

5792640

M

Über die
Flächen dritter Ordnung
mit Ovalpunkten.

Von
Heinrich Wieleitner,
kgl. Gymnasiallehrer.



Program m
zum
Jahresbericht des Kgl. humanistischen Gymnasiums Speyer
für das Schuljahr 1900/1901.



SPEYER.

Druck der Dr. Jaeger'schen Buchdruckerei.
1901.

10080

Wt/
612

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

II 31405

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298334

Akc. Nr.

86

150

I. Vorbereitende Betrachtungen.

§ 1.

Einleitung.

Die parabolische Kurve der allgemeinen Fläche 3. Ordnung (F_3) mit 27 reellen Geraden ist eine Raumkurve 12. Ordnung (R_{12})¹⁾ und besteht aus 10 Ovalen, welche den 10 „Dreiecken“ der Fläche eingeschrieben sind.²⁾ Wenn nun eines dieser „Dreiecke“ sich auf einen Punkt zusammenzieht, so hat die parabolische Kurve in diesem Punkt einen isolierten Punkt, den man nach seiner Entstehung *Ovalpunkt*³⁾ nennen kann. Die Hessesche Kernfläche hat dann im Ovalpunkt einen Knoten, also liegt eine Ecke des Pentaeders auf der Fläche und es zeigt sich, indem man die Pentaedergleichung der Fläche untersucht, wie dies Eckardt⁴⁾ gethan hat, dass die Fälle von 1, 2, 3, 4, 6 und 10 Ovalpunkten möglich sind. Wenn aber das Pentaeder zerfällt,⁵⁾ so erhält

1) S. z. B. Steiner: „Über die Flächen dritten Grades.“ Crelle J. 53 und die daran anknüpfende Monographie von R. Sturm: „Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung.“ Leipzig, 1867.

2) F. Klein: „Über Flächen dritter Ordnung.“ Math. Ann. 6 p. 551 ff. — H. G. Zeuthen: Études des propriétés de situation des surfaces cubiques. Math. Ann. 8.

3) Nach Salmon-Fiedler: „Analytische Geometrie des Raumes.“ II. Art. 315. Leipzig, 1880.

4) F. E. Eckardt: „Über diejenigen Flächen 3. Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden.“ Math. Ann. 10 p. 227 ff.

5) Siehe Rodenberg: „Zur Klassifikation der Flächen 3. Ordnung.“ Math. Ann. 14 p. 46 ff.

die Hessesche Fläche Doppellinien und jeder Schnitt einer Doppellinie mit der Fläche gibt einen Ovalpunkt. So findet Eckardt die Fälle von 9 und 18 Ovalpunkten. Diese Art der Untersuchung hat aber den Nachteil, dass die Flächen mit Ovalpunkten sich in zwei Gruppen teilen, von denen nur die erste, durch das vollständige Pentaeder, einen inneren Zusammenhang erhält, während die Fälle der zweiten Gruppe eine Beziehung unter sich und mit den Fällen der ersten Gruppe nicht recht erkennen lassen. Ich habe nun, auf Anregung von Herrn Professor Dr. Lindemann, die ebene, eindeutige Abbildung der Ovalpunktsflächen untersucht und in derselben ein Mittel gefunden, die sämtlichen Flächen aus einem Gesichtspunkt herzuleiten. Dies bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

§ 2.

Methode der Abbildung.

Die eindeutige Abbildung der F_3 auf die Ebene, wie sie Clebsch⁶⁾ gegeben hat, ist im allgemeinen auf 2·36 Arten möglich, entsprechend den 36 Doppelsechsen⁷⁾ der Fläche, die bezw. als Fundamentaldoppelsechsen genommen werden können. All diese Abbildungen können aber, wie Diekmann⁸⁾ gezeigt hat, aus einer derselben durch quadratische Transformationen abgeleitet werden, und es ist daher zweckmässig, eine bestimmte der Diskussion zu grunde zu legen. Als solche bietet sich sofort die, welcher

6) A. Clebsch: „Die Geometrie auf den Flächen 3. Ordnung.“ Crelle J. 45 und Math. Ann. 5 p. 419.

7) Vergl. die fundamentale Arbeit von Schläfli: „An Attempt to determine the 27 Lines upon a surface of the third order etc.“ Quart. J. 2 p. 116. Im übrigen verweise ich bez. der Literatur über die allgemeine F_3 auf den Artikel von W. Franz Meyer: „Flächen dritter Ordnung“ in der „Encyclopädie der Math. W.“ III C 6 a.

8) J. Diekmann: „Über die Modifikationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche 3. Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält.“ Math. Ann. 4 p. 442 ff.

die ausgezeichnete Doppelsechs der 12 Geraden mit imaginären Asymptotenpunkten⁹⁾ als Fundamentaldoppelsechs zu grunde liegt.

Diese Doppelsechs, die ich mit

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \end{array}$$

bezeichne, bildet sich ab in die 6 Fundamentalpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 und in die 6 Kegelschnitte, welche durch je fünf der Fundamentalpunkte gehen (1', 2', 3', 4', 5', 6'). Die 15 Verbindungslinien der 6 Fundamentalpunkte sind die Bilder der 15 Geraden mit reellen Asymptotenpunkten vom Typus 12. Dabei geht, nach den Eigenschaften der Doppelsechs, der Kegelschnitt 1' durch die Punkte 2, 3, 4, 5, 6 und die andern entsprechend. Es fragt sich nur, was für eine spezielle Lage den 6 Fundamentalpunkten infolge der gewählten Fundamentaldoppelsechs zukommt.

Dies lässt sich dadurch entscheiden, dass man betrachtet, welche „Öffnungen“ der Fläche sich zu Knoten zusammenziehen können. Solcher Öffnungen gibt es zehn; jede ist dadurch charakterisiert, dass über ihre „Wandung“ die Geraden einer Doppelsechs von dem Typus

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 56 & 46 & 45 \\ 23 & 13 & 12 & 4' & 5' & 6' \end{array}$$

laufen, von welchen beim Zusammenziehen der Öffnung immer die untereinanderstehenden Geraden z. B. 1 und 23 konsekutiv werden und zusammenfallen. Dies würde im Bilde dadurch zum Ausdruck kommen, dass die Fundamentalpunkte 1, 2, 3 in einer Geraden lägen,¹⁰⁾ also Punkt 1 auf die Gerade 23 rückte. Es darf jedoch die Lage der Punkte nicht derart sein, dass zwei derselben z. B. 1 und 2 unendlich nahe werden

⁹⁾ S. z. B. Klein l. c. § 11. Über die verschiedenen Typen der Doppelsechse siehe Schröter: „Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Fläche 3. Ordnung.“ Crelle J. 62 p. 265.

¹⁰⁾ J. Diekmann l. c. § 4.

könnten; denn dies entspräche dem Zusammenziehen einer Doppelsechs vom Typus

1 1' 23 24 25 26

2 2' 13 14 15 16

und es dürfen die Fundamentalpunkte nicht auf einen Kegelschnitt zu liegen kommen; denn dies entspräche dem Zusammenziehen der Fundamentaldoppelsechs.

Nehmen wir also 5 Punkte — der besseren Übersicht halber zunächst auf einer Ellipse — so ist die letzte Bedingung sicher erfüllt, wenn Punkt 6 innerhalb des durch die Punkte 1—5 bestimmten Fünfecks liegt. Infolge der ersten Bedingung muss derselbe aber von jedem der 5 Punkte durch eine Gerade, also eine der Diagonalen des Fünfecks getrennt sein. Wir erhalten so die ersten 5 Punkte als Ecken eines Pentagramms, in dessen Fünfeck der 6^{te} Punkt liegt. Es ist dann aber auch jeder der ersten 5 Punkte vom nächsten durch die Verbindungslinie der gegenüberliegenden Ecke des Fünfecks mit Punkt 6 getrennt.

Man sieht nun schon, dass es 10 Möglichkeiten gibt, einen Knoten entstehen zu lassen, indem einerseits Punkt 6 auf jede Seite des Pentagramms, andererseits jeder der Punkte 1—5 auf die ihn von 6 trennende Seite rücken kann. Da aber unter den 20 Doppelsechsen vom Typus 123 nur 10 ganz bestimmte sind, die Öffnungen entsprechen, ist die Bezeichnung der 5 ersten Punkte, wenn für den inneren 6 genommen wird, noch nicht gleichgiltig. Die 10 Öffnungsdoppelsechse sind nun aber 123, 124, 135, 146, 156, 236, 245, 256, 345, 346.¹¹⁾ Es muss deshalb die Reihenfolge der Ecken des Fünfecks 1, 2, 4, 5, 3 sein. Punkt 6 ist aber, wie man leicht erkennt, in keiner Weise ausgezeichnet. Denn es liegt auch jeder andere Punkt, da wir das Unendlichferne nicht als trennend betrachten können, in dem inneren Fünfeck eines Pentagramms¹²⁾ und wir erhalten durch

¹¹⁾ Siehe F. Klein l. c. § 12.

¹²⁾ In der Figur am Schluss der Abhandlung ist dieses Pentagramm, für den Punkt 5 deutlich gemacht.

Projektion die Regel, dass, wenn ein anderer Punkt z. B. 5 als innerer genommen wird, man in der Reihenfolge der fünf übrigen diesen durch 6 zu ersetzen und die beiden, deren Verbindungslinie die vertauschten Punkte trennt, also hier 3 und 4, auch zu vertauschen hat.

§ 3.

Zusammenhang der Öffnungen.

Da die Öffnungen und ihre gegenseitige Lage bei der Entstehung von Knoten eine wesentliche Bedeutung haben, ist es nötig, über ihre Gruppierung das Wichtigste vorausszuschicken.

Zwei der Öffnungen haben entweder nur eine Fundamentalgerade gemein (eine Ziffer ihrer Bezeichnung¹³⁾) wie z. B.

1 2 3 und 1 4 6

oder zwei, wie 1 2 3 und 1 2 4

die wir dann zusammenhängend¹⁴⁾ nennen. Im ersten Falle haben die Doppelsechse

(1) 2 3 56 (46) 45	und	(1) 4 6 35 25 (23)
(23) 13 12 4' (5') 6'		(46) 16 14 2' 3' (5')

¹³⁾ Siehe G. Bauer: „Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Kurve auf einer Fläche 3. Ordnung.“ Sitzgsber. der math. phys. Cl. d. k. b. Ak. der W. zu München, Bd. XIII. 1883. p. 327.

¹⁴⁾ S. d. Diss. v. G. Herting: „Über die gestaltlichen Verhältnisse der Flächen 3. Ordnung und ihrer parabolischen Kurven.“ München, 1884, p. 15. — In dieser Arbeit bietet Herting eine Zusammenstellung aller Arten von Flächen 3. Ordnung mit und ohne Singularitäten mittels der von Geiser Math. Ann. I p. 129 ff. angegebenen und von Zeuthen l. c. (und schon vorher am Schluss der Abhandlung „Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre.“ Math. Ann. 7 Abschn. VII) erweiterten Abbildung durch den von einem Punkt der Fläche ausgehenden Kegel 4. Ordnung. Die entsprechenden „Umrisskurven“ sind auf 8 Tafeln sorgfältig ausgeführt und waren mir, da ich die Rodenbergsche Modellsammlung nicht benützen konnte, ein erwünschtes Hilfsmittel für die Anschauung.

vier (eingeklammerte) Gerade gemein, die mit derselben fünften zwei Dreiecke bilden:

$$\begin{array}{cc} (1) & (5') \\ (23) & (46) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cc} (1) & (5') \\ (23) & (46) \end{array}} \right\} 15.$$

Im letzteren Falle haben die Doppelsechse

$$\begin{array}{cccccc} (1) & (2) & 3 & (56) & 46 & 45 \\ & & & & & \text{und} \\ 23 & 13 & (12) & 4' & (5') & (6') \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} (1) & (2) & 4 & (56) & 36 & 35 \\ & & & & & \\ 24 & 14 & (12) & 3' & (5') & (6') \end{array}$$

sechs Gerade gemein, die zwei windschiefe, sich gegenseitig schneidende Tripel bilden und daher einem der 360 Steinerschen Hyperboloide angehören. Beide Doppelsechse zusammen enthalten in diesem Falle 18 Gerade.

An jeder Öffnung hängen 3 andere. In unserer Abbildung „hängt“ entsprechend jedes Dreieck von der Art 123 mit jeder Seite an einem ebensolchen, z. B.

$$123 \text{ an } \underline{124}, \underline{135}, \underline{236}.$$

Zwei nicht zusammenhängende Öffnungen hängen an einer dritten, die in unserer Abbildung mittels der eben erwähnten Dreiecke leicht auffindbar ist, z. B.

$$123 \text{ und } 146 \text{ an } 124.$$

Es gibt ferner 5 Gruppen von je 4 Öffnungen, von welchen keine an der andern hängt. Diese sind

$$\begin{array}{cccc} 123 & 146 & 256 & 345 \\ 123 & 156 & 245 & 346 \\ 124 & 135 & 256 & 346 \\ 124 & 156 & 236 & 345 \\ 135 & 146 & 236 & 245. \end{array}$$

Jede dieser 5 Gruppen gibt Veranlassung zu einer Fläche mit 4 C_2 . Unsere Fundamentalpunkte bilden dann die 6 Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen 4 Seiten die Bilder der 4 Knoten sind. Jeder Fundamentalpunkt ist das Bild einer vierfachen Geraden, die durch zwei Knoten geht: Die 6 Fundamentalpunkte sind die Bilder der 6 Kanten des Knotentetraeders. Die Fläche enthält noch 3 einfache, in einer Ebene liegende Gerade, deren jede zwei gegenüberliegende Tetraederkanten schneidet, in unserer Abbildung die drei Diagonalen des Vierseits,

§ 4.

Allgemeines über die Dreiecke der Fläche.

Die 45 Dreiecke der F_3 scheiden sich in zwei Gruppen. Die einen enthalten nur eine Gerade mit reellen Asymptotenpunkten, wie 12, 1, 2'; die andern deren drei, wie 12, 34, 56. Der letzteren gibt es 15; sie werden in unserer Abbildung von den 15 Verbindungslinien der Fundamentalpunkte gebildet und zerfallen wieder in zwei Gruppen: 10 eigentliche „Dreiecke“ der Fläche, d. h. solche Felder, die von keiner andern Geraden überstrichen werden und in denen die 10 Ovale der parabolischen Kurve, in den Asymptotenpunkten berührend, liegen, und 5 andere Dreiecke. Die ersteren sind den 10 Pentaederecken benachbart und können in dieselben übergehen, wenn Ovalpunkte entstehen, die letzteren ebenso den 5 Pentaederebenen. Aus unserer Abbildung sind die „Dreiecke“ leicht zu erkennen. Jedem derselben ist eine der 10 Öffnungen als „gegenüberliegend“ zugeordnet, insoferne als sie von jedem Punkte des „Dreiecks“ aus „sichtbar“ und zugleich von einer Doppelsechse umhüllt wird, die keine Gerade des Dreiecks enthält. Zeuthen hat a. a. O. eine Tabelle der 10 „Dreiecke“ mit ihren gegenüberliegenden und von ihnen aus sichtbaren resp. unsichtbaren Öffnungen u. s. w. gegeben, aus der ich die folgende Zusammenstellung der 10 Öffnungen und „Dreiecke“ herausnehme.

„Dreieck“	Gegenüber- liegende Öffnung.	„Dreieck“	Gegenüber- liegende Öffnung.
12, 35, 46	256	14, 25, 36	135
12, 36, 45	156	15, 23, 46	245
13, 24, 56	346	15, 26, 34	124
13, 26, 45	146	16, 24, 35	236
14, 23, 56	345	16, 25, 34	123

Ich werde dann die „Dreiecke“ kurz durch die in Klammer gesetzte Bezeichnung der gegenüberliegenden Öffnung ausdrücken, so dass also (256) das „Dreieck“ 12, 35, 46 bedeutet.

§ 5.

Die verschiedenen Arten von Ovalpunkten.

Wenn wir eines der vorher genannten „Dreiecke“ zusammenziehen, so entsteht ein Ovalpunkt mit drei reellen Geraden; wir wollen ihn „von der Gattung α “¹⁵⁾ nennen. Durch Zusammenziehen zweier Öffnungen können wir aber erreichen, dass zwei der Ovalpunktsgersten zusammenfallen. Die Ebene des Ovalpunktes berührt dann die Fläche längs dieser Verbindungslinie der beiden Knoten, der Ovalpunkt gehört zur Gattung β). Trennt man nun an diesen Knoten, so werden die beiden Geraden konjugiert imaginär, ihr reeller Schnittpunkt auf der reellen unären dritten Geraden ist ein Ovalpunkt von der Gattung γ). Nun kann aber an einer weiteren Öffnung verbunden und dann getrennt werden, sodass auch die dritte Ovalpunktsgerade imaginär wird. Dann wird aber auch immer eine der beiden konjugiert imaginären Geraden in Mitleidenschaft gezogen, es verschwindet ihr reeller Schnittpunkt und der Ovalpunkt ist selbst imaginär: Gattung δ).¹⁶⁾

Wenn aber die Geraden der Fläche nicht mehr alle reell sind, ist auch die Feldereinteilung und der Verlauf der parabolischen Kurve anders geartet,¹⁷⁾ und es können sich nicht mehr bloss „Dreiecke“ zusammenziehen. Wir müssen daher auch alle Fälle untersuchen, die sich durch Zusammen-

¹⁵⁾ Nach Herting l. c. p. 59.

¹⁶⁾ Herting erwähnt diese Gattung nicht, da er natürlich einen solchen Punkt nicht als Projektionszentrum benutzen könnte.

¹⁷⁾ Vergl. Bauer l. c. und Herting p. 69 ff.

ziehen der 35 übrigen Dreiecke ergeben können.¹⁸⁾ Auf eine Diskussion der Realität der Geraden der entstehenden Flächen, also auf ihre Einreihung in eine der 5 Schläflischen Spezies,¹⁹⁾ gehe ich aber nicht ein, einerseits da dies von Eckardt schon geschehen ist, andererseits aber unsere Abbildung das ungeeignetste Mittel hiezu wäre.

Für diese ist im Falle des Zusammenziehens eines der 30 Dreiecke vom Typus

$$16 \quad 1 \quad 6'$$

Bedingung, dass die Gerade 16 den Kegelschnitt $6'$ im Punkte 1 berührt, was ebenso wie das Zusammenziehen eines der 5 Dreiecke vom Typus

$$12 \quad 34 \quad 56,$$

wie das Bild deutlich zeigt, nur bei imaginären Ovalpunkten stattfinden kann.

Es ist dann immer zu untersuchen, ob der so gefundene Fall eine neue Art von Fläche gibt oder ob er auf einen der bekannten Fälle — unter Voraussetzung imaginärer Geraden — zurückgeführt werden kann. Dies lässt sich entscheiden, indem man untersucht, welches die Abbildung wäre, wenn man eine andere Fundamentaldoppelsechs zu grunde legt.

Es ist deshalb nötig, wenn wir auch immer wieder zu der im § 2 erläuterten Abbildung zurückkehren und von ihr ausgehen, zu sehen, was für Veränderungen in der Bezeichnung der Geraden eine quadratische Transformation der Ebene zur Folge hat.

¹⁸⁾ Es ist dabei nur noch zu bemerken, dass auf einer Geraden nie mehr als zwei Ovalpunkte liegen können, dass also nicht drei und mehr Dreiecke, die an einer Geraden hängen, zugleich zusammengezogen werden können; denn jede Gerade der Fläche berührt die parabolische Kurve nur in zwei Punkten.

¹⁹⁾ Quart. J. II (1858) p. 117.

§ 6.

Zugrundelegung einer andern Fundamentaldoppelsechs.

Transformieren wir die Abbildung quadratisch unter Zugrundelegung dreier Fundamentalpunkte, etwa 4, 5, 6, als Hauptpunkte der Transformation, so geht, nach bekannten Eigenschaften dieser Transformation, jede Ecke des Fundamentaldreiecks in die Gegenseite über, also

$$\begin{aligned} 4 &\text{ in } 56, \\ 5 &\text{ in } 46, \\ 6 &\text{ in } 45; \end{aligned}$$

die Punkte 1, 2, 3 werden nur verschoben, ebenso wie die Kegelschnitte 4', 5', 6', welche durch 2 Hauptpunkte gehen. Die Kegelschnitte 1', 2', 3' aber, die durch alle 3 Hauptpunkte gehen, gehen über in Gerade und zwar

$$\begin{aligned} 1' &\text{ in } 23 \\ 2' &\text{ in } 13 \\ 3' &\text{ in } 12. \end{aligned}$$

Alle Geraden, die einen Hauptpunkt mit einem der 3 andern Punkte verbinden, erleiden nur die entsprechende Verschiebung. Die Transformation lässt sich also durch das einfache Schema darstellen

4	5	6	1'	2'	3'
56	46	45	23	13	12

das, wegen der vollständigen Reziprozität der Abbildung, auch von unten nach oben gelesen werden muss. Was nicht im Schema steht, behält seine Bezeichnung.

Die neuen Fundamentalpunkte sind

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 56 \quad 46 \quad 45,$$

die neuen Kegelschnitte

$$23 \quad 13 \quad 12 \quad 4' \quad 5' \quad 6'.$$

Fundamentaldoppelsechs ist also 123.

§ 7.

Zusammenstellung der Singularitätenflächen mit den dabei von selbst auftretenden Ovalpunkten.

Wie schon in § 5 bemerkt, enthält jede F_3 mit 2 Knoten einen Ovalpunkt β) und es wird sich als nützlich erweisen, bevor wir zu den einzelnen Fällen übergehen, alle möglichen F_3 mit Singularitäten in bezug auf solche, der Fläche zugehörige Ovalpunkte β) zu untersuchen. Alles Nähere gibt die folgende Übersicht.

1. 1 C_2 . Jede Knotengerade ist aus 2 windschiefen entstanden; also kein Ovalpunkt.
2. 1 B_3 . Jede Knotengerade ist aus 3 windschiefen entstanden; kein Ovalpunkt.
3. 2 C_2 . Die gemeinsame Knotengerade ist vierfach und enthält zwei Gerade, die sich vorher schnitten. Die zugehörige dritte bleibt unär und schneidet die gemeinsame Knotengerade in einem Ovalpunkt.
4. 1 B_4 . Dieser entsteht durch Zusammenziehen der die zwei C_2 trennenden Öffnung. Die gemeinsame Knotengerade wird 6fach, indem zwei Gerade dazutreten, die mit der vorher erwähnten unären Geraden zwar ein Dreieck, aber keines der (reell) zusammenziehbaren bilden. Der Ovalpunkt bleibt also erhalten und einfach. 4 weitere Knotengerade sind aus je 4 windschiefen Geraden entstanden. Ausserdem enthält die Fläche 4 unäre Gerade.
5. 1 B_3 und 1 C_2 . Es sind noch 3 unäre Gerade vorhanden, die aber die 6fache gemeinsame Knotengerade nicht treffen. Die übrigen Knotenstrahlen können überhaupt nicht in betracht kommen; also kein Ovalpunkt.

6. 1 B_5 . Durch den Knoten gehen eine 10fache und drei 5fache Gerade: Zum B_4 ist noch eine Öffnung gezogen. Die eine der dort 4fachen Geraden fällt dann mit der 6fachen zusammen; zu jeder der 3 vierfachen tritt noch eine weitere, die aber vorher zu allen dort konsekutiven Geraden windschief war. Es bleiben zwei windschiefe Gerade unär, die die 10fache Gerade nicht schneiden. Eine der 5fachen kann, da sie aus 5 konsekutiven Windschiefen besteht, zu einem Ovalpunkt auch nicht Veranlassung geben; also kein Ovalpunkt.
7. 3 C_2 . Es gibt drei unäre Gerade, welche entsprechend Nr. 3 auf jeder gemeinsamen Knotengeraden je einen Ovalpunkt bestimmen. Die drei unären Geraden bilden selbst ein Ovalpunktsdreieck.
8. 2 B_3 . Es gibt keine unäre Gerade, also auch keinen Ovalpunkt.
9. 1 B_4 und 1 C_2 . Die eine unäre Gerade von Nr. 4 ist noch erhalten und schneidet die 6fache Knotengerade des B_4 in dem schon oben erwähnten Ovalpunkt.
10. 1 B_6 . Es gibt keine unäre Gerade und keinen Ovalpunkt.
11. 1 U_6 . Entsteht aus Nr. 7, wenn die 3 zusammengezogenen Öffnungen an einer dritten hängen, durch Zusammenziehen dieser dritten. Es bleiben also die 3 unären Geraden, wie die 3 Ovalpunkte erhalten. Die Ovalpunkte bleiben auch einfach, da, wie schon in Nr. 7 bemerkt, die restierenden 3 unären Geraden selbst ein Ovalpunktsdreieck bilden und jede Gerade nur an zwei solchen teil hat.
12. 1 B_3 und 2 C_2 . Die Verbindungslinie der beiden C_2 wird, wie schon in Nr. 3 von der einzigen unären Geraden in einem Ovalpunkt getroffen.

13. 1 B_5 und 1 C_2 . Es gibt keine unäre Gerade, keinen Ovalpunkt.
14. 1 U_7 . Entsteht aus dem U_6 durch Zusammenziehen einer der am Knoten hängenden Öffnungen. Zwei der dort 8fachen Knotenstrahlen rücken zu einer 16fachen Geraden zusammen. In den andern 8fachen fallen zwei der vorher unären Geraden. Diese 10fache Gerade wird von der bleibenden unären in einem Punkte geschnitten, den man für 2 zusammengefallene Ovalpunkte zählen muss, da das Dreieck der unären Geraden ein Ovalpunktsdreieck war.
15. 4 C_2 . Jede der 6 gemeinsamen (vierfachzählenden) Knotengeraden wird nach Nr. 3 in einem Ovalpunkt getroffen, von einer der 3, kein Ovalpunktsdreieck bildenden unären Geraden. Jede unäre Gerade trifft zwei sich nicht schneidende Knotenstrahlen.
16. 2 B_3 und 1 C_2 . Keine unäre Gerade; kein Ovalpunkt.
17. 1 B_4 und 2 C_2 . Eine unäre Gerade, welche sowohl die 6fache B_4 -Gerade, also auch die gemeinsame, 4fache C_2 -Gerade trifft. Also nach Nr. 3 und Nr. 4 zwei getrennte Ovalpunkte.
18. 1 B_6 und 1 C_2 . Keine unäre Gerade; kein Ovalpunkt.
19. 1 U_8 . Keine unäre Gerade; kein Ovalpunkt.
20. 3 B_3 . Keine unäre Gerade; kein Ovalpunkt.

Wenn wir nun dazu übergehen, die möglichen Arten von Flächen mit Ovalpunkten abzuleiten, so wird uns bei der Frage nach Singularitäten die eben gegebene Übersicht aller Fälle von Ovalpunkten β) immer sofort sagen, ob etwa bei Auftreten der und der Singularität neue Ovalpunkte notwendig entstehen oder nicht. Und damit wende ich mich zu meinem eigentlichen Thema.

II. Ableitung der möglichen Ovalpunktsflächen.

§ 8.

Flächen mit einem Ovalpunkt.

Nehmen wir an, es würde sich das „Dreieck“ (236) in einen Punkt zusammenziehen, so haben wir einen Ovalpunkt. Es schneiden sich dann in diesem Punkt die Geraden 16, 24, 35. Dies kann man dahin auffassen, dass die 6 Fundamentalpunkte zwei zu einander einfach perspektive Dreiecke bilden.²⁰⁾ Nehmen wir als solche etwa 123 und 456, so haben wir die Perspektivität

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ \hline (236). \end{array}$$

Ist nun 1 2 3 Koordinatendreieck, das Kollineationszentrum (236) Einheitspunkt, dann haben die 6 Punkte folgende Koordinaten:

$$\begin{array}{ll} 1) & 1 \quad 0 \quad 0 \quad 6) \quad y_1 \quad 1 \quad 1 \\ 2) & 0 \quad 1 \quad 0 \quad 4) \quad 1 \quad y_2 \quad 1 \\ 3) & 0 \quad 0 \quad 1 \quad 5) \quad 1 \quad 1 \quad y_3 \end{array}$$

²⁰⁾ Über perspektive Dreiecke siehe J. Rosanes: „De polarium reciprocarum theoria observationes.“ Dissert. Vratisl. 1865 und desselben Arbeit in Math. Ann. 2 p. 549. Die analytische Behandlung hat wesentlich vereinfacht Vályi in Arch. f. Math. und Phys. 70, p. 105. Eine synthetische Behandlung der vorkommenden Fälle gab H. Schröter Math. Ann. 2 p. 553.

All diese Arbeiten hat E. Hess zusammengefasst in einer grösseren Abhandlung: „Beiträge zur Theorie der mehrfach perspektiven Dreiecke und Tetraeder.“ Math. Ann. 28 (1886). Diesem folge ich auch in der analytischen Behandlung. Nur ist mir der Einheitspunkt bequemer als die Einheitsgerade.

wobei die y_i willkürliche Grössen bedeuten. Wenn nun die Unterdeterminanten von

$$Y \equiv \begin{vmatrix} y_1 & 1 & 1 \\ 1 & y_2 & 1 \\ 1 & 1 & y_3 \end{vmatrix}$$

mit Y_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) bezeichnet werden, so sind die Koordinaten von

$$\begin{array}{lll} 23) & 1 & 0 & 0 & 45) & Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ 13) & 0 & 1 & 0 & 56) & Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ 12) & 0 & 0 & 1 & 46) & Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{array}$$

und von

$$(236) \begin{cases} (16) & 0 & -1 & 1 \\ (24) & 1 & 0 & -1 \\ (35) & -1 & 1 & 0 \end{cases} \quad (135) \begin{cases} (14) & 0 & -1 & y_2 \\ (25) & y_3 & 0 & -1 \\ (36) & -1 & y_1 & 0 \end{cases} \quad (124) \begin{cases} (15) & 0 & y_3 & -1 \\ (26) & -1 & 0 & y_1 \\ (34) & y_2 & -1 & 0 \end{cases}$$

Jede Gerade des Ovalpunkts ist an zwei Öffnungen beteiligt, die zusammenhängen, gemäss folgender Tabelle:

16	24	35
146, 156	124, 245	135, 345.

Von den noch übrigen 4 Öffnungen hängen 3 an der vierten, die dem Ovalpunkt gegenüberliegt, nämlich

$$123, 256, 346 \text{ an } 236.$$

Daraus erhellt, dass wir 4 Möglichkeiten haben, unserer Fläche, ohne dass der Ovalpunkt davon beeinflusst wird, einen Knoten C_2 zu geben. Lassen wir z. B. Punkt 6 auf 23 rücken, so ist Gerade $\overline{236}$ das Bild des Knotens und es werden die untereinanderstehenden Geraden folgender Doppelsechs konsekutiv:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 6 & 45 & 15 & 14 \\ 36 & 26 & 23 & 1' & 4' & 5'. \end{array}$$

Die andern 3 Öffnungen geben, einzeln zusammengezogen, da sie in Bezug auf den Ovalpunkt gleichmässig liegen (es sind die 3 vom Ovalpunkt aus „unsichtbaren“), nur eine neue Art von F_3 mit Ovalpunkt und C_2 .

Ziehen wir die gegenüberliegende und eine der unsichtbaren Öffnungen gleichzeitig zusammen, so entsteht ein B_3 , in welchem 6mal je drei Windschiefe konsekutiv werden. Rückt z. B. Punkt 1 in den auf 23 liegenden Punkt 6, dann sind die Öffnungen 236 und 123 zusammengezogen. Es werden konsekutiv die untereinander stehenden Geraden:

1	2	3	4'	5'	6'
23	13	12	56	46	45
6	36	26	15	14	1'.

Gerade 23 ist das Bild des Knotens;²¹⁾ die unendlich nahen Punkte 1 und 6 bestimmen noch die Gerade 16. Wir sehen also auch im Bilde, dass der Ovalpunkt von dieser Deformation nicht beeinflusst wurde.

Würden wir noch eine Öffnung, etwa 256, zum B_3 hinzuziehen, so würde aus demselben ein B_4 , was nach § 7, 4) zu einem neuen Ovalpunkt Veranlassung gäbe. Das Zusammenziehen sämtlicher 4 freien Öffnungen gäbe nach § 7, 11) einen U_6 und damit drei weitere Ovalpunkte, gehört also ebenfalls in einen späteren §.

Unser Ovalpunkt nimmt die Form β) an, wenn zwei Öffnungen sich zusammenziehen, denen zwei der Ovalpunktgeraden gemeinsam sind. Diese Paare von Öffnungen sind:

- I. 156 u. 245; dabei werden konsekutiv die Geraden 16 u. 24;
 II. 145 „ 345; „ „ „ „ „ 16 „ 35;
 III. 125 „ 135; „ „ „ „ „ 24 „ 35.

Betrachten wir den Fall I. in der Abbildung, so liegt 6 auf 15 und 4 auf 25; 15 und 25 sind die Bilder der beiden Knoten. Punkt 5 ist das Bild der vierfachen Geraden 5, 3', 16, 24 und also auch das Bild des Ovalpunktes.

Ziehen wir noch (bei Fall I.) die zwischen 156 und 245 liegende Öffnung 256 zusammen, so entsteht ein B_4 , wobei der Ovalpunkt erhalten bleibt. Im Bild werden die Punkte 6 und 4; 1 und 2 konsekutiv. Gerade 5 wird 6fach, indem noch 26 und 14 mit ihr coïncidieren.

²¹⁾ Siehe immer Diekmann l. c.

Der Ovalpunkt von der Gattung β) kann im Falle der zwei C_2 noch mit einem B_3 (236 mit 123 oder 346), im Falle des B_4 nur noch mit einem C_2 (entweder 123 oder 346) kombiniert sein.

Stellen wir nun die Bedingung, dass sich etwa

$$16 \quad 1 \quad 6'$$

in einem Punkt schnitten, so lässt sich dieser Ovalpunkt durch die Transformation

1	2	4	56	36	35
24	14	12	3'	5'	6'

in unsern Ovalpunkt 16, 24, 35 (236), also auf die Perspektivität zurückführen. Die nicht beteiligten Öffnungen sind 3 aneinanderhängende: 346, 236, 256, und ergeben durch Zusammenziehen nichts wesentlich Neues.

Wir haben nun nur noch einen Ovalpunkt von der Form

$$16 \quad 23 \quad 45$$

zu betrachten. Dieser wird aber durch

1	2	3	56	46	45
23	13	12	4'	5'	6'

auf die obige Form 16, 1, 6' zurückgeführt. Die freien Öffnungen sind in diesem Falle 4 nicht zusammenhängende: 124, 135, 256, 346 und geben durch Zusammenziehen ebenfalls keine neuen Flächen.

Wir haben also folgende Arten von F_3 mit einem Ovalpunkt:

1. Keine Singularität.
2. Ein einfacher Knoten C_2 .
3. Ein biplanarer Knoten B_3 .
4. 2 Knoten C_2 .
5. 2 Knoten C_2 und ein B_3 .
6. Ein biplanarer Knoten B_4 .
7. Ein B_4 und ein C_2 .

In den letzten 4 Fällen ist der Ovalpunkt von der Gattung β).

§ 9.

Flächen mit zwei Ovalpunkten.

Wir erhalten eine zweifache Perspektivität der beiden Fundamentaldreiecke, wenn wir die Ecken des zweiten den negativen Permutationen unterwerfen, also zu

1	2	3
6	4	5

(236)

noch eine der drei Perspektivitäten

1	2	3
6	5	4

(123)

1	2	3
5	4	6

(imaginär)

1	2	3
4	6	5

(imaginär)

nehmen. Wählen wir die erste, so entspricht dies einer F_3 mit zwei reellen Ovalpunkten. Im Bild müssen 16, 25, 34 durch einen Punkt gehen. Dafür ist Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ y_3 & 0 & -1 \\ y_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = y_2 - y_3 = 0,$$

und man hätte entsprechend für die beiden andern Fälle

$$y_3 - y_1 = 0 \text{ und } y_1 - y_2 = 0$$

als Bedingungen. Bei anderer Wahl der Fundamentaldreiecke würden sich auch hiefür „Dreiecke“ ergeben, was aber unwesentlich ist. Wir sehen auf jeden Fall, dass zwei Ovalpunkte immer eine gemeinsame Gerade haben.

Um die möglichen Singularitäten zu erhalten, stelle ich zunächst wieder die Öffnungen zusammen, an denen die einzelnen Ovalpunktsgereaden beteiligt sind. Wir haben die zwei Tabellen:

(236)

35	16	24
135, 345	146, 156	124, 245

(123)

25	16	34
245, 256	146, 156	345, 346

Von diesen 8 Öffnungen sind

- a) 146, 156, 245, 345 beiden Ovalpunkten zugehörig, während
b) 124, 135; 256, 346 nur Gerade eines Ovalpunkts enthalten.

Die zwei freien Öffnungen 236 und 123 sind zusammenhängend und gleichberechtigt, geben also zu je einer Art mit C_2 und B_3 Veranlassung, indem man entweder nur eine oder beide zugleich zusammenzieht.

Die Öffnungen b) bilden eine Gruppe von 4 nichtzusammenhängenden und trennen sich in zwei Paare der Art, dass das Zusammenziehen eines Paares die Coincidenz der zwei nicht gemeinschaftlichen Geraden des einen Ovalpunkts, das Zusammenziehen des andern Paares dasselbe beim zweiten Ovalpunkt bewirkt.

Verbinden wir z. B. bei 124 und 135, so fallen 24 und 35 zusammen, der eine Ovalpunkt ist von der Gattung β). Ebenso können wie im vorigen § die zwei C_2 zu einem B_4 zusammenrücken, wobei noch 123 zusammengezogen wird. In unserm Bild werden dann die Punkte 2 und 5, 3 und 4 konsekutiv, während 1 die 6fache Gerade darstellt. Um dies an unserer Abbildung wirklich auszuführen, brauchen wir, nachdem 2 schon auf 14 und 3 auf 15 gerückt ist, die Figur nur so zu projizieren, dass die unendlich ferne Gerade die Punkte 2 und 4 von 1, 3, 5 trennt, dass also 2 und 4 in die Verlängerungen von 25 und 43 über 5 und 3 hinaus zu liegen kommen.

Ähnliches gilt für das Knotenpaar 256 und 346, wo 25 und 34 konsekutiv werden. Der B_4 entsteht hier durch Zusammenziehen von 236.

Das gleichzeitige Zusammenziehen aller 4 Öffnungen b) gäbe eine Fläche mit 4 C_2 und also nach § 11, 15) 6 Ovalpunkte. Lassen wir aber 2 der Knoten, etwa 124 und 135 mit Hilfe von 123 in einen B_4 zusammenrücken, wie oben, so verschwinden alle neu entstandenen Ovalpunkte im B_4 und es bleiben nur unsere zwei ursprünglichen, die jetzt beide von der Gattung β) sind.²²⁾ Im Bild rückt einfach 6 in den Schnittpunkt von 25 und 34.

²²⁾ Vergl. § 11, 17.

Gehen wir nun nochmals von dem ersten B_4 (124, 123, 135) aus und ziehen dazu 236, so haben wir 3 Öffnungen (124, 135 und 236), welche an der vierten (123) hängen, zusammengezogen und damit einen U_6 , der aber zu drei neuen Ovalpunkten Veranlassung gibt. Lassen wir aber jetzt durch Zusammenziehen einer weiteren an 236 hängenden Öffnung (256 oder 346) zwei der Knotenstrahlen des U_6 konsekutiv werden, so entsteht ein U_7 mit einer 16fachen und einer 10fachen Geraden, welche letztere nach § 7, 14) von der einzigen unären Geraden 16 in den jetzt zusammengefallenen Ovalpunkten getroffen wird.

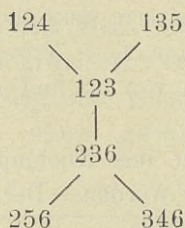
Man überzeugt sich nun leicht, dass beide Öffnungen 256 und 346 sich gleichzeitig zusammenziehen und dass in jedem Falle folgende Gerade konsekutiv werden:

16fach: 2, 3, 4, 5, 2', 3', 4', 5', 12, 13, 14, 15, 26, 36, 46 56;

10fach: 1, 6, 1', 6', 24, 35, 25, 34.

An den letzten beiden Paaren erkennt man unsere Ovalpunktsgereaden.

Schreiben wir die 6 zusammengezogenen Öffnungen nach ihrer gegenseitigen Lage an, so erhalten wir folgendes Diagramm:



und ersehen daraus, wie die beiden freien Öffnungen und die 4 Öffnungen b) symmetrisch am U_7 beteiligt sind. Wir erkennen in den drei unteren Öffnungen den zweiten B_4 und sehen also, dass dieselbe Operation, am zweiten B_4 ausgeführt, zu demselben Resultat führen würde. Im Bild sind die Fundamentalpunkte 2, 3, 4, 5 einerseits und 1, 6 andererseits zusammengefallen; letztere so, dass ihre Verbindungsline bestimmt bleibt.

Würden wir zu dem Ovalpunkt (236) einen andern von der Art 16, 1, 6' nehmen, der mit demselben auch 16 gemeinsam hätte, so wäre nur die Transformation

2	5	6	34	14	13
56	26	25	1'	3'	4'

nötig, um diesen Fall auf den betrachteten zurückzuführen. Da nur die einzige Öffnung 123 frei ist, kann auch durch Zusammenziehen derselben Neues nicht entstehen.

Wären beide Ovalpunkte von der Art

$$\text{I. } \begin{cases} 23 & 3' & 2 \\ 23 & 3 & 2' \end{cases}$$

so würden dieselben durch die Transformation

2	3	5	46	16	14
35	25	23	1'	4'	6'

zunächst übergeführt in

$$\text{II. } \begin{cases} 5 & 3' & 35 \\ 5 & 25 & 2' \end{cases}$$

und diese durch

1	5	6	34	24	23
56	16	15	2'	3'	4'

in

$$\text{III. } \begin{cases} 16 & 24 & 35 & (236) \\ 16 & 25 & 34 & (123) \end{cases}$$

also auf unsern ursprünglichen Fall. Bei I. sind frei die zusammenhängenden Öffnungen 146 und 156, bei II. die Öffnungen 123 und 236 von derselben Art, sodass also auch hiedurch Neues nicht veranlasst werden kann.

Auch der Fall

$$\text{IV. } \begin{cases} 16 & 24 & 35 & (236) \\ 16 & 23 & 45 \end{cases}$$

lässt sich durch zweimalige Transformation in unsern zuerst betrachteten Fall überführen. Zuerst durch

1	3	6	45	25	24
36	16	13	2'	4'	5'

in

$$\begin{array}{ccc} 3 & 5' & 35 \\ 3 & 23 & 2' \end{array}$$

was dem Fall II. entspricht und durch die Transformation

3	4	6	25	15	12
46	36	34	1'	2'	5'

in

$$\begin{array}{ccccc} 46 & 12 & 35 & (256) \\ 46 & 23 & 15 & (245) \end{array}$$

verwandelt wird, und dies ist ja, wenn auch mit andern Geraden, der ursprünglich angenommene Fall. Im Falle IV. sind die beiden freien Öffnungen 256 und 346 nicht zusammenhängend. Andere Fälle gibt es nicht.

Wir haben also folgende Arten von E_3 mit zwei Ovalpunkten:

1. Keine Singularität.
2. Ein Knoten C_2 .
3. Ein Knoten B_3 .
4. 2 C_2 ; ein Ovalpunkt β .
5. 1 B_4 ; ein Ovalpunkt β .
6. 2 C_2 und 1 B_4 ; beide Ovalpunkte β .
7. Ein uniplanarer Knoten U_7 ; beide Ovalpunkte β und unendlich nahe.

§ 10.

Flächen mit drei Ovalpunkten.

Vertauscht man die Punkte 6, 4, 5 cyklisch, was die positiven Permutationen ergibt, so werden die Dreiecke 3fach perspektiv, und wir erhalten die zwei neuen Perspektivitätszentra (resp. Ovalpunkte), die einander gegenseitig zur Folge haben:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline (135) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ \hline (124) \end{array}$$

Die Bedingung für (135) ist:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & y_2 \\ y_3 & 0 & -1 \\ -1 & y_1 & 0 \end{vmatrix} = y_1 y_2 y_3 - 1 = 0,$$

und die Bedingung für (124)

$$\begin{vmatrix} 0 & y_3 & -1 \\ -1 & 0 & y_1 \\ y_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = y_1 y_2 y_3 - 1 = 0,$$

woraus die Gleichzeitigkeit beider erhellt. Wir haben zur leichten Bestimmung dreier Ovalpunkte die allgemeine Regel: Man nehme ein „Dreieck“ (hier 123), dann hängt an jeder Seite desselben je noch ein solches. Diese 3 „Dreiecke“ zusammengezogen geben drei Ovalpunkte.

Bezüglich der gegenseitigen Lage dreier Ovalpunkte bemerke man, dass die drei Ebenen derselben ein Steinersches Trieder bilden

16	24	35	(236)
25	36	14	(135)
34	15	26	(124),

dessen konjugiertes Trieder (vertikal gelesen) aus drei Ebenen besteht, die die Verbindungslinie zweier Ovalpunkte enthalten müssen. Auf dieser Verbindungslinie (einer Kante des Pentaeders) liegt dann notwendig auch der dritte Ovalpunkt.

Die Anordnung der Öffnungen in Bezug auf die Ovalpunkte ist folgende:

(236)			(135)			(124)		
16	24	35	25	36	14	34	15	26
146	124	135	245	236	124	345	135	236
156	245	345	256	346	146	346	156	256

Es sind dies 9 Öffnungen, jede zu zwei Ovalpunkten gehörig. Die 10. Öffnung ist 123, die also zu einem die Ovalpunkte unverändert lassenden C_2 Veranlassung gibt,

Eine besondere Stellung nehmen auch die 3 an 123 hängenden, unseren Ovalpunkten gegenüberliegenden Öffnungen 236, 135, 124 ein. Ziehen wir alle drei Öffnungen zugleich zusammen, so werden alle 3 Ovalpunkte von der Gattung β), indem die Paare von Geraden 24, 35; 36, 14; 15, 26 konsekutiv werden. Einfach bleiben die Geraden des „Dreiecks“ (123), nämlich 16, 25, 34. Die Verbindungslinie der drei Ovalpunkte ist hier die Schnittlinie der Ebene des „Dreiecks“ (123) mit der Ebene der 3 Knoten.

In der Abbildung liegen auf den Seiten des Dreiecks der Punkte 1, 2, 3 resp. die Punkte 4, 6, 5. Ziehen wir nun noch Öffnung 123 auch zusammen, so werden 2, 5; 3, 4; 1, 6 konsekutiv und wir haben einen U_6 mit denselben Ovalpunkten wie vorher.²³⁾

Die drei Perspektivitätszentra haben bez. die Koordinaten:

$$(236) \dots 1 \quad 1 \quad 1$$

$$(135) \dots 1 \quad \frac{1}{y_1} \quad y_3$$

$$(124) \dots \frac{1}{y_2} \quad 1 \quad y_3.$$

Es ist ein beachtenswerter Fall, wenn diese 3 Punkte in einer Geraden liegen. Dafür ist Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{y_1} & y_3 \\ \frac{1}{y_2} & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet

$$y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2 = 3,$$

$$\text{resp. } \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = 3.$$

Dann liegen aber die 6 Fundamentalpunkte auf einem Kegelschnitt. Denn die Gleichung von $5'$ ist beispielsweise

$$x_1 x_2 (y_1 y_2 - 1) + x_2 x_3 (y_1 - y_1 y_2) + x_3 x_1 (y_2 - y_1 y_2) = 0,$$

²³⁾ Siehe § 7, 7 und 11.

Setzt man hier die Koordinaten von 5:

$$1 \quad 1 \quad y_3$$

ein, so resultiert die Bedingung

$$y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2 = 3.$$

Die Fläche hat also einen Knoten, wenn die Sechs der Fundamentalpunkte einer Öffnung angehört. Dies erkennt man auch, wenn man bedenkt, dass die 3 Ovalpunkte, als im Bild auf einer Geraden liegend, auf der F_3 Punkte einer Raumkurve dritter Ordnung sein müssen, die dann von der Geraden der drei Ovalpunkte (der Pentaederkante) in drei Punkten getroffen wird, also in eine ebene C_3 ausartet. Damit ist aber immer das Auftreten eines Knotens verbunden.

Eine neue Art von Fläche ist dies aber nicht. Denn wenn man die Transformation

4	5	6	23	13	12
56	46	45	1'	2'	3'

angewendet, bleiben die Ovalpunktsgersten im Bild dieselben, während die Fundamentalpunkte sind:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 56 \quad 46 \quad 45.$$

Liegen sie auf einem Kegelschnitt, so verschwindet die Öffnung 123, welcher Fall schon erledigt ist.

Würde man zu (236) einen andern Ovalpunkt nehmen, der keine Gerade mit ihm gemein hat, etwa

$$25 \quad 2' \quad 5,$$

so zeigt das Triederschema

$$A' \left\{ \begin{array}{c|c|c} 16 & 24 & 35 \\ \hline 25 & 2' & 5 \\ \hline 34 & 4 & 3' \end{array} \right.$$

dass auch das ergänzende Dreieck 34, 4, 3' einen Ovalpunkt bilden muss. Der Fall ist aber durch

1	4	5	36	26	23
45	15	14	2'	3'	6'

auf unsern ursprünglichen Fall zurückführbar. Denn diese Transformation macht aus dem Trieder A' das Trieder

$$A. \left\{ \begin{array}{c|c|c} 16 & 24 & 35 \\ \hline 25 & 36 & 14 \\ \hline 34 & 15 & 26 \end{array} \right.$$

was unser zuerst zugrunde gelegtes ist.

Frei sind aber im Falle A' die beiden zusammenhängenden Öffnungen

123 und 236,

die alle 18 Gerade, welche an den Ovalpunkten nicht beteiligt sind, enthalten.

Das Zusammenziehen einer dieser Öffnungen bringt nichts wesentlich Neues. Beide zugleich zusammengezogen ergeben aber eine Fläche mit B_3 , der im Falle A nicht auftreten konnte.

Jedes andere Trieder lässt sich ebenfalls in die Form A überführen. Es können uns deshalb diese Fälle nicht mehr interessieren, da nach § 3 die 18 freien Geraden mehr als zwei Öffnungen nicht angehören können.

Wir haben also folgendes Resultat:

1. Keine Singularität.
2. Ein Knoten C_2 .
3. Ein Knoten B_3 .
4. 3 C_2 ; alle Ovalpunkte β).
5. Ein uniplanarer Knoten U_6 ; alle Ovalpunkte β).

§ 11.

Flächen mit vier Ovalpunkten.

Wir erhalten eine vierfache Perspektivität unserer Dreiecke, wenn wir noch, ausser den 3 „Dreiecken“ des vorigen §, das dort ausgezeichnete „Dreieck“ (123) zusammenziehen,

Wir haben also dann noch

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ \hline (123) \end{array}$$

wofür, wie im § 9, Bedingung ist:

$$y_2 - y_3 = 0$$

oder also $y_2 = y_3 = y$.

Wegen der Bedingung

$$y_1 y_2 y_3 = 1$$

des vorigen § ist dann $y_1 = \frac{1}{y^2}$.

Die Koordinaten der Perspektivitätszentra sind

$$(236) \dots 1 \quad 1 \quad 1 \qquad (124) \dots \frac{1}{y} \quad 1 \quad y$$

$$(135) \dots 1 \quad y^2 \quad y \qquad (123) \dots \frac{1}{y} \quad 1 \quad 1.$$

Die Bedingung, dass (236), (135) und (124) auf einer Geraden liegen, wird zu

$$y^3 + 2 = 0$$

woraus also $y = -\sqrt[3]{2}$.

Da der Ovalpunkt (123) nur Gerade der ihm zugeordneten 3 andern Ovalpunkte enthält, treten neue Verhältnisse in Bezug auf das Zusammenziehen der Öffnungen nicht ein. Es genügt daher eine einfache Aufzählung der möglichen Fälle:

1. Keine Singularität.
2. Ein Knoten C_2 .
3. Ein Knoten B_3 .
4. 3 C_2 ; 3 Ovalpunkte β .
5. 1 U_6 ; 3 Ovalpunkte β .

§ 12.

Flächen mit sechs Ovalpunkten.

Wir haben, von der dreifachen Perspektivität ausgehend, noch verschiedene Möglichkeiten, ein neues Dreieck zusammenzuziehen. In erster Linie wären zu betrachten die 2 Dreiecke, die von den 9 Ovalpunktsgersten ausser (123) noch gebildet werden:

$$14 \quad 25 \quad 36 \quad \text{und} \quad 15 \quad 24 \quad 36.$$

Das entspräche aber dem Fall der 6fachen Perspektivität, der uns erst in § 15 beschäftigen soll.

Es existieren dann noch Dreiecke, die eine der Ovalpunktsgersten und noch zwei andere zu Seiten haben, und Dreiecke, die keine der 9 Ovalpunktsgersten enthalten. Der letzte Fall wird im § 14 seine Erledigung finden, den mittleren wollen wir hier betrachten.

Ziehen wir zunächst das „Dreieck“

$$15 \quad 23 \quad 46 \quad (245)$$

zusammen, wofür die Bedingung ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_3 & -1 \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{vmatrix} \equiv Y_{32} + y_3 Y_{33} = 0 \text{ oder } y_1 + y_3 = 2,$$

so bemerken wir, dass dann die beiden Perspektivitäten

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (236) \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \quad (245)$$

bestehen, welche nach § 10 die dritte Perspektivität

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ \hline \end{array} \quad (156)$$

zur Folge haben. Die Ovalpunktsgersten von (236), (245) werden eben durch die von (156) zum Trieder

$$\begin{array}{c|c|c|c} 16 & 35 & 24 & (236) \\ \hline 23 & 46 & 15 & (245) \\ \hline 45 & 12 & 36 & (156) \end{array}$$

ergänzt. Die Bedingung für (156) ist:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & y_1 & 0 \\ Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \end{vmatrix} \equiv Y_{12} + y_1 Y_{11} = 0 \text{ oder } y_1 + y_3 = 2,$$

was mit dem Obigen übereinstimmt. Aus demselben Grund muss aber wegen (245) und (345) von selbst noch (346) zum Ovalpunkt werden. Die Bedingung ist auch hier dieselbe:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \end{vmatrix} \equiv Y_{21} + Y_{23} = 0 \text{ oder } y_1 + y_3 = 2.$$

Wir haben also eine Fläche mit 6 Ovalpunkten:

I. (236) (135) (124) (245) (156) (346).

Für den Ovalpunkt (345) mit den Geraden 14, 23, 56 wäre die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & y_2 \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \end{vmatrix} \equiv y_2 Y_{22} + Y_{23} = 0 \text{ oder } y_1 + y_2 = 2,$$

und es ist aus Gründen der Analogie ersichtlich, dass dieselbe Bedingung auch für (256) und (146) resultieren muss.

Wir hätten dann die Gruppe von 6 Ovalpunkten:

II. (236) (135) (124) (345) (256) (146).

Auch die Bedingung $y_2 + y_3 = 2$

entspricht natürlich einer solchen Gruppe, deren zweite Hälfte aber nicht mehr aus „Dreiecken“ besteht. Suchen wir die Bedingung für den Ovalpunkt

16 23 45,

so haben wir:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \end{vmatrix} \equiv - (Y_{12} + Y_{13}) = 0 \text{ oder } y_2 + y_3 = 2.$$

Mittels der Trieder findet man dann noch die ergänzenden 2 Ovalpunkte zur Gruppe:

III. (236) (135) (124)

16 23 45

12 34 56

13 25 46.

Auf diese müssen wir unten ohnehin zu sprechen kommen.

Betrachten wir nun, um die gegenseitige Lage der 6 Ovalpunkte zu studieren, eine der 3 Gruppen, z. B. I. näher, so sehen wir, dass dieselben 3 Paare von 2 Ovalpunkten, nämlich

$$\begin{array}{c|c|c} (236) & (135) & (124) \\ (346) & (156) & (245) \end{array}$$

und, mit dem ursprünglichen, 4 Tripel von 3 Ovalpunkten bilden. Diese letzteren sind:

Zugehörig zu	(123)		(124)	(135)	(236)
„	„	(146)		(124)	(156) (346)
„	„	(256)		(156)	(236) (245)
„	„	(345)		(135)	(245) (346).

Daraus ist ersichtlich:

Die 6 Ovalpunkte liegen paarweise auf den Seiten des Dreiecks 15, 24, 36, also in einer (Pentaeder-)Ebene, und bilden dort, da die 3 Punkte eines Tripels immer auf einer Geraden liegen müssen, die 6 Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen Diagonalen 15, 24, 36 sind.

Da an den 6 Ovalpunkten alle 15 Geraden vom Typus 12 beteiligt sind und zwar ausser den Geraden 15, 24, 36 jede nur an einem Ovalpunkt, gibt es keine ausgezeichneten Öffnungen; vielmehr wird jede von 3 der 15 Geraden überstrichen, z. B. 123 von 12, 23, 13, und es ist also unnötig, hier die jeder Geraden zugehörigen Öffnungen zusammenstellen.

Die 10 Öffnungen scheiden sich aber doch in zwei Gruppen, die der 6 den Ovalpunkten gegenüberliegenden und die Gruppe der 4 andern:

$$123 \quad 146 \quad 256 \quad 345$$

die ein Quadrupel von nichtzusammenhängenden bilden. Das gleichzeitige Zusammenziehen irgend eines der 6 Paare, die sich aus ihnen bilden lassen, hätte für sich zur Folge, dass einer der 6 Ovalpunkte von der Gattung β) würde. Man erkennt aber bald, dass bei Bestehen aller 6 Ovalpunkte nur alle 4 Öffnungen gleichzeitig verschwinden können. Dann werden alle 6 Ovalpunkte von der Gattung β), wir erhalten die schon im § 3 besprochene Fläche mit 4 C_2 .

Die 12 freien Geraden bilden die Fundamentaldoppelsechs. Ist also diese eine Öffnungsdoppelsechs, etwa 123, so erhalten wir eine Fläche mit 6 Ovalpunkten und C_2 durch Zusammenziehen der Öffnung. Transformieren wir mittels

4	5	6	23	13	12
56	46	45	1'	2'	3'

so bleibt das Trieder der ersten 3 Ovalpunkte erhalten und die 3 andern werden:

$$A. \begin{cases} 15 & 1' & 5 \\ 36 & 3' & 6 \\ 24 & 2' & 4. \end{cases}$$

Die Fundamentaldoppelsechs ist dann 123. Weitere Singularitäten können nicht gebildet werden; es bleibt nur nachzuweisen, dass das Zusammenziehen irgend eines Dreiecks, das eine der ursprünglichen 9 Geraden zur Seite hat, immer auf eine Fläche mit 6 Ovalpunkten führt.

Für den Fall eines Dreiecks der Art

$$15 \quad 1' \quad 5$$

möchte dies in Obigem nachgewiesen erscheinen. Wenn wir nun aber die Gruppe III derselben Transformation unterwerfen, so erhalten wir, ausser (236), (135), (124)

$$B. \begin{cases} 16 & 1' & 6 \\ 34 & 3' & 4 \\ 25 & 2' & 5, \end{cases}$$

also eine ähnliche Gruppe wie A, welche sich aber von A dadurch unterscheidet, dass die drei Geraden 16, 34, 25 ein „Dreieck“ bilden, während 15, 36, 24 keinem „Dreieck“ angehören. In § 8 haben wir aber schon gesehen, dass solche Dreiecke mittels zweier Transformationen in einander übergeführt werden und wir können wohl, ohne eine solche Transformation wirklich auszuführen, den Satz aussprechen:

Zieht man an einer Fläche mit 3 Ovalpunkten ein Dreieck zusammen, das eine der 9 Ovalpunktsgeraden enthält, so resultiert immer eine Fläche mit 6 Ovalpunkten.

Unser Resultat ist:

1. Keine Singularität.
2. Ein Knoten C_2 .
3. 4 C_2 ; alle Ovalpunkte β).

§ 13.

Die Fläche mit zehn Ovalpunkten.

Gehen wir von der Fläche mit 6 Ovalpunkten, Gruppe I, des vorigen § aus und ziehen noch ein Dreieck der Gruppe II zusammen, so erhalten wir zunächst 9 Ovalpunkte, mit den Bedingungsgleichungen:

1. $y_1 y_2 y_3 = 1$
2. $y_1 + y_3 = 2$
3. $y_1 + y_2 = 2$.

Aus 2. und 3. erhellt aber, dass in diesem Falle auch

$$4. y_2 = y_3,$$

was nach § 11 die Bedingung für die vierfache Perspektivität, resp. für den zehnten Ovalpunkt (123), darstellt.

Wir haben die von Clebsch²⁴⁾ „Diagonalfläche“ genannte F_3 , bei der alle Ovale der parabolischen Kurve auf Punkte zusammengeschrumpft sind. In den 10 Ovalpunkten liegen die 10 Pentaederecken. Die Ovalpunkte bilden 10 Tripel²⁵⁾, die auf den 10 Pentaederkanten liegen. In jeder Pentaederebene liegen 3 der beteiligten 15 Geraden und bilden dort die „Diagonalen“ des von den vier andern Pentaederebenen ausgeschnittenen Vierseits.

Für y hat man die Gleichung

$$\frac{1}{y^2} + y = 2, \text{ oder}$$

$$y^3 - 2y^2 + 1 = 0.$$

²⁴⁾ „Über die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichung 5. Grades und die geom. Theorie des ebenen Fünfeits.“ Math. Ann. 4 p. 332 ff.

²⁵⁾ Nach dem vorigen § ist jedem „Dreieck“ ein solches zugeordnet und sind dieselben also auch in der Abbildung leicht anzugeben, was ich unterlasse.

Sondert man die Wurzel $+1$ ab, welche einer Trivialität entspräche, so resultiert

$$y^2 - y - 1 = 0$$

mit den Wurzeln

$$y = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{5}).$$

Man erkennt hieraus schon den engen Zusammenhang der Fläche mit dem regulären Fünfeck und in der That ist die Abbildungsfigur immer projektiv zur Figur eines regulären Pentagons, wobei Punkt 6 dem Mittelpunkt desselben entspricht. Das Sechseck der Fundamentalpunkte ist ein „zehnfach Brianchon'sches“²⁶⁾, d. h. die 6 Punkte lassen sich zu $10 \cdot 4 = 40$ Sechseiten verbinden, die einem Kegelschnitt umbeschrieben sind.

Zu demselben Resultat wären wir natürlich gekommen, wenn wir, ausgehend von der vierfachen Perspektivität, noch irgend-ein „Dreieck“ zusammengezogen hätten.

Dass es andere Fälle mit 10 Ovalpunkten nicht geben kann, ist wegen der Transformierbarkeit aller Fälle von 6 Ovalpunkten ohne weiteres klar.

Da die Fläche vollständig festgelegt ist, können auch keinerlei Singularitäten auftreten und es gibt daher nur eine Art von F_3 mit 10 Ovalpunkten, eben die Diagonalfläche.

²⁶⁾ S. Näheres bei Clebsch a. a. O. und bei Hess § 6. Man könnte auf die Betrachtung der entstandenen Abbildungsfiguren als Brianchonsche Sechsecke eine Methode gründen, die fraglichen Flächen einheitlich abzuleiten. Für den Ovalpunkt (236) beispielsweise wäre eines der vier entsprechenden Sechseite: 15, 26, 34; 14, 25, 36. Zieht man nun etwa (124) zusammen, so gehen 15, 26, 34 durch einen Punkt. Da aber wegen (236) die 6 Geraden einen Kegelschnitt umhüllen, müssen auch 14, 25, 36 durch einen Punkt gehen und der Kegelschnitt wäre in ein Punktepaar ausgeartet. Das gäbe die Fläche mit 3 Ovalpunkten u. s. w. Diese Methode lässt aber bei den nun folgenden Flächen im Stich.

§ 14.

Die Fläche mit neun Ovalpunkten.

Wir haben noch den Fall zu erledigen, dass bei Bestehen der drei Ovalpunkte des § 10, nämlich

$$(236) \quad (135) \quad (124),$$

ein Dreieck sich zusammenzieht, das mit keinem derselben eine Gerade gemein hat. Es sei dies z. B.

$$56 \quad 5' \quad 6;$$

dann muss in der Abbildung Kegelschnitt 5' von 56 im Punkte 6 berührt werden.

Kegelschnitt 5' ist, als dem Fundamentaldreieck umschrieben, von der Form

$$\alpha x_1 x_2 + \beta x_2 x_3 + \gamma x_3 x_1 = 0.$$

Setzt man die Koordinaten der Punkte 4 und 6 ein, nämlich

$$4) \quad 1 \quad y_2 \quad 1$$

$$6) \quad y_1 \quad 1 \quad 1$$

so resultieren als Bedingungsgleichungen für α, β, γ :

$$\alpha y_2 + \beta y_2 + \gamma = 0$$

$$\alpha y_1 + \beta + \gamma y_1 = 0$$

woraus:

$$\alpha : \beta : \gamma = y_1 y_2 - 1 : y_1 - y_1 y_2 : y_2 - y_1 y_2.$$

Die Gleichung von 5' ist also

$$(y_1 y_2 - 1) x_1 x_2 + (y_1 - y_1 y_2) x_2 x_3 + (y_2 - y_1 y_2) x_3 x_1 = 0.$$

Die Tangente im Punkte 6 lautet

$$(1 - y_2) x_1 + y_1 y_2 (1 - y_1) x_2 + y_1 (y_1 y_2 - 1) x_3 = 0.$$

Die Gleichung von 56 ist aber

$$(1 - y_3) x_1 + (y_1 y_3 - 1) x_2 + (1 - y_1) x_3 = 0.$$

Sollen diese beiden Geraden identisch sein, so müssen die 3 Gleichungen stattfinden:

$$1 - y_2 = \varrho (1 - y_3)$$

$$y_1 y_2 (1 - y_1) = \varrho (y_1 y_3 - 1)$$

$$y_1 (y_1 y_2 - 1) = \varrho (1 - y_1).$$

Die Elimination von ϱ führt nur zu der einen Bedingung:

$$I. \quad y_1 y_3 - 1 + y_2 - y_1 y_2 + y_1^2 y_2 - y_1 = 0.$$

Multipliziert man aber diese Gleichung mit $y_2 y_3$ und beachtet, dass

$$y_1 y_2 y_3 = 1,$$

so geht dieselbe über in

$$y_3 - y_2 y_3 + y_2^2 y_3 - y_2 + y_1 y_2 - 1 = 0, \text{ oder}$$

$$\text{II. } y_2 y_1 - 1 + y_3 - y_2 y_3 + y_2^2 y_3 - y_2 = 0,$$

was durch zyklische Vertauschung aus I entsteht und die Bedingung des Ovalpunkts

$$46 \quad 6' \quad 4$$

darstellt. Ebenso ist

$$\text{III. } y_3 y_2 - 1 + y_1 - y_3 y_1 + y_3^2 y_1 - y_3 = 0$$

mit I und II identisch und die Bedingung für den Ovalpunkt

$$45 \quad 4' \quad 5.$$

Durch Addition der drei Bedingungsgleichungen ergibt sich die einfachere:

$$y_2 y_1^2 + y_1 y_3^2 + y_3 y_2^2 = 3, \text{ oder}$$

$$\frac{y_1}{y_3} + \frac{y_3}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} = 3.$$

Dieselbe Bedingungsgleichung muss aber wegen der vollständigen Gleichberechtigung der beiden Dreiecke 1-2-3 und 6-4-5 noch die weiteren 3 Ovalpunkte ergeben:

$$13 \quad 1' \quad 3$$

$$12 \quad 2' \quad 1$$

$$23 \quad 3' \quad 2.$$

Wir haben also eine Fläche mit 9 Ovalpunkten. Alle 27 Geraden der Fläche sind gleichmässig an je einem derselben beteiligt und es ist ja auch $\frac{27}{3} = 9$. Die genauere Gruppierung wird ersichtlich, wenn wir die Trieder der Fläche ins Auge fassen.

Das Trieder der ursprünglichen 3 Ovalpunkte ist uns schon von p. 25 her bekannt. Die drei vertikal gelesenen Ebenen gehen durch eine Gerade, die wir jetzt mit a bezeichnen wollen. Auf a liegen die Ovalpunkte (236), (135), (124). Das Trieder ist, etwas anders geordnet:

14	25	36	(135)
26	34	15	(124)
35	16	24	(236).
$\underbrace{\hspace{10em}}_a$			

Man sieht aber leicht, dass auch die zweite Gruppe von 3 Ovalpunkten einem Trieder angehört. Das zweite Tripel der 9 Ovalpunkte liegt also auf einer Geraden b. Das Trieder lautet:

4	6'	46	(II)
5'	56	6	(I)
45	5	4'	(III).

b

Dann ist aber klar, dass auch die letzten 3 Ovalpunkte auf einer Geraden c liegen müssen. Um jedoch eine einheitliche Benennung zu haben, will ich die 9 Ovalpunkte resp. mit dem Buchstaben ihrer Geraden, versehen mit einem der Indices 1, 2, 3, bezeichnen. Dann haben wir also zunächst die drei Trieder:

14	25	36	a ₁	4	6'	46	b ₁	1'	13	3	c ₁
26	34	15	a ₂	5'	56	6	b ₂	12	1	2'	c ₂
35	16	24	a ₃	45	5	4'	b ₃	2	3'	23	c ₃
a				b				c			

Bei dieser Anordnung findet man nun aber leicht zu jedem der 9 Ovalpunkte 3 weitere Trieder, z. B. zu a₁ die Trieder a₁ b₁ c₁; a₁ b₂ c₃; a₁ b₃ c₂.

Die entsprechenden Ovalpunkte liegen dann immer auf einer Geraden. Durch jeden Ovalpunkt gehen demnach 4 Gerade, auf denen noch zwei weitere Ovalpunkte liegen. Das gibt im ganzen $\frac{9 \cdot 4}{3} = 12$ Gerade, unter denen die gleich anfangs gefundenen a, b, c keineswegs ausgezeichnet sind. Wenn man aber bedenkt, dass jede der 9 andern jede der drei ersten trifft, gelangt man unschwer zu dem Satz, dass die 9 Ovalpunkte auf ihren 12 Trägergeraden in einer Ebene liegen.

Schreibt man sich die in Rede stehenden 12 Geraden zusammen, so wird man erkennen, dass sie sich in das Schema bringen lassen, welches von den Wendepunkten der ebenen Kurven dritter Ordnung her bekannt ist:

a₁ a₂ a₃
b₁ b₂ b₃
c₁ c₂ c₃.

Die 9 Ovalpunkte liegen also wie die Wendepunkte einer C_3 . Soweit unsere Abbildung. — Man weiss ²⁷⁾, dass die Fläche einen oskulierenden Kegel hat, dessen Berührungskurve die erwähnte C_3 bildet. Die Hessesche Fläche zerfällt in den Hesseschen Kegel des Oskulationskegels und die Ebene der C_3 , hat also die Hessesche Kurve der C_3 zur Doppellinie. Diese schneidet die C_3 in den Wendepunkten, und somit die F_3 in den Ovalpunkten.

Wir hätten, von den Ovalpunkten a_1, a_2, a_3 ausgehend, auch

$$45 \quad 5' \quad 4$$

zusammenziehen können. Dies hätte sämtliche 6 vertikal geschriebenen Dreiecke der beiden letzten Trieder zu Ovalpunkten gemacht. Die Bedingungsgleichung wäre in diesem Falle

$$y_3 y_1^2 + y_1 y_2^2 + y_2 y_3^2 = 3, \text{ oder}$$

$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \frac{y_3}{y_1} = 3.$$

Bestünden beide Ovalpunktgruppen gleichzeitig, wäre also

$$m \equiv y_2 y_1^2 + y_1 y_3^2 + y_3 y_2^2 = 3, \text{ und zugleich}$$

$$m' \equiv y_1 y_2^2 + y_3 y_1^2 + y_2 y_3^2 = 3,$$

$$\text{so wäre auch } y_2 m - y_1 m' \equiv y_3 (y_2^3 - y_1^3) = 0,$$

$$\text{oder } y_1 m - y_3 m' \equiv y_2 (y_1^3 - y_3^3) = 0,$$

$$\text{oder } y_3 m - y_2 m' \equiv y_1 (y_3^3 - y_2^3) = 0,$$

$$\text{woraus } y_1 = 1; y_2 = \varepsilon; y_3 = \varepsilon^2,$$

wenn ε und ε^2 die imaginären dritten Einheitswurzeln bedeuten. Das ist aber, wie wir sehen werden, der Fall des folgenden §.

Da alle Geraden gleichförmig an den Ovalpunkten Anteil haben, wird jede Transformation wieder dieselbe Fläche ergeben. Ich möchte nur noch den Fall, dass die C_3 einen Knoten hat, kurz erledigen. Dann fallen 6 Ovalpunkte in den Knoten, die C_3 hat noch 3 Wendepunkte. Es seien diese beispielsweise

$$a_1 \quad b_2 \quad c_3,$$

²⁷⁾ S. Eckardt a. a. O. und Rodenberg, Math. A. 14 p. 100.

welche in einer Geraden liegen, und das Trieder

14	25	36	a_1
56	5'	6	b_2
23	2	3'	c_3

bilden, so gehören die 18 freien Geraden zunächst keinen Öffnungsdoppelsechsen an. Wendet man aber die Transformation an

1	2	4	56	36	35
24	14	12	3'	5'	6',

so wird das Trieder

2	25	5'	(a_1)
3'	36	6	(b_2)
23	14	56	(c_3)

und die 18 freien Geraden bilden die zwei Doppelsechse:

1	3	5	46	26	24
35	15	13	2'	4'	6'
3	4	5	26	16	12
45	35	34	1'	2'	6'.

Zieht man die 2 entsprechenden Öffnungen zusammen, so erhält die Fläche einen B_3 und die C_3 einen Knoten. Wir haben einen Spezialfall der Fläche mit 3 Ovalpunkten und B_3 von Seite 28 mit oskulierendem Kegel.

Gingen wir von 4 Ovalpunkten aus und stellten eine der Bedingungen m oder m' auf, etwa

$$m \equiv y_2 y_1^2 + y_1 y_3^2 + y_3 y_2^2 = 3,$$

so hätten wir wegen $y_2 = y_3 = y; y_1 = \frac{1}{y^2}$

als Gleichung für y : $y^3 - 2 + \frac{1}{y^3} = 0,$

oder

$$(y^3 - 1)^2 = 0,$$

was wieder entweder die Trivialität $y = 1$, oder y gleich einer imaginären dritten Einheitswurzel gibt, also wieder auf den nun zu erörternden Fall weist,

§ 15.

Die Fläche mit achtzehn Ovalpunkten.

Nachdem alle Spezialfälle der dreifachen Perspektivität ihre Erledigung gefunden haben, bleibt nur noch der Fall der sechsfachen zu betrachten übrig. Wir haben dann ausser

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 6 \\ \hline & (236) & & & (123) & & & (135) & & & (124) & \end{array}$$

noch die zwei weiteren Perspektivitäten:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 4 & 6 & 5 \\ \hline & X & & & Y. & \end{array} \quad \text{und}$$

Für X ist Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 0 & y_3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ oder } y_3 - y_1 = 0,$$

was mit

$$y_2 = y_3 = y \text{ und } y_1 = \frac{1}{y^2} \text{ zu} \\ y^3 - 1 = 0$$

führt, also $y = \epsilon$ ergibt, wie im vorigen § bereits angekündigt

Für Y ist Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & y_2 \\ -1 & 0 & y_1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ oder } y_1 - y_2 = 0,$$

was zu demselben Resultat führt. Die Bedingung der 6fachen Perspektivität ist also $y = \epsilon$.

Wir haben zunächst 6 Ovalpunkte mit den Koordinaten

$$\begin{array}{l|l} (236) \dots 1 & 1 & 1 & (123) \dots \epsilon^2 & 1 & 1 \\ (135) \dots 1 & \epsilon^2 & \epsilon & X \dots 1 & \epsilon^2 & 1 \\ (124) \dots \epsilon^2 & 1 & \epsilon & Y \dots 1 & 1 & \epsilon^2. \end{array}$$

Die Koordinaten der Fundamentalpunkte sind

$$\begin{array}{l|l} 1) \dots 1 & 0 & 0 & 6) \dots \epsilon & 1 & 1 \\ 2) \dots 0 & 1 & 0 & 4) \dots 1 & \epsilon & 1 \\ 3) \dots 0 & 0 & 1 & 5) \dots 1 & 1 & \epsilon, \end{array}$$

die der Geraden

$$\begin{array}{lcl} 23) \dots 1 & 0 & 0 \\ 13) \dots 0 & 1 & 0 \\ 12) \dots 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} 45) \dots \varepsilon^2 & 1 & 1 \\ 56) \dots 1 & \varepsilon^2 & 1 \\ 46) \dots 1 & 1 & \varepsilon^2, \end{array} \right.$$

da ja $1 + \varepsilon = -\varepsilon^2$.

Nun ist Kegelschnitt 6' von der Form

$$u_3 x_1 x_2 + u_1 x_2 x_3 + u_2 x_3 x_1 = 0,$$

wobei, da er durch 4 und 5 gehen muss, die Bedingungen bestehen:

$$u_3 \varepsilon + u_1 \varepsilon + u_2 = 0$$

$$u_3 + u_1 \varepsilon + u_2 \varepsilon = 0,$$

also von der Gleichung:

$$\left| \begin{array}{ccc} x_1 x_2 & x_2 x_3 & x_3 x_1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{array} \right| = 0, \text{ oder schliesslich}$$

$$x_1 x_2 + \varepsilon x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0.$$

Die Polare von 6 in bezug auf 6' hat aber die Koordinaten:

$$\varrho \xi_1 = 2; \varrho \xi_2 = 2\varepsilon; \varrho \xi_3 = 2\varepsilon, \text{ oder } \varepsilon^2 \ 1 \ 1.$$

Das ist aber nichts anderes als die Gerade 45. Ebenso ist dann 56 die Polare von 4 in bezug auf 4',

$$46 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 5 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 5'.$$

Wir haben also die 6 Ovalpunkte

$$\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6' & 46 & 4 & 5' & 45 \\ \hline 5' & 56 & 6 & 6' & 56 & 5 \\ \hline 45 & 5 & 4' & 46 & 6 & 4', \end{array}$$

in welchen wir die Dreiecksebenen des Trieders der Ovalpunkte b_1, b_2, b_3 des vorigen § erkennen.

Die Beziehung der 6fachen Perspektivität ist aber zwischen den beiden Dreiecken 1-2-3 und 6-4-5 vollständig reziprok, sodass in derselben Weise die Gruppe der 6 Dreiecke des dritten Trieders zu Ovalpunkten werden muss.²⁸⁾

²⁸⁾ Zum direkten Nachweis hätte man die Gleichungen von

$$1') \ \varepsilon x_1^2 - x_2 x_3 = 0$$

$$2') \ \varepsilon x_2^2 - x_1 x_3 = 0$$

$$3') \ \varepsilon x_3^2 - x_1 x_2 = 0,$$

welche die Ovalpunkte schon durch ihre Form ersichtlich machen.

Wir haben also 18 Ovalpunkte, die in folgender Weise bezeichnet sein sollen:

14	25	36	a_1	4	6'	46	b_1	1'	13	3	c_1
26	34	15	a_2	5	56	6	b_2	12	1	2'	c_2
35	16	24	a_3	45	5	4'	b_3	2	3'	23	c_3
a'_1	a'_2	a'_3		b'_1	b'_2	b'_3		c'_1	c'_2	c'_3	

Auf jeder der 27 Geraden liegen 2 derselben. Es ist ja auch $\frac{27 \cdot 2}{3} = 18$. Wir sehen nun, dass die beiden Fälle von 9 Ovalpunkten des vorigen §:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b'_1 & b'_2 & b'_3 & c'_1 & c'_2 & c'_3, \end{array}$$

wenn sie gleichzeitig stattfinden, die 6fache Perspektivität und mithin noch die 3 Ovalpunkte

$$a'_1 \quad a'_2 \quad a'_3$$

zur Folge haben. Die Tripel

$$\begin{array}{ccc} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{array}$$

liegen natürlich, wegen der Trieder, auf den Geraden a' , b' , c' . Die 6 Geraden a , b , c , a' , b' , c' haben aber eine ganz besondere Lage zu einander.

Wir kennen schon aus dem vorigen § das Schema der 9 Ovalpunkte

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

welches uns sagt, dass a , b , c in einer Ebene liegen. Ebenso wurde schon hingewiesen auf das zweite:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3, \end{array}$$

wonach a , b' , c' einer Ebene angehören,

Man findet aber noch zwei weitere Gruppen von 9 Ovalpunkten, nämlich:

$$\begin{array}{ccccccc} a'_1 & a'_2 & a'_3 & & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \text{und} & b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 & & c_1 & c_2 & c_3, \end{array}$$

wonach also auch a', b, c' und a', b', c in einer Ebene liegen. Das heisst aber mit anderen Worten: Die 18 Ovalpunkte liegen zu je dreien auf 6 Geraden, welche ein Tetraeder bilden. Die Ecken dieses Tetraeders sind:

$$a', b', c'; a', b, c; a, b', c; a, b, c'.$$

In jeder Tetraederebene bilden die 9 Ovalpunkte die Wendepunkte der C_3 , in welcher der von der gegenüberliegenden Ecke an die Fläche gehende Kegel oskuliert.

Wir haben die Tetraederfläche mit eigentlichem Tetraeder, die sich durch die Summe von vier Kuben darstellen lässt. Ihre Hessesche Fläche zerfällt in die vier Tetraederebenen, hat also die 6 Tetraederkanten zu Doppel-
linien. Alles Nähere ist bei Eckardt und Rodenberg a. a. O. zu finden. Die Fläche ist nunmehr gewiss auch als reelles Substrat für die imaginäre 6fache Perspektivität interessant.²⁹⁾

Es ist selbstverständlich, dass es nur diese eine Art der Fläche mit 18 Ovalpunkten geben kann. Da wir nun auch weiter keine Möglichkeit haben, Dreiecke zusammenzuziehen, sind sämtliche Fälle erschöpft.

²⁹⁾ Vergl. Hess a. a. O. § 5, Schluss.

Inhalt.

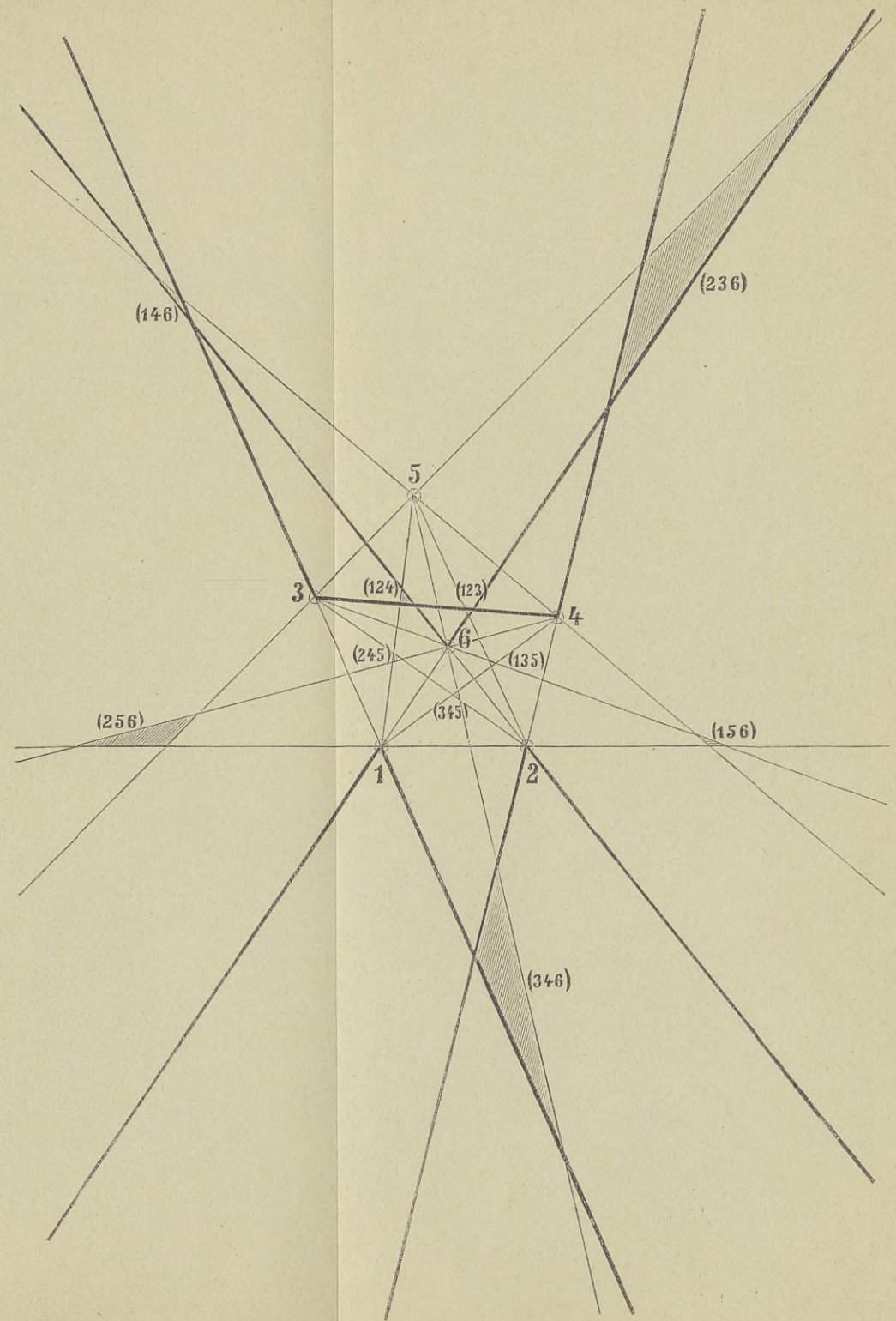
I. Vorbereitende Betrachtungen.

	Seite
§ 1. Einleitung	3
§ 2. Methode der Abbildung	4
§ 3. Zusammenhang der Öffnungen	7
§ 4. Allgemeines über die Dreiecke der Fläche	9
§ 5. Die verschiedenen Arten von Ovalpunkten	10
§ 6. Zugrundelegung einer andern Fundamentaldoppelsechs . .	12
§ 7. Zusammenstellung der Singularitätenflächen mit den dabei von selbst auftretenden Ovalpunkten	13

II. Ableitung der möglichen Ovalpunktsflächen.

§ 8. Flächen mit einem Ovalpunkt	16
§ 9. Flächen mit zwei Ovalpunkten	20
§ 10. Flächen mit drei Ovalpunkten	24
§ 11. Flächen mit vier Ovalpunkten	28
§ 12. Flächen mit sechs Ovalpunkten	30
§ 13. Die Fläche mit zehn Ovalpunkten	34
§ 14. Die Fläche mit neun Ovalpunkten	36
§ 15. Die Fläche mit achtzehn Ovalpunkten	41





BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II 31465
L. inw.

Kdn., Czapskich 4 — 678, 1, XII, 52, 10,000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298334