CZEM JEST I CZEM BĘDZIE MATEMATYKA

Odbitka z „Wiadomości Matematycznych". Tom XIV.

E. STAMM.

Czem jest i czem będzie Matematyka?

WARSZAWA.
Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego, Włodzimierska 3/5.

1910.

E. STAMM.

Czem jest i czem będzie Matematyka?

„... ut sufficiat duos disputantes omissis verborum concertationibus sibi invicem dicere: calculemus, ita enim perinde ac si duo arithmetici disputarent de quodam calculi errore".

Leibniz.

Przypisuję Matematyce większe znaczenie, jak się to powszechnie dzieje; ale z drugiej strony chciałbym wykazać, czem ona być nie może. Oto cel tej pracy. Nie myślę oczywiście o zupełnem rozstrzygnięciu postawionego pytania. Będę zadowolony, jeżeli potrafię wzniecić u nas chociaż małą iskierkę; inni niech dorzucą paliwa.

Matematyce przypisuję, jak powiedziałem, obszerne znaczenie. Dlatego też muszą być nasze rozmyślania ogólne, na pozór nie wiążące się z naszym celem. Rezultat, do jakiego dojdziemy, usprawiedliwi jednak to postępowanie.

Aby odpowiedzieć na postawione pytanie, musimy przedewszystkiem porównać nauki poszczególne z Matematyką pod tym względem, pod jakim różnić się mogą między sobą, a więc pod względem treści i metody. Drugi czynnik jest ogólnie, a specyalnie w naszym przypadku, bardzo wątpliwem kryteryum. Dla zupełności i uniknięcia zarzutów będziemy się nim posługiwali. Pozwoli on nam nawet odkryć wiele ciekawych związków.

Jeżeli staniemy na możliwie naukowem stanowisku, odrzucając niepotrzebną, a często tak szkodliwą metafizykę, to musimy zgodzić się na to, że każda nauka bada „przedmioty". Rozumiem to w następujący sposób: wszystko, o czem możemy wiedzieć, redukuje się do tak zwanych faktów świadomości. Wprawdzie cały nasz sposób myślenia, cała nasza mowa ma charakter metafizyczny, ale możemy pozbyć się szkodliwych skutków tego zwyrodnienia, pamiętając o tem. W naszem życiu intelektualnem spotykamy się często z faktem, że to, co jest przypadkowe, uważamy za istotne. Coś zupełnie analogicznego spotykamy w życiu duchowem ludzkości: powstają czynniki przypadkowe, a ludzie uważają je nieraz uporczywie za istotne. Najdonioślejszym w skutki błędem takim jest rozdzielenie „przedmiotów" na rzeczy zewnętrzne, jaźń i działanie tych rzeczy na jaźń. Jeżeli spytamy, co nas uprawnia do tego rozdziału, to odpowiedzieć na to nie potrafimy. Albowiem wszystkie nasze wiadomości są faktami świadomości, t. zn. tem co nazywam „przedmiotami"; poza to wyjść nie podobna. W nauce jest to nawet zbyteczne. Dla zaspokojenia uczucia mieć możemy fantazye metafizyczne; są one równouprawnione ze sztuką. Ale nauka obejść się bez nich może i powinna. Na tem polegać musi jej dalszy rozwój. Istnieje nieprzerwany ciąg przedmiotów, łańcuch, w którym ogniwa dadzą się rozróżnić; ten ciąg przedmiotów nazywamy światem. Nauki badają świat; każda z nich zajmuje się grupami pewnych określonych przedmiotów; jak się to dzieje, przedstawimy potem. Jeżeli uznaliśmy rozdział na rzeczy zewnętrzne, jaźń i działanie pierwszych na ostatnią za urojenie, to nie należy jednak sądzić, że przez to znikają jeszcze nauki, np. Psychologia. Jakkolwiek na miejsce zdania: ja widzę drzewo, stawiamy przedmiot drzewo, to mimo to nie odrzucamy „ogólnej genezy przedmiotów", a tem jest Psychologia. W ten sposób zyskują nauki niektóre inny charakter, zmienia się nasz sposób patrzenia na nie, ale one same pozostają. Znikają jednak pewne pytania niedorzeczne Nasza metafizycznie wykształcona mowa posługuje się wielu symbolami (jaźń, rzeczy zewnętrzne); i jeżeli zapominamy o tem ich znaczeniu, możemy stawiać wiele niedorzecznych pytań. Dlatego powiedzieliśmy przedtem, że świadomość metafizyki naszych zapatrywań i mowy uwolnić nas może od wielu błędów. I ludzkość z pewnością mniej cierpień znosić musiałaby, gdyby o tem pamiętano, gdyby oddzielano ściśle naukę od metafizyki.

Pominąwszy Matematykę, widzimy, że treść niektórych nauk jest prawie ściśle ograniczona, innych natomiast nieokreślona. Jeżeli jednak np. bakterye opracowywane są raz przez botaników, drugi raz przez zoologów, to w każdym razie nie będzie nigdy zoolog badał roślin liliowatych, a botanik ślimaków. W treści nauk poszczególnych (z wyjątkiem Matematyki) niemożliwe są fakty, aby treść pewnej nauki została pochłonięta przez inną naukę, od pierwszej różną. A gdyby nawet tak było, to zawsze można podać treść taką, której dana nauka badać nigdy nie będzie.

O Matematyce tego powiedzieć nie można. Jeżeli porównamy Matematykę z przed 5000 lat z teraźniejszą, zdumiemy się nadzwyczajną różnicą. Egipcyanie zajmowali się tylko najpierwotniejszemi zagadnieniami Arytmetyki i Geometryi. Podobnie Chińczycy, Babilończycy. Grecy tworzą system elementarnej Arytmetyki i Geometryi. Późniejsze wieki dodały uogólnienia liczb, Trygonometryę, Descartes i Fermat Geometryę analityczną, Leibniz i Newton Analizę. Nowsze czasy czynią Matematyką gałęzie wiedzy ludzkiej, które albo były przedtem zbiorem przypuszczeń uważanych za bezcelowe, albo były naukami, zupełnie różnemi od Matematyki. W r. 1494 wydaje Luca Paciuolo dzieło [1], w którem po raz pierwszy pojawiają się zadania Rachunku prawdopodobieństwa. Dalsze badania Hieronima Cardana [2], a szczególnie B. Pascala [3], Jakóba Bernoulliego [4], Leibniza wykształciły nową naukę (właściwie metodę) Rachunku prawdopodobieństwa. Dzisiaj zalicza ją każdy do Matematyki. Podobne dzieje przechodziła Kombinatoryka, Teorya podstawień, Analysis situs, Teorya mnogości, Teorya liczb nadskończonych. Zauważyć tu należy, że wszystkie te nauki nie mają prawie ilościowego charakteru, że pojęcie wielkości nie odgrywa w nich prawie żadnej roli. Temsamem upada rozpowszechniona definicya Matematyki, jako nauki o wielkościach. Według badania B. Russela w znakomitem dziele „The Principles of Mathematics“ [5] jest pojęcie porządku daleko ważniejsze od pojęcia wielkości w czystej Matematyce. Nawet kontinuum da się zdefiniować w sposób czysto porządkowy [6]. Podczas gdy

[1]) Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita, Wenecya, 1494.

[2]) Practica Arithmeticae et mensurandi generalis, 1539.

[3]) Traité du triangle arithmétique, 1665.

[4]) Ars coniectandi, 1713.

[5]) B. Russel, The Principles of Mathematics, I, 1903.

[6]) Por. także L. Couturat, Sur la déf. du continu, Revue de metaph. et de morale, t. 8, str. 157—68, 1900, i jego „Les Principes des Mathématiques,“ 1905; także w Revue de metaph. et de morale 1904, 1905. Niemieckie tłom. tego ostatniego dzieła wyszło w roku 1908 w Philos.-Sociol. Bücherei“ t. 8. Lipsk Klinkhardt, C. IV, § B.

G. Cantor określa kontinuum metrycznie[1], jest już definicya Enriquesa[2] porządkową. I pojęcie przestrzeni geometrycznej określa się w podobny sposób[3]. A jeżeli definicya Matematyki jako nauki o wielkościach jest niemożliwa, to tracimy wszelką podstawę; i nowsze definicye Matematyki, które później jeszcze rozpatrzymy, wykażą nam to dosadnie.

Jest jeszcze jedna nauka nadzwyczajna, do Matematyki zaliczana: Algebra Logiki. Algebra Logiki, o której wyraża się Whitehead, że jest ona zupełnie nienumeryczną gałęzią Algebry, powstała właściwie w rękach Leibniza[4]. Jednak zapomniano o tem, i G. Boole[5] odkrył ją poraz drugi. Dzisiaj ma ona bogato rozwiniętą literaturę[6], jakkolwiek jej stan obecny wiele zostawia jeszcze do życzenia. W każdym razie możemy dzisiaj powiedzieć, że bada ona przedmioty, które niegdyś należały do innych nauk, i to w sposób pod wieloma względami doskonalszy. A od jej narodzin upłynęło nie więcej jak 60 lat! Sądzę, że dadzą się w niej rozróżnić dwa pierwiastki: logiczny i ontologiczny. Z jednej strony stara się ona przedstawić narzędzie naszej intelektualnaj pracy i wtedy jest Logiką. W tym celu była ona nawet wynaleziona. W tym celu stworzył Leibniz swą Characteristica universalis[4], którą określają dosadnie jego słowa, przytoczone przez nas na początku. W tym celu, wydoskonalili ją Boole[5], a potem E. Schroeder[7], S. Jevons[8], a szczególnie G. Peano[9], B. Russel[10] i G. Frege[11]. Ostatnia

[1]) Grundl. e. allg. Mannigfaltigkeitslehre, Math. Annalen, 1883 t. **21**.

[2]) Sui fondamenti della Geometria projettiva, Rend. de B. Ist. Lombardo, ser. II, t. **27**, post. 7.

[3]) Por. np. L. Couturat, Les Principes des Mathém., 1905, C. VI, § A.

[4]) Por. L. Couturat, La logique de Leibniz, 1901.

[5]) Szczególnie tu Investigation of the Laws of Thought, 1854.

[6]) Por. niżej cytowane pisma, a także I. Venn, Symbolic Logic, 2 wyd. 1894; L. Couturat, L'Algèbre de la Logique, w wyd. „Scientia" t. **24**, Paryż, 1905; to ostatnie dziełko nadaje się szczególnie do pierwszych studyów.

[7]) E. Schroeder, Verlesungen u. Algebra d. Logik, 3 t, 1890–1906,

[8]) Pure Logic, 1864; The principles of science, 1878, takża nowsze wydania.

[9]) Formulaire mathématique, Turyn, dotychczas 6 t.; krótkie przedstawienie w „Pojęciach i metodach Matematyki". S. Dicksteina, t. **1**, cz. 1, 1891, str. 39—43.

[10]) The Princ.; a szczególnie The theory of implication, Amer. Journ. of Mathem., t. **28**, 1906, 159—202.

[11]) Begriffsschrift, 1879, a szczególnie „Grundgesetze d. Arithmetik," t. **1**, 1893.

znana mi praca B. Russela[1] oddaje w zupełności Logikę dyscyplin matematycznych, sprowadzając ją do bardzo małej liczby zasad. Dzięki pracom trzech ostatnich uczonych możemy wszystkie gałęzie czystej Matematyki przedstawić zupełnie symbolicznie, czego też dokonał G. Peano wraz ze swymi stronnikami we „Formulaire mathématique". Gdyby filozofowie znali prace G. Peana, B. Russela i G. Fregego, nie wydawaliby z pewnością pogardliwych sądów o Algebrze Logiki, które mogą się co najwyżej odnosić do niezupełnych badań Schroedera.

Prócz tego właściwego czynnika logicznego tkwi w Algebrze logiki drugi, nieraz także za Logikę uważany, który jednak odnosi się do Ontologii, do t. zn. ogólnej nauki o przedmiotach. Tu należą niektóre części „Rachunku pojęć", „Rachunek klas". Zajmuje się on ogólnemi związkami między pojęciami, a temsamem między grupami przedmiotów bez względu na ich treść szczegółową. Z Algebrą Logiki wiąże się „Rachunek względności (stosunków)", badający ogólne własności. Rozwinęli go przedewszystkiem Ch. S. Peirce, E. Schroeder[2] w dawnej postaci zakresu, G. Peano, i B. Russel[3]. W ten sposób mamy nawet część Ontologii, a więc Filozofii, zamienioną na „Matematykę".

Zakres badań Algebry Logiki na tem się jednak nie kończy; istnieją jej gałęzie na razie abstrakcyjne, które jednak już teraz wykazują wiele pokrewieństwa z innemi dyscyplinami. A. B. Kempe[4] zwrócił uwagę na ciekawe zastosowania Algebry Logiki do Geometryi rzutowej, G. Peano[5] na zastosowania do Teoryi liczb, które to ostatnie dałyby się jeszcze rozszerzyć. Tu wspomnieć też należy, że elementarna część Rachunku klas i Teoryi mnogości są identyczne[6], a rozwój

[1]) The theory of implication.

[2]) Vorl. üb. Algebra d. Logik. t. **1**, Rachunek klas i sądów, t. **3**, Rachunek względności dwójkowych.

[3]) Sur la logique des relations, Revue des Mathématiques, t. **7**, 1901, str. 115—136; i The Principles. Form. math.

[4]) On the relation betw. the logical theory of classes and the geom theory of points, Proc. of. the Lond. Math. Soc., t. **21**, str. 147—82.

[5]) Formulaire mathém., np. t. **4**, 1902—3, rozdział A (classe nulle), *7.

[6]) Por. np. L. Couturat, Les principes, wyd. niemieckie, str. 231—40.

Algebry Logiki jest nieograniczony. A. N. Whithead[1] rozwinął ją w dziedzinie ogólnej teoryi „funkcyj logicznych“ i teoryi podstawień analogicznych do odpowiednich teoryj w Matematyce czystej. Ja starałem się wykazać, że ograniczenia, stawiane dotychczas Algebrze Logiki, dadzą się usunąć przez wprowadzenie nowych utworów, odpowiadających liczbom wymiernym Arytmetyki, podczas gdy dotychczas operowano rzeczami, odpowiadającemi liczbom całkowitym dodatnim. W ten sposób rozszerzyłem zakres rozwiązalnych „równań logicznych“ i uczyniłem odejmowanie i dzielenie logiczne zawsze możliwemi do wykonania[2].

W ten sposób wciąga „Matematyka“ coraz więcej przedmiotów w zakres swojego badania, „matematyzując“ inne gałęzie wiedzy ludzkiej; że dzieje się to w jeszcze większej mierze, jak tu przedstawiliśmy, wspomnimy przy rozpatrywaniu metody.

Ta nieokreśloność zakresu badania Matematyki odbija się w definicyach tej „nauki“. Zwróćmy tu tylko uwagę na to, do jak ogólnej definicyi dochodzi A. B. Kempe[3] w nowszych czasach (potem rozpatrzymy jeszcze inne definicye). Według Kempego, przedmiotem Matematyki są klasy osobników, względności i działania. Ponieważ jednak działania redukują się ostatecznie do względności, więc klasy osobników i względności są przedmiotem Matematyki. Według naszego zapatrywania jest to część Ontologii. Dlaczego jednak można tak czystą Matematykę zdefiniować, rozpatrzymy później, zajmując się definicyą Russela.

Zbierając rezultaty osiągnięte dotychczas, możemy powiedzieć: treść Matematyki nie jest odgraniczona od treści innych nauk. W rozwoju historycznym możemy przeciwnie zauważyć, że Matematyka absorbuje powoli przedmioty innych nauk. Te rezultaty poprzemy jeszcze, badając metodę.

Pojęcie wiedzy jest obszerniejsze od pojęcia nauki. Wiedza

---

[1]) A. N. Whitehead, A Treatise on universal Algebra, t. I, 1895; a szczególnie Memoir on the Alg. of. symb. Logic., Amer. Journ. of Mathem., t **23**, 1901. Prace nad podstawami ogłosił Huntington w Transactions of the Amer. Math. Soc., t. **5**, 1904.

[2]) Praca ta wyjdzie w najbliższym czasie w „Monatshefte f. Mathem. u. Physik“.

[3]) Nature, t. **43**, str. 157, 1890; Proceedings of the Lond. Math. Soc., 1894, t. **26**, str. 5.

jest zbiorem tego, co wiemy; od nauki żądamy natomiast jeszcze pewnego wewnętrznego porządku. Nauka jest uporządkowaną wiedzą. I cel nauki jest zupełnie różny od celu wiedzy nieuporządkowanej. Zbiory wiadomości, wiedza nieuporządkowana zaspakaja naszą ciekawość, uczucia estetyczne i t. d. Dlatego stoi ona bliżej sztuki i metafizyki niż nauki. Tylko ten fakt, że wszelkie wiedze nieuporządkowane są materyałem na przyszłe nauki, są jakby fazą przejściową, nakłania nas do łączenia wiedzy nieuporządkowanej z drugiej strony z nauką. Takiemi są np. Historya, Geologia szczegółowa. W pracy „o aprioryczności Matematyki“ [1]) starałem się wykazać, o ile nasz stan myślenia jest najdoskonalszem narzędziem reakcyi. Jesteśmy dlatego w najdoskonalszych warunkach rozwojowych, ponieważ władamy takiem narzędziem. A jest to narzędzie przepowiadania. Między sądami różnych osobników trwa walka o byt; zostają te sądy, które są najstosowniejsze; jest to selekcya sądów. Podobnie istnieje walka o byt między sądami jednego i tego samego osobnika; zostają te sądy, które są najstosowniejsze; jest to intraselekcya sądów. Najstosowniejsze sądy pozwalają nam najlepiej przepowiadać. To samo powiedzieć należy o ogólnych pojęciach, które zresztą ściśle wiążą się ze sądami. W ten sposób jest nauka narzędziem rozwoju, i w tem leży zasadnicza różnica między nią a wiedzą nieuporządkowaną, ze względu na cel. Przypominając sobie to, co nazwaliśmy przedmiotami i światem, możemy się też wyrazić, że nauka jest extrapolacyą przedmiotów na podstawie znanego świata. Cel nauki dowodzi też, że każda nauka ma charakter kategoryczny, a przynajmniej że dąży do niego. Albowiem nie to, co jest możliwe w danych warunkach obchodzi nas (tem musimy się zadowolić, skoro więcej nie wiemy), ale co ma być faktycznie. Od tego zawisły jest nasz los. Uwaga ta przyda nam się jeszcze na później.

Wartość nauki leży w wartości przepowiadania. Przepowiadanie możliwe jest natomiast tylko wskutek klasyfikacyi. Tylko klasyfikacya pozwala nam przepowiadać. I w klasyfikacyi leży zasadnicza różnica między nauką a wiedzą nieuporządkowaną, różnica rodzaju. Klasyfikacya jest porządkiem wiedzy. Ale jak odbywa się ta klasyfikacya? Musimy się zająć tem pytaniem, albowiem pozwoli nam to bliżej ocenić metodę nauk; prócz tego wchodzi tu w rachubę pewne

[1]) Przegląd filozoficzny, t. **12**, 1909, str. 512 n.

bardzo ważne pojęcie Matematyki, co jest także świadectwem matematycznego charakteru metody nauk. Klasyfikacya rzeczy i stosunków a również i zjawisk opiera się na tem, że te przedmioty nie są dla nas czemś jednolitem, lecz możemy w nich rożróżnić pewne „momenty“. Te momenty mogą być orzeczeniem w odpowiednim sądzie, którego podmiotem jest dany przedmiot. I naodwrót, każde orzeczenie jest momentem. Moment jest więc pojęciem obszerniejszem niż cecha. Obejmuje on w sobie to, co nazywamy własnościami, stanami (rzeczy), częściami (rzeczy złożonych, drugorzędnych), elementami (zjawisk). W ten sposób przedstawiają się nam przedmioty zawsze jako „kompleksy“ momentów. Nauka jest więc klasyfikacyą kompleksów. Oczywiście klasyfikacya ta musi opierać się na „strukturze wewnętrznej“ kompleksów i odbywać się wraz z rozwojem sądów. Grupa kompleksów wtedy należy do jednej i tej samej klasy, jeżeli między momentami, a temsamem i między stosunkami, jakie panują między tymi momentami, utworzyć możemy dwujednoznaczne odwzorowanie; każdemu momentowi jednego kompleksu odpowiadać musi wtedy jeden jedyny moment drugiego, przyczem temu ostatniemu odpowiada znowu pierwszy. Przy klasyfikacyi tej pomijamy oczywiście pewne momenty. Nie możemy tu zatrzymywać się nad tem dłużej. W ten sposób są pojedyńcze kompleksy tej samej klasy „obrazami“. Równocześnie z powstawaniem takich klas szuka człowiek symbolu, którybyzastąpił mu całą klasę, szuka tego co nazywamy „wzorem“. Wzór jest niejako schematem każdego z odpowiadających mu kompleksów, jest on schematycznym kompleksem. Jest on wyrazem tego, co dla rzeczy i stosunków nazywamy pojęciem, dla zjawisk prawem. Ze stanowiska logicznego możemy wprost nazwać pojęcie lub prawo wzorem odpowiedniej klasy obrazów. W rzeczywistości jest pojęcie utworem bardzo skomplikowanym, albowiem nazywamy pojęciami nietylko całe wzory, ale i ich części. Tak powstaje np. pojęcie liczby kardynalnej, której wzór ma następujący charakter: jego momenty są względem siebie wszystkie równoważne, zresztą dowolne (właściwie wskutek tej dowolności równoważne), a stosunki między nimi również dowolne i przez to równoważne. Pojęcie liczby kardynalnej powstaje bowiem z dwujednoznacznego odwzorowania mnogości rzeczy; momentami są tu pojedyńcze rzeczy. Widzimy więc, że pojęcie to jest proste i nie różni się bardzo od pojęcia kompleksu wogóle. Jednak w liczbach kardynalnych określamy budowę wzoru, natomiast w pojęciu kompleksu tego nie czynimy. Wzór liczby porządkowej w znaczeniu typu porządkowego G. Cantora[1]) ma momenty takie same, jak pojęcie liczby kardynalnej, jednak stosunki między temi momentami nie są dowolne; momenty muszą być „liniowo uporządkowane". W ten sposób postępujemy do kompleksów, których budowa staje się coraz zawilszą: pojedyńcze momenty nie są ogólnie równoważne, lecz jakościowo i ilościowo różne.

Przepowiadanie redukuje się do odpowiedzi na pytanie, czy dany przedmiot posiada dany moment, czy nie.

Wobec takiego stanu rzeczy musimy więc przedewszystkiem tworzyć w każdej nauce obrazy i wzory. A dziać się to może tylko z pomocą indukcyi. Ale to jest tylko część nauk, niejako przygotowanie. Wprawdzie na tem zwykle kończy się teorya, ale nie nauka. Właściwym czynnikiem jest znowu po przejściu przez wzór ogólny, powrót do poszczególnych przedmiotów, a to dzieje się z pomocą dedukcyi. (Dedukcya służyć może również do wyszukiwania nowych przedmiotów, do sprawdzania hypotez). Ale ta dedukcya kończyć się musi znowu indukcyą, schodząc od wzoru do poszczególnych przedmiotów, opieramy się temsamem na doświadczeniu. To jest bieg nauki, mozolne zbieranie, a potem przepowiednia, wyprzedzanie rzeczywistości, trzy stopnie metodyczne indukcya, dedukcya i napowrót indukcya.

Matematyka nie różni się pod tym względem prawie niczem. Tylko w poszczególnych naukach rozwinięty jest przedewszystkiem stopień pierwszy, w Matematyce stopień drugi; ale to nie są, jak później zobaczymy, różnice zasadnicze, lecz przejściowe.

Matematyka jest w tem położeniu, że stopień pierwszy odrzuca się na bok, uważa się go za prywatną rzecz uczonego; ale że on istnieje, poświadczyć może każdy matematyk. Znany jest fakt doświadczalnej metody Fermata. Na świat dostają się już gotowe teorye matematyczne. I to uważa się za właściwą rzecz, zostawiając znowu zastosowania Matematyki naukom praktycznym. I wskutek nadzwyczajnego rozwinięcia się stopnia średniego, co daje się wytłómaczyć prostotą przedmiotów dzisiejszej Matematyki, wyrobiło się mylne przekonanie o czystodedukcyjnej metodzie Matematyki. Działał tu jeszcze ten fakt, że wła-

---

[1]) Por. np. Grundlagen e. allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, 1883 albo S. Dickstein, Pojęcia i metody Matematyki, t. **1**, 1891, str. 61 n.

śnie w innych naukach, wskutek zawiłej budowy przedmiotów, ten stopień dotychczas mało jest rozwinięty. Dlatego oddzielano zawsze Matematykę od innych nauk także ze względu na różnicę metody.

Że jednak taka różnica jest tylko pozorną i nie zasadniczą, wykazać można również historycznie.

U Egipcyan niema śladu ani pewników, ani dowodów w naszem znaczeniu. Że $3+5=8$, udowodnić można było wtedy doświadczalnie, za pomocą palców, liczydła. Matematyka była wtedy tak samo doświadczalną nauką, jak dzisiaj Botanika. Posługiwano się nawet fałszywemi prawami. Pole trójkąta równoramiennego miało wynosić $\frac{ab}{2}$, gdzie a oznacza jeden bok, b podstawę, zamiast $\frac{bh}{2}$, gdzie h oznacza wysokość trójkąta. Podobnie posługiwano się fałszywym wzorem na pole trapezu równoramiennego [1]. Ale mimo to mamy już u Egipcyan początki symboliki [2]. Podobny stan spotykamy u Babilończyków, Chińczyków, Etrusków [1]. Dopiero Tales miał pierwszy żądać dowodu, a w każdym razie czyniono to w szkole Pytagorasa. Wobec tego i świadomość potrzeby pewników musiała się zjawić, czego dowody spotykamy u Platona. Dzieło Euklidesa jest pięknym systemem ówczesnej Matematyki w szacie więcej matematycznej, ale mimo wielu zalet, nie posiada ono tej genialności, jaką mu często przypisują [3]. Nie mamy zamiaru kreślić tu obrazu rozwoju metody Matematyki. Ale wspomnieć musimy o zdobyczach ostatnich, o jej zupełnym symbolicznym stanie. Mówiliśmy już o tem, że badania G. Peana, B. Russela i G. Fregego (nie wyliczając innych) pozwoliły nam przedstawić symbolicznie całą znaną Matematykę. Jest to w każdym razie najdoskonalszy stopień rozwoju. Symbolika jest uwieńczeniem dedukcyi. Pozwala nam ona pewniej przepowiadać, uwalnia nas od zbytecznego myślenia, jest wogóle ekonomią metody; teorye symbolicznie przedstawione stają się o wiele ściślejszemi, aniżeli słownie przedstawione. Podczas gdy słowa nie posiadają stałych znaczeń, jest stałość symbolów prawie idealna.

---

[1]) Por. M. Cantor. Vorlesungen ü. Geschichte der Mathematik, t. 1, 1907, szczególnie str. 113.

[2]) Cantor, str. 74.

[3]) Por. dzieła Russela, The principles i Couturata, Les principes.

Możemy więc powiedzieć, że jakkolwiek indukcya odgrywa ważną rolę w Matematyce, dąży ona przedewszystkiem do zyskania systemu pewników, aby na podstawie tej módz dedukcyjnie przepowiadać; zarazem przyjmuje Matematyka coraz bardziej postać symboliczną.

Ale z drugiej strony musimy to samo powiedzieć o innych naukach. I one chcą posiąść jak najwięcej praw i pojęć, a więc rozwinąć stronę dedukcyjną jaknajbardziej. Jest to zupełnie zrozumiałe po tem, cośmy o nauce w ogóle powiedzieli, gdyż wtedy dopiero spełni nauka najlepiej swoje zadanie. Na to każdy zgodzić się musi. Ale i wszystkie nauki starają się o szatę symboliczną, gdyż daje ona znaczniejsze korzyści, aniżeli słowna.

Przypatrzmy się przy tej sposobności, o ile wszystkie nauki osiągnęły stopień dedukcyjny i szatę symboliczną. Ogólna nauka o przedmiotach, Ontologia, jest po części dedukcyjną i symboliczną. Widzieliśmy bowiem, że jest takim „Rachunek klas“ i „Rachunek względności“, gałęzie Ontologii. Dyscypliny matematyczne jak Arytmetyka, Analiza, nauka o przestrzeni etc. są dedukcyjne i symboliczne [1]. Fizyka jest po części dedukcyjną, ale nie symboliczną. Symboliczną jest tylko w częściach ilościowych, jako Fizyka matematyczna. Tosamo powiedzieć można o Astronomii i Chemii. Chemia ma prócz tego części symboliczne w swoich równaniach reakcyjnych i symbolach struktury chemicznej. Ślady symboliki wykryć można w Botanice, Zoologii etc. Logika jest w znacznej mierze symboliczna i dedukcyjna, o czem wyżej dokładniej mówiliśmy. Symbolika zaczyna się nawet pojawiać w Psychologii. Courtier przedstawił na ostatnim kongresie psychologicznym w Genewie w r. 1909 system symbolów psychologicznych dla oznaczania faktów świadomości i ich stosunków.

Widzimy więc. że i metoda nie odróżnia Matematyki od innych nauk; owszem, poszczególne nauki okazują tendencyę do osiągnięcia metody Matematyki, dokładniej mówiąc, tego stopnia metody porządkującej, jaką posiada Matematyka; z drugiej strony był czas, kiedy Matematyka nie różniła się metodą od stanu obecnego poszczególnych nauk. Skonstatowaliśmy również, że idealnym stanem dla nauk jest stan pewników, które muszą być oczywiście przez długie wieki tworzone, aby nie zawie-

---

[1]) Por. G. Peano, Formulaire mathématique.

rały przypadkowości, stan, który nazywaliśmy krótko (jakkolwiek nie dokładnie) dedukcyjnym, a zarazem szata symboliczna. Albowiem te dwa czynniki dają nam najlepsze narzędzie w rozwoju, pozwalają nam najlepiej przepowiadać.

Wobec tego najnaturalniejszym jest wniosek, że tak zwana Matematyka nie jest wcale nauką, lecz metodą, owym idealnym, dedukcyjno-symbolicznym stanem nauki w ogóle. Matematyką nazywamy te nauki, które stan taki osiągnęły, a więc Arytmetykę, Analizę, Geometrye, Algebrę Logiki i t. d. Ale nie należy sądzić, że stan dedukcyjno-symboliczny, a więc matematyczny, jest stanem arytmetycznym albo geometrycznym, że matematyzowanie się nauki polega na zastosowaniu liczenia i mierzenia. To zapatrywanie naiwne a rozpowszechnione jest zupełnie nieuzasadnione. Ostatecznie liczyć można wszędzie, również i mierzyć, ale jakie z tego rezultaty? Pojęcie wielkości nie jest, jak wykazaliśmy w dyscyplinach matematycznych, istotnem. Dzisiaj posiadają one wiele elementów jakościowych (Kombinatoryka, Analysis situs, Podstawienia, Algebra Logiki). Przyznać jednak należy, że symbolika nie jest wszystkiem, że różnorodność przedmiotów jest za wielka, aby można ją było ekonomicznie w sposób symboliczny przedstawić. Ale symbolika jest szkieletem, od którego zależy wygląd zewnętrzny, jest kwintesencyą teoryi.

Tu jest miejsce zająć stanowisko względem jednej z najgłośniejszych definicyj współczesnej Matematyki B. Russela[1]: „Pure mathematics is the class of all propositions of the form, „p implies q", where p and q are propositions, containing one ore more variables, the same in the two propositions, and neither p nor q contains any constants except logical constants". Uderzają nas w tej definicyi przedewszystkiem dwie rzeczy, dedukcyjno-hypotetyczny stan czystej Matematyki i jej zależności od Logiki, a nie od innych czynników. Pierwszy przebija się w słowach „z p wynika q". Russel tłómaczy[2]

---

[1]) The principles, str. 1. „Czysta Matematyka jest ogółem sądów formy, „z p wynika q", gdzie p i q są sądami, zawierającymi jednę lub więcej zmiennych identycznych w obu sądach, przyczem jednak ani p, ani q nie zawiera, prócz stałych logicznych, innych stałych".

[2]) Por. The principles, a także The theory of implication, Amer. Journal of Mathem., 1906, t. **28**, str, 161. 162, *1·2, 167*2·5.

stosunek wyniku w następujący sposób: „z p wynika q“ znaczy tyle, co, jeżeli p jest prawdziwe, to i q jest prawdziwe, czyli, jeżeli q jest fałszywe, to i p jest fałszywe, albo też, albo jest p fałszywe, albo q prawdziwe [1]. Z tego wynika jasno dedukcyjno-hypotetyczny charakter czystej Matematyki. Chodzi więc, według Russela, w niej o związki: jeżeli te a te pewniki przyjmujemy, to musi być prawdziwe to i to twierdzenie. W ten sposób byłoby np. równanie $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ niezupełnem. Twierdzenie całkowite brzmiałoby: jeżeli pewniki Arytmetyki są prawdziwe to $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Ten stan hypotetyczny (na który godzą się i inni matematycy, np. L. Couturat, M. Pieri, H. Weber) jest jednak tylko pozorny. Już przedtem staraliśmy się wykazać, że każda nauka jest w swej istocie kategoryczną. Jako hypotetyczna nie da się ona nigdy zrozumieć. Nawet jeżeli chodzi nam o związek, „z p wynika q“, to właściwą formą twierdzenia jest, że: z p wynika q, a nie „jeżeli p jest prawdziwe, to i q jest prawdziwe“. Jest wiele twierdzeń Matematyki, nie mających na razie związku z naturą, ale spodziewamy się związek ten w przyszłości znaleść. Przeciwnie byłyby podobne badania charakterem zupełnie różne od każdej z nauk i mielibyśmy zupełne prawo nie uważać ich za naukowe. Otóż takie na pozór nie mające z naturą związku twierdzenia (p), z których wynikają inne (q) o tymsamym charakterze mogły naprowadzić na to błędne pojmowanie. Drugim faktem jest zależność Matematyki czystej od Logiki; p i q zawierają, prócz zmiennych, tylko stałe logiczne, t. zw. cała czysta Matematyka da się zbudować za pomocą pojęć logicznych. I to jest tendencya wyżej wspomnianego, znakomitego dzieła Russela. Prawdziwość tego twierdzenia zrozumiemy, jeżeli weźmiemy pod uwagę, że ma to być cecha czystej Matematyki i uprzytomnimy sobie, co Russel nazywa Logiką. Logiką jest dla Russela Rachunek klas, Rachunek sądów i Rachunek względności (stosunków), a więc prócz elementarnej Logiki jeszcze część tego, co nazywamy Ontologią. Wobec tego ostatniego faktu rozporządzać możemy takiemi pojęciami, które należą do Ontologii; i to pozwala nam na zbudowanie czystej Matematyki. Pojęcie liczby kardynalnej wymaga, prócz tego, pojęcia odwzorowania dwujednoznacznego, które należy jednak do

---

[1]) Związek tych trzech tłómaczeń przedstawia się jasno w logice symbolicznej. $p \supset q$ jest równoważne bowiem z $-q \supset -p$ i z $-p \cup q = \mathrm{V}$ (symbolika Peana).

Logiki Russela, do Rachunku stosunków[1]. W liczbach porządkowych i w innych pojęciach brakuje jeszcze pojęcia porządku. Ale porządek nie jest niczem innem, jak stosunkiem asymetrycznym i przechodnim[2], które to pojęcia znowu należą do Rachunku stosunków. Ale czy i to ograniczenie Russela do czystej Matematyki jest obowiązujące dla Matematyki w ogóle? Wydaje mi się ono nawet sztucznem; i kto wie, czy nie działał tu ukryty cel zbudowania Matematyki na pojęciach logicznych. Co nazywać będziemy Matematyką, jest po części obojętne. W każdym razie zgodzić się na to musimy, że czysta Matematyka Russela nie jest identyczna z tem, co ogólnie nazywamy Matematyką, i co my uważaliśmy za Matematykę; że należy tu jeszcze cała nauka o przestrzeni realnej i zastosowania. Definicya Russela (bez dodatku hypotetyczności) odnosi się więc tylko do czystej Matematyki. I w tem znaczeniu jest zakres tej Matematyki ściśle oznaczony: to co zbudować się daje za pomocą pojęć czysto logicznych. Nie odróżnia się ona metodą od innych dyscyplin matematycznych, a potencyalnie i od innych nauk.

Możemy również historycznie wykazać tendencyę do naszej definicyi Matematyki. Fakt, że ona wyprzedza rzeczywistość, jak słusznie zauważył S. Dickstein[3], kusił człowieka do matematyzowania wszystkich nauk. A pokusa ta jest nawet zupełnie naturalna. Żądamy przecież tylko tego, co dyscypliny matematyczne z powodu prostoty owych przedmiotów już osiągnęły; a między przedmiotami dyscyplin matematycznych a innych nauk nie ma gatunkowej różnicy. W podawaniu faktów historycznych ograniczamy się do minimum. Przedewszystkiem musimy zwrócić uwagę na pewne pomięszanie pojęć. Kiedy Matematyka osiągnęła pewien stopień rozwoju, ale była jeszcze nauką o wielkości, zauważono jej nadzwyczajne korzyści w badaniu, ścisłość, zupełność i t. d.

---

[1]) Por. np. Couturat, Les princ. Ch. II, § A. Odwzorowanie dwujednoznaczne definiujemy logistycznie w następujący sposób: Rel $\frown R \varepsilon (xRy . xRz . \supset_x y \equiv z)$, t. z.: dwujednoznaczne odwzorowanie jest stosunkiem R, posiadającym własność: jeżeli x zostaje do y w stosunku R i x do z w tym samym stosunku, to dla każdego x jest y identyczne ze z.

[2]) Jeżeli a zostaje do b w stosunku R, co oznaczamy aRb, to R jest asymetrycznym, jeżeli z aRb nigdy nie wynika bRa; R nazywa się przechodnim, jeżeli z aRb, bRc wynika aRc. Por. np. Couturat, Les princ., Ch. I, § C.

[3]) Matematyka i rzeczywistość, 1893, str. 24.

I nastąpiła właśnie owa naturalna pokusa zastosowania Matematyki do innych nauk. Ale nie spostrzeżono, że nie liczenie i mierzenie daje te korzyści, lecz stan dedukcyjno-symboliczny. Pierwsze wzięto za drugie. I widziano długi czas istotę Matematyki w liczeniu i mierzeniu i śmielsi marzyli o zdobyciu wszystkiego tą prostą metodą. „Ale Ty uporządkowałeś wszystko miarą, liczbą i wagą“ (Salomon, XI, 22). Znany podręcznik matematyczny egipski Ahamesa z przed paru tysięcy lat w ten sposób się zaczyna: „Przepis do osiągnięcia poznania wszelkich ciemnych rzeczy... wszelkich tajemnic, jakie zawarte są w przedmiotach...“ A w księgach chińskich czytamy słowa: „..... kątomierz i liczby kierują wszelkiemi rzeczami“. Często pogrążano się prócz tego błędu w spekulacye mistyczne. Babilończycy chcieli zbadać stosunki religijne sposobem matematycznym, tworzyli związki między bogami a liczbami całkowitemi, między duchami a ułamkami [1]. W Persyi szczególnie wróżono z linij i punktów nakreślonych na piasku, posypanym na desce, z ich przesunięcia się po potrząśnięciu, o losach ludzi, który to zwyczaj pokrewny jest znanemu u nas wróżeniu z figur, lanych z wosku, z ołowiu. Spekulacye matematyczno-moralne Pytagorasa są każdemu wiadome. Spinoza pisze swój system filozofii, Etykę, sposobem matematycznym. Jego usiłowania były jednak jeszcze przedwczesne. Leibniz marzy o swej Characteristica universalis, Kant oblec chce metafizykę w szatę matematyczną, oczywiście odmiennie rozumianą. Proroczym wzrokiem przewidział B. Peirce [2] przyszłość Matematyki: „Mathematics is the science, which draws necessary conclusions“. Jeżeli zmienimy słowo „nauka“ na „metoda“, to definicya ta jest ogólnie identyczna z naszą.

Możnaby uczynić zarzut, że osiągnięcie stanu dedukcyjno-symbolicznego jest dla innych nauk niemożliwe. Ale dlaczego? Czy można poprzeć takie zapatrywanie jakimkolwiek argumentem? Czy są one może za bardzo skomplikowane? Ale jest że to jakim argumentem? To znaczy tylko: dzisiaj tego stanu nie osiągnęliśmy. Ale przyszłość go osiągnie. A to popiera rozwój Matematyki i rozwój nauk, cel nauki, nasze stanowisko w przyrodzie. Oczywiście, że najjaśniejszym i jedynym zupełnie przekonywającym dowodem byłoby to, gdybyśmy mogli jednę z nauk,

---

[1]) F. Lenormant, La magie chez les Chaldeens, 1874, str. 23.

[2]) Linear assoc. Algebra, Amer. Journ. of Math. t. 4, 1881.

np. Fizykę, przedstawić dedukcyjno-symbolicznie. Ale to nie jest dziełem jednej chwili, a zupełne dokonanie tego nie dziełem jednego człowieka. Gdy więc przeciwko temu zapatrywaniu niema żadnych argumentów, jest wiele za niem. Czyż to nie jest rezultatem dodatnim?

Dla zupełności zajmiemy się jednym z poważnych zarzutów. Wybieram K. Goeringa, ponieważ jego odnosząca się do tej kwestyi praca wyszła w tłómaczeniu polskiem [1]) i jest u nas zapewne bardziej znana. Na początku swej pracy mówi Goering, że początkowo występuje błąd każdy naiwnie, i właśnie przeto z największą pewnością. Nie zauważył on jednak, że mogło zajść tu pomieszanie pojęć, o jakiem wspominaliśmy; uważa on w ten sposób dążenia Descartes'a, Spinozy, Leibniza za dosłownie odpowiadające prawdziwemu stanowi rzeczy, lecz w zasadzie błędne. Wobec tego nie walczy on przeciw Matematyce, ale przeciw narzucaniu wszelkiemu poznawaniu metody dowolnego tworzenia podstaw; i pod tym względem ma słuszność. Ale też wnioski jego nie sięgają dalej. Korzyść, jaką odnoszą czytelnicy mniej krytyczni, z jego pracy będzie raczej negatywna, bo z pewnością rozciągną oni, stosownie do tytułu pracy, wnioski na całą Matematykę. Że Goering tak właśnie postępuje, jak przedstawiliśmy, wynika ze zdań o Spinozie [2]), który tworzy definicye, jakgdyby definicye były istotą Matematyki. Chodzi tu chyba o dowolne definicye, bo jeżeli byłyby one naturze odpowiadające, to przeciw nim nic miećby nie można. A w Matematyce nikt nigdy dowolnych definicyj nie tworzył. Wydawać się to może tylko zupełnie nieświadomym metod Matematyki. „Leibniz nosi się z urojeniem jakiejś Characteristica universalis“ [2]), które to zdanie świadczy dosadnie o nieznajomości zupełnej tego „urojenia“ Leibniza. Ogólnie uważa Goering konstrukcyę, podobnie jak Kant, za cechę Matematyki. Jeżeli ma być ona zgodna z naturą, to znowu nic przeciwko niej mieć nie można, jeżeli zaś ma być dowolną, to takiej żadna Matematyka nie zna.

Cóż więc zostaje z tych urojonych zarzutów?

---

[1]) K. Goering. „O nadużywaniu Matematyki we Filozofii. Filozofia nowokrytyczna“, t. 1, zesz. 2.

[2]) Str. 135 n.

Kraków, w styczniu 1910.