
$M_g = -17.88$	$M_g(3) = -17.885$

Przykład P5 – rama prostokątna

Znaleźć wartości i naszkicować wykresy sił podłużnej oraz poprzecznej, a także momentu zginającego dla ramy prostokątnej jak na rysunku 9.15. W zadaniu nie podano konkretnych wartości wielkości l , E , A , J_z , P , będziemy poszukiwać rozwiązywania symbolicznego, przyjmując jako dane wejściowe wartości jednostkowe. W celu wyeliminowania wpływu siły podłużnej na deformację ramy przyjęto wartość pola przekroju A z mnożnikiem 100. Otrzymane wyniki rozumieć należy zatem jako odpowiednie mnożniki bądź sił wewnętrznych, bądź przemieszczeń. Plik danych wejściowych P5.TXT jest następujący:



Rysunek 9.15. Rama prostokątna: schemat konstrukcji oraz podział na elementy skończone.

```

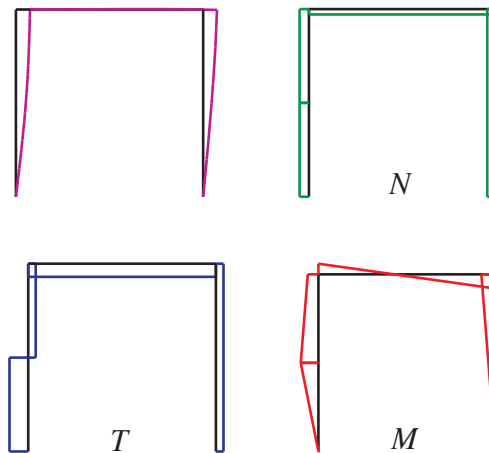
4 5
1 1 2 2
2 2 3 2
3 3 4 2
4 4 5 2
1 0.0000E+00 0.0000E+00
2 0.0000E+00 0.5000E+00
3 0.0000E+00 0.1000E+01
4 0.1000E+01 0.1000E+01
5 0.1000E+01 0.0000E+00
2 2 0

```

```

1  0.0000E+00
5  0.0000E+00
1  0.0000E+00
5  0.0000E+00
1
2  0.1000E+01  0.0000E+00  0.0000E+00
1  0.1000E+01  0.1000E+03  0.1000E+01
2  0.1000E+01  0.1000E+03  0.1000E+01
3  0.1000E+01  0.1000E+03  0.1000E+01
4  0.1000E+01  0.1000E+03  0.1000E+01
    
```

Wykresy przemieszczeń ramy oraz przebiegi siły podłużnej, siły poprzecznej i momentu zginającego pokazano na rysunku 9.16.



Rysunek 9.16. Wykresy przemieszczenia oraz siły podłużnej, poprzecznej i momentu zginającego dla ramy prostokątnej.

Wartości liczbowe wszystkich wielkości zamieszczono w pliku z wynikami.

**** WYNIKI ****

**** Przemieszczenia ****

węz.	U_x	U_y	ϑ
1	0.0000E+00	0.0000E+00	-2.6588E-01
2	1.1806E-01	2.5000E-03	-1.7660E-01
3	1.6768E-01	5.0000E-03	-3.3774E-02
4	1.6482E-01	-5.0000E-03	-6.9559E-02
5	0.0000E+00	0.0000E+00	-2.1245E-01

**** Siły w elementach ****

el.	węz.	siła N	siła T	moment M_g
1	1	-5.0000E-01	7.1421E-01	1.7855E-11
1	2	5.0000E-01	-7.1421E-01	3.5711E-01
2	2	-5.0000E-01	-2.8579E-01	-3.5711E-01
2	3	5.0000E-01	2.8579E-01	2.1421E-01
3	3	2.8579E-01	-5.0000E-01	-2.1421E-01
3	4	-2.8579E-01	5.0000E-01	-2.8579E-01
4	4	5.0000E-01	2.8579E-01	2.8579E-01
4	5	-5.0000E-01	-2.8579E-01	1.4289E-11

Porównanie wartości momentu zginającego w miejscu przyłożenia siły P oraz w narożu (węzły nr 2, 3).

wartości teoretyczne	wartości obliczone
$M_g = 57Pl/160$	$M_g(2) = 0.3571$
$M_g = 17Pl/80$	$M_g(3) = 0.2142$

Przykład P6 – rama zamknięta

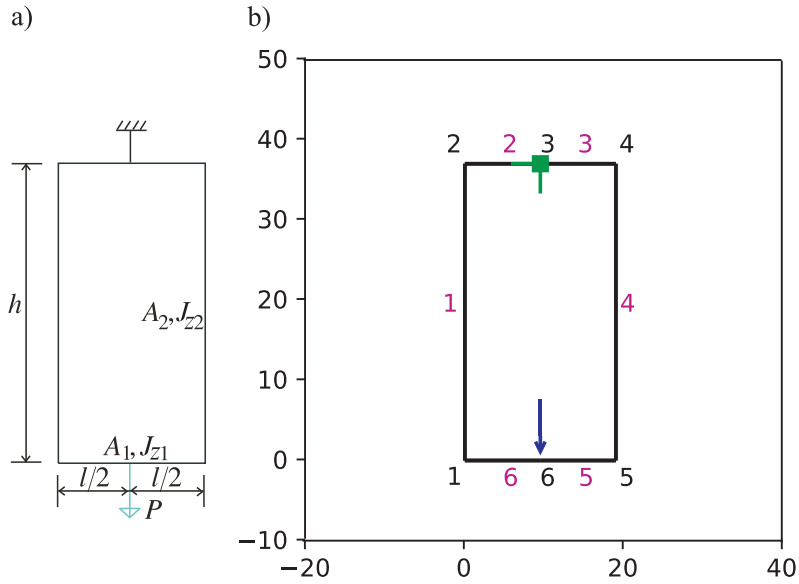
Znaleźć wartości i naszkicować wykresy sił podłużnej oraz poprzecznej, a także momentu zginającego dla ramy zamkniętej o wymiarach $l = 19$ cm, $h = 37$ cm, jak pokazano na rysunku 9.17*). Przekrój prętów poziomych jest prostokątem o wymiarach 0.3 cm \times 0.12 cm, dla którego $A_1 = 3.6$ cm², $J_{z1} = 0.432$ cm⁴, natomiast przekrój prętów pionowych jest prostokątem o wymiarach 0.3 cm \times 0.1 cm, dla którego $A_2 = 3$ cm², $J_{z2} = 0.25$ cm⁴, moduł sprężystości jest równy $E = 2.0 \times 10^7$ N/cm². Wartość siły skupionej $P = 4000$ N. Plik danych wejściowych P6.TXT jest następujący:

```

6 6
1 1 2 2
2 2 3 2
3 3 4 2
4 4 5 2
5 5 6 2
6 6 1 2

```

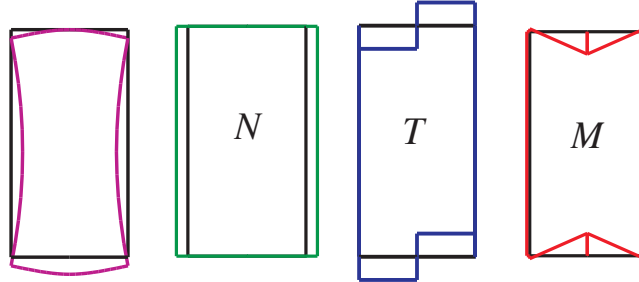
*) Rama stanowi przedmiot jednego z ćwiczeń laboratoryjnych wykonywanych w Katedrze Mechaniki Stosowanej i Biomechaniki.



Rysunek 9.17. Rama zamknięta: schemat konstrukcji oraz jej podział na elementy skończone.

1	0.0000E+00	0.0000E+00	
2	0.0000E+00	0.3700E+02	
3	0.9500E+01	0.3700E+02	
4	0.1900E+02	0.3700E+02	
5	0.1900E+02	0.0000E+00	
6	0.9500E+00	0.0000E+00	
1	1	1	
3	0.0000E+00		
3	0.0000E+00		
3	0.0000E+00		
1			
6	0.0000E+00	-0.4000E+04	0.0000E+00
1	0.2000E+08	0.3000E+01	0.2500E+00
2	0.2000E+08	0.3600E+01	0.4320E+00
3	0.2000E+08	0.3600E+01	0.4320E+00
4	0.2000E+08	0.3000E+01	0.2500E+00
5	0.2000E+08	0.3600E+01	0.4320E+00
6	0.2000E+08	0.3600E+01	0.4320E+00

Wykres przemieszczeń ramy oraz wykresy siły podłużnej, siły poprzecznej i momentu zginającego pokazano na rysunku 9.18.



Rysunek 9.18. Wykresy przemieszczeń, siły podłużnej, siły poprzecznej oraz momentu zginającego dla ramy zamkniętej.

Wartości liczbowe wszystkich wielkości zamieszczono w pliku z wynikami.

**** WYNIKI ****

**** Przemieszczenia ****

węz.	U_x	U_y	ϑ
1	0.0000E+00	-5.6022E-02	-8.0526E-03
2	0.0000E+00	-5.4789E-02	8.0526E-03
3	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
4	0.0000E+00	-5.4789E-02	-8.0526E-03
5	0.0000E+00	-5.6022E-02	8.0526E-03
6	0.0000E+00	-1.1081E-01	0.0000E+00

**** Siły w elementach ****

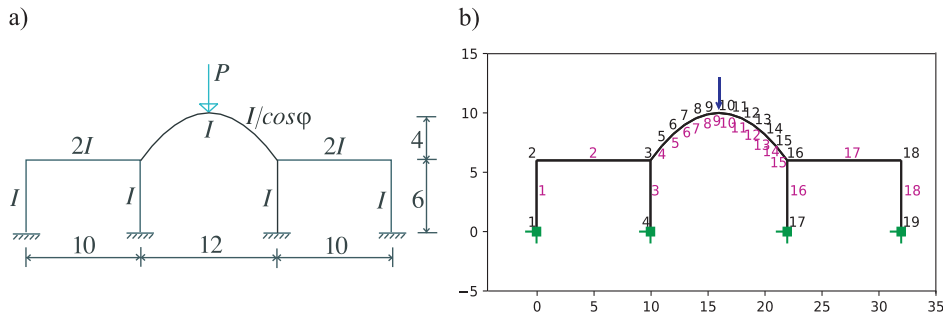
el.	węz.	siła N	siła T	moment M_g
1	1	-2.0000E+03	-2.0179E-12	-2.1764E+03
1	2	2.0000E+03	2.0179E-12	2.1764E+03
2	2	0.0000E+00	-2.0000E+03	-2.1764E+03
2	3	0.0000E+00	2.0000E+03	-1.6824E+04
3	3	0.0000E+00	2.0000E+03	1.6824E+04
3	4	0.0000E+00	-2.0000E+03	2.1764E+03
4	4	-2.0000E+03	-9.9476E-13	-2.1764E+03
4	5	2.0000E+03	9.9476E-13	2.1764E+03
5	5	0.0000E+00	-2.0000E+03	-2.1764E+03
5	6	0.0000E+00	2.0000E+03	-1.6824E+04
6	6	0.0000E+00	2.0000E+03	1.6824E+04
6	1	0.0000E+00	-2.0000E+03	2.1764E+03

Porównanie wartości siły podłużnej i momentu zginającego w pręcie pionowym (węzeł nr 5).

wartości teoretyczne	wartości obliczone
$N = P/2$	$N(5) = 2000$
$M_g = Pl/8(1 + ms)$	$M_g(5) = 2.1764 \times 10^3$
$m = J_{z2}/J_{z1} \quad s = h/l$	

Przykład P7 – rama wielonawowa

Należy obliczyć wartości i naszkicować wykresy sił podłużnej oraz poprzecznej, a także momentu zginającego w konstrukcji, jak na rysunku 9.19a, złożonej z dwóch ram utwierdzonych, na których oparto łuk paraboliczny. Łuk posiada zmienną sztywność scharakteryzowaną momentem bezwładności $J_z/\cos\varphi$, gdzie $\varphi = 0$ w kluczu łuku. Podział rami na elementy skończone pokazano na rysunku 9.19b. W zadaniu nie podano konkretnych wartości wielkości r, E, A, J_z, P , będziemy poszukiwać rozwiązywania symbolicznego, przyjmując jako dane wejściowe wartości jednostkowe. W celu wyeliminowania wpływu siły podłużnej na deformację rami przyjęto wartość pola przekroju A z mnożnikiem 100. Otrzymane wyniki rozumieć należy zatem jako odpowiednie mnożniki bądź sił wewnętrznych, bądź przemieszczeń.



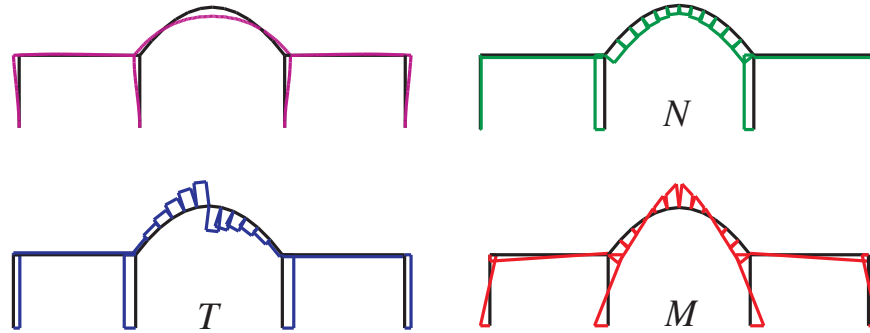
Rysunek 9.19. Rama wielonawowa: schemat konstrukcji wraz z jej podziałem na elementy skończone.

Plik danych wejściowych P7.TXT jest następujący:

18	19		
1	1	2	2
2	2	3	2
3	3	4	2
4	3	5	2
5	5	6	2
6	6	7	2
7	7	8	2
8	8	9	2
9	9	10	2
10	10	11	2
11	11	12	2
12	12	13	2
13	13	14	2
14	14	15	2
15	15	16	2
16	16	17	2
17	16	18	2
18	18	19	2
1	0.0000E+00	0.0000E+00	
2	0.0000E+00	0.6000E+01	
3	0.1000E+02	0.6000E+01	
4	0.1000E+02	0.0000E+00	
5	0.1100E+02	0.7220E+01	
6	0.1200E+02	0.8220E+01	
7	0.1300E+02	0.9000E+01	
8	0.1400E+02	0.9550E+01	
9	0.1500E+02	0.9880E+01	
10	0.1600E+02	0.1000E+02	
11	0.1700E+02	0.9880E+01	
12	0.1800E+02	0.9550E+01	
13	0.1900E+02	0.9000E+01	
14	0.2000E+02	0.8220E+01	
15	0.2100E+02	0.7220E+01	
16	0.2200E+02	0.6000E+01	
17	0.2200E+02	0.0000E+00	
18	0.3200E+02	0.6000E+01	
19	0.3200E+02	0.0000E+00	

```
4 4 4
1 0.0000E+00
4 0.0000E+00
17 0.0000E+00
19 0.0000E+00
1 0.0000E+00
4 0.0000E+00
17 0.0000E+00
19 0.0000E+00
1 0.0000E+00
4 0.0000E+00
17 0.0000E+00
19 0.0000E+00
1
10 0.0000E+00 -0.1000E+01 0.0000E+00
1 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1000E+01
2 0.1000E+01 0.1000E+03 0.2000E+01
3 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1000E+01
4 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1577E+01
5 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1414E+01
6 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1268E+01
7 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1141E+01
8 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1053E+01
9 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1023E+01
10 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1023E+01
11 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1053E+01
12 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1141E+01
13 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1268E+01
14 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1414E+01
15 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1577E+01
16 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1000E+01
17 0.1000E+01 0.1000E+03 0.2000E+01
18 0.1000E+01 0.1000E+03 0.1000E+01
```

Wykres przemieszczeń ramy wielonawowej wraz z wykresami siły podłużnej, siły poprzecznej i momentu zginającego pokazano na rysunku 9.20.



Rysunek 9.20. Wykresy przemieszczeń, siły podłużnej i poprzecznej oraz momentu zginającego dla ramy wielonawowej.

Wartości liczbowe wszystkich wielkości zamieszczono w pliku z wynikami.

**** WYNIKI ****

**** Przemieszczenia ****

węz.	U_x	U_y	ϑ
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	-3.4372E+00	-2.1508E-03	4.2408E-01
3	-3.4492E+00	-2.7849E-02	-1.3049E-01
4	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
5	-2.9528E+00	-4.4700E-01	-6.7772E-01
6	-2.0583E+00	-1.3532E+00	-1.0952E+00
7	-1.1106E+00	-2.5800E+00	-1.3096E+00
8	-3.9866E-01	-3.8871E+00	-1.2458E+00
9	-5.0351E-02	-4.9585E+00	-8.2886E-01
10	0.0000E+00	-5.4111E+00	0.0000E+00
11	5.0351E-02	-4.9585E+00	8.2886E-01
12	3.9866E-01	-3.8871E+00	1.2458E+00
13	1.1106E+00	-2.5800E+00	1.3096E+00
14	2.0583E+00	-1.3532E+00	1.0952E+00
15	2.9528E+00	-4.4700E-01	6.7772E-01
16	3.4492E+00	-2.7849E-02	1.3049E-01
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	3.4372E+00	-2.1508E-03	-4.2408E-01
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

**** Siły w elementach ****

el.	węz.	siła N	siła T	moment M_g
1	1	3.5847E-02	-1.2028E-01	-4.3151E-01
1	2	-3.5847E-02	1.2028E-01	-2.9015E-01
2	2	1.2028E-01	3.5847E-02	2.9015E-01
2	3	-1.2028E-01	-3.5847E-02	6.8324E-02
3	3	4.6415E-01	-2.1337E-01	-6.6187E-01
3	4	-4.6415E-01	2.1337E-01	-6.1837E-01
4	3	5.9821E-01	5.8923E-02	5.9354E-01
4	5	-5.9821E-01	-5.8923E-02	-5.0059E-01
5	5	5.8948E-01	1.1763E-01	5.0059E-01
5	6	-5.8948E-01	-1.1763E-01	-3.3424E-01
6	6	5.7060E-01	1.8905E-01	3.3424E-01
6	7	-5.7060E-01	-1.8905E-01	-9.4488E-02
7	7	5.3331E-01	2.7732E-01	9.4488E-02
7	8	-5.3331E-01	-2.7732E-01	2.2200E-01
8	8	4.7353E-01	3.7026E-01	-2.2200E-01
8	9	-4.7353E-01	-3.7026E-01	6.1190E-01
9	9	3.9084E-01	4.5669E-01	-6.1190E-01
9	10	-3.9084E-01	-4.5669E-01	1.0719E+00
10	10	3.9084E-01	-4.5669E-01	-1.0719E+00
10	11	-3.9084E-01	4.5669E-01	6.1190E-01
11	11	4.7353E-01	-3.7026E-01	-6.1190E-01
11	12	-4.7353E-01	3.7026E-01	2.2200E-01
12	12	5.3331E-01	-2.7732E-01	-2.2200E-01
12	13	-5.3331E-01	2.7732E-01	-9.4488E-02
13	13	5.7060E-01	-1.8905E-01	9.4488E-02
13	14	-5.7060E-01	1.8905E-01	-3.3424E-01
14	14	5.8948E-01	-1.1763E-01	3.3424E-01
14	15	-5.8948E-01	1.1763E-01	-5.0059E-01
15	15	5.9821E-01	-5.8923E-02	5.0059E-01
15	16	-5.9821E-01	5.8923E-02	-5.9354E-01
16	16	4.6415E-01	2.1337E-01	6.6187E-01
16	17	-4.6415E-01	-2.1337E-01	6.1837E-01
17	16	1.2028E-01	-3.5847E-02	-6.8324E-02
17	18	-1.2028E-01	3.5847E-02	-2.9015E-01
18	18	3.5847E-02	1.2028E-01	2.9015E-01
18	19	-3.5847E-02	-1.2028E-01	4.3151E-01

Porównanie wartości momentu zginającego w podporze, narożu i w punkcie przyłożenia siły P (węzły nr 1, 2, 10).

wartość teoretyczna	wartość obliczona
$M_g = -0.4355$	$M_g(1) = -0.4315$
$M_g = 0.2930$	$M_g(2) = 0.2901$
$M_g = 1.0744$	$M_g(10) = 1.0719$

9.5. Dodatek A

W celu zaoszczędzenia użytkownikowi trudu przepisywania oraz późniejszego debugowania kodu zrezygnowałem z podawania w tym miejscu pliku z kodem źródłowym MES. Kod ten, napisany w języku Python i wzorowany na [6], można pobrać bezpośrednio ze strony m1.pk.edu.pl, na której dodatkowo dostępne są wszystkie pliki z przykładami. Nazwę pliku w każdym z przykładów najlepiej zmienić, nadając mu standardową nazwę akceptowaną przez kod MES, tzn. `DANE.TXT`. Po uruchomieniu i wykonaniu użytkownik może na bieżąco śledzić wykonanie programu w odpowiednim oknie, a dodatkowo otrzymuje plik z wynikami `Wyniki.TXT` oraz dwa rysunki `Schemat.SVG` oraz `Wykres.SVG` zapisane w formacie grafiki wektorowej, które dalej można obrabiać za pomocą programu narzędziowego Ink. Reasumując, pod względem oprogramowania do uruchomienia przykładów niezbędne wymagania to instalacja bezpłatnych wersji Pythona oraz ewentualnie Ink, wtedy gdy zachodzi potrzeba dalszej obróbki plików graficznych.

9.6. Dodatek B

Wszystkich zainteresowanych przebudową kodu komputerowego zachęcam na początek do próby zaimplementowania płaskiego elementu rusztowego mającego formalnie strukturę bardzo podobną do zaprezentowanego płaskiego elementu belkowego. Dla ułatwienia funkcja kształtu określająca kąt skręcenia jest równa

$$\phi = a_1 + a_2x$$

postać lokalnej macierzy sztywności jest następująca

$$[\mathbf{k}_x] = \begin{bmatrix} \frac{GJ_0}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ_0}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{l^3} & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ_z}{l^3} & \frac{6EJ_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & \frac{4EJ_z}{l} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & \frac{2EJ_z}{l} \\ -\frac{GJ_0}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ_0}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_z}{l^3} & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{12EJ_z}{l^3} & -\frac{6EJ_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & \frac{2EJ_z}{l} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & \frac{4EJ_z}{l} \end{bmatrix}$$

zaś macierzy transformacji (9.18).

W przypadku użytkowników mających większe doświadczenie w programowaniu proponuję implementację ogólnego elementu belkowego o 6 stopniach swobody w każdym węźle. Odpowiednia macierz sztywności lokalnej ma następującą postać

$$[\mathbf{k}_x] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_0}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_0}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{l} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^3} \\
 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_0}{l} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 \\
 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{l} \\
 \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} \\
 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_0}{l} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{l} & 0 \\
 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{l}
 \end{bmatrix}$$

natomiast macierz transformacji

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{t}] & & & \\ & [\mathbf{t}] & & \\ & & [\mathbf{t}] & \\ & & & [\mathbf{t}] \end{bmatrix}$$

zawiera kosinusy kątów pomiędzy odpowiednimi osiami układu lokalnego i globalnego

$$[\mathbf{t}] = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}.$$

Bibliografia

- [1] Bielajew N. M. (1954): *Wytrzymałość materiałów*, tłum. z ros. Kaliski S., MON, Warszawa.
- [2] Boussinesq J. V. (1885): *Application des potentiels à l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Gauthier-Villars, Paris.
- [3] Cegielski E. (2007): *Wytrzymałość materiałów*, t. 1, Wydawnictwo PK, Kraków.
- [4] Dyląg Z., Krzemieńska-Niemiec E., Filip F. (1989): *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa.
- [5] Фолониенко-Бородич М. М. (1945): Простейшая модель упругого основания, способная распределять нагрузку, Сборник трудов Московского Электромех. Института Инженеров Транспорта, вып. 53, Трансжелдориздат, Москва.
- [6] Hartley G. (1986): *Fundamentals of the Finite Element Method*, Macmillan Publishing Company, New York.
- [7] Hertz H. (1895): *Gesammelte Werke*, t. 1, Lipsk.
- [8] Huber M. T. (1954): *Teoria sprężystości*, cz. I, PWN, Warszawa.
- [9] Krzemiński-Freda H. (1989): *Łożyska toczne*, PWN, Warszawa.
- [10] Medwadowski J. (1980): *Stalowe konstrukcje budowlane*, PWN, Warszawa.
- [11] Niezgodziński M. E., Niezgodziński T. (1984): *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa.
- [12] Nowacki W. (1967): *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa.

-
- [13] Oberhettinger F., Magnus W. (1963): *Zastosowania funkcji eliptycznych w fizyce i technice*, PWN, Warszawa.
- [14] Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flanner B. (1997): *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, New York.
- [15] Pytko S. (1982): *Problemy wytrzymałości kontaktowej*, PWN, Warszawa.
- [16] Работнов Ю. Н. (1988): *Механика деформируемого твердого тела*, Наука, Москва.
- [17] Rżysko J. (1977): *Statyka i wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa.
- [18] Timoshenko S., Goodier J. N. (1962): *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa.
- [19] Walczak J. (1973): *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*, PWN, Warszawa.
- [20] Winkler E. (1867): *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, Prag.
- [21] Ylinen A., Mikkola M. (1967): A beam on Wieghardt-type elastic foundation, *Int. J. Sol. Struct.*, vol. 2.
- [22] Zakrzewski M., Zawadzki J. (1983): *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa.
- [23] Życzkowski M. red. (1988): *Mechanika techniczna – wytrzymałość konstrukcji*, t. IX, PWN, Warszawa.

Indeks

- adres strony `m1.pk.edu.pl` 144
- agregator 106
- algorytm podstawiania wstecz 119
- belka
 - długa 12
 - długa obciążona momentem skupionym 14
 - długa obciążona obciążeniem stałym 16
 - długa obciążona siłą skupioną 13
 - na trzech podporach 50
 - o nieskończonej długości 12
 - półnieskończona 13
 - przegubowa 126
 - o skończonej długości 3
 - typu 'krótkiego' 13
 - utwierdzona 128
- docisk ciał niekulistych 92
- dyskretyzacja 107
- eksperyment Striebecka 98
- ekstremalne wartości składowych stycznych naprężenia 34
- element
 - główny 119
 - skończony 107
 - skończony dostosowany 109
 - skończony zgodny 109
 - skończony zupełny 109
- eliminacja Gaussa 118
 - macierzy wstęgowej 121
 - z wyborem elementu głównego 120
- energia sprężystości 44, 47, 48, 108
- funkcja
 - aproksymująca 107
 - Greena 19
 - kształtu 107, 108, 144
 - kształtu liniowa 109
 - kształtu wielomianowa trzeciego stopnia 109
 - kształtu wielomianowa 109
- globalna macierz sztywności 108, 115
- hipoteza
 - Hubera–Misesa–Hencky’ego 95
 - Tresca–Guesta 95
- kąt określający nachylenie składowej głównej naprężenia 34
- kierunki ekstremalnych składowych stycznych 35
- koło Mohra 31, 36
 - naprężenia 37
- kod w języku Python 144
- kontakt koła wagonu z szyną 100
- kratownica 1, 123
 - statycznie niewyznaczalna 53
 - statycznie wyznaczalna 2

- linia wpływowa 19
 - belki swobodnie podpartej 20
 - momentu zginającego 20
 - przemieszczenia 21
 - przemieszczenia belki swobodnie podpartej 24
 - reakcji belki swobodnie podpartej 28
 - siły poprzecznej belki swobodnie podpartej 28
 - belki wspornikowej 28
- liniowe prawo rozszerzalności termicznej 73
- liniowy spadek (gradient) zmiany temperatury wzdłuż wysokości 74
- lokalna macierz sztywności 108
 - elementu określona w lokalnym układzie współrzędnych 114
- łożysko
 - kulkowe jednorzędowe 98
 - wałowe 101
- macierz
 - dodatnio określona 120
 - naprężenia 31
 - sztywności 57
 - sztywności elementu 112
 - sztywności lokalnej 145
 - transformacji 111, 146
- maksymalna wartość nacisku 91
- maksymalne ciśnienie dociskowe 97
- maksymalny nacisk 93
- metoda
 - bezpośredniej eliminacji 118
 - elementów skończonych 104
 - iteracyjna 118
 - Maxwella–Mohra 21, 22, 23
 - przemieszczeń 57, 105
 - różnic skończonych 104
 - równoważenia kolejnych węzłów kratownicy 2, 54
 - sił 4, 105
 - superpozycji 46
- model
 - dyskretny 104, 106, 107
 - fizyczny 103
 - matematyczny 105
 - podłoża sprężystego typu Winklera 9, 10
- modelowanie
 - obciążeń 116
 - obciążenia rozłożonego w sposób liniowy 117
 - warunków brzegowych 115
- model
 - fizyczny 104
 - matematyczny 106
- moduł
 - Younga 89, 97
- modyfikacja metody Gaussa dla macierzy specjalnych 120
- myślowy przekrój 5
- nadliczbowa hiperstatyczna 46
- najbardziej niekorzystne położenie obciążenia 26
- naprężenie zredukowane w punkcie Bielajewa 96, 97
- obciążenie termiczne w metodzie
 - przemieszczeń 76
 - sił 75
- odkształcenie uzależnione od zmiany temperatury 74
- ogólny element belkowy o 6 stopniach swobody 145

- półosie elipsy pola zetknięcia 94
- półprzestrzeń sprężysta 85
- płaski element rusztowy 144
- pliki z przykładami 144
- postać trójkątna górna układu równań 119
- post-procesor 106
- prawo Hooke'a 41, 44
 - wzbogacone o efekt termiczny 63
- pre-procesor 106
- proces agregacji 114
- program komputerowy 105
- promień
 - koła Mohra 37
 - pola zetknięcia 91
- przemieszczenie uogólnione 48, 108
- punkt Hertza 95
- równania
 - Lagrange'a 107, 108
 - modelu dyskretnego 108
- równanie
 - Fouriera 73
 - różniczkowe linii ugięcia belki 10, 105
 - transformacyjne dla pręta kratownicy 63
- równomierna zmiana temperatury 74
- rama 1
 - o węzłach nieprzesuwnych 63
 - o węzłach przesuwnych 65
 - prostokątna 134
 - statycznie niewyznaczalna 51
 - statycznie niewyznaczalna – zastosowanie metody przemieszczeń 81
 - statycznie wyznaczalna 1, 5
 - wielonawowa 139
 - zamknięta 136
- rozwiązanie układu równań 118
- schemat belki
 - fikcyjnej 21
 - rzeczywistej 21
- siła uogólniona 108
- składowe główne
 - naprężenia 34
 - odkształcenia 35
- skończenie elementowa
 - aproksymacja modelu matematycznego 106
- solwer 106
- stopień
 - geometrycznej niewyznaczalności 57, 58
 - hiperstatyczności 46
 - statycznej niewyznaczalności 58
- struktura pliku danych wejściowych 122
- średnia zmiana temperatury 74
- teoria Bernoullego 45
- tożsamość
 - Eulera 43
 - Eulera–de Moivre'a 11
- transformacja
 - lokalnej macierzy sztywności 111
 - z układu lokalnego do układu globalnego 110
- twierdzenie
 - Castigliana 43, 44, 47, 48
 - Schwedlera–Żurawskiego 6, 7, 10, 21, 58, 60
- ugięcia elementu belkowego na skutek działania gradientu temperatury 76

- układ
 - belkowo-ramowy 58
 - Clapeyrona 41, 42
 - globalny 109
 - kratowy 62, 68
 - kratowy przy zmianie temperatury 80
 - liniowo-sprężysty 41
 - lokalny 109
 - podstawowy 46, 54
 - równań liniowych 118
 - równań metody przemieszczeń 64, 66
 - równań metody sił 52
 - samorzównoważony 54
 - uzupełniający 46, 54
 - równań kanonicznych metody sił 47
- uogólnienie metody sił o efekt zmiany temperatury 75
- uogólniona siła 41
- uogólnione przemieszczenie 41

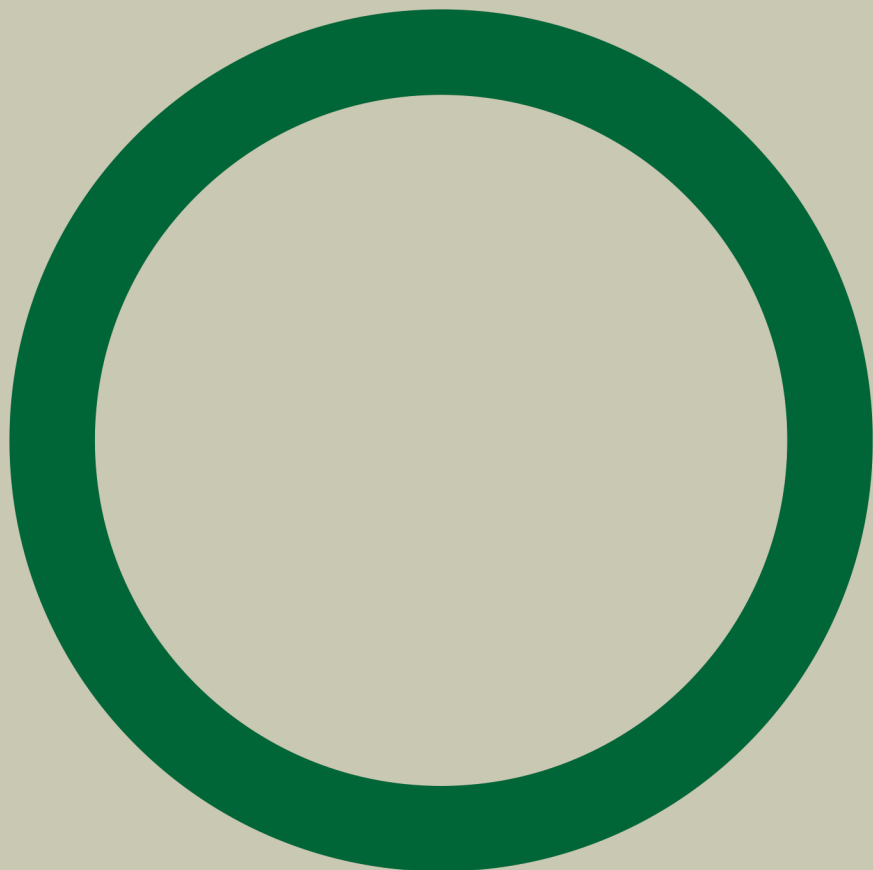
- warunek wyężeniowy
 - Hubera–Misesa–Hencky’ego 96
 - Tresca–Guesta 96
- wektor uogólnionych
 - przemieszczeń 57, 111, 112, 115
 - sił 57, 111, 112
- wpływ przemieszczeń podpór belki ciągłej 132
- współczynnik
 - oporu podłoża 11
 - podatności 41
 - Poissona 89, 95, 97
 - rozszerzalności termicznej 63, 73
 - podatności 48
- współczynniki lokalnej macierzy sztywności 112

- współrzędna środka koła Mohra 37
- wydłużenie względne 73
- wyężenie w środku kołowego pola zetknięcia 95
- wzory
 - metody przemieszczeń 58, 60, 62
 - transformacyjne macierzy naprężenia 32
 - zmodyfikowanej symetrycznej eliminacji Gaussa 120

- zagadnienie
 - Hertza 85, 86
 - Boussinesqa 85
 - własne 116
- zasada Bettiego–Maxwella 48
- zmiana
 - długości pręta spowodowana średnią zmianą temperatury 76
 - temperatury w układzie statycznie wyznaczalnym 74



Politechnika Krakowska
im. Tadeusza Kościuszki



ISBN 978-83-67188-92-0



9 788367 188920