

M

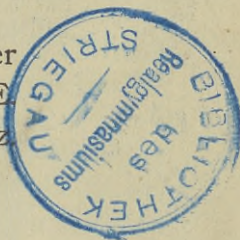
Lineare Erzeugung
der
Kegelschnitte
und
auf ihr beruhende Ableitung
der Kegelschnittsgleichungen

von

Dr. FRIEDRICH WILHELM FRANKENBACH
Direktor.



Beilage zum Jahresbericht der
städtischen Oberrealschule i. E.
(Wilhelmsschule) in Liegnitz



Progr. Nr. 319.

LIEGNITZ

Druck von H. Krumbhaar

1909

Woy
545

12750

KD 513.5:515.56

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

II 31415

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298328

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

Akc. Nr.

105150

Vorliegende Abhandlung soll einen Beitrag zur Lehre von den Kegelschnitten liefern. Der erste Teil ist rein synthetischer Natur und hat die Bekanntschaft mit einigen Eigenschaften der Kegelschnitte, den Grundgesetzen der Projektivität der Elementargebilde und der Involution auf projektiven Gebilden zur Voraussetzung. In dem zweiten Teile, einer analytischen Betrachtung, kommen, außer dem System der cartesischen Koordinaten und der trimetrischen Punktkoordinaten, die einfachsten Sätze der Determinantenlehre zur Anwendung.

ERSTER TEIL.

Lineare Erzeugung der Kegelschnitte mit Hilfe zweier projektiver Strahlenbüschel.

1. Allgemeines über lineare Erzeugung von Kegelschnitten durch projektive Strahlenbüschel.

Besteht zwischen zwei in einer Ebene liegenden Strahlenbüscheln (B) und (C) mit den Scheiteln B und C eine projektive Beziehung, so ist der Ort der Schnittpunkte je zweier entsprechender Strahlen, das Erzeugnis der Projektivität, ein Kegelschnitt, der durch die beiden Scheitel geht und in jedem von ihnen zur Tangente den Strahl des zugehörigen Büschels hat, welcher dem gemeinsamen Strahle BC beider Büschel als Strahl des jeweilig anderen Büschels entspricht.

Als Projektivität zweier Strahlenbüschel bezeichnet man eine Zuordnung zwischen den Strahlen der beiden Büschel, bei der jedem Strahle des einen Büschels eindeutig ein Strahl des anderen entspricht und umgekehrt. Die geometrische Bedeutung dieser Zuordnung ist die einer linearen, — lediglich mit dem Lineal ausführbaren, — Konstruktion, durch die zu jedem Strahle des einen der beiden Büschel der entsprechende Strahl des anderen Büschels erhalten wird. Diese Konstruktion und damit zugleich die projektive Verwandtschaft ist bestimmt, wenn drei Paare entsprechender Strahlen gegeben sind.

Um einen Kegelschnitt als Erzeugnis einer projektiven Verwandtschaft zwischen zwei Strahlenbüscheln zu erhalten, lege man zwei Scheitel, B und C, drei Strahlen des Büschels (B) und drei Strahlen des Büschels (C) zu Grunde, von denen die letzteren den ersteren beziehentlich entsprechen. Hierdurch ist die Projektivität zwischen (B) und (C) festgelegt und zugleich die Konstruktion, vermöge deren man zu jedem Strahle des einen Büschels den entsprechenden Strahl des anderen erhält, und man kann beliebig viele Punkte des durch Projektivität erzeugten Kegelschnitts herstellen.

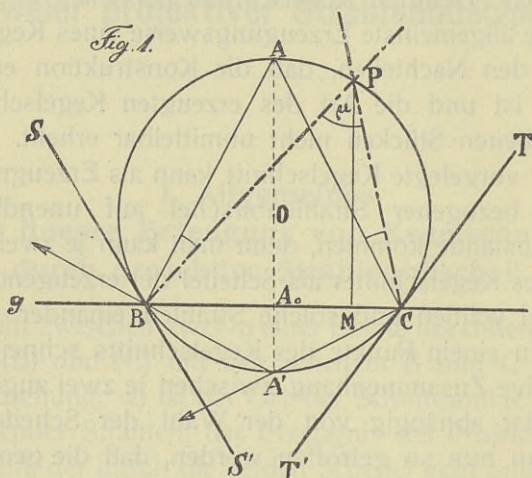
Diese allgemeinste Erzeugungsweise eines Kegelschnitts leidet an den Nachteilen, daß die Konstruktion etwas umständlich ist und die Art des erzeugten Kegelschnitts aus den gegebenen Stücken nicht unmittelbar erhellt.

Jeder vorgelegte Kegelschnitt kann als Erzeugnis zweier projektiv bezogener Strahlenbüschel auf unendlich viele Weisen zustande kommen, denn man kann je zwei beliebige Punkte des Kegelschnitts als Scheitel der erzeugenden Strahlenbüschel wählen und solche Strahlen einander zuordnen, die sich in einem Punkte des Kegelschnitts schneiden. Der konstruktive Zusammenhang zwischen je zwei zugeordneten Strahlen ist abhängig von der Wahl der Scheitel. Diese Wahl kann nun so getroffen werden, daß die geometrische Beziehung zwischen je zwei entsprechenden Strahlen eine möglichst einfache wird.

Bevor eine solche einfache Beziehung zugeordneter Strahlen der allgemeinen Betrachtung der Kegelschnitte zu Grunde gelegt wird, soll ein besonderer Fall von Projektivität zweier Strahlenbüschel betrachtet werden.

2. Lineare Erzeugung des Kreises vermittelt zweier gleicher und gleichsinniger Strahlenbüschel.

Zur Einführung in die allgemeine Betrachtung der linearen Erzeugung der Kegelschnitte aus zwei projektiven Strahlenbüscheln, die einerlei Ebene angehören, gehe man



von der Annahme aus, daß beide Strahlenbüschel gleich und gleichsinnig sind; diese Eigenschaft kommt nur Büscheln mit Trägern im Endlichen zu.

Man wähle (Fig. 1) zu Trägern zweier Strahlenbüschel (B) und (C) die Punkte B und C einer Geraden g , ordne jedem Strahl des einen Büschels einen Strahl des anderen so zu, daß der Unterschied der Neigungswinkel dieser Strahlen gegen die Gerade g eine unveränderliche Größe ist, und setze fest, daß der Durchlaufungssinn einer beliebigen Reihe von Strahlen des einen Büschels stets übereinstimme mit dem Durchlaufungssinn der entsprechenden Strahlen des anderen Büschels, also etwa der dem Drehungssinne des Uhrzeigers entgegengesetzte sei. Bezeichnet man die Neigungswinkel der Strahlen BP und CP gegen die Gerade g je

mit φ_b und φ_c und den von den Strahlen eingeschlossenen Winkel BPC mit μ , dann sind die Strahlen einander zugeordnet, wenn die Beziehung besteht:

$$\varphi_c - \varphi_b = \mu.$$

Der Wert des Winkels μ soll zwischen 0° und $2R$ liegen. Durchläuft der Neigungswinkel eines Strahles des Büschels (B) gegen die Gerade g alle Werte von $\varphi_b = 0$ bis $\varphi_b = 4R$, so nimmt der Neigungswinkel des zugeordneten Strahles des Büschels (C) nacheinander alle Werte von $\varphi_c = \mu$ bis $\varphi_c = 4R + \mu$ an.

Irgend zwei der dadurch entstandenen Dreiecke nach Art von BPC haben an der Spitze P gleiche Winkel, wenn sie auf einerlei Seite, supplementäre Winkel, wenn sie auf entgegengesetzten Seiten von g liegen. Der von je zwei beliebigen Strahlen eines Büschels eingeschlossene Winkel ist gleich dem Winkel zwischen den beiden zugeordneten Strahlen des anderen Büschels. Die beiden Strahlenbüschel sind daher gleich und gleichsinnig. Jedem Strahle des einen Büschels entspricht eindeutig ein Strahl des anderen und umgekehrt. Es liegt sonach eine Korrespondenz [1,1] zwischen den beiden Strahlenbüscheln (B) und (C) vor, das ist eine Projektivität; das Erzeugnis ist eine Kurve zweiter Ordnung. Jeder Strahl schneidet diese Kurve in zwei Punkten: B,P und C,P.

Um zu untersuchen, welcher Art der Kegelschnitt, das Erzeugnis des Schnittes zugeordneter Strahlen gleicher und gleichsinniger Büschel, ist, betrachte man zunächst einige besondere Lagen der erzeugenden Strahlen. Der den beiden Büscheln gemeinsame Strahl BC bildet, als dem Büschel (B) zugehörig, in seiner Anfangslage mit der Geraden g den Winkel $\varphi_b = 0$; der ihm zugeordnete Strahl CT ist gegen die Gerade g unter dem Winkel $\varphi_c = \mu$ geneigt. Hat der Strahl BC eine Drehung von $2R$ um Punkt B vollendet, so bildet der ihm zugeordnete Strahl CT' mit der Geraden g den Winkel $\varphi_c = 2R + \mu$, fällt sonach mit dem Strahle CT zusammen. Die Gerade TT' ist der einzige Strahl des Büschels (C), bei dem der zweite Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt neben dem Scheitel C mit diesem ersten Schnittpunkt zusammenfällt; sie ist daher

eine Tangente des Ortes im Punkte C. Der Geraden BC, aufgefaßt als Strahl des Büschels (C), entsprechen für die Werte $\varphi_c = 2R$, $\varphi_c = 4R$, die unter dem Winkel $\varphi_b = 2R - \mu$, $\varphi_b = 4R - \mu$ gegen die Gerade g geneigten Strahlen BS und BS' des Büschels (B). Sie fallen in die Gerade SS' zusammen, welche den gesuchten Ort außer im Scheitel B auch noch zum zweiten Male in B schneidet. Daher ist SS' die Tangente des Ortes im Punkte B.

Solange der Unterschied der Neigungswinkel zweier einander zugeordneter Strahlen eine endliche Größe zwischen 0^0 und $2R$ ist, hat der Ort nur endliche reelle Punkte. Laufen die einander zugeordneten Strahlen parallel, dann treffen sie sich in unendlicher Ferne, und der gesuchte Ort zerfällt in zwei von einander getrennte geometrische Gebilde, die Verbindungsgerade der Träger beider Büschel und die unendlich ferne Gerade der Ebene.

Unter den über der Strecke $BC = a$ stehenden Dreiecken sind die gleichschenkligen Dreiecke ABC und A'BC besonders ausgezeichnet; sie sind durch die gegebenen Stücke $BC = a$ und $\angle BAC = \mu$ bzw. $\angle BA'C = 2R - \mu$ bestimmt; die erzeugenden Strahlen BA, CA und BA', CA' bilden mit der Geraden g die Winkel $\varphi_b = R - \frac{\mu}{2}$, $\varphi_c = R + \frac{\mu}{2}$, bzw. $\varphi_b = 2R - \frac{\mu}{2}$, $\varphi_c = 2R + \frac{\mu}{2}$. Die Ecken des Dreiecks ABC bestimmen einen Kreis, auf welchem auch Punkt A' liegt, denn $\angle ABA' = \angle ACA' = R$. Der Durchmesser dieses Kreises, die Verbindungsgerade AA' der Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke ABC und A'BC, ist Symmetrielinie der Punkte B und C. Um nun die Lage der übrigen Punkte des Ortes in Beziehung zu dem durch die Punkte A, B, C bestimmten Kreise zu suchen, nehme man (Fig. 2) an, der Strahl BP treffe den Kreis im Punkte A₁; zieht man die Strecke A₁C, so entstehen die Dreiecke A₁BC und A₁CP, und es ist einerseits:

$$\angle BA_1C = \mu = \angle BAC, \text{ andererseits:}$$

$$\angle BA_1C = \angle BPC + \angle A_1CP = \mu + \angle A_1CP;$$

folglich:

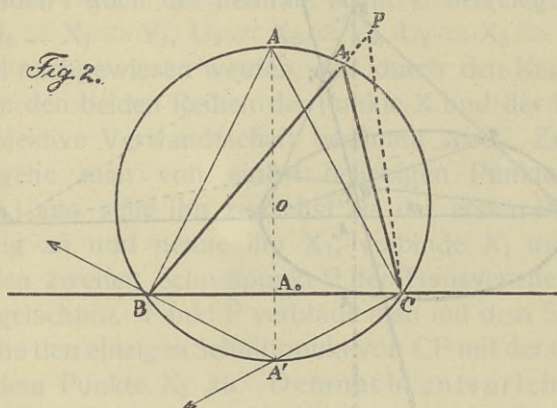
$$\mu = \mu + \angle A_1CP.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn $\angle A_1CP = 0$, wenn also die Strahlen CA_1 und CP zusammenfallen. Punkt P fällt sonach auf Punkt A_1 , liegt auf dem durch die Punkte A, B, C bestimmten Kreise.

Der gegebene Beweis hat nur Gültigkeit für den Fall, daß die Punkte A_1 und P auf einerlei Seite des Punktes B und zwar in der Reihenfolge BA_1P liegen. Unter Annahme der ebenfalls möglichen Reihenfolge BPA_1 muß die Bedingung erfüllt sein:

$$\angle BA_1C = \angle BPC - \angle A_1CP = \mu - \angle A_1CP,$$

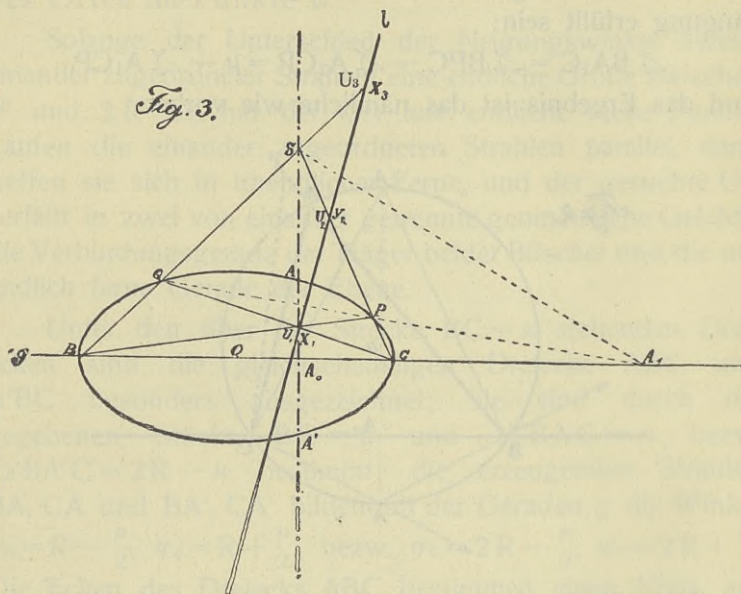
und das Ergebnis ist das nämliche wie vorher.



Die stillschweigend gemachte Annahme, daß die Punkte A_1 und P auf einerlei Seite der Geraden BC liegen, erfordert eine Begründung. Sie liegt im folgenden: Lägen P und A_1 auf entgegengesetzten Seiten von BC , etwa P auf der Seite, welcher der Punkt A des gesuchten Ortes angehört, so müßte, nach der auf Seite 6 getroffenen Bestimmung $\angle BPC = \angle BAC = \mu$ sein, während dagegen für Winkel BA_1C , als Umfangswinkel über dem nämlichen Bogen wie Winkel $BA'C$, die Gleichung $BA_1C = 2R - \mu$ erfüllt sein müßte (siehe Seite 8); das Dreieck A_1PC enthielte alsdann zwei supplementäre Winkel, ohne daß der dritte Winkel, $\angle PCA_1$, gleich Null wäre.

3. Lineare Erzeugung der Kegelschnitte durch zwei projektive Strahlenbüschel, deren Träger mit den Scheiteln der Kegelschnitte zusammenfallen.

Im folgenden soll eine Erzeugung der Kegelschnitte durch Projektivität zweier Strahlenbüschel dargelegt werden, bei der zu jedem Strahle der entsprechende durch eine sehr einfache Konstruktion gefunden und die Art des erzeugten



Kegelschnitts sofort aus den zu Grunde gelegten Stücken erkannt wird.

Will man für einen gegebenen Kegelschnitt eine solche Erzeugung finden, so kommen zunächst die beiden Fragen in Betracht, welche beiden Punkte des Kegelschnitts als Träger der erzeugenden Strahlenbüschel geeignet erscheinen, und welche geometrische Beziehung bei ihnen zwischen je zwei entsprechenden Strahlen besteht.

Man wähle (Fig. 3) als Träger der erzeugenden Strahlenbüschel die reellen Endpunkte B und C einer Achse des Kegelschnitts. Die Scheitel der Strahlenbüschel stimmen dann bei der Hyperbel stets mit deren Scheiteln überein,

während sie bei der Ellipse entweder mit deren Scheiteln oder mit den Endpunkten der kleinen Achse zusammenfallen; zwei einander zugeordnete Strahlen nenne man daher in diesem Falle «zusammengehörige Scheiteltransversalen». Nun lege man in die Ebene eine beliebige Gerade l , die den Kegelschnitt in zwei reellen — oder konjugiert imaginären — Punkten schneidet. Diese Gerade sei der Träger zweier ineinander liegender Punktreihen: $X_1, X_2, X_3, \dots$ und $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$. Jeder Punkt der Geraden l gehört sowohl der Reihe der Punkte X als auch der Reihe der Punkte Y an; außerdem werde dem nämlichen Punkte $X \equiv Y$ der Geraden l noch der neutrale Name U beigelegt. Es ist daher $U_1 \equiv X_1 \equiv Y_1, U_2 \equiv X_2 \equiv Y_2, U_3 \equiv X_3 \equiv Y_3, \dots$. Nun soll nachgewiesen werden, daß durch den Kegelschnitt zwischen den beiden Reihen der Punkte X und der Punkte Y eine projektive Verwandtschaft bestimmt wird. Zu diesem Behuf gehe man von einem beliebigen Punkte U_1 der Geraden l aus, sehe ihn zunächst als der ersten Punktreihe zugehörig an und nenne ihn X_1 , verbinde X_1 mit B und suche den zweiten Schnittpunkt P der Transversale BX_1 mit dem Kegelschnitt. Punkt P verbinde man mit dem Scheitel C und ordne den einzigen Schnittpunkt von CP mit der Geraden l als Y_2 dem Punkte X_1 zu. Demnach entspricht jedem Punkte der Reihe der X eindeutig ein Punkt der Reihe der Y und zwar so, daß die beiden entsprechenden Punkte X_1 und Y_2 durch zwei zusammengehörige Scheiteltransversalen in die Gerade l eingeschnitten werden, nämlich X_1 von BP und Y_2 von CP .

Um zu entscheiden, wieviel Punkte der Reihe der X einem Punkte der Reihe der Y in dieser Zuordnung entsprechen, gehe man wieder von dem ursprünglich angenommenen Punkte U_1 aus, betrachte ihn aber jetzt als zur Reihe der Y gehörig und nenne ihn Y_1 . Als Y_1 verbinde man ihn mit dem Scheitel C und bestimme den zweiten Schnittpunkt Q der Geraden CY_1 mit dem Kegelschnitt. Der durch die Gerade BQ auf der Geraden l eingeschnittene Punkt X_3 werde dem Punkte $Y_1 \equiv X_1$ zugeordnet. Es besteht daher $[1,1] =$ deutiges Entsprechen zwischen den Reihen der

Punkte X und Y auf der Geraden l , eine projektive Verwandtschaft.

Die Punkte Y_2 und X_3 , welche in dieser Projektivität dem Punkte U_1 entsprechen, je nachdem man ihn als X_1 zur ersten oder als Y_1 zur zweiten Punktreihe auf der Geraden l rechnet, sind im allgemeinen von einander verschieden. Sie fallen in dem einzigen Falle zusammen, daß der Schnittpunkt S der Geraden BQ und CP auf der Geraden l liegt.

Um zu ermitteln, wann dieser Fall eintritt, verbinde man einen beliebigen Punkt $U_1 \equiv X_1 \equiv Y_1$ der Ebene des Kegelschnitts mit dessen Scheiteln B und C und bestimme die Schnittpunkte P und Q der Geraden BU_1 und CU_1 mit dem Kegelschnitt; nun ziehe man die Verbindungsgeraden der Punkte B und Q , C und P , die sich im Punkte S schneiden, sowie der Punkte B und C , P und Q , die den Schnittpunkt A_1 gemeinsam haben; dann ist die Gerade A_1S die Polare des Punktes U_1 in Bezug auf den Kegelschnitt; daher muß die Polare des Punktes A_1 durch den Punkt $U_1 \equiv X_1 \equiv Y_1$ gehen. Die Punkte U_1 und S sind harmonisch zugeordnet den durch ihre Verbindungsgerade auf dem Kegelschnitt bestimmten Schnittpunkten A und A' .

Die Geraden BP , CQ , BQ , CP bilden ein vollständiges Vierseit mit den Nebenseiten BC , PQ , U_1S . Ist nun A_0 der Schnittpunkt der Geraden U_1S mit der Geraden BC , dann sind, entsprechend den Eigenschaften des vollständigen Vierseits, die Punkte A_0 und A_1 den Punkten B und C harmonisch zugeordnet; sie sind in Bezug auf den Kegelschnitt konjugierte Punkte. Die Polare von A_1 geht sonach auch durch A_0 , ist daher die Gerade U_1S . Als Polare eines Punktes der Achse BC des Kegelschnitts muß U_1S auf BC senkrecht stehen.

Hieraus geht hervor, daß Punkt S , den man als Schnittpunkt der Geraden BQ und CP erhält, wenn U_1 ein Punkt der Geraden l ist, nur dann auf diese Gerade fällt, wenn $l \perp BC$. Alsdann vereinigen sich die Punkte X_3 und Y_2 , die dem Punkte $U_1 \equiv X_1 \equiv Y_1$ entsprechen, in einem Punkte, der mit dem neutralen Namen U_2 bezeichnet werden soll. Die Projektivität zwischen den beiden Punktreihen $X_1, X_2, X_3, \dots$ und $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ auf der Geraden l als Träger hat dann

die Eigentümlichkeit, daß jedem Punkte U_1 der nämliche Punkt U_2 entspricht, gleichviel, ob man U_1 als X_1 oder als Y_1 ansieht: die Projektivität ist in eine Involution übergegangen, und gepaarte Punkte U_1 und U_2 sind solche, die von zusammengehörigen Scheiteltransversalen in l geschnitten werden. Gepaarte Punkte einer Involution liegen stets harmonisch zu den Doppelpunkten der Involution. Doppelpunkte entstehen, wenn ein Punkt mit seinem gepaarten Punkte zusammenfällt. Auf der Geraden l sind dies die reellen — oder imaginären — Schnittpunkte A und A' mit dem Kegelschnitt.

Vorstehende Untersuchung hat zu folgendem, bemerkenswerten Ergebnis geführt:

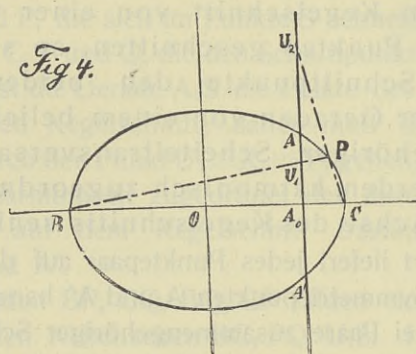
Wird ein Kegelschnitt von einer Geraden in zwei reellen Punkten geschnitten, so sind die entstandenen Schnittpunkte den beiden Punkten, welche in der Geraden von einem beliebigen Paare zusammengehöriger Scheiteltransversalen geschnitten werden, harmonisch zugeordnet, wenn die Gerade zur Achse des Kegelschnitts senkrecht steht.

Umgekehrt liefert jedes Punktepaar auf der Geraden l , welches den Symmetriepunkten A und A' harmonisch zugeordnet ist, zwei Paare zusammengehöriger Scheiteltransversalen und damit zugleich zwei Punkte des Kegelschnitts.

Um dies nachzuweisen, muß man dartun, daß, wenn U_1 und U_2 ein beliebiges Paar harmonischer Punkte in Bezug auf A und A' bilden, die Strahlenpaare BU_1 , CU_2 und BU_2 , CU_1 sich je in einem dem Kegelschnitt angehörigen Punkte schneiden. Dies lehrt wiederum die Konstruktion der Polare des einen der beiden Punkte, etwa des Punktes U_1 . Weil nämlich der früher erhaltene Punkt S jetzt mit dem Punkte U_2 zusammenfällt, so werden die zweiten Schnittpunkte von U_1B und U_1C mit dem Kegelschnitt erhalten, indem man U_1B mit U_2C und U_1C mit U_2B schneidet: Verbindet man von zwei zu A und A' harmonischen Punkten den einen mit B , den anderen mit C , so schneiden sich die Verbindungslinien stets in einem Punkte des Kegelschnitts.

Nunmehr kann man den Kegelschnitt in folgender Weise erzeugen: Gegeben sind die Scheitel B und C des Kegelschnitts und eine zu BC senkrechte Gerade l, nebst ihren in Bezug auf BC symmetrisch liegenden reellen — oder imaginären — Schnittpunkten A und A'. Es werden nach und nach sämtliche Paare der zu A und A' harmonischen Punkte hergestellt und immer der eine von beiden mit B, der andere mit C verbunden. Die Schnittpunkte der Verbindungslinien erfüllen den Kegelschnitt.

Die Paare der zu A und A' harmonischen Punkte sind am leichtesten herstellbar, wenn die Punkte A und A' reell sind. Man setze darum fest, daß die Gerade l den Kegelschnitt reell schneiden soll.



Die vorangegangene Betrachtung hat zu der Aufgabe geführt, das Erzeugnis der folgenden Verwandtschaft zwischen zwei Strahlenbüscheln zu untersuchen:

Gegeben sind (Fig. 4) die Scheitel B und C zweier Strahlenbüschel, eine auf der Verbindungsgeraden BC senkrecht stehende Gerade l und auf ihr zwei zu BC symmetrisch liegende Punkte A und A'. Einander entsprechend sind solche Strahlen der beiden Büschel, deren Schnittpunkte U₁ und U₂ mit l den Punkten A und A' harmonisch zugeordnet sind, so daß ihr Entfernungsprodukt vom Schnittpunkt A₀ der Geraden l mit BC eine konstante Größe ist:

$$\overline{A_0A}^2 = \overline{A_0A'}^2 = A_0U_1 \cdot A_0U_2, \text{ oder, wenn man}$$

$$A_0A = A_0A' = a_0, A_0U_1 = u_1, A_0U_2 = u_2 \text{ setzt,}$$

$$u_1 \cdot u_2 = a_0^2.$$

Es ist ersichtlich, daß die Korrespondenz zwischen den beiden Strahlenbüscheln eine $[1,1]$ = deutige, eine Projektivität, ist. Das Erzeugnis ist ein Kegelschnitt. Er geht durch die Punkte B und C und hat dort zu Tangenten die zu l parallelen Strahlen der beiden Büschel. Daraus folgt, daß die Gerade BC eine Achse des Kegelschnitts ist, die Hauptachse, wenn es sich um eine Hyperbel, die große oder kleine Achse, wenn es sich um eine Ellipse handelt, und wenn außerdem $\overline{A_0A}^2 < A_0B \cdot A_0C$ bzw. $\overline{A_0A}^2 > A_0B \cdot A_0C$.

Stellt der Kegelschnitt eine Parabel dar, so ist die Gerade BC deren im Endlichen liegende Achse.

Welcher von diesen drei Fällen vorliegt, kann aus der gegenseitigen Lage der Punkte A_0 , B, C leicht entschieden werden.

Nimmt man zunächst an, daß die Punkte B und C beide im Endlichen liegen, so kann nur eine Ellipse oder eine Hyperbel zustande kommen. Da die Punkte A und A' dem Kegelschnitt angehören, so ist dieser eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem der Schnittpunkt A_0 der Geraden AA' mit der Achse BC die Strecke BC innerlich oder äußerlich teilt.

Der dem Dreieck ABC umgeschriebene Kegelschnitt mit den Scheiteln B und C stellt eine Ellipse oder Hyperbel dar, je nachdem an der Grundlinie BC zwei spitze oder ein spitzer und ein stumpfer Winkel liegen.

Zu diesem Resultat gelangt man auch, wenn man den erzeugten Kegelschnitt hinsichtlich seiner unendlich fernen Punkte untersucht. Unendlich ferne Punkte ergeben sich, wenn zwei einander zugeordnete Strahlen aus beiden Büscheln einander parallel sind.

Für je zwei zugeordnete Strahlen BU_1 , CU_2 gilt die Beziehung

$$u_1 \cdot u_2 = a_0^2.$$

Soll außerdem der Bedingung $BU_1 \parallel CU_2$ Genüge geschehen, so muß die Gleichung

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

erfüllt werden, wenn $BA_0 = a_1$, $CA_0 = a_2$ gesetzt wird. Diese beiden Gleichungen ergeben für die veränderlichen Größen u_1 und u_2 zwei Wertepaare u_1', u_2' und u_1'', u_2'' , welchen parallele, einander entsprechende Strahlen zukommen:

$$u_1' = \frac{a_0}{a_2} \sqrt{a_1 \cdot a_2}, \quad u_1'' = -\frac{a_0}{a_2} \sqrt{a_1 \cdot a_2};$$

$$u_2' = \frac{a_0}{a_1} \sqrt{a_1 \cdot a_2}, \quad u_2'' = -\frac{a_0}{a_1} \sqrt{a_1 \cdot a_2}.$$

Die Größen u_1' und u_2' , u_1'' und u_2'' sind Strecken auf der Geraden l mit dem Anfangspunkt A_0 . Aus der Gleichheit der Vorzeichen der Größen u_1' und u_2' , bzw. u_1'' und u_2'' geht hervor, daß sie in gleicher Richtung vom Anfangspunkt A_0 aus liegen. Der Umstand, daß u_1'' und u_2'' das dem Vorzeichen von u_1' und u_2' entgegengesetzte Vorzeichen haben, zeigt an, daß die Richtungen der Strecken u_1'' und u_2'' den Richtungen der Strecken u_1' und u_2' entgegengesetzt sind. Über die Frage, ob diese Strecken reell oder imaginär sind, entscheidet das Vorzeichen des Produktes $a_1 \cdot a_2$. Es ist abhängig von dem Vorzeichen der einzelnen Faktoren, und zwar ist $a_1 \cdot a_2$ positiv oder negativ, je nachdem die Strecken $BA_0 = a_1$ und $CA_0 = a_2$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Der erste Fall tritt ein, wenn A_0 außerhalb der Strecke BC liegt, der zweite, wenn A_0 der Strecke BC angehört.

Ist A_0 ein Punkt auf einer der Verlängerungen der Strecke BC , so ist das Produkt $a_1 \cdot a_2 = BA_0 \cdot CA_0$ eine positive Größe und daher der Ausdruck $\sqrt{a_1 \cdot a_2}$ reell; der Kegelschnitt hat zwei reelle, unendlich ferne Punkte und ist eine Hyperbel. Befindet sich A_0 auf der Strecke BC , so hat das Produkt $a_1 \cdot a_2 = BA_0 \cdot CA_0$ einen negativen Wert, die Größen $\sqrt{a_1 \cdot a_2}$ und u_1', u_2', u_1'', u_2'' sind somit imaginär; der erzeugte Kegelschnitt besitzt keine reellen, unendlich fernen Punkte und ist eine Ellipse.

Bezeichnet man den absoluten Wert des Produktes $a_1 \cdot a_2$ mit $|a_1 \cdot a_2|$, so soll der besondere Fall untersucht werden, welcher eintritt, wenn

$$a_0^2 = |a_1 \cdot a_2|$$

gesetzt wird.

Die auf Seite 16 gefundenen Wurzelwerte gehen unter Beachtung dieser Gleichung in die folgenden über:

$$u_1' = \frac{a_0^2}{a_2}, \quad u_2' = \frac{a_0^2}{a_1}; \quad u_1'' = -\frac{a_0^2}{a_2}, \quad u_2'' = -\frac{a_0^2}{a_1}.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{u_1'}{a_1} &= \frac{a_0^2}{a_1 a_2} = 1, & \frac{u_2'}{a_2} &= \frac{a_0^2}{a_1 a_2} = 1; \\ \frac{u_1''}{a_1} &= -\frac{a_0^2}{a_1 a_2} = -1, & \frac{u_2''}{a_2} &= -\frac{a_0^2}{a_1 a_2} = -1, \end{aligned}$$

oder

$$u_1' = a_1, \quad u_2' = a_2; \quad u_1'' = -a_1, \quad u_2'' = -a_2.$$

Aus den Gleichungen $u_1' = a_1$, $u_2' = a_2$ ist ersichtlich, daß die rechtwinkligen Dreiecke BA_0U_1' und CA_0U_2' gleichschenkelig sind, und daß daher $\sphericalangle A_0BU_1' = \sphericalangle A_0CU_2' = 45^\circ$. Die beiden parallelen, einander zugeordneten Strahlen BU_1' und CU_2' liefern den einen unendlich fernen Punkt der Hyperbel, und die zu ihnen durch den Mittelpunkt O von BC, den Mittelpunkt der Hyperbel, parallel gezogene Gerade ist eine Asymptote; sie ist gegen die Hauptachse unter einem Winkel von 45° geneigt.

Aus den Beziehungen $u_1'' = -a_1$, $u_2'' = -a_2$ erhält, daß die zweite Asymptote der Hyperbel mit der Hauptachse BC ebenfalls einen Winkel von 45° bildet. Die beiden Asymptoten stehen senkrecht aufeinander; die Hyperbel ist gleichseitig.

Wendet man auf die Ellipse den besonderen Fall an, daß $a_0^2 = |a_1 \cdot a_2|$, so erhält man unter Beachtung der Formel $u_1 \cdot u_2 = a_0^2$ die Gleichung:

$$|u_1 \cdot u_2| = |a_1 \cdot a_2|.$$

Hieraus folgt:

$$\left| \frac{u_1}{a_1} \right| = \left| \frac{a_2}{u_2} \right|.$$

Diese Beziehung lehrt, daß die rechtwinkligen Dreiecke BA_0U_1 und CA_0U_2 einander ähnlich sind; daher ist $\sphericalangle A_0BU_1 = \sphericalangle A_0U_2C$. Da die beiden Schenkel BA_0 und U_2A_0 dieser

gleichen Winkel aufeinander senkrecht stehen, so gilt dies auch für die beiden anderen Schenkel, BU_1 und CU_2 . Demnach bilden je zwei zusammengehörige Scheiteltransversalen einen rechten Winkel: die Ellipse ist in einen Kreis übergegangen.

Läßt man den einen der beiden Scheitel, etwa den Punkt C, ins Unendliche rücken, und bezeichnet man ihn mit C_∞ , so wird die Achse des Kegelschnitts durch die Gerade BC_∞ bestimmt. Alle Strahlen des Büschels (C_∞) laufen der Achse parallel. Die Konstruktion der Punkte des Kegelschnitts erfolgt im übrigen wie im allgemeinen Falle. Der zweite unendlich ferne Punkt des erzeugten Kegelschnitts außer dem Scheitel C_∞ kommt hier folgendermaßen zustande: Der Büschel (B) enthält einen einzigen Strahl, BC_∞ , der zu seinem entsprechenden Strahle im Büschel (C_∞) parallel sein kann. Der entsprechende Strahl ist die unendlich ferne Gerade der Ebene, da dem Punkte A_0 der unendlich ferne Punkt der Geraden l in Bezug auf die Punkte A und A' harmonisch zugeordnet ist. Der Schnittpunkt dieser beiden entsprechenden Strahlen ist C_∞ , so daß der zweite unendlich ferne Punkt des Kegelschnitts sich mit dem ersten, C_∞ , vereinigt. Die unendlich ferne Gerade schneidet also den Kegelschnitt in zwei vereinigten Punkten, ist Tangente an ihn, und der Kegelschnitt ist eine Parabel.

Wendet man auf die Parabel den besonderen Fall an, daß $a_0^2 = a_1 \cdot a_2$, oder $\frac{a_0}{a_2} = \frac{a_1}{a_0}$, so folgt hieraus, wegen $a_2 = \infty$, die Beziehung $\frac{a_1}{a_0} = 0$.

So lange a_0 eine endliche Größe darstellt, ist

$$a_1 = 0.$$

Die Parabel zerfällt in ein Geradenpaar, bestehend aus der Geraden l und der unendlich fernen Geraden. Sie vermittelt den Übergang von den Kreisen zu den gleichseitigen Hyperbeln, wenn A_0 die Gerade BC durchläuft und dabei immer die Bedingung erfüllt wird: $a_0 = \sqrt{|a_1 \cdot a_2|}$. Sie kann selbst als Kreis aufgefaßt werden, weil sie einen Kegel-

schnitt darstellt, der durch die beiden absoluten Punkte der Ebene geht, und sie ist gleichseitige Hyperbel, insofern als ihre Asymptoten, die Gerade l und die unendlich ferne Gerade, als rechtwinklig zueinander anzusehen sind, indem alle Strahlen des Büschels (C_∞) auf der Geraden l senkrecht stehen, und die unendlich ferne Gerade selbst ein Strahl dieses Büschels ist.

Rücken die beiden Scheitel zugleich ins Unendliche, sodaß $a_1 = \infty$, $a_2 = \infty$, dann ist das Erzeugnis eine Parabel, welche durch zwei Gerade dargestellt wird, die durch die Punkte A und A' gehen und der Achse BC parallel laufen.

Sei wiederum $a_1 = a_2 = \infty$ und zugleich $a_0 = 0$, so fallen jene parallelen Geraden mit der Achse zusammen. Das Erzeugnis ist die Doppelgerade BC .

Nimmt man bei beliebiger Lage der Punkte B , C und A_0 an, daß $a_0 = 0$, so geht Dreieck ABC in die Strecke BA_0C über. Nun hat man zu beachten, daß, wenn von vier harmonischen Punkten zwei zusammenfallen, sich stets noch ein dritter Punkt mit ihnen vereinigt und der vierte unbestimmt wird; er kann jeder Punkt des Trägers sein. Die Projektivität zwischen den beiden Strahlenbüscheln artet aus; jedem Strahle des Büschels (B) entspricht im Büschel (C) der nämliche Strahl, der «singuläre Strahl» CB von (C), jedem Strahle des Büschels (C) entspricht der singuläre Strahl BC des Büschels (B); das Erzeugnis ist das von den singulären Strahlen gebildete Geradenpaar, die Doppelgerade BC .

Eine der vorigen ähnliche Ausartung tritt ein, wenn Punkt A_0 mit einem der beiden Scheitel zusammenfällt; in diesem Falle hat Dreieck ABC an der Grundlinie BC einen rechten Winkel. Das Erzeugnis ist die Gerade l und die durch den anderen Scheitel zu ihr parallel gezogene Gerade. Dieses Geradenpaar vermittelt als Parabel den Übergang zwischen den Ellipsen und Hyperbeln, die man erhält, wenn man bei stets gleichbleibendem a_0 den Punkt A_0 die Gerade BC durchlaufen und auf diese Weise sämtliche Dreiecke mit der Grundlinie BC und der Höhe AA_0 entstehen läßt.

Setzt man $a_1 = a_2 = 0$ und $a_0 \geq 0$, so ist das Erzeugnis die Gerade l als Doppelgerade.

Fallen die Scheitel B und C miteinander, nicht aber mit A_0 zusammen, so bilden die von dem Punkte $B \equiv C$ nach den Punkten A und A' gezogenen Geraden das Erzeugnis.

Für $a_0 = \infty$ wird

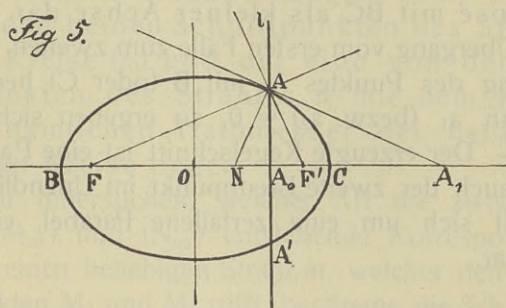
$$u_1 \cdot u_2 = \infty.$$

Da in dieser Gleichung einer der beiden Faktoren stets gleich ∞ sein muß, so entspricht jedem Strahl des Büschels (B) die Parallele zur Geraden l im Büschel (C) und umgekehrt. Es liegt eine ausgeartete Projektivität vor; die singulären Strahlen beider Büschel, die beiden durch B und C parallel zu l gezogenen Geraden, bilden das Erzeugnis. Dies gilt auch für $a_1 = 0$ oder $a_2 = 0$. Dabei ist zu beachten, daß dem Punkte A_0 als Mittelpunkt von AA' stets der unendlich ferne Punkt von l harmonisch zugeordnet ist in Bezug auf A und A' , auch dann noch, wenn A und A' ins Unendliche rücken.

Die im vorstehenden beschriebene Erzeugung von Kegelschnitten versagt nur in dem Falle, daß a_0 samt einer der beiden Strecken a_1 und a_2 oder samt beiden zugleich den Wert Null annimmt.

Anmerkung: Für den zu erzeugenden Kegelschnitt waren die Scheitel B und C und der außerhalb der Geraden BC gelegene Punkt A gegeben. Die Tangenten des Kegelschnitts in B und C sind die in diesen Punkten auf BC errichteten Senkrechten; auch die im Punkte A an den Kegelschnitt zu ziehende Tangente ist durch die gegebenen Stücke bestimmt. Ist (Fig. 5) A_1 der vierte harmonische Punkt zu A_0 in Bezug auf B und C , dann ist er der Pol der Geraden l in Bezug auf den Kegelschnitt, und die vom Pol A_1 nach dem Schnittpunkt A von l mit dem Kegelschnitt gezogene Gerade A_1A ist Tangente des Kegelschnitts in A . Die auf ihr im Punkte A errichtete Senkrechte, die BC in N schneide, ist die zum Punkte A gehörige Normale des Kegelschnitts. Zur Erkennung der Art des erzeugten Kegelschnitts kann

nun auch von dem Satze Gebrauch gemacht werden, daß bei jedem Kegelschnitt die Tangente und die Normale eines Punktes den zugehörigen Brennpunktstransversalen harmonisch zugeordnet sind. Bezeichnet man die Brennpunkte



des erzeugten Kegelschnitts mit F und F' , so müssen ihnen die Punkte A_1 und N harmonisch zugeordnet sein. Wenn O der Mittelpunkt der Strecke BC ist, so besteht die Beziehung:

$$\overline{OF}^2 = \overline{OF'}^2 = \overline{OA_1} \cdot \overline{ON}.$$

Diese Gleichung ermöglicht es, die lineare Exzentrizität $e = OF$ des durch die Scheitel B und C und den Punkt A bestimmten Kegelschnitts zu berechnen.

Liegt A_0 , der Schnittpunkt der Geraden BC mit l , außerhalb der Strecke BC , so ergibt sich:

$$\overline{OA_1} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{2(a_1 + a_2)}; \quad \overline{ON} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2 + a_0^2}{a_1 a_2};$$

$$e = \pm \frac{a_1 - a_2}{2} \sqrt{\frac{a_1 \cdot a_2 + a_0^2}{a_1 a_2}},$$

und die lineare Exzentrizität ist stets reell. Der erzeugte Kegelschnitt ist daher eine Hyperbel mit der Hauptachse BC .

Ist A_0 auf der Strecke BC gelegen, so findet man:

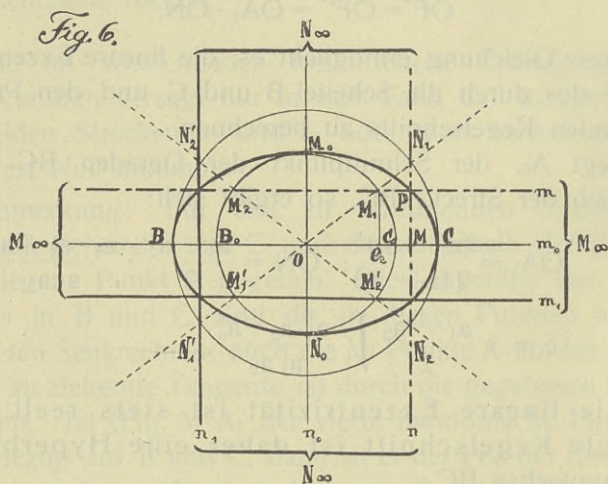
$$\overline{OA_1} = \frac{(a_1 + a_2)^2}{2(a_1 - a_2)}; \quad \overline{ON} = \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0^2}{a_1 \cdot a_2};$$

$$e = \pm \frac{a_1 + a_2}{2} \sqrt{\frac{a_1 a_2 - a_0^2}{a_1 \cdot a_2}}.$$

Die Exzentrizität ist reell, Null oder imaginär, je nachdem $a_0^2 \leq a_1 \cdot a_2$, und der Kegelschnitt stellt dementsprechend eine Ellipse mit BC als großer Achse, einen Kreis mit BC als Durchmesser oder eine Ellipse mit BC als kleiner Achse dar.

Der Übergang vom ersten Falle zum zweiten wird durch Vereinigung des Punktes A_0 mit B (oder C) herbeigeführt. Da alsdann a_1 (bzw. a_2) = 0, so ergeben sich für e die Werte $\pm \infty$. Der erzeugte Kegelschnitt ist eine Parabel, bei der aber auch der zweite Brennpunkt im Unendlichen liegt; es handelt sich um eine zerfallene Parabel, ein Parallelgeradenpaar.

4. Lineare Erzeugung der Mittelpunktskegelschnitte durch zwei projektive Strahlenbüschel, deren Träger die unendlich fernen Punkte zweier aufeinander senkrecht stehender Geraden sind.



a) Die Ellipse.

Es sind (Fig. 6) zwei konzentrische Kreise mit den Halbmessern $OB = r$, $OB_0 = r_0$ und zwei in ihrem Mittelpunkt O aufeinander senkrecht stehende Gerade, m_0 und n_0 , gegeben. Man wähle die unendlich fernen Punkte M_∞ und

N_∞ der Geraden m_0 und n_0 zu Scheiteln zweier Strahlenbüschel, (M_∞) und (N_∞) , und setze die Strahlen beider Büschel in folgender Weise in Beziehung zu einander:

Zwei Strahlen, m und n , aus den Büscheln (M_∞) und (N_∞) werden einander zugeordnet, wenn der eine von den beiden Schnittpunkten des Strahles m mit dem Kreise (r_0) und der eine von den beiden Schnittpunkten des Strahles n mit dem Kreise (r) auf dem nämlichen Halbmesser der beiden konzentrischen Kreise liegen.

Um zu untersuchen, welcher Art die zwischen den Büscheln (M_∞) und (N_∞) entstehende Korrespondenz ist, ziehe man einen beliebigen Strahl m , welcher den Kreis (r_0) in den Punkten M_1 und M_2 trifft, bestimme die Schnittpunkte N_1 und N_2' der Halbmesser OM_1 und OM_2 mit dem Kreise (r) . Durch jeden dieser Punkte geht ein Strahl des Büschels (N_∞) . Einem Strahle des Büschels (M_∞) entsprechen zwei Strahlen des Büschels (N_∞) .

Andererseits ziehe man einen beliebigen Strahl n des Büschels (N_∞) , der den Kreis (r) in den Punkten N_1 und N_2 trifft, und bestimme die Schnittpunkte M_1 und M_2' der Halbmesser ON_1 und ON_2 mit dem Kreise (r_0) ; dann geht durch jeden dieser Punkte ein Strahl des Büschels (M_∞) . Einem Strahle des Büschels (N_∞) entsprechen zwei Strahlen des Büschels (M_∞) .

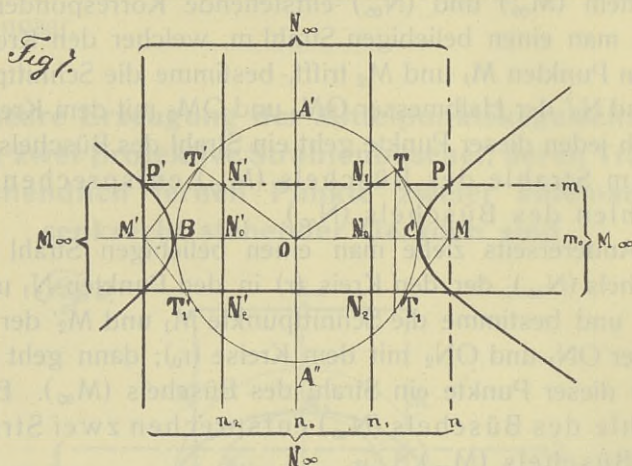
Die Verwandtschaft der Strahlen beider Büschel ist sonach eine Korrespondenz [2,2], und das Erzeugnis ist eine Kurve $(2+2)$ ter oder vierter Ordnung.

Die Geraden m_0 und n_0 sind Symmetrieachsen der Kurve. Hat man einen Punkt P des Erzeugnisses gezeichnet, so kann man durch Umklappen sowohl um die Gerade m_0 als auch um die Gerade n_0 noch drei neue Punkte erhalten, die auch gemäß der allgemeinen Vorschrift konstruierbar sind und demnach dem gesuchten Orte angehören.

Der den beiden Büscheln gemeinsame Strahl $M_\infty N_\infty$ ist die unendlich ferne Gerade der Ebene; sie schneidet, als dem Büschel (M_∞) zugehörig betrachtet, den Kreis (r_0) in den absoluten Punkten $M_{1\infty}$ und $M_{2\infty}$ der Ebene. Die ihnen

entsprechenden Halbmesser schneiden den Kreis (r) wiederum in den absoluten Punkten $N_{1\infty}$ und $N_{2\infty}$ der Ebene, so daß die Punkte $M_{1\infty}$ und $M_{2\infty}$ beziehentlich mit $N_{1\infty}$ und $N_{2\infty}$ zusammenfallen. Die Geraden $N_{\infty} N_{1\infty}$ und $N_{\infty} N_{2\infty}$ sind dann dem unendlich fernen Strahl des Büschels (M_{∞}) zugeordnet. Der unendlich fernen Geraden der Ebene, aufgefaßt als Strahl des Büschels (M_{∞}), entsprechen im Büschel (N_{∞}) zwei Strahlen, die unendlich fern sind und sonach mit ihr zusammenfallen.

Andererseits schneidet die unendlich ferne Gerade $M_{\infty} N_{\infty}$ des Büschels (N_{∞}) den Kreis in den absoluten Punkten $N_{1\infty}$ und $N_{2\infty}$ der Ebene, und die Schnittpunkte $M_{1\infty}$ und $M_{2\infty}$ der



zugehörigen Halbmesser mit dem Kreise (r_0) fallen beziehungsweise mit ihnen zusammen. Die durch sie gelegten Strahlen des Büschels (M_{∞}) sind der unendlich fernen Geraden als Strahl des Büschels (N_{∞}) zugeordnet. Jeder dieser beiden Strahlen ist die Verbindungsgerade zweier unendlich fernen Punkte, nämlich des Scheitels M_{∞} mit den absoluten Punkten $M_{1\infty}$ und $M_{2\infty}$, ist sonach die unendlich ferne Gerade selbst.

Die den beiden Scheiteln gemeinsame unendlich ferne Gerade gehört als Doppelgerade zum Orte der Schnittpunkte entsprechender Strahlen in der Korrespondenz [2,2]. Dieser Ort muß als Kurve vierter Ordnung neben der Doppelgeraden noch eine Kurve zweiter Ordnung, einen Kegelschnitt, enthalten; er ist eine Ellipse,

denn alle übrigen Paare zugeordneter Strahlen schneiden sich rechtwinklig in endlichen, reellen Punkten, welche in Bezug auf die zueinander senkrecht stehenden Durchmesser beider Kreise, die Achsen der Ellipse, symmetrisch liegen. Die Endpunkte des Kreisdurchmessers BC sind die Scheitel der Ellipse. Dem Strahle m_0 entspricht die im Scheitel C an den Kegelschnitt gelegte Tangente, während die Tangente des Kegelschnitts in M_0 dem Strahle n_0 zugeordnet ist.

b) Die Hyperbel.

Gegeben sind (Fig. 7) ein Kreis mit dem Mittelpunkt O , dem Halbmesser $OB = r$, zwei zueinander senkrecht stehende Durchmesser, m_0 und n_0 , sowie die im Abstand $ON_0 = ON'_0 = r_0$ zu n_0 parallelen Geraden, n_1 und n_2 . Man wähle die unendlich fernen Punkte M_∞ und N_∞ von m_0 und n_0 zu Scheiteln zweier Strahlenbüschel (M_∞) und (N_∞) und setze die Strahlen der Büschel in folgender Weise zueinander in Beziehung: Sei M der Schnittpunkt eines Strahles n des Büschels (N_∞) mit m_0 , N_1 der Schnittpunkt eines Strahles m des Büschels (M_∞) mit n_1 , so soll die Zuordnung zweier Strahlen in der Weise bewirkt werden, daß der durch N_1 gehende Halbmesser den Umfang des Kreises in dem Berührungspunkt T einer der beiden durch M gehenden Tangenten trifft.

Um zu untersuchen, welcher Art die zwischen den Büscheln (M_∞) und (N_∞) entstehende Korrespondenz ist, ziehe man einen beliebigen Strahl n des Büschels (N_∞) , welcher die Gerade m_0 in dem Punkte M schneidet, und lege durch ihn an den Kreis die Berührenden MT und MT_1 . Die Halbmesser OT und OT_1 liefern zwei Schnittpunkte N_1 und N_2 mit derjenigen von den Parallelen n_1 und n_2 , die mit der Sehne TT_1 auf einerlei Seite von n_0 liegt, und dem Strahle n entsprechen die beiden Strahlen des Büschels (M_∞) , die durch N_1 und N_2 gehen. Einem Strahle des Büschels (N_∞) entsprechen zwei Strahlen des Büschels (M_∞) .

Ein beliebiger Strahl m des Büschels (M_∞) schneidet die Geraden n_1 und n_2 in den Punkten N_1 und N'_1 . Durch diese Punkte gehen zwei Halbmesser, welche den Kreis in T und T'

schneiden. Die Tangenten des Kreises in T und T' treffen die Gerade m_0 in den Punkten M und M' , und durch diese Punkte gehen die Strahlen des Büschels (N_∞) , die dem Strahle m entsprechen. Einem Strahle des Büschels (M_∞) entsprechen zwei Strahlen des Büschels (N_∞) .

Die Verwandtschaft der Strahlen beider Büschel ist eine Korrespondenz [2,2], und das Erzeugnis ist eine Kurve $(2+2)$ ter oder vierter Ordnung.

Um zu entscheiden, ob durch den Schnitt zweier zugeordneter Strahlen imaginäre Punkte entstehen, beachte man, daß, so lange M außerhalb der Strecke BC liegt, die auf n_1 und n_2 entstehenden Schnittpunkte reell sind. Fällt aber M auf die Strecke BC , dann sind die durch M an den Kreis zu legenden Tangenten imaginär, und es gibt im Büschel (M_∞) keine reellen, der Geraden n zugeordneten Strahlen und daher auch keine reellen Punkte der Kurve vierter Ordnung, die auf n liegen.

Hinsichtlich der unendlich fernen Punkte des gesuchten Ortes ist zu bemerken, daß der gemeinsame Strahl $M_\infty N_\infty$ beider Büschel, die Verbindungslinie ihrer Scheitel, die unendlich ferne Gerade ist, welche als Strahl von (M_∞) mit m_∞ und als Strahl von (N_∞) mit n_∞ bezeichnet werden soll. Sucht man nun die der Geraden n_∞ zugeordneten Strahlen, so findet man, daß beide sich in m_∞ vereinigt haben und sonach mit m_∞ zusammenfallen. Die Gerade n_∞ trifft die Gerade m_0 im Punkte M_∞ , und die von ihm an den Kreis gezogenen Tangenten gehen durch die Punkte A' und A'' des Kreises; der Schnittpunkt der Halbmesser OA' und OA'' mit den Geraden n_1 und n_2 ist der unendlich ferne Punkt N_∞ . Die nach N_∞ zu ziehenden beiden Halbmesser des Kreises (r_0) bilden die Gerade n_0 , und die in ihren Schnittpunkten mit dem Kreise zu konstruierenden Tangenten sind zu m_0 parallel und schneiden beide die Gerade m_0 in M_∞ . Somit vereinigen sich die dem Strahle m_∞ entsprechenden Strahlen aus (N_∞) in der Geraden $N_\infty M_\infty$, d. i. in n_∞ .

In jedem Punkte der unendlich fernen Geraden schneidet sich ein Strahl des einen Büschels mit den beiden ihm zugeordneten des anderen. Daher gehört jeder Punkt der

unendlich fernen Geraden $M_\infty N_\infty$ als Doppelpunkt der Kurve vierter Ordnung an. Die Gerade $M_\infty N_\infty$ gehört somit als Doppelgerade zur Kurve vierter Ordnung.

Sieht man von diesem unendlich fernen Gebilde ab, so bleibt eine Kurve zweiter Ordnung, ein Kegelschnitt, übrig. Dieser Kegelschnitt begegnet der unendlich fernen Geraden, wie jeder Geraden der Ebene, zweimal und zwar, wie oben nachgewiesen, in zwei reellen Punkten; er ist eine Hyperbel mit den Symmetrieachsen m_0 und n_0 . Die Punkte B und C, die auch dem Orte angehören, sind ihre Scheitel; in dem Streifen, der durch die in den Scheiteln gezogenen, auf BC senkrecht stehenden, Tangenten begrenzt wird, hat die Hyperbel keine reellen Punkte. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes O mit den unendlich fernen Punkten P_∞ und P'_∞ sind die Asymptoten. Die Strecke $BC = 2r$ wird Hauptachse, die Strecke $N_0 N'_0 = 2r_0$ Nebenachse der Hyperbel genannt.

Das durch die Asymptoten (Fig. 8) auf der Geraden n_1 begrenzte Stück $SS' = 2p$ steht in einer gewissen Abhängigkeit von den gegebenen Größen r und r_0 . Um die algebraische Beziehung für diese Abhängigkeit zu ermitteln, beachte man, daß die Hyperbel der Ort des Punktes ist von der Beschaffenheit, daß das durch ihn und die Asymptoten bestimmte Parallelogramm einen unveränderlichen Inhalt hat. Ein beliebiger Punkt P der Hyperbel, habe von der Geraden m_0 den Abstand MP und von der Geraden n_0 den Abstand QP = OM; dann sind diese beiden Abstände gemäß der Konstruktion der erzeugenden Geraden, m und n, durch folgende Beziehung mit einander verbunden: $N_0 N : ON_0 = MT : OT$ und, weil $N_0 N = MP$ und $MT = \sqrt{OM^2 - OT^2}$,

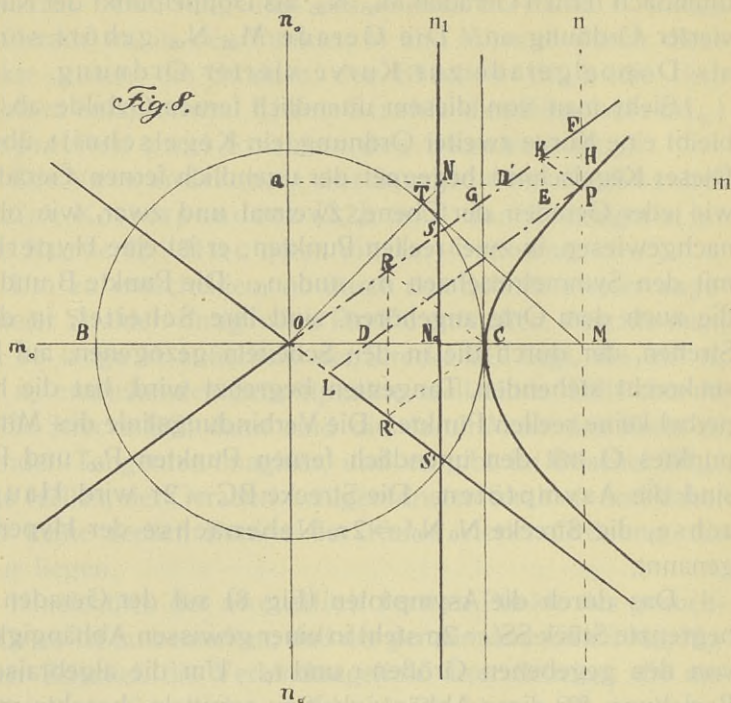
$$PM = \frac{r_0 \sqrt{OM^2 - r^2}}{r}.$$

Für das dem Punkte P entsprechende Parallelogramm besteht nun die Beziehung

$$PKOL = \text{const.},$$

und zwar ist:

$$\text{const.} = ORCR' = \frac{pr^2}{2r_0}.$$



Durch Zerlegung des Parallelogramms PKOL findet man:

$$PKOL = \# ODPD' + \triangle ODL + \triangle D'KP$$

$$= \# ODPD' + 2 \triangle D'KP. \text{ Da nun}$$

$$\# ODPD' = OD \cdot PM; 2 \triangle D'KP = D'P \cdot KE, \text{ so folgt}$$

$$PKOL = OD \cdot PM + D'P \cdot KE, \text{ oder wegen } OD = D'P,$$

$$PKOL = OD \cdot (PM + KE).$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DMP und N_0OS ergibt sich:

$$N_0O : N_0S = DM : PM,$$

$$\text{oder } r_0 : p = OM - OD : PM; \quad r_0 \cdot PM = p \cdot OM - p \cdot OD$$

und daher

$$OD = \frac{p \cdot OM - r_0 \cdot PM}{p}; \text{ andererseits findet man wegen}$$

der Ähnlichkeit der Dreiecke $D'EK$ und DPM , und

$$\text{weil } D'E = \frac{OD}{2},$$

$$KE : \frac{OD}{2} = MP : OM - OD, \text{ und daher:}$$

$$KE = \frac{p \cdot OM - r_0 \cdot PM}{2 r_0}.$$

Durch Einsetzen der für OD und KE gefundenen Werte erhält man:

$$PKOL = \frac{p^2 \cdot \overline{OM}^2 - r_0^2 \cdot \overline{PM}^2}{2 p r_0} = \frac{p r^2}{2 r_0}.$$

Hieraus folgt:

$$p^2 \cdot \overline{OM}^2 - r_0^2 \cdot \overline{PM}^2 = p^2 r^2.$$

Unter Benutzung des für PM gefundenen Wertes entspringt aus dieser Gleichung die Formel:

$$(p^2 r^2 - r_0^4) \overline{OM}^2 = r^2 (p^2 r^2 - r_0^4).$$

Da OM sich von Punkt zu Punkt ändert, und somit die linke Seite der vorstehenden Gleichung eine veränderliche Größe ist, während die rechte Seite unverändert bleibt, so kann die Gleichung nur erfüllt werden, wenn

$$p^2 r^2 - r_0^4 = 0.$$

Zwischen den Größen r_0 und r einerseits und p andererseits besteht daher die Beziehung:

$$p = \frac{r_0^2}{r}.$$

Weil $\triangle ON_0 S \sim \triangle OCG$, so ist $ON_0 : SN_0 = OC : CG$ oder, unter Berücksichtigung der Werte von ON_0, SN_0 und OC :

$$r_0 : p = r : CG, \text{ und daher:}$$

$$CG = \frac{p r}{r_0}.$$

$$\text{Wegen } p = \frac{r_0^2}{r} \text{ ist } r_0 = \frac{p r}{r_0}.$$

Der Vergleich dieser Formel mit der vorhergehenden ergibt:

$$CG = r_0.$$

Das durch die Asymptote und den Scheitel begrenzte Stück der Scheiteltangente ist gleich der Nebenachse der Hyperbel.

Setzt man $r_0 = r$ in Formel $r_0^2 = pr$ ein, so erhält man

$$p = r.$$

Für diesen Fall ist $\angle \text{COG} = 45^\circ$; die Hyperbel ist gleichseitig.

Man setze $\angle \text{SON}_0 = \lambda$, dann ist der Asymptotenwinkel $\text{SOS}' = 2\lambda$, und aus $\text{tg } \lambda = \frac{r_0}{r}$ folgt $\text{tg } 2\lambda = \frac{2r r_0}{r^2 - r_0^2}$.

Der Asymptotenwinkel ist ein spitzer, rechter oder stumpfer, je nachdem der Schnittpunkt N_0 der Geraden n_1 mit der Geraden m_0 auf der Strecke BC, auf dem Punkte C oder außerhalb der Strecke BC liegt. Den Grenzwerten $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{R}{2}$, $\lambda = R$ entsprechen die Doppelgerade m_0 , die gleichseitige Hyperbel oder das in den Scheiteln auf der Hauptachse senkrecht stehende Geradenpaar.

ZWEITER TEIL.

Entwicklung der Gleichungen der Kegelschnitte auf Grund der linearen Erzeugung.

1. Allgemeines über die Ableitung der Kegelschnittsgleichungen aus linearer Erzeugung.

Aus der im vorstehenden gewonnenen Erzeugungsweise der Kegelschnitte mit Hilfe projektiver Strahlenbüschel können die Gleichungen der Kegelschnitte auf einfache Weise abgeleitet werden. Unter Annahme cartesischer Koordinaten nehme man bei endlicher Lage der Strahlenbüschelscheitel deren Verbindungsgerade zur einen und die durch den außerhalb gelegenen Punkt auf sie gefällte Senkrechte zur anderen Koordinatenachse an. Soll die Darstellung der Gleichungen in homogenen Punktkoordinaten erfolgen, so betrachte man das durch die Träger der beiden Strahlenbüschel und den außerhalb des gemeinsamen Strahles liegenden Punkt bestimmte Dreieck als Grunddreieck. Bei unendlich fernen, zu rechtwinkligen Richtungen gehörenden Scheiteln wähle man die Achsen aus den Geraden dieser beiden Richtungen, lege den Koordinatenanfangspunkt in den Mittelpunkt der beiden zur Konstruktion des Kegelschnitts benützten Kreise bzw. des Hilfskreises und stelle aus den Koordinaten des Scheitels und eines geeignet zu wählenden zweiten Punktes die Gleichung eines beliebigen Strahles des einen und des anderen der erzeugenden Strahlenbüschel auf. Dann ergeben

sich bei Zugrundelegung cartesischer Koordinaten die Gleichungen zweier Strahlen in der Form:

$$\varphi(x, y, u) = 0, \quad \psi(x, y, v) = 0, \quad \dots \quad \text{I.}$$

in welchen u eine von Strahl zu Strahl des ersten Büschels sich ändernde Größe ist von der Beschaffenheit, daß nach und nach die Gleichung eines jeden Strahles des ersten Büschels erhalten wird, indem man der Veränderlichen u alle Werte von 0 bis $\pm \infty$ erteilt. Entsprechendes gilt hinsichtlich des zweiten Büschels für die veränderliche Größe v . Der konstruktive Zusammenhang zwischen zwei in der Projektivität einander entsprechenden Strahlen aus dem einen und dem anderen Büschel findet seinen analytischen Ausdruck in einer sowohl in u als auch in v linearen Relation:

$$f(u, v) = 0 \quad \dots \quad \text{II.}$$

Man erhält somit die Koordinaten eines Punktes des erzeugten Kegelschnitts, des Schnittpunkts zweier entsprechender Strahlen, indem man die gemeinsame Lösung nach x und y der Gleichungen I aufsucht, deren Größen u und v der Gleichung II genügen. Werden umgekehrt die Koordinaten x' und y' eines beliebigen Punktes des Kegelschnitts in die Gleichung I eingesetzt, so müssen die hieraus sich ergebenden Werte von u und v die Gleichung II erfüllen. Setzt man die durch Auflösung der Gleichungen I nach u und v gefundenen Werte:

$$u = \Phi(x, y), \quad v = \Psi(x, y) \quad \dots \quad \text{III.}$$

in Gleichung II ein, so erhält man eine Gleichung in x und y

$$f[\Phi(x, y), \Psi(x, y)] = 0, \quad \dots \quad \text{IV}$$

welcher die Koordinaten eines jeden Punktes des Kegelschnitts genügen müssen; sie ist die gesuchte Gleichung des Kegelschnitts.

Bei Anwendung homogener Koordinaten treten in den vorstehenden Gleichungen die Größen x_1, x_2, x_3 anstelle von x, y ; alles übrige bleibt ungeändert.

2. Die auf Grund linearer Erzeugung abgeleitete Gleichung des Kreises.

a) in cartesischen rechtwinkligen Koordinaten.

Die Sehne $BC = a$ des Kreises (r) nehme man (Fig. 1) als Abszissen-Achse und die im Mittelpunkt A_0 auf ihr errichtete Senkrechte als Ordinaten-Achse an. Werden dann die Koordinaten A_0M , PM eines beliebigen Punktes P des Kreises mit x , y bezeichnet, dann findet man, unter Beibehaltung der im ersten Teile No. 2 gebrauchten Bezeichnungen, die Gleichungen der erzeugenden Geraden:

$$\left. \begin{aligned} [BP] &\equiv 2x \operatorname{tg} \varphi_b - 2y + a \operatorname{tg} \varphi_b = 0, \\ [CP] &\equiv 2x \operatorname{tg} \varphi_c - 2y - a \operatorname{tg} \varphi_c = 0. \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

Erteilt man den Winkeln φ_b und φ_c alle Werte von 0 bis $2R$, so liefert Gleichung (1) sämtliche Strahlen des Büschels (B) beziehungsweise des Büschels (C). Aus (1) folgt:

$$\operatorname{tg} \varphi_b = \frac{y}{x + \frac{a}{2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_c = \frac{y}{x - \frac{a}{2}}. \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

Setzt man diese veränderlichen Bestimmungsstücke in die aus der Relation $\mu = \varphi_c - \varphi_b$ fließende Gleichung:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} \varphi_c - \operatorname{tg} \varphi_b}{1 + \operatorname{tg} \varphi_b \cdot \operatorname{tg} \varphi_c} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (3)$$

ein, so erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung des Kreises (r):

$$x^2 + y^2 - ay \cot \mu - \frac{a^2}{4} = 0. \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (4)$$

Für $\mu = R$ wird die Sehne a zum Durchmesser des Kreises. Es ist daher $\cot \mu = 0$ und $a = 2r$ in Gleichung (4) einzusetzen, und die Mittelpunkts Gleichung des Kreises lautet:

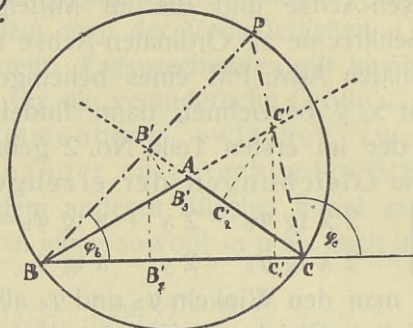
$$x^2 + y^2 = r^2. \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (5)$$

b) in trimetrischen Punktkoordinaten.

Über der Sehne BC des Kreises (r) konstruiere man (Fig. 9) ein beliebiges Dreieck ABC als Grunddreieck, mit den Seiten und Winkeln $a, b, c; \alpha, \beta, \gamma$. Versteht man

unter den Koordinaten eines in der Ebene dieses Dreiecks gelegenen Punktes drei Zahlengrößen, welche den Abständen des Punktes von den Fundamentallinien proportional sind, dann stellen die Gleichungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks dar.

Fig 9.



Zur Ermittlung der Gleichungen der erzeugenden Strahlen BP und CP bestimme man die Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit den Seiten CA und AB des Grunddreiecks aus den Strecken:

$$B'B'_1 = BB' \sin \varphi_b, \quad B'B'_3 = BB' \sin (\varphi_b - \beta);$$

$$C'C'_1 = CC' \sin \varphi_c, \quad C'C'_2 = CC' \sin (\varphi_c + \gamma),$$

und findet:

$$[B'] \equiv \begin{bmatrix} \sin \varphi_b, & 0, & -\sin (\varphi_b - \beta), \\ \sin \varphi_c, & -\sin (\varphi_c + \gamma), & 0 \end{bmatrix}.$$

Aus diesen Koordinaten und denen der Scheitel B und C folgen die Gleichungen der erzeugenden Strahlen:

$$[BB'] \equiv \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 0, & 1, & 0 \\ \sin \varphi_b, & 0, & -\sin (\varphi_b - \beta) \end{vmatrix} = 0,$$

$$[CC'] \equiv \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 0, & 0, & 1 \\ \sin \varphi_c, & -\sin (\varphi_c + \gamma), & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\begin{cases} [BP] \equiv x_1 \sin (\varphi_b - \beta) + x_3 \sin \varphi_b = 0, \\ [CP] \equiv x_1 \sin (\varphi_c + \gamma) + x_2 \sin \varphi_c = 0; \end{cases} \quad (6)$$

daher ist:

$$\operatorname{tg} \varphi_b = \frac{x_1 \sin \beta}{x_1 \cos \beta + x_3}, \operatorname{tg} \varphi_c = - \frac{x_1 \sin \gamma}{x_1 \cos \gamma + x_2}. \quad (7)$$

Es sei bemerkt, daß die Gleichungen $x_1 \cos \beta + x_3 = 0$ und $x_1 \cos \gamma + x_2 = 0$ die in den Punkten B und C auf der Geraden BC errichteten Senkrechten darstellen.

Aus (3) folgt sonach die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{x_1^2 \sin \alpha + x_1 x_2 \sin \beta + x_3 x_1 \sin \gamma}{x_1^2 \cos \alpha - x_1 x_2 \cos \beta - x_3 x_1 \cos \gamma - x_2 x_3},$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{x_1 (x_1 \sin \alpha + x_2 \sin \beta + x_3 \sin \gamma)}{x_1 (x_1 \cos \alpha - x_2 \cos \beta - x_3 \cos \gamma) - x_2 x_3}. \quad (8)$$

Wegen $\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin \mu}{\cos \mu}$ erhält man hieraus nach einigen Umformungen die Gleichung des Kreises (r):

$$x_1^2 \sin (\alpha - \mu) + x_1 x_2 \sin (\beta + \mu) + x_2 x_3 \sin \mu + x_3 x_1 \sin (\gamma + \mu) = 0. \quad (9)$$

Die Form dieser Gleichung läßt erkennen, daß der durch sie dargestellte Kreis durch die Punkte B und C, nicht aber durch Punkt A geht. Soll Punkt A dem Kreise angehören, so ist in (9) $\mu = \alpha$ zu setzen, und man erhält die Gleichung des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises:

$$x_2 x_3 \sin \alpha + x_3 x_1 \sin \beta + x_1 x_2 \sin \gamma = 0 \quad (10)$$

Für $\mu = R$ folgt aus (9) die Gleichung des über BC als Durchmesser stehenden Kreises:

$$x_1^2 \cos \alpha + x_1 x_2 \cos \beta + x_2 x_3 + x_3 x_1 \cos \gamma = 0. \quad (11)$$

Setzt man hierin $\alpha = R$, so wird $\beta + \gamma = R$, und die Gleichung des dem rechtwinkligen Dreieck umschriebenen Kreises ist:

$$x_2 x_3 + x_3 x_1 \sin \beta + x_1 x_2 \cos \beta = 0. \quad (12)$$

Sind die erzeugenden Geraden BP und CP einander parallel, dann ist $\varphi_b = \varphi_c$ und die Gleichungen (6) gehen in die folgenden über:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \sin (\varphi_b - \beta) + x_3 \sin \varphi_b &= 0, \\ x_1 \sin (\varphi_b + \gamma) + x_2 \sin \varphi_b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die Elimination des den beiden Parallelen gemeinsamen Bestimmungsstücks φ_b liefert die Gleichung:

$$x_1 (x_1 \sin \alpha + x_2 \sin \beta + x_3 \sin \gamma) = 0,$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_1 \sin \alpha + x_2 \sin \beta + x_3 \sin \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

Die erste dieser Gleichungen stellt die Gerade BC dar; durch die zweite wird der Ort der Schnittpunkte sämtlicher durch B und C gehender Parallelen, die unendlich ferne Gerade der Ebene, ausgedrückt.

Die Einführung des Wertes $\mu = 0$ in Gleichung (9) führt zu dem nämlichen Ergebnis.

Für die in B und C an den Kreis gezogenen Tangenten hat man in (6) $\varphi_b = 2R - \mu$ und $\varphi_c = \mu$ zu setzen und erhält:

$$\left. \begin{aligned} [SS'] &\equiv x \sin (\mu + \beta) + x_3 \sin \mu = 0, \\ [TT'] &\equiv x \sin (\mu + \gamma) + x_2 \sin \mu = 0. \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

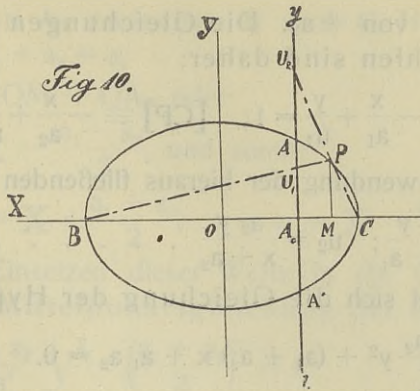
3. Gleichungen der Kegelschnitte, abgeleitet auf Grund linearer Erzeugung aus Strahlenbüscheln mit im Endlichen liegenden Trägern.

a) in cartesischen Koordinaten.

Mit Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems nehme man die Gerade g zur Achse der x und die Gerade l zur Achse der y an und stelle unter Beibehaltung der früher gebrauchten Bezeichnungen die Gleichungen der dem Punkte P entsprechenden Scheiteltransversalen auf. Seien (Fig. 10) $A_0M = x$ und $MP = y$ die laufenden Koordinaten des Schnittpunkts P zweier zusammengehöriger Scheiteltransversalen, so erhält man, wenn Punkt A_0 innerhalb der Strecke BC liegt, die Gleichungen der Geraden:

$$[BP] \equiv -\frac{x}{a_1} + \frac{y}{u_1} = 1; \quad [CP] \equiv \frac{x}{a_2} + \frac{y}{u_2} = 1. \dots (16)$$

Fig. 10.



Hieraus findet man die veränderlichen Bestimmungsstücke

$$u_1 = \frac{a_1 y}{x + a_1}, \quad u_2 = -\frac{a_1 y}{x - a_2} \quad \dots \quad (17)$$

Aus der Relation

$$u_1 \cdot u_2 = a_0^2 \quad \dots \quad (18)$$

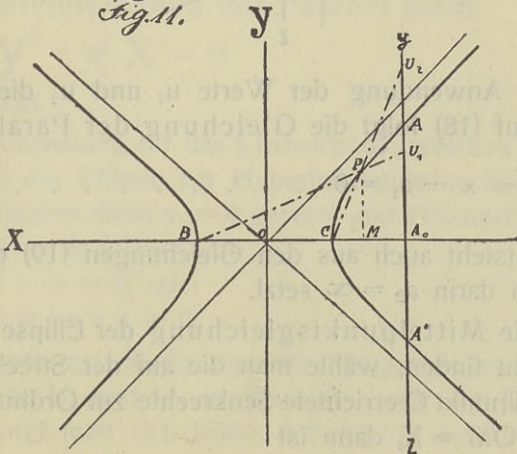
folgt die Gleichung der Ellipse:

$$-\frac{a_1 a_2 y^2}{(x + a_1)(x - a_2)} = a_0^2, \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{a_1 a_2}{a_0^2} y^2 + (a_1 - a_2) x - a_1 a_2 = 0. \quad \dots \quad (19)$$

Wird (Fig. 11) die Strecke BC durch Punkt A_0 äußerlich geteilt, so tritt in den vorstehenden Formeln

Fig. 11.



— a_2 anstelle von $+ a_2$. Die Gleichungen der erzeugenden Strahlen sind daher:

$$[BP] \equiv -\frac{x}{a_1} + \frac{y}{u_1} = 1, \quad [CP] \equiv -\frac{x}{a_2} + \frac{y}{u_2} = 1. \quad (20)$$

Unter Anwendung der hieraus fließenden Werte:

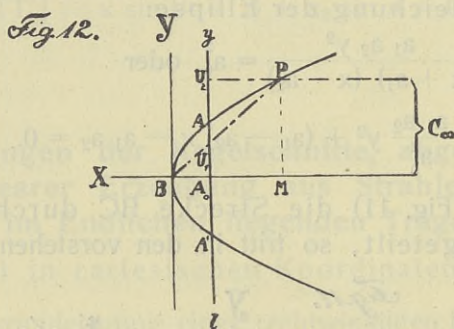
$$u_1 = \frac{a_1 y}{x + a_1}; \quad u_2 = \frac{a_2 y}{x + a_2} \quad \dots \quad (21)$$

auf (18) ergibt sich die Gleichung der Hyperbel:

$$x^2 - \frac{a_1 a_2}{a_0^2} y^2 + (a_1 + a_2) x + a_1 a_2 = 0. \quad \dots \quad (22)$$

Rückt (Fig. 12) der Scheitel C in unendliche Ferne, dann haben die Gleichungen der erzeugenden Strahlen die Form:

$$[BP] \equiv -\frac{x}{a_1} + \frac{y}{u_1} = 1; \quad [C_\infty P] \equiv y = u_2, \quad \dots \quad (23)$$



und unter Anwendung der Werte u_1 und u_2 dieser Gleichungen auf (18) folgt die Gleichung der Parabel:

$$\frac{a_1}{a_0^2} y^2 - x - a_1 = 0 \quad \dots \quad (24)$$

Sie entsteht auch aus den Gleichungen (19) oder (22), indem man darin $a_2 = \infty$ setzt.

Um die Mittelpunkts Gleichung der Ellipse und der Hyperbel zu finden, wähle man die auf der Strecke BC in ihrem Mittelpunkt O errichtete Senkrechte zur Ordinatenachse und setze $OM = X$, dann ist

α) wenn A_0 zwischen B und C liegt (Fig. 10), und daher $a_1 + a_2 = a$,

$$A_0M = OM - OA_0, \text{ oder}$$

$$x = X - \frac{a_1 - a_2}{2}, \text{ und somit:}$$

$$x + a_1 = X + \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad x - a_2 = X - \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung (19) entsteht die Mittelpunktsleichung der Ellipse:

$$X^2 + \frac{a_1 a_2}{a_0^2} Y^2 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 = 0. \quad \dots \dots (25)$$

β) Wenn A_0 außerhalb der Strecke BC liegt, so daß $a_1 - a_2 = a$ (Fig. 11), erhält man $x = X - \frac{a_1 + a_2}{2}$, und daher:

$$x + a_1 = X + \frac{a_1 - a_2}{2}, \quad x + a_2 = X - \frac{a_1 - a_2}{2}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Werte geht aus Gleichung (22) die Mittelpunktsleichung der Hyperbel:

$$X^2 - \frac{a_1 a_2}{a_0^2} Y^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 = 0. \quad \dots \dots (26)$$

hervor.

γ) Setzt man $x = X - a_1$ in Gleichung (24) ein, so wird die Scheitelgleichung der Parabel durch:

$$a_1 Y^2 - a_0^2 X = 0. \quad \dots \dots (27)$$

ausgedrückt.

Die Gleichung für das Linienpaar, welches beim Übergang von der Ellipse zur Hyperbel entsteht, folgt aus (19) und (22), indem darin $a_2 = 0$ gesetzt und gleichzeitig beachtet wird, daß a_1 in a übergeht:

$$x(x + a) = 0, \text{ oder}$$

$$x = 0, \quad x + a = 0. \quad \dots \dots (28)$$

Anmerkung: Sucht man die Spiegelpunkte U_1' und U_2' der Punkte U_1 und U_2 in Beziehung auf die Gerade BC, so überzeugt man sich leicht, daß der Ort des Schnittpunkts

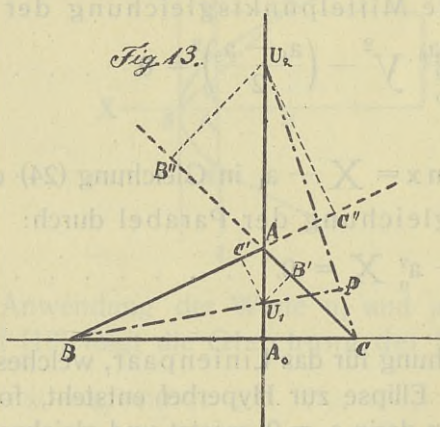
der Scheiteltransversalen BU_1 und CU_2' eine Hyperbel mit der Hauptachse BC oder eine Ellipse mit der großen (bezw. kleinen) Achse BC ist, je nachdem der Punkt A_0 der Strecke BC angehört oder nicht, und daß die Punkte A und A' die imaginären Schnittpunkte der Kegelschnitte mit der Geraden l darstellen.

b) in trimetrischen Punktkoordinaten.

Man nehme das durch die im Endlichen liegenden Scheitel B und C und den außerhalb der Geraden BC liegenden Punkt A des Kegelschnitts K_a gebildete Dreieck ABC als Fundamentaldreieck an und bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte U_1 und U_2 der erzeugenden Geraden BU_1 und CU_2 .

Fällt der Fußpunkt A_0 des von A auf BC gefällten Lotes auf BC , dann ist (Fig. 13)

$$\begin{aligned} A_0U_1 &= u_1, \quad B'U_1 = (a_0 - u_1) \cos \gamma, \quad C'U_1 = (a_0 - u_1) \cos \beta; \\ A_0U_2 &= u_2, \quad B''U_2 = (u_2 - a_0) \cos \gamma, \quad C''U_2 = (u_2 - a_0) \cos \beta, \end{aligned}$$



und die Gleichungen der durch die Punkte B und U_1 , C und U_2 bestimmten Geraden lauten:

$$[BP] \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_1 & (a_0 - u_1) \cos \gamma & (a_0 - u_1) \cos \beta \end{vmatrix} = 0,$$

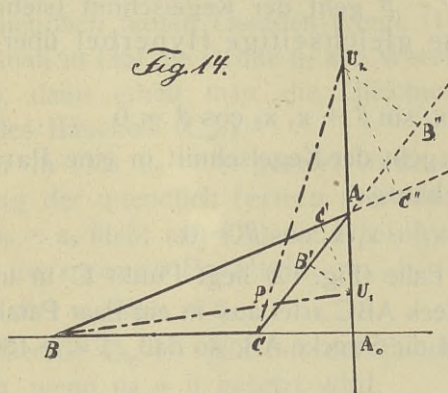
$$[CP] \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ u_2 & -(u_2 - a_0) \cos \gamma & -(u_2 - a_0) \cos \beta \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\begin{cases} [BP] \equiv (a_0 - u_1) x_1 \cos \beta - u_1 x_3 = 0, \\ [CP] \equiv (u_2 - a_0) x_1 \cos \gamma + u_2 x_2 = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Fällt (Fig. 14) Punkt A_0 außerhalb der Grundlinie BC des Fundamentaldreiecks, so ist

$$\begin{aligned} A_0 U_1 &= u_1, & B' U_1 &= -(a_0 - u_1) \cos \gamma, & C' U_1 &= (a_0 - u_1) \cos \beta; \\ A_0 U_2 &= u_2, & B'' U_2 &= -(u_2 - a_0) \cos \gamma, & C'' U_2 &= (u_2 - a_0) \cos \beta. \end{aligned}$$



Die Gleichungen der durch die Punkte B und U_1 , C und U_2 bestimmten Geraden stimmen mit den Gleichungen (29) überein.

Läßt man in (29) die Bestimmungsstücke u_1 und u_2 alle Werte von 0 bis $\pm \infty$ durchlaufen, so erhält man die Gleichungen sämtlicher Strahlen des Büschels (B) bzw. des Büschels (C).

Die Gleichungen (29) der erzeugenden Strahlen BP und CP ergeben die Werte:

$$u_1 = \frac{a_0 x_1 \cos \beta}{x_1 \cos \beta + x_3}, \quad u_2 = \frac{a_0 x_1 \cos \gamma}{a_1 \cos \gamma + x_2}. \quad (30)$$

Durch Einsetzen dieser Größen in (18) erhält man die Gleichung des durch die Punkte A , B , C gehenden Kegelschnitts:

$$[K_a] \equiv x_2 x_3 + x_3 x_1 \cos \gamma + x_1 x_2 \cos \beta = 0. \quad (31)$$

Sie stellt eine Ellipse oder eine Hyperbel dar, je nachdem Winkel γ kleiner oder größer als R ist.

Für $\gamma = R$ ist $\cos \gamma = 0$, und die Kegelschnittsgleichung

$$x_1 x_2 \cos \beta + x_2 x_3 = 0, \text{ oder} \\ x_2 (x_1 \cos \beta + x_3) = 0 \quad (32)$$

stellt das in den Punkten C und B auf der Geraden BC senkrecht stehende Linienpaar dar.

Wenn $\beta + \gamma = R$, dann ist $\cos \gamma = \sin \beta$, und die aus (31) sich ergebende Gleichung stellt den Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks [vergl. Gleichung (12)] dar.

Für $R = \gamma - \beta$ geht der Kegelschnitt (siehe Anmerk. Seite 39) in eine gleichseitige Hyperbel über, mit der Gleichung:

$$x_2 x_3 - x_3 x_1 \sin \beta + x_1 x_2 \cos \beta = 0 \quad (33)$$

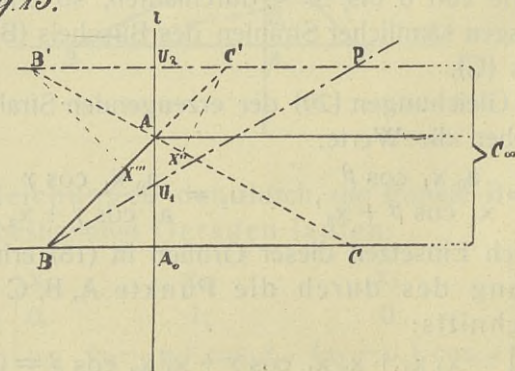
Für $\gamma = 0$ geht der Kegelschnitt in eine Parabel über mit der Gleichung:

$$x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 \cos \beta = 0 \quad (34)$$

In diesem Falle (Fig. 12) liegt Punkt C in unendlicher Ferne, das Dreieck ABC artet aus in ein Paar Parallelstrahlen AC_∞ , BC_∞ und die Strecke AB, so daß $\sphericalangle \alpha = 180 - \beta$ und $\sphericalangle \gamma = 0$.

Um mit Hilfe der erzeugenden Strahlen BU_1 und $C_\infty U_2$ die Gleichung der Parabel (Fig. 15) unmittelbar zu entwickeln, lege man zunächst das Grunddreieck ABC mit endlichem Eckpunkt C zu Grunde und bilde die Gleichung

Fig. 15.



des Strahles $C_\infty U_2$ aus den Koordinaten B' und C' seiner Schnittpunkte mit den Geraden CA und AB :

$$[C_\infty U_2] \equiv \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ u_2 \sin \gamma, & 0, & -(u_2 - a_0) \sin \alpha \\ u_2 \sin \beta, & -(u_2 - a_0) \sin \alpha, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\frac{a_0}{u_2} x_1 \sin \alpha - (x_1 \sin \alpha + x_2 \sin \beta + x_3 \sin \gamma) = 0. \quad (35)$$

Die Form dieser Gleichung läßt erkennen, daß die durch sie dargestellte Gerade durch den Schnittpunkt der Geraden g mit der unendlich fernen Geraden [vergl. (14)] geht.

Läßt man in (35) die Größe u_2 alle Werte von 0 bis $\pm \infty$ annehmen, dann erhält man die Gleichungen sämtlicher Strahlen des Büschels (C_∞).

Wenn in (35) $u_2 = \infty$ gesetzt wird, so entsteht die Gleichung der unendlich fernen Geraden.

Für $u_2 = a_0$ fließt aus (35) die Gleichung der zu BC durch A gezogenen Parallele:

$$x_2 \sin \beta + x_3 \sin \gamma = 0. \quad (35a)$$

Die Gerade $C_\infty U_2$ fällt mit der Fundamentallinie BC zusammen, wenn $u_2 = 0$ gesetzt wird.

Rückt nun Punkt C ins Unendliche, so wird $\sin \alpha = \sin \beta$ und $\sin \gamma = 0$, und die Gleichung (35) geht über in:

$$[C_\infty U_2] \equiv (u_2 - a_0) x_1 + u_2 x_2 = 0. \quad (36)$$

Die Anwendung des hieraus folgenden Wertes

$$u_2 = \frac{a_0 x_1}{x_1 + x_2} \quad (37)$$

in Verbindung mit dem in (30) ermittelten Wert für u_1 auf (18) liefert die Gleichung der Parabel (34).

Jede Seite des Dreiecks ABC kann als Achse eines dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitts angesehen werden. Bei dem spitzwinkligen Dreieck sind sämtliche 3 Kegelschnitte Ellipsen; beim stumpfwinkligen Dreieck steht über der größten Seite eine Ellipse, während die über den beiden kleineren Seiten stehenden Kegelschnitte Hyperbeln sind. Je zwei der Kegelschnitte besitzen außer

in den Ecken des Dreiecks einen vierten Schnittpunkt. Er bildet mit jenen ein vollständiges Viereck und ist der Gegenpunkt des den beiden Kegelschnitten gemeinsamen Scheitels.

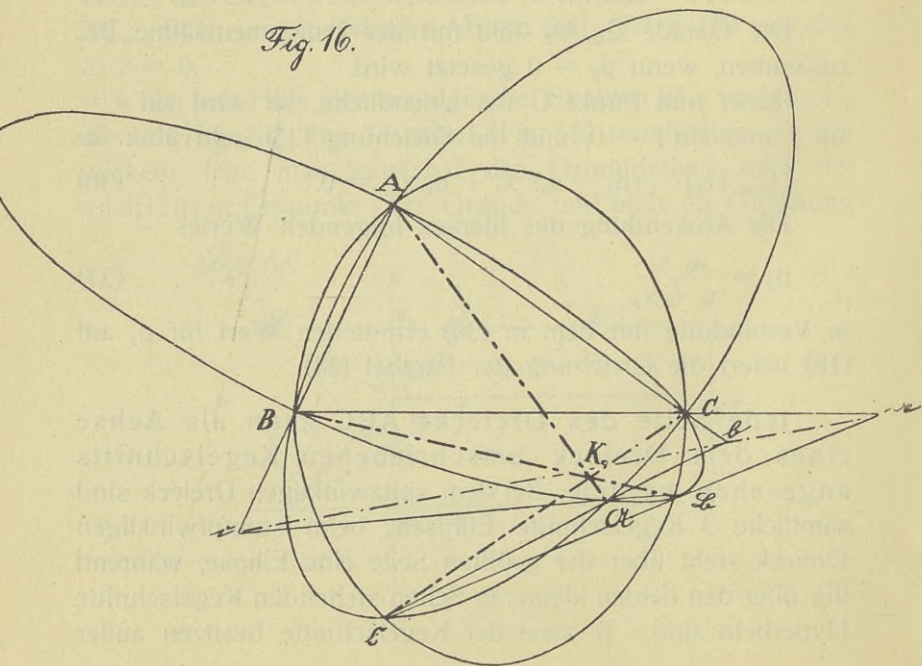
Um die Koordinaten (Fig. 16) der von den Punkten A, B, C verschiedenen vierten Schnittpunkte $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ der Kegelschnitte K_a und K_b bzw. K_b und K_c bzw. K_c und K_a zu finden, dividiere man jede der Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} [K_a] &\equiv x_2 x_3 + x_3 x_1 \cos \gamma + x_1 x_2 \cos \beta = 0, \\ [K_b] &\equiv x_3 x_1 + x_1 x_2 \cos \alpha + x_2 x_3 \cos \gamma = 0, \\ [K_c] &\equiv x_1 x_2 + x_2 x_3 \cos \beta + x_3 x_1 \cos \alpha = 0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

mit dem Quadrat einer der Koordinaten x_1, x_2, x_3 , etwa mit x_3^2 , dann enthalten die entstehenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_1}{x_3} \cos \gamma + \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cos \beta &= 0, \\ \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cos \alpha + \frac{x_2}{x_3} \cos \gamma &= 0, \\ \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_2}{x_3} \cos \beta + \frac{x_1}{x_3} \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (39)$$

Fig. 16.



die Koordinatenverhältnisse $\frac{x_2}{x_3}$ und $\frac{x_1}{x_3}$, und man findet aus den Gleichungen der Kegelschnitte K_a und K_b für den Schnittpunkt $\mathfrak{C}$ die Koordinatenverhältnisse:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_2}{x_3} &= \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha}, \\ \frac{x_1}{x_3} &= \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta}, \text{ und somit} \\ \frac{x_1}{x_2} &= \frac{\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha}{\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (40)$$

In entsprechender Weise werden aus den beiden übrigen Paaren der Kegelschnittsgleichungen die Koordinatenverhältnisse des jeweiligen vierten Schnittpunktes $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gefunden.

Die Gleichungen der den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zugehörigen Scheiteltransversalen $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ folgen aus dem entsprechenden Verhältnis der Koordinaten dieser Punkte:

$$\left. \begin{aligned} [A\mathfrak{A}] &\equiv (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) x_2 - (\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta) x_3 = 0, \\ [B\mathfrak{B}] &\equiv (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) x_3 - (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) x_1 = 0, \\ [C\mathfrak{C}] &\equiv (\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta) x_1 - (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) x_2 = 0. \end{aligned} \right\} (41)$$

Die Determinante ihrer Koeffizienten:

$$\begin{vmatrix} 0, & (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma), & -(\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta) \\ -(\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma), & 0, & (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \\ (\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta), & -(\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha), & 0, \end{vmatrix}$$

ist, wie der Augenschein lehrt, gleich Null.

Die Geraden $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ gehen sonach durch **einen Punkt, K_0 . Dieser Punkt ist ein merkwürdiger Punkt des Dreiecks***) und hat die Koordinaten:

$$[\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha, \cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta, \cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma] \quad (42)$$

Einem Dreieck können drei Kegelschnitte so umschrieben werden, daß jede Seite eine Achse eines Kegelschnitts und jeder Eckpunkt den gemeinsamen Scheitel zweier Kegelschnitte bilden.

*) Vergleiche: Die Anwendung trimetrischer Punktkoordinaten auf die merkwürdigen Punkte des Dreiecks, von dem Verfasser. Progr. Nr. 239. Liegnitz 1899.

Je zwei umschriebene Kegelschnitte schneiden sich außer in den Ecken des Dreiecks noch in einem vierten Punkte.

Die Verbindungsgeraden je zweier Ecken des Grunddreiecks und des „Dreiecks der vierten Punkte“ schneiden sich in **einem** Punkte.

Ermittelt man mit Hilfe der Koordinaten der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Gleichungen der Seiten des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ und aus ihnen die Koordinaten der Schnittpunkte a , b , c je zweier entsprechender Seiten der Dreiecke ABC und $\mathfrak{ABC}$, so ist die Determinante dieser Koordinaten gleich Null. Die Punkte a , b , c liegen sonach auf **einer** Geraden.

Die Schnittpunkte je zweier entsprechender Seiten des Grunddreiecks und des „Dreiecks der vierten Punkte“ liegen auf **einer** Geraden.

Auch der Umkreis des Dreiecks hat mit jedem der drei umschriebenen Kegelschnitte außer den Ecken des Dreiecks einen vierten Punkt gemeinsam. Die Verbindungssehne dieses Punktes mit der Ecke des Dreiecks, welcher der Achse des Kegelschnitts gegenüberliegt, ist der Gegensehne parallel.

Zur Ermittlung der Koordinaten des vierten Schnittpunkts $\mathfrak{A}'$ des Umkreises

$$x_2 x_3 \sin \alpha + x_3 x_1 \sin \beta + x_1 x_2 \sin \gamma = 0,$$

mit dem Kegelschnitt

$$x_2 x_3 + x_3 x_1 \cos \gamma + x_1 x_2 \cos \beta = 0$$

dividiere man beide Gleichungen mit x_3^2 und ermittle das Koordinatenverhältnis $\frac{x_2}{x_3}$.

Die Gleichungen:

$$\frac{x_2}{x_3} \sin \alpha + \frac{x_1}{x_3} \sin \beta + \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} \sin \gamma = 0,$$

$$\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_1}{x_3} \cos \gamma + \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cos \beta = 0 \text{ liefern dann:}$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{\sin \alpha \cos \gamma - \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \sin \gamma},$$

zum Ausdruck gebracht und nimmt unter Anwendung der eingeführten Bezeichnungen die Form an:

$$\nu : \sqrt{r^2 - \mu^2} = r_0 : r. \quad (45)$$

Unter Beachtung von (44) folgt hieraus die Gleichung des erzeugten Kegelschnitts:

$$y : \sqrt{r^2 - x^2} = r_0 : r, \text{ oder}$$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r_0^2} = 1, \quad (46)$$

d. i. die Gleichung der Ellipse mit den Achsen r und r_0 . Sie liefert für $r_0 = r$ die Gleichung des Kreises mit dem Halbmesser r :

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (47)$$

b) Die Hyperbel.

Die Ableitung der Gleichung der Hyperbel auf Grund der im ersten Teile Nr. 4 behandelten Erzeugung gestaltet sich folgendermaßen: Die erzeugenden Strahlen sind durch die Gleichungen (44) dargestellt; gemäß der a. a. O. getroffenen Bestimmung findet die Proportion statt (Fig. 7):

$$N_0 N_1 : N_0 O = MT : OT, \text{ oder}$$

$N_0 N_1 : N_0 O = \sqrt{OM^2 - OT^2} : OT$, und nach Einführung der gebrauchten Bezeichnungen:

$$\nu : r_0 = \sqrt{\mu^2 - r^2} : r. \quad (48)$$

Die Verbindung dieser Proportion mit den Gleichungen (44) liefert:

$y : r_0 = \sqrt{x^2 - r^2} : r$, und die Gleichung der Hyperbel mit den Achsen r und r_0 lautet:

$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r_0^2} = 1. \quad (49)$$

Setzt man $r_0 = r$, dann ist $\nu = MP = MT$, die Hyperbel ist gleichseitig und hat die Gleichung:

$$x^2 - y^2 = r^2. \quad (50)$$

Inhalt.

ERSTER TEIL.

Lineare Erzeugung der Kegelschnitte mit Hilfe zweier projektiver Strahlenbüschel.

1. Allgemeines über lineare Erzeugung von Kegelschnitten durch projektive Strahlenbüschel	Seite 4
2. Lineare Erzeugung des Kreises mittelst zweier gleicher und gleichsinniger Strahlenbüschel	„ 6
3. Lineare Erzeugung der Kegelschnitte durch zwei projektive Strahlenbüschel, deren Träger mit den Scheiteln der Kegelschnitte zusammenfallen	„ 10
4. Lineare Erzeugung der Mittelpunktskegelschnitte durch zwei projektive Strahlenbüschel, deren Träger die unendlich fernen Punkte zweier aufeinander senkrecht stehender Geraden sind	„ 22

ZWEITER TEIL.

Entwicklung der Gleichungen der Kegelschnitte auf Grund der linearen Erzeugung.

1. Allgemeines über die Ableitung der Kegelschnittsgleichungen aus linearer Erzeugung	„ 31
2. Die auf Grund linearer Erzeugung abgeleitete Gleichung des Kreises	
a) in cartesischen rechtwinkligen Koordinaten	„ 33
b) in trimetrischen Punktkoordinaten	„ 33
3. Gleichungen der Kegelschnitte, abgeleitet auf Grund linearer Erzeugung aus Strahlenbüscheln mit im Endlichen liegenden Trägern	
a) in cartesischen Koordinaten	„ 36
b) in trimetrischen Punktkoordinaten	„ 40
4. Die Gleichungen der Mittelpunktskegelschnitte in cartesischen Koordinaten, abgeleitet auf Grund linearer Erzeugung aus zwei Strahlenbüscheln mit unendlich fernen, zu rechtwinkligen Richtungen gehörenden Scheiteln	„ 47

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II 31415 L. inw.

Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298328