



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000349051





Inż. Dr. Włodzimierz Burzyński

ZRZESZENIE STUDENTÓW POLSKICH  
Komitet Uczelniany  
Wydz. Politechnicznych AGH.  
Kraków, ul. Warszawska 24  
Tel. 206-81, 535-21

MECHANIKA OGÓLNA

59

ZWIĄZEK STUDENTÓW INŻYNIERII  
PRZY A. G. W KRAKOWIE  
KOMISJA WYDAWNICZA

L W Ó W

Nakładem "Komisji Wydawniczej" Kół Naukowych i Twą Bratniej Pomocy  
Studentów Politechniki Lwowskiej

1 9 3 1

KD 531(075.8)



III. 13232

Akc. Nr.          D-486154.

WZESZENIE STUDENTÓW POLSKICH  
Komitet Uczelniany  
Wydział Politechnicznych AGH.  
Kraków, ul. Warszawska 24  
Tel. 206-87

W S T E P

L i t e r a t u r a .

A. W języku polskim:

Autenrieth E. - Mechanika techniczna. Przekład z niem. A. Patschke' go,  
Warszawa 1910.  
Czopowski H. - Mechanika teoretyczna, Warszawa 1911 i 1916.  
Huber M.T. - Mechanika ogólna - Podręcznik inżynierski, t. II, Lwów  
i Warszawa 1928.  
Straszewicz Z. - Nauka o ruchu, Warszawa 1918.

B. W języku francuskim:

Appell P. - Traité de Mécanique rationnelle, 3t. Paryż 1902 - 1909.  
Bouligand G. - Précis de Mécanique rationnelle, Paryż 1925.

C. W języku angielskim:

Love A.E.H. - Theoretical Mechanics, Cambridge 1906.  
Perry J. - Applied Mechanics, London 1907.

D. W języku niemieckim:

Föppl A. - Vorlesungen über technische Mechanik, Leipzig und München 1900 - 1921.  
Pöschl Th. - Lehrbuch der technischen Mechanik, Berlin 1923 i 1930.

Zbiory ćwiczeń:

Bojnicz - Sianożęcki - Zbiór zadań z mechani teoretycznej.  
Mittenbauer F. - Aufgaben aus der technischen Mechanik (3t.).

---

Mechanika jest nauką zajmującą się ruchem i równowagą ciał rzeczywistych i jako taka jest pewną częścią ogólnej wiedzy fizyki. Skonstatowawszy ruch jakiegoś przedmiotu zechcemy przedewszystkiem poznać w jaki sposób ten ruch się odbywa; tę geometryczną stronę ruchu obejmuje tzw. 1. kinematyka, z którą często spotykamy się przy omawianiu różnych krzywych i powierzchni w geometrii analitycznej. Poznawszy sam sposób odbywania ruchu w czasie, będziemy się starali poznać i przyczyny tego zjawiska; przyczyny te nazywać będziemy siłami. W szczególnym przypadku układ sił działających na ciało może ruchu wogóle nie wywołać; badaniem równowagi ciała zajmuje się tzw. 2. statyka. Ogólnie jednak układ sił wywoła pewien ruch; badanie zależności między ruchem a siłami zajmuje się 3. dynamiką. Niektórzy autorzy dzielą też mechanikę inaczej, a mianowicie na kinematykę i dynamikę, przy czem dynamika obejmuje podziały statykę i kinetykę.

Podobnie jak w matematyce najprostszym elementem mechanicznym jest punkt, a mianowicie punkt geometryczny w kinematyce i materialny w dynamice względnie statyce. Rozróżniamy przeto 1. mechanikę punktu i 2. mechanikę ciała lub ściślej mechanikę systemu punktów. Ze względu na stan skupienia ciała może być mowa o 1. mechanice ciał stałych, 2. ciekłych i 3. gazowych lub lotnych. W kursie tu przedstawionym będzie z reguły mowa o ciałach stałych. Ciała tego rodzaju możemy<sup>z</sup> korzyścią idealizować i uważać je za ciała sztywne. Mechanika ogólna jest przedewszystkiem mechaniką ciała sztywnego. Okaże się że taki model ciała wystarczy nam w dużej ilości zagadnień o doniosłym znaczeniu. Tam, gdzie powyższy schemat zawiedzie musi się przyjąć odkształcalność ciała stałego. Mechanika ciała odkształcalnego obejmuje t.zw. teorię sprężystości i plastyczności; w kursie niniejszym o teoriach tych mówić nie będziemy.

Początków mechaniki można się dopatrzeć bardzo dawno w tzw. mechanice elementarnej, tj. nauce opierającej się o cały szereg drobnych spostrzeżeń i formuł elementarnych, jak "prawo" dźwigni, wolnego spadku ciała itp.

Zbiegiem czasu okazało się, że owe drobne prawa nie były między sobą niezależne. Po odpowiednim przygotowaniu terenu przez Galileusza (1564 - 1642) udało się Newtonowi (1642 - 1727) utworzyć na podstawie czysto geometrycznej **m e c h a n i k ę** wyższą lub rozumową, syntezę owych oddzielnych formuł, <sup>w trzy</sup> aksjomaty mechaniczne, tj. w trzy prawa nierozbieralne na części. Prawami temi do dziś się posługujemy jakkolwiek nie zmieniając treści sumarycznej oddzielnie inaczej je przedstawiamy. Nieprzejrzyste metody geometryczne Newtona usuwa Euler (1707 - 1783) przez wprowadzenie rachunku różniczkowego i całkowego; udoskonala całość Lagrange (1736 - 1813) w formie tzw. **m e c h a n i k i** **a n a l i t y c z n e j** tj. wiedzy ściśle teoretycznej.

Trzy wyliczone typy mechanik nazywają krótko **mechaniką klasyczną**. Podstawowymi jej pojęciami są czas, masa i przestrzeń. Pojęcia te były często atakowane. Fizyk Hertz próbuje trzy prawa Newtona zamienić na jedno. Jego następcy starają się zupełnie abstrahować od przyrody i rozwinąć mechanikę na podstawie tylko pomysłanych ruchów przypuszczalnych ustrojów przestrzennych; powstaje w ten sposób **m e c h a n i k a** **t e o r e t y c z n a**; zwyczajna mechanika klasyczna staje się tylko jej specjalnym przypadkiem. Obok mechaniki teoretycznej rozwija się **m e c h a n i k a** **w z g l ę d n o ś c i** Einsteina. Zmiany w ten sposób wprowadzone mają znaczenie poważne, ale w wynikach, które rzadko mogą techniki dotyczyć.

Obok naszkicowanego rozwoju teoretycznego należy zanotować i rozwój praktyczny mechaniki, która wyrobiła sobie znaczenie w rozmaitych działach wiedzy stosowanej. Zbierając wszystkie te części, które mają zastosowanie wyłącznie w technice otrzymamy tzw. **mechanikę techniczną**. Korzysta ona równie dobrze z mechaniki elementarnej jak i analitycznej zależnie od celu. Ta jej część, która zajmuje się ciałem sztywnym wprowadza technika w cały szereg praktycznych zagadnień i podstawowych twierdzeń o charakterze dość ogólnym. Mechanika ta jest **o g ó l n ą**.

Kurs tu przedstawiony, nie będzie się odbywał ściśle po myśli podziału klasycznego, a to z pewnych konieczności pedagogicznych i programowych.

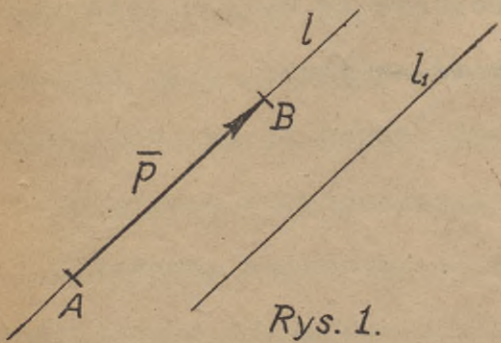
*duże litery*

ROZDZIAŁ I.

Teoria wektorów.

§. 1. Ogólne.

Przyjrząwszy się bliżej treści mechaniki zauważymy, że operuje ona wielkościami dwojakiego rodzaju. Do określenia jednych wystarczy podać wartość (np. energja); wielkość tego rodzaju nazywamy skalarami. Odrębną grupę tworzą wielkości kierunkowe; pewne z nich twz. wielkości jednokierunkowe noszą nazwę wektorów. Do określenia wektora  $\vec{p}$  (rys. 1.) należy podać prostą  $l$  zorientowaną w przestrzeni, długość  $AB$  tj. wielkość bezwzględną wektora i wreszcie jego kierunek czyli strzałkę. Znakujemy:  $p = AB$  wskazując w ten sposób na kierunek od  $A$  do  $B$ . Piszemy  $p = |\vec{p}|$  oznaczając



w ten sposób wielkość wektora. Rozróżniamy:

1. Wektory swobodne
2. Wektory osiowe czyli linjowe
3. Wektory nieswobodne.

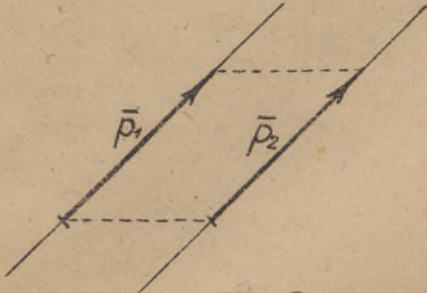
Wektor jest swobodnym, gdy umieścić go możemy na dowolnej z ogółu prostych zorientowanych równoległe do  $l$ , a zatem np. na  $l_1$  itp. Gdy tego zrobić nie możemy tj. gdy wektor  $p$  przynależy jest ściśle określonej prostej  $l$ , to wektor nazywamy linjowym; z definicji wynika, że wektor linjowy możemy przesuwać, ale tylko wzdłuż jego prostej. Gdy wreszcie i tego nie można zrobić tzn. gdy początek  $A$  wektora ma ściśle określone miejsce na określonej prostej  $l$ , to wtedy wektor nazywamy nieswobodnym.

§. 2. Wektory swobodne.

1. Z podanej wyżej definicji wynika, że dwa wektory swobodne są sobie równe geometrycznie tzn. pod wszelkimi charakterystycznymi względami, gdy leżą na prostych równoległych, mają równe wartości bezwzględne i równe czyli zgodne kierunki. Piszemy wtedy

$$\vec{p}_1 \hat{=} \vec{p}_2$$

lub krócej równie wyraźnie  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$  ; oczywiście wtedy i  $p_1 = p_2$  . Dwa takie wektory można przez równoległe przesunięcie doprowadzić do nakrycia wzajemnego

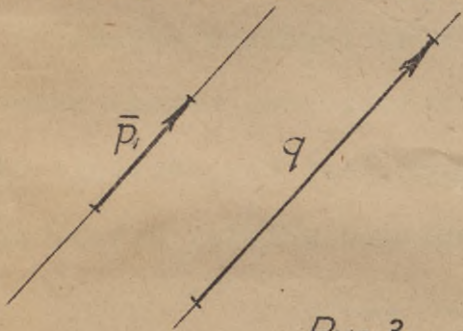


Rys.2.

(rys.2.)

2. Pomnożyć algebraicznie wektor  $\vec{p}$  przez skalar tj.liczbę  $a$  znaczy - znaleźć wektor  $\vec{q}$  równoległy do poprzedniego o wartości bezwzględnej  $q = |a| \cdot p$  i o strzałce zgodnej lub niezgodnej zależnie od tego, czy  $a$  jest

dodatnie czy też ujemne (rys.3.)



Rys.3.

Piszemy to następująco:

$$\vec{q} = a \cdot \vec{p}$$

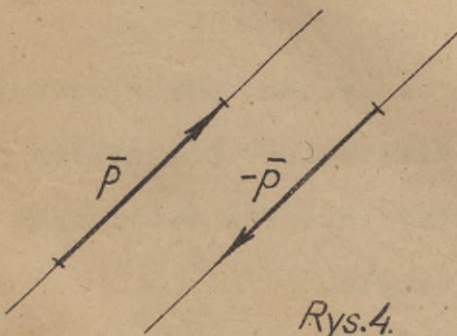
Na rys.3. jest najwidoczniej nietylko  $a > 0$  ale też jest  $a > 1$ .

3. W szczególności, gdy  $a = \frac{1}{|\vec{p}|} = \frac{1}{p}$  to  $\vec{q} = \frac{\vec{p}}{p}$  jest wektorem jednostkowym

wektora  $\vec{p}$  ; istotnie bowiem  $|\vec{q}| = q = \left| \frac{\vec{p}}{p} \right| = \frac{|\vec{p}|}{p} = \frac{p}{p} = 1$ . Wektor jednostkowy nazywamy też wersorem i znakujemy go  $\vec{p}^\circ$  lub w inny umówiony, wygodny sposób.

4. Gdy  $a = 0$  , to  $\vec{q} = \vec{0}$  ,przyczem  $|\vec{0}| = 0$ . Wektor  $\vec{0}$  jest wektorem zerowym; jest to wektor, którego koniec pokrywa się z początkiem.

5. Jeżeli  $a = -1$  ,to  $\vec{q} = -\vec{p}$ ,wektory  $\vec{q}$  i  $\vec{p}$  nazywamy w tym wypadku niezgodnie równymi.Oczywiście  $|\vec{q}| = |\vec{p}| = p$  (rys.4.)

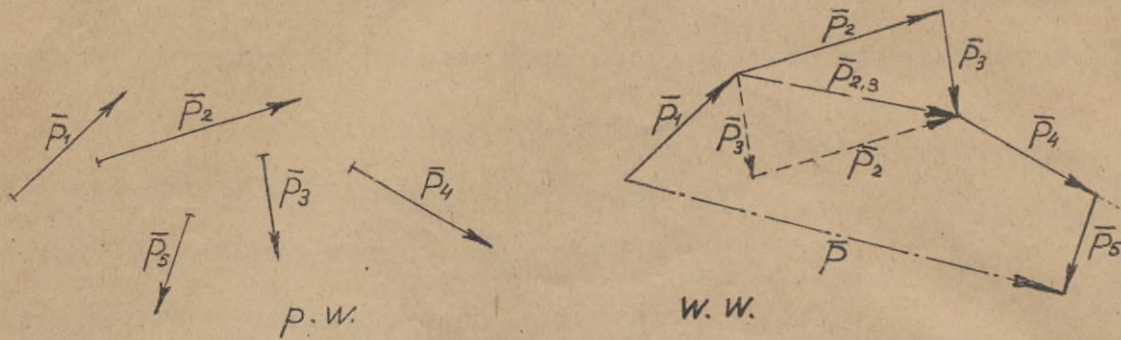


Rys.4.

6. Układem wektorów nazywamy pewien ich dowolny zbiór składający się z dowolnej ilości wektorów. Układ wektorów swobodnych redukujemy tworząc ich sumę geometryczną jak następuje:Wykreślmy z dowolnego punktu wektor równy geometrycznie wektorowi  $\vec{p}_1$  ; do jego końca dołączmy początek wektora równego geometrycznie wektorowi  $\vec{p}_2$  ; postąpmy

identycznie z wszystkimi wektorami; sumę układu stanowi wektor łączący swój po-

czątek z początkiem  $\bar{p}_1$  i swój koniec z końcem wektora ostatniego ( rys.5.)



Rys. 5.

Nazywamy często układ planem wektorów ( p. w. ), a wielobok tworzący sumę wielobokiem wektorów. Nie jest rzeczą konieczną, by w planie zaznaczono długości wektorów, odpowiadające ich wielkościom bezwzględny; natomiast koniecznym to jest przy tworzeniu wieloboku. Staje się to jasnym, jeśli w szczególnym wypadku wieloboku płaskiego ( ogólnie jest on przestrzennym ) zastosujemy metodę wykreślną dodawania geometrycznego. Dodawanie wektorów swobodnych jest bezpośrednio dlatego możliwe, że możemy je poprzecznie przesuwając nie zmieniając układu. Rys.5. przedstawia konstrukcję równania:

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \bar{p}_4 + \bar{p}_5 = \bar{p}$$

Najwidoczniej suma  $\bar{p}$  niezależy od porządku dodawania (prawo przemienności.); Rysunek dowodzi, że również jest:

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_3 + \bar{p}_2 + \bar{p}_4 + \bar{p}_5$$

Obowiązuje tu również prawo kojarzenia czyli łączności, dozwalające na stosowanie częściowych sum; rzeczywiście widzimy, że przy oznaczaniu:

$$\bar{p}_2 + \bar{p}_3 = \bar{p}_3 + \bar{p}_2 = \bar{p}_{2,3} \quad \text{zachodzi równość:}$$

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_{2,3} + \bar{p}_4 + \bar{p}_5 = \bar{p}$$

Powyższe jest oczywiście niezależne od ilości wektorów układu. Gdy w szczególnym przypadku koniec ostatniego wektora pokryje się w wieloboku z początkiem pierwszego, to w myśl określenia 4.  $\bar{p} = \vec{0}$ ; zatem układ wektorów swobodnych jest równowarty zeru, gdy wielobok wektorów zgodnie się zamyka.

Jeśli wszystkie bez wyjątku wektory układu są równoległe, to obok ich wartości bezwzględnych  $|\bar{p}_i|$  wprowadza się skorzyścią wartości algebraiczne  $p_i$

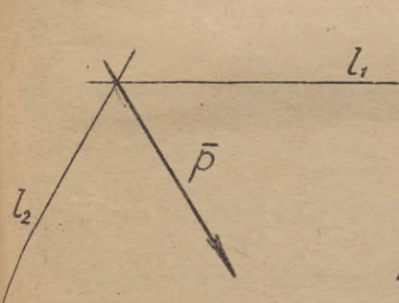
o co trzeba się jednak każdorazowo dla uniknięcia nieporozumień umówić; wtedy  $p_i$  jest dodatnie lub ujemne w zależności od tego czy wektor  $\bar{p}_i$  ma zgodny lub niezgodny kierunek z pewnym przyjętym za porównawczy. W omawianym wypadku staje się suma geometryczna układu identyczną co do swej wartości z sumą algebraiczną; tylko wtedy równanie:

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \dots + \bar{p}_n$$

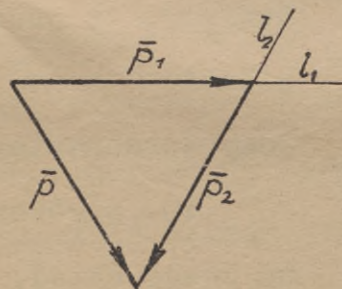
pociąga za sobą równanie:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

7. Przeprowadzone w ust.6. dodawanie nazywamy też składaniem wektorów swobodnych. Działanie konstrukcyjne odwrotne tj. rozkładanie wektora na dodajniki da się w odpowiednich warunkach również wykonać. Dwa wypadki mają szczególne znaczenie:



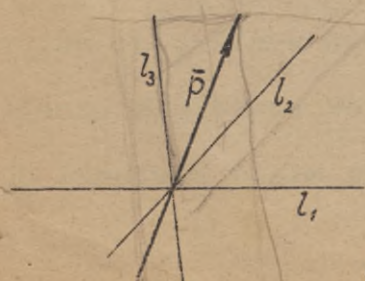
Rys.6.



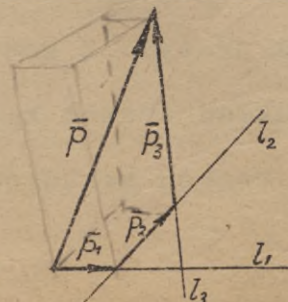
a). Wektor  $\bar{p}$  rozłożyć na dwa inne o określonych prostych  $l_1$  i  $l_2$  (rys.6.). Z początku i końca wektora  $\bar{p}$  kreślimy równoległe do  $l_1$  i  $l_2$ ; uzyskany w ten sposób długościom  $p_1$  i  $p_2$  dajemy strzałki o obie-

gu jak na szkicu; faktycznie jest:  $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}$  uzyskane wektory jako swobodne możemy dowolnie równoległe przesunąć w przestrzeni.

b). Wektor  $\bar{p}$  rozłożyć na trzy inne o określonych prostych  $l_1, l_2$  i  $l_3$ . Zagadnienie to da się również jednoznacznie rozwiązać, ale pod warunkiem, że  $l_1, l_2$  i  $l_3$  nie są równoległe do jednej płaszczyzny. Z początku i końca wektora  $\bar{p}$  kreślimy równoległe do  $l_1$  i  $l_3$ ; wreszcie kreślimy równoległą do  $l_2$  tak, by przecięła się ona z dwiema poprzednimi; oczywiście znajdziemy tylko jedną taką równoległą do  $l_2$  (rys.7.). Ostatecznie stosownie do wymagania jest:  $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 = \bar{p}$



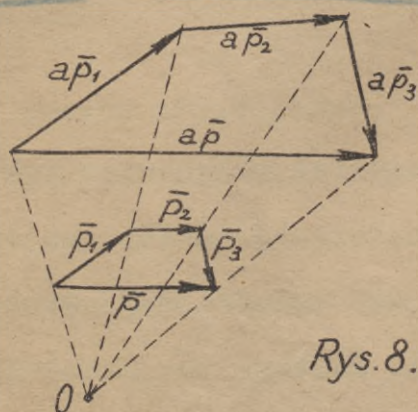
Rys.7.



Oczywiście stosownie do uwag, zamieszczonych w ust.6.są rezultaty od początku kreślenia prostych niezależne. Nietrudno

przeto zauważyć, że wektor  $\bar{p}$  w wypadku a) jest jedną z przekątnych równoległoboku o bokach, równoległych do  $\bar{p}_1$  i  $\bar{p}_2$  - i że podobnie wektor  $\bar{p}$  w wypadku b) jest jedną z przekątnych równoległościanu, którego krawędzie są równoległe do kierunków  $\bar{p}_1$ ,  $\bar{p}_2$  i  $\bar{p}_3$ .

8. Mnożenie algebraiczne wektora (ust. 2.) podlega prawu rozdzielności. Zatem:  $a\bar{p} = a(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \dots + \bar{p}_n) = a\bar{p}_1 + a\bar{p}_2 + a\bar{p}_3 + \dots + a\bar{p}_n$ ,



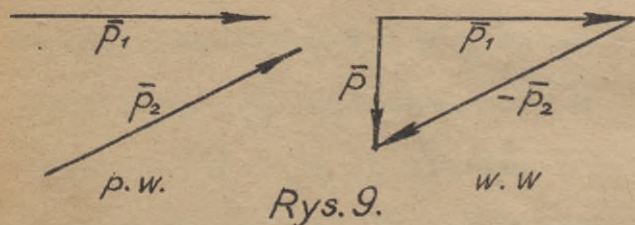
Rys. 8.

jeżeli  $\bar{p} = \sum_i^n \bar{p}_i$  Dowód powyższego wyniku z rys. 8., jeśli zauważymy, że 0 jest środkiem podobieństwa.

9. Odejmowanie wektora jest identyczne z dodawaniem wektora ujemnego tzn.

$$\bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \bar{p}_1 + (-\bar{p}_2)$$

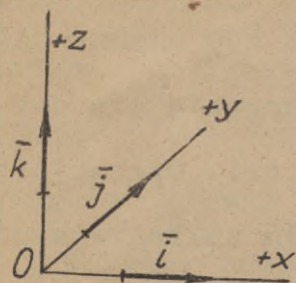
Operację tę podaje nam rys. 9. Z powyższego wynika, że  $\bar{p} + \bar{p}_2 = \bar{p}_1$ , zatem wektory porządkujemy (przenosimy) tak jak liczby w algebrze.



Rys. 9.

10. Z różnych możliwych układów zasługuje na uwagę układ, złożony z trzech wektorów.

Pomyślmy je sobie dla wygody z jednego punktu. Jeśli owym wektorom np. w kolejności  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$  odpowiadają palce wielki, wskazujący i średni rozstawionej prawej ręki, to układ  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$  nazywamy układem prawym. Z definicji tej wynika, że przez przemianę cykliczną otrzymujemy również układy prawe tj.  $\bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_1$  względnie  $\bar{p}_3, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ . Droga przemiany antycyklicznej otrzymamy natomiast z układu prawego lewy i na odwrót. Wprowadzone pojęcie oczywiście nie zależy od kątów zawartych między poszczególnymi wektorami. Należy tę uwagę rozumieć tak: Niech  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$  w podanej kolejności będzie układem prawym, przyczem np. jest  $\bar{p}_1 \perp \bar{p}_2$ . Wtedy układ  $\bar{p}'_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$  gdzie  $\bar{p}'_1$  i  $\bar{p}_2$  tworzą z sobą kąt ostry większy od zera lub też rozwarty mniejszy od kąta półpełnego, jest również układem prawym. Z powyższego wynika, że najprostszą orientację układu prawego stanowi układ trzech kierunków wzajemnie prostopadłych  $x, y, z$  (rys. 10.). Jeżeli strzałki trzech wektorów będą miały kierunki do-



Rys. 10.

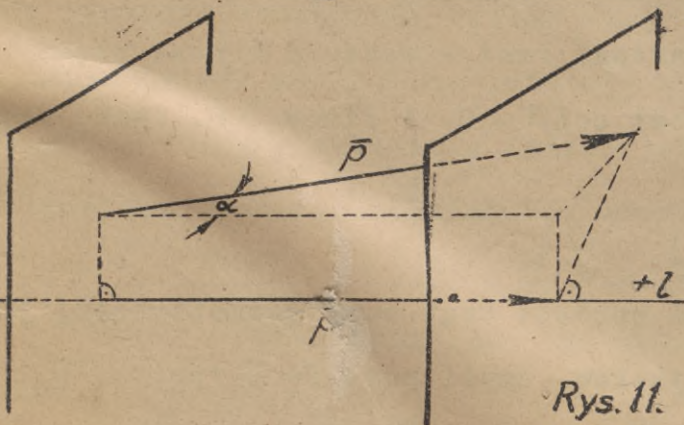
datnich osi podanego układu, to wektory owe w kolejności  $x, y, z$  względnie innej cyklicznej tworzą układ prawy. Umówimy się znaczyć wektory jednostkowe czyli wersory kierunków  $+x, +y, +z$  symbolami  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ .

11. Niech danym będzie wektor  $\bar{p}$  i dowolna prosta  $l$  określona w przestrzeni wraz z kierunkiem swym dodatnim najprościej np. zapomocą odnośnego wersora  $\bar{\lambda}$ ; tem samem określony jest ostry lub rozwarty kąt

$(\bar{p}, l) = (\bar{p}, \bar{\lambda}) = \alpha$ . Rzutem wektora  $\bar{p}$  na prostą  $l$  nazywamy nowy wektor  $\bar{p}'$ , którego początek i koniec są rzutami początku i końca wektora  $\bar{p}$  na prostą  $l$ . Piszemy

$$\bar{p}' = R_l(\bar{p}) = \bar{\lambda} p \cos \alpha, \quad |\bar{p}'| = p' = |p| \cdot |\cos \alpha| = p \cdot |\cos \alpha|$$

przyczem  $p'$  jest bezwzględną wartością wektora  $\bar{p}'$ . Wygodniej jednak jest w tym wypadku użyć algebraicznej wartości wektora  $\bar{p}'$ ; piszemy wtedy  $p' = p \cdot \cos \alpha$ . W ostatnim wypadku jest  $p' \gtrless 0$  w zależności od  $\alpha \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$ . W zależności też od  $\alpha \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$  jest wektor  $\bar{p}'$  zgodnie lub niezgodnie skierowany z wersorem  $\bar{\lambda}$  czyli z dodatnim kierunkiem prostej  $l$ . W szczególności, gdy  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  jest  $\bar{p}' = \bar{0}$ ; jeśli przeto rzut wektora znika, to nie dotyczy to zupełnie samego wektora. W podanem wyżej obliczeniu wartości rzutu wektora tkwi milcząco rzutowanie ortogonalne (rys.11), bo to

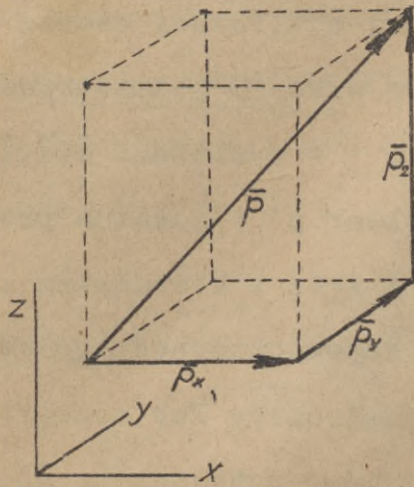


Rys. 11.

specjalnie będzie miało dla nas znaczenie. Niech będzie daną suma geometryczna  $\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \dots + \bar{p}_n$ . Rzućmy sumę i wszystkie dodajniki na prostą  $l$ ; rzuty  $\bar{p}'_1, \bar{p}'_2, \bar{p}'_3, \dots, \bar{p}'_n$  i  $\bar{p}'$  będą wzajemnie do siebie zgodnie lub niezgodnie równoległe; będzie je można przeto dać

algebraicznie czyli  $p' = p'_1 + p'_2 + p'_3 + \dots + p'_n$ . Innymi słowy <sup>rzut</sup> sumy geometrycznej ma wartość sumy algebraicznej rzutów wszystkich dodajników. Skoro  $\bar{p} = \bar{0}$  to i  $\bar{p}' = \bar{0}$  lub  $p'=0$  lecz - jak wyżej zauważono - nie naodwrot.

Rzućmy wektor  $\bar{p}$  na kierunki  $x, y, z$ , układu analitycznego prostokątnego;



Rys. 12.

otrzymamy wektory  $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ ; ich wartości algebraiczne są dodatnie lub ujemne zależnie od tego czy strzałki pokrywają się czy też nie z dodatnimi kierunkami osi. Operacja ta jest jednoznaczna. Skoro zatem znikną w szczególnym wypadku  $\bar{p}_x, \bar{p}_y$  i  $\bar{p}_z$  to i  $\bar{p}$  zniknie. Zatem twierdzenie odwrotne do  $\bar{p} = 0$  brzmi  $\bar{p}_x = 0, \bar{p}_y = 0, \bar{p}_z = 0$ . Łącząc rys.12. z uwagami wypowiedzianymi w 7. widzimy, że r z u t y w e k t o r a

na osie prostokątnego układu współrzędnych są równocześnie jego wektorami składowymi dla przyjętych kierunków; istotnie bowiem promienie rzucające leżą w płaszczyznach ścian odpowiednio skonstruowanego prostopadłościanu, pozbawionym jest

$$\bar{p}_x + \bar{p}_y + \bar{p}_z = \bar{p}, \text{ przyczem } \bar{p}_x = \bar{i} \cdot p_x, \bar{p}_y = \bar{j} \cdot p_y, \bar{p}_z = \bar{k} \cdot p_z.$$

12. Rzutem wektora  $\bar{p}$  na płaszczyznę  $\omega$  nazywamy nowy wektor  $\bar{p}'$ , którego początek i koniec są rzutami początku i końca danego wektora  $\bar{p}$ . Kąt  $(\bar{p}, \omega) = \beta$  nachylenia wektora  $\bar{p}$  względem płaszczyzny  $\omega$  jest zawsze ostry; nachylenie  $(\bar{p}, n) = \alpha = \frac{\pi}{2} \pm \beta$  wektora  $\bar{p}$  względem normalnej do płaszczyzny zawarte jest przeto między  $\frac{\pi}{2}$  i 0. Bezwzględna wartość rzutu - wektora wynosi przeto:  $p' = p \cdot \cos \beta = p \sin \alpha$ , przyczem stale jest  $\cos \beta > 0$  i  $\sin \alpha > 0$ . Znakujemy w

$$\bar{p}' = R_\omega(\bar{p})$$

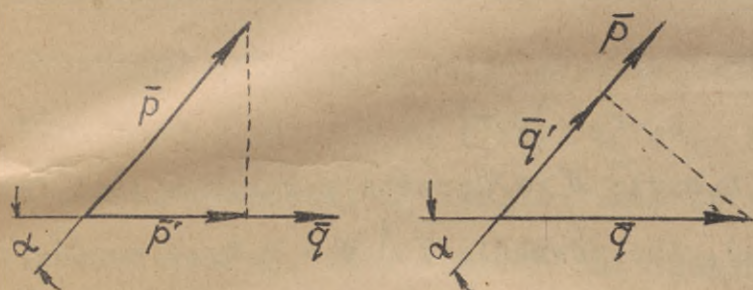
Z określenia rzutu na płaszczyznę wynika wprost: Rzut sumy geometrycznej jest równy sumie geometrycznej rzutów - dodajników, czyli gdy:  $\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots + \bar{p}_n$ , to  $\bar{p}' = \bar{p}'_1 + \bar{p}'_2 + \dots + \bar{p}'_n$ . Gdy  $\bar{p} = \bar{0}$  to i  $\bar{p}' = \bar{0}$ ; lecz gdy  $\bar{p}' = \bar{0}$  to musi jeszcze być  $R_n(\bar{p}) = \bar{0}$ , by można stwierdzić  $\bar{p} = \bar{0}$ . (Dlaczego?).

13. Niech będą dane dwa wektory  $\bar{p}$  i  $\bar{q}$  dla prostoty sprowadzone do wspólnego punktu; kąt między nimi zawarty niech wynosi  $\alpha$ , przyczem oczywiście jest  $\pi > \alpha > 0$ . Będziemy pisać:

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = p \cdot q \cdot \cos \alpha$$

i nazywać  $\vec{p} \cdot \vec{q}$  iloczynem skalarowym; wynikiem mnożenia skalarowego dwóch wektorów jest liczba algebraiczna, obliczona jak wyżej, gdzie - jak dotychczas - jest  $p = |\vec{p}|$ ,  $q = |\vec{q}|$ . Przyjmijmy kolejno  $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  to  $\vec{p} \cdot \vec{q} = p \cdot q, 0, -p \cdot q$ ; ogólnie zaś jest iloczyn skalarowy dodatni lub ujemny zależnie od  $\alpha \lessgtr \frac{\pi}{2}$ . W szczególności jest  $\vec{p} \cdot \vec{p} = p^2$  i naodwrot; warunek prostopadłości  $\vec{p} \perp \vec{q}$  wypisujemy zawsze następująco  $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ . Iloczyn skalarowy stosownie do swej definicji podlega prawu przemienności:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \vec{p}$$



Rys. 13.

Wektor  $\vec{p}'$  na rys. 13 jest rzutem wektora  $\vec{p}$  na prostą  $q$  dodatnim kierunku  $\frac{q}{q}$ , przyczem jest  $p' = p \cdot \cos \alpha$ . Przeto jest  $\vec{p}' \cdot \vec{q} = p' \cdot q = p \cdot q \cdot \cos \alpha = \vec{p} \cdot \vec{q}$ . Podobnież jest  $\vec{p} \cdot \vec{q}' = p \cdot q' = \vec{p} \cdot \vec{q}$ . Możemy przeto powiedzieć, że iloczyn skalarowy jest równy iloczynowi bez-

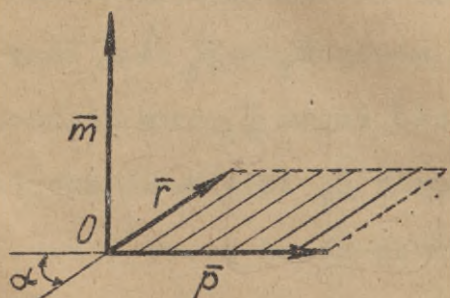
względnej wartości jednego wektora i algebraicznej wartości wektora składowego drugiego. Iloczyn skalarowy podlega prawu rozdzielności f.m.

$$\vec{p} (\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 + \dots + \vec{q}_n) = \vec{p} \cdot \vec{q}_1 + \vec{p} \cdot \vec{q}_2 + \vec{p} \cdot \vec{q}_3 + \dots + \vec{p} \cdot \vec{q}_n$$

Aby powyższe zrozumieć, rzućmy sumę  $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 + \dots + \vec{q}_n$  na kierunek  $\vec{p}$  i zauważmy, że według 11, jest  $q' = q'_1 + q'_2 + q'_3 + \dots + q'_n$ . Otóż  $\vec{p} \cdot \vec{q} = p \cdot q'$  a stąd po postawieniu i wykonaniu reszta jak wyżej. Prawo rozdzielności stosuje się oczywiście i do ogólniejszego działania:

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n) \cdot (\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \dots + \vec{q}_k)$$

14. Niech będą dane dwa wektory swobodne  $\vec{p}$  i  $\vec{r}$  jak na rys. 14.



Rys. 14.

Umieśćmy je w punkcie O i ustawmy tam trzeci wektor swobodny  $\vec{m}$  o następujących własnościach:  
a)  $\vec{p} \cdot \vec{m} = 0$  i  $\vec{r} \cdot \vec{m} = 0$  tj.  $\vec{m} \perp \vec{p}$  i  $\vec{m} \perp \vec{r}$  (zatem wektor  $\vec{m}$  jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory dane  $\vec{p}$  i  $\vec{r}$ ).

b) Wektor  $\bar{m}$  z dwoma danymi tworzy w kolejności  $\bar{p}, \bar{r}, \bar{m}$  układ prawy ( stąd strzałka nowego wektora).

c) Bezwzględna wartość  $\bar{m}$  wynosi pole równoległoboku utworzonego przez boki  $\bar{p}$  i  $\bar{r}$  tzn. jest  $|\bar{m}| = m = p \cdot r \cdot \sin \alpha$ , jeśli  $\alpha$  jest kątem zawartym między obu danymi wektorami. Przez podanie trzech własności określiliśmy zupełnie wektor swobodny  $\bar{m}$ . Nazywamy go iloczynem wektorjajalnym czynników  $\bar{p}$  i  $\bar{r}$ , a operację tę znakować będziemy następująco:

$$\bar{p} \wedge \bar{r} = \bar{m}$$

Zatem iloczyn wektorjajalny jest wektorem. Zamiast symbolu mnożenia wektorjajalnego  $\wedge$ , spotyka się w literaturze i inne np.

$$\sqrt{p \cdot r}, \quad p \times r, \quad p_0 r, \quad [p \cdot r]$$

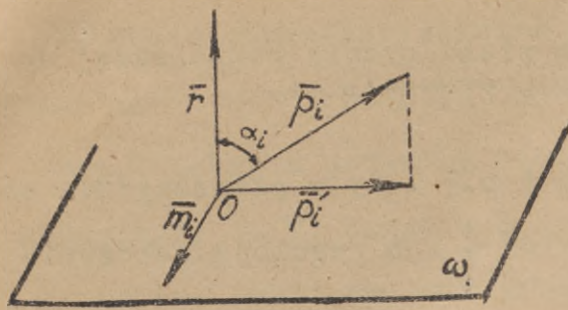
Ponieważ jest  $p = |\bar{p}| > 0$ ,  $r = |\bar{r}| > 0$ , nadto  $\pi > \alpha > 0$ , przeto  $p \cdot r \cdot \sin \alpha$  jest faktycznie wartością bezwzględną (dodatnią). Aby równanie  $\bar{p} \wedge \bar{r} = \bar{m}$  było wogóle np. ze względu na  $\bar{p}$  rozwiązalne musi być spełniony warunek a). Przy  $p \neq 0$  i  $r \neq 0$  znika ich iloczyn wektorjajalny, gdy jest  $p \parallel r$ ; wtedy bowiem  $\alpha = 0$ , lub  $\alpha = \pi$ , czyli  $\sin \alpha = 0$ , skoro zaś  $m = 0$  to i  $\bar{m} = \bar{0}$ . Warunek zgodnej lub niezgodnej równoległości brzmi przeto  $\bar{p} \wedge \bar{r} = \bar{0}$ . Przy określonych  $p$  i  $r$  jest  $\bar{p} \wedge \bar{r} = \bar{m}$  największe dla  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ; wtedy bowiem  $\sin \alpha = 1$ , zaś  $m = p \cdot r$ . Mnożenie wektorjajalne nie podlega prawu przemienności, jeżeli bowiem  $\bar{p}, \bar{r}, \bar{m}$  tworzą układ ptawy, to  $\bar{r}, \bar{p}, \bar{m}$  jako układ antycykliczny jest układem lewym; natomiast również prawym będzie układ  $\bar{r}, \bar{p}, -\bar{m}$ ; przeto

$$\bar{p} \wedge \bar{r} = -\bar{r} \wedge \bar{p}.$$

Mnożenie wektorjajalne podlega jednak prawu rozdzielności, tzn. jest:

$$(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \dots + \bar{p}_n) \wedge \bar{r} = \bar{p}_1 \wedge \bar{r} + \bar{p}_2 \wedge \bar{r} + \bar{p}_3 \wedge \bar{r} + \dots + \bar{p}_n \wedge \bar{r}.$$

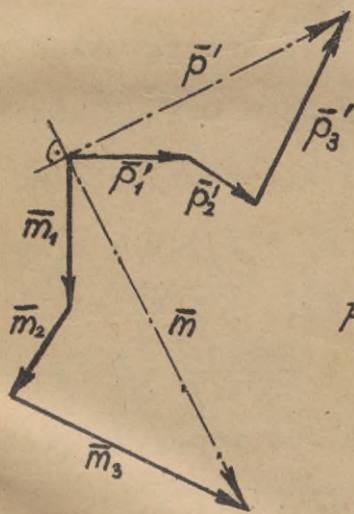
Żeby powyższe udowodnić, weźmiemy wpierv pod uwagę twierdzenie pomocnicze. Weźmy pod uwagę któryś z wektorów sumy np. wektor  $\bar{p}_1$ ; wtedy  $\bar{m}_1 = \bar{p}_1 \wedge \bar{r}$ , leży w płaszczyźnie  $\omega$ , prostopadłej do  $\bar{r}$ . Bezwzględna wartość rzutu  $\bar{p}_1$  na płaszczyznę  $\omega$  wynosi  $p'_1 = p_1 \sin \alpha_1$  (według ust. 12.). Najwidocznie  $\bar{p}'_1$  leży w płaszczyźnie  $(\bar{p}_1, \bar{r})$  czyli również jest  $\bar{m}_1 \perp \bar{p}'_1$ . Pozatem  $\bar{p}'_1, \bar{r}, \bar{m}_1$  tworzą układ prawy ( rys. 15.)



Rys. 15.

Obliczmy iloczyn  $\bar{m}'_i = \bar{p}'_i \wedge \bar{r}$ ; dwie pierwsze jego własności jak wyżej wykazano są identyczne jak dla  $\bar{m}_i$  (a,b); pozostaje do obliczenia trzecia własność (c), tj. wartość bezwzględna; wynosi ona  $m'_i = p'_i \cdot r = p_i \cdot r \cdot \sin \alpha_i$ ; ale również jest  $m_i = p_i \cdot r \cdot \sin \alpha_i$ . Wykazaliśmy przeto, że  $\bar{m}'_i = \bar{m}_i$  lub wyraźniej  $\bar{m}_i = \bar{p}'_i \wedge \bar{r}$ . Przeprowadźmy podobne rozumowanie dla wszystkich wektorów  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Wyobraźmy sobie przytem, że płaszczyzną  $\omega$  jest płaszczyzna rysunkowa (rys. 16.) Wykreślmy w nim  $\bar{p}' = \bar{p}'_1 + \bar{p}'_2 + \bar{p}'_3 + \dots + \bar{p}'_n$  nadto  $\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 + \dots + \bar{m}_n$ . Najwidoczniej dodajniki  $\bar{m}_i$  drugiej sumy są proporcjonalne wielkością dodajnikom  $\bar{p}'_i$  sumy pierwszej, skoro jest - jak wyżej  $m_i = p'_i \cdot r$ . Pozatem  $\bar{m}_i$  są obrócone względem  $\bar{p}'_i$  o  $\frac{\pi}{2}$ . W konsekwencji przeto oba wieloboki łamane są do siebie podobne; odnosi się to również do sum  $\bar{p}'$  i  $\bar{m}$ . Wiążąc powyższe z treścią ust. 8. zyskujemy dowód twierdzenia o rozdzielności mnożenia wektorjalnego. Podobnie dowodzi się prawa rozdzielności dla wypadku ogólniejszego:



Rys. 16.

$(\bar{p}'_1 + \bar{p}'_2 + \bar{p}'_3 + \dots + \bar{p}'_n) \wedge (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 + \dots + \bar{r}_k)$ .

Przykłady ćwiczeń.

1. Bezwzględna wartość wektora  $\bar{p}$  wynosi  $p$ ; jest ona znaną. Pozatem wiemy, że wektor  $\bar{p}$  jest zgodnie równoległy do danego wektora  $\bar{q}$ . Napisać wyrażenie wektorjalne dla liczby  $p$ .

Odp.: Wersory obu wektorów są geometrycznie równe. Zatem:

$$\frac{\bar{p}}{p} = \frac{\bar{q}}{q} \text{ czyli } \bar{p} = \frac{p}{q} \cdot \bar{q}$$

2. Określić dowolny wektor  $\bar{s}$ , położony w płaszczyźnie równoległej do danych wektorów  $\bar{p}$  i  $\bar{q}$ .

Odp.: Suma lub różnica dwóch wektorów  $a.\bar{p}$  i  $b.\bar{q}$  leży w płaszczyźnie wektorów  $\bar{p}$  i  $\bar{q}$ . Zatem:  $\bar{s} = a.\bar{p} - b.\bar{q}$ . Wielkości dowolne  $a$  i  $b$  regulują położenie i wielkość wektora  $\bar{s}$ .

3. W zgodnie zamkniętym wieloboku wektorów odwracamy strzałkę jednego wektora; czem on jest dla pozostałych wektorów?

Odp.: Ich sumą geometryczną.

4. Dane są trzy wektory  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$  (układ prawy). Rozłóż  $\bar{r}$  na trzy dodajniki  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$  i  $\bar{r}_3$  tak, by  $\bar{r}_1$  miał kierunek normalnej do płaszczyzny  $(\bar{p}, \bar{q})$ , a  $\bar{r}_2$  i  $\bar{r}_3$  leżały w tejże płaszczyźnie i były odpowiednio prostopadłe do  $\bar{p}$  i  $\bar{q}$ . Ile wynoszą  $r_1, r_2$  i  $r_3$ ?

Odp.: Niech  $\bar{s}$  ma kierunek normalnej taki, że  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{s}$  tworzą układ prawy. Z założenia wynika:  $\bar{r}_1.\bar{p} = 0, \bar{r}_1.\bar{q} = 0, \bar{r}_1.\bar{s} = r_1.s; \bar{r}_2.\bar{p} = 0, \bar{r}_2.\bar{s} = 0; \bar{r}_3.\bar{q} = 0, \bar{r}_3.\bar{s} = 0; \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 = \bar{r}$ . Pomnożmy ostatnią równość stronami kolejno przez  $\bar{s}, \bar{q}, \bar{p}$  skalarowo. Otrzymamy:  $\bar{r}.\bar{s} = r.s \cos(\bar{r}, \bar{s}) = (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3).\bar{s} = r_1.s$ , a stąd  $r_1 = r \cos(\bar{r}, \bar{s})$ ; podobnie będzie:  $\bar{r}.\bar{q} = r.q \cos(\bar{q}, \bar{r}) = (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3).\bar{q} = \bar{r}_2.\bar{q} = r_2.q \cos(\bar{q}, \bar{r}_2) = r_2.q \sin(\bar{p}, \bar{q})$ , a stąd:  $r_2 = \frac{\cos(\bar{q}, \bar{r})}{\sin(\bar{p}, \bar{q})}$ ; wreszcie:  $\bar{r}.\bar{p} = r.p \cos(\bar{r}, \bar{p}) = (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3).\bar{p} = \bar{r}_3.\bar{p} = r_3.p \cos(\bar{p}, \bar{r}_3) = r_3.p \sin(\bar{p}, \bar{q})$ , stąd:  $r_3 = r \frac{\cos(\bar{r}, \bar{p})}{\sin(\bar{p}, \bar{q})}$ . Przypuśćmy bez ujmy, że kąty  $(\bar{p}, \bar{q}), (\bar{q}, \bar{r}), (\bar{r}, \bar{p})$  są ostre, to łatwo kreśląc odpowiedni szkic zauważyć, że jeśli  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{s}$  było układem prawym, to  $\bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{s}$  jest układem lewym, natomiast prawym jest  $\bar{r}_3, \bar{r}_2, \bar{s}$ .

5. Składowe wektorów  $\bar{p}$  i  $\bar{m}$  w kierunkach osi  $x, y, z$  prostokątnego układu współrzędnych są dane. Wyrazić przy pomocy ich iloczyn  $\bar{p}.\bar{m}$ .

Odp.:  $\bar{p}.\bar{m} = (\bar{p}_x + \bar{p}_y + \bar{p}_z).(\bar{m}_x + \bar{m}_y + \bar{m}_z) = p_x.m_x + p_y.m_y + p_z.m_z$

6. Podać charakterystyczne iloczyny skalarowe i wektorjalne wersorów  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ .

Odp.:  $\bar{i}.\bar{i} = \bar{j}.\bar{j} = \bar{k}.\bar{k} = 1; \bar{i}.\bar{j} = \bar{j}.\bar{i} = \bar{j}.\bar{k} = \bar{k}.\bar{j} = \bar{k}.\bar{i} = \bar{i}.\bar{k} = 0;$

$\bar{i} \wedge \bar{i} = \bar{j} \wedge \bar{j} = \bar{k} \wedge \bar{k} = 0; \bar{i} \wedge \bar{j} = -\bar{j} \wedge \bar{i} = \bar{k}, \bar{j} \wedge \bar{k} = -\bar{k} \wedge \bar{j} = \bar{i}, \bar{k} \wedge \bar{i} = -\bar{i} \wedge \bar{k} = \bar{j}.$

7. Podać charakterystyczną różnicę między iloczynami:

$$\vec{r} \cdot (\vec{p} \wedge \vec{q}) \quad , \quad \vec{p} \cdot (\vec{q} \wedge \vec{r}) \quad , \quad \vec{q} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{p})$$

Odp.: Każdy z podanych iloczynów jest wektorem, ale innym: pierwszy  $\vec{r} \cdot (\vec{p} \wedge \vec{q})$  jest równoległy do  $\vec{r}$ , drugi  $\vec{p} \cdot (\vec{q} \wedge \vec{r})$  jest równoległy do  $\vec{p}$ , trzeci  $\vec{q} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{p})$  jest równoległy do  $\vec{q}$ . Przemiana cykliczna nie prowadzi tu do żadnej zależności charakterystycznej.

1 2 3    2 3 1    3 1 2

8. Wykazać równość:  $\vec{r} \cdot \vec{p} \wedge \vec{q} = \vec{p} \cdot \vec{q} \wedge \vec{r} = \vec{q} \cdot \vec{r} \wedge \vec{p}$ ; zbadać znaczenie takiego iloczynu.

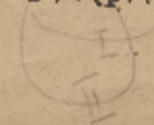
Odp.: Iloczyn powyższy jest skalarom; z powodu cyklicznej zmiany kolejności znak algebraiczny jest zachowany. Niech będzie  $\vec{p} \wedge \vec{q} = \vec{s}$  to  $s = p \cdot q \cdot \sin(\vec{p}, \vec{q})$  zatem  $\vec{r} \cdot \vec{p} \wedge \vec{q} = \vec{r} \cdot \vec{s} = r \cdot s \cos(\vec{r}, \vec{s}) = p \cdot q \cdot r \cdot \sin(\vec{p}, \vec{q}) \cdot \cos(\vec{r}, \vec{s})$ . Ostatnie wyrażenie przedstawia najwidoczniej objętość równoległościanu o krawędziach  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ ; istotnie  $p \cdot q \sin(\vec{p}, \vec{q})$  jest polem jednej podstawy, a  $r \cdot \cos(\vec{r}, \vec{s})$  jest wysokością mierzona prostopadłe do tejże podstawy. Iloczyny następne przedstawiają tę samą objętość, przyczem podstawą jest  $|\vec{q} \wedge \vec{r}|$  względnie  $|\vec{r} \wedge \vec{p}|$ , a wysokością odpowiednia normalna.

$$\vec{r} \cdot \vec{p} \wedge \vec{q} = r \cdot p \cdot q \cdot \sin(\vec{p}, \vec{q}) \cdot \cos(\vec{r}, \vec{s})$$

9. Obliczyć iloczyn  $\vec{r} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{q})$ .

Odp.: Oznaczmy  $\vec{p} \wedge \vec{q} = \vec{s}$ ,  $s = p \cdot q \sin(\vec{p}, \vec{q})$ , to najwidoczniej  $\vec{r} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \vec{r} \wedge \vec{s}$  jest wektorem prostopadłym do  $\vec{s}$  czyli leżącym w płaszczyźnie wektorów  $\vec{p}$  i  $\vec{q}$ . Poszukiwany iloczyn będzie miał przeto formę  $a \cdot \vec{p} - b \cdot \vec{q}$ . Znajdziemy szczegółowy kształt tego wyrażenia następująco: Rozłożmy  $\vec{r}$  jak w równaniu 4. Wtedy będzie  $\vec{r} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{q}) = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \wedge \vec{s} = \vec{r}_2 \wedge \vec{s} + \vec{r}_3 \wedge \vec{s}$ , bo  $\vec{r}_1 \wedge \vec{s} = 0$ . Lecz  $\vec{r}_2 \wedge \vec{s}$  jest równoległe do  $\vec{p}$ , zaś  $\vec{r}_3 \wedge \vec{s}$  jest równoległe do  $\vec{q}$ ; Ponadto  $\vec{r}_2, \vec{s}, \vec{r}_2 \wedge \vec{s}$  tworzą układ prawy, zaś  $\vec{r}_3, \vec{s}, \vec{r}_3 \wedge \vec{s}$  układ lewy; wreszcie jest  $|\vec{r}_2 \wedge \vec{s}| = r_2 \cdot s \sin(\vec{r}_2, \vec{s}) = r_2 \cdot s$ ,  $|\vec{r}_3 \wedge \vec{s}| = r_3 \cdot s \sin(\vec{r}_3, \vec{s}) = r_3 \cdot s$ , albowiem kąt  $(\vec{r}_2, \vec{s}) = (\vec{r}_3, \vec{s}) = \frac{\pi}{2}$ . Wstawiając wartości  $r_2, r_3$  i  $s$  i nadając wektorem kierunku wersorów  $\frac{\vec{p}}{p}$  i  $-\frac{\vec{q}}{q}$  znajdziemy:  $\vec{r}_2 \wedge \vec{s} = \vec{p} \cdot q \cdot s \cos(\vec{q}, \vec{r}) = \vec{p} \cdot (\vec{q} \cdot \vec{r})$ ,  $\vec{r}_3 \wedge \vec{s} = -\vec{q} \cdot r \cdot p \cos(\vec{r}, \vec{p}) = -\vec{q} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{p})$ . Zatem ostatecznie jest:

$$\vec{r} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \vec{p} \cdot (\vec{q} \cdot \vec{r}) - \vec{q} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{p})$$

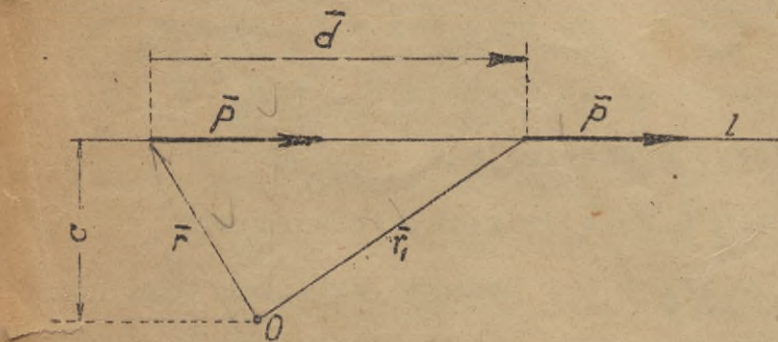


10. Wyznaczyć związek charakterystyczny dla iloczynu z zadania 9. przy cyklicznej przemianie czynników.

Odp.:  $\vec{r} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{q}) + \vec{p} \wedge (\vec{q} \wedge \vec{r}) + \vec{q} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{p}) = 0.$

§. 3. Wektory linjowe (osiowe).

1. Z definicji, podanej w §.1.wynika, że dwa wektory l i n j o w e są tylko wtedy sobie równe, gdy leżą na t e j s a m e j p r o s t e j, mają zgodne kierunki i równe wartości bezwzględne. Dla jednoznacznego określenia wektora linjowego trzeba przeto podać taką współrzędną, którąby z ogółu wektorów swobodnych, przynależnych zorjentowanemu kierunkowi w przestrzeni, wybrała tylko jeden taki wektor, względnie jedną taką prostą jako miejsce pobytu wektora linjowego. Że współrzędną tą nie może być j e d n a liczba algebraiczna - to jasne. Przypuśćmy bowiem, że jest nią oddalenie prostej danego wektora  $\vec{p}$  od punktu O, to jeszcze mamy do wyboru nieograniczoną ilość tworzących walca obrotowego, które podanej liczbie zadość czynią. Współrzędną ową musi być wielkość zorjentowana z punktu O zatem wektor. Gdyby wektor  $\vec{p}$  był wektorem nieswobodnym, to współrzędną kierunkową mógłby być wektor  $\vec{r}$ , łączący punkt określony O z ustalonym punktem początkowym wektora; dla wektora linjowego byłby to jednak sposób zanadto krępujący, gdyż równie dobrze - w myśl definicji - mógłby tę współrzędną określić wektor  $\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{d}$ , przyczem  $\vec{d}$  jest dowolnym wektorem położony na prostej l wektora linjowego  $\vec{p}$  (rys.17.). Okazuje się, że



Rys. 17.

taka współrzędną, pozwalającą wektorowi  $\vec{p}$  dowolnie przesuwać się wzdłuż jego prostej l, istnieje. Utwórzmy mianowicie iloczyn wektorjalny  $\vec{m} = \vec{p} \wedge \vec{r}$  a nadto iloczyn  $\vec{p} \wedge \vec{r}_1$ ; otóż  $\vec{p} \wedge \vec{r}_1 = \vec{p} \wedge (\vec{r} + \vec{d}) = \vec{p} \wedge \vec{r} = \vec{m}$ , albowiem z powodu równoległości  $\vec{p}$  i  $\vec{d}$  jest  $\vec{p} \wedge \vec{d} = 0$ . Zatem  $\vec{m}$  nie

$$\vec{p} \wedge \vec{r}_1 = \vec{p} \wedge (\vec{r} + \vec{d}) = \vec{p} \wedge \vec{r} + \vec{p} \wedge \vec{d} = \vec{m} + 0 = \vec{m}$$

$r_1$  obrotowe

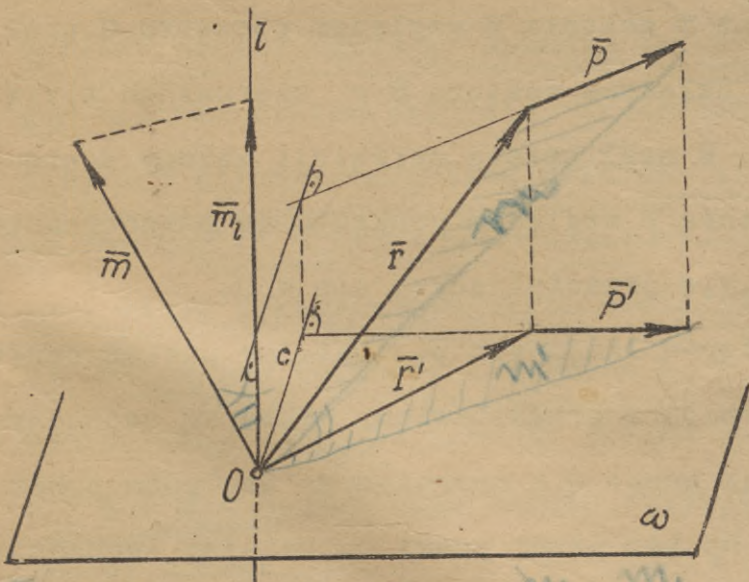
zależy od położenia wektora  $\vec{p}$  na jego prostej; może przeto najkorzystniej służyć za uogólnioną współrzędną tegoż wektora. Znakujemy wyraźnie:

$$\vec{m} = \vec{p} \wedge \vec{r} = M_0(\vec{p})$$

i czytamy iloczyn wektorjalny  $\vec{p} \wedge \vec{r}$  jest momentem wektora  $\vec{p}$  względem środka  $O$ . Wykazaliśmy, że wektor linjowy  $\vec{p}$  jest w stosunku do punktu  $O$  zupełnie określony wektorem swobodnym, geometrycznie równoważnym i swym momentem względem tegoż punktu  $O$ . Zatem dwa wektory linjowe  $\vec{p}, \vec{m}$  i  $\vec{q}, \vec{n}$  są równowarte, gdy ich wektory swobodne i ich momenty względem tego samego punktu są równe, tj. gdy  $\vec{p} = \vec{q}$  i  $\vec{m} = \vec{n}$ . Oczywiście  $\vec{p}$  i  $\vec{m}$  są wektorami różnego typu (wymiaru). Skoro  $\vec{m}$  jest momentem wektora  $\vec{p}$ , to absolutnie musi być  $\vec{p} \cdot \vec{m} = 0$ . Liczebną wartość momentu  $m = p \cdot r \cdot \sin(\vec{p}, \vec{r})$  najprościej przedstawia iloczyn  $p \cdot c$ , gdzie tzw.  $r$  a m i ę  $c = r \cdot \sin(\vec{p}, \vec{r})$  jest odległością punktu  $O$  od prostej  $l$  wektora  $\vec{p}$ . Istotnie  $p \cdot c$  jest polem równoległoboku, scharakteryzowanego

w ust. 14.c. Moment wektora względem punktu znika, gdy środek momentu leży na prostej wektora  $\vec{p}$ , wtedy bowiem jest  $\vec{p} \parallel \vec{r}$ .

2. Niech będzie dany wektor  $\vec{p}$  i prosta  $l$ . Obieźmy na niej dowolny punkt  $O$  (rys. 18.); obliczmy i skonstruujmy  $\vec{m} = \vec{p} \wedge \vec{r}$ ; rzućmy  $\vec{m}$  na prostą  $l$ , zaś  $\vec{p}$  i  $\vec{r}$  na płaszczyznę  $\omega$ , o normalnej  $l$ . Otrzymany rzut  $\vec{m}_1$  będziemy nazywać momentem wektora  $\vec{p}$



Rys. 18.

$p \cdot r = m \cos \alpha$   
 $m_L = m \cos \alpha$   
 =  $m \cdot \frac{m_L}{m}$

$$\vec{m}_1 = M_1(\vec{p}) = \vec{p} \wedge \vec{r}' = R_1(\vec{m}) = M_0(\vec{p}')$$

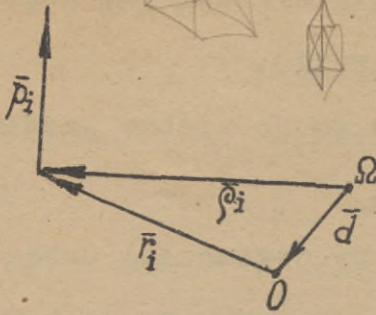
Żeby wprowadzona wielkość miała wogóle sens, musimy wykazać, że jest ona od obrotu  $O$  niezależna wektorjalnie. Otóż (a) prosta wektora  $\vec{m}_1$  jest określona, poza-tem  $\vec{p}', \vec{r}', \vec{m}_1$  tworzyć muszą układ prawy (b) - stąd wynika kierunek, wreszcie

$$m_1 = p c \sin(\vec{p}, l)$$

zauważmy, że kąt  $(\bar{m}, \bar{m}_1)$  jest równe kątowi zawartemu między płaszczyznami  $(\bar{p}, \bar{r})$  i  $\omega$ , przeto  $m_1 = m \cdot \cos(\bar{m}, \bar{m}_1)$  wyraża rzut pola równoległoboku  $(\bar{p}, \bar{r})$  na płaszczyznę  $\omega$ , ten rzut zaś jest niezależny od obioru punktu O i jest faktycznie równy polu równoległoboku  $(\bar{p}', \bar{r}')$  - stąd zaś wynika wartość nowego wektora (c). W powyższym dowodzeniu tkwi dwojaki sposób obliczania momentu wektora względem prostej, albo mianowicie jest  $\bar{m}_1 = R_1[M_0(\bar{p})]$ , albo też  $\bar{m}_1 = M_0[R_\omega(\bar{p})]$ . Liczebną wartość najprościej obliczymy następująco  $m_1 = p' \cdot r' \cdot \sin(\bar{p}', \bar{r}') = p' \cdot c = p \cdot \cos(\bar{p}, \omega) \cdot c = p \cdot c \cdot \sin(\bar{p}, l)$ , przyczem c jest najkrótszą odległością między prostą  $\bar{p}$  i osią l. Najwidoczniej moment wektora względem prostej znika, gdy oboje tworzą jedną płaszczyznę tj. przecinają się lub są wzajemnie równoległe. Z podanej obecnie definicji wprost wynika, że momenty kilku wektorów  $\bar{p}_i$  względem tej samej prostej dodają się algebraicznie; w tym wypadku korzystnym jest ich wartościom  $m_{i1}$  udzielić znaków algebraicznych, odróżniając w ten sposób wektory  $\bar{m}_{i1}$  zgodnie i niezgodnie skierowane.

Przypuśćmy, żeśmy obliczyli moment  $\bar{m}$  wektora  $\bar{p}$  względem początku O prostokątnego układu współrzędnych x, y, z. Składowe wektora  $\bar{m}$  w kierunkach x, y, z tj.  $\bar{m}_x, \bar{m}_y, \bar{m}_z$  są rzutami  $\bar{m}$  na owe osie. W myśl przeto definicji możemy powiedzieć, że składowe  $\bar{m}_x, \bar{m}_y, \bar{m}_z$  momentu wektora  $\bar{p}$  względem punktu O są równocześnie momentami tegoż wektora względem osi x, y, z przecinających się w O.

3. Niech będzie danym układ wektorów linjowych  $\bar{p}_i$ . Ustalmy pewien punkt O, to każdy z wektorów linjowych wyczerpująco przedstawiony wektorem swobodnym  $\bar{p}_i$  dowolnie umieszczonym, więc np. przez punkt O i momentem  $\bar{m}_i$  <sup>jego</sup> względem punktu O, umieszczonym również dowolnie zatem np. też przez punkt O. Dodając swobodnie oba typy wektorów otrzymamy ogólną sumę geometryczną układu  $\bar{p} = \sum_i \bar{p}_i$  i ogólny moment układu  $\bar{m} = \sum_i \bar{m}_i$ , przyczem  $\bar{m}_i = \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i$ . Należy z naciskiem podkreślić, że ogólna suma  $\bar{p}$  i ogólny moment  $\bar{m}$  nie są w wypadku najogólniejszym wzajemnie do siebie prostopadłe, jakkolwiek dla poszczególnych dwójek  $\bar{p}_i$  i  $\bar{m}_i$  z pewnością tak jest - co gdzieindziej już wykazano. Aby zbadać charakterystyczne własności  $\bar{p}$  i  $\bar{m}$  wykonamy transformację;



Rys. 19.

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \bar{p} \wedge \bar{s} = \bar{p} \wedge (\bar{r} + \bar{d}) = \\ &= \bar{p} \wedge \bar{r} + \bar{p} \wedge \bar{d} = \bar{m} + \bar{p} \wedge \bar{d} \end{aligned}$$

przyjmujemy nowy punkt  $\Omega$  zamiast  $O$  tak, że promień-wektor  $\bar{r}_i$  zmieni się na  $\bar{r}'_i = \bar{r}_i + \bar{d}$ . (rys.19.).

Najwidoczniej suma ogólna  $\bar{p} = \sum_i \bar{p}_i$  nie ulegnie zmianie czyli jest ona (ściśle rzecz biorąc jej kwadrat) niezmiennikiem układu dla przewidzianej transformacji. Ogólny moment wynosi

$$\begin{aligned} \text{obecnie } \bar{\mu} &= \sum_i \bar{\mu}_i = \sum_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}'_i = \sum_i \bar{p}_i \wedge (\bar{r}_i + \bar{d}) = \\ &= \sum_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i + \left( \sum_i \bar{p}_i \right) \wedge \bar{d} = \bar{m} + \bar{p} \wedge \bar{d} \end{aligned}$$

Zatem nowy moment ogólny wzrósł o moment ogólnej sumy  $\bar{p}$  umieszczonej w  $O$

względem  $\Omega$ . Przedyskutujemy ostatni wzór. Założymy przypadek najogólniejszy

$\bar{p} \neq 0, \bar{m} \neq 0$ . a) Będzie  $\bar{\mu} = \bar{m}$  jeśli będzie  $\bar{d} \parallel \bar{p}$ ; tzn. ogólny moment nie ulega zmianie jeśli środek  $O$  względnie  $\Omega$  przesuwamy równoległe do kierunku ogólnej sumy.

b) Przy dowolnym  $\bar{d}$  jest  $\bar{p} \cdot \bar{m} = \bar{p} \cdot \bar{\mu} = k = \text{stała}$ ; istotnie bowiem  $\bar{p} \cdot (\bar{p} \wedge \bar{d}) = 0$ , bo  $\bar{p}$  jest równoległe do  $\bar{p} \wedge \bar{d}$ . Zatem: podczas zmiany środka iloczyn skalarowy ogólnej sumy i ogólnego momentu zachowuje stałą wartość. Jest on przeto drugim niezmiennikiem przyjętej transformacji. Liczbę  $k$  nazywać będziemy wyróżnikiem lub parametrem układu wektorów linjowych.

c) Jeżeli  $\bar{p} = \bar{0}$  to  $\bar{\mu} = \bar{m} = \text{stała}$  tj. gdy suma ogólna zanika, to moment ogólny jest stały wektorjalnie czyli niezależny od obioru środka.

d) Dwa układy wektorów linjowych  $\bar{p}_i$  i  $\bar{q}_j$  nazywamy równowartymi, gdy mają równe ogólne sumy i ogólne momenty układu ze względu na ten sam środek  $O$  tj., gdy  $\bar{p} = \bar{q}$  i  $\bar{m} = \bar{n}$ . Gdy suma układu zanika, to układ wystarczająco charakteryzuje ogólny moment.

e) Gdy  $\bar{p} = \bar{0}$  i  $\bar{m} = \bar{0}$  nazywamy układ równowartym zeru albo zerowym.

f) Dowolny układ nie ulega zmianie jeśli do niego dodamy układ równowarty zeru.

4. Rozróżniamy następujące układy wektorów linjowych:

- a) ogólny -  $\alpha$ ) przestrzenny lub  $\beta$ ) płaski
- b) równoległy -  $\alpha$ ) przestrzenny lub  $\beta$ ) płaski
- c) środkowy czyli zbieżny -  $\alpha$ ) przestrzenny lub  $\beta$ ) płaski



- a) Wektory układu niczem się w stosunku do siebie nie wyróżniają; więc np. w przestrzeni są one względem siebie skośne (wichrowate).
- b) Wszystkie bez wyjątku wektory układu są do siebie wzajemnie równoległe i to zgodnie lub niezgodnie.
- c) Proste wszystkich bez wyjątku wektorów przechodzą przez jeden punkt. Pozatem układ jest płaski, gdy wszystkie bez wyjątku wektory układu leżą w jednej płaszczyźnie; w przeciwnym wypadku jest układ przestrzennym.

5. Pod redukcją układu wektorów linjowych rozumiemy znalezienie układu równowartego możliwie prostego. W myśl 3.d. będzie ów układ zredukowany miał sumę geometryczną  $\bar{p}$  i moment ogólny  $\bar{m}$ . Zachodzi pytanie czy  $\bar{p}$  i  $\bar{m}$  nie dadzą się sprowadzić do jednego wektora. Odpowiedź tkwi w ust.1. Jeśli mianowicie będzie  $\bar{p} \perp \bar{m}$  to taki wektor istnieje i musi nim być  $\bar{p}$ , gdyż inaczej nie byłby spełniony pierwszy warunek równowartości układu. W wypadku omawianym jest wyróżnik układu zerem tj.  $k = \bar{p} \cdot \bar{m} = 0$ . Założywszy  $\bar{p} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{m} \neq \bar{0}$  dla pewnego punktu  $O$  i  $k = 0$  widzimy, że najoczywiściej układ, złożony z wektorów linjowych  $\bar{p}_i$  i układ, złożony z jednego wektora  $\bar{p}$ , są układami równowartymi, albowiem jest  $\bar{p} = \sum_i \bar{p}_i$ , zaś równanie  $\bar{m} = \sum_i \bar{m}_i = \sum_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = \bar{p} \wedge \bar{r}$  jest z tytułu  $k = 0$  i ustalenego jednoznacznie  $\bar{p}$  względem  $\bar{r}$  rozwiązalne. Otrzymamy wprowadzić cały zbiór wartości  $\bar{r}$ , ale takiego rodzaju, że będą one tylko przesuwac wektor linjowy  $\bar{p}$  wzdłuż jego prostej (ust.1.). Zatem rzeczywiście badany układ redukuje się do jednego wektora  $\bar{p}$ , którego położenie reguluje uogólniona współrzędna - ogólny moment układu  $\bar{m}$ . Ową własność  $\bar{m}$ , tkwiącą w równaniu:

$$\sum_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = \bar{p} \wedge \bar{r}, \text{ gdy } k = \bar{p} \cdot \bar{m} = 0; \bar{p} \neq \bar{0}, \bar{m} \neq \bar{0}$$

możemy wysłowić następująco: Gdy przy znikającej ogólnej sumie geometrycznej  $\bar{p}$  znika wyróżnik  $k$  układu - to suma geometryczna momentów wszystkich dodajników-vektorów  $\bar{p}_i$  jest rów-

na momentowi tej sumy  $\bar{p}$  ze względu na ten sam punkt O. Nawiązując do ust.2 i ust.11 z §.2. możemy w omawianym wypadku wygłosić też twierdzenie następujące: gdy  $\bar{p} \neq 0$ , a  $k = 0$  - to suma algebraiczna momentów wektorów dodajników względem prostej l jest równą momentowi sumy geometrycznej dodajników względem tej samej prostej. Punkt O nazywamy środkiem redukcji. Gdy przypadkiem  $\bar{m} = \bar{0}$  to najwidoczniej wektor zredukowany  $\bar{p}$  przechodzi dokładnie przez przyjęty środek O. Wypadek dyskutowany w obecnym ustępie <sup>zajść</sup> może w wszystkich alternatywach, wymienionych w 4. zależnie od warunków zadania. Z pewnością zaś stale ma on miejsce dla układu zbieżnego. Przyjmijmy bowiem bez ujmy, że początki wszystkich wektorów pokrywają się z wierzchołkiem pęku, to najwidoczniej dla wszystkich wektorów  $\bar{p}$  tego układu jest  $\bar{r}_i = \bar{r} = \text{stałej}$ ; zatem  $\sum_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = (\sum_i \bar{p}_i) \wedge \bar{r} = \bar{p} \wedge \bar{r}$  czyli powyższe równanie warunkowe staje się tu tożsamością na podstawie twierdzenia o rozdzielności mnożenia wektorjalnego. Zatem wektor zredukowany układu środkowego przechodzi zawsze przez środek zbieżności tego układu. Poza to - o ile, jak podkreślono  $\bar{p} \neq \bar{0}$  - może się też tak zdarzyć w układzie równoległym, skoro takowy możemy uważać za pęk zbieżny o środku oddalonym o nieskończoność; jeśli układ równoległy składa się z wektorów zgodnie skierowanych to oczywiście zawsze jest  $\bar{p} \neq \bar{0}$ . Jednakże w układzie równoległym nie jest równanie dyskutowane identycznością. Że w układzie równoległym jest faktycznie  $\sum_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = \bar{p} \wedge \bar{r}$ , gdy  $\bar{p} \neq \bar{0}$  wykażemy udowadniając równość  $\bar{p} \cdot \bar{m} = 0 = k$  dla takiego układu. W tym celu niech wektorem kierunku dodatniego będzie  $\bar{\lambda}$ , wtedy  $\bar{p}_i = \bar{\lambda} \cdot p_i$ , przy czym  $p_i$  jest algebraiczną wartością wektora, zaś  $\bar{p} = \sum_i \bar{p}_i = \bar{\lambda} \cdot \sum_i p_i = \bar{\lambda} \cdot p$ . Poza to  $\bar{m}_i = \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = \bar{\lambda} p_i \wedge \bar{r}_i = \bar{\lambda} \wedge p_i \bar{r}_i$  czyli  $\bar{m} = \sum_i \bar{m}_i = \bar{\lambda} \wedge \sum_i p_i \bar{r}_i$ . Zatem  $k = \bar{p} \cdot \bar{m} = p \cdot \bar{\lambda} \cdot \bar{\lambda} \wedge \sum_i p_i \bar{r}_i$ . Ostatni iloczyn można cyklicznie przedkształcić (ćwiczenie 8, §.2) zaczem  $k = \bar{p} \cdot \bar{m} = p \sum_i p_i \bar{r}_i \cdot \bar{\lambda} \bar{\lambda}$ ; lecz  $\bar{\lambda} \bar{\lambda} = 0$  czyli  $k = \bar{p} \cdot \bar{m} = 0$ . Wreszcie dla każdego układu płaskiego jest  $k = 0$ , albowiem, przyjąwszy np. w płaszczyźnie układu środek redukcji widzimy, że wszystkie  $\bar{m}_i$  są do siebie równoległe a prostopadłe do płaszczyzny układu, w której leży wektor swobodny  $\bar{p}$ ; zatem i  $\sum_i \bar{m}_i = \bar{m}$  jest

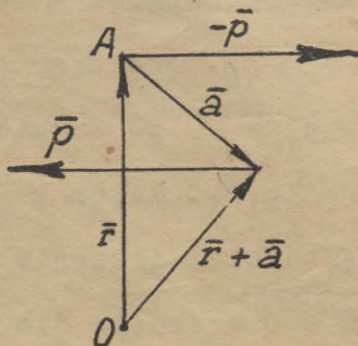
wektorem prostopadłym do  $\bar{p}$ ; jeśli przeto  $\bar{p} \neq 0$ , to oba wektory swobodne  $\bar{p}$  i  $\bar{m}$  określają w płaszczyźnie układu wektor zredukowany - linjowy  $\bar{p}$ . Dowód ogólniejszy dla dowolnego środka przedstawia się następująco: W iloczynie  $k = \bar{p} \cdot \bar{m} = \sum_i \bar{p}_i \sum_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i$  występują dodajniki typów:  $\bar{p}_i \cdot \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = \bar{r}_i \cdot \bar{p}_i \wedge \bar{p}_i = \bar{r}_i \cdot 0 = 0$ , nadto:  $\bar{p}_i \cdot \bar{p}_k \wedge \bar{r}_k + \bar{p}_k \cdot \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = \bar{r}_k \cdot \bar{p}_i \wedge \bar{p}_k + \bar{r}_i \cdot \bar{p}_k \wedge \bar{p}_i = \bar{r}_k \cdot \bar{p}_i \wedge \bar{p}_k - \bar{r}_i \cdot \bar{p}_i \wedge \bar{p}_k = (\bar{r}_k - \bar{r}_i) \cdot \bar{p}_i \wedge \bar{p}_k = 0$  albowiem  $(\bar{r}_k - \bar{r}_i)$  leży w płaszczyźnie wektorów a  $\bar{p}_i \wedge \bar{p}_k$  jest prostopadłe do tej płaszczyzny, a zatem i do  $(\bar{r}_k - \bar{r}_i)$ . Skoro zaś wszystkie dodajniki znikają, to znika i wyróżnik i wobec tego jest  $\sum_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = \bar{p} \wedge \bar{r}$  przy  $\bar{p} \neq 0$ .

Akcentowane stałe założenie  $\bar{p} \neq 0$  nie jest koniecznem; możnaby przy  $\bar{p} = 0$  i oczywiście  $\bar{m} \neq 0$  przyjąć  $\bar{r} \rightarrow \infty$ . Prostą, na której leży  $\bar{p}$  nazywamy osią układu; w wypadku  $\bar{p} = 0$ ,  $\bar{m} \neq 0$  możemy powiedzieć, że oś układu leży w nieskończoności.

Przeprowadzone w ust. 5. rozważania mają swój sens tylko wtedy, gdy  $k = 0$ .

Skoro  $k \neq 0$  to dysponujemy wprowadzić ogólną sumą układu  $\bar{p}$  i ogólnym momentem układu  $\bar{m}$  tj. dwiema współrzędnymi geometrycznymi, ale z powodu swobodnego ich charakteru a różnych typów nie mamy stąd - przynajmniej narazie - żadnej korzyści dla celów redukcji. Z tego powodu w dalszym ciągu unieruchomimy  $\bar{p}$ , a wielkości  $\bar{m}$  nadamy nowe znaczenie; zrobimy to zaś tak, by rozważania obecnego ustępu tj. przypadek  $k=0$  nie poniósł na tem żadnej szkody. W tym celu zbadamy wpierw przypadek 3.c.

6. Weźmy pod uwagę następujący układ wektorów linjowych (rys. 20.).

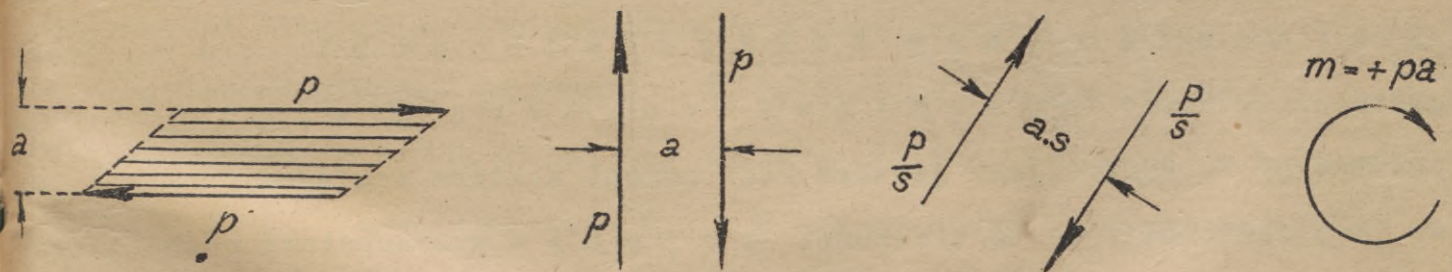


Rys. 20.

Proste obu są wzajemnie równoległe, strzałki przeciwne, bezwzględne wartości równe. Układ taki, posiadający niezwykle doniosłe znaczenie dla mechaniki, nazywamy parą wektorów. Suma pary wektorów jest najoczywiściej stałe równą zeru. Jednakże układ nie jest równowarty zeru, albowiem ogólny moment układu nie znika. Wynosi on:

$$\bar{m} = -\bar{p} \wedge \bar{r} + \bar{p} \wedge (\bar{r} + \bar{a}) = \bar{p} \wedge \bar{a}$$

zatem faktycznie jest on niezależny od obioru środka  $O$ ; jego prosta jest prostopadła do płaszczyzny pary  $\vec{p}, -\vec{p}$ . Rezultat  $\vec{p} \wedge \vec{a}$  mówi, że najprościej obliczymy  $\vec{m}$  obierając za środek punkt  $A$ , wtedy moment od  $-\vec{p}$  znika, zaś  $\vec{p}$  daje moment  $\vec{p} \wedge \vec{a}$ . Stwierdziliśmy, że moment pary wektorów jest wielkością dostatecznie charakteryzującą parę wektorów. Jeśli parę przesuniemy na inną płaszczyznę równoległą do pierwotnej, jeśli parę w tej lub w innej równoległej płaszczyźnie obrócimy, jeśli zwiększając  $p$  w tym samym stosunku zmniejszymy  $a$ , czyli - co na jedno wyjdzie - odstęp między wektorami pary lub też naodwrot zmniejszając  $p$  zwiększymy odpowiednio  $a$  - to w każdym z tych wypadków  $\vec{m}$  nie ulegnie zmianie, albowiem prosta  $\vec{m}$  pozostanie równoległą do pierwotnej, jej strzałka nie ulegnie zmianie, wielkość bezwzględna pozostanie tasama. Moment pary wektorów jest wektorem swobodnym. Pary przedstawione na rys.21. są między sobą identyczne. Pary, leżące w tej samej płaszczyźnie oznaczamy w technice łukami ze zwrotami; oczywiście istnieją wtedy pary zgodne lub niezgodne; korzystnym jest ich wartości traktować algebraicznie. Moment pary określa najprościej pole równoległoboku.

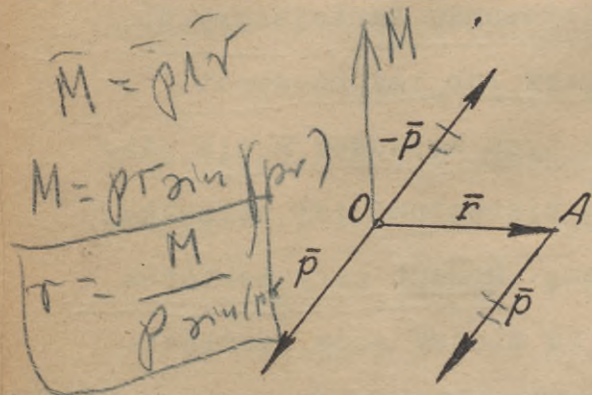


Rys. 21.

Momenty par jako wektory swobodne można oczywiście zredukować; redukcja polega w tym wypadku wprost na dodaniu geometrycznym wszystkich par  $\vec{m}_i$  (§.2.ust.6.). Wracając do ust.3.c.możemy stwierdzić, że w wypadku  $\vec{p} = \vec{0}$ ,  $\vec{m} \neq \vec{0}$  układ redukuje się do pary wektorów, o momencie  $\vec{m}$ . Oczywiście musimy wykazać dla zupełności, że ogólny moment układu w tym wypadku jest faktycznie wielkością geometrycznie równą momentowi pary; albowiem przy definiowaniu układu w ust.3. wogóle nie zaznaczono, że składa się on z par wektorów. W tym celu wpierw wykazemy, że nie zmie-

niając ilościowo wielkości  $\bar{p}$ ,  $\bar{m}$  ust.1., możemy wektorowi  $\bar{m}$  nadać nowe znaczenie i to tak, że  $\bar{p}$  wraz z ilościowo innym  $\bar{m}$  określi tenże sam wektor linjowy  $\bar{p}$ . Sprawa ma na przyszłość pierwszorzędne znaczenie.

7. Przyjmijmy w płaszczyźnie rysunku punkt O i wektor linjowy  $\bar{p}$  przechodzący przez A. Moment jego względem O wynosi  $\bar{m} = \bar{p} \wedge \bar{r}$ . Zróbmy użytek z twierdzenia 3.f. i dołączmy do  $\bar{p}$  układ zerowy  $\bar{p}$ ,  $-\bar{p}$  przez punkt O (rys.22.



Rys. 22.

Wektory  $\bar{p}$  przez A i  $-\bar{p}$  przez O tworzą parę wektorów ; z powodu specjalnie ułożonego układu zerowego (tj. akurat przez punkt O) wynosi moment pary według ust.6.  $\bar{p} \wedge \bar{r}$ , to znaczy tyle samo i moment wektora  $\bar{p}$  przez A względem O. Z trzech wektorów układu pozostał jeszcze wektor  $\bar{p}$  przez O. Uzyskaliśmy w ten sposób nowy sposób przedstawienia wektora linjowego  $\bar{p}$ . W e k t o r

linjowy  $\bar{p}$  jest w stosunku do punktu O zupełnie określony geometrycznie równym wektorem przez punkt O i momentem pary wektorów ; moment pary jest geometrycznie równy momentowi wektora  $\bar{p}$  względem O czyli  $\bar{m} = \bar{p} \wedge \bar{r}$ . Podkreślamy jeszcze raz: moment wektora względem punktu i moment pary wektorów - są to wielkości ilościowo zupełnie różne ; przypadkowo mogą ich wektory być sobie równe - jak to obecnie miało miejsce. Moment wektora względem punktu ( także i prostej ) ma znaczenie uogólnionej współrzędnej ; moment pary wektorów jest obok wektora drugim podstawowym pojęciem układu wektorów linjowych. Oczywiście sprawę można przedstawić odwrotnie: Dany wektor  $\bar{p}$  i moment pary  $\bar{m} \perp \bar{p}$  można zawsze zredukować do jednego wektora  $\bar{p}$ , równoległego ułożonego względem pierwszego; w tym celu trzeba  $\bar{m}$  zamienić na parę wektorów  $\bar{p}$ ,  $-\bar{p}$  i jej płaszczyznę umieścić przez dany wektor  $\bar{p}$ .

8. Po wyjaśnieniach ust.6.i 7. możemy wrócić do sprawy redukcji układu



wektorów linjowych  $\bar{p}_i$ . Przyjmijmy w tym celu środek redukcji  $O$  i dołączmy w punkcie  $O$  dla każdego wektora  $\bar{p}_i$  układ zerowy jak w ust.7. Otrzymamy w ten sposób układ zbieżny  $\bar{p}_i$  w środku  $O$  i układ par o momentach  $\bar{m}_i$ . Układ zbieżny ma sumę geometryczną  $\bar{p} = \sum_i \bar{p}_i$  w punkcie  $O$ ; układ wektorów swobodnych ma sumę geometryczną  $\bar{m} = \sum_i \bar{m}_i = \sum_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i$ . Ilościowo nie będzie się  $\bar{p}$  i  $\bar{m}$  różnić niczem od ogólnej sumy i ogólnego momentu podanych <sup>w</sup>ust.3. względnie 5. Jednakże obecnie  $\bar{p}$  jest wektorem, przechodzącym bezwarunkowo przez  $O$  - podczas gdy poprzednio był to wektor swobodny;  $\bar{m}$  jest i było wektorem swobodnym, ale obecnie jest to moment ogólnej pary, podczas gdy poprzednio w najlepszym wypadku tj. dla  $k = 0$  mógł to być moment wektora  $\bar{p}$  względem  $O$  - a ogólnie była to wielkość geometryczna bez szczególnego znaczenia dla jednego układu. W przypadku  $k = 0$ , obszernie przedyskutowanym w ust.5., możemy oczywiście korzystać z obu znaczeń  $\bar{m}$ ; w myśl ust.7. doprowadzi to do zgođnego zawsze efektu końcowego tj. do wektora linjowego  $\bar{p}$ .

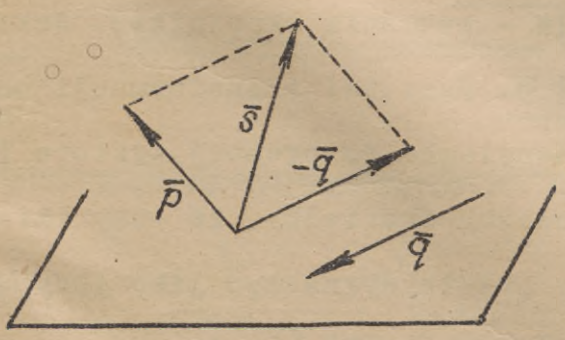
9. W wypadku najogólniejszym  $k \neq 0$  układ redukuje się zatem do ogólnej sumy  $\bar{p}$  przez  $O$  i ogólnej pary o momencie  $\bar{m}$ , przy czym  $\bar{p}$  i  $\bar{m}$  są względem siebie nachylone. Dlaśca redukcja nie jest celową, ale możemy ją sobie wyobrazić następująco: Przyjmijmy zamiast momentu  $\bar{m}$  parę wektorów o dowolnych składowych  $q, -q$  tak oddalonych wzajemnie o  $\bar{a}$ , by było  $q \wedge \bar{a} = \bar{m}$ ; umieścmy tę parę w płaszczyźnie prostopadłej do  $\bar{m}$  tak, by jeden z jej dodajników np.  $-q$  przeciął się z wektorem  $\bar{p}$  (rys.23.). Obecnie  $\bar{p}$  i  $-q$  możemy dodać i otrzymamy wektor  $\bar{s}$ . W ten

sposób układ  $\bar{p}, \bar{m}$  sprowadza się do dwóch wektorów  $q, \bar{s}$  tego samego typu.

10. S t r e s z c z e n i e. Dla układu wektorów linjowych  $\bar{p}_i$  obliczone ogólną sumę geometryczną  $\bar{p}$  i ogólny moment układu  $\bar{m}$  ze względu na środek redukcji  $O$ .

a) Gdy  $\bar{p} \neq \bar{0}, \bar{m} \neq \bar{0}, k \neq 0$  układ sprowadza

się do wektora  $\bar{p}$  przez  $O$  i momentu pary  $\bar{m}$  lub też do dwóch wektorów skośnych



Rys.23.

$\bar{q}$  i  $\bar{s}$  tego samego typu. Zdarzyć się to może tylko dla układu  $a, \alpha$  (ust.4.).

b) Gdy  $\bar{p} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{m} \neq \bar{0}$ ,  $k = 0$  układ sprowadza się do wektora  $\bar{p}$ ; jego prostą ustala  $\bar{m}$ , któremu możemy nadać dwojakie znaczenie (ust.5 i 7). Wypadek ten zdarzyć się może dla wszystkich układów  $a, b, c$  (ust.4)  $\alpha$  lub  $\beta$ .

c) Gdy  $\bar{p} = \bar{0}$ ,  $\bar{m} \neq \bar{0}$  układ sprowadza się do momentu  $\bar{m}$  pary wektorów  $\bar{q}$ ,  $-\bar{q}$ . Zdarzyć się to może dla układów  $a, b$  (ust.4)  $\alpha$  lub  $\beta$ .

d) Gdy  $\bar{p} = \bar{0}$  i  $\bar{m} = \bar{0}$  układ sprowadza się do zera czyli jest układem równowartym zera. Stać się to może dla wszystkich układów  $a, b, c$  (ust.4.)  $\alpha$  lub  $\beta$ .

11. Redukcja zmierza do zmniejszenia ilości wektorów do liczbie możliwie najmniejszej. Obok redukcji stosuje się często t r a n s f o r m a c j ę czyli p r z e k s z t a ł c e n i e układu wektorów. Zarówno jedna operacja jak i druga opierają się na tem samym szablonie, a mianowicie na t w i e r d z e n i u 3.d; z tego powodu często różnice się zatracają. Punktem wyjścia dla transformacji jest obok tego twierdzenia wzór (ust.3.)

$$\bar{\mu} = \bar{m} + \bar{p} \wedge \bar{d}$$

względnie dokładniej zmiana środka  $O$ , jako ustalonego punktu w przestrzeni. Przez odpowiednie przyjęcie  $\Omega$  można często dojść do efektowniejszych wyników. Rozwiązania ust.9. prowadzą do wniosku, że w przypadku  $k \neq 0$  można  $\bar{p}$  i  $\bar{m}$  sprowadzić do dwóch wektorów skończonego momentu  $\bar{m}$ . Otóż zamiast tego można  $\bar{p}$  i  $\bar{m}$  sprowadzić do tzw. skrętnika  $\bar{p}$  i  $\bar{\mu} = f \cdot \bar{p}$  ( $f$  - wskaźnik skrętnika). Wektor  $\bar{\mu}$  - jak z powyższego wynika - leży na prostej  $\bar{p}$ . Przy tej transformacji chodzi zatem o taki obiór środka  $\Omega$ , by  $\bar{\mu}$  było równoległe do prostej wektora  $\bar{p}$ . Można wykazać, że obiór taki jest możliwy; zauważmy chociażby, że przy zmianie  $O$  na dowolne  $\Omega$   $\bar{p}$  nie ulega zmianie. Należy przeto wyznaczyć jako jedyną niewiadomą takie  $\bar{d}$ , by było  $\bar{\mu} \wedge \bar{p} = 0$ . Jeśli znajdziemy punkt  $\Omega$ , to tem samem określimy całą prostą takich punktów na podstawie twierdzenia 3.a. Prostą tę nazywamy osią środkową (centralną) układu wektorów linjowych. Prostą tę wyzna-

czyimy z korzyścią rachunkową w innym miejscu metodą analityczną. Tutaj tylko dodamy, że w ostatnim dziesiątku lat postępowano jeszcze dalej zastępując układ  $\bar{p}, \bar{\mu}$  pewną ilustracją geometryczną jednoznaczną ( $\bar{\mu}$  można w dalszym ciągu jeszcze przedstawiać różnymi parami i tego chciano uniknąć). Ilustrację tę stanowią dwie proste skośne (różne od naszych wektorów skośnych), zwane motorem; współrzędnymi motoru są  $\bar{p}$  i  $\overline{\text{tang} \varphi} = |\bar{\mu}|$ , ułożone na osi motoru tj. na prostej przecinającej prostopadle obie skośne motoru.

12. Obok redukcji i transformacji używamy często rozkładania wektora linjowego. Najczęściej stosuje się rozkład jak w ust. 7. §. 2. tj. na dwa wektory w płaszczyźnie i na trzy w przestrzeni. Oba zagadnienia można przeprowadzić jednoznacznie. Jedyna różnica między postępowaniem stosowanym do wektora swobodnego a dotyczącym wektora linjowego polega na tem, że składowe uzyskane z wieloboku wektorów musi się przenieść do planu nie w dowolny sposób, lecz tak, by składowe wraz z danym wektorem przecinały się w jednym punkcie jego prostej zresztą dowolnym. Dla rozkładu na dwie składowe jest to jasne, albowiem wektor suma przechodzi przez punkt przecięcia się wektorów dodajników. Przy rozkładzie na trzy wektory w przestrzeni podany warunek nie jest konieczny, ale jest najprostszymi z innych możliwych.

Przykłady ćwiczeń redukcji układów wektorów linjowych będą podane w rozdziale II-im.

---

#### §. 4. Analityczna teoria wektorów.

---

1. Wektor swobodny  $\bar{p}$  określają w układzie analitycznym  $x, y, z$  składowe  $\bar{p}_x = \bar{i} \cdot p_x, \bar{p}_y = \bar{j} \cdot p_y, \bar{p}_z = \bar{k} \cdot p_z$  (rys. 12.), przy czem  $p_x, p_y, p_z$  są algebraicznymi wartościami rzutów wektora  $\bar{p}$  na osie układu. Oznaczmy kąty nachylenia wektora  $\bar{p}$  względem osi układu przez  $\alpha, \beta, \gamma$  to najwidoczniej jest :

$$\boxed{p_x = p \cdot \cos \alpha, \quad p_y = p \cdot \cos \beta, \quad p_z = p \cdot \cos \gamma}$$

Nadwrot znajdziemy :

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{p_x}{p}, \quad \cos \beta = \frac{p_y}{p}, \quad \cos \gamma = \frac{p_z}{p}$$

przyczem - jak wiadomo -  $\alpha, \beta, \gamma$  nie są wzajemnie niezależne, gdyż :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Zatem trzy niezależne liczby algebraiczne określają w zupełności wektor swobodny. Wektor swobodny  $\bar{m}$  o składowych  $\bar{m}_x = \bar{i} \cdot m_x$ ,  $\bar{m}_y = \bar{j} \cdot m_y$ ,  $\bar{m}_z = \bar{k} \cdot m_z$  określają wystarczająco również trzy liczby algebraiczne:

$$m_x = m \cdot \cos \lambda, \quad m_y = m \cdot \cos \mu, \quad m_z = m \cdot \cos \nu$$

gdzie  $\lambda, \mu, \nu$  określają kierunek wektora  $\bar{m}$ ; inną trójką jest :

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}, \quad \cos \lambda = \frac{m_x}{m}, \quad \cos \mu = \frac{m_y}{m}, \quad \cos \nu = \frac{m_z}{m}$$

przyczem :

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1.$$

Określenie wektora jego składowymi jest symetryczne i wygodne w rachunku.

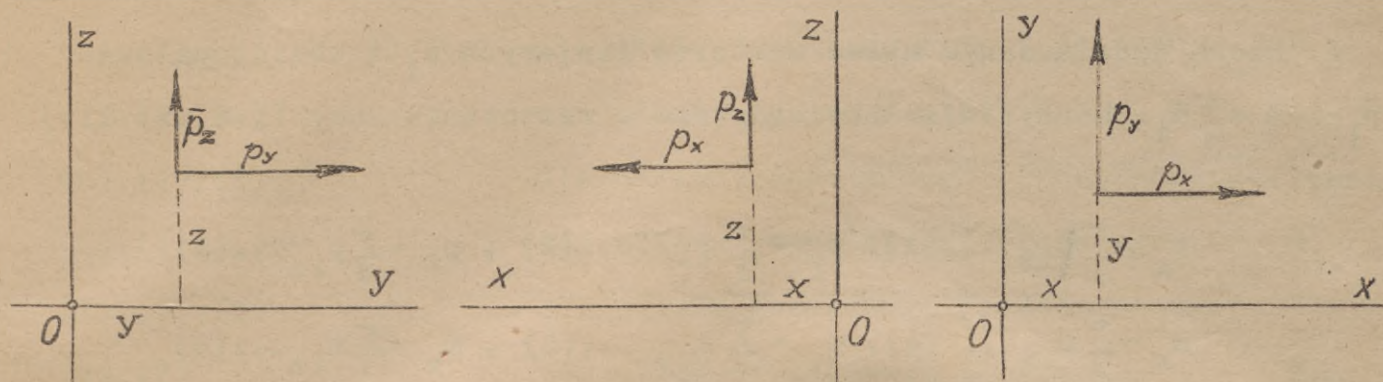
2. Wektor linjowy  $\bar{p}$  określony jest wektorem swobodnym  $\bar{p}$  i jego momentem  $\bar{m}$  względem początku układu 0. Składowe wektora  $\bar{m}$  są równocześnie (§.3.ust.2) momentami wektora  $\bar{p}$  względem osi układu x,y,z. Niech składowe  $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$  przecinają się z wektorem  $\bar{p}$  w jednym punkcie (§.3.ust.12.), to według twierdzenia z §.3. ust.5 jest wartość momentu wektora  $\bar{p}$  względem każdej z osi równą sumie algebraicznej momentów wektorów  $\bar{p}_x, \bar{p}_y$  i  $\bar{p}_z$  względem obranej osi. Stosując tedy jeden z podanych sposobów obliczania momentu wektora względem prostej i uważając na wzroty owych momentów znajdziemy ich algebraiczne wartości jak następuje:

$$m_x = p_y \cdot z - p_z \cdot y, \quad m_y = p_z \cdot x - p_x \cdot z, \quad m_z = p_x \cdot y - p_y \cdot x$$

przyczem x,y,z oznaczają współrzędne dowolnego punktu na prostej wektora p.

Na rys. 24. podano trzy płaszczyzny układu współrzędnych tak, że każdorazowo trzecia oś skierowana jest dodatnim kierunkiem ku patrzącemu (układ prawy).

Zarówno  $p_x, p_y, p_z$  jak i x, y, z są między sobą niezależne ; zatem wektor linjowy wystarczająco i jednoznacznie przedstawia sześć liczb algebraicznych w układzie



Rys. 24.

analitycznym. Zamiast szóstki  $p_x, p_y, p_z, x, y, z$  korzystniej jest użyć szóstki  $p_x, p_y, p_z, m_x, m_y, m_z$ . Jak łatwo jednak zauważyć składowe tej szóstki są między sobą zależne, albowiem jest :

$$k = p_x \cdot m_x + p_y \cdot m_y + p_z \cdot m_z = 0$$

Rzeczywiście musi też tak być, albowiem ostatnie wyrażenie jest niczem innym jak wyróżnikiem  $k = \bar{p} \cdot \bar{m} = p_x \cdot m_x + p_y \cdot m_y + p_z \cdot m_z$  (§.2. Ćwicz.5.). W omawianym wypadku rezultat  $k$  stwierdza, że jest  $p \perp m$  jak być powinno ( dla jednego wektora) względnie, że trzy płaszczyzny określone równaniami na  $m_x, m_y$  i  $m_z$  przecinają się wzdłuż jednej krawędzi, a mianowicie prostej wektora  $\bar{p}$ . Ta niejednołitość przedstawienia wektora linjowego odpadnie, gdy przejdziemy do układu wektorów.

3. Gdy wektor  $\bar{p}$  przedstawiony w układzie płaskim np.  $x, y$  to z powodu

$\gamma = \frac{\pi}{2}$  i  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  otrzymamy rezultaty następujące :

$$p_x = p \cdot \cos \alpha, \quad p_y = p \cdot \sin \alpha$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \quad \text{tang} \alpha = \frac{p_y}{p_x}$$

Dla wektora linjowego przybiera trzecia uogólniona współrzędna :

$$m_z = p_x \cdot y - p_y \cdot x = m = p \cdot r$$

W tym wypadku moment wektora względem osi (jest identyczny z momentem wektora względem punktu 0. Oczywiście jest  $m_x = m_y = 0$  czyli  $\lambda = \mu = \frac{\pi}{2}$  czyli  $v = 0$  względnie  $v = \pi$  tj. wektor  $\bar{m}$  zorientowany jest prostopadle do płaszczyzny układu. Równanie linjowe na  $\bar{m}$  przedstawia prostą wektora  $\bar{p}$  ;  $r$  jest oddaleniem wektora

od początku układu 0 ; znak momentu wyklucza dwuznaczność tkwiącą w wielkości r.

4. Niech będzie dany układ wektorów linjowych  $\bar{p}_i$  i obliczoną sumą  $\bar{p} = \sum_i \bar{p}_i$  i  $\bar{m} = \sum_i \bar{m}_i$ . Korzystając z twierdzenia o rzutowaniu sumy (§.2.ust.11.) znajdziemy :

$$p_x = \sum_i p_{ix} \dots(1), p_y = \sum_i p_{iy} \dots(2), p_z = \sum_i p_{iz} \dots(3)$$

$$m_x = \sum_i m_{ix} \dots(4), m_y = \sum_i m_{iy} \dots(5), m_z = \sum_i m_{iz} \dots(6)$$

przyczem dla każdego wektora  $\bar{p}_i$  określają składowe  $p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}$  tudzież  $m_{ix}, m_{iy}, m_{iz}$  wzory ustępów 1.i 2. po uzupełnieniu ich wskaźnikiem dodatkowym i. W myśl wyżej wspomnianego twierdzenia są  $p_x, p_y, p_z$  tudzież  $m_x, m_y, m_z$  składowymi wektorów  $\bar{p}$  i  $\bar{m}$ . Zatem ich wartości bezwzględne i kierunki są:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}, \cos \alpha = \frac{p_x}{p}, \cos \beta = \frac{p_y}{p}, \cos \gamma = \frac{p_z}{p} \dots\dots (p)$$

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}, \cos \lambda = \frac{m_x}{m}, \cos \mu = \frac{m_y}{m}, \cos \nu = \frac{m_z}{m} \dots\dots (m)$$

Jednakże wyróżnik badanego układu :

$$k = p_x \cdot m_x + p_y \cdot m_y + p_z \cdot m_z$$

jest ogólnie różny od zera tak, że układ wektorów linjowych reprezentuje jednoznacznie sześć niezależnych liczb algebraicznych. Równania (1), (2) i (3) nazywamy równaniami wektorów, (4), (5) i (6) równania momentów- wektorów. Równania te łącznie z wyrażeniami (p) i (m) rozwiązują sprawę redukcji jednoznacznie. Dochodzimy w ten sposób do rezultatów §.3. ust.10. a,b,c,d. Nie trzeba dodawać, że składowe  $m_x, m_y, m_z$  w przypadkach a.i c.uważać należy za momenty składowe pary  $\bar{m}$  ; w wypadkach b.i d.pojęcie to można wprowadzić, jakkolwiek można się tam bez niego obejść. Gdy układ jest równoległy, to najwygodniej jedną z osi układu np. y przyjąć równoległe do wektorów układu ; odnośne równanie (2) uprości się na  $p = \sum_i p_i$ . Gdy układ jest płaski, to obierając za płaszczyznę wektorów płaszczyznę (x,y) uprościmy równania redukcji analogicznie jak to miało miejsce w ust.3. Resumując widzimy, że stosować należy równania :

- a) (1), (2), (3), (4), (5), (6) dla układu ogólnego przestrzennego  $\alpha$ ).  
 (1), (2), (6) dla układu ogólnego płaskiego  $\beta$ ).  
 b) (2), (4), (6), dla układu równoległego przestrzennego  $\alpha$ ).  
 (2), (4) dla układu równoległego płaskiego  $\beta$ ).  
 c) (1), (2), (3) dla układu środkowego przestrzennego  $\alpha$ ).  
 (1), (2) dla układu środkowego płaskiego  $\beta$ ).

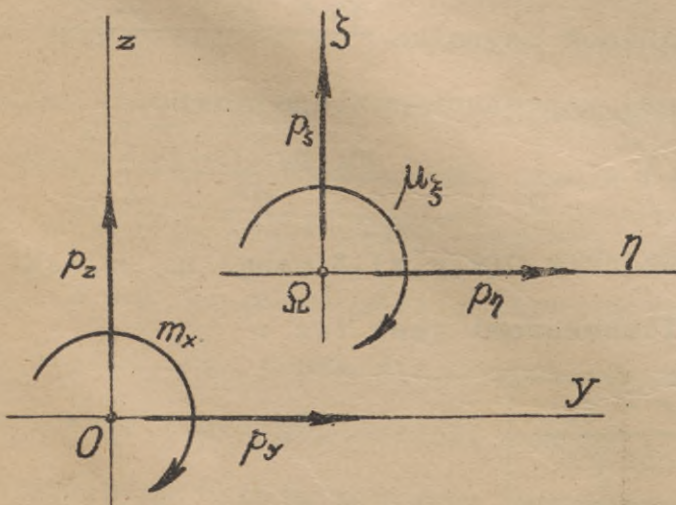
i to wraz z wyrażeniami (p) i (m) względnie odpowiednią ich częścią.

5. Jeśli ma być  $\bar{p} = \bar{0}$ , czyli  $i p = 0$ , to musi być zarówno  $p_x = 0$  jak  $p_y = 0$  i  $p_z = 0$ , albowiem  $p_x, p_y, p_z$  są liczbami rzeczywistymi, a  $p^2$  jest sumą kwadratów tych liczb. Podobnie warunek  $\bar{m} = \bar{0}$  pociąga za sobą  $m_x = 0, m_y = 0, m_z = 0$ . Jeśli przeto układ wektorów linjowych ma być równowarty zeru, to musi być :

$$\sum_i p_{ix} = 0 \dots\dots(1) , \sum_i p_{iy} = 0 \dots\dots(2) , \sum_i p_{iz} = 0 \dots\dots (3)$$

$$\sum_i m_{ix} = 0 \dots\dots(4) , \sum_i m_{iy} = 0 \dots\dots(5) , \sum_i m_{iz} = 0 \dots\dots(6)$$

Oczywiście równania (p) i (m) odpadają tu. Równania (1), (2), (3), (4), (5) i (6) nazywamy warunkami równowartości zerowej lub równowagi wektorów. Ilość ich zmniejsza się w zależności od charakteru badanego układu według szablonu a, b, c i to  $\alpha$  lub  $\beta$ , podanego w ust. 4.



Rys. 25.

Dwa układy równowarte muszą mieć wspólne wartości składowe określone sześciu równaniami ust. 4. Na twierdzeniu tem oprzemy między innymi transformację układu. Znajdziemy obecnie równanie osi centralnej dowolnego układu wektorów. Niech składowe charakterystyczne tegoż układu wektorów dla układu  $O(x, y, z)$  będą  $p_x, p_y, p_z, m_x, m_y, m_z$ , a dla układu równoległego przesuniętego  $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$  wynoszą one  $p_\xi,$

$p_x, p_y, p_z, \mu_x, \mu_y, \mu_z$ . Dwie odpowiadające sobie trójki przedstawiono na rys. 25. Punkt  $\Omega$  niech ma w układzie  $x, y, z$  współrzędne  $(x, y, z)$ ; założmy, że punkt ten jest właśnie jednym z punktów osi centralnej układu wektorów. Aby tak było musi się spełnić równanie :

$$\frac{\mu_x}{p_x} = \frac{\mu_y}{p_y} = \frac{\mu_z}{p_z}$$

albowiem  $\bar{p}$  i  $\mu$  leżą na wspólnej prostej. Z definicji równowartości wynika :

$$p_x = p_y = p_z, \quad \mu_x = m_x - p_y \cdot z + p_z \cdot y, \quad \mu_y = m_y - p_z \cdot x + p_x \cdot z, \quad \mu_z = m_z - p_x \cdot y + p_y \cdot x$$

Wstawiając ostatnie wyrażenia w powyższą proporcję ciągłą i rozwiązując ją trojako znajdziemy :

$$\begin{aligned} (m_y - p_x \cdot z + p_z \cdot y)p_z - (m_z - p_x \cdot y + p_y \cdot x)p_y &= 0 & - p_x^2 \cdot x + p_x^2 \cdot x \\ (m_z - p_x \cdot y + p_y \cdot x)p_x - (m_x - p_y \cdot z + p_z \cdot y)p_z &= 0 & - p_y^2 \cdot y + p_y^2 \cdot y \\ (m_x - p_y \cdot z + p_z \cdot y)p_z - (m_y - p_z \cdot x + p_x \cdot z)p_x &= 0 & - p_z^2 \cdot z + p_z^2 \cdot z \end{aligned}$$

Uzupełniając równania dwumianami zerowemi, jak obok zaznaczono i porządkując otrzymamy z uwagi na równość  $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = p^2$  następujące:

$$\begin{aligned} m_y \cdot p_z - m_z \cdot p_y - p^2 \cdot x + p_x (p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z) &= 0 \\ m_z \cdot p_x - m_x \cdot p_z - p^2 \cdot y + p_y (p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z) &= 0 \\ m_x \cdot p_y - m_y \cdot p_x - p^2 \cdot z + p_z (p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z) &= 0 \end{aligned}$$

Wreszcie po przyrównaniu w wszystkich równaniach czynnika  $\frac{p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z}{p^2}$  otrzymamy poszukiwane równanie osi centralnej w postaci następującej:

$$\frac{1}{p_x} \left( x - \frac{m_y \cdot p_z - m_z \cdot p_y}{p^2} \right) = \frac{1}{p_y} \left( y - \frac{m_z \cdot p_x - m_x \cdot p_z}{p^2} \right) = \frac{1}{p_z} \left( z - \frac{m_x \cdot p_y - m_y \cdot p_x}{p^2} \right)$$

Jest to najwidoczniej równanie prostej w układzie  $O(x, y, z)$ . Z uwagi na związki między składowymi wektora  $\bar{p}$ , a dostawami kierunkowymi jest też :

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}$$

przyczem współrzędne :

$$x_0 = \frac{m_y p_z - m_z p_y}{p^2} \quad y_0 = \frac{m_z p_x - m_x p_z}{p^2} \quad z_0 = \frac{m_x p_y - m_y p_x}{p^2}$$

odnoszą się do pewnego charakterystycznego punktu, położonego na osi centralnej; nazywać go będziemy środkiem układu wektorów linjowych. Ponieważ wyróżnik nie ulega przy transformacji żadnej zmianie, przeto

$$k = \bar{m} \cdot \bar{p} = \bar{\mu} \cdot \bar{p} = \mu \cdot p$$

Stąd wynika :  $\mu = \frac{k}{p}$ ; nie trudno pozatem wyznaczyć składowe wektora  $\bar{\mu}$ ; są to :

$$\mu_x = \frac{k \cdot p_x}{p^2}, \quad \mu_y = \frac{k \cdot p_y}{p^2}, \quad \mu_z = \frac{k \cdot p_z}{p^2}. \text{ Tem samem zagadnienie zostało ukończone.}$$

### §. 5. Wektory nieswobodne.

-----

1. Jeśli początek wektora linjowego na prostej, jest stale lub chociażby chwilowo ściśle na tej prostej określony, to wektor nazywamy **n i e s w o b o d n y m**, ów punkt nazywamy wtedy punktem przyłożenia lub zaczepienia. Z powyższej definicji wynika, że na wektorach nieswobodnych można wykonać cały szereg operacyj §.3. i §.4. jednakże z tem, że promień-wektor  $\bar{r}_i$ , względnie współrzędne  $x_i, y_i, z_i$  punktu zaczepienia, musi być obrany stosownie do warunków zadania. Nasuwa się oczywiście pytanie, czy określenia wektora nieswobodnego wektorem swobodnym i jego momentem - jako wieloznaczne w stosunku do  $\bar{r}_i$  - nie powinno być odrzucone i zastąpione innym środkiem jednoznacznym. Potrzeba ta najczęściej odpada z następującego powodu. Jak się w dalszych rozdziałach okaże - ustalenie punktu przyłożenia wektora do pewnego miejsca zawarunkowane jest tem, że właśnie ów punkt jest siedliskiem przyczyny istnienia danego wektora. Naistotniejszym rachunkiem elementarnej teorii wektorów jest redukcja. Po przeprowadzeniu tej z reguły okaże się, że na kierunku ogólnej sumy  $\bar{p}$  względnie ogólnego momentu  $\bar{m}$  nie istnieje wogóle punkt stały, któryby mógł w równym stopniu być przyczyną istnienia  $\bar{p}$  i  $\bar{m}$  jak to przed chwilą skonstatowaliśmy dla każdego z osobna wektora  $\bar{p}_i$ . Jeśli wogóle taki punkt się znajdzie, to będzie on posiadał raczej narzucone mu znaczenia fikcyjne, aniżeli realne fizyczne. Pozatem wypada dodać, że w przypadku ogólnego układu wektorów nieswobodnych obecność takiego charakterystycznego punktu będzie najczęściej uwarunkowaną zależnością wektorów od współrzędnych itp.

Tylko w nielicznych wypadkach uda się znaleźć taki punkt przy stałych wartościach wektorów ; wtedy z pewnością stanie się to tylko dla pewnych specjalnych układów wektorów.

2. Jako taki prosty przykład może służyć układ zbieżny, przy założeniu, że początki wszystkich wektorów nieswobodnych pokrywają się z wierzchołkiem pęku. Jeśli taki układ, traktowany jako sztywna całość, obrócimy dookoła dowolnej prostej, przechodzącej przez wspólny początek, to wektor suma zajmie względem wektorów dodajników takie samo jak poprzednio położenie. Rzecz jasna - jego początek jest wierzchołkiem pęku ; punkt ten możemy nazwać środkiem układu.

3. Niezwykle doniosłe znaczenie mieć będzie dla nas układ równoległy wektorów. Niech owymi wektorami będą  $\bar{p}_i$ , ich ustalonymi promień-wektorami  $\bar{r}_i$ , wreszcie  $p_i$  algebraicznymi wartościami. Jeśli jest  $\bar{p} = \sum_i \bar{p}_i \neq \bar{0}$  to - jak wiadomo - dla układu równoległego obowiązuje twierdzenie :  $\sum_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = \bar{p} \wedge \bar{r}$ . Przekształcimy je następująco : Ponieważ  $\bar{p}_i$  są wzajemnie równoległe, przeto jest  $\bar{p}_i = \bar{\lambda} \cdot p_i$  jeśli  $\bar{\lambda}$  jest wersorem kierunku  $+ p_i$  ; podobnie jest  $\bar{p} = \bar{\lambda} p$ . Zatem jest :

$$\sum_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = \sum_i \bar{\lambda} p_i \wedge \bar{r}_i = \sum_i \bar{\lambda} p_i \bar{r}_i = \bar{\lambda} \wedge \sum_i p_i \bar{r}_i \quad \text{i podobnie :}$$

$$\bar{p} \wedge \bar{r} = \bar{\lambda} \wedge p \cdot \bar{r} \quad \text{Z porównania wynika rezultat :}$$

$$\sum_i p_i \cdot \bar{r}_i = p \cdot \bar{r}$$

jako własność charakterystyczna układu wektorów równoległych o ustalonych początkach. Własność ta tkwi w tem, że powyższe równanie nie zawiera wektorów  $\bar{p}_i$ , lecz tylko ich wartości algebraiczne  $p_i$ . Jeśli przeto wszystkie wektory układu obrócimy o ten sam kąt, to tok dowodzenia nie zmieni się i osiągnięty rezultat nie zmieni się. Zatem obliczony z powyższego równania wektor  $\bar{r}$  wskazuje na pewien stały, niezależny od obrotu wektorów, punkt. Punkt ten nazywamy środkiem układu wektorów równoległych. Najwidoczniej  $p_i$  nie muszą być wartościami wektorów ; mogą to być wogóle liczby przynależne pewnym punktom, określonym co do położenia wektorami  $\bar{r}_i$ . Wyrażenie  $p_i \bar{r}_i$  nazywamy chętnie momentem liczby (skalarem) względem punktu. Zatem suma momentów liczb względem punktu jest równą momentowi sumy liczb względem tegoż punktu. Aby wykazać, że i w tem nowem znaczeniu formuła wyżej podana

jest ważna, zmienimy punkt odniesienia  $O$  na  $\Omega$  tak, że nowe promienie będą wynosić  $\bar{r}_i = \bar{r}_i + \bar{d}$ , gdzie  $\bar{d} = \bar{\Omega O}$ . Jeśli istnieje środek liczb  $p_i$  określony wektorem  $\bar{r}$  z  $O$ , to musimy wykazać, że określa go z  $\Omega$  wektor  $\bar{g} = \bar{r} + \bar{d}$ . Otóż  $p\bar{g} = \sum_i p_i \bar{g}_i = \sum_i p_i (\bar{r}_i + \bar{d}) = \sum_i p_i \bar{r}_i + \sum_i p_i \bar{d} = p\bar{r} + p\bar{d}$ , a stąd rezultat  $\bar{g} = \bar{r} + \bar{d}$  jak przewidywano.

4. Środek układów wektorów równoległych czyli środek liczb możemy równie szybko oznaczyć też metodą analityczną. W tym celu weźmy pod uwagę wzory redukcji §.4. ust.3°. Niech kierunek wspólny wektorów  $\bar{r}_i$  będzie określony kątami  $\alpha, \beta, \gamma$ , to przy nadaniu wyrażeniu  $p_i$  algebraicznej wartości są  $\alpha, \beta, \gamma$  wspólne dla wszystkich wektorów układu jakoteż i dla sumy  $p = \sum_i p_i \neq 0$ . Wskutek tego równania (1), (2), i (3) przechodzą wprost na :

$$p = \sum_i p_i$$

Trzy następne równania są z powodu  $k = 0$  między sobą zależne i dadzą się napisać następująco :

$$\begin{aligned} m_x &= p_y z - p_z y = p z \cdot \cos \beta - p y \cdot \cos \gamma = \sum_i m_{ix} = \sum_i (p_{iy} z_i - p_{iz} y_i) = \cos \beta \sum_i p_i z_i - \cos \gamma \sum_i p_i y_i \\ m_y &= p_z x - p_x z = p x \cdot \cos \gamma - p z \cdot \cos \alpha = \sum_i m_{iy} = \sum_i (p_{iz} x_i - p_{ix} z_i) = \cos \gamma \sum_i p_i x_i - \cos \alpha \sum_i p_i z_i \\ m_z &= p_{xy} - p_y x = p y \cdot \cos \alpha - p x \cdot \cos \beta = \sum_i m_{iz} = \sum_i (p_{ix} y_i - p_{iy} x_i) = \cos \alpha \sum_i p_i y_i - \cos \beta \sum_i p_i x_i \end{aligned}$$

lub po uporządkowaniu :

$$\begin{aligned} \cos \beta (p \cdot z - \sum_i p_i z_i) &= \cos \gamma (p \cdot y - \sum_i p_i y_i) \\ \cos \gamma (p \cdot x - \sum_i p_i x_i) &= \cos \alpha (p \cdot z - \sum_i p_i z_i) \\ \cos \alpha (p \cdot y - \sum_i p_i y_i) &= \cos \beta (p \cdot x - \sum_i p_i x_i) \end{aligned}$$

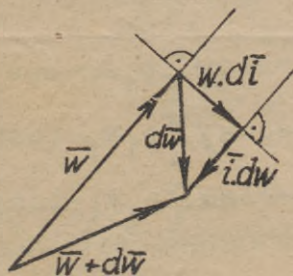
Ostatnie równania są istotnie od siebie zależne; możemy je napisać następująco :

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}$$

przyczem :  $p \cdot x_0 = \sum_i p_i x_i$ ,  $p \cdot y_0 = \sum_i p_i y_i$ ,  $p \cdot z_0 = \sum_i p_i z_i$ . Środkiem poszukiwanym jest punkt  $(x_0, y_0, z_0)$ . Przy obrocie wektorów zmieni się  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  jednakże nie wpływa to na współrzędne  $x_0, y_0, z_0$ . Przy ustalonym kierunku  $\alpha, \beta, \gamma$  przedstawia wyżej podane równanie prostą wektora sumy. Wyrażenia typu  $p_i x_i$ ,  $p_i y_i$ ,  $p_i z_i$  nazywamy momentem skalarowym (algebraicznym) wektora. Jeśli  $p_i$  jest wogóle liczbą, to powyższe wyrażenia nazywamy też momentem liczby względem płaszczyzny.

§. 6. Różniczkowanie wektorów.

1. Zróżniczkować funkcję znaczy znaleźć zmienną jej uwarunkowaną pomyslanym lub rzeczywistym przyrostem zmiennej niezależnej. Niech będzie wektor  $\bar{w}$  funkcją zmiennej  $t$ . Pytamy o różnicę  $d\bar{w}$  tj. o zmianę wektora  $\bar{w}$  odpowiadającą przyrostowi  $dt$ . Ponieważ wektor charakteryzują trzy cechy, przeto wszystkie trzy musimy zmienić, tzn. prostą, kierunek i wielkość bezwzględną. Lecz przez zmianę prostej zmieniamy i kierunek, przeto różniczkowanie oprócz należy na znalezieniu sumy geometrycznej zmiany prostej z kierunkiem i wielkości wektora. Owe cechy są od siebie wzajemnie niezależne; każdą przeto zmianę znaleźć możemy w dowolnym porządku. Niech  $\bar{i}$  będzie wersorem wektora  $\bar{w}$ , to  $\bar{w} = \bar{i} \cdot w$ . Zmiana wielkości  $w$  jest różniczką  $dw$ ; zmiana  $d\bar{i}$  wektora jednostkowego  $\bar{i}$  musi być tak dokonana, by wektor  $\bar{i} + d\bar{i}$  w dalszym ciągu miał wartość bezwzględną 1; zatem musi być  $d\bar{i} \perp \bar{i}$ . Różniczkę  $d\bar{w}$  wektora  $\bar{w}$  tworzą ostatecznie dwie różniczki: jedna  $\bar{i} \cdot dw$  nie zmieniająca kierunku tylko wielkość i druga  $w \cdot d\bar{i}$  nie zmieniająca wielkości tylko kie-



Rys. 26.

runek. Na rysunku 26. zaznaczono  $\bar{i} \cdot dw$  tak jakby przyrostowi  $dt$  odpowiadał ubytek wielkości  $w$ . Ostatecznie jest różniczka wektora  $\bar{w}$  równą:

$$d\bar{w} = w \cdot d\bar{i} + \bar{i} \cdot dw$$

Ponieważ zaś było  $\bar{w} = w \cdot \bar{i}$ , przeto widzimy, że różniczkowanie odbyło tu się tak jak normalne różniczkowanie iloczynu dwóch funkcji jednej zmiennej.

2. Mając znaleźć różniczkę iloczynu skalarowego  $\bar{u} \cdot \bar{w}$  napiszemy:

$$d(\bar{u} \cdot \bar{w}) = (\bar{u} + d\bar{u}) \cdot (\bar{w} + d\bar{w}) - \bar{u} \cdot \bar{w}$$

Co rozumiemy przytem pod  $d\bar{u}$  i  $d\bar{w}$  wyjaśniano w ust. 1. Wykonując mnożenie dwumianów i redukując znajdziemy:

$$d(\bar{u} \cdot \bar{w}) = \bar{u} \cdot d\bar{w} + \bar{w} \cdot d\bar{u} + d\bar{u} \cdot d\bar{w}. \quad \text{Lecz wyraz ostatni znika w porówna-$$

niu do dwóch poprzednich, przeto:

$$d(\bar{u} \cdot \bar{w}) = \bar{u} \cdot d\bar{w} + \bar{w} \cdot d\bar{u}.$$

Zatem iloczyn skalarowy różniczkujemy formalnie jak iloczyn dwóch funkcji bezkierunkowych.

3. Zupełnie podobnie znajdziemy różniczkę iloczynu wektorjalnego  $\bar{u} \wedge \bar{w}$ .

Pamiętając o zmianie znaku przy stosowaniu przemiany czynników otrzymamy:

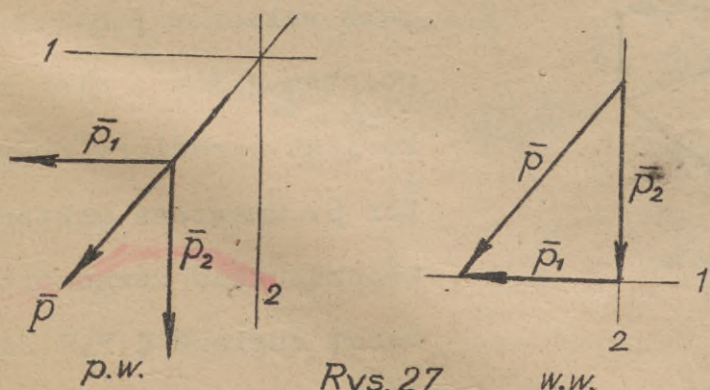
$$d(\bar{u} \wedge \bar{w}) = \bar{u} \wedge d\bar{w} + d\bar{u} \wedge \bar{w} = \bar{u} \wedge d\bar{w} - \bar{w} \wedge d\bar{u}.$$

Podane reguły wystarczą nam do rozwiązania konkretnych zagadnień mechaniki. Odwrócenie rachunku różniczkowego tj. całkowanie nie nastręczy żadnych nowości.

### §. 7. Wykreślne metody rachunku wektorjalnego.

1. Wykreślne metody znajdują specjalne swe zastosowanie wtedy, gdy rozważany układ wektorów jest płaski. Może tu być mowa o wektorach swobodnych, linjowych i nieswobodnych. Jako podstawowe zagadnienia rozumiemy redukcję, rozkładanie i transformację. W następnych ustępach zajmiemy się przede wszystkim układami wektorów linjowych.

2. Dwa wektory przecinające się  $\bar{p}_1$  i  $\bar{p}_2$  mają sumę  $\bar{p}$  przechodzącą przez punkt przecięcia wektorów  $\bar{p}_1$  i  $\bar{p}_2$ . Zagadnienia odwrotne rozkładu  $\bar{p}$  na wektory, o określonych kierunkach 1 i 2 przedstawiono na rys.27.; wektory  $\bar{p}_1$  i  $\bar{p}_2$ ,



Rys.27.

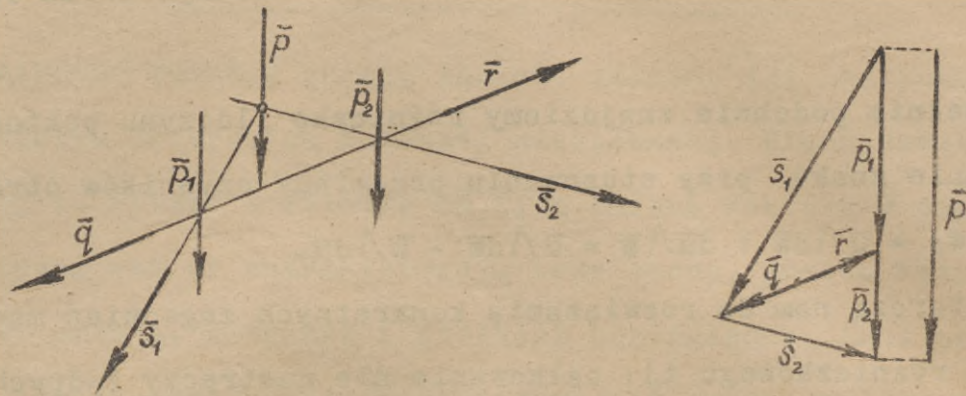
uzyskane w znany sposób w wieloboku wektorów przenosimy równolegle do dowolnego punktu prostej wektora  $\bar{p}$  w płaszczyźnie wektorów.

3. Dwa wektory tworzą układ równowarty zeru, gdy mają wspólną prostą odwrotne kierunki i bezwzględne równe

wartości np.  $\bar{q}$  i  $\bar{r}$ , na rys.28. Sumę dwóch wektorów równoległych znaleźć można następująco :

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{q} + \bar{r} = (\bar{p}_1 + \bar{q}) + (\bar{p}_2 + \bar{r}) = \bar{s}_1 + \bar{s}_2$$

tj. przez dodanie układu dowolnego zerowego  $\bar{q} + \bar{r} = \bar{0}$  i zamianę wektorów równoległych  $\bar{p}_1$  i  $\bar{p}_2$  na równowarty układ wektorów  $\bar{s}_1$  i  $\bar{s}_2$  przecinających się (ryc.28.)

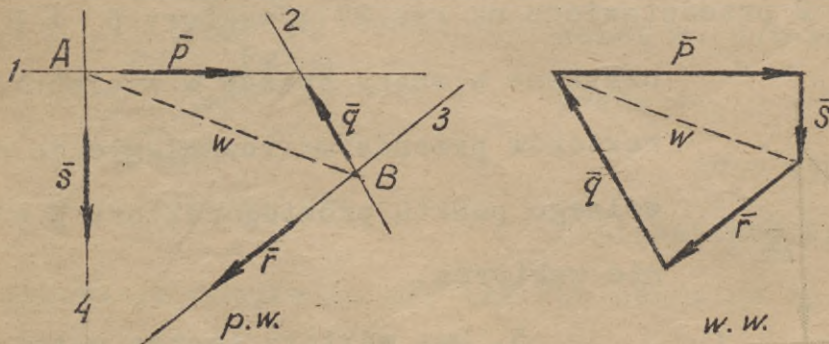


Rys. 28.

Wektor suma  $\bar{p}$  przechodzi przez punkt przecięcia się wektorów  $\bar{s}_1$  i  $\bar{s}_2$ .

5. Trzy wektory na płaszczyźnie mogą tylko wtedy tworzyć układ zerowy, gdy przecinają się w jednym punkcie; jest to warunek konieczny, jakkolwiek niewystarczający. Dowód wynika z ust. 2., jeśli do wektorów  $\bar{p}_1$  i  $\bar{p}_2$  dodamy wektor  $-\bar{p}$ , gdzie  $\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$  - względnie z ust. 3. jeśli np. wektor  $\bar{q}$  zamienimy na sumę dwóch innych np.  $\bar{r} + \bar{s}$ .

6. Ważne zagadnienie wykreślne stanowi wypadek następujący: Dane



Rys. 29.

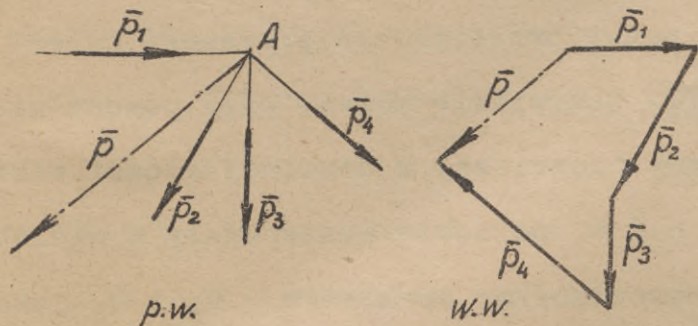
są proste 1, 2, 3, 4 czterech wektorów  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}$ , a poza to jeden z nich tylko jest określony np. wektor  $\bar{p}$ . Omawiane wektory tworzą układ równowarty zeru; znaleźć  $\bar{q}, \bar{r}, \bar{s}$ . Po-

nieważ  $\bar{p} + \bar{q} + \bar{r} + \bar{s} = \bar{0}$  przeto sumy częściowe np.  $\bar{p} + \bar{s} = \bar{w}$  i  $\bar{q} + \bar{r} = -\bar{w}$  muszą tworzyć również taki układ. Ponieważ  $\bar{p} + \bar{s}$  przechodzi przez punkt A, zaś  $\bar{q} + \bar{r}$  przez B, przeto układ zerowy  $\bar{w}, -\bar{w}$  leży na prostej AB (rys. 29). Mamy zatem dwie trójki  $\bar{p}, \bar{s}, \bar{w}$  i  $\bar{q}, \bar{r}, -\bar{w}$  o określonych położeniach; ponadto w pierwszej dany jest wektor  $\bar{p}$ . Zaczynając wielobok wektorów od trójki pierwszej znajdziemy jak w ust. 2.  $\bar{s}$  i  $\bar{w}$ . Tem samym w drugiej trójce znane jest  $-\bar{w}$ , a stąd wynika  $\bar{q}$  i  $\bar{r}$ . Obieg strzałek wieloboku musi być zgodny dla poszukiwanych wektorów. Zakończenie

zadania stanowi przeniesienie  $\bar{q}, \bar{r}, \bar{s}$  z wieloboku do planu wektorów.

7. Układ z t i e ż n y wektorów  $\bar{p}_i$  redukuje się do sumy  $\bar{p}$ , gdy wielo-

bok wektorów nie zamyka się lub do  $\bar{O}$ , gdy wielobok wektorów zgodnie zamyka się.



Rys.30.

Przypadek  $\bar{p} \neq \bar{O}$  przedstawia rys.30.

Sumę znaną w wieloboku wektorów należy przenieść do planu równoległe przez wierzchołek pęku A.

8. Dowolny układ wektorów zamie-

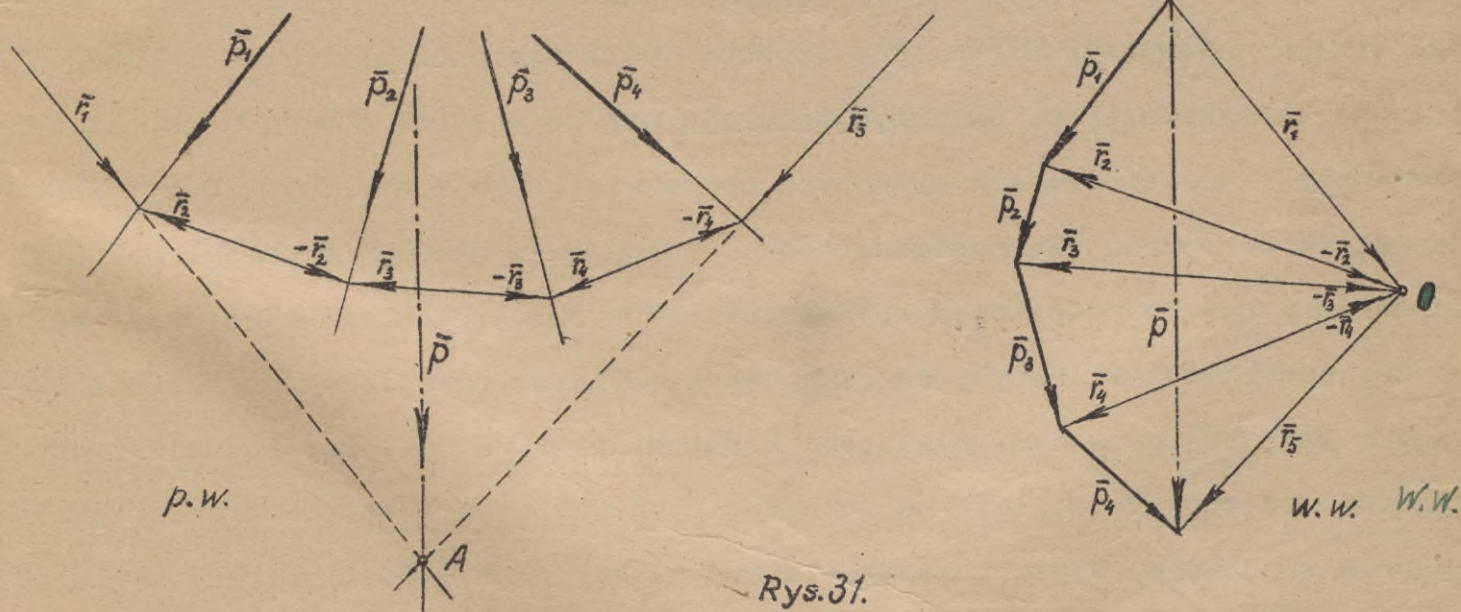
nić można na równowarty układ dwóch

wektorów. Ważną tę transformację

przeprowadzimy następująco (rys.31). Każdy z danych wektorów  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \dots$  zamienimy

na dwa inne, jemu równowarte i to w pewien charakterystyczny sposób. W tym celu

połączmy d o w o l n i e obrany punkt O (tzw. biegun) z wierzchołkami wieloboku



Rys.31.

wektorów; przy stosownym obiorze strzałek będą  $\bar{r}_1$  i  $\bar{r}_2$  składowymi od  $\bar{p}_1$ ,  $-\bar{r}_2$  i  $\bar{r}_3$

składowymi od  $\bar{p}_2$ ,  $-\bar{r}_3$  i  $\bar{r}_4$  składowymi od  $\bar{p}_3$  itd. Ilościowo (tj. bez uwzględnienia

znaków) jest promieni  $\bar{r}_j$  zawsze o jeden więcej aniżeli wektorów  $\bar{p}_i$ . Aby uzyskane

$\bar{r}_j$  były faktycznie odpowiednio równowarte danemu układowi, muszą  $\bar{r}_1$  i  $\bar{r}_2$  przeci-

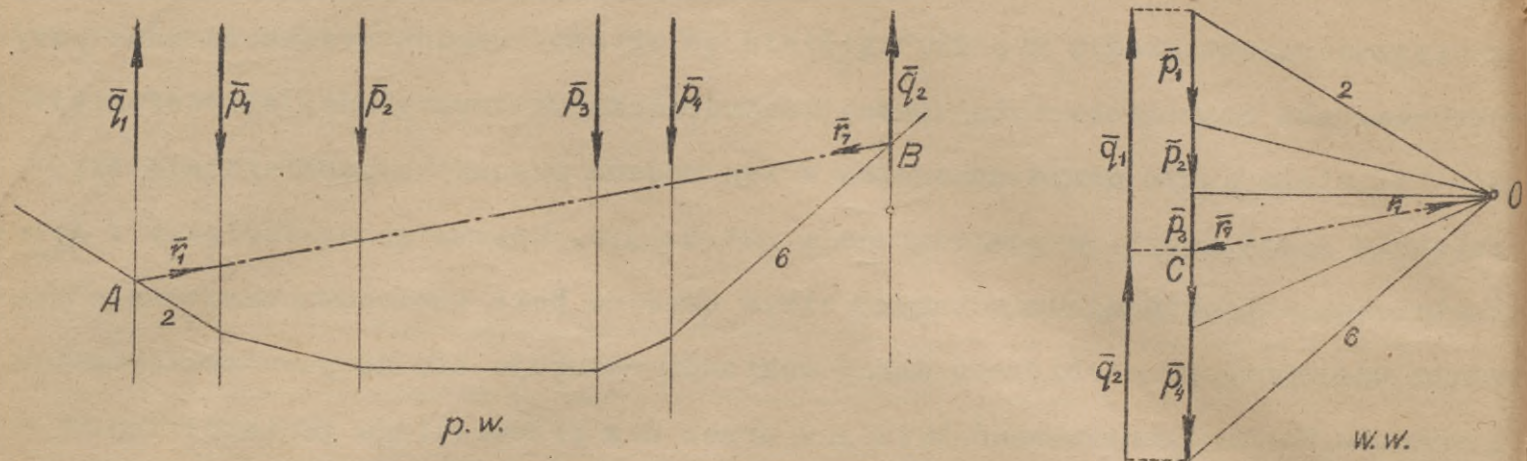
nać się na  $\bar{p}_1$ ,  $-\bar{r}_2$  i  $\bar{r}_3$  na  $\bar{p}_2$ ,  $-\bar{r}_3$  i  $\bar{r}_4$  na  $\bar{p}_3$ , itd. Uskuteczono to najwidoczniej w planie wektorów i to tak, że  $\bar{r}_2$  i  $-\bar{r}_2$ ,  $\bar{r}_3$  i  $-\bar{r}_3$ , itd. tworzą trójki zerowe. Ostatecznie tedy dany układ wektorów  $\bar{p}_i$  jest równowarty dwóm wektorom  $\bar{r}_1$  i  $\bar{r}_5$  tworzącym skrajne boki, wykreślonego w planie wieloboku, zwanego wielobokiem sznurowym. Przez ich punkt przecięcia A przesunąć należy z wieloboku wektorów sumę  $\bar{p} = \sum \bar{p}_i = \bar{r}_1 + \bar{r}_5$ . Oczywiście możemy przy pomocy wieloboku sznurowego znaleźć też położenie sumy częściowej z dowolnej ilości wektorów układu, byleby one bez pośrednio po sobie występowały w wieloboku wektorów; więc np. by znaleźć  $\bar{p}_2 + \bar{p}_3$  przedłożymy promienie  $-\bar{r}_2$  i  $\bar{r}_4$  jako skrajne dla owej sumy; natomiast w ugrupowaniu jak na rys. 31. nie znajdziemy przy pomocy tego samego wieloboku sznurowego sumy częściowej  $\bar{p}_1 + \bar{p}_4$ . Wykazaliśmy, że o ile jest  $\bar{p} \neq \bar{0}$  to dowolny układ wektorów zamienić możemy zawsze na równowarty układ dwóch wektorów przecinających się. Jedyne w wypadku przyjęcia bieguna O na prostej wektora p w wieloboku wektorów będą skrajne promienie leżały na sobie, czyli odnośne skrajne boki wieloboku sznurowego będą do siebie równoległe; najwidoczniej należy unikać tego rodzaju położenia bieguna. Treść niniejszego ustępu możemy wyrazić w inny sposób: jeśli wielobok wektorów dowolnego układu nie zamyka się, to ów układ redukuje się do wektora sumy; jego położenie określa punkt przecięcia się skrajnych boków wieloboku sznurowego. Oczywiście konstrukcję wieloboku sznurowego stosować można i do układu równoległego. Nie trudno np. w rys. 28. dopatrzeć się właśnie konstrukcji takiego wieloboku. Warto przy tej sposobności zauważyć, że suma dwóch wektorów równoległych, zgodnie skierowanych leży pomiędzy tymi wektorami - natomiast suma wektorów równoległych, niezgodnie skierowanych, leży na zewnątrz tych wektorów i to po stronie wektora, liczebnie większego. Wypada wreszcie dodać następujące: Jeśli strzałki wieloboku sznurowego odwrócimy, to układ złożony z danych wektorów  $\bar{p}_i$  i dodatkowych  $\bar{r}_j$  jest równowarty zeru.

9. Jeżeli wielobok wektorów zamyka się, to pierwszy i ostatni promień wieloboku nakrywają się i reprezentują dwa wektory równe i przeciwnie skierowane. Odnośne skrajne boki wieloboku sznurowego tworzą w tym wypadku ogólnie parę wek-

torów. Ponieważ rezultat redukcji jest niezależny od obioru bieguna, przeto możemy otrzymać w opisywanym wypadku zależnie od obioru bieguna rysunkowo inne pary wektorów, ale oczywiście o tej samej wartości charakterystycznej dla definicji pary tj. stale o tym samym momencie. W ten sposób rysunkowo potwierdzają się wszystkie nasze uwagi, wypowiedziane w ust. 6. §. 3. Resumując stwierdzamy: Jeżeli wielobok wektorów zgodnie zamyka się, a skrajne boki wieloboku sznurowego nie padają wzajemnie na siebie, to układ wektorów redukuje się do pary wektorów tj. do momentu  $\bar{m}$ . Ta ewentualność była już przez nas przewidziana gdzieindziej.

10. Jeżeli wielobok wektorów zamyka się, to obok ewentualności ust. 9. zdarzyć się może, że skrajne boki wieloboku sznurowego padną na siebie, Ponieważ zaś są one prostymi wektorów równych i przeciwnie skierowanych, przeto tworzą one dwójkę zerową, jak ust. 3. Stwierdzamy przeto: jeżeli zarówno wielobok wektorów jak i wielobok sznurowy zamykają się, to badany układ wektorów jest równowarty zeru.

12.3.4. 45  
11. Znajomość wieloboku sznurowego pozwala rozwiązać ważne zagadnienie następujące: Dany jest układ wektorów  $\bar{p}_i$  ponadto prosta wektora  $\bar{q}_1$  i jeden punkt prostej wektora  $\bar{q}_2$ ; znaleźć wektory  $\bar{q}_1$  i  $\bar{q}_2$ , jeśli wiadomo, że  $\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \sum_i \bar{p}_i = 0$  tzn. dany układ wraz z poszukiwanymi równowarty jest zeru. Znajdujemy najpierw jak na rys. 31.  $\bar{p} = \sum_i \bar{p}_i$  i tem samym sprowadzamy zagadnienie do trzech wektorów  $\bar{p}, \bar{q}_1, \bar{q}_2$ . Według twierdzenia ust. 5. musi ta trójka mieć wspólny punkt przecięcia; wyznaczają go proste wektorów  $\bar{p}$  i  $\bar{q}_1$ ; łącząc go z danym punktem prostej wektora  $\bar{q}_2$ , otrzymujemy brakującą prostą i zagadnienie sprowadza się do wypadku, traktowanego w ust. 2. z tą odmianą, że wektorom  $\bar{p}, \bar{q}_1$  i  $\bar{q}_2$  dajemy w wieloboku ich zgodny obiek strzałek. W szczególnym wypadku może się zdarzyć, że prosta wektora  $\bar{p}$  będzie równoległą do danej prostej wektora  $\bar{q}_1$ ; wtedy po myśli cytowanego twierdzenia będzie i prosta wektora  $\bar{q}_2$  do tamtych dwóch równoległą. W tym wypadku zagadnienie rozwiąże się jak w ust. 4., przyczem wprost skorzystamy z wykreślonego dla znalezienia  $\bar{p}$  wieloboku sznurowego. Wypadek, o jakim mowa, z pewnością będzie miał miejsce jeżeli  $\bar{p}_i$  będą tworzyć układ równoległy, a prosta wektora  $\bar{q}_1$  będzie również do wektorów układu równoległą.



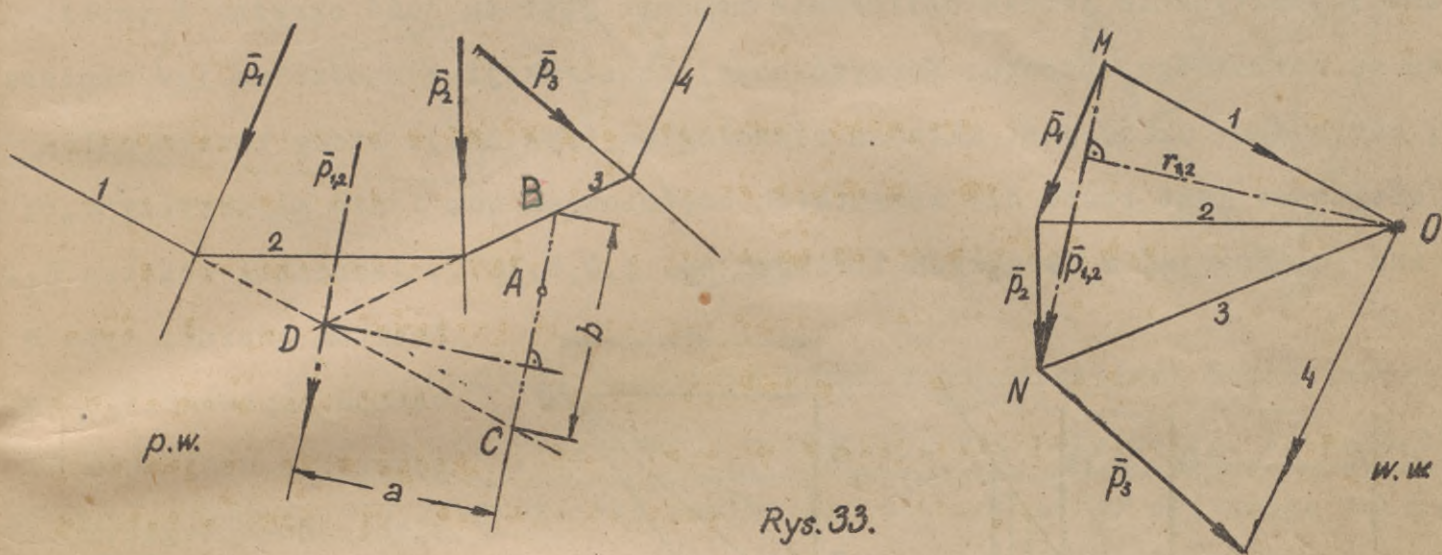
Rys. 32.

Przypadek taki przedstawiono na rys.32. Wykreśliwszy wielobok sznurowy dla wektorów  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$  i  $\bar{p}_4$  począwszy od boku 2, a skończywszy na 6, znajdujemy punkty przecięcia A i B tych boków z prostymi wektorów  $\bar{q}_1$  i  $\bar{q}_2$ . (Poszukiwanie sumy  $\bar{p}$  jest w tym wypadku najwidoczniej zbyteczne). Ponieważ ogółem wektorów jest sześć, przeto promieni i boków musi być siedem; wykreślono ich dotychczas pięć. Brakujące  $\bar{r}_1$  i  $\bar{r}_7$  muszą z tytułu równości:  $\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{p} = \bar{0}$  leżeć na wspólnej prostej (wielobok sznurowy ma być zamknięty); jest nią oczywiście prosta AB (t.zw. zamykająca). Wykreśliwszy z bieguna równoległą do zamykającej znajdujemy punkt C, a tem samem  $\bar{q}_1$  i  $\bar{q}_2$ ; strzałki tych ostatnich dobieramy tak, by spełnił się warunek równowartości zerowej, tj.by wielobok wektorów był zamknięty. Ponieważ  $\bar{q}_1$  zawarte jest między promieniami  $\bar{r}_1$  i 2 przeto przenosimy je równoległe do punktu A przecięcia się boków  $\bar{r}_1$  i 2; podobnież  $\bar{q}_2$  zawarte jest między promieniami 6 i  $\bar{r}_7$ , a punkt B jest punktem przecięcia boków 6 i  $\bar{r}_7$  wieloboku sznurowego. Tem samem zagadnienie zostało ukończone.

12. Jeżeli na wektorach układu równoległego ustalimy punkty przyłożenia, to uzyskamy układ nieswobodny. Położenie środka znajdziemy następująco: Dla danego układu, potraktowanego za linjowy, wznaczymy przy pomocy wieloboku sznurowego prostą sumy  $\bar{p}$ . Wszystkie wektory układu obrócimy o ten sam dowolny kąt np. najlepiej o  $\frac{\pi}{2}$ ; wtedy jak wiadomo i suma obróci się o ten sam kąt dookoła środka układu. Wyznaczymy przeto znów przy pomocy wieloboku sznurowego prostą sumy układu obróconego; obie znalezione proste przetną się oczywiście w poszuki-

wanym punkcie charakterystycznym.

13. Niech będzie dany układ wektorów linjowych  $\bar{p}_1$ . Nakreślmy kolejno wielobok wektorów, promienie z dowolnego bieguna  $O$  i wielobok sznurowy. Obliczmy sumę momentu np. wektorów  $\bar{p}_1$  i  $\bar{p}_2$  względem punktu  $A$  (rys.33). Ponieważ układ jest

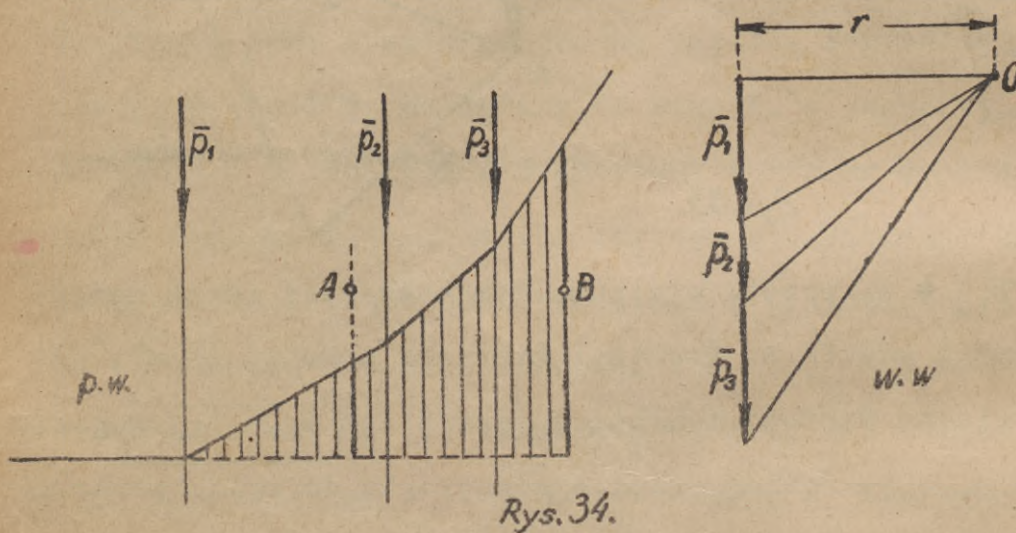


Rys. 33.

płaski, nadto jest  $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_{1,2} \neq 0$ , przeto owa suma momentów jest równą momentowi sumy  $\bar{p}_{1,2}$  względem tego samego punktu  $A$ . Prosta i kierunek momentu znamy; wystarczy przeto obliczyć bezwzględną wartość momentu; jest nią:  $m_{1,2} = \bar{p}_{1,2} \cdot a$ , gdzie  $a$  jest odleganiem punktu  $A$  od  $p_{1,2}$ . Nakreślmy przez  $A$  równoległą do  $p_{1,2}$  i zaznaczmy na niej odcinek  $BC = b$  odcięty bokami 1 i 3, przynależnymi do sumy  $p_{1,2}$ ; z  $O$  wykreślmy  $r_{1,2}$  prostopadle do  $p_{1,2}$ . Najwidoczniej trójkąty  $BCD$  i  $MNO$  są wzajemnie podobne; zatem jest:  $a : b = r_{1,2} : p_{1,2}$  lub inaczej  $m_{1,2} = p_{1,2} \cdot a = r_{1,2} \cdot b$ . Uzyskaliśmy w ten sposób inny sposób obliczania wartości poszukiwanego momentu;  $r_{1,2}$  nazywamy odległością biegunową dla  $p_{1,2}$ . W omawianym wypadku odległości biegunowe dla  $\bar{p}_1$ ,  $\bar{p}_1 + \bar{p}_2$ ,  $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3$  są wzajemnie różne. Oczywiście naszkicowany sposób obliczenia stosować można dla dowolnej ilości wektorów - jednakże wektory wybrane muszą następować po sobie w kolejności przyjętej w wieloboku wektorów. Warto przy tej sposobności zauważyć, że w powyższy prosty sposób sprawdziliśmy definicję wektora linjowego; jak wiadomo określa go wektor geometrycznie mu równy (figurujący w wieloboku wektorów) i moment tegoż wektora linjowego względem punktu. Otóż zależnie od przyjęcia bieguna zmieniają się odległości biegunowe i odcinki typu  $b$ ; ich iloczyn jednakowoż nie ulega zmianie jak to wykazała równość

$\bar{p}_{1,2} \cdot \mathbf{a} = r_{1,2} \cdot \mathbf{b}$ . Innymi słowy w metodzie wykreślnej wielobok wektorów zastępuje nam sumowanie wektorów, wielobok sznurowy sumowanie momentów. O powyższem przekonał się już w ust. 8. 9. i 10.

14. Opisany wyżej własność wieloboku sznurowego ma duże znaczenie teoretyczne ; praktycznie jednak obliczenie momentu jest tu dość okrutne i przeto dłuższe od normalnego sposobu. Korzyść nowej konstrukcji wychodzi na jaw dopiero wtedy, gdy badany układ jest układem równoległym (rys. 34.). Wtedy bowiem odległość biegunowa jest stała dla wszystkich częściowych sum i nie ma przyczyny, by nie można jej przyjąć w okrągłych liczbach np. 1, 2, 5, 10... jednostek wektora  $\bar{p}_1$ .

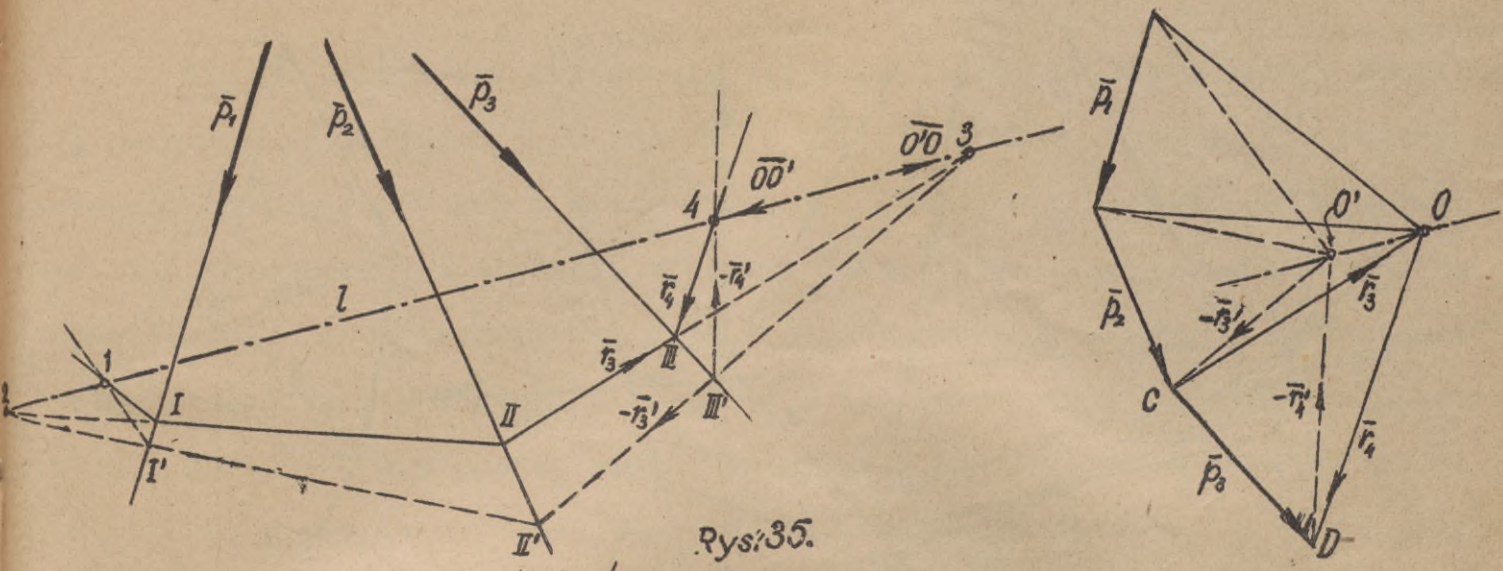


Rys. 34.

Pozatem odcinki typu b ustępu poprzedniego są wszystkie wzajemnie do siebie równoległe. Mnożąc np. odcinek pod punktem A przez r otrzymamy moment wektora  $\bar{p}_1$  względem punktu A ; podobnież moment sumy  $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3$  względem

B oznacza iloczyn z odcinka położonego równoległe do wektorów układu przez B i odległości biegunowej r. Wykazaliśmy przeto następujące : Wielobok sznurowy układu równoległego wektorów jest wykresem (dżagramem) momentów tych wektorów, o kierunku rzędnych, równoległym do wektorów układu. Zauważymy gdzieindziej, że ostatnia konstrukcja będzie dla nas mieć pierwszorzędne znaczenie.

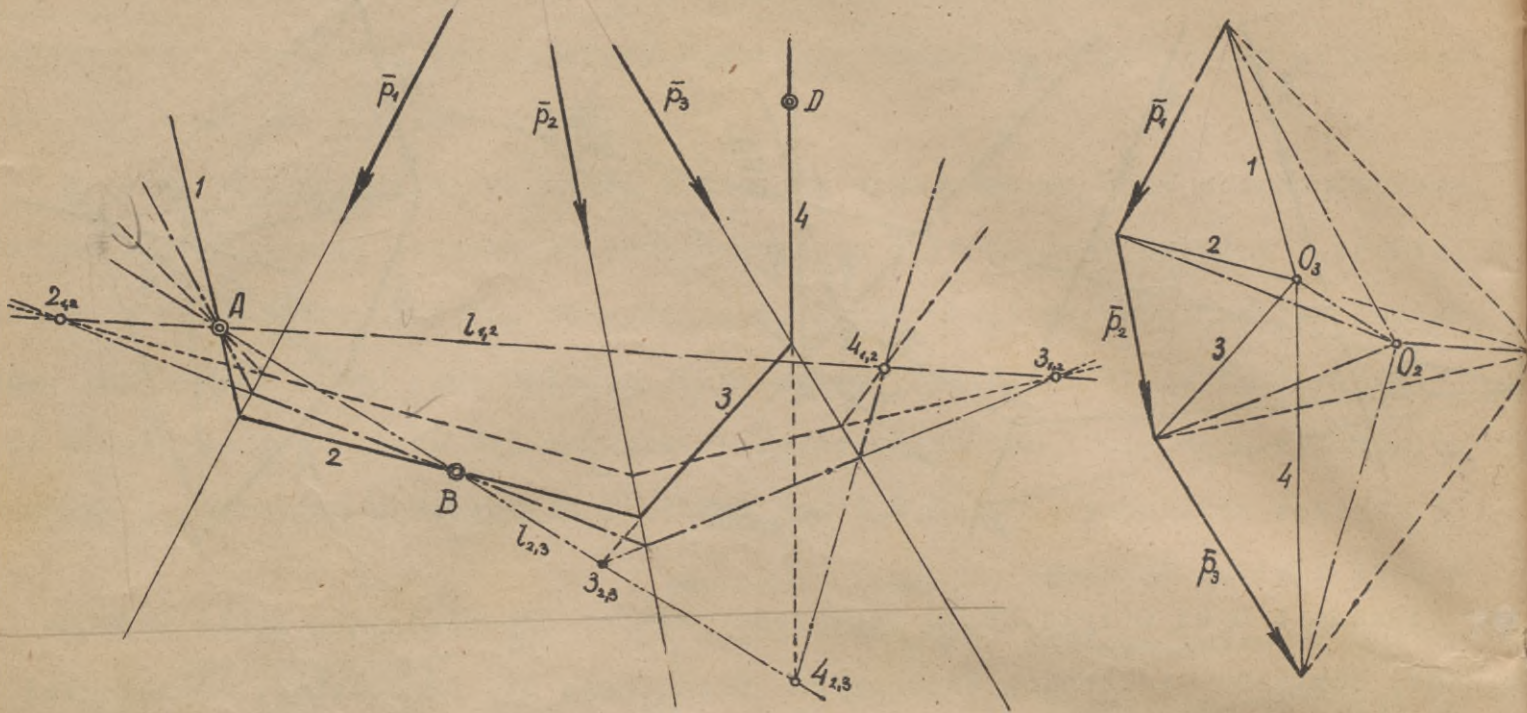
15. Biegun O można obrać zawsze zupełnie dowolnie ; możliwych biegunów na płaszczyźnie istnieje  $\infty^2$ ; tyleż odpowiada im wieloboków sznurowych przez określony punkt planu wektorów. Na dowolnym wektorze planu istnieje  $\infty^1$  punktów; tyleż wieloboków sznurowych można wykreślić przy określonym biegunie. W sumie przeto istnieje  $\infty^3$  wieloboków sznurowych dla każdego układu wektorów linjowych. Zachodzi proste pytanie : jak zmieni się wielobok sznurowy, gdy zmienimy położenie



Rys. 35.

nie bieguna z  $O$  na  $O'$  (rys. 35.). Odpowiedź brzmi : odpowiadające sobie (równomienne) boki obu wieloboków sznurowych przecinają się na prostej, równoległej do prostej łączącej oba bieguny. Aby powyższego dowiedzieć weźmy pod uwagę czworokąty zupełne  $III'34$  i  $CDOO'$ . W czworokątach tych pięć boków odpowiada sobie równoległe ; według znanego twierdzenia geometrii syntetycznej muszą zatem i szóste boki być równoległe czyli faktycznie jest :  $34 \parallel OO'$ . Dowód wektorjalny zaś przedstawia się równie prosto: Obrawszy strzałki jak na rysunku widzimy, że  $\bar{r}_3$  i  $\bar{r}_4$  są równowarte  $\bar{p}_3$ , zaś  $-\bar{r}'_3$  i  $-\bar{r}'_4$  są równowarte  $-\bar{p}_3$  ; zatem układ  $\bar{r}_3, \bar{r}_4, -\bar{r}'_3, -\bar{r}'_4$  musi być równowarty  $\bar{0}$ . Zatem  $\bar{r}_3 - \bar{r}'_3$  i  $\bar{r}_4 - \bar{r}'_4$  muszą leżeć na jednej prostej  $34$  ; pozatem jest najwidoczniej  $\bar{r}_3 - \bar{r}'_3 = \bar{OO}$ ,  $\bar{r}_4 - \bar{r}'_4 = \bar{OO}'$  czyli ta prosta jest równoległą do prostej przechodzącej przez  $O$  i  $O'$ . To samo oczywiście da się udowodnić dla wszystkich czworoboków zupełnych z tem, że każdy punkt prostej  $l$  będzie dwa razy zjawiał się w dowodzie ; zatem wszystkie charakterystyczne punkty  $1, 2, 3, 4$  leżą na jednej prostej  $l$ , równoległej do prostej  $OO'$ , co było do udowodnienia.

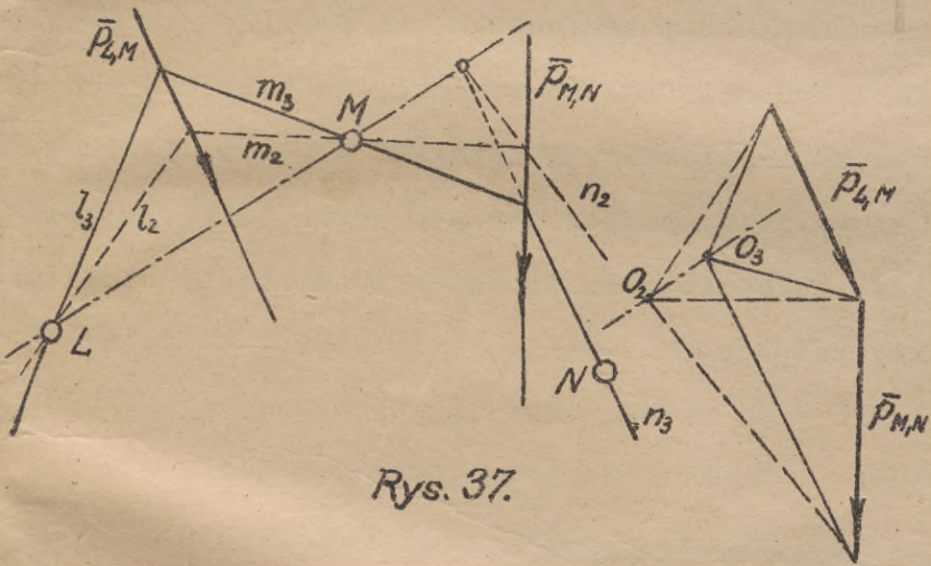
16. Przez jeden punkt można narysować  $\infty^2$  wieloboków sznurowych, zmieniając mianowicie w dowolny sposób biegun. Przez dwa określone punkty można narysować  $\infty^1$  wieloboków , przesuwając mianowicie biegun w pewien określony sposób. Przez trzy punkty można narysować tylko jeden wielobok sznurowy, mianowicie dla specjalnie obranego bieguna. Na rys. 36. dany jest układ  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$  ; wielobok składać się zatem będzie z czterech boków ; żądany, by pierwszy przeszedł przez



Rys. 36.

A , drugi przez B , czwarty przez punkt D. Przyjawszy dowolny biegun  $O_1$ , wykreślamy pierwszy wielobok sznurowy przez A. Przez punkt A przesuwamy dowolną prostą  $l_{1,2}$  i znajdujemy na niej punkty przecięcia boków narysowanego wieloboku tj punkty  $A, 2_{1,2}, 3_{1,2}, 4_{1,2}$ . Wykorzystując twierdzenie ust. 15. Łączymy B z  $2_{1,2}$  i zyskujemy drugi bok wieloboku sznurowego drugiego ; punkt przecięcia prostej  $B2_{1,2}$  z  $\bar{p}_1$  i  $\bar{p}_3$  łączymy z A i  $3_{1,2}$  zyskując w ten sposób pierwszy i trzeci bok wieloboku ; wreszcie punkt przecięcia boku trzeciego z  $\bar{p}_3$  łączymy z  $4_{1,2}$ ; w ten sposób uzyskaliśmy wielobok sznurowy przez dwa punkty . Kreślimy prostą  $l_{2,3}$  łącząc A z B i znajdujemy na niej  $A, B, 3_{2,3}$  i  $4_{2,3}$ ; łączymy  $4_{2,3}$  z D i otrzymujemy bok 4 szukanego wieloboku ; punkt przecięcia boku 4 z  $\bar{p}_3$  łączymy z  $3_{2,3}$  i otrzymujemy bok 3 ; punkt przecięcia boku 3 z wektorem  $\bar{p}_2$  łączymy z B i otrzymujemy bok 2 ; wreszcie łącząc punkt przecięcia boku 2 z A otrzymujemy bok 1. W ten sposób skonstruowaliśmy wielobok sznurowy przez trzy podane punkty zachowując kolejność założoną na wstępie. Kreśląc z wierzchołków wieloboku wektorów równoległe do boków uzyskamy jako kontrolę wspólny ich punkt przecięcia - mianowicie dla drugiego wieloboku biegun  $O_2$ , dla trzeciego biegun  $O_3$ .

17. Naszkicowana metoda dla większej ilości wektorów silnie komplikuje się ; bardzo często trudno jest znaleźć w obrębie arkusza rysunkowego punkty przecięcia równoimiennych boków i wtedy korzystać musimy z pomocy bieguna (ust.16 nie musieliśmy tego robić) ; wreszcie z powodu dużej ilości linii konstrukcyjnych rysunek wygląda nieprzejrzyście. Podany sposób prostszy. Dany układ wektorów podzielimy na dwie grupy ; jeśli mianowicie l-ty, m-ty i n-ty bok wieloboku sznurowego mają przejść przez punkty odpowiednio L, M i N - to do pierwszej grupy zaliczymy wektory  $\vec{p}_l, \vec{p}_{l+1}, \vec{p}_{l+2}, \dots, \vec{p}_{m-1}$ , do drugiej  $\vec{p}_m, \vec{p}_{m+1}, \vec{p}_{m+2}, \dots, \vec{p}_{n-1}$  ; pozostawimi wektorami  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_{l-1}$  nadto  $\vec{p}_n, \vec{p}_{n+1}, \vec{p}_{n+2}, \dots, \vec{p}_r$  chwilowo zajmować się nie będziemy. Przy pomocy wieloboku sznurowego (pierwszego) znajdziemy równowartości wydzielonym podukładowi sumy  $\vec{p}_{L,M} = \sum_{i=l}^{m-1} \vec{p}_i$  i  $\vec{p}_{M,N} = \sum_{i=m}^{n-1} \vec{p}_i$  i w ten sposób sprowadzamy zagadnienie do dwóch

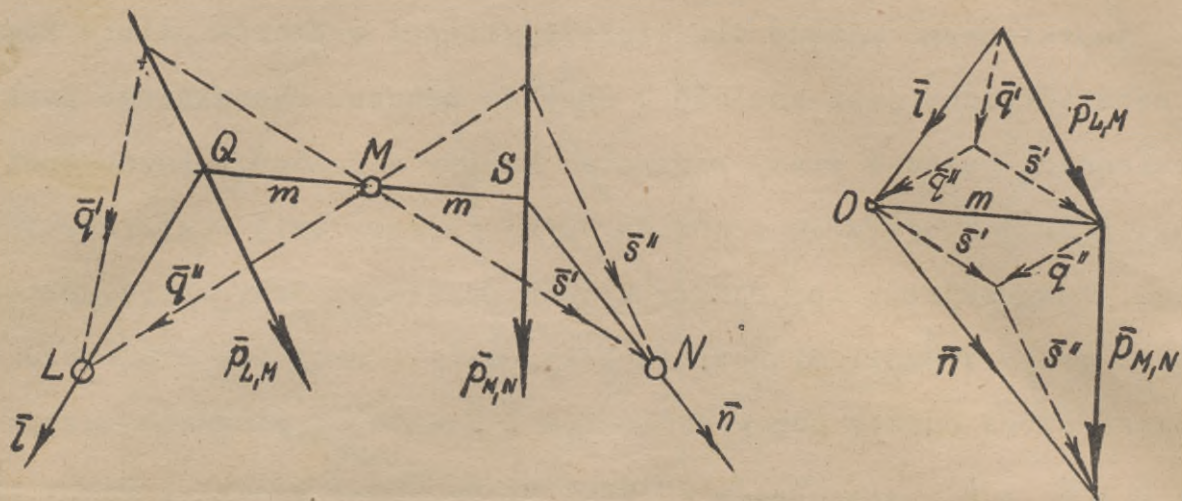


Rys. 37.

my zagadnienie do dwóch wektorów jak na rys.37, W dalszym ciągu zupełnie dowolnie prowadzimy przez L i M boki  $l_2$  i  $m_2$  i tym samym ustalamy dla wieloboku wektorów biegun  $O_2$  i bok trzeci  $n_2$ . Prosta LM spełni w dalszym ciągu to

samo zadanie, co ust.16. prosta AB ; posłuży mianowicie do znalezienia boku  $n_3$  przez N i wstecz boków  $m_3$  i  $l_3$  przez M i L. Tem samym ustalony jest biegun  $O_3$ . Łącząc ten ostatni z wierzchołkami wieloboku utworzonego z wszystkich wektorów układu tj.  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_{l-1}, \vec{p}_l, \vec{p}_{l+1}, \dots, \vec{p}_{m-1}, \vec{p}_m, \vec{p}_{m+1}, \dots, \vec{p}_{n-1}, \vec{p}_n, \vec{p}_{n+1}, \dots, \vec{p}_r$ , otrzymamy wszystkie promienie i równoległe do nich boki wieloboku sznurowego. Kreślenie zaczynamy oczywiście od boków  $l_3, m_3$  i  $n_3$  wstecz i wprzód.

18. Konstrukcję wieloboku sznurowego przez trzy punkty najbardziej symetryczną stanowi następująca : Sprowadzamy jak w ust.17. układ wektorów do dwóch podukładowi  $\vec{p}_{L,M}$  i  $\vec{p}_{M,N}$ . Rozkładamy  $\vec{p}_{L,M}$  na  $\vec{q}'$  i  $\vec{s}'$  przyczem  $\vec{s}'$  przechodzi przez M



Rys. 38.

a  $\vec{q}'$  przez L ; podobnie rozkładamy  $\vec{p}_{M,N}$  na  $\vec{q}''$  i  $\vec{s}''$  przyczem  $\vec{q}''$  przechodzi przez L i  $\vec{s}''$  przez N. Otóż  $\vec{q}' + \vec{q}''$  jest równowarte  $\vec{l}$ , zaś  $\vec{s}' + \vec{s}''$  jest równowarte  $\vec{n}$ . Na rys. 38 uwidoczniono rozkład omówiony i sumowanie ; koniec wektora  $\vec{l}$  względnie początek  $\vec{n}$  jest poszukiwanym biegunem O. W tym celu należy wykazać, że punkty Q tudzież S leżą na wspólnej prostej przez M. Najwidoczniej tak jest m wynika zarówno z l i  $\vec{p}_{L,M}$  jak i z  $\vec{s}'$  i  $\vec{q}''$  ; toż samo m wynika z drugiej strony zarówno z n i  $\vec{p}_{M,N}$  jak i z  $\vec{s}'$  i  $\vec{q}''$  ; mieliśmy na myśli oczywiście nie tylko wartość bezwzględne ale i kierunkowe. Tem samym dowód jest wyczerpany.

## ROZDZIAŁ II.

### Wstęp do mechaniki.

---

#### §.1. Pojęcia kinematyczne.

1. Ruch ciała uświadamiamy sobie jako zmianę otoczenia tegoż ciała.

Celem wzajemnego porozumienia się jako otoczenie przyjmujemy najwygodniej układ współrzędnych jako tzw. układ odniesienia. Zdefiniowanie układu odniesienia musi być tego rodzaju, by wykluczało ono nieporozumienia. Każdy punkt ciała określony jest w układzie współrzędnymi. Współrzędne mają wymiar długości. Za jednostkę długości przyjmujemy pewną określoną wielokrotność długości fali określonego rodzaju światła lub też długości wzorcowej sztaby z platyny i irydium przechowanej w Paryżu, przyczem jej temperatura ma wynosić  $0^{\circ}\text{C}$ . Jednostkę tę nazywamy 1 metrem; jednostkami pokrewnymi są 1 cm, 1 mm lub też 1 km itp. Punkt poruszający się w układzie opisuje sobą pewną krzywą w tym układzie; dla obserwatora znajdującego się w innym układzie krzywa owa może zmienić wogóle swój charakter - między innymi może się zdarzyć, że wyda się mu ona prostą. Przeto jeszcze raz widzimy, że dokładne topograficzne określenie układu odniesienia jest sprawą niesłychanie ważną mianowicie z tego powodu, że jeden układ może względem drugiego w pewien sposób się poruszać. Owe ruchy mogą być tego rodzaju, że dla pewnych zagadnień dadzą się one pominąć - dla drugich natomiast nie. W pierwszym wypadku najprościej przyjmujemy, że układ przyjęty jest nieruchomy, w drugim będziemy musieli za takim układem nieruchomym szukać, względnie dla przyjętego dowolnego układu przyjąć pewne poprawki kinematyczne. Fakt ostatni ma miejsce gdy chodzi o wyrażenie pewnych praw ogólnych, wyrażających wogóle przyczyny ruchu. Układ taki nazwano bezwzględny. Za taki układ można dla zagadnień technicznych nawet bardzo dokładnych przyjąć ziemię. Dla zagadnień astronomicznych, w których ziemia stanowi już czynnik drugorzędny, przyjęto za układ bezwzględny układ gwiazd stałych. W obu wypadkach rozważania geometryczne prowadzimy po myśli geometrii Euklidesa. Pewne poprawki w tym kierunku

ku wprowadza teoria względności Einsteina.

2. Ruch punktu połączony jest nie tylko ze zmianą współrzędnych, ale i zmianą drugiej wielkości zwanej czasem. Jeśli czas upływa, a punkt nie zmienia położenia, to mówimy o nim, że spoczywa. Jeśli punkt na przebyciu pewnej długości zużywa mniej lub więcej czasu, mówimy, że porusza się on szybciej lub powolniej. W ogóle zaś konstatając ruch mówimy, że punkt posiada prędkość, szybkość lub chyżość. Prędkość jest to zatem zmiana współrzędnej w czasie; jej wymiar fizyczny wynosi przeto  $\frac{\text{długość}}{\text{czas}}$ . Za jednostkę czasu przyjmujemy 1 sekundę tj.  $\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}$  część średniego dnia słonecznego, czyli czasu średnio potrzebnego na jeden pełny obrót geoidu ziemskiego dookoła swej osi. Najwidoczniej pojęcie to jest połączone z pojęciem układu odniesienia; w jakiż bowiem sposób moglibyśmy stwierdzić, że geoid odbył jeden obrót, tj. że wrócił do położenia początkowego? Z tego też powodu i pojęcie czasu zostało zaatakowane w mechanice względności. Za najprostszy ruch traktujemy ten, w którym wartość i kierunek prędkości są stałe tj. taki w którym punkt porusza się po prostej i <sup>w</sup>/dowolnie dużych lub małych, ale równych interwałach czasu odbywa równe drogi czyli zmiany współrzędnej. Ruch taki nazywamy geometrycznie jednostajnym; mówimy wtedy, że prędkość punktu jest wektorowo stała. I w tej definicji tkwi pojęcie układu odniesienia; kiedyż bowiem ruch jest rzeczywiście prostoliniowy?

3. Jeśli prędkość w ogóle zmienia się, to konstatajemy to w ten sposób, że w układzie odniesienia spostrzegamy, iż w równych interwałach czasu punkt odbywa nierówne drogi. Mówimy wtedy, że punkt przyspiesza lub opóźnia swą wędrówkę; dodatkowo też konstatajemy, że tor jest prostoliniowy lub też krzywoliniowy i to płaski lub przestrzenny. Najprościej wyrażymy się mówiąc, że punkt ma przyspieszenie. Pod przyspieszeniem rozumiemy wtedy zmianę prędkości w czasie. Wymiar przyspieszenia jest przeto  $\frac{\text{prędkość}}{\text{czas}} = \frac{\text{długość}}{\text{czas}^2}$ . W szczególnie prostym wypadku ruchu geometrycznie jednostajnego wynosi najwidoczniej przyspieszenie zero. Naodwrot jeśli przyspieszenie jest geometrycznym zerem, to ruch punktu może być albo jednostajnym i prostoliniowym albo też spoczynkiem. W przyrodzie konstatajemy bardzo często ruch prostoliniowy przyspieszony, przyczem przyspieszenie

jest geometrycznie stałe i różne od zera. Mianowicie przedmiot nie podparty ani nie zawieszony spada pionowo z upływem czasu coraz to szybciej ; skonstatowano, że w obrębie pewnej szerokości geograficznej i przy odległościach małych w porównaniu do średniego promienia kuli ziemskiej przyśpieszenie owo <sup>można</sup> uważać za stałe geometrycznie ; jego wartość np. dla Lwowa wynosi  $9,81 \frac{m}{sek^2}$ .

4. Zmodyfikowanie toru poruszającego się przedmiotu, unieruchomienie ciała, poruszenie spoczywającego, stoi bardzo blisko pojęć naszkicowanych w ust. 1,2,3. Najwidoczniej wymaga ona jednak jakiegoś nowego pojęcia, <sup>w</sup> którymby albo tkwił nasz wyraźny wysiłek mięśniowy albo też zaakcentowaną była indywidualność ciała, jego materja. Pojęcia te niekinematyczne zostaną omówione w §.2. i dalszych.

## §.2. Zasadnicze prawa dynamiki.

---

1. Podstawę mechaniki wyższej stanowią trzy aksjomaty Newton'a. W pierwszej swej kolejności brzmiały one następująco :

- a. Prawo bezwładności.
- b. Prawo niezależności działania sił
- c. Prawo wzajemności działania.

Dzięki krytyce filozoficznej Mach'a i innych wyraża się te prawa nieco inaczej i w nieco innym porządku, ale oczywiście tak, że sumaryczna treść nie doznaje tu żadnej zmiany.

I. Działania dwóch punktów materialnych na siebie są wzajemne i objawiają się przyśpieszeniami tych punktów  $\vec{p}_1$  i  $\vec{p}_2$ , przy czem kierunki tych przyśpieszeń leżą na prostej, łączącej oba punkty.

II. Dowolnie wybranym punktem 1,2,.... przynależą skalary  $m_1, m_2, \dots$  niezależne od natury fizycznej działania, zwane masami tych punktów, które wraz z przyśpieszenia-

mi tych punktów  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots$  czynią zadość równaniom typu :

$$\bar{p}_1 \cdot m_1 + \bar{p}_2 \cdot m_2 = 0$$

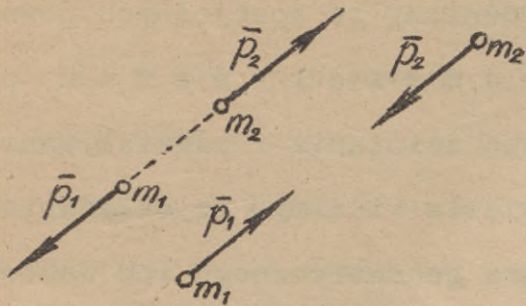
.....

III. Działania różnych punktów materialnych na dany punkt dodają się geometrycznie w sensie równania :

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots + \bar{p}_n$$

2. Zwróćmy uwagę na kilka szczegółów, wiążących się z prawami I,II,III. Podstawowe prawa dynamiki są ważne w układzie bezwzględnym. W kinematyce dowiedziemy, że przyspieszenie punktu poruszającego się w pewnym układzie waraża się identycznie w układzie innym, jeśli ten ostatni względem pierwszego porusza się jednostajnie i prostoliniowo. Zatem ogólniej możemy powiedzieć, że prawa podstawowe są ważne w każdym układzie, poruszającym się względem bezwzględnego jednostajnie i prostoliniowo. W prawach, jakie podano, nie ma mowy o tym, czy działanie dwóch punktów ma być bezwpośrednie czy też na odległość; może ono zatem mieć charakter dowolny. W każdym razie stwierdziwszy w układzie bezwzględnym przyspieszenie punktu możemy być pewni, że w bliższej lub dalszej odległości znajduje się punkt materialny, który to przyspieszenie wywołał ( I ). Jeśli natomiast pewien punkt porusza się geometrycznie jednostajnie, to albo nań nie działa inny punkt ( I ) albo też działają na niego inne punkty w ten sposób, że geometryczna suma przyspieszeń znika ( III ). Jeśli zatem na punkt materialny nie działają inne lub ich działania są równowarte zeru, to dany punkt porusza się jednostajnie i prostoliniowo, a więc w szczególnym wypadku spoczywa ( a ). Już Poincaré zwrócił uwagę, że w wygłoszonym wyżej prawie bezwładności tkwi milcząca umowa pomiaru czasu ; w §.1. zwrócono uwagę na pewne związane z tem trudności. Prawo (II) określa zależność między masą a przyspieszeniem. Oczywiście odnośnie do przyspieszenia może zajść dwojaki wypadek jak to zilustrowano na rys.39.; w zależności od tego dajemy działaniu wzajemnemu nazwę odpychania lub przyciągania. Żeby zdefiniować nowe pojęcie tj. masę, przyjmijmy wypadek, w którym  $|\bar{p}_1| = |\bar{p}_2|$ ; wtedy otrzymany

49



Rys. 39.

$m_1 = m_2$ . Zatem masy dwóch punktów są sobie równe, gdy przyspieszenia bezwzględne, których sobie udzielają są - równe. W ten sposób pojęcie masy staje się pojęciem od natury działania niezależnym ; masa jest czemś stałym. Teoria względności zaatakowała niedwuznacznie i to pojęcie. Za jednost-

kę masy możemy oczywiście przyjąć coś dowolnego. Umówiono się za taką jednostkę przyjąć masę 1 grama tj.  $\frac{1}{1000}$  część masy ciężarka wzorcowego z platyny i irydu przechowanego w Paryżu i zwanego 1 kilogramem. Masa ta nieznacznie się różni od masy 1 cm<sup>3</sup> wody w temperaturze jej największej gęstości 4°C. Jednostkę masy będziemy nazywać 1 Gram. W ten sposób wprowadziliśmy układ fizyczny jednostek podstawowych czyli tzw. system CGS = centymetr - Gram - sekundowy. Istnieje ogólny dowód twierdzenia, że wszelkie zjawiska fizyczne można zmierzyć jednostkami zbudowanymi z trzech podstawowych ; nic nie stoi na przeszkodzie, żeby za takowe nie przyjąć trzech wymienionych. Trzecie prawo (III) należy rozumieć następująco : Niech będzie dany punkt o masie  $m$  i układ innych punktów o masach  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Między  $m$  i  $m_1$  można ustalić zależność (II), toż samo da się zrobić z osobna dla  $m$  i  $m_2, \dots, m$  i  $m_n$ . Owe oddzielne działania różnych punktów na jeden inny są równoczesne i można je dodać geometrycznie zyskując w ten sposób działanie  $m \cdot \bar{p}_1 + m \cdot \bar{p}_2 + \dots + m \cdot \bar{p}_n = m \cdot (\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \dots + \bar{p}_n)$  lub według (III) krótko  $m \cdot \bar{p}$ . Owe działania względnie same przyspieszenia tworzą układ zbieżny o początku wspólnym umieszczonym w punkcie  $m$ .

3. Ważnem szczególnie w zastosowaniach technicznych jest pojęcie tzw. siły. Jeśli punkt materialny o masie  $m$  pod działaniem innego lub innych punktów materialnych posiada przyspieszenie  $\bar{p}$  to mówimy, że na punkt ten działa siła :

$$\bar{P} = m \cdot \bar{p}$$

Oczywiście nietrudno prawa podstawowe wyrazić obecnie inaczej używając określenia siły. W szczególności możemy powiedzieć, że skoro punkt 1 działa na punkt 2 siłą  $\bar{P}$ , to na odwrót punkt 2 działa na punkt 1 siłą  $-\bar{P}$  ; twierdzenie to można rozsze-

rzyć na układ punktów ; skoro jeden z nich wyróżniamy ze specjalnych powodów, to mówimy o d z i a ł a n i u nań drugiego i o d d z i a ł y w a n i u pierwszego na drugi ; wynikło stąd powiedzenie : " prawo działania i oddziaływania" lub " akcji i reakcji ". Po wprowadzeniu nowego pojęcia widzimy, że składanie sił  $\vec{P}_i$  działających na punkt odbywa się drogą sumowania geometrycznego ich wektorów tj.  $\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i$ . W szczególności gdy  $\sum_i \vec{P}_i = \vec{0}$  to i  $\vec{p} = \vec{0}$ , czyli punkt spoczywa lub porusza się jednostajnie i prostoliniowo ; mówimy wtedy o r ó w n o w a d z e s i ł i r ó w n o w a d z e p u n k t u m a t e r j a l n e g o, w tym ostatnim wypadku mając na myśli równowagę w s z y s t k i c h sił działających na punkt ; może się bowiem zdarzyć, że punkt będzie przynależał do pewnego ciała i wykonywał z powodu krępującego sąsiedztwa innych punktów opisany wyżej ruch mimo, że wszystkie na ten punkt działające siły nie będą w równowadze. W układzie fizycznym jest najoczywistej siła pojęciem pochodnym ; jej wymiar będzie tam według podanej definicji wynosił  $1 \text{ Gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sek}^{-2}$  ; powyższą jednostkę tzn. siłę udzielającą  $1 \text{ Gr}$  masy przyspieszenia  $1 \text{ cm}/\text{sek}^2$  nazwano 1 d y n ą. W układzie t e c h n i c z n y m jednostek zatrzymujemy bez zmian  $1 \text{ cm}$  i  $1 \text{ sek}$ , natomiast odrzucamy wymiar masy jako podstawowy a zastępujemy go jednostkami siły. Za taką przyjmujemy ciężar  $1 \text{ Gr}$  masy ; jednostkę taką nazywamy 1 gramem (ciężarowym) ; ponieważ - jak się za chwilę okaże - pojęcie to mogłoby być niedostatecznie ustalone, przeto mowa jest o  $1 \text{ gr}$  w Paryżu, gdzie przyspieszenie ciężkości  $g = 981 \text{ cm}/\text{sek}^2$ . Jednostkami pokrewnymi są  $1 \text{ kg}$ ,  $1 \text{ tona}$  itp. Układ techniczny operuje przeto jednostkami : cm - gr - sek. Tutaj siła jest pojęciem podstawowym, a masa pochodnym ; wymiar masy w tym układzie brzmi  $\text{gr} \cdot \text{sek}^2 \cdot \text{cm}^{-1}$ . Poza to jest 1 gram = 981 dyn. Wypada w tym miejscu podkreślić następujące : Równość  $\vec{P} = m \cdot \vec{p}$  nie jest trywialną identycznością mianowicie dzięki temu, że lewą i prawą stronę tego równania będziemy mogli z osobna doświadczalnie wykazać i sprawdzić. Poza to masa i ciężar, to są dwa zgoła różne pojęcia, które nie muszą wzajemnie ze siebie wynikać, skoro istnieje tzw. bezwładność. Celem bliższego wyjaśnienia poświęcimy tej sprawie osobny §.

§. 3. Masa i siła.

1. W dotychczasowych naszych rozważaniach idąc po myśli praw podstawowych mówiliśmy tylko o jednym punkcie materjalnym ; gdy zaś była mowa o kilku, to jednak każdy z nich stanowił dla siebie odrębny układ. Tymczasem namacalna rzeczywistość mówi, że przedmioty realne mają wymiary skończone tego rodzaju, że trudno je nazwać punktem. Możemy w dalszym ciągu obrać dwojaką drogę. Stojąc na gruncie teorii molekularnej możemy stwierdzić, że każde ciało składa się z systemu małych cząstek o wymiarach rzędu  $10^{-6}$  milimetra czyli 1 mikromilimetra, położonych w wzajemnej odległości podobnego rzędu ; tak małe elementy materjalne możemy skorzyścią nazwać punktami materjalnymi. Jeśli masę jednego z nich nazwiemy  $m_i$ , to masa całego układu tj. całego rozpatrywanego ciała wynosi:

$$m = \sum_i m_i$$

W podanym sensie jest ciało najwidoczniej niejedolite ; składa się bowiem z punktów materjalnych i punktów niematerjalnych ; w powyższem pojęciu ma jednak punkt wymiar skończony jakkolwiek praktycznie bardzo mały. Dla zrozumienia tego co nastąpi dodamy, że w zagadnieniach mechaniki nigdy nie zachodzi potrzeba dzielenia ciała na tak drobne elementy ; jeśli nawet przy pewnych rozważaniach punkty ciała będziemy wyodrębniać, to operacja ta stanie się nieistotną dla zagadnienia zasadniczego. Jakkolwiek przeto pojęcie ciała jako systemu punktów materjalnych jest dla celów mechaniki ciała sztywnego najzupełniej wystarczające, możemy pójść krok wprzód i dla wygody rachunkowej założyć kontinuum materjalne. Przyjmujemy je tak jak gdybyśmy przestrzeń nie zajętą materją zapełnili materją odnośnego punktu rozdzieliwszy ją w odpowiedni sposób. Wtedy wewnątrz powierzchni ograniczającej ciało w każdym punkcie matematycznym znajdziemy materję ; ciało będzie obecnie jedolite m. Jeśli w dowolnem miejscu takiego medjum ciągłego pomyślimy pewną objętość  $\Delta V$ , to obejmie ona pewną masę  $\Delta m$ . Z powodu założenia ciągłości istnieje obecnie granica wyrażenia  $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ , jeśli będziemy  $\Delta V$  nieograniczenie zmniejszali ; granicę tę nazywamy gęstością  $\delta$  ciała w danym punkcie, zatem :

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \delta$$

$$\delta = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Gęstość ciała naogół nie musi<sup>być</sup> jednak stałą w każdym punkcie ciała ; ciało takie nazywamy niejednorodnym. Jeśli natomiast gęstość jest stała, to wtedy ciało nazywamy jednorodnym. Oba określenia ściśle rzecz biorąc związane są z pojęciem jednolitości, a zatem są fikcją, ale silnie zbliżoną do prawdy. Już badania makroskopowe wykazują, że rzadko spotykamy się z ciałami jednolitymi. Tak np. stal składa się z kryształów i elementów bezpostaciowych ; zapewno gęstości tych elementów są różne ; cóż dopiero mówić np. o betonie, na który składa się cement, piasek i tłuczeń o różnej średnicy przeciętnej ziaren ? Technika załatwia się z temi problemami prosto ; przyjmuje się, że każdy materiał, zależnie od swego pochodzenia ma pewną gęstość przeciętnie stałą ; przyjmujemy, że jest to właśnie gęstość, określona, wyżej podaną definicją matematyczną. Innemi słowy jest :

$$m = \int dm = \int \delta \cdot dV = \delta \cdot \int dV = \delta \cdot V$$

Gęstość, tkwiącą w powyższym wzorze nazywamy wyrażnie gęstością objętościową. Jest rzeczą oczywistą, że masa może być rozłożona tylko w sposób trójwymiarowy. Jednakże często się zdarza, że mamy do czynienia z przedmiotami, których dwa wymiary dominują w porównaniu do trzeciego (płyty, powłoki itp.). Jeśli taki wypadek ma miejsce, a ów trzeci stosunkowo mały wymiar (grubość) jest stały, to skorzyścią możemy masę zgęścić w kierunku grubości i rozłożyć ją w powierzchni środkowej danego ciała ; mówimy wtedy o masie rozłożonej dwuwymiarowo i o gęstości powierzchniowej ; wtedy jest :

$$m = \int dm = \int \delta \cdot dA = \delta \cdot \int dA = \delta \cdot A$$

gdzie A jest powierzchnią badaną. Oczywiście w gęstości powierzchniowej tkwi gęstość objętościowa i wymiar grubości. Wypada dodać, że często postępujemy naodwrot ; np. z dwuwymiarowego prostokąta łatwo można przejść do cienkiej płytki prostokątnej o stałej grubości. Jeśli wreszcie ciało rozpatrywane ma dwa stałe wymiary małe w porównaniu do trzeciego (np. pręt), to idziemy jeszcze krok naprzód

48  
16  
64

i wprowadzamy w rachunek gęstość liniową i masę rozłożoną jedno-  
wymiarowo. Wtedy jest :

$$m = \int dm = \int \delta \cdot ds = \delta \cdot \int ds = \delta \cdot s$$

W gęstości linjowej tkwi gęstość objętościowa i pole przekroju pręta. Wprowadzenie kontinuum materjalnego przynosi korzyści czysto rachunkowe, znane z porównania rachunku sumacyjnego i całkowego. Będziemy z tych wygod chętnie korzystali.

2. Jak już wspomniano ciała swobodne spadają w pobliżu powierzchni zewnętrznej geoidu ziemskiego po liniach prostych ze stałym przyspieszeniem  $g = 9,81 \text{ m/sek}^2$ , przyczem tory wszystkich punktów ciała są wzajemnie równoległe. Zatem działanie ziemi wyraża się równością :

$$m_1 \cdot \bar{g} + m_2 \cdot \bar{g} + m_3 \cdot \bar{g} + \dots \dots \dots m_n \cdot \bar{g} = \sum_i m_i \cdot \bar{g} = \bar{g} \sum_i m_i = m \cdot \bar{g}$$

Wyrażenie typu  $m \cdot \bar{p}$  umówiliśmy się nazywać siłą. Przyspieszenie  $\bar{g}$  nazywamy przyspieszeniem ciężkości. Wyrażenie typu  $m_i \cdot \bar{g}$  moglibyśmy nazwać siłą ciężkości ; nazwiemy je krótko ciężarem punktu  $m_i$ . Wyrażenia powyższego typu są wektorami równoległymi. Niezależnie od mechanicznego znaczenia tych wyrażen - bezsprzecznie możemy je dodać. Iloczyn :

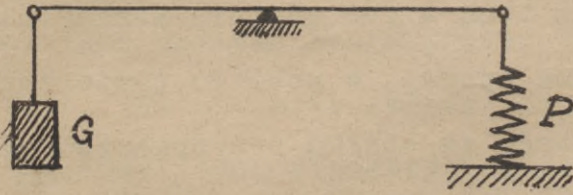
$$\bar{G} = m \cdot \bar{g}$$

nazywamy ciężarem ciała w pewnym miejscu. Zamiast po myśli praw Newton'a powiedzieć : Działanie ziemi na ciało m objawia się wzajemnem przyciąganiem o wartości  $G = m \cdot g$  mówimy - wyodrębniając rozpatrywany przedmiot - : ciężar ciała m wynosi  $G = m \cdot g$ . Że w tym skrócie tkwi nieco inny pojęciowo, jakkolwiek ilościowo ten sam rezultat - o tem pomówimy gdzieindziej. Tutaj dodamy, że właśnie z powyższych powodów wprowadziliśmy nazwę " masy 1 grama ". Zatem wyrażnie :

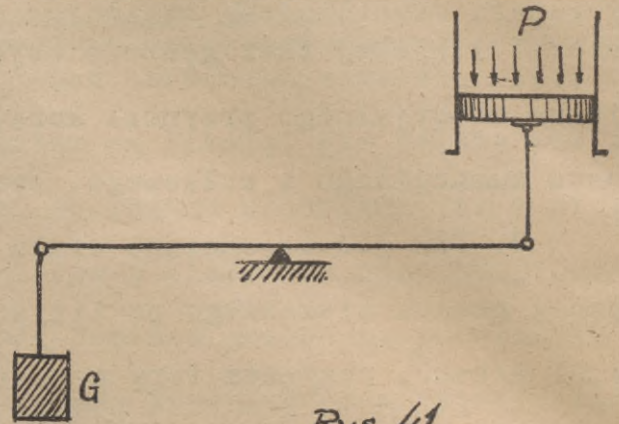
$$\begin{aligned} \text{masa 1 grama} &= 1 \text{ Gram} && (\text{masowa jednostka}) \\ \text{ciężar 1 Grama} &= 1 \text{ gram} && (\text{ciężarowa jednostka}) \end{aligned}$$

3. Wyrażenie  $m \cdot p$  jest siłą, ciężar  $m \cdot g$  jest również siłą. Zatem siły możemy mierzyć ciężarami. Żeby tak było musi na masę ciężarka działać wyłącznie przyspieszenie ciężkości ; w przeciwnym bowiem wypadku zmierzylibyśmy daną siłę nie tylko ciężarem, ale i pewnym dodatkowym (czasem nieuchwytnym) działaniem. Mówimy zatem o tzw. stатыcznym pomiarze sił; ciężarek znajduje się w równowa-

dze tj. najprościej - spoczywa. W ten sposób możemy przy pomocy najprostszej dźwigni lub wagi zmierzyć ciężarem  $G$  siłę napięcia sprężyny  $P$  (rys.40.); w równie



Rys. 40.

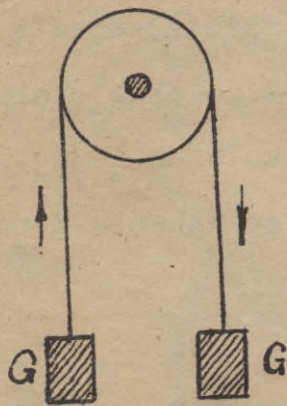


Rys. 41.

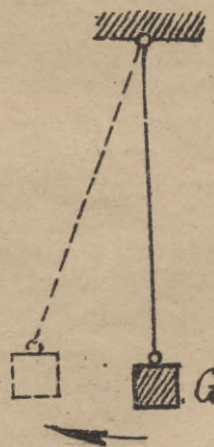
prosty sposób możemy ciężarem  $G$  zmierzyć ciśnienie pary na tłok  $P$  (rys.41.).

Sens obu doświadczeń tkwi w równości  $P = G$ . W ten sposób w równaniu  $P = m.p$  można doświadczalnie stwierdzić lewą stronę równania. Jeśli istnieje masa, to istnieje i ciężar ; jednakże identyfikowanie obu wielkości lub też pochopne wyciąganie jakichś wniosków może doprowadzić do błędów.

4. Istnieje bowiem również tzw. bezwładność tj. opór jaki wyczuwamy, gdy ciało spoczywające chcemy naszym osobistym wysiłkiem mięśniowym poruszyć.



Rys. 42.



Rys. 43.

Układ przedstawiony na rys.42 jest najwidoczniej zrównoważony. Działanie krążka - jak gdzieindziej będzie wykazane - można pominąć. Jeśli ciężary będą większe, ale równe to w równowadze nic się nie zmieni. Starajmy się jeden z ciężarków przesunąć w dół czyli drugi podnieść. Okaze się, że

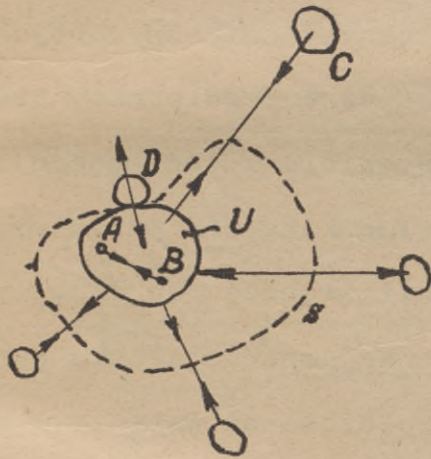
uczujemy opór, który będzie tem większy im większe będą masy ciał zawieszonych, nadto tem większy im naglej ruch wywołamy tzn. im mniejszego czasu zużyjemy na wywołanie ustalonej prędkości, czyli naprościej im większe będzie przyśpieszenie

ruchu : zatem opór wyniesie m.p. Podobnie będzie w wypadku zilustrowanym na rys.43. Przedmiot wiszący G trwa w równowadze ; działanie ciężaru zrównoważone jest napięciem pręta. Jeśli jednak zechcemy przedmiot przesunąć w bok, to doznamy znów oporu bezwładności, którego wielkość zależeć będzie znów od masy i przyspieszenia względnie wielkości pokrewnych. Podobnie jeśli przedmiot ten będzie wahał to zatrzymanie go w położeniu np. najniższym tj. w tem gdzie niedawno istniała równowaga, wymagać będzie znów pewnego wysiłku. Oba przykłady dowodzą niezbicie, że rola masy jest obszerniejszą od roli ciężaru. Wysiłkiem naszym zmierzaliśmy obecnie p r a w ą stronę równości  $P = m.p$ . W ten sposób dowiedliśmy, że równanie

$$P = m.p$$

nie jest faktycznie trywialną identycznością, jakby się ogólnie zdawało.

5. Weźmy pod uwagę jakieś ciało np. U na rys.44. Na punkty tego układu



Rys. 44.

działają różne siły. Pochodzą one od wzajemnego działania punktów A i B tego samego ciała, albo też od działania ciał innych C, przyczem owo działanie jest oczywiście też wzajemne ; może ono funkcjonować na odległość np. między U a C albo też może być bezpośrednie np. między U a D. Nie wchodząc narazie bliżej w to, do czego redukuje się działanie dwóch ciał tj. ukła

dów [punktów materjalnych, możemy narazie rys.44. traktować za szkic, w którym zaznaczono dla każdego układu działanie jednego punktu materjalnego. Działanie to objawia się siłami. Najwidoczniej wszystkie siły zjawiają się dwójkami. Gdybyśmy na uwadze nie mieli żadnego specjalnego układu, to najprościej nazwać byśmy musieli wszystkie siły a) s i ł a m i w e w n ę t r z n e m i . Wyodrębniając pewien określony układ np. U przecinamy pomyslanym przekrojem s nitki wiążące wszystkie układy i odrzucamy wszystkie ciała z wyjątkiem ciała U. Oczywiście działanie części odrzuconych zastąpimy odnośniami siłami. Siły te nazwiemy obecnie b) s i ł a m i z e w n ę t r z n e m i . Na ciało U działają obecnie siły ze-

wewnętrzne ; wewnętrznymi są nadal tylko te, które pochodzą od wzajemnego działania punktów samego układu U. Gdybyśmy w dalszym ciągu podzielili ciało U na części i rozpatrując jedną z nich resztę odrzucili, to znów działanie części odrzuconych zastąpiłibyśmy odnośnymi siłami. Najwidoczniej przeto wartości liczebne obu gatunków sił mogą być i są równe, jednakże oba pojęcia są zgoła różne. Siły wewnętrzne pojawiają się dwójkami zerowymi ; siły zewnętrzne nie. Mówiąc w ust. 2) że działanie wzajemne ciała i ziemi objawia się siłą G - powiedzieliśmy tem samym, że G jest siłą wewnętrzną. Mówiąc natomiast, że toż samo ciało ma ciężar G potwierdzamy milcząco, że G jest siłą zewnętrzną. Naszkicowany podział sił jest z a s a d n i c z y m ; jest rzeczą pierwszorzędnej wagi przed rozpatrzeniem w jakiegokolwiek zagadnienia mechanicznego zdać sobie przedewszystkiem sprawę z tego, które siły są zewnętrzne, a które wewnętrzne.

6. Jeśli na ciało działamy siłami to wywołany ruch tzn. znajdziemy, że punkty tego ciała poruszają się po pewnych krzywych matematycznych tj. niematerialnych. Możemy jednakże zmusić ciało do tego, że pewne jego punkty będą musiały się poruszać po zgóry przewidzianych krzywych mianowicie w ten sposób, że krzywe owe wykonamy jako uwłoty materialne i sztywne i z niemi właśnie połączymy owe pewne punkty ciała. Mówimy wtedy, żeśmy ciało odebrali swobodę ruchów. Oczywiście ograniczenie swobody wywoła nowe siły ; są niemi wzajemne działania punktów ciała i materialnego toru. Rozpatrując tylko ciało założone na wstępie a nie tor, odrzucimy ten ostatni, a jego działanie zastąpimy pewnymi siłami, zewnętrznymi dla badanego ciała ; nazywamy je odporami lub reakcjami. Siły te nie będą najwidoczniej dowolne ; zależą będą między innymi przedewszystkiem od tych sił, jakie miśmy działali na ciało w jego poprzedzonym stanie swobodnym. Jeśli jedne zmienimy to zmodyfikują się i drugie. W związku z powyższem dzielimy siły z e w n ę - t r z n e na a) siły czynne i b) b i e r n e czyli w i ą ż ą - c e tj. o d p o r y l u b r e a k c j e. Rozróżnienie obu gatunków sił niekłada żadnych trudności ; ma ono również duże znaczenie dla mechaniki.

7. Jeśli dwa ciała stykają się ze sobą w jednym punkcie np. kula z płytą to może się zdarzyć, że sumaryczne działanie wszystkich punktów układu wyrazi się

siłą przechodzącą przez ten punkt i to w sposób dynamicznie równowarty. Mówimy wtedy o s i l e s k u p i o n e j w punkcie. Skądinąd jest wiadomem, że z powodu odkształcalności materji nacisk skupiony jest fizycznie niemożliwy. Pojęcie to jednak jest tak pożyteczne, że bardzo chętnie się niem posługujemy. Z powodu wspomnianej odkształcalności materji działanie siły objawia się zawsze w pewien sposób ciągły; mówimy wtedy o s i l e r o z k ł o ż o n e j według pewnego matematycznego schematu i to wzdłuż krzywej lub wzdłuż powierzchni np. w przypadku łańcucha zawieszzonego w dwóch punktach, pryzmatu piasku ułożonego na płaszczyźnie itp.

Pojęcie siły wiążemy zupełnie słusznie z obecnością masy. Z tego powodu w mechanice klasycznej mówiono wyłącznie o s i l e m a s o w e j. Z biegiem czasu okazało się, że nie wszystkie zjawiska można na tem tle wyjaśnić. Z powyższych powodów, a częściowo i dla uproszczenia pewnych metod rachunkowych wprowadzono pojęcie s i ł y p o w i e r z c h n i o w e j. Np. wiadomem jest, że działanie molekuł więc punktów materjalnych ciała ogranicza się do najbliższego sąsiedztwa tzn., że sięga ono swym promieniem do wielkości rzędu zaledwie  $10^{-5}$  milimetra



Rys. 45.

Jeśli przeto przez ciało takie wykonamy w myśli dowolny przekrój, to przez element pola pomyślany w miejscu A (rys. 45.) przejdzie wprawdzie znaczna ilość prostych działania sąsiadujących elementów masowych, ale w grę wejdą tylko punkty oddalone od płaszczyzny przekroju o wielkości podanego rzędu. Odrzucając jedną część ciała otrzymamy cały las wektorów różnie nachylonych

względem płaszczyzny przekroju i zmieniających się w sposób ciągły zależnie od współrzędnych punktu płaszczyzny. Przyjmujemy zupełne wystarczająco, że siedliskiem owych sił jest wprost przekrój ciała. W ten sposób wprowadziliśmy pojęcie siły powierzchniowej zdając sobie jednak doskonale sprawę z jej pochodzenia.

Rozróżniamy w mechanice tzw. s i ł y z a c h o w a w c z e i r o z p r a s z a j a c e. Pojęcia te nie dadzą się w tem miejscu wyraźnie oświetlić i będzie o tem mowa gdzieś indziej. Ilustrujemy sprawę prostym przykładem. Pierwsze

Zachowawczy

z nich nie zależą od natury zagadnienia np. ciężar ciała, który nie zależy od tego czy ciało jest w ruchu takim lub w innym, czy na to ciało działają takie lub inne siły dodatkowe. Drugie zależą od całego szeregu szczegółów indywidualnych np. tarcie, które znika ze spoczynkiem ciała, pojawia się przy jego ruchu nieswobodnym, rośnie lub maleje zależnie od podnieć zewnętrznych, modyfikuje zagadnienie<sup>w</sup> zależności od kierunku ruchu itp.

Powyższej klasyfikacji nie wolno jednak mieszać z inną. Mówimy o siłach stałych i zmiennych. Zmienność może tkwić tylko w współrzędnych ciała ; ten wypadek - o ile zachodzi - to przedewszystkiem w statyce ; więc np. opór ciała może być różny w różnych położeniach ciała. Znacznie zawilej przedstawia się sprawa, gdy siła zależy dodatkowo i od czasu względnie wielkości pokrewnych tj. od prędkości itp ; z wypadkami takimi mamy do czynienia w dynamice ; np. opór środowiska - przypuśćmy powietrza - w którym porusza się jakieś medjum zależy od jego prędkości tj. opór rośnie wraz z prędkością. Siły rozpraszające są najczęściej zmienne, jednakże i siły zachowawcze mogą być zmienne ; najwidoczniej oba podziały ostatnio wprowadzone są przeto różne

8. Niech na ciało działa pewien układ sił zewnętrznych to ogólnie rzecz biorąc nastąpi ruch tegoż ciała. Jeśli tym samym układem będziemy działali na inne ciało to wystąpi inny ruch. Jest rzeczą jasną, że oba ciała nie muszą się nawet różnić masami ; wystarczy, że w obu wypadkach tę samą ilość materji rozmaicie rozmieścimy w przestrzeni. Zachodzi następujące pytanie : Jaki obrać układ trzech prostopadłych osi dla ciała, aby rozmieszczenie masy opisać jak najprościej - powiedzmy - aby ów system osi był układem naturalnym w tym sensie, w jakim np. w matematyce naturalnymi współrzędnymi krzywej płaskiej są długość łuku i krzywizna. Ile i jakie współrzędne ciała należy obrać, by z punktu widzenia mechaniki ciała sztywnego wpływ rozmieszczenia danej masy na charakter ruchu był wystarczająco i jednoznacznie opisany. Nie wchodząc narazie bliżej w dowodzenie tego co nastąpi zapowiemy tylko, że odpowiedź na powyższe pytania istnieje. W tym celu w najbliższych dwóch paragrafach wprowadzimy pewne nowe po-

ciała. Gdziekolwiek się okaże, że ubiegniemy w ten sposób wypadki w sposób mechanicznie pożądany.

§. 4. Środek masy.

1. Przedewszystkiem dla danego ciała ustalimy pewien charakterystyczny punkt matematyczny. Zdefiniujemy go tak, by ustalenie to było jednojednoznaczne. Z teorii wektorów (§. 5. ust. 3 i 4) przypominamy sobie, że dla układu liczb (skalarów) można znaleźć ich środek. Niech przeto badane ciało składa się z układu punktów materialnych  $m_i$ , to przyjąwszy dowolny punkt O jako początek promieni wektorów  $\vec{r}_i$  możemy określić punkt S promieniem-wektorem :

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

Punkt S nazywamy środkiem masy układu punktów materialnych. W teorii wektorów wykazano, że określenie punktu S jest jednojednoznaczne. Jeśli ciałem jest kontinuum materialne, to środek masy układu ciągłego określa wektor:

$$\vec{r}_0 = \frac{\int dm \cdot \vec{r}}{\int dm} = \frac{\int dm \cdot \vec{r}}{m}$$

$$m \vec{r}_0 = \int dm \cdot \vec{r}$$

Ogólnie przeto możemy wygłosić następujące twierdzenie: Suma geometryczna momentów mas wszystkich punktów (elementów) materialnych względem punktu jest równą momentowi masy całkowitej m, skupionej w jej środku względem tego samego punktu.

Powyższy sposób wyślowienia wynika stąd, że iloczyn  $m \cdot \vec{r}_0$  możemy faktycznie uważać za moment masy całkowitej m zgęszczonej w jednym punkcie S, umieszczonym na końcu wektora  $\vec{r}_0$ . Równanie :

$$m \cdot \vec{r}_0 = \sum m_i \vec{r}_i \quad \text{względnie} \quad m \cdot \vec{r}_0 = \int dm \cdot \vec{r}$$

możemy - jak wiadomo - przedstawić analitycznie następująco :

$$m \cdot x_0 = \sum m_i x_i, \quad m \cdot y_0 = \sum m_i y_i, \quad m \cdot z_0 = \sum m_i z_i$$

$$\text{względnie} \quad m \cdot x_0 = \int dm \cdot x, \quad m \cdot y_0 = \int dm \cdot y, \quad m \cdot z_0 = \int dm \cdot z$$

Współrzędne  $x_0, y_0, z_0$  określają położenie środka masy  $S$  w układzie  $x, y, z$ . Jeśli ciało jest jednorodne, to ostatnia grupa da się uprościć stronami przez gęstość  $\delta$ . Wtedy zależnie od tego czy masa rozłożona jest trój-, dwu- lub jedno-wymiarowo uzyskamy jedną z grup następujących :

$$\begin{aligned} V.x_0 &= \int dV.x, & V.y_0 &= \int dV.y, & V.z_0 &= \int dV.z \\ A.x_0 &= \int dA.x, & A.y_0 &= \int dA.y, & A.z_0 &= \int dA.z \\ s.x_0 &= \int ds.x, & s.y_0 &= \int ds.y, & s.z_0 &= \int ds.z \end{aligned}$$

Najwidoczniej  $x, y, z$  oznaczają oddalenie elementu masy (objętości, pola, łuku) od płaszczyzn układu  $yz, zx, xy$ ; iloczyn oddalenia od płaszczyzny i elementarnej masy nazwiemy momentem (skalarowym) masy względem płaszczyzny. Zatem : Suma momentów w wszystkich mas elementarnych względem płaszczyzny jest równą momentowi masy całkowitej, skupionej w jej środku, względem tejże płaszczyzny.

2. Wracając do cytowanych ustępów §.5. rozdziału I-ego możemy wszystkie skalary  $m_i$  pomnożyć przez jeden i ten sam zresztą dowolny wektor, a wtedy zamiast układu punktów materjalnych uzyskamy układ równoległy wektorów nieswobodnych ; jak udowodniono środek takiego układu wektorów ma właśnie współrzędne, podane w ust.1. Zatem : a) Środek masy jest równocześnie środkiem układu wektorów równoległych o początkach pokrywających się z punktami (elementami) materjalnymi o wartościach do nich proporcjonalnych. Z różnych wektorów nasuwa się przede wszystkim przyspieszenie ciężkości  $\vec{g}$  ; z tego to powodu nazywamy często środek masy środkiem ciężkości. b) Jeśli  $\sum m_i \vec{r}_i = \vec{0}$  względnie  $\int dm. \vec{r} = \vec{0}$  to  $\vec{r}_0 = \vec{0}$  czyli środek masy  $S$  pokrywa się z punktem odniesienia  $O$ . c) Jeśli suma momentów mas względem przyjętej płaszczyzny znika, to na tej płaszczyźnie mieści się środek masy. Zdarzyć się może przedewszystkiem wtedy, gdy ciało badane jest płaskie i ży właśnie w płaszczyźnie rachunkowej ; wtedy znikają współrzędne dowolnych punktów mierzone prostopadle do płaszczyzny, a tem samem znikają odnośne momenty i wreszcie ich suma. Nieco ogólniejszy wypadek stanowi ciało posiadające płasz

Wzajemnej symetrii - zresztą niekoniecznie prostokątnej ; wtedy każdemu dowolnemu punktowi, położonemu po jednej stronie płaszczyzny, odpowiada drugi po stronie przeciwnej, w tem samym bezwzględny oddaleniu od tej płaszczyzny ; jeśli ową płaszczyznę uważać będziemy za płaszczyznę układu odniesienia, to momenty mas elementarnych parami będą znikać, a tem samym i ich całkowita suma. Zatem środek masy leży w płaszczyźnie symetrii. d) Jeśli suma momentów elementarnych mas (punktów materialnych) znika dla dwóch płaszczyzn, to - z powodu c) - środek masy leży na krawędzi przecięcia się obu tych płaszczyzn. Taki wypadek zachodzi, gdy masa rozłożona jest na prostej ; na tej prostej też leży jej środek. Wypadek nieco ogólniejszy ma miejsce, gdy ciało posiada dwie płaszczyzny symetrii czyli oś symetrii ; środek masy leży na osi symetrii ciała. e) Jeśli wreszcie suma momentów mas znika dla trzech płaszczyzn, to w punkcie ich przecięcia leży szukany środek masy. Taki wypadek zachodzi gdy ciało ma trzy płaszczyzny symetrii, a zatem środek symetrii ; przeto środek symetrii jest środkiem masy.

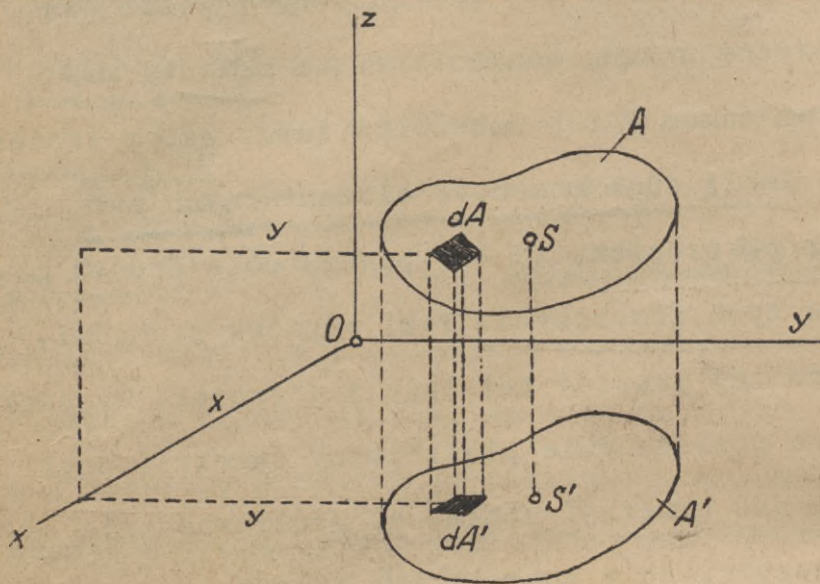
Sumę  $\sum m_i \vec{r}_i$  względnie  $\int dm \cdot \vec{r}$  można rozbić na części tzn. na sumy częściowe względnie całki w obszarach częściowych ; dla każdego takiego podukładu można stosować twierdzenie o środku masy. Niech owe masy s k o ń c z o n e i dowolnie wielkie będą  $m_I, m_{II}, \dots, m_j, \dots$ , a ich środki na końcu wektorów  $\vec{r}_I, \vec{r}_{II}, \dots, \vec{r}_j, \dots$  możemy napisać :

$$\sum m_j \vec{r}_j = m \cdot \vec{r}_0, \text{ względnie}$$

$$\sum m_j x_j = m \cdot x_0, \quad \sum m_j y_j = m \cdot y_0, \quad \sum m_j z_j = m \cdot z_0$$

Wnania powyższe różnią się wybitnie od dotychczasowych tem, że zarówno po lewej jak i po prawej stronie figurują tam masy skończone nadto, że po obu stronach figurują współrzędne środka. Twierdzenia powyższego możemy przeto z korzyścią użyć tylko wtedy, gdy układ da się podzielić na takie części, dla których znalezienie środków nie nastrocza żadnych trudności względnie położenie tych środków jest z góry znane. Z wypadkami takimi mamy bardzo często do czynienia. g) Znajomość położenia środka dla figur dwuwymiarowych p ł a s k i c h pozwala często proste znalezienie środka innych figur p ł a s k i c h z tamtymi spowinoc-

waconych. Niech będzie  $A$  polem figury o danym środku  $S(x_0, y_0, z_0)$ . Pole rzutu tej figury na płaszczyznę  $xy$  wynosi  $A' = A \cdot \cos \alpha$ , przy czym  $\alpha$  oznacza kąt nachylenia



Rys. 46.

płaszczyzny figury i płaszczyzny  $xy$ .

Ten sam związek zachodzi między ele-

mentem pola  $dA$  i jego rzutem  $dA'$  z

wodu założonej płaskości ; zatem

$dA' = dA \cdot \cos \alpha$ . Współrzędne środka

rzutu (rys. 46) wynoszą :  $x_0' = \frac{1}{A'} \cdot \int x dA$

$y_0' = \frac{1}{A'} \int y \cdot dA'$  ,  $z_0' = 0$ , albowiem

współrzędne rzutu elementu są  $x, y, 0$ .

Wstawiając za  $A'$  i  $dA'$  wyżej podane

wartości otrzymamy:  $x_0' = \frac{1}{A} \cdot \int x \cdot dA = x_0$

$y_0' = \frac{1}{A} \cdot \int y dA = y_0$  ,  $z_0' = 0$ . Zatem:

Środek rzutu pola figury płaskiej na płaszczyznę jest rzu-  
tem środka owej figury. h) Znajomość pola powierzchni obrotowej pozwala

ustalić współrzędną środka masy krzywej południkowej i naodwrot (1-a część twier-

dzenia Pappusa - Guldińa). Niech bowiem będzie  $s$  krzywą południkową a  $l$  osią o-

brotu, to przy obrocie o kąt dowolny  $\varphi$  opisze element  $ds$  część (dwukąt) powierz-

chni stożka ściętego o polu  $dA = r \cdot \varphi \cdot ds$ . Zatem całe  
pole wyniesie

$$A = \int r \cdot \varphi \cdot ds = \varphi \int r \cdot ds = \varphi \cdot r_0 \cdot s$$

przy czym  $r_0$  oznacza oddalenie środka masy łuku  $s$

od osi obrotu. Dla zupełności wypada dodać, że od-

dalenia  $r$  elementów  $ds$  od osi obrotu są równocze-

śnie oddaleniami od płaszczyzny przechodzącej przez

$l$  prostopadle do płaszczyzny krzywej południkowej

w ten sposób twierdzeniu o momentach mas względem

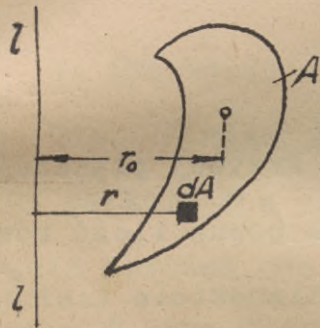
płaszczyzny stało się zadość. Kąt  $\varphi$  jest oczywiście

wspólny dla wszystkich elementów. W szczególnym wy-



Rys. 47.

padku pełnego obrotu jest  $\varphi = 2\pi$ . Wreszcie należy pamiętać, że gdyby krzywa s przecinała prostą l, to należy ją podzielić na odpowiednią ilość części i dla każdej z osobna zastosować twierdzenie wykazane. Brzmi ono: Pole powierzchni obrotowej jest równe iloczynowi z długości krzywej południkowej i drogi jej środka masy. - i) Podobnie znajomość objętości bryły obrotowej pozwala oznaczyć współrzedną środka przekroju południkowego i naodwrot. Albowiem: Objętość bryły obrotowej jest równą iloczynowi z pola przekroju południkowego i drogi jego środka masy. Niech l będzie osią obrotu, A polem przekroju, zaś dA jego elementem



Rys. 48.

oddalonym o r od prostej l względnie odpowiednio przez l pomyślanej płaszczyzny, to przy obrocie o kąt  $\varphi$  elementarna objętość wynosi  $dV = r \cdot \varphi \cdot dA$ . Zatem cała objętość wynosi

$$V = \int r \cdot \varphi \cdot dA = \varphi \int r dA = \varphi \cdot r_0 \cdot A$$

co było do udowodnienia.

j) Pewną orientację i ochronę przed błędem grubym stanowić może wskazówka następująca: Środek masy dowolnie ukształtowanej mieści się zawsze wewnątrz najmniejszej powierzchni wypukłej opisaney na danym ciele. W szczególności gdy masa rozłożona jest płasko, to zamiast powierzchni w grę będzie wchodzić najmniejszy wielobok względnie kontur wypukły opisany na rozpatrywanej figurze.

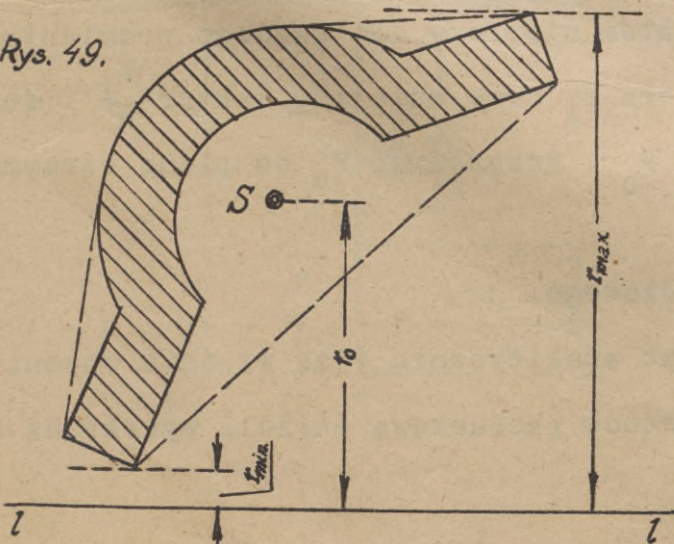
Niech bowiem będzie dane jakieś ciało np. jak na rys. 49, wtedy zachodzi dla środka S równość  $m \cdot r_0 = \int dm \cdot r$ , przyczem jest  $r_{\min} < r < r_{\max}$ . Wstawiając raz za wszystkie r wartość  $r_{\max}$ , a drugi raz  $r_{\min}$  znajdziemy najoczywiściej

$$\int dm \cdot r_{\min} < m \cdot r_0 < \int dm \cdot r_{\max}$$

czyli po uproszczeniu przez  $m = \int dm$

$$r_{\min} < r_0 < r_{\max}$$

Rys. 49.



Ponieważ powyższe rozumowanie jest niezależne od orientacji osi odniesienia i przeto obracając ją w dowolny sposób zachowany powyższe twierdzenie w ten sposób jednakże, by rzędne każdorazowe  $r_{\max}$  i  $r_{\min}$  nie przecięły figury ; najwidoczniej przeto będą one przynależały punktom konturu opisanego na figurze i wypukłego. Analogicznie dowodzi się i twierdzenia o powierzchni wypukłej.

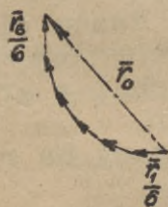
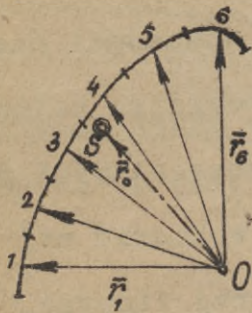
Środek masy odgrywa ważną rolę w dynamice. Poświęca mu się też dużo uwagi. W każdym kalendarzu inżynierskim znaleźć można obszerne zestawienie współrzędnych środka dla typowych figur. Między innymi zbiorami polecić można cytowany już w zestawieniu literatury "Podręcznik inżynierski" Str.1023 - 1027. Tutaj naszkicujemy kilka ćwiczeń.

Przykłady ćwiczeń.

1. Wyznaczyć środek masy dowolnej krzywej płaskiej.

Odp.: Najprościej jest krzywą podzielić na pewną ilość równych części

(rys.50.) a mianowicie takich,byje można było w przybliżeniu traktować za odcinki proste ; wtedy masę  $s_i$  takiego odcinka można skupić w jego środku i określić jej położenie promieniem  $\bar{r}_i$ . Według definicji jest  $\bar{r}_0 = \frac{\sum s_i \bar{r}_i}{S}$ , lecz  $s_i$  jest stałe i wynosi  $\frac{S}{n}$  gdzie  $n$  jest liczbą podziału;



Rys. 50.

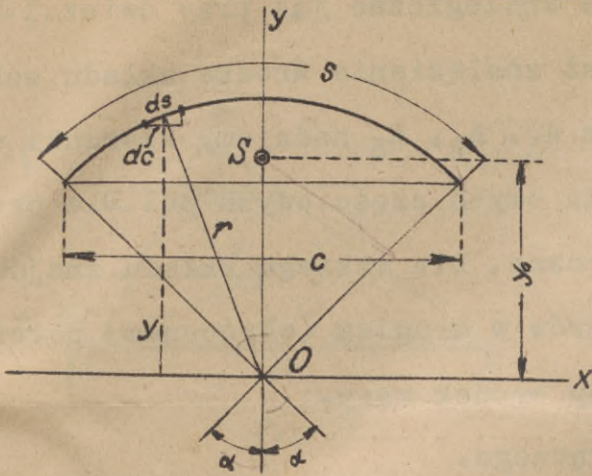
$$\bar{r}_0 = \frac{s_i \sum \bar{r}_i}{S} = \frac{\sum \bar{r}_i}{n} = \sum \frac{\bar{r}_i}{n}$$

Zatem utwórzmy dla każdego promienia-wektora  $\bar{r}_i$  nowy mniejszy wektor  $\frac{\bar{r}_i}{n}$  i zesu-

mujmy je w wieloboku wektorów, a otrzymamy  $\bar{r}_0$ . Przenosząc  $\bar{r}_0$  do planu otrzymamy na jego końcu szukany środek S.

2. Określić środek masy łuku kołowego.

Odp.: Jeśli kształt krzywej jest analitycznie (jak właśnie obecnie) określony, to korzystniej jest stosować metodę rachunkową aniżeli wykresną. Śro-



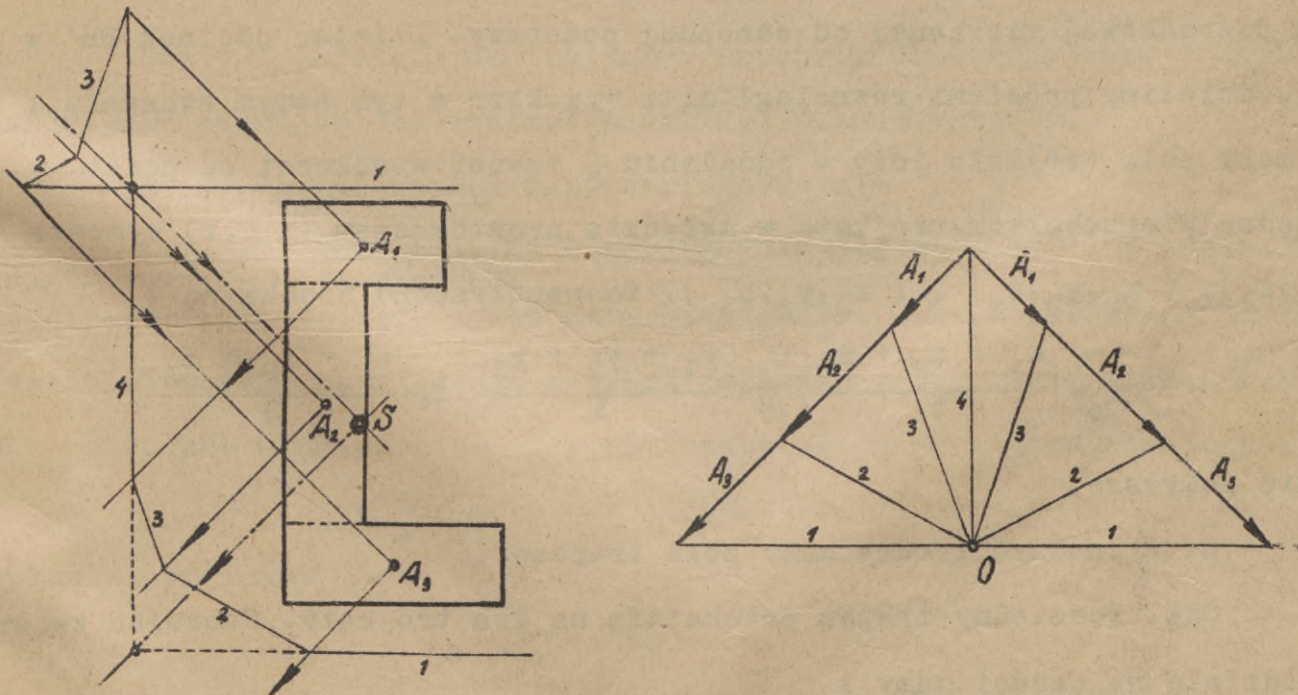
Rys. 51.

dek masy łuku kołowego leży na osi symetrii y tak, że wystarczy podać jedną współrzędną  $y_0$ , by go ustalić. Obliczymy ją z równania  $s \cdot y_0 = \int ds \cdot y$ . Przyjawszy początek układu w środku koła O (rys. 51.) mamy najwidoczniej  $\frac{ds}{dc} = \frac{r}{y}$  lub  $ds \cdot y = dc \cdot r$  przyczem  $dc$  jest elementem przynależnej cięciwy. Zatem  $s \cdot y_0 = \int dc \cdot r = r \int dc = r \cdot c$ , a stąd  $y_0 = r \frac{c}{s} = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ . W szczególnym wypadku łuku półkolistego jest  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  a wtedy  $y_0 = \frac{2r}{\pi}$

3. Sprawdzić ostatni wynik regułą Pappus'a - Guldin'a.

Odp.: Powierzchnia kuli wynosi  $A = 4 r^2 \cdot \pi$ ; jej powierzchnia powstała przez obrót półkola ( $s = r \cdot \pi$ ) dokoła prostej o kąt  $\varphi = 2\pi$ ; przeto według zaznaczonej reguły powinna ona wynosić również  $A = 2\pi \cdot r_0 \cdot r \cdot \pi = 2 r_0 \cdot r \cdot \pi^2$ . Z porównania  $2 r_0 \cdot r \cdot \pi^2 = 4 r^2 \cdot \pi$  otrzymujemy faktycznie  $r_0 = \frac{2r}{\pi}$  jak wyżej.

4. Znaleźć środek masy pola płaskiego jak na rys. 52. stosując metodę wykreślną.



Rys. 52.

Odp.: Można by zastosować postępowanie analogiczne jak przy ćwic. 1. Wtedy  $\bar{r}_0 = \sum a_i \cdot \bar{r}_i$ , jeśli  $a_i = \frac{A_i}{A}$ . Wygodniejszym jest znalezienie środka układu wektorów równoległych. W tym celu polom częściowym  $A_1, A_2, A_3$  nadajemy kierunki wspólne i odnośne wektory zaczepiamy w środkach mas owych częściowych pól. Dla prostokątów są to najwidoczniej ich środki geometryczne. Dla takiego układu znajdujemy prostą wypadkową A. Robiąc to samo dla wektorów w drugim (obróconym) położeniu znajdujemy punkt przecięcia S jako poszukiwany środek masy.

5. Wyznaczyć środek masy pola trójkątnego.

Odp.: Podzielmy w myśli pole trójkąta paskami elementarnymi równoległymi do któregoś z boków. Środek masy każdego z pasków leży w połowie jego długości; także można skupić masę każdego paska. Miejscem geometrycznym owych elementarnych mas jest dośrodkowa. Zagadnienie sprowadza się przeto do wyznaczenia środka masy odcinka  $BB'$  (rys. 53.) jednakże niejednoroznego. Najprościej tedy postąpimy stosując inny podział, który doprowadzi do dośrodkowej  $CC'$ ; środek masy S leży w punkcie przecięcia się obu dośrodkowych. Z podobieństwa trójkątów  $BCS$  i  $B'C'S$  i położenia punktów  $B'$  i  $C'$  wynika, że  $B'S = \frac{1}{2}BS$  czyli  $B'S = \frac{1}{3}BB'$ . Zatem środek masy pola trójkąta leży w jednej trzeciej długości odcinka dośrodkowej mierzonej od odnośnej podstawy. Dzieląc odcinek  $BB'$  w pewnym stosunku, dzielimy prostymi równoległymi i wysokość w tym samym stosunku; zatem środek masy pola trójkąta leży w oddaleniu  $\frac{1}{3}$  części wysokości od podstawy. Jeśli współrzędne wierzchołków trójkąta w układzie prostokątnym  $(x, y, z)$  wynoszą  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ , to współrzędne środka są:

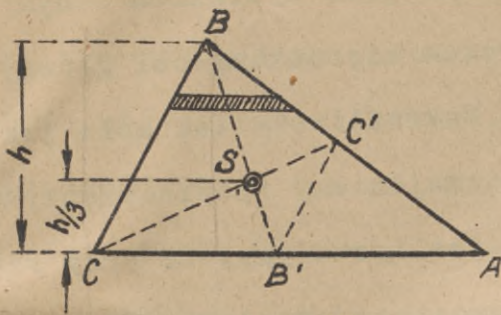
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

Udowodnić powyższe.

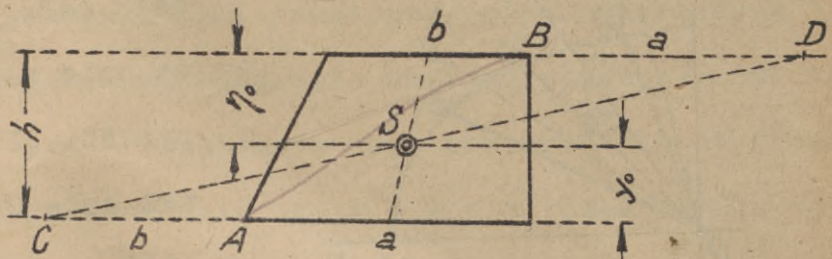
6. Wyznaczyć środek masy pola trapezu.

Odp. Podzielmy trapez przekątnią na dwa trójkąty. Stosując twierdzenie o podziale na części mamy:

$$\frac{a+b}{2} \cdot h \cdot y_c = \frac{ah}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{bh}{2} \cdot \frac{2h}{3} \quad \text{a stąd:} \quad y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$$



Rys. 53.



Rys. 54.

naodwrót otrzymamy też :  $\eta_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b}$

Stąd wynika prosta konstrukcja wykreslna ( rys. 54). Odetnijmy na odpowiednich przedłużeniach  $BD = a$  i  $AC = b$ , to prosta  $CD$  przecina się z dośrodkową w poszukiwanym punkcie  $S$ . Faktycznie bowiem dośrodkowa jest odcinkiem na którym  $S$  musi leżeć ( jak z ćwicz.5.). Ponadto z podobieństwa trójkątów czytamy :

$$y_0 : \eta_0 = ( \frac{1}{2}a + b ) : ( a + \frac{1}{2}b ) = ( a + 2b ) : ( 2a + b )$$

Ten sam rezultat wynika z podanych przed chwilą rezultatów.

7. Jak wyznaczyć można najprościej środek masy pola wieloboku dowolnego ?

Odp.: Z podziału na trójkąty. Przeprowadzić konstrukcję wykreslną dla czworoboku stosując oba możliwe podziały. Wysznuć wnioski.

8. Wyznaczyć środek masy wycinka koła.

Odp. Przyjmijmy układ współrzędnych jak na rys.51. i podzielmy wycinek na elementarne trójkąty o wspólnym wierzchołku w  $O$  i podstawach na łuku  $s$ . Najwidoczniej możemy masę całego wycinka rozłożyć jednorodnie wzdłuż łuku określonego ze środka  $O$  promieniem  $\frac{2}{3} r$  i rozwartością  $2\alpha$ . Stąd rezultat :

$$y_0 = \frac{2}{3} r \frac{c}{s} = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

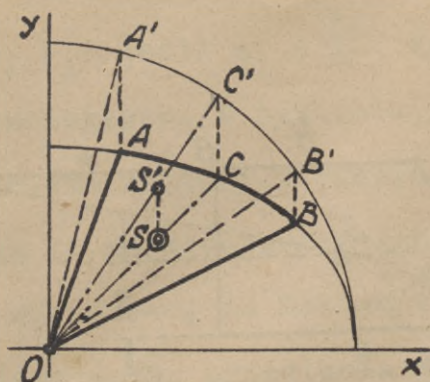
Dla półkola otrzymamy

$$y_0 = \frac{4r}{3\pi}$$

9. Sprawdzić ostatni rezultat regułą Pappus'a - Guldin'a.

Odp. Wyjść z objętości kuli i postąpić analogicznie jak w ćwicz.3.

10. Znaleźć wykreslnie środek masy wycinka elipsy.



Rys. 55.

Odp.: Skorzystamy z twierdzenia o środku rzutu. Niech mianowicie wycinkiem danym będzie OAB, przyczem kierunkami osi głównych są osie x i y. Nakreśliwszy tak koła jak na rys.55., łatwo znajdziemy spowinowacony wycinek koła OA'B' jeśli zważymy, że przy rzutowaniu proste pozostają prostymi. Na symetralnej OC' należy odciąć OS' =  $y_0$  według ćwiczenia 8. Na promieniu OC leży S jako poszukiwany środek masy.

11. Określić środek masy odcinka koła.

Odp. Potraktować wycinek koła jako figurę płaską, złożoną z trójkąta i odcinka. Dla układu jak rys.51. znajdziemy  $y_0 = \frac{c^3}{12A}$ , przyczem c jest długością cięciwy tj. podstawy odcinka, zaś A jego polem.

12. Podać wykreślny środek odcinka elipsy.

Odp.: Postąpić jak w ćwic.10.

13. Wyznaczyć współrzędne odcinka paraboli jak na rys.56.

Odp: Równanie paraboli brzmi

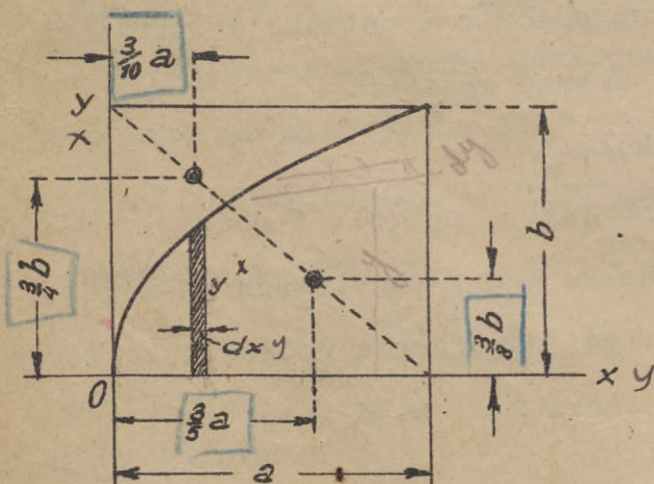
$$y^2 = \frac{b^2}{a} \cdot x$$

Dla odcinka wypukłego mamy równości :

$$y_0 \int_{x=0}^{x=a} y dx = \int_{x=0}^{x=a} \frac{y}{2} y dx \quad \text{nadto :}$$

$$x_0 \int_{x=0}^{x=a} y dx = \int_{x=0}^{x=a} x \cdot y dx \quad \text{stąd wynika :}$$

$$x_0 = \frac{3}{5} a, \quad y_0 = \frac{3}{8} b.$$



Rys. 56.

Analogicznie znajdziemy dla odcinka wklęsłego

$$x_0 = \frac{3}{10} a, \quad y_0 = \frac{3}{4} b.$$

14. Wyznaczyć środek masy dla powierzchni bocznej graniastosłupa względnie walca prostego, tudzież dla pasa i czaszy kulistej.

Odp. : Środek masy leży w połowie wysokości wymienionych powierzchni mianowicie na prostej łączącej środki mas wieloboków względnie krzywych, wynikłych z przekrojania powierzchni płaszczyznami prostopadłymi do tworzących - względnie na osi pasa i czaszy. Zauważmy mianowicie, że dzieląc płaszczyznami wyżej opisanymi i równoległymi wzajemnie daną powierzchnię na elementarne pierścienie będziemy dzielili powierzchnię na równe części. Dla walca i graniastosłupa jest to wprost jasne, a dla czaszy i pasa kulistego również, jeśli sobie przypomniemy, że ich powierzchnie są zależne od wysokości i od promienia koła dużego tj. promienia  $s t a ł e g o$ . W konsekwencji zadanie sprowadza się do znalezienia środka masy j e d n o r o d n e g o odcinka ; leży on oczywiście w połowie jego długości.

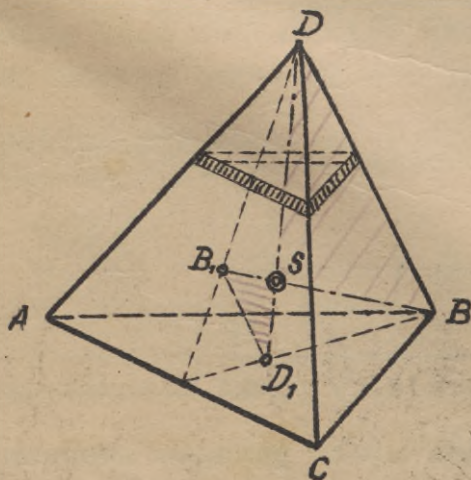
15. Wyznaczyć środek masy pobocznic stożka prostego i stożka prostego ściętego.

Odp.: Środek masy dzieli prostą, łączącą środki mas przekrojów podstawowych, w tym samym stosunku, w jakim dzieli środek masy dośrodkową w trójkącie względnie trapezie. Dlaczego ?

• 16. Określić środek masy pełnego czworościanu.

Odp.: Podzielmy czworościan płaszczyznami równoległymi np. do podstawy ABC na elementarne płytki, to miejscem geometrycznym ich środków, a zatem

i ich skupionych mas jest odcinek  $DD_1$ , przy czym  $D_1$  jest środkiem pola podstawy. Odcinek  $DD_1$  nie jest masą nałożony jednorodnie ; możemy przeto scharakteryzowany podział przeprowadzić równoległe do innej podstawy z rezultatem  $BB_1$ . Środek poszukiwany S stanowi punkt przecięcia się obu odcinków (rys. 57.). Z podobieństwa trójkątów EDS i  $B_1D_1S$  tudzież położenie punktów  $B_1$  i  $D_1$  wynika równość  $SD_1 = \frac{1}{3} SD = \frac{1}{4} DD_1$ . Zatem środek masy peł-



Rys. 57.

nego czworościanu leży na dowolnej jego linii środkowej w oddaleniu  $\frac{1}{4}$  - części wysokości od podstawy.

17. Oznaczyć położenie środka masy dowolnego ostrosłupa względnie stożka.

Odp.: Środek masy leży w oddaleniu  $\frac{1}{4}$  - części wysokości od podstawy na prostej łączącej wierzchołek ze środkiem pola podstawy. Dowód polega na rozłożeniu danej bryły na czworościany jak zadanie 16.

18. Oznaczyć środek masy wycinka kuli.

Odp.: Niech promień kuli będzie  $r$ , a wysokość przynależnego wycinkowi odcinka:  $h$ . Możemy złożyć wycinek z elementarnych ostrosłupów o wspólnym wierzchołku i podstawach wypełniających pole czaszy. W ten sposób zagadnienie sprowadza się do znalezienia środka masy powierzchni czaszy zakreślonej z tego samego środka, lecz promieniem  $\frac{2}{3}r$ ; jej wysokość też wynosić będzie odpowiednio mniej tj.  $\frac{2}{3}h$ . Licząc współrzędną  $z_0$  od środka kuli będziemy według ćwiczenia 14. mieli:

$$z_0 = \frac{2}{3}r - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}(r - \frac{1}{3}h). \text{ Dla półkuli jest } h = r, z_0 = \frac{3}{8}r.$$

19. Określić środek masy odcinka kuli.

Odp.: Odcinek kuli potraktujemy za różnicę objętości wycinka i stożka. Licząc  $z_0$  od środka kuli znajdziemy  $z_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$ . Oddalenie środka masy od podstawy wynosi natomiast  $\xi_0 = h - (r - z_0) = \frac{h}{4} \cdot \frac{4r - h}{3r - h}$ .

20. W jakiej odległości od podstawy leży środek masy pełnej paraboloidy obrotowej.

Odp.: W  $\frac{1}{3}$  części wysokości paraboloidy.

### §.5. Moment bezwładności.

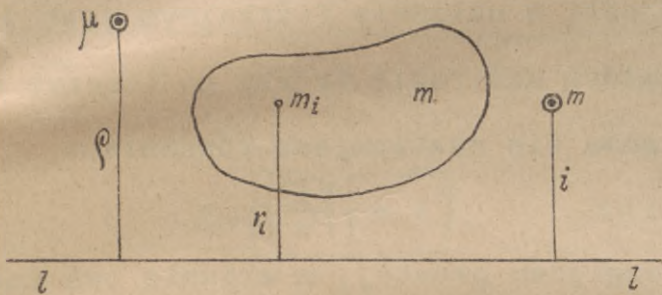
-----

1. W §.4. określiliśmy pewien specjalny punkt matematyczny zwany środkiem masy. Skupienie w nim masy całego układu miało narazie znaczenie po-myślane pozwalające nam prościej wyrażać wnioski i rozumowania. Gdzieindziej wyjdzie na jaw, że kalkulacja ta będzie miała również znaczenie mechaniczne. W każdym zaś razie możemy uprzedzić wypadki i zapowiedzieć, że odnośny punkt będzie się do-

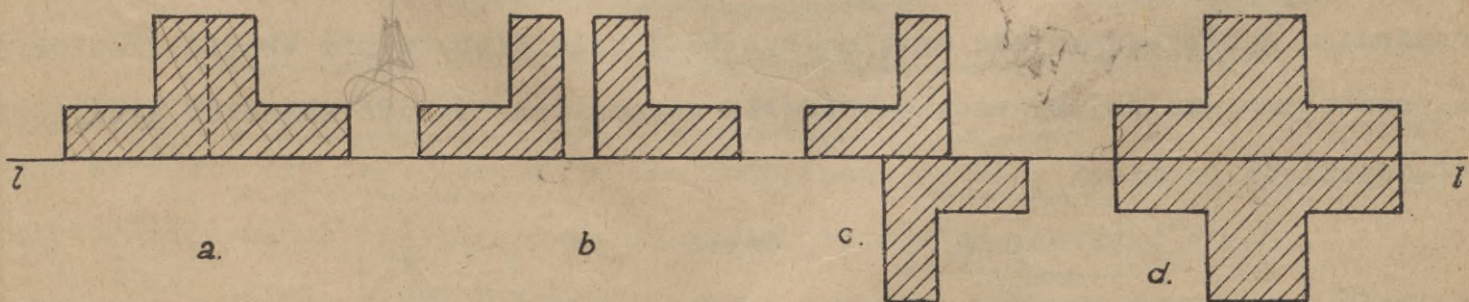
skonale nadawał jako początek układu współrzędnych, w stosunku do którego ze -  
 chcemy opisać w dalszym ciągu bardziej szczegółowo masę tj. wyrażniej jej rozmie-  
 szczenie. Wypada się obecnie zastanowić nad tem jak zorientować przez punkt S  
 o s i e układu współrzędnych. Nie wiążąc się narazie owym punktem wprowadzimy  
 w tym celu nowe pojęcie - bardzo ważne.

2. Niech będzie danym układ punktów materialnych  $m_i$  o masie  
 $m = \sum m_i$  względnie kontinuum materialne o tejże masie  $m = \int dm$  i dowolna prosta  $l$ .

Punkty materialne  $m_i$  względnie elemen-  
 ty masy  $dm$  są od owej p r o s t e j  
 oddalone o  $r_i$  względnie  $r$  (rys. 58.). Wy-  
 rażenie :  $I = \sum m_i r_i^2$  względnie  $I = \int dm \cdot r^2$   
 nazywać będziemy momentem  
bezwładności masy  $m$   
względem prostej  $l$ , lub  
 też równikowym momentem bez  
władności. Powyższy moment drugiego rzę-  
 du nazywamy też wyrażniej masowym. Ponieważ ograniczyliśmy się do rozwa-  
 żania mas jednorodnych przeto przejście do momentu bezwładności geometrycznego  
 jest bardzo proste ; wynosi on poprostu  $\frac{I}{\delta}$ , jeśli  $\delta$  jest gęstością materji. Oczy-  
 wiście może być mowa o trojakim rozkładzie masy trój-, dwu- i jedno-wymiarowym. Naj-  
 widoczniej moment bezwładności jest z a w s z e d o d a t n i, a znika jedynie  
 w tym wypadku, gdy masa  $m$  rozłożona jest wzdłuż prostej  $l$ . W związku z powyż-



Rys. 58.



Rys. 59.

szem widzimy, że dla prostej  $l$  są momenty bezwładności figur  $a, b$  i  $c$  na rys. 59 wzajemnie równe. Figura  $b$  powstała bowiem z przecięcia pola  $a$  na dwie części i odpowiedniego ich rozsunęcia; rozmieszczenie mas w stosunku do prostej  $l$  nie uległo zmianie. Figura  $c$  powstała z  $b$  przez obrócenie i przesunięcie jednej części o wprowdzenie połowa  $r_1$  ma obecnie znak ujemny, jednakże pozostaje to bez wpływu na skoro w grę wchodzi kwadraty tych oddaleń. Moment bezwładności pola  $b$  jest dwa razy większy od momentu bezwładności pola  $a$ , zaś cztery razy większy od momentu bezwładności jednej części figury  $b$  względnie  $c$ . Oczywiście mieliśmy stale na myśli jako prostą odniesienia prostą  $l$ .

2. Wymiarem momentu bezwładności w układzie fizycznym jest  $Gr.cm^2$  - w układzie technicznym  $gr.cm.sek^2$  - w każdym zaś razie tworzy go iloczyn wymiaru masy i wymiaru długości do kwadratu. Nasuwa się następujące równanie :

$$I = m \cdot i^2$$

czyli

$$i = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

gdzie  $I$  oznacza moment bezwładności masy względem prostej,  $m$  właśnie ową masę, a  $i$  odległość warunkową, czyniącą zadość powyższej równości. Uzmysłowić możemy ją sobie w ten sposób (rys. 58.), że wyobrazimy sobie całą masę układu skupioną w jednym punkcie, położonym w takiej odległości  $i$  od prostej, że momenty bezwładności masy rozmieszczonej i skupionej w punkcie są równe ze względu na tę samą prostą. Wielkość  $i$  nazywamy promieniem lub ramieniem bezwładności. Ogólniejszy sposób pojmowania może polegać na tym, że masę  $m$  rozłożymy dowolnie wzdłuż powierzchni walca obrotowego, o promieniu  $i$ , a osi  $l$ . Nie zmienia to sposobu obliczania  $i$ . Z drugiej jednak strony nasuwa się inna kalkulacja: przyjmijmy mianowicie z góry pewną odległość  $\varrho$  (względnie walce o takimże promieniu) i zapytajmy jaką masę  $\mu$  (rys. 58.) należałoby w nim skupić (rozłożyć na powierzchni walca), by znów zachodziła wspomniana równość momentów bezwładności. Odpowiedź brzmi :

$$I = \mu \cdot \varrho^2$$

czyli

$$\mu = \frac{I}{\varrho^2}$$

wielkość  $\mu$  nazywamy masą danego układu, zredukowaną (sprowadzoną) na odległość  $\varrho$ . Z obu pojęć będziemy często korzystać.

3. Żeby o roli środka masy nie zapomnieć wykonamy transformację,

zwaną przesunięciem. Niech będą dane dwie równoległe proste, oddalone o długość  $a$  przyczem jedna z nich przechodzi przez środek masy  $S$  danego ciała (rys.60). Moment bezwładności względem tej ostatniej wynosi według definicji  $I_S = \sum m_i r_i^2$ ; moment bezwładności względem prostej przez punkt  $O$  wynosi  $I = \sum m_i \rho_i^2$ . Z rysunku czytamy:

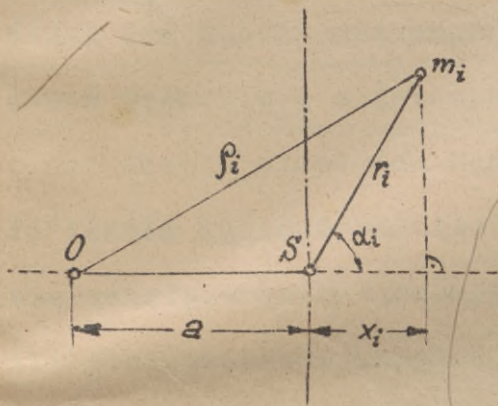
$$\rho_i^2 = r_i^2 + a^2 + 2r_i a \cdot \cos \alpha_i = r_i^2 + a^2 + 2ax_i$$

przyczem  $x_i$  jest oddaleniem punktu  $m_i$  od płaszczyzny, przechodzącej przez środek masy  $S$  prostopadłe do prostej  $OS$ . Wstawiając powyższe znajdujemy:

$$I = \sum m_i \rho_i^2 = \sum m_i r_i^2 + a^2 \sum m_i + 2a \sum m_i x_i$$

Lecz pierwszy dodatek oznacza  $I_S$ , w drugim  $\sum m_i = m$ , a w trzecim  $\sum m_i x_i = 0$  z tytułu niedawnego określenia  $x_i$ . Zatem ostatecznie jest:

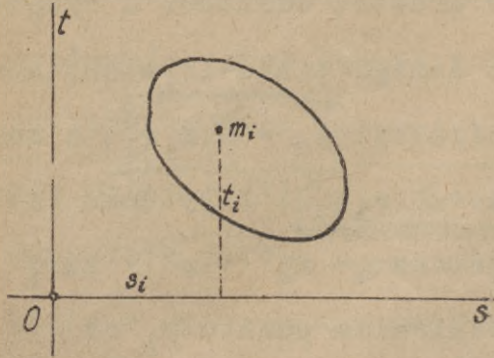
$$I = I_S + m \cdot a^2$$



Rys. 60.

czyli przy równoległym przesunięciu prostej z e ś r o d k a m a s y moment bezwładności w z r a s t a o iloczyn masy układu i kwadratu oddalenia obu prostych. Jeśli przeto weźmiemy pod uwagę wiązkę prostych równoległych, to n a j - m n i e j s z y moment bezwładności otrzymamy ze względu na tę, która przechodzi przez środek masy ciała. Moment bezwładności względem prostej, przechodzącej przez środek masy ciała nazywamy c e n t r a l n y m lub ś r o d k o w y m momentem bezwładności. Wszystkie centralne momenty bezwładności nie będą oczywiście sobie równe, lecz z obrotem prostej dookoła S będą się one zmieniać w sposób ciągły tak, że z pewnością istnieje ekstremum, a w szczególności minimum i maksimum. W dalszym ciągu udowodnimy, że tak istotnie jest, a nawet, że istnieją trzy charakterystyczne wzajemnie prostopadłe kierunki - i to nie tylko dla punktu S, ale i dla każdego innego wewnątrz czy też zewnątrz ciała położonego punktu. Zanim przeprowadzimy w tym celu transformację obrotową układu, musimy w pierw przygotować teren.

4. Niech będzie daną masa  $m = \sum m_i$  względnie  $m = \int dm$  i dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny s. i t. (rys.61). Współrzędne  $s_i$



Rys. 61.

$i$  i  $t_i$  określają oddalenie punktu materialnego  $m_i$  od tych płaszczyzn. Wyrażenie

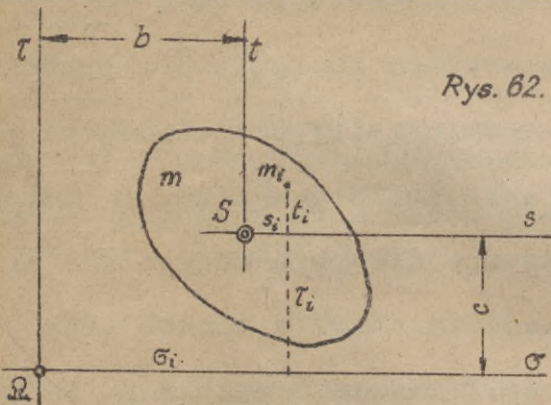
$$D = \sum m_i s_i t_i \quad \text{względnie}$$

$$D = \int dm \cdot s \cdot t$$

nazywać będziemy momentem z b o c z e n i a lub momentem o d ś r o d k o w y m ( d e w j a c y j n y m ) masy  $m$  w sto

sunku do p ł a s z c z y z n  $s$ . i  $t$ . Wymiar momentu z b o c z e n i a  $D$  jest ten sam co i momentu bezwładności. W przeciwieństwie jednak do tego ostatniego moment z b o c z e n i a może być dodatni lub ujemny zależnie od rozmieszczenia masy względem p ł a s z c z y z n ; może on też znikać. Ten ostatni fakt ma duże znaczenie szczególnie wtedy gdy moment z b o c z e n i a znika dla dwóch dwójek p ł a s z c z y z n i to takich, w których jedna z p ł a s z c z y z n pozostała wspólną. Jeśli p ł a s z c z y z n y  $s$ . i  $t$ . przecinają się wzdłuż prostej przechodzącej przez środek masy ciała, to odnośny moment z b o c z e n i a n a z y w a m y c e n t r a l n y m lub ś r o d k o w y m.

5. Niech p ł a s z c z y z n y  $s$ . i  $t$ . przechodzą przez środek masy ciała tzn.



Rys. 62.

niech będzie  $\sum m_i s_i = 0$  i  $\sum m_i t_i = 0$

Odnośny moment z b o c z e n i a niech wynosi

$$D_s = \sum m_i s_i t_i$$

Przesuńmy równolegle p ł a s z c z y z n y  $s$ . i  $t$ .

do położenia  $\sigma$  i  $\tau$ ; dla tych nowych p ł a s z c z y z n (rys. 62.) jest  $\sigma_i = s_i + b$ ,

$\tau_i = t_i + c$ , a zatem :

$$D = \sum m_i \sigma_i \tau_i = \sum m_i (s_i + b)(t_i + c) = \sum m_i s_i t_i + b \sum m_i t_i + c \sum m_i s_i + bc \sum m_i$$

Lecz pierwszy wyraz ma już wyżej określone znaczenie, dwa następne znikają, a w trzecim jest  $\sum m_i = m$ ; zatem :

$$D = D_s + m \cdot b \cdot c$$

czyli przy przesunięciu p ł a s z c z y z n z położenia ś r o d k o w e g o moment z b o c z e n i a z m i e n i a się o iloczyn masy i współrzędnych ś r o d k a; wzór analogiczny jak w ust. 3.

Jeśli  $D_s = 0$ , to  $D = m \cdot b \cdot c$ .

6. Wprowadźmy układ współrzędnych prostokątnych  $x, y, z$ . W układzie tym możemy obliczyć sześć wielkości, dotychczas omawianych a to :

$$\begin{aligned} I_x &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2), & I_y &= \sum m_i (z_i^2 + x_i^2), & I_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ D_x &= \sum m_i y_i z_i, & D_y &= \sum m_i z_i x_i, & D_z &= \sum m_i x_i y_i \end{aligned}$$

Pierwsza trójka oznacza momenty bezwładności masy względem osi kolejno  $x, y, z$  ; druga trójka oznacza momenty zbieżności względem płaszczyzn  $zx$  i  $xy, xy$  i  $yz, yz$  i  $zx$ . Punkt  $m_i(x_i, y_i, z_i)$  oddalony jest od początku układu o  $\rho_i$  przyczem jest :

$$\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

Oddalenie to jest niezależne od obrotu układu współrzędnych. Wyrażenie

$$I_o = \sum m_i \rho_i^2 \quad \text{względnie} \quad I_o = \int dm \cdot \rho^2$$

nazywamy momentem bezwładności względem punktu albo biegunowym momentem bezwładności. Pomocnicze to pojęcie ma niekiedy duże znaczenie przy obliczaniu wielkości  $I_x, I_y, I_z$ , specjalnie wtedy, gdy zachodzą wypadki symetrii. Dodając  $I_x, I_y, I_z$  najwidoczniej znajdujemy :

$$I_x + I_y + I_z = 2 I_o$$

Zatem suma trzech momentów bezwładności względem osi prostopadle przecinających się w jednym punkcie jest stałą i równą podwójnemu momentowi biegunowemu bezwładności względem tegoż punktu.

7. Gdy masa rozłożona jest w sposób dwuwymiarowy np. w płaszczyźnie

$xz$ , to :

$$I_o = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = I_y$$

Wtedy zamiast szóstki wielkości podanych w ust. 6., mamy do czynienia z trójką :

$$I_x = \sum m_i z_i^2, \quad D_y = \sum m_i z_i x_i, \quad I_z = \sum m_i x_i^2$$

albowiem jest  $y_i = 0$  ; pozatem zamiast  $I_y$  korzystniej jest wprowadzić  $I_o = I_y$ , przyczem najwidoczniej jest :

$$I_x + I_z = I_o$$

8. Wracamy do wypadku ogólnego. Jeśli oś  $y$  układu jest tak zoriento-

waną w przyjętym punkcie  $O$ , że zachodzą równości :

$$D_x = \sum m_i y_i z_i = 0, \quad D_z = \sum m_i x_i y_i = 0$$

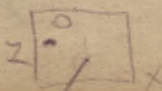
to nazywamy ją wtedy główną osią bezwładności, a płaszczyz-

nę przechodzącą przez  $O$  i prostopadłą do tej osi główną płaszczyzną bezwładności; w opisanym wypadku nazywać będziemy krótko osią 2. Moment bezwładności  $I_y$  nazywamy w tym wypadku głównym momentem bezwładności i piszemy  $I_y = I_2$ . Punkt  $O$  tj. początek układu współrzędnych może przytem leżeć wewnątrz lub zewnątrz rozpatrywanego ciała - jest to rzeczą zupełnie obojętną. W szczególności gdy jest  $O \equiv S$ , tj. gdy początek układu  $O$  pokrywa się ze środkiem masy ciała, to w wypadku omawianym mówimy o centralnej głównej osi bezwładności itp.

Warunki określające  $os\ y \equiv 2$  są możliwe do spełnienia; jest ich dwa tj.  $D_x = 0$  i  $D_z = 0$ . Zauważmy, że do określenia prostej w przestrzeni przez określony punkt istotnie potrzebne są dwa niezależne warunki (np. dwa kąty). Dla określenia następnych osi głównych należałoby ogólnie podać też dwa warunki; skoro jednakże może się spełnić  $D_x = 0$  i  $D_z = 0$ , to równie dobrze można przypuszczać, że może się spełnić  $D_z = 0$  i  $D_y = 0$  lub też  $D_y = 0$  i  $D_x = 0$ . Jeśli przeto jedna z głównych osi bezwładności jest wyznaczona np. 2, to do określenia drugiej wystarczy już tylko jeden dodatkowy warunek  $D_y = 0$ . Jeśli mamy dwie główne osie, to tem samem wyznaczaliśmy i trzecią. W powyższem rozumowaniu milcząco przyjęto, że osie główne stoją wzajemnie do siebie prostopadle, to jest, że możliwym jest układ  $D_x = D_y = D_z = 0$ . Faktycznie tak jest. Natomiast nie powiedzieliśmy, czy nie istnieje przypadkiem więcej aniżeli trzy główne osie dla przyjętego punktu. Wypadek taki jest możliwy - jak jeszcze wspomnimy; da go się zazwyczaj zgóry przewidzieć. Ogólnie rzecz biorąc istnieją dla każdego punktu trzy główne kierunki, a zatem i trzy momenty główne bezwładności  $I_1, I_2, I_3$ .

9. Podamy kilka wypadków, w których zgóry można przewidzieć położenie głównej osi bezwładności.

a) Każda prosta prostopadła do płaszczyzny płaskiej figury materialnej jest główną osią bezwładności. Wypadek ten omówiono już w ust. 7. Istotnie niech  $z$  będzie płaszczyzną figury, to dla wszystkich jej punktów jest  $y_i = 0$ , a zatem  $D_x = D_z = 0$  czyli jest  $y \equiv 2$ . Dla uniknięcia nieporozumień powtórzmy wyraźniej: Prosta prostopadła do figury płaskiej jest jej główną osią bezwładności dla



punktu  $O$ , położonego w płaszczyźnie figury  
Przyjawszy bowiem oś  $y$  prostopadłe do płaszczyzny figury i na niej dowolny punkt  
 $O$  jako początek układu współrzędnych ustalamy tem samem stałe  $y_i = b$ , a wtedy mo-  
menty zboczenia  $D_x = b \sum m_i z_i$  i  $D_z = b \sum m_i x_i$  nie znikają, chyba, że jest  $\sum m_i z_i = 0$   
 $\sum m_i x_i = 0$  to mamy chyba tylko wtedy, gdy  $O$  obierzemy na prostopadłej przez śro-  
dek masy  $S$ .

b) Każda prostopadła do płaszczyzny symetrii ciała z początkiem  $O$   
w tej płaszczyźnie jest główną osią bezwładności. Skoro bowiem  $xz$  jest tą płasz-  
czyzną, to każdemu punktowi  $m_i(x_i, y_i, z_i)$  odpowiada drugi  $m_i(x_i, -y_i, z_i)$ . Dla każdej  
takiej dwójki jest  $m_i x_i y_i + m_i x_i (-y_i) = 0$  nadto  $m_i y_i z_i + m_i (-y_i) z_i = 0$ , a zatem  
i w sumie jest  $D_x = D_z = 0$  czyli jest  $y \equiv z$ . I tutaj łatwo wykazać, że oś  $y$  prze-  
stałaby być osią główną gdybyśmy dla niej przyjęli początek  $O$  dowolnie, chyba, że  
przechodziłaby ona przez środek masy ciała tj. że byłaby ona centralną główną osią  
bezwładności.

c) Każda oś symetrii jest główną osią bezwładności; początek  $O$   
można na niej przyjąć dowolnie. Niech  $y$  będzie osią symetrii, to punktowi  
 $m_i(x_i, y_i, z_i)$  odpowiada punkt  $m_i(-x_i, y_i, -z_i)$ ; dowodząc jak pod b) znajdziemy  
 $D_x = D_z = 0$  czyli  $y \equiv z$ .

d) Podzielmy masę na elementarne równoległe płytki; jeśli miej-  
scem geometrycznym środków mas jest prosta prostopadła do płytek, to jest ona główną  
osią bezwładności. Niech ową prostą będzie oś  $y$ , to dla jednej takiej płytki jest  
 $y_i = b$  wielkością stałą, zatem  $D_x = b \sum m_i z_i$ ,  $D_z = b \sum m_i x_i$ ; lecz  $\sum m_i x_i = \sum m_i z_i = 0$   
bo płaszczyzny  $xy$  i  $yz$  mają krawędź  $y$  wyżej scharakteryzowaną; w konsekwencji  
więc  $D_x = D_z = 0$  czyli  $y \equiv z$ .

e) W wypadkach a) i b) w płaszczyźnie  $xz$  leżał środek masy  $S$   
ciała. Możemy podane tam twierdzenia uogólnić. Niech mianowicie początek układu  
 $O$  leży w centralnej głównej płaszczyźnie, to oś  $y$  prostopadła do tej płaszczyzny  
jest główną osią bezwładności ciała dla punktu  $O$ . Dowód powyższego zechce przepro-  
wadzić czytelnik.

f) W wypadkach c) i d) na prostej  $y$  leżał środek masy ciała  $S$ . Możemy i tu twierdzenie uogólnić. Niech mianowicie początek układu współrzędnych  $O$  leży na centralnej głównej osi bezwładności, to prosta  $y$  z początkiem w  $O$  jest nadal główną osią bezwładności. Dodatkowo można tu wykazać, że przy opisanym położeniu  $O$  pozostałe dwie osie główne zajmują położenie równoległe do początkowego. Dowód ze-  
chce przeprowadzić czytający.

10. W ust. 9. wykazaliśmy, że istnieją wypadki, w których bez długich rozważań matematycznych można wykazać obecność j e d n e j osi głównej dla ustalonego punktu  $O$ . Przy zmianie początku  $O$  na inny punkt kierunek osi głównej nie ulegał d l a t e g o zmianie, że obieraliśmy dla niego pewne s p e c j a l n e położenie nowe. Ogólnie jednak tak nie jest; ze zmianą położenia  $O$  zmieni się i kierunek osi głównych - jak zresztą łatwo wykazać. Z a t e m k i e r u n e k g ł ó w n y pewnej osi z w i ą z a n y jest ś c i ś l e z p o ł o ż e n i e m p o c z ą t k u u k ł a d u  $O$ . Ustaliwszy punkt  $O$ , ustalamy równaniami  $D_x = 0$  i  $D_z = 0$  jeden kierunek w sposób jednojednoznaczny. Aby powyższego dowieźć obrócimy układ współrzędnych dokoła punktu  $O$  i to w ten sposób, by jedna z nowych osi np.  $\eta$  pokryła się z jedną z dawnych osi np.  $y$ . Dowolny punkt ma

terjalny  $m_i$  o współrzędnych  $x_i, y_i, z_i$  w dawnym układzie ma w obróconym układzie współrzędne:

$$\begin{aligned} \xi_i &= x_i \cos \alpha + z_i \sin \alpha \\ \eta &= y_i \\ \zeta &= -x_i \sin \alpha + z_i \cos \alpha \end{aligned}$$

przyczem najwidoczniej jest

$$\xi_i^2 + \zeta_i^2 = x_i^2 + z_i^2$$

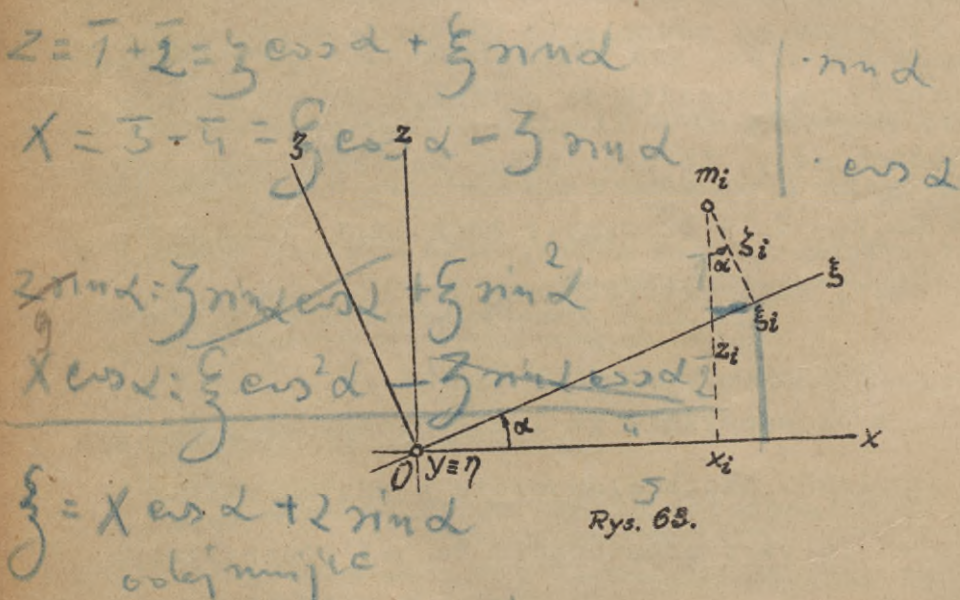
Obliczmy narazie trzy wielkości

$I_\eta, D_\xi$  i  $D_\zeta$ . Znajdziemy:

$$I_\eta = \sum m_i (\xi_i^2 + \zeta_i^2) = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = I_y$$

$$D_\xi = \sum m_i \eta_i \xi_i = \sum m_i y_i (-x_i \sin \alpha + z_i \cos \alpha) = D_x \cos \alpha - D_z \sin \alpha$$

$$D_\zeta = \sum m_i \xi_i \eta_i = \sum m_i y_i (x_i \cos \alpha + z_i \sin \alpha) = D_x \sin \alpha + D_z \cos \alpha$$



Rys. 63.

Niech  $y$  będzie w układzie  $x, y, z$  osią główną, to wtedy  $D_x = 0$  i  $D_z = 0$ . Jeśli jednak  $D_x = 0$  i  $D_z = 0$ , to widzimy że zarówno  $D_\xi = 0$  jak i  $D_\zeta = 0$ , tzn., że oś  $\eta$  jest również główną osią. Naodwrot jeśli  $D_\xi = 0$  i  $D_\zeta = 0$ , to układ linjowych równań jednorodnych  $D_x \cdot \cos \alpha - D_z \cdot \sin \alpha = 0, D_x \cdot \sin \alpha + D_z \cdot \cos \alpha = 0$  daje pierwiastki  $D_x = 0$  i  $D_z = 0$  niezależnie od kąta  $\alpha$ , albowiem wyznacznik współczynników owych równań:  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  jest różny od zera. Wykazaliśmy przeto, że pojęcie osi głównej jest niezależne od położenia dwu pozostałych osi układu.

11. Unikając skomplikowanego rozwiązania ogólnego problemu kierunków głównych założmy, że jeden z nich znamy; jest nim  $y = 2$ . Jeśli rzeczywiście istnieją jeszcze inne doń prostopadłe, to należy ich szukać w płaszczyźnie  $xz$ . Przeprowadźmy tedy transformację jak w ust. 10. Wtedy  $I_\eta = I_y = I_2$  jest jednym z głównych momentów bezwładności, albowiem  $D_\xi = D_\zeta = D_x = D_z = 0$ . Pozostaje do obliczenia  $I_\xi, D_\eta, I_\zeta$ . Otóż mamy:

$$\begin{aligned} I_\xi &= \sum m_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2) = \sum m_i \left[ y_i^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (-x_i \sin \alpha + z_i \cos \alpha)^2 \right] = \\ &= \cos^2 \alpha \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) + \sin^2 \alpha \sum m_i (y_i^2 + x_i^2) - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sum m_i x_i z_i = \\ &= I_x \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - 2 D_y \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} (I_x + I_z) + \frac{1}{2} (I_x - I_z) \cos 2\alpha - D_y \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_\eta &= \sum m_i \xi_i \zeta_i = \sum m_i (x_i \cos \alpha + z_i \sin \alpha) \cdot (-x_i \sin \alpha + z_i \cos \alpha) = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \left[ \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \right] + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sum m_i x_i z_i = \\ &= (I_x - I_z) \sin \alpha \cos \alpha + D_y (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} (I_x - I_z) \sin 2\alpha + D_y \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

$$I_\zeta = I_x \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + 2 D_y \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} (I_x + I_z) - \frac{1}{2} (I_x - I_z) \cos 2\alpha + D_y \sin 2\alpha$$

Ponieważ już skonstatowaliśmy  $D_\xi = D_\zeta = 0$ ; przeto dla pozostałych kierunków głównych - o ile takowe istnieje - wystarczy dodatkowy warunek  $D_\eta = 0$  tj.

$$\frac{1}{2} (I_x - I_z) \sin 2\alpha + D_y \cos 2\alpha = 0$$

Znajdujemy stąd:

$$\text{tg } 2\alpha = -\frac{2D_y}{I_x - I_z}$$

Pierwiastki ostatniego równania są rzeczywiste, zatem w płaszczyźnie do 2 prostopadłej istnieją faktycznie kierunki główne. Jeśli pierwszy pierwiastek powyższego równania oznaczymy przez  $\alpha_1 = \alpha_0$  ( $\alpha_0$  kąt ostry, tablicowy), to następny możliwy wynosi  $\alpha_2 = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$  itd. Do tych dwóch wystarczy się ograniczyć, bo następny  $\alpha_0 + \pi$  określi już tę samą prostą co kąt  $\alpha_0$ . Zatem w płaszczyźnie głównej  $xz$  istnieją dwa wzajemnie prostopadłe kierunki główne  $\xi=1, \zeta=3$ . Ogółem istnieją trzy wzajemnie prostopadłe kierunki główne. Gdyby  $D_y$  było równe zero, to już kierunki  $x$  i  $z$  byłyby poszukiwanymi głównymi; gdyby jednakże było w tym wypadku równocześnie  $I_x = I_z$ , to  $\text{tg}2\alpha$  byłoby nieokreślone, tzn. możliwą jest w tym wypadku większa ilość kierunków głównych w płaszczyźnie  $xz$ . W przypadku  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$  można jednak ogólnie wyznaczyć, że istnieją tylko trzy kierunki główne wzajemnie do siebie prostopadłe i na tem stanowisku będziemy trwali dalej. Znajac wartość  $\text{tg}2\alpha$  możemy przy jej pomocy określić  $\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{\text{tg}^2 2\alpha + 1}}$ ,  $\sin 2\alpha = \frac{\text{tg} 2\alpha}{\sqrt{\text{tg}^2 2\alpha + 1}}$  i określić wartości  $I_\xi = I_1$  i  $I_\zeta = I_3$ . Otrzymamy:

$$I_{1,3} = \frac{1}{2}(I_x + I_z) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_z)^2 + 4D_y^2}$$

W ten sposób zamiast trójki  $I_x, I_z$  i  $D_y$ , względnie  $I_\xi, I_\zeta, D_y$  zyskujemy trójkę  $I_1, I_3$  i  $\alpha_0$ .

12. Ze zmianą kąta  $\alpha$  zmieni się  $I_\xi$  we wzorze ust. 11. Pytamy o ekstrema funkcji  $I_\xi = I_\xi(\alpha)$  lub - co na jedno wychodzi - o ekstrema funkcji  $I_\zeta = I_\zeta(\alpha)$  albowiem  $I_\zeta(\alpha) = I_\xi(\alpha + \frac{\pi}{2})$ . Znajdujemy po zróżniczkowaniu  $\frac{dI_\xi}{d\alpha} = -2D_y$ . Jeśli przeto ma być  $\frac{dI_\xi}{d\alpha} = 0$  to tem samem  $D_y = 0$ ; lecz ten ostatni warunek już jest nam znany. Możemy przeto stwierdzić, że główne momenty bezwładności  $I_1$  i  $I_3$  są równocześnie ekstremalnemi wartościami momentu bezwładności dla prostych przechodzących przez punkt 0 w płaszczyźnie  $xz$ . Jeśli  $D_y$  jest ujemne, to  $(\frac{dI_\xi}{d\alpha})_{\alpha=0}$  jest dodatnie czyli  $I_\xi$  rośnie, czyli kątowi ostremu  $\alpha_1$  odpowiada  $I_{\max}$ ; gdy jest  $D_y > 0$ , to kątowi ostremu  $\alpha_1$  odpowiada  $I_{\min}$ . W końcowem równaniu ust. 11. możemy napisać  $I_{1,3} = I_{\max, \min}$ . Ogólnie okazuje się, że w układzie  $x, y, z$  jest dla prostej  $\alpha, \beta, \gamma$  przez punkt 0

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2D_x \cos \beta \cos \gamma - 2D_y \cos \gamma \cos \alpha - 2D_z \cos \alpha \cos \beta$$

funkcja  $I$  posiada maksimum dla kierunku głównego 1, minimum dla kierunku głównego 3 i wartość "siodełkową" dla kierunku 2.

13. Dotychczas wychodziliśmy z kierunków  $x, y, z$  do  $\xi, \eta, \zeta$  względnie za pośrednictwem tych ostatnich do 1, 2, 3. Postąpimy obecnie odwrotnie, wyjdziemy z kierunków 1, 2, 3 do  $x, y, z$ ; ograniczymy się znowu do przypadku gdy  $y = 2$ . Obiór osi 1, 2, 3 za osie układu znakomicie upraszcza wzory ust. 11. Znajdziemy poprostu:

$$I_x = I_1 \cos^2 \alpha + I_3 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(I_1 + I_3) + \frac{1}{2}(I_1 - I_3) \cdot \cos 2\alpha$$

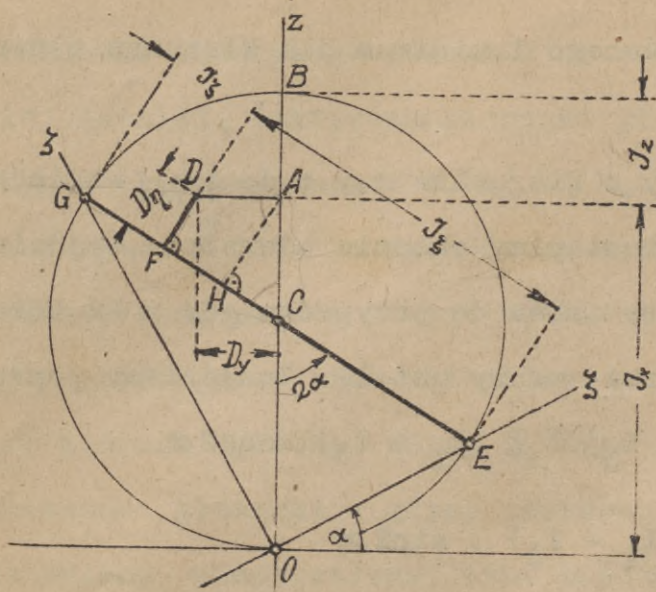
$$D_y = (I_1 - I_3) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}(I_1 - I_3) \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_z = I_1 \sin^2 \alpha + I_3 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(I_1 + I_3) - \frac{1}{2}(I_1 - I_3) \cdot \cos 2\alpha$$

kąt  $\alpha$  jest tu kątem zawartym między osią 1 a  $x$ . Nie należy wciąż zapominać o tem, że transformacje ust. 11, 12 i 13 mają specjalne znaczenie wtedy, gdy znamy jeden z kierunków głównych zgóry np. w przypadku figury płaskiej lub wogóle w jednym z podanych w ust. 9. Skoro tak nie jest, to jeden warunek  $D_\eta = 0$  nie posiada żadnego wybitnego znaczenia.

14. Nawiązując do treści ust. 8. §. 3. możemy obecnie zresumować wyniki rozważań §. 4. i §. 5. Jako najprostsz, bo naturalny układ charakterystyczny dla ciała należy uważać układ trzech centralnych głównych osi bezwładności tego ciała. Przecinają się one w środku masy ciała. Jeden z momentów bezwładności tego układu jest bezwzględnie najmniejszym możliwym momentem bezwładności; drugi jest największym z możliwych dla prostych przechodzących przez środek masy ciała; trzecia oś jest do dwóch określonych wyżej prostopadłą. Okaże się w dynamice, że wielkości  $m, I_1, I_2, I_3$  wystarczają do scharakteryzowania rozmieszczenia masy w przestrzeni i do uchwycenia jej zachowania się pod działaniem danego układu sił. Nie należy zapominać, że  $I_1, I_2, I_3$  mieszczą w sobie właściwie szóstkę wielkości tj. trzy momenty i trzy kierunki.

15. Zajmiemy się obecnie ilustracją wykreślną podanych wzorów. Ma ona szczególne znaczenie dla zagadnień dwuwymiarowych. Niech będzie daną trójka



$$CA = I_x - \frac{I_x + I_z}{2} = \frac{2I_x - I_x - I_z}{2} = \frac{1}{2}(I_x - I_z)$$

Rys. 64.

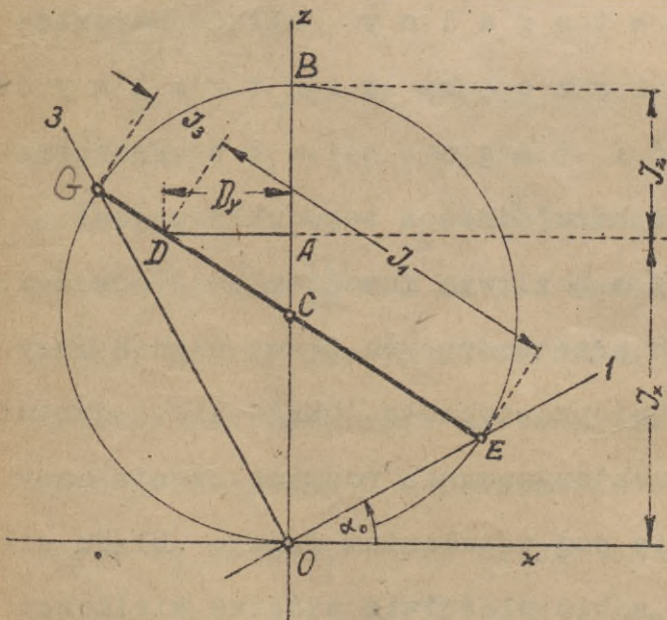
$I_x, D_y, I_z$  dla układu  $xz$  jak na rysunku 64. Odetnijmy na osi  $z$  układu  $OA = I_x, AB = I_z$  i prostopadle do niej  $AD = D_y$ . Na średnicy  $OB$  zakreślmy z  $C$  koło bezwładności (koło Mohr'a). Poszukiwaną jest trójka  $I_\xi, D_\eta, I_\zeta$  dla układu obróconego o kąt  $\alpha$ . Połączmy punkty przecięcia  $E$  i  $G$  nowych osi, to prosta ta przechodzi przez  $C$ . Rzućmy na nią ortogonalnie punkt  $D$ , to jest  $EF = I_\xi, FG = I_\zeta, FD = D_\eta$ . Na rysunku 64. jest  $D_y < 0$ .

zaś  $D_y > 0$ . Dowód powyższej konstrukcji jest z rysunku wprost widoczny; zauważmy poza znakiem  $D_y$ , równości  $CA = \frac{1}{2}(I_x - I_z)$ ,  $CE = CG = \frac{1}{2}(I_x + I_z)$ , nadto  $\angle OCE = 2\alpha$ , wreszcie wzory ust. 11.

$$CE = CG = \frac{I_x + I_z}{2} = \frac{1}{2}(I_x + I_z)$$

16. Dla danej trójki  $I_x, D_y, I_z$  znajdujemy  $I_1, \alpha_0, I_3$  jak następuje:

Odetnijmy  $I_x, I_z$  tudzież  $D_y$  jak w ust. 15. i nakreślmy jedno koło (rys. 65). Połączmy  $D$  z  $C$ , to prosta  $DC$  przetnie koło w punktach  $E$  i  $G$ . Ponieważ nakreślono  $D < 0$  przeto oś  $OE$  jako tworząca kąt ostry  $\alpha_0$  z osią  $x$  jest osią główną 1 największego momentu bezwładności, oś  $OG$  jest osią 3 najmniejszego momentu. Pozatem jest  $DE = I_1, DG = I_3, \alpha_0 = \angle x, OE$ .



Rys. 65.

Podane tu konstrukcje Mohr'a wykreślono w układzie  $x, z$ . Istnieją też inne w układzie  $I, D$  również proste; znaleźć je

można w pracach Mohr'a. Oczywiście, jeśli dane jest  $I_x = I_1, D_y = 0, I_z = I_3$ , to użycie podanych konstrukcyj upraszcza się, w treści jednak pozostaje takie sa-

mo jak podano.

17. Konstrukcyj kół bezwładności używamy chętnie z powodu ich prostoty. Istnieją zagadnienia, w których zamiast koła stosujemy elipsę bezwładności. Weźmy pod uwagę końcowe równania ust. 12. Przy pomocy szóstki wielkości  $I_x, I_y, I_z, D_x, D_y, D_z$  można obliczyć  $I$  dla dowolnego kierunku  $\alpha, \beta, \gamma$ . Wyobraźmy sobie, że na owym kierunku odcinamy w obie strony od początku  $O$  odcinek  $\rho = \frac{C}{\sqrt{I}}$  odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z  $I$ . Zmieniając  $\alpha, \beta, \gamma$  możemy zapytać co będzie miejscem geometrycznym końców odcinka, przy ustalonym  $C$ . Ponieważ dostawy kierunkowe są proporcjonalne do współrzędnych  $x, y, z$  przeto miejscem geometrycznym będzie powierzchnia stopnia drugiego bez punktów, położonych nieograniczenie daleko, bo zawsze jest  $I \neq 0$ . Będzie to zatem elipsojda trójosiowa; właśnie osie tej elipsojdy są osiami głównymi. Elipsojdę tę nazywamy elipsojdą bezwładności (Poinset'a). Zajmiemy się tutaj tylko jej przekrojem głównym  $xz$ . Weźmiemy w tym celu pod uwagę wzór ust. 11.

$$I_\alpha = I_x \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - 2D_y \sin \alpha \cos \alpha$$

Współrzędne końca odcinka  $\rho \cdot \frac{C}{\sqrt{I_\alpha}}$ , prostej nachylonej pod kątem  $\alpha$  względem osi  $x$  są:  $x = \rho \cdot \cos \alpha, z = \rho \cdot \sin \alpha$  skąd  $\cos \alpha = x \cdot \frac{\sqrt{I_\alpha}}{C}, \sin \alpha = z \cdot \frac{\sqrt{I_\alpha}}{C}$ . Rzucając kąt  $\alpha$  z wyrażenia na  $I$  znajdziemy:

$$I_x \cdot x^2 + I_z \cdot z^2 - 2D_y \cdot x \cdot z = C^2$$

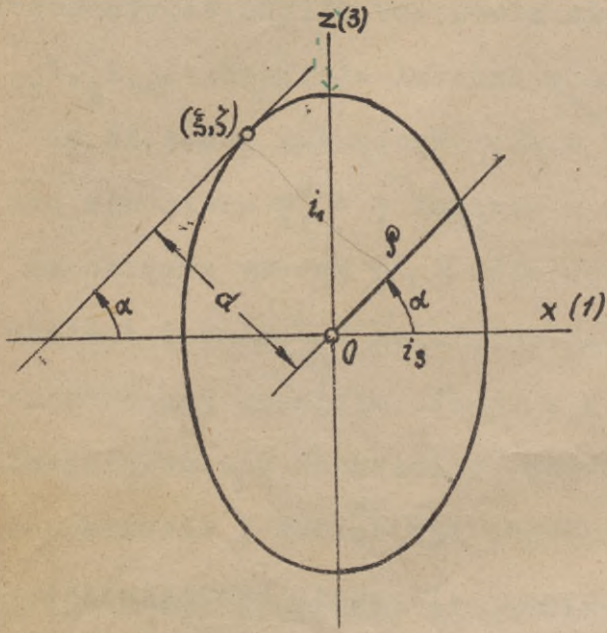
Jest to najwidoczniej równanie elipsy o czym można się między innymi przekonać obracając układ współrzędnych tak, aby znikł wyraz mieszany  $x \cdot z$ . Nie ma celu dochodzić, że kąt transformacji będzie tym jaki określa  $\tan 2\alpha$  ust. 11. Przypuśćmy, żeśmy tak postąpili, to równanie na  $I_\alpha$  będzie brzmieć jak w ust. 13., a równanie elipsy uprosi się do formy:

$$I_1 x^2 + I_3 z^2 = C^2$$

W tej ostatniej wprowadźmy promienie bezwładności  $I_1 = m \cdot i_1^2, I_3 = M \cdot i_3^2$ , nadto obierzmy dla wygody rachunkowej  $C = i_1 i_3 \sqrt{m}$ , to ostatnie równanie przejdzie na prostą formę:

$$\frac{x^2}{i_3^2} + \frac{z^2}{i_1^2} = 1$$

jest to równanie Culmanowskiej elipsy bezwładności ; odgrywa ona poważną rolę w niektórych obliczeniach. Przy jej pomocy (rys.66.) możemy przy danych  $I_1$  i  $I_3$



Rys. 66.

łatwo obliczyć  $I_\alpha$  tj. moment bezwładności względem prostej nachylonej do osi  $x \equiv 1$  pod kątem  $\alpha$ . Mianowicie :

$$I_\alpha = m \cdot i_\alpha^2$$

Promień bezwładności  $i_\alpha$  obliczyć możemy dwójako, albo z definicji  $\rho = \frac{C}{\sqrt{I_\alpha}} = \frac{i_1 i_3 \sqrt{m}}{i_\alpha \sqrt{m}}$  to jest

$$i_\alpha = \frac{i_1 i_3}{\rho}$$

albo też krótko :

$$i_\alpha = d$$

przyczem  $d$  oznacza oddalenie stycznej równoległej do danego kierunku od początku układu

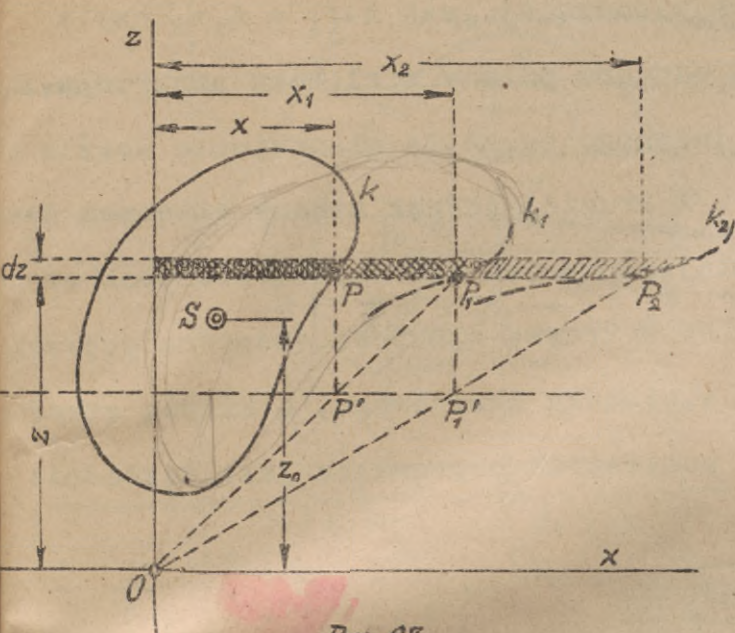
Niech bowiem  $(\xi, \zeta)$  będzie punktem styczności, tj.  $\frac{\xi^2}{i_3^2} + \frac{\zeta^2}{i_1^2} = 1$  a równanie stycznej brzmi :  $\frac{\xi \cdot x}{i_3^2} + \frac{\zeta \cdot z}{i_1^2} = 1$  względnie w formie normalnej :  $-x \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha = d$ . Z identyczności obu równań wynika proporcja :  $-\frac{\sin \alpha}{\xi} = \frac{\cos \alpha}{\zeta} = \frac{d}{1}$  lub związki :  $-i_3 \sin \alpha = d \cdot \frac{\xi}{i_3}$ ,  $i_1 \cos \alpha = d \cdot \frac{\zeta}{i_1}$ . Podnosząc je stronami do kwadratu i dodając otrzymamy :  $i_1^2 \cos^2 \alpha + i_3^2 \sin^2 \alpha = d^2 \left( \frac{\xi^2}{i_3^2} + \frac{\zeta^2}{i_1^2} \right)$  czyli  $i_\alpha^2 = d^2$  a stąd  $i_\alpha = d$ , co było do udowodnienia. Jeśli  $i_1 = i_3$ , to każde  $i_\alpha = i_1 = i_3$ .

18. W ustępach 15, 16 i 17 przetłumaczono na język wykreslny wzory

transformacji układu ; wielkości  $I_x, D_y, I_z$  względnie  $I_1, \alpha, I_3$  traktowaliśmy za wiadome. Okażemy na kilku metodach, że owe wielkości można dla masy rozłożonej dwuwymiarowo i płasko ( dla płaskiego pola) wyznaczyć bardzo szybko konstrukcją wykreslną. Za jedną z bardzo dokładnych uchodzi metoda Vojaček-Nehls a. Niech będzie danym pole  $A$  ograniczone krzywą  $k$  (rys.67) ; poszukiwany jest moment bezwładności względem osi  $x$  to jest  $I = \int z^2 dA$ . Przyjmujemy prostą równoległą do osi  $x$  w odstępnie dowolnym  $c$ , i konstruujemy krzywą  $k_1$  jak na rysunku ; mianowicie punkt  $P_1$  o rzędnej z punktu  $P$  leży na promieniu  $OP'$ , gdzie  $P'$  jest rzutem  $P$  na przyjętą prostą. Przy pomocy krzywej  $k_1$ , obejmującej pole  $A_1$ , konstruujemy analogicznie krzywą

82

20000



Rys. 67.

obejmującą pole  $A_2$ . Z podobieństwa trójkątów wynika :

$zx = cx_1, zx_1 = cx_2$  czyli  $z^2x = c^2x_2$

a stąd :

$zxdz = cx_1dz$  nadto  $z^2xdz = c^2x_2dz$

lub krócej :

$z dA = c dA_1$  nadto  $z^2 dA = c^2 dA_2$ .

Po scałkowaniu mamy :

$\int z dA = z_0 A = c \int dA_1 = c A_1$  nadto

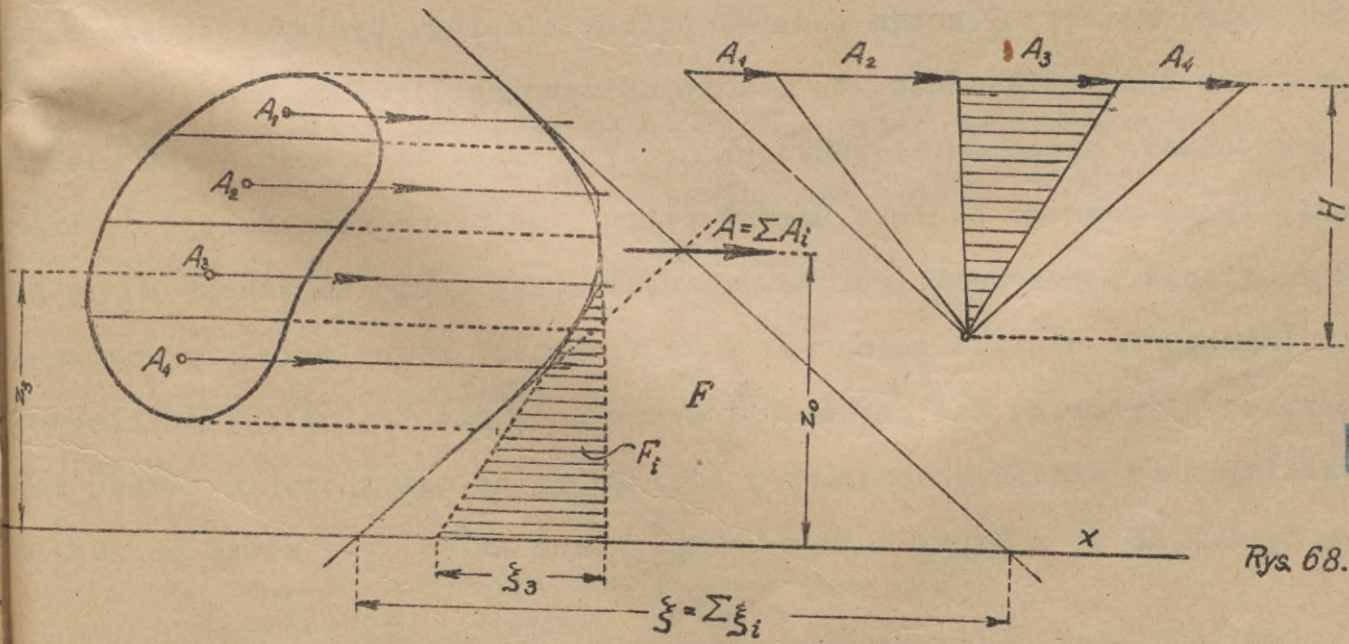
$\int z^2 dA = I = c^2 \int dA_2 = c^2 A_2$ .

Ostatecznie zatem pole krzywej  $k_1$  po-

żyć może do obliczenia współrzędnej środka masy  $z_0 = c \frac{A_1}{A}$ , pole zaś objęte krzywą  $k_2$  daje poszukiwany moment bezwładności  $I = c^2 A_2$ . Moment bezwładności względem równoległej do x przez środek masy S wynosi  $I_S = I - Az_0^2 = c^2 (A_2 - \frac{A_1^2}{A})$ . Dla  $A, A_1, A_2$  znajdujemy planimetrem.

19. Sposób Mohr'a prowadzi do celu równie szybko. Podzielmy dane

na paski (niekoniecznie zbyt wąskie) równoległe do osi x, względem której obliczyć moment bezwładności (rys. 68). Pola tych pasków uważamy za wielkości



Rys. 68.

$M_{G_{z_0}} =$   
Pole z 20 mas  
H  
 $M = F_{(pły)} \cdot H$

punkowe zaczepione w odnośnych środkach mas. Dobrowszy odpowiednią odległość

biegunową kreślimy wielobok sznurowy. Najwidoczniej jest  $H \cdot \xi_i = A_i z_i$  czyli  $H \xi_i z_i = A_i z_i^2$ . Lecz  $\xi_i z_i = 2F_i$  oznacza odnośne pole w wieloboku sznurowym, zaś  $A_i z_i^2 = I_i$  oznacza moment bezwładności odnośnego paska, a mianowicie ściśle wtedy gdy ów pasek jest nieograniczenie wężki. Z drugiej jednak strony wiadomem jest w miarę zwiększania ilości pasków i zmniejszania ich szerokości wielobok sznurowy zwiększy ilość boków przechodząc w granicy w krzywą sznurową. Odnośna poprawka dla  $I_i$  zawarta jest między dwoma bokami wieloboku sznurowego, a krzywą sznurową styczną w przedłużeniach podziału. Przy powyższych poprawkach jest dokładnie  $2HF_i = I_i$  lub po zesumowaniu :

$$I = 2HF$$

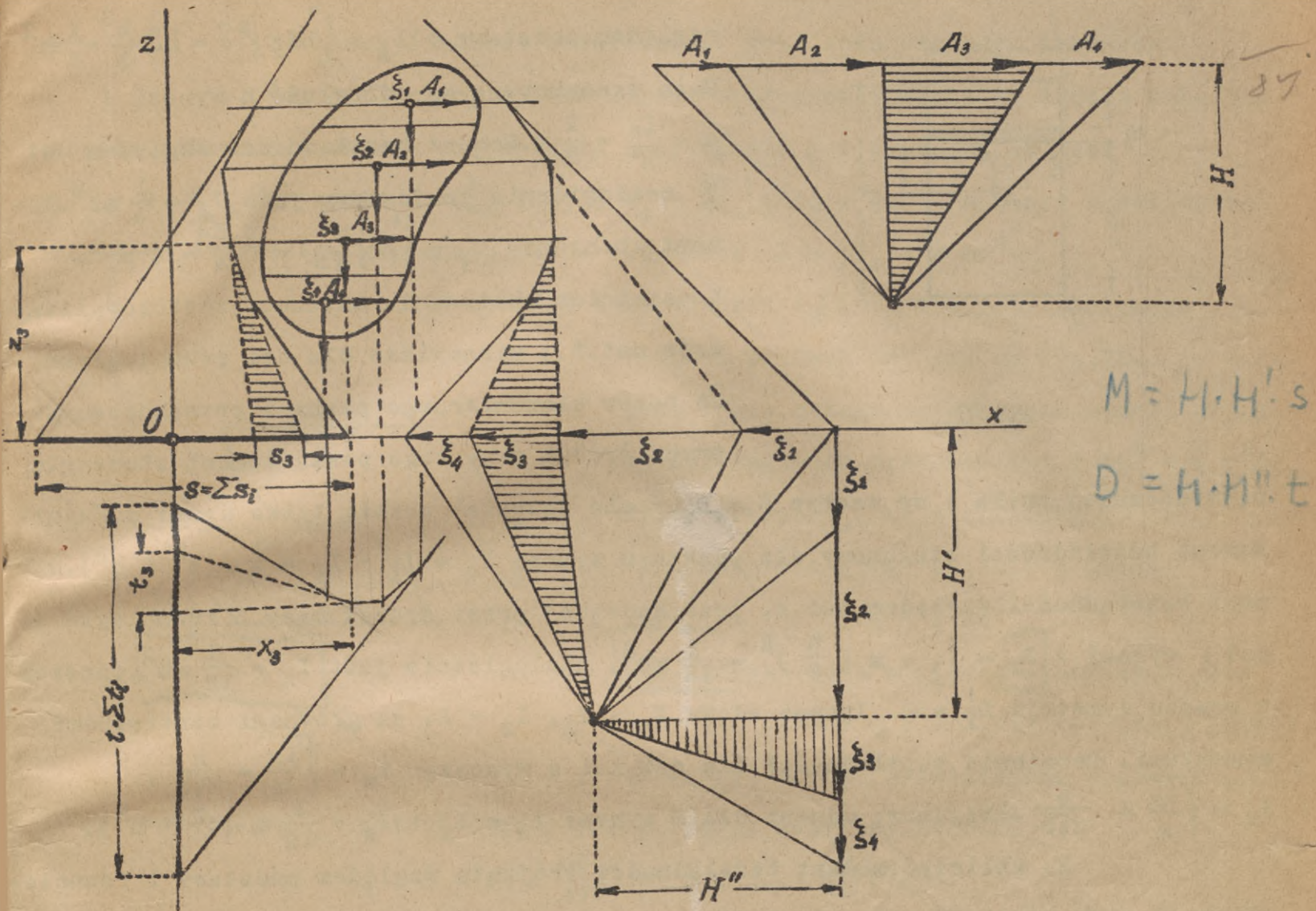
przyczem F oznacza pole objęte krzywą sznurową, przedłużeniami skrajnych boków i osią x. Wielkości H i F mają wymiar pola. Z powyższej konstrukcji wynika, że moment bezwładności względem prostej równoległej do x i przechodzącej przez środek masy ciała wynosi  $I_s = 2HF_s$ , gdzie  $F_s$  jest polem, zawartem między krzywą sznurową a promieniami skrajnymi. Sprawdzając widzimy, że  $I_s = 2HF_s = 2H(F - \xi \cdot \frac{1}{2} z_0) = 2HF - H \xi \cdot z_0 = 2HF - A z_0 z_0 = I - A z_0^2$  jak być powinno.

20. W obu naszkicowanych metodach do obliczenia momentu bezwładności należało użyć planimetru, co stanowi niekiedy pewną niewygodę mimo dużej dokładności samej metody. Pozatem podane sposoby nie mogą być zastosowane do obliczenia momentu zбочenia. Podamy tu metodę Culmanna obliczenia momentów bezwładności i zбочenia. Ta nieco mniej dokładna metoda wymaga do poznania obu wielkości zmierzania tylko pewnego odcinka. Doprowadzimy najpierw konstrukcję do tego punktu, jak w ustępie poprzednim (rys. 69.). Zanotowawszy sobie zależność  $H \xi_i = A_i z_i$  potraktujemy obecnie odcinki  $\xi_i$  na osi x za wielkości równoległe, kierunkowe, zapione również w środkach mas pasków. Dobrawszy znów dowolną odległość biegunową  $H'$  nakreślimy nowy wielobok sznurowy ; odcinki  $s_i$  na osi x czynią zadość równaniu  $H' s_i = \xi_i z_i$  lub  $HH' s_i = H \xi_i z_i = A_i z_i^2 = I_i$ . Lecz  $A_i z_i^2 = I_i$  ; zatem po zesumowaniu

$$I = HH' s$$

*man ber*

gdzie  $s = \sum s_i$  oznacza odcinek, zawarty między skrajnymi bokami wieloboku sznurowego. Celem obliczenia momentu zбочenia obrócmy odcinki  $\xi_i$  o kąt prosty i przyjdzie



Rys. 69.

szy nową odległość biegunową  $H''$  nakreślmy trzeci wielobok sznurowy ; odcinki  $t_1$  zawarte między bokami tego ostatniego na osi  $z$  czynią zadość równaniu  $H''t_1 = \xi_1 x_1$  lub  $HH''t_1 = H\xi_1 x_1 = A_1 z_1 x_1 = D_1$ . Ostatecznie po zesumowaniu otrzymamy:

$$D = HH''t$$

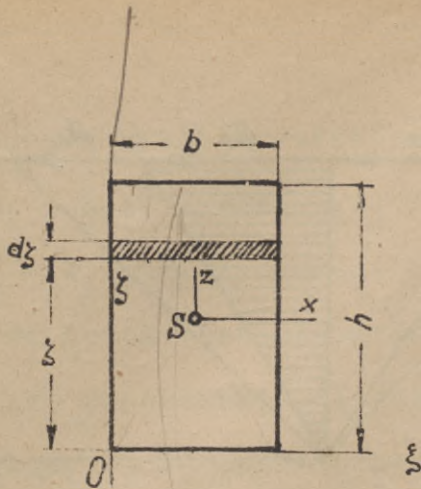
*moment zbież.*

przyczem  $t = \sum t_1$  przedstawia odcinek zawarty między skrajnymi bokami wieloboku sznurowego na osi  $z$ .

Przykłady ćwiczeń.

1. Podać kilka charakterystycznych wielkości dla prostokąta (rys. 70).

Odp. : Masa prostokąta wynosi  $m = bh\delta$  stąd  $\delta = \frac{m}{bh}$ . Moment bezwładności



Rys. 70.

względem podstawy :  $I_{\xi} = \int_0^h b dz \cdot z^2 \delta = b \delta \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} m h^2$

Masa zredukowana na odległość h wynosi :

$\mu = \frac{I_{\xi}}{h^2} = \frac{1}{3} m$ . Moment bezwładności względem osi

$\xi$  analogicznie znajdziemy jako  $I_{\zeta} = \frac{1}{3} m b^2$ . Mo-

ment zbroczenia  $D_{\eta} = \int_0^h b dz \cdot \frac{b}{2} z \delta = \frac{b^2 h \delta}{4} = \frac{1}{4} m b h$ .

W ostatnim obliczeniu milcząco zastosowaliśmy

wzór ust. 5.; mianowicie dla osi równoległych

do boków elementarnego paska i przechodzących

przez środek masy tego paska moment zbroczenia

najwidoczniej znika ; we wzorze  $D = D_S + mbc$  pozostał przeto tylko drugi dodatek

Moment bezwładności biegunowy dla punktu O wynosi  $I_0 = I_{\xi} + I_{\zeta} = \frac{1}{3} m (b^2 + h^2)$ . Mo-

ment bezwładności względem osi x, przechodzącej przez środek masy S równoległe do

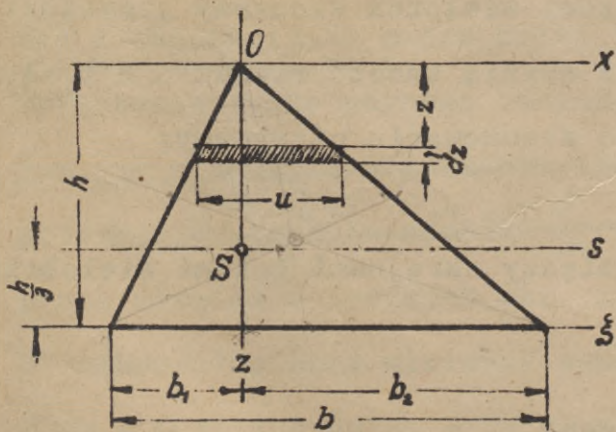
osi  $\xi$  wynosi :  $I_x = I_{\zeta} - m \left( \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m h^2$ , analogicznie jest  $I_z = \frac{1}{12} m b^2$ , po-

z powodu symetrii  $D_y = 0$ . Innymi słowy  $I_x = I_1$ ,  $I_z = I_3$  są głównymi centralnymi

momentami. Promienie bezwładności dla osi x-i z wynoszą  $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}$ ,

$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$ . Biegunowy moment dla S wynosi  $I_S = I_x + I_z = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2)$ .

2. Obliczyć moment bezwładności trójkąta względem podstawy i równoległych do nich prostych przez środek masy i wierzchołek ; nadto moment bezwładności biegunowy dla wierzchołka O (rys. 71.).



Rys. 71.

Odp. :  $I_x = \int_0^h u dz \cdot z^2 \delta$ ,  $u = b \frac{z}{h}$ ,  $\delta = \frac{2m}{bh}$ ,

zatem :

$$I_x = \frac{2m}{h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{1}{6} m h^2$$

$$I_S = I_x - m \left( \frac{2h}{3} \right)^2 = \frac{1}{18} m h^2$$

$$I_{\xi} = I_S + m \left( \frac{h}{3} \right)^2 = \frac{1}{6} m h^2$$

$$I_z = \frac{1}{6} m_1 b_1^2 + \frac{1}{6} m_2 b_2^2$$

gdzie  $m_1$  i  $m_2$  oznaczają masę trójkątów składowych.

Otóż  $m_1 = \frac{1}{3} b_1 h \delta = m \frac{b_1}{b}$ ,  $m_2 = \frac{1}{3} b_2 h \delta = m \frac{b_2}{b}$

a zatem  $I_z = \frac{1}{6} \frac{m}{b} (b_1^3 + b_2^3) = \frac{1}{6} m (b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2)$ . Sumując  $I_x$  i  $I_z$  otrzymamy

$$I_0 = \frac{1}{6} m (3h^2 + b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2)$$

3. Obliczyć moment bezwładności pola koła względem średnicy.

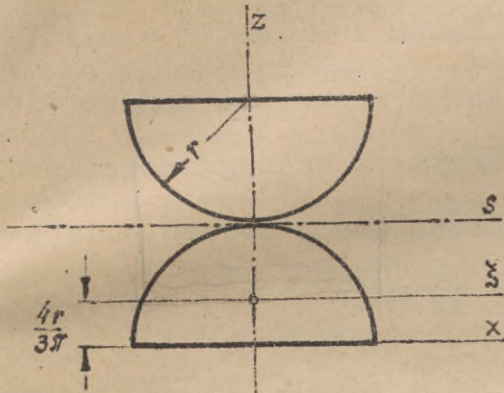
Odp.: Obliczymy wpierw moment bezwładności względem środka koła. Dla

współśrodkowego wąskiego pierścienia o promieniu  $\rho$  i grubości  $d\rho$  jest

$dI_0 = 2\rho \cdot \pi \cdot d\rho \cdot \rho^2 \cdot \delta$  gdzie  $\delta = \frac{m}{r^2 \pi}$ ; stąd  $I_0 = \frac{2m}{r^2} \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} m r^2$ . Momenty bezwładności względem średnic są wzajemnie równe i wynoszą  $I = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{4} m r^2$ .

4. Obliczyć momenty bezwładności  $I_S$  i  $I_Z$  dla pola złożonego

z dwóch połówek kół jak na rys. 72.



Rys. 72.

Odp.: Dla całego koła wynosi moment bezwładności względem średnicy  $I = \frac{1}{4} m r^2 = \frac{1}{4} r^4 \pi \delta$ . Tyleż wynosi  $I_Z$ , bo w stosunku do osi z rozkład masy nie uległ zmianie; zatem

$$I_Z = \frac{1}{4} m r^2$$

Dla połówki koła względem średnicy x jest

$$I_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot r^4 \cdot \pi \cdot \delta = \frac{1}{8} r^4 \pi \delta. \text{ Dla tej samej połówki}$$

wynosi moment bezwładności względem pro-

stej równoległej  $\xi$  przechodzącej przez środek masy tej połówki

$$I_\xi = I_x - \frac{1}{2} r^2 \pi \delta \left( \frac{4r}{3\pi} \right)^2 = \frac{1}{8} r^4 \pi \delta - \frac{8}{9\pi} r^4 \delta$$

dla tej samej połówki moment bezwładności względem prostej s wynosi:

$$I_\xi + \frac{1}{2} r^2 \pi \delta \left( r - \frac{4r}{3\pi} \right)^2. \text{ Ostatecznie moment bezwładności całego pola wynosi:}$$

$$I_S = 2 \cdot \left[ \frac{1}{8} r^4 \pi \delta - \frac{8}{9\pi} r^4 \delta + \frac{1}{2} r^4 \pi \delta \left( 1 - \frac{4}{3\pi} \right)^2 \right]$$

lub ponieważ  $\delta = \frac{m}{r^2 \pi}$  przeto:

$$I_S = \frac{1}{4} m r^2 \cdot \left( 5 - \frac{32}{3\pi} \right)$$

Przez obrócenie połówek względem siebie wzrósł moment bezwładności  $\left( 5 - \frac{32}{3\pi} \right)$  razy tj. o przeszło 60%.

5. Obliczyć moment bezwładności pełnej kuli względem stycznej.

Odp.: Znajdźmy moment biegunowy względem środka. Dla współśrodko-

wej powłoki kulistej jest:  $dI_0 = 4\rho^2 \cdot \pi \cdot d\rho \cdot \rho^2 \cdot \delta$ , gdzie  $\delta = \frac{3m}{4r^3 \pi}$ . Zatem dla całej

kuli jest:

$$I_0 = \frac{3m}{r^3} \int_0^r \rho^4 d\rho = \frac{3}{5} m r^2.$$

Momenty bezwładności względem średnic są wzajemnie równe i wynoszą  $I$  przyczem

$3I = 2I_0$ ; zatem  $I = \frac{2}{5} mr^2$ . Moment bezwładności względem prostej stycznej wynosi  $I_t = I + mr^2 = \frac{7}{5} mr^2$ .

6. Obliczyć moment bezwładności dowolnego ostrego graniastosłupa lub walca względem jego osi.

Odp. : Podzielmy graniastosłup względnie walec na równoległe płytki prostopadłe do osi, to moment bezwładności takiej płytki względem osi jest biegunowym momentem bezwładności tej płytki względem punktu przebicia i wynosi  $dm \cdot i^2$ , jeśli  $i$  jest promieniem bezwładności pola płytki. Zatem  $I = \int dm \cdot i^2 = m \cdot i^2$ . Innymi słowy szukany moment bezwładności wyraża się tym samym wzorem co moment biegunowy przekroju, lecz pod  $m$  należy rozumieć masę całej bryły. W szczególności według ćwiczeń 1 i 3 wynosi moment bezwładności prostopadłościanu o bokach podstawy  $b$  i  $h$  względnie walca o promieniu  $r$  względem osi  $I = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2)$  względnie  $I = \frac{1}{2} mr^2$ .

7. Obliczyć moment bezwładności stożka prostego kołowego względem wierzchołka  $O$  (rys.73.).

Odp. : Moment bezwładności elementarnej płytki względem osi  $z$  wynosi  $\frac{1}{4} h \cdot dm \cdot x^2$ , gdzie  $dm = x^2 \cdot \pi dz \cdot \delta$ , zaś  $\delta = \frac{3m}{r^2 \pi \cdot h}$ ;

zatem :  $I_z = \frac{3m}{2r^2 h} \int_0^h x^4 dz$ , przy czym  $x = r \frac{z}{h}$ ;

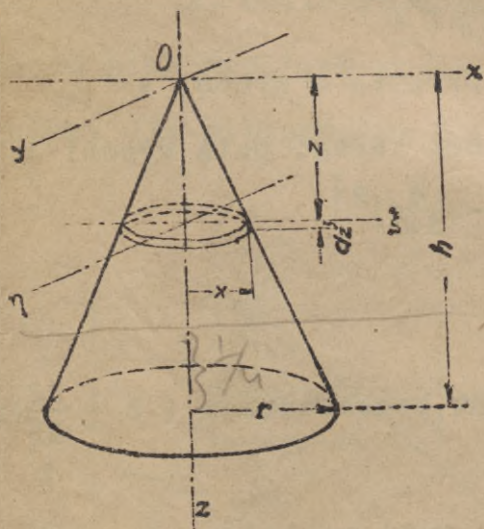
Ostatecznie  $I_z = \frac{3mr^2}{2h^5} \int_0^h z^4 dz = \frac{3}{10} mr^2$ . Moment bezwładności elementarnej płytki względem prostej leżącej w jej płaszczyźnie i przechodzącej przez jej środek masy wynosi :

$\frac{1}{4} dm \cdot x^2 = \frac{3m}{4r^2 h} x^4 \cdot dz = \frac{3mr^2}{4h^5} z^4 dz$ ; moment bezwładności tejże płytki względem prostej równoległej  $x$  wzrośnie o  $dm \cdot z^2 = \frac{3m}{r^2 h} x^2 z^2 dz = \frac{3m}{h^3} z^4 \cdot dz$ .

Moment bezwładności całego stożka względem osi  $x$  wynosi :  $I_x = \left( \frac{3mr^2}{4h^5} + \frac{3m}{h^3} \right) \int_0^h z^4 dz = \frac{3}{5} m \left( h^2 + \frac{r^2}{4} \right)$ .

Tyleż samo wynosi  $I_y = I_x$ . Dla momentu biegunowego mamy relację :

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z \quad \text{stąd} \quad I_0 = \frac{3}{10} m (r^2 + 2h^2).$$



Rys. 73.

## §.6. Redukcja układu sił.

---

1. Siła jest wielkością kierunkową - wektorem ; charakteryzują ją bowiem prosta działania, kierunek i wielkość - nadto punkt zaczepienia , jeśli się przyjmie, że siedliskiem siły jest punkt materjalny ciała. Z tej ostatniej cechy można często zrezygnować. Innymi słowy siła jest wektorem nieswobodnym względnie linjowym. Jak wiadomo układ tego rodzaju wektorów można sprowadzić do prostej postaci drogą redukcji. Chodzi tylko o to czy metody redukcji podane w rozdziale I. są metodami opartymi o wyniki mechaniki czyli wyraźniej, czy pojęcie wektora i momentu wektora jest zaczerpniętem z rozważań dynamicznych i czy w szczególności dwa te pojęcia wystarczają do obecnych naszych celów. Że tak będzie jest jasnym, albowiem teoria wektorów powstała na gruncie mechanicznym ; przyswoiła ona sobie przede wszystkim przeto te pojęcia, które mechanice są potrzebne. Chodziłoby jednak o to, by tę sprawę udowodnić.

2. W podstawowych prawach mechaniki mowa jest tylko o układzie ś r o d k o w y m sił. Wiadomem nam jest z prawa trzeciego, że działania sił  $\vec{F}_i$  na punkt materjalny dodają się geometrycznie i że można je zastąpić siłą w y p a d k o w ą  $\vec{P}$  działającą na ów punkt. Powiedziano przez to dwa fakty a mianowicie :  $\vec{P} = \sum_i \vec{F}_i$  nadto  $\vec{M} = \vec{P} \wedge \vec{r} = \sum_i \vec{F}_i \wedge \vec{r}_i$ , to jest ustalono wektor swobodny  $\vec{P}$  i wektorem swobodnym  $\vec{M}$  ograniczono mu swobodę, każąc sumie  $\vec{P}$  przejść przez punkt przecięcia się wszystkich wektorów  $\vec{F}_i$ .

3. Przy omawianiu podstawowych praw wprowadzono również pojęcie r ó w n o w a g i układu ś r o d k o w e g o sił i pojęcie r ó w n o w a g i punktu m a t e r j a l n e g o. Mianowicie układ środkowy sił pozostaje w równowadze, gdy  $\sum \vec{F}_i = 0$  ; skądinąd nam wiadomo, że w tym wypadku jest tak że  $\vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0$  jeśli  $\vec{M}$  jest momentem układu tych sił. Tak samo wyraża się równowaga punktu materjalnego ; w wypadku równowagi trwa on w spoczynku lub też ruchu jednostajnym i prostolinjowym. Z definicji równowagi sił widzimy, że odpowiada ona pojęciu r ó w n o w a r t o ś c i z e r o w e j układu wektorów.

4. Jeśli ciało składa się z układu punktów materjalnych, to działa

nie najrozmaitszych układów sił na różne punkty tego ciała możemy na podstawie dotychczasowego sprowadzić do układu pojedynczych sił, działających na różne punkty ciała. Owe siły utworzą układ sił, który wogólności będzie różnym od układu środkowego. O redukcji takiego układu na układ prostszy - wypadkowy, nie ma mowy w prawach podstawowych; podobnie nie mówią one nic wyraźnego o równowadze takiego układu sił względnie równowadze omawianego ciała. Innymi słowy należałoby te nowe pojęcia wydedukować opierając się o prawa podstawowe decydując się co do pewnych prostych oznaczeń. Np. możemy się umówić, że pod równowagą ciała będziemy uważali jego spoczynek lub ruch jednostajny taki, w którym wszystkie punkty odbywają drogi równe i równoległe. Układ sił, który taki stan wywoła nazywać będziemy układem sił w równowadze. Jeśli do danego układu sił  $\bar{P}_1$  trzeba będzie dodać drugi możliwie prosty  $\bar{Q}_j$ , by całość była w równowadze, to układ  $-\bar{Q}_j$  nazwiemy zredukowanym układem  $\bar{P}_1$ .

5. Droga tego rodzaju myślowych kombinacji sprowadzimy wszystko do rozważania ruchu jednego punktu, dalej - do określenia warunków pod jakimi inny punkt będzie wykonywał drogę równoległą do pierwszego itp. W każdym razie oprzemy się o prawa podstawowe, określone dla punktu materialnego. Fakt ten jest oczywiście niezmiernie doniosły. Nie wchodząc obecnie w naszkicowany logiczny sposób postępowania uprzedzimy wypadki i podamy wprost rezultaty tego rodzaju badań. Okaże się mianowicie, że trzeba będzie wprowadzić obok siły nowe pojęcie korzystne to jest parę sił (parę wektorów) względnie jej moment. Okaże się że oba pojęcia wystarczają w zupełności do określenia redukcji dowolnego układu sił, a w szczególności do określenia równowagi układu sił

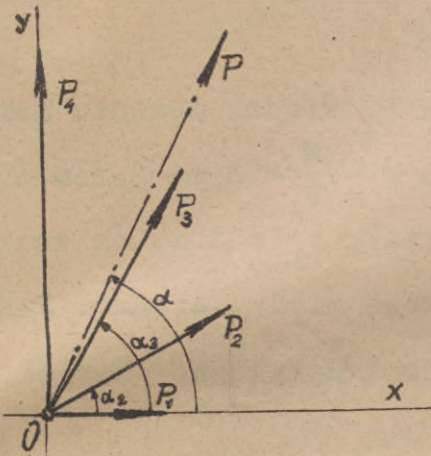
6. W związku z powyższem należy sobie przypomnieć wszystkie te operacje jakie podano w teorii wektorów. W szczególności należy zwrócić baczną uwagę na §§. 3, 4, 5, 7. W ćwiczeniach jakie w dalszym ciągu naszkicujemy w miejsce wektora  $\bar{P}_1$  używać będziemy oznaczeń  $\bar{P}_1$  lub innych, podobnie w miejsce momentu  $\bar{M}_1$  wprowadzimy  $\bar{M}_1$  lub oznaczenia podobne.

Przykłady ćwiczeń.

1. Obliczyć położenie i wielkość wypadkowej płaskiego zbieżnego ukła-

du sił  $P_1 = 1 \text{ t}$ ,  $P_2 = 2 \text{ t}$ ,  $P_3 = 3 \text{ t}$ ,  $P_4 = 4 \text{ t}$ , jeśli kąty  $(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = (\bar{P}_2, \bar{P}_3) = 30^\circ$ .

Odp. : Przyjmijmy na  $P_1$  oś  $x$ , na  $P_4$  oś  $y$ , to  $\alpha_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$ ,  $\alpha_3 = 60^\circ$   
 $\alpha_4 = 90^\circ$ .



Rys. 74.

$$P_{ix} = P_i \cdot \cos \alpha_i, P_x = \sum P_{ix} = 4,232 \text{ ton}$$

$$P_{iy} = P_i \cdot \sin \alpha_i, P_y = \sum P_{iy} = 7,598 \text{ ton}$$

W dalszym ciągu siła wypadkowa  $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = 8,7 \text{ t}$ ,

$$\text{tg} \alpha = \frac{P_y}{P_x} = 1,795, \alpha = \sim 60^\circ 53'.$$

Sprawdzić rezultat  $P$  wzorem :

$$P = \sqrt{\sum P_i^2 + 2 \sum P_i P_k \cdot \cos(\bar{P}_i, \bar{P}_k)},$$

w którym  $P_i P_k$  oznacza iloczyn mieszany wszelkich możliwych sił danego układu. Sprawdzić zadanie wykreślnie.

2. Składowe prostokątne siły pozostają do siebie w stosunku :

$P_x : P_y : P_z = 1 : 2 : 3$  ; jak jest zorientowana siła  $P$  ?

Odp. :  $P_x : P_y : P_z = \frac{P_x}{P} : \frac{P_y}{P} : \frac{P_z}{P} = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = 1 : 2 : 3$

czyli:  $\cos \beta = 2 \cos \alpha$ ,  $\cos \gamma = 3 \cos \alpha$ ; pozatem jest  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

Stąd znajdziemy  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$ ,  $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$ ,  $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$  czyli :

$$\alpha = \sim 74^\circ 30', \beta = \sim 57^\circ 41', \gamma = \sim 36^\circ 42'.$$

3. Trzy równe siły działają wzdłuż krawędzi bocznych umiarowego

ostroskupa o podstawie kwadratowej. Ile wynosi ich wypadkowa i gdzie trafia ona

podstawę ?

Odp. : Dany układ jest środkowym i przestrzen-

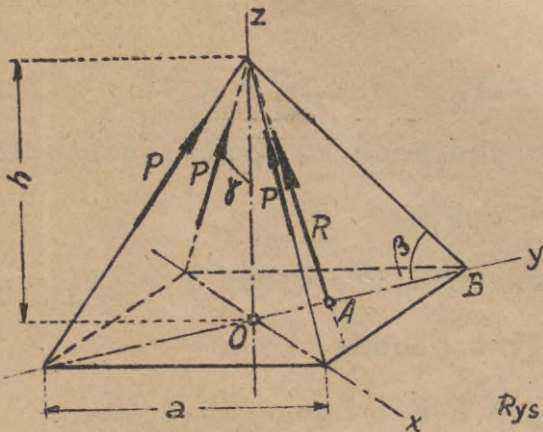
nym. Przesunawszy osie układu jak na rys. 75.

znajdujemy  $R_x = \sum P_{ix} = 0, R_y = \sum P_{iy} = P \cdot \cos \beta$

$R_z = \sum P_{iz} = 3P \cos \gamma$  a wobec tego

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = P \sqrt{\cos^2 \beta + 9 \cdot \cos^2 \gamma}$$

przyczem  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$ ,  $\text{tg} \beta = \frac{h}{a} \cdot \sqrt{2}$  zaczem



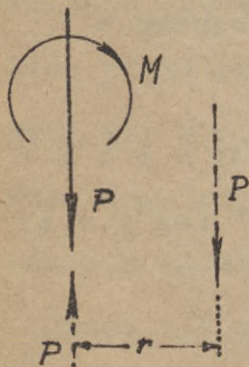
Rys. 75.

$R = P\sqrt{\cos^2\beta + 9\sin^2\beta}$ . Oznaczywszy kąty nachylenia wypadkowej  $R$  przez  $\lambda, \mu, \nu$  mamy:  $\cos\lambda = \frac{R_x}{R} = 0$ ,  $\cos\mu = \frac{R_y}{R} = \frac{1}{\sqrt{1+9\operatorname{tg}^2\beta}}$ ,  $\cos\nu = \frac{R_z}{R}$ . Ponieważ  $\lambda = \frac{\pi}{2}$  przeto  $R$  leży w płaszczyźnie  $yz$ , czyli  $\nu = \frac{\pi}{2} - \mu$ . Odcinek  $OA$  wynosi:  $OA = h \cdot \operatorname{ctg}\mu = \frac{h}{3\operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}OB$ ;  $R = P\sqrt{\frac{a^2 + 18h^2}{a + 2h}}$

4. Znaleźć wypadkową dwóch sił równoległych  $P_1 = 20 \text{ kg}$  i  $P_2 = 30 \text{ kg}$  zgodnie skierowanych, oddalonych wzajemnie o  $a = 5 \text{ m}$ .

Odp.:  $P = \sum P_i = 50 \text{ kg}$ ; przyjąwszy na  $P_1$  środek momentu mamy:  $M = \sum M_i = P_1 \cdot 0 + P_2 \cdot a = 150 \text{ kgm}$ ; lecz  $M = P \cdot r$ , stąd  $r = \frac{M}{P} = 3 \text{ m}$ . Zatem wypadkowa jest równoległa do sił  $P_1$  i  $P_2$  i oddalona jest od siły  $P_1$  o  $3 \text{ m}$ . Ze znaku momentu łatwo się zorientować, że mieści się owa wypadkowa między siłami. Jak się zmieni rezultat, jeśli siły będą niezgodnie skierowane? Rozwiązać obie alternatywy wykreślnie!

5. Dana jest siła i moment pary sił, przyczem siła leży w płaszczyźnie pary (rys.76.). Zredukować ten układ, jeśli  $P = 5 \text{ ton}$ ,  $M = 6 \text{ tm}$ !



Rys.76.

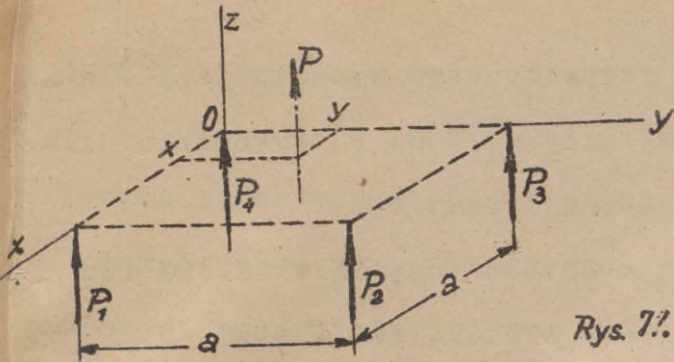
Odp.: Przedstawmy moment jako parę sił o siłach  $P = 5 \text{ ton}$ , to ich odstęp  $r = \frac{M}{P} = 1,2 \text{ m}$ . Umieścimy z zachowaniem znaku momentu parę sił tak, aby jedna z nich zrównoważyła się z daną siłą  $P$ . W rezultacie układ sprowadził się do jednej siły  $P$ , równoległej do danej i zgodnie z nią skierowanej, lecz przesuniętej w naszym wypadku w prawo o  $r = 1,2 \text{ m}$ . Odwrócić strzałkę siły i zbadać rezultat; odwrócić znak momentu i zbadać rezultat; odwrócić strzałki siły i momentu i zbadać rezultat! Narysować parę dowolnie i znaleźć

wypadkową przy użyciu wieloboku sznurowego!

6. Cztery siły równoległe  $P_1 = 1 \text{ t}$ ,  $P_2 = 2 \text{ t}$ ,  $P_3 = 4 \text{ t}$ ,  $P_4 = 7 \text{ t}$  równoległe i zgodnie skierowane zaczepiają w wierzchołkach kwadratu, prostopadłe do jego płaszczyzny. Znaleźć wypadkową, jeśli  $a = 3,5 \text{ m}$ .

Odp.: Przyjmijmy układ jak na rysunku 77. wtedy  $P = \sum P_i = 14$ . Obliczymy obecnie sumy momentów względem osi  $x$  i  $y$  z osobna.

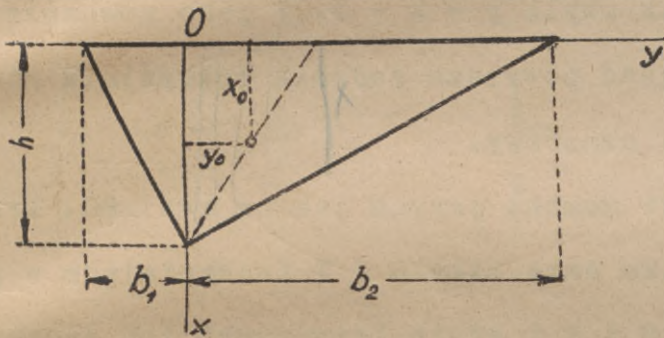
$$M_x = \sum M_{ix} = -P_2 a - P_3 a = -21 \text{ tm}, \quad M_y = \sum M_{iy} = P_1 a + P_2 a = 10,5 \text{ tm}.$$



Rys. 77.

Lecz  $M_x = -P \cdot y$  i  $M_y = P \cdot x$  zatem  
 $x = \frac{M_y}{P} = 0.75 \text{ m}$ ,  $y = \frac{M_x}{-P} = + 1.5 \text{ m}$ . Zatem wypadkowa  $P = 14 \text{ ton}$  przechodzi przez punkt  $x = 0.75 \text{ m}$ ,  $y = 1.5 \text{ m}$  płaszczyzny kwadratu. Jak się zmienią rezultaty zadania, jeśli siłę  $P_4$  odwrócimy kierunek ?

7. Prostopadle do płaszczyzny trójkąta działa nań równoległy ciągły układ sił o natężeniu  $p = \gamma \cdot x$ . Znaleźć wypadkową i jej współrzędne (rys. 78.).



Rys. 78.

Odp. : Wypadkowa wynosi  $P = \int p dA = \gamma \int x dA = \gamma \cdot x_s A$ , gdzie  $dA$  oznacza element pola trójkąta, a  $x_s = \frac{h}{3}$  współrzędną jego środka. Wypadkowa przejdzie przez środek układu sił równoległych. Formuły :  $P x_0 = \sum P_i x_i$ ,  
 $P y_0 = \sum P_i y_i$  przejdą tu na wzory :

$P x_0 = \int p dA \cdot x$ ,  $P y_0 = \int p dA \cdot y$ . Zatem :

$\gamma \cdot x_s A x_0 = \gamma \int x^2 \cdot dA = \gamma \cdot I_y$ ,

$\gamma \cdot x_s A y_0 = \gamma \int x y dA = \gamma \cdot D_z$ , a stąd :

$x_0 = \frac{I_y}{A x_s}$ ,  $y_0 = \frac{D_z}{A x_s}$  gdzie  $I_y$  i  $D_z$  są momentami bezwładności i zbieżności pola trójkąta, dla osi jak na rys. 78. Po wykonaniu otrzymamy :  $x_0 = \frac{1}{2}h$ ,  $y_0 = \frac{1}{2}(b_2 - b_1)$ .

Wypadkowa leży przeto na dośrodkowej trójkąta w połowie jego wysokości. Wzory na  $x_0$  i  $y_0$  mają znaczenie ogólne dla dowolnej figury płaskiej obciążonej według prawa  $p = \gamma \cdot x$ . Szczegółowo zajmuje się tym prostym zagadnieniem hydrostatyka.

8. Znaleźć wypadkową płaskiego układu jak na rys. 79., jeśli

$P_1 = P_5 = 10 \text{ ton}$ ,  $P_2 = P_4 = 20 \text{ ton}$ ,  $P_3 = 30 \text{ ton}$ ,  $\alpha_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = 60^\circ$ ,  $\alpha_3 = 45^\circ$ ,  
 $\alpha_4 = 30^\circ$ ,  $\alpha_5 = 0$ , zaś  $a = 2 \text{ m}$ .

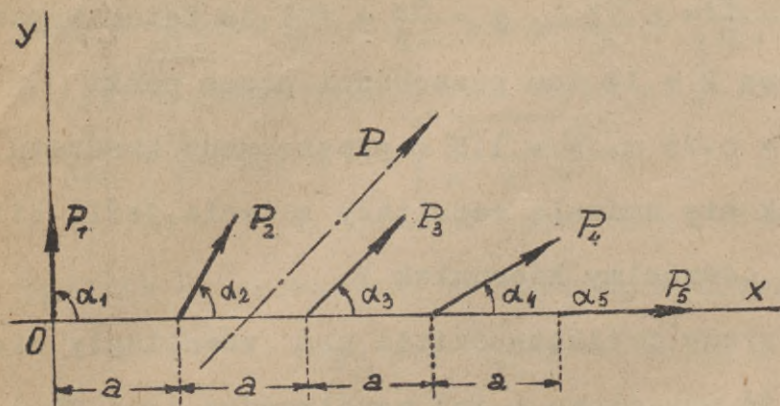
Odp. : Dla układu płaskiego ogólnego mamy do dyspozycji równania :

$P_x = \sum P_{ix}$  , gdzie  $P_{ix} = P_i \cos \alpha_i$

$P_y = \sum P_{iy}$  , gdzie  $P_{iy} = P_i \sin \alpha_i$

$M_0 = \sum M_i$  , gdzie  $M_i = P_{ix} y_i - P_{iy} x_i$

83/0  
42/32



Rys. 79.

W rozpatrywanym wypadku jest dla każdej siły  $y_1 = 0$ . Po wykonaniu działań znajdziemy :

$$P_x = 58.533 \text{ ton}, P_y = 58.533 \text{ ton}$$

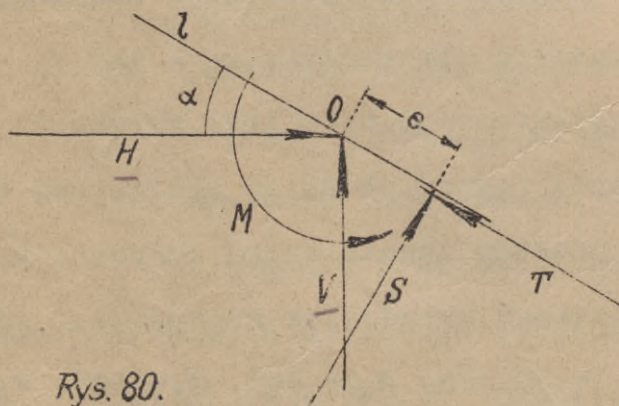
$$M_0 = - 179.494 \text{ tm. a stąd}$$

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sim 82.8 \text{ ton}, \text{tg}\alpha = \frac{P_y}{P_x} = 1$$

$\alpha = 45^\circ$ , wreszcie oddalenie siły od początku układu  $r = \frac{|M_0|}{P} = \sim 2.17 \text{ m.}$  Znak momentu wyklucza dwuznaczność. Równie

dobrze możemy też napisać :  $M_0 = P_x \cdot y - P_y \cdot x$  czyli  $y = x - 3.07$  jako równanie prostej, na której leży wypadkowa P. Rozwiązać powyższe zadanie wykreślnie stosując dla znalezienia położenia siły wielobok sznurowy.

9. Dane są siły V i H tudzież moment pary M jak na rys. 80. Przekształcić ten układ na inny posiadający tylko dwie siły S i T zaczepiające w pewnym punkcie prostej danej l. Ile wynoszą S i T i gdzie leży punkt ich zaczepienia, jeśli  $\alpha = 30^\circ$ ,  $V = 240 \text{ ton}$ ,  $H = 100 \text{ ton}$ ,  $M = 50 \text{ tm.}$



Rys. 80.

Odp. : Oba układy muszą być równowarte : zatem ich sumy rzutów na dwie różne osie z osobna muszą być wzajemnie równe , ich sumy momentów ze względu na ten sam punkt muszą być wzajemnie równe. Obierzmy za kierunki rzutów proste równoległe do S względnie T, za środek momentów punkt O.

Otrzymany :

$$S = V \cdot \cos\alpha + H \cdot \sin\alpha, T = V \cdot \sin\alpha - H \cdot \cos\alpha, M = S \cdot e$$

lub po podstawieniu :

$$S = 287.846 \text{ ton}, T = 33.398 \text{ ton}, e = \frac{M}{S} = 0.194 \text{ m.}$$

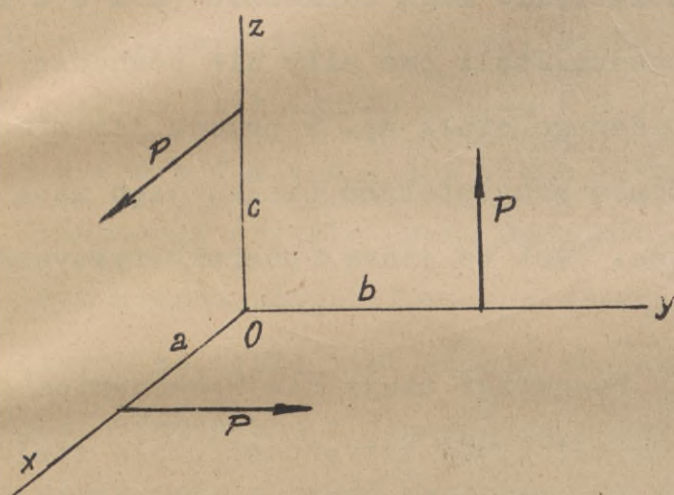
2000

Kontrolę stanowić może związek

$$\sqrt{V^2 + H^2} = \sqrt{S^2 + T^2} = 260 \text{ ton.}$$

Wypada zauważyć, że dla S można było zgóry przewidzieć strzałkę, natomiast dla T przyjęto ją dowolnie; rezultat otrzymamy  $T > 0$  wskazuje, że strzałka była przyjęta odpowiednio.

10. Dany jest układ trzech równych sił jak na rys. 81. Pod jakim warunkiem układ ten zredukuje się do wypadkowej? Ile ona wynosi, jaki ma kierunek i w jakim oddaleniu mija początek układu?



Rys. 81.

Odp. : Układ jest ogólnym i przestrzennym. Należy obliczyć przede wszystkim składowe sumy geometrycznej i ogólnego momentu układu. Znajdziemy :

$$R_x = P, \quad R_y = P, \quad R_z = P$$

$$M_x = -P \cdot b, \quad M_y = -P \cdot c, \quad M_z = -P \cdot a$$

Zatem :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = P\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{P}{P\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

czyli R ma kierunek przekątnej sześcianu o krawędziach równoległych do osi układu współrzędnych. Aby układ zredukował się wyłącznie do siły R musi zniknąć wyróżnik układu; zatem  $R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = -P^2 \cdot (a + b + c) = 0$ . Poszukiwany warunek brzmi  $a + b + c = 0$ . W tym wypadku moment

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = P \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

podaje oddalenie R od początku O; mianowicie jest :

$$r = \frac{M}{R} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (a^2 + ab + b^2) \quad \text{itp.}$$

## R O Z D Z I A Ł    I I I .

S t a t y k a .  
-----

## §.1. Równowaga i swoboda.

1. S t a t y k a zajmuje się r ó w n o w a g ą c i a ł t j .  
i c h s p o c z y n k i e m względnie ruchem jednostajnym prostoliniowym ;  
w szczególności chodzi w tej części mechaniki o p o s t a ć i p o ł o ż e -  
n i e równowagi, wreszcie o z w i ą z k i, jakie mogą zachodzić m i ę d z y  
s i ł a m i układu, pozostającego w równowadze. Jeśli owe siły nie pochodzą - jak  
to się często zdarza - od obecności masy badanego ciała np. z powodu jej nieznaczących  
wymiarów, to jest rzeczą jasną, że z braku przyspieszeń ciała, jego masa wogóle  
w zadaniu konkretnym nie znajdzie miejsca. Jest to jedną z charakterystycznych  
cech statyki.

2. Znajdywanie p o s t a c i równowagi staje się w mechanice ciała sztywnego  
rzeczą zbyteczną ; z powodu bowiem założonej sztywności ciała staje się jego  
kształt niezależny od wielkości i sposobu działania nań sił układu. Natomiast jasnym  
jest, że musimy ową sztywność w jakiś sposób konkretny scharakteryzować.  
Założmy, że badane ciało uważać będziemy za zbiór punktów materialnych.  
Warunki określające istotę sztywności nazywać będziemy w a r u n k a m i w i ą -  
z ą c e m i ; warunki te polegają na matematycznym stwierdzeniu faktu, iż dowolne  
dwa punkty, nie zależnie od spoczynku czy też ruchu ciała, zachowują s t a ł ą  
między sobą odległość. Dla ciała, składającego się z dwóch punktów materialnych  
istnieje najoczywiście jeden warunek wiążący. Dla ciała składającego się  
z trzech punktów można podać trzy niezależne warunki wiążące mianowicie długości  
boków odnośnego trójkąta. Dla ciała składającego się z  $n \geq 3$  punktów materialnych  
ilość warunków wiążących wynosi  $3n - 6$ , albowiem punkt czwarty, piąty itd. należy  
w stosunku do trzech pierwszych opisać trzema odległościami ; odjemnik 6 wy-  
równuje różnicę odpowiadającą trzem pierwszym punktom ciała. Powyższe ma charakter

ogólny tj. odnosi się do ciała sztywnego dowolnego. Dla ciał dwuwymiarowych płaskich dla czwartego, piątego itd. punktu przybywają tylko po dwa warunki ; w rezultacie ilość warunków wiążących takiego ciała sztywnego wynosi  $2n - 3$ , przy czym ilość punktów układu wynosi  $n \geq 2$ .

3. Przypuśćmy, że ciało znajduje się w równowadze tj. trwa w spoczynku w odniesieniu do przyjętego układu współrzędnych. Wtedy każdy z  $n$  punktów tego ciała jest unieruchomiony tj. jest on określony trzema współrzędnymi. Dla  $n$  punktów mamy przeto w wypadku ogólnym  $3n$  współrzędnych. Skoro jednakże ciało badane jest sztywnem to najwidoczniej między owymi  $3n$  współrzędnymi zachodzić będzie  $3n - 6$  zależności. Zatem dla ciała sztywnego złożonego z więcej aniżeli trzech punktów istnieje  $3n - (3n - 6) = 6$  niezależnie warunków unieruchamiających. Możemy przeto powiedzieć, że położenie i równowagi określa sześć warunków. Czy unieruchomienie odbywa się dzięki specjalnym więzom, podparciom, zawieszonom itp. czy też przez stosowny obiór sił działających na ciało jest rzeczą obojętną, albowiem każde skrepowanie swobody ciała jest identyczne z wywołaniem pewnych sił. Możemy przeto twierdzić, że równowagę ciała ustala sześć warunków sił względnie momentów ; odnośne równania nazywamy warunkami równowagi ; jest ich najwidoczniej sześć. Dla ciała płaskiego względnie wogóle zagadnienia dwuwymiarowego ilość omawianych warunków redukuje się do  $2n - (2n - 3) = 3$  przy czym jest  $n \geq 2$ .

4. Jeśli żaden z warunków unieruchamiających tj. warunków równowagi nie zachodzi - to mówimy, że ciało posiada sześć stopni swobody. Ten sposób wyrażania się ma podstawę kinematyczną. W kinematyce mianowicie udowodnimy, że ciało może wogóle wykonać sześć charakterystycznych ruchów układowych w odniesieniu do dowolnie przyjętego układu. Są to trzy przesunięcia wzajemnie prostopadłe tj. ruchy, w których drogi wszystkich punktów układu są wzajemnie równoległe i równe, tudzież trzy obroty dookoła osi wzajemnie prostopadłych tj. ruchy, w których punkty ciała wędrują po kołach, leżących w płaszczyznach prostopadłych do tzw. osi obrotu.

5. Jeśli ciało swobodne, pozostające pod działaniem dowolnego układu sił zmusimy do tego, by jeden jego punkt stale wędrował po pewnej określonej nieruchomej tj. stałej powierzchni, to wykluczamy w ten sposób jeden z możliwych ruchów tj. przesunięcie w kierunku normalnej do owej powierzchni. Ciało posiada wtedy tylko pięć stopni swobody. Jeśli ciało, jak wyżej, zmusimy do tego, że jeden jego punkt będzie wędrował po dowolnej krzywej stałej, to wykluczamy możliwość przesunięć w płaszczyźnie normalnie położonej względem krzywej, a więc w szczególności np. w kierunkach normalnej i binormalnej. Ciało posiada obecnie tylko cztery stopnie swobody. Gdy wreszcie jeden punkt ciała stale unieruchomimy tj. zwiążemy go z pewnym punktem stałym, to owemu ciału pozostaną tylko trzy stopnie swobody - najwidoczniej trzy obroty. Z kolei rzeczy możemy unieruchomić punkt ciała odbierając mu w ten sposób dwa następne stopnie swobody. Ostatni stopień swobody utraci ciało gdy trzeci punkt ciała zostanie unieruchomiony. Sposób unieruchomiania można wyliczyć bardzo dużo. Typowym przykładem jest statyw instrumentu mierniczego ; sześć jego punktów łączymy z trzema punktami stałej powierzchni (terenu). Równie dobrze można sześć punktów ciała połączyć z trzema (oczywiście nie leżącymi na jednej prostej) punktami stałej powierzchni. Konstrukcje unieruchamiające tj. podpierające względnie zawieszające ciało, nazywamy łożyskami. Zagadnienie dwuwymiarowe może mieć tylko trzy stopnie swobody ; unieruchomienie takiego układu jest odpowiednio prostsze.

### §.2. Warunki równowagi.

1. Z punktu widzenia dynamiki można powiedzieć - narazie wystarczające - że na przesunięcie wpływa obecność siły, na obrót obecność momentu pary sił. Ponieważ dowolny układ sił redukuje się do siły o trzech składowych i momentu również o trzech składowych, przeto równowagę ciała uwarunkowują równania geometryczne :

$$\sum \bar{P}_i = 0$$

$$\sum \bar{M}_i = 0$$

względnie analityczne :

$$\sum P_{ix} = 0 \quad (1) , \quad \sum P_{iy} = 0 \quad (2) , \quad \sum P_{iz} = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_{ix} = 0 \quad (4) , \quad \sum M_{iy} = 0 \quad (5) , \quad \sum M_{iz} = 0 \quad (6)$$

Są to najwidoczniej warunki redukcji zerowej układu sił. Gdzieindziej zostanie wykazane, że równania powyższe są rzeczywiście warunkami równowagi. Trzy pierwsze nazywamy warunkami sił, trzy następne warunkami momentów. W równaniach tych niewiadomymi w liczbie sześć są albo tylko pewne współrzędne ( kąty i długości ) albo tylko siły ( reakcje, momenty utwierdzenia ), albo częściowo jedno i drugie. Aby sposób zastosowania równań równowagi był jasny, musimy określić jakie to siły wchodzi w rachubę w wypisanych warunkach.

ZRZESZENIE STUDENTÓW POLSKICH

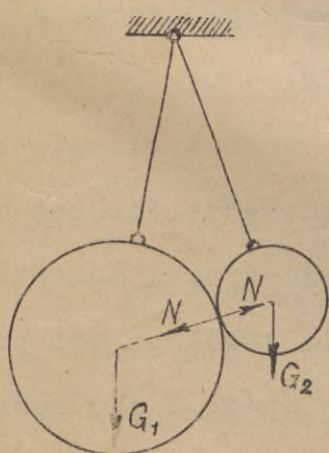
Wydz. Politechnicznych AGH.

Kraków, ul. Warszawska 24

Tel. 208-81, 535-21

2. Siły wewnętrzne odpadają z warunków równowagi ; zjawiają się one bowiem zawsze w postaci dwójki sił równych, przeciwnie skierowanych i położonych na tej samej prostej czyli krótko w postaci dwójki równowartej zeru.

Niekiedy jednakże zachodzi potrzeba podziału ciała na części ; podział ten albo wprost narzuca się, jeśli np. badany układ składa się z ciał częściowych, mogących względem siebie w stosownych warunkach wykonać pewien ruch, - albo też jest w pewien celowy sposób obrany, o czym jeszcze będzie mowa. Jeśli np. na dwóch pętlach jak na rys.82. zawiesimy dwie kule, to kula  $G_1$  stanowi podparcie kuli  $G_2$ ,



Rys. 32.

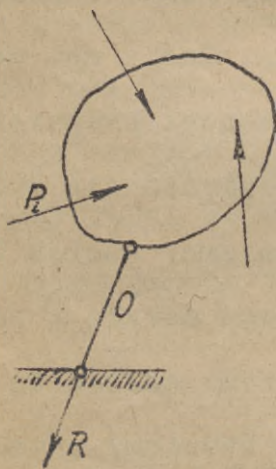
ale też kula  $G_2$  stanowi podparcie dla kuli  $G_1$ . Między obu kulami istnieje wzajemny nacisk  $N$  ; nacisk ten jest siłą wewnętrzną tego układu i odpada z rachunku, gdy pod uwagę bierzemy całość tj. obie kule. Skoro jednakże rozpatrywać będziemy równowagę np. tylko kuli  $G_1$ , pomyślanej jako część całego układu, to obok innych sił wprowadzimy w rachunek i nacisk  $N$  skierowany ku środkowi kuli  $G_1$ . Resumując przeto możemy powiedzieć, że w warunki równowagi wchodzi przede wszystkim wszystkie siły

wewnętrzne, a przy podziale układu na części i te siły we-

wnętrzne, które zastępują działanie części odrzuconych; te ostatnie siły nabierają poprostu charakteru sił zewnętrznych.

3. Jak wiadomo siły zewnętrzne dzielimy przedewszystkiem na tzw. siły czynne i bierne czyli odpory albo reakcje. Podział ten znajdzie obecnie wyczerpujące wyjaśnienie. Wspomniano już, że odebranie ciała swobody ruchów jest identyczne z wywołaniem pewnych sił; siły są zewnętrznymi; właśnie te dodatkowe siły nazywamy reakcjami. Występują one najczęściej jako wielkości niewiadome w warunkach równowagi. Jest rzeczą ważną pamiętać, że - jak wogóle każdy wektor - wymaga określenie reakcji podania jej prostej, jej wielkości i jej kierunku. Szczegóły te zależą od sposobu podparcia i wzdłużnie zawieszenia ciała.

4. Weźmy pod uwagę najprostszyp wypadek uszczuplenia swobody ciała poddanego działaniu układu sił  $\vec{P}_i$ . Połączmy mianowicie jeden jego punkt ze stałym punktem zapomocą pręta opatrzonego na obu końcach przegubami (rys. 83.) tj. urządzeniem



Rys. 83.

niemi, umożliwiającymi obrót ciała. Wtedy oś pręta jest kierunkiem reakcji  $\vec{R}$ , albowiem wzdłuż tej prostej właśnie wykluczony jest ruch ciała. Warunki wektorjalne równowagi brzmią:

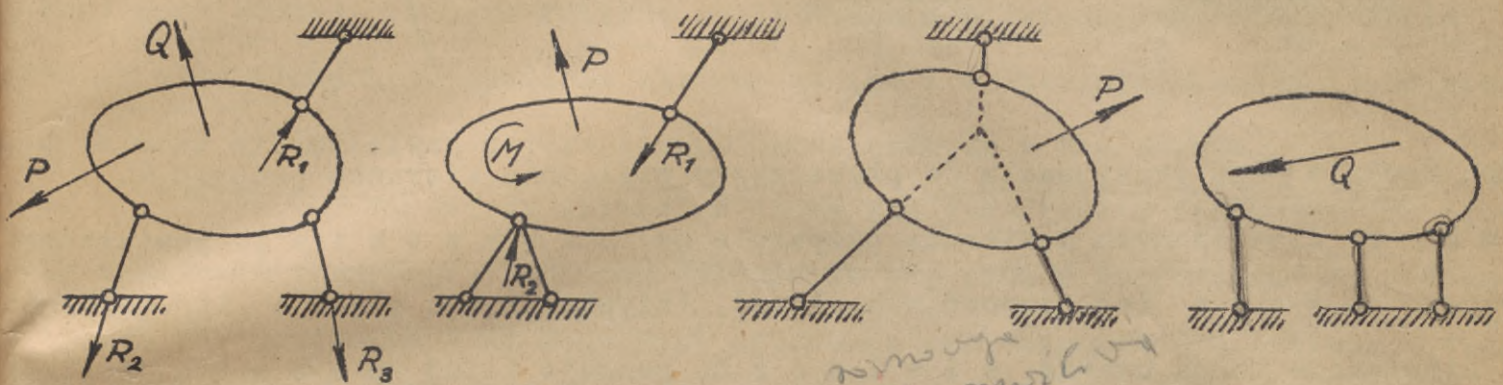
$$\sum \vec{P}_i + \vec{R} = \vec{0}, \quad \sum \vec{M}_i = \vec{0}.$$

Mianowicie reakcja  $\vec{R}$  ma wraz z siłami czynnymi  $\vec{P}_i$  utrzymać ciało w równowadze. Warunek momentów pomyślano w ten sposób, że środek momentów przyto najprościej w punkcie dowolnym osi pręta  $O$  tak, że moment reakcji odpadł. Z obu powyższych

równań wynika, że  $\vec{R}$  jest liczebnie równe wypadkowej sił zewnętrznych czynnych, lecz znaku przeciwnego, a nadto, że owa wypadkowa leży na kierunku pręta.

5. Jak powyżej umotywowano pręt opatrzone przegubami kulisemi dostarcza jednej niewiadomej tj. algebraicznej wartości

reakcji; oś pręta jest prostą reakcji. Celem ustalenia przeto ciała w za-  
gadnieniu dwuwymiarowym sił należy zastosować trzy pręty jak na rys. 84., przyczem  
dwa z nich można zesunąć do jednego punktu ciała; w każdym razie należy uważać,  
by owe trzy pręty nie przecinały się w jednym punkcie, względnie w przypadku gra-  
nicznym nie były do siebie równoległe. W wypadkach przedstawionych na rys. 84. do -

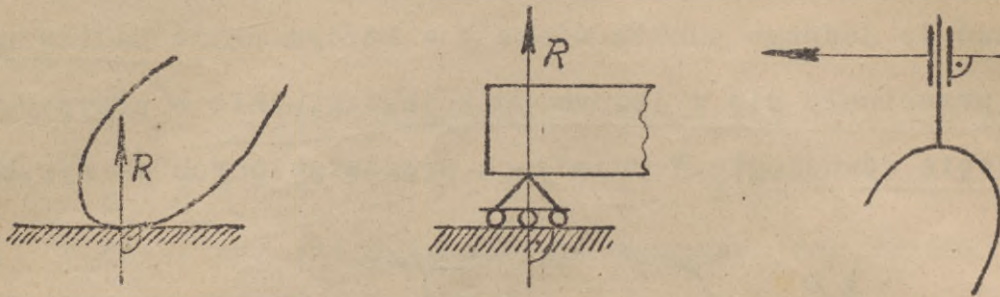


Rys. 84.

*nie może  
nie może*

starczya pręt pojedynczy jednej niewiadomej; pręt podwójny daje dwie niewiadome  
tj. siłę i jej prostą; w wypadkach dwóch końcowych równowaga albo - przy dowolnem  
obciążeniu - jest wogóle niemożliwa, albo - przy specjalnem obciążeniu - wielozna-  
czną. Oczywiście obciążenie stanowiąc mogą zawsze nietylko siły, lecz także i mo-  
menty pary sił. W przedstawionych dwóch pierwszych wypadkach układ jest unierucho-  
iony tj. sztywny; ponieważ dla zagadnienia płaskiego mamy do dyspozycji trzy wa-  
runki równowagi, przeto trzy niewiadome tych zagadnień można wyznaczyć. Z tego  
też powodu nazywamy takie zadanie st a t y c z n i e w y z n a c z a l n e m  
lub i z o s t a t y c z n e m. Przy większej ilości podpór jest zagadnienie  
st a t y c z n i e n i e w y z n a c z a l n e m lub h y p e r s t a t y -  
c z n e m; przy mniejszej zaś ilości podpór c h w i e j n e m lub c z ę ś c i o  
w o s w o b o d n e m. Zamiast podparć względnie zawieszzeń na prętach stosujemy  
inne prostsze lub też bardziej skomplikowane łożyska. Nie wchodząc bliżej  
w szczegóły konstrukcyjne podamy kilka prostych schematów mając na uwadze przede-  
wszystkiem zagadnienia dwuwymiarowe. J e d n e j niewiadomej, a mianowicie warto-  
ści algebraicznej reakcji dostarcza: podparcie ciała na g ł a d k i e j p o -  
wierzchni względnie płaszczyźnie, łożysko r u c h o m e (np. na wałkach), łożysko

ko pierścieniowe (szyjne) itp. (rys.85.). We wszystkich tych wypad-

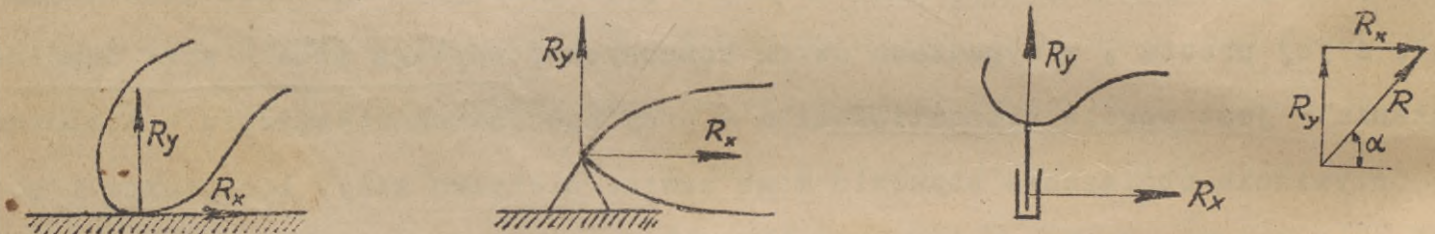


Rys. 85.

kach reakcja jest prostopadłą do płaszczyzny względnie kierunku podparcia.

Dwóch niewiadomych dostarcza podparcie na szorstkiej powierzchni, łożysko stałe (np. czopowe, wahadkowe), łożysko stopowe itp. (rys. 86.)

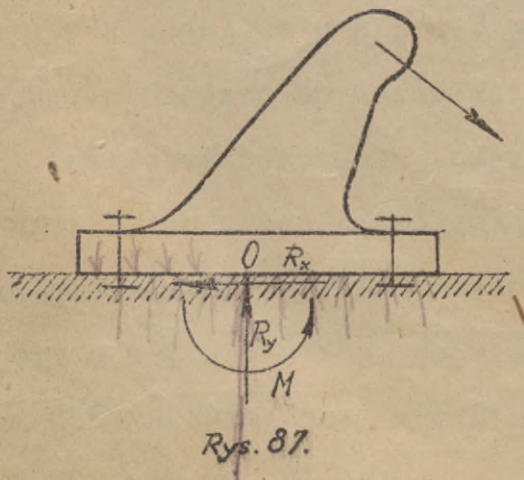
Za niewiadome można uważać wielkość reakcji i jej prostą (tj. kąt) względnie lepiej dwie składowe reakcji. Przegub walco-



Rys. 86.

wy, łączący dwie części układu dostarcza również dwóch niewiadomych. Pozo wymie-  
nionemi sposobami podparć stosuje się często tzw. utwierdzenie.

Wyobraźmy sobie np., że pewna powierzchnia ciała (rys.87) została połączona trwale



Rys. 87.

z jakąś powierzchnią stałą. Między oboma po-  
wierzchniami wystąpi układ reakcji rozmiesz-  
czony w pewien sposób ciągły; praktycznie  
mamy tu więc do czynienia z nieograniczoną  
ilością niewiadomych. W tym jednak wypadku  
wystarcza dla dużej ilości celów przyjąć pe-  
wien punkt O i zredukować do niego cały u-  
kład reakcji. Układ ów w przypadku płaskim

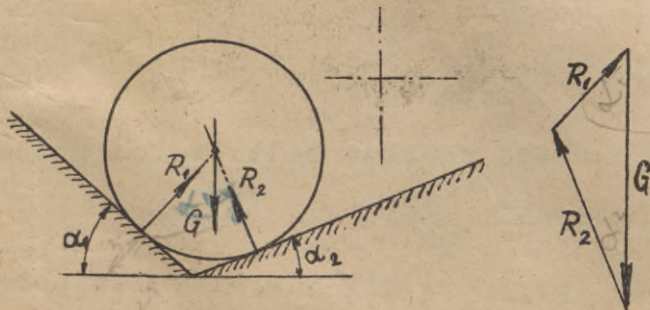
zredukuje się do trzech niewiadomych podporowych - dwóch sił i jednego momentu pary sił zwanego momentem utwierdzenia.

6. Dla układów przestrzennych używa się tych samych łożysk lub innych odpowiednio zmienionych do celu. Zorientowanie się co do ilości niewiadomych nie nastrocza zbyt trudności. Tak np. łożysko kuliste ruchome dostarcza jednej niewiadomej, łożysko kuliste stałe trzech niewiadomych, utwierdzenie sześciu niewiadomych. Oczywiście zarówno tu jak i w układzie płaskim ilość niewiadomych może być mniejszą dzięki pewnym uproszczeniom w obciążeniu.

7. Metody wykreślne dadzą się z korzyścią zastosować do płaskich zagadnień równowagi. Dane zagadnienie da się zawsze doprowadzić do jednego z trzech następujących: a) Dana jest wypadkowa sił czynnych (znaleziona z wieloboku sił i wieloboku sznurowego), dana jest prosta jednej reakcji i jeden punkt reakcji drugiej; znaleźć owe reakcje. Zagadnienie to zostało rozwiązane w teorii wektorów; kardynalnym warunkiem rozwiązania jest wspólny punkt przecięcia się wszystkich trzech wymienionych sił. b) Prosta jednej reakcji jest równoległa do wypadkowej sił czynnych; wtedy i druga reakcja będzie równoległa do wypadkowej. Dany w ten sposób układ równoległy trzech sił rozwiążemy przy użyciu wieloboku sznurowego (zamykającej). c) Dana jest wypadkowa i proste trzech niewiadomych sił np. reakcji; wyznaczyć owe siły. Zagadnienie to zostało również w teorii wektorów rozwiązane jako zagadnienie Culmann'a.

Przykłady ćwiczeń.

1. Ciężki walec jednorodny oparty jest o dwie gładkie płaszczyzny



Rys. 88.

(rys.88.) ; wyznaczyć reakcje punktów podparcia wykreślnie i analitycznie.

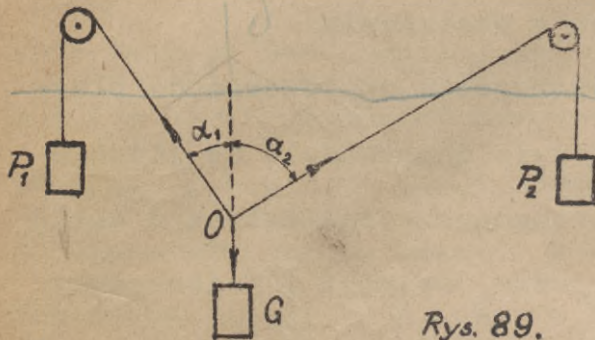
Odp.: Normalne do walca, przecinają się z jego osią; dany układ jest przeto środkowym i płaskim. Dla takiego układu istnieją dwa warunki równowagi tj. równa.

nia sił. Rzutując na dwa kierunki jak zaznaczono otrzymamy :

$$R_1 \sin \alpha_1 - R_2 \sin \alpha_2 = 0, \quad R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2 - G = 0$$

skąd łatwo wyznaczyć  $R_1$  i  $R_2$ . Przy rozwiązywaniu rachunkowym jesteśmy zmuszeni zgór przyjąć dla niewiadomych sił pewne strzałki ; jeśli rezultaty wynikają dodatnie, to zwroty niewiadomych są rzeczywiście takie jak przyjęto. Rozwiązanie wykreślne podano na rys.88. Strzałki i wielkości sił wynikają z wieloboku sił.

2. Jakie muszą być napięcia nici na rys.89. jeśli zrównoważyć one



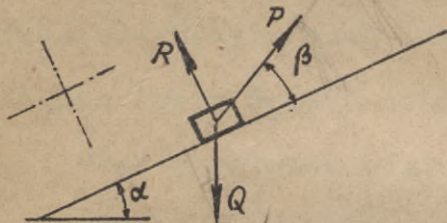
Rys. 89.

mają ciężar G w położeniu określonym kątami  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ ?

Odp. : Badamy równowagę węzła O. Napięcia nici są równe ciężarom  $P_1$  i  $P_2$ . Rozwiązanie brzmi jak w ćwiczeniu 1., jeśli w miejsce  $R_1$  i  $R_2$  wpisujemy  $P_1$  i  $P_2$ . Jak można sobie wytłumaczyć niemożliwy fizycznie wynik przy  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  ?

3. Ciężki ( Q ) przedmiot położony na gładkiej płaszczyźnie pochy-

łej mamy utrzymać w równowadze siłą P, nachyloną względem płaszczyzny pod kątem  $\beta$ . Ile wynosi P ?



Rys. 90.

Odp. : Siłami, działającymi na przedmiot są : ciężar jego Q, reakcja R i siła P; tworzą one układ środkowy (rys.90). Warunki równowagi brzmią :

$$P \cos \beta - Q \sin \alpha = 0, \quad R + P \sin \beta - Q \cos \alpha = 0$$

$$\text{a stąd } P = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}, \quad R = Q \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

Szczególne wypadki są :  $\beta = 0, P = Q \sin \alpha, R = Q \cos \alpha$

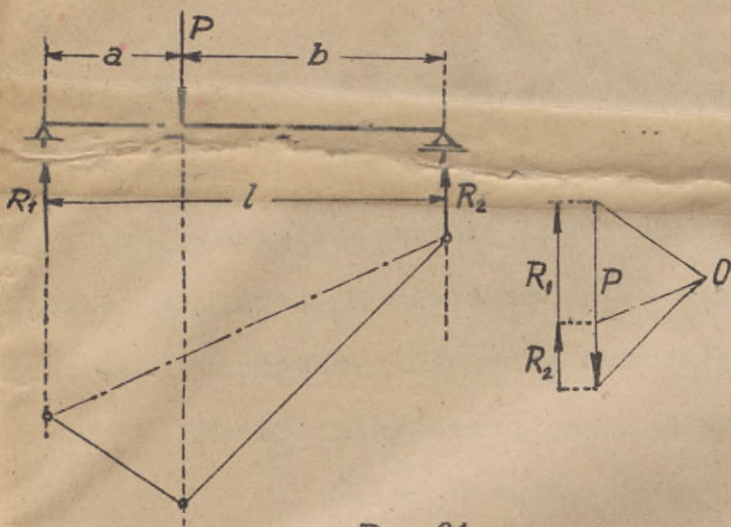
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, P = Q, R = 0$$

$$\beta = -\alpha, P = Q \operatorname{tg} \alpha, R = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

4. Wyznaczyć wykreślnie i rachunkowo reakcje belki wolno podpar-  
tej jak na rys.91.

Odp.: Przyjawszy biegun O, kreślimy promienie dla siły P, a potem wielobok sznurowy. Zagadnienie należy do kategorii b), wymienionej w ust.7., albo

wiem  $R_2$  jest równoległe do  $P$ , a zatem i  $R_1$  będzie równoległe do  $P$ . Nakreślone boki



Rys. 91.

wieloboku sznurowego będą skrajniami i wtedy, gdy  $P$  będzie wypadkową większej ilości sił obciążających belkę. Owe skrajne boki<sup>wyznaczają</sup> z kierunku reakcyj dwa punkty zamykającej; równoległa do zamykającej z bieguna dzieli  $P$  na reakcje  $R_1$  i  $R_2$ . Rachunkowo dla układu równoległego płaskiego mamy do dyspozycji dwa równania równowagi; jednym z nich musi być waru-

nek momentów. Równania brzmią :

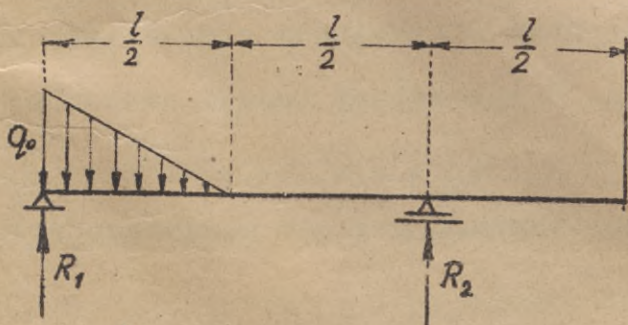
$$R_1 + R_2 - P = 0 \quad , \quad R_1 l - P \cdot b = 0$$

(przyczem środek momentów obrano na  $R_2$ ). Stąd wyniki  $R_1 = \frac{P \cdot b}{l}$ ,  $R_2 = \frac{P \cdot a}{l}$ . Reakcje  $R_1$  i  $R_2$  są linjowo zależne od siły  $P$ . Jeśli przeto belka będzie obciążona układem równoległym sił  $P_1, P_2, \dots$  położonym w miejscach  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  to stosując zasadę superpozycji napiszemy ogólnie :

$$R_1 = \frac{1}{l} \sum P_i b_i \quad , \quad R_2 = \frac{1}{l} \sum P_i a_i$$

W ostatnich wzorach jest  $P_i > 0$ , gdy siła skierowana jest w dół; podobnie  $a_i$  i  $b_i$  są dodatnie gdy siła leży między podporami, wreszcie  $R_1$  względnie  $R_2$  jest dodatnie, gdy strzałka reakcji wskazuje ku górze. Ciężary rozłożone wzdłuż długości można wobec znanego twierdzenia o sumie momentów i momencie sumy zastąpić przy wyznaczaniu reakcyj siłą skupioną, przechodzącą przez środek masy obciążenia.

5. Wyznaczyć reakcję dla belki obciążonej jak na rys. 92.



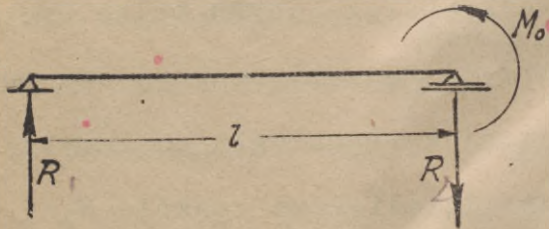
Rys. 92.

Odp. : We wzorach końcowych zadania 4-go należy dla obciążenia według trójkąta podstawić :  $P_1 = \frac{1}{2} q_0 \cdot \frac{1}{2} l = \frac{1}{4} q_0 l$ ,  
 $a_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} l = \frac{l}{6}$ ,  $b_1 = \frac{5l}{6}$ , dla ciężaru skupionego :

$$P_2 = P, \quad a_2 = \frac{3}{2} l, \quad b_2 = -\frac{l}{2}$$

Stąd wynika :  $R_1 = \frac{5}{24} q_0 l - \frac{1}{2} P$  ,  $R_2 = \frac{1}{24} q_0 l + \frac{3}{2} P$  ; najwidoczniej jest  $R_2 >$   
zaś  $R_1 \geq 0$  zależnie od  $P \leq \frac{5}{12} q_0 l$

6. Wyznaczyć reakcję w przypadku obciążenia momentem  $M_0$  jak na



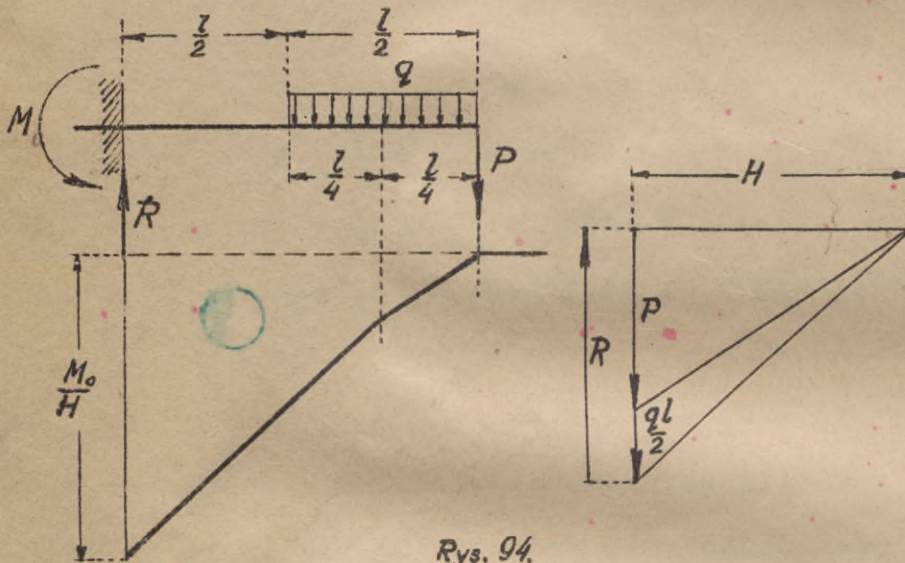
Rys. 93.

rys.93.

Odp. : Ponieważ jedyne obciążenie belki sta-  
wi para sił o momencie  $M_0$  przeto i reakcje  
szą utworzyć parę sił o momencie liczebnie  
równym i znaku przeciwnego. Zatem

$$R_1 = R_2 = \frac{M_0}{l}$$

7. Rozwiązać rachunkowo i wykreślić zadanie jak na rys.94.



Rys. 94.

Odp. : Pręt jest jednym końcem  
utwierdzony ; z powodu prostopa-  
do do osi kierunku działania ob-  
żeń mamy dwie niewiadome podpor-  
tj. reakcję R i moment utwierdzenia  
 $M_0$ . Warunki równowagi brzmią :

$$R - P - \frac{1}{2} q l = 0$$

$$M_0 - P \cdot l - \frac{3}{8} q l^2 = 0$$

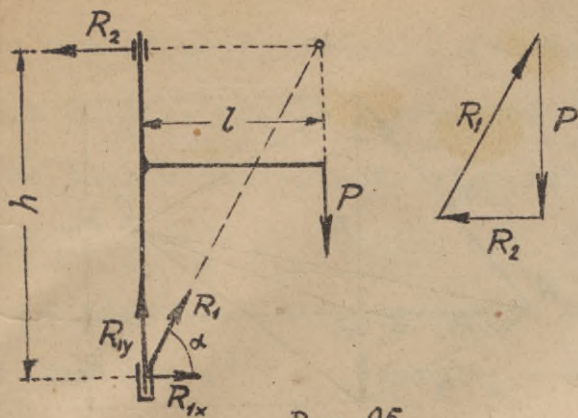
zatem R jest sumą wszystkich ob-  
żeń, a  $M_0$  momentem wszystkich obciążeń ze względu na środek umieszczony w przek-

ju utwierdzonym. Kreśląc P i  $\frac{q \cdot l}{2}$  znajdujemy w tej chwili R. Przyjawszy w dowolnej  
odległości H bieżun i nakreśliwszy promień, rysujemy wielobok sznurowy tak, by  
promienie przynależne do  $\frac{q \cdot l}{2}$  przecinały się na tej właśnie wypadkowej. Dla równo-  
wagi musi być wielobok sznurowy zamknięty. Otóż pierwszy i ostatni bok przecinają  
prostą R w dwóch punktach. Zamiast dotychczasowej zamykającej uzyskaliśmy rzędną  
momentu, potrzebnego do zrównoważenia układu. Z wykreślnej teorii wektorów jest  
nam wiadomem, że owa rzędna wynosi  $\frac{M_0}{H}$  .

8. Znaleźć wykreślić i analitycznie reakcje płaskiego układu

jak na rys.95.

Odp. : Siła P i prosta reakcji łożyska pierścieniowego  $R_2$  okr



Rys. 95.

ślają swym punktem przecięcia prostą reakcji łożyska stopowego  $R_1$ ; stąd rozwiązanie wykreślne jak na rys. 95. Analitycznie będzie wygodniej wprowadzić jako niewiadome  $R_{1x}$ ,  $R_{1y}$ ,  $R_2$ . Dla układu płaskiego ogólnego możemy napisać trzy warunki równowagi; jednym z nich musi być warunek momentów. Równania równowagi brzmią:

$$R_{1x} - R_2 = 0, \quad R_{1y} - P = 0, \quad R_2 h - P l = 0$$

a stąd:  $R_2 = P \frac{l}{h}$ ,  $R_{1x} = P \frac{l}{h}$ ,  $R_{1y} = P$ ,  $R_1 = \sqrt{R_{1x}^2 + R_{1y}^2} = P \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{h} \text{tg} \alpha = \frac{R_{1y}}{R_{1x}} = \frac{h}{l}$

9. Rozwiązać temat rys. 96.

Odp.: Rozwiązanie jak w ćwiczeniu 8., jeśli zamiast  $P$  wstawimy ciężar pręta  $Q$ , zamiast  $h$  długość  $a \cdot \sin \alpha$  wreszcie zamiast  $l$  długość  $\frac{1}{2} a \cdot \cos \alpha$

10. Pręt oparty o dwie ściany gładkie utrzymujemy w równowadze siłą  $P$  jak na rys. 97. Ile wynosi kąt równowagi  $\alpha$ ?

Odp.: Najwidoczniej jest  $R_1 = Q$ ,  $R_2 = P$ . Kąt  $\alpha$  najprościej obliczymy przyjmując środek momentów w punkcie  $O$  przecięcia się prostych  $R_1$  i  $R_2$ .  
Otrzymano:

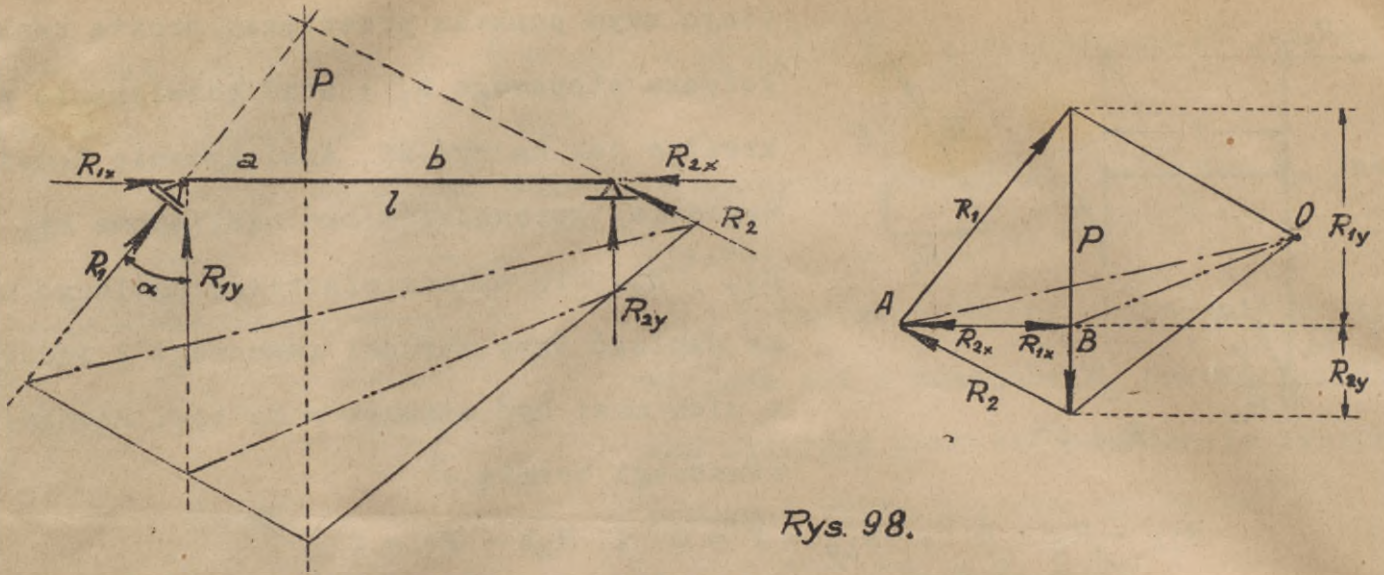
$$P(a + b) \sin \alpha - Q \cdot a \cdot \cos \alpha = 0 \quad \text{stąd}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{Q}{P} \cdot \frac{a}{a + b}$$

11. Wyznaczyć wykreślnie i rachunkowo reakcję belki jak na rys. 98.

Odp.: Reakcja  $R_1$ , prostopadła do płaszczyzny podparcia ruchomego,

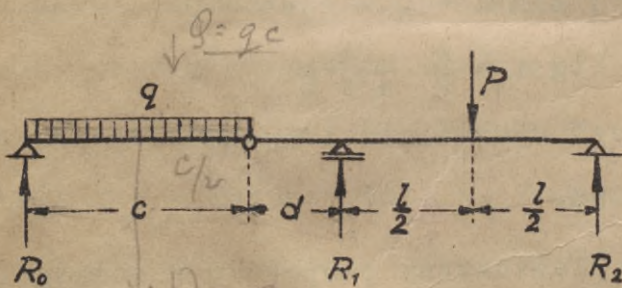
wraz z siłą  $P$  wyznaczają punkt, przez który musi dla równowagi przejść reakcja  $R_2$ ; stąd proste rozwiązanie wykreślne. Dla kontroli można też postąpić (zresztą niekoniecznie) następująco: Przyjmijmy biegun  $O$ , nakreślmy wielobok sznurowy i znaj-



Rys. 98.

dźmy zamykającą ; równoległy z O promień musi przejść przez punkt A. Dalsza kontrola może być następująca : Rozłożmy  $R_1$  i  $R_2$  na składowe równoległe i prostopadłe do osi belki ; wyniknie stąd w wieloboku sił punkt B. Proste składowych  $R_{1y}$  i  $R_{2y}$  dają nową zamykającą ; równoległa do niej z bieguna O musi przejść przez punkt B. Odnośnie do rozwiązania rachunkowego możemy użyć dla składowych  $R_{1y}$  i  $R_{2y}$  wzorów ćwiczenia 4. nawet gdy P będzie względem osi pręta nachylone pod kątem różnym od  $\frac{\pi}{2}$  ; należy wtedy w owych wzorach pod P rozumieć tylko składową siły prostopadłą do osi belki. Powyższe wynika stąd, że jak łatwo zauważyć przy tego rodzaju postępowaniu nie ulegają formalnie zmianie dwa pierwsze warunki równowagi. Warunek dodatkowy trzeci brzmi :  $R_{1x} = R_{2x}$  tzn. nie wystarcza on do rozwiązania zadania . Jednakże z danego kątem  $\alpha$  położenia łożyska ruchomego czytamy  $R_{1x} = R_{1y} \operatorname{tg} \alpha$  ( jest to warunek czysto geometryczny ) ; zatem  $R_{1x} = R_{2x} = P \frac{b}{l} \operatorname{tg} \alpha$

12. Rozwiązać układ na rys. 99.



Rys. 99.

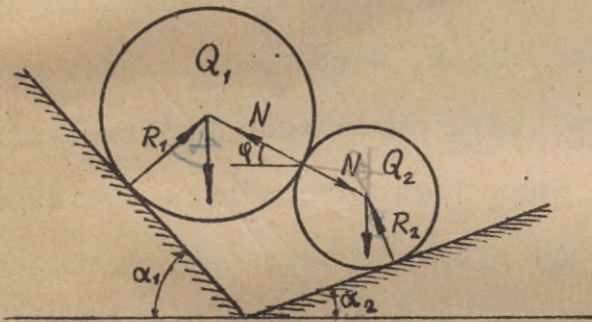
Odp. : Warunki równowagi układu równoległego :  $R_0 + R_1 + R_2 - qc - P = 0$  ,  
 $R_0(c + d) - R_2 \cdot l - q \cdot c(\frac{c}{2} + d) + P \cdot \frac{l}{2} = 0$  ,  
nie wystarczają do obliczenia niewiadomych  $R_0$ ,  $R_1$  i  $R_2$ . Wykorzystujemy zatem obecność przegubu. Gdybyśmy układ podzieli-

li na dwie nasuwające się nam części, to przybyłaby wprowadzić nowa niewiadoma tj. siła wewnętrzna w przegubie, ale moglibyśmy dla któregoś z podukładów napisać no-

we dwa od poprzednich niezależne warunki równowagi. Ponieważ o nacisk wzajemny nam nie chodzi, przeto z warunków owych najprościej obliczymy warunek momentów względem punktu zaczepienia siły wewnętrznej. Wynika stąd często cytowane twierdzenie : Suma momentów wszystkich sił, położonych po jednej stronie przegubu, ze względu na przegub jest równą zeru. W naszym wypadku jako brakujące równanie napiszemy :  $R_0 \cdot c - \frac{1}{2} q \cdot c^2 = 0$ , stąd  $R_0 = \frac{1}{2} q \cdot c$ . Wracając do poprzednich równań znajdziemy  $R_1$  i  $R_2$ .

13. Dwa walce ciężkie opierają się o siebie spoczywając na dwóch gładkich płaszczyznach. Wyznaczyć reakcje (rys.100) i określić położenie równowagi.

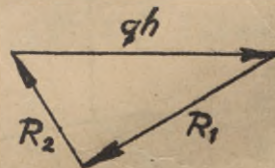
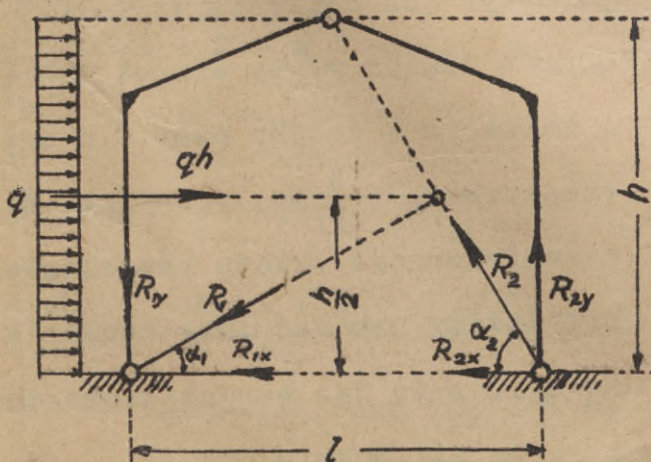
Odp. : Podobnie jak w ćwiczeniu 12. rozłożyliśmy zagadnienie na dwa układy równoległe - będzie korzystnym rozdzielić obecne zagadnienie na dwa układy środkowe wprowadzając poza  $R_1$  i  $R_2$  jako dodatkowe niewiadome wzajemny nacisk  $N$  i kąt równowagi  $\varphi$ . Z rysunku 100. czytamy :  $R_1 \cos \alpha_1 - Q_1 + N \cdot \sin \varphi = 0$ ,  $R_1 \sin \alpha_1 - N \cos \varphi = 0$  dla pierwszego walca, nad



Rys. 100.

to dla drugiego :  $R_2 \cos \alpha_2 - Q_2 - N \sin \varphi = 0$ ,  $R_2 \sin \alpha_2 - N \cos \varphi = 0$ . Po wyrugowaniu  $N \cdot \sin \varphi$ , względnie  $N \cdot \cos \varphi$  znajdziemy  $R_1$  i  $R_2$  z równań :  $R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cdot \cos \alpha_2 = Q_1 + Q_2$ ,  $R_1 \sin \alpha_1 - R_2 \sin \alpha_2 = 0$ , poczem wracając wstecz wyznaczymy dodatkowo  $N$  i  $\varphi$

14. Obliczyć reakcje układu trójprzegubowego jak na rys.101.



Rys. 101.

Odp. : Każda z podpór stałych przedstawia dwie niewiadome. Warunki sił dla całego układu brzmia :  $R_{1x} + R_{2x} - qh = 0$ ,  $R_{1y} - R_{2y} = 0$ . Zamiast podawać obecnie jako trzecie

równanie warunków momentów dla całego układu i dopiero potem wyskiwać obecność

górnego przeguba do ustawienia czwartego traktującego równania - zrobimy to od razu uważając przegub raz za podporę lewej drugi raz prawej części układu. Odnosne warunki momentów brzmią :

$$R_{1x}h - R_{1y} \cdot \frac{l}{2} - \frac{qh^2}{2} = 0, \quad R_{2x}h - R_{2y} \cdot \frac{l}{2} = 0$$

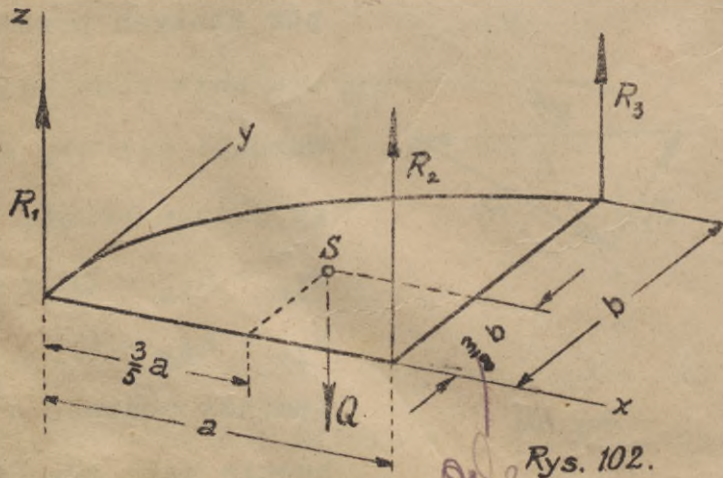
Powyższe cztery równania wystarczają do wyznaczenia niewiadomych  $R_1 = \sqrt{R_{1x}^2 + R_{1y}^2}$ ,  $\text{tg} \alpha_1 = \frac{R_{1y}}{R_{1x}}$ ,  $R_2 = \sqrt{R_{2x}^2 + R_{2y}^2}$ ,  $\text{tg} \alpha_2 = \frac{R_{2y}}{R_{2x}}$

Rozwiązanie wykresłne wygląda następująco : ponieważ prawa część nie jest obciążona przeto stanowi ona poprostu łożysko dla części lewej tzn. reakcja  $R_2$  przejdzie przez górny przegub jak na rys. 101. Reakcja  $R_2$  i wypadkowa obciążenia lewej części  $qh$  wyznaczają punkt, przez który przejdzie  $R_1$ . Tem samym sprowadziliśmy układ do układu środkowego ; wielobok sił przedstawiono obok. Gdyby obie części układu były obciążone , to przy rozwiązaniu wykresłnem stosujemy zasadę superpozycji : Traktujemy najpierw układ tak, jak gdyby tylko lewa jego strona była obciążona i znajdujemy jak wyżej  $R_1'$  i  $R_2'$ . W dalszym ciągu sytuację odwracamy zyskując  $R_1''$  i  $R_2''$ . Całkowite reakcje wynoszą  $\bar{R}_1 = \bar{R}_1' + \bar{R}_1''$ ,  $\bar{R}_2 = \bar{R}_2' + \bar{R}_2''$ . Poprostu reakcje  $R_1$  i  $R_2$  są promieniami wieloboku sił, którego wielobok sznurowy przechodzi przez trzy przeguby. W teorii wektorów zagadnienie tego rodzaju zostało opracowane

15. Ile warunków równowagi ustawić należy dla przestrzennego układu środkowego sił ?

Odp. : Trzy warunki sił.

16. Płyta ciężka ( $q \text{ kg/m}^2$ ) w kształcie odcinka paraboli powieszona jest na trzech równoległych niciach ; wyznaczyć ich napięcia (rys.102).

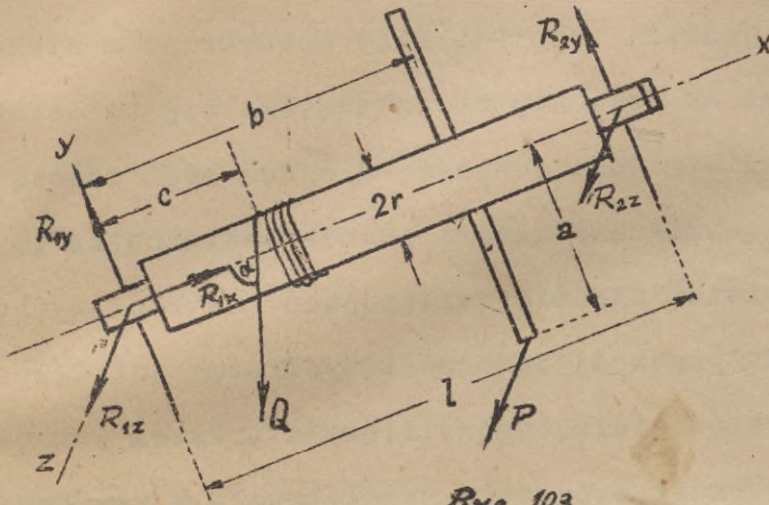


Odp. : Ciężar płyty wynosi  $Q = \frac{2}{3} \cdot abq$  i zaczepia w środku masy S o współrzędnych  $x_0 = \frac{3}{5} a$ ,  $y_0 = \frac{3}{8} b$ . Dla przestrzennego układu równoległego sił możemy napisać trzy równania równowagi, a to dwa warunki momentów i jeden sił. Brzmia one :

$$R_3 b - Q y_0 = 0, R_2 \cdot a + R_3 \cdot a - Q x_0 = 0, R_1 + R_2 + R_3 - Q = 0$$

Po rozwiązaniu znajdziemy :  $R_3 = \frac{1}{4} abq$  ,  $R_2 = \frac{3}{20} abq$  ,  $R_1 = \frac{4}{15} abq$  .  $\times$

17. Dla prostego wyciągu jak na rys.103. dane są wszystkie wymiary i ciężar  $Q$ . Obliczyć siłę równoważącą układ  $P$  i reakcje punktów podparcia.



Rys. 103.

Odp. : Mamy do czynienia z ogólnym przestrzennym układem sił. Sześć warunków równowagi brzmi :

$$\sum P_{ix} = 0, \sum P_{iy} = 0, \sum P_{iz} = 0$$

$$\sum (P_{iy} z_i - P_{iz} y_i) = 0$$

$$\sum (P_{iz} x_i - P_{ix} z_i) = 0$$

$$\sum (P_{ix} y_i - P_{iy} x_i) = 0 .$$

Łożysko dolne przedstawia trzy niewiadome, górne dwie niewiadome (rucho

me w kierunku osi  $x$ ). Dla przejrzystości najlepiej określić współrzędne i składowe wszystkich sił dla osi  $x, y, z$ .

$R_1$ ,	$x = 0$ ,	$y = 0$ ,	$z = 0$ ,	$R_{1x}$	,	$R_{1y}$	,	$R_{1z}$
$R_2$ ,	$= l$ ,	$= 0$ ,	$= 0$ ,	$0$	,	$R_{2y}$	,	$R_{2z}$
$Q$ ,	$= c$ ,	$= 0$ ,	$= r$ ,	$- Q \cos \alpha$ ,	$- Q \sin \alpha$ ,	$0$		
$P$ ,	$= b$ ,	$= -a$ ,	$= 0$ ,	$0$	,	$0$	,	$P$

Zatem warunki równowagi brzmią :

$$R_{1x} - Q \cos \alpha = 0, R_{1y} + R_{2y} - Q \sin \alpha = 0, R_{1z} + R_{2z} + P = 0$$

$$- Q \cdot r \cdot \sin \alpha + P \cdot a = 0, R_{2x} \cdot l + Q \cdot c \cdot \cos \alpha + P \cdot b = 0, - R_{2y} \cdot l + Q \cdot c \cdot \sin \alpha = 0$$

Stąd wynika :  $P = Q \frac{r}{a} \sin \alpha$  ,  $R_{2y} = Q \frac{c}{l} \sin \alpha$  ,  $R_{2z} = - Q \frac{r}{l} (\cos \alpha + \frac{b}{a} \sin \alpha)$

$$R_{1x} = Q \cdot \cos \alpha, R_{1y} = Q \cdot \sin (1 - \frac{c}{l}), R_{1z} = Q \frac{r}{l} (\cos \alpha - \frac{l-b}{a} \sin \alpha)$$

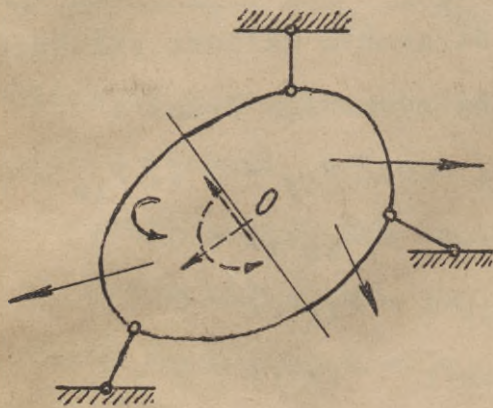
$$\text{i w końcu : } R_1 = \sqrt{R_{1x}^2 + R_{1y}^2 + R_{1z}^2}, \cos \alpha_1 = \frac{R_{1x}}{R_1}, \cos \beta_1 = \frac{R_{1y}}{R_1}, \cos \gamma_1 = \frac{R_{1z}}{R_1}$$

$$\text{i podobnie : } R_2 = \sqrt{R_{2y}^2 + R_{2z}^2}, \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \text{tg } \beta_2 = \frac{R_{2z}}{R_{2y}}, \gamma_2 = \frac{\pi}{2} - \beta_2$$

Wypada zauważyć, że jest  $R_{2z} < 0$  tj. składowa ta ma strzałkę przeciwną od zaznaczonej na rys.103. Ponadto jest  $R_{1z} \gtrless 0$  w zależności od  $\text{tg } \alpha \gtrless \frac{a}{l-b}$

§. 3. Redukcja wewnętrzna.

1. Niech będzie danem dowolne ciało obciążone układem sił względnie momentów (rys. 104). Siły te wraz z reakcjami utrzymują ciało w równowadze. Wiadomym



Rys. 104.

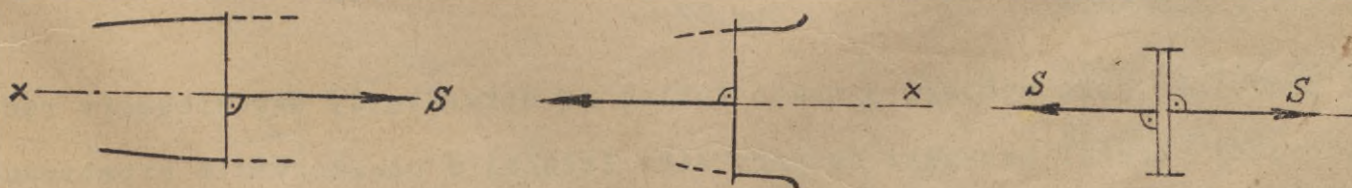
nam jest, że istnieją siły wewnętrzne w ciele, które ze sobą się równoważą. Jak się te ostatnie zmieniają jako funkcje miejsca jest rzeczą innego wykładu. W każdym jednak razie potrafimy rozwiązać zadanie następujące: Wykonajmy przez ciało przekrój dowolny i wyobraźmy sobie, że jedną część ciała odrzuciliśmy; przytem wymagamy, żeby część pozostała nadal trwała w równowadze jak niedawno w całości. Oczywiście musimy działa

nie części odrzuconej zastąpić odnośniami siłami wewnętrznymi. Tych ostatnich wprost nie znajdziemy, ale ich wypadkowe. Przyjmijmy dowolny punkt przekroju za środek redukcji i umieścimy w nim początek układu współrzędnych, przyczem najwygodniej dwie osie umieścimy w płaszczyźnie przekroju, a trzecia niech wobec tego będzie prostopadłą do tej płaszczyzny. Najwidoczniej układ sił wewnętrznych może reprezentować sześć składowych, mianowicie trzy siły i trzy pary sił tj. trzy momenty. Trzy (dla przejrzystości) takie wielkości zaznaczono na rys. 104. Znalazienie owych sił czy momentów nie nastrocza żadnych trudności; są one poprostu układem sił (oczywiście łącznie z reakcjami) odrzuconej części, zredukowanej do punktu O; względnie są one przeciwnie wziętym układem części pozostawionej zredukowanym do punktu O; wreszcie są one składowymi umieszczonemi w O, które łącznie z siłami pozostałej części potrafią ją utrzymać w równowadze. Powyższe rozmaite pozornie wyjaśnienia są zrozumiałe, skoro założono, że cały układ bez podziału pozostawał w równowadze. Jakkolwiek jednak sprawę postawimy jest rzeczą pewną, że wielkości omawiane znaleźć możemy, albowiem w najogólniejszym wypadku może ich być sześć: Tyleż samo - jak nam wiadomo - istnieje warunków redukcji układu, względnie tyle samo istnieje warunków równowagi.

2. Układ współrzędnych  $x, y, z$  musimy w jakiś sposób w stosunku do przekroju opisać. Najwygodniej będzie postąpić następująco : Niech układem tym będzie układ np. prawy, niech jego początkiem będzie środek masy przekroju, wreszcie oś  $x$  niech będzie normalną do przekroju. Wtedy jeszcze osie  $y$  i  $z$  wymagają bliższego opisanie. Najprościej będzie przyjąć dla nich jakieś położenie naturalne. Niech one przeto będą głównymi osiami bezwładności przekroju. W ten sposób pozostałoby do zrobienia jeszcze jedna rzecz - należałoby opisać położenia przekroju względem ciała. To ostatnie staje się dość trudnem.

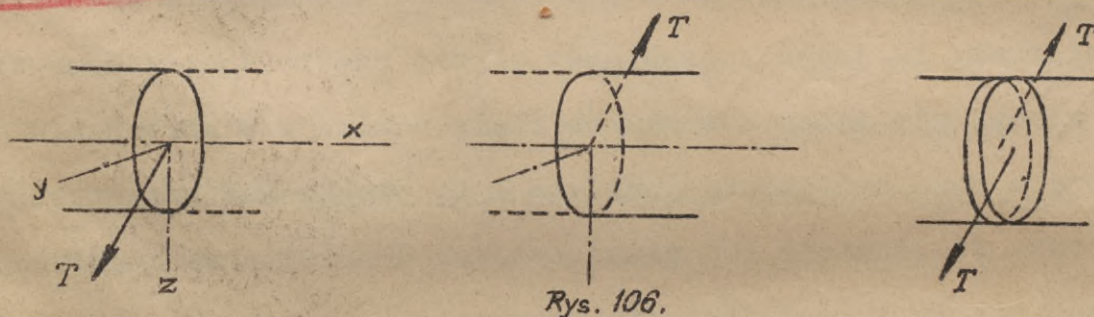
3. Na szczęście kalkulacja, podana w ust. 1., nie ma zawsze praktycznego znaczenia. Jest ona niezmiernie doniosła wtedy, gdy kształt ciała zasługuje na pewną specjalną uwagę. Nie wchodząc bliżej w rozmaite technicznie ważne kształty konstrukcyjne obierzemy tu jeden z szablonów bardzo często spotykanych - tzw. pręt. Mowa jest o nim wtedy, gdy jeden z wymiarów ciała dominuje w porównaniu do dwóch pozostałych. Oś pręta może być prosta i krzywa i to płaska lub przestrzenna. Wyobraźmy sobie, że taka oś istnieje ; w płaszczyznach do niej prostopadłych umieścimy stałe lub w sposób ciągly zmieniające się przekroje i to tak, by ich środki mas leżały na osi - to uzyskamy materialny pręt. Prosto oś pręta jest to miejsce geometryczne środków mas sąsiadujących przekrojów ; przekrój wykonuje<sup>my</sup> prostopadle do osi. W ten sposób ust. 2. został całkowicie uzupełniony.

4. Wypadek przedstawiony w ust. 3. ma duże znaczenie. Dla składowych omówionych na wstępie stosować tu będziemy specjalne nazwy. a) Może się zdarzyć, że działanie jednej części na drugą równowarte będzie sile  $S$ , przechodzącej przez środek masy przekroju i prostopadłej do płaszczyzny przekroju (rys. 105). W zależności od tego, którą część odrzuciliśmy, strzałka siły  $S$

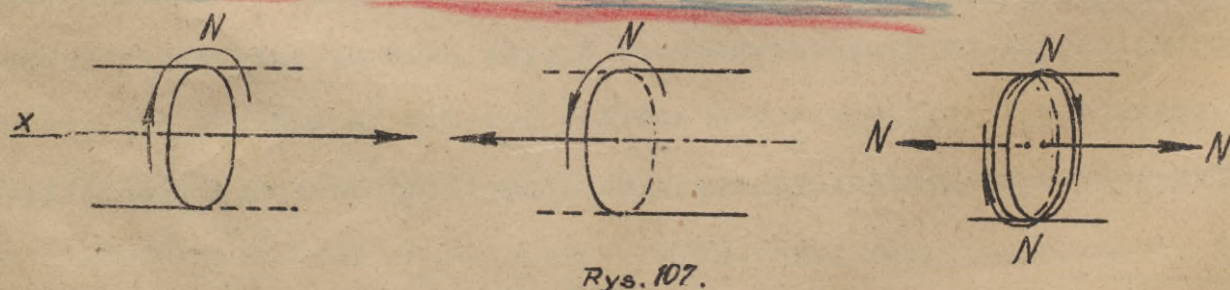


Rys. 105.

ma kierunek zaznaczony na pierwszej lub drugiej części rysunku. Poprostu gdybyśmy wyobrazili sobie, żeśmy odrzucili część na prawo i lewo położoną od przekroju - pozostawiając tylko niezmiernie cienką warstewkę w okolicy przekroju, to siły  $S$  będą się starały oddalić (o ile to u ciała sztywnego jest możliwe) płaszczyzny, ograniczające warstewkę. Siłę  $S$  nazywamy wtedy ogólnie siłą podłużną i to ciągnącą lub cisnącą w zależności od tego, czy strzałka siły skierowana jest od czy do płaszczyzny przekroju. Przypadek powyższy nazywamy rozciąganiem względnie ściskaniem. b) Jeżeli działanie wzajemne obu części objawia się siłą, przechodzącą przez środek masy przekroju i leżącą w płaszczyźnie przekroju, to siłę  $T$  (rys. 106) nazywamy poprzeczną a przypadek odnośny ścinaniem. Celem określenia siły  $T$

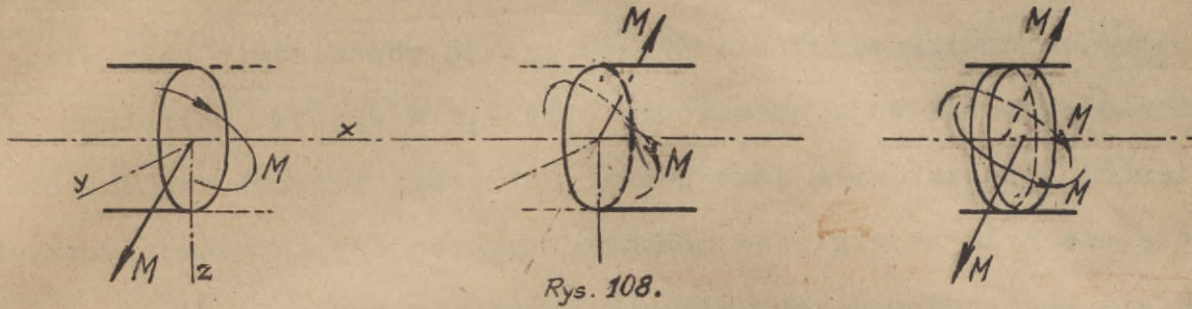


najprościej jest podać jej składowe  $T_y$  i  $T_z$  odniesione do osi środkowych głównych przekroju. c) Jeśli działanie części układu redukuje się do pary sił położonej w płaszczyźnie przekroju czyli do momentu, którego wektor jest prostopadły do płaszczyzny przekroju (rys. 107), wtedy wypadek ów nazywamy skręcaniem, a ów moment skręcającym  $N$ . Na rys. 107. zaznaczono



ów moment podwójnie jako wektor, a nadto łukiem ze strzałką. d) Gdy wreszcie redukcja sił odciętej części prowadzi do pary sił, leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny przekroju, której wektor-moment zatem leży w płaszczyźnie przekroju, to moment ów nazywamy zginającym, a wypadek omawiany

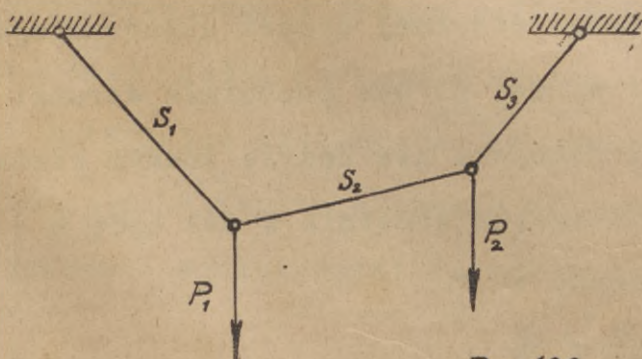
z g i n a n i e m . Położenie momentu  $M$  określamy najprościej jego składowymi w kierunkach osi głównych przekroju. Na rys.108. zaznaczono moment  $M$  dwojako.



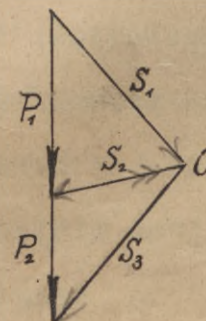
Rys. 108.

5. Wpływy przedstawione w ust.4.mogą się zdarzyć z osobna lub też w rozmaitych kombinacjach.Najogólniej może się układ wewnętrzny zredukować do sześciu składowych  $S$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ . Wielkości mogą być przytem stałe tj.nie zależne od współrzędnych  $x$  lub też co ma częściej miejsce, zmieniać się i to w sposób ciągły lub nieciągły.W najbliższych ustępach przejdziemy kilka technicznie ważnych zagadnień.

6. W pierwszym rzędzie na uwagę zasługuje taki układ, w którego pewnych skończonych częściach wielkości wewnętrzne są stałe.Ma to miejsce w układach złożonych z prętów przegibnie ze sobą połączonych i obciążonych właśnie w miejscach połączeń. Układ złożony z  $p$  takich prętów ma  $p + 2$  stopni swobody ; jeśli początek i koniec takiego łańcucha zostanie ustalony,to pozostaje układowi  $(p + 2) - 2 \cdot 2 = p - 2$  stopni swobody. By przeto układ ostatecznie scharakteryzowany był sztywny musiałoby być  $p = 2$ . Jest to znany już nam układ trójprzegubowy.Dla  $p > 2$  układ taki może pełnić funkcje celowe o ile pręty są rozciągane (rys.109); przy odwrotnem ułożeniu układu pręty będą ściskane i dana postać równowagi jest chwiejną.Odnosnie do wypadku, przedstawionego na rys.109. można zauważyć następujące :



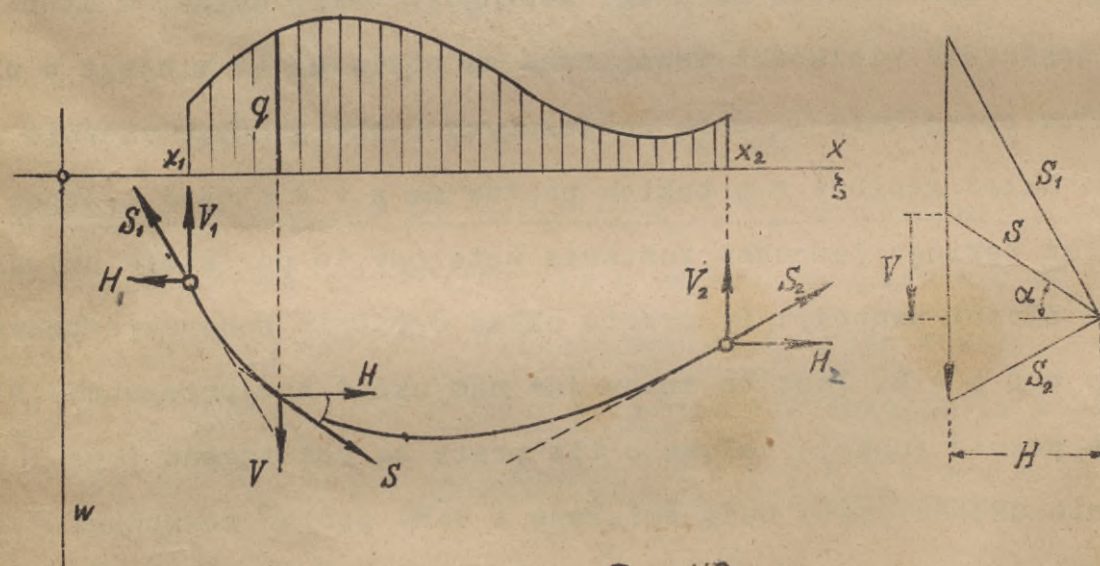
Rys. 109.



jące : Stosunkowo proste zagadnienie mamy do rozwiązania wtedy,gdy dana jest postać równowagi układu,proste siły rozciągających układ w węzłach i wreszcie jeden warunek

dotyczący wielkości jednej siły szczególnej (napięcie w jednym, siła w jednym węźle, suma wszystkich sił itp.). Wtedy napięcia  $S_i$  prętów wieszara są bokami wieloboku sznurowego, zatem ich wielkości przedstawiają odpowiednie boki wieloboku sił. Tenże sam wielobok sił daje niewiadome siły  $P_i$ . W wypadku odwrotnym tj. gdy dane są obciążenia, a poszukiwaną jest postać równowagi więzara zagadnienie silnie komplikuje się nie tyle ze względów mechanicznych, co czysto geometrycznych. Rozwiązanie przykładu tego rodzaju zamieścimy w rozdziale ostatnim.

7. Tutaj zajmiemy się tylko specjalnym przypadkiem omawianego zagadnienia, mianowicie znajdziemy postaci równowagi łańcucha, w którym ilość ogniw rośnie nieograniczenie, a długość każdego z ogniw jest nieograniczenie mała. Innymi słowy mamy na myśli wiotką nić obciążoną w sposób przedewszystkiem ciągłym obciążeniem pionowym. W tym wypadku wielobok sznurowy przejdzie na krzywą sznurową; pytamy zatem o równanie tej krzywej. Niech obciążeniem zmiennym według pozic-



Rys. 110.

mej współrzędnej  $x$  będzie  $q = q(x)$ . Każdy z punktów zawieszenia dostarcza dwóch niewiadomych tj.  $V_1$  i  $H_1$  tudzież  $V_2$  i  $H_2$ . Z warunku równowagi sił dla osi  $x$  znajdujemy  $H_1 = H_2 = H$

(rys. 110). Wogóle przy rozpatrzeniu równowagi dowolnej części układu znajdujemy, że składowa pozioma napięcia jest stałą i wynosi  $H$ . Dwa pozostałe warunki równowagi nie wystarczają do znalezienia  $V_1, V_2$  i  $H$ , dopóki nie będzie znanym kształt krzywej sznurowej. Niech rzędne tej ostatniej mierzone dodatnio w dół będą  $w$  - to nachylenie stycznej w dowolnym miejscu  $x$  mierzy :

$$\text{tang } \alpha = \frac{dw}{dx} = \frac{V}{H}$$

Z warunku sił odciętej przekrojem  $x$  części znajdziemy :

$$V = V_1 - \int_{x_1}^x q(\xi) d\xi$$

W zależności od sposobu obciążenia i warunków brzegowych będzie zatem  $V$  wielkością każdorazowo inną. Konkretne znaczenie matematyczne ma natomiast  $\frac{dV}{dx}$ ; różniczkując według górnej granicy znajdujemy mianowicie :

$$\frac{dV}{dx} = -q(x)$$

Różniczkując  $\tan \alpha$  według  $x$  i uwzględniając powyższe znajdziemy ostatecznie :

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{q(x)}{H},$$

jako równanie różniczkowe krzywej sznurowej. Celem rozwiązania zadania szczególnego muszą być zawsze dane trzy warunki brzegowe ; dwa z nich określają stałe całkowania, trzeci posłuży do ustalenia brakującego równania dla  $V_1$ ,  $V_2$  i  $H$ . Jeśli poza obciążeniem rozłożonym  $q(x)$  zdarzy się w pewnym przekroju ciężar skupiony  $P$  to w miejscu tem lewostronna i prawostronna pochodna będą się różnić o :

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_l - \left(\frac{dw}{dx}\right)_p = \frac{P}{H}$$

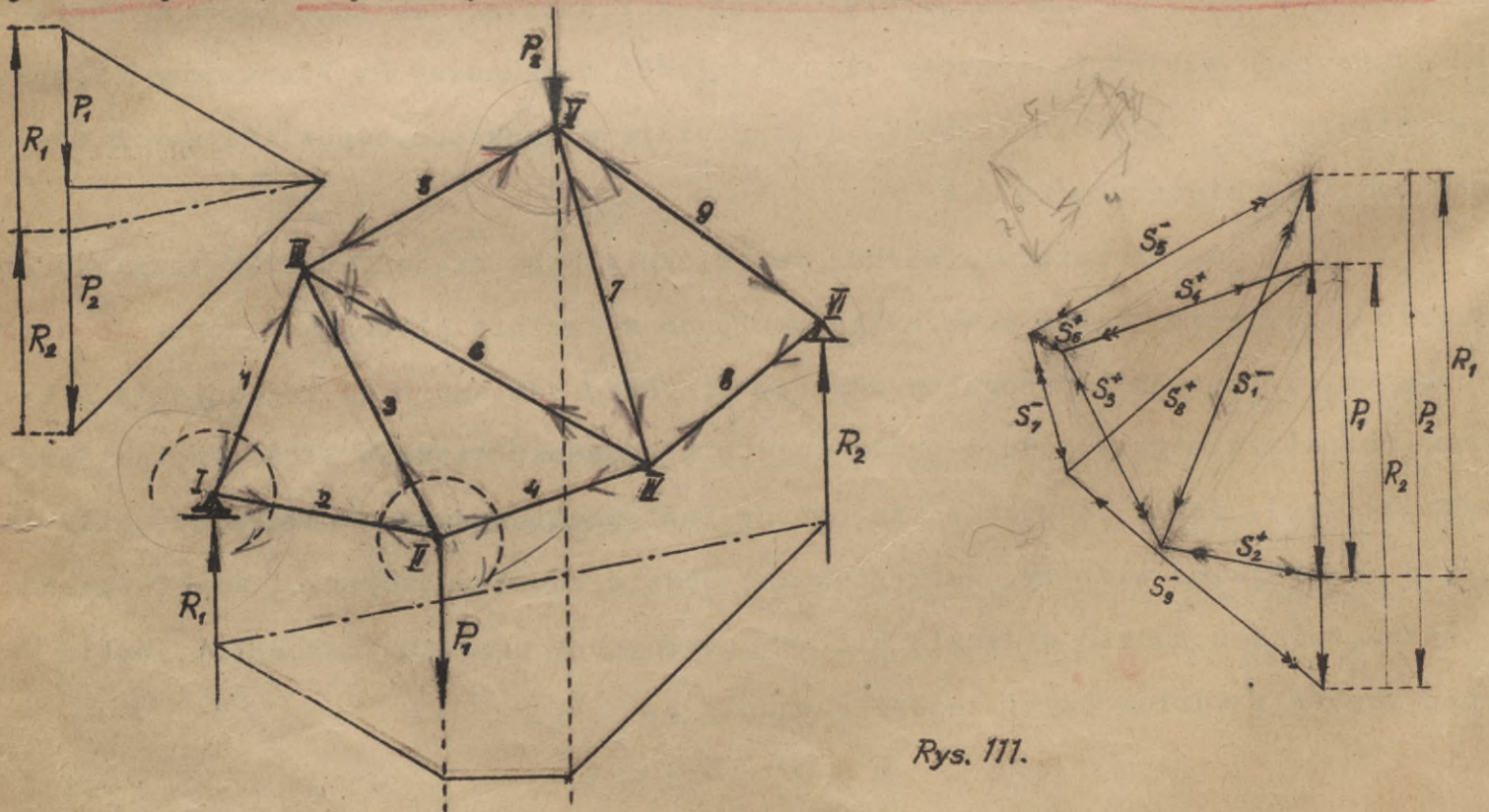
Ostatnie wynika z rozważania równowagi sił dla osi w najbliższym sąsiedztwie obciążenia  $P$  na lewo i prawo. Wykreślnie znajdujemy krzywą sznurową dzielącą obciążenie na części przynależne małym długościom  $x$  i kreśląc dla tego rodzaju obciążeń skupionych wielobok sznurowy dla odległości biegunowej  $H$ . Poszukiwana krzywa jest styczną do wieloboku łamanego a mianowicie w punktach, odpowiadających miejscom podziału ciężaru  $q(x)$ .

8. Niezmiernie ważnym technicznie jest zagadnienie kratownic. W wykładzie niniejszym będzie mowa o kratownicach wyłącznie płaskich. Stanowi je układ  $p$  prętów, łączących w przegubów-węzłów, przyczem odmiennie od zagadnienia niedawno rozpatrywanego w jednym węźle może się schodzić większa ilość prętów (przynajmniej dwa). Jeśli podparcie kratownicy jest izostatyczne, to uważając węzły za punkty materialne widzimy, że kratownica będzie również sztywną i izostatyczną; tj. wyznaczalną z punktu widzenia sił wewnętrznych w prętach kratownicy, jeśli ilość prętów i węzłów czyni zadość równaniu :

$$p = 2w - 3.$$

W dalszym ciągu założymy dodatkowo, że obciążenia stanowiąc będą siły skupione, umieszczone wyłącznie w węzłach. W takich warunkach pręty będą wyłącznie tylko ściskane lub rozciągane, przyczem w każdym pręcie na całej jego długości siła podłużna będzie stałą. Uprzedzając wypadki możemy od razu dodać, że w wypadku obciążenia międzywęzłowego będą pręty dodatkowo zginane i ścinane; uwzględnienie tych wpływów nie następuje żadnych trudności. Z metod służących do znalezienia sił wewnętrznych w prętach kratownicy należy wspomnieć o sposobach wykreslnych i rachunkowych. Zarówno jedne jak i drugie rozwiązują zagadnienie w dwojaki sposób - przez rozważanie równowagi wyodrębnionego węzła (metoda węzłowa) tudzież przez rozważanie równowagi dowolnie wydzielonej części kratownicy (metoda przecięć). Poza temi istnieją metody specjalne jak metoda zamiary pręta, metoda kinematyczna itp.

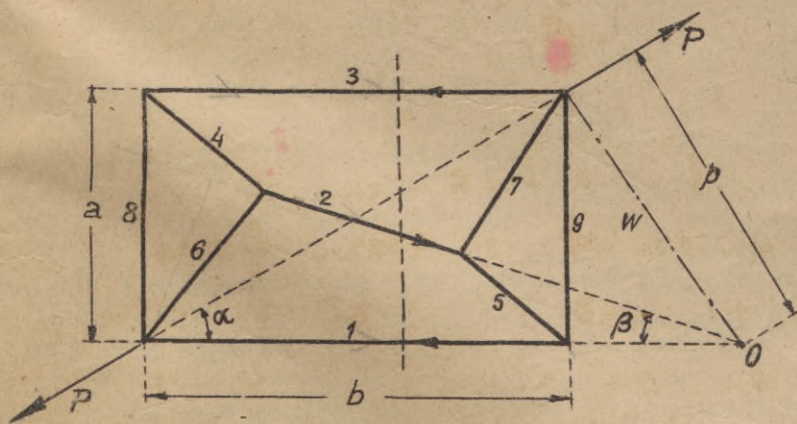
9. Najczęstsze zastosowanie ma metoda (węzłów) Cremona'y; jest to sposób wykreslny, w którym dla każdego węzła (tj. układu zbieżnego sił) kreśli się wielobok zamknięty sił, przyczem wieloboki kombinuje się tak, by każda z sił wewnętrznych figurowała tylko raz w konstrukcji wykreslnej. Aby tak mogło wogóle być należy: a) siły wewnętrzne kratownicy nanosić w takim porządku, w jakim znaj



Rys. 111.

dujemy je posuwając się po obwodzie kratownicy, b) siły każdego węzła kreślić w przyjętym pod a) obiegu. Siły znalezione zastępują działanie części odrzuconych na wyodrębniony węzeł. Zatem siły wskazujące od węzła są ciągnieniami, siły wskazujące strzałkami ku węzłowi są ciśnieniami. Na rys. 111. zaznaczono je  $S^+$  względnie  $S^-$ . Przy przechodzeniu od jednego węzła do drugiego należy oczywiście strzałki na pięć zmieniać. Zacząć można kreślenie wieloboku sił Cremona'y poczynając od węzła w którym figurują dwie niewiadome (dwa pręty). Rys. 111. zaczęto od węzła I, poczem kolejno rozwiązano węzły II, III, IV, V i VI. Przy omówionym sposobie postępowania zyskuje się pewne kontrole. I tak w węźle V figurowała tylko jedna niewiadoma  $S_9$ ; w węźle VI nie znaleziono żadnej niewiadomej. Każdemu węzłowi odpowiada odpowiedni wielobok sił; punktowi wieloboku sił, w którym schodzi się kilka sił odpowiada odpowiedni wielobok w planie kratownicy. Dla uniknięcia nieporozumień dodajemy, że po znalezieniu reakcyj  $R_1$  i  $R_2$  naniesiono je łącznie z siłami  $P_1$  i  $P_2$  według reguły a) w skali dwa razy większej od stosowanej poprzednio.

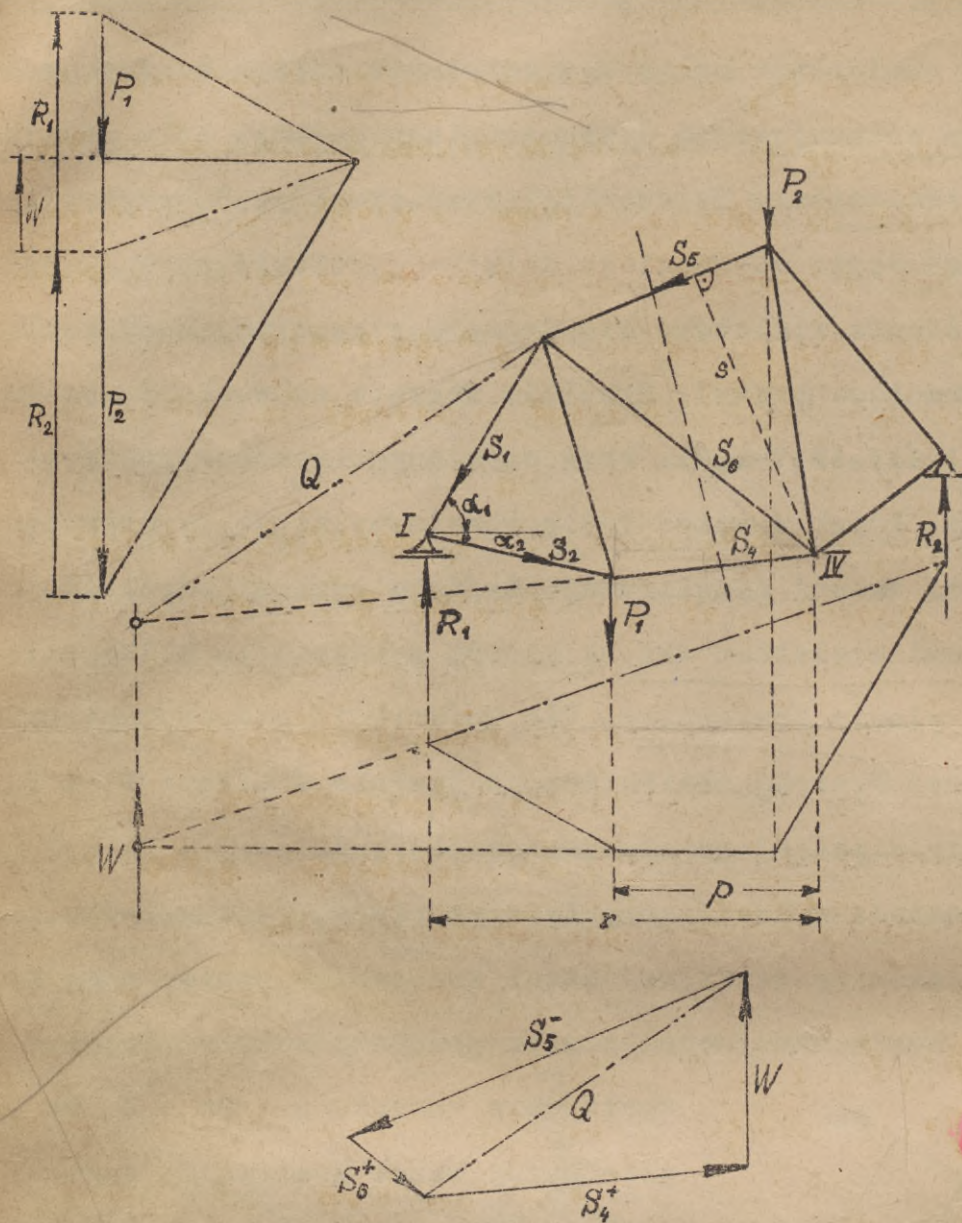
10. Omówiona metoda wykreslna ma tę niekorzyść, że w wypadku, gdy chodzi tylko o siły kilku prętów np. środkowej części kratownicy musimy mimo tego zacząć wielobok Cremona'y od węzła skrajnego. Poza to może się zdarzyć, że mimo



Rys. 112.

spełnienia warunku  $p = 2w - 3$  będzie każdy węzeł kratownicy zawierał trzy niewiadome jak np. na rysunku 112. W omawianych wypadkach z korzyścią posługujemy się metodą (przecięć) Culmann'a. Kratownicę przecinamy przez trzy pręty nie schodzące się w jednym węźle; osie

tych prętów są prostymi trzech niewiadomych sił. Siłę czwartą zupełnie określoną przedstawia wypadkowa sił położonych po odciętej stronie kratownicy. Rozwiązanie tego rodzaju zagadnienia zostało już podane. Dla przypomnienia zastosowano metodę Culmann'a do znalezienia sił  $S_4$ ,  $S_5$ ,  $S_6$  kratownicy, podanej na rys. 113. Wypadkowa wynosi  $W = R_1 - P_1$ ; jej położenie określa punkt przecięcia się odnośnych



Rys. 113.

boków wieloboku sznurowego. Siły  $W, S_4, S_5$  i  $S_6$  podzielono na dwie grupy, mianowicie  $W$  i  $S_4$  tudzież  $S_5$  i  $S_6$ . Częśćowa wypadkowa wynosi  $Q$ . Przy wyznaczaniu sił wewnętrznych zwiększono skalę sił dwukrotnie.

11. Metoda analityczna węzłowa rozpatruje równowagę każdego węzła tj. równowagę zbieżnego układu sił. W tym celu w każdym z badanych węzłów przyjmuje się dla napięć  $S_i$  dowolne strzałki, przyczem wypisuje warunki równowagi po dwa dla każdego węzła. Dla  $w$  węzłów otrzymujemy  $2w$  równań; trzy z nich będą jednak zależne od pozostałych z tytułu równowagi całego układu;

innymi słowy trzy równania odpadają dla wyznaczenia reakcyj podporowyci; w konsekwencji przeto niewiadomych sił może być  $2w - 3$ , tj. tyle ile wymaganych prętów dla zapewnienia sztywności układu. Po odpowiednim obiorze kolejnym węzłów (tj. ider tycznie jak w ust. 9.) każda dwójka równań zawierać będzie tylko dwie niewiadome, które przeto będzie można odrazu wyznaczyć. Rezultaty dodatnie potwierdzają obrany kierunek strzałek. Dla węzła I. kratownicy z rys. 113. równania równowagi brzmią:  $S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2 = 0, S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 = R_1$ . Przy przejściu do węzła następnego strzałki sił należy odwrócić. Metoda naszkicowana jakkolwiek najogólniejsza rzadko bywa stosowana.

Wielkość: momentem składowym

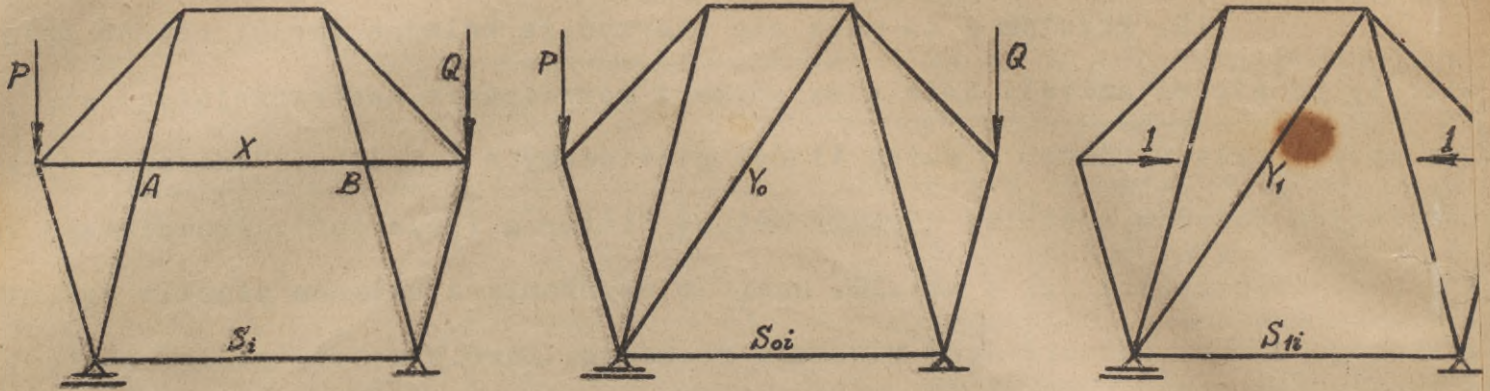
$q = \text{moment}$   $N$   $\text{nie}$   $\text{momentem}$   $I(\theta' - \theta) = N$

12. Ponadto i tu może się zdarzyć, że kolejne dwójki równań będą

awierały po więcej aniżeli dwie niewiadome ; rozwiązanie następującego się  $N = mV_s$   
ten sposób układu równań o dużej ilości niewiadomych komplikuje znacznie sprawę.  
powyższych powodów chętniej używamy metody Ritter'a (przecięć). Przeciawamy kra  
wnicę na dwie części jak w ust.10. mamy do czynienia z układem płaskim ogólnym,  $V_s = 0$   
la którego możemy ustawić trzy równania równowagi. Dowcip metody polega na tem, że  
osujemy trzy razy warunek momentów obierając przytem środek momentów tak, by sta  
e w równaniu figurowała tylko jedna niewiadoma ; najwidoczniej należy w tym celu  
rodek momentów przyjmować w punkcie przecięcia się prostych dwóch pozostałych  
y niewiadomych. Np. celem znalezienia siły wewnętrznej pręta 5 kratownicy, przed  
awionej na rys.113., obierzemy środek momentów w węźle IV. Odnosny warunek rów  
owagi brzmi :  $S_5 s + P_1 p - R_1 r = 0$ . Jeśli w szczególnym wypadku okaże się, że  
la obranego przekroju kratownicy dwa pręty są równoległe, to rezygnujemy z wa  
runku momentów wprowadzając zamiast tego warunek sił dla kierunku przedpadałego  
owych równoległych prętów. Uzyskane równanie zawierać będzie również tylko jed  
n niewiadomą.

13. Z warunków równowagi wogóle, a w szczególności z rozważań

at.11 i 12 wynika, że siły wewnętrzne są linjowymi funkcjami obciążeń. Pozwala  
na zastosowanie zasady superpozycji tj. na dodawanie algebraiczne sił wewnątrz-  
nych, wywołanych kolejnymi niezależnymi obciążeniami kratownicy. Szczególnie zasto-  
owanie ma to w tzw. metodzie zamiany pręta ; metodę tę stosujemy tam, gdzie wszel  
e z podanych <sup>metod</sup> zawodzą. Rozpatrzmy ją na przykładzie podanym na rys.114. Kratowni  
tu przedstawiona ma  $w = 6$  węzłów (A i B nie są węzłami) i  $p = 9$  prętów ; związek  
 $p = 2w - 3$  jest tu zatem spełnione. Każdy z węzłów daje jednak trzy niewiadome ;  
przekroje, dzielące kratownicę na dwie części dają albo trzy siły zbieżne albo rów-  
noległe. Podane metody zawodzą. Oznaczmy siły wewnętrzne wszystkich prętów przez  
z wyjątkiem np. siły pręta poziomego, w którym siłą niech będzie X. Usuńmy ów  
stąpi pręt i w miejsce jego wstawmy pręt inny w dogodny sposób. Dla danego obcią-  
żenia P,Q znajdziemy siły  $S_{0i}$  ( np. metodą Cremona'y ) nadto w dodanym pręcie siłę  
X. Usuńmy obciążenie P,Q i obciążmy kratownicę siłami niemianowanymi 1,1 działają



Rys. 114.

siłami w węzłach odrzuconego pręta wzdłuż jego prostej. Wynikające stąd siły są  $Y_1$ . Gdybyśmy w miejsce 1,1 umieścili tam napięty siłą wewnętrzną  $X$  pręt czy siły zewnętrzne  $X, X$ , to wymienione napięcia wzrosną do wartości  $X \cdot S_{1i}$  i  $X \cdot Y_1$ . stosujemy zasadę superpozycji do obciążeń  $P, Q$  i  $X, X$  wtedy znajdziemy rzeczywiste siły zewnętrzne dla danej na wstępie kratownicy w postaci :

$$S_i = S_{oi} + X \cdot S_{1i} \quad \text{nadto} \quad X \cdot$$

W powyższych określeniach nie znane jest  $X$ . Lecz pręta dodatkowego w rzeczywistości nie było ; napięcie jego musi być zerem ; zatem :

$$Y = Y_0 + X \cdot Y_1 = 0$$

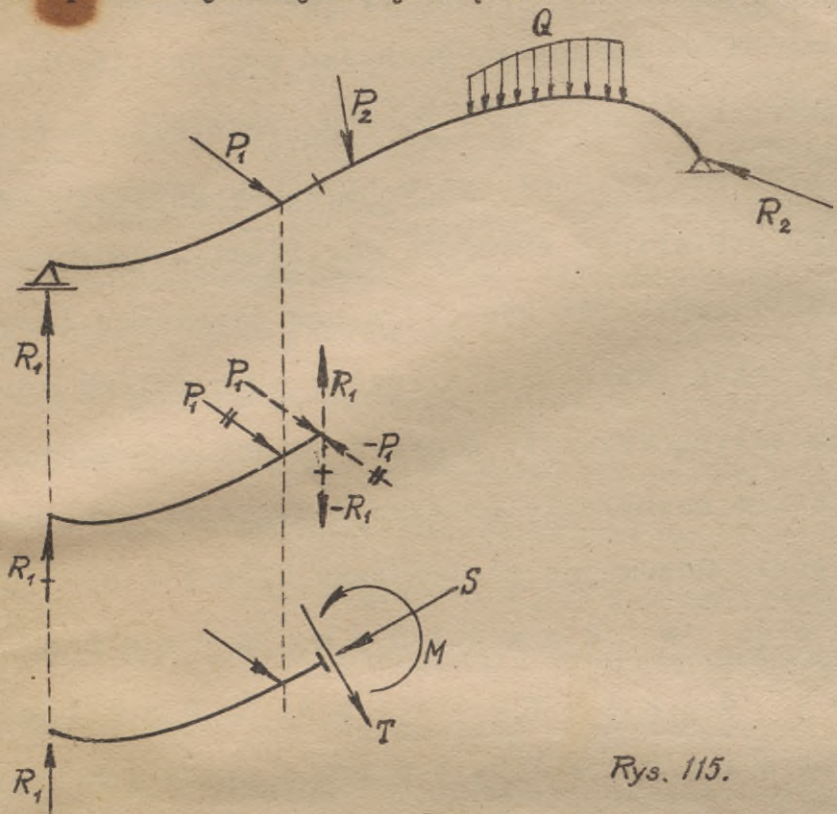
skąd można wyznaczyć  $X$ . Ostatecznie tedy mamy :

$$S_i = S_{oi} - \frac{Y_0}{Y_1} \cdot S_{1i} \quad , \quad X = - \frac{Y_0}{Y_1} \cdot$$

Wielkości  $S_{1i}$  i  $Y_1$  są niemianowane. Resumując widzimy, że do rozwiązania zagadnienia musieliśmy stosować dwa razy wielobok sił Cremona  $y$  - jeden dla znalezienia sił  $S_{oi}$  i  $Y_0$ , drugi dla sił  $S_{1i}$  i  $Y_1$ . Pomimo to ten sposób rozwiązania doprowadzi nas prędzej do celu aniżeli np. rozwiązywanie skomplikowanego układu równań.

14. Omówiwszy obszernie sprawę układu prętów prostych, obciążonych w węzłach przejdziemy do przypadku obciążenia między podporami końcowymi ta. Założymy zagadnienie płaskie, a mianowicie a) oś pręta może być dowolną krzywą byleby płaską b) obciążenie działające na pręt może być skupione lub rozłożone byleby leżało w płaszczyźnie osi pręta. Przy powyższych założeniach w dowolnym przekroju pręta będzie w przypadku ogólnym istniała siła podłużna i poprzeczna

tudzież moment zginający. Siły i pary sił będą oczywiście leżeć w płaszczyźnie zadania. Wymienione wielkości będą zmieniać swe wartości algebraicznie od przekroju do przekroju. Zajmiemy się obecnie ich obliczeniem. Obierzmy w dowolnym miejscu



Rys. 115.

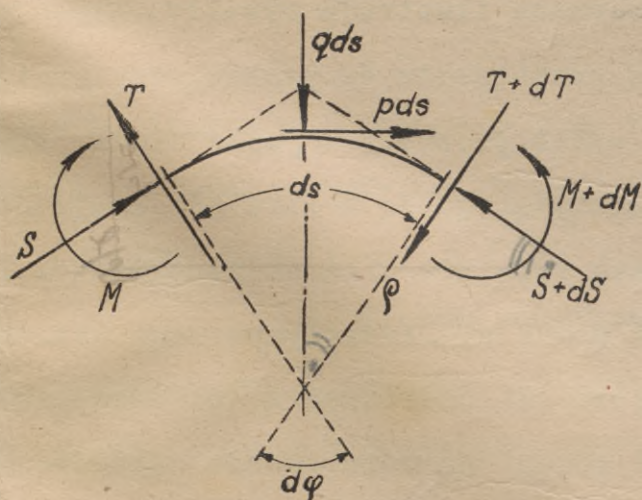
scu pręta przekrój i odrzucimy w myśli część np. prawą (rys. 115). Po lewej zostały siły  $R_1$  i  $P_1$ . Zredukujmy je do środka przekroju przyjętego tzn. dołączmy tam układ zerowy  $R_1, -R_1$  tudzież  $P_1, -P_1$ . Reakcja  $R_1$  wraz z dołączoną  $-R_1$  tworzy parę sił; podobnie parę sił tworzy obciążenie  $P_1$  i z dołączoną siłą  $-P_1$ . Obie pary

leżą w tej samej płaszczyźnie, a mianowicie płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny przekroju; ich momenty są zatem momentami zginającymi. Możemy je najwidoczniej dodać algebraicznie; momenty są wektorami swobodnymi; możemy je przeto odnieść właśnie do badanego przekroju; są one przeto momentami zginającymi w badanym przekroju. Wreszcie najwidoczniej zastępują one (częściowo) działanie części pozostawionej na odrzuconą. Odwracając im strzałkę znajdujemy działanie (częściowe) części odrzuconej na pozostałą; w ten sposób pojęto właśnie ostatni szkic rys. 115. Wartość momentu pary jest zależną od obioru przekroju; np. moment pary ( $R_1, -R_1$ ) jest liczebnie równy momentowi reakcji  $R_1$  względem środka przekroju. Wartość momentu zginającego w dowolnym miejscu pręta jest zależną i w inny sposób od położenia przekroju; w miarę przesuwania się po osi pręta przybywać będą obciążenia pozostawionej części. Resumując wszystko możemy napisać: Momentem zginającym w dowolnym przekroju pręta jest suma algebraiczna momentów wszystkich sił, położonych po jednej stronie prze-

króju ze względu na środek przekroju. Oczywiście obciążenie stanowić musi nie tylko siła, ale może nim być i moment; jest on wtedy (wyjątkowo) wektorem nieswobodnym; w definicji powyższej może być przeto mowa i o sumie algebraicznej wszystkich momentów. Wracając do rys. 115. zauważymy, że pozostały nam jeszcze do omówienia zaczepione w środku przekroju, a zatem nieswobodne siły  $R_1$  i  $P_1$ . Każdą z nich możemy rozłożyć w kierunku prostopadłym i stycznym do płaszczyzny przekroju. Pierwsze składowe są siłami podłużnymi, drugie poprzecznymi. Ze sposobu kalkulacji wynika, że zastępują one działanie (częściowe) części pozostałej na odrzuconą; przez odwrócenie strzałek otrzymujemy działanie odwrotne, zaznaczone na końcowym szkicu rys. 115. W miarę zmiany przekroju zmieniają się składowe: zmienia się bowiem nachylenie przekroju względem sił, pozatem przybywają względnie ubywają części. Resumując stwierdzamy: Siłę podłużną (poprzeczną) w dowolnym przekroju pręta stanowi suma algebraiczna odnośnych składowych wszystkich sił, położonych po jednej stronie przekroju. Słowo "odnośny" zostało wyżej wyjaśnione. Jeśli obciążenie stanowi moment - to nie wpływa on wogóle na wartość siły podłużnej względnie poprzecznej, albowiem suma sił pary sił (tj. momentu) jest równą zeru. Przy założeniach a) i b) moment zginający  $M$ , siła podłużna  $S$  i poprzeczna  $T$  zastępują (całkowicie) działanie jednej części na drugą. Odwrócenie strzałki  $M, S$  i  $T$  w sensie wyżej dwukrotnie akcentowanym nie jest identyczne ze zmianą znaku tych wielkości; są to bowiem wielkości wewnętrzne - dwukierunkowe. Wyjaśnia tę sprawę dostatecznie ust. 4. z rys. 105., 106, 107 i 108. Np. zmiana strzałki dla siły  $S$  w rysunku 105 oznacza tylko rozpatrywanie działania tej lub innej części pręta. Natomiast zmiana znaku siły  $S$  pociągałaby za sobą zmianę ciągnięcia na ciśnienie lub też na odwrót. W związku z powyższym nasuwa się pewna trudność w zdefiniowaniu znaków wykazanych wielkości  $M, S$  i  $T$ . Najmniejszą trudność stanowi znakowanie siły  $S$ ; można się umówić, że ciągnięcie otrzyma znak dodatni, a ciśnienie ujemny. Odnośnie do wielkości  $M$  i  $T$  najprościej sprawę wyjaśnia przypadek pręta prostego, obciążonego siłą

mi prostopadkami do osi. Pomyślmy sobie tę oś poziomo. Zrobimy następującą umowę co do znaku momentu  $M$  : Niezależnie od tego czy moment zginający przekroju wyznaczamy przy pomocy sił lewej czy prawej części jest  $M < 0$  od sił skierowanych ku górze, względnie jest  $M > 0$  od sił skierowanych w dół. Natomiast umowa co do znaku siły  $T$  brzmi : Zależnie od tego czy siłę poprzeczną w przekroju wyznaczamy przy pomocy sił lewej czy też prawej części jest w pierwszym wypadku  $T > 0$  od sił skierowanych ku górze, zaś  $T < 0$  od sił skierowanych w dół - natomiast w drugim odwrotnie. Pamiętając o powyższym łatwo będzie przejść do wypadku sił względem osi nachylonych pod kątem ostrym czy też do krzywej osi pręta. Wielkości  $M$ ,  $S$  i  $T$  można przedstawić wykreślnie przyjmując za oś odciętych oś pręta. Powstałe w ten sposób diagramy mają duże znaczenie w technice.

15. Wielkości  $M$ ,  $S$  i  $T$  zmieniają się wraz ze zmianą położenia przekroju. Chodzi nam o zbadanie tych zmian, a w szczególności o znalezienie ewentualnych wzajemnych między nimi zależności. W tym celu przyjmijmy dwa sąsiadujące przekroje tj. oddalone wzajemnie o element długości osi  $ds$ . Najwidoczniej będziemy zmuszeni założyć, że  $M$ ,  $S$  i  $T$  są względem  $s$  różniczkowalne. W tym celu założymy że obciążenie osi pręta zmienia<sup>się</sup> w sposób ciągły ; składową normalną natężenia



Rys. 116.

oznaczmy przez  $q$ , styczną przez  $p$ . Na rys. 116. przedstawiono sytuację.  $M$ ,  $S$  i  $T$  są wielkościami wewnętrznymi przekroju  $s$  ; w przekroju  $s + ds$  wielkości te zmieniły się o odpowiednie różniczki ; stało się to dzięki krzywiznie  $\frac{1}{\rho}$  pręta i przyrostowi obciążenia na długości  $ds = \rho d\varphi$  o wielkości  $qds$  i  $pds$ . Dla wypisanego układu możemy napisać trzy warunki równowagi - warunek momentów np. względem punktu przecięcia

się kierunków sił podłużnych, warunek sił dla prostopadłej do symetralnej kąta  $d\varphi$  i wreszcie warunek sił dla symetralnej kąta  $d\varphi$ . Zwążywszy, że  $\cos \frac{d\varphi}{2} \rightarrow 1$ ,  $\sin \frac{d\varphi}{2} \rightarrow \frac{d\varphi}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{d\varphi}{2} \rightarrow \frac{d\varphi}{2}$ , możemy po kolei napisać :

$$M + dM - M - (T + dT) \varphi \frac{d\varphi}{2} - T \cdot \varphi \cdot \frac{d\varphi}{2} = 0$$

$$S + dS - S + (T + dT) \frac{d\varphi}{2} + T \cdot \frac{d\varphi}{2} - pds = 0$$

$$(S + dS) \cdot \frac{d\varphi}{2} + S \frac{d\varphi}{2} - (T + dT) + T - qds = 0$$

Stąd po uzasadnionych pominięciach i podstawieniu  $\varphi d\varphi = ds$  mamy :

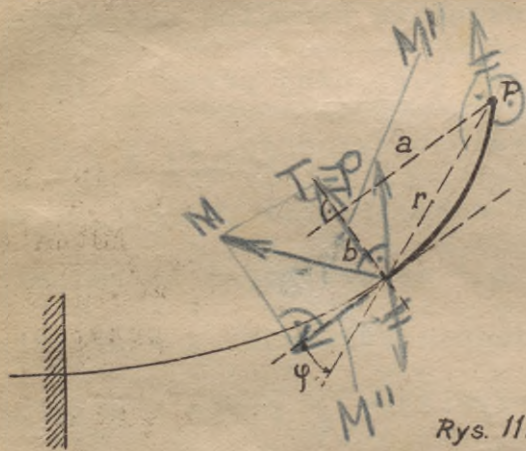
$$T = + \frac{dM}{ds}, \quad p = + \frac{dS}{ds} + \frac{T}{\varphi}, \quad q = + \frac{S}{\varphi} - \frac{dT}{ds}$$

W szczególnym wypadku, gdy oś pręta jest prostą jest  $\frac{1}{\varphi} \rightarrow 0$ , a wtedy :

$$T = \frac{dM}{dx}, \quad p = \frac{dS}{dx}, \quad q = - \frac{dT}{dx} = - \frac{d^2M}{dx^2}$$

Z podanych relacji wynika cały szereg różnych sprawdzeń ; okazuje się bowiem, że podane przez <sup>nas</sup> definicje dla M, S i T są wzajemnie między sobą zależne. W szczególności np. gdy M osiąga w pewnym przekroju względne ekstremum, to siła poprzeczna w tym przekroju znika. Wypisane związki są ważne i w wypadku obciążenia pręta siłami skupionymi ; wtedy jednak należy zważać na prawostronne i lewostronne wartości funkcji i ich pochodnych w przekrojach obciążonych.

16. Przypadek ogólniejszy od omówionego w ustępach 14. i 15. można sobie wyobrazić następująco : Oś pręta jest krzywą płaską lecz obciążenia nie leżą w płaszczyźnie osi pręta. Wtedy możemy obciążenia rozłożyć w kierunku prostopadłym i stycznym do owej płaszczyzny i oddzielnie zająć się obu zagadnieniami składowymi



Rys. 117.

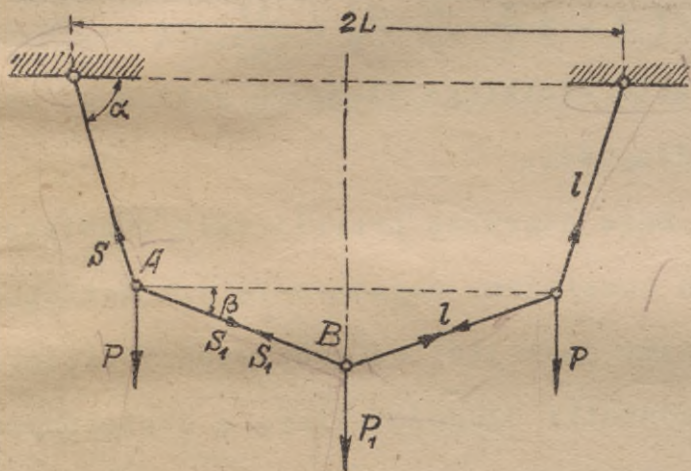
Część druga właśnie została już rozpatrzona, część pierwszą ilustruje rys. 117. Niech obciążenie prostopadłe do płaszczyzny pręta stanowi - dla prostoty - jeden ciężar skupiony P. Redukując go do środka przekroju otrzymamy w tym ostatnim siłę poprzeczną  $T = P$  i moment  $M = P \cdot r$ . Płaszczyzna tego ostatniego nie jest ani prostopadłą ani równoległą

do płaszczyzny przekroju. Rozłożymy przeto ów moment na odpowiednie składowe, a mianowicie :  $M' = M \cos \varphi = P r \cos \varphi$  i  $M'' = M \sin \varphi = P r \sin \varphi$  ;  $M'$  jest momentem zginającym,  $M''$  jest momentem najwidoczniej skręcającym. Jest rzeczą wygodniejszą sprawę postawić nieco inaczej : Zauważmy, że jest  $r \cos \varphi = a$ ,  $r \sin \varphi = b$  lub inaczej  $M' = Pa$ ,  $M'' = Pb$ . Zamiast tedy rozkładać moment M jest prościej rozłożyć ramię

momentu  $r$  na części prostopadłą  $a$  i styczną  $b$  do płaszczyzny przekroju. Nazywamy krótko  $a$  ramieniem zginającym,  $b$  ramieniem skręcającym.

17. Rozwiązawszy zagadnienie typu wyżej podanego nie trudno będzie przejść do wypadku najogólniejszego, w którym oś pręta jest krzywą przestrzenną. Obciążenia nie muszą przecinać się z osią; mogą one działać na oś za pośrednictwem prętów sztywnie z osią połączonych. W ostatnim wypadku oś pręta jest obciążoną siłami i momentami; powyższe wynika z redukcji sił do osi pręta.

Przykłady ćwiczeń.



Rys. 118.

1. Wieszar złożony z czterech równych prętów obciążono symetrycznie jak na rys. 118. Wyznaczyć kąty równowagi  $\alpha$  i  $\beta$ .

Odp. : Dla węzła A można napisać dwa warunki równowagi, a to :

$$S \cos \alpha - S_1 \cos \beta = 0$$

$$S \sin \alpha - S_1 \sin \beta - P = 0$$

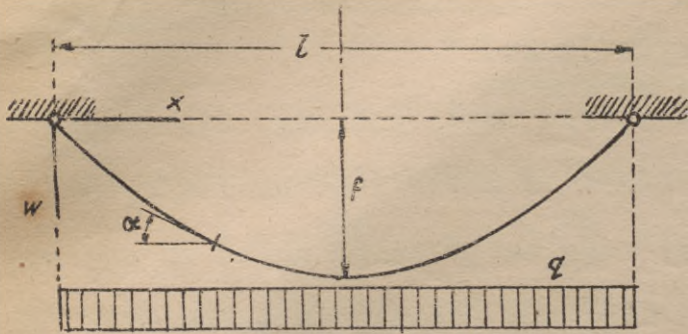
Dla węzła B jedyny z powodu symetrii warunek równowagi brzmi :

$$2S_1 \sin \beta - P_1 = 0$$

Rugując z otrzymanych równań  $S$  i  $S_1$  znajdziemy związek :  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{2P + P_1}{P_1}$  jako pierwsze równanie między  $\alpha$  i  $\beta$ . Drugiego dostarcza związek czysto geometryczny :  $L = l \cdot (\cos \alpha + \cos \beta)$ .

2. Wiotka nie obciążona jest ciężarem równomiernie rozłożonym wzdłuż rozpiętości  $l$ . Punkty zawieszenia leżą w równej wysokości; największy zwis wynosi  $f$ . Obliczyć napięcia nici  $S$  w dowolnym miejscu.

Odp. : Przyjmijmy układ  $(x, w)$  jak na rys. 119., to warunki brzegowe brzmią : a)  $x = 0, w = 0$ , b)  $x = l, w = 0$ , c)  $w_{\max} = f$ . Równanie różniczkowe krzywej sznurowej brzmi :  $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{q}{H}$ . W badanym wypadku jest  $q = \text{const.}$ , zatem całki podanego równania brzmią :



Rys. 119.

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{q}{H}x + C_1,$$

$$w = -\frac{q}{2H}x^2 + C_1x + C_2$$

Stosując dwa pierwsze warunki brzegowe znajdziemy z drugiego równania :

$$C_2 = 0, \quad C_1 = +\frac{ql}{2H}$$

Maksimum \$w\$ znajdziemy z warunku \$\frac{dw}{dx} = 0\$

tnz. w miejscu \$x = \frac{H}{q}C\_1 = \frac{l}{2}\$ ; wynosi ono

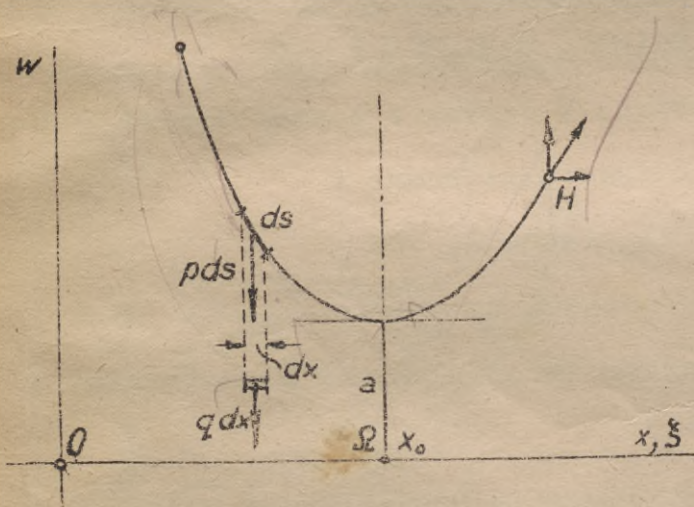
$$w_{\max} = \frac{ql^2}{8H} \text{ lub według } c) H = \frac{ql^2}{8f}. \text{ Ostatecznie}$$

zatem :  $\frac{dw}{dx} = \frac{4f}{l} \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)$ ,  $w = \frac{4f}{l}x \left(1 - \frac{x}{l}\right)$ . Napięcie w przekroju \$x\$ wynosi:

$$S = H \sec \alpha = H \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2} \cdot \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2} = \frac{ql}{2} \sqrt{\frac{l^2}{16f^2} + \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}$$

3. Znaleźć równanie kształtu wiotkiego wieszara poddanego działaniu ciężaru własnego stałego wzdłuż jego długości.

Odp. : Dla małych zwisów może pierwsze przybliżenie rozwiązania - nia stanowić ćwic.2. Przy zwisach większych rozwiążemy zagadnienie jak następują



Rys. 120.

Zbadamy jaki jest związek między ciężarem \$p\$ jednostki długości liny, a obciążeniem \$q\$ rzutu poziomego.

Najwidoczniej (rys.120) jest :  $pds = qdx$  czyli  $q = p \frac{ds}{dx} = p\sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}$ .

Dla ogólności przyjmijmy następujące warunki brzegowe : a) Niech będzie  $\frac{dw}{dx} = 0$  dla  $x = x_0$ ,

a nadto b) dla  $x = x_0$  niech będzie  $w = a = \frac{H}{p}$  ; trzeci warunek może mieć

brzmienie rozmaite ; do rozwiązania ogólnego nie jest on nam obecnie potrzebny.

Równanie różniczkowe poszukiwanej krzywej

wobec odmiennego przyjęcia osi w brzmi :  $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q}{H} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}$ . Po podstawieniu  $\frac{dw}{dx} = y$ , zatem  $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$  będziemy mieli po rozdzieleniu zmiennych :  $\frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{dx}{a}$ .

Całka tego równania brzmi :  $\log_e (y + \sqrt{1 + y^2}) = \frac{x}{a} + C_1$ . Stosując warunek brzegowy a) znajdujemy  $C_1 = -\frac{x_0}{a}$ . Wstawiając powyższe i rozwiązując równanie względem

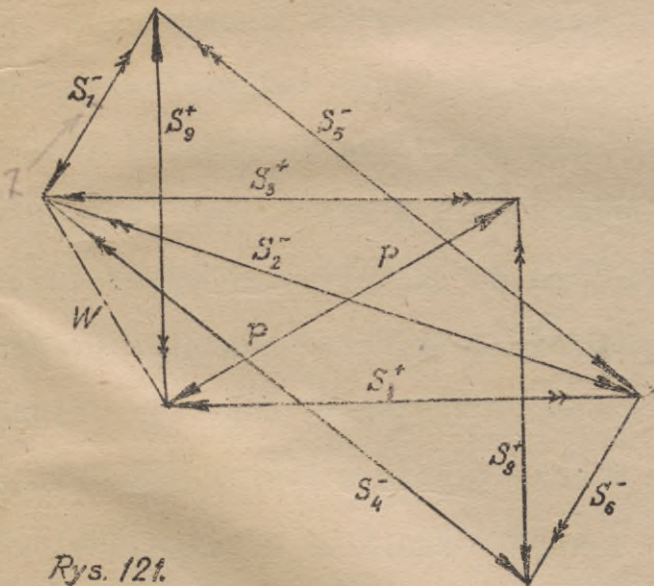
$y = \frac{dw}{dx}$  znajdziemy :  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} \cdot (e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}})$ . Całka ostatniego równania brzmi :

$y = \frac{a}{2} ( e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}} ) + C_2$ . Stosując drugi warunek brzegowy otrzymamy  $C_2 = 0$ . Ostatecznie zatem jest :

$$y = \frac{a}{2} ( e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}} )$$

gdzie  $a = \frac{H}{p}$ . Równanie uprości się, jeśli początek układu przesuniemy do punktu  $\Omega$ . Wtedy będzie  $y = \frac{a}{2} ( e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}} )$ . Równanie to jest powszechnie znane jako tzw. krzywa łańcuchowa. Rozwijając  $y$  według potęg  $\xi$  ( względnie  $x$  ) znajdziemy jako pierwsze przybliżenie krzywej łańcuchowej parabolę drugiego stopnia jak w ówcz.2. Bardzo prosto oblicza się napięcie w dowolnym miejscu omawianej krzywej. Ogólnie jest :  $S = H \sec \alpha = H \sqrt{1 + ( \frac{dw}{dx} )^2}$ . Podstawiając  $\frac{dw}{dx}$  znajdziemy pod pierwiastkiem trójmian, który da się spierwiastkować bez reszty. W ten sposób znajdziemy  $S = \frac{H \cdot y}{a} = p \cdot y$ .

4. Znaleźć wykreślić siły wewnętrzne kratownicy podanej na rysunku 112.



Rys. 121.

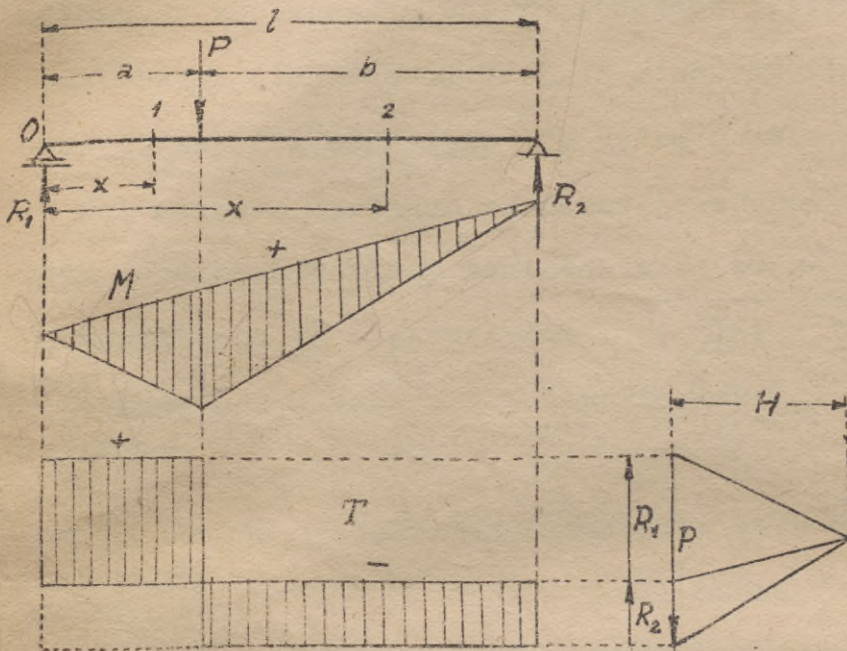
Odp. : Rozwiązanie przedstawia rys.121. Kratownicę przecięto przez pręty 1, 2 i 3; powstały w ten sposób układ podzielony na grupy  $P, S_3, W$  i  $W, S_2, S_1$  i rozwiązano zagadnienie Culmann'a. W dalszym ciągu bez trudności zastosowano metodę Cremona'y.

5. Znaleźć siły wewnętrzne prętów 1, 2 i 3 kratownicy rys.112. metodą analityczną.

Odp. : Przecinamy kratownicę przez

wymienione pręty i opatrujemy siły wewnętrzne dowolnymi strzałkami np. jak na rysunku 112. Celem znalezienia siły  $S_2$  rzutujemy układ na prostą, prostopadłą do prętów 1 i 3; znajdujemy równanie :  $S_2 \sin \beta - P \sin \alpha = 0$  stąd  $S_2 = P \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ . Celem znalezienia siły  $S_3$  stosujemy warunek momentów dla punktu O; otrzymamy  $S_3 a - P p = 0$  stąd  $S_3 = \frac{P p}{a}$ . W wykonaniu liczebnym prościej będzie napisać :  
 $P p = P \cos \alpha \cdot a + P \sin \alpha \cdot c = P ( a \cos \alpha + \frac{a \cdot \cot \beta - b}{2} \sin \alpha )$ . Ostatecznie przeto  
 $S_3 = P \cdot ( \cos \alpha + \frac{\cot \beta - b/a}{2} \sin \alpha ) = P \cdot ( \cos \alpha + \frac{\cot \beta - \cot \alpha}{2} \sin \alpha ) =$   
 $= P \frac{\sin \alpha}{2} ( \cot \alpha + \cot \beta ) = P \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \beta}$ . Oczywiście jest  $S_1 = S_3$ .

6. Podać równania i djagramy momentów zginających i sił poprzecznych dla belki obciążonej jak na rys.122.



Rys. 122.

W pierwszym jest  $M_1 = R_1 x$ ,  $T_1 = R_1$  w drugim natomiast :  
 $M_2 = R_1 x - P ( x - a )$ ,  $T_2 = R_1 - P$   
 W miejscu  $x = 0$  jest  $M_1 = 0$ , w miejscu  $x = a$  jest  $M_1 = M_2 = P \frac{ab}{l}$ , wreszcie dla  $x = l$  jest  $M_2 = 0$  ;  
 zatem djagram momentów jest ograniczony prostymi. W pierwszym interwale jest siła poprzeczna stała i równa  $\frac{Pb}{l}$ , w drugim jest również stałą i równą  $-\frac{Pa}{l}$ . W miejscu  $x = a$  jest zatem możliwa dwojaka wartość dla T. Oba djagramy można skonstruować wykreślnie. Wykres sił poprzecznych nie wymaga objaśnienia. Odnośnie do wykresu momentów przypomniemy znaczenie wieloboku sznurowego, podane w teorii wektorów. Prostopadła (prostokątna) do osi belki ) wykresu zawarta między odpowiednim bokiem a zamykającym jest proporcjonalna do poszukiwanego momentu ; współczynnikiem proporcjonalności jest odległość biegunowa H.

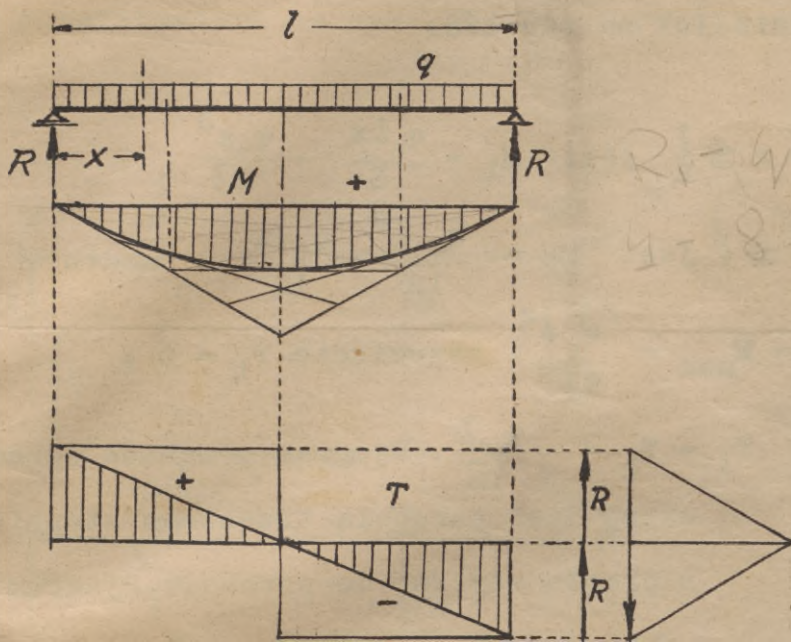
7. Podać równania i wykresy charakterystyczne dla belki jak na rys.123.

Odp. : Z powodu symetrii reakcje obie są wzajemnie równe i wynoszą po  $R = \frac{q \cdot l}{2}$ . Dowolnym przekrojem odcinamy na lewo siłę R i  $qx$ . Stosując twierdzenie o sumie momentów i momencie sumy znajdziemy :

$$M = Rx - qx \frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Pozatem jest  $T = R - qx = \frac{q \cdot l}{2} - qx$ . Djagram momentów jest parabolą drugiego stopnia o rzędnych zerowych w przekrojach  $x = 0$  i  $x = l$  tudzież maksymalnej wartości

$M = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{x}{l} = \frac{q \cdot l \cdot x}{8}$



Rys. 123.

$M = q \cdot \frac{l^2}{8}$  dla  $x = \frac{l}{2}$ . Wykres sił poprzecznych zmienia się według prostej; dla  $x = 0$  jest  $T = \frac{q \cdot l}{2}$ , dla  $x = l$  jest  $T = -\frac{q \cdot l}{2}$ ; w środku rozpiętości jest  $T = 0$ . Do konstrukcji wykreślnej dodaje się uwagi następujące: Gdybyśmy skupili obciążenie  $q$  w środku belki wykres momentów ograniczony byłby zamykającą i dwoma bokami wieloboku sznurowego, zaś wykres sił poprzecznych posiadałby stopień. Przy podziale obciążenia

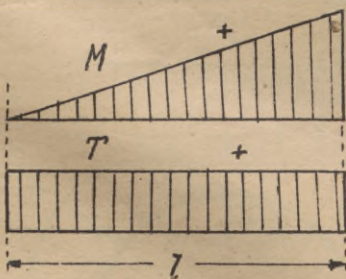
na dwie części po  $\frac{q \cdot l}{2}$  przybyłby jeden bok w wykresie momentów i jeden stopień w wykresie sił. W miarę zwiększania ilości podziałów, a zatem i zmniejszania oddzielnych obciążeń będziemy coraz to silniej zbliżali się do rzeczywistości. Najwidoczniej położenia nowych boków odpowiadają znanej konstrukcji wykreślnej paraboli 2-go stopnia; pozatem granicą schodków jest linja prosta.

$P \cdot dl = M$   
 $P \cdot x = 0$   
 $T = P$

8. Podać wykresy charakterystyczne dla wypadku przedstawionego na rys. 93.

Odp.: Wykres momentów jest trójkątem, wykres sił prostokątem jak na rys. 124. Dlaczego?

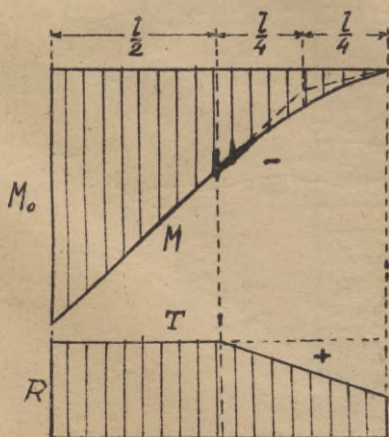
Rys. 124.



9. Podać wykresy momentów i sił dla wypadku jak na rys. 94.

Odp.: Wykres momentów zginających ograniczony jest prostą i łukiem paraboli 2-go stopnia; styczne jej zaznaczono na rysunku 125. Wykres sił poprzecznych składa się z prostokąta i trapezu. Dlaczego?

Rys. 125.



10. Zbadać zagadnienie jak na rys.126.

Odp. :

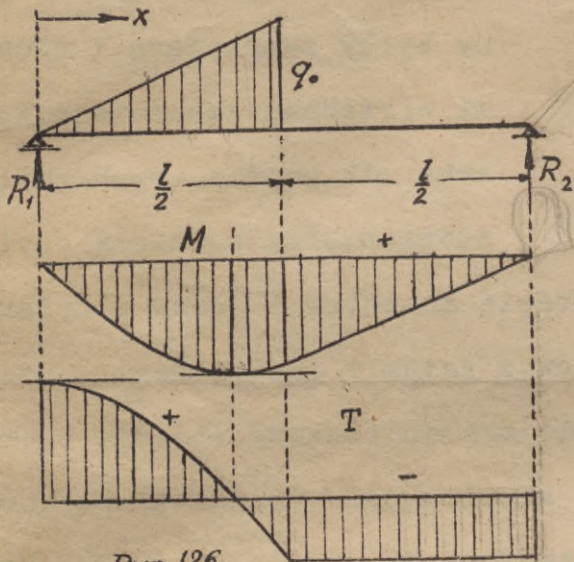
$$R_1 = \frac{q_0 l}{6}, R_2 = \frac{q_0 l}{12}; \text{ Dla } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \text{ jest } M_1 = \frac{q_0 l x}{6} - \frac{q_0 x^3}{3.l}$$

$$\text{nadto } T_1 = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 x^2}{l}; \text{ dla } \frac{l}{2} \leq x \leq l \text{ jest } M_2 = \frac{q_0 l^2}{12} - \frac{q_0 l x}{12}, \text{ nadto}$$

$$T_2 = -\frac{q_0}{12}. \text{ Dla } x = \frac{l}{\sqrt{6}} \text{ jest } M_1 = M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{6}} \text{ i oczywiście } T_1 = 0;$$

$$\text{dla } x = \frac{l}{2} \text{ jest } M_1 = M_2 = \frac{q_0 l^2}{24} \text{ nadto } T_1 = T_2 = -\frac{q_0 l}{12}.$$

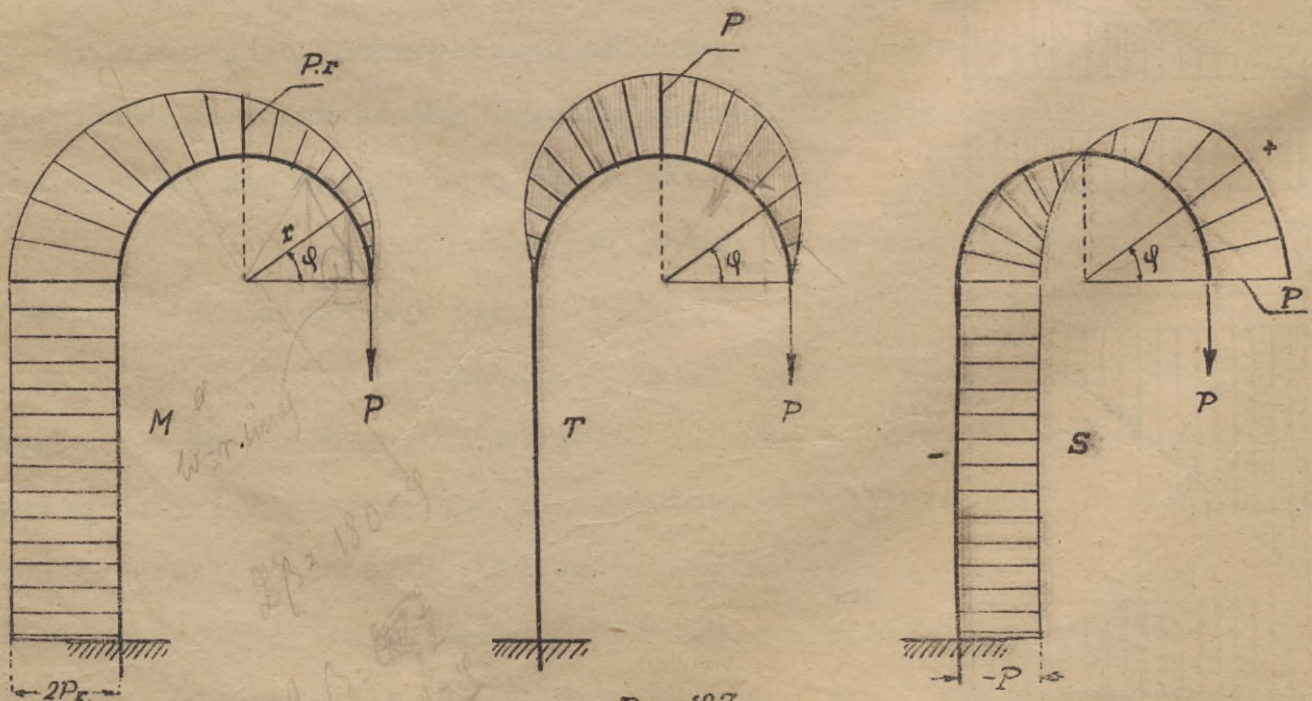
Djagram momentów ograniczony jest parabolą trzeciego stopnia i prostą styczną do paraboli. Djagram sił poprzecznych ogranicza parabola drugiego stopnia i prosta pozioma.



Rys. 126.

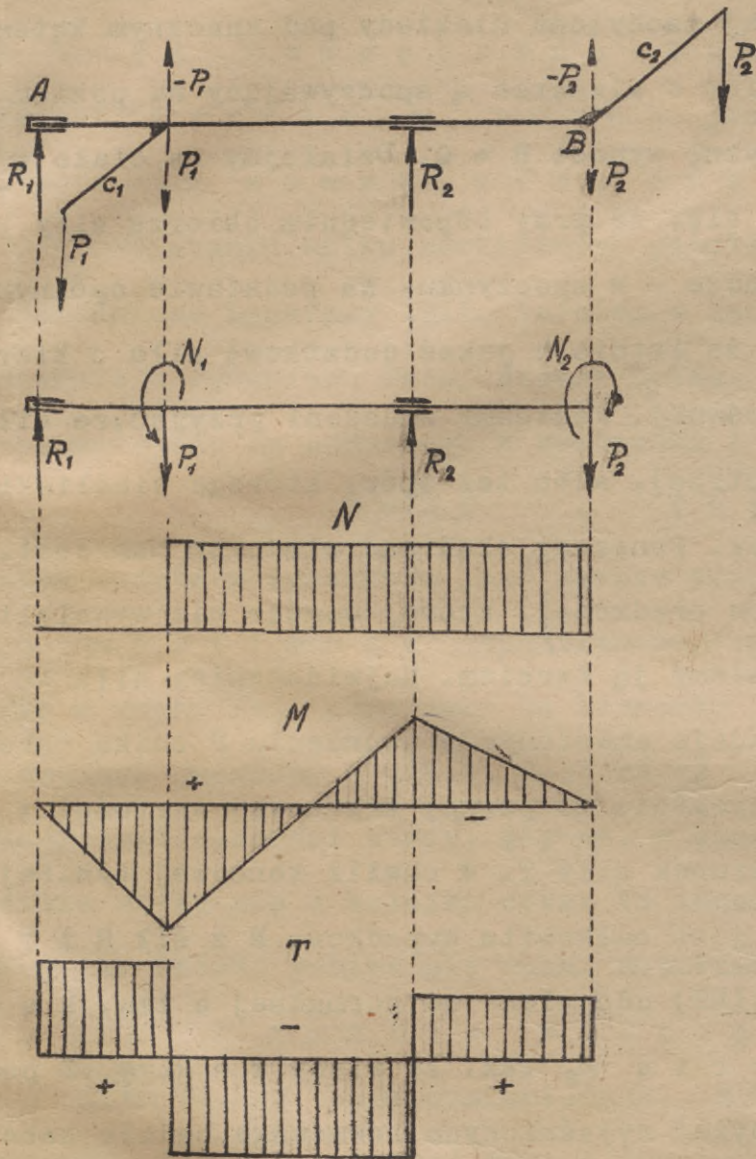
11. Podać wykresy momentów zginających sił poprzecznych i podłużnych dla układu przedstawionego na rys.127.

Odp. : W dowolnym przekroju części kołowej jest :  $M_1 = Pr (1 - \cos \varphi)$ ,  $T_1 = Pr \sin \varphi$ ,  $S_1 = Pr \cos \varphi$ ; w dowolnym zaś



Rys. 127.

przekroju części prostej :  $M_2 = 2Pr$  ,  $T_2 = 0$  ,  $S_2 = -P$  (ściskanie). Stąd wykresy przedstawione na rys.127. Osie prętów przyjęto równocześnie za osie wykresów.



Rys. 128.

12. Pręt AB obciążono siłami

$P_1$  i  $P_2$  za pośrednictwem sztywnych ramion, prostopadle zorientowanych względem osi pręta (rys.128). Podać charakterystyczne wykresy.

Odp. : Redukując siły  $P_1$  i  $P_2$  do osi pręta (jak zaznaczono na rysunku) sprowadzamy zagadnienie do wypadku, podanego w drugiej części rysunku ; oś pręta jest mianowicie w dwóch punktach obciążona siłami  $P_1$  i  $P_2$  nadto momentami  $N_1$  i  $N_2$ , przyczem te ostatnie leżą w płaszczyznach prostopadłych do osi pręta. Z warunków równowagi wyznaczyć można  $R_1$  i  $R_2$  ponadto związek  $N_1 = P_1 c_1 = P_2 c_2 = N_2$ . W związku z powyższym otrzymujemy wykres momentów skręcających  $N$ , momentów zginających  $M$  i sił poprzecznych  $T$ . Uzasadnić podane szkice !

13. Dla pręta prostego obciążonego prostopadle do osi znaleziono

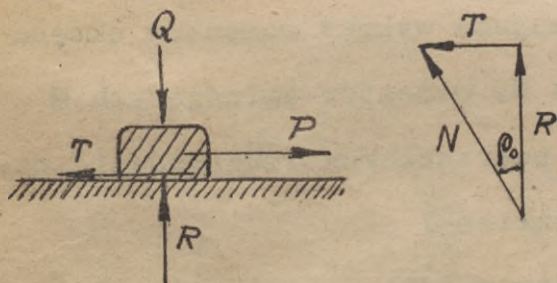
wyrażenie na moment zginający w postaci następującej :  $M = c_1 x^4 + c_2 x^3$ . Jak zmienia się siła poprzeczna i jak jest obciążony pręt ?

Odp. :

$$T = \frac{dM}{dx} = 4c_1 x^3 + 3c_2 x^2, \quad q = -\frac{dT}{dx} = -12c_1 x^2 + 6c_2 x.$$

§.4. Tarcie.

1. Już w §.2. zauważono, że reakcja szorstkiej płaszczyzny czy też powierzchni może być względem normalnej nachylona niekiedy pod znacznym kątem. Istotnie wyobraźmy sobie jakiś przedmiot o ciężarze  $Q$  spoczywający na poziomej płaszczyźnie. Wtedy nacisk na płaszczyznę wynosi  $R = Q$ . Działajmy na ciało w dowolnym kierunku poziomą siłą  $P$ . Okaże się, że przy odpowiednim obiorze siły  $P$  przedmiot nadal trwać będzie w równowadze - w spoczynku. Na podstawie ogólnych warunków równowagi musimy wnioskować, że istnieje jakaś dodatkowa siła o kierunku przeciwnym  $P$  a wartości liczebnie równej. Jesteśmy zmuszeni przyjąć, że siłą tą jest albo opór środowiska (np. powietrza), albo też opór, którego siedliskiem jest powierzchnia stykania się obu ciał. Ponieważ skądinąd wiadomem nam jest, że opór środowiska zależy monotonicznie od prędkości, której wogóle nie wywołaliśmy, przeto pozostaje ta druga przyczyna. Zwiemy ją tarcie. Najwidoczniej siła ta posiada ciekawe własności. Np. w przykładzie omawianym po usunięciu  $P$  znika tarcie; ze wzrostem  $P$  rośnie siła tarcia  $T$  oczywiście do pewnej krańcowej wartości; ze zmianą kierunku siły  $P$  zmienia się kierunek siły  $T$ . W chwili końcowej tzn. tej, w której  $P = T$  wywoła ruch przedmiotu jest całkowita wypadkowa  $N$  z sił  $R$  i  $T$



Rys. 129.

(rys.129) odchylna od normalnej o tzw. kąt tarcia  $\varphi_0$  tak, że wtedy  $T = R \operatorname{tg} \varphi_0$ . Z powodów wyżej wyjaśnionych równowaga będzie zabezpieczoną tak długo, jak długo całkowita reakcja  $N$  nie odchyli się od normalnej o kąt  $\varphi_0$  i to w dowolnym kierunku tj. tak długo, jak długo  $N$  pozostanie w obrębie stożka tarcia o osi pokrywających się z normalną w punkcie

zestknięcia się obu ciał. Wielkość  $\operatorname{tg} \varphi_0$  nazywamy też współczynnikiem tarcia posuwistego. Wypada dla siły tarcia zanotować następujące wzory :

$T = R \operatorname{tg} \varphi_0$   
 $\operatorname{tg} \varphi_0 = f_0$   
 $|T| \leq R \cdot f_0 \quad , \quad f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$

2. Zanim zajmiemy się zastosowaniem podanej formuły, wyjaśnimy parę podstawowych szczegółów. Rozróżniamy tarcie w spoczynku (pryczepność) i tarcie w ruchu. Nazwy te wyjaśniają istotę rzeczy z punktu widzenia mechaniki nie zupełnie dokładnie. Otóż należy pamiętać o tem, że tarcie w spoczynku jest siłą zewnętrzną bierną tzn. prosto dodatkową reakcją natomiast tarcie w ruchu jest oporem rozpraszającym energję ciała tzn. jest siłą zewnętrzną czynną. Różnice te wyjdą wyraźnie na jaw po rozwiązaniu kilku konkretnych przykładów. W rozdziale niniejszym zajmować się zasadniczo będziemy tylko tarcie w spoczynku ; tarcie w ruchu znajdzie zastosowanie w dynamice. Tutaj dodamy tylko, że współczynnik tarcia w ruchu jest zawsze mniejszy od odnośnego w spoczynku i zanotujemy relację :

$$T = R \cdot f \quad , \quad f = \operatorname{tg} \varphi < f_0$$

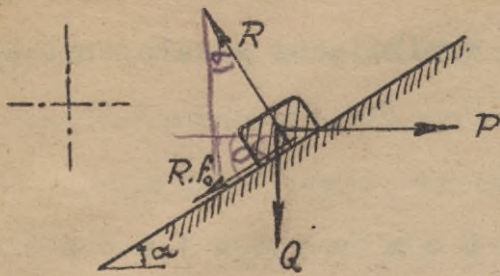
Pozatem tarcie w spoczynku jest zawsze przeciwne do kierunku ewentualnie możliwego (spodziewanego, pomyślanego w sposób możliwy) ruchu ; tarcie w ruchu jest przeciwne do kierunku odbywającego się ruchu. Wypadek omówiony w ust. 1. nosi nazwę tarcia posuwistego ; wypadek taki zachodzi wtedy, gdy np. w czasie ruchu ciała pewien punkt tego ciała stale styka się z kolejno coraz to innymi punktami powierzchni czy też płaszczyzny, po której odbywa się ruch. Rozróżniamy nadto tarcie poteczyste i tarcie wiercące względnie różne kombinacje je tych trzech typów wymienionych . Mowa o nich będzie na końcu niniejszego paragrafu. Pozatem może być mowa o tarcie ciał stałych, ciekłych i gazowych. Nas interesować będą przedewszystkiem ciała stałe. Nie można jednak nie zwrócić uwagi na pewien ciekawy szczegół. Tarcie suche między dwoma ciałami stałymi starają się często zmniejszyć przez użycie odpowiednich smarów (byleby nie wody, która tarcie zwiększa z reguły). Otóż zachowanie się owej cienkiej warstewki smaru należy do rozważań hydromechaniki i zagadnieniu temu poświęca się w ostatnich czasach wiele uwagi. Jeśli korzystamy w technice w takich wypadkach z wzorów wyżej podanych to robimy albo dla uproszczenia zagadnienia, albo też z braku dostatecznego teoretycznego ujęcia danego zagadnienia. Dla wyjaśnienia podajemy kilka

szczegółów porównawczych. Przy tarcia suchem : Siła tarcia jest a) proporcjonalna do nacisku, b) niezależna od prędkości, c) zależna od stopnia szorstkości obu ciał, d) większa na początku ruchu (tj. przy przejściu od spoczynku do ruchu). Tymczasem przy tarcia cieczy : Siła tarcia jest a) niezależna od nacisku, b) proporcjonalna do prędkości, c) niezależna od szorstkości obu ciał, d) znika na początku ruchu. Te charakterystyczne cechy mówią za siebie. Wypada dodać, że i one mają pewien stopień przybliżenia. I tak ściśle badania wykazały, że współczynnik  $f_0$  można uważać za stały, ale przy bardzo dużych naciskach, że podobnie  $f$  maleje z prędkością, że tarcie hydrodynamiczne nie zależy od nacisku tylko wtedy, gdy ten ostatni jest mały itp. Dokładne ujęcie sprawy jest jednak tak zawiłe, że narazie z konieczności jesteśmy zmuszeni używać dotychczasowych założeń prostych. Dla orientacji podajemy wreszcie kilka danych szczególnych dla tej uproszczonej teorii

Materiał	$f_0$			f		
	suchy	smarow.	woda	suchy	smarow.	woda
Stal po stali	0,15	0,10	--	0,10	0,009	--
Metal po drzewie	0,6-0,5	0,10	--	0,5-0,2	0,08-0,02	0,26-0,22
Drzewo po drzewie	0,65	0,20	0,70	0,4-0,2	0,16-0,04	0,25
Skóra po metalu	0,60	0,25	0,62	0,25	0,12	0,36
Stal po lodzie	0,027	--	--	0,014	--	--

3. Rozwiązanie zagadnienia równowagi z uwzględnieniem tarcia polega na określeniu granicznych wartości sił utrzymujących ciało w równowadze, względnie na podaniu granicznych położen równowagi. Do sił zewnętrznych czynnych należy dołączyć reakcje i dla całości użyć jak dotychczas warunków równowagi. Różnica polegać będzie na tem, że do reakcyj normalnych R dołączymy reakcje styczne  $R \cdot f_0$ , dając tym ostatnim kierunki przeciwne do kierunku oczekiwanego ruchu. Przykład konkretny tę sprawę wyjaśni.

Ciężki (Q) przedmiot utrzymuje się w równowadze na szorstkiej



Rys. 130.

płaszczyźnie przy działaniu nań poziomej siły P. Zbadamy w jakich granicach może być ona zawartą. Nadmiernej wartości siły P odpowiadałby ruch ciała ku górze; wobec tego końcową wartość tarcia  $R f_0$  zaznaczymy (rys.130) w dół. Odnosną krańcową wartość siły P oznaczymy przez  $P_1$ . Traktując - wobec małych rozmiarów ciała - układ

za środkowy możemy napisać dwa warunki równowagi :

$$R \cos \alpha - R f_0 \sin \alpha - Q = 0, \quad P_1 - R \sin \alpha - R f_0 \cos \alpha = 0$$

Obu równań przy użyciu skrótu  $f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$  znajdziemy kolejno :

$$R = Q \frac{\cos \varphi_0}{\cos(\alpha + \varphi_0)}, \quad P_1 = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi_0)$$

Wartość  $P_1$  jest największą ze wszystkich możliwych w stanie równowagi. Wartość najmniejszą znajdziemy zakładając, iż przy odpowiednim ubytku P, możliwym stałoby się ruch w dół; wtedy w schemacie rys.130. należałoby zmienić tylko strzałkę wielkości  $R f_0$ . Ponieważ R nie ulegnie zmianie kierunku, przeto powyższa operacja jest identyczną ze zmianą znaku współczynnika  $f_0$  lub - co na jedno wychodzi - kąta  $\varphi_0$ . Zatem najmniejsza wartość siły P wynosi :  $P_2 = Q \operatorname{tg}(\alpha - \varphi_0)$ . Równowaga będzie zachodzić dla wszelkich wartości P, zawartych w granicach :

$$Q \operatorname{tg}(\alpha - \varphi_0) \leq P \leq Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi_0)$$

Natomiast możemy jeszcze zauważyć następujące : Stale jest  $P_1 > 0$ ; gdybyśmy przeszli do zagadnienia dynamicznego i chcieli wywołać faktyczny ruch w górę musielibyśmy działać siłą odpowiedniej wielkości skierowaną jak na rys.130. Natomiast wartość  $P_2 \geq 0$  zależy od  $\alpha \geq \varphi_0$ . Zatem przy orientacji siły jak wyżej i odpowiedniej jej wartości możliwy jest ruch w dół - ale wtedy, gdy jest  $\alpha > \varphi_0$ . W wypadku  $\alpha < \varphi_0$  ów ruch możliwy byłby wtedy tylko, gdybyśmy zmienili zwrot siły P. Innymi słowy w wypadku  $\alpha < \varphi_0$  możliwą jest w stanie równowagi wartość zerowa siły P, a nawet ujemna. Mówimy krótko : Ciało jest zahamowane - a urządzenie odnośne (w naszym wypadku płaszczyzna) samo hamowne. Pojęcie to zależnym jest najwidoczniej od stosunku kąta tarcia do kąta ( lub wykładnika wymiarów ) konstrukcyjnego i da się prawie w każdym wypadku z miejsca dostrzec. Poza pojęciem samohamowności

wprowadzimy jeszcze inne. Gdyby tarcia wogóle nie było to równowaga istniałaby w rozważanym przykładzie dla wartości  $P_0 = Q \operatorname{tg} \alpha$ , wynikającej z założenia  $\varphi_0 =$  (por. §. 2. Ćwicz. 3.). Stosunek :

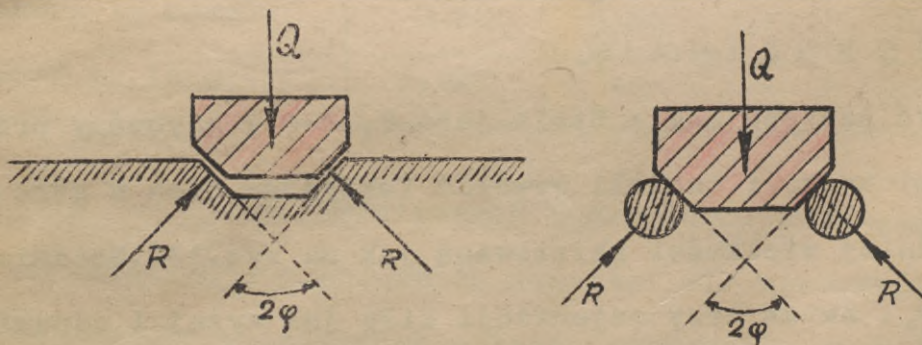
$$\eta = \frac{P_0}{P_1} < 1$$

lub rzadziej  $\frac{P_2}{P_0}$  nazywamy współczynnikiem wydajności urządzenia. W naszym wypadku jest  $\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_0)}$ . Dla płaszczyzny samohamownej i dyskutowanego obciążenia jest najwidoczniej z powodu nierówności  $\alpha < \varphi_0$ .

$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_0)} < \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2} \ll \frac{1}{2}$ . Fakt ten ma prawie zawsze miejsce ; wydajność urządzeń samohamownych jest mniejszą od 50%.

4. Wydajność danego urządzenia ma duże znaczenia dla inżyniera.

W urządzeniach przeznaczonych dla pracy pozytywnej staramy się  $\eta$  zwiększyć przez zmniejszenie tarcia. W całym szeregu innych urządzeń postępujemy odwrotnie ; tarcie zwiększamy odpowiednimi zabiegami. Wyobraźmy sobie np., że na przedmiot, prowadzony jak na rys. 131. działamy siłą prostopadłą do płaszczyzny rysunku ; płaszczyzna z wyżłobieniem trapezowym, względnie oba okrągłaki są poziome. W miejscach podparcia w kierunku przeciwnym do działania siły poziomej wystąpi tarcie o wartości  $|T| \leq 2Rf_0$ . W warunku



Rys. 131.

$$f_0' = \operatorname{tg} \varphi_0' = \frac{f_0}{\sin \varphi}$$

sił dla prostej, równoległej do Q, odpada T i siła pozioma tak, że warunek równowagi brzmi :

$$Q - 2R \sin \varphi = 0, \text{ a stąd } 2R = \frac{Q}{\sin \varphi}. \text{ Ostatecznie}$$

zatem :

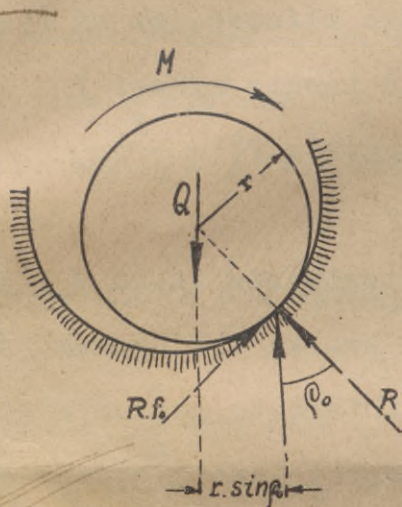
$$|T| \leq Q \frac{f_0}{\sin \varphi} = Q f_0', \quad f_0' = \operatorname{tg} \varphi_0'$$

Gdyby płaszczyzna wyżłobienia nie posiadała byłoby  $|T| \leq Q f_0$ . Najwidoczniej tarcie zwiększyliśmy w stosunku  $f_0' : f_0 = 1 : \sin \varphi$ . Rezultat powyższy warto sobie zapamiętać. Przy prowadzeniu klinowem ciała korzystamy z wyników prowadzenia zwykłego zwiększając współczynnik tarcia  $f_0$  do wartości  $f_0' = \frac{f_0}{\sin \varphi}$  względnie

zmieniając  $\varphi_0$  na  $\varphi_0'$ . Kąt typu  $\varphi$  da się zawsze zauważyć.

5. Szczególnie ważne znaczenie ma wypadek, gdy ciało i powierzchnia podpierająca ma kształt walca obrotowego. Ma to miejsce w łożyskach wałów itp. Rozpatrujemy dwa wypadki : a) oba ciała mają różny promień i b) oba szczelnie do siebie przylegają. Wypadek pierwszy ma miejsce gdy łożysko czopa jest wytarte. Wtedy oba ciała stykają się tylko wzdłuż jednej tworzącej i to jak z warunków

równowagi wynika, nie leżącej w przedłużeniu obciążenia czopa  $Q$ , lecz odsuniętej prostopadle w bok o wielkość  $r \sin \varphi_0$ . Z krańcowych bowiem warunków równowagi wynika, że reakcja całkowita musi być od normalnej w miejscu podparcia odchylona o kąt  $\varphi_0$  (rys.132), a zatem musi ona wynosić  $Q$ . Z powodu obecności tarcia możemy na wał działać momentem  $M$  nie burząc równowagi. W stanie krańcowym musi się dodatkowo spełnić warunek momentów ; brzmi on :  $M - Qr \sin \varphi_0 = 0$ , a stąd równowaga istnieje gdy jest :

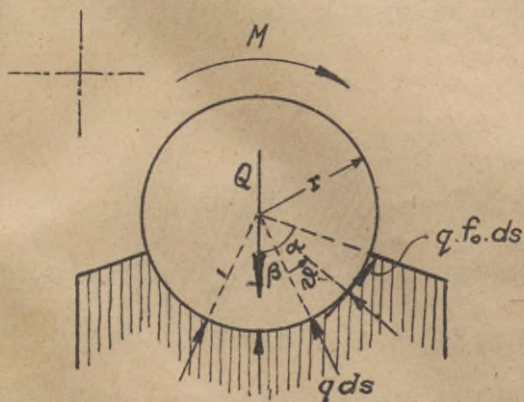


Rys. 132.

$$|M| \leq Q \cdot r \cdot f_1, \quad f_1 = \sin \varphi_0 < \operatorname{tg} \varphi_0 = f_0$$

Wyrażenie  $Q \cdot r \cdot f_1$  nazywamy momentem tarcia czopowego, zaś  $f_1$  współczynnikiem tarcia czopowego ; jest on nieco mniejszy od  $f_0$ . Przypadek, gdy obie powierzchnie walcowe są niewytarte przedstawia się teoretycznie o tyle zawilej, że nie znamy prawa rozkładu nacisków na powierzchnię podpierającą. Zróbmy założenie, że nacisk rozkłada się równomiernie na powierzchni, przynależnej kątowi środkowemu  $2\alpha$  ( $\alpha$  -

znane). Jako niewiadome wprowadzimy kąt  $\beta$ , określający położenie w symetralnej kąta  $2\alpha$  równy momentowi sił zewnętrznych  $M$ . Warunki równowagi brzmią (rys.133.) :



Rys. 133.

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} q ds \cdot \sin(\beta + \vartheta) - \int_{-\alpha}^{+\alpha} q ds \cdot f_0 \cdot \cos(\beta + \vartheta) = 0$$

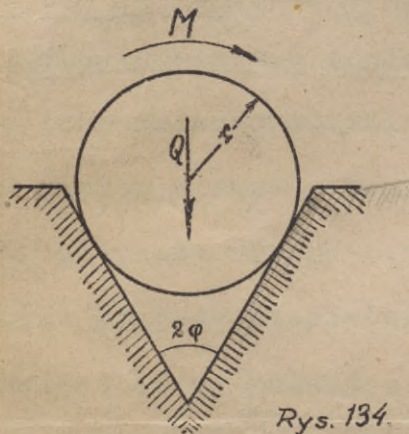
$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} q ds \cdot \cos(\beta + \vartheta) + \int_{-\alpha}^{+\alpha} q ds \cdot f_0 \cdot \sin(\beta + \vartheta) = Q$$

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} q ds \cdot f_0 \cdot r = M$$

Wstawiając  $ds = r \cdot d\alpha$  i wykonując całkowanie w zaznaczonych granicach znajdujemy z pierwszego równania  $\beta = \varphi_0$ , z drugiego  $q = \frac{Q}{2r} \cdot \frac{\cos \varphi_0}{\sin \alpha}$ , wreszcie z trzeciego  $M = 2q \cdot f \cdot r^2 \cdot \alpha = Q \cdot r \cdot \sin \varphi_0 \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha}$ . Równowaga jest możliwa dla :

$$|M| \leq Q \cdot r \cdot f_1 \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha}, \quad f_1 = \sin \varphi_0.$$

Jeśli np. jest  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , to moment tarcia waha w granicach obszerniejszych o  $\frac{\pi}{2} - 1 = \sim 57\%$  w porównaniu do wykazanych poprzednio. Wytarcie łożyska wywołuje pewne mimośrodowość w prowadzeniu wału. Tam gdzie tego chcemy uniknąć (np. w łożyskach precyzyjnych instrumentów mierniczych) możemy wprowadzić łożysko klinowe, jak na rys. 134.



Rys. 134.

Wtedy krańcowa wartość momentu tarcia wynosi :

$$M = Q \cdot r \cdot f'_1, \quad \text{gdzie } f'_1 = \frac{f_1}{\sin \varphi}$$

(Udowodnić powyższe !).

6. Jako szczególne zastosowanie wzoru  $M = Q \cdot r \cdot f_1$  weźmiemy pod uwagę przypadek krążka obciążonego jak na rys. 135. Gdyby tarcie nie istniało, to najoczywściej byłoby  $P = Q$ ; z powodu obecności tarcia będzie  $P$  zawar-

te w stanie równowagi w pewnych granicach. Pierwszorzędne znaczenie ma dla nas

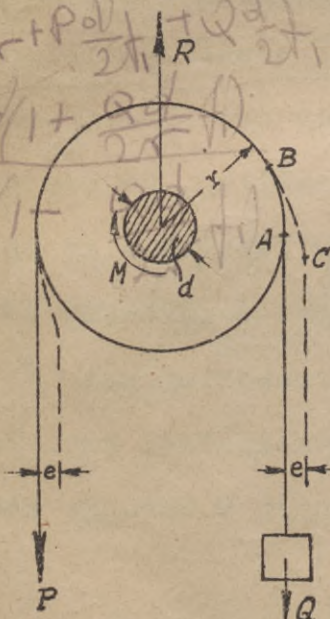
górną wartość  $P$ . Z warunków równowagi dla kierunku pionowego mamy  $R = P + Q$ ; zatem krańcowy moment tarcia wynosi  $M = (P + Q) \cdot \frac{d}{2} f_1$ . Warunek momentów względem osi trzpienia daje :  $Q \cdot r + M - P \cdot r = 0$ , stąd wynika :

$P = Q \cdot \frac{1 + \frac{d}{2r} \cdot f_1}{1 - \frac{d}{2r} \cdot f_1}$ . Zważywszy, że  $\frac{d}{2r} \cdot f_1$  jest małe w porównaniu do jednostki, możemy ów wynik napisać też w prostej formie :

$$P = Q \left( 1 + \frac{d}{r} f_1 \right).$$

Przy tej sposobności warto poruszyć sprawę zasadniczo do mechaniki ciała sztywnego nie należącą. Przyjęcie punktu styczności liny z krążkiem w miejscu A nie odpowiada prawdzie i teoretycznej i doświadczalnej. Mianowicie

lina posiada pewną sztywność sprężystą, która wymagać będzie ciągłej zmiany krzywizny od wartości  $\frac{1}{r}$  do wartości 0; tymczasem w miejscu A nastąpiłby gwałtowny skok



Rys. 135.

wartości krzywizny. Otóż punkt styczności będzie faktycznie leżał w miejscu B ; od niego począwszy krzywizna będzie maleć w sposób ciągły i osiągnie wartość zerową w miejscu C. W ten jednak sposób ciężar  $Q$  przesunie się bocznie o drobną wielkość  $e$  zależną od wymiarów liny, promienia krążka, i własności indywidualnych liny. Po stronie przeciwnej sytuacja będzie odwrotna. Na rys. 135 oba mimośrodory zaznaczono jak wzajemnie równe ; jest to przybliżenie tembardziej uzasadnione, że pomiaru wielkości  $e$  wogóle dokonywamy doświadczalnie rezygnując z rozważań teoretycznych. Pomijając tarcie, a uwzględniając mimośrodory  $e$  napiszemy warunek momentów w postaci :  $Q ( r + e ) - P ( r - e ) = 0$  , skąd jest  $P = Q \frac{r+e}{r-e} = Q \cdot \frac{1+\frac{e}{r}}{1-\frac{e}{r}}$ . Zważywszy, że  $\frac{e}{r}$  jest małe w porównaniu do 1 możemy napisać :

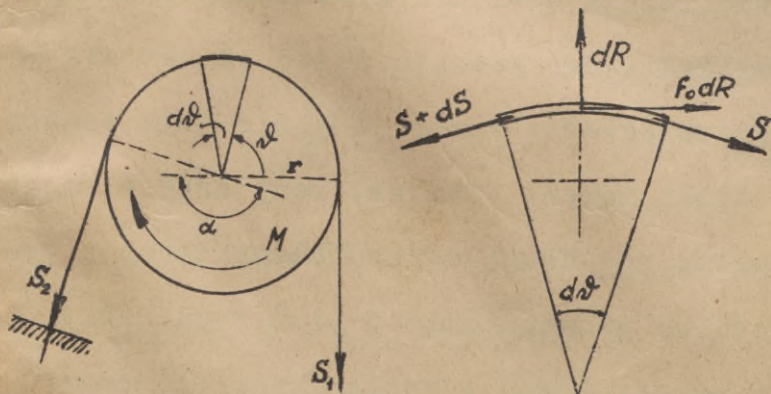
$$P = Q \left( 1 + 2 \frac{e}{r} \right)$$

Uwzględniając oba wpływy znajdziemy ostatecznie :

$$P = Q \left( 1 + \frac{d}{r} f_1 + 2 \frac{e}{r} \right) = Q \cdot w \quad , \quad w > 1.$$

Zależnie od warunków (lina konopna, stalowa, łańcuch itp) waha  $w$  w granicach od 1,05 do 1,15 ; zatem średnio  $w = 1,10$ . Najwidoczniej wydajność krążka wynosi :  $\eta = \frac{1}{w}$  tj. średnio  $\sim 0,90$ .

7. W rozważaniach w ust. 6. milcząco przyjęliśmy, że między liną a krążkiem było dostatecznie duże tarcie zabezpieczające układ przed poślizgiem, a równocześnie pozwalające nam linę i krążek traktować jako całość ; innymi słowy założyliśmy, że moment tarcia jest dość mały. Obecnie przyjmiemy przypadek wręcz przeciwny. Założymy mianowicie, że lina względem krążka przesuwa się lub też naodwrot. Wtedy między liną a krążkiem powstanie tarcie, które wpływa na to, że na-



Rys. 136.

pięcia liny po obu stronach krążka będą się wybitnie różnić między sobą. Na rys. 136. lina jest nieruchomą ; dla krążka przewidziana jest możliwość obrotu w kierunku M. Rozpatrzmy równowagę elementu liny przynależną kątowemu środkowemu  $d\varphi$ . Warunki równowagi brzmią :

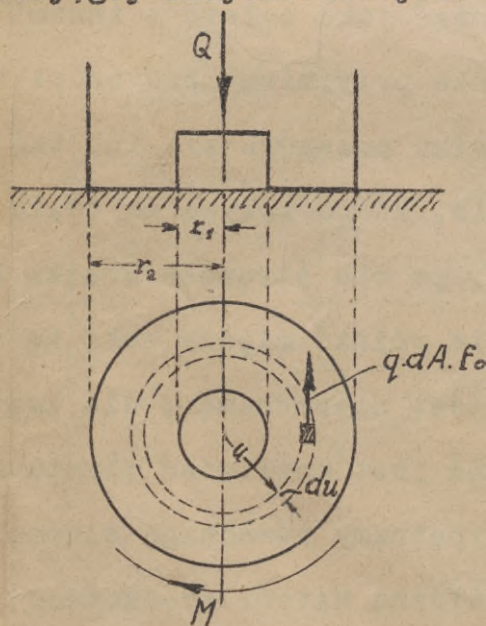
$$dR - (S + dS) \frac{d\varphi}{2} = 0, \quad f_0 dR + S - (S + dS) = 0$$

czyli po uzasadnionych pominięciach :  $dR = Sd\vartheta$  ,  $f_0 dR = dS$ .Rugując  $dR$  znajdujemy  $\frac{dS}{S} = f_0 \cdot d\vartheta$  czyli po scałkowaniu :  $\log_e S = f_0 \vartheta + C$ .Lecz dla  $\vartheta = 0$  jest  $S = S_1$  zatem  $C = \log_e S_1$ . Podstawiając powyższe znajdujemy :  $\log_e S - \log_e S_1 = \log_e \frac{S}{S_1} = f_0 \vartheta$  czyli  $\frac{S}{S_1} = e^{f_0 \vartheta}$  lub ostatecznie :

$$S = S_1 e^{f_0 \vartheta}$$

Największe  $S$  znajdujemy dla  $\vartheta = \alpha$ , a mianowicie  $S_2 = S_1 e^{f_0 \alpha}$ . Różnica napięć wynosi  $S_2 - S_1 = S_1 (e^{f_0 \alpha} - 1)$ . Krańcowa wartość momentu wynosi :  $M = (S_2 - S_1)r = S_1 r (e^{f_0 \alpha} - 1)$ .Charakterystyczną dla rozwiązania jest obecność współczynnika tarcia w wykładniku potęgowym. Pozatem bardzo ważną rzeczą jest nieobecność promienia we wzorze na  $S$  względnie  $S_2$ . Można tedy sobie wyobrazić, że lina nawinięta jest na kilka wąłów o różnych promieniach (urządzenia ratownicze) ; wtedy  $\alpha$  jest sumą wszystkich poszczególnych kątów nawinięcia.Prowadząc linę w wycięciu trapezowym zwiększymy jeszcze więcej tarcie.Wtedy w miejsce  $f_0$  wstawimy  $f_0' = \frac{f_0}{\sin \varphi}$  gdzie  $2\varphi$  jest kątem zawartym między płaszczyznami, o które trze lina.

8. W wypadkach, omówionych w ust.5,6 i 7 tarcie rozłożone byłowa poboczniczy walca. Weźmiemy obecnie pod uwagę wypadek, gdzie tarcie rozłożone jest na podstawie walca. Założmy narazie, że płaszczyzny stykające się geometrycznie równomierny rozkład nacisku zewnętrznego  $Q$  ; ma to miejsce w przybliżeniu wtedy,gdy łożysko nie jest wytarte. Jeśli  $r_2$  i  $r_1$  oznaczają promienie zewnętrzny i wewnętrzny czopa walcowego, to wtedy nacisk jednostkowy wynosi :  $q = \frac{Q}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}$ . Przy założonym kierunku  $M$  (rys.137) będą elementarne naciski  $q dA$  wywoływać tarcia  $q dA \cdot f_0$  o kierunkach prostopadłych do promieni .Tego rodzaju układ płaski sił — jak łatwo przewidzieć z symetrii — nie daje żadnej wypadkowej tylko moment. Zamiast tedy brać elementy pół  $dA$  weźmiemy pod uwagę odrazu elementarny pierścień, zakreślony promieniami  $u$  i  $u + du$ . Pole pierścienia wynosi  $2u\pi du$  ; mnożąc powyższe przez  $q \cdot f_0 \cdot u$  otrzymamy elementarny moment tarcia.Warunek



Rys. 137.

wnowagi brzmi :  $M - \int_{r_1}^{r_2} 2u \cdot \pi \cdot du \cdot q \cdot f_0 \cdot u = 0$  ; po scałkowaniu i wstawieniu granic dzież  $q$  otrzymamy :

$$M = \frac{2}{3} Q \cdot f_0 \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}$$

śli w szczególności  $r_1 = 0$  i  $r_2 = r$ , to :

$$M = \frac{2}{3} Q \cdot f_0 \cdot r$$

st to oczywiście graniczna wartość. Jeśli powierzchnie stykające są wytarte (zapewne i bez tego), to nacisk  $q$  nie jest stały i z pewnością maleje ze wzrostem oddalenia od środka koła. Zakładając najprościej  $q = \frac{q_0}{u}$  i wstawiając powyższe w warunek momentów nie wyznaczymy  $M$  dopóki nie określimy stałej  $q_0$ . Otóż z warunku sił dla kierunku  $Q$  tj. równania :  $Q - \int 2u \cdot \pi \cdot du \frac{q_0}{u} = 0$  znajdziemy :

$$q_0 = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot (r_2 - r_1)}$$
 ; dla  $M$  łatwo wykażemy wtedy :

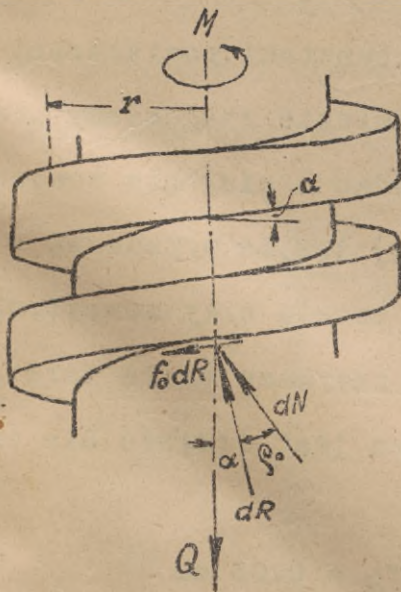
$$M = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot f_0 \cdot (r_2 + r_1)$$

lub w wypadku szczególnym  $r_1 = 0$  i  $r_2 = r$

$$M = \frac{1}{2} Q \cdot f_0 \cdot r$$

Moment tarcia zmalał w wypadku ostatnim o 25% wartości uprzedniej.

9. Ważny technicznie wypadek stanowi tarcie w śrubie. Niech



Rys.138.

siłą, działającą osiowo na śrubę o płaskim gwinie (rys.138.) będzie  $Q$ . Naciski elementarne  $dR$  i tarcia  $f_0 dR$  dadzą elementarną reakcję  $dN$  odchyloną od osi śruby o kąt  $\alpha + \varphi_0$  względnie  $\alpha - \varphi_0$  w zależności od pomyślanego ruchu. Składowe równoległe i prostopadłe do osi śruby wynoszą zatem :

$dN \cdot \cos(\alpha + \varphi_0)$  i  $dN \cdot \sin(\alpha + \varphi_0)$ . Sumując pierwsze mamy  $Q - \int dN \cdot \cos(\alpha + \varphi_0) = 0$  czyli

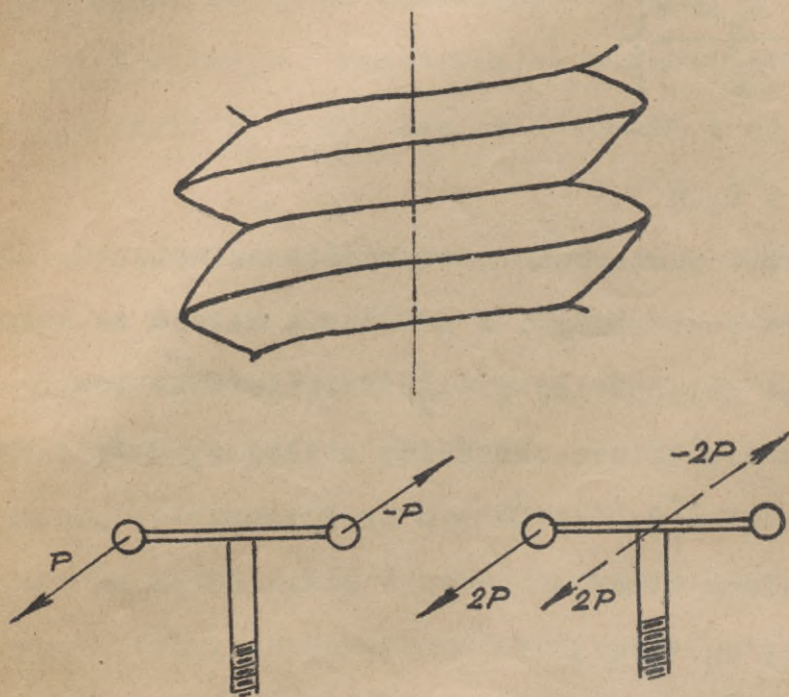
$$\int dN = \frac{Q}{\cos(\alpha + \varphi_0)}$$
 . Składowe równoległe nie dają

momentu względem osi śruby ; warunek momentów

$$\text{brzmi przeto : } M - \int dN \cdot r \cdot \sin(\alpha + \varphi_0) = 0 \text{ skąd}$$

$M_1 = Q \cdot r \cdot \text{tg}(\alpha + \varphi_0)$  względnie  $M_2 = Q \cdot r \cdot \text{tg}(\alpha - \varphi_0)$  jako górna i dolna wartość

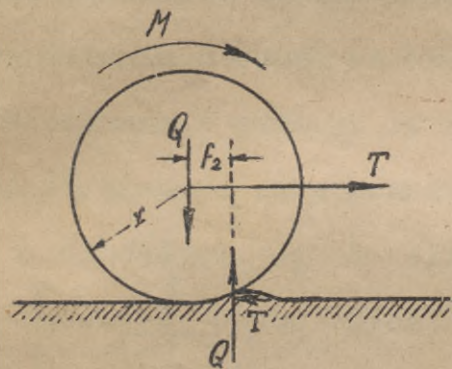
momentów w stanie równowagi. Rezultaty powyższe zmieniają się nieznacznie dla śru



Rys. 139.

by o gwincie ostrym. Należy mianowicie w miejsce  $f_0$  wprowadzić  $f'_0 = \frac{f_0}{\sin \varphi}$  (rys.139.) tzn. odpowiednio zmienić  $\varphi_0$  na  $\varphi'_0$ . Należy baczyć na sposób obciążenia śruby. W wypadkach przedstawionych na rys.139. uwidoczniło obciążenie faktycznym momentem tj. parą sił i przypadek, gdzie prócz pary działa na śrubę i siła boczna. Wtedy oczywiście wystąpi tarcie i na ścianach bocznych śruby. Uwaga powyższa odnosi się i do ust.8.

10. Założenie sztywności ciała i podłoża nie wystarcza do wyjaśnienia oporu, jaki zachodzi przy toczeniu się



Rys. 140.

ciała tj. gdy przy ruchu coraz to inny punkt ciała styka się z kolejnymi punktami powierzchni względnie płaszczyzny. Wyjaśnienie znajdziemy przyjmując, że przynajmniej jedno z ciał nie znacznie odkształca się (rys.140.) tak, że wypadkowa z reakcyj nie pokrywa się z prostą siły zewnętrznej Q. Różnicę odległości  $f_2$  nazywamy stałą tarcia potoczystego; jej wymiarem jest długość. Dla orjenta-

cji podajemy kilka wartości :

koło stalowe po szynie stalowej	$f_2 = 0,05 \text{ cm}$
drzewo po drzewie	$f_2 = 0,05 - 0,08 \text{ cm}$
guma na terenie porośłym trawą	$f_2 = 1,0 - 1,5 \text{ cm}$

Ponieważ siła Q i reakcja Q tworzą parę sił przeto takąż parą o zwrocie przeciwnym możemy utrzymać równowagę; przeto

$$M = Q f_2 .$$

Moment zewnętrzny  $M$  może być wywołany siłą pociągową ; będzie ona w stanie równowagi równą poziomemu oporowi  $T$  ; zatem  $M = T \cdot r = Q \cdot f_2$ , a stąd

$$T = Q \frac{f_2}{r}$$

Oczywiście  $T$  nie może być większe od tarcia posuwistego, bo zamiast toczenia uzyskamy poślizg ; zatem ma być  $Q \frac{f_2}{r} \leq Q \cdot f_0$  lub  $r \geq \frac{f_2}{f_0}$ . Mniejsza wartość tarcia potocznego od posuwistego znalazła zastosowanie w łożyskach kulkowych.

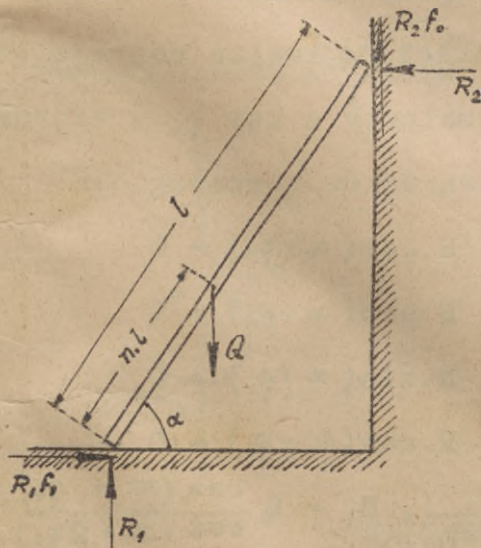
11. Niech dwa ciała stykają się w jednym punkcie i naciskają się wzajemnie siłą  $Q$ . W miejscu zetknięcia powstanie drobna deformacja. Momentowi o wektorze leżącym na prostej  $Q$  przeciwdziałać będzie tarcie rozłożone na powierzchni deformacji . W stanie równowagi graniczna wartość momentu tarcia wiercącego wynosi :

$$M = Q \cdot f_3$$

przyczem  $f_3$  w wymiarze długości jest odnośną stałą tarcia wiercącego.

### Przykłady ćwiczeń.

1. Ciężka drabina wraz z człowiekiem oparta jest o pionową ścianę i podłogę. Przyjawszy równe współczynniki tarcia na obu płaszczyznach obliczyć kąt  $\alpha$  , pod jakim drabina może utrzymać się w równowadze (rys.141).



Rys.141.

Odp. : Niech  $n$  w zależności od położenia człowieka oznacza położenie całkowitego obciążenia.

Z warunków równowagi :

$$R_2 f_0 - R_2 = 0, \quad R_1 + R_2 f_0 - Q = 0,$$

$$R_2 \cdot l \cdot \sin \alpha + R_2 f_0 \cdot l \cdot \cos \alpha - Q \cdot n \cdot l \cdot \cos \alpha = 0$$

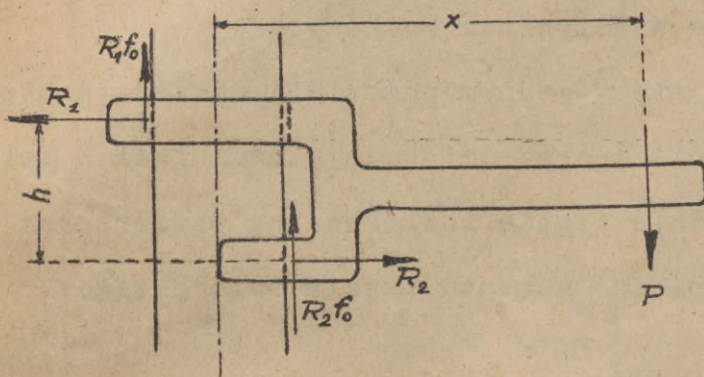
wynika :  $\operatorname{tg} \alpha = n \cdot \left( \frac{1}{f_0} + f_0 \right) - f_0$  .

Niech będzie  $f_0 = 0,4$  tj.  $\varphi_0 = \sim 22^\circ$ , to

$\operatorname{tg} \alpha = 2,9 n - 0,4$ . Przyjmijmy krótko, że ciężar człowieka jest w przybliżeniu równy ciężarowi drabiny, to gdy człowiek znajduje się kolejno na najniższym, środkowym i najwyższym szczeblu, a za-

tem gdy kolejno  $n = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  uzyskamy następujące wartości  $\alpha = 18^\circ, 46.5^\circ, 60.7^\circ$ .  
Jeśli założymy, że drabina jest bardzo lekka, to maksymalny kąt  $\alpha = 90^\circ - \varphi_0 = 68^\circ$   
uzyskamy dla  $n = 1$ .

2. Pionowy pręt objęty jest urządzeniem jak na rys.142. Przy jakim



Rys. 142.

położeniu siły P urządzenie zatnie się ?

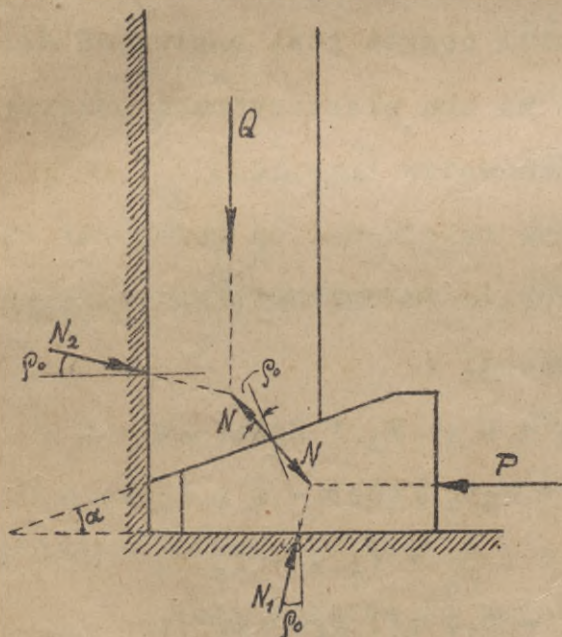
Odp. : Z warunków równowagi :

$R_1 - R_2 = 0, R_1 f_0 + R_2 f_0 - P = 0$   
wynika  $R_1 = R_2 = \frac{P}{2f_0} = R$ . Z tego powodu  
w warunku momentów względem dowolnego punktu  
osi pręta odpadają wielkości  $R_1 f_0$  i  $R_2 f_0$   
tak, że brzmi on :  $R \cdot h - P \cdot x = 0$ ,  
a stąd  $x = \frac{R}{P} h = \frac{h}{2f_0}$  jako wartość graniczną

na najmniejszą. Dla  $x > \frac{h}{2f_0}$  urządzenie będzie zacinać się tj. trwać w równowadze.

3. Słup przyścienny rusztowania uregulowany jest wysokościowo

klinem (rys.143). W jakich granicach wahać może siła pozioma P jeśli określimy



Rys. 143.

tarcia między wszystkimi płaszczyznami  
wspólnym współczynnikiem  $f_0$  ?

Odp. : Przy pomyślanym ruchu klina w lewo  
czyli słupa do góry stosunki przedstawiają

się jak na rys.143. Całkowite reakcje oddziaływane są od normalnych o kąt  $\varphi_0$  w kierunku

zaznaczonym. Z warunków równowagi :

$$Q + N_2 \sin \varphi_0 - N \cdot \cos(\alpha + \varphi_0) = 0$$

$$P - N_1 \sin \varphi_0 - N \cdot \sin(\alpha + \varphi_0) = 0$$

$$N_2 \cos \varphi_0 - N \cdot \sin(\alpha + \varphi_0) = 0$$

$$N_1 \cos \varphi_0 - N \cdot \cos(\alpha + \varphi_0) = 0$$

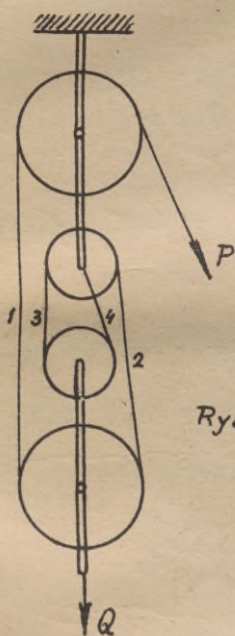
wynika kolejno :  $N_2 = Q \frac{\cos(\alpha + 2\varphi_0)}{\sin(\alpha + \varphi_0)}$ ,  $N = Q \frac{\cos \varphi_0}{\cos(\alpha + 2\varphi_0)}$ ,  $N_1 = Q \frac{\cos(\alpha + \varphi_0)}{\cos(\alpha + 2\varphi_0)}$

i wreszcie :  $P = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi_0) = P_1$ . Przy ruchu pomyślanym odwrotnie jest

$P = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi_0) = P_2$ . Dla równowagi musi być  $P_2 \leq P \leq P_1$ . Przyjawszy  $f_0 = 0,2$

czyli  $\varphi_0 = \sim 11^\circ$  nadto  $\alpha = 17^\circ$  otrzymamy :  $P_1 = 0,8 Q$  i  $P_2 = - 0,09 Q$ . Najwidoczniej  $\alpha$  nie może być zupełnie dowolne ; gdyby bowiem było  $\alpha + 2\varphi_0 = 90^\circ$ , to byłoby wtedy  $P_1 \rightarrow \infty$  czyli klin nie nadawałby się do użytku. Oczywiście najwygodniej byłoby, by klin był samohamowny ; stanie się to, gdy będzie  $\alpha < 2\varphi_0$  jak właśnie w podanym przykładzie liczebnym. Zważywszy, że w wypadku omawianym również we wzorach na  $N_2$ ,  $N$  i  $N_1$  należałoby (jak dla  $P$ ) wstawić w miejsce  $\varphi_0$  wartość  $-\varphi_0$  widzimy, że  $\alpha$  nie może być dowolnie mniejsze od  $2\varphi_0$ , albowiem mogłoby się zdarzyć  $N_2$  ujemne. Z powyższego wynika, że w celach samohamowności należałoby  $\alpha$  ograniczyć nierównością :  $\varphi_0 \leq \alpha \leq 2\varphi_0$ .

4. Obliczyć siłę  $P$  dla wielokrążka zwyczajnego, jeśli w zespole ruchomym znajduje się  $n$  krążków.



Rys. 144.

Odp. : Napięcie części 1 wynosi  $S_1 = P \frac{1}{w}$ , w drugiej  $S_2 = S_1 \frac{1}{w} = P \frac{1}{w^2}$ , w trzeciej  $S_3 = P \frac{1}{w^3}$ , w  $2n$ -tej  $S_{2n} = P \frac{1}{w^{2n}}$ . Przecinając układ otrzymamy z warunku równowagi :

$$Q = S_1 + S_2 + \dots + S_{2n} = P \cdot \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^3} + \dots + \frac{1}{w^{2n}} \right)$$

czyli  $P = Q \frac{w^{2n} - 1}{w^{2n} - 1}$ . Gdyby strat wymienionych

w ust.6. nie było, należałoby przyjąć  $w = 1$ . Wtedy  $\lim_{w \rightarrow 1} P = \frac{Q}{2n}$ . Zatem  $\eta = \frac{w^{2n} - 1}{2nw^{2n}(w - 1)}$

5. Obliczyć siłę  $P$  dla wielokrążka potęgowego o  $n$  krążkach ruchomych.

Odp. :  $P = Q \frac{w^{n+1}}{(1+w)^n}$ . Gdy  $w = 1$  jest  $P = \frac{Q}{2^n}$

(stąd nazwa). Udowodnić powyższe wyniki (rys.145.).

6. Na zaklinowanym okrągłaku opuszczamy liną

$Q = 1000 \text{ kg}$  ; ile wynosi  $P$  jeśli  $f_0 = \frac{1}{3}$ , zaś  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ?

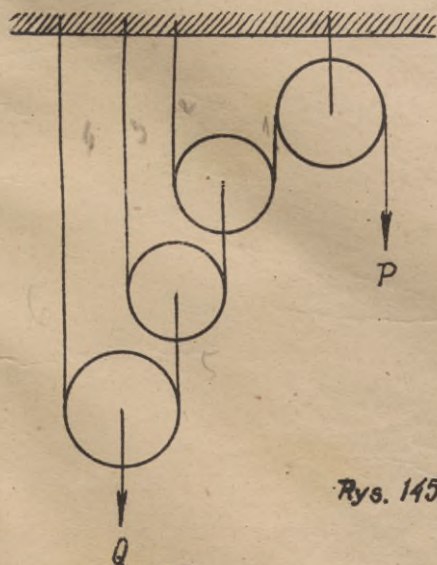
Odp. :  $P = Q \cdot e^{-f_0 \cdot \alpha} = \frac{1000}{2,85} = 351 \text{ kg}$ .

7. Ile razy należałoby linę owinać, by było

$P = 1 \text{ kg}$  ( w ówcz.6.) ?

Odp. :  $e^{f_0 \cdot \alpha} = \frac{Q}{P} = 1000$ , stąd  $\alpha = 20,7 = \sim 3,32\pi$ .

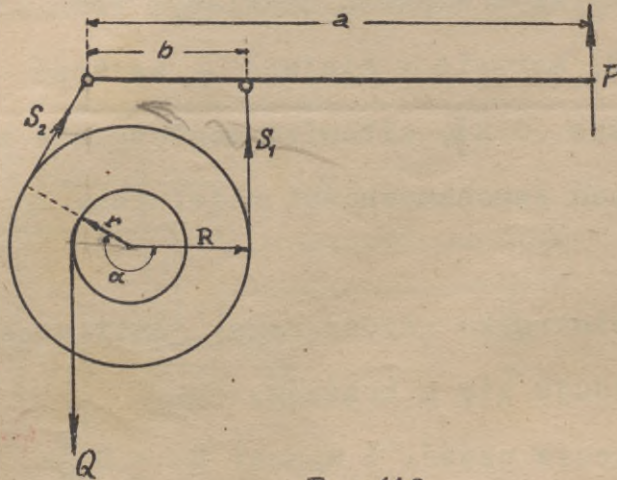
Zatem  $3 \frac{1}{3}$  razy.



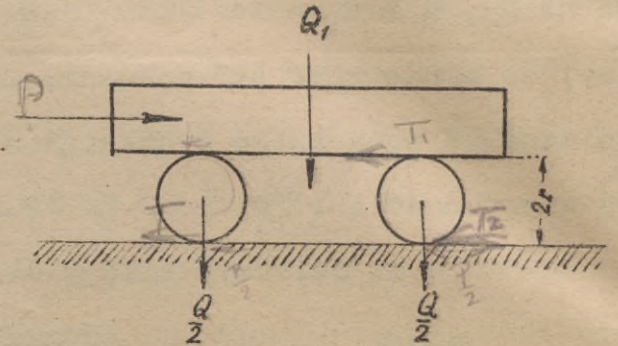
Rys. 145.

8. Obliczyć siłę potrzebną do zahamowania tarczy na rys.146.,  
jeśli  $Q = 242 \text{ kg}$   $\alpha = 0,7 \cdot 2\pi$ ,  $f_0 = 0,18$ ,  $\frac{R}{r} = 2$ ,  $\frac{a}{b} = 10$  ?

Odp. :  $P = Q \frac{r \cdot b}{R \cdot a} \cdot \frac{1}{e^{f_0 \cdot \alpha} - 1} = 10 \text{ kg}$ . Należy osobno rozpatrzeć tarczę z bębnem, a osobno dźwignię.



Rys. 146.



Rys. 147.

9. Płyta  $Q_1$  toczona jest na walcach  $Q$ . Ile wynosić musi siła  $P$  (rys.147.) ?

Odp. : Płyta toczy się na wałkach a wałki po terenie.

$$P = \frac{Q_1 f_2 + (Q + Q_1) \cdot f_2}{2r} \text{ . Jeśli } Q_1 = 1000 \text{ kg, } Q = 50 \text{ kg, } r = 0,1 \text{ m, } f_2' = f_2 = 0,05 \text{ cm}$$

$$\text{to } P = \frac{1000 \cdot 0,0005 + 1050 \cdot 0,0005}{0,2} = 5,1 \text{ kg.}$$

$$\text{Moment siły mechanicznej} = m v \cdot r = I \dot{\theta}$$

$$\boxed{139} = I_s \dot{\theta} + \int m r^2 \dot{\theta}$$

## ROZDZIAŁ IV.

### Kinematyka.

---

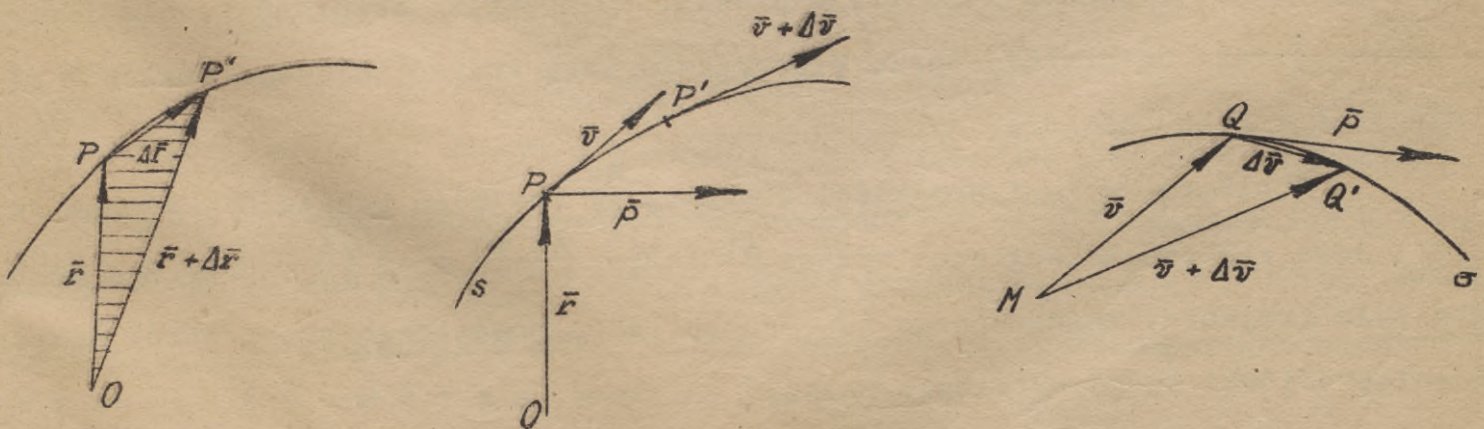
#### §.1. Kinematyka punktu.

1. Kinematyka jest geometrią ruchu tj. tą częścią mechaniki, która zajmuje się ruchem ciała względnie punktu nie wchodząc jednak w przyczyny, które ruch wywołały względnie go modyfikują. Od geometrii zaś różni się ona tem, że wprowadza dodatkową zmienną mianowicie czas  $t$ , mierzony w sekundach i jednostkach pokrewnych. Za chwilę początkową najprościej przyjąć czas  $t = 0$ , za chwilę dowolną czas  $t$ , za chwilę sąsiadującą czas  $t + dt$ . Chcąc poznać ruch ciała trzeba będzie z pewnością obserwować ruchy różnych jego punktów. Zaczniemy od ruchu jednego punktu.

2. Poznać ruch punktu znaczy określić położenie jego w dowolnej chwili, tudzież określić wszelkie zmiany czasowe tego położenia, więc sposób tych zmian. Wektorjalnie określamy położenia punktu promieniem wektorem  $r$ , łączącym stały punkt odniesienia  $O$  z ruchomym punktem  $P$ . Równanie ruchu przeto brzmi :

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

i wyraża, że promień-wektor jest wektorjalną funkcją czasu  $t$ . W dwóch sąsiadujących



Rys. 148.

chwilach  $t$  i  $t + \Delta t$  punkt poruszając się po swym torze znajduje się w położe-

niach P i P', określonych wektorami  $\vec{r}$  i  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$  (rys.148.). Wyrażenie  $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ , posiadające kierunek przyrostu  $\Delta\vec{r}$  nazywamy prędkością średnią w interwale PP'. Granicę tego stosunku tj.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

nazywamy prędkością punktu w chwili t, tzn. w położeniu P. Najwidoczniejszą prędkość  $\vec{v}$  jest styczną do toru w każdorazowym położeniu punktu. Wymiar prędkości jest ilorazem długości i czasu więc np.  $\frac{cm}{sek}$ . W rozpatrywanych dwóch chwilach prędkości wynoszą  $\vec{v}$  i  $\vec{v} + \Delta\vec{v}$  (rys.148.). Wykreślmy je z jednego punktu M, to iloraz  $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$  nazywamy średnim przyśpieszeniem

w badanym przedziale. Końce wektorów  $\vec{v}$ , wykreślonych ze wspólnego początku M utworzą krzywą ciągłą  $\sigma$ , zwaną hodografem. Punktem toru rzeczywistego P, P'... odpowiadają odwzorowania Q, Q' ... Granicę :

$$\vec{p} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

nazywamy przyśpieszeniem punktu w chwili t, tzn. w położeniu P. Przyśpieszenie  $\vec{p}$  jest najoczywiściej styczne do hodografu

zatem z pewnością leży ono w płaszczyźnie ściśle stycznej toru rzeczywistego w każdej rozważanej chwili ; stąd wynika konstrukcja  $\vec{p}$  dla punktu P (rys.148.). Wymiarem przyśpieszenia jest np.

$\frac{cm}{sek^2}$ . Chcąc w pewnych wypadkach silniej zaakcentować jakość omówionych wielkości

$\vec{v}$  i  $\vec{p}$  mówimy niekiedy : prędkość linjowa i przyśpieszenie linjowe. Jeżeli w szczególnym przypadku tor punktu jest linią prostą, to nie tylko prędkość  $\vec{v}$ , ale i przyśpieszenie  $\vec{p}$  leżą na prostej toru. W przypadku toru krzywoliniowego wektor  $\vec{p}$  nigdy nie jest styczny do toru.

Obliczmy moment prędkości średniej  $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$  względem punktu O. Wynosi on

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \wedge \vec{r} ; \text{ jego wartość bezwzględna wynosi } \frac{\Delta r \cdot r \cdot \sin(\Delta\vec{r}, \vec{r})}{\Delta t} = 2 \frac{\Delta A}{\Delta t}, \text{ przyczem } \Delta A \text{ o-}$$

znacza pole trójkąta, zaznaczonego na rysunku 148., powstałego przez obrót wektora

$\vec{r}$ . Granicę połówki owego wyrażenia nazywać będziemy prędkością wycinkową  $\eta$  w chwili t. Zatem jest :

$$\eta = \frac{1}{2} \vec{v} \wedge \vec{r}$$

3. Analitycznie określimy położenie punktu i jego ruch współrzędne.

mi :  $x = x(t)$  ,  $y = y(t)$  ,  $z = z(t)$  ,

Niech wersorami kierunków  $x, y, z$  prostokątnego układu o początku w punkcie  $O$  będą wektory  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  to wtedy :  $\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ . Różniczkując powyższe względem  $t$  znajdujemy, że prędkość  $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$  ma składowe prostokątne :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad , \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

zwane prędkościami składowymi. Z teorii wektorów jest nam wiadomem, że owe składowe są równocześnie rzutami prędkości  $v$  na osie układu ; więc np. jest :  $v_x = v \cos \alpha$ ,  $v_y = v \cos \beta$ ,  $v_z = v \cos \gamma$ , jeśli  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  oznaczają nachylenia prostej  $v$  względem osi układu. Następne różniczkowanie dostarcza nam przyspieszeń składowych względnie rzutów przyspieszenia na kierunki osi układu :

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \dot{v}_x \quad , \quad p_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = \dot{v}_y \quad , \quad p_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} = \dot{v}_z$$

przyczem zachodzą związki :  $p_x = p \cos \lambda$ ,  $p_y = p \cos \mu$ ,  $p_z = p \cos \nu$ , jeśli  $\lambda, \mu, \nu$  określają kierunek przyspieszenia  $p$ . Możemy napisać : Prędkość, względnie przyspieszenie rzutu punktu na dowolną prostą jest rzutem prędkości względnie przyspieszenia tego punktu na ową prostą. W szczególności gdy punkt porusza się po krzywej płaskiej jest :

$$v_x = v \cos \alpha \quad , \quad v_y = v \sin \alpha \quad , \quad p_x = p \cos \lambda \quad , \quad p_y = p \sin \lambda$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad , \quad p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{p_y}{p_x}$$

W tym ostatnim wypadku łatwo jest napisać wyrażenie dla prędkości wycinkowej :

$$\eta = \frac{1}{2} (x \cdot v_y - y \cdot v_x) = \frac{1}{2} (x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x})$$

4. Rugując czas  $t$  z równań  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  możemy znaleźć równanie toru np. zapomocą dwóch powierzchni walcowych  $h(x, y) = 0, f(y, z) = 0$ . Określiwszy w ten czy inny sposób tor wystarczy jeszcze podać jedno równanie ruchu, by ten ostatni był w zupełności określony. Najwygodniej będzie określić którąś ze współrzędnych naturalnych np. długość odbytej drogi tj. długość łuku  $s$  toru jako funkcję czasu. W ten sposób ostatecznie ruch będzie określony następująco :

$$\text{tor} \quad , \quad s = s(t)$$

Ponieważ przy przejściu do granicy długości cięciwy, łuku i stycznej wzajemnie się pokrywają, przeto z ust. 2. wynika :

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$p_t = \dot{v}$$

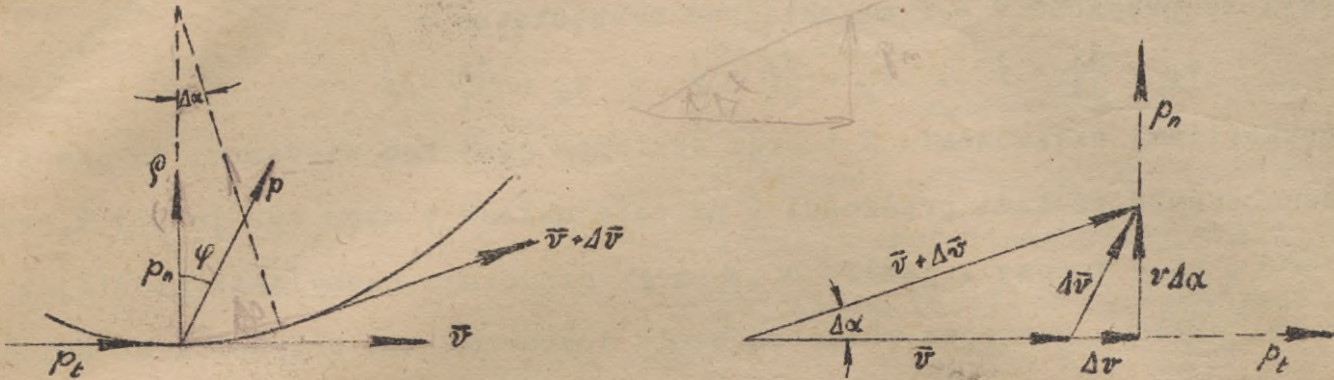
$$p_n = v \cdot \dot{\alpha}$$

prz. 4.

$$\dot{\alpha} = \frac{v}{r}$$

$$p_n = \frac{v^2}{r} = r \dot{\alpha}^2$$

w zależności od tego czy jest  $v$  dodatnie czy też ujemne widzimy, że punkt porusza się w kierunku rosnących lub malejących  $s$ , mierzonych oczywiście od jakiegoś ustalonego początku. Przyspieszenie  $p$  nachylone względem normalnej pod kątem  $\varphi$



Rys. 149.

rozłożymy na dwie składowe : styczną  $p_t$  i normalną  $p_n$ . Jest to dla nas o tyle korzystne, że - jak wiadomo - różniczkowanie wektora  $\vec{v}$  polega na podwójnej operacji a mianowicie na zmianie jego wartości algebraicznej bez zmiany prostej położenia i na zmianie położenia bez zmiany wielkości. Na rys. 149. zaznaczono dla przedziału  $\Delta t$  pierwszą zmianę na kierunku  $\vec{v}$  symbolem  $\Delta v$  i drugą do pierwszej prostopadłą równą oczywiście  $v \Delta \alpha$ . Owe zmiany są proporcjonalne do poszukiwanych przyspieszeń.

Zatem :

$$p_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad , \quad p_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = v \frac{d\alpha}{dt} = v \cdot \dot{\alpha}$$

ds : r = 4

Uważajmy  $\alpha$  jako funkcję  $s$ , to w ostatnim wyrażeniu można było napisać :

$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} v$  gdzie  $\frac{1}{\rho}$  jest krzywizną toru (drugą współrzędną naturalną). Wobec tego można też napisać :

$$p_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho \cdot \dot{\alpha}^2$$

Przyspieszenie całkowite wynosi :  $p = \sqrt{p_t^2 + p_n^2}$  ; pozatem jest  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_t}{p_n}$ . Jeśli tor punktu jest prosty, to  $\frac{1}{\rho} = 0$  czyli  $p_n = 0$  lub  $p = p_t = \dot{v}$ . Znalezienie wyrażenia dla prędkości wycinkowej nie ma tu specjalnego znaczenia.

5. Zdarzyć się może, że ruch punktu jest określony torem i diagramem ruchu.

W tym wypadku zamiast równania  $s = s(t)$  lub innego podobnego podany jest wprost obraz tego równania w prostokątnym układzie współrzędnych ; wykres taki może być

wykonanym np. na drodze doświadczalnej czy też na podstawie jakiejś umowy (rozkładu jazdy). Wtedy następujące się zagadnienie kinematyczne rozwiązujemy wykreślnie.

Na rys. 150. podano djagram  $(s, t)$ .

Nachylenie stycznej w dowolnej chwili wynosi :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ds}{dt} = v$$

Odcinając przeto  $\operatorname{tg} \alpha$  w odpowiedniej podziałce znajdziemy w tej chwili djagram prędkości  $(v, t)$ . W tym zaś jest :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dv}{dt} = p_t$$

skąd wynika djagram  $(p_t, t)$ . Naodwrot - niech będzie danym wykres ostatni. Elementarne pole, zaznaczone na rysunku wynosi  $p_t \cdot dt$  czyli  $dv$ . Planimetrując tedy pole wykresu między rzędnymi  $t = t_1$  i  $t = t_2$  znajdziemy zmiannę prędkości od chwili  $t_1$  do chwili  $t_2$ . Podobnie drogą planimetrowania wykresu  $(v, t)$  dojdziemy do zmiannę długości  $s$ .

Znając kształt toru możemy również prosto podać wykres  $(p_n, t)$  ; podobnie z wykresów  $(s, t)$  i  $(v, t)$  możemy skonstruować djagram  $(v, s)$  itp. W rozwinięciu tych graficznych metod rugowania

zmiennych, różniczkowania i całkowania nie wchodzimy.

Rys. 150.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \Delta v$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \Delta p_t$$

6. Niekiedy stosujemy dla zagadnień płaskich ruchu współrzędne

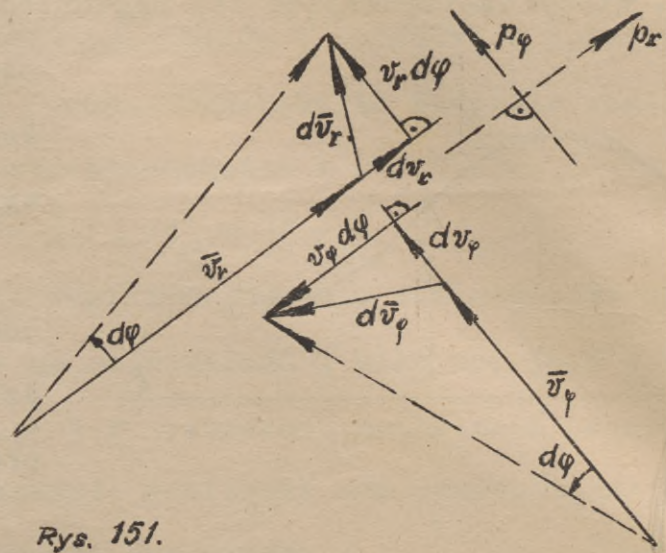
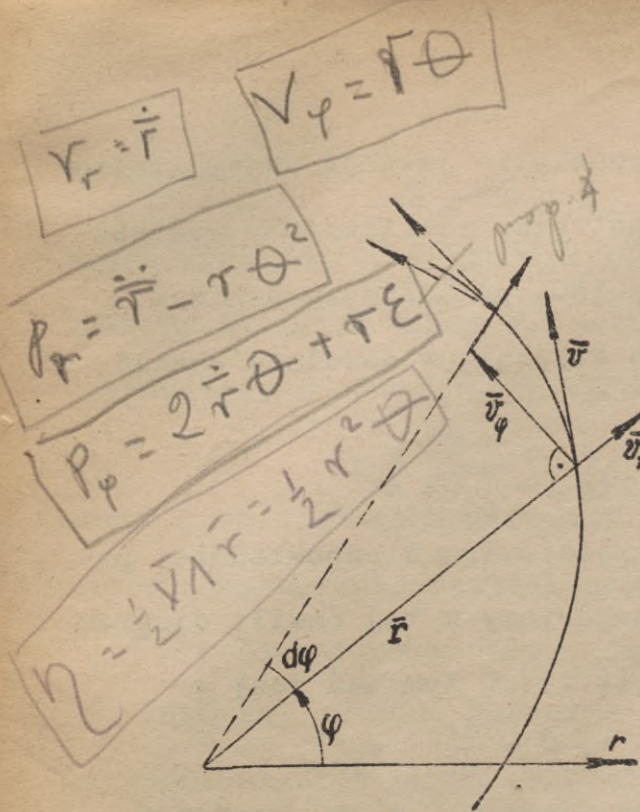
biegunowe  $(r, \varphi)$ . Położenie punktu określone jest wtedy współrzędnymi  $r = r(t)$

i  $\varphi = \varphi(t)$  (rys. 151). W tym wypadku korzystnym jest podać składowe prędkości

i przyspieszenia kierunku promienia i w kierunku doń prostopadłym. Najwidoczniej

jest wtedy

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi \quad , \quad \vec{p} = \vec{p}_r + \vec{p}_\varphi$$



Rys. 151.

Algebraiczne wartości poszukiwanych składowych są :

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad , \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}$$

$$p_r = \frac{dv_r}{dt} - v_\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \ddot{r} - v_\varphi \dot{\varphi} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \quad , \quad p_\varphi = v_r \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dv_\varphi}{dt} = v_r \dot{\varphi} + \dot{v}_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$

Przy dowodzeniu powyższego należy skorzystać z rys.151. i uwag o różniczkowaniu wektora, zamieszczonych w ust.4. Prędkość wycinkowa wynosi  $\eta = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$ .

7. Zagadnienia kinematyczne mają naogół dwojaki charakter ; równania ruchu mogą mianowicie wynikać z rozważań dynamicznych lub też czysto geometrycznych (teorie mechanizmów). Kilka przykładów z grupy drugiej podamy za chwilę .Odnośnie do grupy pierwszej uprzedzając wypadki możemy dodać, że rozważania dynamiczne prowadzą najczęściej do określenia przyspieszenia jako pewnej funkcji. Nasuwają się następujące proste możliwości :

A) Ruch prostolinijny .

a)  $p = 0$ . Wtedy całkując równanie  $p = \dot{v} = 0$  znajdujemy

$v = v_0 = \text{constans} = \dot{s}$  nadto  $s = s_0 + v_0 t$ . Ruch tego rodzaju nazywamy jednostajnym. Wielkości  $v_0$  i  $s_0$  są stałymi całkowania, określonymi warunkami brzegowymi zadania.

b)  $p = p_0 = \text{constans}$ . Znajdujemy drogą całkowania :

$v = v_0 + p_0 t$ , nadto  $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} p_0 t^2$ . Ruch rozpatrywany nazywamy jednostajnie zmiennym.

c)  $p = p(t)$ . Całkując znajdujemy  $v = v(t)$  nadto  $s = s(t)$ . Ruch obecny nazywamy krótko zmiennym.

d)  $p = p(s)$ . Korzystamy z przekształcenia  $p = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} =$

$= \frac{dv}{ds} \cdot v$ . Zatem  $p(s) = v \frac{dv}{ds}$  lub  $v dv = p(s) ds$ . Całkując znajdujemy :

$$v^2 = v_0^2 + 2 \int p(s) ds \text{ czyli } v = v(s) = \dot{s} = \frac{ds}{dt}. \text{ W dalszym ciągu mamy : } dt = \frac{ds}{v(s)} \text{ czyli}$$

$$t = \int \frac{ds}{v(s)} = t(s). \text{ Odwracając ostatni wynik mamy : } s = s(t) \text{ a zatem i } v = v(t),$$

$$p = p(t).$$

e)  $p = p(v)$ . Całkujemy równanie  $p(v) = \frac{dv}{dt}$  ; zatem  $t = \int \frac{dv}{p(v)} = t(v)$

lub  $v = v(t)$ . Z ostatniego całkując znajdujemy  $s = s(t)$ .

f) Pomijając wszelkie inne możliwości podajemy wypadek najogólniejszy :

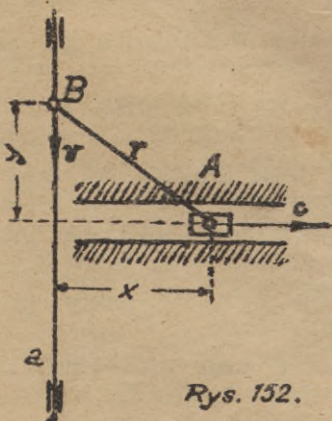
$p = p(v, s, t)$ . W tym wypadku stoimy przed równaniem różniczkowym :

$f(\ddot{s}, \dot{s}, s, t) = 0$  , którego sposób rozwiązania zależy jest od konkretnej formy równania i warunków brzegowych.

### B. Ruch krzywoliniowy.

Mogą tu zajść wypadki podane pod A), przy czym w miejsce  $p$  wejdzie w rachubę przyspieszenie styczne  $p_t = \dot{v} = \ddot{s}$ . Przyspieszenie normalne jest niewiadomą dodatkową, wynikającą z kształtu toru i sposobu zmian prędkości. W dużej ilości wypadków wygodniej będzie zamiast współrzędnych naturalnych użyć współrzędnych prostokątnych. Zarówno w grupie A jak i B dużą rolę odgrywają ruchy okresowe tj. powtarzające się w równych przedziałach czasu.

### Przykłady ćwiczeń.



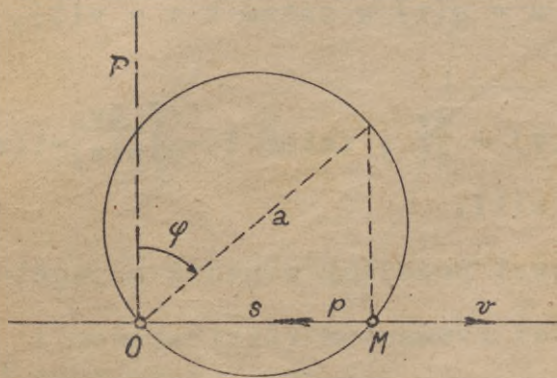
Rys. 152.

1. Punkt A prowadzony jest poziomo ze stałą prędkością  $c$ . Ile wynosi prędkość  $v$  i przyspieszenie  $p$  pręta  $a$  ?

Odp. : Prędkość pręta jest równą prędkości punktu B. Najwidoczniej jest  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Różniczkując względem  $t$  znajdujemy :  $\dot{y} = v = - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot \dot{x} = - \frac{x}{y} c$ . Jeśli jest  $x > 0$  i  $y > 0$  (jak na rys.152) to jest  $v < 0$  czyli

v ma kierunek malejących y. Różniczkując drugi raz znajdziemy :  $\ddot{y} = \dot{v} = p = -\frac{r^2}{y^3}$  (2).

2. Koło o średnicy a, w chwili początkowej styczne do prostej w punkcie O (rys.153) obraca się jednostajnie dookoła O. Określić ruch drugiego punktu przecięcia M ze stałą prostą.



Rys. 153.

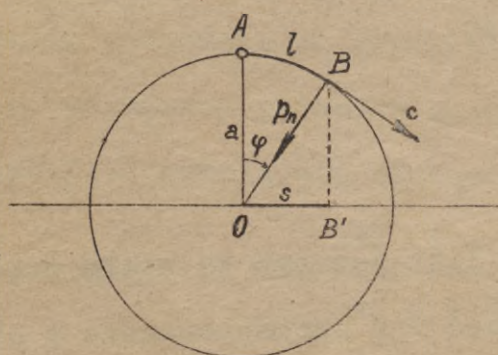
punktu przecięcia M ze stałą prostą.

Odp. : Zadanie rozumieć należy tak, że  $\varphi$  zmienia się jednostajnie z czasem tj., że  $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega = \text{const}$ . W dowolnej chwili jest  $s = a \cdot \sin \varphi$ . Różniczkując znajdujemy  $\dot{s} = v = a \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = a \cdot \omega \cdot \cos \varphi$ . Następne różniczkowanie dostarcza przyspieszenia :  $\ddot{s} = \dot{v} = p = -a \omega \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = -a \omega^2 \sin \varphi$ . Charakterystyczny dla zadania fakt wynika z obecności funkcji trygonometrycznej. Badany ruch jest ruchem okresowym. Z równań na s i p wynika związek :  $p = -\omega^2 s$ ; jest to równanie różniczkowe ruchu harmonicznego.

h a r m o n i c z n e g o .

3. Zbadać ruch jednostajny punktu po kole i jego rzut na średnicę.

Odp. : Niech w chwili początkowej punkt znajduje się w A, w chwili dowolnej w B (rys.154). Położeniom tych odpowiadają O i B'. Droga po kole wynosi  $l = c \cdot t = a \varphi$  czy



Rys. 154.

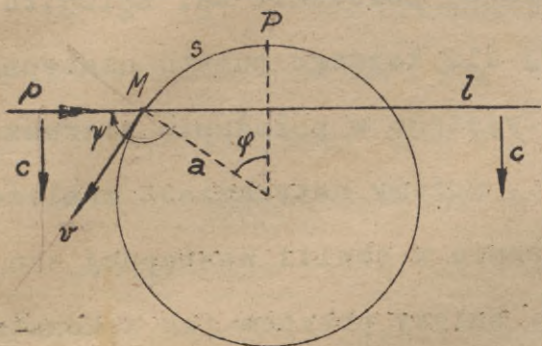
li  $\varphi = \frac{c}{a} t = \omega t$ , jeśli krótko  $\frac{c}{a} = \omega$ . Droga po prostej wynosi  $s = a \cdot \sin \varphi = a \cdot \sin \omega t$ . Prędkość po kole jest stała i wynosi c. Prędkość ruchu po prostej v jest rzutem prędkości c tj. wynosi ona :

$v = c \cdot \cos \varphi = a \omega \cos \omega t$ ; ten sam rezultat otrzymamy różniczkując s. Przyspieszenie ruchu po kole

ma tylko składową normalną  $p_n = \frac{c^2}{a}$ ; rzut tego przyspieszenia jest ujemny (ma kierunek malejących s) i wynosi  $p = -p_n \sin \varphi = -a \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 s$ ; ten sam rezultat znajdziemy różniczkując v. Ruch po prostej jest najwidoczniej ruchem harmonicznym.

$v = r\dot{\theta}$

4. Prosta  $l$  przesuwa się równolegle ze stałą prędkością  $c$  przecinając stałe koło w punkcie  $M$  (rys.155). Zbadać ruch punktu  $M$  po kole.



Rys. 155.

Odp. : Prędkość  $v$  jest styczną do koła ; jej składową jest  $c$  ; zatem  $v = \frac{c}{\sin\varphi}$  . Z drugiej strony zaś jest  $s = a\varphi$  czyli  $v = \dot{s} = a\dot{\varphi}$  ; z porównania mamy  $\dot{\varphi} = \frac{dv}{dt} = \frac{c}{a} = \frac{c}{a \cdot \sin\varphi}$  . Przyspieszenie normalne wynosi  $p_n = \frac{v^2}{a} = \frac{c^2}{a \cdot \sin^2\varphi}$  . Przyspieszenie styczne wynosi  $p_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = -\frac{c}{\sin^2\varphi} \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} = -\frac{c^2}{a} \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$  . Przyspieszenie całkowite wynosi :  $p = \sqrt{p_n^2 + p_t^2} = \frac{c^2}{a} \cdot \frac{1}{\sin^3\varphi}$  ; odchylenie jego  $\psi$  od normalnej wynika z równania :  $\operatorname{tg}\psi = \frac{p_t}{p_n} = -\operatorname{cotg}\varphi$  skąd  $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$

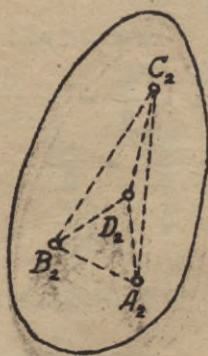
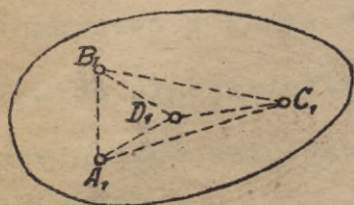
zatem przyspieszenie  $p$  leży na kierunku prostej  $l$  .

5. Jeśli przyspieszenie punktu poruszającego się przechodzi stale przez ustalony punkt przestrzeni, to ruch dany nazywamy środkowy. Zbadać tego rodzaju ruch biorąc pod uwagę wyrażenie wektorjalne prędkości wycinkowej.

Odp. : Prędkość wycinkowa wynosi  $\vec{\eta} = \frac{1}{2} \vec{v} \wedge \vec{r}$  (ust.2.). Ponieważ definicja ruchu tkwi w równoległości  $\vec{p}$  i  $\vec{r}$  , przeto najprościej będzie różniczkować  $\vec{\eta}$  . Otóż  $\dot{\vec{\eta}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{v}} \wedge \vec{r} + \frac{1}{2} \vec{v} \wedge \dot{\vec{r}}$  ; lecz  $\dot{\vec{v}} = \vec{p}$  , zaś  $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$  zatem  $\dot{\vec{\eta}} = \frac{1}{2} \vec{p} \wedge \vec{r} + \frac{1}{2} \vec{v} \wedge \vec{v} = 0$  , albowiem jest  $\vec{p} \parallel \vec{r}$  i  $\vec{v} \parallel \vec{v}$  . Skoro jednakże  $\dot{\vec{\eta}} = \frac{d\vec{\eta}}{dt} = 0$  , to  $\vec{\eta} = \text{constans} = \frac{\vec{c}}{2}$  . Zważywszy na wektorjalną formę ostatniego rezultatu możemy podać następujące cechy ruchu środkowego : Prędkość wycinkowa ruchu środkowego jest stałą tzn. promień wodzący  $r$  , wychodzący ze środka ruchu (środku przyciągania lub odpychania) zakreśla w równych dowolnych odstępach czasu równe pola ; normalna do prędkości  $v$  i promienia  $r$  zachowuje stałe położenie w przestrzeni tzn. ruch środkowy odbywa się zawsze po krzywej płaskiej. Można wykazać i na odwrót, że skoro powyższe cechy są spełnione, to przyspieszenie  $p$  leży zawsze na promieniu wodzącym  $r$  . Bliższe cechy ruchu zależą oczywiście od charakteru zmienności przyspieszenia. Szczególne znaczenie ma ruch, w którym zachodzi relacja  $p = -\frac{k}{r^2}$  , gdzie  $k$  jest stałą .

§.2. Kinematyka ciała sztywnego.

1. Aby określić ruch ciała sztywnego wystarczy wziąć pod uwagę ruch tylko trzech punktów tego ciała, więc np. punktów A, B i C (rys.156). Niech bowiem owe punkty w pewnej chwili zajmują położenie  $A_1, B_1, C_1$  a w innej położenie  $A_2, B_2, C_2$ , to naj-



Rys 156.

widoczniej dla każdego punktu następnego D, E, ..., przyjętego w położeniu pierwszym  $D_1, E_1, \dots$  możemy natychmiast znaleźć jego położenie w chwili następnej tzn.  $D_2, E_2, \dots$ . Należy przytem jak z konstrukcji wynika przyjąć A, B, C nie na jednej prostej ; przy poszukiwaniu punktów na -

stępnych należy wykluczyć dwuznaczność tj. baczyc, by obieg  $A_2B_2D_2$  był identyczny z  $A_1B_1D_1$ ,  $B_2C_2D_2$  z  $B_1C_1D_1$  i  $C_2A_2D_2$  z  $C_1A_1D_1$ . Rozumowanie tu przeprowadzone polega na założeniu, że ciało jest sztywne tzn. że odległości wzajemne wybranych punktów nie ulegają żadnej zmianie podczas ruchu. Zamiast trzech punktów można przyjąć jeden punkt O i dwie przezeń proste najlepiej wzajemnie prostopadłe x i y ; dla zupełności ( nie zaś z powodu konieczności ) przyjmujemy wtedy i trzecią oś z do tamtych prostopadłą. Między dziewięcioma współrzędnymi trzech punktów względnie między dziewięcioma dostawami kierunkowemi osi x, y, z, połączonych niezmiennie z ciałem istnieją trzy warunki odległościowe względnie sześć warunków kierunkowych. Zatem ruch ciała sztywnego określa sześć niezależnych współrzędnych analitycznych jako funkcyj np. czasu, mianowicie w pierwszym wypadku sześć długości, w drugim trzy długości i trzy kierunki. W metodzie wektorjalnej między trzema wektorami określającymi położenie trzech punktów względnie jednego punktu i przechodzących przezeń dwóch kierunków istnieją dwa związki niezależne tak, że tylko jeden z wektorów można dobrać dowolnie a następne częściowo lub całkowicie należy od niego uzależnić. Tory trzech punktów ciała sztywnego nazywamy kierownicami ruchu. Zatem możemy też powiedzieć, że ruch ciała jest

$$s = r \cdot \varphi$$

$$v = r \cdot \dot{\varphi}$$

$$p = r \cdot \ddot{\varphi}$$

znany, gdy wiadome nam są kierownice trzech punktów. Zachodzi pytanie czy z pośród wszelkich możliwych ruchów nie dadzą się wyodrębnić takie, dla których podane warunki uproszczą się.

2. Przedewszystkiem nasuwa się ruch, w którym kierownice wszystkich punktów są krzywymi równoległymi. Ruch tego rodzaju nazywamy postępowym. Z powyższej definicji wynika, że prędkości wszystkich punktów są równe i równoległe. Innymi słowy do określenia ruchu postępowego wystarczy znać położenie początkowe ciała i ruch jednego jego punktu. Poprostu do rozpatrywania ruchu postępowego wystarczają znajomości §.1. tj. kinematyki punktu, więc w szczególności dyskutowany ruch określają w zupełności trzy współrzędne jako funkcje czasu. Jeśli w szczególności kierownice ruchu są prostymi, to tego rodzaju ruch postępowy nazywamy przesunięciem. Ruch postępowy możemy przeto uważać za ruch złożony z kolejno po sobie następujących przesunięć o różnych kierunkach.

3. Przy określonym kształcie kierownicy ruch postępowy jest sprecyzowany jednym równaniem np. typu  $s = s(t)$  lub  $v = v(t)$  lub  $p_t = p_t(t)$  itp. Istnieje inny zupełny ruch, który można określić równie prosto i krótko. Przyjmijmy mianowicie, że dwie kierownice ruchu zredukowały się do punktów; z określenia sztywności wynika, że wtedy istnieje cała prosta punktów nie poruszających się; prostą tę, łączącą oba wyżej podane punkty, nazywamy osią obrotu, a dany ruch obrotowym. Trzeci punkt ciała i każdy następny nie leżący na osi obrotu może poruszać się najwidoczniej tylko po kole, położonem w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu, z określonym z punktu przebicia osi i owej płaszczyzny jako środka. Na rys. 157. zaznaczono tor punktu oddalonego o  $\rho$  od osi obrotu. Droga  $PQ$  tegoż punktu wynosi

$$s = \rho \cdot \varphi$$

Z różniczkowania względem t wynika

$$v = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$v = \rho \cdot \dot{\varphi} = \rho \cdot \omega$$

$$p_t = \rho \cdot \ddot{\varphi} = \rho \cdot \dot{\omega} = \rho \cdot \epsilon$$

$$\sigma = \rho \cdot \omega$$

$\frac{s}{\rho} = \varphi$   $s = \rho \varphi$

Rot.  
Kierunek zgodny z  
wzrostem t  
Miarę kąta  $\varphi$

$$p_n = \frac{v^2}{r} = r \dot{\theta}^2$$

$$v = r \dot{\theta}$$

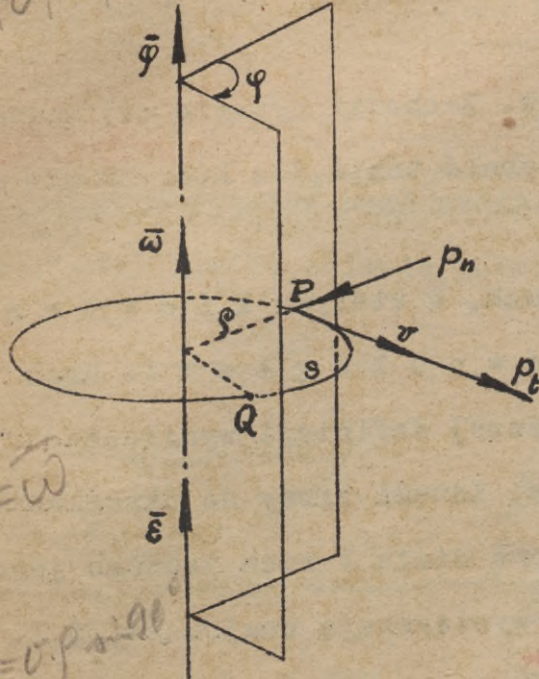
Wielkości  $s, v, p_t$  określają ruch nie tylko punktu  $P$ , ale wogóle każdego innego, oddalonego od osi obrotu o długość  $\rho$ . Weźmy pod uwagę wielkości nowo wprowadzone

$$\varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \varepsilon$$

Najwidoczniej określają one ruch wszystkich punktów ciała czyli ruch całego ciała. Współrzędna  $\varphi$  określa obrót dowolnie przez oś obrotu pomyślanej płaszczyzny; możemy ją uważać za wektor  $\vec{\varphi}$ , położony na osi obrotu;  $\varphi$  jest niemianowane. Wielkość  $\omega$  będziemy nazywać prędkością kątową; jej wymiarem jest  $\frac{1}{\text{sek}}$ . Wielkość  $\varepsilon$  jest przyspieszeniem kątowym;

jego wymiarem jest  $\frac{1}{\text{sek}^2}$ . Obie te wielkości możemy również uważać za wektory, leżące na osi obrotu. Wielkościom linjowym  $s, v, p_t$  odpowiadają kolejno  $\varphi, \omega, \varepsilon$ , niezależne od  $\rho$ . Przyspieszenie normalne  $p_n = \frac{v^2}{\rho}$  nie ma tu odpowiednika, albowiem zależne jest ono od  $\rho$ ; możemy je tu natomiast z korzyścią przekształcić kładąc  $v = \rho \cdot \omega$ ; wtedy jest  $p_n = \rho \cdot \omega^2$ . Nie trudno jest na podstawie ust. 7. §. 1. podać kilka przykładów ruchu obrotowego. Tak np. jeśli  $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t$ , to  $\omega = \omega_0 = \text{constans}$ ,  $\varepsilon = 0$ ; tego rodzaju wypadek przedstawia ruch, obrotowy jednostajny. W tym wypadku w technice chętnie wprowadza się pojęcie ilości obrotów na minutę  $n$ . Najwidoczniej jest  $\omega = \frac{n\pi}{30} \cdot \frac{1}{\text{sek}}$ . Gdy jest  $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon_0 t^2$ , to wtedy  $\omega = \omega_0 + \varepsilon_0 t$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$  a ruch podany jest obrotowym jednostajnie zmiennym. Gdy równanie ruchu brzmi  $\varepsilon = \ddot{\varphi} = -k^2 \varphi$ , to ruch jest harmonicznym okresowym. Wogóle do wszelkich typów przesunięć można przez prostą zmianę oznaczeń dobrać odpowiednie typy obrotów. Z powyższych powodów oba ostatnio wymienione ruchy odgrywają w kinematyce ciała bardzo ważną rolę. Nasuwa się pytanie czy wobec tego nie byłoby rzeczą pożądaną z każdego innego ruchu wyodrębnić przedewszystkiem przesunięcie i obrót, a później dopiero zastanowić się nad pozostałą resztą; okaże się że u ciał sztywnych owej reszty wogóle niema.

SVP  
φ ω ε



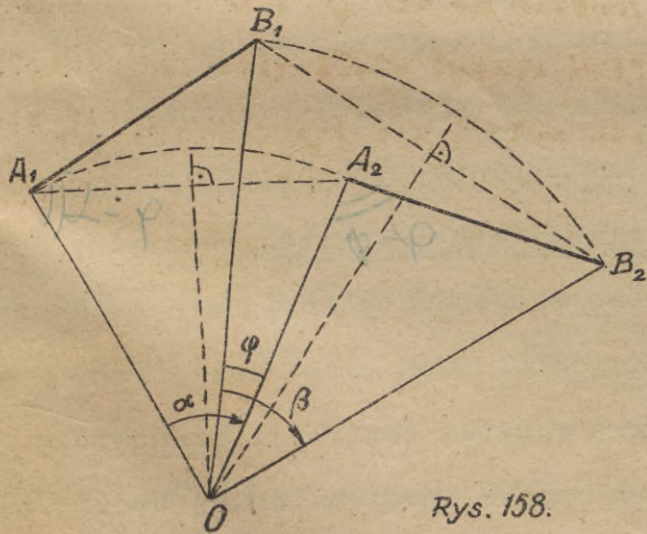
Rys. 157.

$\vec{\omega} = \dot{\varphi}$   
 $\frac{v}{\rho} = \omega$   
 $\frac{p_n}{\rho} = \omega^2$

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$$

$$p_t = \frac{dv}{dt} = \rho \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \rho \varepsilon$$

4. Jeśli kierownice trzech punktów ciała leżą w płaszczyznach wzajemnie równoległych, to ruch ciała nazywamy posuwistym lub plaskim. Którąkolwiek z płaszczyzn wymienionych nazywać będziemy kierującą. Z powyższego wynika, że punkty ciała położone w płaszczyźnie kierującej nadal w niej w czasie ruchu będą się znajdować. Weźmy pod uwagę właśnie takie punkty ciała, to najwidoczniej wystarczy ich przyjąć tylko dwa, albowiem punkt trzeci ustala dwa oddalenia i warunek nakazujący szukać tego punktu w płaszczyźnie przyjętej. Zatem ruch posuwisty określają ruchy dwóch punktów ciała, czyli dwie kierownice ruchu, tj. trzy niezależne od siebie współrzędne jako funkcje np. czasu; czwarta współrzędna odpada z powodu obecności warunku wiążącego oba punkty. Weźmy pod uwagę dwa punkty A i B ciała w położeniach  $A_1, B_1$  i  $A_2, B_2$  oddzielonych skończonym interwałem czasu i spróbujmy, czy będzie możebnym przemieścić ciało z jednego położenia w drugie za pomocą jednego obrotu. W tym celu znajdziemy punkt przecięcia O symetralnych odcinków  $A_1A_2$  i  $B_1B_2$

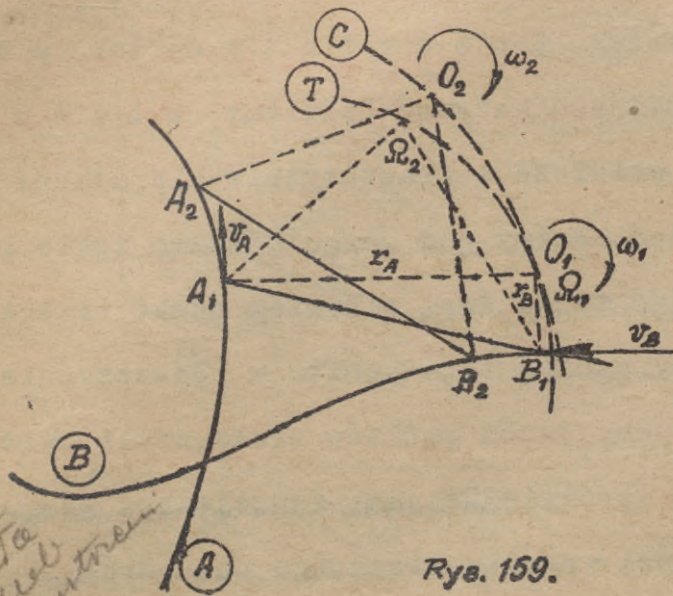


Rys. 158.

ciała O symetralnych odcinków  $A_1A_2$  i  $B_1B_2$  (rys. 158) i przezń przesunemy prostopadle do płaszczyzny kierującej (tzn. rysunku) oś obrotu. Jeśli punkt O jest faktycznie punktem osi obrotu, to musiałyby być  $\alpha = \beta$  tzn. musiałyby punkt  $B_1$  zająć położenie  $B_2$  równocześnie z tą chwilą gdy  $A_1$  będzie w  $A_2$ . Otóż tak faktycznie jest; albowiem w trójkątach przystających  $OA_1B_1$  i  $OA_2B_2$  są kąty

w wierzchołkach O wzajemnie równe i wynoszą one  $\alpha - \varphi$  względnie  $\beta - \varphi$ ; z równości  $\alpha - \varphi = \beta - \varphi$  wynika  $\alpha = \beta$ . Należy z naciskiem podkreślić następujące: ruch rzeczywisty ciała nie był w rozważanym przypadku wogóle obrotem; wykazaliśmy tylko, że dwoma różnymi ruchami można osiągnąć ten sam efekt końcowy. Nieco inaczej przedstawia się sprawa, jeśli pod uwagę weźmiemy ruch chwilowy ciała, tzn. ruch odpowiadający przedziałowi czasu  $dt$ . Wtedy ruch po kole czy po dowolnej krzywej zmierz do tej samej granicy  $ds$ , określonej tą samą wartością prędkości  $\frac{ds}{dt} = v$ . Na ry-

sunku 159. zaznaczono kierownice A i B i ciało w położeniach  $A_1, B_1$  i sąsiadującym



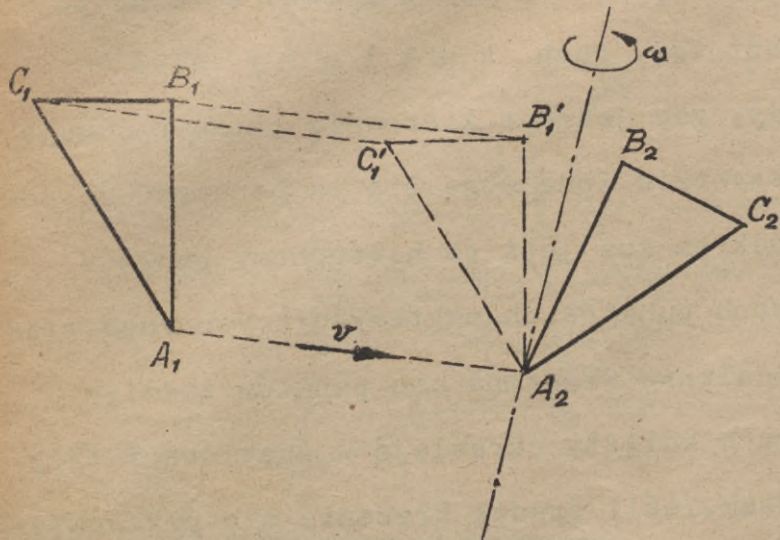
Rys. 159.

cem  $A_2, B_2$ . Symetralne rys. 158. przeszły tu na normalne, wykreślone w  $A_1$  i  $B_1$ ; normalne te wyznaczają oś obrotu  $O_1$  i promienie wodzące  $r_A$  i  $r_B$ . W chwili rozważanej prędkości punktów A i B wynoszą  $v_A = r_A \cdot \omega_1$  i  $v_B = r_B \cdot \omega_1$ . W czasie aproksymowania rzeczywistego ruchu posuwistego ruchem obrotowym ciało będzie zmieniać swe położenie zatem w konsekwencji oś obrotu chwilowe-

go będzie się równolegle przesuwać z położenia  $O_1$  do  $O_2$  itd. ; równocześnie i  $\omega$  będzie zmieniać swą wartość. Miejszem geometrycznym osi chwilowych obrotów jest powierzchnia walcowa o kierownicy C zwana walcem centralnym stałym. Wyobraźmy sobie, żeśmy w czasie ruchu ciała zaznaczali (np. szpilką) każdorazową oś obrotu w ten sposób, że uchwyciliśmy nietylko ślady tych osi na stałej płaszczyźnie kierującej, ale i na ruchomym ciele ; miejszem geometrycznym tych ostatnich będzie również powierzchnia walcowa o tworzących  $\Omega$  a mianowicie tzw. walec centralny ruchomy ( T ) . W każdej chwili ruchu, któraś z tworzących  $\Omega$  pokrywa się z odnośną prostą O, na rys. 159. Stan taki odnosi się właśnie do  $O_1$  i  $\Omega_1$  ; za chwilę inny punkt ciała mianowicie  $\Omega_2$  pokryje się odpowiednim punktem centrodi mianowicie  $O_2$ . W tej chwili nastąpi znów obrót dookoła  $O_2$  i proces omawiany dalej będzie zachodził. Punkt  $\Omega_2$  dla położenia  $A_1 B_1$  znajdziemy konstruując na podstawie  $A_1 B_1$  trójkąt  $A_2 B_2 O_2$ . Długości  $\widehat{O_1 O_2}$  i  $\widehat{\Omega_1 \Omega_2}$  są najoczywiściej wzajemnie równe. Tego rodzaju ruch, w którym dwa ciała stykają się wzdłuż jakichś krzywych i nawiająją względnie odwijają wzajemnie na owych krzywych równe długości nazywamy toczeniem się ciał. Zatem możemy zrezygnować przy ruchu płaskim z kierownic ruchu ; ruch płaski możemy wywołać tocząc walec centralny ruchomy ( ciała ) po walcu centralnym stałym. Z ruchem płaskim stykamy się bardzo często w rozmaitych mechanizmach niekiedy bardzo prostych jak np. konstrukcja " papierkowa " elipsy itp.

5. Drugim z kolei ruchem, który możemy aproksymować kolejno po sobie następującymi obrotami chwilowymi jest tzw. ruch kulisty albo kręcenie się. Mówimy o nim wtedy, gdy jedna z kierownic ruchu redukuje się do punktu. Dwa pozostałe punkty  $a$  i wszystkie inne mogą się tu poruszać po powierzchniach współśrodkowo-kulistych; środkiem kul jest ów nieruchomy punkt - środek kręcenia się. Sześć współrzędnych dwóch punktów, charakteryzujących ruch, wiąże trzy warunki wiążące tj. określające oddalenie wzajemne obu punktów tudzież oddalenia ich punktu nieruchomego. Zatem ruch kulisty określają w zupełności trzy współrzędne niezależne jako funkcje np. czasu. Jeśli środek kręcenia się przesuniemy do nieskończoności, to otrzymamy w rezultacie ruch posuwisty jako szczególny wypadek obecnie traktowanego ruchu. Należy wobec tego przypuszczać, że cały szereg rezultatów ust. 4. będzie można tutaj odwzorować. Istotnie tak jest. Czytającemu pozostawia się dowiedzenie następującego twierdzenia: Ciało znajdujące się w ruchu kulistym można przemieścić z jednego położenia w drugie za pomocą jednego obrotu dokoła prostej, przechodzącej przez środek kręcenia się. Wystarczy wykazać, że prosta taka wogóle istnieje, by stwierdzić, że ruch chwilowy ciała jest rzeczywiście wymienionym obrotem chwilowym. Osie chwilowe utworzą w przestrzeni stożek centralny stały - w ciele stożek centralny ruchomy; oba stożki mają najoczywściej wspólny wierzchołek w środku ruchu. Zatem ruch kulisty ciała jest wywołany toceniem się stożka centralnego ciała po stożku centralnym stałym.

6. Pozostaje do omówienia ruch ogólny ciała tj. ruch posiadający ogólne cechy charakterystyczne, omówione w ust. 1. W ruchu omawianym można ciało przemieścić z jednego położenia w drugie za pomocą jednego określonego przesunięcia i jednego określonego obrotu i to na nieskończenie wiele sposobów. Powstająca w ten sposób pozorna dowolność nie powinna być niewłaściwie rozumiana. Przesunięcie wykonać należy tak, by któryś z punktów ciała w położeniu pierwszym pokrył się z tym samym punktem ciała w położeniu drugim np. punkt  $A$  na rysunku 160. Gdy to zostanie przeprowadzone, to pozostała część ruchu jest oczywiście ruchem kulistym tzn. obrotem dokoła prostej, przechodzącej przez  $A_2$ , a więc nie do-



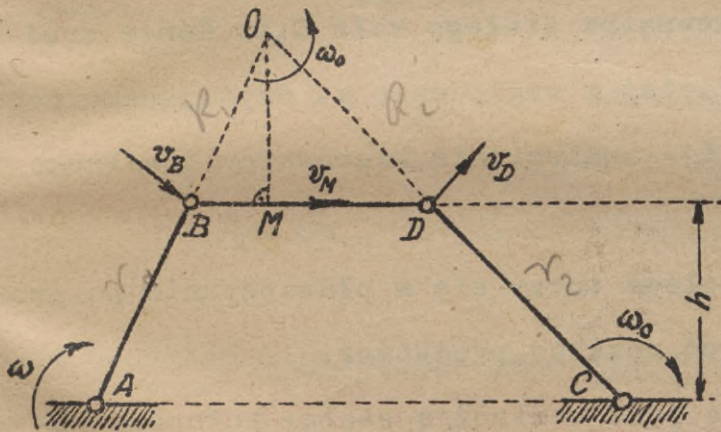
Rys. 160.

wolnej. Najwidoczniej wartości i kierunku przesunięć mogą być najrozmaitsze zależnie od wyboru punktu ciała. Osie obrotu będą w zależności od powyższego przechodziły również przez różne punkty. Natomiast ciekawem jest, iż niezależnie od powyższego postępowania każdorazowe osie obrotu są wzajemnie do siebie równoległe; dowód powyższego podamy w następnym paragrafie. Jeśli jednakże tak jest, to z pośród wszelkich możliwych

kombinacji przesunięć i obrotów możemy wybrać jedną ze specjalnych najprościej taką, w której przesunięcie jest równoległe do osi obrotu. Wypada przytem dodać, że obojętną jest rzeczą, czy za punkt ciała uważamy jakiś faktycznie istniejący jego punkt czy też punkt nieistniejący, któryśmy w myśli do ciała (sztywnie) dołączyli; tego rodzaju operacja będzie niekiedy konieczną z powodu przyjęcia zgóry kierunku przesunięcia. Operacja dotychczas opisywana jest czysto geometryczną; jej kinematyczna strona tkwi w wielkości prędkości przesunięcia  $v$  i prędkości obrotu  $\omega$ . Jeśli stosunek  $f = \frac{v}{\omega}$  jest stałym w czasie ruchu ciała, to ruch złożony z obrotu i równoległego przesunięcia nazywamy skrętem lub ruchem śrubowym;  $f$  jest w skaznikiem skrętu. Ruch rzeczywisty ciała nie musi być wogóle ruchem dyskutowanym; ale chwilowy ruch ogólny ciała jest z pewnością skrętem chwilowym, a ruch ogólny w całości składa się z kolejno po sobie następujących skrętów chwilowych. Miejscem geometrycznym osi chwilowych obrotu i przesunięcia jest powierzchnia (prostokreślna) centralna-stała w przestrzeni i ruchoma w ciele. Ruch ogólny ciała wywołać można toczeniem się wraz z prostopadkiem do kierunku toczenia poślizgiem powierzchni ruchomej po powierzchni stałej. Odnośnie do ruchu śrubowego wypada podkreślić, że zarówno prędkość przesunięcia  $v$  jak i prędkość obrotu  $\omega$  są w danej chwili wspólne dla wszystkich punktów ciała; wynika to z definicji obu ruchów. Kąt nachylenia stycznej do toru jednego z punktów ciała

względem osi ruchu wynosi  $\frac{\pi}{2} - \alpha_i$  przyczem jest  $\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{v}{\rho_i \omega}$ , jeśli  $\rho_i$  oznacza oddalenie tego punktu od osi. Po jednym pełnym obrocie punkt przesunie się równolegle do osi o k r o k ( s k o k )  $h = 2\rho_i \pi \operatorname{tg} \alpha_i = 2\pi \frac{v}{\omega} = 2\pi f$  tj. o wielkość od  $\rho_i$  niezależną; powyższe jest jasne albowiem ruch równolegle do osi faktycznie od  $\rho_i$  musi być niezależny. Wracając do końcowej uwagi ust. 3-go stwierdzamy jej słuszność; wykazaliśmy na drodze czysto geometrycznej, że najogólniejszy ruch można rozłożyć tylko najwyżej na dwa ruchy składowe różnego typu. Stwierdzimy to jeszcze wyraźniej za chwilę. Postąpimy mianowicie odwrotnie; będziemy się starali znaleźć konstrukcję składania ruchów.

Przykłady ćwiczeń.



Rys. 161.

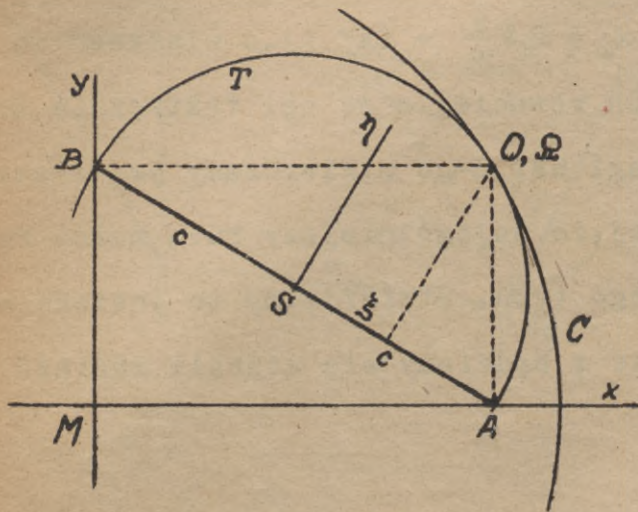
1. Dla układu trzech prętów jak na rysunku 161. daną jest prędkość kątowa  $\omega_A = \omega$ . Znaleźć prędkość  $\omega_c$  tudzież położenie tego punktu M, którego prędkość  $v_M$  ma kierunek łącznika.

Odp. : Rozpatrywany ruch jest płaskim; w szczególności pręty AB i CD znajdują się w ruchu obrotowym, natomiast BD w ruchu posuwistym. Opierając się na ruchu obrotowym widzimy, że prędkości  $v_B$  i  $v_D$

są prostopadłe do kierunków korb. Wykreślając normalne do tych prędkości (tzn. do kierownic) znajdujemy środek obrotu chwilowego O łącznika. Wobec tego mamy:  $v_B = \overline{AB} \cdot \omega$ ,  $\omega_c = \frac{v_B}{\overline{BO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \omega$ ,  $v_D = \overline{DC} \cdot \omega_c = \overline{DC} \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \omega$ , i wreszcie  $\omega_c = \frac{v_D}{\overline{CD}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \cdot \omega$ ; lecz z powodu równoległości  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  jest  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{DO}}$  czyli  $\frac{\overline{DC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} = 1$  tak, że ostatecznie  $\omega_c = \omega = \omega_A$ . Wykreślmy z O prostopadłą do BD to znalezione w ten sposób M jest poszukiwanym punktem; dla niego jest:  $v_M = \overline{OM} \cdot \omega_c = \overline{OM} \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \cdot \omega$ ; lecz  $\frac{\overline{AB}}{h} = \frac{\overline{BO}}{\overline{OM}}$  zatem  $v_M = h \omega$ .

2. Ciało AB porusza się tak, że A porusza się stale po prostej x,

a B po prostej y. Znaleźć centroidę stałą i ruchomą.

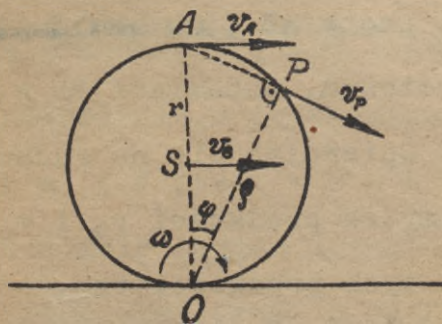


Rys. 162.

$\xi^2 + \eta^2 = c^2$ ; zatem centroidą ruchomą jest koło o promieniu  $c$ , zakreślone ze środka w S. Jeśli koło T będzie się toczyć wewnątrz stałego koła C, to końce średnicy tj. punkty A i B będą posuwać się po prostej x względnie y. Czytającemu pozostawia się udowodnienie konstrukcji elipsy, tj. znalezienie kierownicy dowolnego punktu odcinka AB.

Odp. : W stałym układzie  $x, y$  ma oś chwilowa obrotu  $O$  współrzędne  $x$  i  $y$ , przyczem - jak wynika z rys. 162. - jest stale  $x^2 + y^2 = (2c)^2 = 4c^2$ ; centroidą stałą jest koło o promieniu  $2c$ , zakreślone ze środka M. Przyjmijmy w odniesieniu do ciała AB jako oś  $\xi$ , a prostopadłą do niej np. ze środka S odcinka  $\overline{AB}$  za oś  $\eta$ . Oś chwilowego obrotu  $O$  ma zatem w odniesieniu do ciała współrzędne  $\xi$  i  $\eta$ ; najwidoczniej jest

3. Obręcz kołowa toczy się w płaszczyźnie po prostej; znaleźć rozkład prędkości.



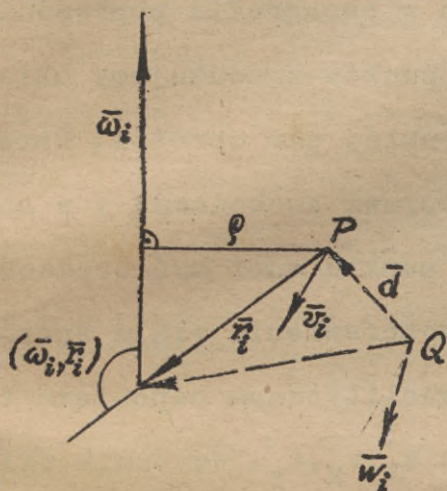
Rys. 163.

Odp. : Prosta jest centroidą stałą, koło centroidą ruchomą, O jest środkiem obrotu chwilowego. Prędkość dowolnego punktu obręczy P skierowaną jest prostopadle do promienia  $\rho = 2r \cos \varphi$  tzn. przechodzi ona przez punkt A; stąd rozkład prędkości. Ponadto jest  $v_P = \rho \cdot \omega = 2r \cdot \omega \cdot \cos \varphi$ . Prędkości punktów A i S są  $v_A = 2r\omega$ ,  $v_S = r\omega$ ; jeśli np.  $v_S$  jest dane to  $\omega = \frac{v_S}{r}$  czyli  $v_P = 2v_S \cos \varphi$ .

### §. 3. Redukcja i transformacja ruchów.

1. Ruch chwilowy ciała określony jest przemieszczeniami jego punktów. Przemieszczenie chwilowe któregośkolwiek punktu określone jest odcinkiem

zorientowanym w przestrzeni - wektorem. Prędkość tego punktu określa wektor proporcjonalny do wektora-przemieszczenia. Przeto ruch chwilowy ciała określony jest w zupełności prędkościami punktów. Prędkości pochodzą od przesunięcia ciała i od obrotu. Prędkość przesunięcia ma wymiar  $\frac{\text{cm}}{\text{sek}}$ , prędkość obrotu wymiar  $\frac{1}{\text{sek}}$ . Nasuwa się przypuszczenie, iż pierwsza może być momentem drugiej. Załóżmy, że punkt P na rys. 164. należy do ciała obracającego się dookoła prostej  $\bar{\omega}_i$ . Połączmy



Rys. 164.

punkt P z dowolnym punktem osi obrotu promieniem-wektorem  $\bar{r}_i$ , wtedy o prędkości  $\bar{v}_i$  wywołanej obrotem możemy powiedzieć następujące: a) trzy wektory w kolejności  $\bar{\omega}_i, \bar{r}_i, \bar{v}_i$  tworzą układ prawy. b) Pomiędzy nimi zachodzą zależności kierunkowe  $\bar{v}_i \perp \bar{\omega}_i, \bar{v}_i \perp \bar{r}_i$ . c) Bezwzględna wartość wektora  $\bar{v}_i$  wynosi  $v_i = \omega_i \rho = \omega_i r_i \sin(\omega_i, r_i)$  gdzie  $\rho$  jest odleganiem P od  $\bar{\omega}_i$ . Z teorii wektorów wiadomo, że cechy a) b) c) charakteryzują iloczyn wektorjalny; zatem:

$$\bar{v}_i = \bar{\omega}_i \wedge \bar{r}_i$$

czyli prędkość linjowa punktu jest momentem prędkości kątowej względem tegoż punktu. Prędkość innego punktu np. Q wynosi  $\bar{w}_i = \bar{\omega}_i \wedge (\bar{r}_i + \bar{d}) = \bar{v}_i + \bar{\omega}_i \wedge \bar{d}$  przyczem  $\bar{d}$  określa położenie Q względem P.

2. Możemy na podstawie widocznej analogji rozszerzyć nasze przypuszczenia. Zapewne ruch ciała jest określony wystarczająco u k ł a d e m obrotów chwilowych  $\bar{\omega}_i$ , o dowolnej skończonej ilości osi obrotów  $i = 1, 2, \dots, n$ . Niech owe osie  $\bar{\omega}_i$  będą dowolnie rozmieszczone w przestrzeni, to prędkości  $\bar{v}_i$  utworzą pęk zbieżny o prędkości wypadkowej równej sumie geometrycznej prędkości częściowych - czyli:

$$\bar{v} = \sum_i \bar{\omega}_i \wedge \bar{r}_i$$

Prędkość innego punktu wynosi:

$$\bar{w} = \sum_i \bar{\omega}_i \wedge (\bar{r}_i + \bar{d}) = \sum_i \bar{\omega}_i \wedge \bar{r}_i + \left( \sum_i \bar{\omega}_i \right) \wedge \bar{d} = \bar{v} + \bar{\omega} \wedge \bar{d}, \text{ gdzie } \bar{\omega} = \sum_i \bar{\omega}_i$$

Zatem prędkość dowolnego punktu jest w zupełności określona wektorami :  $\bar{\omega} = \sum \bar{\omega}_i$   
 $\bar{v} = \sum \bar{v}_i = \sum \bar{\omega}_i \wedge \bar{r}_i$ . Podobnie układ wektorów linjowych jest w zupełności określony sumą geometryczną i ogólnym momentem układu. Możemy wobec tego powtórzyć cały szereg wniosków teorii wektorów. Przedewszystkiem tedy dla każdego punktu ciała jest wartość sumy geometrycznej  $\bar{\omega}$  ta sama, tj. oś obrotu wypadkowego jest niezależnie od obioru punktu ustalona w swej równoległości ; jest to zapowiedziany dowód twierdzenia, podanego przy badaniu ruchu ogólnego w paragrafie poprzednim. Owa oś przejdzie przez badany punkt P jeśli do tegoż punktu zredukujemy układ wektorów  $\bar{\omega}_i$ . Wtedy zaś - jak wiadomo - otrzymamy cały układ par obrotów. Para obrotów jest równoważna momentowi tej pary  $\bar{\omega} \wedge \bar{a}$  tj. wektorowi swobodnemu ; w naszej nomenklaturze wielkość o wymiarze  $\frac{cm}{sek}$ , niezależna od punktu musi być prędkością przesunięcia. Zatem ruch chwilowy ciała można na nieskończenie wiele sposobów zredukować do obrotu  $\omega$  i przesunięcia  $v$ . W układzie analitycznym odpowiada to trzem obrotom  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  tudzież trzem przesunięciom  $v_x, v_y, v_z$ . Wyróżnik układu wynosi  $k = \bar{\omega} \cdot \bar{v} = \omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z$ . Na uwagę zasługują cztery możliwości :

- a)  $\bar{\omega} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}, k \neq 0$ , obr. i przesun. / *obr. i przesun.*
- b)  $\bar{\omega} \neq \bar{0}, \bar{v} \perp \bar{0}, k = 0$ , *pr. i obr. wzdłuż osi*
- c)  $\bar{\omega} = \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}$ , *nie ma obr. ruch postępowy i przesun.*
- d)  $\bar{\omega} = \bar{0}, \bar{v} = \bar{0}$ . *Spoczynek*

Wypadek a) prowadzi do ruchu ogólnego złożonego z obrotu i przesunięcia, względnie z dwóch obrotów skośnych. Przy stosownym obiorze środka redukcji można znaleźć oś centralną układu  $\bar{\omega}_i$ ; jeśli ruch sprowadzić do skrętu chwilowego, w którym jest  $\bar{v} \parallel \bar{\omega}$ . Jeśli  $k = 0$  tj. w wypadku b) nie musimy  $\bar{v}$  uważać za prędkość przesunięcia; prościej będzie przyjąć, że  $\bar{v}$  jest momentem  $\bar{\omega}$  względem środka redukcji. Ruch da się tu zredukować jeszcze dalej tj. tylko do jednego obrotu chwilowego  $\bar{\omega}$  przy - czem oś obrotu oddalona jest od środka redukcji o wielkość  $\frac{v}{\omega} = r$ . Innymi słowy przesunięcie  $\bar{v}$  i obrót  $\bar{\omega}$  wzajemnie do siebie prostopadle zorientowane zamienić można na równoległy obrót dookoła osi chwilowej przesuniętej prostopadle do płaszczyzny  $(\bar{v}, \bar{\omega})$  o wielkość  $\frac{v}{\omega}$ . Należy tu ruch posuwisty i kulisty. W wypadku c) niema obrotu ; istniejąca para wypadkowa obrotów jest prędkością przesunię-

$$\bar{v} = \bar{\omega} \wedge \bar{r}$$

-175 -

$$\bar{p} = \bar{\varepsilon} \wedge \bar{r} + \bar{v} \wedge \bar{\omega}$$

cia  $\bar{v}$ ; tu należy ruch postępowy chwilowy i przesunięcie. Wreszcie w wypadku d) ruchu wogóle niema; ciało spoczywa - wypadek ten należy do statyki i był tam krótko naszkicowany. Zagadnienie przeprowadzone w ust. 2. nazywamy redukcją obrotów chwilowych.

3. Zróżniczkujemy podług czasu wyrażenie  $\bar{v}_1 = \bar{\omega}_1 \wedge \bar{r}_1$  a znajdziemy:

$\bar{p}_1 = \bar{\varepsilon}_1 \wedge \bar{r}_1 + \bar{\omega}_1 \wedge \dot{\bar{r}}_1$ . Ponieważ  $\bar{r}_1$  skierowane jest od punktu do osi obrotu przeto  $\dot{\bar{r}}_1 = -\bar{v}_1$ . Zatem  $\bar{p}_1 = \bar{\varepsilon}_1 \wedge \bar{r}_1 + \bar{v}_1 \wedge \bar{\omega}_1$ . Łatwo wykazać, że  $\bar{\varepsilon}_1 \wedge \bar{r}_1$  jest przyspieszeniem stycznym, a  $\bar{v}_1 \wedge \bar{\omega}_1$  przyspieszeniem normalnym punktu. Powyższy wynik na  $\bar{p}_1$  wskazuje nam na to, że redukcji przyspieszeń nie dokonamy tak prosto jak redukcji prędkości, albowiem obok trójki  $\bar{\varepsilon}_1, \bar{r}_1, \bar{p}_1$  mamy jeszcze inne wielkości. Sprawa ta niema jednak dla kwestji ruchu wybitniejszego znaczenia, skoro już prędkości ustalają typ ruchu. Z tego powodu zajmować się nią tu nie będziemy.

4. Pod transformacją rozumiemy zmianę układu odniesienia ruchu. Wyobraźmy sobie, że znanym nam jest ruch ciała C w układzie W tj., że znamy dla każdego punktu tego ciała prędkość  $\bar{v}_w$  i przyspieszenie  $\bar{p}_w$ ; ruch w tym układzie nazywać będziemy w z g l ę d n y m. Wyobraźmy dalej sobie, iż układ względny W wykonuje dowolny określony ruch w stosunku do innego U, który nazywać będziemy układem odniesienia. Zatem ciało C i układ W wykonują pewne ruchy w układzie U; ruch ciała C w układzie U nazywamy b e z w z g l ę d n y m. Ruchy te nie są odrębne; rozumiemy to należy tak: gdyby nawet w odniesieniu do W ciało C nie poruszało się zupełnie, to jednak ciało to posiadałoby prędkości i przyspieszenia w U - mianowicie dowolny punkt ciała C miałby tę prędkość u n o s z e n i a  $\bar{v}_u$  i to przyspieszenie  $\bar{p}_u$ , jakie ma punkt układu W chwilowo pokrywający się właśnie z punktem obranym ciała. Pytamy obecnie jakim jest ruch ciała C względem U tj. ile wynosi  $\bar{v}_b$  i  $\bar{p}_b$  obranego punktu ciała. Otóż kwestja prędkości przedstawia się tu zupełnie prosto, mianowicie z powyższego określenia sposobu odbywania ruchu wynika, że prędkości  $\bar{v}_w$  i  $\bar{v}_u$  dodają się geometrycznie; zatem:

$$\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{v}_u$$

Nieco zawilej przedstawia się sprawa z przyspieszeniami. Zauważmy, że gdyby nawet badany punkt ciała nie ulegał prędkości unowszenia  $\bar{v}_u$  tj. gdyby przypadkiem dla

$$p_c = 2 \cdot v_w \cdot \omega - 176 -$$

pokrywającego się z nim punktu układu W prędkość przesunięcia zredukowała się z prędkością obrotu do zera, to jednak tenże punkt ciała poza przyspieszeniem  $\bar{p}_w$  doznawałby w układzie U jeszcze dodatkowego przyspieszenia  $\bar{p}_c$  pochodzącego od obrócenia prędkości względnej  $\bar{v}_w$  unoszeniem układu W tzn. jego prędkością  $\bar{\omega}$ . Wystarczy w tym celu rozpatrzyć rys.151., gdzie np. obrócenie prędkości  $\bar{v}_r$  spowodowało przyspieszenie  $\bar{v}_r \cdot \omega$ . Oczywiście pozatem rys.151. w niczem obecnego typu zagadnienia nie przypomina. W każdym razie ruch układu W odbija się na owym dodatkowym przyspieszeniu podwójnie mianowicie powoduje obrót prędkości  $\bar{v}_w$  i zmienia promień obrotu  $\bar{r}$ . Nie wchodząc z braku czasu w dość zawiłe dowodzenie sprawy podamy rezultat tego zagadnienia. Otóż jest :

$$\bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_u + \bar{p}_c$$

gdzie :

$$\bar{p}_c = 2\bar{v}_w \wedge \bar{\omega}$$

Wyrażenie  $\bar{p}_c$  nosi nazwę przyspieszenia Coriolisa ; często nazywany ujemną wartością tego przyspieszenia przyspieszeniem odśrodkowym złożonym. Przyspieszenie dodatkowe  $\bar{p}_c$  znika, a) gdy układ W wykonuje tylko przesunięcie tj. gdy jest  $\bar{\omega} = \bar{0}$ , b) gdy rozważany punkt ciała spoczywa tj. gdy jest  $\bar{v}_w = \bar{0}$ , c) gdy badany punkt porusza się w układzie względnym równoległe do osi obrotu układu W tj. gdy jest  $\bar{v}_w \parallel \bar{\omega}$ . Obok wspomnianego zadania częściej spotykamy się z innym mianowicie, gdy ruch bezwzględny jest znany a względny jest poszukiwanym. Wtedy

$$\bar{v}_w = \bar{v}_b - \bar{v}_u$$

$$\bar{p}_w = \bar{p}_b - \bar{p}_u - \bar{p}_c$$

5. Przypadek taki zachodzi w tzw. klasycznej teorii względności.

Sformułować ją możemy następująco : znanym jest ruch ciała  $C_1$  w układzie U, znanym jest nadto ruch ciała  $C_2$  w tym samym układzie U. Jakim jest ruch ciała  $C_2$  względem  $C_1$  lub naodwrot ? Najwidoczniej należy obecnie zidentyfikować ciało  $C_2$  z poprzednim C, ciało  $C_1$  z układem W, albowiem ruch ciała  $C_2$  względem U możemy traktować jako wypadkowy z ruchu ciała  $C_2$  względem  $C_1$  i  $C_1$  względem U. Zatem możemy napisać :

$$\bar{v}_{2,1} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1, \quad \bar{p}_{2,1} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 - \bar{p}_c \quad \text{gdzie :}$$

$$\bar{p}_c = 2\bar{v}_{2,1} \wedge \bar{\omega}_1 = 2 \cdot (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \wedge \bar{\omega}_1$$

przyczem  $\bar{\omega}_1$  oznacza prędkość kątową ciała  $C_1$ . Odnośnie do prędkości  $\bar{v}_{2,1}$  wypowiada się często zasadę względności następująco : Udzielmy w myśli ciału  $C_2$  ruchu chwilowego wręcz przeciwnego temu, jaki posiada ciało  $C_1$  ; składając go geometrycznie z danym ruchem ciała  $C_2$  otrzymamy ruch ciała  $C_2$  względem  $C_1$ . Oczywiście należy uważać na to, że  $\bar{v}_1$  oznacza prędkość tego punktu ciała  $C_1$ , który w danej chwili pokrywa się z badanym punktem ciała  $C_2$ .

Przykłady ćwiczeń.

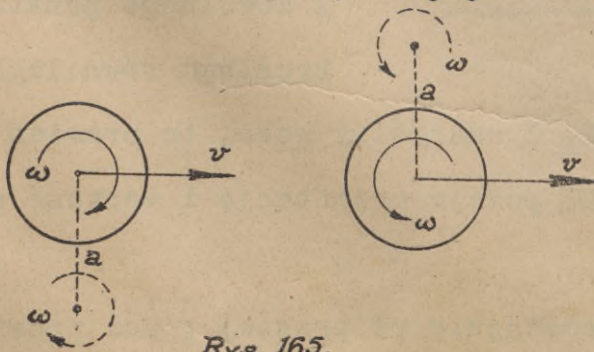
1. Ciało obraca się dookoła trzech przecinających się wzajemnie prostopadłych osi z prędkościami kątowymi  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = 2\omega$ ,  $\omega_3 = 3\omega$ . Jakim jest ruch tego ciała ?

Odp. : Obrotem dookoła osi przecinającej się z danymi pod kątami wynikającymi z dostaw  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$ ,  $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$ ,  $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$  z prędkością kątową  $\omega \sqrt{14}$ .

2. Ciało obraca się dookoła dwóch równoległych osi w tym samym kierunku z prędkościami kątowymi  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , przyczem osie oddalone są wzajemnie o  $a$ . Jakim jest ruch ciała ?

Odp. : Obrotem z prędkością kątową  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  dookoła osi równoległej do danych i położonej w ich płaszczyźnie przyczem oddalenie osi  $\omega$  od  $\omega_1$  względnie  $\omega_2$  wynosi  $a_1 = a \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$  względnie  $a_2 = a \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$ .

3. Piłce tenisowej udzielono prędkości przesunięcia  $v$  i obrotu  $\omega$  jak na rys. 165. Jakim jest jej ruch chwilowy ?



Rys. 165.

Odp. : W obu wypadkach jest on obrotem dookoła osi równoległej do poprzedniej z tą samą prędkością kątową  $\omega$  ; oś obrotu chwilowego przesunięta jest jak na rys. 165. o długość :

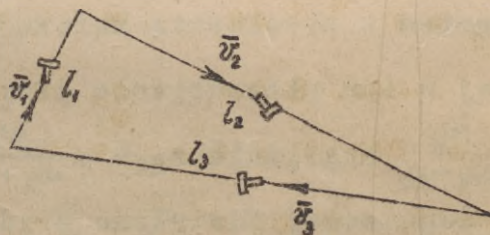
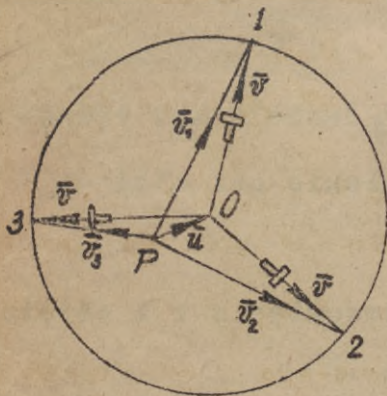
$$a = \frac{v}{\omega}$$

4. Pień o nieznannej długości  $l$  porusza się z pojazdem jednostajnie ; jak można obliczyć jego długość ?

Odp. : Niech pojazd porusza się z prędkością  $u$ . Przejdźmy jednostajnie i równoległe do pojazdu idąc raz od końca pnia ku początkowi, a drugi raz odwrotnie ; niech ilość kroków wynosi raz  $n_1$  drugi raz  $n_2$  czyli drogi bezwzględne  $n_1 s$  i  $n_2 s$  jeśli  $s$  jest długością kroku. Prędkości bezwzględne są  $\frac{n_1 s}{t_1} = v$  i  $\frac{n_2 s}{t_2} = v$ ; prędkości względne natomiast wynoszą  $v - u$  i  $v + u$ ; otóż  $(v - u) \cdot t_1 = l$  i  $(v + u) \cdot t_2 = l$  albo  $1 - \frac{u}{v} = \frac{l}{n_1 s}$  i  $1 + \frac{u}{v} = \frac{l}{n_2 s}$ . Różając  $\frac{u}{v}$  mamy  $l = \frac{2s}{\frac{1}{n_1 s} + \frac{1}{n_2 s}} = \frac{2s}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ . Jak należy postąpić jeśli jest  $u > v$  ?

5. Poprzednie zagadnienie może posłużyć do obliczenia prędkości samolotu w stosunku do ( nieruchomego ) powietrza, jeśli samolot porusza się równoległe do kierunku wiatru. Inny sposób polega na przelocie wzdłuż boków wytyczonego trójkąta o bokach  $l_1, l_2, l_3$  (rys.166.). Odczytując czasy przelotu  $t_1, t_2, t_3$  znajdziemy bezwzględne ( tj. w stosunku do ziemi ) prędkości  $v_1 = \frac{l_1}{t_1}, v_2 = \frac{l_2}{t_2}, v_3 = \frac{l_3}{t_3}$ . Ile wynosi prędkość aeroplanu względem wiatru, a ile prędkość wiatru i jak ta ostatnia jest zorientowana ?

Odp. : Zakładamy, iż prędkości samolotu i wiatru leżą w jednej płaszczyźnie. Prędkości bezwzględne są  $\bar{v}_1 = \bar{v} + \bar{u}$ , a stąd konstrukcja wykreślna. Z dowolnego punktu P narysujemy równoległe do

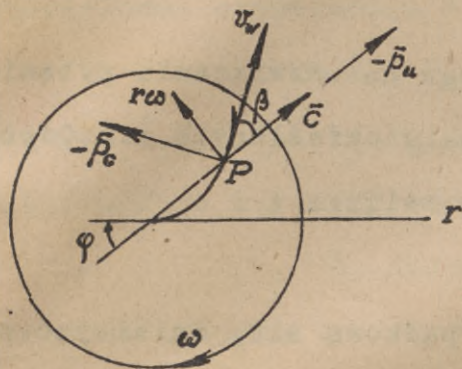


Rys. 166.

$l_1, l_2, l_3 - \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  i przez punkty 1, 2, 3 narysujemy koło, to promień tego koła jest poszukiwaną prędkością  $v$ , wektor  $\bar{PO}$  podaje orientację i wartość prędkości wiatru  $\bar{u}$ .

6. Punkt porusza się jednostajnie po prostej ; pod prostą wyobraźmy sobie tarczę jednostajnie wirującą przyczem oś obrotu przecina się z ową prostą. Jakim jest ruch punktu względem tarczy ?

Odp. : Niech w chwili początkowej punkt pokrywa się dokładnie z osią tj. niech będzie dla  $t = 0$ ,  $r = 0$  i  $\varphi = 0$  (rys.167). Udzielmy punktowi prędkości  $r\omega$  przeciwnie skierowanej do kierunku obrotu  $\omega$ , to  $c$  i  $r\omega$  są składowymi prędkości względnej, czyli :  $v_{wr} = c$ ,  $v_{w\varphi} = r\omega$  lub całkowita prędkość względna wynosi  $v_w = \sqrt{c^2 + r^2\omega^2}$ . W układzie biegunowym jest  $v_r = \dot{r}$ ,  $v_\varphi = r\dot{\varphi}$  czyli  $\dot{r} = c$ ,  $\dot{\varphi} = \omega$  ;



Rys. 167.

całkując z uwzględnieniem warunków brzegowych mamy  $r = ct$ ,  $\varphi = \omega t$  czyli  $r = c \frac{\varphi}{\omega}$  jako równanie toru względnego ( spiralna Archimedesesa ). Całkowita prędkość zamyka z promieniem kąt  $\beta$  dla którego  $\operatorname{tg} \beta =$

$-\frac{r\omega}{c} = -\varphi$ . Przyspieszenie bezwzględne  $\bar{p}_D = \bar{0}$ , przyspieszenie unoszenia ma wartość  $p_u = r\omega^2$  i jest skierowane do osi obrotu, przyspieszenie Coriolisa skierowane jest od środka krzywizny spiralnej i wynosi  $p_c = 2v_w \cdot \omega$ . Przyspieszenie względne  $\bar{p}_w$  jest sumą przyspieszeń  $-\bar{p}_u$  i  $-\bar{p}_c$ . Ma ono zatem składową w kierunku promienia  $p_{wr} = r\omega^2 - 2v_w \cdot \omega \cdot \sin \beta$ , i składową doń prostopadłą  $p_{w\varphi} = 2v_w \omega \cos \beta$  lub ponieważ  $\sin \beta = \frac{r\omega}{v_w}$  i  $\cos \beta = \frac{c}{v_w}$  to  $p_{wr} = r\omega^2 - 2r\omega^2 = -r\omega^2$  ( skierowane do środka ) i  $p_{w\varphi} = 2c\omega$ . Skontrolować zadanie wprowadzając oznaczenia dla  $p_r$  i  $p_\varphi$  ( współrzędne biegunowe ) i całkując dwukrotnie ostatnio otrzymane składowe przyspieszenia względnego !

## ROZDZIAŁ V.

### Dynamika.

#### §.1. Dynamika punktu materialnego i środka masy.

1. Ogólne zadanie dynamiki punktu polega na rozwiązaniu pytania: Jakim będzie ruch punktu materialnego, podanego działaniu określonych sił. Odpowiedź na to pytanie była już podana w rozdziale II-im w związku:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{p}$$

Tutaj  $m$  oznacza masę punktu,  $\vec{p}$  jego przyspieszenie,  $\vec{P}$  wypadkową sił, działających na punkt. Jeśli  $\vec{r}$  oznacza promień-wektor, określający każdorazowe położenie punktu, to jego prędkość wynosi - jak wiadomo -  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ , a przyspieszenie  $\vec{p} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$ . Jeśli przeto  $\vec{P}$  jest określone, to wyżej podane równanie prowadzi do zagadnienia kinematycznego

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{P}$$

z którego oznaczyć mamy wszystkie pozostałe elementy ruchu tj.  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  i  $\vec{r}$ . Odnośnie do siły  $\vec{P}$  zachodzić mogą najrozmaitsze wypadki; najogólniej może być

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

W wypadkach prostszych może być  $\vec{P}$  tylko funkcją położenia  $\vec{r}$  i wtedy mówimy, że punkt porusza się w polu sił. Pod  $\vec{P}$  rozumiemy - jak już wspomniano - wogóle wypadkową sił, działających na punkt. Należy tu zasadniczo odróżnić dwie ewentualności: ruch swobodny i ruch nieswobodny; o tym ostatnim mówi się wtedy, gdy tor punktu jest niezależnie od sił czynnych z góry określony, więc - powiedzmy - tor ten jest krzywą materialną (druć, na którym przesuwają się koral). Ze stanowiska matematycznego jest jakość ruchu rzeczą zupełnie obojętną. Ze stanowiska dynamiki sprawa przedstawia się natomiast tak, iż w  $\vec{P}$  musimy wtedy widzieć nie tylko siły czynne, ale i bierne tj. reakcje; prosto reakcje zastępują działanie toru na punkt materialny. Owe reakcje są skierowane prostopadle do toru; opory styczne do toru w rodzaju tarcia itp. uważamy w dynamice za siły czynne, o czym już była mowa. Wreszcie wypada dodać, że do zupełnego określenia całki równania różniczkowe-

go ruchu muszą być podane dwa warunki brzegowe, przy pomocy których wyznaczymy każdorazowo stałe całkowania.

2. W przestrzennym układzie współrzędnych podanemu równaniu wektorjalnemu odpowiadają trzy równania analityczne :

$$m \ddot{x} = P_x \quad , \quad m \ddot{y} = P_y \quad , \quad m \ddot{z} = P_z$$

w których  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, P_x, P_y, P_z$  oznaczają odpowiednie składowe przyspieszenia  $p$  i siły  $P$  w kierunkach  $x, y, z$  układu. Warunków brzegowych musimy tu mieć sześć.

3. Najczęściej prowadzi do celu szybko użycie układu naturalnego współrzędnych tj. stycznej, normalnej i binormalnej. Za dodatni kierunek stycznej najprościej przyjąć kierunek wzrastających długości  $s$  mierzonych po torze od dowolnie przyjętego początku ; za dodatni kierunek normalny przyjmiemy kierunek ku środkowi krzywizny toru ; wreszcie odnośnie do binormalnej możemy zażądać by styczna, normalna i binormalna w podanym porządku tworzyły np. układ prawy. Równania ruchu brzmią :

$$m \ddot{s} = P_t \quad , \quad m \frac{v^2}{\rho} = P_n \quad , \quad 0 = P_b = -mcp_0 = 0$$

gdzie  $P_t, P_n, P_b$  oznaczają algebraiczne wartości rzutów siły  $\vec{P}$  na wyżej zdefiniowane kierunki.

4. Współrzędnych biegunowych używamy często w ruchach płaskich. Równania ruchu brzmią :

$$m \cdot R_{\dot{\varphi}} = P_r \quad , \quad m \cdot p_{\varphi} = P_{\varphi}$$

z oznaczeniami dla  $p_r$  i  $p_{\varphi}$  podanymi w kinematyce. Dla ruchu przestrzennego należałoby te równania rozszerzyć o trzecią współrzędną walcową.

5. Jest rzeczą zupełnie obojętną czy rozważania nasze przeprowadzone są w układzie takim lub innym więc np. bezwzględny czy względny. Należy jednakże bacznie zważać na to, że przy przejściu od układu jednego do drugiego należy do przyspieszeń zawsze dołączyć przyspieszenia Coriolisa, określone nie dawno w kinematyce. Skoro przyspieszenie punktu w danym układzie względnie odnośne siły są określone, to równania podane w poprzednich ustępach prowadzą do poszukiwanego rozwiązania.

6. Pod działaniem określonych sił ciało, tj. układ punktów ma-

terjalnych, wykonywać będzie ruch. Jakim on będzie - rozstrzygniemy to na innym miejscu. Niezależnie od tego można ustawić bardzo proste wyrażenia dynamiczne dla środka masy tegoż ciała. Punktem wyjścia może być znane nam równanie, określające położenie środka masy ; jest nim związek:

$$m \cdot \bar{r}_0 = \sum_i m_i \bar{r}_i$$

gdzie  $\bar{r}_i$  jest promieniem-wektorem punktu materjalnego  $m_i$ , a  $\bar{r}_0$  promieniem określającym położenie środka masy ciała ; w tym ostatnim możemy sobie wyobrazić skupioną całą masę układu  $m = \sum m_i$ . Różniczkując powyższe równanie względem czasu otrzymamy :

$$\frac{d\bar{r}_0}{dt} = \bar{v}_0$$

$$m \cdot \bar{v}_0 = \sum_i m_i \bar{v}_i$$

$$m \frac{d\bar{r}_0}{dt} = m \bar{v}_0 = \sum_i m_i \bar{v}_i$$

Wyrażenie kierunkowe  $m_i \bar{v}_i$  nazywamy ilością ruchu lub pędem punktu materjalnego. Zatem : Suma geometryczna pędów wszystkich punktów materjalnych układu jest równą pędowi całego układu, skupionego w swym środku. Z twierdzenia tego zrobimy w przyszłości użytek. Różniczkując otrzymany związek jeszcze raz znajdziemy :

$$m \frac{d\bar{v}_0}{dt} =$$

$$m \cdot \bar{p}_0 = \sum_i m_i \bar{p}_i$$

$$m \frac{d^2 \bar{r}_0}{dt^2} =$$

Z powodów, które jeszcze zostaną wyjaśnione, nazywamy chętnie wyrażenie -  $m_i \bar{p}_i$  siłą bezwładności punktu materjalnego. Zatem : Suma geometryczna sił bezwładności wszystkich punktów materjalnych układu jest równą sile bezwładności całego układu, skupionego w swym środku. W układzie analitycznym każdym z wypisanych równań wektorjalnych odpowiadają trzy równania, a to :

$$m \cdot x_0 = \sum m_i x_i \quad , \quad m \cdot y_0 = \sum m_i y_i \quad , \quad m \cdot z_0 = \sum m_i z_i$$

$$m \cdot v_{0x} = \sum m_i v_{ix} \quad , \quad m \cdot v_{0y} = \sum m_i v_{iy} \quad , \quad m \cdot v_{0z} = \sum m_i v_{iz}$$

$$m \cdot p_{0x} = \sum m_i p_{ix} \quad , \quad m \cdot p_{0y} = \sum m_i p_{iy} \quad , \quad m \cdot p_{0z} = \sum m_i p_{iz}$$

Łatwo napisać powyższe równania dla innych układów.

7. Na dowolnie obrany punkt  $m_i$  ciała działa wypadkowa sił zewnętrznych  $\bar{P}_i$  i układ sił wewnętrznych, o wypadkowej  $\sum_k \bar{W}_{ik}$  ; ta ostatnia siła pochodzi od działania innych punktów układu tj. punktów k. Dla punktu  $m_i$  możemy przeto napisać :  $m_i \bar{p}_i = \bar{P}_i + \sum_k \bar{W}_{ik}$ . Napiszmy takie równania ruchu dla wszystkich punktów układu i zesumujmy je stronami, a otrzymamy :  $\sum_i m_i \bar{p}_i = \sum_i \bar{P}_i + \sum_i \sum_k \bar{W}_{ik}$ .

13. X. 1946

chociaż może być  
nie bezwart.

Lecz według ust. 6. jest  $\sum_i m_i \bar{p}_i = m \cdot \bar{p}_0$ , gdzie  $m = \sum_i m_i$ ; pozatem oznaczmy krótko wypadkową sił zewnętrznych przez  $\bar{P}$  tj. podstawmy  $\sum_i \bar{P}_i = \bar{P}$ ; wreszcie zauważmy, że jest bezwarunkowo  $\sum_i \sum_k \bar{W}_{ik} = \bar{0}$ , albowiem siły wewnętrzne zdarzają się zawsze dwójkami zerowemi tzn. że działania wzajemne dwóch różnych punktów  $m_i$  tudzież  $m_k$  znoszą się. Przeto ostatecznie jest :

$$m \cdot \bar{p}_0 = \bar{P}$$

W ostatniem równaniu  $m$  jest masą całego układu : możemy ją sobie pomyśleć skupioną w środku masy układu ;  $\bar{p}_0 = \dot{\bar{v}}_0 = \ddot{\bar{r}}_0$  oznacza przyspieszenie tegoż właśnie środka ; wreszcie  $\bar{P}$  jest sumą geometryczną wszystkich sił zewnętrznych ; w odniesieniu do punktu możemy sobie  $\bar{P}$  wyobrazić jako wypadkową wszystkich sił zewnętrznych  $\bar{P}_i$  przesuniętych równolegle (jak gdyby wektory swobodne) do środka masy. W ten sposób doprowadziliśmy zagadnienie do ruchu punktu, o określonej masie i określonej sile nań działającej. Możemy przeto wyrazić następująco z a s a d ę r u c h u ś r o d k a m a s y : Środek masy ciała materjalnego porusza się jak punkt o masie całego ciała pod działaniem sił zewnętrznych tego ciała, równoległe doń przesuniętych. Nie wchodząc narazie w inną definicję ruchu środka masy dodamy tu jeszcze parę wniosków bardzo ważnych. Przedewszystkiem należy zapamiętać ważny szczegół, który wyżej uzasadniono : Siły wewnętrzne ciała nie wpływają na ruch jego środka. W pocisku między planetarnym można się zupełnie swobodnie (ściśle rzecz biorąc w sferze bez atmosfery tj. bez oporów) poruszać nie zmieniając tem obranego toru. Mianowicie środek masy pocisku będzie w dalszym ciągu poruszał się po przewidzianej krzywej, a tylko pocisk może się ewentualnie dookoła tego środka obrócić. Gdy siły zewnętrzne znoszą się, środek masy trwać będzie w spoczynku względnie w ruchu jednostajnym prostoliniowym. Ale i gdy siły zewnętrzne ciała redukują się do pary sił to i w tym wypadku środek będzie spoczywać względnie poruszać się jak wyżej. Albowiem siły pary, przesunięte do środka dadzą dwójkę zerową. Szczegół ten jest również bardzo ważny.

Przykłady ćwiczeń .  
-----

1. Równanie różniczkowe ruchu harmonicznego brzmi :  $m \cdot \ddot{\bar{r}} = - a \cdot \bar{r}$  ; warun-

ki brzegowe przyjmijmy dla  $t = 0$ ,  $\bar{r} = \bar{r}_0$  i  $\bar{v} = \bar{v}_0$ . Zbadać ten ruch.

Odp. : Całka podanego równania brzmi :  $\bar{r} = \bar{A}\cos kt + \bar{B}\sin kt$ , gdzie  $k = \sqrt{\frac{a}{m}}$ . Różniczkując mamy  $\bar{v} = -\bar{A}k\sin kt + \bar{B}k\cos kt$ . Z warunków brzegowych znajdujemy  $\bar{A} = \bar{r}_0$ ,  $\bar{B} = \frac{\bar{v}_0}{k}$ . Zatem równanie ruchu harmonicznego (krzywoliniowego) brzmi :

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos kt + \frac{\bar{v}_0}{k} \sin kt$$

Jest to ruch płaski ; płaszczyznę ruchu wyznaczają wektory  $\bar{r}_0$  i  $\bar{v}_0$ . Zmieniając  $kt$  o dowolne wielokrotności  $2\pi$  nie zmieniamy  $\bar{r}$ . Zatem okres ruchu wynosi :

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{a}}$$

Umieścimy w początku  $\bar{r}_0$  środek układu prostokątnego współrzędnych  $x, y$  i przyjmijmy że  $\bar{r}_0$  tworzy z osią  $x$  kąt  $\alpha$ , zaś  $\bar{v}_0$  kąt  $\beta$  to współrzędne końca wektora  $\bar{r}$  czyli poruszającego się punktu materialnego w chwili  $t$  są :

$$x = A \cos \alpha \cos kt + B \cos \beta \sin kt$$

$$y = A \sin \alpha \cos kt + B \sin \beta \sin kt$$

Z powyższych równań wyrugować możemy czas  $t$  ; mianowicie jest

$$\cos kt = \frac{x \sin \beta - y \cos \beta}{A \sin(\beta - \alpha)}, \quad \sin kt = -\frac{x \sin \alpha - y \cos \alpha}{B \sin(\beta - \alpha)}$$

Podnosząc oba równania stronami do kwadratu i dodając znajdujemy :

$$\frac{(x \sin \beta - y \cos \beta)^2}{A^2 \sin^2(\beta - \alpha)} + \frac{(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2}{B^2 \sin^2(\beta - \alpha)} = 1$$

Ostatecznie równanie przedstawia tor ruchu harmonicznego ; krzywa ta nie posiada punktów rzeczywistych w nieskończoności. Jest to zatem elipsa. W szczególności, gdy  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  otrzymamy :  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ .

2. W chwili  $t = 0$  z punktu  $O$  wyrzucono punkt materialny z prędkością początkową  $\bar{v}_0$ . Zbadać ruch tegoż punktu.

Odp. : Punkt pozostaje pod działaniem siły ciężkości  $\bar{P} = m \cdot \bar{g}$  ; zatem równanie ruchu brzmi  $m \cdot \ddot{\bar{r}} = \bar{P} = m \cdot \bar{g}$  czyli

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{g} = \overline{\text{const.}}$$

Całki powyższego równania brzmią :

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{g}t, \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{1}{2} \bar{g}t^2.$$

Przyjmijmy w  $O$   $\bar{r}_0 = \bar{0}$  to równanie upraszcza się do postaci  $\bar{r} = \bar{v}_0 t + \frac{1}{2} \bar{g}t^2$ . Jest to ruch w płaszczyźnie utworzonej wektorami  $\bar{v}_0$  i  $\bar{g}$ . Tor punktu znajdziemy wprowadza-

jąc układ prostokątny o początku w 0, osi x poziomej i osi y pionowej od środka ziemi. Wtedy przyjąwszy elewację  $\alpha$  dla prędkości wyrzutu mamy :

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad , \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

lub po wyrugowaniu czasu t :

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2c^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot x^2$$

Torem rzutu ukośnego (z pominięciem oporu ośrodka) jest przeto parabola stopnia drugiego o osi pionowej. Prędkości składowe wynoszą :

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad , \quad v_y = v_0 \sin \alpha - g t$$

Zamianę rozwiązania wektorjalnego na analityczne uzmysławia rys. 168. Wysokość rzutu ukośnego wynosi :

$$y_0 = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad ;$$

dalekość rzutu wynosi :

$$2x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

czyli osiąga dla  $\alpha$  i  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  tę samą wartość.

3. Rzut pionowy znajdziemy z zadania poprzedniego kładąc  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Zbadać ten ruch.

Odp. : Rzut pionowy odbywa się po prostej pionowej. Wysokość rzutu

wynosi  $y_0 = \frac{v_0^2}{2g}$  ; na wysokości  $y = y_0$  jest  $v = 0$  przyczem odpowiada to czasowi  $t = \frac{v_0}{g}$ . Od tej chwili zaczyna się spadek pionowy bez prędkości początkowej ; po dodatkowym czasie  $t_1 = \frac{v_0}{g}$  czyli w chwili  $t = \frac{2v_0}{g}$  przedmiot osiąga z powrotem poziom  $y = 0$  z prędkością dokładnie  $v_0$ .

4. Zbadać ruch środkowy z przyspieszeniem  $p = -\frac{k}{r^2}$ .

Odp. : Ruch środkowy jest ruchem płaskim ze stałą prędkością wy-

cińkową  $\eta$ . We współrzędnych biegunowych z początkiem w środku przyciągania jest

$\eta = \frac{c}{2} = \frac{r^2 \dot{\varphi}}{2}$  czyli  $\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$ . Prędkość w kierunku promienia  $v_r = \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = -\frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -c \frac{d(\frac{1}{r})}{d\varphi}$ . Prędkość w kierunku kąta wynosi  $v_\varphi = r \dot{\varphi} = \frac{c}{r}$ . Prędkość całko-

wita :

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = c \sqrt{\left[\frac{d(\frac{1}{r})}{d\varphi}\right]^2 + \frac{1}{r^2}}$$

Przyspieszenie w kierunku promienia  $p_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$  jest równocześnie przyspieszeniem całkowitem i wynosi :

$$p_r = p = -\frac{c^2}{r^2} \left[ \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right] \quad (\text{równanie Binet'a})$$

Od tego ostatniego równania należy zacząć rachunek kładąc  $p = -\frac{k}{r^2}$ . Otrzymujemy w ten sposób równanie różniczkowe :

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} = \frac{1}{q}$$

Całka tego równania brzmi :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{\varepsilon}{q} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

gdzie  $\varepsilon$  i  $\varphi_0$  są stałymi brzegowymi. Równanie powyższe przedstawia elipsę dla  $\varepsilon < 1$ , Koło dla  $\varepsilon = 0$ , parabolę dla  $\varepsilon = 1$ , hyperbolę dla  $\varepsilon > 1$ . Punkt poruszający znajduje się w perihelium (tj. najbliżej środka ruchu) dla  $\varphi = \varphi_0$ . Przesuńmy przez perihelium oś  $r$  to równanie powyższe uprości się do postaci

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{q}$$

a stąd  $\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon \sin \varphi}{q}$  i w konsekwencji  $v = \frac{c}{q} \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}$  lub po wyrugowaniu  $\cos \varphi$

$$v = \sqrt{k \left( \frac{2}{r} - \frac{1 - \varepsilon^2}{q} \right)}$$

W perihelium jest  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} = \frac{1 + \varepsilon}{q}$ . Można przeto prędkość napisać i tak :

$$v = \sqrt{k \left( \frac{2}{r} - \frac{1 - \varepsilon^2}{r_0} \right)}$$

Dla  $r = r_0$  jest  $v = v_0 = \sqrt{k \frac{1 + \varepsilon}{r_0}}$ . Dla punktów w pobliżu ziemi jest  $p = -\frac{k}{R^2} = -g$  czyli  $k = gR^2$  gdzie  $R$  jest promieniem kuli ziemskiej. W pobliżu ziemi jest zatem  $r_0 \cong R$  czyli  $v_0 = \sqrt{gR(1 + \varepsilon)}$ . Jaką wartość musi mieć prędkość punktu w pobliżu ziemi w perihelium, by tor punktu był jedną z wymienionych wyżej krzywych? Wielkość  $k$  jest stałą grawitacyjną dla wszystkich planet. Wykazać (trzecie prawo Keppler'a), że iloraz trzeciej potęgi dłuższej osi elipsy i kwadratu czasu obiegu jest dla wszystkich planet wielkością stałą.

5. Punkt materialny wyrzucono w chwili  $t = 0$  z poziomu  $z = 0$  pionowo w górę z prędkością początkową  $v_0$ . Opór (tj. siła) środowiska  $S = k \cdot v^2$  ma kierunek  $-v$ . Zbadać ruch punktu.

Odp. :Równanie ruchu brzmi  $m\ddot{z} = - m \cdot g - k \cdot v^2$  jeśli oś z skiero-  
wana jest pionowo ku górze. Oznaczmy krótko  $\frac{mg}{k} = v_\infty^2$  to równanie ruchu brzmi

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = - g \cdot \left( 1 + \frac{v^2}{v_\infty^2} \right)$$

Po scałkowaniu znajdziemy stosując warunek brzegowy:

$$t = \frac{v_\infty}{g} \left( \text{arc tg } \frac{v_0}{v_\infty} - \text{arc tg } \frac{v}{v_\infty} \right).$$

Czas wznoszenia się uzyskamy kładąc  $v = 0$ , zatem wynosi on

$$t_1 = \frac{v_\infty}{g} \text{arc tg } \frac{v_0}{v_\infty}$$

Podstawiając w równaniu na  $t$  za  $v$  wyrażenie  $\frac{dz}{dt}$ , rozdzielając zmienne, całkując i uwzględniając warunek brzegowy znajdziemy  $z$  jako funkcję  $t$  w postaci

$$z = \frac{v_\infty^2}{g} \log_e \left( \cos \frac{gt}{v_\infty} + \frac{v_0}{v_\infty} \sin \frac{gt}{v_\infty} \right)$$

Nieco prędzej można było korzystając z przekształcenia  $pdz = vdv$  wyjść z równania tytułowego i całkując je dojść do równania:

$$z = \frac{v_\infty^2}{2g} \log_e \frac{v_\infty^2 + v_0^2}{v^2 + v_\infty^2}$$

kładąc w  $z = z(t)$  czas  $t = t_1$  względnie<sup>w</sup>ostatniem równaniu  $v = 0$  znajdziemy wysokość wzniesienia się :

$$h = \frac{v_\infty^2}{2g} \log_e \left( 1 + \frac{v_0^2}{v_\infty^2} \right)$$

Zakładając  $v_0 < v_\infty$  możemy zastosować rozwinięcie :

$$\log_e \left( 1 + \frac{v_0^2}{v_\infty^2} \right) = \frac{v_0^2}{v_\infty^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^4}{v_\infty^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{v_0^6}{v_\infty^6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{v_0^8}{v_\infty^8} + \dots$$

Wtedy :

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{v_\infty^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{v_0^4}{v_\infty^4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{v_0^6}{v_\infty^6} + \dots \right)$$

z czego wynika, że wysokość rzutu jest wogóle mniejsza od  $\frac{v_0^2}{2g}$  tj. wartości niedawno wykazanej i to tem mniejsza im mniejszą jest różnica między  $v_0$  i  $v_\infty$ . Przy małych  $v_0$  jest w pierwszym przybliżeniu  $h = \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 - \frac{v_0^2}{2v_\infty^2} \right)$ . Stała  $v$  jest oznaczona gdy doświadczalnie stwierdzimy wartość  $k$ . Szczególny sposób oznaczania wielkości  $v_\infty$  znajdzie zaraz wyjaśnienie.

6. Punkt spada z poziomu  $z = 0$  bez prędkości początkowej pion.

wdół .Zbadać ruch przyjmując opór jak w ćwiczeniu 5.

Odp. : Przyjmijmy dodatni kierunek osi z wdół, to równaniem ruchu jest  $m\ddot{z} = m\cdot g - k\cdot v^2$  czyli :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g \cdot \left( 1 - \frac{v^2}{v_\infty^2} \right)$$

a stąd w kolejności przyjętej w zadaniu poprzednim :

$$t = \frac{v_\infty}{2g} \log_e \frac{v_\infty + v}{v_\infty - v}$$

czas w jakim punkt osiągnie poziom  $z = h$  czyli prędkość  $v = v_h$

$$t_2 = \frac{v_\infty}{2g} \cdot \log_e \frac{v_\infty + v_h}{v_\infty - v_h}$$

droga jako funkcja czasu

$$z = \frac{v_\infty^2}{g} \log_e \frac{e^{\frac{gt}{v_\infty}} + e^{-\frac{gt}{v_\infty}}}{2}$$

droga jako funkcja prędkości

$$z = \frac{v_\infty^2}{2g} \cdot \log_e \frac{v_\infty^2}{v_\infty^2 - v^2}$$

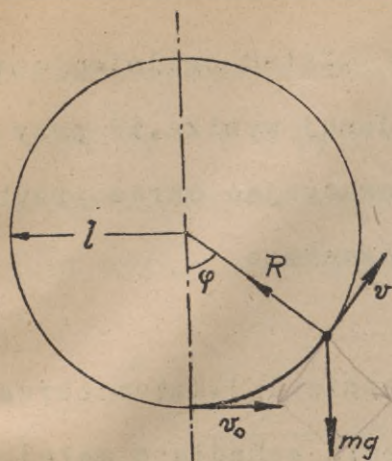
lub też naodwrot

$$v = v_\infty \sqrt{1 - e^{-\frac{2gz}{v_\infty^2}}}$$

a stąd prędkość na poziomie  $z = h$  tj.  $v_h$ . (Rozwinąć  $v_h$  na szereg potęgowych  $h$ ).  
Ostatni wzór wyjaśnia znaczenie wielkości  $v_\infty$ . Gdybyśmy mianowicie przyjęli  $h \rightarrow \infty$  to wtedy byłoby  $v_h \rightarrow v_\infty$ ; zatem  $v_\infty$  oznacza prędkość końcową, jakąby osiągnął punkt spadający z nieskończoności. Ciekawym wreszcie okazuje się stosunek prędkości  $v_0$  (ćwiczenie 5.) i  $v_h$  dla tego samego  $h$ ; stosunek ten wynosi  $\frac{v_0}{v_h} = \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{v_\infty^2}}$  tzn. że prędkość wznoszenia się jest większa od prędkości spadku na tym samym poziomie. W ćwiczenia 3. było  $v_0 = v_h$ .

7. Punkt materjalny  $m$  porusza się po pionowym torze nieswobodnym kołowym o promieniu  $l$ . Zbadać ruch punktu zakładając, że w chwili początkowej  $t = 0$  było  $s = 0$  i  $v = v_0$  ( rys.169. )

Odp. : Użyjemy współrzędnych naturalnych. Na punkt działa ciężar jego  $m\cdot g$  i reakcja toru ( lub napięcie nici )  $R$ . Warunek dla binormalnej odpada (względnie wynika właśnie z niego, że  $R$  i  $mg$  leżą w płaszczyźnie koła). Dla kierunku normalnej mamy :



Rys. 169.

$$R - m \cdot g \cdot \cos \frac{s}{l} = m \frac{v^2}{l} \quad \text{stąd}$$

$$R = m \cdot g \cdot \left( \frac{v^2}{gl} + \cos \frac{s}{l} \right)$$

Reakcja będzie określona, gdy znajdziemy prędkość  $v$ .

Dla kierunku stycznej mamy :

$$- m \cdot g \cdot \sin \frac{s}{l} = m \cdot \ddot{s} \quad \text{czyli}$$

$$\ddot{s} = - g \sin \frac{s}{l}$$

$2v \cdot \dot{v} = -2g \sin \frac{s}{l} \cdot \dot{s}$   
 $2v \frac{dv}{ds} = -2g \sin \frac{s}{l}$

Mnożąc ostatnie równanie stronami przez  $2\dot{s}$  i całkując znajdujemy po uwzględnieniu warunku brzegowego:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot l \cdot \left( 1 - \cos \frac{s}{l} \right)$$

ten sposób będzie obecnie :

$$R = m \cdot g \cdot \left( \frac{v_0^2}{gl} - 2 + 3 \cos \frac{s}{l} \right)$$

Zależności od tego jak sobie wyobrazimy ograniczenie swobody punktu, możemy ustalić rozmaite granice ważności naszego rachunku. Jeśli np. punkt jest stale z torem wiązany ( np. koral nanizany na drut ), to musimy wymagać, by stale było  $v^2 \geq 0$ ; w tym wypadku zależnie od nierówności  $v_0 \leq 2\sqrt{gl}$  może być lub nie mowa o okrążeniu całego toru kołowego. Jeśli natomiast swoboda jest ograniczona od zewnątrz ( np. punkt porusza się wewnątrz gładkiego walca lub też zawieszony jest na wiotkiej nici ) możemy dla ważności zagadnienia wymagać, by było stale  $R \geq 0$ ; w tym wypadku zależnie od nierówności  $v_0 \geq \sqrt{5gl}$  może być lub nie mowa o okrążeniu całego toru kołowego.

W każdym razie równanie na  $v$  względnie  $R$  określa tę wartość  $s = s_{max}$ , do której przy określonym  $v_0$  może dojść. Zarówno  $v$  jak i  $R$  są symetrycznymi i okresowymi funkcjami  $s$ ; i ruch badany jest przeto takim. Ruch tego rodzaju nazywamy wahadłowym, a model punktu materialnego na nieważkiej nici w a h a d ł e m m a t e m a t y c z n e m p r o s t e m; kąt  $\varphi$  odpowiadający dowolnemu  $s$  jest kątem odchylenia, kąt  $\varphi_{max}$  jest kątem obszerności, czas  $T$  odpowiadający drodze  $4s_{max}$  tj. od  $s_{max}$  do  $s_{min}$  i z powrotem, trwaniem lub okresem jednego w a h n i e n i a. Aby ten czas znaleźć należałoby scałkować równanie na  $v$ . Okazuje się, że okres  $T$  wyraża się całką eliptyczną zupełną pierwszego typu :

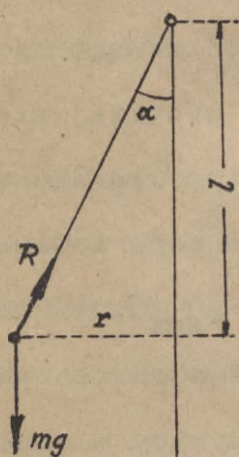
$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} \sin^2 \psi}}$$

przyczem  $\varphi$  i  $\psi$  związane są relacją  $\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_{\max}}{2} \sin \psi$ . Zatem ogólnie jest  $T$  funkcją  $l$ ,  $g$  i  $\varphi_m$ . Z własności całki eliptycznej wyżej podanej wynika, iż przy małych  $\varphi_m$  (do  $8^\circ$ ) nie popełnimy dużego błędu ( $\sim 1\%$ ) wprowadzając okres przybliżony. W tym celu przyjmijmy w równaniu różniczkowym uproszczenie :

$$\ddot{s} = -g \sin \frac{s}{l} \approx -\frac{g}{l} s = -k^2 s$$

Jest to najwidoczniej równanie ruchu harmonicznego (ćwiczenie 1.). Zatem okres wahań wynosi  $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Zatem okres jednego wahnienia wahadła o małej amplitudzie wychylenia jest od tej amplitudy niezależny. Wzór wyżej podany może mieć znaczenie zupełnie ścisłe, jeżeli koniec zawieszony nici będziemy w czasie ruchu odpowiednio nawijać ; prowadzi to do teorii wahadła cykloidalnego.

8. Jeśli prędkość początkowa punktu nie leży w pionowej płaszczyźnie, przechodzącej przez środek zawieszenia, to mamy wtedy do czynienia z wahadłem sferycznym. W szczególnych warunkach punkt, zawieszony na nici, opisywać będzie poziome koło ; wahadło nazywamy wtedy stożkowym. Podać odnośne warunki.



Rys. 170.

Odp. : Na punkt działają ciężar  $mg$  i napięcia nici  $R$  ; obie te siły leżą w płaszczyźnie normalnej do toru (rysunek 170.). Dla kierunku stycznej do toru kołowego mamy zatem  $\ddot{s} = 0$  lub po scałkowaniu  $v = \text{constans}$ . Zatem ,aby ruch w kole poziomem był możliwy musi być prędkość punktu stała. Dla kierunku binormalnej jest  $R \cdot \cos \alpha = m \cdot g$  wreszcie dla normalnej  $R \cdot \sin \alpha = m \frac{v^2}{r}$ . Z obu ostatnich równań wynika  $v = \sqrt{g \cdot r \cdot \operatorname{tg} \alpha}$ . Okres ruchu wynosi  $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r \cot \alpha}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  przyczem  $l$  oznacza oddalenie płaszczyzny ruchu od

środka zawieszenia. Nietrudno przeto jest porównać okresy wahań wahadeł prostego i stożkowego.

9. Przyspieszenie bezwzględne jakiemu ulegają ciała na powierzchni geoidu ziemskiego skierowane jest ku środkowi ziemi i wynosi  $p = 982 \text{ cm/sek}^2$ . Ile wynosi przyspieszenie ciężkości ziemskiej tj. względnej ?

Odp. : Przyspieszenie względne wynosi  $g$  i ma kierunek tzw. pionu tj. kierunek napiętej ciężarkiem nici w stanie jej równowagi względnej tj., gdy

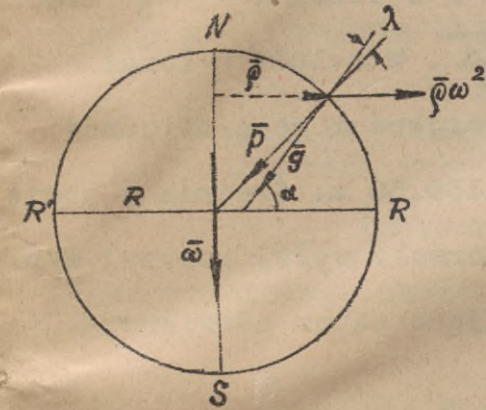
$v_w = 0$ . Według twierdzenia kinematycznego jest :  $\bar{p}_w = \bar{p}_b - \bar{p}_u - \bar{p}_c$ . W naszym wypadku jest  $\bar{p}_w = \bar{g}$ ,  $\bar{p}_b = \bar{p}$ ; pozatem ponieważ ruch po ekliptyce jest w przybliżeniu jednostajnym odbywając się po kole o bardzo dużym promieniu, przeto  $\bar{p}_u$  wywołane jest wyłącznie obrotem ziemi z prędkością  $\omega = \frac{2\pi}{86.164} = 0,000073 \frac{1}{\text{sek}}$  tj. wynosi

ono  $\bar{p}\omega^2$  i skierowane jest od osi obrotu ( przyspieszenie odśrodkowe ); wreszcie z powodu  $\bar{v}_w = \bar{0}$  jest  $\bar{p}_c = \bar{0}$ . Ostatecznie przeto :

$$\bar{g} = \bar{p} + \bar{p}\omega^2$$

przyczem  $\bar{g}$  leży w płaszczyźnie  $\bar{p}$  i  $\bar{p}\omega^2$  tj. w płaszczyźnie przechodzącej przez oś obrotu. Przyjawszy układ prostokątny o osiach  $g$  i drugiej doń prostopadłej możemy napisać :  $g = p \cdot \cos \lambda - \rho \cdot \omega^2 \cos \alpha$ ,

$$0 = p \cdot \sin \lambda - \rho \cdot \omega^2 \sin \alpha,$$



Rys. 171.

z których można wyznaczyć  $g$  i  $\lambda$ . W tym celu zauważmy dodatkowo, że z powodu małej wartości  $\lambda$  jest  $\rho = R \cdot \cos(\alpha - \lambda) \approx R \cdot \cos \alpha$ ,  $\cos \lambda \approx 1$ ,  $\sin \lambda \approx \lambda$  a wtedy znajdziemy kładąc  $R = 6378$  km :

$$g = p \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\cos \alpha}{17} \right)^2 \right], \quad \lambda = \frac{\sin 2\alpha}{578}$$

Zatem tylko na biegunie jest  $g = p$ ,  $\lambda = 0$ , na równiku  $g = \left( 1 - \frac{1}{289} \right) \cdot p$ ,  $\lambda = 0$ . Największe odchylenie pionu od promienia ma miejsce w szerokości geograficznej  $\alpha = 45^\circ$ ; wynosi ono  $\lambda = \frac{1}{578}$  tj.  $\approx \frac{1}{10}^\circ$ .

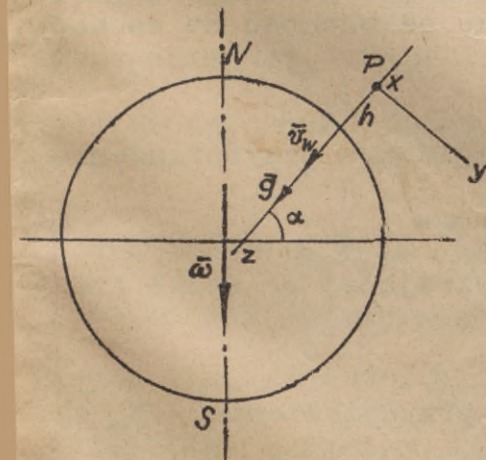
10. Zbadać spadek swobodny punktu materjalnego w pobliżu ziemi.

Odp. : Przyjmijmy przez punkt P osie  $x, y, z$  układu jak na rys. 172. i przyjmijmy ( pomijając działanie słońca, księżyca itp. ), że ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie  $xz$ . Równania tego ruchu brzmią :

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot p_{wx}, \quad m \cdot \ddot{z} = m \cdot p_{wz}, \quad \text{przyczem}$$

$$\bar{p}_w = \bar{p}_b - \bar{p}_u - \bar{p}_c = \bar{g} - \bar{p}_c = \bar{g} - 2 \bar{v}_w \wedge \bar{\omega}$$

Przyjawszy w przybliżeniu ( rzędu wyżej zaakcentowanego ), iż  $\bar{v}_w$  ma kierunek pionu i wynosi  $v_w = gt$ , to wektor  $\bar{p}_c$  skierowany jest prostopadle za płaszczyznę



Rys. 172.

rysunku tj. na wschód lub w dodatnim kierunku osi  $x$ . Ostatecznie przyspieszenie względne  $\vec{p}_w$  ma składowe  $p_{wx} = 2 \cdot g \cdot \omega \cdot t \cdot \cos \alpha$ ,  $p_{wz} = g$ . Równania ruchu w układzie względnym brzmią :

$$\ddot{x} = 2g\omega t \cdot \cos \alpha \quad , \quad \ddot{z} = g$$

Całkując mamy :  $\dot{x} = v_{wx} = g \cdot \omega \cdot t^2 \cdot \cos \alpha$ ,  $\dot{z} = v_{wz} = \sim v_w = gt$  i w końcu  $x = \frac{g \omega t^3}{3} \cos \alpha$   
 $z = \frac{1}{2}gt^2$ . Dla  $z = h$  jest  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  i  $x = \frac{2}{3} h \omega \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . W r. 1831 wykonał F. Reich w szybie kopalnianym we Freibergu saskim tj. w szerokości geograficznej  $\alpha = 50^\circ 53' 23''$  doświadczenie ze spadkiem na wysokości  $h = 158,50$  m. Średnia z pomiarów zboczenia wschodniego dała rezultat  $x = 28,4$  mm ; z formuły wyżej podanej wynika  $x = 27,5$  mm tj. o 3% mniej. Doświadczenie to wystarczająco zatem potwierdza teorię.

11. Punkt materialny porusza się na północnej ( południowej ) półkuli wzdłuż południka ze stałą prędkością  $v_w$ . Określić przyspieszenie Coriolisa

Odp. : Przyspieszenie wynosi  $2v_w \omega \sin \alpha$  i jest skierowane dla patrzącego w kierunku ruchu na prawo (lewo) stycznie do równoleżnika. Udowodnić powyższe. Wykazać pozatem, że jeśli  $v_w$  jest dowolną prędkością poziomą (tj. styczną do kuli ziemskiej, ale dowolnie nachyloną względem południka) określa  $2v_w \omega \sin \alpha$  poziomą składową przyspieszenia Coriolisa.

12. Wahadło proste zawieszone w ten sposób, że może wahać w dowolnej płaszczyźnie pionowej punktu zawieszenia ( np. ułożonego w łożysku Cardana ) nazywamy wahadłem Foucault'a. Jeśli pod wahadłem tym umieścimy przyrząd samopiszący to koniec wahadła zaznaczy krzywe obracające się w kierunku od wschodu na zachód z prędkością  $\omega \sin \alpha$ . Dlaczego ?

Odp. : Dzięki obecności w układzie względnym przyspieszenia Coriolisa, a mianowicie poziomej jego składowej  $2v_w \omega \sin \alpha$ .

13. Zbadać ruch punktu na gładkiej, wirującej ze stałą prędkością kątową  $\omega$ , prostej .

Odp. : Ruch odbywa się pod wpływem przyspieszenia -  $\vec{F}_u$  tj. siły odśrodkowej  $m \cdot x \omega^2$ , albowiem ciężar ( siła bezwzględna ) punktu i siła Coriolisa a znoszą się z odnośnymi składowymi reakcyj. Niech dla  $t = 0$  będzie  $v = v_0$

i  $x = x_0$  to z równania różniczkowego :

$$\ddot{x} = -x\omega^2$$

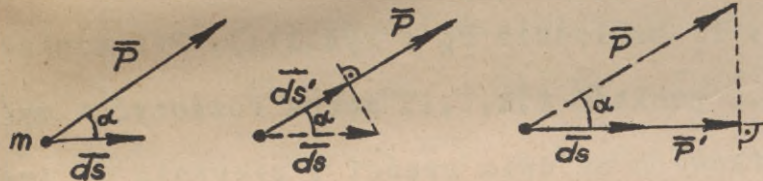
uzyskamy :

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 (x^2 - a^2)}, \quad x = \frac{1}{2} \left[ \left(x_0 + \frac{v_0}{\omega}\right) e^{\omega t} + \left(x_0 - \frac{v_0}{\omega}\right) e^{-\omega t} \right]$$

Jak się zmieni zadanie, jeśli przyjmiemy, że punkt znajduje się na wirującym w swej płaszczyźnie kole, przyczem środek obrotu leży na obwodzie koła ?

§.2. Praca, potencjał, zasada prac możliwych, dzielność.

1. Niech siła  $\vec{P}$  działa na punkt materialny  $m$  i niech ruch chwilowy tegoż ostatniego określa wektor  $\vec{ds}$  (rys.173.). Wtedy wyrażenie  $dL = \vec{P} \cdot \vec{ds} = P ds \cos \alpha$



Rys. 173.

nazywamy pracą elementarną siły  $\vec{P}$  na przesunięciu  $\vec{ds}$ . Wyrażenie  $ds \cdot \cos \alpha = ds'$  nazywamy przesunięciem składowym tzn. w kierunku danej siły  $P$ . Wyrażenie  $P \cdot \cos \alpha$  nazywamy siłą składową tzn. w kierunku danego przesunięcia

$ds$ . Równie dobrze przeto jest :

$$dL = P \cdot ds' = P' \cdot ds.$$

W zależności od tego, czy jest  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$  lub czy  $P$  i  $ds'$  względnie  $P'$  i  $ds$  są zgodnie, prostopadle lub niezgodnie skierowane może być  $dL \gtrless 0$ . Z prawidła rozdzielności mnożenia skalarowego wynika, że  $\vec{P}$  może być wypadkową sił  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$  działających zosobna na tem samym przesunięciu ; naodwrot możemy  $\vec{ds}$  uważać za wypadkową przesunięć  $\vec{ds}_1, \vec{ds}_2, \dots, \vec{ds}_n$ , na których zosobna wykonuje pracę siła  $\vec{P}$ . W tem dwójakiem znaczeniu możemy napisać :

$$dL = dL_1 + dL_2 + \dots + dL_n$$

przyczem  $dL_1 = \vec{P}_1 \cdot \vec{ds}$  względnie  $\vec{P} \cdot \vec{ds}_1$  zależnie od wypadku. Nie wchodząc bliżej w pochodzenie  $P$  czy  $ds$  rozłożmy każde z nich w kierunkach wzajemnie prostopadłych  $x, y, z$  tak, że :  $\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y + \vec{P}_z$ ,  $\vec{ds} = \vec{dx} + \vec{dy} + \vec{dz}$ , to z tytułu ortogonalności dodajników o różnych kierunkach jest :

$$dL = P_x dx + P_y dy + P_z dz$$

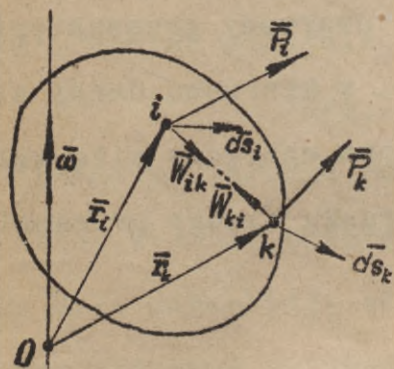
183  $\varphi = \theta t$

wyrażeniem analitycznym pracy elementarnej. Praca całkowita wynosi :

$$L = \int_{(1)}^{(2)} \bar{P} \cdot d\bar{s} = \int_{(1)}^{(2)} (P_x dx + P_y dy + P_z dz)$$

jest to praca odpowiadająca przesunięciu rozważanego punktu od położenia początkowego (1) do położenia końcowego (2) .

2. Dotychczas była mowa o jednym punkcie ; obecnie przejdziemy do układu punktów materialnych tj. do ciała. Ruch tegoż ciała rozłożymy na przesunięcie chwilowe  $d\bar{s}$  i obrót chwilowy  $d\varphi = \bar{\omega} \cdot dt$  ; jak wiadomo można to uskutecznić na nieskończenie wiele sposobów. Jeśli przeto na osi obrotu obierzemy jakiś punkt O względem którego będziemy ustalać położenie chwilowe punktu i czy k ciała, to już obecnie możemy powiedzieć, że punkt O jest punktem dowolnym. Położenie chwilowe dwóch punktów ciała określają wektory  $\bar{r}_i$  względnie  $\bar{r}_k$  ( rys.174). Przesunięcia



Rys. 174.

$d\bar{s}_i, d\bar{s}_k, \dots$  punktów i, k, ... można rozłożyć w myśl uwag początkowych na dwie części ; pierwsza  $d\bar{s}$  jest wspólna dla wszystkich punktów, druga, pochodząca od obrotu wynosi  $\bar{v}_{i0} dt, \bar{v}_{k0} dt, \dots$ , przyczem  $\bar{v}_{i0}, \bar{v}_{k0} \dots$  oznaczają prędkości linjowe, pochodzące wyłącznie od obrotu czyli  $\bar{v}_{i0} = \bar{r}_i \wedge \bar{\omega}, \bar{v}_{k0} = \bar{r}_k \wedge \bar{\omega} \dots$ . Na iasem mówiąc zmianę porządku czynników  $\bar{r}$  i  $\bar{\omega}$  wywołała zmiana strzałki dla promienia wektora  $\bar{r}$  ; w odnośnym uste

pie kinematyki było  $\bar{v} = \bar{\omega} \wedge \bar{r}$ , ale  $\bar{r}$  wskazywało od punktu do osi obrotu, a obecnie postąpiliśmy odwrotnie. Zważywszy na równość  $\bar{\omega} dt = d\varphi$  widzimy, że przesunięcia pochodzące tylko od obrotu wynoszą  $\bar{r}_i \wedge d\varphi, \bar{r}_k \wedge d\varphi, \dots$ , przyczem  $d\varphi$  jest wspólne dla wszystkich punktów układu. Ostatecznie jest :

$$\begin{aligned} d\bar{s}_i &= d\bar{s} + \bar{r}_i \wedge d\varphi \\ d\bar{s}_k &= d\bar{s} + \bar{r}_k \wedge d\varphi \end{aligned}$$

Na punkt i działa wypadkowa sił zewnętrznych tego punktu  $\bar{P}_i$  i układ sił wewnętrznych, pochodzących od działania punktów k o wypadkowej  $\sum_k \bar{W}_{ik}$ . Na punkt i działa przeto siła :

$$\bar{P}_i + \sum_k \bar{W}_{ik}$$

$$d\bar{s}_i = d\bar{s} + \bar{r}_i \wedge d\varphi$$

$P/ds$   
 $M/d\varphi$

184

$$dL = \bar{P} \bar{ds} + \bar{M} \cdot d\varphi$$

Podobnie na punkt k działa siła :

$$\bar{F}_k + \sum_i \bar{W}_{ki}$$

Napiszmy wyrażenie pracy elementarnej dla punktu i ; brzmi ono :

$$dL_i = ( \bar{P}_i + \sum_k \bar{W}_{ik} ) ( \bar{ds} + \bar{r}_i \wedge d\varphi )$$

Uwzględnivszy, że w iloczynie mieszanym  $\bar{P}_i \bar{r}_i \wedge d\varphi$  możemy cyklicznie zmienić porządek czynników przedstawimy go w formie  $d\varphi \cdot \bar{P}_i \wedge \bar{r}_i = d\varphi \bar{M}_i$ , przyczem  $\bar{M}_i$  jest najwi-  
doczniej momentem siły  $\bar{P}_i$  względem punktu O. Podobnie  $\bar{W}_{ik} \wedge \bar{r}_i = \bar{N}_{ik}$  przedstawia  
moment siły  $\bar{W}_{ik}$  względem O. Zatem mamy :

$$dL_i = \bar{ds} \cdot \bar{P}_i + d\varphi \cdot \bar{M}_i + \bar{ds} \cdot \sum_k \bar{W}_{ik} + d\varphi \sum_k \bar{N}_{ik}$$

Chcąc otrzymać pracę elementarną wykonaną w czasie ruchu chwilowego ciała tj. wszystkich punktów układu zesumujemy  $dL_i$ . Zatem :

$$dL = \sum_i dL_i = \bar{ds} \cdot \sum_i \bar{P}_i + d\varphi \cdot \sum_i \bar{M}_i + \bar{ds} \cdot \sum_i \sum_k \bar{W}_{ik} + d\varphi \sum_i \sum_k \bar{N}_{ik}$$

W powyższem równaniu  $\sum_i \bar{P}_i = \bar{P}$  oznacza sumę geometryczną wszystkich sił zewnętrz-  
nych działających na ciało,  $\sum_i \bar{M}_i = \bar{M}$  zaś ogólny moment układu dla punktu O obrane-  
go dowolnie z tem zastrzeżeniem, iż w ten sposób ustalono oś obrotu i kierunek  
przesunięcia. Pozatem jest  $\sum_i \sum_k \bar{W}_{ik} = \bar{0}$ ,  $\sum_i \sum_k \bar{N}_{ik} = \bar{0}$  albowiem siły wewnętrzne zda-  
rzają się tylko dwójkami zerowemi. Ostatecznie przeto dla ciała  
s z t y w n e g o (dla takiego ruchu ogólny jest kombinacją przesunięcia i obrotu)  
jest :

$$dL = \bar{P} \cdot \bar{ds} + \bar{M} \cdot d\varphi$$

czyli

$$L = \int_{(1)}^{(2)} ( \bar{P} \cdot \bar{ds} + \bar{M} \cdot d\varphi )$$

W układzie analitycznym będzie najwidoczniej

$$L = \int_{(1)}^{(2)} ( P_x dx + P_y dy + P_z dz + M_x d\lambda + M_y d\mu + M_z d\nu )$$

ze zrozumiałemi oznaczeniami. Warto zapamiętać ciekawą symbolikę w definicji pracy,  
wystarczy w pierwszej części tj.  $\bar{P} \cdot \bar{ds}$  wstawić w miejsce siły  $\bar{P}$  moment  $\bar{M}$ , zaś  
w miejsce długości  $s$  kąt  $\varphi$ , by uzyskać część drugą. Z odpowiedniością  $s$  i  $\varphi$  spo-  
tykaliśmy się już w kinematyce, z odpowiedniością  $P$  i  $M$  w statyce, a obecnie  
i w dynamice.

3. Pracę  $\int \bar{P} \cdot \bar{ds} = \int P \cdot ds'$  względnie  $\int \bar{M} \cdot d\varphi = \int M \cdot d\varphi'$  można obliczyć  
wykreślnie (rys. 175) planimetrując pole zawarte między osią przesunięć składowych

$D$  {mnożenie druktów} składowych

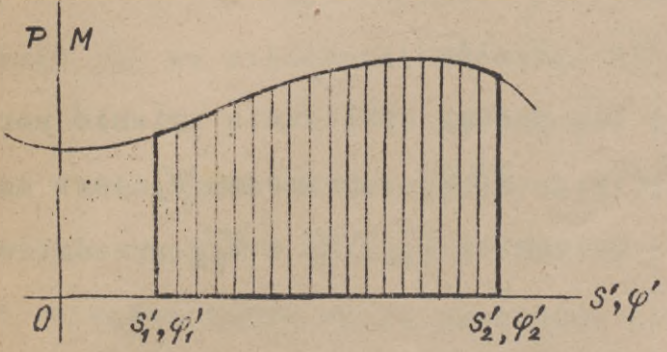
$$D = P_x v_x + P_y v_y + P_z v_z$$

$$\theta = \frac{n\pi}{30}$$

$$D = M_x \dot{\theta}_x + M_y \dot{\theta}_y + M_z \dot{\theta}_z$$

$$D = M \cdot n \cdot \frac{\pi}{30}$$

s' względnie obrotów składowych  $\varphi'$  rzędnymi  $s_1'$  i  $s_2'$  względnie  $\varphi_1'$  i  $\varphi_2'$  a krzywą  $P(s')$  względnie  $M(\varphi')$ . Dowodu dostarcza wprost sam rysunek. Przyrządy kreślące krzywą pracy zwiemy indykatorami. Mają one zastosowanie przy rozmaitych motorach.



Rys. 175.

4. W układzie fizykalnym za jednostkę pracy uważa się 1 erg tj. pracę 1 dyny na przesunięciu 1 cm. Jednostką więcej praktyczną w tym układzie jest 1 Joule =  $10^7$  erg. W układzie technicznym stosujemy jako jednostki 1 kgm = 100 kgcm = 0,001 ton m. Ponieważ 1 dyna =  $\frac{1}{981}$  grama, przeto

$$1 \text{ kgm} = 98100000 \text{ ergów} = 9,81 \text{ Joule i naodwrot } 1 \text{ Joule} = 0,102 \text{ kgm.}$$

5. Równie pożytecznym pojęciem jak praca jest tzw. m o c lub s k u t e k lub też d z i e l n o ś ć  $D$ . Jest to praca wykonana w pomysłanej jednostce czasu. Zatem ogólnie :

$$D = \frac{dL}{dt} = \bar{P} \frac{ds}{dt} = \bar{P} \cdot \bar{v} = P \cdot v' = P' \cdot v = P_x v_x + P_y v_y + P_z v_z$$

względnie  $D = \frac{dL}{dt} = \bar{M} \frac{d\varphi}{dt} = \bar{M} \cdot \bar{\omega} = M \cdot \omega' = M' \cdot \omega = M_x \omega_x + M_y \omega_y + M_z \omega_z$

Znajdźmy tu znowu odpowiedniość  $\bar{v}$  i  $\bar{\omega}$ . Niech będzie  $\bar{M} \parallel \bar{\omega}$  i  $\bar{\omega} = \text{const.}$ , to chętnie wprowadzamy ilość obrotów  $n$  na minutę tj. związek  $\omega = \frac{n\pi}{30}$ ; wtedy :

$$D = M \cdot n \cdot \frac{\pi}{30}$$

6. W układzie fizykalnym jednostką dzielności jest 1 Watt = 1 Joule/sek względnie 1 Kilowatt = 1000 Wattów. W układzie technicznym wprowadzono 1 kgm/sek i często 1 koń mechaniczny = 75 kgm/sek. Oczywiście są następujące relacje zamienne : 1 kgm/sek = 9,81 W, względnie 1 W = 0,102 kgm/sek, 1 KM = 0,736 KW względnie 1 KW = 1,36 KM. Dzielność w koniach mechanicznych oznaczamy zwyczajnie literą  $N$ . Jeśli we wzorze końcowym w ust. 5.  $M$  ma wymiar kgm, to  $N = \frac{D}{75} = \frac{\pi}{30 \cdot 75} \cdot M n = 0,0014 M n$  (KM) lub naodwrot  $M = \frac{30 \cdot 75}{\pi} \frac{N}{n} = 716,2 \text{ kgm.}$

7. Wróćmy do definicji pracy przy przesunięciu punktu materialnego w formie :

$$L = \int_{(1)}^{(2)} ( P_x dx + P_y dy + P_z dz )$$

$$dU = -P_x dx - P_y dy + P_z dz$$

Granice całkowania oznaczają, że chodzi o obliczenie pracy przy przesunięciu od położenia ① do położenia ②. W stadium przesuwania zmieniają się siły i to wraz ze współrzędnymi punktu, wraz z jego prędkościami składowymi i wreszcie wraz z czasem. Z powyższych powodów całkowanie może być często silnie utrudnionem. Znacznie prościej będzie, gdy siły będą określone polem sił tj., gdy będą one funkcjami tylko współrzędnych punktu. W tym ostatnim wypadku zachodzi czasem wypadek niezwykle ważny, mianowicie wtedy, gdy wyrażenie podcałkowe da się przekształcić na funkcję jednej zmiennej czyli gdy wyrażenie to będzie różniczką zupełną  $dF$  jednowartościowej funkcji współrzędnych  $x, y, z$ . Wtedy praca jest zależną tylko od położenia początkowego i końcowego a nie od położen pośrednich między owymi skrajnemi. Istotnie bowiem wtedy

$$L = \int_{\text{①}}^{\text{②}} dF = F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1) = F_2 - F_1$$

W tym wypadku chętniej zamiast funkcji sił  $F$  wprowadzamy potencjał  $U = -F$ . Zatem praca

$$L = - \int_{\text{①}}^{\text{②}} dU = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2) = U_1 - U_2$$

jest w omawianym wypadku różnicą potencjałów w położeniu początkowym i końcowym (a nie odwrotnie). Odnośne pole sił jest teraz polem potencjalnym lub niewirowym. Skoro:  $dU = -P_x dx - P_y dy - P_z dz$  jest różniczką

zupełną  $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$  funkcji  $U = U(x, y, z)$ , to najwidoczniej wtedy

jest:

$$P_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad P_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad P_z = - \frac{\partial U}{\partial z}$$

tzn. pochodne cząstkowe potencjału z odwróconymi znakami są odpowiedniami składowymi siłami pola. Jeśli przeto zamiast wyrażenia  $P_x dx + P_y dy + P_z dz$  na różniczkę jednej zmiennej (z powodu np. zawikłej postaci wyrażenia) nie da się przeprowadzić, to posiadamy mimo to kryterjum obecności potencjału w postaci:

$$\frac{\partial P_y}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P_z}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P_x}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial x} = 0$$

wynikającej ze znanego twierdzenia matematycznego o niezależności pochodnych

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

cząstkowych od porządku różniczkowania względem zmiennych mieszanych. Pole potencjalne możemy skonstruować za pomocą tzw. powierzchni ekwipotencjalnych tj. powierzchni równego (stałego) potencjału :

$$U(x,y,z) = C$$

Przypuśćmy, żeśmy skonstruowali układ takich powierzchni, tj. ich zbiór dla różnych wartości stałych  $C$ . Jeśli punkt materialny wykona dowolne przesunięcie po którejś z nich to praca siły pola wynosi  $L = C - C = 0$ . Z drugiej strony wiadomym nam jest, że  $L = 0$ , gdy siła skierowana jest stale prostopadle do przesunięcia punktu. Zatem siła zachowawcza (tzn. pola potencjalnego) jest zawsze skierowana prostopadle do powierzchni ekwipotencjalnej przechodzącej przez dany punkt. Wyrażamy to i tak : Linje sił zachowawczych przecinają się ortogonalnie z powierzchniami równego potencjału. Ponadto siły są zawsze skierowane od powierzchni wyższego  $C+dC$  do powierzchni niższego  $C$  potencjału. Albowiem tylko przy takiej umowie będzie znak pracy  $dL = (C + dC) - C = dC = P \cdot dn$  dogadzał naszym dotychczasowym wywodom. W ostatnim równaniu  $dn$  jest rzutem dowolnego przesunięcia między powierzchniami  $C+dC$  i  $C$  na kierunek siły  $P$  ;  $dn$  jest przeto odcinkiem normalnej do powierzchni potencjalnej, zawartym między wymienionymi powierzchniami. Wnioskujemy stąd :

$$P = \frac{dC}{dn}$$

czyli słowami : siła pola  $C$  jest odwrotnie proporcjonalna do odcinka  $dn$  normalnej jak wyżej, a wprost proporcjonalna do odpowiadającej zmiany potencjału. Jest to twierdzenie, odpowiadające wyżej podanym rezultatom na  $P_x, P_y, P_z$ .

8. Niech na ciało znajdujące się w równowadze działa układ sił.

Udzielmy w myśli punktom (ciała) zaczepienia sił przesunięć dowolnych, tj. niezależnych od sił, ale możliwych z punktu widzenia sztywności ciała. Więc np. w przypadku zagadnienia płaskiego mogą to być dwa przesunięcia równoległe w płaszczyźnie zadania i obrót dookoła osi, prostopadłej do płaszczyzny zagadnienia lub jakieś inne trzy ruchy ; w przypadku najogólniejszych może ów pomyślany ruch polegać na sześciu ruchach składowych. Tego rodzaju przesunięcia nazywamy wirtualnym, przygotowanym lub możliwym. Jak wspomniano niema ogranicze-

nia co do jakości tych ruchów ; wymaga się jedynie, by one wogóle były możliwe tzn. milcząco przyjmuje się, że one mogłyby się zdarzyć, gdyby np. układ sił zmieniono i ruch faktycznie musiałby powstać - równowaga, która dotychczas miała miejsce zostałaby zniweczona. Niekiedy pojęcie możliwości ruchów ogranicza się silniej mianowicie z punktu widzenia swobody ciała wogóle. Np. przyjmuje się, że punktowi znajdującemu się na krzywej materjalnej można udzielić przesunięcia możliwego tylko w kierunku stycznej do krzywej. Ograniczenie to upraszcza pewne konkretne równania, ale nie jest ono konieczne. Jak się okaże - naszkicujemy za chwilę nową metodę rozwiązywania zagadnień statyki. Otóż w zagadnieniach tych - jak wiadomo - chodzi o znalezienie reakcyj punktów podparcia i o pedanie położenia równowagi. Owo wspomniane ograniczenie ma szczególną rację bytu przy poszukiwaniu właśnie położenia równowagi ; przy poszukiwaniu reakcyj możemy być znacznie swobodniejsi. Natomiast zawsze na oku musi się mieć sztywność ciała i ewentualności ruchu dopuszczalne dla takiego ciała z punktu widzenia kinematyki. Niemożliwość ruchu ze stanowiska dynamiki pozostawić zawsze należy na uboczu. Ruchy pomyślane uważać pozatem możemy za małe ; będzie to wygodne jakkolwiek niekonieczne. Przesunięcia możliwe oznaczać będziemy symbolem  $\delta s$ , obrót możliwy symbolem  $\delta \varphi$ . Symbol  $\delta$  oznacza pomyślaną zmianę współrzędnej  $s$  względnie  $\varphi$ . Ma on zatem znaczenie warjacji. Jak wiadomo formalnie operuje się oznaczeniem  $\delta$  identycznie jak symbolem  $d$  zwykłego rachunku różniczkowego. Zatem  $\delta s$ ,  $\delta \varphi$  można uważać za różniczki - jakkolwiek pojęciowo są wielkościami zgoła innymi. Pozatem wielkościami temi możemy operować wektorjalnie lub analitycznie zależnie od obranej metody badania. Tak się przedstawia sprawa przesunięć lub ogólnie ruchów przygotowanych, możliwych.

9. Podczas ruchów możliwych wykonają siły układu pracę ; pracę tę nazywamy możliwą, przygotowaną lub wirtualną. Zatem praca przygotowana jest pracą siły na przesunięciu przygotowanym. Pamiętając stale o tem, że mowa tu jest o układzie pozostającym w równowadze weźmy narazie pod uwagę układ najprostszyszy - jeden punkt materjalny. Niech nań działa układ sił, to punkt ten zachowuje się tak (trzecie prawo Newton'a) jak gdyby nań działała wypadkowa wszystkich sił (łącznie z ewentualną reakcją)  $\bar{P} = \sum \bar{P}_i$ . Przesunięcie możliwe niech wynosi  $\delta s$ , a zatem pra-

ca możliwa wynosi  $\delta L = \sum_i \bar{P}_i \cdot \delta s$  lub  $\bar{P} \cdot \delta s$  co wynika z uwagi zamieszczonej przy definiowaniu pracy. Punkt badany znajduje się w równowadze ; ze stanowiska dynamiki oznacza to, że jest  $\bar{P} = \bar{0}$  ; zatem zarówno i  $\delta L = 0$  .Ale i naodwrot gdyby przy dowolnym pomyślanem  $\delta s$  miało być  $\delta L = 0$  to stałoby to się mogło jedynie dla

$$\bar{P} = \sum_i \bar{P}_i = 0$$

lub w układzie analitycznym :

$$P_x = \sum P_{ix} = 0, P_y = \sum P_{iy} = 0, P_z = \sum P_{iz} = 0$$

Ostatnie równania są - jak wiadomo - warunkami równowagi punktu lub - co na jedno wychodzi - warunkami równowagi układu zbieżnego sił. Równania powyższe o tyle mogą czytającego zdziwić, że są one samo przez się zrozumiałe ; wynikają bowiem wprost z podstawowego aksjomatu mechaniki i omówionego pojęcia równowagi punktu. Natomiast nie jest a priori jasnym wynikające stąd stwierdzenie, które odrazu rozszerzymy do układu punktów materialnych tzn. ciała.

10. Układ materialny jest w równowadze, jeśli suma algebraiczna prac przygotowanych wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych układu jest zerem. Jednakże tylko jeden krok nas dzieli od uznania powyższego kryterjum. Istotnie niech  $\bar{P}_i$  będzie wypadkową sił zewnętrznych, a  $\sum_k \bar{W}_{ik}$  wypadkową sił wewnętrznych działających na punkt  $m_i$  układu rozpatrywanego, wreszcie  $\delta s_i$  przesunięciem możliwym dla punktu, to na podstawie do tychczasowego jest jasnym, że dla równowagi punktu  $m_i$  jest słusznem równanie :

$$\delta L_i = \bar{P}_i \cdot \delta s_i + \sum_k \bar{W}_{ik} \cdot \delta s_i = 0.$$

Jeśli jednak układ znajduje się w równowadze to każdy bez wyjątku punkt musi też w niej trwać. Powyższe równanie można przeto wypisać dla wszystkich po kolei punktów  $m_i$ . Sumując powyższe otrzymamy :

$$\delta L = \sum_i \delta L_i = \sum_i \bar{P}_i \cdot \delta s_i + \sum_i \sum_k \bar{W}_{ik} \cdot \delta s_i = 0$$

co było do udowodnienia.

11. Jak wspomniano w odnośnym ustępie statyki ogólne warunki równowagi ciała sztywnego zidentyfikowaliśmy tam z ogólnymi warunkami redukcji zerowej układu sił zewnętrznych bez żadnego słusznego dowodu. Dostarczymy go obecnie. Ostatnie równanie ust. 10. przyjmuje mianowicie dla ciała

sztynnego postać :

$$\delta L = \sum \delta L_i = \bar{P} \cdot \delta s + \bar{M} \cdot \delta \varphi = 0$$

z oznaczeniami dla  $\bar{P}$  i  $\bar{M}$ , tudzież  $\delta s$  i  $\delta \varphi$  jak w ustępie 2. Jeśli powyższe ma się spełnić nie zależnie od  $\delta s$  i  $\delta \varphi$ , które przecież - wciąż podkreślamy - przyjąć możemy zupełnie dowolnie, to stać się to może tylko wtedy, gdy zosobna będzie

$$\bar{P} = \sum_i \bar{P}_i = \bar{0} \quad , \quad \bar{M} = \sum_i \bar{M}_i = \bar{0}$$

lub w układzie prostokątnym x,y,z :

$$P_x = \sum P_{ix} = 0 \quad , \quad P_y = \sum P_{iy} = 0 \quad , \quad P_z = \sum P_{iz} = 0 \quad , \quad M_x = \sum M_{ix} = 0 \quad , \quad M_y = \sum M_{iy} = 0 \\ M_z = \sum M_{iz} = 0$$

Zatem : ogólne warunki równowartości zerowej układu sił zewnętrznych, działających na ciało sztywne są równocześnie koniecznymi i wystarczającymi warunkami równowagi tego ciała. Że koniecznymi one były można było przypuszczać ; nasuwa się jednak poważna wątpliwość czy były one warunkami wystarczającymi. Obecnie to wykazano.

12. Nie należy jednostronnie potraktować wartości ostatnich ustępów. Zasada prac przygotowanych posłużyła nam do wykazania prawdziwości i samowystarczalności równań, któremi posługiwaliśmy się w statyce. Ale nie tylko do tego celu ona służy. Zyskaliśmy w niej nową metodę rozwiązywania zagadnień równowagi. Metoda ta tkwi w uproszczeniu twierdzenia ust.10. Mianowicie : Ciało sztywne jest w równowadze, jeśli suma algebraiczna prac przygotowanych wszystkich sił zewnętrznych, działających na ciało, jest równą zeru. Że niekiedy przy stosownym (ograniczonym silniej co do możliwości) obiorze przesunięć przygotowanych pewne siły zewnętrzne np. reakcje mogą odpaść z rachunku jest rzeczą jasną ; wiadomem nam bowiem jest kiedy praca znika. Przykłady szczegółowe wyjaśnią nam bliżej sposób postępowania.

$$\frac{dM_v}{dt} = \bar{M} \wedge \bar{\Theta}$$

całkowita prędkość  $\bar{M}_v$  gdy obrót, smiętny.

$$\frac{d\bar{M}_v}{dt} = \bar{M} \wedge \bar{\Theta} + \frac{d\bar{M}_v}{dt} \cdot \bar{e}$$

$\eta =$  współwzrost wektora  $\bar{M}_v$

Przykłady ćwiczeń.

$S_m = m h \Theta^2$

1. Obliczyć pracę siły P przy wyciągnięciu ciężaru Q po torze kolistym (rys.176) zakładając stałą prędkość przesuwania.

Odp. : Z założenia stałej prędkości wynika, że w dowolnej chwili możemy układ uważać za zrównoważony. Zatem rzutując siły na styczną mamy :

$$P \cdot \cos \psi - Q \cdot \sin \varphi = 0$$

Praca wynosi

$$L = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} P \cdot \cos \psi \cdot r \cdot d\varphi = Qr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot d\varphi$$

czyli  $L = Qr$ . Wynik ten jest jasny, skoro zauważymy, że praca ciężaru Q wynosi  $-Qr$ , albowiem Q jest stale pionowe a rzut przesunięcia całkowitego na ten kierunek wynosi  $-r$ . Poza tym mogliśmy uważać ruch

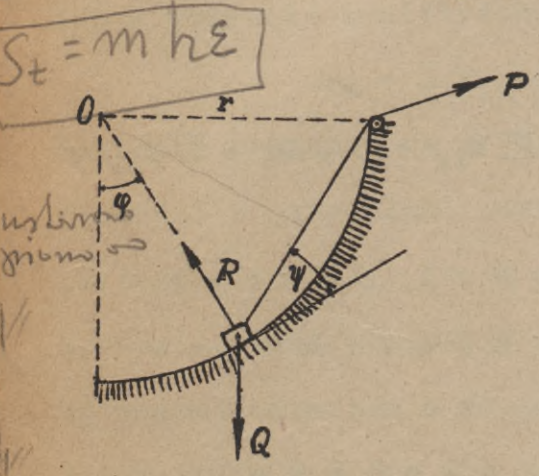
przedmiotu za obrót dookoła osi O ; obrót elementarny wynosi  $d\varphi$  a moment siły względem O wynosi  $P \cdot r \cdot \cos \psi$  ; stąd znów  $L = Qr$ .

2. Obliczyć pracę jaką wykonamy wyciągając ruchem jednostajnym ciężar Q z pionowego szybu o głębokości h na linję, której jednostka długości waży q .

Odp. : W dowolnej chwili, gdy ciężar znajduje się w głębokości x siła ciągnąca musi wynosić  $Q + qx$  czyli praca elementarna wynosi wtedy  $(Q + qx)dx$ . Zatem praca całkowita wynosi :  $L = \int_0^h (Q + qx)dx = Qh + \frac{qh^2}{2}$ . Oznaczmy całkowity ciężar liny przez  $Q_0 = qh$  to  $L = (Q + \frac{Q_0}{2})h$ .

3. Kanał roboczy prowadzi  $Q \text{ m}^3/\text{sek}$  wody ; wskutek strat nie szczelności kanału i strat mechanicznych wydajność zakładu charakteryzuje liczba  $\eta = 0,75$ . Jaką dzielność reprezentuje zakład wodny jeśli spad użytkowy wody wynosi h metrów ?

Odp. :  $D = \eta Q h \gamma \text{ kgm/sek}$  jeśli  $\gamma \text{ kg/m}^3 = 1000$  jest ciężarem gatunkowym wody . Innymi słowy  $N = \frac{\eta Q h \gamma}{75} = 10 Q h \text{ KM}$  ; jeśli np.  $Q = 1 \text{ m}^3/\text{sek}$ ,  $h = 10 \text{ m}$ , to  $N = 100 \text{ KM}$ .



Rys. 176.

Moment z T odśrodkowy  $M_m = -\bar{M} \wedge \bar{\Theta}$   
 Moment z T styczniowy  $M_t = \epsilon \sqrt{M_v + M_n}$

$$M_m = -\bar{M} \wedge \bar{\Theta}$$

$$M_t = \epsilon \sqrt{M_v + M_n}$$

$$\gamma \text{ z wektora } = M_n = \Theta^2 \sqrt{M_v + M_n}$$

*Siłomie w T bezwzględności były obrotowej w T około osi symetrii można*  
*192*  
*do I) - 2ch w T S<sub>n</sub> i S<sub>t</sub>; S<sub>n</sub> - 203 - należała do prostopadłej z powierzchni uśrednionej*  
*masę były do osi obrotu. S<sub>t</sub> ⊥ S<sub>n</sub> prostej (h)*

4. Ile wynosić musi teoretycznie moment użytkowy wału reprezen

tującego dzielność  $N = 1000 \text{ KM}$  przy  $n = 250 \text{ obr/min}$  ?

Odp. :  $M = 716,2 \frac{N}{n} \text{ kgm} = 2865 \text{ kgm}.$

5. Zbadać czy siły o prostych zbieżnych w jednym punkcie O

o algebraicznych wartościach  $V(\rho)$ , zależnych od oddalenia  $\rho$  punktu od owego środka zbieżności (środku przyciągania względnie odpychania) posiadają potencjał.

Odp. : Niech punkt, na który działa siła  $P = V(\rho)$  ma współ

rzędne  $x, y, z$  w prostokątnym układzie z początkiem w O. Składowe siły są :

$$P_x = P \frac{x}{\rho}, P_y = P \frac{y}{\rho}, P_z = P \frac{z}{\rho} \text{ przy czym } \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Praca elementarna wynosi  $dL = P \frac{xdx + ydy + zdz}{\rho}$ ; lecz licznik ułamka wynosi najwidoczniej  $\rho d\rho$ . Zatem praca elementarna  $dL = P d\rho = V(\rho) \cdot d\rho$  jest różniczką zupełną. Potencjał istnieje i wynosi on :

$$U = - \int V(\rho) \cdot d\rho$$

stałej całkowania można nadać stosowną dowolną zresztą wartość np. zero; przy stosowaniu bowiem potencjału chodzi tylko zawsze o jego różnicę w dwóch miejscach. Podobnie wykazuje się, że siły prostopadłe do stałej prostej lub płaszczyzny o wartościach, zależnych od oddalenia punktu od tej prostej względnie płaszczyzny posiadają również potencjał. Udowodnić powyższe !

6. Odkryte przez Newton'a ogólne prawo gra

witacji brzmi : Każdy punkt materjalny przyciąga inny punkt materjalny siłą wprost proporcjonalną do mas obu punktów, a odwrotnie proporcjonalną względem kwadratu ich wzajemnej odległości. Ile wynosi potencjał przyciągania ?

Odp. : Umieścimy w jednym punkcie początek prostej  $\rho$ , to

przyciąganie wywołane tym punktem na inny punkt objawia się siłą skierowaną ku punktowi pierwszemu; wynosi ono przeto

$$P = - C \frac{m_1 m_2}{\rho^2} = - \frac{\mu}{\rho^2}$$

gdzie C jest stałą grawitacyjną, a dla skrócenia położono

$\mu = C \cdot m_1 m_2$ . Według zadania 5-go potencjał grawitacyjny wynosi :

$$U = - \int P \cdot d\rho = \mu \int \frac{d\rho}{\rho^2} = - \frac{\mu}{\rho} + a$$

lub krótko  $U = - \frac{\mu}{\rho}$ , jeśli przyjmujemy  $a = 0$ . Dla  $\rho \rightarrow \infty$  jest  $U = 0$ . Ze znaczenia róż-

*II) do obliczenia momentu w T osi obrotu i styśszych*  
*z osi + precyzyjny M<sub>v</sub>*  
*M<sub>t</sub> wywołuje tylko w T odgięcie w wysk*  
*M<sub>t</sub> ⊥ M<sub>n</sub> w T precyzyjny ruchu M<sub>v</sub> w T*

nicy potencjału wynika przeto, że potencjał Newtonowski w dowolnym punkcie ma znaczenie pracy jaką wykonywa siła pola grawitacyjnego od owego miejsca do nieskończoności. Pozatem jest rzeczą najzupełniej obojętną po jakiego kształtu drodze punkt się porusza.

7. Wychodząc z ogólnego prawa grawitacji można dowieść, że ziemia (uważana za kulę) przyciąga każdy punkt materjalny znajdujący się zewnątrz niej tak samo jak punkt materjalny o masie ziemi skupiony w jej środku. Pozatem przyciąganie to na powierzchni ziemi objawia się przyspieszeniem ciężkości  $g$ . Określić siad potencjał ciężkości w bliskim sąsiedztwie powłoki ziemi.

Odp. : Jeśli  $R$  jest promieniem ziemi to według powyższego :

$-mg = -\frac{\mu}{R^2}$  czyli  $\mu = mgR^2$ , a zatem  $U = -\frac{mgR^2}{\rho} + a$ . Niech  $z$  oznacza oddalenie punktu  $m$  od powierzchni ziemi to  $\rho = R + z$ , czyli  $U = -\frac{mgR^2}{(R+z)} + a$ . Rozwiązując  $U$  według potęg  $z$  mamy :  $U = -mgR + a + mgz (1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \dots)$ . Przyjmijmy  $a = mgR$  i założmy, że  $z$  są małe w porównaniu do  $R$  to z dostatecznym przybliżeniem wynosi potencjał ciężkości w pobliżu ziemi :

$$U = mgz$$

Na niezbyt wielkich powierzchniach można powłokę ziemi uważać za płaszczyznę ; jest mierzone prostopadle od tej płaszczyzny. Siła ciężkości wynosi przeto

$$P = -\frac{dU}{dz} = -mg$$

i jest skierowana ku płaszczyźnie. Ostatni wynik jest nam dawno znany.

8. Ile wynosi praca ciężaru  $mg$  w polu ciężkości na dowolnej drodze od położenia  $z_1$  do położenia  $z_2$  ?

Odp. :  $L = U_1 - U_2 = mg(z_1 - z_2) = mgh$  ; praca jest przeto zależną tylko od różnicy wysokości ; pozatem jest  $L > 0$ , gdy  $z_1 > z_2$ .

9. Ciężki pręt jednorodny o długości  $2a$  umocowano przegibnie na końcu  $O$  (rys.177) utrzymując drugi koniec w równowadze napięciem nici  $P$ . Określić położenie równowagi  $\varphi$ .

Odp. : Oznaczmy współrzędne punktów zaczepienia sił (najlepiej obrać je równoległe do sił) przez  $q$  i  $p$ . Otóż  $q = a \cdot \cos \varphi$ ,  $p = 4a \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$ . Udzielmy siłom  $q$  i  $P$  przesunięć  $\delta q$  i  $\delta p$ . (Reakcja przegubu  $O$  nie wykonaj przy pomyślanym

114

obrocie pręta żadnej pracy). Otóż zasada prac możliwych wymaga, by było w stanie równowagi :

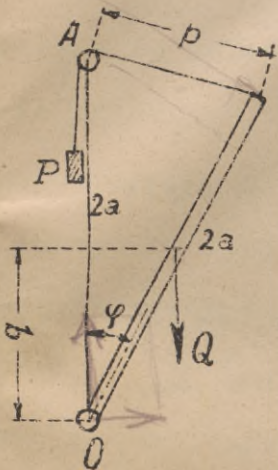
$$Q \cdot \delta q + P \cdot \delta p = 0$$

Ale :  $\delta q = - a \cdot \sin \varphi \cdot \delta \varphi$  ,  $\delta p = 2a \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \delta \varphi$  . Zatem :

$$- Q \cdot a \cdot \sin \varphi \cdot \delta \varphi + 2P \cdot a \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \delta \varphi = 0$$

skąd po uproszczeniu przez  $\delta \varphi$  i przezróbce  $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$  znajdujemy

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{P}{Q}$$



Rys. 177.

Do powyższego dojść można było oczywiście i w inny sposób np. zmieniając  $\varphi$  o  $\delta \varphi$  i wyrażając w ten sposób prace przygotowane momentów sił  $Q$  i  $P$  względem  $O$ . Przy udziale- niu ciała innych stosownych przesunięć będzie można z rów- nania prac przygotowanych obliczyć reakcję punktu  $O$ . Najle- piej wprowadzić dwie składowe reakcji mianowicie w kierunku  $OA$  i drugim doń prostopadłym. Niech przesunięciem przygo- towanym będzie r ó w n o l e g ł e przesunięcie pręta w kierunku  $OA$ , to druga składowa nie wykona pracy i z od- nośnego równania obliczymy składową pierwszą ; podobnie z równania prac dla rów- noległego przesunięcia pręta w kierunku do  $OA$  prostopadłym obliczymy drogę składo- wą. Wykonać odnośny rachunek !

10. Określić położenie równowagi  $s$  dla układu jak na rys.178.

Odp. : Reakcja ciężaru  $Q$  nie wykona przy pomyślanym równoległe do nachylonej płaszczyzny przesunięciu pra- cy. Równanie prac przygotowanych brzmi :

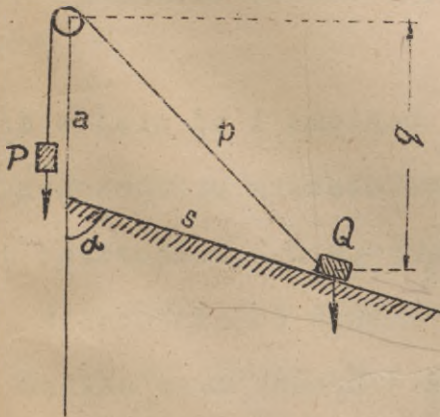
$$P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q = 0$$

przyczem  $p^2 = a^2 + s^2 + 2a \cdot s \cdot \cos \alpha$  ,  $q = a + s \cdot \cos \alpha$

skąd :  $p \cdot \delta p = s \cdot \delta s + a \cdot \cos \alpha \cdot \delta s$  ,  $\delta q = \cos \alpha \delta s$  . Po pod- stawieniu i uproszczeniu przez  $\delta s$  mamy :

$p \frac{s + a \cdot \cos \alpha}{p} + Q \cdot \cos \alpha = 0$  a stąd po wyrugowaniu  $p$  re- zultat  $s = a \cdot \cos \alpha \cdot \left[ - 1 + \sqrt{\frac{Q \cdot \sin \alpha}{P^2 - Q^2 \cdot \cos^2 \alpha}} \right]$  . Jak należy

dobierać przesunięcia, by z równań prac obliczyć reakcje?



Rys. 178.

Mom. bezw. obr. wzgl. pkt. 0

$$I = \frac{1}{3} m l^2$$

195

$$mgh = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

11. Określić wartość siły P w położeniu równowagi układu jak na rys.179. jeśli  $Q_1 = Q_2 = Q$ .

Odp. : Równanie prac przygotowanych brzmi :

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + P(-\delta p) = 0$$

Znak ostatniego wyrazu tłumaczy się tem, iż przy rosnącym p wykonuje P ujemną pracę. Przy przesunięciach jak na rysunku jest :

$$q_1 = \frac{a}{2} \sin \alpha_1,$$

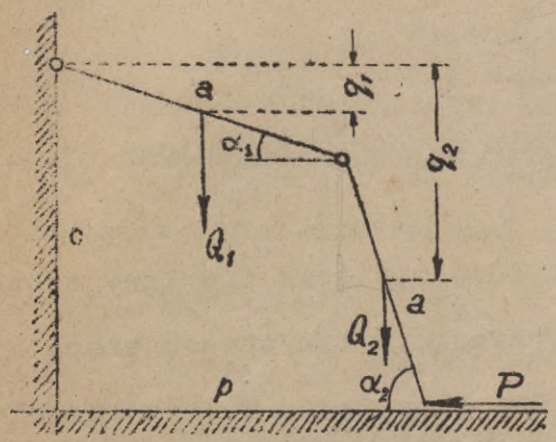
$$q_2 = a \sin \alpha_1 + \frac{a}{2} \sin \alpha_2,$$

$$p = a \cos \alpha_1 + a \cos \alpha_2, \quad \text{czyli}$$

$$\delta q_1 = \frac{a}{2} \cos \alpha_1 \delta \alpha_1$$

$$\delta q_2 = a \cos \alpha_1 \delta \alpha_1 + \frac{a}{2} \cos \alpha_2 \delta \alpha_2$$

$$\delta p = -a \sin \alpha_1 \delta \alpha_1 - a \sin \alpha_2 \delta \alpha_2$$



Rys.179.

Po podstawieniu i uwzględnieniu równości  $Q_1 = Q_2 = Q$  otrzymujemy :

$$2P (\sin \alpha_1 \delta \alpha_1 + \sin \alpha_2 \delta \alpha_2) + Q (3 \cos \alpha_1 \delta \alpha_1 + \cos \alpha_2 \delta \alpha_2) = 0$$

Lecz jakkolwiek układ się ułoży musi być :  $a \sin \alpha_1 + a \sin \alpha_2 = c$  stąd po różniczkowaniu :  $\cos \alpha_1 \delta \alpha_1 + \cos \alpha_2 \delta \alpha_2 = 0$  ; skąd np.  $\delta \alpha_1 = -\delta \alpha_2 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$ . Podstawiając ostatnie w równanie pracy będziemy je mogli uprościć przez  $\delta \alpha_2$  i otrzymać po prostych przekształceniach rezultat :

$$P = Q \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin (\alpha_2 - \alpha_1)}$$

12. Określić ogólnie położenie równowagi układu złożonego z ciężkich ogniw połączonych przegibnie !

Odp. : Przyjmijmy dowolną płaszczyznę poziomą i od niej w dół określmmy współrzędne  $z_i$  każdego ogniwka o ciężarze  $Q_i$ . Przesunięciem przygotowanym niech będzie  $\delta z_i$ . Równanie prac przygotowanych brzmi :  $\sum_i Q_i \delta z_i = 0$ . Dołączając do tego warunki czysto geometryczne otrzymamy potrzebną ilość równań do oznaczenia współrzędnych  $z_i$ . Warto przytem zauważyć rzecz następującą : Środek masy układu ma współrzędną  $z_0 = \frac{\sum Q_i z_i}{\sum Q_i}$ ; równanie prac jest przeto identyczne z warunkiem  $\delta z_0 = 0$ . Zatem przy ruchu przygotowanym rozważanego łańcucha ogniw środek masy może się najwyżej poruszać w płaszczyźnie poziomej, bo  $z_0 = \text{const.}$

§. 3. Energja, zasada energii, kryterjum równowagi.

1. Obok pracy gra w mechanice dużą rolę inne pojęcie bez kierunku o tym samym ponadto wymiarze mianowicie tzw. energja kinetyczna czyli energja ruchu. Niech punkt materjalny m porusza się z prędkością v. Energją kinetyczną punktu nazywamy wtedy wyrażenie :

$$E = \frac{1}{2} mv^2$$

Wyrażenie to zmienia się wraz z czasem ; wraz z czasem bowiem zmienia się v. Oczywiście zależność tę możemy sobie pomyśleć i w innej formie. Poza to wartość energii E jest zależną od układu, w którym ruch jest badany ; przy przejściu od układu względnego do bezwzględnego energja wzrasta lub maleje zależnie od wartości kierunkowych prędkości względnych i prędkości unoszenia.

2. Jak zauważono energja jest skalarem o wymiarze pracy. Możemy przeto bardzo łatwo napisać wyrażenie energii kinetycznej układu punktów materjalnych  $m_i$  sumując energie częściowe tj. wszystkich punktów z osobna. Zatem :

$$E = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

jest energją dowolnego układu (odkształcalnego lub sztywnego) w dowolnym ruchu.

3. Wyrażenie powyższe można często przedstawić w formie bardzo prostej. Jeśli układ jest ciałem sztywnym, odbywającym ruch postępowy to - jak wiadomo - prędkości wszystkich punktów układu są równe i równoległe i wynoszą v. Oznaczywszy masę całego układu przez  $m = \sum m_i$  mamy tu widocznie :

$$E = \frac{1}{2} mv^2$$

tzn. tak samo jak dla jednego punktu.

4. Jeśli układ jest ciałem sztywnym, odbywającym ruch obrotowy to, oznaczając przez  $r_i$  prostopadłe oddalenie punktu  $m_i$  od osi obrotu, możemy napisać  $v_i = r_i \omega$  gdzie  $\omega$  jest prędkością kątową obrotu wspólną dla wszystkich punktów układu. Zważywszy, że  $I = \sum m_i r_i^2$  jest momentem bezwładności ciała względem osi obrotu

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \cdot (r\theta)^2 = \frac{1}{2} m r^2 \theta^2 = \frac{1}{2} I \cdot \theta^2$$

wyższym  $E = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$

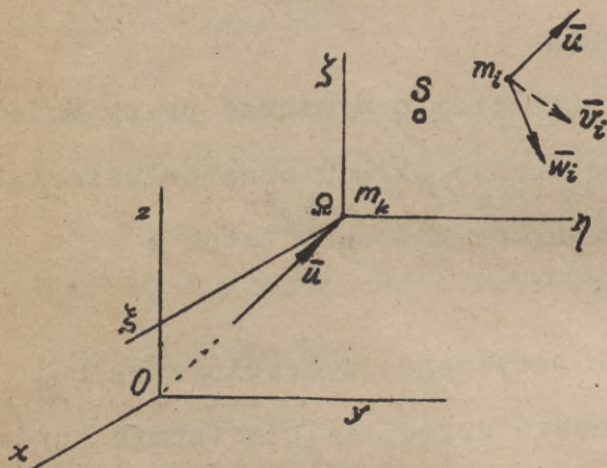
$E = \frac{mv^2}{2}$   $v = \sqrt{v_0^2}$   
 $E = \frac{I\omega^2}{2}$

możemy obecnie napisać :

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

jako wyrażenie energii ruchu obrotowego. Oczywiście  $\omega$  może z czasem zmieniać się; pozatem może oś obrotu zmienić położenie; na formę zewnętrzną podanej formuły to nie wpływa. Z uwag powyższych natomiast wynika, że dyskutowany wzór obejmuje równocześnie energję ruchu posuwistego i kulistego, albowiem ruchy te można sprowadzić do następujących po sobie obrotów chwilowych.

5. Jeśli ciało znajduje się w ruchu dowolnym to korzystniej niekiedy będzie zamiast formuły ust.2. wprowadzić inną nieco obszerniejszą, ale wygodniejszą w dyskusji. Sprawę postawmy może tak: Niezależnie od tego jakim je



Rys. 180.

ruch ciała i budowa indywidualna ciała będzie rzeczą pożyteczną wyłączyć z tego ruchu chociaż jedną część wspólną dla wszystkich punktów układu. Weźmy w tym celu pod uwagę prędkość  $\bar{v}_k = \bar{u}$  któregośkolwiek punktu np.  $m_k$  układu i prędkość  $\bar{v}_i$  każdego z pozostałych punktów układu rozłożmy na  $\bar{u}$  i resztę  $\bar{w}_i$ . Innymi słowy ruch rzeczywisty układu rozkładamy na postępowy (ciała sztywnego) i odnośną resztę. Tą resztą może być ruch obrotowy (ciała sztywnego) i ostateczna reszta,

możliwa u ciała odkształcalnego, bo ruch ciała sztywnego wyczerpuje przesunięcie i obrót. Rysunek 180. podaje omówioną sytuację. Układ  $O(x, y, z)$  jest układem, w którym obliczyć chcemy chwilową energję ciała; układ  $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$  z początkiem niezmiennie połączonym z punktem  $m_k$  odbywa ruch postępowy z prędkością  $\bar{u}$ ; dowolny punkt  $m_i$  ma w układzie  $\Omega$  prędkość  $\bar{w}_i$ , w układzie  $O$  zaś prędkość

$$\bar{v}_i = \bar{u} + \bar{w}_i$$

Dla punktu  $m_k$  jest - jak zauważono -  $\bar{v}_k = \bar{u}$  czyli  $\bar{w}_k = 0$ . Z pomnożenia równania na  $\bar{v}_i$  przez siebie stronami na sposób skalarowy otrzymamy  $v_i^2 = u^2 + w_i^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{w}_i$ . mnożąc ostatecznie przez  $\frac{1}{2}m_i$  i sumując dla wszystkich punktów układu znajdziemy:

$$\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = E = \frac{1}{2} \sum m_i u^2 + \frac{1}{2} \sum m_i w_i^2 + \sum m_i \bar{u} \cdot \bar{w}_i$$

Lecz w pierwszym dodajniku jest  $u^2$  wspólnem dla całego układu  $m = \sum_1 m_i$ , podobnież w ostatnim  $\bar{u}$ ; pozatem zaś jest (§.1.)  $\sum_1 m_i \bar{w}_i = m \cdot \bar{w}_0$ , jeśli  $\bar{w}_0$  oznacza prędkość środka S w układzie  $\Omega$ . Zatem :

$$E = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} \sum_1 m_i w_i^2 + m \bar{u} \bar{w}_0.$$

Ostatnie trójwyrazowe wyrażenie dla energii możemy uprościć w następujący sposób: Przy wyborze dotychczas dowolnego punktu  $m_k$  postąpmy w sposób bardziej stosowny; przyjmijmy za  $\Omega$  właśnie punkt S tj. środek masy układu. Dla tego punktu będzie obecnie  $\bar{v}_0 = \bar{u}$ ,  $\bar{w}_0 = 0$  a wyrażenie na energję przybierze postać :

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_1 m_i w_i^2$$

*to Koenig'a*

podaną poraz pierwszy przez Koenig'a.

6. Nietrudno jest przejść obecnie do ciała sztywnego. W tym wypadku ruch ciała w układzie  $\Omega$  może być tylko obrotem dokoła osi przechodzącej przez  $\Omega$ ; podobnie przeto jak w ust.4. znajdziemy  $\frac{1}{2} \sum_1 m_i w_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$ , ponieważ nadto  $\bar{u} \cdot \bar{w}_0 = \bar{u}(\bar{v}_0 - \bar{u}) = \bar{u} \cdot \bar{v}_0 - u^2$  przeto trójwyrazowe wyrażenie energii brzmi :

$$E = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m(\bar{u} \cdot \bar{v}_0 - u^2)$$

przyczem I jest momentem bezwładności ciała względem osi obrotu, przechodzącej przez  $\Omega$ . Skoro przyjmijmy  $\Omega$  w S, to ostatni wyraz odpadnie i będzie

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2$$

Zatem energia ruchu ogólnego ciała sztywnego jest sumą energii ruchu postępowego z prędkością środka masy i ruchu obrotowego dokoła osi przez środek masy przechodzącej. Nie należy sprawy pojmować fałszywie. Ruch ogólny ciała sztywnego można na nieskończenie wiele sposobów rozłożyć na przesunięcie i obrót. Jakąkolwiek bądź kombinację weźmiemy pod uwagę otrzymamy dla danego ruchu jedną i tę samą wartość energii mianowicie E; jest ona bowiem niezmiennikiem kinetycznym owej transformacji ruchu. Najszybciej natomiast dojdziemy do celu przy poszukiwaniu E rozkładając ruch w sposób ostatnio scharakteryzowany. Oczywiście nie jest to jedyny sposób uproszczenia. Jeśli mianowicie ruch ciała sprowadzimy do skrętu chwilowego, to wtedy jest  $\bar{u} \parallel \bar{\omega}$  lub  $\bar{u} \perp \bar{w}_i$  zatem jest też  $\bar{u} \perp \bar{w}_0$  a wtedy też znika ostatni wyraz obszerniejszego wyrażenia, albowiem wtedy jest  $\bar{u} \cdot \bar{w}_0 = 0$

7. Praca i energia mają ten sam wymiar; zachodzi słuszne

$$m \bar{p} = \bar{P}$$

można przez  $\bar{v} dt = d\bar{s}$

$$m p \cdot \bar{v} dt = P dt$$

$$\int m \frac{dv}{dt} \cdot v dt = \int P ds = L$$

$$E_2 - E_1 = U_1 - U_2$$

- 210 -

Wtedy  $E_2 + U_2 = E_1 + U_1$  energia

Zasada  
Zachowania

przypuszczenie, iż obie te wielkości pozostają ze sobą w jakimś kontakcie. Zechcemy tę zależność bliżej określić. Weźmy pod uwagę dynamiczne równanie ruchu jednego punktu materialnego w postaci  $m \cdot \bar{p} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P}$  i pomnożmy je stronami przez równość  $\bar{v} \cdot dt = d\bar{s}$ ; znajdziemy:  $m \cdot \bar{v} \cdot d\bar{v} = \bar{P} \cdot d\bar{s}$ . Lecz lewa strona tego równania przedstawia różniczkę energii  $E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \bar{v} \bar{v}$ ; prawa natomiast jest pracą elementarną; ostatecznie równanie przeto możemy napisać i tak:  $dE = dL$ . Niech rozważany punkt przejdzie od położenia ① do położenia ②; całkując ostateczne równanie w odnośnych granicach znajdziemy ostatecznie:

$$E_2 - E_1 = L$$

Zatem: zmiana energii między dwoma położeniami poruszającego się punktu materialnego równą jest pracy sił punktu na odnośnym przemieszczeniu. Twierdzenie powyższe wyraża zasadę energii punktu materialnego.

8. Przejście do układu materialnego nie następuje trudności; wystarczy mianowicie wypisać powyższe wyrażenie dla każdego punktu  $m_i$  układu i wyrażenia te do siebie dodać. Pożytecznym będzie oddzielnie potraktować pracę sił zewnętrznych i wewnętrznych. Zatem dla punktu  $m_i$  jest:  $E_{i2} - E_{i1} = L_{iz} + L_{iw}$ . Sumując powyższe równania znajdujemy:

$$E_2 - E_1 = L_z + L_w$$

jako ogólną formę zasady energii dla układu materialnego o dowolnych własnościach. Jak się w takim wypadku wyraża energia i praca - o tem już była mowa. W szczególnym wypadku, gdy układem jest ciało sztywne, to - jak wiadomo - wtedy jest  $L_w = 0$  i pozostaje

$$E_2 - E_1 = L_z = L$$

Nie trudno jest słowami wyrazić treść powyższych równań. Zasada energii jak z jej przedstawienia wynika jest pierwszą całką równania różniczkowego ruchu. W zastosowaniach konkretnych służy ona najczęściej do określenia niewiadomych prędkości, niakiedy natomiast do określenia przemieszczeń.

9. Szczególną postać omawianej zasady znajdziemy wtedy, gdy

$$L = \Delta E = \text{różnica potencjałów} \\ = U_1 - U_2$$

siły działające na punkt względnie układ posiadają potencjał  $U$ ; ten ostatni często też nazywamy energją potencjalną. Praca  $L$  w opisanym przedziale równa jest wtedy - jak już omówiono - różnicy potencjałów, czyli jest wtedy  $L = U_1 - U_2$ . Zasada energii przyjmie wobec tego formę:  $E_2 - E_1 = U_1 - U_2$  czyli po uporządkowaniu względem wskaźników:  $E_1 + U_1 = E_2 + U_2$ . Podobnie przechodząc do dalszych położenia ciała możemy napisać  $E_2 + U_2 = E_3 + U_3 = \dots$ . Ogólnie zatem jest:

$$E + U = \text{Const.}$$

Tę szczególną formę zasady energii nazywamy zasadą zachowania energii. Brzmi ona: Podczas ruchu punktu (ciała) materialnego w potencjalnym polu sił zachowuje całkowita energia (tj. suma energii kinetycznej i potencjalnej) wartość stałą. Zastowanie zasady zachowania energii jest takie samo jak i zasady energii.

10. Jako zastosowanie specjalne podamy pewne kryterjum równowagi. Jeśli punkt materialny znajduje się w równowadze, to w myśl zasady prac przygotowanych z pewnością wtedy jest suma prac przygotowanych sił działających na punkt równą zero, czyli wtedy jest  $\sum L = 0$ . Niech siły działające pochodzą od pola potencjalnego. Wtedy warunek równowagi punktu brzmi:

$$\sum U = 0$$

Jest to jednakże konieczny warunek, by w uważanym położeniu było

$$U = U_{\text{ekstremum}}$$

Czy jednakże jest  $U = U_{\text{minimum}}$  czy też  $U = U_{\text{maksimum}}$  nie można wywnioskować tylko z warunku  $U = 0$ , lecz należałoby jeszcze wziąć pod uwagę zmianę  $\delta^2 U$  a niekiedy i inne wyższe. Jednakże warunek omawiany nie jest wystarczającym dla istnienia ekstremum funkcji. Może się równie dobrze zdarzyć, że będzie  $U \neq U_{\text{min}}$  lub  $U \neq U_{\text{max}}$  lub wreszcie, że będzie  $U = \text{Const.}$ , przyczem wszystkim tym alternatywom odpowiadać będzie warunek równowagi  $U = 0$ . W zależności od tego rozróżniamy rozmaite typy równowagi, a mianowicie stałą, niestałą czyli chwiejną i wreszcie obojętną. Dla inżyniera pojęciem wartościowym jest jedynie równowaga stała. Możemy przyjąć następujące pojęcie stałości równowagi (metoda drobnych wychyleń): Równowagę punktu materialnego nazywamy stałą, jeśli

przez dobór udzielonej mu przez nas drobnej energii kinetycznej, potrafiemy powstające wskutek tego drobne ruchy punktu pod wpływem sił pola potencjalnego dowolnie silnie ograniczyć. Można wykazać ogólnie, że powyższemu określeniu równowagi stałej punktu materialnego odpowiada minimum energii potencjalnej (kryterjum Minding'a-Dirichlet'a)

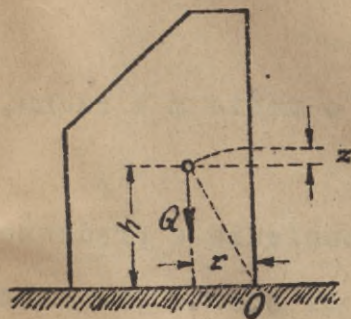
Dowód przedstawia się następująco : Niech położeniem równowagi będzie punkt A w polu potencjalnym i niech będzie  $U_A = U_{\min}$  ; przy odpowiednim obiorze stałej całkowania możemy przyjąć  $U_A = 0$  ; wobec tego dla w s z e l k i c h sąsiadujących z A miejsc jest  $U(x,y,z) > U_A$  czyli - przy przyjęciu upraszczajacem jak wyżej - jest absolutnie  $U(x,y,z) > 0$ . Udzielmy punktowi w położeniu równowagi drobnej prędkości w dowolnym kierunku, a zatem drobnej energii kinetycznej  $\epsilon$ . W położeniu równowagi całkowita energia wynosi przeto  $\epsilon + U_A = \epsilon$ . Pod wpływem udzielonej prędkości punkt opuści w jakimś kierunku położenie A ; w położeniu dowolnym innym całkowita energia wynosi  $\frac{1}{2}mv^2 + U(x,y,z)$ , przyczem  $v$  oznacza prędkość punktu w tem innym położeniu. W myśl zasady zachowania energii musi być :

$\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 + U(x,y,z)$ . W ostatniem równaniu są wszystkie wielkości z konieczności dodatnie ; zatem przedewszystkiem będzie  $\frac{1}{2}mv^2 \leq \epsilon$  tzn. prędkość punktu nie przekroczy nigdy wartości mu udzielonej ; pozatem będzie  $U(x,y,z) \leq \epsilon$  tzn. punkt będzie się poruszał w obrębie ograniczonej dowolnie małej powierzchni  $U(x,y,z) = \epsilon$ .

W szczególności, gdy ruch punktu będzie dodatkowo krępowany (ruch nieswobodny), to punkt będzie się poruszał tylko po pewnej krzywej wytyczonej na powierzchni  $U(x,y,z) = \epsilon$ . Zupełnie podobnie można wykazać, że gdy położeniu równowagi punktu odpowiada  $U = U_{\max}$ , równowaga punktu jest niestałą tzn., że po udzieleniu mu drobnej energii kinetycznej wywołamy ruch punktu nieograniczony ani co do prędkości ani co do współrzędnych ; przy ruchu nieswobodnym tor może być ograniczonym, ale wartości adnośnych przesunięć nie. W wypadku, gdy położeniu równowagi nie odpowiada ani minimum ani maksimum, należy zbadać przyrosty U wyższych rzędów ; Sprawa może być niekiedy dość uciążliwą. W wypadku wreszcie, gdy położeniu równowagi

i miejscu sąsiadującym odpowiada  $U = \text{Const.}$  mówimy o równowadze obojętnej ; w tym wypadku istnieje ograniczenie co do prędkości wychylenia, ale nie ma ograniczeń co do wielkości przesunięć. Bez uszczerbku można przeto równowagę obojętną uważać często za niestałą.

11. Podane w ustępie poprzednim kryterjum odnoszące się do jednego punktu można uogólnić do układu materialnego. Wtedy kryterjum brzmi : Pod wpływem sił zewnętrznych, posiadających potencjał, jest równowaga układu materialnego o dowolnej skończonej ilości n stopni swobody stałą wtedy i tylko wtedy, gdy energia potencjalna jest minimum; a powyższe twierdzenie było bezwarunkowo ważnym musi być energia potencjalna funkcją wszystkich n uogólnionych współrzędnych (poprawka Appell'a). Dowód przeprowadza się podobnie jak w ust. 10. Wypada dodać następujące : Jeżeli ciało jest sztywne lub składa się z części sztywnych, to posiada ono ograniczoną ilość stopni swobody, a zatem takąż samą ilość współrzędnych określających jego położenie. Ciało niesztwyne posiada natomiast nieograniczoną ilość stopni swobody. W tym wypadku kierowani intuicją stosujemy powyższe twierdzenie ; nie okazało się dotychczas, by stanowisko takie było błędem ; z drugiej zaś strony dowodu kryterjum dla  $n \rightarrow \infty$  dotychczas nie posiadamy.



$Qr = \text{moment}$   
Rys. 181.  
*z tego dynamicznej*

12. Pojęcia stałości równowagi, określonego wyczerpująco w ust. 10 i 11 nie należy mieszać ze spotykanem niekiedy pojęciem "stałości dynamicznej" ciała. Wyobraźmy sobie ciało ciężkie  $Q$  w zwykły sposób podparte (rys. 181). Na figurze podparcia opiszmy wielobok w całości wypukły. Przy działaniu odpowiednich momentów względnie sił poziomych (i równoważącym je tarcie) możliwym jest obrót ciała dokoła którejs z stycznych do figury

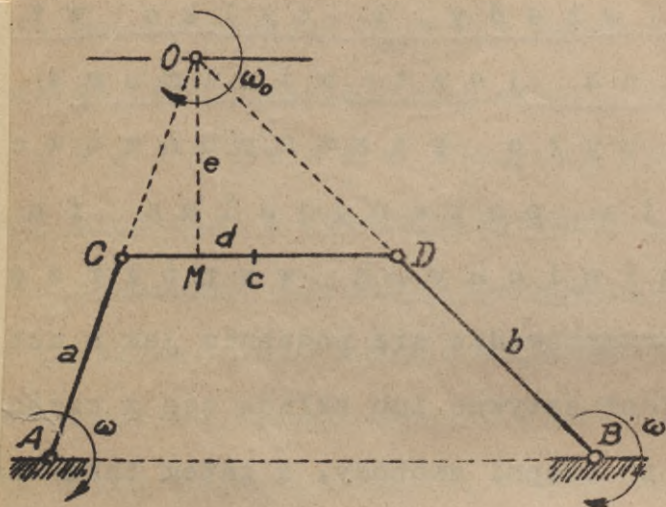
podparcia. Przeciwdziałać temu będzie moment ciężaru  $Qr$  względem tejże krawędzi niebezpieczeństwo największe zachodzi dla  $r = r_{\min}$ . Moment  $Qr$  uważamy za tzw. moment stałości dynamicznej (np. przy wysokich kominach fabrycznych). Za miarę tego rodzaju stałości uważają niektórzy także pracę potrzebną do obrócenia ciała doła uważanej osi  $O$ . Praca ta wynosi  $Qz = \frac{Qr^2}{h + \sqrt{h^2 + r^2}}$ .

$$v_1 = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2) + K m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

Przykłady ćwiczeń.

$$v_2 = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2) + K m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

Obliczyć energję układu korbowego jak na rys. 182. jeśli m jednostki długości każdego z trzech prętów są wzajemnie równe.



Rys. 182.

Odp. : W kinematyce rozwiązano kwestję prędkości dyskutowanego układu. Pręt  $AB$  wykonuje ruch obrotowy z prędkością  $\omega$  z tą samą prędkością z powodu równoległości  $AB$  i  $CD$  obraca się pręt  $BD$ ; ruch posuwisty pręta  $CD$  jest obrotem chwilowym z prędkością  $\omega_0$  dokoła osi  $O$ . Momenty bezwładności wyszczególnionych prętów są

$$I_a = \frac{1}{3} a^3 \delta, \quad I_b = \frac{1}{3} b^3 \delta, \quad I_c = c \delta \left( \frac{1}{12} c^2 + d^2 + e^2 \right)$$

tym ostatnim oznacza  $d$  oddalenie środka odcinka  $c$  od spodka  $M$  prostopadłej wyznaczonej z  $O$ , zaś  $e$  oddalenie środka  $O$  od pręta  $c$ ;  $I_c$  obliczono sumując momenty bezwładności odcinka  $c$  względem prostej  $OM$  i prostopadłej do niej w  $O$ . Wobec powyższego energia całkowita układu wynosi :

$$E = \frac{1}{2} I_a \omega^2 + \frac{1}{2} I_b \omega^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_0^2$$

2. Obliczyć energję piłki tenisowej o masie  $m$  w ruchu, przedstawionym na rys. 165.

Odp. : Jeśli ruch traktujemy za przesunięcie z prędkością  $v$  i obrót z prędkością  $\omega$ , to  $E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_s \omega^2$  albowiem oś obrotu przechodzi przez środek masy ciała. Jeśli natomiast dany ruch redukujemy do chwilowego obrotu

skierunki  $\theta \rightarrow d\theta = \epsilon \rightarrow d\varphi$

Mom. bezw. kuli wzgl. osi sk.

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

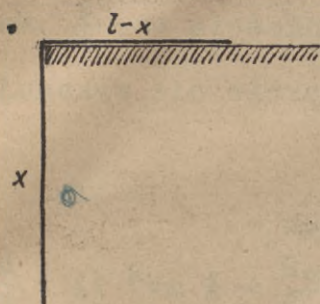
to  $E = \frac{1}{2} I \omega^2$ . Że oba wyrażenia mają tę samą wartość  $E$  nie może ulegać wątpliwości. Ponieważ oś momentu  $I$  odsunięta jest od osi momentu  $I_S$  o  $a = \frac{v}{\omega}$ , przeto - jak wiadomo teorii momentów bezwładności - jest  $I = I_S + m \cdot a^2 = I_S + m \frac{v^2}{\omega^2}$ . Podstawiając ostatnie w  $E = \frac{1}{2} I \omega^2$  otrzymamy  $E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2$ , co było do przewidzenia.

3. Ciężka a wiotka nić spoczywa na szorstkim stole w granicznym położeniu równowagi ; dzięki swobodnemu wstrząśnięciu nić zaczyna się zsuwać. Jaka jest jej prędkość w chwili opuszczenia płaszczyzny stołu (rys.183) ?

Odp. : Niech  $q$  oznacza ciężar jednostki długości nici,  $l$  jej długość całkowitą, zaś  $a$  długość zwisającą w stanie krańcowej równowagi, to najwidoczniej jest :

$$aq = (l - a) \cdot qf_0$$

skąd  $a = \frac{l f_0}{1 + f_0}$  jeśli  $f_0$  oznacza współczynnik tarcia posuwistego. W omawianej chwili jest  $E_1 = 0$ , zaś w chwili końcowej jest :  $E_2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{q \cdot l}{g} v^2$ . W dowolnym położeniu  $x > a$  (rys.183) wykonuje pracę ciężar  $qx$  i tarcie



Rys.183.

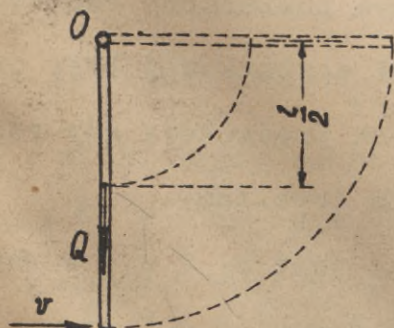
$qf_0 \cdot (l - x)$  ; reakcja stołu pracy nie wykona jako prostopadła do przesunięcia.

Praca od chwili początkowej do chwili końcowej wynosi :  $L = \int_a^l q x dx - \int_a^l q f_0 (l - x) dx = q \frac{l^2 - a^2}{2} - q f_0 (l^2 - a l - \frac{l^2 - a^2}{2}) = q \frac{l - a}{2} [l + a - f_0 (l - a)]$ . Według zasady energii jest :

$$\frac{1}{2} \frac{q \cdot l}{g} v^2 = q \frac{l - a}{2} [l + a - f_0 (l - a)] = \frac{q \cdot l^2}{2(1 + f_0)}$$

a stąd :

$$v = \sqrt{\frac{gl}{1 + f_0}}$$



Rys.184.

4. Jakiej prędkości  $v$  należy udzielić końcowi zawieszonoego przegibnie ciężkiego jednorodnego pręta  $Q$  długiego  $l$ , by pręt doszedł aż do położenia początkowego ?

Odp. : Ruch rozważany jest obrotem dokoła  $O$

z prędkością początkową  $\omega = \frac{v}{l}$ . Zatem  $E_1 = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m l^2}{3} \cdot \frac{v^2}{l^2} = \frac{1}{6} \frac{m}{g} v^2$ , albowiem  $I = \frac{1}{3} m l^2$  ; pozatem

*M. Gierż. Kuli. wył. na lka:*

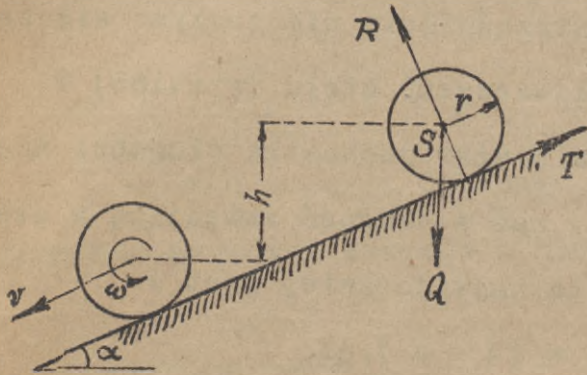
$$M = \frac{4}{5} \pi R^3 \rho = I = \frac{3}{5} m R^2$$

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\theta = \theta_0 + \epsilon t$$

jest  $E_2 = 0$  i wreszcie  $L = - Q \frac{l}{2}$ . Zatem  $-\frac{1}{6} \cdot \frac{Q}{g} v^2 = -\frac{Q \cdot l}{2}$ , a stąd  $v = \sqrt{3gl}$ .

5. Ciężka kula (walec) stacza się bez poślizgu po płaszczyźnie pochyłej bez prędkości początkowej; obliczyć prędkość środka kuli (walca) w położeniu  $h$  (rys.185).

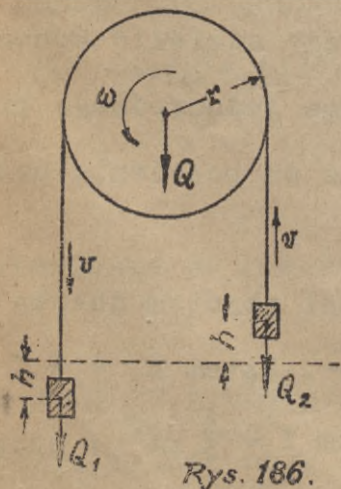


Rys. 185.

Odp. : Aby ślizgania nie było musi istnieć dostatecznie wielkie tarcie  $T$ ; przypuścimy, że tak jest. Wtedy ruch dany jest albo obrotem chwilowym, albo przesunięciem z prędkością  $v$  i obrotem z prędkością  $\omega = \frac{v}{r}$ . Zważywszy, że reakcja i tarcie nie wykonują pracy mamy :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2 &= Qh = \\ &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_S \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2} m v^2 \left( 1 + \frac{\mu}{m} \right) \end{aligned}$$

przyczem  $\mu = \frac{I_S}{r^2}$  oznacza masę kuli (walca), zredukowaną na odległość  $r$ . Kładąc  $Q = mg$  znajdujemy ostatecznie  $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\mu}{m}}}$ . W zależności od tego czy kula (walec) jest pełna czy wydrążona przyjmie stosunek  $\frac{\mu}{m}$  odpowiednie wartości. Gdyby tarcia wogóle nie było (względnie gdyby ono było za małe) odpadłby w wyrażeniu energii wyraz uzależniony obrotem i byłoby  $v = \sqrt{2gh}$ . Pełna kula stalowa o promieniu  $r$  i ciężarze  $Q$  została poślizgnięta; obok niej postawiono drugą ze złota wydrążoną ale o promieniu zewnętrznym  $r$  i tym samym ciężarze  $Q$ . W jaki sposób nie uszkadzając obu kul można ocenić, która jest bardziej wartościowa?



Rys. 186.

6. Na ciężkim bloku walcowym powieszono dwa różne ciężary  $Q_1$  i  $Q_2$  tak, że w chwili początkowej były one na równej wysokości. Określić ich prędkości, gdy różnica wysokości wynosić będzie  $2h$  (rys.186).

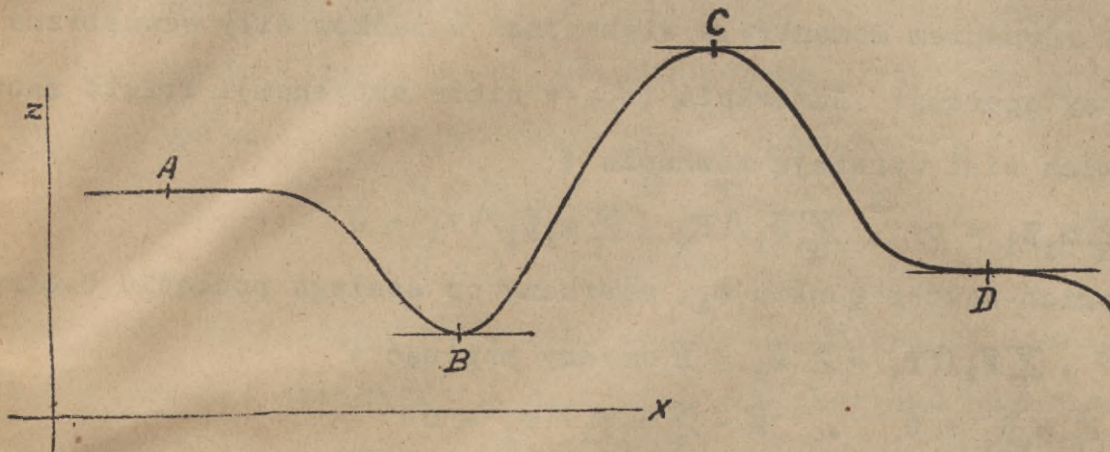
Odp. : W chwili początkowej jest  $E_1 = 0$ ; w chwili zaś końcowej  $E_2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 =$   
 $= \frac{Q_1 + Q_2}{2g} v^2 + \frac{1}{2} \frac{m r^2}{2} \omega^2 = \frac{Q_1 + Q_2 + \frac{Q}{2}}{2g} v^2$ . Odnosząc pracę wynosi  $L = Q_1 h - Q_2 h$ . Z równania  $E_2 - E_1 = L$  mamy :

$$v dv = p dx \quad \text{gdzie} \quad p = x \theta^2$$

$$v = \sqrt{2gh \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2 + \frac{Q}{2}}}$$

Rozpatrywany ruch jest jednostajnie zmiennym.

7. Rozpatrzeć równowagę punktu materialnego w polu ciężkości na krzywej ułożonej w płaszczyźnie pionowej, kształtu uwidocznionego na rys.187.



Rys. 187.

Odp. : Potencjał ciężkości wynosi  $U = mgz + a$ . Dla równowagi musi być  $\delta U = 0$  czyli  $\delta z = 0$ . Jeśli równanie krzywej jest  $z = f(x)$ , to równość  $\delta z = 0$  zachodzi dla  $f'(x) = 0$

tj. w miejscach A, B, C i D. Najwidoczniej w A równowaga obojętna, albowiem po udzieleniu punktowi drobnej prędkości wywołamy wprawdzie ruch nieograniczony, ale jednostajny i prostoliniowy ; w B jest równowaga stała, w miarę bowiem wznoszenia się punktu rośnie potencjał zatem maleć musi energia kinetyczna, która w końcu znika powodując ruch powrotny itd. ; wreszcie w C i D równowaga jest niestała, albowiem ruchowi punktu odpowiadać będzie ubytek potencjału czyli wzrost energii kinetycznej.

§.4. Zasada d'Alembert'a. 27621

---

1. Niech układ materialny  $m = \sum m_i$  porusza się w sposób dowolny ; wtedy każdy punkt  $m_i$  posiada przyspieszenia  $\bar{p}_i$ , które z siłą działającą na punkt  $\bar{P}_i + \sum_k \bar{W}_{ik}$  pozostaje w związku  $\bar{P}_i + \sum_k \bar{W}_{ik} = m_i \bar{p}_i$ , które możemy również dobrze napisać tak  $\bar{P}_i + \sum_k \bar{W}_{ik} - m_i \bar{p}_i = 0$ . Siłę  $- m_i \bar{p}_i$  nazywamy oporem lub siłą bezwładności ; posiada ona kierunek przeciwny przyspieszeniu  $\bar{p}_i$  punktu. Najwidoczniej możemy powiedzieć, że punkt  $m_i$  pozostaje w fikcyjnej równowadze pod działaniem siły rzeczywistej  $\bar{P}_i + \sum_k \bar{W}_{ik}$  i pomyślanej  $- m_i \bar{p}_i$ .

2. Takim jest właśnie sens zasady d'Alebert'a : W czasie ruchu ciała siły rzeczywiste nań działające równoważą się z pomyslanemi siłami bezwładności. W wypadku ogólnym tworzą wyszczególnione siły układ ogólny wektorów. Równowagę fikcyjną wyrazić przeto musimy dwoma równaniami wektorjalnymi tj. równaniem sił i równaniem momentów. W większości wypadków siły wewnętrzne odpadają z rachunków przy operacji sumowania (np. w ciele sztywnem). Przeto zasadę d'Alebert'a dla takich ciał wyrażają równania :

$$\sum_i \bar{P}_i - \sum_i m_i \bar{p}_i = 0 \quad , \quad \sum_i \bar{P}_i \wedge \bar{r}_i - \sum_i m_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = 0$$

przyczem  $\bar{r}_i$  oznacza promień-wektor punktu  $m_i$ , mierzony od stałego początku O. Oznaczwszy krótko  $\sum_i P_i = \bar{P}$ ,  $\sum_i \bar{P}_i \wedge \bar{r}_i = \sum_i \bar{M}_i = \bar{M}$  możemy napisać :

$$\bar{P} - \sum_i m_i \bar{p}_i = 0 \quad , \quad \bar{M} - \sum_i m_i \bar{p}_i \wedge \bar{r}_i = 0$$

przyczem  $\bar{M}$  oznacza ogólny moment układu sił rzeczywistych dla punktu O. Oczywiście dwom ostatnim równaniom wektorjalnym odpowiada sześć równań analitycznych.

3. Weźmy pod uwagę ruch postępowy ciała względnie przesuńcicie. Wtedy przyspieszenia wszystkich punktów układu są wzajemnie równe i równoległe a mianowicie wynoszą  $\bar{p}$ . Wtedy siły  $- m_i \bar{p}_i = - m_i \bar{p}$  tworzą układ równoległy z wypadkową  $- m \bar{p}$ , gdzie  $m = \sum_i m_i$ , przechodzącą przez środek masy ciała, a oba równania d'Alebert'a sprowadzają się do jednego :

$$\bar{P} - m \bar{p} = 0$$

z zastrzeżeniem, że  $\bar{P}$  i  $m \bar{p}$  leżą na jednej prostej. Zatem koniecznym warunkiem istnienia ruchu postępowego jest przejście linii działania wypadkowej sił rzeczywistych przez środek masy ciała. Jeśli dodatkowo w chwili początkowej ciało było w spoczynku albo w ruchu postępowym z prędkością  $\bar{v}$  równoległą do  $\bar{P}$ , to badany ruch w dalszym ciągu będzie postępowym ; jest to warunek dodatkowy.

4. Niech obecnie ciało sztywne znajduje się w ruchu obrotowym. Przyjmijmy za oś obrotu oś x. W czasie ruchu wędrują wszystkie punkty ciała a więc i środek masy S w płaszczyznach prostopadłych do osi x. Wobec tego bez ujmy dla ogólności przyjmijmy osie y i z w płaszczyźnie ruchu środka S (rys. 188). Wtedy dowolny punkt  $m_i(x_i y_i z_i)$  określony jest co do położenia wektorem :

$$\bar{r}_i = \bar{i}.x_i + \bar{j}.y_i + \bar{k}.z_i = \bar{i}.x_i + \bar{\rho}_i$$

gdzie  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  są wersorami dodatnich kierunków  $x, y, z$ , zaś  $\bar{\rho}_i$  oznacza wektor wykreślony prostopadle od osi obrotu ku punktowi  $m_i$ . Środek  $S(0, y_0, z_0)$  określa geometrycznie wektor

$$\bar{r}_0 = \bar{\rho}_0 = \bar{j}.y_0 + \bar{k}.z_0$$

Przyśpieszenie  $\bar{p}_i$  punktu  $m_i$  ma dwie znane składowe, normalną :  $-\bar{\rho}_i \omega^2$ , skierowaną ku osi obrotu i styczną :  $\bar{r}_i \wedge \bar{\varepsilon}$  skierowaną w kierunku prędkości  $\bar{r}_i \wedge \bar{\omega}$ . Równania końcowe ust. 2. przybiorą przeto postać następującą :

$$\bar{P} + \sum_i m_i \bar{\rho}_i \omega^2 - \sum_i m_i \bar{r}_i \wedge \bar{\varepsilon} = 0$$

$$\bar{M} + \sum_i m_i \bar{\rho}_i \omega^2 \wedge \bar{r}_i - \sum_i (m_i \bar{r}_i \wedge \bar{\varepsilon}) \wedge \bar{r}_i = 0$$

Zajmiemy się kolejno wszystkimi wyrazami powyższych równań : Otóż  $\bar{P}$  jest sumą geometryczną sił działających na ciało, a  $\bar{M}$  jest ogólnym momentem tych sił ze względu na punkt  $O$  (rys. 188) , leżący we wspomnianej płaszczyźnie środka.  $\bar{P}_n = \sum_i m_i \bar{\rho}_i \omega^2$

jest normalną siłą bezwładności zwaną siłą odśrodkową ciała ; możemy ją przedstawić następująco :  $\omega^2 \sum_i m_i \bar{\rho}_i = \omega^2 \sum_i m_i (\bar{r}_i - \bar{i} x_i) = \omega^2 . m . \bar{r}_0$  z powodu podanych wyżej określeń położenia środka masy  $S$  ; zatem :

$$\bar{P}_n = m r_0 \omega^2 = m \bar{\rho}_0 \omega^2 = m . (\bar{j}.y_0 + \bar{k}.z_0) . \omega^2 .$$

Normalna siła bezwładności jest przeto równoległa do promienia  $\bar{\rho}_0$  tj. jest ona w każdym razie

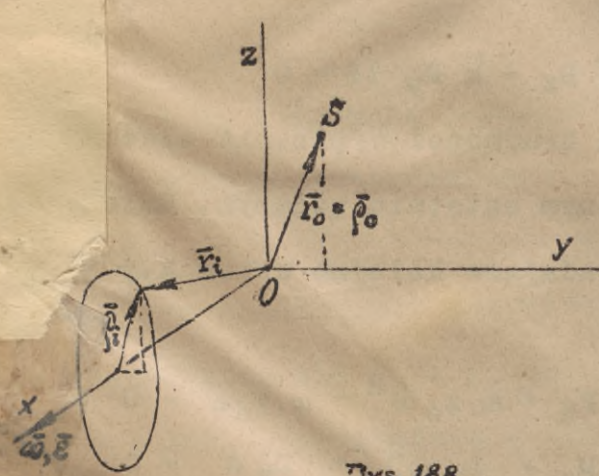
prostopadła do osi obrotu. W tej chwili zredukowaliśmy ją do punktu  $O$ .

$\bar{P}_t = - \sum_i m_i \bar{r}_i \wedge \bar{\varepsilon}$  jest styczną siłą bezwładności . Wynosi ona  $- (\sum_i m_i \bar{r}_i) \wedge \bar{\varepsilon} = - m \bar{r}_0 \wedge \bar{\varepsilon} = - m . (\bar{j}y_0 + \bar{k}z_0) \wedge \bar{i}\varepsilon = - m . \varepsilon (-\bar{k}y_0 + \bar{j}z_0)$  czyli :

$$\bar{P}_t = m . (-\bar{j}z_0 + \bar{k}y_0) \varepsilon = m \bar{\varepsilon} \wedge \bar{r}_0$$

i leży najwidoczniej też w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu  $x$  ; zredukowaliśmy ją również do punktu  $O$ . Moment normalnych sił bezwładności :

$$\bar{M}_n = \sum_i m_i \bar{\rho}_i \omega^2 \wedge \bar{r}_i \text{ przekształcimy obliczając sumę : } \sum_i m_i \bar{\rho}_i \wedge \bar{r}_i = \sum_i m_i . (\bar{j}y_i + \bar{k}z_i) \wedge (\bar{i}x_i + \bar{j}y_i + \bar{k}z_i) = \sum m_i . (-\bar{k}x_i y_i + \bar{i}y_i z_i + \bar{j}x_i z_i - \bar{i}y_i z_i) =$$



rys. 188.

$= \bar{j} D_y - \bar{k} D_z$ , gdzie  $D_y = \sum m_i z_i x_i$ ,  $D_z = \sum m_i x_i y_i$  oznaczają momenty zboczenia ciała. Zatem :

$$\bar{M}_n = (\bar{j} D_y - \bar{k} D_z) \omega^2$$

Wektor swobodny  $\bar{M}_n$  jest również prostopadle zorientowany do osi x. Wzecie moment stycznych sił bezwładności  $\bar{M}_t = -\sum_i (m_i \bar{r}_i \wedge \bar{\varepsilon}) \wedge \bar{r}_i = -\sum_i \bar{r}_i \wedge (m_i \bar{r}_i \wedge \bar{\varepsilon})$  obliczymy pamiętając o wyniku następującym teorii wektorów:  $\bar{a} \wedge (\bar{b} \wedge \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c}\bar{a}) - \bar{c} \cdot (\bar{a}\bar{b})$ . Zatem  $\sum_i \bar{r}_i \wedge (m_i \bar{r}_i \wedge \bar{\varepsilon}) = \sum_i m_i \bar{r}_i \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot \bar{r}_i) - \sum_i \bar{\varepsilon} \cdot (\bar{r}_i m_i \bar{r}_i) = \sum_i m_i \bar{r}_i \varepsilon x_i - \sum_i m_i \bar{\varepsilon} \cdot r_i^2 = \varepsilon \sum_i m_i x_i (\bar{i}x_i + \bar{j}y_i + \bar{k}z_i) - \varepsilon \cdot \bar{i} \sum_i m_i r_i^2 = \varepsilon \cdot (-\bar{i}I_x + \bar{j}D_z + \bar{k}D_y)$

Zatem :

$$\bar{M}_t = (-\bar{i}I_x + \bar{j}D_z + \bar{k}D_y) \cdot \varepsilon$$

Moment ten ma składowe w kierunkach wszystkich osi układu. Ostatecznie zasada d'Alembert'a daje w przypadku ruchu obrotowego równania :

$$\bar{P} + m \cdot \bar{r}_0 \omega^2 - m \cdot \bar{r}_0 \wedge \bar{\varepsilon} = 0$$

$$\bar{M} + (\bar{j} D_y - \bar{k} D_z) \cdot \omega^2 - (\bar{i} I_x - \bar{j} D_z - \bar{k} D_y) \cdot \varepsilon = 0$$

5. Nie nastęrcza nam żadnych trudności wypisanie sześciu analitycznych równań, odpowiadających dwom wektorjalnym ostatnio podanym. Należy po prostu zebrać z osobna wszystkie wielkości odpowiadające kolejno osiom x, y i z.

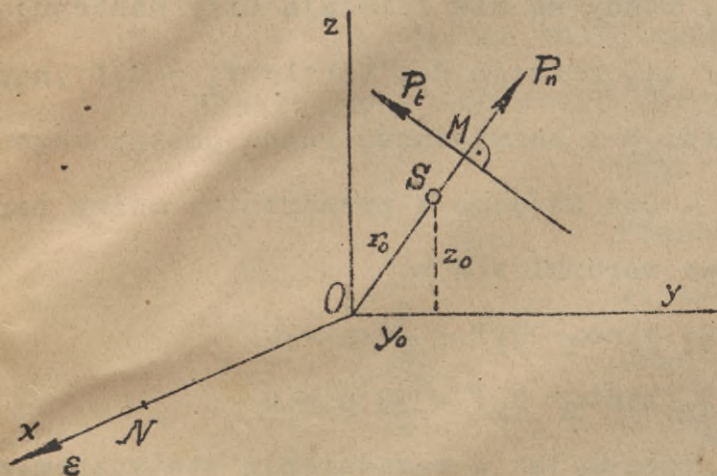
Równania te brzmią :

$$P_x = 0, \quad P_y + m y_0 \omega^2 - m z_0 \varepsilon = 0, \quad P_z + m z_0 \omega^2 + m y_0 \varepsilon = 0$$

$$M_x - I_x \varepsilon = 0, \quad M_y + D_y \omega^2 + D_z \varepsilon = 0, \quad M_z - D_z \omega^2 + D_y \varepsilon = 0$$

W równaniach tych na szczególną uwagę zasługuje równanie czwarte  $M - I\varepsilon = 0$ ; jest ono równaniem podstawowym ruchu obrotowego. Znaleźliśmy w ten sposób odpowiednik dla równania ruchu postępowego  $P - m\bar{p} = 0$ . W wielkościach  $P_x, P_y, P_z, M_y$  i  $M_z$  tkwią nie tylko siły zewnętrzne czynne, ale i reakcje łożysk osi obrotu; ponieważ przecinają się one z osią x przeto w  $M_x$  niema ich wpływu. Całkując równanie czwarte znajdziemy  $\omega$  i w ten sposób w pięciu pozostałych równaniach może figurować pięć niewiadomych składowych reakcyj tj. dwie łożyska pierścieniowego i trzy łożyska stopowego. Jeśli osią obrotu jest centralna główna oś bezwładności, to wtedy  $y_0 = z_0 = 0, D_y = D_z = 0$  i równania zawierające niewiadome reakcje niczem się nie różnią od równań statycznych równowagi tj. wskutek założonego obrotu nie

wystąpią żadne zmiany w reakcjach statycznych ; taką oś obrotu nazywamy s w o - b o d n ą . Aby ruch był jednostajnym musi być  $\varepsilon = 0$  tzn. musi zniknąć moment sił zewnętrznych względem osi obrotu. W drugich i trzecich wyrazach wyżej podanych równań znajdujemy składowe wielkości  $P_n$ ,  $P_t$ ,  $M_n$  i  $M_t$ . Na rys. 189 przedstawiono wielkości  $P_n$  i  $P_t$ . Jak ze składowych tych sił wynika, są one wzajemnie do siebie



Rys. 189.

prostopadłe. Nie należy zapominać, że  $P_n$  i  $P_t$  nie wyczerpują redukcji układu sił bezwładności ; musi się zawsze pamiętać i o momentach  $M_n$  i  $M_t$ . W wypadku ogólnym redukcja sił normalnych prowadzi do  $P_n$  i  $M_n$ , sił stycznych do  $P_t$  i  $M_t$ . Jeśli  $P_n$  znika, to znika i  $P_t$ , czyli siły bezwładności redukują się do par  $M_n$  i  $M_t$ . Aby układ redukował się

tylko do sił  $P_n$  i  $P_t$  musi wyróżnik układu zniknąć ; wynika stąd wspólny warunek dla sił normalnych i stycznych :

$$y_0 D_y - z_0 D_z = 0$$

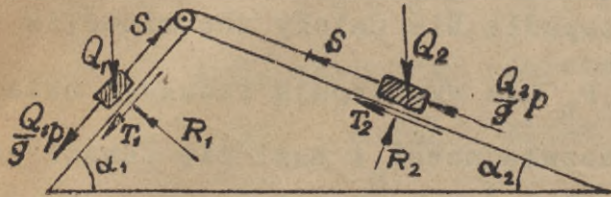
Pod powyższym warunkiem i oczywiście  $y_0 \neq 0$ ,  $z_0 \neq 0$  jest położenie równoległej do yz płaszczyzny sił  $P_n$  i  $P_t$  określone współrzędną :  $a = \frac{D_z}{m y_0} = \frac{D_y}{m z_0} = \frac{\sqrt{D_y^2 + D_z^2}}{m r_0}$  -

$\overline{OM}$  ( rys.189.), wynikającą z redukcji układu wektorów ; równocześnie też wtedy określa oddalenie  $P_t$  od osi obrotu odcinek  $l = \frac{M_x}{P_t} = \frac{I_x}{m r_0} = \overline{OM}$  ( rys.189 ). Jeśli oś x jest główną osią bezwładności, to  $a = 0$  czyli siły  $P_n$  i  $P_t$  leżą w płaszczyźnie środka S.

6. Jeśli ruch ciała jest ogólnym to rozłożyć go można - jak wiadomo - na przesunięcie i obrót. Wykonać to można najprościej tak, jak to uczyniono przy wyznaczaniu ogólnego wyrażenia dla energii kinetycznej ; z powodu ruchu postępowego układu pomocniczego  $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$  znika przyspieszenie Coriolis'a i rozwiązanie ostateczne jest - krótko mówiąc - sumą rozwiązań szczególnych tutaj podanych. Jako początek  $\Omega$  - rzecz jasna - najlepiej przyjąć punkt S.

Przykłady ćwiczeń.

1. Dwa ciężary  $Q_1$  i  $Q_2$  połączone wiotką nicią posuwają się wzdłuż dwóch szorstkich płaszczyzn. Wyznaczyć przyspieszenie tego ruchu (rys.190)



Rys.190.

Odp. : Niech  $Q_1$  porusza się do góry czyli  $Q_2$  w dół, wtedy na nie działają siły następujące ciężar  $Q_i$ , reakcja  $R_i$ , tarcie  $T_i = R_i f$ , napięcie nici  $S$  i bezwładność ruchu postępowego  $\frac{Q_i}{g} p$ . Dla każdego z przedmiotów można napisać dwa warunki :

$$R_1 - Q_1 \cdot \cos \alpha_1 = 0, \quad S - Q_1 \cdot \sin \alpha_1 - R_1 f - \frac{Q_1}{g} \cdot p = 0$$

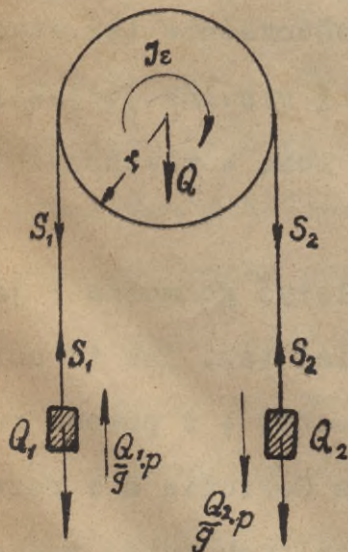
$$R_2 - Q_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0, \quad S - Q_2 \cdot \sin \alpha_2 + R_2 f - \frac{Q_2}{g} \cdot p = 0$$

z których wynika :  $R_1 = Q_1 \cdot \cos \alpha_1$ ,  $R_2 = Q_2 \cdot \cos \alpha_2$  jak w zagadnieniu statycznym, nadto :

$$p = \frac{g}{\cos \varphi} \cdot \frac{Q_2 \cdot \sin(\alpha_2 - \varphi) - Q_1 \cdot \sin(\alpha_1 + \varphi)}{Q_1 + Q_2}, \quad S = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{Q_1 + Q_2} \frac{\sin(\alpha_1 + \varphi) + \sin(\alpha_2 - \varphi)}{\cos \varphi}$$

Założony ruch wystąpi, o ile będzie  $p > 0$ , czyli  $\frac{Q_2}{Q_1} > \frac{\sin(\alpha_1 + \varphi)}{\sin(\alpha_2 - \varphi)}$ , przyczem  $\varphi$  jest kątem tarcia.

2. Dwa ciężary  $Q_1 > Q_2$  przewieszono przez ciężki  $Q$  krążek kołowy. Obliczyć przyspieszenie wywołanego ruchu !



Rys.191.

Odp. : Rozpatrujemy osobno równowagę ciała  $Q_1$ ,  $Q_2$  i  $Q$ ; obok sił rzeczywistych zaznaczono na rys.191. siły bezwładności  $\frac{Q_1}{g} p$ ,  $\frac{Q_2}{g} p$  nadto moment stycznych sił bezwładności  $I \epsilon = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r^2 \cdot \epsilon$ ; ten ostatni możemy przedstawić prosto zważywszy, że przyspieszenie obwodowe  $p$  i kątowe  $\epsilon$  związane są równością  $p = \epsilon \cdot r$ ; zatem  $I \epsilon = \frac{1}{2} Q r \cdot \frac{p}{g}$ . Równania równowagi dynamicznej brzmią :

$$S_1 - Q_1 + \frac{Q_1}{g} \cdot p = 0$$

$$S_2 - Q_2 - \frac{Q_2}{g} \cdot p = 0$$

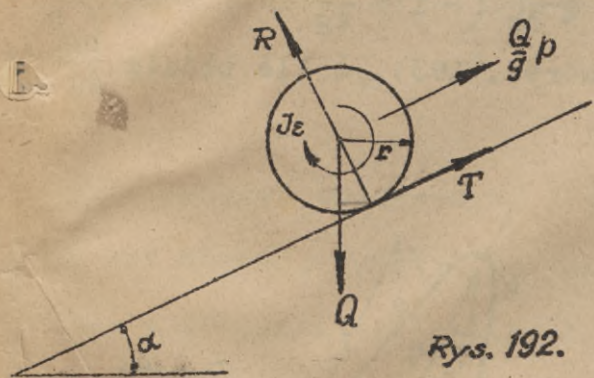
$$S_1 r - S_2 r - I \epsilon = 0$$

a stąd wynikają rezultaty :

$$p = g \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2 + \frac{Q}{2}}, \quad S_1 = Q_1 \frac{2Q_2 + \frac{Q}{2}}{Q_1 + Q_2 + \frac{Q}{2}}, \quad S_2 = Q_2 \frac{2Q_1 + \frac{Q}{2}}{Q_1 + Q_2 + \frac{Q}{2}}$$

Przy pominięciu wpływu bezwładności krążka będzie oczywiście  $S_1 = S_2$ . Zbadać jak się zmieniają powyższe rezultaty jeśli uwzględnimy tarcie czopowe !

3. Ciężka kula (walec, pierścien) stacza się bez poślizgu z nachylonej płaszczyzny ; obliczyć przyspieszenie tego ruchu. (rys.192).



Rys. 192.

Odp. : Z założenia toczenia bez poślizgu wynika równość  $p = \epsilon \cdot r$  ; w tym celu jednak tarcie T musi być dostatecznie wielkie. Warunki fikcyjnej równowagi brzmią :

$$R - Q \cdot \cos \alpha = 0, \quad T - Q \cdot \sin \alpha + \frac{Q}{g} p = 0,$$

$$Tr - I\epsilon = 0$$

Wstawiając  $I = \mu r^2$ ,  $Q = mg$  gdzie  $\mu$  jest masą ciała zredukowaną na odległość r znajdziemy

kolejno :

$$R = Q \cdot \cos \alpha, \quad p = g \left( \frac{\sin \alpha}{1 + \frac{\mu}{m}} \right), \quad T = Q \left( \frac{\sin \alpha}{1 + \frac{\mu}{m}} \right)$$

Dla obręczy jest  $\frac{\mu}{m} = 1$ , dla pełnego walca  $\frac{\mu}{m} = \frac{1}{2}$ , dla kuli pełnej  $\frac{\mu}{m} = \frac{2}{5}$ . Aby roz-

zanie powyższe pokrywało się z założeniem toczenia bez poślizgu musi na T wypaść wartość wogóle możliwa tj. musi być  $T \leq Rf$  tzn. musi zachodzić nierówność  $\text{tg} \alpha \leq f \left( 1 + \frac{\mu}{m} \right)$ . Jeśli warunek ten nie zachodzi, to co najwyżej może być  $T = Rf$ , zaś  $p \neq \epsilon r$ .

Uwzględniając powyższe znajdziemy z wypisanych równań :

$$R = Q \cdot \cos \alpha, \quad p = g \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}, \quad \varphi = \frac{g}{r} \frac{m}{\mu} \cdot f \cdot \cos \alpha$$

4. Jednorodnie ciężkie  $Q$  pole trójkątne wiruje ze stałą prędkością dokoła pionowej osi jak na rys.193. Wyznaczyć reakcje łożysk.

Odp. : Dla wygody przyjęto płaszczyznę trójkąta w płaszczyźnie  $xy$  tak, że  $z_0 = 0$ ,  $D_x = 0$  i wobec tego warunek  $x_0 D_x - z_0 D_z = 0$  jest identycznie spełniony ; innymi słowy siły  $dN$  redukują się do wypadkowej ; sił  $dT$  z powodu  $\epsilon = 0$  wogóle niema. Abstrahując od podanych (teorii wzorów znajdziemy następująco położenie siły  $N$ .  $dN = xdy \delta \cdot \omega^2 r_0 = xdy \delta \cdot \omega^2 \frac{x}{2} = \frac{\delta \cdot \omega^2}{2} x^2 dy$  gdzie  $\delta$  jest gęstością ciała.

Podobnie  $N = \frac{ab}{2} \delta \cdot \omega^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{Q}{3g} a \omega^2$ , albowiem  $\frac{ab}{2} \delta = m = \frac{Q}{g}$  czyli  $\delta = \frac{2Q}{abg}$ . Siły  $dN$  tworzą płaski i równoległy układ sił; z twierdzenia o sumie momentów i momencie sumy znajdziemy:  $\int dN \cdot y = N \cdot y_*$  czyli:

$$y_* = \frac{1}{N} \int \frac{\delta \cdot \omega^2}{2} \cdot x^2 y dy = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{3g}{Qa\omega^2} \cdot \frac{2Q}{abg} \int x^2 y dy = \frac{3}{a^2 b} x^2 y dy$$

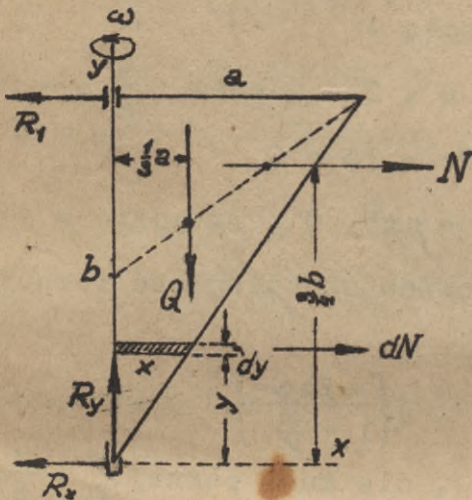
lecz  $x = y \frac{a}{b}$  czyli  $y_* = \frac{3}{b^3} \int_0^b y^3 dy = \frac{3}{4} b$ . Mając obliczone siłę  $N$  i jej położenie możemy obecnie napisać warunki równowagi, a mianowicie:

$$R_y - Q = 0, \quad R_x + R_1 - N = 0, \quad R_1 b - Q \frac{a}{3} - N \frac{3b}{4} = 0$$

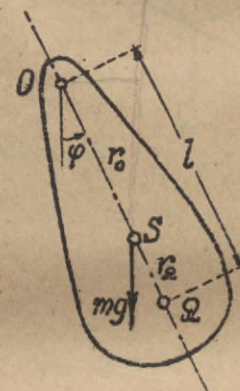
i stąd wyznaczyć poszukiwane niewiadome zagadnienia płaskiego:

$$R_y = Q, \quad R_1 = Q \frac{a}{3b} \left( 1 + \frac{3b\omega^2}{4g} \right), \quad R_x = Q \frac{a}{3b} \left( -1 + \frac{b\omega^2}{4g} \right)$$

Składowa  $R_x$  będzie faktycznie mieć strzałkę jak na rys. 193., o ile będzie  $\frac{b\omega^2}{4g}$



Rys. 193.



Rys. 194.

5. Ciężkie ciało o dowolnym kształcie wahające dookoła dowolnej osi nazywamy wahadłem fizycznym. Zbadać czy teorii wahadła fizycznego nie można oprzeć na rezultatach teorii wahadła matematycznego prostego?

Odp.: W położeniu dowolnym  $\varphi$  ma moment sił zewnętrznych działających na ciało wahające, względem osi obrotu  $O$  wartość  $M = -mgr_0 \sin \varphi$  (ujemną dlatego, że wektor  $M$  ma kierunek malejących  $\varphi$ ); pozatem przyspieszenie ruchu wynosi  $\epsilon = \ddot{\varphi} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ . W myśl zasady d'Alembert'a jest  $M - I\epsilon = 0$  czyli:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgr_0}{I} \sin \varphi$$

Odetnijmy na kierunku  $r_0$  odcinek  $l = \overline{O\Omega}$  to punkt  $\Omega$  będzie w czasie wahanja odbywał drogę  $s = l \cdot \varphi$ . Równanie różniczkowe wahadła matematycznego:  $\ddot{s} = -g \sin \frac{s}{l}$

( podane w §.1. ) przejdzie wobec powyższej równości na równanie :  $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin\varphi$ .  
 Jeśli przeto warunki brzegowe przyjmiemy dla obu wahadeł takie same to wszystkie rezultaty wynikłe dla wahadła matematycznego będzie można przyjąć i dla wahadła fizycznego, o ile będzie :  $\frac{m g r_0}{I} = \frac{g}{l}$  czyli jeśli uczynimy :

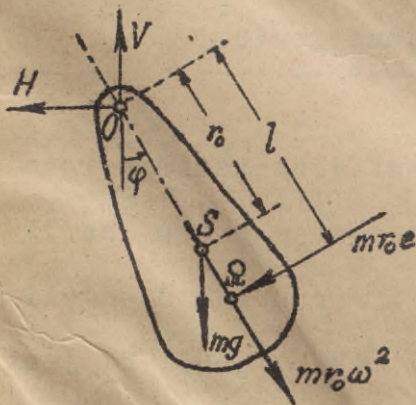
$$l = \frac{I}{m r_0}$$

Wielkość  $l$  nazywamy długością zredukowaną wahadła fizycznego. Okres małych wahań wahadła fizycznego wynosi przeto  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g r_0}}$ . Wahadło, dla którego  $\frac{T}{2} = 1$  sek. nazywamy wahadłem sekundowym ; najwidoczniej dla takiego wahadła musi być  $l = L = \frac{g}{\pi^2}$  tj. dla Lwowa  $L = 0,9939$  m. Niech moment bezwładności ciała względem prostej przez punkt  $S$ , równoległej do osi obrotu wynosi  $I_S = m \cdot i_S^2$  to najwidoczniej  $I = I_S + m r_0^2 = m \cdot (r_0^2 + i_S^2)$  czyli

$$l = \frac{I}{m r_0} = r_0 + \frac{i_S^2}{r_0} > r_0$$

czyli długość sprowadzona  $l$  jest stale większa od oddalenia  $r_0$  środka masy ciała od osi obrotu. Punkt  $\Omega$  nazywamy środkiem wzniesienia. Jeśli  $i_S$  i  $l$  są dane to  $r_0$  wynika z równania  $r_0^2 - l \cdot r_0 + i_S^2 = 0$  ; możliwe są zatem dwie wartości dla oddalenia środka masy od osi obrotu  $r_0$  i  $r_\Omega$  przyczem  $r_0 + r_\Omega = l$ . Ostatni rezultat stwierdza że  $O$  i  $\Omega$  są zamienne ; jeśli  $\Omega$  jest osią obrotu, to  $O$  jest środkiem wzniesienia (wahadło rewersyjne).

6. Obliczyć reakcje wahadła wahającego dokoła głównej osi bezwładności.



Rys. 195.

Ódp. : Jeśli ciało obraca się dokoła głównej osi bezwładności to siły elementarne bezwładności posiadają wypadkowe  $m r_0 \omega^2$  i  $m r_0 g$  położone w prostopadłej do osi obrotu płaszczyźnie środka masy  $S$ . Oś obrotu jest pozioma, zatem  $m r_0 \omega^2$  i  $m r_0 g$  leżą w płaszczyźnie pionowej przez środek  $S$ . Lecz w tej samej płaszczyźnie leży też ciężar ciała  $mg$  ; zatem i składowe  $V$  i  $H$  reakcji leżeć będą w tej płaszczyźnie tworząc w całości układ płaski sił, z trzema zatem warunkami fikcyjnej równowagi.

Wszystkie siły zaznaczono na rys.195., przyczem  $g$  zaznaczono tam bezwzględnie. Wa-



$K = I_x \omega$  gg w j glos. w...

$\bar{K}_* = \bar{K} + \bar{B} \wedge \bar{d}$

przyczem  $\bar{d}$  jest wektorem punktu O w odniesieniu do nowego środka ; zatem do obliczenia  $\bar{K}$  potrzebne są i wystarczają  $\bar{B}$  i  $\bar{K}$ , co chcieliśmy udowodnić. Wyróżnik badanego układu pędów wynosi  $k = \bar{B} \cdot \bar{K}$ . Układ pędów redukuje się do : a)  $\bar{B}$  i  $\bar{K}$ , gdy  $k \neq 0$  b) oczywiście  $\bar{B} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{K} \neq \bar{0}$  c)  $\bar{B}$  gdy  $k = 0$  i  $\bar{B} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{K} \perp \bar{0}$  d)  $\bar{K}$  gdy  $\bar{B} = \bar{0}$ ,  $\bar{K} \neq \bar{0}$  e) wreszcie do d) 0 gdy  $\bar{B} = \bar{0}$ ,  $\bar{K} = \bar{0}$ . Wypadki te nasuwa nam teoria wektorów.

2. Jeśli ciało m wykonuje ruch postępowy z prędkością chwilową  $\bar{v}$ , to  $\bar{B} = m\bar{v}$ ,  $K = m\bar{v} \wedge \bar{r}_0 = \bar{B} \wedge \bar{r}_0$  czyli pędy punktów układu redukują się do pędu całego ciała, przechodzącego przez jego środek masy. Jeśli ciało obraca się dookoła osi z prędkością  $\bar{\omega}$ , to  $\bar{v}_i = \bar{r}_i \wedge \bar{\omega}$  czyli  $\bar{B} = \sum_i m_i \bar{r}_i \wedge \bar{\omega} = m\bar{r}_0 \wedge \bar{\omega}$ , zaś

$\bar{K} = \sum_i (m_i \bar{r}_i \wedge \bar{\omega}) \wedge \bar{r}_i = (\bar{i} \cdot I_x - \bar{j} \cdot D_z - \bar{k} \cdot D_y) \bar{\omega}$ ; ostatnie przekształcono jak w §.4.

3. Jeśli oś obrotu jest główną osią bezwładności, to  $\bar{K} = I_x \bar{\omega}$ . Jeśli ciało obraca się dookoła dowolnej osi, to możemy obrót  $\bar{\omega}$  zamienić na obroty  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  dookoła głównych osi bezwładności ; wtedy kręt  $\bar{K} = I_1 \bar{\omega}_1 + I_2 \bar{\omega}_2 + I_3 \bar{\omega}_3$  zawiera osi obrotu chwilowego najwidoczniej kąt ostry (zresztą tak jest zawsze). Ażeby pędy punktu układu obracającego się zredukowały się tylko do pędu  $\bar{B}$  musi być :

$\bar{D}_y - z \bar{D}_z = 0$ . Nie trudno jest z podanych wyrażen wektorjalnych utworzyć odnośne układowe analityczne.

3. Sformułowana w §.1. zasada ruchu środka masy jest często wyrażana nieco inaczej : Zesumujmy mianowicie zrozumiałe dla nas równanie :

$m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \bar{P}_i + \sum_k \bar{W}_{ik}$  dla wszystkich punktów układu, a otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \bar{v}_i = \frac{d\bar{B}}{dt} = \sum_i \bar{P}_i = \bar{P}$$

albowiem  $\sum_i \sum_k \bar{W}_{ik} = \bar{0}$ . Zatem : pochodna pędu układu materialnego względem czasu jest równą sumie geometrycznej sił zewnętrznych układu. Podobnie mnożąc równanie ruchu punktu wektorjalnie przez  $\bar{r}_i$  i dodając otrzymane równanie dla wszystkich punktów układu znajdziemy łatwo :

$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \bar{v}_i \wedge \bar{r}_i = \frac{d\bar{K}}{dt} = \sum_i \bar{P}_i \wedge \bar{r}_i = \sum_i \bar{M}_i = \bar{M}$

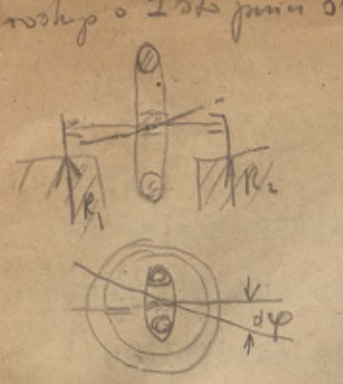
czyli : pochodna krętu układu materialnego względem czasu jest równą sumie geometrycz-

$\frac{d\bar{B}}{dt} = \bar{P}$        $\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M}$        $\bar{B} = \int \bar{P} dt$        $\bar{K} = \int \bar{M} dt$

nej momentów sił zewnętrznych ze względu na przyjęty punkt stały. Pierwsze z podanych twierdzeń obejmuje twz. z zasadę pędu lub ruchu środka masy, drugie twz. z zasadę krętu lub pól. Jeśli suma geometryczna sił znika to  $\bar{B} = \overline{\text{const}}$  czyli  $\bar{v}_0 = \overline{\text{const}}$  tj. środek masy ciała porusza się jednostajnie i prostoliniowo lub spoczywa. Jeśli suma geometryczna momentów sił znika, to  $\bar{K} = \overline{\text{const}}$ . Z redukcji natomiast pędów wynika, że skoro  $\bar{B} = \bar{0}$  to  $\bar{K}_* = \bar{K}$  tzn. kręt nie zależy od obioru środka redukcji  $O$ ; skoro jednak  $\bar{B} = \bar{0}$ , to  $\bar{v}_0 = \bar{0}$  czyli dyskutowany wypadek zdarzyć się może albo gdy środek masy ciała spoczywa albo gdy układ współrzędnych jest z tym środkiem niezmiennie połączony. W zasadę pędu i krętu nie wchodzi zupełnie siły wewnętrzne układu.

4. Niech ciało wiruje s z y b k o ( $\omega$ ) dokoła jednej z centralnych głównych osi bezwładności, to jego kręt  $\bar{K} = I \cdot \bar{\omega} = I \cdot \dot{\bar{\varphi}}$  leży na owej osi; pozatem z §.4. jest nam wiadomem, że wtedy reakcje podpór tego ciała niczem się nie różnią od statycznych. Przy d o w o l n e m p r z e s u n i ę c i u j e d n o s t a j n e m ciała reakcje oczywiście z braku przyspieszeń nie ulegną zmianie; obliczenie zmian reakcyj przy przesunięciu niejednostajnym nie następuje trudności. Obrót ciała dodatkowy dokoła osi równoległej do poprzedniej  $\bar{\omega}$  da się łącznie z poprzednim zredukować do obrotu wypadkowego - nie następuje wobec tego również żadnych ciekawych szczegółów. Natomiast na uwagę zasługuje wypadek, gdy obrót drugi z m a ł ą p r ę d k o ś c i ą  $\dot{\bar{\psi}}$  odbywa się dokoła osi zawierającej kąt dowolny z osią obrotu szybkiego  $\dot{\bar{\varphi}}$ . Pytamy obecnie jakim działaniem zewnętrznym można ten nowy obrót wywołać. Dla prostoty założymy  $\dot{\bar{\psi}} \perp \dot{\bar{\varphi}}$  - możemy, że wskutek dodatkowego obrotu kręt  $\bar{K}$  będzie się obracał dokoła  $\dot{\bar{\psi}}$  pozostając nadal na osi obrotu szybkiego; przy poczynionych założeniach jest to dopuszczalne. Wtedy sytuację przedstawia rys. 196. Wskutek mianowicie obrotu  $d\bar{\psi}$  zmienia się kręt o  $d\bar{K}$ , przy czym

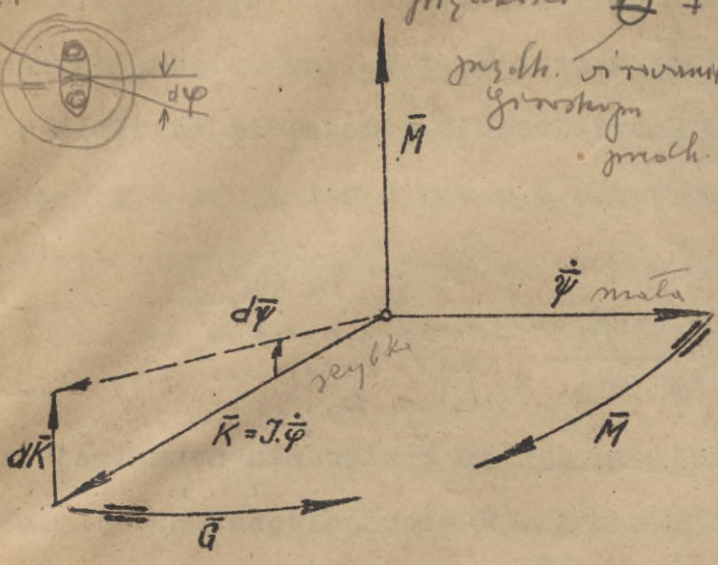
$|\bar{dK}| = K \cdot d\psi = I \cdot \omega \cdot d\psi$ , przy czym  $d\bar{K}$  ma kierunek wektora prostopadłego do  $\bar{K}$  i  $\dot{\bar{\psi}}$  a w porządku  $\bar{K}, \dot{\bar{\psi}}, d\bar{K}$  tworzą wymienione wektory układ prawy. Według zasady krętu jest  $\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M}$ ; zatem  $\bar{M} = \frac{I \omega d\psi}{dt} = I \cdot \dot{\bar{\varphi}} \cdot \dot{\bar{\psi}}$ . Nawiązując do uwag o położeniu  $d\bar{K}$  w przestrzeni możemy napisać:



Obliczenia do obrótanie.  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ . Zastosowanie metody  
 Schulerbech. - 229 - Sólz miedziowy obrót dookoła osi  
 przemieszczenia  $\dot{\phi} + \frac{d\dot{\phi}}{dt}$   $\bar{M} = \bar{K} \wedge \dot{\psi} = I \dot{\phi} \wedge \dot{\psi}$

przech. w kierunku  
 górnym  
 ruch. odwróconego obrótu.

Istotnie jeśli  $\dot{\psi}$  będzie z  $\dot{\phi}$  zawierać  
 kąt różny od prostego, to tylko skła-  
 dowa prostopadła wejdzie w obliczenie  
 wektora  $\bar{M}$  prostopadłego do  $\bar{K}$  i  $\dot{\psi}$ ; dru-  
 ga równoległa do  $\dot{\phi}$  wywołana będzie mo-  
 mentem do  $\bar{K}$  równoległym; jej wpływ o-  
 mówiono krótko wyżej. Ostatecznie za-  
 tem aby obrócić oś obrotu szybkiego  
 dokoła osi do niej prostopadłej trze-  
 ba działać momentem zewne-



Rys. 196.

trznym o wektorze p r o s t o p a d ł y m zarówno do jednej jak i dru-  
 giej osi. Oczywiście ciało zareaguje na to działanie liczebnie równym  $\bar{M}$   
 a przeciwnie skierowanym. Owo działanie ciała nazywamy girostatycznym, a odnośny  
 moment  $\bar{G} = - \bar{M}$  tj.

$$\bar{G} = I \dot{\psi} \wedge \dot{\phi}$$

momentem girostatycznym. Działanie girostatyczne obja-  
 wia się przede (rys.196) tendencją sprowadzenia  
 na najkrótszej drodze osi obrotu pierwsze-  
 go (szybkiego) do zgodnej równoległości z o-  
 sią obrotu drugiego (powolnego). (Reguła Foucault'a)

5. Dwa ciała odbywające ruch mogą się ze sobą spotkać; mówi-  
 my wtedy o uderzeniu obu ciał. Wspólną normalną w punkcie zetknięcia  
 się ciał nazywamy ośią lub normalną uderzenia. Uderzenie  
 jest środkowym lub mimośrodkowym (dla obu lub któregoś  
 z ciał) zależnie od tego czy normalna uderzenia przechodzi lub nie przez środek  
 masy ciała. Ponadto uderzenie jest prostym lub ukośnym (dla obu  
 względnie jednego z ciał) zależnie od tego czy prędkość środka masy jest lub ni  
 równoległą do osi uderzenia. Tuż przed uderzeniem punkt zetknięcia ciała jednego  
 ma prędkość  $\bar{v}$ .

Os. uderzenia  
 jest albo  
 środkowa

hyloną względem osi uderzenia pod kątem  $\alpha_1$ ; punkt zetknięcia  
 jest symetryczny  
 względem osi uderzenia  
 w punkcie zetknięcia

pasment obrót...  
 Powłacz obrót...  
 Kłosa...  
 - 230 -  
 symetryczności...  
 t.j. wyznaczkowej...  
 ciała drugiego niech ma prędkość  $\bar{V}_2$ , nachyloną względem osi pod kątem  $\alpha_2$ . Tuż po uderzeniu wymienione punkty będą posiadać prędkości  $\bar{W}_1$  i  $\bar{W}_2$ , nachylone do normalnej uderzenia pod kątami  $\beta_1$  względnie  $\beta_2$ . Doświadczenie poucza, że zależnie od indywidualności ciał zderzonych, będzie w s p ó ł c z y n n i k u d e r z e - n i a :

$$k = \frac{W_2 \cos \beta_2 - W_1 \cos \beta_1}{V_1 \cos \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_2}$$

proste...  
 moment...  
 obrót...  
 symetryczności...  
 t.j. wyznaczkowej...  
 z osi obrót...  
 1/2

Wzrost...  
 wypadk...  
 t.j. stosunek...  
 t.j. stosunek względnych prędkości po i przed uderzeniem w kierunku normalnej przy-

bierał rozmaite wartości, przyczem jest  $0 \leq k \leq 1$ . W szczególności np. dla obu ciał z tego samego materiału jest dla szkła  $k = \frac{15}{16}$ , dla stali i korka  $k = \frac{5}{9}$ , dla drzewa  $k = \frac{1}{2}$ . Przy wyznaczaniu doświadczalnym stałej  $k$  najlepiej urządzić warunki tak, by było  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ , np. opuszczając ciężką kulę na płaszczyznę. Uprzedzając wypadki możemy powiedzieć, że skoro ciało drugie będzie mieć bardzo duże wymiary w porównaniu do pierwszego, to będzie  $W_2 = 0$ ; jeśli ciało przed uderzeniem spoczywało, to jest  $V_2 = 0$  i ostatecznie jest  $k = -\frac{W_1}{V_1}$ . Spuśćmy z wysokości  $a$  kulę na nieruchomą płaszczyznę to  $V_1 = \sqrt{2ga}$ ; ciało odskoczy z prędkością początkową  $W_1$  i osiągnie wysokość  $b$  przyczem jest  $-W_1 = \sqrt{2gb}$ ; wobec tego  $k = \sqrt{\frac{b}{a}}$  czyli  $k$  wynika z pomiaru  $a$  i  $b$ . Będziemy oczywiście  $k$  uważać za wielkość znaną.

W krańcowych wypadkach, gdy  $k = 1$  nazywamy uderzenie doskonałe sprężyste, gdy  $k = 0$  jest uderzenie doskonałe plastyczne. Uderzenie trwa pewien ułamek czasu  $\tau$ ; rozróżniamy trzy fazy uderzenia. W fazie pierwszej (I) ciała właśnie zetknęły się posiadając prędkości nałożone im przez dotychczasowy ruch, mianowicie  $v_{i1}$  względnie  $v_{i2}$ . Od tej chwili począwszy zaczyna się uderzenie t.j. gwałtowna zmiana prędkości obu ciał a w szczególności punktów zetknięcia się; fazą drugą (II) jest ta, w której punkt zetknięcia się dla obu ciał posiada tę samą prędkość  $U_1 = U_2$ ; prędkości wszystkich innych punktów ciała oznaczają wtedy będziemy literami  $u_{i1}$  względnie  $u_{i2}$ . O powyższem wyrównaniu prędkości może być mowa z powodu odkształcalności obu ciał. Jeśli ciała są doskonale elastyczne, to na fazie drugiej kończy się fakt uderzenia; jeśli niemi nie są

o bezpośrednio po opisanem wyrównaniu zacznie się zmiana prędkości a w szczególności...  
 punkt...  
 t.j. wyznaczkowej...  
 obrót...  
 1/2

*Wielkość grawitacji - 1 obrót w czasie momentu 217*  
*jakie poruszyły się listki lewej osi symetrii ruchem obrotowym.*  
 Moment nt bezwładności =  $M = \frac{dM_V}{dt}$  - *mom. ilości ruchu grawitacji*  
 $M_V = I\dot{\theta}$  *mom. bezw. grawitacji wyl. 1go osi. Wektor  $M_V$  leży w osi 2go*

i wymiana prędkości między ciałami ; po czasie  $\tau$  (licząc od początku uderzenia) proces ustanie ; punkty ciała będą mieć prędkości  $w_{11}$  względnie  $w_{12}$  ; jest to fa-  
 z trzecia (III), ciała zaczną się znów poruszać niezależnie od siebie. Powyż-  
 szych uwag nie należy pojmować fałszywie ; ciała mogą być nawet doskonale spręży-  
 ste a proces uderzenia może być plastycznym np. dzięki temu, że specjalne urządze-  
 nia miejsc zetknięcia nie pozwalają na ukończenie procesu ( np. sprzęgło łączące  
 wa wały).

6. Mówiliśmy przed chwilą o zmianie prędkości. Każda tego ro-  
 zaju zmiana musi być wywołana odpowiednimi siłami ; w rozpatrywanym wypadku  
 siła wewnątrzna między obu ciałami - siła uderzenia.  
 Aby zmiany prędkości obliczyć musimy znać siłę uderzenia względnie jakąś wielkość  
 inną pokrewną. Gdyby uderzenie było doskonale sprężyste, to porównanie fazy osta-  
 nej z początkową (ale nie pośrednią) prowadziło do rezultatu, że ciało zachowa-  
 ło się jak sztywne ; zmianę prędkości możnaby uzyskać stosując zasadę energii  
 j. zakładając  $E_{III} - E_I = \Delta E = 0$ , albowiem sił zewnętrznych w czasie uderzenia  
 nie było, a praca sił wewnętrznych ciała sztywnego zawsze znika. Dla dowolnego ga-  
 tunku uderzenia metody tej stosować nie możemy. Zastosujemy przeto taką, w której  
 siły wewnętrzne bez względu na indywidualność ciała nie figurują. Jest nią za-  
 sada pędu i krętu. Ponieważ - jak zaznaczono - uderzeniem nie zo-  
 stały wywołane żadne siły zewnętrzne przeto pęd i kręt przed  
 i po uderzeniu albo wogóle w dowolnej chwili uderzenia muszą  
 mieć tę samą wartość. Zatem :

*Julius' obratu*  
*obrotu.  $\dot{\theta} = \frac{d\varphi}{dt}$*   

$$\bar{B}_{1,I} + \bar{B}_{2,I} = \bar{B}_{1,II} + \bar{B}_{2,II} = \bar{B}_{1,III} + \bar{B}_{2,III}$$

$$\bar{K}_{1,I} + \bar{K}_{2,I} = \bar{K}_{1,II} + \bar{K}_{2,II} = \bar{K}_{1,III} + \bar{K}_{2,III}$$

*wartość obrotu = g*  

$$G = I\dot{\theta} = I\dot{\theta} \dot{\varphi}$$

Dla skrócenia dyskusji będziemy w dalszym ciągu brać pod uwagę fazę I i III. Otóż  
 w powyższych równaniach tkwią cztery niewiadome, a mianowicie przesunięcie  $\bar{w}_1$   
 i obrót  $\bar{\omega}_1$  ciała pierwszego tudzież przesunięcie  $\bar{w}_2$  i obrót  $\bar{\omega}_2$  drugiego ciała -  
 a mianowicie obu po uderzeniu. Trzecim równaniem jest związek określający prę-  
 dkości w miejscu uderzenia tj. współczynnik k. Równanie czwarte wynika z założenia,  
 że siła uderzenia jest skierowana wzdłuż normalnej uderzenia - oczywiście w wypad-

... gwałtowny ruch obroty i precesyjny:  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$



Obrotu gwałtowny obroty i precesyjny:  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$

ku ciał gładkich; dla szorstkich można wziąć pod uwagę odpowiednie odchylenie siły od normalnej. Tam (o T zwłocz) obrótami gwałtownymi równo-  
wagi z osi pionowej tożysk dla wyrotu on

7. Ostatni warunek jest samo przez się zrozumiały; niestety

nie wiemy tylko jak wyrazić to, co nazywamy siłą uderzenia  $\bar{\mathbf{P}}$ . Zamiast tedy wpro-  
sily uderzenia wprowadzimy pewną wielkość zastępczą, mianowicie i m p u l s s  
k y tj. następującą całkę:

$$\int_0^{\tau} \bar{\mathbf{P}}.dt = \int_I^{\text{III}} d\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}_{\text{III}} - \bar{\mathbf{B}}_I = \bar{\mathbf{B}}$$

Podobnie możemy wprowadzić i m p u l s m o m e n t u tj. wyrażenie:

$$\int_0^{\tau} \bar{\mathbf{M}}.dt = \int_I^{\text{III}} d\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}_{\text{III}} - \bar{\mathbf{K}}_I = \bar{\mathbf{K}}$$

W tych określeniach  $d\bar{\mathbf{B}}$  względnie  $d\bar{\mathbf{K}}$  przedstawia zmianę pędu względnie krętu jed-  
go z ciał (dlatego drugi wskaźnik pominięto). Pozatem jest  $\bar{\mathbf{M}}$  momentem siły uderze-  
nia względem środka redukcji; skoro jednak  $\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{P}} \wedge \bar{\mathbf{r}}$  to i  $\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{B}} \wedge \bar{\mathbf{r}}$  (prostu  
 $\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{K}} = 0$ ). Siła uderzenia  $\bar{\mathbf{P}}$  jest siłą wewnętrzną; skoro przeto dla jednego ciała  
impuls wynosi  $\bar{\mathbf{B}}$  względnie  $\bar{\mathbf{K}}$ , to dla drugiego wynosi on  $-\bar{\mathbf{B}}$  względnie  $-\bar{\mathbf{K}}$ . Najwi-  
doczniej równania ust. 6. czynią zadość tej konieczności. Możemy je obecnie napisać

tak: Wyobraźmy sobie mechanizm. Siłki i momenty z  $\bar{\mathbf{P}}$  gwałtowny  
i osi pionowej mechanicznie i mechanicznie i 1 pt. Nowejmy  
z osi pionowej obroty i obroty on 1 pt. obrotów osi  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_{1,\text{II}} - \bar{\mathbf{B}}_{1,\text{I}} &= \bar{\mathbf{B}}, & \bar{\mathbf{K}}_{1,\text{II}} - \bar{\mathbf{K}}_{1,\text{I}} &= \bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{B}} \wedge \bar{\mathbf{r}} \\ \bar{\mathbf{B}}_{2,\text{II}} - \bar{\mathbf{B}}_{2,\text{I}} &= -\bar{\mathbf{B}}, & \bar{\mathbf{K}}_{2,\text{II}} - \bar{\mathbf{K}}_{2,\text{I}} &= -\bar{\mathbf{K}} = -\bar{\mathbf{B}} \wedge \bar{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

W tych czterech równaniach jest pierwsza i ostatnia kolumna w każdej grupie nie-  
wiadoma tj. razem pięć niewiadomych. Równaniem piątym jest warunek określający  
współczynnik k. Tem samym problem uderzenia zostaje w zupełności rozwiązany. W prze-  
stawieniu analitycznym mamy w sumie trzynaście równań.

Tym obrotami występują obroty gwałtowne i 1 pt. wyrotu on  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$

Przykłady ćwiczeń.  $\mathbf{G} = I\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\phi}$

Soboty same mechanicznie były mechanicznie i obroty gwałtowne  
inowizy by on z 21temi odpowiednimi osiami. Pomocno same  
chemie osi pionowej obroty, obroty gwałtowne występują obroty  
osie mech osi z gwałtownym sk. on  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$

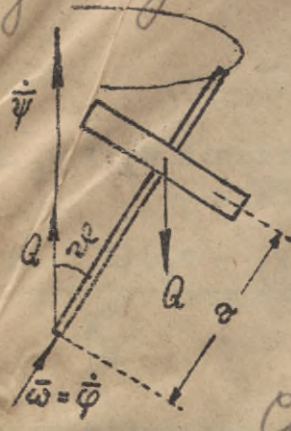
1. W jaki sposób nie uciekając się do pomocy z zewnątrz można  
zmienić orjentację balonu w powietrzu?  
Odp.: Obchodząc gondolę balonu. W stanie spoczynku kręt balo-  
nu wraz z człowiekiem wynosił zero; z powodu braku sił zewnętrznych w czasie ru-  
chu człowieka powyższa wartość krętu musi być zachowana. Niech moment bezwładności  
człowieka względem osi pionowej balonu wynosi  $I_1$  a jego prędkość kątowa  $\omega_1$ ; moment

2. W jakich warunkach może się zdarzyć, że moment bezwładności człowieka  
względem osi pionowej balonu wynosi  $I_1$  a jego prędkość kątowa  $\omega_1$ ; moment  
 $I\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\phi} = I^* \frac{d^2\boldsymbol{\phi}}{dt^2}$  moment bezwładności człowieka względem osi.

Leży obrot prosty  $\dot{\theta}$  wokół osi  $I_1$  z prędkością  $\omega_1$  i momentem bezwładności  $I_1$  ok. tej osi.  $I_2$  ok. tej osi  $I_2$  z prędkością  $\omega_2$  i momentem bezwładności  $I_2$  i odnośna prędkość  $\omega_2$ . Zatem :

$$I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 = 0 \quad \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{a wartość jego: } G_1 = I_1 \dot{\theta}$$

a stąd :  $\omega_2 = -\frac{I_1}{I_2} \omega_1$ . Zatem prędkością  $\omega_1$  wywołamy drugą o kierunku przeciwnym. *Przebiegiem osi  $I_2$  wokół osi  $I_1$  z prędkością  $\dot{\psi}$  wokół osi  $I_1$  i momentem bezwładności  $I_3$  wokół osi  $I_1$ .*



2. Oś szybko wirującego bąka ustawiono jednym końcem na kulistym, wklęsłym łożysku odchylając ją od pionu o kąt  $\delta$  (rys.197). Jaki ruch dodatkowy spostrzeżemy ? *Przebiegiem osi  $I_2$  wokół osi  $I_1$  z prędkością  $\dot{\psi}$  wokół osi  $I_1$  i momentem bezwładności  $I_3$  wokół osi  $I_1$ .*  
 Odp. : Moment sił zewnętrznych  $M = Q \cdot a \cdot \sin \delta$  równoważy się z działaniem girostatycznym  $G = I_3 \dot{\psi} \sin \delta$ .  
 Skonstatujemy przeto obrót dodatkowy  $\dot{\psi} = \frac{Q \cdot a}{I_3} = \frac{Q \cdot a}{I \cdot \omega}$

Wektory  $\vec{M}, \vec{\phi}, \vec{\psi}$  tworzyć muszą układ prawy. Oś krążka opisze powierzchnię stożkową o kącie wierzchołkowym  $2\delta$  (regularna precesja).

Rys. 197.  
 $G = I \dot{\theta}^2$   
 $G = I^* \dot{\psi}^2$

3. Pojazd kolejowy porusza się jednostajnie w łuku kołowym poziomy. Jakim wpływem on wtedy podlega.

Odp. : Ciężar wagonu łącznie z kołami niech wynosi  $Q = mg$ ; zaczepia on w środku masy. Z powodu małych wymiarów pojazdu w stosunku do promienia  $r$  łuku trasy możemy przyjąć, że siła odśrodkowa  $N = \frac{mv^2}{r}$  zaczepia również w środku masy. Niech promień kół wynosi  $a$ , to moment bezwładności kół z osiami

( i ewentualnym motorem elektrycznym ) wynosi  $I = \mu a^2$ , gdzie  $\mu$  jest masą wspomnianych części wirujących, sprowadzoną na długość  $a$ ; prędkość obrotu kół wynosi  $\frac{v}{a}$  czyli kąt wynosi  $K = I\omega = \mu v a$ . Prędkość obrotu w łuku wynosi  $\frac{v}{r}$  czyli działanie girostatyczne wobec prawie poziomego ułożenia obu toków wynosi  $G = \mu v^2 \frac{a}{r}$ ; moment girostatyczny  $G$  stara się wagon obrócić dokoła prostej, równoległej do kierunku jazdy na zewnątrz toru. Wszystkie wymienione wpływy tj.  $Q, N, G$  utrzymują się w równowadze z reakcjami toków ; oddziaływanie toku wewnętrznego  $R$  jest prostopadłe

główki szyny, reakcja toku zewnętrznego ma dwie składowe tj. prostopadłą  $V$  i styczną  $H$  do główki szyny ( przy pominięciu tarcia ). Najprawidłowiej zużyją si szyny jeśli tok zewnętrzny podwyższymy tak, by było  $R = V$ . Rozwiązać powyższe zadanie ; jakim jest wpływ  $G$  w zestawieniu z  $N$  ?

$$K = I \dot{\theta}$$

4. Dwa ciała odbywają ruch postępowy i uderzają się prosto i środkowo ; prędkości przed uderzeniem wynosiły  $v_1$  względnie  $v_2$  przyczem jest  $v_1 > v_2$ . Ile wynoszą prędkości ciał po uderzeniu ?

Odp. : Możemy ustawić następujące równania impulsu :

$$m_1 w_1 - m_1 v_1 = - B \quad , \quad m_2 w_2 - m_2 v_2 = + B$$

ponadto trzecie :

$$k = \frac{w_2 - w_1}{v_1 - v_2}$$

a trzy niewiadome B i prędkości ruchu postępowego po uderzeniu  $w_1$  i  $w_2$ . Po rozwiązaniu znajdziemy :

$$w_1 = v_1 - \frac{(v_1 - v_2)(1 + k)}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \quad , \quad w_2 = v_2 + \frac{(v_1 - v_2)(1 + k)}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

adto :  $B = (v_1 - v_2)(1 + k) \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ . Średnia siła uderzenia wynosi  $P = \frac{B}{\tau}$  gdzie  $\tau$  jest czasem uderzenia. Ponieważ jest  $v_1 > v_2$  przeto będzie  $w_1 < v_1, w_2 > v_2$ . Zmiana energii układu wynosi :

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 w_1^2 - \frac{1}{2} m_2 w_2^2 = \frac{1}{2} (v_1 - v_2)^2 (1 - e^2) \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

a  $k = 1$  znajdziemy prędkości uderzenia doskonale sprężystego, dla  $k = 0$  prędkości uderzenia plastycznego względnie prędkość wspólną  $u$  w fazie II. Sprawdzić to w ust.5. sposób doświadczalny obliczenia współczynnika  $k$ .

5. Dwa wały  $I_1$  i  $I_2$  obracające się z prędkościami  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są sprzęgnięto ; jaką będzie w s p ó l n a prędkość obrotu ?

Odp. : Należy przyjąć najwidoczniej  $k = 0$ . Pozatem jest :

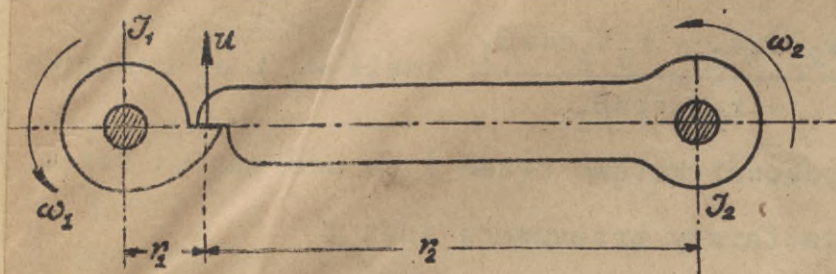
$$I_1 \omega - I_1 \omega_1 = - K \quad , \quad I_2 \omega - I_2 \omega_2 = K$$

przem  $\omega$  oznacza poszukiwaną prędkość kątową. Znajdujemy :

$$\omega = \frac{I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2}{I_1 + I_2} \quad , \quad K = \frac{I_1 \cdot I_2}{I_1 + I_2} (\omega_1 - \omega_2)$$

jąc czas sprzęgnięcia (uderzenia) moglibyśmy obliczyć średni moment (skreślony) uderzenia  $M = \frac{K}{\tau}$ . Ile wynosi zmiana energii ?

6. Dwa ciała o kształcie podanym na rys. 198. obracając się z prędkościami  $\omega_1$  i  $\omega_2$  dokoła głównych osi bezwładności uderzają się. Obliczyć prędkość  $u$  miejsca w fazie II-giej .



Rys. 198.

Odp. : Niech algebraiczne wartości prędkości kątowych w tej fazie będą  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  to możemy podać następujące równania :

$$I_1(\Omega_1 - \omega_1) = B \cdot r_1,$$

$$I_2(\Omega_2 - \omega_2) = B \cdot r_2,$$

$$k = 0,$$

przyczem  $r_1$  i  $r_2$  oznaczają bezwzględne wartości. Z równania ostatniego wynika :

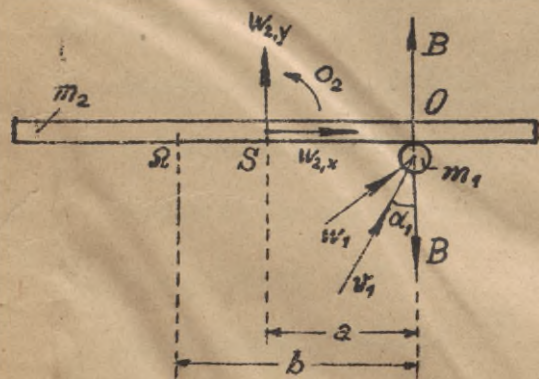
przyczem  $\mu > 0$  zorientowane jest jak na rys.198.

$$u = r_1 \cdot \Omega_1 = - r_2 \Omega_2$$

a z dwóch pierwszych :  $\frac{\Omega_1 - \omega_1}{\Omega_1 - \omega_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{I_2}{I_1} = \frac{\mu_2 r_2}{\mu_1 r_1}$  przyczem  $\mu_1$  i  $\mu_2$  są masami dukowanymi. Stąd ostatecznie :

$$u = \frac{\mu_1 r_1 \omega_1 - \mu_2 r_2 \omega_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

7. Na spoczywający pręt uderza mimośrodowo kula  $m_1$  z prędkością  $v_1$  (rys.199). Podać stan po uderzeniu .



Rys. 199.

Odp. : Dla kuli możemy napisać :

$$m_1(w_{1x} - v_1 \sin \alpha) = 0, \quad m_1(w_{1y} - v_1 \cos \alpha) = -1$$

Ruch pręta zamienimy na przesunięcia  $w_{2x}, w_{2y}$  i obrót  $\omega_2$  dokoła S tak, że równania uderzenia są :

$$m_2 w_{2x} = 0, \quad m_2 w_{2y} = B, \quad I_2 \omega_2 = Ba \cdot W_{ref}$$

$$\text{współczynnik } k \text{ wynosi } k = \frac{w_{2y} + a\omega_2 - w_{1y}}{v_1 \cos \alpha_1}$$

Z powyższych równań znajdziemy :  $w_{1x} = v_1 \sin \alpha_1$

$$w_{2x} = 0, \quad w_{1y} = (1 - n \frac{m_2}{m_1}) v_1 \cos \alpha_1, \quad w_{2y} = n \cdot v_1 \cos \alpha_1, \quad \omega_2 = n \frac{a}{I_2} v_1 \cos \alpha_1 \text{ nadto}$$

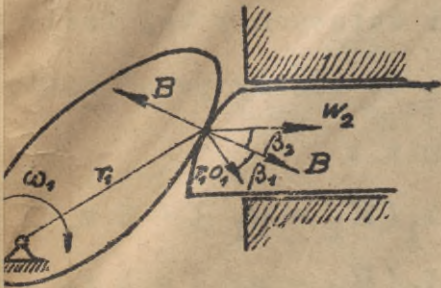
$$B = n \cdot m_2 v_1 \cos \alpha_1 \text{ przyczem } I_2 = \frac{I_2}{m_2} \text{ a dla skrócenia podstawiono : } n = \frac{1 + k}{1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{a}{l}}$$

Przesunięcie  $w_{2y}$  i obrót  $\omega_2$  dokoła S można zamienić na obrót  $\omega_2$  dokoła  $\Omega_2$

czem  $b - a = \frac{w_{2y}}{\omega_2} = \frac{I_2}{a}$  w chwili uderzenia  $\Omega$  nie dozna ruchu.

8. Tarcza obracająca się trafia w tarczę przesuwną (rys.200).

Wzagać warunki uderzenia.



Odp. : Stała uderzenia wynosi :

$$k = \frac{w_2 \cos \beta_2 - r_1 \omega_1 \cos \beta_1}{r_1 \omega_1 \cos \beta_1}$$

jeśli ω<sub>1</sub> i ω<sub>1</sub> oznaczają

prędkości kątowe przed i po uderzeniu. Poza-  
tem dla tarczy przesuwnej jest :

$$m_2 w_2 = B \cos \beta_2$$

zaś dla tarczy wirującej :  $I_1 (\omega_1 - \omega_1) = -B r_1 \cos \beta$

Rys. 200.

z powyższych równań łatwo wyznaczymy B<sub>1</sub>, w<sub>2</sub> i ω<sub>1</sub>.

==== Koniec ====

S P I S R Z E C Z Y

Str.

Wstęp . . . . .	1	1
Literatura . . . . .	1	

Rozdział I. - T E O R J A W E K T O R Ó W

§.1. Ogólne . . . . .	4	3
§.2. Wektory swobodne . . . . .	4	3
Przykłady ćwiczeń . . . . .	13	12
§.3. Wektory linjowe (osiowe) . . . . .	16	14
§.4. Analityczna teoria wektorów . . . . .	27	25
§.5. Wektory nieswobodne . . . . .	33	30
§.6. Różniczkowanie wektorów . . . . .	36	33
§.7. Wykreślne metody rachunku wektorjalnego . . . . .	37	34

Rozdział II. - W S T E P D O M E C H A N I K I

§.1. Pojęcia kinematyczne . . . . .	49	45
§.2. Zasadnicze prawa dynamiki . . . . .	51	47
§.3. Masa i siła . . . . .	55	50
§.4. Środek masy . . . . .	63	58
Przykłady ćwiczeń . . . . .	68	63
§.5. Moment bezwładności . . . . .	74	69
Przykłady ćwiczeń . . . . .	91	85
§.6. Redukcja układu sił . . . . .	95	88
Przykłady ćwiczeń . . . . .	97	89

Rozdział III. - S T A T Y K A

§.1. Równowaga i swoboda . . . . .	102	95
§.2. Warunki równowagi . . . . .	104	97
Przykłady ćwiczeń . . . . .	109	102

	Str.
§.3. Redukcja wewnętrzna . . . . .	118 <i>111</i>
Przykłady ćwiczeń . . . . .	133 <i>126</i>
§.4. Tarcie . . . . .	140 <i>132</i>
Przykłady ćwiczeń . . . . .	151 <i>143</i>

## Rozdział IV. - K I N E M A T Y K A

.1. Kinematyka punktu . . . . .	155
Przykłady ćwiczeń . . . . .	161
.2. Kinematyka ciała sztywnego . . . . .	164
Przykłady ćwiczeń . . . . .	171
.3. Redukcja i transformacja ruchów . . . . .	172
Przykłady ćwiczeń . . . . .	177

## Rozdział V. - D Y N A M I K A

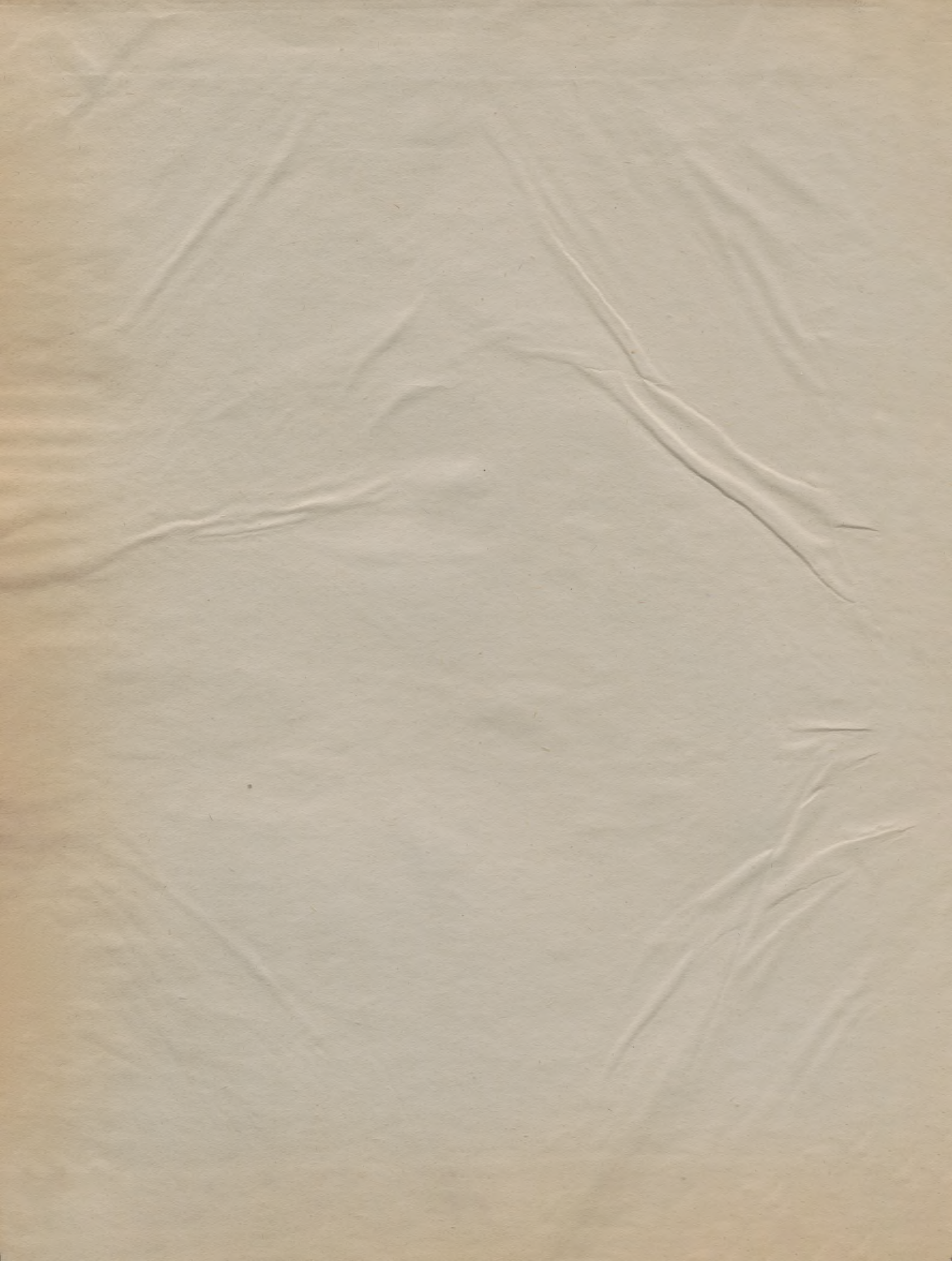
.1. Dynamika punktu materialnego i środka masy . . . . .	180
Przykłady ćwiczeń . . . . .	183
.2. Praca, potencjał, zasada prac możliwych, dzielność . . . . .	193
Przykłady ćwiczeń . . . . .	202
.3. Energje, zasada energii, kryterjum równowagi . . . . .	207
Przykłady ćwiczeń . . . . .	214
.4. Zasada d'Alembert'a . . . . .	217
Przykłady ćwiczeń . . . . .	222
.5. Pęd, kręt, działanie girostatyczne, uderzenie . . . . .	226
Przykłady ćwiczeń . . . . .	232

*Lista zadania**av.*

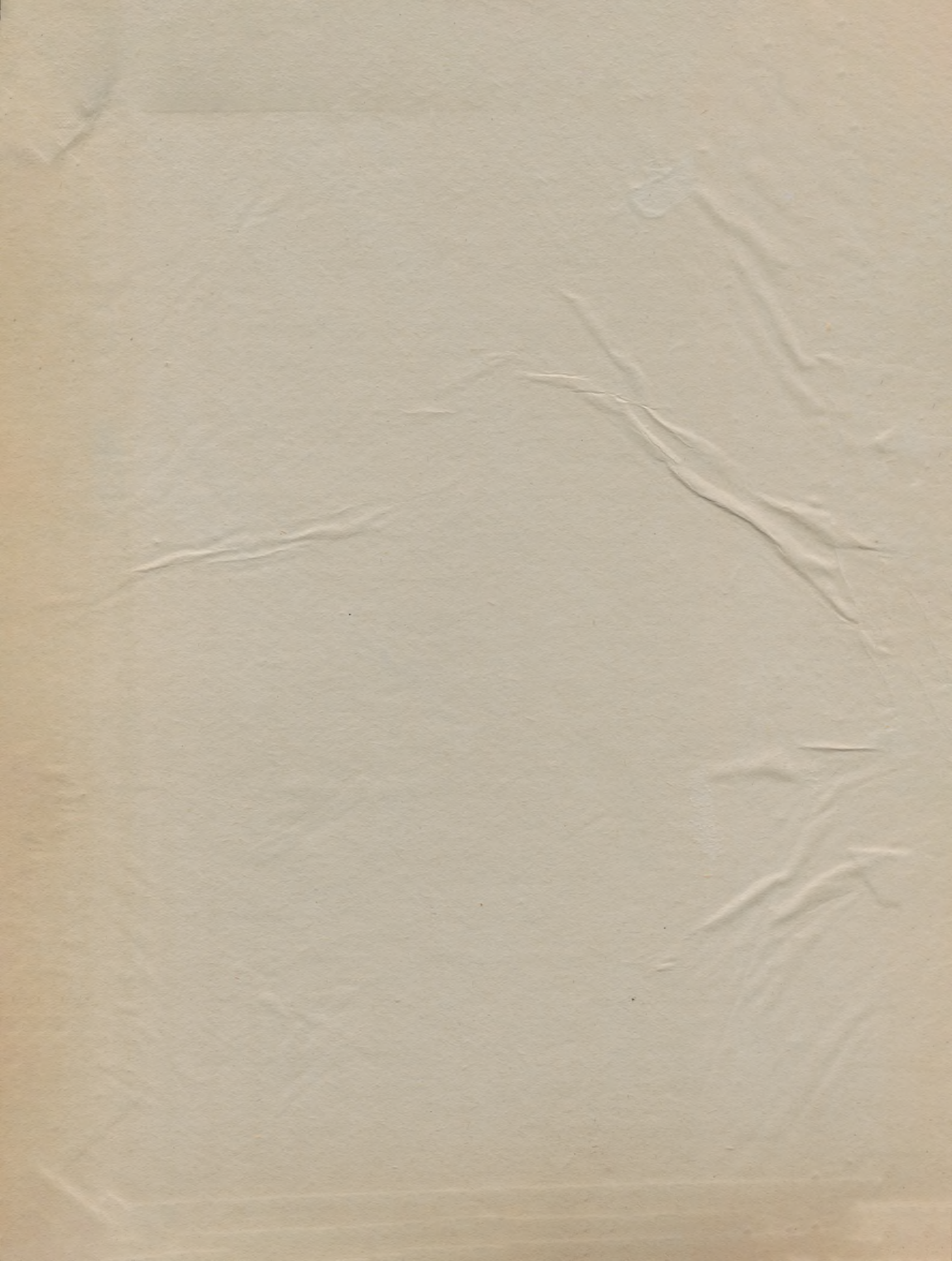
144 - 9 ✓  
 160 - 10 ✓  
 176 - 11 ✓  
 192 - 12 ✓  
 218 - 13 ✓  
 224 - 14 ✓

*220*

*ul 196 do końca*  
*Nowy list*







POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw. 13222

Kdn. 524. 13. IX. 54

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000349051