

**Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki**  
**Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej**

Jarosław Tulicki  
Katedra Inżynierii Elektrycznej E-2

**ROZPRAWA DOKTORSKA**

**Modelowanie maszyn indukcyjnych dwuklatkowych  
na potrzeby diagnostyki**

**Promotor:** Prof. zw. dr hab. inż. Tadeusz Sobczyk

**Promotor pomocniczy:** dr hab. inż. Maciej Sułowicz, Prof. PK

**Kraków 2024**

*Składam serdeczne podziękowania mojemu Promotorowi Panu Prof. Tadeuszowi Sobczykowi i Promotorowi Pomocniczemu Panu Prof. Maciejowi Sułowiczowi za cenne uwagi oraz nieocenioną cierpliwość.*

# SPIS TREŚCI

## Wykaz najważniejszych oznaczeń

### Rozdział 1. Wstęp

1.1 Wprowadzenie.....	7
1.2 Zagadnienia omawiane w rozprawie.....	10
1.3 Cel, zakres i teza rozprawy.....	12
1.4 Przegląd zawartości pracy.....	13

### Rozdział 2. Model liniowy opisywany równaniami różniczkowymi o okresowo zmiennych współczynnikach w dziedzinie częstotliwości

2.1 Wprowadzenie .....	15
2.2 Formułowanie równań stanu ustalonego maszyn prądu przemiennego .....	17
2.3 Rozwiązanie układu równań różniczkowych o okresowo zmiennych współczynnikach niesprowadzalnych do postaci stałej przez transformacje.....	19
2.3.1 Analiza macierzowych równań napięciowych .....	19
2.3.2 Analiza macierzowych równań momentu elektromagnetycznego.....	22
2.3.3 Metody rozwiązywania równań bilansu harmonicznego.....	23
2.4 Model obwodowy silnika dwuklatkowego we współrzędnych fazowych .....	25
2.4.1 Transformacja modelu do składowych symetrycznych.....	31
2.4.2 Rozwiązanie układu równań metodą bilansu harmonicznego.....	37
2.4.3 Równania momentu elektromagnetycznego.....	41
2.5 Badanie rozwiązań modelu liniowego w dziedzinie częstotliwości .....	46
2.5.1 Widmo prądów i momentu elektromagnetycznego w warunkach obustronnej symetrii silnika.....	48
2.5.2 Widmo prądu stojana w warunkach niesymetrii elektrycznej od strony wirnika.....	53
2.5.3 Widmo momentu elektromagnetycznego w warunkach niesymetrii elektrycznej wirnika .....	62
2.5.4 Widmo prądu stojana w warunkach obustronnej niesymetrii elektrycznej.....	70
2.5.5 Widmo momentu elektromagnetycznego w warunkach obustronnej niesymetrii elektrycznej silnika.....	79
2.5.6 Czynniki utrudniające diagnostykę niesymetrii rezystancyjnej wirnika.....	86

### **Rozdział 3. Model nieliniowy z niesymetrią wewnętrzną dla stanu ustalonego w dziedzinie czasu**

3.1 Wprowadzenie.....	91
3.2 Równania dyskretnego bilansu harmoniczych w dziedzinie czasu.....	93
3.3 Równania modelu bazowego.....	98
3.4 Algorytm bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego.....	100
3.4.1 Równania modelu bazowego w dziedzinie czasu.....	100
3.4.2 Struktura i opis działania algorytmu bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego w dziedzinie czasu .....	106
3.4.3 Zbieżność numeryczna algorytmu bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego.....	110
3.4.4 Porównanie metody bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego w dziedzinie czasu z całkowaniem numeryczny.....	123
3.5 Badanie rozwiązań modelu nieliniowego w dziedzinie częstotliwości.....	134
3.5.1 Widmo prądu stojana w warunkach niesymetrii elektrycznej wirnika.....	145
3.5.2 Widmo momentu elektromagnetycznego w warunkach niesymetrii elektrycznej wirnika.....	151
3.5.3 Widmo prądu stojana w warunkach obustronnej niesymetrii elektrycznej.....	157
3.5.4 Widmo momentu elektromagnetycznego w warunkach obustronnej niesymetrii elektrycznej silnika.....	163

### **Rozdział 4. Badania laboratoryjne**

4.1 Wstęp.....	169
4.2 Program i metodyka badań.....	170
4.3 Wyniki pomiarów i obliczeń.....	171
4.3.a Zasilanie symetrycznym układem napięć trójfazowych.....	171
4.3.b Zasilanie dwufazowe.....	183
4.4 Wnioski z pomiarów laboratoryjnych.....	188

### **Rozdział 5. Zakończenie**

Podsumowanie pracy i wnioski końcowe .....	190
--	-----

<b>Literatura</b> .....	192
Spis tabel.....	198
Spis rysunków.....	199

## Wykaz najważniejszych oznaczeń

- a** - reprezentacja wektorowa szeregu Fouriera
- A** - macierz układu równań
- A** - macierz układu równań w formie reprezentacji macierzowej szeregu Fouriera
- B** - współczynnik tarcia
- E** - wektor jednostkowy, macierz jednostkowa
- $E_{ko}$  - koenergia pola magnetycznego
- $g$  - grubość szczeliny powietrznej
- $i$  - prąd w funkcji czasu
- i** - wektor prądów
- i** - wektor prądów w formie reprezentacji wektorowej szeregu Fouriera
- $j$  - jednostka urojona
- J** - moment bezwładności
- $k_u$  - współczynnik uzwojenia
- $l_{fe}$  - idealna długość poosiowa obwodu magnetycznego
- L** - indukcyjność
- L** - macierz indukcyjności
- L** - macierz indukcyjności w formie reprezentacji macierzowej szeregu Fouriera
- M** - indukcyjność wzajemna
- M** - macierz indukcyjności wzajemnych
- N** - liczba żłobków, liczba prętów
- $p$  - liczba par biegunów
- $q$  - liczba żłobków na biegun i fazę
- $r$  - średni promień szczeliny powietrznej
- R** - rezystancja
- R** - macierz rezystancji
- R** - macierz rezystancji w formie reprezentacji macierzowej szeregu Fouriera
- $s$  - poślizg
- $t$  - czas
- T** - okres
- T** - macierz transformacji
- $T_{em}$  - moment elektromagnetyczny
- $T_m$  - moment mechaniczny

- $u$  - napięcie w funkcji czasu
- $\mathbf{u}$  - wektor napięcia
- $\mathbf{u}$  - wektor napięcia w formie reprezentacji wektorowej szeregu Fouriera
- $\mathbf{x}$  - wektor współrzędnych
- $\mathbf{x}$  - wektor współrzędnych w formie reprezentacji wektorowej szeregu Fouriera
- $z_s$  - liczba zwojów na fazę uzwojenia stojana
- $\mathbf{Z}$  - zbiór liczb całkowitych

### Symbole greckie

- $\alpha, \beta, \varepsilon$  - kąty rozwarcia cewek lub uzwojeń
- $\varphi$  - kąt obrotu wirnika
- $\varphi_0$  - kąt początkowy położenia wirnika
- $\Lambda$  - przewodność magnetyczna dla strumienia głównego
- $\mu_0$  - przenikalność magnetyczna próżni
- $\delta$  - delta Kroneckera
- $\Psi$  - wektor strumieni skojarzonych
- $\omega$  - prędkość kątowa wirnika
- $\Omega$  - pulsacja
- $\mathbf{\Omega}$  - macierz pulsacji

### Indeksy dolne i górne

- $\sigma$  - indukcyjność rozproszenia
- $m$  - indukcyjność magnesująca
- $s$  - stojan
- $p, r$  - klatka pracy, klatka rozruchowa
- $w$  - wirnik
- $k_s$  - numer składowej symetrycznej stojana,  $k_s=0, 1, 2$
- $k_w$  - numer składowej symetrycznej wirnika,  $k_w=0, \dots, N$

### I. Wstęp

#### 1.1 Wprowadzenie

W obecnej chwili do jednych z najczęściej eksploatowanych rodzajów maszyn elektrycznych prądu przemiennego należą silniki asynchroniczne dwuklatkowe [3], [12]. Znalazły one zastosowanie w układach napędowych niskiego oraz średniego napięcia dla przedziału mocy 50kW–2MW, wymagających ciężkich rozruchów i wielokrotnych nawrotów [17], [74]. Wśród takich aplikacji warto wymienić napędy główne dźwigów, młynów węglowych, wentylatorów, turbosprężarek, a także pomp wody instalowanych w systemach potrzeb własnych elektrowni i elektrociepłowni [3], [108]. Wirniki maszyn tego typu wykonuje się w standardowej technologii jako nieodlewane z połączeniami spawanymi bądź lutowanymi między prętami klatek oraz pierścieniami zwierającymi [17], [32]. Niekiedy też, aby ograniczyć negatywne skutki działania momentów pasożytniczych, zamiast zgrzewanych spoin kompozytów srebra, stosowane są nity zmniejszające wypadkową rezystancję wirnika tym samym redukując wartości wyższych momentów asynchronicznych [58]. Silnik dwuklatkowy powszechnie uznano za maszynę indukcyjną o specjalnej budowie z klatkami wirnika pełniącymi osobno funkcje obwodu rozruchowego i pracy. Klatka rozruchowa – górna, położona bliżej szczeliny powietrznej niż klatka pracy – dolna, posiada decydujący wpływ na właściwości rozruchowe, natomiast w zakresie poślizgów bliskich znamionowemu charakterystykę mechaniczną kształtują parametry obwodowe klatki pracy [3], [108]. Pręty obwodów wirnika mogą być zwarte wspólnym lub osobnymi pierścieniami, gdzie podstawowym kryterium warunkującym wybór konstrukcji stanowi rozszerzalność termiczna elementów składowych klatek bezpośrednio związana z rodzajem napędzanej maszyny roboczej tj. czasem trwania stanów dynamicznych oraz nieustalonych [33], [55]. W przypadku maszyn niskonapięciowych małej mocy poniżej 150kW i przewidywalnie nieznacznym momencie bezwładności układu napędowego, pierścień zwierający jest wspólny [17], [108]. Jednak zazwyczaj wirniki silników dwuklatkowych mają niepołączone ze sobą galwanicznie obwody rozruchowe i pracy bez skosu oraz pierścieni pośrednich, wykonane z różnych materiałów przewodzących [3], [17], [34]. Spawane pręty klatek z reguły posiadają kształt kołowy albo prostokątny [74], [108]. Niezależnie od budowy wirnika obydwie klatki łączy zawsze wzajemne pole rozproszenia szczelinowego przez prze-

-smyk powietrzny, którego wymiary obok samego przekroju i materiału prętów określają przebieg krzywej momentu elektromagnetycznego [3], [34]. Bardzo często klasyfikację maszyn dwuklatkowych, uzupełniają silniki mające niestandardową budowę wirnika z biernym obwodem rozruchowym (cewkami lub prętami swobodnymi niezwartymi pierścieniem [6], [7], [73]) i klatkami przesuniętymi względem siebie o pół podziałki żłobkowej [22], [73], [108]. Niewątpliwa zaleta silnika posiadającego bierne pręty rozruchowe leży w zdolności ich dowolnego wydłużenia cieplnego zgodnie z kierunkiem osiowym jarzma zdecydowanie ograniczając awaryjność wirnika, ponieważ dla małych poślizgów prętami swobodnymi przepływają wyłącznie prądy wirowe praktycznie równe zero – jeżeli w szczelinie powietrznej nie występuje pole przeciwbieżne (zachowana symetria wewnętrzna obwodu stojana i układu zasilania). Mniejszą uwagę poświęca się silnikom z przesuniętymi klatkami, bowiem nie wnoszą nowych informacji w opisie właściwości eksploatacyjnych niż typowa konstrukcja zwarta osobnymi pierścieniami poza zwiększonym momentem rozruchowym i prądem biegu jałowego [22], [73]. Generalnie silnik dwuklatkowy od maszyn jednoklatkowych podobnej wielkości odróżnia mniejszy prąd rozruchowy przy jednocześnie powiększonym momencie początkowym, gorszy współczynnik mocy czynnej oraz niższa przeciążalność statyczna i dynamiczna [17], [74], [108].

Wspomniane wyżej warunki pracy silników dwuklatkowych jak również metoda wykonania klatek stanowią główną przyczynę uszkodzeń wirnika [8], [9], [56]. W pierwszej kolejności za niekorzystne czynniki powodujące niesymetrię elektryczną uznano częste rozruchy z dużym momentem bezwładności, występowanie znacznych przyspieszeń oraz drgań przenoszonych przez wał napędzanej maszyny roboczej. Istotnym aspektem przesądzającym o awaryjności jest budowa klatek z nieizolowanych prętów wkładanych bezpośrednio w żłobki [32] jarzma wirnika – przyjęta tolerancja wykonania uzwojeń ogranicza wymianę ciepła między pakietem blach i elementami czynnymi wirnika [9], [53]. Szczegółowa analiza procesu uszkodzenia klatek pozwala stwierdzić, że pierwotnym źródłem niesymetrii wirnika są siły elektrodynamiczne skupione blisko części żłobkowej oraz naprężenia cieplne wywołane nierównomiernym rozkładem temperatury pochodzące ze zwiększonej mocy strat rozruchowych. Powstanie sił elektrodynamicznych od nieustalonych zjawisk termicznych wiąże się z przepływem prądów udarowych w prętach klatek oraz oddziaływaniem strumienia rozproszenia wokół części pakietowej [23]-[25]. Nastęstwem tych zjawisk będzie odkształcenie pierścieni zwiernających, pęknięcie prętów lub wytopienie połączeń czołowych klatek wskutek oddziaływań mechanicznych osiągających maksymalną wartość w punktach zakończenia rdzenia wirnika [9], [25]. Maszynami najbardziej podatnymi na uszkodzenia wirnika są silniki szybkobieżne z elementami czynnymi części rozruchowej i pracy [23]-[25]. W silniku zwartym osobnymi



pierścieniami uszkodzenia występują przede wszystkim w klatce górnej, gdyż przejmuje większość zgromadzonej energii kinetycznej układu napędowego podczas rozruchu. Klatka robocza blisko punktów pracy  $s=1$  ma minimalny udział w wypadkowym rozplywie prądów wirnika i tylko nieznacznie podlega działaniu sił elektrodynamicznych osiągających wartości krytyczne [17]. Zniszczenie mechaniczne połączeń tej części wirnika, zachodzi zwykle w stanie ustalonym pod wpływem obciążenia momentem tętniącym (napędy sprężarek tłokowych) [17]. W silnikach z klatkami zwartymi wspólnym pierścieniem, podobnie jak w sytuacji maszyn zwartych osobnymi pierścieniami podstawowymi przyczynami uszkodzeń obwodów wirnika pozostają długotrwałe oraz częste stany dynamiczne. Dla takiej konstrukcji uszkodzenia prętów klatki górnej i dolnej mają związek z lokalnym oddziaływaniem sił elektrodynamicznych przenoszonych wspólnym pierścieniem między obwodami wirnika [17], [25]. Widocznym skutkiem niesymetrii elektrycznej wirnika z powodu przzerwania połączeń w obwodach klatek jest wzrost temperatury uzwojeń stojana, spadek sprawności a także obniżenie momentów rozruchowego i maksymalnego. Dodatkowe negatywne zjawiska wywołane niesymetrią części wirującej, niesie również rozkład uszkodzonych prętów. Przerwanie dużej liczby prętów obok siebie w klatce rozruchowej zwykle skutecznie uniemożliwia rozruch silnika. W stanie pracy ustalonej, rozkład przzerwanych prętów wirnika odpowiada za poziom wahań prądów stojana generujących momenty przemienne typu synchronicznego [32]. Znaczącym efektem uwarunkowanym uszkodzeniem dużej liczby prętów położonych w sąsiednich żłobkach jest przepływ prądu po powierzchni jarzma wirnika, niszczącego skrajne części pakietu blach [24]. Rozkład prądów wirnika oraz jego negatywny wpływ obejmuje również układ mechaniczny, zwiększając drgania i nadmiernie obciążając łożyska wraz z wzrostem siły naciągu magnetycznego [10].

Postawione przez przemysł wysokie standardy niezawodności i efektywności energetycznej napędów elektrycznych dużej mocy zintensyfikowały rozwój złożonych systemów diagnostycznych mających za zadanie wczesne wykrycie zaburzeń oraz źródeł ich pochodzenia. Dotychczasowe doświadczenia pozwoliły opracować skuteczne algorytmy i metody oceny stanu technicznego wirników maszyn dwuklatkowych bez przerywania pracy napędu. Najistotniejsze z nich pochodzą od założenia, że dla przedziału 0-0,5 prędkości synchronicznej prąd płynie wyłącznie w klatce rozruchowej. Natomiast w zakresie pracy między poślizgiem maksymalnym i prędkością odpowiadającą poślizgowi biegu jałowego o rozplywie prądów wirnika decyduje klatka pracy. W pierwszym przypadku wymienione założenia wymuszają m. in. badanie charakterystycznych cech niesymetrii klatki rozruchowej otrzymanych z przebiegów czasowych stanu dynamicznego [95]. Drugie zagadnienie wymaga analizy ustalonego stanu pracy kojarzonego głównie z klatką dolną. Stąd wynikają liczne sposoby poszukiwania sygnałów dia-

gnostycznych na podstawie stanów przejściowych wykorzystujących w tym celu analizę czasowo-częstotliwościową prądów stojana [1], [2], [32], [97]. Dla stanów ustalonych powszechne zastosowanie znalazły metody statystyczne analizy widma amplitudowego wielkości takich jak prąd oraz napięcie (liniowo proporcjonalne do strumienia radialnego lub poosiowego) czy prędkość drgań mechanicznych [10], [35]-[39], [73]. Zasady oceny stanu technicznego obwodów wirnika będą wystarczająco skuteczne dopiero w sytuacji posiadania wiarygodnych wzorców diagnostycznych uzyskanych pomiarowo lub drogą modelowania matematycznego. Pierwsza metoda określenia miar uszkodzenia jest ograniczona względami technicznymi i ekonomicznymi, ponieważ wymaga pozyskania dużej liczby danych pomiarowych z maszyn pracujących w zbliżonych warunkach i szerokim zakresie stosowanych mocy oraz napięć przy jednoczesnej możliwości kształtowania poziomu, jak również miejsca wystąpienia uszkodzenia. Nie dotyczy to wzorców diagnostycznych pochodzących z obliczeń analitycznych i numerycznych, pod warunkiem odpowiedniego dostosowania modelu matematycznego do wybranego problemu.

## 1.2 Zagadnienia omawiane w rozprawie

Przedstawione w rozprawie zagadnienia dotyczą wyznaczania rozwiązań stanów ustalonych silnika indukcyjnego dwuklatkowego z niesymetrią elektryczną wirnika. Z tym że stanem ustalonym nazywa się taki stan pracy, gdy przebiegi wielkości elektrycznych i mechanicznych podlegają okresowym lub prawie-okresowym zmianom w czasie [80]. Przyjęcie założenia odnośnie stacjonarnego charakteru przetwarzania energii, pozwala zbudować szeroką gamę modeli, których rozwiązanie można otrzymać stosując klasyczne metody znane z teorii obwodów lub ich modyfikacje [67], [79]. Niezależnie od stopnia komplikacji modelu matematycznego, zadanie określenia stanu ustalonego powinno być sprowadzone do rozwiązania układu równań algebraicznych liniowych bądź nieliniowych [67], [80]. Metoda algebraizacji równań stanu ustalonego została uznana za standard w przypadku obwodowego modelowania maszyn elektrycznych [57], [73], [80]. Ponadto ważną zaletą takiego podejścia przy odwzorowaniu niesymetrii wewnętrznych jest możliwość świadomego kształtowania właściwości maszyn prądu przemiennego przez modyfikację konfiguracji uzwojeń i geometrii obwodu magnetycznego w awaryjnych stanach. Pod tym stwierdzeniem należy rozumieć sytuację, gdy uwzględnienie albo ograniczenie zjawisk dodatkowych będzie zabiegiem celowym. Umowna dowolność w formułowaniu równań tej klasy staje się szczególnie korzystna, jeżeli ocenie podlegają skutki ilościowe działania odmiennych zjawisk wywołujących identyczne efekty jakościowe.

Znanym wynikiem niesymetrii elektrycznej wirnika jest generowanie przez maszynę prądów z częstotliwościami różnymi od częstotliwości napięć zasilających [73]. Istnienie tych

prądów powoduje wytwarzanie momentów typu synchronicznego odpowiedzialnych m. in. za kołysania wirnika wokół wartości średniej prędkości [51]. Następnie o działaniu silnika w tym stanie pracy przesądza proces nasycenia głównego obwodu magnetycznego [106], [107]. Wymienione czynniki towarzyszące niesymetrii wprowadzają nieliniowe związki między równaniami elektromagnetycznymi i mechanicznym, istotnie komplikując poszukiwanie rozwiązania końcowego. Dlatego w analizie stanów ustalonych, zakłada się stałą prędkość kątową oraz liniowość charakterystyki magnesowania [57], [73], [80], co pozwala rozdzielić zjawiska elektromagnetyczne i mechaniczne, sprowadzając równania do postaci liniowych równań różniczkowych. W rzeczywistości takim warunkom odpowiada praca silnika z dużym momentem bezwładności tłumiącym wahania kąta obrotu. Pomimo daleko idących uproszczeń, model liniowy powinien być traktowany jako ogólny punkt wyjścia w formułowaniu uniwersalnego opisu maszyny z teoretycznie nieskończonym spektrum harmonicznych przepływu, tym samym zdecydowanie lepiej przybliżając zjawiska wywołane niesymetrią. Z tego wynika, że w wielu zagadnieniach cechy jakościowe modelu da się przewidzieć już na etapie analizy struktury algebraicznej układu bez konieczności jego rozwiązywania [73], [80]. Pełniejszy obraz stanu ustalonego otrzymuje się, uwzględniając oddziaływania elektromechaniczne, czyli rozwiązując łącznie równania elektromagnetyczne oraz mechaniczne [75], które tworzą strukturalnie nieliniowy układ równań różniczkowych. Warunkiem koniecznym algebraizacji takiego zagadnienia jest istnienie okresowej lub dwuokresowej funkcji opisującej przebieg zmienności wahań prędkości kątowej wirnika w czasie [76], [79], [87]. Rozwiązanie nieliniowego układu równań różniczkowych można także, przeprowadzić w sposób przybliżony całkując numerycznie równania stanu silnika, nie nakładając żadnych założeń dotyczących okresowości poszukiwanych wielkości [26], [80]. Stosując metody całkowania numerycznego jako wynik końcowy otrzymuje się przebiegi czasowe, w których pewnemu zatarciu ulegają związki między harmonicznymi i przyczynami ich wystąpienia [67]. Wykonanie takich działań w skończonym przedziale czasu ogranicza jednak dokładność wyników względem fazy badanego przebiegu czasowego wskutek koniecznego wyodrębnienia z całości przebiegu części sygnału odpowiadającego pracy w stanie ustalonym [14]. Poza tym, wszystkie znane procedury dyskretnego przetwarzania sygnałów odznaczają się stosunkowo długim czasem obliczeń, aby zapewnić wysoką rozdzielczość widma w dziedzinie częstotliwości. Pozostaje więc uznać, że metody numeryczne wyznaczania całek szczególnych stanowią narzędzie wspomagające analizę stanów stacjonarnych.

Rzeczywiste układy napędowe z silnikami asynchronicznymi dwuklatkowymi pracują w warunkach odbiegających od stanu ustalonego [32]. Niemniej ograniczenie rozważań do podanego przedziału pracy należy uzasadnić względami poznawczymi. Decyduje o tym przede

wszystkim analityczna forma rozwiązania ułatwiająca określenie integralnego zbioru cech opisującego maszynę wraz z naruszeniem symetrii wewnętrznej [94], [104]. Z tego powodu, podjęto próbę opracowania procedury rozpoznania i lokalizacji uszkodzeń elektrycznych w wirniku silnika dwuklatkowego dla ustalonego stanu pracy. W tym celu sformułowano wieloharmoniczny model silnika oraz poddano go szczegółowej analizie przy pominięciu i uwzględnieniu oddziaływań elektromechanicznych.

### 1.3 Cel, zakres i teza rozprawy

Głównym celem rozprawy było opracowanie metod i algorytmów wspomagających diagnozowanie niesymetrii elektrycznej wirnika w silniku indukcyjnym dwuklatkowym. Przedstawione zagadnienia obejmują analizę ustalonych stanów pracy przy stałej lub zmiennej prędkości kątowej. W pracy za zmienną prędkość kątową uważa się okresowe odchylenie tej wielkości względem wartości średniej. Postawione zadania zrealizowano formując równania modelu obwodowego wieloharmonicznego, gdzie przyjęto w każdym etapie realizacji rozprawy ogólne założenia dotyczące symetrii oraz liniowości obwodu magnetycznego, jak również zasilania z symetrycznego źródła napięć trójfazowych i skojarzenia uzwojeń w gwiazdę bez przewodu zerowego. Wskazany rodzaj układu połączeń wybrano, ponieważ występuje najczęściej w przypadku maszyn średnich i dużych mocy. W odwzorowaniu podstawowych własności maszyn dwuklatkowych wykorzystano typowe konstrukcje silników z obwodami wirnika zwartymi wspólnym lub osobnymi pierścieniami. Aby rozwiązać równania utworzonego modelu, zastosowano metodę bilansu harmonicznych bezpośrednio w dziedzinie częstotliwości i czasu:

- **zakładając stałą prędkość obrotową wirnika**, co sprowadza problem do rozwiązania liniowego układu równań algebraicznych wiążących współczynniki Fouriera napięć, indukcyjności uzwojeń oraz prądów, czyli operujący w dziedzinie częstotliwości. Model tego typu umożliwia określenie widma prądów stojana i wirnika dla dowolnej liczby harmonicznych przepływu tych uzwojeń z pominięciem oddziaływań elektromechanicznych,

- **uwzględniając równanie mechaniczne**, które wymaga rozwiązania nieliniowego układu równań algebraicznych wiążących chwilowe wartości napięć, indukcyjności i poszukiwanych prądów oraz wahań prędkości w dyskretnym zbiorze chwil czasowych. Równania modelu silnika są określone bezpośrednio w dziedzinie czasu, a to pozwala wyznaczyć dwuokresowe przebiegi czasowe prądów stojana, wirnika i wahań prędkości kątowej z uwzględnieniem oddziaływań elektromechanicznych przy ograniczonej liczbie harmonicznych przepływu uzwojeń.

W wyniku przeprowadzonych badań autor uważa za słuszną następującą tezę:

**Istnieje możliwość wykrycia i lokalizacji niesymetrii elektrycznej wirnika w silniku indukcyjnym dwuklatkowym w stanie ustalonym z uwzględnieniem oddziaływań elektro-mechanicznych.**

#### 1.4 Przegląd zawartości pracy

Rozprawa została podzielona na pięć rozdziałów. W rozdziale pierwszym przedstawiono ogólną charakterystykę budowy silników asynchronicznych dwuklatkowych oraz ich zastosowanie i rolę w przemyśle. W dalszej części objaśniono proces i warunki eksploatacyjne w jakich dochodzi do uszkodzenia rezystancyjnego obwodów klatek. Omówiono negatywne skutki wystąpienia niesymetrii elektrycznej wirnika wraz z typowymi metodami identyfikacji tych zaburzeń w czasie normalnej pracy silnika. Wskazano istotne przesłanki techniczne warunkujące wykorzystanie dostępnych środków w pozyskiwaniu szczegółowych wzorców diagnostycznych. Następnie opisano problemy podjęte w pracy, uzasadniając korzyści z podejścia obwodowego modelowania zagadnień stanów ustalonych maszyn elektrycznych. Rozdział ten zakończono sformułowaniem głównej tezy rozprawy oraz omówiono zawartość rozdziałów.

W wstępie rozdziału drugiego opisano zasady formułowania równań stanu ustalonego maszyn elektrycznych z teoretycznie nieskończonym spektrum harmonicznych przestrzennych za pomocą liniowych równań różniczkowych o okresowo zmiennych współczynnikach. Następny punkt przybliży sposób rozwiązania wspomnianego układu równań metodą bilansu harmonicznych w dziedzinie częstotliwości. Kolejny podrozdział zawiera opis utworzonego modelu silnika dwuklatkowego, który uwzględnia możliwość modelowania dowolnej zewnętrznej niesymetrii rezystancyjnej stojana i wewnętrznej wirnika. W tym miejscu, podano także założenia upraszczające równania oraz zakres stosowalności modelu. Przedostatnia część, przedstawia strukturę układu równań otrzymaną w konsekwencji transformacji do przestrzeni składowych symetrycznych określonych w postaci szeregu Fouriera funkcji prawie-okresowej. Rozdział drugi, zakończono omówieniem przeprowadzonych badań numerycznych dla wybranych przypadków uszkodzenia elektrycznego obwodów wirnika. Wykorzystując otrzymane wyniki obliczeń przeprowadzono analizę widma amplitudowego prądu fazowego stojana i momentu elektromagnetycznego pod kątem generowanych sygnałów diagnostycznych. W celu rozróżnienia miejsca powstania uszkodzenia, dyskusji poddano pracę silnika z obciążeniem mechanicznym zasilanego symetrycznym układem napięć oraz przy wymuszeniu dwufazowym bez momentu zewnętrznego. W ostatnim fragmencie rozdziału drugiego rozważono przypadki szczególne mogące mieć wpływ na poprawność procesu diagnostyki silnika. Do tych czynni-

ków zaliczono między innymi: wystąpienie odkształcenia napięć zasilających, dodanie przewodu zerowego oraz przybliżoną niesymetrię biegunową klatek wirnika.

W rozdziale trzecim przedstawiono algorytm bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego uwzględniającego oddziaływania elektromechaniczne. Równania stanu ustalonego są wówczas opisane układem nieliniowych równań algebraicznych dla poszukiwanych prądów i wahań prędkości w wybranym zbiorze chwil czasowych, zdefiniowanych jako dwuokresowe szeregi Fouriera. Równania bilansu harmonicznym w dziedzinie czasu rozwiązano wykorzystując zmodyfikowany schemat iteracyjny Newtona-Raphsona. Równania różniczkowe silnika dwuklatkowego, przedstawione w poprzednim rozdziale, przekształcono do tzw. postaci bazowej, w której ograniczono liczbę uwzględnianych harmonicznym przestrzennych tak, aby równania silnika można było wyrazić przez transformacje współrzędnych za pomocą układu zwyczajnych równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Opracowana procedura rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych zakłada poszukiwanie widm Fouriera prądów i momentu elektromagnetycznego, gdy należy rozważyć istnienie równania elektromechanicznego. W dalszych podrozdziałach, zilustrowano wyniki testów zbieżności algorytmu biorąc pod uwagę m. in. ewentualną zmienność parametrów charakteryzujących zjawiska mechaniczne. Następnie porównano algorytm bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego z metodą całkowania numerycznego. Ostatni punkt rozdziału trzeciego został poświęcony analizie jakościowej i ilościowej oddziaływań w warunkach zadanej niesymetrii parametrycznej obwodów wirnika. Aby to uczynić, przeprowadzono transformację powrotną układu równań z dziedziny czasu do częstotliwości, traktując niezależne od siebie równania elektromagnetyczne i mechaniczne.

Rozdział czwarty zawiera rezultaty z weryfikacji pomiarowej opracowanych modeli oraz zastosowanych metod diagnostyki wirnika. Na początku, przedstawiono konstrukcję, sposób wykonania oraz parametry obwodowe prototypowego silnika dwuklatkowego małej mocy przystosowanego do badań eksperymentalnych w laboratorium. W kolejnej części, omówiono budowę stanowiska laboratoryjnego i zakres przeprowadzonych pomiarów. Następnie porównano wyniki z pracami doświadczalnymi dla wybranych przypadków niesymetrii. Główną uwagę poświęcono analizie wpływu momentu zewnętrznego i bezwładności oraz sposobu zasilania obwodu stojana na efekty oddziaływań elektromechanicznych. Prezentowane treści opatrzone odpowiednim komentarzem z przeprowadzonych obliczeń i obserwacji.

W rozdziale piątym przedstawiono podsumowanie, jak również wnioski końcowe z realizacji najważniejszych etapów rozprawy. W zakończeniu rozdziału określono kierunki dalszych prac badawczych oraz możliwości rozwoju zaproponowanych metod i algorytmów.

### II. Model liniowy opisywany równaniami różniczkowymi o okresowo zmiennych współczynnikach w dziedzinie częstotliwości

#### 2.1 Wprowadzenie

Model monoharmoniczny jest w teorii maszyn elektrycznych prądu przemiennego, najczęściej stosowanym modelem silnika indukcyjnego klatkowego. Równania tego rodzaju cechuje znaczna idealizacja zjawisk zachodzących w maszynie, co przy założeniu symetrii magnetycznej i elektrycznej daje możliwość ogólnego opisu silnika dla większości znanych konstrukcji w dowolnym stanie pracy [21], [57], [80]. Ograniczenie modelu względem podstawowej harmonicznej przepływu nie pozwala jednak na badanie zjawisk dodatkowych, których istnienie w silniku indukcyjnym można wytłumaczyć tylko korzystając z modelu wieloharmonicznego. Do takich zjawisk zalicza się: występowanie pasożytniczych momentów asynchronicznych i synchronicznych oraz indukowanie się prądów o częstotliwościach niezwiązanych z źródłem zasilania jak np. harmoniczne żłobkowe [73], [80]. Wymienione efekty nabierają dużego znaczenia, tak pod względem jakościowym jak i ilościowym, w przypadku naruszenia symetrii maszyny zmieniając rozkład przestrzenny pola. Pomimo to, podejmowane są liczne próby dostosowania modelu monoharmonicznego tak, aby obejmował zagadnienia niesymetrii wewnętrznych sprowadzalnych lub niesprowadzalnych do niesymetrii zewnętrznych. W sytuacji odwzorowania stanu awaryjnego przez niesymetrię układu zasilania uznaje się, że założenie o sinusoidalnym kształcie pola nie odbiega znacząco od rzeczywistości [55], [77], [93]. W warunkach niesymetrii wewnętrznej niesprowadzalnej do niesymetrii zewnętrznej przeniesienie podstawowych cech diagnostycznych może być przeprowadzone według zróżnicowanej zasady, których podstawowym zadaniem jest otrzymanie poprawnych ilościowo wyników obliczeń dla najważniejszych składowych prądów oraz momentu elektromagnetycznego [86]. Bardzo często spotyka się modele z odpowiednio sparametryzowanymi współczynnikami obwodowymi, stawiające za główny cel przybliżone odzwierciedlenie charakterystyki magnesowania i zminimalizowanie liczby rozwiązywanych równań [4], [5], [51], [82], [85], [86]. Omówione metody formułowania równań silnika w niesymetrycznych stanach pracy nie wyczerpują wszystkich modyfikacji modelu monoharmonicznego. Nietrudno w tym podejściu zauważyć naturalną konsekwencję przy ich definiowaniu wynikającą z budowy maszyn prądu przemiennego.

-nego o których przesądza w pierwszej kolejności indukcyjność wzajemna najniższego rzędu. Niemniej ograniczenie modelu silnika wyłącznie względem składowej podstawowej przepływu stanowi zbyt poważne osłabienie jego właściwości jakościowych [27], [41]. Z tych powodów stosowanie modelu monoharmonicznego ma swoje techniczne uzasadnienie głównie w ramach szeroko pojętej analizy oddziaływania maszyn indukcyjnych z niesymetrią zewnętrzną lub wewnętrzną na system elektromechaniczny i elektroenergetyczny [54], [55].

Pominięcie założenia o sinusoidalnym rozkładzie przestrzennym pola w szczelinie powietrznej jest równoznaczne z uwzględnieniem większej liczby harmonicznych przepływu niż tylko podstawowa. Powiększenie zakresu składowych przestrzennych uzwojeń rozszerza możliwości odzwierciedlenia zjawisk dodatkowych [42], lecz istotnie komplikuje model maszyny. Ogólnie wyróżnia się dwie klasy modeli wieloharmonicznych ściśle związanych z strukturą macierzy indukcyjności wzajemnych między stojanem i wirnikiem:

- **modele sprowadzalne** w wyniku liniowej transformacji współrzędnych (prądów oraz napięć) do układu równań niezależnych jawnie od kąta obrotu i skończonej liczbie harmonicznych przestrzennych [26], [41], [99], [100],
- **modele niesprowadzalne**, dla których nie istnieją macierze transformacji dające możliwość przedstawienia układu równań w postaci stałej - z teoretycznie nieskończonym spektrum harmonicznych przepływu [67]-[73], [83].

Według powyższej klasyfikacji modele wieloharmoniczne opisywane stałymi równaniami różniczkowymi są wyłącznie przypadkiem szczególnym, zawartym w drugiej klasie równań [80]. Wspólnym punktem odniesienia będą równania opisujące maszynę prądu przemiennego równaniami różniczkowymi o współczynnikach zmiennych względem kąta obrotu wirnika. Generalnie występujące w tych równaniach funkcje czasu stwarzają zasadnicze problemy w ich jakościowej interpretacji [77]. Pomimo to, jeśli można przewidzieć okresową lub dwuokresową zmienność w czasie zarówno współrzędnych elektrycznych jak i mechanicznych, wtedy rozwiązanie układu równań sprowadza się do określenia stanu ustalonego. W tych równaniach przeważnie nieznanne są prądy uzwojeń oraz wahania prędkości kątowej wirnika maszyny. Kąt obrotu wirnika nie ma wówczas charakteru okresowego, periodyczne będą wyłącznie jego wahania, wynikające z zmienności prędkości względem liniowo narastającej wartości kąta, odpowiadającej średniej wartości prędkości wirnika. Założenie takie pozwala sprowadzić problem do liniowego bądź nieliniowego układu równań algebraicznych, wiążącego, w wersji ciągłej współczynniki Fouriera wymuszeń, parametrów równań oraz poszukiwanych rozwiązań ustalonych, a w wersji dyskretnej wartości wymuszeń, parametrów równań i rozwiązań w wybranych dyskretnych chwilach czasowych [78]. Ze względu na korzyści wynikające z bezpośred-



niego opisu stanów ustalonych, metoda algebraizacji (bilansu harmoniczných) równań różniczkowych o okresowo zmiennych współczynnikach została wykorzystana w dalszej analizie niesymetrii zewnętrznych i wewnętrznych silnika dwukłatkowego.

## 2.2 Formułowanie równań stanu ustalonego maszyn prądu przemiennego

Równania łączące własności elektromechanicznego przetwarzania energii w maszynach elektrycznych prądu przemiennego z uwzględnieniem nieliniowych związków między strumieniami i prądami uzwojeń można zapisać jako:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \frac{d}{dt} \Psi(\varphi, \mathbf{i}) \quad (2.1)$$

$$J \frac{d^2}{dt^2} \varphi + B \frac{d}{dt} \varphi = T_{em}(\varphi, \mathbf{i}) - T_m \quad (2.2)$$

Zależności (2.1) i (2.2), tworzą nieliniowy układ zwyczajnych równań różniczkowych z zmiennymi współczynnikami w czasie. Występująca w tym układzie nieliniowość ma charakter parametryczny i strukturalny. Rodzaj parametryczny wynika z relacji między strumieniami skojarzonymi a prądami uzwojeń maszyny. Przyczynę nieliniowości strukturalnej stanowi moment elektromagnetyczny, gdyż jest on co najmniej kwadratową funkcją prądów stojana oraz wirnika [43], [80]. Zważywszy na brak uniwersalnej metody analitycznego rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych, bezpośrednio wyznaczanie stanu ustalonego staje się niemożliwe [11], [14], [16]. W tym miejscu należy dodać, że istnieją przybliżone algorytmy i metody analityczne, które niekiedy pozwalają poszukiwać całość szczególną układu równań (2.1)-(2.2), ale ich stosowanie wymaga za każdym razem indywidualnego ujęcia rozwiązywanego problemu. Zazwyczaj otrzymane w ten sposób wyniki zbyt daleko odbiegają od rzeczywistości. W połączeniu z uciążliwością odrębnego formułowania równań dla danego zagadnienia stosowanie metod funkcji specjalnych [43] lub procedury rozwinięcia w szereg potęgowy [47], może być nie zawsze akceptowalne, jeżeli poszukuje się właściwych cech jakościowych niesymetrii.

Warunkiem koniecznym rozwiązania stanu ustalonego jest wyeliminowanie z układu równań nieliniowości parametrycznej i strukturalnej. W tym celu należy przyjąć liniową charakterystykę magnesowania oraz założyć stałą prędkość kątową. Usunięcie nieliniowości parametrycznej z równań prowadzi do liniowych związków strumieni skojarzonych i prądów

$$\Psi(\varphi) = \mathbf{L}(\varphi) \cdot \mathbf{i} \quad (2.3)$$

Natomiast założenie stałej wartości prędkości kątowej wirnika w czasie, powoduje rozdzielenie

części elektromagnetycznej układu od równania elektromechanicznego, a co za tym idzie oznacza jego rozwiązanie w następującej postaci

$$\varphi(t) = \Omega \cdot t + \varphi_0, \Omega = \text{const.} \quad (2.4)$$

Założenie stałej prędkości kątowej (2.4) sprawia, że macierz indukcyjności okresowo zmienna względem kąta obrotu zostaje przekształcona w okresową funkcję czasu

$$\mathbf{L}(\varphi) = \mathbf{L}(\varphi + 2\pi) = \mathbf{L}(\Omega \cdot t + \varphi_0 + 2\pi) = \mathbf{L}(t + T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{L}}_k \cdot e^{j \cdot (k \cdot \Omega) \cdot t}, \underline{\mathbf{L}}_k = \mathbf{L}_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \varphi_0} \quad (2.5)$$

Ostatecznie na podstawie (2.4) oraz (2.5), rozwiązywany układ liniowych równań różniczkowych z okresowo zmiennymi współczynnikami w czasie przyjmie poniższą formę macierzową

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \frac{d}{dt} \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{i} \quad (2.6)$$

W następstwie wprowadzonych uproszczeń, moment elektromagnetyczny z (2.2) będzie rezultatem podstawienia wcześniej obliczonych prądów (2.6) do (2.7)

$$\mathbf{T}_{em}(\varphi, \mathbf{i}) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{E}_{ko}(\varphi, \mathbf{i}) = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{L}(\varphi, \mathbf{i}) \right] \cdot \mathbf{i} \quad (2.7)$$

Równania (2.6) dają możliwość przedstawienia prądów uzwojeń silnika w formie analitycznej, a wyrażenie (2.7) także momentu elektromagnetycznego. Analiza tych równań pozwala określić cechy jakościowe prądów i momentu tzn. niezerowe relacje między prądami i indukcyjnościami. Oddzielną kwestią pozostaje prawidłowe przybliżenie charakteru ilościowego związków (2.6)-(2.7). Spodziewaną poprawę wyników ilościowych otrzymuje się korygując parametry obwodowe maszyny przez uwzględnienie dodatkowych współczynników niezmiennych struktury równań bilansu harmonicznego, częściowo rekompensując w ten sposób wprowadzone uproszczenia. Dotyczy to szeregu zjawisk zmieniających nie tylko skład jakościowy prądów i momentu elektromagnetycznego, ale przede wszystkim właściwości ilościowe rozwiązań [21], [67]. Za takie efekty można uznać m.in. nieliniowość typu parametrycznego względem podstawowej składowej przepływu, gdzie uzmiennieniu w funkcji prądu magnesującego podlega indukcyjność główna oraz przebieg procesu wypierania prądu opisywany jako zależność rezystancji i indukcyjności rozproszenia od poślizgu [22]. W drugim przypadku alternatywnym podejściem wobec metody parametryzacji współczynników jest zastąpienie wielkości rozłożonych opisywanych cząstkowymi równaniami różniczkowymi schematem łańcuchowym zwyczajnych równań różniczkowych kosztem znacznego rozbudowania układu.

## 2.3 Rozwiązanie układu równań różniczkowych o okresowo zmiennych współczynnikach niesprowadzalnych do postaci stałej przez transformacje

### 2.3.1 Analiza macierzowych równań napięciowych

Podstawową własnością równań różniczkowych z okresowo zmiennymi współczynnikami (2.6) jest możliwość ich przekształcenia do postaci stałej - niezależnej od kąta obrotu bez konieczności stosowania transformacji współrzędnych [26], [67], [80]. Równaniom tym formalnie odpowiada niejednorodny oraz nieautonomiczny układ zwyczajnych równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (2.8)$$

Warunkiem koniecznym oraz wystarczającym, aby istniało stabilne rozwiązanie ustalone równania (2.8) będą ciągłe w przedziale  $t \in (-\infty, \infty)$  dwuokresowe funkcje wektora wyrazów wolnych  $\mathbf{f}(t)$  oraz macierzy  $\mathbf{A}(t)$  posiadającej wyłącznie ujemne części rzeczywiste wartości własnych [16], [20], [48]. Przy tych założeniach zarówno wektor  $\mathbf{f}(t)$ , a także macierz układu  $\mathbf{A}(t)$  spełniają dostateczne kryteria rozwinięcia w podwójny szereg Fouriera. W rezultacie wektor wyrazów wolnych interpretowany jako wymuszenie można przedstawić za pomocą nieskończonej funkcji wykładniczej

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{m,n} \cdot e^{j \cdot (m\Omega_s + n\Omega_p) \cdot t} \Leftrightarrow \mathbf{F} = [\dots \quad \mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_0 \quad \mathbf{F}_{-1} \quad \dots]^T \quad (2.9)$$

Z kolei podwójnie określona macierz układu równań (2.8) przyjmie jednoznacznie uporządkowaną formę nazywaną w literaturze [48], [80], reprezentacją macierzową szeregu Fouriera

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_{r,s} \cdot e^{j \cdot (r\Omega_s + s\Omega_p) \cdot t} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{-2} & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_0 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Dla wektorów i macierzy zdefiniowanych powyższymi zależnościami, poszukiwane rozwiązanie  $\mathbf{x}(t)$  - całkę szczególną układu równań z (2.8) należy przewidzieć w postaci (2.11) tzn. nie-

skończenie wymiarowego wektora szeregu Fouriera dwóch niezależnych okresów bazowych

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_{m,n} \cdot e^{j \cdot (m\Omega_s + n\cdot p\Omega) \cdot t} \Leftrightarrow \mathbf{X} = [\dots \mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_0 \quad \mathbf{X}_{-1} \quad \dots]^T, \quad (2.11)$$

gdzie:

$$T_s = 2\pi/\Omega_s \text{ - okres podstawowy napięcia (wymuszenia) zasilania,} \quad (2.12)$$

$$T = 2\pi/\Omega \text{ - okres z wartości średniej prędkości kątowej wirnika.} \quad (2.13)$$

Występujące w zależnościach (2.9)-(2.11) reprezentacje wektorowe i macierzowe dwuokresowego szeregu Fouriera są utworzone z kolejnych podwektorów oraz podmacierzy o wymiarach nieskończonych [*szczegółowe rozwinięcie szeregów przedstawiają wzory (2.33) i (2.34)*]:

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{F}_{m,n} \equiv \mathbf{X}_{m,n} \equiv \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{C}_{m,1} \\ \mathbf{C}_{m,0} \\ \mathbf{C}_{m,-1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{r,s} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{A}_{r,0} & \mathbf{A}_{r,1} & \mathbf{A}_{r,2} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{r,-1} & \mathbf{A}_{r,0} & \mathbf{A}_{r,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{r,-2} & \mathbf{A}_{r,-1} & \mathbf{A}_{r,0} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Podstawiając w równaniu wyjściowym (2.8) zdefiniowane wektory oraz macierze, a następnie różniczkując względem zmiennej niezależnej i przyrównując funkcje przy tych samych potęgach otrzymuje się poniższy szereg

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j \cdot (m\Omega_s + n \cdot p\Omega) \cdot \mathbf{X}_{m,n} \cdot e^{j \cdot (m\Omega_s + n \cdot p\Omega) \cdot t} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_{r,s} \cdot e^{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega) \cdot t} \cdot \sum_{\rho=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_{\rho,\kappa} \cdot e^{j \cdot (\rho\Omega_s + \kappa \cdot p\Omega) \cdot t} + \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{m,n} \cdot e^{j \cdot (m\Omega_s + n \cdot p\Omega) \cdot t}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

w którym sumowanie należy prowadzić względem oddzielnych wskaźników ze zbioru liczb całkowitych spełniających związeki

$$m = (r + \rho) \wedge n = (s + \kappa), \quad \forall (m, n) \in \mathbf{Z} \quad (2.16)$$

Wykonanie obustronnego mnożenia przez sprzężenie wykładnicze danego równania powoduje

wyeliminowanie z (2.15) funkcji zmiennych w czasie:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j \cdot (m\Omega_s + n \cdot p\Omega) \cdot \mathbf{X}_{m,n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_{r,s} \cdot \sum_{\rho=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_{\rho,\kappa} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{m,n}, \forall (m,n) \in \mathbf{Z} \quad (2.17)$$

W konsekwencji działań opisanych przez (2.17) rozwiązaniu podlega nieskończony układ liniowych równań algebraicznych z nieznanymi współczynnikami szeregu Fouriera

$$(j \cdot \mathbf{\Omega} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2.18)$$

Wynikiem przeprowadzonych działań jest dwuokresowa oraz nieskończona macierz operatora różniczkowania w dziedzinie częstotliwości

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}[\dots \mathbf{\Omega}_2 \mathbf{\Omega}_1 \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{\Omega}_{-1} \mathbf{\Omega}_{-2} \dots], \quad (2.19)$$

zbudowana z kolejnych podmacierzy tworzących prawie-okresowe operatory różniczkowania:

$$\mathbf{\Omega}_m = \text{diag}[\dots (m\Omega_s + 2 \cdot p\Omega) \cdot \mathbf{E} \quad (m\Omega_s + 1 \cdot p\Omega) \cdot \mathbf{E} \quad m\Omega_s \cdot \mathbf{E} \\ (m\Omega_s - 1 \cdot p\Omega) \cdot \mathbf{E} \quad (m\Omega_s - 2 \cdot p\Omega) \cdot \mathbf{E} \quad \dots] \quad (2.20)$$

Przyjęcie w dalszych rozważaniach zerowej wartości wskaźnika rzędu harmonicznej czasowej rozwinięcia macierzy układu równań (2.10) sprowadza jego rozwiązanie do zagadnienia pracy silnika z stałą prędkością. W tych warunkach macierz (2.10) staje się diagonalna

$$\mathbf{A} = \text{diag}[\dots \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0 \dots] \quad (2.21)$$

Powoduje to, że układ równań (2.17) rozpada się na teoretycznie nieskończoną ilość niezależnych od siebie parami sprzężonymi podukładami dla każdej harmonicznej czasowej wymuszenia. Na tej podstawie rozwiązaniu podlega jedynie poniższy układ równań

$$(j \cdot \mathbf{\Omega}_m - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{X}_0 = \mathbf{F}_m, \quad (2.22)$$

spełniający ogólne relacje:  $\mathbf{X}_{(-m,n)}^* = \mathbf{X}_{(m,-n)}$ .

W przypadku wymuszenia wieloharmonicznego rozwiązanie końcowe stanowi superpozycją rozwiązań cząstkowych (2.22) wobec wybranych numerów harmonicznych czasowych. Dostosowanie (2.1) do wyrażenia (2.22) wymaga sprowadzenia tych równań w (2.23), co daje po odpowiednich przekształceniach

$$\mathbf{u}_m = (\mathbf{R} + j \cdot \mathbf{\Omega}_m \mathbf{L}_0) \cdot \mathbf{i}_m \quad (2.23)$$

W tym układzie równań algebraicznych wektory napięć i prądów posiadają zgodnie z wzorem (2.24) formę zredukowanych szeregów wybranego rzędu harmonicznej czasowej:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{U}}_{m,n} \cdot e^{j(m\Omega_s + n\Omega_p)t}; \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{i}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{I}}_{m,n} \cdot e^{j(m\Omega_s + n\Omega_p)t} \quad (2.24)$$

Jeżeli w (2.23) uwzględnić szeregi (2.24) oraz postać macierzy  $\mathbf{L}_0$ , wówczas równanie napięciowe przyjmie postać nieskończonego układu równań z współczynnikami zespolonymi

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{U}_{m,1} \\ \mathbf{U}_{m,0} \\ \mathbf{U}_{m,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{m,1} \\ \mathbf{I}_{m,0} \\ \mathbf{I}_{m,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} + j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ (m\Omega_s + p\Omega) \cdot \mathbf{E} \\ m\Omega_s \cdot \mathbf{E} \\ (m\Omega_s - p\Omega) \cdot \mathbf{E} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_0 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{-1} & \mathbf{L}_0 & \mathbf{L}_1 & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{-2} & \mathbf{L}_{-1} & \mathbf{L}_0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{m,1} \\ \mathbf{I}_{m,0} \\ \mathbf{I}_{m,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Rozwiązanie (2.25) będzie możliwe w sytuacji ograniczenia jego wymiaru do wartości skończonej. Przedstawiona metoda wyznaczania współczynników szeregu Fouriera poszukiwanych rozwiązań okresowych jest powszechnie znana jako metoda bilansu lub równowagi harmonicznych z wykładnikami potęgowymi [48], [67], [80], [101].

### 2.3.2 Analiza macierzowych równań momentu elektromagnetycznego

Moment elektromagnetyczny w analizowanym przypadku ustalonego stanu pracy przy stałej prędkości kątowej jest określony przez równanie (2.7). Podstawiając w tym wyrażeniu przewidywane wektory rozwiązań z wybranego zbioru harmonicznych czasowych wymuszenia (2.25) otrzymuje się jakościowo ogólny wzór na wypadkowy moment elektromagnetyczny

$$\mathbf{T}_{\text{em}} = j \cdot \frac{1}{2} \left( \sum_{v=\pm m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \mathbf{I}_{v,n} \right)^* \cdot e^{-j \cdot (v\Omega_s + n\Omega_p)t} \right) \cdot \left( \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \mu \cdot \mathbf{pL}_{\mu} \cdot e^{j \cdot (\mu\Omega_p)t} \right) \cdot \left( \sum_{\rho=\pm m} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{\rho,r} \cdot e^{j \cdot (\rho\Omega_s + r\Omega_p)t} \right) \quad (2.26)$$

W celu uproszczenia równania momentu elektromagnetycznego do wyrażenia (2.26) wprowadza się nowy wskaźnik sumowania  $k = \mu - n + r$ :

$$\mathbf{T}_{\text{em}} = j \cdot \frac{1}{2} \sum_{v=\pm m} \sum_{\rho=\pm m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \mu \cdot \left( \mathbf{I}_{v,n} \right)^* \cdot \mathbf{pL}_{\mu} \cdot \mathbf{I}_{\rho, k+n-\mu} \right) \cdot e^{j \cdot [(\rho-v)\Omega_s + k\Omega_p]t} \quad (2.27)$$

Porządkując (2.27) względem tych samych funkcji wykładniczych elementarne składowe momentu elektromagnetycznego przyjmą poniższą formę kwadratową prądów

$$\mathbf{T}_{\text{em},(v,\rho,k)} = \mathbf{j} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{v,1}^* \\ \mathbf{I}_{v,0}^* \\ \mathbf{I}_{v,-1}^* \\ \vdots \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{0} & 1\mathbf{L}_1 & 2\mathbf{L}_1 & \dots \\ \dots & -1\mathbf{L}_1 & \mathbf{0} & 1\mathbf{L}_1 & \dots \\ \dots & -2\mathbf{L}_1 & -1\mathbf{L}_1 & \mathbf{0} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{\rho,1+k} \\ \mathbf{I}_{\rho,0+k} \\ \mathbf{I}_{\rho,-1+k} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Uwzględniając kształt zależności (2.27) oraz (2.28) wypadkowy moment elektromagnetyczny będzie superpozycją momentów elementarnych

$$\mathbf{T}_{\text{em}} = \mathbf{j} \cdot \sum_{v=\pm m} \sum_{\rho=\pm m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{T}_{v,\rho,k} \cdot e^{\mathbf{j} \cdot [(\rho-v)\Omega_s + k \cdot p\Omega] \cdot t} \quad (2.29)$$

Biorąc pod uwagę, że muszą być spełnione następujące związki między współczynnikami szeregów w powyższym równaniu

$$\mathbf{T}_{v,\rho,k} = -\mathbf{T}_{-v,-\rho,-k}^* \quad (2.30)$$

to superpozycja momentu elektromagnetycznego z (2.29) wynosi:

$$\mathbf{T}_{\text{em}} = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{T}_{v,\rho,k} - \mathbf{T}_{-v,-\rho,-k}^*) = -2\text{Im}\{\mathbf{T}_{v,\rho,k}\} = 2\text{Re}\{\mathbf{j} \cdot \mathbf{T}_{v,\rho,k}\} \quad (2.31)$$

Ostatecznie wypadkowy moment elektromagnetyczny zgodnie z równaniem (2.31) można zapisać jako sumę dwóch momentów cząstkowych typu pierwszego i drugiego

$$\mathbf{T}_{\text{em}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( 2\text{Re}\{\mathbf{j} \cdot \mathbf{T}_{0,k} \cdot e^{\mathbf{j} \cdot (k \cdot p\Omega) \cdot t}\} \right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( 2\text{Re}\{\mathbf{j} \cdot \mathbf{T}_{2m,k} \cdot e^{\mathbf{j} \cdot (2m\Omega_s + k \cdot p\Omega) \cdot t}\} \right) = \mathbf{T}_{\text{em}}^{\text{I}} + \mathbf{T}_{\text{em}}^{\text{II}} \quad (2.32)$$

### 2.3.3 Metody rozwiązywania równań bilansu harmonicznych

Generalnie liniowy układ równań algebraicznych (2.25) jest układem złożonym z macierzy o dużych wymiarach, które są powszechnie klasyfikowane jako macierze rzadkie [14], [19], [60]. W celu rozwiązania tych równań stosuje się metody dokładne i przybliżone (iteracyjne). Niekiedy też, aby zredukować wymiar układu już na etapie formułowania równań eliminuje się rozwiązania zerowe przez usunięcie wektorów zerowych z macierzy indukcyjności wzajemnych [28], [67]. Opisany sposób postępowania należy uznać za bardziej właściwy w przypadku

poszukiwania rozwiązań jakościowych niż ilościowych. Zwykle, gdy należy obliczyć współczynniki Fouriera układu z macierzami rzadkimi wykorzystywany jest algorytm iteracyjny, niemniej jednak wspomniana metoda nakłada ścisłe warunki zbieżności, których nie można zawsze spełnić dla (2.25). Poza tym uzyskanie wyników o dobrej dokładności wiąże się z znacznym nakładem czasowym, co sprawia że bardziej dogodnie może być stosowanie metod dokładnych pozbawionych wad algorytmów przybliżonych. Dlatego za szczególnie korzystną należy uznać metodę rozkładu LU, gdzie jedynie wektor wyrazów wolnych podlega zmianom [98], wymienioną cechą algorytmu wykorzystano m. in. przy wymuszeniu wieloharmonicznym [p.2.5.6].

- Rozwinięcie dwukresowej reprezentacji wektorowej i macierzowej szeregu Fouriera z (2.14)

$$\mathbf{X}_{m,n} = \left[ \dots \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{X}_{-1,-1} & \mathbf{X}_{-1,0} & \mathbf{X}_{-1,1} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{X}_{0,-1} & \mathbf{X}_{0,0} & \mathbf{X}_{0,1} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{X}_{1,-1} & \mathbf{X}_{1,0} & \mathbf{X}_{1,1} & \dots \end{bmatrix} \dots \right]^T$$

$$\mathbf{A}_{r,s} = \tag{2.33}$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc} \left[ \begin{array}{cccc} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{0,0} & \mathbf{A}_{0,1} & \mathbf{A}_{0,2} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{0,-1} & \mathbf{A}_{0,0} & \mathbf{A}_{0,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{0,-2} & \mathbf{A}_{0,-1} & \mathbf{A}_{0,0} & \dots \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{1,0} & \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{1,-1} & \mathbf{A}_{1,0} & \mathbf{A}_{0,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{1,-2} & \mathbf{A}_{1,-1} & \mathbf{A}_{1,0} & \dots \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{2,0} & \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{2,-1} & \mathbf{A}_{2,0} & \mathbf{A}_{2,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{2,-2} & \mathbf{A}_{2,-1} & \mathbf{A}_{2,0} & \dots \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cccc} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{-1,0} & \mathbf{A}_{-1,1} & \mathbf{A}_{-1,2} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{-1,-1} & \mathbf{A}_{-1,0} & \mathbf{A}_{-1,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{-1,-2} & \mathbf{A}_{-1,-1} & \mathbf{A}_{-1,0} & \dots \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{0,0} & \mathbf{A}_{0,1} & \mathbf{A}_{0,2} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{0,-1} & \mathbf{A}_{0,0} & \mathbf{A}_{0,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{0,-2} & \mathbf{A}_{0,-1} & \mathbf{A}_{0,0} & \dots \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{1,0} & \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{1,-1} & \mathbf{A}_{0,0} & \mathbf{A}_{1,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{1,-2} & \mathbf{A}_{1,-1} & \mathbf{A}_{1,0} & \dots \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cccc} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{-2,0} & \mathbf{A}_{-2,1} & \mathbf{A}_{-2,2} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{-2,-1} & \mathbf{A}_{-2,0} & \mathbf{A}_{-2,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{-2,-2} & \mathbf{A}_{-2,-1} & \mathbf{A}_{-2,0} & \dots \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{-1,0} & \mathbf{A}_{-1,1} & \mathbf{A}_{-1,2} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{-1,-1} & \mathbf{A}_{-1,0} & \mathbf{A}_{-1,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{-1,-2} & \mathbf{A}_{-1,-1} & \mathbf{A}_{-1,0} & \dots \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{0,0} & \mathbf{A}_{0,1} & \mathbf{A}_{0,2} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{0,-1} & \mathbf{A}_{0,0} & \mathbf{A}_{0,1} & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_{0,-2} & \mathbf{A}_{0,-1} & \mathbf{A}_{0,0} & \dots \end{array} \right] \end{array} \right] \tag{2.34}$$



## 2.4 Model obwodowy silnika dwuklatkowego we współrzędnych fazowych

Równania napięciowo-prądowe silnika indukcyjnego dwuklatkowego w współrzędnych naturalnych dla stałej prędkości kątowej wirnika oraz liniowym obwodzie magnetycznym [57], [73], [110], posiadają ogólną postać określoną przez poniższy układ równań macierzowych

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^r \\ \mathbf{u}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^r & \mathbf{R}^{rp} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^{pr} & \mathbf{R}^p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}^s \\ \mathbf{i}^r \\ \mathbf{i}^p \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^s & \mathbf{L}^{sr}(\varphi) & \mathbf{L}^{sp}(\varphi) \\ \mathbf{L}^{rs}(\varphi) & \mathbf{L}^r & \mathbf{L}^{rp} \\ \mathbf{L}^{ps}(\varphi) & \mathbf{L}^{pr} & \mathbf{L}^p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}^s \\ \mathbf{i}^r \\ \mathbf{i}^p \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

gdzie:

- $\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^r, \mathbf{u}^p$  - wektory kolumnowe wartości chwilowych napięć zasilających uzwojenia stojana oraz obwodu klatki rozruchowej i obwodu klatki pracy,
- $\mathbf{i}^s, \mathbf{i}^r, \mathbf{i}^p$  - wektory kolumnowe wartości chwilowych prądów uzwojeń stojana i prądów oczkowych klatki rozruchowej oraz klatki pracy,
- $\mathbf{L}^{rp}, \mathbf{L}^{pr}$  - macierze stałe indukcyjności wzajemnych między obwodami wirnika, kolejno: klatka rozruchowa - pracy i klatka pracy - rozruchowa,
- $\mathbf{R}^{rp}, \mathbf{R}^{pr}$  - macierze wzajemne połączeń galwanicznych silnika zwartego wspólnym pierścieniem niezależne od kąta obrotu wirnika,
- $\mathbf{L}^{sr}, \mathbf{L}^{sp}$  - macierze zmienne indukcyjności wzajemnych między uzwojeniami stojana i obwodem klatki rozruchowej oraz klatką pracy,
- $\mathbf{L}^s, \mathbf{L}^r, \mathbf{L}^p$  - macierze stałe indukcyjności własnych oraz wzajemnych uzwojeń stojana, klatki rozruchowej i klatki pracy,
- $\mathbf{R}^s, \mathbf{R}^r, \mathbf{R}^p$  - macierz rezystancji uzwojeń stojana oraz macierze rezystancji obwodów klatki rozruchowej i klatki pracy.

W modelu (2.35) przyjęto następujące założenia przy formułowaniu równań:

- silnik jest obustronnie symetryczny magnetycznie - macierze indukcyjności własnych oraz wzajemnych uzwojeń stojana i wirnika nie zależą od kąta obrotu, uzwojenia fazowe stojana są równomiernie rozłożone na obwodzie części stałej, tzn. spełniają warunek symetrii kątowej [57], [80] i mogą być przedstawione jako obwody skupione,

- szczelina powietrzna jest gładka, a jej powiększenie wynikające ze żłobkowania rzeczywistych obwodów magnetycznych stojana i wirnika zostanie ujęte w indukcyjności magnesującej z wykorzystaniem współczynników Cartera [33], [73],
- nie istnieją dodatkowe obwody przewodzące prądy oprócz uzwojeń stojana i wirnika oznacza to, że nie bierze się pod uwagę skutków wynikających z występowania prądów wirowych oraz efektu wypierania prądu, straty rezystancyjne w rdzeniu są pomijalnie małe,
- w części ruchomej znajdują się dwa promieniowo umiejscowione względem siebie uzwojenia zwarte, wykonane z prętów prostych o takiej samej liczbie i rozłożonych symetrycznie na obwodzie wirnika,
- uwzględnia się dodatkowe połączenia galwaniczne pomiędzy klatkami silnika zwanego wspólnym pierścieniem – rysunki nr 2.1 i 2.2 przedstawiają uproszczone schematy obwodów wybranej konstrukcji wirnika z zaznaczonymi prądami oczkowymi,
- sprzężenia wzajemne między uzwojeniami stojana i poszczególnymi obwodami wirnika są sobie równe (w zależności od budowy klatek, to uproszczenie jest nie zawsze słuszne, zazwyczaj ma to miejsce w silnikach dużej mocy, gdzie strumień główny obejmujący klatkę dolną będzie osłabiony głębokim umiejscowieniem prętów tego obwodu względem obwodu rozruchowego [33], [34]),
- zostaje uwzględniona część poosiowa klatek wirnika z pominięciem efektów krańcowych tj. sprzężeń elektromagnetycznych między czołami uzwojeń stojana jak również wycinkami segmentów pierścieni zwierających,
- współczynniki indukcyjności wzajemnych obwodów stojana i wirnika zawierają nieskończone spektrum nieparzystych składowych przestrzennych z numerami  $n=1, 3, 5, \dots$ ,
- elementarne obwody wirnika wytwarzają przepływy prostokątne,
- dopuszcza się występowanie niesymetrii zewnętrznej typu parametrycznego od strony stojana oraz wewnętrznej wirnika o charakterze rezystancyjnym.

Składowe wektorów wartości chwilowych napięć oraz prądów stojana w układzie równań (2.35) oznaczono jako:

$$\mathbf{u}^s = [u_1^s \quad u_2^s \quad u_3^s]^T, \quad \mathbf{i}^s = [i_1^s \quad i_2^s \quad i_3^s]^T \quad (2.36)$$

- diagonalna macierz rezystancji obwodu stojana w fazowym układzie odniesienia

$$\mathbf{R}^s = \mathbf{R}^{\text{sys}} + \mathbf{R}^{\text{sf}} = \text{diag} \left[ \mathbf{R}_1^{\text{sys}} \quad \mathbf{R}_2^{\text{sys}} \quad \mathbf{R}_3^{\text{sys}} \right] + \text{diag} \left[ \mathbf{R}_1^s \quad \mathbf{R}_2^s \quad \mathbf{R}_3^s \right] \quad (2.37)$$

dla:  $\mathbf{R}_k^{\text{sys}}$  - rezystancja przewodowa (systemowa),  $\mathbf{R}_k^s$  - rezystancja pasma fazowego.

- symetryczna macierz indukcyjności uzwojeń stojana stanowi sumę macierzy indukcyjności rozprożeń i macierzy indukcyjności głównych

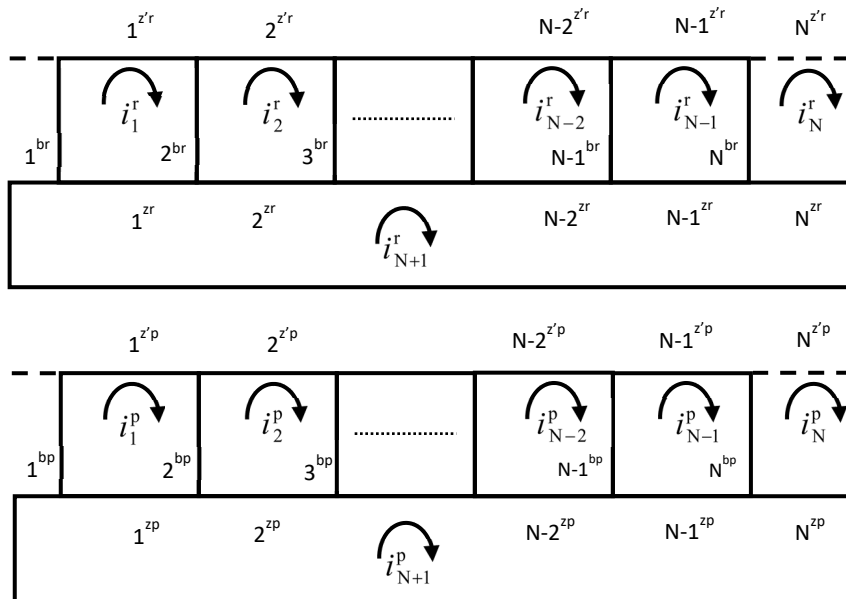
$$\mathbf{L}^s = \mathbf{L}_\sigma^s + \mathbf{L}_m^s = \begin{bmatrix} L_\sigma^s & M_\sigma^s & M_\sigma^s \\ M_\sigma^s & L_\sigma^s & M_\sigma^s \\ M_\sigma^s & M_\sigma^s & L_\sigma^s \end{bmatrix} + \sum_n L_{m,n}^s \cdot \begin{bmatrix} \cos(n \cdot p0) & \cos(n \cdot p\alpha) & \cos(n \cdot p2\alpha) \\ \cos(n \cdot p2\alpha) & \cos(n \cdot p0) & \cos(n \cdot p\alpha) \\ \cos(n \cdot p\alpha) & \cos(n \cdot p2\alpha) & \cos(n \cdot p0) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

gdzie:

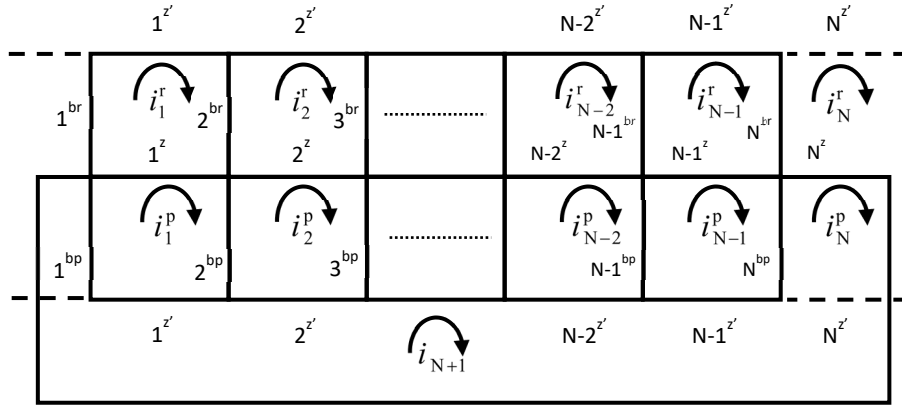
- $L_\sigma^s$  - indukcyjność własna rozproszenia pasma fazowego obwodu stojana,
- $M_\sigma^s$  - indukcyjność wzajemna rozproszenia między fazami uzwojenia,
- $L_m^s$  - indukcyjność główna pojedynczego pasma fazowego uzwojenia,
- $\alpha = 2\pi/3p$  - kąt rozsunęcia między uzwojeniami obwodu stojana.

- wektory kolumnowe wartości chwilowych napięć i prądów wirnika strukturalnie identyczne dla każdej budowy wirnika silnika dwuklatkowego

$$\mathbf{u}^w \equiv \mathbf{u}^r \equiv \mathbf{u}^p = [u_1^w \ u_2^w \ \dots \ u_N^w \ u_{N+1}^w]^T = \mathbf{0}^T, \quad \mathbf{i}^w \equiv \mathbf{i}^r \equiv \mathbf{i}^p = [i_1^w \ i_2^w \ \dots \ i_N^w \ i_{N+1}^w]^T \quad (2.39)$$



**Rys. 2.1** Rozwinięty schemat obwodów wirnika zwartego osobnymi pierścieniami.



**Rys. 2.2** Rozwinięty schemat obwodów wirnika zwanego wspólnym pierścieniem.

- macierze blokowe rezystancji własnych klatek z uwzględnieniem części poosiowej, takie same w przypadku silnika zwanego wspólnym i osobnymi pierścieniami.

$$\mathbf{R}^w \equiv \mathbf{R}^r \equiv \mathbf{R}^p = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^g & \mathbf{R}^z \\ (\mathbf{R}^z)^T & \mathbf{R}^z \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

- główna macierz rezystancji klatek w powyższym wyrażeniu jest równa

$$\mathbf{R}^g \equiv \mathbf{R}^{w-r} \equiv \mathbf{R}^{w-p} = \begin{bmatrix} R_1^o & -R_2^b & 0 & 0 & \dots & 0 & -R_1^b \\ -R_2^b & R_2^o & -R_3^b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -R_3^b & R_3^o & -R_4^b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_4^b & R_4^o & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & R_{(N-1)}^o & -R_N^b \\ -R_1^b & 0 & 0 & 0 & \dots & -R_N^b & R_N^o \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

- wektory rezystancji oczek poosiowych klatek z macierzy blokowej wirnika

$$\mathbf{R}^z \equiv \mathbf{R}^{z,r} \equiv \mathbf{R}^{z,p} = \begin{bmatrix} -R_1^z & -R_2^z & \dots & -R_{N-1}^z & -R_N^z \end{bmatrix}^T \quad (2.42)$$

- równania rezystancji oczkowych z (2.41) i części poosiowej wynoszą

$$\mathbf{R}_k^o \equiv \mathbf{R}_k^{o,r} \equiv \mathbf{R}_k^{o,p} = \mathbf{R}_k^b + \mathbf{R}_{\text{mod}(k+1,N)}^b + \mathbf{R}_k^z + \mathbf{R}_k^{z'}, \quad \mathbf{R}^z = \sum_{k=1}^N \mathbf{R}_k^z \quad (2.43)$$

Rezystancje wycinków pierścieni według założeń upraszczających w zależności od konstrukcji, kolejno dla silnika zwartego wspólnym pierścieniem i osobnymi pierścieniami spełniają następujące związki

$$\mathbf{R}_k^{z,r} = \mathbf{R}_k^{z,p} = \mathbf{R}_k^{z',r} = \mathbf{R}_k^{z',p} \text{ oraz } \left( \mathbf{R}_k^{z,r} = \mathbf{R}_k^{z',r} \right) \neq \left( \mathbf{R}_k^{z,p} = \mathbf{R}_k^{z',p} \right) \quad (2.44)$$

- macierze wzajemne rezystancji klatek wirnika, które przyjmują zerowe wartości w przypadku silnika zwartego odrębnymi pierścieniami

$$\mathbf{R}^{ww} \equiv \mathbf{R}^{rp} = \mathbf{R}^{pr} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{gw} & \mathbf{R}^z \\ (\mathbf{R}^z)^T & \mathbf{R}^z \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{R}^{gw} = \mathbf{R}^{w-rp} = \mathbf{R}^{w-pr} = \text{diag}[\mathbf{R}_1^\mu \quad \mathbf{R}_2^\mu \quad \mathbf{R}_3^\mu \quad \dots \quad \mathbf{R}_N^\mu], \quad \mathbf{R}_k^\mu = \mathbf{R}_k^z + \mathbf{R}_k^{z'}; \forall k = 1, 2 \dots N \quad (2.46)$$

- macierzom indukcyjności rozprożeń własnych oraz wzajemnych w obrębie tego samego obwodu wirnika odpowiada struktura macierzy rezystancji (2.40)

$$\mathbf{L}^w \equiv \mathbf{L}^r \equiv \mathbf{L}^p = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^g & \mathbf{L}^z \\ (\mathbf{L}^z)^T & \mathbf{L}^z \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

gdzie:  $\mathbf{L}^g = \mathbf{L}^{\sigma,w} + \mathbf{L}_m^w$

- macierze indukcyjności rozprożeń

$$\mathbf{L}^{\sigma,w} \equiv \mathbf{L}^{\sigma,r} \equiv \mathbf{L}^{\sigma,p} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1^{o,\sigma} & -\mathbf{L}_2^{b,\sigma} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\mathbf{L}_1^{b,\sigma} \\ -\mathbf{L}_2^{b,\sigma} & \mathbf{L}_2^{o,\sigma} & -\mathbf{L}_3^{b,\sigma} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{L}_3^{b,\sigma} & \mathbf{L}_3^{o,\sigma} & -\mathbf{L}_4^{b,\sigma} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{L}_4^{b,\sigma} & \mathbf{L}_4^{o,\sigma} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{L}_{(N-1)}^{o,\sigma} & -\mathbf{L}_N^{b,\sigma} \\ -\mathbf{L}_1^{b,\sigma} & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{L}_N^{b,\sigma} & \mathbf{L}_N^{o,\sigma} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

- wektory indukcyjności rozprożeń oczek poosiowych klatek

$$\mathbf{L}^z \equiv \mathbf{L}^{z,r} \equiv \mathbf{L}^{z,p} = \left[ -\mathbf{L}_1^{z,\sigma} \quad -\mathbf{L}_2^{z,\sigma} \quad \dots \quad -\mathbf{L}_{N-1}^{z,\sigma} \quad -\mathbf{L}_N^{z,\sigma} \right]^T \quad (2.49)$$

Równania cząstkowe indukcyjności rozprożeń oczkowych w (2.48) określają równania

$$\mathbf{L}_k^{o,\sigma} \equiv \mathbf{L}_k^{o,\sigma,r} \equiv \mathbf{L}_k^{o,\sigma,p} = \mathbf{L}_k^{b,\sigma} + \mathbf{L}_{\text{mod}(k+1,N)}^{b,\sigma} + \mathbf{L}_k^{z,\sigma} + \mathbf{L}_k^{z'}; \quad \mathbf{L}^z = \sum_{k=1}^N \mathbf{L}_k^{z,\sigma} \quad (2.50)$$

Relacje między wartościami tych indukcyjności zależnie od budowy wirnika w odniesieniu do rezystancji (2.44) pozostają niezmiennione, co pozwala zapisać następujące zależności

$$\mathbf{L}_k^{z,\sigma,r} = \mathbf{L}_k^{z,\sigma,p} = \mathbf{L}_k^{z',\sigma,r} = \mathbf{L}_k^{z',\sigma,p} \text{ oraz } \left( \mathbf{L}_k^{z,\sigma,r} = \mathbf{L}_k^{z',\sigma,r} \right) \neq \left( \mathbf{L}_k^{z,\sigma,p} = \mathbf{L}_k^{z',\sigma,p} \right) \quad (2.51)$$

- macierze indukcyjności wzajemnych między klatkami wirnika wyrażone jako suma podmacierzy indukcyjności wzajemnych rozprożeń i indukcyjności połączeń galwanicznych ulegająca zerowaniu dla silnika zwartego osobnymi pierścieniami

$$\mathbf{L}_\sigma^{\text{ww}} \equiv \mathbf{L}_\sigma^{\text{rp}} = \mathbf{L}_\sigma^{\text{rp}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\sigma^{\text{gw}} & \mathbf{L}^z \\ (\mathbf{L}^z)^T & \mathbf{L}^z \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{L}_\sigma^{\text{gw}} = \mathbf{L}_\sigma^{\text{w-rp}} = \mathbf{L}_\sigma^{\text{w-pr}} = \text{diag}[\mathbf{L}_{1,\sigma}^\mu \quad \mathbf{L}_{2,\sigma}^\mu \quad \mathbf{L}_{3,\sigma}^\mu \quad \dots \quad \mathbf{L}_{N,\sigma}^\mu], \mathbf{L}_{\sigma,k}^\mu = \mathbf{L}_k^{z,\sigma} + \mathbf{L}_k^{z',\sigma} \quad (2.53)$$

- macierz indukcyjności wzajemnych oczek klatek

$$\mathbf{L}_m^g \equiv \mathbf{L}_m^r \equiv \mathbf{L}_m^p = \mathbf{L}_m^w \cdot \begin{bmatrix} \cos(0 \cdot \varepsilon) & \cos(\varepsilon) & \cos(2 \cdot \varepsilon) & \dots & \cos((N-1) \cdot \varepsilon) \\ \cos((N-1) \cdot \varepsilon) & \cos(0 \cdot \varepsilon) & \cos(\varepsilon) & \dots & \cos((N-2) \cdot \varepsilon) \\ \cos((N-2) \cdot \varepsilon) & \cos((N-1) \cdot \varepsilon) & \cos(0 \cdot \varepsilon) & \dots & \cos((N-3) \cdot \varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\varepsilon) & \cos(2 \cdot \varepsilon) & \cos(3 \cdot \varepsilon) & \dots & \cos(0 \cdot \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

gdzie:  $\varepsilon = 2\pi/N$  - kąt rozsunęcia prętów.

Wprowadzone kryterium pominięcia sprzężeń elektromagnetycznych (zjawisk krańcowych) oczek klatki z wycinkami pierścieni ograniczają macierze indukcyjności wzajemnych między obwodami wirnika do postaci

$$\mathbf{L}^{\text{ww}} = \mathbf{L}_m^{\text{ww}} + \mathbf{L}_\sigma^{\text{ww}}; \text{ dla: } \mathbf{L}^{\text{ww}} = \mathbf{L}^{\text{rp}} = \mathbf{L}^{\text{pr}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_m^g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

- niecykliczna macierz indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik w postaci sumy szeregu trygonometrycznego funkcji nieparzystych składowych przestrzennych

$$\mathbf{L}^{\text{sr}} = \sum_n \mathbf{L}_{n \cdot p}^m \begin{bmatrix} \cos(n \cdot p \cdot \varphi) & \cos(n \cdot p[\varphi + \varepsilon]) & \dots & \cos(n \cdot p[\varphi + (N-1) \cdot \varepsilon]) & 0 \\ \cos(n \cdot p[\varphi - \alpha]) & \cos(n \cdot p[\varphi + \varepsilon - \alpha]) & \dots & \cos(n \cdot p[\varphi + (N-1) \cdot \varepsilon - \alpha]) & 0 \\ \cos(n \cdot p[\varphi - 2\alpha]) & \cos(n \cdot p[\varphi + \varepsilon - 2\alpha]) & \dots & \cos(n \cdot p[\varphi + (N-1) \cdot \varepsilon - 2\alpha]) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

spełniająca związki:  $\mathbf{L}^{\text{rs}} = \mathbf{L}^{\text{ps}} = (\mathbf{L}^{\text{sr}})^T = (\mathbf{L}^{\text{sp}})^T$ .

### 2.4.1 Transformacja modelu do składowych symetrycznych

Równania modelu (2.35) można rozwiązać bezpośrednio w układzie współrzędnych naturalnych po dostosowaniu ich opisu do metody bilansu harmonicznych [73], [80]. Jednak pełne macierze indukcyjności własnych i wzajemnych zawierające funkcje trygonometryczne, stanowiące zasadniczą przeszkodę w analizie jakościowej równań. Bardziej użyteczną formę układu równań, otrzymuje się w wyniku transformacji współrzędnych, której zadaniem jest wyeliminowanie wspomnianych niedogodności. Postawione warunki spełnia przekształcenie do składowych symetrycznych znacząco porządkujące układ równań przy niezmienniej mocy oraz częstotliwości względem współrzędnych fazowych. W zapisie ogólnym równaniom macierzowym transformacji nadaje się postać

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{i}) + \frac{d}{dt} [\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}(\varphi) \cdot \mathbf{S}^{-1}] \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{i}) \quad (2.57)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{S} = \text{diag}[\mathbf{T}_s \quad \mathbf{T}_w \quad \mathbf{T}_w] \quad (2.58)$$

Wykonanie działań mnożenia przewidzianych przez wyrażenie (2.57) definiuje wielkości i parametry obwodu stojana w przestrzeni liczb zespolonych – składowych symetrycznych jako:

- wektor napięć

$$\mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_s^I \\ u_s^{II} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_s \cdot \mathbf{u}^s = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^s \\ u_2^s \\ u_3^s \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_s^1 \\ u_s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * u_s^0 \\ * u_s^2 \\ * u_s^1 \end{bmatrix} \right) \quad (2.59)$$

- wektor prądów

$$\mathbf{i}_s = \begin{bmatrix} i_s^0 \\ i_s^I \\ i_s^{II} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_s \cdot \mathbf{i}^s = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1^s \\ i_2^s \\ i_3^s \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} i_s^0 \\ i_s^1 \\ i_s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * i_s^0 \\ * i_s^2 \\ * i_s^1 \end{bmatrix} \right) \quad (2.60)$$

gdzie:  $a = e^{j \cdot 2\pi/3}$  - operator obrotu układu trójfazowego.

- macierz rezystancji systemowych i uzwojeń stojana

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{T}_s \cdot (\mathbf{R}^{\text{sys}} + \mathbf{R}^{\text{sf}}) \cdot \mathbf{T}_s^{-1} = \mathbf{R}_{\text{sys}} + \mathbf{R}_{\text{sf}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{sys}}^0 & \mathbf{R}_{\text{sys}}^1 & \mathbf{R}_{\text{sys}}^{*1} \\ \mathbf{R}_{\text{sys}}^{*1} & \mathbf{R}_{\text{sys}}^0 & \mathbf{R}_{\text{sys}}^1 \\ \mathbf{R}_{\text{sys}}^1 & \mathbf{R}_{\text{sys}}^{*1} & \mathbf{R}_{\text{sys}}^0 \end{bmatrix} + \text{diag} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s \\ \mathbf{R}_s \\ \mathbf{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s^0 & \mathbf{R}_s^1 & \mathbf{R}_s^{*1} \\ \mathbf{R}_s^{*1} & \mathbf{R}_s^0 & \mathbf{R}_s^1 \\ \mathbf{R}_s^1 & \mathbf{R}_s^{*1} & \mathbf{R}_s^0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Pełna struktura macierzy systemowej obowiązuje dla dowolnego poziomu niesymetrii parametrycznej i ulega diagonalizacji, jeżeli zostanie zachowana symetria przewodowa strony obwodu stojana. Jednakowo macierz rezystancji własnych uzwojeń nie zmienia swojej struktury wobec wzoru (2.37) – założona symetria wewnętrzna. Współczynniki rezystancji w (2.61) wynoszą

$$\mathbf{R}_{\text{sys}}^0 = \frac{\mathbf{R}_1^{\text{sys}} + \mathbf{R}_2^{\text{sys}} + \mathbf{R}_3^{\text{sys}}}{3}, \quad \mathbf{R}_{\text{sys}}^1 = \frac{\mathbf{R}_1^{\text{sys}} + a^2 \cdot \mathbf{R}_2^{\text{sys}} + a \cdot \mathbf{R}_3^{\text{sys}}}{3}, \quad (2.62.a)$$

oraz

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_1^s = \mathbf{R}_2^s = \mathbf{R}_3^s \quad (2.62.b)$$

Macierze indukcyjności stojana w współrzędnych naturalnych są symetryczne i niezależne od kąta obrotu wirnika ze względu na założoną symetrię magnetyczną. W konsekwencji przekształcenia stają się diagonalne, a więc nie wnoszą żadnych sprzężeń galwanicznych i elektromagnetycznych między składowymi symetrycznymi prądów stojana

$$\mathbf{L}_s^\sigma = \mathbf{T}_s \cdot \mathbf{L}_\sigma^s \cdot \mathbf{T}_s^{-1} = \text{diag} \left[ \mathbf{L}_{\sigma,s}^0 \quad \mathbf{L}_{\sigma,s}^1 \quad \mathbf{L}_{\sigma,s}^2 \right] \quad (2.63)$$

$$\mathbf{L}_s^m = \mathbf{T}_s \cdot \mathbf{L}_m^s \cdot \mathbf{T}_s^{-1} = \text{diag} \left[ \mathbf{L}_{m,s}^0 \quad \mathbf{L}_{m,s}^1 \quad \mathbf{L}_{m,s}^2 \right] \quad (2.64)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{L}_s = \mathbf{L}_s^\sigma + \mathbf{L}_s^m \quad (2.65)$$

Poszczególne składniki w tych macierzach spełniają poniższe zależności [67], [80]:

$$\mathbf{L}_{\sigma,s}^0 = \mathbf{L}_s^\sigma + 2 \cdot \mathbf{M}_s^\sigma \quad (2.66.a), \quad \mathbf{L}_{\sigma,s}^1 = \mathbf{L}_{\sigma,s}^2 = \mathbf{L}_s^\sigma - \mathbf{M}_s^\sigma \quad (2.66.b),$$

$$\mathbf{L}_{m,s}^0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_{m,(6k+3)\cdot p} \quad (2.66.c), \quad \mathbf{L}_{m,s}^1 = \mathbf{L}_{m,s}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_{m,(6k+1)\cdot p} \quad (2.66.d),$$

$$\mathbf{L}_{m,n\cdot p} = \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{z_s}{n \cdot p} \right)^2 \cdot \left( \frac{4 \cdot r \cdot l_{\text{FE}}}{\pi \cdot g} \mu_0 \right) \cdot \left( \frac{k_{us,p} \cdot k_{us,n\cdot p} \cdot k_{uw,n\cdot p}}{k_{uw,p}} \right) \quad (2.66.e).$$



- Transformacja równań obwodów wirnika:

- wektory napięć oczkowych klatek

$$\begin{bmatrix} u_w^0 \\ u_w^1 \\ u_w^2 \\ \vdots \\ u_w^{N-2} \\ u_w^{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{u}^w = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} u_w^0 \\ u_w^1 \\ u_w^2 \\ \vdots \\ u_w^{N-2} \\ u_w^{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_w^{*0} \\ u_w^{*N-1} \\ u_w^{*N-2} \\ \vdots \\ u_w^{*2} \\ u_w^{*1} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \mathbf{b} & \mathbf{b}^2 & \dots & \mathbf{b}^{(N-1)} \\ 1 & \mathbf{b}^2 & \mathbf{b}^4 & \dots & \mathbf{b}^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mathbf{b}^{(N-2)} & \mathbf{b}^{2(N-2)} & \dots & \mathbf{b}^{(N-2)^2} \\ 1 & \mathbf{b}^{(N-1)} & \mathbf{b}^{2(N-1)} & \dots & \mathbf{b}^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^w \\ u_2^w \\ u_3^w \\ \vdots \\ u_{N-1}^w \\ u_N^w \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{u}^w \equiv \mathbf{u}^r \equiv \mathbf{u}^p = \left[ \mathbf{T}_w \cdot \left[ u_1^w \quad u_2^w \quad \dots \quad u_{N-1}^w \quad u_N^w \right]^T; u_{N+1}^w \right] = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_w^* \quad (2.68)$$

- wektory prądów oczkowych klatek

$$\begin{bmatrix} i_w^0 \\ i_w^1 \\ i_w^2 \\ \vdots \\ i_w^{N-2} \\ i_w^{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{i}^w = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} i_w^0 \\ i_w^1 \\ i_w^2 \\ \vdots \\ i_w^{N-2} \\ i_w^{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_w^{*0} \\ i_w^{*N-1} \\ i_w^{*N-2} \\ \vdots \\ i_w^{*2} \\ i_w^{*1} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \mathbf{b} & \mathbf{b}^2 & \dots & \mathbf{b}^{(N-1)} \\ 1 & \mathbf{b}^2 & \mathbf{b}^4 & \dots & \mathbf{b}^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mathbf{b}^{(N-2)} & \mathbf{b}^{2(N-2)} & \dots & \mathbf{b}^{(N-2)^2} \\ 1 & \mathbf{b}^{(N-1)} & \mathbf{b}^{2(N-1)} & \dots & \mathbf{b}^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1^w \\ i_2^w \\ i_3^w \\ \vdots \\ i_{N-1}^w \\ i_N^w \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{i}^w \equiv \mathbf{i}^r \equiv \mathbf{i}^p = \left[ \mathbf{T}_w \cdot \left[ i_1^w \quad i_2^w \quad \dots \quad i_{N-1}^w \quad i_N^w \right]^T; i_{N+1}^w \right] = \mathbf{i}_w + \mathbf{i}_w^* \quad (2.70)$$

gdzie:  $\mathbf{b} = e^{j \cdot 2\pi/N}$  - operator obrotu układu wielofazowego.

Przy czym napięcia i prądy części poosiowych klatek wirnika z (2.68) oraz (2.70) wynoszą

$$u_{N+1}^w = \sum_{k=1}^N u_k^w = u_w^N = 0, i_{N+1}^w = \sum_{k=1}^N i_k^w = i_w^N, \quad (2.71)$$

$$\text{co pozwala zapisać: } \mathbf{u}_w = \left[ u_w^0 \quad u_w^1 \quad \dots \quad u_w^{N-1} \quad u_w^N \right], \mathbf{i}_w = \left[ i_w^0 \quad i_w^1 \quad \dots \quad i_w^{N-1} \quad i_w^N \right]. \quad (2.72)$$

- macierze blokowe rezystancji obwodów wirnika

$$\mathbf{R}_w \equiv \mathbf{R}_r \equiv \mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{R}^g \cdot \mathbf{T}_w^{-1} & \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{R}^z \\ (\mathbf{R}^z)^T \cdot \mathbf{T}_w^{-1} & \mathbf{R}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_g & \mathbf{R}_z \\ \mathbf{R}_z^T & \mathbf{R}_z \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

W sytuacji wystąpienia niesymetrii parametrycznej prętów wybranej klatki macierz główna rezystancji będzie pełna

$$\mathbf{R}_g = \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{R}^g \cdot \mathbf{T}_w^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0,0} & \mathbf{R}_{0,1} & \mathbf{R}_{0,2} & \cdots & \mathbf{R}_{0,2}^* & \mathbf{R}_{0,1}^* \\ \mathbf{R}_{0,1}^* & \mathbf{R}_{1,1} & \mathbf{R}_{1,2} & \cdots & \mathbf{R}_{1,(N-2)} & \mathbf{R}_{1,(N-1)} \\ \mathbf{R}_{0,2}^* & \mathbf{R}_{1,2}^* & \mathbf{R}_{2,2} & \cdots & \mathbf{R}_{2,(N-2)} & \mathbf{R}_{2,(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}_{0,2} & \mathbf{R}_{1,(N-2)}^* & \mathbf{R}_{2,(N-2)}^* & \cdots & \mathbf{R}_{2,2} & \mathbf{R}_{1,2} \\ \mathbf{R}_{0,1} & \mathbf{R}_{1,(N-1)}^* & \mathbf{R}_{1,(N-2)}^* & \cdots & \mathbf{R}_{1,2}^* & \mathbf{R}_{1,1} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

gdzie:

$$\mathbf{R}_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \mathbf{R}_k^o - \mathbf{R}_k^b \cdot (\mathbf{b}^j + \mathbf{b}^{-i}) \right] \cdot \mathbf{b}^{(k-1) \cdot (i-j)} \quad (2.75)$$

Podobnie wektor kolumnowy z (2.73) części poosiowej, gdy rozważane jest uszkodzenie segmentów klatki zawiera na każdej pozycji element różny od zera

$$\mathbf{R}_z = \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{R}^z = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z^0 & \mathbf{R}_z^1 & \mathbf{R}_z^2 & \cdots & \cdots & \mathbf{R}_z^{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{R}_z^k = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=1}^N \mathbf{R}_k^z \cdot \mathbf{b}^{(k-1)} \quad (2.77)$$

Przy zachowaniu symetrii wybranego obwodu wirnika tzn. dla takich samych rezystancji prętów oraz jednakowych wycinków pierścieni zwierających otrzymuje się macierze i wektory o składnikach rzeczywistych

$$\mathbf{R}_g = \text{diag} \left[ \mathbf{R}_w^0 \quad \mathbf{R}_w^1 \quad \mathbf{R}_w^2 \quad \cdots \quad \mathbf{R}_w^{N-1} \right] \quad (2.78)$$

$$\mathbf{R}_z = \text{diag} \left[ \sqrt{N} \cdot \mathbf{R}_z \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \right] \quad (2.79)$$

$$\mathbf{R}_w^k = 2 \cdot \mathbf{R}^z + 4 \cdot \mathbf{R}^b \cdot \sin(k \cdot \pi / N) \quad (2.80)$$

Z przyjętych założeń [p.2.4] symetrii magnetycznej między macierzami indukcyjności własnych i wzajemnych zachodzą relacje

$$\mathbf{L}_r \equiv \mathbf{L}_p \equiv \mathbf{L}_w^\sigma + \mathbf{L}_w^m, \mathbf{L}_{rp} = \mathbf{L}_{pr} = \mathbf{L}_w^m \quad (2.81)$$

przy czym macierze:

- indukcyjności rozproszeń klatki rozruchowej oraz klatki pracy z uwzględnieniem części poosiowej

$$\mathbf{L}_w^\sigma \equiv \mathbf{L}_r^\sigma \equiv \mathbf{L}_p^\sigma = \text{diag} \left[ \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{L}_\sigma^w \cdot \mathbf{T}_w^{-1} \quad \mathbf{L}_w^{\sigma, N} \right] = \text{diag} \left[ \mathbf{L}_w^{\sigma, 0} \quad \mathbf{L}_w^{\sigma, 1} \quad \mathbf{L}_w^{\sigma, 2} \quad \dots \quad \mathbf{L}_w^{\sigma, N-1} \quad \mathbf{L}_w^{\sigma, N} \right] \quad (2.82)$$

- indukcyjności wzajemnych między kłatkami lub oczkami tego samego obwodu wirnika z zerowym wyrazem obwodu oczka poosiowego

$$\mathbf{L}_w^m = \text{diag} \left[ \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{L}_m^w \cdot \mathbf{T}_w^{-1} \quad 0 \right] = \text{diag} \left[ 0 \quad \mathbf{L}_w^m \quad \mathbf{L}_w^m \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{L}_w^m \quad 0 \right] \quad (2.83)$$

Macierz indukcyjności wzajemnych (2.56) – [p.2.4], w składowych symetrycznych posiada szczególną strukturę [26], [73], [80], gdzie wybrana harmoniczna przestrzenna może zajmować tylko jedną ściśle określoną pozycję wynikającą bezpośrednio z parametrów konstrukcyjnych silnika takich jak liczba par biegunów i prętów klatki wirnika. Ponieważ zbiór uwzględnianych współczynników indukcyjności jest teoretycznie nieskończony, a wymiar macierzy skończony, to w jednym miejscu wystąpi sumowanie składowych z różnymi numerami harmonicznymi przestrzennymi  $n$  dla tych samych współrzędnych wierszowych

$$\mathbf{L}_{sr} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}}_{(6 \cdot k + 3) \cdot p}^{\text{mod}(6 \cdot k + 3, 3), \text{mod}((6 \cdot k + 3) \cdot p, N)} & \dots & \tilde{\mathbf{L}}_{(6 \cdot k + 3) \cdot p}^{\text{mod}(6 \cdot k + 3, 3), \text{mod}((6 \cdot k + 3) \cdot p, N)} & \tilde{\mathbf{L}}_{(6 \cdot k + 3) \cdot p}^{\text{mod}(6 \cdot k + 3, 3), \text{mod}((6 \cdot k + 3) \cdot p, N)} & 0 \\ \tilde{\mathbf{L}}_{(6 \cdot k + 1) \cdot p}^{\text{mod}(6 \cdot k + 1, 3), \text{mod}((6 \cdot k + 1) \cdot p, N)} & \dots & \tilde{\mathbf{L}}_{(6 \cdot k + 1) \cdot p}^{\text{mod}(6 \cdot k + 1, 3), \text{mod}((6 \cdot k + 1) \cdot p, N)} & \tilde{\mathbf{L}}_{(6 \cdot k + 1) \cdot p}^{\text{mod}(6 \cdot k + 1, 3), \text{mod}((6 \cdot k + 1) \cdot p, N)} & 0 \\ \tilde{\mathbf{L}}_{(6 \cdot k - 1) \cdot p}^{\text{mod}(6 \cdot k - 1, 3), \text{mod}((6 \cdot k - 1) \cdot p, N)} & \dots & \tilde{\mathbf{L}}_{(6 \cdot k - 1) \cdot p}^{\text{mod}(6 \cdot k - 1, 3), \text{mod}((6 \cdot k - 1) \cdot p, N)} & \tilde{\mathbf{L}}_{(6 \cdot k - 1) \cdot p}^{\text{mod}(6 \cdot k - 1, 3), \text{mod}((6 \cdot k - 1) \cdot p, N)} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{n \cdot p}^{(\text{wiersz}), (\text{kolumna})} = \sum_n \mathbf{L}_{n \cdot p}^{(\text{wiersz}), (\text{kolumna})} \cdot e^{j \cdot [n \cdot p \cdot (\Omega t + \phi_0)]} = \sum_n \underline{\mathbf{L}}_{n \cdot p}^{(\text{wiersz}), (\text{kolumna})} \cdot e^{j \cdot (n \cdot p \cdot \Omega t)}, \forall k \in \mathbf{Z} \quad (2.85)$$

Wszystkie wielkości oraz parametry związane z obwodem wirnika zostały sprowadzone na stronę obwodu stojana przez przekładnię zwojową według poniższych zależności - we wszystkich wzorach celowo pominięto znak sprowadzenia, aby zachować czytelność użytych indeksów górnych.

$$\mathbf{u}'_w = \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{u}, \mathbf{i}'_w = \mathbf{i}_w / \mathbf{k}_z, \mathbf{R}'_w = \mathbf{k}^2 \cdot \mathbf{R}_w, \mathbf{L}'_w = \mathbf{k}^2 \cdot \mathbf{L}_w; \mathbf{k}_z = \sqrt{3/N} \cdot (\mathbf{z}_s \cdot \mathbf{k}_{us, p}) \cdot \mathbf{k}_{uw}^{-1} \quad (2.86)$$

Macierze połączeń galwanicznych silnika zwartego wspólnym pierścieniem jako dodatkowe elementy uogólniające wyjściowy układ równań w wyniku przekształcenia otrzymują postać:

$$\mathbf{R}_{ww} \equiv \mathbf{R}_{rp} = \mathbf{R}_{pr} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{R}^{gw} \cdot \mathbf{T}_w^{-1} & \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{R}^z \\ (\mathbf{R}^z)^T \cdot \mathbf{T}_w^{-1} & \mathbf{R}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{gw} & \mathbf{R}_z \\ \mathbf{R}_z^T & \mathbf{R}_z \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

$$\mathbf{L}_{ww}^\sigma \equiv \mathbf{L}_{rp}^\sigma = \mathbf{L}_{pr}^\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{L}_\sigma^{gw} \cdot \mathbf{T}_w^{-1} & \mathbf{T}_w \cdot \mathbf{L}^z \\ (\mathbf{L}^z)^T \cdot \mathbf{T}_w^{-1} & \mathbf{L}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{gw}^\sigma & \mathbf{L}_z \\ \mathbf{L}_z^T & \mathbf{L}_z \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

gdzie:

$$\mathbf{R}_{gw} = \mathbf{R}_{rp} = \mathbf{R}_{pr} = \frac{1}{N} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}_\mu^0 & \underline{\mathbf{R}}_\mu^1 & \underline{\mathbf{R}}_\mu^2 & \dots & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-3} & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-2} & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-1} \\ * \underline{\mathbf{R}}_\mu^1 & \underline{\mathbf{R}}_\mu^0 & \underline{\mathbf{R}}_\mu^1 & \dots & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-4} & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-3} & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-2} \\ * \underline{\mathbf{R}}_\mu^2 & * \underline{\mathbf{R}}_\mu^1 & \underline{\mathbf{R}}_\mu^0 & \dots & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-5} & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-4} & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-3} \\ * \underline{\mathbf{R}}_\mu^3 & * \underline{\mathbf{R}}_\mu^2 & * \underline{\mathbf{R}}_\mu^1 & \dots & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-6} & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-5} & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-4} \\ * \underline{\mathbf{R}}_\mu^4 & * \underline{\mathbf{R}}_\mu^3 & * \underline{\mathbf{R}}_\mu^2 & \dots & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-7} & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-6} & \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-1} & * \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-2} & * \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-3} & * \underline{\mathbf{R}}_\mu^{N-4} & \dots & * \underline{\mathbf{R}}_\mu^1 & \underline{\mathbf{R}}_\mu^0 \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

$$\mathbf{L}_{gw}^\sigma = \mathbf{L}_{rp}^\sigma = \mathbf{L}_{pr}^\sigma = \frac{1}{N} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{L}}_\mu^0 & \underline{\mathbf{L}}_\mu^1 & \underline{\mathbf{L}}_\mu^2 & \dots & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-3} & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-2} & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-1} \\ * \underline{\mathbf{L}}_\mu^1 & \underline{\mathbf{L}}_\mu^0 & \underline{\mathbf{L}}_\mu^1 & \dots & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-4} & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-3} & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-2} \\ * \underline{\mathbf{L}}_\mu^2 & * \underline{\mathbf{L}}_\mu^1 & \underline{\mathbf{L}}_\mu^0 & \dots & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-5} & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-4} & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-3} \\ * \underline{\mathbf{L}}_\mu^3 & * \underline{\mathbf{L}}_\mu^2 & * \underline{\mathbf{L}}_\mu^1 & \dots & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-6} & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-5} & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-4} \\ * \underline{\mathbf{L}}_\mu^4 & * \underline{\mathbf{L}}_\mu^3 & * \underline{\mathbf{L}}_\mu^2 & \dots & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-7} & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-6} & \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-1} & * \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-2} & * \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-3} & * \underline{\mathbf{L}}_\mu^{N-4} & \dots & * \underline{\mathbf{L}}_\mu^1 & \underline{\mathbf{L}}_\mu^0 \end{bmatrix}, \quad (2.90)$$

dla:

$$\underline{\mathbf{R}}_\mu^k = \left( \mathbf{R}_\mu^1 + \mathbf{R}_\mu^2 \cdot b^{-1 \cdot k} + \mathbf{R}_\mu^3 \cdot b^{-2 \cdot k} + \dots + \mathbf{R}_\mu^N \cdot b^{-(N-1) \cdot k} \right), \quad (2.91)$$

$$\underline{\mathbf{L}}_\mu^k = \left( \mathbf{L}_\mu^{1,\sigma} + \mathbf{L}_\mu^{2,\sigma} \cdot b^{-1 \cdot k} + \mathbf{L}_\mu^{3,\sigma} \cdot b^{-2 \cdot k} + \dots + \mathbf{L}_\mu^{N,\sigma} \cdot b^{-(N-1) \cdot k} \right), \quad (2.92)$$

$$\text{wówczas zachodzi równanie: } \mathbf{L}_{rp} = \mathbf{L}_{pr} = \mathbf{L}_w^m + \mathbf{L}_{ww}^\sigma \quad (2.93)$$

### 2.4.2 Rozwiązanie układu równań metodą bilansu harmonicznego

W punkcie 2.3 przedstawiono sposób rozwiązania modelu silnika pracującego w stanie ustalonym z uwzględnieniem teoretycznie nieskończonego spektrum harmonicznego przestrzennych. Według tej metody całą szczególną należy przewidzieć w postaci następujących szeregów Fouriera prądów składowych symetrycznych stojana

$$\begin{bmatrix} i_s^0 \\ i_s^1 \\ i_s^{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s^0 \\ \mathbf{I}_s^1 \\ \mathbf{I}_s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s^{*0} \\ \mathbf{I}_s^{*2} \\ \mathbf{I}_s^{*1} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \sum_m \cdot \sum_n \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{s,(m,n-p)}^0 \\ \mathbf{I}_{s,(m,n-p)}^1 \\ \mathbf{I}_{s,(m,n-p)}^2 \end{bmatrix} \cdot e^{j \cdot (m\Omega_s + n \cdot p\Omega) \cdot t} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{s,(-m,n-p)}^{*0} \\ \mathbf{I}_{s,(-m,n-p)}^{*2} \\ \mathbf{I}_{s,(-m,n-p)}^{*1} \end{bmatrix} \cdot e^{-j \cdot (m\Omega_s + n \cdot p\Omega) \cdot t} \right) \quad (2.94)$$

oraz wirnika

$$\begin{bmatrix} i_w^0 \\ i_w^1 \\ i_w^2 \\ \vdots \\ i_w^{\frac{N-1}{2}} \\ i_w^{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I}_w + \mathbf{I}_w^* \right) = \frac{1}{2} \sum_m \cdot \sum_n \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{w,(m,n-p)}^0 \\ \mathbf{I}_{w,(m,n-p)}^1 \\ \mathbf{I}_{w,(m,n-p)}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{w,(m,n-p)}^{\frac{N-1}{2}} \\ \mathbf{I}_{w,(m,n-p)}^N \end{bmatrix} \cdot e^{j \cdot (m\Omega_s + n \cdot p\Omega) \cdot t} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{w,(-m,n-p)}^{*0} \\ \mathbf{I}_{w,(-m,n-p)}^{*N-1} \\ \mathbf{I}_{w,(-m,n-p)}^{*N-2} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{w,(-m,n-p)}^{*1} \\ \mathbf{I}_{w,(-m,n-p)}^{*N} \end{bmatrix} \cdot e^{-j \cdot (m\Omega_s + n \cdot p\Omega) \cdot t} \right) \quad (2.95)$$

W wyniku przekształcenia układu równań do współrzędnych zespolonych wystarczy znaleźć odpowiedź tylko dla jednego wektora wymuszeń cząstkowych, ponieważ (2.96) spełnia wcześniej podany związek (2.22)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_p \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{U}_r \\ \mathbf{U}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^* \\ \mathbf{U}_r^* \\ \mathbf{U}_p^* \end{bmatrix} \right) = \sum_m \cdot \sum_n \left( \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{s,(m,n-p)} \\ \mathbf{U}_{r,(m,n-p)} \\ \mathbf{U}_{p,(m,n-p)} \end{bmatrix} \cdot e^{j \cdot (m\Omega_s + n \cdot p\Omega) \cdot t} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{s,(-m,n-p)}^* \\ \mathbf{U}_{r,(-m,n-p)}^* \\ \mathbf{U}_{p,(-m,n-p)}^* \end{bmatrix} \cdot e^{-j \cdot (m\Omega_s + n \cdot p\Omega) \cdot t} \right) \quad (2.96)$$

Zgodnie z powyższym oraz [p. 2.3.1], wydzielony podukład równań algebraicznych w wyniku zbilansowania względem takich samych funkcji wykładniczych przyjmie nieskończoną formę

opisaną przez (2.97). Aby zachować pewną ogólność prowadzonych rozważań pozostawiono równania składowej zerowej stojana, mimo wcześniejszego pominięcia przewodu zerowego

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{U}_r \\ \mathbf{U}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{R}_{rp} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{pr} & \mathbf{R}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} + j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_o \\ \boldsymbol{\Omega}_w \\ \boldsymbol{\Omega}_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sw} & \mathbf{L}_{sw} \\ \mathbf{L}_{ws} & \mathbf{L}_r & \mathbf{L}_{rp} \\ \mathbf{L}_{ws} & \mathbf{L}_{pr} & \mathbf{L}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Związki między równaniami w (2.97) należy rozpatrywać niezależnie od rzędu harmonicznej czasowej bez zmiany wyjściowej struktury układu równań. Wychodząc z założeń wstępnych, że źródłem zasilania jest symetryczny i okresowy układ napięć trójfazowych, wówczas przy skojarzeniu uzwojeń stojana w gwiazdę wektor wymuszeń tego obwodu można zapisać jako

$$\mathbf{U}_s = [\mathbf{U}_s^0 \quad \mathbf{U}_s^1 \quad \mathbf{U}_s^2]^T, \quad \mathbf{U}_s^{\text{mod}(k_s,3)} = [\dots \quad 0 \quad 0 \quad \underline{U}_{s,(m,0n-p)}^{\text{mod}(k_s,3)} \cdot \delta_{[\text{mod}(k_s,3), \text{mod}(m,3)]} \quad 0 \quad 0 \quad \dots] \quad (2.98)$$

Wektor danej składowej symetrycznej wymuszenia (2.98) zawiera wyłącznie jeden niezerowy wyraz na pozycji centralnej. Jeżeli pominąć odkształcenie napięć, wtedy zbiór wymuszeń zostanie zredukowany tylko do pojedynczego elementu w wektorze składowej pierwszej. Ogólnie zakres uwzględnianych harmonicznych czasowych zmienia liczbę rozwiązywanych podukładów równań, natomiast nie modyfikuje struktury wektorów i macierzy w (2.97). Z tych względów, prądy składowych symetrycznych odpowiadające wektorowi wymuszeń charakteryzują się zawsze takim samym uporządkowaniem jego elementów

$$\mathbf{I}_s^{\text{mod}(k_s,3)} = [\dots \quad \underline{I}_{s,(m,2n-p)}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \underline{I}_{s,(m,n-p)}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \underline{I}_{s,(m,0n-p)}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \underline{I}_{s,(m,-n-p)}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \underline{I}_{s,(m,-2n-p)}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \dots]^T \quad (2.99)$$

Stałe macierze obwodu stojana mają budowę blokową oraz są utworzone z nieskończonych podmacierzy diagonalnych o współczynnikach określonych w [p.2.4.1]. W sytuacji uwzględnienia niesymetrii elektrycznej macierz rezystancji staje się z definicji pełna

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s^0 & \mathbf{R}_s^1 & \mathbf{R}_s^2 \\ \mathbf{R}_s^2 & \mathbf{R}_s^0 & \mathbf{R}_s^1 \\ \mathbf{R}_s^1 & \mathbf{R}_s^2 & \mathbf{R}_s^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s,3)} = \text{diag}[\dots \quad R_s^{\text{mod}(k_s,3)} \quad R_s^{\text{mod}(k_s,3)} \quad R_s^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \dots], \quad \mathbf{R}_s^2 = \mathbf{R}_s^{1*}.$$

W przypadku szczególnym symetrii obwodu stojana następuje zerowanie wyrazów leżących poza główną przekątną macierzy  $\mathbf{R}_s = \text{diag}[\mathbf{R}_s^0 \quad \mathbf{R}_s^0 \quad \mathbf{R}_s^0]$ . (2.100)

Z uwagi na symetrię magnetyczną macierz indukcyjności własnych i wzajemnych pozostaje nadal diagonalna według (2.65)

$$\mathbf{L}_s = \text{diag}[\mathbf{L}_s^0 \quad \mathbf{L}_s^1 \quad \mathbf{L}_s^2], \quad \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s,3)} = \text{diag}[\dots \quad \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \dots] \quad (2.101)$$

Wektory kolumnowe napięć i prądów oczkowych wirnika w układzie równań (2.97) przyjmują następującą postać

$$\mathbf{U}_w \equiv \mathbf{U}_r \equiv \mathbf{U}_p = [\dots \quad 0 \cdot \mathbf{E} \quad 0 \cdot \mathbf{E} \quad 0 \cdot \mathbf{E} \quad 0 \cdot \mathbf{E} \quad 0 \cdot \mathbf{E} \quad \dots]^T \quad (2.102)$$

$$\mathbf{I}_w \equiv \mathbf{I}_r \equiv \mathbf{I}_p = [\dots \quad \mathbf{I}_{w,(m,2n-p)} \quad \mathbf{I}_{w,(m,n-p)} \quad \mathbf{I}_{w,(m,0-p)} \quad \mathbf{I}_{w,(m,-n-p)} \quad \mathbf{I}_{w,(m,-2n-p)} \quad \dots]^T \quad (2.103)$$

Nieskończone macierze rezystancji i indukcyjności wirnika posiadają strukturę blokowo-diagonalną utworzoną z macierzy o wymiarach skończonych zdefiniowanych według wzorów

$$\mathbf{R}_w \equiv \mathbf{R}_r \equiv \mathbf{R}_p = \text{diag}[\dots \quad \mathbf{R}_w \quad \mathbf{R}_w \quad \mathbf{R}_w \quad \mathbf{R}_w \quad \mathbf{R}_w \quad \dots] \quad (2.104)$$

$$\mathbf{L}_w^m = \mathbf{L}_{rp}^m = \mathbf{L}_{pr}^m = \text{diag}[\dots \quad \mathbf{L}_w^m \quad \mathbf{L}_w^m \quad \mathbf{L}_w^m \quad \mathbf{L}_w^m \quad \mathbf{L}_w^m \quad \dots] \quad (2.105)$$

$$\mathbf{L}_w \equiv \mathbf{L}_r \equiv \mathbf{L}_p = \text{diag}[\dots \quad \mathbf{L}_w \quad \mathbf{L}_w \quad \mathbf{L}_w \quad \mathbf{L}_w \quad \mathbf{L}_w \quad \dots]; \quad \mathbf{L}_w = \mathbf{L}_w^\sigma + \mathbf{L}_w^m \quad (2.106)$$

Macierze prawie-okresowych operatorów różniczkowania z układu równań (2.97) wynoszą

$$\mathbf{\Omega}_o = \text{diag}[\mathbf{\Omega}_s \quad \mathbf{\Omega}_s \quad \mathbf{\Omega}_s] \quad (2.107)$$

$$\mathbf{\Omega}_s = [\dots \quad (m\Omega_s + 2p\Omega) \quad (m\Omega_s + p\Omega) \quad m\Omega_s \quad (m\Omega_s - p\Omega) \quad (m\Omega_s - 2p\Omega) \quad \dots]$$

$$\mathbf{\Omega}_w = [\dots \quad (m\Omega_s + 2p\Omega) \cdot \mathbf{E} \quad (m\Omega_s + p\Omega) \cdot \mathbf{E} \quad m\Omega_s \cdot \mathbf{E} \quad (m\Omega_s - p\Omega) \cdot \mathbf{E} \quad (m\Omega_s - 2p\Omega) \cdot \mathbf{E} \quad \dots]$$

Macierze indukcyjności wzajemnych pomiędzy uzwojeniami stojana i oczkami klatek wirnika otrzymuje się z poniższego szeregu reprezentowanego przez zależności

$$\mathbf{L}_{sw} = \mathbf{L}_{sr} = \mathbf{L}_{sp} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_{n-p} \cdot e^{j \cdot (n \cdot p \varphi)} = [\mathbf{L}_{sw}^0 \quad \mathbf{L}_{sw}^1 \quad \mathbf{L}_{sw}^2]^T, \quad \mathbf{L}_{rs} = \mathbf{L}_{ps} = \left( \mathbf{L}_{sw}^* \right)^T \quad (2.108)$$

Wektory indukcyjności wzajemnych z (2.97) wiążące prądy wirnika ze składowymi symetrycznymi prądami stojana stanowią reprezentacje macierzowe szeregu Fouriera, które ulegają znaczącemu uproszczeniu w rezultacie przekształcenia współrzędnych oraz zerowaniu się parzystych harmonicznych przepływu już na etapie obliczania współczynników uzwojenia. W istocie

wspomniane reprezentacje macierzowe szeregu Fouriera przechodzą w teoretycznie nieskończone macierze rzadkie utworzone z wektorów wierszowych o skończonej długości

$$\mathbf{L}_{sw}^0 = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \dots \mathbf{0} \dots & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{3p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{9p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{15p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{21p} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-3p} \dots \mathbf{0} & \dots \mathbf{0} \dots & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{3p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{9p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{15p} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-9p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-3p} \dots \mathbf{0} & \dots \mathbf{0} \dots & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{3p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{9p} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-15p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-9p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-3p} \dots \mathbf{0} & \dots \mathbf{0} \dots & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{3p} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-21p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-15p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-9p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-3p} \dots \mathbf{0} & \dots \mathbf{0} \dots & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

$$\mathbf{L}_{sw}^1 = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{7p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{13p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{19p} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-5p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{7p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{13p} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-5p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{7p} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-17p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-11p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-5p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} \dots \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-23p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-17p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-11p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-5p} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

$$\mathbf{L}_{sw}^2 = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{5p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{11p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{17p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{23p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{5p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{11p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{17p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{5p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{11p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{-13p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{5p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{-19p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{-13p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} \dots \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

gdzie:  $\mathbf{L}_{n-p} = \left[ \dots \quad \mathbf{0} \quad \underline{\mathbf{L}}_{n-p}^{\text{mod}(n-p, N)} \cdot e^{j(n-p\Omega) \cdot t} \quad \dots \quad \dots \right]$ ,  $\underline{\mathbf{L}}_{n-p} = \mathbf{L}_{n-p} \cdot e^{j(n-p\phi_0)}$ . (2.112)



### 2.4.3 Równania momentu elektromagnetycznego

Moment elektromagnetyczny wytwarzany przez silnik indukcyjny dwukłatkowy wynika z ogólnego wzoru przedstawionego w podrozdziale [p.2.3]. Uwzględnienie w tym równaniu nieskończonych wektorów prądów (2.60) i (2.69) oraz macierzy indukcyjności wzajemnych (2.84) zapisanych w składowych symetrycznych prowadzi do wyrażenia

$$\mathbf{T}_{em} = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i}_s^T \\ \mathbf{i}_r^T \\ \mathbf{i}_p^T \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \dot{\mathbf{L}}_{sw} & \dot{\mathbf{L}}_{sw} \\ \dot{\mathbf{L}}_{ws} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{L}}_{ws} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \\ \mathbf{i}_p \end{array} \right], \text{ dla: } \dot{\mathbf{L}}_{sw} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{L}_{sw}(\varphi) \quad (2.113)$$

Wykonanie działań mnożenia przewidzianych przez równanie (2.113) daje możliwość przedstawienia momentu elektromagnetycznego w dwóch równych sobie postaciach

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{em} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \mathbf{i}_s^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw} \cdot \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_s^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw} \cdot \mathbf{i}_p \right) + \left( \mathbf{i}_r^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{ws} \cdot \mathbf{i}_s + \mathbf{i}_p^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{ws} \cdot \mathbf{i}_s \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{i}_s^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw} \cdot \mathbf{i}_w + \mathbf{i}_w^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{ws} \cdot \mathbf{i}_s \right] = \\ &= \mathbf{i}_s^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw} \cdot \mathbf{i}_w = \mathbf{i}_w^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{ws} \cdot \mathbf{i}_s \end{aligned} \quad (2.114)$$

gdzie:

$$\dot{\mathbf{L}}_{sw} = \left[ \begin{array}{ccc} \dot{\mathbf{L}}_{sw}^0 & \dot{\mathbf{L}}_{sw}^1 & \dot{\mathbf{L}}_{sw}^2 \end{array} \right]^T, \mathbf{L}_{ws} = \left( \dot{\mathbf{L}}_{sw}^* \right)^T, \mathbf{i}_w = \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_p \quad (2.115)$$

Z względu, że zachodzi warunek (2.30) – [p.2.3.2], wystarczy rozważyć tylko jeden człon równania momentu elektromagnetycznego

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{em} &= \mathbf{i}_s^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw} \cdot \mathbf{i}_w = \left[ \begin{array}{ccc} \left( \mathbf{i}_s^0 \right) & \left( \mathbf{i}_s^1 \right) & \left( \mathbf{i}_s^2 \right) \end{array} \right]^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw} \cdot \left( \mathbf{i}_w^N + \mathbf{i}_w^* \right) = \left[ \left( \mathbf{i}_s^0 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw}^0 \cdot \left( \mathbf{i}_w^N + \mathbf{i}_w^* \right) \right] + \\ &+ \left[ \left( \mathbf{i}_s^1 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw}^1 \cdot \left( \mathbf{i}_w^N + \mathbf{i}_w^* \right) \right] + \left[ \left( \mathbf{i}_s^2 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw}^2 \cdot \left( \mathbf{i}_w^N + \mathbf{i}_w^* \right) \right] = \mathbf{T}_{em}^0 + \mathbf{T}_{em}^1 + \mathbf{T}_{em}^2 \end{aligned} \quad (2.116)$$

Wprowadzenie do (2.113) zależności wiążących prądy obwodu stojana i wirnika w składowych symetrycznych, pozwala zapisać wypadkowy moment elektromagnetyczny z (2.116) jako sumę trzech niezależnych momentów cząstkowych

$$\mathbf{T}_{\text{em}}^0 = \left( \mathbf{i}_{s,(-m,-n\cdot p)}^{*0} + \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^0 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^0 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\cdot p)}^N + \left( \mathbf{i}_{s,(-m,-n\cdot p)}^0 + \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^{*0} \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^0 \cdot \mathbf{i}_{w,(-m,n\cdot p)}^{*N} \quad (2.117)$$

$$\mathbf{T}_{\text{em}}^I = \left( \mathbf{i}_{s,(-m,-n\cdot p)}^{*1} + \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^2 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^1 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\cdot p)}^N + \left( \mathbf{i}_{s,(-m,-n\cdot p)}^{*1} + \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^2 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^1 \cdot \mathbf{i}_{w,(-m,n\cdot p)}^{*N} \quad (2.118)$$

$$\mathbf{T}_{\text{em}}^{II} = \left( \mathbf{i}_{s,(-m,-n\cdot p)}^{*2} + \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^1 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^2 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\cdot p)}^N + \left( \mathbf{i}_{s,(-m,-n\cdot p)}^{*2} + \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^1 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^2 \cdot \mathbf{i}_{w,(-m,n\cdot p)}^{*N} \quad (2.119)$$

Momenty elektromagnetyczne podlegają kolejnemu podziałowi na składniki, które można uporządkować według tych samych funkcji wykładniczych

-moment elektromagnetyczny typu pierwszego:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{em}}^I &= \left( \mathbf{i}_{s,(-m,-n\cdot p)}^{*0} \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^0 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\cdot p)}^N + \left( \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^0 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^0 \cdot \mathbf{i}_{w,(-m,n\cdot p)}^{*N} + \\ &+ \left( \mathbf{i}_{s,(-m,-n\cdot p)}^{*1} \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^1 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\cdot p)}^N + \left( \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^2 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^1 \cdot \mathbf{i}_{w,(-m,n\cdot p)}^{*N} + \\ &+ \left( \mathbf{i}_{s,(-m,-n\cdot p)}^{*2} \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^2 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\cdot p)}^N + \left( \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^1 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^2 \cdot \mathbf{i}_{w,(-m,n\cdot p)}^{*N} , \end{aligned} \quad (2.120)$$

-moment elektromagnetyczny typu drugiego:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{em}}^{II} &= \left( \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^0 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^0 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\cdot p)}^N + \left( \mathbf{i}_{s,(-m,-n\cdot p)}^{*0} \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^0 \cdot \mathbf{i}_{w,(-m,n\cdot p)}^{*N} + \\ &+ \left( \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^2 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^1 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\cdot p)}^N + \left( \mathbf{i}_{s,(-m,-n\cdot p)}^{*1} \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^1 \cdot \mathbf{i}_{w,(-m,n\cdot p)}^{*N} + \\ &+ \left( \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^1 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^2 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\cdot p)}^N + \left( \mathbf{i}_{s,(m,-n\cdot p)}^2 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^2 \cdot \mathbf{i}_{w,(-m,n\cdot p)}^{*N} . \end{aligned} \quad (2.121)$$

Ponieważ funkcje momentu elektromagnetycznego z powyższych równań zawierają człony parami sprzężone, to ostatecznie momenty cząstkowe typu pierwszego i drugiego zostaną zredukowane do następujących zależności

$$\begin{aligned} T_{\text{em}}^I &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \left( i_{s,(-m,-n\text{p})}^1 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^1 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\text{p})}^N + \left( i_{s,(-m,-n\text{p})}^2 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^2 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\text{p})}^N \right\} = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \left( T_{\text{em},(0m,n\text{p})}^{I,1} + T_{\text{em},(0m,n\text{p})}^{I,2} \right) \cdot e^{j \cdot (n\text{p}\Omega) \cdot t} \right\} \end{aligned} \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} T_{\text{em}}^{II} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \left( i_{s,(m,-n\text{p})}^2 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^1 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\text{p})}^N + \left( i_{s,(m,-n\text{p})}^1 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^2 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\text{p})}^N \right\} = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \left( T_{\text{em},(2m,n\text{p})}^{II,1} + T_{\text{em},(2m,n\text{p})}^{II,2} \right) \cdot e^{j \cdot (2m\Omega_s + n\text{p}\Omega) \cdot t} \right\} \end{aligned} \quad (2.123)$$

W tych równaniach wyeliminowano momenty generowane przez składową zerową prądów stojąca (założenia wstępne [p.1.3]), które wynoszą

$$\begin{aligned} T_{\text{em}}^0 &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \left( i_{s,(-m,-n\text{p})}^0 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^0 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\text{p})}^N + \left( i_{s,(-m,-n\text{p})}^0 \right)^T \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^0 \cdot \mathbf{i}_{w,(m,n\text{p})}^N \right\} = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \left( T_{\text{em},(0m,n\text{p})}^0 \cdot e^{j \cdot (n\text{p}\Omega) \cdot t} \right) + \left( T_{\text{em},(2m,n\text{p})}^0 \cdot e^{j \cdot (2m\Omega_s + n\text{p}\Omega) \cdot t} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.124)$$

Z podstawienia reprezentacji macierzowych i wektorowych szeregu Fouriera według punktu [p.2.4.2] w równaniach (2.122)-(2.123), otrzymuje się nieskończone formy kwadratowe momentów cząstkowych

$$T_{\text{em}}^I = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ T_{\text{em}}^{I,1} + T_{\text{em}}^{I,2} \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{I}_s^1 \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^1 \cdot \mathbf{I}_{w,k} + \mathbf{I}_s^2 \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^2 \cdot \mathbf{I}_{w,k} \right\} \quad (2.125)$$

$$T_{\text{em}}^{II} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ T_{\text{em}}^{II,1} + T_{\text{em}}^{II,2} \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{I}_s^2 \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^1 \cdot \mathbf{I}_{w,k} + \mathbf{I}_s^1 \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^2 \cdot \mathbf{I}_{w,k} \right\} \quad (2.126)$$

Sumowanie wewnątrz forma kwadratowych należy prowadzić względem wskaźnika  $k$  dla wybranego rzędu harmonicznej czasowej oraz przyjętego zbioru harmonicznych przestrzennych. Z analizy wynika, że w równaniach momentu wypadkowego wystąpią trzy rodzaje składowych:

- moment asynchroniczny stanowiący złożenie momentu podstawowego i momentów pasożytniczych

$$T_{\text{em},(0,0)} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{I}_s^1 \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^1 \cdot \mathbf{I}_{w,k} + \mathbf{I}_s^2 \cdot \dot{\mathbf{L}}_{\text{sw}}^2 \cdot \mathbf{I}_{w,k} \right\}, \quad k = 0 \quad (2.127)$$

- momenty przemienne z punktem synchronizmu przy postoju wirnika  $\Omega=0$

$$T_{em,(0,k)} = 2\text{Re} \left\{ \mathbf{I}_s^{*1} \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw}^1 \cdot \mathbf{I}_{w,k} + \mathbf{I}_s^{*2} \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw}^2 \cdot \mathbf{I}_{w,k} \right\}, \forall k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \quad (2.128)$$

- momenty przemienne z punktem synchronizmu przy prędkościach  $\Omega \neq 0$ , w tym składnik niezależny od czasu

$$T_{em,(2m,k)} = 2\text{Re} \left\{ \mathbf{I}_s^{*2} \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw}^1 \cdot \mathbf{I}_{w,k} + \mathbf{I}_s^{*1} \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw}^2 \cdot \mathbf{I}_{w,k} \right\}, \forall k \in \mathbf{Z} \quad (2.129)$$

gdzie:

$$\dot{\mathbf{L}}_{sw}^0 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \ddots \\ & \vdots & & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & \vdots & \\ \ddots & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_{sw}^1 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \ddots \\ & \vdots & & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & \vdots & \\ \ddots & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_{sw}^2 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \ddots \\ & \vdots & & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots 5\mathbf{L}_{5p} & \mathbf{0} \dots 11\mathbf{L}_{11p} & \mathbf{0} \dots 17\mathbf{L}_{17p} & \mathbf{0} \dots 23\mathbf{L}_{23p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} \dots -1\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots 5\mathbf{L}_{5p} & \mathbf{0} \dots 11\mathbf{L}_{11p} & \mathbf{0} \dots 17\mathbf{L}_{17p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} \dots -7\mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} \dots -1\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots 5\mathbf{L}_{5p} & \mathbf{0} \dots 11\mathbf{L}_{11p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} \dots -13\mathbf{L}_{-13p} & \mathbf{0} \dots -7\mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} \dots -1\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots 5\mathbf{L}_{5p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} \dots -19\mathbf{L}_{-19p} & \mathbf{0} \dots -13\mathbf{L}_{-13p} & \mathbf{0} \dots -7\mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} \dots -1\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

Wektory o wymiarach skończonych w macierzach (2.130) – (2.132), po wykonaniu różniczkowania zachowują identyczną postać jak (2.112). Pomijając tożsame wyprowadzenia dla drugiego członu z (2.122)-(2.123), aby ponownie nie powtarzać tych zależności w kolejnym rozdziale, można zapisać następujące związki wykorzystane do utworzenia algorytmu bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego przy uwzględnieniu równania mechanicznego [p.3.4]

$$T_{em}^I = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ T_{em}^{I,1} + T_{em}^{I,2} \right\} = 2\text{Re} \left\{ \mathbf{I}_{w,k}^N \cdot \dot{\mathbf{L}}_{ws}^1 \cdot \mathbf{I}_s^1 + \mathbf{I}_{w,k}^{N*} \cdot \dot{\mathbf{L}}_{ws}^2 \cdot \mathbf{I}_s^2 \right\} \quad (2.133)$$

$$T_{em}^{II} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\text{Re} \left\{ T_{em}^{II,1} + T_{em}^{II,2} \right\} = 2\text{Re} \left\{ \mathbf{I}_{w,k}^N \cdot \dot{\mathbf{L}}_{ws}^1 \cdot \mathbf{I}_s^1 + \mathbf{I}_{w,k}^N \cdot \dot{\mathbf{L}}_{ws}^2 \cdot \mathbf{I}_s^2 \right\} \quad (2.134)$$

Momenty elektromagnetyczne typu pierwszego (2.133) oraz drugiego (2.134) zawierają tylko takie składniki, które eliminują konieczność mnożenia formy liniowej z wielkościami sprzężonymi przez wektor prądów stojana lub wirnika tworzących formy kwadratowe momentów cząstkowych w dziedzinie czasu. Jest to spowodowane metodą formułowania układu równań z nieliniowością strukturalną w [p.3.1], a przedstawione zależności (2.133)-(2.134) są jedną spośród czterech możliwych kombinacji wyrażenia równych sobie członów momentu elektromagnetycznego (2.116). W tym i następnym rozdziale do analizy generowanych sygnałów diagnostycznych zostaną użyte związki (2.125)-(2.126). Z uwagi na fakt, iż równania elektromagnetyczne oraz równanie mechaniczne będą rozwiązywane łącznie [p.3.4], konieczne jest opuszczenie czynnika „2” stojącego przed nawiasem części rzeczywistej.

## 2.5 Badanie rozwiązań modelu liniowego w dziedzinie częstotliwości

Wybrane uszkodzenia był odwzorowane w sposób parametryczny polegający na wymnożeniu rezystancji fazy obwodu stojana, pręta klatki oraz wycinka pierścienia zwierającego przez odpowiedni współczynnik liczbowy. Przyjęte wartości współczynników modelujących przerwę rezystancyjną w wirniku dobrano według kształtu żłobków klatek [73]. Zadane równania algebraiczne rozwiązywano metodą dekompozycji macierzy blokowych LU w programie Matlab. Podstawowe informacje dotyczące układu równań przedstawia poniższa tabela nr 2.1, gdzie pod pojęciem liczby uwzględnianych harmonicznym przestrzennych jest rozumiana ilość niezerowych składowych przepływu w równaniu centralnym bilansu harmonicznym.

**Tab. 2.1** Wymiar układu równań i wartości współczynników odwzorowujących niesymetrię.

<b>Współczynnik modelujący niesymetrię rezystancyjną</b>	
Obwód stojana (przerwa zewnętrzna w fazie)	$10^3$
Segment pierścienia	$10^3$
Pręt klatki wirnika: przekrój kołowy – klatka rozruchowa, przekrój prostokątny – klatka pracy.	20
<b>Liczba składowych przestrzennych / wymiar układu równań</b>	50 / 36000x36000

Obliczenia wykonano dla wzorcowego silnika dwuklatkowego średniej mocy zwartej osobnymi pierścieniami. W celu porównania cech ilościowych parametry obwodowe wirnika maszyny bazowej przeliczono do konstrukcji zwartej wspólnym pierścieniem z pominięciem rzeczywistych zagadnień budowy klatek (różna rozszerzalność termiczna prętów obwodu rozruchowego oraz pracy, zjawisko wypierania prądu). Niezbędne dane analizowanych silników, aby utworzyć układ równań zawiera tabela nr 2.2. Przykładowe wyniki zilustrowano jako:

- względne widma amplitudowe prądów i momentu elektromagnetycznego w skali decybelowej o poziomie odniesienia  $10^{-5}$ ,
- charakterystyki statyczne sygnałów diagnostycznych w funkcji poślizgu z rozdzielczością 10 obr/min.

Przy rozwiązaniu układu równań ustalono założenia ogólne obowiązujące w rozpatrywanych przypadkach pracy silnika z niesymetrią wirnika:

- warunek dokładnego odwzorowania składowych przepływu jest spełniony przez 1,5-krotne powiększenie liczby równań,
- kąt początkowy położenia wirnika względem fazy odniesienia uzwojeń stojana  $\varphi_0 = 0$ ,
- zasilanie nieodkształconym układem napięć z wyłączeniem podpunktu [p.2.5.6].

**Tab. 2.2** Dane konstrukcyjne i znamionowe maszyn dwuklatkowych średniej mocy wykorzystane w obliczeniach numerycznych.

Budowa wirnika	Osobne pierścienie	Wspólny pierścień
<b>Parametry znamionowe</b>		
Moc znamionowa	160 kW	160 kW
Napięcie znamionowe	1000 V	1000 V
Prąd znamionowy	116,5 A	116,5 A
Prędkość obrotowa	1485 obr/min	1485 obr/min
Współczynnik mocy	0,89	0,89
Sprawność	0,89	0,89
Moment znamionowy	1030 N·m	1030 N·m
Moment bezwładności	5 kg·m <sup>2</sup>	5 kg·m <sup>2</sup>
Współczynnik tarcia	0,3 N·m·s	0,3 N·m·s
<b>Parametry konstrukcyjne stojana</b>		
Rezystancja uzwojenia	0,06 Ω	0,06 Ω
Indukcyjność rozproszenia	0,0015 H	0,0015 H
Liczba żłobków	48	48
Liczba zwojów na fazę	56	56
Średni poskok uzwojenia	11	11
Długość rdzenia	0,310 m	0,310 m
Średnica wewnętrzna	0,322 m	0,322 m
<b>Parametry konstrukcyjne wirnika</b>		
Liczba żłobków klatki górnej i dolnej	38	38
Średnica zewnętrzna	0,310 m	0,310 m
Rezystancja/indukcyjność rozproszenia pręta klatki górnej	$4,2 \cdot 10^{-4} \Omega / 6,9 \cdot 10^{-7} \text{ H}$	$4,3 \cdot 10^{-4} \Omega / 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ H}$
Rezystancja/indukcyjność rozproszenia pręta klatki dolnej	$5,8 \cdot 10^{-5} \Omega / 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ H}$	$5,9 \cdot 10^{-5} \Omega / 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ H}$
Rezystancja/indukcyjność rozproszenia segmentu pierścienia klatki górnej	$1,1 \cdot 10^{-6} \Omega / 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ H}$	$5,4 \cdot 10^{-7} \Omega / 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ H}$
Rezystancja/indukcyjność rozproszenia segmentu pierścienia klatki dolnej	$6,1 \cdot 10^{-7} \Omega / 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ H}$	$5,4 \cdot 10^{-7} \Omega / 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ H}$

Parametry obwodowe silników wyznaczono korzystając z pozycji literatury [18], [34], [59].

### 2.5.1 Widmo prądów i momentu elektromagnetycznego w warunkach obustronnej symetrii silnika

W wstępie tego rozdziału [p.2.1] stwierdzono, że maszyna indukcyjna zbudowana symetrycznie tak pod względem elektrycznym i magnetycznym, na zadane wymuszenie nieodkształconym układem napięć sinusoidalnych odpowiada wytwarzaniem prądów niezwiązanych z jego pulsacją podstawową [80]. Przyczyn występowania tych składowych należy poszukiwać, analizując rozkład przestrzenny pola głównego mającego swoje odzwierciedlenie w strukturze macierzy indukcyjności wzajemnych. Jak już wspomniano [p.2.4.1], postać tej macierzy zależy w szczególności od liczby par biegunów oraz liczby żłobków wirnika. Wymienione parametry konstrukcyjne decydują o pozycji współczynników w wektorach wierszowych macierzy indukcyjności wzajemnych, wyznaczając tym samym kombinacje sprzężeń między obwodami stojana i wirnika. Wobec tego, czynnikami warunkującymi istnienie a także postać rozwiązania (2.97) będą położenia niezerowych elementów w (2.109)–(2.111). Dlatego też, aby przewidzieć właściwości jakościowe prądów i momentu elektromagnetycznego wystarczy rozpatrzeć tylko część równań związaną z strumieniem wzajemnym, jeżeli pozostałe macierze indukcyjności przyjmują postać diagonalną. Zachodzi to, gdy nie uwzględnia się w równaniach ewentualnej niesymetrii magnetycznej wybranego typu uzmienniającej jednocześnie macierze indukcyjności własnych obwodów stojana oraz wirnika względem kąta obrotu [103]–[105].

Dla przypadku obustronnej symetrii silnika zasilanego okresowym układem napięć trójfazowych, sekwencja sprzężeń dająca m. in. prądy z pulsacjami wymuszenia występuje jedynie w równaniu centralnym przyporządkowanemu danej kolejności harmonicznej czasowej. Obok współczynnika indukcyjności podstawowej można wyróżnić składowe przestrzenne mające położenie w macierzy (2.84) będące funkcją liczby par biegunów oraz takie, których miejsce wyznacza dodatkowo liczba żłobków wirnika. Wszystkie te harmoniczne wchodzi w skład równania centralnego i powodują przepływ prądów wirnika z pulsacjami  $[m\Omega_s + (6k-1)\cdot p\Omega]$ . Niezerowe prądy wirnika łączą ze sobą współczynniki indukcyjności leżące, poza tym równaniem generując prądy stojana o pulsacjach żłobkowych. Ponieważ wektor prądów wirnika nie ulega zmianie, to wskazane harmoniczne w zależności od postaci macierzy indukcyjności wzajemnych zostaną przyporządkowane różnym wektorom składowych symetrycznych prądów obwodu stojana z odpowiednią kolejnością ich występowania. Relacje wyznaczające niezerowe rozwiązania układu równań (2.97), wiążą się z parametrem  $g$  klasyfikującym maszynę asynchroniczną według położenia współczynników indukcyjności w (2.84). Dlatego dowolny silnik indukcyjny (bez gałęzi równoległych) zalicza się wyłącznie do jednej z trzech grup: **0**, **1** lub **2**.



Parametr  $g$  jest definiowany jako liczba naturalna, spełniająca jedno z trzech poniższych równań [68], [69], [80]:

$$\mathbf{0} : (1 + 3k) \cdot 2p = h \cdot N \quad (2.135.a)$$

$$\mathbf{1} : (0 + 3k) \cdot 2p = h \cdot N \quad (2.135.b)$$

$$\mathbf{2} : (2 + 3k) \cdot 2p = h \cdot N \quad (2.135.c)$$

Podane założenia w jakich istnieją sprzężenia tworzą odmienne układy równań cząstkowych. Wyprowadzone dalej związki wynikają z wyeliminowania rozwiązań zerowych części stojanowej. Układ w zapisie skróconym przy wybranej klasyfikacji macierzy indukcyjności wzajemnych przyjmie nieskończoną formę liniową (2.136). W celu zachowania czytelności, wektory prądów poszczególnych klatek zastąpiono superpozycją prądów wirnika. Indeksy górne podane przy operatorach różniczkowania oraz prądach stojana odczytywane według kolumn, przedstawiają sekwencje występowania harmonicznnych żłobkowych w wektorach prądów składowych symetrycznych

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{sw} \cdot \mathbf{I}_w) &= \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}_{sw} \cdot \mathbf{I}_w = \\ &= \mathbf{j} \cdot \text{diag} \left[ \dots \boldsymbol{\Omega}_{(m, 2h \cdot N)}^{(1-2g, 3)} \boldsymbol{\Omega}_{(m, h \cdot N)}^{(1-g, 3)} \boldsymbol{\Omega}_{(m, 0 \cdot p)}^1 \boldsymbol{\Omega}_{(m, -h \cdot N)}^{(1+g, 3)} \boldsymbol{\Omega}_{(m, -2h \cdot N)}^{(1+2g, 3)} \dots \right] \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+2h \cdot N} & \mathbf{L}_{-5p+2h \cdot N} & \mathbf{L}_{1p+2h \cdot N} & \mathbf{L}_{7p+2h \cdot N} & \mathbf{L}_{13p+2h \cdot N} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+1h \cdot N} & \mathbf{L}_{-5p+1h \cdot N} & \mathbf{L}_{1p+1h \cdot N} & \mathbf{L}_{7p+1h \cdot N} & \mathbf{L}_{13p+1h \cdot N} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p} & \mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{L}_{7p} & \mathbf{L}_{13p} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p-1h \cdot N} & \mathbf{L}_{-5p-1h \cdot N} & \mathbf{L}_{1p-1h \cdot N} & \mathbf{L}_{7p-1h \cdot N} & \mathbf{L}_{13p-1h \cdot N} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p-2h \cdot N} & \mathbf{L}_{-5p-2h \cdot N} & \mathbf{L}_{1p-2h \cdot N} & \mathbf{L}_{7p-2h \cdot N} & \mathbf{L}_{13p-2h \cdot N} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w, (m, 11p)} \\ \mathbf{I}_{w, (m, 5p)} \\ \mathbf{I}_{w, (m, -1p)} \\ \mathbf{I}_{w, (m, -7p)} \\ \mathbf{I}_{w, (m, -13p)} \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.136)$$

Rozwiązanie jakościowe (2.136) poszukiwanego wektora składowych symetrycznych prądów stojana w rozpatrywanych warunkach pracy silnika zawiera niezerowe elementy według zapisu

$$\mathbf{I}_s = \left[ \dots \mathbf{I}_{s, (m, 2h \cdot N)}^{\text{mod}(1-2g, 3)} \mathbf{I}_{s, (m, 1h \cdot N)}^{\text{mod}(1-g, 3)} \mathbf{I}_{s, (m, 0 \cdot p)}^1 \mathbf{I}_{s, (m, -1h \cdot N)}^{\text{mod}(1+g, 3)} \mathbf{I}_{s, (m, -2h \cdot N)}^{\text{mod}(1+2g, 3)} \dots \right] \quad (2.137)$$

- indeks górny w wektorze rozwiązań oznacza numer składowej symetrycznej obwodu stojana, natomiast indeksy dolne pulsację.

Następstwo kolejności występowania harmonicznych żłbkowych w wektorach składowych symetrycznych prądów stojana kształtuje jednocześnie zmianę momentów cząstkowych, a więc uwzględniając niezerowe elementy wektora prądów (2.137) oraz związki (2.135), otrzymuje się zredukowane formy kwadratowe

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{\text{cm}}^{\text{I}} = \mathbf{j} \cdot \sum_k \left[ \dots \begin{matrix} * \\ \mathbf{I}_{s,(-m,-2h \cdot N)}^{\text{mod}(1+2g,3)} \\ * \\ \mathbf{I}_{s,(-m,-1h \cdot N)}^{\text{mod}(1+g,3)} \\ * \\ \mathbf{I}_{s,(-m,0 \cdot p)}^1 \\ * \\ \mathbf{I}_{s,(-m,1h \cdot N)}^{\text{mod}(1-g,3)} \\ * \\ \mathbf{I}_{s,(-m,2h \cdot N)}^{\text{mod}(1-2g,3)} \\ \dots \end{matrix} \right] \cdot \\
 \left[ \begin{matrix} \ddots & & & & & & \ddots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+\beta^1+2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{-5p+\beta^1+2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{1p+\beta^1+2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{7p+\beta^1+2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{13p+\beta^1+2h \cdot N}^{\approx} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+\beta^1+1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{-5p+\beta^1+1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{1p+\beta^1+1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{7p+\beta^1+1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{13p+\beta^1+1h \cdot N}^{\approx} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+\beta^1}^{\approx} & \mathbf{L}_{-5p+\beta^1}^{\approx} & \mathbf{L}_{1p+\beta^1}^{\approx} & \mathbf{L}_{7p+\beta^1}^{\approx} & \mathbf{L}_{13p+\beta^1}^{\approx} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+\beta^1-1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{-5p+\beta^1-1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{1p+\beta^1-1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{7p+\beta^1-1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{13p+\beta^1-1h \cdot N}^{\approx} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+\beta^1-2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{-5p+\beta^1-2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{1p+\beta^1-2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{7p+\beta^1-2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{13p+\beta^1-2h \cdot N}^{\approx} & \dots \\ \ddots & & & & & & \ddots \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,(m,11p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,5p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-1p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-7p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-13p)} \\ \vdots \end{matrix} \right] \quad (2.138)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{\text{cm}}^{\text{II}} = \mathbf{j} \cdot \sum_k \left[ \dots \begin{matrix} \mathbf{I}_{s,(m,2h \cdot N)}^{\text{mod}(1-2g,3)} \\ \mathbf{I}_{s,(m,1h \cdot N)}^{\text{mod}(1-g,3)} \\ \mathbf{I}_{s,(m,0 \cdot p)}^1 \\ \mathbf{I}_{s,(m,-1h \cdot N)}^{\text{mod}(1+g,3)} \\ \mathbf{I}_{s,(m,-2h \cdot N)}^{\text{mod}(1+2g,3)} \\ \dots \end{matrix} \right] \cdot \\
 \left[ \begin{matrix} \ddots & & & & & & \ddots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+\beta^{\text{II}}+2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{-5p+\beta^{\text{II}}+2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{1p+\beta^{\text{II}}+2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{7p+\beta^{\text{II}}+2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{13p+\beta^{\text{II}}+2h \cdot N}^{\approx} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+\beta^{\text{II}}+1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{-5p+\beta^{\text{II}}+1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{1p+\beta^{\text{II}}+1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{7p+\beta^{\text{II}}+1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{13p+\beta^{\text{II}}+1h \cdot N}^{\approx} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+\beta^{\text{II}}}^{\approx} & \mathbf{L}_{-5p+\beta^{\text{II}}}^{\approx} & \mathbf{L}_{1p+\beta^{\text{II}}}^{\approx} & \mathbf{L}_{7p+\beta^{\text{II}}}^{\approx} & \mathbf{L}_{13p+\beta^{\text{II}}}^{\approx} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+\beta^{\text{II}}-1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{-5p+\beta^{\text{II}}-1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{1p+\beta^{\text{II}}-1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{7p+\beta^{\text{II}}-1h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{13p+\beta^{\text{II}}-1h \cdot N}^{\approx} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-11p+\beta^{\text{II}}-2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{-5p+\beta^{\text{II}}-2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{1p+\beta^{\text{II}}-2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{7p+\beta^{\text{II}}-2h \cdot N}^{\approx} & \mathbf{L}_{13p+\beta^{\text{II}}-2h \cdot N}^{\approx} & \dots \\ \ddots & & & & & & \ddots \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,(m,11p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,5p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-1p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-7p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-13p)} \\ \vdots \end{matrix} \right] \quad (2.139)
 \end{aligned}$$

gdzie:

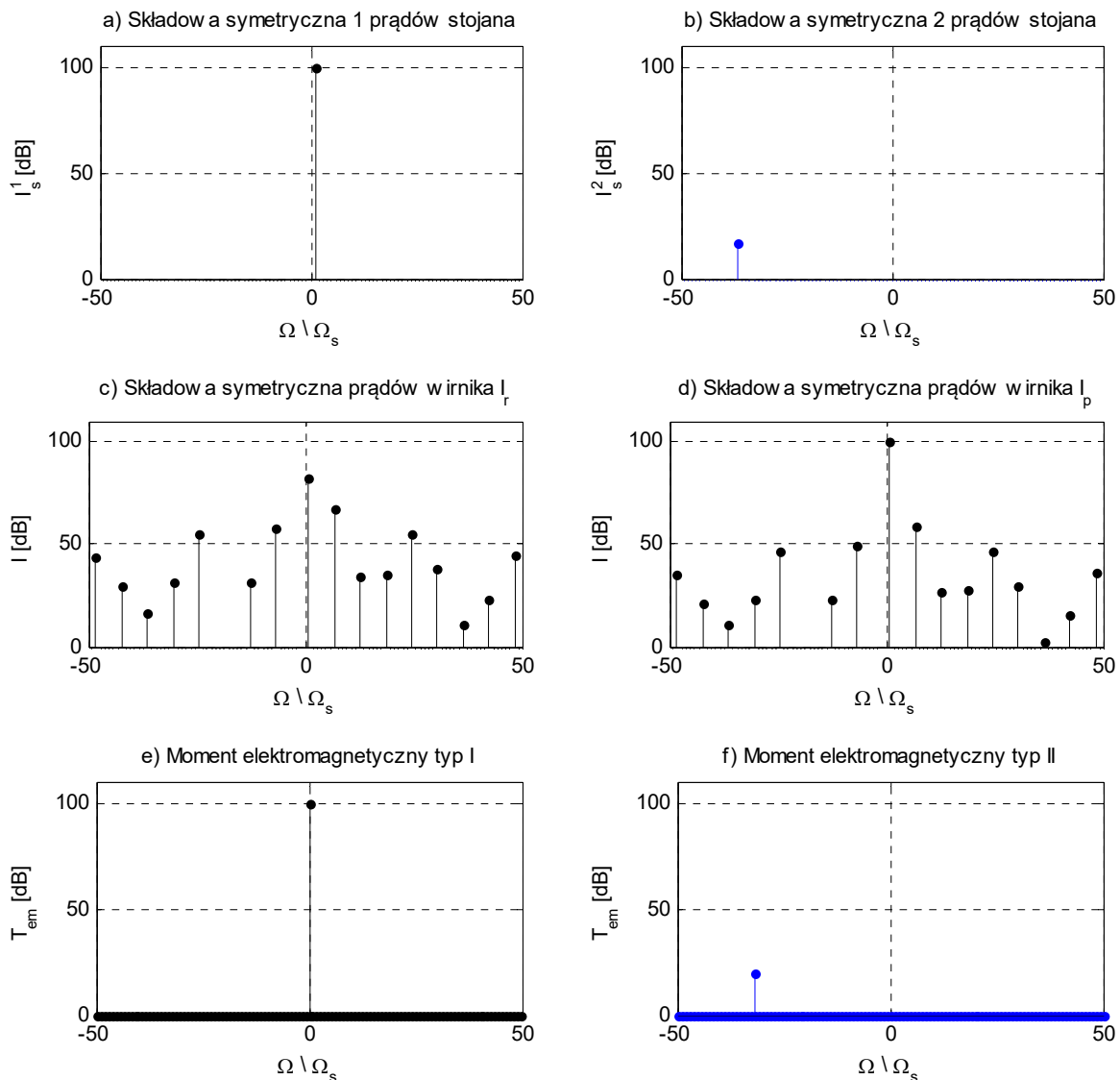
$$\mathbf{L}_{n \cdot p}^{\approx} = (n \cdot p + \beta + zh \cdot N) \cdot \left[ 0 \quad \dots \quad \mathbf{L}_{n \cdot p + \beta + zh \cdot N}^{\text{mod}(n \cdot p + \beta + zh \cdot N, N)} \quad \dots \quad 0 \right], \mathbf{L}_{n \cdot p + \beta + zh \cdot N}^{\text{mod}(n \cdot p + \beta + zh \cdot N, N)} = \mathbf{L}_{n \cdot p + \beta + zh \cdot N} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{j} \cdot [(n \cdot p + \beta + zh \cdot N) \cdot \varphi_0]}$$

$$\text{oraz warunki sumowania: } \beta^{\text{I}} = g \cdot N = 6k \cdot p, \beta^{\text{II}} = g \cdot N = (4 + 6k) \cdot p, z \in \mathbf{Z} \quad (2.140)$$

Według klasyfikacji macierzy indukcyjności wzajemnych momenty przemienne generowane przy współudziale składowych żłbkowych stojana posiadają niezerowe wartości momentu cząstkowego typu I oraz II, jeśli parametr  $g$  wynosi  $\mathbf{0}$  lub  $\mathbf{2}$ . Silnik z grupy  $\mathbf{1}$ , ze względu

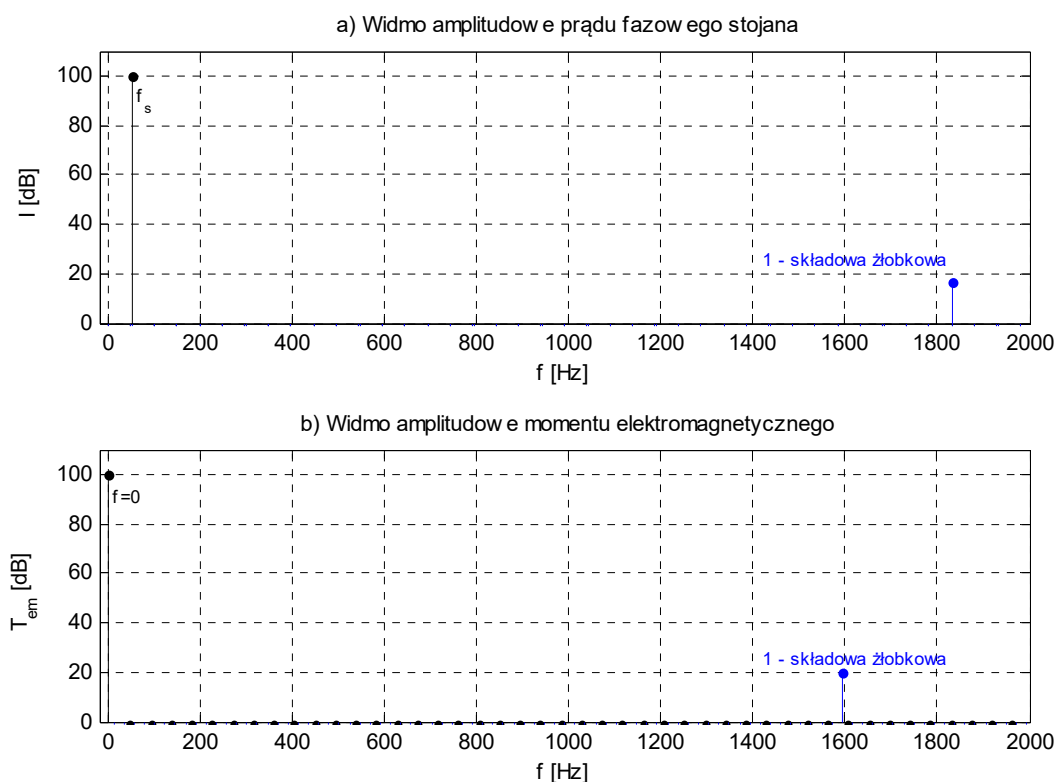
na brak spełnienia warunku  $\beta^{\text{II}}$ , generuje wyłącznie momenty synchroniczne w zbiorze typu I. Przykładowe wyniki obliczeń (rys. 2.3-2.4) związane z omawianym stanem pracy wykonano dla silnika wzorcowego [p.2.5] zwartego osobnymi pierścieniami i obciążonego momentem znamionowym. Poniższe rysunki ilustrują widma amplitudowe w funkcji względnej wartości pulsacji składowych symetrycznych prądów stojana oraz „p-tych” składowych symetrycznych prądów wirnika i momentów cząstkowych. Zgodnie z parametrami konstrukcyjnymi (tabela nr 2.2), maszynę przyporządkowano do zbioru rozwiązań **2**.

- widmo amplitudowe prądów i momentu elektromagnetycznego  $\Omega = 155,5 \text{ rad/s}$ :



**Rys. 2.3** Względne widmo amplitudowe w funkcji pulsacji – silnik symetryczny zwarty osobnymi pierścieniami, a) składowa symetryczna 1 prądów stojana, b) składowa symetryczna 2 prądów stojana, c) składowa symetryczna „p-ta” prądu klatki rozruchowej, d) składowa symetryczna „p-ta” prądu klatki pracy, e) moment elektromagnetyczny typ I, f) moment elektromagnetyczny typ II.

- widmo amplitudowe prądu fazowego i momentu elektromagnetycznego  $s=0,01$ :



**Rys. 2.4** Względne widmo amplitudowe w funkcji częstotliwości – silnik symetryczny zwarty osobnymi pierścieniami, a) prąd fazowy stojana, b) wypadkowy moment elektromagnetyczny.

Przedstawiony szczególnie przypadek pracy silnika z perspektywy niesymetrii rezystancyjnej wirnika (istnienie składowych żłobkowych) nie ma praktycznego znaczenia w poszukiwaniu właściwych cech jakościowych wykorzystywanych przy diagnozowaniu obwodów klatek. Dlatego z dalszej analizy uszkodzeń parametrycznych powyższe zagadnienie zostanie pominięte, choć pełni ważną rolę w dziedzinie konstrukcji oraz projektowania maszyn indukcyjnych. Z tych samych przyczyn nie uwzględniono wyprowadzenia zależności opisujących rzeczywiste użłobkowanie stojana i wirnika (nierównomierna szczelina powietrzna), które jest odpowiedzialne za powstania dodatkowych prądów o pulsacjach będących zależnościami całkowitych wielokrotności wyrażenia typu  $(z_s \pm N)$ . Opuszczenie tych składowych w obliczeniach maszyn średniej oraz dużej mocy na ogół znacząco nie modyfikuje otrzymanych efektów ilościowych [42], [73] poza prędkościami, gdy przemienne momenty żłobkowe (reluktancyjne) osiągają punkt synchronizmu. Zaniedbanie w opisie szczeliny powietrznej sum i różnic przepływów  $(z_s \pm N)$  powoduje, że funkcja grubości szczeliny powietrznej pozostaje stała - część równań macierzowych dotycząca indukcyjności własnych, jak również wzajemnych obwodów stojana i wirnika nie zależy od kąta obrotu, a co za tym idzie wyznaczenie współczynników macierzy indukcyjności wzajemnych stojan - wirnik ulega znaczącemu uproszczeniu [67], [80].

### 2.5.2 Widmo prądu stojana w warunkach niesymetrii elektrycznej od strony wirnika

Wprowadzenie w układzie równań niesymetrii rezystancyjnej wirnika jest powodem zmian jakościowych i ilościowych wektorów prądu stojana [10], [26], [73], [109]. Wystąpienie składowych widma związanych z uszkodzeniem staje się możliwe w przypadku, gdy macierz lub macierze rezystancji wirnika będą pełne. Wymieniona struktura macierzy powoduje, że dla każdej składowej symetrycznej wirnika danego rzędu harmonicznej przestrzennej wskutek połączeń rezystancyjnych istnieją wymuszenia pierwotnie wywołane przez rozwiązanie równania centralnego składowej pierwszej stojana. W tych warunkach wektory prądów wirnika również muszą zawierać we wszystkich pozycjach składniki z niezerowymi wartościami sprzęgając ze sobą wektory wierszowe współczynników indukcyjności spoza równania centralnego składowej symetrycznej pierwszej i drugiej stojana. Dzięki temu w wektorach składowych symetrycznych mogą powstać dodatkowe prądy mające cechy diagnostyczne. Jeżeli w równaniach napięciowych (2.97) pozostawić jedynie uwzględniane harmoniczne przestrzenne, wówczas otrzymuje się dla składowej pierwszej podukład równań pozwalający przewidzieć własności jakościowe rozwiązania

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{sw}^1 \cdot \mathbf{I}_w) = j \cdot \boldsymbol{\Omega}_s^1 \cdot \mathbf{L}_{sw}^1 \cdot \mathbf{I}_w =$$

$$= j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Omega_{(m,12p)} \\ \Omega_{(m,6p)} \\ \Omega_{(m,0p)} \\ \Omega_{(m,-6p)} \\ \Omega_{(m,-12p)} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{L}_{7p} & \mathbf{L}_{13p} & \mathbf{L}_{19p} & \mathbf{L}_{25p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{L}_{7p} & \mathbf{L}_{13p} & \mathbf{L}_{19p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{-11p} & \mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{L}_{7p} & \mathbf{L}_{13p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{-17p} & \mathbf{L}_{-11p} & \mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{L}_{7p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{-23p} & \mathbf{L}_{-17p} & \mathbf{L}_{-11p} & \mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{L}_{1p} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,(m,11p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,5p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-1p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-7p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-13p)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

W powyższym równaniu wypisano jawnie całe podwektory indukcyjności wzajemnych oraz prądów wirnika. Wynikiem rozwiązania (2.141) względem równania centralnego wektora składowej pierwszej (drugiej – zależność 2.142) stojana mogą być wyłącznie prądy posiadające pulsacje o całkowitych kombinacjach minimalnej różnicy między niezerowymi harmonicznymi przestrzennymi ( $6k \cdot p\Omega$ ). Stosując analogiczną metodę analizy równania składowej drugiej, tzn.

mnożąc macierz indukcyjności wzajemnych przyporządkowaną składowej drugiej przez wektory prądów wirnika można otrzymać następujące wyrażenie

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{sw}^2 \cdot \mathbf{I}_w) = j \cdot \Omega_s^2 \cdot \mathbf{L}_{sw}^2 \cdot \mathbf{I}_w =$$

$$= j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Omega_{(m,10p)} \\ \Omega_{(m,4p)} \\ \Omega_{(m,-2p)} \\ \Omega_{(m,-8p)} \\ \Omega_{(m,-14p)} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{L}_{5p} & \mathbf{L}_{11p} & \mathbf{L}_{17p} & \mathbf{L}_{23p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{L}_{5p} & \mathbf{L}_{11p} & \mathbf{L}_{17p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{-13p} & \mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{L}_{5p} & \mathbf{L}_{11p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{-19p} & \mathbf{L}_{-13p} & \mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{L}_{5p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{-25p} & \mathbf{L}_{-19p} & \mathbf{L}_{-13p} & \mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{L}_{-1p} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,(m,11p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,5p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-1p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-7p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-13p)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

Na podstawie powyższych równań macierzowych pulsacje sygnałów diagnostycznych generowanych w poszczególnych wektorach prądów składowych symetrycznych stojana zawierają się w dwóch zbiorach uporządkowanych według rzędu harmonicznej czasowej  $m=1, 3, 5, 7, \dots$ :

$$\begin{cases} \mathbf{I}_s^{\text{mod}(m,3)} : m \Omega_s + (6k - 0) \cdot p \Omega \\ \mathbf{I}_s^{\text{mod}(-m,3)} : m \Omega_s + (6k - 2) \cdot p \Omega \end{cases}, \forall k \in \mathbf{Z} \quad (2.143)$$

Równaniom napięciowym (2.141) oraz (2.142) można nadać bardziej szczegółową postać dającą wgląd w związki tworzące wektory poszukiwanych rozwiązań

$$\underline{\mathbf{U}}_{s,(m,6k-p)}^{\text{mod}(m,3)} = \mathbf{R}_s^0 \cdot \underline{\mathbf{I}}_{s,(m,6k-p)}^{\text{mod}(m,3)} + j \cdot (m \Omega_s + 6k \cdot p \Omega) \cdot \left( \mathbf{L}_s^{\text{mod}(m,3)} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{s,(m,6k-p)}^{\text{mod}(m,3)} + \sum_{z=n+l} \underline{\mathbf{L}}_{n-p}^{\text{mod}(n-p,N)} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{w,(m,l-p)}^{\text{mod}(n-p,N)} \right),$$

$$\forall (l = -n + 6k), n = \dots -5, 1, 7 \dots \quad (2.144)$$

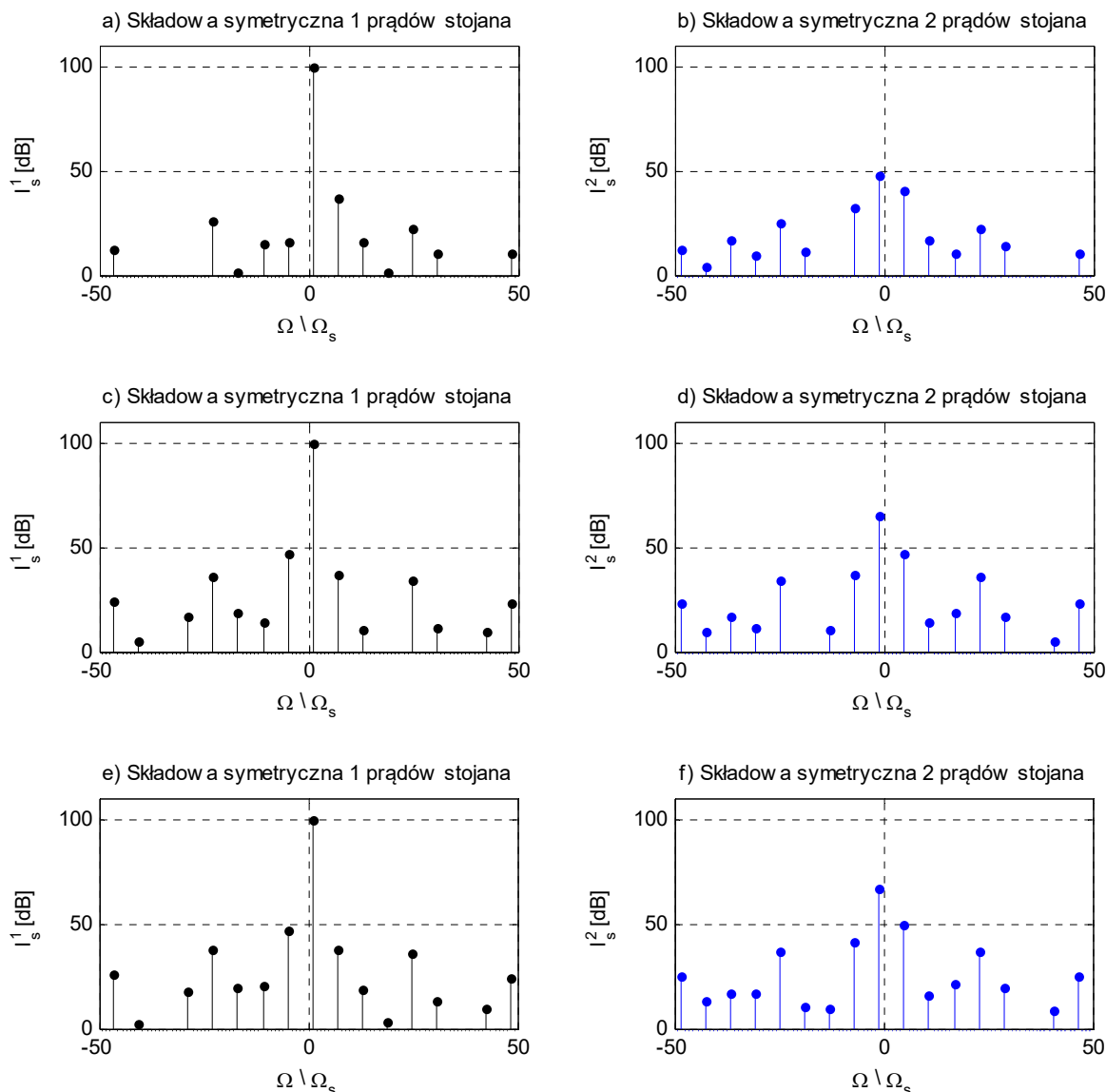
$$\underline{\mathbf{U}}_{s,(m,(6k-2)-p)}^{\text{mod}(-m,3)} = \mathbf{R}_s^0 \cdot \underline{\mathbf{I}}_{s,(m,(6k-2)-p)}^{\text{mod}(-m,3)} + j \cdot [m \Omega_s + (6k - 2) \cdot p \Omega] \cdot \left( \mathbf{L}_s^{\text{mod}(-m,3)} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{s,(m,(6k-2)-p)}^{\text{mod}(-m,3)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{z=n+l} \underline{\mathbf{L}}_{n-p}^{\text{mod}(n-p,N)} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{w,(m,l-p)}^{\text{mod}(n-p,N)} \right), \forall (l = -n + 6k - 2), n = \dots -7, -1, 5 \dots \quad (2.145)$$

Warto zwrócić uwagę, że ilościowe cechy niesymetrii rezystancyjnej są bezpośrednio przenoszone między wektorami prądów wirnika przez sprzężenia wzajemne między tymi obwodami. Jeśli tylko jeden z obwodów wykazuje cechy niesymetrii, to skutek wspomnianych sprzężeń

wzajemnych wektor prądów wirnika obwodu symetrycznego również będzie pełny. W celu zilustrowania analizy jakościowej prądów stojana wykonano obliczenia dla silnika obciążonego momentem znamionowym z uszkodzonym jednym prętem klatki rozruchowej lub klatki pracy oraz łączną niesymetrią obu klatek – pod sobą.

- widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów stojana  $\Omega=155,5$  rad/s:

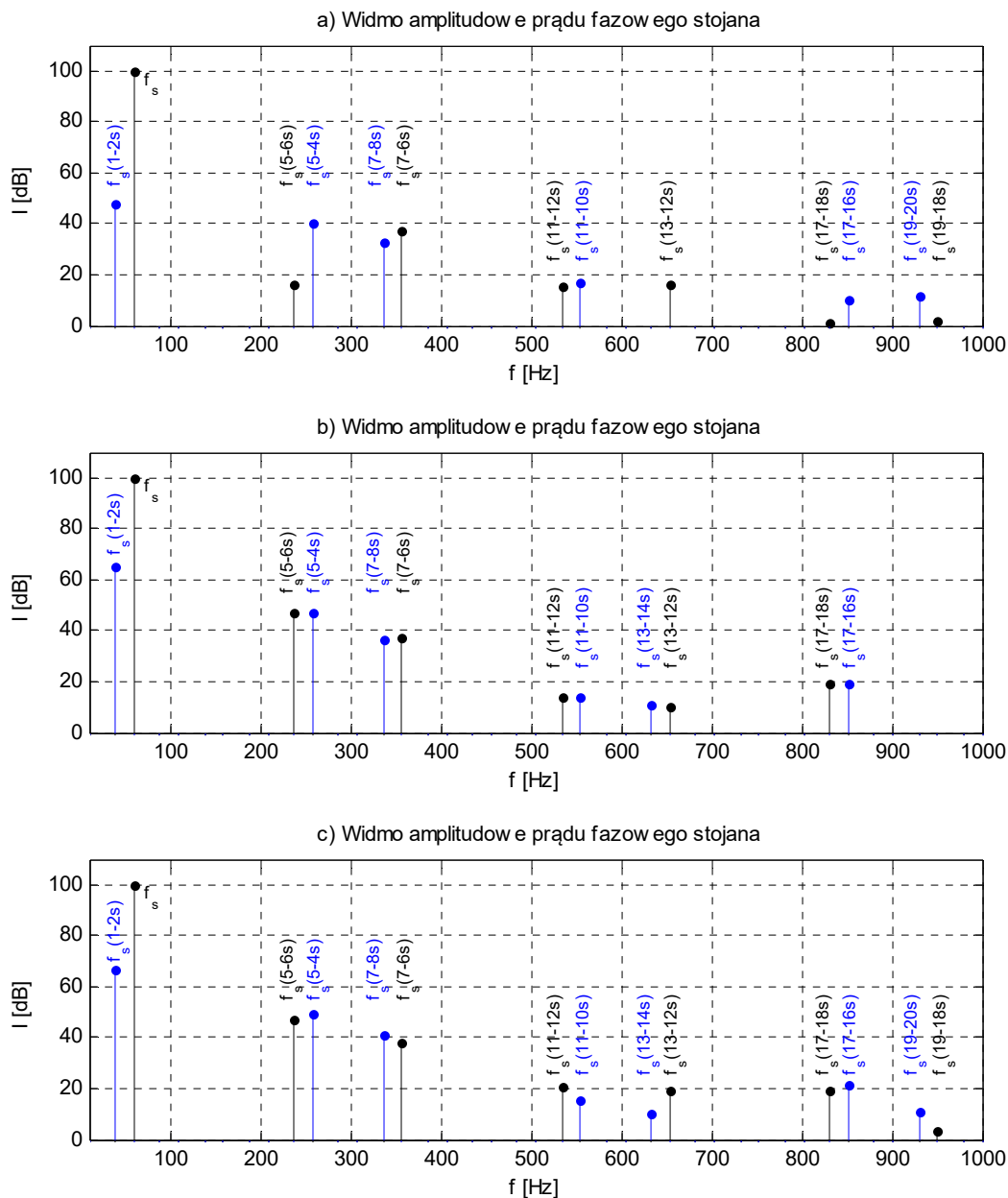


**Rys. 2.5** Względne widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów stojana w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a-b) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, c-d) przerwa w pręcie klatki pracy, e-f) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.

Głównym sygnałem świadczącym o niesymetrii rezystancyjnej w dowolnym obwodzie wirnika jest prąd składowej drugiej stojana z pulsacją ( $\Omega_s-2p\Omega$ ). Wybrany sygnał wyróżnia stosunkowo duża wartość amplitudy już przy niesymetrii jednego pręta klatki [73], [92], [104].

Z racji ograniczonego udziału reaktancji rozproszeń dla małych poślizgów o rozplywie prądów wirnika decyduje przede wszystkim stosunek rezystancji oczek klatek. Zgodnie z rysunkami 2.6 (a-c), proporcje między amplitudami składowej poślizgowej otrzymane w sytuacji przerwania osobno pręta klatki górnej i klatki dolnej są zbliżone do tych relacji. Stąd łączna niesymetria obwodów wirnika nie spowoduje widocznej zmiany wartości składowej diagnostycznej prądu względem modelowanej przerwy klatki pracy w początkowej fazie rozwoju uszkodzenia.

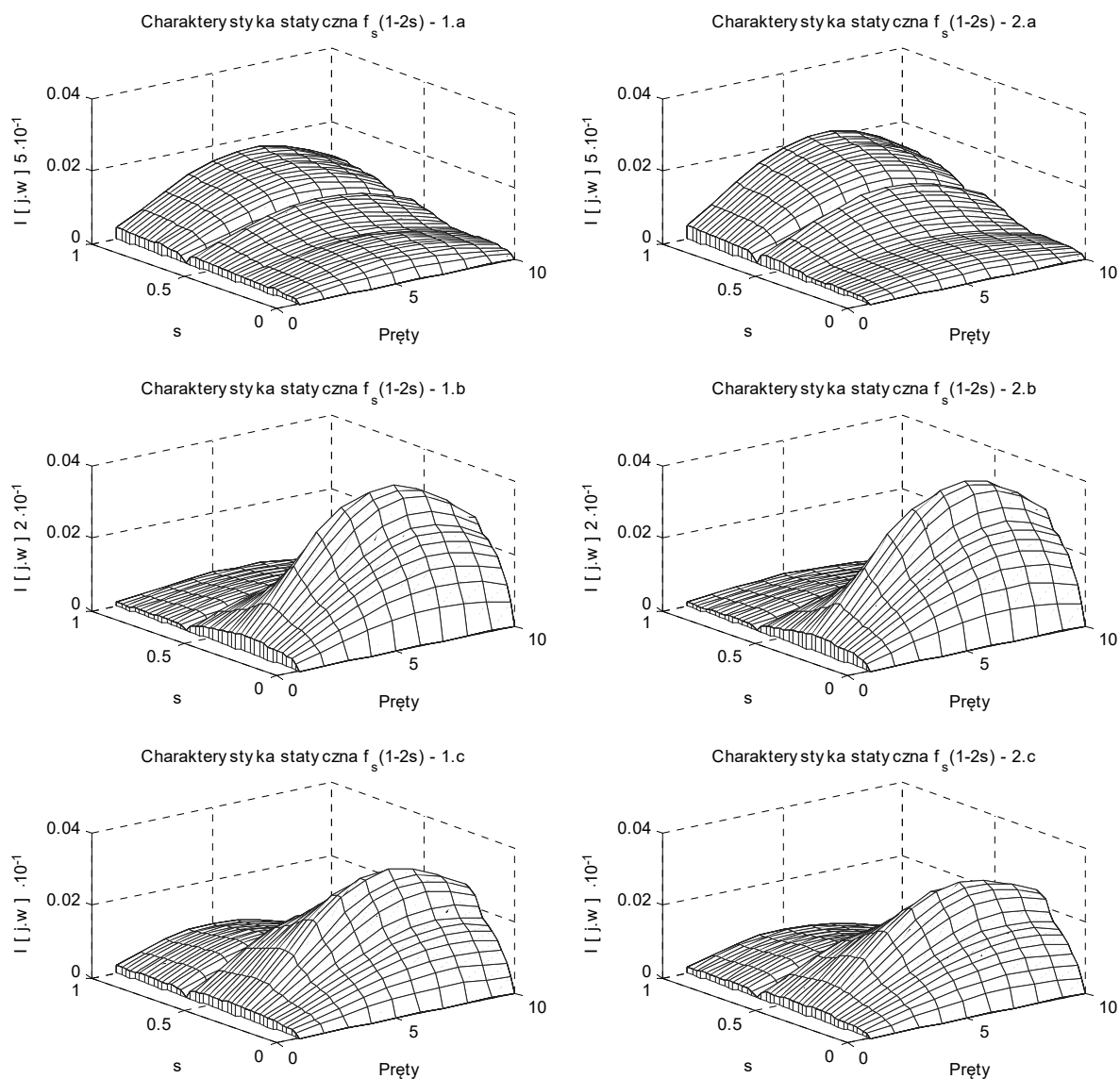
- widmo amplitudowe prądu fazowego obwodu stojana  $s=0,01$ :



**Rys. 2.6** Względne widmo amplitudowe prądu w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, b) przerwa w pręcie klatki pracy, c) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.



Skuteczność diagnozowania obwodów klatek wirnika w ten sposób – składowa prądu fazowego  $f_s(1-2s)$ , można zilustrować typowym przykładem z eksploatacji maszyn [32], [44], [92], [110], jeżeli następuje stopniowe zerwanie prętów leżących obok siebie. Wyniki obliczeń obrazujące rezultaty ilościowe związane z wzrostem liczby przerwanych prętów w funkcji poślizgu i odmiennych konstrukcjach wirnika zawierają rysunki nr 2.7.

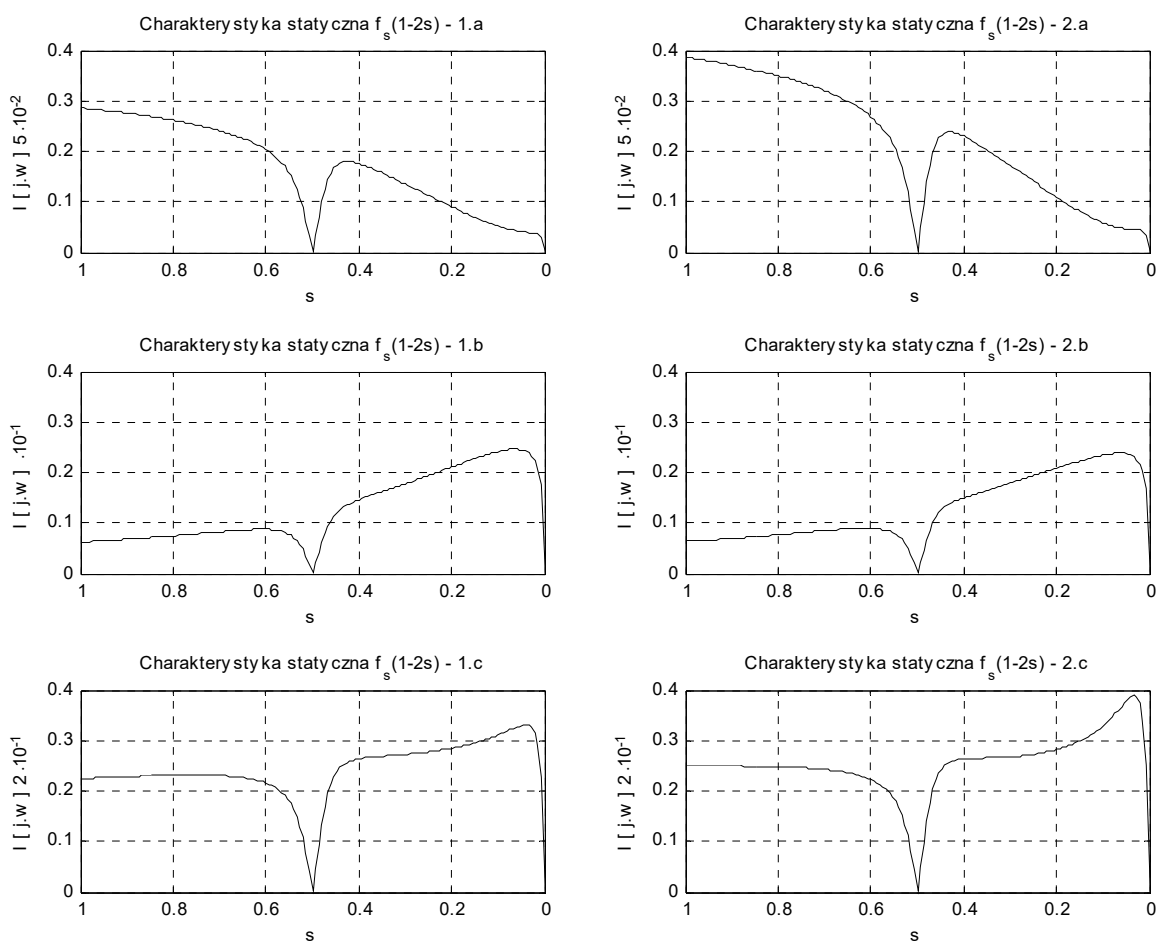


**Rys. 2.7** Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności składowej prądu fazowego  $f_s(1-2s)$  w funkcji poślizgu i liczby uszkodzonych prętów, 1. (a-c) silnik zwarty wspólnym pierścieniem, 2. (a-c) silnik zwarty osobnymi pierścieniami – a) niesymetria klatki rozruchowej, b) niesymetria klatki pracy, c) niesymetria klatki rozruchowej i klatki pracy.

Charakterystyki zmienności prądu  $f_s(1-2s)$  wskazują, że obserwowany sygnał narasta w przybliżeniu liniowo wraz z liczbą uszkodzonych prętów aż do chwili, gdy kąt fazowy składowej diagnostycznej zaczyna ponownie maleć po przekroczeniu pewnej granicy powodując

zmniejszenie jej modułu. Punkt, w którym zachodzi zmiana kierunku narastania kąta fazowego sygnału diagnostycznego jest funkcją rezystancji modelującej uszkodzenie jak również reakcji rozproszenia pręta zależnej od aktualnej wartości poślizgu. Dlatego też przy różnych prędkościach wspomniana granica ulega zauważalnemu przesunięciu [73], [92].

Powszechnie przyjęto, że uszkodzenie wirnika spowodowane niesymetrią rezystancyjną nieznaczącej liczby prętów nie prowadzi do groźnych skutków w działaniu silnika indukcyjnego [32], [44]. Odmiennie kształtuje się przypadek wystąpienia przerwy w segmencie pierścienia zwierającego, gdzie już na etapie uszkodzenia pojedynczego wycinka tej części klatki można dostrzec prawie dwukrotny wzrost amplitudy prądu diagnostycznego wobec niesymetrii spowodowanej pęknięciem pręta.



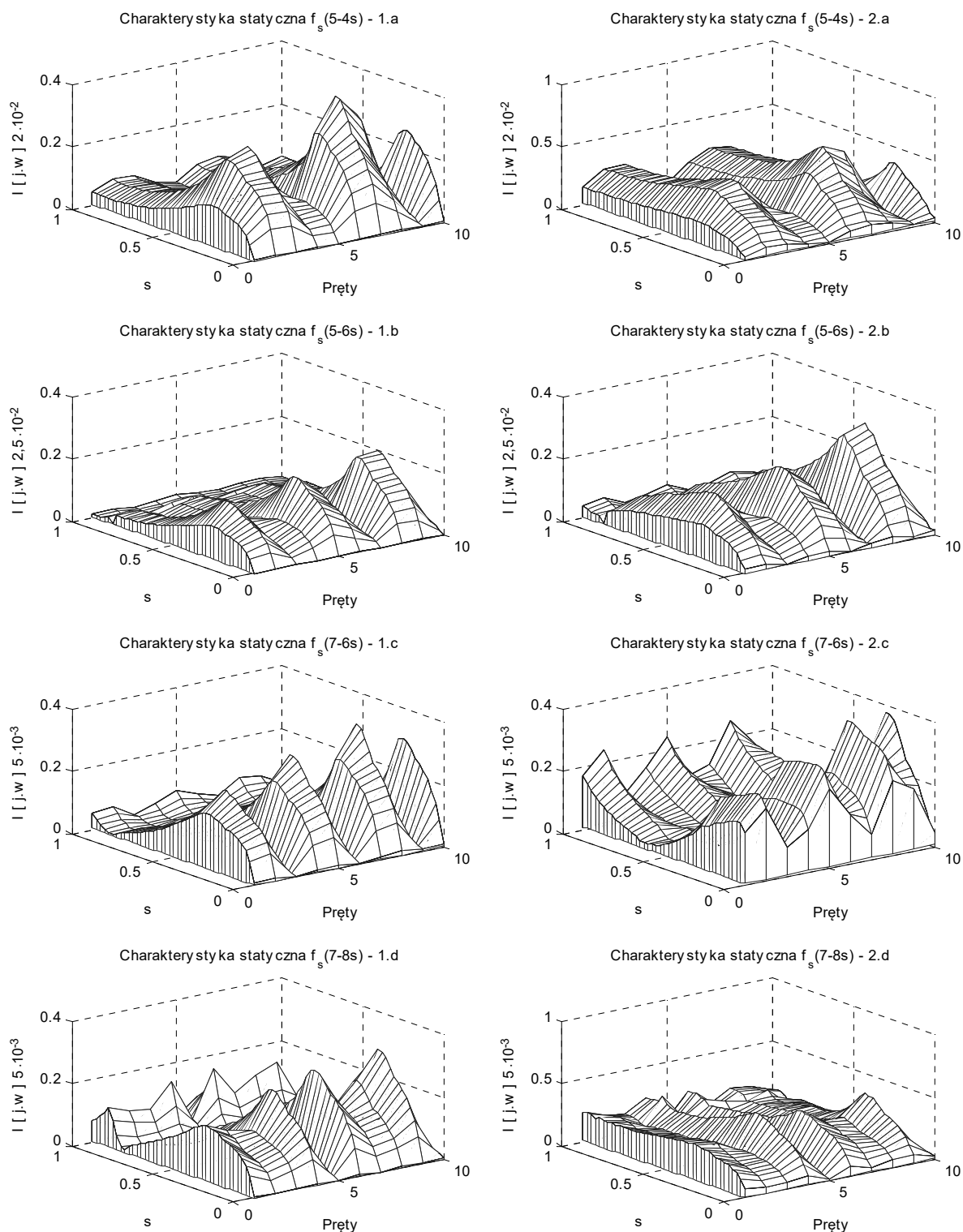
**Rys. 2.8** Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności składowej prądu fazowego  $f_s(1-2s)$  w funkcji poślizgu, 1. (a-c) silnik zwarty wspólnym pierścieniem, 2. (a-c) silnik zwarty osobnymi pierścieniami – a) przerwa w segmencie klatki rozruchowej, b) przerwa w segmencie klatki pracy, c) przerwa w segmencie klatki rozruchowej i klatki pracy.

Przykładowe obliczenia z powyższego rysunku nr 2.8-1, dotyczące silnika zwanego wspólnym pierścieniem przeprowadzono modyfikując rezystancję wycinka segmentu w macierzy głównej

wirnika. W rzeczywistych warunkach taka niesymetria oznacza zawsze uszkodzenie obwodu rozruchowego i pracy łącznie, tak więc rysunki 2.8-1 (a-b) przedstawiają wirtualną przerwę pierścienia zwierającego dostosowaną do potrzeb porównawczych. Ponadto wspólną cechą rozpatrywanych konstrukcji jest niezmiennosc charakteru jakościowego sygnału diagnostycznego w całym zakresie jego zmian. Z tych względów, w dalszej części pracy szczególną uwagę poświęcono badaniu rozwiązań numerycznych dla silnika zwartego osobnymi pierścieniami.

Według ogólnych zależności (2.141) i (2.142), w widmie prądu stojana oprócz podstawowej składowej poślizgowej wystąpią prądy diagnostyczne wokół kolejnych nieparzystych wielokrotności harmonicznej sieciowej, co stanowi szczególną cechę maszyny indukcyjnej z uszkodzonymi elektrycznie obwodami wirnika, których analiza podnosi pewność procesu oceny stanu silnika. Stosunkowo łatwo można wykazać, że diagnostyka wirnika oparta wyłącznie na częstotliwości  $f_s \cdot (1-2s)$  będzie niejednoznaczna w sytuacji typowych asymetrii elektromagnetycznych [28], [92], [104]. Znane są również konstrukcje silników otrzymujące już w czasie ich projektowania właściwości maszyny niesymetrycznej magnetycznie tj., gdy liczba gałęzi równoległych uzwojenia stojana pokrywa się z liczbą par biegunów [4], [5], [44]. Jeżeli dodać wśród wspomnianych przyczyn generowania w widmie prądu stojana składowej  $f_s \cdot (1-2s)$  istnienie zewnętrznego momentu tętniącego  $2f_s \cdot s$  (napędy sprężarek tłokowych), wówczas jedynie analiza wskazanych wcześniej obszarów widma ogranicza ryzyko błędnej interpretacji otrzymanych wyników. Przyjęte założenia dotyczące stałej prędkości kątowej wykluczają badanie interakcji elektromechanicznych, choć w tym przypadku nie ma to większego znaczenia, ponieważ jak udowodniono [49], prądy generowane za pośrednictwem przemiennego momentu mechanicznego zbieżne z częstotliwością głównego sygnału diagnostycznego wystąpią wyłącznie w wektorze składowej pierwszej. Natomiast efekty wywołane niesymetrią wewnętrzną związane z prądem  $f_s \cdot (1-2s)$  zostaną przyporządkowane wektorowi składowej drugiej. Zatem badanie skutków niesymetrii rezystancyjnej obwodów wirnika należy, rozważając porównując tendencje zmian sygnałów niskoczęstotliwościowych z prądami zlokalizowanymi w pobliżu piątej i siódmej wielokrotności składowej podstawowej lub dalszych. Z przeprowadzonych obliczeń numerycznych oraz dotychczas zebranych doświadczeń [10], [32], [44] za najbardziej reprezentatywne uznano prądy  $f_s \cdot (5-4s) - f_s \cdot (5-6s)$ ;  $f_s \cdot (7-6s) - f_s \cdot (7-8s)$ . Wymienione sygnały odznaczają się dobrą skutecznością w diagnozowaniu uszkodzeń wirnika nawet przy obciążeniu nieprzekraczającym połowy momentu znamionowego [32]. Dodatkową zaletą wynikającą z obserwacji pasma średnich częstotliwości jest znacznie ograniczony wpływ oddziaływań elektromechanicznych – wahań prędkości kątowej będących funkcją momentu bezwładności, na amplitudy tych prądów, a w dalszej konsekwencji momentu elektromagnetycznego [p.3.5].

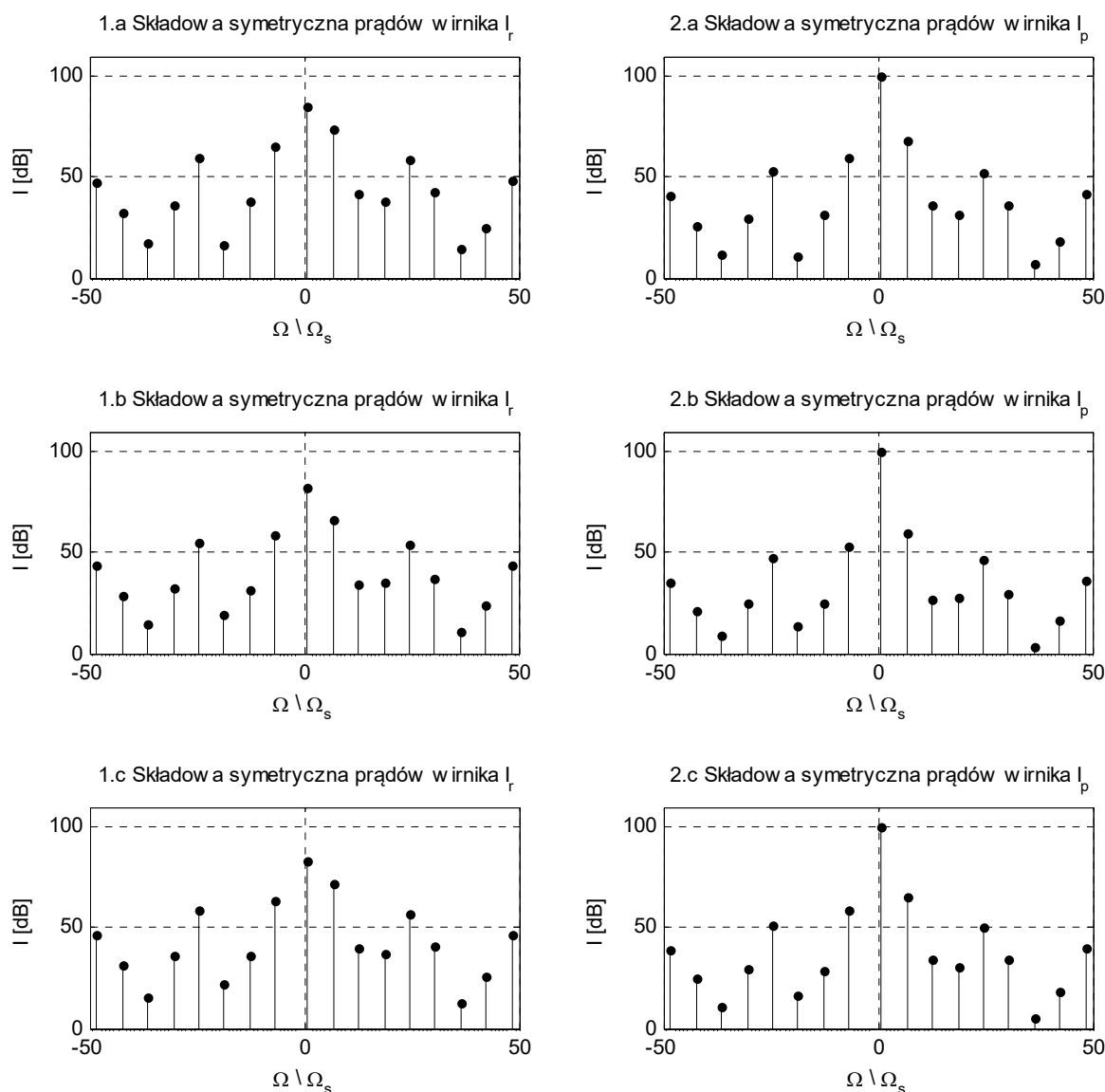
Charakterystyki statyczne sygnałów diagnostycznych w funkcji poślizgu oraz liczby uszkodzonych prętów klatki przedstawiają poniższe rysunki nr 2.9.



**Rys. 2.9** Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności wybranych składowych prądu fazowego w funkcji poślizgu i liczby uszkodzonych prętów – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1. niesymetria klatki pracy, 2. niesymetria klatki rozruchowej i klatki pracy.

Z analizy składowych symetrycznych prądów stojana (2.141) i (2.142) wynika, że niesymetria rezystancyjna wirnika nie powoduje w sensie jakościowym modyfikacji widma prądów oczkowych klatek względem silnika obustronnie symetrycznego [p.2.5.1]. Zmiany mają cechy ilościowe, będąc przyczyną nierównomiernego rozplywu prądów wewnątrz obwodów wirnika. Jako przykład wykorzystano widma amplitudowe prądów oczkowych „p-tych” składowych symetrycznych odniesione do prądu mod(1p,N) klatki pracy.

- widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów wirnika  $\Omega=155,5$  rad/s:



**Rys. 2.10** Względne widmo amplitudowe w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1. prąd „p-tej” składowej symetrycznej prądów klatki rozruchowej, 2. prąd „p-tej” składowej symetrycznej prądów klatki pracy, a) przerwa w pręcie klatki górnej, b) przerwa w pręcie klatki dolnej, c) przerwa w pręcie klatki górnej i dolnej.

### 2.5.3 Widmo momentu elektromagnetycznego w warunkach niesymetrii elektrycznej wirnika

Analiza generowanego momentu elektromagnetycznego dla niesymetrii rezystancyjnej wirnika przeprowadzono według ogólnych związków (2.125) oraz (2.126) podanych w podrozdziale [p.2.4.3]. W tych równaniach całkowity moment elektromagnetyczny został sprowadzony do superpozycji momentów typu I oraz II. Własności budowy silnika dwuklatkowego sprawiają, że wymienione momenty ulegają dalszemu podziałowi na momenty elementarne wytwarzane osobno przez każdą klatkę wirnika [55], [74], [108] – liniowy układ równań różniczkowych. Rozkład tych składowych warunkuje charakter ilościowy momentu całkowitego i powinien być uwzględniony w obliczeniach numerycznych. W analizie jakościowej wspomniany wyżej podział nie ma praktycznego uzasadnienia, ponieważ prądy klatek posiadają takie same cechy jakościowe ze względu na istnienie sprzężeń wzajemnych między obwodami wirnika [p.2.5.2]. Z tego powodu, aby nadmiernie nie rozbudowywać równań momentów cząstkowych prądy oczkowe klatek ponownie zastąpiono wypadkowym wektorem prądów wirnika. Podstawiając we wzorze (2.125) prądy składowych symetrycznych obwodu stojana z [p.2.5.2], pierwsza forma kwadratowa momentu cząstkowego typu I będzie określona przez poniższe wyrażenie

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{\text{em},(0m,6k\text{p})}^{\text{I},1} = & \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \cdot \sum_k \left[ \dots \begin{matrix} * \\ \underline{\mathbf{I}}_{\text{s},(-m,-12\text{p})}^1 \\ * \end{matrix} \begin{matrix} * \\ \underline{\mathbf{I}}_{\text{s},(-m,-6\text{p})}^1 \\ * \end{matrix} \begin{matrix} * \\ \underline{\mathbf{I}}_{\text{s},(-m,0\text{p})}^1 \\ * \end{matrix} \begin{matrix} * \\ \underline{\mathbf{I}}_{\text{s},(-m,6\text{p})}^1 \\ * \end{matrix} \begin{matrix} * \\ \underline{\mathbf{I}}_{\text{s},(-m,12\text{p})}^1 \\ * \end{matrix} \dots \right] \\
 & \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{L}_{1\text{p}} & 7\mathbf{L}_{7\text{p}} & 13\mathbf{L}_{13\text{p}} & 19\mathbf{L}_{19\text{p}} & 25\mathbf{L}_{25\text{p}} & \dots \\ \dots & -5\mathbf{L}_{-5\text{p}} & \mathbf{L}_{1\text{p}} & 7\mathbf{L}_{7\text{p}} & 13\mathbf{L}_{13\text{p}} & 19\mathbf{L}_{19\text{p}} & \dots \\ \dots & -11\mathbf{L}_{-11\text{p}} & -5\mathbf{L}_{-5\text{p}} & \mathbf{L}_{1\text{p}} & 7\mathbf{L}_{7\text{p}} & 13\mathbf{L}_{13\text{p}} & \dots \\ \dots & -17\mathbf{L}_{-17\text{p}} & -11\mathbf{L}_{-11\text{p}} & -5\mathbf{L}_{-5\text{p}} & \mathbf{L}_{1\text{p}} & 7\mathbf{L}_{7\text{p}} & \dots \\ \dots & -23\mathbf{L}_{-23\text{p}} & -17\mathbf{L}_{-17\text{p}} & -11\mathbf{L}_{-11\text{p}} & -5\mathbf{L}_{-5\text{p}} & \mathbf{L}_{1\text{p}} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{\text{w},[m,(11+6k)\cdot\text{p}]} \\ \mathbf{I}_{\text{w},[m,(5+6k)\cdot\text{p}]} \\ \mathbf{I}_{\text{w},[m,(-1+6k)\cdot\text{p}]} \\ \mathbf{I}_{\text{w},[m,(-7+6k)\cdot\text{p}]} \\ \mathbf{I}_{\text{w},[m,(-13+6k)\cdot\text{p}]} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.146)
 \end{aligned}$$

Z równania formy kwadratowej (2.146) wynika, że pierwszy moment cząstkowy typu I jest źródłem momentów stałych i przemiennych w funkcji prędkości kątowej. Wypadkowy moment

asynchroniczny stanowi sumę geometryczną momentu elektromagnetycznego pochodzącego od składowej podstawowej oraz momentów pasożytniczych wytwarzanych przy współdziałaniu wyższych harmonicznych przestrzennych [43], [55], [80]. Wszystkie momenty przemienne typu I są momentami synchronicznymi z punktem synchronizmu przypadającym w  $\Omega=0$ . Drugi składnik momentu cząstkowego typu I (2.147) generuje momenty jakościowo zbieżne względem składnika pierwszego, lecz z przeciwnymi znakami

$$\mathbf{T}_{em, (0m, 6k \cdot p)}^{I,2} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \cdot \sum_k \left[ \dots \begin{matrix} \mathbf{I}_{s, (-m, -10p)}^2 & \mathbf{I}_{s, (-m, -4p)}^2 & \mathbf{I}_{s, (-m, 2p)}^2 & \mathbf{I}_{s, (-m, 8p)}^2 & \mathbf{I}_{s, (-m, 14p)}^2 & \dots \end{matrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & -\mathbf{L}_{-1p} & 5\mathbf{L}_{5p} & 11\mathbf{L}_{11p} & 17\mathbf{L}_{17p} & 23\mathbf{L}_{23p} & \dots \\ \dots & -7\mathbf{L}_{-7p} & -\mathbf{L}_{-1p} & 5\mathbf{L}_{5p} & 11\mathbf{L}_{11p} & 17\mathbf{L}_{17p} & \dots \\ \dots & -13\mathbf{L}_{-13p} & -7\mathbf{L}_{-7p} & -\mathbf{L}_{-1p} & 5\mathbf{L}_{5p} & 11\mathbf{L}_{11p} & \dots \\ \dots & -19\mathbf{L}_{-19p} & -13\mathbf{L}_{-13p} & -7\mathbf{L}_{-7p} & -\mathbf{L}_{-1p} & 5\mathbf{L}_{5p} & \dots \\ \dots & -25\mathbf{L}_{-25p} & -19\mathbf{L}_{-19p} & -13\mathbf{L}_{-13p} & -7\mathbf{L}_{-7p} & -\mathbf{L}_{-1p} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w, [m, (11+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (5+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-1+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-7+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-13+6k) \cdot p]} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

Wykorzystując związki wyprowadzone w podrozdziale [p.2.4.3] oraz uwzględniając niezerowe wektory prądów składowych symetrycznych z poprzedniego podrozdziału, otrzymuje się formę kwadratową pierwszego składnika momentu cząstkowego typu II

$$\mathbf{T}_{em, [2m, (6k-2) \cdot p]}^{II,1} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \cdot \sum_k \left[ \dots \begin{matrix} \mathbf{I}_{s, (m, -14p)}^2 & \mathbf{I}_{s, (m, -8p)}^2 & \mathbf{I}_{s, (m, -2p)}^2 & \mathbf{I}_{s, (m, 4p)}^2 & \mathbf{I}_{s, (m, 10p)}^2 & \dots \end{matrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{L}_{1p} & 7\mathbf{L}_{7p} & 13\mathbf{L}_{13p} & 19\mathbf{L}_{19p} & 25\mathbf{L}_{25p} & \dots \\ \dots & -5\mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{L}_{1p} & 7\mathbf{L}_{7p} & 13\mathbf{L}_{13p} & 19\mathbf{L}_{19p} & \dots \\ \dots & -11\mathbf{L}_{-11p} & -5\mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{L}_{1p} & 7\mathbf{L}_{7p} & 13\mathbf{L}_{13p} & \dots \\ \dots & -17\mathbf{L}_{-17p} & -11\mathbf{L}_{-11p} & -5\mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{L}_{1p} & 7\mathbf{L}_{7p} & \dots \\ \dots & -23\mathbf{L}_{-23p} & -17\mathbf{L}_{-17p} & -11\mathbf{L}_{-11p} & -5\mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{L}_{1p} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w, [m, (11+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (5+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-1+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-7+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-13+6k) \cdot p]} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.148)$$

Według powyższej formy kwadratowej pierwszy składnik momentu cząstkowego typu II może generować tylko momenty przemienne (synchroniczne). Dla składników o formalnie ujemnych pulsacjach poszczególne elementy z (2.148) osiągają synchronizm w zakresie pracy silnikowej. W przeciwnej sytuacji składowe momentu cząstkowego II z dodatnimi pulsacjami mają punkty synchronizmu leżące w przedziale poślizgów z ujemnymi wartościami. Wskazane właściwości nie dotyczą momentu przemiennego  $2 \cdot (\Omega_s - p\Omega)$ , który staje się momentem stałym w punkcie charakterystyki mechanicznej odpowiadającemu idealnemu biegowi jałowemu. Składnik drugi momentu cząstkowego II wytwarza jakościowo takie same momenty jak (2.148) z przeciwnymi znakami

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{em, [2m, (6k-2) \cdot p]}^{II,2} = & \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \cdot \sum_k \left[ \begin{array}{cccccc} \dots & \mathbf{I}_{s, (m, -12p)}^1 & \mathbf{I}_{s, (m, -6p)}^1 & \mathbf{I}_{s, (m, 0p)}^1 & \mathbf{I}_{s, (m, 6p)}^1 & \mathbf{I}_{s, (m, 12p)}^1 & \dots \end{array} \right] \cdot \\
 & \left[ \begin{array}{cccccc} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & -\mathbf{L}_{-1p} & 5\mathbf{L}_{5p} & 11\mathbf{L}_{11p} & 17\mathbf{L}_{17p} & 23\mathbf{L}_{23p} & \dots \\ \dots & -7\mathbf{L}_{-7p} & -\mathbf{L}_{-1p} & 5\mathbf{L}_{5p} & 11\mathbf{L}_{11p} & 17\mathbf{L}_{17p} & \dots \\ \dots & -13\mathbf{L}_{-13p} & -7\mathbf{L}_{-7p} & -\mathbf{L}_{-1p} & 5\mathbf{L}_{5p} & 11\mathbf{L}_{11p} & \dots \\ \dots & -19\mathbf{L}_{-19p} & -13\mathbf{L}_{-13p} & -7\mathbf{L}_{-7p} & -\mathbf{L}_{1p} & 5\mathbf{L}_{5p} & \dots \\ \dots & -25\mathbf{L}_{-25p} & -19\mathbf{L}_{-19p} & -13\mathbf{L}_{-13p} & -7\mathbf{L}_{-7p} & -\mathbf{L}_{1p} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{I}_{w, [m, (11+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (5+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-1+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-7+6k) \cdot p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-13+6k) \cdot p]} \\ \vdots \end{array} \right] \quad (2.149)
 \end{aligned}$$

Porządkując równania form kwadratowych momentów cząstkowych (2.146) – (2.149) względem tych samych wykładników można zapisać następujące zależności

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{em, (0m, 6k \cdot p)}^I = & 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \sum_k \left( n_1 \cdot \mathbf{I}_{s, (-m, z_1 \cdot p)}^{*1} \cdot \underline{\mathbf{L}}_{n_1 \cdot p}^{\operatorname{mod}(n_1 \cdot p, N)} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{w, (m, [-1+(6l_1+6w_1)] \cdot p)}^{\operatorname{mod}(n_1 \cdot p, N)} - n_2 \cdot \mathbf{I}_{s, (-m, z_2 \cdot p)}^{*2} \cdot \underline{\mathbf{L}}_{n_2 \cdot p}^{\operatorname{mod}(n_2 \cdot p, N)} \cdot \right. \\
 & \left. \underline{\mathbf{I}}_{w, (m, [-1+(6l_2+6w_2)] \cdot p)}^{\operatorname{mod}(n_2 \cdot p, N)} \right) \Bigg\}, \forall : 6k = z_1 + n_1 + [-1 + (6l_1 + 6w_1)] = z_2 + n_2 + [-1 + (6l_2 + 6w_2)] \quad (2.150)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{em, [2m, (6k-2) \cdot p]}^{II} = & 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \sum_k \left( -n_2 \cdot \mathbf{I}_{s, (m, z_1 \cdot p)}^1 \cdot \underline{\mathbf{L}}_{n_2 \cdot p}^{\operatorname{mod}(n_2 \cdot p, N)} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{w, (m, [-1+(6l_1+6w_1)] \cdot p)}^{\operatorname{mod}(n_2 \cdot p, N)} + n_1 \cdot \mathbf{I}_{s, (m, z_2 \cdot p)}^2 \cdot \underline{\mathbf{L}}_{n_1 \cdot p}^{\operatorname{mod}(n_1 \cdot p, N)} \cdot \right. \\
 & \left. \underline{\mathbf{I}}_{w, (m, [-1+(6l_2+6w_2)] \cdot p)}^{\operatorname{mod}(n_1 \cdot p, N)} \right) \Bigg\}, \forall : 6k - 2 = z_1 + n_2 + [-1 + (6l_1 + 6w_1)] = z_2 + n_1 + [-1 + (6l_2 + 6w_2)] \quad (2.151)
 \end{aligned}$$

gdzie:  $n_1, n_2 \in n$ ;  $z_1 \in (\dots, -6, 0, 6, \dots)$ ;  $z_2 \in (\dots, -8, -2, 4, \dots)$ ;  $k, l_1, l_2, w_1, w_2 \in \mathbf{Z}$

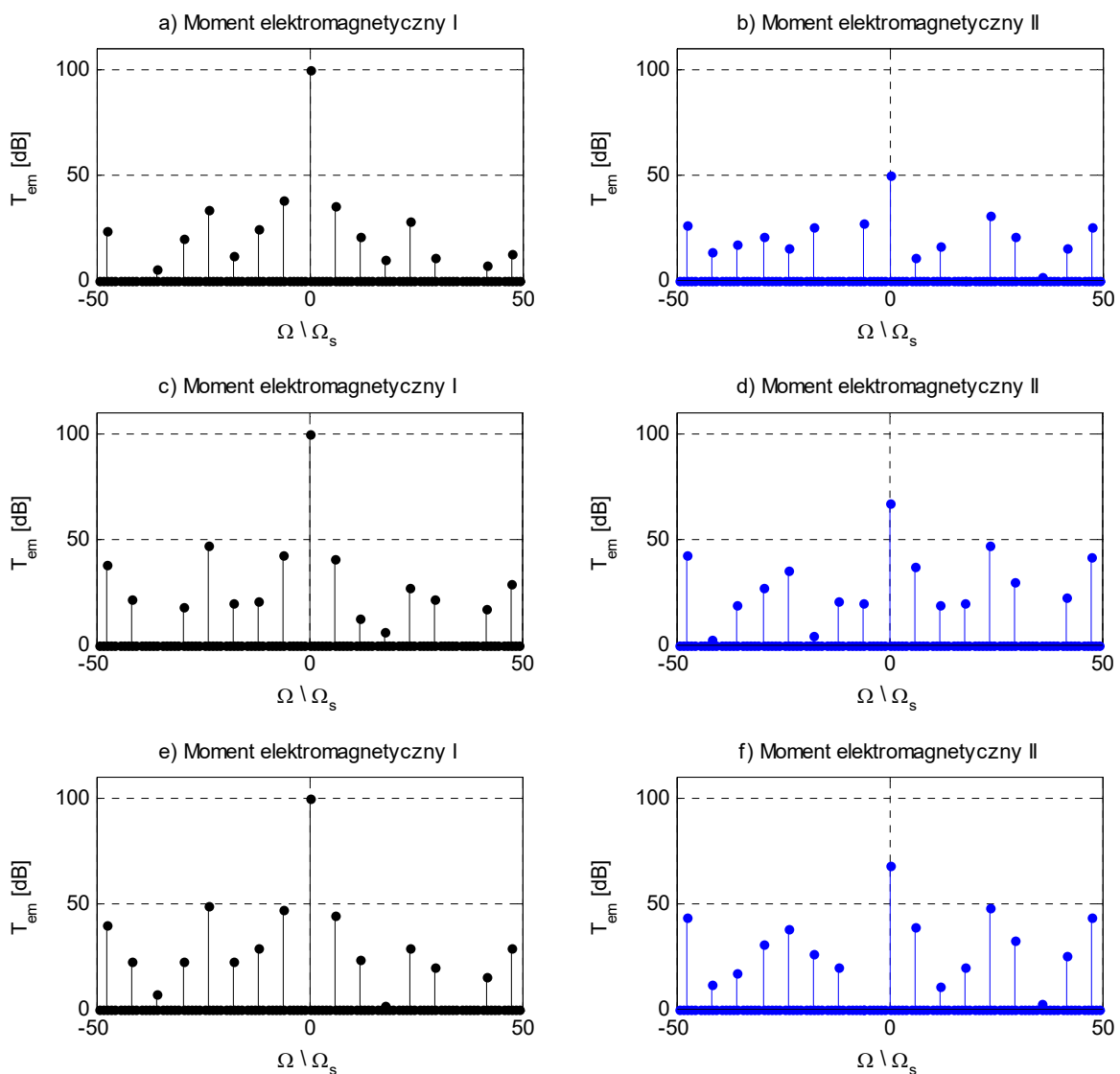


Ogólnie w rozważanym stanie pracy silnika w widmie momentu elektromagnetycznego występują składniki z pulsacjami

$$\begin{cases} T_{em}^{\text{mod}(m,3)} : 0m\Omega_s + (6k-0) \cdot p\Omega \\ T_{em}^{\text{mod}(-m,3)} : 2m\Omega_s + (6k-2) \cdot p\Omega \end{cases}, \forall k \in \mathbf{Z} \quad (2.152)$$

Jeżeli pominąć niesymetrię parametryczną obwodów wirnika zbiór momentów elektromagnetycznych (2.152) przejdzie w zbiór sygnałów (2.138) - (2.139). Przedstawione niżej wyniki obliczeń odpowiadają wybranym uszkodzeniom kłatek z [p. 2.5.2].

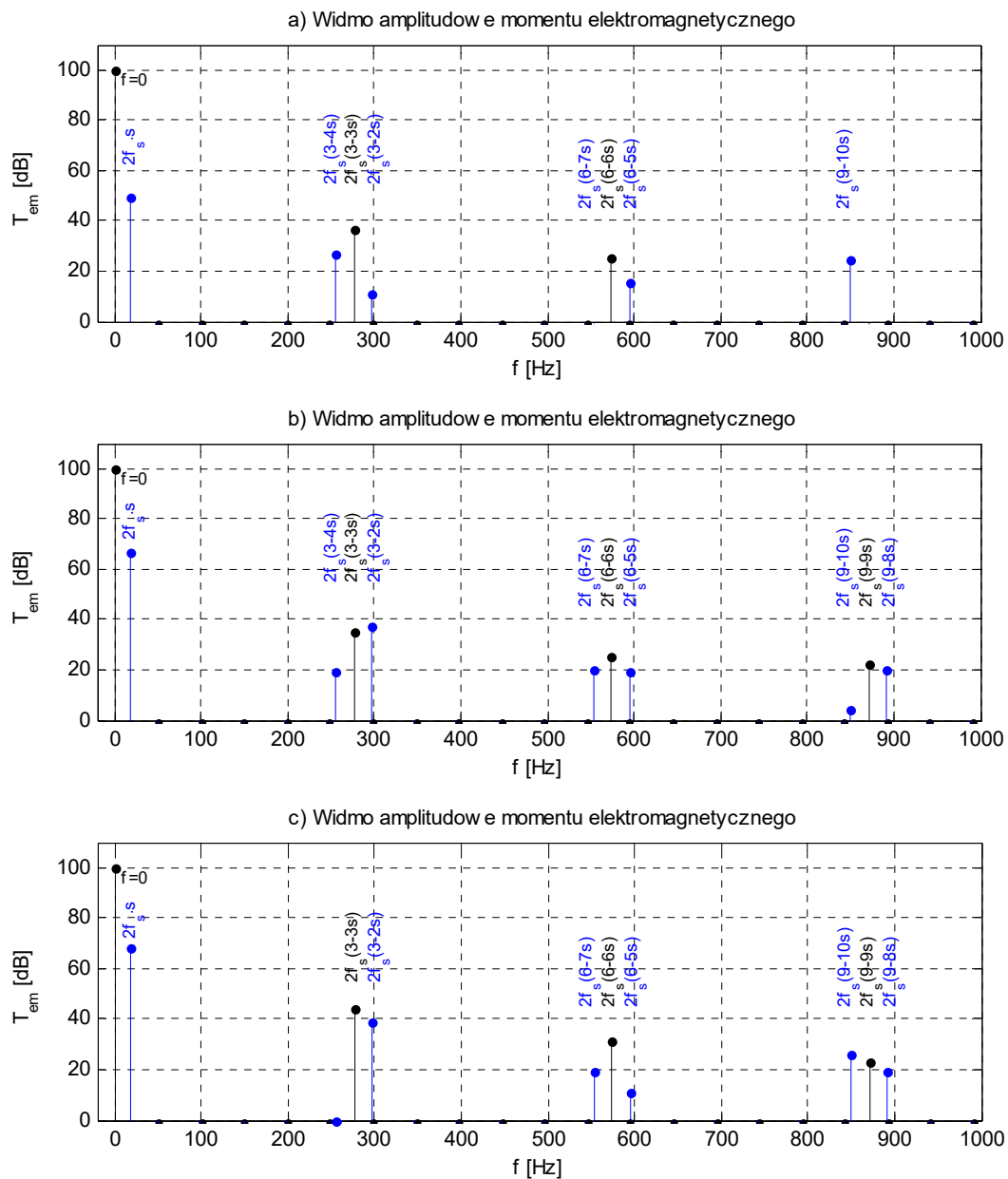
- widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego  $\Omega=155,5$  rad/s:



**Rys. 2.11** Względne widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a-b) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, c-d) przerwa w pręcie klatki pracy, e-f) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.

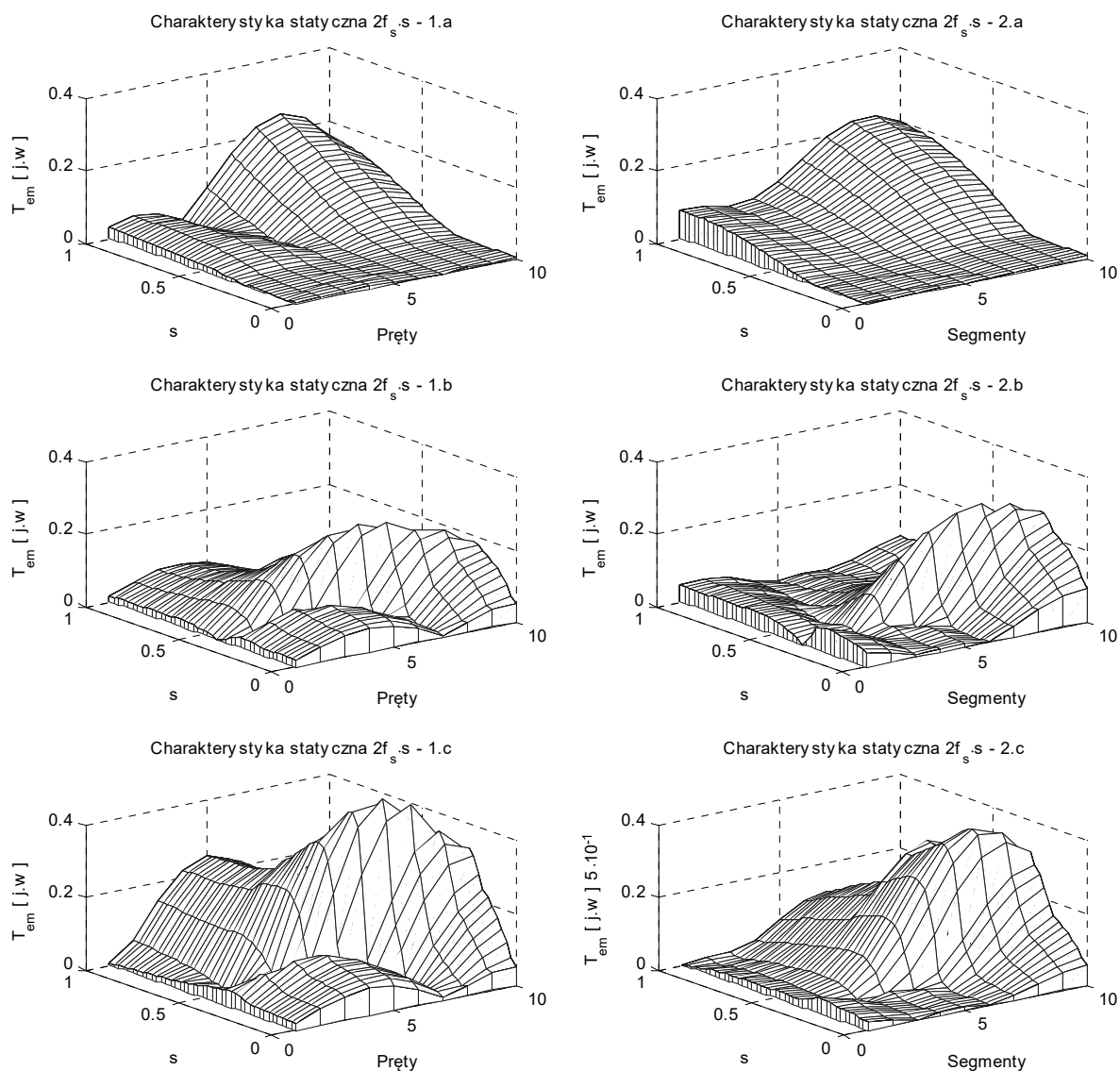
Zgodnie z powyższymi rysunkami sygnałem diagnostycznym z największym zasięgiem oddziaływania w całym zakresie widma jest moment przemienny typu II:  $2 \cdot (\Omega_s - p\Omega)$ . Jak wynika z równań, moment ten będzie generowany głównie za pośrednictwem prądów stojana mających pulsacje  $(\Omega_s - 2p\Omega)$  i  $\Omega_s$  oraz indukcyjności wzajemnej najniższego rzędu. Pozostałe momenty przemienne w zakresie pracy znamionowej (początkowy etap rozwoju niesymetrii) odgrywają zdecydowanie mniejsze znaczenia przy próbie lokalizacji uszkodzenia wirnika z racji ich stosunkowo nieznacznych amplitud.

- widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego  $s=0,01$ :



**Rys. 2.12** Względne widmo amplitudowe wypadkowego momentu elektromagnetycznego w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, b) przerwa w pręcie klatki pracy, c) przerwa w pręcie klatki górnej i dolnej.

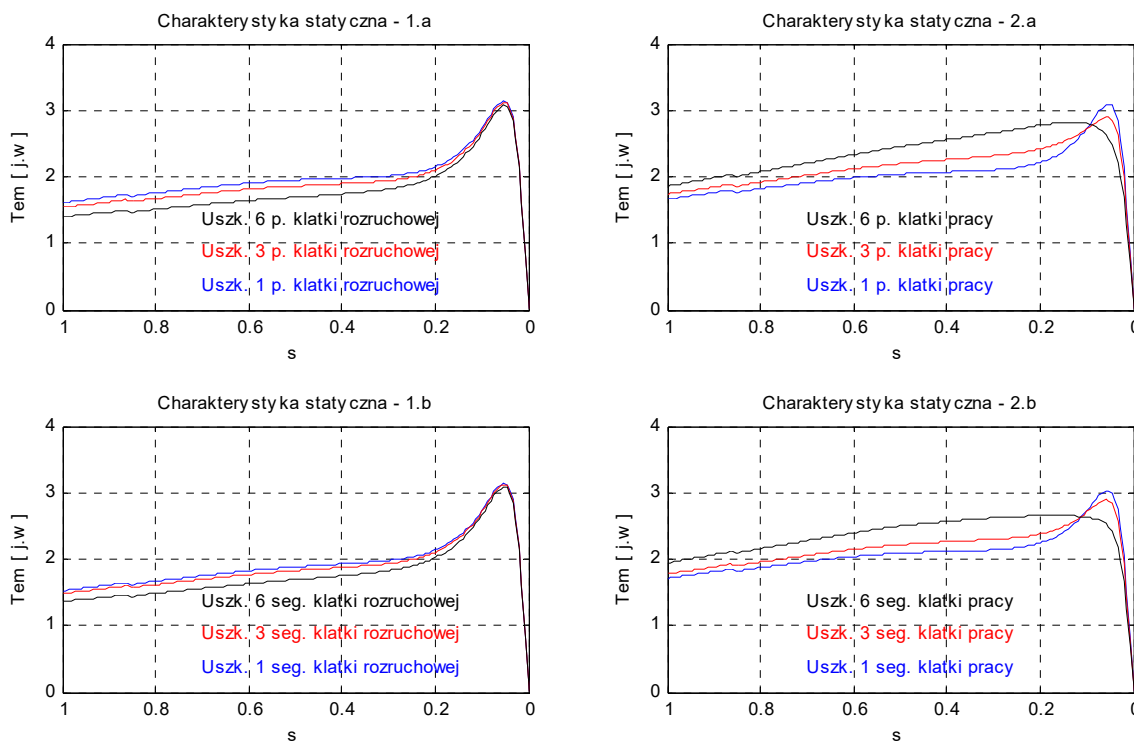
Ocenę skutków działania momentu diagnostycznego  $2 \cdot (\Omega_s - p\Omega)$  pod względem cech ilościowych przeprowadzono w funkcji poślizgu i poziomu niesymetrii rezystancyjnej wybranego obwodu wirnika - konstrukcja zwarta osobnymi pierścieniami. Rozpatrywany sygnał odniesiono do amplitudy momentu asynchronicznego.



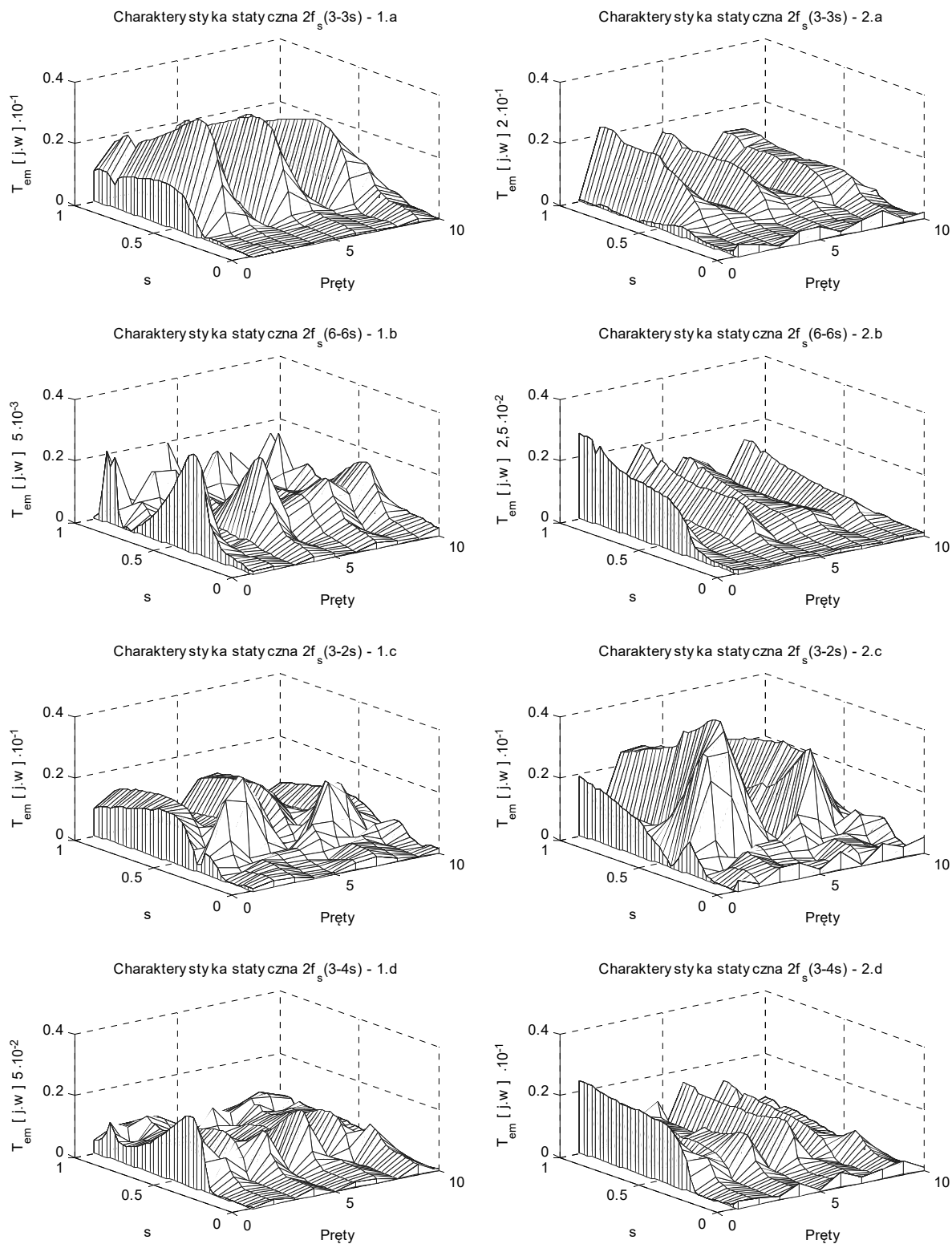
**Rys. 2.13** Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności momentu elektromagnetycznego typu II  $2f_s \cdot s$  w funkcji poślizgu, 1. (a-c) uszkodzenie prętów, 2. (a-c) uszkodzenie segmentów pierścieni zwierających – a) klatka rozruchowa, b) klatka pracy, c) klatka rozruchowa i klatka pracy.

Z charakterystyk statycznych momentu  $2f_s \cdot s$  w funkcji poślizgu wynika odległy obraz zmian tej wielkości względem prądu diagnostycznego  $f_s \cdot (1-2s)$ . Przyczyn takiego stanu rzeczy, należy poszukiwać w wyrażeniach opisujących moment typu II, który jest różnicą momentów cząstkowych, gdzie jedynie drugi składnik podlega zerowaniu w połowie prędkości synchronicznej.

Dlatego wokół punktu pracy  $s=0,5$  w przedziale nieznacznych wartości osiąganych przez prąd  $f_s \cdot (1-2s)$  przebieg krzywych określa stosunek momentów cząstkowych typu I i II. Poza tym przedziałem o jakościowym przebiegu charakterystyk decydują kąty fazowe prądów stojana i wirnika wchodzące w skład momentów cząstkowych, biorących udział w wytwarzaniu momentu  $2f_s \cdot s$  oraz moment odniesienia (asynchroniczny) kształtowany drugim składnikiem momentu cząstkowego typu I. Pozostałe momenty przemienne z zbiorów I i II choć przyjmują wartości co najmniej rząd mniejszy niż  $2f_s \cdot s$ , to nabierają istotnego znaczenia w tworzeniu rozbudowanych wzorców diagnostycznych dla różnych kombinacji uszkodzeń klatek wirnika. Interesujący przykład działania momentów synchronicznych I, przedstawiają rysunki nr 2.14, gdzie obserwuje się ich lokalny wzrost albo obniżenie połączone z lokalizacją uszkodzenia [52]. Przerwanie prętów klatki dolnej powoduje zwiększenie momentu rozruchowego (osłabienie tłumiącego działania obwodu pracy) lub jego zmniejszenie, jeżeli niesymetria rezystancyjna występuje w klatce górnej. Zbieżny efekt wyłączenia danego obwodu wirnika występuje także w przypadku niesymetrii stojana dla silnika pracującego bez obciążenia zewnętrznego [p.2.5.4–5]. Zatem zilustrowane krzywe momentów potwierdzają konieczność szerszego badania składowych momentu elektromagnetycznego zlokalizowanych poza pasmem niskich częstotliwości, tak z względów konstrukcyjnych jak i diagnostycznych.



**Rys. 2.14** Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności momentu asynchronicznego w funkcji poślizgu, 1. (a-b) uszkodzenie prętów, 2. (a-b) uszkodzenie segmentów pierścieni zwierających – a) klatka rozruchowa, b) klatka pracy.



**Rys. 2.15** Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności wybranych składowych momentu elektromagnetycznego w funkcji poślizgu i liczby uszkodzonych prętów – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1. niesymetria klatki pracy, 2. niesymetria klatki rozruchowej i klatki pracy, sygnały diagnostyczne w skali liniowej odniesione do podstawowej harmonicznej prądu fazowego stojana.

### 2.5.4 Widmo prądu stojana w warunkach obustronnej niesymetrii elektrycznej

W poprzednim podrozdziale [p.2.5.3] wykazano, że w stanie pracy ustalonej pod obciążeniem z zachowaniem symetrii od strony stojana efekty jakościowe wywołane uszkodzeniem elektrycznym obwodu klatki rozruchowej są zbieżne z wynikami otrzymanymi dla niesymetrii klatki pracy. Różnice między wymienionymi przypadkami miały wyłącznie cechy ilościowe. Niemniej jednak w odpowiednich warunkach pracy poza przedziałem działania obwodu klatki rozruchowej generowane sygnały diagnostyczne uznaje się za tożsame z powstaniem niesymetrii rezystancyjnej klatki pracy. Podobnie należy postąpić przy próbie oceny stanu klatki górnej umownie wyłączając obwód klatki dolnej, wykorzystując w tym celu właściwości budowy silnika dwuklatkowego [21], [73], [74]. Wychodząc z założenia, że indukcyjność własna rozproszona klatki dolnej jest dużo większa niż indukcyjność obwodu klatki górnej oraz dopuszczając wystąpienie pola przeciwbieżnego, to wraz z zmniejszaniem poślizgu o rozplywie prądów wirnika będzie decydowała wartość pulsacji składowej przeciwnej [61]-[64], [73]. Dla prędkości bliskiej idealnemu biegowi jałowemu pole składowej przeciwnej wiruje w przybliżeniu z podwójną pulsacją sieci, zapewniając najsilniejsze wypieranie prądu z klatki dolnej, minimalizując tym samym udział tej części wirnika w ogólnym bilansie rozplywu prądów silnika dwuklatkowego. Wspomniane wyżej warunki zostaną spełnione z chwilą przerwania jednej fazy zasilania maszyny pracującej bez obciążenia zewnętrznym momentem mechanicznym. Moment elektromagnetyczny wytwarzany wskutek istnienia składowej przeciwnej - wewnętrzny moment hamujący, gwarantuje przepływ prądów diagnostycznych w uzwojeniach obwodu stojana.

Następstwem obustronnej niesymetrii silnika jest powstanie nowych prądów i momentów przemiennych z pulsacjami wyróżniających ten stan pracy. Analiza indukowanych prądów składowych symetrycznych w tym zakresie musi być wykonana z uwzględnieniem, że macierze rezystancji obwodu stojana i wirnika są pełne [p. 2.4.2]. Składowe symetryczne prądów stojana zostaną ze sobą wzajemnie związane przez istnienie sprzężenia galwanicznego. Połączenie takie ma w istocie charakter wymuszenia dla równania składowej drugiej powodując przenoszenie między wymienionymi wielkościami cech jakościowych tzn. jak przedstawiono poniżej wektory obu składowych zawierają prądy przesunięte względem siebie o 180 stopni (brak przewodu zerowego) z dokładnie takimi samymi pulsacjami. Amplitudy tych prądów w wektorach składowych symetrycznych ściśle zależą od wartości rezystancji sprzęgających, które stanowią współczynniki proporcjonalności między prądami obwodu stojana [73], [91]. Inaczej wygląda struktura równań, jeżeli należy rozwiązać zagadnienie związane z niesymetrią układu napięć.

W tym przypadku mimo identycznych efektów jakościowych macierzy rezystancji przewodowych (systemowych) stojana pozostanie diagonalna przy pełnym wektorze wymuszeń co sprawia, że rozwiązania dla składowej pierwszej i drugiej będą od siebie niezależne. Niemniej jednak zmiana sposobu wymuszenia przepływu prądów składowej 2, nie modyfikuje metody analizy równań w porównaniu z [p.2.5.2], gdyż nadal o właściwościach rozwiązania decyduje macierz indukcyjności wzajemnych i pełne podmacierze rezystancji wirnika. Jeżeli z układu (2.97) wyeliminuje się rozwiązania zerowe, wówczas część równań wiążąca wektor składowej pierwszej stojana z prądami wirnika przyjmie poniższe wyrażenie

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{sw}^1 \cdot \mathbf{I}_w) = j \cdot \boldsymbol{\Omega}_s^1 \cdot \mathbf{L}_{sw}^1 \cdot \mathbf{I}_w =$$

$$= j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Omega_{(m,4p)} \\ \Omega_{(m,2p)} \\ \Omega_{(m,0p)} \\ \Omega_{(m,-2p)} \\ \Omega_{(m,-4p)} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{7p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,(m,5p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,3p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,1p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-1p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-3p)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

Postępując dokładnie w taki sam sposób do wzoru (2.154), można zapisać zredukowaną postać rozwiązania składowej drugiej prądów stojana za pomocą następującej formy liniowej

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{sw}^2 \cdot \mathbf{I}_w) = j \cdot \boldsymbol{\Omega}_s^2 \cdot \mathbf{L}_{sw}^2 \cdot \mathbf{I}_w =$$

$$= j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Omega_{(m,4p)} \\ \Omega_{(m,2p)} \\ \Omega_{(m,0p)} \\ \Omega_{(m,-2p)} \\ \Omega_{(m,-4p)} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{5p} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{5p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{-1p} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,(m,5p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,3p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,1p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-1p)} \\ \mathbf{I}_{w,(m,-3p)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

Z przeprowadzonej analizy równań macierzowych (2.153) i (2.154) łatwo wykazać, że w prądach składowych symetrycznych stojana wskutek obustronnej niesymetrii rezystancyjnej silnika zostaną wygenerowane prądy określone zbiorem pulsacji (2.155). Sygnały z tego zbioru w wyniku uporządkowania względem rzędu harmonicznej czasowej:

$$\begin{cases} \underline{I}_s^{\text{mod}(m,3)} : m\Omega_s + (2k-0) \cdot p\Omega \\ \underline{I}_s^{\text{mod}(-m,3)} : m\Omega_s + (2k-2) \cdot p\Omega \end{cases}, \forall k \in \mathbf{Z} \quad (2.155)$$

Powyższy zbiór sygnałów można rozłożyć na dwa osobne dodatkowe podzbiory składowych symetrycznych prądów stojana, gdzie pierwszy zawiera pulsacje z (2.50) – [p.2.5.2] oraz drugi podzbiór z niezerowymi elementami bez harmonicznej podstawowej

$$\begin{cases} \underline{I}_s^{\text{mod}(m,3)} : m\Omega_s + (6k-2) \cdot p\Omega \\ \underline{I}_s^{\text{mod}(-m,3)} : m\Omega_s + (6k+2) \cdot p\Omega \end{cases}, \forall k \in \mathbf{Z} \quad (2.156)$$

Znaczenie tego podziału jest w pełni uzasadnione, ponieważ w czytelny sposób wskazuje sygnały skojarzone wyłącznie ze stanem obustronnej niesymetrii silnika, a więc takimi, które będą niepowtarzalne dla przypadku uszkodzenia wirnika i zasilania symetrycznym układem napięć trójfazowych. Gdyby pominąć ewentualną niesymetrię obwodów wirnika, wtedy przy przerwie w fazie stojana z zbioru (2.155) pozostaną wyrazy mające pulsacje kolejnych składowych żłobkowych

$$\begin{cases} \underline{I}_s^{\text{mod}(m,3)} : m\Omega_s + kN \cdot p\Omega \\ \underline{I}_s^{\text{mod}(-m,3)} : m\Omega_s + kN \cdot p\Omega \end{cases}, \forall k \in \mathbf{Z} \quad (2.157)$$

Korzystając z zależności [p.2.4.2]-(2.97), (2.153) oraz (2.154) równania napięciowe danej składowej symetrycznej prądów stojana względem tych samych funkcji wykładniczych wynoszą

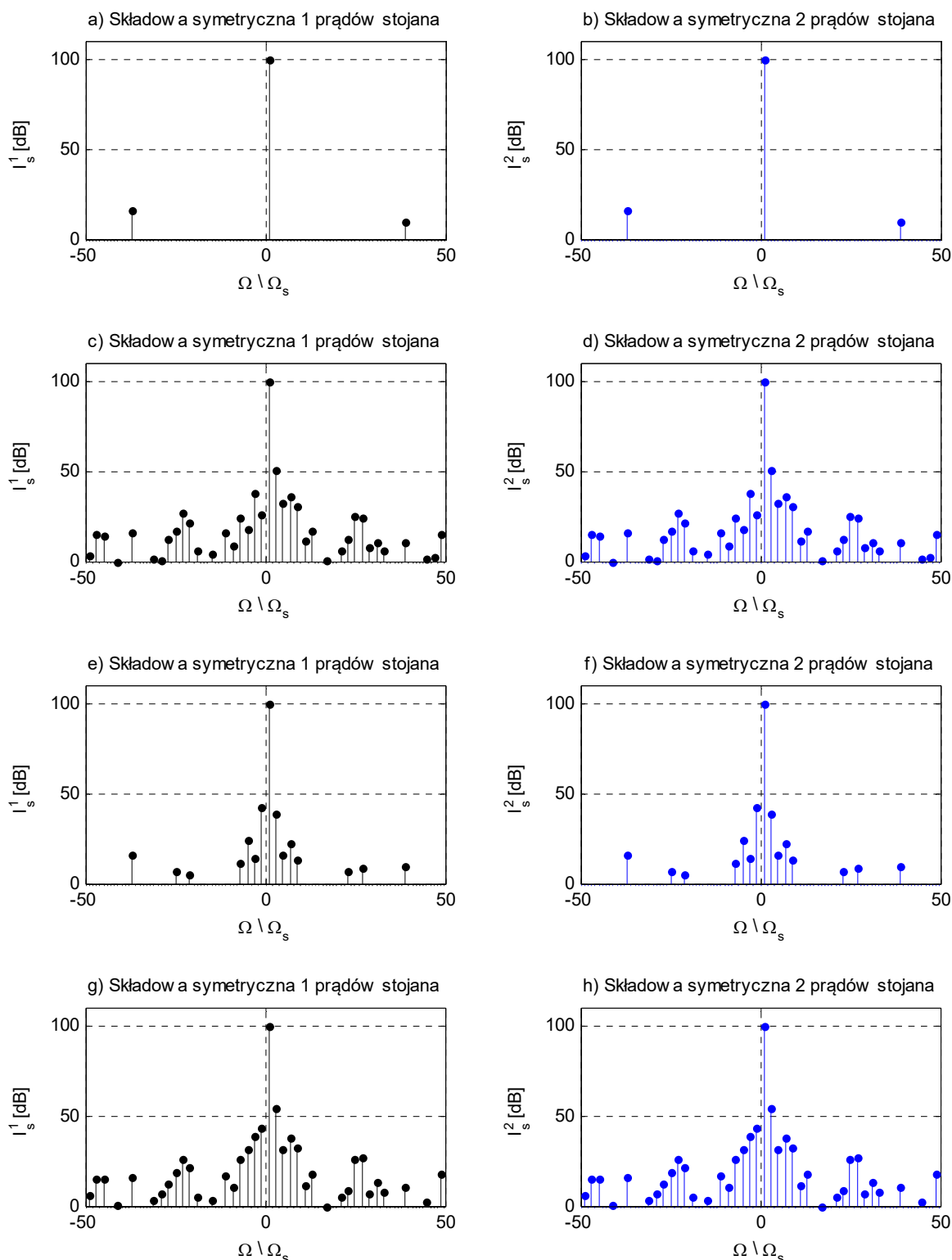
$$\begin{aligned} \underline{U}_{s,(m,2k-p)}^{\text{mod}(m,3)} = & \underline{R}_s^0 \cdot \underline{I}_{s,(m,2k-p)}^{\text{mod}(m,3)} + \underline{R}_s^1 \cdot \underline{I}_{s,(m,2k-p)}^{\text{mod}(-m,3)} + j \cdot (m\Omega_s + 2k \cdot p\Omega) \cdot \left( \underline{L}_s^{\text{mod}(m,3)} \cdot \underline{I}_{s,(m,2k-p)}^{\text{mod}(m,3)} + \right. \\ & \left. + \sum_{z=n+l} \underline{L}_{n-p}^{\text{mod}(n-p,N)} \cdot \underline{I}_{w,(m,l-p)}^{\text{mod}(n-p,N)} \right), \forall (l = -n + 2k), n = \dots -5, 1, 7 \dots \end{aligned} \quad (2.158)$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{s,(m,(2k-2)-p)}^{\text{mod}(-m,3)} = & \underline{R}_s^0 \cdot \underline{I}_{s,(m,(2k-2)-p)}^{\text{mod}(-m,3)} + \underline{R}_s^1 \cdot \underline{I}_{s,(m,(2k-2)-p)}^{\text{mod}(m,3)} + j \cdot [m\Omega_s + (2k-2) \cdot p\Omega] \cdot \left( \underline{L}_s^{\text{mod}(-m,3)} \cdot \underline{I}_{s,(m,(2k-2)-p)}^{\text{mod}(-m,3)} + \right. \\ & \left. + \sum_{z=n+l} \underline{L}_{n-p}^{\text{mod}(n-p,N)} \cdot \underline{I}_{w,(m,l-p)}^{\text{mod}(n-p,N)} \right), \forall (l = -n + 2k - 2), n = \dots -7, -1, 5 \dots \end{aligned} \quad (2.159)$$

Przykładowe widma amplitudowe prądów stojana i wirnika wyrażone w składowych symetrycznych oraz prądu fazowego stojana zamieszczono na rysunkach nr 2.16–2.17.

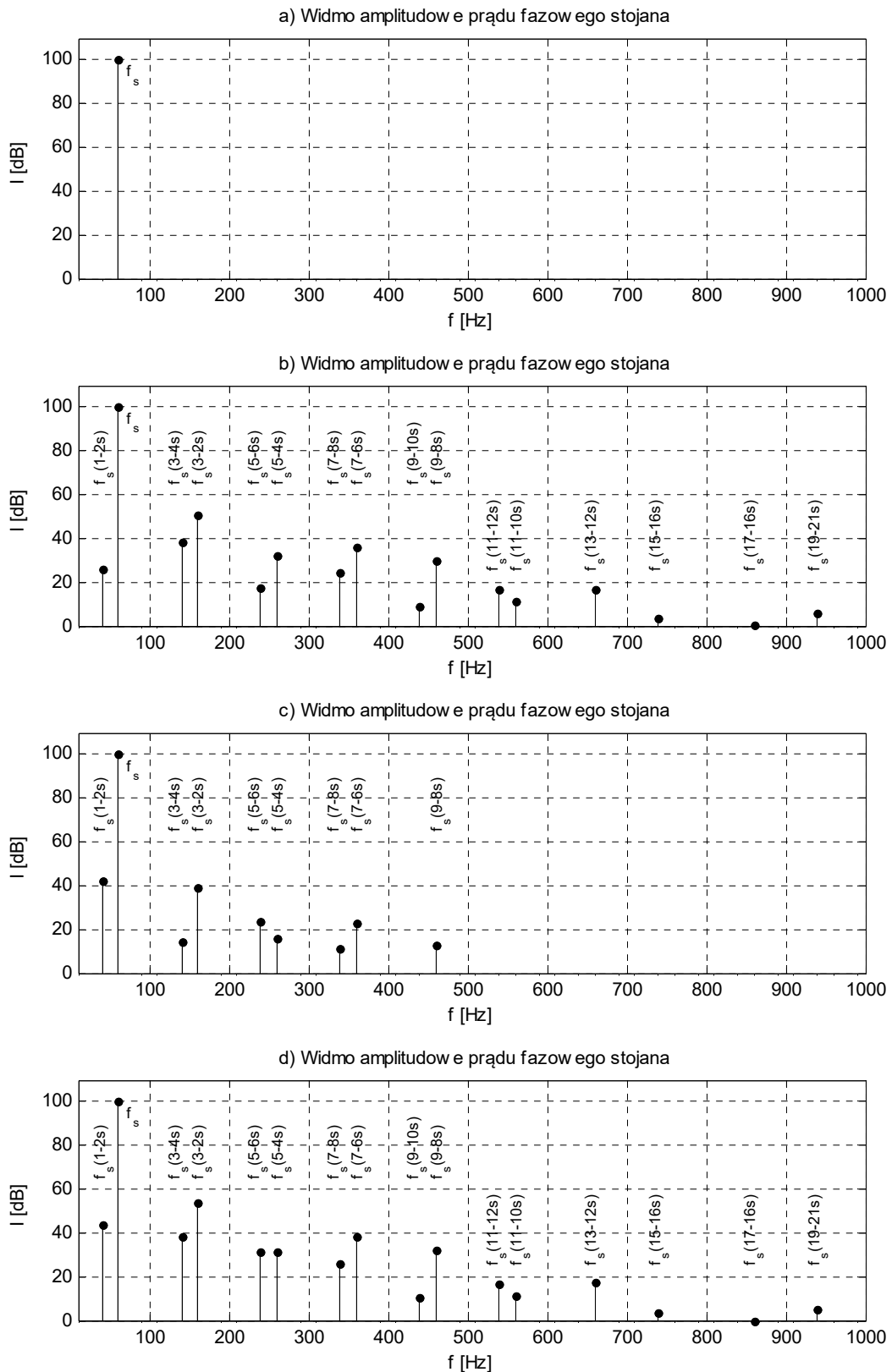


- widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów stojana  $\Omega=157$  rad/s:



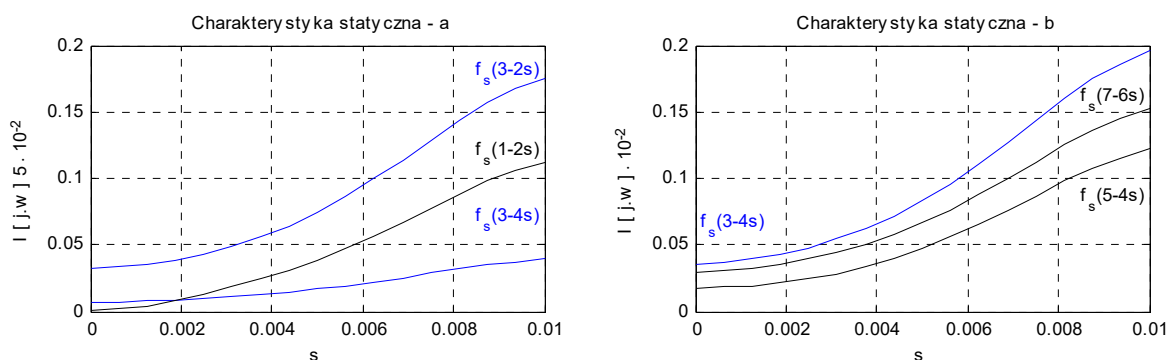
**Rys. 2.16** Względne widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów stojana w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie obwodu stojana, a-b) symetryczny wirnik, c-d) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, e-f) przerwa w pręcie klatki pracy, g-h) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.

- widmo amplitudowe prądu fazowego obwodu stojana  $s=0,0005$ :



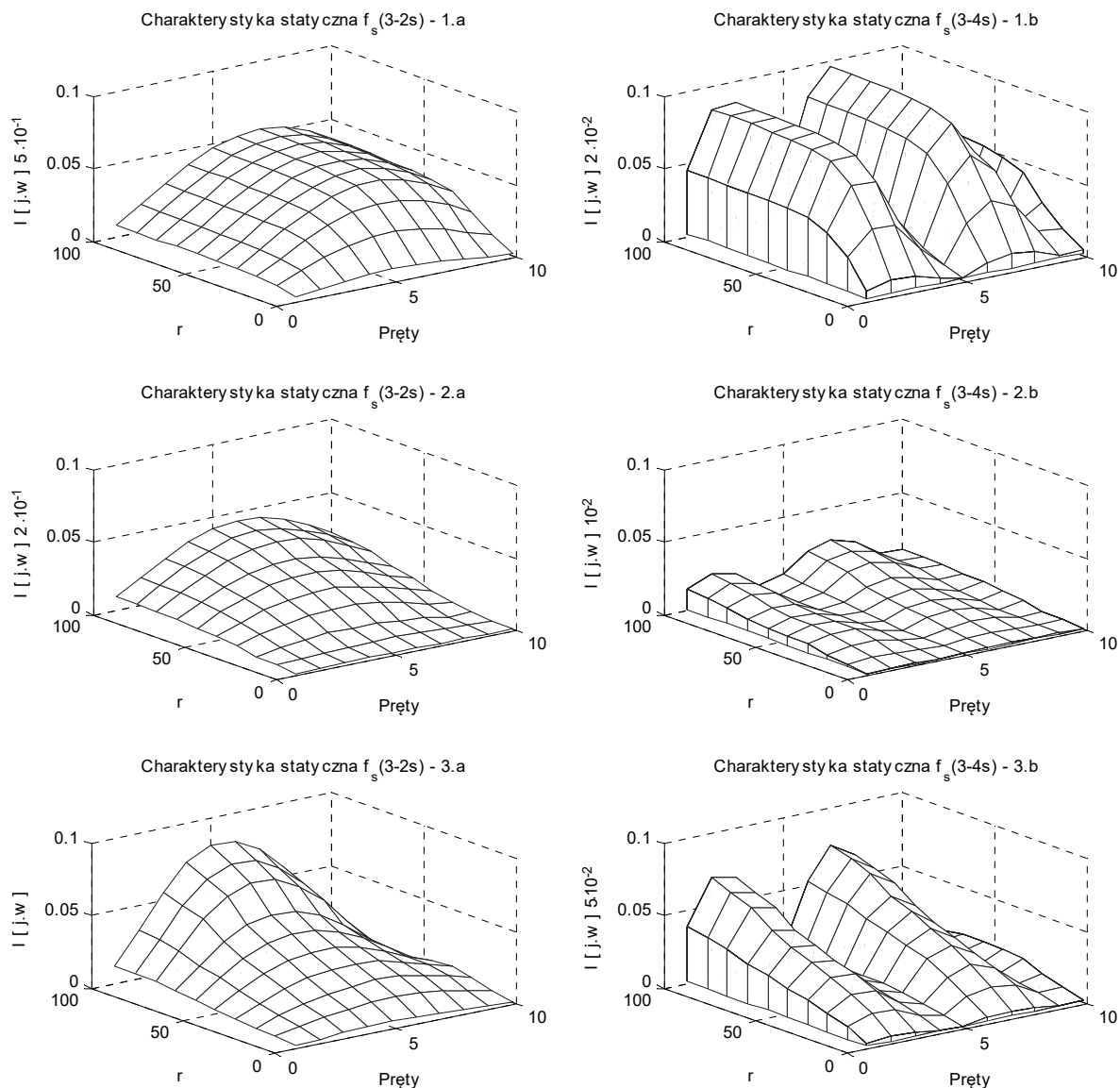
**Rys. 2.17** Względne widmo amplitudowe prądu w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, a) wirnik symetryczny, b) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, c) przerwa w pręcie klatki pracy, d) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pracy.

Zbiór (2.155) jest jakościowo zbieżny ze zbiorem sygnałów diagnostycznych opisujących silnik zasilany symetrycznym układem napięć i ekscentrycznością dynamiczną (niesymetria magnetyczna) [103]. Równorzędny zbiór sygnałów odpowiada pracy silnika z symetrycznym obwodem stojana oraz niesymetrią elektryczną wirnika - skojarzenie uzwojeń stojana w gwiazdę z przewodem zerowym. W każdym przypadku mechanizm powstania tych prądów ma różny charakter i wymaga innej metody ich analizy. Jednym z nich może być wybór takich sygnałów diagnostycznych, które dla danego uszkodzenia podlegają zauważalnym zmianom nawet przy nieznacznym wzroście poziomu modelowanej niesymetrii. W rozpatrywanym stanie pracy silnika warunek ten spełnia składowa o pulsacji  $\Omega_s + 2p\Omega - f_s \cdot (3-2s)$  generowana głównie w efekcie sprzężeń obwodu stojana z wirnikiem przez indukcyjność najniższego rzędu. Drugim istotnym sygnałem diagnostycznym pozwalającym ocenić poziom i miejsce powstania uszkodzenia jest składowa  $-\Omega_s + 4p\Omega - f_s \cdot (3-4s)$ , gdyż przy niesymetrii prętów klatki rozruchowej wykazuje znaczący udział w widmie amplitudowym. Według rysunków nr 2.16–2.17, oprócz wymienionych wyżej prądów obserwuje się również składową  $\Omega_s - 2p\Omega - f_s \cdot (1-2s)$  osiągającą wartość powyżej tła widma, lecz jak już udowodniono w [p.2.5.2] wraz z zmniejszaniem poślizgu amplituda tego sygnału dąży do zera i nie powinna stanowić miary uszkodzenia wirnika. Odmiennie przebiegają krzywe prądów zlokalizowanych w pasmie średnich częstotliwości, gdzie dla poślizgów bliskich  $s=0$  widoczne jest istotne spłaszczenie charakterystyk statycznych – rysunek nr 2.18.



**Rys. 2.18** Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności sygnałów diagnostycznych w funkcji poślizgu – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej.

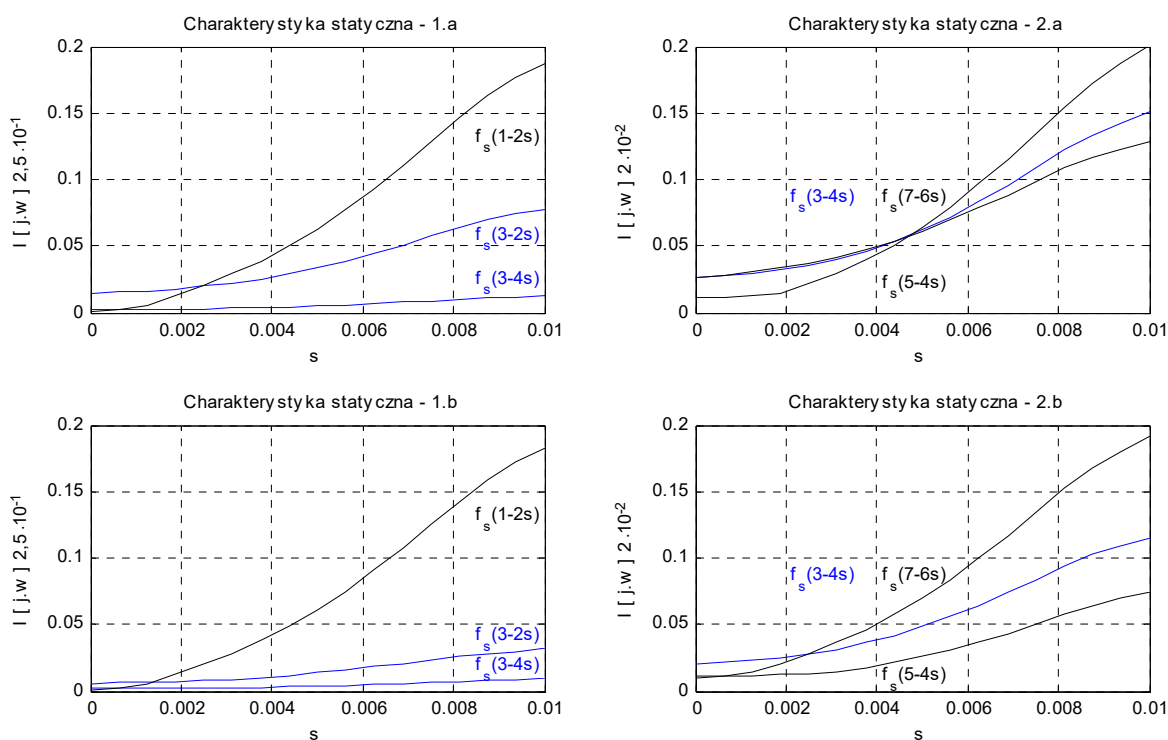
Dzięki temu, nawet jeżeli punkt pracy silnika ulega przesunięciu wskutek rozwoju niesymetrii klatki rozruchowej, to wzorce diagnostyczne (krzywe w funkcji mnożnika modelującego niesymetrię rezystancyjną wirnika oraz liczby uszkodzonych prętów – rysunek nr 2.19) zachowują z dobrym przybliżeniem identyczny przebieg przy małych poślizgach, a więc mogą być traktowane jako niezależne od równania mechanicznego.



**Rys. 2.19** Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności wybranych składowych prądu fazowego w funkcji współczynnika „r” oraz liczby uszkodzonych prętów – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, 1. niesymetria klatki rozruchowej, 2. niesymetria klatki pracy, 3. niesymetria klatki rozruchowej i klatki pracy, sygnały diagnostyczne w skali liniowej odniesione względem podstawowej harmonicznej prądu fazowego stojana,  $s=0,0005$ .

Porównując charakterystyki z rysunków 2.19 można wykazać, że niesymetria klatki rozruchowej powoduje liniowo proporcjonalne narastanie amplitud obserwowanych prądów do liczby uszkodzonych prętów (położonych obok siebie) i współczynnika modelującego przerwę rezystancyjną. Podobnie przebiega kształt krzywych prądów diagnostycznych dla niesymetrii klatki pracy oraz stosunkowo małych wartości mnożnika  $r < 30$ . Widoczny efekt załamania charakterystyk następuje po przekroczeniu granicy pięciu  $f_s \cdot (3-2s)$  i trzech  $f_s \cdot (3-4s)$  pękniętych prętów klatki rozruchowej lub pracy, ponieważ kąt przesunięcia fazowego sygnałów diagnostycznych

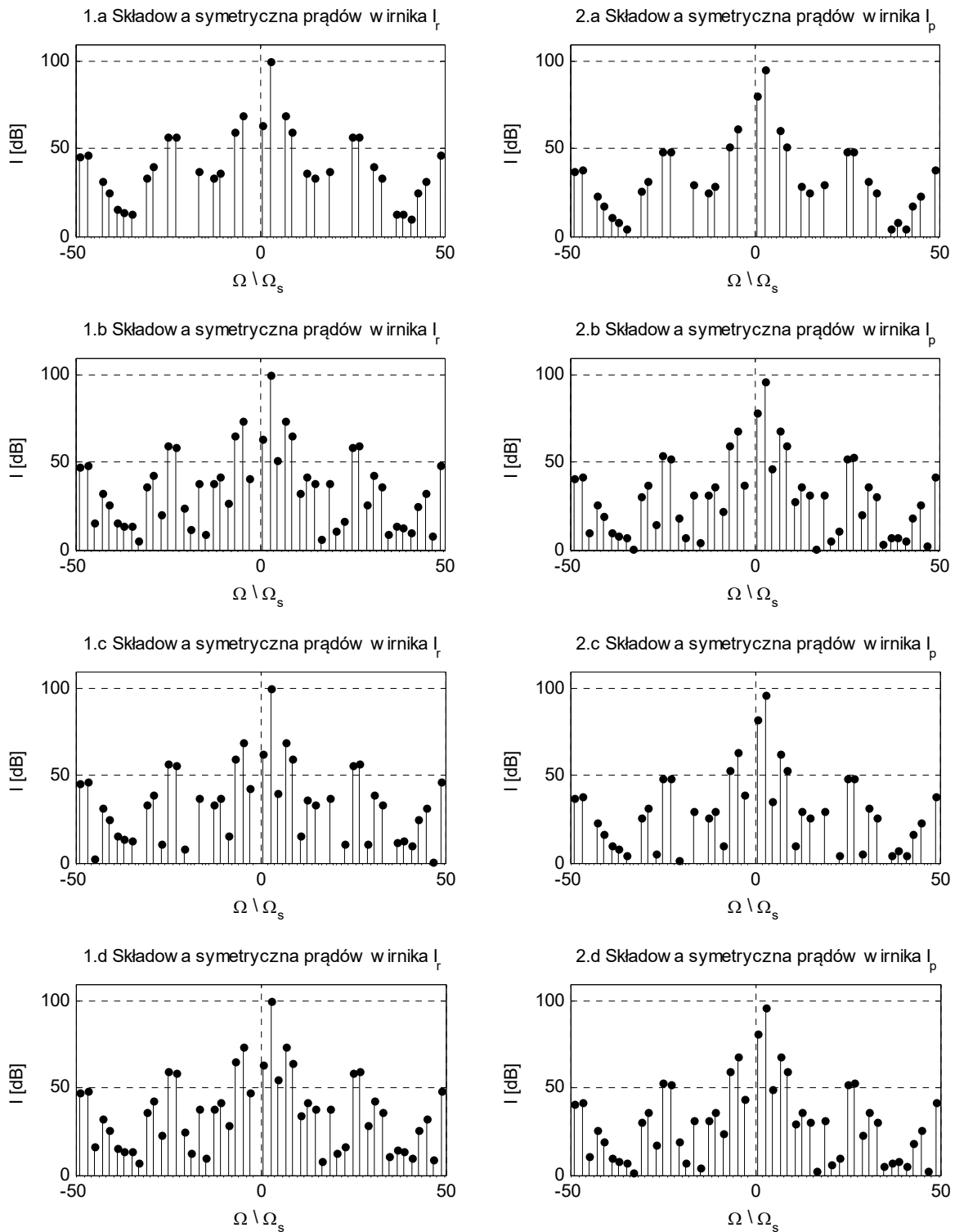
zaczyna się powtarzać (zmniejszenie modułu prądu). W przypadku uszkodzenia prętów klatki górnej i dolnej ( $r < 30$ ) niesymetria obwodu pracy tylko nieznacznie zmienia amplitudy sygnałów diagnostycznych względem prądów (2.19-1.a) oraz (2.19-1.b). Jednakże stopniowe zwiększanie współczynnika „r” będzie przyczyną wyeliminowania tłumiącego działania klatki pracy, jak również dużego przyspieszenia wzrostu prądów, co nie zachodzi w sytuacji przerywania prętów z różnych sekcji wirnika – nieleżących pod sobą (rysunek 2.20).



**Rys. 2.20** Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności sygnałów diagnostycznych w funkcji poślizgu dla  $r=40$  – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej i pracy, a) w żłobkach nr 1, b) w żłobku nr 1 i 2.

Sygnałom diagnostycznym według (2.155) towarzyszy zawsze przepływ prądów wirnika z pulsacjami niespotykanymi w warunkach symetrii rezystancyjnej obwodu stojana. Wszystkie przypadki niesymetrii stojana łączy konieczność zachowania takiego samego rozwiązania jakościowego równania centralnego składowej pierwszej i drugiej. Gdy obwody wirnika są symetryczne, współczynniki indukcyjności w (2.153) oraz (2.154) mogą się sprzęgać wyłącznie z wektorami prądów o pulsacjach  $m\Omega_s \pm (6k+1) \cdot p\Omega$ . Poza tym z uwagi na symetrię klatek, wektory prądów wirnika zawierają jeden niezerowy element położony w wierszu  $\text{mod}(n \cdot p, N)$ . Jeżeli dodatkowo uwzględnić niesymetrię parametryczną wirnika wówczas macierze rezystancji klatek (wektory prądów) będą pełne - generując zbiór pulsacji  $m\Omega_s + (2k-1) \cdot p\Omega$ . Z tego zbioru można wyodrębnić składniki odpowiadające wyłącznie niesymetrii rezystancyjnej obwodu stojana  $m\Omega_s + (6k+1) \cdot p\Omega$  i wirnika  $m\Omega_s \pm (6k+3) \cdot p\Omega$  powstające przy obustronnym uszkodzeniu.

- widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów wirnika  $\Omega=157$  rad/s:



**Rys. 2.21** Względne widmo amplitudowe w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, 1. prąd „p-tej” składowej symetrycznej prądów klatki rozruchowej, 2. prąd „p-tej” składowej symetrycznej prądów klatki pracy, a) symetryczny wirnik, b) przerwa w pręcie klatki górnej, c) przerwa w pręcie klatki dolnej, d) przerwa w pręcie klatki górnej i dolnej.

## 2.5.5 Widmo momentu elektromagnetycznego w warunkach obustronnej niesymetrii elektrycznej silnika

Metoda analizy momentu elektromagnetycznego w warunkach obustronnej niesymetrii silnika nie odbiega w zasadniczy sposób od metody przedstawionej w podrozdziale [p.2.5.3]. Dla tego przypadku w równaniach momentów cząstkowych należy uwzględnić zmianę składu jakościowego prądów stojana i wirnika z [p.2.5.4]. Wstawiając wspomniane wektory prądów do związków opisujących momenty typu I, pierwszy składnik przyjmie formę kwadratową

$$\mathbf{T}_{em,(0m,2k;p)}^{1,1} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \cdot \sum_k \left[ \cdots \begin{matrix} \mathbf{I}_{s,(-m,-4p)}^1 & \mathbf{I}_{s,(-m,-2p)}^1 & \mathbf{I}_{s,(-m,0p)}^1 & \mathbf{I}_{s,(-m,2p)}^1 & \mathbf{I}_{s,(-m,4p)}^1 & \cdots \end{matrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 7\mathbf{L}_{7p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & -5\mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & -5\mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -5\mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,[m,(5+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w,[m,(3+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w,[m,(1+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w,[m,(-1+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w,[m,(-3+2k)p]} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

Drugi składnik momentu elektromagnetycznego I otrzyma następującą postać:

$$\mathbf{T}_{em,(0m,2k;p)}^{1,2} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \cdot \sum_k \left[ \cdots \begin{matrix} \mathbf{I}_{s,(-m,-4p)}^2 & \mathbf{I}_{s,(-m,-2p)}^2 & \mathbf{I}_{s,(-m,0p)}^2 & \mathbf{I}_{s,(-m,2p)}^2 & \mathbf{I}_{s,(-m,4p)}^2 & \cdots \end{matrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & -\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5\mathbf{L}_{5p} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5\mathbf{L}_{5p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & -7\mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & -7\mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_{-1p} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,[m,(5+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w,[m,(3+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w,[m,(1+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w,[m,(-1+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w,[m,(-3+2k)p]} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

Z przytoczonych zależności wynika, że moment elektromagnetyczny pierwszego rodzaju, generuje momenty cząstkowe asynchroniczne o przeciwnych znakach, które przy zatrzymanym wirniku stają się sobie równe względem wartości bezwzględnej. Poza zakresem pracy transformatorowej wypadkowy moment asynchroniczny jest większy od zera. Oprócz składowej stałej, moment elektromagnetyczny pierwszego typu wytwarza momenty przemienne z punktem synchronizmu  $s=1$ . Momenty cząstkowe II według zależności (2.126) a także ponownym uwzględnieniu wektorów prądów stojana oraz wirnika [p.2.5.4], będą reprezentowane równaniami:

$$T_{em, (2m, 2k-p)}^{II,1} = j \cdot p \cdot \sum_k \left[ \dots \underline{I}_{s, (m, -4p)}^2 \quad \underline{I}_{s, (m, -2p)}^2 \quad \underline{I}_{s, (m, 0-p)}^2 \quad \underline{I}_{s, (m, 2-p)}^2 \quad \underline{I}_{s, (m, 4p)}^2 \quad \dots \right] \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \ddots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 7\mathbf{L}_{7p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & -5\mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & -5\mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -5\mathbf{L}_{-5p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w, [m, (5+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (3+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (1+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-1+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-3+2k)p]} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

$$T_{em, (2m, 2k-p)}^{II,1} = j \cdot p \cdot \sum_k \left[ \dots \underline{I}_{s, (m, -4p)}^1 \quad \underline{I}_{s, (m, -2p)}^1 \quad \underline{I}_{s, (m, 0-p)}^1 \quad \underline{I}_{s, (m, 2-p)}^1 \quad \underline{I}_{s, (m, 4p)}^1 \quad \dots \right] \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \ddots \\ \dots & -\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5\mathbf{L}_{5p} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5\mathbf{L}_{5p} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & -7\mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_{-1p} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & -7\mathbf{L}_{-7p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_{-1p} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w, [m, (5+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (3+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (1+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-1+2k)p]} \\ \mathbf{I}_{w, [m, (-3+2k)p]} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

Zgodnie z przedstawionymi zależnościami (2.162)–(2.163), moment drugiego typu może wytwarzać wyłącznie momenty przemienne. Wśród tych momentów zalicza się składnik zależny od czasu i niezależny od prędkości kątowej wirnika o podwójnej pulsacji sieciowej. Pozostałe



składniki są momentami przemiennymi osiągającymi synchronizm w zakresie pracy silnikowej – momenty z ujemnymi pulsacjami lub w przedziale pracy prądnicowej – momenty cząstkowe mające dodatnie pulsacje. Nie dotyczy to jedynie momentu  $2 \cdot (\Omega_s - p\Omega)$  z punktem synchronizmu przy prędkości kątowej równej prędkości wirowania podstawowej składowej pola stojana  $s=0$ . W zapisie skróconym, grupując równania form kwadratowych (2.160)–(2.163) według identycznych wykładników otrzymuje się szczegółową postać dowolnej składowej momentu

$$\begin{aligned} T_{em, (0m, 2k-p)}^I = 2 \operatorname{Re} \left\{ j \cdot p \sum_k \left( n_1 \cdot \underline{I}_{s, (-m, z_1-p)}^{*1} \cdot \underline{I}_{n_1-p}^{\operatorname{mod}(n_1-p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (m, [-1+(2l_1+2w_1)]-p)}^{\operatorname{mod}(n_1-p, N)} - n_2 \cdot \underline{I}_{s, (-m, z_2-p)}^{*2} \cdot \underline{I}_{n_2-p}^{\operatorname{mod}(n_2-p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (m, [-1+(2l_2+2w_2)]-p)}^{\operatorname{mod}(n_2-p, N)} \right) \right\}, \forall : 2k = z_1 + n_1 + [-1 + (2l_1 + 2w_1)] = z_2 + n_2 + [-1 + (2l_2 + 2w_2)] \end{aligned} \quad (2.164)$$

$$\begin{aligned} T_{em, (2m, 2k-p)}^{II} = 2 \operatorname{Re} \left\{ j \cdot p \sum_k \left( -n_2 \cdot \underline{I}_{s, (m, z_1-p)}^1 \cdot \underline{I}_{n_2-p}^{\operatorname{mod}(n_2-p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (m, [-1+(2l_1+2w_1)]-p)}^{\operatorname{mod}(n_2-p, N)} + n_1 \cdot \underline{I}_{s, (m, z_2-p)}^2 \cdot \underline{I}_{n_1-p}^{\operatorname{mod}(n_1-p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (m, [-1+(2l_2+2w_2)]-p)}^{\operatorname{mod}(n_1-p, N)} \right) \right\}, \forall : 2k - 2 = z_1 + n_2 + [-1 + (2l_1 + 2w_1)] = z_2 + n_1 + [-1 + (2l_2 + 2w_2)] \end{aligned} \quad (2.165)$$

gdzie:  $n_1, n_2 \in n$ ;  $z_1, z_2 \in (\dots, -2, 0, 2, \dots)$ ;  $k, l_1, l_2, w_1, w_2 \in \mathbf{Z}$

Widmo amplitudowe wytwarzanego momentu elektromagnetycznego w rozpatrywanym stanie pracy silnika zawiera składniki

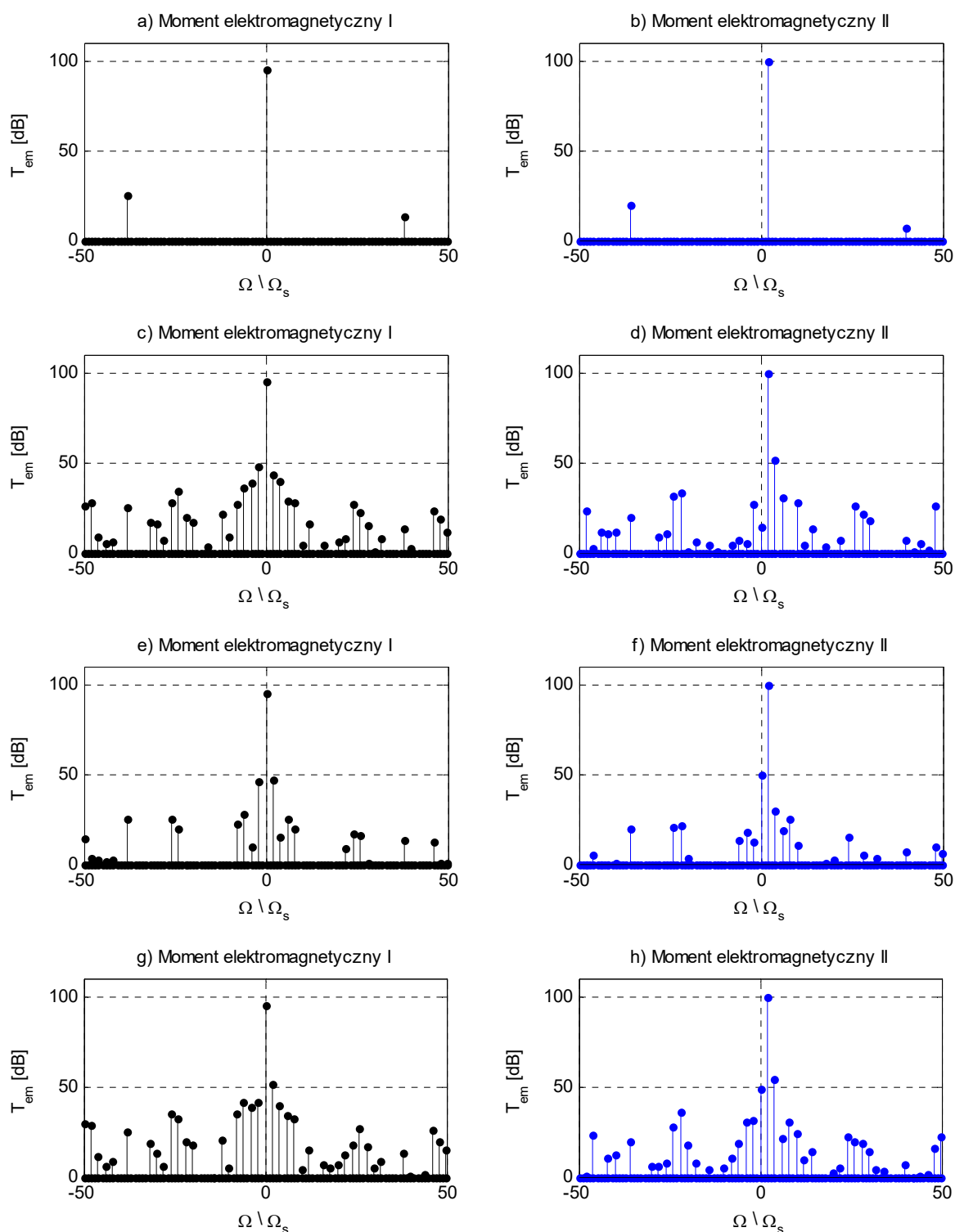
$$\begin{cases} T_{em}^{\operatorname{mod}(m,3)} : 0m\Omega_s + 2k \cdot p\Omega \\ T_{em}^{\operatorname{mod}(-m,3)} : 2m\Omega_s + 2k \cdot p\Omega \end{cases}, \forall k \in \mathbf{Z} \quad (2.166)$$

Wszystkie wyżej przedstawione równania, obowiązują bez względu na przyjęty poziom niesymetrii stojana i wirnika. Z tego zbioru sygnałów diagnostycznych można wyodrębnić momenty generowane tylko w zadanych warunkach pracy silnika, które należy brać pod uwagę badając niesymetrię rezystancyjną obwodu klatki rozruchowej

$$\begin{cases} T_{em}^{\operatorname{mod}(m,3)} : 0m\Omega_s + (2k - 0) \cdot p\Omega \\ T_{em}^{\operatorname{mod}(-m,3)} : 2m\Omega_s + (2k + 2) \cdot p\Omega \end{cases}, \forall k \in \mathbf{Z} \setminus \{6k\} \quad (2.167)$$

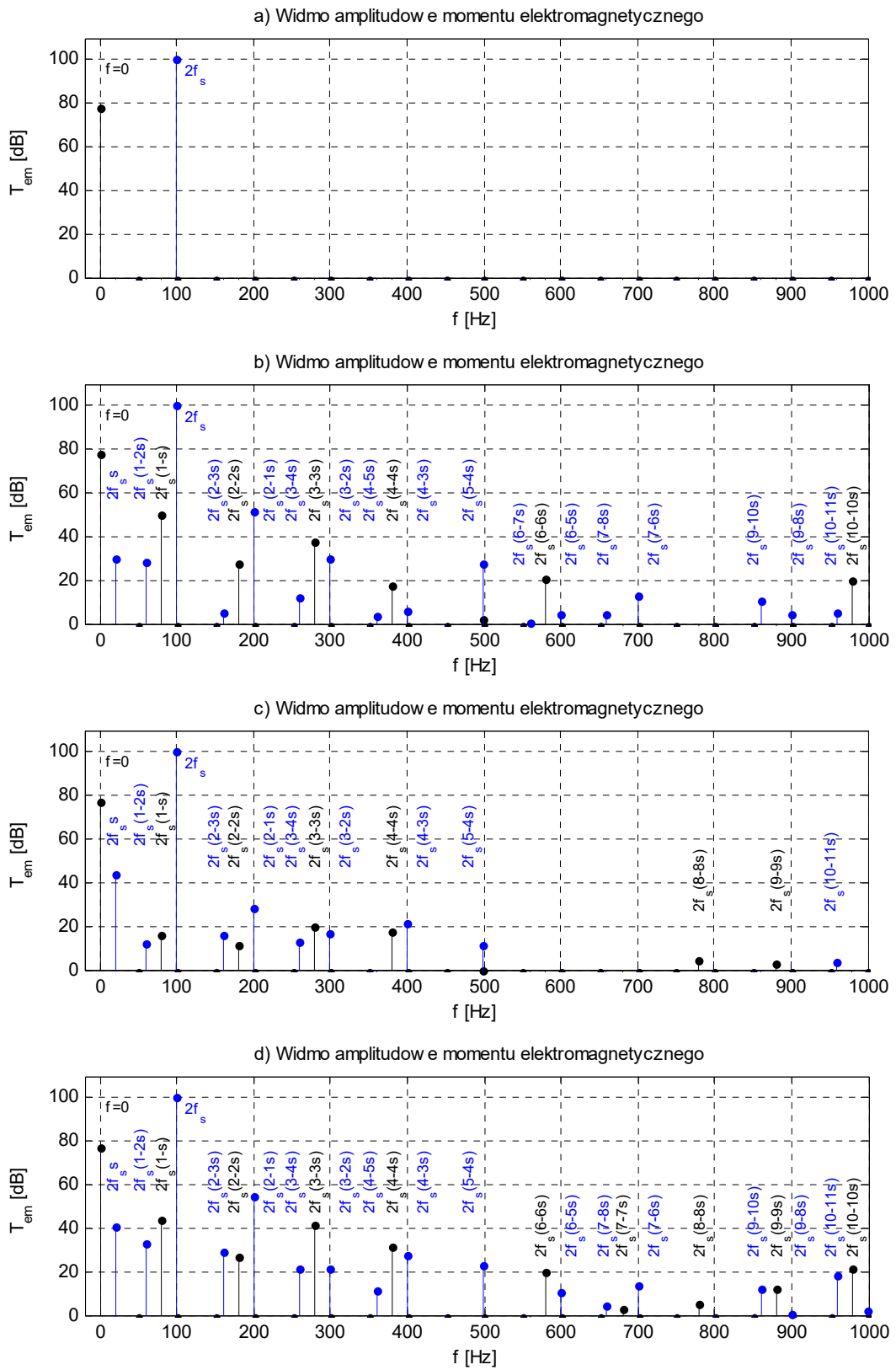
W sytuacji wystąpienia jedynie niesymetrii rezystancyjnej obwodu stojana zbiór (2.166) zostanie zredukowany do momentu asynchronicznego i przemiennego z podwójną pulsacją wymuszenia. W tym stanie pracy silnika – brak obciążenia zewnętrznego, przerwana faza zasilania obwodu stojana, moment elektromagnetyczny  $2\Omega_s$  będzie kilkukrotnie większy od momentu asynchronicznego. Z tej przyczyny zilustrowane poniżej przykładowe wyniki obliczeń (rysunki nr 2.22–2.23) odniesiono do momentu o podwójnej pulsacji sieciowej – zbiór II.

- widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego  $\Omega = 157$  rad/s:



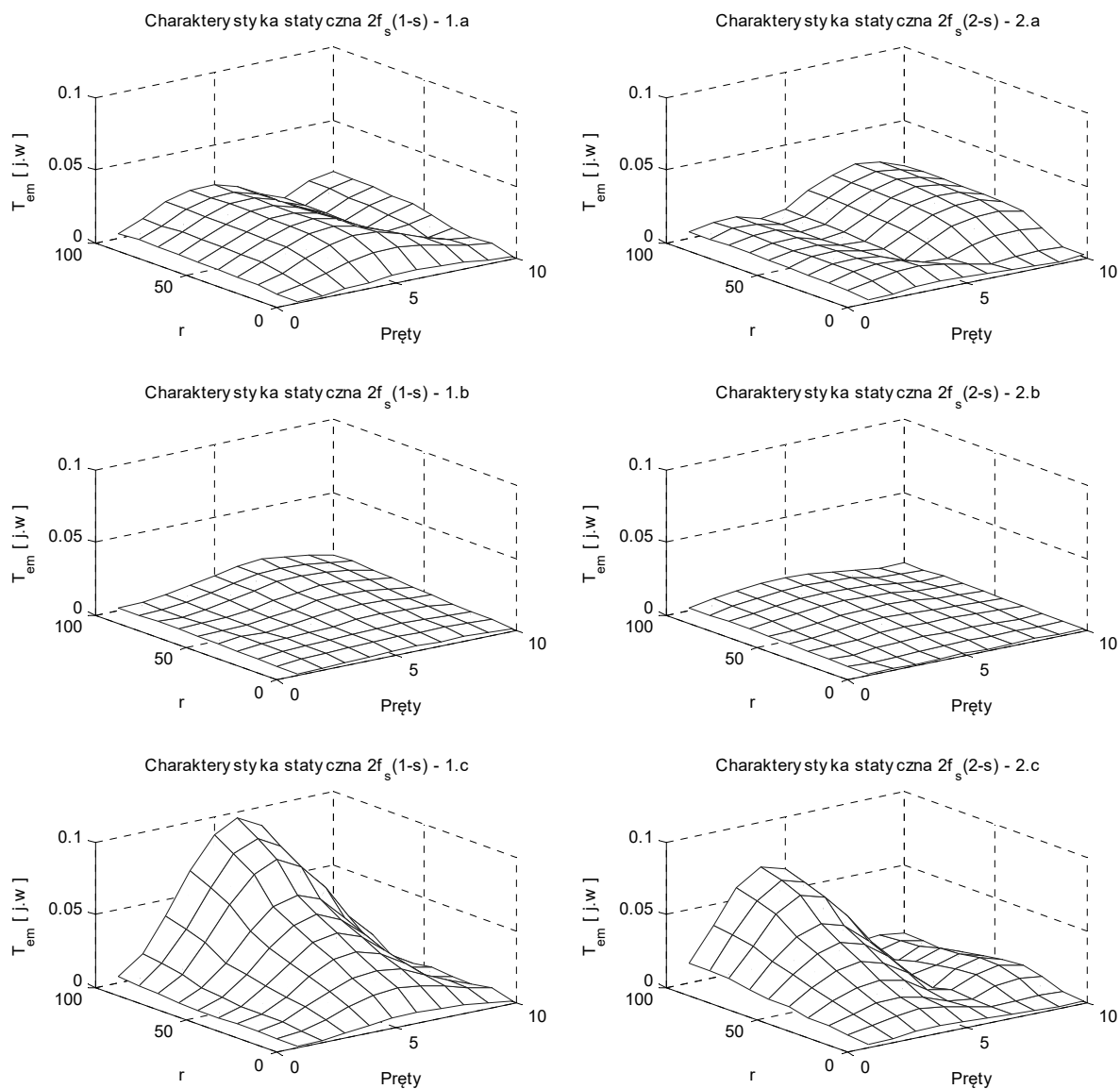
**Rys. 2.22** Względne widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa zewnętrzna w fazie stojana, a-b) symetryczny wirnik, c-d) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, e-f) przerwa w pręcie klatki pracy, g-h) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.

- widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego  $s=0,0005$ :



**Rys. 2.23** Względne widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego w funkcji częstotliwości, a) symetryczna klatka rozruchowa i klatka pracy, b) przerwy pręty klatki rozruchowej, c) przerwy pręty klatki pracy, d) przerwy pręty klatki górnej i dolnej pod sobą.

W ustalonym stanie pracy silnika nieobciążonego momentem mechanicznym z przerwana fazą stojana oraz niesymetrią rezystancyjną wirnika, najbardziej znaczące ilościowo są momenty generowane z dominującym współdziałaniem prądów stojana  $\Omega_s$  i składowej diagnostycznej  $\Omega_s + 2p\Omega - f_s \cdot (3-2s)$ . Zachodzi to w przypadku momentów elektromagnetycznych typu pierwszego  $2 \cdot p\Omega - 2 \cdot f_s \cdot (1-s)$  oraz drugiego typu  $2 \cdot (\Omega_s + p\Omega) - 2 \cdot f_s \cdot (2-s)$ . Wskazane składniki mogą powstać wyłącznie wskutek obustronnej niesymetrii silnika. Obserwacja zamieszczonych widm amplitudowych pozwala wykazać, że w początkowym etapie uszkodzenia klatki górnej wymienione momenty charakteryzują się znaczącymi amplitudami względem identycznych momentów generowanych wskutek niesymetrii klatki dolnej. Równie ważnym spostrzeżeniem staje się ilościowa zmiana tych składowych pod wpływem jednoczesnego uszkodzenia prętów klatki rozruchowej i klatki pracy zlokalizowanych w tej samej sekcji wirnika, gdzie rozkład amplitud ulega istotnej modyfikacji. Przyczyn obserwowanych efektów ilościowych należy poszukiwać w zmianach kątów fazowych prądów uwarunkowanych między innymi wartością mnożnika modelującego przerwę prętów klatek i reaktancji rozproszeń. Oprócz analizowanych momentów przemiennych prezentowane widma zawierają również moment elektromagnetyczny typu drugiego  $2 \cdot (\Omega_s - p\Omega) - 2f_s \cdot s$  związany z niesymetrią rezystancyjną wirnika. Wartość amplitudy powyższej składowej widma momentu elektromagnetycznego jest funkcją prędkości kątowej i momentu bezwładności. Ponieważ z założenia silnik pracuje z poślizgiem bliskim poślizgowi odpowiadającemu prędkości synchronicznej, a więc w najmniej korzystnych warunkach obciążenia jedynie momentem bezwładności własnej, amplituda tego momentu zostanie znacznie zredukowana w stosunku do przedstawionych obliczeń. Momenty przemiennie generowane z pulsacjami  $2 \cdot p\Omega$  oraz  $2 \cdot (\Omega_s + p\Omega)$  według punktu [p. 3.5.4] tylko nieznacznie zależą od momentu bezwładności, tak więc składowe zlokalizowane w przybliżeniu poza zakresem oddziaływań elektromechanicznych najwierniej odwzorowują poziom niesymetrii klatki rozruchowej. Ważną rolę w ocenie ilościowej niesymetrii spełnia badanie tendencji zmian najbardziej znaczących sygnałów diagnostycznych w funkcji parametrów charakteryzujących wybrany stan pracy silnika. Wśród tych parametrów w zakresie obustronnej niesymetrii i prędkości bliskiej idealnemu biegowi jałowemu zalicza się przede wszystkim wartość rezystancji modelującej przerwę pręta [56]. Przykładowe charakterystyki statyczne prezentujące przebieg zmienności momentów elektromagnetycznych  $2 \cdot f_s \cdot (1-s)$  oraz  $2 \cdot f_s \cdot (2-s)$  opracowano w odniesieniu do momentu  $2\Omega_s - 2 \cdot f_s$  ze zbioru pulsacji  $T_{em}^{II}$  dla silnika pracującego z poślizgiem  $s=0,0005$ . Krzywe przebiegów zmienności wybranych momentów synchronicznych z rysunku nr 2.24 odzwierciedlają typowy przypadek przzerwania kolejnych prętów klatek obok siebie.



**Rys. 2.24** Charakterystyka zmian amplitudy momentów przemiennych w funkcji liczby uszkodzonych prętów oraz współczynnika modelującego niesymetrię, a) obwód klatki rozruchowej, b) obwód klatki pracy, c) obwód klatki rozruchowej i klatki pracy,  $s=0,0005$ .

W tym punkcie należy wspomnieć o skutkach oddziaływania momentów przemiennych, które do tej pory nie były poddane dyskusji. Momenty te ze względu na szeroki zakres zmian częstotliwości mogą zrównać się z częstotliwościami własnymi elementów konstrukcyjnych układu napędowego, powodując wystąpienie zjawiska rezonansu. Zagadnie to obejmuje wszystkie momenty z punktem synchronizmu przy postoiu wirnika [74]. Stan pracy silnika w warunkach obustronnej niesymetrii rezystancyjnej jako najbardziej ogólny pozwala zaliczyć wśród tych składowych momenty z pulsacjami  $\pm 2k \cdot p\Omega$ , a jeżeli zostanie zachowana pełna symetria przewodowa obwodu stojana  $\pm 6k \cdot p\Omega$ . Z wymienionych powodów przebiegi krzywych sygnałów diagnostycznych mogą wykazywać znaczące różnice między wynikami obliczeń i pomiarów.

### 2.5.6 Czynniki utrudniające diagnostykę niesymetrii rezystancyjnej wirnika

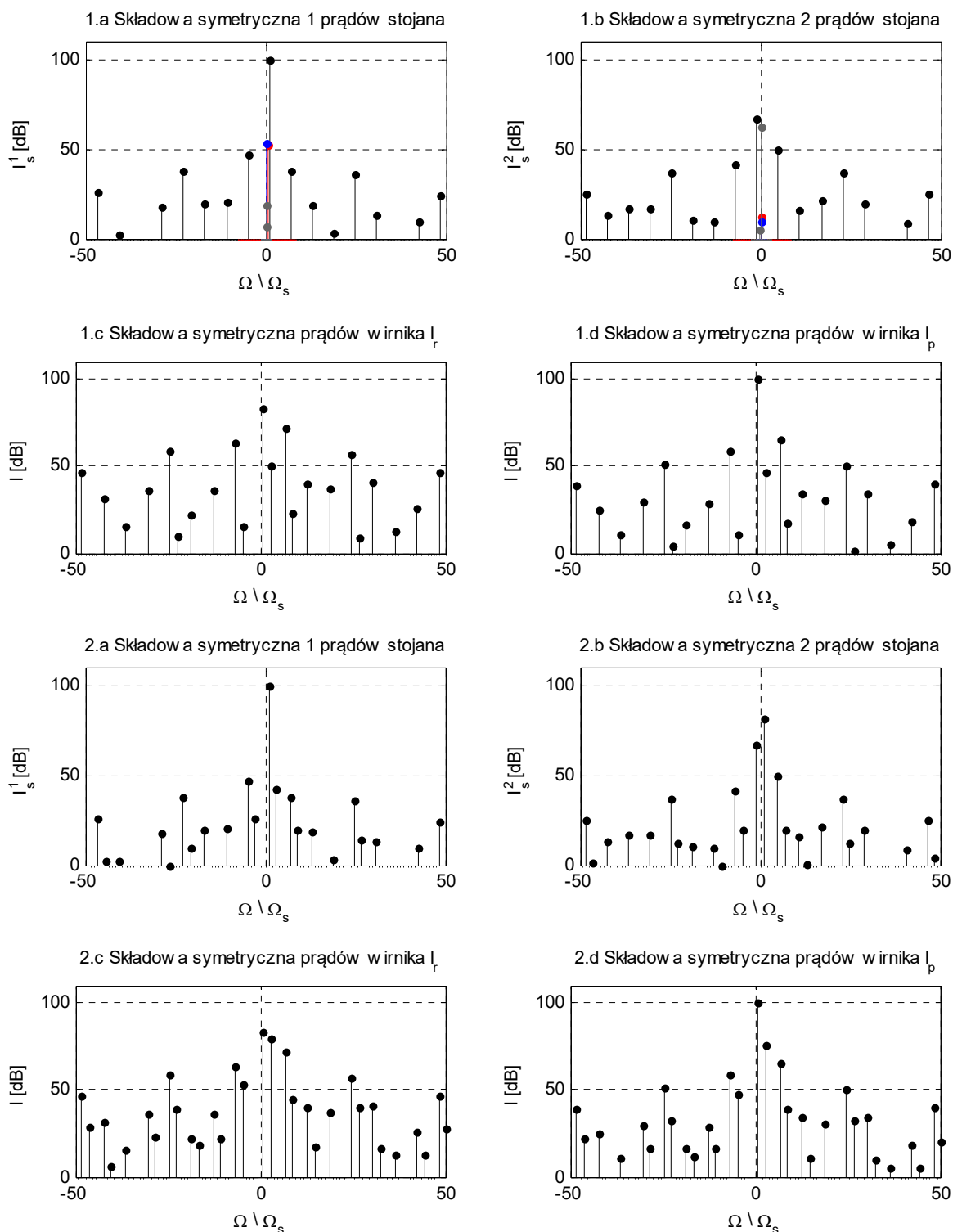
W rzeczywistym układzie napędowym pojawia się szereg czynników zaburzających proces prawidłowej diagnostyki wirnika z niesymetrią elektryczną. Powoduje to, m. in. generowania prądów i momentów z tymi samymi częstotliwościami co składowe diagnostyczne, ale będących efektem odmiennych zjawisk zachodzących w maszynie. Praktycznie użytecznym przykładem takiej sytuacji jest zasilanie silnika sieciowym układem napięć odkształconych lub pośrednio z przekształtnika. Zaniedbanie wprowadzonego w poprzednich podrozdziałach założenia odnośnie sinusoidalnego zasilania obwodu stojana powoduje, że równania wybranej harmonicznej czasowej można rozpatrywać jako niezależne [p.2.3.1]. W związku z przyjętą wcześniej liniową charakterystyką magnesowania oraz stałą prędkością kątową wirnika rozwiązanie końcowe uważa się za superpozycję niezależnych rozwiązań cząstkowych wynikających z uwzględnienia większej liczby harmonicznym czasowych wymuszenia niż tylko składowa podstawowa. Innym aspektem w znaczący sposób decydującym o skuteczności diagnostyki wirnika pozostaje nadal rozkład uszkodzonych prętów i pierścieni zwierających obwodu wybranej klatki [84]. Zazwyczaj desymetryzacja rezystancyjna wirnika postępuje ilościowo, tzn. uszkodzeniu podlegają kolejne pręty położone obok siebie [32]. Jednakże od tej reguły występują różne odstępstwa np. ze względu na standard wykonania połączeń elementów składowych klatek, minimalizując udział wybranych sygnałów diagnostycznych w widmie prądu stojana i momentu elektromagnetycznego nawet przy znacznej ilości przerwanych prętów. Dlatego też, aby wykazać jakościowy oraz ilościowy wpływ efektów dodatkowych w granicach użyteczności modelu bilansu harmonicznym – pomijając oddziaływania elektromechaniczne, rozważono następujące przypadki pracy silnika z podanymi niżej warunkami:

- a)** okresowo zmienne odkształcenie napięć zasilających harmonicznymi czasowymi o częstotliwościach (przesunięciach fazowych) i wartościach skutecznych:  $U_n$  (50Hz – 0°, 120°, 240°), 2V (150Hz – 30°, -90°, 150°), 5V (350Hz – 0°, 120°, 240°); składowe pierwsze (zgodne), 10V (250Hz – 0°, 120°, 240°) – składowa druga (przeciwna),
- b)** niesymetrię zasilania sinusoidalnym układem napięć trójfazowych, gdzie składowe symetryczne wymuszenia są równe  $0,98 \cdot U_n$  (harmoniczna pierwsza) i  $0,02 \cdot U_n$  (harmoniczna druga),
- c)** niesymetrię prawie biegunową wirnika (wynik dzielenia liczby prętów przez ilość biegunów nie daje wartości całkowitej) – uszkodzenie prętów klatki dolnej oraz górnej 1-8-15-22,
- d)** dodanie przewodu zerowego z rezystancją  $1\Omega$  w układzie zasilania obwodu stojana i napięciu nieodkształconym (znamionowym).

Obliczenia w punktach **a**, **b** i **d**, wykonano zakładając przerwę jednego pręta klatki rozruchowej

i klatki pracy pod sobą ( $r=20$ ). Rysunki nr 2.25, 2.27–2.28 zawierają zaznaczone dodatkowymi kolorami sygnały wytwarzane przez nałożone w powyższych punktach warunki pracy silnika.

- widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów  $\Omega=155,5$  rad/s:



**Rys. 2.25** Względne widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1) okresowe odkształcenie układu napięć trójfazowych, 2) niesymetria parametryczna układu napięć zasilających.

Z przytoczonych obliczeń numerycznych wynikają następujące wnioski:

a) odkształcenie napięć jest przyczyną wytwarzania składowych tożsamyh z istnieniem oddziaływań elektromechanicznych lub nieliniowością obwodu magnetycznego, lecz jak można zauważyć ich udział w widmie prądu jest nieznaczny,

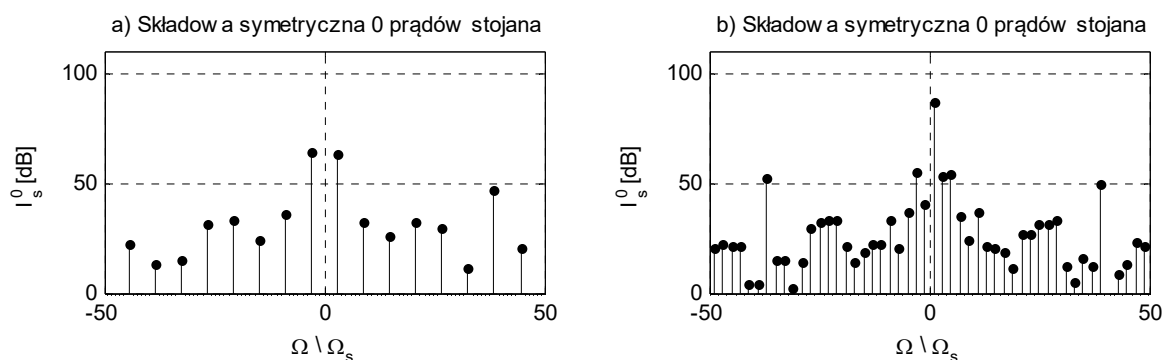
b) niesymetria układu zasilania prowadzi do pojawienia się pola przeciwbieznego, wskutek czego wektory rozwiązań stojana i wirnika zawierają sygnały z zbiorów [p.2.5.5],

c) szczególny przypadek uszkodzenia wirnika jakim jest przybliżona niesymetria biegunowa ma charakter symetryzujący, tak więc potwierdza tezę o konieczności badania składowych leżących w przedziale średnich częstotliwości według zasad przytoczonych w poprzednich podrozdziałach [p.2.5.2–p.2.5.5],

d) uwzględnienie przewodu zerowego w silniku zasilanym symetrycznym układem napięć powoduje w nim przepływ prądów z pulsacjami  $m\Omega_s + 2 \cdot p\Omega \cdot (3 \cdot k + 1)$  i  $m\Omega_s - 2 \cdot p\Omega \cdot (2 \cdot k + 1)$  spotykanymi przy obustronnej niesymetrii silnika. Jeżeli dodatkowo założyć istnienie przerwy zasilania fazy obwodu stojana, wówczas w zbiorze sygnałów składowej zerowej należy wyróżnić obok wymienionego wyżej zbioru prądy  $m\Omega_s + 2 \cdot k \cdot p\Omega$  oraz  $m\Omega_s - 2 \cdot p\Omega \cdot (k + 1)$ .

Warto nadmienić, że we wszystkich przedstawionych przykładach skład jakościowy prądów wirnika pozostaje bez zmiany, gdyż obowiązują zależności ogólne z [p.2.5.2] i [p.2.5.4].

- widmo amplitudowe składowej symetrycznej zerowej prądów stojana:

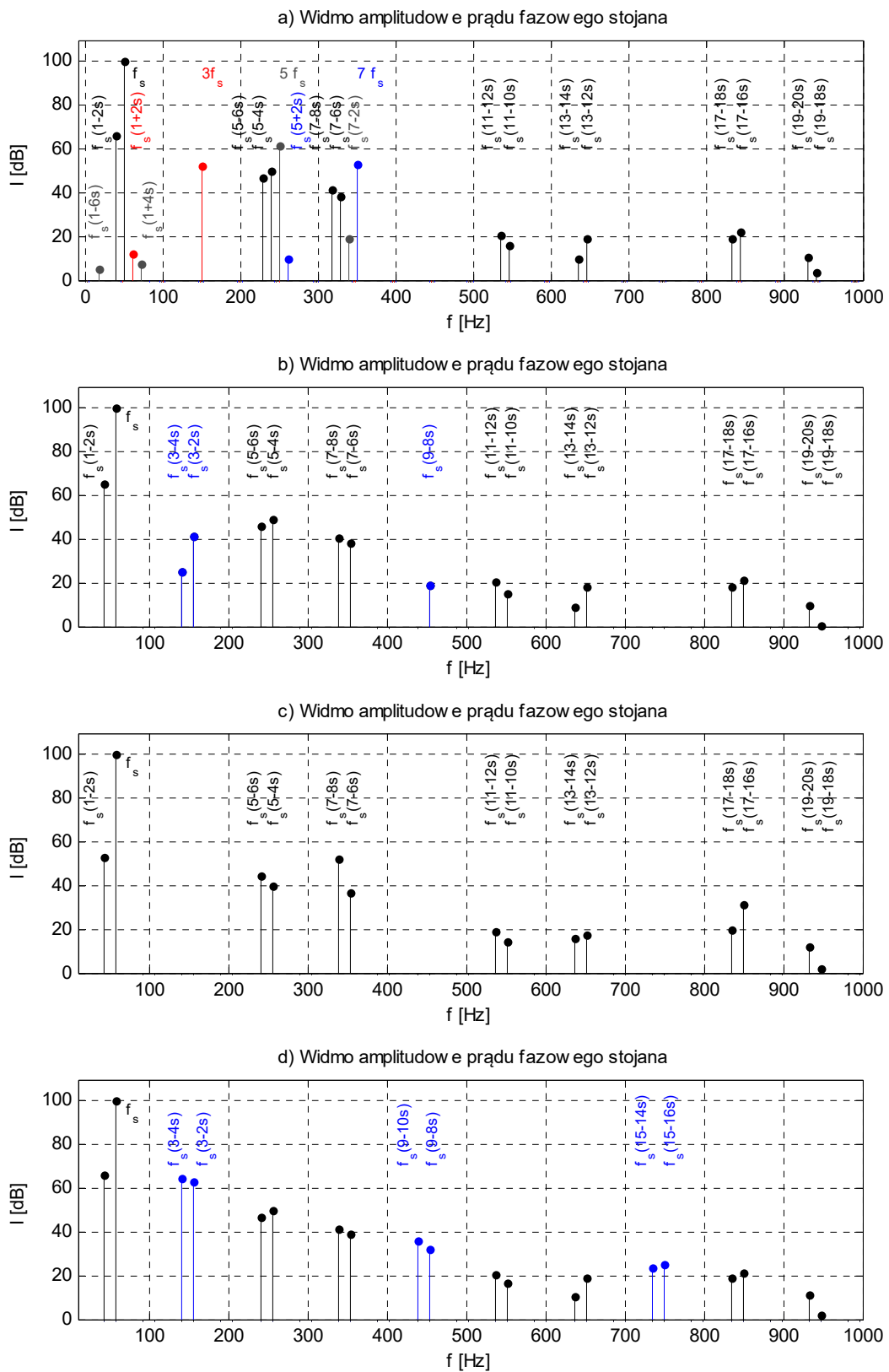


**Rys. 2.26** Względne widmo amplitudowe składowej symetrycznej zerowej prądu stojana w funkcji pulsacji względnej, przerwany jeden pręt klatki górnej oraz dolnej pod sobą, a) symetryczny układ napięć trójfazowych – 155,5 rad/s (prędkość znamionowa), b) przerwa w fazie zasilania obwodu stojana – 157 rad/s (bieg jałowy).

Omówione przypadki nie wyczerpują wszystkich rodzajów zaburzenia procesu oceny stanu niesymetrii elektrycznej wirnika, niemniej jednak pozwalają przedstawić możliwości wieloharmonicznego modelu obwodowego w tworzeniu złożonych wzorców diagnostycznych.

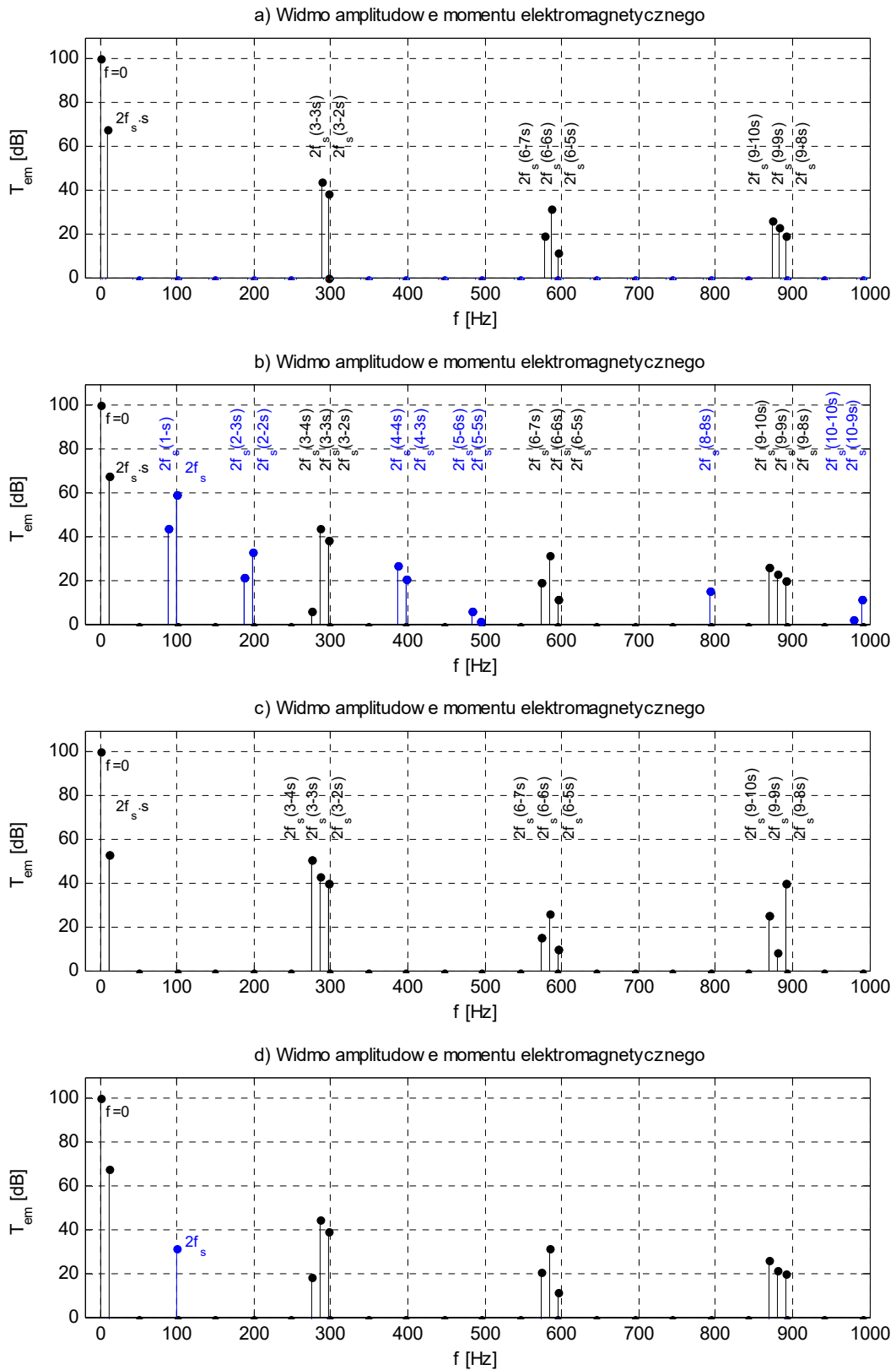


- widmo amplitudowe prądu fazowego obwodu stojana  $s=0,01$ :



**Rys. 2.27** Widmo amplitudowe prądu fazowego stojana w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) odkształcenie napięć zasilających, b) niesymetria parametryczna układu napięć, c) niesymetria prawie biegunowa, d) dołączenie przewodu zerowego.

- widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego  $s=0,01$ :



**Rys. 2.28** Widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) odkształcenie napięć zasilających, b) niesymetryczna parametryczna układu napięć, c) niesymetryczna prawie biegunowa, d) dołączenie przewodu zerowego.

### III. Model nieliniowy z niesymetrią wewnętrzną dla stanu ustalonego w dziedzinie czasu

#### 3.1 Wprowadzenie

W poprzednim rozdziale przedstawiono równania silnika indukcyjnego dwuklatkowego z niesymetrią wewnętrzną w dziedzinie częstotliwości. Najważniejszymi właściwościami tego modelu były założenia dotyczące stałej prędkości kątowej oraz liniowego charakteru obwodu magnetycznego [p.2.4]. Wskazane uproszczenia wyeliminowały nieliniowości typu strukturalnego i parametrycznego sprowadzając rozwiązanie układu równań do typowego zagadnienia algebraicznego z różnym stopniem złożoności zależnym od miejsca powstania niesymetrii rezystancyjnej. Wskutek ograniczenia modelu względem rozwiązań liniowych pominięto zjawiska jakościowe wywołane oddziaływaniami elektromechanicznymi, a także nasyceniem głównego obwodu magnetycznego. Uwzględnienie wymienionych czynników wymaga rozwiązania układu równań różniczkowych, gdy wybrany typ nieliniowości nie wpływa na sposób formułowania tych równań, lecz spowoduje zmianę metody ich rozwiązania [78], [88].

Jak już wielokrotnie wspomniano [p.2.1], najważniejszym zjawiskiem towarzyszącym niesymetrii wewnętrznej silnika indukcyjnego modyfikującym rozwiązanie stają się wahania prędkości kątowej wirnika wokół wartości średniej będące przyczyną generowania nowych składowych widma prądów oraz momentu elektromagnetycznego. Rozszerzenie modelu w tym zakresie sprawia, że równania części elektrycznej powinny być najczęściej rozwiązane łącznie z równaniem mechanicznym, gdzie w najbardziej złożonym przypadku oprócz prądów poszukuje się dodatkowo wektorów prędkości i perturbacji kąta obrotu wirnika [65], [75], [76]. Bezpośrednie wyznaczenie stanu ustalonego wymaga spełnienia warunku, aby przewidywane rozwiązanie miało postać funkcji dwuokresowej. Sprawdzenie czy układ równań posiada wskazane cechy odbywa się między innymi w etapie przekształcenia współrzędnych [65], [76], [79] lub, co wykazano [48], [p.2.3], okresowość rozwiązań ustalonych wynika z okresowej zmienności wymuszeń oraz współczynników występujących w równaniach. Jeżeli oddziaływania elektromechaniczne wchodzi w skład zbioru rozwiązań, wówczas wymuszeniami są napięcia i zewnętrzny moment mechaniczny. Moment mechaniczny [p.2.1] poza składową stałą może również zawierać składowe przemienne [29], [88], tak więc powinien strukturalnie przyjmować

postać wektora opisanego przez (2.14) gwarantując, że rozwiązanie pozostanie nadal dwuokresowe. W rezultacie pozwala to zapisać poszukiwane prądy, za pomocą szeregu funkcji dwóch niezależnych okresów (3.1) wynikających z pulsacji napięć zasilających (2.12) i średniej prędkości kątowej wirnika (2.13)

$$\mathbf{i}(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \cdot \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{r,s} e^{j \cdot [(r\Omega_s + s\cdot p\Omega) \cdot t + s \cdot p \varphi_0]} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \cdot \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{r,s} e^{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega) \cdot t}, \forall (r,s) \in \mathbf{Z} \quad (3.1)$$

Prędkość kątową z uwzględnieniem jej okresowej zmienności w czasie oraz wektora momentu mechanicznego należy przewidzieć jako złożenie wartości średniej i przemiennej

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \cdot \sum_{s=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\Omega}_{r,s} e^{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega) \cdot t} = \boldsymbol{\Omega} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \cdot \sum_{s=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\Omega}_{r,s} e^{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega) \cdot t}, \forall (r,s) \setminus \{0\} \quad (3.2)$$

Wektorowi prędkości wirnika reprezentowanemu przez (3.2) odpowiada szereg Fouriera określający przebieg kąta obrotu, gdzie  $\boldsymbol{\Omega}$  i  $\varphi_0$  pozostają niezależne od siebie

$$\varphi(t) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot t + \varphi_0) + \Delta\varphi(t) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot t + \varphi_0) + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \cdot \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Delta\varphi_{r,s} e^{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega) \cdot t}, \forall (r,s) \setminus \{0\} \quad (3.3)$$

Przedział poszukiwanych wielkości zdefiniowanych związkami (3.1) – (3.3), warunkuje strukturę układu równań i wiąże się głównie ze znajomością bądź nieznanością wartości średniej prędkości kątowej wirnika [65], [75], [76]. W sytuacji, kiedy prędkość średnia jest znana, rozwiązanie zostanie zawężone do nieznanych szeregów prądów oraz wahań kąta obrotu

$$\mathbf{A}_2(t) \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) + \frac{d}{dt} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}(t) = [\mathbf{i}(t) \quad \Delta\varphi(t)]^T \quad (3.4)$$

W równaniach (3.4) macierz  $\mathbf{A}_2(t)$  jest niezależna od  $\mathbf{x}(t)$ , natomiast pozostałe wektory układu stanowią nieliniowe funkcje względem wektora rozwiązań. W drugim przypadku, gdy wśród poszukiwanych zmiennych występuje wartość średnia prędkości kątowej układowi równań nadaje się poniższą strukturę

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}(t) = [\mathbf{i}(t) \quad \boldsymbol{\omega}(t) \quad \Delta\varphi(t)]^T \quad (3.5)$$

Jeśli rozwiązaniu podlega wyłącznie nieliniowe zagadnienie elektromagnetyczne przy znanym wektorze prędkości kątowej [75], zbiór poszukiwanych wielkości zostanie zredukowany tylko

do nieznanych wartości prądów - rozwiązywany układ równań różniczkowych przyjmie wtedy najprostszą postać:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{b}(t), \mathbf{x}(t) = [\mathbf{i}(t)]^T \quad (3.6)$$

Rozwiązanie przedstawionych równań bezpośrednio dla stanu ustalonego staje się możliwe jedynie w wyniku zastąpienia ciągłego operatora różniczkowania jego dyskretnym odpowiednikiem i dostosowania tak zalgebraizowanego układu do wybranej metody iteracyjnej. Ten sposób rozwiązania nieliniowych równań różniczkowych z okresowo zmiennymi współczynnikami w dziedzinie czasu będzie nazywany metodą dyskretnego bilansu harmonicznego. W tym rozdziale rozważono wyłącznie równanie (3.4) z nieliniowością typu strukturalnego tzn. przyjęto, że silnik pracuje ze znaną średnią prędkością kątową wirnika.

### 3.2 Równania dyskretnego bilansu harmonicznego w dziedzinie czasu

W celu utworzenia równań dyskretnego bilansu harmonicznego niezbędne jest zdefiniowanie czasowego operatora różniczkowania wychodząc z struktury dwuokresowej macierzy (2.19) przedstawionej w dziedzinie częstotliwości [75], [76]. Aby otrzymać operator w dziedzinie czasu należy określić wzajemne relacje między współczynnikami Fouriera i wartościami chwilowymi poszukiwanej funkcji [75], [76]. Wymaga to wcześniejszego ograniczenia szeregu (2.11) do postaci skończonej dla dwóch niezależnych oraz okresowych funkcji (2.12)–(2.13) z liczbą wyrazów zawartych w zbiorach  $-R \leq r \leq R$  i  $-S \leq s \leq S$  równomiernie rozłożonych punktów na osi czasu

$$\begin{cases} \mathbf{R}_r = r \alpha, & -R \leq r \leq R, \alpha = 2\pi/(2R+1) \\ \mathbf{S}_s = s \beta, & -S \leq s \leq S, \beta = 2\pi/(2S+1) \end{cases} \quad (3.7)$$

Szereg (2.11) zgodnie z przyjętymi założeniami (3.7) przyjmie jednoznacznie określoną formę liniową

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \sum_{r=-R}^R \cdot \sum_{s=-S}^S \mathbf{X}_{r,s} e^{j \cdot (r \Omega_s) \cdot t} e^{j \cdot (s \cdot p \Omega) \cdot t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X} \quad (3.8)$$

Pochodną z powyższego szeregu względem zmiennej niezależnej można zapisać jako iloczyn uporządkowanej macierzy rozwinięcia funkcji wykładniczych  $\mathbf{T}$  oraz ograniczonej przez zbiór punktów (3.7) macierzy operatora różniczkowania w dziedzinie częstotliwości (2.19) i wektora

poszukiwanych współczynników Fouriera

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{r=-R}^R \sum_{s=-S}^S \mathbf{X}_{r,s} e^{j \cdot (r\Omega_s)t} e^{j \cdot (s\Omega)t} \right) = \mathbf{T} \cdot j\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{X} \quad (3.9)$$

Z wyrażenia (3.8) wynika, że musi być spełniony następujący związek:  $\mathbf{X} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x}$ , który po podstawieniu do wzoru (3.9) pozwala wyznaczyć skończoną macierz dwuokresowego operatora różniczkowania  $\mathbf{D}$  w dziedzinie czasu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \cdot j\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \quad (3.10)$$

Jeżeli w (2.8) uwzględnić zależności (3.8) oraz (3.10), otrzymuje się następujący układ równań algebraicznych

$$\mathbf{T} \cdot j\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \quad (3.11)$$

W tym równaniu wektor wartości funkcji w punktach jest uporządkowany według następującego schematu

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_R \quad \dots \quad \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}_{-1} \quad \dots \quad \mathbf{x}_{-R}]^T \quad (3.12)$$

Każdy z podwektorów występujących w (3.8) posiada strukturę określoną zgodnie z poniższą równością

$$\mathbf{x}_r = [\mathbf{x}_{r,S} \quad \dots \quad \mathbf{x}_{r,1} \quad \mathbf{x}_{r,0} \quad \mathbf{x}_{r,-1} \quad \dots \quad \mathbf{x}_{r,-S}] \quad (3.13)$$

Identycznym rozkładem elementów charakteryzuje się wektor wartości współczynników Fouriera z prawej strony równania (3.8)

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_R \quad \dots \quad \mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_0 \quad \mathbf{X}_{-1} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{-R}]^T, \quad (3.14)$$

w którym kolejne podwektory posiadają analogiczne położenie współczynników do podwektora wartości chwilowych (3.13)

$$\mathbf{X}_r = [\mathbf{X}_{r,S} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{r,1} \quad \mathbf{X}_{r,0} \quad \mathbf{X}_{r,-1} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{r,-S}] \quad (3.15)$$

Wykonanie operacji mnożenia przewidzianych w (3.11) względem wektora wymuszeń  $\mathbf{B}$  oraz macierzy  $\mathbf{A}$  układu równań określa uporządkowaną strukturę wektora  $\mathbf{b}$  i macierzy  $\mathbf{a}$  w dziedzinie czasu:

$$\mathbf{f} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} = [\mathbf{f}_R \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_0 \quad \mathbf{f}_{-1} \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{f}_{-R}]^T \quad (3.16)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \text{diag}[\mathbf{a}_R \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_0 \quad \mathbf{a}_{-1} \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{a}_{-R}] \quad (3.17)$$

dla:  $\mathbf{f}_r = [\mathbf{f}_{r,S} \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{f}_{r,1} \quad \mathbf{f}_{r,0} \quad \mathbf{f}_{r,-1} \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{f}_{r,-S}]$  (3.18)

$$\mathbf{a}_r = \text{diag}[\mathbf{a}_{r,S} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{r,1} \quad \mathbf{a}_{r,0} \quad \mathbf{a}_{r,-1} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{r,-S}] \quad (3.19)$$

W zależnościach (3.8)–(3.11) macierz unitarna  $\mathbf{T}$  pełni rolę podwójnie określonej macierzy Fouriera łączącej wartości funkcji czasu z współczynnikami szeregu (3.8)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{R^2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{c}^R \mathbf{B} & \mathbf{c}^0 \mathbf{B} & \mathbf{c}^{-R} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{c}^{-R^2} \mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{c}^R \mathbf{B} & \dots & \mathbf{c}^1 \mathbf{B} & \mathbf{c}^0 \mathbf{B} & \mathbf{c}^{-1} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{c}^{-R} \mathbf{B} \\ \mathbf{c}^0 \mathbf{B} & \dots & \mathbf{c}^0 \mathbf{B} & \mathbf{c}^0 \mathbf{B} & \mathbf{c}^0 \mathbf{B} & \dots & \mathbf{c}^0 \mathbf{B} \\ \mathbf{c}^{-R} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{c}^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{c}^0 \mathbf{B} & \mathbf{c}^1 \mathbf{B} & \dots & \mathbf{c}^R \mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{c}^{-R^2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{c}^{-R} \mathbf{B} & \mathbf{c}^0 \mathbf{B} & \mathbf{c}^R \mathbf{B} & \dots & \mathbf{c}^{R^2} \mathbf{B} \end{bmatrix}, \mathbf{c} = e^{j \cdot \alpha} \quad (3.20)$$

gdzie:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{S^2} & \dots & \mathbf{d}^S & \mathbf{d}^0 & \mathbf{d}^{-S} & \dots & \mathbf{d}^{-S^2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{d}^S & \dots & \mathbf{d}^1 & \mathbf{d}^0 & \mathbf{d}^{-1} & \dots & \mathbf{d}^{-S} \\ \mathbf{d}^0 & \dots & \mathbf{d}^0 & \mathbf{d}^0 & \mathbf{d}^0 & \dots & \mathbf{d}^0 \\ \mathbf{d}^{-S} & \dots & \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^0 & \mathbf{d}^1 & \dots & \mathbf{d}^S \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{d}^{-S^2} & \dots & \mathbf{d}^{-S} & \mathbf{d}^0 & \mathbf{d}^S & \dots & \mathbf{d}^{S^2} \end{bmatrix}, \mathbf{d} = e^{j \cdot \beta} \quad (3.21)$$

Dopiero przekształconym w ten sposób równaniom można nadać formę schematu iteracyjnego. Najczęściej stosowanymi w praktyce algorytmami numerycznego poszukiwania rozwiązań algebraicznych układów równań nieliniowych są procedury iteracji prostej i metoda Newtona-Raphsona [14]. Każdą z nich zaliczono do metod przybliżonych o zbieżności lokalnej. Oznacza to, że przed rozpoczęciem obliczeń niezbędne jest prawidłowe wyznaczenie przedziału obejmującego punkt startowy będący pierwszym przybliżeniem rozwiązania końcowego. W przeciwnym przypadku, gdy rozwiązanie początkowe leży, poza tym zbiorem wskazane algorytmy wykazują cechy niestabilności numerycznej. Prócz tego wybór punktu startowego posiada decydujący wpływ na szybkość danej procedury iteracyjnej. Niestety nie zawsze można tak dobrać lub przewidzieć wartości początkowe, aby zminimalizować czas rozwiązania z założoną wcześniej dokładnością. Zazwyczaj w celu uniknięcia komplikacji przy stałych wymuszeniach za punkt startowy przyjmuje się rozwiązanie układu zlinearyzowanego. Niemniej ważnym czynnikiem mającym szczególne znaczenie w zakresie zbieżności algorytmu iteracji prostej jest rodzaj występującej nieliniowości tzn. istnieją takie równania, które pomimo spełnienia wszystkich warunków wyboru punktu startowego nie osiągają stabilnego rozwiązania.

Metoda iteracji prostej (**MIP**), koncepcyjnie pochodzi z idei odwzorowań zwięzających [14], [31], [60] i ma zastosowanie w rozwiązywaniu równań o postaci  $F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0}$  przy założeniu, że można je przekształcić do układu spełniającego tożsamość  $\mathbf{x} = f(x_1, \dots, x_n)$ . Następnie dla zadanego punktu startowego, należy znaleźć wartości rozwiązań tworzące ciąg kolejnych przybliżeń dany wyrażeniem

$$\mathbf{x}^{i+1} = f(\mathbf{x}^i) \quad (3.22)$$

Jeżeli w każdym następnym kroku obliczeń zachodzi następujący warunek zbieżności algorytmu  $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^i| \leq |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i+1}|$ ; gdzie:  $\mathbf{x}'$ , to poszukiwane rozwiązanie końcowe z określonym błędem  $\varepsilon$ , wówczas proces iteracji zostanie zakończony w  $i$ -tej pętli, ponieważ  $|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i+1}| \approx \mathbf{0}$ . Zatem równaniu macierzowemu (3.4) w metodzie iteracji prostej odpowiada równanie rekurencyjne

$$\mathbf{x}^{i+1} = (\mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_1(\mathbf{x}^i) + \mathbf{a}_0)^{-1} \cdot \mathbf{f}, \quad (3.23)$$

które ma rozwiązanie jedynie przy znanej wartości średniej prędkości kątowej. W algorytmie Newtona-Raphsona (**ANR**) odmiennie niż w metodzie iteracji prostej, funkcja  $F$  traktowana jest jako „ $n$ ” funkcji zmiennych niezależnych aproksymowanych szeregiem Taylora. Kła-



syczny algorytm ANR uwzględnienia jedynie dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia funkcji  $F$  linearyzując tym samym rozwiązywany układ równań. W metodzie ANR zlinearyzowane równanie (3.4) podlega przekształceniu według zależności

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (3.24)$$

Funkcję  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  występującą w (3.24) przeważnie dobiera się jako odwrotność pochodnej funkcji  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ , co zapewnia zbieżność schematu iteracyjnego. Podstawiając w (3.24), za  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{h}'(\mathbf{x})]^{-1}$ , można otrzymać równanie początkowe typu

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - [\mathbf{h}'(\mathbf{x})]^{-1} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (3.25)$$

przy czym algorytm wyznaczania pierwiastków powyższego równania:

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - [\mathbf{g}(\mathbf{x}^i)]^{-1} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{x}^i - [\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)]^{-1} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}^i) \quad (3.26)$$

Macierz współczynników  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^i)$  układu równań obliczaną w każdym kroku iteracji z wektora  $\mathbf{x}^i$  opisuje macierz Jacobiego

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{x}_{n-1}} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{x}_2} & \ddots & \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{x}_{n-1}} & \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Proces poszukiwania rozwiązania algorytmu (3.26) przebiega  $i$ -razy, dopóki teoretycznie nie zostanie spełniona równość  $|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i+1}| = \mathbf{0}$  lub w praktyce, jeśli dopuszczalny błąd  $|\mathbf{h}(\mathbf{x}^i)| \leq \varepsilon$ .

Z ogólnego równania wynika dopasowanie (3.4) do metody Newtona-Raphsona

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - (\mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_1(\mathbf{x}^i) + \mathbf{a}_0)^{-1} \cdot \mathbf{f} \quad (3.28)$$

Warto nadmienić, że przedstawione metody rozwiązywania nieliniowych układów równań algebraicznych wykazują pewne niedogodności w ich stosowaniu. Jedną z nich może być już wspomniana szybkobieżność, która w przypadku algorytmu iteracji prostej ma jedynie własność zbieżności liniowej. Zdecydowanie bardziej korzystna w tym względzie jest metoda Newtona-Raphsona charakteryzująca się zbieżnością kwadratową, lecz jej wadę stanowi konieczność wyznaczania odwrotności macierzy Jacobiego w każdej iteracji [14]. Wprawdzie powstało wiele modyfikacji ANR i MIP przyspieszających proces obliczeń w tym m. in. metody relak-

sacji i ograniczonej wrażliwości, ale żadna z nich nie daje tak ogólnego podejścia w formułowaniu rozwiązań nieliniowych układów równań jak algorytm Newtona-Raphsona. W celu przyspieszenia działania algorytmu **ANR** wykorzystanego do bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego z uwzględnieniem równania ruchu, zastosowano znaną modyfikację ze schematem Gaussa, która nie wymaga takich nakładów obliczeniowych jak metoda klasyczna [14], [31].

### 3.3 Równania modelu bazowego

Według omówionych we wstępie informacji niesymetria elektryczna wirnika jest przyczyną wystąpienia wolnozmiennych wahań momentu oraz prędkości kątowej. Z tych powodów wnioskuje się, że zakres oddziaływań elektromechanicznych w widmie prądów stojana będzie ograniczony głównie do pasma skupionego wokół składowej podstawowej [29], [30], [83], [104]. Powyższe spostrzeżenie daje możliwość znacznego zredukowania modelu silnika. Pod tym pojęciem stoi wybór takiej liczby uwzględnianych wyższych harmonicznych przestrzennych, która nie spowoduje istotnych zmian efektów ilościowych wywołanych odpowiedzią układu mechanicznego związanych z zaburzeniem symetrii wewnętrznej. Przyjmując za wspomnianą liczbę wartość pozwalającą przedstawić macierz indukcyjności wzajemnych między stojanem oraz wirnikiem w formie niezależnej od kąta obrotu, otrzymuje się klasę równań łatwo sprowadzalnych przez transformację do postaci stałej w ciele liczb zespolonych lub rzeczywistych [26], [55], [80]. Właściwości modelu opisywanego równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach zostaną wykorzystane w celu porównania proponowanej metody bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego z metodą całkowania numerycznego [p.3.4.4].

Podstawą w formułowaniu równań modelu wieloharmonicznego opisywanego stałymi równaniami różniczkowymi jest struktura macierzy indukcyjności wzajemnych między obwodami stojana i wirnika (2.84). Z przytoczonej postaci macierzy wynika, że indukcyjność danego rzędu może wystąpić tylko jeden raz na pozycji będącej funkcją liczby par biegunów i żłobków wirnika. Prócz tego rozwinięcie w nieskończony szereg Fouriera współczynników indukcyjności przy ograniczonym wymiarze macierzy, spowoduje sumowanie elementów różnego rzędu w tym samym miejscu. W związku z tym, sprowadzenie układu równań do postaci stałej polega na takim wyborze zbioru harmonicznych przestrzennych, które w następstwie przekształcenia współrzędnych dadzą macierz niezależną względem kąta obrotu wirnika. Sposób wyboru harmonicznych przestrzennych wchodzących w skład macierzy indukcyjności wzajemnych, pozwala wyróżnić dwie klasy modeli. Pierwszą klasę tworzą tzw. bazowe układy równań różniczkowych, jeśli skutek transformacji równania składowych zerowej, pierwszej i drugiej prądów stojana mogą być rozpatrywane jako trzy niezależne podukłady [26], [80], [99], [100]. W dru-

giej bardziej złożonej klasie zawarte są układy, gdzie składowa pierwsza i druga prądów stojana będą wzajemnie związane, natomiast równanie składowej zerowej poza nielicznymi przypadkami powinno zostać pominięte [26], [80]. Modele tej klasy uznaje się za istotne rozszerzenie układu bazowego zdecydowanie powiększając zbiór uwzględnianych harmonicznym przepływu, lecz ich wadą jest konieczność indywidualnego podejścia w formułowaniu równań dla każdej maszyny [80]. Należy również zaznaczyć, że utworzenie takiego modelu jest nie zawsze możliwe. Przyjęcie bazowego układu równań w algorytmie bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego można rozpatrywać jako optymalne rozwiązanie, ponieważ stanowi kompromis między liczbą harmonicznym przepływu i ograniczeniem nadmiernego rozbudowania modelu.

W modelu bazowym, liczba harmonicznym tworzących macierz indukcyjności wzajemnych powinna być tak dobrana, aby w danej kolumnie znajdował się wyłącznie jeden współczynnik z ściśle określonym numerem. Z reguły wybór harmonicznym przebiega od składowej podstawowej przepływu i jej kolejnych minimalnych wielokrotności według zasady, że o najistotniejszych właściwościach maszyny prądu przemiennego decydują indukcyjności najniższego rzędu [26], [55], [80]. Zgodnie z omówioną metodą przy pominięciu składowej zerowej, macierz indukcyjności określa wyrażenie (3.29), w którym symbolicznie zapisano położenie danego składnika indukcyjności jako rezultat dzielenia modulo rzędu harmonicznym przestrzennej i liczby oczek kłatek wirnika

$$\mathbf{L}_{sw} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{sw}^1 \\ \mathbf{L}_{sw}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{L}_{1p}^{\text{mod}(1p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{-5p}^{\text{mod}(-5p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{7p}^{\text{mod}(7p,N)} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{L}_{-1p}^{\text{mod}(-1p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{5p}^{\text{mod}(5p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{-7p}^{\text{mod}(-7p,N)} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Generalnie macierze transformacji obwodów stojana oraz wirnika powinny spełniać ogólny warunek:  $\mathbf{T}_s \cdot \mathbf{L}(\varphi) \cdot \mathbf{T}_w^{-1} = \mathbf{L}$ , aby zapewnić stałą strukturę macierzy indukcyjności wzajemnych [80], co daje według opisanej metody wyboru składowych przepływu macierze przekształcenia w najprostszej postaci

$$\mathbf{E}_s = \text{diag}[1 \ 1] \quad (3.30)$$

$$\mathbf{E}_w = \text{diag} \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & \dots & e^{j1p\varphi}_{\text{mod}(1p,N)} & 1 & \dots & 1 & e^{-j5p\varphi}_{\text{mod}(-5p,N)} & 1 & \dots & 1 & e^{j7p\varphi}_{\text{mod}(7p,N)} & 1 & \dots \\ 1 & \dots & e^{-j1p\varphi}_{\text{mod}(-1p,N)} & 1 & \dots & 1 & e^{j5p\varphi}_{\text{mod}(5p,N)} & 1 & \dots & 1 & e^{-j7p\varphi}_{\text{mod}(-7p,N)} & 1 & \dots \end{array} \right] \quad (3.31)$$

gdzie: indeks dolny wyznacza położenie (wiersz i kolumnę) wybranego współczynnika indukcyjności na głównej przekątnej.

### 3.4 Algorytm bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego

Poszukiwanie rozwiązania stanu ustalonego z uwzględnieniem oddziaływań elektromechanicznych bezpośrednio w dziedzinie czasu powoduje konieczność dostosowania modelu silnika do postaci algebraicznej operatora różniczkowania. Według tej metody, opisanej w podrozdziale [p.3.2], równania mogą zostać przedstawione w dowolnym układzie odniesienia. Z tego powodu zasadniczą kwestią jaką należy rozstrzygnąć pozostaje wybór takich współrzędnych, które zagwarantują optymalizację działania algorytmu iteracyjnego, tzn. zminimalizują ilość wykonywanych operacji w każdym cyklu obliczeń. Warunek ten spełniają jedynie równania zapisane w składowych symetrycznych, ponieważ czynnikiem decydującym o skali złożoności wykonywanych obliczeń jest bezpośrednio liczba elementów jawnie związanych z kątem obrotu wirnika. Z perspektywy analizowanych przypadków niesymetrii, eliminuje to z dalszych rozważań modele w przestrzeni liczb rzeczywistych, gdzie występują co najmniej pełne macierze indukcyjności wzajemnych-współrzędne fazowe lub rezystancji wirnika będące funkcją zmienności kąta obrotu-współrzędne prostokątne. Podobnie kształtują się macierze rezystancji obwodów kłatek wirnika w zespolonym układzie równań składowych wirujących dlatego, że w wyniku transformacji wszystkie elementy tych macierzy otrzymują zmienną postać w funkcji kąta obrotu wirnika mimo stałej macierzy indukcyjności wzajemnych [p.3.3]. Dla porównania ilość aktualizowanych elementów w układzie składowych symetrycznych zależy wyłącznie od liczby harmonicznym przestrzennych tworzących macierz indukcyjności wzajemnych, a nie jak wyżej, dodatkowo również liczby prętów kłatek wirnika.

#### 3.4.1 Równania modelu bazowego w dziedzinie czasu

Wyprowadzenie modelu bazowego w dziedzinie czasu dopasowanego do metody dyskretnego bilansu harmonicznym jak wynika z [p.3.1], wymaga odpowiedniego przegrupowania wektorów i macierzy względem równania (3.4)

$$\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad (3.32)$$

Z przyjętych na wstępie założeń silnik jest obciążony stałym momentem mechanicznym i zasilany z symetrycznego układu napięć trójfazowych przy skojarzeniu uzwojeń stojana w gwiazdę

bez przewodu zerowego, co pozwala zapisać postać wektora wymuszeń cząstkowych dla przyjętego układu współrzędnych

$$\mathbf{b} = [\mathbf{u}_s^1 \quad \mathbf{u}_s^2 \quad \mathbf{u}_r \quad \mathbf{u}_p \quad \mathbf{T}_m]^T \quad (3.33)$$

Ponieważ z definicji obowiązują związki  $\mathbf{i}_s^2 = \mathbf{i}_s^1$ ,  $\mathbf{i}_w^{N-n} = \mathbf{i}_w^n$  oraz  $\Delta\varphi^- = \Delta\varphi^+$ , stąd nieznanymi wielkościami w równaniu (3.32) będą prądy i wektor wahań kąta obrotu:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{i}_s^1 \quad \mathbf{i}_s^2 \quad \mathbf{i}_r^N \quad \mathbf{i}_p^N \quad \Delta\varphi^+]^T \quad (3.34)$$

Wcześniej określony zbiór wymuszeń zawiera tylko dwa niezerowe składniki. Wykorzystując zależności (2.24) i (2.98), pierwszy z nich odpowiadający składowej pierwszej napięć stojana można zapisać jako

$$\mathbf{u}_s^1 = \sqrt{3}/2 \cdot \underline{U}_m \left[ e^{j\Omega_s \cdot t_{s,r}} \cdot \mathbf{E}_r \quad \dots \quad e^{j\Omega_s \cdot t_{s,0}} \cdot \mathbf{E}_r \quad \dots \quad e^{j\Omega_s \cdot t_{s,r}} \cdot \mathbf{E}_r \right] \quad (3.35)$$

gdzie:

$\mathbf{E}_r = [1 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 1]_{(2S+1)}$  - wektor jednostkowy o wymiarze  $(2S+1)$  równym liczbie punktów przypadających w okresie wirnika.

Drugie niezerowe wymuszenie występuje w równaniu mechanicznym i posiada szczególną postać niezależną od czasu przy braku zaburzenia momentu zewnętrznego składową przemienną

$$\mathbf{T}_m = T_{m,0} \cdot [1 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 1]_N \quad (3.36)$$

Pozostałe podwektory wartości chwilowych wymuszeń w (3.33) są zerowe z względu na symetrię układu napięć zasilających i zwartą konstrukcję wirnika

$$\mathbf{u}_s^2 = [0 \cdot \mathbf{E}_{sr}]_N \quad (3.37)$$

$$\mathbf{u}_r = [0 \cdot \mathbf{E}_{sr} \quad \dots \quad 0 \cdot \mathbf{E}_{sr} \quad \dots \quad 0 \cdot \mathbf{E}_{sr}]_{N \cdot (N+1)} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{u}_p = [0 \cdot \mathbf{E}_{sr} \quad \dots \quad 0 \cdot \mathbf{E}_{sr} \quad \dots \quad 0 \cdot \mathbf{E}_{sr}]_{N \cdot (N+1)} \quad (3.39)$$

gdzie:

$\mathbf{E}_{sr} = [1 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 1]$  - wektor jednostkowy o wymiarze  $N=(2R+1) \cdot (2S+1)$ .

W celu usystematyzowania zapisu formułowanych równań macierze z (3.32) odniesiono wobec najbardziej ogólnego przypadku obustronnej niesymetrii rezystancyjnej silnika

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s^0 & \underline{\mathbf{R}}_s^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{R}}_s^{1*} & \mathbf{R}_s^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s^1 & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{sr}^1 & \mathbf{L}_{sr}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_s^2 & \mathbf{L}_{sr}^2 & \mathbf{L}_{sr}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{rs}^1 & \mathbf{L}_{rs}^2 & \mathbf{L}_r & \mathbf{L}_{rp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{rs}^1 & \mathbf{L}_{rs}^2 & \mathbf{L}_{pr} & \mathbf{L}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Przedstawione macierze łączą parametrycznie ze sobą prądy składowych symetrycznych oraz równania cząstkowe momentu elektromagnetycznego przez zmienne współczynniki  $\mathbf{C}$  określone w funkcji prądów i wahań kąta obrotu wirnika. Stałe podmacierze występujące w macierzach  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  uporządkowano według złożoności ich struktury, dla:

- obwodu stojana

$$\mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s,3)} = \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s,3)} \cdot \text{diag}[1 \dots 1 \dots 1]_{N \times N} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s,3)} = \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s,3)} \cdot \text{diag}[1 \dots 1 \dots 1]_{N \times N} \quad (3.44)$$

- obwodów wirnika sprowadzonych na stronę stojana, w których macierze blokowe rezystancji i indukcyjności własnych oraz wzajemnych z [p.2.4.1]

$$\mathbf{R}_w \equiv \mathbf{R}_r \equiv \mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_g & \mathbf{R}_z \\ \mathbf{R}_z^T & \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{E}_N \end{bmatrix} \quad (3.45.a), \quad \mathbf{L}_w \equiv \mathbf{L}_r \equiv \mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_g & \mathbf{L}_z \\ \mathbf{L}_z^T & \mathbf{L}_z \cdot \mathbf{E}_N \end{bmatrix} \quad (3.45.b)$$

gdzie:

-macierz rezystancji głównych oraz wektor części poosiowej

$$\mathbf{R}_g = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}_{0,0} \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{0,1} \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{0,2} \cdot \mathbf{E}_N & \dots & \underline{\mathbf{R}}_{0,2}^* \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{0,1}^* \cdot \mathbf{E}_N \\ \underline{\mathbf{R}}_{0,1}^* \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{1,1} \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{1,2} \cdot \mathbf{E}_N & \dots & \underline{\mathbf{R}}_{1,(N-2)} \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{1,(N-1)} \cdot \mathbf{E}_N \\ \underline{\mathbf{R}}_{0,2}^* \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{1,2}^* \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{2,2} \cdot \mathbf{E}_N & \dots & \underline{\mathbf{R}}_{2,(N-2)} \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{2,(N-1)} \cdot \mathbf{E}_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \underline{\mathbf{R}}_{0,2} \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{1,(N-2)}^* \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{2,(N-2)}^* \cdot \mathbf{E}_N & \dots & \underline{\mathbf{R}}_{2,2} \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{1,2} \cdot \mathbf{E}_N \\ \underline{\mathbf{R}}_{0,1} \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{1,(N-1)}^* \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{1,(N-2)}^* \cdot \mathbf{E}_N & \dots & \underline{\mathbf{R}}_{1,2}^* \cdot \mathbf{E}_N & \underline{\mathbf{R}}_{1,1} \cdot \mathbf{E}_N \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{R}_z = \left[ \underline{\mathbf{R}}_z^0 \cdot \mathbf{E}_N \quad \underline{\mathbf{R}}_z^1 \cdot \mathbf{E}_N \quad \underline{\mathbf{R}}_z^2 \cdot \mathbf{E}_N \quad \dots \quad \dots \quad \underline{\mathbf{R}}_z^{N-1} \cdot \mathbf{E}_N \right]^T \quad (3.47)$$

-macierze indukcyjności rozprożeń własnych i wzajemnych

$$\mathbf{L}_w^\sigma \equiv \mathbf{L}_r^\sigma \equiv \mathbf{L}_p^\sigma = \text{diag} \left[ \mathbf{L}_w^{\sigma,0} \cdot \mathbf{E}_N \quad \mathbf{L}_w^{\sigma,1} \cdot \mathbf{E}_N \quad \dots \quad \mathbf{L}_w^{\sigma,N-1} \cdot \mathbf{E}_N \quad \mathbf{L}_w^{\sigma,N} \cdot \mathbf{E}_N \right] \quad (3.48)$$

$$\mathbf{L}_w^m \equiv \mathbf{L}_r^m \equiv \mathbf{L}_p^m = \text{diag} \left[ \mathbf{0} \cdot \mathbf{E}_N \quad \mathbf{L}_w^m \cdot \mathbf{E}_N \quad \mathbf{L}_w^m \cdot \mathbf{E}_N \quad \dots \quad \mathbf{L}_w^m \cdot \mathbf{E}_N \quad \mathbf{0} \cdot \mathbf{E}_N \right] \quad (3.49)$$

$$\mathbf{L}_w^m \equiv \mathbf{L}_{ip}^m \equiv \mathbf{L}_{pr}^m = \text{diag} \left[ \mathbf{0} \cdot \mathbf{E}_N \quad \mathbf{L}_w^m \cdot \mathbf{E}_N \quad \mathbf{L}_w^m \cdot \mathbf{E}_N \quad \dots \quad \mathbf{L}_w^m \cdot \mathbf{E}_N \quad \mathbf{0} \cdot \mathbf{E}_N \right] \quad (3.50)$$

$\mathbf{E}_N$  – macierz jednostkowa o wymiarze  $N=(2R+1) \cdot (2S+1) \times (2R+1) \cdot (2S+1)$ .

- równania mechanicznego

$$\mathbf{J} = \mathbf{J} \cdot \text{diag} [1 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 1]_N \quad (3.51)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \text{diag} [1 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 1]_N \quad (3.52)$$

Ze względu na specyficzną strukturę układu równań w dziedzinie czasu macierz indukcyjności wzajemnych w modelu bazowym przyjmie postać klatkową

$$\mathbf{L}_{sw} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{sw}^1 \\ \mathbf{L}_{sw}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \cdot \mathbf{E}_N & \dots & \mathbf{L}_{1p}^{\text{mod}(1p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{-5p}^{\text{mod}(-5p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{7p}^{\text{mod}(7p,N)} & \dots & \mathbf{0} \cdot \mathbf{E}_N \\ \mathbf{0} \cdot \mathbf{E}_N & \dots & \mathbf{L}_{-1p}^{\text{mod}(-1p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{5p}^{\text{mod}(5p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{-7p}^{\text{mod}(-7p,N)} & \dots & \mathbf{0} \cdot \mathbf{E}_N \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

W tej macierzy niezerowe będą jedynie bloki leżące w kolumnach wyznaczonych z operacji dzielenia modulo numeru harmonicznej przepływu przez liczbę oczek klatek wirnika

$$\mathbf{L}_{n-p}^{\text{mod}(n-p,N)} = \text{diag} \left[ \mathbf{L}_{n-p} \dots \mathbf{L}_{n-p} \dots \mathbf{L}_{n-p} \right]_{N \times N} \cdot \Delta \varphi_p \quad (3.54)$$

gdzie:

- przekształcony do postaci macierzy diagonalnej podwektor wartości chwilowych wahań kąta obrotu obliczanych w kolejnych iteracjach dla „ $N+1$ ” punktów

$$\Delta \varphi_p = \left[ \mathbf{E}_p \cdot (\Delta \varphi^+) \right]_{N \times N} = \text{diag} \left[ e^{j \cdot n \cdot p} \dots e^{j \cdot n \cdot p} \dots e^{j \cdot n \cdot p} \right] \cdot \text{diag} \left[ e^{j \cdot \Delta \varphi_{-N/2}} \dots e^{j \cdot \Delta \varphi_0} \dots e^{j \cdot \Delta \varphi_{N/2}} \right]$$

- pomocnicza macierz indukcyjności o wymiarze  $(2S+1) \times (2S+1)$  związanym z liczbą punktów przypadających w okresie wirnika

$$\mathbf{L}_{n-p} = \underline{\mathbf{L}}_{n-p} \cdot \text{diag} \left[ e^{j \cdot n \cdot p \cdot \Omega \cdot t_{w,-s}} \dots e^{j \cdot n \cdot p \cdot \Omega \cdot t_{w,0}} \dots e^{j \cdot n \cdot p \cdot \Omega \cdot t_{w,s}} \right]_{(2S+1) \times (2S+1)} \cdot$$

Równania cząstkowe momentu elektromagnetycznego przedstawione w rozdziale drugim za pomocą wzorów z [p.2.4.3] przekształcono stosując oznaczenia

$$\mathbf{T}_{em}^1 = \left[ \left( \mathbf{i}_w^* + \mathbf{i}_w^N \right) \cdot \dot{\mathbf{L}}_{ws}^1 \right]_{(\text{macierz})} \cdot \mathbf{i}_s^1_{(\text{wektor})} = \mathbf{C}_1(\mathbf{i}, \Delta \varphi) \cdot \mathbf{i}_s^1_{(\text{wektor})} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{T}_{em}^2 = \left[ \left( \mathbf{i}_w^* + \mathbf{i}_w^N \right) \cdot \dot{\mathbf{L}}_{ws}^2 \right]_{(\text{macierz})} \cdot \mathbf{i}_s^2_{(\text{wektor})} = \mathbf{C}_2(\mathbf{i}, \Delta \varphi) \cdot \mathbf{i}_s^2_{(\text{wektor})} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{T}_{em}^3 = \left[ \left( \mathbf{i}_s^1 + \mathbf{i}_s^2 \right) \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw}^1 + \left( \mathbf{i}_s^2 + \mathbf{i}_s^1 \right) \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw}^2 \right]_{(\text{macierz})} \cdot \mathbf{i}_p^N_{(\text{wektor})} = \left[ \mathbf{C}_3(\mathbf{i}, \Delta \varphi) + \mathbf{C}_4(\mathbf{i}, \Delta \varphi) \right] \cdot \mathbf{i}_p^N_{(\text{wektor})} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{T}_{em}^4 = \left[ \left( \mathbf{i}_s^1 + \mathbf{i}_s^2 \right) \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw}^1 + \left( \mathbf{i}_s^2 + \mathbf{i}_s^1 \right) \cdot \dot{\mathbf{L}}_{sw}^2 \right]_{(\text{macierz})} \cdot \mathbf{i}_p^N_{(\text{wektor})} = \left[ \mathbf{C}_3(\mathbf{i}, \Delta \varphi) + \mathbf{C}_4(\mathbf{i}, \Delta \varphi) \right] \cdot \mathbf{i}_p^N_{(\text{wektor})} \quad (3.58)$$



Z powyższych równań (3.55)–(3.58) wynika wypadkowy wektor momentu elektromagnetycznego określony bezpośrednio w dziedzinie czasu

$$\mathbf{T}_{em} = \mathbf{T}_{em}^1 + \mathbf{T}_{em}^2 + \mathbf{T}_{em}^3 + \mathbf{T}_{em}^4, \quad (3.59)$$

w którym wartości chwilowe składowych symetrycznych prądu stojana wewnątrz nawiasów kwadratowych

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_s^{\text{mod}(k_s,3)} &= \text{diag} \left[ 1 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 1 \right]_{N \times N} \cdot \text{diag} \left[ i_{s,-N/2}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \dots \quad i_{s,0}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \dots \quad i_{s,N/2}^{\text{mod}(k_s,3)} \right]_{N \times N} = \\ &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_s^{\text{mod}(k_s,3)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Podobnie jak (3.60) w równaniu (3.61) zdefiniowano poszczególne prądy wirnika uwzględniając ogólną postać wektora jego przewidywanych rozwiązań w formie macierzy diagonalnej

$$\mathbf{i}_w^N = \text{diag} \left[ \mathbf{i}_w^0 \quad \mathbf{i}_w^1 \quad \dots \quad \mathbf{i}_w^{N-1} \quad \mathbf{i}_w^N \right] \quad (3.61)$$

Dla dowolnej składowej symetrycznej wirnika wartości chwilowe wynoszą

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_w^{\text{mod}(k_w,N)} &= \text{diag} \left[ 1 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 1 \right]_{N \times N} \cdot \text{diag} \left[ i_{w,-N/2}^{\text{mod}(k_w,N)} \quad \dots \quad i_{w,0}^{\text{mod}(k_w,N)} \quad \dots \quad i_{w,N/2}^{\text{mod}(k_w,N)} \right]_{N \times N} = \\ &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_w^{\text{mod}(k_w,N)} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Prądy przez które są mnożone wyrażenia w nawiasach kwadratowych (3.55)–(3.58), zachowują postać wektorów kolumnowych, co symbolicznie zaznaczono obok każdego z nich. Macierz czasowa z równania momentu elektromagnetycznego w rezultacie różniczkowania względem kąta obrotu wirnika (3.53) otrzymuje strukturę złożoną z podmacierzy blokowych mnożonych przez rząd harmonicznej przestrzennej

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_{sw} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{L}}_{sw}^1 \\ \dot{\mathbf{L}}_{sw}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \cdot \begin{bmatrix} 0 \cdot \mathbf{E}_N & \dots & 1 \cdot \mathbf{L}_{1p}^{\text{mod}(1p,N)} & \dots & -5 \cdot \mathbf{L}_{-5p}^{\text{mod}(-5p,N)} & \dots \\ 0 \cdot \mathbf{E}_N & \dots & -1 \cdot \mathbf{L}_{-1p}^{\text{mod}(-1p,N)} & \dots & 5 \cdot \mathbf{L}_{5p}^{\text{mod}(5p,N)} & \dots \\ \dots & 7 \cdot \mathbf{L}_{7p}^{\text{mod}(7p,N)} & \dots & 0 \cdot \mathbf{E}_N & \dots & \dots \\ \dots & -7 \cdot \mathbf{L}_{-7p}^{\text{mod}(-7p,N)} & \dots & 0 \cdot \mathbf{E}_N & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Ponadto w równaniach momentów cząstkowych obowiązuje związek  $\dot{\mathbf{L}}_{ws} = \left( \dot{\mathbf{L}}_{sw}^* \right)^T$ .

### 3.4.2 Struktura i opis działania algorytmu bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego w dziedzinie czasu

Równania (3.32) przedstawiają teoretycznie nieskończony układ nieliniowych równań algebraicznych, który po ograniczeniu względem wymiarów skończonych można rozwiązać jedynie w sposób iteracyjny. Uwzględniając przytoczone w wstępie do rozdziału informacje na temat własności poszczególnych metod, jak również rodzaju występującej nieliniowości o charakterze strukturalnym, w rozwiązaniu (3.32) należy posłużyć się schematem iteracyjnym Newtona-Raphsona zapewniającym odpowiednią szybkożbieżność prowadzonych obliczeń

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - [\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)]^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}^i) \quad (3.64)$$

gdzie:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{b} \quad (3.65)$$

- macierz Jacobiego z wyrażenia (3.65) według przyjętych oznaczeń wynosi

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_5}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_5}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_5}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_5}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_5}{\partial \mathbf{x}_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{i}_s^1} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{i}_s^2} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{i}_r} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{i}_p} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{i}_s^1} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{i}_s^2} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{i}_r} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{i}_p} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{i}_s^1} & \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{i}_s^2} & \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{i}_r} & \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{i}_p} & \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \mathbf{i}_s^1} & \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \mathbf{i}_s^2} & \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \mathbf{i}_r} & \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \mathbf{i}_p} & \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_5}{\partial \mathbf{i}_s^1} & \frac{\partial \mathbf{f}_5}{\partial \mathbf{i}_s^2} & \frac{\partial \mathbf{f}_5}{\partial \mathbf{i}_r} & \frac{\partial \mathbf{f}_5}{\partial \mathbf{i}_p} & \frac{\partial \mathbf{f}_5}{\partial \Delta \varphi} \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{D}^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{D} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) \quad (3.66) \end{aligned}$$

Macierz z (3.66) można określić dwoma sposobami. Pierwsza metoda polega na numerycznym wyznaczeniu pochodnych cząstkowych poprzez ich zastąpienie odpowiednimi ilorazami różnicowymi [14], [31], [60] w punktach wynikających z podziału osi czasu przez dyskretny operator różniczkowania. Znaczącą wadą tej metody jest rosnąca z kwadratem liczby elementów zawartych w macierzy ilość koniecznych do wykonania operacji różniczkowania [14], [31], [60]. Bardziej efektywnym sposobem znajdowania macierzy Jacobiego wyróżnia się metoda

analityczna, jeżeli różniczkowane funkcje nie są nadmiernie złożone oraz liczba zmiennych dla których oblicza się pochodne cząstkowe będzie stosunkowo mała. Wskazane warunki użyteczności metody analitycznej spełnia (3.66), gdzie elementarne funkcje macierzy w zapisie ogólnym przyjmują postać

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_{0,1}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,1}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,1}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,1}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,1}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{0,2}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,2}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,2}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,2}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,2}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{0,3}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,3}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,3}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,3}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,3}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{0,4}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,4}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,4}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,4}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,4}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{0,5}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,5}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,5}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,5}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{0,5}}{\partial \mathbf{x}_5} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_{1,1}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,1}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,1}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,1}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,1}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{1,2}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,2}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,2}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,2}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,2}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{1,3}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,3}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,3}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,3}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,3}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{1,4}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,4}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,4}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,4}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,4}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{1,5}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,5}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,5}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,5}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1,5}}{\partial \mathbf{x}_5} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_{2,1}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,1}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,1}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,1}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,1}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{2,2}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,2}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,2}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,2}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,2}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{2,3}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,3}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,3}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,3}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,3}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{2,4}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,4}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,4}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,4}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,4}}{\partial \mathbf{x}_5} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{2,5}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,5}}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,5}}{\partial \mathbf{x}_3} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,5}}{\partial \mathbf{x}_4} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2,5}}{\partial \mathbf{x}_5} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Przeprowadzenie działań różniczkowania względem wektorów poszukiwanych wielkości pozwala przedstawić poszukiwaną macierz Jacobiego (3.66) w szczegółowej postaci wynikającej z równań modelu bazowego silnika. Ponieważ macierz indukcyjności wzajemnych zależy od

czasu, to różniczkowaniu podlegają jedynie elementy związane bezpośrednio z wektorem wahań kąta obrotu wirnika

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s^1 & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{sr}^1 & \mathbf{L}_{sr}^1 & \mathbf{A}_{1,5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_s^2 & \mathbf{L}_{sr}^2 & \mathbf{L}_{sr}^2 & \mathbf{A}_{2,5} \\ \mathbf{L}_{rs}^1 & \mathbf{L}_{rs}^2 & \mathbf{L}_r & \mathbf{L}_{rp} & \mathbf{A}_{3,5} \\ \mathbf{L}_{rs}^1 & \mathbf{L}_{rs}^2 & \mathbf{L}_{pr} & \mathbf{L}_p & \mathbf{A}_{4,5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s^0 & \mathbf{R}_s^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_s^{1*} & \mathbf{R}_s^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 & \mathbf{A}_{0,5} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_{1,5} = \frac{\partial \mathbf{f}_{1,1}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}_{sr}^1 \cdot (\mathbf{i}_r + \mathbf{i}_p)_{(\text{macierz})} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}_{sr}^1 \cdot \mathbf{i}_w_{(\text{macierz})} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{A}_{2,5} = \frac{\partial \mathbf{f}_{1,2}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}_{sr}^2 \cdot (\mathbf{i}_r + \mathbf{i}_p)_{(\text{macierz})} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}_{sr}^2 \cdot \mathbf{i}_w_{(\text{macierz})} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{A}_{3,5} = \frac{\partial \mathbf{f}_{1,3}}{\partial \mathbf{x}} = j \cdot p \cdot \mathbf{D} \cdot \left( \mathbf{L}_{rs}^1 \cdot \mathbf{i}_{s(\text{macierz})}^1 + \mathbf{L}_{rs}^2 \cdot \mathbf{i}_{s(\text{macierz})}^2 \right) \quad (3.75)$$

$$\mathbf{A}_{4,5} = \frac{\partial \mathbf{f}_{1,4}}{\partial \mathbf{x}} = j \cdot p \cdot \mathbf{D} \cdot \left( \mathbf{L}_{rs}^1 \cdot \mathbf{i}_{s(\text{macierz})}^1 + \mathbf{L}_{rs}^2 \cdot \mathbf{i}_{s(\text{macierz})}^2 \right) \quad (3.76)$$

$$\mathbf{A}_{0,5} = \frac{\partial \mathbf{f}_{0,5}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{em}}{\partial \Delta \varphi} = j \cdot p \cdot \left( -\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{i}_{s(\text{macierz})}^1 + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{i}_{s(\text{macierz})}^2 + \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{i}_{w(\text{macierz})}^N - \mathbf{C}_4 \cdot \mathbf{i}_{w(\text{macierz})}^N \right) \quad (3.77)$$

### Procedura algorytmu bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego:

<b>1</b>	Zadanie: liczby punktów w okresach $R$ , $S$ , błędu zakończenia obliczeń $\varepsilon$ , amplitudy napięcia, częstotliwości wymuszenia oraz wartości średniej prędkości kątowej wirnika,
<b>2</b>	Utworzenie macierzy operatora różniczkowania oraz równań modelu silnika – macierze stałe (niewymagające aktualizacji) są obliczane tylko jeden raz w tym punkcie,
<b>3</b>	Wyznaczenie rozwiązania początkowego układu zlinearyzowanego (bez równania mechanicznego) ze względu na prądy stojana i wirnika $\mathbf{i}^0 = (\mathbf{R} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{u}, \quad (3.78)$
<b>4</b>	Obliczenie składowej stałej momentu zewnętrznego (wymuszenia w równaniu mechanicznym) z wartości średniej momentu elektromagnetycznego określonego według rozwiązania startowego – punkt 3 $\mathbf{T}_{m,0} = \mathbf{T}_{em}^0 - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_0, \quad (3.79)$
<b>5</b>	Wykonanie obliczeń w głównej pętli iteracji przy uwzględnieniu równania mechanicznego, gdzie następuje korekta rozwiązania wraz z aktualizacją macierzy Jacobiego (macierzy indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik) na podstawie bezpośrednio poprzedzającego go wektora rozwiązań, aż do chwili uzyskania wyniku z założonym błędem.

### Metoda i zasady rozwiązania równania Newtona-Raphsona:

Zgodnie z [14] równanie głównej pętli iteracji – punkt 5, przekształcono w postać niewymagającą odwracania macierzy Jacobiego

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^i) \cdot \mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^i) \cdot \mathbf{x}^i - \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) \quad (3.80)$$

Wyrażenie (3.80) rozwiązywano metodą eliminacji Gaussa poszukując pierwiastków wektora  $\mathbf{x}^{i+1}$  dla  $R=15$ ,  $S=15$ ,  $\varepsilon=10^{-3}$ . Uzasadnienie przyjętej liczby punktów podano w [p.3.4.3].

### 3.4.3 Zbieżność numeryczna algorytmu bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego

Podstawowym celem tego podrozdziału jest wskazanie wpływu zmienności parametrów równania mechanicznego w zakresie określonego poziomu oraz miejsca wystąpienia niesymetrii na zbieżność numeryczną algorytmu bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego. Przedstawione wyniki obliczeń stanowią arbitralnie wybrane przypadki, które w zamierzeniu mają reprezentować najważniejsze cechy jakościowe i ilościowe opracowanej metody. Z tych powodów testy numeryczne zostały wykonane w dwóch częściach, gdzie niezależnie rozważono zagadnienia asymetrii rezystancyjnej wirnika z symetrycznym obwodem stojana i obustronnej niesymetrii silnika. W każdym punkcie dokonano oceny szybkości algorytmu badając najistotniejsze składowe widma prądu stojana oraz momentu elektromagnetycznego wyróżniające sposób lokalizacji uszkodzenia. Przeprowadzone próby skoncentrowano wokół analizy obliczeń w funkcji momentu bezwładności i obciążenia (poślizgu) dla zadanych punktów startowych z różnym stopniem niesymetrii parametrycznej danego obwodu klatki wirnika. Wszystkie przedstawione wyniki dotyczące prądów stojana są wielkościami otrzymanymi po transformacji powrotnej - współrzędne fazowe. Prądy i momenty odniesiono odpowiednio do składowej sieciowej [p. 3.4.3.a, p.3.4.3.b] oraz wypadkowego momentu asynchronicznego [p.3.4.3.a] lub momentu przemiennego  $2 \cdot f_s$  [p.3.4.3.b].

#### 3.4.3.a Niesymetria rezystancyjna wirnika

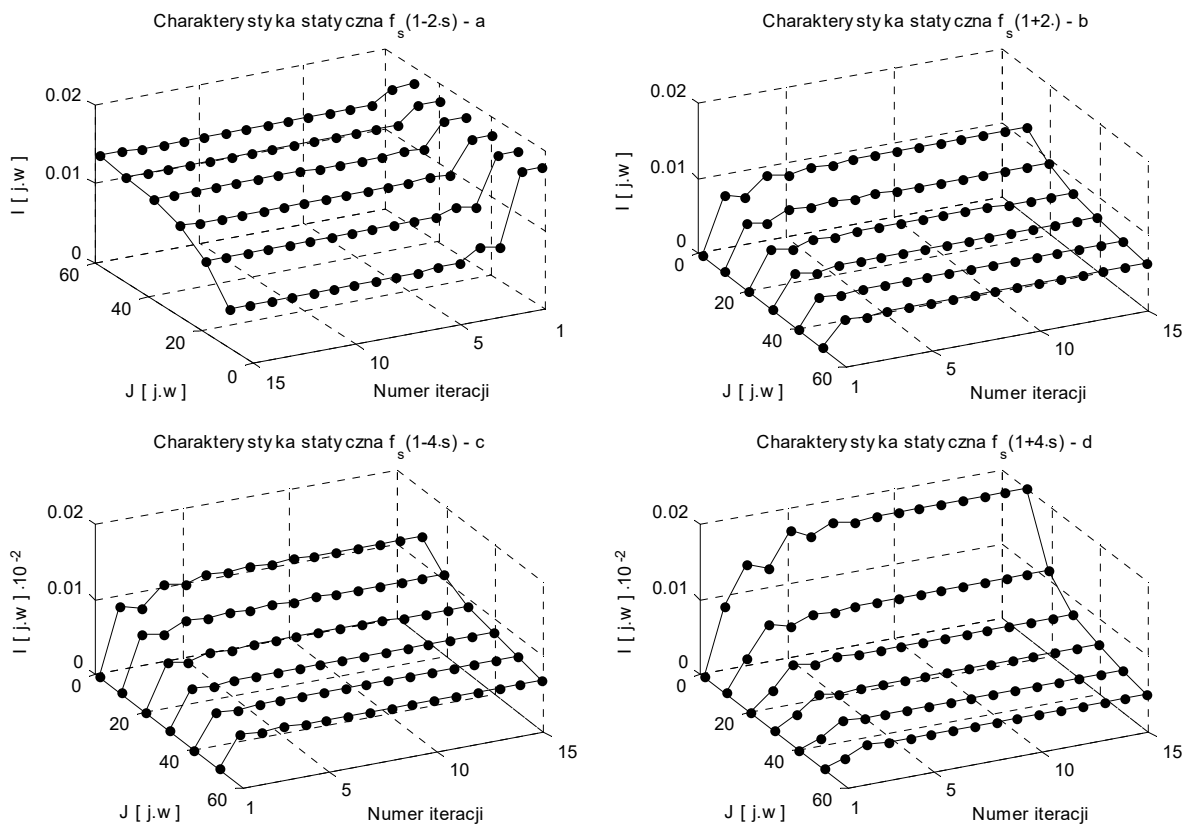
Praca silnika dwuklatkowego z niesymetrią elektryczną wirnika z zachowaniem symetrii zewnętrznej obwodu stojana, jak wykazano w poprzednim rozdziale jest stanem, gdy generowane sygnały diagnostyczne wiążą się głównie z obwodem klatki pracy. Według takich założeń, wyniki badań numerycznych odniesiono względem modelowanych przypadków uszkodzeń w prętach klatki dolnej i symetrycznym obwodzie klatki rozruchowej.

Pierwszym etapem oceny skuteczności proponowanej metody było wskazanie znaczenia wartości wypadkowego momentu bezwładności układu napędowego w stosunku do szybkości ustalania się rozwiązania końcowego. W obliczeniach przyjęto przedział zmienności momentu bezwładności od wartości własnej wirnika do pięćdziesięciokrotnej wartości własnej tego momentu. W tym miejscu należy podkreślić, że wybór rozpatrywanego przedziału zmienności momentu bezwładności i jego zakresu oddziaływania na widma charakteryzujące omawiany stan niesymetrii jest indywidualną cechą każdej maszyny oraz bezpośrednio zależy od aktualnego poślizgu z jakim pracuje silnik. Dla założonego przedziału zmienności momentu bezwładności

rozważono dwa punkty startowe algorytmu przybliżające rozwiązanie końcowe uwzględniając lokalną zbieżność schematu iteracyjnego Newtona-Raphsona. W obu przypadkach rozwiązania początkowe poszukiwano przy znanej wartości średniej prędkości kątowej z pominięciem równania mechanicznego, co daje możliwość rozpoczęcia obliczeń w stanie obustronnej symetrii (pierwszy punkt startowy) lub niesymetrii od strony wirnika (drugi punkt startowy). Dlatego w pierwszym kroku algorytmu poszukuje się wyłącznie rozwiązania części elektromagnetycznej układu równań, tzn. wektor wahań kąta obrotu musi być zerowy, a to powoduje wyzerowanie wartości początkowych składników widma prądów i momentu elektromagnetycznego generowanych w wyniku istnienia oddziaływań elektromechanicznych.

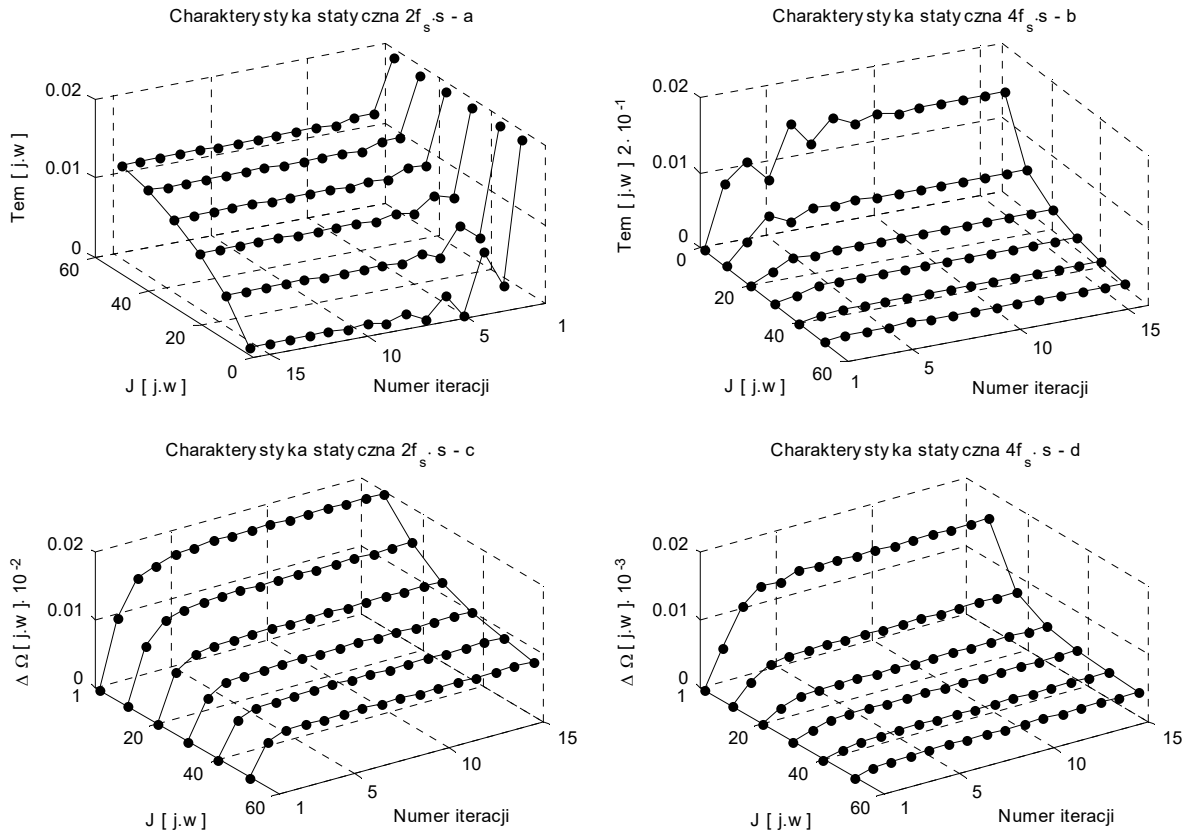
- **Rozwiązanie w funkcji momentu bezwładności  $I=f(J)$**

W celu zobrazowania wrażliwości działania algorytmu w funkcji momentu bezwładności wykorzystano jako przykład wystąpienie niesymetrii pojedynczego pręta klatki pracy z dwudziestokrotnie powiększoną rezystancją własną. Analizie poddano sygnały niskoczęstotliwościowe prądu i momentu elektromagnetycznego silnika pracującego z prędkością znamionową. - składowe diagnostyczne widma prądu fazowego stojana,  $J \in J_w \{1, 10, 20, 30, 40, 50\}$ ,  $s=0,01$ , drugi punkt startowy:



**Rys. 3.1** Przebieg zmienności wybranych składowych widma prądu stojana w funkcji momentu bezwładności, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.

- składowe diagnostyczne widma momentu elektromagnetycznego,  $J \in J_w \{1, 10, 20, 30, 40, 50\}$ ,  $s=0,01$ , drugi punkt startowy:



**Rys. 3.2** Przebieg zmienności wybranych składowych widma momentu oraz wahań prędkości w funkcji momentu bezwładności, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.

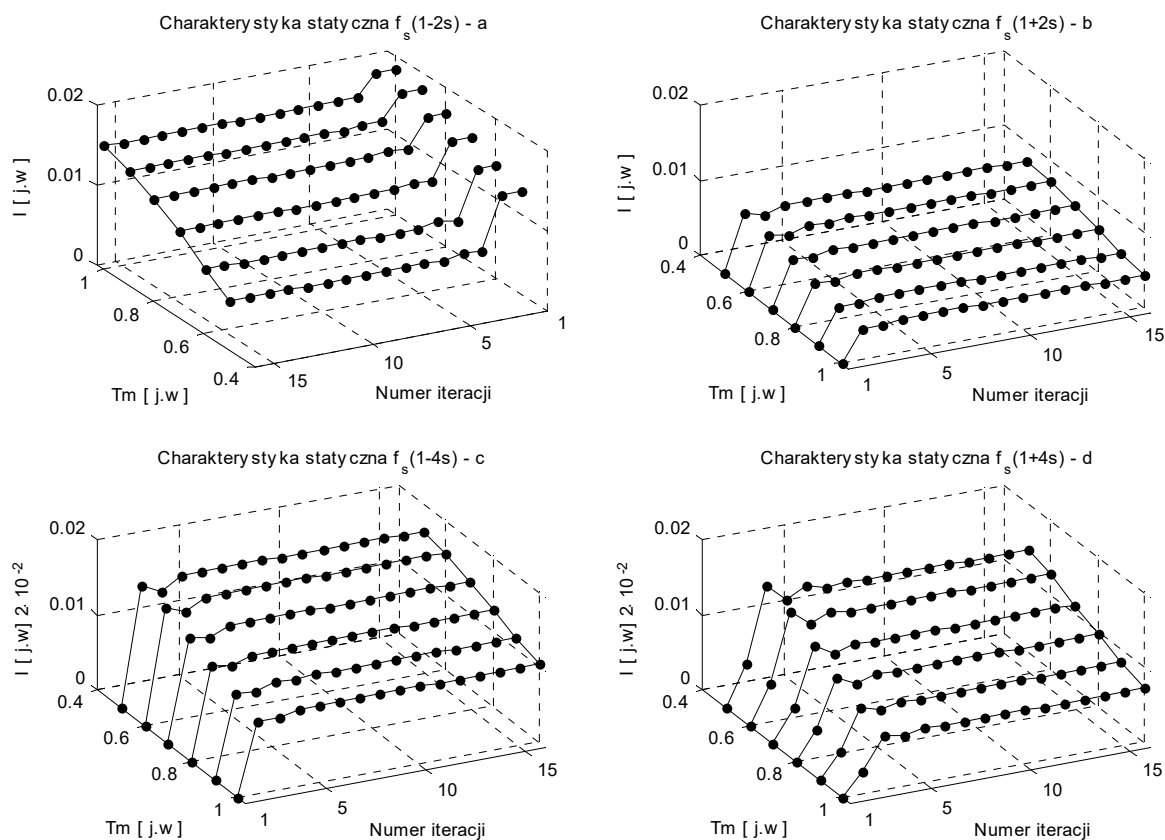
Według rysunków 3.1 i 3.2 szybkość otrzymanych rozwiązań wzrasta wraz z powiększaniem wypadkowego momentu bezwładności, tłumiąc wahania prędkości i momentów przemiennych bezpośrednio związanych z przebiegiem zmian sygnałów diagnostycznych zawartych w widmie prądu stojana. Dla każdej wartości momentu bezwładności z przyjętego wcześniej przedziału, poszukiwane składowe stabilizują się z dobrym przybliżeniem w tych samych węzłach kolejnych iteracji. Ze względu na warunki zakończenia obliczeń pominięto przedstawienie pozostałych składowych widma prądów i momentu, które już w drugiej pętli iteracji uzyskały wartości poniżej założonego błędu metody. Jeżeli w układzie równań przyjąć większą liczbę lub inny rozkład uszkodzonych prętów wówczas obraz szybkości algorytmu zostanie zmieniony. W typowym zagadnieniu stopniowo narastającej ilości przerwanych prętów obok siebie przesunięciu ulegnie głównie punkt zbieżności sygnałów prądu i momentu elektromagnetycznego z zbiorów:  $f_s \cdot (1 \pm 6s)$ ,  $f_s \cdot (1 \pm 8s)$ , ...,  $\pm 6 \cdot f_s$ ,  $\pm 8 \cdot f_s$ , ..., osiągających docelowo amplitudy większe niż przyjęty błąd zakończenia działania algorytmu.



- **Rozwiązania w funkcji momentu zewnętrznego  $I=f(T_m)$**

Parametrem mającym udział w osłabieniu lub wzmocnieniu oddziaływań elektromechanicznych jest częstotliwość własna obserwowanych sygnałów diagnostycznych uwarunkowana wartością momentu obciążenia. Aby przedstawić znaczenie wyboru stałego punktu pracy silnika wykonano testy szybkozbieżności algorytmu w funkcji momentu zewnętrznego (wartości średniej prędkości kątowej) i momentu bezwładności własnej.

- składowe diagnostyczne widma prądu fazowego stojana,  $T_m \in T_N \{1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5\}$ ,  $J=J_w$ , drugi punkt startowy:



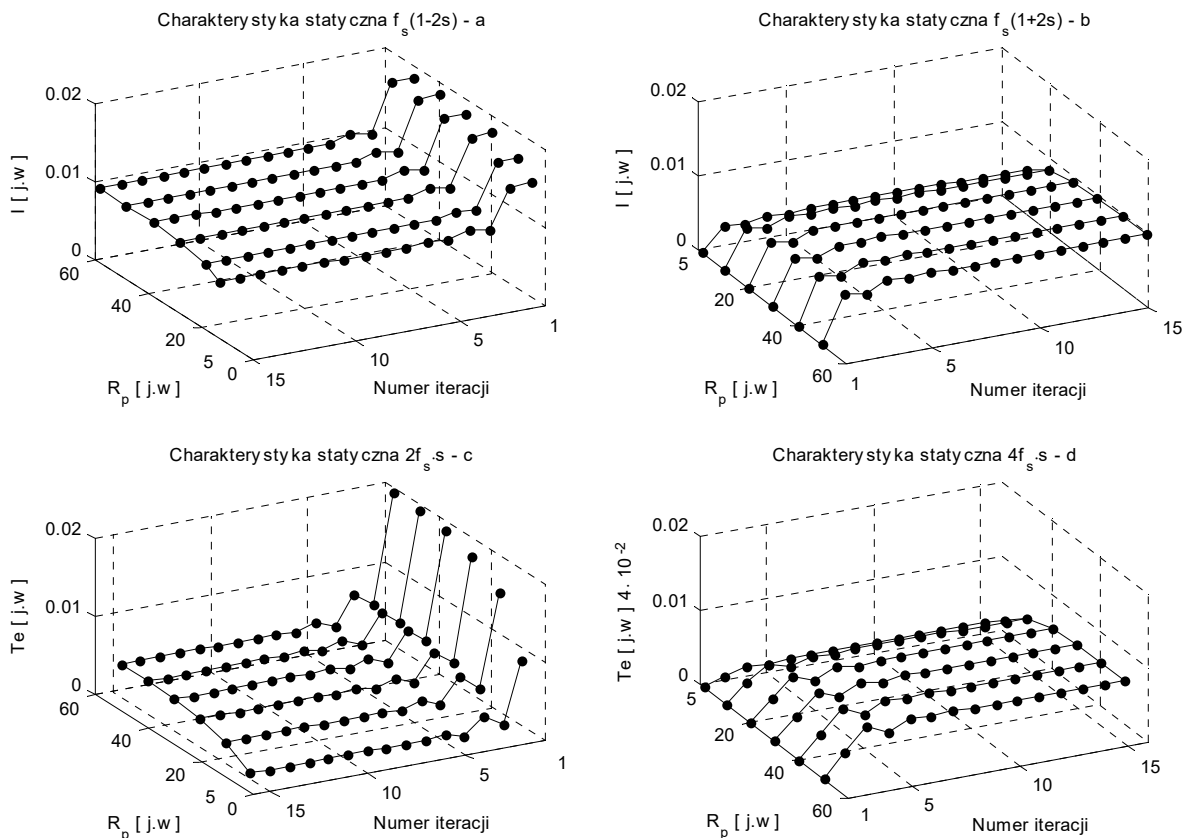
**Rys. 3.3** Przebieg zmienności wybranych składowych widma prądu stojana w funkcji momentu obciążenia, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.

Zgodnie z przeprowadzonymi obliczeniami przy zwiększaniu momentu obciążenia obserwowane jest skrócenie czasu obliczeń wymaganego do osiągnięcia oczekiwanego punktu zbieżności, ponieważ przy dużych poślizgach następuje wzrost częstotliwości sygnałów będących wtórnym efektem niesymetrii rezystancyjnej wirnika, a także interakcji elektromechanicznych, skutecznie tłumiąc wahania prędkości kątowej. Zmodyfikowanie liczby oraz rozkładu uszkodzonych prętów spowoduje jedynie zmianę położenie końcowego punktu równowagi.

- **Rozwiązania w funkcji współczynnika modelującego niesymetrię pręta  $I=f(r)$**

Dodatkowym czynnikiem, który należy brać pod uwagę, aby uzupełnić przeprowadzone rozważania jest między innymi zmienna wartość współczynnika modelującego niesymetrię rezystancyjną. W tym zakresie przeprowadzono obliczenia testowe dla znamionowej prędkości kątowej wirnika i pięciokrotnie powiększonym momencie bezwładności własnej silnika.

- składowe diagnostyczne widma prądu fazowego stojana,  $r \in R_p \{5, 10, 20, 30, 40, 50\}$ ,  $J=5 \cdot J_w$ ,  $s=0,01$ ; drugi punkt startowy:



**Rys. 3.4** Przebieg zmienności wybranych składowych widma prądu i momentu elektromagnetycznego w funkcji współczynnika modelującego przerwę rezystancyjną, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.

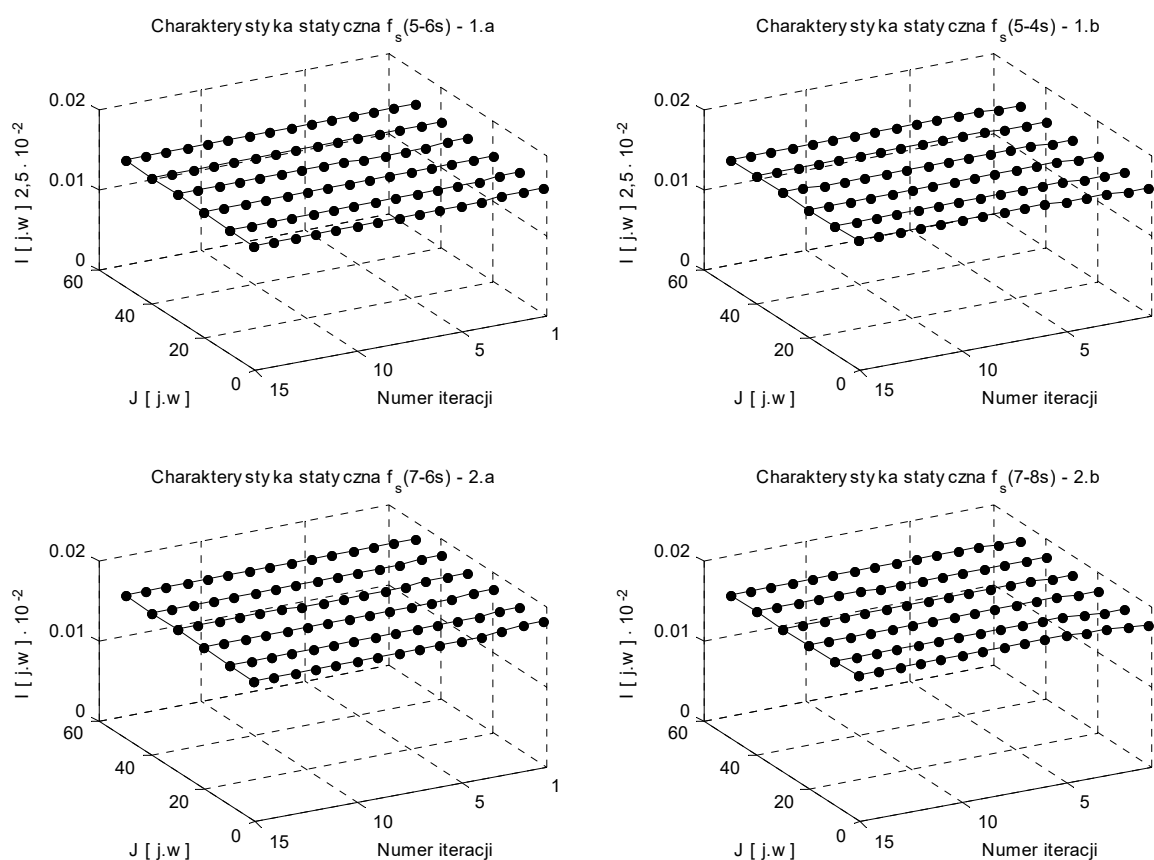
Jak można zauważyć, stopniowe zmniejszanie wartości współczynnika modelującego przerwę w pręcie powoduje przyspieszenie działania algorytmu tym bardziej, im rozwiązanie końcowe znajduje się bliżej rozwiązania dla silnika obustronnie symetrycznego. Podobnie przebiega proces zbieżności obliczeń przy równomiernym rozkładzie uszkodzonych prętów, gdzie liczba niezbędnych iteracji w celu osiągnięcia właściwego rozwiązania rośnie aż do granicy, kiedy obserwowany sygnał diagnostyczny ulega zmniejszeniu mimo dalszego powiększania niesymetrii. Wnioski z omówionych przykładów dotyczących typowych przypadków uszkodzeń wystę-

pujących w eksploatacji maszyn klatkowych i są również słuszne, jeżeli przerwane pręty nie leżą obok siebie.

- **Rozwiązanie w przedziale wyższych harmonicznych przestrzennych**

Poza analizą sygnałów niskoczęstotliwościowych prądów stojana i momentu elektromagnetycznego dokonano oceny działania algorytmu w obszarze wyższych częstotliwości obejmujących wybrane składowe zlokalizowane blisko częstotliwości piątej i siódmej harmonicznych czasowych, czyli takich które zawiera model bazowy silnika wzorcowego.

- składowe diagnostyczne widma prądu fazowego stojana,  $J=J_w$ ,  $s=0,01$ , drugi punkt startowy:

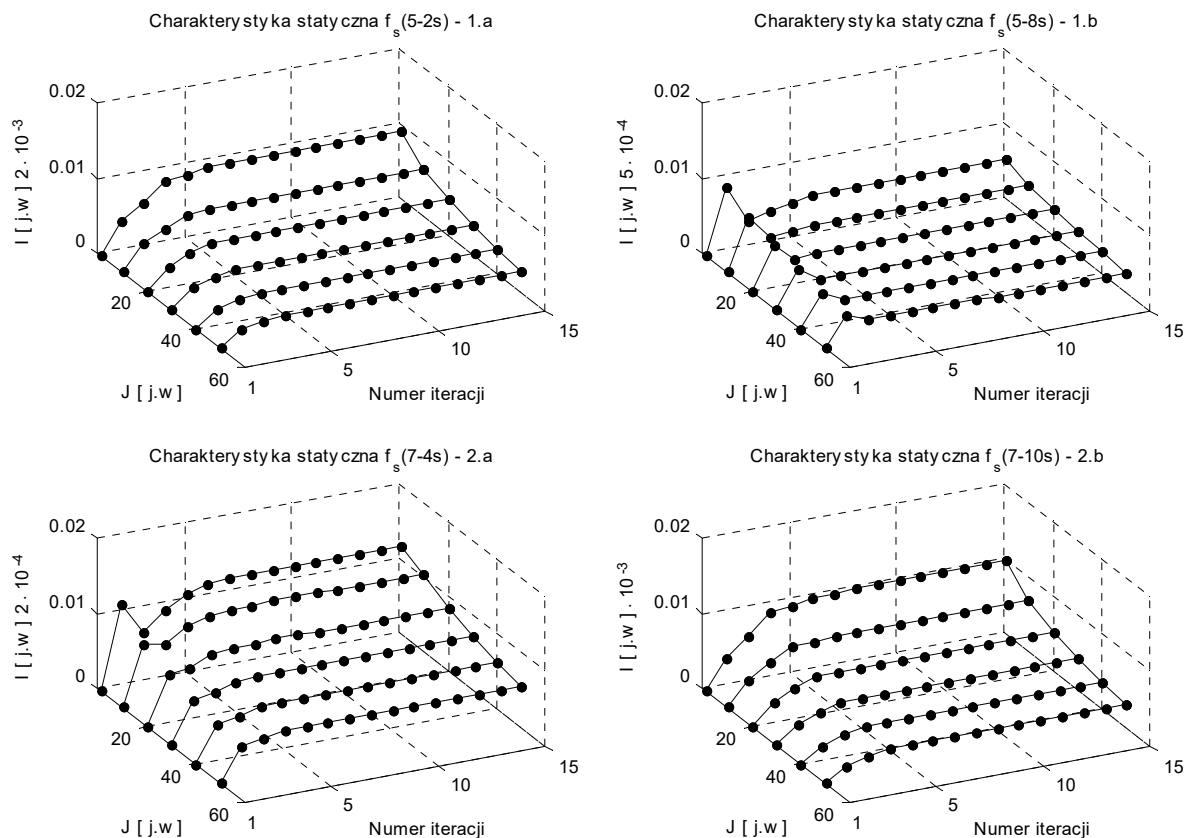


**Rys. 3.5** Przebieg zmienności wybranych składowych nietłumionych z pasma średnich częstotliwości widma prądu fazowego stojana w funkcji momentu bezwładności, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.

W rozpatrywanym przedziale wpływ oddziaływań elektromechanicznych jest stosunkowo nieznaczny i maleje wraz z wzrostem pulsacji obserwowanych sygnałów. Ze względu na dodatkowe sprzężenia wzajemne powstałe przez uwzględnienie równania mechanicznego z składowymi niskoczęstotliwościowymi [p.3.5], punkty zbieżności dla przyjętej dokładności obliczeń przypadają w tych samych węzłach iteracji. Przedstawione wyżej obliczenia dotyczą składo-

wych, których reakcja przy zmniejszeniu wahań prędkości kątowej wirnika powoduje wzrost amplitudy tych sygnałów. Identyczny przebieg procesu zbieżności obserwuje się w przypadku składowych podlegających tłumieniu wspólnie z zanikającym działaniem zjawisk elektromechanicznych – rysunek nr 3.6.

- składowe diagnostyczne widma prądu fazowego stojana,  $J=J_w$ ,  $s=0,01$ , drugi punkt startowy:

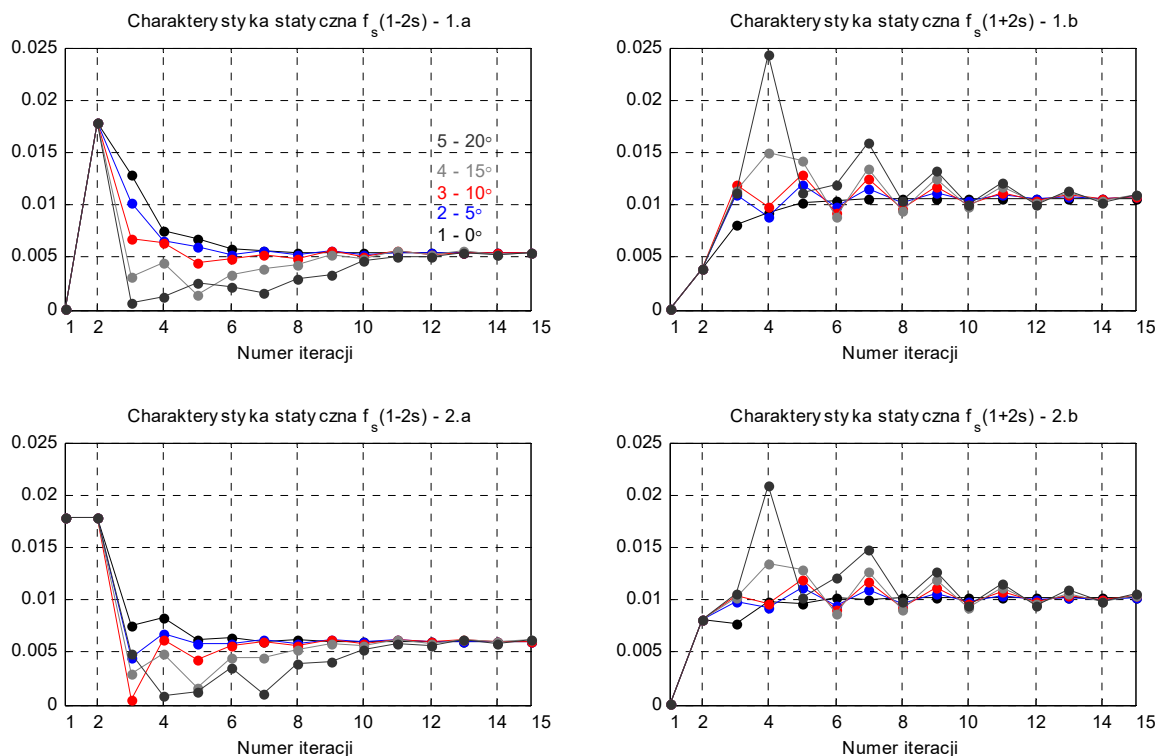


**Rys. 3.6** Przebieg zmienności wybranych składowych tłumionych z pasma średnich częstotliwości widma prądu fazowego stojana w funkcji momentu bezwładności, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.

- **Punkt startowy - rozwiązanie początkowe**

W tej części badania szybkości rozwiązań sprawdzono poprawność działania algorytmu, jeśli rozpoczęcie obliczeń następuje od założonej wartości kąta początkowego położenia wirnika względem osi odniesienia uzwojeń stojana z zadany pierwszym i drugim punktem startowym (naturalny moment bezwładności). Przedstawione wyniki obliczeń (rysunek nr 3.7) ograniczono wyłącznie względem składowych niskoczęstotliwościowych prądu stojana wykazujących największe odchylenia wartości amplitud w czasie procesu iteracji.

- składowe diagnostyczne widma prądu fazowego stojana,  $\varphi_0 \in \varphi \{0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ\}$ ,  $J=J_w$ ,  $s=0,01$ :



**Rys. 3.7** Przebieg zmienności wybranych składowych widma prądu fazowego w funkcji kąta początkowego położenia wirnika, pierwszy oraz drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.

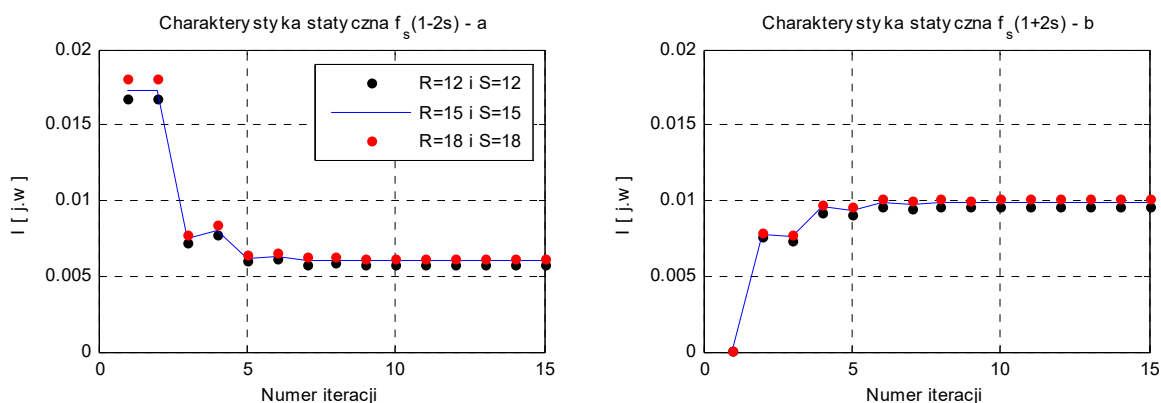
Zmiana kąta początkowego położenia wirnika wykazuje jednoznaczną tendencję na szybkość działania algorytmu, gdzie liczba niezbędnych iteracji w celu uzyskania zbieżności wzrasta równoległe z zwiększaniem wartości tego parametru. Modyfikacja kąta początkowego położenia wirnika nie zmienia rozwiązań końcowych, co wprost wynika z ograniczenia liczby harmonicznych przepływu biorących udział w wytwarzaniu momentów przemiennych mających punkty synchronizmu poza zakresem pracy silnikowej. Nie dotyczy to wyłącznie rozwiązań w skrajnym przypadku dla poślizgu równego jedności modyfikującym indukcyjności wzajemne przy postoju wirnika. Oprócz tego rozpoczęcie obliczeń od pierwszego lub drugiego punktu startowego może być przyczyną widocznych różnic między poszukiwanymi rozwiązaniami końcowymi. Wykazany brak zgodności otrzymanych wyników wiąże się głównie ze sposobem wyznaczania położenia punktu pracy silnika wokół ustalonej prędkości średniej wirnika. Przybliżenie rozwiązania pierwszym punktem startowym pomija obniżenie momentu asynchronicznego spowodowanego niesymetrią rezystancyjną z którego określa się składową stałą momentu

zewnątrznego w równaniu mechanicznym. Natomiast rozwiązanie początkowe w drugim punkcie startowym uwzględnia już wspomniany efekt. Dlatego w tym samym miejscu charakterystyki mechanicznej wystąpią rozbieżności ilościowe, a więc za bardziej właściwy należy uznać wybór drugiego punktu startowego, ponieważ zapewnia lepsze dopasowanie numeryczne względem metody całkowania numerycznego.

- **Wymiar układu równań – liczba punktów przypadająca w okresie**

Obliczenia testowe wykazały, że wymiar układu równań nie powoduje przesunięcia punktów zbieżności algorytmu, lecz odgrywa istotną rolę w odwzorowaniu ilościowym amplitud sygnałów diagnostycznych. Przykładowe wyniki obliczeń w zależności od przyjętej liczby punktów  $R$ ,  $S$  opracowano w warunkach pracy silnika z prędkością znamionową obciążonego dwukrotnym momentem bezwładności własnej.

- składowe diagnostyczne widma prądu fazowego stojana;  $R$ ,  $S=12$ ;  $R$ ,  $S=15$ ;  $R$ ,  $S=18$ ;  $J=2 \cdot J_w$ ,  $s=0,01$ :



**Rys. 3.8** Przebieg zmienności składowych niskoczęstotliwościowych widma prądu fazowego stojana w funkcji liczby punktów  $R$ ,  $S$ ; drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.

Z badań numerycznych określono graniczny wymiar układu, powyżej którego nie zauważa się dla zadanej liczby punktów różnic między wynikami obliczeń. Za optymalną pod względem czasu działania algorytmu i efektywnego odwzorowania wartości prądów oraz momentu elektromagnetycznego uznano liczbę punktów w okresach równą  $R=15$  i  $S=15$  (tabela nr 3.1). Należy zaznaczyć, że zmiana wypełnienia harmonicznym przestrzennym (szczególnie ich zwiększenie – korekta relacji między ilością prętów i par biegunów) w bazowej macierzy indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik, spowoduje wzrost granicznej wartości współczynników  $R$  oraz  $S$  przy których nastąpi minimalizacja wielkości układu równań bez pogorszenia własności

ilościowych rozwiązań. Stąd dla każdej konstrukcji wirnika zachodzi konieczność indywidualnego doboru parametrów  $R$  i  $S$ , aby spełnić postawione warunki działania algorytmu.

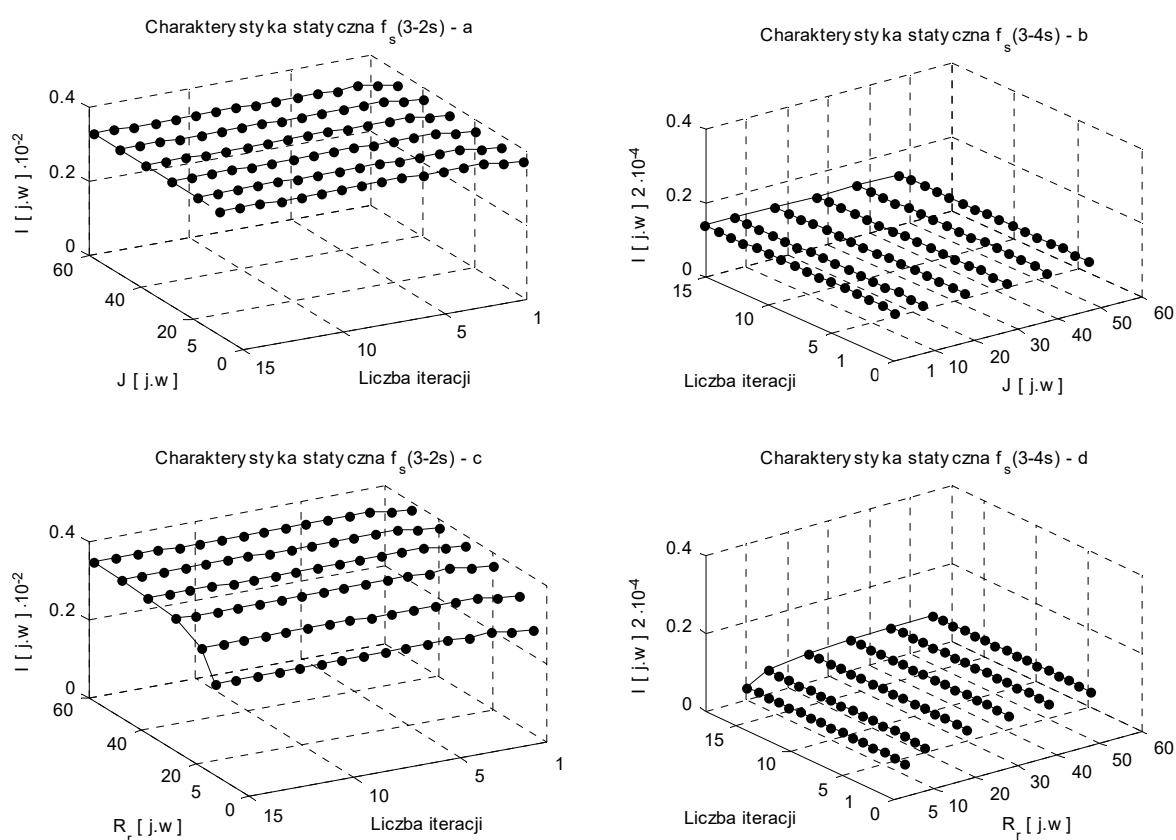
**Tab. 3.1** Wyniki obliczeń dla różnych wymiarów układu, uszkodzony jeden pręt klatki pracy,  $J=2 \cdot J_w$ ,  $s=0,01$ .

$R=12, S=12, I_{50\text{Hz}}=156,0282 \text{ [A]}_{p-p}, T_{em,0\text{Hz}}=982,2210 \text{ [Nm]}$ , wymiar ukł. równań: 50000x50000				
Lp.	I - [Hz]	I [A]	$T_{em}$ - [Hz]	T [Nm]
1	$f_s \cdot (1-6s) - 47$	0,0043	$4f_s \cdot s - 2$	0,2099
2	$f_s \cdot (1+6s) - 53$	0,0092	$6f_s \cdot s - 3$	0,0131
3	$f_s \cdot (5-6s) - 247$	0,0608	$8f_s \cdot s - 4$	0,0002
4	$f_s \cdot (5-4s) - 248$	0,0633	$f_s \cdot (6-8s) - 296$	0,1011
5	$f_s \cdot (5-2s) - 249$	0,0028	$f_s \cdot (6-6s) - 297$	0,2731
6	$f_s \cdot (7-8s) - 346$	0,0281	$f_s \cdot (6-4s) - 298$	0,3917
7	$f_s \cdot (7-6s) - 347$	0,0274	$f_s \cdot (6-10s) - 595$	0,0529
8	$f_s \cdot (7-4s) - 348$	0,0001	$f_s \cdot (12-8s) - 596$	0,0092
$R=15, S=15, I_{50\text{Hz}}=156,0285 \text{ [A]}_{p-p}, T_{em,0\text{Hz}}=982,2212 \text{ [Nm]}$ , wymiar ukł. równań: 76880x76880				
1	$f_s \cdot (1-6s) - 47$	0,0035	$4f_s \cdot s - 2$	0,2099
2	$f_s \cdot (1+6s) - 53$	0,0092	$6f_s \cdot s - 3$	0,0130
3	$f_s \cdot (5-6s) - 247$	0,0608	$8f_s \cdot s - 4$	0,0005
4	$f_s \cdot (5-4s) - 248$	0,0632	$f_s \cdot (6-8s) - 296$	0,1012
5	$f_s \cdot (5-2s) - 249$	0,0028	$f_s \cdot (6-6s) - 297$	0,2541
6	$f_s \cdot (7-8s) - 346$	0,0285	$f_s \cdot (6-4s) - 298$	0,3738
7	$f_s \cdot (7-6s) - 347$	0,0272	$f_s \cdot (6-10s) - 595$	0,0538
8	$f_s \cdot (7-4s) - 348$	0,0003	$f_s \cdot (12-8s) - 596$	0,0079
$R=18, S=18, I_{50\text{Hz}}=156,0285 \text{ [A]}_{p-p}, T_{em,0\text{Hz}}=982,2214 \text{ [Nm]}$ , wymiar ukł. równań: 109520x109520				
1	$f_s \cdot (1-6s) - 47$	0,0035	$4f_s \cdot s - 2$	0,2099
2	$f_s \cdot (1+6s) - 53$	0,0092	$6f_s \cdot s - 3$	0,0130
3	$f_s \cdot (5-6s) - 247$	0,0608	$8f_s \cdot s - 4$	0,0005
4	$f_s \cdot (5-4s) - 248$	0,0632	$f_s \cdot (6-8s) - 296$	0,1012
5	$f_s \cdot (5-2s) - 249$	0,0028	$f_s \cdot (6-6s) - 297$	0,2540
6	$f_s \cdot (7-8s) - 346$	0,0285	$f_s \cdot (6-4s) - 298$	0,3738
7	$f_s \cdot (7-6s) - 347$	0,0272	$f_s \cdot (6-10s) - 595$	0,0538
8	$f_s \cdot (7-4s) - 348$	0,0003	$f_s \cdot (12-8s) - 596$	0,0079

### 3.4.3.b Obustronna niesymetria rezystancyjna silnika

W tym podrozdziale rozważono przypadek obustronnej niesymetrii parametrycznej silnika – przerwa w jednym pręcie klatki rozruchowej i fazie obwodu stojana (trzeci punkt startowy), obciążenie momentem tarcia. Analizę zbieżności algorytmu opracowano w funkcji momentu bezwładności i współczynnika modelującego uszkodzenie, co jak wykazano niżej wystarczy, żeby określić podstawowe właściwości procedury dyskretnego bilansu harmonicznych.

- składowe diagnostyczne widma prądu stojana,  $J \in J_w \{1, 10, 20, 30, 40, 50\}$ ,  $r=20$  (a-b), oraz  $r \in R_p \{5, 10, 20, 30, 40, 50\}$ ,  $J=J_w$  (c-d);  $s=0,0005$ , trzeci punkt startowy (rozwiązanie startowe z warunkiem  $\Delta\Omega=0$  przy dwustronnej niesymetrii rezystancyjnej silnika).



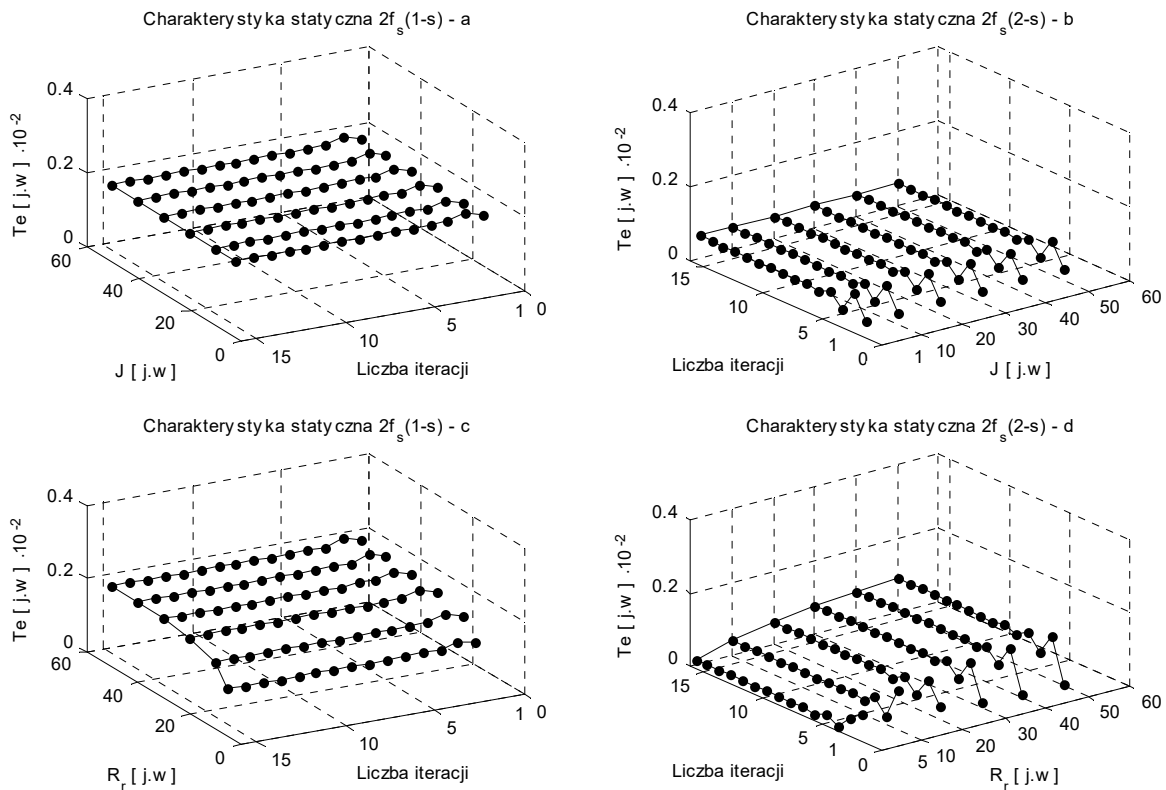
**Rys. 3.9** Przebieg zmienności wybranych składowych widma prądu fazowego w funkcji momentu bezwładności i współczynnika modelującego przerwę prętów wirnika, trzeci punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej, obustronna niesymetria.

Wykonane obliczenia mają podobne cechy jakościowe, jak w przypadku badania zbieżności algorytmu dla niesymetrii klatki pracy i składowych zlokalizowanych poza pasmem niskich częstotliwości. Z ograniczenia oddziaływań elektromechanicznych obserwowane składowe diagnostyczne stabilizują się maksymalnie po czterech iteracjach, gdzie wraz ze wzro-



stem wartości momentu bezwładności skróceniu ulega czas niezbędny do osiągnięcia przez algorytm ustalonego punktu zbieżności. Z uwagi na wybór punktu startowego oraz warunki pracy silnika (naturalny moment bezwładności) wzrost współczynnika modelującego asymetrię pręta klatki ustala rozwiązanie najpóźniej w szóstym powtórzeniu pętli ( $r=50$ ). Zmiana warunków początkowych (obustronna symetria – pierwszy punkt startowy) wydłuża obliczenia o jedną iterację – rysunek nr 3.11.

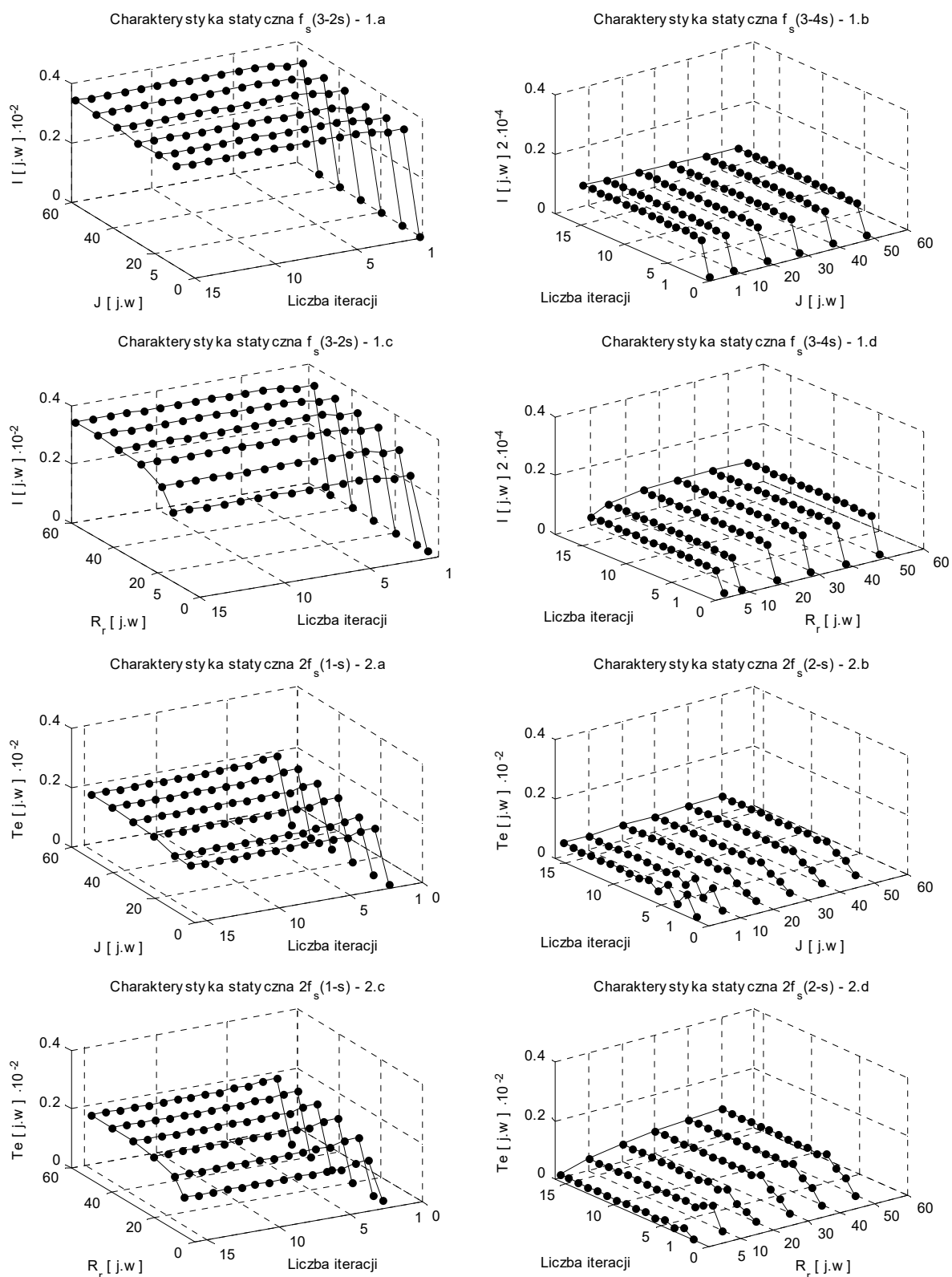
- składowe diagnostyczne widma momentu elektromagnetycznego,  $J \in J_w \{1, 10, 20, 30, 40, 50\}$ ,  $r=20$  (a-b), oraz  $r \in R_p \{5, 10, 20, 30, 40, 50\}$ ,  $J=J_w$  (c-d);  $s=0,0005$ , trzeci punkt startowy:



**Rys. 3.10** Przebieg zmienności wybranych składowych widma momentu elektromagnetycznego w funkcji momentu bezwładności i współczynnika modelującego przerwę prętów wirnika, trzeci punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej, obustronna niesymetria.

Wyniki przeprowadzonych testów numerycznych wskazują jednoznacznie, że niezbędna do osiągnięcia rozwiązania końcowego z założoną dokładnością liczba iteracji jest określona przez narzucone warunki pracy silnika, a więc ściśle zależy od zmienności parametrów równania mechanicznego i poziomu przyjętej niesymetrii. Pozostałe parametry jak wymiar układu równań i liczba uwzględnianych harmonicznych przestrzennych mają ograniczone znaczenie w szybkości ustalania się rozwiązania. Przy tym utworzony algorytm iteracyjny będzie zawsze zbieżny ze względu na przyjętą metodę jego rozwiązania tj. procedurę znanego punktu stałego z małymi odchyleniami wobec wartości średniej prędkości kątowej wirnika.

- składowe diagnostyczne prądu fazowego stojan i momentu elektromagnetycznego, pierwszy punkt startowy, obliczenia wg warunków podanych przed rysunkami nr 3.9 i 3.10:



**Rys. 3.11** Przebieg zmienności wybranych sygnałów w funkcji momentu bezwładności i współczynnika modelującego przerwę prętów wirnika, pierwszy punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej, obustronna niesymetria.

### 3.4.4 Porównanie metody bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego w dziedzinie czasu z całkowaniem numerycznym

Najczęściej stosowaną metodą rozwiązywania nieliniowych układów równań różniczkowych jest metoda numerycznego całkowania równań stanu [21], [40], [50], [66], [96]. Wobec tego proponowany algorytm bezpośredniego wyznaczania stanów ustalonych w dziedzinie czasu porównano z metodą całkowania numerycznego względem cech ilościowych występujących w przebiegach czasowych prądu fazowego stojana i momentu elektromagnetycznego.

Rozwiązanie równań obwodowych silnika metodą całkowania numerycznego wymaga ich wcześniejszego przedstawienia w postaci normalnej określonej rzeczywistymi funkcjami czasu [26], [41], [80]. Dostosowanie modelu bazowego do wspomnianej formy z jednoczesnym zachowaniem uporządkowanej struktury równań odbywa się przez transformację rozpatrywanego układu - współrzędne prostokątne. Przekształcenie układu równań wykonuje się zazwyczaj bezpośrednio ze współrzędnych naturalnych [26], [41], [55] lub pośrednio z układu w przestrzeni składowych symetrycznych [26], [55], [74], [80]. Niezależnie od sposobu postępowania każda z wymienionych metod daje w rezultacie takie same równania końcowe, pod warunkiem wcześniejszego ustalenia możliwej liczby uwzględnianych harmonicznich przepływu [p. 3.3]. W tym podrozdziale wykorzystano metodę pośredniego sprowadzenia równań, przy czym według zależności z [p. 3.3] w macierzach transformacji przyjęto dla obwodu stojana  $\gamma_s=0$  i wirnika  $\gamma_w=p\varphi$ . Wykonanie ogólnych działań przewidzianych przez (2.57) pozwala zapisać układ równań (silnik zwarty osobnymi pierścieniami [p.2.5]) w współrzędnych dwuosowych jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \\ \mathbf{i}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sw} & \mathbf{L}_{sw} \\ \mathbf{L}_{sw}^T & \mathbf{L}_r & \mathbf{L}_{rp} \\ \mathbf{L}_{sw}^T & \mathbf{L}_{pr} & \mathbf{L}_p \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left( \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & & \\ & \mathbf{R}_r & \\ & & \mathbf{R}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \\ \mathbf{i}_p \end{bmatrix} + p \cdot \omega \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{sw}^T & \mathbf{M}_r & \mathbf{M}_{rp} \\ \mathbf{M}_{sw}^T & \mathbf{M}_{pr} & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \\ \mathbf{i}_p \end{bmatrix} \right) \quad (3.81)$$

$$\frac{d}{dt} \omega = \frac{T_{em} - T_m - D \cdot \omega}{J} \quad (3.82)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi = \omega \quad (3.83)$$

We wzorze (3.81) utrzymano wszystkie wcześniejsze założenia dotyczące modelowanych niesymetrii oraz rodzaju skojarzenia uzwojeń. Transformację równań obwodu stojana z przestrzeni

składowych symetrycznych z pominięciem równania składowej zerowej przeprowadzono stosując macierze [26], [80]

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{E}_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{j\gamma_s} & \\ & e^{-j\gamma_s} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Równania obejmujące wektory i macierze obwodu wirnika zostały przekształcone z uwzględnieniem postaci macierzy [p.3.3] oraz [55], [80] dla parzystej liczby prętów klatek wirnika

$$\mathbf{T}_w = \mathbf{D}_w \cdot \mathbf{E}_w = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & & & & & \\ & 1 & & & & & 1 \\ & & \ddots & & & & \ddots \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & & & \sqrt{2} & & \\ & & & & & j & -j \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ j & & & & & & -j \end{bmatrix} \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ e^{j \cdot l_p \cdot \varphi_{\text{mod}(p,N)}} \\ \vdots \\ 1 \\ e^{-j \cdot l_p \cdot \varphi_{\text{mod}(-p,N)}} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

W wyniku transformacji otrzymano:

-dwuelementowe wektory wartości chwilowych napięć zasilających i prądów obwodu stojana

$$\mathbf{u}_s = [u_s^d \quad u_s^q]^T = [\sqrt{3/2} \cdot U_m \cos(\Omega_s t) \quad \sqrt{3/2} \cdot U_m \sin(\Omega_s t)]^T, \quad \mathbf{i}_s = [i_s^d \quad i_s^q]^T, \quad (3.86)$$

oraz N+1 elementowe wektory kolumnowe wirnika

$$\mathbf{u}_r \equiv \mathbf{u}_p = [u_w^{0,d} \quad u_w^{1,d} \quad \dots \quad u_w^{1,q} \quad u_w^N]^T = \mathbf{0}^T, \quad \mathbf{i}_r \equiv \mathbf{i}_p = [i_w^{0,d} \quad i_w^{1,d} \quad \dots \quad i_w^{1,q} \quad i_w^N]^T \quad (3.87)$$

-macierz rezystancji przy założeniu niesymetrii parametrycznej, która w przypadku zachowania symetrii staje się macierzą diagonalną

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} 2/3 (\mathbf{R}_1^s + 1/4 (\mathbf{R}_2^s + \mathbf{R}_3^s)) & \sqrt{3}/4 (\mathbf{R}_3^s - \mathbf{R}_2^s) \\ \sqrt{3}/4 (\mathbf{R}_3^s - \mathbf{R}_2^s) & 3/4 (\mathbf{R}_2^s + \mathbf{R}_3^s) \end{bmatrix}, \quad (3.88)$$

natomiast macierze rezystancji obwodów wirnika w przyjętym układzie odniesienia są reprezentowane funkcją kąta obrotu  $\mathbf{R}(\varphi) \equiv \mathbf{R}_r \equiv \mathbf{R}_p$  – obliczane dla każdego kroku całkowania.

- stałe macierze indukcyjności głównych i rozprożeń z współczynnikami określonymi przez parametry geometryczne zdefiniowane w [p.2.4.1]

$$\mathbf{L}_s = \text{diag} \left[ \mathbf{L}_s^1 \quad \mathbf{L}_s^2 \right], \text{ dla: } \mathbf{L}_s^1 = \mathbf{L}_s^2 = \mathbf{L}_s^\sigma + \sum_n \mathbf{L}_{n,p} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{L}_{rp} = \mathbf{L}_{pr} = \text{diag} \left[ 0 \quad \mathbf{L}_{m,w} \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{L}_{m,w} \quad \dots \quad 0 \right] \quad (3.90)$$

$$\mathbf{L}_r \equiv \mathbf{L}_p = \text{diag} \left[ \mathbf{L}_{\sigma,w}^0 \quad \mathbf{L}_{\sigma,w}^1 + \mathbf{L}_{m,w} \quad \dots \quad \mathbf{L}_{\sigma,w}^{N-1} + \mathbf{L}_{m,w} \quad \mathbf{L}_{\sigma,w}^N \right] \quad (3.91)$$

- macierz pulsacji indukcyjności wzajemnych między obwodem stojana i wirnika, w której niezerowe są tylko elementy na pozycjach wynikających z dzielenia modulo numeru harmoniczej przepływu przez liczbę oczek klatki wirnika

$$\mathbf{L}_{sw} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{sw}^1 \\ \mathbf{L}_{sw}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \mathbf{L}_{1p}^{\text{mod}(1p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{-5p}^{\text{mod}(-5p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{7p}^{\text{mod}(7p,N)} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \mathbf{L}_{-1p}^{\text{mod}(-1p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{5p}^{\text{mod}(5p,N)} & \dots & \mathbf{L}_{-7p}^{\text{mod}(-7p,N)} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

- macierz rotacji indukcyjności wzajemnych między stojanem i obwodami klatek wirnika

$$\mathbf{M}_{sw} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{sw}^1 \\ \mathbf{M}_{sw}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -\mathbf{L}_{-1p}^{\text{mod}(-1p,N)} & \dots & 5\mathbf{L}_{5p}^{\text{mod}(5p,N)} & \dots & -7\mathbf{L}_{-7p}^{\text{mod}(-7p,N)} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \mathbf{L}_{1p}^{\text{mod}(1p,N)} & \dots & -5\mathbf{L}_{-5p}^{\text{mod}(-5p,N)} & \dots & 7\mathbf{L}_{7p}^{\text{mod}(7p,N)} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

- macierz rotacji indukcyjności wzajemnych między obwodami klatki rozruchowej oraz pracy

$$\mathbf{M}_{rp} = \mathbf{M}_{pr} = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{M}_2 \quad (3.94)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & \mathbf{L}_{m,w}^{\text{mod}(1p,N), \text{mod}(-1p,N)} & \ddots & \mathbf{L}_{m,w}^{\text{mod}(-5p,N), \text{mod}(5p,N)} & \ddots \\ \ddots & \mathbf{L}_{m,w}^{\text{mod}(7p,N), \text{mod}(-7p,N)} & \ddots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.95.a)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & \mathbf{L}_{m,w}^{\text{mod}(-1p,N), \text{mod}(1p,N)} & \ddots & \mathbf{L}_{m,w}^{\text{mod}(5p,N), \text{mod}(-5p,N)} & \ddots \\ \ddots & \mathbf{L}_{m,w}^{\text{mod}(-7p,N), \text{mod}(7p,N)} & \ddots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.95.b)$$

W powyższym zapisie jak również (3.96) cząstkowe macierze rotacji posiadają elementy niezerowe jedynie na głównej przekątnej położone w wierszu i kolumnie wyznaczonym przez działania z indeksu górnego indukcyjności wzajemnej.

- macierz rotacji indukcyjności głównych i wzajemnych w obrębie wybranego obwodu wirnika

$$\mathbf{M}_r \equiv \mathbf{M}_p = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{M}_{w,1} + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{M}_{w,2} \quad (3.96)$$

$$\mathbf{M}_{w,1} = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & L_{w,1p}^{\text{mod}(1p,N),\text{mod}(-1p,N)} & \ddots & L_{w,-5p}^{\text{mod}(-5p,N),\text{mod}(5p,N)} & \ddots \\ & & \ddots & L_{w,7p}^{\text{mod}(7p,N),\text{mod}(-7p,N)} & \ddots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.97.a)$$

$$\mathbf{M}_{w,2} = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & L_{w,-1p}^{\text{mod}(-1p,N),\text{mod}(1p,N)} & \ddots & L_{w,5p}^{\text{mod}(5p,N),\text{mod}(-5p,N)} & \ddots \\ & & \ddots & L_{w,-7p}^{\text{mod}(-7p,N),\text{mod}(7p,N)} & \ddots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.97.b)$$

gdzie:

$$L_{w,n \cdot p} = L_{\sigma,w}^{\text{mod}(n \cdot p,N)} + L_{m,w} \quad (3.98)$$

Macierze  $\mathbf{C}$  wynikające z różniczkowania macierzy transformacji względem kąta obrotu, zawierają współczynniki liczbowe oznaczające rząd harmonicznej przestrzennej przepływu

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & 1^{\text{mod}(1p,N),\text{mod}(1p,N)} & \ddots & -5^{\text{mod}(5p,N),\text{mod}(5p,N)} & \ddots & 7^{\text{mod}(7p,N),\text{mod}(7p,N)} & \ddots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & -1^{\text{mod}(-1p,N),\text{mod}(-1p,N)} & \ddots & 5^{\text{mod}(-5p,N),\text{mod}(-5p,N)} & \ddots & -7^{\text{mod}(-7p,N),\text{mod}(-7p,N)} & \ddots & 0 \end{bmatrix}$$

Moment elektromagnetycznych wyrażony jako suma momentów wytwarzanych osobno przez obwód klatki rozruchowej i klatki pracy zgodnie z równaniem (2.7) oraz postacią macierzy indukcyjności wzajemnych w układzie współrzędnych rzeczywistych będzie opisany poniższą zależnością

$$\begin{aligned} T_{em} &= T_{em}^r + T_{em}^p = \\ &= \sum_n n \cdot p \cdot L_{n \cdot p} \left[ \left( i_s^q \cdot i_r^{\text{mod}(n \cdot p,N),d} - i_s^d \cdot i_r^{\text{mod}(-n \cdot p,N),q} \right) + \left( i_s^q \cdot i_p^{\text{mod}(n \cdot p,N),d} - i_s^d \cdot i_p^{\text{mod}(-n \cdot p,N),q} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.99)$$

gdzie:

$T_{em}^r$  - moment wytwarzany przez klatkę górną,

$T_{em}^p$  - moment wytwarzany przez klatkę dolną.

Badanie zgodności numerycznej całkowania z algorytmem dyskretnego bilansu harmoniczných przeprowadzono analizując widma amplitudowe w dziedzinie częstotliwości, gdzie w celu rozwiązania układu równań metodą całkowania numerycznego przyjęto:

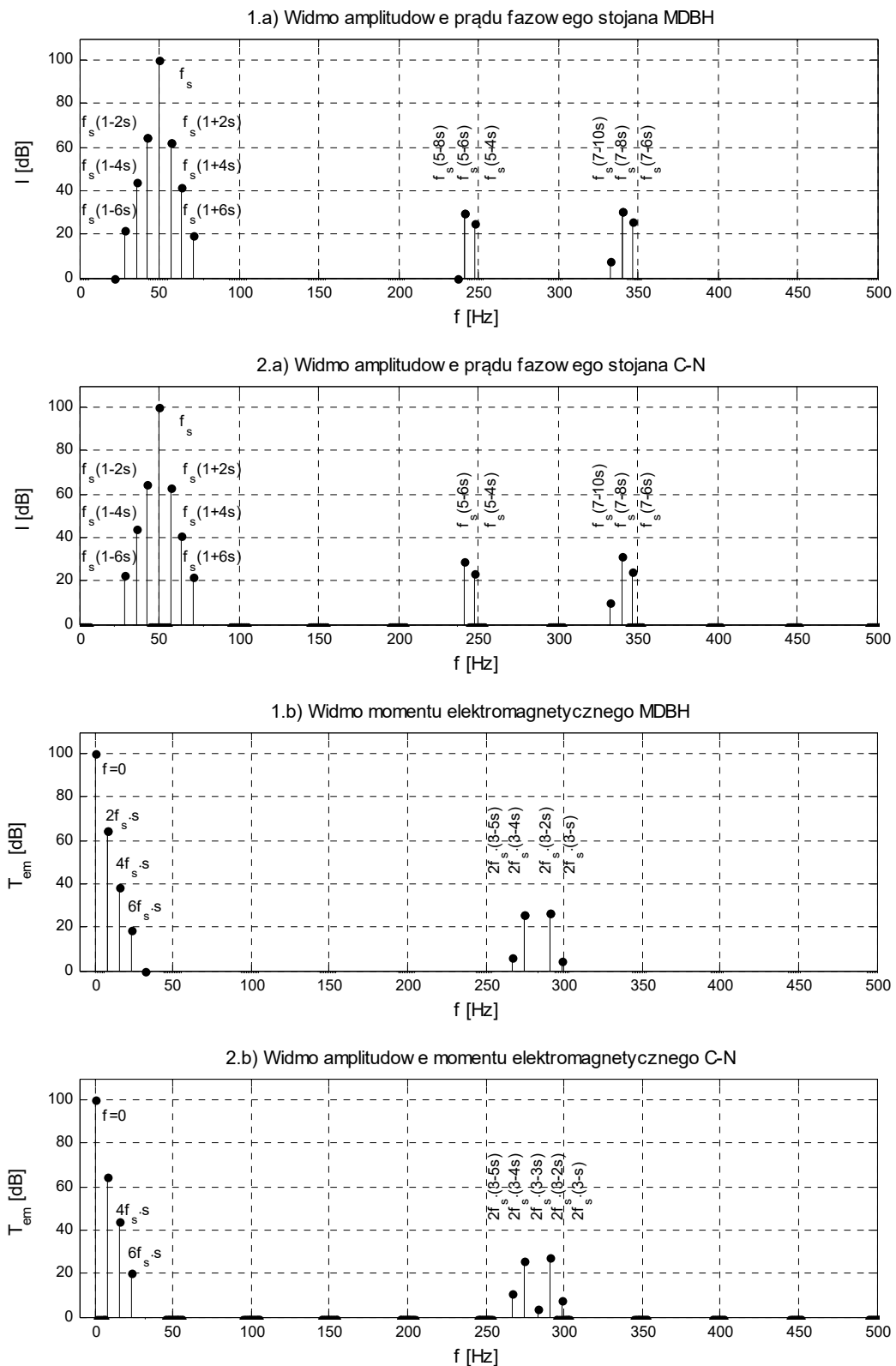
- a) zbiór punktów czasowych w przedziale  $t = (0, 20)$  [s] próbkowanych synchronicznie względem podstawowej harmoniczných sieciowej z stałym krokiem 0,0005-metoda Rungego-Kutty 4,
- b) warunki początkowe: zerowe w wektorach prądów stojana i wirnika oraz prędkość kątową równą prędkości synchronicznej,
- c) okno czasowe: prostokątne.

Otrzymane wyniki obliczeń będą zawierały oprócz przebiegów stanu ustalonego również sygnały przejściowe, które należy pominąć w analizie częstotliwościowej. W metodzie całkowania numerycznego warunki początkowe, jak i moment bezwładności powodują wydłużenie lub skrócenie czasu trwania stanu nieustalonego, a więc także zmieniają położenie oraz fazę punktu początkowego stanu ustalonego. Ponieważ odwzorowanie wartości amplitud składowych prawie-okresowych w skończonym przedziale czasu zależy od kąta fazowego, to wybór odpowiedniego punktu wycięcia sygnału nie powinien być przypadkowy. Z tego powodu, wydzielenie przebiegów stanu ustalonego można przeprowadzić dwoma sposobami. Pierwszy polega na uśrednianiu widma w dziedzinie częstotliwości dla przedziałów czasowych o stałej długości i różnych punktach początkowych wycięcia sygnału z całości przebiegu. Natomiast w drugiej metodzie, aby utrzymać niezmienną fazę przeszukuje się widmo fazowe aż do chwili uzyskania z satysfakcjonującą dokładnością informacji dotyczącej położenia stałego punktu wycięcia sygnału. W dalszej części pracy wybrano drugi sposób określenia przebiegów stanu ustalonego dlatego, że pozwala zachować z dużym przybliżeniem jednakowy błąd we wszystkich analizowanych przykładach. Obliczenia mające za zadanie porównanie całkowania numerycznego równań stanu z działaniem algorytmu dyskretnego bilansu harmoniczných, wykonano zakładając następujące warunki pracy silnika:

- obciążenie momentem znamionowym, uszkodzony pierwszy i trzeci pręt klatki pracy,
- obciążenie momentem wynikającym z tarcia mechanicznego (bieg jałowy), przerwa w trzeciej fazie stojana, uszkodzony pierwszy i trzeci pręt klatki rozruchowej.

Szczegółowe wyniki analiz ilościowych opracowano dla najważniejszych składowych diagnostycznych prądu fazowego stojana i momentu elektromagnetycznego, zadając w modelu równań stanu składową stałą momentu mechanicznego wcześniej obliczoną za pomocą algorytmu bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego (drugi [p.3.4.3.a] lub też trzeci punkt startowy [3.4.3.b]).

- widmo amplitudowe prądu fazowego i momentu elektromagnetycznego  $J=10 \cdot J_w$ ,  $s=0,01$ :



**Rys. 3.12** Względne widmo amplitudowe prądu fazowego (a) i momentu elektromagnetycznego (b) w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1. metoda dyskretne bilansu harmoniczných, 2. metoda całkowania numerycznego – niesymetria wirnika.



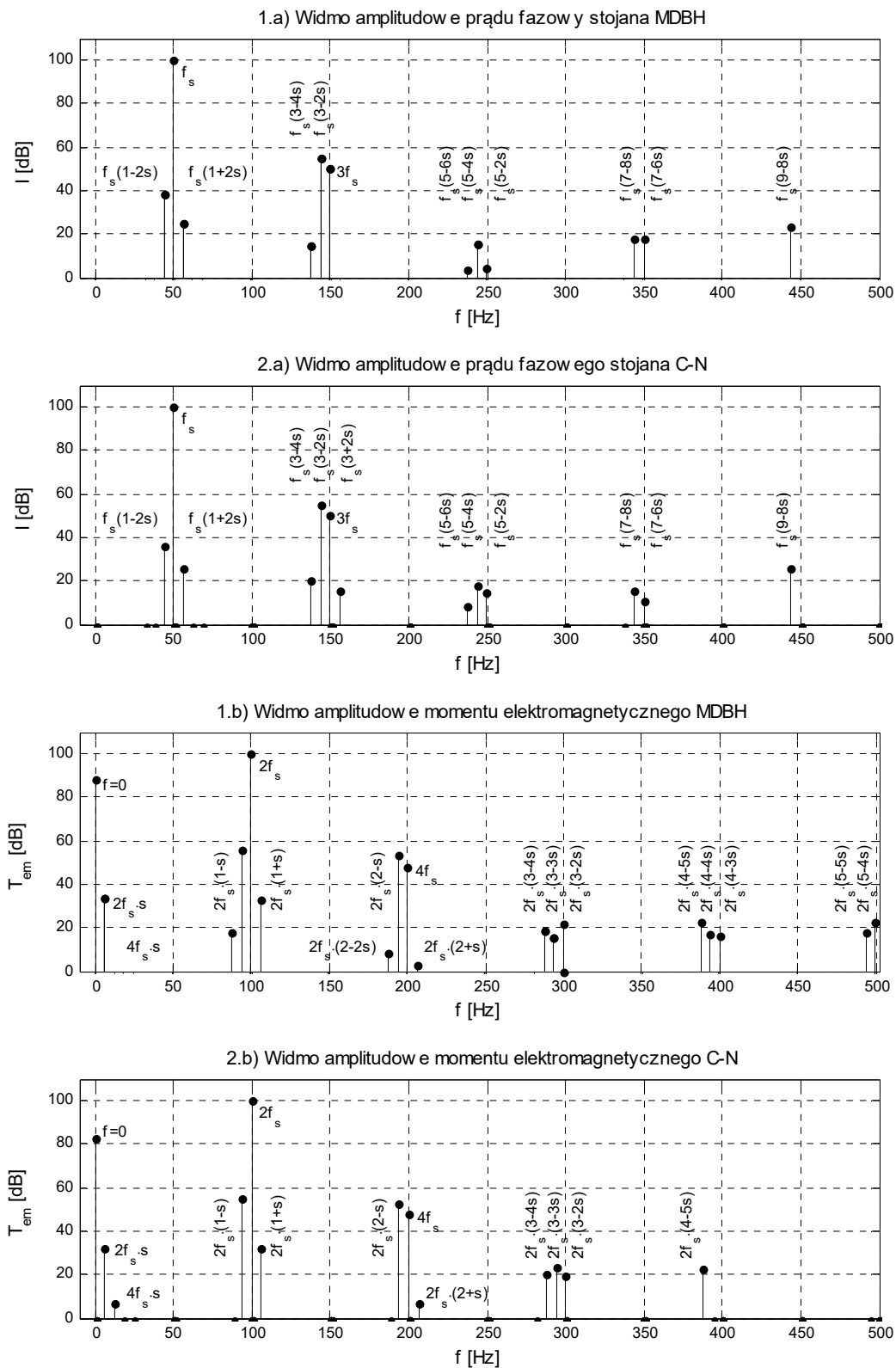
**Tab. 3.2** Wyniki obliczeń – porównanie metody całkowania numerycznego z metodą dyskretnego bilansu harmoniczych, uszkodzony pierwszy i trzeci pręt klatki pracy.

Niesymetria rezystancyjna wirnika $J=10 \cdot J_w, 1485$ [obr/min] – wartości szczytowe							
Widmo prądu stojana				Widmo momentu elektromagnetycznego			
f [Hz]		I <sub>s</sub> [A]		f [Hz]		T <sub>em</sub> [Nm]	
		C-N	MDBH			C-N	MDBH
$f_s \cdot (1-6s)$	47	0,02	0,02	0	0	958,23	958,23
$f_s \cdot (1-4s)$	48	0,23	0,25	$2 f_s \cdot s$	1	16,642	17,55
$f_s \cdot (1-2s)$	49	2,51	2,55	$4 f_s \cdot s$	2	1,553	1,33
$f_s$	50	153,26	153,26	$6 f_s \cdot s$	3	0,094	0,16
$f_s \cdot (1+2s)$	51	2,15	2,038	$8 f_s \cdot s$	4	0,005	0,002
$f_s \cdot (1+4s)$	52	0,162	0,184	$10 f_s \cdot s$	5	0,000	0,001
$f_s \cdot (1+6s)$	53	0,018	0,014	$2f_s \cdot (3-5s)$	295	0,034	0,020
$f_s \cdot (5-6s)$	247	0,042	0,046	$2f_s \cdot (3-4s)$	296	0,178	0,187
$f_s \cdot (5-4s)$	248	0,022	0,026	$2f_s \cdot (3-3s)$	297	0,015	0,006
$f_s \cdot (5-2s)$	249	0,000	0,001	$2f_s \cdot (3-2s)$	298	0,226	0,200
$f_s \cdot (7-10s)$	345	0,005	0,003	$2f_s \cdot (3-1s)$	299	0,023	0,015
$f_s \cdot (7-8s)$	346	0,056	0,050	$2f_s \cdot (6-5s)$	595	0,132	0,159
$f_s \cdot (7-6s)$	347	0,024	0,028	$2f_s \cdot (6-4s)$	596	0,055	0,013

W ocenie zgodności (błąd względny) numerycznej wyników otrzymanych z całkowania równań stanu i metody iteracyjnej uwzględniono podział harmoniczych widma prądu oraz momentu elektromagnetycznego według poniższych kryteriów:

- składowe okresowe próbkowane synchronicznie względem pulsacji sieciowej niezależne od momentu bezwładności mające równe amplitudy w widmie prądu stojana 50Hz i momentu elektromagnetycznego 0Hz,
- składowe prawie-okresowe będące funkcją momentu bezwładności i osiągające maksimum przy braku oddziaływań elektromechanicznych, gdzie w widmach prądu  $f_s \cdot (1-2s)$ , oraz momentu  $2f_s \cdot s$  różnice między porównywanymi wielkościami nie przekraczają 6%,
- składowe prawie-okresowe określone w funkcji momentu bezwładności oraz dążące do zera wraz z tłumieniem wahań prędkości kątowej wykazujące największe rozbieżności ilościowe (20%) spowodowane błędem (kątowym) wycięcia sygnału prawie-okresowego z całości przebiegu czasowego analizowanych wielkości.

- widmo amplitudowe prądu fazowego i momentu elektromagnetycznego  $J=J_w, s=0,0005$ :



**Rys. 3.13** Względne widmo amplitudowe prądu fazowego (a) i momentu elektromagnetycznego (b) w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1. metoda dyskretnego bilansu harm., 2. metoda całkowania numerycznego – obustronna niesymetria silnika.

**Tab. 3.3** Wyniki obliczeń – porównanie metody całkowania numerycznego z metodą dyskretnego bilansu harmonicznym, obustronna niesymetria silnika: przerwa w fazie obwodu stojana, uszkodzony pierwszy i trzeci pręt klatki rozruchowej.

Obustronna niesymetria rezystancyjna silnika $J=J_w, 1499$ [obr/min] – wartości szczytowe							
Widmo prądu stojana				Widmo momentu elektromagnetycznego			
f [Hz]		I <sub>s</sub> [A]		f [Hz]		T <sub>em</sub> [Nm]	
		C-N	MDBH			C-N	MDBH
$f_s \cdot (1-2s)$	49,93	0,074	0,095	$0f_s$	0	58,2	58,2
$f_s$	50,00	114	114	$2f_s \cdot s$	0,067	0,18	0,22
$f_s \cdot (1+2s)$	50,07	0,023	0,019	$4f_s \cdot s$	0,133	0,01	0,00
$f_s \cdot (3-4s)$	149,87	0,012	0,009	$2f_s \cdot (1-s)$	99,93	2,59	2,77
$f_s \cdot (3-2s)$	149,93	0,645	0,630	$2f_s$	100,00	441,1	441
$3f_s$	150,00	0,375	0,370	$2f_s \cdot (1+s)$	100,06	0,18	0,2
$f_s \cdot (3+2s)$	150,07	0,007	0,001	$2f_s \cdot (2-s)$	199,93	2,25	2,45
$f_s \cdot (5-6s)$	249,80	0,003	0,001	$4f_s$	200,00	1,10	1,05
$f_s \cdot (5-4s)$	249,87	0,009	0,006	$2f_s \cdot (2+s)$	200,07	0,01	0,006
$f_s \cdot (5-2s)$	249,93	0,006	0,002	$2f_s \cdot (3-4s)$	299,73	0,045	0,038
$f_s \cdot (7-8s)$	349,73	0,007	0,009	$2f_s \cdot (3-3s)$	299,80	0,040	0,035
$f_s \cdot (7-6s)$	349,80	0,004	0,008	$2f_s \cdot (3-2s)$	299,87	0,062	0,051
$f_s \cdot (9-8s)$	449,73	0,023	0,017	$2f_s \cdot (4-5s)$	399,67	0,060	0,057

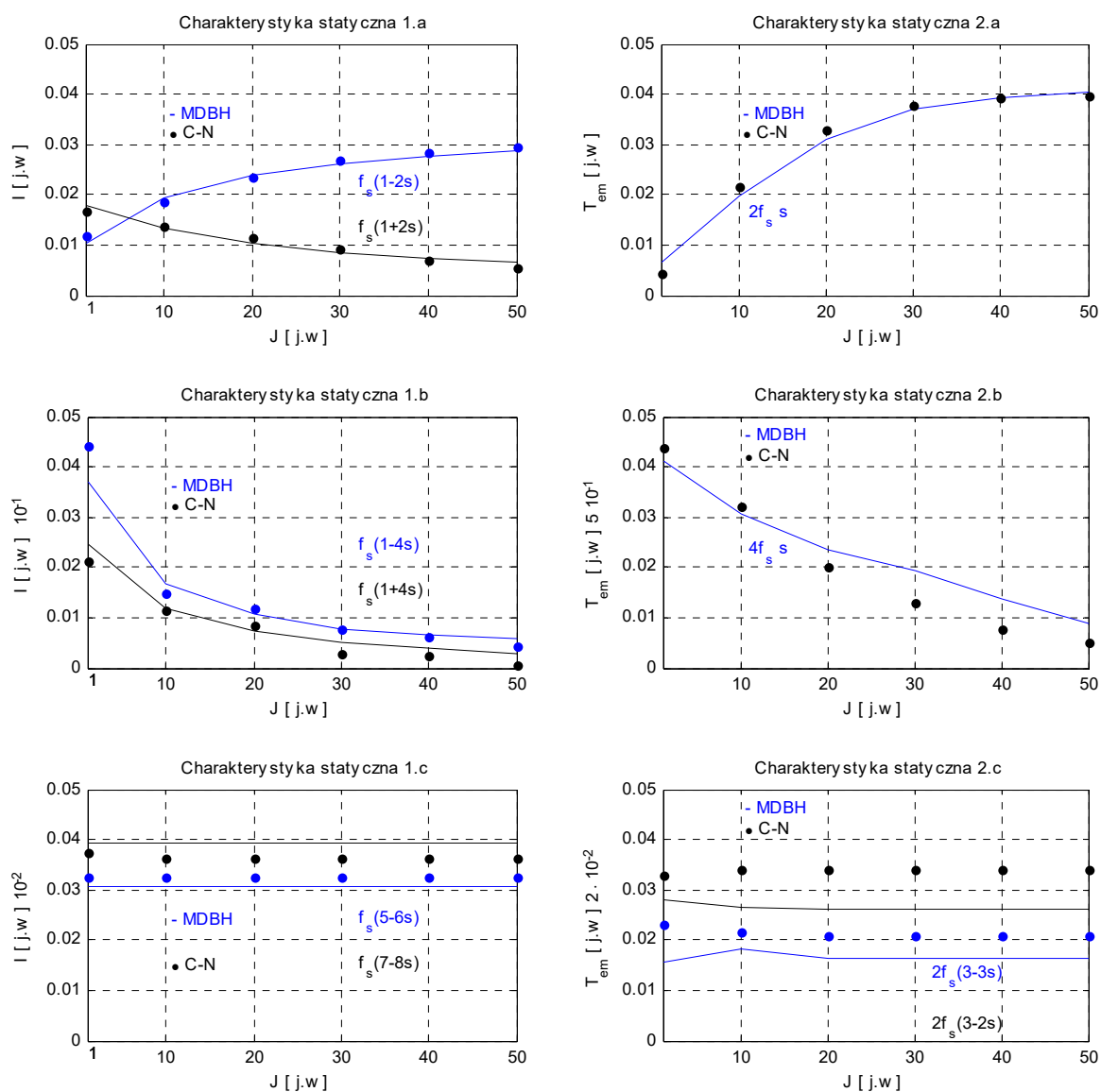
Analogiczny podział harmonicznym jak poprzednio wykorzystano w opisie cech ilościowych widm amplitudowych dla przypadku obustronnej niesymetrii silnika uwzględniając zmiany jakościowe wynikające z rozważanego stanu pracy:

- składowe okresowe próbkowane synchronicznie względem pulsacji sieciowej niezależne od momentu bezwładności, które posiadają równe amplitudy w widmie prądu stojana 50Hz i momentu elektromagnetycznego 0Hz,
- składowe okresowe próbkowane synchronicznie względem pulsacji sieciowej zależne od momentu bezwładności  $2f_s, 4f_s$ , itd. - maksymalna różnica procentowa wynosi 4,5%,
- składowe prawie-okresowe będące funkcją momentu bezwładności i osiągające maksimum przy braku oddziaływań elektromechanicznych:  $f_s \cdot (3-2s), f_s \cdot (3-4s)$  oraz  $2f_s \cdot (1-s), 2f_s \cdot (2-s)$ , gdzie różnice między porównywanymi wielkościami nie przekraczają 25%,
- składowe prawie-okresowe określone w funkcji momentu bezwładności oraz dążące do

zera wraz z tłumieniem wahań prędkości kątowej osiągają w niektórych przypadkach rozbieżność na poziomie 90%.

W badaniach oprócz bezpośredniej analizy widm amplitudowych przeprowadzono również testy zbieżności obu metod polegające na porównaniu tendencji zmian wartości obserwowanych sygnałów diagnostycznych w funkcji momentu bezwładności.

- niesymetria rezystancyjna wirnika  $I=f(J) - (1)$ ,  $T_{em}=f(J) - (2)$ ,  $s=0,01$ :

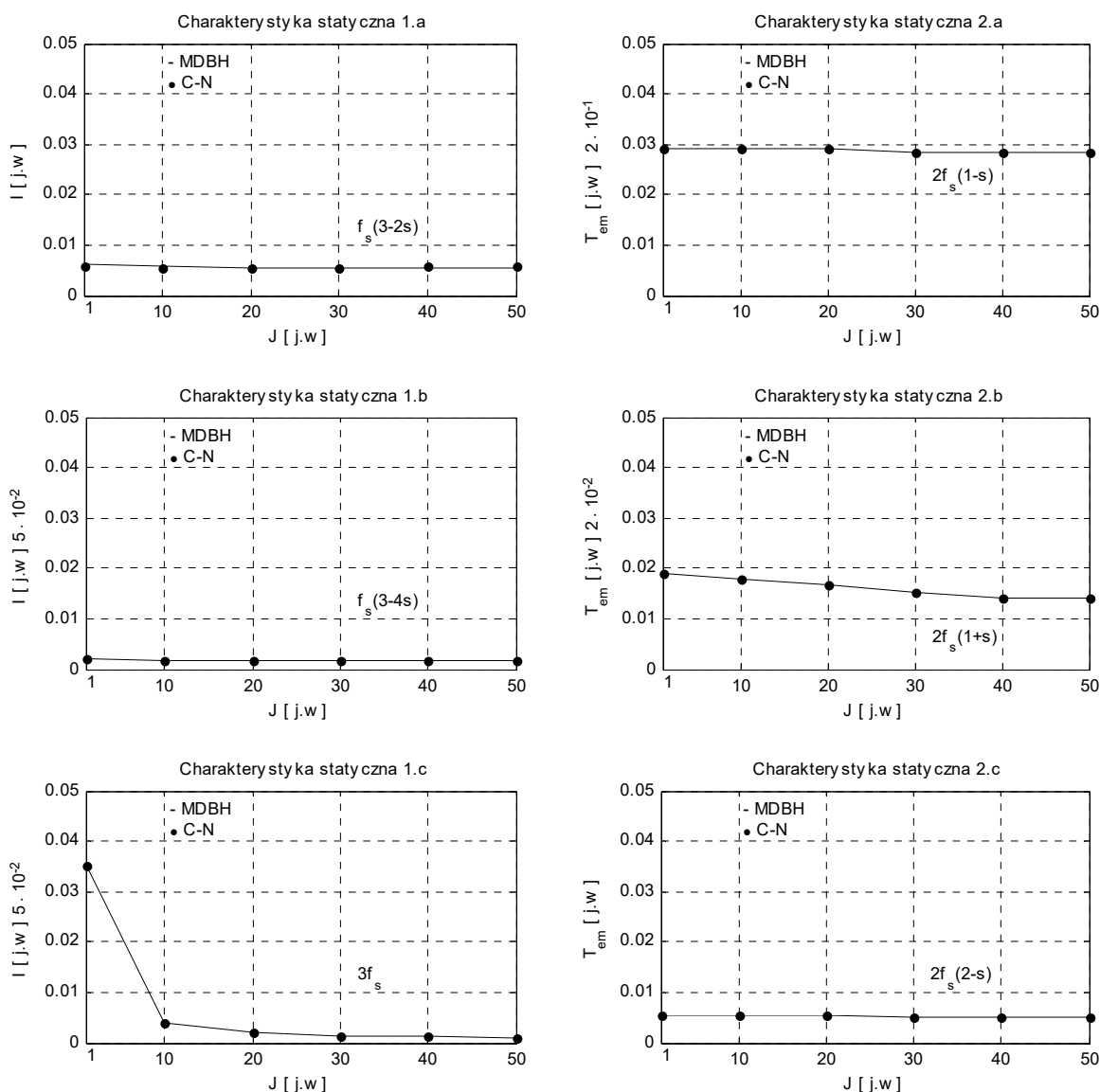


**Rys. 3.14** Charakterystyki statyczne zmian amplitud prądów fazowych stojana oraz momentów elektromagnetycznych w funkcji momentu bezwładności – uszkodzony pierwszy i trzeci pręt klatki pracy, symetryczny stojan.

Z analizy porównawczej wyników obliczeń otrzymanych metodą dyskretnego bilansu harmonicznego i całkowania numerycznego (rys. 3.14 i 3.15) obserwuje się dość dobrą zgodność

ilościową najistotniejszych składowych widma amplitudowego prądów stojana oraz momentu elektromagnetycznego. Znaczące różnice w wartościach amplitud analizowanych sygnałów diagnostycznych prawie-okresowych dotyczą głównie sygnałów w granicy dokładności ich odwzorowania (na brzegu rozwiązań prawostronnych) przez przyjętą liczbę punktów czasowych. Widocznym problemem jest również brak korelacji między dyskretnymi chwilami wykonywanych obliczeń dla wielkości prawie-okresowych metodą całkowania równań stanu i dyskretnego bilansu harmonicznego, co również stanowi przyczynę występujących niezgodności.

- obustronna niesymetria rezystancyjna silnika  $I=f(J) - (1)$ ,  $T_{em}=f(J) - (2)$ ,  $s=0,0005$ :



**Rys. 3.15** Charakterystyki statyczne zmian amplitud prądów fazowych stojana oraz momentów elektromagnetycznych w funkcji momentu bezwładności – uszkodzony pierwszy i trzeci pręt klatki rozruchowej, obustronna niesymetria silnika.

### 3.5 Badanie rozwiązań modelu nieliniowego w dziedzinie częstotliwości

Obliczenia przedstawione w poprzednich punktach tylko częściowo wyczerpują zagadnienia obejmujące oddziaływania elektromechaniczne. Wnioski sformułowane w podrozdziałach [p.3.4.3] i [p.3.4.4] mają charakter intuicyjny, wynikający z kształtowania się rozwiązania końcowego zależnie od zadanych warunków pracy silnika. Z perspektywy działania algorytmu bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego tego typu podejście należy uznać za akceptowalne, ponieważ spełnia wszelkie przesłanki fizyczne związane z obserwacją rzeczywistych układów napędowych. Wadą takiego ujęcia problemu interakcji elektromechanicznych w dziedzinie czasu jest brak jawnego powiązania wszystkich zjawisk towarzyszących niesymetrii z jej skutkami. Pełny wgląd w procesy, których przyczyną są asymetrie wewnętrzne oraz ich wpływ na odpowiedź układu mechanicznego, zapewnia jedynie analiza układu w dziedzinie częstotliwości po uprzednim rozdzieleniu równań elektromagnetycznych i mechanicznego oraz założeniu odpowiednich cech jakościowych wektora wahań kąta obrotu wirnika.

Posługiwanie się prądami w układzie składowych symetrycznych stwarza dodatkowe możliwości w interpretacji stanów awaryjnych zespołu napędowego z jednoczesnym uwzględnieniem zmienności parametrów wchodzących w skład równania mechanicznego. Ze wstępnej analizy przedstawionego w podrozdziale [p.3.4] układu równań (3.32) można stwierdzić, że informacje dotyczące ilościowego oraz jakościowego udziału oddziaływań elektromechanicznych w wypadkowym widmie prądu stojana są zawarte osobno w wektorach prądów składowej pierwszej oraz drugiej. Potraktowanie wyżej wymienionych prądów w układzie współrzędnych zespolonych jako umownie niezależnych sprowadza zagadnienie oddziaływań elektromechanicznych do metody rozdziału widma. Wskazana metoda postępowania ma ważny aspekt praktyczny o którym już częściowo wspomniano przy okazji omawiania rozwiązań prawie-okresowych [p.2.5.2]. W tamtym punkcie założono bez dowodu, że badanie widma składowych symetrycznych pozwala skutecznie rozróżnić m.in. uszkodzenia elektryczne wirnika od zewnętrznych zaburzeń momentu mechanicznego [49]. W wielu przypadkach, zaburzenie momentu zewnętrznego zostanie odzwierciedlone pod postacią składowych prądu o pulsacjach zbieżnych z sygnałami diagnostycznymi [10], [13], [15], [44]. Jednakże, stosowanie tylko widma prądu w układzie współrzędnych naturalnych będzie często niewystarczające, aby ustalić przyczynę istnienia – wytwarzania dodatkowych sygnałów związanych z oddziaływaniami elektromechanicznymi [4], [5], [44], [46], co uzasadnia konieczność poszukiwania relacji jakościowych między równaniami elektromagnetycznymi i równaniem mechanicznym.

Z wyrażeń (3.10) i (3.11) równania części elektromagnetycznej w dziedzinie częstotliwości dla składowych symetrycznych zachowują strukturalnie taką samą formę jak (3.97)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^1 \\ \mathbf{U}_s^2 \\ \mathbf{U}_r \\ \mathbf{U}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s^0 & \mathbf{R}_s^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{R}_s^1 & \mathbf{R}_s^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s^1 \\ \mathbf{I}_s^2 \\ \mathbf{I}_r \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} + j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_s \\ \boldsymbol{\Omega}_s \\ \boldsymbol{\Omega}_w \\ \boldsymbol{\Omega}_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s^1 & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{sw}^1 & \mathbf{L}_{sw}^1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_s^2 & \mathbf{L}_{sw}^2 & \mathbf{L}_{sw}^2 \\ \mathbf{L}_{ws}^1 & \mathbf{L}_{ws}^2 & \mathbf{L}_r & \mathbf{L}_{rp} \\ \mathbf{L}_{ws}^1 & \mathbf{L}_{ws}^2 & \mathbf{L}_{pr} & \mathbf{L}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s^1 \\ \mathbf{I}_s^2 \\ \mathbf{I}_r \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Układ równań (3.100) w ogólnym przypadku należy rozpatrywać jako nieskończony, gdzie sekwencje pulsacji prądów stojana i wirnika wyznaczają macierze operatora różniczkowania

$$\boldsymbol{\Omega}_s = \text{diag} [\dots \quad \dots \boldsymbol{\Omega}_{s,2} \quad \boldsymbol{\Omega}_{s,1} \quad \boldsymbol{\Omega}_{s,0} \quad \boldsymbol{\Omega}_{s,-1} \quad \boldsymbol{\Omega}_{s,-2} \quad \dots \quad \dots] \quad (3.101)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_w = \text{diag} [\boldsymbol{\Omega}_{w,0} \quad \boldsymbol{\Omega}_{w,1} \quad \boldsymbol{\Omega}_{w,2} \quad \dots \quad \boldsymbol{\Omega}_{w,N-2} \quad \boldsymbol{\Omega}_{w,N-1} \quad \boldsymbol{\Omega}_{w,N}] \quad (3.102)$$

dla:

$$\boldsymbol{\Omega}_{s,m} = \text{diag} [\dots \quad (m\boldsymbol{\Omega}_s + 2p\boldsymbol{\Omega}) \quad (m\boldsymbol{\Omega}_s + p\boldsymbol{\Omega}) \quad m\boldsymbol{\Omega}_s \quad (m\boldsymbol{\Omega}_s - p\boldsymbol{\Omega}) \quad (m\boldsymbol{\Omega}_s - 2p\boldsymbol{\Omega}) \quad \dots] \quad (3.103)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{w,\text{mod}(k_w,N)} = \text{diag} [\dots \quad \boldsymbol{\Omega}_{s,2} \cdot \mathbf{E} \quad \boldsymbol{\Omega}_{s,1} \cdot \mathbf{E} \quad \boldsymbol{\Omega}_{s,0} \cdot \mathbf{E} \quad \boldsymbol{\Omega}_{s,-1} \cdot \mathbf{E} \quad \boldsymbol{\Omega}_{s,-2} \cdot \mathbf{E} \quad \dots] \quad (3.104)$$

Zgodnie z zależnościami (3.101) oraz (3.102) pozostałe wektory i macierze w (3.100) otrzymają uporządkowaną postać według struktury macierzy operatorów różniczkowania:

-wektory wymuszeń

$$\mathbf{U}_s^1 = [\dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{U}_{s,1}^1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots]^T, \quad \mathbf{U}_{s,1}^1 = [\dots \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{U}_{s,(1,0-p)}^1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots] \quad (3.105)$$

$$\mathbf{U}_s^2 = \mathbf{0}^T, \mathbf{U}_w \equiv \mathbf{U}_r \equiv \mathbf{U}_p = \mathbf{0}^T \quad (3.106)$$

-wektory prądów stojana

$$\mathbf{I}_s^{\text{mod}(k_s,3)} = [\dots \quad \mathbf{I}_{s,2}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \mathbf{I}_{s,1}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \mathbf{I}_{s,0}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \mathbf{I}_{s,-1}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \mathbf{I}_{s,-2}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \dots]^T \quad (3.107)$$

$$\mathbf{I}_{s,m}^{\text{mod}(k_s,3)} = [\dots \quad \mathbf{I}_{s,(m,2-p)}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \mathbf{I}_{s,(m,1-p)}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \mathbf{I}_{s,(m,0-p)}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \mathbf{I}_{s,(m,-1-p)}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \mathbf{I}_{s,(m,-2-p)}^{\text{mod}(k_s,3)} \quad \dots] \quad (3.108)$$

- wektory prądów wirnika

$$\mathbf{I}_w \equiv \mathbf{I}_r \equiv \mathbf{I}_p = [\mathbf{I}_w^0 \quad \mathbf{I}_w^1 \quad \mathbf{I}_w^2 \quad \dots \quad \mathbf{I}_w^{N-2} \quad \mathbf{I}_w^{N-1} \quad \mathbf{I}_w^N]^T \quad (3.109)$$

gdzie:

$$\mathbf{I}_w^{\text{mod}(k_w, N)} = \left[ \dots \mathbf{I}_{w,2}^{\text{mod}(k_w, N)} \mathbf{I}_{w,1}^{\text{mod}(k_w, N)} \mathbf{I}_{w,0}^{\text{mod}(k_w, N)} \mathbf{I}_{w,-1}^{\text{mod}(k_w, N)} \mathbf{I}_{w,-2}^{\text{mod}(k_w, N)} \dots \right] \quad (3.110)$$

$$\mathbf{I}_{w,m}^{\text{mod}(k_w, N)} = \left[ \dots \mathbf{I}_{w,(m,2-p)}^{\text{mod}(k_w, N)} \mathbf{I}_{w,(m,1-p)}^{\text{mod}(k_w, N)} \mathbf{I}_{w,(m,0-p)}^{\text{mod}(k_w, N)} \mathbf{I}_{w,(m,-1-p)}^{\text{mod}(k_w, N)} \mathbf{I}_{w,(m,-2-p)}^{\text{mod}(k_w, N)} \dots \right] \quad (3.111)$$

- macierze stałe rezystancji oraz indukcyjności obwodu stojana

$$\mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} = \text{diag} \left[ \dots \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \dots \right] \quad (3.112)$$

$$\mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} = \text{diag} \left[ \dots \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{R}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \dots \right] \quad (3.113)$$

$$\mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} = \text{diag} \left[ \dots \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \dots \right] \quad (3.114)$$

$$\mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} = \text{diag} \left[ \dots \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \mathbf{L}_s^{\text{mod}(k_s, 3)} \dots \right] \quad (3.115)$$

- macierze rezystancji obwodów wirnika wraz z częścią poosiową

$$\mathbf{R}_w \equiv \mathbf{R}_r \equiv \mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0,0} & \mathbf{R}_{0,1} & \mathbf{R}_{0,2} & \dots & \mathbf{R}_{0,2}^* & \mathbf{R}_{0,1}^* & \mathbf{R}_{1,N}^Z \\ \mathbf{R}_{0,1}^* & \mathbf{R}_{1,1} & \mathbf{R}_{1,2} & \dots & \mathbf{R}_{1,(N-2)} & \mathbf{R}_{1,(N-1)} & \mathbf{R}_{2,N}^Z \\ \mathbf{R}_{0,2}^* & \mathbf{R}_{1,2}^* & \mathbf{R}_{2,2} & \dots & \mathbf{R}_{2,(N-2)} & \mathbf{R}_{2,(N-1)} & \mathbf{R}_{3,N}^Z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}_{1,N}^Z & \mathbf{R}_{2,N}^Z & \mathbf{R}_{3,N}^Z & \dots & \mathbf{R}_{(N-2),N}^Z & \mathbf{R}_{(N-1),N}^Z & \mathbf{R}_{N,N}^Z \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

gdzie:

$$\mathbf{R}_{i,j} = \text{diag} \left[ \dots \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{R}_{i,j} \dots \right] \quad (3.117)$$

$$\mathbf{R}_{i,j} = \text{diag} \left[ \dots \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{R}_{i,j} \dots \right] \quad (3.118)$$

- macierze indukcyjności rozprożeń

$$\mathbf{L}_w^\sigma \equiv \mathbf{L}_r^\sigma \equiv \mathbf{L}_p^\sigma = \text{diag} \left[ \mathbf{L}_w^{\sigma,0} \mathbf{L}_w^{\sigma,1} \mathbf{L}_w^{\sigma,2} \dots \mathbf{L}_w^{\sigma,N-2} \mathbf{L}_w^{\sigma,N-1} \mathbf{L}_w^{\sigma,N} \right] \quad (3.119)$$

dla:

$$\mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} = \text{diag} \left[ \dots \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \dots \right] \quad (3.120)$$



$$\mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} = \text{diag} \left[ \dots \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \mathbf{L}_w^{\sigma, \text{mod}(k_w, N)} \dots \right] \quad (3.121)$$

- macierze indukcyjności głównych i wzajemnych

$$\mathbf{L}_{rp} = \mathbf{L}_{pr} = \text{diag} \left[ \mathbf{0} \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \dots \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \mathbf{0} \right] \quad (3.122)$$

$$\mathbf{L}_w = \text{diag} \left[ \dots \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \dots \right] \quad (3.123)$$

$$\mathbf{L}_w = \text{diag} \left[ \dots \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w \dots \right] \quad (3.124)$$

- macierze indukcyjności własnych

$$\mathbf{L}_r \equiv \mathbf{L}_p = \text{diag} \left[ \mathbf{L}_w^{\sigma, 0} \mathbf{L}_w^{\sigma, 1} + \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w^{\sigma, 2} + \mathbf{L}_w \dots \mathbf{L}_w^{\sigma, N-2} + \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w^{\sigma, N-1} + \mathbf{L}_w \mathbf{L}_w^{\sigma, N} \right] \quad (3.125)$$

- macierz indukcyjności wzajemnych określona w funkcji kąta obrotu wirnika między uzwojeniami stojana i oczkami klatek wirnika

$$\mathbf{L}_{sw} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{sw}^1 \\ \mathbf{L}_{sw}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{L}_{1p}^{\text{mod}(1p, N)} & \dots & \mathbf{L}_{-5p}^{\text{mod}(-5p, N)} & \dots & \mathbf{L}_{7p}^{\text{mod}(7p, N)} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{L}_{-1p}^{\text{mod}(-1p, N)} & \dots & \mathbf{L}_{5p}^{\text{mod}(5p, N)} & \dots & \mathbf{L}_{-7p}^{\text{mod}(-7p, N)} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

Zasadniczym problemem, który występuje w analizie układu z nieliniowością strukturalną jest takie jego przekształcenie, aby można było wskazać związki łączące równania elektromagnetyczne z równaniem mechanicznym. W tym celu należy odwzorować zmienność prędkości kątowej w macierzy indukcyjności wzajemnych uwzględniając postać równania z [p.3.1]

$$\omega(t) = \Omega + \Delta\omega(t) = \Omega + \sum_{r,s} \Delta\Omega_{r,s}(t) \cdot e^{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega) \cdot t} \quad (3.127)$$

oraz

$$\varphi(t) = \varphi + \Delta\varphi(t) = (\Omega t + \varphi_0) + \Delta\varphi(t) \quad (3.128)$$

Ponieważ z definicji między powyższymi równaniami (3.127) i (3.128) zachodzi związek

$$\begin{aligned} \omega(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t), \text{ to } : \varphi(t) &= \int \omega(t) dt = \int \left[ \Omega + \Delta\omega(t) \right] dt = \Omega \int dt + \int \Delta\omega(t) dt = \\ &= (\Omega t + \varphi_0) + \int \sum_{r,s} \Delta\Omega_{r,s} \cdot e^{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega) \cdot t} dt = \varphi + \Delta\varphi(t) \end{aligned} \quad (1.129)$$

gdzie:

$$\Delta\varphi(t) = \int \sum_{r,s} \Delta\Omega_{r,s} \cdot e^{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega) \cdot t} dt, \quad (3.130)$$

całkując przez podstawienie  $z = j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega)$

$$\Delta\varphi(t) = \int \sum_{r,s} \Delta\Omega_{r,s}(t) \cdot \frac{e^z}{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega)} dz = \sum_{r,s} \frac{\Delta\Omega_{r,s}}{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega)} \cdot e^{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega) \cdot t}, \quad (3.131)$$

otrzymuje się szereg wykładniczy wyrażający okresowe wahania kąta obrotu dogodny w zastosowaniu metody bilansu harmoniczných. Jeżeli składową prędkości kątovej  $\Delta\Omega_{r,s}$  z (3.131) rozpatrywać jako małe odchylenie wartości średniej tej wielkości (przy założeniu, że współczynniki w (3.100) są okresowymi funkcjami kąta obrotu), wtedy macierz indukcyjności wzajemnych można rozwinąć w szereg potęgowy Taylora [47], [67] - biorąc w tym rozwinięciu pod uwagę wyłącznie wyrazy liniowe:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L}(\varphi)|_{\varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{L}(\varphi)|_{\varphi} \cdot \Delta\varphi(t) = \sum_n \mathbf{L}_{n-p} \cdot e^{j \cdot (n \cdot \varphi)} + \left[ j \cdot p \cdot \sum_n n \cdot \mathbf{L}_{n-p} \cdot e^{j \cdot (n \cdot \varphi)} \right] \cdot \Delta\varphi(t) = \\ &= \sum_n \mathbf{L}_{n-p} \cdot e^{j \cdot (n \cdot \varphi)} \Big|_{r=s=0} + \left( \left[ j \cdot \sum_n n \cdot \mathbf{L}_{n-p} \cdot e^{j \cdot (n \cdot \varphi)} \right] \cdot \sum_{r,s} \frac{\Delta\Omega_{r,s}}{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega)} \cdot e^{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega) \cdot t} \right) \Big|_{r,s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} = \\ &= \sum_n \mathbf{L}_{n-p} \cdot e^{j \cdot (n \cdot p\Omega) \cdot t} \Big|_{r=s=0} + \left( \left[ j \cdot \sum_n n \cdot \mathbf{L}_{n-p} \cdot e^{j \cdot (n \cdot p\Omega) \cdot t} \right] \cdot \sum_{r,s} \frac{\Delta\Omega_{r,s}}{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega)} \cdot e^{j \cdot (r\Omega_s + s \cdot p\Omega) \cdot t} \right) \Big|_{r,s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \end{aligned} \quad (3.132)$$

Przy czym, współczynniki wektora wahań prędkości kątovej związane bezpośrednio z równaniem mechanicznym

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) + B \cdot \omega(t) = J \frac{d}{dt} [\Omega + \Delta\omega(t)] + B \cdot [\Omega + \Delta\omega(t)] = T_{em}(t) - T_m(t), \quad (3.133)$$

ponieważ  $\Omega = \Omega_{0,0} = \text{const.}$ , to w wyniku różniczkowania (3.133) przyjmuje postać:

$$J \frac{d}{dt} \Delta\omega(t) + B \cdot [\Omega + \Delta\omega(t)] = T_{em}(t) - T_m(t) \quad (3.134)$$

Powyzsza zależność wyrażona za pomocą szeregu wykładniczego Fouriera, który po przyrównaniu do siebie wyrazów o tych samych potęgach przechodzi w dwuokresową formę liniową

(3.136) wyprowadzoną z dalszych przekształceń (3.135).

$$\begin{aligned}
 J \cdot \sum_{r,s} \Delta \Omega'_{r,s} \cdot e^{j \cdot (r \Omega_s + s \cdot p \Omega) \cdot t} + \left( B \cdot \Omega + B \cdot \sum_{r,s} \Delta \Omega_{r,s} \cdot e^{j \cdot (r \Omega_s + s \cdot p \Omega) \cdot t} \right) &= \sum_{r,s} \left( T_{em,(r,s)} - T_{m,(r,s)} \right) \cdot \\
 &\cdot e^{j \cdot (r \Omega_s + s \cdot p \Omega) \cdot t} \\
 J \cdot \sum_{r,s} j \cdot (r \Omega_s + s \cdot p \Omega) \cdot \Delta \Omega_{r,s} \cdot e^{j \cdot (r \Omega_s + s \cdot p \Omega) \cdot t} + B \cdot \left( \Omega + \sum_{r,s} \Delta \Omega_{r,s} \cdot e^{j \cdot (r \Omega_s + s \cdot p \Omega) \cdot t} \right) &= \\
 = \sum_{r,s} \left( T_{em,(r,s)} - T_{m,(r,s)} \right) \cdot e^{j \cdot (r \Omega_s + s \cdot p \Omega) \cdot t} &\quad (3.135)
 \end{aligned}$$

- dwukresowa forma liniowa rozwinięcia w szereg Fouriera równania mechanicznego:

$$\left( \begin{array}{c} \vdots \\ (1\Omega_s + 0p\Omega) \cdot \Delta\Omega_{1,0} \\ \vdots \\ (0\Omega_s + 1p\Omega) \cdot \Delta\Omega_{0,1} \\ 0 \\ (0\Omega_s - 1p\Omega) \cdot \Delta\Omega_{0,-1} \\ \vdots \\ (-1\Omega_s + 0p\Omega) \cdot \Delta\Omega_{-1,0} \\ \vdots \end{array} \right) + B \cdot \text{diag} \left( \begin{array}{c} \vdots \\ \Delta\Omega_{1,0} \\ \vdots \\ \Delta\Omega_{0,1} \\ \Omega_{0,0} \\ \Delta\Omega_{0,-1} \\ \vdots \\ \Delta\Omega_{-1,0} \\ \vdots \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \vdots \\ T_{em,(1,0)} \\ \vdots \\ T_{em,(0,1)} \\ T_{em,(0,0)} \\ T_{em,(0,-1)} \\ \vdots \\ T_{em,(-1,0)} \\ \vdots \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \vdots \\ T_{m,(1,0)} \\ \vdots \\ T_{m,(0,1)} \\ T_{m,(0,0)} \\ T_{m,(0,-1)} \\ \vdots \\ T_{m,(-1,0)} \\ \vdots \end{array} \right) \quad (3.136)$$

Według (3.136) równanie wierszowe przy wybranej potędze:

$$\left[ J \cdot j \cdot (r \Omega_s + s \cdot p \Omega) \cdot \Delta \Omega_{r,s} + B \cdot \Delta \Omega_{r,s} \right] = j \cdot \left[ J \cdot (r \Omega_s + s \cdot p \Omega) + B \right] \cdot \Delta \Omega_{r,s} = T_{em,(r,s)} - T_{m,(r,s)}, \quad (3.137)$$

z którego wynikają relacje łączące wektor wahań prędkości kątowej z momentem elektromagnetycznym i mechanicznym

$$\Delta \Omega_{r,s} = \frac{T_{em,(r,s)} - T_{m,(r,s)}}{\left[ j \cdot J \cdot (r \Omega_s + s \cdot p \Omega) + B \right]} \quad (3.138)$$

o właściwości  $\lim_{J \rightarrow \infty} \Delta \Omega_{r,s} = 0$ .

Z wyprowadzenia (3.138) wynika dowód poprawności wzoru (3.132), gdyż wszystkie współczynniki indukcyjności zależne od wahań prędkości kątowej ulegają zerowaniu przy pominięciu równania ruchu. Wynikiem przedstawionych działań jest rozdzielenie współczynników indukcyjności na część stałą i zależną od wektora wahań prędkości kątowej. Przegrupowanie równań (3.126) względem tych samych wykładników, pozwala przedstawić dowolną podmacierz indukcyjności wzajemnej w postaci

$$\mathbf{L}_{sr}^{\text{mod}(n-p, N)} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,1} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,3} & \mathbf{L}_{n,4} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-1} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,1} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,3} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,-1} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,1} & \mathbf{L}_{n,2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-3} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,-1} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,1} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-3} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,-1} & \mathbf{L}_{n,0} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

W ogólnym przypadku (3.139) będzie podwójnie nieskończoną macierzą blokową utworzoną z dwóch poniższych podmacierzy:

-współczynników indukcyjności wzajemnych niezależnych od wektora wahań kąta obrotu

$$\mathbf{L}_{n-p,0} = \text{diag} \left[ \dots \quad \underline{\mathbf{L}}_{n-p} \quad \underline{\mathbf{L}}_{n-p} \quad \underline{\mathbf{L}}_{n-p} \quad \underline{\mathbf{L}}_{n-p} \quad \underline{\mathbf{L}}_{n-p} \quad \dots \right] \quad (3.140)$$

-współczynników indukcyjności wzajemnych rzędu  $n$  w funkcji wektora wahań kąta obrotu

$$\mathbf{L}_{n-p, m \neq 0} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 0-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 1-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 2-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 3-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 4-p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, -1-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 0-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 1-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 2-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 3-p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, -2-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, -1-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 0-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 1-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 2-p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, -3-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, -2-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, -1-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 0-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 1-p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, -4-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, -3-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, -2-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, -1-p)} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p, (m, 0-p)} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

Zapis w indeksie dolnym  $n \cdot p, (m, k)$  oznacza wykładnik funkcji potęgowej  $e^{j \cdot [m\Omega_s + (n+k)p\Omega]t}$ . Znajomość macierzy indukcyjności wzajemnych oraz struktury wypadkowego wektora prądów wirnika daje w rezultacie równanie napięciowe części wspólnej dla dowolnej składowej symetrycznej stojana:

$$\mathbf{I}_s^{1,2} \cdot j \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}_{sr}^{\text{mod}(n_{(1,2)} \cdot p, N)} \cdot \mathbf{I}_w^{\text{mod}(n_{(1,2)} \cdot p, N)} = j \cdot \boldsymbol{\Omega}^{1,2} \cdot \mathbf{L}_{sr}^{1,2} \cdot \mathbf{I}_w^{1,2} =$$

$$= j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_2 \\ \boldsymbol{\Omega}_1 \\ \boldsymbol{\Omega}_0 \\ \boldsymbol{\Omega}_{-1} \\ \boldsymbol{\Omega}_{-2} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,1} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,3} & \mathbf{L}_{n,4} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-1} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,1} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,3} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,-1} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,1} & \mathbf{L}_{n,2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-3} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,-1} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,1} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-3} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,-1} & \mathbf{L}_{n,0} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,2} \\ \mathbf{I}_{w,1} \\ \mathbf{I}_{w,0} \\ \mathbf{I}_{w,-1} \\ \mathbf{I}_{w,-2} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$\forall (n_1 = -n_2) \in n \tag{3.142}$$

Przedstawiona forma liniowa zawiera poza główną przekątną elementy nie biorące udziału w sprzężaniu obwodów stojana z wirnikiem. Wylimitowanie tych składników redukuje macierz (3.139) do macierzy złożonej z podmacierzy o współczynnikach parzystych

$$\mathbf{L}_{sr}^{\text{mod}(n \cdot p, N)} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \mathbf{L}_{n,8} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-8} & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.143}$$

Powyższą macierz ograniczono względem niezerowych współczynników korzystając z zasady spełnienia równań bilansu harmonicznych przy znanym wymuszeniu pierwotnym jakim jest rozwiązanie otrzymane w warunkach pracy silnika ze stałą prędkością kątową wirnika. Ozna-

cza to, że sygnały diagnostyczne generowane w wyniku mnożenia  $\mathbf{L}_{n,0} \cdot \mathbf{I}_{w,0}$ , muszą dać zbieżne jakościowo rozwiązanie w przypadku pozostałych wyrażen z równania centralnego, co z jednoznaczności reprezentacji macierzowej szeregu Fouriera zapewnia niezmiennosc struktury podmacierzy, poza tym równaniem. W konsekwencji odrzucenia rozwiązań zerowych równania napięciowe składowych symetrycznych prądów stojana (3.142) przechodzą w (3.144) oraz (3.145) odpowiednio dla składowej pierwszej i drugiej

$$\mathbf{I}_s^1 : \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}_{n-p}^{\text{mod}(n \cdot p, N)} \cdot \mathbf{I}_w^{\text{mod}(n \cdot p, N)} = \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\Omega}^1 \cdot \mathbf{L}_{sr}^1 \cdot \mathbf{I}_w^1 =$$

$$= \mathbf{j} \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{\Omega}_5^1 \\ \boldsymbol{\Omega}_3^1 \\ \boldsymbol{\Omega}_1^1 \\ \boldsymbol{\Omega}_{-1}^1 \\ \boldsymbol{\Omega}_{-3}^1 \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \mathbf{L}_{n,8} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-8} & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,5}^1 \\ \mathbf{I}_{w,3}^1 \\ \mathbf{I}_{w,1}^1 \\ \mathbf{I}_{w,-1}^1 \\ \mathbf{I}_{w,-3}^1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

$$\mathbf{I}_s^2 : \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}_{-n-p}^{\text{mod}(-n \cdot p, N)} \cdot \mathbf{I}_w^{\text{mod}(-n \cdot p, N)} = \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\Omega}^2 \cdot \mathbf{L}_{sr}^2 \cdot \mathbf{I}_w^2 =$$

$$= \mathbf{j} \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{\Omega}_5^2 \\ \boldsymbol{\Omega}_3^2 \\ \boldsymbol{\Omega}_1^2 \\ \boldsymbol{\Omega}_{-1}^2 \\ \boldsymbol{\Omega}_{-3}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \mathbf{L}_{n,8} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-8} & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,5}^2 \\ \mathbf{I}_{w,3}^2 \\ \mathbf{I}_{w,1}^2 \\ \mathbf{I}_{w,-1}^2 \\ \mathbf{I}_{w,-3}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

Podobnie jak wyżej zostaną utworzone równania momentu elektromagnetycznego z ogólnych zależności podanych w [p.2.4.3], gdzie należy uwzględnić wektory prądów stojana i wirnika oraz zredukowaną macierz indukcyjności wzajemnych. Z równania (2.125) otrzymuje się po-

dwójnie określone formy kwadratowe momentów cząstkowych typu I zawierające wyłącznie niezerowe rozwiązania:

- moment elektromagnetyczny typu I, składnik pierwszy:

$$\begin{aligned}
 T_{em}^{1,1} &= j \cdot p \cdot \sum_n n \cdot \sum_k \sum_z \left( \mathbf{I}_{s,m}^1 \right)^T \cdot \mathbf{L}_{sr}^{\text{mod}(n \cdot p, N)} \cdot \mathbf{I}_w^{1, \text{mod}(n \cdot p, N)} = \\
 &= j \cdot p \cdot \sum_n n \cdot \sum_k \sum_z \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{s,5}^1 \\ \mathbf{I}_{s,3}^1 \\ \mathbf{I}_{s,1}^1 \\ \mathbf{I}_{s,-1}^1 \\ \mathbf{I}_{s,-3}^1 \\ \vdots \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \mathbf{L}_{n,8} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-8} & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,5+k}^1 \\ \mathbf{I}_{w,3+k}^1 \\ \mathbf{I}_{w,1+k}^1 \\ \mathbf{I}_{w,-1+k}^1 \\ \mathbf{I}_{w,-3+k}^1 \\ \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.146}$$

- moment elektromagnetyczny typu I, składnik drugi:

$$\begin{aligned}
 T_{em}^{1,2} &= -j \cdot p \cdot \sum_n n \cdot \sum_k \sum_z \left( \mathbf{I}_{s,m}^2 \right)^T \cdot \mathbf{L}_{sr}^{\text{mod}(-n \cdot p, N)} \cdot \mathbf{I}_w^{2, \text{mod}(-n \cdot p, N)} = \\
 &= -j \cdot p \cdot \sum_n n \cdot \sum_k \sum_z \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{s,5}^2 \\ \mathbf{I}_{s,3}^2 \\ \mathbf{I}_{s,1}^2 \\ \mathbf{I}_{s,-1}^2 \\ \mathbf{I}_{s,-3}^2 \\ \vdots \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \mathbf{L}_{n,8} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-8} & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,5+k}^2 \\ \mathbf{I}_{w,3+k}^2 \\ \mathbf{I}_{w,1+k}^2 \\ \mathbf{I}_{w,-1+k}^2 \\ \mathbf{I}_{w,-3+k}^2 \\ \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.147}$$

Momentom cząstkowym typu II odpowiada formalnie równanie (2.126), a to daje po podstawieniu przewidywanych prądów i macierzy indukcyjności wzajemnych następujące wyrażenia:

- moment elektromagnetyczny typu II, składnik pierwszy:

$$\begin{aligned}
 T_{em}^{II,1} &= -j \cdot p \cdot \sum_n n \cdot \sum_k \cdot \sum_z \mathbf{I}_{s,m}^1 \cdot \mathbf{L}_{sr}^{\text{mod}(-n \cdot p, N)} \cdot \mathbf{I}_w^{2, \text{mod}(-n \cdot p, N)} = \\
 &= -j \cdot p \cdot \sum_n n \cdot \sum_k \cdot \sum_z \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{s,-3}^1 \\ \mathbf{I}_{s,-1}^1 \\ \mathbf{I}_{s,1}^1 \\ \mathbf{I}_{s,3}^1 \\ \mathbf{I}_{s,5}^1 \\ \vdots \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \mathbf{L}_{n,8} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-8} & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,5+k}^2 \\ \mathbf{I}_{w,3+k}^2 \\ \mathbf{I}_{w,1+k}^2 \\ \mathbf{I}_{w,-1+k}^2 \\ \mathbf{I}_{w,-3+k}^2 \\ \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.148}$$

- moment elektromagnetyczny typu II, składnik drugi:

$$\begin{aligned}
 T_{em}^{II,2} &= j \cdot p \cdot \sum_n n \cdot \sum_k \cdot \sum_z \mathbf{I}_{s,m}^2 \cdot \mathbf{L}_{sr}^{\text{mod}(n \cdot p, N)} \cdot \mathbf{I}_w^{1, \text{mod}(n \cdot p, N)} = \\
 &= j \cdot p \cdot \sum_n n \cdot \sum_k \cdot \sum_z \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{s,-3}^2 \\ \mathbf{I}_{s,-1}^2 \\ \mathbf{I}_{s,1}^2 \\ \mathbf{I}_{s,3}^2 \\ \mathbf{I}_{s,5}^2 \\ \vdots \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \mathbf{L}_{n,8} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \mathbf{L}_{n,6} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \mathbf{L}_{n,4} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \mathbf{L}_{n,2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{L}_{n,-8} & \mathbf{L}_{n,-6} & \mathbf{L}_{n,-4} & \mathbf{L}_{n,-2} & \mathbf{L}_{n,0} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{I}_{w,5+k}^1 \\ \mathbf{I}_{w,3+k}^1 \\ \mathbf{I}_{w,1+k}^1 \\ \mathbf{I}_{w,-1+k}^1 \\ \mathbf{I}_{w,-3+k}^1 \\ \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.149}$$



### 3.5.1 Widmo prądu stojana w warunkach niesymetrii elektrycznej wirnika

Z postawionych warunków spełnienia równań bilansu harmonicznym dla rozwiązania równania centralnego przy stałej prędkości można wskazać postać podmacierzy indukcyjności wzajemnych  $\mathbf{L}_{n,p,m \neq 0}$  zawierającą niezerowe elementy. Skład jakościowy tej podmacierzy odpowiada założeniu, że pierwotną przyczyną zmienności wektora wahań kąta obrotu są prądy składowych symetrycznych pierwszej i drugiej z zbioru (2.143) – [p.2.5.2]. Z względu na wzajemne związki łączące składową pierwszą oraz drugą poprzez pełne macierze rezystancji wirnika, struktura podmacierzy (3.139) w (3.144) i (3.145) ulegnie zredukowaniu

$$\mathbf{L}_{n,p,m \neq 0} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \underline{L}_{n,p,(m,-m \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-6) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-12) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-18) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-24) \cdot p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+6) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-m \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-6) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-12) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-18) \cdot p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+12) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+6) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-m \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-6) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-12) \cdot p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+18) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+12) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+6) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-m \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-6) \cdot p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+24) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+18) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+12) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+6) \cdot p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-m \cdot p)} & \cdots \\ \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

Z tych samych przyczyn wektory prądów wirnika przyporządkowane danemu równaniu napięciowemu będą zawierały niezerowe wartości określone według poniższych zbiorów pulsacji

$$\mathbf{I}_{w,m}^1 = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{I}_{w,(-(n-12)-(m-1))p} & \mathbf{I}_{w,(-(n-6)-(m-1))p} & \mathbf{I}_{w,(-(n-1)-(m-1))p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{I}_{w,(-(n+6)-(m-1))p} & \mathbf{I}_{w,(-(n+12)-(m-1))p} & \cdots \end{bmatrix}^T \quad (3.151)$$

$$\mathbf{I}_{w,m}^2 = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{I}_{w,(-(n-10)-(m-1))p} & \mathbf{I}_{w,(-(n-4)-(m-1))p} & \mathbf{I}_{w,(-(n+2)-(m-1))p} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{I}_{w,(-(n+8)-(m-1))p} & \mathbf{I}_{w,(-(n+14)-(m-1))p} & \cdots \end{bmatrix}^T \quad (3.152)$$

Zapis prądów wirnika należy uważać za umowny sposób rozdzielenia wektora prądów w celu uproszczenia analizy generowanych sygnałów diagnostycznych. Podobny podział zastosowano dla macierzy operatorów różniczkowania w dziedzinie częstotliwości (3.153) - (3.154). Z ilo-

czynu macierzy i prądów wirnika wynikają macierze operatorów różniczkowania wyznaczające zbiory pulsacji prądów składowych symetrycznych stojana

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_m^1 = \text{diag}[\dots & m\Omega_s + [(-m+1)+12] \cdot p\Omega \quad m\Omega_s + [(-m+1)+6] \cdot p\Omega \quad \dots \\ \dots m\Omega_s + (-m+1) \cdot p\Omega & \quad m\Omega_s + [(-m+1)-6] \cdot p\Omega \quad m\Omega_s + [(-m+1)-12] \cdot p\Omega \quad \dots] \end{aligned} \quad (3.153)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_m^2 = \text{diag}[\dots & m\Omega_s + [(-m-1)+12] \cdot p\Omega \quad m\Omega_s + [(-m-1)+6] \cdot p\Omega \quad \dots \\ \dots m\Omega_s + (-m-1) \cdot p\Omega & \quad m\Omega_s + [(-m-1)-6] \cdot p\Omega \quad m\Omega_s + [(-m-1)-12] \cdot p\Omega \quad \dots] \end{aligned} \quad (3.154)$$

Z cząstkowych macierzy operatora różniczkowania (3.154) i (3.155), przewidywana postać rozwiązania przyjmie poniższą postać

$$\mathbf{I}_{s,m}^1 = \left[ \dots \quad \underline{\mathbf{I}}_{s, (m, [(-m+1)+12]p)}^1 \quad \underline{\mathbf{I}}_{s, (m, [(-m+1)+6]p)}^1 \quad \underline{\mathbf{I}}_{s, (m, (-m+1)p)}^1 \quad \underline{\mathbf{I}}_{s, (m, [(-m+1)-6]p)}^1 \quad \underline{\mathbf{I}}_{s, (m, [(-m+1)-12]p)}^1 \quad \dots \right]^T \quad (3.155)$$

$$\mathbf{I}_{s,m}^2 = \left[ \dots \quad \underline{\mathbf{I}}_{s, (m, [(-m-1)+12]p)}^2 \quad \underline{\mathbf{I}}_{s, (m, [(-m-1)+6]p)}^2 \quad \underline{\mathbf{I}}_{s, (m, (-m-1)p)}^2 \quad \underline{\mathbf{I}}_{s, (m, [(-m-1)-6]p)}^2 \quad \underline{\mathbf{I}}_{s, (m, [(-m-1)-12]p)}^2 \quad \dots \right]^T \quad (3.156)$$

Otrzymane rozwiązania analityczne prowadzą do wniosku, że w zbiorze generowanych sygnałów diagnostycznych (według rzędu harmonicznej czasowej) wystąpią prądy składowych symetrycznych z cechami ujętymi w poniższych tabelach nr 3.4 i 3.5.

**Tab. 3.4** Właściwości sygnałów diagnostycznych w zbiorze składowych symetrycznych prądu stojana z uwzględnieniem oddziaływań elektromechanicznych - niesymetria obwodów wirnika.

Lp.	Wektor składowej symetrycznej	$\mathbf{I}_s^1$	$\mathbf{I}_s^2$	$\mathbf{I}$
1	Zbiór rozwiązań $\mathbf{I}_s^1$ [p.2.5.2]	$m=1$	$m=-1$	$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{I} = \mathbf{I}_s^1 \wedge \mathbf{I}_{s,-1}^2 = \mathbf{0}$
		*1, *3	*2	
2	Zbiór rozwiązań $\mathbf{I}_s^2$ [p.2.5.2]	$m=-1$	$m=1$	$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{I} = \mathbf{I}_s^2 \wedge \mathbf{I}_{s,-1}^1 = \mathbf{0}$
		*2	*1, *3	
3	Zbiór rozwiązań z wyłączeniem równania centralnego	$m \setminus \{-1, 1\}$	$m \setminus \{-1, 1\}$	$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{I} = \mathbf{0}$
		*2	*2	

**Tab. 3.5** Oznaczenie cech jakościowych sygnałów diagnostycznych w zbiorze składowych symetrycznych prądu stojana i momentu elektromagnetycznego.

Symbol	Znaczenie
*1	Zbiór rozwiązań dla stałej prędkości kątowej
*2	Amplituda jest funkcją momentu bezwładności
*3	Amplituda nie zależy od momentu bezwładności

Zbiór sygnałów **1** generowanych przy stałej prędkości w składowej symetrycznej pierwszej odpowiada za wytwarzanie prądów o takich samych pulsacjach bezwzględnych, ale przeciwnych znakach w składowej drugiej. Identyczna zasada obowiązuje w przypadku zbioru **2** tj. sygnały diagnostyczne z wektora prądów składowej drugiej mają swój jakościowo zbieżny odpowiednik w składowej drugiej. Należy przy tym zauważyć, że rozwiązania dla  $m=1$  są niezależne od momentu bezwładności a ich wartość wyznacza jedynie poziom niesymetrii wirnika. Natomiast odpowiedź układu mechanicznego  $m=-1$  jest już funkcją momentu bezwładności. Istnienie oddziaływań pierwotnych wywołuje oddziaływania wtórne, które generują **3** zbiór sygnałów tłumiony wraz z wzrostem wartości momentu bezwładności. Stąd suma geometryczna prądów składowych symetrycznych ze zbiorów **1** oraz **2** pozwala zaobserwować zmniejszenie tych sygnałów przy zwiększeniu wahań prędkości kątowej – jeżeli teoretycznie  $J \rightarrow 0$ . Nie dotyczy to podstawowej składowej sieciowej, gdzie suma geometryczna prądów składowych symetrycznych z zbioru **1** zwraca zawsze wynik nie będący funkcją momentu bezwładności po wykonaniu transformacji powrotnej do współrzędnych naturalnych, ponieważ, jak wynika z struktury hipermacierzy (3.139), wszystkie składniki położone poza macierzą centralną (rozwiązania dla  $\Omega = \text{const}$ ) wzajemnie się znoszą. Równania napięciowe składowych symetrycznych przegrupowane względem tych samych wykładników – relacje między prądami i wahaniami prędkości kątowej zostały wyrażone zależnościami (3.157) oraz (3.158). Poniższe wzory dają ogólny wgląd w sprzężenia elektromagnetyczne spowodowane oddziaływaniami elektromechanicznymi, choć uniemożliwiają wykonanie praktycznych obliczeń.

$$\underline{U}_{s,(m, [(-m+1)+6k]p)}^1 = \mathbf{R}_s^0 \cdot \underline{I}_{s,(m, [(-m+1)+6k]p)}^1 + \mathbf{j} \cdot (m\Omega_s + [(-m+1) + 6k] \cdot p\Omega) \cdot \left[ \mathbf{L}_s^1 \cdot \underline{I}_{s,(m, [(-m+1)+6k]p)}^1 + \right. \\ \left. + \left( \sum_z \underline{L}_{n-p}^{\text{mod}(n-p, N)} \cdot \underline{I}_{w,(m,l-p)}^{\text{mod}(n-p, N)} + \frac{n \cdot \Delta\Omega_{[2r, -(2s+6k)]}}{2 \cdot r\Omega_s - (2 \cdot s + 6 \cdot k) \cdot p\Omega} \cdot \sum_w \underline{L}_{n-p, (2r, -(2s+6k)p)}^{\text{mod}(n-p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (\mu, q-p)}^{\text{mod}(n-p, N)} \right) \right], \\ \forall z = w = (-m+1) + 6k, \mu = m - 2r, l = -n + 6k - (m-1), n = \dots -5, 1, 7, \dots, \quad (3.157)$$

$$\underline{U}_{s,(m, [(-m-1)+6k]p)}^2 = \mathbf{R}_s^0 \cdot \underline{I}_{s,(m, [(-m-1)+6k]p)}^2 + \mathbf{j} \cdot (m\Omega_s + [(-m-1) + 6k] \cdot p\Omega) \cdot \left[ \underline{L}_s^2 \cdot \underline{I}_{s,(m, [(-m-1)+6k]p)}^2 + \right. \\ \left. + \left( \sum_z \underline{L}_{n-p}^{\text{mod}(n-p, N)} \cdot \underline{I}_{w,(m, l-p)}^{\text{mod}(n-p, N)} + \frac{n \cdot \Delta\Omega_{[2r, -(2s+6k)]}}{2 \cdot r\Omega_s - (2 \cdot s + 6 \cdot k) \cdot p\Omega} \cdot \sum_w \underline{L}_{n-p, (2r, -(2s+6k) \cdot p)}^{\text{mod}(n-p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (\mu, q-p)}^{\text{mod}(n-p, N)} \right) \right], \\ \forall z = w = (-m-1) + 6k, \mu = m - 2r, l = -n + 6k - 2 - (m-1), n = \dots -7, -1, 5, \dots, \quad (3.158)$$

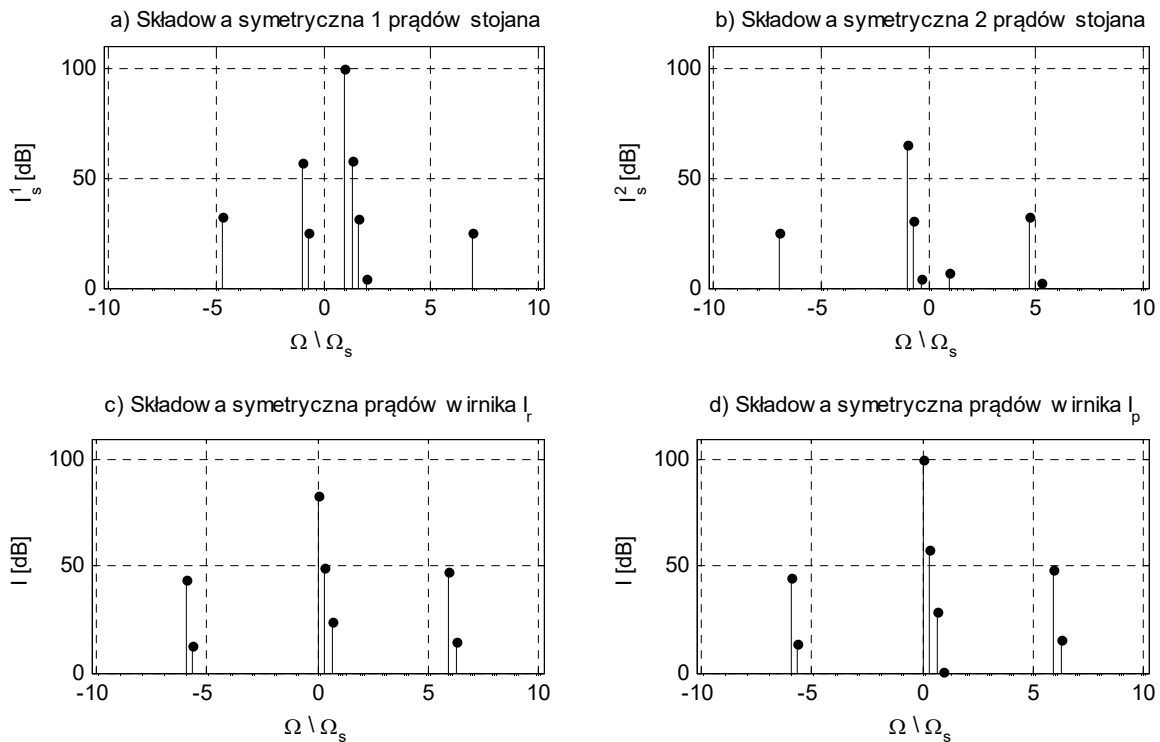
– wskaźniki sumowania w równaniach (3.157) i (3.158) muszą spełniać zależności:

$$z = n + l, w = n - (2s + 6k) + q, q = -n + 6k - (\alpha - 1),$$

dla:  $k = \dots -1, 0, 1, \dots, m \wedge \alpha = \dots -3, -1, 1, 3, \dots, r \wedge s = \dots -2, -1, 1, 2, \dots$

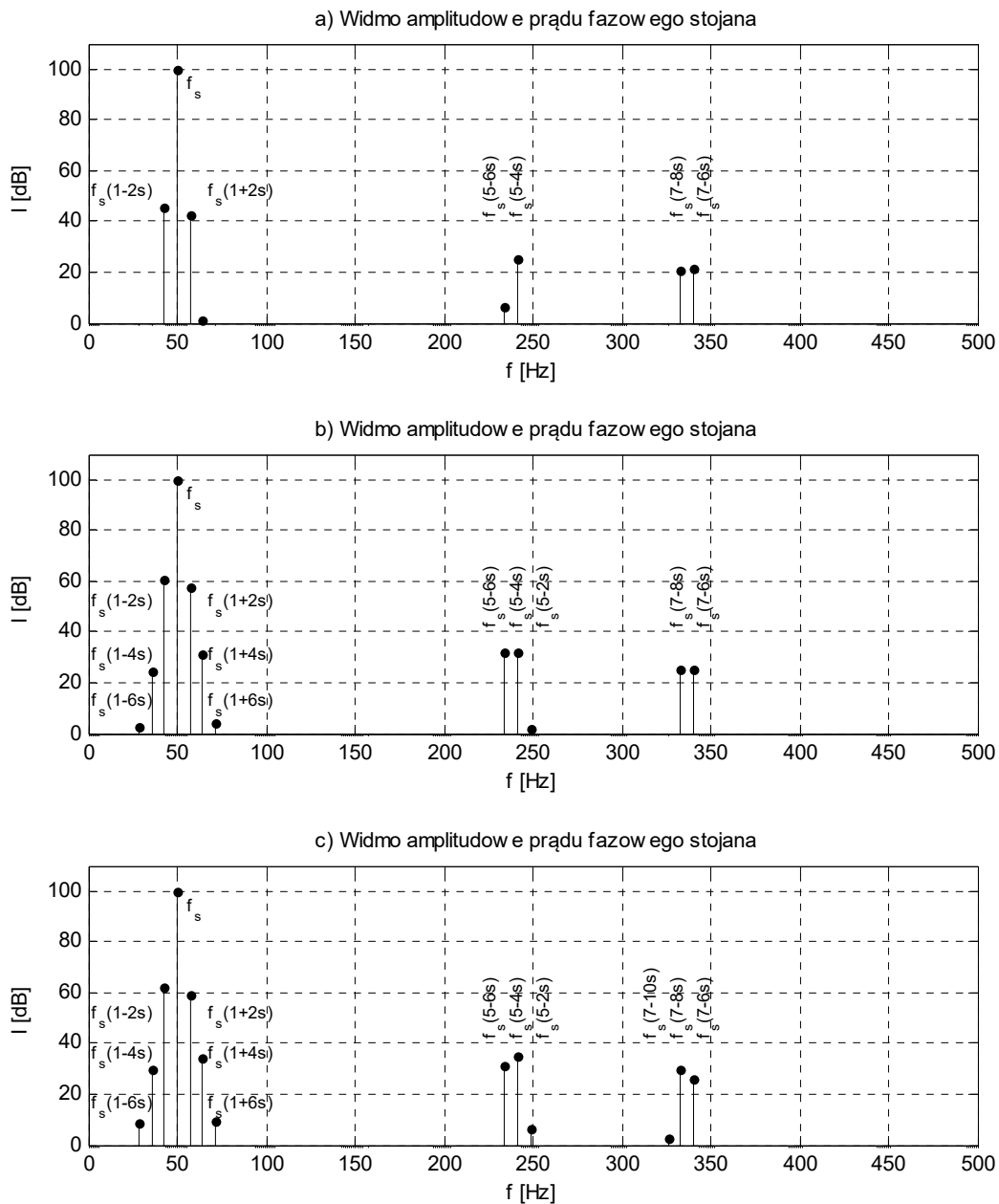
Przyjęcie  $m=1$  sprowadzi równania (3.158)-(3.159) do szeregów (2.144)-(2.145) stałej prędkości kątowej. Przykładowe widma amplitudowe składowych symetrycznych prądów stojana oraz wirnika w funkcji pulsacji – przerwa w pręcie klatki pracy, ilustrują rysunki (3.16)-(3.17). Wyniki ilościowe oraz jakościowe przedstawiają widma częstotliwościowe prądów fazowych, które zostały wykonane dla analogicznych uszkodzeń obwodów klatek wirnika jak w rozdziale drugim [p.2.5.2], ale z uwzględnieniem równania mechanicznego.

- widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów  $J=10 \cdot J_w, \Omega=155,5 \text{ rad/s}$ :



**Rys. 3.16** Względne widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w pręcie klatki pracy, a-b) składowa pierwsza i druga stojana, c-d) składowa „p-ta” prądu klatki rozruchowej oraz klatki pracy.

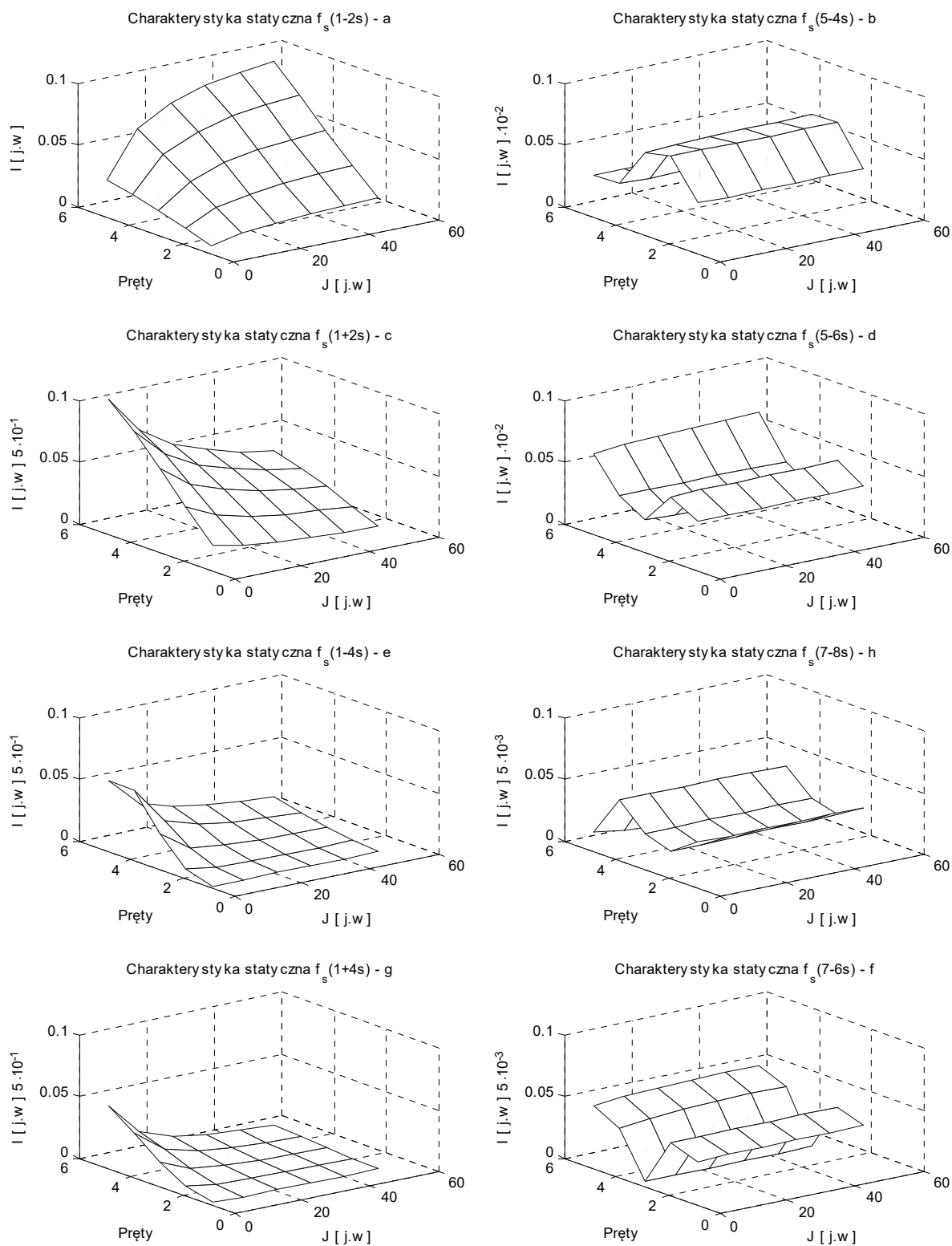
- widmo amplitudowe prądu fazowego stojana  $J=10 \cdot J_w$ ,  $s=0,01$ :



**Rys. 3.17** Względne widmo amplitudowe prądu stojana w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, b) przerwa w pręcie klatki pracy, c) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i klatki pracy.

Pozostałe obliczenia zobrazowano za pomocą charakterystyk statycznych prądów diagnostycznych w funkcji liczby uszkodzonych prętów i momentu bezwładności dla rzadko występującego przypadku pracy silnika z wyłącznie niesymetryczną klatką pracy. Przy wyborze sygnałów (rysunek nr 3.18) kierowano się głównie zasięgiem ich oddziaływania na widmo amplitudowe, który wynika z symetrycznego zasilania obwodu stojana oraz znamionowego punktu pracy. Z przyczyn takich jak rozkład uszkodzeń, wartość współczynnika modelującego

przerwę w pręcie lub segmencie zawierającym, kształt płaszczyzn wzorcowych ulegnie wyraźnej zmianie wraz z modyfikacją założeń obejmujących inne warunki pracy silnika.



**Rys. 3.18** Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądów fazowych stojana – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w pręcie klatki pracy,  $s=0,01$ .

### 3.5.2 Widmo momentu elektromagnetycznego w warunkach niesymetrii elektrycznej wirnika

Aby określić równania momentów cząstkowych generowanych w rozważanym stanie pracy silnika wystarczy uwzględnić postać wektorów prądów stojana oraz wirnika z [p.3.5.1], nie zmieniając struktury podmacierzy indukcyjności wzajemnych

- wektory składowych symetrycznych stojana

$$\mathbf{I}_{s,m}^1 = \left[ \dots \quad \mathbf{I}_{s,(m,[-m+1]+12]p}^1 \quad \mathbf{I}_{s,(m,[-m+1]+6]p}^1 \quad \mathbf{I}_{s,(m,-m+1)p}^1 \quad \mathbf{I}_{s,(m,[-m+1]-6]p}^1 \quad \mathbf{I}_{s,(m,[-m+1]-12]p}^1 \quad \dots \right]^T \quad (3.159)$$

$$\mathbf{I}_{s,m}^2 = \left[ \dots \quad \mathbf{I}_{s,(m,[-m-1]+12]p}^2 \quad \mathbf{I}_{s,(m,[-m-1]+6]p}^2 \quad \mathbf{I}_{s,(m,-m-1)p}^2 \quad \mathbf{I}_{s,(m,[-m-1]-6]p}^2 \quad \mathbf{I}_{s,(m,[-m-1]-12]p}^2 \quad \dots \right]^T \quad (3.160)$$

- wektory prądów wirnika wraz z wskaźnikami sumowania form kwadratowych ujęte w opisie równań momentów cząstkowych

$$\mathbf{I}_{w,m}^1 = \left[ \dots \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-(n-12)-(m-1+k)+z) \cdot p]} \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-(n-6)-(m-1+k)+z) \cdot p]} \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-(n-(m-1+k)+z) \cdot p]} \quad \dots \right. \\ \left. \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-(n+6)-(m-1+k)+z) \cdot p]} \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-(n+12)-(m-1+k)+z) \cdot p]} \quad \dots \right]^T \quad (3.161)$$

$$\mathbf{I}_{w,m}^2 = \left[ \dots \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-(n-10)-(m-1+k)+z) \cdot p]} \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-(n-4)-(m-1+k)+z) \cdot p]} \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-(n+2)-(m-1+k)+z) \cdot p]} \quad \dots \right. \\ \left. \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-(n+8)-(m-1+k)+z) \cdot p]} \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-(n+14)-(m-1+k)+z) \cdot p]} \quad \dots \right]^T \quad (3.162)$$

Wychodząc z podstawienia zdefiniowanych wyżej prądów do (2.133) i (2.134), momenty elektromagnetyczne wybranego typu i danych pulsacjach przyjmują ogólną postać

$$\mathbf{T}_{em}^I = \mathbf{T}_{em,[k,(z-k) \cdot p]} \cdot e^{j \cdot [k \cdot \Omega_s + (z-k) \cdot p \Omega] \cdot t} \quad (3.163)$$

$$\mathbf{T}_{em}^{II} = \mathbf{T}_{em,[2+k,(z-k+2) \cdot p]} \cdot e^{j \cdot [(2+k) \cdot \Omega_s + (z-k+2) \cdot p \Omega] \cdot t} \quad (3.164)$$

Moment wypadkowy będący sumą geometryczną składników pierwszego oraz drugiego typu otrzymuje się grupując równania względem identycznych wykładników składowych czasowych i przestrzennych zawartych w dwóch niezależnych zbiorach:  $k = \dots -2, 0, 2, \dots$  oraz  $z = \dots -$

6, 0, 6...Równania momentów cząstkowych można w dalszej kolejności przedstawić jako złożenie momentów niezależnych od prędkości kątowej (wymuszenie pierwotne) i momentów generowanych w wyniku uwzględnienia równania mechanicznego. Szczegółowe wyprowadzenie (3.163) i (3.164) zawarto na końcu tego podrozdziału za pomocą równań (3.165)-(3.171).

**Tab. 3.6** Właściwości momentów cząstkowych wytwarzanych w warunkach niesymetrii parametrycznej wirnika – symetryczny obwód stojana.

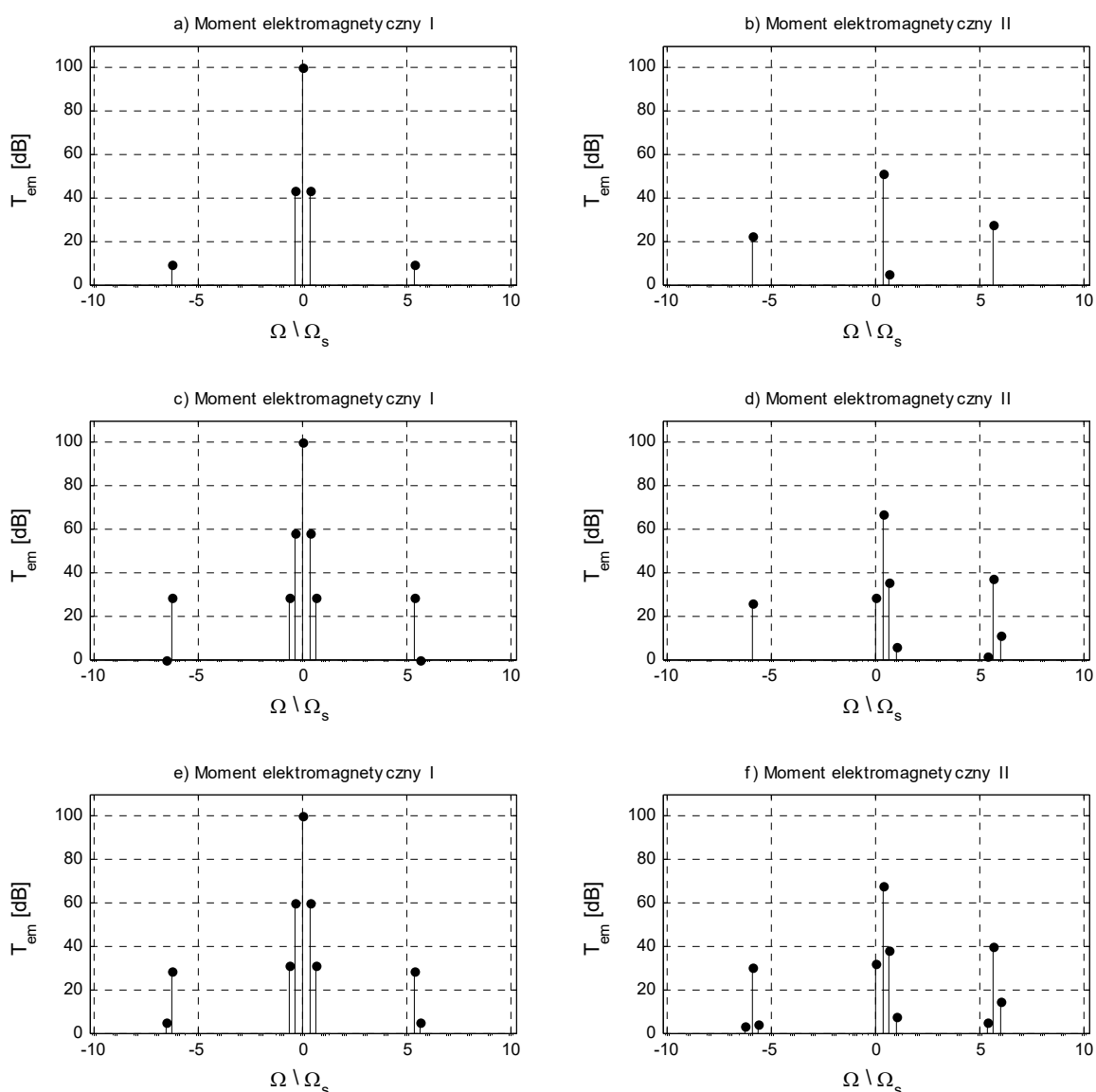
Lp.	Moment	$T_{em}^I$	$T_{em}^{II}$	$T_{em}$
<b>1</b>	Asynchroniczny	$k=0, z=0$	$k=-2, z=0$	*3
		*1, *2	*2, $\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} T_{em, (-2,0)} = 0$	
<b>2</b>	Przebiegienny z punktem synchronizmu $\Omega=0$	$k=0, \forall z \setminus \{0\}$	$k=0, \forall z \setminus \{0\}$	*2
		*1, *3	*2	
<b>3.a</b>	Przebiegienny z punktem synchronizmu $\Omega \neq 0$	$k=2, z=0$	$k=0, z=0$	*2
		*2	*1, *3	
<b>3.b</b>	Przebiegienny z punktem synchronizmu $\Omega \neq 0$	$\forall k \setminus \{0\}, \forall z$	$\forall k \setminus \{-2\}, \forall z \setminus \{0\}$	*2
		*2	*2	

Przedstawione w powyższej tabeli właściwości jakościowe momentów cząstkowych są bezpośrednio związane z cechami prądów składowych symetrycznych. Tak więc za wytwarzanie momentów przebiegających z punktem synchronizmu przy postoju wirnika odpowiada zbiór sygnałów prądowych **1** (tab. nr 3.4), a momentom przebiegającym **3.a** zbiór rozwiązań **2** (tab. nr 3.4). Z charakterystyki momentów cząstkowych wynika, że moment typu pierwszego dla składników przebiegających **2** jak również moment typu drugiego związany ze składowymi **3.a** nie są funkcją momentu bezwładności. Przyczyną zmian ilościowych tych momentów w wypadkowym widmie momentu będą momenty cząstkowe typu drugiego ze zbioru **2** oraz pierwszego dla sygnałów **3.a**, które przyjmują formalnie przeciwne znaki do momentów wytwarzanych przy stałej prędkości kątowej. Pozostałe momenty **3.b**, generowane przy współdziałaniu **3** (tab. nr 3.4) zachowują takie same cechy jak prądy tj. ulegają tłumieniu z wzrostem momentu bezwładności. W opisie wytwarzanych momentów należy zwrócić szczególną uwagę na momenty przebiegające z punktem synchronizmu przy postoju wirnika oraz wypadkowy moment asynchro-



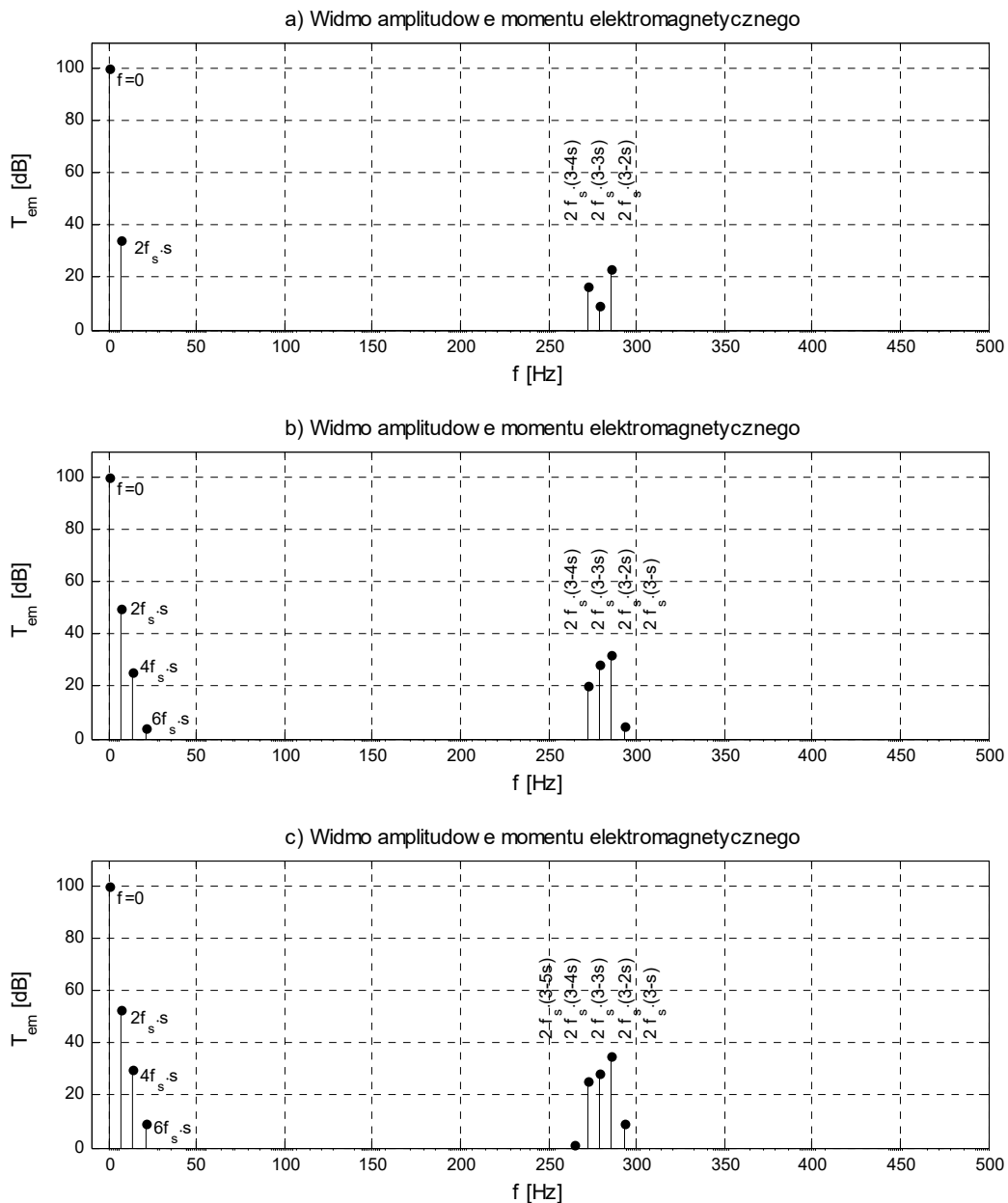
niczny, gdyż momenty **2** (tab. nr 3.6) obok wymuszenia pierwotnego, zawierają wyłącznie składowe przemienne będące funkcją bezwładności układu mechanicznego w momencie drugiego typu. Natomiast moment asynchroniczny dla równań zapisanych w składowych symetrycznych jest generowany przez momenty pierwszego oraz drugiego typu, których superpozycja geometryczna daje składową o zerowej pulsacji niezależnej od momentu bezwładności. Wyniki obliczeń przedstawiają rysunki nr 3.19 oraz 3.20. Wskazane niżej przypadki uszkodzenia wirnika odpowiadają przykładom z rozdziału drugiego [p.2.5.3], gdzie pominięto równanie mechaniczne.

- widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego  $J=10 \cdot J_w$ ,  $\Omega=155,5$  rad/s:



**Rys. 3.19** Względne widmo amplitudowe momentów cząstkowych w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a-b) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, c-d) przerwa w pręcie klatki pracy, e-f) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.

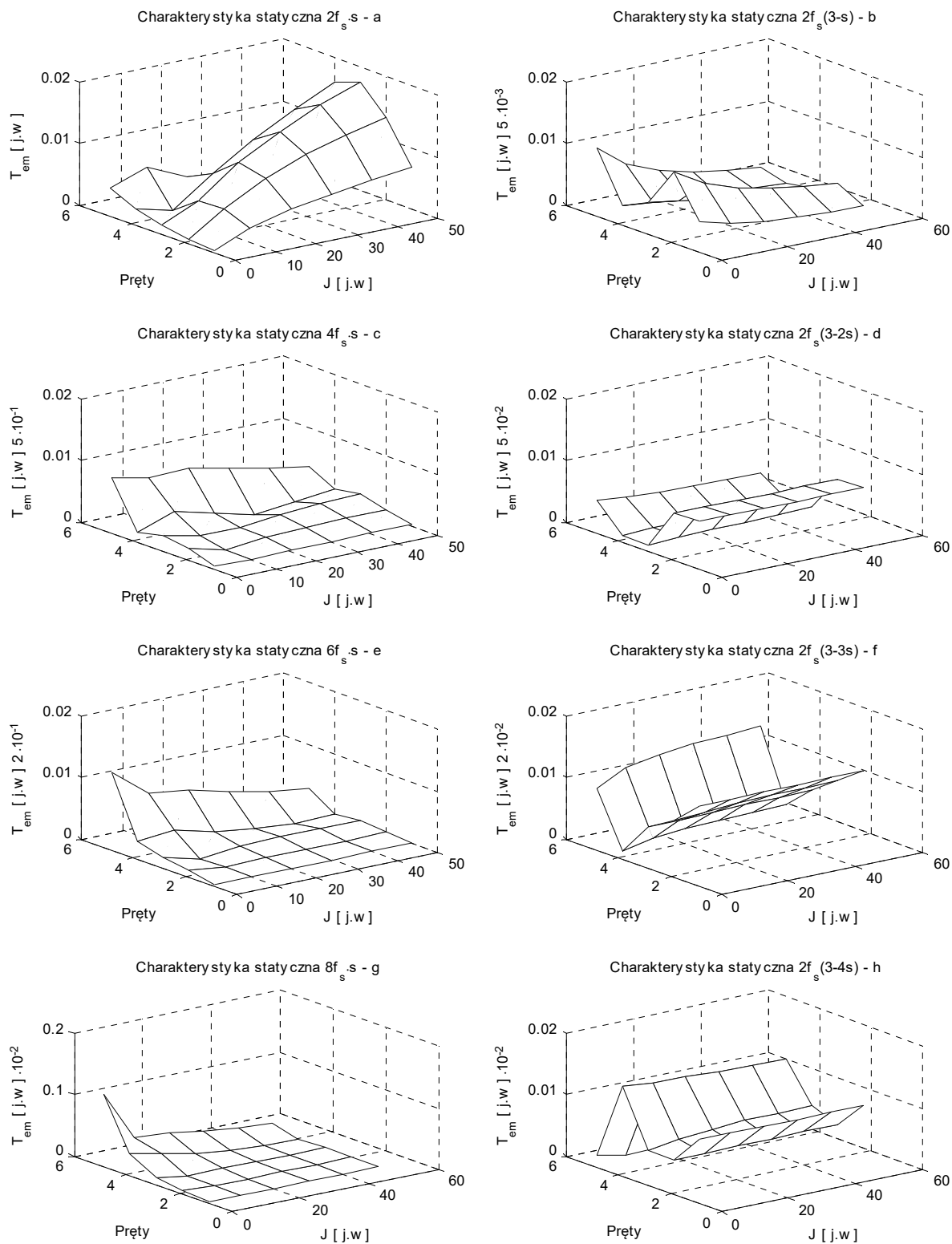
- widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego  $J=10 \cdot J_w$ ,  $s=0,01$ :



**Rys. 3.20** Względne widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, b) przerwa w pręcie klatki pracy, c) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.

Wykresy płaszczyzn zmienności sygnałów w funkcji momentu bezwładności układu napędowego i liczby uszkodzonych prętów decydujących o znaczącej modyfikacji widma momentu elektromagnetycznego sporządzono dla silnika z symetryczną klatką górną i uszkodzonymi prętami klatki dolnej. Przedstawiony przypadek należy uważać za teoretyczny, dlatego że niesymetria obwodu pracy jest zwykle wtórnym efektem stopniowo postępującego procesu degra-

dacji obwodu rozruchowego lub wyjątkowo decydują o tym względy technologiczne wykonania połączeń między prętami i pierścieniami zwierającymi.



**Rys. 3.21** Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma momentu elektromagnetycznego – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w pręcie klatki pracy,  $s=0,01$ .

Równania momentów:

$$\begin{aligned}
T_{em, (2 \cdot m, [6 \cdot k - 2 \cdot \lambda] \cdot p)}^I &= 2 \operatorname{Re} \left\{ j \cdot p \sum \left( n_1 \cdot \overset{*}{\underline{I}}_{s, (\alpha_1, z_1 \cdot p)}^1 \cdot \underline{L}_{n_1 \cdot p}^{\operatorname{mod}(n_1 \cdot p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (\beta_1, v_1 \cdot p)}^{\operatorname{mod}(n_1 \cdot p, N)} - n_2 \cdot \overset{*}{\underline{I}}_{s, (\alpha_2, z_2 \cdot p)}^2 \cdot \underline{L}_{n_2 \cdot p}^{\operatorname{mod}(n_2 \cdot p, N)} \right. \right. \\
&\quad \cdot \underline{I}_{w, (\beta_2, v_2 \cdot p)}^{\operatorname{mod}(n_2 \cdot p, N)} + n_1 \cdot \overset{*}{\underline{I}}_{s, (\alpha_3, z_3 \cdot p)}^1 \cdot \overset{*}{\Delta} \underline{L}_{n_1 \cdot p, (m_1, k_1 \cdot p)}^{\operatorname{mod}[(n_1 + k_1) \cdot p, N]} \cdot \underline{I}_{w, (\beta_3, v_3 \cdot p)}^{\operatorname{mod}[(n_1 + k_1) \cdot p, N]} - n_2 \cdot \overset{*}{\underline{I}}_{s, (\alpha_4, z_4 \cdot p)}^2 \cdot \overset{*}{\Delta} \underline{L}_{n_2 \cdot p, (m_2, k_2 \cdot p)}^{\operatorname{mod}[(n_2 + k_2) \cdot p, N]} \\
&\quad \left. \left. \cdot \underline{I}_{w, (\beta_4, v_4 \cdot p)}^{\operatorname{mod}[(n_2 + k_2) \cdot p, N]} \right) \right\} = T_{em}^I + \Delta T_{em}^I = T_{em, (2 \cdot m, [6 \cdot k - 2 \cdot \lambda] \cdot p)}^I \cdot e^{j \cdot (2 \cdot m \Omega_s + [6 \cdot k - 2 \cdot \lambda] \cdot p \Omega) t} \quad (3.165)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{em, (2 \cdot m + 2, [6 \cdot k - (2 \cdot \lambda + 2)] \cdot p)}^{II} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ j \cdot p \sum \left( n_1 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_1, z_1 \cdot p)}^1 \cdot \underline{L}_{n_1 \cdot p}^{\operatorname{mod}(n_1 \cdot p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (\beta_1, v_1 \cdot p)}^{\operatorname{mod}(n_1 \cdot p, N)} - n_2 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_2, z_2 \cdot p)}^2 \cdot \underline{L}_{n_2 \cdot p}^{\operatorname{mod}(n_2 \cdot p, N)} \right. \right. \\
&\quad \cdot \underline{I}_{w, (\beta_2, v_2 \cdot p)}^{\operatorname{mod}(n_2 \cdot p, N)} + n_1 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_3, z_3 \cdot p)}^1 \cdot \overset{*}{\Delta} \underline{L}_{n_1 \cdot p, (m_1, k_1 \cdot p)}^{\operatorname{mod}[(n_1 + k_1) \cdot p, N]} \cdot \underline{I}_{w, (\beta_3, v_3 \cdot p)}^{\operatorname{mod}[(n_1 + k_1) \cdot p, N]} - n_2 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_4, z_4 \cdot p)}^2 \cdot \overset{*}{\Delta} \underline{L}_{n_2 \cdot p, (m_2, k_2 \cdot p)}^{\operatorname{mod}[(n_2 + k_2) \cdot p, N]} \\
&\quad \left. \left. \cdot \underline{I}_{w, (\beta_4, v_4 \cdot p)}^{\operatorname{mod}[(n_2 + k_2) \cdot p, N]} \right) \right\} = T_{em}^{II} + \Delta T_{em}^{II} = T_{em, (2 \cdot m + 2, [6 \cdot k - (2 \cdot \lambda + 2)] \cdot p)}^{II} \cdot e^{j \cdot ([2 \cdot m + 2] \Omega_s + [6 \cdot k - (2 \cdot \lambda + 2)] \cdot p \Omega) t} \quad (3.166)
\end{aligned}$$

Sumowanie w równaniach momentów cząstkowych danego rzędu, należy prowadzić tak, aby osobno dla  $T_{em}^I$  i  $T_{em}^{II}$  były spełnione poniższe zależności:

$$I: 2 \cdot m = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_3 + m_1 + \beta_3 = \alpha_4 + m_2 + \beta_4, \quad (3.167)$$

$$6 \cdot k - 2 \cdot \lambda = z_1 + n_1 + v_1 = z_2 + n_2 + v_2 = z_3 + (n_1 + k_1) + v_3 = z_4 + (n_2 + k_2) + v_4, \quad (3.168)$$

oraz

$$II: 2 \cdot m + 2 = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_3 + m_1 + \beta_3 = \alpha_4 + m_2 + \beta_4, \quad (3.169)$$

$$6 \cdot k - (2 \cdot \lambda + 2) = z_1 + n_1 + v_1 = z_2 + n_2 + v_2 = z_3 + (n_1 + k_1) + v_3 = z_4 + (n_2 + k_2) + v_4, \quad (3.170)$$

jak również zgodnie z równaniem (3.132)

$$\overset{*}{\Delta} \underline{L}_{n \cdot p, (m, k \cdot p)} = \underline{L}_{n \cdot p} \cdot \frac{n \cdot \Delta \Omega_{m, k}}{j \cdot (m \Omega_s + k \cdot p \Omega)} \cdot e^{j \cdot [m \Omega_s + (k + n) \cdot p \Omega] t} \quad (3.171)$$

gdzie: wszystkie wskaźniki muszą zawierać się w zbiorze liczb całkowitych  $\mathbf{Z}$ .

### 3.5.3 Widmo prądu stojana w warunkach obustronnej niesymetrii elektrycznej silnika

Składowymi określającymi postać podmacierzy indukcyjności wzajemnych w funkcji wahań kąta obrotu dla obustronnej niesymetrii rezystancyjnej silnika są rozwiązania równania centralnego składowej pierwszej i drugiej ze zbiorów stałej prędkości (2.155)

$$\mathbf{L}_{n,p,m \neq 0} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\ \cdots & \underline{L}_{n,p,(m,-m)p} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-2)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-4)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-6)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-8)p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+2)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-m)p} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-2)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-4)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-6)p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+4)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+2)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-m)p} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-2)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-4)p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+6)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+4)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+2)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-m)p} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m-2)p)} & \cdots \\ \cdots & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+8)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+6)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+4)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-(m+2)p)} & \underline{L}_{n,p,(m,-m)p} & \cdots \\ \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

Z macierzy indukcyjności wzajemnych oraz rozwiązania jakościowego równań (2.78) wektory prądów stojana i wirnika zawierają niezerowe elementy z następującymi pulsacjami

$$\mathbf{I}_{s,m}^1 = \left[ \cdots \underline{I}_{s,(m,[-m+1]+4)p}^1 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m+1]+2)p}^1 \quad \underline{I}_{s,(m,-(m+1)p)}^1 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m+1]-2)p}^1 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m+1]-4)p}^1 \quad \cdots \right]^T \quad (3.173)$$

$$\mathbf{I}_{s,m}^2 = \left[ \cdots \underline{I}_{s,(m,[-m-1]+4)p}^2 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m-1]+2)p}^2 \quad \underline{I}_{s,(m,-(m-1)p)}^2 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m-1]-2)p}^2 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m-1]-4)p}^2 \quad \cdots \right]^T \quad (3.174)$$

gdzie:

- cząstkowe macierze operatorów różniczkowania składowej pierwszej i drugiej stojana mające znaczenie generowanych sygnałów diagnostycznych, podobnie jak w [p.3.5.1]

$$\mathbf{\Omega}_m^1 = \text{diag} \left[ \dots \quad m \Omega_s + [(-m+1)+4] \cdot p \Omega \quad m \Omega_s + [(-m+1)+2] \cdot p \Omega \quad \dots \right. \\ \left. \dots m \Omega_s + (-m+1) \cdot p \Omega \quad m \Omega_s + [(-m+1)-2] \cdot p \Omega \quad m \Omega_s + [(-m+1)-4] \cdot p \Omega \quad \dots \right] \quad (3.175)$$

$$\mathbf{\Omega}_m^2 = \text{diag} [\dots m\Omega_s + [(-m-1)+4] \cdot p\Omega \quad m\Omega_s + [(-m-1)+2] \cdot p\Omega \quad \dots \\ \dots m\Omega_s + (-m-1) \cdot p\Omega \quad m\Omega_s + [(-m-1)-2] \cdot p\Omega \quad m\Omega_s + [(-m-1)-4] \cdot p\Omega \quad \dots] \quad (3.176)$$

- struktura wektorów prądów wirnika przyporządkowana zbiorowi (3.109) – (3.111)

$$\mathbf{I}_{w,m}^{1,2} = \left[ \dots \mathbf{I}_{w,(-n-4)-(m-1)p} \quad \mathbf{I}_{w,(-n-2)-(m-1)p} \quad \mathbf{I}_{w,(-n)-(m-1)p} \quad \mathbf{I}_{w,(-n+2)-(m-1)p} \quad \mathbf{I}_{w,(-n+4)-(m-1)p} \quad \dots \right]^T \quad (3.177)$$

Właściwości jakościowe prądów składowych symetrycznych stojana zgodnie z przewidywaną postacią rozwiązania przedstawia poniższa tabela nr 3.7.

**Tab. 3.7** Właściwości sygnałów diagnostycznych w zbiorze składowych symetrycznych prądów stojana dla obustronnej niesymetrii silnika.

Lp.	Wektor składowej symetrycznej	$\mathbf{I}_S^1$	$\mathbf{I}_S^2$	$\mathbf{I}$
1	Zbiór rozwiązań $\mathbf{I}_S^1$ [p.2.5.4]	$m=1$	$m=-1$	$\lim_{J \rightarrow \infty} \mathbf{I} = \mathbf{I}_S^1 \wedge \mathbf{I}_{S,-1}^2 = \mathbf{0}$
		*1, *3	*2	
2	Zbiór rozwiązań $\mathbf{I}_S^2$ [p.2.5.4]	$m=-1$	$m=1$	$\lim_{J \rightarrow \infty} \mathbf{I} = \mathbf{I}_S^2 \wedge \mathbf{I}_{S,-1}^1 = \mathbf{0}$
		*2	*1, *3	
3	Zbiór rozwiązań z wyłączeniem równania centralnego	$m \setminus \{-1, 1\}$	$m \setminus \{-1, 1\}$	$\lim_{J \rightarrow \infty} \mathbf{I} = \mathbf{0}$
		*2	*2	

Składowe najniższego rzędu  $m=1$  stanowią wymuszenie pierwotne sygnałów  $m=-1$ , wchodzących do zbioru prądów składowych symetrycznych przez pełną macierz rezystancji stojana. Wymienione prądy wywołują oddziaływania wtórne przejawiające się między innymi występowaniem sygnałów, które można nazwać składowymi przestrzenno-czasowymi  $m=\dots,-5,-3,3,5,\dots$ , ponieważ przyjmują pulsacje ze zbioru harmonicznym czasowych, lecz przyczyną ich powstania jest nieliniowość typu strukturalnego. Jeżeli w równaniach pominąć oddziaływania elektromechaniczne lub przyjąć wielokrotnie większy moment bezwładności układu napędowego od momentu bezwładności własnej silnika zasilanego monoharmonicznym układem napięć trójfazowych, wówczas amplitudy wskazanych składowych dążą do zera. Zatem głównym czynnikiem wymuszającym przebieg zmienności charakterystyk statycznych sygnałów przestrzenno-czasowych będą parametry równania mechanicznego, a nie jak bardzo często się przyjmuje poziom asymetrii rezystancyjnej obwodu stojana. Biorąc dodatkowo pod uwagę rzeczywisty rozkład napięć jaki występuje w sieciach zakładowych, składowe przestrzenno-czasowe podlegają sumowaniu geometrycznemu z harmonicznymi prądów wymuszonych przez

napięcia tego samego rzędu. Poza opisanymi składowymi widma, efektem istnienia oddziaływań elektromechanicznych jest generowanie prądów wokół nieparzystych pulsacji harmonicznym czasowych oddalonych o podwójną częstotliwość poślizgową. Wśród tych składowych ponownie można wyróżnić sygnały diagnostyczne zawarte w zbiorze dla stałej prędkości  $m=1$ , gdzie wraz z osłabieniem wahań kąta obrotu amplitudy tych składowych zmierzają do wartości maksymalnej oraz składowe tłumione  $m \neq 1$  podlegające zerowaniu przy  $J \rightarrow \infty$ . Ponieważ równania bilansu harmonicznym z uwzględnieniem oddziaływań elektromechanicznych muszą być spełnione, gdy wektor wahań prędkości  $\Delta\Omega=0$  [p.2.3]. Dlatego też, wzory upraszczające zapis składowych symetrycznym napięć opisujące związki jakościowe między prądami oraz indukcyjnościami, zawierają jak w [p.3.5.1] dodatkowy składnik będący funkcją okresowego odchylenia prędkości kątowej od wartości średniej.

$$\underline{U}_{s,(m, [(-m+1)+2k]p)}^1 = \mathbf{R}_s^0 \cdot \underline{I}_{s,(m, [(-m+1)+2k]p)}^1 + \mathbf{R}_s^1 \cdot \underline{I}_{s,(m, [(-m+1)+2k]p)}^2 + \mathbf{j} \cdot (m\Omega_s + [(-m+1)+2k] \cdot p\Omega) \cdot \left[ \underline{L}_s^1 \cdot \underline{I}_{s,(m, [(-m+1)+2k]p)}^1 + \left( \sum_z \underline{L}_{n-p} \cdot \underline{I}_{w,(m,l,p)}^{\text{mod}(n-p,N)} + \frac{n \cdot \Delta\Omega_{[2r, -(2s+2k)]}}{2 \cdot r\Omega_s - (2 \cdot s + 2 \cdot k) \cdot p\Omega} \cdot \sum_w \underline{L}_{n-p,(2r, -(2s+2k))} \cdot \underline{I}_{w,(\mu,q)}^{\text{mod}(n-p,N)} \right) \right],$$

$$\forall z = w = (-m+1) + 2k, \mu = m - 2r, l = -n + 2k - (m-1), n = \dots -5, 1, 7, \dots, \quad (3.178)$$

$$\underline{U}_{s,(m, [(-m-1)+2k]p)}^2 = \mathbf{R}_s^0 \cdot \underline{I}_{s,(m, [(-m-1)+2k]p)}^2 + \mathbf{R}_s^1 \cdot \underline{I}_{s,(m, [(-m-1)+2k]p)}^1 + \mathbf{j} \cdot (m\Omega_s + [(-m-1)+2k] \cdot p\Omega) \cdot \left[ \underline{L}_s^2 \cdot \underline{I}_{s,(m, [(-m-1)+2k]p)}^2 + \left( \sum_z \underline{L}_{n-p} \cdot \underline{I}_{w,(m,l,p)}^{\text{mod}(n-p,N)} + \frac{n \cdot \Delta\Omega_{[2r, -(2s+2k)]}}{2 \cdot r\Omega_s - (2 \cdot s + 2 \cdot k) \cdot p\Omega} \cdot \sum_w \underline{L}_{n-p,(2r, -(2s+2k))} \cdot \underline{I}_{w,(\mu,q)}^{\text{mod}(n-p,N)} \right) \right],$$

$$\forall z = w = (-m-1) + 2k, \mu = m - 2r, l = -n + 2k - 2 - (m-1), n = \dots -7, -1, 5, \dots, \quad (3.179)$$

Wskaźniki sumowania w równaniach (3.178) i (3.179) muszą spełniać zależności:

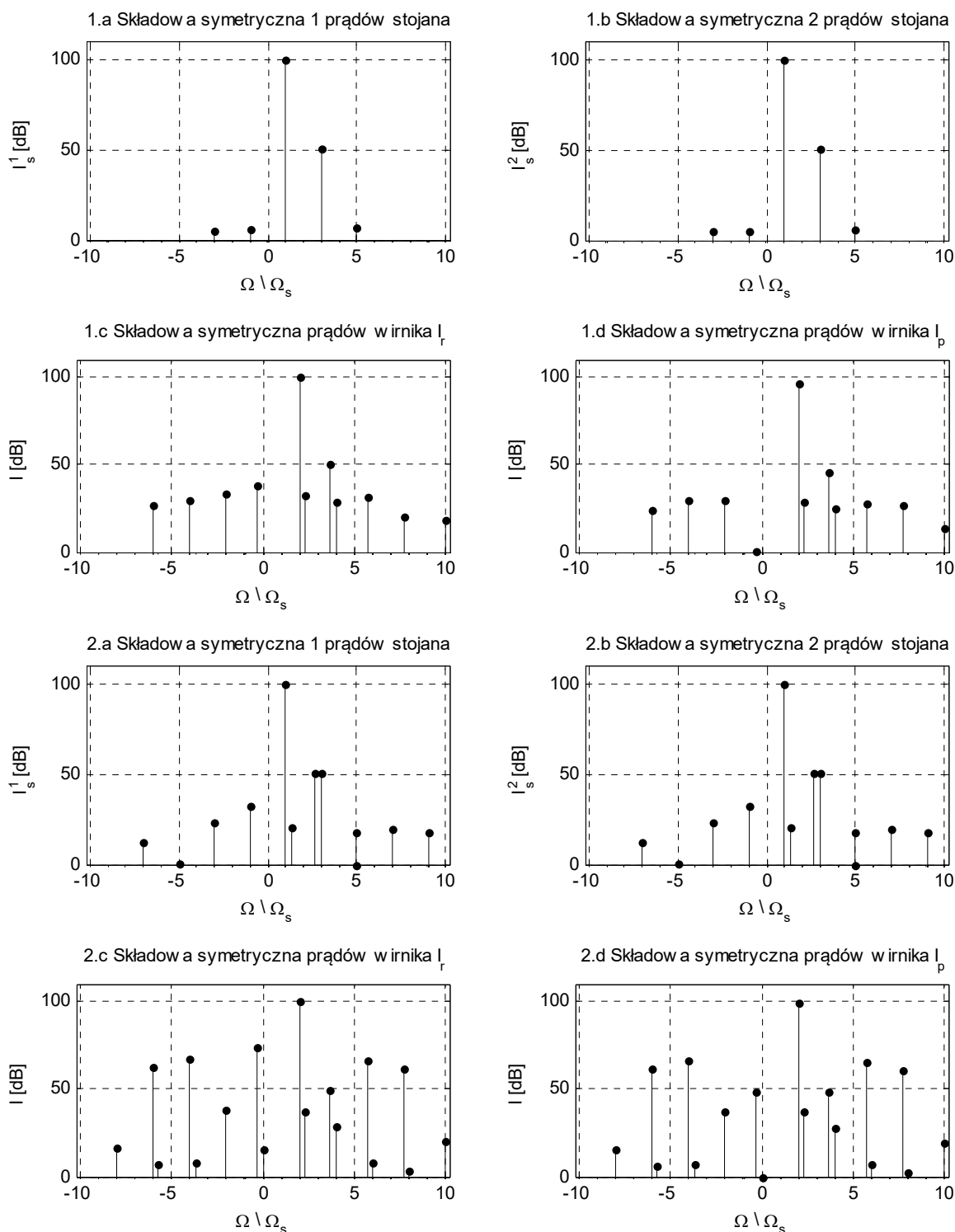
$$z = n + l, w = n - (2s + 2k) + q, q = -n + 2 - (\alpha - 1),$$

dla:  $k = \dots -1, 0, 1, \dots, m \wedge \alpha = \dots -3, -1, 1, 3, \dots, r \wedge s = \dots -2, -1, 1, 2, \dots$

Przykładowe wyniki obliczeń dla silnika pracującego bez obciążenia zewnętrznego z przerwany przewodem zasilającym zilustrowano (zobrazowano) widmami amplitudowym pulsacji prądów składowych symetrycznym przy nieuszkodzonym wirniku oraz pęknięciu jednego pręta klatki rozruchowej. Dowolne inne kombinacje niesymetrii obwodów klatek nie wnoszą jakościowo nowych efektów opisanych zależnościami (3.178) – (3.179). Z tej przyczyny skutki ilościowe niesymetrii rezystancyjnej przedstawiono za pomocą widm częstotliwościowych 3.23 (przypadki odpowiadające [p.2.5.4]). Płaszczyzny zmienności wybranych sygnałów diagnostycznych w funkcji liczby uszkodzonych prętów i momentu bezwładności obejmują wy-

łącznie zakres asymetrii klatki rozruchowej – rysunek nr 3.24.

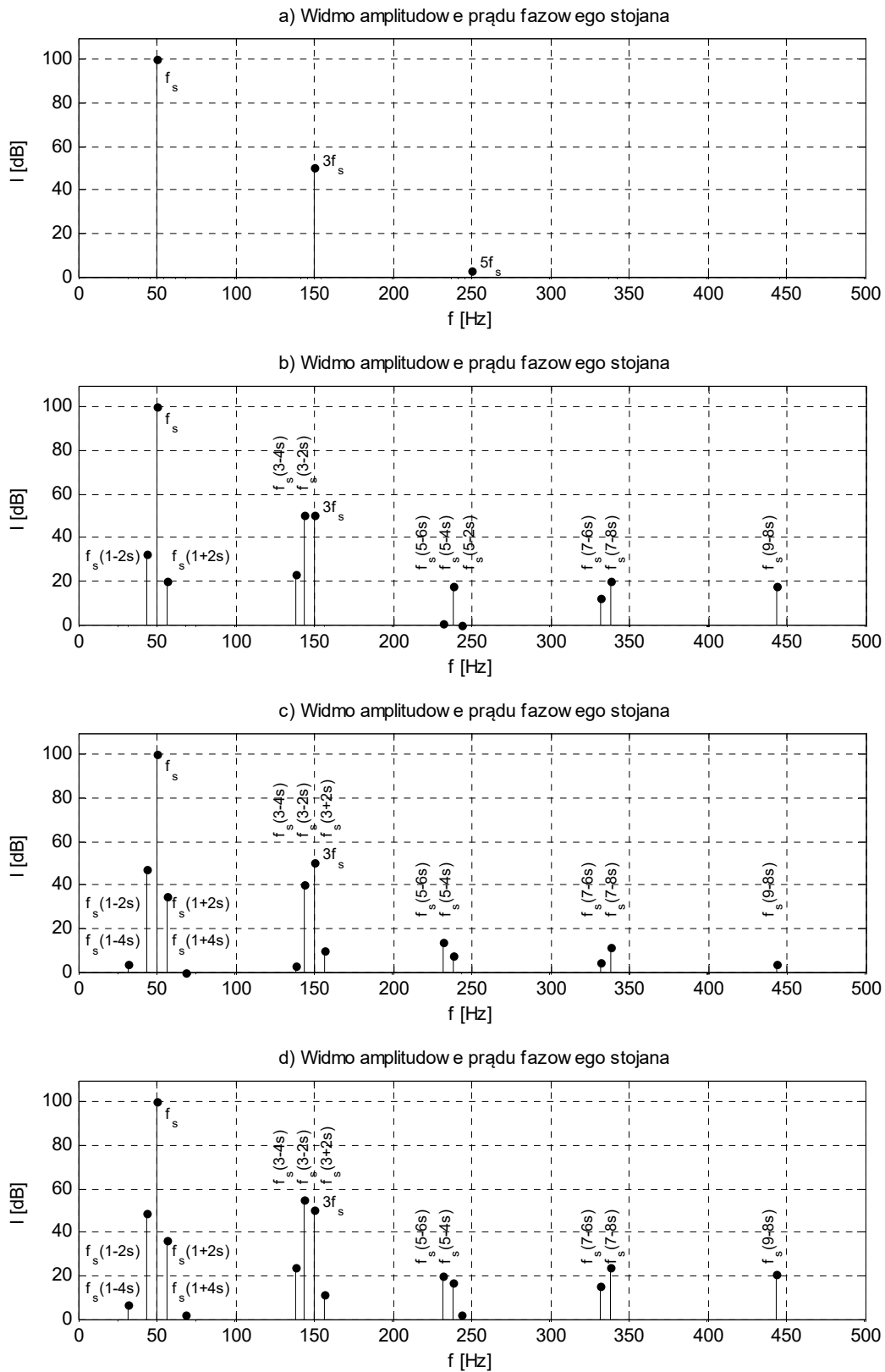
- widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów stojana  $J=1 \cdot J_w$ ,  $\Omega=157$  rad/s:



**Rys. 3.22** Względne widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów stojana i wirnika w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie obwodu stojana, uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej, a) składowa pierwsza prądów stojana, b) składowa druga prądów stojana, c) składowa „p-ta” klatki rozruchowej, d) składowa „p-ta” klatki pracy.

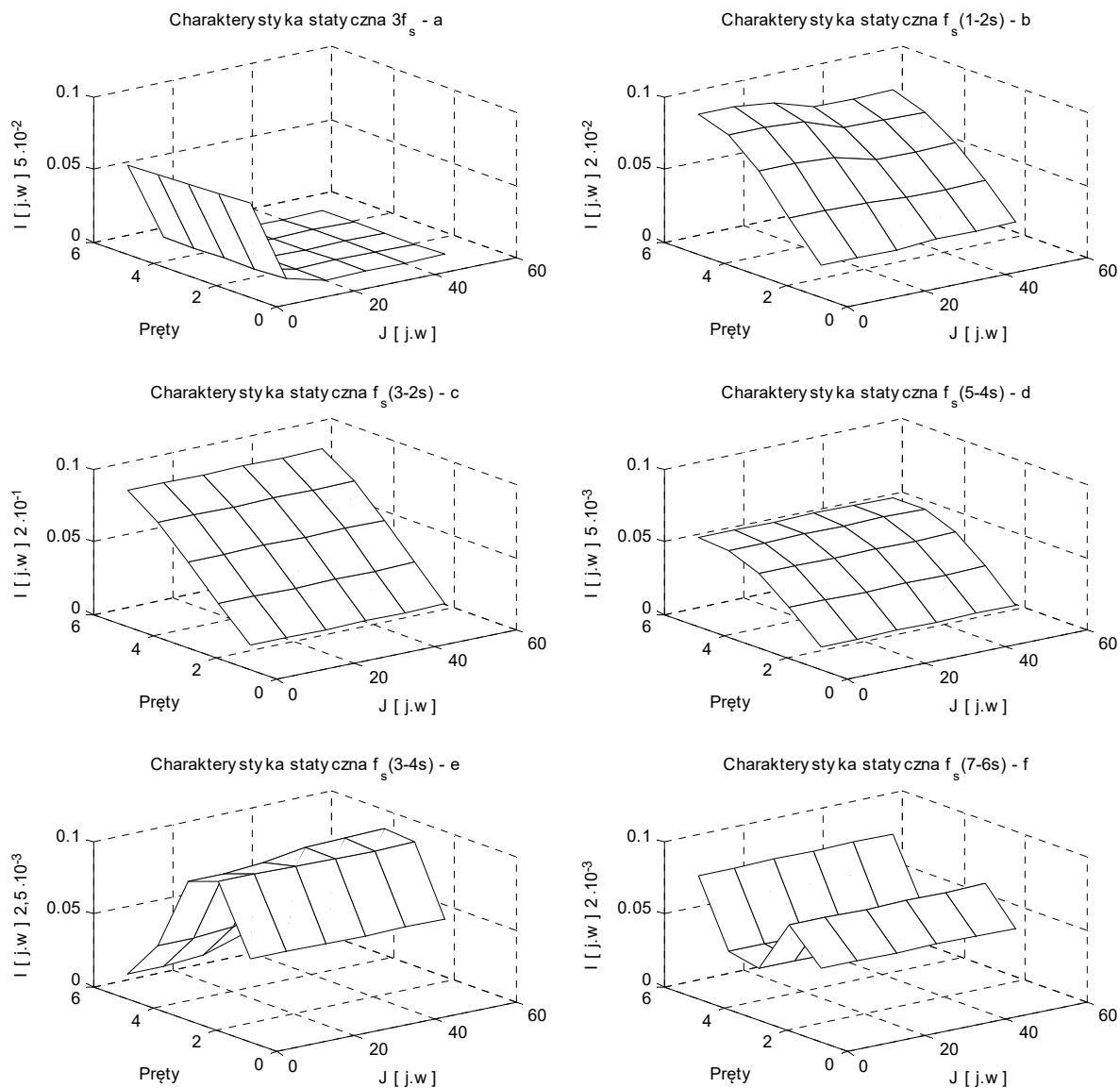


- widmo amplitudowe prądu fazowego stojana  $J=1 \cdot J_w$ ,  $s=0,0005$ :



**Rys. 3.23** Względne widmo amplitudowe prądu stojan w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, a) symetryczny wirnik, b) przerwany pręt klatki rozruchowej, c) przerwany pręt klatki pracy, d) przerwany pręt klatki górnej i dolnej.

W rozpatrywanym stanie pracy ze względu na tłumienie prądów przez ich pulsacje własne nawet przy momencie bezwładności własnej (naturalnej) oddziaływania elektromechaniczne mają znacząco ograniczony wpływ na amplitudy sygnałów diagnostycznych, co można udowodnić badając przebieg zmienności wybranych prądów w funkcji liczby uszkodzonych prętów i momentu bezwładności.



**Rys. 3.24** Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności wybranych składowych prądu fazowego w funkcji momentu bezwładności i liczby uszkodzonych prętów – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie obwodu stojana, uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej,  $s=0,0005$ .

### 3.5.4 Widmo momentu elektromagnetycznego w warunkach obustronnej niesymetrii elektrycznej silnika

Znając skład spektralny prądów stojana i wirnika oraz strukturę macierzy indukcyjności wzajemnych z podpunktu [3.5.3], można przeprowadzić analizę jakościową momentu elektromagnetycznego uwzględniając wskaźniki sumowania z (3.146)-(3.149):

- wektory prądów składowych symetrycznych stojana

$$\mathbf{I}_{s,m}^1 = \left[ \cdots \quad \underline{I}_{s,(m,[-m+1]+4]p}^1 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m+1]+2]p}^1 \quad \underline{I}_{s,(m,(-m+1)p}^1 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m+1]-2]p}^1 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m+1]-4]p}^1 \quad \cdots \right]^T \quad (3.180)$$

$$\mathbf{I}_{s,m}^2 = \left[ \cdots \quad \underline{I}_{s,(m,[-m-1]+4]p}^2 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m-1]+2]p}^2 \quad \underline{I}_{s,(m,(-m-1)p}^2 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m-1]-2]p}^2 \quad \underline{I}_{s,(m,[-m-1]-4]p}^2 \quad \cdots \right]^T \quad (3.181)$$

- wektory prądów składowych symetrycznych wirnika

$$\mathbf{I}_{w,m}^{1,2} = \left[ \cdots \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-n-4)-(m-1+k)+z]p} \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-n-2)-(m-1+k)+z]p} \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-n-(m-1+k)+z]p} \quad \cdots \right. \\ \left. \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-n+2)-(m-1+k)+z]p} \quad \mathbf{I}_{w,[(m+k),(-n+4)-(m-1+k)+z]p} \quad \cdots \right]^T \quad (3.182)$$

Z form kwadratowych momentów cząstkowych typu pierwszego i drugiego generowane składowe w warunkach obustronnej niesymetrii silnika przyjmują identyczne zależności jak równania (3.163)-(3.164). Rozszerzeniu podlega wyłącznie zbiór wskaźników sumowania harmonicznych przestrzennych  $z=(\dots-2, 0, 2, \dots)$

$$\mathbf{T}_{em}^I = \mathbf{T}_{em,[k,(z-k)p]} \cdot e^{j[k\Omega_s+(z-k)p\Omega]t}; \quad \mathbf{T}_{em}^{II} = \mathbf{T}_{em,[2+k,(z-k+2)p]} \cdot e^{j[(2+k)\Omega_s+(z-k+2)p\Omega]t} \quad (3.183)$$

Szczegółowe wyprowadzenie (3.183) przedstawiono w części kończącej podrozdział (3.184) – (3.190). Zgodnie z równaniami momentów cząstkowych można wprowadzić klasyfikację składowych widma będących jednocześnie uzupełnieniem [p.2.5.5] o dodatkowe komponenty wynikające z uwzględnienia oddziaływań elektromechanicznych. Opisane niżej momenty uporządkowano według wskaźników sumowania form kwadratowych - tabela nr 3.8:

- **Moment asynchroniczny** stanowi superpozycję momentów I i II typu, jeśli  $J \rightarrow \infty$  to składowe II rodzaju ulegają wyzerowaniu a tym samym zbiór rozwiązań przechodzi w [p.2.5.5].

- **Momenty przemienne** z punktem synchronizmu przy postoju wirnika mogą być wytwarzane przez składowe I–II. Dodatkowo wektor momentów drugiego typu zawiera zerowe rozwiązania w sytuacji pominięcia równania mechanicznego oraz gdy prędkość kątowna wirnika  $\Omega=0$ .

- **Momenty przemienne** z punktem synchronizmu –  $\Omega \neq 0$ , zostały podzielone na składniki **3.a** i **3.b**. Przy czym składowe **3.a** są sumą geometryczną wymuszenia pierwotnego II oraz wtór-

nego I będącego funkcją momentu bezwładności. Wszystkie elementy ze zbioru **3.b** zawierają niezerowe rozwiązania, jeżeli wektor wahań prędkości kątowej  $\Delta\Omega \neq 0$ .

- **Momenty przemienne** niezależne względem czasu, wytwarzane wskutek niesymetrii obrotu stojana, podobnie jak wyżej przedstawiono za pomocą dwóch zbiorów **4.a** i **4b**. Wśród tych momentów największy udział w widmie posiada moment o podwójnej pulsacji sieciowej z zbioru stałej prędkości kątowej, który jest pierwotną przyczyną generowania harmonicznym mających cechy zależności od momentu bezwładności w zbiorze momentów I i II.

Momenty cząstkowe wchodzące w skład częstotliwościowego widma amplitudowego z tymi samymi pulsacjami i różnymi znakami podlegają sumowaniu geometrycznemu, więc obserwowane momenty przemienne przyporządkowane zbiorom stałej prędkości kątowej podlegają zmniejszeniu względem [p.2.5.5]. Wskazane rozwiązania jakościowe mogą być interpretowane jako najbardziej ogólne zagadnienie analizy momentu z dowolną niesymetrią parametryczną z uwzględnieniem lub pominięciem równania mechanicznego.

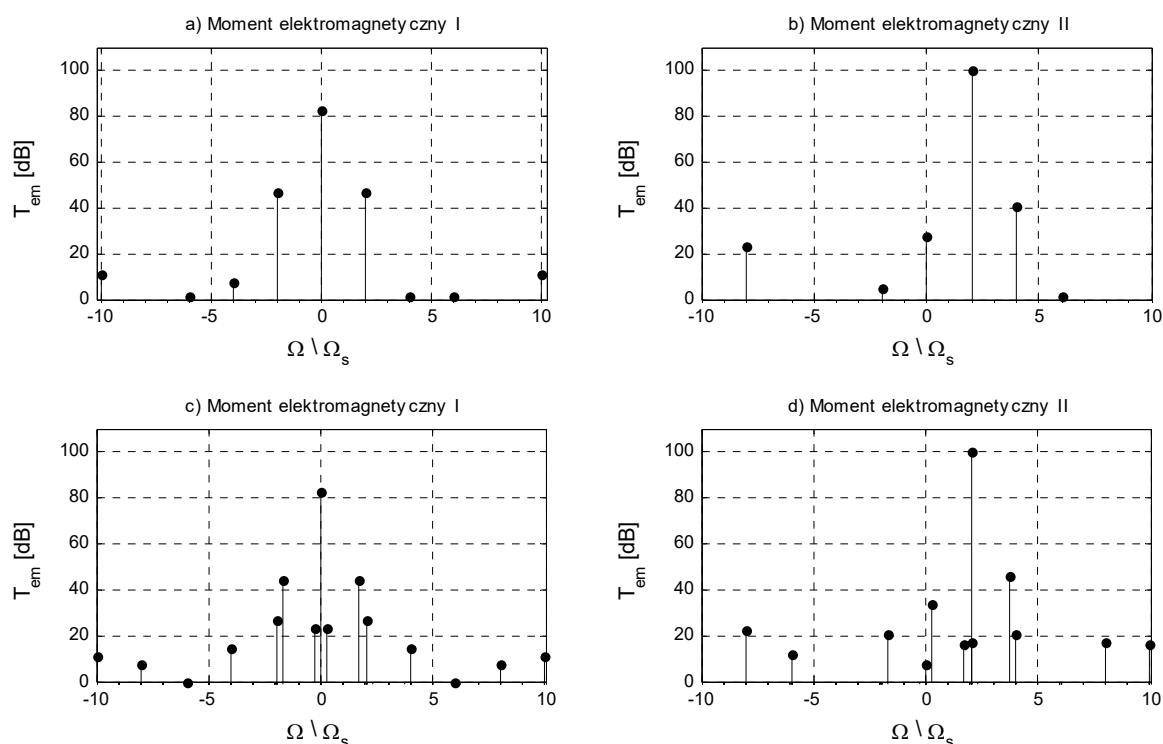
**Tab. 3.8** Właściwości momentów cząstkowych wytwarzanych w warunkach obustronnej niesymetrii parametrycznej silnika.

Lp.	Typ momentu	$T_{em}^I$	$T_{em}^{II}$	$T_{em}$
<b>1</b>	Asynchroniczny	$k=0, z=0$	$k=-2, z=0$	*3
		*1, *2	*2, $\lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} T_{em, (-2,0)} = 0$	
<b>2.a</b>	Przemienny z punktem synchronizmu $\Omega=0$	$k=0, \forall z \setminus \{0\}$	$k=0, \forall z \setminus \{0\}$	*2
		*1, *3	*2	
<b>3.a</b>	Przemienny z punktem synchronizmu $\Omega \neq 0$	$k=2, z=0$	$k=0, z=0$	*2
		*2	*1, *3	
<b>3.b</b>	Przemienny z punktem synchronizmu $\Omega \neq 0$	$\forall k \setminus \{0\}, \forall z$	$\forall k \setminus \{-2\}, \forall z \setminus \{0\}$	*2
		*2	*2	
<b>4.a</b>	Przemienny niezależny od czasu	$k=2, z=2$	$k=0, z=2$	*2
		*2	*1, *3	
<b>4.b</b>	Przemienny niezależny od czasu	$\forall k \setminus \{0, 2\}, z=k$	$\forall k \setminus \{-2, 0\}, z=k+2$	*2
		*2	*2	

Podział momentów cząstkowych z tab. nr 3.8 zilustrowano na przykładzie silnika z uszkodzonym jednym prętem klatki rozruchowej. Za poziom odniesienia przyjęto amplitudę momentu

z podwójną pulsacją sieciową składnika momentu drugiego typu 4.a. Otrzymane wyniki obliczeń porównano z przypadkiem przerwy w fazie stojana przy zachowanej symetrii wirnika.

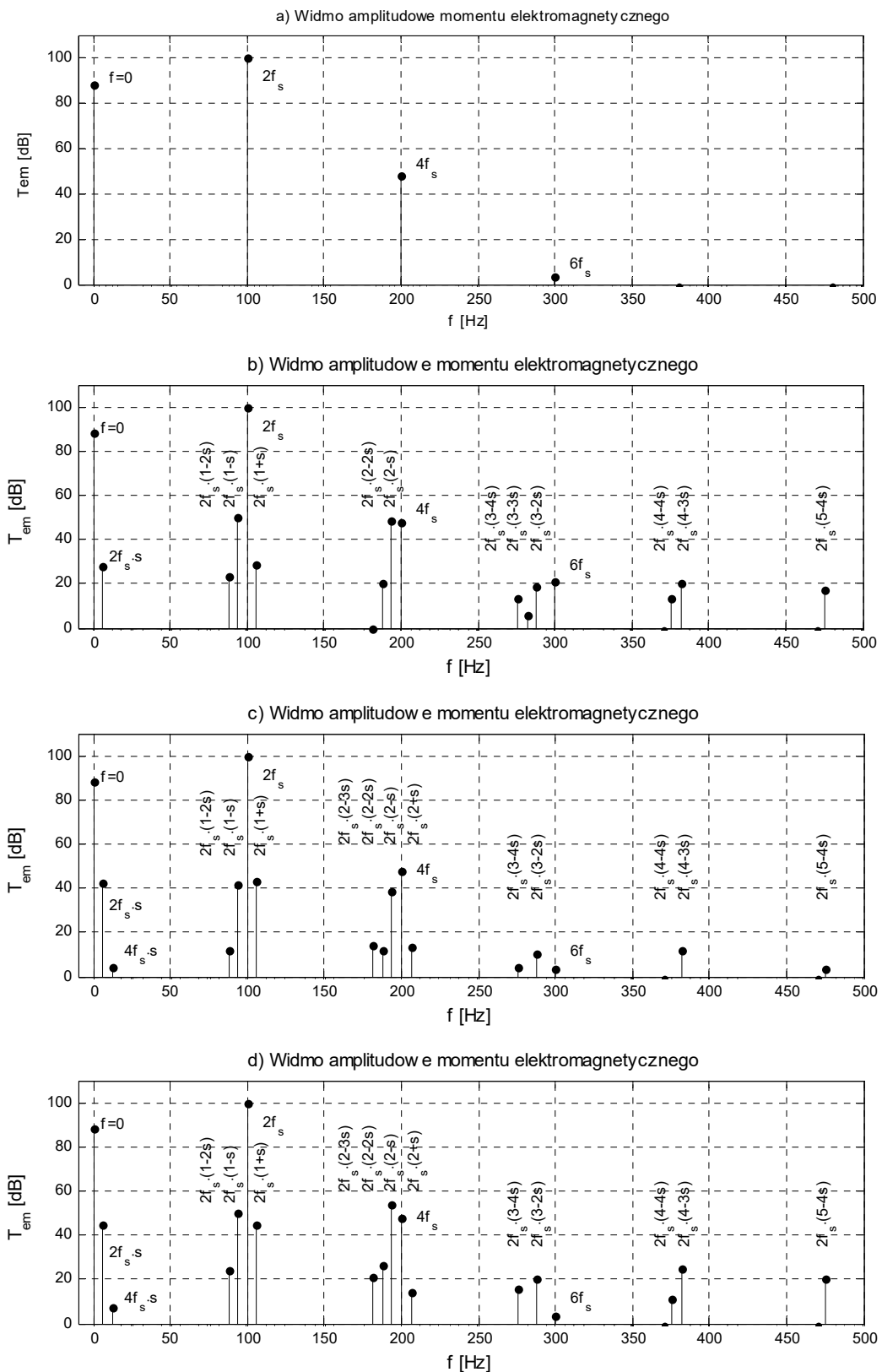
- widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego  $J=1 \cdot J_w$ ,  $\Omega=157$  rad/s:



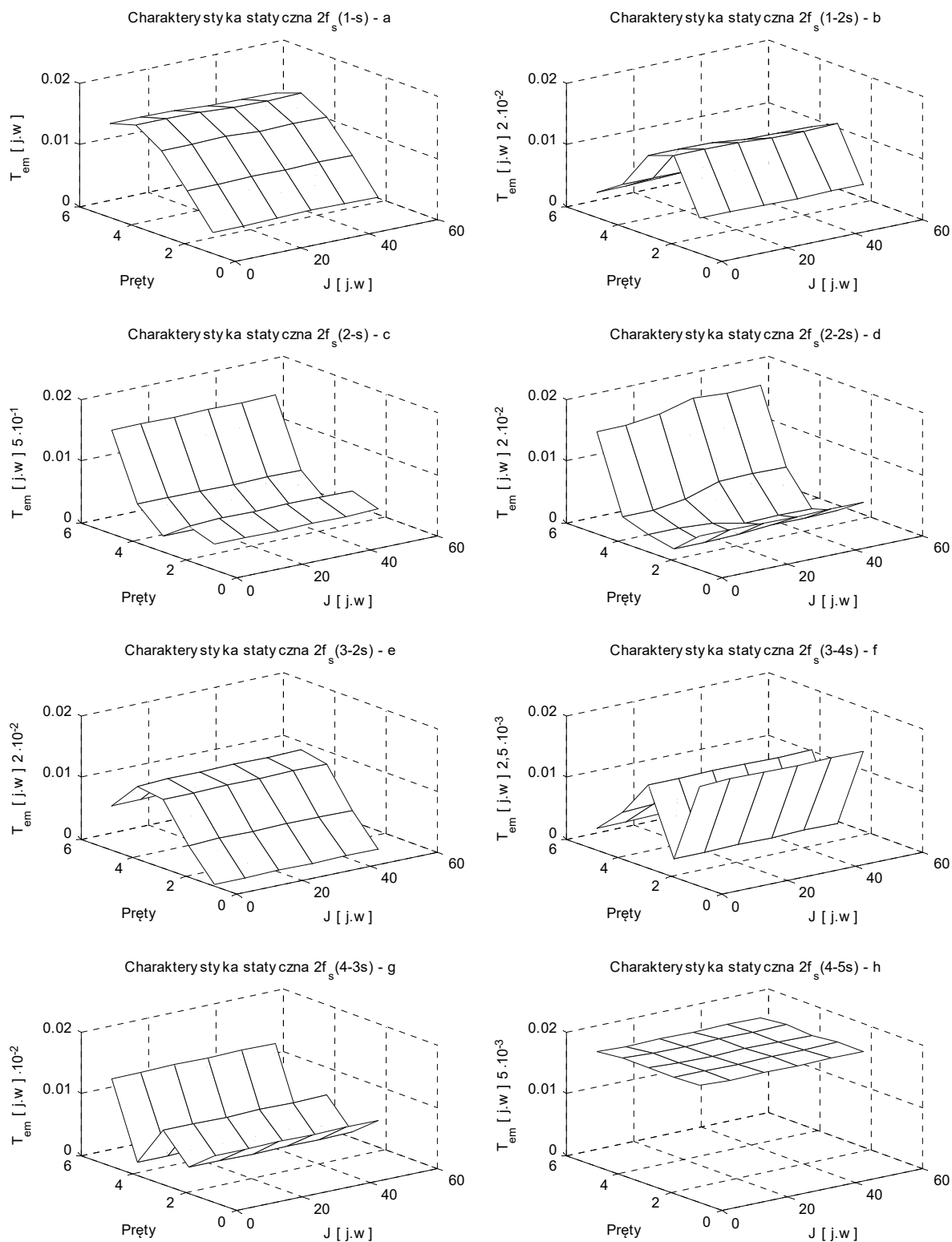
**Rys. 3.25** Względne widmo amplitudowe momentów cząstkowych w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a-b) przerwa w fazie obwodu stojana – symetryczny wirnik, c-d) przerwa w fazie obwodu stojana i pręcie klatki rozruchowej.

Widma amplitudowe momentu elektromagnetycznego w funkcji częstotliwości – rys. 3.26, wykonano dla czterech konfiguracji uszkodzeń silnika, które są bezpośrednio związane z punktem [p.3.5.3]. Z przedstawionych rezultatów obliczeń numerycznych można wykazać, że składowe momentów ze zbioru stałej prędkości obrotowej pozostają praktycznie niezmiennie w porównaniu z [p.2.5.5], choć prowadzą do modyfikacji jakościowej oraz ilościowej wektora rozwiązań w możliwym zakresie użyteczności modelu bazowego – wytwarzanie m.in. momentów prawostronnych typu  $2f_s \cdot (1+s)$ ,  $2f_s \cdot (2+s)$ . Uwzględnienie oddziaływań elektromechanicznych jest również powodem generowania dodatkowego momentu  $4f_s \cdot s$ , a tym samym zmiany amplitudy momentu  $2f_s \cdot s$ . Spostrzeżenia dotyczące składowych niskoczęstotliwościowych nie mają większego znaczenia diagnostycznego, podobnie jak obserwacja momentów niezależnych od czasu  $4f_s$ ,  $6f_s$ , lecz co najważniejsze ich występowanie potwierdza prawidłowość wyprowadzonych zależności analitycznych.

- widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego  $J=1 \cdot J_w$ ,  $s=0,0005$ :



**Rys. 3.26** Względne widmo amplitudowe momentu el. w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, a) symetryczny wirnik, b) przerwy pręt klatki rozruchowej, c) przerwy pręt klatki pracy, d) przerwy pręt klatki górnej i dolnej.



**Rys. 3.27** Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności wybranych składowych momentu elektromagnetycznego w funkcji momentu bezwładności i liczby uszkodzonych prętów – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie obwodu stojana, uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej,  $s=0,0005$ .

Równania momentów:

$$\begin{aligned} T_{em, (2 \cdot m, [2k-2\lambda]p)}^I = 2 \operatorname{Re} \left\{ j \cdot p \sum \left( n_1 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_1, z_1 p)}^1 \cdot \underline{L}_{n_1 p}^{\operatorname{mod}(n_1 p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (\beta_1, v_1 p)}^{\operatorname{mod}(n_1 p, N)} - n_2 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_2, z_2 p)}^2 \cdot \underline{L}_{n_2 p}^{\operatorname{mod}(n_2 p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (\beta_2, v_2 p)}^{\operatorname{mod}(n_2 p, N)} \right. \right. \\ \left. \left. + n_1 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_3, z_3 p)}^1 \cdot \Delta \underline{L}_{n_1 p, (m_1, k_1 p)}^{\operatorname{mod}[(n_1+k_1)p, N]} \cdot \underline{I}_{w, (\beta_3, v_3 p)}^{\operatorname{mod}[(n_1+k_1)p, N]} - n_2 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_4, z_4 p)}^2 \cdot \Delta \underline{L}_{n_2 p, (m_2, k_2 p)}^{\operatorname{mod}[(n_2+k_2)p, N]} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \underline{I}_{w, (\beta_4, v_4 p)}^{\operatorname{mod}[(n_2+k_2)p, N]} \right) \right\} = T_{em, (2 \cdot m, [2k-2\lambda]p)}^I + \Delta T_{em, (2 \cdot m, [2k-2\lambda]p)}^I = T_{em, (2 \cdot m, [2k-2\lambda]p)}^I \cdot e^{j \cdot (2 \cdot m \cdot \Omega_s + [2k-2\lambda]p \cdot \Omega) t} \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} T_{em, (2 \cdot m+2, [2k-(2\lambda+2)]p)}^{II} = 2 \operatorname{Re} \left\{ j \cdot p \sum \left( n_1 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_1, z_1 p)}^1 \cdot \underline{L}_{n_1 p}^{\operatorname{mod}(n_1 p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (\beta_1, v_1 p)}^{\operatorname{mod}(n_1 p, N)} - n_2 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_2, z_2 p)}^2 \cdot \underline{L}_{n_2 p}^{\operatorname{mod}(n_2 p, N)} \cdot \underline{I}_{w, (\beta_2, v_2 p)}^{\operatorname{mod}(n_2 p, N)} \right. \right. \\ \left. \left. + n_1 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_3, z_3 p)}^1 \cdot \Delta \underline{L}_{n_1 p, (m_1, k_1 p)}^{\operatorname{mod}[(n_1+k_1)p, N]} \cdot \underline{I}_{w, (\beta_3, v_3 p)}^{\operatorname{mod}[(n_1+k_1)p, N]} - n_2 \cdot \underline{I}_{s, (\alpha_4, z_4 p)}^2 \cdot \Delta \underline{L}_{n_2 p, (m_2, k_2 p)}^{\operatorname{mod}[(n_2+k_2)p, N]} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \underline{I}_{w, (\beta_4, v_4 p)}^{\operatorname{mod}[(n_2+k_2)p, N]} \right) \right\} = T_{em, (2 \cdot m+2, [2k-(2\lambda+2)]p)}^{II} + \Delta T_{em, (2 \cdot m+2, [2k-(2\lambda+2)]p)}^{II} = T_{em, (2 \cdot m+2, [2k-(2\lambda+2)]p)}^{II} \cdot e^{j \cdot ([2 \cdot m+2] \cdot \Omega_s + [2k-(2\lambda+2)]p \cdot \Omega) t} \end{aligned} \quad (3.185)$$

Sumowanie w równaniach momentów cząstkowych danego rzędu, należy prowadzić tak, aby osobno dla  $T_{em}^I$  i  $T_{em}^{II}$  były spełnione poniższe zależności:

$$I: 2 \cdot m = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_3 + m_1 + \beta_3 = \alpha_4 + m_2 + \beta_4, \quad (3.186)$$

$$2 \cdot k - 2 \cdot \lambda = z_1 + n_1 + v_1 = z_2 + n_2 + v_2 = z_3 + (n_1 + k_1) + v_3 = z_4 + (n_2 + k_2) + v_4, \quad (3.187)$$

oraz

$$II: 2 \cdot m + 2 = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_3 + m_1 + \beta_3 = \alpha_4 + m_2 + \beta_4, \quad (3.188)$$

$$2 \cdot k - (2 \cdot \lambda + 2) = z_1 + n_1 + v_1 = z_2 + n_2 + v_2 = z_3 + (n_1 + k_1) + v_3 = z_4 + (n_2 + k_2) + v_4. \quad (3.189)$$

jak również zgodnie z równaniem (3.132)

$$\Delta \underline{L}_{n \cdot p, (m, k \cdot p)} = \underline{L}_{n \cdot p} \cdot \frac{n \cdot \Delta \Omega_{m, k}}{j \cdot (m \Omega_s + k \cdot p \Omega)} \cdot e^{j \cdot [m \Omega_s + (k+n) \cdot p \Omega] t}, \quad (3.190)$$

gdzie: wszystkie wskaźniki muszą zawierać się w zbiorze liczb całkowitych  $\mathbf{Z}$ .



## IV. Badania laboratoryjne

### 4.1 Wstęp

Pomiary laboratoryjne zostały przeprowadzone dla maszyny dwuklatkowej zbudowanej na podstawie czterobiegunowego stojana (uzwojenie średnicowe) silnika jednoklatkowego Sg-112M4 IE2-4kW produkcji Tamel. Oryginalny wirnik zastąpiono wirnikiem dwuklatkowym z prętami bez skosu, połączonymi wspólnym pierścieniem zwierającym. Ze względów technologicznych pręty klatek (nieizolowane) oraz pierścienie zwierające wykonano z miedzi elektrotechnicznej. Zmodyfikowany wirnik posiada pręty odpowiednio o przekroju kołowym klatki rozruchowej i prostokątnym klatki pracy. W czasie montażu elementy konstrukcyjne obwodów wirnika połączono z pierścieniami stopem srebra. Parametry elektryczne oraz geometryczne prototypowego silnika dwuklatkowego zawarto w poniższej tabeli nr 4.1.

**Tab. 4.1** Dane konstrukcyjne silnika dwuklatkowego przeznaczonego do pomiarów laboratoryjnych.

Napięcie znamionowe	690 V	Prąd znamionowy	8,2 A
Moment znamionowy	18 N·m	Znamionowa prędkość obrotowa	1440 obr/min
Moment bezwładności	0,02 kg·m <sup>2</sup>	Współczynnik tarcia	0,005 N·m·s
<b>Parametry obwodu stojana</b>			
Rezystancja uzwojenia	3 Ω	Indukcyjność rozproszenia	0,02 H
Liczba żłobków	36	Liczba zwojów w zezwoju	51
Poskok uzwojenia	9	Liczba zezwojów na fazę	6
Średnica wewnętrzna	0,118 m	Długość rdzenia	0,115 m
<b>Parametry obwodu wirnika</b>			
Liczba żłobków klatki górnej i dolnej	28	Średnica zewnętrzna	0,1172 m
Rezystancja pręta klatki górnej	$2 \cdot 10^{-4} \Omega$	Rezystancja pręta klatki dolnej	$5 \cdot 10^{-5} \Omega$
Indukcyjność rozproszenia pręta klatki górnej	$1,1 \cdot 10^{-7} \text{ H}$	Indukcyjność rozproszenia pręta klatki dolnej	$1,1 \cdot 10^{-6} \text{ H}$
Rezystancja segmentu pierścienia zwierającego	$7,2 \cdot 10^{-7} \Omega$	Indukcyjność rozproszenia segmentu pierścienia zwierającego	$5,2 \cdot 10^{-9} \text{ H}$

Projekt wirnika opracowano korzystając z pozycji literatury [18], [33], [59]. W celu zachowania takiej samej kategorii badanej maszyny [p.2.5.1] jak silnik wzorcowy z rozdziału drugiego, założono w obliczeniach projektowych 28 prętów klatek, mimo że optymalna wartość dla 36 żłobków obwodu stojana (uzwojenie jednowarstwowe) oraz prętów prostych jest równa 26 [18], [45]. Prócz tego w odróżnieniu od fabrycznej konstrukcji silnika, wirnik doświadczalny nie ma pierścienia pośredniego i posiada ok. 1,5-krotnie większą szczelinę powietrzną (wysokości przesmyk między prętami klatek), niż silnik fabryczny, co z dobrym przybliżeniem skutkuje proporcjonalnym wzrostem prądu magnesującego.

#### 4.2 Program i metodyka pomiarów

Podstawowym celem badań laboratoryjnych było porównanie otrzymanych wyników pomiarów w funkcji momentu bezwładności lub obciążenia z obliczeniami w zadanych warunkach niesymetrii rezystancyjnej wirnika. Przeprowadzone próby miały charakter niszczący i polegały na wycięciu (przerwaniu) części pręta klatki wirnika po stronie napędowej w pobliżu pierścienia zwierającego. Silnik skojarzono w gwiazdę bez przewodu zerowego oraz połączono mechanicznie za pośrednictwem momentomierza/obrotomierza z prądnicą prądu stałego PZM5545 Komel ( $P_n=4,5\text{kW}$ ,  $U_n=230\text{V}$ ,  $I_n=19,6\text{A}$ ,  $I_{fn}=0,86\text{A}$ ) – przypadek pracy pod obciążeniem zewnętrznym i zasilaniu symetrycznym układem napięć trójfazowych. W sytuacji przerwania fazy obwodu stojana (praca bez obciążenia zewnętrznego) i konieczności pomiaru momentu, badaną maszynę dwuklatkową łączono z silnikiem o takim samym wzniosie wału jak również zbliżonym momencie bezwładności (fabryczny silnik jednoklatkowy Sg-112M4). W ten sposób, żeby znacząco nie odbiegać od warunków pracy z obciążeniem momentem bezwładności własnej, wykonano jedynie część pomiarów mających za zadanie sprawdzenie cech jakościowych rozwiązań numerycznych modelu z rozdziału drugiego [p.2.5] i trzeciego [p.3.5]. Wartości chwilowe analizowanych wielkości rejestrowano przez okres 60s z częstotliwością próbkowania 10kHz - zastosowaną aparaturę pomiarową opisano w tabeli nr 4.2.

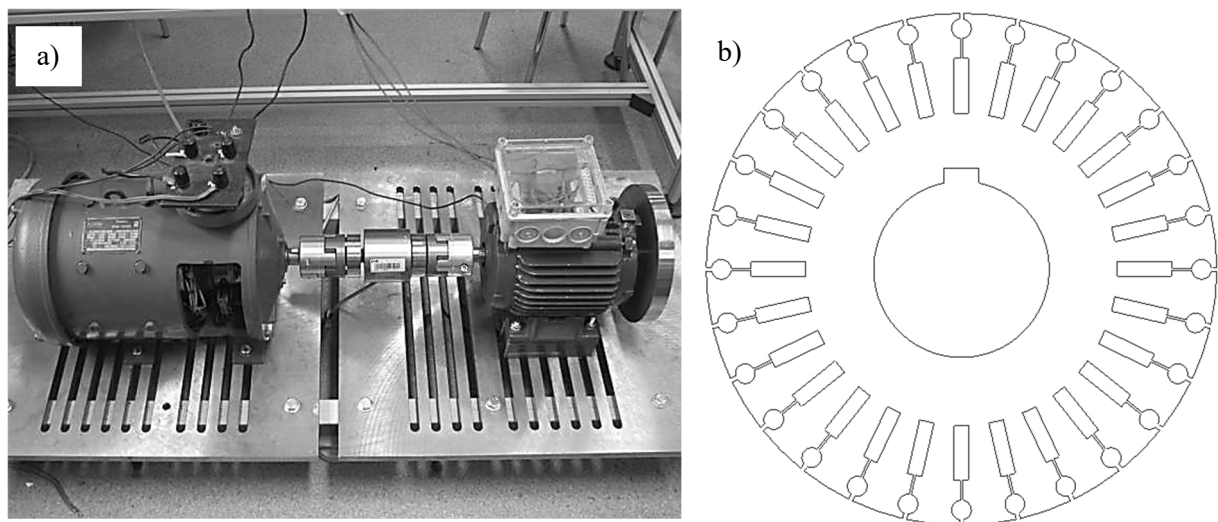
**Tab. 4.2** Urządzenia pomiarowe wykorzystane w badaniach laboratoryjnych.

Lp.	Wielkość	Przetwornik	Zakres pomiarowy
1	Napięcie	Sonda Testec TT-SI9001	700 [V] <sub>p-p</sub>
2	Prąd	Sonda Tektronix A-622	10 [A] <sub>p-p</sub>
3	Moment mechaniczny, prędkość kątowna	KTR DataFlex 22/50	50 [Nm] <sub>p-p</sub>
4	Sygnaly napięciowe z przetworników pomiarowych	Karta NI-6259: 16bit	10 [V] <sub>p-p</sub>

Zakres pomiarów obejmował ustaloną pracę silnika z uszkodzeniem prętów klatki górnej oraz klatki dolnej:

- regulowane zasilanie symetrycznym układem napięć trójfazowych ze zmiennym obciążeniem mechanicznym i momentem bezwładności – [p.4.3.a],
- regulowane zasilanie dwufazowe (przerwa w przewodzie fazowym stojana) bez obciążenia zewnętrznego ze zmiennym momentem bezwładności – [4.3.b].

Moment obciążenia odniesiono względem składowej podstawowej prądu fazowego - pomiary wykonano dla wybranych wartości prądu stojana silnika. Nastawy momentu bezwładności w układzie napędowym zostały zrealizowane za pomocą wymiennych kół masowych  $J=[0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1]$   $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ . Wypadkowy moment bezwładności został określony jako suma momentów: własnego prądnicy ( $0,06 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ), badanej maszyny i danego koła masowego. Stawisko laboratoryjne oraz eksperymentalny wirnik dwuklatkowy ilustruje rysunek 4.1.



**Rys. 4.1** Widok: a) układu napędowego przeznaczonego do pomiarów diagnostycznych silnika dwuklatkowego małej mocy, b) wykroju blachy wirnika.

### 4.3 Wyniki pomiarów i obliczeń

#### a) Zasilanie symetrycznym układem napięć trójfazowych

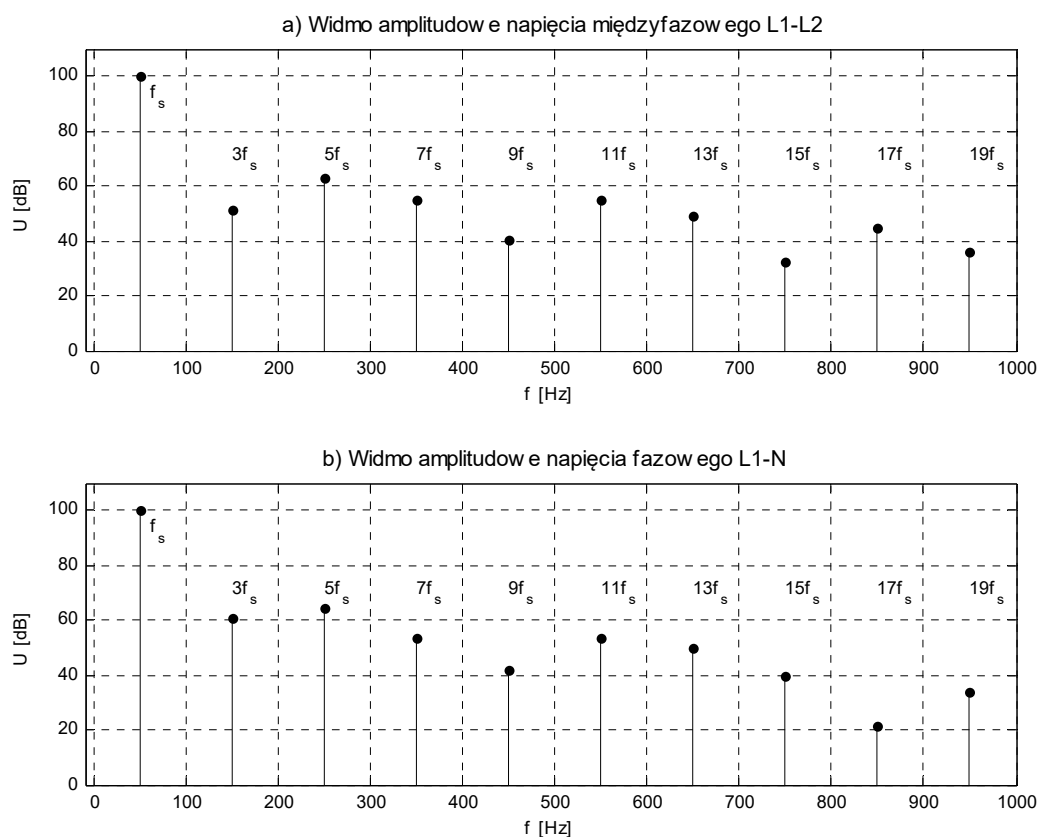
Pomiary i obliczenia opracowano w sekwencji od przerwy w pręcie klatki górnej oraz nieuszkodzonym pręcie klatki dolnej (1p-0g) do łącznej niesymetrii trzech prętów obwodu rozruchowego oraz pracy (3p-3g). Uszkodzeniom podlegały pręty wirnika leżące obok i pod sobą. Z racji parametrów konstrukcyjnych silnika w modelu bazowym – dyskretny bilans harmonicznych uwzględniono tylko dwie pierwsze składowe przepływu najwyższego rzędu: 1p i 5p.

Założone parametry rozwiązywanego układu równań stanu ustalonego metodą bilansu harmonicznych bezpośrednio w dziedzinie częstotliwości i czasu przedstawia tabela nr 4.3.

**Tab. 4.3** Parametry charakteryzujące rozwiązywane równania met. bilansu harmonicznych.

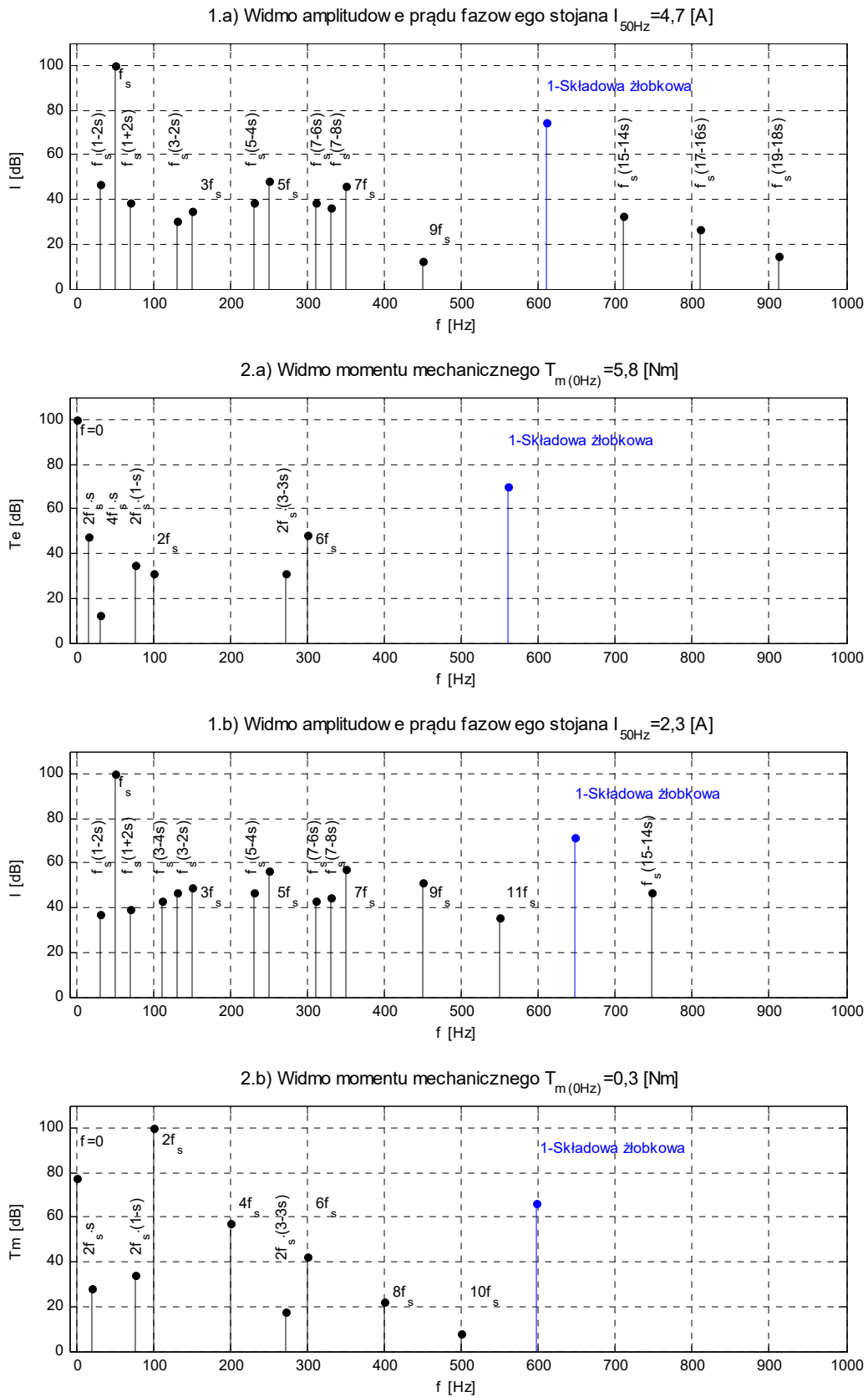
Metoda bilansu harmonicznych w dziedzinie	Liczba harmonicznych przepływu	Wymiar układu równań
- częstotliwości	50	18000x18000
- czasu	2; $R=12, S=12$	38125x38125

Współczynnik modelujący przerwę w pręcie klatki wirnika wynosił 20. Za poziom odniesienia przykładowych widm amplitudowych w skali decybelowej przyjęto wartość prądu lub momentu o wartości  $10^{-5}$ . Badany silnik był zasilany pośrednio z sieci miejskiej (układ sieciowy IT) przez autotransformator obniżający napięcie międzyfazowe do wartości 400V, tak aby zachować zakres pracy w liniowej części charakterystyki magnesowania. Różnice między napięciami fazowymi nie przekraczały 3V. Przykładowe widma amplitudowe napięć zasilających, prądów oraz momentów pokazano na poniższych rysunkach (4.2)-(4.3); silnik z symetrycznym wewnętrznym stojanem i wirnikiem.



**Rys. 4.2** Widmo amplitudowe napięcia wyjściowego z autotransformatora w dziedzinie częstotliwości: a) międzyfazowe L1-L2, b) fazowe między L1 i punktem gwiazdowym silnika.

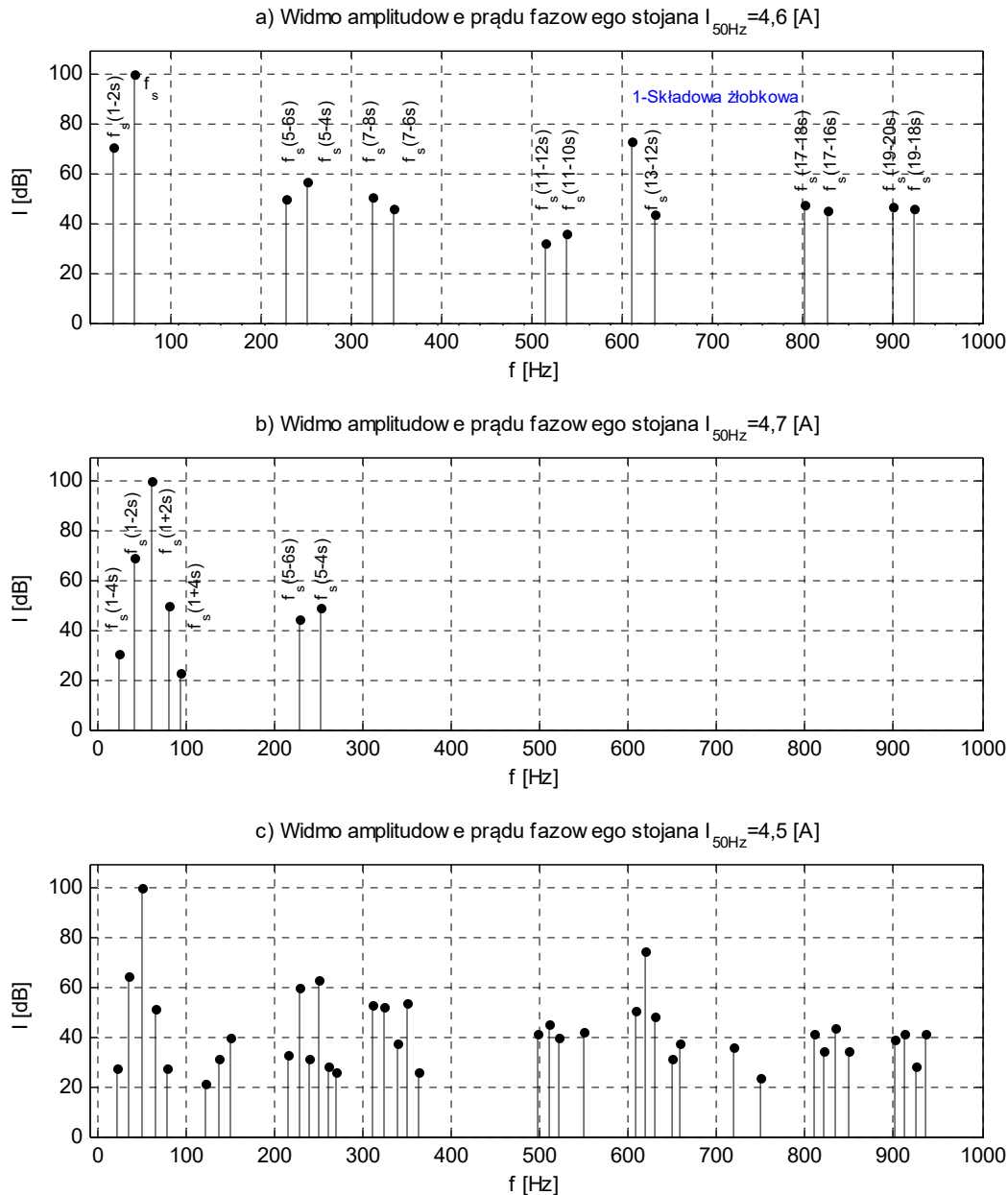
- widmo amplitudowe prądu fazowego stojana a)  $s=0,04$ ,  $J=4 \cdot J_w$ ; b)  $s=0,002$ ,  $J=2 \cdot J_w$ :



Rys. 4.3 Widmo amplitudowe prądu i momentu mechanicznego w dziedzinie częstotliwości, a) silnik obustronnie symetryczny, b) przerwa w trzeciej fazie zasilania – symetryczny wirnik.

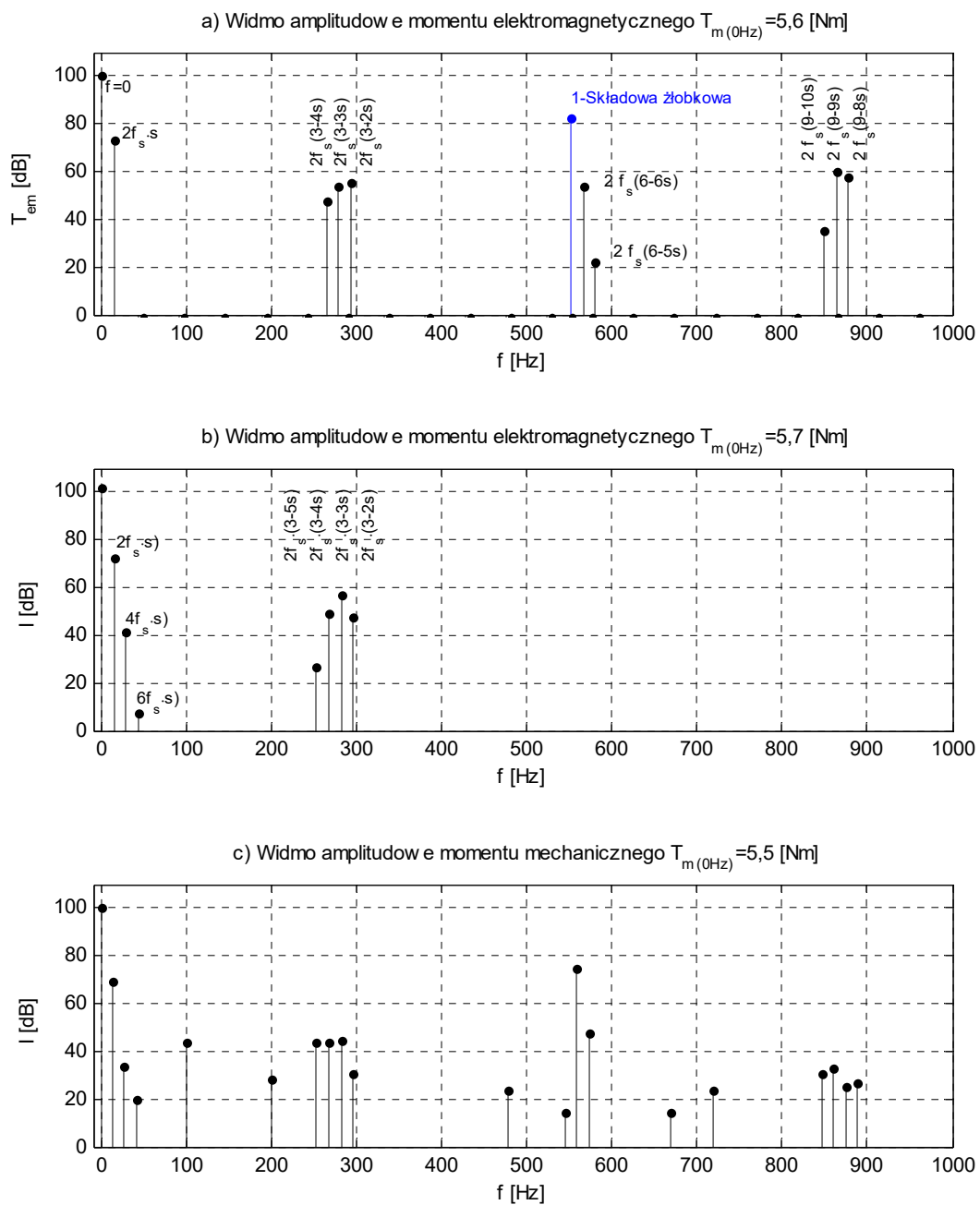
Opracowane widma amplitudowe prądów, a także momentu elektromagnetycznego lub mechanicznego (rys. nr 4.4-4.5) analizowano głównie pod kątem zgodności cech jakościowych występujących w przebiegach czasowych tych wielkości. W celu zweryfikowania zbieżności ilościowej pomiarów i obliczeń sporządzono charakterystyki zmienności wybranych sygnałów diagnostycznych, które porównano z metodą dyskretnego bilansu harmoniczných.

- widmo amplitudowe prądu fazowego stojana  $J=4 \cdot J_w$ ,  $s=0,04$ :



**Rys. 4.4** Widmo amplitudowe prądu fazowego stojana, silnik zwarty wspólnym pierścieniem, uszkodzony pręt klatki rozruchowej i klatki pracy, a) obliczenia: metoda bilansu harmoniczných - model liniowy, b) obliczenia: metoda dyskretnego bilansu harmoniczných - model nieliniowy strukturalnie  $J=4 \cdot J_w$ , c) wynik pomiarów  $J=4 \cdot J_w$ .

- widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego lub mechanicznego  $J=4 \cdot J_w$ ,  $s=0,04$ :



**Rys. 4.5** Widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego i mechanicznego, silnik zwarty wspólnym pierścieniem, uszkodzony pręt klatki rozruchowej i klatki pracy, a) obliczenia: metoda bilansu harmoniczných - model liniowy, b) obliczenia: metoda dyskretnego bilansu harmoniczných - model nieliniowy strukturalnie  $J=4 \cdot J_w$ , c) wynik pomiarów  $J=4 \cdot J_w$ .

Przykładowe wyniki pomiarów i obliczeń pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków dotyczących porównywanych sygnałów diagnostycznych,

- **metoda bilansu harmoniczných** w dziedzinie częstotliwości dla stałej prędkości kątowej:

- a) w przedziale pasma częstotliwości 150-650Hz (pierwsza składowa żłobkowa) obserwuje się dość dobrą korelację ilościową między prądami oraz momentami, względna różnica wartości składowych nie przekracza 15dB, poza tym zakresem w widmie zmierzonego momentu zauważalne jest silne tłumienie spowodowane elastycznym połączeniem silnika z prądnicą,
- b) harmoniczne żłobkowe widma prądu posiadają praktycznie takie same amplitudy, przebiegi czasowe otrzymane z pomiarów zawierają dodatkowe składniki pochodzące od niesymetrii napięć i zawartości wyższych harmonicznym czasowych,
- c) pozostałe składowe oznaczają zgodność jakościową pomiarów z obliczeniami przy pominięciu oddziaływań elektromechanicznych i naturalnej niesymetrii występującej w układzie pomiarowym - jako bardziej właściwy sposób analizy pasma niskich częstotliwości wybrano metodę dyskretnego bilansu harmonicznym,

- **algorytm bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego** w dziedzinie czasu:

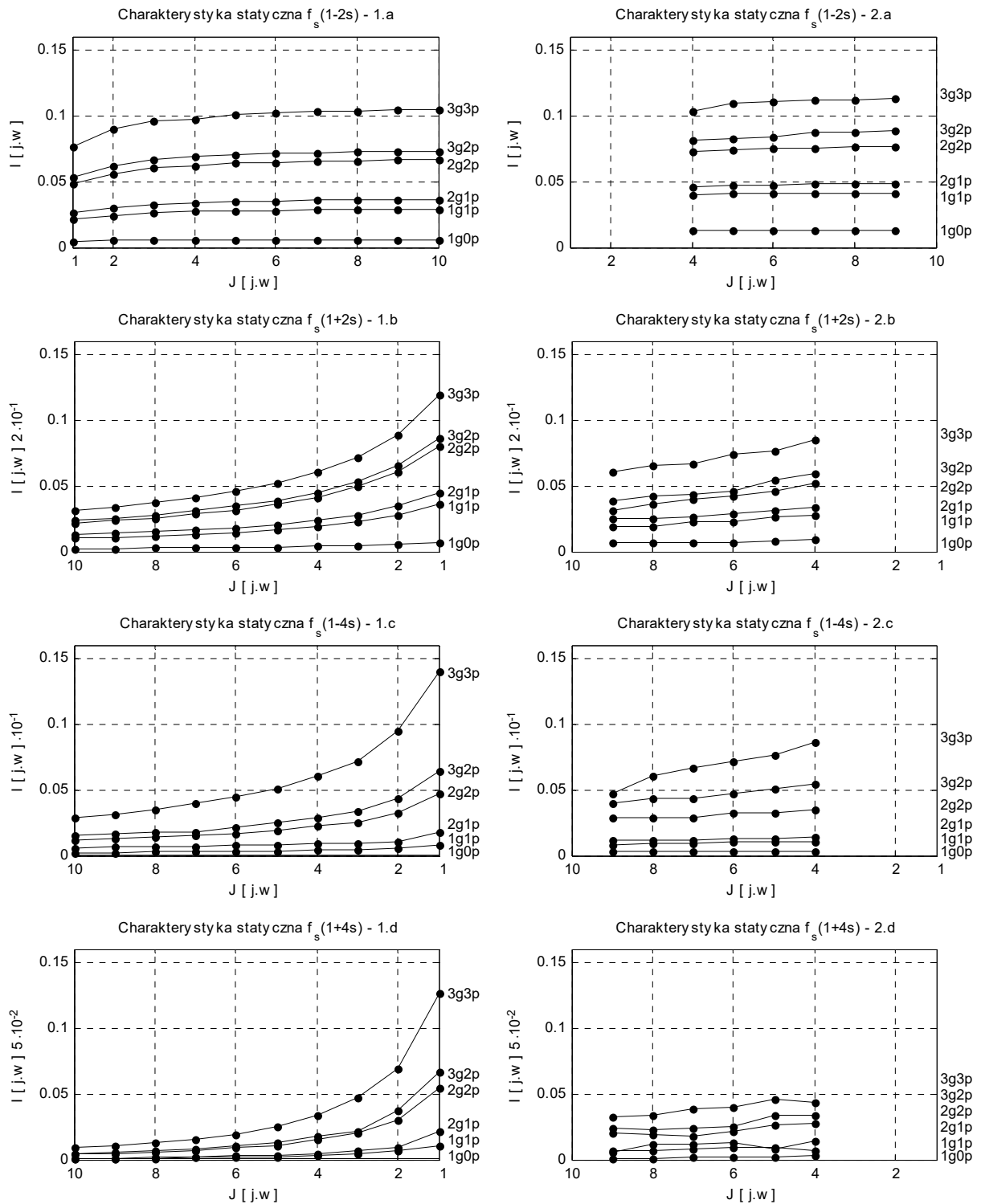
- d) składowe niskoczęstotliwościowe widma prądu fazowego i momentu uzyskane teoretycznie są mniejsze względem zmierzonych wielkości średnio o 5dB, natomiast dla komponent związanych z piątą harmoniczną przestrzenną maksymalna różnica wynosi ok. 12 dB,
- e) dla zastosowanej metody obliczeń, w zakresie użyteczności modelu bazowego (liczba możliwych do uwzględnienia harmonicznym przepływu, zasilanie monoharmoniczne) pomiary potwierdzają wystąpienie identycznych efektów jakościowych.

Warto podkreślić, że w przedstawionych widmach amplitudowych uzyskanych doświadczalnie, celowo pominięto sygnały losowe stanowiące głównie tło badanych przebiegów czasowych, a więc takich, które były niepowtarzalne przy kolejnych powtórzeniach pomiarów dla tego samego przypadku uszkodzenia. Dodatkowymi czynnikami warunkującymi zgodność ilościową mierzonych i obliczanych wielkości jest uproszczona metoda wyznaczania współczynników indukcyjności występujących w równaniach oraz próba analizy porównawczej obliczonego momentu elektromagnetycznego z momentem mechanicznym zawierającym szereg składników tłumiących nieuwzględnionych za pomocą modelu bazowego. Z tych powodów, jak i ze względu na wykorzystanie procedury szybkiej transformaty Fouriera w przetwarzaniu danych pomiarowych, należy przyjąć, że odstępstwa ilościowe są również spowodowane błędem kątowym, o przyczynach którego wspomniano w poprzednich rozdziałach. Pozostałe rezultaty analizy porównawczej prądów i momentów diagnostycznych w funkcji bezwładności, momentu obciążenia układu napędowego oraz poziomu niesymetrii reprezentują charakterystyki statyczne z rysunków nr 4.6-4.10. Wszystkie wyznaczone wielkości w tym,



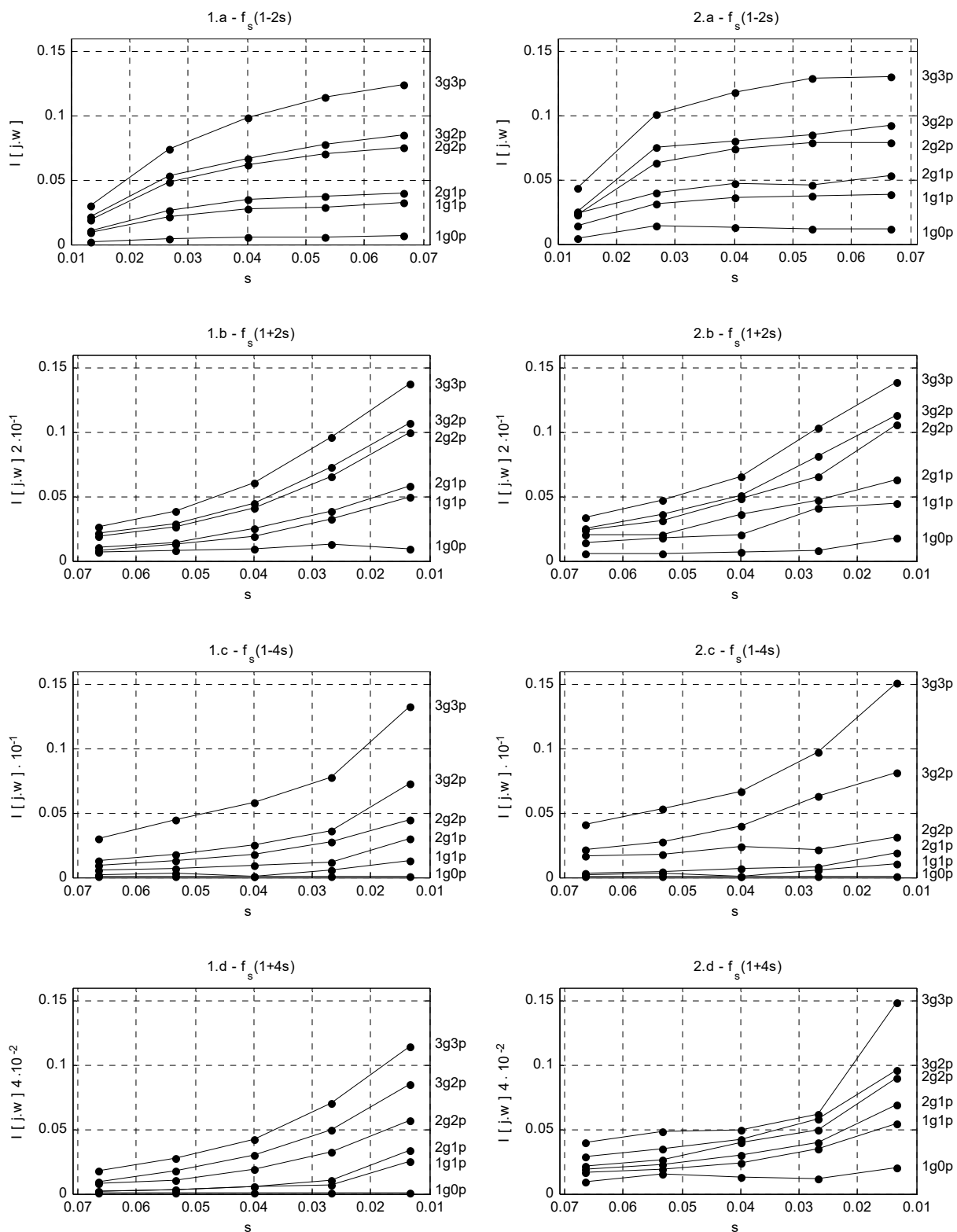
jak i dla pozostałych punktów odniesiono do składowej sieciowej prądu lub wypadkowego momentu asynchronicznego.

- wyniki obliczeń i pomiarów w funkcji momentu bezwładności własnej  $s=0,04$ :



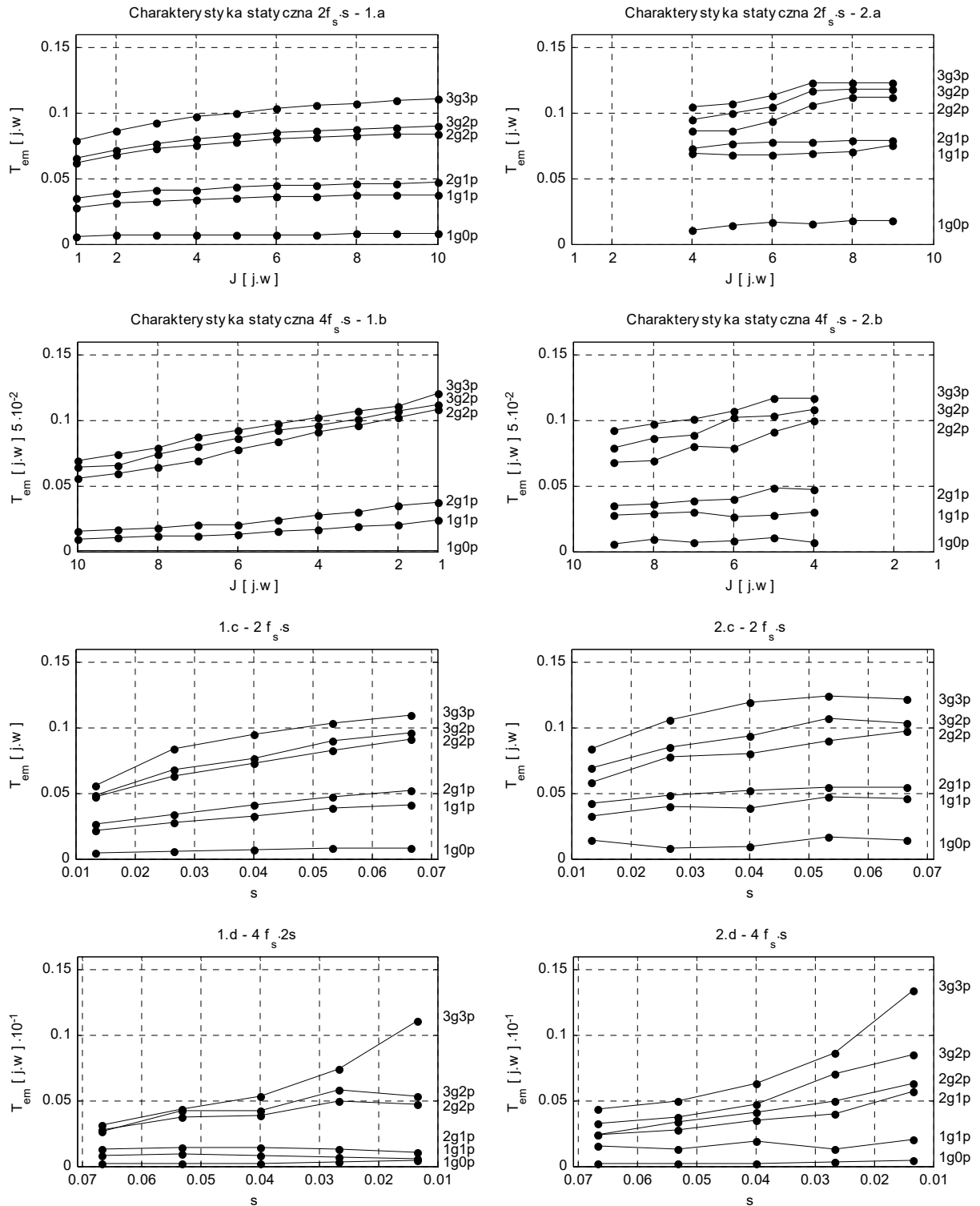
Rys. 4.6 Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądu stojana w funkcji momentu bezwładności: 1) obliczenia, 2) pomiar.

- wyniki obliczeń i pomiarów w funkcji momentu zewnętrznego,  $J=4 \cdot J_w$ :



**Rys. 4.7** Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądu stojana w funkcji momentu zewnętrznego: 1) obliczenia, 2) pomiar.

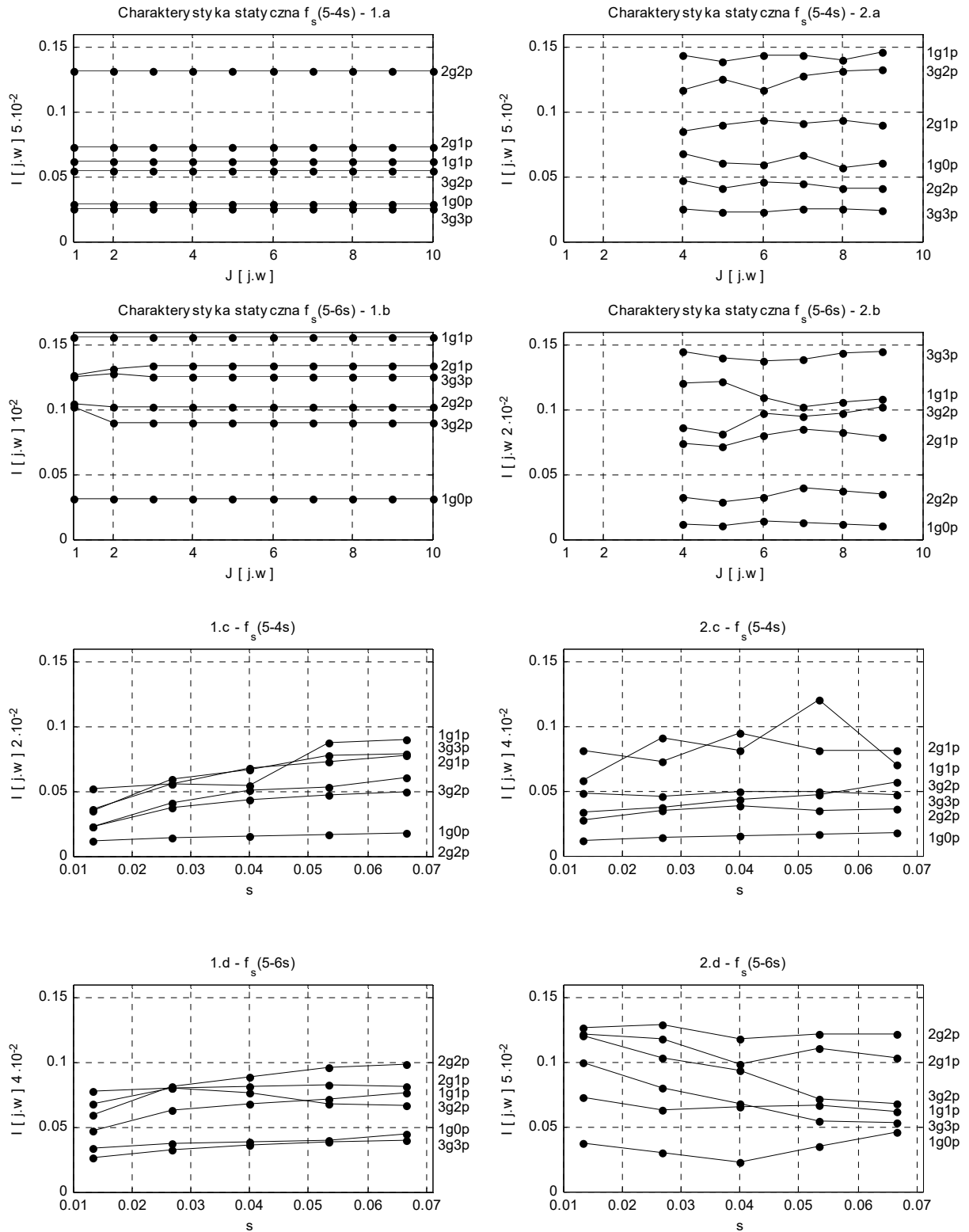
- wyniki obliczeń i pomiarów w funkcji momentu bezwładności własnej  $s=0,04$  lub obciążenia  $J=4 \cdot J_w$ :



**Rys. 4.8** Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma momentu elektromagnetycznego (1) i mechanicznego (2) w funkcji momentu bezwładności lub momentu zewnętrznego: 1) obliczenia, 2) pomiar.

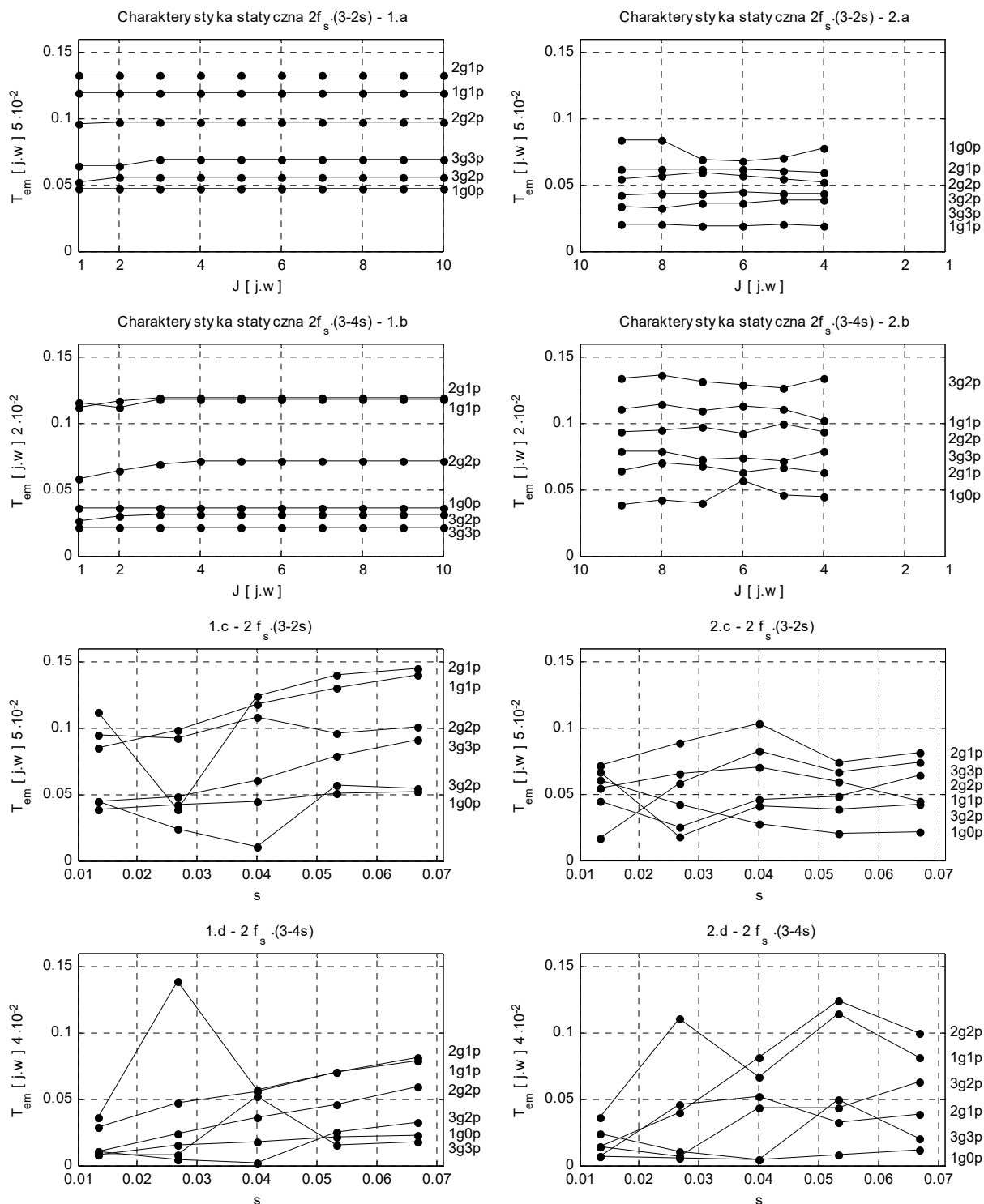
Zestawione wyniki ilościowe tych samych sygnałów z zakresu niskich częstotliwości pozwalają stwierdzić, że względne różnice między prądami  $f_s \cdot (1-2s)$  i  $f_s \cdot (1+2s)$  oraz momentem przemiennym  $2f_s \cdot s$  nie przekraczają 25%. Pozostałe składowe będące efektem wahań prędkości kątowej dla przyjętego kryterium oceny zgodności (błąd względny) pomiarów z obliczeniami wynoszą maksymalnie 40%. Mimo stosunkowo znacznej rozbieżności otrzymanych wyników szczególnie w zakresie prądów  $f_s \cdot (1-4s)$ ,  $f_s \cdot (1+4s)$ , jak również momentu  $4f_s \cdot s$ , wykresy statyczne tych wielkości wraz ze zmianą momentu bezwładności przyjmują jakościowo taki sam kształt. Podobnie można opisać przebieg charakterystyk zmienności obserwowanych harmonicznym widm amplitudowych odniesionych względem otrzymanych wartości w funkcji momentu obciążenia, gdzie obliczone oraz zmierzone sygnały diagnostyczne cechuje identyczny trend ich przebiegu. Z przeprowadzonych badań w przedziale średnich częstotliwości tj. powyżej 100Hz wynika, że dane uzyskane eksperymentalnie zasadniczo odbiegają od wielkości modelowanych teoretycznie. Dla tego przypadku, można zaobserwować tylko częściową zgodność zmienności prądów fazowych i momentów w funkcji parametrów układu mechanicznego. Dotyczy to przede wszystkim punktów mieszczących się w przedziale gwarantowanych zdolności metrologicznych wykorzystanej aparatury. Poza tym, podstawowymi czynnikami utrudniającymi weryfikację obliczeń składowych z przewidywalnie nieznacznymi wartościami jest liczba uwzględnianych harmonicznym przestrzennych oraz szybsze narastanie względnej różnicy wielkości mierzonych i poszukiwanych numerycznie wraz z zbliżaniem się amplitudy obserwowanych sygnałów do granicy błędu metody algorytmu iteracyjnego. Z tych powodów, wyznaczone za pomocą procedury czasowego operatora różniczkowania sygnały prądów diagnostycznych  $f_s \cdot (5-4s)$  oraz  $f_s \cdot (5-6s)$  praktycznie nie zależą od momentu bezwładności, co zachodzi przy obserwacji przebiegu krzywych momentu elektromagnetycznego  $2f_s \cdot (3-2s)$  i  $2f_s \cdot (3-4s)$ . Zdecydowanie większe trudności napotyka się stosując analizę porównawczą prądów oraz momentów wyrażonych w funkcji obciążenia, ponieważ można wykazać jedynie podobieństwo ilościowe obliczeń numerycznych z pomiarami na poziomie tego samego rzędu wielkości – położenia miejsc geometrycznych odpowiadające wybranym uszkodzeniom tylko w nielicznych punktach są ze sobą zbieżne. Niemniej pomimo występujących różnic między obliczeniami oraz danymi uzyskanymi eksperymentalnie, zilustrowane przykłady potwierdzają w wystarczającym stopniu słuszność założeń analitycznych z rozdziału trzeciego, dotyczących wpływu parametrów układu mechanicznego na postać i właściwości widm amplitudowych poza pasmem częstotliwości skupionych wokół składowej podstawowej prądów lub momentu elektromagnetycznego.

- wyniki obliczeń i pomiarów w funkcji momentu bezwładności własnej  $s=0,04$  lub obciążenia  $J=4 \cdot J_w$  - pasmo średnich częstotliwości:



**Rys. 4.9** Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądu fazowego w funkcji momentu bezwładności i momentu zewnętrznego: 1) obliczenia, 2) pomiar.

- wyniki obliczeń i pomiarów w funkcji momentu bezwładności własnej  $s=0,04$  lub obciążenia  $J=4 \cdot J_w$  - pasmo średnich częstotliwości:



**Rys. 4.10** Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma momentu elektromagnetycznego lub mechanicznego w funkcji momentu bezwładności i momentu zewnętrznego: 1) obliczenia, 2) pomiar.

**b) Zasilanie dwufazowe**

W tym stanie pracy silnika pomiary i obliczenia wykonano dla takich samych uszkodzeń wirnika jak w poprzednim punkcie. Zmianom nie uległ wymiar układu równań i liczba współczynników indukcyjności wzajemnych (tabela nr 4.3). Wybraną fazę zasilania obwodu stojana przerywano po etapie rozruchu napięciowego z autotransformatora. Zgodność mierzonych prądów oraz generowanego momentu z obliczeniami wykonano osobno w funkcji momentu bezwładności i wartości napięcia zasilającego. Właściwości jakościowe analizowanego przypadku przedstawiono na rysunkach nr 4.11-4.12, gdzie kolorem jasnoszarym zaznaczono dodatkowe składowe wytwarzane w warunkach dwustronnej niesymetrii rezystancyjnej silnika. Odpowiednio, jak miało to miejsce w poprzednim punkcie (zasilanie symetrycznym układem napięć trójfazowych), wyniki pomiarów i obliczeń porównano pod względem cech jakościowych oraz ilościowych z metodą bilansu harmonicznym przy stałej, a także zmiennej prędkości kątowej, które prowadzą do następujących spostrzeżeń,

- **rozwiązanie liniowego układu równań** w dziedzinie częstotliwości:

a) analizowane widma zawierają identyczne sygnały diagnostyczne na tych samych pozycjach z uwzględnieniem możliwości odwzorowania prądów i momentu elektromagnetycznego, gdyby pominąć oddziaływania elektromechaniczne oraz zawartość wyższych harmonicznym czasowych napięcia,

b) amplitudy składowych diagnostycznych określone numerycznie i zmierzone różnią się od siebie nie więcej niż o 10dB w zakresie pasma 100Hz-450Hz oraz 15dB dla pozostałej części widma amplitudowego (0Hz-100Hz, 450Hz-1000Hz) z wyłączeniem składowej podstawowej prądu lub momentu do których odniesiono prezentowane wyniki,

- **rozwiązanie iteracyjne nieliniowego układu równań** bezpośrednio w dziedzinie czasu:

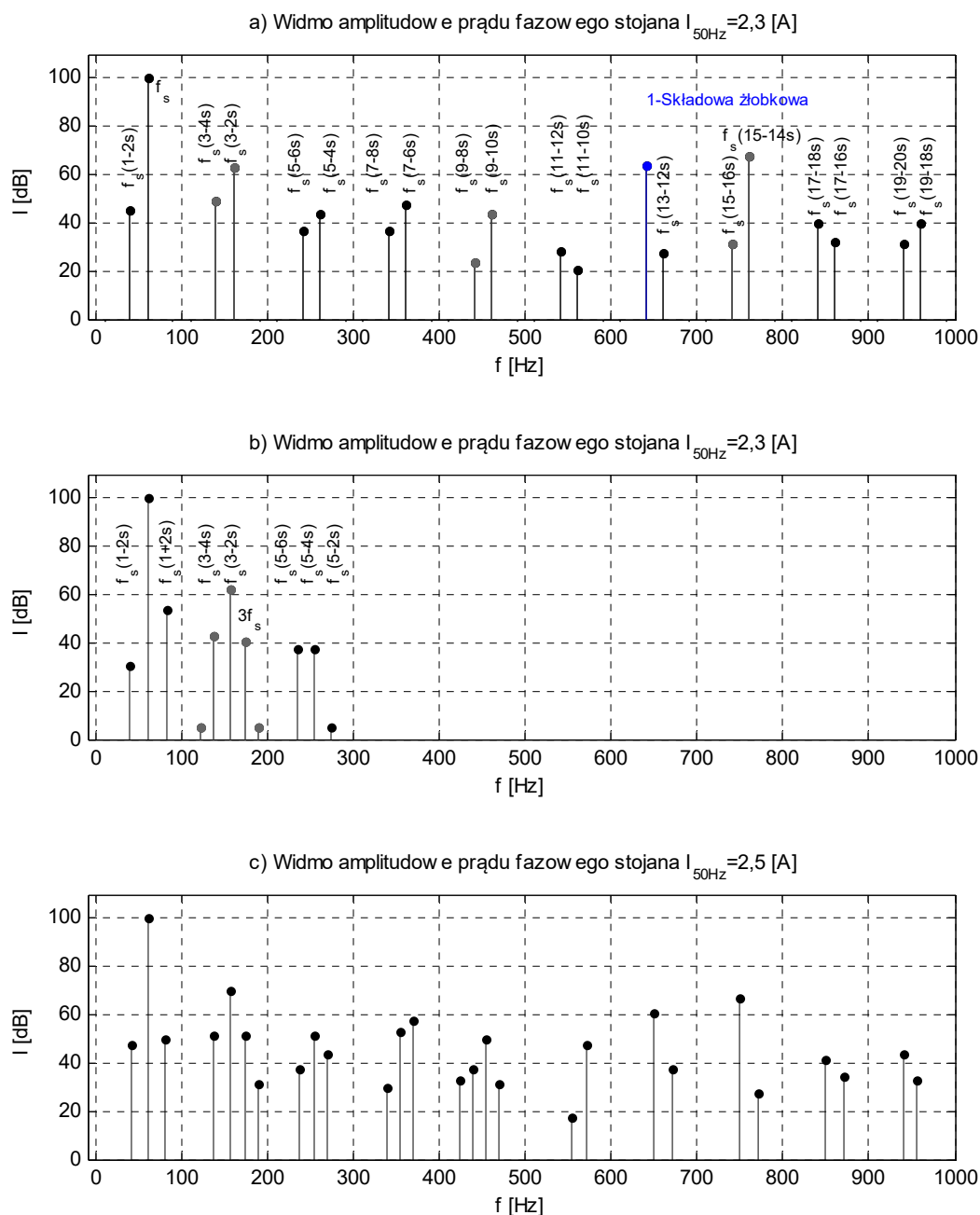
c) w przedziale rozwiązania modelu bazowego widoczne jest wystąpienie takich samych prądów i momentów pochodzących od łącznej niesymetrii rezystancyjnej stojana i wirnika,

d) widma zmierzone zawierają dodatkowe harmoniczne poślizgowe rzędu „5p” wytwarzane wskutek istnienia sprzężeń z składowymi przestrzennymi nieujętych w modelu bazowym,

e) ocena składowych czasowo-przestrzennych generowanych w konsekwencji uwzględnienia równania mechanicznego sprawia duże trudności ze względu na odkształcenie napięcia zasilającego (geometryczne sumowanie prądów stojana z tymi samymi pulsacjami, ale pochodzących z różnych źródeł). W oparciu o widma amplitudowe, moment bezwładności ma ograni-

zione znaczenie przy ustalaniu wartości sygnałów diagnostycznych dla przedziału częstotliwości przekraczającego 100Hz niezależnie od stopnia asymetrii wirnika, co potwierdzają również charakterystyki statyczne z rysunków nr 4.13 oraz 4.14.

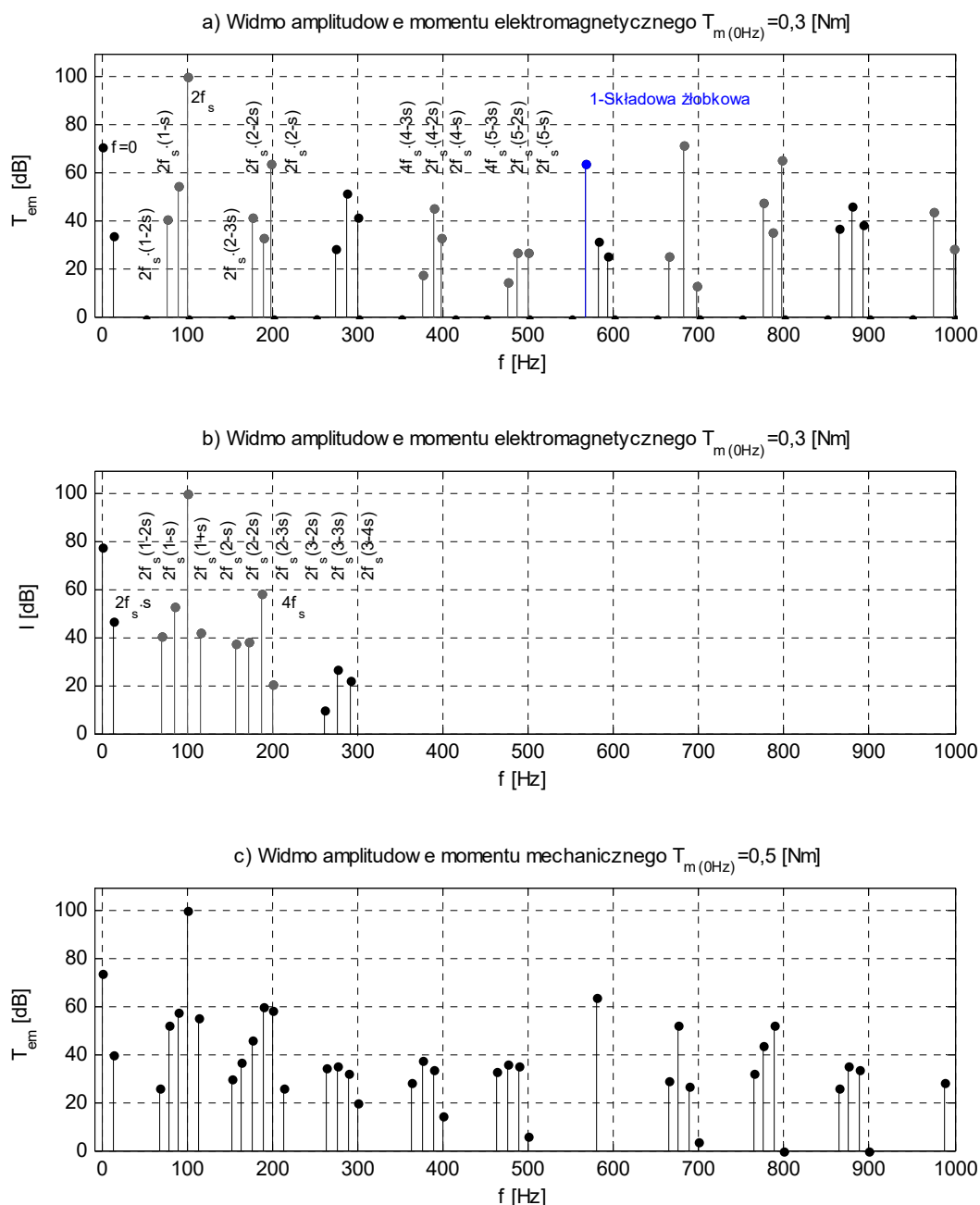
- widmo amplitudowe prądu fazowego stojana  $J=2 \cdot J_w$  (b, c),  $s=0,002$ :



**Rys. 4.11** Widmo amplitudowe prądu fazowego stojana, silnik zwarty wspólnym pierścieniem, przerwa w fazie, uszkodzony pręt klatki rozruchowej i klatki pracy, a) obliczenia: metoda bilansu harmoniczných - model liniowy, b) obliczenia: metoda dyskretnego bilansu harmoniczných - model nieliniowy strukturalnie  $J=2 \cdot J_w$ , c) wynik pomiarów  $J=2 \cdot J_w$ .



- widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego lub mechanicznego odniesione do momentu o podwójnej składowej sieciowej  $J=2 \cdot J_w$  (b, c),  $s=0,002$ :

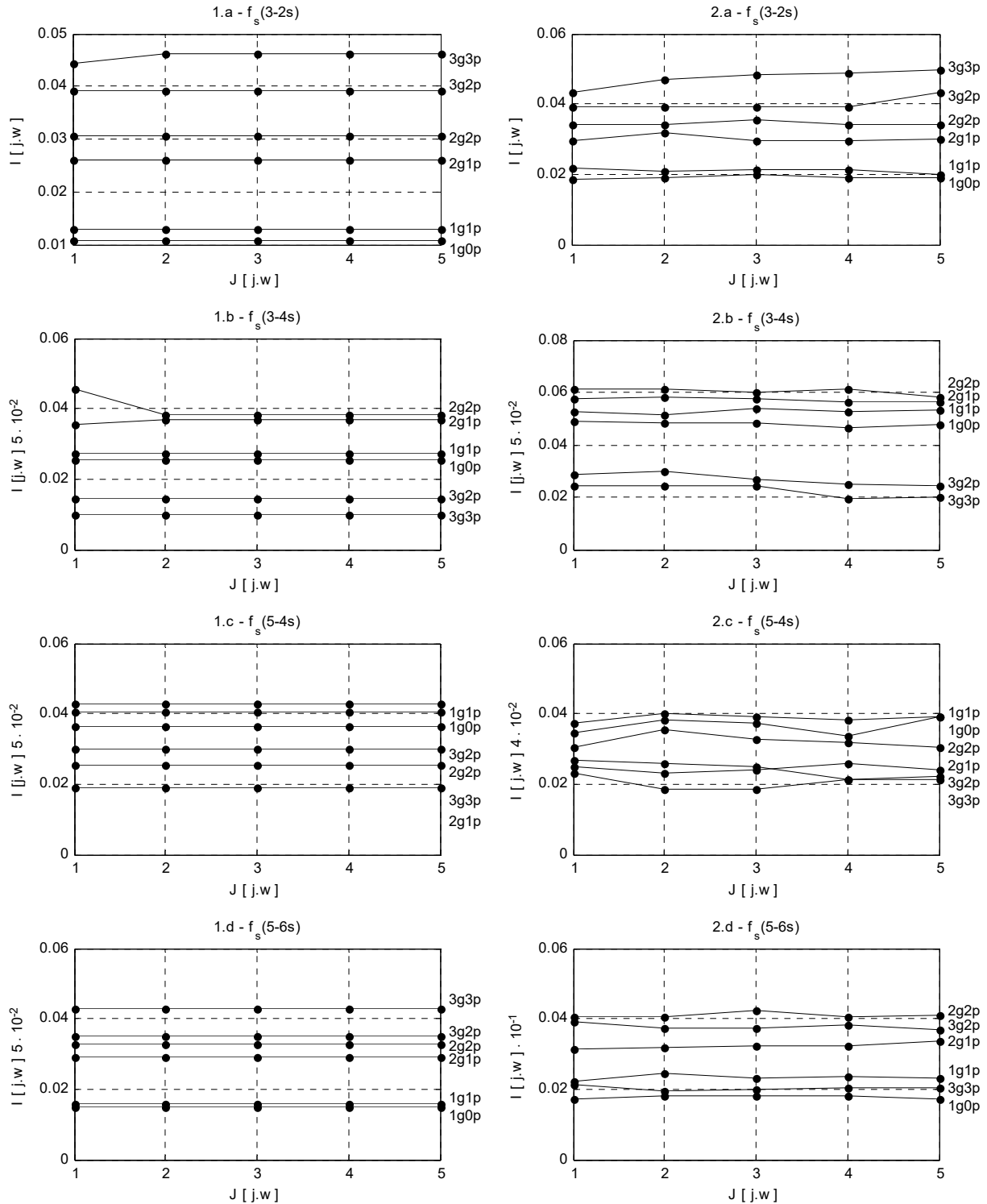


**Rys. 4.12** Widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego lub mechanicznego, silnik zwarty wspólnym pierścieniem, uszkodzony pręt klatki rozruchowej i klatki pracy, a) obliczenia: metoda bilansu harmonicznego - model liniowy, b) obliczenia: metoda dyskretnego bilansu harmonicznego – model nieliniowy strukturalnie  $J=2 \cdot J_w$ , c) wynik pomiarów  $J=2 \cdot J_w$ .

Niżej pokazane wykresy zmienności prądów obejmują poza krzywymi w funkcji momentu bezwładności także badania przebiegu tych samych sygnałów dla regulowanej wartości napięcia przy  $J=J_w$ . Jak łatwo przewidzieć, ze względu na pracę w liniowej części charaktery-

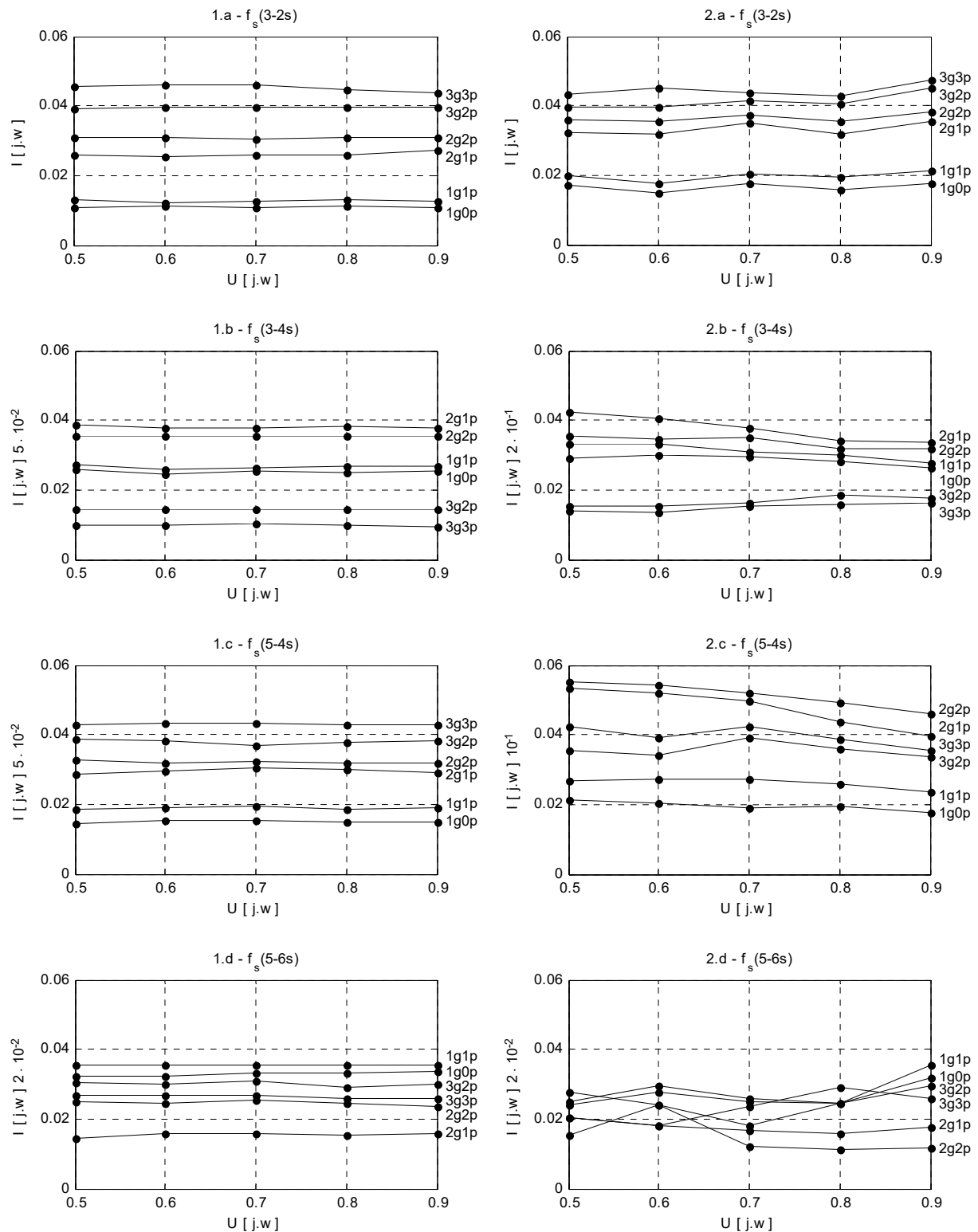
styki magnesowania, stosunkowo daleko idące obniżenie napięcia zasilania z dobrym przybliżeniem nie powoduje względnej zmiany prądów diagnostycznych. Opisany efekt, nabiera istotnego znaczenia w badaniu maszyn WN, o czym wspomniano w ostatnim podpunkcie 4.4.

- wyniki obliczeń i pomiarów w funkcji momentu bezwładności własnej  $s=0,002$ :



**Rys. 4.13** Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądu fazowego w funkcji momentu bezwładności, 1) obliczenia, 2) pomiar.

- wyniki obliczeń i pomiarów w funkcji napięcia zasilającego  $J=J_w$ ,  $s=0,002$ :



**Rys. 4.14** Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądu fazowego w funkcji napięcia zasilającego, 1) obliczenia, 2) pomiar.

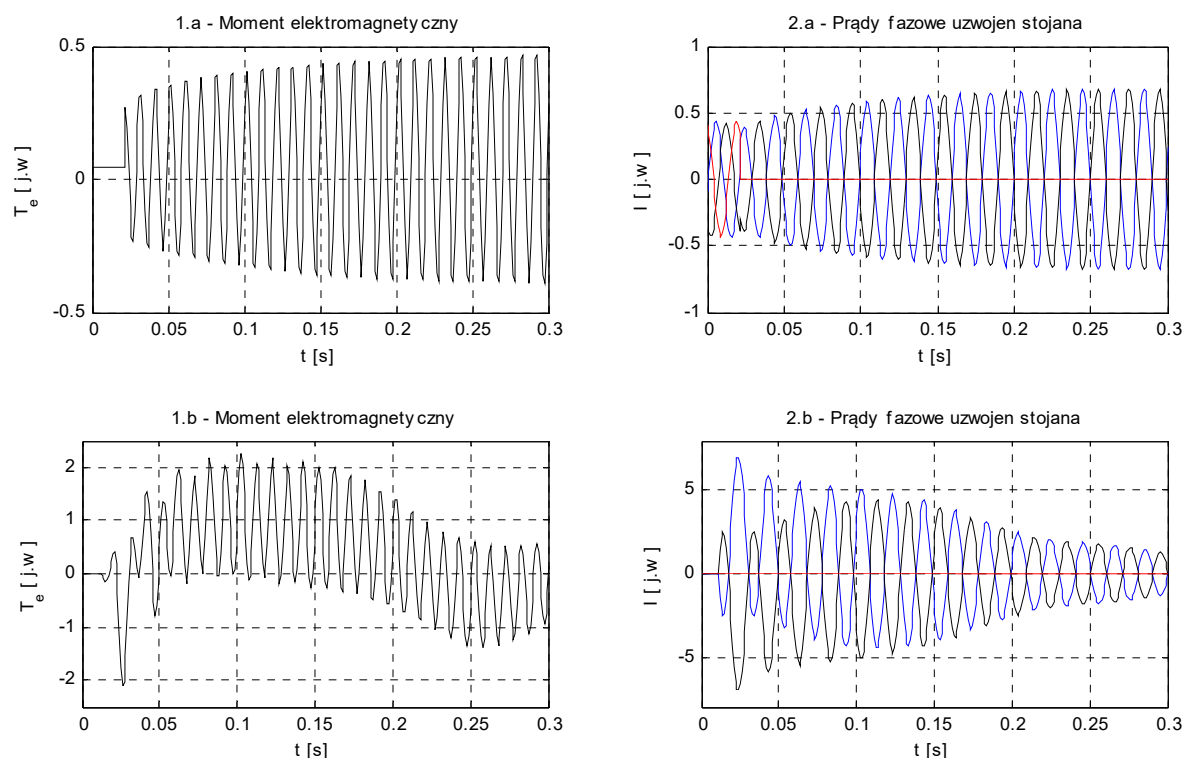
Wybrane do analizy względne charakterystyki statyczne sygnałów diagnostycznych w szerokim zakresie zmienności momentu bezwładności i napięcia, wyznaczone z algorytmu iteracyjnego zachowują praktycznie stałą wartość. Jedynie część prądów z rysunków nr 4.13-4.14 dla momentu bezwładności własnej ulega nieznacznemu, choć widocznemu odchyleniu od linii prostej. Adekwatne cechy z dostatecznie dobrym przybliżeniem ilościowym i jakościowym posiadają krzywe pomiarowe  $f_s \cdot (3-2s)$  oraz  $f_s \cdot (3-4s)$ . Pozostałe zmierzone prądy wyłącznie w ograniczonym zakresie zachowują podobny kształt jak składowe wyznaczone numerycznie.

#### 4.4 Wnioski z pomiarów laboratoryjnych

Przedstawione wyniki badań eksperymentalnych potwierdziły poprawność opracowanych metod bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego silnika dwuklatkowego z niesymetrią rezystancyjną wirnika. W analizowanych przypadkach, gdy porównywano wyniki pomiarów z obliczeniami posłużono się modelem uproszczonym, który pomija m.in. nieliniowość typu parametrycznego stanowiącą jedną ze znanych przyczyn modyfikacji przebiegów czasowych prądu i momentu elektromagnetycznego również dla silnika symetrycznego. W celu częściowego wyeliminowania zjawiska nasycenia obwodu magnetycznego, uzwojenia stojana zasilano napięciem o trzykrotnie obniżonej wartości względem napięcia znamionowego. Z tych powodów należy mieć na uwadze, że widma zmierzone przy nominalnym zasilaniu mogą być znacząco różne ilościowo i jakościowo od przykładów omówionych w tej części pracy.

Ważnym aspektem praktycznym oraz teoretycznym dotyczącym przede wszystkim diagnozowania klatki rozruchowej maszyn wysokonapięciowych średniej i dużej mocy jest problem bezpiecznego przerwania jednej fazy zasilania. Z założenia rozruch silnika trójfazowego odbywa się w układzie symetrycznego źródła napięć trójfazowych co sprawia, że wyłączenie uzwojenia stojana można przeprowadzić - podczas wybiegu przy wcześniej ustalonej prędkości kątowej wirnika i ponownym załączeniu silnika, tylko do dwóch faz wymuszenia lub bezpośrednio przerywając jeden z przewodów za pomocą odpowiedniego układu. W pierwszym przypadku załączenie silnika powinno być przeprowadzone przy zerowym napięciu rotacji, chcąc uniknąć nadmiernych udarów prądów i momentu przekraczających wielokrotnie wartości znamionowe. Drugi sposób wymaga zastosowania wyłącznika mocy z systemem gaszącym falę przepięciową. W celu dodatkowego złagodzenia zjawisk przejściowych należałoby takie pomiary wykonać za pomocą regulowanych źródeł napięcia o obniżonej wartości. Przeważnie zakłady remontowe posiadają układy płynnej lub skokowej regulacji napięcia w postaci przetwornic elektromaszynowych oraz transformatorów z odczepami, a same maszyny

są testowane bez obciążenia zewnętrznego. Aby sprawdzić zachowanie się silnika w chwili przzerwania jednej fazy wykonano obliczenia całkując równania stanu maszyny zwartej osobnymi pierścieniami z tabeli nr 2.2. W przedstawionych niżej wynikach przyjęto uszkodzenie pięciu prętów klatki rozruchowej oraz klatki pracy położonych w tych samych żłobkach przez dwudziestokrotne powiększenie ich rezystancji. Przerwę w obwodzie zasilającym obwód stojana modelowano włączając do trzeciej fazy impedancję o wartości  $2k\Omega$ .



**Rys. 4.15** Obliczone przebiegi czasowe metodą całkowania numerycznego dla silnika średniej mocy z [p.2.5] zwartego osobnymi pierścieniami, 1. moment elektromagnetyczny, 2. prądy fazowe obwodu stojana: a) przerwanie fazy zasilania w ustalonym stanie pracy przy napięciu znamionowym, b) załączenie dwóch faz zasilania po zaniku napięcia rotacji.

Z uzyskanych przebiegów wynika, że zdecydowanie bardziej korzystne dla badanej maszyny jest bezpośrednie wyłączenie fazy, ponieważ prądy i moment elektromagnetyczny nie przekraczają wartości znamionowych. Dyskusyjną kwestią pozostaje całościowe przygotowanie stanowiska pomiarowego w warunkach przemysłowych ze względu na istniejące zabezpieczenia systemowe przed skutkami niesymetrii zewnętrznej oraz ewentualną pracą silnika z obniżonym napięciem. Jeżeli pominąć wśród rozwiązań ograniczających negatywne konsekwencje przerwy w jednym z przewodów zasilających obwód stojana (chroniących izolację uzwojeń przed przepięciami), to wyłączenie fazy można przeprowadzić stosując rozłącznik próżniowy wspomagany szybkim układem warystorowym.

### V. Podsumowanie pracy i wnioski końcowe

W rozprawie przedstawiono metody diagnozowania i lokalizacji niesymetrii rezystancyjnej wirnika silnika dwuklatkowego bezpośrednio dla ustalonego stanu pracy. W tym celu opracowano obwodowy model wieloharmoniczny, dostosowany do metody bilansu harmonicznych wychodząc z założenia dwuokresowego przebiegu wielkości wymuszonych takich jak prądy i moment elektromagnetyczny. Zależnie od przyjętych warunków obliczeń rozważono klasyczne zagadnienie liniowe z pominięciem oddziaływań elektromechanicznych oraz zadanie bezpośredniego wyznaczania stanu ustalonego układu strukturalnie nieliniowego. Drugi z wymienionych przypadków wymagał opracowania algorytmu iteracyjnego, gdzie równania elektromagnetyczne oraz równanie mechaniczne rozwiązywano łącznie ze względu na nieznane wektory prądów i wahania kąta obrotu. Dzięki algebraizacji układu otrzymano równania w postaci analitycznej dające możliwość poszukiwania charakterystycznych cech i związków jakościowych wyróżniających uszkodzenie elektryczne obwodów wirnika. Jako ogólną metodę diagnozowania niesymetrii silnika pozwalającą określić rozkład przestrzenny przerwanych prętów klatki rozruchowej i klatki pracy zaproponowano badanie zmienności sygnałów diagnostycznych w funkcji parametrów lub wielkości opisujących układ napędowy. Za takim podejściem przemawia kwestia niejednoznaczności oceny stanu silnika indukcyjnego jedynie w granicach stosowanych zazwyczaj norm ilościowych, bazujących wyłącznie na obserwacji prądów skupionych wokół składowej podstawowej. Wobec tego, obwodom wirnika przyporządkowano zbiory pulsacji prądów i momentu elektromagnetycznego wiążące miejsce powstania niesymetrii rezystancyjnej z własnościami silnika dwuklatkowego. Z założenia interpretacja zmienności sygnałów opisujących uszkodzenie klatek wirnika, ułatwia generację ogólnych albo indywidualnych wzorców diagnostycznych w przedziale dokładności wyznaczonych parametrów obwodowych i uwzględnianych zjawisk dodatkowych. Przeprowadzone obliczenia wzorcowej maszyny średniej mocy porównano z wynikami pomiarów laboratoryjnych, które potwierdziły jakościową poprawność utworzonego modelu i sposobów jego rozwiązania w określonych warunkach pracy. W rozważaniach świadomie pominięto zestawienie wyników uzyskanych obwodowo z aktualnie najszybciej rozwijającymi się oraz rozpowszechnionymi metodami obliczeń polowych. Podstawowymi przyczynami wspomnianego postępowania były ograniczenia związane z brakiem pewnej dowolności w odwzorowaniu geometrycznym modelu (np. gładka

szczelina powietrzna). Poza tym, przekształcenie przebiegów czasowych do dziedzin częstotliwości otrzymanych w rezultacie rozwiązania równań polowych, cechuje się podobnymi trudnościami jak w procedurze całkowania numerycznego. Zarazem zasadnicza różnica między opracowanymi a najczęściej wykorzystywanymi algorytmami numerycznymi, występuje już przy próbie uzyskania charakterystyk statycznych wielkości opisujących niesymetrię wewnętrzną, gdzie w przedstawionych procedurach nie ma potrzeby każdorazowego wyznaczenia stanu przejściowego i odpowiedniego wyboru warunków początkowych istotnie zwiększających nakład czasowy prowadzonych obliczeń. Ważnym aspektem usprawniającym działanie metody iteracyjnej z macierzowym operatorem różniczkowania Fouriera, jest możliwość sprowadzenia układu równań dla przypadków szczególnych jednostronnej niesymetrii rezystancyjnej oraz znanej prędkości średniej wirnika do postaci jednookresowej w wyniku transformacji współrzędnych [90]. Ograniczenie przewidywanego rozwiązania będzie przyczyną zredukowania jednego wymiaru układu oraz uproszczenia ogólnej struktury równań i operatora. Opracowaną metodę z powodzeniem da się rozszerzyć o zaburzenia symetrii wewnętrznej spowodowanej zmienną grubością szczeliny powietrznej w funkcji położenia wirnika.

Nadal nierozstrzygniętym problemem pozostaje poszukiwanie rozwiązań ustalonych dla nieznannej wartości średniej prędkości kątowej oraz minimalizacja liczby prowadzonych operacji algebraicznych. Pierwsze z wymienionych zadań wymaga opracowania algorytmu gwarantującego zbieżność numeryczną i jednocześnie niebędącego ściśle metodą punktu stałego. Dotychczas stosunkowo dobre wyniki uzyskano dodając w klasycznej procedurze ANR nową pod pętlę iteracji odpowiadającą za rozwiązanie wektora wahań kąta obrotu, lecz uzależnioną od wartości średniej prędkości wirnika z głównej części programu. Oznacza to, że wektory prądów i kąta obrotu wyznaczone w danym cyklu obliczeń podstawia się do równania mechanicznego, z którego zostaje określony nowy punkt pracy aktualizujący macierz operatora różniczkowania. Wadą takiego podejścia jest znacząca ilość niezbędnych powtórzeń, aby uzyskać zbieżność numeryczną z odpowiednią dokładnością. Alternatywnie zamiast operatora różniczkowania można stosować operator całkowy [89], niewymagający odwracania macierzy, sprowadzając wszystkie działania wyłącznie do mnożenia i tym samym wyraźnie przyspieszając obliczenia nawet względem algorytmu wykorzystującego schemat Gaussa. Wskazane niedogodności są etapem aktualnych prac zmierzających w kierunku utworzenia nowych algorytmów oraz rozwiązania innych złożonych problemów. Wśród nich należy wymienić m.in. proces samowzbudzenia rezystancyjnego [74] lub pojemnościowego (prądnicowego) maszyny indukcyjnej ściśle związanych z nieliniowością strukturalną i parametryczną.

## Literatura

- [1] Antonino-Daviu J., Lee S. B., Wiedenbrug E.: *Reliable detection of rotor bar failures in induction motors operating in petrochemical plants*. Petroleum and Chemical Industry Conference Europe, 2014, s.1-8.
- [2] Antonino-Daviu J., Riera-Guasp M., Pons-Llinares J., Park J., Lee S. B., Yoo J., Kral C.: *Detection of broken outer-cage bars for double-cage induction motors under the startup transient*. IEEE Transactions on industry applications, Nr 5 (48), 2012, s. 1539-1548.
- [3] Anuszczyk J.: *Maszyny elektryczne w energetyce. Zagadnienia wybrane*. WNT, Warszawa 2005.
- [4] Bellini A., Concari C., Franceschini G, Lorenzani E., Tassoni C., Toscani A.: *Thorough understanding and experimental validation of current sideband components in induction machines rotor monitoring*. IECON 2006 - 32nd Annual Conference on IEEE Industrial Electronics, 2006, s. 4957-4962.
- [5] Bellini A., Filippetti F., Franceschini G, Tassoni C., Kliman G. B.: *Quantitative Evaluation of induction motor broken bars by means of electrical signature analysis*. IEEE Transactions on Industry Applications, 2000, S. 484-490.
- [6] Bernatt J., Bernatt M.: *Wirnik klatkowy z rozruchowymi zwojami zwartymi*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 101, z.1, 2014, s. 35-38.
- [7] Bernatt M., Poprawski W.: *Silniki wysokiego napięcia dla trudnych warunków rozruchowych*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 85, 2010, s. 1-5.
- [8] Bernatt M., Rut R., Mróz J.: *Bezpośredni rozruch zmniejsza trwałość silników klatkowych dużej mocy*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 89, 2011, s. 1-5.
- [9] Bernatt M., Rut R., Mróz J.: *O uszkodzeniach klatek wirnika*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 79, 2008, s. 7-12.
- [10] Biernat A.: *Analiza sygnałów diagnostycznych maszyn elektrycznych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2015.
- [11] Bierski F.: *Struktury algebraiczne. Elementy algebry liniowej. Analiza macierzy z zastosowaniem do układów różniczkowych i form kwadratowych*. Wydawnictwo AGH, Skrypty Uczelniane, nr 1219, Wydanie trzecie, Kraków 1990.
- [12] Boldea I., Nasad S. A.: *The induction machine handbook*. CRC Press, 2002.
- [13] Bossio G.R., De Angelo C. H., Pezzani C. M., Bossio J. M., Garcia G. O.: *Evaluation of harmonic current sidebands for broken bar Diagnosis in induction motor*. IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives, 2009, s. 1-6.
- [14] Chua L. O., Lin P-M.: *Komputerowa analiza układów elektronicznych – algorytmy i metody obliczeniowe*. WNT, Warszawa 1981.
- [15] Concari C., Franceschini G., Tassoni C.: *Discerning mechanical load unbalances from rotor faults in induction machines through current space vector components*. IECON 2010 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society, 2010, s. 2609-2614.
- [16] Cunningham W. J.: *Analiza układów nieliniowych*. WNT, Warszawa 1962.
- [17] Dąbrowski M.: *Konstrukcje maszyn elektrycznych*. WNT, Warszawa 1977.
- [18] Dąbrowski M.: *Projektowanie maszyn prądu przemiennego*. WNT, Warszawa 1988.
- [19] Dahlquist G., Björck A.: *Metody numeryczne*. PWN, Warszawa 1983.
- [20] Demidowicz B. P.: *Matematyczna teoria stabilności*. WNT, Warszawa 1972.
- [21] Dems M.: *Symulacja komputerowa przebiegów elektromechanicznych w silnikach indukcyjnych klatkowych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, nr 754, Łódź 1996.



- [22] Dems M., Komeża K.: *Modelowanie statycznych i dynamicznych stanów pracy silników indukcyjnych*. Monografie Politechniki Łódzkiej, Łódź 2011.
- [23] Drak B.: *Typowe uszkodzenia silników indukcyjnych dużej mocy*. Zeszyty problemowe – Maszyny Elektryczne, Nr 89, 2011, s. 7-14.
- [24] Drak B.: *Zniszczenia klatek rozruchowych wirników dwuklatkowych silników indukcyjnych*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 97, z.4, 2012, s. 63-66.
- [25] Drak B., Zientek P.: *Analiza uszkodzeń silników wysokonapięciowych prądu przemiennego w elektrowniach zawodowych*. Zeszyty problemowe – Maszyny Elektryczne, Nr 1 (98), 2013, s. 135-141.
- [26] Drozdowski P.: *Kształtowanie charakterystyk i własności ruchowych wielofazowych silników indukcyjnych klatkowych*. Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Seria Inżynieria Elektryczna i Komputerowa, Monografia 278, Kraków 2000.
- [27] Drozdowski P., Sobczyk T.J.: *On a mathematical of squirrel-cage induction motors*. Springer-Verlag, Archiv für Elektrotechnik, Vol. 70, 1987, s. 371-382.
- [28] Elawgali S.S.H.: *Diagnosing of rotor eccentricity and clutch wobbling of the induction machines, based of inspection of spectrums of the calculated and registered currents*. Akademia Górniczo Hutnicza w Krakowie, Rozprawa Doktorska, Kraków 2007.
- [29] Filippetti F., Franceschini G., Tassoni C., Vas P.: *AI techniques in induction machines diagnosis including the speed ripple effects*. IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 34, Iss. 1, 1998, s. 98-108.
- [30] Filippetti F., Franceschini G., Tassoni C., Vas P.: *Broken bar detection in induction machines: comparison between current spectrum approach and parameter estimation approach*. Proceedings of 1994 IEEE Industry Applications Society Annual Meeting, s. 1-8.
- [31] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.: *Metody numeryczne*. WNT, Warszawa 2002.
- [32] Glinka T., Szymaniec S.: *Eksploatacja i diagnostyka maszyn elektrycznych i transformatorów*. WNT, Warszawa 2019.
- [33] Głowacki A.: *Obliczenia elektromagnetyczne silników indukcyjnych trójfazowych*. WNT, Warszawa 1993.
- [34] Głowacki A., Sliwiński T.: *Parametry rozruchowe silników indukcyjnych*. PAN Komitet Elektrotechniki, PWN, Warszawa 1982.
- [35] Gritli Y., Di Tommaso A. O., Filippetti F., Miceli R., Rossi C., Chatti A.: *Investigation of motor current signature and vibration analysis for diagnosing rotor broken bars in double cage induction motors*. International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, 2012, s. 1360-1365.
- [36] Gritli Y., Di Tommaso A. O., Filippetti F., Miceli R., Rossi C.: *Vibration signature analysis for rotor broken bar diagnosis in double cage induction motor drives*. 4th International Conference on Power Engineering, Energy and Electrical Drives, 2013, s. 1814-1820.
- [37] Gritli Y., Di Tommaso A. O., Miceli R., Rossi C.: *Diagnosis of mechanical unbalance for double cage induction motor load in time-varying conditions based on motor vibration signature analysis*. International Conference on Renewable Energy Research and Applications, 2013, s. 1157-1162.
- [38] Gritli Y., Di Tommaso A. O., Miceli R., Rossi C., Filippetti F.: *Quantitative rotor broken bar evaluation in double squirrel cage induction machines under dynamic operating conditions*. International Conference and Exhibition on Ecological Vehicles and Renewable Energies, 2013, s. 1-6.
- [39] Gritli Y., Lee S. B., Filippetti F., Zarri L.: *Advanced diagnosis of outer cage damage in double-squirrel-cage induction motors under time-varying conditions based on wavelet analysis*. IEEE Transactions on industry applications, Nr 3 (50), 2014, s. 1791-1800.

- [40] Hickiewicz J., Macek-Kaminska K.: *Wybrane zagadnienia w diagnostyce silników indukcyjnych*. PAK, Vol. 55, nr 1/2009, s. 71-75.
- [41] Kluszczyński K., Miksiewicz R.: *Modelowanie 3-fazowych maszyn indukcyjnych przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Elektryka, nr 1272, z. 142, Gliwice 1995.
- [42] Kluszczyński K.: *Momenty pasożytnicze w maszynach asynchronicznych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Elektryka, nr 897, z. 102, Gliwice 1986.
- [43] Kopyłow J. P.: *Elektromechaniczne przetworniki energii*. PWN, Warszawa 1978.
- [44] Kowalski C.T.: *Diagnostyka układów napędowych z silnikiem indukcyjnym z zastosowaniem metod sztucznej inteligencji*. Oficyna wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2013.
- [45] Kozłowski H. S., Turowski E.: *Silniki indukcyjne. Projektowanie. Konstruowanie, Wytwarzanie*. WNT, Warszawa 1961.
- [46] Kral C., Pirker F., Pascoli G.: *The impact of inertia on rotor fault effects-theoretical aspects of the Vienna monitoring method*. IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 23, No. 4, 2008, s. 2136-2142.
- [47] Krause P. C.: *Analysis of Electrical Machinery*. McGraw-Hill Book Company, 1986.
- [48] Kudrewicz J.: *Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych*. WNT, Warszawa 1970.
- [49] Lee S. B., Hyun D., Kang T-j., Park S., Kong T-S., Kim H-D.: *Identification of false rotor fault indications produced by on-line MCSA for medium-voltage induction machines*. IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 52 (1), s. 729-739.
- [50] Levi E.: *General method of magnetising flux saturation modelling in d-q axis models of double-cage induction machines*. IEE Proceedings - Electric Power Applications, Nr 2 (144), 1997, s. 101-109.
- [51] Maciołek W.: *Wpływ bezwładności oraz nasycania się głównego obwodu magnetycznego na sygnały diagnostyczne mówiące o stanie klatki*. Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki, z.1-E/2008, s. 15-24.
- [52] Miksiewicz R.: *Diagnostyka silników indukcyjnych dwuklatkowych z uszkodzonymi prętami*. Zeszyty problemowe – Maszyny Elektryczne, Nr 95, Zeszyt 2, 2012, s. 83-88.
- [53] Mróz J.: *Termiczne ograniczenia pracy układów napędowych z silnikami indukcyjnymi dwuklatkowymi*. Przegląd elektrotechniczny, z. 93, nr 8, 2017, s. 175-179.
- [54] Noga M.: *Analizy awaryjne związane z wewnętrzną niesymetrią silników asynchronicznych*. Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica, z. 68, Kraków 1975.
- [55] Paszek W.: *Stany nieustalone maszyn elektrycznych prądu przemiennego*. WNT, Warszawa 1986.
- [56] Poprawski W., Wolnik T.: *Innowacyjna konstrukcja wirnika w silniku indukcyjnym dwuklatkowym przeznaczonym do pracy z częstymi rozruchami*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 111, z. 3, 2016, s. 41-44.
- [57] Puchała A.: *Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych*. PWN, Warszawa 1977.
- [58] Puchała A.: *Teoria przetworników elektromechanicznych*. Maszyny Elektryczne, część II, Skrypty Uczelniane AGH nr 161, wydanie pierwsze, Kraków 1969.
- [59] Pyrhönen J., Jokinen T., Hrabcová V.: *Design of rotating electrical machines*. John Wiley & Sons, 2008.
- [60] Ralston A.: *Wstęp do analizy numerycznej*. PWN, Wydanie drugie, Warszawa 1975.
- [61] Rams W., Rusek J.: *Induction machine cage state diagnosis by supply from two phases*. XXX Sympozjum Maszyn Elektrycznych, Mat. Konf., 1994, s. 395-401.
- [62] Rams W., Rusek J.: *Wyznaczanie wartości sygnałów diagnostycznych uszkodzenia klatki silników indukcyjnych*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 54, 1997, s. 100-103.

- [63] Rams W., Rusek J., Wierzcholski M.: *Diagnostics of cage asymmetry of induction machine by two-phase supply.*, 40. Int. Wiss. Kolloquium, Mat. Konf., 1995, s. 649-654.
- [64] Rams W., Rusek J., Wierzcholski M.: *Kontrola symetrii klatki w silnikach indukcyjnych przy zasilaniu dwufazowym.* Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 50, 1995, s. 100-103.
- [65] Radzik M.: *Algorytm bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach synchronicznych z uwzględnieniem równania ruchu.* Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Rozprawa Doktorska, Kraków 2011.
- [66] Rashmi M.N., Shubhanga K. N.: *Dynamic Modelling of a Double-Cage Induction Machine for Analysis with WECS.* Innovations in Power and Advanced Computing Technologies, 2017, s. 1-7.
- [67] Rusek J.: *Analiza harmoniczna stanu ustalonego silnika asynchronicznego.* Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica, Elektrotechnika, nr 1047, z. 9, Kraków 1986.
- [68] Rusek J.: *Categorization of induction machines resulting from their harmonic-balance model.* Electromagnetics, Vol. 23, No. 3, 2003, s. 277-292.
- [69] Rusek J.: *Category, slot harmonics and the torque of induction machines.* COMPEL – International Journal for Computation Mathematics in Electrical and Electronics Engineering – 2003, Vol. 22, No. 2, s. 388-409.
- [70] Rusek J.: *Computerorientierter Algorithmus der Analyse einer stationär betriebenen Asynchronmaschinen.* Springer-Verlag, Archiv für Elektrotechnik, Vol. 71 (1988), s. 229-236
- [71] Rusek J.: *Drehmoment und Strom über stromeinprägenden Wechselrichter gespeisten Asynchronmaschine im stationären Betriebszusten.* Springer-Verlag, Archiv für Elektrotechnik, Vol. 67 (1984), s. 151-160.
- [72] Rusek J.: *Impact of voltage impurity and load fluctuation on induction-motor current spectrum, with accounting for eccentricity, slotting and cage damage.* IECM 2002: 15th International Conference on Electrical Machines: August 25-28, 2002, Brugge, Belgium: book of abstracts / Technologisch Instituut, KU Leuven, Universiteit Gent. - Belgium: Technologisch Instituut, 2002.
- [73] Rusek J.: *Komputerowa analiza maszyn indukcyjnych z wykorzystaniem bilansu harmonicznych.* Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2000.
- [74] Skwarczyński J., Tertel Z.: *Maszyny Elektryczne.* Tom1, Wydawnictwo AGH, Kraków 1997.
- [75] Sobczyk T.J.: *Algorytm określania stanów ustalonych w maszynach prądu przemiennego bezpośrednio w dziedzinie czasu.* Zeszyty problemowe – Maszyny Elektryczne, Nr 107, Zeszyt 3, 2015, s. 1-5.
- [76] Sobczyk T.J.: *Algorithm for determining two-periodic steady-states in AC machines directly in time domain.* Archives of electrical engineering, nr 65(3), 2016, s. 575-583.
- [77] Sobczyk T.J.: *Analiza procesów stacjonarnych maszyn elektrycznych.* Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica, Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, nr 654, z. 97, Kraków 1977.
- [78] Sobczyk T.J.: *Direct determination of two-periodic solution for nonlinear dynamic systems.* COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol. 13 No. 3, 1994, s. 509-529.
- [79] Sobczyk T.J.: *Frequency analysis of fault machines-possibilities and limitations.* IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives, Kraków 2007, s.1-5.
- [80] Sobczyk T.J.: *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych.* WNT, Warszawa 2004.

- [81] Sobczyk T.J.: *Obwodowe modele matematyczne maszyn elektrycznych - stan aktualny i perspektywy*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Elektryka, z. 176, Gliwice 2001
- [82] Sobczyk T.J., Maciołek W.: *Asymmetry factors of rotor cage.*, Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki, nr 102, z.5-E/2005, s. 61-76
- [83] Sobczyk T.J., Maciołek W.: *Diagnostics of rotor-cage faults supported by effects due to higher MMF harmonics*. IEEE Bologna Power Tech Conference Proceedings, Bolonia 2003, s. 1-5
- [84] Sobczyk T.J., Maciołek W.: *Does the component  $(1-2s)f_0$  in stator currents is sufficient for detection of rotor cage faults?*. Proc. of IEEE SDEMPED 2005, Wiedeń 2005, s. 175-179
- [85] Sobczyk T.J., Maciołek W.: *Influence of pole-pair number and rotor slot number on effects caused by cage faults*. 8th IEEE Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives, Bolonia 2011, s. 199-204.
- [86] Sobczyk T.J., Maciołek W.: *On uniqueness of diagnosis of induction motor cage faults*. Przegląd Elektrotechniczny, Pub. Sigma-NOT, nr. 85, z. 1, 2009, s. 140-146.
- [87] Sobczyk T.J., Radzik M.: *Bezpośrednie wyznaczanie rozwiązań okresowych dla przetworników elektromechanicznych w dziedzinie czasu*. Zeszyty problemowe – Maszyny Elektryczne, Nr 103, z. 3, 2014, s. 223-228.
- [88] Sobczyk T.J., Radzik M.: *Numeryczny test zbieżności algorytmu bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach prądu przemiennego z uwzględnieniem równania ruchu*. Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki, z.1-E/2010 (17), s. 87-97.
- [89] Sobczyk T.J., Radzik M., Tulicki J.: *Direct steady-state solutions for circuit models of nonlinear electromagnetic devices*. COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol. 40, No. 3, 2021, s.660-675.
- [90] Sobczyk T.J., Walas M.: *An algorithm determining stationary electromechanical interactions in faulty AC machines*. IEEE 10th International Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives (SDEMPED), Guarda 2015, s. 1-6.
- [91] Sobczyk T.J., Weinreb K.: *Analysis of currents and an electromagnetic torque in steady states of induction squirrel-cage motors with asymmetric stator windings*. Springer-Verlag, Archiv für Elektrotechnik, vol. 71 (1988) s. 245-256.
- [92] Sobczyk T.J., Weinreb K., Węgiel T., Sułowicz M., Warzecha A., Maciołek W.: *Ocena skuteczności diagnostyki wirników silników klatkowych na podstawie widma prądów*. XIII Konferencja Energetyki: Energetyka modernizacja i rozwój, Kliczków 2003, s. 167-176.
- [93] Stein Z.: *Zagadnienia stanów niesymetrycznych trójfazowych maszyn indukcyjnych*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Rozprawy - Politechnika Poznańska, nr 79, Poznań 1976.
- [94] Sułowicz M.: *Diagnostyka silników indukcyjnych metodami sztucznej inteligencji*. Instytut elektrotechniki w Warszawie, Samodzielna pracownia diagnostyki układów elektromechanicznych w Krakowie, Rozprawa Doktorska, Kraków 2005.
- [95] Sułowicz M., Petryna J., Weinreb K., Guzic K.: *Porównawcze pomiary defektów klatek rozruchowych silników indukcyjnych pod kątem wykorzystania w diagnostyce*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, nr 2, 2013, s. 77-83.
- [96] Sürgevil T., Akpınar E.: *abc/qd, qd/abc Model of a double-cage induction machine and determination of parameters using the genetic algorithm*. Electric Power Components and Systems, 2003, s. 1115-1131.
- [97] Swędrowski L.: *Pomiary w diagnostyce silników indukcyjnych klatkowych*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2013.
- [98] Szatkowski A., Cichosz J.: *Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2010.

- [99] Taegen F., Hommes E.: *Das allgemeine gleichungssystem des käfigläufermotors unter Berücksichtigung der Oberfelder*. Springer-Verlag, Archiv für Elektrotechnik, Vol. 55 (1972), s. 21-31.
- [100] Taegen F., Hommes E.: *Die theorie allgemeine des käfigläufermotors unter Berücksichtigung der Ständer – und Läufernutung*. Springer-Verlag, Archiv für Elektrotechnik, Vol. 56 (1974), s. 331-339.
- [101] Uruski M., Wolski W.: *Wybrane zagadnienia teorii obwodów*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1976.
- [102] Wach P.: *Niesymetrie wewnętrzne maszyn indukcyjnych*. Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, Seria Elektryka, z. 19, Opole 1982.
- [103] Weinreb K.: *Modele matematyczne maszyn indukcyjnych z nierównomierną szczeliną powietrzną*. Modelowanie matematyczne zjawisk elektromagnetycznych w maszynach elektrycznych, Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Monografia 169, s. 56-87, Kraków 1994.
- [104] Weinreb K.: *Diagnostics of an induction-motor rotor by the spectral analysis of stator currents*. Thermal Engineering Vol. 60, No. 14, 2013, s.1006-1023.
- [105] Weinreb K., Skwarczyński J.: *Model matematyczny maszyny indukcyjnej klatkowej z niecentrycznie usytuowanym wirnikiem*. Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica, Elektrotechnika, nr 1190, z. 12, Kraków 1988, s. 47-69.
- [106] Weinreb K., Węgiel T., Sułowicz M.: *Wpływ nasycenia głównego obwodu magnetycznego silnika asynchronicznego z niesymetrycznym wirnikiem na obraz widma prądu stojana*. XLI International Symposium on Electrical Machines SME'2005, Jarnołtówek 2005, s. 461-467.
- [107] Węgiel T., Weinreb K., Warzecha A., Sułowicz M.: *Model of cage induction motor with saturated main magnetic circuit for diagnostics applications*. Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki, z.1-E/2004, s. 1-13.
- [108] Węglarz J.: *Maszyny elektryczne*. WNT, Warszawa 1962.
- [109] Williamson S., Smith A. C.: *Steady-state analysis of 3-phase cage motors with rotor-bar and end-ring faults*. IEE Proceedings B - Electric Power Applications, Nr 3 (129), 1982, s. 93-100.
- [110] Williamson S., Abdel-Magied M.A.S.: *Steady-state analysis of double-cage induction motors with rotor-cage faults*. IEE Proceedings B - Electric Power Applications, Nr 4 (134), 1987, s. 199-206.

## Spis tabel

Nr	Tytuł	Strona
<b>Rozdział 2</b>		
2.1	Wymiar układu równań i wartości współczynników odwzorowujących niesymetrię.	46
2.2	Dane konstrukcyjne i znamionowe maszyn dwuklatkowych średniej mocy wykorzystane w obliczeniach numerycznych.	47
<b>Rozdział 3</b>		
3.1	Wyniki obliczeń dla różnych wymiarów układu, uszkodzony jeden pręt klatki pracy, $J=2 \cdot J_w$ , $s=0,01$ .	119
3.2	Wyniki obliczeń – porównanie metody całkowania numerycznego z metodą dyskretnego bilansu harmonicznego, uszkodzony pierwszy i trzeci pręt klatki pracy.	129
3.3	Wyniki obliczeń – porównanie metody całkowania numerycznego z metodą dyskretnego bilansu harmonicznego, obustronna niesymetria silnika: przerwa w fazie obwodu stojana, uszkodzony pierwszy i trzeci pręt klatki rozruchowej.	131
3.4	Właściwości sygnałów diagnostycznych w zbiorze składowych symetrycznych prądu stojana z uwzględnieniem oddziaływań elektromechanicznych - niesymetria obwodów wirnika.	146
3.5	Oznaczenie cech jakościowych sygnałów diagnostycznych w zbiorze składowych symetrycznych prądu stojana i momentu elektromagnetycznego.	147
3.6	Właściwości momentów cząstkowych wytwarzanych w warunkach niesymetrii parametrycznej wirnika – symetryczny obwód stojana.	152
3.7	Właściwości sygnałów diagnostycznych w zbiorze składowych symetrycznych prądów stojana dla obustronnej niesymetrii silnika.	158
3.8	Właściwości momentów cząstkowych wytwarzanych w warunkach obustronnej niesymetrii parametrycznej silnika.	164
<b>Rozdział 4</b>		
4.1	Dane konstrukcyjne silnika dwuklatkowego przeznaczonego do pomiarów laboratoryjnych.	169
4.2	Urządzenia pomiarowe wykorzystane w badaniach laboratoryjnych.	170
4.3	Parametry charakteryzujące rozwiązywane równania met. bilansu harmonicznego.	172

## Spis rysunków

Nr	Tytuł	Strona
<b>Rozdział 2</b>		
2.1	Rozwinięty schemat obwodów wirnika zwartego osobnymi pierścieniami.	27
2.2	Rozwinięty schemat obwodów wirnika zwartego wspólnym pierścieniem.	28
2.3	Względne widmo amplitudowe w funkcji pulsacji – silnik symetryczny zwarty osobnymi pierścieniami, a) składowa symetryczna 1 prądów stojana, b) składowa symetryczna 2 prądów stojana, c) składowa symetryczna „p-ta” prądu klatki rozruchowej, d) składowa symetryczna „p-ta” prądu klatki pracy, e) moment elektromagnetyczny typ I, f) moment elektro-magnetyczny typ II.	51
2.4	Względne widmo amplitudowe w funkcji częstotliwości – silnik symetryczny zwarty osobnymi pierścieniami, a) prąd fazowy stojana, b) wypadkowy moment elektromagnetyczny.	52
2.5	Względne widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów stojana w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a-b) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, c-d) przerwa w pręcie klatki pracy, e-f) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.	55
2.6	Względne widmo amplitudowe prądu w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, b) przerwa w pręcie klatki pracy, c) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.	56
2.7	Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności składowej prądu fazowego $f_s \cdot (1-2s)$ w funkcji poślizgu i liczby uszkodzonych prętów, 1. (a-c) silnik zwarty wspólnym pierścieniem, 2. (a-c) silnik zwarty osobnymi pierścieniami – a) niesymetria klatki rozruchowej, b) niesymetria klatki pracy, c) niesymetria klatki rozruchowej i klatki pracy.	57
2.8	Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności składowej prądu fazowego $f_s \cdot (1-2s)$ w funkcji poślizgu, 1. (a-c) silnik zwarty wspólnym pierścieniem, 2. (a-c) silnik zwarty osobnymi pierścieniami – a) przerwa w segmencie klatki rozruchowej, b) przerwa w segmencie klatki pracy, c) przerwa w segmencie klatki rozruchowej i klatki pracy.	58
2.9	Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności wybranych składowych prądu fazowego w funkcji poślizgu i liczby uszkodzonych prętów – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1. niesymetria klatki pracy, 2. niesymetria klatki rozruchowej i klatki pracy.	60
2.10	Względne widmo amplitudowe w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1. prąd „p-tej” składowej symetrycznej prądów klatki rozruchowej, 2. prąd „p-tej” składowej symetrycznej prądów klatki pracy, a) przerwa w pręcie klatki górnej, b) przerwa w pręcie klatki dolnej, c) przerwa w pręcie klatki górnej i dolnej.	61

2.11	Względne widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a-b) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, c-d) przerwa w pręcie klatki pracy, e-f) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.	65
2.12	Względne widmo amplitudowe wypadkowego momentu elektromagnetycznego w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, b) przerwa w pręcie klatki pracy, c) przerwa w pręcie klatki górnej i dolnej.	66
2.13	Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności momentu elektromagnetycznego typu II $2f_s \cdot s$ w funkcji poślizgu, 1. (a-c) uszkodzenie prętów, 2. (a-c) uszkodzenie segmentów pierścieni zwierających – a) klatka rozruchowa, b) klatka pracy, c) klatka rozruchowa i klatka pracy.	67
2.14	Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności momentu asynchronicznego w funkcji poślizgu, 1. (a-b) uszkodzenie prętów, 2. (a-b) uszkodzenie segmentów pierścieni zwierających – a) klatka rozruchowa, b) klatka pracy.	68
2.15	Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności wybranych składowych momentu elektromagnetycznego w funkcji poślizgu i liczby uszkodzonych prętów – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1. niesymetria klatki pracy, 2. niesymetria klatki rozruchowej i klatki pracy, sygnały diagnostyczne w skali liniowej odniesione do podstawowej harmonicznej prądu fazowego stojana.	69
2.16	Względne widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów stojana w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie obwodu stojana, a-b) symetryczny wirnik, c-d) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, e-f) przerwa w pręcie klatki pracy, g-h) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.	73
2.17	Względne widmo amplitudowe prądu w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, a) wirnik symetryczny, b) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, c) przerwa w pręcie klatki pracy, d) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pracy.	74
2.18	Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności sygnałów diagnostycznych w funkcji poślizgu – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej.	75
2.19	Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności wybranych składowych prądu fazowego w funkcji współczynnika „r” oraz liczby uszkodzonych prętów – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, 1. niesymetria klatki rozruchowej, 2. niesymetria klatki pracy, 3. niesymetria klatki rozruchowej i klatki pracy, sygnały diagnostyczne w skali liniowej odniesione względem podstawowej harmonicznej prądu fazowego stojana, $s=0,0005$ .	76
2.20	Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności sygnałów diagnostycznych w funkcji poślizgu dla $r=40$ – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej i pracy, a) w żłobkach numer 1, b) w żłobku numer 1 i 2.	77



2.21	Względne widmo amplitudowe w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, 1. prąd „p-tej” składowej symetrycznej prądów klatki rozruchowej, 2. prąd „p-tej” składowej symetrycznej prądów klatki pracy, a) symetryczny wirnik, b) przerwa w pręcie klatki górnej, c) przerwa w pręcie klatki dolnej, d) przerwa w pręcie klatki górnej i dolnej.	78
2.22	Względne widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa zewnętrzna w fazie stojana a-b) symetryczny wirnik, c-d) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, e-f) przerwa w pręcie klatki pracy, g-h) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.	82
2.23	Względne widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego w funkcji częstotliwości a) symetryczna klatka rozruchowa i klatka pracy, b) przerwany pręt klatki rozruchowej, c) przerwany pręt klatki pracy, d) przerwany pręt klatki górnej i dolnej pod sobą.	83
2.24	Charakterystyka zmian amplitudy momentów przemiennych w funkcji liczby uszkodzonych prętów oraz współczynnika modelującego niesymetrię, a) obwód klatki rozruchowej, b) obwód klatki pracy, c) obwód klatki rozruchowej i klatki pracy, $s=0,0005$ .	85
2.25	Względne widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1) okresowe odkształcenie układu napięć trójfazowych, 2) niesymetria parametryczna układu napięć zasilających.	87
2.26	Względne widmo amplitudowe składowej symetrycznej zerowej prądu stojana w funkcji pulsacji względnej, przerwany jeden pręt klatki górnej oraz dolnej pod sobą, a) symetryczny układ napięć trójfazowych – 155,5 rad/s (prędkość znamionowa), b) przerwa w fazie zasilania obwodu stojana – 157 rad/s (bieg jałowy).	88
2.27	Widmo amplitudowe prądu fazowego stojana w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) odkształcenie napięć zasilających, b) niesymetria parametryczna układu napięć, c) niesymetria prawie biegunowa, d) dołączenie przewodu zerowego.	89
2.28	Widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) odkształcenie napięć zasilających, b) niesymetria parametryczna układu napięć, c) niesymetria prawie biegunowa, d) dołączenie przewodu zerowego.	90
<b>Rozdział 3</b>		
3.1	Przebieg zmienności wybranych składowych widma prądu stojana w funkcji momentu bezwładności, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.	111
3.2	Przebieg zmienności wybranych składowych widma momentu oraz wahań prędkości w funkcji momentu bezwładności, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.	112
3.3	Przebieg zmienności wybranych składowych widma prądu stojana w funkcji momentu obciążenia, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.	113

3.4	Przebieg zmienności wybranych składowych widma prądu i momentu elektromagnetycznego w funkcji współczynnika modelującego przerwę rezystancyjną, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.	114
3.5	Przebieg zmienności wybranych składowych nietłumionych z pasma średnich częstotliwości widma prądu fazowego stojana w funkcji momentu bezwładności, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.	115
3.6	Przebieg zmienności wybranych składowych tłumionych z pasma średnich częstotliwości widma prądu fazowego stojana w funkcji momentu bezwładności, drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.	116
3.7	Przebieg zmienności wybranych składowych widma prądu fazowego w funkcji kąta początkowego położenia wirnika, pierwszy oraz drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.	117
3.8	Przebieg zmienności składowych niskoczęstotliwościowych widma prądu fazowego stojana w funkcji liczby punktów $R$ , $S$ ; drugi punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki pracy.	118
3.9	Przebieg zmienności wybranych składowych widma prądu fazowego w funkcji momentu bezwładności i współczynnika modelującego przerwę prętów wirnika, trzeci punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej, obustronna niesymetria.	120
3.10	Przebieg zmienności wybranych składowych widma momentu elektromagnetycznego w funkcji momentu bezwładności i współczynnika modelującego przerwę prętów wirnika, trzeci punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej, obustronna niesymetria.	121
3.11	Przebieg zmienności wybranych sygnałów w funkcji momentu bezwładności i współczynnika modelującego przerwę prętów wirnika, pierwszy punkt startowy – uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej, obustronna niesymetria.	122
3.12	Względne widmo amplitudowe prądu fazowego (a) i momentu elektromagnetycznego (b) w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1. metoda dyskretnego bilansu harmonicznym, 2. metoda całkowania numerycznego – niesymetria wirnika.	128
3.13	Względne widmo amplitudowe prądu fazowego (a) i momentu elektromagnetycznego (b) w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, 1. metoda dyskretnego bilansu harm., 2. metoda całkowania numerycznego – obustronna niesymetria silnika.	130
3.14	Charakterystyki statyczne zmian amplitud prądów fazowych stojana oraz momentów elektromagnetycznych w funkcji momentu bezwładności – uszkodzony pierwszy i trzeci pręt klatki pracy, symetryczny stojan.	132
3.15	Charakterystyki statyczne zmian amplitud prądów fazowych stojana oraz momentów elektromagnetycznych w funkcji momentu bezwładności – uszkodzony pierwszy i trzeci pręt klatki rozruchowej, obustronna niesymetria silnika.	133

3.16	Względne widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w pręcie klatki pracy, a-b) składowa pierwsza i druga stojana, c-d) składowa „p-ta” prądu klatki rozruchowej oraz klatki pracy.	148
3.17	Względne widmo amplitudowe prądu stojana w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, b) przerwa w pręcie klatki pracy, c) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i klatki pracy.	149
3.18	Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądów fazowych stojana – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w pręcie klatki pracy, $s=0,01$ .	150
3.19	Względne widmo amplitudowe momentów cząstkowych w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a-b) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, c-d) przerwa w pręcie klatki pracy, e-f) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.	153
3.20	Względne widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a) przerwa w pręcie klatki rozruchowej, b) przerwa w pręcie klatki pracy, c) przerwa w pręcie klatki rozruchowej i pręcie klatki pracy.	154
3.21	Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma momentu elektromagnetycznego – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w pręcie klatki pracy, $s=0,01$ .	155
3.22	Względne widmo amplitudowe składowych symetrycznych prądów stojana i wirnika w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie obwodu stojana, uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej, a) składowa pierwsza prądów stojana, b) składowa druga prądów stojana, c) składowa „p-ta” klatki rozruchowej, d) składowa „p-ta” klatki pracy.	160
3.23	Względne widmo amplitudowe prądu stojan w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, a) symetryczny wirnik, b) przerwany pręt klatki rozruchowej, c) przerwany pręt klatki pracy, d) przerwany pręt klatki górnej i dolnej.	161
3.24	Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności wybranych składowych prądu fazowego w funkcji momentu bezwładności i liczby uszkodzonych prętów – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie obwodu stojana, uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej, $s=0,0005$ .	162
3.25	Względne widmo amplitudowe momentów cząstkowych w funkcji pulsacji – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, a-b) przerwa w fazie obwodu stojana – symetryczny wirnik, c-d) przerwa w fazie obwodu stojana i pręcie klatki rozruchowej.	165
3.26	Względne widmo amplitudowe momentu el. w funkcji częstotliwości – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie stojana, a) symetryczny wirnik, b) przerwany pręt klatki rozruchowej, c) przerwany pręt klatki pracy, d) przerwany pręt klatki górnej i dolnej.	166

3.27	Charakterystyki statyczne przebiegu zmienności wybranych składowych momentu elektromagnetycznego w funkcji momentu bezwładności i liczby uszkodzonych prętów – silnik zwarty osobnymi pierścieniami, przerwa w fazie obwodu stojana, uszkodzony jeden pręt klatki rozruchowej, $s=0,0005$ .	167
<b>Rozdział 4</b>		
4.1	Widok: a) układu napędowego przeznaczonego do pomiarów diagnostycznych silnika dwuklatkowego małej mocy, b) wykroju blachy wirnika.	171
4.2	Widmo amplitudowe napięcia wyjściowego z autotransformatora w dziedzinie częstotliwości: a) międzyfazowe L1-L2, b) fazowe między L1 i punktem gwiazdowym silnika.	172
4.3	Widmo amplitudowe prądu i momentu mechanicznego w dziedzinie częstotliwości, a) silnik obustronnie symetryczny, b) przerwa w trzeciej fazie zasilania – symetryczny wirnik.	173
4.4	Widmo amplitudowe prądu fazowego stojana, silnik zwarty wspólnym pierścieniem, uszkodzony pręt klatki rozruchowej i klatki pracy, a) obliczenia: metoda bilansu harmoniczných - model liniowy, b) obliczenia: metoda dyskretnego bilansu harmoniczných - model nieliniowy strukturalnie $J=4 \cdot J_w$ , c) wynik pomiarów $J=4 \cdot J_w$ .	174
4.5	Widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego i mechanicznego, silnik zwarty wspólnym pierścieniem, uszkodzony pręt klatki rozruchowej i klatki pracy, a) obliczenia: metoda bilansu harmoniczných - model liniowy, b) obliczenia: metoda dyskretnego bilansu harmoniczných - model nieliniowy strukturalnie $J=4 \cdot J_w$ , c) wynik pomiarów $J=4 \cdot J_w$ .	175
4.6	Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądu stojana w funkcji momentu bezwładności: 1) obliczenia, 2) pomiar.	177
4.7	Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądu stojana w funkcji momentu zewnętrznego: 1) obliczenia, 2) pomiar.	178
4.8	Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma momentu elektromagnetycznego (1) i mechanicznego (2) w funkcji momentu bezwładności lub momentu zewnętrznego: 1) obliczenia, 2) pomiar.	179
4.9	Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądu fazowego w funkcji momentu bezwładności i momentu zewnętrznego: 1) obliczenia, 2) pomiar.	181
4.10	Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma momentu elektromagnetycznego lub mechanicznego w funkcji momentu bezwładności i momentu zewnętrznego: 1) obliczenia, 2) pomiar.	182
4.11	Widmo amplitudowe prądu fazowego stojana, silnik zwarty wspólnym pierścieniem, przerwa w fazie, uszkodzony pręt klatki rozruchowej i klatki pracy, a) obliczenia: metoda bilansu harmoniczných - model liniowy, b) obliczenia: metoda dyskretnego bilansu harmoniczných - model nieliniowy strukturalnie $J=2 \cdot J_w$ , c) wynik pomiarów $J=2 \cdot J_w$ .	184

4.12	Widmo amplitudowe momentu elektromagnetycznego lub mechanicznego, silnik zwarty wspólnym pierścieniem, uszkodzony pręt klatki rozruchowej i klatki pracy, a) obliczenia: metoda bilansu harmoniczných - model liniowy, b) obliczenia: metoda dyskretnego bilansu harmoniczných – model nieliniowy strukturalnie $J=2 \cdot J_w$ , c) wynik pomiarów $J=2 \cdot J_w$ .	185
4.13	Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądu fazowego w funkcji momentu bezwładności, 1) obliczenia, 2) pomiar.	186
4.14	Charakterystyki statyczne wybranych sygnałów diagnostycznych widma prądu fazowego w funkcji napięcia zasilającego, 1) obliczenia, 2) pomiar.	187
4.15	Obliczone przebiegi czasowe metodą całkowania numerycznego dla silnika średniej mocy z [p.2.5] zwanego osobnymi pierścieniami, 1. moment elektromagnetyczny, 2. prądy fazowe obwodu stojana: a) przerwanie fazy zasilania w ustalonym stanie pracy przy napięciu znamionowym, b) załączenie dwóch faz zasilania po zaniku napięcia rotacji.	189