ANWENDUNG DER CAUCHY-LIPSCHITZSCHEN METHODE AUF LINEARE PARTIELLE DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN

VON

DR. ANTON SCHMID

BEILAGE ZUM PROGRAMM DER GROSSHERZOGLICHEN REALSCHULE
ZU SCHÖNBERG IN MECKLENBURG 1909

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1909

Einleitung.

Die Cauchy-Lipschitzsche Methode[1]), die Existenz der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zu beweisen, besteht im wesentlichen darin, daß an die Stelle der Differentialquotienten Differenzenquotienten gesetzt werden, welche beim späteren Grenzübergange in die entsprechenden Differentialquotienten übergehen. An die Stelle der identisch zu erfüllenden Differentialgleichung tritt dadurch eine für eine diskrete Anzahl von Punkten gültige Differenzengleichung.

Bei dieser Methode ist eine gewisse Willkür nicht zu vermeiden. Denn einerseits kann man die Einteilung der Intervalle nach Belieben wählen, sofern man nur dafür sorgt, daß alle Teilstrecken gleichmäßig der Null sich nähern. Andererseits ist die Definition der zu benützenden Differenzenquotienten in mehrfacher Beziehung willkürlich. Besitzt nämlich eine Funktion eine Derivierte, so hat sowohl der vorwärts genommene als auch der rückwärts genommene Differenzenquotient oder irgend ein Mittelwert zwischen beiden dieselbe zum Grenzwert.

Die Schwierigkeiten werden noch erheblich größer bei der Ausdehnung der Methode auf partielle Differentialgleichungen. Denn einerseits wird dabei die Definition der Differenzenquotienten umständlicher, andererseits treten noch die mehr oder weniger komplizierten Randbedingungen hinzu. Ein erfolgreicher Versuch die Methode auch auf partielle Differentialgleichungen anzuwenden scheint bisher nicht gemacht worden zu sein. Runge[2]) bemerkt am Schlusse einer Abhandlung, in welcher er eine Methode zur Schätzung der Fehlergrenzen bei der Cauchy-Lipschitzschen Methode angibt: „Für partielle Differentialgleichungen wird vermutlich ein ähnlicher Satz existieren. Es ist mir aber bis jetzt nicht gelungen die analogen Erörterungen durchzuführen."

1) Lipschitz, Lehrbuch der Analysis 2. Bd. p. 499 ff., Bonn 1880. — Erörterung der Möglichkeit, ein gegebenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig zu integrieren Bonn 1868; außerdem mitgeteilt in den Annali di mat. Serie 2^{a} t. 2^{0} p. 288, und im Bull. des sciences mathém. t. 10 p. 149. — Cauchy leçons de calcul differentiel et de calcul intégral, redigées par Moigno t. 2 p. 385, und Coriolis in Lionville, Journal t. 2 p. 229.

2) Runge, Über angewandte Mathematik, Math. Ann. Bd. 44, 1894 p. 437 ff.

Die gegenwärtige Abhandlung beschränkt sich auf die Untersuchung der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen und einer abhängigen Variablen. Die Zahl der unabhängigen Variablen wurde nur wegen der größeren Einfachheit der Formeln auf zwei beschränkt. Im wesentlichen dürften meine Betrachtungen auch für mehrere unabhängige Veränderliche durchführbar sein.

Teilen wir das zweidimensionale Gebiet der unabhängigen Variablen durch fortlaufend numerierte Parallelen zu den Achsen rechteckig ein, so können wir für die partiellen ersten Differenzenquotienten eine der vier folgenden Definitionen wählen:

$$1.\quad \frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} x_i} = \frac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{x_{i+1} - x_i}, \qquad \frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} y_k} = \frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{y_{k+1} - y_k};$$

$$2.\quad \frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} x_i} = \frac{u_{i-1,k} - u_{ik}}{x_{i-1} - x_i}, \qquad \frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} y_k} = \frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{y_{k+1} - y_k};$$

$$3.\quad \frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} x_i} = \frac{u_{i-1,k} - u_{ik}}{x_{i-1} - x_i}, \qquad \frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} y_k} = \frac{u_{i,k-1} - u_{ik}}{y_{k-1} - y_k};$$

$$4.\quad \frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} x_i} = \frac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{x_{i+1} - x_i}, \qquad \frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} y_k} = \frac{u_{i,k-1} - u_{ik}}{y_{k-1} - y_k}.$$

Hierin soll $u_{ik} = u(x_i, y_k)$ der Wert der Funktion $u = u(x, y)$ im Punkte $P_{ik} = Px_i, y_k$ sein. Die vier Definitionen entsprechen den vier möglichen Kombinationen der vorwärts und rückwärts genommenen Differenzenquotienten nach x und y und weisen je einem der vier Quadranten eine ausgezeichnete Rolle zu. Es braucht indessen nicht jeder der vier Fälle besonders untersucht zu werden, da sich mittelst einer Transformation von der Form

$$x' = \pm x, \qquad y' = \pm y,$$

jeder derselben auf jeden andern zurückführen läßt.[1])

Es genügt daher nur den ersten der obigen Fälle zu betrachten. Ist

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

die zu integrierende Differentialgleichung erster Ordnung, so kann man für jeden Punkt P_{ik} die Differenzengleichung

$$F\left(x_i, y_k, u_{ik}, \frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} x_i}, \frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} y_k}\right) = 0$$

1) Man könnte auch noch andere Festsetzungen treffen, z. B.

$$\frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} x_i} = \frac{1}{l+m}\left\{ l\,\frac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{x_{i+1} - x_i} + m\,\frac{u_{i-1,k} - u_{ik}}{x_{i-1} - x_i}\right\}$$

$$\frac{\mathfrak{d} u_{ik}}{\mathfrak{d} y_k} = \frac{1}{\lambda+\mu}\left\{ \lambda\,\frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{y_{k+1} - y_k} + \mu\,\frac{u_{i,k-1} - u_{ik}}{y_{k-1} - y_k}\right\}.$$

bilden. Nimmt man noch an, daß alle $x_{i+1} - x_i = y_{k+1} - y_k = h$ seien[1]), so kann man auch schreiben:

$$F\left(x_i,\, y_k,\, \frac{u_{i+1,\,k} - u_{ik}}{h},\, \frac{u_{i,\,k+1} - u_{ik}}{h}\right) = 0.$$

In dieser Gleichung kommen die drei Werte u_{ik}, $u_{i+1,\,k}$, $u_{i,\,k+1}$ vor. Nimmt man zwei derselben als bekannt an, so läßt sich der dritte daraus berechnen. Demnach sind zwei wesentliche Fälle zu unterscheiden:

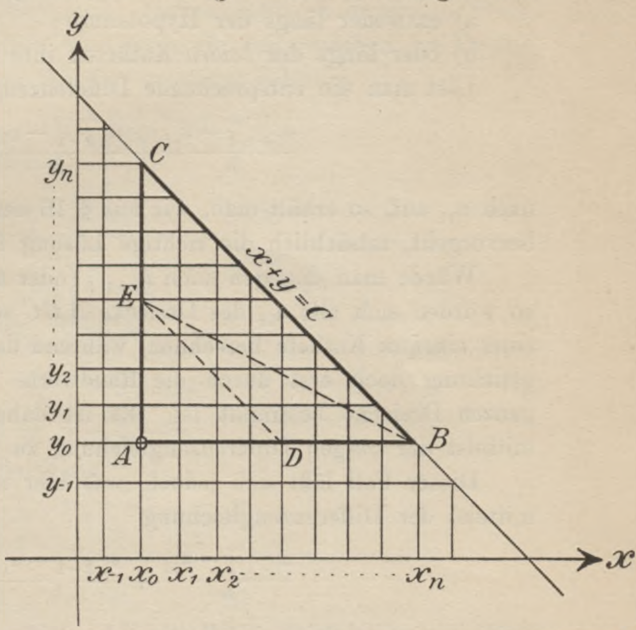
I. Der Wert u_{ik} wird aus den beiden Werten $u_{i+1,\,k}$ und $u_{i,\,k+1}$ berechnet. Dieser Fall wird in der vorliegenden Abhandlung untersucht. Er ist in bezug auf x und y vollständig symmetrisch. Unsere Differenzengleichung gestattet in dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck ABC, dessen Katheten die Geraden

$$x = x_0,$$
$$y = y_0$$

sind, und dessen Hypotenuse die Randgerade

$$x + y = C$$

ist, aus den Werten u_{ik} längs der Hypotenuse sukzessive die Werte in den dazu parallelen Punktreihen zu berechnen.



II. Einer der beiden Werte $u_{i+1,\,k}$ bzw. $u_{i,\,k+1}$ wird aus den beiden andern u_{ik} und $u_{i,\,k+1}$ bzw. u_{ik} und $u_{i+1,\,k}$ berechnet. Dieser unsymmetrische Fall gestattet im ebengenannten Dreieck ABC aus den Werten u_{ik} längs einer Kathete sukzessive die Werte in den dazu parallelen Punktreihen zu berechnen.

Wie Painlevé[2]) gezeigt hat, besitzt die Cauchy-Lipschitzsche Methode für gewöhnliche Differentialgleichungen den weitesten Konvergenzbezirk. Dagegen versagt die erwähnte Verallgemeinerung der-

1) Diese beschränkende Voraussetzung ist für die folgende Untersuchung wesentlich.

2) Painlevé: Sur le calcul des intégrales d'un système differentiel par la méthode de Cauchy-Lipschitz, Bull. soc. math. t. 27, 1899 p. 149.

selben für partielle Differentialgleichungen oft schon in den einfachsten Fällen. So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

das allgemeine Integral

$$u = \varphi\,(y - x),$$

wo φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Hieraus erhellt, daß die Werte von u längs aller Geraden

$$y - x = c$$

konstant sein müssen. Daher ist die Lösung vollständig bestimmt, wenn

a) entweder längs der Hypotenuse

b) oder längs der *beiden* Katheten ihre Werte vorgeschrieben sind.

Löst man die entsprechende Differenzengleichung

$$\frac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{h} + \frac{u_{i,k-1} - u_{ik}}{h} = 0$$

nach u_{ik} auf, so erhält man, wie aus § 16 der vorliegenden Abhandlung hervorgeht, tatsächlich die richtige Lösung für den Fall a).

Würde man dagegen nach $u_{i+1,k}$ (oder auch nach $u_{i,k+1}$) auflösen, so würden sich alle u_{ik} des Dreiecks ABC schon aus den Werten längs *einer einzigen* Kathete berechnen, während das Integral der Differentialgleichung doch erst durch die Randwerte längs *beider* Katheten im ganzen Dreiecke bestimmt ist. Es ist daher unmöglich, den Fall b) mittelst der obigen Differenzengleichung zu erledigen.

Dieser Fall läßt sich jedoch, was hier nur angedeutet werden soll, mittelst der Differenzengleichung

$$\frac{u_{i-1,k} - u_{ik}}{h} + \frac{u_{i,k-1} - u_{ik}}{h} = 0,$$

welche unserer dritten Definition der Differenzenquotienten entspricht, behandeln.[1])

1) Daß man dabei tatsächlich die richtige Lösung erhält ersieht man entweder, indem man mittelst der Substitution $\xi = -x$, $\eta = -y$ diesen Fall auf den im folgenden behandelten zurückführt, oder indem man aus der Differenzengleichung die folgende Rekursionsformel ableitet:

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\,(u_{i-1,k} + u_{i,k-1}).$$

Durch wiederholte Anwendung derselben erhält man

$$u_{ik} = \frac{1}{2^{m+n}} \sum \frac{(m+n)!}{m!\;n!}\, u_{i-m,k-n}.$$

Diese Formel ist bereits in früheren Zeiten eingehend untersucht worden, nämlich bei der Ableitung des sogenannten Bernoullischen Theorems der Wahrschein-

Was endlich die Frage der Intervallsteilung betrifft, so scheint auch hier die Konvergenz wesentlich durch die Wahl der Teilstrecken bedingt zu sein. So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

das allgemeine Integral

$$u = \varphi(x + y).$$

Jede Lösung ist daher konstant längs aller Geraden

$$x + y = c.$$

In dem Dreieck ABC ist sonach eine Lösung durch ihre Werte längs der einen *ganzen* Kathete bestimmt. Insbesondere ist durch die Werte längs der Hälfte CE derselben die Lösung für den zwischen den Parallelen BC und DE gelegenen Streifen bestimmt. Für

$$x_{i+1} - x_i = y_{k+1} - y_k = h$$

liefert die Differenzengleichung

$$\frac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{h} = \frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{h}$$

oder

$$u_{i+1,k} = u_{i,k+1}$$

auch tatsächlich das richtige Resultat.

Setzt man aber

$$x_{i+1} - x_i = 2h,$$
$$y_{k+1} - y_k = h,$$

so würde die Differenzengleichung

$$\frac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{2h} = \frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{h}$$

oder

$$u_{i+1,k} = 2u_{i,k+1} - u_{ik}$$

gestatten, aus den Werten längs AE alle Werte in dem Dreieck ABE zu berechnen, während doch der im obigen Streifen gelegene Teil derselben dadurch überhaupt nicht bestimmt ist. Deshalb muß auch in diesem Falle die Methode versagen.

Die im vorausgehenden angedeuteten Schwierigkeiten nötigten den Verfasser der vorliegenden Abhandlung seine Aufgabe auf die Untersuchung der *linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu + D = 0$$

---

lichkeitsrechnung (vgl. Czuber, Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen, Jahresb. d. deutschen Mathematiker Vereinigung Leipzig 1899). Auch dieses Theorem ergibt den Beweis für die Konvergenz der u_{ik} gegen das gesuchte Integral.

zu beschränken. Hierin sind A, B, C, D als *endliche, willkürliche, reelle Funktionen* der *reellen* unabhängigen *Variablen* x und y zu betrachten, welche den aus § 3 ersichtlichen Stetigkeitsbedingungen genügen. Sind dann die Randwerte längs der Geraden

$$\alpha x + \beta y = C$$

vorgeschrieben, so wird noch vorausgesetzt, daß in dem betrachteten Gebiete Δ die *Produkte* αA *und* βB *von gleichem Zeichen und nicht beide gleichzeitig Null sind.*[1])

Der Verfasser zeigt, daß unter diesen Voraussetzungen die durch seine Verallgemeinerung der Cauchy-Lipschitzschen Methode gefundenen *Näherungswerte gegen eine Grenzfunktion konvergieren, und daß diese und nur diese Grenzfunktion die obige Differentialgleichung bei willkürlich vorgeschriebenen Randwerten befriedigt.* — Der hauptsächliche Wert derartiger Untersuchungen dürfte darin zu suchen sein, daß man *keine analytischen Funktionen* vorauszusetzen braucht, daß man sich vielmehr ganz im Gebiete der *willkürlichen reellen Funktionen von reellen Variablen* bewegt.

§ 1.

Es sei die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung vorgelegt

$$A\frac{\partial u}{\partial x'} + B\frac{\partial u}{\partial y'} + Cu + D = 0, \tag{1}$$

wo A, B, C, D endliche, willkürliche, reelle Funktionen der reellen Variablen x' und y' sind. Alsdann stellen wir uns die Aufgabe, u derart als Funktion von x' und y' zu bestimmen, daß dieselbe unserer Differentialgleichung genügt und längs der Geraden

$$\alpha x' + \beta y' = C \tag{2}$$

vorgeschriebene Randwerte annimmt.

Durch die Substitution

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha x' \\ y &= \beta y' \end{aligned}\right\}$$

geht die Gleichung der Randgeraden über in

$$x + y = C, \tag{3}$$

d. h. in den neuen Koordinaten x und y ist die Randgerade unter einem Winkel von 45^0 gegen die beiden Achsen geneigt.

Unsere Differentialgleichung wird durch diese Substitution in die folgende verwandelt:

---

1) Übrigens lassen sich in vielen Fällen diese Einschränkungen durch eine geeignete Transformation beseitigen.

$$\alpha A \frac{\partial u}{\partial x} + \beta B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu + D = 0.$$

Dividiert man noch durch $\alpha A + \beta B$ und setzt

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\alpha A}{\alpha A + \beta B}, \\ b &= \frac{\beta B}{\alpha A + \beta B}, \\ c &= \frac{C}{\alpha A + \beta B}, \\ d &= \frac{D}{\alpha A + \beta B}, \end{aligned}\right\}$$

so nimmt sie schließlich die Form an:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + d = 0, \tag{4}$$

wo noch die Relation besteht:

$$a + b = 1. \tag{5}$$

Im folgenden machen wir stets nur von der letzten Form der Differentialgleichung Gebrauch und setzen überdies voraus, daß *a und b* in dem zu betrachtenden Gebiete *$\varDelta$ nirgends negativ* seien. Diese Voraussetzung ist offenbar erfüllt, wenn αA und βB vom gleichen Zeichen und nicht beide gleichzeitig Null sind. Außerdem sollen für a, b, c, d noch die in § 3 angeführten Stetigkeitsbedingungen gelten.

§ 2.

Das im folgenden zu betrachtende Gebiet $\varDelta$ sei ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten $\leqq L$ und parallel zu den Achsen sind, und dessen Hypotenuse unsere Randgerade ist. Durch einen beliebigen Punkt $A = P_{x,y}$ dieses Gebietes legen wir (unter x' und y' laufende Koordinaten verstanden) die Geraden $y' = y$ und $x' = x$. Die Schnittpunkte B und C derselben mit der Randgeraden $x' + y' = C$ haben die Koordinaten $C - y$, y bzw. x, $C - x$. Daher sind die beiden Katheten des Dreiecks ABC einander gleich, $\leqq L$ und gleich $C - (x + y)$.

Hierauf ziehen wir zu beiden Seiten jeder Kathete parallele Gerade in gleichen Abständen $h = \frac{C - (x + y)}{n}$, und numerieren sie fortlaufend so, daß die Geraden durch den Punkt A den Index Null bekommen. Dadurch ist jeder Gitterpunkt des entstandenen quadratischen Netzes durch zwei Indizes charakterisiert und soll fortan mit $P_{ik} = P_{x_i, y_k}$ bezeichnet werden. Insbesondere kommt dem Punkte $A = P_{x,y}$ die Bezeichnung $P_{00} = P_{x_0, y_0}$ zu.

Sind $f_{ik} = f(x_i, y_k)$ die Werte irgend einer Funktion $f(x, y)$ in den

Gitterpunkten, so wollen wir für die partiellen Differenzenquotienten folgende abkürzende Bezeichnungen gebrauchen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_i} &= f_{ik}^{10} = \frac{f_{i+1,k} - f_{ik}}{h},\\ \frac{\partial f_{ik}}{\partial y_k} &= f_{ik}^{01} = \frac{f_{i,k+1} - f_{ik}}{h},\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x_{i\,k}^2} &= f_{ik}^{20} = \frac{f_{i+1,k}^{10} - f_{ik}^{10}}{h} = \frac{f_{i+2,k} - 2f_{i+1,k} + f_{ik}}{h^2},\\ \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_i \partial y_k} &= f_{ik}^{11} = \frac{f_{i,k+1}^{10} - f_{ik}^{10}}{h} = \frac{f_{i+1,k}^{01} - f_{ik}^{01}}{h} = \frac{f_{i+1,k+1} - f_{i,k+1} - f_{i+1,k} + f_{ik}}{h^2},\\ \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial y_k^2} &= f_{ik}^{02} = \frac{f_{i,k+1}^{01} - f_{ik}^{01}}{h} = \frac{f_{i,k+2} - 2f_{i,k+1} + f_{ik}}{h^2},\end{aligned}\right\}$$

usw.

§ 3.

Innerhalb des Gebietes $\varDelta$ sollen nun die folgenden Voraussetzungen gelten:

1. Keine der Größen a und b, welche der Bedingung $a + b = 1$ genügen, soll negativ sein.

2. Die Beträge von c und d, sowie von den ersten und zweiten Differenzenquotienten der Größen a, b, c, d sollen unter einer festen, von h unabhängigen Grenze u bleiben.

3. Auf dem ganzen Rande $x + y = C$, wo auch $i + k = n$ ist, sollen die Beträge der vorgeschriebenen Randwerte und ihrer ersten und zweiten längs des Randes genommenen Differenzenquotienten

$$u'_{ik} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i+1,k}}{h}$$

und

$$u''_{ik} = \frac{u'_{i,k+1} - u'_{i+1,k}}{h} = \frac{u_{i,k+2} - 2u_{i+1,k+1} + u_{i+2,}}{h^2}$$

unter derselben festen Grenze u bleiben.

§ 4.

Zunächst erwähnen wir einige im folgenden zu verwendende Hilfssätze.

Hilfssatz 1: Für jede Funktion $f(x, y)$ gelten die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}f_{i+1,k} &= f_{ik} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_i} h,\\ f_{i,k+1} &= f_{ik} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial y_k} h,\end{aligned}\right\}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{d} f_{i+1,k}}{\mathfrak{d} x_{i+1}} = \frac{\mathfrak{d} f_{ik}}{\mathfrak{d} x_i} + \frac{\mathfrak{d}^2 f_{ik}}{\mathfrak{d} x_i^2} h, \\
&\frac{\mathfrak{d} f_{i,k+1}}{\mathfrak{d} x_i} = \frac{\mathfrak{d} f_{ik}}{\mathfrak{d} x_i} + \frac{\mathfrak{d}^2 f_{ik}}{\mathfrak{d} x_i \mathfrak{d} y_k} h, \quad \frac{\mathfrak{d} f_{i+1,k}}{\mathfrak{d} y_k} = \frac{\mathfrak{d} f_{ik}}{\mathfrak{d} y_k} + \frac{\mathfrak{d}^2 f_{ik}}{\mathfrak{d} x_i \mathfrak{d} y_k} h, \\
&\frac{\mathfrak{d} f_{i,k+1}}{\mathfrak{d} y_{k+1}} = \frac{\mathfrak{d} f_{ik}}{\mathfrak{d} y_k} + \frac{\mathfrak{d}^2 f_{ik}}{\mathfrak{d} y_k^2} h.
\end{aligned}\right\}$$

Diese Formeln ergeben sich unmittelbar aus der Definition der Differenzenquotienten in § 2.

Hilfssatz 2: Für alle positiven ganzen Zahlen μ und ν gilt die Formel:

$$\frac{\mathfrak{d}^{\mu+\nu} a_{ik}}{\mathfrak{d} x_i^{\mu} \mathfrak{d} y_k^{\nu}} + \frac{\mathfrak{d}^{\mu+\nu} b_{ik}}{\mathfrak{d} x_i^{\mu} \mathfrak{d} y_k^{\nu}} = 0.$$

Diese Beziehung folgt aus der für alle Punkte P_{ik} gültigen Gleichung $a_{ik} + b_{ik} = 1$, da wie leicht ersichtlich für die Differenzenquotienten das distributive Gesetz gilt.

Hilfssatz 3: Für genügend kleines h besteht im ganzen Gebiete Δ die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{1 - hc_{ik}} \right| \leqq 1 + 2Mh.$$

Zum Beweise dieses Satzes brauchen wir nur zu beachten, daß man nach den Voraussetzungen in § 3 h immer so klein, d. h. n so groß wählen kann, daß

$$| hc_{ik} | \leqq hM \leqq \frac{1}{2}$$

wird. Dann ist aber

$$| 1 - hc_{ik} | \geqq \frac{1}{2},$$

oder

$$\left| \frac{1}{1 - hc_{ik}} \right| \leqq 2.$$

Aus der Identität

$$\frac{1}{1 - hc_{ik}} = 1 + \frac{1}{1 - hc_{ik}} \cdot hc_{ik}$$

und § 3, 2 folgt dann unmittelbar die Behauptung.

Endlich verwenden wir noch den bekannten Satz:

Hilfssatz 4: Für positive p und q gilt die Gleichung:

$$(1 + q)^p \leqq e^{pq}.$$

§ 5.

Wir ersetzen nun die vorgelegte Differentialgleichung

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + d = 0$$

durch die entsprechende Differenzengleichung

$$a_{ik}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} + b_{ik}\frac{\partial u_{ik}}{\partial y_k} + c_{ik}u_{ik} + d_{ik} = 0$$

oder

$$a_{ik}\frac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{h} + b_{ik}\frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{h} + c_{ik}u_{ik} + d_{ik} = 0.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit h und finden wegen $a_{ik} + b_{ik} = 1$:

$$u_{ik}(1 - hc_{ik}) = a_{ik}u_{i+1,k} + b_{ik}u_{i,k+1} + hd_{ik}. \tag{1}$$

Hierin sollen die u_{ik} so bestimmt werden, daß sie für alle Punkte P_{ik}[1]) dieser Differenzengleichung genügen und auf dem Rande die für die gesuchte Lösung u vorgeschriebenen Werte annehmen. Durch diese Forderung sind die u_{ik} eindeutig bestimmt; denn die Gl. (1) gestattet aus den Randwerten die u_{ik} für $i + k = n - 1$, aus diesen diejenigen für $i + k = n - 2$ usw. zu berechnen.

Bezeichnet man mit M_r den größten Wert von $|u_{ik}|$ für die Diagonale $i + k = r$[1]), und ist allenthalben $|d| \leqq D$, so ergibt sich aus Gl. (1), Hilfss. 3 (§ 4) und § 3, 1 unmittelbar:

$$\begin{aligned} \underset{i+k=r}{|u_{ik}|} &\leqq (1 + 2Mh)(a_{ik}M_{r+1} + b_{ik}M_{r+1} + Dh) \\ &\leqq (1 + 2Mh)(M_{r+1} + Dh), \end{aligned}$$

oder weil dieses für jedes $i + k = r$ gilt:

$$M_r \leqq (1 + 2Mh)(M_{r+1} + Dh). \tag{2}$$

Insbesondere hat man also:

$$\begin{aligned} M_{n-1} &\leqq (1 + 2Mh)(M_n + Dh) \\ M_{n-2} &\leqq (1 + 2Mh)(M_{n-1} + Dh) \\ &\leqq (1 + 2Mh)\{(1 + 2Mh)(M_n + Dh) + Dh\} \\ &\leqq (1 + 2Mh)^2(M_n + 2Dh), \\ M_{n-3} &\leqq (1 + 2Mh)(M_{n-2} + Dh) \\ &\leqq (1 + 2Mh)\{(1 + 2Mh)^2(M_n + 2Dh) + Dh\} \\ &\leqq (1 + 2Mh)^3(M_n + 3Dh) \end{aligned}$$

. . . .

$$M_r = M_{n-(n-r)} \leqq (1 + 2Mh)^{n-r} \cdot (M_n + (n - r)Dh).$$

Hieraus folgt nach Hilfss. 4 (§ 4) und § 3:

$$\begin{aligned} \underset{i+k=r}{|u_{ik}|} \leqq M_r &\leqq (M_n + (n - r)Dh) \cdot e^{2M(n-r)h} \\ &\leqq (M_n + LD) \cdot e^{2LM} \end{aligned} \tag{3}$$

Im vorliegenden Falle ist nun $M_n \leqq M$ und $D \leqq M$. Daher ergibt sich:

1) Auch wo dies nicht erwähnt ist, ist immer stillschweigend die Beschränkung auf das Gebiet $\varDelta$ vorausgesetzt.

Satz 1: Im ganzen Gebiete $\varDelta$ bleiben für genügend kleine h die Beträge der aus den Differenzengleichungen (§ 5 Gl. (1)) berechneten Werte der u_{ik} unter der festen Grenze

$$K = M(1+L)\cdot e^{2LM}.$$

Setzt man in Gl. (3) $M_n = E$, so erhält man das noch mehrfach zu verwendende Resultat:

Zusatz zu Satz 1: Wenn im Gebiete $\varDelta$, in welchem a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik} den Voraussetzungen von § 3 genügen, irgendwelche Größen v_{ik} der Differenzengleichung

$$a_{ik}\frac{\delta v_{ik}}{\delta x_i} + b_{ik}\frac{\delta v_{ik}}{\delta y_k} + c_{ik}v_{ik} + d_{ik} = 0$$

oder

$$v_{ik}(1-hc_{ik}) = a_{ik}v_{i+1,k} + b_{ik}v_{i+2,k} + hd_{ik}$$

genügen, und wenn auf dem Rande $|v_{ik}| \leqq E$ und im Gebiete $\varDelta$ $|d_{ik}| \leqq D$ ist, so bleiben die Beträge dieser v_{ik} unter der festen Grenze

$$(E+DL)\cdot e^{2LM}.$$

§ 6.

Ersetzt man in der Differenzengleichung § 5 (Gl. (1)) den Index i durch $i+1$, so erhält man:

$$u_{i+1,k}(1-hc_{i+1,k}) = a_{i+1,k}u_{i+2,k} + b_{i+1,k}u_{i+1,k+1} + hd_{i+1,k}.$$

Hierin entwickeln wir die Koeffizienten $a_{i+1,k}$, $b_{i+1,k}$, $c_{i+1,k}$ und $d_{i+1,k}$ nach § 4 Hilfss. 1. Dann folgt:

$$u_{i+1,k}\{1-h(c_{ik}+hc_{ik}^{10})\}$$
$$= (a_{ik}+ha_{ik}^{10})\,u_{i+2,k} + (b_{ik}+hb_{ik}^{10})\,u_{i+1,k+1} + (d_{ik}+hd_{ik}^{10})\,h$$

oder

$$u_{i+1,k}(1-hc_{ik}) = P'_{ik} + hQ'_{ik}, \tag{1}$$

wenn man setzt

$$P'_{ik} = a_{ik}u_{i+2,k} + b_{ik}u_{i+1,k+1} + hd_{ik} \tag{2}$$
$$Q'_{ik} = a_{ik}^{10}u_{i+2,k} + b_{ik}^{10}u_{i+1,k+1} + hc_{ik}^{10}u_{i+1,k} + hd_{ik}^{10}.$$

Die letzte Gleichung läßt sich noch vereinfachen, wenn man nach § 4 Hilfss. 2 b_{ik}^{10} durch $-a_{ik}^{10}$ ersetzt. Das gibt dann:

$$Q'_{ik} = a_{ik}^{10}(u_{i+2,k} - u_{i+1,k+1}) + hc_{ik}^{10}u_{i+1,k} + hd_{ik}^{10}$$
$$= \{-a_{ik}^{10}u'_{i+1,k} + c_{ik}^{10}u_{i+1,k} + d_{ik}^{10}\}h, \tag{3}$$

wo $u'_{i+1,k}$ den in § 3, 3. definierten Differenzenquotienten bedeutet.

Ersetzt man aber in der ursprünglichen Differenzengleichung (§ 5 Gl. (1)) den Index k durch $k+1$, so erhält man durch dasselbe Verfahren die zu Gl. (1), (2), (3) symmetrischen Formeln:

$$u_{i,k+1}(1-hc_{ik}) = P''_{ik} + hQ''_{ik}, \tag{4}$$

$$P''_{ik} = a_{ik}\,u_{i+1,k+1} + b_{ik}\,u_{i,k+2} + hd_{ik} \tag{5}$$

$$Q''_{ik} = \{+\,b^{01}_{ik}\,u'_{i,k+1} + c^{01}_{ik}\,u_{i,k+1} + d^{01}_{ik}\}h \tag{6}$$

Durch Subtraktion der Gl. (1) von (4) und Division durch h ergibt sich weiter:

$$u'_{ik}(1-hc_{ik}) = \frac{1}{h}(P''_{ik} - P'_{ik}) + Q''_{ik} - Q'_{ik}. \tag{7}$$

Hierin ist

$$\frac{1}{h}(P''_{ik} - P'_{ik}) = a_{ik}\,u'_{i+1,k} + b_{ik}\,u'_{i,k+1}.$$

Setzt man daher den größten Wert von $|\,u'_{ik}\,|$ für $i+k=r-1$ gleich M'_r, so folgt:

$$\left|\,\frac{1}{h}(P''_{ik} - P'_{ik})\right|_{i+k=r-1} \leqq a_{ik}\,M'_{r+1} + b_{ik}\,M'_{r+1} \leqq M'_{r+1} \tag{8}$$

Ferner findet man aus Gl. (3), sowie aus § 3, 2. und Satz 1 (§ 5):

$$\begin{aligned}|\,Q'_{ik}\,|_{i+k=r-1} &\leqq \{M\cdot M'_{r+1} + MK + M\}h \\ &\leqq M(M'_{r+1} + K + 1)\,h,\end{aligned}$$

und ebenso:

$$|\,Q''_{ik}\,|_{i+k=r-1} \leqq M(M'_{r+1} + K + 1)\,h,$$

d. h.

$$|\,Q''_{ik} - Q'_{ik}\,|_{i+k=r-1} \leqq 2M(M'_{r+1} + K + 1)\,h. \tag{9}$$

Die Werte aus Gl. (8) und (9) setzen wir in Gl. (7) ein und erhalten mit Rücksicht auf § 4, Hilfss. 3:

$$\begin{aligned}|\,u'_{ik}\,|_{i+k=r-1} &\leqq (1+2Mh)\{M'_{r+1} + 2M(M'_{r+1} + K + 1)\,h\} \\ &\leqq (1+2Mh)\{M'_{r+1}(1+2Mh) + 2M(K+1)\,h\} \\ &\leqq (1+2Mh)^2\{M'_{r+1} + 2M(K+1)\,h\} \\ &\leqq (1+2Mh)^2(M'_{r+1} + 4MKh).\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde $K+1 \leqq 2K$ angenommen. Dies ist jedenfalls erlaubt, da ja $K \geqq M$ ist, und M im voraus schon genügend groß angenommen werden kann.

Da die letzte Ungleichung für alle $i+k=r-1$ gilt, so folgt insbesondere auch:

$$M'_r \leqq (1+2Mh)^2(M'_{r+1} + 4MKh). \tag{10}$$

Nach § 3, 3. ist $M'_n \leqq M$. Daher findet man durch wiederholte Anwendung dieser Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
M'_{n-1} &\leqq (1+2Mh)^2 \cdot (M'_n + 4MKh) \\
&\leqq (1+2Mh)^2 \cdot (1+4Kh) \cdot M, \\
M'_{n-2} &\leqq (1+2Mh)^2 \cdot (M'_{n-1} + 4MKh) \\
&\leqq (1+2Mh)^2 \cdot \{(1+2Mh)^2 (1+4Kh)\, M + 4MKh\} \\
&\leqq (1+2Mh)^{2\cdot 2} \cdot (1+2\cdot 4Kh)\, M, \\
M'_{n-3} &\leqq (1+2Mh)^2 \cdot (M'_{n-2} + 4MKh) \\
&\leqq (1+2Mh)^2 \cdot \{(1+2Mh)^{2\cdot 2} \cdot (1+2\cdot 4Kh) M + 4MKh\} \\
&\leqq (1+2Mh)^{3\cdot 2} \cdot (1+3\cdot 4Kh)\, M
\end{aligned}$$

. . . .

$$M'_r = M'_{n-(n-r)} \leqq (1+2Mh)^{2(n-r)} \cdot (1+4K(n-r)\,h)\, M.$$

Wegen Hilfss. 4 (§ 4) und § 2 erhält man hieraus:

$$\underset{i+k=r-1}{|u'_{ik}|} \leqq M'_r \leqq M(1+4K\cdot(n-r)\,h)\cdot e^{4M\cdot(n-r)h}$$
$$\leqq M(1+4KL)\cdot e^{4ML}.$$

Satz 2: Für genügend kleine h bleiben im ganzen Gebiete Δ die Beträge der aus den Differenzengleichungen (§ 5 Gl. (1)) berechneten

$$u'_{ik} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i+1\,k}}{h}$$

unter der festen Grenze

$$K' = M(1+4KL)\cdot e^{4ML}.$$

§ 7.

Wir untersuchen noch den Ausdruck

$$u''_{ik} = \frac{u'_{i,k+1,} - u'_{i+1,k}}{h}.$$

Im vorigen § haben wir aus der Differenzengleichung

$$u_{ik}(1-hc_{ik}) = a_{ik}\, u_{i+1,k} + b_{ik}\, u_{i,k+1} + hd_{ik} \tag{1}$$

die Gleichung

$$u'_{ik}(1-hc_{ik}) = \frac{1}{h}(P''_{ik} - P'_{ik}) + \frac{1}{h}(Q''_{ik} - Q'_{ik})\cdot h, \tag{2}$$

abgeleitet, wo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{h}(P''_{ik} - P'_{ik}) &= a_{ik}\, u'_{i+1,k} + b_{ik}\, u'_{i,k+1}, \\
\frac{1}{h}\, Q'_{ik} &= -\, a^{10}_{ik}\, u'_{i+1,k} + c^{10}_{ik}\, u_{i+1,k} + d^{10}_{ik}, \\
\frac{1}{h}\, Q''_{ik} &= +\, b^{01}_{ik}\, u'_{i,k+1} + c^{01}_{ik}\, u_{i,k+1} + d^{01}_{ik}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$d'_{ik} = \frac{1}{h}(Q''_{ik} - Q'_{ik}), \tag{4}$$

und fügt den Wert von $\frac{1}{h}(P''_{ik} - P'_{ik})$ in Gl. (2) ein, so folgt:

$$u'_{ik}(1 - hc_{ik}) = a_{ik}\,u'_{i+1,k} + b_{ik}\,u'_{i,k+1} + hd'_{ik}. \tag{5}$$

Diese Gleichung geht aber aus Gl. (1) hervor, indem man einfach die Buchstaben u_{ik}, $u_{i+1,k}$, $u_{i,k+1}$ und d_{ik} durch die entsprechenden einmal gestrichenen Buchstaben ersetzt. Andererseits geht auch u''_{ik} genau so aus $u'_{i+1,k}$ und $u'_{i,k+1}$ hervor, wie u'_{ik} aus $u_{i+1,k}$ und $u_{i,k+1}$. Wir definieren nun noch eine Größe d''_{ik} durch die Forderung, dieselbe solle genau so aus den Größen der Gl. (5) hervorgehen, wie d'_{ik} aus denen von Gl. (1). Dann folgt aus Gl. (5) sofort:

$$u''_{ik}(1 - hc_{ik}) = a_{ik}\,u''_{i+1,k} + b_{ik}\,u''_{i,k+1} + hd''_{ik}. \tag{6}$$

Hierin ist der Ausdruck d''_{ik} noch näher zu untersuchen. Geht $\overline{Q}'_{ik}$ bzw. $\overline{Q}''_{ik}$ genau so aus den Größen der Gl. (5) hervor, wie Q'_{ik} bzw. Q''_{ik} aus denen der Gl. (1), so ergibt sich:

$$d''_{ik} = \frac{1}{h}(\overline{Q}''_{ik} - \overline{Q}'_{ik}). \tag{7}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h}\overline{Q}'_{ik} &= -a^{10}_{ik}\,u''_{i+1,k} + c^{10}_{ik}\,u'_{i+1,k} + d'^{10}_{ik} \\ \frac{1}{h}\overline{Q}''_{ik} &= +b^{01}_{ik}\,u''_{i,k+1} + c^{01}_{ik}\,u'_{i,k+1} + d'^{01}_{ik} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Zur weiteren Untersuchung von d''_{ik} brauchen wir noch den Wert von $d'^{01}_{ik} - d'^{10}_{ik}$. Es ist

$$\begin{aligned} d'^{01}_{ik} - d'^{10}_{ik} &= \frac{d'_{i,k+1} - d'_{ik}}{h} - \frac{d'_{i+1,k} - d'_{ik}}{h} = \frac{d'_{i,k+1} - d'_{i+1,k}}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{h}(Q''_{i,k+1} - Q'_{i,k+1}) - \frac{1}{h}(Q''_{i+1,k} - Q'_{i+1,k})\right\} \\ &= \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{h}(Q''_{i,k+1} - Q''_{i+1,k}) - \frac{1}{h}(Q'_{i,k+1} - Q'_{i+1,k})\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

Ersetzt man in dem Ausdruck für $\frac{1}{h}Q''_{ik}$ in Gl. (3) einmal den Index k durch $k+1$, das anderemal den Index i durch $i+1$, und entwickelt nach Hilfss. 1 (§ 4), so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h}Q''_{i,k+1} &= +b^{01}_{i,k+1}\,u'_{i,k+2} + c^{01}_{i,k+1}\,u_{i,k+2} + d^{01}_{i,k+1} \\ &= b^{01}_{ik}\,u'_{i,k+2} + c^{01}_{ik}\,u_{i,k+2} + d^{01}_{ik} + h\cdot R''_{i,k+1}, \\ \frac{1}{h}Q''_{i+1,k} &= +b^{01}_{i+1,k}\,u'_{i+1,k+1} + c^{01}_{i+1,k}\,u_{i+1,k+1} + d^{01}_{i+1,k} \\ &= b^{01}_{ik}\,u'_{i+1,k+1} + c^{01}_{ik}\,u_{i+1,k+1} + d^{01}_{ik} + h\cdot R''_{i+1,k} \\ \text{wo}\qquad & \\ R'_{i,k+1} &= b^{02}_{ik}\,u'_{i,k+2} + c^{02}_{ik}\,u_{i,k+2} + d^{02}_{ik}, \\ R''_{i+1\ k} &= b^{11}_{ik}\,u'_{i+1,k+1} + c^{11}_{ik}\,u_{i+1,k+1} + d^{11}_{ik}. \end{aligned}\right\}$$

Hieraus ergibt sich endlich:

$$\frac{1}{h}\left(Q''_{i,k+1} - Q''_{i+1,k}\right) = h b^{01}_{ik} u''_{i,k+1} + h \cdot c^{01}_{k} u'_{i,k+1} + h\left(R''_{i,k+1} - R''_{i+1,k}\right)$$
$$= \{ b^{01}_{ik} u''_{i,k+1} + c^{01}_{ik} u'_{i,k+1} + (R''_{i,k+1} - R''_{i+1,k}) \} h.$$

Dabei ist aber

$$\left.\begin{aligned} |R''_{i,k+1}| &\leqq MK' + MK + M \\ &\leqq M(K' + K + 1), \\ \text{ebenso } |R''_{i+1,k}| &\leqq M(K' + K + 1). \end{aligned}\right\}$$

Somit erhalten wir wegen § 3, 2. die Ungleichung:

$$\underset{i+k=r-2}{\left|\frac{1}{h}\left(Q''_{i,k+1} - Q''_{i+1,k}\right)\right|} \leqq \{ M M''_{r+1} + MK' + 2M(K' + K + 1)\} h$$
$$\leqq M\{ M''_{r+1} + 3K' + 2(K+1)\} h, \qquad (10)$$

wenn man unter M''_r wiederum den größten Wert von $|u''_{ik}|$ für $i + k = r - 2$ versteht.

Die Q'_{ik} sind die zu den Q''_{ik} symmetrischen Ausdrücke. Sie entstehen aus diesen, wenn man statt des Index k und des Buchstaben b den Index i und den Buchstaben a auszeichnet. Da sich aber bei dieser Vertauschung die rechte Seite von Gl. (10) gar nicht ändert, so muß offenbar auch die Ungleichung bestehen.

$$\underset{i+k=r-2}{\left|\frac{1}{h}\left(Q'_{i,k+1} - Q'_{i+1,k}\right)\right|} \leqq M\{ M''_{r+1} + 3K' + 2(K+1)\} h. \qquad (11)$$

Wir setzen nun die Werte aus Gl. 10 und 11 in die Gl. 9 ein und erhalten

$$\underset{i+k=r-2}{|d'^{01}_{ik} - d'^{10}_{ik}|} \leqq 2M\{ M''_{r+1} + 3K' + 2(K+1)\}. \qquad (12)$$

Nun folgt aus Gl. (7) und (8):

$$\underset{i+k=r-2}{|d''_{ik}|} \leqq 2MM''_{r+1} + 2MK' + |d'^{01}_{ik} - d'^{01}_{ik}|,$$

oder wenn man aus Gl. (12) einsetzt:

$$\underset{i+k=r-2}{|d''_{ik}|} \leqq 2M\{ M''_{r+1} + K' + [M''_{r+1} + 3K' + 2(K+1)]\}$$
$$\leqq 4M\{ M''_{r+1} + 2K' + K + 1\}.$$

Indem wir dieses endlich in Gl. 6 einsetzen kommen wir zu dem Ergebnis:

$$\underset{i+k=r-2}{|u''_{ik}|} \leqq (1 + 2Mh)\{ M''_{r+1} + 4M[M''_{r+1} + 2K' + K + 1]\cdot h\}$$
$$\leqq (1 + 2Mh)\{ M''_{r+1}(1 + 4Mh) + 4M(2K' + K + 1)\cdot h\}$$
$$\leqq (1 + 4Mh)^2\{ M''_{r+1} + 4M(2K' + K + 1)\cdot h\}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $i + k = r - 2$. Daher folgt insbesondere auch:

$$M''_r \leqq (1 + 4Mh)^2 \cdot \{M''_{r+1} + 8M(K' + K)h\}. \tag{13}$$

Wir berücksichtigen noch, daß nach § 3, 3 $M''_n \leqq M$ ist, und wenden diese Rekursionsformel wiederholt an. Dadurch finden wir:

$$\begin{aligned}
M''_{n-1} &\leqq (1 + 4Mh)^2 \cdot \{M''_n + 8M(K' + K)h\} \\
&\leqq (1 + 4Mh)^2 \cdot \{1 + 8(K' + K)h\} M, \\
M''_{n-2} &\leqq (1 + 4Mh)^2 \cdot \{M''_{n-1} + 8M(K' + K)h\} \\
&\leqq (1 + 4Mh)^2 \cdot \{(1 + 4Mh)^2 [1 + 8(K' + K)h] M + 8M(K' + K)h\} \\
&\leqq (1 + 4Mh)2 \cdot 2 \{1 + 2 \cdot 8(K' + K)h\} M
\end{aligned}$$

. . . .

$$M''_r = M''_{n-(n-r)} \leqq (1 + 4Mh)^{2(n-r)} \cdot \{1 + 8(K' + K)(n - r)h\} M.$$

Wegen Hilfss. 4 (§ 4) und § 3 ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
\underset{i+k=r-2}{|u''_{ik}|} \leqq M''_r &\leqq M\{1 + 8(K' + K) \cdot (n - r)h\} \cdot e^{8M(n-r)h} \\
&\leqq M\{1 + 8L(K' + K)\} \cdot e^{8LM}.
\end{aligned}$$

Satz 3: Für genügend kleine h bleiben im ganzen Gebiete Δ die Beträge der aus den Differenzengleichungen (§ 5 Gl. (1)) sich ergebenden Differenzenquotienten

$$u''_{ik} = \frac{u'_{i,k+1} - u'_{i+1,k}}{h} = \frac{u_{i,k+2} - 2u_{i+1,k+1} + u_{i+2,k}}{h^2}$$

unter der festen Grenze

$$K'' = M\{1 + 8L(K' + K)\} \cdot e^{8LM}.$$

§ 8.

Es erübrigt uns noch, die für die u'_{ik} und u''_{ik} gewonnenen Resultate auch auf $\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_i^2}$ usw. zu übertragen.

Die ursprüngliche Form unserer Differenzengleichung war

$$a_{ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} + b_{ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial y_k} + c_{ik} u_{ik} + d_{ik} = 0.$$

Hierin ersetzen wir a_{ik} durch $1 - b_{ik}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} &= - b_{ik} \left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial y_k} - \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i}\right) - c_{ik} u_{ik} - d_{ik} \\
&= - b_{ik} u'_{ik} - c_{ik} u_{ik} - d_{ik}.
\end{aligned}$$

Indem man oben b_{ik} durch $1 - a_{ik}$ ersetzt erhält man ebenso:

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial y_k} = + a_{ik} u'_{ik} - c_{ik} u_{ik} - d_{ik}.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

Satz 4: Für genügend kleine h bleiben im ganzen Gebiete $\varDelta$ die Beträge der Differenzenquotienten $\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial u_{ik}}{\partial y_k}$ unter der festen Grenze

$$\mathsf{K}' = M\,(K' + K + 1).$$

§ 9.

Etwas weitläufiger wird die Rechnung für $\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_i^2}$ und $\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial y_k^2}$. In der Gleichung

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} = -\,b_{ik}\,u'_{ik} - c_{ik}\,u_{ik} - d_{ik} \tag{1}$$

des § 8 drückt sich nach § 7 Gl. (5) u'_{ik} aus in der Form:

$$u'_{ik} = a_{ik}\,u'_{i+1,k} + b_{ik}\,u'_{i,k+1} + h c_{ik}\,u'_{ik} + h d'_{ik}.$$

Wenn man hierin noch a_{ik} durch $1 - b_{ik}$ ersetzt, so gibt dies:

$$u'_{ik} = u'_{i+1,k} + (b_{ik}\,u''_{ik} + c_{ik}\,u'_{ik} + d'_{ik})\,h.$$

Setzt man dies in Gl. (1) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} = -\,b_{ik}\,u'_{i+1,k} - b_{ik}\,(b_{ik}\,u''_{ik} + c_{ik}\,u'_{ik} + d'_{ik})\,h - c_{ik}\,u_{ik} - d_{ik}. \tag{2}$$

Nun ersetzen wir in Gl. (1) den Index i durch $i+1$ und entwickeln nach Hilfss. 1 (§ 4). Dann kommt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{i+1,k}}{\partial x_{i+1}} &= -\,b_{i+1,k}\,u'_{i+1,k} - c_{i+1,k}\,u_{i+1,k} - d_{i+1,k}\\ &= -\,b_{ik}\,u'_{i+1,k} - c_{ik}\,u_{i+1,k} - d_{ik}\\ &\qquad -\,(b^{10}_{ik}\,u'_{i+1,k} + c^{10}_{ik}\,u_{i+1,k} + d^{10}_{ik})\,h.\end{aligned} \tag{3}$$

Durch Subtraktion der Gl. (2) von 3 und Division mit h ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_i^2} = -\,c_{ik}\,\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} &- (b^{10}_{ik}\,u'_{i+1,k} + c^{10}_{ik}\,u_{i+1,k} + d^{10}_{ik})\\ &+ b_{ik}\,(b_{ik}\,u''_{ik} + c_{ik}\,u'_{ik} + d'_{ik}).\end{aligned}$$

Nach § 6 Gl. (9) und § 7 Gl. (4) ist aber

$$\begin{aligned}\left| d'_{ik} \right| = \frac{1}{h}\left| Q''_{ik} - Q'_{ik} \right| &\leqq 2M\,(M'_{r+1} + K + 1)\\ &\leqq 2M\,(K' + K + 1).\end{aligned}$$

Trägt man diesen Wert in die vorige Gleichung ein, so erhält man wegen der Sätze 1, 2, 3 und 4:

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_i^2} \right| &\leqq M\mathsf{K}' + M\,(K' + K + 1)\\ &\quad + 1 \cdot M\{K'' + K' + 2\,(K' + K + 1)\}\\ &\leqq M\{K'' + 4K' + \mathsf{K}' + 3K + 3\}.\end{aligned}$$

Hierin ändert sich die rechte Seite nicht, wenn man i mit k, a mit b usw. vertauscht. Daher ergibt sich ebenso:

$$\left|\frac{\eth^2 u_{ik}}{\eth y_k^2}\right| \leqq M\{K'' + 4K' + \mathsf{K}' + 3K + 3\}.$$

Satz 5: Für genügend kleine h bleiben im ganzen Gebiete $\varDelta$ die Beträge der Differenzenquotienten $\frac{\eth^2 u_{ik}}{\eth x_i^2}$ und $\frac{\eth^2 u_{ik}}{\eth y_k^2}$ unter der festen Grenze

$$\mathsf{K}'' = M\{K'' + 4K' + \mathsf{K}' + 3K + 3\}.$$

§ 10.

Zur Durchführung des folgenden Konvergenzbeweises bedürfen wir noch eines Hilfssatzes.

Wir führen zunächst für eine willkürliche Funktion $f(x)$ der einen Variablen x noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\eth f_i}{\eth x_i} &= \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f_i^1 \\ \frac{\eth^2 f_i}{\eth x_i^2} &= \frac{f_{i+1}^1 - f_i^1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1}^1 - f_i^2}{h} = f \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

usw.

Unter der Voraussetzung $\lambda < \mu$ leitet man hieraus durch Summation die Gleichung ab:

$$f_\mu^1 = f_\lambda^1 + h \sum_{\nu=\lambda}^{\nu=\mu-1} f_\nu^2$$

oder

$$\left.\begin{aligned} f_\mu^1 &= f_\lambda^1 + h\,(\mu - \lambda) \overset{\mu-1}{\underset{\lambda}{\mathfrak{M}}} f_\nu^2 \\ &\text{und} \\ f_\lambda^1 &= f_\mu^1 - h\,(\mu - \lambda) \overset{\mu-1}{\underset{\lambda}{\mathfrak{M}}} f_\nu^2 \end{aligned}\right\},\ \lambda < \mu. \tag{2}$$

Hierin bedeutet $\overset{\mu-1}{\underset{\lambda}{\mathfrak{M}}} f_\nu^2$ einen mittleren Wert zwischen den in Betracht kommenden f_ν^2; übrigens ist die letzte Gleichung nur die Auflösung der vorhergehenden nach f_λ^1.

Im folgenden sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Sei $j > i + 1$; dann leitet man aus Gl. (1) durch Summation die folgende ab:

$$\frac{f_j - f_i}{x_j - x_i} = \frac{f_j - f_i}{\varrho \cdot h} = \frac{1}{\varrho} \sum_i^{j-1} f_\mu^1,$$

wo $\varrho = j - i$ gesetzt ist. Setzt man hierin die Werte von f_μ^1 aus Gl. (2) ein, so folgt für $\lambda = i$:

$$\frac{f_j - f_i}{x_j - x_i} = \frac{1}{\varrho}\{(j-i) f^1_i + \sum_{\mu=i}^{j-1} h(\mu - i) \cdot \overset{\mu-1}{\underset{i}{\mathfrak{M}}} f^2_\nu\}$$

$$= f^1_i + \frac{h}{\varrho} \cdot \overset{j-2}{\underset{i}{\mathfrak{M}}} f^2_\nu \cdot \sum_{\mu=i}^{j-1} (\mu - i)$$

$$= f^1_i + \frac{h}{\varrho} \cdot \overset{j-2}{\underset{i}{\mathfrak{M}}} f^2_\nu \cdot \frac{(j-i)(j-i-1)}{2}$$

$$= f^1_i + \frac{1}{2}(\varrho - 1) h \cdot \overset{j-2}{\underset{i}{\mathfrak{M}}} f^2_\nu. \tag{3}$$

II. Sei $j < i$; dann findet man aus Gl. (1):

$$\frac{f - f_i}{x_j - x_i} = \frac{f_j - f_i}{\varrho \cdot h} = \frac{1}{\varrho} \sum_j^{i-1} f^1_\lambda,$$

wo $\varrho = i - j$ gesetzt wird. Setzt man hierin die Werte von f^1_λ aus Gl. (2) ein, so folgt für $\mu = i$:

$$\frac{f_j - f_i}{x_j - x_i} = \frac{1}{\varrho}\{(i-j) f^1_i - \sum_{\lambda=j}^{i-1} h(i - \lambda) \overset{i-1}{\underset{\lambda}{\mathfrak{M}}} f^2_\lambda\}$$

$$= f^1_i - \frac{h}{\varrho} \overset{i-1}{\underset{j}{\mathfrak{M}}} f^2_\lambda \cdot \sum_{\lambda=j}^{i-1} (i - \lambda)$$

$$= f^1_i - \frac{h}{\varrho} \overset{i-1}{\underset{j}{\mathfrak{M}}} f^2_\nu \cdot \frac{(i-j)(i-j+1)}{2}$$

$$= f^1_i - \frac{1}{2}(\varrho + 1) h \cdot \overset{i-1}{\underset{j}{\mathfrak{M}}} f^2_\nu. \tag{4}$$

Hilfssatz 5: Für jede Funktion $f(x)$ und für jede konstante Teilstrecke h gelten die Mittelwertsätze:

$$\frac{f_j - x_i}{x_j - x_i} = \frac{d f_i}{d x_i} + \frac{1}{2}(\varrho - 1) h \cdot \overset{j-2}{\underset{i}{\mathfrak{M}}} \frac{d^2 f_\mu}{d x_\mu^2}, \text{ wenn } j > i + 1$$

$$\frac{f_j - f_i}{x_j - x_i} = \frac{d f_i}{d x_i} - \frac{1}{2}(\varrho + 1) h \cdot \overset{i-1}{\underset{j}{\mathfrak{M}}} \frac{d^2 f_u}{d x_\mu^2}, \text{ wenn } j < i,$$

wo beidemale $\varrho = |j - i|$ gesetzt ist.

Diesen Hilfssatz wenden wir auf die Größen u_{ik} an, indem wir das einemal k, das anderemal i festhalten. Dann folgt:

Satz 6: Im ganzen Gebiete $\varDelta$ gelten für die Näherungswerte u_{ik} die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_{k} - u_{ik}}{x_j - x_i} &= \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} + \varepsilon^{\varrho}_{ik} \\ \frac{u_{i\varkappa} - u_{ik}}{y_\varkappa - y_k} &= \frac{\partial u_{ik}}{\partial y_k} + \eta^{\varrho}_{ik} \end{aligned}\right\},$$

wenn $\varrho = |j - i| = |\varkappa - k|$ gesetzt wird. Hierbei genügen die $\varepsilon^{\varrho}_{ik}$ und η^{ϱ}_{ik} (wegen Hilfss. 5 und Satz 5) den Ungleichungen:

$$\left.\begin{aligned} |\varepsilon^{\varrho}_{ik}| &\leqq \frac{1}{2}(\varrho - 1)\,h \cdot \mathsf{K}'' \\ |\eta^{\varrho}_{ik}| &\leqq \frac{1}{2}(\varrho - 1)\,h \cdot \mathsf{K}'' \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } j > i + 1$$

$$\left.\begin{aligned} |\varepsilon^{\varrho}_{ik}| &\leqq \frac{1}{2}(\varrho + 1)\,h \cdot \mathsf{K}'' \\ |\eta^{\varrho}_{ik}| &\leqq \frac{1}{2}(\varrho + 1)\,h \cdot \mathsf{K}'' \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } j < i.$$

§ 11.

Für den nunmehr zu führenden Konvergenzbeweis nehmen wir an, das in § 1 erwähnte Intervall $AB = AC = C - (x + y)$ sei einmal in μ, das anderemal in ν Teilstrecken σ bzw. τ geteilt. Die den beiden Einteilungen entsprechenden Näherungswerte u_{ik} wollen wir der Unterscheidung halber mit v_{ik} bzw. w_{ik} bezeichnen. Dabei denken wir uns die Numerierung der Punkte in beiden Fällen einer dritten Einteilung in $n = \mu \cdot \nu$ Teilstrecken von der Länge h entnommen, in welcher auch die Teilpunkte der beiden andern vorkommen. Dann ist zu zeigen, daß die Differenzen $\delta_{ik} = w_{ik} - v_{ik}$ ihrem absoluten Betrage nach durch genügende Verkleinerung von σ und τ unter jede Grenze herabgedrückt werden können.

Die Näherungswerte, welche sich aus der dritten (n fachen) Teilung ergeben, seien schlechthin mit u_{ik} bezeichnet. Dann hat man zunächst:

$$C - (x + y) = nh = \mu \cdot \nu \cdot h = \mu\sigma = \nu\tau,$$

d. h.

und

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \nu h \\ \tau &= \mu h \end{aligned}\right\}.$$

In der ersten Einteilung sind nach der obigen Bezeichnungsweise die dem Punkte P_{ik} zunächst gelegenen Punkte $P_{i+\nu,k}$ bzw. $P_{i,k+\nu}$. Deshalb bestehen für die v_{ik} die Differenzengleichungen:

$$v_{ik}(1 - \sigma c_{ik}) = a_{ik}\, v_{i+\nu,k} + b_{ik}\, v_{i,k+\nu} + \sigma d_{ik}. \tag{1}$$

Andererseits besteht wegen Satz 6 (§ 10) für die dritte Teilung und die u_{ik} auch die Beziehung:

$$a_{ik}\frac{u_{i+\nu,k} - u_{ik}}{\sigma} + b_{ik}\frac{u_{i\,k+\nu} - u_{ik}}{\sigma} + c_{ik}\,u_{ik} + d_{ik}$$

$$= a_{ik}\left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} + \varepsilon^{\nu}_{ik}\right) + b_{ik}\left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial y_k} + \eta^{\nu}_{ik}\right) + c_{ik}\,u_{ik} + d_{ik}$$

$$= \left\{a_{ik}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} + b_{ik}\frac{\partial u_{ik}}{\partial y_k} + c_{ik}\,u_{ik} + d_{ik}\right\} + a_{ik}\,\varepsilon^{\nu}_{ik} + b_{ik}\,\eta^{\nu}_{ik}.$$

Dabei sind unter $\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial u_{ik}}{\partial y_k}$ die Differenzenquotienten in bezug auf die dritte Teilung zu verstehen. Daher verschwindet der eingeklammerte Ausdruck vermöge der Definition der u_{ik} und es bleibt noch:

$$a_{ik}\frac{u_{i+\nu,k}-u_{ik}}{\sigma}+b_{ik}\frac{u_{i\,k+\nu}-u_{ik}}{\sigma}+c_{ik}u_{ik}+(d_{ik}-a_{ik}\varepsilon^{\nu}_{ik}-b_{ik}\eta^{\nu}_{ik})=0,$$

oder

$$u_{ik}(1-\sigma c_{ik})=a_{ik}u_{i+\nu,k}+b_{ik}u_{i,k+\nu}+(d_{ik}-a_{ik}\varepsilon^{\nu}_{ik}-b_{ik}\eta^{\nu}_{ik})\,\sigma. \qquad (2)$$

Subtrahiert man endlich Gl. (1) von (2), und setzt $\delta'_{ik}=u_{ik}-v_{ik}$, so folgt:

$$\delta'_{ik}(1-\sigma c_{ik})=a_{ik}\delta'_{i+\nu,k}+b_{ik}\delta'_{i,k+\nu}-(a_{ik}\varepsilon^{\nu}_{ik}+b_{ik}\eta^{\nu}_{ik})\,\sigma. \qquad (3)$$

Die δ'_{ik} genügen im ganzen Gebiete $\varDelta$ diesen Differenzengleichungen und sind auf dem Rande voll. Daher ergibt sich aus dem Zusatz zu Satz 1 (§ 5) und Satz 6 (§ 10):

$$\begin{aligned}|\delta'_{ik}| &\leqq \frac{1}{2}(\nu-1)\,h\cdot \mathsf{K}''\cdot L\cdot e^{2LM}\\ &\leqq \frac{\sigma}{2}\cdot \mathsf{K}''L\cdot e^{2LM}. \qquad (4)\end{aligned}$$

Betrachten wir die zweite Intervallsteilung, so erhalten wir durch dasselbe Verfahren für die Differenzen $\delta''_{ik}=u_{ik}-w_{ik}$ die Ungleichung

$$|\delta''_{ik}|\leqq\frac{\tau}{2}\cdot \mathsf{K}''L\cdot e^{2LM}. \qquad (5)$$

Durch Verbindung der Gl. (4) und (5) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}|w_{ik}-v_{ik}| &= |(u_{ik}-v_{ik})-(u_{ik}-w_{ik})|\\ &= |\delta'_{ik}-\delta''_{ik}|\\ &\leqq \varepsilon\cdot \mathsf{K}''L\cdot e^{2LM}, \qquad (6)\end{aligned}$$

wenn sowohl σ als auch τ kleiner als eine beliebig kleine Zahl ε sind.

Die letzte Ungleichung besagt, daß mit abnehmender Teilstrecke h, d. h. mit zunehmendem n die auf irgend einen Teilpunkt P_{ik} treffenden Näherungswerte u_{ik}, insbesondere auch die Werte u_{00} im Punkte $P_{00}=P_{xy}$, einer bestimmten (endlichen) Grenze zustreben. Man kann also setzen:

$$u(x,y)=\lim_{n=\infty}u_{00}=\lim_{h=0}u_{00}.$$

Hierbei kann der Punkt $P_{x,y}$ ganz beliebig liegen, und auch die Gebietsteilung darf sich über das ganze Gebiet $\varDelta$ erstrecken, sodaß auch negative i und k vorkommen.

Satz 7: Mit zunehmender Zahl n der Teilintervalle, d. h. mit abnehmendem h, nähern sich die aus unsern Differenzengleichungen (§ 5 Gl. (1)) berechneten Näherungswerte u_{00} in dem beliebig gelegenen

Punkte $P_{00} = P_{x,y}$ des Gebietes Δ einer bestimmten endlichen Grenze $u(x, y)$. Es existiert also eine durch folgenden Grenzprozeß definierte Funktion

$$u(x, y) = \lim_{n=\infty} u_{00} = \lim_{h=0} u_{00},$$

welche die für die Lösung der Differentialgleichung vorgeschriebenen Randwerte besitzt.

Es erübrigt uns noch zu zeigen, daß die gefundene Funktion $u(x, y)$ stetig und (stetig) differenzierbar ist, sowie daß sie der gegebenen Differentialgleichung genügt.

§ 12.

Um die Stetigkeit der Funktion $u(x, y)$ zu beweisen, führen wir den Punkt $P_{x,y}$ in einen benachbarten Punkt $P_{x',y'}$, über, während das Intervall $C-(x+y)$ bzw. $C-(x'+y')$ nach wie vor in n Teile h bzw. h' geteilt sein soll. Ist dann sowohl $|x'-x|$ als auch $|y'-y|$ kleiner als eine beliebig kleine Zahl ω, so gehen alle Punkte $P_{ik} = P_{x_i, y_k}$ in neue Lagen $P'_{ik} = P_{x'_i, y'_k}$ über. Für die Punkte mit positiven Indizes i und k ist dann auch $|x'_i - x_i| \leqq \omega$ und $|y'_i - y_i| \leqq \omega$.[1])

Wir bezeichnen nun die Näherungswerte, welche sich aus den Differenzengleichungen ergeben an den Punkten P_{ik} wie immer mit u_{ik}, aber an den Punkten P'_{ik} zur Unterscheidung mit v_{ik}, und die Werte

---

1) Man hat nämlich:

$$h = \frac{1}{n}\{C-(x+y)\},$$

$$h' = \frac{1}{n}\{C-(x'+y')\},$$

also

$$h - h' = \frac{1}{n}\{(x'-x)+(y'-y)\}.$$

Daraus folgt

$$|h-h'| \leqq \frac{2\omega}{n}.$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x + ih \\ x'_i &= x' + ih, \end{aligned}\right\}$$

folglich

$$\begin{aligned} x'_i - x_i &= (x'-x) + i(h'-h) \\ &= (x'-x) - \frac{i}{n}\{(x'-x)+(y'-y)\} \\ &= \frac{n-i}{n}(x'-x) - \frac{i}{n}(y'-y); \end{aligned}$$

daher

$$|x'_i - x_i| \leqq \frac{n-i}{n}\omega + \frac{i}{n}\omega \leqq \omega.$$

Ebenso

$$|y'_i - y_i| \leqq \omega, \text{ w. z. b. w}$$

der a, b, c, d daselbst mit a'_{ik}, b'_{ik}, c'_{ik}, d'_{ik}. Dann erhalten wir die Differenzengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u_{ik}(1-hc_{ik}) - (a_{ik}u_{i+1,k} + b_{ik}u_{i,k+1} + hd_{ik}) = 0 \\ v_{ik}(1-h'c'_{ik}) - (a'_{ik}v_{i+1,k} + b'_{ik}v_{i,k+1} + hd'_{ik}) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Nach § 3, 2 können die Differenzen $|c'_{ik} - c_{ik}|$, $|a'_{ik} - a_{ik}|$, ..., $|h' - h|$ durch bloße Verkleinerung von ω beliebig klein gemacht werden. In der Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= v_{ik}(1-h'c'_{ik}) - (a'_{ik}v_{i+1,k} + b'_{ik}v_{i,k+1} + h'd'_{ik}) \\ &= v_{ik}(1-hc_{ik}) - (a_{ik}v_{i+1,k} + b_{ik}v_{i,k+1} + hd_{ik}) \\ &\quad - v_{ik}(h'c'_{ik} - hc_{ik}) - \{(a'_{ik} - a_{ik})v_{i+1,k} + (b'_{ik} - b_{ik})v_{i,k+1} + (h'd'_{ik} - hd_{ik})\} \end{aligned}$$

kann daher der ganze in der letzten Zeile stehende Ausdruck, welcher etwa $= -\varepsilon_{ik}h$ gesetzt werde, durch bloße Verkleinerung von ω beliebig klein, etwa $\leqq \varepsilon$ gemacht werden. Die Differenzen $\delta_{ik} = v_{ik} - u_{ik}$ genügen daher der Gleichung

$$\delta_{ik}(1-hc_{ik}) = a_{ik}\delta_{i+1,k} + b_{ik}\delta_{i,k+1} + h\varepsilon_{ik}, \tag{2}$$

und können auf dem Rande durch weitere Verkleinerung von ω etwa $\leqq \varepsilon$ gemacht werden. Daher folgt aus dem Zusatz zu Satz 1 (§ 5):

$$\begin{aligned} |\delta_{ik}| &\leqq (\varepsilon + \varepsilon L)\cdot e^{2LM} \\ &\leqq \varepsilon(1+L)\cdot e^{2LM}. \end{aligned} \tag{3}$$

Damit ist aber die Stetigkeit von $u(x, y)$ erwiesen.

Satz 8: Die gefundene Funktion $u(x, y)$ ist als Funktion der zwei Variablen x und y im ganzen Gebiete Δ stetig und daher innerhalb desselben auch gleichmäßig stetig.

§ 13.

Jetzt können wir auch zeigen, daß die Funktion $u(x, y)$ nach x differenziert werden kann. Hierzu genügt der Nachweis, daß

$$\left| \frac{u(x'', y) - u(x, y)}{x'' - x} - \frac{u(x', y) - u(x, y)}{x' - x} \right| \leqq \varepsilon$$

wird, wenn $|x' - x|$ und $|x'' - x|$ kleiner als eine genügend kleine Zahl ω wird.

Entweder sind nämlich die Punkte $P_{x',y}$ bzw. $P_{x'',y}$ selbst rationale innere oder äußere Teilpunkte der Strecke $C - (x + y)$, oder man kann eine Teilstrecke h so klein, (d. i. ein n so groß) wählen, daß in beliebiger Nähe jedes dieser Punkte ein Teilpunkt $P_{\bar{x}',y}$ bzw. $P_{\bar{x}'',y}$ der durch die Teilstrecke h bestimmten Gebietsteilung fällt. Durch ein genügend kleines h kann es daher wegen der Stetigkeit der Funktion $u(x, y)$ immer erreicht werden, daß

$$\left| \frac{u(x', y) - u(x, y)}{x' - x} - \frac{u(\bar{x}', y) - u(x, y)}{\bar{x}' - x} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{8} \tag{1}$$

wird. Nun sei sowohl $|x' - x|$ als auch $|x'' - x| \leqq \omega$. Bezeichnen wir dann den Punkt $P_{x,y}$ mit P_{00}, den Punkt $P_{\bar{x}',y}$ mit $P_{i',k}$ und den Punkt $P_{\bar{x}'',y}$ mit $P_{i''k}$, sowie die entsprechenden Näherungswerte mit $u_{i'k}$, $u_{i''k}$ und u_{00}, so können wir h auch so klein wählen, daß

$$\left| \frac{u(\bar{x}', y) - u(x, y)}{\bar{x}' - x} - \frac{u_{i'k} - u_{00}}{x_{i'} - x_0} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{8}. \tag{2}$$

Endlich erhellt aus Satz 6 (§ 10), daß für genügend kleines ω auch

$$\left| \frac{u_{i'k} - u_{00}}{x_{i'} - x_0} - \frac{\mathfrak{d} u_{00}}{\mathfrak{d} x_0} \right| \leqq \frac{1}{2} (\omega + h)\, K'' \leqq \frac{\varepsilon}{4} \tag{3}$$

gemacht werden kann, gleichgültig ob $x' > x$ oder $x' < x$ ist.

Vermöge der Sätze über den absoluten Betrag einer Summe leiten wir aus Gl. (1), (2), (3) die folgenden Ungleichungen ab. Aus Gl. (1) und (2):

$$\left| \frac{u(x', y) - u(x, y)}{x' - x} - \frac{u_{i'k} - u_{00}}{x_{i'} - x_0} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{4}, \tag{4}$$

aus (3) und (4):

$$\left| \frac{u(x', y) - u(x, y)}{x' - x} - \frac{\mathfrak{d} u_{00}}{\mathfrak{d} x_0} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Ebenso findet man:

$$\left| \frac{u(x'', y) - u(x, y)}{x'' - x} - \frac{\mathfrak{d} u_{00}}{\mathfrak{d} x_0} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen ergibt sich endlich das gewünschte Resultat:

$$\left| \frac{u(x'', y) - u(x, y)}{x'' - x} - \frac{u(x', y) - u(x, y)}{x' - x} \right| \leqq \varepsilon. \tag{7}$$

Damit ist die Existenz einer bestimmten, endlichen Derivierten $\frac{\partial u}{\partial x}$ bewiesen. Ebenso beweist man die Existenz von $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Aus Gl. (5) und (6) erhellt aber auch, daß der Wert dieser Derivierten bestimmt ist durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \lim_{h=0} \frac{\mathfrak{d} u_{00}}{\mathfrak{d} x_0}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \lim_{h=0} \frac{\mathfrak{d} u_{00}}{\mathfrak{d} y_0}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wenn der Punkt $P_{x,y}$ mit P_{00} bezeichnet wird.

Hieraus folgt aber ohne weiteres:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + d &= a_{00} \lim_{h=0} \frac{\mathfrak{d} u_{00}}{\mathfrak{d} x_0} + b_{00} \lim_{h=0} \frac{\mathfrak{d} u_{00}}{\mathfrak{d} y_0} + c_{00} u_{00} + d_{00} \\ &= \lim_{h=0} \left\{ a_{00} \frac{\mathfrak{d} u_{00}}{\mathfrak{d} x_0} + b_{00} \frac{\mathfrak{d} u_{00}}{\mathfrak{d} y_0} + c_{00} u_{00} + d_{00} \right\} = 0, \end{aligned}$$

d. h. die gefundene Funktion $u(x, y)$ befriedigt in jedem Punkte $P_{x, y}$ des Gebietes Δ die gegebene Differentialgleichung.

Satz 9: Die gefundene Funktion $u(x, y)$ hat im Innern des Gebietes Δ überall bestimmte endliche erste Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ und befriedigt daselbst überall die vorgelegte Differentialgleichung

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + d = 0.$$

§ 14.

Um auch noch die Eindeutigkeit der Lösung nachzuweisen wollen wir zunächst zeigen, daß für konstantes y die Ableitung $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ eine stetige Funktion von x, und daß für konstantes x die Ableitung $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ eine stetige Funktion von y ist.

Sei h eine genügend kleine Teilstrecke. Dann kann man in dem zugehörigen Netze zu einem benachbarten Punkt $P_{x', y}$ von $P_{x, y}$ stets einen Gitterpunkt P_{i0} finden von der Art, daß

$$|x_i - x| \geqq |x' - x| > |x_i - x| - h.$$

Jetzt besteht wegen der bewiesenen Existenz von $\frac{\partial u}{\partial x'}$, wegen der Stetigkeit von $u(x, y)$ usw. die Gleichung:

$$\frac{\partial u(x', y)}{\partial x'} = \lim_{x - x' = 0} \frac{u(x, y) - u(x', y)}{x - x'}$$
$$= \frac{u(x', y) - u(x, y)}{x' - x} + \varepsilon,$$

wo $|\varepsilon|$ zugleich mit $|x' - x|$ beliebig klein wird. Weiter folgt hieraus

$$\text{Aber} \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial u(x', y)}{\partial x'} &= \lim_{h = 0} \frac{u_{i0} - u_{00}}{x_i - x} + \varepsilon. \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \lim_{h = 0} \frac{\delta u_{00}}{\delta x_0}, \end{aligned}\right\}$$

daher folgt durch Subtraktion:

$$\frac{\partial u(x', y)}{\partial x'} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{h = 0} \left\{ \frac{u_{i0} - u_{00}}{x_i - x_0} - \frac{\delta u_{00}}{\delta x_0} \right\} + \varepsilon.$$

Nach Satz 6 (§ 10) wird der Ausdruck unter dem Limeszeichen mit $|x_i - x_0|$ beliebig klein. Da dies gleichzeitig auch für ε gilt, so ist hiermit die Stetigkeit von $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ als Funktion von x allein bewiesen.

Gleiches gilt auch für $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ als Funktion von y allein.

Satz 10: Die ersten partiellen Ableitungen der gefundenen Funktion $u(x, y)$ haben im Gebiete $\varDelta$ die Eigenschaft, daß $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ für konstantes y eine stetige Funktion von x, und daß $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ für konstantes x eine stetige Funktion von y ist. Wir sagen kurzweg, die Funktion $u(x, y)$ sei sowohl nach x als auch nach y *„stetig differenzierbar"*.

§ 15.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob die gefundene Funktion $u(x, y)$ die einzige Funktion ist, welche die vorgeschriebenen Randwerte besitzt und der gegebenen Differentialgleichung genügt.

Nehmen wir an, $v(x, y)$ wäre eine andere Funktion, welche auf dem Rande mit $u(x, y)$ übereinstimmte und im Gebiete $\varDelta$ der Differentialgleichung

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + d = 0$$

genügte, dann wäre nach dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung für irgend ein h

$$\frac{\mathfrak{d} v_{ik}}{\mathfrak{d} x_i} = \frac{v_{i+1,k} - v_{ik}}{h} = \frac{\partial v(x_i + \theta h, y)}{\partial (x_i + \theta h)}$$

$$= \frac{\partial v(x_i, y_k)}{\partial x_i} + \left\{ \frac{\partial v(x_i + \theta h, y_k)}{\partial (x_i + \theta h)} - \frac{\partial v(x_i, y_k)}{\partial x_i} \right\}.$$

Wenn nun $v(x, y)$ auch noch stetig differenzierbar wäre, so könnte man demnach setzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{d} v_{ik}}{\mathfrak{d} x_i} &= \frac{\partial v(x_i, y_k)}{\partial x_i} + \varepsilon_{ik} \\ \text{und ebenso} \qquad \frac{\mathfrak{d} v_{ik}}{\mathfrak{d} y_k} &= \frac{\partial v(x_i, y_k)}{\partial y_k} + \eta_{ik} \end{aligned}\right\},$$

wo $|\varepsilon_{ik}|$ und $|\eta_{ik}|$ mit abnehmendem h gleichmäßig unter jede Grenze sinken würden.

Daher könnte man ein h so klein finden, daß alle Größen $|\varepsilon_{ik}|$ und $|\eta_{ik}| \leqq \varepsilon$ würden, und man hätte dann die Gleichungen:

$$a_{ik} \frac{\mathfrak{d} v_{ik}}{\mathfrak{d} x_i} + b_{ik} \frac{\mathfrak{d} v_{ik}}{\mathfrak{d} y_i} + c_{ik} v_{ik} + d_{ik}$$

$$= \left\{ a_{ik} \frac{\partial v(x_i, y_k)}{\partial x_i} + b_{ik} \frac{\partial v(x_i, y_k)}{\partial y_k} + c_{ik} v(x_i y_k) + d_{ih} \right\} + a_{ik} \varepsilon_{ik} + b_{ik} \eta_{ik}.$$

Da aber die Differentialgleichung in jedem Punkte erfüllt sein müßte, so verschwände der in der Klammer stehende Ausdruck, und es bliebe noch:

$$a_{ik} \frac{\mathfrak{d} v_{ik}}{\mathfrak{d} x_i} + b_{ik} \frac{\mathfrak{d} v_{ik}}{\mathfrak{d} y_i} + c_{ik} v_{ik} + d_{ik} = a_{ik} \varepsilon_{ik} + b_{ik} \eta_{ik}. \tag{1}$$

Andererseits genügen die u_{ik} den Gleichungen:

$$a_{ik}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} + b_{ik}\frac{\partial u_{ik}}{\partial y_k} + c_{ik}u_{ik} + d_{ik} = 0. \tag{2}$$

Daher würden die Differenzen $\delta_{ik} = u_{ik} - v_{ik}$, welche auf dem Rande verschwinden, der Differenzengleichung

$$a_{ik}\frac{\partial \delta_{ik}}{\partial x_i} + b_{ik}\frac{\partial \delta_{ik}}{\partial y_k} + c_{ik}\delta_{ik} + (a_{ik}\varepsilon_{ik} + b_{ik}\eta_{ik}) = 0 \tag{3}$$

genügen. Nach dem Zusatz zu Satz 1 (§ 5) müßten daher die Ungleichungen bestehen:

$$|\delta_{ik}| \leqq \varepsilon \cdot L \cdot e^{2LM},$$

d. h. es wäre

$$v_{00} = \lim_{h=0} u_{00} = u(x, y)$$

für jeden Punkt $P_{x,y}$.

Satz 11: Die gefundene Funktion $u(x, y)$ ist die einzige stetig differenzierbare Funktion, welche der vorgelegten Differentialgleichung im Gebierte $\varDelta$ genügt und auf dem Rande die vorgeschriebenen Werte annimmt.

§ 16.

Schlußergebnis.

Die im vorangehenden gewonnenen Resultate wollen wir noch kurz zusammenfassen.

Sei die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + d = 0$$

vorgelegt, worin a, b, c, d willkürliche (eindeutige) reelle Funktionen der reellen unabhängigen Veränderlichen x und y sind, welche jedoch der Bedingung $a + b = 1$ genügen.

Sei ferner ein durch die Randgerade

$$x + y = C$$

und durch zwei Parallele zu den Achsen begrenztes Dreieck $\varDelta$ vorhanden, in welchem die Größen *a und b nicht negativ* werden, und in welchem sowohl $|c|$, $|d|$ als auch die Beträge der ersten und zweiten partiellen Differenzenquotienten von a, b, c, d unter einer festen Grenze bleiben.

Dann läßt sich mittelst des behandelten Verfahrens stets eine eindeutig bestimmte reelle, stetige und stetig differenzierbare Funktion u von x und y bestimmen, welche im genannten Gebiete $\varDelta$ der vorgelegten Differentialgleichung genügt und längs der Randgeraden willkürliche Werte annimmt.

Die Randwerte sind dabei nur der Bedingung unterworfen, nebst ihren ersten und zweiten in Richtung des Randes genommenen Differenzenquotienten dem absoluten Betrage nach unter einer festen Grenze zu bleiben.

Das Gesagte läßt sich auch ohne Schwierigkeit auf die Differentialgleichung

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu + D = 0$$

und die Randgerade

$$\alpha x + \beta y = C$$

sinngemäß übertragen. Abgesehen von den zu fordernden Stetigkeitsbedingungen dürfen dabei die Produkte αA und βB in dem zu betrachtenden Gebiete weder von verschiedenem Zeichen, noch beide gleichzeitig null sein.